# Unterstrukturen in endlichen projektiven Räumen und Polarräumen

Inauguraldissertation
zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)

eingereicht beim
Fachbereich Mathematik und Informatik, Physik, Geographie
der Justus-Liebig-Universität Gießen

von Linda Beukemann

Betreuer: Prof. Dr. Klaus Metsch

Gießen Oktober 2013

# Vorwort

Dieses Buch enthält die Ergebnisse meiner Forschungsarbeit der letzten Jahre. Mein Arbeitsumfeld ist der endliche projektive Raum $\mathrm{PG}(n, q)$ und die darin eingebetteten endlichen klassischen Polarräume. In diesen geometrischen Strukturen betrachte ich Mengen von Unterräumen mit unterschiedlichen Eigenschaften. Die einzelnen Kapitel dieser Arbeit sind dabei voneinander unabhängige Untersuchungen. Trotzdem stellen sich immer wieder die gleichen Fragen:

- Existiert eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften?
- Wie groß oder klein ist ihre Mächtigkeit?
- Wie sehen mögliche Beispiele aus?

Es geht also um Existenzbedingungen, obere und untere Schranken, sowie um Klassifizierungsaussagen. Die Beweise werden mit geometrischen und kombinatorischen Argumenten geführt.

Kapitel 1 ist das Grundlagen-Kapitel. Darin werden alle benötigten geometrischen Strukturen eingeführt. Zudem sind Definitionen und Aussagen aus der Codierungs- und Graphentheorie zu finden, die im Laufe der Arbeit benötigt werden, und es werden die verwendete Zähltechniken erläutert. Die weiteren Kapitel sind chronologisch danach geordnet, wann ich anfing an dem Thema zu arbeiten.

Kapitel 2 befasst sich mit der Suche nach $q$-regulären Graphen mit Taillenweite 8. Dieses graphentheoretische Problem wird mit geometrischen Methoden angegangen. Der Inzidenzgraph eines verallgemeinerten Vierecks der Ordnung $q$ ist ein $(q + 1)$-regulärer Graph der Taillenweite 8. Die Idee ist, einige Ecken und Kanten dieses Graphen zu "löschen" um einen $q$-regulären Graphen zu erhalten. Das entspricht dem Entfernen von Punkten und Geraden des verallgemeinerten Vierecks, so dass auf jeder verbleibenden Gerade genau ein Punkt und für jeden verbleibenden Punkt genau eine Gerade durch diesen gelöscht wird. Wir beweisen untere und obere Schranke für solche Punkt-Geraden-Mengen und geben eine Reihe von Beispielen an.

An diesem Kapitel habe ich das erste dreiviertel Jahr meiner Promotion gearbeitet. Silvester 2009 wurde die dazugehörige Arbeit beim "Journal of Combinatorial Designs" eingereicht.

Kapitel 3 ist in zwei Abschnitte unterteilt. Der erste Teil verbessert die untere Schranke für kleine maximale Teilfaserungen der elliptischen Quadrik $Q^-(5, q)$. Im zweiten Teil gebe ich einen geometrischen Beweis dafür, dass kein Teilovoid mit 35 Elementen von $Q^-(5,4)$ existiert. Dieses kürzere Kapitel entstand in der ersten Hälfte des Jahres 2010.

Den Monat September 2010 verbrachte ich in Gent bei Leo Storme und Jan de Beule. Leo Storme und ich fingen an eine bereits begonnene Arbeit von ihm mit Klaus Metsch wieder aufzurollen: Die Klassifizierung von $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihypern für kleine $\delta$ und $q = p^{2s}$. Dies stellte sich als sehr schwierige Aufgabe heraus, die uns bis heute beschäftigt. Die dazugehörige Arbeit steht kurz vor der Einreichung und die Ergebnisse sind in Kapitel 4 zu finden.

Kapitel 5 befasst sich mit der Existenz und der Klassifizierung von tight Mengen der hyperbolischen Quadrik $Q^+(2n+1,q)$ für $n \geq 3$. An diesem Thema fing ich ebenfalls im Spätsommer 2010 an zu arbeiten und die Ergebnisse hierzu wurden im August 2011 in "Designs, Codes and Cryptography“ eingereicht. In Kapitel 5 wird außerdem bewiesen, dass keine $(q+1)$-tight Mengen von $Q^+(5,q)$ für Primzahlen $q > 2$ existieren. Dieses Ergebnis wurde kürzlich von Klaus Metsch verbessert, allerdings mit einer anderen Methode, weshalb dieser Beweis weiterhin interessant ist.

Im März 2012 kam mein Sohn Emil Beukemann zur Welt. Dies ist der wunderschöne Hauptgrund dafür, dass diese Arbeit nun erst zwei Jahre nach Erarbeitung der meisten Ergebnisse fertig gestellt ist.

Linda Beukemann
Oktober 2013

# Danksagung

Ich möchte einigen Leuten danken, die mich beim Erstellen dieser Arbeit auf die ein oder andere Weise unterstützt haben.

Als erstes bedanke ich mich bei Klaus Metsch, meinem Doktorvater, der mich während der gesamten Promotion hervorragend betreut hat und dabei immer die richtige Mischung aus nachfragen, weiterhelfen und grübeln lassen gefunden hat.
Dann danke ich Leo Storme und Jan de Beule für den angenehmen Aufenthalt in Gent und die gute Zusammenarbeit danach.

Ich danke meinen Arbeitskollegen aus der Arbeitsgruppe, aus dem Mathematischen Institut und aus dem Mathematikum für die zahlreichen Gespräche über und auch jenseits der Mathematik, die erholsamen gemeinsamen Mittagspausen und die stets hervorragende Bürostimmung. Besonders möchte ich mich bei meinem Chef Albrecht Beutelspacher bedanken. Mit meiner Anstellung als Wissenschaftliche Mitarbeiterin im Mathematischen Institut und als Volontärin im Mathematikum hatte ich nicht nur eine finanzielle Grundlage, sondern auch die Möglichkeit, neben meiner Forschung, viel und auf ganz unterschiedliche Weise in der Lehre zu arbeiten und mich weiterzubilden.

Auch meinem privaten Umfeld möchte ich danken. Ich habe wundervolle Freunde und eine liebevolle Familie. Mein Privatleben hat mir immer neue Kraft und Energie für diese Arbeit gegeben.
Ich danke meinen Eltern Marianne und Felix Beukemann für das Mathe-affine Umfeld indem ich groß werden durfte und ohne das ich nie meine Liebe zur Mathematik entdeckt hätte. Außerdem haben sie mein Studium ermöglicht und mich bei meinen Plänen immer unterstützt. Danke Felix, für das Korrektur lesen der kompletten Arbeit voller Sätze, die grammatikalisch falsch sind aber Mathematiker "halt so schreiben".
Last but not least danke ich meiner eigenen kleinen Familie, meinem Partner Julian Haas und unserem Sohn Emil Beukemann. Ihr gebt mir Rückhalt und Unterstützung zu jeder Zeit und seid das wichtigste im meinem Leben.

# Inhaltsverzeichnis

# 1 Grundlagen

Das erste Kapitel enthält grundlegende Definitionen, Beispiele, Aussagen und Notationen, die für die weitere Arbeit benötigt werden. Insbesondere werden die Strukturen “Polarraum“ und “projektiver Raum“ eingeführt.

Es wird versucht, die benötigten Grundlagen möglichst kompakt und trotzdem vollständig zusammenzufassen. Geometer sind mit den Definitionen, Aussagen und Beispielen in diesem Kapitel vertraut, daher verzichte ich auf die Wiedergabe von Beweisen. Sie finden sich beispielsweise in den Büchern [Bue95, Hir98, Dem97].

## 1.1 Inzidenzstrukturen

Die Inzidenzstruktur ist die einfachste geometrische Struktur in dieser Arbeit. Alle weiteren Strukturen bauen darauf auf.

**Definition 1.1.1** Eine *Inzidenzstruktur* ist ein Tripel $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ von Mengen $\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I} \neq \emptyset$ mit $\mathcal{P} \cap \mathcal{G} = \emptyset$ und $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{G}$. Die Elemente von $\mathcal{P}$ werden *Punkte*, die aus $\mathcal{G}$ *Geraden* und die Elemente aus $\mathcal{I}$ *Inzidenzen* genannt.

Ist $P \in \mathcal{P}$ und $g \in \mathcal{G}$ mit $(P, g) \in \mathcal{I}$, so *inzidiert* $P$ mit $g$ und $g$ mit $P$. Man sagt auch, $P$ *liegt auf* $g$, $g$ *enthält* $P$, oder $g$ *geht durch* $P$. Zwei Punkte, die mit einer gemeinsamen Gerade inzidieren, werden als *kollinear* bezeichnet. Inzidieren zwei Geraden mit einem gemeinsamen Punkt, so *treffen* oder *schneiden* sich die Geraden, andernfalls sind sie *windschief*.

Oft ist $\mathcal{G}$ eine Menge von Teilmengen von $\mathcal{P}$ und $(P, g) \in \mathcal{I}$ genau dann, wenn $P \in g$. Eine solche Inzidenzstruktur wird mit $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ bezeichnet.

Eine Teilmenge $U$ von $\mathcal{P}$ heißt *Unterraum*, wenn jeder Punkt einer Geraden, die mindestens zwei Punkte in $U$ hat, in $U$ liegt. Die leere Menge und $\mathcal{P}$ sind die trivialen Unterräume. Ein Unterraum $U$ heißt *singulär*, wenn je zwei Punkte in $U$ kollinear sind. Treffen sich je zwei verschiedene Geraden der Inzidenzstruktur in höchstens einem Punkt, so ist jede Gerade ein singulärer Unterraum.

Zu der Inzidenzmenge $\mathcal{I}$ sei $\mathcal{I}^* := \{(g, P) \in \mathcal{G} \times \mathcal{P} \mid (P, g) \in \mathcal{I}\}$ die zu $\mathcal{I}$ *duale* Inzidenzmenge. Dann ist $(\mathcal{G}, \mathcal{P}, \mathcal{I}^*)$ ebenfalls eine Inzidenzstruktur. Sie heißt die zu $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ *duale Inzidenzstruktur*.

Ein *Isomorphismus* zwischen zwei Inzidenzstrukturen $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ und $(\mathcal{P}', \mathcal{G}', \mathcal{I}')$ ist eine bijektive Abbildung $\varphi : \mathcal{P} \cup \mathcal{G} \to \mathcal{P}' \cup \mathcal{G}'$ mit

- $\varphi(\mathcal{P}) = \mathcal{P}'$, $\varphi(\mathcal{G}) = \mathcal{G}'$ und
- $(\varphi(P), \varphi(g)) \in \mathcal{I}'$ genau dann, wenn $(P, g) \in \mathcal{I}$.

Existiert ein Isomorphismus zwischen $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ und $(\mathcal{P}', \mathcal{G}', \mathcal{I}')$, so heißen die Inzidenzstrukturen *isomorph*.

## 1.2 Projektive Räume

Fast alle Unterstrukturen, die in dieser Arbeit untersucht werden, liegen innerhalb eines projektiven Raumes. Auch die betrachteten Polarräume sind von einem projektiven Raum umgeben. In diesem Abschnitt werden projektive Räume definiert und einige ihrer Eigenschaften beschrieben.

**Definition 1.2.1** Ein *projektiver Raum* $\mathscr{P}$ ist eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$, die die folgenden Axiome erfüllt.

(R1) Zu je zwei verschiedenen Punkten $P$ und $Q$ gibt es genau eine Gerade, die mit $P$ und $Q$ inzidiert. Diese wird mit $PQ$ bezeichnet.

(R2) Seien $P, Q, R$ und $S$ vier verschiedene Punkte, so dass sich die Geraden $PQ$ und $RS$ treffen. Dann schneiden sich die Geraden $PR$ und $QS$.

(R3) Auf jeder Geraden liegen mindestens drei Punkte und es gibt drei Punkte, die nicht zusammen auf einer Geraden liegen.

Aus Vektorräumen lassen sich projektive Räume wie folgt konstruieren.

**Beispiel 1.2.2** Sei $V$ ein Vektorraum über dem Schiefkörper $K$ der Dimension mindestens Drei, $\mathcal{P}$ die Menge der eindimensionalen Unterräume von $V$ und $\mathcal{G}$ die Menge der zweidimensionalen Unterräume von $V$. Dann ist die Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \subseteq)$ ein projektiver Raum, der mit $\mathscr{P}(V)$ bezeichnet wird.

Aus (R1) folgt, dass jeder Unterraum eines projektiven Raums singulär ist. Für eine Teilmenge $S$ von $\mathcal{P}$ sei $\langle S \rangle$ der Schnitt über alle Unterräume, die $S$ enthalten. $\langle S \rangle$ heißt *Erzeugnis* von $S$ und ist ebenfalls ein Unterraum. Für zwei Punktmengen $S_1, S_2$ wird $\langle S_1 \cup S_2 \rangle$ zu $\langle S_1, S_2 \rangle$ verkürzt und falls $S_1$ und $S_2$ Unterräume sind, so wird auch $S_1 S_2$ für $\langle S_1, S_2 \rangle$ geschrieben.

Die *Dimension* eines Unterraums $U$ von $\mathscr{P}$, in Zeichen $\dim(U)$, ist die größte Zahl $d \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, so dass eine Kette $\emptyset \subsetneq U_0 \subsetneq \cdots \subsetneq U_d = U$ aus Unterräumen existiert. Die *Codimension* eines Unterraums $U$ ist die größte Zahl $c \in \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$, so dass eine Kette $U = U_0 \subsetneq \cdots \subsetneq U_c = \mathcal{P}$ aus Unterräumen existiert.

Die leere Menge hat Dimension $-1$. Punkte sind Unterräume der Dimension Null und Geraden sind Unterräume der Dimension Eins. Ein Unterraum der Dimension Zwei heißt *Ebene*, einer der Dimension Drei *Solid*, einer der Codimension Eins *Hyperebene* und einer der Codimension Zwei *Cogerade*.

Für Unterräume $U$ und $V$ von $\mathscr{P}$ mit $U \cap V = \emptyset$ und $UV = \mathcal{P}$ heißt $V$ ein *Komplement* von $U$ in $\mathscr{P}$.

Unterräume der Dimension mindestens Zwei sind mit den darin enthaltenen Punkten und Geraden wieder projektive Räume. Die Punktmenge eines projektiven Raums wird in dieser Arbeit häufig mit dem projektiven Raum selbst identifiziert, man schreibt also auch $\mathscr{P}$ für $\mathcal{P}$.

Nach (R3) hat $\mathscr{P}$ mindestens die Dimension Zwei. Ein projektiver Raum der Dimension genau Zwei heißt *projektive Ebene*. In einer projektiven Ebene treffen sich je zwei Geraden.

Sei $\mathcal{P}^*$ die Menge der Hyperebenen in $\mathscr{P}$ und $\mathcal{G}^*$ die Menge der Cogeraden in $\mathscr{P}$. Die Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}^*, \mathcal{G}^*, \supseteq)$ heißt *Dualraum* von $\mathscr{P}$ und wird mit $\mathscr{P}^*$ bezeichnet. $\mathscr{P}^*$ ist ein zu $\mathscr{P}$ isomorpher projektiver Raum. Hat $\mathscr{P}$ die endliche Dimension $n$, dann entspricht ein $d$-dimensionaler Unterraum $U$ von $\mathscr{P}$ dem $(n-d-1)$-dimensionalen Unterraum $\{H \in \mathcal{P}^* \mid U \subseteq H\}$ von $\mathscr{P}^*$.

Sei $U$ ein Unterraum von $\mathscr{P}$ der Codimension $c > 2$. Sei $\mathcal{P}_U$ bzw. $\mathcal{G}_U$ die Menge der Unterräume $W$ von $\mathscr{P}$ durch $U$, so dass $U$ in $W$ Codimension Eins bzw. Zwei hat. Die Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}_U, \mathcal{G}_U, \subseteq)$ heißt *Quotientenraum* von $\mathscr{P}$ nach $U$ und wird mit $\mathscr{P}/U$ bezeichnet. $\mathscr{P}/U$ ist ein projektiver Raum, der zu jedem Komplement $V$ von $U$ in $\mathscr{P}$ isomorph ist. Ist die Codimension $c$ von $U$ in $\mathscr{P}$ endlich, dann sind die Unterräume von $\mathscr{P}$ durch $U$ mit Codimension $d \leq c$ die $(c-d-1)$-dimensionalen Unterräume von $\mathscr{P}/U$.

Sei $S$ ein Unterraum und $T$ eine Menge von Punkten in $\mathscr{P}$ mit $\langle T \rangle \cap S = \emptyset$. Ist $T \neq \emptyset$, so heißt die Punktmenge $\bigcup_{X \in T} SX$ der *Kegel* mit *Spitze* $S$ über $T$. Für $T = \emptyset$, heißt $S$ der *Kegel* mit Spitze $S$ über $T$. Die Menge $T$ heißt *Basis* des Kegels und ist im allgemeinen nicht eindeutig bestimmt. Man schreibt $ST$ für den Kegel mit Spitze $S$ über $T$. Ist $T$ ein Unterraum, so ist $ST$ auch die Bezeichnung für das Erzeugnis $\langle S, T \rangle$. In diesem Fall sind Erzeugnis und Kegel aber die gleichen Punktmengen.

Wie im Beispiel 1.2.2 gesehen, können projektive Räume aus Vektorräumen konstruiert werden. Um im Verlaufe dieser Arbeit den Dimensionsbegriff in projektiven Räumen von dem in Vektorräumen zu unterscheiden, wird die Dimension eines Vektorraumes $V$ ab sofort mit *Rang* von $V$ bezeichnet, in Zeichen $\operatorname{rang}(V)$. Ein Unterraum $U$ des Vektorraums $V$ mit $\operatorname{rang}(U) = d + 1 > 0$ entspricht dem $d$-dimensionalen Unterraum $\{\langle u \rangle \mid 0 \neq u \in U\}$ von $\mathscr{P}(V)$. Der triviale Unterraum $\{0\}$ von $V$ entspricht dem trivialen Unterraum $\emptyset$ in $\mathscr{P}(V)$. Umgekehrt entspricht ein Unterraum $U$ der Dimension $d$ von $\mathscr{P}(V)$ dem Unterraum $\langle U \rangle$ vom Rang $d+1$ von $V$.

Ist der Vektorraum $V$ vom endlichen Rang $n + 1$ und ist $K$ ein Körper, so ist $V$ isomorph zu $K^{n+1}$ und $\mathscr{P}(V)$ hat die Dimension $n$. In diesem Fall wird $\mathscr{P}(V)$ auch mit $\mathrm{PG}(n, K)$ bezeichnet. Die Unterräume von $\mathrm{PG}(n, K)$ der Dimensionen $-1, 0$ und $1$ werden auch mit $\mathrm{PG}(-1, K)$, $\mathrm{PG}(0, K)$ bzw. $\mathrm{PG}(1, K)$ bezeichnet. $\mathrm{PG}(n, \mathrm{GF}(q))$ wird zu $\mathrm{PG}(n, q)$ verkürzt.

Das Beispiel 1.2.2 beschreibt fast alle projektiven Räume, wie das folgende Theorem zeigt.

**Theorem 1.2.3** (Veblen, Young [VY08]) *Sei $\mathscr{P}$ ein projektiver Raum der Dimension mindestens drei. Dann ist $\mathscr{P}$ isomorph zu $\mathscr{P}(V)$ für einen Vektorraum $V$.*

Bis auf projektive Ebenen sind somit alle projektiven Räume von der Form $\mathscr{P}(V)$. Es gibt allerdings Beispiele für projektive Ebenen, die nicht zu $\mathrm{PG}(2, K)$ mit $K$ Körper isomorph sind.

Für projektive Räume der Form $\mathscr{P}(V)$ folgt die *Dimensionsformel* direkt aus ihrem Pendant für Vektorräume. Sie ist aber auch für alle projektiven Ebenen richtig.

**Resultat 1.2.4** *Seien $U_1, U_2$ Unterräume eines projektiven Raumes. Dann gilt*

$$\dim(U_1) + \dim(U_2) = \dim(U_1 \cap U_2) + \dim(U_1 U_2).$$

In dieser Arbeit werden ausschließlich endliche projektive Räume betrachtet. Ist die Dimension $n$ eines solchen projektiven Raums mindestens drei, so ist er von der Form $\mathrm{PG}(n,q)$ für eine Primzahlpotenz $q$. In $\mathrm{PG}(n,q)$ lässt sich die Anzahl an Unterräumen der Dimension $r$ leicht berechnen, siehe z.B. [Hir98].

**Resultat 1.2.5** *In* $\mathrm{PG}(n,q)$ *liegen*

$$\prod_{i=0}^{r} \frac{q^{n+1-i}-1}{q^{r+1-i}-1}$$

*Unterräume der Dimension $r$.*

Insbesondere hat $\mathrm{PG}(n,q)$ genau $(q^{n+1}-1)/(q-1) = q^n + q^{n-1} + \cdots + q + 1$ Punkte und genauso viele Hyperebenen. Diese Zahl wird sehr häufig benötigt, daher sei

$$\theta(n,q) := \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Ist $q$ aus dem Zusammenhang klar, so wird $\theta_n$ statt $\theta(n,q)$ geschrieben.

Auch für endliche projektive Ebenen $\mathscr{E}$, die nicht von der Form $\mathrm{PG}(2,q)$ sind, gibt es ein $s \in \mathbb{N}$ mit $s \geq 2$, so dass jede Gerade von $\mathscr{E}$ genau $\theta(1,s) = s+1$ Punkte hat und in $\mathscr{E}$ genau $\theta(2,s) = s^2+s+1$ Geraden und genauso viele Punkte liegen.

Ein endlicher projektiver Raum $\mathscr{P}$ der Dimension $n$ hat somit immer genau $\theta(n,q)$ Punkte für ein $2 \leq q \in \mathbb{N}$. Die Zahl $q$ heißt *Ordnung* von $\mathscr{P}$. Für $n \geq 3$ ist $q$ eine Primzahlpotenz.

## Kollineationen, Korrelationen, Polaritäten

Ein Isomorphismus zwischen zwei Inzidenzstrukturen wurde bereits definiert. Für projektive Räume haben diese Isomorphismen eigene Bezeichnungen.

**Definition 1.2.6** Sei $\mathscr{P}$ ein projektiver Raum. Eine *Kollineation* von $\mathscr{P}$ ist ein Isomorphismus von $\mathscr{P}$ auf sich selbst. Eine *Korrelation* ist ein Isomorphismus von $\mathscr{P}$ auf seinen Dualraum $\mathscr{P}^*$. Eine *Polarität* $\pi$ von $\mathscr{P}$ ist eine Korrelation von $\mathscr{P}$ mit $\pi^2 = \mathrm{id}$.

Für projektive Räume der Form $\mathscr{P}(V)$ sind alle Kollineationen charakterisiert. Dies ist eine Folgerung aus dem zweiten Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.

**Theorem 1.2.7** *Jede Kollineation von $\mathscr{P}(V)$ wird durch eine bijektive semilineare Abbildung von $V$ auf sich induziert.*

In dieser Arbeit werden ausschließlich projektive Räume der Form $\mathrm{PG}(n,q)$ betrachtet. Für jeden Punkt $P$ aus $\mathrm{PG}(n,q)$ gibt es einen Vektor $0 \neq v \in \mathrm{GF}(q)^{n+1}$ mit $P = \langle v \rangle$. Zu jeder Kollineation $\varphi$ von $\mathrm{PG}(n,q)$ mit $q = p^s$ existieren nach dem obigen Theorem eine reguläre Matrix $A \in \mathrm{GF}(q)^{n+1,n+1}$ und ein $0 \leq r \leq s-1$ mit

$$\varphi(\langle v \rangle) = Av^{(p^r)},$$

wobei $v^{(p^r)}$ komponentenweise zu verstehen ist, also $v^{(p^r)} = (v_1^{(p^r)}, \ldots, v_{n+1}^{(p^r)})^\top$. Ein Unterraum $U$ von $\mathrm{PG}(n,q)$ wird auf $\varphi(U) = \{\varphi(P) \mid P \in U\}$ abgebildet.

Ähnlich wie bei den Kollineationen wird jede Korrelation von $\mathrm{PG}(n,q)$ von einer nicht ausgearteten Sesquilinearform auf $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$ induziert. Zu einer Korrelation $\pi$ von $\mathrm{PG}(n,q)$ mit $q = p^s$ existieren daher eine reguläre Matrix $A \in \mathrm{GF}(q)^{n+1,n+1}$ und ein $0 \leq r \leq s-1$ mit

$$\pi(\langle v \rangle) = \{w \in \mathrm{GF}(q)^{n+1} \mid w^\top A v^{(p^r)} = 0\}.$$

Ein Unterraum $U$ von $\mathrm{PG}(n,q)$ wird auf $\bigcap_{P \in U} \pi(P)$ abgebildet.

In Anlehnung an die Sesquilinearform schreibt man auch $U^{\perp_\pi}$ oder nur $U^\perp$ anstatt $\pi(U)$ für einen Unterraum $U$ von $\mathrm{PG}(n,q)$. $U$ heißt *total isotrop*, falls $U \subseteq U^\perp$ gilt. Somit hat ein total isotroper Unterraum höchstens die Dimension $(n-1)/2$. Von besonderem Interesse ist die Struktur der total isotropen Unterräume von Polaritäten.

Ist $\pi$ eine Polarität von $\mathrm{PG}(n,q)$ mit $q = p^s$, so kann man zeigen, dass die zugehörige Sesquilinearform äquivalent zu einer der folgenden ist.

- $s$ ist gerade, $r = s/2$ und $A^\top = A^{(p^r)} = A^{\sqrt{q}}$. Dann heißt $\pi$ *hermitesche Polarität.*
- $r = 0$, $A^\top = -A$ und alle Diagonalelemente von $A$ sind gleich Null. Dann heißt $\pi$ *symplektische Polarität.*
- $r = 0$, $A^\top = A$, $q$ gerade und nicht alle Diagonalelemente von $A$ sind gleich Null. Dann heißt $\pi$ *Pseudo-Polarität.*
- $r = 0$, $A^\top = A$ und $q$ ungerade. Dann heißt $\pi$ *orthogonale Polarität.*

$r = 0$ bedeutet, dass die Abbildung $v \mapsto v^{(p^r)}$ die Identität auf $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$ ist.

Ist $\pi$ eine orthogonale oder eine hermitesche Polarität, dann sind die total isotropen Unterräume gerade die Unterräume, deren Punkte total isotrop sind.

Ist $q$ ungerade, so folgt aus $A^\top = -A$, dass alle Diagonalelemente von $A$ gleich Null sind und der Zusatz im zweiten Fall ist nicht nötig. Für $q$ gerade ist $A^\top = -A$ äquivalent zu $A^\top = A$ und man unterscheidet die Fälle, ob alle Einträge der Diagonalen gleich Null sind oder nicht.

Ist $n+1$ ungerade und $M \in \mathrm{GF}(q)^{n+1,n+1}$ eine Matrix, deren Diagonalelemente gleich Null sind und die $M^\top = -M$ erfüllt, dann ist $M$ singulär. Die Matrix $A$, die die Sesquilinearform definiert, ist regulär, daher gibt es keine symplektischen Polaritäten von $\mathrm{PG}(n,q)$, falls $n+1$ ungerade, also $n$ gerade ist. Ist $\pi$ eine symplektische Polarität von $\mathrm{PG}(n,q)$, so sind alle Punkte in $\mathrm{PG}(n,q)$ total isotrop. Die total isotropen Unterräume größerer Dimension sind in diesem Fall daher nicht dadurch identifiziert, dass sie nur total isotrope Punkte enthalten.

Ist $\pi$ eine Pseudo-Polarität, so bilden die total isotropen Punkte eine Hyperebene $H$ von $\mathrm{PG}(n,q)$. Ist $n$ gerade, so ist die Einschränkung von $\pi$ auf $H$ eine symplektische Polarität von $H$. Ist $n$ ungerade, so ist die Einschränkung von $\pi$ auf $H$ keine Polarität und es gibt genau einen Punkt $P \in H$ mit $\pi(P) = H$. Für jedes Komplement $C$ von $P$ in $H$ ist die Einschränkung von $\pi$ auf $C$ eine symplektische Polarität von $C$. Die Pseudo-Polaritäten lassen sich somit durch die symplektischen Polaritäten beschreiben und werden daher nicht weiter untersucht.

## Quadriken

Eine *quadratische Form* von $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$ ist eine Abbildung $f : \mathrm{GF}(q)^{n+1} \to \mathrm{GF}(q)$ mit

$$f((x_0,\dots,x_n)^\top) = \sum_{0\le i\le j\le n} a_{ij}x_ix_j$$

und $a_{ij} \in \mathrm{GF}(q)$. Ein Vektor $v \in \mathrm{GF}(q)^{n+1}$ mit $f(v) = 0$ heißt *singulär* bzgl. $f$. Die Unterräume von $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$, die nur singuläre Vektoren enthalten, werden *total singuläre* Unterräume genannt. Ein total singulärer Unterraum, der in keinem anderen total singulären Unterraum enthalten ist, heißt *maximaler* total singulärer Unterraum. Man kann zeigen, dass alle maximalen total singulären Unterräume den gleichen Rang haben.

Die Abbildung $b : \mathrm{GF}(q)^{n+1} \times \mathrm{GF}(q)^{n+1} \to \mathrm{GF}(q)$ mit

$$b(v,w) := f(v+w) - f(v) - f(w)$$

für alle $v, w \in \mathrm{GF}(q)^{n+1}$ ist eine symmetrische Bilinearform auf $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$. Sie heißt die *begleitende Bilinearform* zu $f$ und ist eindeutig durch $f$ bestimmt. Ist $M = (m_{ij})$ die Darstellungsmatrix von $b$, so gilt $m_{ii} = 2a_{ii}$ und $m_{ij} = m_{ji} = a_{ij}$ für $i \ne j$. Ist $q$ ungerade, so ist auch $f$ eindeutig durch $b$ bestimmt, nämlich $f(v) = b(v,v)/2$ für alle $v \in \mathrm{GF}(q)^{n+1}$.

Für eine Teilmenge $S$ von $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$ sei

$$S^{\perp_f} := \{v \in \mathrm{GF}(q)^{n+1} \mid b(v,s) = 0 \ \forall s \in S\}$$

der *Senkrechtraum* von $S$. Man schreibt auch $S^\perp$ anstatt $S^{\perp_f}$. Die quadratische Form $f$ heißt *ausgeartet*, falls es einen Vektor $0 \ne v \in \mathrm{GF}(q)^{n+1}$ mit $f(v) = 0$ und $v^\perp = \mathrm{GF}(q)^{n+1}$ gibt.

**Definition 1.2.8** Sei $f$ eine quadratische Form von $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$. Die durch $f$ definierte *Quadrik* in $\mathrm{PG}(n,q)$ ist die Punktmenge

$$Q_f := \{\langle v\rangle \mid 0 \ne v \in \mathrm{GF}(q)^{n+1}, f(v) = 0\}.$$

Die Quadrik $Q_f$ heißt *ausgeartet*, wenn $f$ ausgeartet ist. Der *Index* von $Q_f$ ist der Rang der maximalen total singulären Unterräume bzgl. $f$ von $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$.

Man kann zeigen, dass es bis auf Isomorphie nur eine bzw. zwei nicht ausgeartete Quadriken von $\mathrm{PG}(n,q)$ gibt, je nachdem ob $n$ gerade bzw. ungerade ist. Durch einen Basiswechsel kann jede nicht ausgeartete quadratische Form von $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$ auf eine der folgenden Formen gebracht werden, siehe z.B. [Hir98].

- $n$ ist gerade und $f((x_0,\dots,x_n)^\top) = x_0^2 + x_1x_2 + \dots + x_{n-1}x_n$. Dann heißt $Q_f$ nicht ausgeartete *parabolische Quadrik* und wird mit $Q(n,q)$ bezeichnet. $Q_f$ hat den Index $n/2$.
- $n$ ist ungerade und $f((x_0,\dots,x_n)^\top) = x_0x_1 + x_2x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$. Dann heißt $Q_f$ nicht ausgeartete *hyperbolische Quadrik* und wird mit $Q^+(n,q)$ bezeichnet. $Q_f$ hat den Index $(n+1)/2$.
- $n$ ist ungerade und $f((x_0,\dots,x_n)^\top) = ax_0^2+x_0x_1+x_1^2+x_2x_3+\dots+x_{n-1}x_n$, wobei $x^2+x+a$ ein irreduzibles Polynom über $\mathrm{GF}(q)$ ist. Dann heißt $Q_f$ nicht ausgeartete *elliptische Quadrik* und wird mit $Q^-(n,q)$ bezeichnet. $Q_f$ hat den Index $(n-1)/2$.

Sei $f$ eine nicht ausgeartete quadratische Form von $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$, $b$ die begleitende Bilinearform und $\pi : \mathrm{PG}(n,q) \to \mathrm{PG}(n,q)^*$ mit $\pi(U) = U^\perp$ für jeden Unterraum $U$ von $\mathrm{PG}(n,q)$.

Ist $q$ ungerade, dann ist $\pi$ eine orthogonale Polarität von $\mathrm{PG}(n,q)$. Die total singulären Unterräume bzgl. $f$ sind genau die total isotropen Unterräume bzgl. $\pi$.

Ist $q$ gerade und $n$ ungerade, dann ist $\pi$ eine symplektische Polarität von $\mathrm{PG}(n,q)$. Die total singulären Unterräume bzgl. $f$ bilden eine echte Teilmenge der total isotropen Unterräume bzgl. $\pi$.

Sind $q$ und $n$ gerade, dann hat die Darstellungsmatrix von $b$ den Rang $n$, ist also singulär, und $\pi$ ist keine Korrelation von $\mathrm{PG}(n,q)$. Es gibt genau einen Punkt $P$ in $\mathrm{PG}(n,q)$ mit $P^\perp = \mathrm{PG}(n,q)$. Da $f$ nicht ausgeartet ist, ist $P$ kein Punkt der Quadrik $Q_f$. $P$ wird *Nucleus* der Quadrik genannt. Auf dem Quotientenraum $\mathrm{PG}(n,q)/P$ induziert $\pi$ eine symplektische Polarität.

## Baer-Untergeometrien

Für diesen Unterabschnitt sei $q = p^{2s}$ mit $p$ Primzahl und $s \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mathrm{GF}(\sqrt{q})$ ein Unterkörper von $\mathrm{GF}(q)$ und $x \mapsto x^{\sqrt{q}}$ ist ein Körperautomorphismus von $\mathrm{GF}(q)$, dessen Fixpunkte genau die Elemente von $\mathrm{GF}(\sqrt{q})$ sind.

Sei $\mathcal{P}_{\sqrt{q}}$ die Menge der Punkte in $\mathrm{PG}(n,q)$, deren zugehöriger Unterraum vom Rang Eins von $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$ von einem Vektor aus $\mathrm{GF}(\sqrt{q})^{n+1}$ erzeugt werden kann. Sei weiter $\mathcal{G}_{\sqrt{q}}$ die Menge der Geraden in $\mathrm{PG}(n,q)$, die mindestens zwei Punkte in $\mathcal{P}_{\sqrt{q}}$ haben. Dann ist $\mathscr{P}_{\sqrt{q}} := (\mathcal{P}_{\sqrt{q}}, \mathcal{G}_{\sqrt{q}}, \subseteq)$ ein zu $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ isomorpher projektiver Raum, der in $\mathrm{PG}(n,q)$ auf natürliche Art eingebettet ist.

Eine Gerade $\ell \in \mathcal{G}_{\sqrt{q}}$ hat dabei $q+1$ Punkte in $\mathrm{PG}(n,q)$ und nur $\sqrt{q}+1$ Punkte in $\mathscr{P}_{\sqrt{q}}$. Die Gerade $\ell$ hat damit in $\mathscr{P}_{\sqrt{q}}$ weniger Punkte als in $\mathrm{PG}(n,q)$.

Durch eine Kollineation $\varphi$ von $\mathrm{PG}(n,q)$ wird $\mathscr{P}_{\sqrt{q}}$ auf einen zu $\mathscr{P}_{\sqrt{q}}$ isomorphen projektiven Raum abgebildet. Ist $\varphi$ keine Kollineation von $\mathscr{P}_{\sqrt{q}}$, so ist $\varphi(\mathscr{P}_{\sqrt{q}})$ verschieden von $\mathscr{P}_{\sqrt{q}}$.

**Definition 1.2.9** Jedes Bild von $\mathscr{P}_{\sqrt{q}}$ unter einer Kollineation von $\mathrm{PG}(n,q)$ ist zu $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ isomorph und heißt *Baer-Untergeometrie* oder *Baer-Teilraum* von $\mathrm{PG}(n,q)$. Alle Baer-Untergeometrien von $\mathrm{PG}(n,q)$ werden mit $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ identifiziert.

Für einen $u$-dimensionalen Unterraum $U$ der Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ von $\mathrm{PG}(n,q)$ ist $U$ eine Teilmenge von $\mathrm{PG}(n,q)$ und $\langle U\rangle$ ein $u$-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{PG}(n,q)$. Unterräume der Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ gehören damit zu Unterräumen von $\mathrm{PG}(n,q)$ derselben Dimension. Hierbei ist $U$ ein Baer-Teilraum von $\langle U\rangle$. Für $u=1$ heißt $U$ *Baer-Teilgerade* und für $u=2$ *Baer-Unterebene* von $\langle U\rangle$.

Für einen $u$-dimensionalen Unterraum $U$ von $\mathrm{PG}(n,q)$ ist $U\cap\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ ein Unterraum von $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ der Dimension höchstens $u$.

Über die Schnitte von Unterräumen von $\mathrm{PG}(n,q)$ mit Unterräumen einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ lassen sich viele Aussagen beweisen. Das nächste Resultat enthält zwei der bekanntesten.

**Resultat 1.2.10** (Sved [Sve83]) *Sei* $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ *eine Baer-Untergeometrie des projektiven Raums* $\mathrm{PG}(n,q)$.

*(i) Jeder Punkt* $P\in\mathrm{PG}(n,q)\setminus\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ *liegt auf genau einer Geraden von* $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$.

*(ii) Für jede Hyperebene* $H$ *von* $\mathrm{PG}(n,q)$ *ist* $H\cap\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ *eine Hyperebene oder eine Cogerade von* $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$.

Insbesondere folgt für projektive Ebenen $\mathrm{PG}(2,q)$ aus (ii), dass jede Gerade aus $\mathrm{PG}(2,q)$ die Baer-Unterebene $\mathrm{PG}(2,\sqrt{q})$ trifft. Für höher dimensionale Räume, also für $n>2$, ist dies nicht mehr richtig. Das nächste Lemma zeigt, wie groß die Dimension eines Unterraums von $\mathrm{PG}(n,q)$ höchstens ist, wenn er $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ nicht trifft.

**Lemma 1.2.11** *Sei* $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ *eine Baer-Untergeometrie von* $\mathrm{PG}(n,q)$. *Dann existiert ein Unterraum* $U$ *von* $\mathrm{PG}(n,q)$ *der Dimension* $\lfloor(n-1)/2\rfloor$, *der* $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ *nicht trifft.*

*Beweis:* $\mathrm{PG}(n,\sqrt{q})$ hat $\theta(n,\sqrt{q})=((\sqrt{q})^{n+1}-1)/(\sqrt{q}-1)$ Punkte. Jeder Punkt liegt in

$$\alpha_u:=\prod_{i=0}^{u-1}\frac{q^{n-i}-1}{q^{u-i}-1}$$

Unterräumen von $\mathrm{PG}(n,q)$ der Dimension $u$. In $\mathrm{PG}(n,q)$ liegen

$$\beta_u:=\prod_{i=0}^{u}\frac{q^{n+1-i}-1}{q^{u+1-i}-1}=\alpha_u\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q^{u+1}-1}$$

Unterräume der Dimension $U$. Für $u \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$ ist

$$\theta(n, \sqrt{q}) \cdot \alpha_u < \beta_u$$

und es folgt die Behauptung. □

**Baer-Kegel**

Wir haben bereits den Kegel mit Spitze $S$ über der Menge $T$ definiert (in Zeichen $ST$). Dabei ist $S$ ein Unterraum und $T$ eine beliebige Menge mit $S \cap \langle T \rangle = \emptyset$. Wir betrachten nun Kegel $ST$, bei denen $T$ die Punktmenge einer Baer-Untergeometrie ist. Diese Kegel spielen eine wichtige Rolle in Kapitel 4.

**Definition 1.2.12** Sei $S$ ein $s$-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{PG}(n,q)$ und $T$ eine Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(t, \sqrt{q})$ von $\langle T \rangle$ mit $S \cap \langle T \rangle = \emptyset$. Dann heißt der Kegel $ST$ *Baer-Kegel* vom *Typ* $B_{s,t}$.

Baer-Kegel sind Bilder von Baer-Untergeometrien. Sei $U$ ein $u$-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{PG}(n,q)$, der die Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$ nicht trifft (hierbei ist $u \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor$). Sei weiter $C$ ein Komplement von $U$ in $\mathrm{PG}(n,q)$ und $K$ das Bild der Abbildung $\varphi : \mathrm{PG}(n, \sqrt{q}) \to C$ mit $\varphi(P) := PU \cap C$ für alle Punkte $P$ aus $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$. Die Abbildung $\varphi$ heißt *Projektion* von $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$ von $U$ auf $C$.

**Lemma 1.2.13** *Das Bild $K$ von $\varphi$ ist ein Baer-Kegel vom Typ $B_{u,n-2(u+1)}$. Dabei hat jeder Punkt der Spitze genau $\sqrt{q}+1$ Urbilder und jeder andere Punkt in $K$ genau ein Urbild.*

*Beweis:* O.B.d.A. kann jeder Punkt der Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$ als Unterraum vom Rang Eins von $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$ durch einen Vektor aus $\mathrm{GF}(\sqrt{q})^{n+1}$ erzeugt werden. Für einen Punkt $P = \langle v \rangle$ aus $\mathrm{PG}(n,q)$ mit $v = (x_0, \ldots, x_n)^\top \in \mathrm{GF}(q)^{n+1}$ sei

$$P^{\sqrt{q}} := \langle v^{\sqrt{q}} \rangle = \langle (x_0^{\sqrt{q}}, \ldots, x_n^{\sqrt{q}})^\top \rangle.$$

Damit ist $U^{\sqrt{q}} = \{P^{\sqrt{q}} \mid P \in U\}$ ein Unterraum von $\mathrm{PG}(n,q)$ der Dimension $u$. Es gilt $U \cap U^{\sqrt{q}} = \emptyset$, denn angenommen es ist $P^{\sqrt{q}} \in U$ für einen Punkt $P \in U$, dann ist die Gerade $\ell := PP^{\sqrt{q}}$ eine Gerade in $U$. Wegen $\ell^{\sqrt{q}} = (PP^{\sqrt{q}})^{\sqrt{q}} = P^{\sqrt{q}}P = \ell$ trifft die Gerade $\ell$ die Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$ in einer Baer-Teilgeraden. Damit hat $\ell \subseteq U$ Punkte in $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$, ein Widerspruch zu $U \cap \mathrm{PG}(n, \sqrt{q}) = \emptyset$. Somit ist $UU^{\sqrt{q}}$ ein $(2u+1)$-dimensionaler Unterraum, der das Komplement $C$ von $U$ in einem Unterraum $S$ der Dimension $u$ trifft. Wir zeigen nun $S \subseteq K$.
Zu jedem Punkt $R \in S$ gibt es einen Punkt $P \in U$ mit $R = (UP^{\sqrt{q}} \cap C)$. Die Gerade $PP^{\sqrt{q}}$ trifft die Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$ in einer Baer-Teilgeraden, also in $\sqrt{q}+1$ Punkten $R_0, \ldots, R_{\sqrt{q}}$. Dann ist $UR_0 = \cdots = UR_{\sqrt{q}} = UP^{\sqrt{q}}$ und damit

$$\varphi(R_0) = \cdots = \varphi(R_{\sqrt{q}}) = (UP^{\sqrt{q}} \cap C) = R \in K.$$

Es folgt $S \subseteq K$ und jeder Punkt $R \in S$ hat mindestens $\sqrt{q}+1$ Urbilder.
Für zwei verschiedene Punkte $P_1, P_2 \in U$ treffen sich die Geraden $P_1P_1^{\sqrt{q}}$ und

$P_2P_2^{\sqrt{q}}$ nicht, denn angenommen doch, so spannen sie eine Ebene $E$ auf, die $U$ in der Geraden $P_1P_2$ trifft. Die Ebene $E$ enthält bereits zwei Baer-Teilgeraden und trifft daher die Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$ in einer Baer-Unterebene. Es gilt, dass jede Gerade einer Ebene jede Baer-Unterebene trifft. Damit hat die Gerade $P_1P_2$ mindesten einen Punkt in $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$, ein Widerspruch zu $U \cap \mathrm{PG}(n, \sqrt{q}) = \emptyset$. Somit trifft $UU^{\sqrt{q}}$ die Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$ in mindestens

$$\theta(u, q) \cdot (\sqrt{q} + 1) = \frac{q^{u+1} - 1}{q - 1} \cdot (\sqrt{q} + 1) = \frac{(\sqrt{q})^{2u+2} - 1}{\sqrt{q} - 1} = \theta(2u + 1, \sqrt{q})$$

Punkten. Außerdem ist $UU^{\sqrt{q}}$ ein Unterraum von $\mathrm{PG}(n, q)$ der Dimension $2u+1$, der $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$ in einem Unterraum der Dimension höchstens $2u+1$ trifft. Wegen der Anzahl an Schnittpunkten ist $UU^{\sqrt{q}} \cap \mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$ ein $(2u + 1)$-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$. Diesen bezeichnen wir mit $U'$.
Jeder Punkt aus $U'$ wird auf einen Punkt in $S$ abgebildet. Ein beliebiger Punkt aus $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q}) \setminus U'$ liegt nicht in $UU^{\sqrt{q}}$ und dessen Bild daher nicht in $S$. Somit haben die Punkte in $S$ genau $\sqrt{q}+1$ Urbilder. Seien $A, B$ zwei verschiedene Punkte aus $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q}) \setminus U'$. Dann sind die Unterräume $UA$ und $UB$ verschieden, denn die Gerade $AB$ liegt nicht in $U'$ und hat damit auch nicht die Form $PP^{\sqrt{q}}$ für einen Punkt $P \in U$. Außerdem liegt jeder Punkt $P \in U$ auf genau einer Geraden aus $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$, also nur auf $PP^{\sqrt{q}}$ und insbesondere nicht auf der Geraden $AB$. Damit sind die Bilder $\varphi(A)$ und $\varphi(B)$ verschieden. Die Punkte in $K \setminus S$ haben somit genau ein Urbild.
Sei $C'$ ein Komplement von $U'$ in $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$, dann ist $C'$ eine Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(n - 2(u + 1), \sqrt{q})$ von $\langle C' \rangle$. Es gilt $\langle C' \rangle \cap U = \emptyset$, denn jeder Punkt $P$ aus $\langle C' \rangle \setminus C'$ liegt auf der eindeutigen Geraden $PP^{\sqrt{q}}$, die $C' \subseteq \mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$ in einer Baer-Teilgeraden trifft. Ist $P \in U$, so liegt die Baer-Teilgerade von $PP^{\sqrt{q}}$ in $U'$, also nicht in $C'$. Somit ist $\langle C', U \rangle$ ein $(n - u - 1)$-dimensionaler Unterraum, der $C$ in einem $(2 - 2u - 2)$-dimensionalen Unterraum $T$ trifft, der disjunkt zu $S$ ist. Die Punkte aus $C'$ werden von $\varphi$ auf eine Baer-Untergeometrie von $T$ der Dimension $n - 2(u + 1)$ abgebildet.
Für einen Punkt $A \in C'$ ist $W_A := U'A \cap \mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$ ein $(2u + 2)$-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{PG}(n, \sqrt{q})$. In $W_A \setminus U'$ liegen genau $(\sqrt{q})^{2u+2} = q^{u+1}$ Punkte, die auf die $q^{u+1}$ Punkte in $S\varphi(A) \setminus S$ abgebildet werden. Damit ist $K$ der Kegel mit $u$-dimensionaler Spitze $S$ über der Baer-Untergeometrie $\varphi(C')$ von $T$ der Dimension $n - 2(u + 1)$. □

## Ovale, Ovoide, Faserungen, blockierende Mengen

In diesem Teilabschnitt werden einige Unterstrukturen des projektiven Raumes $\mathrm{PG}(n, q)$ präsentiert, die im Laufe der Arbeit auftauchen.

### Ovale und Ovoide

Sei $\mathcal{O}$ eine Teilmenge der Punktmenge von $\mathrm{PG}(n, q)$, mit folgenden Eigenschaften:

(O1) Keine drei Punkte aus $\mathcal{O}$ sind kollinear.

(O2) Für jeden Punkt $P \in \mathcal{O}$ ist die Vereinigung aller Geraden $\ell$ mit $\ell \cap \mathcal{O} = \{P\}$ eine Hyperebene von $\mathscr{P}$.

Wegen Eigenschaft (O1) trifft jede Gerade von $\mathrm{PG}(n, q)$ die Menge $\mathcal{O}$ in keinem, genau einem oder in genau zwei Punkten. Die Geraden werden entsprechend *Passanten*, *Tangenten* und *Sekanten* genannt. Man kann zeigen, dass eine solche Menge $\mathcal{O}$ nur für $n \leq 3$ existiert. Daher werden die Fälle $n = 2$ und $n = 3$ genauer betrachtet.

**Definition 1.2.14** Eine Menge $\mathcal{O}$ von Punkten aus $\mathrm{PG}(n, q)$, die (O1) und (O2) erfüllt, heißt *Oval* für $n = 2$ und *Ovoid* für $n = 3$.

Es folgt direkt aus der Definition, dass jedes Oval genau $q + 1$ und jedes Ovoid genau $q^2 + 1$ Punkte hat.

**Beispiel 1.2.15** Die parabolische Quadrik $Q(2, q)$ ist ein Oval von $\mathrm{PG}(2, q)$. Die elliptische Quadrik $Q^-(3, q)$ ist ein Ovoid von $\mathrm{PG}(3, q)$.

Ein Oval, das eine Quadrik ist, heißt *Kegelschnitt*. Für ungerade $q$ ist jedes Oval von $\mathrm{PG}(2, q)$ ein Kegelschnitt (Satz von Segre) und jedes Ovoid von $\mathrm{PG}(3, q)$ eine elliptische Quadrik (Satz von Barlotti). Es gibt gerade $q > 4$, für die Ovale oder Ovoide existieren, die keine Quadriken sind.

Betrachtet man eine Punktmenge $\mathcal{M}$ von $\mathrm{PG}(n, q)$, $n = 2, 3$, die nur Eigenschaft (O1) erfüllen muss, so kann man folgendes zeigen:

- Ist $n = 2$ und $q$ ungerade, dann ist $|\mathcal{M}| \leq q + 1$ und falls $|\mathcal{M}| = q + 1$, so ist $\mathcal{M}$ ein Oval.
- Ist $n = 2$ und $q$ gerade, dann ist $|\mathcal{M}| \leq q + 2$ und falls $|\mathcal{M}| = q + 1$, so ist $\mathcal{M}$ ein Oval.
- Ist $n = 3$ und $q = 2$, dann ist $|\mathcal{M}| \leq 8$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\mathcal{M}$ alle Punkte außerhalb einer Ebene enthält.
- Ist $n = 3$ und $q > 2$, dann ist $|\mathcal{M}| \leq q^2 + 1$ und falls $|\mathcal{M}| = q^2 + 1$, so ist $\mathcal{M}$ ein Ovoid.

Punktmengen von $\mathrm{PG}(2, q)$, die (O1) erfüllen und genau $q + 2$ Punkte haben, heißen *Hyperovale*. Ist $q$ gerade und $\mathcal{O}$ ein Oval von $\mathrm{PG}(n, q)$, dann treffen sich alle Tangenten in einem gemeinsamen Punkt $P$ und $\mathcal{O} \cup \{P\}$ ist ein Hyperoval von $\mathrm{PG}(n, q)$. Für Kegelschnitte ist dieser Punkt $P$ der Nukleus der Quadrik. Ist umgekehrt $\mathcal{H}$ ein Hyperoval und $P \in \mathcal{H}$, dann ist $\mathcal{H} \setminus \{P\}$ ein Oval von $\mathrm{PG}(2, q)$.

### Reguli, Faserungen und Überdeckungen

Die eben beschriebenen Ovale und Ovoide sind Punktmengen. Jetzt betrachten wir Mengen von Unterräumen mit Dimension größer als Null.

**Definition 1.2.16** Sei $1 \leq t \in \mathbb{N}$. Ein *$t$-Regulus* von $\mathrm{PG}(2t+1, q)$ ist eine Menge $\mathcal{R}$ von $q+1$ paarweise disjunkten $t$-dimensionalen Unterräumen, so dass jede Gerade, die drei verschiedene Elemente aus $\mathcal{R}$ trifft, alle Elemente in $\mathcal{R}$ trifft. Eine Gerade, die alle Elemente aus $\mathcal{R}$ trifft, heißt *Transversale* von $\mathcal{R}$.

Man kann zeigen, dass jeder Punkt von jedem Element in $\mathcal{R}$ auf genau einer Transversalen liegt. Die Transversalen sind also insbesondere paarweise windschief. Außerdem gilt, dass zu je drei paarweise disjunkten $t$-dimensionalen Unterräumen von $\mathrm{PG}(2t+1, q)$ genau ein $t$-Regulus existiert, der diese drei Unterräume enthält.

Ein 1-Regulus wird auch nur *Regulus* genannt. Ist $\mathcal{R}$ ein Regulus von $\mathrm{PG}(3, q)$, so ist die Menge der Transversalen ebenfalls ein Regulus $\mathcal{R}'$ von $\mathrm{PG}(3, q)$. Man nennt $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ *entgegengesetzte Reguli*.

**Definition 1.2.17** Sei $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t < n$. Eine *$t$-Faserung $\mathcal{F}$* von $\mathrm{PG}(n, q)$ ist eine Menge von Unterräumen der Dimension $t$, so dass jeder Punkt von $\mathrm{PG}(n, q)$ in genau einem Element aus $\mathcal{F}$ enthalten ist. Ist $t = 1$, so wird $\mathcal{F}$ auch *Geradenfaserung* oder nur *Faserung* genannt.

Eine $t$-Faserung von $\mathrm{PG}(n, q)$ kann natürlich nur existieren, falls $\theta_t$ ein Teiler von $\theta_n$ ist. Es gilt sogar die Umkehrung, siehe z.B. [Hir98].

**Resultat 1.2.18** *Die folgenden Aussagen sind äquivalent.*

*(i)* *Es existiert eine $t$-Faserung von* $\mathrm{PG}(n, q)$.

*(ii)* $\theta_t \mid \theta_n$

*(iii)* $t + 1 \mid n + 1$.

Eine $t$-Faserung $\mathcal{F}$ von $\mathrm{PG}(n, q)$ heißt *regulär*, falls für je drei Elemente von $\mathcal{F}$, die gemeinsam in einem $(2t + 1)$-dimensionalen Unterraum liegen, der $t$-Regulus durch diese drei Elemente in $\mathcal{F}$ enthalten ist.

Die Elemente einer $t$-Faserung sind paarweise disjunkt. Eine Menge von paarweise disjunkten $t$-dimensionalen Unterräumen heißt *partielle $t$-Faserung* oder *$t$-Teilfaserung*. Die Punkte aus $\mathrm{PG}(n, q)$, die in keinem Element der $t$-Teilfaserung enthalten sind, heißen *Löcher*. Eine $t$-Teilfaserung ist *maximal*, wenn sie in keiner anderen $t$-Teilfaserung enthalten ist.

Jeder Punkt von $\mathrm{PG}(n, q)$ liegt in genau einem Element der $t$-Faserung $\mathcal{F}$. Verzichtet man auf das Wort “genau“, so erhält man folgende Definition.

**Definition 1.2.19** Sei $t \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq t < n$. Eine Menge $\mathcal{C}$ von $t$-dimensionalen Unterräumen von $\mathrm{PG}(n, q)$ heißt *$t$-Überdeckung*, wenn jeder Punkt aus $\mathrm{PG}(n, q)$ in mindestens einem Element aus $\mathcal{C}$ enthalten ist. Eine $t$-Überdeckung heißt *minimal*, wenn sie keine andere $t$-Überdeckung enthält.

### Blockierende Mengen

Die eben beschriebene $t$-Überdeckung $\mathcal{C}$ hat die Eigenschaft, dass jeder Punkt in einem Element aus $\mathcal{C}$ enthalten ist. Nun betrachten wir Punktmengen, so dass jeder $t$-dimensionale Unterraum diese Punktmenge trifft.

**Definition 1.2.20** Seien $1 \leq s, t \in \mathbb{N}$. Eine Punktmenge $\mathcal{B}$ von $\mathrm{PG}(n, q)$ heißt *s-fach t-blockierende Menge*, wenn jeder $t$-dimensionale Unterraum von $\mathrm{PG}(n, q)$ die Menge $\mathcal{B}$ in mindestens $s$ Punkten trifft und ein $t$-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{PG}(n, q)$ existiert, der $\mathcal{B}$ in genau $s$ Punkten trifft. $\mathcal{B}$ heißt *minimal*, wenn für alle $P \in \mathcal{B}$ die Menge $\mathcal{B} \setminus \{P\}$ keine $s$-fach $t$-blockierende Menge ist.

Ist $s = 1$, so heißt $\mathcal{B}$ einfach nur $t$-blockierende Menge. Aus der Dimensionsformel folgt direkt, dass ein $(n-t)$-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{PG}(n, q)$ eine $t$-blockierende Menge ist. Eine kleinere gibt es nicht, wie der nächste Satz zeigt.

**Theorem 1.2.21** (Bose, Burton [BB66]) *Sei $\mathcal{B}$ eine $t$-blockierende Menge von $\mathrm{PG}(n, q)$. Dann gilt $|\mathcal{B}| \geq \theta_{n-t}$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\mathcal{B}$ ein $(n-t)$-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{PG}(n, q)$ ist.*

Eine $t$-blockierende Menge, die einen $(n-t)$-dimensionalen Unterraum enthält, wird *trivial* genannt. Interessanter sind $t$-blockierende Mengen, die keinen $(n-t)$-dimensionalen Unterraum enthalten, oder allgemeiner, die keinen $r$-dimensionalen Unterraum enthalten mit $r \leq n - t$.

**Resultat 1.2.22** (Huber [Hub87]) *Sei $\mathcal{B}$ eine $t$-blockierende Menge von $\mathrm{PG}(n, q)$, die keinen $r$-dimensionalen Unterraum enthält und $r \leq n - t$, sowie $q \geq 5$. Dann gilt $|\mathcal{B}| \geq \theta(r-2, q) + q^{r-1}\theta(2(n-t-r+1), \sqrt{q})$ mit Gleichheit genau dann, wenn $\mathcal{B}$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{r-2,2(n-t-r+1)}$ ist.*

Ein Baer-Kegel vom Typ $B_{a,b}$ mit $b > 0$ existiert in $\mathrm{PG}(n, q)$ nur, wenn $q$ eine quadratische Primzahlpotenz ist. Insbesondere ist die Mächtigkeit von $\mathcal{B}$ im vorherigen Resultat echt größer, falls $q$ kein Quadrat ist. Die Aussagen in den Fällen $r = 1, r = n-t$ und $t = n-1$ wurden schon früher von Beutelspacher, siehe [Beu83, Beu80], und Bruen, siehe [Bru80], untersucht. Der wichtigste Spezialfall ist die entsprechende Aussage für $n = 2$ und $t = r = 1$. Diese wurde schon 1971 von Bruen bewiesen, siehe [Bru71].

Ist $\mathcal{B}$ eine $s$-fach $t$-blockierende Menge von $\mathrm{PG}(n, q)$ mit $t = n - 1$, dann heißt $\mathcal{B}$ einfach nur $s$-fach blockierende Menge. Folgendes Resultat von Ball wird im Kapitel 5 benötigt.

**Resultat 1.2.23** (Ball [Bal96]) *Sei $\mathcal{B}$ eine $s$-fach blockierende Menge in $\mathrm{PG}(2, p)$, $p > 3$ Primzahl. Im Fall $s = 1$ enthalte $\mathcal{B}$ keine Gerade.*

*(i) Ist $s < p/2$, dann gilt $|\mathcal{B}| \geq (s + \frac{1}{2})(p + 1)$.*

*(ii) Ist $s > p/2$, dann gilt $|\mathcal{B}| \geq (s + 1)p$.*

## 1.3 Polarräume

Die erste Definition eines Polarraums ist von Veldkamp [Vel59]. Tits reduzierte die Anzahl der Axiome von zwölf auf vier [Tit74]. Die folgende Definition für Polarräume ist von Buekenhout und Shult. Sie zeigen in [BS74], dass die Axiome von Tits aus ihren Axiomen folgen.

**Definition 1.3.1** Ein *(dicker) Polarraum* $\mathbb{P}$ *mit endlichem Rang* ist eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$, die folgende Axiome erfüllt.

(P1) Jede Gerade enthält mindestens drei Punkte.

(P2) Es existiert $n \in \mathbb{N}$, so dass für jede Kette $U_0 \subsetneq \cdots \subsetneq U_i$ aus singulären Unterräumen $i \leq n$ gilt.

(P3) Sei $g$ eine Gerade und $P$ ein Punkt, der nicht auf $g$ liegt. Dann ist $P$ entweder zu allen Punkten auf $g$ oder zu genau einem Punkt auf $g$ kollinear.

(P4) Kein Punkt ist zu allen Punkten kollinear.

(P5) Auf zwei verschiedenen Geraden liegen nicht dieselben Punkte.

Buekenhout und Shult zeigen in [BS74] unter anderem, dass jeder singuläre Unterraum $U$, wobei $U \neq \emptyset$ und $U \notin \mathcal{P} \cup \mathcal{G}$, mit den in $U$ enthaltenen Punkten und Geraden ein projektiver Raum ist. Die Dimension eines solchen Unterraums $U$ sei die Dimension des entsprechenden projektiven Raums. Die Dimension der leeren Menge wird auf $-1$ gesetzt, die von Punkten bzw. Geraden auf 0 bzw. 1. Ein singulärer Unterraum heißt *maximal*, wenn er in keinem anderen singulären Unterraum enthalten ist. Man kann zeigen, dass alle maximalen singulären Unterräume die gleiche Dimension haben. Diese ist wegen des zweiten Axioms endlich. Die maximalen singulären Unterräume eines Polarraums heißen *Erzeuger*. Ist die Dimension eines Erzeugers $r - 1$, so ist $r$ der *Rang* des Polarraums.

## Endliche klassische Polarräume

Hier werden zunächst die für diese Arbeit wichtigen Typen von Polarräumen vorgestellt. Alle hier behandelten Polarräume sind in dem projektiven Raum $\mathrm{PG}(n, q)$ eingebettet. Ein *endlicher klassischer Polarraum* ist ein Polarraum, der zu einem der folgenden Beispiele isomorph ist.

**Beispiel 1.3.2** Sei $Q_f$ eine nicht ausgeartete Quadrik von $\mathrm{PG}(n, q)$ vom Index $r \geq 2$. Sei $\mathcal{P} = Q_f$ und $\mathcal{G}$ die Menge der total singulären Geraden von $\mathrm{PG}(n, q)$ bzgl. $f$. Dann ist $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ ein Polarraum vom Rang $r$. Er heißt *orthogonaler Polarraum* und wird genau wie $Q_f$ mit $Q(n, q)$, $Q^+(n, q)$ oder $Q^-(n, q)$ bezeichnet, je nachdem ob $Q_f$ parabolisch, hyperbolisch oder elliptisch ist. Die singulären Unterräume des Polarraums sind die total singulären Unterräume von $\mathrm{PG}(n, q)$ bzgl. $f$.

**Beispiel 1.3.3** Sei $n \geq 3$ ungerade und $\pi$ eine symplektische Polarität von $\mathrm{PG}(n, q)$. Sei $\mathcal{P} = \mathrm{PG}(n, q)$ und $\mathcal{G}$ die Menge der total isotropen Geraden von $\mathrm{PG}(n, q)$ bzgl. $\pi$. Dann ist $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ ein Polarraum vom Rang $(n + 1)/2$. Er heißt *symplektischer Polarraum* und wird mit $W(n, q)$ bezeichnet. Die singulären Unterräume des Polarraums sind die total isotropen Unterräume von $\mathrm{PG}(n, q)$ bzgl. $\pi$.

**Beispiel 1.3.4** Sei $q = p^{2s}$, $n \geq 3$ und $\pi$ eine hermitesche Polarität von $\mathrm{PG}(n,q)$. Sei $\mathcal{P}$ bzw. $\mathcal{G}$ die Menge der total isotropen Punkte bzw. Geraden von $\mathrm{PG}(n,q)$ bzgl. $\pi$. Dann ist $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \in)$ ein Polarraum vom Rang $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$. Er heißt *hermitescher Polarraum* und wird mit $H(n,q)$ bezeichnet. Die singulären Unterräume des Polarraums sind die total isotropen Unterräume von $\mathrm{PG}(n,q)$ bzgl. $\pi$.

Tits hat in [Tit74] alle Polarräume vom endlichen Rang $r \geq 3$ klassifiziert. Er ergänzte damit die Klassifizierung von Veldkamp in [Vel59]. Für die endlichen Polarräume vom Rang $r \geq 3$ gilt daher die folgende Klassifizierung. Die Polarräume vom Rang zwei, auch die endlichen, sind bisher nicht klassifiziert.

**Theorem 1.3.5** (Veldkamp [Vel59],Tits [Tit74]) *Jeder endliche Polarraum vom Rang $r \geq 3$ ist klassisch.*

Ist $\pi$ eine symplektische oder hermitesche Polarität von $\mathrm{PG}(n,q)$, so schreiben wir, wie in Abschnitt 1.2 bereits erwähnt, anstatt $\pi(X)$ auch $X^{\perp_\pi}$ oder kürzer $U^\perp$ für einen Unterraum $X$ von $\mathrm{PG}(n,q)$.

Ist $f$ eine quadratische Form von $\mathrm{GF}(q)^{n+1}$ und $b$ die begleitende Bilinearform, so wurde $S^\perp := \{v \mid b(v,s) = 0 \forall s \in S\}$ für alle Teilmengen $S \subseteq \mathrm{GF}(q)^{n+1}$ bereits in Abschnitt 1.2 definiert. Dies definiert auch $X^\perp$ für alle Unterräume $X$ von $\mathrm{PG}(n,q)$. Die Abbildung $X \mapsto X^\perp$ ist eine orthogonale Polarität, falls $q$ ungerade ist und eine symplektische Polarität, falls $q$ gerade und $n$ ungerade ist. Sind $q$ und $n$ gerade, dann ist dies keine Polarität.

Wir verwenden im Folgenden nur noch die Bezeichnung $\perp$ für alle endlichen klassischen Polarräume. Sei $\mathbb{P} \subseteq \mathrm{PG}(n,q)$ ein endlicher klassischer Polarraum. Eine Hyperebene $H$ von $\mathrm{PG}(n,q)$ heißt *Tangentialhyperebene*, wenn $H = P^\perp$ für einen Punkt $P \in \mathbb{P}$ gilt. Der Unterraum $X$ von $\mathrm{PG}(n,q)$ steht *senkrecht* auf dem Unterraum $Y$ von $PG(n,q)$, wenn $Y \subseteq X^\perp$ gilt, in Zeichen $X \perp Y$. Zwei verschiedene Punkte aus $\mathbb{P}$ heißen *benachbart* oder *verbunden*, wenn sie aufeinander senkrecht stehen. Insbesondere ist dann die Verbindungsgerade eine singuläre Gerade von $\mathbb{P}$.

Im Folgenden werden die für diese Arbeit wichtigsten Eigenschaften der endlichen klassischen Polarräume aufgezählt. Insbesondere wird jeweils die Anzahl der $m$-dimensionalen singulären Unterräume angegeben. Für die Beweise siehe z.B. [HT91].

### Orthogonale Polarräume

Sei $\mathbb{P}$ ein orthogonaler Polarraum, dessen Punkte in $\mathrm{PG}(n,q)$ liegen, d.h. die Punkte von $\mathbb{P}$ sind die Punkte einer nicht ausgearteten Quadrik $Q_f$. Jeder Unterraum von $\mathrm{PG}(n,q)$ ist genau dann ein singulärer Unterraum von $\mathbb{P}$, wenn all seine Punkte total singulär bzgl. $f$ sind. Daher wird $\mathbb{P}$ auch mit seiner Punktmenge $Q_f$ identifiziert. Jede Gerade von $\mathrm{PG}(n,q)$, die keine singuläre Gerade von $\mathbb{P}$ ist, enthält genau $0, 1$ oder $2$ total singuläre Punkte. Sie heißt entsprechend *Passante*, *Tangente* oder *Sekante*. Sei $U$ ein Unterraum von $\mathrm{PG}(n,q)$. Dann bilden die total singulären Punkte in jedem Komplement $C$ von $U^\perp \cap U$ in $U$ eine nicht ausgeartete Quadrik $Q_C$. Die total singulären Unterräume durch $U \cap U^\perp$ entsprechen einem zu $Q_C$ isomorphen Polarraum, der im Quotientenraum $\mathrm{PG}(n,q)/(U \cap U^\perp)$ liegt. Außerdem bilden die total singulären Punkte in $U$ einen Kegel mit Spitze $U^\perp \cap U$ über $Q_C$. Ist die Spitze eines solchen Kegels nicht die leere Menge, so wird der Kegel als *ausgeartete Quadrik* oder *ausgearteter orthogonaler Polarraum* bezeichnet. Ein Kegel mit Punktspitze über einem $Q(2,q)$ heißt auch *Ovalkegel*.

**Resultat 1.3.6** *In $Q(2n,q), Q^+(2n+1,q)$ bzw. $Q^-(2n+1,q)$ liegen*

$$\prod_{i=0}^{m} \frac{q^{2(n-m+i)}-1}{q^{i+1}-1}, \qquad \prod_{i=0}^{m} \frac{(q^{n-m+i}+1)(q^{n-m+1+i}-1)}{q^{i+1}-1}$$

*bzw.*

$$\prod_{i=0}^{m} \frac{(q^{n-m+i}-1)(q^{n-m+1+i}+1)}{q^{i+1}-1}$$

*total singuläre Unterräume der Dimension $m$.*

Ist $q$ gerade, so besitzt die Quadrik $Q(2n,q)$ einen Nucleus $N$. Jede Gerade durch $N$ in $\mathrm{PG}(2n,q)$ ist eine Tangente. Sei $\mathcal{P}$ die Menge der Geraden durch $N$, und $\mathcal{G}$ die Menge der Ebenen durch $N$, die $Q(2n,q)$ in einer total singulären Geraden treffen. Dann ist $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \subseteq)$ eine zu $W(2n-1,q)$ isomorphe Inzidenzstruktur, die in $\mathrm{PG}(2n,q)/N$ liegt. Insbesondere sind $Q(2n,q)$ und $W(2n-1,q)$ für gerade $q$ isomorph.

### Symplektische Polarräume

Sei $W(2n+1,q)$ der durch eine symplektische Polarität definierte symplektische Polarraum von $\mathrm{PG}(2n+1,q)$. Dann sind die Punktmengen von $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ und $W(2n+1,q)$ identisch, nicht aber ihre Geradenmengen. Somit wird $W(2n+1,q)$ nicht allein durch seine Punkte bestimmt. Schränkt man $\pi$ auf eine nicht total isotrope Gerade $g$ von $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ ein, so ist jeder Punkt von $g$ total isotrop, aber $g$ selbst nicht. Eine solche Struktur wird auch mit $W(1,q)$ bezeichnet. Genau wie bei den orthogonalen Polarräumen gilt für jeden Unterraum $U$ von $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ und jedes Komplement $C$ von $U \cap U^\perp$ in $U$, dass die total isotropen Punkte und Geraden in $C$ einen $W(\dim(C),q)$ induzieren. Insbesondere ist $\dim(C)$ immer ungerade. Die total isotropen Unterräume durch $U \cap U^\perp$ entsprechen einem zu $W(\dim(C),q)$ isomorphen Polarraum, der im Quotientenraum $\mathrm{PG}(2n+1,q)/(U \cap U^\perp)$ liegt. Ist $U \cap U^\perp$ nicht leer, so heißt $U \cap W(2n+1,q)$ ein *ausgearteter symplektischer Polarraum*.

**Resultat 1.3.7** *In $W(2n+1,q)$ liegen*

$$\prod_{i=0}^{m} \frac{q^{2(n+1-m+i)}-1}{q^{i+1}-1}$$

*total isotrope Unterräume der Dimension $m$.*

### Hermitesche Polarräume

Sei $H(n, q^2)$ der durch eine hermitesche Polarität definierte hermitesche Polarraum von $\mathrm{PG}(n, q^2)$. Bei jeder hermiteschen Polarität von $\mathrm{PG}(2, q^2)$ gibt es keine total isotropen Geraden, weshalb diese Polarität keinen Polarraum definiert. Trotzdem wird die Menge der total isotropen Punkte mit $H(2, q^2)$ bezeichnet. Jeder Unterraum von $\mathrm{PG}(n, q^2)$ ist genau dann total isotrop, wenn all seine Punkte total isotrop sind. $H(n, q^2)$ kann also auch mit seiner Punktmenge identifiziert werden. Eine nicht total isotrope Gerade in $\mathrm{PG}(n, q^2)$ trifft $H(n, q^2)$ in genau einem oder in genau $q+1$ Punkten und heißt entsprechend *Tangente* oder *Sekante*. Die Menge der $q+1$ total isotropen Punkten auf einer Sekante $s$ wird auch mit $H(1, q^2)$ bezeichnet. Diese Punkte bilden eine Baer-Teilgerade von $s$. Für einen Unterraum $U$ von $\mathrm{PG}(n, q^2)$ und ein Komplement $C$ von $U \cap U^\perp$ in $U$ induzieren die total isotropen Unterräume in $C$ einen $H(\dim(C), q^2)$. Die total isotropen Unterräume durch $U \cap U^\perp$ entsprechen einem zu $H(\dim(C), q^2)$ isomorphen Polarraum, der im Quotientenraum $\mathrm{PG}(n, q^2)/(U \cap U^\perp)$ liegt. Ist $U \cap U^\perp$ nicht leer, so heißt $U \cap H(n, q^2)$ ein *ausgearteter hermitescher Polarraum.*

**Resultat 1.3.8** *In $H(2n, q^2)$ bzw. $H(2n+1, q^2)$ liegen*

$$\prod_{i=0}^{m} \frac{(q^{2(n-m+i)} - 1)(q^{2(n-m+i)+1} + 1)}{q^{2(i+1)} - 1}$$

*bzw.*

$$\prod_{i=0}^{m} \frac{(q^{2(n-m+i)+1} + 1)(q^{2(n-m+i+1)} - 1)}{q^{2(i+1)} - 1}$$

*total isotrope Unterräume der Dimension $m$.*

## Die Klein-Korrespondenz

In der hyperbolischen Quadrik $Q^+(2n+1, q) \subseteq \mathrm{PG}(2n+1, q)$ haben die Erzeuger die Dimension $n$. Ein total singulärer Unterraum $U$ der Dimension $n-1$ liegt in genau zwei Erzeugern $G_1, G_2$, denn der $(n+1)$-dimensionale Unterraum $U^\perp$ ist ein Kegel mit Spitze $U$ über einer Sekante. Man kann zeigen, dass ein von $G_1$ und $G_2$ verschiedener Erzeuger $G_3$ die beiden Erzeuger $G_1$ und $G_2$ in Unterräumen trifft, deren Dimensionen unterschiedliche Parität haben. Dies führt zu einer Äquivalenzrelation auf der Menge der Erzeuger von $Q^+(2n+1, q)$ mit zwei Äquivalenzklassen I und II, so dass zwei Erzeuger genau dann in der gleichen Klasse liegen, wenn ihr Schnitt eine gerade Codimension in ihnen hat. Die Erzeuger $G_1$ und $G_2$ durch $U$ liegen also in unterschiedlichen Klassen.

Für $n = 2$ lässt sich mit Hilfe dieser Äquivalenzklassen der projektive Raum $\mathrm{PG}(3, q)$ darstellen.

**Resultat 1.3.9** *Sei $\mathcal{P}$ die Punktmenge von $Q^+(5, q)$ und* I *eine der beiden Erzeugerklassen. Dann ist* $(\mathrm{I}, \mathcal{P}, \ni)$ *eine zu* $\mathrm{PG}(3, q)$ *isomorphe Inzidenzstruktur.*

Es gibt also einen Isomorphismus, der die Ebenen der einen Erzeugerklasse I von $Q^+(5,q) \subseteq \mathrm{PG}(5,q)$ auf die Punkte des projektiven Raums $\mathrm{PG}(3,q)$ und die Punkte der Quadrik $Q^+(5,q)$ auf die Geraden von $\mathrm{PG}(3,q)$ abbildet. Diese Abbildung heißt *Klein-Korrespondenz*. Die Punkte einer Ebene der anderen Erzeugerklasse II werden von der Klein-Korrespondenz auf die Geraden einer Ebene von $\mathrm{PG}(3,q)$ abgebildet. Die Bilder der $q+1$ Punkte auf einer Geraden von $Q^+(5,q)$ sind $q+1$ Geraden von $\mathrm{PG}(3,q)$, die gemeinsam in einer Ebene $E$ von $\mathrm{PG}(3,q)$ liegen und alle durch einen Punkt $P \in E$ gehen. Wir bezeichnen diese Menge als *Geradenbüschel*, in Zeichen $\mathrm{Pen}(P,E)$.

Eine Nicht-Tangentialhyperebene von $\mathrm{PG}(5,q) \supseteq Q^+(5,q)$ trifft die Quadrik $Q^+(5,q)$ in einer parabolischen Quadrik $Q(4,q)$. Die $\theta_3$ Punkte von $Q(4,q)$ werden von der Klein-Korrespondenz auf $\theta_3$ Geraden von $\mathrm{PG}(3,q)$ abgebildet. Die Bilder der $\theta_3$ Geraden von $Q(4,q)$ sind $\theta_3$ Geradenbüschel $\mathrm{Pen}(P,E)$, die jeweils durch einen Punkt $P$ und eine Ebene $E$ durch $P$ eindeutig bestimmt sind. Dabei treten alle Punkte $P$ des projektiven Raums $\mathrm{PG}(3,q)$ auf und die Ebenen $E$ sind paarweise verschieden. Wandelt man die Klein-Korrespondez ab und bildet eine Gerade von $Q(4,q)$ auf den Punkt $P$ des Geradenbüschels $\mathrm{Pen}(P,E)$ ab und definiert $E$ als Tangetialebene von $P$, so erhält man eine zu $W(3,q)$ isomorphe Struktur.

**Resultat 1.3.10** *Die Polarräume $Q(4,q)$ und $W(3,q)$ sind dual zueinander.*

Ebenfalls mit Hilfe der Klein-Korrespondenz kann man folgende Dualität beweisen.

**Resultat 1.3.11** *Die Polarräume $Q^-(5,q)$ und $H(3,q^2)$ sind dual zueinander.*

Hierbei betrachtet man die quadratische Form zur elliptischen Quadrik $Q^-(5,q)$ über dem Erweiterungskörper $\mathrm{GF}(q^2)$ und erhält dadurch eine hyperbolische Quadrik $Q^+(5,q^2)$. Die Klein-Korrespondenz bildet diese auf $\mathrm{PG}(3,q^2)$ ab. Betrachtet man eine total singuläre Gerade $g$, so hat $g$ in $Q^-(5,q)$ genau $q+1$ und in $Q^+(5,q^2)$ genau $q^2+1$ Punkte. Die Gerade $g$ wird von der Klein-Korrespondenz auf ein Geradenbüschel $\mathrm{Pen}(P,E)$ von $\mathrm{PG}(3,q^2)$ abgebildet. Dabei sind $q+1$ der $q^2+1$ Geraden durch $P$ in $E$ die Bilder der $q+1$ Punkte von $g$ in $Q^-(5,q)$. Setzt man analog zu oben $P$ als Bild von $g$ und $E$ als Tangentialebene von $P$, so erhält man einen hermiteschen Polarraum $H(3,q^2)$.

## Verallgemeinerte Vierecke

Wie bereits erwähnt sind die Polarräume vom Rang zwei noch nicht vollständig klassifiziert. Eine sehr ähnliche Struktur sind die verallgemeinerten Vierecke. Auch hierfür gibt es noch keine vollständige Klassifizierung.

**Definition 1.3.12** Ein *verallgemeinertes Viereck* der Ordnung $(s,t)$ ist eine Inzidenzstruktur $(\mathcal{P},\mathcal{G},\mathcal{I})$, die die folgenden Axiome erfüllt:

(V1) Jeder Punkt liegt auf genau $t+1 \geq 2$ Geraden.

(V2) Jede Gerade hat genau $s+1 \geq 2$ Punkte.

(V3) Zwei verschiedene Punkte inzidieren höchstens mit einer gemeinsamen Geraden.

(V4) Sei $P$ ein Punkt und $g$ eine Gerade, die nicht durch $P$ geht. Dann existiert genau eine Gerade $g'$ durch $P$, die $g$ trifft.

Für $s = t$ hat das verallgemeinerte Viereck die Ordnung $s$ anstatt $(s, s)$.

Ist $\mathcal{Q}$ ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung $(s, t)$, dann ist die dazu duale Inzidenzstruktur ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung $(t, s)$.

Ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung $(s, t)$ mit $s \geq 2$ ist ein Polarraum vom Rang 2. Sei $\mathbb{P}$ ein endlicher Polarraum vom Rang 2. Man kann aus Axiom (P1) folgern, dass durch jeden Punkt in $\mathbb{P}$ gleich viele Geraden gehen. Gilt zudem, dass jeder Punkt von $\mathbb{P}$ auf mindestens drei Geraden liegt, so folgt dual, dass jede Gerade gleich viele Punkte hat und dann ist $\mathbb{P}$ ein verallgemeinertes Viereck.

Die Polarräume $Q^+(3,q), Q(4,q), Q^-(5,q), W(3,q), H(3,q^2)$ und $H(4,q^2)$ sind verallgemeinerte Vierecke der Ordnung $(q,1), (q,q), (q,q^2), (q,q), (q^2,q)$ und $(q^2,q^3)$. Diese verallgemeinerten Vierecke heißen *klassisch*.

Die verallgemeinerten Vierecke $Q^-(5,q)$ und $H(3,q^2)$, sowie $Q(4,q)$ und $W(3,q)$ sind dual zueinander. Ist $q$ gerade, so ist $Q(4,q)$ auch isomorph zu $W(3,q)$. In diesem Fall sind $Q(4,q)$ und $W(3,q)$ somit auch selbstdual.

## Ovoide und Faserungen von Polarräumen

Ovoide und Faserungen des projektiven Raums $\mathrm{PG}(n,q)$ haben wir bereits definiert. Nun werden ähnliche Objekte für die endlichen klassischen Polarräume eingeführt. Sei $\mathbb{P}$ ein endlicher klassischer Polarraum.

**Definition 1.3.13** Eine Punktmenge $\mathcal{O}$ von $\mathbb{P}$ heißt *Ovoid*, falls jeder Erzeuger von $\mathbb{P}$ die Menge $\mathcal{O}$ in genau einem Punkt trifft. Eine Menge $\mathcal{F}$ von Erzeugern aus $\mathbb{P}$ heißt *Faserung*, wenn jeder Punkt von $\mathbb{P}$ in genau einem Element aus $\mathcal{F}$ liegt.

Es folgt sofort, dass die Punkte eines Ovoids paarweise nicht aufeinander senkrecht stehen und, dass die Erzeuger in einer Faserung paarweise disjunkt sind. Mengen mit den eben genannten Eigenschaften heißen *Teilovoid* bzw. *Teilfaserung* von $\mathbb{P}$. Ein Teilovoid bzw. eine Teilfaserung heißt *maximal*, wenn sie nicht in einem anderen Teilovoid bzw. einer anderen Teilfaserung enthalten ist.

Die Mächtigkeit eines Ovoids oder einer Faserung von $\mathbb{P}$ lässt sich berechnen.

**Resultat 1.3.14** *Sei $\mathcal{O}$ ein Ovoid und $\mathcal{F}$ eine Faserung des endlichen klassischen Polarraums $\mathbb{P}$.*

*(i) Für $\mathbb{P} = Q(2n,q)$ ist $|\mathcal{O}| = |\mathcal{F}| = q^n + 1$.*

*(ii) Für $\mathbb{P} = Q^+(2n+1,q)$ ist $|\mathcal{O}| = |\mathcal{F}| = q^n + 1$.*

*(iii) Für $\mathbb{P} = Q^-(2n+1,q)$ ist $|\mathcal{O}| = |\mathcal{F}| = q^{n+1} + 1$.*

(iv) *Für* $\mathbb{P} = W(2n+1, q)$ *ist* $|\mathcal{O}| = |\mathcal{F}| = q^{n+1} + 1$.

(v) *Für* $\mathbb{P} = H(2n, q^2)$ *ist* $|\mathcal{O}| = |\mathcal{F}| = q^{2n+1} + 1$.

(vi) *Für* $\mathbb{P} = H(2n+1, q^2)$ *ist* $|\mathcal{O}| = |\mathcal{F}| = q^{2n+1} + 1$.

Nicht in allen endlichen klassischen Polarräumen existieren Ovoide oder Faserungen. In manchen dieser Polarräume ist es sogar nicht bekannt, ob sie existieren oder nicht. Eine Übersicht gibt es zum Beispiel in [BKMS08b].

## 1.4 Graphen

Die Untersuchungen in Kapitel 2 sind graphentheoretisch motiviert. Daher werden hier die benötigten Definitionen zusammengefasst. Diese stammen aus dem Buch [Jun90], sind aber in anderen Büchern über Graphentheorie genauso oder sehr ähnlich zu finden.

**Definition 1.4.1** Ein *Graph* ist ein Paar $G = (V, E)$ aus einer Menge $V \neq \emptyset$ und einer Menge $E$ von zweielementigen Teilmengen von $V$. Die Elemente von $V$ heißen *Ecken* (manchmal auch *Punkte* oder *Knoten*), die von $E$ *Kanten*.

Für eine Kante $e = \{a, b\} \in E$ heißen $a$ und $b$ die *Endecken* von $e$. Man sagt, dass $a$ und $b$ mit $e$ *inzidieren* und dass $a$ und $b$ *adjazent* sind. Die Kante $e = \{a, b\}$ wird zu $e = ab$ verkürzt.

Für jede Ecke $v \in V$ definiert man den *Grad* von $v$ als die Anzahl der mit $v$ inzidenten Kanten. Wenn alle Ecken des Graphen $G$ den gleichen Grad $k$ haben, dann heißt $G$ ein *$k$-regulärer Graph*.

Der Graph mit $n$ Ecken, bei dem je zwei Ecken adjazent sind, heißt *vollständiger Graph* und wird mit $K_n$ bezeichnet. Der Graph mit Eckenmenge $V = V_1 \dot\cup V_2$, wobei $|V_1| = |V_2| = n$ und Kantenmenge

$$E = \{v_1 v_2 \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\},$$

heißt *vollständiger bipartiter Graph* und wird mit $K_{n,n}$ bezeichnet. $K_n$ ist ein $(n-1)$-regulärer und $K_{n,n}$ ein $n$-regulärer Graph.

Ein *Kantenzug* ist eine Folge $(e_1, \ldots, e_n)$ von Kanten von $G$ mit $e_i = v_{i-1}v_i$ und $v_0, \ldots, v_n \in V$. $v_0$ heißt *Anfangsecke* und $v_n$ *Endecke* des Kantenzugs. Gilt $v_0 = v_n$, $n \geq 3$ und sind $v_0, \ldots, v_{n-1}$ paarweise verschieden, so heißt der Kantenzug *Kreis* (in [Jun90] einfacher Kreis). Die Zahl $n$ heißt *Länge* des Kantenzugs bzw. des Kreises. Die minimale Länge eines Kantenzugs zwischen zwei Ecken $a$ und $b$ heißt *Abstand* von $a$ und $b$. Der *Durchmesser* eines Graphen ist der maximale Abstand zwischen zwei Ecken. Die *Taillenweite* eines Graphen, der Kreise enthält, ist die kürzeste Länge eines Kreises.

In Kapitel 2 werden $(k+1)$-reguläre Graphen mit Taillenweite 8 gesucht. Beispiele für solche Graphen lassen sich aus verallgemeinerten Vierecken der Ordnung $k$ wie folgt erstellen.

**Beispiel 1.4.2** Sei $(\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung $k$, $V = \mathcal{P} \cup \mathcal{G}$ und $E = \{\{x, y\} \mid x, y \in V, (x, y) \in \mathcal{I}\}$. Dann ist $G = (V, E)$ ein $(k+1)$-regulärer Graph der Taillenweite 8.

Graphen, die auf diese Weise aus einer Inzidenzstruktur konstruiert werden, heißen *Inzidenzgraphen*. Die Definition eines verallgemeinerten Vierecks lässt sich wie folgt erweitern.

**Definition 1.4.3** Ein *verallgemeinertes d-Eck* der Ordnung $(s, t)$ ist eine Inzidenzstruktur $D = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Jeder Punkt inzidiert mit genau $t + 1 \geq 2$ Geraden.

(ii) Jede Gerade inzidiert mit genau $s + 1 \geq 2$ Punkten.

(iii) Der Inzidenzgraph von $D$ hat Durchmesser $d$ und Taillenweite $2d$.

Ist $s = t$, so vereinfacht man Ordnung $(s, s)$ auch zu Ordnung $s$.

## 1.5 Lineare Codes

Die Untersuchungen in Kapitel 4 werden durch die Untersuchungen von Griesmer-Codes motiviert. Wir fassen hier alle benötigten Definitionen zusammen. Die Definitionen und Aussagen lassen sich in den Büchern [HP03] und [vL99] nachlesen.

Der *Hamming-Abstand* $\mathrm{d}(v_1, v_2)$ zweier Vektoren $v_1, v_2 \in \mathrm{GF}(q)^n$ ist die Anzahl der Koordinaten, in denen sich $v_1$ und $v_2$ unterscheiden. Die Zahl $\mathrm{wt}(v) := \mathrm{d}(v, 0)$ heißt *Hamming-Gewicht* des Vektors $v \in \mathrm{GF}(q)^n$.

**Definition 1.5.1** Ein *linearer* $[n, k, d, q]$*-Code* $C$ ist ein linearer Unterraum von $\mathrm{GF}(q)^n$ vom Rang $k$, so dass der kleinste Hamming-Abstand zweier verschiedener Elemente aus $C$ gleich $d$ ist. Die Zahl $n$ ist die *Länge* des Codes $C$ und $d$ heißt *Minimalabstand* von $C$. Die Elemente in $C$ werden *Codeworte* genannt.

Für jede Basis $\{v_1, \ldots, v_k\}$ des linearen $[n, k, d, q]$-Codes $C$ heißt die Matrix $G \in \mathrm{GF}(q)^{k,n}$ mit den Zeilen $v_1^\top, \ldots, v_k^\top$ eine *Generatormatrix* oder *Erzeugermatrix* von $C$. Es ist

$$C = \{v^\top G \mid v \in \mathrm{GF}(q)^k\}$$

und der Rang der Matrix $G$ ist gleich $k$. Ist $s$ eine Spalte von $G$ mit $s \neq 0$, so ist $\langle s \rangle$ ein Punkt von $\mathrm{PG}(k-1, q)$. Hierbei können verschiedene Spalten $\neq 0$ von $G$ den gleichen Punkt von $\mathrm{PG}(k-1, q)$ erzeugen.

Ein *Griesmer-Code* ist ein linearer $[n, k, d, q]$-Code, dessen Parameter die *Griesmer-Schranke*

$$n \geq \sum_{i=0}^{k-1} \left\lceil \frac{d}{q^i} \right\rceil$$

(siehe [Gri60, SS65]) mit Gleichheit erfüllen. Schreibt man den Minimalabstand $d$ eines Griesmer-Codes $C$ in der Form

$$d = \lambda q^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} \epsilon_i q^i$$

mit $\lambda \in \mathbb{N}$ und $\epsilon_i \in \{0, \ldots, q-1\}$, so kann man zeigen, dass keine $\lambda+1$ Spalten einer Generatormatrix $G$ paarweise linear abhängig sind. Außerdem existiert auch keine Nullspalte in $G$. Das heißt, dass jede Spalte von $G$ einen Punkt aus $\mathrm{PG}(k-1, q)$ erzeugt und dass höchstens $\lambda$ Spalten denselben Punkt in $\mathrm{PG}(k-1, q)$ erzeugen. Für $v \in \mathrm{GF}(q)^k$ sei $a(v)$ die Anzahl der Spalten $s$ in $G$ mit $\langle v \rangle = \langle s \rangle$. Die im Kapitel 4 beschriebenen und untersuchten Minihyper entsprechen der Funktion $w : \mathrm{PG}(k-1, q) \to \{0, \ldots, \lambda\}$ mit $w(\langle v \rangle) := \lambda - a(v)$ für alle $\langle v \rangle \in \mathrm{PG}(k-1, q)$.

## 1.6 Kombinatorische Methoden

Die Beweise in dieser Arbeit werden ausschließlich geometrisch und kombinatorisch geführt. Dabei sind die kombinatorischen Methoden sehr elementar und sind so in der Mathematik verankert, dass sie oft nicht explizit genannt werden, wenn sie verwendet werden. Die folgenden Definitionen und Aussagen lassen sich in den Büchern [Aig06] und [Ste07] finden.

**Resultat 1.6.1** *Verteilt man $n$ Elemente auf $m$ Fächer, so gibt es mindestens ein Fach, das mindestens $\lceil n/m \rceil$ Elemente enthält.*

Diese Tatsache ist unter dem Namen *Verallgemeinertes Schubfachprinzip* bekannt und wird häufig in dieser Arbeit verwendet, aber nie mit Namen genannt.

**Resultat 1.6.2** *Seien $M_1$ und $M_2$ Mengen, dann ist*

$$|M_1 \cup M_2| = |M_1| + |M_2| - |M_1 \cap M_2|.$$

Dies ist die einfachste Version der *Siebformel*. Auch diese Aussage wird ohne Verweis in dieser Arbeit verwendet.

Nachdem die ersten beiden Resultate aus der Schule bekannt sind, folgt nun ein Zählprinzip, das ebenfalls sofort einleuchtet, aber trotzdem sehr hilfreich für diese Arbeit ist.

**Resultat 1.6.3** *Seien $X, Y$ Mengen und sei $R \subseteq X \times Y$ eine Relation. Sei weiter für $x \in X$ die Zahl $r(x) := |\{y \in Y \mid (x, y) \in R\}|$ die Anzahl der zu $x$ in Relation stehenden Elemente aus $Y$ und analog für $y \in Y$ sei $r(y) := |\{x \in X \mid (x, y) \in R\}|$. Dann ist*

$$\sum_{x \in X} r(x) = \sum_{y \in Y} r(y) = |R|$$

*die Anzahl der in Relation stehenden Paare $(x, y) \in X \times Y$.*

Dieses Zählprinzip heißt *Prinzip der doppelten Abzählung*, weil die Mächtigkeit $|R|$ derselben Menge auf zwei verschiedene Arten abgezählt wird. Hierbei ist $R$ eine Menge von Paaren $(x, y)$. Dieses Prinzip lässt sich auch auf das Zählen von Tripeln $(x, y, z)$ oder allgemein das Zählen von $n$-Tupeln erweitern.

# 2 Aus verallgemeinerten Vierecken konstruierte reguläre Graphen

Die Untersuchungen in diesem Kapitel sind durch die Suche nach $k$-regulären Graphen mit Taillenweite $g$ und minimaler Eckenanzahl motiviert . Hierbei sei $k \geq 2$ und $g \geq 3$. Ein $k$-regulärer Graph mit Taillenweite $g$ und minimaler Eckenanzahl heißt $(k, g)$-*cage*. Die ersten Ergebnisse über $(k, g)$-cages kamen von Tutte [Tut47], Kàrteszi [Kàr60], Erdös und Sachs [ES63] sowie Hoffman und Singleton [HS60]. Einen guten Überblick über das Thema liefert der Artikel [Won82].

**Resultat 2.0.1** *Sei $c(k, g)$ die kleinste Anzahl an Ecken in einem $k$-regulären Graphen mit Taillenweite $g$. Dann gilt*

$$c(k+1, g) \geq v(k+1, g) := \begin{cases} 2\frac{k^r-1}{k-1} & \text{falls } g = 2r \text{ gerade} \\ 1 + (k+1)\frac{k^r-1}{k-1} & \text{falls } g = 2r+1 \text{ ungerade} \end{cases}$$

*für $k + 1 \geq 3$ und $g \geq 3$.*

Diese Schranke ist als *Moore-Schranke* bekannt. Moore untersuchte keine cages, sondern reguläre Graphen mit Durchmesser $r$ und möglichst vielen Ecken. Für $g = 2r + 1$ ist allerdings die obere Schranke für solche Graphen gleich der oben angegeben unteren Schranke für $c(k, g)$. Beweisen lässt sich Resultat 2.0.1, indem man die Ecken im Abstand $1, 2, \ldots, r$ von einer gegebenen Kante bzw. Ecke zählt, siehe z.B. [Tut66] Seite 70. Ein $(2, g)$-cage ist ein Kreis der Länge $g$, es gilt daher $c(2, g) = g$.

Erdös und Sachs haben die Existenz von $(k, g)$-cages für alle Parameter $k \geq 2$ und $g \geq 3$ gezeigt (siehe [ES63]). Für die meisten Parameter ist allerdings $c(k, g) > v(k, g)$. Für $g \in \{3, 4\}$ gilt $c(k, g) = v(k, g)$ für alle $k \geq 3$, denn ein $(k, 3)$-cage ist der vollständige Graph $K_{k+1}$ und ein $(k, 4)$-cage ist der vollständig bipartite Graph $K_{k,k}$. Der Fall $g = 5$ wurde von Hoffman und Singleton in [HS60] untersucht. Sie zeigten, dass $c(k, 5) = v(k, 5)$ nur für $k \in \{3, 7, 57\}$ möglich ist und sie gaben einen 7-regulären Graphen mit Taillenweite 5 und $v(7, 5)$ Ecken an.

**Resultat 2.0.2** *Ist $k + 1 \geq 3$, $g \geq 5$ und $c(k + 1, g) = v(k + 1, g)$, dann gilt*

*(i)* $g = 5$ *und* $k + 1 \in \{3, 7, 57\}$ *oder*

*(ii)* $2d = g \in \{6, 8, 12\}$ *und es existiert ein verallgemeinertes $d$-Eck der Ordnung $k$.*

Dieses Resultat geht auf mehrere Mathematiker zurück. Ein algebraischer Beweis steht in [Big93]. Es gilt $c(3,5) = v(3,5)$ und $c(7,5) = v(7,5)$. Die dazugehörenden Graphen sind der Petersen-Graph und der Hoffman-Singleton-Graph. Ob $c(57,5) = v(57,5)$ gilt, ist offen.

Im Fall (ii) gilt auch die Umkehrung, denn existiert ein verallgemeinertes $d$-Eck der Ordnung $k$, so ist der Inzidenzgraph des verallgemeinerten $d$-Ecks ein $(k+1)$-regulärer Graph mit Taillenweite $2d$ und genau $v(k+1, 2d)$ Ecken. Ein verallgemeinertes $d$-Eck der Ordnung $k$, mit $d \geq 3$ und $k \geq 2$, kann nur existieren, falls $d \in \{3, 4, 6\}$ ist (siehe [FH64]). Ist $k$ eine Primzahlpotenz und $d \in \{3, 4, 6\}$, so ist die Existenz bekannt. Ist $k$ hingegen keine Primzahlpotenz, so ist die Existenz für ein verallgemeinertes $d$-Eck der Ordnung $k$ offen. In diesem Fall kann folgendes versucht werden.

Man startet mit dem Inzidenzgraphen eines existierenden verallgemeinerten $d$-Ecks der Ordnung $q = k + t$, so dass $t$ möglichst klein ist, und löscht Ecken und Kanten des Graphen, um ihn $(k+1)$-regulär zu machen. Diese Idee stammt von Brown. In [Bro67] untersucht er den Fall $d = 3$ mit dieser Methode. Die gelöschten Ecken bilden im Ausgangsgraphen eine Menge $B$, so dass jede Ecke, die nicht in $B$ liegt, mit genau $t$ Ecken aus $B$ adjazent ist. Der entstehende Graph hat Taillenweite größer oder gleich $2d$. Ist $t$ klein, so folgt aus der Moore-Schranke, dass Taillenweite $2d$ erhalten bleibt. Dann gilt

$$v(k+1, 2d) \leq c(k+1, 2d) \leq v(q+1, 2d) - |B|\,. \tag{2a}$$

Je größer $B$ ist, desto näher sind sich die obere und die untere Schranke für $c(k+1, 2d)$. Insbesondere liefert (2a) auch eine obere Schranke für $|B|$.

Im folgenden wird der Fall $t = 1$ und $d = 4$ näher untersucht. Wir starten also mit dem Inzidenzgraphen eines verallgemeinerten Vierecks der Ordnung $q = k+1$ und suchen darin eine Menge $B$ von Punkten und Geraden, so dass jeder Punkt und jede Gerade außerhalb von $B$ mit genau einem Element aus $B$ inzidiert. Die vorgestellten Ergebnisse sind bereits in [BM11] veröffentlicht. (2a) liefert für diese Parameter

$$|B| \leq 2(3q^2 - q + 1). \tag{2b}$$

Wir zeigen $|B| < 2(2q^2+2q)$ und für das klassische verallgemeinerte Viereck $Q(4,q)$ sogar $|B| \leq 2(2q^2+q+1)$. Das größte uns bekannte Beispiel für eine solche Menge $B$ hat Mächtigkeit $2(q^2 + 3q + 1)$ für ungerade $q > 3$ und $2(q^2 + 4q + 3)$ für gerade $q > 2$. Für $q = 3$ wird außerdem $|B| \neq 2 \cdot 23$ gezeigt und ein Beispiel mit $|B| = 2 \cdot 22$ angegeben. Für $q = 2$ hat das größte Beispiel für eine solche Menge die Mächtigkeit $2 \cdot 11$. Auch untere Schranken für die Mächtigkeit von $B$ werden betrachtet.

## 2.1 Definitionen und Beispiele

Sei $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung $q$, $1 < q \in \mathbb{N}$. Dann hat $\mathcal{Q}$ genau $q^3 + q^2 + q + 1$ Punkte und genauso viele Geraden. Für die bessere

Anschaulichkeit arbeiten wir nicht mit dem Inzidenzgraphen von $\mathcal{Q}$, sondern direkt mit den Punkten und Geraden von $\mathcal{Q}$. Die eben beschriebene Menge $B$ lässt sich somit aufteilen in eine Punktmenge $\mathcal{P}_b$ und eine Geradenmenge $\mathcal{G}_b$. Seien also $\mathcal{P}_b$ und $\mathcal{G}_b$ echte Teilmengen von $\mathcal{P}$ und $\mathcal{G}$, so dass jeder Punkt, der nicht in $\mathcal{P}_b$, liegt mit genau einer Gerade aus $\mathcal{G}_b$ inzidiert und jede Gerade, die nicht in $\mathcal{G}_b$ liegt, genau einen Punkt in $\mathcal{P}_b$ hat. Die Elemente in $\mathcal{P}_b$ und $\mathcal{G}_b$ nennen wir *schlechte Punkte* bzw. *schlechte Geraden*. Die übrigen Punkte und Geraden werden *gute Punkte* bzw. *gute Geraden* genannt. Zwei verschiedene Punkte heißen *benachbart*, wenn sie auf einer gemeinsamen Geraden liegen.

Vor der Beschreibung einiger Beispiele kommt noch die Bemerkung, dass es immer gleich viele schlechte Punkte wie schlechte Geraden gibt. Insbesondere ist $|B|$ eine gerade Zahl.

**Lemma 2.1.1** *Es gilt* $|\mathcal{P}_b| = |\mathcal{G}_b|$.

*Beweis:* Jeder gute Punkt liegt auf genau $q$ guten Geraden und auf jeder guten Geraden liegen genau $q$ gute Punkte. Zählt man die inzidenten Paare $(P, k)$ mit guten Punkten $P$ und guten Geraden $k$ doppelt ab, so folgt, dass die Anzahl der guten Punkte gleich der Anzahl der guten Geraden ist. Zusammen mit $|\mathcal{P}| = |\mathcal{G}|$ folgt $|\mathcal{P}_b| = |\mathcal{G}_b|$. $\square$

Im folgenden werden Beispiele für solche Mengen $\mathcal{P}_b$ und $\mathcal{G}_b$ im klassischen verallgemeinerten Viereck $Q(4, q)$ angegeben. Nicht alle Beispiele sind neu, siehe [GH08]. Manche Beispiele lassen sich auch auf andere verallgemeinerte Vierecke der Ordnung $q$ übertragen. Viele Beispiele lassen sich konstruieren, indem man mit einer Menge von Punkten, die alle Geraden blockieren, und einer Menge von Geraden, die alle Punkte überdecken, beginnt und anschließend ein paar Punkte und Geraden hinzufügt. Als Punktmenge eignen sich ein Ovoid, ein Ovalkegel und eine hyperbolische Quadrik $Q^+(3, q)$. Für die Geradenmenge ist die Menge aller Geraden, die zu einer gegebenen Gerade $\ell$ nicht windschief sind, ein Beispiel. Diese Menge wird mit $X_\ell$ bezeichnet. Sie ist die zum Ovalkegel duale Menge. Ist $q$ gerade, so ist $Q(4, q)$ selbstdual und die zu Ovoid und $Q^+(3, q)$ dualen Mengen, nämlich Faserung und zwei senkrechte Kegelschnitte mit Verbindungsgeraden, sind weitere Beispiele für solche Geradenmengen. Wir setzen $b := |\mathcal{P}_b| = |\mathcal{G}_b|$ und $g := |\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_b| = |\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_b|$.

**Beispiele 2.1.2** Sei $\mathcal{Q} = Q(4, q)$, $q$ Primzahlpotenz. Mit der eben beschriebenen Methode erhält man folgende Beispiele.

(i) $b = q^2 + 1$, $q$ gerade, $\mathcal{P}_b$ ist ein Ovoid und $\mathcal{G}_b$ ist eine Faserung.

(ii) $b = q^2 + q + 1$, $\mathcal{P}_b = P^\perp$, $\mathcal{G}_b = X_\ell$ für einen Punkt $P$ und eine Gerade $\ell$ durch $P$.

(iii) $b = q^2 + q + 1$, $\mathcal{P}_b = \mathcal{O} \cup \ell$, $\mathcal{G}_b = X_\ell$ für ein Ovoid $\mathcal{O}$ und eine Gerade $\ell$.

(iv) $b = q^2 + 2q + 1$, $\mathcal{P}_b = P^\perp \cup \ell$, $\mathcal{G}_b = X_\ell \cup Y$, wobei $Y$ die Menge der Geraden durch den Punkt $P$ ist und $\ell$ eine Gerade, die nicht durch $P$ geht.

(v) $b = q^2 + 2q + 1$, $q$ gerade, $\mathcal{P}_b = \mathcal{O} \cup K_1 \cup K_2$ für ein Ovoid $\mathcal{O}$ und zwei aufeinander senkrechte Kegelschnitte $K_1$ und $K_2$. Diese existieren für gerade $q$, denn dann ist der Senkrechtraum einer Ovalebene durch den Nucleus der Quadrik ebenfalls eine Ovalebene durch den Nucleus. $\mathcal{G}_b$ sei die Menge der Geraden, die $K_1$ und $K_2$ treffen. Diese Geraden überdecken alle Punkte aus $Q(4, q)$ und schneiden sich nur in Punkten aus $K_1 \cup K_2$. Damit das Ovoid $\mathcal{O}$ insbesondere diese Geraden blockiert, muss es entweder mit $K_1$ oder mit $K_2$ mindestens zwei Punkte gemeinsam haben. Es sind außerdem höchstens zwei, denn jeder Punkt aus $\mathcal{O} \setminus K_i$ steht auf genau einem Punkt aus $K_i$ senkrecht und mit $\alpha := |\mathcal{O} \cap K_i|$ gibt es damit höchstens $(q + 1 - \alpha)(q + 1)$ Punkte in $\mathcal{O} \setminus K_i$. Aus $(q + 1 - \alpha)(q + 1) + \alpha \geq q^2 + 1$ folgt $\alpha \leq 2$.

(vi) $b \in \{q^2+2q+1, q^2+3q+1\}$, $\mathcal{P}_b = Y \cup \ell$, $\mathcal{G}_b = X_\ell \cup Z$, wobei $Y$ die Punktmenge und $Z$ die Geradenmenge einer hyperbolischen Teilquadrik $Q^+(3, q)$ ist und $\ell$ eine Gerade, die in dieser Quadrik $Q^+(3, q)$ liegt ($b = q^2 + 2q + 1$) oder nicht liegt ($b = q^2 + 3q + 1$).

(vii) $b \in \{q^2 + 4q - 1, q^2 + 4q + 3\}$, $q$ gerade, $\mathcal{P}_b = K_1 \cup K_2 \cup X$, $\mathcal{G}_b = Y \cup Z$, wobei $K_1$ und $K_2$ zwei aufeinander senkrechte Kegelschnitte sind und $Y$ die Menge der Geraden, die $K_1$ und $K_2$ treffen. $Z$ und $X$ sind die dazu dualen Mengen, $X$ die Punktmenge einer hyperbolischen Teilquadrik $Q^+(3, q)$ und $Z$ die Geradenmenge dieser Quadrik $Q^+(3, q)$. Es gilt $|Q^+(3, q) \cap K_1| = |Q^+(3, q) \cap K_2| \in \{0, 2\}$.

Ist $q$ gerade, so ist das duale dieser Beispiele ebenfalls ein Beispiel. Das in 2.1.2(ii) beschriebene Beispiel kann wie folgt variiert werden.

**Beispiel 2.1.3** Sei zunächst $\mathcal{P}_b = P^\perp$ und $\mathcal{G}_b = X_\ell$ für einen Punkt $P$ und eine Gerade $\ell$ durch $P$, wie in 2.1.2(ii). Sei $k \neq \ell$ eine weitere Gerade durch $P$. Man betrachte eine beliebige hyperbolische Quadrik $Q^+(3, q) \subseteq Q(4, q)$, die $\ell$ und $k$ enthält. Sei $\mathcal{R}$ der Regulus in $Q^+(3, q)$, der $\ell$ enthält, und sei $\mathcal{R}'$ der entgegen gesetzte Regulus. Alle Geraden in $\mathcal{R}'$ sind schlecht und alle Geraden in $\mathcal{R} \setminus \{\ell\}$ sind gut. Die $q^2$ guten Punkte aus $Q^+(3, q)$, das sind die Punkte, die weder auf $\ell$ noch auf $k$ liegen, werden somit jeweils von genau einer schlechten und genau einer guten Gerade aus $Q^+(3, q)$ getroffen. Wählt man nun $\mathcal{P}'_b = \mathcal{P}_b$ und $\mathcal{G}'_b = (\mathcal{G}_b \setminus \mathcal{R}') \cup \{k\} \cup \mathcal{R}$, so erhält man ein weiteres Beispiel mit $b = q^2 + q + 1$. Dieses Vorgehen kann mit anderen hyperbolischen Quadriken $Q^+(3, q)$ durch $\ell$ und $k$ wiederholt werden.

Neben diesen allgemeinen Beispielen sind uns noch die folgenden sporadischen Beispiele bekannt.

**Beispiel 2.1.4** Sei $\mathcal{O}$ ein maximales Teilovoid von $Q(4, q)$ mit $|\mathcal{O}| = q^2 - 1$. Dann bilden die $2(q+1)$ Geraden aus $Q(4, q)$, die keinen Punkt in $\mathcal{O}$ haben, die Erzeuger einer hyperbolischen Quadrik $Q^+(3, q)$ (Beweis hierfür siehe z.B. [PT09]). Seien $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ die Reguli in $Q^+(3, q)$ und $h \in \mathcal{R}$. Dann ist $\mathcal{P}_b := \mathcal{O} \cup h$, $\mathcal{G}_b := \mathcal{R} \cup (X_h \setminus \mathcal{R}')$ ein Beispiel mit $b = q^2 + q$.

Es ist bekannt, dass maximale Teilovoide von $Q(4,q)$ mit $q^2-1$ Elementen nur existieren können, falls $q$ eine Primzahl ist (siehe [BKMS08a] und [Tal91]). Beispiele für solche maximalen Teilovoide sind für $q \in \{2,3,5,7,11\}$ bekannt. Für Primzahlen größer als 11 ist die Existenz offen.

**Beispiel 2.1.5** Sei $q = 3$, $h$ eine Gerade einer hyperbolischen Quadrik $Q^+(3,3) \subseteq Q(4,3)$ und seien $P_1, P_2$ zwei Punkte auf $h$. Sei $\mathcal{P}_b$ die Menge, die aus den zwölf zu $P_1$ oder $P_2$ benachbarten Punkten, die nicht in $Q^+(3,3)$ liegen, aus den vier Punkten auf $h$ und den sechs Punkten aus $Q^+(3,3)$, die nicht zu $P_1$ oder $P_2$ benachbart sind, besteht. Dann ist $|\mathcal{P}_b| = 22$ und es gibt 18 Geraden, die genau einen Punkt in $\mathcal{P}_b$ haben. Wählt man für $\mathcal{G}_b$, die Menge der übrigen Geraden, so erhält man ein Beispiel mit $b = 22$.

Es wird später gezeigt, dass dieses sporadische Beispiel für $q = 3$ ein größt mögliches ist.

Alle genannten Beispiele erfüllen $b \geq q^2+1$ (dies gilt sogar allgemein und wird im nächsten Abschnitt bewiesen). Der jeweilige Inzidenzgraph zur Inzidenzstruktur $(\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_b, \mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_b, \mathcal{I}')$, wobei $\mathcal{I}' := \mathcal{I} \cap ((\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}_b) \times (\mathcal{G} \setminus \mathcal{G}_b))$ ist, ist ein $q$-regulärer Graph mit Taillenweite mindestens 8. Wegen $b \geq q^2+1$ hat dieser Graph höchstens $2(q^3+q)$ Ecken und für $q \geq 3$ liefert dann die Moore-Schranke eine Taillenweite kleiner als 10. Da der Graph bipartit ist, ist Taillenweite 9 nicht möglich und es folgt, dass alle Beispiele für $q \geq 3$ einen $q$-regulären Graphen mit Taillenweite 8 liefern.

## 2.2 Untere Schranken für *b*

Sei weiterhin $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung $q$, mit $1 < q \in \mathbb{N}$, sowie $\mathcal{P}_b, \mathcal{G}_b$ und $b$ wie im letzten Abschnitt definiert.

**Lemma 2.2.1** *Sei $b \neq q^2+q$. Dann trifft jede Gerade die Menge der schlechten Punkte $\mathcal{P}_b$ und jeder Punkt liegt auf einer schlechten Geraden.*

*Beweis:* Angenommen es gibt eine Gerade $\ell$ nur mit guten Punkten. Dann ist $\ell$ eine schlechte Gerade und jeder Punkt auf $\ell$ liegt auf genau $q$ guten Geraden, die genau einen schlechten Punkt haben. Es folgt $b = (q+1)q$, ein Widerspruch zu $b \neq q^2+q$. Die zu $\mathcal{Q}$ duale Inzidenzstruktur ist ebenfalls ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung $q$. Daher gilt auch die duale Aussage, dass jeder Punkt auf einer schlechten Geraden liegt. $\square$

Wir kommen nun zu einer unteren Schranke für $b$.

**Theorem 2.2.2** *Sei $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung $q \geq 2$. Sei weiter $\mathcal{P}_b \subsetneq \mathcal{P}$ und $\mathcal{G}_b \subsetneq \mathcal{G}$, so dass jeder Punkt außerhalb von $\mathcal{P}_b$ auf genau einer Geraden von $\mathcal{G}_b$ liegt und jede Gerade außerhalb von $\mathcal{G}_b$ genau einen Punkt in $\mathcal{P}_b$ hat. Mit $b = |\mathcal{P}_b| = |\mathcal{G}_b|$ gilt dann entweder*

*(i) $b = q^2+1$, $\mathcal{P}_b$ ist ein Ovoid und $\mathcal{G}_b$ eine Faserung oder*

*(ii)* $b \geq q^2 + q$.

*Ist $b > q^2 + 1$, trifft jede Gerade die Menge $\mathcal{P}_b$ und liegt jeder Punkt auf einer Geraden aus $\mathcal{G}_b$, so gilt sogar $b \geq q^2 + q + 1$.*

*Beweis:* Angenommen $b \leq q^2 + 1$. Dann ist $b \neq q^2 + q$ und somit liegt jeder Punkt auf einer schlechten Geraden. Die Menge der schlechten Geraden $\mathcal{G}_b$ ist daher eine Überdeckung der Punkte und hat mindestens $(q^3 + q^2 + q + 1)/(q + 1) = q^2 + 1$ Elemente mit Gleichheit, wenn sie eine Faserung ist. Somit ist $b = q^2 + 1$ und $\mathcal{G}_b$ eine Faserung. Dual folgt, dass $\mathcal{P}_b$ ein Ovoid ist.
Angenommen $b = q^2 + 1 + \delta$ mit $0 < \delta < q$ und falls $b = q^2 + q$, so gelte zusätzlich, dass jede Gerade einen schlechten Punkt hat und jeder Punkt auf einer schlechten Geraden liegt (für $b \neq q^2 + q$ ist dies nach Lemma 2.2.1 automatisch erfüllt). Wegen $b(q-1) = q^3 - q^2 + q - 1 + \delta(q-1) \leq q^3 - q < g$ können nicht alle schlechten Geraden $q-1$ oder weniger gute Punkte haben. Es gibt also eine schlechte Gerade $h$, auf der mindestens und somit genau $q$ gute Punkte liegen. Sei $P$ der schlechte Punkt auf $h$. Jeder gute Punkt auf $h$ liegt auf genau $q$ guten Geraden, die jeweils genau einen schlechten Punkt haben. $P$ hat somit genau $b - 1 - q^2 = \delta$ schlechte Nachbarn.
Sei $a + 1$ die Anzahl der schlechten Geraden durch $P$, eine davon ist $h$. Liegt $P$ auf einer weiteren schlechten Geraden $\ell \neq h$, so liegt auf $\ell$ ein guter Punkt $Q$, da $P$ nur $\delta < q$ schlechte Nachbarn hat. Alle $q^2$ Punkte in $Q^\perp \setminus \ell$ liegen mindestens auf einer schlechten Geraden, daher kann $\ell$ höchstens von $\delta$ schlechten Geraden $\neq \ell$ getroffen werden. Da durch $P$ bereits $a$ von $\ell$ verschiedene schlechte Geraden gehen, wird $\ell$ außerhalb von $P$ maximal von $\delta - a$ schlechten Geraden getroffen.
Die guten Punkte auf $h$ liegen außer auf $h$ auf keiner weiteren schlechten Geraden. Jede gute Gerade durch $P$ wird außerhalb von $P$ von genau $q$ schlechten Geraden getroffen. Zusammen ergibt das maximal $a + 1 + a(\delta - a) + (q - a)q$ schlechte Geraden. Wegen $b = q^2 + 1 + \delta$, folgt $a(\delta + 1 - a - q) \geq \delta > 0$. Weil $a \geq 0$ und $\delta < q$, ist dies ein Widerspruch. □

Nicht in jedem verallgemeinerten Viereck $\mathcal{Q}$ existieren Ovoid und Faserung. Zum Beispiel hat das klassische verallgemeinerte Viereck $Q(4, q)$ für ungerade Primzahlpotenzen $q$ keine Faserung. Insbesondere ist somit für $\mathcal{Q} = Q(4, q)$ und $q$ ungerade $b > q^2 + 1$. Im Fall $b = q^2 + q + 1$ lässt sich noch etwas mehr über die Struktur $\mathcal{P}_b$ bzw. $\mathcal{G}_b$ sagen.

**Lemma 2.2.3** *Ist $b = q^2 + q + 1$, so ist $\mathcal{G}_b = X_h$ für eine Gerade $h$ in $\mathcal{Q}$, oder $\mathcal{P}_b = R^\perp$ für einen Punkt $R$ in $\mathcal{Q}$.*

*Beweis:* Wegen $b \neq q^2 + q$ und Lemma 2.2.1 hat jede Gerade mindestens einen schlechten Punkt und jeder Punkt liegt auf mindestens einer schlechten Geraden. Wegen $b(q-1) = q^3 - 1 < g = q^3$ gibt es eine schlechte Gerade $\ell$ mit genau $q$ guten Punkten und einen schlechten Punkt $P$.
Analog zum Beweis in Theorem 2.2.2 folgt, dass $P$ genau $q$ schlechte Nachbarn hat und das $P$ nicht auf einer von $\ell$ verschiedenen schlechten Geraden mit mindestens einem guten Punkt liegt. Also liegen die $q$ schlechten Nachbarn von $P$ alle auf

einer schlechten Geraden $h$ mit $q+1$ schlechten Punkten.
Wird $h$ nur von schlechten Geraden getroffen, so ist $\mathcal{G}_b = X_h$ und die Aussage gezeigt. Sei deswegen $k$ eine gute Gerade, die $h$ im Punkt $Q$ trifft. Jeder der $q$ guten Punkte auf $k$ liegt noch auf $q-1$ guten und einer schlechten Geraden, wobei die guten Geraden genau einen schlechten Punkt haben und die schlechte Gerade mindestens einen schlechten Punkt hat. Die $q$ guten Punkte auf $k$ haben daher zusammen mindestens $q^2$, von $Q$ verschiedene, schlechte Nachbarn. Zusammen mit den $q+1$ schlechten Punkten auf $h$ sind dies alle $q^2+q+1 = b$ schlechten Punkte. Es folgt, dass die Nachbarn von $Q$, die nicht auf $h$ liegen, alle gut sind und dass die schlechten Geraden, die $k$ in einem guten Punkt treffen, genau einen schlechten Punkt haben. Sei $m$ eine solche schlechte Gerade. Dann hat jeder gute Punkt auf $m$ einen schlechten Nachbarn auf $h$. Diese Nachbarn sind $q$ verschiedene Punkte (einer ist $Q$) und die Verbindungsgeraden sind gut, da die guten Punkte auf $m$ bereits auf der schlechten Geraden $m$ liegen. Es werden also $q$ Punkte auf $h$ von einer guten Geraden getroffen.
Genau wie für $Q$ zeigt man, dass die schlechten Nachbarn dieser Punkte nur auf $h$ liegen. Es folgt, dass alle schlechten Punkte, die nicht auf $h$ liegen, zu dem verbleibenden Punkt auf $h$ benachbart sind. Sei dieser Punkt $R$, dann folgt $\mathcal{P}_b = R^\perp$. □

## Untere Schranken in $Q(4, q)$

Sei nun $q$ eine Primzahlpotenz und $\mathcal{Q}$ das klassische verallgemeinerte Viereck $Q(4, q)$ eingebettet im projektiven Raum $\mathrm{PG}(4, q)$.

**Lemma 2.2.4** *Falls es eine schlechte Gerade mit $q+1$ guten Punkten gibt, so ist $b = q^2+q$ und $\mathcal{P}_b$ und $\mathcal{G}_b$ sind wie im Beispiel 2.1.4. Insbesondere ist $q$ eine Primzahl.*

*Beweis:* Sei $\ell$ eine schlechte Gerade mit $q+1$ guten Punkten. Dann wird $\ell$ nur von guten Geraden getroffen, die alle genau einen schlechten Punkt haben, woraus $b = (q+1)q = q^2+q$ folgt.
Wir zeigen nun, dass jeder schlechte Punkt $X$ auf mindestens einer schlechten Geraden liegt. Wir können dafür $X \notin \ell$ annehmen. Sei $k$ die Gerade durch $X$, die $\ell$ trifft. Eine hyperbolische Teilquadrik $Q^+(3, q)$, die $\ell$ und $k$ enthält, enthält genau $q+1$ gute Geraden, die $\ell$ treffen. Daher liegen genau $q+1$ schlechte Punkte in dieser hyperbolischen Quadrik $Q^+(3, q)$. Diese verteilen sich auf die $q+1$ Geraden der Quadrik $Q^+(3, q)$, die $k$ treffen. Da $\ell$ nur gute Punkte hat, hat mindestens eine Gerade aus $Q^+(3, q)$ mindestens zwei schlechte Punkte und ist somit schlecht. In jeder hyperbolischen Teilquadrik $Q^+(3, q)$, die $\ell$ und $k$ enthält, liegt also die schlechte Gerade $\ell$ und mindestens eine schlechte Gerade mit mindestens zwei schlechten Punkten, die $k$ trifft. Gibt es in einer dieser Quadriken $Q^+(3, q)$ sogar eine Gerade mit mindestens drei schlechten Punkten, so liegt darin neben $\ell$ noch eine weitere schlechte Gerade ohne schlechten Punkt, also bereits mindestens drei schlechte Geraden. Da es $q$ verschiedene dieser Quadriken $Q^+(3, q)$ gibt, gibt

es mindestens $q+1$ schlechte Geraden, die $k$ treffen. Jeder der $q$ guten Punkte auf $k$ liegt auf genau einer schlechten Gerade. Daher liegt $X$ auf mindestens einer schlechten Gerade.

Sei $R$ ein Punkt auf $\ell$. Alle schlechten Geraden treffen $R^\perp$ und von diesen ist nur $\ell$ in $R^\perp$ enthalten. Genau $q(q-1)$ schlechte Geraden treffen $R^\perp$ in genau einem guten Punkt. Also treffen $q^2+q-1-q(q-1)=2q-1$ schlechte Geraden $R^\perp$ in einem schlechten Punkt. Da $R$ genau $q$ schlechte Nachbarn hat und jeder schlechte Punkt auf mindestens einer schlechten Geraden liegt, gibt es einen schlechten Nachbarn $P$ von $R$, der auf genau einer schlechten Geraden liegt. Dann liegt jeder Punkt der Geraden $h = PR$ auf genau einer schlechten Geraden. Die obigen Überlegungen zeigen, dass die von $\ell$ verschiedenen schlechten Geraden, die $h$ treffen, genau zwei schlechte Punkte haben. Also hat die schlechte Gerade $m$ durch $P$ genau einen weiteren schlechten Punkt $Q$.

In $P^\perp$ ist genau eine schlechte Gerade enthalten, nämlich $m$. Die $q^2$ Punkte in $P^\perp \setminus m$ werden jeweils von genau einer schlechten Geraden getroffen. Daher wird $m$ von weiteren $q-1$ schlechten Geraden getroffen, die alle durch den Punkt $Q$ gehen. Somit liegt $Q$ auf $q$ schlechten Geraden. Sei $n$ die Gerade durch $Q$, die $\ell$ trifft. Dann ist $n$ die einzige gute Gerade durch $Q$. Jede hyperbolische Quadrik $Q^+(3,q)$, die $n$ und $m$ enthält, enthält genau $q+1$ gute Geraden, die $m$ treffen. Daher liegen genau $q+1$ schlechte Punkte in dieser Quadrik $Q^+(3,q)$. Diese verteilen sich auf die $q+1$ Geraden, die $n$ treffen. Da auf $m$ bereits zwei schlechte Punkte liegen, gibt es in $Q^+(3,q)$ mindestens eine Gerade, die $n$ in einem guten Punkt trifft und keinen schlechten Punkt hat. Diese Gerade ist eine schlechte Gerade. Es gibt $q$ verschiedene $Q^+(3,q)$, die $m$ und $n$ enthalten, und jeder gute Punkt von $n$ liegt auf genau einer schlechten Geraden. Daher liegt jeder gute Punkt von $n$ auf einer schlechten Geraden mit $q+1$ guten Punkten. Diese Punkte haben somit jeweils $q-1$ von $Q$ verschiedene schlechte Nachbarn. Es bleiben $q^2+q-1-q(q-1)=2q-1$ schlechte Nachbarn für $Q$.

Sei $\{R'\} := n \cap \ell$. Wie für $R$ zeigt man, dass genau $2q-1$ schlechte Geraden durch die schlechten Nachbarn von $R'$ gehen. Da $Q$ bereits auf $q$ schlechten Geraden liegt, liegen die anderen $q-1$ schlechten Nachbarn von $R'$ jeweils auf genau einer schlechten Geraden.

Sei $s$ eine beliebige schlechte Gerade. Diese trifft $R'^\perp$. Falls $s$ die Gerade $n$ trifft, so geht sie entweder durch $Q$ oder sie enthält keinen schlechten Punkt. Falls $s$ eine Gerade $R'P'$ trifft, wobei $P'$ ein schlechter Nachbar von $R'$ ist, der nur auf einer schlechten Geraden liegt, so liegen auf $s$ genau zwei schlechte Punkte. Dies zeigt man analog wie für $R$ und $P$. Nun folgt, dass jede schlechte Gerade höchstens zwei schlechte Punkte hat, außer sie geht durch $Q$. Da $Q$ genau $2q-1$ schlechte Nachbarn hat, gibt es mindestens eine schlechte Gerade mit mehr als zwei schlechten Punkten.

So wie $Q$ in Beziehung zu $P$ steht, gibt es einen schlechten Punkt $Q'$, der in der gleichen Beziehung zu einem schlechten Nachbarn $P' \neq Q$ von $R'$ steht. $Q'$ hat die gleichen Eigenschaften wie $Q$. Also gehen alle schlechten Geraden mit mehr als zwei schlechten Punkten nicht nur durch $Q$, sondern auch durch $Q'$. Somit hat nur die schlechte Gerade $r := QQ'$ mehr als zwei schlechte Punkte. Es folgt, dass

die anderen $q-1$ schlechten Geraden durch $Q$ genau einen weiteren schlechten Punkt haben und daher $2q-1-(q-1)=q$ schlechte Nachbarn von $Q$ auf $r$ liegen. Folglich hat $r$ genau $q+1$ schlechte Punkte.
Ein schlechter Punkt $X$, der nicht auf $r$ liegt, liegt auf genau einer Geraden, die $r$ trifft. Diese Gerade hat zwei schlechte Punkte und ist somit schlecht. Da sie von $r$ verschieden ist, hat sie höchstens zwei schlechte Punkte. Es folgt, dass es $q^2-1$ schlechte Geraden gibt, die $r$ in einem Punkt treffen und genau einen weiteren schlechten Punkt haben. Außerdem gibt es noch die Gerade $r$ sowie $q$ schlechte Geraden, die $q+1$ gute Punkte haben. Hieraus folgt, dass jede schlechte Gerade, die einen schlechten Punkt enthält, die Gerade $r$ trifft. Insbesondere sind die schlechten Punkte außerhalb von $r$ paarweise nicht kollinear. Sie bilden daher ein Teilovoid $\mathcal{O}$ mit $q^2-1$ Punkten.
Die Gerade $r$ ist disjunkt zu $\ell$ und jeder Punkt auf $r$ liegt auf genau einer guten Geraden, die $\ell$ trifft. Es folgt, dass jeder Punkt auf $r$ auf genau $q$ schlechten und einer guten Gerade liegt. Insbesondere ist jeder Punkt auf $r$ zu einem Punkt in $\mathcal{O}$ kollinear. Die Punkte außerhalb von $\mathcal{O}\cup r$ sind gute Punkte. Sie sind ebenfalls zu einem Punkt in $\mathcal{O}$ kollinear. Hieraus folgt, dass $\mathcal{O}$ ein maximales Teilovoid ist. Daher sind $\mathcal{P}_b$ und $\mathcal{G}_b$ wie in Beispiel 2.1.4. Die Bemerkung im Anschluss an das Beispiel 2.1.4 liefert, dass $q$ eine Primzahl ist. □

**Theorem 2.2.5** *Sei $\mathcal{P}_b$ eine echte Teilmenge der Punkte und $\mathcal{G}_b$ eine echte Teilmenge der Geraden des klassischen verallgemeinerten Vierecks $Q(4,q)$, so dass jeder Punkt außerhalb von $\mathcal{P}_b$ auf genau einer Geraden von $\mathcal{G}_b$ liegt und jede Gerade außerhalb von $\mathcal{G}_b$ genau einen Punkt in $\mathcal{P}_b$ hat. Sei weiter $b=|\mathcal{P}_b|=|\mathcal{G}_b|$.*

*(i) Für $q$ ungerade gilt $b\geq q^2+q$. Falls $b=q^2+q$, dann gibt es entweder einen Punkt in $\mathcal{P}_b$, der auf keiner Geraden aus $\mathcal{G}_b$ liegt, oder $q$ ist eine Primzahl und $\mathcal{P}_b$ enthält ein maximales Teilovoid mit $q^2-1$ Elementen.*

*(ii) Falls $q$ gerade, so ist entweder $b=q^2+1$ und $\mathcal{P}_b$ ein Ovoid, sowie $\mathcal{G}_b$ eine Faserung, oder $q=2$ und $b=q^2+q=6$, oder $b\geq q^2+q+1$.*

*Beweis:* Für ungerade $q$ hat $Q(4,q)$ keine Faserung und wegen Theorem 2.2.2 ist dann $b\geq q^2+q$. Gilt Gleichheit, so existiert wegen Theorem 2.2.2 und Lemma 2.2.4 entweder ein Punkt, der nur auf guten Geraden liegt, oder es existiert eine Gerade mit $q+1$ guten Punkten, $q$ ist eine Primzahl und $\mathcal{P}_b,\mathcal{G}_b$ sind wie im Beispiel 2.1.4.
Für gerade $q$ ist $Q(4,q)$ selbstdual. Ist $2\neq q$ gerade, so ist $q$ keine Primzahl, weshalb aus dem vorherigen Lemma folgt, dass jede Gerade einen schlechten Punkt hat. Da $Q(4,q)$ selbstdual ist, gilt auch die duale Aussage, dass jeder Punkt auf einer schlechten Geraden liegt. Mit Theorem 2.2.2 folgt dann entweder $b=q^2+1$, $\mathcal{P}_b$ ein Ovoid und $\mathcal{G}_b$ eine Faserung oder $b\geq q^2+q+1$. Für $q=2$ ist zusätzlich der Fall $b=q^2+q=6$ und $\mathcal{P}_b,\mathcal{G}_b$ wie im Beispiel 2.1.4 möglich. □

## 2.3 Obere Schranke für $b$

In diesem Abschnitt werden obere Schranken für $b$ bewiesen. Sei dazu zunächst $\mathcal{Q}$ wieder ein beliebiges verallgemeinertes Viereck der Ordnung $q$ mit $1 < q \in \mathbb{N}$. Zu Beginn dieses Kapitel wurde bereits die triviale Schranke $b \leq 3q^2 - q + 1$ begründet (siehe (2b)). Aus dem nächsten Lemma kann direkt $b \leq 2q^2 + 2q$ gefolgert werden. Im darauf folgenden Theorem wird $b < 2q^2 + 2q$ gezeigt. Zunächst brauchen wir noch eine Definition.

**Definition 2.3.1** Sei $s$ das Maximum an schlechten Punkten auf einer Geraden oder an schlechten Geraden durch einen Punkt.

**Lemma 2.3.2** *(i) Es gilt $b \leq q(q+1+s)$, falls $s = q+1$ und $b \leq (q+1)(q+s)$, falls $s \leq q$ ist.*

*(ii) Sei $s \in \{q, q+1\}$, $b = 2q(q+1)$ und $h$ eine schlechte Gerade mit $s$ schlechten Punkten. Dann hat jeder schlechte Punkt auf $h$ genau $(q-1)^2$ gute Nachbarn. Außerdem gilt für jede gute Gerade $g$, die $h$ in einem schlechten Punkt trifft, dass jede schlechte Gerade, die $g$ in einem guten Punkt trifft, keinen weiteren guten Punkt hat.*

*Beweis:* (i) Ist $s \leq 1$, dann trifft jede Gerade die Menge der schlechten Punkte $\mathcal{P}_b$ höchstens einmal. $\mathcal{P}_b$ ist damit ein Teilovoid und es folgt $b \leq q^2 + 1$.
Sei daher nun $s \geq 2$ und $h$ eine schlechte Gerade mit $s$ schlechten und $q + 1 - s$ guten Punkten. Wir können annehmen, dass es eine solche Gerade $h$ gibt, denn falls es nur einen Punkt $H$ gibt, der auf $s$ schlechten Geraden liegt, so liegt im dualen verallgemeinerten Viereck eine solche Gerade $h$.
Die $q+1-s$ guten Punkte auf $h$ haben jeweils genau $q(q-1)$ gute Nachbarn, die nicht auf $h$ liegen. Es gibt daher $x := g - (q + 1 - s)q(q - 1) - (q + 1 - s)$ gute Punkte, die nicht auf $h$ liegen und zu einem schlechten Punkt von $h$ benachbart sind. Somit existiert ein schlechter Punkt $P$ auf $h$, der zu mindestens $x/s$ guten Punkten benachbart ist, die nicht auf $h$ liegen.

**Fall 1:** $s = q + 1$ und $P$ liegt auf einer guten Geraden $\ell$. Dann hat jeder gute Punkt auf $\ell$ mindestens $(q - 1)^2$ gute Nachbarn, die nicht auf $\ell$ liegen. Aus $x = g$ folgt $g \geq g/(q + 1) + q(q - 1)^2$ und hieraus $g \geq (q - 1)(q^2 - 1)$ bzw. $b \leq 2q^2 + 2q$.

**Fall 2:** $s = q + 1$ und $P$ liegt nur auf schlechten Geraden. Dann gibt es eine schlechte Gerade $k$ durch $P$, auf der mindestens $x/(sq) = g/((q+1)q)$ gute Punkte liegen. Daher wird $k$ von mindestens $g/(q+1)$ guten Geraden getroffen. Ein guter Punkt auf $k$ hat genau $q(q - 1)$ gute Nachbarn, die nicht auf $k$ liegen und die zusammen von $q(q - 1)^2$ guten Geraden getroffen werden, die $k$ nicht treffen. Es ist daher $g \geq g/(q + 1) + q(q - 1)^2$, woraus erneut $b \leq 2q^2 + 2q$ folgt.

**Fall 3:** $s \leq q$. Da $P$ höchstens auf $s \leq q$ schlechten Geraden liegt, gibt es eine gute Gerade $\ell$ durch $P$. Damit gibt es genau $q(q-1)^2$ gute Punkte außerhalb von $\ell$, die zu einem guten Punkt auf $\ell$ durch eine gute Gerade benachbart sind. Die schlechten Geraden, die $\ell$ in einem guten Punkt treffen, haben mindestens $q - s$ gute Punkte außerhalb von $\ell$. Außerdem gibt es $q + 1 - s$ gute Nachbarn von $P$

auf $h$. Es folgt

$$g \geq q(q-1)^2 + q(q-s) + (q+1-s) + \frac{x}{s}.$$

Dies ist äquivalent zu $g(s-1) \geq (s-1)(q^3+1-s(q+1))$. Mit $s \geq 2$ folgt $g \geq q^3+1-(q+1)s$, also $b \leq (q+1)(q+s)$.

(ii) Sei nun $s \in \{q, q+1\}$ und $b = 2q(q+1)$. Dann gilt Gleichheit in den obigen Situationen, weshalb jeder schlechte Punkt auf $h$ genau $x/s$ gute Nachbarn außerhalb von $h$ hat. Für $s = q+1$ ist $x/s = (q-1)^2$. Für $s = q$ ist $x/s = q(q-2)$ und zusammen mit dem guten Punkt auf $h$ hat jeder schlechte Punkt auf $h$ genau $(q-1)^2$ gute Nachbarn. Falls eine gute Gerade $\ell$ existiert, die $h$ in einem schlechten Punkt trifft, dann hat jeder gute Punkt auf $\ell$ genau $(q-1)^2$ gute Nachbarn, die auf einer guten Geraden $\neq \ell$ liegen. Zusammen mit den $(q-1)^2$ guten Nachbarn des Schnittpunkts von $\ell$ und $h$, sind das bereits $(q-1)^2 + q(q-1)^2 = g$ gute Punkte. Es folgt, dass jede schlechte Gerade, die $\ell$ in einem guten Punkt trifft, keinen weiteren guten Punkt hat. □

**Lemma 2.3.3** *Sei $b > 2q^2+q+1$. Dann liegt jeder schlechte Punkt auf mindestens drei schlechten Geraden und jede schlechte Gerade hat mindestens drei schlechte Punkte.*

*Beweis:* Angenommen ein schlechter Punkt $P$ liegt auf mindestens $q-1$ guten Geraden. Dann hat $P$ mindestens $q(q-1)$ gute Nachbarn. Sei $\ell$ eine gute Gerade durch $P$. Die guten Punkte auf $\ell$ haben zusammen mindestens $q(q-1)^2$ gute Nachbarn. Das ergibt mindestens $q(q-1) + q(q-1)^2 = q^3 - q^2$ gute Punkte. Für $b > 2q^2 + q + 1$ ist das ein Widerspruch. Die zweite Aussage ist dual zu der ersten und gilt daher ebenfalls. □

**Theorem 2.3.4** *Sei $\mathcal{Q} = (\mathcal{P}, \mathcal{G}, \mathcal{I})$ ein verallgemeinertes Viereck der Ordnung $q \geq 2$. Sei weiter $\mathcal{P}_b \subsetneq \mathcal{P}$ und $\mathcal{G}_b \subsetneq \mathcal{G}$, so dass jeder Punkt außerhalb von $\mathcal{P}_b$ auf genau einer Geraden von $\mathcal{G}_b$ liegt und jede Gerade außerhalb von $\mathcal{G}_b$ genau einen Punkt in $\mathcal{P}_b$ hat. Dann gilt $|\mathcal{P}_b| = |\mathcal{G}_b| < 2q^2 + 2q$.*

*Beweis:* Nach Lemma 2.1.1 ist $b := |\mathcal{P}_b| = |\mathcal{G}_b|$. Angenommen $b = 2q^2 + 2q$. Dann ist $s = q+1$ oder $s = q$ nach Lemma 2.3.2 und daher gibt es eine schlechte Gerade $h$ mit $s$ schlechten Punkten.

**Fall 1:** $s = q$. Lemma 2.3.2(ii) zeigt, dass jeder schlechte Punkt auf $h$ genau $(q-1)^2$ gute Nachbarn hat. Seien $P_1, \dots P_q$ die schlechten Punkte auf $h$. Wegen $s = q$ liegt jeder dieser Punkte $P_i$ auf einer guten Geraden $\ell_i$. Lemma 2.3.2(ii) zeigt nun, dass alle schlechten Geraden, die $\ell_i$ in einem guten Punkt treffen, keine weiteren guten Punkte haben. Insbesondere kann eine solche Gerade keine gute Gerade $\ell_j$ mit $i \neq j$ treffen. Es gibt somit $q^2$ verschiedene schlechte Geraden mit jeweils $q$ schlechten Punkten und genau einem guten Punkt in $\ell_i \backslash \{P_i\}$ für ein $i \in \{1, \dots, q\}$. Sei $Q$ der gute Punkt auf $h$. Die $q^2$ schlechten Geraden, die $\ell_i \setminus \{P_i\}$ für ein $i \in \{1, \dots q\}$ treffen, treffen $Q^\perp$ in einem schlechten Punkt außerhalb von $h$. Da es nur $q$ schlechte Nachbarn von $Q$ gibt, die nicht auf $h$ liegen, gehen durch jeden dieser Punkte genau $q$ schlechte Geraden mit jeweils genau einem guten Punkt. Sei $R$ ein solcher schlechter Nachbar von $Q$ und $h'$ eine dieser schlechten Geraden durch $R$. Dann hat $R$ genau $2q$ gute Nachbarn. Lemma 2.3.2(ii) angewendet für $h'$ zeigt andererseits, dass $R$ genau $(q-1)^2$ gute Nachbarn hat. Es folgt $(q-1)^2 = 2q$, ein Widerspruch.

**Fall 2:** $s = q+1$. Lemma 2.3.2(ii) zeigt, dass jeder Punkt, der auf einer Geraden mit $q+1$ schlechten Punkten liegt, genau $(q-1)^2$ gute Nachbarn hat. Die duale Aussage gilt ebenfalls: Liegt ein Punkt nur auf schlechten Geraden, so wird jede dieser schlechten Geraden von genau $(q-1)^2$ guten Geraden getroffen.
Jeder Punkt auf $h$ hat also $(q-1)^2$ gute Nachbarn. Weil eine schlechte Gerade nach Lemma 2.3.3 höchstens $q-2$ gute Punkte hat und auf $h$ keine guten Punkte liegen, liegt somit jeder Punkt von $h$ auf mindestens einer guten Geraden.
Für $q = 2$ entsteht hier bereits ein Widerspruch, denn jeder Punkt auf $h$ hat nur $(2-1)^2 = 1$ gute Nachbarn und kann daher nicht auf einer guten Geraden liegen. Sei nun $q > 2$. Dann wird $h$ von mindestens $q+1$ guten Geraden getroffen. Sei $x$ die Anzahl an guten Geraden, die $h$ treffen, also ist $x \geq q+1$. Sei weiter $\ell$ eine gute Gerade, die $h$ trifft. Dann haben die schlechten Geraden, die $\ell$ in einem guten Punkt treffen, nach Lemma 2.3.2(ii) keine weiteren guten Punkte. Sie können daher keine andere gute Gerade treffen, die $h$ trifft. Insbesondere hat jede schlechte Gerade, die disjunkt zu $h$ ist, höchstens einen guten Punkt. Es gibt somit $(q+1)q - x$ schlechte Geraden, die $h$ treffen und $xq$ schlechte Geraden mit einem guten Punkt, die windschief zu $h$ sind. Es bleiben

$$b - xq - 1 - (q(q+1) - x) = (q+2-x)(q-1) + 1$$

schlechte Geraden, die windschief zu $h$ sind und keinen guten Punkt haben. Zusammen mit $q > 2$ folgt hieraus $x \leq q+2$. Da aber bereits $x \geq q+1$ gezeigt wurde, gilt nun $x \in \{q+1, q+2\}$ und es gibt entweder eine oder $q$ schlechte Geraden, die keinen guten Punkt haben und windschief zu $h$ sind. Sei $h'$ eine solche Gerade. Wie für $h$, gilt auch für $h'$, dass diese Gerade von höchstens $q+2$ guten Geraden getroffen wird.
Wegen $x \leq q+2$ gibt es einen Punkt $P$ auf $h$, der auf genau einer guten Geraden liegt. Die Gerade durch $P$, die $h'$ trifft, hat bereits zwei schlechte Punkte und ist daher schlecht. Auf ihr liegen nach 2.3.3 maximal $q-2$ gute Punkte. Hieraus folgt, dass von den $(q-1)^2$ guten Nachbarn von $P$ mindestens $(q-1)^2 - q - (q-2) = q^2 - 4q + 3$ durch eine schlechte Gerade zu $P$ verbunden sind, die $h'$ nicht trifft. Diese guten Punkte liegen somit schon auf einer schlechten Geraden und die Gerade durch einen solchen Punkt, die $h'$ trifft, ist daher gut. Da $h'$ von höchstens $q+2$ guten Geraden getroffen wird, folgt nun $q^2 - 4q + 3 \leq q+2$ und daraus $q \leq 4$.

**Fall 2a:** $q = 3$. Dann zeigt Lemma 2.3.3, dass jeder Punkt auf $h$ auf höchstens einer guten Geraden liegt und somit liegt jeder Punkt auf $h$ auf genau einer guten Geraden. Es ist also $x = q+1$ und es gibt drei schlechte Geraden, die windschief zu $h$ sind und keine guten Punkte haben. Jeder Punkt auf $h$ hat $(q-1)^2 = 4$ gute Nachbarn. Ein solcher Punkt liegt daher auf $h$, einer guten Geraden, einer schlechten Geraden mit einem guten Punkt und einer schlechten Geraden ohne guten Punkt, die von $h$ verschieden ist. Die Gerade $h$ trifft also noch genau $q+1 = 4$

schlechte Geraden, auf denen nur schlechte Punkte liegen. Insgesamt gibt es nun acht schlechte Geraden, auf denen keine guten Punkte liegen. Jede dieser schlechten Geraden trifft genau vier weitere dieser Geraden. Es folgt, dass diese acht Geraden ein $(4 \times 4)$-Gitter bilden.
Es existieren nur zwei verallgemeinerte Vierecke der Ordnung drei (siehe [Pay75]). Diese sind $Q(4,3)$ und $W(3,3)$. Da $W(3,3)$ kein $(4 \times 4)$-Gitter enthält, handelt es sich um das verallgemeinerte Viereck $Q(4,3)$. Hieraus folgt, dass je zwei windschiefe Geraden von $\mathcal{Q}$ eindeutig einen Regulus bestimmen.
Seien $g_0, \dots, g_3$ die guten Geraden, die $h$ treffen und $\mathcal{R}_1$ der Regulus, der durch $g_0$ und $g_1$ bestimmt wird. Sei weiter $\mathcal{R}_1'$ der zu $\mathcal{R}_1$ entgegengesetzte Regulus. Die von $h$ verschiedenen Geraden in $\mathcal{R}_1'$ treffen $g_0$ und $g_1$ jeweils in einem guten Punkt. Sie haben daher bereits zwei gute Punkte und sind somit gute Geraden, die genau drei gute Punkte haben. Es folgt, dass die beiden von $g_0$ und $g_1$ verschiedenen Geraden in $\mathcal{R}_1$ zusammen genau drei gute Punkte haben. Es ist somit eine der beiden Geraden gut und die andere schlecht mit keinem guten Punkt. O.B.d.A. liegt $g_3$ in $\mathcal{R}_1$. Sei nun $\mathcal{R}_2$ der Regulus, der von $g_0$ und $g_2$ aufgespannt wird. Dann ist $\mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}_2$. Analog zeigt man nun, dass entweder $g_1$ oder $g_3$ in $\mathcal{R}_2$ liegt. Daraus folgt $|\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2| = 2$, ein Widerspruch zu $\mathcal{R}_1 \neq \mathcal{R}_2$.

**Fall 2b:** $q = 4$. Dann hat jeder Punkt auf $h$ genau $(q-1)^2 = 9$ gute Nachbarn. Außerdem gilt, dass jede schlechte Gerade höchstens $q - 2 = 2$ gute Punkte hat. Ist nun $x = q + 1$, so liegt jeder Punkt auf $h$ noch auf einer guten Geraden, zwei schlechten Geraden mit je zwei guten Punkten und einer schlechten Geraden mit einem guten Punkt. Ist $x = q + 2$, so ändert sich dies für einen Punkt auf $h$. Dieser liegt dann auf zwei guten Geraden, einer schlechten Geraden mit einem guten Punkt und einer von $h$ verschiedenen schlechten Geraden, die keinen guten Punkt hat.

**Fall 2b(i):** $x = q+2$. Dann gibt es genau drei schlechte Geraden, auf denen nur schlechte Punkte liegen. Diese sind $h$, $h'$ und eine Gerade $h''$, die $h$ trifft. Genau wie für $h$ gilt nun für $h'$ und $h''$, dass sie entweder zu einer oder zu vier weiteren schlechten Geraden mit nur schlechten Punkten disjunkt sind. Aber egal, ob $h'$ und $h''$ sich treffen oder nicht treffen, es entsteht nun ein Widerspruch.

**Fall 2b(ii):** $x = q + 1$. Dann trifft $h$ keine schlechte Gerade ohne guten Punkt und ist zu vier schlechten Geraden ohne guten Punkt disjunkt. Insgesamt gibt es also fünf schlechte Geraden mit nur schlechten Punkten, die paarweise disjunkt sind, da man sich sonst im Fall 2 (b)(i) wieder findet, der zum Widerspruch führt. Es gibt genau fünf schlechte Geraden mit je genau einem guten Punkt und zehn schlechte Geraden mit je genau zwei guten Punkten, die $h$ treffen. Außerdem werden die guten Geraden, die $h$ treffen, von $x \cdot 4 = 5 \cdot 4 = 20$ schlechten Geraden mit nur einem guten Punkt getroffen, die zu $h$ windschief sind. Zusammen mit den fünf schlechten Geraden ohne guten Punkt sind dies alle 40 schlechten Geraden. Es gibt also nur zehn schlechte Geraden mit je zwei guten Punkten. Jede der fünf schlechten Geraden ohne guten Punkt trifft alle zehn schlechten Geraden mit je zwei guten Punkten. Damit gibt es mindestens zehn Geraden, die sowohl $h$ als auch $h'$ treffen. Jeder Punkt auf $h'$ ist aber durch genau eine Gerade zu genau einem Punkt auf $h$ verbunden. Damit gibt es genau $q + 1 = 5$ Geraden, die $h$ und

$h'$ treffen, Widerspruch. □

Für $q = 2$ ist $2q^2 + 2q - 1 = 11$. Das in 2.1.2(vii) beschriebene Beispiel mit $b = q^2 + 4q - 1 = 11$ ist somit eines mit einer maximalen Anzahl an schlechten Punkten. Die Variante mit $b = q^2 + 4q + 3$ in 2.1.2(vii) ist für $q = 2$ kein Beispiel, denn wegen $q^2 + 4q + 3 = 15 = q^3 + q^2 + q + 1$ enthält diese Menge alle Punkte aus $Q(4, 2)$, was zu Beginn des Abschnitts 2.1 ausgeschlossen wurde.

Für $q = 3$ ist $2q^2 + 2q - 1 = 23$, was bereits sehr nah an $b = 22$ in Beispiel 2.1.5 ist. Das nächste Lemma zeigt, dass das Beispiel in 2.1.5 tatsächlich ein größt mögliches für $q = 3$ ist.

**Lemma 2.3.5** *Für $q = 3$ gilt $b \neq 2q^2 + 2q - 1 = 23$.*

*Beweis:* Angenommen $b = 23$. Dann gibt es wegen $q^3 + q^2 + q + 1 = 40$ genau 17 gute Punkte. Aus Lemma 2.3.2 folgt $s = 3$ oder $s = 4$ und o.B.d.A. existiert eine Gerade $h$ mit $s$ schlechten Punkten.

**Fall 1:** $s = 3$. Dann folgt aus Lemma 2.3.3, dass jeder schlechte Punkt auf genau einer guten Geraden liegt und jede schlechte Gerade genau einen guten Punkt hat. Jeder schlechte Punkt auf $h$ hat somit genau $3 + 2 = 5$ gute Nachbarn, die nicht auf $h$ liegen. Der gute Punkt auf $h$ hat genau $3 \cdot 2 = 6$ gute Nachbarn, die nicht auf $h$ liegen. Zusammen ergibt das $3 \cdot 5 + 6 + 1 = 22$ gute Punkte. Dies ist ein Widerspruch.

**Fall 2:** $s = 4$. Nun zeigt Lemma 2.3.3, dass jeder schlechte Punkt auf höchstens einer guten Geraden liegt und jede schlechte Gerade höchstens einen guten Punkt hat. Sei $\ell$ eine gute Gerade. Jeder gute Punkt auf $\ell$ liegt auf $\ell$, einer schlechten Geraden, die keinen weiteren guten Punkt hat und auf weiteren zwei guten Geraden, die jeweils genau einen schlechten Punkt haben. Ein guter Punkt auf $\ell$ ist somit zu genau vier guten Punkten benachbart, die nicht auf $\ell$ liegen. Es bleiben $17 - 3 \cdot 4 = 5$ gute Punkte, die zu dem schlechten Punkt auf $\ell$ benachbart sind. Der schlechte Punkt einer guten Gerade ist somit immer zu genau fünf guten Punkten benachbart.
Falls ein schlechter Punkt $P$ auf $h$ mindestens vier gute Nachbarn hat, so liegt er auf einer guten Geraden, denn $h$ enthält keinen guten Punkt und jede andere schlechte Gerade durch $P$ höchstens einen. Somit hat $P$ in diesem Fall genau fünf gute Nachbarn. Es folgt, dass kein Punkt auf $h$ genau vier oder mehr als fünf gute Nachbarn hat.
Da es 17 gute Punkte gibt und jeder Punkt auf $h$ entweder 0,1,2,3 oder 5 gute Nachbarn hat, gibt es einen Punkt $Q$ auf $h$, der genau zwei gute Nachbarn hat und drei Punkte auf $h$, die genau fünf gute Nachbarn haben. Es folgt, dass $h$ von genau drei guten Geraden getroffen wird. Somit treffen $17 - 3 = 14$ gute Geraden $Q^\perp \setminus h$. Jeder der sieben schlechten Punkte in $Q^\perp \setminus h$ liegt auf höchstens einer guten Geraden. Die beiden guten Punkte in $Q^\perp \setminus h$ liegen jeweils auf genau drei guten Geraden. Damit kann $Q^\perp \setminus h$ maximal von $7 + 2 \cdot 3 = 13$ guten Geraden getroffen werden. Dies ist ein Widerspruch. □

Um die Schranke für $b$ weiter zu verbessern, nehmen wir $b = 2q^2 + 2q - \delta$ mit $\delta > 0$ an. Dann gibt es $(q+1)(q-1)^2 + \delta$ gute Punkte. Ist $\delta \leq q$, so ist $s \in \{q, q+1\}$

nach Lemma 2.3.2. Außerdem können wir annehmen, dass es eine schlechte Gerade $h$ mit genau $s$ schlechten Punkten gibt.

**Lemma 2.3.6** *Sei $0 < \delta \leq q - 2$. Dann gilt:*

*(i) Jeder Punkt auf $h$ mit mindestens $(q-1)^2$ guten Nachbarn liegt auf einer guten Gerade.*

*(ii) Es gibt einen schlechten Punkt auf $h$, der mehr als $(q-1)^2$ gute Nachbarn hat.*

*(iii) Sei $P$ ein schlechter Punkt auf $h$ mit $(q-1)^2 + x$ guten Nachbarn für ein $x \in \mathbb{Z}$. Ist $\ell$ eine gute Gerade durch $P$, dann haben die schlechten Geraden, die $\ell$ in einem guten Punkt treffen, zusammen genau $\delta - x$ gute Punkte zusätzlich zu denen auf $\ell$. Insbesondere gilt $x \leq \delta$.*

*Beweis:* (i) Falls $s = q$, so liegt per Definition von $s$ jeder Punkt auf mindestens einer guten Gerade. Ist $s = q + 1$, so hat $h$ keinen guten Punkt. Ein Punkt auf $h$ mit mindestens $(q-1)^2$ guten Nachbarn liegt auf einer Geraden mit mehr als $q - 2$ guten Punkten, welche nach Lemma 2.3.3 gut ist.

(ii) Es gibt mehr als $(q+1)(q-1)^2$ gute Punkte. Ist also $s = q+1$, so gibt es einen schlechten Punkt auf $h$ mit mehr als $(q-1)^2$ guten Nachbarn. Ist $s = q$, so hat der gute Punkt auf $h$ genau $q(q-1)$ gute Nachbarn. Es bleiben $(q+1)(q-1)^2 + \delta - 1 - q(q-1) = q^2(q-2) + \delta$ gute Punkte, die nicht auf $h$ liegen und zu einem schlechten Punkt auf $h$ benachbart sind. Somit hat ein schlechter Punkt auf $h$ mehr als $q(q-2)$ gute Nachbarn aus dieser Menge und den guten Punkt auf $h$ als Nachbarn, also mehr als $(q-1)^2$ gute Nachbarn. In beiden Fällen existiert ein schlechter Punkt auf $h$ mit mehr als $(q-1)^2$ guten Nachbarn.

(iii) Sei $P$ ein schlechter Punkt auf $h$ mit $(q-1)^2 + x$ guten Nachbarn für ein $x \in \mathbb{Z}$. Sei weiter $\ell$ eine gute Gerade durch $P$. Die $q(q-1)^2 + \delta - x$ guten Punkte, die nicht zu $P$ benachbart sind, sind zu einem guten Punkt auf $\ell$ benachbart. Genau $q(q-1)^2$ davon sind über eine gute Gerade zu einem guten Punkt auf $\ell$ benachbart. Die schlechten Geraden, die $\ell$ in einem guten Punkt treffen, haben somit zusammen genau $\delta - x$ gute Punkte außerhalb von $\ell$, insbesondere ist $\delta - x \geq 0$. Ist $x \geq 0$, so existiert diese gute Gerade $\ell$ nach (i) und es folgt aus $\delta - x \geq 0$, dass $x \leq \delta$ ist. □

Das folgende Lemma verbessert die Schranke für $b$ im Fall $s = q$ und $q > 7$. Weitere Verbesserungen werden im Anschluss für das klassische verallgemeinerte Viereck $Q(4, q)$ bewiesen.

**Lemma 2.3.7** *Für $s = q$ und $q > 7$ gilt $b \leq 2q^2 + q + 3$.*

*Beweis:* Angenommen $b = 2q^2 + 2q - \delta$ und $0 < \delta \leq q - 4$. Sei o.B.d.A. $h$ eine schlechte Gerade mit $q$ schlechten Punkten. Sei weiter $R$ der gute Punkt auf $h$ und seien $P_1, \ldots, P_q$ die schlechten Punkte auf $h$, sowie $x_i \in \mathbb{Z}$, so dass $P_i$ genau

$(q-1)^2 + x_i$ gute Nachbarn hat. Da $R$ genau $q(q-1)$ gute Nachbarn hat und es $q^3 - q^2 - q + 1 + \delta$ gute Punkte gibt, folgt

$$\sum_{i=1}^{q}((q-1)^2 + x_i - 1) + 1 + q(q-1) = q^3 - q^2 - q + \delta + 1$$

und hieraus $\sum_{i=1}^{q} x_i = \delta$. Lemma 2.3.6 zeigt $x_i \leq \delta$.
Sei $Q$ ein schlechter Punkt, der auf einer schlechten Geraden mit $q$ schlechten Punkten liegt und $(q-1)^2 + x$ gute Nachbarn hat, so dass für jeden anderen schlechten Punkt $Q'$, der auf einer schlechten Geraden mit $q$ schlechten Punkten liegt und $(q-1)^2 + x'$ gute Nachbarn hat, $x \leq x'$ gilt. Sei $k$ eine schlechte Gerade durch $Q$ mit $q$ schlechten Punkten $Q_1, \ldots, Q_{q-1}, Q$ und einem guten Punkt $S$. Sei $\ell_i$ eine gute Gerade durch $Q_i$, und $Q_i$ habe $(q-1)^2 + y_i$ gute Nachbarn mit $y_i \in \mathbb{Z}$ für $i = 1, \ldots, q-1$. Lemma 2.3.6(iii) zeigt, dass die schlechten Geraden, die $\ell_i \setminus \{Q_i\}$ treffen, zusammen $\delta - y_i$ gute Punkte außerhalb von $\ell_i$ haben. Sei $I := \{i \mid \delta - y_i \leq q\}$. Für $i \in I$ wird $\ell_i$ von mindestens $q - (\delta - y_i)$ schlechten Geraden getroffen, die nur einen guten Punkt haben und dieser liegt auf $\ell_i$. Insbesondere trifft eine solche Gerade keine der Geraden $\ell_j$ mit $i \neq j$ und sie trifft $S^\perp$ in einem schlechten Punkt außerhalb von $k$.
Nun gibt es mindestens

$$\alpha := \sum_{i \in I}(q - (\delta - y_i)) \geq \sum_{i=1}^{q-1}(q - (\delta - y_i)) = (q-1)(q-\delta) + \delta - x \tag{2c}$$

schlechte Geraden mit $q$ schlechten Punkten, die eine Gerade $\ell_i$ für ein $i \in \{1, \ldots, q-1\}$ in einem guten Punkt treffen. Sie alle gehen durch einen der $q$ schlechten Punkte aus $S^\perp \setminus k$. Daher existiert ein schlechter Punkt $Y$ in $S^\perp \setminus k$, der auf $\beta \geq \alpha/q$ dieser Geraden liegt. Diese Geraden haben jeweils genau einen guten Punkt, jede andere Gerade durch $Y$ hat höchstens $q$ gute Punkte. Wegen $x \leq \delta \leq q - 4$ ist $\beta \geq \alpha/q \geq 1$. $Y$ liegt also auf mindestens einer schlechten Geraden mit $q$ schlechten Punkten. $Y$ habe $(q-1)^2 + y$ gute Nachbarn für ein $y \in \mathbb{Z}$. Es folgt

$$(q-1)^2 + y \leq \beta + (q + 1 - \beta)q.$$

Da $Y$ auf der guten Geraden $SY$ liegt, ist $\beta \leq q$. Zusammen mit $\beta q \geq \alpha$ und (2c) gilt nun

$$(q-1)^2 + y \leq q + q^2 + q - \beta q \leq 3q + \delta(q-2) + x.$$

Hieraus folgt mit $x \leq y$ (siehe Wahl von $x$ oben)

$$(q-2)(q-3) - 5 \leq \delta(q-2).$$

Dies führt für $\delta \leq q - 4$ und $q > 7$ zum Widerspruch. □

## Obere Schranken in $Q(4, q)$

Sei weiterhin $b = 2q^2 + 2q - \delta$ mit $0 < \delta \leq q$ und damit $s \in \{q, q+1\}$. In diesem Abschnitt wird die obere Schranke für $b$ für das klassische verallgemeinerte Viereck $Q(4, q)$ mit $q > 2$ und $q$ gerade, verbessert. Für $q = 2$ wurde bereits gezeigt, dass die Grenze $b \leq 2q^2 + 2q - 1 = 11$ scharf ist. Daher wird nun $q > 2$ vorausgesetzt. Da $Q(4, q)$ für gerade $q$ selbstdual ist, können wir weiterhin annehmen, dass es eine schlechte Gerade $h$ mit genau $s$ schlechten Punkten gibt. Dies ist auch der Hauptgrund, weshalb die folgenden Beweise nur für gerade $q$ richtig sind. Außerdem machen wir davon Gebrauch, dass zwei windschiefe Geraden aus $Q(4, q)$ einen Regulus eindeutig beschreiben, der nur aus Geraden aus $Q(4, q)$ besteht und diese beiden Geraden enthält.

Im gesamten Abschnitt sei $q = 2^r$ mit $r > 1$ und $h$ eine schlechte Gerade mit $s \in \{q, q+1\}$ schlechten Punkten. In den folgenden Lemmas führen wir die Annahme $0 < \delta \leq q - 2$ für $s = q$ und für $s = q + 1$ zum Widerspruch.

**Lemma 2.3.8** *Ist $s = q$, so folgt $\delta \geq q - 1$ und somit $b \leq 2q^2 + q + 1$.*

*Beweis:* Angenommen $b = 2q^2 + 2q - \delta$ mit $0 < \delta \leq q - 2$. Lemma 2.3.6 zeigt, dass es einen schlechten Punkt $P$ auf $h$ mit $(q-1)^2 + x > (q-1)^2$ guten Nachbarn gibt. Außerdem liegt $P$ auf einer guten Geraden $\ell$, und die $q$ schlechten Geraden, die $\ell \setminus \{P\}$ treffen, haben zusammen noch $\delta - x \leq q - 3$ gute Punkte, abgesehen von denen auf $\ell$. Daher gibt es zwei schlechte Geraden $k_1$ und $k_2$, die $\ell$ in je einem guten Punkt treffen, aber keine weiteren guten Punkte haben. Sei $\mathcal{R}$ der Regulus in $Q(4, q)$, der die Geraden $k_1$ und $k_2$ enthält und $\mathcal{R}'$ der zu $\mathcal{R}$ entgegen gesetzte Regulus. $\mathcal{R}$ und $\mathcal{R}'$ bilden die Erzeuger einer hyperbolischen Quadrik $Q^+(3, q)$. Da alle Geraden aus $\mathcal{R}' \setminus \{\ell\}$ die Geraden $k_1$ und $k_2$ jeweils in einem schlechten Punkt treffen, ist $\ell$ die einzige gute Gerade in $\mathcal{R}'$. Sei $\ell'$ die Gerade in $\mathcal{R}$ durch $P$. $\ell'$ wird somit von $\ell$ und von $q$ schlechten Geraden aus $Q^+(3, q)$ getroffen. Wäre $\ell'$ eine schlechte Gerade, so hätte sie daher $q + 1$ schlechte Punkte, was im Widerspruch zu $s = q$ steht. Daher ist $\ell'$ eine gute Gerade. Insbesondere gilt $\ell' \neq h$. Genau wie für $\ell$ gilt auch für $\ell'$, dass die schlechten Geraden, die $\ell' \setminus \{P\}$ treffen, zusammen genau $\delta - x$ weitere gute Punkte haben. Also existieren schlechte Geraden $k_1', k_2'$ in $\mathcal{R}'$ mit jeweils genau $q$ schlechten Punkten. Hieraus folgt analog, dass alle Geraden in $\mathcal{R} \setminus \{\ell'\}$ schlechte Geraden sind. Somit liegen alle Punkte der hyperbolischen Quadrik $Q^+(3, q)$, die nicht auf $\ell$ oder $\ell'$ liegen, auf zwei schlechten Geraden und sind schlecht. Es folgt $\delta - x = 0$, also $x = \delta$.
Sei $Q \neq P$ ein schlechter Punkt auf $h$. Jede Gerade durch $Q$ trifft die Quadrik $Q^+(3, q)$ außerhalb von $\ell \cup \ell'$, also in einem schlechten Punkt und ist daher eine schlechte Gerade. Es folgt, dass $Q$ auf $q + 1$ schlechten Geraden liegt. Ein Widerspruch zu $s = q$. □

**Lemma 2.3.9** *Ist $s = q + 1$ und $0 < \delta \leq q - 2$, so gibt es einen Punkt auf $h$ mit $(q-1)^2 + \delta$ guten Nachbarn.*

*Beweis:* Angenommen die Aussage ist falsch, so gibt es wegen Lemma 2.3.6 einen Punkt $P$ auf $h$ mit $(q-1)^2 + x$ und $0 < x < \delta$ guten Nachbarn.

Ebenfalls nach Lemma 2.3.6 liegt $P$ auf einer guten Geraden $\ell$ und die $q$ guten Punkte auf $\ell$ werden von $q$ schlechten Geraden $k_1, \dots, k_q$ mit insgesamt genau $0 < \delta - x \leq q - 3$ guten Punkten außerhalb von $\ell$ getroffen. O.B.d.A. haben die Geraden $k_1, \dots, k_a$ mit $3 \leq a < q$ genau einen guten Punkt (der liegt auf $\ell$) und die Geraden $k_i$ mit $i > a$ mehr als einen guten Punkt. Sei $y+1$ die kleinste Anzahl an guten Punkten auf einer Geraden $k_i$ mit $i > a$. Dann gilt $y > 0$ und

$$(q-a)y \leq \delta - x \tag{2d}$$

Sei $k_j$, $j > a$, eine Gerade mit $y + 1$ guten Punkten und sei $\mathcal{R}_i$ der Regulus in $Q(4, q)$, der die Geraden $k_i$ und $k_j$ enthält für $1 \leq i \leq a$. Sei weiter $\mathcal{R}'_i$ der zu $\mathcal{R}_i$ entgegen gesetzte Regulus. Eine Gerade des Regulus $\mathcal{R}'_i$ ist die Gerade $\ell$. Genau $q - y$ Geraden in $\mathcal{R}'_i$ treffen $k_i$ und $k_j$ in einem schlechten Punkt und sind somit schlechte Geraden. Die restlichen $y$ Geraden in $\mathcal{R}'_i$ treffen $k_j$ in einem guten Punkt und sind daher gute Geraden, denn dieser gute Punkt liegt bereits auf der schlechten Geraden $k_j$.
Sei $m_i$ die Gerade durch $P$ in $\mathcal{R}_i$. Zu verschiedenen $i$ erhält man verschiedene Reguli $\mathcal{R}_i$, denn angenommen es ist etwa $\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2$, so treffen alle von $\ell$ verschiedenen Geraden in $\mathcal{R}'_1 = \mathcal{R}'_2$ die Geraden $k_1$ und $k_2$ in je einem schlechten Punkt und sind daher schlecht. Wie eben gesehen, enthält $\mathcal{R}'_1$ aber $y > 0$ gute Geraden neben $\ell$. Daher sind die Reguli $\mathcal{R}_i$ verschieden, sie treffen sich in $k_j \neq m_i$ und verschiedene $i$ gehören zu verschiedenen Geraden $m_i$.

**Fall 1:** Für alle $i = 1, \dots, a$ ist die Gerade $m_i$ schlecht. Dann wird $m_i$ von $q - y$ schlechten Geraden des Regulus $\mathcal{R}'_i$ in je einem schlechten Punkt getroffen. Die von $\ell$ verschiedenen guten Geraden des Regulus $\mathcal{R}'_i$ treffen $m_i$ in einem guten Punkt, denn ihr schlechter Punkt liegt bereits auf $k_i$. Es folgt, dass $m_i$ genau $y > 0$ gute Punkte hat, also insbesondere verschieden von $h$ ist. Durch $P$ gehen somit mindestens $a$ schlechte Geraden mit je $y$ guten Punkten, die schlechte Gerade $h$ mit keinem guten Punkt und maximal $q - a$ gute Geraden. Das ergibt höchstens $ay + (q - a)q$ gute Nachbarn für $P$. Daher gilt

$$(q-1)^2 + x \leq ay + (q-a)q.$$

Aus (2d) und $\delta \leq q - 2$ folgt

$$(q-1)^2 + x \leq a\frac{q-2-x}{q-a} + (q-a)q.$$

Dies lässt sich umformen zu

$$(a-3)q(q-1-a) + (x-1)q + (q-1)(q-a) \leq 0.$$

Wegen $3 \leq a \leq q - 1$ folgt nun ein Widerspruch.

**Fall 2:** Mindestens eine der Geraden $m_i$, $i = 1, \dots, a$, ist eine gute Gerade. Sei o.B.d.A. $m_1$ eine gute Gerade. Weil die Geraden $k_2, \dots, k_a$ nicht in $\mathcal{R}_1$ liegen, sind neben $m_1$ noch mindestens weitere $a - 1$ gute Geraden in $\mathcal{R}_1$. Der Regulus $\mathcal{R}'_1$ enthält genau $q - y$ schlechte Geraden. Diese schlechten Geraden treffen die

$a-1$ guten Geraden aus $\mathcal{R}_1$ in $(q-y)(a-1)$ Punkten, wovon höchstens $a-1$ Punkte schlechte Punkte sind. Es folgt, dass die schlechten Geraden, die $m_1$ treffen, zusammen mindestens $(a-1)(q-y-1)$ gute Punkte außerhalb von $m_1$ haben. Für $m_1$ gilt genau wie für $\ell$, dass diese Geraden höchstens $\delta - x \leq q-3$ gute Punkte außerhalb von $m_1$ haben. Daher ist

$$(a-1)(q-y-1) \leq q-3. \tag{2e}$$

Mit $a \geq 3$ folgt hieraus $y \geq (q+1)/2$. Die Ungleichung (2d) zusammen mit $\delta - x \leq q-3$ liefert nun $a > q-2$. Also ist $a = q-1$ und $y = \delta - x \leq q-3$. Setzt man dies in (2e) ein, so erhält man einen Widerspruch. □

**Lemma 2.3.10** *Ist $s = q+1$, so folgt $\delta \geq q-1$ und somit $b \leq 2q^2+q+1$.*

*Beweis:* Angenommen $0 < \delta \leq q-2$. Nach dem vorherigen Lemma gibt es einen Punkt $P$ auf $h$ mit genau $(q-1)^2+\delta$ guten Nachbarn. Nach Lemma 2.3.6 liegt $P$ auf einer guten Geraden $\ell$ und die $q$ schlechten Geraden $k_1, \ldots, k_q$, die $\ell$ in einem guten Punkt treffen, haben keine weiteren guten Punkte.

**Fall 1:** Die Geraden $k_i$ liegen nicht alle zusammen in einem Regulus. Seien daher o.B.d.A. die Reguli, die von zwei der Geraden $k_1, k_2, k_3$ aufgespannt werden, verschieden. Sei $\mathcal{R}$ der Regulus, der von $k_1$ und $k_2$ aufgespannt wird, $\mathcal{R}'$ der zu $\mathcal{R}$ entgegen gesetzte Regulus und $m$ die Gerade in $\mathcal{R}$ durch $P$. Die $q$ von $\ell$ verschiedenen Geraden in $\mathcal{R}'$ treffen $k_1$ und $k_2$ jeweils in einem schlechten Punkt und sind daher schlecht. Da $k_3$ nicht in $\mathcal{R}$ liegt, liegt mindestens eine gute Gerade in $\mathcal{R}$ und die $q$ schlechten Geraden in $\mathcal{R}'$ haben zusammen mindestens $q-1$ gute Punkte. Aus Lemma 2.3.6 folgt nun, dass $m$ eine schlechte Gerade sein muss. Weil die $q$ Geraden in $\mathcal{R}' \setminus \{\ell\}$ alle schlecht sind, hat $m$ nur schlechte Punkte.
Führt man die gleichen Überlegungen für die Reguli, die durch $k_1$ und $k_3$ bzw. $k_2$ und $k_3$ erzeugt werden, durch, so erhält man, dass $P$ auf mindestens drei schlechten Geraden mit jeweils $q+1$ schlechten Punkten liegt. Somit hat $P$ mindestens $3q$ schlechte Nachbarn. Da $P$ aber bereits $(q-1)^2+\delta > (q-1)^2$ gute Nachbarn hat, folgt nun ein Widerspruch.

**Fall 2:** Alle Geraden $k_i$ liegen zusammen in einem Regulus $\mathcal{R}$. Die Geraden von $\mathcal{R}$ sind Erzeuger einer hyperbolischen Quadrik $Q^+(3,q)$. Die $q^2$ Punkte der Quadrik $Q^+(3,q)$, die nicht auf einer Geraden durch $P$ liegen, sind schlecht. Angenommen die Gerade in $\mathcal{R}$ durch $P$ ist nicht die Gerade $h$. Für einen Punkt $Q$ auf $h$ mit $Q \neq P$ treffen dann alle Geraden durch $Q$, die Quadrik $Q^+(3,q)$ in einem schlechten Punkt und sind daher schlecht. Eine schlechte Gerade hat nach Lemma 2.3.3 höchstens $(q-2)$ gute Punkte und die Gerade $h$ hat keine guten Punkte, somit hat $Q$ höchstens $q(q-2) < (q-1)^2$ gute Nachbarn. Da dies für alle von $P$ verschiedenen Punkte auf $h$ gilt, gibt es insgesamt weniger als $q(q-1)^2+(q-1)^2+\delta$ gute Punkte, ein Widerspruch.
Es folgt daher $h \in \mathcal{R}$ und somit sind alle Punkte bis auf die Punkte von $\ell \setminus \{P\}$ dieser hyperbolischen Quadrik $Q^+(3,q)$ schlecht. Sei $\mathcal{R}'$ der zu $\mathcal{R}$ entgegen gesetzte Regulus. Dann hat jede Gerade in $\mathcal{R}' \setminus \{\ell\}$ nur schlechte Punkte. Sei $h'$ eine solche Gerade. Wie für $h$ finden wir eine hyperbolische Quadrik $Q^+(3,q)$ durch $h'$,

deren gute Punkte alle auf einer guten Geraden $\ell'$ der Quadrik $Q^+(3,q)$ liegen, die $h'$ trifft. Um die beiden hyperbolischen Quadriken zu unterscheiden, bezeichnen wir sie mit $Q_h^+(3,q)$ und $Q_{h'}^+(3,q)$.
$Q_h^+(3,q)$ und $Q_{h'}^+(3,q)$ treffen sich in $h'$ und einer Geraden aus $\mathcal{R} = \{k_1,\ldots,k_q,h\}$. Jede von $\ell'$ verschiedene Gerade in $Q_{h'}^+(3,q)$, die $h'$ trifft, hat nur schlechte Punkte. Es folgt $Q_h^+(3,q) \cap Q_{h'}^+(3,q) = h \cup h'$. Somit gibt es $(q-1)q$ schlechte Punkte, die in $Q_h^+(3,q) \setminus Q_{h'}^+(3,q)$ liegen. Diese Punkte liegen auf $q-1$ Geraden, die nicht in $Q_h^+(3,q)$ enthalten sind, und daher $Q_{h'}^+(3,q)$ außerhalb von $h'$ und $h$ treffen. Da die guten Punkte aus $Q_{h'}^+(3,q)$ alle auf der Geraden $\ell'$ liegen, treffen jeweils mindestens $q-2$ der $q-1$ Geraden die hyperbolische Quadrik $Q_{h'}^+(3,q)$ in einem schlechten Punkt und sind daher schlecht. Außerdem liegen noch $4q$ verschiedene schlechte Geraden in $Q_h^+(3,q)$ oder $Q_{h'}^+(3,q)$. Insgesamt ergibt das mindestens $(q-1)q(q-2)+4q = q^3-3q^2+6q$ schlechte Geraden. Da $q>2$ und gerade ist, ist $q \geq 4$ und damit $q^3-3q^2+6q > 2q^2+2q-\delta$. Es folgt ein Widerspruch. $\square$

Im nächsten Theorem werden die Ergebnisse dieses Abschnitts noch einmal zusammengefasst.

**Theorem 2.3.11** *Sei $\mathcal{P}_b$ eine echte Teilmenge der Punkte und $\mathcal{G}_b$ eine echte Teilmenge der Geraden des klassischen verallgemeinerten Vierecks $Q(4,q)$, $q$ gerade, so dass jeder Punkt außerhalb von $\mathcal{P}_b$ auf genau einer Geraden von $\mathcal{G}_b$ liegt und jede Gerade außerhalb von $\mathcal{G}_b$ genau einen Punkt in $\mathcal{P}_b$ hat. Dann gilt $|\mathcal{P}_b| = |\mathcal{G}_b| \leq 2q^2+q+1$.*

*Beweis:* Mit $b := |\mathcal{P}_b| = |\mathcal{G}_b|$ aus Lemma 2.1.1 und den Lemmas 2.3.8 und 2.3.10 folgt sofort die Behauptung für $q>2$. Für $q=2$ wurde im letzten Abschnitt bereits $b \leq 11 = 2q^2+q+1$ gezeigt. $\square$

# 3 Teilovoide und Teilfaserungen von $Q^-(5,q)$ und $H(3,q^2)$

In diesem Kapitel betrachten wir Teilovoide und Teilfaserungen der Polarräume $Q^-(5,q)$ und $H(3,q^2)$. Dies geschieht parallel, denn die elliptische Quadrik $Q^-(5,q)$ ist dual zum hermiteschen Polarraum $H(3,q^2)$, siehe Resultat 1.3.11 bzw. [TP76] oder [PT09]. Eine Faserung oder ein Ovoid in einem dieser Polarräume hat $q^3+1$ Elemente (Resultat 1.3.14).

Der hermitesche Polarraum $H(3,q^2) \subseteq \mathrm{PG}(3,q^2)$ besitzt Ovoide, denn jede Nicht-Tangentialhyperebene von $\mathrm{PG}(3,q^2)$ trifft $H(3,q^2)$ in einem $H(2,q^2)$ und die $q^3+1$ Punkte darin sind paarweise nicht aufeinander senkrecht. Mit der Dualität folgt, dass $Q^-(5,q)$ Faserungen besitzt. Dies sieht man auch direkt. Sei $\ell$ eine Gerade der elliptischen Quadrik $Q^-(5,q) \subseteq \mathrm{PG}(5,q)$. Dann ist $\ell^\perp$ ein Solid, der die Quadrik $Q^-(5,q)$ nur in $\ell$ trifft. Sei $\mathcal{G}$ eine Geradenfaserung dieses Solids, der die Gerade $\ell$ enthält. Dann besteht $\mathcal{G}$ aus der Geraden $\ell$ und aus $q^2$ Passanten der Quadrik. Für eine Passante $g \in \mathcal{G}$ ist $g^\perp$ ein Solid durch $\ell$, der die Quadrik $Q^-(5,q)$ in einer hyperbolische Quadrik $Q^+(3,q)$ trifft. In dieser Teilquadrik liegen $q$ Geraden, die $\ell$ nicht treffen. Sei $\mathcal{F}$ die Menge, die $\ell$ und diese $q$ Geraden für jede Passante $g \in \mathcal{G}$ enthält. Dann hat $\mathcal{F}$ genau $q^2 \cdot q + 1 = q^3+1$ Elemente und je zwei Elemente aus $\mathcal{F}$ sind windschief, denn für zwei verschiedene Passanten $g_1, g_2 \in \mathcal{G}$ ist $g_1 \cap g_2 = \emptyset$, also $\langle g_1, g_2 \rangle = \ell^\perp$ und daher $g_1^\perp \cap g_2^\perp = \ell$. Somit ist $\mathcal{F}$ eine Faserung von $Q^-(5,q)$.

Obwohl Faserungen von $Q^-(5,q)$ existieren, lässt sich nicht jede Teilfaserung zu einer Faserung ergänzen. Eine Teilfaserung $\mathcal{F}$ heißt *maximal*, wenn es keine Teilfaserung gibt, die $\mathcal{F}$ echt enthält. Im ersten Abschnitt dieses Kapitels wird die untere Schranke für maximale Teilfaserungen von $Q^-(5,q)$ verbessert.

Die Quadrik $Q^-(5,q)$ hat keine Ovoide, siehe beispielsweise [Tha81]. Dies bedeutet dual, dass der hermitesche Polarraum $H(3,q^2)$ keine Faserung besitzt. Somit hat ein Teilovoid von $Q^-(5,q)$ weniger als $q^3+1$ Elemente. In [BKMS08a] wird die obere Schranke $(q^3+q+2)/2$ für Teilovoide von $Q^-(5,q)$ bewiesen. Sie ist scharf für $q=2$ und $q=3$. Mit Hilfe des Computers wurde bereits gezeigt, dass diese Schranke für größere $q$ nicht mehr scharf ist. Im zweiten Abschnitt dieses Kapitels wird ein geometrischer Beweis dafür im Fall $q=4$ gegeben.

Die Beweise der beiden folgenden Abschnitte werden in der elliptischen Quadrik $Q^-(5,q)$ geführt. Die jeweiligen dualen Aussagen gelten dann im hermiteschen Polarraum $H(3,q^2)$.

## 3.1 Kleine maximale Teilfaserungen von $Q^-(5,q)$

Sei $\mathcal{F}$ eine maximale Teilfaserung von $Q^-(5,q)$ und $M$ die Menge der von Geraden aus $\mathcal{F}$ überdeckten Punkte. Die Punkte in $Q^-(5,q)\setminus M$ heißen *Löcher*. Jeder Punkt der Quadrik liegt auf $q^2+1$ Geraden der Quadrik. Ist $P$ ein Loch, dann trifft jede Gerade aus $\mathcal{F}$ genau eine Gerade durch $P$. Weil $\mathcal{F}$ maximal ist, muss jede Gerade durch $P$ von mindestens einer Geraden aus $\mathcal{F}$ blockiert werden. Hieraus folgt direkt $|\mathcal{F}| \geq q^2+1$.

Dual bedeutet dies, dass jedes maximale Teilovoid von $H(3,q^2)$ mindestens $q^2+1$ Punkte hat. Cossidente und Kochmáros konstruieren in [CK03] ein solches maximales Teilovoid mit genau $q^2+1$ Punkten, falls $q$ gerade ist. Sie starten mit einer elliptischen Quadrik $Q^-(3,q) \subseteq \mathrm{PG}(3,q)$. Für gerade $q$ bilden die Tangenten der elliptischen Quadrik die Erzeuger eines symplektischen Polarraums $W(3,q) \subseteq \mathrm{PG}(3,q)$. Erweitert man $\mathrm{PG}(3,q)$ zu $\mathrm{PG}(3,q^2)$, so kann der symplektische Polarraum $W(3,q)$ in einen hermiteschen Polarraum $H(3,q^2)$ eingebettet werden. Die Punkte der elliptischen Quadrik $Q^-(3,q)$ bilden dann ein maximales Teilovoid von $H(3,q^2)$ mit genau $q^2+1$ Punkten.

Dual ist diese Konstruktion eine Faserung einer parabolischen Quadrik $Q(4,q)$, die in einer elliptischen Quadrik $Q^-(5,q)$ enthalten ist und damit eine Teilfaserung von $Q^-(5,q)$ bildet. In [AEL06] wurde gezeigt, dass dies das einzige Beispiel einer maximalen Teilfaserung von $Q^-(5,q)$ mit $|\mathcal{F}| = q^2+1$ ist.

Für ungerade $q$ hat $Q(4,q)$ keine Faserung, hier ist die unterer Schranke für $|\mathcal{F}|$ größer. In [Met06] wurde bewiesen, dass keine maximalen Teilfaserungen von $Q^-(5,q)$ mit einer Mächtigkeit im Intervall $\left[q^2+2, q^2+1+4q/9\right]$ existieren. Dieses Ergebnis verbessern wir in diesem Abschnitt, indem wir die obere Schranke des Intervalls auf $q^2+1+(q-1)/2$ erhöhen. Wir zeigen außerdem erneut, dass eine maximale Teilfaserung von $Q^-(5,q)$ mit $q^2+1$ Elementen eine Faserung einer parabolischen Quadrik $Q(4,q) \subseteq Q^-(5,q)$ sein muss.

Die Beweisidee stammt aus [BHMS13]. Dort werden Mengen von Geraden in $Q^-(5,q^2)$ untersucht, die alle Geraden in $Q^-(5,q)$ blockieren. Eine maximale Teilfaserung ist eine solche Menge mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass die Geraden paarweise disjunkt sind.

Sei im folgenden $0 \leq \delta \in \mathbb{N}$ mit $|\mathcal{F}| = q^2+1+\delta$. Sei weiter $b_i$ für $0 \leq i \leq q+1$ die Anzahl der Geraden in $Q^-(5,q)$, die nicht in $\mathcal{F}$ liegen und genau $i$ Geraden aus $\mathcal{F}$ treffen. Für ein Loch $P$ sei $b_i(P)$ für $0 \leq i \leq q+1$ die Anzahl der Geraden in $Q^-(5,q)$ durch $P$, die genau $i$ Geraden aus $\mathcal{F}$ treffen.

**Lemma 3.1.1** *Für $\delta < q$ gelten die folgenden Aussagen.*

*(i) Für jedes Loch $P$ ist*

$$\sum_{i=0}^{q+1} b_i(P)(i-1) = \delta.$$

*(ii) Es gilt $b_i = 0$ für $i = 0$ und für $\delta + 1 < i < q+1$.*

*(iii) Es ist*

$$(q-\delta)\sum_{i=1}^{\delta+1} b_i(i-1) \le (q^3-q^2-\delta)(q+1)\delta.$$

*Beweis:* (i) $P$ liegt auf $q^2+1$ Geraden, daher ist $\sum_i b_i(P) = q^2+1$. Zählt man Paare von Geraden $(g,h)$ mit $P \in g$, $h \in \mathcal{F}$ und $g \cap h \neq \emptyset$, so erhält man $\sum_i b_i(P)i = |\mathcal{F}|$. Es folgt die Behauptung.

(ii) Es gibt keine Gerade, die keine Gerade aus $\mathcal{F}$ trifft, weil $\mathcal{F}$ maximal ist. Daher ist $b_0 = 0$. Sei nun $\ell$ eine Gerade, die nicht in $M$ enthalten ist, und $P$ ein Loch auf $\ell$. Die $q^2$ von $\ell$ verschiedenen Geraden durch $P$ treffen jeweils mindestens eine Gerade aus $\mathcal{F}$. Daher bleiben höchstens $|\mathcal{F}| - q^2 = \delta+1$ Geraden aus $\mathcal{F}$, die $\ell$ treffen können. Somit gibt es keine Gerade, die mehr als $\delta+1$ aber weniger als $q+1$ Geraden aus $\mathcal{F}$ trifft.

(iii) Wir zählen inzidente Paare $(P,\ell)$ mit Löchern $P$ und Geraden $\ell$ doppelt ab und erhalten

$$\sum_{P\notin M}\sum_{i=1}^{\delta+1} b_i(P) = \sum_{i=1}^{\delta+1} b_i(q+1-i).$$

Das Zählen von Tripeln $(P,\ell,R)$ mit $P$ Loch, $\ell$ Gerade, $P,R \in \ell$ und $R \in M$ ergibt

$$\sum_{P\notin M}\sum_{i=1}^{\delta+1} b_i(P)i = \sum_{i=1}^{\delta+1} b_i(q+1-i)i.$$

Die Kombination dieser beiden Gleichungen unter Verwendung von (i) liefert

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{\delta+1} b_i(q-\delta)(i-1) &\le \sum_{i=1}^{\delta+1} b_i(q+1-i)(i-1)\\ &= \sum_{P\notin M}\sum_{i=1}^{\delta+1} b_i(P)(i-1)\\ &= \left(\left|Q^-(5,q)\right| - |M|\right)\delta.\end{aligned}$$

Zusammen mit $|Q^-(5,q)| = (q+1)(q^3+1)$ und $|M| = (q^2+1+\delta)(q+1)$ folgt die Behauptung. $\square$

Eine *lange Gerade* sei eine Gerade aus $Q^-(5,q)$, die kein Element der Teilfaserung $\mathcal{F}$ ist, aber in $M$ enthalten ist. Es gibt also $b_{q+1}$ lange Geraden. Das nächste Lemma liefert eine untere Schranke für diese Anzahl.

**Lemma 3.1.2** *Sei $\delta < q$. Dann gilt*

$$b_{q+1} \ge q(q^2+\delta) + \frac{q^2+\delta}{q-\delta} - \frac{\delta^2(q^2-1)}{q-\delta}.$$

*Beweis:* Wir zählen inzidente Paare $(\ell, P)$ mit $\ell \notin \mathcal{F}$ Gerade aus $Q^-(5,q)$ und $P \in M$ doppelt ab und erhalten

$$\sum_{i=1}^{q+1} b_i i = |M|\, q^2.$$

Da in $Q^-(5,q)$ genau $(q^2+1)(q^3+1)$ Geraden liegen, ist

$$|\mathcal{F}| + \sum_{i=1}^{q+1} b_i = (q^2+1)(q^3+1)$$

und somit

$$\begin{aligned}
|\mathcal{F}|\, q + \sum_{i=1}^{q+1} b_i(i-1) &= |\mathcal{F}|\,(q+1) + \left(\sum_{i=1}^{q+1} b_i i\right) - (q^2+1)(q^3+1)\\
&= |M| + |M|\, q^2 - (q^2+1)(q^3+1)\\
&= (q^2+1+\delta)(q+1)(q^2+1) - (q^2+1)(q^3+1)\\
&= (q^2+1)(q+1)(q^2+1+\delta-q^2+q-1)\\
&= (q^2+1)(q+1)(q+\delta).
\end{aligned}$$

Aus Lemma 3.1.1(ii) folgt nun

$$(|\mathcal{F}| + b_{q+1})q = (q^2+1)(q+1)(q+\delta) - \sum_{i=1}^{\delta+1} b_i(i-1)$$

und zusammen mit 3.1.1(iii) ergibt das

$$\begin{aligned}
b_{q+1} &\geq \frac{1}{q}\left[(q^2+1)(q+1)(q+\delta) - \frac{1}{q-\delta}(q^3-q^2-\delta)(q+1)\delta\right] - |\mathcal{F}|\\
&= \frac{q^4+q^2-\delta^2q^2-\delta^2q+\delta^2-\delta q^3+\delta q^2+\delta}{q-\delta}\\
&= q(q^2+\delta) + \frac{q^2+\delta}{q-\delta} - \frac{\delta^2(q^2-1)}{q-\delta}.
\end{aligned}$$

□

Je kleiner $\delta$, desto größer ist die untere Schranke für die Zahl der langen Geraden. Für $\delta = 0$ folgt $b_{q+1} = q^3+q = (q^3+q^2+q+1) - (q^2+1)$, was die Anzahl der Geraden in einer parabolischen Quadrik $Q(4,q)$ ohne die Geraden einer Faserung von $Q(4,q)$ ist. In diesem Fall ist die Schranke also scharf (siehe Beginn dieses Abschnitts). Wir zeigen nun in den nächsten zwei Lemmas, dass auch für kleine $\delta > 0$ die große Anzahl an langen Geraden eine parabolische Teilquadrik $Q(4,q) \subseteq Q^-(5,q)$ liefert, die in $M$ enthalten ist.

**Lemma 3.1.3** *Ist $\delta \leq (q-1)/2$, dann existiert eine hyperbolische Teilquadrik $Q^+(3,q) \subseteq Q^-(5,q)$ mit $Q^+(3,q) \subseteq M$.*

*Beweis:* Jede lange Gerade trifft $q+1$ Geraden aus $\mathcal{F}$. Zählt man Paare $(h,g)$ sich schneidender Geraden $h \in \mathcal{F}$ und langen Geraden $g$ doppelt ab, so erhält man, dass eine Gerade $\ell \in \mathcal{F}$ existiert, die

$$x \geq \frac{b_{q+1}(q+1)}{|\mathcal{F}|}$$

lange Geraden trifft.
Jede der $x$ langen Geraden, die $\ell$ trifft, trifft $q$ weitere Geraden aus $\mathcal{F}$. Somit folgt erneut mit doppelter Abzählung, dass es eine Gerade $\ell' \in \mathcal{F} \setminus \{\ell\}$ gibt, so dass

$$z \geq \frac{xq}{|\mathcal{F}|-1} \geq \frac{b_{q+1}(q+1)q}{(q^2+1+\delta)(q^2+\delta)}$$

lange Geraden $\ell$ und $\ell'$ treffen.
Mit Lemma 3.1.2 und $0 \leq \delta \leq (q-1)/2$ folgt

$$\begin{aligned}
z &\geq \frac{q^2(q+1)}{q^2+1+\delta} + \frac{q(q+1)}{(q^2+1+\delta)(q-\delta)} - \frac{\delta^2(q^2-1)(q+1)q}{(q^2+1+\delta)(q^2+\delta)(q-\delta)} \\
&> \frac{2q^2(q+1)}{2q^2+q+1} + 0 - \frac{\delta^2}{q-\delta} \cdot \frac{(q-1)(q+1)^2}{(q^2+1)q} \\
&\geq \frac{q+1}{2}\left(\frac{2q^2}{q^2+\frac{q+1}{2}} - \frac{(q-1)^3}{(q^2+1)q}\right) \\
&> \frac{q+1}{2}\left(\frac{2q-1}{q+1} - \frac{q}{q+1}\right) \\
&\geq \delta.
\end{aligned}$$

Hierbei wurde für die dritte Zeile $q+1 \leq 2(q-\delta)$ verwendet. Es gibt also eine Gerade $\ell' \in \mathcal{F}$, so dass mindesten $\delta+1$ lange Geraden $\ell$ und $\ell'$ treffen. Die Geraden $\ell$ und $\ell'$ spannen eine hyperbolische Quadrik $Q^+(3,q) \subseteq Q^-(5,q)$ auf.
Angenommen ein Punkt $P \in Q^+(3,q)$ liegt nicht in $M$. Dann liegt $P$ weder auf $\ell$ oder $\ell'$ noch auf den langen Geraden, die $\ell$ und $\ell'$ treffen. Die Gerade in $Q^+(3,q)$ durch $P$, die $\ell$ und $\ell'$ trifft, hat daher mindestens zwei Punkte in $M$. Die andere Gerade in $Q^+(3,q)$ durch $P$ trifft die $\delta+1$ langen Geraden, die $\ell$ und $\ell'$ treffen, und enthält daher mindestens $\delta+1$ Punkte aus $M$. Es folgt $\sum_i b_i(P)(i-1) \geq 1+\delta > \delta$, ein Widerspruch zu Lemma 3.1.1(i). Somit liegen alle Punkte von $Q^+(3,q)$ in $M$. $\square$

**Lemma 3.1.4** *Ist $\delta \leq (q-1)/2$, dann existiert eine parabolische Teilquadrik $Q(4,q) \subseteq Q^-(5,q)$ mit $Q(4,q) \subseteq M$.*

*Beweis:* Sei $\ell \in \mathcal{F}$ die Gerade aus dem vorherigen Beweis, die von

$$x \geq \frac{b_{q+1}(q+1)}{|\mathcal{F}|}$$

langen Geraden getroffen wird. Dann existiert eine hyperbolische Quadrik $Q^+(3,q)$ durch $\ell$, die in $M$ enthalten ist.
Die hyperbolische Quadrik $Q^+(3,q)$ liegt in einem Solid $U$ von $\mathrm{PG}(5,q)$ und dieser ist in genau $q+1$ Hyperebenen von $\mathrm{PG}(5,q)$ enthalten. Jede dieser Hyperebenen trifft die Quadrik $Q^-(5,q)$ in einer parabolischen Quadrik $Q(4,q)$. Genau $q+1$ der langen Geraden, die $\ell$ treffen, liegen in $Q^+(3,q)$. Die restlichen $x-(q+1)$ dieser langen Geraden verteilen sich auf die $q+1$ Hyperebenen durch $U$.
Wegen $0 \leq \delta \leq (q-1)/2$ ist

$$q^4 + q^2 \geq (2\delta+1)(q^3+q)$$

und daher

$$q^4 + q^2 + \delta^3 + 3\delta^2 + 2\delta q^2 + 2\delta > (2\delta+1)(q^3+q) + 2\delta^2 q.$$

Dies ist äquivalent zu

$$q(q^2+\delta)(q-\delta) + q^2 + \delta - \delta^2(q^2-1) > (\delta+1)(q^2+1+\delta)(q-\delta).$$

Daraus und mit Lemma 3.1.2 folgt

$$\begin{aligned} \frac{x-(q+1)}{q+1} &\geq \frac{b_{q+1}}{|\mathcal{F}|} - 1 \\ &\geq \frac{q(q^2+\delta)(q-\delta) + q^2 + \delta - \delta^2(q^2-1)}{(q-\delta)(q^2+1+\delta)} - 1 \\ &> \delta. \end{aligned}$$

Es gibt also eine parabolische Quadrik $Q(4,q) \subseteq Q^-(5,q)$ durch $Q^+(3,q)$, die neben den langen Geraden in $Q^+(3,q)$ noch mindestens weitere $\delta+1$ lange Geraden enthält, die $\ell$ treffen.
Angenommen es gibt einen Punkt $P \in Q(4,q) \setminus M$. Dann liegt $P$ nicht in $Q^+(3,q)$ und auch auf keiner langen Geraden. Jede Gerade der parabolischen Quadrik $Q(4,q)$ durch $P$ trifft $Q^+(3,q)$ und genau eine dieser Geraden durch $P$ trifft $\ell$. Sei $R$ der Schnittpunkt, also der eindeutige Nachbar von $P$ auf $\ell$. Seien $g_1, \ldots, g_s$ die langen Geraden aus $Q$, die $\ell$ in einem von $R$ verschiedenen Punkt treffen, und nicht in $Q^+(3,q)$ liegen. Dann existiert genau eine Gerade $h_i$ durch $P$, die $g_i$ trifft. Der Schnittpunkt von $g_i$ und $h_i$ liegt nicht in $Q^+(3,q)$, weil $g_i$ nicht in $Q^+(3,q)$ enthalten ist und $R \notin g_i$ der eindeutige Nachbar von $P$ auf $\ell$ ist. Ist $h_i = h_j$ für $i \neq j$, so ist trotzdem $g_i \cap h_i \neq g_j \cap h_i$, weil sich $g_i$ und $g_j$ höchstens in einem Punkt $\neq R$ auf $\ell$ treffen. Die Geraden $h_i$ treffen außerdem $Q^+(3,q)$ außerhalb von $\ell$ und haben somit einen weiteren Punkt in $M$. Ist $s \geq \delta+1$, so folgt $\sum_i b_i(P)(i-1) \geq \delta + 1 > \delta$, ein Widerspruch zu Lemma 3.1.1(i).
Es ist also $s \leq \delta < q$. Damit existiert ein Punkt $S \neq R$ auf $\ell$, der auf keiner der Geraden $\ell_1, \ldots, \ell_s$ liegt. Es folgt, dass der Punkt $S$ auf genau einer langen Geraden aus $Q(4,q)$ liegt. Diese lange Gerade durch $S$ ist in $Q^+(3,q)$ enthalten. Sei $P'$ ein Nachbar von $S$ in $Q(4,q)$. Liegt $P'$ in $Q^+(3,q)$, so gilt $P' \in M$. Liegt $P'$

nicht in $Q^+(3,q)$, so zeigen die gleichen Argumente wie für $P$, dass $P'$ in $M$ liegt, weil nun mindestens $\delta+1$ lange Geraden aus $Q(4,q)$ die Gerade $\ell$ in einem von $S$ verschiedenen Punkt treffen und nicht in $Q^+(3,q)$ enthalten sind. Damit liegen alle Punkte aus $S^\perp \cap Q(4,q)$ in der Menge $M$. Somit sind alle von $\ell$ verschiedenen Geraden aus $Q(4,q)$ durch $S$ lange Geraden. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $S$ auf genau einer langen Geraden liegt. Dieser Widerspruch zeigt, dass alle Punkte $P \in Q(4,q)$ in $M$ liegen. $\square$

**Lemma 3.1.5** *Ist $\delta \leq (q-1)/2$, dann ist $\delta = 0$, $q$ gerade und $\mathcal{F}$ eine Faserung einer parabolischen Quadrik $Q(4,q) \subseteq Q^-(5,q)$.*

*Beweis:* Nach dem vorherigen Lemma existiert eine parabolische Teilquadrik $Q(4,q) \subseteq Q^-(5,q)$, die ganz in $M$ enthalten ist. Angenommen es gibt eine Gerade $k \in \mathcal{F}$, die nicht in $Q(4,q)$ liegt. Sei $S$ der Schnittpunkt von $k$ mit $Q(4,q)$. Dann liegt $S$ auf keiner Geraden von $\mathcal{F}$, die in $Q(4,q)$ enthalten ist. Daher werden die $q^2+q+1$ Punkte in $S^\perp \cap Q(4,q)$ jeweils von einer anderen Geraden aus $\mathcal{F}$ überdeckt. Es folgt $|\mathcal{F}| \geq q^2+q+1$, ein Widerspruch zu $\delta \leq (q-1)/2$. Deshalb liegen alle Geraden aus $\mathcal{F}$ in $Q(4,q)$ und überdecken $Q(4,q)$ vollständig. Sie bilden somit eine Faserung von $Q(4,q)$. Eine solche Faserung existiert nur für gerade $q$ und hat genau $q^2+1$ Elemente. Insgesamt folgt, dass $q$ gerade und $\delta = 0$ sein muss. $\square$

**Theorem 3.1.6** *Sei $\mathcal{F}$ eine maximale Teilfaserung von $Q^-(5,q)$.*

*(i) Ist $q$ ungerade, so ist $|\mathcal{F}| \geq q^2+(q+1)/2+1$.*

*(ii) Ist $q$ gerade, so ist entweder $|\mathcal{F}| = q^2+1$ und $\mathcal{F}$ eine Faserung einer parabolischen Quadrik $Q(4,q) \subseteq Q^-(5,q)$ oder $|\mathcal{F}| \geq q^2+q/2+1$.*

*Beweis:* Sei $|\mathcal{F}| = q^2+1+\delta$. Ist $\delta \leq (q-1)/2$, so zeigt das vorherige Lemma, dass $\delta = 0$, $q$ gerade und $\mathcal{F}$ eine Faserung einer parabolischen Quadrik $Q(4,q) \subseteq Q^-(5,q)$ ist. Somit folgt für ungerade $q$, dass $\delta > (q-1)/2$, also $\delta \geq (q+1)/2$, gilt. Für gerade $q$ ist entweder $\delta = 0$ und $\mathcal{F}$ eine Faserung einer parabolischen Quadrik $Q(4,q) \subseteq Q^-(5,q)$ oder $\delta > (q-1)/2$, also $\delta \geq q/2$. $\square$

Hieraus folgt sofort die entsprechende Aussage für den zu $Q^-(5,q)$ dualen Polarraum $H(3,q^2)$.

**Folgerung 3.1.7** *Sei $\mathcal{O}$ ein maximales Teilovoid von $H(3,q^2)$.*

*(i) Ist $q$ ungerade, so ist $|\mathcal{O}| \geq q^2+(q+1)/2+1$.*

*(ii) Ist $q$ gerade, so ist entweder $|\mathcal{O}| = q^2+1$ und $\mathcal{O}$ die Punktmenge einer eingebetteten elliptischen Quadrik $Q^-(3,q) \subseteq W(3,q) \subseteq H(3,q^2)$ oder es ist $|\mathcal{O}| \geq q^2+q/2+1$.*

## 3.2 Teilovoide von $Q^-(5,4)$

In [BKMS08a] zeigen de Beule, Klein, Metsch und Storme, dass eine Teilfaserung von $H(3,q^2)$ höchstens $(q^3+q+2)/2$ Elemente hat. Somit hat ein Teilovoid von $Q^-(5,q)$ ebenfalls höchstens $(q^3+q+2)/2$ Elemente. Für $q=2$ und $q=3$ ist diese Grenze scharf. Dye konstruierte in [Dye92] das folgende Beispiel für ein Teilovoid in $Q^-(5,2)$ mit $6=(2^3+2+2)/2$ Punkten.

**Beispiel 3.2.1** Sei $U$ ein Solid von $\mathrm{PG}(5,2) \supseteq Q^-(5,2)$, der die Quadrik $Q^-(5,2)$ in einer elliptischen Quadrik $Q^-(3,2)$ trifft. Dann ist $s := U^\perp$ eine Sekante. Sei weiter $E$ eine Tangentialebene von $Q^-(3,2)$, also eine Ebene, die die Quadrik in genau einem Punkt $P$ trifft. Dann ist $E^\perp$ eine Ebene durch die Sekante $s$, die $Q^-(5,2)$ in zwei Geraden durch $P$ trifft. Seien $R_1$ und $R_2$ die beiden von $P$ verschiedenen Punkte der Quadrik in $E^\perp$, die nicht auf $s$ liegen. Sei weiter $\mathcal{O} := \{R_1,R_2\} \cup (Q^-(3,2) \setminus \{P\})$. Wegen $R_i \notin s$ ist $U \nsubseteq R_i^\perp$. Da aber $R_i \in E^\perp$, gilt $E \subseteq R_i^\perp$, woraus nun $R_i^\perp \cap U = E$ folgt. Die Punkte in $\mathcal{O}$ sind somit paarweise nicht aufeinander senkrecht und es gilt $|\mathcal{O}| = 2^2+2 = 6 = (2^3+2+2)/2$.

Ebert und Hirschfeld konstruieren in [EH99] mit Hilfe des Computers eine Teilfaserung von $H(3,9)$ mit $16=(3^3+3+2)/2$ Elementen, was dual einem Teilovoid von $Q^-(5,3)$ mit 16 Punkten entspricht. Außerdem wird gezeigt, dass dieses Beispiel bis auf Isomorphie eindeutig ist.

Ebenfalls mit Hilfe des Computers wurden Teilfaserungen von $H(3,16)$ mit maximal $25 < 35 = (4^3+4+2)/2$ Elementen in [EH99] und in [ACE03] gefunden. Eine weitere Computersuche von Cimráková und Fack in [CF05] ergibt, dass es keine größeren Teilfaserungen von $H(3,16)$ gibt. Somit ist für $q=4$ die obere Schranke für Teilfaserungen von $H(3,q^2)$ aus [BKMS08a] nicht mehr scharf. Wir geben in diesem Abschnitt einen geometrischen Beweis hierfür. Dieser wird allerdings in der Struktur der elliptischen Quadrik $Q^-(5,4)$ geführt.

Neben der oberen Schranke werden in [BKMS08a] noch Eigenschaften einer Teilfaserung von $H(3,q^2)$ mit genau $(q^3+q+2)/2$ Elementen nachgewiesen. Insbesondere wird das folgende Resultat gezeigt, das hier dual, also in $Q^-(5,q)$, dargestellt wird.

**Resultat 3.2.2** (de Beule et al. [BKMS08a]) *Sei $\mathcal{O}$ ein Teilovoid der elliptischen Quadrik $Q^-(5,q)$ mit $(q^3+q+2)/2$ Elementen. Dann existiert ein zweites Teilovoid $\mathcal{O}'$ von $Q^-(5,q)$ mit $|\mathcal{O}'| = |\mathcal{O}| = (q^3+q+2)/2$ und $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' = \emptyset$. Außerdem blockieren $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ dieselben Geraden in $Q^-(5,q)$.*

**Lemma 3.2.3** *Seien $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ zwei disjunkte Teilovoide der elliptischen Quadrik $Q^-(5,q) \subseteq \mathrm{PG}(5,q)$ mit $|\mathcal{O}'| = |\mathcal{O}| = (q^3+q+2)/2$. Dann ist $|H \cap \mathcal{O}| = |H \cap \mathcal{O}'|$ für jede Hyperebene $H$ von $\mathrm{PG}(5,q)$, die die Quadrik $Q^-(5,q)$ in einer parabolischen Quadrik $Q(4,q)$ trifft.*

*Beweis:* Nach Resultat 3.2.2 blockieren $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ dieselben Geraden der Quadrik $Q^-(5,q)$. Jede Gerade durch einen Punkt aus $\mathcal{O}$ trifft damit $\mathcal{O}'$ genau einmal. Sei $H$ eine Hyperebene von $\mathrm{PG}(5,q)$, die die Quadrik $Q^-(5,q)$ in einer parabolischen

Quadrik $Q(4,q)$ trifft. Ein Punkt der parabolischen Quadrik $Q(4,q)$ liegt auf genau $q+1$ Geraden der Quadrik. Doppeltes Abzählen von inzidenten Paaren $(P,R)$ mit $P \in H \cap \mathcal{O}$ und $\mathcal{R} \in H \cap \mathcal{O}'$ liefert

$$|H \cap \mathcal{O}| \cdot (q+1) = |H \cap \mathcal{O}'| \cdot (q+1),$$

woraus die Behauptung folgt. □

**Theorem 3.2.4** *Es gibt kein Teilovoid von $Q^-(5,4)$ mit $(4^3+4+2)/2 = 35$ Elementen.*

*Beweis:* Angenommen ein solchens Teilovoid $\mathcal{O}$ mit genau 35 Elementen existiert. Dann gibt es nach Resultat 3.2.2 ein weiteres Teilovoid $\mathcal{O}'$ mit $|\mathcal{O}'| = 35$ und $\mathcal{O} \cap \mathcal{O}' = \emptyset$. Sei $P \in \mathcal{O}$. Der Punkt $P$ ist zu genau $4^2+1 = 17$ Punkten in $\mathcal{O}'$ benachbart. Wegen $17 < |\mathcal{O}'|$ existiert damit ein Punkt $R \in \mathcal{O}'$, der nicht auf $P$ senkrecht steht. Somit ist $PR$ eine Sekante und $U := (PR)^\perp$ ein Solid in PG$(5,4)$, der die Quadrik $Q^-(5,4)$ in einer dreidimensionalen elliptischen Quadrik $Q^-(3,4)$ trifft. Diese elliptische Quadrik enthält weder Punkte aus $\mathcal{O}$ noch Punkte aus $\mathcal{O}'$, weil die Punkte in $U$ auf $P$ und $R$ senkrecht stehen und damit nicht in $\mathcal{O}$ oder $\mathcal{O}'$ liegen können. Der Solid $U$ liegt in genau $q+1 = 5$ Hyperebenen von $PG(5,4)$. Dies sind $P^\perp, R^\perp$ und drei weitere Hyperebenen $H_1, H_2, H_3$, die die Quadrik $Q^-(5,4)$ jeweils in einer parabolischen Quadrik $Q(4,4)$ treffen. Jeder Punkt von PG$(5,4)$ außerhalb von $U$ liegt in genau einer dieser Hyperebenen. In $P^\perp$ liegen ein Punkt aus $\mathcal{O}$ und $4^2+1$ Punkte aus $\mathcal{O}'$. In $R^\perp$ sind diese Zahlen genau umgekehrt, daher ist

$$|(P^\perp \cup R^\perp) \cap \mathcal{O}| = |(P^\perp \cup R^\perp) \cap \mathcal{O}'| = 4^2+1+1 = 18.$$

Es bleiben $35 - 18 = 17$ Punkte aus $\mathcal{O}$ bzw. $\mathcal{O}'$, die sich auf die restlichen drei Hyperebenen $H_1, H_2, H_3$ durch $U$ aufteilen. Wir schließen im folgenden eine Reihe von Schnittzahlen $a_i := |H_i \cap \mathcal{O}|$ für $i = 1,2,3$ aus. Aus Lemma 3.2.3 wissen wir bereits $a_i := |H_i \cap \mathcal{O}| = |H_i \cap \mathcal{O}'|$.

$\boldsymbol{a_i \notin \{1,2,\ldots,8\}}$ **:** Angenommen $a_i > 0$, dann gibt es einen Punkt $S \in H_i \cap \mathcal{O}$. Der Punkt $S$ liegt in $H_i$ auf genau $q+1 = 5$ Geraden der Quadrik, die alle das Teilovoid $\mathcal{O}'$ treffen. Daher ist $a_i \geq 5$. Sei $T \neq S$ ein weiterer Punkt aus $H_i \cap \mathcal{O}$. Dann ist $\ell := ST$ eine Sekante und $E := \ell^\perp \cap H_i$ ist eine Ovalebene durch den Nukleus $N$ der parabolischen Quadrik $Q(4,4)$ in $H_i$. Die Ebene $E^\perp$ enthält $\ell$ und ist ebenfalls eine Ovalebene in $H_i$ durch den Nukleus $N$. Da sowohl $S$ als auch $T$ genau $4+1 = 5$ Nachbarn in $H_i \cap \mathcal{O}'$ haben, es aber genau $a_i$ Punkte in $H_i \cap \mathcal{O}'$ gibt und nur in $E$ gemeinsame Nachbarn liegen, gilt

$$\alpha := |E \cap \mathcal{O}'| \geq 2 \cdot 5 - a_i. \tag{3a}$$

Angenommen $\alpha > 0$ (dies ist insbesondere für $a_i < 10$ der Fall). Sei $\beta := |E^\perp \cap \mathcal{O}|$. Seien $A, B \in E \cap Q(4,4)$ zwei verschiedene Punkte. Dann sind die Geraden der Form $AX$ mit $X \in E^\perp \cap Q(4,4)$ alle Geraden der Quadrik $Q(4,4)$ durch $A$. Analog sind für $B$ die Geraden $BX'$ mit $X' \in E^\perp$ alle Geraden der Quadrik $Q(4,4)$ durch $B$. Diese Geraden $AX$ und $BX'$ treffen sich nur für $X = X'$ und dann ist der

Schnittpunkt der Punkt $X \in E^\perp$, denn jeder Schnittpunkt von $AX$ und $BX'$ liegt in $(AB)^\perp = E^\perp$. Somit liegt jeder Punkt der Quadrik $Q(4,4)$, der nicht in $E$ oder $E^\perp$ liegt, auf höchstens einer Geraden der Quadrik, die $E$ und $E^\perp$ trifft. Durch Zählen erhält man, dass jeder Punkt aus $Q(4,4) \setminus (E \cup E^\perp)$ auf genau einer solchen Geraden liegt. Außerdem blockieren $\mathcal{O}$ und $\mathcal{O}'$ dieselben Geraden. Somit trifft jede der $4+1 = 5$ Geraden durch einen der $\alpha$ Punkte in $E \cap \mathcal{O}'$ die Menge $\mathcal{O}$. $\beta$ dieser Geraden treffen $\mathcal{O}$ in $E^\perp$. Analog kann man für die $\beta$ Punkte in $E^\perp \cap \mathcal{O}$ argumentieren. Es folgt

$$\alpha(5-\beta) + \beta + x = a_i = \beta(5-\alpha) + \alpha + x,$$

wobei $x$ die Anzahl der Geraden der Quadrik $Q(4,4)$ ist, die $E$ und $E^\perp$ treffen und außerdem $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$ außerhalb von $E \cup E^\perp$ treffen. Hieraus folgt $\alpha = \beta$ und

$$6\alpha - \alpha^2 \leq a_i. \tag{3b}$$

Angenommen $\alpha = \beta \geq 4$. Der Solid $U$ enthält keine der beiden Ebenen $E$ und $E^\perp$, weil $U$ die Quadrik in einer elliptischen Quadrik $Q^-(3,4)$ trifft und damit nicht den Nukleus $N$ enthält. Somit trifft $U$ eine der beiden Ebenen in einer Passante und die andere in einer Sekante. Weil beide Ebenen höchstens einen Punkt haben, der nicht in $\mathcal{O}$ oder $\mathcal{O}'$ liegt, trifft $U$ die Menge $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$. Dies ist ein Widerspruch, denn $U$ enthält keine Punkte aus $\mathcal{O} \cup \mathcal{O}'$.
Es folgt $\alpha \leq 3$ und damit $a_i \geq 7$ nach (3a). Für $a_i = 7$ ist also $\alpha = 3$ und es folgt ein Widerspruch aus (3b).
Angenommen $a_i = 8$, dann ist nach (3a) $\alpha \geq 2$. Die Werte $\alpha = 3$ und $a_i = 8$ widersprechen (3b), also bleibt nur $\alpha = \beta = 2$. Die Punkte $S$ und $T$ haben in $H_i$ genau zwei gemeinsame Nachbarn aus $\mathcal{O}'$ (diese liegen in $E$) und jeweils drei weitere voneinander verschiedene Nachbarn in $\mathcal{O}'$, was zusammen alle acht Punkte aus $\mathcal{O}' \cap H_i$ sind (das bedeutet $x = 0$ in der obigen Gleichung). Somit ist jeder Punkt in $\mathcal{O}' \cap H_i$ ein Nachbar von $S$ oder $T$. Sei $Y \neq S, T$ ein weiterer Punkt aus $\mathcal{O} \cap H_i$. Dann hat auch $Y$ genau fünf Nachbarn in $\mathcal{O}' \cap H_i$ und daher mit $S$ oder $T$ mindestens drei gemeinsame Nachbarn. Sei dies o.B.d.A. $S$. Dann ist $\ell' := SY$ eine Sekante, $E' := \ell'^\perp \cap H_i$ eine Ovalebene durch den Nukleus $N$ und $\alpha' := |E' \cap \mathcal{O}'|$ nach den vorangegangenen Überlegungen größer oder gleich drei. Analog zu $\alpha \leq 3$ zeigt man aber auch $\alpha' \leq 3$, also ist $\alpha' = 3$. Dies widerspricht der zu (3b) analogen Ungleichung für $\alpha'$.
Insgesamt haben wir gezeigt, dass $a_i = 0$ oder $a_i > 8$ gelten muss.

$\boldsymbol{a_i \neq 17}$**:** Angenommen $a_i = 17 = 4^2 + 1$, dann ist $H_i \cap \mathcal{O}$ ein Ovoid der parabolischen Quadrik $Q(4,4)$ in $H_i$. Nach [BNS87] trifft ein Ovoid von $Q(4,4)$ jede elliptische Teilquadrik $Q^-(3,4)$ in einer ungeraden Anzahl von Punkten. Der Solid $U$ trifft $Q(4,4)$ in einer elliptischen Quadrik $Q^-(3,4)$. Damit haben $H_i \cap \mathcal{O}$ und der Solid $U$ mindestens einen Punkt gemeinsam. Dies ist ein Widerspruch zu $U \cap \mathcal{O} = \emptyset$.

Insgesamt erhalten wir $a_1 + a_2 + a_3 = 17$ und $a_i \neq \{1, 2, \ldots, 8, 17\}$. Dies ist nicht möglich und damit ein Widerspruch zur Annahme, dass ein solches Teilovoid $\mathcal{O}$ existiert. □

Die hierzu duale Aussage ist nun ebenfalls bewiesen.

**Folgerung 3.2.5** *Es gibt keine Teilfaserung von $H(3,16)$ mit $(4^3+4+2)/2 = 35$ Elementen.*

# 4 $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper

Die Untersuchungen in diesem Kapitel gehen auf die Klassifizierung von Griesmer-Codes zurück. Diese Codes können bijektiv auf gewisse Gewichtsfunktionen von $\mathrm{PG}(k-1,q)$ abgebildet werden, so genannte Minihyper. In diesem Kapitel werden bestimmte Minihyper klassifiziert und damit bestehende Resultate verbessert.

**Definition 4.0.1** Eine *Minihyper* des projektiven Raums $\mathrm{PG}(k-1,q)$ ist eine Gewichtsfunktion $w : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0$ von der Punktmenge $\mathcal{P}$ des projektiven Raums $\mathrm{PG}(k-1,q)$ in die Menge der nicht-negativen ganzen Zahlen.

Für einen Punkt $P$ heißt $w(P)$ das *Gewicht* von $P$, und für eine Menge $Y \subseteq \mathcal{P}$ ist $w(Y) := \sum_{P\in Y} w(P)$ das *Gewicht* von $Y$. Die Parameter der Minihyper sind

- die Dimension des projektiven Raums $k-1$,
- die Ordnung des zugrunde liegenden Körpers $q$,
- das Gesamtgewicht $f := w(\mathcal{P})$
- und das minimale Gewicht einer Hyperebene

$$m := \min\{w(H) \mid H \text{ Hyperebene von } \mathrm{PG}(k-1,q)\}.$$

Eine Minihyper $w$ mit diesen Parametern wird allgemein als $\{f, m; k-1, q\}$-Minihyper bezeichnet. Ist $w(P) \in \{0,1\}$ für alle $P \in \mathcal{P}$, so heißt $w$ auch *ungewichtete Minihyper* und entspricht einer Teilmenge der Punktmenge.

Ursprünglich wurden Minihyper von Hamada und Tamari in [HT78] definiert, um die maximale Mächtigkeit einer Punktmenge $M$ des projektiven Raums $\mathrm{PG}(r,q)$ zu untersuchen mit der Eigenschaft, dass je $s+1$ Punkte aus $M$ einen $s$-dimensionalen Unterraum aufspannen. In [Ham87] erklärt Hamada die Korrespondenz zwischen $[n,k,d,q]$-Griesmer-Codes mit $d < q^{k-1}$ und ungewichteten Minihypern. Diese Korrespondenz wird von Hamada und Helleseth in [HH01] auf alle Griesmer-Codes und gewichtete Minihyper erweitert.

**Resultat 4.0.2** (Hamada [Ham87], Hamada und Helleseth [HH01]) *Seien $k, \lambda \in \mathbb{N}$ und sei $m_i \in \mathbb{N}_0$ mit $k \geq 3$, $m_i \leq q-1$ und $(m_0, \ldots, m_{k-2}) \neq (0, \ldots, 0)$, dann kann die Menge der nicht äquivalenten*

$$[\lambda\theta_{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} m_i\theta_i, k, \lambda q^{k-1} - \sum_{i=0}^{k-2} m_i q^i, q]\text{-}\textit{Griesmer-Codes}$$

*bijektiv auf die Menge der nicht isomorphen*

$$\{\sum_{i=0}^{k-2} m_i\theta_i, \sum_{i=1}^{k-2} m_i\theta_{i-1}; k-1, q\}\text{-Minihyper } w$$

*mit $w(P) \leq \lambda$ für alle Punkte $P$ abgebildet werden.*

Eine Klassifizierung der Minihyper liefert somit eine Klassifizierung der Griesmer-Codes. Wir betrachten in diesem Kapitel $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper in der Situation, dass $q$ eine quadratische Primzahlpotenz, $\mu \leq k-2$ und $\delta$ klein ist. Solche Minihyper sind nicht nur für die Codierungstheorie interessant, sondern auch für die Untersuchung maximaler partieller $\mu$-Faserungen und minimaler $\mu$-Überdeckungen von $\mathrm{PG}(k-1, q)$ mit $\mu + 1 \mid k$.

**Resultat 4.0.3** (Govaerts und Storme [GS03]) *Es gelte $\mu + 1 \mid k$.*

*(i) Sei $L$ die Menge der Löcher einer partiellen $\mu$-Faserung von $\mathrm{PG}(k-1, q)$ mit $|L| = \delta\theta_\mu$ und $\delta < q$. Dann ist $L$ die Punktmenge einer ungewichteten $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper.*

*(ii) Sei $\mathcal{C}$ eine $\mu$-Überdeckung von $\mathrm{PG}(k-1, q)$ mit $\theta_{k-1}/\theta_\mu + \delta$ Elementen und $\delta < q$. Sei $w : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0$, so dass $w(P) + 1$ gleich der Anzahl der Elemente aus $\mathcal{C}$ ist, die $P$ enthalten. Dann ist $w$ eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper.*

**Beispiele 4.0.4** (i) Sei $U$ ein $\mu$-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{PG}(k-1, q)$ mit $\mu < k-1$, dann ist $w^U : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0$ mit

$$w^U(P) := \begin{cases} 1 & \text{falls } P \in U \\ 0 & \text{falls } P \notin U \end{cases}$$

eine (ungewichtete) $\{\theta_\mu, \theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper.

(ii) Sei $q$ eine Quadratzahl und $\Omega$ ein Baer-Kegel in $\mathrm{PG}(k-1, q)$ vom Typ $B_{s,t}$ mit Spitze $S$ und $t > 0$, dann ist $w^\Omega : \mathcal{P} \to \mathbb{N}_0$ mit

$$w^\Omega(P) := \begin{cases} \sqrt{q} + 1 & \text{falls } P \in S \\ 1 & \text{falls } P \in (\Omega \setminus S) \\ 0 & \text{falls } P \notin \Omega \end{cases}$$

eine $\{(\sqrt{q}+1)\theta_\mu, (\sqrt{q}+1)\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper mit $\mu := s + (t+1)/2$ für ungerade $t$ und eine $\{\theta_\mu + \sqrt{q}\theta_{\mu-1}, \theta_{\mu-1} + \sqrt{q}\theta_{\mu-2}; k-1, q\}$-Minihyper mit $\mu := s + t/2 + 1$ für gerade $t$.

(iii) Seien $w_i$, $i = 1, \ldots, n$, $\{f_i, m_i; k-1, q\}$-Minihyper des selben projektiven Raums $\mathrm{PG}(k-1, q)$, dann ist $w := \sum w_i$ eine $\{f, m; k-1, q\}$-Minihyper mit $f = \sum f_i$ und $m \geq \sum m_i$.

Für die Definition von Baer-Kegeln siehe Abschnitt 1.2. Dort wird außerdem gezeigt, dass Baer-Kegel projizierten Baer-Untergeometrien entsprechen. Ein Baer-Kegel $\Omega$ vom Typ $B_{s,t}$ entspricht dabei dem Bild einer Projektion einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(2s+t+2,\sqrt{q})$. Daher bezeichnen wir diesen Baer-Kegel $\Omega$ auch als *projizierte Baer-Untergeometrie* $\mathrm{pPG}(2s+t+2,\sqrt{q})$. Diese Bezeichnung erklärt intuitiver die möglichen Schnitte mit anderen Baer-Kegeln oder mit Unterräumen. Beide Bezeichnungen haben ihre Vorteile, weshalb sie auch beide in diesem Kapitel verwendet werden. Außerdem gilt für $t > 0$ und $w^\Omega$ wie in (ii) des obigen Beispiels

$$w^\Omega(\mathcal{P}) = (\sqrt{q}+1)\theta_s + q^{s+1}\frac{(\sqrt{q})^{t+1}-1}{\sqrt{q}-1} = |\mathrm{PG}(2s+t+2,\sqrt{q})|\,. \tag{4a}$$

Die Einschränkung $t > 0$ ist für die Wohldefiniertheit von $w^\Omega$ wichtig, denn ein Baer-Kegel $\Omega_1$ vom Typ $B_{s,0}$ und ein Baer-Kegel $\Omega_2$ vom Typ $B_{s+1,-1}$ sind beides Unterräume der Dimension $s+1$. Eine zu (ii) analoge Definition für $w^{\Omega_1}$ und $w^{\Omega_2}$ führt aber zu zwei verschiedenen Gewichtsfunktionen, die zudem beide nicht der Funktion $w^U$ für einen $(s+1)$-dimensionalen Unterraum $U$ entsprechen.

**Bemerkung 4.0.5** Ist $\Omega$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,1}$, dann ist $\Omega$ die Vereinigung von $\sqrt{q}+1$ verschiedenen $(s+1)$-dimensionalen Unterräumen $U_1,\dots,U_{\sqrt{q}+1}$, die sich paarweise in der $s$-dimensionalen Spitze $S$ treffen und daher ist

$$w^\Omega = \sum_{i=1}^{\sqrt{q}+1} w^{U_i}.$$

Eine Minihyper, die durch einen Unterraum $U$ oder einen Baer-Kegel $\Omega = B_{s,t}$ mit $t > 0$ wie in (i) bzw. (ii) des Beispiels definiert wird, bezeichnen wir für den Rest des Kapitels mit $w^U$ bzw. $w^\Omega$. Ist die Minihyper $w$ eine Summe $w = \sum w_i$ wie in (iii) des Beispiels und ist $w_i = w^{U_i}$ oder $w_i = w^{\Omega_i}$ mit $U_i$ Unterraum und $\Omega_i$ Baer-Kegel vom Typ $B_{s_i,t_i}$ mit $t_i > 0$, so sagen wir, dass $w$ die *Summe von Unterräumen $U_i$ und projizierten Baer-Untergeometrien $\Omega_i$* ist. Mit der vorangegangenen Bemerkung können wir in einer solchen Summe die $w^{\Omega_i}$ mit $t_i = 1$ durch eine Summe von Unterräumen ersetzen, weshalb hierbei sogar $t_i > 1$ gefordert werden kann.

**Beispiel 4.0.6** Seien $\Omega_1,\dots,\Omega_x$ projizierte Baer-Untergeometrien $\mathrm{pPG}(2\mu+1,\sqrt{q})$ von $\mathrm{PG}(k-1,q)$, deren Basen jeweils mindestens Dimension Eins haben und seien $U_1,\dots,U_y$ Unterräume $\mathrm{PG}(\mu,q)$ von $\mathrm{PG}(k-1,q)$. Gibt es außerdem eine Hyperebene $H$ von $\mathrm{PG}(k-1,q)$ mit $\Omega_i \cap H = \mathrm{pPG}(2\mu-1,\sqrt{q})$ und $U_j \cap H = \mathrm{PG}(\mu-1,q)$ für $i = 1,\dots,x$ und $j = 1,\dots y$, dann ist

$$w := \sum_{i=1}^{x} w^{\Omega_i} + \sum_{j=1}^{y} w^{U_j}$$

eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper mit $\delta := (\sqrt{q}+1)x + y$.

**Lemma 4.0.7** *Die im voran gegangenen Beispiel definierte Gewichtsfunktion $w$ ist eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper mit $\delta := (\sqrt{q}+1)x + y$.*

*Beweis:* Sei $\mathcal{P}$ die Punktmenge von $\mathrm{PG}(k-1,q)$, dann ist mit (4a)

$$\begin{aligned} w(\mathcal{P}) &= \sum_{i=1}^{x} w^{\Omega_i}(\mathcal{P}) + \sum_{j=1}^{y} w^{U_j}(\mathcal{P}) \\ &= x\,|\mathrm{PG}(2\mu+1,\sqrt{q})| + y\,|\mathrm{PG}(\mu,q)| \\ &= x(\sqrt{q}+1)\theta_\mu + y\theta_\mu \\ &= \delta\theta_\mu. \end{aligned}$$

Jede Hyperebene $H$ von $\mathrm{PG}(k-1,q)$ trifft $\Omega_i$ in einer projizierten Baer-Untergeometrie der Dimension mindestens $2\mu-1$ (Beweis hiervon später in Lemma 4.1.4) und $U_j$ in einem Unterraum der Dimension mindestens $\mu-1$. Daraus folgt $w(H) \geq \delta\theta_{\mu-1}$ mit Gleichheit für mindestens eine Hyperebene $H$ nach Voraussetzung. □

Beispiel 4.0.6 zeigt, wie man $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper und damit auch entsprechende Griesmer Codes konstruiert. Diese Konstruktion wurde in ähnlicher Form von Belov, Logachev und Sandimirov in [BLS74] entwickelt. Ziel dieses Kapitels ist es, für gewisse Parameter die Umkehrung zu beweisen, also zu zeigen, dass eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper die Summe von $\mu$-dimensionalen Unterräumen und von projizierten Baer-Untergeometrien der Dimension $2\mu+1$ ist. Es gibt bereits die folgenden Ergebnisse dieser Art.

**Resultat 4.0.8** (Govaerts und Storme [GS03]) *Sei $q+\epsilon$ die Mächtigkeit einer kleinsten minimalen nicht-trivialen blockierenden Menge in* $\mathrm{PG}(2,q)$. *Sei weiter $w$ eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper mit $q > 2$, $0 \leq \delta < \epsilon$ und $\mu \leq k-2$. Dann ist $w$ die Summe von $\delta$ Unterräumen der Dimension $\mu$.*

**Resultat 4.0.9** (Govaerts und Storme [GS02]) *Sei $w$ eine ungewichtete $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper mit $q > 16$ Quadratzahl und $\delta < q^{5/8}/\sqrt{2}+1$. Dann ist $w$ die Summe von paarweise disjunkten Unterräumen* $\mathrm{PG}(\mu,q)$ *und Baer-Untergeometrien* $\mathrm{PG}(2\mu+1,\sqrt{q})$.

Wir erweitern diese Resultate und beweisen in diesem Kapitel das folgende Theorem. Die Ergebnisse dieses Kapitels werden in Kürze bei der Zeitschrift "Advances in Mathematics of Communications" eingereicht, siehe [BMS].

**Theorem 4.0.10** *Sei $w$ eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper mit $q = p^{2h}$, $p$ Primzahl, $p \geq 11$, $k \geq 4$, $1 \leq \mu \leq k-2$, $\delta \leq (q-1)/4$ und falls $h > 1$ noch*

$$\delta + \frac{\delta^2}{q} + \frac{2\delta^2-\delta}{q^2} + \frac{\delta^2-\delta}{q^3} < 1+\epsilon,$$

*wobei $q+1+\epsilon$ die Mächtigkeit einer kleinsten minimalen blockierenden Menge in* $\mathrm{PG}(2,q)$ *ist, die keine Gerade und keine Baer-Unterebene ist. Dann ist $w$ die Summe von $\mu$-dimensionalen Unterräumen* $\mathrm{PG}(\mu,q)$ *und projizierten Baer-Untergeometrien* $\mathrm{pPG}(2\mu+1,\sqrt{q})$ *deren Basisdimensionen größer oder gleich Drei sind. Diese Summe ist bis auf Reihenfolge der Summanden eindeutig.*

Ein projizierter Baer-Unterraum $\Omega$ der Dimension $2\mu+1$ ist ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-1-2s}$ mit $s \in \{-1,\ldots,\mu\}$. Für $s=\mu$ ist $\Omega$ ein $\mu$-dimensionaler Unterraum $\mathrm{PG}(\mu,q)$. Für $s=\mu-1$ ist nach Bemerkung 4.0.5 die Minihyper $w^\Omega$ die Summe von Unterräumen der Dimension $s+1=\mu$. Um eine (bis auf Reihenfolge der Summanden) eindeutige Summe $w$ in Theorem 4.0.10 zu erhalten, muss daher die Basisdimension der Baer-Kegel mindesten Drei sein (bzw. $s \leq \mu-2$). Wir nennen die eindeutigen Unterräume und projizierten Baer-Untergeometrien die *Komponenten* von $w$ bzw. genauer *Unterraum-Komponenten* und *Baer-Komponenten*.

**Bemerkung 4.0.11** Die Aussage von Theorem 4.0.10 für $\mu=1$ ist das Hauptresultat von Storme in [Sto08]. Wegen $s \leq \mu-2=-1$ ist in diesem Fall die Minihyper $w$ die Summe von Geraden $\mathrm{PG}(1,q)$ und von (nicht projizierten) Baer-Untergeometrien $\mathrm{PG}(3,\sqrt{q})$.

## 4.1 Vorbereitungen

Bevor wir mit dem Beweis von Theorem 4.0.10 anfangen, beweisen wir in diesem Abschnitt noch einige Aussagen, die dafür benötigt werden. Im ersten Teilabschnitt stellen wir Resultate über Minihyper zusammen. Im zweiten werden Schnitte zwischen Baer-Kegeln und Unterräumen betrachtet. Im dritten Teilabschnitt wird gezeigt, wie eine Baer-Komponente der Minihyper aus dieser "entfernt" werden kann, was anschließend einen induktiven Beweis von Theorem 4.0.10 ermöglicht.

### Benötigte Resultate über Minihyper

In diesem Teilabschnitt nennen wir drei Resultate über Minihyper, die im folgenden verwendet werden. Zum Teil sind die Resultate umformuliert. Für eine Minihyper $w$ und einen Unterraum $U$ bezeichnen wir mit $w_U$ die Einschränkung von $w$ auf $U$.

**Resultat 4.1.1** (Hamada [Ham93]) *Sei $w$ eine $\{\sum_{i=0}^{k-2} m_i\theta_i, \sum_{i=0}^{k-2} m_i\theta_{i-1}; k-1, q\}$-Minihyper mit $0 \leq m_i \leq q-1$ und $(0,\ldots,0) \neq (m_0,\ldots,m_{k-2})$.*

*(i) Für alle $0 \leq n \leq k-1$ ist das minimale Gewicht eines Unterraums der Dimension $k-1-n$ gleich $\sum_{i=n}^{k-2} m_i\theta_{i-n}$.*

*(ii) Ist $\Delta$ ein Unterraum der Dimension $k-3$ mit minimalem Gewicht und sind $H_j$, $j=0,\ldots,q$, die Hyperebenen durch $\Delta$, dann ist $w_{H_j}$ eine*

$$\{\epsilon_j + \sum_{i=1}^{k-2} m_i\theta_{i-1}, \sum_{i=1}^{k-2} m_i\theta_{i-2}; k-2, q\} - \textit{Minihyper}$$

*von $H_j$ für $j=0,\ldots,q$ mit $\epsilon_j \in \mathbb{N}_0$ und $\sum_{j=0}^{q} \epsilon_j = m_0$.*

**Resultat 4.1.2** (Ferret und Storme [FS02], Hamada und Helleseth [HH93]) *Sei $w$ eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper von $\mathrm{PG}(k-1,q)$ mit $1 \leq \mu \leq k-2$ und $\delta \leq (q+1)/2$, und sei $H$ eine Hyperebene von $\mathrm{PG}(k-1,q)$. Dann ist die Einschränkung $w_H$ von $w$ auf $H$ eine $\{\sum_{i=0}^{\mu} m_i\theta_i, \sum_{i=0}^{\mu} m_i\theta_{i-1}; k-2, q\}$-Minihyper, wobei $\sum_{i=0}^{\mu} m_i = \delta$ gilt.*

Insbesondere ist für eine Hyperebene $H$ mit minimalem Gewicht $w(H) = \delta\theta_{\mu-1}$ die Einschränkung $w_H$ eine $\{\delta\theta_{\mu-1}, \delta\theta_{\mu-2}; k-2, q\}$-Minihyper.

**Resultat 4.1.3** (Ferret und Storme [FS02], Hamada und Helleseth [HH93]) *Sei $w$ eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper $w$ mit $0 \leq \delta < q$, und sei $U$ ein $N$-dimensionaler Unterraum, der Punkte vom Gewicht Null enthält. Dann ist die Einschränkung $w_U$ von $w$ auf $U$ eine $\{\sum_{i=0}^{x} m_i\theta_i, \sum_{i=0}^{x} m_i\theta_{i-1}; N, q\}$-Minihyper, wobei $x := \min(N-1, \mu)$ und $\sum_{i=0}^{x} m_i \leq \delta$ gilt.*

## Schnitte zwischen Baer-Kegeln und Unterräumen

In diesem Teilabschnitt untersuchen wir, wie sich Baer-Kegel untereinander und mit Unterräumen schneiden.

**Lemma 4.1.4** *Sei $B$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,t}$ und Spitze $S$ im projektiven Raum $\mathrm{PG}(d,q)$.*

*(i) Für jeden Unterraum $U$ von $\mathrm{PG}(d,q)$ ist $U \cap B$ ein Baer-Kegel mit Spitze $U \cap S$ vom Typ $B_{s',t'}$, wobei $s' \leq s$, $t' \leq t$ und $s'+t' \leq \dim(U)-1$ gilt.*

*(ii) Ist $U$ eine Hyperebene von $\mathrm{PG}(d,q)$, die $B$ nicht enthält, dann ist $U \cap B$ ein Baer-Kegel mit Spitze $U \cap S$ vom Typ $B_{s-1,t}$, $B_{s,t-1}$ oder $B_{s,t-2}$.*

*Beweis:* Sei $S' := U \cap S$ und sei $T'$ ein Komplement von $S'$ in $U \cap \langle B\rangle$. Sei weiter $T$ ein Komplement von $S$ in $\langle B\rangle$ mit $T' \subseteq T$. Dann ist $B \cap T$ eine Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(t,\sqrt{q})$ und $B$ der Kegel mit Spitze $S$ über dieser Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(t,\sqrt{q})$. $T'$ trifft diese Baer-Untergeometrie in einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(t',\sqrt{q})$ mit $t' \leq t$. Zusammen mit $U \cap \langle B\rangle = \langle S', T'\rangle$ folgt (i). Sei nun $U$ eine Hyperebene und $B \nsubseteq U$, also $\dim(\langle B\rangle \cap U) = \dim(\langle B\rangle)-1$. Ist $S \subseteq U$, dann ist $T'$ eine Hyperebene von $T$, die die Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(t,\sqrt{q})$ in einer Baer-Untergeometrie der Dimension $t-1$ oder $t-2$ trifft. Ist $S \nsubseteq U$, also $\dim(S') = s-1$, so gilt $T \subseteq U$ und $U \cap B$ ist ein Kegel mit Spitze $S'$ vom Typ $B_{s-1,t}$. □

**Lemma 4.1.5** *Seien $B$ und $B'$ zwei Baer-Kegel des projektiven Raums $\mathrm{PG}(d,q)$ mit $B' \subseteq B$. Sei weiter $B$ vom Typ $B_{s,t}$ mit $t \geq 3$, $B'$ vom Typ $B_{s',t'}$ und $t+2s = t'+2s'+1$. Dann tritt einer der folgenden Fälle ein.*

*(i) $B'$ ist vom Typ $B_{s,t-1}$ und die Spitzen der beiden Kegel sind identisch.*

*(ii) $B'$ ist vom Typ $B_{s-1,t+1}$, die Spitze von $B'$ ist in der Spitze von $B$ enthalten und die Spitze von $B$ ist im Kegel $B'$ enthalten.*

*Beweis:* Wegen $B' \subseteq B$ ist $\langle B' \rangle \subseteq \langle B \rangle$, also $s'+t' \leq s+t$. Da zudem $2s+t = 2s'+t'+1$ gilt, folgt $s' \geq s-1$. Sei $S$ die Spitze von $B$ und die Baer-Untergeometrie $C := \mathrm{PG}(t, \sqrt{q})$ eine Basis von $B$. Dann liegt $C$ in einem $t$-dimensionalen Unterraum $T$ von $\langle B \rangle$ mit $T \cap S = \emptyset$. Sei außerdem $S'$ die Spitze von $B'$.
Angenommen $S' \not\subseteq S$. Sei $P$ ein Punkt in $S' \setminus S$. Für jeden von $P$ verschiedenen Punkt $X \in B'$ liegt die Gerade $PX$ in $B'$ und somit auch in $B$. Deswegen trifft $PX$ die Spitze $S$ und es folgt $B' \subseteq \langle S, P \rangle$. Damit ist $t' + s' \leq \dim(\langle S, P \rangle) - 1 = s$. Hieraus folgt $2s + t = t' + 2s' + 1 \leq 2s + 1 - t'$, also $t + t' \leq 1$, was wegen $t \geq 3$ und $t' \geq -1$ ein Widerspruch ist.
Es ist also $S' \subseteq S$. Falls $S' = S$, dann ist $t' = t - 1$ und daher $B'$ ein Kegel mit Spitze $S$ über einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(t-1, \sqrt{q}) \subseteq C$ und Fall (i) tritt ein.
Sei daher nun $S' \neq S$, also $S' \subsetneq S$. Wegen $s' \geq s - 1$ ist dann $s' = s - 1$ und zusammen mit $t + 2s = t' + 2s' + 1$ folgt $t' = t + 1$. Wir erhalten $s' + t' = s + t$, weshalb $\langle B' \rangle = \langle B \rangle = \langle S, T \rangle$ gilt. Sei $T'$ ein Komplement von $S'$ in $\langle S, T \rangle$. Dann ist $C' := B' \cap T'$ eine Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(t+1, \sqrt{q})$ und $B'$ ist der Kegel mit Spitze $S'$ über $C'$. Mit der Dimensionsformel folgt, dass $Y := T' \cap S$ ein Punkt ist. Somit ist $S' = \langle S, Y \rangle$. Wir zeigen nun $Y \in B'$, denn dann gilt $S = \langle S', Y \rangle \subseteq B'$ und Fall (ii) tritt ein.
Sei dazu $T_0$ eine Hyperebene von $T'$ mit $Y \notin T_0$, die $C'$ in einer Baer-Untergeometrie $C'' := \mathrm{PG}(t, \sqrt{q})$ trifft. Dann ist $C'' \subseteq B' \subseteq B$ und $\langle C'' \rangle = T_0$ ist disjunkt zu $S$. Damit ist $B$ auch der Kegel mit Spitze $S$ über $C''$.
Sei $P$ ein Punkt aus $C' \setminus C''$. Liegt $P$ in $S$, dann ist $P = Y$, also $Y \in B'$ und der Beweis ist abgeschlossen. Sei daher $P \notin S$. Weil $P$ ein Punkt aus $B$ ist, dem Kegel mit Spitze $S$ über der Basis $C''$, gibt es einen eindeutigen Punkt $X \in C''$ mit $P \in \langle S, X \rangle$. Die Gerade $PX$ liegt somit in $T'$ und trifft $S$. Damit trifft $PX$ die Spitze $S$ im Punkt $Y$ und es gilt $Y \in PX$. Sei $Q$ ein von $X$ verschiedener Punkt aus $C''$ und $P' \neq P, Q$ ein Punkt aus $C'$ der Geraden $PQ$. Dann ist $P'$ kein Punkt der Spitze $S$ und $P'$ liegt auch nicht in $C''$, denn die Gerade $PQ$ trifft wegen $P \notin C''$ die Baer-Untergeometrie $C''$ nur in $Q$. Analog zu eben folgt, dass es einen Punkt $X' \in C''$ gibt, mit $P' \in \langle S, X' \rangle$ und $Y \in P'X'$. Damit liegen die Geraden $PX$ und $P'X'$ beide in der Ebene $\langle P, X, Q \rangle$ und sie treffen beide die Baer-Untergeometrie $C'$ in einer Baer Geraden. Damit liegt $Y = PX \cap P'X'$ in $C'$, also auch in $B'$. □

Bei einem Baer-Kegel $B$ vom Typ $B_{s,t}$ mit $t > 0$, nennen wir die Punkte außerhalb der Spitze *einfache Punkte*. In der dazugehörigen Minihyper $w^B$ sind dies gerade die Punkte mit Gewicht genau eins. $t > 0$ wird hier mit der gleichen Begründung wie bei der Definition von $w^B$ wegen der Wohldefiniertheit vorausgesetzt.

**Lemma 4.1.6** *Sei $B$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,t}$ mit $t > 0$ in einem projektiven Raum $\mathrm{PG}(d,q)$. Dann enthält jeder Unterraum $U$ von $\mathrm{PG}(d,q)$ mit $\dim(U) \leq s + t - 1$ höchstens ein $q$-tel der einfachen Punkte von $B$.*

*Beweis:* Sei $S$ die Spitze des Baer-Kegels $B$. Nach Lemma 4.1.4 ist $U \cap B$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s',t'}$ mit Spitze $S \cap U$, $s' \leq s$ und $t' \leq t$. Es gilt außerdem $s' + t' + 1 \leq \dim(U) \leq s + t - 1$. Die einfachen Punkte von $B$, die in $U$ liegen, sind gerade die Punkte in $(U \cap B) \setminus (S \cap U)$. $B$ enthält genau

$$a := (1 + \sqrt{q} + \cdots + (\sqrt{q})^t)q^{s+1}$$

einfache Punkte. In $U \cap B$ liegen davon genau

$$a' := (1 + \sqrt{q} + \cdots + (\sqrt{q})^{t'})q^{s'+1}.$$

Ist $s' \leq s - 1$, so folgt mit $t' \leq t$, dass $a'/a \leq q$ gilt. Ist $s' = s$, dann gilt wegen $s' + t' + 1 \leq s + t - 1$, dass $t' \leq t - 2$ ist und somit $a'/a \leq q$. $\square$

**Lemma 4.1.7** *Der Schnitt zweier verschiedener Baer-Kegel $B$ vom Typ $B_{s,t}$ und $B'$ vom Typ $B_{s',t'}$ des projektiven Raums* $\mathrm{PG}(d, q)$ *mit $t, t' \geq 2$ und $2s + t + 1 = 2s' + t' + 1$ enthält weniger als ein $(\sqrt{q} - 1)$-tel der einfachen Punkte jeder der beiden Kegel.*

*Beweis:* $B$ enthält genau $q^{s+1} \sum_{i=0}^{t} (\sqrt{q})^i$ einfache Punkte. Wegen $t \geq 2$, ist diese Zahl größer oder gleich $\sigma$ mit

$$\sigma := (1 + \sqrt{q} + q)q^{s+\frac{t}{2}}.$$

Da $2s + t = 2s' + t'$, folgt analog, dass auch $B'$ mindestens $\sigma$ einfache Punkte hat.

**Fall 1:** $\langle B \rangle \neq \langle B' \rangle$. O.B.d.A. ist $\langle B \rangle \cap \langle B' \rangle \neq \langle B \rangle$. Dann trifft der Unterraum $H' := \langle B' \rangle$ nach Lemma 4.1.4 den Baer-Kegel $B$ in einem Baer-Kegel $B_{a,b}$ mit $a \leq s$ und $b \leq t$. Wegen $B \not\subseteq H'$ ist $(a, b) \neq (s, t)$. Es folgt

$$\begin{aligned} |B \cap B'| (\sqrt{q} - 1) &\leq |H' \cap B| (\sqrt{q} - 1) \\ &= \left( \theta_a + q^{a+1} \frac{(\sqrt{q})^{b+1} - 1}{\sqrt{q} - 1} \right) (\sqrt{q} - 1) \\ &< q^{a+\frac{3}{2}+\frac{b}{2}} \leq q^{s+1+\frac{t}{2}} < \sigma. \end{aligned}$$

Weil die Anzahl der einfachen Punkte von $B$ bzw. $B'$ in $B \cap B'$ höchstens gleich $|B \cap B'|$ ist, folgt die Behauptung.

**Fall 2:** $\langle B \rangle = \langle B' \rangle$. Dann ist $s + t + 1 = s' + t' + 1$ und zusammen mit $2s + t + 1 = 2s' + t' + 1$ folgt $s = s'$ und $t = t'$. Wir beweisen diesen Fall mit Induktion nach $s$.

$\boldsymbol{s = s' = -1}$ **:** Dann sind $B$ und $B'$ zwei verschiedene Baer-Untergeometrien $\mathrm{PG}(t, \sqrt{q})$ mit $t \geq 2$. Der Schnitt enthält höchstens $|\mathrm{PG}(t-1, \sqrt{q})| + 1$ Punkte (diese sind alle einfach), siehe [Sve83] oder [DD06]. Wegen

$$(|\mathrm{PG}(t-1, \sqrt{q})| + 1)(\sqrt{q} - 1) < (\sqrt{q})^t + \sqrt{q} < \sigma,$$

folgt die Behauptung für $s = -1$.

$\boldsymbol{s = s' \geq 0}$ **:**

**Fall 2a:** Die Spitzen von $B$ und $B'$ haben einen Punkt $P$ gemeinsam. Dann sind $B$ und $B'$ Kegel mit Spitze $P$ über Baer-Kegeln des Typs $B_{s-1,t}$. Für einen einfachen Punkt $R$ von $B$ ist $RP$ ein einfacher Punkt von $B/P$. Auf der Geraden $RP$ liegen genau $q$ einfache Punkte von $B$, daher gehört jeder einfache Punkt von $B/P$ zu genau $q$ einfachen Punkten von $B$. Gleiches gilt für den Kegel $B'$. Im Schnitt von $B$ und $B'$ liegen damit $q$-mal so viele einfache Punkte wie im Schnitt von $B/P$ und $B'/P$. Die Induktionsvoraussetzung liefert, dass $B/P$ und $B'/P$ weniger als ein $(\sqrt{q}-1)$-tel ihrer einfachen Punkte im Schnitt haben. Die Anzahl der einfachen Punkte in $B$ ist

$$q^{s+1}\sum_{i=0}^{t}(\sqrt{q})^i = q\cdot\left(q^s\sum_{i=0}^{t}(\sqrt{q})^i\right),$$

also $q$-mal die Anzahl der einfachen Punkte in $B/P$. Dies zeigt die Behauptung.

**Fall 2b:** Die Spitzen von $B$ und $B'$ sind disjunkt. Wir bezeichnen sie mit $\pi$ bzw. $\pi'$. $B$ ist die Vereinigung von $(s+1)$-dimensionalen Unterräumen $U$ durch $\pi$. Jeder dieser Unterräume $U$ enthält genau $q^{s+1}$ einfache Punkte von $B$, das sind gerade die Punkte in $U\setminus\pi$.
Ist $U\cap\pi'=\emptyset$ für einen solchen Unterraum $U$, dann ist $U\cap B'$ eine Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(x+1,\sqrt{q})$ mit $x\le s$. $\pi$ ist eine Hyperebene von $U$ und trifft die Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(x+1,\sqrt{q})$ damit mindestens in einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(x-1,\sqrt{q})$. Es folgt, dass höchstens

$$(\sqrt{q})^{x+1}+(\sqrt{q})^x=(\sqrt{q})^x(\sqrt{q}+1)\le(\sqrt{q})^s(\sqrt{q}+1)$$

Punkte aus $\mathrm{PG}(x+1,\sqrt{q})$ einfache Punkte von $B$ sind. Da $U$ genau $q^{s+1}$ einfache Punkte von $B$ enthält und $s\ge 0$ ist, sind dies weniger als ein $(\sqrt{q}-1)$-tel der einfachen Punkte von $B$ in $U$.
Ist $U\cap\pi'\ne\emptyset$ für einen solchen Unterraum $U$, dann gilt wegen $\pi\cap\pi'=\emptyset$, dass $\pi'\cap U$ ein Punkt $P$ außerhalb von $\pi$ ist. Es folgt, dass jede Gerade in $U\cap B'$ durch $P$ geht, also $U\cap B'$ ein Kegel mit Spitze $P$ über $\pi\cap B'$ ist. Weil $\pi\cap\pi'=\emptyset$, enthält $\pi\cap B'$ keine Gerade und daher ist $|\pi\cap B'|\le\left|\mathrm{PG}(s,\sqrt{q})\right|$. Damit liegen höchstens $1+(q-1)\left|\mathrm{PG}(s,\sqrt{q})\right|$ einfache Punkte von $B$ in $U\cap B'$. Für $s\ge 1$ sind dies weniger als $1/(\sqrt{q}-1)$ der einfachen Punkte von $B$ in $U$.
Für $s\ge 1$ ist die Behauptung damit gezeigt. Für $s=s'=0$ sind $\pi$ und $\pi'$ verschiedene Punkte. Die Unterräume $U$ sind Geraden durch $\pi$ mit genau $q$ einfachen Punkten aus $B$. Höchstens eine dieser Geraden ist die Gerade $\pi\pi'=:U_0$. Die anderen Geraden durch $\pi$ in $B$ treffen $B'$ höchstens in einer Baer-Teilgeraden mit $\sqrt{q}+1<q/(\sqrt{q}-1)$ Punkten.
Ist $U_0\cap B'=\pi'$, dann hat $U_0$ genau einen Punkt in $B'$ und für alle Geraden $U$ durch $\pi$ gilt, dass weniger als $1/(\sqrt{q}-1)$ der einfachen Punkte von $B$ in $B'$ liegen. Ist $U_0\cap B'\ne\pi'$, dann ist $U_0$ in $B'$ enthalten. Ist $U_0$ keine Gerade von $B$, dann folgt wie eben die Behauptung. Ist $U_0$ eine gemeinsame Gerade von $B$ und $B'$, dann liegen alle $q$ einfachen Punkte von $B$ auf $U_0$ in $B'$. Die anderen Geraden $U$ durch $\pi$ treffen $B'$ weiterhin höchstens in einer Baer-Teilgeraden mit $\sqrt{q}+1$ Punkten, allerdings ist nun $\pi$ einer dieser Punkte, und daher liegen höchstens $\sqrt{q}$ einfache Punkte von $U$ in $B'$. Es folgt, dass in $B'$ höchstens

$$(\sqrt{q}+\cdots+(\sqrt{q})^t)\sqrt{q}+q$$

einfache Punkte aus $B$ liegen. Da $t \geq 2$, ist diese Zahl größer als $\sigma/(\sqrt{q}-1)$. □

Die vorherigen Lemmas zeigen, wie sich Baer-Kegel untereinander und mit Unterräumen treffen. Mit Hilfe dieser Aussagen können wir das nächste Lemma beweisen, welches zeigt, dass die Vereinigung weniger Baer-Kegel und Unterräume keine anderen Baer-Kegel und Unterräume der gleichen Dimension enthält. Das führt anschließend zur Folgerung 4.1.9, die feststellt, dass eine Minihyper, die Summe aus Unterräumen und projizierten Baer-Untergeometrien ist (siehe auch Beispiel 4.0.6), bis auf Reihenfolge eindeutig durch diese bestimmt ist.

**Lemma 4.1.8** *Im projektiven Raum* $\mathrm{PG}(d,q)$ *liege die Menge*

$$F = \bigcup_{i=1}^{x} B_i \ \cup \bigcup_{i=1}^{y} U_i, \tag{4b}$$

*wobei* $U_i$ *ein* $m$*-dimensionaler Unterraum mit* $m \geq 1$ *und* $B_i$ *ein Baer-Kegel vom Typ* $B_{s_i,t_i}$ *mit* $t_i \geq 3$ *und* $2s_i+1+t_i = 2m$ *sei. Es sei außerdem* $\delta := x(1+\sqrt{q})+y < q-1$.

*(i) Ein Baer-Kegel* $B$ *vom Typ* $B_{s,t}$ *mit* $t \geq 2$ *und* $2s+1+t = 2m$*, der kein Bestandteil der Zerlegung (4b) ist, hat weniger als* $\delta$ $(q-1)$*-tel seiner einfachen Punkte in* $F$*. Insbesondere ist* $B \not\subseteq F$*.*

*(ii) Die Unterräume* $U_i$ *sind die einzigen Unterräume der Dimension* $m$*, die in* $F$ *enthalten sind.*

*Beweis:* (i) Wegen $t \geq 2$ ist $2s+1+2t \geq 2m+2$, also $s+t-1 \geq m$. Lemma 4.1.6 und Lemma 4.1.7 können daher angewendet werden und zeigen, dass höchstens ein $q$-tel der einfachen Punkte von $B$ in $U_i$ und weniger als ein $(\sqrt{q}-1)$-tel der einfachen Punkte von $B$ in $B_i$ liegen. Es folgt, dass höchstens ein Anteil von

$$\frac{x}{\sqrt{q}-1} + \frac{y}{q} < \frac{x(\sqrt{q}+1)+y}{q-1} = \frac{\delta}{q-1} < 1$$

der einfachen Punkte von $B$ in $F$ liegen. Insbesondere ist $B$ nicht in $F$ enthalten.

(ii) Sei $U$ ein von den $U_i$ verschiedener Unterraum der Dimension $m$. Dann ist $|U \cap U_i| \leq \theta_{m-1} < |U|/q$ für jeden Unterraum $U_i$. Die Menge $B_i \cap U$ ist nach Lemma 4.1.4 ein Baer-Kegel $B_{a,b}$ mit $a \leq s_i$ und $a+b+1 \leq m$. Wegen $2s_i = 2m-1-t_i < 2(m-1)$ ist $s_i \leq m-2$, also $a \leq m-2$ und $a+3/2+b/2 \leq m$. Wir erhalten

$$\begin{aligned}|U \cap B_i| &= |\mathrm{PG}(a,q)| + q^{a+1}|\mathrm{PG}(b,\sqrt{q})| \\ &< \theta_a + \frac{q^{a+\frac{3}{2}+\frac{b}{2}}}{\sqrt{q}-1} \leq \theta_{m-2} + \frac{q^m}{\sqrt{q}-1} < \frac{|U|}{\sqrt{q}-1}.\end{aligned}$$

Analog zu (i) folgt hieraus, dass $U$ nicht in $F$ enthalten ist. □

**Folgerung 4.1.9** *Die Minihyper $w$ sei die Summe der Unterräume $U_i$ und der Baer-Kegel $B_i$ aus dem vorherigen Lemma, also eine Summe von Unterräumen* $\mathrm{PG}(m,q)$ *und von projizierten Baer-Untergeometrien* $\mathrm{pPG}(2m+1,\sqrt{q})$. *Dann ist die Zusammensetzung von $w$ bis auf die Reihenfolge der $U_i$ und $B_i$ eindeutig.*

Das folgende Lemma ist sehr ähnlich zu Lemma 4.1.8. Wieder handelt es sich um eine Vereinigung von Unterräumen und Baer-Kegeln, hier ist es allerdings die Vereinigung von Unterräumen $\mathrm{PG}(m-1,q)$ und von projizierten Baer-Untergeometrien $\mathrm{pPG}(r,\sqrt{q})$ mit $r \leq 2m$.

**Lemma 4.1.10** *Im projektiven Raum* $\mathrm{PG}(d,q)$ *liege die Menge*

$$F = \bigcup_{i=1}^{x} B_i \ \cup \bigcup_{i=1}^{y} U_i,$$

*wobei die $U_i$ Unterräume der Dimension höchstens $m-1$ und die $B_i$ Baer-Kegel des Typs $B_{s_i,t_i}$ mit $s_i \leq m-2$ und $2s_i+2+t_i \leq 2m$ seien. Es gelte außerdem $\delta := x(1+\sqrt{q})+y < q-1$. Dann enthält $F$ keinen Unterraum der Dimension $m$ und keinen von den $B_i$ verschiedenen Baer-Kegel des Typs $B_{s,t}$ mit $s \leq m-2$ und $2s+2+t = 2m$.*

*Beweis:* Der Beweis, dass $F$ keinen $m$-dimensionalen Unterraum enthält, verläuft analog zum Beweis von Lemma 4.1.8(ii).
Sei nun $B$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,t}$ mit $s \leq m-2$, $2s+2+t = 2m$ und $B \neq B_i$ für alle $i$. Dann ist $t \geq 2$ und der Baer-Kegel $B$ hat

$$z := q^{s+1}\frac{(\sqrt{q})^{t+1}-1}{\sqrt{q}-1} \geq (\sqrt{q})^{2s+2+t} = q^m$$

einfache Punkte. Gilt für einen Baer-Kegel $B_i$, dass $2s_i+2+t_i = 2m$ ist, dann folgt auch hier $t_i \geq 2$, und Lemma 4.1.7 zeigt, dass in $B \cap B_i$ weniger als $z/(\sqrt{q}-1)$ einfache Punkte von $B$ liegen. Gilt hingegen $2s_i+2+t_i \leq 2m-1$ für den Baer-Kegel $B_i$, dann ist

$$|B_i| \leq |\mathrm{PG}(2m-1,\sqrt{q})| = \frac{q^m-1}{\sqrt{q}-1} < \frac{z}{\sqrt{q}-1}.$$

Wegen $|U_i| \leq \theta_{m-1} < z/(q-1)$ enthält jeder der $y$ Unterräume $U_i$ weniger als $z/(q-1)$ einfache Punkte von $B$. Zusammen erhalten wir, dass weniger als

$$z\left(\frac{x}{\sqrt{q}-1}+\frac{y}{q-1}\right) = \frac{z\left(x(\sqrt{q}+1)+y\right)}{q-1} = \frac{z\delta}{q-1} < z$$

einfache Punkte von $B$ in $F$ liegen, also $B$ nicht in $F$ enthalten ist. □

Betrachtet man das Erzeugnis von drei verschiedenen $(m+1)$-dimensionalen Unterräumen, die sich in einem gemeinsamen $m$-dimensionalen Unterraum treffen, so erhält man einen $(m+2)$- oder einen $(m+3)$-dimensionalen Unterraum. Eine ähnliche Aussage kann man für Baer-Untergeometrien treffen, hierbei gibt es zusätzlich die Möglichkeit, dass ein Baer-Kegel entsteht.

**Lemma 4.1.11** *Sei $\Delta$ ein $(n-2)$-dimensionaler Unterraum des projektiven Raums $\mathrm{PG}(n,q)$ und $C$ eine Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(m,\sqrt{q})$, die in $\Delta$ enthalten ist. Seien weiter $H_1, H_2$ und $H_3$ Hyperebenen durch $\Delta$ und $C_1, C_2$ und $C_3$ Baer-Untergeometrien $\mathrm{PG}(m+1,\sqrt{q})$ mit $C_i \subseteq H_i$ und $C_i \cap \Delta = C$ für $i = 1,2,3$.*

*(i) Dann existiert eine eindeutige Baer-Untergeometrie $C_{12} = \mathrm{PG}(m+2,\sqrt{q})$, die $C_1$ und $C_2$ enthält. Sie erfüllt $C_{12} \cap H_i = C_i$ für $i = 1,2$.*

*(ii) Ist $H_3 \cap C_{12} = C$ und $C_3 \not\subseteq \langle C_{12}\rangle$, so existiert eine eindeutige Baer-Untergeometrie $B = \mathrm{PG}(m+3,\sqrt{q})$, die $C_{12}$ und $C_3$ enthält. Es gilt $B \cap \Delta = C$ und $B \cap \langle C_{12}\rangle = C_{12}$. Außerdem trifft genau eine Hyperebene durch $\Delta$ die Baer-Untergeometrie $B$ in einer Bear Untergeometrie $\mathrm{PG}(m+2,\sqrt{q})$ und jede andere Hyperebene durch $\Delta$ trifft $B$ in einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(m+1,\sqrt{q})$.*

*(iii) Ist $H_3 \cap C_{12} = C$ und $C_3 \subseteq \langle C_{12}\rangle$, dann existiert ein Baer-Kegel $B$ vom Typ $B_{0,m+1}$, der $C_{12}$ und $C_3$ enthält. Die Spitze $V$ von $B$ ist nicht in $\Delta$ enthalten und die Hyperebene $\langle \Delta, V\rangle$ trifft $B$ in einem Baer-Kegel vom Typ $B_{0,m}$ mit Spitze $V$, während alle anderen Hyperebenen durch $\Delta$ den Baer-Kegel $B$ in einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(m+1,\sqrt{q})$ treffen.*

*Beweis:* (i) und (ii) sind bekannte Aussagen über Baer-Untergeometrien.
Wir beweisen nun (iii). Sei dazu $\mathrm{PG}(n,q)$ eingebettet in einen projektiven Raum $\mathrm{PG}(n+1,q)$ und $P$ ein Punkt außerhalb von $\mathrm{PG}(n,q)$. Wir setzten $\Delta' := \langle \Delta, P\rangle$ und $H_i' := \langle H_i, P\rangle$. Sei weiter $U$ eine von $H_3$ verschiedene Hyperebene von $H_3'$, die $P$ nicht enthält. Wir projizieren $C_3$ von $P$ auf $U$ und erhalten $C_3'$, eine Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(m+1,\sqrt{q})$ mit $C_3' \not\subseteq \langle C_{12}\rangle$. Das Anwenden von (i) und (ii) liefert eine Baer-Untergeometrie $B' := \mathrm{PG}(m+3,q)$, die $C_{12}$ und $C_3'$ enthält. Nun projizieren wir $B'$ von $P$ auf $\mathrm{PG}(n,q)$ und erhalten einen Baer-Kegel $B$ vom Typ $B_{0,m}$. Wegen (ii) gilt $B' \cap \Delta' = C$ und daher $B \cap \Delta = C$.
Nach Voraussetzung ist $C_3 \subseteq \langle C_{12}\rangle$, also $C_3' \subseteq \langle C_{12}, P\rangle$ und damit $P \in \langle C_{12}, C_3'\rangle = \langle B'\rangle$. Daher liegt $P$ auf einer eindeutigen Geraden $\ell$, die $B'$ in einer Baer-Teilgerade trifft. $\ell$ ist nicht in $\Delta'$ enthalten, denn $B' \cap \Delta' = C$ und $P \notin \langle C\rangle$. Somit liegt der Punkt $V := \ell \cap \mathrm{PG}(n,q)$ nicht in $\Delta$. Jede Ebene aus $\mathrm{PG}(n+1,q)$ durch $\ell$ tifft $B'$ entweder in der Baer-Teilgeraden $\ell \cap B'$ oder in einer Baer-Unterebene $\mathrm{PG}(2,\sqrt{q})$. Damit ist $B$ ein Kegel mit Spitze $V$ über einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(m+1,\sqrt{q})$. Die Hyperebene $\langle V, \Delta\rangle$ trifft $B$ in einem Baer-Kegel vom Typ $B_{0,m}$. Dieser Kegel hat als Urbild unter der Projektion die eindeutige Hyperebene von $\mathrm{PG}(n+1,q)$, die $B'$ in einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(m+1,\sqrt{q})$ trifft. Die anderen Hyperebenen durch $\Delta'$ in $\mathrm{PG}(n+1,q)$ treffen $B'$ in einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(m+1,\sqrt{q})$ und werden auf Hyperebenen durch $\Delta$ von $\mathrm{PG}(n,q)$ projiziert, die $V$ nicht enthalten und $B$ in einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(m+1,q)$ treffen. □

## Entfernen von Baer-Komponenten

Für Minihyper $w_1, w_2$ desselben projektiven Raums $\mathrm{PG}(k-1,q)$ schreiben wir $w_1 \leq w_2$, falls $w_1(P) \leq w_2(P)$ für alle Punkte $P$ aus $\mathrm{PG}(k-1,q)$ gilt.

**Resultat 4.1.12** (Govaerts und Storme [GS03]) *Sei $w$ eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper mit $\delta \leq (q+1)/2$ und $0 \leq \mu \leq k-2$. Für jeden $\mu$-dimensionalen Unterraum $U$ mit $w^U \leq w$ ist $w - w^U$ eine $\{(\delta-1)\theta_\mu, (\delta-1)\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper.*

Wir beweisen nun die analoge Aussage für projizierte Baer-Untergeometrien $\mathrm{pPG}(2\mu+1, \sqrt{q})$. Der Beweis ist genauso aufgebaut wie der Beweis des vorherigen Resultats in [GS03].

**Theorem 4.1.13** *Sei $w$ eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper mit $\delta \leq (q+1)/2$ und $0 \leq \mu \leq k-3$. Für jeden Baer-Kegel $\Omega$ vom Typ $B_{s,2\mu-1-2s}$ mit $s \leq \mu - 2$ und $w^\Omega \leq w$ ist $w - w^\Omega$ eine $\{(\delta-\sqrt{q}-1)\theta_\mu, (\delta-\sqrt{q}-1)\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper.*

*Beweis:* $w^\Omega$ ist eine $\{(\sqrt{q}+1)\theta_\mu, (\sqrt{q}-1)\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper, daher müssen wir nur $(w - w^\Omega)(H) \geq (\delta - \sqrt{q} - 1)\theta_{\mu-1}$ für jede Hyperebene $H$ mit Gleichheit für mindestens eine Hyperebene zeigen.
Sei $H$ eine beliebige Hyperebene. Ist $\Omega$ nicht in $H$ enthalten, so ist nach Lemma 4.1.4(ii) der Schnitt $H \cap \Omega$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s-1,2\mu-1-2s}, B_{s,2\mu-3-2s}$, oder $B_{s,2\mu-2-2s}$. Enthält $H$ den Baer-Kegel $\Omega$, so ist natürlich $H \cap \Omega = \Omega$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-1-2s}$.

**Fall 1:** $H \cap \Omega$ ist vom Typ $B_{s-1,2\mu-1-2s}$ oder $B_{s,2\mu-3-2s}$. Dann ist

$$w^\Omega(H) = |\mathrm{PG}(2\mu-1, \sqrt{q})| = (\sqrt{q}+1)\theta_{\mu-1}$$

und wegen $w(H) \geq \delta\theta_{\mu-1}$ folgt wie gewünscht $(w - w^\Omega)(H) \geq (\delta - \sqrt{q} - 1)\theta_{\mu-1}$.

**Fall 2:** $H \cap \Omega$ ist vom Typ $B_{s,2\mu-2-2s+e}$ mit $e \in \{0,1\}$. Dann ist

$$w(H) \geq w^\Omega(H) = \theta_\mu + \sqrt{q}\theta_{\mu+e-1} > \delta\theta_{\mu-1}, \tag{4c}$$

wobei $\delta \leq (q+1)/2 < q$ im letzten Schritt verwendet wurde. Wir nehmen nun $(w - w^\Omega)(H) \leq (\delta - \sqrt{q} - 1)\theta_{\mu-1}$ an und zeigen, dass Gleichheit gilt. Aus (4c) und aus $w^\Omega(H) = |\mathrm{PG}(2\mu+e, \sqrt{q})|$ folgt nun

$$(e\sqrt{q}+1)\theta_\mu \leq w(H) < (e\sqrt{q}+2)\theta_\mu,$$

also $w(H) = \sum_{i=0}^{\mu} m_i\theta_i$ mit $\sum_{i=0}^{\mu} m_i = \delta$ und $m_\mu = e\sqrt{q}+1$ nach Resultat 4.1.2. Nach Resultat 4.1.1 existiert ein $(k-2-\mu)$-dimensionaler Unterraum $K$ von $H$ mit $w(K) = m_\mu$. Der Unterraum $K$ liegt in $x := \theta_\mu - 1$ von $H$ verschiedenen Hyperebenen $H_1, \ldots, H_x$. Jeder Punkt außerhalb von $K$ liegt in $\theta_{\mu-1}$ der Hyperebenen durch $H$. Es folgt

$$w(H) + \sum_{i=1}^{x} w(H_i) = m_\mu\theta_\mu + \theta_{\mu-1}(\delta\theta_\mu - m_\mu).$$

Wir schreiben $w(H_i) = \delta\theta_{\mu-1} + h_i$ mit $h_i \geq 0$ und erhalten

$$w(H) = m_\mu\theta_\mu + (\delta - m_\mu)\theta_{\mu-1} - \sum_{i=1}^{x} h_i.$$

Damit ist $(w - w^\Omega)(H) = (\delta - \sqrt{q} - 1)\theta_{\mu-1} - \sum h_i$, also gilt $\sum h_i \leq (\delta - \sqrt{q} - 1)\theta_{\mu-1}$. Wegen $2\delta \leq q+1$ folgt nun wie gewünscht $w(H_i) = \delta\theta_{\mu-1} + h_i < \theta_\mu$ für jedes $i$. Resultat 4.1.2 liefert daraus $h_i = 0$ für alle $i$, also $(w - w^\Omega)(H) = (\delta - \sqrt{q} - 1)\theta_{\mu-1}$, wie gewünscht.

Fall 1 und 2 zeigen $(w - w^\Omega)(H) \geq (\delta - \sqrt{q} - 1)\theta_{\mu-1}$ für jede Hyperebene $H$. Außerdem wurde gezeigt, dass eine Hyperebene $H$ mit $w(H) = \delta\theta_{\mu-1}$ (und diese existiert nach den Voraussetzungen für $w$) den Baer-Kegel $\Omega$ wie in Fall 1 trifft, denn in Fall 2 ist $w(H) > \delta\theta_{\mu-1}$ (siehe (4c)). Für eine solche Hyperebene ist $(w - w^\Omega)(H) = (\delta - \sqrt{q} - 1)\theta_{\mu-1}$. □

## 4.2 Beweis von Theorem 4.0.10

Nachdem wir nun alle Grundlagen geschaffen haben, beweisen wir in diesem Abschnitt Theorem 4.0.10. Dies geschieht mit Induktion nach $\mu \geq 1$. Für $\mu = 1$ ist Theorem 4.0.10 bereits von Leo Storme in [Sto08] bewiesen. Sei daher nun $\mu \geq 2$ und die Aussage für alle kleineren Werte gezeigt. Sei weiterhin $w$ eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper von $\mathrm{PG}(k-1, q)$, die die Voraussetzungen in Theorem 4.0.10 erfüllt, insbesondere ist

$$\delta \leq \frac{q-1}{4}, \quad q = p^{2h} \text{ und } p \geq 11. \tag{4d}$$

Nach Definition von $w$ ist $w(H) \geq \delta\theta_{\mu-1}$ für jede Hyperebene $H$ von $\mathrm{PG}(k-1, q)$ und Gleichheit tritt für mindestens eine Hyperebene auf. Ist $w(H) = \delta\theta_{\mu-1}$ für eine Hyperebene $H$, dann zeigt Resultat 4.1.2, dass die Einschränkung $w_H$ von $w$ auf $H$ eine $\{\delta\theta_{\mu-1}, \delta\theta_{\mu-2}; k-2, q\}$-Minihyper ist. Die Induktionsvoraussetzung liefert, dass $w_H$ die Summe von $(\mu-1)$-dimensionalen Unterräumen und Baer-Kegeln vom Typ $B_{s_i, 2\mu-3-2s_i}$ ist, wobei $2\mu - 3 - 2s_i \geq 3$, also $s_i \leq \mu - 3$ gilt. Diese Unterräume und Baer-Kegel sind nach Folgerung 4.1.9 und nach Induktionsvoraussetzung bis auf ihre Reihenfolge eindeutig bestimmt. Wir nennen sie *Unterraum-Komponenten* und *Baer-Komponenten* von $w_H$. Für eine Baer-Komponente $\Omega$ gilt also $w^\Omega \leq w_H$ und die größte Zahl $\alpha$ mit $\alpha w^\Omega \leq w_H$ nennen wir *Vielfachheit* der Baer-Komponente $\Omega$.

**Lemma 4.2.1** *Gilt für jede Hyperebene $H$ von $\mathrm{PG}(k-1, q)$ mit $w(H) = \delta\theta_{\mu-1}$, dass $w_H$ ausschließlich die Summe von $\delta$ Unterräumen der Dimension $\mu - 1$ ist, dann ist $w$ die Summe von $\delta$ Unterräumen der Dimension $\mu$.*

*Beweis:* Der Beweis funktioniert analog zum Beweis von Theorem 13 auf Seite 59 in [GS03]. □

Tritt der Fall des vorherigen Lemmas ein, so ist Theorem 4.0.10 bewiesen. Wir nehmen daher an, dass für mindestens eine Hyperebene $H$ von $\mathrm{PG}(k-1, q)$ mit $w(H) = \delta\theta_{\mu-1}$ die Minihyper $w_H$ eine Baer-Komponente hat. Wir zeigen, dass daraus die Existenz einer Baer-Komponente $B$ von $w$ folgt. Ist dies geschehen, so folgt mit Theorem 4.1.13, dass $w - w^B$ eine $\{(\delta - \sqrt{q} - 1)\theta_\mu, (\delta - \sqrt{q} - 1)\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper ist und ein induktives Argument für $\delta$ schließt den Induktionsschritt für $\mu$ ab. Die Existenz der Baer-Komponente $B$ wird in vier Schritten gezeigt.

Wir betrachten alle Baer-Komponenten aller Minihyper $w_H$ mit $H$ Hyperebene von $\mathrm{PG}(k-1,q)$ und $w(H) = \delta\theta_{\mu-1}$. Sei $\Omega$ eine dieser Baer-Komponenten von kleinster Vielfachheit. Wir verwenden die folgende Notation.

| | |
|---|---|
| $H$ | eine Hyperebene mit $\Omega \subseteq H$ und $w(H) = \delta\theta_{\mu-1}$ |
| $\alpha$ | die Vielfachheit von $\Omega$ |
| $s$ | mit $s \leq \mu - 3$, so dass $\Omega$ vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$ ist |
| $\pi_s$ | die $s$-dimensionale Spitze von $\Omega$ |
| $x$ | die Anzahl von Baer-Komponenten von $w_H$ (mit Vielfachheit gezählt) |
| $y$ | die Anzahl von Unterraum-Komponenten von $w_H$ (mit Vielf. gezählt) |
| $F$ | die Menge der Punkte $P$ aus $\mathrm{PG}(k-1,q)$ mit $w(P) \geq 1$ |

Wegen $w(H) = \delta\theta_{\mu-1}$ ist $x(\sqrt{q}+1) + y = \delta$. Zusammen mit $\alpha \leq x$ und $\delta \leq (q-1)/4$ (siehe (4d)) folgt

$$\alpha \leq \frac{1}{4}(\sqrt{q} - 1). \tag{4e}$$

Im folgenden Lemma fassen wir noch einmal die eben beschriebenen Aussagen zusammen.

**Lemma 4.2.2** *Für jede Hyperebene $K$ von $\mathrm{PG}(k-1,q)$ mit $w(K) = \delta\theta_{\mu-1}$ ist $w_K$ die Summe von $(\mu-1)$-dimensionalen Unterräumen und projizierten Baer-Untergeometrien $\mathrm{pPG}(2\mu-1, \sqrt{q})$. Jede Baer-Komponente von $w_K$ hat mindestens Vielfachheit $\alpha$ und die Dimension der Spitze ist kleiner oder gleich $\mu - 3$.*

## Schritt 1

In diesem Schritt betrachten wir Hyperebenen $G$ von $\langle\Omega\rangle$, die $\Omega$ in einer projizierten Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu-2, \sqrt{q})$ treffen, also in einem Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$ und es gilt $\pi_s \subseteq G$ (siehe Lemma 4.1.4). Diese Hyperebenen von $\langle\Omega\rangle$ nennen wir *potentiell*. Es gibt genau $\left|\mathrm{PG}(2\mu-3-2s, \sqrt{q})\right|$ potentielle Hyperebenen. Eine potentielle Hyperebene nennen wir *markiert*, falls

- $G$ eine Unterraum-Komponente von $w_H$ enthält, oder falls
- $G$ eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu-2, \sqrt{q})$ enthält, die in einer von $\Omega$ verschiedenen Baer-Komponente von $w_H$ liegt.

In diesen Fällen sagen wir, dass die entsprechende Komponente von $w_H$ die Hyperebene $G$ *markiert*.

**Lemma 4.2.3** *Jede von $\Omega$ verschiedene Baer-Komponente $\Omega'$ von $w_H$ markiert höchstens $\left|\mathrm{PG}(2\mu-3-2s, \sqrt{q})\right| / (\sqrt{q}-1)$ potentielle Hyperebenen von $\langle\Omega\rangle$.*

*Beweis:* Sei $\Omega'$ vom Typ $B_{s',2\mu-3-2s'}$ mit $-1 \leq s' \leq \mu - 3$ und sei $\pi'$ die Spitze von $\Omega'$. Dann ist $\dim(\langle\Omega'\rangle) = 2\mu - 2 - s'$ und $\dim(\langle\Omega\rangle) = 2\mu - 2 - s$. Ist $\Phi$ eine in $\Omega'$ enthaltene projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu-2, \sqrt{q})$, dann ist nach Lemma 4.1.5 die Spitze von $\Phi$ in $\pi'$ enthalten und entweder

- ist $\Phi$ vom Typ $B_{s'-1,2\mu-2-2s'}$, $\langle\Phi\rangle = \langle\Omega'\rangle$ und $\pi' \subseteq \Phi$, oder
- $\Phi$ ist vom Typ $B_{s',2\mu-4-2s'}$ mit Spitze $\pi'$ und $\dim(\langle\Phi\rangle) = \dim(\langle\Omega'\rangle) - 1$.

In beiden Fällen gilt $\pi' \subseteq \Phi$.
Falls $s' < s$ ist, dann ist $\dim(\langle\Phi\rangle) \geq 2\mu - 3 - s' \geq \dim(\langle\Omega\rangle)$ und $\Omega'$ markiert keine der potentiellen Hyperebenen von $\langle\Omega\rangle$. Sei daher nun $s' \geq s$.

**Fall 1:** $\pi' \neq \pi_s$. Dann ist wegen $s' \geq s$ auch $\pi' \nsubseteq \pi_s$ und es gibt einen Punkt $P$ in $\pi' \setminus \pi_s$. Eine durch $\Omega'$ markierte potentielle Hyperebene $G$ von $\langle\Omega\rangle$ enthält einen Baer-Kegel $\Phi$, wie oben beschrieben, und damit $\pi'$ und insbesondere den Punkt $P$. Außerdem liegt nach Definition der potentiellen Hyperebenen die Spitze $\pi_s$ in $G$. Es folgt $\langle\pi_s, P\rangle \subseteq G$.

**Fall 1a:** $P$ liegt in $\Omega$. Dann ist $\langle\pi_s, P\rangle / \pi_s$ ein Punkt der Quotientengeometrie $\Omega/\pi_s \cong \mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, \sqrt{q})$ und es gibt daher genau $\left|\mathrm{PG}(2\mu - 4 - 2s, \sqrt{q})\right|$ potentielle Hyperebenen durch $P$. Damit markiert $\Omega'$ höchstens

$$|\mathrm{PG}(2\mu - 4 - 2s, \sqrt{q})| < \frac{\left|\mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, \sqrt{q})\right|}{\sqrt{q} - 1}$$

der potentiellen Hyperebenen.

**Fall 1b:** $P$ liegt nicht in $\Omega$. Dann ist $\langle\pi_s, P\rangle / \pi_s$ ein Punkt von $\langle\Omega\rangle/\pi_s \cong \mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, q)$, der nicht in $\Omega/\pi_s \cong \mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, \sqrt{q})$ enthalten ist. Somit gibt es genau eine Gerade $\ell$ in $\langle\Omega\rangle/\pi_s$ durch $\langle\pi_s, P\rangle/\pi_s$, die $\Omega/\pi_s$ in einer Baer-Teilgeraden trifft. Für jede potentielle Hyperebene $G$ durch $P$ gilt daher, dass $G/\pi_s$ die Gerade $\ell$ enthält. Es gibt genau $\left|\mathrm{PG}(2\mu - 5 - 2s, \sqrt{q})\right|$ solche potentiellen Hyperebenen und $\Omega'$ markiert damit höchstens

$$|\mathrm{PG}(2\mu - 5 - 2s, \sqrt{q})| < \frac{\left|\mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, \sqrt{q})\right|}{\sqrt{q} - 1}$$

der potentiellen Hyperebenen von $\langle\Omega\rangle$.

**Fall 2:** $\pi' = \pi_s$. Falls $\Omega'$ nicht in $\langle\Omega\rangle$ enthalten ist, dann ist $\dim(\langle\Omega\rangle \cap \langle\Omega'\rangle) \leq \dim(\langle\Omega\rangle) - 1$ und $\Omega'$ markiert daher höchstens eine potentielle Hyperebene. Sei deswegen nun $\langle\Omega\rangle = \langle\Omega'\rangle$. Eine von $\Omega'$ markierte potentielle Hyperebene $G$ trifft $\Omega$ und $\Omega'$ jeweils in einem Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$. Damit ist die Quotientengeometrie $G/\pi_s$ eine Hyperebene von $\langle\Omega\rangle / \pi_s$, die zwei verschiedene Baer-Untergeometrien $\mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, \sqrt{q})$ (verschieden, da $\Omega \neq \Omega'$) von $\langle\Omega\rangle/\pi_s$ jeweils in einer Baer-Untergeometrie $\mathrm{PG}(2\mu - 4 - 2s, \sqrt{q})$ trifft.
Zwei verschiedene Baer-Untergeometrien $\mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, \sqrt{q})$, die im gleichen projektiven Raum $\mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, q)$ liegen, treffen sich in höchstens

$$|\mathrm{PG}(2\mu - 4 - 2s, \sqrt{q})| + 1$$

verschiedenen Punkten, siehe [Sve83] oder [DD06]. Außerdem haben sie genauso viele Hyperebenen wie Punkte gemeinsam, siehe [Bru82]. Es gibt damit höchstens

$$|\mathrm{PG}(2\mu - 4 - 2s, \sqrt{q})| + 1 < \frac{\left|\mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, \sqrt{q})\right|}{\sqrt{q} - 1}$$

Möglichkeiten für $G$, also höchstens so viele durch $\Omega'$ markierte potentielle Hyperebenen. □

**Lemma 4.2.4** *Jede Unterraum-Komponente $U$ von $w_H$ markiert weniger als $\left|\mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, \sqrt{q})\right| / q$ potentielle Hyperebenen von $\langle \Omega \rangle$.*

*Beweis:* Eine Unterraum-Komponente $U$ von $w_H$, die nicht in $\langle \Omega \rangle$ enthalten ist, ist auch in keiner Hyperebene von $\langle \Omega \rangle$ enthalten und markiert daher keine potentielle Hyperebene. Sei daher nun $U \subseteq \langle \Omega \rangle$. Es gilt $\dim(U) = \mu - 1 \geq \dim(\pi_s) + 2$, also enthält $U$ einen Punkt $P$ mit $P \notin \pi_s$ und $\langle \pi_s, P \rangle \cap \Omega = \pi_s$. Analog zu Fall 1b im Beweis des vorherigen Lemmas folgt, dass $U$ höchstens

$$|\mathrm{PG}(2\mu - 5 - 2s, \sqrt{q})| < \frac{\left|\mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, \sqrt{q})\right|}{q}$$

potentielle Hyperebenen markiert. □

**Lemma 4.2.5** *Mehr als 3/4 aller potentiellen Hyperebenen von $\langle \Omega \rangle$ sind nicht markiert.*

*Beweis:* Es gibt $|\mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s, \sqrt{q})|$ potentielle Hyperebenen von $\langle \Omega \rangle$. Die Minihyper $w_H$ hat $y$ Unterraum-Komponenten und $x - \alpha$ von $\Omega$ verschiedene Baer-Komponenten (jeweils mit Vielfachheit gezählt). Die beiden vorherigen Lemmas und (4d) liefern, dass höchstens

$$\frac{x - \alpha}{\sqrt{q} - 1} + \frac{y}{q} < \frac{x(\sqrt{q} + 1) + y}{q - 1} = \frac{\delta}{q - 1} \leq \frac{1}{4}$$

aller potentiellen Hyperebenen von $\langle \Omega \rangle$ markiert sind. □

Sei ab sofort $G$ eine nicht markierte potentielle Hyperebene von $\langle \Omega \rangle$. Das heißt

- $G$ trifft $\Omega$ in einem Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$,
- $G$ enthält keine Unterraum-Komponente von $w_H$ und
- $G$ enthält keine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu - 2, \sqrt{q})$, die in einer von $\Omega$ verschiedenen Baer-Komponente von $w_H$ liegt.

Den Baer-Kegel $G \cap \Omega$ bezeichnen wir mit $\Pi$. Dann ist $\pi_s$, die Spitze von $\Omega$, auch die Spitze von $\Pi$ und $\Pi$ ist in keiner von $\Omega$ verschiedenen Baer-Komponente von $w_H$ enthalten.

## Schritt 2

In diesem Schritt zeigen wir, dass der Baer-Kegel $\Pi$ in einer Cogeraden $\Delta$ mit $\Delta \subseteq H$ und $w(\Delta) = \alpha\theta_{\mu-1} + (\delta - \alpha)\theta_{\mu-2}$ liegt. Außerdem betrachten wir die Hyperebenen durch $\Delta$.

**Lemma 4.2.6** *Es gibt eine Hyperebene $\Delta$ von $H$ mit $\Delta \cap \Omega = \Pi$, so dass $\Delta$ weder eine Unterraum-Komponente von $w_H$ enthält, noch eine projizierte Baer-Untergeometrie* $\mathrm{pPG}(2\mu - 2, \sqrt{q})$*, die in einer von $\Omega$ verschiedenen Baer-Komponente von $w_H$ liegt.*

*Beweis:* Wir zeigen mit Induktion nach $v$, wobei $\dim(G) \leq v \leq \dim(H) - 1$, dass es einen $v$-dimensionalen Unterraum $V$ von $H$ gibt, so dass $V \cap \Omega = \Pi$ ist und $V$ weder eine Unterraum-Komponente von $w_H$ enthält, noch eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu - 2, \sqrt{q})$, die in einer von $\Omega$ verschiedenen Baer-Komponente von $w_H$ liegt.

$\boldsymbol{v = \dim(G)}$ **:** $V = G$ hat die gewünschten Eigenschaften.

$\boldsymbol{v \mapsto v+1}$ **:** Sei $V$ ein solcher Unterraum mit $\dim(V) = v < \dim(H) - 1 = k-3$. Der Unterraum $V$ liegt in $r \geq q+1$ verschiedenen Unterräumen $W_1, \ldots, W_r$ aus $H$ der Dimension $v+1$. Wir zeigen, dass mindestens einer der Unterräume $W_1, \ldots, W_r$ die gewünschten Eigenschaften hat.

Weil $V$ keine Unterraum-Komponente von $w_H$ enthält und $W_i \cap W_j = V$ für $i \neq j$ ist, liegt jede der $y$ Unterraum-Komponenten von $w_H$ jeweils in höchstens einem der Unterräume $W_1, \ldots, W_r$.

Als nächstes zeigen wir für jede Baer-Komponente $\Omega'$ von $w_H$, dass höchstens $\sqrt{q} + 1$ der Unterräume $W_1, \ldots, W_r$ eine von $\Pi$ verschiedene projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu - 2, \sqrt{q})$ von $\Omega'$ enthalten.

Dies ist klar für $\Omega' = \Omega$, denn $V \cap \Omega = \Pi$ und somit enthält genau einer der Unterräume $W_1, \ldots, W_r$ den Baer-Kegel $\Omega$ und alle anderen Unterräume $W_1, \ldots, W_r$ treffen $\Omega$ nur in $\Pi$.

Sei nun $\Omega' \neq \Omega$ und $B_{s', 2\mu-3-2s'}$ mit $-1 \leq s' \leq \mu - 3$ der Typ von $\Omega'$. Enthält nur einer der Unterräume $W_1, \ldots, W_r$ eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu - 2, \sqrt{q})$ von $\Omega'$, so ist die Teilaussage gezeigt. Dies ist insbesondere der Fall, wenn $\Omega' \subseteq W_i$ für ein $i$ gilt.

Seien daher $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ mit $i \neq j$, so dass $W_i$ und $W_j$ jeweils eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu - 2, \sqrt{q})$ von $\Omega'$ enthalten. Sei weiter $\Phi_i := W_i \cap \Omega'$ und $\Phi_j := W_j \cap \Omega'$. Dann sind $\Phi_i$ und $\Phi_j$ Baer-Kegel vom Typ $B_{s', 2\mu-4-2s'}$ mit jeweils der gleichen Spitze wie $\Omega'$. Diese bezeichnen wir mit $\pi'$. Dass $\Phi_i$ vom Typ $B_{s'-1, 2\mu-2-2s'}$ ist, ist nicht möglich, da sonst $\langle \Phi_i \rangle = \langle \Omega' \rangle$, also $\Omega' \subseteq W_i$ gilt. Wegen $\Phi_i, \Phi_j \not\subseteq V = W_i \cap W_j$ ist $\Phi_i \neq \Phi_j$. Damit sind $\Phi_i/\pi'$ und $\Phi_j/\pi'$ zwei verschiedene Hyperebenen der Baer-Untergeometrie $\Omega'/\pi' \cong \mathrm{PG}(2\mu - 3 - 2s', \sqrt{q})$. Es folgt $(\Phi_i \cap \Phi_j)/\pi' \cong \mathrm{PG}(2\mu - 5 - 2s', \sqrt{q})$, also ist $\Phi_i \cap \Phi_j = V \cap \Omega'$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s', 2\mu-5-2s'}$ mit der gleichen Spitze wie $\Omega'$. Somit liegt $V \cap \Omega'$ in genau $\sqrt{q} + 1$ verschiedenen Baer-Kegeln vom Typ $B_{s', 2\mu-4-2s'}$ von $\Omega'$, und damit enthalten höchstens $\sqrt{q} + 1$ der Unterräume $W_1, \ldots, W_r$ eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu - 2, \sqrt{q})$ von $\Omega'$.

Die Minihyper $w_H$ hat $y$ Unterraum-Komponenten und $x$ Baer-Komponenten (gezählt mit Vielfachheit). Aus den vorherigen Überlegungen zusammen mit (4d) folgt, dass mindestens

$$r - y - x(\sqrt{q}+1) = r - \delta \geq q + 1 - \delta > 0$$

der Unterräume $W_1, \ldots, W_r$ die gewünschten Eigenschaften haben. □

Sei im folgenden $\Delta$ eine Hyperebene von $H$ mit den Eigenschaften aus Lemma 4.2.6. Mit $F$ haben wir die Menge aller Punkte $P$ aus $\mathrm{PG}(k-1, q)$ mit $w(P) \geq 1$ bezeichnet.

**Lemma 4.2.7** *(i) Es gilt* $w(\Delta) = \alpha\theta_{\mu-1} + (\delta - \alpha)\theta_{\mu-2} = \alpha q^{\mu-1} + \delta\theta_{\mu-2}$.

*(ii)* $\Delta \cap F$ *enthält keinen Unterraum der Dimension* $\mu - 1$.

*(iii) Die Menge* $\Delta \cap F$ *enthält* $\Pi$, *aber keine weitere projizierte Baer-Untergeometrie* $\mathrm{pPG}(2\mu - 2, \sqrt{q})$.

*(iv) Der Baer-Kegel* $\Pi$ *enthält einfache Punkte mit Gewicht* $\alpha$.

*Beweis:* Die Minihyper $w_H$ ist die Summe von $y$ Unterraum-Komponenten, $\alpha$ mal der Baer-Komponente $\Omega$ und $x - \alpha$ anderen Baer-Komponenten (alle mit Vielfachheit gezählt). $\Delta$ ist eine Hyperebene von $H$. Die Lemmas 4.1.4 und 4.2.6 zeigen:

- $\Delta$ trifft jede der $y$ Unterraum-Komponenten von $w_H$ in einem Unterraum der Dimension $\mu - 2$.
- $\Delta$ trifft $\Omega$ in $\Pi$, einem Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$.
- $\Delta$ trifft jede der anderen $x - \alpha$ Baer-Komponenten von $w_H$ in einer projizierten Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu - 3, \sqrt{q})$.

(i) Für jede Unterraum-Komponente $U$ von $w_H$ ist $w^U(\Delta) = \theta_{\mu-2}$. Für jede Baer-Komponente $\Omega' \neq \Omega$ von $w_H$ ist $w^{\Omega'}(\Delta) = |\mathrm{PG}(2\mu-3, \sqrt{q})| = (\sqrt{q}+1)\theta_{\mu-2}$. Außerdem gilt $w^{\Omega}(\Delta) = w^{\Pi}(\Delta) = |\mathrm{PG}(2\mu - 2, \sqrt{q})| = \theta_{\mu-1} + \sqrt{q}\theta_{\mu-2}$. Es folgt

$$\begin{aligned} w(\Delta) &= \alpha(\theta_{\mu-1} + \sqrt{q}\theta_{\mu-2}) + y\theta_{\mu-2} + (x - \alpha)(\sqrt{q}+1)\theta_{\mu-2} \\ &= \alpha(\theta_{\mu-1} + \sqrt{q}\theta_{\mu-2}) + (\delta - \alpha(\sqrt{q}+1))\theta_{\mu-2} \\ &= \alpha\theta_{\mu-1} + (\delta - \alpha)\theta_{\mu-2}. \end{aligned}$$

Dabei wurden Komponenten mit Vielfachheit größer als Eins entsprechend oft gezählt.

(ii) Nach Lemma 4.1.8(ii) mit $m = \mu-1$ ist jeder $(\mu-1)$-dimensionale Unterraum in $(\Delta \cap F) \subseteq (H \cap F)$ eine Unterraum-Komponente von $w_H$. Damit enthält $\Delta \cap F$ keinen Unterraum der Dimension $\mu - 1$.

(iii) Sei $V$ die Vereinigung der $y$ Unterraum-Komponenten von $w_H$ und der $x-\alpha$ Baer-Komponenten ungleich $\Omega$ von $w_H$. Dann hat $V \cap \Delta$ höchstens

$$(y + (x-\alpha)(\sqrt{q}+1))\,\theta_{\mu-2} < \delta\theta_{\mu-2} < \frac{1}{4}q^{\mu-1}$$

Punkte, wobei (4d) verwendet wurde. Sei weiter $\Psi \subseteq \Delta$ eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu-2, \sqrt{q})$ vom Typ $B_{s',2\mu-4-2s'}$ mit $\Psi \neq \Pi$.
Falls $s' \geq \mu-2$, dann ist $s' = \mu-2$ und $\Psi$ ist vom Typ $B_{\mu-2,0}$. In diesem Fall ist $\Psi$ ein Unterraum der Dimension $\mu-1$ und nach (ii) nicht in $\Delta \cap F$ enthalten.
Sei daher nun $s' \leq \mu-3$, also $2\mu-4-2s' \geq 2$. Dann hat $\Psi$ mindestens $q^{\mu-1}$ einfache Punkte und Lemma 4.1.7 zusammen mit $q \geq 11^2$ (siehe (4d)) zeigt, dass weniger als die Hälfte dieser Punkte in $\Pi$ liegen. Wegen $|V \cap \Delta| \leq \frac{1}{4}q^{\mu-1}$ ist damit $\Psi$ nicht in $\Delta \cap F$ enthalten.

(iv) Der Baer-Kegel $\Pi$ hat mindestens $q^{\mu-1}$ einfache Punkte. Sei $V$ wie in (iii) definiert. Wegen $|V \cap \Delta| \leq \frac{1}{4}q^{\mu-1}$ gibt es einfache Punkte in $\Pi \setminus V$ und diese haben Gewicht $\alpha$. □

**Lemma 4.2.8** *Die Anzahl der Hyperebenen $K$ von $\mathrm{PG}(k-1,q)$ durch $\Delta$ mit Gewicht $w(K) > \delta\theta_{\mu-1}$ ist kleiner als $4\alpha/3$.*

*Beweis:* Jeder Punkt außerhalb von $\Delta$ liegt in genau einer der $q+1$ Hyperebenen $K$ durch $\Delta$ und jeder Punkt in $\Delta$ liegt in allen Hyperebenen $K$ durch $\Delta$. Es folgt

$$\sum_K w(K) = \delta\theta_\mu + q \cdot w(\Delta).$$

Weil $w$ eine $\{\delta\theta_\mu, \delta\theta_{\mu-1}; k-1, q)$-Minihyper ist, gilt $w(K) \geq \delta\theta_{\mu-1}$ für alle Hyperebenen $K$ durch $\Delta$. Wir subtrahieren $\delta\theta_{\mu-1}$ für jede Hyperebene $K$ durch $\Delta$ und verwenden Lemma 4.2.7(i), um

$$\sum_K (w(K) - \delta\theta_{\mu-1}) = \alpha q^\mu$$

zu erhalten. Resultat 4.1.2 zeigt, dass jede Hyperebene $K$ das Gewicht $w(K) = \sum_{i=0}^{\mu} m_i\theta_i$ hat, mit ganzen Zahlen $m_i \geq 0$, die $\sum_{i=0}^{\mu} m_i = \delta$ erfüllen. Es folgt $w(K) = \delta\theta_{\mu-1}$ oder $w(K) \geq \theta_\mu + \delta - 1$. Sei $\beta$ die Anzahl an Hyperebenen $K$ durch $\Delta$ mit $w(K) > \delta\theta_{\mu-1}$, dann ist

$$\beta(\theta_\mu + \delta - 1 - \delta\theta_{\mu-1}) \leq \sum_K (w(K) - \delta\theta_{\mu-1}) = \alpha q^\mu.$$

Wegen (4d) ist $\theta_\mu + \delta - 1 - \delta\theta_{\mu-1} \geq \theta_\mu - (q-1)\theta_{\mu-1}/4 > 3q^\mu/4$, also $\beta < 4\alpha/3$. □

## Schritt 3

Im dritten Schritt zeigen wir, dass der Baer-Kegel $\Pi$ (eine projizierte Baer-Untergeometrie der Dimension $2\mu-2$) in vielen Baer-Kegeln $\Omega_i$ vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$ (projizierte Baer-Untergeometrien der Dimension $2\mu-1$), die $w^{\Omega_i} \leq w$ erfüllen, enthalten ist.

Lemma 4.2.8 und (4e) zeigen, dass es Hyperebenen $H_1, \ldots, H_{q+1-\beta}$ durch $\Delta$ mit $w(H_i) = \delta\theta_{\mu-1}$ gibt, wobei

$$\beta := \left\lfloor \frac{4}{3}\alpha \right\rfloor \leq \frac{1}{3}(\sqrt{q}-1). \tag{4f}$$

Wir wählen dabei $H = H_1$. Die Hyperebenen $H_1, \ldots, H_{q+1-\beta}$ erfüllen Lemma 4.2.2. Diese Tatsache werden wir im folgenden häufig verwenden. Sei insbesondere $x_i$ die Anzahl von Baer-Komponenten und $y_i$ die Anzahl von Unterraum-Komponenten von $w_{H_i}$ mit Vielfachheit gezählt. Dann gilt $y_i + x_i(\sqrt{q}+1) = \delta$.

**Lemma 4.2.9** *Die Minihyper $w_{H_i}$ hat eine eindeutige Baer-Komponente $\Omega_i$, die $\Pi$ enthält. $\Omega_i$ hat Vielfachheit $\alpha$ und ist vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$ mit Spitze $\pi_s$.*

*Beweis:* Nach Lemma 4.2.7 enthält $\Delta \cap F$ keine von $\Pi$ verschiedene projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu-2, \sqrt{q})$ und keinen Unterraum der Dimension $\mu-1$. Somit trifft jede Unterraum-Komponente von $w_{H_i}$ den Raum $\Delta$ in einem Unterraum der Dimension $\mu-2$, und jede Baer-Komponente von $w_{H_i}$ trifft $\Delta$ in einem $\mathrm{pPG}(2\mu-3, \sqrt{q})$ oder in $\Pi$. Dabei muss $\Pi$ als Schnitt auftreten, denn die Vereinigung von $y_i$ Unterräumen der Dimension $\mu-2$ und von $x_i$ projizierten Baer-Untergeometrien $\mathrm{pPG}(2\mu-3, \sqrt{q})$ hat höchstens

$$(y_i + x_i(\sqrt{q}+1))\,\theta_{\mu-2} = \delta\theta_{\mu-2} < q^{\mu-1}$$

Punkte, was nicht reicht, um $\Pi$ zu überdecken.
Somit gibt es eine Baer-Komponente $\Omega_i$ von $w_{H_i}$, die $\Pi$ enthält. Wegen $\Omega_i \not\subseteq \Delta$ zeigt Lemma 4.1.4, dass die Baer-Kegel $\Pi$ und $\Omega_i$ dieselbe Spitze haben, also $\pi_s$. Damit ist $\Omega_i$ vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$. Wegen Lemma 4.2.2, hat $\Omega_i$ mindestens Vielfachheit $\alpha$. Da $\Pi$ jedoch Punkte mit Gewicht genau $\alpha$ hat (Lemma 4.2.7), hat $\Omega_i$ Vielfachheit genau $\alpha$. $\square$

**Lemma 4.2.10** *Für alle $i \in \{1, \ldots, q+1-\beta\}$ enthält $H_i$ eine Hyperebene $\Delta_i \neq \Delta$ mit den folgenden Eigenschaften.*

*(i)* $\Pi_i := \Delta_i \cap \Omega_i$ *ist ein Baer-Kegel vom Typ* $B_{s,2\mu-4-2s}$ *mit* $\Pi_i \neq \Pi$.

*(ii)* $\Pi \cap \Pi_i$ *enthält Punkte vom Gewicht* $\alpha$.

*(iii)* $\Delta_i$ *trifft jede Unterraum-Komponente von* $w_{H_i}$ *in einem* $(\mu-2)$*-dimensionalen Unterraum und jede von* $\Omega_i$ *verschiedene Baer-Komponente von* $w_{H_i}$ *in einer projizierten Baer-Untergeometrie* $\mathrm{pPG}(2\mu-3, \sqrt{q})$.

*(iv)* $\Delta_i \cap F$ *enthält weder einen Unterraum der Dimension* $\mu - 1$ *noch eine von* $\Pi_i$ *verschiedene projizierte Baer-Untergeometrie* $\mathrm{pPG}(2\mu-2, \sqrt{q})$.

*Beweis:* $\Omega_i$ ist ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$ mit Spitze $\pi_s$ genau wie $\Omega$. Wir betrachten nun Hyperebenen von $\langle\Omega_i\rangle$, die $\Omega_i$ in einem Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$ treffen. Diese nennen wir, analog zum Beginn von Schritt 1, *potentiell*. Ebenfalls analog definieren wir, dass eine potentielle Hyperebene $K$ *markiert* ist, wenn

- $K$ eine Unterraum-Komponente von $w_{H_i}$ enthält, oder falls
- $K$ eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu-2, \sqrt{q})$ enthält, die in einer von $\Omega_i$ verschiedenen Baer-Komponente von $w_{H_i}$ liegt.

Wie in Lemma 4.2.5 zeigt man, dass $\langle\Omega_i\rangle$ mindestens

$$\frac{3}{4}\left|\mathrm{PG}(2\mu-3-2s, \sqrt{q})\right|$$

potentielle Hyperebenen hat, die nicht markiert sind, eine davon ist $\langle\Pi\rangle$.
Es ist $|\Pi| \geq q^{\mu-1}$ und jeder Punkt aus $\Pi$ hat mindestens das Gewicht $\alpha$. Lemma 4.2.7(i) und (4d) zeigen

$$w(\Delta) - \alpha|\Pi| \leq \delta\theta_{\mu-2} \leq \frac{1}{4}q^{\mu-1},$$

also haben höchstens so viele einfache Punkte von $\Pi$ ein Gewicht größer als $\alpha$. Ein einfacher Punkt aus $\Pi$ liegt in $\left|\mathrm{PG}(2\mu-4-2s, \sqrt{q})\right|$ verschiedenen potentiellen Hyperebenen von $\langle\Omega_i\rangle$. Somit hat eine der mindestens

$$\frac{3}{4}\left|\mathrm{PG}(2\mu-3-2s, \sqrt{q})\right| - 1$$

von $\langle\Pi\rangle$ verschiedenen, unmarkierten potentiellen Hyperebenen höchstens

$$\frac{\frac{1}{4}q^{\mu-1}\left|\mathrm{PG}(2\mu-4-2s, \sqrt{q})\right|}{\frac{3}{4}\left|\mathrm{PG}(2\mu-3-2s, \sqrt{q})\right| - 1} \leq \frac{1}{2}\sqrt{q}q^{\mu-2}$$

einfache Punkte von $\Pi$ mit Gewicht größer als $\alpha$. Sei $K$ eine solche potentielle Hyperebene von $\langle\Omega_i\rangle$ und sei $\Phi_i := K \cap \Omega_i$. Dann ist $\Phi_i \cap \Pi$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-5-2s}$ und dieser enthält mindestens $\sqrt{q}q^{\mu-2}$ einfache Punkte von $\Pi$, also insbesondere Punkte mit Gewicht genau $\alpha$.
Wie in Lemma 4.2.6 und 4.2.7 zeigt man nun die Existenz eines $(k-3)$-dimensionalen Unterraums $\Delta_i \supseteq K$ mit den gewünschten Eigenschaften, insbesondere gilt $\Pi_i = \Delta_i \cap \Omega_i = \Phi_i$. □

Die Baer-Kegel $\Pi_i$ werden im Beweis des nächsten Lemmas benötigt. Dort betrachten wir den eindeutigen Baer-Kegel $\Psi_{ij}$, der die Baer-Kegel $\Omega_i$ und $\Omega_j$ enthält. Für $i, j \in \{1, \ldots, q+1-\beta\}$ mit $i \neq j$ sind $\Omega_i$ und $\Omega_j$ zwei verschiedene Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2s-3-2\mu}$, die sich in $\Pi$, einem Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$, treffen. Alle drei Kegel haben dieselbe Spitze $\pi_s$. Die Existenz eines eindeutigen Baer-Kegels $\Psi_{ij}$ vom Typ $B_{s,2\mu-2-2s}$ mit Spitze $\pi_s$, der $\Omega_i$ und $\Omega_j$ enthält, folgt aus Lemma 4.1.11 im Quotientenraum nach $\pi_s$.

**Lemma 4.2.11** *Für $i, j, l \in \{1, \dots, q+1-\beta\}$ mit $i \neq j$ gilt entweder $H_l \cap \Psi_{ij} = \Omega_l$ oder $H_l \cap \Psi_{ij} = \Pi$.*

*Beweis:* **Teil 1:** $\Delta_i$ hat die gleichen Eigenschaften wie $\Delta$. Daher folgt aus Lemma 4.2.8, dass es Hyperebenen $H'_1, \dots, H'_{q+1-\beta}$ durch $\Delta_i$ vom Gewicht $\delta\theta_{\mu-1}$ gibt. Dabei sei $H'_1 = H_i$. Die Minihyper $w_{H'_a}$ ist somit wie in Lemma 4.2.2 beschrieben. Analog zu Lemma 4.2.9 zeigt man, dass $w_{H'_a}$ eine eindeutige Baer-Komponente $\Omega'_a$ hat, die $\Delta_i$ in $\Pi_i$ trifft. $\Omega'_a$ hat Vielfachheit $\alpha$ und ist vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$. Es gilt $\Omega'_1 = \Omega_i$.

**Teil 2:** In diesem Teil zeigen wir für alle $a \in \{1, \dots, q+1-\beta\}$ ist $H'_a \cap \Psi_{ij} = \Omega'_a$ oder $H'_a \cap \Psi_{ij} = \Pi_i$. Für $a = 1$ ist dies richtig, da $H'_1 = H_i$ den Baer-Kegel $\Psi_{ij}$ in $\Omega_i = \Omega'_1$ trifft. Sei nun $a > 1$. Es gilt $\Pi_i \subset \Delta_i \subset H'_a$, also ist $\Pi_i$ in $H'_a \cap \Psi_{ij}$ enthalten. Angenommen $\Pi_i$ ist eine echte Teilmenge von $H'_a \cap \Psi_{ij}$. Wegen $\Pi \subset \Omega_j \subset \Psi_{ij}$ und $\Pi \not\subseteq H'_a$ (da $\Delta_i \subseteq H'_a$ und $\langle \Delta_i, \Pi \rangle = H_i = H'_1$) sind $\Omega_j$ und $\Psi_{ij}$ nicht in $H'_a$ enthalten. Die Baer-Kegel $\Pi_i$, $\Omega_j$ und $\Psi_{ij}$ sind vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$, $B_{s,2\mu-3-2s}$ und $B_{s,2\mu-2-2s}$ mit gemeinsamer Spitze $\pi_s$. Es folgt, dass $\Omega^* := H'_a \cap \Psi_{ij}$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$ ist und, dass $\Phi := H'_a \cap \Omega_j$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$ ist.
$w_{H_j}$ ist die Summe von $x_j$ projizierten Baer-Untergeometrien $\mathrm{pPG}(2\mu-1, \sqrt{q})$ und $y_j$ Unterräumen der Dimension $\mu - 1$. Wegen $w(H'_a) = \delta\theta_{\mu-1}$ ist auch $w_{H'_a}$ eine Summe von $x'$ projizierten Baer-Unterräumen $\mathrm{pPG}(2\mu-1, \sqrt{q})$ und von $y'$ Unterräumen der Dimension $\mu - 1$. Seien diese $B_1, \dots, B_{x'}$ und $U_1, \dots, U_{y'}$. Liegt eine dieser Komponenten in der Hyperebene $H_j$, so folgt aus Lemma 4.1.8 und Folgerung 4.1.9, dass diese Komponente auch eine Komponente von $w_{H_j}$ ist. $\Omega_j$ ist eine Baer-Komponente von $w_{H_j}$, die nicht in $H'_a$ enthalten ist, also auch keine Komponente von $w_{H'_a}$ ist. Somit müssen die Komponenten von $w_{H'_a}$, die nicht in $H_j$ enthalten sind, die Punkte von $\Omega_j \cap H'_a = \Phi$ überdecken.
Seien o.B.d.A $B_1, \dots, B_u$ und $U_1, \dots, U_v$ die Komponenten von $w_{H'_a}$, die nicht in $H_j$ enthalten sind. Dann ist $U_b \cap H_j$ ein Unterraum der Dimension $\mu - 2$ für alle $b \in \{1, \dots, u\}$. Der Baer-Kegel $B_c$ ist vom Typ $B_{r_c,2\mu-3-2r_c}$ für ein $r_c \leq \mu-3$ und daher ist $B_c \cap H_j$ ein Baer-Kegel $B_{s_c,t_c}$ mit $s_c \leq r_c \leq \mu-3$ und $2s_c+t_c+2 \leq 2\mu-2$ für alle $c \in \{1, \dots, v\}$ (siehe Lemma 4.1.4). Lemma 4.1.10 mit $m = \mu - 1$ zeigt, dass die Vereinigung von $(B_1 \cap H_j), \dots, (B_u \cap H_j)$ und $(U_1 \cap H_j), \dots, (U_v \cap H_j)$ keinen Baer-Kegel vom Typ $B_{d,e}$ mit $2d + 2 + e = 2\mu - 2$ und $d \leq \mu - 3$ enthält, außer den Baer-Kegeln $(B_1 \cap H_j), \dots, (B_u \cap H_j)$. Somit ist $\Phi = B_c \cap H_j$ für ein $c \in \{1, \dots, u\}$, also ist $\Phi$ in der Baer-Komponente $B_c$ von $w_{H'_a}$ enthalten.
Weil $\Phi$ den Baer-Kegel $\Pi \cap \Pi_i$ enthält, welcher Punkte vom Gewicht $\alpha$ hat (Lemma 4.2.10), und weil $\Omega'_a$ eine Baer-Komponente von $w_{H'_a}$ mit Vielfachheit $\alpha$ ist, die $\Pi \cap \Pi_i$ enthält, folgt $B_c = \Omega'_a$. Somit sind $\Phi$ und $\Pi_i$ zwei verschiedene Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$, die beide in $\Omega'_a$ (ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$) und beide in $\Omega^*$ (ebenfalls ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$) enthalten sind. Es folgt $\Omega'_a = \Omega^*$, was Teil 2 abschließt.

**Teil 3:** Es gibt $\sqrt{q}+1$ Hyperebenen durch $\Delta_i$, die $\Psi_{ij}$ in einer projizierten Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu-1, \sqrt{q})$ treffen, und mindestens $\sqrt{q}+1-\beta > 1$ dieser Hyperebenen sind unter den Hyperebenen $H'_1, \ldots, H'_{q+1-\beta}$. Eine dieser Hyperebenen ist $H'_1 = H_i$. Sei $H'_n$ eine zweite. Dann wird $\Psi_{ij}$ auch von $\Omega'_1$ und $\Omega'_n$ erzeugt, d.h. $\Psi_{ij}$ ist der eindeutige Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-2-2s}$, der $\Omega'_1$ und $\Omega'_n$ enthält.
Nun gilt $\Pi \subseteq \Delta \subseteq H_1, \ldots, H_i, \ldots, H_{q+1-\beta}$ und $\Pi_i \subseteq \Delta_i \subseteq H_i = H'_1, \ldots, H'_{q+1-\beta}$, wobei die entsprechenden Strukturen gleiche Eigenschaften haben. Somit sind $\Pi$ und $\Pi_i$ symmetrisch definiert und das Argument von Teil 2 zeigt $H_l \cap \Psi_{ij} = \Omega_l$ oder $H_l \cap \Psi_{ij} = \Pi$ für alle $l \in \{1, \ldots, q+1-\beta\}$. □

## Schritt 4

Im vierten Schritt zeigen wir, dass eine projizierte Baer-Untergeometrie $\Lambda$ der Dimension $2\mu+1$ mit $w^\Lambda \leq w$ existiert. Wir haben bisher die folgende Situation nachgewiesen.

- In der Cogeraden $\Delta$ liegt genau eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu-2, \sqrt{q})$, bezeichnet mit $\Pi$, die $w^\Pi \leq w$ erfüllt. Es gilt sogar $\alpha w^\Pi \leq w$. Der Baer-Kegel $\Pi$ ist vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$ mit $-1 \leq s \leq \mu-3$ und Spitze $\pi_s$. $\Pi$ enthält Punkte vom Gewicht genau $\alpha$. Der Unterraum $\Delta$ liegt in $q+1-\beta$ Hyperebenen $H_1, \ldots, H_{q+1-\beta}$ mit $w(H_i) = \delta\theta_{\mu-1}$. Für jede dieser Hyperebenen $H_i$ enthält die Minihyper $w_{H_i}$ genau eine Baer-Komponente $\Omega_i$, die $\Pi$ enthält. Der Baer-Kegel $\Omega_i$ hat Vielfachheit genau $\alpha$ und ist vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$ mit Spitze $\pi_s$. Insbesondere ist $\Omega_i$ eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu-1, \sqrt{q})$, die $\Omega_i \cap \Delta = \Pi$ erfüllt.
- Je zwei verschiedene dieser projizierten Baer-Untergeometrien, $\Omega_i$ und $\Omega_j$ mit $i \neq j$, definieren eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu, \sqrt{q})$ vom Typ $B_{s,2\mu-2-2s}$, die mit $\Psi_{ij}$ bezeichnet wird. Es gilt $\Psi_{ij} \cap H_l = \Pi$ oder $\Psi_{ij} \cap H_l = \Omega_l$ für alle $l = 1, \ldots, q+1-\beta$.

**Lemma 4.2.12** *Es existiert eine projizierte Baer-Untergeometrie $\Lambda$ der Dimension $2\mu+1$ mit $\Omega_l \subseteq \Lambda$ für alle $l = 1, \ldots, q+1-\beta$. Der Baer-Kegel $\Lambda$ ist entweder vom Typ $B_{s,2\mu-1-2s}$ mit Spitze $\pi_s$ oder er ist vom Typ $B_{s+1,2\mu-3-2s}$ und seine Spitze trifft $\Delta$ in $\pi_s$.*

*Beweis:* Für verschiedene $i, j \in \{1, \ldots, q+1-\beta\}$ treffen genau $\sqrt{q}+1$ Hyperebenen durch $\Delta$ den Baer-Kegel $\Psi_{ij}$ in einer projizierten Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu-1, \sqrt{q})$. Sei $\epsilon_{ij}$ die Anzahl dieser Hyperebenen, die verschieden von $H_1, \ldots, H_{q+1-\beta}$ sind. Dann gibt es $\sqrt{q}+1-\epsilon_{ij}$ Hyperebenen $H_l$ mit $H_l \cap \Psi_{ij} = \Omega_l$ (Lemma 4.2.11). O.B.d.A. sei $H_r \cap \Psi_{12} = \Omega_r$ für $r = 1, \ldots, \sqrt{q}+1-\epsilon_{12}$. Mit $j := \sqrt{q}+2-\epsilon_{12}$ ist $\Omega_j$ nicht in $\Psi_{12}$ enthalten. Da die Baer-Kegel $\Omega_j$ und $\Psi_{12}$ die selbe Spitze $\pi_s$ haben, können wir Lemma 4.1.11 im Quotientenraum nach $\pi_s$ anwenden. Das Lemma zeigt, dass ein Baer-Kegel $\Lambda$ existiert, der $\Omega_j$ und $\Psi_{12}$ enthält. Außerdem ist $\Lambda$ entweder vom Typ $B_{s,2\mu-1-2s}$ mit Spitze $\pi_s$ oder $\Lambda$ ist vom Typ $B_{s+1,2\mu-3-2s}$

und seine Spitze trifft den Unterraum $\Delta$ in $\pi_s$.
Für $1 \leq r \leq \sqrt{q}+1-\epsilon_{12}$ gilt, dass die Baer-Kegel $\Lambda$ und $\Psi_{jr}$ beide $\Omega_j$ und $\Omega_r$ enthalten, also $\Psi_{jr} \subseteq \Lambda$. Da $\Omega_j$ nicht in $\Psi_{12}$ liegt, erzeugen verschiedene $r$ verschiedene Baer-Kegel $\Psi_{jr}$, die sich paarweise nur in $\Omega_j$ treffen. Ist $H_l \cap \Psi_{jr} = \Omega_l$, dann ist $\Omega_l \subseteq \Psi_{jr} \subseteq \Lambda$. Die Anzahl verschiedener Baer-Kegel $\Omega_l$, die in $\Lambda$ enthalten sind, ist damit mindestens

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{r=1}^{\sqrt{q}+1-\epsilon_{12}} (\sqrt{q}-\epsilon_{jr}) &= 1 + (\sqrt{q}+1-\epsilon_{12})\sqrt{q} - \sum_{r=1}^{\sqrt{q}+1-\epsilon_{12}} \epsilon_{jr} \\ &\geq 1 + (\sqrt{q}+1-\epsilon_{12})\sqrt{q} - (\beta - \epsilon_{12}) \\ &\geq 1 + q - \sqrt{q}(\beta-1). \end{aligned}$$

Hierbei wurde $\epsilon_{12} + \sum_r \epsilon_{jr} \leq \beta$ verwendet, was daraus folgt, dass nur $\beta$ der Hyperebenen durch $\Delta$ nicht unter den Hyperebenen $H_1, \ldots, H_{q+1-\beta}$ sind.
Wir wählen $j'$ mit $\sqrt{q}+1-\epsilon_{12} < j' \leq q+1-\beta$. Dann definieren $\Psi_{12}$ und $\Omega_{j'}$ ebenfalls eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu+1, \sqrt{q}) =: \Lambda'$, so dass mindestens $1+q-\sqrt{q}(\beta-1)$ der Baer-Kegel $\Omega_l$ in $\Lambda'$ enthalten sind. Dann gilt $\Omega_l \subseteq \Lambda \cap \Lambda'$ für mindestens $\beta+1+q-2\sqrt{q}(\beta-1) > \sqrt{q}+1$ verschiedene $\Omega_l$ (siehe (4f)), also $\Lambda = \Lambda'$. Somit ist $\Omega_{j'} \subseteq \Lambda$.
Es folgt $\Omega_l \subseteq H_l \cap \Lambda$ für alle $l = 1, \ldots, q+1-\beta$. □

Die Aussage des nächsten Lemmas wird in den Beweisen der beiden darauf folgenden Lemmas verwendet und hier für die bessere Übersichtlichkeit getrennt bewiesen.

**Lemma 4.2.13** *Sei $U$ Unterraum von $\mathrm{PG}(k-1,q)$ mit Dimension höchstens $\mu$, der nicht in $F$ enthalten ist, und $P$ ein Punkt außerhalb von $U$. Dann existiert eine Hyperebene mit minimalem Gewicht $\delta\theta_{\mu-1}$ durch $U$, die $P$ nicht enthält.*

*Beweis:* Resultat 4.1.3 liefert $w(U) \leq \delta\theta_{\mu-1}$. Sei $u := \dim(U)$ und sei $\mathcal{H}$ die Menge der Hyperebenen durch $U$. Jeder Punkt $X$ außerhalb von $U$ liegt in $\theta_{k-3-u}$ Hyperebenen aus $\mathcal{H}$. Zählt man inzidente Paare $(X, K)$ mit Punkten $X$ außerhalb von $U$ und $K \in \mathcal{H}$ doppelt ab, wobei man jedes Paar genau $w(X)$ mal zählt, so erhält man

$$\sum_{H \in \mathcal{H}} (w(H) - w(U)) = \sum_{X \notin U} w(X)\theta_{k-3-u}.$$

Angenommen die $q^{k-2-u}$ Hyperebenen durch $U$, die $P$ nicht enthalten, haben alle ein Gewicht größer als $\delta\theta_{\mu-1}$. Dann zeigt Resultat 4.1.2, dass diese Hyperebenen mindestens das Gewicht $\theta_\mu + (\delta-1)$ haben. Es folgt

$$q^{k-2-u}(\theta_\mu + \delta - 1 - w(U)) \leq (\delta\theta_\mu - w(U))\theta_{k-3-u}.$$

Mit $w(U) \leq \delta\theta_{\mu-1}$ und $\delta \leq \frac{1}{4}(q-1)$ (siehe (4d)) folgt der Widerspruch. □

**Lemma 4.2.14** *Ist der Baer-Kegel $\Lambda$ vom Typ $B_{s+1,2\mu-3-2s}$, so ist $w^\Lambda \leq w$.*

*Beweis:* Sei $\pi_{s+1}$ die Spitze von $\Lambda$. Dann ist $\pi_s$, die gemeinsame Spitze von $\Pi$ und allen $\Omega_i$, in $\pi_{s+1}$ enthalten.

**Teil 1:** Aus Lemma 4.2.12 folgt $\pi_{s+1} \cap \Delta = \pi_s$, also ist $L := \langle \pi_{s+1}, \Delta \rangle$ eine Hyperebene durch $\Delta$. Es ist $\Lambda \nsubseteq L$, denn $H_i \cap \Lambda = \Omega_i \nsubseteq \Delta$, aber $\Omega_i \subseteq \Lambda$ für $i = 1, 2$. Damit folgt aus Lemma 4.1.4, dass $\Phi := L \cap \Lambda$ ein Baer-Kegel mit Spitze $\pi_{s+1}$ vom Typ $B_{s+1,2\mu-4-2s}$ oder vom Typ $B_{s+1,2\mu-5-2s}$ ist. Da $\Delta$ eine Hyperebene von $L$ ist, die die Spitze von $\Phi$ in $\pi_s$ schneidet, folgt aus dem gleichen Lemma, dass $\Phi \cap \Delta$ entsprechend vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$ oder vom Typ $B_{s,2\mu-5-2s}$ ist. Der Baer-Kegel $\Pi \subseteq \Lambda$ ist vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$ und in $\Delta$ enthalten. Daher gilt $\Pi = \Phi \cap \Delta$ und $\Phi$ ist vom Typ $B_{s+1,2\mu-4-2s}$.

**Teil 2:** Für alle $l \in \{1, \ldots, q+1-\beta\}$ mit $H_l \neq L$, ist $H_l \cap \pi_{s+1} = \pi_s$. Da $\Lambda$ vom Typ $B_{s+1,2\mu-3-2s}$ ist, folgt nun aus Lemma 4.1.4, dass die Hyperebene $H_l$ den Baer-Kegel $\Lambda$ in einem Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$ trifft. $\Omega_l$ ist ein Baer-Kegel vom gleichen Typ, der in $H_l \cap \Lambda$ liegt (Lemma 4.2.12), also gilt $H_l \cap \Lambda = \Omega_l$.

**Teil 3:** Sei $P_0$ ein Punkt aus $\pi_{s+1} \setminus \pi_s$. In diesem Teil zeigen wir für alle Punkte $P \in \Lambda$ mit $P \neq P_0$, dass $w(P) \geq 1$ ist und sogar $w(P) \geq \sqrt{q}+1$ gilt, falls $P \in \pi_{s+1}$.

**Fall 1:** $P \in \Lambda$ mit $P \notin L$. Dann ist $\ell := PP_0$ eine Gerade aus $\Lambda$, die nicht in $L$ enthalten ist. Nach Teil 2 treffen mindestens $q - \beta$ der Hyperebenen $H_l$ die Gerade $\ell$ in einem Punkt aus $\Omega_l$. Wegen $w(X) \geq 1$ für alle Punkte $X$ in $\Omega_l$ ist $w(\ell) \geq q - \beta > q/2 > \delta$. Aus Resultat 4.1.3 folgt, dass jede Gerade entweder Gewicht höchstens $\delta$ hat oder in $F$ enthalten ist. Somit gilt $w(X) \geq 1$ für alle $X \in \ell$, also $w(P) \geq 1$.

**Fall 2:** $P \in \Lambda \cap L$ mit $P \neq P_0$. Sei $\pi$ eine Hyperebene von $\pi_{s+1}$, die $P_0$ nicht enthält, und falls $P \in \pi_{s+1}$, so gelte zusätzlich $P \in \pi$. Dann ist $\dim(\langle \pi, P \rangle) \leq s+1 \leq \mu-2$, also existiert ein Unterraum $U$ der Dimension $\mu-1$ durch $\langle \pi, P \rangle$, der $P_0$ nicht enthält und auch nicht in $F$ enthalten ist,denn es gibt genug Punkte vom Gewicht Null in $\mathrm{PG}(k-1, q)$. Das vorherige Lemma zeigt, dass es eine Hyperebene $K$ mit Gewicht $\delta\theta_{\mu-1}$ gibt, die $\langle \pi, P \rangle$ enthält, aber $P_0$ nicht enthält.
Weil $P_0$ in der Spitze von $\Lambda$ liegt, ist $K \cap \Lambda$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$. Wir haben bereits gezeigt, dass jeder Punkt in $K \cap \Lambda$, der nicht in $K \cap L$ liegt, ein positives Gewicht hat. Außerdem ist $\Phi = L \cap \Lambda$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s+1,2\mu-4-2s}$ und damit $K \cap L \cap \Lambda$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{s,2\mu-4-2s}$. Somit gibt es $q^{s+1}(\sqrt{q})^{2\mu-3-2s}$ einfache Punkte in $(K \cap \Lambda) \setminus (K \cap L \cap \Lambda)$ und diese liegen alle in $F$. Das sind mehr als ein Viertel aller einfachen Punkte von $K \cap \Lambda$, weshalb Lemma 4.2.2 und 4.1.8 zeigen, dass $K \cap \Lambda$ eine Baer-Komponente von $w_K$ ist. Es folgt $w(P) \geq 1$, und falls $P$ in der Spitze von $K \cap \Lambda$ liegt, was bedeutet, dass $P$ in der Spitze von $\Lambda$ liegt, dann gilt $w(P) \geq \sqrt{q}+1$.

**Teil 4:** In diesem letzten Teil zeigen wir noch $w(P_0) \geq \sqrt{q}+1$. Falls $s \geq 0$ ist, so können wir das Argument aus Teil 3 für einen von $P_0$ verschiedenen Punkt in $\pi_{s+1} \setminus \pi_s$ wiederholen und erhalten $w(P_0) \geq \sqrt{q}+1$. Sei daher $s = -1$, also $\pi_s = \emptyset$ und $\pi_{s+1} = \{P_0\}$. Sei $X$ ein Punkt vom Gewicht Null, $U$ die Gerade $XP_0$ und sei $P$ ein Punkt in $\Lambda \setminus U$. Dann existiert nach Lemma 4.2.13 eine Hyperebene $K$ durch $P_0$, die $\Lambda$ nicht enthält und minimales Gewicht hat. Dann ist $K \cap \Lambda$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{0,2\mu-2}$ oder vom Typ $B_{0,2\mu-3}$. Der erste Fall kann nicht eintreten, denn ein solcher Kegel hat $q^\mu$ einfache Punkte, die alle nach Teil 3 in $F$

liegen, aber es ist $w(K) = \delta\theta_{\mu-1} < q^\mu$. Somit ist $K \cap \Lambda$ ein Baer-Kegel vom Typ $B_{0,2\mu-3}$.
Ist $2\mu - 3 \geq 2$, so lässt sich Lemma 4.1.8 anwenden. Nach Teil 3 liegen alle einfachen Punkte von $K \cap \Lambda$ in $F$ und nach Lemma 4.1.8 ist damit $K \cap \Lambda$ eine Baer-Komponente von $w_K$. Es folgt $w(P_0) \geq \sqrt{q} + 1$.
Ist $\mu = 2$, so ist Lemma 4.1.8 nicht anwendbar. In diesem Fall ist nach Lemma 4.2.2 die Minihyper $w_K$ eine Summe von $z$ Baer-Untergeometrien $\mathrm{PG}(3, \sqrt{q})$ und $\delta - z(\sqrt{q}+1)$ Geraden für ein $z \leq \delta/(\sqrt{q}+1)$. Diese $\delta - z(\sqrt{q}+1)$ Geraden sind die einzigen Geraden, die in $K \cap F$ enthalten sind. $K \cap \Lambda$ ist ein Baer-Kegel vom Typ $B_{0,1}$, also die Vereinigung von $\sqrt{q}+1$ Geraden durch $P_0$. Jede dieser Geraden hat nach Teil 3 Gewicht mindestens $q > \delta$, ist also in $F$ enthalten (siehe Resultat 4.1.3). Damit folgt $w(P_0) \geq \sqrt{q} + 1$. □

**Lemma 4.2.15** *Ist der Baer-Kegel $\Lambda$ vom Typ $B_{s,2\mu-1-2s}$, so ist $w^\Lambda \leq w$.*

*Beweis:* Die Spitze von $\Lambda$ ist $\pi_s$, die Spitze des Baer-Kegels $\Pi$. Wegen $w^\Pi \leq w$ reicht es, $w(R) \geq 1$ für alle Punkte $R$ aus $\Lambda \setminus \Pi$ zu zeigen. Sei $R$ ein solcher Punkt. Wir wählen eine Baer-Teilebene $E$ von $\Lambda$ durch $R$, so dass

$$(\langle E, \pi_s\rangle \cap \Lambda)/\pi_s \cong \mathrm{PG}(2, \sqrt{q})$$

ein Komplement von $\Pi/\pi_s \cong \mathrm{PG}(2\mu-4-2s, \sqrt{q})$ in $\Lambda/\pi_s \cong \mathrm{PG}(2\mu-1-2s, \sqrt{q})$ ist. Sei $U := \langle E, \pi_s\rangle$, dann ist $\dim(U) = s+3 \leq \mu$. Ist $U \subseteq F$, dann ist $w(R) \geq 1$ und die Behauptung gezeigt. Sei daher $U$ nicht in $F$ enthalten. Dann existiert eine Hyperebene $K$ durch $U$ mit minimalem Gewicht $\delta\theta_{\mu-1}$, die $\Lambda$ nicht enthält (Lemma 4.2.13). Nach Lemma 4.1.4 ist der Baer-Kegel $K \cap \Lambda$ daher vom Typ $B_{s,2\mu-2-2s}$ oder vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$ und nach Lemma 4.2.2 ist $w_K$ eine $\{\delta\theta_{\mu-1}, \delta\theta_{\mu-2}; k-2, q\}$-Minihyper, die die Summe aus $(\mu-1)$-dimensionalen Unterräumen $\mathrm{PG}(\mu-1, q)$ und projizierten Baer-Untergeometrien $\mathrm{pPG}(2\mu-1, \sqrt{q})$ ist.
Angenommen $K \cap \Lambda$ ist vom Typ $B_{s,2\mu-2-2s}$. Weil $(U \cap \Lambda)/\pi_s$ ein Komplement von $(K \cap \Pi)/\pi_s$ in $(K \cap \Lambda)/\pi_s$ ist, ist $(K \cap \Pi)/\pi_s \cong \mathrm{PG}(2\mu-5-2s)$ und $(K \cap \Omega_l)/\pi_s \cong \mathrm{PG}(2\mu-4-2s)$ für alle $l \in \{1, \ldots, q+1-\beta\}$. Alle diese $(K \cap \Omega_l)/\pi_s$ sind paarweise verschieden und enthalten $(K \cap \Pi)/\pi_s$. Somit liegen mindestens

$$(q+1-\beta)(\sqrt{q})^{2\mu-4-2s} q^{s+1} > \delta\theta_{\mu-1}$$

einfache Punkte aus $K \cap \Lambda$ in $F$. Dies ist ein Widerspruch zu $w(K) = \delta\theta_{\mu-1}$, weshalb $K \cap \Lambda$ vom Typ $B_{s,2\mu-3-2s}$ ist, also eine projizierte Baer-Untergeometrie $\mathrm{pPG}(2\mu-1, \sqrt{q})$.
Weil $(U \cap \Lambda)/\pi_s$ ein Komplement von $(K \cap \Pi)/\pi_s$ in $(K \cap \Lambda)/\pi_s$ ist, ist $(K \cap \Pi)/\pi_s \cong \mathrm{PG}(2\mu-6-2s)$ und $(K \cap \Omega_l)/\pi_s \cong \mathrm{PG}(2\mu-5-2s)$ für alle $l \in \{1, \ldots, q+1-\beta\}$. Alle diese $(K \cap \Omega_l)/\pi_s$ sind paarweise verschieden und enthalten $(K \cap \Pi)/\pi_s$. Somit liegen mindestens

$$(q+1-\beta)(\sqrt{q})^{2\mu-5-2s} q^{s+1} > \frac{1}{4} \frac{(\sqrt{q})^{2\mu-2-2s} - 1}{\sqrt{q}-1} q^{s+1}$$

einfache Punkte von $K \cap \Lambda$ in $F$. Das sind mehr als $\delta/(q-1) \leq 1/4$ aller einfachen Punkte von $K \cap \Lambda$ und mit Lemma 4.1.8 folgt, dass $K \cap \Lambda$ eine der Baer-Komponenten von $w_K$ ist, also $R$ in $F$ liegt. □

**Beweisabschluss von Theorem 4.0.10:** Wie zu Beginn des Abschnitts beschrieben, beweisen wir Theorem 4.0.10 mit Induktion nach $\mu$.

Für $\mu = 1$ ist Theorem 4.0.10 bereits von Leo Storme in [Sto08] bewiesen.

Sei nun $\mu \geq 2$ und die Aussage für alle kleineren Werte gezeigt. Nach Resultat 4.1.2 ist für jede Hyperebene $K$ von $\mathrm{PG}(k-1, q)$ mit $w(K) = \delta\theta_{\mu-1}$ die Einschränkung $w_K$ eine $\{\delta\theta_{\mu-1}, \delta\theta_{\mu-2}; k-2, q\}$-Minihyper. Diese ist nach Induktionsvoraussetzung die Summe von Unterräumen $\mathrm{PG}(\mu-1, q)$ und von projizierten Baer-Untergeometrien $\mathrm{pPG}(2\mu-1, \sqrt{q})$. Den Induktionsschritt für $\mu$ beweisen wir nun mit einer Induktion nach $\delta$.

Für $0 \leq \delta \leq \sqrt{q}$ zeigt Resultat 4.0.8, dass $w$ die Summe von $\delta$ Unterräumen der Dimension $\mu$ ist.

Sei nun $\delta \geq \sqrt{q} + 1$ und die Aussage für alle kleineren Werte bereits gezeigt.

**Fall 1:** Für alle Hyperebenen $K$ von $\mathrm{PG}(k-1, q)$ mit $w(K) = \delta\theta_{\mu-1}$ enthält $w_K$ keine Baer-Komponente. Dann ist nach Lemma 4.2.1 die Minihyper $w$ die Summe von $\delta$ Unterräumen der Dimension $\mu$ und Theorem 4.0.10 gezeigt.

**Fall 2:** Für mindestens eine Hyperebene $K$ mit $w(K) = \delta\theta_{\mu-1}$ enthält $w_K$ eine Baer-Komponente. Dann zeigen die Schritte 1 - 4, dass eine projizierte Baer-Untergeometrie $\Lambda$ der Dimension $2\mu + 1$ mit $w^\Lambda \leq w$ existiert. Theorem 4.1.13 zeigt, dass $w - w^\Lambda$ eine $\{(\delta - 1 - \sqrt{q})\theta_\mu, (\delta - 1 - \sqrt{q})\theta_{\mu-1}; k-1, q\}$-Minihyper ist. Diese ist nach Induktionsannahme die Summe von Unterräumen der Dimension $\mu$ und von projizierten Baer-Untergeometrien der Dimension $2\mu + 1$. □

# 5 Tight Mengen in hyperbolischen Quadriken

In diesem Kapitel werden Punktmengen $M$ eines endlichen, klassischen Polarraums untersucht, die die Eigenschaft haben, dass die Punkte in $M$ auf möglichst vielen Punkten aus $M$ senkrecht stehen. Drudge hat sich in seiner Doktorarbeit [Dru98] mit solchen Mengen beschäftigt und das folgende Theorem bewiesen.

**Theorem 5.0.1** (Drudge [Dru98]) *Sei $M$ eine Teilmenge der Punkte eines endlichen klassischen Polarraums $\mathbb{P}$ vom Rang $r$. Dann gilt für die durchschnittliche Anzahl $\zeta$ an Punkten in $M$, die auf einem Punkt $P \in M$ senkrecht stehen*

$$\zeta \leq q^{r-1} + |M| \frac{\theta_{r-2}}{\theta_{r-1}}.$$

*Gilt Gleichheit, so ist $|M| = x\theta_{r-1}$ für ein $x \in \mathbb{N}_0$. Dieser Fall ist äquivalent zu*

$$|P^{\perp} \cap M| = \begin{cases} q^{r-1} + x\theta_{r-2} & \textit{falls } P \in M \\ x\theta_{r-2} & \textit{falls } P \notin M \end{cases} \tag{5a}$$

*für alle $P \in \mathbb{P}$.*

Eine Menge $M$ mit $|M| = x\theta_{r-1}$, für die Gleichheit im vorherigen Theorem gilt, heißt *$x$-tight Menge* von $\mathbb{P}$. Es ist $0 \leq x \leq |\mathbb{P}| / \theta_{r-1}$.

Payne bewies schon 1973 ein entsprechendes Theorem für verallgemeinerte Vierecke, siehe [PT09]. Er nannte diese Mengen bereits *tight Mengen* und untersuchte sie in weiteren Veröffentlichungen. Eisfeld bewies in [Eis98] die gleiche Aussage wie Drudge mit Hilfe von stark regulären Graphen. Er gab außerdem eine untere Schranke für $\zeta$ an. Gilt Gleichheit bei der unteren Schranke, dann trifft jeder Erzeuger von $\mathbb{P}$ die Menge $M$ in genau $m$ Punkten für ein $m \in \mathbb{N}$. Für $m = 1$ ist dies also ein Ovoid von $\mathbb{P}$. Daher heißen die Mengen, die die untere Schranke mit Gleichheit erfüllen, *$m$-Ovoid.* Bei Eisfeld heißen die zu $x$-tight Menge und $m$-Ovoid entsprechenden Mengen *Clique* und *Coclique.*

Die Vereinigung von $x$ disjunkten Erzeugern ist in jedem endlichen, klassischen Polarraum ein Beispiel für eine $x$-tight Menge, denn eine solche Menge erfüllt (5a). Wir untersuchen in diesem Kapitel tight Mengen der hyperbolischen Quadrik $Q^+(2n+1, q)$ auf Existenz und Klassifizierbarkeit.

In der hyperbolischen Quadrik $Q^+(2n+1, q)$ sind die Erzeuger in zwei Klassen, I und II, aufgeteilt, so dass die Dimension $d$ des Schnitts zweier Erzeuger genau dann $d \equiv n-1 \mod 2$ erfüllt, wenn die Erzeuger aus unterschiedlichen

Klassen stammen. Insbesondere gilt für gerade $n$, dass zwei Erzeuger aus der gleichen Klasse einen Schnitt von gerader Dimension haben, dieser Schnitt also nicht leer sein kann. Somit existieren für gerade $n$ maximal zwei disjunkte Erzeuger in $Q^+(2n+1,q)$ und die Existenz von $x$-tight Mengen mit $x > 2$ ist zunächst offen.

Der Spezialfall $n = 2$ wurde bisher besonders stark untersucht, denn eine $x$-tight Menge von $Q^+(5,q)$ wird durch die Klein-Korrespondenz auf eine Geradenmenge von $\mathrm{PG}(3,q)$ abgebildet, mit der Eigenschaft, dass sie jede Faserung von $\mathrm{PG}(3,q)$ in genau $x$ Geraden trifft. Solche Geradenmengen wurden von Cameron und Liebler erstmals beschrieben, siehe [CL82], und heißen heute *Cameron-Liebler-Geradenmengen*. Sie vermuteten damals, dass es außer den trivialen Beispielen für $x = 0,1,2$ und deren Komplementen, welche entsprechende Mengen mit $x = q^2+1, q^2, q^2-1$ sind, keine solchen Geradenmengen gibt. Diese Vermutung ist falsch. Drudge klassifiziert in [Dru99] alle Cameron-Liebler-Geradenmengen von $\mathrm{PG}(3,3)$ und findet ein Beispiel für $x = 5$. Dieses Beispiel lässt sich zu einer Cameron-Liebler-Geradenmenge mit $x = (q+1)/2$ für alle ungeraden $q$ verallgemeinern und wird von Bruen und Drudge in [BD99] beschrieben. Das erste nicht triviale Beispiel für gerade $q$ stammt von Govaerts und Penttila. In [GP05] konstruieren sie eine Cameron-Liebler-Geradenmenge mit $x = 7$ in $\mathrm{PG}(3,4)$. Mit Hilfe des Computers wurden inzwischen weitere Beispiele gefunden. Rodgers beweist in seiner Doktorarbeit [Rod12] die Existenz von Cameron-Liebler-Geradenmengen mit $x = (q^2-1)/2$ für $q \equiv 5$ oder $9 \mod 12$ und $q < 200$, sowie für $x = (q+1)^2/3$, $q \equiv 2 \mod 3$ und $q < 150$.

Obwohl die Vermutung von Cameron und Liebler falsch war, sind nur für wenige Parameter $x$ Cameron-Liebler-Geradenmengen bekannt und damit $x$-tight Mengen von $Q^+(5,q)$. Für $q = 2$ ist $\{0,1,2,q^2-1,q^2,q^2+1\} = \{0,1,2,3,4,5\}$ und Cameron und Liebler haben in [CL82] bereits gezeigt, dass für alle $x$ eine $x$-tight Menge von $Q^+(5,2)$ existiert und diese auch klassifiziert. Das folgende Resultat listet die bisher bekannten nicht-Existenzaussagen für $q > 2$ chronologisch auf.

**Resultat 5.0.2** *Für eine $x$-tight Menge in $Q^+(5,q)$, $q \geq 3$, gilt*

*(i)* $x \neq 3$ *[Pen91].*

*(ii)* $x \neq 4$, *falls* $q \geq 5$ *[Pen91].*

*(iii)* $x \notin [3, \sqrt{q}]$ *[BD98].*

*(iv)* $x \notin [3, \epsilon]$ *[Dru99].*

*(v)* $x \neq 4$, *falls* $q = 3$ *[Dru99].*

*(vi)* $x \neq 4$, *falls* $q = 4$ *[Gov03].*

*(vii)* $x \notin [3, 2\epsilon)$ *[GS04].*

*(viii)* $x \notin [3, q/2)$ *[BG08].*

*(ix)* $x \notin [3, q]$ *[Met10].*

*Hierbei bezeichnet $q+1+\epsilon$ die Mächtigkeit einer kleinsten minimalen nicht-trivialen blockierenden Menge in* $\mathrm{PG}(2,q)$.

Der Fall $n > 2$ wird noch nicht so lange untersucht wie der Fall $n = 2$. Für ungerade $n$ ist die Dimension des Schnitts zweier Erzeuger aus der gleichen Klasse ungerade. Wählt man dann $x$ disjunkte Erzeuger aus einer Klasse, so erhält man eine $x$-tight Menge von $Q^+(2n+1,q)$. Nun stellt sich die Frage, ob es andere $x$-tight Mengen für diese Parameter $x$ gibt. Zumindest für kleine $x$ ist dies nicht der Fall, wie das folgende Resultat zeigt.

**Resultat 5.0.3** *Eine $x$-tight Menge von $Q^+(2n+1,q)$ ist die Vereinigung von $x$ disjunkten Erzeugern, für alle*

*(i) $x \leq \sqrt{q}$ und $q \geq 4$ [Dru98].*

*(ii) $x \leq \epsilon$ [BKLP07].*

*(iii) $x \leq q/2 - 1$ [BGHS09].*

*Hierbei bezeichnet $q+1+\epsilon$ die Mächtigkeit einer kleinsten minimalen nicht-trivialen blockierenden Menge in* $\mathrm{PG}(2,q)$. *Insbesondere gilt für gerade $n$ und $x$ in diesen Schranken $x \in \{0,1,2\}$.*

Im folgenden Abschnitt sammeln wir einige Beispiele und Aussagen zu tight Mengen im Allgemeinen. Im zweiten Abschnitt verbessern wir das Resultat 5.0.2 und zeigen, dass keine $(q+1)$-tight Menge von $Q^+(5,q)$ existiert, falls $q$ eine ungerade Primzahl ist. Der dritte Abschnitt verbessert das Resultat 5.0.3. Dort beweisen wir, dass $x$-tight Mengen von $Q^+(2n+1,q)$ mit $x \leq q-1$ und $q \geq 71$, oder mit $n = 3$ und $x \leq q$, immer die Vereinigung von $x$ disjunkten Erzeugern sind. Die Ergebnisse des dritten Abschnitts sind bereits in [BM13] veröffentlicht.

## 5.1 Beispiele und Grundlagen

Sei $\mathbb{P}$ ein endlicher, klassischer Polarraum vom Rang $r$. Wie bereits erwähnt, ist die Vereinigung von $x$ disjunkten Erzeugern von $\mathbb{P}$ ein Beispiel für eine $x$-tight Menge, denn diese Menge erfüllt (5a). Die Umkehrung ist allerdings falsch, nicht jede $x$-tight Menge ist die Vereinigung von $x$ disjunkten Erzeugern. Für $Q^+(5,q)$ wurde bereits die Existenz solcher Beispiele erwähnt. Zudem lassen sich aus bekannten Beispielen neue Beispiele zusammensetzen, denn ist $M$, $M'$ eine $x$- bzw. $x'$-tight Menge von $\mathbb{P}$, so erhält man aus (5a) die folgenden Eigenschaften:

- Ist $M \cap M' = \emptyset$, so ist $M \cup M'$ eine $(x+x')$-tight Menge von $\mathbb{P}$.
- Ist $M' \subseteq M$, so ist $M \setminus M'$ eine $(x-x')$-tight Menge von $\mathbb{P}$.

Da die gesamte Punktmenge von $\mathbb{P}$ eine tight Menge ist, ist also insbesondere das Komplement einer tight Menge wieder eine tight Menge. Außerdem ist die Menge, die nur aus den Punkten eines Erzeugers $G$ besteht, eine 1-tight Menge, weshalb

Erzeuger aus $x$-tight Mengen entfernt werden können, um eine $(x-1)$-tight Menge zu erhalten. Diese Aussage verwenden wir mehrfach für Induktionsbeweise nach $x$ und halten sie im nächsten Lemma fest.

**Lemma 5.1.1** *Sei $G$ ein Erzeuger von $\mathbb{P}$ und $M$ eine $x$-tight Menge von $\mathbb{P}$ mit $G \subseteq M$. Dann ist $M \setminus G$ eine $(x-1)$-tight Menge von $\mathbb{P}$.*

Liegen in einer tight Menge mehrere Erzeuger, so kann das Entfernen verschiedener Erzeuger zu nicht isomorphen tight Mengen führen. Sei z.B. $\ell$ eine Gerade der parabolischen Quadrik $Q(4, q)$ und seien $P_0, \ldots, P_q$ die Punkte auf $\ell$. Wähle nun durch jeden Punkt $P_i$ eine Gerade $\ell_i \neq \ell$, so dass nicht alle $\ell_i$ zusammen in einer hyperbolischen Quadrik $Q^+(3, q)$ liegen. Sei $M$ die Vereinigung der $\ell_i$. Dann ist $M$ eine $(q+1)$-tight Menge von $Q(4, q)$. Das Entfernen einer Geraden $\ell_i$ aus $M$ liefert eine $q$-tight Menge von $Q(4, q)$, die weiterhin Geraden enthält. Die Gerade $\ell$ ist allerdings auch in $M$ enthalten und es gilt, dass $M' := M \setminus \ell$ eine $q$-tight Menge von $Q(4, q)$ ist, die keine Geraden enthält.

Dieses Beispiel lässt sich verallgemeinern und ist in der folgenden Form zusammen mit Ferdinand Ihringer entstanden [BI11]. Uns ist bisher keine andere Quelle für diese Konstruktion bekannt.

**Beispiel 5.1.2** Sei $G$ ein Erzeuger von $\mathbb{P}$ und $\mathcal{C}$ eine Überdeckung von $G$ durch Unterräume von $G$, so dass

(i) ein $a \in \mathbb{N}$ existiert, für das gilt, dass jeder Punkt in $G$ genau $a$ Mal überdeckt wird, sowie

(ii) je zwei Elemente aus $\mathcal{C}$ den Unterraum $G$ erzeugen.

Wähle für jedes Element $C \in \mathcal{C}$ einen Erzeuger $G_C$ durch $C$ mit $G_C \cap G = C$. Sei

$$M := \bigcup_{C \in \mathcal{C}} (G_C \setminus G).$$

Dann ist $M$ eine $(|\mathcal{C}| - a)$-tight Menge von $\mathbb{P}$.

**Lemma 5.1.3** *Die in Beispiel 5.1.2 konstruierte Menge $M$ ist eine $(|\mathcal{C}| - a)$-tight Menge von $\mathbb{P}$.*

*Beweis:* Seien $C$ und $D$ zwei verschiedene Elemente aus $\mathcal{C}$. Dann ist

$$G_C \cap G_D = C \cap D \subseteq G,$$

denn angenommen, es gibt einen Punkt $R \in G_C \cap G_D$, der nicht in $G$ liegt, so steht $R$ auf $C$ und $D$ und damit wegen (ii) auf $CD = G$ senkrecht. Somit wäre $RG$ ein singulärer Unterraum von $\mathbb{P}$ der Dimension $r$, ein Widerspruch zu Rang von $\mathbb{P}$ gleich $r$.

Zusammen mit (i) folgt

$$|M| = |\mathcal{C}|\,\theta_{r-1} - a\theta_{r-1}$$

und

$$\left|P^\perp \cap M\right| = \theta_{r-1} + (|\mathcal{C}| - 1)\theta_{r-2} - a\theta_{r-2}$$

für alle Punkte $P \in M$. □

Für $\mathcal{C}$ lässt sich zum Beispiel die Menge aller Hyperebenen von $G$ nehmen (in diesem Fall ist $a = \theta_{r-2}$), oder, falls $r$ gerade, eine $((r-2)/2)$-Faserung von $G$ (dann ist $a = 1$).

In manchen endlichen, klassischen Polarräumen gilt die Gleichung (5a) nicht nur für Punkte $P \in \mathbb{P}$, sondern auch für Punkte des umgebenden projektiven Raums. Dies lässt sich zu Schnittzahlen einer tight Menge $M$ mit Senkrechträumen $S^\perp$ für alle Unterräume $S$ verallgemeinern. Das nächste Lemma ist in [BM13] veröffentlicht. Spezialfälle, z.B. für $n = 2$, sind bereits bekannt.

**Lemma 5.1.4** *Sei $M$ eine $x$-tight Menge von $W(2n+1,q)$, $H(2n+1,q)$ oder $Q^+(2n+1,q)$ eingebettet in* $\mathrm{PG}(2n+1,q)$*. Dann gilt für jeden Unterraum $S$ der Dimension $s \leq n$ von* $\mathrm{PG}(2n+1,q)$

$$|S^\perp \cap M| = |S \cap M| q^{n-s} + x\theta_{n-s-1}.$$

*Beweis:* Durch Induktion nach $s$.

$\boldsymbol{s = -1:}$ Per Definition gilt $|M| = x\theta_n$.

$\boldsymbol{s = 0:}$ Dieser Fall ist bereits bekannt, siehe z.B. Theorem 12 in [BKLP07], folgt aber auch mit doppelter Abzählung und $|M| = x\theta_n$ aus

$$\begin{aligned}
&\sum_H (|H \cap M| - x\theta_{n-1})^2 \\
&= \sum_H \left(|H \cap M|(|H \cap M| - 1) - (2x\theta_{n-1} - 1)|H \cap M| + x^2\theta_{n-1}^2\right) \\
&= |M|(|M| - 1)\theta_{2n-1} - (2x\theta_{n-1} - 1)|M|\theta_{2n} + \theta_{2n+1}x^2\theta_{n-1}^2 \\
&= |M|\left((|M| - 1)\theta_{2n-1} - (2x\theta_{n-1} - 1)\theta_{2n} + (q^{n+1} + 1)x\theta_{n-1}^2\right) \\
&= |M| q^{2n},
\end{aligned}$$

wobei die Summe über alle Hyperebenen $H$ von $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ läuft. Für Hyperebenen $H$ mit $H^\perp \in M$ ist $(|H \cap M| - x\theta_{n-1})^2 = q^{2n}$ nach (5a), weshalb der Term $|M|q^{2n}$ bereits von diesen Hyperebenen aufgebraucht wird. Alle anderen Hyperebenen von $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ treffen $M$ daher in genau $x\theta_{n-1}$ Punkten. Dies liefert die Aussage für $s = 0$.

$\boldsymbol{s - 1 \mapsto s, s > 0:}$ In $S$ liegen $\theta_s$ Hyperebenen $U$. Ein Punkt von $S^\perp$ liegt in $U^\perp$ für jede Hyperebene $U$ von $S$. Punkte außerhalb von $S^\perp$ hingegen liegen in $U^\perp$ für genau eine Hyperebene $U$ von $S$. Unter Verwendung der Induktionsannahme für die Unterräume $U$ folgt

$$\begin{aligned} |S^{\perp} \cap M|(\theta_s - 1) + |M| &= \sum_U |U^{\perp} \cap M| \\ &= \sum_U (|U \cap M| q^{n+1-s} + x\theta_{n-s}) \\ &= x\theta_{n-s}\theta_s + q^{n+1-s} \sum |U \cap M| \\ &= x\theta_{n-s}\theta_s + q^{n+1-s} |S \cap M| \theta_{s-1}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die Aussage für $S$. □

**Folgerung 5.1.5** *Sei $M$ eine $x$-tight Menge von $W(2n+1,q)$, $H(2n+1,q)$ oder $Q^+(2n+1,q)$. Dann gilt für jeden Unterraum $S$ des umgebenden projektiven Raums $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ mit $s := \dim(S) \leq n$*

$$|S \cap M| \geq x\theta_{s-n-1}.$$

## 5.2 $(q+1)$-tight Mengen von $Q^+(5,q)$ für ungerade Primzahlen $q$

Die Erzeuger von $Q^+(5,q)$ sind Ebenen. Sie teilen sich in zwei Klassen auf, so dass zwei Erzeuger genau dann in der gleichen Klasse liegen, wenn ihr Schnitt eine gerade Dimension hat. Daher gibt es maximal zwei disjunkte Ebenen in $Q^+(5,q)$ und die Existenz von $x$-tight Mengen mit $q^2 - 1 > x > 2$ ist zunächst offen. Sei $M$ eine $x$-tight Menge von $Q^+(5,q) \subseteq \mathrm{PG}(5,q)$. Nach Lemma 5.1.4 gilt für jeden Unterraum $S$ von $\mathrm{PG}(5,q)$ mit $\dim(S) = s \leq 2$

$$\left|S^{\perp} \cap M\right| = |S \cap M|\, q^{2-s} + x\theta_{1-s}.$$

Insbesondere gilt für eine Gerade $\ell$ der Quadrik und die beiden Erzeuger $E$ und $F$ durch $\ell$

$$\left|\ell^{\perp} \cap M\right| = |(E \cup F) \cap M| = |\ell \cap M|\, q + x \tag{5b}$$

beziehungsweise

$$|E \cap M| + |F \cap M| = |\ell \cap M|\,(q+1) + x. \tag{5c}$$

Dieser Spezialfall von Lemma 5.1.4 wurde bereits von Penttila in [Pen91] bewiesen. Drudge verwendete ihn und Aussagen über blockierende Mengen, um in [Dru99] zu zeigen, dass keine $x$-tight Menge mit $x \in [3, \epsilon]$ von $Q^+(5,q)$ für $q > 2$ existiert. Hierbei bezeichnet $q + 1 + \epsilon$ die Mächtigkeit einer kleinsten minimalen nicht-trivialen blockierenden Menge in $\mathrm{PG}(2,q)$. Er beweist diese Aussage für Cameron-Liebler-Geradenmengen in $\mathrm{PG}(3,q)$ mit Induktion nach $x$. In $Q^+(5,q)$ übersetzt sich der Beweis wie folgt.

$\boldsymbol{x = 3}$ **:** In [Pen91] wird gezeigt, dass keine 3-tight Menge von $Q^+(5,q)$ für $q > 2$ existiert.

$\boldsymbol{x - 1 \mapsto x,\ 3 < x < \epsilon + 1}$ **:** Angenommen es existiert eine $x$-tight Menge $M$. Sei $P$ ein Punkt der Quadrik, der nicht in $M$ liegt. Dann ist $\left|P^\perp \cap M\right| = x(q+1) < (q+1)^2$, also existiert eine Gerade $g$ durch $P$, die $M$ nicht trifft. In $g^\perp$ liegen nach (5b) genau $x < q+1$ Punkte aus $M$, weshalb eine Gerade $\ell \subseteq g^\perp$ der Quadrik mit genau einem Punkt in $M$ existiert. Seien $E$ und $F$ die Erzeuger durch $\ell$. Dann haben $E$ und $F$ zusammen nach (5b) genau $q + x > 2x$ Punkte in $M$ und somit o.B.d.A. $|E \cap M| > x$. Angenommen es gibt eine Gerade $k$ in $E$, die $M$ nicht trifft. Dann ist $\left|k^\perp \cap M\right| = x < |E \cap M|$, ein Widerspruch zu $E \subseteq k^\perp$. Somit ist $E \cap M$ eine blockierende Menge in $E$. Wegen $|E \cap M| \leq q + x < q + 1 + \epsilon$ existiert eine Gerade $h$ in $E \cap M$. Sei $H$ die zweite Ebene durch $h$. Dann ist nach (5c)

$$|H \cap M| = (q+1)^2 + x - |E \cap M| \geq q^2 + q + 1,$$

also $H \subseteq M$. Nun ist $M \setminus H$ nach Lemma 5.1.1 eine $(x-1)$-tight Menge, welche nach Induktionsvoraussetzung nicht existiert, ein Widerspruch.

Govaerts und Storme verbesserten dieses Ergebnis in [GS04], indem sie den Beweis nur wenig veränderten. Sie starten mit einer Geraden aus $Q^+(5,q)$, die $M$ nicht trifft. Ähnliche Argumente wie eben zeigen dann, dass keine $x$-tight Menge von $Q^+(5,q)$ mit $x \in [3, 2\epsilon)$ existiert. Hierbei bezeichnet erneut $q+1+\epsilon$ die Mächtigkeit einer kleinsten minimalen nicht-trivialen blockierenden Menge in $\mathrm{PG}(2,q)$.

Für ungerade Primzahlen hat eine kleinste, nicht-triviale, minimale blockierende Menge in $\mathrm{PG}(2,q)$ genau $3(q+1)/2$ Punkte, also $\epsilon = (q+1)/2$. Für solche $q$ und für $x = 2\epsilon = q+1$ entsteht zunächst kein Widerspruch im Beweis von Govaerts und Strome, aber man erhält einige Information über die Menge $M$. Diese nutzen wir, um folgendes Theorem zu beweisen.

**Theorem 5.2.1** *Sei $q$ eine ungerade Primzahl. Dann gibt es keine $(q+1)$-tight Menge von $Q^+(5,q)$.*

Drudge zeigt in [Dru99], dass es keine 4-tight Menge in $Q^+(5,3)$ gibt. Somit ist dieses Theorem für $q = 3$ bereits bewiesen. Sei daher im folgenden

$$3 < q \text{ Primzahl.} \tag{5d}$$

Der Beweis von Theorem 5.2.1 wird indirekt geführt. Angenommen es existiert eine $(q+1)$-tight Menge $M$ von $Q^+(5,q)$ für eine ungerade Primzahl $q > 3$. Diese Annahme führen wir in den folgenden Lemmas zum Widerspruch. Dafür benötigen wir nicht nur die Mächtigkeit einer nicht-trivialen, minimalen, 1-fach blockierenden Menge in $\mathrm{PG}(2,q)$, sondern auch folgendes Resultat von Ball über $a$-fach blockierende Mengen in $\mathrm{PG}(2,q)$.

**Resultat 5.2.2** (Ball [Bal96]) *Sei $\mathcal{B}$ eine $a$-fach blockierende Menge in* $\mathrm{PG}(2,q)$, *$q > 3$ Primzahl. Im Fall $a = 1$ enthalte $\mathcal{B}$ keine Gerade.*

- *Ist $a < q/2$, dann gilt $|\mathcal{B}| \geq (2a+1)(q+1)/2$.*

- *Ist $a > q/2$, dann gilt $|\mathcal{B}| \geq (a+1)q$.*

**Lemma 5.2.3** *Sei $E$ ein Erzeuger von $Q^+(5,q)$ und $\ell$ eine Gerade in $E$ mit $\ell \subseteq M$. Dann ist $|E \cap M| \geq 2q+1$. Insbesondere ist $E \cap M \neq \ell$.*

*Beweis:* Sei $F$ der von $E$ verschiedene Erzeuger durch $\ell$. Dann ist

$$|E \cap M| = (q+1)^2 + x - |F \cap M| \geq q + x = 2q+1$$

nach (5c) und mit $|F| = \theta_2$. □

Genau wie im Beweis von Govaerts und Storme starten wir mit einer Geraden aus $Q^+(5,q)$, die $M$ nicht trifft. Die Existenz einer solchen Geraden muss für $x = q+1$ zunächst noch gezeigt werden.

**Lemma 5.2.4** *Es gibt eine Gerade in $Q^+(5,q)$, die $M$ nicht trifft.*

*Beweis:* Sei $R$ ein Punkt der Quadrik, der nicht in $M$ liegt. Liegt $R$ auf einer Geraden der Quadrik, die $M$ nicht trifft, so folgt die Behauptung. Liegt $R$ auf keiner solchen Geraden, dann trifft jede Gerade von $Q^+(5,q)$ durch $R$ die Menge $M$ mindestens einmal und wegen $\left|R^\perp \cap M\right| = x(q+1) = (q+1)^2$ genau einmal. Somit existiert ein Erzeuger $E$ durch $R$, der $M$ in genau $q+1$ Punkten trifft.
Angenommen diese $q+1$ Punkte bilden eine blockierende Menge in $E$. Dann ist $E \cap M$ eine Gerade $g$, ein Widerspruch zu Lemma 5.2.3.
Also ist $E \cap M$ keine blockierende Menge in $E$ und es existiert eine Gerade in $E$, die $M$ nicht trifft. □

**Lemma 5.2.5** *Sei $\ell$ eine Gerade in $Q^+(5,q)$, die $M$ nicht trifft, und seien $E$ und $F$ die beiden Erzeuger durch $\ell$. Dann gilt $|E \cap M| = (q+1)/2 = |F \cap M|$.*

*Beweis:* Nach (5b) enthalten $E$ und $F$ zusammen $x = q+1$ Punkte aus $M$. Sei o.B.d.A. $q+1 = x \geq |E \cap M| \geq x/2 = (q+1)/2$. Dann existiert eine Gerade $g$ in $E$, die $M$ in genau einem Punkt trifft. Sei $G$ der von $E$ verschiedene Erzeuger durch $g$. Dann ist

$$\frac{3}{2}(q+1) \geq |G \cap M| = q + 1 + x - |E \cap M| \geq q+1$$

nach (5c).
Angenommen es gilt $|G \cap M| = q+1 = |E \cap M|$. Dann liegen nach Lemma 5.2.3 nicht alle Punkte von $E \cap M$ auf einer Geraden. Wähle eine Gerade $k$ in $E$ mit $q-1 \geq |k \cap M| =: a \geq 2$. Dies ist möglich, denn zum einen ist $q-1 > 2$ nach (5d) und zum anderen, falls es keine Gerade in $E$ gibt, die genau $q$ Punkte aus $M$ enthält, so ist jede Gerade in $E$ mit mindestens zwei Punkten in $M$ geeignet, und falls es eine Gerade $h$ in $E$ mit genau $q$ Punkten in $M$ gibt, so wähle für $k$ eine Gerade durch den verbleibenden Punkt $(E \cap M) \setminus h$, die $h$ in einem Punkt aus $M$ trifft.
Sei $K$ der von $E$ verschiedene Erzeuger durch $k$. Dann ist $|K \cap M| = a(q+1)$

nach (5c). Gäbe es in $K$ eine Gerade $k'$, die $M$ in höchstens $a-1$ Punkten trifft, dann wäre nach (5c)

$$\left|k'^{\perp} \cap M\right| \leq (a-1)q + q + 1 = aq + 1 < a(q+1),$$

und dies ein Widerspruch zu $K \subseteq k'^{\perp}$. Somit bilden die Punkte aus $K \cap M$ eine $a$-fach blockierende Menge in $K$. Da $a < q$, sind $a(q+1)$ Punkte nach Resultat 5.2.2 nicht genug, um alle Geraden $a$-fach zu blockieren, ein Widerspruch.
Somit ist $|G \cap M| > q+1 = x$ und $G \cap M$ blockiert alle Geraden in $G$, denn für eine Gerade $m$, die $M$ nicht trifft, ist $\left|m^{\perp} \cap M\right| = x = q+1 < |G \cap M|$. Da bereits $|G \cap M| \leq 3(q+1)/2 < 2q+1$ gezeigt wurde, folgt mit Lemma 5.2.3, dass $G \cap M$ keine Gerade enthält. Also enthält $G \cap M$ eine minimale, nicht-triviale, blockierende Menge. Es folgt $|G \cap M| = 3(q+1)/2$ aus Resultat 5.2.2 und damit $|E \cap M| = (q+1)/2 = |F \cap M|$. $\square$

**Bemerkung 5.2.6** Der Beweis von Govaerts und Strome verläuft analog zum Beweis des vorherigen Lemmas. Da sie mit $x < 2\epsilon$ arbeiten, folgt für den Erzeuger $G$ bereits

$$q + 1 + \epsilon > q + 1 + \frac{x}{2} \geq |G \cap M| = q + 1 + x - |E \cap M| \geq q + 1 > x.$$

Wegen $|G \cap M| > x$ enthält $G \cap M$ eine blockierende Menge. Weil aber auch $|G \cap M| < q + 1 + \epsilon$ gilt, enthält $G \cap M$ eine triviale blockierende Menge, eine Gerade $g'$. Sei $G'$ der von $G$ verschiedene Erzeuger durch $g'$, dann gilt nach (5c) und mit $|G'| = \theta_2$

$$\theta_2 \geq |G' \cap M| \geq q^2 + q + \frac{x}{2},$$

also $x \leq 2$. Für $x \leq 2$ wurde bereits von Cameron und Liebler in [CL82] gezeigt, dass $M$ die Vereinigung von $x$ disjunkten Erzeugern ist.

Im unserem Fall, also $x = q+1$, ist der Beweis noch nicht abgeschlossen, aber wir haben die Information, dass Erzeuger durch Geraden, die $M$ nicht treffen, die Menge $M$ in genau $(q+1)/2$ Punkten treffen. Eine vergleichbare Aussage lässt sich nun auch für alle anderen Erzeuger treffen. Ab sofort nehmen wir zudem an, dass $M$ keinen Erzeuger enthält. Denn wäre ein Erzeuger $G$ in $M$ enthalten, so wäre nach Lemma 5.1.1 die Menge $M \setminus G$ eine $q$-tight Menge von $Q^+(5,q)$, welche nach [GS04, Met10] nicht existiert.

**Lemma 5.2.7** *Jeder Erzeuger $E$ in $Q^+(5,q)$ trifft $M$ in $(2a_E+1)(q+1)/2$ Punkten mit $a_E := \min\{|\ell \cap M| : \ell$ Gerade in $E\}$. Außerdem gilt $0 \leq a_E \leq (q+1)/2$ und falls $1 \leq a_E < q/2$, so bilden die Punkte in $E \cap M$ eine minimale $a_E$-fach blockierende Menge.*

*Beweis:* Das vorherige Lemma zeigt diese Aussage bereits für Erzeuger $E$ mit $a_E = 0$. Sei daher nun $E$ ein Erzeuger mit $a_E > 0$, $\ell$ eine Gerade in $E$ mit $|\ell \cap M| = a_E$ und $F$ der von $E$ verschiedene Erzeuger durch $\ell$. $E \cap M$ ist eine $a_E$-fach blockierende Menge in $E$. Wegen $E \nsubseteq M$ ist $a_E \leq q$.

Angenommen $F \cap M$ blockiert jede Gerade aus $F$. Wegen $\ell \not\subseteq M$ gibt es einen Punkt $P \in \ell$, der nicht in $M$ liegt. Die $q$ von $\ell$ verschiedenen Geraden durch $P$ in $F$ werden dann von $M$ blockiert. Also liegen neben den Punkten auf $\ell$ mindestens weitere $q$ Punkte aus $M$ in $F$. Damit ist $|F \cap M| \geq q + a_E$ und deshalb $|E \cap M| \leq a_E q + 1$ nach (5c). Ist $a_E > 1$, so sind $a_E q + 1$ Punkte nach Resultat 5.2.2 zu wenig Punkte, um jede Gerade in $E$ $a_E$-fach zu blockieren, ein Widerspruch. Falls $a_E = 1$, so ist $E \cap M$ eine Gerade und dies ein Widerspruch zu Lemma 5.2.3.
Somit liegt in $F$ eine Gerade, die $M$ nicht trifft. Damit gilt nach dem vorherigen Lemma $|F \cap M| = (q+1)/2$ und daher $|E \cap M| = (2a_E + 1)(q+1)/2$. Außerdem gilt

$$a_E = |\ell \cap M| \leq |F \cap M| = \frac{q+1}{2}.$$

Ist $1 < a_E < q/2$, so enthält eine $a_E$-fach blockierende Menge nach Resultat 5.2.2 mindestens $(2a_E + 1)(q+1)/2$ Punkte, daher ist $E \cap M$ eine minimale $a_E$-fach blockierende Menge. Ist $a_E = 1$, so enthält $E \cap M$ keine Gerade, da sonst ein Widerspruch zu Lemma 5.2.3 folgt. Also enthält $E \cap M$ eine nicht-triviale, 1-fach blockierende Menge. Eine solche Menge hat mindestens $3(q+1)/2$ Punkte. Daher ist $E \cap M$ eine minimale blockierende Menge. $\square$

**Definition 5.2.8** Ein Punkt $P \in M$ *ist vom Typ I (bzw. Typ II)*, wenn $P$ in einem Erzeuger $E$ der Erzeugerklasse I (bzw. II) mit $|E \cap M| = (q+1)/2$ liegt.

**Lemma 5.2.9** *Jeder Punkt aus $M$ ist entweder vom Typ I oder vom Typ II und beide Typen treten auf.*

*Beweis:* Wir zeigen zunächst, dass jeder Punkt $R \in M$ vom Typ I oder II ist. Da $R \in M$, ist $\left|R^{\perp} \cap M\right| = q^2 + (q+1)^2$. Die von $R$ verschiedenen Punkte in $R^{\perp}$ verteilen sich auf $q+1$ Erzeuger der Klasse I durch $R$. Wegen

$$\frac{q^2 + (q+1)^2 - 1}{q+1} = 2q$$

existiert ein Erzeuger $E$ der Klasse I durch $R$ mit höchstens $2q+1$ Punkten in $M$. Weil $2q+1 < 5(q+1)/2$, ist $|E \cap M| = (q+1)/2$ oder $|E \cap M| = 3(q+1)/2$ nach Lemma 5.2.7. Gilt $|E \cap M| = (q+1)/2$, dann ist $R$ vom Typ I. Ist hingegen $|E \cap M| = 3(q+1)/2$, dann ist nach dem vorherigen Lemma $E \cap M$ eine minimale blockierende Menge in $E$. Daher existiert eine Gerade $g$ durch $R$ in $E$ mit $g \cap M = \{R\}$. Sei $G$ der von $E$ verschiedene Erzeuger durch $g$. Dann liegt $G$ in der Klasse II und $|G \cap M| = (q+1)/2$ nach (5c). Somit ist $R$ vom Typ II.
Nun zeigen wir die Eindeutigkeit des Typs. Sei $P \in M$ vom Typ I und $E'$ ein Erzeuger durch $P$ mit $|E' \cap M| = (q+1)/2$. Jeder Erzeuger $F'$ der Klasse II durch $P$ trifft $E'$ in einer Geraden $\ell$ durch $P$. Nun ist $|\ell \cap M| \geq 1$ und daher

$$|F' \cap M| = |\ell \cap M|\,(q+1) + (q+1) - |E' \cap M| \geq 3(q+1)/2$$

nach (5c). Damit ist $P$ nicht vom Typ II. Analog gilt für Punkte vom Typ II, dass sie nicht vom Typ I sind.

Nun zeigen wir noch, dass beide Typen auftreten. Nach Lemma 5.2.4 existiert eine Gerade $h$, die $M$ nicht trifft. Seien $H_1$ und $H_2$ die beiden Erzeuger durch $h$. Dann ist $|H_1 \cap M| = |H_2 \cap M| = (q+1)/2$ nach Lemma 5.2.5. Sei o.B.d.A $H_1$ aus Klasse I und $H_2$ aus Klasse II. Dann sind alle Punkte in $H_1 \cap M$ vom Typ I und alle Punkte in $H_2 \cap M$ sind vom Typ II. $\square$

**Lemma 5.2.10** *Seien $P$ und $Q$ Punkte aus $M$, die senkrecht aufeinander stehen und von unterschiedlichem Typ sind. Dann ist $PQ \subseteq M$.*

*Beweis:* O.B.d.A. sei $P$ vom Typ I und $Q$ vom Typ II. Seien $E$ und $F$ die beiden Erzeuger durch $PQ$. Dann gibt es nach Lemma 5.2.7 nicht-negative ganze Zahlen $a, a' \in \mathbb{N}_0$ mit $a, a' \leq (q+1)/2$, $|E \cap M| = (2a+1)(q+1)/2$ und $|F \cap M| = (2a'+1)(q+1)/2$. Da $P$ und $Q$ von unterschiedlichem Typ sind und beide in den Ebenen $E$ und $F$ liegen, gilt $a, a' > 0$. Sei o.B.d.A. $E$ aus Klasse I.
Angenommen $1 \leq a < q/2$, so bilden die Punkte in $E \cap M$ nach Lemma 5.2.7 eine minimale $a$-fach blockierende Menge in $E$. Daher liegt $P$ auf einer Geraden in $E$, die $M$ in genau $a$ Punkten trifft. Der von $E$ verschiedene Erzeuger durch diese Gerade hat nach (5c) genau $(q+1)/2$ Punkte in $M$ und ist aus Klasse II. Es folgt, dass $P$ vom Typ II ist, ein Widerspruch.
Daher ist $a = (q+1)/2$. Analog folgt $a' = (q+1)/2$. Zusammen mit (5c) erhält man

$$|PQ \cap M|\,(q+1) + (q+1) = 2\frac{(q+2)(q+1)}{2},$$

woraus $|PQ \cap M| = q+1$ folgt. $\square$

Das nächste Lemma zeigt, dass die eben beschriebene Situation gar nicht auftreten kann, weil aufeinander senkrechte Punkte vom selben Typ sind. Hieraus bekommen wir anschließend den gewünschten Widerspruch.

**Lemma 5.2.11** *Sei $P$ ein Punkt aus $M$. Dann sind alle Punkte in $M \cap P^\perp$ vom selben Typ wie $P$.*

*Beweis:* O.B.d.A. sei $P$ vom Typ I. Sei $E$ ein Erzeuger durch $P$ der Klasse I mit $|E \cap M| = (q+1)/2$. Dann sind alle Punkte in $E \cap M$ vom Typ I. Angenommen es existiert ein Punkt $Q$ vom Typ II in $P^\perp \cap M$. Sei $F$ der Erzeuger der Klasse II durch $PQ$, $\ell$ die Schnittgerade von $E$ und $F$, sowie $a := |\ell \cap M|$. Dann ist $1 \leq a \leq (q+1)/2 = |E \cap M|$ und nach (5c) gilt $|F \cap M| = (2a+1)(q+1)/2$.
Angenommen $1 \leq a < q/2$, so ist $F \cap M$ nach Lemma 5.2.7 eine minimale $a$-fach blockierende Menge in $F$. Daher liegt $Q$ in $F$ auf einer Geraden $g$, die $M$ in genau $a$ Punkten trifft. Der von $F$ verschiedene Erzeuger durch $g$ ist aus der Klasse I und hat nach (5c) genau $(q+1)/2$ Punkte in $M$. Es folgt, dass $Q$ vom Typ I ist, ein Widerspruch zur Eindeutigkeit des Typs.
Daher ist $a = (q+1)/2$. Alle Punkte von $\ell \cap M$ liegen in $E$ und sind daher vom Typ I. Da $Q$ vom Typ II ist, folgt aus dem vorherigen Lemma $QR \subseteq M$ für alle $R \in \ell \cap M$. Weil $F \cap M$ eine $((q+1)/2)$-fach blockierende Menge ist, haben die

anderen $(q+1)/2$ Geraden durch $Q$ in $F$ mindestens $(q-1)/2$ von $Q$ verschiedene Punkte in $M$. Das ergibt

$$\frac{1}{2}(q+2)(q+1) = |F \cap M| \geq \frac{q+1}{2}q + \frac{q+1}{2} \cdot \frac{q-1}{2} + 1,$$

zusammen mit $q > 2$ aus (5d) ist das ein Widerspruch. □

**Beweisabschluss von Theorem 5.2.1:** Nach Lemma 5.2.9 gibt es Punkte $P$ und $Q$ in $M$ von unterschiedlichem Typ. Somit steht nach Lemma 5.2.11 der Punkt $P$ nicht senkrecht auf $Q$. Sei $g$ die Sekante in $\mathrm{PG}(5,q)$ durch $P$ und $Q$. Dann ist $\left|g^\perp \cap M\right| = 2q + (q+1) > 0$ nach Lemma 5.1.4. Somit existiert ein Punkt $R \in (g^\perp \cap M)$. $R$ ist nach Lemma 5.2.11 vom gleichen Typ wie $P$ und vom gleichen Typ wie $Q$. Dies ist ein Widerspruch zur Eindeutigkeit des Typs (Lemma 5.2.9). □

### Nachtrag

Die Aussage von Theorem 5.2.1 wurde inzwischen von Metsch in [Met14] deutlich verbessert. Sein Beweis ist allerdings ganz anders, weshalb der eben vorgestellte Beweis weiterhin interessant ist.

## 5.3 $x$-tight Mengen von $Q^+(2n+1,q)$

Sei $M$ eine $x$-tight Menge der hyperbolischen Quadrik $Q^+(2n+1,q)$, die im projektiven Raum $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ eingebettet ist. Wir zeigen in diesem Abschnitt, dass $M$ die Vereinigung von $x$ disjunkten Erzeugern ist, sofern $x$ nicht zu groß ist. Das folgende Lemma ist für alle $x$ richtig und lässt sich in vielen Arbeiten über $x$-tight Mengen finden.

**Lemma 5.3.1** *Jeder $(n+1)$-dimensionale Unterraum von $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ trifft $M$ in mindestens $x$ Punkten. Trifft der $(n+1)$-dimensionale Unterraum $T$ die Menge $M$ in mehr als $x$ Punkten, so hat jeder $n$-dimensionale Unterraum von $T$ mindestens einen Punkt in $M$.*

*Beweis:* Sei $S$ ein Unterraum von $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ der Dimension $n+1$. Dann ist

$$|S \cap M| \geq x$$

nach Folgerung 5.1.5. Ein $n$-dimensionaler Unterraum $U$ liegt in $\theta_n$ Unterräumen der Dimension $n+1$. Diese partitionieren die Punkte außerhalb von $U$. Trifft $U$ die Menge $M$ nicht, so liegt jeder Punkt aus $M$ in genau einem Unterraum der Dimension $n+1$ durch $U$. Jeder dieser Unterräume hat mindestens $x$ Punkte in $M$ und, wegen $|M| = x\theta_n$, genau $x$. Daraus folgt der zweite Teil der Behauptung. □

Für $n = 1$ folgt hieraus nun sofort, dass $M$ die Vereinigung von $x$ disjunkten Geraden ist. Sei dazu $P \in M$, dann gilt $\left|P^\perp \cap M\right| = q + x > x$ und alle Geraden der Ebene $P^\perp$ werden von $P^\perp \cap M$ blockiert. Da $P^\perp$ die Quadrik in zwei Geraden durch $P$ trifft, folgt, dass eine der beiden Geraden in $M$ enthalten sein muss. Mit Folgerung 5.1.1 lässt sich diese Gerade entfernen und man erhält eine $(x-1)$-tight Menge. Ein induktives Argument zeigt, dass $M$ die Vereinigung von $x$ disjunkten Geraden ist.

Für $n = 2$ und $x \leq q$ wird in [Met10] gezeigt, dass $M$ die Vereinigung von $x$ disjunkten Erzeugern ist. Insbesondere ist dann $x \leq 2$, da $Q^+(5,q)$ keine drei disjunkten Erzeuger enthält.

In folgenden beiden Teilabschnitten werden die Fälle $n = 3$ und $n \geq 4$ näher betrachtet. Die beiden folgenden Resultate spielen in den Beweisen eine zentrale Rolle.

**Resultat 5.3.2** ([KM05] , [KM11]) *Sei $PQ^-(3,q) \subseteq \mathrm{PG}(4,q)$ ein Kegel mit Spitze $P$ über einer elliptischen Quadrik $Q^-(3,q)$ und $B$ eine Menge von Punkten in $PQ^-(3,q)$ mit $|B| \leq 2q$, so dass jeder Solid von $\mathrm{PG}(4,q)$ die Menge $B$ in mindestens einem Punkt trifft. Dann tritt einer der beiden folgenden Fälle ein.*

*(i) Es existiert eine Gerade $\ell$ in $PQ^-(3,q)$ mit $\ell \subseteq B$.*

*(ii) $|B| > 9q/5+1$, $P \in B$ und es existiert eine eindeutige Gerade $\ell$ in $PQ^-(3,q)$, die $B$ in mindestens $2+(3q-|B|)/2$ Punkten trifft. Diese Gerade hat höchstens $|B|-q-1$ Punkte in $B$.*

Der Beweis des vorherigen Resultats in [KM05] enthält die folgende nützliche Aussage.

**Resultat 5.3.3** ([KM05]) *Es gelten die gleichen Voraussetzungen wie im vorherigen Resultat. Seien $\ell_1, \ell_2$ zwei Geraden des Kegels $PQ^-(3,q)$, die beide nicht in $B$ enthalten sind. Dann gilt*

$$|\ell_1 \cap M| + |\ell_2 \cap M| \leq |B| + 1 - q.$$

## $n = 3$

In diesem Teilabschnitt beweisen wir das folgende Theorem.

**Theorem 5.3.4** *Eine $x$-tight Menge $M$ von $Q^+(7,q)$ mit $x \leq q$ ist die Vereinigung von $x$ disjunkten Erzeugern.*

Wir beweisen diese Aussage mit Induktion nach $x$.

$\boldsymbol{x = 1:}$ Sei $M$ eine 1-tight Menge von $Q^+(7,q)$. Dann ist $|M| = 1 \cdot \theta_3$ und für einen Punkt $P \in M$ ist nach (5a)

$$\left|P^\perp \cap M\right| = q^3 + 1 \cdot \theta_2 = \theta_3 = |M|.$$

Damit steht ein Punkt aus $M$ auf allen Punkten aus $M$ senkrecht, sie liegen also zusammen in einem Erzeuger $G$. Wegen $|G| = \theta_3 = |M|$ folgt nun $G = M$.

$\boldsymbol{x - 1 \mapsto x, 1 < x \leq q:}$ Sei $M$ eine $x$-tight Menge von $Q^+(7,q)$. Enthält $M$ einen Erzeuger $G$, dann ist $M \setminus G$ nach Lemma 5.1.1 eine $(x-1)$-tight Menge von

$Q^+(7,q)$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann $M \setminus G$ die Vereinigung von $x-1$ disjunkten Erzeugern. Es folgt, dass $M = (M \setminus G) \dot{\cup} G$ die disjunkte Vereinigung von $x$ Erzeugern ist.

Sei daher nun in diesem Teilabschnitt $M$ eine $x$-tight Menge von $Q^+(7,q) \subseteq \mathrm{PG}(7,q)$ mit $1 < x \leq q$, die keinen Erzeuger enthält. Wir erhalten in den folgenden Lemmas einen Widerspruch, weshalb eine solche $x$-tight Menge nicht existiert. Damit enthält eine $x$-tight Menge mit $1 < x \leq q$ immer einen Erzeuger und ist somit die disjunkte Vereinigung von $x$ Erzeugern.

Wir definieren
$$z := \left\lceil 1 + q - \frac{1}{2}x \right\rceil .$$
Eine Gerade $\ell$ nennen wir *lange Gerade*, wenn $\ell$ eine Gerade der Quadrik ist und mindestens $z+1$ Punkte in $M$ hat.

Die Definition für $z$ hängt mit Resultat 5.3.2 zusammen. Enthält die blockierende Menge $B$ in diesem Resultat genau $q+x$ Punkte, dann folgt die Existenz einer Geraden $\ell$ mit $|\ell \cap B| \geq z+1$. Das nächste Lemma zeigt mit Hilfe dieses Resultats, dass es tatsächlich lange Geraden gibt.

**Lemma 5.3.5** *Jeder Punkt aus $M$ liegt auf mindestens $\theta_2$ langen Geraden. Ist $q \leq 5$, so liegt jeder Punkt aus $M$ auf $\theta_2$ Geraden, die in $M$ enthalten sind.*

*Beweis:* Sei $P$ ein Punkt aus $M$. $P^\perp$ trifft die Quadrik in einem Kegel $PQ^+(5,q)$ und enthält daher Passanten. Somit existiert eine Ebene $E$ von $\mathrm{PG}(7,q)$, die die Quadrik nur in $P$ trifft. $E^\perp$ ist dann ein 4-dimensionaler Unterraum von $\mathrm{PG}(7,q)$, der die Quadrik in einem Kegel $PQ^-(3,q)$ trifft. Nach Lemma 5.1.4 ist $\left|E^\perp \cap M\right| = q + x > x$. Somit trifft nach Lemma 5.3.1 jeder Solid von $E^\perp$ die Menge $M$. Aus dem Resultat 5.3.2 folgt nun, dass $E^\perp$ eine Gerade $\ell$ der Quadrik enthält, die $M$ in mindestens $z+1$ Punkten trifft. $\ell$ ist also eine lange Gerade durch $P$.
Ist $q \leq 5$, so gilt $q + x \leq 2q \leq 9q/5 + 1$, und nach Resultat 5.3.2 existiert eine Gerade $\ell$ der Quadrik durch $P$, die in $M$ enthalten ist.
Sei $c_d$ die Anzahl der Passanten einer hyperbolischen Quadrik $Q^+(d,q) \subseteq \mathrm{PG}(d,q)$. Sei $R$ ein Punkt einer hyperbolischen Quadrik $Q^+(5,q) \subseteq \mathrm{PG}(5,q)$. Dann trifft $R^\perp$ die Quadrik in einem Kegel $RQ^+(3,q)$, der $c_3 \cdot q^2$ Passanten enthält, denn jede Passante einer fest gewählten Basis $Q^+(3,q)$ liefert eine Ebene mit genau $q^2$ Passanten. Zählt man nun Paare $(g,R)$ mit Passanten $g$ einer hyperbolischen Quadrik $Q^+(5,q) \subseteq PG(5,q)$, Punkten $R \in Q^+(5,q)$ und $g \perp R$, doppelt ab, so erhält man
$$c_5 \cdot (q^2+1) = \left|Q^+(5,q)\right| \cdot c_3 \cdot q^2,$$
denn $g^\perp$ ist ein Solid, der $Q^+(5,q)$ in einer elliptischen Quadrik $Q^-(3,q)$ trifft, die genau $q^2+1$ Punkte hat.
Diese Gleichung verwenden wir gleich in unserem Beweis. $P^\perp$ trifft die Quadrik in einem Kegel $PQ^+(5,q)$ und enthält genau $c_5$ Ebenen, die die Quadrik nur in $P$ treffen. Damit gibt es genau $c_5$ verschiedene Kegel $PQ^-(3,q)$. Sei $h$ eine Gerade der Quadrik durch $P$ und $S$ ein von $P$ verschiedener Punkt auf $h$. Dann trifft $h^\perp$

die Quadrik in einem Kegel $hQ^+(3,q)$. Dieser Kegel $hQ^+(3,q)$ lässt sich auch als Kegel mit Spitze $P$ über einem Kegel $SQ^+(3,q)$ beschreiben. Ein solcher Kegel $SQ^+(3,q)$ spannt einen 4-dimensionalen Unterraum auf, der $c_3 \cdot q^2$ Passanten enthält. Also enthält $h^\perp$ genau $c_3 \cdot q^2$ Ebenen, die die Quadrik nur in $P$ treffen. Somit liegt jede Gerade der Quadrik durch $P$ in $c_3 \cdot q^2$ verschiedenen Kegeln $PQ^-(3,q)$. Da jeder Kegel $PQ^-(3,q)$ eine lange Gerade durch $P$ enthält, gibt es mindestens $c_5/(c_3 q^2) = |Q^+(5,q)|/(q^2+1) = \theta_2$ lange Geraden durch $P$. Für $q \leq 5$ folgt analog, dass es mindestens $\theta_2$ Geraden durch $P$ gibt, die in $M$ enthalten sind. $\square$

**Lemma 5.3.6** *Seien $\ell_1, \ell_2$ verschiedene Geraden von $Q^+(7,q)$, die sich in einem Punkt $P$ aus $M$ treffen mit*

- *$\ell_1, \ell_2 \nsubseteq M$ und $|\ell_1 \cap M| + |\ell_2 \cap M| > x+1$ oder*
- *$\ell_1, \ell_2 \subseteq M$.*

*Dann stehen $\ell_1$ und $\ell_2$ senkrecht aufeinander.*

*Beweis:* Angenommen $\ell_1$ und $\ell_2$ stehen nicht senkrecht aufeinander. Dann spannen die beiden Geraden eine Ebene $E$ auf, die $Q^+(7,q)$ nur in $\ell_1 \cup \ell_2$ trifft. $E^\perp$ ist ein 4-dimensionaler Unterraum, der die Quadrik in einem Kegel $PQ^+(3,q)$ trifft. In $E^\perp$ existiert damit eine Passante $g$ und die Ebene $F := Pg$ trifft $Q^+(7,q)$ nur in $P$. Nun ist $F^\perp$ ein 4-dimensionaler Unterraum, der $Q^+(7,q)$ in einem Kegel $PQ^-(3,q)$ trifft, $\ell_1$ und $\ell_2$ enthält und nach Lemma 5.1.4 genau $q+x$ Punkte in $M$ hat, die nach Lemma 5.3.1 alle Solids von $F^\perp$ blockieren. Damit haben $\ell_1$ und $\ell_2$ zusammen höchstens $q+x < 2q+1$ Punkte in $M$, sind also nicht beide in $M$ enthalten. Aus der Voraussetzung des Lemmas folgt nun $|\ell_1 \cap M|+|\ell_2 \cap M| > x+1$ und $\ell_1, \ell_2 \nsubseteq M$. Dies widerspricht Resultat 5.3.3. $\square$

Da $2z+2 \geq 2+2q-x+2 \geq x+4$ ist, folgt aus dem vorherigen Lemma, dass je zwei lange Geraden durch einen Punkt $P \in M$ aufeinander senkrecht stehen, sofern beide in $M$ enthalten sind oder beide nicht in $M$ enthalten sind. Das führt zu Erzeugern mit relativ vielen Punkten in $M$ und damit später zum Widerspruch, da $M$ keinen Erzeuger ganz enthält. Für $q \leq 5$ erhalten wir direkt den gewünschten Widerspruch.

**Beweisabschluss von Theorem 5.3.4 für $q \leq 5$:** Sei $q \leq 5$. Nach Lemma 5.3.5 gibt es durch jeden Punkt $P \in M$ mindestens $\theta_2$ Geraden, die in $M$ enthalten sind. Diese Geraden stehen nach Lemma 5.3.6 paarweise aufeinander senkrecht und liegen damit alle in einem gemeinsamen Erzeuger $G$ der Quadrik. $P$ liegt auf genau $\theta_2$ Geraden von $G$, weshalb alle diese Geraden durch $P$ in $M$ enthalten sind. Damit ist $G \subseteq M$ und der gewünschte Widerspruch erreicht. $\square$

Das nächste Lemma zeigt, dass auch für $q \geq 7$ nicht zu viele der langen Geraden durch einen Punkt $P \in M$ in $M$ enthalten sein können. Für den restlichen Teilabschnitt sei

$$q \geq 7. \tag{5e}$$

**Lemma 5.3.7** *Kein Punkt aus $M$ liegt auf $q^2$ Geraden, die in $M$ enthalten sind.*

*Beweis:* Angenommen der Punkt $P \in M$ liegt auf mindestens $q^2$ Geraden, die in $M$ enthalten sind. Diese stehen nach Lemma 5.3.6 paarweise aufeinander senkrecht und spannen daher einen Erzeuger $G$ der Quadrik auf. Sei $s$ die minimale Anzahl von Punkten aus $M$ auf einer Geraden von $G$. Dann liegt $P$ auf $q^2$ Geraden, die in $M$ enthalten sind, und die anderen $q+1$ Geraden in $G$ durch $P$ haben neben $P$ mindestens weitere $s-1$ Punkte in $M$. Es folgt

$$|G \cap M| \geq q^2 \cdot q + (q+1)(s-1) + 1.$$

Sei $\ell$ eine Gerade in $G$ mit $|\ell \cap M| = s$. Dann ist $G \subseteq \ell^\perp$ und daher mit Lemma 5.1.4

$$|G \cap M| \leq \left|\ell^\perp \cap M\right| = sq^2 + x(q+1).$$

Die beide Ungleichungen und $x \leq q$ ergeben zusammen

$$q^2 - 2q - 1 \leq (s+1-q)(q^2-q-1)$$

Da zudem $q \geq 7$ gilt (siehe (5e)), folgt hieraus $s > q-1$, also $s \geq q$. Wegen $G \nsubseteq M$ ist $s \neq q+1$ und damit $s = q$.
Sei $Q \in G \backslash M$. Dann haben alle Geraden durch $Q$ in $G$ genau $q$ Punkte in $M$, es ist also $G \setminus M = \{Q\}$. Wegen $\left|P^\perp \cap M\right| > \left|Q^\perp \cap M\right|$ (nach (5a)) existiert ein Punkt $R \in (P^\perp \cap M) \setminus Q^\perp$. Da $R \notin Q^\perp$, ist $R \notin G$ und damit $PR \nsubseteq M$. Die Gerade $PR$ hat aber mindestens zwei Punkte in $M$ und die Gerade $PQ$ hat genau $q$ Punkte in $M$. Nun folgt mit Lemma 5.3.6 und $|PR \cap M| + |PQ \cap M| \geq 2 + q > x + 1$, dass $PR$ senkrecht auf $PQ$ steht. Dies ist ein Widerspruch zu $R \notin Q^\perp$. □

**Lemma 5.3.8** *Jeder Punkt $P$ aus $M$ liegt in einem Erzeuger $G$, so dass jede Gerade von $G$ mindestens $z-1$ Punkte in $M$ hat und jede Gerade $\ell$ der Quadrik durch $P$ mit $z-1 \leq |\ell \cap M| \leq q$ in $G$ enthalten ist.*

*Beweis:* Lemma 5.3.5 zeigt, dass es mindestens $\theta_2$ lange Geraden durch $P$ gibt.

**Fall 1:** Mindestens $3q$ der langen Geraden durch $P$ sind in $M$ enthalten. Nach Lemma 5.3.6 stehen diese paarweise aufeinander senkrecht und spannen daher einen Erzeuger $G$ auf. Sei $s$ die minimale Anzahl von Punkten aus $M$ auf einer Geraden von $G$. Dann folgt

$$|G \cap M| \geq 3q \cdot q + (\theta_2 - 3q)(s-1) + 1.$$

Sei $\ell$ eine Gerade in $G$ mit $|\ell \cap M| = s$. Dann folgt mit Lemma 5.1.4 $|G \cap M| \leq sq^2 + x(q+1)$. Beide Ungleichungen ergeben zusammen

$$0 \leq (2q-1)(s + \frac{x}{2} - q - \frac{1}{2}) + \frac{3x-1}{2} - 2q.$$

Wegen $x \leq q$ folgt

$$s > \frac{x}{2} - q - \frac{1}{2},$$

also $s > z-1$ und damit ist $s \geq z$. Insbesondere hat jede Gerade durch $P$ in $G$ mindestens $z$ Punkte in $M$.
Angenommen $P$ liegt auf einer Geraden $\ell$ der Quadrik mit $z \leq |\ell \cap M| \leq q$, die nicht in $G$ enthalten ist. Dann gibt es $q^2$ Geraden $h$ in $G$ durch $P$, die nicht auf $\ell$ senkrecht stehen. Wegen $|h \cap M| + |\ell \cap M| \geq 2z \geq 2+2q-x \geq x+2$ und Lemma 5.3.6 folgt dann $h \subseteq M$. Damit gibt es $q^2$ Geraden durch $P$, die in $M$ enthalten sind, ein Widerspruch zu Lemma 5.3.7.
Somit liegt jede Gerade $\ell$ durch $P$ mit $z \leq |\ell \cap M| \leq q$ in $G$. Es folgt, dass jede lange Gerade durch $P$ in $G$ liegt. Da $P$ nach Lemma 5.3.5 auf mindestens $\theta_2$ langen Geraden liegt, sind die langen Geraden durch $P$ gerade die $\theta_2$ Geraden von $G$ durch $P$. Insbesondere hat jede Gerade von $G$ durch $P$ mindestens $z+1$ Punkte in $M$.
Wegen Lemma 5.3.7 gibt es mindestens $q+2$ Geraden $h$ durch $P$ in $G$, die nicht in $M$ enthalten sind. Angenommen es gibt eine Gerade $\ell$ der Quadrik durch $P$ mit $z-1 \leq |\ell \cap M| \leq q$, die nicht in $G$ enthalten ist. Dann sind $\ell$ und $h$ nicht in $M$ enthalten und es ist $|h \cap M| + |\ell \cap M| \geq z+1+z-1 \geq 2+2q-x \geq x+2$, also stehen $\ell$ und $h$ nach Lemma 5.3.6 senkrecht aufeinander. Da es mindestens $q+2$ solcher Geraden $h$ gibt und $q+2$ Geraden von $G$ durch $P$ den Erzeuger $G$ aufspannen, steht $\ell$ auf $G$ senkrecht. Wegen $\ell \nsubseteq G$ ist dann $\ell G$ ein 4-dimensionaler, total singulärer Unterraum der Quadrik $Q^+(7,q)$, ein Widerspruch.

**Fall 2:** Weniger als $3q$ der langen Geraden durch $P$ sind in $M$ enthalten. Dann gibt es mindestens $\theta_2 - 3q + 1 = q^2 - 2q + 2$ lange Geraden durch $P$, die nicht in $M$ enthalten sind und nach Lemma 5.3.6 paarweise aufeinander senkrecht stehen. Wegen $q \geq 7$, siehe (5e), ist $q^2 - 2q + 2 > q+1$ und diese Geraden spannen daher einen Erzeuger $G$ auf. Sei erneut $s$ die minimale Anzahl von Punkten aus $M$ auf einer Geraden von $G$. Dann folgt wie im Fall 1

$$sq^2 + x(q+1) \geq |G \cap M| \geq (q^2 - 2q + 2)z + (3q-1)(s-1) + 1.$$

Angenommen $s = z-2$ erfüllt diese Ungleichung, dann erhält man

$$0 \geq q(2q + z - x - 9) + z + 4 - x.$$

Wegen $q \geq 7$ (siehe (5e)) ist $z \geq 5$ und zusammen mit $x \leq q$ folgt ein Widerspruch. Daher ist $s \geq z-1$.
Eine Gerade $\ell$ durch $P$ mit $z-1 \leq |\ell \cap M| \leq q$ steht auf allen langen Geraden durch $P$, die nicht in $M$ enthalten sind, senkrecht (analog zum Fall 1). Die langen Geraden durch $P$, die nicht in $M$ enthalten sind, spannen den Erzeuger $G$ auf. Damit steht $\ell$ auf $G$ senkrecht, ist also in $G$ enthalten. □

**Lemma 5.3.9** *Jeder Punkt aus $M$ liegt in genau einem Erzeuger $G$, so dass jede Gerade in $G$ mindestens $z-1$ Punkte in $M$ hat.*

*Beweis:* Angenommen der Punkt $P \in M$ liegt in zwei verschiedenen solchen Erzeugern $G_1$ und $G_2$. O.B.d.A. habe $G_1$ die Eigenschaften aus dem vorherigen Lemma. Sei $\ell$ eine Gerade durch $P$, die in $G_2$, aber nicht in $G_1$ enthalten ist.

Dann ist $z-1 \leq |\ell \cap M|$ (Eigenschaft von $G_2$) und daher $\ell \subseteq M$ (Eigenschaft von $G_1$, da $\ell \nsubseteq G_1$). Es gibt mindestens $q^2$ Geraden durch $P$ in $G_2 \setminus G_1$ und diese sind somit alle in $M$ enthalten. Dies ist ein Widerspruch zu Lemma 5.3.7. □

Wir kommen nun zum Abschluss des Beweises von Theorem 5.3.4. Für $q \leq 5$ wurde schon ein Widerspruch erreicht. Nun folgt der gewünschte Widerspruch für $q \geq 7$.

**Beweisabschluss von Theorem 5.3.4 für $q \geq 7$:** Nach dem vorherigen Lemma existieren Erzeuger $G_1, \ldots, G_s$ mit der Eigenschaft, dass jede Gerade in $G_i$ die Menge $M$ in mindestens $z-1$ Punkten trifft. Es gilt außerdem, dass jeder Punkt aus $M$ in genau einem der Erzeuger $G_i$ liegt, also $M$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $G_i \cap M$ ist.
O.B.d.A. ist $|G_1 \cap M| \geq |M|/s = x\theta_3/s$. Sei $R$ ein Punkt in $G_1 \setminus M$. Dann enthält $R^\perp$ den Erzeuger $G_1$ und $R^\perp$ trifft die Erzeuger $G_i$ mit $i > 1$ mindestens in einer Ebene. Trifft $R^\perp \cap G_i$ die Menge $M$ in einer Ebene, so gilt $\left|(R^\perp \cap G_i) \cap M\right| \geq \theta_2$. Ist dies nicht der Fall, so existiert ein Punkt $Q_i$ in $(R^\perp \cap G_i) \setminus M$. Der Punkt $Q_i$ liegt in $R^\perp \cap G_i$ auf mindestens $q+1$ Geraden, die jeweils mindestens $z-1 \leq q-1$ Punkte in $M$ haben, daher ist in jedem Fall $\left|(R^\perp \cap G_i) \cap M\right| \geq (q+1)(z-1)$ für $i > 1$. Es folgt

$$\left|R^\perp \cap M\right| \geq \frac{x}{s}\theta_3 + (s-1)(q+1)(z-1).$$

Wegen $R \notin M$ ist andererseits $\left|R^\perp \cap M\right| = x\theta_2$. Zusammen mit $z-1 \geq x/2$ und $x > 0$ folgt nun

$$\theta_2 \geq \frac{1}{s}\theta_3 + \frac{1}{2}(s-1)(q+1).$$

Multiplizieren mit $2s > 0$ liefert

$$\begin{aligned} 0 &\geq s(s-1)(q+1) - 2s\theta_2 + 2\theta_3 \\ &= (q+1)\left[\left(s - \frac{2\theta_2+q+1}{2(q+1)}\right)^2 - \left(\frac{2\theta_2+q+1}{2(q+1)}\right)^2 + 2(q^2+1)\right]. \end{aligned}$$

Aus

$$\left(\frac{2\theta_2+q+1}{2(q+1)}\right)^2 = \left(q + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{2}\right)^2 < (q+1)^2 < 2(q^2+1)$$

folgt nun der gewünschte Widerspruch. □

## $n \geq 4$

Dieser Teilabschnitt ist ähnlich aufgebaut wie der vorherige. Wir zeigen das folgende Theorem ebenfalls mit Induktion nach $x$.

**Theorem 5.3.10** *Eine $x$-tight Menge $M$ von $Q^+(2n+1, q)$ mit $x \leq q-1$, $n \geq 4$ und $q \geq 71$ ist die Vereinigung von $x$ disjunkten Erzeugern.*

Der Fall $x = 1$ und der Fall, dass $M$ einen Erzeuger enthält, werden genauso wie für Theorem 5.3.4 bewiesen. Sei daher für den Rest dieses Teilabschnitts $M$ eine $x$-tight Menge von $Q^+(2n+1,q) \subseteq \mathrm{PG}(2n+1,q)$ mit

$$n \geq 4, \ 1 < x \leq q-1 \text{ und } q \geq 71, \tag{5f}$$

die keinen Erzeuger enthält. Wir erhalten erneut in den folgenden Lemmas einen Widerspruch, weshalb eine solche $x$-tight Menge nicht existiert, was Theorem 5.3.10 beweist. Die Zahl $z$ sei weiterhin

$$z := \left\lceil 1 + q - \frac{1}{2}x \right\rceil.$$

Sei $P \in M$. Ein $(n-2)$-dimensionaler, total singulärer Unterraum $W$ durch $P$ wird *$\Delta$-Raum für $P$* genannt, wenn er die folgende Eigenschaft erfüllt: Es existiert eine Hyperebene $U$ von $W$ mit $U \cap M = \{P\}$, so dass jede Hyperebene von $U$ in mindestens $z+1$ Hyperebenen von $W$ liegt, die $M$ treffen.

Der $\Delta$-Raum nimmt zunächst die Rolle der langen Geraden aus dem vorherigen Teilabschnitt ein. Das nächste Lemma zeigt, dass diese $\Delta$-Räume tatsächlich existieren. Hierbei wird auch Resultat 5.3.2 verwendet, allerdings erst nach einer Projektion auf einen Kegel $PQ^-(3,q)$. Die bei dieser Projektion evtl. verlorenen Punkte führen dazu, dass wir die Aussage nur für $x \leq q-1$ und $q \geq 71$ zeigen können und nicht für $x \leq q$ und alle $q$.

**Lemma 5.3.11** *Jeder total singuläre, $(n-3)$-dimensionale Unterraum $U$ eines Kegels $PQ^-(2n-3,q) \subseteq Q^+(2n+1,q)$ mit $P \in M$ und $U \cap M = \{P\}$ liegt in einem $\Delta$-Raum $W$ für $P$, der in $PQ^-(2n-3,q)$ enthalten ist.*

*Beweis:* Der Unterraum $U^\perp$ trifft den Kegel $PQ^-(2n-3,q)$ in einem Kegel $UQ^-(3,q)$. Dieser Kegel $UQ^-(3,q)$ ist in einem $(n+1)$-dimensionalen Unterraum $V$ von $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ enthalten. $V^\perp$ hat die Dimension $n-1$ und trifft die Quadrik $Q^+(2n+1,q)$ nur in $U$ und daher die Menge $M$ nur in $P$. Mit Lemma 5.1.4 folgt $|V \cap M| = q + x > x$. Daher werden nach Lemma 5.3.1 alle Hyperebenen von $V$ durch Punkte aus $M$ blockiert.
Es gibt genau einen 4-dimensionalen Unterraum $F$ von $V$, der den Kegel $UQ^-(3,q)$ in einem Kegel $PQ^-(3,q)$ trifft. Es ist daher $F \cap U = \{P\}$. Sei $C$ ein Komplement von $P$ in $U$ und sei $B$ die Menge der Punkte, die entsteht, wenn die Punkte aus $V \cap M$ von $C$ auf $F$ projiziert werden, also

$$B := \{CX \cap F \mid X \in V \cap M\}.$$

Dann ist $|B| \leq |V \cap M| = q + x$ und $B$ blockiert alle Solids in $F$, denn $M$ blockiert alle Hyperebenen von $V$. Außerdem ist $B \subseteq PQ^-(3,q)$, da $C \subseteq F^\perp$. Nach Resultat 5.3.2 existiert eine Gerade $\ell$ durch $P$ in $PQ^-(3,q)$ mit $|\ell \cap B| \geq z+1$. Nun ist $U\ell$ ein $(n-2)$-dimensionaler, total singulärer Unterraum durch $P$, so dass mindestens $z+1$ Hyperebenen von $U\ell$ durch $C$ von $M$ blockiert werden. Enthält $B$ eine (dann eindeutige) Gerade, so wählen wir diese für $\ell$.

Angenommen der Kegel $PQ^-(2n-3,q)$ enthält keinen $\Delta$-Raum für $P$. Insbesondere ist $U\ell$ kein $\Delta$-Raum für $P$. Dann existiert eine Hyperebene $C'$ von $U$, so dass weniger als $z+1$ Hyperebenen von $U\ell$ durch $C'$ von $M$ blockiert werden. Da $P \in M$, ist $P \notin C'$, d.h. $C'$ ist ein Komplement von $P$ in $U$. Sei $B'$ die Menge der Punkte, die entsteht, wenn die Punkte aus $V \cap M$ von $C'$ auf $F$ projiziert werden. Analog zu $B$ blockiert $B'$ alle Solids von $F$ und es existiert eine Gerade $\ell'$ durch $P$ in $PQ^-(3,q)$, so dass mindestens $z+1$ Hyperebenen von $U\ell'$ durch $C'$ von $M$ blockiert werden. Weil weniger als $z+1$ Hyperebenen von $U\ell$ durch $C'$ von $M$ blockiert werden, ist $|\ell \cap B'| < z+1$ und daher $\ell \neq \ell'$, also auch $U\ell \neq U\ell'$.

**Fall 1**: $\ell \subseteq B$. Dann treffen alle Hyperebenen von $U\ell$ durch $C$ die Menge $M$ und $|U\ell \cap M| \geq q+1$. Wegen $U\ell \cap U\ell' = U$ und $U \cap M = \{P\}$ ist $|U\ell' \cap M| \leq q+x-q < q+1$, also $|\ell' \cap B'| < q+1$. Sei $|B'| = q+x-\epsilon'$. Das bedeutet, dass $\epsilon'$ Punkte bei der Projektion von $V \cap M$ von $C'$ auf $F$ verloren gehen. Da $|U\ell \cap M| \geq q+1$, ist $|\ell \cap B'| \geq q+1-\epsilon'$. Es folgt

$$|\ell \cap B'| + |\ell' \cap B'| \geq q+1-\epsilon'+z+1.$$

Weil $B'$ weder $\ell'$ noch $\ell$ enthält, zeigt Resultat 5.3.3, dass diese Zahl höchstens gleich $|B'|+1-q = x+1-\epsilon'$ ist. Es folgt $q+1+z \leq x$, ein Widerspruch zu $x < q$ und $z > 0$.

**Fall 2:** $\ell \nsubseteq B$. Nach der Wahl von $\ell$ enthält $B$ damit keine Gerade, insbesondere ist $\ell' \nsubseteq B$. Sei $|B| = q+x-\epsilon$. Weil $|U\ell' \cap M| \geq |\ell' \cap B'| \geq z+1$ ist und höchstens $\epsilon$ Punkte bei der Projektion auf $B$ verloren gehen, ist $|\ell' \cap B| \geq z+1-\epsilon$. Es folgt

$$|\ell \cap B| + |\ell' \cap B| \geq z+1+z+1-\epsilon.$$

Erneut folgt mit Resultat 5.3.3

$$2z+2-\epsilon \leq x+1-\epsilon,$$

ein Widerspruch zu $z > q/2 > x/2$. □

Ein $(n-2)$-dimensionaler, total singulärer Unterraum $W$ durch $P$ ist natürlich ein $\Delta$-Raum, falls $|W \cap M| \geq z+1$ ist und alle diese Punkte auf einer gemeinsamen Geraden durch $P$ liegen. In der Tat ist diese Vorstellung nicht so falsch, wie wir später sehen. Diese Geraden mit relativ vielen Punkten in $M$ stehen dann, wie für $n=3$, wieder senkrecht aufeinander.

**Lemma 5.3.12** *Seien $\ell_1, \ell_2$ verschiedene Geraden der Quadrik, die sich in einem Punkt $P$ aus $M$ treffen mit*

- *$\ell_1, \ell_2 \nsubseteq M$ und $|\ell_1 \cap M| + |\ell_2 \cap M| > x+1$ oder*
- *$\ell_1, \ell_2 \subseteq M$.*

*Dann stehen $\ell_1$ und $\ell_2$ senkrecht aufeinander.*

*Beweis:* Angenommen $\ell_1$ und $\ell_2$ stehen nicht aufeinander senkrecht. Dann spannen sie eine Ebene $E$ auf, die die Quadrik nur in $\ell_1 \cup \ell_2$ trifft, also $|E \cap M| \leq 2q+1$. Aus Lemma 5.1.4 folgt

$$\left|E^\perp \cap M\right| \leq (2q+1)q^{n-2} + x\theta_{n-3}.$$

Der Unterraum $E^\perp$ trifft die Quadrik in einem Kegel $PQ^+(2n-3,q)$. Sei $\alpha$ die Anzahl der $(n-4)$-dimensionalen, total singulären Unterräume einer Quadrik $Q^+(2n-3,q)$ und $\beta$ die Anzahl dieser Unterräume durch jeden Punkt von $Q^+(2n-3,q)$. Dann ist $\alpha\theta_{n-4} = |Q^+(2n-3,q)|\,\beta$. Wegen $q \geq 3$ folgt

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{(q^{n-2}+1)(q^{n-1}-1)}{q^{n-3}-1} > \left|E^\perp \cap M\right|.$$

Daher gibt es einen $(n-3)$-dimensionalen, total singulären Unterraum $U$ durch $P$ in $E^\perp$ mit $U \cap M = \{P\}$. $U^\perp$ trifft die Quadrik in einem Kegel $UQ^+(5,q)$. Deswegen gibt es einen $(n+1)$-dimensionalen Unterraum $V$ von $\mathrm{PG}(2n+1,q)$ mit $U, E \subseteq V \subseteq U^\perp$, so dass $V$ die Quadrik in einem Kegel $UQ^-(3,q)$ trifft. Analog zum Beweis des vorherigen Lemmas, folgt aus Lemma 5.1.4, dass $|V \cap M| = q+x$ ist. Somit haben $\ell_1$ und $\ell_2$ zusammen höchstens $q+x < 2q+1$ Punkte in $M$ und sind nicht beide in $M$ enthalten. Die Voraussetzungen des Lemmas liefern nun, dass keine der beiden Geraden in $M$ enthalten ist und dass $|\ell_1 \cap M| + |\ell_2 \cap M| > x+1$ gilt.
Sei, wie im Beweis zu Lemma 5.3.11, $F$ der 4-dimensionale Unterraum von $V$, der die Quadrik in einem Kegel $PQ^-(3,q)$ trifft. Sei weiter $C$ ein Komplement von $P$ in $U$ und $B$ die Menge der Punkte, die entsteht, wenn die Punkte aus $V \cap M$ von $C$ auf $F$ projiziert werden. Dann blockiert $B$ alle Solids von $F$, denn $|V \cap M| = q+x > x$, weshalb nach Lemma 5.3.1 $M$ alle Hyperebenen von $V$ blockiert. Außerdem gilt $|B| \leq |V \cap M| = q+x$ und $|\ell_i \cap B| \geq |\ell_i \cap M|$ für $i = 1,2$. Somit

$$|\ell_1 \cap B| + |\ell_2 \cap B| > x+1 \geq |B| + 1 - q$$

und mit Resultat 5.3.3 folgt, dass eine der Geraden $\ell_i$ in $B$ enthalten ist. Dieses Argument kann man für alle Komplemente $C$ von $P$ in $U$ durchführen. Angenommen für verschiedene Komplemente $C$ und $C'$ und die dazugehörigen Mengen $B$ und $B'$ gilt $\ell_1 \subseteq B$ und $\ell_2 \subseteq B'$. Dann liegen in $U\ell_1$ und in $U\ell_2$ neben $P$ weitere $q$ Punkte aus $M$, was zu $|V \cap M| \geq 2q+1 > q+x$ führt, ein Widerspruch. Daher ist für verschiedene Komplemente immer die gleiche Gerade, o.B.d.A. $\ell_1$, in der dazugehörigen Menge $B$ enthalten. Das bedeutet, dass für jedes Komplement $C$ von $P$ in $U$ und für jeden Punkt $Q \in \ell_1$ der Unterraum $CQ$ die Menge $M$ trifft. Daher blockiert $M$ alle Hyperebenen von $U\ell_1$. Weil $\ell_1 \not\subseteq M$ ist, existiert ein Punkt $R \in \ell_1 \setminus M$. Damit alle Hyperebenen von $U\ell_1$ durch $R$, die $\ell_1$ nicht enthalten, von Punkten aus $M$ blockiert werden, liegen mindestens $q$ Punkte aus $M$ in $U\ell_1 \setminus \ell_1$. Es folgt

$$\begin{aligned}
|V \cap M| &\geq |(U\ell_1 \cap M) \cup (U\ell_2 \cap M)| \\
&\geq q + |\ell_1 \cap M| + |\ell_2 \cap M| - 1 \\
&> q + x,
\end{aligned}$$

ein Widerspruch. □

**Lemma 5.3.13** *Sei $W$ ein $\Delta$-Raum für den Punkt $P$ aus $M$. Für eine Gerade $h$ in $W$ durch $P$ mit $|h \cap M| \leq z-1$ gilt*

$$|W \cap M| \geq |h \cap M| + 4.$$

*Beweis:* Per Definition existiert eine Hyperebene $U$ durch $P$ in $W$ mit $U \cap M = \{P\}$, so dass mindestens $z+1$ Hyperebenen von $W$ durch jede Hyperebene von $U$ die Menge $M \cap W$ treffen. Insbesondere ist $|W \cap M| \geq z+1$.
Ist $h \subseteq U$, so ist $h \cap M = \{P\}$ und damit $|W \cap M| \geq z+1 = z + |h \cap M|$. Aus (5f) folgt $z \geq 4$ und damit die Behauptung.
Sei daher $h \nsubseteq U$, d.h. $h \cap U = \{P\}$. Sei weiter $Y := M \cap (W \setminus h)$. Jeder Punkt aus $Y$ liegt in $q^{n-4}(q+1-|h \cap M|)$ Hyperebenen von $W$, die keinen Punkt aus $h \cap M$ enthalten. Jedes der $q^{n-3}$ Komplemente von $P$ in $U$ liegt in mindestens $z+1-|h \cap M|$ Hyperebenen von $W$, die keinen Punkt aus $|h \cap M|$, aber mindestens einen Punkt aus $Y$ enthalten. Zählt man Paare $(R, H)$ mit $R \in Y$ und $H$ Hyperebene von $W$ durch $R$ mit $H \cap (h \cap M) = \emptyset$ doppelt ab, so folgt

$$|Y| \cdot q^{n-4}(q+1-|h \cap M|) \geq q^{n-3} \cdot (z+1-|h \cap M|).$$

Angenommen $|Y| \leq 3$. Dann ist $|Y| \leq q$, also $q^{n-3} - q^{n-4}|Y| \geq 0$, und mit $|h \cap M| \leq z-1$ folgt

$$(q+2-z)\,|Y| \geq 2q.$$

Da $|Y| \leq 3$, erhält man hieraus $z \leq q/3 + 2$, ein Widerspruch zur Definition von $z$, $x \leq q-1$ und $q > 3$ (siehe (5f)). □

Das vorherige Lemma wird benötigt, um in den beiden folgenden Lemmas zu zeigen, dass es tatsächlich einige Geraden mit relativ vielen Punkten in $M$ durch einen Punkt $P \in M$ gibt. Dies geschieht ähnlich wie für $n=3$, ist aber deutlich komplizierter.

**Lemma 5.3.14** *In jedem Kegel $PQ^-(2n-3, q) \subseteq Q^+(2n+1, q)$ mit $P \in M$ gibt es mindestens $4z\theta_{n-3}/7$ von $P$ verschiedene Punkte $R$ aus $M$ mit $|PR \cap M| \geq z$.*

*Beweis:* Der Kegel $PQ^-(2n-3, q)$ liegt in einem $(2n-2)$-dimensionalen Unterraum $T$ von $\mathrm{PG}(2n+1, q)$ und $T^\perp$ ist eine Ebene, die die Quadrik nur in $P$ trifft. Nach Lemma 5.1.4 liegen daher genau $q^{n-2} + x\theta_{n-3}$ Punkte aus $M$ in $T$. Sei $\mathcal{W}$ die Menge der $\Delta$-Räume für $P$, die in $T$ enthalten sind. Wir wollen die Mächtigkeit von $\mathcal{W}$ abschätzen und zählen dazu Paare $(U, W)$ mit $W \in \mathcal{W}$ und $(n-3)$-dimensionalen Unterräumen $U$ von $W$ mit $U \cap M = \{P\}$. Die Unterräume $W \in \mathcal{W}$ treffen $M$ nicht nur in $P$, daher gibt es eine Gerade $g$ in $W$ durch $P$, die $M$ in mindestens zwei Punkten trifft. Die Gerade $g$ liegt damit nicht in $U$, es kommen also höchsten $q^{n-3}$ der $\theta_{n-3}$ Hyperebenen von $W$ für $U$ in Frage. Jedes $W \in \mathcal{W}$ tritt damit in höchsten $q^{n-3}$ Paaren auf. Jeder total singuläre, $(n-3)$-dimensionale Unterraum

$U$ von $T$ mit $U \cap M = \{P\}$ liegt nach Lemma 5.3.11 in mindestens einem $\Delta$-Raum $W \in \mathcal{W}$. $T$ enthält nach Resultat 1.3.6

$$\theta_{n-3} \prod_{i=3}^{n-1} (q^i + 1) =: a$$

total singuläre Unterräume der Dimension $n-3$ durch $P$. Jeder Punkt $X \in (T \cap M) \setminus \{P\}$ liegt in

$$\theta_{n-4} \prod_{i=3}^{n-2} (q^i + 1) =: b$$

von diesen total singulären Unterräumen der Dimension $n-3$ durch $P$ (folgt ebenfalls aus 1.3.6). Es gibt daher mindestens

$$a - |(T \cap M) \setminus \{P\}| \cdot b =: c$$

total singuläre, $(n-3)$-dimensionale Unterräume $U$ von $T$ mit $U \cap M = \{P\}$. Die doppelte Abzählung der Paare $(U, W)$ von oben liefert

$$c \cdot 1 \leq |\mathcal{W}| \cdot q^{n-3},$$

also

$$\big((q^{n-1}+1)\theta_{n-3} - \theta_{n-4}(q^{n-2} + x\theta_{n-3} - 1)\big) \prod_{i=3}^{n-2} (q^i + 1) \leq |\mathcal{W}|\, q^{n-3}. \tag{5g}$$

Um eine obere Schranke für $|\mathcal{W}|$ zu erhalten, zählen wir nun inzidente Paare $(X, W)$ mit $W \in \mathcal{W}$ und $X \in (T \cap M) \setminus \{P\}$. Es gibt mindesten $|\mathcal{W}| \cdot z$ dieser Paare, denn ein $\Delta$-Raum enthält per Definition mindestens $z$ von $P$ verschiedene Punkte aus $M$. Für $X \in (T \cap M) \setminus \{P\}$ liegt die Gerade $PX$ in $\prod_{i=2}^{n-2}(q^i+1)$ total singulären Unterräumen von $T$ der Dimension $n-2$ (folgt aus Resultat 1.3.6) und $X$ liegt daher in höchstens genauso vielen $W$ aus $\mathcal{W}$. Ist $|PX \cap M| \leq z-1$, so lässt sich diese Zahl noch verbessern. Sei dafür $X$ ein solcher Punkt und $h := PX$. Dann ist $T^\perp h$ ein Solid von $\mathrm{PG}(2n+1,q)$, der die Quadrik nur in $h$ trifft. Nach Lemma 5.1.4 liegen in $(T^\perp h)^\perp = h^\perp \cap T$ genau

$$q^{n-3}\, |h \cap M| + x\theta_{n-4}$$

Punkte aus $M$. Ein $\Delta$-Raum $W \in \mathcal{W}$, der $X$ enthält, enthält nach Lemma 5.3.13 mindestens vier Punkte aus $M$, die nicht auf $h$ liegen. Sei $Y$ ein solcher Punkt, also $Y \in ((h^\perp \cap T) \cap M)$ mit $Y \notin h$. Dann liegt die Ebene $Yh$ in genau $\prod_{i=2}^{n-3}(q^i+1)$ total singulären Unterräumen $Z$ von $T$ der Dimension $n-2$ (Resultat 1.3.6) und daher auch in höchstens so vielen $\Delta$-Räumen $W \in \mathcal{W}$ durch $X$. Sei $d$ die Anzahl der $\Delta$-Räume $W \in \mathcal{W}$ durch $X$. Zählt man inzidente Paare $(Y, W)$ doppelt ab, so erhält man

$$4d \leq \big(q^{n-3}\, |h \cap M| + x\theta_{n-4} - |h \cap M|\big) \prod_{i=2}^{n-3} (q^i + 1).$$

Wegen $|h \cap M| \leq z-1$ und $x \leq q-1$ folgt

$$4d \leq \left(q^{n-3}-1\right) z \prod_{i=2}^{n-3}(q^i+1) =: e.$$

Ist nun $k$ die Anzahl der Punkte $X \in (T \cap M) \setminus \{P\}$ mit $|PX \cap M| \geq z$, dann folgt mit Hilfe der doppelten Abzählung der Paare $(X, W)$ von oben

$$|\mathcal{W}| \cdot z \leq k \prod_{i=2}^{n-2}(q^i+1) + (q^{n-2} + x\theta_{n-3} - 1 - k) \cdot \frac{e}{4}. \tag{5h}$$

Setzt man $e$ ein, so erhält man aus (5g) und (5h)

$$\begin{aligned} &z\left((q^{n-1}+1)\theta_{n-3} - \theta_{n-4}(q^{n-2}+x\theta_{n-3}-1)\right)(q^{n-2}+1) \\ &\leq q^{n-3}k(q^2+1)(q^{n-2}+1) + q^{n-3}(q^{n-2}+x\theta_{n-3}-1-k)\frac{1}{4}(q^{n-3}-1)z(q^2+1). \end{aligned}$$

Mit $x \leq q-1$ folgt

$$\begin{aligned} &z\left((q^{n-1}+1)\theta_{n-3} - 2\theta_{n-4}(q^{n-2}-1)\right)(q^{n-2}+1) \\ &- zq^{n-3}\frac{1}{2}(q^{n-2}-1)(q^{n-3}-1)(q^2+1) \\ &\leq kq^{n-3}(q^2+1)\left(q^{n-2}+1-\frac{1}{4}z(q^{n-3}-1)\right). \end{aligned} \tag{5i}$$

**Fall 1:** $n \geq 5$. Wegen $z \geq 1+q-x/2 \geq (q+3)/2$ und $q \geq 71$ ist der Koeffizient von $kq^{n-3}(q^2+1)$ in (5i) höchstens gleich

$$q^{n-2}+1-\frac{1}{8}(q^{n-3}-1)(q+3) \leq \frac{7}{8}q(q^{n-3}-1).$$

Verwendet man dies, so erhält man aus (5i)

$$\frac{4}{7}z\left[\frac{\left(2(q^{n-1}+1)\theta_{n-3} - 4\theta_{n-4}(q^{n-2}-1)\right)(q^{n-2}+1)}{q^{n-2}(q^2+1)(q^{n-3}-1)} - \frac{q^{n-2}-1}{q}\right] \leq k.$$

Für $q \geq 7$ gilt

$$\frac{\left(2(q^{n-1}+1)\theta_{n-3} - 4\theta_{n-4}(q^{n-2}-1)\right)(q^{n-2}+1)}{q^{n-2}(q^2+1)(q^{n-3}-1)} \geq 2q^{n-3}+\theta_{n-4},$$

weshalb die Behauptung folgt.

**Fall 2:** $n = 4$. Setzt man $z \geq 1+q-x/2 \geq (q+3)/2$ in die rechte Seite von (5i) ein, so erhält man

$$k \geq z\frac{4q^4+12q^3-12q^2+4q+24}{7q^3-2q^2+11q} \geq z\frac{4}{7}(q+1).$$

□

**Lemma 5.3.15** *Für jeden Punkt $P$ in $M$ gibt es mindestens $4z\theta_{n-1}/7$ von $P$ verschiedene Punkte $R \in M \cap P^\perp$, so dass $|RP \cap M| \geq z$ gilt.*

*Beweis:* Sei $\mathcal{R}$ die Menge der in der Aussage dieses Lemmas beschriebenen Punkte $R$. Sei weiter $c_d$ die Anzahl der Passanten einer hyperbolische Quadrik $Q^+(d,q)$ in $\mathrm{PG}(d,q)$. Dann folgt analog zum Beweis von Lemma 5.3.5 mit doppelter Abzählung

$$c_{2n-1}\left|Q^-(2n-3,q)\right| = \left|Q^+(2n-1,q)\right| c_{2n-3} \cdot q^2$$

und daraus

$$c_{2n-1}(q^{n-2}-1) = (q^n-1)c_{2n-3} \cdot q^2.$$

Nun liegt $P$ in genau $c_{2n-1}$ Ebenen $E$, die die Quadrik nur in $P$ treffen, und damit in genauso vielen Unterräumen $E^\perp$, die die Quadrik in einem Kegel $PQ^-(2n-3,q)$ treffen. Eine Gerade $h$ der Quadrik durch $P$ liegt in $c_{2n-3}q^2$ dieser Kegel. Jeder dieser Kegel enthält nach Lemma 5.3.14 mindestens $4z\theta_{n-3}/7$ Punkte aus $\mathcal{R}$. Es folgt

$$c_{2n-1}\frac{4}{7}z\theta_{n-3} \leq |\mathcal{R}|\, c_{2n-3}q^2 = |\mathcal{R}|\, c_{2n-1}\frac{q^{n-2}-1}{q^n-1} = |\mathcal{R}|\, c_{2n-1}\frac{\theta_{n-3}}{\theta_{n-1}}$$

und daraus $|\mathcal{R}| = 4z\theta_{n-1}/7$. □

Die eben beschriebenen Punkte liefern also Geraden durch den Punkt $P$ mit vielen Punkten in $M$. Diese Geraden führen nun, wie für $n=3$, erneut zu Erzeugern mit vielen Punkten in $M$.

**Lemma 5.3.16** *Für jeden Punkt $P$ in $M$ existiert ein Erzeuger $G$ durch $P$, so dass jede Gerade von $G$ die Menge $M$ in mindestens $z-2$ Punkten trifft und jede Gerade $\ell$ durch $P$ mit $z-2 \leq |\ell \cap M| < q+1$ in $G$ enthalten ist.*

*Beweis:* Sei $\mathcal{R}$ die Menge der im vorherigen Lemma beschriebenen Punkte. Wegen $2z \geq x+4$ und Lemma 5.3.12 stehen zwei Geraden $\ell_1$ und $\ell_2$ der Quadrik durch $P$ aufeinander senkrecht, falls für beide $z \leq |\ell_i \cap M| \leq q$ oder $\ell_i \subseteq M$ gilt.

**Fall 1:** Mindestens $3q\theta_{n-2}$ der Punkte aus $\mathcal{R}$ liegen auf Geraden durch $P$, die in $M$ enthalten sind. Dann gibt es mindestens $3\theta_{n-2}$ Geraden durch $P$, die in $M$ enthalten sind und daher paarweise aufeinander senkrecht stehen. Sei $G$ der Erzeuger, der von diesen Geraden aufgespannt wird und sei $s$ die minimale Anzahl von Punkten aus $M$ auf einer Geraden von $G$. Dann ist

$$|G \cap M| \geq 3q\theta_{n-2} + (\theta_{n-1} - 3\theta_{n-2})(s-1) + 1.$$

Sei $g$ eine Gerade in $G$ mit genau $s$ Punkten in $M$, dann folgt mit $G \subseteq g^\perp$ und Lemma 5.1.4

$$|G \cap M| \leq \left|g^\perp \cap M\right| = sq^{n-1} + x\theta_{n-2}. \tag{5j}$$

Zusammen erhalten wir

$$2s\theta_{n-2} \geq \theta_{n-2}(2q+3-x).$$

Hieraus folgt $s \geq z$, es treffen also alle Geraden von $G$ die Menge $M$ in mindestens $z$ Punkten.
Angenommen $P$ liegt auf einer Geraden $\ell$ der Quadrik mit $z - 1 \leq |\ell \cap M| \leq q$, die nicht in $G$ enthalten ist. Dann gibt es $q^{n-1}$ Geraden $h$ in $G$ durch $P$, die nicht auf $\ell$ senkrecht stehen und die $M$ in mindestens $z$ Punkten treffen. Wegen $|h \cap M| + |\ell \cap M| \geq z + z - 2 \geq x + 2$ und Lemma 5.3.12 folgt $h \subseteq M$. $P$ liegt in $G$ damit auf mindestens $q^{n-1}$ Geraden, die in $M$ enthalten sind. Somit ist

$$|G \cap M| \geq q^n + \theta_{n-2}(s-1) + 1.$$

Zusammen mit (5j) und $x \leq q - 1$ folgt

$$sq^{n-1} + q^{n-1} - 1 \geq q^n + \theta_{n-2}(s-1) + 1.$$

Hieraus erhalten wir

$$(q^{n-1} - \theta_{n-2})(s-q) \geq 1.$$

Es folgt $s > q$, also $s = q + 1$ und daher $G \subseteq M$, ein Widerspruch dazu, dass $M$ keine Erzeuger enthält.

**Fall 2:** Weniger als $3q\theta_{n-2}$ der Punkte aus $\mathcal{R}$ liegen auf Geraden durch $P$, die in $M$ enthalten sind. Sei $y$ die Anzahl der Punkte $R$ in $P^\perp$ mit $z \leq |PR \cap M| \leq q$ und sei $c$ die Anzahl der verschiedenen Geraden $PR$, die durch diese Punkte $R$ entstehen. Dann ist

$$\frac{y}{q} \leq c \leq \frac{y}{z-1}.$$

Nach dem vorherigen Lemma ist

$$y \geq y_0 := \frac{4}{7} z\theta_{n-1} - 3q\theta_{n-2}$$

und aus $q \geq 71$ folgt $y_0 > q\theta_{n-2}$. Damit ist $y > q\theta_{n-2}$ und daher ist $c > \theta_{n-2}$. Diese $c$ Geraden stehen paarweise aufeinander senkrecht und spannen daher einen Erzeuger $G$ durch $P$ auf. Sei erneut $s$ die minimale Anzahl von Punkten aus $M$ auf einer Geraden von $G$. Dann ist

$$|G \cap M| \geq y + (\theta_{n-1} - c)(s-1) + 1$$

und (5j) gilt ebenfalls. Aus beiden Ungleichungen erhält man

$$s(c - \theta_{n-2}) \geq y + c - (x+q)\theta_{n-2}.$$

Angenommen $s \leq z - 3$, dann ist

$$\begin{aligned}\theta_{n-2}(q + x - z + 3) &\geq y - c(z-4) \\ &\geq y - \frac{y(z-4)}{z-1} = \frac{3y}{z-1} \\ &\geq \frac{3y_0}{z-1}.\end{aligned}$$

Zusammen mit $y_0 > (4z/7-3)q\theta_{n-2}$ folgt hieraus

$$q+x-z+3 \geq \frac{12}{7}q - \frac{51q}{7(z-1)}.$$

Verwendet man $x \leq q-1$ und $z \geq (q+3)/2$, so erhält man einen Widerspruch für $q > 69$. Somit ist $s \geq z-2$.
Jede Gerade $\ell$ der Quadrik durch $P$ mit $z-2 \leq |\ell \cap M| \leq q$ steht auf den $c$ Geraden $PR$ mit $R \in \mathcal{R}$ und $z \leq |PR \cap M| \leq q$ wegen $z+z-2 \geq 2q-x \geq x+2$ und Lemma 5.3.12 senkrecht. Weil $c > \theta_{n-2}$ gilt, steht $\ell$ damit auf dem Erzeuger $G$ senkrecht, es ist also $\ell \subseteq G$. $\square$

**Lemma 5.3.17** *Jeder Punkt aus $M$ liegt in genau einem Erzeuger $G$, so dass jede Gerade in $G$ die Menge $M$ in mindestens $z-2$ Punkten trifft.*

*Beweis:* Angenommen der Punkt $P \in M$ liegt in zwei solchen Erzeugern $G_1$ und $G_2$. O.B.d.A. habe $G_1$ die Eigenschaften aus dem vorherigen Lemma. Sei $\ell$ eine Gerade durch $P$ in $G_2$, die nicht in $G_1$ enthalten ist. Dann ist $|\ell \cap M| \geq z-2$ nach Voraussetzung von $G_2$ und somit $|\ell \cap M| = q+1$ nach Voraussetzung von $G_1$. Damit sind mindestens $q^{n-1}$ Geraden aus $G_2$ durch $P$ in $M$ enthalten. Analog zum Schluss des ersten Falls des vorherigen Beweises folgt hieraus $G_2 \subseteq M$. Dies ist ein Widerspruch dazu, dass $M$ keinen Erzeuger enthält. $\square$

**Beweisabschluss von Theorem 5.3.10:** Nach dem vorherigen Lemma existieren Erzeuger $G_1, \ldots, G_s$ mit der Eigenschaft, dass jede Gerade in $G_i$ die Menge $M$ in mindestens $z-2$ Punkten trifft. Es gilt außerdem, dass jeder Punkt aus $M$ in genau einem der Erzeuger $G_i$ liegt, also $M$ die disjunkte Vereinigung der Mengen $G_i \cap M$ ist.
O.B.d.A. ist $|G_1 \cap M| \geq |M|/s = x\theta_n/s$. Sei $R$ ein Punkt in $G_1 \setminus M$. Dann enthält $R^\perp$ den Erzeuger $G_1$ und $R^\perp$ trifft die Erzeuger $G_i$ mit $i > 1$ mindestens in einem Unterraum der Dimension $n-1$. Trifft $R^\perp \cap G_i$ die Menge $M$ in einem Unterraum der Dimension $n-1$, so gilt $\left|(R^\perp \cap G_i) \cap M\right| \geq \theta_{n-1}$. Ist dies nicht der Fall, so existiert ein Punkt $Q_i$ in $(R^\perp \cap G_i) \setminus M$. Der Punkt $Q_i$ liegt in $R^\perp \cap G_i$ auf mindestens $\theta_{n-2}$ Geraden, die jeweils mindestens $z-2 \leq q-2$ Punkte in $M$ haben, daher ist in jedem Fall $\left|(R^\perp \cap G_i) \cap M\right| \geq \theta_{n-2}(z-2)$ für $i > 1$. Es folgt

$$\left|R^\perp \cap M\right| \geq \frac{x}{s}\theta_n + (s-1)\theta_{n-2}(z-2).$$

Wegen $R \notin M$ ist andererseits $\left|R^\perp \cap M\right| = x\theta_{n-1}$. Zusammen mit $z-2 \geq x/2$ und $x > 0$ folgt nun

$$\theta_{n-1} \geq \frac{1}{s}\theta_n + \frac{1}{2}(s-1)\theta_{n-2}.$$

Multiplizieren mit $2s > 0$ liefert

$$\begin{aligned}
0 &\geq s(s-1)\theta_{n-2} - 2s\theta_{n-1} + 2\theta_n \\
&= \theta_{n-2}\left[s^2 - s\frac{2\theta_{n-1} + \theta_{n-2}}{\theta_{n-2}} + 2\frac{\theta_n}{\theta_{n-2}}\right] \\
&= \theta_{n-2}\left[\left(s - \frac{2\theta_{n-1} + \theta_{n-2}}{2\theta_{n-2}}\right)^2 - \left(\frac{2\theta_{n-1} + \theta_{n-2}}{2\theta_{n-2}}\right)^2 + 2\frac{\theta_n}{\theta_{n-2}}\right].
\end{aligned}$$

Mit $n \geq 4$ und $q \geq 71$ folgt aus

$$\left(\frac{2\theta_{n-1} + \theta_{n-2}}{2\theta_{n-2}}\right)^2 < (q+1)^2 < 2\frac{\theta_n}{\theta_{n-2}}$$

nun der gewünschte Widerspruch. □

# Literaturverzeichnis


[ACE03] A. Aguglia, A. Cossidente, and G. L. Ebert. Complete spans on hermitian varieties. *Designs, Codes and Cryptography*, 29(1/3):7–15, 2003.

[AEL06] A. Aguglia, G. L. Ebert, and D. Luyckx. On partial ovoids of hermitian surfaces. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 12(5):641–650, 2006.

[Aig06] M. Aigner. *Diskrete Mathematik: Mit 600 Übungsaufgaben*. Aufbaukurs Mathematik. Vieweg, Wiesbaden, 6., korr edition, 2006.

[Bal96] S. Ball. Multiple blocking sets and arcs in finite planes. *Journal of the London Mathematical Society*, 54(3):581–593, 1996.

[BB66] R. C. Bose and R. C. Burton. A characterization of flat spaces in a finite geometry and the uniqueness of the hamming and the MacDonald codes. *Journal of Combinatorial Theory*, 1(1):96–104, 1966.

[BD98] A. A. Bruen and K. Drudge. On the non-existence of certain Cameron-Liebler line classes in $\mathrm{PG}(3, q)$. *Designs, Codes and Cryptography*, 14(2):127–132, 1998.

[BD99] A. A. Bruen and K. Drudge. The Construction of Cameron–Liebler Line Classes in $\mathrm{PG}(3, q)$. *Finite Fields and Their Applications*, 5(1):35–45, 1999.

[Beu80] A. Beutelspacher. Blocking sets and partial spreads in finite projective spaces. *Geometriae Dedicata*, 9(4):425–449, 1980.

[Beu83] A. Beutelspacher. On Baer subspaces of finite projective spaces. *Mathematische Zeitschrift*, 184(3):301–319, 1983.

[BG08] J. de Beule and A. Gács. Complete arcs on the parabolic quadric. *Finite Fields and Their Applications*, 14(1):14–21, 2008.

[BGHS09] J. de Beule, P. Govaerts, A. Hallez, and L. Storme. Tight sets, weighted m-covers, weighted m-ovoids, and minihypers. *Designs, Codes and Cryptography*, 50:187–201, 2009.

[BHMS13] J. de Beule, A. Hallez, K. Metsch, and L. Storme. Sets of generators blocking all generators in finite classical polar spaces. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 120(2):318–339, 2013.

[BI11] L. Beukemann and F. Ihringer. Beispiele für tight Mengen aus Überdeckungen, 2011.

[Big93] N. Biggs. *Algebraic graph theory.* Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edition, 1993.

[BKLP07] J. Bamberg, S. Kelly, M. Law, and T. Penttila. Tight sets and m-ovoids of finite polar spaces. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 114(7):1293–1314, 2007.

[BKMS08a] J. de Beule, A. Klein, K. Metsch, and L. Storme. Partial ovoids and partial spreads in hermitian polar spaces. *Designs, Codes and Cryptography*, 47(1-3):21–34, 2008.

[BKMS08b] J. de Beule, A. Klein, K. Metsch, and L. Storme. Partial ovoids and partial spreads of classical finite polar spaces. *Serdica Mathematical Journal*, 34:689–714, 2008.

[BLS74] B. I. Belov, V. N. Logačev, and V. P. Sandimirov. Construction of a class of linear binary codes that attain the Griesmer bound. *Problems of Information Transmission*, 10(3):211–217, 1974.

[BM11] L. Beukemann and K. Metsch. Regular graphs constructed from the classical generalized quadrangle $Q(4, q)$. *Journal of Combinatorial Designs*, 19(1):70–83, 2011.

[BM13] L. Beukemann and K. Metsch. Small tight sets of hyperbolic quadrics. *Designs, Codes and Cryptography*, 68(1-3):11–24, 2013.

[BMS] L. Beukemann, K. Metsch, and L. Storme. On weighted $\{\delta v_{\mu+1}, \delta v_\mu; k-1, q\}$-minihypers, $q$ square. preprint.

[BNS87] B. Bagchi and N. S. Narasimha Sastry. Even order inversive planes, generalized quadrangles and codes. *Geometriae Dedicata*, 22(2):137–147, 1987.

[Bro67] W. G. Brown. On hamiltonian regular graphs of girth six. *J. London Math. Soc*, 42:514–520, 1967.

[Bru71] A. A. Bruen. Blocking sets in finite projective planes. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 21(3):380–392, 1971.

[Bru80] A. A. Bruen. Blocking sets and skew subspaces of projective space. *Canadian Journal of Mathematics*, 32(3):628–630, 1980.

[Bru82] A. A. Bruen. Intersection of Baer subgeometries. *Archiv der Mathematik*, 39(3):285–288, 1982.

[BS74] F. Buekenhout and E. Shult. On the foundations of polar geometry. *Geometriae Dedicata*, 3(3 // 2):155–170, 1974.

[Bue95] F. Buekenhout, editor. *Handbook of incidence geometry: Buildings and foundations.* Elsevier, Amsterdam and , New York, 1995.

[CF05] M. Cimráková and V. Fack. Searching for maximal partial ovoids and spreads in generalized quadrangles. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 12(5):697–705, 2005.

[CK03] A. Cossidente and G. Korchmáros. Transitive ovoids of the Hermitian surface of $\mathrm{PG}(3, q^2)$, $q$ even. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 101(1):117–130, 2003.

[CL82] P. J. Cameron and R. A. Liebler. Tactical decompositions and orbits of projective groups. *Linear Algebra and its Applications*, 46(0):91–102, 1982.

[DD06] G. Donati and N. Durante. On the intersection of two subgeometries of $\mathrm{PG}(n, q)$. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 26:51–53, 2006.

[Dem97] P. Dembowski. *Finite geometries.* Springer, Berlin and , New York, 1997.

[Dru98] K. W. Drudge. *Extremal sets in projective and polar spaces.* PhD thesis, The University of Western Ontario, London, Canada, 1998.

[Dru99] K. Drudge. On a Conjecture of Cameron and Liebler. *European Journal of Combinatorics*, 20(4):263–269, 1999.

[Dye92] R.H. Dye. Maximal sets of non-polar points of quadrics and symplectic polarities over GF(2). *Geometriae Dedicata*, 44(3), 1992.

[EH99] G. L. Ebert and J. W. P. Hirschfeld. Complete systems of lines on a hermitian surface over a finite field. *Designs, Codes and Cryptography*, 17(1/3):253–268, 1999.

[Eis98] J. Eisfeld. On the common nature of spreads and pencils in $\mathrm{PG}(d, q)$. *Discrete Mathematics*, 189(1-3):95–104, 1998.

[ES63] P. Erdös and H. Sachs. Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knotenzahl. *Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg, Math.-Naturwiss.*, Reihe 12:251–257, 1963.

[FH64] W. Feit and G. Higman. The nonexistence of certain generalized polygons. *Journal of Algebra*, 1(2):114–131, 1964.

[FS02] S. Ferret and L. Storme. Minihypers and linear codes meeting the Griesmer bound: Improvements to results of Hamada, Helleseth and Maekawa. *Designs, Codes and Cryptography*, 25(2):143–162, 2002.

[GH08] A. Gács and T. Héger. On geometric constructions of (k, g)-graphs. *Contributions to Discrete Mathematics*, 3(1), 2008.

[Gov03] P. Govaerts. *Classifications of blocking set related structures in Galois geometries.* PhD thesis, Ghent University, 2003.

[GP05] P. Govaerts and T. Penttila. Cameron-Liebler line classes in $PG(3,4)$. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 12(5):793–804, 2005.

[Gri60] J. H. Griesmer. A bound for error-correcting codes. *IBM Journal of Research and Development*, 4(5):532–542, 1960.

[GS02] P. Govaerts and L. Storme. On a particular class of minihypers and its applications II. Improvements for $q$ square. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 97(2):369–393, 2002.

[GS03] P. Govaerts and L. Storme. On a particular class of minihypers and its applications. I. The result for general $q$. *Designs, Codes and Cryptography*, 28(1):51–63, 2003.

[GS04] P. Govaerts and L. Storme. On Cameron–Liebler line classes. *Advances in Geometry*, 4(3):279–286, 2004.

[Ham87] N. Hamada. Characterization of minihypers in a finite projective geometry and its applications to error-correcting codes. *Bull. Osaka Women's Univ.*, 24:1–24, 1987.

[Ham93] N. Hamada. A characterization of some $[n,k,d;q]$-codes meeting the Griesmer bound using a minihyper in a finite projective geometry . *Discrete Mathematics*, 116(1-3):229–268, 1993.

[HH93] N. Hamada and T. Helleseth. A characterization of some q-ary codes $(q > (h-1)^2, h \geq 3)$ meeting the Griesmer bound. *Math. Japon.*, 38(5):925–940, 1993.

[HH01] N. Hamada and T. Helleseth. Codes and minihypers. *Third EuroWorkshop on Optimal Codes and Related Topics (Bulgaria, June 10-16, 2001)*, pages 79–84, 2001.

[Hir98] J. W. P. Hirschfeld. *Projective geometries over finite fields.* Clarendon Press and Oxford University Press, Oxford, New York, 2 edition, 1998.

[HP03] W. C. Huffman and V. Pless. *Fundamentals of error-correcting codes.* Cambridge Univ. Pr, Cambridge u.a, 2003.

[HS60] A. J. Hoffman and R. R. Singleton. On Moore graphs with diameters 2 and 3. *IBM Journal of Research and Development*, 4(5):497–504, 1960.

[HT78] N. Hamada and F. Tamari. On a geometrical method of construction of maximal t-linearly independent sets. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 25(1):14–28, 1978.

[HT91] J. W. P. Hirschfeld and J. A. Thas. *General galois geometries*. Clarendon, Oxford, 1991.

[Hub87] M. Huber. Baer cones in finite projective spaces. *Journal of Geometry*, 28(2):128–144, 1987.

[Jun90] D. Jungnickel. *Graphen, Netzwerke und Algorithmen*. BI-Wiss.-Verl., Mannheim [u.a.], 2., überarb. und erw edition, 1990.

[Kàr60] F. Kàrteszi. Piani finiti ciclici come risoluzioni di un certo problema di minimo. *Bollettino dell'Unione Matematica Italiana*, 15(4):522–528, 1960.

[KM05] A. Klein and K. Metsch. New results on covers and partial spreads of polar spaces. *Innov. Incidence Geom*, 1:19–34, 2005.

[KM11] A. Klein and K. Metsch. Corrections to „New results on covers and partial spreads of polar spaces“. *Innov. Incidence Geom*, 11:237–240, 2011.

[Met06] K. Metsch. Small maximal partial ovoids of $H(3, q^2)$. *Innov. Incidence Geom*, 3:1–12, 2006.

[Met10] K. Metsch. The non-existence of Cameron-Liebler line classes with parameter $2 < x \leq q$. *Bulletin of the London Mathematical Society*, 42(6):991–996, 2010.

[Met14] K. Metsch. An improved bound on the existence of Cameron-Liebler line classes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 121(0):89 – 93, 2014.

[Pay75] S. E. Payne. All generalized quadrangles of order 3 are known. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 18(2):203–206, 1975.

[Pen91] T. Penttila. Cameron-Liebler line classes in PG$(3, q)$. *Geometriae Dedicata*, 37(3), 1991.

[PT09] S. E. Payne and J. A. Thas. *Finite generalized quadrangles*. European Mathematical Society, Zürich, Switzerland, 2nd edition, 2009.

[Rod12] M. Rodgers. On some new examples of Cameron-Liebler line classes. *ProQuest Dissertations and Theses*, 2012.

[SS65] G. Solomon and J.J. Stiffler. Algebraically punctured cyclic codes. *Information and Control*, 8(2):170–179, 1965.

[Ste07] A. Steger. Diskrete Strukturen: Band 1: Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra. *Kombinatorik, Graphentheorie, Algebra*, 2007.

[Sto08] L. Storme. Weighted $\{\delta(q+1), \delta; k-1, q\}$-minihypers. *Discrete Mathematics*, 308(2-3):339–354, 2008.

[Sve83] M. Sved. Baer subspaces in the n-dimensional projective space. In Louis Casse, editor, *Combinatorial Mathematics X*, volume 1036 of *Lecture Notes in Mathematics*, pages 375–391. Springer Berlin / Heidelberg, 1983.

[Tal91] G. Tallini. Blocking sets with respect to planes in $\mathrm{PG}(3, q)$ and maximal spreads of a non-singular quadric in $\mathrm{PG}(4, q)$, 1991.

[Tha81] J. A. Thas. Ovoids and spreads of finite classical polar spaces. *Geometriae Dedicata*, 10(1-4):135–143, 1981.

[Tit74] J. Tits. *Buildings of spherical type and finite BN-pairs - Lecture Notes in Mathematics*, volume 386. Springer Berlin Heidelberg, Berlin 1974,, 1974.

[TP76] J. A. Thas and S. E. Payne. Classical finite generalized quadrangles: a combinatorial study. *Ars Combinatoria*, 2:57–110, 1976.

[Tut47] W. T. Tutte. A family of cubical graphs. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 43(04):459, 1947.

[Tut66] W.T. Tutte. *Connectivity in graphs*. Mathematical expositions. University of Toronto Press, 1966.

[Vel59] F.D. Veldkamp. Polar geometry I-V. *Proc. Kon. Ned. Akad. Wet.*, A62, A63:512–551, 207–212, 1959.

[vL99] J. van Lint. *Introduction to coding theory*, volume 86 of *Graduate texts in mathematics*. Springer, Berlin, New York, 3rd rev. and expanded edition, 1999.

[VY08] O. Veblen and J. W. Young. A Set of Assumptions for Projective Geometry. *American Journal of Mathematics*, 30(4):347–380, 1908.

[Won82] P. Wong. Cages—a survey. *Journal of Graph Theory*, 6(1):1–22, 1982.

# Erklärung

Ich erkläre: Ich habe die vorgelegte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt, die ich in der Dissertation angegeben habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der „Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ niedergelegt sind, eingehalten.

Linda Beukemann, Oktober 2013