

Mathematische Vergleichsarbeiten in der Grundschule-

Zum diagnostischen Potential von Aufgaben und deren Bearbeitungen
einer landesweiten Vergleichsarbeit für dritte Klassen

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
an den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
(Didaktik der Mathematik)
der Justus-Liebig-Universität Gießen

eingereicht von

Eva Susanne Hoffart

unter dem Titel
Diagnose versus Leistungserhebung –
Fachdidaktische Analysen zu Aufgaben einer mathematischen Vergleichsarbeit der Grundschule
im August 2011

Tag der Disputation: 05.10.2011

Für meine Eltern

Inhalt

1	Einleitung	1
1.1	Motivation	1
1.2	Aufbau und Inhalt der Arbeit	3
Teil I: <u>Theoretische Rahmung</u>		
2	Diagnose	7
2.1	Grundsätze und Ziel der Pädagogischen Diagnostik	7
2.2	Funktionen und Modelle der Pädagogischen Diagnostik	9
2.2.1	Die Erteilung von Qualifikationen und die Verbesserung des individuellen Lernens	9
2.2.2	Modelle und Konzepte der Pädagogischen Diagnostik	10
2.3	Methoden der Pädagogischen Diagnostik	12
2.4	Stellenwert der Diagnose im Mathematikunterricht der Grundschule	14
2.5	Diagnostische Kompetenz der Lehrer	16
2.6	Für die weitere Arbeit	17
3	Vergleichende Leistungserhebungen	19
3.1	Grundlegende Begriffsklärungen	19
3.2	Exkurs Test	23
3.2.1	Testtheorie	23
3.2.2	Gütekriterien	24
3.2.3	Aufgabenkonstruktion	25
3.2.4	Auswertung	26
3.3	Zielsetzungen und Funktionen vergleichender Leistungserhebungen	27
3.4	Forschungsstand zu vergleichenden Leistungserhebungen im Fach Mathematik	29
3.5	Für die weitere Arbeit	30
4	Aufgaben - Instrumente der Diagnose und der Leistungserhebung	31
4.1	Aufgaben	31
4.2	Die Bedeutung von Aufgaben für den Mathematikunterricht	32
4.3	Aufgaben im Spannungsfeld von Diagnose und Leistungserhebung	35
4.4	Für die weitere Arbeit	39
4.5	Die Aufgaben der hessischen Orientierungsarbeit 2005 - ein Beispiel vergleichender Leistungserhebung in der Grundschule	40
4.5.1	Kontext, Inhalte und Anforderungen	40
4.5.2	Aufgabenset der hessischen Orientierungsarbeit 2005	42
4.5.3	Einordnung der hessischen Orientierungsarbeit Mathematik 2005	46
Teil II: <u>Das eigene Forschungsvorhaben</u>		
5	Die eigene Untersuchung	49
5.1	Zielsetzung, Forschungsanliegen und Fragestellungen	49
5.2	Ausgangslage und Charakterisierung der Datenbasis	51
5.2.1	Die Schriftdaten	51
5.2.1.1	Voraussetzungen der Schriftdaten	51
5.2.1.2	Über die Schriftdaten	53
5.2.1.3	Sampling der Aufgaben	53
5.2.2	Die Interviewdaten	55
5.2.2.1	Intention der Interviewstudie	55
5.2.2.2	Planung und Durchführung der Interviewstudie	55

5.3	Einordnung des Untersuchungsvorhabens und Positionierung	57
5.3.1	Vorannahme und Forschungsparadigma	57
5.3.2	Qualitativer Anspruch der Untersuchung	57
5.3.3	Triangulation	58
5.3.4	Inhaltsanalyse als Auswertungsmethode der Datenbasis	59
5.4	Die Phasierung der Untersuchung	61
5.4.1	Auswertung qualitativer Interviews nach SCHMIDT	61
5.4.2	Phasen der eigenen Untersuchung	62
5.4.3	Übersicht des Forschungsvorhabens	66
6	Die Aufgabenanalyse als Instrument der Untersuchung	67
6.1.	Die Aufgabenanalyse als Instrument der mathematikdidaktischen Forschung	67
6.2	Das Instrument der Aufgabenanalyse in der vorliegenden Arbeit	72
6.2.1	Zielsetzung der Aufgabenanalyse	72
6.2.2	Die Rationale Aufgabenanalyse	74
6.2.3	Die Empirische Aufgabenanalyse	82

Teil III: Darstellung der Aufgabenanalysen und der Konstruktion einer Bearbeitungstypologie

7	Darstellung der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse A4 „Hundertertafel“	88
7.1	Rationale Aufgabenanalyse A4 „Hundertertafel“ mit Konstruktion von Bearbeitungsvarianten	88
7.1.1	Die Analyseperspektiven	88
7.1.2	Bearbeitungsvarianten Teilaufgabe A4a	97
7.1.3	Bearbeitungsvarianten Teilaufgabe A4b	98
7.1.4	Bearbeitungsvarianten Teilaufgabe A4c	100
7.2	Empirische Aufgabenanalyse A4 „Hundertertafel“ mit Ausschärfung zu Ergebnis- und Bearbeitungskategorien	102
7.2.1	Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse Teilaufgabe A4a	102
7.2.2	Überblick über die Interviewstudie Teilaufgabe A4a	103
7.2.3	Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse Teilaufgabe A4b	105
7.2.4	Überblick über die Interviewstudie Teilaufgabe A4b	107
7.2.5	Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse Teilaufgabe A4c	112
7.2.6	Zusammenschau der Bearbeitungskategorien Teilaufgabe A4c	119
7.2.7	Überblick über die Interviewstudie Teilaufgabe A4c	120
7.3	Zusammenführung der Bearbeitungswege Teilaufgabe A4b und A4c	121
7.4	Zusammenfassung und Kennzeichnung der Aufgabe A4	128
8	Darstellung der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse A5 „Quadrate in Figur“	135
8.1	Rationale Aufgabenanalyse A5 „Quadrate in Figur“ mit Konstruktion von Bearbeitungsvarianten	135
8.1.1	Die Analyseperspektiven	135
8.1.2	Bearbeitungsvarianten Teilaufgabe A5a	142
8.1.3	Bearbeitungsvarianten Teilaufgabe A5b	145
8.2	Empirische Aufgabenanalyse A5 „Quadrate in Figur“ mit Ausschärfung zu Bearbeitungskategorien	152
8.2.1	Vorbemerkung zur Empirischen Aufgabenanalyse A5	152
8.2.2	Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse Teilaufgabe A5a	153
8.2.3	Zusammenschau der Bearbeitungskategorien Teilaufgabe A5a	161
8.2.4	Überblick über die Interviewstudie Teilaufgabe A5a	161
8.2.5	Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse Teilaufgabe A5b	163
8.2.6	Zusammenschau der Bearbeitungskategorien Teilaufgabe A5b	171
8.2.7	Überblick über die Interviewstudie Teilaufgabe A5b	172
8.3	Zusammenführung der Bearbeitungswege Teilaufgaben A5a und A5b	173
8.4	Zeichnungen	178
8.5	Zusammenfassung und Kennzeichnung der Aufgabe A5	181

9	Darstellung der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse A8 „Zucker“	187
9.1	Rationale Aufgabenanalyse A8 „Zucker“ mit Konstruktion von Bearbeitungsvarianten	187
9.1.1	Die Analyseperspektiven	187
9.1.2	Bearbeitungsvarianten Aufgabe A8	196
9.2	Empirische Aufgabenanalyse A8 mit Ausschärfung zu Bearbeitungskategorien	200
9.2.1	Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse A8	200
9.2.2	Zusammenschau der Bearbeitungskategorien Aufgabe A8	211
9.2.3	Überblick der Interviewstudie Aufgabe A8	212
9.2.4	Exkurs: Einzelfallbeschreibung Marco	214
9.3	Zusammenführung der Bearbeitungswege A8	215
9.4	Zusammenfassung und Kennzeichnung der Aufgabe A8	218
10	Konstruktion einer Bearbeitungstypologie	225
10.1	Das Verständnis der Typenbildung und die Umsetzung in der vorliegenden Arbeit	225
10.2	Adaption und Umsetzung der Stufenfolge empirisch begründeter Typenbildung	227
10.2.1	Konkretisierung der relevanten Vergleichsdimensionen auf Grundlage der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse	227
10.2.2	Gruppierung der Daten und Reduktion des Merkmalsraums	229
10.2.2.1	Die theoretische Reduktion	229
10.2.2.2	Die empirische Reduktion	230
10.3	Die computergestützten Clusteranalyse	231
10.3.1	Einsatz des hierarchischen Clusterverfahren Ward	232
10.3.2	Bestimmung der optimalen Clusterzahl	233
10.3.3	Beschreibung der Clusterlösung C ₅	235
10.3.4	Charakterisierung der inhaltlichen Clusterschwerpunkte anhand von Prototypen	238
Teil IV: <u>Zusammenfassung und Fazit</u>		
11	Zusammenführung der Ergebnisse	243
11.1	Rückblick auf das Instrument der Aufgabenanalyse	243
11.2	Ergebnisse aus den Aufgabenanalysen	246
11.3	Ergebnisse aus der Konstruktion einer Bearbeitungstypologie	250
12	Fazit mit Ausblick	253
12.1	Ergebnisse zum Spannungsfeld Diagnose und vergleichende Leistungserhebung	253
12.2	Ausblick	258
Abbildungen		261
Tabellen		262
Literatur		263
Anhang		279

1 Einleitung

1.1 Motivation

Seit einigen Jahren wird in Fachkreisen eine vielfältige Diskussion um die mathematischen Leistungen der deutschen Schüler¹ geführt. Diese Leistungen werden in der Regel aus den Ergebnissen schriftlicher Prüfungen abgeleitet, wobei diverse Formen der Leistungsmessung verwendet werden. Neben den bekannten internationalen und nationalen Schulleistungsstudien wurden in den letzten Jahren vermehrt landesweite Vergleichsuntersuchungen im Fach Mathematik implementiert.

Es fällt auf, dass die mathematischen Leistungen der Schüler in den Sekundarstufen ausführlich diskutiert und analysiert werden. Für den Bereich der Grundschule² wird infolge akzeptabler Ergebnisse in Leistungsstudien auf einen vermeintlich geringeren Handlungsbedarf geschlossen, sodass weder die Leistungen der Grundschüler noch die vergleichenden Leistungserhebungen in dieser Schulphase von besonderem Interesse zu sein scheinen (vgl. SCHERER 2004, S. 270). Doch gerade in den ersten Schuljahren sind die Leistungserhebungen bedeutsam. Dies wird einerseits auf die vielfältigen Entwicklungen der Kinder in diesem Alter zurückgeführt, andererseits beeinflusst das in der Grundschule erworbene mathematische Wissen die Anschlussfähigkeit für die nachfolgenden Schuljahre (vgl. SJUTS 2008, S. 58).

In den Handreichungen und Publikationen zu verschiedenen Leistungserhebungen der Grundschule werden neben dem Aspekt der Leistungsmessung diagnostische Anliegen formuliert. Die vergleichenden Leistungserhebungen sollen diagnostische Zusatzinformationen liefern, um besondere Stärken und Schwächen einzelner Schüler zu identifizieren (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2009, S. 18) und die Kinder in der noch verbleibenden Grundschulzeit gezielter fördern zu können. So werden die Leistungserhebungen als „wichtiges Diagnoseinstrument für die Grundschullehrerinnen und -lehrer“ (HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005) bezeichnet. Es stellt sich die Frage, inwiefern dieser diagnostische Anspruch mit den Anforderungen der Leistungsmessung vereinbar ist und eine vergleichende Leistungserhebung tatsächlich zur diagnostischen Nutzung herangezogen werden kann.

Die vorliegende Forschungsarbeit nimmt sich dieser Fragestellung an und widmet sich dem Themenfeld der vergleichenden Leistungserhebungen im Mathematikunterricht der Grundschule. Das Ziel der Arbeit ist die Formulierung grundlegender Erkenntnisse zu der diagnostischen Nutzung vergleichender Leistungserhebungen aus fachdidaktischer Perspektive.

Hierzu werden die in den Leistungserhebungen gestellten Aufgaben besonders berücksichtigt, denn „Leistungstests bestehen üblicherweise aus der Bearbeitung von Aufgaben“

¹ In der vorliegenden Arbeit werden zur besseren Lesbarkeit bei den Personenbezeichnungen keine geschlechtsspezifischen Formen verwendet, die Begriffe schließen jeweils die weibliche und die männliche Form ein.

² Die Begriffe Grundschule und Primarstufe werden im Rahmen der Arbeit synonym als Bezeichnung für die Klassenstufen 1 bis 4 verwendet.

(NEUBRAND 2008, S. 6). Aufgaben können somit als Instrumente der Leistungsmessung bezeichnet werden. Um dem komplexen Themenfeld sinnvoll zu begegnen, werden die Aufgaben einer offiziellen mathematischen Leistungserhebung in den Mittelpunkt der Untersuchung gestellt. Neben einer gründlichen Analyse der Aufgaben wird eine Auswertung der zugehörigen Schülerbearbeitungen in die Untersuchung integriert. In Anlehnung an SILL (in SILL/SIKORA 2007, S.154) werden dabei die Lösungswege und Aufgabenbearbeitungen der Kinder als Abbild der gestellten Aufgaben aufgefasst.

In der vorliegenden Forschungsarbeit wird das Aufgabenset einer mathematischen Vergleichsuntersuchung in einem dritten Grundschuljahrgang untersucht. Neben den gegebenen Aufgaben der Leistungserhebung lagen über 2000 Schülerbearbeitungen der offiziellen Durchführung der hessischen Orientierungsarbeit Mathematik 2005 vor, die durch eine Interviewstudie ergänzt wurden. Dieses umfangreiche authentische Datenmaterial bietet den Vorteil, die Untersuchung der Aufgaben mit der Untersuchung der Aufgabenbearbeitungen verknüpfen zu können. Nur auf diese Weise werden Rückschlüsse von den Bearbeitungen auf die Aufgaben und ihre Besonderheiten möglich.

Um diese Untersuchungsintention realisieren zu können, wird ein umfangreiches Modell der Aufgabenanalyse benötigt. Ein erstes Ziel des vorliegenden Forschungsvorhabens ist somit die Entwicklung eines angemessenen Analysemodells, welches verschiedene Aspekte der Aufgabe berücksichtigt. Mit diesem werden ausgewählte Aufgaben der hessischen Orientierungsarbeit 2005 und die zugehörigen Aufgabenbearbeitungen ausgewertet. Die Datenfülle ermöglicht ein umfassendes Bild der Aufgabenbearbeitungen, sodass einerseits eine Strukturierung der Daten erfolgen kann und andererseits Rückschlüsse auf Aufgabenmerkmale gezogen werden können.

Über die Einzelanalysen der Aufgaben hinaus werden die Bearbeitungswege der Drittklässler zu allen untersuchten Aufgaben kombiniert analysiert. Anhand dieser ergänzenden Untersuchungsphase werden weiterführende explorative Erkenntnisse zu bestehenden Zusammenhängen der Aufgabenbearbeitungen gewonnen.

Die ausführlichen Analysen der Aufgaben und ihrer Bearbeitungen liefern erste Antworten auf die Frage nach den diagnostischen Möglichkeiten vergleichender Leistungserhebungen in der Grundschule. Konkret wird auf eine mögliche Multifunktionalität dieser Erhebungen sowie auf die Besonderheiten der gestellten Aufgaben eingegangen. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit bieten nicht nur weiterführende Impulse für die mathematikdidaktische Forschung, sondern können ebenso auf der Schulebene genutzt werden.

1.2 Aufbau und Inhalt der Arbeit

Die vorliegende Forschungsarbeit ist in vier Teile gegliedert. Die wesentlichen Inhalte ihrer Kapitel werden anschließend dargestellt.

Teil I: Theoretische Rahmung

Im ersten Teil werden die umfangreichen Kontexte erörtert, in welche sich die Untersuchungen von Aufgaben in vergleichenden Leistungserhebungen und ihren Bearbeitungen einordnen lassen. Ebenso werden in den Kapiteln des ersten Teils relevante Begrifflichkeiten und Auffassungen für die anstehende Untersuchung geklärt.

In Kapitel 2 „Diagnose“ werden zunächst Grundsätze und Ziele der Pädagogischen Diagnostik erläutert, bevor die konkurrierenden Funktionen der Erteilung von Qualifikationen und der Verbesserung des individuellen Lernens diskutiert werden. Es folgt eine Darstellung der diagnostischen Methoden Beobachtung, Befragung und Test. Im Anschluss wird der Stellenwert der Diagnose für den Mathematikunterricht der Grundschule herausgestellt und begründet, wobei für die Umsetzung einer entwicklungsorientierten Diagnose im Mathematikunterricht auch die diagnostische Kompetenz des Lehrers entscheidend ist.

Mit dem sich anschließenden Kapitel 3 „Vergleichende Leistungserhebungen“ wird konkret auf das zugrundegelegte Verständnis dieser Form der Leistungsmessung eingegangen. Ein Exkurs in die Grundlagen der Testtheorie dient dazu, die Unterschiede zwischen einem psychometrisch basierten Test und einer schriftlichen Prüfung zu verdeutlichen. Weiterführend werden die vielfältigen Ziele und Funktionen von vergleichenden Leistungserhebungen dargestellt. An dieser Stelle verhilft die Theorie der Ebenen des Bildungssystems nach FEND (2008, 2009) zur Differenzierung und Einordnung der genannten Funktionen. Obwohl seit einigen Jahren immer wieder Diskussionen um vergleichende Leistungserhebungen im Fach Mathematik entfachen, existieren nur wenige Forschungsarbeiten in diesem Bereich.

In Kapitel 4 „Aufgaben - Instrumente der Diagnose und der Leistungserhebung“ wird explizit auf das Thema Aufgaben eingegangen. Die Bedeutung von Aufgaben als zentrale Elemente des Mathematikunterrichts wird herausgestellt und erläutert. Ausführlich werden im Anschluss die unterschiedlichen Anforderungen an Aufgaben als Instrumente vergleichender Leistungserhebungen und an Aufgaben als Instrumente der Diagnose diskutiert. Danach werden die Aufgaben der hessischen Orientierungsarbeit Mathematik 2005 als ein Beispiel für vergleichende Leistungserhebungen in der Grundschule vorgestellt. Sowohl die Aufgaben als auch deren Bearbeitungen bilden die Datengrundlage der anstehenden Untersuchung, sodass neben den offiziellen Intentionen und Zielsetzungen ebenso Informationen zur Durchführung und zur Auswertung der Leistungserhebung dargestellt werden. Nach der Präsentation und der Erläuterung des verwendeten Aufgabensets erfolgt die Einordnung der hessischen Orientierungsarbeit Mathematik 2005 hinsichtlich der in diesem Teil der Arbeit angeführten Aspekte zu den Themen Diagnose und Leistungserhebung.

Teil II: Das eigene Forschungsvorhaben

Dieser Teil der Arbeit widmet sich dem eigenen Forschungsanliegen und nimmt eine Einordnung der methodologischen sowie der methodischen Grundsätze vor.

In Kapitel 5 „Die eigene Untersuchung“ wird die grundlegende Zielsetzung der Untersuchung präzisiert, bevor eine Formulierung der konkreten Forschungsanliegen erfolgt. Spezielles Augenmerk wird auf die Datenbasis der Untersuchung gelegt, welche sich aus non-reaktiven Schriftdaten der hessischen Orientierungsarbeit und reaktiven Daten der ergänzenden Interviewstudie zusammensetzt. Daraufhin erfolgt die methodologische und methodische Positionierung des Untersuchungsvorhabens, indem das Forschungsparadigma, der qualitative Anspruch, das Prinzip der Triangulation sowie die Inhaltsanalyse als angewandte Auswertungsmethode erläutert werden. Das vielschichtige Untersuchungsvorhaben wird zuletzt anhand des mehrphasigen Untersuchungsprozesses erläutert und abschließend graphisch dargestellt.

„Die Aufgabenanalyse als Instrument der Untersuchung“, Kapitel 6, bildet den Schwerpunkt des vorliegenden Forschungsvorhabens. Zunächst wird die Aufgabenanalyse als modifizierbares Instrument der mathematikdidaktischen Forschung vorgestellt und von einer psychometrisch basierten Aufgabenanalyse abgegrenzt, bevor verschiedene Anwendungsbeispiele im Kontext mathematischer Leistungserhebungen vorgestellt werden. Den größten Teil des Kapitels nimmt das entwickelte Modell der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse ein. Hier werden sowohl die verschiedenen Analyseaspekte im Detail dargestellt als auch das Zusammenspiel der einzelnen Untersuchungskomponenten erläutert.

Teil III: Darstellung der Aufgabenanalysen und der Konstruktion einer Bearbeitungstypologie

Im dritten Teil der Arbeit sind die detaillierten Ergebnisse der durchgeführten Aufgabenanalysen zu den drei untersuchten Aufgaben A4 „Hundertertafel“, A5 „Quadrate in Figur“ und A8 „Zucker“ zu finden. Die Kapitel 7, 8 und 9 widmen sich jeweils der Darstellung der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse dieser Aufgaben. Jedes Kapitel beginnt mit den Ergebnissen der Rationalen Aufgabenanalyse, auf deren Grundlage die Konstruktion potentieller Bearbeitungsvarianten erfolgt. Es schließt sich die Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse an, aus der die empirisch ausgeschärften Bearbeitungskategorien resultieren. Dabei werden sowohl die Auswertungen der Schriftdaten als auch die komplementären Erkenntnisse der Interviewstudie einbezogen. Identifizierte Besonderheiten und Auffälligkeiten der Aufgaben werden nachfolgend in eigenen Abschnitten der Kapitel vorgestellt und erläutert. Jedes der drei Kapitel schließt mit einer Zusammenfassung der Ergebnisse aus der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse ab, in welcher die Aufgabe und ihr diagnostisches Potential jeweils gekennzeichnet werden.

Kapitel 10 „Konstruktion einer Bearbeitungstypologie“ wendet sich im Anschluss an die Einzelanalysen den empirischen Bearbeitungskombinationen über die drei untersuchten Aufgaben hinweg zu. In Anlehnung an die Stufenfolge empirisch begründeter Typenbildung von KLUGE (1999) wird mit Hilfe einer computergestützten Clusteranalyse eine Bearbeitungstypologie konstruiert. Nach Darlegung der methodischen Entscheidungen der Clusteranalyse folgt eine inhaltliche Beschreibung der erhaltenen Cluster.

Teil IV: Zusammenfassung und Fazit

Der abschließende Teil der Forschungsarbeit fasst die Ergebnisse der Untersuchung zusammen, weiterführend wird ein Fazit zu dem Thema Aufgaben im Spannungsfeld Leistungserhebung und Diagnosepotential formuliert.

Zunächst erfolgt in Kapitel 11 „Zusammenführung der Ergebnisse“ eine Rückschau auf die einzelnen Untersuchungsschwerpunkte. Mit Bezug zu den in Kapitel 5 aufgestellten Forschungsanliegen werden die Ergebnisse der Aufgabenanalysen und der Konstruktion einer Bearbeitungstypologie zusammenfassend dargestellt. Zunächst wird das entwickelte Modell der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse als Untersuchungsinstrument im Hinblick auf Anforderungen und Ergebnisse beurteilt. Weiterführend werden die in den Aufgabenanalysen identifizierten Besonderheiten der untersuchten Aufgaben und ihrer Bearbeitungen dargelegt sowie weiterführende Schlüsse aus der Konstruktion einer Bearbeitungstypologie gezogen.

Im „Fazit mit Ausblick“, Kapitel 12, wird das Spannungsfeld von Diagnose und Leistungserhebung behandelt. Anhand der empirischen Ergebnisse der Arbeit werden Aussagen zur Relevanz der Aufgaben als Instrumente der Leistungserhebung und der Diagnose getroffen. Ebenso wird die Frage nach dem multifunktionalen Einsatz eines Aufgabensets beantwortet und Konsequenzen für die Konstruktion von Aufgaben mit entwicklungsdiagnostischer Funktion abgeleitet. Die Arbeit schließt mit einem Ausblick auf zukünftige Forschungsvorhaben und weiterführenden Fragestellungen ab.

„Nicht alles,
was gezählt werden kann, zählt,
und nicht alles, was zählt,
kann gezählt werden.“

Albert Einstein

Kapitel 1- Einleitung

TEIL I: THEORETISCHE RAHMUNG

2 Diagnose

Das vorliegende Forschungsvorhaben stellt die Frage nach dem diagnostischen Potential vergleichender Leistungserhebungen. Deshalb werden zunächst theoretische Grundlagen und Aspekte aus dem komplexen Themenfeld der Diagnose behandelt.

Im Sprachgebrauch des pädagogischen Umfelds wird das Wort Diagnose vielfach verwendet. Daher folgt zunächst eine Herleitung und Diskussion des Begriffs Diagnose, an die sich eine Erörterung der Funktionen, Modelle und Konzepte der Pädagogischen Diagnostik anschließt. Ebenso werden die anerkannten diagnostischen Methoden Beobachtung, Befragung und Test erläutert, um die vorliegende Untersuchung von Aufgaben einer vergleichenden Leistungserhebung und deren Bearbeitungen einzuordnen.

Diagnose besitzt im Mathematikunterricht der Grundschule einen besonderen Stellenwert, was auf die vielfältigen Entwicklungen der Kinder im Grundschulalter zurückzuführen ist. Um die Lernprozesse der Grundschüler angemessen fördern zu können, ist eine diagnostische Kompetenz der Lehrer notwendig.

2.1 Grundsätze und Ziel der Pädagogischen Diagnostik

Der Begriff Diagnose hat seinen Ursprung in dem griechischen Wort 'diagnosis', das in seiner Übersetzung so viel wie Unterscheidung bedeutet (vgl. SCHAUB/ZENKE 2007, S. 98). Der aus der Medizin und Psychologie entnommene Begriff beschreibt „die Summe der Erkenntnisbemühungen, die im Dienste pädagogischer Entscheidungen stehen“ (ebd.). In der Pädagogik wird die Bezeichnung Diagnose für alle aus Beobachtung und Feststellung resultierenden Aussagen über eine Person verwendet (siehe Abschnitt 2.3). Dabei werden sowohl die Ursachen des beobachteten Zustandes als auch die prognostizierbaren Erwartungen einbezogen (vgl. SCHAUB/ZENKE 2007, S. 98). Der zugehörige Begriff der Diagnostik meint „die Lehre von der sachgemäßen Durchführung der Diagnose; auch die Ausübung der Diagnose“ (LUKESCH 1998, S. 31). Dazu gehört die Entwicklung und Anwendung geeigneter Methoden, um eine Diagnose sachgemäß auf Grundlage pädagogischer Fragestellungen durchzuführen (vgl. SCHAUB/ZENKE 2007, S. 98). Diagnostik umfasst demnach die Umstände und die Methoden, mit denen eine Diagnose durchgeführt werden kann. Die Diagnose selbst beschreibt die zugehörigen Tätigkeiten inklusive des Prozesses der Beobachtung und Feststellung.

In den verschiedenen Wissenschaftsdisziplinen hat sich ein spezifisches Verständnis von Diagnose entwickelt. Die Vielfalt der Ausprägungen und die damit einhergehenden Begriffsvariationen sind im Rahmen dieser Arbeit nicht darstellbar³. Die vorliegende Arbeit

³ Hierzu wird auf MOSER OPITZ verwiesen, die im März 2010 in ihrem Hauptvortrag „Diagnose und Förderung: Aufgaben für die Mathematikdidaktik und die mathematikdidaktische Forschung“ auf der Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik diese Vielfalt ausführlich erörtert hat (vgl. MOSER OPITZ, 09.03.2010).

orientiert sich an den Grundsätzen der Pädagogischen Diagnostik, die nachfolgend in Abgrenzung zu den Grundsätzen der Psychologischen Diagnostik dargestellt werden.

Die Psychologische Diagnostik als Teilgebiet der Psychologie betont das Messen und die hierfür eingesetzten Instrumente. Im Vordergrund stehen die Transparenz des Messvorgangs und eine „kontrollierte Praxis“ (JÄGER/PETERMANN 1999, S. 12). Standardisierte Methoden der Diagnose sowie deren systematischer Einsatz führen zu einer Beschreibung inter- sowie intravidueller Unterschiede von Personen, Institutionen, Situationen oder Gegenständen (vgl. LUKESCH 1998, S. 31). Zu den Teildisziplinen der Psychologischen Diagnostik gehören beispielsweise die Klinische Diagnostik oder die Persönlichkeitsdiagnostik.⁴

Dagegen sind die Pädagogische Diagnostik und ihre Handlungsfelder ausschließlich im Umfeld von Lernen, Schule und Unterricht angesiedelt, der umfassende Prozess des Lehrens und Lernens wird betont. Im Vordergrund steht das Interesse an den Fähigkeiten, Kompetenzen, Einstellungen und Motivationen eines Menschen im Rahmen seines Lehr-Lern-Prozesses. INGENKAMP (2008, S. 14) beschreibt den Leitgedanken der Pädagogischen Diagnostik als die Identifikation angemessener Entscheidungen für den Lernenden. Er formuliert die folgende Definition, welche aufgrund ihrer Aussagekraft und Ausführlichkeit an dieser Stelle vollständig wiedergegeben wird:

„Pädagogische Diagnostik umfasst alle diagnostischen Tätigkeiten, durch die bei einzelnen Lernenden und den in einer Gruppe Lernenden Voraussetzungen und Bedingungen planmäßiger Lehr- und Lernprozesse ermittelt, Lernprozesse analysiert und Lernergebnisse festgestellt werden, um individuelles Lernen zu optimieren. Zur Pädagogischen Diagnostik gehören ferner die diagnostischen Tätigkeiten, die die Zuweisung zu Lerngruppen oder zu individuellen Förderungsprogrammen ermöglichen sowie die mehr gesellschaftlich verankerten Aufgaben der Steuerung des Bildungsnachwuchses oder der Erteilung von Qualifikationen zum Ziel haben.“
(INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 13)

In den pädagogischen Fachkreisen herrscht Einigkeit über den Stellenwert der Diagnose für die Steuerung von Lehr-Lern-Prozessen (vgl. HORSTKEMPER 2006, S. 4). Als grundlegendes Ziel der Pädagogischen Diagnostik führt INGENKAMP (2008, S. 13) eine Optimierung des Lernens und der Lernerfolge an. Diese Zielsetzung differenziert sich jedoch in zwei unterschiedliche Funktionen, die im folgenden Abschnitt erläutert werden.

⁴ JÄGER und PETERMANN (1999) definieren die Psychologische Diagnostik als „das systematische Sammeln und Aufbereiten von Informationen mit dem Ziel, Entscheidungen und daraus resultierende Handlungen zu begründen, zu kontrollieren und zu optimieren“ (JÄGER/PETERMANN 1999, S.11). Die Diagnose basiert auf einem Informationsverarbeitungsprozess, in dem Regeln, Anleitungen und Algorithmen die Methoden kennzeichnen und streng standardisiert sind. Instrumente und Verfahren sind beim Prozess des psychologischen Diagnostizierens deutlich eingeschränkt. Diese Verfahren helfen zielgerichtet Informationen über psychische Eigenschaften des beobachteten Menschen zu gewinnen.

2.2 Funktionen und Modelle der Pädagogischen Diagnostik

2.2.1 Die Erteilung von Qualifikationen und die Verbesserung des individuellen Lernens

Der beschriebene Grundgedanke der Pädagogischen Diagnostik, die Optimierung des Lernens und der Lernerfolge, manifestiert sich in zwei unterschiedlichen Funktionen: Zum einen handelt es sich um eine Kontroll- und Auslesefunktion und zum anderen um eine Entwicklungsfunktion (vgl. PREDIGER/SELTER 2008, S. 113). Beide sind in der zuvor angeführten Definition INGENKAMPS verankert und die gewählten Begrifflichkeiten deuten bereits die existierende Spannung zwischen diesen beiden Funktionen an.

Die *Kontroll- und Auslesefunktion* umfasst neben einer Erteilung von Berechtigungen und Qualifikationen auch die Zuweisung der Schüler in spezielle Lerngruppen oder Förderungsprogramme. Eine Diagnose zur Erteilung von Qualifikationen erfolgt meist anhand von Leistungsbeurteilungen und -bewertungen. Die hierzu eingesetzten Maßnahmen und Instrumente basieren auf curricular definierten Lernerfolgen, die in der Regel mit Zensuren bewertet werden. Sie führen zu Entscheidungen über die Schullaufbahn eines Kindes, die sich in einer Selektion oder auch in einer Zuweisung außerunterrichtlicher Maßnahmen niederschlagen können (vgl. PARADIES ET AL. 2008, S. 26). INGENKAMP (2008, S. 135) bezeichnet dies als die gesellschaftlich orientierte Funktion der Pädagogischen Diagnostik zur Optimierung der Lernerfolge für die Gesellschaft.

Hinsichtlich der *Entwicklungsfunktion* dient Diagnose dem Verständnis und der Einschätzung von Schülerleistungen, um angemessene Entscheidungen für den individuellen Lernprozess des Kindes treffen zu können. Diese didaktisch orientierte Funktion der Pädagogischen Diagnostik dient der Verbesserung der individuellen Lernvorgänge. Diagnose darf dann nicht ausschließlich aus einer Feststellung des aktuellen Leistungsvermögens bestehen. Vielmehr ist es die Aufgabe der Pädagogischen Diagnostik, die zugrundeliegenden Lernprozesse zu verstehen und die beim Lerner vorhandenen Ressourcen zu erkennen (vgl. PARADIES ET AL. 2008, S. 26; INGENKAMP 2008, S. 20f, WINTER 2006, S. 24). GRAF und MOSER OPITZ (2007, S. 7) fordern eine bestmögliche Förderung der individuellen Lernprozesse und somit die Entwicklungsfunktion als Kern der diagnostischen Tätigkeiten.

Den beiden beschriebenen Funktionen der Pädagogischen Diagnostik liegen differierende Modelle der Leistungsbeurteilung zugrunde. Diese führen unterschiedliche Bedingungen, Vorgehensweisen und Zielsetzungen des Diagnoseprozesses mit sich. Für das in Abschnitt 4.3 aufzuzeigende Spannungsfeld zwischen vergleichenden Leistungserhebungen und deren diagnostischer Nutzung sind die nachfolgend erläuterten Unterschiede bedeutsam.

2.2.2 Modelle und Konzepte der Pädagogischen Diagnostik

In den bisherigen Ausführungen wurde eine grundlegende Standortbestimmung der Pädagogischen Diagnostik vorgenommen. Ebenso wurde die primäre Zielsetzung der Optimierung des Lernens und der Lernergebnisse dargelegt. Die Unterschiede zwischen einer Kontroll- und Auslesefunktion einerseits sowie einer Entwicklungsfunktion andererseits bezeichnet INGENKAMP (2008, S. 28ff) als Modelldiskussion. Es stehen sich hier zwei idealtypische Pole gegenüber, die jeweils unterschiedliche diagnostische Vorgehensweisen erfordern. Zurückzuführen ist diese Differenzierung auf die in der Psychologie unterschiedenen Modelle der Eigenschafts- und der Verhaltensdiagnostik. Das Konzept der *Eigenschaftsdiagnostik* geht davon aus, dass das Verhalten des Menschen aufgrund differierender und unterschiedlich stark ausgeprägter Eigenschaften bestimmt wird. Diese Dispositionen sollen diagnostiziert und Verhalten somit prognostizierbar werden. Das Verhalten kann innerhalb dieses Modells also erklärt, jedoch nur schwer beeinflusst werden. Im Gegensatz dazu untersucht die *Verhaltensdiagnostik* die Auslöser für das beobachtete Verhalten. Im Mittelpunkt stehen die konkrete Situation und die Beeinflussung der Verhaltensweise (vgl. ebd.).

Weiterführend werden die Formen Status- und Prozessdiagnostik unterschieden. Die *Statusdiagnostik* rückt eine Überprüfung des Lernerfolgs nach längeren Lerneinheiten oder eine Feststellung des vorhandenen Wissens in den Vordergrund. Sie wird als Instrument der summativen Evaluation gefasst (siehe Abschnitt 3.1). Vorausgesetzt wird eine hohe Stabilität des diagnostizierten Merkmals, das demnach auf andere Zeitpunkte und Bedingungen verallgemeinerbar ist. In Anlehnung an HORSTKEMPER (2006, S. 5) hat die Statusdiagnostik meist die Funktion der Kontrolle und Auslese. Angewendet wird sie unter anderem bei Laufbahneempfehlungen oder Überweisungen in andere Schulformen, um den Anspruch einer bestmöglichen Lernsituation für jedes Kind zu erfüllen. In diesem Zusammenhang wird häufig der Begriff der *Selektions- und Auslesediagnostik* verwendet. Angestrebt ist eine Erfassung der Wissenslücken des Kindes, sodass die Statusdiagnostik als weitestgehend defizitorientiert bezeichnet werden kann (vgl. SIEMES 2010, S. 15). Die *Prozessdiagnostik* hingegen konzentriert sich auf den Lernverlauf des Kindes, womit Parallelen zu dem Prinzip der in Abschnitt 3.1 vorgestellten formativen Evaluation erkennbar sind. Der Anspruch der Prozessdiagnostik ist in einer Optimierung der Entwicklungsmöglichkeiten des einzelnen Kindes zu sehen, sodass die Förderung des Lernprozesses und die entsprechende Ausrichtung des Unterrichts im Mittelpunkt der Bemühungen stehen. Die Diagnose identifiziert Potentiale von Veränderungen, sodass Prognosen gestellt werden können. Umschrieben wird dieses Konzept in der Fachliteratur mit der Bezeichnung *Modifikations- und Förderdiagnostik*. Im Gegensatz zur Statusdiagnostik ist die Prozessdiagnostik als kompetenzorientiert zu bezeichnen. Im Fokus der diagnostischen Bemühungen steht hier das Aufdecken der Vorkenntnisse und Kompetenzen des Kindes, um die weitere Entwicklung des Unterrichts darauf ausrichten zu können (vgl. SIEMES 2010, S. 16f). SCHERER und MOSER OPITZ (2010, S. 24) empfehlen für eine prozessorientierte Diagnose idealerweise einen Einsatz der Methoden Beobachtung und Interview (siehe Abschnitt 2.3). Ebenso weisen die Mathematikdidaktikerinnen explizit auf die Möglichkeit einer Prozess-

diagnostik durch die Analyse von Arbeitsprodukten, zu denen auch Aufgabenbearbeitungen gehören, hin. Von Interesse sind neben der Beurteilung des Ergebnisses einer Aufgabe insbesondere Fragen nach dem Lösungsprozess. INGENKAMP (2008, S. 32) unterstreicht dieses Interesse bei nicht korrekt gelösten Aufgaben. Erst mit dem Wissen über mögliche Gründe für eine fehlerhafte Bearbeitung kann eine gezielte Förderung initiiert werden.

Die Unterscheidung zwischen der Statusdiagnostik und der Prozessdiagnostik mit Blick auf die Ergebnisse oder auf die Bearbeitungen, wird von SACHER (2009) hinsichtlich der Kompetenz- und Defizitorientierung konkretisiert:

„Unter dem Bewältigungsaspekt achten wir darauf, welche Aufgaben und Schritte der Schüler lösen konnte, und wir schließen daraus auf seine Kompetenzen. Unter dem Ausfallaspekt richten wir unser Augenmerk auf die Defizite, die in seiner Leistung offenbar wurden, und schließen daraus auf seine Lücken.“
(SACHER 2009, S. 80)

Prinzipiell sollten diagnostische Maßnahmen zu Entscheidungen führen, welche sich einer der Klassen Selektion oder Förderung, also der Kontroll- und Auslesefunktion oder der Entwicklungsfunktion, zuweisen lassen. Dass diese Unterscheidung nicht immer trennscharf ist, macht HORSTKEMPER (2006, S. 5) an einem Beispiel deutlich: Wird bei einem Kind in der Grundschule gravierender Förderbedarf festgestellt, kann dies im Sinne der Förderdiagnostik in der Ausarbeitung eines konkreten Förderplans und weiteren Hilfestellung im Rahmen des bisherigen Unterrichts geschehen. Ebenso kann eine Diagnose auch zu einem Wechsel an eine Förderschule führen, was eine Selektion hinsichtlich der Zuweisung einer bestimmten Schulform ist. Aber auch diese Entscheidung wird aufgrund einer Förderabsicht getroffen, um dem Kind eine angemessene Lernumgebung anzubieten. Es wird festgehalten, dass jeder Selektion in der Regel auch eine Absicht des Förderns zugrunde liegt. Die Diagnose meint dann eine Identifikation der optimalen Lernumgebung unter Berücksichtigung der vorhandenen Alternativen (vgl. ebd.). Die Strategien und Modelle der Pädagogischen Diagnostik unterscheiden sich in Abhängigkeit der intendierten Funktion trotz gemeinsamer Zielsetzung maßgeblich. Nicht selten wird über eine mögliche Annäherung beider Positionen diskutiert. Die Kompatibilität der beiden Funktionen Selektion und Förderung wird häufig bestritten (vgl. FRÖHLICH ET AL. 2006, S. 6). Diese Polarisierung wird in der nachfolgenden Grafik idealisiert dargestellt.

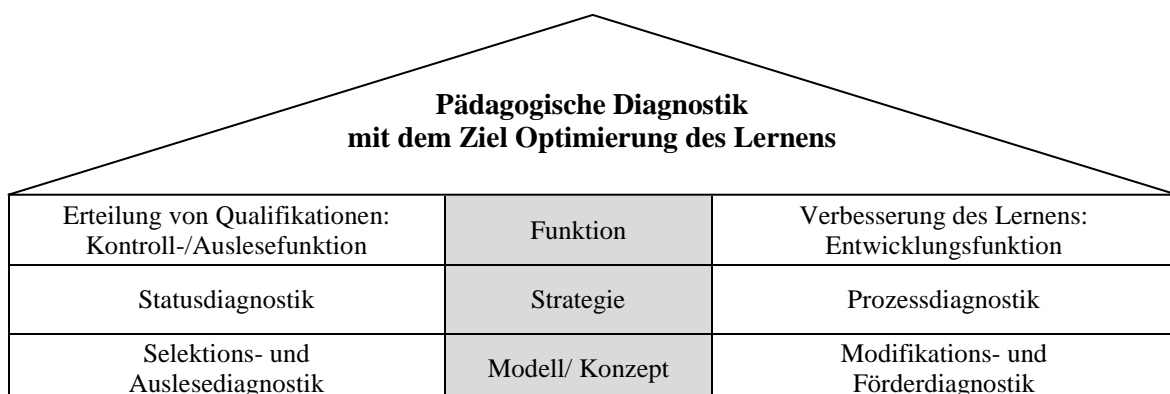


Abbildung 1: Haus der Pädagogischen Diagnostik zur Visualisierung des grundlegenden Ziels sowie der Funktionen, Strategien und Modelle.

2.3 Methoden der Pädagogischen Diagnostik

Die Auswahl der diagnostischen Methode richtet sich deutlich nach der diagnostischen Funktion. Je nach Intention sind andere Diagnosekonzepte und -instrumente einzusetzen (vgl. SCHERER/MOSER OPITZ 2010, S. 31f). INGENKAMP (2008, S. 51) fasst die Methoden und Instrumente der Diagnostik als Möglichkeiten des Messens zusammen. Dabei bemüht sich die Pädagogische Diagnostik stets um die Güte der Messergebnisse. Prinzipiell sollten sich die eingesetzten Methoden und Instrumente an den Gütekriterien Objektivität, Reliabilität, Validität und Normierung orientieren (siehe Abschnitt 3.2.2). SCHERER und MOSER OPITZ (2010, S. 38) betonen, dass bei der Einhaltung dieser Gütekriterien aus diagnostischer Perspektive nicht das testtheoretische Verständnis und die statistischen Kennzahlen im Vordergrund stehen sollten. Vielmehr geht es darum, den Diagnoseprozess transparent, intersubjektiv nachvollziehbar und theoriegeleitet zu planen, durchzuführen und zu evaluieren.

Zu den anerkannten Methoden der Pädagogischen Diagnostik gehören die Verhaltensbeobachtung, Befragungsmethoden sowie Testmethoden (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 74ff). Das vorliegende Forschungsvorhaben untersucht schriftliche Bearbeitungen einer vergleichenden Leistungserhebung, womit die Aufmerksamkeit konkret auf die Testmethoden gerichtet wird (siehe Abschnitt 3.2). Die ergänzende Interviewstudie ist hingegen den Befragungsmethoden zuzuordnen.

Die *Beobachtung* gilt als grundlegende Methode der Pädagogischen Diagnostik (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 94). Sie ermöglicht eine umfassende Informationssammlung und ist zudem weitestgehend unabhängig einsetzbar. Es wird zwischen naiver und systematischer Beobachtung unterschieden (vgl. PARADIES ET AL. 2008, S. 110). Während die naive oder auch teilnehmende Beobachtung als unreflektiert und subjektiv beeinflusst gilt, erfolgt eine systematische Beobachtung innerhalb eines theoretisch gesetzten Rahmens. Hierzu gehört das Bewusstsein über den konkreten Diagnosezweck, eine systematische Planung und Durchführung der Beobachtung sowie eine kontinuierliche Aufzeichnung der Beobachtungsergebnisse (vgl. ebd.). Die Notation erfolgt anhand von Beobachtungsbögen mit Index- und Kategoriensystemen oder Schätzskaleten (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 82ff).

Die *Befragungsmethoden* lassen sich in mündliche und schriftliche Befragungen differenzieren. Das Interview gilt als Form der mündlichen Befragung und kann als Instrument der Pädagogischen Diagnostik anhand verschiedener Merkmale kategorisiert werden (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 96). Im Mittelpunkt des Interviews steht die verbale Kommunikation zwischen Interviewer und Interviewtem. Diese kann sowohl durch die beiden Beteiligten als auch die Interviewsituation beeinflusst werden. Die Strukturiertheit der Interviewsituation ist zwischen den Polen wenig strukturiert und stark strukturiert einzuordnen. Ebenso variieren Anzahl, Formulierung sowie Reihenfolge der verwendeten Fragen. Während das unstrukturierte Interview lediglich einen thematischen Rahmen für das Gespräch vorgibt, sind bei einem strukturierten oder auch standardisierten Interview

Wortlaut und Abfolge der Fragen explizit vorgegeben (vgl. BORTZ/DÖRING 2006, S. 238f). Weiterhin wird bei einer mündlichen Befragung zwischen offenen und geschlossenen Antworttechniken unterschieden. Offen gestellte Fragen ermöglichen eine ausführliche und freie Antwort des Interviewten. Die Antworten sind dann vom Interviewer vollständig zu protokollieren. Hingegen lässt eine geschlossen gestellte Frage wenig Spielraum für die Beantwortung. Meist werden hier Antwortkategorien vorgegeben, was eine spätere Vergleichbarkeit der Informationen garantiert (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 97ff). Grundsätzlich sind mündliche Befragungen sowohl mit Einzelpersonen als auch mit Gruppen durchführbar. Das Einzelinterview ist für persönliche Themen vorzuziehen, die eine freie Interviewsituation ohne Beeinflussung weiterer Beteiligter voraussetzen. Findet die Befragung mit Hilfe eines strukturierten Fragenkatalogs statt, ist das Gruppeninterview angemessen (vgl. BORTZ/DÖRING 2006, S. 242). Die Befragung in Form von Fragebögen unterscheidet sich von den Interviewvarianten durch die selbstständige Beantwortung durch den Befragten (vgl. BORTZ/DÖRING 2006, S. 252). Als wissenschaftliches Erhebungsinstrument der Pädagogischen Diagnostik ist der Fragebogen das Ergebnis eines sorgfältigen und aufwändigen Konstruktionsprozesses, der in der Regel ausschließlich durch Experten zu leisten ist (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 104).

Auch der *Test* gilt als anerkannte Methode der Diagnostik. Das Begriffsverständnis ist jedoch im allgemeinen und wissenschaftlichen Sprachgebrauch zu unterscheiden. Im wissenschaftlichen Sprachgebrauch ist das Verständnis eines Tests meist von der Psychologie geprägt (siehe Abschnitt 3.2). LIENERT und RAATZ (1994) erklären „nicht jede beliebige zu diagnostischen Zwecken angestellte Untersuchung kann als Test gelten, sondern nur eine solche, die erstens wissenschaftlich begründet ist; zweitens routinemäßig, also unter Standardbedingungen [...] durchführbar ist; drittens eine relative Positionsbestimmung des untersuchten Individuums [...] ermöglicht; und viertens bestimmte [...] abgrenzbare Eigenschaften, Verhaltensdispositionen, Fähigkeiten, Fertigkeiten oder Kenntnisse prüft“ (LIENERT/RAATZ 1994, S. 1). Auch PARADIES ET AL. (2008) betonen die Bedeutung des Tests als diagnostisches Instrument, das als „ein wissenschaftliches Routineverfahren zur Untersuchung eines oder mehrerer empirisch abgrenzbarer Merkmale“ (PARADIES ET AL 2008, S. 89) dient. Unter dieser Prämisse liefert ein Test quantitative Aussagen über den relativen Grad der individuellen Merkmalsausprägung. Von besonderer Bedeutung sind die im Test gestellten Aufgaben, da deren Bearbeitungen die Leistung der Probanden abbilden und eine Einschätzung der Merkmalsausprägung ermöglichen (vgl. ebd.). Um den Ansprüchen und Zielsetzungen der Pädagogischen Diagnostik Rechnung zu tragen, stellt INGENKAMP (2008) eine modifizierte Definition des Tests für die Pädagogische Diagnostik vor:

„Tests sind Verfahren der Pädagogischen Diagnostik, mit deren Hilfe eine Verhaltensstichprobe, die Voraussetzungen für oder Ergebnisse von Lernprozessen repräsentieren soll, möglichst vergleichbar, objektiv, zuverlässig und gültig gemessen und durch Lehrer oder Erzieher ausgewertet, interpretiert und für ihr pädagogisches Handeln nutzbar gemacht werden kann.“

(INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 105)

Demnach muss ein Test nicht grundsätzlich dem Verständnis eines wissenschaftlichen Instrumentes entsprechen und die psychometrischen Gütekriterien erfüllen. Allgemein betrachtet kann jede Art von Prüfverfahren als Test bezeichnet werden. Darauf wird in den nachfolgenden Kapiteln der theoretischen Rahmung weiterführend eingegangen.

2.4 Stellenwert der Diagnose im Mathematikunterricht der Grundschule

„Diagnostik ist ein zentraler Baustein des Unterrichts. Sie hilft, Schülerprodukte und Lernprozesse besser zu verstehen und passende Schlussfolgerungen für eine systematische individuelle Förderung abzuleiten.“

(JORDAN/VOM HOFE 2008, S. 4)

JORDAN und VOM HOFE verdeutlichen mit ihrer Aussage die Relevanz der Diagnose für einen schüler- und förderorientierten Unterricht und betonen somit die in Abschnitt 2.2.1 dargestellte Entwicklungsfunktion. Gerade in der Grundschule gilt die Wahrnehmung der Lernprozesse, ihre Deutung und Begleitung als wichtige Herausforderung (vgl. GRAF/MOSER OPITZ 2007, S. 5ff). Als erste Schulstufe prägt die Grundschule das Kind in einem Alter höchster Lernfähigkeit nachhaltig für seinen weiteren Bildungs- und Lebensweg (vgl. BILDUNGSSERVER HESSEN 2010). Ebenso ist die Grundschulzeit, welche sich über das Alter von circa sechs bis elf Jahren erstreckt, eine bedeutende Zeit hinsichtlich verschiedener Entwicklungsbereiche. Neben der Weiterentwicklung des Gehirns und dem Wachstum des Körpers ist hier die kognitive Entwicklung des Grundschulkindes zu nennen, zu der auch die Informationsverarbeitung, das Problemlösen sowie das Strategie- und Inhaltswissen gehören (vgl. SIEGLER ET AL. 2008, S. 115ff). In diesem Zusammenhang wird auf die vier Entwicklungsstufen nach PIAGET verwiesen⁵. Trotz Kritik und Korrekturen ist sein Entwicklungsmodell als allgemeine Struktur der kognitiven Entwicklung in Fachkreisen noch immer anerkannt (vgl. SIEGLER ET AL. 2008, S. 197ff).

Lesen, Schreiben und Mathematik gehören zu den schulischen Fähigkeiten, die ein Kind sich in der Grundschule aneignet (vgl. SIEGLER ET AL. 2008, S. 443ff). Im Kontext der vergleichenden Leistungserhebungen ist die ausschließlich schriftliche Form der Aufgaben bedeutend. Neben den mathematischen Kompetenzen besitzt somit auch das Lesen und das Schreiben Einfluss auf die Aufgabenbearbeitung. FRITZ (2003) betont den Zusammenhang zwischen Mathematik und Sprache, der bei der Entwicklung des in Abschnitt 6.2 vorgestellten Modells zur Aufgabenanalyse einbezogen wird:

„Grundsätzlich ist die Vermittlung arithmetischer Kompetenzen und die Bearbeitung arithmetischer Aufgaben an Sprache gebunden. Schließlich werden Aufgabenstellungen sprachlich präsentiert, sie müssen sprachlich entschlüsselt und die Lösung anschließend wieder in Sprache übersetzt werden.“

(FRITZ 2003, S. 293)

⁵ PIAGET beschreibt die sensumotorische Stufe (0 bis 2 Jahre), die präoperationale Stufe (2 bis 7 Jahre), die konkret-operatorische Stufe (7 bis 11 Jahre) und die formal-operatorische Stufe (11 bis 15 Jahre). Jede Phase enthält weitere Stufen, die Altersangaben sind nur als Anhaltspunkte zu verstehen (vgl. SIEGLER ET AL. 2008, S. 185ff). Umfangreiche Ausführungen hierzu sind in SIEGLER ET AL. (2008) nachzulesen.

Im Kontext des Mathematikunterrichts bedeutet das, „auf der Basis von beobachtbarem Verhalten der Schülerinnen und Schüler in Form von Worten, Symbolen, Zeichnungen oder auch von mündlichen Äußerungen“ (BÜCHTER/LEUDERS 2005a, S. 168) Diagnosen anzustellen, um das Können der Schüler einzuschätzen und den weiteren Lernprozess zu planen.

Der Pädagoge JÜRGENS (2006, S. 12) fasst den primären Auftrag der Grundschule mit der Ausbildung von Leistungsbereitschaft und Leistungsfähigkeit zusammen. Allerdings sind diese Komponenten nicht nur – beispielweise anhand von Leistungserhebungen – zu fordern und vorauszusetzen. Eine sensible Förderung mit umfassendem Blick auf die Bedingungen und Voraussetzungen des Lernens ist stets nötig. HANKE (2010) hebt den spezifischen Anspruch des Förderns in der Grundschule hervor und verweist auf die ausgeprägte Heterogenität der Kinder. Diese Unterschiedlichkeit und die Besonderheiten der Entwicklungen dieser Altersstufe bedingen eine Gestaltung von Lernumgebungen, „die für Kinder auf ganz unterschiedlichen Fähigkeitsniveaus anschlussfähig sind“ (HANKE 2010, S. 2). Grundlage für eine derartige Gestaltung des Unterrichts ist wiederum die Ermittlung der individuellen Lernvoraussetzungen, die verstehend nachzuvollziehen sind (vgl. ebd.).

Auch aufgrund der aktuell vielfältig durchgeführten schriftlichen Prüfungen und Tests rückt die Diagnose mathematischer Kompetenzen in den Mittelpunkt der Diskussion:

„Lehrer, Erzieher, Sonderpädagogen, Schulpsychologen und Dyskakulie-Therapeuten zeigen vermehrtes Interesse an den Kompetenzgrundlagen mathematischer Leistungen und ihrer Diagnose. Schulverantwortliche und Bildungsforscher sind darüber hinaus bemüht, Standards und Kompetenzstufen zu beschreiben, auf deren Grundlage die Wirkung von Schule und Unterricht auf die Entwicklung mathematischer Kompetenzen und Leistungen von Schule bewertbar werden.“

(HASSELHORN ET AL. 2005, S. 1)

Um eine produktive diagnostische Nutzung von vergleichenden Leistungserhebungen für den Unterrichtsalltag zu ermöglichen, ist eine Klärung der unterschiedlichen Funktionen notwendig. In diesem Kontext führt HORSTKEMPER (2006, S. 6) die notwendige Diskussion um die Anerkennung einer Standardisierung durch Tests oder zentrale Vergleichsarbeiten als zuverlässiges Hilfsmittel für diagnostische Entscheidungen an. Für die Mathematikdidaktik hebt SCHERER (2004, S. 279) hervor, dass es bei der Methodenfrage auf eine produktive Nutzung und nicht auf einen gegenseitigen Ausschluss der Optionen ankommt.

HANKE (2010, S.1) merkt an, dass die Forschungsergebnisse der letzten Jahre einen Entwicklungsbedarf der Grundschule belegen, der vor allem in einer verbesserten Förderung von Kindern mit ihren unterschiedlichen Lernvoraussetzungen, Lernbedingungen und Lernmöglichkeiten zu sehen ist. Die Bildungsadministrationen reagieren, indem entsprechende rechtliche Rahmenbedingungen geschaffen werden. Als Beispiel für dieses neue Bewusstsein wird die hessische Verordnung über die Förderung von Schülerinnen und Schülern mit besonderen Schwierigkeiten beim Lesen, Rechtschreiben oder Rechnen (VOLRR) angeführt (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2006). Als Grundlage werden

hier Diagnose und Beratung für eine frühzeitige und individuelle Förderung von Kindern in der Grundschule festgeschrieben. Weiterhin ist die Feststellung der besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen als Aufgabe der Schule definiert, sodass die Diagnose nicht an externe Institutionen übertragen werden kann. Jede Schule hat ein schulbezogenes Förderkonzept zu entwickeln, das die Erstellung eines individuellen Förderplans für Kinder mit besonderen Schwierigkeiten beim Rechnen sowie einer intensiven Einbeziehung der Eltern beinhaltet (vgl. ebd.). Auch hier wird die in Abschnitt 2.2.1 beschriebene Entwicklungsfunktion der Diagnose mit Blick auf den individuellen Lernprozess des Kindes betont.

2.5 Diagnostische Kompetenz der Lehrer

Die Erfassung, Einschätzung und Förderung mathematischer Kompetenzen erfordert von den Lehrern eine Auseinandersetzung mit diagnostischen Fragestellungen (vgl. SCHERRER/MOSER OPITZ 2010, S. 31). Die diagnostische Kompetenz gilt neben dem sachbezogenen und fachdidaktischen Wissen, den didaktisch-methodischen Fähigkeiten sowie der Klassenführung als eine der vier grundlegenden Lehrerkompetenzen, die für eine erfolgreiche und lernwirksame Unterrichtsgestaltung wichtig sind (vgl. SCHRADER ET AL. 2006, S. 266). Sie umfasst nach HELMKE (2004, S. 9) vier Komponenten. *Diagnosegenauigkeit* beschreibt die Fähigkeit, Schüler und ihnen gestellte Aufgaben zutreffend einzuschätzen. Die Komponente *methodisches Wissen* ist konkret auf das Themenfeld Diagnose bezogen und meint vorrangig ein Wissen über existierende diagnostische Methoden. Inkludiert wird hier die Kenntnis über spezifische Besonderheiten, Einsatzbereiche, aber auch bekannte Urteilsfehler oder -tendenzen. Dagegen meint das *lehrstoffbezogene Wissen* ein Bewusstsein über die Lehrinhalte und die zugehörigen Aufgaben. Hierzu gehört ebenso die Kenntnis über verschiedene Lösungswege, alterstypische Bearbeitungen oder auch mögliche Fehler. Des Weiteren sollte ein Lehrer *spezifische Kenntnisse über die Schüler*, Schülergruppen und Klassen besitzen, damit ihm Stärken und Schwächen bekannt sind (vgl. ebd.).

Die diagnostischen Fertigkeiten des Lehrers sind laut HANKE (2010) konkret „auf Beobachtungsfähigkeiten, auf die Beherrschung von Diagnoseinstrumenten, auf einen situationsgerechten, angemessenen und reflektierten Einsatz von Diagnoseverfahren“ (HANKE 2010, S. 17) zu beziehen. Eine Ausbildung dieser Fertigkeiten setzt jedoch Wissen in allen zuvor beschriebenen Bereichen voraus. Erst dann wird eine Entwicklung der angeführten diagnostischen Fertigkeiten möglich. Auch KRETSCHMANN (2006, S. 31f) betont, dass die diagnostische Kompetenz sich nicht auf die Beherrschung und Anwendung von Diagnoseinstrumenten beschränken kann. Im Konsens mit HELMKE (2004) beschreibt er ein notwendiges Metawissen, um sowohl eine kompetente Diagnose als auch eine kompetente Reaktion auf die Diagnoseergebnisse zu ermöglichen. Erst das Wissen über fachspezifische Entwicklungsverläufe und ihre Abweichungen sowie Förder- und Interventionskonzepte führt in Kombination mit den für eine Realisierung nötigen Handlungsspielräumen und Organisationsstrukturen zu produktiven Diagnosekonzepten (vgl. ebd.).

PARADIES ET AL. (2008) fassen Diagnosekompetenz als „die Fähigkeit von Lehrerinnen und Lehrern, nach festgelegten Kriterien angemessene Urteile über das Lern- und Leistungsverhalten ihrer Schüler abzugeben“ (PARADIES ET AL. 2008, S. 55) zusammen. So

bezeichnet SJUTS (2007, S. 33) wie zuvor bereits HELMKE die Diagnose als eine Kompetenz des professionellen Wissens und Könnens von Lehrern und betont deren Stellenwert. GRAF und MOSER OPITZ (2007, S. 5) erkennen, dass auch im Zuge der internationalen Schulleistungsstudien die diagnostische Kompetenz der Grundschullehrer immer vehementer gefordert wird und heben diese als eine Grundlage für eine angemessene Förderung der Kinder hervor. Die Anforderung an das diagnostische Handeln im Mathematikunterricht beschreiben BÜCHTER und LEUDERS (2005a) wie folgt:

„Zu den wichtigsten und zugleich schwierigsten Bereichen professionellen Lehrerhandelns gehört die Abstimmung des Unterrichts und der individuellen Fördermaßnahmen auf die Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler.“

(BÜCHTER/LEUDERS 2005a, S. 167)

Im Kontext einer entwicklungsdiagnostischen Funktion und der Verbesserung des individuellen Lernprozesses ist zunächst unbedeutend, was zuvor gelehrt wurde. Relevanter ist das, was die Schüler tatsächlich gelernt haben und anhand der Aufgabenbearbeitungen zeigen (vgl. ebd.).

Über den hohen Stellenwert der Diagnostik im Rahmen der professionellen Kompetenz von Lehrern herrscht in den Fachkreisen der Pädagogik und den Fachdidaktiken Einigkeit. Auch wenn deutliche Bezüge zu den Grundlagen der Pädagogischen Diagnostik offensichtlich sind, ist das Lernen dennoch stets fach-, sach- und inhaltsgebunden. So ist die diagnostische Kompetenz mit didaktischen Förderungs- und Strukturierungsmaßnahmen zu kombinieren, um eine hinreichende Bedingung zur Optimierung der individuellen Lernprozesse zu erfüllen (vgl. KLIEMANN 2010, S. 11).

2.6 Für die weitere Arbeit

Im Verständnis der Pädagogischen Diagnostik und der damit einhergehenden Adaption auf das Umfeld Schule wird das Ziel einer Diagnose als Optimierung des Lernens und der Lernergebnisse beschrieben. Diese übergeordnete Intention äußert sich in zwei unterschiedlichen Funktionen. Hinsichtlich der Kontroll- und Auslesefunktion dient Diagnose der Erteilung von Berechtigungen und Qualifikationen. Das manifestiert sich in Entscheidungen über die Schullaufbahn oder der Zuweisung außerunterrichtlicher Maßnahmen. Die Entwicklungsfunktion hingegen bezweckt eine Verbesserung des individuellen Lernprozesses durch das Verstehen und Erkennen der vorhandenen Potentiale eines Schülers.

Speziell für die Grundschule ist die diagnostische Entwicklungsfunktion bedeutsam. Da die Kinder in den ersten vier Schuljahren diverse physische und kognitive Entwicklungsprozesse durchlaufen, gehört das Wahrnehmen und Fördern der individuellen Lernprozesse zu den grundlegenden Anforderungen der Primarstufe. Für das vorliegende Forschungsvorhaben stellt sich die Frage, inwiefern eine vergleichende Leistungserhebung den Anspruch einer entwicklungsdiagnostischen Funktion erfüllen kann.

Die Forderung nach einem schüler- und förderorientierten Unterricht in der Grundschule verlangt zudem eine grundlegende diagnostische Kompetenz der Lehrer. Hierzu

gehören neben der Kenntnis diagnostischer Methoden eine angemessene Beurteilung der eingesetzten Aufgaben sowie eine Vorstellung möglicher Bearbeitungen und Lösungen. Die Notwendigkeit didaktischer Forschung zu diagnostischen Potentialen von Aufgaben in vergleichenden Leistungserhebungen, wie sie in der vorliegenden Arbeit realisiert ist, wird somit unterstrichen.

3 Vergleichende Leistungserhebungen

Die vorliegende Arbeit untersucht Aufgaben und deren Bearbeitungen einer hessischen Orientierungsarbeit als Beispiel einer vergleichenden Leistungserhebung. Aus diesem Grund ist für die theoretische Rahmung des Forschungsvorhabens die Erörterung verschiedener Aspekte vergleichender Leistungserhebungen erforderlich. Zunächst werden grundlegende Begrifflichkeiten der Leistungsmessung im schulischen Kontext geklärt. Neben den Begriffen Schulleistungsmessung, Leistung und Kompetenz wird das der Arbeit zugrundeliegende Verständnis einer vergleichenden Leistungserhebung erläutert. Im Anschluss erfolgt ein Exkurs in die Testtheorie, in dessen Verlauf ein psychometrischer Test von einer Prüfung abgegrenzt wird. Des Weiteren wird auf Zielsetzungen und Funktionen vergleichender Leistungserhebungen eingegangen. Die Theorie der Ebenen des Bildungssystems nach FEND (2006, 2008) wird herangezogen, um eine Einordnung der verschiedenen Zielsetzungen in diese Ebenen vorzunehmen, wobei bereits hier die mögliche Multifunktionalität vergleichender Leistungserhebungen deutlich wird. Eine der Funktionen ist die diagnostische Nutzung dieser Leistungserhebungen und ihrer Ergebnisse, wobei diese Zielrichtung in der herangezogenen Literatur stets unkonkret bleibt.

Die einzigen publizierten Forschungsergebnisse zu vergleichenden Leistungserhebungen im Fach Mathematik sind die Arbeiten von LEVIN (2009) und SIKORA (2007), welche sich beide mit Leistungserhebungen der Sekundarstufe auseinandersetzen. Das unterstreicht die Notwendigkeit nach weiteren Forschungsarbeiten im Bereich vergleichender Leistungserhebungen, wobei insbesondere die Primarstufe berücksichtigt werden muss.

3.1 Grundlegende Begriffsklärungen

Im Mittelpunkt der nachfolgenden Erläuterungen steht der Begriff *Leistung*, womit in Anlehnung an HELLER und HANY (2001, S. 88) immer die Leistung des Schülers gemeint ist. Der Schüler erzeugt in einer Anforderungssituation ein nachweisbares Tätigkeitsprodukt, für dessen Bewertung Gütemaßstäbe existieren sollten. In der Praxis der mathematischen Leistungserhebungen existieren unterschiedliche Maßstäbe der Bewertung und des Vergleichs, welche in Abschnitt 3.2.2 vorgestellt werden.

Die Leistungsmessung im schulischen Kontext ist ein Themenfeld, zu dem seit vielen Jahren geforscht und publiziert wird. Die verwendeten Begrifflichkeiten werden jedoch – auch in Abhängigkeit von den unterschiedlichen wissenschaftlichen Disziplinen – nicht immer einheitlich verstanden. WEINERT (2001) ist sich der Bedeutung der *Schulleistungsmessung* früh bewusst und formuliert in seinem noch heute vielfach zitierten und anerkannten Sammelwerk wie folgt:

„Kein Zweifel: Leistungsmessungen in Schulen werden künftig eine größere Rolle als bisher spielen. Ihren Ergebnissen kommt für die Fundierung und Überprüfung bildungspolitischer Entscheidungen wie für die Qualitätsentwicklung der einzelnen Schulen und des Unterrichts eine wachsende Bedeutung zu.“

(WEINERT 2001, S. 30)

Ergänzend beschreiben HELLER und HANY (2001, S. 89) die Schulleistungsmessung als Erfassung des Umfangs, des Niveaus und der Qualität des von den Schülern erworbenen Wissens sowie der Fertigkeiten, Einsichten, Werthaltungen und Kompetenzen in einem bestimmten Sach- oder Lebensbereich.

Der in der vorliegenden Arbeit primär verwendete Begriff der *Leistungserhebung* orientiert sich an der Definition des Mathematikdidaktikers SILL (2006). Dieser beschreibt die Leistungserhebung grundsätzlich als eine schriftliche Ermittlung von Schülerleistungen:

„Unter einer Leistungserhebung wird ein Verfahren zur Ermittlung von Schülerleistungen im Unterricht verstanden. Die Leistung eines Schülers ist ein in einer Anforderungssituation erzeugtes nachweisbares Tätigkeitsprodukt, für dessen Bewertung es Gütemaßstäbe gibt. Unter dem Begriff der Leistungserhebung werden damit sämtliche Verfahren zur Ermittlung von Schülerleistungen im Unterricht zusammengefasst, angefangen bei Kurzkontrollen über Klassenarbeiten, Abschlussarbeiten, Vergleichsarbeiten bis zu standardisierten Leistungstests.“

(SILL 2006, S. 497)

Die angeführten Gütemaßstäbe bedeuten nicht von Vorneherein eine Standardisierung nach den testtheoretischen Gütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität (siehe Abschnitt 3.2.2), sondern können durchaus allgemeiner aufgefasst werden. Auch für das Verständnis der Leistungserhebung im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit werden diese Gütekriterien als mögliche, jedoch nicht notwendige Anforderungen vorausgesetzt (siehe ebd.). In Anlehnung an SCHERER und MOSER OPITZ (2010, S. 38) ist eine Modifikation der Gütekriterien als transparenter und intersubjektiv nachvollziehbarer Prozess sowie eine theoriegeleitete Planung, Durchführung und Evaluation hinreichend.

Grundsätzlich erfasst eine Leistungserhebung primär den statischen Aspekt der Leistung, da als Ergebnis ein Lernprodukt vorliegt. Sie liefert in schriftlicher Form die Daten für eine verbale Leistungsbeurteilung oder eine zensierende Leistungsbewertung. Der Lernprozess als dynamischer Aspekt der Leistung bleibt unbeachtet (vgl. HELLER 1984, S. 15). Leistungserhebungen gehören zu der Gruppe der summativen Evaluationen, womit die Erfassung des Lernstandes als Lernprodukt zu einem definierten Zeitpunkt bezeichnet wird. So differenziert sich die summative von der formativen Evaluation, bei letzterer werden die Erfassung von Zwischenergebnissen sowie eine qualitative Betrachtung des Lernprozesses und eine individuelle Beurteilung der Lernfortschritte berücksichtigt (vgl. CRIBLEZ ET AL. 2009, S. 107).

Die Beschreibung der Lernprodukte erfolgt aktuell meist unter Einbeziehung der seit 2004 geltenden Bildungsstandards⁶ und den darin formulierten *Kompetenzen*. Sie unterscheiden sich deutlich von den bis dato aufgestellten Lernzielen. Die Beschreibung von Kompetenzen beruht auf WEINERT (2001), der Kompetenzen als die beim Individuum verfügbaren

⁶ Bundesweit geltende Bildungsstandards existieren derzeit (2011) für den Primarbereich (Jahrgangsstufe 4) in den Fächern Deutsch und Mathematik, für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9) in den Fächern Deutsch, Mathematik und die erste Fremdsprache Englisch oder Französisch sowie für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10) in den Fächern Deutsch, Mathematik, erste Fremdsprache Englisch oder Französisch, Biologie, Chemie und Physik.

oder erlernbaren kognitiven Fähigkeiten oder Fertigkeiten beschreibt, die benötigt werden, um bestimmte Probleme zu lösen. Ebenso umfasst sein Kompetenzbegriff „die damit verbundenen motivationalen, volitionalen und sozialen Bereitschaften und Fähigkeiten um die Problemlösungen in variablen Situationen erfolgreich und verantwortungsvoll nutzen zu können“ (WEINERT 2001, S. 27f). In neueren Veröffentlichungen werden Kompetenzen als Dispositionen zur Bewältigung bestimmter Anforderungen angeführt. So formulieren CRIBLEZ ET AL. (2009) folgende Erklärung:

„Unter dem Begriff der Kompetenz kann in einem ganzheitlichen Sinne die Fähig- oder Fertigkeit verstanden werden, komplexe Anforderungen und Aufgaben in einem konkreten Kontext erfolgreich zu bewältigen, indem man Ressourcen (Wissen, Fertigkeiten, Fähigkeiten, Ressourcen des sozialen Umfeldes) mobilisiert.“
(CRIBLEZ ET AL. 2009, S. 35)

In der Mathematikdidaktik werden Kompetenzen in Anlehnung an WALTHER (2004) als die Beschreibung dessen „was ein Lernender schließlich kann oder können sollte“ (WALTHER 2004, S. 7) verstanden. Gleichzeitig weist er auf die Entwicklung und Ausbildung von Kompetenzen anhand der Aktivitäten und Tätigkeiten des Lernenden hin (vgl. ebd.).

Den Beschreibungen der Kompetenz gemeinsam ist die Abgrenzung und Unterscheidung vom Begriff des Könnens. Während der gängige Kompetenzbegriff ein unmittelbares Abrufen der aktuell in einer bestimmte Situation erforderlichen Fähigkeiten und Fertigkeiten impliziert, umschreibt der Begriff *Können* darüber hinaus die nicht direkt abrufbaren psychischen Eigenschaften (vgl. bspw. SILL in SILL/SIKORA 2007, S. 11f). Bezüglich der Leistungserhebungen und den darin verwendeten Aufgaben betont KLIEME (2004, S. 3) das Verständnis von Kompetenz als die Verbindung zwischen Wissen und Können, die einen Menschen zur Bewältigung unterschiedlicher Situationen befähigt. Dieses verfügbare Wissen gilt es einzusetzen und in der Anforderungssituation zur Lösung einer Aufgabe anzuwenden. Diese Darstellung des zur Verfügung stehenden Wissens bezeichnet STERN (1998) als *Performanz*. STERN betont, dass Kompetenzen selbst nicht sichtbar sind, sondern „nur aus der direkt beobachtbaren Performanz erschlossen werden“ (STERN 1998, S. 17) können.

Das bedeutet, schriftliche Leistungserhebungen bilden anhand der Aufgabenbearbeitungen nicht Kompetenzen, sondern Performanzen ab. Der für die weitere Lernentwicklung des Schülers wichtige entwicklungsdiagnostische Rückschluss auf die zugrundeliegenden Kompetenzen wird durch den Informationsgehalt der Ergebnisse beeinflusst.

Die im Rahmen der vorliegenden Arbeit diskutierte und untersuchte Form einer *vergleichenden Leistungserhebung* ist zudem deutlich von den nationalen und internationalen Schulleistungsstudien abzugrenzen:

„Es sollte vermieden werden, zentrale Tests zur Überprüfung von Standards mit solchen für das Systemmonitoring (wie z.B. bei PISA) zu vermengen. Die Anforderungen an Tests für den Vergleich von Schulsystemen und ihre Durchführungsmodalitäten sind gänzlich verschieden, auch wenn einzelne Aufgaben und Aufgabentypen übernommen werden können.“

(DEUTSCHER VEREIN ZUR FÖRDERUNG DES MATHEMATISCHEN UND NATURWISSENSCHAFTLICHEN UNTERRICHTS E.V. 2006, S. 6)

Vergleichende Leistungserhebungen erfassen im Gegensatz zu den Stichprobenziehungen der Schulleistungsstudien zumeist vollständige Jahrgänge und Regionen. Die Aufgabensets solcher Leistungserhebungen werden an einer zentralen Institution entwickelt. Diese stellt alle für die Durchführung notwendigen Materialien bereit und ist für die zusammenführende Auswertung der vergleichenden Leistungserhebung verantwortlich. Die Daten werden an den beteiligten Schulen erhoben, wobei die Durchführungsbestimmungen vorgegeben sind. Vergleichende Leistungserhebungen sind demnach eine Form der externen Evaluation (vgl. CREUTZBURG 2006, S. 10; KLIEME 2006, S. 191ff). Hervorzuheben ist bei dieser flächendeckenden, jahrgangsbasierten Evaluation aller Schulen oder Klassen auf landesübergreifender oder auch landesinterner Ebene der ständige Bezug zu den länderübergreifenden Bildungsstandards. Dieser Orientierungsrahmen wird von der KULTUSMINISTER-KONFERENZ (2006, S. 10) ausdrücklich betont.

Unter diesen Gesichtspunkten wird die untersuchte hessische Orientierungsarbeit als vergleichende Leistungserhebung folgender Definition nach LORENZ (2005) zugeordnet:

„Vergleichsarbeiten lassen sich wie folgt charakterisieren: Es handelt sich um schriftliche Arbeiten, die in einer größeren Anzahl von Schulen (ggf. landesweit) auf der Basis einer vorgegebenen Aufgabenstichprobe eingesetzt werden mit dem Ziel, die Leistungen der Schüler an einem über die Klasse und die Schule hinausgehenden Vergleichsmaßstab, d.h. an einer klassen- und schulübergreifenden sozialen und/oder kriterialen Bezugsnorm zu messen.“

(LORENZ 2005, S. 317)

Die DEUTSCHE GESELLSCHAFT FÜR ERZIEHUNGSWISSENSCHAFT (2004, S.1) begrüßt die Entwicklung vergleichender Leistungserhebungen als Verfahren für einen schulübergreifenden Leistungsvergleich, die sowohl in der Grundschule als auch in der Sekundarstufe I in allen Schulformen Anwendung finden. Benannt werden vergleichende Leistungserhebungen als Orientierungsarbeiten oder Vergleichsarbeiten, was auch für die vorliegende untersuchte Leistungserhebung zutreffend ist (siehe Abschnitt 4.5). Beabsichtigt ist dabei der Erhalt möglichst repräsentativer Informationen über den Entwicklungsstand bestimmter Kompetenzen der Schüler (vgl. WEINERT 2001, S. 29).

Die vorangehenden Ausführungen verdeutlichen den Anspruch an vergleichende Leistungserhebungen. LEVIN (2009) unterstreicht die Schwierigkeiten bei der Realisierung der oft vielfältigen Anforderungen:

„Darauf ist zunächst zu entgegnen, dass sich eine Vergleichsarbeit, von wem auch immer diese konstruiert wurde, an den selbst formulierten Ansprüchen messen lassen muss. Dazu müssen Standardverfahren von entsprechender Güte gewählt werden, die dazu taugen, eben die Verwirklichung der formulierten Ansprüche sinnvoll zu testen.“

(LEVIN 2009, S. 13)

3.2 Exkurs Test

Als anerkanntes Messinstrument für Schulleistungen dient der Test, der sowohl im allgemeinen als auch im wissenschaftlichen Sprachgebrauch diverse Bedeutungen besitzt (siehe Abschnitt 2.3). Unverzichtbar für die Einschätzung der Ziele und Ergebnisse von vergleichenden Leistungserhebungen ist eine kurze Darstellung der Grundlagen des Messens und Testens. Bedingung für eine Leistungsmessung ist zunächst die Darstellung der Leistung in einem beobachtbaren Verhalten, das im Kontext des Mathematikunterrichts der Aufgabebearbeitung entspricht. Demzufolge ist die gestellte Aufgabe derart zu konstruieren, dass sich die unterschiedlichen Leistungspotentiale einer Schülergruppe auch in unterschiedlichem Verhalten zeigen können (vgl. HELLER/HANY 2001, S. 90).

3.2.1 Testtheorie

Unabhängig von der Art des Testes erbringt die Messung als Ergebnis einen Testwert. Von diesem ausgehend wird auf die tatsächliche Ausprägung der gemessenen Merkmale und Fähigkeiten geschlossen. Eine Testtheorie beschreibt die Anforderungen, denen ein Test hierfür genügen muss sowie die Regeln der Interpretation. Es existieren verschiedene Theoriemodelle, die nebeneinander bestehen und sich ergänzen (vgl. BORTZ/DÖRING 2006, S. 192ff; INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 118ff). Als die beiden anerkanntesten Modelle werden sowohl die klassische als auch die probabilistische Testtheorie angeführt.

Die *klassische Testtheorie* wird auch als Messfehlertheorie bezeichnet. Sie beruht auf dem Grundgedanken, dass sich der im Testergebnis beobachtete Wert aus einem tatsächlichen Wert und einem Fehlerwert zusammensetzt. Der Messfehler wird als zentrierte Zufallsvariable modelliert, der erwartete Fehler ist Null. Also entspricht der theoretische Wert des Testes somit dem Mittelwert aus einer unendlichen Anzahl von wiederholten Testdurchläufen unter jeweils gleichen Bedingungen (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 118ff). Kritisiert wird das Modell der klassischen Testtheorie primär aufgrund seiner Populationsabhängigkeit, da die Messwerte und Fehlereinschätzungen ausschließlich auf den zugrundeliegenden Vergleichsstichproben aufbauen (vgl. ebd.).

Das Modell der *probabilistischen Testtheorie* setzt sich direkt mit der Beziehung des untersuchten Merkmals und dem erhaltenen Messwert auseinander. Hier wird die Grundannahme formuliert, dass der im Testergebnis beobachtete Wert lediglich als Indikator für das latente, also nicht direkt beobachtbare, Merkmal aufgefasst wird. Ziel der probabilistischen Testtheorie ist es, mittels stochastischer Berechnungen zu einem gegebenen Messwert tatsächlich existierende Merkmalsausprägung mit der höchsten Wahrscheinlichkeit zu ermitteln (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 121ff). Zu den bekanntesten Modellen gehört das Rasch-Modell, das in zahlreichen internationalen Schulleistungsstudien wie PISA oder TIMSS Anwendung findet⁷.

⁷ Die International Association for the Evaluation of Educational Achievement (IEA) führt die Schulleistungsstudie TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) seit dem Jahr 1995 in den Jahrgangsstufen 4 und 8 durch (vgl. BOS ET AL. 2008). Das Programme for International Student Assessment, kurz PISA, wird seit dem Jahr 2000 in dreijährigem Turnus durchgeführt, um eine Rückmeldung bezüglich grundlegender Kompetenzen von Schülern am Ende der Pflichtschulzeit zu geben (vgl. OECD 2010).

3.2.2 Gütekriterien

Die grundlegenden Anforderungen an einen Test manifestieren sich in den drei Kriterien Objektivität, Reliabilität und Validität. Diese anerkannten Kriterien der Testgüte sollen Auskunft über die Qualität einer Messung geben und werden daher im Folgenden genauer erläutert.⁸

Die **Objektivität** eines Testes untersucht die Unabhängigkeit der Ergebnisse von der Person des Testanwenders. Die *Durchführungsobjektivität* beschreibt die Unabhängigkeit des Testergebnisses von der konkreten Durchführung und dem Ablauf des Testes. In diesem Zusammenhang wird häufig auf den Vorteil von standardisierten Testinstruktionen verwiesen, die der Anwender auswendig wiedergeben oder zumindest sicher ablesen können sollte (vgl. BORTZ/DÖRING 2006, S. 195). Anhand der *Auswertungsobjektivität* wird gewährleistet, dass die Beurteilung der Testantworten und die Punktvergabe durch verschiedene Personen nicht variieren. Anschließend werden die erhaltenen Testwerte eingeordnet, wobei die Anforderung der *Interpretationsobjektivität* individuelle Deutungen der Testergebnisse ausschließen soll (vgl. ebd.).

Mit der **Reliabilität** werden die Zuverlässigkeit eines Testes sowie seine Präzision angegeben. Ein Test sollte stabile Messwerte erbringen und auch bei einer Wiederholung gleiche Ergebnisse erzielen (vgl. BORTZ/DÖRING 2006, S. 196). Die *Retestreliabilität* wird ermittelt, indem der untersuchten Stichprobe derselbe Test nach einem zu variierenden Zeitintervall ein zweites Mal zur Bearbeitung vorgelegt wird. Die erhaltenen Ergebnisse der beiden Testdurchgänge werden anschließend korreliert (vgl. ROST 2004, S. 378). Bei der Ermittlung der *Paralleltestreliabilität* werden der Stichprobe zwei verschiedene Testversionen vorgelegt, die hintereinander bearbeitet werden. Die Entwicklung solcher Paralleltest ist jedoch ebenso wie die Konstruktion eines Retests aufwändig und zeitintensiv (vgl. ROST 2004, S. 377). Bei der *Halbtestmethode* hingegen wird nach der Bearbeitung des Tests das Aufgabenset nach verschiedenen Prinzipien halbiert und ausgewertet, um anschließend den Zusammenhang der Ergebnisse beider Testhälften zu berechnen (vgl. ROST 2004, S. 378). Wird der Test anhand der Aufgaben in seine kleinstmöglichen Einheiten zerlegt, erfolgt eine Bestimmung der Reliabilität anhand der *internen Konsistenz* durch die Korrelation der einzelnen Ergebnisse (vgl. BORTZ/DÖRING 2006, S. 199).

Als drittes zentrales Testgütekriterium wird die **Validität** angeführt, mit der Aussagen über die Gültigkeit eines Tests getroffen werden. Die *Inhaltsvalidität* eines Testes beruht auf subjektiven Einschätzungen. Die Aufgaben eines Testes sollen das zu überprüfende Merkmal erschöpfend repräsentieren und keine bedeutsamen Aspekte außer Acht lassen. Die curriculare Gültigkeit eines Testes zur Erfassung von Schulleistung wird als Spezialfall der Inhaltsvalidität bezeichnet (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 57f). Die *Kriteriumsvalidität* beschreibt den Zusammenhang zwischen dem erhaltenen Testwert und der Ausprägung des zu messenden Kriteriums (vgl. BORTZ/DÖRING 2006, S. 200f). Abschlie-

⁸ Dabei wird von einer Präsentation der Berechnungen abgesehen und sich auf die inhaltliche Beschreibung und Festlegung der Kriterien beschränkt. Für Erläuterungen zu den statistischen Berechnungen wird beispielsweise auf die Ausführungen von ROST (2004, S. 369ff) oder DIEHL/KOHR (2004, S. 376ff) verwiesen.

ßend gilt die *Konstruktvalidität* als objektivste Unterform der Validität (vgl. BORTZ/DÖRING 2006, S. 201f). Ein Test wird als konstruktvalide bezeichnet, wenn die Testwerte die zuvor aus Empirie und Theorie abgeleiteten Hypothesen bestätigen.

ROST (2004) führt die **Normierung** als weiteres Testgütekriterium an, das Antwort auf die Frage gibt „inwieweit es für die Ergebnisse eines Tests *Vergleichsdaten* gibt, anhand derer sich Einzelergebnisse interpretieren lassen“ (ROST 2004, S. 41). Besonders für Messungen zu Schulleistungen sind Vergleichsdaten unentbehrlich, um zu einer brauchbaren Einschätzung der Testergebnisse zu gelangen. Synonym für Normierung wird in der Praxis häufig der Begriff *Bezugsnorm* verwendet, der sich in drei Vergleichsmaßstäbe differenziert (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 63f). Bei einer *sozialen Bezugsnorm* werden die Ergebnisse des Probanden mit den Ergebnissen einer relevanten Stichprobe verglichen. Die *individuelle Bezugsnorm* vergleicht die Ergebnisse eines Probanden mit dessen eigenen Ergebnissen aus früheren Messungen, wodurch die Leistungsentwicklung sichtbar wird. Die *sachliche Bezugsnorm* orientiert sich an einem Vergleich des Testergebnisses mit den gesetzten Kriterien des Tests, stellt also die Inhalte in den Vordergrund. Mit Blick auf die aktuellen Leistungserhebungen wird diese Form der Normierung als fähigkeitsorientierte Testinterpretation umgesetzt (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 70f). Die Schwierigkeiten von Testaufgaben und die Fähigkeiten von Personen werden anhand der Beschreibung von Kompetenzstufen erkannt, und es werden Kompetenzstufenmodelle entwickelt (vgl. ebd.).

3.2.3 Aufgabenkonstruktion

Nach der Festlegung von Inhalt, Art und Umfang des Testes folgt die Formulierung von Aufgaben. Eine Aufgabe lässt sich in die zwei Komponenten *Aufgabenstamm* und *Antwortformat* unterteilen (vgl. ROST 2004, S. 55). Der *Aufgabenstamm* präsentiert die zu bewältigende Situation und beinhaltet Fragen, Grafiken oder Zeichnungen. In der Fachliteratur zu Testtheorie und Testkonstruktion wird wenig auf die Bedeutung der sprachlichen Formulierung und das subjektive Verständnis von Aufgabentexten eingegangen (vgl. ROST 2004, S. 54f). Die vorliegende Forschungsarbeit zeigt speziell in den Ergebnissen der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse (siehe Teil III) inwiefern der sprachliche Aspekt der Aufgaben sowie die damit verbundenen Konsequenzen für vergleichende Leistungserhebungen in der Primarstufe bedeutend sind und Einfluss auf die Aufgabenbearbeitungen der Kinder besitzen.

Ausführlichere Darstellungen sind in der Literatur hingegen zu den *Antwortformaten* von Aufgaben zu finden. In Abschnitt 6.2.2 werden die im Rahmen der Rationalen Aufgabenanalyse unterschiedenen Antwortformate erläutert, sodass an dieser Stelle lediglich ein Überblick zu Antwortformaten in Anlehnung an GAGE und BERLINER (1996, S. 634) erfolgt.



Abbildung 2: Übersicht zu Antwortformaten einer Aufgabe in Anlehnung an GAGE und BERLINER (1996).

3.2.4 Auswertung

Bei der Auswertung eines Testes wird jede Aufgabenbearbeitung beurteilt, wobei die vorliegenden Varianten der Aufgabenbearbeitungen hierzu in Zahlenwerte übertragen werden. Die Ergebnisse der einzelnen Aufgaben werden anschließend als Testergebnis in einem numerischen Testwert zusammengefasst. Das Kriterium der Auswertungsobjektivität ist einzuhalten, was eine klare und ausführliche Beurteilungsvorgabe voraussetzt. Sowohl für freie als auch für gebundene Antwortformate sind die zu erteilenden Punktzahlen sowie die Erläuterungen in den Auswertungsvorgaben gewissenhaft zu durchdenken. Speziell für freie Antwortformate empfiehlt ROST (2004, S. 78ff) einen zweischrittigen Erarbeitungsprozess. Zunächst ist eine Zuordnung der freien Antworten in ein Kategoriensystem vorzunehmen. Daraufhin folgt die Signierung, bei der jeder Kategorie ein Punktwert zugeordnet wird. ROST hebt die Bedeutung derartiger Kategoriensysteme für die Beurteilung von Bearbeitungswegen einer Aufgabe bei freien Antwortformaten hervor. Verschiedene korrekte und auch falsche Lösungen sollten gleichermaßen berücksichtigt werden. Aufgrund der Testauswertung durch die Bildung eines Summenwertes wird jedoch immer wieder eine Quantifizierung durchgeführt. Auch wenn ein Test auf die Erfassung qualitativer Merkmale ausgerichtet ist, können dem Ergebniswert keinerlei Informationen zu Bearbeitungen einzelner Aufgaben oder speziellen Antwortmustern entnommen werden.

Vergleichende Leistungserhebungen erfüllen die vorgestellten Gütekriterien und deren untergeordnete Aspekte nicht in jedem Fall. Um begriffliche Missverständnisse in den nachfolgenden Ausführungen zu vermeiden, wird anstelle des Begriffs Test die allgemeinere Bezeichnung *Prüfung* verwendet. Damit werden sämtliche Formen der schriftlichen Leistungserhebung erfasst, ohne die zuvor angeführten Bedingungen eines psychometrischen Testes erfüllen zu müssen. Die Verwendung des Begriffs Test hingegen impliziert alle zuvor dargelegten notwendigen und hinreichenden Kriterien eines psychometrisch basierten Testes.

3.3 Zielsetzungen und Funktionen vergleichender Leistungserhebungen

SILL (in SILL/SIKORA2007, S. 58ff) unterscheidet Zielsetzungen als reine Auflistungen von Absichten und Funktionen als beabsichtigte Wirkungen. Funktionen sind dabei immer in Verbindung mit einem Bezugssystem zu sehen, wobei eine Zielsetzung durchaus verschiedenen Funktionen zugeordnet werden kann.

Um die Zielsetzungen und Funktionen vergleichender Leistungserhebungen zu konkretisieren, wird an dieser Stelle der theoretische Ansatz von FEND (2008, 2009) hinzugezogen. Er führt in das Verständnis von Bildungssystemen ein und formuliert als wichtigste Voraussetzung für die Arbeit im Handlungsfeld Bildung, Erziehung und Pädagogik ein Verständnis des Bildungssystems als Ganzes. Mit Blick auf Funktionsweisen, Strukturen und Zusammenhänge führt FEND (2009, 2008) eine Unterscheidung des Bildungssystems in drei Ebenen an:

- Die Makroebene des Bildungssystems trifft als Bildungsadministration bildungspolitische Entscheidungen in Form von Schulgesetzen, Bildungsplänen und anderen Regelungen (Systemebene).
- Die Mesoebene der einzelnen Schule beinhaltet Schulführung, Schulentwicklungsarbeit oder lokale Besonderheiten (Schulebene).
- Die Mikroebene der Lehrer und Schüler fasst den Unterricht in den einzelnen Klassen sowie das Individuum (Individualebene).

Auch KAUERTZ ET AL. (2008, S. 75) nutzen eine Interpretation dieser Unterscheidung, um die Frage nach dem Bedarf an Leistungserhebungen zu erörtern. Während die Individual Ebene den einzelnen Schüler konkret betrifft, fasst die Schulebene die an den Schulen bestehende Gemeinschaft als Klassen, Lehrerschaft, Schulleitung und anderen Bezugspersonen zusammen. Weiterhin existiert die so genannte Systemebene, auf der beispielsweise die Lehrplan- und Standardentwicklungen verankert sind. Eine ähnliche Differenzierung erfolgt bei STEFFENS (2010a, S. 5), der Unterricht als Mikroebene, die Einzelschule als Handlungseinheit der Mesoebene sowie die Makroebene des Monitorings und der Qualitätssicherung bezeichnet.

Die Zielsetzungen der nationalen und internationalen Schulleistungsstudien als Systemmonitoring werden vorrangig auf der Makroebene des Bildungssystems eingeordnet, während die Mesoebene der Schule und auch die Mikroebene des Individuums deutlich in den Hintergrund rücken (vgl. PEEK 2007, S 3f). Anders verhält es sich hingegen mit den Formen zentraler Lernstandserhebungen, zu denen auch die vergleichende Leistungserhebung gehört. Deren Ergebnisse sind nun auf die Ebene der einzelnen Schule und der Klasse oder auch des einzelnen Schülers zu beziehen (vgl. PEEK 2007, S. 3). Mit dieser Fokussierung der Mesoebene der Schule und der Mikroebene des Schülers wird neben der Option einer Standortbestimmung und Rechenschaftsablegung eine Verbesserung des Lehrens und Lernens, eine Steigerung der Unterrichtsqualität sowie eine Förderung der Professionalisierung der Lehrerschaft angestrebt (vgl. POSCH 2009, S. 1). So konkretisieren BURKHARD und PEEK (2005) „Vergleichsarbeiten sollen dazu dienen, fachliche Standards und Anforderungen zwischen den Lehrkräften zu klären, eine abgestimmte Praxis der Leistungsbeurteilung zu fördern und eine Grundlage für gezielte Förderangebote und Maßnahmen der

Unterrichtsentwicklung zu erhalten." (BURKHARD/PEEK 2005, S. 25). Die intendierte entwicklungsdiagnostische Nutzung vergleichender Leistungserhebungen wird mit dieser Aussage deutlich.

Das NETZWERK EMPIRIEGESTÜTZTE SCHULENTWICKLUNG (EMSE) führt zahlreiche Funktionen zentraler standardisierter Leistungserhebungen an. Da die Aussagen durchaus auf vergleichende Leistungserhebungen im Allgemeinen zutreffen, wird an dieser Stelle die Beschränkung der Standardisierung aufgehoben. Auf der Mesoebene der Schule bieten Leistungserhebungen demnach Zusatzinformationen über erreichte Lernstände, verschaffen Rückmeldung zu den Bildungsstandards und ermöglichen eine Vergleichbarkeit der Leistungen mit anderen Lerngruppen. Des Weiteren bieten vergleichende Leistungserhebungen auf der Mikroebene Grundlagen für weiterführende Lernbedarfsdiagnosen, fördern die Kommunikation über Lernen und Lernentwicklungen und unterstützen eine Weiterentwicklung des Unterrichts auf Grundlage empirischer Ergebnisse. In Bezug auf die Systemebene bieten die Leistungserhebungen aufgrund der Ergebnisse zu Schulformen oder Schulstufen Informationen über die Leistungen des Bildungssystems. Darüber hinaus sind Konsequenzen für die Lehrplan- und Standardentwicklung abzuleiten, womit bedeutsames Planungs- und Steuerungswissen gewonnen wird. Abschließend findet eine Identifizierung von Unterstützungs- und Entwicklungsbedarf für die Aus-, Fort- und Weiterbildung statt (vgl. NETZWERK EMPIRIEGESTÜTZTE SCHULENTWICKLUNG 2006, S. 1f).

Speziell für den Mathematikunterricht führen BÜCHTER und LEUDERS (2005b, S. 14) die Auswertung extern erhobener Daten an, um daraus konkrete Impulse für die Weiterentwicklung des Unterrichts abzuleiten. Nach LEVIN (2009, S. 27) können die Beurteilungen von Schülern durch den Lehrer mit Hilfe der Ergebnisse vergleichender Leistungserhebungen sinnvoll ergänzt werden, da nun Daten weiterer Lerngruppen einbezogen werden. Eine Überarbeitung und Neuausrichtung der eigenen Beurteilung wird möglich. Vervollständigt werden sowohl die Unterstützung bei der Unterrichtsentwicklung als auch die Bereitstellung von Daten zum Leistungsvergleich durch eine diagnostische Perspektive auf der Mikroebene, auf der die Ergebnisse vergleichender Leistungserhebungen Hinweise für die individuelle Förderung der Schüler liefern sollen (vgl. BÜCHTER/LEUDERS 2005b, S. 14). Die Komponente der diagnostischen Nutzung vergleichender Leistungserhebungen wird in dieser und anderen Publikationen häufig angeführt. Dabei wird jedoch weder das diagnostische Potential von vergleichenden Leistungserhebungen noch der Einbezug der Ergebnisse in den weiteren Diagnoseprozess konkretisiert.

Es wird deutlich, „dass die Leistungserhebungen in den Bundesländern offensichtlich stets mehrere Funktionen erfüllen sollen" (SILL in SILL/SIKORA 2007, S. 96). Es bleibt offen, ob diese unterschiedlich ausgerichteten Zielrichtungen gleichermaßen erfüllt werden können. LEVIN (2009, S. 190) betont den hierfür notwendigen Diskurs über Potentiale und Grenzen der vergleichenden Leistungserhebungen, um zu Entscheidungen über deren Nutzung zu gelangen.

3.4 Forschungsstand zu vergleichenden Leistungserhebungen im Fach Mathematik

Die vorangegangenen Ausführungen trennen die vergleichende Leistungserhebung als flächendeckende Prüfung deutlich von den nationalen und internationalen Schulleistungstudien. Diesem Verständnis folgend werden konkret zwei aktuelle Untersuchungen zu vergleichenden Leistungserhebungen vorgestellt.⁹

LEVIN (2009) publiziert in ihrer Habilitationsschrift im Fachbereich der Pädagogischen Psychologie und der Empirischen Bildungsforschung die Ergebnisse einer Untersuchung zu Qualitätsproblemen mathematischer Vergleichsarbeiten. Grundlage sind die Aufgaben und Ergebnisse einer Vergleichsarbeit im Fach Mathematik in Klassenstufe 10 an Berliner Schulen, für die sie eine psychometrische Modellierung vornimmt. Die vielschichtigen Hypothesen und Ergebnisse zu den Aufgabenstellungen und den numerischen Testergebnissen sind deutlich auf die Perspektive der Pädagogischen Psychologie ausgerichtet und lassen fachdidaktische Aspekte vermissen. Auch die eigentlichen Schülerbearbeitungen der Aufgaben in der Vergleichsarbeit werden nicht berücksichtigt.

Auch SIKORA (in SILL/SIKORA 2007) führt umfangreiche Untersuchungen zu einer Vergleichsarbeit durch, die in einer fünften Klassenstufe in Mecklenburg-Vorpommern geschrieben wurde. Ihr Forschungsanliegen der Entwicklung einer inhalts- und bereichsunabhängigen Klassifizierung der Schülerantworten ist mathematikdidaktisch orientiert. Neben einer ausführlichen Beschäftigung mit der Tradition und Anwendung der Fehleranalyse in der Mathematikdidaktik analysiert SIKORA die Anforderungen an die Schüler bei der Aufgabenbearbeitung. Anschließend untersucht sie die realen Schülerlösungen und verdeutlicht anhand eines Vergleichs der Lösungen mit ihren theoretischen Konstruktionen Ursachen für fehlerhafte Bearbeitungen.

Während LEVIN (2009) sich streng an der psychometrischen Methodologie ausrichtet, realisiert SIKORA (in SILL/SIKORA 2007) eine Kombination aus statistischen Methoden der Testtheorie und inhaltsfokussierten Auswertungen.

„Will man die Ergebnisse von Vergleichsarbeiten nutzen, um Veränderungen in der Unterrichtspraxis aus fachdidaktischer Sicht zu initiieren, so sind inhaltliche Analysen unumgänglich, ...“

(SIKORA in SILL/SIKORA 2007, S. 143)

Beide Forschungsarbeiten beschäftigen sich jedoch mit vergleichenden Leistungserhebungen aus der Sekundarstufe I. Für den Bereich der Grundschule liegen aktuell keine Untersuchungen zu Aufgaben, Ergebnissen und Bearbeitungen von vergleichenden Leistungserhebungen vor. Die vorliegende fachdidaktische Untersuchung zu einer vergleichenden Leistungserhebung Mathematik im Bereich der Primarstufe beginnt, diese Lücke zu schließen. Erste qualitative Erkenntnisse zu diesem Forschungsbereich werden formuliert und können zukünftig weiterentwickelt werden.

⁹ Es erfolgt kein geschichtlicher Abriss sämtlicher Forschungen zu Leistungserhebungen in den vergangenen Jahrzehnten, da ein solcher den Rahmen der vorliegenden Arbeit sprengen würde und ihrer Zielsetzung nicht weiter dienlich wäre. Bei Interesse wird auf die Untersuchungen von INGENKAMP (1962) zu den deutschen Schulleistungstests und die übersichtlichen Sammlungen von SILL (in SILL/SIKORA 2007), in denen Forschungen in der BRD sowie in der DDR gleichermaßen berücksichtigt werden, verwiesen.

3.5 Für die weitere Arbeit

Bei der untersuchten Orientierungsarbeit handelt es sich um eine vergleichende Leistungserhebung, die sich durch die Erfassung gesamter Jahrgänge sowie eine zentrale Entwicklung und Auswertung der Aufgaben auszeichnet. Sie wird im weiteren Verlauf der Arbeit als Prüfung und nicht als Test bezeichnet, da sie nicht den psychometrischen Gütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität entspricht.

Die mathematische Leistung der Drittklässler liegt als schriftliches Tätigkeitsprodukt in Form der Aufgabenbearbeitungen vor. Während in der Fachliteratur zahlreiche Antwortformate unterschieden werden, wird auf die formale Aufgabenstellung und die Aufgabenpräsentation selten eingegangen. In der eigenen Aufgabenanalyse wird dieser Aspekt hingegen aufgrund der Bedeutung für das Grundschulalter besonders berücksichtigt (siehe Abschnitt 6.2).

Um die Anforderung der gestellten Aufgaben zu bewältigen, muss der Schüler sein erworbenes Wissen mobilisieren, was als Kompetenz bezeichnet wird. In der Fachliteratur wird jedoch darauf hingewiesen, dass nicht die Kompetenzen selbst, sondern lediglich Performanzen anhand der Aufgabenbearbeitungen sichtbar werden. Aus diesen kann zwar auf die zugrundeliegenden Kompetenzen geschlossen werden, die diagnostische Nutzung vergleichender Leistungserhebungen wird jedoch erschwert.

Die untersuchte Orientierungsarbeit ist eine summative Form der Beurteilung, da Lernprodukte zu einem festgelegten Zeitpunkt erhoben werden. Dieser offensichtliche Bezug zur Form der Statusdiagnostik ist hinsichtlich einer entwicklungsdiagnostischen Nutzung dieser Prüfungen im weiteren Verlauf der Arbeit zu berücksichtigen.

Die in der Fachliteratur angeführte Multifunktionalität vergleichender Leistungserhebungen kann mithilfe der Theorie der Ebenen des Bildungssystems nach FEND (2008, 2009) differenziert werden: Vergleichende Leistungserhebungen sollen vorrangig Ergebnisse auf der Mesoebene der Schule sowie der Mikroebene des Individuums erbringen. Die von FEND definierte Systemebene rückt zunächst in den Hintergrund. Die im Kontext vergleichender Leistungserhebungen häufig angeführte diagnostische Komponente ist der Mikroebene des Schülers zuzuordnen. Auch die vorliegende hessische Orientierungsarbeit soll neben dem Leistungsvergleich für eine Analyse individueller Stärken und Schwächen der Schüler genutzt werden, um Konsequenzen für eine handlungsorientierte Förderung im weiteren Lernprozess zu ziehen.

Zu vergleichenden Leistungserhebungen im Fach Mathematik sind aktuell jedoch nur zwei Forschungsarbeiten bekannt (vgl. LEVIN 2009; SIKORA in SILL/SIKORA 2007). Beide Arbeiten sind in der Sekundarstufe angesiedelt, aus der Primarstufe liegen keine Untersuchungen vor. Das eigene Forschungsvorhaben beginnt, diese Lücke zu schließen. Die in Abschnitt 2.6 aufgeworfene Frage nach der entwicklungsdiagnostischen Nutzung vergleichender Leistungserhebungen wird im weiteren Verlauf der Arbeit auf die Mikroebene bezogen.

4 Aufgaben - Instrumente der Diagnose und der Leistungserhebung

Aufgaben¹⁰ gelten als zentrale Elemente des Mathematikunterrichts (vgl. RISSE/BLÖMEKE 2008, S. 33). Somit sind sie sowohl Instrumente der Diagnose als auch der Leistungserhebung. Nachdem in den beiden vorangehenden Kapiteln bedeutende Aspekte der Themenkomplexe Diagnose und vergleichende Leistungserhebung herausgearbeitet wurden, widmet sich das vierte Kapitel der Arbeit speziell den Aufgaben. Nach einer allgemeinen Annäherung an das Thema folgt die Anbindung an den Mathematikunterricht. Aus Sicht der Fachdidaktik wird die Mathematik als „Aufgabenfach“ (GRANZER/WALTHER 2008, S. 8) bezeichnet. Die Klassifikation von Aufgaben im Mathematikunterricht erfolgt unter Bezug auf die vielfältigen Funktionen von Aufgaben. Primär werden Aufgaben zum Leisten und Aufgaben zum Lernen unterschieden, wobei weiterhin der Frage nach einer ‘guten’ Aufgabe als für ihre Funktion geeignete Aufgabe diskutiert wird. Die Einschätzung von Aufgaben im Spannungsfeld Diagnose und Leistungserhebung wird hier besonders hervorgehoben. In diesem Zusammenhang erfolgt eine Diskussion des diagnostischen Einsatzes von Multiple-Choice-Aufgaben, da dieses Antwortformat häufig in vergleichenden Leistungserhebungen eingesetzt wird.

Der zweite Teil dieses Kapitels stellt die Aufgaben der Hessischen Orientierungsarbeit 2005 als ein Beispiel für vergleichende Leistungserhebungen in der Grundschule vor. Da im vorliegenden Forschungsvorhaben ausgewählte Aufgaben dieser Prüfung analysiert werden, werden zudem der Kontext und die Anforderungen der Leistungserhebung erläutert. Abschließend erfolgt eine Beschreibung der hessischen Orientierungsarbeit unter Einbezug relevanter Aspekte der theoretischen Rahmung.

4.1 Aufgaben

Allgemein kann eine Aufgabe nach GIRMES (2003, S. 6ff) als „Lücke“ zwischen dem Menschen und der ihn umgebenden Welt bezeichnet werden. Eine Situation, ein Ereignis oder ein Sachverhalt wird zur Aufgabe, wenn die Schließung dieser Lücke angestrebt wird. Zwischen dem Menschen und seiner Umwelt entsteht somit eine Beziehung. Im Kontext der Bildungsaufgabe als Adaption auf das schulischen Umfeld (vgl. GIRMES 2003, S. 9ff) wird die Bearbeitung einer Aufgabe wie folgt beschrieben:

„Wer für sich eine Situation als Aufgabe interpretiert, hat ein Ziel vor Augen, d.h. eine Vorstellung davon, wie eine gültige Aufgabenlösung am Ende aussehen könnte; er hat ferner eine Idee, wie er die Aufgaben angehen könnte, und die nötige Portion Zuversicht, dass ihm die Lösung gelingen wird.“

(THONHAUSER 2008, S. 16)

¹⁰ In der Mathematikdidaktik werden Aufgaben und Probleme unterschieden. Grundsätzlich zeichnet sich eine Aufgabe durch die Bekanntheit der transformatorischen Operationen aus, die den Ausgangszustand in den erwünschten Endzustand bringt. Bei Problemen hingegen sind die Strategien zur Lösung weitestgehend unbekannt. Bei der Verwendung des Begriffes Aufgaben sind hier beide Formen impliziert, da eine Differenzierung für die anstehende Untersuchung nicht nötig ist. Eine Beschreibung der ausgewählten Aufgaben erfolgt aus einer multiperspektivischen Sicht im Rahmen der Aufgabenanalysen, welche den Anspruch und das Potential der jeweiligen Aufgabe untersucht (siehe Abschnitt 6.2).

FUCHS und BLUM (2008, S. 135) bezeichnen „Aufgaben als Mittler zwischen den gesetzlichen gesellschaftlichen Normen und dem Handeln von Lehrern sowie Schülern“. Zwei Aspekte werden für einen zeitgemäßen Umgang mit Aufgaben besonders hervorgehoben: Einerseits ist Wert auf die konkreten Inhalte der Aufgaben zu legen und mit Sicht auf die aktuellen Kompetenzbeschreibungen ein bildungsadäquater Abgleich durchzuführen. Gleichzeitig ist jedoch der Blick auf die Bearbeitungen der gestellten Aufgaben zu lenken, die ebenfalls eine qualitätsvolle Form aufweisen sollen. Darüber hinaus ergänzt THONHAUSER (2008): „im Zusammenhang mit schulisch organisiertem Lernen werden Aufgaben von Beteiligten einerseits mit Lernkontrollen und Prüfungen assoziiert, andererseits mit Übungen, die nicht zuletzt auf Prüfungen vorbereiten sollen“ (THONHAUSER 2008, S. 13). Die Leistungsmessung findet mithilfe von Aufgaben in mündlicher, schriftlicher, gestalterischer oder praktischer Form statt, wobei zuvor eine Operationalisierung der jeweiligen Anforderungen erfolgt.

Konsens herrscht über die Notwendigkeit, aus der jeweiligen fachdidaktischen Perspektive heraus einen konkreten Blick auf Aufgaben, ihre Funktionen und ihre Merkmale zu richten. In der Pädagogik und den Fachdidaktiken werden Aufgaben häufig anhand ihrer Funktionen klassifiziert (vgl. GIRMES 2003; KLEINKNECHT 2008; WINTER 2008; MÜLLER/HELMKE 2008). THONHAUSER (2008) ermahnt, „was die Qualität der Aufgaben betrifft, sind die Vorgaben weit spärlicher und lange nicht so genau definiert“ (THONHAUSER 2008, S. 14). Er motiviert zu einer Beschäftigung mit diesem Desiderat, um forschungsbasierte Erkenntnisse und detaillierte Ergebnisse zu erhalten. Erst dann könne die Qualität von Aufgaben verbessert werden (vgl. ebd.).

4.2 Die Bedeutung von Aufgaben für den Mathematikunterricht

„Aufgaben sind zentrale Elemente des Mathematikunterrichts.“
(RISSE/BLÖMEKE 2008, S. 33)

Diese Aussage fasst die Bedeutung von Aufgaben für das Lernen von Mathematik prägnant zusammen. Zahlreiche Publikationen widmen sich seit vielen Jahren dieser zentralen Bedeutung. Auch BROMME, SEEGER und STEINBRING (1990) betonen die Relevanz einer Auseinandersetzung mit dem Themenkomplex Aufgaben im Mathematikunterricht:

„Mathematische Aufgaben sind für das Lernen von Mathematik, für den Unterricht, für die Unterrichtsvorbereitung und für die Evaluation des Wissensstandes der Schüler von zentraler Bedeutung. Aufgaben sind die schulgemäßen Formen für mathematische Probleme.“
(BROMME/SEEGER/STEINBRING 1990, S. 1)

Bereits um die vorletzte Jahrhundertwende standen Aufgaben im Zentrum des Mathematikunterrichts. In dieser Zeit wurde der Begriff der Aufgabendidaktik in der Traditionellen Mathematik geprägt. Allerdings unterscheidet sich die Beschäftigung mit Aufgaben zu der heutigen. In der Traditionellen Mathematik herrschte das so genannte Stofforganisations-

prinzip vor, welches die Inhalte des Mathematikunterrichts in Einzelstoffe und diese wiederum in Stoffgebiete gliederte (vgl. LENNÉ 1969, S. 50ff). Jedes dieser Teilgebiete wurde durch einen bestimmten Aufgabentyp repräsentiert. Mit Hilfe der zugewiesenen Aufgaben wurden die zu lehrenden Kenntnisse, Fähigkeiten und Methoden systematisch vom Lehrer an die Schüler vermittelt. Die einzelnen Stoffgebiete galten nach dem Abarbeiten der Aufgabentypen als abgehandelt. Bezüge zwischen den inhaltlichen Themen wurden nicht hergestellt und der Schüler galt lediglich als ausführendes Organ. LENNÉ (1969) benennt diese Form des Mathematikunterrichts als Lernschule und fasst die Aufgabendidaktik als Vermittlung „bloßer Lösungsschemata“ (LENNÉ 1969, S. 53) zusammen.

Auch heute ist das Lernen von Mathematik und somit auch der Mathematikunterricht ohne Aufgaben nicht denkbar. Aufgaben transportieren nicht nur die Inhalte, sondern auch die Anforderungen der Mathematik, wie dies in keinem weiteren Unterrichtsfach der Fall ist. BÜCHTER und LEUDERS (2005a) erläutern dies weiterführend, „denn im Mathematikunterricht spielen Aufgaben eine zentrale Rolle für das Lehren und Lernen, sei es als Anlass zum Entdecken mathematischer Zusammenhänge, zum Üben von Fertigkeiten, zum Vernetzen von Begriffen oder als Instrument der Leistungsbewertung“ (BÜCHTER/LEUDERS 2005a, S. 9). GRANZER und WALTHER (2008) heben die wesentliche Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht der Primarstufe hervor und bezeichnen die Mathematik im schulischen Kontext sogar als „Aufgabefach“ (GRANZER/WALTHER 2008, S. 8).

GRANZER und WALTHER (2008) betonen die Bearbeitung der im Mathematikunterricht gestellten Aufgaben entgegen der mit den Aufgaben verbundenen Intention. Sie sehen die Chance, „bei den Eigenproduktionen der Kinder unterschiedliche Bearbeitungswege, Schwierigkeiten, Lernerfolge, vielleicht sogar die eine oder andere ‘herausragende’ Idee festzustellen“ (GRANZER/WALTHER 2008, S. 10). Aus diesen Beobachtungen und Einschätzungen heraus lassen sich dann Handlungsentscheidungen für den weiteren Lernprozess ableiten. Auch an anderer Stelle betont WALTHER (1984, S. 28) die Überprüfung und Bewertung mündlicher sowie schriftlicher Lösungen als auch Bearbeitungswege zu Aufgaben. Die zentrale Bedeutung von Aufgaben als Instrumente des Mathematikunterrichts wird deutlich und motiviert für eine intensive Auseinandersetzung mit dem Instrument der Aufgabenanalyse (siehe Kapitel 6).

„Es wäre wünschenswert wenn das Thema Aufgaben - etwa auch im Zusammenhang mit Fragen der Evaluation - aufgrund seiner Bedeutung für den Schulalltag ein stärkeres Forschungsinteresse in der Mathematikdidaktik auf sich ziehen würde.“
(WALTHER 1984, S. 29)

In zahlreichen mathematikdidaktischen Publikationen ist der Ausdruck ‘gute Aufgabe’ zu finden. Häufig dient dieser Begriff als Leitwort für die angestrebte Qualitätsentwicklung des Mathematikunterrichtes, wobei der Einsatz ‘guter Aufgaben’ unweigerlich mit einem guten Mathematikunterricht gleichgesetzt wird. Allerdings ist die Qualität von Aufgaben nicht ausschließlich anhand formaler Merkmale zu bestimmen. Der Einsatz der Aufgabe und der Umgang mit ihr durch den Lehrer sowie die Reaktionen der Schüler müssen in die Beurteilung einbezogen werden. Erst diese Kombination aus dem Umgang mit der Aufgabe und ihrem Potential führen zu einer Einschätzung als ‘gute Aufgabe’ (vgl. GRANZER/

WALTHER 2008, S. 9f). Der systemische Blick auf Aufgaben im Mathematikunterricht wird geschärft, da Aufgaben im Bewusstsein der vielfältigen inhaltlichen und sozialen Beziehungen beurteilt werden. Dieses Aufgabenverständnis prägt die Planung und Durchführung der anstehenden Untersuchung. Formale und andere Merkmale der Aufgabe, wie zum Beispiel inhaltliche oder kognitive Merkmale, werden mithilfe des entwickelten Modells der Rationalen Aufgabenanalyse untersucht. Die realen Aufgabebearbeitungen der Schüler werden als Umgang mit der Aufgabe gedeutet und analysiert (siehe Abschnitt 6.2).

Die intendierte Funktion der Aufgabe ist bei der Analyse von besonderer Bedeutung und sollte stets einbezogen werden. BÜCHTER und LEUDERS (2005a) formulieren die Frage nach der guten Aufgabe „als Frage nach der für einen bestimmten Zweck *geeigneten* Aufgabe“ (BÜCHTER/LEUDERS 2005a, S. 9). Im weiteren Verlauf der Arbeit wird somit der Begriff der geeigneten Aufgabe verwendet, um die Abhängigkeit der Aufgabenqualität von ihrer Funktion zu unterstreichen.

In der Didaktik der Mathematik werden grundlegende didaktische Funktionen von Aufgaben angeführt. WALTHER (2004, S. 4) unterscheidet das Initiieren von Lernprozessen und das Überprüfen von Lernergebnissen anhand geeigneter Aufgaben. BÜCHTER und LEUDERS (2005a) differenzieren diese Unterscheidung weiter. Sie bezeichnen einerseits Aufgaben zum Lernen und andererseits Aufgaben zum Leisten. Beiden Aufgabenklassen werden weiterführende Typen von Aufgaben zugeschrieben, die jeweils unterschiedliche Anforderung bedingen¹¹. Neben der didaktischen Klassifikation einer Aufgabe als Lern- oder Leistungsaufgabe besitzen Aufgaben aufgrund der bildungspolitischen Entwicklungen eine Funktion als Instrument der Qualitätsentwicklung (vgl. WALTHER 2004, S. 5f). Nach WALTHER (2004, S. 2) kann eine Beurteilung von Aufgaben durchaus ambivalent ausfallen, wobei er die Abhängigkeit der Analyse von den berücksichtigten Qualitätsmerkmalen und intendierten Funktionen der Aufgaben anführt. Er weist auf die konstruktive Nutzung dieser Tatsache hin, die als Chance für einen flexiblen Umgang mit Aufgaben verstanden werden sollte.

Unabhängig von der Funktion einer Aufgabe sind aus den Bearbeitungen prinzipielle Erkenntnisse über den spezifischen Lernstand der Schüler ablesbar. SJUTS (2007) beschreibt die Chancen von Aufgaben und ihren Bearbeitungen folgendermaßen.

„Aufgaben sind vielfältig einsetzbar. Sie dienen der Überprüfung des Lernerfolgs. Sie dienen aber auch der Gestaltung des Lernprozesses. Sie erlauben stets einen Einblick in die individuellen Lernwege und Lernergebnisse.“

(SJUTS 2007, S. 48)

¹¹ Nach den Autoren umfassen Aufgaben zum Lernen folgende Tätigkeiten: Erkunden/Entdecken/Erfinden, Sammeln/Sichern/Systematisieren und Üben/Anwenden (vgl. BÜCHTER/LEUDERS 2005a, S. 114ff). Aufgaben zum Leisten beschreiben Aufgaben zur Diagnose, Aufgaben zur Leistungsbewertung sowie Aufgaben zum Erleben des Kompetenzzuwachses (vgl. BÜCHTER/LEUDERS 2005a, S. 165ff).

4.3 Aufgaben im Spannungsfeld von Diagnose und Leistungserhebung

Aus den zuvor formulierten Überlegungen ergibt sich, dass die Einschätzung einer Aufgabe in Abhängigkeit von ihrer Funktion unterschiedlich ausfallen kann. LEUTNER ET AL. (2008, S. 169) halten fest, dass Aufgaben zwar verschiedenen Zwecken dienen, sich formal jedoch trotzdem ähneln können. So ist es einer Aufgabe nicht anzusehen, „ob sie eine Lernaufgabe oder eine Testaufgabe ist“ (LEUTNER ET AL. 2008, S. 169). Eine Aufgabe kann jeweils für beide Funktionen optimiert werden. Mit Blick auf Leistungsaufgaben interessieren dann primär die psychometrischen Grundlagen der Aufgabe, während bei einer Lernaufgabe die Erfassung der Lernprozesse in den Mittelpunkt rückt (vgl. ebd.). THONHAUSER (2008, S. 15) betont eine notwendige Differenzierung bei der Darstellung von Aufgaben und weist auf die didaktische Bedeutung der Funktionen hin.

Die verschiedenen Aspekte von Aufgaben lassen sich in anhand eines grafischen Modells visualisieren. Hierzu werden der übergeordnete Aspekt der mathematischen Leistungsmessung sowie die Funktionen entwicklungsorientierte Diagnose und vergleichende Leistungserhebung einander gegenüber gestellt. Im Zentrum dieses Dreiecks stehen die Aufgaben, die als Instrumente beider Funktionen dienen und somit eine besondere Bedeutung haben.

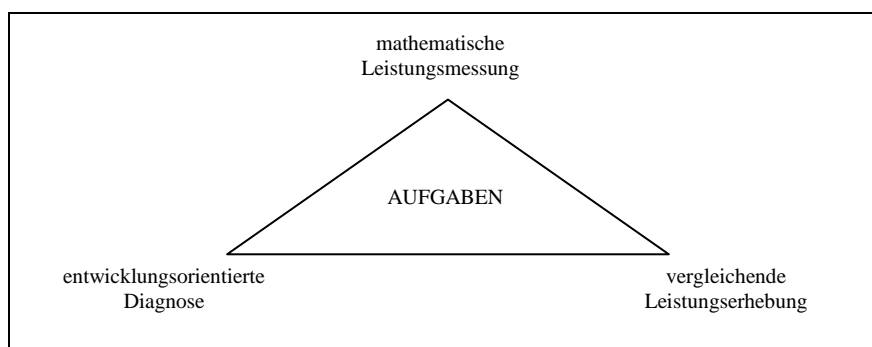


Abbildung 3: Aufgaben im Spannungsfeld Diagnose und Leistungserhebung.

Anhand der Darstellung werden Beziehungen zwischen den vier abgebildeten Größen transparent. So kann speziell das Spannungsfeld zwischen der entwicklungsorientierten Diagnose und den vergleichenden Leistungserhebungen im Mathematikunterricht thematisiert werden. Die eingesetzten Aufgaben dienen hier als Instrumente für die Erfassung der Lernstände. Doch kann ein und dieselbe Aufgabe beide Intentionen gleichermaßen erfüllen?

Darüber hinaus weist Felix WINTER (2008, S. 118ff) auf die Besonderheiten des Prüfungsarrangements hin. Der Begriff umfasst neben den gestellten Aufgaben und den damit verbundenen Anforderungen ebenso die Auswertung der Ergebnisse. WINTER bezeichnet die klausurähnlichen Prüfungsarrangements als eingeschränkt. Einerseits bemängelt er den Einsatz zumeist einseitiger Aufgabenformate, sodass die Möglichkeit der Verwendung konstruktiver Aufgaben in schriftlichen Leistungserhebungen kaum genutzt wird. Zum Anderen kritisiert er das zugrundeliegende Motiv der Leistungseinschätzung entlang einer (Noten)Skala. Er fordert das Bemühen um eine differenzierte Beschreibung des Lernstan-

des, bei der neben den Ergebnissen die „realen Lösungshandlungen“ (WINTER 2008, S. 120) und Bearbeitungen mehr beachtet werden sollten. Seine Kritik an Prüfungsarrangements wird von HAGEMEISTER (2000) weitergeführt:

„Es ist nahezu unvermeidbar, dass mit dem Einsatz standardisierter Tests Faktenwissen und Fertigkeiten in den Vordergrund rücken. Je größer die Bedeutung der Tests ist (etwa für den weiteren Bildungsweg), umso eher werden geistige Selbstständigkeit und Kreativität an Gewicht verlieren, weil sie sich in den Testergebnissen in der Regel nicht widerspiegeln.“

(HAGEMEISTER 2000, S. 5)

Trotz dieser Kritik gesteht HAGEMEISTER (2000, S. 12) Tests und Prüfungen bei hinreichender curricularer Validität durchaus Potential als Diagnoseinstrumente zur Identifikation existierender Defizite der einzelnen Schüler zu. LEUDERS (2006, S. 78f) bezeichnet einen Test als psychologisches Verfahren, wenn dieser aufgrund der im Vorfeld zu definierenden Merkmale vorrangig Leistungskennzahlen misst und somit lediglich begrenzte Leistungsaspekte wiedergeben kann. Idealerweise liegt der Testkonstruktion ein Kompetenzstufenmodell zugrunde, das eine Einordnung von Schülergruppen oder einzelnen Schülern in die jeweils erreichten Kompetenzstufen ermöglicht. LEUDERS bezeichnet diese eingeschränkte Form der Diagnose als eine Art der Ferndiagnose. Auch WOLLRING (2006, S. 64) befasst sich im Rahmen der Schulleistungsstudien mit der diagnostischen Nutzung vergleichender Leistungserhebungen. Er bemängelt, dass es sich dabei ausschließlich um schriftliche Bearbeitungen und Äußerungen der Schüler handelt. Aufgrund der vorliegenden Bearbeitungsprodukte steht weitestgehend Output im Fokus, wobei lediglich eine Momentaufnahme geboten werden kann. In Anlehnung an LEUDERS (2006, S. 79) wird angeführt, dass Tests zur Erhebung von Gruppenleistungen und deren Positionierung innerhalb des definierten Leistungsspektrums durchaus geeignet sein können. Eine entwicklungsdiagnostische Funktion mit dem Ziel der Optimierung des individuellen Lernens ist jedoch auf der alleinigen Grundlage von Prüfungs- und Testergebnissen in Frage zu stellen. WOLLRING (2006, S. 64) führt weiter aus, dass die Ergebnisse psychometrisch basierter Tests keine konkreten Handlungsunterstützungen für die Schulpraxis und die unterrichtenden Lehrer enthalten. Es bleibt also zunächst offen, inwiefern eine vergleichende Leistungserhebung zugleich die Funktion der entwicklungsorientierten Diagnose erfüllen kann.

„Es geht daher nicht mehr um die grundsätzliche Frage für oder gegen Tests, sondern darum, Testverfahren gezielt nach Fragestellung und Ziel der Diagnose einzusetzen. Lernstandsdiagnosen kann man mit oder ohne Hilfe von Tests durchführen. Subjektive Beobachtungen, Einschätzungen und standardisierte Tests können sich aber durchaus sinnvoll ergänzen, wenn sie bestimmte Voraussetzungen erfüllen und aufeinander aufbauen.“

(PARADIES ET AL. 2008, S. 86)

Wie bereits in Abschnitt 3.1 ausgeführt, sind Tests und Prüfungen weitestgehend produktorientiert, bestimmen lediglich die gezeigte Leistung eines Kindes zu einem bestimmten Zeitpunkt und sind daher als diagnostisches Instrument vorwiegend der Strategie der Statusdiagnostik zuzuordnen. Sie folgen dem Konzept der Selektions- und Auslesediagnostik und erfüllen somit die Funktion der Erteilung von Qualifikationen. Die entwicklungsorien-

tierte Diagnose beabsichtigt hingegen eine Abstimmung des Unterrichts mit den individuellen Leistungen und Fähigkeiten des Schülers, um Handlungsentscheidungen für ein optimales Weiterlernen des einzelnen Kindes treffen zu können (siehe Abschnitt 2.2.1). Den mathematikdidaktischen Anspruch der für die Diagnose verwendeten Aufgaben formuliert RICKEN (2003) eingängig:

„Wir wollen uns hier mit der Frage beschäftigen, wie qualitative Aussagen über den erreichten Stand der Entwicklung mathematischer Kompetenzen getroffen werden können. Dahinter steckt die Idee, dass wir Kindern dann besser helfen können, wenn wir etwas mehr darüber wissen, welche Prozesse beim Lösen von Aufgaben ablaufen, über welche Voraussetzungen Kinder verfügen, welche Einsichten ihnen fehlen. Nicht die Punktmenge insgesamt, sondern die Entwicklungsleistung des Kindes, die in der Bewältigung der verschiedenen Anforderungen steckt, interessiert im Weiteren.“
(RICKEN 2003, S. 265)

In der mathematikdidaktischen Fachliteratur wird die Auffassung vertreten, dass Tests und Prüfungen nicht nur für das Konzept der Selektions- und Auslesediagnostik, sondern durchaus für das Konzept der Modifikations- und Förderdiagnostik genutzt werden können. KÖLLER ET AL. (2010, S. 3f) fordern von einem Test mit förderdiagnostischem Potential, dass dieser in allen Kompetenzgruppen das gesamte Leistungsspektrum einer Jahrgangsstufe abbilden müsse. Die Initiative SINUS¹² schärft das Bewusstsein über die erforderliche Veränderung von Aufgaben und ihrer Konstruktion in Leistungserhebungen. Neben der Funktion der Leistungsmessung erwächst der diagnostische Anspruch einer Rückmeldung des individuellen Lernzuwachses, sodass eine Konsequenz „in der Konstruktion anderer Prüfungs- beziehungsweise Testaufgaben [besteht]. So sind z.B. Aufgaben, die mehrere Lösungswege zulassen, eher dazu geeignet, individuelle Fähigkeiten zu erfassen und einzelnen Schülern positive Rückmeldung zu geben“ (DAVIER/HANSEN 1998, S. 12).

Zu Recht wird die Ausrichtung der Aufgaben in Leistungserhebungen nach statistischen und nicht nach fachlichen sowie fachdidaktischen Kriterien kritisiert. SCHERER und MOSER OPITZ (2010, S. 36) stellen fest, dass der psychometrischen Ausrichtung häufig ein eingeschränktes Verständnis von mathematischer Kompetenz zugrundeliegt. Sie betonen die Bedeutung der Aufgaben und deren Darbietung zu diagnostischen Zwecken „und zwar unabhängig vom Diagnosekonzept und vom Grad der Standardisierung des Instruments“ (SCHERER/MOSER OPITZ 2010, S. 38). Aufgaben sollten nicht ausschließlich aus testtheoretischer Perspektive betrachtet und konstruiert werden. Ergänzend soll stets eine mathematikdidaktische Perspektive eingenommen werden. Eine intensive Beschäftigung mit den zum Einsatz kommenden Aufgaben wird einhellig als lohnenswert erachtet. Je ausgereifter und überlegter sich die Konstruktion der Aufgaben erweist, „desto besser gelingt es mit ihrer Hilfe, die mentalen Konstruktionen sichtbar, identifizierbar und beeinflussbar zu machen“ (SJUTS 2002, S. 470). Im Vordergrund können dann nicht mehr ausschließlich die von den Schülern produzierten Lösungen stehen. Eine besondere Bedeutung erhalten dann die zu den Ergebnissen führenden Bearbeitungswege.

¹² SINUS ist ein Projekt zur Steigerung der Effizienz des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichtes in der Grundschule und der Sekundarstufe I. Das Programm startete 1998 bundesweit mit 180 Schulen und wurde fünf Jahre später in das Anschlussprojekt SINUS-Transfer überführt.

„Bei Lernaufgaben und mehr noch bei Aufgaben mit diagnostischer Fragestellung interessieren auch die Lösungshandlungen, hier also die Rechenwege.“
(WINTER 2008, S. 116)

Die in Leistungserhebungen häufig eingesetzten Multiple-Choice-Aufgaben gehören zu dem Antwortformat der Mehrfachwahlausgaben (siehe Abschnitte 3.2.3 und 6.2.2). An dieser Stelle erfolgt ein Überblick über die kontroverse Diskussion eines sinnvollen Einsatzes aus diagnostischer Sicht.

KNOCHE und LIND (2000, S. 20) beschreiben Multiple-Choice-Aufgaben als zweckmäßiges Diagnoseinstrument, sofern sie der folgenden schrittweisen Entwicklung unterzogen werden. Im Vorfeld des Testeinsatzes wird die Aufgabenstellung als freies Antwortformat einer Probandengruppe vorgelegt. Die Auswertung der Antworten identifiziert denkbare Fehlvorstellungen bei der Aufgabenbearbeitung, woraus sinnvolle Distraktoren erarbeitet werden können. Unklar bleibt jedoch die diagnostische Aussagekraft von Multiple-Choice-Aufgaben. Aufgrund der durch den Schüler gewählten Auswahlantworten entsteht ein Eindruck seiner Vorstellungen und Kenntnisse. Allerdings bleibt der zu den Ergebnissen führende Bearbeitungsweg unbeachtet. Die üblicherweise verwendeten Multiple-Choice-Aufgaben können demnach lediglich einen eingeschränkten prozessorientierten Blick auf die vorhandenen Kompetenzen des Schülers gewähren.

„Multiple-Choice-Aufgaben sind zwar aus guten Gründen vor allem in Leistungsuntersuchungen üblich, aber in dieser Form offensichtlich nur begrenzt für eine Diagnose geeignet. Der Rückschluss vom gesetzten Kreuz auf mögliche Kompetenzen oder Fehlvorstellungen ist derart unsicher, dass hier betont werden muss, dass es sich höchstens um eine Diagnose in einem probabilistischem Sinn mit großer Unsicherheit handeln kann.“
(BÜCHTER/LEUDERS 2005a, S. 169)

BÜCHTER und LEUDERS (2005b, S. 16) führen diesen Gedanken weiter. Ein Verzicht auf Multiple-Choice-Aufgaben erhöht den Wert einer Leistungserhebung maßgeblich, da bei offenen Antwortformaten ein breites Spektrum an individuellen Lösungen zugelassen wird.

GRANZER (2006b) entschärft diese Ansicht, indem sie auf die Möglichkeiten einer Multiple-Choice-Aufgabe hinweist. Mit der von ihr als „einfaches Aufgabenformat“ (GRANZER 2006b, S. 19) bezeichneten Variante sind Wissen und Können oder Kenntnisse und Fertigkeiten messbar. Derartige Bausteine sind zumeist für die Lösung komplexer Problemstellungen notwendig, sodass eine Überprüfung der vorhandenen Werkzeuge mit Hilfe von Multiple-Choice-Aufgaben durchaus realisierbar ist. Das Erfassen kreativer Strategien oder kommunikativer Kompetenzen hingegen ist mittels Multiple-Choice-Aufgaben nur bedingt möglich (vgl. ebd.), sodass eine entwicklungsdiagnostische Nutzung dieses Antwortformates in Frage gestellt wird.

SJUTS (2008, S. 60) betont den Bedarf geeigneter Aufgaben und Antwortformate für die Diagnose von Kompetenzen und Lernprozessen. Herkömmliche Aufgaben berücksichtigen lediglich ausgewählte Kompetenzen. In diesem Zusammenhang ist ebenfalls das verwendete Antwortformat der Aufgabe zu reflektieren, anhand dessen ein Schüler Lösungen und

Bearbeitungen präsentiert (siehe Abschnitt 3.2.3). Davon hängt das Beurteilungsverfahren ab, welches letztlich zu den Ergebnissen und Einschätzungen der Kompetenzen führt.

„Bei den meisten diagnostischen Prüfverfahren wird lediglich registriert, ob das Kind die Aufgaben richtig löst oder nicht. Solch ein Auswertungsmodus ist für Förderzwecke nicht ausreichend, weil das Diagnoseergebnis keinerlei Auskunft darüber gibt, woran das Kind scheitert.“

(KRETSCHMANN 2006, S. 45)

Die vorliegende Arbeit konzentriert sich auf Aufgaben einer vergleichenden Leistungserhebung der Primarstufe, sodass die schriftlichen Bearbeitungen der Schüler eine Grundlage der Untersuchung darstellen. Anhand der Schriftdokumente können lediglich die Performanzen des Aufgabenbearbeiters sichtbar werden. Aufgrund des gezeigten Verhaltens in den schriftlichen Bearbeitungen werden Rückschlüsse auf die Kompetenzen der Schüler gezogen (siehe Abschnitt 3.1). Um diese Rückschlüsse leisten zu können, braucht es Beurteilungsvorgaben, welche die vorhandenen Schülerbearbeitungen fassbar machen und eine Einordnung hinsichtlich der Kompetenzen ermöglichen.

Aus fachdidaktischer Sicht ist es also unbedingt notwendig, neben den beabsichtigten Lösungen auch weitere Bearbeitungswege und Fehllösungen zu bedenken. Erst dann werden Rückschlüsse von der gezeigten Performanz auf die dahinterliegenden Denkwege und Kompetenzen möglich (siehe ebd.). MEYERHÖFER (2005c, S. 74) weist darauf hin, bei der Beurteilung einer Testaufgabe unbedingt auch die möglichen und nicht nur die gewünschten Lösungen in den Blick zu nehmen. Dann lassen sich vielseitig orientierte und aufgabenspezifische Bewertungsschemata konstruieren, die eine sinnvolle Beurteilung der Aufgabenbearbeitung ermöglichen und von einer einseitigen Punktvergabe wegführen (vgl. BÜCHTER/LEUDERS 2005b, S. 17ff).

4.4 Für die weitere Arbeit

Aufgaben gelten als das zentrale Element im Mathematikunterricht, sodass Mathematik im positiven Sinne als Aufgabenfach verstanden wird. Nach heutigem Verständnis transportieren Aufgaben neben den Inhalten auch die Anforderungen der Mathematik, womit sich von der stofforientierten und lehrerzentrierten Aufgabendidaktik der Traditionellen Mathematik distanziert wird.

In der Mathematikdidaktik werden Leistungsaufgaben und Lernaufgaben unterschieden, wobei formal ähnliche Aufgaben durchaus für beide Zielsetzungen eingesetzt werden. Im Fall der untersuchten Orientierungsarbeit soll das Aufgabenset sowohl die Zielsetzung der Leistungserhebung als auch der Diagnose erfüllen (siehe Abschnitt 4.5.1). In der anstehenden Aufgabenanalyse werden demnach beide Untersuchungsperspektiven gleichermaßen berücksichtigt.

Die Untersuchung und Kennzeichnung sollte darum aus multiperspektivischer Sicht erfolgen, so dass ein entsprechendes Modell der Analyse erarbeitet wird. Im mathematikdidaktischen Verständnis der vorliegenden Arbeit ist eine Analyse der Aufgaben an sich unzu-

reichend. Die in der vergleichenden Leistungserhebung gestellten Aufgaben transportieren die Intentionen der Aufgabenautoren, wobei die Aufgabenbearbeitungen der Grundschüler als Reaktion auf die Aufgaben interpretiert werden. Aus entwicklungsdiagnostischer Sicht sind die realen Aufgabenbearbeitung unbedingt in die Untersuchung einzubeziehen, da Rückschlüsse auf das Denken der Kinder, aber ebenso auf zu reflektierende Aufgabenmerkmale möglich werden.

4.5 Die Aufgaben der hessischen Orientierungsarbeit 2005 - ein Beispiel vergleichender Leistungserhebung in der Grundschule

Im Zentrum der vorliegenden Untersuchung stehen das Aufgabenset und über 2000 zugehörige Schülerbearbeitungen einer hessischen Orientierungsarbeit im dritten Schuljahr. Als ein Beispiel vergleichender Leistungserhebungen wird der Kontext dieser Orientierungsarbeit sowie die Aufgaben aus dem Jahr 2005 in den folgenden Abschnitten vorgestellt.

4.5.1 Kontext, Inhalte und Anforderungen

Im Zuge der bildungspolitischen Entwicklungen formuliert das Hessische Kultusministerium die Qualitätsentwicklung und -sicherung als eine „gemeinsame[r] Verpflichtung von Lehrkräften, Schulleitung und Schulaufsicht“ (HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 5). Die Orientierungsarbeiten dienen als Instrument der externen Evaluation, das Impulse für die Weiterentwicklung der jeweiligen Schule liefern soll. Sie werden als „landeseinheitliche Klassenarbeiten“ (HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM, 2007) in den beiden Kernfächern Mathematik und Deutsch bezeichnet.

In den Schuljahren 2002/2003 und 2003/2004 erfolgte zunächst eine Pilotphase mit 57 Schulen, um erste Erfahrungen bezüglich Durchführung und Aufgabenformaten zu erhalten. Seit dem Schuljahr 2004/2005 wurden die Orientierungsarbeiten verbindlich und flächendeckend an allen rund 1170 hessischen Grundschulen eingeführt.

Mit dem Schuljahr 2009/10 wurden die hessischen Orientierungsarbeiten in die Lernstandserhebungen in der Jahrgangstufe 3 überführt. In Kooperation aller 16 Bundesländer werden seitdem unter Verantwortung des INSTITUTES FÜR QUALITÄTSENTWICKLUNG einheitlich konzipierte vergleichende Leistungserhebungen durchgeführt. Die bundesweiten Lernstandserhebungen sind im Vergleich zu dem Konstrukt der hessischen Orientierungsarbeiten ein normiertes und standardisiertes Verfahren. Sie können demnach als Tests bezeichnet werden (siehe Abschnitt 3.2). Jedoch sind auch nach der Überführung die nachfolgend angeführten Zielsetzungen weiterhin zutreffend.

Die Orientierungsarbeiten waren weder als Instrument zur Auslese, noch als Klassenarbeiten gedacht. Ebenso sollten sie keinen Einfluss auf die Übergangsempfehlungen nach der vierten Klasse besitzen (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 6f).¹³ Bei

¹³ Diesen Auflagen wurde nicht immer Folge geleistet. Es sind durchaus Schulen bekannt, die durchzuführende Klassenarbeiten durch die jährliche Orientierungsarbeit ersetzen und diese benoteten. Die Absichten der Leistungserhebung sowie ein notwendig sensibler Umgang mit der Orientierungsarbeit wurden an einigen Schulen somit keineswegs umgesetzt. Diese Tatsache kann durchaus als ein Indiz für eine nicht transparente und ebenso wenig ausreichende Kommunikation angesehen werden.

ihrer offiziellen Einführung bezeichnete die damalige Kultusministerin Karin WOLFF (2005b) die Orientierungsarbeiten als wichtiges Diagnoseinstrument, deren "Ergebnisse (sollen) den Lehrerinnen und Lehrern helfen [sollen], Stärken und Schwächen der Kinder besser zu erkennen und sie noch gezielter zu fördern" (HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005b). Diese Aussage wurde in den Ausführungen zu den hessenweiten Orientierungsarbeiten jährlich wiederholt. Sie wurden als Diagnoseinstrument deklariert, das den Lernstand der Kinder erfasst und eine Leistungsbestimmung der Lerngruppe ermöglichen soll. Auch die Leistung des einzelnen Kindes und der individuelle Förderbedarf sollten aus den Ergebnissen der Orientierungsarbeit abzuleiten sein. Jürgen BANZER (2008) beschrieb die Besonderheit der Orientierungsarbeit als ergänzende Maßnahme der Lernstandserhebung für die Förderung des einzelnen Kindes (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2008). Sowohl WOLFF als auch BANZER betonten somit eine entwicklungsdiagnostische Funktion der Orientierungsarbeit.

Es standen sich also die Funktionen der Orientierungsarbeit als Instrument der Entwicklungsdiagnose und gleichzeitig als Instrument zur Leistungserhebung unterschiedlicher Lerngruppen gegenüber. Die Aufgaben sollten einerseits Ergebnisse zur Vergleichbarkeit der Leistung produzieren und andererseits konkrete Informationen für den weiteren Lernverlauf des einzelnen Schülers bieten.

Das Hessische Kultusministerium verfolgte mit den Orientierungsarbeiten noch weitere Zielsetzungen¹⁴. Erfolge und Defizite des eigenen Unterrichts sollten deutlich werden, um eine gezielte Förderung der Kinder im letzten Grundschuljahr anbieten zu können (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S.6). Hinweise oder Kriterien für eine solche Analyse wurden jedoch nicht angeboten. Weiter transportierte die Orientierungsarbeit neue Aufgabenformate und aktuelle fachdidaktische Grundsätze, über welche die Kollegien sich austauschen und diskutieren sollten. In den Ausführungen zu den hessischen Orientierungsarbeiten wurde weiterhin die „Möglichkeit, sich der fach- und methodenbezogenen Qualität der unterrichtlichen und diagnostischen Arbeit mithilfe eines externen Instruments zu versichern und ggf. erforderliche Konsequenzen daraus abzuleiten“ (HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 6), formuliert.

Die Orientierungsarbeit Mathematik wurde Mitte des zweiten Schulhalbjahres des dritten Schuljahres in einem vorgegebenen Zeitfenster geschrieben. Auch nach der Überführung in die bundesweiten Lernstandserhebungen hat sich an den nachfolgend skizzierten Eckpunkten der Durchführung nichts geändert. Für die Bearbeitung der Aufgaben standen den Drittklässlern 45 Minuten zur Verfügung. Die Reihenfolge der Bearbeitung war beliebig. Unbekannte Begriffe und Sprechweisen in den Aufgabenformulierungen durften vom Lehrer erläutert werden, konkrete Lösungshinweise waren jedoch zu vermeiden.

Die Auswertung der einzelnen Orientierungsarbeiten erfolgte durch die Fachlehrer auf Grundlage eines vorgegebenen tabellarischen Kriterienkatalogs. Durch die Berücksichtigung nur einer Lösungsvariante zu jeder Aufgabe wurde das Potential einiger Aufgaben

¹⁴ Die dargestellten Zielsetzungen der hessischen Orientierungsarbeiten beziehen sich nicht ausschließlich auf die Durchführung im Jahr 2005. Bis 2009 sind die dargestellten Formulierungen weitestgehend unverändert in den jährlichen Ausführungen zu lesen.

sicher nicht ausgeschöpft. Ebenso boten die ungenauen Bewertungsvorgaben Beurteilungsspielräume. Die Ausführungen zeigen, dass sowohl die Anforderung der Durchführungsobjektivität als auch der Auswertungsobjektivität nicht erfüllt wurden.

Die Ergebnisse wurden auf einem anonymisierten Klassenbogen unter Angabe der jeweils erreichten Punktzahlen gesammelt. Dieser Überblick gliederte sich nach den einzelnen Aufgaben. Der ausgefüllte Klassenbogen wurde an das Hessische Kultusministerium in Wiesbaden übermittelt, wo eine elektronische Gesamtauswertung erfolgte. Die bearbeiteten Aufgabenbögen verblieben an den Schulen. Es folgte eine quantitative Ergebnisrückmeldung in Form tabellarischer Übersichten. Abgebildet wurden die klasseninternen und landesweiten Punktzahlen und Lösungshäufigkeiten. Mit wenigen Zeilen wurden die präsentierten Werte deskriptiv erläutert, sodass die offizielle Auswertung nicht mehr als vier Seiten umfasste.

4.5.2 Aufgabenset der hessischen Orientierungsarbeit 2005

Die Aufgabensets wurden jährlich auf Grundlage des Hessischen Rahmenplans Grundschule und unter Berücksichtigung der Bildungsstandards Mathematik für die Primarstufe durch eine Arbeitsgruppe (Mitglieder des Hessischen Kultusministeriums, des Institutes für Qualitätsentwicklung, der Staatlichen Schulämter sowie Schulleiter und Grundschullehrer) erstellt. Die neun Aufgaben wurden in ein Raster aus drei Anforderungsbereichen und drei Arbeitsfeldern eingeordnet. Das Hessische Kultusministerium unterschied die drei Anforderungsbereiche der Reproduktion, der Verknüpfung sowie Verallgemeinerung und der Reflexion. Die Anforderung der Reproduktion erfordert die Anwendung mathematischer Fertigkeiten, die Präsentation von Faktenwissen und den Einsatz bekannter Arbeitstechniken. Das Herstellen von Zusammenhängen und das Schaffen von Querverbindungen steht im Mittelpunkt des Anforderungsbereiches Verknüpfung. Letztlich fordert der Anforderungsbereich der Verallgemeinerung und Reflexion zu einer selbstständigen Strukturierung sowie dem Entwickeln von Strategien heraus. Ebenso sollen mathematische Aussagen oder eigene Bearbeitungen beurteilt oder Ergebnisse verallgemeinert werden (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 45). Somit orientierten sich die in der Hessischen Orientierungsarbeit Mathematik beschriebenen Anforderungsbereiche grundsätzlich an den Definitionen der Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich (siehe Fußnote 6). Die Inhaltsbereiche der Aufgaben, genannt Arbeitsfelder, orientierten sich ausschließlich am Hessischen Rahmenplan Grundschule. Während die Bildungsstandards Mathematik für die Primarstufe fünf inhaltliche mathematische Kompetenzbereiche unterscheiden¹⁵, wird hier lediglich zwischen den drei Inhaltsbereichen des Rahmenplans - Mengen und Zahlen, Größen und Sachrechnen sowie Raum und Form - unterschieden. Eine grundlegende Orientierung an den Bildungsstandards Mathematik für die Primarstufe ist somit nicht erkennbar.

¹⁵ Bei den inhaltlichen mathematischen Kompetenzen handelt es sich um die Bereiche Zahlen und Operationen, Muster und Strukturen, Größen und Sachrechnen, Raum und Form sowie Daten, Häufigkeit und Wahrscheinlichkeit.

Die nachfolgende Tabelle bildet die offizielle Einordnung des Aufgabensets der hessischen Orientierungsarbeit 2005 ab. Ausgehend von den durch das Hessische Kultusministerium formulierten Inhalten und Ansprüchen der Aufgaben ist der Schwerpunkt des Aufgabensets im Anforderungsbereich Verknüpfung gesetzt. Auch scheinen die Inhaltsbereiche der neun Aufgaben relativ homogen angesprochen zu werden. Die Rationale Aufgabenanalyse wird zeigen, ob sich diese Zuordnungen bestätigen und welche Schwierigkeiten die jeweiligen Aufgaben enthalten.

	Reproduktion	Verknüpfung	Verallgemeinerung/ Reflexion
Mengen und Zahlen	A 4a	A 2, A 3, A 4b	A 4c
Größen und Sachrechnen	A 7	A 6	A 8
Raum und Form	A 1, A 5	A 9	---

Tabelle 1: Offizielle Einordnung des Aufgabensets der hessischen Orientierungsarbeit 2005 in Inhalts- und Anforderungsbereiche.

Im Anschluss wird das vollständige Aufgabenset der untersuchten Hessischen Orientierungsarbeit präsentiert und auf Grundlage der offiziellen Handreichungen erläutert. Die Formulierungen und Kommentare sind diesen Ausführungen entnommen (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 49ff). Die Bezeichnungen der Aufgaben sind auf die Autorin der vorliegenden Arbeit zurückzuführen und werden im Verlauf der weiteren Arbeit durchgängig verwendet.

Kapitel 4 - Aufgaben

A1 „Messen“

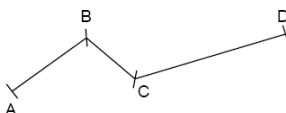
Aufgabe 1

a) Miss die Wege mit deinem Lineal. Trage die Längen ein!

von A nach B: _____

von B nach C: _____

von C nach D: _____



b) Der Weg soll bis zu einem Punkt E weiter gehen. Die Entfernung von D nach E soll 2,7 cm betragen. Zeichnel!

Arbeitsfeld: Geometrie
 Anforderungsbereich: Reproduktion
 Aufgabenstellung: - Strecken messen und Messergebnis als Maßzahl mit Einheit notieren
 - Strecke vorgegebener Länge zeichnen

A2 „Stellenwerte“

Aufgabe 2

Welche Zahl ist das? Kreuze an!

3Z 9H 20E

392

932

950

3920

9320

Arbeitsfeld: Mengen und Zahlen
 Anforderungsbereich: Verknüpfung
 Aufgabenstellung: - Stellenwerte erkennen und richtige Zahl zuordnen

A3 „Überschlag“

Aufgabe 3

Bei welchen Aufgaben liegt das Ergebnis unter 500? Überschlage und kreuze an!

235 + 289

803 - 321

395 + 68

781 - 247

143 + 319

997 - 486

Arbeitsfeld: Mengen und Zahlen
 Anforderungsbereich: Verknüpfung
 Aufgabenstellung: - mit Hilfe eines Überschlags (keine genaue Rechnung!) bei Additions- und Subtraktionsaufgaben entscheiden, ob eine vorgegebene Zahl über- beziehungsweise unterschritten wird

A4 „Hundertertafel“

Aufgabe 4

a) Trage die fehlenden Zahlen in die Hundertertafel ein!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31		33	34	35	36	37	38	39	40
41		43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62		64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	89	90	
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Julia addiert in jeder Zeile alle Zahlen:

1. Zeile: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$

2. Zeile: $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 155$

3. Zeile: $21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 255$

Welches Ergebnis erhält sie in der 6. Zeile?

c) Julia erkennt: „Es kommen bei jeder Zeile immer 100 dazu.“ Erkläre, warum es immer 100 mehr werden!

Teilaufgabe 4a)
 Arbeitsfeld: Mengen und Zahlen
 Anforderungsbereich: Reproduktion
 Aufgabenstellung: - fehlende Zahlen in die Hundertertafel eintragen

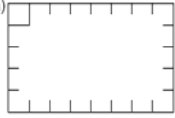
Teilaufgabe 4b)
 Arbeitsfeld: Mengen und Zahlen
 Anforderungsbereich: Verknüpfung
 Aufgabenstellung: - strukturierte Aufgabenfolge gedanklich fortsetzen und Zeilensumme ermitteln

Teilaufgabe 4c)
 Arbeitsfeld: Mengen und Zahlen
 Anforderungsbereich: Verallgemeinerung und Reflexion
 Aufgabenstellung: - Struktur einer Aufgabenfolge erkennen und verallgemeinern

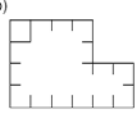
Kapitel 4 - Aufgaben

A5 „Quadrate in Figur“

Aufgabe 5
Wie viele kleine Quadrate passen in die Figuren? Schreibe zu jeder Figur eine passende Rechnung und gib das Ergebnis an!

a) 

Rechnung: _____
 Quadrate

b) 

Rechnung: _____
 Quadrate

Arbeitsfeld:

Anforderungsbereich:

Aufgabenstellung:


Geometrie


Reproduktion

- vorgegebene Flächen (in der Vorstellung) mit Einheitsquadraten ausfüllen, Anzahl der Einheitsquadrate berechnen

A6 „Einkaufen“

Aufgabe 6




Uli kauft: 

a) Welche der Fragen kannst du mit den Informationen beantworten? Kreuze an!

- Wie viel Geld hat Uli mitgenommen?
- Wie viel Geld behält Uli übrig?
- Kostet Ulis Einkauf mehr als 5 €?
- Wie viel Geld bekommt Uli zurück?

b) Schreibe eine passende Rechnung und Antwort!
(Es genügt auch ein Überschlag.)



Antwort:

Arbeitsfeld:

Anforderungsbereich:

Aufgabenstellung:

Größen und Sachrechnen

Verknüpfung

- entscheiden, ob gegebene Informationen zur Beantwortung vorgegebener Fragen ausreichen
 - sachangemessene Rechenoperation durchführen und passende Antwort formulieren

A7 „Tabelle“

Aufgabe 7
Die Tabelle zeigt dir, aus welchen Orten die Kinder der Klasse 3a kommen. Trage in die Kästchen die passenden Zahlen ein!

	aus Schöndorf	aus Wiesental	aus Tannenberg
Jungen	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>
Mädchen	<input type="text"/>	<input type="text"/>	<input type="text"/>

Beantworte die Fragen:

a) Wie viele Mädchen sind in der Klasse 3a?

b) Wie viele Kinder kommen aus Schöndorf?

c) Aus welchem Ort kommen die meisten Kinder?

d) Wie viele Kinder hat die Klasse 3a?

Arbeitsfeld:

Anforderungsbereich:

Aufgabenstellung:

Größen und Sachrechnen

Reproduktion

- Informationen aus einer Tabelle ablesen

A8 „Zucker“

Aufgabe 8
In vielen Lebensmitteln versteckt sich Zucker:

	Gewicht	Zuckeranteil
Schokokuss	25 g	15 g
Cornflakes	200 g	18 g
Schokolade	100 g	60 g
1 Flasche Ketchup	800 g	150 g

Paul behauptet: „In Schokolade ist genau so viel Zucker drin wie in Schokoküssen.“

a) Hat Paul Recht? ja nein

b) Begründe deine Antwort!

Arbeitsfeld: Größen und Sachrechnen
Anforderungsbereich: Verallgemeinerung und Reflexion
Aufgabenstellung: - Informationen in der Tabelle zueinander in Beziehung setzen und interpretieren und auf diese Weise eine vorgegebene Aussage beurteilen

A9 „Symmetrie“

Aufgabe 9
Lea hat Papier gefaltet und Figuren ausgeschnitten.

Jetzt hat Lea ihre Figuren aufgeklappt. Aus welchen Faltblättern hat sie diese Figuren geschnitten? Trage die richtigen Buchstaben ein!

Arbeitsfeld: Geometrie
Anforderungsbereich: Verknüpfung
Aufgabenstellung: - Figuren symmetrisch ergänzen und zueinander in Beziehung setzen

4.5.3 Einordnung der hessischen Orientierungsarbeit Mathematik 2005

Die hessische Orientierungsarbeit ist eine Form der vergleichenden Leistungserhebung. Das zentral entwickelte Aufgabenset wurde landesweit zu einem festgelegten Zeitpunkt von allen Kindern der dritten Jahrgangsstufe bearbeitet. Die Leistungserhebungen wurden an den Schulen ausgewertet und die Ergebniswerte anschließend an eine zentrale Institution des Bildungswesens übermittelt. Die hessische Orientierungsarbeit diente der Erfassung des Lernstandes zu einem definierten Zeitpunkt und wird so der Form einer summativen Beurteilung zugeordnet. Somit wird lediglich der statische Aspekt der Leistung als Lernprodukt erfasst, der dynamische Aspekt des Lernprozesses wird nicht berücksichtigt.

Hinsichtlich der drei Ebenen des Bildungssystems nach FEND (siehe Abschnitt 3.3) sollte die hessische Orientierungsarbeit zunächst die Mikroebene des Schülers ansprechen.

Sie wurde als Diagnoseinstrument zur Feststellung des Lernstandes bezeichnet und sollte Aussagen über den individuellen Förderbedarf eines Schülers ermöglichen. Weiterhin wurde die Mesoebene der Klasse und Schule einbezogen, indem Leistungsergebnisse einer gesamten Klasse erhoben werden. Diese konnten wiederum mit den Ergebnissen von anderen Lerngruppen verglichen werden. Ebenso sollte ein Lehrer mit Hilfe des Instrumentes der Orientierungsarbeit Stärken und Schwächen des eigenen Unterrichts analysieren können. Die Ausführungen verdeutlichen die vielfältigen Funktionen der Orientierungsarbeit als Leistungserhebung sowie den dadurch hohen Anspruch an den Umgang mit dieser Prüfung. Einerseits bleibt fraglich, ob ein Aufgabenset die unterschiedlichen Funktionen auf den verschiedenen Ebenen des Bildungssystems zu erfüllen vermag. Andererseits ist kritisch anzumerken, dass die Lehrer neben den wenig detaillierten Anmerkungen zur Auswertung der Arbeit keine Impulse und Hilfestellung für den weiteren Umgang mit den Ergebnissen erhielten. Eine Umsetzung der Zielsetzungen zur schulinternen Entwicklung und die damit angestrebte Funktionalität werden somit in Frage gestellt.

Die Orientierungsarbeit als vergleichende Leistungserhebung ist aufgrund ihrer inhaltlich vielgestaltigen Aufgaben eine heterogene Prüfung. Fachdidaktische Kommentare und spezifische Fehleranalysen fehlen, was die praktische Nutzbarkeit der Ergebnisse in Frage stellt. Ebenso wie MAIER (2007, S. 11) in seiner Untersuchung einer vergleichenden Leistungserhebung das Fehlen nutzbarer Ausführungen und Handreichungen bemängelt, gilt dieses Manko auch für die hessische Orientierungsarbeit.

Es fällt auf, dass der Bezug der Aufgaben zu den Bildungsstandards immer wieder genannt, jedoch bei der Beschreibung und Erläuterung der einzelnen Aufgaben nie ausgeführt wird. Bei der Rationalen Aufgabenanalyse ist hierauf explizit einzugehen, um Aussagen über die inhaltliche Validität formulieren zu können.

Die hessische Orientierungsarbeit Mathematik wird nicht als Test eingeordnet (siehe Abschnitt 3.2). Nach LORENZ (2005, S. 318) sind die Anforderungen bei Vergleichsarbeiten an die Gütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität geringer als bei standardisierten Tests zu setzen. Dennoch darf diese Entlastung nicht ein völliges Außerachtlassen bedeuten. Es muss transparent werden, inwiefern die Ergebnisse der Leistungserhebungen tatsächlich vergleichbar sind und auf welcher Basis Aussagen getroffen werden. Die Handreichungen der hessischen Orientierungsarbeit versuchen, einen gewissen Grad der Durchführungsobjektivität zu wahren. Ob eine entsprechende Umsetzung und Einhaltung dieser Vorgaben durch die verantwortlichen Lehrer stets geschehen ist, bleibt an dieser Stelle jedoch offen.

Die Aufgabenlösungen und Auswertungskriterien (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a) werden aufgrund ihrer Oberflächlichkeit und eingeschränkten Sichtweise kritisch im Rahmen der Untersuchung diskutiert (siehe Teil II und III). Eine Auswertungsobjektivität konnte nicht erreicht werden, was anhand der Untersuchung deutlich wird. Dieses Manko verschärft sich im Aspekt der Interpretationsobjektivität. Die auf den undeutlichen Grundlagen vergebenen und zum Teil subjektiv erteilten Punktzahlen für die Aufgabenbearbeitungen wurden abschließend zu einem Ergebnispunktwert addiert. Inwiefern diese

Ergebnisse tatsächlich vergleichbar sind und die mathematischen Leistungen der Drittklässler widerspiegeln, bleibt anzuzweifeln. Auch die Reliabilität, also die Stabilität der Ergebnisse, ist unklar. Eine statistische Berechnung der Reliabilität ist aufgrund der fehlenden Auswertungsobjektivität und der nicht metrischen Datenbasis unmöglich (siehe Abschnitt 5.2). Ebenso verhält es sich mit Aussagen zur Kriteriums- und Konstruktvalidität, die ebenfalls auf rechnerischen Bestimmungen basieren würden. Die Inhaltsvalidität aus Sicht der Fachdidaktik ist für jede Aufgabe des Aufgabensets spezifisch zu beurteilen. Überlegungen und Ergebnisse hierzu werden im Kapitel zur Rationalen Aufgabenanalyse (siehe Abschnitt 6.2.2) angeführt. Für die Einordnung der klassen- und schulinternen Ergebnisse der hessischen Orientierungsarbeit liegen keinerlei Vergleichsdaten im Sinne einer sozialen Normierung vor. Lediglich hessenweite Vergleichswerte auf Landes-, Schul- und Schulumtsebene in Form der arithmetischen Mittelwerte der Aufgaben werden für die Einschätzung angeboten. Aufgrund der berechtigten Kritik an den Vorgaben der Punktvergabe und der heiklen Berechnung von Mittelwerten auf diesem niedrigen Messniveau wird die Aussagekraft dieser Vergleichswerte angezweifelt. Eine kriteriale Bezugsnorm im Hinblick auf die Ende der Klasse 4 angestrebten Erreichung der Bildungsstandards Mathematik für die Primarstufe setzt eine Einordnung der Aufgaben in Bezug auf die dort formulierten inhaltlichen und allgemeinen mathematische Kompetenzen voraus. Dies ist jedoch, wie bereits angemerkt, von Seiten der Aufgabenautoren nicht geschehen.

TEIL II: DAS EIGENE FORSCHUNGSVORHABEN

5 Die eigene Untersuchung

In der theoretischen Rahmung der Arbeit wurde die herausragende Bedeutung der Aufgaben als Instrumente der vergleichenden Leistungserhebung und der Diagnose dargestellt. Auf dieser Grundlage erfolgt nun die Umsetzung des eigenen Forschungsvorhabens. Zunächst wird die grundlegende Zielsetzung der Arbeit im Hinblick auf die Entwicklung und Anwendung eines multiperspektivischen Modells der Aufgabenanalyse erläutert. Darüber hinaus werden verschiedene Fragen zu den Untersuchungen ausgewählter Aufgaben einer vergleichenden Leistungserhebung formuliert.

Im Anschluss werden die Besonderheiten der untersuchten Datenbasis dargestellt, da es sich hierbei um originale Aufgaben und deren Bearbeitungen einer offiziellen landesweiten Orientierungsarbeit handelt. Nach der Darstellung der ergänzend durchgeführten Interviewstudie schließt sich die methodologische und methodische Einordnung des Untersuchungsvorhabens an. Die vielschichtige Untersuchung gliedert sich in verschiedene Phasen, die in einem abschließenden Abschnitt ausführlich erläutert werden.

5.1 Zielsetzung, Forschungsanliegen und Fragestellungen

Die theoretischen Erörterungen im ersten Teil der Arbeit verdeutlichen das Spannungsfeld zwischen vergleichenden Leistungserhebungen und ihrem Diagnosepotential, wobei die Besonderheiten für den Bereich der Grundschule herausgestellt wurden. Wie in Abschnitt 4.3 angeführt, besitzen die Aufgaben als Instrumente der Leistungserhebung und der Diagnose in diesen Klassenstufen eine besondere Bedeutung.

Zentrales Anliegen der Untersuchung ist eine detaillierte Analyse ausgewählter Aufgaben einer vergleichenden Leistungserhebung der Primarstufe (siehe Abschnitt 5.2.1.3) sowie der hierzu vorhandenen realen Schülerbearbeitungen. Eine umfassende Untersuchung der einzelnen Aufgaben erfordert ein multiperspektivisches Analysemodell, welches die ausführliche Beschreibung unterschiedlicher Aufgabenmerkmale ermöglicht und auf alle ausgewählten Aufgaben gleichermaßen anwendbar ist. Mit dieser Form der Aufgabenanalyse sollen vorhandene Potentiale und Besonderheiten der Aufgaben aufgedeckt werden sowie eine anschließende Kennzeichnung erfolgen. Da aktuell kein Analysemodell für eine derart umfassende Untersuchung von Aufgaben verfügbar ist, wird zunächst die Entwicklung eines angemessenen Modells angestrebt, sodass folgende erste Forschungsanliegen formuliert werden.

1. Entwicklung eines multiperspektivischen Analysemodells zur umfassenden Untersuchung von Aufgaben in vergleichenden Leistungserhebungen und deren Bearbeitungen.

2. Welche Schlussfolgerungen können aus der Anwendung des zweistufigen Modells auf ausgewählte Aufgaben einer vergleichenden Leistungserhebung der Grundschule gezogen werden?

Die nachfolgenden Forschungsanliegen sollen empirische Ergebnisse hinsichtlich einer entwicklungsdiagnostischen Nutzung der Aufgaben und der zugehörigen Aufgabenbearbeitungen liefern. Im Vordergrund stehen eine strukturierte Darstellung der Bearbeitungen zu jeder Aufgabe und eine Kennzeichnung jeder Aufgabe. Der Umfang des vorliegenden Datenmaterials legitimiert eine Kategorisierung der Aufgabenbearbeitungen sowie die Darstellung empirischer Häufigkeiten und Verteilungen. Die angeführten Forschungsanliegen verfolgen prinzipiell eine qualitative Ausrichtung, wobei die Größe des Datensatzes quantitative Spezifizierungen erlaubt.

3. In welcher Form lassen sich die Bearbeitungen der ausgewählten Aufgaben strukturieren?
4. Ist anhand der Ergebnisse der Aufgabenanalysen eine Kennzeichnung der untersuchten Aufgaben möglich?
5. Welche Besonderheiten der untersuchten Aufgaben lassen sich hinsichtlich der entwicklungsdiagnostischen Nutzung anhand der Aufgabenanalysen identifizieren?

Ein bedeutender Vorteil der vorliegenden Arbeit liegt in der Untersuchung des umfangreichen authentischen Datensatzes. Zunächst erfolgt eine Analyse der einzelnen Aufgaben und der zugehörigen Bearbeitungen, der sich eine Untersuchung der Bearbeitungskombinationen über alle untersuchten Aufgaben hinweg anschließt. Folgende Forschungsanliegen sollen hierzu bearbeitet werden:

6. Konstruktion einer eindeutigen Bearbeitungstypologie zu allen untersuchten Aufgaben.
7. Welche typischen Bearbeitungsmuster können im Vergleich der Aufgabenbearbeitungen herausgearbeitet werden?
8. Welche Schlüsse können aus der Konstruktion einer Bearbeitungstypologie gezogen werden?

Die Forschungsarbeit konzentriert sich auf vergleichende Leistungserhebungen im Mathematikunterricht der Primarstufe und den Möglichkeiten einer diagnostischen Nutzung. Im Rückblick der Untersuchung sollen die folgenden Fragen zu dem Spannungsfeld zwischen vergleichenden Leistungserhebungen und deren diagnostischer Nutzung mithilfe explorativer Erkenntnisse beantwortet werden.

9. Welche Erkenntnisse zur Bedeutung der Aufgaben als Instrumente der Leistungserhebung beziehungsweise als Instrumente der Diagnose lassen sich ableiten?
10. Welche Schlüsse lassen sich bezüglich eines Aufgabensets mit der doppelten Funktion Leistungserhebung und Diagnose aus den Untersuchungsergebnissen ableiten?
11. Welche Konsequenzen können für die Aufgabenkonstruktion hinsichtlich einer entwicklungsdiagnostischen Nutzung formuliert werden?

5.2 Ausgangslage und Charakterisierung der Datenbasis

Die untersuchte Datenbasis setzt sich aus den Schriftdaten der Schülerarbeiten und den ergänzenden Interviewdaten zu den Aufgaben der vorliegenden hessischen Orientierungsarbeit zusammen. Die Schriftdaten weisen einige Besonderheiten auf, die für die Umsetzung des Forschungsvorhabens berücksichtigt werden mussten und nachfolgend erläutert werden.

5.2.1 Die Schriftdaten

5.2.1.1 Voraussetzungen der Schriftdaten

Grundlage der durchgeführten Untersuchung ist eine Stichprobe der im Jahr 2005 geschriebenen landesweiten Leistungserhebung in Hessen. Erstmals verbindlich schrieben alle hessischen Schüler des dritten Grundschuljahrgangs in der Zeit vom 25.04. bis 06.05.2005 die Orientierungsarbeiten in den Fächern Mathematik und Deutsch. An der Leistungserhebung im Fach Deutsch waren 56.181 Drittklässler beteiligt. Etwas mehr Kinder, exakt 57.041 Schüler, schrieben die Orientierungsarbeit im Fach Mathematik (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 8). Im Juni 2005 nahm das Institut für Didaktik der Mathematik der Justus-Liebig-Universität Gießen Kontakt mit den verantwortlichen Personen des Hessischen Kultusministeriums auf und signalisierte sein deutliches Interesse für ein Forschungsprojekt zu diesem ersten offiziellen Durchgang der hessischen Orientierungsarbeit Mathematik. Die erste Resonanz aus Wiesbaden ist als äußerst zurückhaltend, fast abweisend, zu bezeichnen. Nach beharrlicher Kommunikation wurden letztlich im August 2005 sowohl die Einsicht in die Arbeiten als auch die Verwendung der erhobenen Daten des Schulamtsbezirkes Gießen und Vogelsbergkreis genehmigt. Die Beschaffung der Daten unter Vorbehalt einzuhaltender Auflagen blieb dem Institut für Didaktik der Mathematik überlassen. Nach erneuter langwieriger Kommunikation wurden im November 2005 mit Unterstützung der Schulamtsdirektion Gießen alle 77 Grundschulen des zugehörigen Aufsichtsbereiches mit der Bitte um eine freiwillige Zusendung der Leistungserhebung angeschrieben. So gingen in den kommenden Wochen 2190 Orientierungsarbeiten Mathematik aus 52 Schulen auf dem Postweg im Institut für Didaktik der Mathematik ein.

Das Hessische Kultusministerium formulierte zuvor die Bedingung, dass die Leistungserhebungen mittelfristig für schulinterne Zwecke wieder an den Schulen vorzuliegen haben. Somit mussten die Arbeiten vervielfältigt werden, sodass in einem aufgrund fehlender personeller Ressourcen langwierigen Arbeitsprozess über 10.000 Kopien angefertigt wurden. Im Frühjahr 2006 konnten die organisatorischen Vorarbeiten abgeschlossen werden.

Um die Objektivität der anstehenden Untersuchung zu gewährleisten, wurden nach Sichtung der 2190 vorliegenden Prüfungsbögen unleserliche oder unvollständige Datensätze ausgesondert. Die im Rahmen der Untersuchung verwendeten Schriftdaten umfassten letztlich die Orientierungsarbeiten von 2022 Schülern aus 49 Schulen und 110 Klassen. Jede Schülerarbeit erhielt für die anonymisierte Weiterarbeit einen Code, der sich aus den Komponenten Schule, Klasse und Schülernummer zusammensetzt. Von jedem dieser Schüler lagen die schriftlichen Bearbeitungen aller neun Aufgaben der Hessischen Orientierungsarbeit Mathematik 2005 vor.

Die Besonderheiten der untersuchten Schriftdaten zu den Orientierungsarbeiten werden an dieser Stelle wie folgt zusammengefasst:

- Die Daten wurden nicht im Rahmen des Untersuchungsvorhabens erhoben, sondern entstammen dem offiziellen Durchgang der hessischen Orientierungsarbeit Mathematik 2005. Auf die Aufgaben und deren Konstruktion sowie die Bedingungen der Leistungserhebung konnte somit kein Einfluss genommen werden. Die schriftlichen Daten entstammen somit einem non-reaktivem Verfahren der Datenerhebung (siehe Abschnitt 5.3.3).
- Die Stichprobe resultierte aus der Genehmigung und den damit einhergehenden Auflagen des Hessischen Kultusministeriums. Die Zusendung der angeforderten Orientierungsarbeiten an das Institut für Didaktik der Mathematik erfolgte auf freiwilliger Basis, womit es sich um eine Opportunitätsstichprobe handelt. Insgesamt antworteten 52 der 77 angeschriebenen Schulen, sodass die Rücklaufquote mit 67,5 % ungewöhnlich hoch war¹⁶. Für eine Auswertung konnten letztlich 2022 Arbeiten aus 49 Schulen und 110 Klassen verwendet werden.
- Die untersuchte Leistungserhebung erfüllt die in Abschnitt 3.2.2 vorgestellten Anforderungen eines Tests nach psychometrischen Gütekriterien nicht. Die Daten sind ausschließlich nominal skaliert, was sich auf die Untersuchungsmöglichkeiten der Datenanalyse auswirkt.
- Die Datenbasis liefert mittels der Aufgaben und deren Bearbeitungen reale Informationen zu einer vergleichenden Leistungserhebung. Die Authentizität der Schriftdaten wird somit besonders hervorgehoben.

¹⁶ In der Fachliteratur wird von schwankenden Rücklaufquoten zwischen 10 % und 90 % berichtet (vgl. LAMNEK 2005, S. 256f). Somit belegt die Quote der vorliegenden Untersuchung die Repräsentativität der Opportunitätsstichprobe. Die zahlreichen Rückmeldungen der Schulen werden auf die Akzeptanz und Anerkennung von Prof. Dr. Marianne Franke zurückgeführt, die bis zu ihrem Tod 2007 aktiv mit den Schulen im Umfeld der Universität Gießen kooperiert hat.

5.2.1.2 Über die Schriftdaten

Nach Abschluss der organisatorischen Phase waren die Daten der Aufgaben und der zugehörigen Bearbeitungen zunächst den Aufgabendokumenten der Orientierungsarbeit zu entnehmen. Dieser Umstand führte zu einer außerordentlichen Papiermenge, da jeder der Schüler neun Aufgaben auf jeweils fünf Prüfungsbögen bearbeitet hatte. Eine erste Herausforderung bestand in einem Zusammentragen der auf über 10.000 Blatt Papier verteilten Datenmenge. Hierzu wurde mit Hilfe einer Tabellenkalkulation eine Datentabelle konstruiert, welche sämtliche vorliegenden Informationen zu Aufgaben und Bearbeitungen abbildet. Alle neun Aufgaben der Hessischen Orientierungsarbeit 2005 werden in dieser Tabelle gleichwertig berücksichtigt.

Die Bearbeitungen der Schüler wurden sortiert nach den Codes der Schulen und Klassen zeilenweise in die Datentabelle übertragen. In den Spalten werden sämtliche Informationen zu einer Aufgabe abgebildet. Neben den Antwortdaten der einzelnen Teilaufgaben wurden, soweit auf den Testbögen vorhanden, ebenso Informationen zu der Bewertung der verantwortlichen Lehrer oder Schülernotizen übertragen. Auf diese Weise entstand eine wenngleich umfangreiche, dennoch übersichtliche und handhabbare Datentabelle. In 2524 Zeilen sowie 107 Spalten enthält sie die vollständigen Rohdaten zu allen schriftlichen Aufgabendokumenten der Untersuchung. Die Aufgabenbearbeitungen der Schüler werden in der Datentabelle zeilenweise abgebildet, sodass sich die Anzahl der Zeilen wie folgt zusammensetzt: 2190 Zeilen für die entsprechende Anzahl Schrift Dokumente, 3 Zeilen für Spaltenüberschriften, 331 Zeilen für Gliederung und Summenbildungen der Klassen. Die 107 Spalten der Datentabelle enthalten folgende Angaben: Je eine Spalte zu Schülercode, Lesbarkeit und Geschlecht (falls bekannt), 64 Spalten für die Bearbeitungen der Schüler sowie Notizen zu Besonderheiten, weitere 30 Spalten bilden die durch die Lehrer vergebenen Punktzahlen sowie die Punktvergabe durch die Forscherin ab. Die letzten zehn Spalten weisen die errechneten Punktesummen auf.

Sämtliche Eintragungen wurden mit Unterstützung zweier externer Mitarbeiter geprüft, um Übertragungsfehler auszuschließen und Angaben zu korrigieren.

5.2.1.3 Sampling der Aufgaben

Die Darstellung der schriftlichen Datenbasis belegt die Fülle und die Vielfalt des zu Beginn der Forschungsarbeit vorliegenden Datenmaterials. Die grundlegende Zielsetzung der Untersuchung ist die Analyse einzelner Aufgaben sowie ihrer Schülerbearbeitungen hinsichtlich einer diagnostischen Nutzung. Eine Analyse aller neun Aufgaben der Leistungserhebung sowie der jeweils über 2000 zugehörigen Aufgabenbearbeitungen hätte zu keinen profunden Ergebnissen und Antworten auf die aufgestellten Forschungsanliegen führen können. Um den in Abschnitt 5.1 formulierten Anforderungen und Fragestellungen gerecht zu werden, erfolgte die detaillierte und ausführliche Untersuchung einer begründeten Aufgabenauswahl. Damit den qualitativen Zielsetzungen genügt werden konnte, sollten bereits den schriftlich vorliegenden Datensätzen Informationen zu entnehmen sein, die Rückschlüsse auf die Bearbeitungswege der Kinder zulassen. Eine erste stichwortartige Rationa-

le Aufgabenanalyse (siehe Abschnitt 6.2.2) verhalf zu einem Überblick über das Aufgabenset, um anschließend eine sinnvolle Auswahl der Aufgaben treffen zu können.

Bereits die Entwicklung der Rationalen Aufgabenanalyse zeigte, dass ein freies Antwortformat Einfluss auf die diagnostische Nutzung einer Aufgabe zu besitzen scheint (siehe Abschnitt 6.2.2). Diese Anforderung erfüllen die Aufgaben A4 „Hundertertafel“ und A8 „Zucker“ des vorliegenden Aufgabensets¹⁷. Das Interesse an diesen beiden Aufgaben erhöhte sich aufgrund der offiziellen Zuordnung der Aufgabe zu dem Anforderungsbereich Reflexion und Verallgemeinerung¹⁸. Des Weiteren lagen zu beiden Aufgaben mit einer mittleren Lösungshäufigkeit von 27 %¹⁹ und 15 % die hessenweit niedrigsten Ergebnisse vor (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 64). Eine eingehende und detaillierte Untersuchung des Datenmaterials zu den Aufgaben A4 „Hundertertafel“ und A8 „Zucker“ ließ somit interessante Erkenntnisse zu Lösungen und Bearbeitungswege der Drittklässler erwarten. Die Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ ermöglicht aufgrund der Kombination der Ergebniszahlen mit den zugehörigen Rechnungen Einsichten in das Bearbeitungsverhalten der Drittklässler, obwohl das Antwortformat zunächst nicht als frei bezeichnet wird. Von besonderem Interesse war hier das mit einem hessenweit mittleren Lösungsprozentsatz von 66 % relativ niedrige Ergebnis für eine Aufgabe des Anforderungsbereiches Reproduktion. Auch hier sollte eine detaillierte Aufgabenanalyse Rückschlüsse auf denkbare Ursachen ermöglichen.

Die weiteren Aufgaben der Leistungserhebung wurden aufgrund folgender Argumente für eine detaillierte Aufgabenanalyse ausgeschlossen. Die Aufgaben A2 „Stellenwerte“ sowie A3 „Überschlag“ sind Multiple-Choice-Aufgaben. Eine empirische Analyse der vorliegenden Daten ginge über eine Auszählung der angekreuzten Antworten kaum hinaus. Anhand des Antwortformates ähnlich beurteilt werden die beiden Aufgaben A1 „Messen“ und A7 „Tabelle“. Bei diesen Aufgaben wählen die Kinder zwar nicht zwischen gegebenen Antwortmöglichkeiten, tragen jedoch lediglich Messergebnisse oder Zahlenwerte in gebundene Antwortformate ein. Ähnlich informationsarm wird A9 „Symmetrie“ als Zuordnungsaufgabe eingeschätzt. Auch A6 „Einkaufen“ wurde aufgrund des freien gebundenen Antwortformates ausgeschlossen. Prinzipiell wird die Anlage dieser Sachaufgabe hinsichtlich der möglichen Erkenntnisse positiv beurteilt, was sich jedoch durch die formale Einengung der verwendeten Antwortformate relativiert.

Eine umfangreiche Untersuchung unter Anwendung der nachfolgend erläuterten Methoden und Instrumente erfolgt somit anhand der Aufgaben A4 „Hundertertafel“, A5 „Quadrate in Figur“ und A8 „Zucker“ (siehe Teil III).

¹⁷ Eine Übersicht des Aufgabensets mit kurzer Beschreibung der Aufgaben ist in Abschnitt 4.5.2 zu finden.

¹⁸ Da diese Zuordnung seitens der Verantwortlichen des Hessischen Kultusministeriums erfolgte, gilt es diesen Anspruch im Rahmen der Rationalen Aufgabenanalyse zu diskutieren (siehe Abschnitt 6.2.2).

¹⁹ Dieser Wert betrifft explizit Teilaufgabe A4c. Die mittlere Lösungswahrscheinlichkeit der Teilaufgabe A4a liegt bei 98 %, die von Teilaufgabe A4b bei 56 %.

5.2.2 Die Interviewdaten

5.2.2.1 Intention der Interviewstudie

Die Einbettung einer ergänzenden Interviewstudie erfolgte bereits in einer frühen Phase des Forschungsprozesses. Die Aufgaben der Hessischen Orientierungsarbeit 2005 und deren Bearbeitungen lagen zunächst ausschließlich als Schriftdaten vor. Intendiert wurde eine Erweiterung der Empirie durch die Erhebung zusätzlich auswertbarer Daten, um ergänzende Erkenntnisse zu Aufgabenpotentialen und den Schülerbearbeitungen zu gewinnen. Eine Identifikation bedeutender Aufgabenmerkmale sowie die Einschätzung des diagnostischen Potentials der Aufgaben sollten mit dem zusätzlichen Datenmaterial erleichtert werden. Ebenso dienten die Interviewdaten der Illustration und der Spezifizierung der aus den Schriftdaten kodierten Bearbeitungswege. Hierzu wurden die Interviews vollständig und abschnittsweise hinsichtlich der Bearbeitungswege der Kinder analysiert. In den Darstellungen der Empirischen Aufgabenanalyse werden exemplarische Interviewpassagen zur Illustration angeführt und ermöglichen ein Verständnis für die zugrundeliegenden Denkwege der Kinder. Die Verwendung der Interviewausschnitte geht somit über das nach Bedarf selektierende Zitieren passender Interviewpassagen ohne Blick auf den gesamten Interviewverlauf, die so genannte „selektive Plausibilisierung“ (FLICK 1998, S. 239), hinaus.

5.2.2.2 Planung und Durchführung der Interviewstudie

Das qualitative Interview wird in diversen mathematikdidaktischen Untersuchungen angewendet, wobei zahlreiche unterschiedlich geprägte Einsatzformen existieren (vgl. BECK/MAIER 1993, S. 147). In der vorliegenden Untersuchung wird das halbstandardisierte Interview mithilfe eines Leitfadens genutzt. SELTER und SPIEGEL (2007) ordnen das halbstandardisierte Interview als einen „sinnvollen Mittelweg“ (SELTHER/ SPIEGEL 2007, S. 101) zwischen der Zielgerichtetheit standardisierter Tests und der offenen Beobachtung ein.

Die untersuchte Orientierungsarbeit Mathematik wurde bereits Anfang Mai 2005 an den hessischen Schulen geschrieben, sodass aufgrund des in Abschnitt 5.2.1.1 beschriebenen organisatorischen Vorlaufs des Untersuchungsvorhabens eine Durchführung der Interviews mit einer Auswahl dieser Kohorte nicht möglich war. Für die Interviewstudie wurde das Frühjahr 2007 angesetzt, da das Hessische Kultusministerium in diesem Zeitraum die Orientierungsarbeiten des Jahres 2007 erheben ließ. Die Kombination und Vergleichbarkeit der Daten legitimiert sich demnach durch folgendes erfülltes Kriterium: Beide Datenformen, Schrift- und Interviewdaten, stammen aus gleichaltrigen Kohorten und wurden zum Zeitpunkt der jeweils offiziellen Orientierungsarbeiten Mathematik erhoben.

Unter Voraussetzung des Einverständnisses der Eltern nahmen 28 Kinder aus zwei Klassen eines dritten Grundschuljahrgangs an der Interviewstudie teil. Die Schule liegt in einem ländlichen Einzugsgebiet des Landkreises Marburg-Biedenkopf, nahe dem Schulamtsbezirk Gießen und Vogelsbergkreis. Die Interviewstudie erfolgte in Form von Einzelinterviews, wobei die Forscherin in allen Gesprächen die Rolle der Interviewenden einnahm. Jedes Interview wurde als Videoaufnahme dokumentiert, um anschließend auf Basis

der Bild- und Toninformationen vollständige Transkriptionen der Aufgabenbearbeitungen anzufertigen. Parallel konnten hier die schriftlich vorliegenden Bearbeitungen der Kinder hinzugezogen werden.

Die ausgewählten Aufgaben (siehe Abschnitt 5.2.1.3) wurden auf gelbe Din A4-Dokumente übertragen, um den Kontrast der Videoaufnahmen zu erhöhen. Die Bearbeitung der Aufgaben erfolgte in chronologischer Reihenfolge. Für die spätere Analyse der Bearbeitungswege und den Erhalt von Hinweisen auf mögliche Schwierigkeiten der Aufgabe wurde auf eine Einschränkung der zur Verfügung stehenden Arbeitszeit verzichtet. Jedes Kind bearbeitete alle drei Aufgaben. Die Bearbeitungszeit der Aufgabe A4 „Hundertertafel“ variierte zwischen 6:02 Minuten und 20:36 Minuten. Die für Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ aufgewendete Zeit lag zwischen 2:41 Minuten und 17:51 Minuten. Aufgabe A8 „Zucker“ bearbeiteten die Drittklässler innerhalb eines Zeitfensters von 2:18 Minuten und 10:47 Minuten.

Da den Drittklässlern bei Erhebung der hessischen Orientierungsarbeiten kein Arbeitsmaterial zur Verfügung gestellt wird, wurde auch bei der Interviewstudie auf eine Bereitstellung von Materialien verzichtet. Somit lagen den Kindern bei der Bearbeitung lediglich die Aufgabendokumente sowie ein Tintenschreiber vor. Der Arbeitsplatz befand sich an der Längsseite eines Tisches, die Videokamera wurde schräg gegenüber dem Kind positioniert und die Interviewende saß zwischen Kind und Kamera an der Stirnseite des Tisches.

Die im Vorfeld der Studie erstellten Interviewleitfäden ermöglichten eine strukturierte Bearbeitung der drei Aufgaben. Die Kinder lösten jeweils die einzelnen Teilaufgaben, wobei nach jeder Aufgabe über den Bearbeitungsweg gesprochen wurde. Die tabellarische Form der Leitfäden ermöglichte eine einfache und strukturierte Handhabung während der Interviewverläufe. Die gestellten Fragen und Impulse gliederten sich in die drei Kategorien Pflicht-, Kontroll- und Hilfsfragen. Dieses Prinzip unterstützte die Vergleichbarkeit der Interviews bei gleichzeitiger Offenheit des Interviewverlaufs. Der Pflichtteil enthielt Erläuterungen und Fragen, welche die Interviewende bei allen Kindern formulierte. Zu Beginn erfolgte eine Einführung in die Aufgabensituation, indem das Kind die Aufgabenstellung meist laut vorlas, sie mit eigenen Worten erläuterte und sich an die Bearbeitung begab. Die gestellten Kontrollfragen zielten auf weitere Äußerungen der Denk- und Vorgehensweisen während der Bearbeitung ab. Auch diese wurden verbindlich während des Interviewverlaufs angewendet, wobei jedoch flexibel auf individuelle Vorgehensweisen einzelner Kinder reagiert werden konnte. Hilfsfragen hingegen kamen zum Einsatz, wenn ein Kind während der Bearbeitung stockte und zusätzliche Impulse benötigte. „Durch den konsequenten Einsatz des Leitfadens wird einmal die Vergleichbarkeit der Daten erhöht und zum anderen gewinnen die Daten durch die Fragen eine Struktur“ (MAYER 2004, S. 36), womit MAYER die erhöhte Standardisierung als einen Vorteil des halbstandardisierten Interviews hervorhebt. Ebenso betont er die bereits genannte Strukturierung des Interviews, was für die durchgeführte Untersuchung eine strukturierte Bearbeitung der Aufgaben implizierte und sich für die anstehende Auswertung als Vorteil darstellte.

Das Interview zielte keinesfalls darauf ab, die Kinder durch geschickte Frage- und Impulsstellungen zur richtigen Aufgabenlösung zu führen. Fehllösungen und nicht korrekte Gedankengänge wurden hinterfragt, um Einblicke in mögliche Ursachen und Gedankengänge zu erhalten. Seitens der Interviewenden wurden negative Rückmeldungen vermieden, ebenso erfolgten keine Korrekturen von Fehllösungen oder falschen Aussagen (vgl. SELTER/SPIEGEL 2007, S. 101). Auch in der Situation der Orientierungsarbeit können die Drittklässler nicht auf mögliche Fehler hingewiesen werden, sodass auch diesem Aspekt Rechnung getragen wurde.

Die untersuchte Datenbasis gliedert sich also in Schrift- und Interviewdaten. Die Schriftdaten bezeichnen die in der Datentabelle vereinten Informationen über die Aufgaben und deren Bearbeitungen auf Basis der 2190 Schülerdokumente. Ergänzt werden diese durch die parallel vorliegenden Aufgabendokumente. Entsprechend setzen sich die zusätzlichen Interviewdaten aus Transkripten, Videoaufnahmen und Aufgabendokumenten der Kinder zusammen.

5.3 Einordnung des Untersuchungsvorhabens und Positionierung

5.3.1 Vorannahme und Forschungsparadigma

Vorab begründet sich das vorliegende Untersuchungsvorhaben in einem Verständnis der Mathematikdidaktik als empirische Wissenschaft. MAYER definiert diese als „Wissenschaften deren Aussagen auf Grund der Übereinstimmung mit der beobachteten Wirklichkeit Geltung erlangen“ (MAYER 2004, S. 15). Die Mathematikdidaktik als empirische Wissenschaft formuliert Hypothesen und Theorien demnach unter Bezug auf Beobachtungen und Phänomene des Untersuchungsgegenstandes.

Darüber hinaus orientiert sich das Untersuchungsvorhaben an dem in der Fachliteratur als interpretativ bezeichnetem Forschungsparadigma (vgl. BECK/MAIER 1993, S. 170ff). Im Gegensatz zu einem normativen Forschungsparadigma wird hier vor einer vorgängigen Aufstellung zu überprüfender Thesen abgesehen. Für die beabsichtigte Erforschung des realen Umgangs der Schüler mit Aufgaben einer landesweiten Leistungserhebung ist eine solche Sichtweise unumgänglich.

5.3.2 Qualitativer Anspruch der Untersuchung

Der Forschungsprozess ist ein induktives Vorgehen und beruft sich auf den Schluss des Speziellen zum Allgemeinen. Die Formulierung der Ergebnisse sowie eine sich anschließende Theoriebildung präskriptiven Charakters erfolgt anhand der Empirie, also auf Grundlage der untersuchten Daten (vgl. MAYER 2004). Daraus bedingt sich die grundsätzlich qualitativ orientierte Anlage der Forschungsmethoden, wobei aufgrund der hohen Fallzahlen auf eine Kombination mit quantitativen Methoden nicht verzichtet wird (siehe

Abschnitt 5.3.3). BECK und MAIER (1993) grenzen die qualitativen Forschungsmethoden wie folgt von einer quantitativen Herangehensweise ab:

„Hiermit in Zusammenhang steht, daß sich qualitative Verfahren insbesondere dann einsetzen lassen, wenn das Ziel der Forschung in einer empirisch begründeten Theoriebildung liegt (Generierung von Theorie); dagegen geht quantitative Forschung den umgekehrten Weg: Sie setzt an vorab entwickelter Theorie an und führt von dort zur Empirie (dabei ist der Entstehungszusammenhang der Theorie prinzipiell beliebig, er braucht also kein im vorgenannten Sinne empirischer zu sein).“

(BECK/MAIER 1993, S. 168)

Um umfassende und detaillierte Einblicke in die Aufgaben und Bearbeitungswege der Drittklässler erhalten zu können, verhilft „Der relativ offene Zugang qualitativer Forschung [verhilft] zu einer möglichst authentischen Erfassung der Lebenswelt der Betroffenen sowie deren Sichtweisen und liefert Informationen, die bei einer quantitativen Vorgehensweise aufgrund der Standardisierung oft verloren gehen“ (MAYER 2004, S. 24). Die Passung der Untersuchungsintention mit der verfolgten induktiven Ausrichtung der qualitativen Forschung wird mit dieser Aussage unterstrichen.

5.3.3 Triangulation

Aufgrund der dargelegten qualitativen Orientierung wird im Rahmen der Untersuchung eine Triangulation auf verschiedenen Ebenen realisiert. Der Begriff Triangulation meint im Allgemeinen die Betrachtung eines Forschungsgegenstandes aus mindestens zwei Perspektiven und wird meist als eine Verwendung verschiedener methodischer Zugänge interpretiert. Wurde sie zunächst als eine Strategie der Validierung der Dateninterpretation verstanden, verfolgt Triangulation mittlerweile das Ziel eines Erkenntnisgewinns, einer Ergänzung sowie einer Absicherung von Daten und ihrer Interpretation. Zumeist wird sie im Zusammenhang mit der Kombination qualitativer und quantitativer Methoden diskutiert. Häufig bleibt unbeachtet, dass Triangulationen durchaus auch innerhalb der qualitativen Forschungsmethoden möglich sind (vgl. FLICK 2005, S. 309; KELLE/ERZBERGER 2005, S. 300). Das Untersuchungsvorhaben realisiert eine Triangulation auf folgenden Ebenen:

- Zum Einen findet in Anlehnung an FLICK (2005, S. 313f) eine *Between-Method-Triangulation* statt, da im Rahmen der Untersuchung die Kombination zweier unterschiedlicher Datenformen erfolgt. Die schriftlichen Daten der offiziellen Orientierungsarbeit wurden, wie zuvor erläutert, nicht zu Forschungszwecken erhoben. Sie entstammen einem so genannten non-reaktiven Erhebungsverfahren, deren weiterer Vorteil in der Verzerrungsfreiheit liegt (vgl. HABERMEHL 1992). Im Gegensatz dazu wurde die Interviewstudie eigens für die Untersuchung geplant und durchgeführt. Die Forschende war somit Teil der Erhebungssituation, womit die Interviewdaten wiederum einem reaktiven Erhebungsverfahren entstammen.

- Des Weiteren wird die Triangulation im Sinne der vielfach angewendeten *Methodenintegration* genutzt. Um den Zielsetzungen der Untersuchung und den zugrundeliegenden Daten gerecht werden zu können, wurden in den einzelnen Auswertungsphasen qualitative sowie quantitative Forschungsmethoden kombiniert. Die verwendete Methode der Inhaltsanalyse ermöglichte aufgrund ihrer unterschiedlichen Ausrichtungen und Ausprägungen eine solche Kombination (siehe Abschnitt 5.3.4). Nach FLICK, KARDORFF UND STEINKE (2005, S. 22) ist ein breites Spektrum an methodischen Vorgehensweisen Kennzeichen einer qualitativen Forschungspraxis. Abhängig von Untersuchungsgegenstand und Fragestellung sind sinnvoll einsetzbare Methoden auszuwählen und darzustellen. Auch BECK und MAIER (1993) beschreiben diesen Nutzen der Triangulation als Methodenintegration für die mathematikdidaktische Forschung: „Eine Methode soll dann eventuell mithilfe der anderen Methode(n) gewonnene Befunde kontrollieren oder ergänzen helfen“ (BECK/MAIER 1993, S. 174).

Beide Formen der Triangulation forcieren das Ziel der Komplementarität der Forschungsergebnisse, um ein umfassendes Bild der untersuchten Aufgaben sowie ihrer Bearbeitungen beschreiben zu können und Rückschlüsse auf die diagnostische Nutzung zu ziehen.

5.3.4 Inhaltsanalyse als Auswertungsmethode der Datenbasis

Die in der Untersuchung genutzte Methode der Datenauswertung ist die Inhaltsanalyse, bei deren Anwendung trotz der Vielfalt existierender Ausprägungen Einigkeit über das grundsätzliche Ziel herrscht (vgl. ATTESLANDER 2008; DIEKMANN 2007; LAMNEK 2005).

„Ziel der Inhaltsanalyse ist - darin besteht Übereinstimmung - die Analyse von Material, das auf irgendeine Weise menschliches Verhalten oder soziales Handeln repräsentiert. Die wissenschaftliche Inhaltsanalyse befasst sich vor allem mit der Analyse von schriftlichen Kommunikationsinhalten, also Texten.“

(LAMNEK 2005, S. 483)

Das von LAMNEK (2005) genannte menschliche Handeln spiegelt sich in der vorliegenden Untersuchung sowohl in den Schrift- als auch in den Interviewdaten wider. Konkret werden die in der vergleichenden Leistungserhebung gestellten Aufgaben sowie deren Bearbeitungen als Resultate menschlichen Handelns interpretiert.

Die vorliegenden Schriftdaten werden nach BECK und MAIER (1994) in die Kategorie der schriftlich produzierten Texte eingeordnet. Hierunter werden Texte verstanden, die von vornherein schriftlich produziert wurden, sodass die gestellten Aufgaben an sich, als auch die Schülerlösungen hierunter gefasst werden. Die Interviewtranskripte hingegen werden der Kategorie der durch Verschriftlichung entstandenen Texte zugeordnet, „die durch die Verschriftlichung verbaler Äußerung mittels Ton- oder Tonbildaufzeichnung entstehen“ (BECK/MAIER 1994, S. 38). Unter der Annahme, dass Texte nicht nur einen Sprachakt selbst festhalten, sondern darüber hinaus einen überdauernden Sinngehalt enthalten und

fixieren, wird der Textbegriff für die Mathematikdidaktik von BECK und MAIER (1994) ausgeweitet. So werden Bilder und Graphiken ebenfalls als Texte interpretiert, da sie als schriftähnliche Fixierungen von Sinngehalt angesehen werden. Auch die, durch zu setzende Markierungen gelieferten, Antworten bei Mehrfachwahlaufgaben sind abgekürzte Darstellungen für sprachliche Aussagen. Nur im Zusammenhang mit der zugehörigen Frage ergeben sie einen Sinn, stellen dann jedoch ebenfalls eine Textart dar. Dieses Textverständnis legitimiert die Anwendung der Inhaltsanalyse als Auswertungsmethode der untersuchten Datenbasis. Neben der zuvor beschriebenen Differenzierung der Schrift- und Interviewdaten wird der Sinn einer Kombination verschiedener Textarten betont, „um die Wirkung möglicher Fehlerquellen zu minimieren oder um unterschiedliche Aspekte von Wirklichkeit jeweils adäquat erfassen zu können“ (BECK/MAIER 1994, S. 70).

Die Methode der Inhaltsanalyse lässt sich sowohl mit dem normativen als auch dem interpretativen Forschungsparadigma vereinen und findet Anwendung in diversen Wissenschaftsdisziplinen (vgl. ATTESLANDER 2008; LAMNEK 2005). In diesem Zusammenhang wird die Notwendigkeit der Unterscheidung einer quantitativen von einer qualitativen Inhaltsanalyse diskutiert. Neben der grundsätzlichen Unterscheidung von quantitativen und qualitativen Herangehensweisen oder Forschungsmethoden ist man sich in der Literatur über eine Integration quantitativer Elemente in eine qualitative Inhaltsanalyse oder umgekehrt einig (vgl. ATTESLANDER 2008; DIEKMANN 2007; LAMNEK 2005). DIEKMANN (2007) betont, „daß es nicht *die* Methode quantitativer Inhaltsanalyse gibt, sondern eine Sammlung verschiedener, mehr oder minder komplexer Verfahren, die je nach Fragestellung und Textmaterial unterschiedliche Aufgaben erfüllen“ (DIEKMANN 2007, S. 511).

Die Inhaltsanalyse dient „...im qualitativen Paradigma der Auswertung bereits erhobenen Materials und der Interpretation symbolisch-kommunikativ vermittelter Interaktion in einem wissenschaftlichen Diskurs“ (LAMNEK 2005, S. 481). Bei einer quantitativen Inhaltsanalyse steht eine Überprüfung aufgestellter Hypothesen auf Grundlage theoriegeleiteter Merkmale und Häufigkeitsauszählungen im Vordergrund. Die Inhaltsanalyse der vorliegenden Untersuchung erfolgt mithilfe des entwickelten Modells der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse (siehe Abschnitt 6.2) und dient zunächst einer Erfassung des Sinngehalts der Aufgaben und der Aufgabenbearbeitungen (siehe Abschnitt 5.4.2).

ATTESLANDER (2008) und LAMNEK (2005) beschreiben vier kennzeichnende Merkmale der qualitativen inhaltsanalytischen Vorgehensweise, welche allesamt Eigenschaften der vorliegenden Untersuchung darstellen: *Offenheit* als ein Merkmal bezeichnet die aussagengenerierende Intention der Untersuchung, womit auf eine Formulierung von Theorie aufgrund des vorhandenen Vorwissens explizit verzichtet wird. Die Grundannahme der Entstehung von Wirklichkeit durch Interaktion und Kommunikation postuliert sich in dem Merkmal der *Kommunikativität*, was einen direkten Kontakt des Forschenden mit den Beforschten impliziert. Auch dieses Merkmal wird mit der Ergänzung der Datenbasis durch die reaktiven Interviewdaten erfüllt. Die non-reaktiven Schriftdaten entsprechen der geforderten „*Naturalistizität*“ (LAMNEK 2005, S. 209), also dem Prinzip der Natürlichkeit der Daten und der Datenerhebung. Die Schriftdaten entstammen einem offiziellen Durchgang der hessischen Orientierungsarbeit, sind somit authentische Daten aus der Praxis der Leis-

tungserhebungen. Aus den zahlreichen Bearbeitungen der Aufgaben werden inhaltliche Handlungsmuster identifiziert, sodass auch das letzte Merkmal der *Interpretativität* beachtet wird. Nicht die Verifikation oder Falsifikation als Prüfung im Vorfeld aufgestellter Hypothesen ist Ziel der Untersuchung, sondern die Gewinnung neuer Erkenntnisse zum untersuchten Forschungsbereich.

5.4 Die Phasierung der Untersuchung

5.4.1 Auswertung qualitativer Interviews nach SCHMIDT

Die in Abschnitt 5.2 erläuterte Anlage der Datenbasis erfordert eine sensible Auswertung, mit der eine Kombination des qualitativen Anspruchs der Arbeit und quantitativen Elementen der Deskriptiven Statistik gelingen sollte. In der sozialwissenschaftlichen Fachliteratur werden zahlreiche qualitative Auswertungsmethoden angeführt (vgl. FLICK 2005; BORTZ/DÖRING 2006), die sich auf mathematikdidaktische Forschung übertragen lassen. SCHMIDT (2005, S. 447ff) präsentiert zur Auswertung und Analyse von Leitfadeninterviews ein Auswertungsmodell, bei der eine grundsätzlich offene Herangehensweise der Analyse im Vordergrund steht. Ihr Modell ist eine wichtige Grundlage der im Rahmen des Forschungsvorhabens entwickelten Auswertungsphasen und wird nachfolgend dargestellt.

Erster Schritt: materialorientierte Bildung von Auswertungskategorien

Das ausgiebige Studium des vorliegenden Datenmaterials sowie die Auseinandersetzung mit theoretischen und empirischen Konzepten führen zu ersten vagen Kategorien, um das Datenmaterial zu strukturieren.

Zweiter Schritt: Zusammenstellung der Auswertungskategorien zu einem Kodierleitfaden

Die aus dem ersten Schritt resultierenden Entwürfe werden zu einem Auswertungsleitfaden zusammengestellt. Die Kategorien werden inklusive diverser Ausprägungen im Detail beschrieben.

Dritter Schritt: Kodierung des Materials

Das vorliegende Datenmaterial wird anhand des Kodierleitfadens eingeschätzt und klassifiziert. Die Besonderheit liegt hier in einer Anwendung des aus dem Material entstandenen Kategoriensystems.

Vierter Schritt: quantifizierende Materialübersichten

Die Ergebnisse der Kodierung werden anhand quantifizierender Übersichten dargestellt. Hierzu eignen sich verschiedene Tabellenformen sowie Angaben und Darstellungen von Häufigkeiten einzelner Kategorien. Um Zusammenhänge sichtbar werden zu lassen, können Kontingenztafeln aufgestellt werden.

Fünfter Schritt: vertiefende Fallinterpretation

Ziel des letzten Schrittes ist die Differenzierung und Überarbeitung des vorhandenen theoretischen Rahmens. Aufgrund der zuvor erstellten Materialübersichten ist eine vertiefende Fallinterpretation möglich. Weitere Differenzierungen und Kontrastierungen der aufgestellten Kategorien werden erarbeitet.

5.4.2 Phasen der eigenen Untersuchung

Das skizzierte Analysemodell zur Auswertung qualitativer Interviews von SCHMIDT (2005) ist der Bezugsrahmen der eigenen Auswertungsphasen. Aufgrund der vorliegenden Datenbasis, die non-reaktive Schriftdaten und reaktive Interviewdaten vereint, und der daraus resultierenden Bedingungen für eine zielgerichtete Untersuchung, werden die folgenden Untersuchungsphasen beschrieben

Phase 0: Grundlagen

Die vorliegenden Schriftdaten zu allen neun Aufgaben der hessischen Orientierungsarbeit Mathematik 2005 wurden zusammengetragen und durch das Anlegen einer Datentabelle in einem Tabellenkalkulationsprogramm aufbereitet. So entstand eine übersichtliche Darstellung aller vorliegenden Schülerbearbeitungen. Des Weiteren fand die Planung, Organisation und Durchführung der ergänzenden Interviewstudie statt, um eine Kombination reaktiver und non-reaktiver Daten zu realisieren. Hierzu gehörte auch die vollständige Transkription der Interviewgespräche nach zuvor festgelegten Konventionen. Die in der vergleichenden Leistungserhebung gestellten Aufgaben sollten im Sinne der Untersuchungsintention zunächst aus diversen Perspektiven untersucht werden. Unter Berücksichtigung anerkannter Fachliteratur wurde ein umfangreiches Analysemodell entwickelt (siehe Abschnitt 6.2.2). Weiterhin erfolgte aufgrund der Datenfülle das in Abschnitt 5.2.1.3 erläuterte Sampling der Aufgaben.

Phase 1: Rationale Aufgabenanalyse

Das zuvor entwickelte Analysemodell wurde auf alle neun Aufgaben der hessischen Leistungserhebung angewandt. Die Rationale Aufgabenanalyse durchdenkt die in der hessischen Orientierungsarbeit präsentierten Aufgaben aus den formulierten Analyseperspektiven und untergeordneten Analyseaspekten. Die Ergebnisse zu jeder Aufgabe wurden stichwortartig in einer strukturierten Darstellung fixiert. Die Darstellung der Rationalen Aufgabenanalyse zu den Aufgaben A4 „Hundertertafel“, A5 „Quadrate in Figur“ und A8 „Zucker“ erfolgte anhand einer ausführlichen Verschriftlichung (siehe Kapitel 7, 8 und 9). Mittels dieser inhaltlichen Untersuchung der Aufgaben wurden theoretische Bearbeitungskonzepte sowie untergeordnete Bearbeitungsvarianten konstruiert, die denkbare Bearbeitungswege der Aufgaben darstellen. Dieses Vorgehen versteht sich als Modifikation des ersten Auswertungsschrittes nach SCHMIDT (2005), wobei hier zunächst die Aufgabe an sich im Fokus der Untersuchung stand und die realen Bearbeitungen zunächst außer Acht gelassen wurden. Intention dieses Untersuchungsschrittes war das Ausloten und Diskutie-

ren des Potentials der vorliegenden Aufgabe, bevor ein intensiver Blick in das empirische Datenmaterial erfolgte. Ein letzter Schritt dieser Auswertungsphase diente der strukturierten Zusammenstellung der konstruierten Bearbeitungskonzepte und -varianten. Diese wurden ohne hierarchischen Charakter in einer tabellarischen Übersicht dargestellt. Neben der Einordnung in das theoretische Bearbeitungskonzept wurde hier die Bearbeitungsvariante namentlich benannt und eine exemplarische Darstellung der Bearbeitungsnotation angeführt (siehe Anhang).

Zusammenfasst wird das beschriebene Vorgehen als eine aufgabenorientierte Bildung theoretischer Auswertungskategorien. In Anlehnung an den zweiten Schritt der Auswertung nach SCHMIDT (2005) wurden die beschriebenen Übersichten als Kodierleitfaden zusammengestellt, die in den nachfolgenden Auswertungsphasen als Orientierungsrahmen der Analyse dienten.

Phase 2: Empirische Aufgabenanalyse der Schriftdaten

Anhand der drei ausgewählten Aufgaben A4 „Hundertertafel“, A5 „Quadrate in Figur“ und A8 „Zucker“ erfolgte nun die detaillierte Analyse mittels der Empirischen Aufgabenanalyse (siehe Abschnitt 6.2.3). Hier wurden sowohl die Schriftdaten als auch die Interviewdaten einem vergleichbaren Analyseschema unterzogen. SCHMIDT (2005) fasst die Einschätzung des Materials anhand des Kodierleitfaden als Kodierung des Materials zusammen. Die Auswertung wurde für das eigene Forschungsvorhaben ergänzt und modifiziert. Während ein kategoriengeleitetes Vorgehen das Datenmaterial strikt anhand der im Vorfeld erstellten Kategorien einordnet, impliziert ein kategorienentwickelndes Vorgehen eine Kodierung ohne zuvor festgelegte Kriterien.

Das Vorgehen der vorliegenden Untersuchung wird als kategorienorientierte Auswertung bezeichnet. Das in Phase 1 entwickelte theoretische Kategoriensystem diente als Orientierungsrahmen der Datenauswertung. Aufgrund der untersuchten Schriftdaten waren jedoch Modifikationen der theoretisch beschriebenen Bearbeitungskonzepte und -varianten intendiert, um den Bearbeitungen der Drittklässler gerecht werden zu können. Dieser Anspruch an die Arbeit konnte aufgrund der für einen qualitativen Forschungsansatz ungewöhnlich hohen Fallzahl von 2022 erfüllt werden. So erfolgte im Rahmen der Empirischen Aufgabenanalyse eine Ausschärfung der theoretischen Bearbeitungsvarianten zu empirisch belegten Bearbeitungskategorien. Dabei waren Zusammenfassungen von Bearbeitungsvarianten, Differenzierungen oder auch die Eröffnung zusätzlicher Bearbeitungskategorien möglich. Zunächst wurden die Schriftdaten der jeweils analysierten Aufgabe in ein gesondertes Tabellenblatt übertragen. Hier wurden ausschließlich bearbeitete Datensätze berücksichtigt, um eine Kategorie der Nichtbearbeitung von Vorneherein auszuschließen. Für die Kodierung der schriftlichen Schülerbearbeitungen auf Grundlage der Bearbeitungskonzepte und -varianten wurden verschiedene Funktionen des eingesetzten Tabellenkalkulationsprogrammes genutzt, die ein ökonomisches Handling der Datenfülle ermöglichten²⁰.

Zu jeder analysierten Aufgabe entstand ein Tabellendokument, welches in den Bearbeitungskategorien entsprechenden Tabellenblättern die zugeordneten Schülerbearbeitungen abbildet.

²⁰ Diese Funktionen waren Filterfunktionen, Sortierfunktionen, Kopierfunktionen sowie Suchfunktionen.

Phase 3: Empirische Aufgabenanalyse der Interviewdaten

Diese Phase der Auswertung diente der weiterführenden Kodierung des Materials, wobei nun das vorliegende Interviewmaterial im Fokus der Empirischen Aufgabenanalyse stand. Während die theoretischen Bearbeitungskonzepte und -varianten bei der Kodierung der Schriftdaten als Leitfaden dienten, wurde für die Interpretation des Interviewmaterials nun die ausgeschärfte Übersicht der Bearbeitungskonzepte und -kategorien herangezogen. Auf Basis der Aufgabendokumente und Transkripte wurden die Bearbeitungen der 27 Kinder den aufgestellten Bearbeitungskategorien zugeordnet.

Aufgrund der von den Schriftdaten differierenden Textart (siehe Abschnitt 5.3.4) ermöglichte die zusätzliche Interpretation der Interviewdaten komplementäre Einblicke in die Bearbeitungs- und Denkweisen. Kontrastierende Fälle wurden analysiert, um Besonderheiten der Aufgabe herausarbeiten zu können. SCHMIDT (2005) beschreibt dieses Vorgehen in ihrem fünften Schritt der Auswertung als vertiefende Fallinterpretation, die im Rahmen des eigenen Untersuchungsvorhabens mit der Kodierung des Interviewmaterials einherging.

Phase 4: Quantifizierende Materialübersicht der Empirischen Aufgabenanalysen

Nach der qualitativen Kodierung des Materials erfolgte die quantitative Darstellung und Erläuterung der zu den ausgewählten Aufgaben aufgestellten Bearbeitungskonzepte und -kategorien. Die empirischen Daten werden hier zur Illustration der Bearbeitungskategorien verwendet, wobei Textzitate aus den Schriftdaten ebenso angeführt wurden wie exemplarische Beispiele der Interviewstudie. Die Ergebnisse der Empirischen Aufgabenanalysen zu Schrift- und Interviewdaten wurden zusammengetragen und kombiniert dargestellt (siehe Abschnitt 6.2.3). Darüber hinaus wurden die Ergebnisse und Häufigkeiten in Tabellen und Diagrammen visualisiert sowie Kenngrößen und Darstellungsformen der deskriptiven Statistik zu univariaten Datensätzen herangezogen (vgl. DIEHL/KOHR 2004; CLAUSS/EBNER 1979; HÄUBLER 2009). Die vorhandenen Informationen über die Bearbeitungswege der Schüler wurden als Merkmal auf nominalem Skalenniveau betrachtet, so dass die Ergebnisse des Gruppierungsprozesses ausschließlich eine Klassifizierung der Aufgabenbearbeitungen sind (siehe Fußnote 26). Die Einteilung erhebt weder den Anspruch einer Vergleichbarkeit der Anforderung, noch sind die Kategorien in einem ordinalen Verständnis hierarchisch angeordnet zu deuten. Dieser Umstand ist auf die Ausgangslage der Datenbasis zurückzuführen (siehe Abschnitt 5.2) und impliziert den Ausschluss zahlreicher statistischer Maße und Darstellung nachfolgender Skalenniveaus²¹. Stattdessen wurden individuelle Prägungen der erhaltenen Kategorien mit Hilfe absoluter und interner Häufigkeiten beschrieben und dargestellt (siehe Abschnitt 6.2.3).

²¹ Ausführungen zu den verschiedenen Skalenniveaus finden sich bei DIEHL/KOHR (2004), HÄUBLER (2009) oder DIEKMANN (1995).

Phase 5: Intra-Beziehungen der Aufgabenbearbeitungen

Über die Darstellung der univariaten Häufigkeiten hinaus galt es aufgabeninterne Zusammenhänge und Auffälligkeiten der Aufgabenbearbeitungen zu identifizieren. Diese wurden anhand von Kontingenztafeln herausgearbeitet und interpretiert. Auch hier wurden statistische Kenngrößen und Darstellungen für nominal skalierte Daten genutzt, wobei nun die bivariaten Datensätze der Teilaufgaben herangezogen wurden. Des Weiteren fanden Prüfungen der erkannten Zusammenhänge mit Hilfe des Kontingenzkoeffizienten C (siehe Abschnitt 6.2.3) statt, um die statistische Unabhängigkeit der Ergebnisse zu garantieren.

Phase 6: Inter-Beziehungen der Aufgabenbearbeitungen

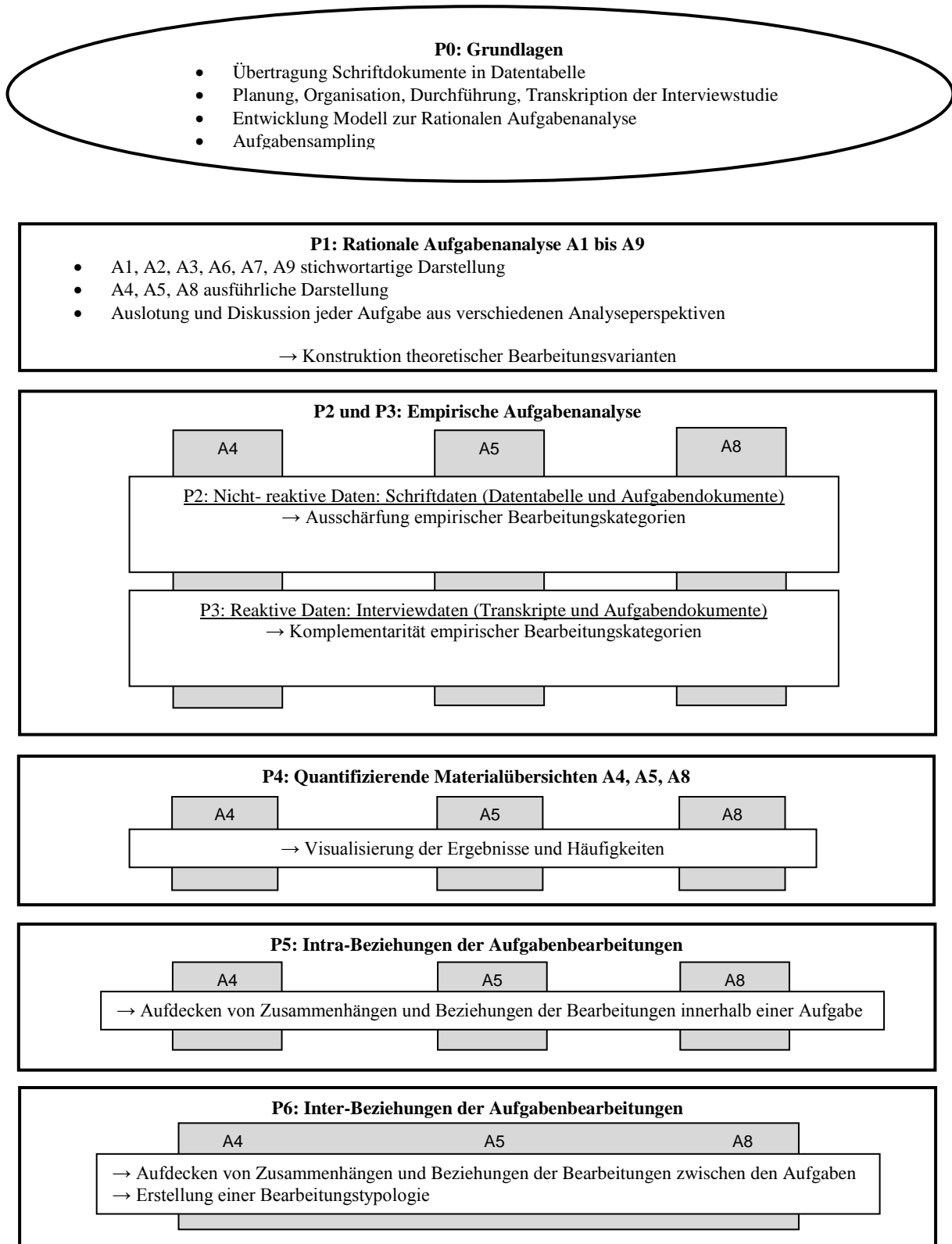
In einer abschließenden Phase stand eine Zusammenschau der Bearbeitungswege über die drei detailliert analysierten Aufgaben und ihre Teilaufgaben hinweg im Fokus der Untersuchung. Die Konstruktion einer eindeutigen Bearbeitungstypologie und die Charakterisierung von Bearbeitungskombinationen war nicht primäres Anliegen der Untersuchung. Auf Grundlage der empirisch belegten und auch nicht belegten Bearbeitungskombinationen konnten jedoch Häufungen und Beziehungen zwischen den Bearbeitungskonzepten beschrieben werden. Für diesen Untersuchungsschritt wurde nach begründetem Ausschluss einer Teilaufgabe (siehe Abschnitt 10.2.2.1) der multivariate Datensatz zu fünf analysierten Teilaufgaben verwendet.

Die Konstruktion einer Bearbeitungstypologie erfolgte in Anlehnung an das Stufenmodell der empirisch begründeten Typenbildung von KLUGE (1999). Die vier von ihr definierten Stufen zur systematischen und nachvollziehbaren Erstellung von Typologien wurden auf das Untersuchungsvorhaben adaptiert, wodurch eine Analyse der empirischen Daten in Kombination mit den zugrundeliegenden theoretischen Überlegungen und Forschungsanliegen ermöglicht wurde (siehe Abschnitt 10.2).

Im Rahmen der empirisch begründeten Typenbildung wurde die computergestützte Clusteranalyse eingesetzt. Die Entscheidung für ein Clusterverfahren, die Frage nach der optimalen Clusterzahl sowie die Untersuchungen zur Clustergüte werden in Abschnitt 10.3 ausführlich erläutert.

5.4.3 Übersicht des Forschungsvorhabens

Die folgende Grafik visualisiert die einzelnen Phasen des Forschungsvorhabens. Angeführt werden das jeweils zugrundeliegende Material und die Zielsetzungen der einzelnen Auswertungsphasen.



6 Die Aufgabenanalyse als Instrument der Untersuchung

In Kapitel 5 erfolgte neben einer Erläuterung der Forschungsanliegen die Einordnung der methodologischen und der methodischen Grundsätze der Untersuchung. Die Übersicht der mehrphasigen Untersuchung hebt die Bedeutung der Aufgabenanalyse als zentrales Instrument des Forschungsvorhabens hervor. Da bereits in Abschnitt 4.2 die Bedeutung von Aufgaben für den Mathematikunterricht erörtert wurde, wird nun die Aufgabenanalyse als anerkanntes Instrument der mathematikdidaktischen Forschung vorgestellt, an die sich eine Skizzierung relevanter Aufgabenanalysen anschließt. Dabei wird deutlich, dass keine Analysen von Aufgaben vergleichender Leistungserhebungen in der Grundschule vorliegen. Im Anschluss wird die Entwicklung und Umsetzung der Aufgabenanalyse für das eigene Forschungsvorhaben dargestellt. Nach einer Formulierung der Zielsetzungen der zweistufigen Untersuchung wird das entwickelte Modell der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse ausführlich erläutert.

6.1 Die Aufgabenanalyse als Instrument der mathematikdidaktischen Forschung

Der Ursprung der Aufgabenanalyse ist in industriellen und militärischen Ausbildungskontexten zu finden. In den Sechzigerjahren wendete der Psychologe und Pädagoge Robert GAGNÉ die Aufgabenanalyse als Zergliederung und Aufbereitung des zu vermittelnden Lernstoffes in Ausbildungskontexten an (vgl. BROMME/SEEGER/STEINBRING 1990, S. 2).

Die grundlegende Bedeutung von Aufgaben für den Mathematikunterricht wurde bereits in Abschnitt 4.2 erläutert. Einstimmig werden Aufgaben als das Instrument im Mathematikunterricht sowie der Leistungserhebungen bezeichnet (vgl. NEUBRAND 2008, S. 6f). BROMME, SEEGER und STEINBRING (1990, S. 3) unterstreichen das Potential einer mathematikdidaktisch orientierten Aufgabenanalyse eindringlich. Aufgrund der Doppeldeutigkeit von Aufgaben im Kontext des Mathematiklernens empfehlen sie „die Rolle der mathematischen Aufgaben als ‘Schnittstelle’ zwischen Lehrer und Schüler“ (BROMME/SEEGER/STEINBRING 1990, S. 3) für eine theoretische und empirische Analyse von Unterrichts- und Lernprozessen zu nutzen. WALTHER (2004, S. 10) fordert die Untersuchung von Aufgabenpotentialen, da aufgrund der Ergebnisse von Aufgabenanalysen ein transparenter Qualitäts- und Bezugsrahmen entsteht. Mit einer Aufgabenanalyse kann das Aufgabenpotential ausgelotet werden, um im Speziellen „die Entwicklung beziehungsweise Festigung von prozessbezogenen Kompetenzen zu unterstützen“ (WALTHER 2004, S. 11). So wird der Blick auf den Prozess und die Aufgabenbearbeitungen gerichtet, womit der in Abschnitt 2.2.1 dargestellten diagnostischen Entwicklungsfunktion entsprochen wird.

Felix WINTER (2008, S. 115) unterscheidet drei grundlegende Untersuchungsaspekte von Aufgaben im schulischen Kontext. Zunächst ist eine Analyse der Aufgabenstellung an sich möglich. Hier erfolgt eine Einschätzung im Hinblick auf Beschaffenheit, verfolgtem Konstruktionsprinzip, repräsentiertem Wissensgebiet, verbundenen Zielen oder gestellten Anforderungen. Darauf aufbauend kann eine Analyse der ausgelösten Lern- und Arbeits-

prozesse stattfinden. Die durch die Aufgabe ausgelösten Lern- und Lösungshandlungen können anhand der von den Schülern erbrachten Resultate untersucht werden und ermöglichen eine Interpretation der Lösung als Prozess. Zuletzt wird basierend auf den Arbeitsprodukten und der durch die Aufgabenbearbeitungen gezeigten Performanzen der Schluss auf das Vorwissen und die Kompetenzen der Schüler gezogen. Somit wird eine diagnostische Perspektive auf die Aufgabe eingenommen, denn „bei Lernaufgaben und mehr noch bei Aufgaben mit diagnostischer Fragestellung interessieren auch die Lösungshandlungen, hier also die Rechenwege“ (WINTER 2008, S. 116).

In Anlehnung an ARTIGUE (1994) wird die eigene Aufgabenanalyse als eine a priori Analyse der Aufgabe selbst mit einer Konstruktion theoretischer Bearbeitungsvarianten und einer sich anschließenden a posteriori Analyse der empirisch vorliegenden Aufgabenbearbeitungen durchgeführt. ARTIGUE nutzt diese Gliederung der Analyse seit vielen Jahren für ihre mathematikdidaktischen Forschungen im Bereich der Algebra. Sie betont die Notwendigkeit eines Durchdenkens mathematischer Situationen, die im Rahmen der Forschungsarbeit als Aufgaben gedeutet werden, und den dann anschließenden Vergleich mit der Wirklichkeit (vgl. ARTIGUE 1994, S. 35; ARTIGUE 1997, S. 105f).

In den letzten Jahren wird der schulinternen und -externen Leistungserhebung wachsende Bedeutung zugemessen, sodass im Anschluss der Leistungserhebungen vermehrt Aufgabenanalysen durchgeführt werden. Die hier häufig praktizierte Form der empirischen Aufgabenanalyse ist als psychometrische Analyse zu bezeichnen. Untersucht werden mit Hilfe statistischer Berechnungen Schwierigkeit und Trennschärfe der Aufgaben auf Grundlage einer metrischen Datenbasis (vgl. INGENKAMP/LISSMANN 2008, S. 161ff). Notwendige Voraussetzung hierfür ist eine testtheoretisch überprüfte Aufgabenkonstruktion hinsichtlich der Gütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität (siehe Abschnitt 3.2.2). Des Weiteren greift eine derartig retrospektive Analyse ausschließlich auf die Aufgabenlösung in Form der erteilten Punktwerte zurück, ohne die tatsächlichen Bearbeitungen und Lösungswege zu berücksichtigen. HERBIG (1978, S. 301f) bezeichnet die empirische Aufgabenanalyse daher als Aufgabenüberprüfung hinsichtlich statistischer Kriterien. WIECZERKOWSKI und QUINTALLA (1978, S. 282) betonen diese ausschließlich testtheoretische Ausrichtung der Aufgabenanalyse als Untersuchung messtheoretischer Anforderungen.

DUBS (2008, S. 279) gibt jedoch zu bedenken, dass Aufgaben in Tests und Prüfungen oft leichtfertig erstellt und entsprechend unbedacht beurteilt werden. Eine retrospektive Aufgabenanalyse sollte demnach weit mehr als Aussagen zu statistisch ermittelten Kennwerten liefern. Des Weiteren entspricht nicht jede vergleichende Leistungserhebung testtheoretischen Gütekriterien, was ebenfalls auf die untersuchte hessische Orientierungsarbeit zutrifft (siehe Abschnitt 4.5.3).

Die vorliegende Arbeit untersucht die Möglichkeit der diagnostischen Nutzung von Aufgaben in schriftlichen Leistungserhebungen der Grundschule. So ist die Empirische Aufgabenanalyse keine psychometrische Analyse und berücksichtigt neben den Lösungen ebenso die Bearbeitungen der Aufgaben (siehe Abschnitt 6.2). Auch in Anlehnung an Felix WINTER (2008, S. 116) ist neben der Analyse der Aufgabenstellungen eine Analyse der Aufgabenbearbeitungen unumgänglich. Darüber hinaus werden nicht nur die intendierten

Bearbeitungsprozesse und Aufgabenlösungen analysiert, sondern es ist „aus der Sicht des Schülers die betreffende Aufgabe hinsichtlich möglicher Lösungswege und der Schwierigkeiten bei ihrer Erfassung und Lösung einzuschätzen“ (HOMEISTER o.J., S. 1). Um diesen Anspruch zu erfüllen, werden in der eigenen Aufgabenanalyse sowohl theoretisch denkbare als auch reale Bearbeitungen der Aufgabe einbezogen (siehe Abschnitt 6.2). Zudem können Aufgabenbearbeitungen nicht immer dichotom beurteilt werden. SCHERER (2004) hebt diesen Aspekt hervor, wodurch die Einbeziehung theoretisch denkbare als auch realer Aufgabenbearbeitungen in die eigene Aufgabenanalyse unterstützt wird:

„Vielleicht existiert vielerorts das Bild, dass im Mathematikunterricht Schwierigkeiten selbstverständlicher identifiziert werden könnten. Tatsächlich hat es aber nur vordergründig diesen Anschein, denn es geht um weitaus mehr als um das Entscheiden über ‘richtig’ oder ‘falsch’. Die diagnostischen Methoden und Aufgaben sind daher auch im Mathematikunterricht kritisch zu reflektieren.“
(SCHERER 2004, S. 273)

BLÖMEKE ET AL. (2006, S. 331) merken an, dass eine systematische Analyse der Qualität von Aufgaben nach wie vor zu den vernachlässigten Forschungsbereichen gehört. Mit Blick auf die Bildungsforschung fällt auf, dass hier Aufgabenanalysen häufig an mathematischen Beispielen ausgeführt werden. So erörtert auch ROSCH (2006) die Aufgabenanalyse als Methode der Bildungsforschung anhand einer Aufgabe aus dem Mathematikunterricht²².

Nur wenige mathematikdidaktische Aufgabenanalysen gehen über die zuvor angeführte a priori Analyse der Aufgabenstellung hinaus. Hier sind vor allem die Arbeiten von BLÖMEKE ET AL (2006), WARTHA (2009) sowie HAFNER und VOM HOFE (2008) anzuführen²³. Darüber hinaus verwenden auch anerkannte Vertreter der kognitiven Mathematik in ihren Untersuchungen das Instrument der Aufgabenanalyse (vgl. SJUTS 2007, GRIEP 2005, KAUNE 2000). Trotz unterschiedlicher Umsetzungen berücksichtigen diese Analysen neben einer Untersuchung der Aufgabe selbst sowohl Aspekte der Aufgabenbearbeitungen als auch die realen Lösungsprozesse. Es werden jedoch ausschließlich Aufgaben aus dem Mathematikunterricht der Sekundarstufe I und II analysiert. Entsprechende Untersuchungen aus der Grundschule sind nicht bekannt, womit die Forderung nach Forschungsarbeiten in diesem Bereich vehement unterstützt wird.

Im Kontext von Leistungserhebungen wird das Instrument der Aufgabenanalyse bisher ausschließlich in der mathematikdidaktischen Forschung zu Schulleistungsstudien der Sekundarstufen verwendet. So beschäftigte sich das deutsche PISA-Konsortium während der

²² Neben der „Aufgabenanalyse als Methode der Bildungsforschung“ (ROSCH 2006) wird in diesem Zusammenhang auf die ausführlichen Überlegungen des Schulpädagogen Marc KLEINKNECHT zur Aufgabenanalyse und -weiterentwicklung verwiesen (vgl. KLEINKNECHT 2008), der seine Darstellungen ebenfalls an mathematischen Aufgaben konkretisiert.

²³ BLÖMEKE ET AL. wenden ihre Aufgabenanalyse hinsichtlich der Aufgabenqualität als dreistufige Untersuchung einer Aufgabe der gymnasialen Oberstufe an (vgl. BLÖMEKE ET AL. 2006). WARTHA führt im Rahmen des Projektes PALMA (Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik) Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs zu Beginn der Sekundarstufe I durch (vgl. WARTHA 2009). HAFNER und VOM HOFE verwenden für ihre Forschung zu Grundvorstellungen der Prozentrechnung eine Form der Aufgabenanalyse, die sich in die Bereiche der normativen und der deskriptiven Analyse gliedert (vgl. HAFNER/VOM HOFE 2008).

ersten Erhebungsphase im Jahr 2000 eingehend mit der Strukturierung und Klassifikation²⁴ der in den deutschen Zusatztests verwendeten Aufgaben (vgl. NEUBRAND ET AL. 2004). Im Zentrum der Analyse stehen fünf Kompetenzklassen, die im Anschluss der Testauswertung definiert wurden. Des Weiteren werden die Aufgaben anhand verschiedener Aspekte gekennzeichnet. Diese Aufstellung ist bisher die umfassendste Sammlung zu untersuchender Merkmale und Kennzeichen einer Aufgabe (vgl. NEUBRAND ET AL. 2004)²⁵.

Johanna NEUBRAND (2003) stellt in ihrem Dissertationsprojekt ein Klassifikationssystem vor, das anhand dreier grundlegender Merkmale eine objektive Kennzeichnung von Aufgaben ermöglichen soll²⁶. Ihre Untersuchung basiert auf der TIMSS-Video-Studie der 8. Jahrgangsstufe im Fach Mathematik aus Japan, den USA und Deutschland. Anhand der jeweiligen Merkmalsausprägung ist eine grundsätzliche Charakterisierung jeder Aufgabe möglich. Die Kombinationen der Merkmale charakterisieren wiederum Aufgabentypen, die durch weitere aufgabenspezifische Merkmale ergänzt werden (vgl. J. NEUBRAND 2003, S. 30ff; J. NEUBRAND 2000, S. 469).

MEYERHÖFER setzt sich seit einigen Jahren kritisch mit den Aufgaben der TIMSS- und PISA-Untersuchungen auseinander. Seine Aufgabenanalysen und darauf basierenden Interpretationen fußen auf der Methode der Objektiven Hermeneutik. Er arbeitet die objektive Textstruktur einer Aufgabenstellung heraus, wobei die subjektive Deutung einer Aufgabe betont wird (vgl. MEYERHÖFER 2005a, S. 1f). Auch nach MEYERHÖFER (2005c, S. 74) ist es für die Beurteilung einer Aufgabe in Leistungserhebungen unumgänglich, nicht nur die gewünschte intendierte Lösung im Blick zu haben, sondern auch weitere mögliche Lösungen zu bedenken. So trägt MEYERHÖFER in einem ersten Untersuchungsschritt mögliche Bearbeitungen der untersuchten Aufgabe zusammen. Der Versuch einer inhaltlichen Einordnung in die bereits existierenden Kompetenzstufen der Leistungserhebung zeigt, dass eine eindeutige Zuordnung aufgrund der differierenden Lösungsvarianten oft unmöglich ist. Als Konsequenz stellt er Kompetenzstufenbeschreibungen bei der vorhandenen Vielfalt von Lösungswegen grundsätzlich in Frage. Der zweite Untersuchungsschritt ist eine Textanalyse, da Überschrift und Textabschnitte hinsichtlich Inhalt, Intention, sprachlicher Besonderheiten und der zugrundeliegenden Mathematik untersucht werden (vgl. Aufgabenanalyse Bauernhöfe, MEYERHÖFER 2005b; Aufgabenanalyse M7, MEYERHÖFER 2005a).

Auch diese Beispiele zeigen die ausschließliche Verortung der Untersuchungen in den Sekundarstufen. Die vielschichtigen Ergebnisse der Analysen führen zu kontroversen Ansichten bezüglich Konstruktion sowie Einsatz und Beurteilung von Aufgaben in Leistungser-

²⁴ In der Arbeit wird zwischen der **Klassifikation** als Sammlung und Anordnung von Klassen hinsichtlich einer Rangfolge und der **Klassifizierung** als eine generelle Zusammenfassung von Objekten zu Klassen unterschieden.

²⁵ Analyseaspekte der Aufgaben: *mathematisches Stoffgebiet* (Arithmetik, Proportionalität, Algebra, Geometrie und Stochastik), *mathematische Tätigkeit* (Begründen, Beweisen, andere spezielle mathematische Tätigkeit, Modellierung als Präzisieren und Mathematisieren oder Interpretieren und Validieren), *Kontext* (authentisch, realistisch, innermathematisch, ohne Kontextanbindung, Umgang mit Größen), *Präsentation* (Text, Grafik, Diagramm, Funktionsgraph, geometrische Zeichnung, Tabelle, Bild), *Grundvorstellungen, sprachlogische und kognitive Komplexität* sowie *Problemlöseprozess* (vgl. NEUBRAND ET AL. 2004).

²⁶ NEUBRAND (2003) identifiziert als grundlegende Merkmale einer Aufgaben das für die Lösung *benötigte Wissen* (prozedurales Wissen, konzeptionelles Wissen, Faktenwissen), die *Komplexität* der Aufgabe (Anzahl zur Lösung benötigter Wissenseinheiten, Grad der geforderten Modellierung und Mathematisierung) und den *Kontext* (außermathematisch, innermathematisch, ohne Kontext).

hebungen. BENDER (2004, S. 60) stellt die berechtigte Frage, was die in Leistungsvergleichen gestellten Aufgaben tatsächlich überprüfen. Im Vordergrund seiner Überlegungen steht die zu hinterfragende Intention der Aufgabe durch die Aufgabenautoren, die auch in der Aufgabenanalyse des vorliegenden Forschungsvorhabens berücksichtigt wird. Diese ist für den Aufgabenbearbeiter oft undeutlich und kann häufig nicht erfüllt werden. Auch WALTHER und CHRISTIANSEN (1986) betonen die ständig im Blick zu behaltende Funktion und Intention der untersuchten Aufgabe:

„It should be emphasized in general that any analysis of task must take place in the perspectives of the teaching/learning process in which it is to be used, and that the pre-active analysis accordingly will depend on educational intentions.“

(WALTHER/CHRISTIANSEN 1986, S. 275)

Konsens herrscht über die Aussagekraft der Ergebnisse aus Aufgabenanalysen zu Leistungserhebungen für die Didaktik der Mathematik. Denn „Aufgaben sind (zudem) geeignete Analyseeinheiten, um von den Daten eines Leistungstests oder einer Studie mit Unterrichtsdokumentation zu inhaltlichen Interpretationen zu kommen“ (NEUBRAND 2008, S. 6). Ergebnisse von Aufgabenanalysen zeigen Einblicke in mathematische Denkstrukturen auf und können Hinweise auf bedeutsame Aufgabenmerkmale liefern (vgl. ebd.). Bisher existieren jedoch kaum Modelle einer ausführlichen Aufgabenanalyse nach mathematikdidaktischen Gesichtspunkten, bereits vorhandene Ansätze sollten weiterentwickelt werden.

Die angeführten Beispiele verdeutlichen zudem die Variationen in der Umsetzung von Aufgabenanalysen. So münden die Untersuchungen wie bei NEUBRAND ET AL. (2004) und NEUBRAND (2003) häufig in einer Klassifikation, bei der die Aufgaben hinsichtlich aufgestellter Kriterien anhand ihrer Ausprägungsgrade eingeordnet werden. Wie bereits angemerkt liegt die Intention der eigenen Aufgabenanalyse weder in einer Klassifikation der Aufgaben, noch wird eine psychometrische Aufgabenanalyse durchgeführt (vgl. bspw. LIENERT ET AL. 1994; HERBIG 1978; WIECZERKOWSKI/QUINTALLA 1978). Das Modell der eigenen Aufgabenanalyse ermöglicht eine multiperspektivische Untersuchung einer Aufgabe, wobei dem in Abschnitt 4.3 dargestellten Spannungsfeld zwischen Diagnose und Leistungserhebung bei dieser a priori Analyse eine besondere Bedeutung zukommt. Die realen Bearbeitungen der Drittklässler werden in der anschließenden a posteriori Analyse untersucht. Die Untersuchung der Bearbeitungswege verlangt demnach tiefer gehende und präzisierende Analysen, um Erkenntnisse auf der Ebene der Aufgaben sowie auf der Ebene der Aufgabenbearbeitungen zu erhalten. MÜLLER und HELMKE (2008, S. 33) empfehlen für entsprechende Forschungsvorhaben eine Verzahnung von Praxis, Empirie und Theorie. Diese lässt sich mit Hilfe einer mehrstufigen Aufgabenanalyse sinnvoll realisieren. Neben Rückschlüssen auf besondere Aufgabenkriterien werden so Aussagen zur diagnostischen Nutzung der Aufgaben anhand der empirischen Bearbeitungen möglich.

6.2 Das Instrument der Aufgabenanalyse in der vorliegenden Arbeit

6.2.1 Zielsetzung der Aufgabenanalyse

In der vorliegenden Arbeit wird eine ausführliche Aufgabenanalyse zu den Aufgaben und Schülerbearbeitungen einer landesweiten Vergleichsarbeit der Grundschule vorgenommen. Wie in Abschnitt 2.4 angeführt, haben Leistungsfeststellung und Diagnose speziell in der Grundschulzeit eine besondere Bedeutung. In den ersten vier Schuljahren wächst die Anforderung an eine aussagekräftige Diagnose der Kompetenzen des einzelnen Kindes. Möglichst frühzeitig sollen die Leistungen der Schüler mit ihren Stärken und Defiziten eingeschätzt werden, um die Kinder fördern zu können und ein sinnvolles Weiterlernen zu ermöglichen. Um diesem Anspruch gerecht zu werden, ist nicht nur die in Abschnitt 2.5 dargestellte diagnostische Kompetenz der Lehrer entscheidend. Ebenso bedeutsam sind Aufgaben als Instrumente der diagnostischen Verfahren. Es stellt sich die Frage, ob und inwiefern es im Rahmen einer schriftlichen Leistungserhebung – in der vorliegenden Untersuchung die hessische Orientierungsarbeit – möglich ist, die zwei konkurrierenden Ansprüche Diagnose und Leistungserhebung zu verknüpfen.

Prämisse der eigenen fachdidaktischen Aufgabenanalyse ist eine explizite Unterscheidung von Aufgabenstellung und Aufgabenbearbeitung. Beide Komponenten werden mit Hilfe einer zweistufigen Aufgabenanalyse gleichwertig betrachtet. Hierfür wird zunächst ein literatur- und theoriebasiertes Analysemodell entwickelt. Dieses stellt die Basis für eine Umsetzung der zweistufigen Aufgabenanalyse, die Rationale und die Empirische Aufgabenanalyse, dar.

Die **Rationale Aufgabenanalyse** dient einer ersten Identifikation aufgabenspezifischer Merkmale jeder untersuchten Aufgabe. Hierzu werden verschiedene relevante Analyseperspektiven mit ihren untergeordneten Aspekten eingenommen. Es wird erneut betont, dass mit der Rationalen Aufgabenanalyse keine Klassifikation der Aufgaben angestrebt wird. Eine Zuordnung bereits im Vorfeld definierter Ausprägungsgrade der aufgestellten Kriterien findet nicht statt (vgl. COHORS-FRESENBORG/SJUTS/ SOMMER 2004, S. 109ff). Es handelt sich bei dem Verständnis der eigenen Aufgabenanalyse um eine umfassende Untersuchung aufgabenspezifischer Merkmale, die anschließend eine detaillierte Beschreibung der einzelnen Aufgabe ermöglicht. Bei den Analysen wird die Intention der Aufgabenautoren im Blick behalten, um individuelle Besonderheiten der Aufgabe konträr zu diesen Absichten aufdecken zu können. Bei den Aufgaben der Untersuchung handelt es sich um Aufgaben einer landesweiten Orientierungsarbeit, sodass offizielle Kommentare zu Aufgabenintentionen, inhaltlichen Einordnungen und Ergebnissen vorliegen. Oftmals unterscheidet sich die Aufgabenintention der Aufgabenautoren vom Aufgabenverständnis des Schülers, was zu differierenden Auffassungen und Bearbeitungen führt. Da es sich weiterhin um eine schriftliche Leistungserhebung handelt, werden während des gesamten Analyseprozesses insbesondere die formale Präsentation der Aufgabe und ihre Wirkung auf den Aufgabebearbeiter betrachtet. WALTHER und CHRISTIANSEN (1986) betonen in diesem Zusammenhang, „that a task does not ‘include’ or ‘transmit’ the intended activity (actions, learning)

to the student in any canonical, a *priori* way" (WALTHER/CHRISTIANSEN 1986, S. 270). Auch BROMME, SEEGER und STEINBRING (1990, S. 6f) weisen darauf hin, dass die als objektiv zu bezeichnende Struktur einer Aufgabe keinesfalls den Verlauf der Aufgabebearbeitung bestimmt. Die subjektive Aufgabenwahrnehmung ist deshalb ebenso bedeutsam wie die analysierten Aufgabenmerkmale.

Auf Grundlage der Rationalen Aufgabenanalyse als a priori Analyse ist anschließend die Konstruktion möglicher Bearbeitungswege der Drittklässler realisierbar. Unabhängig von der ursprünglichen Aufgabenintention und der offiziell existierenden Musterlösung der untersuchten Aufgaben findet eine Zusammenstellung theoretisch möglicher Bearbeitungskonzepte mit untergeordneten Bearbeitungsvarianten statt, die jeweils anhand exemplarischer Beispiele illustriert werden. Hierbei werden korrekte Bearbeitungen ebenso wie mögliche Fehllösungen bedacht, womit dem Zusammenspiel des Bewältigungs- und Ausfallsaspekts entsprochen wird, das SACHER (2009) wie folgt anschaulich darlegt:

„Unter dem Bewältigungsaspekt achten wir darauf, welche Aufgaben und Schritte der Schüler lösen konnte, und wir schließen daraus auf seine Kompetenzen. Unter dem Ausfallsaspekt richten wir unser Augenmerk auf die Defizite, die in seiner Leistung offenbar wurden, und schließen daraus auf seine Lücken.“

(SACHER 2009, S. 80)

Die sich anschließende **Empirische Aufgabenanalyse** ist explizit von der in Abschnitt 6.1 erläuterten psychometrisch orientierten empirischen Aufgabenanalyse zu unterscheiden. Formal weist darauf bereits der verwendete Majuskel in der Schreibweise hin. Der Anspruch der Empirischen Aufgabenanalyse in der vorliegenden Forschungsarbeit ist eine detaillierte Analyse der Aufgabenlösungen anhand der umfangreichen empirischen Schrift- und Interviewdaten (siehe Abschnitt 5.2). Die Untersuchung lässt die Beurteilungen der Aufgaben und Punktwerte außer Acht, wobei diese Entscheidung auf das unzureichende Bewertungssystem der Orientierungsarbeit zurückgeführt wird (siehe Abschnitt 4.5.1). Stattdessen erfolgt eine deskriptive Darstellung und detaillierte Interpretation der tatsächlichen Schülerbearbeitungen. Es findet hier eine inhaltliche und qualitativ orientierte Untersuchung statt, wobei die Größe der Datenbasis quantitative Ergänzungen zulässt. Das auf Grundlage der Rationalen Aufgabenanalyse erarbeitete Kategoriensystem möglicher Bearbeitungswege zu jeder untersuchten Aufgabe bietet für die Empirische Aufgabenanalyse einen optimalen Orientierungsrahmen. Die Aufgabenbearbeitungen der Schrift- und Interviewdaten werden den theoretischen Bearbeitungskonzepten und -kategorien zugeordnet, wobei empiriegestützte Modifikationen bewusst intendiert sind. Erstes Ziel der Kombination aus Rationaler und Empirischer Aufgabenanalyse ist die Erstellung eines gesättigten Kategoriensystems der Bearbeitungen zu jeder der untersuchten Aufgaben. Die Prozesse der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse stehen in wechselseitigem Bezug zueinander und beeinflussen sich somit gegenseitig (siehe Abbildung 4). Diese Beziehung wird von BROMME, SEEGER und STEINBRING (1990) als „notwendiger Begründungszirkel“ bezeichnet (vgl. BROMME/SEEGER/STEINBRING 1990, S. 9). Zusammenfassendes Ziel beider Instrumente ist eine inhaltliche qualitative Analyse mit quantifizierbaren Aspekten der Aufgaben und ihren Bearbeitungen.

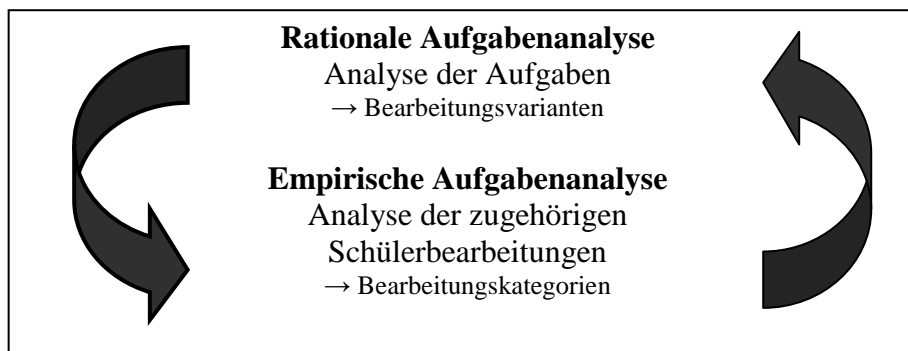


Abbildung 4: Zusammenspiel Rationale und Empirische Aufgabenanalyse.

Das Instrument der Aufgabenanalyse in der vorliegenden Arbeit vereint somit die in Abschnitt 6.1 angeführten Ausrichtungen von Aufgabenanalysen nach Felix WINTER (2008, S. 115): Die Rationale Aufgabenanalyse untersucht zunächst die gestellte Aufgabe an sich, um Beschreibungen zu Beschaffenheit, Konstruktionsprinzip, Wissensgebiet, Zielen und Anforderungen in Form von Aufgabenmerkmalen formulieren zu können. Somit wird der aufgabenspezifischen Blickrichtung WINTERS entsprochen. Anschließend nimmt die Empirische Aufgabenanalyse die realen Bearbeitungs- und Lösungswege der Drittklässler in den Blick. Die Ergebnisse und Aufgabenlösungen werden in diesen Untersuchungsschritt einbezogen, zeigen sich jedoch nicht für die Kategorisierung der Bearbeitungen verantwortlich. Hier wird sowohl der von WINTER (2008, S. 116) beschriebene Blick auf die Lösungshandlungen als Lernprozesse als auch der diagnostische Rückschluss auf mögliche Ursachen vereint. Die anschließende Zusammenführung der Aufgabenanalysen sowie die Erstellung einer Bearbeitungstypologie (siehe Kapitel 10) liefern weiterführende Hinweise zu den Aufgabenbearbeitungen und ermöglichen Rückschlüsse auf die Merkmale der in der Leistungserhebung gestellten Aufgaben.

6.2.2 Die Rationale Aufgabenanalyse

Die Untersuchung umfasst zunächst eine Analyse der neun vorliegenden Aufgaben in Anlehnung an das Verständnis der rationalen Aufgabenanalyse nach RESNICK und FORD (vgl. BROMME/SEEGER/STEINBRING 1990, S. 4f). Es findet eine Gliederung anhand diverser mathematischer, didaktischer und pädagogischer Aspekte statt, die von Bedeutung für Verständnis, Auffassung und Bearbeitung der Aufgabe sind. Die unterschiedlichen Analyseaspekte werden in den weiteren Ausführungen Perspektiven genannt.

Die entwickelte Rationale Aufgabenanalyse unterscheidet sich jedoch in einem zentralen Anliegen von der ursprünglichen Form nach RESNICK: Anhand seiner rationalen Aufgabenanalyse beschreibt RESNICK aus pädagogischer beziehungsweise didaktischer Sicht eine korrekte Aufgabenlösung, indem er die ideale Performanz dieser Aufgabenbearbeitung konstruiert. Dem gegenüber steht seine Form der empirischen Aufgabenanalyse, welche die tatsächlichen Aufgabenbearbeitungen, meist Fehllösungen, präsentiert (vgl. BROMME/SEEGER/STEINBRING 1990, S. 8f). Aus den umfangreichen Betrachtungen der eigenen Rationalen Aufgabenanalyse hingegen resultiert zunächst eine Konstruktion mög-

licher Schülerbearbeitungen, die nicht von vorneherein als korrekte Lösungen anzusehen sind.

Grundsätzlich stehen sich im Rahmen vergleichender Leistungserhebungen die Zielsetzungen als Instrument der Diagnose und gleichzeitig als Instrument der Leistungserhebung gegenüber. Somit versucht auch das Aufgabenset der untersuchten Leistungserhebung parallel die Funktion als Leistungsaufgaben sowie die Funktion als Diagnoseaufgaben zu erfüllen (siehe Abschnitt 4.2). Die Aufgaben sollen einerseits Ergebnisse zur Vergleichbarkeit der Leistung produzieren sowie andererseits der Feststellung vorliegender Kompetenzen dienen und konkrete Informationen für den weiteren Lernverlauf des einzelnen Schülers bieten. Für eine Einschätzung und Auswahl von Aufgaben in Leistungserhebungen sind ihre Funktionen und die damit verbundenen Zielsetzungen nicht unerheblich. Demnach ist in einem ersten Schritt der Rationalen Aufgabenanalyse herauszuarbeiten, welche Kriterien und Bedingungen eine Aufgabe zur Leistungserhebung und welche eine Aufgabe zur Diagnose erfüllen sollte.

Die **Zielperspektive Leistungserhebung** unterscheidet nochmals zwischen Aspekten der psychometrischen Anforderung an eine Leistungsfeststellung und Aspekten der Leistungserhebung im Allgemeinen (siehe Abschnitt 3.1 und 3.2).

Zunächst stehen die drei *Gütekriterien* Objektivität, Reliabilität und Validität im Vordergrund. Da in Abschnitt 3.2.2 ausführlich auf diese eingegangen wurde, erfolgt hier lediglich eine kurze Skizzierung. Die Objektivität bezeichnet die Unabhängigkeit der erreichten Ergebnisse bezüglich des Testleiters, der Auswertung sowie der Interpretation. Die Reliabilität beschreibt die Messgenauigkeit einer Leistungserhebung, die mit der Zuverlässigkeit eines gleichen Messergebnisses bei wiederholter Messung beschrieben wird. Dabei ist zunächst nicht relevant, was die Aufgaben der Leistungserhebung tatsächlich messen. Die Gültigkeit und Aussagefähigkeit einer Leistungserhebung zeichnet sich durch seine Validität aus. Es wird überprüft, ob der Test tatsächlich das misst, was er zu messen vorgibt.

Neben den Gütekriterien gilt die *Normierung* als weiteres anerkanntes Merkmal für die Güte einer Leistungserhebung (siehe Abschnitt 3.2.). Dabei kann eine Normierung auf Ebene eines sozialen, individuellen oder kriterialen Vergleichs stattfinden. Mit Hilfe dieser Bezugsnorm wird die Interpretation von Einzel- und Gruppenergebnissen einer Leistungserhebung und deren Einordnung möglich.

Eine Leistungserhebung sollte darüber hinaus generalisierbare Aussagen über das Antwortverhalten bezüglich einer Klasse von ähnlichen Aufgabenstellungen ermöglichen. Um aufgrund des Bearbeitungsweges Aussagen über Wissen und Fertigkeiten des Aufgabenbearbeiters treffen zu können, ist über den Transfer auf Aufgaben gleichen Typs nachzudenken. Dieses Gütekriterium wird als *Itemuniversum* bezeichnet (vgl. ROST 1996, S. 56f).

Ebenfalls von Interesse bei der Rationalen Aufgabenanalyse ist ein möglicher *Positionseffekt*, der aus der Platzierung einer Aufgabe in der Prüfung resultiert. So können speziell bei

Aufgaben am Anfang und am Ende der Leistungserhebung Effekte durch Einführungssituationen beziehungsweise Ermüdungserscheinungen bei der Bearbeitung auftreten. LEDE-
RER (2008, S. 66) zeigt in einer Untersuchung zu Prüfungen und Prüfungsaufgaben, dass mit zunehmender Dauer der Prüfung verstärkt Konzentrationsfähigkeit sowie Durchhalte-
vermögen der Schüler geprüft werden und die fachlichen Kompetenzen immer mehr in den
Hintergrund rücken.

Den Einfluss zuvor bearbeiteter Aufgaben berücksichtigt der *Reihenfolgeeffekt*. Zum einen
kann die Reihenfolge der Aufgaben die aufgabenspezifische Schwierigkeit beeinflussen,
beispielsweise durch die Anordnung der Aufgaben nach aufsteigender Schwierigkeit. Zum
anderen kann die vorherige Aufgabenbearbeitung die Bearbeitung der aktuellen Aufgabe
aufgrund der Nachhaltigkeit von Arbeitsauftrag, Antwortformat oder Lösungsweg beein-
flussen. SACHER (2009, S. 72f) betont, dass die zu bearbeitenden Aufgaben bei schriftli-
chen Prüfungen zunächst immer in der vorgegeben Reihenfolge gelesen werden. Die zuvor
angeführte Untersuchung von LEDERER (2008, S. 107f) zeigt, dass sich die Schüler auch
bei der Bearbeitung der Aufgaben in 80 % der Fälle an die vorgegebene Reihenfolge hal-
ten. So wird die deutliche Empfehlung ausgesprochen, schwierige und komplexere Aufga-
ben keinesfalls im hinteren Teil der schriftlichen Leistungserhebung zu positionieren.

Ob eine Aufgabe vom Aufgabenbearbeiter tatsächlich so verstanden wird, wie sie gemeint
ist, hängt unter anderem von ihrer sprachlichen Formulierung und der *Verständlichkeit* ab.
Durch die sprachliche Einkleidung einer Aufgabe wird ihre Schwierigkeit durchaus beein-
flusst, was ebenfalls für Aufgaben in mathematischen Leistungserhebungen gilt. BENDER
(2004, S. 61) und SCHERER (2004, S. 276) vertreten die Auffassung, dass minimale sprach-
liche Veränderungen bezüglich der verwendeten Begriffe oder Formulierungen zu völlig
unterschiedlichen Resultaten einer Aufgabe führen können. BENDER weitet seine Aussage
sogar auf das gesamte Layout einer Aufgabe aus.

BÜCHTER und LEUDERS (2005a, S. 165ff) formulieren weitere Anforderungen an Leis-
tungsaufgaben, die unabhängig von psychometrischen Kriterien zu sehen sind. Da es sich
bei vergleichenden Leistungserhebungen nicht immer um standardisierte Tests handelt,
werden zusätzlich folgende Aspekte für die Rationale Aufgabenanalyse hinzugezogen.

Bei Einsatz von Aufgaben zur Leistungserhebung ist zu klären, ob die Beherrschung eines
(rechnerischen) Verfahrens oder das Verständnis von Verfahren, Begriffen oder Modellen
überprüft wird. Es findet also eine Entscheidung für eine *Verstehens- oder Verfahrenso-
rientierung* statt. Eine verfahrenorientierte Aufgabe erwartet die Lösung einer Aufgabe
mittels eines meist mitgelieferten Verfahrens und seiner Anwendung. Zielsetzung ist dann
ein Ergebnis oder Produkt. Der verstehensorientierten Aufgabe liegt hingegen das Bild der
Mathematik als Prozess zugrunde. Die Aufgabenbearbeitung soll die individuellen Vorstel-
lungen und mathematischen Konzepte transparent machen, womit nicht das Ergebnis
selbst, sondern der Weg zum Ergebnis betont wird. BÜCHTER (2006, S. 5) plädiert für ei-
nen vermehrten Einsatz von verstehensorientierten Aufgaben in vergleichenden Leistungs-
erhebungen, um einen deutlicheren Effekt auf die Unterrichtsentwicklung zu bewirken.

Die *Erwartungstransparenz* kennzeichnet in diesem Zusammenhang die Klarheit der Forderungen und der Anforderungen an die Aufgabenbearbeiter. Hierzu gehören ebenfalls klare Abstufungen, für welche die geforderten Zielsetzungen als erfüllt gelten.

Für eine anschließende Beurteilung der Aufgabenbearbeitung sind Zwischenbetrachtungen und -ergebnisse der Schüler einzubeziehen. Die zur Verfügung stehende Bearbeitungszeit und die zu fixierenden Äußerungen sollten hierzu aufeinander abgestimmt sein. BÜCHTER und LEUDERS (2005a, S. 185ff) fassen diesen Aspekt unter dem Begriff Ergebnisorientierung, der aufgrund der Verwendung in anderen Kontexten jedoch durchaus missverstanden werden kann. Besser zu fassen ist der beschriebene Abgleich mit dem Begriff der *Ergebnisrelation*, der in den weiteren Ausführungen dieser Arbeit verwendet wird.

Neben der Zielperspektive Leistungserhebung ist im Rahmen der Rationalen Aufgabenanalyse die weitere **Zielperspektive Diagnose** notwendig.

Auch aus diagnostischer Sicht ist relevant, ob die zu analysierende Aufgabe prozess- oder ergebnisorientiert ausgerichtet ist, also eine *Verstehens- oder Verfahrenorientierung* anstrebt (siehe oben).

Ebenfalls wird die *inhaltliche Validität* der Aufgabe überprüft. Anhand der in den Aufgabenbearbeitungen gezeigten Performanzen werden weiterführende Entscheidungen für den Lernprozess des Kindes getroffen (vgl. BÜCHTER/LEUDERS 2005a, S. 173). Es wird untersucht, welche Kompetenzen für die Aufgabenbearbeitung notwendig sind und ob eine mögliche Überlagerung verschiedener Kompetenzen vorliegt.

Ein weiterer Aspekt der Analyse bezieht sich auf das verwendete *Antwortformat* der Aufgabe. SACHER (2009) veranschaulicht den Einfluss des Antwortformates auf das Diagnosepotential einer Aufgabe:

„Geschlossene Aufgabenstellungen ermöglichen keine Prozessdiagnose der Leistung. Wann immer uns daran liegt, nicht nur in Erfahrung zu bringen, ob Schüler eine Lösung finden oder nicht, sondern auch, welche Lösungswege sie beschreiten, sind wir auf offene und halb offene Aufgaben angewiesen.“

(SACHER 2009, S. 66)

Anhand eines freien Antwortformates werden die Aufgabenbearbeiter zu Notizen und Verschriftlichungen aufgefordert. SJUTS (2007, S. 35) betont die diagnostischen Erkenntnisse solcher Erläuterungen, da sie Verborgenes aufdecken und Unsichtbares sichtbar machen. Weitergehend lässt ein freies Aufgabenformat nicht nur falsche Antworten erkennen, sondern bietet darüber hinaus Einblicke in das Zustandekommen des Fehlers.

Die Anregung von *Eigenproduktionen* ermöglicht weitere Einblicke in die Denkweisen der Aufgabenbearbeitung und erhöht die Intensität der diagnostischen Rückschlüsse.

Das Kriterium der *multiplen Lösbarkeit* beschreibt die verschiedenen möglichen Lösungswege bei der Bearbeitung einer Aufgabe. Das können bereits kleine Abweichungen in den

Bearbeitungs- und Rechenwegen sein. Auch hier steht im Vordergrund, dass individuelle Bearbeitungen und Lösungen Schülervorstellungen abbilden. Dieser Aspekt wird durch eine *Einforderung von Reflexionen* über das eigene Lösen der Aufgabe oder über Metaaufgaben ergänzt.

Ein relevanter Aspekt für die diagnostische Nutzung einer Aufgabe ist die Möglichkeit der *Fehleranalyse*. Ergebnisse nicht korrekter Bearbeitungen sollen transparent werden, um weitergehend auf Ursachen der Fehler schließen zu können. Die Bedeutung sowie das Potential der Fehleranalyse für diagnostische Erkenntnisse werden seit vielen Jahren betont:

„Für die Fehleranalyse: wenn ein Schüler eine Aufgabe erfolgreich löst, weiß niemand, wie und weshalb er das tut. Es fragt auch keiner. Erst am fehlerhaften Denken schärft sich der Blick für die Funktionsweise des korrekten Denkens.“

(LORENZ 1987, S. 210)

Ebenso wenig wie eine Klassifikation der Aufgaben Ziel der anstehenden Aufgabenanalyse ist, gehört auch die Klassifikation von Schülerfehlern nicht zu den Zielen der Untersuchung. Theoretisch mögliche und empirische Fehllösungen werden in den Analyseprozess einbezogen, um eine Komplementarität der Erkenntnisse zu erreichen. Ergänzend merkt FRITZ (2003, S. 297) an, dass eine Fehleranalyse nicht nur auf Probleme des Kindes als Ursache für fehlerhafte Bearbeitungen hinweist. So wird die beschriebene Analyse genutzt, um Rückschlüsse auf die Aufgabe selbst zu ziehen und mögliche Ursachen in den Aufgabenmerkmalen zu identifizieren.

Die **Formale Perspektive** ermöglicht eine detaillierte Betrachtung der schriftlichen Präsentation der Aufgabe.

Zunächst wird unterschieden, ob es sich um eine Einzelaufgabe handelt oder ob *Aufgabenteile* vorhanden sind. Sind diese explizit in der formalen Präsentation der Aufgabe gekennzeichnet, werden sie als Teilaufgaben bezeichnet. Ist keine deutliche Benennung vorhanden und werden die Aufgabenteile erst durch das Durchdenken der nötigen Arbeitsschritte auffällig, wird diese Variante als Unteraufgabe benannt. Bei Existenz von Teil- oder Unteraufgaben stellt sich die Frage, inwieweit eine von den übrigen Aufgabenteilen abgelöste Bearbeitung möglich ist oder die konkreten Ergebnisse voneinander abhängig sind. Bei Aufgabenteilen kann es sich durchaus um eigenständige Arbeitsaufträge handeln, aus denen eine mögliche unabhängige Bearbeitung folgt. Ebenso denkbar ist ein gestufter Aufbau der Aufgabenteile, bei der jeder Teilschritt vom vorherigen Bearbeitungsschritt und seiner Korrektheit abhängt.

Die Darstellung der Situation wird in Anlehnung an die Fachliteratur als *Aufgabenstamm* bezeichnet (siehe Abschnitt 3.2.3). Die Bearbeitung der Aufgabe erfolgt anhand der schriftlich vorliegenden Präsentation und der so verdeutlichten Situation der Aufgabe. Die Darstellung erfolgt anhand eines Textes, wobei Fragen, Erläuterungen und Aufforderungen unterschieden werden. Zusätzlich kann ein Bild, eine Tabelle, ein Diagramm oder eine Zeichnung abgebildet sein, wobei auch die Anordnung dieser formalen Komponenten berücksichtigt wird.

Das *Antwortformat* wird in Anlehnung an ROST (1996, S. 61ff) zunächst zwischen freien und gebundenen Antwortformaten unterschieden (siehe Abschnitt 3.2.3). In freien Antwortformaten wird die Lösung der Aufgabe selbstständig mittels Sprache, Zahlen oder Zeichnungen von dem Aufgabenbearbeiter formuliert. Es wird grundlegend zwischen freien geschlossenen Antworten, bei denen die Antwort in Form eines Wortes, Satzes oder auch einer Zahl gegeben wird, und freien offenen Antworten unterschieden, bei denen die Notation des gesamten Denk- und Lösungsweges gefordert wird. Hingegen wird dem Aufgabenlöser bei einem gebundenen Antwortformat eine Vielfalt von Antwortalternativen angeboten, aus denen er lediglich durch das Setzen von Kreuzen auswählt. Unter Zuordnungsaufgaben versteht man eine Zuweisung von Antwortalternativen zu vorgegebenen Zahlen, Darstellungen oder Begriffen. Bei einer Alternativaufgabe trifft der Aufgabenbearbeiter die Entscheidung, ob eine vorherige Aussage korrekt oder nicht korrekt ist. Zudem existiert die so genannte Mehrfachwahlausgabe. Der Aufgabenbearbeiter drückt hier die Entscheidung anhand seiner gesetzten Kreuze aus. Falsche Antwortalternativen, so genannte Distraktoren, sollen bei Auswahlaufgaben die Identifikation der richtigen Lösung erschweren. Mit einer geschickten Auswahl an Distraktoren sollen jedoch auch Denkfehler und Fehllösungen der Aufgabenbearbeiter im Ansatz erfasst werden (siehe Abschnitt 4.3). Bei allen Varianten des gebundenen Antwortformates ist zu hinterfragen, ob die vorgegebenen Alternativen den Bereich sämtlicher Antwortmöglichkeiten abdecken und als exhaustiv bezeichnet werden. ROST (1996, S. 64) merkt an, dass die Exhaustivität bei vielen Leistungstests mit gebundenen Antwortformaten in Frage zu stellen ist, womit deren Validität sich erheblich verschlechtert. Darüber hinaus wird ein weiteres Dilemma bei der Auswahl geeigneter Antwortformate in schriftlichen Leistungserhebungen angeführt. Nur bei entsprechender sprachlicher Kompetenz ermöglichen freie Formate ein optimales Potential, um individuelle Leistungsprofile der Schüler zu zeigen. Wie zuvor erläutert, sind diese schriftlichen Erläuterungen Grundlage für produktive diagnostische Erkenntnisse. "Aber es kann dann schwierig werden, für die Beurteilung ihrer Leistungen überhaupt noch einen gemeinsamen Maßstab zu finden" (SACHER 2009, S. 67).

Wird eine **Inhaltliche Perspektive** auf Aufgaben vergleichender Leistungserhebung eingenommen, gilt es aus Gründen der inhaltlichen Validität Bezüge zu den jeweils gültigen Lehrplänen des Bundeslandes herzustellen. In der vorliegenden Untersuchung stellt der hessische *Rahmenplan Grundschule* (HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005) einen primär inhaltlichen Orientierungsrahmen dar²⁷. Es erfolgt eine Zuordnung zu einem der drei Inhaltsbereiche Mengen und Zahlen, Größen und Sachrechnen oder Geometrie. Auftauchende Diskrepanzen zu den Formulierungen des Hessischen Kultusministeriums sind an dieser Stelle von besonderem Interesse, da sie Einfluss auf die Beurteilung der inhaltlichen Validität der Aufgabe haben. Innerhalb der drei Arbeitsbereiche sind weitere Verbindungen aufzuzeigen. Es kann herausgefiltert werden, in welchem Schuljahreskomplex die Thematisierung des Aufgabeninhaltes laut Rahmenplan angedacht ist und welche Aktivitäten für

²⁷ Während der gesamten Untersuchungsphase gab es seitens des Hessischen Kultusministeriums Bestrebungen der Überarbeitung des 1995 veröffentlichten Rahmenplans Grundschule hin zu einem auf die Kompetenzorientierung ausgerichteten Kerncurriculum. Bis zur Abgabe der Arbeit 2011 lagen jedoch lediglich Entwürfe dieser Lehrpläne vor.

den Unterricht vorgeschlagen werden (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 1995, S. 146ff).

Neben dem Rahmenplan Grundschule gehören die *Bildungsstandards für das Fach Mathematik in der Primarstufe* zu den landesweiten fachlichen Richtlinien für die Schulpraxis. Verknüpfungen der analysierten Aufgabe zu den verschiedenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen als auch zu den inhaltlichen mathematischen Kompetenzen werden dargestellt und erläutert (vgl. KULTUSMINISTERKONFERENZ 2005, S. 6ff). Für die anschließende Empirische Aufgabenanalyse ist dieser unterscheidende Aspekt nicht unbedeutend. Bereits 1984 formulierte WALTHER (1984, S. 38) die Ebene des mathematischen Gegenstands oder betreffenden Sachgegenstands und die Ebene der zu entwickelnden Lernhandlung als zwei unterschiedliche, durch Aufgaben initiierte Tätigkeiten.

Aus diesem Grund findet eine vertiefende Untersuchung des Aufgabengegenstands auf mathematischen Zusammenhänge, Eigenschaften und Definitionen hin statt, um relevante Aspekte im Sinne einer (stichwortartigen) *Sachanalyse* zu präsentieren.

Im Anschluss klärt das *schuljahrbezogene Niveau* die Frage nach dem Schuljahr, in dem die Anforderungen und Teilanforderungen zur Bewältigung der Aufgabe tatsächlich gelehrt werden. Nicht immer sind hier pauschale Aussagen möglich, sodass eine differenzierte Betrachtung der Aufgaben gegebenenfalls notwendig ist.

Ein letzter Aspekt der inhaltlichen Analyse ist der *Kontext* der Aufgabe. In Adaption der durch das PISA-Konsortium unterschiedenen Zusammenhänge (siehe Fußnote 27) auf das vorliegende Untersuchungsvorhaben einer vergleichenden Leistungserhebung der Primarstufe wird folgende Unterscheidung getroffen: Eine Aufgabe kann ohne jeglichen Kontext gestaltet sein, einen innermathematischen Kontext besitzen oder es liegt ein außermathematischer Kontext vor. Bei letzterem wird zwischen authentischem und realitätsbezogenem Kontext differenziert.

Die **Kognitive Perspektive** rückt stoff- und aufgabenübergreifende Denkprozesse der Aufgabenbearbeitung in den Mittelpunkt und untersucht zunächst die *sprachlogische Komplexität* der Aufgabe (vgl. COHORS-FRESENBORG/SJUTS/SOMMER 2004, S. 142). Diese beschreibt den Aufwand des Schülers, die für die Lösung der Aufgabe relevanten Informationen des sprachlich gegebenen Aufgabentextes zu identifizieren, um als Grundlage der Bearbeitung eine Vorstellung von der Aufgabenstellung ausbilden zu können. Anhand der Formulierung des Aufgabentextes sowie der Reihenfolge der Sätze ergibt sich die Anforderung an die Entnahme der relevanten Informationen. Ebenso sind die verwendeten Sätze bedeutend. Handelt es sich um Einwortsätze oder einfache Hauptsätze, kann dies das Aufgabenverständnis positiv beeinflussen. Muss der Aufgabenbearbeiter die Informationen diffizilen Nebensätzen entnehmen, wird die Bearbeitung durchaus erschwert. Hinzu kommt die Verwendung von Begriffen oder Formulierungen mit besonderem Bedeutungsgehalt, welche die Auffassung und weitere Bearbeitung beeinflussen (vgl. COHORS-FRESENBORG/SJUTS/SOMMER 2004, S. 113f). SACHER (2009) unterstreicht die Anforderung

an die Aufgabenkonstruktion „sich dabei einer gut verständlichen und altersgemäßen Sprache [zu] bedienen“ (SACHER 2009, S. 71) und empfiehlt, für die Altersgruppe unübliche oder nicht geläufige Begriffe zu vermeiden. Der Einfluss von „irreführenden, ungenauen, kindfremden Wendungen“ (BENDER 2004, S. 61) auf die Aufgabenwahrnehmung und das damit einhergehende Verständnis ist besonders für Kinder im Primarstufenalter nicht zu unterschätzen.

Mit dem Grad der *kognitiven Komplexität* drücken sich nach COHORS-FRESENBORG, SJUTS und SOMMER (2004, S. 114f) die Anforderungen der Aufgabe an die Organisation und den Ablauf von Denkvorgängen sowie die damit einhergehende Informationsverarbeitung aus. So ist bei komplexen Aufgaben die Notwendigkeit von Vorüberlegungen zu durchdenken, bevor nötige Denkschritte parallel oder nacheinander ausgeführt werden können. Handelt es sich bei der Aufgabenbearbeitung um das Abarbeiten eines bekannten Schemas oder Modells, ist die kognitive Komplexität eher gering. Dem gegenüber steht die Verarbeitung mehrerer Informationen während eines Denkschrittes oder die parallele Verarbeitung von Nebenbedingungen. Ebenso beeinflussen vorhandene Wahrnehmungsunterstützungen wie beispielsweise verwendeter Fettdruck oder Grafiken den geistigen Organisationsaufwand.

Die Zuordnung der Aufgabe zu einem der drei anerkannten Anforderungsbereiche Reproduktion, Verknüpfung oder Verallgemeinerung (vgl. KULTUSMINISTERKONFERENZ 2005, S. 13) ist nicht immer eindeutig. Für die Zuordnung zu einem *Anforderungsniveau* sind aufgrund von Resultaten der bisherigen Aufgabenbetrachtung verschiedene Fälle und Voraussetzungen notwendigerweise zu unterscheiden. Die Vorkenntnisse der Schüler sind demnach unbedingt einzubeziehen. BLÖMEKE ET AL. (2006, S. 336) betonen in ihren Ausführungen die Abhängigkeit der Aufgabenschwierigkeit von dem bereichsspezifischen Vorwissen des jeweiligen Schülers, womit die allgemeingültige Beschreibung der Anforderung einer Aufgabe fast unmöglich erscheint. Auch die vielschichtigen Aufgabenanalysen von MEYERHÖFER (2004, 2005) zu TIMSS- und PISA-Aufgaben der Sekundarstufe I belegen die Abhängigkeit der Anforderung einer Aufgabe von dem eingeschlagenen Lösungsweg des Aufgabenbearbeiters. In der Rationalen Aufgabenanalyse erfolgt jeweils eine differenzierte Darstellung des Anforderungsniveaus, womit der beschriebenen Subjektivität des Anforderungsbereichs und des Problems der Nivellierung von Aufgaben entsprochen wird (vgl. SCHIPPER 2005, S. 355ff).

Ebenfalls in die Rationale Aufgabenanalyse einbezogen werden die offiziellen **Anmerkungen des Hessischen Kultusministeriums** zu den untersuchten Aufgaben. Diese sind in den originalen Unterlagen allesamt sehr knapp gehalten und werden in den Ausführungen zur Orientierungsarbeit 2005 meist in tabellarischer Form dargeboten (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005, S. 45ff). Die Anmerkungen lassen sich strukturieren in *Aufgabenkommentierung*, *Aufgabenlösung* und *Aufgabenbewertung*. Weiterhin werden hessenweite *Ergebnisse* kurz dargestellt sowie die Rückmeldungen der Lehrer einbezogen. Ergänzend werden in den offiziellen Ausführungen rückblickend einige Aussagen über *Schwierigkeiten und Anforderungen* der Aufgaben getroffen.

Die vollständigen Analyseperspektiven und ihre zugehörigen Analyseaspekte werden in der folgenden Abbildung zusammengefasst dargestellt.

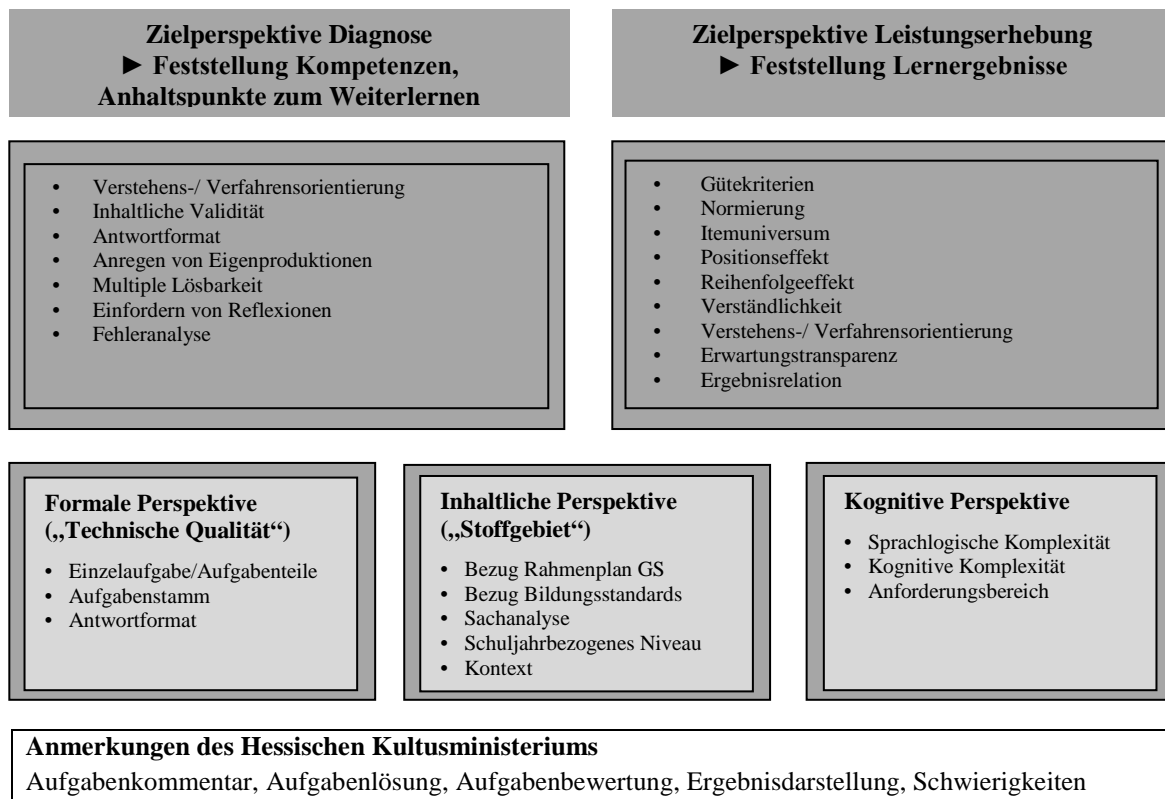


Abbildung 5: Analyseperspektiven und Analyseaspekte der Rationalen Aufgabenanalyse.

Die Kennzeichnung und Beurteilung einer Aufgabe und der Bearbeitungen sollte stets davon ausgehen, auf welche vielfältigen Weisen die Aufgabe gelöst werden kann (vgl. MEYERHÖFER 2005, S. 74). Auf Grundlage der Analysen jeder Aufgabe oder Teilaufgabe erfolgt die Konstruktion potentieller aufgabenspezifischer Bearbeitungen. Um die theoretischen Bearbeitungsmöglichkeiten strukturiert in tabellarischer Form darzustellen, werden übergreifende Bearbeitungskonzepte erstellt, unter denen vorstellbare Aufgabenbearbeitungen aufgeführt werden. Diese sind mit dem Begriff Bearbeitungsvarianten bezeichnet, um den zunächst theoretischen Charakter dieser Konstruktionen zu betonen. Jede Bearbeitungsvariante erhält eine namentliche Zuschreibung sowie die Darstellung einer exemplarischen Aufgabenbearbeitung anhand einer Bearbeitungsnotation.

6.2.3 Die Empirische Aufgabenanalyse

Während die Rationale Aufgabenanalyse jeweils die einzelne Aufgabe aus verschiedenen theoretischen Perspektiven betrachtet, stehen nun die tatsächlichen Aufgabenbearbeitungen der Drittklässler zu den untersuchten Aufgaben im Zentrum der Empirischen Aufgabenanalyse. Die Aufgabenanalyse dient konkret der Aufgabe und deren Bearbeitung im Verständnis der Schülertätigkeit (vgl. BROMME/SEEGER/STEINBRING 1990, S. 6). Die Datenbasis für diese Untersuchungsphase gliedert sich in die Schriftdaten der offiziellen hessischen

Orientierungsarbeit aus dem Jahr 2005 sowie die Daten der ergänzenden Interviewstudie (siehe Abschnitt 5.2).

Die zahlreichen und vielfältigen Aufgabenbearbeitungen einer Aufgabe oder Teilaufgabe werden während dieser Untersuchungsphase weder in dem oft unzureichenden Verständnis der Aufgabenautoren betrachtet, noch findet eine dichotome oder kategorienzuordnende Beurteilung in korrekte und nicht korrekte Aufgabenbearbeitungen statt. Anhand dieser Prinzipien wird der folgende Gedanke von BROMME, SEEGER und STEINBRING (1990) auch im Anschluss an die Rationale Aufgabenanalyse weitergeführt:

„Es gibt offensichtlich, bereits von dem Stoff her gesehen, mehr als eine mögliche Interpretation des Aufgabeninhaltes und damit auch mehr als einen möglichen (zulässigen) Weg zur Aufgabenlösung, und die Schüler realisieren eine Vielzahl unterschiedlicher Aufgabenlösungen, die sich auch nicht mehr in jedem Fall als nur falsch oder nur richtig kennzeichnen lassen.“

(BROMME/SEEGER/STEINBRING 1990, S. 8)

Das zuvor aufgestellte theoretische Kategoriensystem beschreibt trennscharfe Kategorien der Aufgabenbearbeitung, womit die Eindeutigkeit und Überschneidungsfreiheit der einzelnen Bearbeitungsvarianten gewährleistet ist. Mit Hilfe der empirischen Datensätze der Schrift- und Interviewdaten werden die theoretischen Bearbeitungskonzepte und -varianten nun zu empirisch belegten Bearbeitungskategorien ausgeschärft. Das theoretische Kategoriensystem der Rationalen Aufgabenanalyse dient dabei lediglich als Orientierungsrahmen der Empirischen Aufgabenanalyse. Die Einordnung der empirischen Daten erfordert an einigen Stellen durchaus die Notwendigkeit der Differenzierung, Zusammenfassung oder auch Eröffnung von Bearbeitungskategorien, was in den empirischen Sozialwissenschaften als bekannter und legitimer Sachverhalt gilt:

„Auch wenn man ein vorbereitetes Kategorienschema verwendet, wird es relativ häufig der Fall sein, dass während der Kodierung Kategorien aufgegeben werden (etwa weil sie empirisch zu gehaltvoll sind oder aus anderen Gründen den Gehalt der Daten nicht zu erschließen vermögen) oder aber, dass das Kategorienschema um zusätzliche Kategorien ergänzt wird.“

(KELLE/KLUGE 2010, S. 72)

Die Empirische Aufgabenanalyse mündet in einem ausführlichen Kategoriensystem von empirisch belegten Bearbeitungskonzepten und Bearbeitungskategorien zu jeder Aufgabe beziehungsweise Teilaufgabe. Ergänzende Darstellungsformen wie Diagramme oder Tabellen dienen der Visualisierung der Analyseergebnisse. Die zu den Aufgaben und Teilaufgaben erstellten Strukturierungssysteme erfüllen die drei Bedingungen von Kategorien qualitativer Merkmale (vgl. BORTZ/DÖRING 2006, S. 140ff). Das *Genauigkeitskriterium* verlangt präzise definierte und formulierte Indikatoren für die Kodierung der Bearbeitungskonzepte und Bearbeitungskategorien. Anhand des *Exklusivitätskriteriums* wird ausgeschlossen, dass eine Aufgabenbearbeitung gleichzeitig mehreren Bearbeitungskonzepten oder -kategorien zugeordnet werden kann. Darüber hinaus ist das Kategoriensystem derart erschöpfend, dass jede Aufgabenbearbeitung einer Bearbeitungskategorie zugewiesen wer-

den kann. Weiterhin legitimiert dieses *Exhaustivitätskriterium* die Existenz einer Hilfskategorie ‘Sonstige(s)’, wobei der Anteil der Zuordnungen in diese Kategorie möglichst gering zu halten ist (vgl. ebd.).

Über die Darstellung und Beschreibung der Aufgabenbearbeitungen hinaus erlaubt die Größe des vorliegenden Datensatzes von $N = 2022$ eine ergänzende Quantifizierung der Ergebnisse. Hierzu werden die Angaben verschiedener Häufigkeitsverteilungen genutzt. Die *absolute Häufigkeit* gibt jeweils die Anzahl der kodierten Datensätze in den Bearbeitungskonzepten und -kategorien an. Die relative Häufigkeit wird im Rahmen der vorliegenden Arbeit differenziert verwendet. Die *relativen Häufigkeiten* beschreiben den Anteil der Bearbeitungskategorie oder des Bearbeitungskonzeptes in Relation zu allen untersuchten Datensätzen. In die Empirische Aufgabenanalyse fließen ausschließlich bearbeitete Datensätze ein, sodass die Grundgesamtheit der jeweils untersuchten Aufgabe oder Teilaufgabe variiert. Ergänzend wird die *relative interne Häufigkeit* definiert, die den Anteil einer Bearbeitungskategorie im Verhältnis zu ihrem übergeordneten Bearbeitungskonzept wiedergibt. Die Angaben der relativen sowie relativen internen Häufigkeit erfolgen ausschließlich in Prozent, wobei der Wert im Fließtext auf eine Dezimalstelle gerundet angegeben wird. Die Eröffnung einer Bearbeitungskategorie erfolgt primär bei einer relativen Häufigkeit von über einem Prozent. Begründete Ausnahmen werden an der entsprechenden Stelle erläutert.

Ergänzend zu den detaillierten Untersuchungen der einzelnen Teilaufgaben sind Zusammenhänge und Beziehungen zwischen den Aufgabenbearbeitungen der Teilaufgaben einer Aufgabe von Interesse. Die Empirische Aufgabenanalyse beschränkt sich zunächst auf aufgabeninterne Untersuchungen, bevor in einer nachfolgenden Phase der Untersuchung Zusammenhänge zwischen den Bearbeitungen aller untersuchten Teilaufgaben in den Fokus genommen werden (siehe Abschnitt 5.4.2). Um Intra-Beziehungen der Aufgabenbearbeitungen zu identifizieren, eignet sich die *Arbeit mit Kontingenztafeln*. Die Auszählung von Bearbeitungskombinationen lässt sich mit Hilfe zweidimensionaler Kreuztabellen übersichtlich darstellen, wobei die Bearbeitungskategorien der Teilaufgaben jeweils die Anzahl der Zeilen und Spalten bestimmen. Die Zellen der Tabelle werden mit den empirischen Häufigkeiten der jeweiligen Bearbeitungskombination gefüllt. Der Kontingenztafel sind so Informationen zu besonderen oder häufigen Bearbeitungskombinationen zu entnehmen (vgl. BORTZ/DÖRING 2006, S. 142; BACKHAUS ET AL. 2008, S. 302ff).

Um den Zusammenhang von Aufgabenbearbeitungen statistisch zu prüfen und zu belegen, eignet sich die Berechnung des für nominal skalierte Daten anerkannten *Kontingenzkoeffizienten* C^{28} . Grundlage stellt zunächst die Berechnung des zugehörigen χ^2 -Wertes dar, der als die gewichtete Quadratsumme der Abweichungen zwischen den beobachteten und er-

²⁸ Formel Kontingenzkoeffizient C: $C = \sqrt{\frac{\chi^2}{\chi^2 + n}}$ mit $\chi^2 =$ (Chi²-Wert) und $n =$ Stichprobenumfang,

Formel (Chi²-Wert): $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(f_{bi} - f_{ei})^2}{f_{ei}}$ mit $f_{bi} =$ beobachtete Häufigkeit im i-ten Tafelfeld, $f_{ei} =$ erwartete Häufigkeit im i-ten Tafelfeld, $k =$ Zahl der Tafelfelder

warteten Häufigkeiten der Felder einer Kontingenztafel definiert ist. Ist der errechnete χ^2 -Wert größer als der normierte kritische Grenzwert, gilt der Zusammenhang der untersuchten Merkmale als erwiesen. Eine Berechnung des Kontingenzkoeffizienten C ist nur dann sinnvoll. Der Wert C liegt stets zwischen 0 und +1, wobei sein Maximum von der Größe der zugrundeliegenden Mehrfeldertafel abhängig ist. Um vorliegende C-Werte unabhängig von den Mehrfeldertafeln vergleichen zu können, muss die Berechnung eines korrigierten Kontingenzkoeffizienten C_{kor} erfolgen, der nun hinsichtlich des Zusammenhangs zwischen den nominalskalierten Merkmalen interpretiert werden kann (vgl. CLAUB/FINZE/PARTZSCH 1999, S. 63f; BORTZ 2005, S. 234f).

Anhand dieser Ergebnisse wird die Differenzierung und Explikation bisheriger Resultate möglich. Der Bezug zur Rationalen Aufgabenanalyse wird hergestellt und eine Kennzeichnung der Aufgabe kann erfolgen. In diesen Ausführungen wird auf die beiden Phasen der Aufgabenanalyse zurückgeblickt, um Wechselwirkungen zu identifizieren und in die Zusammenfassung aufzunehmen.

In dem sich anschließenden Schritt der Erstellung einer Bearbeitungstypologie werden mit Hilfe einer Clusteranalyse die Beziehungen zwischen den Aufgabebearbeitungen weiterführend untersucht. Die Analyse dieser Inter-Beziehungen ist jedoch von den Untersuchungsphasen der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse abzugrenzen und wird in Kapitel 10 ausführlich dargestellt.

TEIL III: DARSTELLUNG DER AUFGABENANALYSEN UND DER KONSTRUKTION EINER BEARBEITUNGSTYPOLOGIE

Das erarbeitete Modell der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse wurde auf die ausgewählten Aufgaben der untersuchten landesweiten Leistungserhebung angewandt. In den Kapiteln 7, 8 und 9 erfolgt die Darstellung der Ergebnisse zu A4 „Hundertertafel“, A5 „Quadrate in Figur“ und A8 „Zucker“ zunächst getrennt nach den drei Aufgaben. Die grundlegende Struktur der drei Kapitel ist weitestgehend identisch und orientiert sich an der Gliederung der entwickelten Aufgabenanalyse.

Einleitend ist jeweils die Aufgabe abgebildet, wie sie den Schülern auf den Aufgabendokumenten der Orientierungsarbeit präsentiert wird. Es schließen sich die Ergebnisse der Rationalen Aufgabenanalyse an, wobei jeweils auf die fünf beschriebenen Analyseperspektiven und die zugehörigen Analyseaspekte eingegangen wird. Zu jeder Aufgabe erfolgt daraus die Beschreibung theoretisch konstruierter Bearbeitungsvarianten als denkbare Lösungsmöglichkeiten. Hier wird weitestgehend jede Teilaufgabe separat betrachtet.

Die Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse dient zunächst der Erläuterung der ausgeschärften Bearbeitungsvarianten zu empirisch belegten Bearbeitungskategorien. Modifikationen der Bearbeitungsvarianten werden in diesen Abschnitten ebenso angeführt wie die notwendige Aufstellung weiterer Bearbeitungskategorien. Zur Illustration der Ausführungen dienen Beispiele aus den schriftlichen Datensätzen. Ausschnitte aus der Interviewstudie bieten ergänzende Einblicke in die Bearbeitungswege der Kinder. Nach einer jeweiligen Zusammenschau zur Entwicklung der Bearbeitungskategorien, schließt sich ein Überblick der gesamten Interviewstudie an. Merkmale der einzelnen Aufgaben werden an dieser Stelle erneut deutlich und können weiterführend dargestellt werden. Interne Besonderheiten der Aufgabe und ihrer Bearbeitungen werden anschließend anhand der Zusammenführung der Bearbeitungswege untersucht, wobei je nach Aufgabe individuelle Aspekte identifiziert und erläutert werden. Kontingenztafeln dienen in diesen Abschnitten oftmals dem Aufdecken der existierenden Zusammenhänge.

Abgeschlossen wird jedes Kapitel der Aufgabenanalyse mit einer Kennzeichnung der untersuchten Aufgabe, die Ergebnisse hinsichtlich der Aufgabenmerkmale und Besonderheiten zusammenfasst sowie das diagnostische Potential der Aufgabe skizziert.

In Kapitel 10 werden anschließend die Aufgabenbearbeitungen der Schüler zur Identifikation von Zusammenhängen aller drei Aufgaben untersucht. Die Erstellung einer Bearbeitungstypologie mithilfe einer computergestützten Clusteranalyse beantwortet dann die Frage nach einer möglichen Typisierung der Aufgabenbearbeitungen über die Einzelaufgaben hinweg.

7 Darstellung der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse A4 „Hundertertafel“

Die Aufgabe A4 „Hundertertafel“

Aufgabe 4
a) Trage die fehlenden Zahlen in die Hundertertafel ein!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31		33	34	35	36	37	38	39	40
41		43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62		64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87		89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Julia addiert in jeder Zeile alle Zahlen:
 1. Zeile: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$
 2. Zeile: $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 155$
 3. Zeile: $21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 255$
 Welches Ergebnis erhält sie in der 6. Zeile?

c) Julia erkennt: „Es kommen bei jeder Zeile immer 100 dazu.“
 Erkläre, warum es immer 100 mehr werden!

Abbildung 6: Aufgabe A4 „Hundertertafel“ der hessischen Orientierungsarbeit 2005.

7.1 Rationale Aufgabenanalyse A4 „Hundertertafel“ mit Konstruktion von Bearbeitungsvarianten

7.1.1 Die Analyseperspektiven

Anmerkungen des Hessischen Kultusministeriums²⁹

Die vorliegende Aufgabe A4 „Hundertertafel“ der hessischen Orientierungsarbeit 2005 versucht als einzige Aufgabe des Aufgabensets drei Anforderungsbereiche (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 45) in einer Aufgabenstellung zu vereinen. Die drei gekennzeichneten Teilaufgaben werden in den offiziellen Handreichungen jeweils einzeln kommentiert. Die Rationale Aufgabenanalyse untersucht die Aufgabe zunächst differenziert, um auf die Besonderheiten der einzelnen Teilaufgaben eingehen zu können. An einigen Stellen wird jedoch begründet von dieser Struktur abgewichen.

²⁹ Die folgenden Darstellungen beruhen auf den offiziellen Ausführungen des Hessischen Kultusministeriums zur ersten hessenweiten Durchführung der Orientierungsarbeiten (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a).

Laut *Aufgabenkommentar* werden die drei Teilaufgaben dem inhaltlichen Arbeitsfeld Mengen und Zahlen zugeschrieben. Die Anforderung an die Bearbeitung erhöht sich hierbei im Verlauf der drei Aufgabenteile. Die erste Teilaufgabe verlangt die Eintragung fehlender Zahlen in die vier freien Zellen einer Hundertertafel, womit dem Anforderungsbereich der Reproduktion entsprochen werden soll. Um die gefragte sechste Zeilensumme zu ermitteln, ist die in Teilaufgabe A4b dargestellte Zeilenaddition als strukturierte Aufgabenfolge nachzuvollziehen und gedanklich fortzusetzen. Da es sich hier um ein Herstellen von Zusammenhängen handelt, ist dieser Aufgabenteil laut Hessischem Kultusministerium im Anforderungsbereich Verknüpfung anzusiedeln. Die erkannte Struktur der Aufgabenfolge soll in der letzten Teilaufgabe A4c erläutert und verallgemeinert werden sowie als schriftliche Begründung notiert werden, womit es sich um einen Arbeitsauftrag im Anforderungsbereich Verallgemeinerung und Reflexion handelt.

Die *Aufgabenlösungen* werden wie folgt dargestellt: In Teilaufgabe A4a sind die Zahlen 32, 42, 63 und 88 in die freien Zellen der Hundertertafel einzutragen. Weiterhin stellt die Zahl 555 die in Teilaufgabe A4b gesuchte sechste Zeilensumme dar. Für Teilaufgabe A4c werden drei zu verwendende Argumentationsaspekte für die Begründung gefordert: 1. In jedem Kästchen einer neuen Zeile kommen immer 10 dazu. 2. In jeder Zeile sind es 10 Kästchen. 3. Also kommen $10 \cdot 10 = 100$ dazu.

Die *Aufgabenbewertung* wird konkret vorgegeben. Für jede korrekt eingetragene Zahl in der Hundertertafel sind 0,5 Punkte zu vergeben, womit bei Teilaufgabe A4a insgesamt 2 Punkte zu erreichen sind. Die korrekt ermittelte Zeilensumme 555 in der zweiten Teilaufgabe wird mit einem Punkt bewertet. Für eine angemessene Begründung in Teilaufgabe A4c werden auf Basis der zuvor aufgeführten Argumentationsaspekte drei Punkte vergeben. Es wird darauf hingewiesen, dass Teilpunkte für unvollständige Argumentationen berücksichtigt werden sollen. Weitere Hinweise für die Gliederung und Vergabe von Teilpunkten sind jedoch nicht vorhanden.

Die offiziellen und hessenweiten Resultate der *Ergebnisdarstellung* zeigen bei Betrachtung der einzelnen Teilaufgaben sehr heterogene Ergebnisse. Mit einem landesweiten Durchschnitt von 1,96 Punkten sowie einem mittleren Lösungsprozentsatz von 98 % gehört Aufgabenteil A4a zu den am erfolgreichsten gelösten Aufgaben dieses Jahrgangs. Bei der zweiten Teilaufgabe erreichten die hessischen Drittklässler einen mittleren Lösungsprozentsatz von 56 %, da durchschnittlich 0,56 Punkte erreicht wurden. Aufgabenteil A4c lieferte sogar das zweitschlechteste Ergebnis des gesamten Aufgabensets. Es wurde ein hessenweiter Durchschnitt von 0,81 Punkten erreicht, womit lediglich einem mittleren Lösungsprozentsatz von 27 % entsprochen wird.

Entsprechende Kommentare werden zu den *Schwierigkeiten und Anforderungen* der Aufgabe vermerkt. Die erste Teilaufgabe wird als Indikator für das Verständnis der Hundertertafel betrachtet. Aufgrund der erreichten Punktzahlen wird auf eine Vertrautheit der Drittklässler mit diesem Aufgabenformat geschlossen. Zahlreiche Rückmeldungen der durchführenden Lehrer kommentieren diese Teilaufgabe sogar als zu leicht. Aufgrund dieser

positiven Ergebnisse verwundert es die Verantwortlichen des Hessischen Kultusministeriums, dass die angeblich verstandene Struktur der Hundertertafel weder in Teilaufgabe b) genutzt, noch in Teilaufgabe A4c beschrieben werden kann. Das Begründen und Versprachlichen von mathematischen Sachverhalten wird von den Lehrern als zu anspruchsvoll und in der Kultur des Mathematikunterrichts noch nicht geläufig angesehen.

Zielperspektive Diagnose

Die Beurteilung einer *Verstehens- oder Verfahrenorientierung* fällt je nach Teilaufgabe sowie den damit verbundenen Aufgabenintentionen different aus. So ist die erste Teilaufgabe verfahrenorientiert, da bei der Bestimmung und Eintragung der vier gesuchten Zahlen eine reine Ergebnisorientierung angestrebt wird. Teilaufgabe A4b hingegen ist aufgrund ihrer Intention verstehensorientiert ausgerichtet. Die Struktur der Zeilenaddition als Aufgabenfolge soll erkannt und mit Blick auf die Zeilensummen ohne Rechnung weitergeführt werden. Jedoch ist nicht per se von diesem Aufgabenverständnis auszugehen. Auch wenn die zuvor beschriebene Struktur der Zeilenaddition in der Hundertertafel nicht durchdrungen und weitergeführt wird, kann mithilfe des Rechenverfahrens der Addition die Zeilensumme durch Aneinanderreihung der korrekten Summanden berechnet werden. In diesem Fall wird die Teilaufgabe entgegen ihrer Intention verfahrenorientiert gelöst, da nur ein bereits bekanntes Rechenverfahren ausgeführt wird. Die letzte Teilaufgabe hingegen ist im Sinne einer Prozessorientierung eindeutig als verstehensorientiert zu kategorisieren. Eine Begründung auf Basis der drei angeführten Argumentationsaspekte kann ausschließlich verfasst werden, wenn die von Julia formulierte Erkenntnis verstanden ist. Somit wird dann erneut die Aufgabenstruktur der Zeilenadditionen in der vorherigen Teilaufgabe in den Blick genommen.

Ebenso different ist die *inhaltliche Validität* der einzelnen Teilaufgaben einzuschätzen. Während die Eintragung der gesuchten Zahlen in Teilaufgabe A4a als valide zu bezeichnen ist, muss die inhaltliche Validität der zweiten Teilaufgabe deutlich verneint werden. Die vorherigen Ausführungen verdeutlichen, dass das Erkennen und Weiterführen der Aufgabenfolge für eine erfolgreiche Bearbeitung nicht zwingend notwendig ist. Der tatsächliche Bearbeitungsweg wird aufgrund des gewählten Antwortformates jedoch nicht ersichtlich (siehe Formale Perspektive). Da Teilaufgabe A4b und A4c inhaltlich miteinander verzahnt sind (siehe Inhaltliche Perspektive), ist auch die inhaltliche Validität der dritten Teilaufgabe zu verneinen. Der Bezug der letzten Teilaufgabe zur vorherigen Aufgabenstellung ist zu bedeutend, da bei einem fehlenden Verständnis für die Aufgabenfolge keine sinnvolle und vollständige strukturmathematische Begründung formuliert werden kann.

In den ersten beiden Teilaufgaben wird jeweils ein freies gebundenes *Antwortformat* verwendet. Bei Teilaufgabe A4a erfolgt die Notation der Lösung durch das Einsetzen der vier Zahlen in die Hundertertafel, weitere Notizen sind hier nicht vorgesehen. Ebenso ist die Lösung der zweiten Teilaufgabe lediglich als Ergebniszahl einzutragen. Auch an dieser Stelle sind keinerlei Notizen vorgesehen, die Aufschluss über den Bearbeitungsweg bieten

können. Beide Teilaufgaben sind hinsichtlich ihres Antwortformates ergebnisorientiert angelegt. Damit wird der Intention von Teilaufgabe A4b deutlich widersprochen. Das Antwortformat der Teilaufgabe A4c ist hingegen als freies offenes Antwortformat einzuordnen, da der Aufgabenbearbeiter eine frei formulierte Begründung abgeben soll.

Eine *multiple Lösbarkeit* der ersten Teilaufgabe ist zu bestätigen. Verschiedene Bearbeitungswege, die allesamt zu den gesuchten Zahlen führen, sind hier möglich (siehe Abschnitt 7.1.2). Wie bereits angemerkt, kann auch Teilaufgabe A4b anhand verschiedener Bearbeitungswege gelöst werden. Der eigentlichen Aufgabenintention entsprechen lediglich Bearbeitungsvarianten, die auf ein Erkennen und ein Nutzen der Aufgabenfolge zurückzuführen sind. An beiden Teilaufgaben wird kritisiert, dass das jeweilige Antwortformat keine Rückschlüsse auf den tatsächlichen Bearbeitungsweg zulässt. Die korrekte Lösung der Teilaufgabe A4c ist lediglich anhand eines Lösungszuganges möglich, da nur eine strukturmathematische Erklärung die Begründung für die Erhöhung der Zeilensummen liefert. Dieser Zugang setzt jedoch ein bereits in der vorherigen Teilaufgabe gezeigtes Verständnis für die abgebildete Aufgabenfolge voraus.

Den Ausführungen zu den Antwortformaten der vorliegenden Aufgabe ist bereits zu entnehmen, dass weder bei Teilaufgabe A4a noch bei Teilaufgabe A4b neben den Eintragungen der geforderten Ergebniszahlen weitere *Eigenproduktionen* oder Aufforderungen zu *Reflexionen* intendiert sind. In Teilaufgabe A4c hingegen ist die zu formulierende Begründung eindeutig als Eigenproduktion anzusehen.

So lässt der Versuch einer *Fehleranalyse* in den ersten beiden Teilaufgaben lediglich Vermutungen hinsichtlich der Denk- und Bearbeitungswege zu. Aufgabenteil A4c hingegen fordert aufgrund der selbstständig zu formulierenden Begründung eine tatsächliche Eigenproduktion, wobei dieser Kommentar zusätzliche Reflexionsanteile enthält. Anhand der freien Formulierungen sind belegbare Rückschlüsse auf die Denkweisen der Kinder möglich, was in der Retrospektive eine Interpretation der Lösung von Teilaufgabe A4b bedeuten kann.

Zielperspektive Leistungserhebung

Wie bereits in Abschnitt 4.5.3 erläutert, werden die testtheoretischen Gütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität in der hessischen Orientierungsarbeit 2005 nicht eingehalten. Ebenso ist aufgrund fehlender Vergleichsdaten keine soziale Normierung möglich (siehe ebd.).

Eine Einschätzung des *Itemuniversums* erfolgt erneut mit Blick auf die einzelnen Aufgabenteile. So kann das gezeigte Antwortverhalten in Teilaufgabe A4a bei ähnlichen Aufgabenstellungen zu Zahlen in der Hundertertafel oder vergleichbaren strukturmathematischen Abbildungen durchaus abgeleitet werden. Bereits bei Teilaufgabe A4b erweist sich ein solcher Schluss aufgrund der unterschiedlichen Bearbeitungswege als schwierig. Da in

Aufgabenteil A4c die Begründung eines speziellen Sachverhaltes gefordert wird, ist hier keine generelle Übertragung des Antwortverhaltens auf andere Begründungssachverhalte möglich.

Die *Position* der Aufgabe A4 „Hundertertafel“ wird wie folgt beschrieben: Es handelt sich um die vierte Aufgabe der Leistungserhebung. Sie befindet sich auf der zweiten Seite der Aufgabensammlung und nimmt diese vollständig ein.

Reihenfolgeeffekte sind bei einer chronologischen Bearbeitung der Aufgaben nicht zu erwarten. Die Aufgabe A3 „Überschlag“ befindet sich auf der vorherigen Seite und liegt somit nicht im Blickfeld des Aufgabenbearbeiters. Weiterhin sind keine Parallelen zwischen Inhaltsbereichen, Antwortformaten und Aufgabenstämmen zu verzeichnen. Eine Wirkung auf die nachfolgende Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ ist in Einzelfällen aufgrund einer Nachhaltigkeit der Grafik Hundertertafel auf die Grafik Kästchenfigur denkbar, wird jedoch als eher unwahrscheinlich eingeschätzt.

Die *sprachliche Formulierung* der Aufgabe erscheint unkompliziert, sodass keine Beeinflussung der Schwierigkeit aufgrund der sprachlichen Einkleidung erwartet wird. Die im Aufgabentext verwendeten Begriffe ‘addiert’ und ‘Zeilen’ können jedoch zu Irritationen führen (siehe Sprachlogische Komplexität).

Die *Erwartungstransparenz* der ersten beiden Teilaufgaben wird bestätigt. Aufgrund der klaren Aufgabenstellung und des gewählten Antwortformates ist hier für den Aufgabenbearbeiter deutlich, dass lediglich die Ergebniszahlen eingetragen werden sollen. Unterstützt wird der Arbeitsauftrag durch die freien Zellen beziehungsweise das Textfeld zur Notation im Aufgabenstamm. Kritisch zu bemerken ist, dass der Lösungszugang in Teilaufgabe A4b entgegen der ursprünglichen Aufgabenintention nicht klar vorgegeben ist. In Teilaufgabe A4c ist für den Aufgabenbearbeiter ersichtlich, dass eine Erklärung zu der genannten Aussage zu finden und schriftlich zu formulieren ist. Dies wird aufgrund der abgebildeten Schreiblinien zur Notation der Begründung im Aufgabenstamm unterstützt. Hinweise auf den Lösungszugang werden auch hier nicht angeboten. Eine implizite inhaltliche Abhängigkeit zu der vorherigen Teilaufgabe liegt jedoch vor.

Die *Ergebnisrelation*, also das Verhältnis der Bearbeitungszeit zu den Ergebnissen sowie der Bewertung, ist in Teilaufgabe A4a für die vier zu findenden Zahlen angemessen. Bei Teilaufgabe A4b wird eine Zahl als Ergebnis des Bearbeitungsprozesses eingetragen, wobei der Lösungszugang weder vorgegeben ist, noch transparent wird. Auch hier fließen keine Zwischenergebnisse in die Bewertung mit ein. Bei Bearbeitung mittels des intendierten Lösungszuganges, also dem Weiterführen der Aufgabenfolge, ist die Bearbeitungszeit im Verhältnis zum Ergebnis angemessen. Berechnet der Aufgabenbearbeiter hingegen die gefragte Zeilensumme und verfolgt somit einen nicht gewünschten, jedoch adäquaten Lösungszugang, ist dies infrage zu stellen. Das Verhältnis zwischen der Bearbeitungszeit bei Teilaufgabe A4c sowie der zu formulierenden Begründung wird ebenfalls als angemessen

eingeschätzt. Da der Aufgabenbearbeiter völlig frei formuliert und darüber hinaus reflektiert, fließen Zwischenergebnisse implizit in die Bewertung mit ein.

Die für die Aufgabe A4 „Hundertertafel“ problematische Einschätzung der *Verstehens- und Verfahrenorientierung* wird bereits im vorherigen Abschnitt der Zielperspektive Diagnose diskutiert und nun an dieser Stelle zusammengefasst. Teilaufgabe A4a erfordert die Bestimmung und Eintragung vier fehlender Zahlen in der Hundertertafel, wodurch aufgrund der ausschließlichen Ergebnisorientierung eine deutliche Verfahrenorientierung vorliegt. Im Sinne der Aufgabenintention ist Teilaufgabe A4b verstehensorientiert konstruiert. Die Struktur der Aufgabenfolge wird erkannt und ohne Rechnung weitergeführt, wodurch eine Prozessorientierung gegeben ist. Wird diese Struktur jedoch nicht verstanden und genutzt, kann die geforderte Zeilensumme trotzdem mittels Addition berechnet werden. Somit rückt hier eine Ergebnisorientierung in den Vordergrund, welche dann wiederum einer Verstehensorientierung entspricht. Die letzte Teilaufgabe hingegen ist bereits aufgrund der Aufgabenintention deutlich verstehensorientiert ausgerichtet. Das Verständnis für Julias Aussage sowie ein Verstehen des strukturmathematischen Hintergrundes sind Voraussetzungen für die Formulierung einer stichhaltigen Begründung.

Formale Perspektive

Die vorliegende Aufgabe ist in drei *Teilaufgaben* gegliedert, die jeweils mit den Aufzählungszeichen a), b) und c) gekennzeichnet sind. Teilaufgabe A4a teilt sich in vier Unteraufgaben, da vier fehlende Zahlen zu bestimmen sind. Die Bearbeitungen und Ergebnisse der Teilaufgaben A4a und A4b sind unabhängig voneinander zu sehen, sodass sie jeweils separat lösbar sind. Hingegen stehen die Bearbeitungen der Teilaufgaben A4b und A4c in inhaltlicher Abhängigkeit zueinander. Bei beiden Aufgabenstellungen stehen die abgebildeten Zeilenadditionen, ihre Summen sowie die damit verbundene Struktur der Aufgabenfolge im Mittelpunkt. Sowohl die strukturelle Erfassung als auch die Lösung der zweiten Teilaufgabe beeinflussen die Bearbeitung der letzten Teilaufgabe. Ebenso kann die Auseinandersetzung mit der letzten Teilaufgabe eine nachträgliche Beeinflussung der Bearbeitung von Teilaufgabe A4b bedeuten. Teilaufgabe A4c bietet mit der Information der Erhöhung um den Wert 100 eine Lösung zur Weiterführung der Aufgabenfolge, die rückblickend durchaus genutzt werden kann.

Mit Blick über sämtliche Teilaufgaben hinweg werden im *Aufgabenstamm* die drei Komponenten Text, Grafik und auch weitere Angaben verwendet. Es gibt keine einleitenden Erläuterungen und die formalen Komponenten sind jeweils deutlich den einzelnen Teilaufgaben zugeordnet. So beginnt Teilaufgabe A4a mit einem Text, der eine Aufforderung darstellt (*Trage die fehlenden Zahlen in die Hundertertafel ein!*). Unter diesem Satz befindet sich über die knappe Hälfte der Seite hinweg die Grafik der Hundertertafel. Alle Zellen sind bis auf die vier einzutragenden Zahlen mit der Zahlenfolge von 1 bis 100 beschriftet. Sodann folgt Teilaufgabe A4b, bei der mit einem ersten Text, konkret einer Erläuterung, eingeführt wird (*Julia addiert in jeder Zeile alle Zahlen.*). Es folgen die ersten drei Zeilenadditionen mit Angabe der Zeilensummen sowie der jeweiligen vorangesetzten Zeilen-

angabe (1. Zeile: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$, 2. Zeile: $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 155$, 3. Zeile: $21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 255$). Unter dieser Anordnung ist der eigentliche Arbeitsauftrag in Frageform zu finden (*Welches Ergebnis erhält sie in der 6. Zeile?*). Rechts neben der Frage befindet sich ein Textfeld in Lineatur 3 für die Eintragung der gesuchten sechsten Zeilensumme, also der Ergebniszahl 555. Teilaufgabe A4c wird mit einem erläuternden Satz unter Verwendung der wörtlichen Rede eingeleitet (*Julia erkennt: „Es kommen bei jeder Zeile immer 100 dazu.“*). Sogleich folgt der Arbeitsauftrag als Aufforderung (*Erkläre, warum es immer 100 mehr werden!*). Abgeschlossen wird die Aufgabe mit drei Schreiblinien in Lineatur 3 für die Notation der geforderten Begründung.

Die *Antwortformate* der Teilaufgaben setzen sich aus freien geschlossenen sowie freien offenen Formaten zusammen. Die beiden ersten Teilaufgaben verlangen die Notation von vier Zahlen beziehungsweise einer Summe, sodass hier ein freies geschlossenes Antwortformat vorliegt. In Teilaufgabe A4c ist eine Erklärung zu formulieren, womit es sich demnach um ein freies offenes Antwortformat handelt.

Inhaltliche Perspektive

Die inhaltliche Zuordnung der vorliegenden Aufgabe in Bezug zu dem *hessischen Rahmenplan Grundschule* erfolgt in den Arbeitsbereich Mengen und Zahlen. In Zusammenhang mit der Entwicklung des Zahlbegriffs sind für die Einsicht und den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems neben diversen Bündelungsaktivitäten der Umgang mit Zahlenband, Zahlenstrahl, Punktetafel und Zahlentafel unumgänglich. Hierzu gehört es, im Laufe der ersten beiden Grundschuljahre, Zahlen in diese Darstellungen einzutragen (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 1995, S. 150f). Teilaufgabe A4a stellt ein solches Aufgabenformat dar, wie es auch häufig in Unterrichtsmaterialien angeboten wird. Übungen oder Aufgabenstellungen, mit denen die Beziehungen und Strukturen dieser Darstellungen in den Blick genommen werden, sind laut Rahmenplan jedoch nicht vorgesehen.

Mit Blick auf die *Bildungsstandards Mathematik für die Primarstufe* sind zahlreiche Bezüge anzuführen, die Anspruch und Inhalt der drei Teilaufgaben verdeutlichen. Die Teilaufgaben A4a und A4b werden der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenz Zahlen und Operationen zugeschrieben. Es gilt Zahldarstellungen und Zahlbeziehungen, im Speziellen den Aufbau des dezimalen Stellenwertsystems, zu verstehen. Zahlen werden in diesem Zusammenhang verschieden dargestellt, wobei in der vorliegenden Aufgabe die Darstellung der Hundertertafel im Fokus steht. Weiterhin ist der inhaltliche Kompetenzbereich Muster und Strukturen von Bedeutung. Die Gesetzmäßigkeiten und Strukturen in Zahldarstellungen, so auch der Hundertertafel, werden erarbeitet und verwendet. Für die Bearbeitung der Teilaufgabe A4b ist das Fortsetzen dieses Musters gefordert. Wird die Aufgabenstellung entgegen der angedachten Intention gelöst und die geforderte Zeilensumme berechnet, verschiebt sich der Bezug in den Kompetenzbereich Zahlen und Operationen. Es steht dann die Kenntnis und Beherrschung der Grundrechenarten, hier der Addition, im

Vordergrund der Aufgabenbearbeitung. Teilaufgabe A4c wiederum ist deutlich im inhaltlichen Kompetenzbereich Muster und Strukturen verortet. Das Verständnis für die Struktur der Hundertertafel als Zahldarstellung sowie der inhaltliche Bezug zur vorherigen Teilaufgabe sind Voraussetzung für die geforderte Beschreibung und Begründung des vorliegenden Musters. Wird die Aufgabe ihrer Intention entsprechend bearbeitet, sind in Teilaufgabe A4b und A4c weiterhin diverse allgemeine mathematische Kompetenzbereiche gefordert. Im Sinne des Problemlösens ist eine Lösungsstrategie zu entwickeln, für die Zusammenhänge zwischen Hundertertafel und der präsentierten Aufgabenfolge erkannt und genutzt werden. Ebenso ist eine gewisse Argumentationskompetenz notwendig, da Julias Aussage zu hinterfragen und zu prüfen ist. Die mathematischen Zusammenhänge werden durchdrungen und Begründungen für die Korrektheit der Aussage gesucht. Die Formulierung der Erklärung erfordert eine sachgerechte Verwendung mathematischer Fachbegriffe und Zeichen, womit der allgemeine Kompetenzbereich Kommunizieren angesprochen wird (vgl. KULTUSMINISTERKONFERENZ 2005, S. 8).

Im Sinne einer *Sachanalyse* ist für die vorliegende Aufgabe die Hundertertafel als ordinale Form der Zahldarstellung von besonderer Bedeutung. Als typisches Arbeits- und Anschauungsmaterial der zweiten Jahrgangsstufe bildet sie die charakterisierenden Aspekte des dezimalen Stellenwertsystems ab.

Wird Teilaufgabe A4a als Arbeit mit der Hundertertafel verstanden, liegt hier ein *schuljahrbezogenes Niveau* zu Beginn des zweiten Schuljahres vor. Eine Einordnung der Teilaufgaben A4b und A4c als Arbeit mit der Struktur der Hundertertafel ist schwierig, da derartige Aufträge laut Rahmenplan Grundschule bisher nicht vorgesehen sind. Mit Einführung der Bildungsstandards Mathematik für die Primarstufe werden derartige Aufgabenstellungen jedoch durchaus gefordert. Da hier aufgrund der Zeilensummen jedoch auch die Arbeit im Zahlenraum bis 1000 von Bedeutung ist, wird hier ein schuljahrbezogenes Niveau Mitte der dritten Klasse angesetzt. Der Anspruch, Erkenntnisse zu überprüfen und Begründungen zu formulieren, ist hingegen in höheren Klassenstufen anzusiedeln.

Der *Kontext* der Aufgabe ist aufgrund der Hundertertafel deutlich strukturorientiert ausgerichtet und demnach innermathematisch.

Kognitive Perspektive

Der Aufgabenstamm grenzt die drei Teilaufgaben deutlich voneinander ab und es sind keinerlei formale Überschneidungen vorhanden (siehe Formale Perspektive). Die Einschätzung der Sprachlogischen Komplexität erfolgt ebenfalls anhand dieser Gliederung. Die als Hauptsatz formulierte Aufforderung in Teilaufgabe A4a transportiert deutlich den mit ihr verbundenen Arbeitsauftrag. Dieser enthält keine irrelevante Informationen und unterstützt mit der verwendeten Formulierung 'die fehlenden Zahlen' die Besetzung der vier freien Zellen in der abgebildeten Hundertertafel. Die Reihenfolge der beiden Sätze in Teilaufgabe A4b entspricht durchaus der anzustrebenden Bearbeitungsreihenfolge. Der Darstellung der vorliegenden Situation folgt nach einer Verdeutlichung der gebildeten Zeilenaddition die

Frage nach der sechsten Zeilensumme. Die beiden Hauptsätze enthalten erneut keine für die Aufgabenbearbeitung unnötigen Informationen. Eine Unkenntnis der darin verwendeten Begriffe 'addiert' und 'Zeilen' kann jedoch zu Irritationen führen. Julias Vorgehen und die angewandte Rechenoperation sind dann nur aufgrund der abgebildeten Zeilenadditionen zu erschließen. Ist der Begriff Zeile unbekannt, wird die Lokalisierung der als Summanden fungierenden Zahlen erschwert. Die Personifizierung in dieser und auch der nächsten Teilaufgabe stellt eine Besonderheit dar und dient der Identifikation des Aufgabenbearbeiters mit dem Mädchen Julia. Die zu beantwortende Frage erfordert ein Erkennen des Bezugs von Julias Rechnungen zu der abgebildeten Hundertertafel, was sprachlich jedoch keineswegs unterstützt wird. Auch in der letzten Teilaufgabe entsprechen die verwendeten Sätze der Chronologie der Bearbeitung. Erneut enthalten die beiden Hauptsätze keine unnötigen Informationen. Neben der verwendeten Personifizierung wird hier zusätzlich das Stilmittel der wörtlichen Rede genutzt. Der Begriff 'Zeile' wird ein weiteres Mal benutzt. Der ebenfalls verwendete Begriff 'immer' besitzt einen besonderen Bedeutungsgehalt, da er auf die Struktur und Systematik der zu betrachtenden Aufgabenfolge hinweist. Auch für diesen Aufgabenteil ist eine sprachliche Unterstützung des Bezuges zur vorherigen Teilaufgabe durchaus denkbar.

Die *kognitive Komplexität* der ersten Teilaufgabe wird gering eingeschätzt, da für jede Unteraufgabe, also das jeweilige Finden der Zahl, ein Denkvorgang ausreichend ist. Die Bearbeitung erfolgt nacheinander und Ergebnisse vorheriger Denkvorgänge müssen nicht verwendet werden³⁰. Auch ist die Verarbeitung mehrerer Informationen bei einem Denkschritt nicht nötig. Die Struktur der Hundertertafel beziehungsweise die Abfolge der Zahlen kann als ein Denkschema abgearbeitet werden. Eine Wahrnehmungsunterstützung, wie beispielsweise eine weitere Hervorhebung der zu füllenden Zellen, ist nicht gegeben. Unabhängig vom Bearbeitungsweg der Teilaufgabe A4b, Weiterführung der Aufgabenfolge oder Addition der Zeilensummanden, sind an dieser Stelle mehrere Denkvorgänge zum Finden der Zeilensumme nötig. Das Abarbeiten der Denkschritte erfolgt bei beiden Varianten in der Regel nacheinander. Die Ergebnisse vorheriger Denkschritte fließen in die folgenden Prozesse mit ein, dabei werden mehrere Informationen bei einem Denkschritt verwendet. Auch hier bietet die formale Präsentation der Aufgabe keine Wahrnehmungsunterstützung. Darüber hinaus erfordert das Zusammentragen der Argumente und die Formulierung der Begründung in der letzten Teilaufgabe eine Mehrzahl von Denkvorgängen. Im Speziellen sind hier Ergebnisse aus Teilaufgabe A4b notwendig. Somit verlaufen auch hier Denkvorgänge parallel, da mehrere Informationen verarbeitet werden.

Die Einordnung in *Anforderungsbereiche* erfolgt ebenfalls differenziert nach Teilaufgaben, wobei jeweils unterschiedliche Voraussetzungen der Aufgabenbearbeiter auch verschiedene Einordnungen bedingen. In der Regel ist die Hundertertafel ein gängiges Arbeits- und Anschauungsmittel des zweiten Schuljahres. Seit Beginn dieser Jahrgangsstufe wird im Zahlenraum bis 100 gearbeitet, sodass von einer Kenntnis der Zahlwortreihe und des dezimalen Stellenwertsystems auszugehen ist. Demnach entspricht die Aufgabenstellung der Teilaufgabe A4a dem Anforderungsbereich Reproduktion. Ist die Hundertertafel und ihre

³⁰ Bei den zu findenden Zahlen 32 und 42 ist dies möglich, aber nicht notwendig.

Struktur unbekannt, kann der Schüler die Aufgabe mit seinem Wissen über die Zahlenfolge lösen, wobei die Struktur der Hundertertafel dann unbedeutend ist. Teilaufgabe A4b ist in ihrer Anforderung der Verknüpfung zuzuordnen, insofern die Aufgabenfolge erkannt und weitergeführt wird. Wird diese Teilaufgabe mittels Addition bearbeitet, reduziert sich die Anforderung nach Lokalisierung der korrekten Zeilensummanden auf eine Reproduktion, nämlich die schlichte Anwendung eines bereits bekannten Rechenverfahrens. Unabhängig von den Voraussetzungen des Aufgabenbearbeiters sowie des Bearbeitungsweges entspricht Teilaufgabe A4c in ihrer Anforderung der Verallgemeinerung und Reflexion. Die in der Aufgabe präsentierte Aussage muss nachvollzogen, bewertet und schriftlich begründet werden.

Die nachfolgende Beschreibung möglicher Bearbeitungsvarianten gliedert sich entsprechend den drei vorhandenen Teilaufgaben. Da die ersten Teilaufgaben aufgrund ihres Antwortformates rein ergebnisorientiert ausgerichtet sind, wird in der Darstellung der Begriff Ergebniskonzept und nicht Bearbeitungskonzept verwendet. Wie zuvor bereits kritisch angemerkt, lassen die schriftlich vorliegenden Dokumente der Leistungserhebung keinerlei Rückschlüsse auf den tatsächlichen Bearbeitungsweg zu.

7.1.2 Bearbeitungsvarianten Teilaufgabe A4a

Die erste Teilaufgabe lässt aufgrund der erläuterten Ergebnisorientierung und dem damit einhergehenden Antwortformat lediglich zwei unterscheidbare Ergebniskonzepte zu. Unabhängig vom Bearbeitungsweg gelingt es dem Aufgabenbearbeiter alle vier gesuchten **Zahlen korrekt** in die freien Zellen der Hundertertafel einzutragen. Somit sind die Zahlen 32, 42, 63 und 88 abzulesen.

1. Zahlen korrekt, Ergebniszahlen vollständig und richtig, 32/ 42/ 63/ 88

Es erfolgt die Eintragung der vier korrekten Lösungszahlen 32, 42, 63 und 88.

Konträr dazu wird das Ergebniskonzept **Zahlen nicht korrekt** beschrieben. Hier sind die gesuchten Zahlen fehlerhaft oder unvollständig eingetragen, wobei die Ursachen anhand des verwendeten Antwortformates nicht transparent werden. Die dargestellten Ergebniskonzepte sind für jeweils ein, zwei oder drei der einzutragenden Zahlen denkbar, wobei auch Kombinationen der Ergebnisvarianten möglich sind.

2. Zahlen nicht korrekt, Ergebniszahlen unvollständig, 32/ / 63/ 88

Der Aufgabenbearbeiter trägt die Zahlen unvollständig ein. Es fehlen hier bis zu drei Zahlen. Die angegebenen Ergebniszahlen sind jedoch richtig.

3. Zahlen nicht korrekt, Ergebniszahlen falsch - Nachbarzahlen, 32/ 43/ 63/ 88

Im Rahmen dieses Ergebniskonzeptes trägt der Aufgabenbearbeiter vier Zahlen ein. Es sind jedoch Nachbarzahlen der gesuchten Ergebniszahlen abzulesen.

4. Zahlen nicht korrekt, Ergebniszahlen falsch - Nachbarzehner, 32/ 52/ 63/ 88

Es erfolgt die Eintragung nicht korrekter Zahlen, wobei der Aufgabenbearbeiter Gebrauch von den Nachbarzehnern der gesuchten Ergebniszahlen macht.

5. Zahlen nicht korrekt, Ergebniszahlen falsch - Weitere, 32/ 50/ 63/ 88

Die in diesem Fall nicht richtigen Ergebniszahlen weisen keinen Zusammenhang zu den gesuchten Zahlen auf.

Auch wenn der Bearbeitungsweg der Teilaufgabe A4a aufgrund der ausschließlich schriftlich vorliegenden Datensätze nicht zu entnehmen ist, werden an dieser Stelle drei unterscheidbare, theoretisch konstruierte, Bearbeitungskonzepte zur Identifikation der gesuchten Zahlen angeführt.

Identifikation der Zahlen über den abgebildeten Vorgänger und/oder Nachfolger

Der Aufgabenbearbeiter nimmt die Zahlen links und/oder rechts der freien Zelle in den Blick. Aufgrund seines Wissens über das Prinzip des Vorgängers und Nachfolgers in der Zahlwortreihe kann er nun die gesuchte Zahl bestimmen und eintragen. Die kontextuelle Einbettung in die Darstellung der Hundertertafel ist bei diesem Bearbeitungsweg prinzipiell unbedeutend.

Identifikation der Zahlen durch Weiterzählen

In diesem Fall nimmt der Aufgabenbearbeiter nicht konkret Vorgänger oder Nachfolger der gesuchten Zahl in den Blick, sondern bestimmt die gesuchte Zahl durch Weiterzählen. Hierzu wählt er einen Zeilenausschnitt aus und vervollständigt gedanklich die ihm bekannte Zahlwortreihe. Auch hier rückt die Struktur der Hundertertafel in den Hintergrund.

Identifikation der Zahlen durch Nutzen der Struktur der Hundertertafel

Der Aufgabenbearbeiter fokussiert die freie Zelle tatsächlich als Ausschnitt der Hundertertafel. Nun kann er sein Wissen über deren Struktur einsetzen. Nicht nur die Nachbarzahlen der gesuchten Zahlen, auch darüber- und darunterliegende Zahlen oder die Zeilen- und Spaltenbesetzung der Hundertertafel stellen dann eine Hilfe zur Lösungsfindung dar.

7.1.3 Bearbeitungsvarianten Teilaufgabe A4b

Aufgrund der ebenfalls deutlichen Ergebnisorientierung der zweiten Teilaufgabe werden lediglich zwei unterschiedliche Ergebniskonzepte konstruiert, die jedoch eine Beschreibung detaillierter Ergebnisvarianten zulassen. Auch hier ist zunächst das Konzept **Ergebniszahl korrekt** zu nennen. Die eingetragene Ergebniszahl entspricht der gesuchten sechsten Zeilensumme 555. Auch wenn die eigentliche Aufgabenintention keine weiteren Notationen der Aufgabenbearbeiter wünscht, werden auf Grundlage der Rationalen Aufgabenanalyse zwei Ergebnisvarianten unterschieden.

1. Ergebniszahl korrekt, 6. Zeilensumme, 555

Der Aufgabenbearbeiter trägt die gesuchte Ergebniszahl 555 ein. Weitere Notationen, die Rückschlüsse auf den Bearbeitungsprozess liefern, sind nicht vermerkt.

2. Ergebniszahl korrekt, 6. Zeilenaddition, $51+52+53+54+55+56+57+58+59+60=555$

Der Aufgabenbearbeiter notiert neben der gesuchten Lösungszahl die zugehörige Zeilenaddition. Somit ist von einer Berechnung der Zeilensumme und nicht von einer Weiterführung der Aufgabenfolge auszugehen.

Im folgenden Konzept **Ergebniszahl nicht korrekt** entspricht die Lösung nicht dem sechsten Zeilenergebnis, wobei verschiedene fehlerhafte Ergebnisvarianten denkbar sind.

3. Ergebniszahl nicht korrekt, 7. Zeilensumme, 655

Anstelle der geforderten sechsten Zeilensumme präsentiert der Aufgabenbearbeiter die Summe der darauffolgenden siebten Zeile. Diese enthält als Summanden jeweils die Zahlen mit sechs Zehnern, was den Aufgabenbearbeiter zur Notation dieser Zeilensumme verleitet haben kann.

4. Ergebniszahl nicht korrekt, 7. Zeilenaddition, $61+62+63+64+65+66+67+68+69+70=655$

Wie bereits zuvor beschrieben, weist hier zusätzlich die Notation der siebten Zeilenaddition auf ein Errechnen der hier nicht korrekten Ergebniszahl hin.

5. Ergebniszahl nicht korrekt, 4. Zeilensumme, 355

Ebenso sind das bloße Weiterführen der Aufgabenfolge und die Notation der vorherigen, also vierten, Zeilensumme möglich.

6. Ergebniszahl nicht korrekt, 4. Zeilenaddition, $31+32+33+34+35+36+37+38+39+40=355$

Auch diese vierte Zeilensumme kann mittels einer Zeilenaddition errechnet und schriftlich fixiert werden.

7. Ergebniszahl nicht korrekt, x. Zeilensumme, $x55$

Der Aufgabenbearbeiter notiert das Ergebnis einer beliebigen Zeilensumme, ohne den konkreten Arbeitsauftrag zu beachten.

8. Ergebniszahl nicht korrekt, x. Zeilenaddition, $x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x0=x55$

Entsprechend ist die Zeilenaddition dieser beliebigen Zeilensumme möglich.

9. Ergebniszahl nicht korrekt, 6. Zeilensumme $\neq 555$, $55x$ oder $5xx$

Auf Basis der multiplen Lösbarkeit ist eine Notation nicht korrekter Ergebniszahlen denkbar, die auf eine fehlerhafte Berechnung der sechsten Zeilensumme hinweisen.

10. Ergebniszahl nicht korrekt, 6. Zeilenaddition $\neq 555$, $51+52+53+54+55+56+57+58+59+60=55x$ oder $5xx$

Weist das Schriftdokument nicht nur eine falsche Ergebniszahl, sondern zusätzlich die Notation der sechsten Zeilenaddition auf, ist von einer fehlerhaften Berechnung der gesuchten Zeilensumme auszugehen.

11. Ergebniszahl nicht korrekt, Summe der angegebenen Zeilensummen, $55+155+255=465$
Bei fehlendem Verständnis für die Aufgabenfolge und die damit verbundene Aufgabenstellung ist eine bloße Addition der drei angegebenen Zeilensummen nicht auszuschließen.

7.1.4 Bearbeitungsvarianten Teilaufgabe A4c

Als Konsequenz der Rationalen Aufgabenanalyse werden im Folgenden drei Bearbeitungskonzepte beschrieben. Die Darbietung der Aufgabe sowie das Antwortformat ermöglichen bei dieser Teilaufgabe nun einen Blick auf den Bearbeitungsweg und nicht nur auf das notierte Ergebnis, da die Aufgabenbearbeiter in dieser Teilaufgabe zur Formulierung einer Begründung aufgefordert werden.

Aufgrund der Erkenntnisse der Rationalen Aufgabenanalyse sind generell drei Bearbeitungskonzepte zu unterscheiden: **Bearbeitungskonzept Strukturmathematische Begründung**, **Bearbeitungskonzept Argumentation mit Bezug zur Aufgabenfolge** sowie das **Bearbeitungskonzept Anderes**.

Das erste Bearbeitungskonzept beschreibt Bearbeitungsvarianten, bei denen der Aufgabenbearbeiter die strukturmathematischen Aspekte der Aufgabenfolge in seiner notierten Begründung aufgreift. Die Teilaufgabe A4c gibt Julias Erkenntnis wieder, deren Aussage eine Erhöhung der Zeilensummen um jeweils 100 darstellt. Einer detaillierten Begründung dieser Aussage liegen drei Argumentationsaspekte zugrunde, die auf der Struktur der Hundertertafel beruhen. Zum einen erhöhen sich die Zahlen in der Hundertertafel von Zeile zu Zeile um jeweils 10. In jeder Zeile befinden sich zudem zehn Zahlen und die Erhöhung der Zeilensumme errechnet sich somit aus der Multiplikation 10 mal 10. Diese drei Argumentationsaspekte bilden die Grundlage für das hier beschriebene Bearbeitungskonzept. Drei Bearbeitungsvarianten werden unterschieden, wobei von weiteren Differenzierungen bei der späteren Empirischen Aufgabenanalyse auszugehen ist.

1. Strukturmathematische Begründung, ein Argumentationsaspekt wird genannt,

Beispiel: „Zu jeder Zahl kommen 10 dazu.“

Das Aufgabendokument weist einen der drei angeführten Argumentationsaspekte auf. Welcher von diesen notiert wird, ist aus theoretischer Sicht zunächst nicht von Bedeutung. Bei der Empirischen Aufgabenanalyse ist interessant, welche Häufigkeiten die drei Argumentationsaspekte jeweils aufweisen werden.

2. Strukturmathematische Begründung, zwei Argumentationsaspekte werden genannt,

Beispiel: „Zu jeder Zahl kommen 10 dazu, 10 mal 10 gleich 100.“

Bei dieser Variante werden zwei der drei Argumentationsaspekte für die Argumentation verwendet. Auch hier ist nicht relevant, welcher der Aspekte außer Acht gelassen wird.

3. Strukturmathematische Begründung, drei Argumentationsaspekte werden genannt,

Beispiel: „Zu jeder Zahl kommen 10 dazu, in jeder Zeile sind 10 Zahlen, $10 \cdot 10$ gleich 100.“

Dem Aufgabenbearbeiter gelingt eine vollständige Argumentation, sodass die Schrift Dokumente die zuvor angeführten drei Argumentationsaspekte aufweisen.

Weiterhin ist es denkbar, dass Aufgabenbearbeiter in ihren Begründungen Bezüge zu der Aufgabenfolge herstellen oder Eigenschaften anführen, ohne sich der strukturmathematischen Argumentationsaspekte bewusst zu sein oder sie in den Formulierungen zu verwenden. Solche Varianten werden mittels des Bearbeitungskonzeptes Begründung mit Aufgabenbezug beschrieben.

4. Begründung mit Aufgabenbezug, Erhöhung der Summanden/Zeilensumme,

Beispiel: „Es werden immer mehr.“

Um Julias Erkenntnis zu begründen, führt der Aufgabenbearbeiter die Erhöhung der Summanden in den Zeilenadditionen an. Intuitiv kann hier ein richtiger Denkansatz vorliegen. Wie diese Erhöhung jedoch konkret in den Zeilen und über die Zeilen hinweg zu beschreiben ist, bleibt unklar. Ebenso ist denkbar, dass eine ähnliche Aussage hinsichtlich der Zeilensummen getroffen wird.

5. Begründung mit Aufgabenbezug, Bezug zur Addition, Beispiel: „Weil Julia addiert.“

Da in der Aufgabe eine Addition präsentiert wird, kann sich das Ergebnis im Verständnis des Aufgabenbearbeiters nur erhöhen. Es bleibt unbeachtet, dass nach der konkreten Erhöhung der Zeilensummen um jeweils 100 gefragt wird. Ebenso wenig wird ein Zusammenhang zu der Aufgabenfolge erkannt oder dargestellt.

Ein drittes Bearbeitungskonzept Anderes formuliert Bearbeitungsvarianten, die nicht oder nur indirekt mit der konkreten Aufgabenstellung in Verbindung stehen.

6. Anderes, Ringschluss, Beispiel: „Weil das so ist.“

Der Aufgabenbearbeiter nimmt die Erkenntnis als verbindliche Regel hin, sodass eine Begründung aus dieser Perspektive irrelevant erscheint.

7. Anderes, Wiederholung, Beispiel: „Weil sie 100 dazu tut.“

Bei dieser Variante begründet der Aufgabenbearbeiter die Aussage mit Julias Erkenntnis, sodass er die Erhöhung der Zeilensummen um jeweils 100 lediglich wiederholt ohne sie tatsächlich zu begründen.

Ein tabellarischer Überblick der theoretisch konstruierten Bearbeitungsvarianten zu den Teilaufgaben befindet sich im Anhang der Arbeit.

7.2 Empirische Aufgabenanalyse A4 „Hundertertafel“ mit Ausschärfung zu Ergebnis- und Bearbeitungskategorien

Die Präsentation der Empirischen Aufgabenanalyse erfolgt zunächst differenziert zu jeder der drei Teilaufgaben. So findet jeweils eine Darstellung zu den untersuchten Datensätzen und der durchgeführten Interviewstudie zu den Teilaufgaben A4a und A4b statt. Die gewählte Struktur wird auf die zugrunde liegende Ergebnisorientierung dieser beiden Teilaufgaben zurückgeführt. Die schriftlichen Datensätze können hier nur auf Basis der eingetragenen Ergebniszahlen untersucht werden, da die Ausführungen nicht auf bloßen Vermutungen über das Zustandekommen dieser Ergebnisse basieren sollen. Die Interviewstudie hingegen liefert über die Lösungszahlen hinaus Einblicke in die Bearbeitungswege, womit diesen Daten bei Teilaufgabe A4a und A4b eine besondere Bedeutung zukommt. In der Darstellung der Teilaufgabe c) werden Beispiele der Interviewserie zur Illustration und Ergänzung der empirischen Ergebnisse integriert, bevor ein Überblick über die gesamte Interviewstudie erfolgt. Es schließt sich eine Zusammenschau der Ergebnis- und Bearbeitungskonzepte zu den Teilaufgaben A4b und A4c an, um Zusammenhänge und Häufigkeiten zu identifizieren. Abschließend folgt eine Zusammenfassung der Ergebnisse, in der Auffälligkeiten und Besonderheiten zur Kennzeichnung der Aufgabe A4 „Hundertertafel“ herausgestellt werden.

7.2.1 Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse Teilaufgabe A4a

Die im Rahmen der Rationalen Aufgabenanalyse beschriebenen Ergebniskonzepte Zahlen korrekt und Zahlen nicht korrekt mit den fünf zugehörigen Ergebnisvarianten bestätigen sich.

Die vier gesuchten Zahlen sind 1902 der 2013 zu dieser Aufgabe untersuchten Datensätze zu entnehmen, die somit dem **Ergebniskonzept Zahlen korrekt** zugeordnet werden. So sind in insgesamt 94,5 % der Schriftdokumente die fehlenden Zahlen 32, 42, 63 und 88 korrekt vermerkt, was die Ergebnisvariante 1 zweifelsohne empirisch bestätigt.

Dementsprechend tragen 111 Aufgabenbearbeiter, also lediglich 5,5 %, nicht korrekte Zahlen in die Hundertertafel ein. Auf Basis der theoretisch konstruierten Bearbeitungsvarianten lassen sich in diesem **Ergebniskonzept Zahlen nicht korrekt** die nachfolgenden Bearbeitungskategorien differenzieren.

Insgesamt weisen 29 Datensätze der Ergebniskategorie 2.1 ~Zahlen fehlen~ ein oder höchstens zwei fehlende Zahlen auf. Die theoretisch beschriebene Ergebnisvariante 2 schärft sich aus, wobei eine zusätzliche Differenzierung aufgrund der geringen Häufigkeiten unnötig ist. Die relative Häufigkeit beträgt 1,4 %, womit sich ein relativer interner Anteil von 26,1 % errechnet.

Annähernd häufig notieren 22 Aufgabenbearbeiter falsche Zahlen, wobei es sich hier konkret um Nachbarzahlen der gesuchten Ergebniszahlen handelt. Die Ergebnisvariante 3 ist somit empirisch belegt. Die Ergebniskategorie 2.2 ~Zahlen falsch - Nachbarzahlen~ ent-

spricht demnach einem relativen Anteil von 1,1 %, während die relative interne Häufigkeit 19,9 % beträgt.

Mit 46 Datensätzen die größte Gruppierung des Ergebniskonzeptes Zahlen nicht korrekt sind Aufgabenbearbeitungen, bei denen Nachbarzehner der gesuchten Zahlen eingesetzt werden. Die Ausschärfung der Ergebnisvariante 4, Ergebniskategorie 2.3 ~Zahlen falsch - Nachbarzehner~, entspricht aufgrund der analysierten Häufigkeiten einem relativen Anteil von 2,3 % sowie einem relativen internen Anteil von 41,4 %.

Lediglich 14 Aufgabenbearbeitungen weisen die Notation falscher Zahlen ohne Bezug zu den eigentlichen Lösungszahlen auf. Der Anteil dieser Ergebniskategorie 2.4 ~Zahlen falsch - Weitere~ ist mit relativen 0,7 % und relativen internen 12,6 % recht gering. Diese Datensätze lassen sich inhaltlich in keine der aufgestellten Ergebniskategorien einordnen, sodass die beschriebene Kategorie trotz ihrer Häufigkeit unter einem Prozent zugelassen wird. Auch Ergebnisvariante 5 ist somit bestätigt.

7.2.2 Überblick über die Interviewstudie Teilaufgabe A4a

Alle Kinder der Interviewstudie bearbeiten die erste Teilaufgabe und tragen die gesuchten Zahlen 32, 42, 63 und 88 korrekt in die freien Zellen der Hundertertafel ein. Sie werden somit allesamt in Ergebniskategorie 1.1 ~Zahlen korrekt~ eingeordnet. Aufgrund der Gesprächssituation im Interview können die Kinder jeweils nach ihrem Bearbeitungsweg befragt werden. Eine Untersuchung der vorliegenden Interviewdokumente zeigt, dass drei Strategien der Lösung Anwendung finden und sich die zuvor beschriebenen Bearbeitungskonzepte der Rationalen Aufgabenanalyse bestätigen (siehe Abschnitt 7.1.2).

Insgesamt 15 Kinder, mit 55,6 % über die Hälfte der Aufgabenbearbeiter, bestimmen die gesuchten Zahlen jeweils über die Suche des Nachfolgers der zuletzt angegebenen Zahl.

Zwei Auszüge aus den Transkripten der Interviews illustrieren mit den Aussagen der Kinder diese Variante der Bearbeitung und liefern zusätzliche Einblicke in deren Denkweisen.

Beginn Interview Lea bei 54:52
 55:13 K trägt Zahlen 32, 42, 63 ein.
 55:27 K: So, ah hier is noch.
 K trägt Zahl 88 ein.
 55:35 I: Jetzt erklär mir mal bitte kurz, wie du auf diese Zahlen gekommen bist.
 55:38 K: Mm, ich hab einfach mir hier immer davor (K zeigt auf Zahl 31, 41 in Hundertertafel) an geguckt und dann hab ich einfach nur da in das fehlende Kästchen die Zahl geschrieben, die danach kommt.

Beginn Interview Andreas bei 1:19:19
 1:19:44 K trägt Zahlen 32, 42, 63, 88 ein.
 1:20:06 I: So, wie hast du diese Zahlen gefunden?
 1:20:09 K: Ei, ich hab im Kopf gezählt.
 1:20:11 I: Mh.
 1:20:13 K: Also 31, 32 kommt danach.

*Lea*³¹ erklärt ihr Vorgehen, indem sie sich die Zahl vor der freien Zelle betrachtet und deren Nachfolger einträgt. *Andreas* formuliert zunächst, er habe im Kopf gezählt und expliziert dies an der zu findenden Zahl 32. Dieses Beispiel verdeutlicht, dass auch *Andreas* sich den Vorgänger der einzutragenden Zahl sucht und anschließend deren Nachfolger bestimmt.

Des Weiteren ermitteln sieben Kinder die gesuchte Zahl, indem sie die beiden Nachbarzahlen betrachten und überlegen, welche Zahl nun zwischen diesen angeordnet ist. Dieses Vorgehen entspricht einem gedanklichen Weiterzählen. Auf die Frage der Interviewerin, wie er auf die eingetragenen Zahlen gekommen sei, antwortet *Lennox* ganz selbstverständlich: „*Ehm, weil hier die 62 ist und hier die 64 und dazwischen fehlt die 63. Deswegen hab ich die 63 eingetragen*“³².

Auch *Lenka* bereitet die Eintragung der vier fehlenden Zahlen keine Schwierigkeiten und sie erledigt die Notation zügig in weniger als einer Minute.

Beginn Interview Lenka 13:03	
13:32	K trägt Zahlen 32, 42, 63, 88 ein.
13:57	I: Prima. Wie hast du diese Zahlen herausgefunden?
14:01	K: Also...wir machen ja auch immer mit Nachbarzehnern (K zeigt auf 32 in Hundertertafel). Den Nachbarzehner der 31 und von der ehm 33 ist die 32 (K zeigt jeweils auf die Zahlen in der Hundertertafel)...
14:18	I: Mh.
14:18	K: ...weil 31, 32, 33. Und die kommt dann in die Mitte. Also die Nachbarzehner sind 31 und 32 (K zeigt jeweils auf die Zahlen in der Hundertertafel).

In ihrer Erläuterung des Bearbeitungsweges spricht sie von den Nachbarzehnern der gesuchten Zahlen. Aufgrund der Zahlenbeispiele wird deutlich, dass sie einen für ihre Bearbeitung nicht korrekten Begriff gebraucht und stattdessen ebenfalls das Konzept der Nachbarzahlen verwendet.

Fünf Kinder der Interviewgruppe nutzen die Struktur der Hundertertafel mit ihrer Anordnung in Zeilen und Spalten zur Bestimmung der fehlenden Zahlen. Im Vergleich zu den beiden zuvor beschriebenen Bearbeitungsweegen nutzen sie nicht nur die Nachbarzahlen im Sinne des Vorgängers oder Nachfolgers, sondern ebenfalls die lokalen Nachbarn in der Struktur der angebotenen Zahldarstellung. In den Spalten der Hundertertafel sind die Zahlen mit gleicher Besetzung der Einerstelle angeordnet, während in den Zeilen die Zahlen mit identischer Zehnerstelle zu finden sind. Ein Transkriptausschnitt zu *Jennifers* Interviewgespräch verdeutlicht die Nutzung dieser Strukturen.

Beginn Interview Jennifer bei 1:12:07	
	K kichert und trägt Zahlen 32, 42, 63, 88 ein.
1:12:49	I: Prima. Wie bist du auf die Zahlen gekommen?
1:12:51	K: Ehm, ich muss, ich hab, einfach erst mal geguckt, in welcher Reihe das auch ist (K tippt auf vierte Zeile Hundertertafel).
1:12:57	I: Mh.
1:12:58	K: Und dann hab ich hier noch von oben geguckt immer alles mit am Ende alles der 2 und dann hab ich bin ich auf die 32 schon mal gekommen.

³¹ Die Namen aller Kinder sind in den Darstellungen sowie im Anhang aus Gründen des Datenschutzes geändert worden.

³² Zitat aus Transkript 23, A4a, Zeitleiste 14:41

Jennifer gibt an, die entsprechende Zeile der Hundertertafel zu lokalisieren. Sie verdeutlicht ihre Ausführungen am Beispiel der ersten gesuchten Zahl 32 und tippt auf die vierte Zeile der Hundertertafel. Anschließend nimmt sie die freie Zelle in der zweiten Spalte in den Blick, was in ihrem Verständnis der Besetzung der Einerstelle mit der Ziffer 2 entspricht. Ihr Ergebnis ist somit die Zahl 32.

7.2.3 Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse Teilaufgabe A4b

Zu Teilaufgabe A4b liegen 1859 auswertbare Datensätze vor, die in die nachfolgend beschriebene Analyse eingehen. Insgesamt haben 155 Kinder diese Teilaufgabe nicht bearbeitet. Davon weisen 129 Datensätze jedoch eine Bearbeitung der ersten Teilaufgabe auf, weitere 26 Datensätze dokumentieren eine Bearbeitung der Teilaufgaben A4a und A4c.

Um eine Verfälschung und Fehlinterpretation der vorliegenden Daten zu vermeiden, erfolgt die Empirische Aufgabenanalyse zunächst ausschließlich anhand der notierten Ergebniszahlen. Wie in Abschnitt 7.1.2 dargestellt berücksichtigt die Konstruktion der Bearbeitungsvarianten neben der Weiterführung der Zahlenfolge diverse Berechnungen der gesuchten Zeilensumme. Der Aspekt der notierten Zeilenadditionen wird in der nachfolgenden Darstellung der Ergebniskategorien berücksichtigt. Eine Ausschärfung der hierzu beschriebenen Ergebnisvarianten (2, 4, 6, 8 und 10) ist aufgrund der geringen Häufigkeiten nicht möglich, sodass an gegebener Stelle ein zusammenfassender Überblick präsentiert wird.

In Modifikation zu den beiden theoretischen Ergebniskonzepten der Rationalen Aufgabenanalyse (Zahl korrekt, Zahl nicht korrekt) lassen sich die empirischen Ergebniszahlen mithilfe dreier Ergebniskonzepte beschreiben: **Ergebniskonzept 6. Zeilensumme**, **Ergebniskonzept x. Zeilensumme** und **Ergebniskonzept Anderes**.

Das erste **Ergebniskonzept 6. Zeilensumme** enthält 1198 zugeordnete Datensätze. Mit einem relativen Anteil von 64,4 % stellt es die größte Gruppe dar und wird anhand der folgenden zwei Gruppierungen unterschieden.

Die Ergebniskategorie 1.1 ~Ergebniszahl 555~ fasst sämtliche Datensätze, in denen die Zahl 555 als die gesuchte Ergebniszahl eingetragen ist. Über die Hälfte aller Aufgabenbearbeiter, konkret 1080 Drittklässler, bestimmen die gesuchte sechste Zeilensumme korrekt. Dies entspricht einem absoluten Anteil von 58,1 %. Die ausschließlich schriftlich vorliegenden Aufgabenbearbeitungen lassen lediglich Vermutungen über den zu dieser Ergebniszahl führenden Bearbeitungsweg zu. Mit Erinnerung an die Rationale Aufgabenanalyse wird angemerkt, dass aufgrund der Aufgabenintention eine Fortführung der präsentierten Aufgabenfolge und nicht die Addition der Zeilensummanden angestrebt wird. In dieser Ergebniskategorie sind somit die theoretischen Ergebnisvarianten 1 und 2 vereint.

Zahlreiche Bearbeitungsdokumente weisen dennoch auf eine Bearbeitung der Teilaufgabe A4b durch eine Berechnung der Zeilensumme hin. Fehler bei der Addition führen zu Ergebniszahlen, die im Umfeld der korrekten Lösung 555 liegen. So sammelt die Ergebniskategorie 1.2. ~Ergebniszahl 55x/5xx~ jene Datensätze, die ein nicht korrektes Ergebnis mit der Ziffer 5 in der Hunderterstelle oder sogar in der Hunderter- und Zehnerstelle aufweisen. Mit einer Häufigkeit von 118 und einem absoluten Anteil von 6,3 % ist diese Ergebniskategorie nicht unerheblich. Die theoretisch konstruierten Ergebnisvarianten 9 und 10 bestätigen sich somit in dieser Ergebniskategorie.

Das zweite **Ergebniskonzept x. Zeilensumme** beschreibt Aufgabenbearbeitungen, bei denen nicht die gesuchte sechste Zeilensumme, jedoch eine alternative Zeilensumme angegeben ist. In dieser Gruppierung sammeln sich 377 Datensätze, womit ein relativer Anteil von 20,4 % vermerkt wird.

Innerhalb des Konzeptes weisen 247 Aufgabendokumente der Ergebniskategorie 2.1 ~Ergebniszahl 655~ die Notation der Zahl 655 auf. Folgende Vermutung wird formuliert: Diese Aufgabenbearbeiter haben nicht beachtet, dass die Anzahl der Zeilen nicht der Hunderterstelle des Ergebnisses entspricht, sondern um eins verringert werden muss. Mit absoluten 13,3 % vereint dieses Ergebniskonzept die zuvor beschriebenen theoretischen Ergebnisvarianten 3 und 4. Diese Ergebniskategorie stellt mit relativen internen 65,5 % die größte Gruppierung des Konzeptes dar.

Ergebniskategorie 2.2 ~Ergebniszahl 355~ weist darauf hin, dass die Aufgabenbearbeiter die Aufgabenfolge lediglich bis zur nächsten, also vierten, Zeilensumme fortgeführt haben und so die Zahl 355 als Ergebnis notieren. Eine solche Eintragung liegt bei immerhin 42 Datensätzen vor, was einem absoluten Anteil von 2,3 % entspricht. Ein solcher Bearbeitungsansatz wird bereits in der Rationalen Aufgabenanalyse bedacht, sodass die theoretischen Ergebnisvarianten 5 und 6 zusammengefasst werden können. Diese Gruppierung entspricht einem relativen internen Anteil von 11,4 %.

In der Rationalen Aufgabenanalyse wird die Notation der fünften Zeilensumme nicht als spezielle Ergebnisvariante bedacht. Im Rahmen der Empirischen Aufgabenanalyse wird jedoch die Ergebniskategorie 2.3 ~Ergebniszahl 455~ eröffnet, da 26 Datensätze eben diese Lösung aufweisen. Sie entspricht einer relativen Häufigkeit von 1,4 % sowie einem relativen internen Anteil von 6,9 %.

Ebenso sind in den analysierten Datensätzen noch weitere Zeilensummen als notierte Ergebniszahlen zu finden, welche den theoretischen Ergebnisvarianten 7 und 8 entsprechen. Da deren Häufigkeiten jeweils unter einem Prozent liegen, werden sie in der Ergebniskategorie 2.4 ~Ergebniszahl x55~ zusammengeführt. Insgesamt 63 Datensätze weisen eine solche Ergebniszahl auf, wobei sich die Dokumente wie folgt differenzieren: 15 Aufgabenbearbeiter notieren die bereits in der Aufgabenstellung präsentierte Zeilensumme 55. Die ebenfalls im Aufgabenstamm gedruckten Zeilensummen 155 und 255 sind in den Da-

tensätzen dreimal beziehungsweise achtmal vermerkt. Weiterhin ist die Zeilensumme 755 in 17 Datensätzen zu finden. Dreizehn Mal wird die Zeilensumme 855 vermerkt, während die Zeilensumme 955 in drei Datensätzen notiert ist. Zusammengefasst entspricht diese Ergebniskategorie einer relativen Häufigkeit von 3,4 % und einem relativen internen Anteil von 16,2 %.

Die Beschreibung aller analysierten Datensätze erfordert ein zusätzliches **Ergebniskonzept Anderes**. Es werden drei Ergebniskategorien unterschieden, in welche sich insgesamt 284 zugehörigen Datensätze einordnen lassen. Somit weist dieses Konzept einen relativen Anteil von 15,2 % auf.

Zunächst wird Ergebniskategorie 3.1 ~Summe Zeilensummen~ beschrieben. Die Aufgabenbearbeiter dieser Gruppe arbeiten nicht mit den Zeilenadditionen der Hundertertafel, sondern addieren die drei angegebenen Zeilensummen. Die notierte Ergebniszahl entspricht demnach der Zahl 465. Exakt 56 Datensätze, also 3 % aller zu dieser Aufgabe untersuchten Bearbeitungen, weisen dieses Ergebnis auf, was die Ergebnisvariante 11 bestätigt. Mit Bezug zu dem vorgestellten Ergebniskonzept entspricht diese Häufigkeit einem Anteil von 19,7 %.

Die Ergebniskategorie 3.2 ~Ergebniszahl 48~ wird mit einer Häufigkeit von 24 aufgestellt. Aufgrund der Erkenntnisse der Analyse und der Aufgabenbearbeitungen im Interview ist hier auf folgenden Gedankengang zu schließen: In der Rationalen Aufgabenanalyse wird bereits eine mögliche Unkenntnis des Begriffs 'Zeile' diskutiert. Lokalisiert der Aufgabenbearbeiter statt der sechsten Zeile nun die sechste Spalte und hat darüber hinaus die drei angeführten Zeilenadditionen im Blick, identifiziert er die drei Zahlen 6, 16 und 26. In der Summe ergibt sich die Zahl 48. Mit den angegebenen Häufigkeiten entspricht diese Ergebniskategorie inklusive offensichtlicher Rechenfehler einem relativen Anteil von 1,3 % sowie einer relativen internen Häufigkeit von 8,5 %.

Eine letzte Ergebniskategorie 3.3 ~Weitere Zahlen~ sammelt jene Datensätze, deren absoluter Anteil unter einem Prozent liegt und somit keine separate Ergebniskategorie eröffnet wird. Insgesamt werden hier 204 Datensätze vereint, sodass ein relativer Anteil von 10,9 % und eine relative interne Häufigkeit von 71,8 % vermerkt werden.

7.2.4 Überblick über die Interviewstudie Teilaufgabe A4b

Auch die zweite Teilaufgabe wird von allen 27 teilnehmenden Kindern der Interviewstudie bearbeitet. Die auf den Arbeitsdokumenten notierten Zeilensummen werden entsprechend der aufgestellten Ergebniskategorien kodiert.

Zehn Kinder der Interviewstudie sind dem **Ergebniskonzept 6. Zeilensumme** zugeordnet. Hier notieren *Anna, Jennifer, Marco, Lukas, Fiona, Andreas, Lea* und *Lenka* die gesuchte sechste Zeilensumme 555, womit der Ergebniskategorie 1.1 ~Ergebniszahl 555~ entspro-

chen wird. Bis auf eine Ausnahme erhalten alle diese Kinder ihre Lösung durch eine Weiterführung der angegebenen Zeilensummen. *Leas* Transkriptausschnitt spiegelt diesen Bearbeitungsweg der Kinder prototypisch wider.

Beginn Interview Lea bei 54:52	
57:36	K: 555!
57:38	I: Schreib's mal ein, das Ergebnis.
57:41	K trägt Zahl 555 ein.
57:45	I: Und jetzt möchte ich natürlich wissen, wie du so blitzschnell auf das Ergebnis 555 gekommen bist.
57:50	K: Man muss immer ehm..einfach ehm...bei der bei dem Hunderter muss man einfach immer weiterzählen. Einhundert, 200, ehm und 300, 400, 500 und dann dann ist man ja auch schon bei der sechsten Aufgabe.
58:09	I: Mh.
58:10	K: Und weil hier (K zeigt auf Zeilensummen) dann überall 55 steht, is ja auch dann logisch, dass man da dann auch die ehm 55 hinschreibt.

Lea präsentiert ihr Ergebnis 555 und trägt es nach Aufforderung zügig auf ihrem Arbeitsdokument ein. Zu ihrem Ergebnis gelangt sie durch Weiterzählen der Hunderter bis zur sechsten Zeile. Anschließend ergänzt sie die konstante Besetzung der Zehner- und Einerstelle mit der Ziffer 5 und fügt auf diese Weise ihr Ergebnis 555 zusammen. Dieser Gedankengang entspricht dem intendierten Verständnis für die Aufgabenfolge.

Lukas erhält seine Zeilensumme 555 nicht durch Weiterführen der Aufgabenfolge, sondern berechnet das Ergebnis mittels Addition der Zeilensummanden. Ebenso wie *Lukas* möchte auch *Jennifer* die Zeilensumme zunächst berechnen. Beim Abzählen der entsprechenden Zeile in der Hundertertafel unterläuft ihr jedoch ein Fehler, sodass sie die Summanden der siebten Zeile in den Blick nimmt. Während sie die ersten Zahlen im Kopf zerlegt und addiert, hält sie inne. Den anschließenden Bearbeitungsverlauf zeigt der nachfolgende Interviewausschnitt.

Beginn Interview Jennifer bei 1:12:07	
1:16:07	K: Ehm, ich hab auch beim Rechnen nochmal, is mir aufgefallen, dass, ich hab schon mal hier unten (K zeigt auf b) geguckt, da ist mir aufgefallen, dass man, hier (K zeigt auf Zeilensummen), da muss immer ich glaub was mit 55 am Ende.
1:16:18	I: Mh.
1:16:21	K: Dann kommt da bestimmt hin ehm...555.
1:16:28	I: Dann schreibs hin!
1:16:45	I: ...jetzt möchte ich nochmal deine Erklärung haben, wie du auf 555 gekommen bist.
1:16:49	K: Also ehm ich hab erst mal hier an den Ergebnissen nachgeguckt (K zeigt auf Zeilensummen) und ehm da hab ich immer gedacht hier das war ja jetzt die dritte Zeile und da ehm war kam is immer hier vorne die 255 gewesen.
1:17:04	I: Mh.
1:17:05	K: Und am Ende kommt immer irgendwas mit 55 raus. Und ehm weil ich hier ja in der sechsten Zeile mit 60 war (K zeigt auf sechste Zeile Hundertertafel), muss ich noch die 50, mu, also die 500...
1:17:16	I: Mh.
	K: ...nehmen.

Jennifer erkennt mit einem erneuten Blick auf die Teilaufgabe, dass die angegebenen Zeilensummen stets die Zahl 55 enthalten. Da die dritte Zeile mit der Zeilensumme 255 ange-

geben wird, führt sie die Aufgabenfolge fort und erklärt so das Zustandekommen der eingetragenen Ergebniszahl 555.

Steffen und *Sandra* werden ebenfalls dem ersten Ergebniskonzept zugeordnet. Allerdings notieren diese beiden Kinder nicht die geforderte Zeilensumme 555, sondern vermerken die Zahlen 551 und 545. Ihre Bearbeitungen entsprechen also Ergebniskategorie 1.2. ~Ergebniszahl 55x/5xx~. Anhand der Gesprächsdokumente wird transparent, dass *Steffen* und *Sandra* ebenso wie zuvor *Lukas* die Zeilensumme durch Addition der korrekten Zeilensummanden berechnen möchten. Aufgrund von Rechenfehlern erhalten sie jedoch ein falsches Ergebnis unweit der Zahl 555. *Sandra* unterläuft bei ihrer Addition im Kopf ein als typisch zu bezeichnender Fehler, in dem ein Zehner unberücksichtigt bleibt und sie somit das Ergebnis 545 erhält. Im Interview gelingt es ihr darüber hinaus, ihre Rechenstrategie zu erläutern.

Beginn Interview Sandra bei 15:24

22:11 I: Wie kannst du das herauskriegen?

22:13 K: Ehm ich kann hier (K zeigt auf sechste Zeile Hundertertafel) von der sechsten Zeile die Ergebnisse zusammen, also die Zahlen...

22:21 I Mh.

K: ...zusammenrechnen.

23:11 K: Wenn ich die Zahlen (K zeigt über sechste Zeile Hundertertafel) alle zusammen gerechnet hätte, dann käme raus 545.

23:19 I: Mh. Dann trag dein Ergebnis bitte mal ein.

23:23 K trägt Zahl 545 ein.

23:31 I: 545, wie bist du jetzt auf diese Zahl gekommen?

23:36 K: In dem ich die (K zeigt über sechste Zeile Hundertertafel) gerechnet hab.

23:39 I: Mh, und wie hat dein Kopf die zusammengerechnet?

23:43 K: Ich hab zuerst die Fünfziger zusammengerechnet und dann hab ich die 9 und dann hab ich immer ehm die anderen Einer...

23:55 I: Mh.

K: ...noch zusammen gerechnet.

Sandra formuliert während der Bearbeitung im Interview recht zügig die Idee, alle Zahlen der sechsten Zeile zu addieren und präsentiert bald ihr Ergebnis 545. Anschließend erläutert sie implizit die stellengerechte Zerlegung der Summanden, um zunächst die Zehnerzahlen zu addieren. Es ist zu vermuten, dass bereits bei dieser Rechnung der Fehler an der Zehnerstelle entstanden ist. Zu ihrem nicht genannten Zwischenergebnis addiert das Mädchen zunächst die Zahl 9 und anschließend alle weiteren Einerzahlen der Zerlegungsprozesse.

Auch Kategorien des zweiten **Ergebniskonzeptes x. Zeilensumme** zeigen sich in den Bearbeitungen der Interviewstudie. Hier können acht Kinder zu insgesamt drei der vier aufgestellten Ergebniskategorien zugeordnet werden.

In den Schriftdokumenten von *Steffi*, *Anna-Lena*, *Franzi*, *Adrian* und *Norman* findet sich die eingetragene Ergebniszahl 655, womit Ergebniskategorie 2.1. ~Ergebniszahl 655~ entsprochen wird. Eine Analyse der Bearbeitungen zeigt, dass alle Kinder die Aufgabenfolge grundlegend erkannt und die Zeilensumme weitergeführt haben. Dabei erfolgt die Weiterführung statt zur sechsten bis zur siebten Zeile der Hundertertafel. Dies ist auf die Assoziation der Drittklässler der Zahl 6 in den Zeilensummanden und der Frage nach der sechsten Zeilensumme zurückzuführen. Auch *Steffi* führt diese Zeilensummanden auf und nennt das Ergebnis 655.

Beginn Interview Steffi bei 00:20	
3:02	K: 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 70.
3:12	I: Mh. Warum hast du jetzt diese Zahlen vorgelesen?
3:16	K: Weil die hat gesagt, dass es sechste Zeile sei.
3:21	I: Mh.
	K: Dann muss ich ja auch hier die sechste Zeile schreiben (K zeigt auf siebte Zeile Hundertertafel). Hier abgucken (K zeigt auf Hundertertafel), hier hinschreiben (K zeigt unter Zeilenadditionen).
3:29	I: Mh, und welches Ergebnis bekommt sie da?
3:38	K: 655.
3:40	I: Mh, die Zahl kannst du jetzt da eintragen (I zeigt auf Notationslinien)
3:45	K trägt siebte Zeilenaddition ein.
4:04	I: Genau, schreib einfach untendrunter weiter, super.
4:32	K: Plus hab ich vergessen (K trägt Pluszeichen nach).
4:33	I: Mh.
4:47	I: Prima, 655. Kannst du nochmal sagen, wie du darauf kommst, dass es 655 sind?
4:47	K: Ja, bei Sechserzeile da kommt 600 da raus, das ist ja klar. Und Julia hat hier einen Trick gezeigt, dass 55 kommt.
5:07	I: Mh.
	K: Und dann hab ich das zusammengerechnet.

Für das Mädchen scheint es selbstverständlich, dass in der sechsten Zeile die Zahl 600 einen Teil des Ergebnisses darstellt, was sie im Gespräch entsprechend formuliert. Anschließend weist *Steffi* darauf hin, dass die 55 stets Bestandteil der angegebenen Zeilensummen ist und fügt diese Zahl ihrem Teilergebnis 600 hinzu.

Gabrieles Ergebnis entspricht Bearbeitungskategorie 2.3. ~Ergebniszahl 455~. Sie nennt im Gespräch zunächst die korrekten Zahlen der sechsten Zeile. Die Zeilensumme erhält sie durch das Weiterführen der Aufgabenfolge, wobei das Mädchen eine Zeile zu früh abbricht. *Anna* und *Claudia* präsentieren die Ergebniszahlen 255 sowie 855, womit sie in Ergebniskategorie 2.4. ~Ergebniszahl x55~ zu finden sind. *Anna* addiert zu der Zeilensumme 155 nochmals 100, wobei sie diese Rechnung nicht nachvollziehbar erläutern kann. *Claudia* formuliert zunächst die Zeilenaddition der sechsten Zeile und möchte mit der Berechnung beginnen. Doch dann erkennt auch sie die Aufgabenfolge. Hier geschieht dem Mädchen jedoch ein Denkfehler. Da nach der Zeilensumme der sechsten Zeile gefragt ist, addiert sie sechs weitere Hunderter zu der präsentierten dritten Zeilensumme. Auf diesem Wege erhält sie die Zahl 855, demnach die neunte Zeilensumme.

Eine letzte Gruppe von neun Kindern liefert noch andere Lösungen zu der gefragten sechsten Zeilensumme. Sie repräsentieren die Vielfalt an verschiedenen Bearbeitungen des dritten **Ergebniskonzeptes Anderes**.

Auffällig sind hier drei Kinder, deren Ergebniszahlen von der gesuchten Zeilensumme 555 weit entfernt sind, jedoch aufgrund der Interviewanalysen allesamt auf eine fehlerhafte Addition der richtigen Zeilensummanden zurückgeführt werden können. Die Gesprächsverläufe von *Florian*, *Luisa* und *Tatjana* geben Einblicke in die Rechenwege der Kinder, die zu den Ergebniszahlen 459, 489 und 636 führen. Da die Rechenstrategien und damit verbundenen Fehler nicht Thema der vorliegenden Arbeit sind, wird nicht vertiefend darauf eingegangen. Das zuvor geschilderte Untersuchungsergebnis lässt darauf schließen, dass zahlreichen Datensätzen der Ergebniskategorie 3.3. ~Weitere Zahlen~ eine derartige Bearbeitung zugrunde liegt. Mit diesem Ansatz sind die häufig ausschließlich nur einmal oder zweimal vermerkten Ergebniszahlen zu erklären.

Auch *Kathrin* notiert die Zahlen der sechsten Zeile in der Hundertertafel, wobei eine Rechnung ihrer Ansicht nach jedoch unnötig ist. Das Ergebnis bestimmt das Mädchen durch Benennung des letzten Summanden, womit sich die Notation ihrer Ergebniszahl 60 erklärt. *Julias* Zeilensumme 687 wird anhand der Gesprächsdokumente auf eine fehlerhafte Addition der Zahlen der siebten Zeile zurückgeführt. Interessant sind die Bearbeitungen von *Lennox* und *Nadine*. Gemeinsam ist beiden Bearbeitungen ein Verständnis der Zeilen als Spalten. So zeigt sich, dass *Lennox* als Ergebnis die Aufzählung 6, 16, 26 präsentiert. Im Interview wird deutlich, dass er die Spalten der gegebenen Zeilenadditionen abzählt und eben die in der sechsten Spalte angegebenen Summanden notiert. *Nadine* hingegen zählt die sechste Spalte der Hundertertafel ab. Sie notiert alle zehn Zahlen dieser Spalte als Addition. Das Mädchen beginnt die Rechnung und führt sie jedoch aufgrund des rechnerischen Anspruchs nicht zu Ende. *Silvia* scheint ein intuitives Verständnis für die Weiterführung der Aufgabenfolge zu besitzen. Sie nennt im Gesprächsverlauf die Ergebniszahl 755, die sie jedoch nicht weiter erklären kann. Bei der Notation unterläuft ihr ein Fehler, sodass ihr Schriftdokument die Zahl 756 aufweist. *Samuel* notiert das Ergebnis 13 und erklärt die Zahl als Summe der beiden Zahlen 6 und 7. Wie dieses Vorgehen mit der Aufgabenstellung zu verbinden ist, bleibt jedoch ungewiss.

7.2.5 Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse Teilaufgabe A4c

Analog zu den theoretischen Konstruktionen der Rationalen Aufgabenanalyse bestätigen sich die drei aufgestellten Bearbeitungskonzepte **Strukturmathematische Argumentation**, **Argumentation mit Bezug zur Aufgabenfolge** sowie **Anderes**. Diese Gruppen gliedern sich ergänzend zu den aufgestellten Bearbeitungsvarianten in diverse Bearbeitungskategorien, die nachfolgend erläutert werden und anhand von Beispielen aus den untersuchten Datensätzen sowie der Interviewstudie illustriert werden.

Das **Bearbeitungskonzept Strukturmathematische Argumentation** vereint 904 Aufgabenbearbeitungen, bei denen in der notierten Begründung mindestens einer der in Abschnitt 7.1.1 erläuterten strukturmathematischen Argumentationsaspekte angeführt wird. Bei der Konstruktion theoretischer Bearbeitungsvarianten wird anhand der Anzahl genannter Argumentationsaspekte unterschieden. Nach gründlicher Datenanalyse ist weiterführend zu differenzieren, sodass die Bearbeitungsvarianten 1 und 2 modifiziert werden. Es eröffnen sich zwei Bearbeitungskategorien mit jeweils einem Argumentationsaspekt und zwei Bearbeitungskategorien mit jeweils zwei angeführten Argumentationsaspekten.

So beschreibt die erste Bearbeitungskategorie 1.1 ~ein Argumentationsaspekt - Erhöhung 10 abstrakt~ all jene Begründungen, in denen der Aufgabenbearbeiter ausschließlich die Erhöhung der Zahlen von Zeile zu Zeile anführt. Dabei wird nicht auf konkrete Zahlen oder Zeilen der Aufgabenfolge hingewiesen, sondern eine allgemeine Formulierung verwendet. Eine prototypische Aussage ist der Satz „*Es kommen immer zehn dazu*“³³. Andere Aufgabenbearbeiter dieser Bearbeitungskategorie beschreiben genauer: „*Weil in jeder Zeile 10 dazu kommen*“³⁴ oder „*Weil bei jeder Zahl 10 dazukommen*“³⁵. Da den Formulierungen der Aufgabenbearbeiter diese Differenzierung nicht immer zu entnehmen ist, wird hier nicht weiter unterschieden. Mit einer Häufigkeit von 642 stellt diese Bearbeitungskategorie nicht nur die größte Gruppierung des ersten Bearbeitungskonzeptes, sondern auch die mächtigste Kategorie dieser Aufgabenanalyse dar. Sie entspricht einem relativen Anteil von 41,1 % sowie einem relativen internen Anteil von 71,0 %.

Lea arbeitet im Rahmen der Interviewstudie an einer Erklärung für Julias Erkenntnis und formuliert ihre Begründung mit der zuvor angeführten prototypischen Formulierung. Der vorangehende Interviewverlauf verdeutlicht den Anspruch der Aufgabe, eine Begründung in gesprochenem Wort zu formulieren und anschließend zu Papier zu bringen. *Leas* Interviewdokument

c) Julia erkennt: „Es kommen bei jeder Zeile immer 100 dazu.“
Erkläre, warum es immer 100 mehr werden!

Weil es immer 10 mehr werden

³³ Zitat aus Datensatz BT-d-13

³⁴ Zitat aus Datensatz BX-a-11

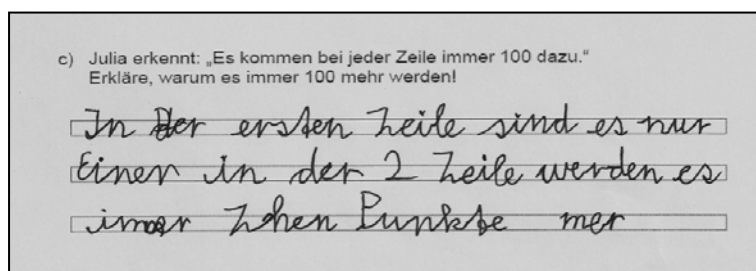
³⁵ Zitat aus Datensatz AV-a-05

zeigt, dass das Mädchen durchaus weitere Erläuterungen als den schriftlich formulierten Satz ausführen kann.

Beginn Interview Lea bei 54:52	
1:02:05	I: Lies deinen Satz bitte noch mal vor.
1:02:06	K liest vor.
1:02:11	I: Mh. Jetzt frag ich aber noch mal nach. Was meinst du mit es werden immer 10 mehr? Versuch mir das noch mal genauer zu erklären.
1:02:21	K: Mm. I: Wo werden es den immer 10 mehr?
1:02:28	K: Bei bei jeder Zahl (K zeigt auf Zeilenadditionen) wird's dann immer ehm w, also wenn man dann 3, 17 plus 10 rechnet, das sind ja dann 27.
1:02:42	I: Mh, okay. Möchtest du zu der Aufgaben noch irgendetwas sagen oder ergänzen?
1:02:49	K schüttelt Kopf: Nn.

Nachdem sie ihren Satz notiert hat, fordert die Interviewerin eine weitere Erläuterung. *Lea* begründet mit der Erhöhung jedes Summanden der Zeilenaddition und liefert ein Beispiel, indem sie die Zahlen 17 und 27 anführt.

Auch die Aufgabenbearbeiter der zweiten Bearbeitungskategorie 1.2 ~ein Argumentationsaspekt - Erhöhung 10 konkret~ nutzen in ihren Begründungen die Erhöhung der Zahlen um jeweils 10. In dieser Gruppe wird der Sachverhalt jedoch mit einem Beispiel der Aufgabenfolge konkretisiert. So wird beispielsweise die abzulesende Erhöhung einer Zahl von Zeile zu Zeile angeführt: „*Es kommt immer 100 dazu weil immer 1,11,21 oder 2,12,22*³⁶“. In anderen Datensätzen sind Erläuterungen zu den Zahlen einzelner Zeilen zu finden: „*Weil Julia immer in der 1. Zeile bis 10 rechnet und in der 2. Zeile geht es mit 11 los und hört mit 20 auf. Und in der 3. Zeile fängt es mit 21 an und hört mit 30 auf*³⁷“. In 116 Aufgabenbearbeitungen ist solch eine konkrete Formulierung des Argumentationsaspektes der Erhöhung um 10 zu finden. Dies entspricht einer relativen Häufigkeit von 7,4 %, wobei der relative interne Anteil 12,8 % beträgt.



Marco präsentiert im Rahmen der Interviewstudie eine Begründung dieser Bearbeitungskategorie. In seiner Notation weist er konkret auf die ersten beiden Zeilen der Zeilenaddition hin, um anhand

dieses Beispiels die Erhöhung um 10 zu erklären. Während des Interviews wird deutlich, dass sich *Marco* der in der Musterlösung präsentierten drei Argumentationsaspekte durchaus bewusst ist. In seinem Schriftdokument formuliert *Marco* dann lediglich eines dieser Argumente, eben die Erhöhung um 10. Ein Blick in das zugehörige Transkript verdeutlicht jedoch das darüber hinausgehende Verständnis des Jungen.

³⁶ Zitat aus Datensatz BG-b-09

³⁷ Zitat aus Datensatz AO-a-15

Beginn Interview Marco bei 1:15:41	
1:22:26	K schreibt.
1:24:28	K: Sag ich mal Punkte zu. K schreibt weiter.
1:25:13	I: Okay. Kannst du mir deine Antwort bitte nochmal vorlesen?
1:25:16	K liest vor.
1:25:24	I: Mh, was meinst du mit den 10 Punkten?
1:25:26	K: Also immer die Zehner, ein Zehner mehr (K zeigt auf Zeilenadditionen), also 10 Punkte
1:25:31	I: Mh. K: Zehn Einer.
1:25:33	I: Also du meinst nicht, es werden insgesamt 10 Punkte mehr?
1:25:36	K: Nein, immer 10 bei jeder Zahl dazu.
1:25:39	I: Mh, okay, prima. Möchtest du zu der Aufgabe noch etwas sagen, Marco?
1:25:44	K: Nö.

Die folgenden zwei Bearbeitungskategorien sammeln diejenigen Datensätze, in denen zwei der drei vollständigen Argumentationsaspekte angeführt werden. Hier wird zunächst Bearbeitungskategorie 1.3 ~Zwei Argumentationsaspekte - 10 Zahlen/Erhöhung 10~ angeführt. Insgesamt 67 Aufgabenbearbeiter argumentieren in ihren Begründungen mit den Aspekten der Erhöhung der Zahlen um jeweils 10 sowie der Tatsache, dass sich in einer Zeile stets zehn Zahlen befinden. Das folgende Beispiel illustriert eine Formulierung, bei der diese beschriebenen Aspekte differenziert dargestellt werden: „*Weil es in jeder Zeile 1 Zehner dazu kommt und es sind immer 10 Zahlen*³⁸“. Häufig verwenden die Aufgabenbearbeiter auch den Ausdruck ‘10 Zehner’, der sowohl den Aspekt der Erhöhung als auch die Anzahl der Zahlen vereint. Entsprechend finden sich auch solche Formulierungen in dieser Bearbeitungskategorie wieder: „*Weil es in jeder Zeile zehn Zehner mehr werden*³⁹“ oder „*Julia zählt immer 10 Zehner dazu*⁴⁰“. Der relative Anteil dieser Bearbeitungskategorie präsentiert sich mit 4,3 %, während der relative interne Anteil 7,4 % beträgt.

In den Begründungen der Bearbeitungskategorie 1.4 ~Zwei Argumentationsaspekte - Erhöhung 10/ 10*10~ findet sich neben dem bereits bekannten Argumentationsaspekt der Erhöhung um 10 der schlussfolgernde Aspekt, dass sich aufgrund dieser Erhöhung und der Anzahl der Zahlen in einer Zeile die Zeilensumme stets um 10 mal 10, also um den angegebenen Wert 100 erhöht. Interessanterweise wird in keiner der Formulierungen dieser Bearbeitungskategorie die Anzahl der Zahlen in einer Zeile ausdrücklich angeführt. Typisch sind Formulierungen wie „*Weil immer 10 dazu kommen und $10 * 10 = 100$* ⁴¹“ oder „*Bei jeder Zahl zum Beispiel 35 sind es 10 mehr als bei 25. Und das bei jeder Zahl: $10 * 10 = 100$* ⁴²“. Insgesamt enthält die Gruppierung 25 Aufgabenbearbeitungen, was einer relativen Häufigkeit von 1,6 % sowie einem relativen internen Anteil von 2,8 % entspricht.

Nur 38 Aufgabenbearbeiter führen in ihren Begründungen explizit alle drei Argumentationsaspekte an und sind somit Bearbeitungskategorie 1.5 ~Drei Argumentationsaspekte~

³⁸ Zitat aus Datensatz AW-a-17

³⁹ Zitat aus Datensatz BT-b-12

⁴⁰ Zitat aus Datensatz AF-b-15

⁴¹ Zitat aus Datensatz AZ-a-04

⁴² Zitat aus Datensatz BD-b-15

zugeordnet. Somit bestätigt sich Bearbeitungsvariante 3, die aufgrund ihrer theoretischen Anlage nicht weiter differenziert werden kann. Mit relativen 2,4 % sowie relativen internen 4,2 % wird die geringe Häufigkeit dieser Bearbeitung deutlich. Folgende Formulierungen werden als typische Beispiele für diese Bearbeitungskategorie angeführt: „*In jeder Zeile kommt zu jeder Zahl ein Zehner dazu und in jeder Zeile sind 10 Zahlen. Also $10 \cdot 10 = 100$ ⁴³*“ und „*In jeder Reihe die von oben nach unten geht immer 10 dazukommen es geht von 1 bis 10, also $10 \cdot 10 = 100$ ⁴⁴*“.

Eine letzte Bearbeitungskategorie 1.6 ~Weiteres~ vereint jene Gruppierungen, für die aufgrund einer zu geringen Häufigkeit keine separate Bearbeitungskategorie eröffnet wurde. Insgesamt sind sechzehn Aufgabenbearbeitungen hier versammelt, die sich in zwei Varianten gliedern. Jeweils zehn Aufgabenbearbeiter führen lediglich einen Argumentationsaspekt an. Hierbei handelt es sich um die Begründung $10 \cdot 10$ gleich 100 , ohne dass den Schriftdokumenten zusätzliche Erläuterungen zu entnehmen sind. Des Weiteren formulieren sechs Aufgabenbearbeiter ihre Begründung mithilfe der beiden Argumentationsaspekte zehn Zahlen in einer Zeile sowie der schlussfolgernden Rechnung $10 \cdot 10$ gleich 100 . Somit stellt diese Bearbeitungskategorie eine verknüpfende Version der theoretischen Bearbeitungsvarianten 1 und 2 dar. Selbst die Vereinigung dieser Bearbeitungen ist mit einem relativen Anteil von 1 % und relativen internen 1,8 % als eher unbedeutend einzuschätzen.

Die Begründungen des **Bearbeitungskonzeptes Argumentation Bezug zur Aufgabenfolge** stützen sich jeweils auf einen konkreten Gesichtspunkt der zu beurteilenden Aufgabenfolge, ohne die strukturmathematischen Zusammenhänge erkennbar zu nutzen oder zu beschreiben. Die vorgenommene Kategorisierung ordnet diesem Bearbeitungskonzept 394 Datensätze zu, das somit einen relativen Anteil von 25,2 % darstellt.

Die mit 168 zugeordneten Datensätzen auch größte Bearbeitungskategorie 2.1 ~Erhöhung Summanden/Summe~ beschreibt Begründungen, in denen der Aufgabenbearbeiter mit einer Erhöhung der Zahlen im Allgemeinen argumentiert. So ist auch die Bearbeitungsvariante 4 empirisch belegt. Oftmals ist den Formulierungen nicht zu entnehmen, ob eine Erhöhung der einzelnen Summanden oder schlussendlich die Erhöhung der Zeilensummen gemeint ist. Auch die Mächtigkeit der Erhöhung wird in den Begründungen nicht angeführt. Meist werden allgemeine Formulierungen wie „*Weil es immer höhere Zahlen werden*⁴⁵“ oder „*Weil immer eine Zahl mehr ist*⁴⁶“ verwendet. Andere Begründungen dieser Bearbeitungskategorie zeugen von einem intuitiven Verständnis des strukturmathematischen Hintergrundes, was in den schriftlichen Formulierungen lediglich durch den Einbezug des Begriffs Zeile angedeutet, aber nicht ausgeführt wird: „*Weil in jeder Zeile eine Zahl höher ist*⁴⁷“. Der relative Anteil dieser Argumentationsvariante entspricht 10,8 % und stellt mit relativen internen 42,6 % die größte Gruppierung des Bearbeitungskonzeptes

⁴³ Zitat aus Datensatz BN-c-12

⁴⁴ Zitat aus Datensatz BS-a-10

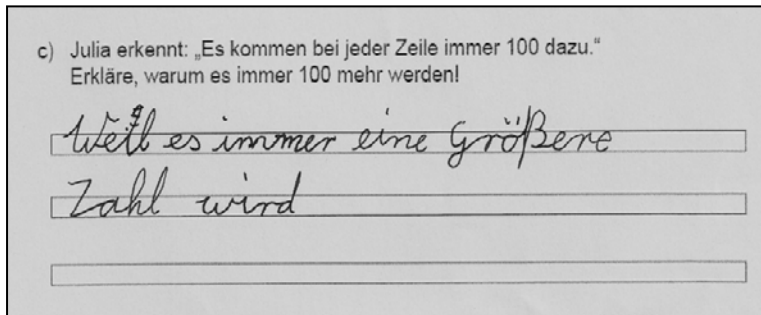
⁴⁵ Zitat aus Datensatz AJ-a-12

⁴⁶ Zitat aus Datensatz BA-h-09

⁴⁷ Zitat aus Datensatz BF-d-10

dar. Ein Blick in die Interviewstudie illustriert diese Bearbeitungskategorie und verdeutlicht die Unterscheidung zu den strukturmathematisch orientierten Kategorien des ersten Bearbeitungskonzeptes.

In den kodierten Begründungen der aktuellen Bearbeitungskategorie ist lediglich von einer allgemeinen Erhöhung der Zahlen zu lesen. Welche Zahlen sich erhöhen oder wie mächtig



diese Erhöhung konkret ist, wird weder mündlich noch schriftlich formuliert. Bereits *Tatjana's* Schriftdokument veranschaulicht diese Unterscheidung deutlich. Auch auf direkte Nachfragen wissen diese Kinder der In-

terviewstudie keine Antworten, wie der zugehörige Transkriptausschnitt belegt.

Beginn Interview Tatjana bei 1:13:15	
	K schaut auf AB.
1:18:32	K: Also ehm man soll erklären, warum es hier (K zeigt auf Zeilensummen) immer Hunderter mehr werden.
1:18:37	I: Mh.
1:18:39	K: Weil, weil hier (K zeigt auf Hundertertafel) auch immer ne Reihe mehr wird.
1:18:43	I: Mh....Versuchs noch mal ein bisschen weiter zu erklären.
1:18:50	K: Mm.
	I: Genauer.
1:18:52	K: Weil...es ja auch immer höhere Zahlen sind.
1:19:01	I: Mh, kannst du mal versuchen das, was du mir jetzt gesagt hast mit Worten aufzu schreiben?
1:19:08	K: Mm, hm.
1:19:11	I: Du kannst dazu gerne noch einen Moment überlegen. Du kannst auch gerne noch mal einen Satz sagen, den du aufschreiben möchtest.
1:19:35	K: Hm.....Weil´s immer ne größere Zahl wird.

Tatjana versteht die Aufgabenstellung und den damit verbundenen Arbeitsauftrag. Nach kurzem Überlegen präsentiert sie einen ersten Begründungsversuch. Nach Aufforderung der Interviewerin scheint ihr bereits eine konkretisierende Erläuterung der getroffenen Aussage Schwierigkeiten zu bereiten. Im Gegensatz zu der später in ihrem Schriftdokument verwendeten Formulierung der größeren Zahlen spricht sie hier zunächst von höheren Zahlen. Die Begriffe höher und größer werden demnach synonym verstanden und verwendet.

Bearbeitungskategorie 2.2 ~Wiederholung~ fasst Aufgabenbearbeitungen zusammen, die eine Wiederholung der formulierten Erkenntnis in der Aufgabenstellung nutzen, wobei dieses Vorgehen bereits in Bearbeitungsvariante 7 bedacht wird. All diese Datensätze führen eine Erhöhung um 100 redundant als Argumentationsgrundlage an. Oftmals ist die Formulierung „Es kommen 100 dazu“⁴⁸ original der Aufgabenstellung übernommen oder

⁴⁸ Zitat aus Datensatz BM-b-01

findet sich in leichter Abwandlung wie „*Es muss immer 100 mehr werden, weil man das Ergebnis zusammenrechnen muss*⁴⁹“ wieder. Mit 89 zugeordneten Datensätzen entspricht diese Bearbeitungskategorie einem relativen Anteil von 5,7 % sowie einer relativen internen Häufigkeit von 22,6 %.

Aufgabenbearbeiter, die sich auf die Zeilensummen der Aufgabenfolge beziehen, sammelt die Bearbeitungskategorie 2.3 ~Bezug Zeilensumme~. So wird in 54 Datensätzen mit der zu erhaltenen Zeilensumme argumentiert, sozusagen der Umkehrschluss gezogen: So sind 100 zu addieren, damit die gewünschte Summe und nicht ein anderes Ergebnis herauskommt. In den Aufgabenbearbeitungen sind somit Formulierungen wie „*Weil es sonst in der 6 Zeile nicht 555 geben kann*⁵⁰“ zu finden. Ebenso wird mit dem Argument der Zeilensumme erneut die Erhöhung um 100 verdeutlicht: „*Weil es hinten immer 100 mehr werden 55, 155, 255 also von 55 bis zur 155 sind es 100 mehr von 155 bis 255 sind es 100 also es sind immer 100 mehr*⁵¹“. Es wird eine relative Häufigkeit von 3,5 % sowie ein relativer interner Anteil von 13,7 % verzeichnet.

Andere Datensätze weisen die Struktur der Zeilensummen in der Aufgabenfolge als primäres Argument der Begründung auf. Bearbeitungskategorie 2.4 ~Struktur Zeilensumme~ entspricht mit 31 zugeordneten Datensätzen einem relativen Anteil von 2,0 % und einem relativen internen Anteil von 7,9 %. Die Veränderung der Zeilensummen um jeweils einen Hunderter bei gleichbleibender Besetzung der Zehner- und Einerstelle ist aus diesen Begründungen deutlich abzulesen: „*Weil Julia immer die gleiche Zahl hinten hat, nur vorne die Zahlen verändern sich, wenn man 100 zum Ergebnis dazu tut*⁵²“ oder „*Die hintere Zahl bleibt, aber wenn ein Hunderter dazukommt, verändert sich zwar die vordere, aber nicht die hintere*⁵³“.

Für 29 Aufgabenbearbeiter erscheint die Erhöhung der Zeilensumme um den Wert 100 selbstverständlich, da es sich um eine Aufgabe im Kontext der Hundertertafel handelt. Bearbeitungskategorie 2.5 ~Hundertertafel~ entspricht einer relativen Häufigkeit von 1,9 % sowie einem relativen internen Anteil von 7,4 %. Da die Hundertertafel eine strukturierte Darstellung der Zahlen eben bis 100 darstellt, scheint für diese Aufgabenbearbeiter keine andere Zahl rational zu sein. Diese Selbstverständlichkeit der Argumentation ist den Schriftdokumenten deutlich zu entnehmen: „*Es kommt immer ein Hunderter dazu, weil es sich um die Hundertertafel dreht*⁵⁴“.

Eine letzte Bearbeitungskategorie 2.6 ~Eigenschaft Addition~ wird eröffnet, um den 23 Aufgabenbearbeitungen gerecht zu werden, welche die Aufgabenfolge im Hinblick auf eine additive Aufgabenfolge betrachten. Addition bedeutet per se eine Erhöhung, wobei der Betrag der Erhöhung oder die Summanden der Addition hier nicht von Belang sind.

⁴⁹ Zitat aus Datensatz BT-d-07

⁵⁰ Zitat aus Datensatz BV-e-14

⁵¹ Zitat aus Datensatz BU-a-05

⁵² Zitat aus Datensatz BW-d-08

⁵³ Zitat aus Datensatz BW-d-21

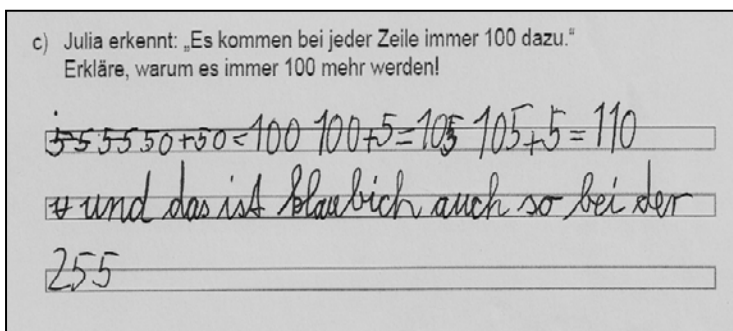
⁵⁴ Zitat aus Datensatz BJ-a-10

Die Datensätze liefern allgemeine Formulierungen wie „Weil sie addiert⁵⁵“ oder „Weil man ja alles zusammengerechnet wird⁵⁶“ und bestätigen die theoretische Bearbeitungsvariante 5.

Ein drittes **Bearbeitungskonzept Anderes** gliedert sich mit insgesamt 263 zugeordneten Aufgabenbearbeitungen in drei Gruppierungen, die nachfolgend erläutert werden. Aufgrund der genannten Häufigkeit entspricht dieses Bearbeitungskonzept relativen 16,9 %.

Zunächst eröffnet sich Bearbeitungskategorie 3.1 ~Zeilenadditionen~ mit 26 zugeordneten Datensätzen. Diese Aufgabenbearbeiter formulieren konkrete Zeilenadditionen, indem die Zahlensätze als Notation auf symbolischer Ebene vorzufinden sind. Häufig werden die vierte, fünfte oder sechste Zeilenaddition als Rechnung fixiert: „ $31+32+33+34+35+36+37+38+39+40=355, 41+42+43+44+45+46+47+48+49+50=455, 51+52+53+54+55+56+57+58+59+60 = 555$ ⁵⁷“. Ebenso werden auch einzelne Zeilenadditionen mit wenigen erläuternden Worten als Begründung herangezogen: „Weil bei jeder Zahl die gleiche Zahl ist zum Beispiel $41\ 42\ 43\ 44\ 45\ 46\ 47\ 48\ 49\ 50 = 555$ ⁵⁸“. Diese Bearbeitungskategorie stellt sich mit einem relativen Anteil von immerhin 1,7 % sowie einer relativen internen Häufigkeit von 9,9 % dar.

Des Weiteren werden in den Datensätzen zum Teil nicht nachvollziehbare Rechnungen angeführt, mit denen Julias Erkenntnis begründet wird. Diese präsentieren sich in Bearbeitungskategorie 3.2 ~Rechnungen~. Interessant ist die Tatsache, dass bei diesen Rechnungen den Zahlen 50 und 55 besondere Beachtung geschenkt wird. Dies schlägt sich in Notationen wie „Weil es immer $55+55$ kommen⁵⁹“ oder „Weil $50+50$ ergeben immer mehr 100ter⁶⁰“ nieder. Auch andere Rechnungen sind in den 39 Datensätzen zu finden. Relativ betrachtet entspricht dies einem Anteil von 2,5 %, während der relative interne Anteil 14,8 % beträgt.



Diese Beobachtung bestätigt sich auch in der Interviewstudie. Andreas bietet als eine erste Erklärung für die Erhöhung der Zeilensummen um jeweils 100 die Rechnung ‘ $55 + 55$ ’ und erläutert, das Ergebnis dieser Addition liege bereits über

100. Diesen Gedankengang führt er weiter fort, indem er die Zahlen 155 und 55 addiert. Die Verschriftlichung seiner Überlegungen ist dem abgebildeten Dokument zu entnehmen.

⁵⁵ Zitat aus Datensatz AR-b-15

⁵⁶ Zitat aus Datensatz BT-b-08

⁵⁷ Zitat aus Datensatz AP-b-12

⁵⁸ Zitat aus Datensatz AU-b-16

⁵⁹ Zitat aus Datensatz AF-b-13

⁶⁰ Zitat aus Datensatz BW-a-16

Eine letzte Bearbeitungskategorie 3.3 ~Weiteres~ erscheint mit 198 Datensätzen zunächst recht mächtig. Jedoch sind in dieser Kategorie diverse Gruppierungen inkludiert, bei denen die Eröffnung einer separaten Bearbeitungskategorie aufgrund der hierfür zu geringen Häufigkeiten ($< 1\%$) unangemessen ist. So gibt es Aufgabenbearbeiter, die wie in Bearbeitungsvariante 6 theoretisch konstruiert, einen Ringschluss formulieren oder aussagen, dass sich das Ergebnis stets verdoppelt. Ebenso wird mehrmals die Regel einer Erhöhung um 55 formuliert. Aufgrund dieser kategorieninternen Gruppenbildung ist dieser Bearbeitungskategorie trotz des relativen Anteils von 12,7 % und einer relativen internen Häufigkeit von 75,3 % weniger bedeutsam einzuschätzen, als zunächst angenommen.

7.2.6 Zusammenschau der Bearbeitungskategorien Teilaufgabe A4c

Als Ergebnis der Rationalen Aufgabenanalyse werden drei theoretische Bearbeitungskonzepte mit insgesamt sieben Bearbeitungsvarianten formuliert. Die drei übergeordneten Bearbeitungskonzepte bestätigen sich mit der Empirischen Aufgabenanalyse, die jeweiligen Bearbeitungsvarianten werden differenziert und ergänzt, sodass letztlich 15 Bearbeitungskategorien beschrieben werden.

Im Rahmen des Bearbeitungskonzeptes **Strukturmathematische Begründung** findet eine Differenzierung der Bearbeitungsvarianten 1 (ein Argumentationsaspekt) und 2 (zwei Argumentationsaspekte) statt. Anhand der Schriftdokumente eröffnen sich aufgrund der Häufigkeiten jeweils zwei untergeordnete Bearbeitungskategorien. Die Bearbeitungsvariante 3 schärft sich zu einer Bearbeitungskategorie aus, in der die Aufgabenbearbeiter alle drei strukturmathematischen Argumentationsaspekte anführen.

Auch die beiden theoretischen Bearbeitungsvarianten 4, 5 und 7 schärfen sich im Rahmen des Bearbeitungskonzeptes **Argumentation mit Bezug Aufgabenfolge** zu empirischen Bearbeitungskategorien aus. Die Empirische Aufgabenanalyse zeigt jedoch auf, dass innerhalb des Bearbeitungskonzeptes drei weitere Bearbeitungskategorien aufgrund formulierter Bezüge zu den Zeilensummen und dem Kontext der Hundertertafel zu eröffnen sind.

Auch im Rahmen des dritten **Bearbeitungskonzeptes Anderes** führt die Datenbasis zu erneuten Modifikationen. Anhand des inhaltlichen Bezuges zur Aufgabenfolge wird diese Kategorie im Rahmen der Empirischen Aufgabenanalyse in das zuvor genannte Bearbeitungskonzept aufgenommen. Hingegen wird Bearbeitungsvariante 6 aufgrund der geringen Anzahlen in einer Bearbeitungskategorie Anderes mit weiteren auftretenden Gruppierungen vereint. Ebenso ergeben die kodierten Datensätze eine zusätzliche Bearbeitungskategorie, da zahlreiche Aufgabenbearbeiter in ihren Argumentationen verschiedene Rechnungen anführen. Eine weitere Bearbeitungskategorie wird als Konsequenz der häufig fixierten Zeilenadditionen eröffnet.

7.2.7 Überblick über die Interviewstudie Teilaufgabe A4c

Die vorliegenden Dokumentationen der Interviews werden nun in das aufgestellte Kategoriensystem eingeordnet. Da sieben Kinder im Verlauf der Interviewserie die dritte Teilaufgabe nicht bearbeitet haben, fließen nur 20 Aufgabenbearbeitungen in die Darstellung ein.

Sieben Bearbeitungen werden dem **Bearbeitungskonzept Strukturmathematische Argumentation** zugeordnet. *Anna*, *Norman*, *Julia* und *Lea* formulieren in ihren schriftlichen Erläuterungen jeweils die Erhöhung um 10 beziehungsweise um einen Zehner, womit Bearbeitungskategorie 1.1 ~ein Argumentationsaspekt - Erhöhung 10 abstrakt~ entsprochen wird. Während *Norman* und *Lea* auch während des Gesprächs ausschließlich dieses Argument zur Erklärung nutzen, werden *Anna* und *Julia* im Verlauf des Interviews konkreter. *Anna* belegt die Erhöhung um 10 am Beispiel der Zahl 17 und demonstriert dies an den abgebildeten Zeilenadditionen. Auch *Julia* führt mit der Erhöhung von 1 zu 11 ein konkretes Zahlenbeispiel an. Des Weiteren ist das Mädchen sogar in der Lage, die Erhöhung der Zeilensumme um 100 auf die Multiplikation der zehn Zahlen in jeder Zeile und die jeweilige Erhöhung um 10 zurückzuführen. Doch auch auf Nachfrage der Interviewerin möchte sie diese Argumente nicht in ihrer schriftlichen Notation ergänzen. *Marco* und *Franzi* führen in ihren schriftlichen Begründungen ebenfalls konkrete Beispiele der abgebildeten Zeilenadditionen an. Ihre Bearbeitungen werden demnach Bearbeitungskategorie 1.2 ~ein Argumentationsaspekt - Erhöhung 10 konkret~ zugeordnet. Die mündlichen Erläuterungen decken sich weitestgehend mit den Schriftdokumenten der beiden Kinder. *Lukas'* Begründung wird Bearbeitungskategorie 1.6 ~Weiteres~ zugeordnet, da er den dritten Argumentationsaspekt $10 \cdot 10 = 100$ schriftlich fixiert. Am Ende des Interviews ergänzt er diese Aussage um den Fakt, dass zehn Zahlen in einer Zeile stehen. Die über zehnminütige Interviewpassage zu dieser Teilaufgabe dokumentiert prägnant, dass *Lukas* mit Unterstützung der Interviewerin die Vorüberlegungen zu dieser Aussage mündlich formulieren und an Beispielen zeigen kann. Trotz des offensichtlich vorhandenen Verständnisses wirkt der Junge bei der Bearbeitung dieser Teilaufgabe unsicher.

Die Lösungen einer weiteren Gruppe von drei Kindern sind in Bearbeitungskategorie 2.1 ~Erhöhung Summanden/Summe~ zu finden. In den Gesprächsaufzeichnungen von *Anna-Lena*, *Tatjana* und *Fiona* bestätigt sich das schriftlich angeführte Argument. *Anna-Lena* und *Tatjana* argumentieren jeweils mit den sich erhöhenden Summanden von Zeile zu Zeile, wobei *Anna-Lena* zusätzlich ein konkretes Zahlenbeispiel anbietet. *Fiona* hingegen schließt von der Erhöhung der Summanden auf eine somit größere Summe.

Florians Schriftdokument enthält lediglich eine Wiederholung von *Julias* Aussage, die hier redundant als Begründung genutzt wird. Somit wird eine Zuordnung dieser Bearbeitung in Bearbeitungskategorie 2.2 ~Wiederholung~ vorgenommen.

Wie bereits erwähnt, finden sich auch in den Dokumenten der Interviewstudie zwei Bearbeitungen der Bearbeitungskategorie 3.2 ~Rechnungen~. *Andreas'* Denkweg und die damit verknüpften Additionen der Zahl 55 zu den jeweiligen Zeilensummen dienen bereits der

Illustration der Bearbeitungskategorien (siehe Abschnitt 7.2.3). *Lennox* hingegen interpretiert Julias Erkenntnis, indem er die Zahl 100 als Summanden auffasst und eine Addition bis zur Summe 1000 notiert. Weitere Erläuterungen gibt er weder in seinem Schriftdokument noch während des Interviews. Seine Bearbeitung deutet jedoch auf ein Verständnis der drei Teilaufgaben als voneinander unabhängige Aufgabenstellungen hin.

Die Bearbeitungskategorie 3.3 ~Weiteres~ enthält sieben inhaltlich völlig unterschiedliche Bearbeitungen, die nachfolgend im Überblick dargestellt werden. *Steffi* ist in der Lage, Julias Erkenntnis nachzuvollziehen und kann sie anhand der Zeilenadditionen zeigen. Eine Erklärung findet sie jedoch trotz Impulsgebung der Interviewerin nicht. So formuliert sie auf ihrem Arbeitsdokument den Satz „Das weiß ich nicht“. Auch *Samuel* zeigt im Ansatz ein Verständnis für die Erhöhung der Zeilensummen um jeweils 100. Seine Erklärung „Die Zehner hab ich in Hunderter gezählt“ weiß er jedoch nicht genauer zu erläutern. *Kathrin* ist aufgrund des Begriffs Zeile verwirrt, sodass sie die Erhöhung der Zeilensumme um den Wert 100 nicht erklären kann. Schließlich interpretiert sie die Aussage, indem sie zu den Zahlen der Hundertertafel immer 100 addieren möchte. In ihrem Schriftdokument erscheint eine bloße Aufzählung der Zehnerzahlen von 100 bis 190, wobei sie ihre Notation erneut mit der Zahl 100 abschließt. *Steffen* begründet in seiner Notation die Erhöhung der Zeilensummen mit den „verschiedenen Aufgaben“ in den drei angegebenen Zeilen. Aufgrund des Transkriptes wird schnell deutlich, dass er mit dem Ausdruck „verschiedene Aufgaben“ die unterschiedlichen Zahlen in den Zeilen bezeichnet. Was jedoch den Unterschied der Zahlen ausmacht, kann der Junge nicht weiter konkretisieren. *Claudia* liefert eine regelrecht putzig anmutende Erklärung. In ihren Augen wäre ein Erhalt des stets gleichen Ergebnisses langweilig, also erhöht sich die Summe stets um die Zahl 100. *Andrea* wiederholt im Verlauf des Interviews lediglich die Erhöhung um jeweils 100, bringt diese Aussage jedoch nicht mit den Zeilensummen in Verbindung. So findet sich auf ihrem Arbeitsdokument letztlich nur die Formulierung „Es werden immer mehr Hunderter“.

7.3 Zusammenführung der Bearbeitungswege Teilaufgabe A4b und A4c

Die Rationale Aufgabenanalyse stellt die inhaltliche Beziehung der beiden Teilaufgaben A4b und A4c deutlich heraus. Ein Blick in die vorliegenden Daten zeigt, dass die Aufgabenbearbeiter diesen inhaltlichen Zusammenhang der Teilaufgaben nicht immer erkennen und nutzen. Dieser Fakt wird hauptsächlich auf die bereits dargestellte und erläuterte Aufgabenpräsentation zurückgeführt (siehe Abschnitt 7.1.1). Wird die Aufgabenfolge in Teilaufgabe A4b zur Ermittlung der geforderten Zeilensumme weitergeführt, ist von einem grundlegenden Verständnis für die vorhandene Struktur der präsentierten Aufgabenfolge auszugehen. Dies wiederum bietet eine notwendige Voraussetzung für die Formulierung einer strukturmathematischen Begründung in Teilaufgabe A4c unter Nutzung der angeführten Argumentationsaspekte. Es ist demnach zu prüfen, ob die Aufgabenbearbeiter in Ergebniskonzept 1 der zweiten Teilaufgabe hauptsächlich strukturmathematische Argumentationen im Sinne des Bearbeitungskonzeptes 1 der Teilaufgabe A4c formulieren. Ebenso sind weitere Bezüge zwischen den Ergebnis- und Bearbeitungskonzepten der beiden Teilaufgaben von Interesse. Die Erstellung einer Kontingenztafel zu den Ergebniskon-

zepten Teilaufgabe A4b und den Bearbeitungskonzepten Teilaufgabe A4c ermöglicht die Darstellung und Identifikation derartiger Zusammenhänge. Hierzu werden alle 1535 Datensätze herangezogen, die eine Bearbeitung sämtlicher Teilaufgaben aufweisen. Es folgt die Auszählung der paarweisen Kombinationen zu jedem Aufgabenbearbeiter sowie deren Darstellung in einer tabellarischen Übersicht. Zunächst erfolgt die Betrachtung der erstellten Kontingenztafel mit den absoluten Häufigkeiten der erhaltenen Kombinationen.

Bearbeitungskonzepte Argumentation A4c					
Ergebniskonzepte A4b		1. Strukturmathematisch	2. Bezug Aufgabenfolge	3. Anderes	
	1. 6. Zeilensumme	41,2 % (633)	14,4 % (221)	10,0 % (154)	
	2. x. Zeilensumme	11,6 % (178)	6,2 % (95)	3,0 % (46)	
	3. Anderes	5,3 % (82)	4,6 % (70)	3,6 % (56)	
				100 % (1535)	

Tabelle 2: Kontingenztafel A4b/A4c mit absoluten Anzahlen und relativen Häufigkeiten.

Mit einem Anteil von 41,2 % bearbeiten 633 Aufgabenbearbeiter die betrachteten Teilaufgaben, in dem sie die gefragte Zeilensumme 555 gemäß dem Ergebniskonzept 1 notieren und in der sich anschließenden Teilaufgabe eine strukturorientierte Argumentation formulieren. Da diese Aufgabenbearbeitungen auf ein Verständnis der Aufgabenfolge der Zeilenaddition in Teilaufgabe A4b und ein entsprechend entwickeltes Argumentationskonzept in Teilaufgabe A4c schließen lässt, bestätigt bereits dieses Ergebnis die zuvor getroffene Annahme.

Werden hier nicht nur die übergeordneten Bearbeitungskonzepte, sondern auch die Ergebnis- und Bearbeitungskategorien einbezogen, ergibt sich im Detail folgende Übersicht.

Bearbeitungskategorien strukturmathematische Argumentation A4c							
6. Zeilensumme A4b		1.1 10 abstrakt	1.2. 10 konkret	1.3. 10 Zahlen/Erhöhung 10	1.4. Erhöhung 10/10*10	1.5. 3 Aspekte	1.6. Andere
	1.1. 555	416	65	47	16	28	10
	1.2. 55x/5xx	37	6	4	2	1	1

Tabelle 3: Kontingenztafel A4b/A4c zu Ergebniskategorien 1 und Bearbeitungskategorien 1 mit absoluten Anzahlen.

Interessant ist an dieser Stelle, dass lediglich in 29 Datensätzen (28+1) alle drei strukturmathematischen Argumentationsaspekte zu finden sind. Bis auf eine Ausnahme notieren diese Aufgabenbearbeiter die Zeilensumme 555, was auf ein Weiterführen der Aufgabenfolge und nicht auf eine Berechnung der Summe schließen lässt.

Mit Blick zurück auf die allgemeine Kontingenztafel werden weitere Erkenntnisse formuliert: Die absoluten Häufigkeiten innerhalb der beiden Ergebniskonzepte 1 und 2 verringern sich auf der Ebene der Bearbeitungskonzepte 1 bis 3 kontinuierlich. Für Ergebniskonzept 1, also den Erhalt der 6. Zeilensumme, sind folgende Werte abzulesen: Während besagte 41,2 % eine strukturmathematische Argumentation formulieren, führen innerhalb des Ergebniskonzeptes nur noch 14,4 % der Drittklässler eine Argumentation mit konkretem Bezug zur Aufgabenfolge an. Notiert der Aufgabenbearbeiter die sechste Zeilensumme, sind nur noch absolute 10,0 % der Datensätze im Bearbeitungskonzept Anderes zu finden.

Eine entsprechende Entwicklung der Häufigkeiten ist für das Ergebniskonzept 2 ablesbar: Insgesamt sind für Teilaufgabe A4b in 11,6 % der Arbeitsdokumente Lösungen der Ergebniskategorie x. Zeilensumme zu finden, diese Aufgabenbearbeiter begründen in Teilaufgabe A4c strukturmathematisch. Die Kombination einer solchen Zeilensumme und der Formulierung einer Begründung mit Bezug zur Aufgabenfolge in Teilaufgabe A4c weist nur einen Anteil von 6,2 % auf. Auch innerhalb dieses Ergebniskonzeptes reduziert sich die Argumentation des Bearbeitungskonzeptes Anderes mit einem Anteil von 3,0 % erneut.

Sind die in Teilaufgabe A4b eingetragenen Zeilensummen hingegen dem dritten Ergebniskonzept Anderes zugeordnet, stellt sich die Verteilung dieser Gruppe auf die Bearbeitungskonzepte der Teilaufgabe A4c weitaus gleichmäßiger dar. Eine strukturmathematische Begründung notieren hier 5,3 %, während mit 4,6 % ein ähnlich großer Anteil einen Bezug zu der präsentierten Aufgabenfolge herstellt. Mit 3,6 % weicht auch der Anteil derer, die weitere Begründungen liefern, nicht auffällig ab.

Die Angabe der korrekten Zeilensumme in Teilaufgabe A4b lässt somit tatsächlich auf ein zumindest basales Verständnis der Struktur der Aufgabenfolge schließen. Bei Notation der Lösung 555 wird meist eine strukturorientierte Argumentation in der letzten Teilaufgabe angeführt. Die Darstellung der Kontingenztafel mit markierten Zeilenhäufigkeiten unterstützt diese Annahme zusätzlich.

Bearbeitungskonzepte Argumentation A4c					
Ergebniskonzepte A4b		1. Strukturmathematisch	2. Bezug Aufgabenfolge	3. Anderes	
	1. 6. Zeilensumme	62,8 % (633)	21,9 % (221)	15,3 % (154)	100 % (1008)
	2. x. Zeilensumme	55,8 % (178)	29,8 % (95)	14,4 % (46)	100 % (319)
	3. Anderes	39,4 % (82)	33,7 % (70)	26,9 % (56)	100 % (208)

Tabelle 4: Kontingenztafel A4b/A4c mit markierten Zeilenhäufigkeiten sowie absoluten Anzahlen und relativen Häufigkeiten.

Anhand der markierten Zeilenhäufigkeiten wird deutlich, dass für jedes der drei Ergebniskonzepte zu Teilaufgabe A4b die jeweils größte Häufigkeit der Aufgabenbearbeitung der Teilaufgabe A4c in dem Bearbeitungskonzept Strukturmathematische Argumentation zu finden ist. Das stellt keinen Widerspruch der zuvor getroffenen Aussage dar, da sich die relativen Häufigkeiten der Argumentationskonzepte gleichzeitig innerhalb der drei Ergeb-

niskonzepte deutlich reduzieren. Ergänzend verringern sich die Abstände der Anteile in den Ergebniskonzepten innerhalb der Zeilen. Auffallend ist die weitestgehende Angleichung der Anteile des dritten Ergebniskonzeptes Anderes. Also: Je prägnanter die in Teilaufgabe A4b gefragte Zeilensumme genannt wird, umso prägnanter scheint auch die Strukturorientierung der formulierten Begründung in Teilaufgabe A4c zu sein.

Diese Ergebnisse lassen sich nun mit den Daten der Interviewstudie vergleichen. Trotz der geringen Stichprobe ist das Hinzuziehen der Kontingenztafel zu den Bearbeitungen der 20 Kinder der Interviewstudie interessant, um Gemeinsamkeiten hervorzuheben oder Unterschiede zu verdeutlichen.

Bearbeitungskonzepte Argumentation A4c					
Ergebniskonzepte A4b		1. Strukturmathematisch	2. Bezug Aufgabenfolge	3. Anderes	
	1. 6. Zeilensumme	20 % (4)	5 % (1)	15 % (3)	8
	2. x. Zeilensumme	5 % (1)	10 % (2)	15 % (3)	6
	3. Anderes	5 % (1)	10 % (2)	15 % (3)	6
		6	5	9	

Tabelle 5: Kontingenztafel A4b/A4c Interviewstudie mit absoluten Anzahlen und relativen Häufigkeiten.

Unter Einbeziehung der abgebildeten Tabelle zeigt sich, dass auch hier die Kombination des ersten Ergebniskonzeptes (Notation der sechsten Zeilensumme) mit dem Bearbeitungskonzept einer strukturmathematischen Argumentation mit vier Kindern den größten Anteil der Verteilung darstellt. Da die durchgeführten Interviews einen ausführlichen Einblick in die jeweiligen Denk- und Bearbeitungswege ermöglichen und somit komplementäre Erkenntnisse liefern, erfolgt eine Skizzierung dieser vier Interviewgespräche mit *Anna*, *Marco*, *Lukas* und *Lea*. Der Vollständigkeit halber wird die Bearbeitung der Teilaufgabe A4a hinzugezogen. Die Arbeitsdokumente der Kinder werden abgebildet und die Bearbeitungen der einzelnen Teilaufgaben anhand der vorliegenden Transkripte erläutert.

Aufgabe 4
a) Trage die fehlenden Zahlen in die Hundertertafel ein!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Julia addiert in jeder Zeile alle Zahlen:
 1. Zeile: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$
 2. Zeile: $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 155$
 3. Zeile: $21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 255$

Welches Ergebnis erhält sie in der 6. Zeile?

c) Julia erkennt: „Es kommen bei jeder Zeile immer 100 dazu.“
 Erkläre, warum es immer 100 mehr werden!

Bei den 2 stetigen Zahlen kommt man immer einen Zehner dazu.

Für die Eintragung der vier fehlenden Zahlen nutzt *Anna* die Struktur der Hundertertafel, indem sie über- und nebeneinanderstehende Zahlen nahe den freien Zellen betrachtet. Auf diese Weise schließt sie auf die vier fehlenden Zahlen, die sie anschließend korrekt einträgt.

Die sechste Zeilensumme erschließt sich das Mädchen durch das Weiterführen der Aufgabenfolge. Hierzu tippt sie während der Bearbeitung nacheinander die Zeilen der Hundertertafel bis zur sechsten Zeile an. Nach kurzem Überlegen formuliert sie das Ergebnis 555, welches sofort eingetragen wird.

Nachdem *Anna* die dritte Teilaufgabe gelesen hat, offenbart sie ohne Aufforderung ihr Argument der Erhöhung der Zahlen um 10. Auf Nachfrage der Interviewerin konkretisiert sie

diese Aussage, in dem sie die Erhöhung um 10 am Beispiel der zweistelligen Zahlen formuliert.

Marco findet die in der Hundertertafel fehlenden Zahlen zügig durch Weiterzählen, indem er die Zahlenfolge vor der freien Zelle fortführt. Bei Eintragung der Zahl 42 unterläuft ihm zunächst ein Fehler, da er erneut die Zahl 32 notiert. Allerdings berichtigt er sich selbstständig und ohne weiteren Kommentar.

Auch *Marco* erkennt den Zusammenhang der zweiten Teilaufgabe mit der Hundertertafel und nutzt diese zur Lösung. Auf den Videoaufnahmen ist sein ständiger Blickwechsel zwischen den Aufgabenteilen deutlich sichtbar. Die Zeilensumme 555 ermittelt er zügig und verbalisiert bereits in diesem Zusammenhang erste Argumentationsaspekte für die in Aufgabenteil A4c geforderte Begründung: „Die Einer bleiben immer gleich. Aber die Zehner werden immer eins mehr⁶¹“. Gleichzeitig demonstriert er an den abgebildeten Zeilenadditionen die Erhöhung der Summanden um jeweils 10. Auf dieser Grundlage formuliert *Marco* seine schriftliche Erklärung.

Aufgabe 4
a) Trage die fehlenden Zahlen in die Hundertertafel ein!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Julia addiert in jeder Zeile alle Zahlen:
 1. Zeile: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$
 2. Zeile: $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 155$
 3. Zeile: $21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 255$

Welches Ergebnis erhält sie in der 6. Zeile?

c) Julia erkennt: „Es kommen bei jeder Zeile immer 100 dazu.“
 Erkläre, warum es immer 100 mehr werden!

In der ersten Zeile sind es nur einer in der 2. Zeile werden es immer zehn Punkte mehr

⁶¹ Zitat aus Transkript 9, A4, Zeitleiste 1:18:55

Aufgabe 4
a) Trage die fehlenden Zahlen in die Hundertertafel ein!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Julia addiert in jeder Zeile alle Zahlen:
1. Zeile: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$
2. Zeile: $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 155$
3. Zeile: $21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 255$

Welches Ergebnis erhält sie in der 6. Zeile? $57+58+59+60+61+62+63+64+65+66=555$

c) Julia erkennt: „Es kommen bei jeder Zeile immer 100 dazu.“
Erkläre, warum es immer 100 mehr werden!

Weil $10 \cdot 10 = 100$ ist. Weil in jeder Zeile 10 Zahlen dazu kommen.

Auch *Lukas* wendet die Strategie des Weiterzählens an, um die vier fehlenden Zahlen zu ermitteln, die er korrekt in die Hundertertafel einträgt.

In Teilaufgabe A4b notiert er zunächst den Zahlensatz der sechsten Zeilenaddition. Hierbei ist er unentschlossen, ob er die Zahlen jeweils durch ein Komma trennt oder mittels eines Rechenzeichens verbindet. *Lukas* führt die Aufgabenfolge nicht fort, sondern berechnet die Summe zügig im Kopf. Der Junge erläutert, dass er zunächst alle Zehnerzahlen addiert, um anschließend die Einerzahlen hinzuzufügen.

Die Bearbeitung der letzten Teilaufgabe scheint *Lukas* Schwierigkeiten zu bereiten. Nur mit Unterstützung der Interviewerin gelingt ihm, die Erhöhung der Zeilensummen zu erkennen. Seinen ersten Impuls, einen Zusammenhang mit der Zahl 100 als letzte Zahl der Hundertertafel herzustellen, verwirft er schnell. Sodann beschreibt er die Veränderung der Zahlen in einer Zeile um jeweils 10 und benennt ebenso die Anzahl der Zahlen in einer Zeile. Spontan äußert er die Überlegung, dass 10 mal 10 genau die gefragte Zahl 100 ergibt. Allerdings weiß er diesen Gedanken zunächst nicht mit der Aufgabenfolge zu verbinden. Auf Nachfrage und Impulsgebung der Interviewerin gelingt es ihm schließlich und *Lukas* formuliert seine schriftliche Begründung. Hier führt er jedoch nur zwei der zuvor drei geäußerten strukturmathematischen Argumentationsaspekte an.

Zwei Beobachtungen dieser Aufgabenbearbeitung sind besonders hervorzuheben:

Lukas berechnet die in Aufgabenteil A4b geforderte sechste Zeilensumme. Um die Addition korrekt aufstellen zu können, ist zumindest ein basales Verständnis der Aufgabenstruktur von Nöten, da die korrekten Zeilensummanden verwendet werden müssen. Das scheint jedoch nicht ausreichend für eine flüssige Bearbeitung der nächsten Teilaufgabe zu sein. Weitere Überlegungen zu den vorherigen und gedanklich bereits abgeschlossenen Teilaufgaben werden notwendig.

Lukas formuliert, wenn auch mit etwas Mühe, mündlich alle drei strukturmathematischen Argumentationsaspekte für eine vollständige Begründung. Seinem Schriftdokument sind jedoch nur zwei dieser Argumente zu entnehmen. Bereits bei anderen Darstellungen der Interviewstudie zeigte sich, dass die Kinder häufig nicht alle mündlich formulierte Aspekte auch schriftlich festhalten.

Aufgabe 4
a) Trage die fehlenden Zahlen in die Hundertertafel ein!

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

b) Julia addiert in jeder Zeile alle Zahlen:
1. Zeile: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$
2. Zeile: $11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 155$
3. Zeile: $21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 255$
Welches Ergebnis erhält sie in der 6. Zeile?

c) Julia erkennt: „Es kommen bei jeder Zeile immer 100 dazu.“
Erkläre, warum es immer 100 mehr werden!
Weil es immer 10 mehr werden

Lea trägt innerhalb weniger Sekunden die fehlenden Zahlen in die freien Zellen der Hundertertafel ein. Auf Nachfrage erläutert *Lea*, sie habe auf die zuvor besetzte Zelle geschaut und „einfach nur da in das fehlende Kästchen die Zahl geschrieben, die danach kommt“⁶².

Auch ihr gelingt es die Aufgabenfolge weiterzuführen, um zügig die Zeilensumme 555 einzutragen. Ähnlich wie *Marco* formuliert sie bereits bei der Bearbeitung dieser Teilaufgabe Aspekte, die für ein Verständnis und eine Bearbeitung der folgenden Teilaufgabe sinnvoll sind. *Lea* erkennt, dass sie lediglich die Hunderter von Zeilensumme zu Zeilensumme erhöhen muss, wobei die Zahl 55 stets fester Bestandteil der Summe bleibt.

Anschließend verwendet das Mädchen verbal ausschließlich den Argumentationsaspekt der Erhöhung um 10. Sich hierzu auszudrücken, fällt ihr schwer. Trotzdem gelingt es *Lea* den genannten Argumentationsaspekt zu notieren und konkretisiert ihn zusätzlich anhand eines Zahlenbeispiels der Zeilenaddition.

Anhand dieser Beispiele werden zuvor formulierte Erkenntnisse unterstützt und können mit Blick auf die gesamte Aufgabe A4 konkretisiert werden:

- Die Kinder wenden bei der Bearbeitung von Teilaufgabe A4a verschiedene Wege zur Bestimmung der vier gesuchten Zahlen an. Dabei hat der gewählte Bearbeitungsweg keinen Einfluss auf die Bearbeitung der nachfolgenden Teilaufgaben.
- Korrekt eingetragene Zeilensummen bei Teilaufgabe A4b werden entweder auf ein Weiterführen der gegebenen Aufgabenfolge oder eine Berechnung der erforderlichen Zeilenaddition zurückgeführt.
- Für die Bearbeitung der letzten Teilaufgabe ist der zuvor gewählte Bearbeitungsweg von Bedeutung. Die Einblicke in die Interviews sowie die Daten der Kontingenztafel deuten darauf hin, dass die Einsicht bei Weiterführung der Aufgabenfolge weitaus umfassender ist, sodass hieraus ein Nutzen für die Begründung der Erhöhung der Zeilensummen um jeweils 100 gezogen werden kann.
- Somit bestätigt sich der inhaltliche Bezug beider Teilaufgaben bis hin zu einer inhaltlichen Abhängigkeit.
- Häufig notieren die Aufgabenbearbeiter nur ein oder zwei Argumentationsaspekte, obwohl sie sich weiterer Aspekte durchaus bewusst sind und diese auch in den Gesprächen anführen.

⁶² Zitat aus Transkript 25, A4, Zeitleiste 55:38

7.4 Zusammenfassung und Kennzeichnung der Aufgabe A4

Es folgt ein Abgleich der Auffälligkeiten aus der Rationalen Aufgabenanalyse mit der Untersuchung der empirischen Daten. Dieser Vergleich bietet weiteren Aufschluss über die identifizierten Besonderheiten und ermöglicht eine Kennzeichnung der Aufgabe.

Zunächst wird festgehalten, dass die drei Teilaufgaben den Anspruch der sich steigernden Anforderung durchaus erfüllen. Damit einher geht eine Erhöhung der Komplexität der Aufgabenstellungen, worauf nachfolgend differenziert eingegangen wird.

Die geringe Anforderung der Teilaufgabe A4a bestätigt sich in den Ergebnissen der Empirischen Aufgabenanalyse. Diesbezügliche Einschätzungen und Kommentare des Hessischen Kultusministeriums sind demnach zutreffend. Das unten abgebildete Diagramm visualisiert die beiden Ergebniskonzepte Zahlen korrekt und Zahlen nicht korrekt. Mit 94,5 % sind in einem sehr großen Anteil der Datensätze die vier korrekten Ergebniszahlen 32, 42, 63 und 88 angegeben. Dementsprechend tragen lediglich 5,5 % der Aufgabenbearbeiter unvollständige oder falsche Zahlen in die freien Zellen der Hundertertafel ein. Die Differenzierung des zweiten Ergebniskonzeptes wird anhand der verschiedenen Bänder der Säule deutlich.

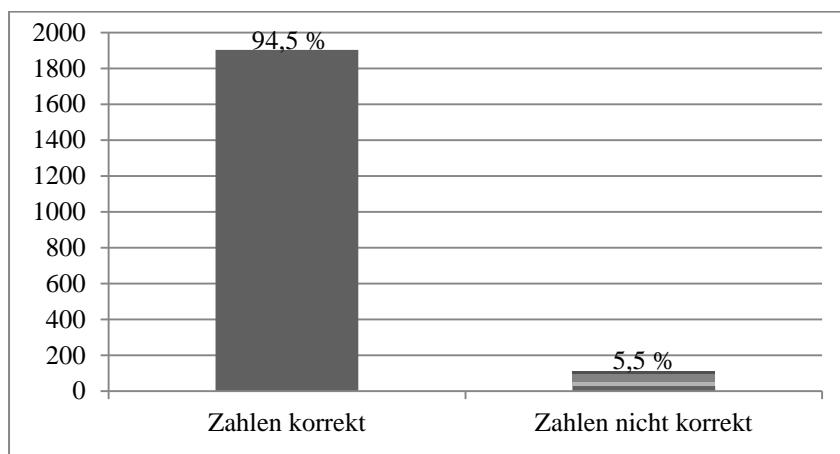


Abbildung 7: Säulendiagramm Ergebniskonzepte Teilaufgabe A4a⁶³.

Abzusprechen ist dieser Teilaufgabe eine prinzipielle Aktivierung des Wissens über die Struktur der Hundertertafel. Die Aufgabenautoren haben die möglichen Herangehensweisen für die Bearbeitung der Aufgabe, also deren multiple Lösbarkeit, offensichtlich nicht in die Aufgabenkonstruktion einbezogen oder unterschätzt. Auch eine reproduktiv angelegte Aufgabe besitzt durchaus grundlegend verschiedene Lösungsvarianten. So werden für Teilaufgabe A4a drei theoretisch konstruierte Bearbeitungswege aufgestellt: Das Finden der Zahlen ist über den eingetragenen Vorgänger und/oder Nachfolger, durch ein Weiterzählen oder der Nutzung der Struktur der Hundertertafel möglich. Bereits die Benennungen

⁶³ Ergebniskonzepte und -kategorien A4a, Nennung aufsteigend

Zahlen korrekt:

Zahlen nicht korrekt: Zahlen fehlen, Zahlen falsch- Nachbarzahlen, Zahlen falsch- Nachbarzehner, Zahlen falsch- Weitere

der Herangehensweisen zeigen, dass nur die dritte Variante eine Verwendung und Nutzung der Hundertertafel als strukturierte Zahldarstellung fordert. Die beiden anderen Bearbeitungswege erfordern lediglich die Kenntnis der Zahlenfolge bis 100.

Die schriftlichen Bearbeitungen der vorliegenden Datensätze bieten aufgrund des verwendeten Antwortformates keine Einsichten in die angewandten Bearbeitungswege dieser Teilaufgabe. Die Aufgabenbearbeitungen der Interviewstudie hingegen gewähren einen ergänzenden Einblick in die Herangehensweisen der Kinder.

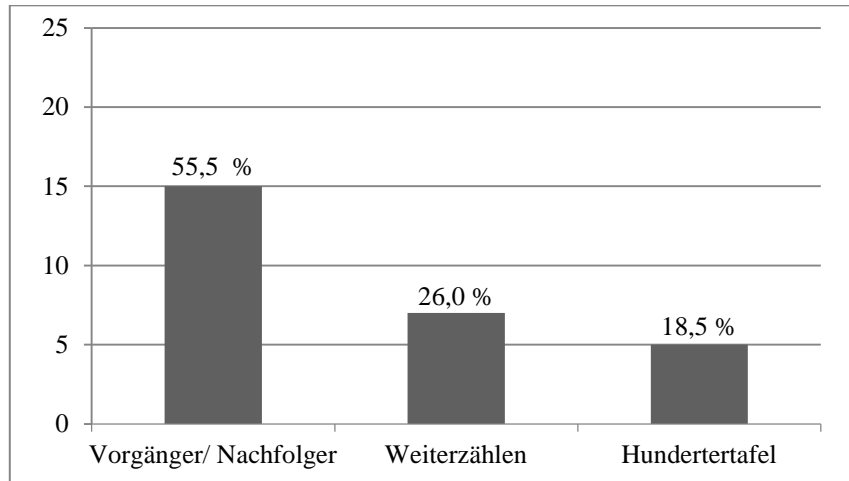


Abbildung 8: Säulendiagramm Bearbeitung Teilaufgabe A4a Interviewstudie.

Die Schüler der Interviewstudie bevorzugen offensichtlich eine Lösung mithilfe der Bearbeitungsvarianten zur Zahlenreihe. Während 15 Kinder die Struktur der Vorgänger und Nachfolger nutzen, arbeiten sieben Kinder im Sinne eines Weiterzählens. Lediglich fünf Kinder nutzen die Struktur der Hundertertafel.

Die nachfolgende Teilaufgabe A4b ist aufgrund ihrer Anlage prozessorientiert ausgerichtet, was die Betonung einer Verstehensorientierung impliziert. Der Aufgabenbearbeiter soll die abgebildete Aufgabenfolge fortführen, um die gefragte sechste Zeilensumme zu ermitteln. Entgegen dieser Aufgabenintention ist das Antwortformat jedoch rein ergebnisorientiert ausgerichtet, da ausschließlich die gesuchte Zahl einzutragen ist.

An dieser Stelle ist den Aufgabenautoren auch die multiple Lösbarkeit der Teilaufgabe aus dem Blick geraten. Lokalisiert der Aufgabenbearbeiter die zehn Zahlen in der gefragten sechsten Zeile und fasst diese mittels Addition zusammen, verschieben sich Ansatz und Anspruch der Aufgabe. Im Fall der intendierten Bearbeitung wird die Struktur der Aufgabenfolge erkannt und genutzt, indem die Zeilensummen schlicht weitergeführt werden. Bei der zweiten Variante liegt eine Schwierigkeit in der Lokalisierung der sechsten Zeile, bevor der Aufgabenbearbeiter dann eine anspruchsvolle Rechenleistung zu vollbringen hat. Die Berechnung der Summe wird als Verfahrensorientierung definiert, da nach dem Aufstellen der Zeilenaddition lediglich ein bekanntes Rechenverfahren angewendet wird.

Das Aufgabenverständnis des Kindes ist aufgrund der inhaltlichen Abhängigkeit dieser und der folgenden Teilaufgabe für die anschließende Bearbeitung bedeutend. Aber auch hier ermöglicht das geschlossene Antwortformat der Teilaufgabe A4b leider keine Rückschlüsse auf den Bearbeitungsweg.

Die Analyse der untersuchten Datensätze zu Teilaufgabe A4b zeigt ein Spektrum der Bearbeitungen von drei Ergebniskonzepten mit insgesamt neun verschiedenen Ergebniskategorien.

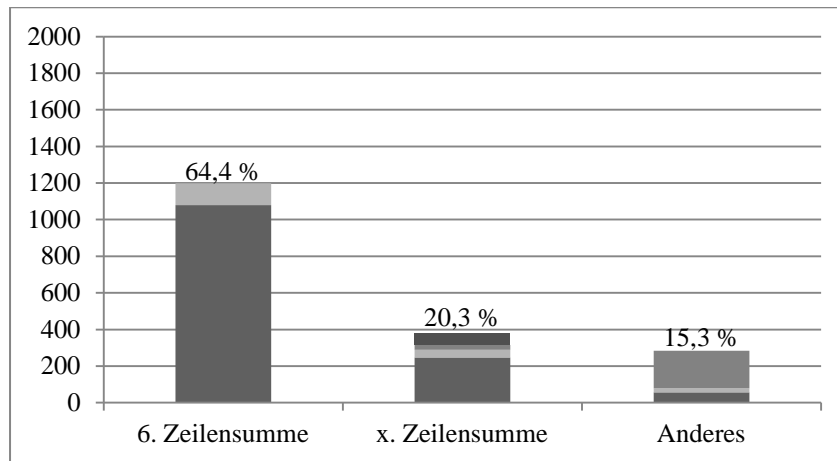


Abbildung 9: Säulendiagramm Bearbeitungskonzepte und -kategorien Teilaufgabe A4b⁶⁴.

Der größte Anteil wird mit 1198 Bearbeitungen in dem ersten Ergebniskonzept 6. Zeilensumme verzeichnet. Hier ist ebenfalls eine Ergebniskategorie inkludiert, in der nicht die gefragte Zeilensumme, sondern eine Zahl der Struktur 55x beziehungsweise 5xx notiert wird. Diese Zahlen liegen im Umfeld der gesuchten Zeilensumme 555, sodass hier nicht auf eine Weiterführung der Zeilensumme geschlossen wird. Stattdessen ist von einer Addition der Zeilensummanden auszugehen.

Die Analyse der Aufgabenbearbeitungen im Interview zeigt, dass auch die Notation der korrekten Zeilensumme 555 oftmals auf eine fehlerfreie Berechnung der Zeilenaddition zurückzuführen ist. Das entspricht nicht der Aufgabenintention, wird aber dennoch ausdrücklich als adäquate Bearbeitung anerkannt. Dabei ist durchaus denkbar, dass der Aufgabenbearbeiter die Zeilenaddition mental aufstellt und im Kopf berechnet. Ebenso sind Vermerke zu den Additionen auf den Arbeitsdokumenten zu finden. So zeigt die Analyse, dass 78 Schriftdokumente derartige Notizen zu Zeilenadditionen oder zugehörige Rechnungen enthalten, sodass in 4,2 % aller Datensätze entsprechende Notizen explizit nachweisbar sind. Die multiple Lösbarkeit der Teilaufgabe A4b ist somit nicht nur theoretisch konstruiert, sondern bestätigt sich aufgrund der empirischen Daten. Nicht nachweisbar sind entsprechende mentale Aufgabenbearbeitungen, wobei in diesem Fall von einem noch hö-

⁶⁴ Ergebniskonzepte und -kategorien A4b, Nennung aufsteigend

6. Zeilensumme: Ergebniszahl 555. Ergebniszahl 55x/5xx;

x. Zeilensumme: Ergebniszahl 655. Ergebniszahl 355, Ergebniszahl 455, Ergebniszahl x55;

Anderes: Summe Zeilensummen, Ergebniszahl 48, Weitere Zahlen

heren Anteil auszugehen ist. Leider werden dem Aufgabenbearbeiter im Aufgabenstamm keine Freiräume für Vermerke angeboten.

Nach diesen Anmerkungen werden nun Besonderheiten der formalen und sprachlichen Präsentation zusammengefasst. Während Teilaufgabe A4a keinen Grund zur Beanstandung bietet, wird auf einige kritische Aspekte in der zweiten Teilaufgabe unbedingt hingewiesen. Zunächst offenbart die Interviewstudie, dass die gestellte Frage nach der Zeilensumme, also der eigentliche Arbeitsauftrag, ungünstig angeordnet ist und den Schülern häufig aus dem Blick gerät. Eine Rahmung der abgebildeten Zeilenaddition oder eine Hervorhebung der Fragestellung könnte das Aufgabenverständnis sowie deren Bearbeitung deutlich erleichtern.

Des Weiteren bestätigt sich die in der Rationalen Aufgabenanalyse vermutete Unkenntnis der im Aufgabenstamm verwendeten Begriffe ‘addiert’ und ‘Zeilen’. So war sieben der 27 Kinder der Interviewstudie der Begriff ‘addiert’ unbekannt und musste zunächst erarbeitet werden. Besonders der auch in Teilaufgabe A4c verwendete Begriff ‘Zeile’ scheint für zahlreiche individuelle Bearbeitungen der zweiten Teilaufgabe verantwortlich zu sein. So sei an dieser Stelle nochmals an Ergebniskategorie 3.2 ~Ergebniszahl 48~ erinnert. Diese Lösung ist auf eine Addition der drei Zahlen der sechsten Spalte in der abgebildeten Zeilenaddition zurückzuführen, statt die sechste Zeile der Hundertertafel zu lokalisieren. Die unterschiedlichen Bedeutungen der Worte Zeile und Spalte sind vielen Aufgabenbearbeitern unbekannt oder die Begriffe werden synonym verwendet. Die genannte Ergebniskategorie weist auf einen weiteren bedeutsamen Aspekt der Aufgabe hin. Laut den Verantwortlichen des Kultusministeriums erhöht sich die Anforderung der Teilaufgaben, wobei diese jedoch inhaltlich deutlich miteinander verknüpft sind. Leider wird dieser Bezug durch den Aufgabenstamm und die formale Präsentation keinesfalls unterstützt. Bereits in der Rationalen Aufgabenanalyse wird der nach den Teilaufgaben differenzierte Aufgabenstamm angeführt. Es gibt keinen einleitenden Text, der auf die Hundertertafel als Basis der Aufgabe hinweist. Somit ist der Zusammenhang der in Teilaufgabe A4b formulierten Zeilenadditionen mit der in Teilaufgabe A4a abgebildeten Hundertertafel für den Aufgabenbearbeiter keinesfalls offensichtlich. Eine einfache sprachliche Unterstützung könnte helfen, diesen Zusammenhang herzustellen. Anhand einer Ergänzung in der Erläuterung wird der Bezug der Teilaufgaben explizit verdeutlicht: Julia addiert in jeder Zeile *der Hundertertafel* alle Zahlen. Eine entsprechende Modifikation des einleitenden Satzes lenkt den Blick bei Bearbeitung dieser Teilaufgabe auf die Hundertertafel und hilft bei der Herstellung der notwendigen Zusammenhänge.

Ebenso kritisch ist die sprachliche Umsetzung der letzten Teilaufgabe zu sehen. Auch hier fehlt eine sprachliche Unterstützung der inhaltlichen Bezüge. Sinnvoll wäre hier folgende Ergänzung: Julia erkennt *zu ihren Rechnungen*: „Es kommen bei jeder Zeile immer 100 dazu.“ Erkläre, warum es von Zeile zu Zeile immer 100 mehr werden! Anhand dieser Ergänzung wird der Blick des Aufgabenbearbeiters direkt auf die abgebildeten Zeilenadditionen in Teilaufgabe A4b gerichtet, was den inhaltlichen Zusammenhang der Aufgabenteile unterstützt. Die Aufforderung kann auch durch das Einfügen der Worte ‘von Zeile zu Zeile’ weiter konkretisiert werden (Erkläre, warum es *von Zeile zu Zeile* immer 100 mehr werden).

Entgegen der zuvor angeführten inhaltlichen Abhängigkeit zeigt sich in den Daten eine isolierte und voneinander unabhängige Bearbeitung der einzelnen Aufgabenteile. Die drei Teilaufgaben werden von den Aufgabenbearbeitern oft als separate Einzelaufgaben aufgefasst und bearbeitet. Dieser Fakt ist für einige der aufgestellten Bearbeitungskategorien zu den Teilaufgaben A4b und A4c verantwortlich, wie bereits das zuvor angeführte Beispiel zu der Spaltensumme 48 zeigt. Beispiele aus der Interviewstudie belegen diese Erkenntnis.

Es werden nun die Ergebnisse der empirischen Aufgabenanalyse zu Teilaufgabe A4c herangezogen, um auch hier den Blick auf die erhaltenen Bearbeitungskategorien zu richten.

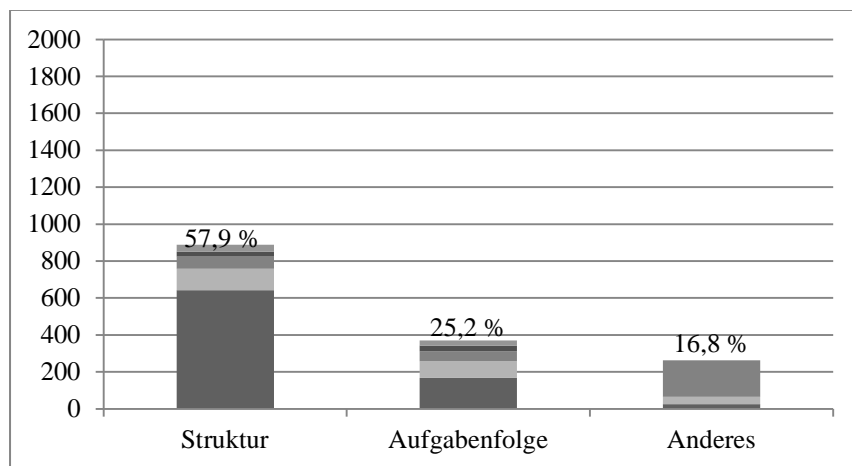


Abbildung 10: Säulendiagramm Bearbeitungskonzepte und -kategorien Teilaufgabe A4c⁶⁵.

Es zeigt sich mit drei Bearbeitungskonzepten und 15 Bearbeitungskategorien ein breites Spektrum an kodierten Bearbeitungswegen. Während 904 Aufgabenbearbeiter wenigstens eines der strukturmathematischen Argumente in ihrer Begründung anführen, beziehen sich 394 Schüler auf besondere Aspekte der Aufgabenfolge. Diese Aufgabenbearbeiter wenden ihren Blick auch bei Bearbeitung der Teilaufgabe A4c zurück zu den beiden vorangehenden Teilaufgaben. So werden konkrete Zahlenbeispiele der abgebildeten Zeilenadditionen geliefert (Bearbeitungskategorie 1.2.), die Hundertertafel angeführt (Bearbeitungskategorie 2.5.) oder die Zahlenstruktur der Zeilensummen herangezogen (Bearbeitungskategorie 2.4.). Bereits bei Bearbeitungskategorie 2.2. ~Wiederholung~ ist jedoch fraglich, ob ein tatsächlicher Bezug zu Teilaufgabe A4a oder A4b hergestellt wird, da hier meist nur eine redundante Wiedergabe der in der Aufgabenstellung angeführten Erkenntnis abzulesen ist. Ebenso weisen zahlreiche der 263 Datensätze des Bearbeitungskonzeptes Anderes auf eine unabhängige Bearbeitung dieser Teilaufgabe hin. Die Datensätze der Bearbeitungskategorie 3.1. ~Zeilenadditionen~ werden gedeutet, indem die Aufgabenbearbeiter sich hier den Raum für Notationen genommen haben, der in Teilaufgabe A4b fehlt. Anders verhält es

⁶⁵ Bearbeitungskonzepte und -kategorien A4c, Nennung aufsteigend

Strukturmathematische Begründung: ein Aspekt-Erhöhung 10 abstrakt, ein Aspekt-Erhöhung 10 konkret, zwei Aspekte-10 Zahlen/Erhöhung 10, zwei Aspekte-Erhöhung 10/10*10, drei Aspekte, Andere;

Bezug Aufgabenfolge: Erhöhung Summanden/Summe, Wiederholung, Bezug Zeilensumme, Struktur Zeilensumme, Hundertertafel, Eigenschaft Addition;

Weiteres: Zeilenaddition, Rechnungen, Anderes

sich mit Bearbeitungskategorie 3.2 ~Rechnungen~, da selten Bezüge zu den Zeilenadditionen oder der Hundertertafel zu finden sind. Einige der Rechnungen konzentrieren sich ausschließlich auf die in Teilaufgabe A4c angeführte Zahl 100, die beispielsweise schlicht additiv zerlegt wird. Dies bietet einen Erklärungsansatz für die häufig auftauchende Zahl 50. Entsprechende Vermutungen können bei zahlreichen Datensätzen der Bearbeitungskategorie 3.3. ~Weiteres~ formuliert werden.

Anhand dieser Beobachtungen wird festgehalten, dass die Erkenntnis des Schülers über eine inhaltliche Abhängigkeit der Teilaufgaben sich positiv auf deren Bearbeitung auswirkt. Der Bezug der Teilaufgaben wird aufgrund der sprachlichen Darstellung im Aufgabenstamm nicht ausreichend hervorgehoben. Wie zuvor beschrieben, kann dies durch zusätzliche sprachliche Unterstützungen modifiziert werden.

Die Ergebnisse weisen darauf hin, dass einige Bearbeitungskategorien aufgrund einer unabhängigen Bearbeitung der Teilaufgaben entstehen. Die Teilaufgaben werden entgegen der Intention nicht aufeinander bezogen, sondern schlicht nacheinander abgearbeitet. Speziell die inhaltliche Abhängigkeit der Teilaufgaben A4b und A4c zeigt sich deutlich in der erstellten Kontingenztafel.

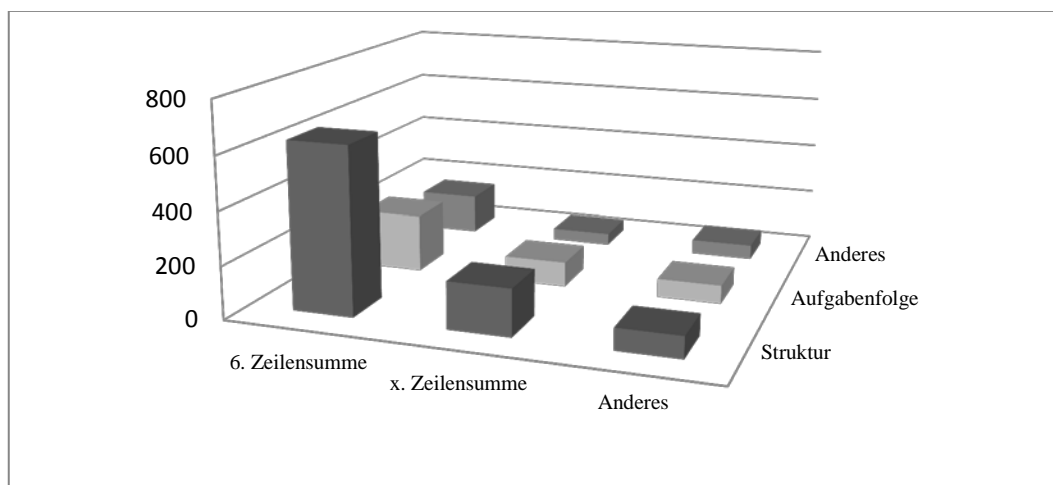


Abbildung 11: Säulendiagramm Kontingenztafel Teilaufgabe A4b und A4c.

Betrachtet werden vorrangig die Größenverhältnisse der gebildeten paarweisen Kombinationen, die jeweiligen Häufigkeiten sind an dieser Stelle zunächst unbedeutend. Bei Paarbildung der Ergebniskonzepte der Teilaufgabe A4b mit den drei Bearbeitungskonzepten der Teilaufgabe A4c zeigt sich sowohl innerhalb der Ergebnis- als auch der Bearbeitungskategorien eine kontinuierliche Abnahme der Anteile. Bezogen auf den Inhalt der Aufgabe lässt sich folgender Schluss formulieren: Je prägnanter die Zeilensumme in Teilaufgabe A4b notiert ist, umso stichhaltiger ist die Begründung in Teilaufgabe A4c formuliert. Unabhängig von einer Lösungsfindung der Zeilensumme durch Weiterführung oder durch Berechnung, liegt hier ein grundlegendes Verständnis für die Zeilenaddition als Aufgabenfolge vor, was die Formulierung einer strukturmathematischen Argumentation positiv beeinflusst. Bestärkt wird diese Annahme durch die Erfahrungen der Interviewstudie, bei der

die Kinder der Kombination Ergebniskonzept 1 mit Bearbeitungskonzept 1 im Gespräch bereits bei Bearbeitung der Teilaufgabe A4b wichtige Aspekte für eine begründete Argumentation der letzten Teilaufgabe anführen.

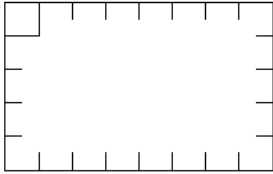
Das diagnostische Potential der vorliegenden Aufgabe „Hundertertafel“ ist aus inhaltlicher Sicht hoch einzuschätzen. Die mit den Teilaufgaben steigende Anforderung wird als gelungen bezeichnet. Die formale und sprachliche Präsentation reduziert das Potential der Aufgabe in der untersuchten Form erheblich. Die Aufgabenbearbeiter werden zu einer voneinander unabhängigen Bearbeitung der einzelnen Teilaufgaben verleitet. Diese Schwäche kann durch einige sprachliche Unterstützungen behoben werden. Für eine Optimierung der Präsentation der Aufgabe spricht ebenso die erwiesene inhaltliche Abhängigkeit der beiden letzten Teilaufgaben. Um eine entwicklungsorientierte Diagnose zu ermöglichen, sind weiterhin die Antwortformate prozessorientiert anzupassen, um Einblicke in die Bearbeitungswege der Kinder zu erhalten.

8 Darstellung der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse A5 „Quadrate in Figur“

Die Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“

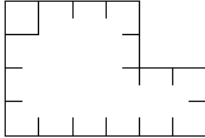
Aufgabe 5
Wie viele kleine Quadrate passen in die Figuren? Schreibe zu jeder Figur eine passende Rechnung und gib das Ergebnis an!

a)



Rechnung: _____
 Quadrate

b)



Rechnung: _____
 Quadrate

Abbildung 12: Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ der Hessischen Orientierungsarbeit 2005.

8.1 Rationale Aufgabenanalyse A5 „Quadrate in Figur“ mit Konstruktion von Bearbeitungsvarianten

8.1.1 Die Analyseperspektiven

Anmerkungen des Hessischen Kultusministeriums⁶⁶

Die vorliegende Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ wird im zugehörigen *Aufgabenkommentar* des Hessischen Kultusministeriums dem inhaltlichen Arbeitsfeld Geometrie zugeordnet. Aufgrund der intendierten Wiedergabe mathematischen Faktenwissens wird sie im reproduktiven Anforderungsbereich angesiedelt. Die Schüler sollen die beiden abgebildeten Figuren gedanklich mit Einheitsquadraten auslegen und die Anzahl der jeweils benötigten Quadrate rechnerisch bestimmen.

Für Teilaufgabe A5a wird die Anzahl von 40 Quadraten als korrekte *Aufgabenlösung* angeführt, für die zweite Teilaufgabe heißt das Ergebnis 20 Quadrate. Es folgen Hinweise zur *Aufgabenbewertung*, laut denen jede inhaltlich richtige Rechnung sowie jedes korrekte Ergebnis mit 0,5 Punkten zu beurteilen ist. Somit ist bei dieser Aufgabe eine maximale Punktesumme von 2 erreichbar. Beispiele für als richtig zu beurteilende Rechnungen werden im offiziellen Aufgabenkommentar nicht angeführt.

Im Rahmen der *Ergebnisdarstellung* ermittelte das Hessische Kultusministerium einen hessenweiten Durchschnitt von 1,33 Punkten, was einem mittleren Lösungsprozentsatz von 67 entspricht. Dieses mittelmäßige Abschneiden der hessischen Grundschüler bei einer

⁶⁶ Die folgenden Darstellungen beruhen auf den offiziellen Ausführungen des Hessischen Kultusministeriums zur ersten hessenweiten Durchführung der Orientierungsarbeiten (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a).

reproduktiv angelegten Aufgabe verwundert und lässt auf die noch folgenden Analysen hoffen.

Weiterhin äußert sich das Kultusministerium zu *Schwierigkeiten und Anforderungen* der Aufgabe A5, indem sie als Grundaufgabe zum Thema Flächeninhalt bezeichnet wird und als „relativ leichte Aufgabe“ (HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 61) anzusehen ist. Die Rückmeldungen der Lehrer zeigen, dass das Aufgabenformat den Schülern vielfach unbekannt ist. Ferner werden geometrische Inhalte noch immer häufig an das Schuljahresende gelegt oder erst gar nicht zum Thema des Unterrichts gemacht. Im Rückblick fällt auf, dass von einem Ausfüllen der Flächen „durch Zeichnen oder in der Vorstellung“ (HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 61) die Rede ist. In den Aufgabenkommentaren scheinen Zeichnungen auf den Aufgabenbögen hingegen unerwünscht und werden in den Ausführungen zur Aufgabenlösung und zur Aufgabenbewertung nicht berücksichtigt.

Zielperspektive Diagnose

Zunächst wird der Frage nachgegangen, ob in Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ eine *Verstehens- oder Verfahrenorientierung* angelegt ist. Das Hessische Kultusministerium betont den reproduktiven Charakter der Aufgabe, wobei es sich damit um eine deutliche Verfahrenorientierung handelt. Der Aufgabenbearbeiter setzt bereits bekannte Fertigkeiten zur Lösung der Aufgabe ein, indem er die abgebildeten Flächen gedanklich mit Einheitsfiguren, hier Einheitsquadraten, ausfüllt. Der Arbeitsauftrag entspricht laut Aufgabenautoren einer Grundaufgabe zum Thema Flächeninhalt. Aufgrund der zu notierenden Rechnung mit Ergebniszahl wird die Aufgabe produktorientiert angesehen.

Was ist jedoch, wenn der Aufgabenbearbeiter noch nicht über die grundlegenden Kenntnisse zum Thema verfügt und somit auch die zugehörigen Aufgabenformate unbekannt sind? In diesem Fall ist die Aufgabe verstehensorientiert ausgerichtet, da der Aufgabenbearbeiter für die Bearbeitung nun vorhandene Fähigkeiten und Fertigkeiten aktivieren muss, um einen Lösungsweg zu generieren. Nicht nur das Ergebnis, sondern auch der Bearbeitungsweg ist bei der Beurteilung dann von Bedeutung, was einer Prozessorientierung entspricht.

Die *inhaltliche Validität* der Aufgabe wird bereits aufgrund der vorherigen Erläuterungen verneint. Wird die Aufgabe als Grundaufgabe zum Thema Flächeninhalt aufgefasst, steht die Erschließung des Flächeninhalts durch das Produkt von Länge und Breite im Vordergrund. Dieses Verständnis soll anhand der formulierten Rechnung transparent werden. Eine Lösung ist in beiden Teilaufgaben jedoch auf vielfältigen Bearbeitungswegen möglich. Diese Optionen werden durch die im Aufgabentext verwendete Formulierung ‘passende Rechnung’ legitimiert. Somit ist die intendierte multiplikative Bearbeitung der Aufgaben nicht deutlich.

Die Notation der Lösung erfolgt in beiden Teilaufgaben durch die Formulierung einer Rechnung und die explizite Eintragung der Ergebniszahl. Raum für weitere Notizen und Vermerke ist nicht vorgesehen, sodass ein *freies geschlossenes Antwortformat* vorliegt.

Die *multiple Lösbarkeit* der Aufgabe ist offensichtlich. Zwar besitzt jede der Teilaufgabe zunächst ein eindeutiges Ergebnis. Neben der nach Aufgabenintention erläuterten multiplikativen Berechnung sind jedoch verschiedene adäquate Bearbeitungswege und Notationen möglich (siehe Abschnitt 8.1.2 und Abschnitt 8.1.3).

Eine *Anregung von Eigenproduktionen* sowie das *Einfordern von Reflexionen* werden jedoch deutlich verneint.

Von besonderer Bedeutung für das diagnostische Potential einer Aufgabe ist die Möglichkeit einer *Fehleranalyse*. In diesem Sinne bietet die Aufgabe einen Abgleich der Ergebniszahl mit der notierten Rechnung. Es wird angenommen, dass die notierten Zahlensätze und Ergebnisse nicht immer einen offensichtlichen Zusammenhang aufweisen (siehe Formale Perspektive). Im Ansatz ist die Denkweise des Schülers bei der Bearbeitung der Aufgabe anhand des Vergleichs von Zahlensatz und Ergebnis jedoch nachvollziehbar.

Zielperspektive Leistungserhebung

Wie bereits in Abschnitt 4.5.3 erläutert, werden die testtheoretischen Gütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität in der hessischen Orientierungsarbeit 2005 nicht eingehalten. Ebenso ist aufgrund fehlender Vergleichsdaten keine soziale Normierung möglich (siehe ebd.).

Aussagen bezüglich des *Itemuniversums*, also der Einschätzung des Antwortverhaltens auf ähnliche Aufgabenstellungen, lassen sich formulieren. Das gezeigte Antwortverhalten bei dieser Aufgabe ist auf ähnliche Grundaufgaben der Flächenberechnung übertragbar. Konkret sollte es sich dann ebenfalls um das Auslegen einer vorgegebenen, gerade begrenzten und rechtwinkligen Fläche mit Einheitsquadraten handeln. Ändert sich die Form der Einheitsfiguren oder die auszulegende Figur, ist das Antwortverhalten nicht mehr abzuleiten.

Zur Analyse der *Position und möglicher Effekte* wird angemerkt, dass es sich um die fünfte Aufgabe der Leistungserhebung handelt. Sie ist im oberen Bereich der dritten Seite abgebildet. Ebenfalls auf dieser Seite befindet sich Aufgabe A6 „Einkaufen“, die dem inhaltlichen Arbeitsbereich Größen und Sachrechnen sowie dem Anforderungsbereich Verknüpfung zugeordnet ist.

Weiterführend wird sich der Frage nach *Reihenfolgeeffekten* gewidmet. Da es sich bei der vorherigen Aufgabe A4 „Hundertertafel“ um einen anderen Inhaltsbereich handelt und weiterhin Antwortformat sowie Aufgabenstamm differieren, ist eine Wirkung der vorherigen Aufgabe auf die Bearbeitung nicht zu erwarten. Weiterhin sind beide Aufgaben auf

verschiedenen Seiten der Leistungserhebung abgebildet. Auch zur nachfolgenden Aufgabe A6 „Einkaufen“ weichen Inhaltsbereich, Antwortformat und Aufgabenstamm ab, sodass ebenfalls nicht von einer Wirkung dieser Bearbeitung auf die nachfolgende Aufgabe ausgegangen wird.

Die *sprachliche Formulierung* des Aufgabentextes lässt kaum Schwierigkeiten bei der Bearbeitung der Aufgabe erwarten. Lediglich die verwendeten Begriffe ‘Quadrate’ und ‘Figur’ können aufgrund ihrer Unkenntnis oder der bisherigen Verwendung zu Irritationen führen (siehe Kognitive Perspektive).

Der klar formulierte Arbeitsauftrag sowie der Aufgabenstamm (siehe Formale und Kognitive Perspektive) verdeutlichen die Forderung nach der Notation einer Ergebniszahl mit Rechnung, sodass die *Erwartungstransparenz* zunächst bejaht wird. Undeutlich ist jedoch der geforderte Bearbeitungsweg als Grundaufgabe zum Thema Flächeninhalt. Hinsichtlich der Notation ist nicht offensichtlich, ob die Fixierung der Ergebniszahl in dem Textfeld ausreicht oder zusätzlich als Ergebnis der Rechnung notiert werden soll. Ferner stellt sich die Frage, ob bei der Ergebnisnotation im Zahlensatz eine zusätzliche Eintragung in das Textfeld notwendig ist.

Eine *Ergebnisrelation* ist bei Aufgabe A5 durchaus vorhanden. Im Gesamtkonstrukt der Orientierungsarbeit sind sowohl die Bearbeitungszeit für diese Aufgabe als auch die erhaltenen Antworten angemessen. Die Überlegungen des Schülers finden sich in der Notation der Rechnung mit Ergebniszahl wieder. Auch wenn die Bewertungsvorgaben des Hessischen Kultusministeriums zu diskutieren sind, wird die differenzierte Beurteilung beider Komponenten (siehe Anmerkungen des Hessischen Kultusministeriums) positiv angemerkt.

Wie bereits erläutert, ist die angestrebte *Verfahrensorientierung* der Aufgabe nicht eindeutig. Aufgrund der undeutlichen und missverständlichen Aufgabenstellung sowie den individuellen Vorkenntnissen des Schülers kann sich die Aufgabe unversehens zu einer versterorientierten Aufgabe wandeln.

Formale Perspektive

Aufgabe A5 gliedert sich in zwei *Teilaufgaben*, welche durch die Aufzählungszeichen a) und b) gekennzeichnet sind. Die Bearbeitungen beider Aufgabenteile erfolgen unabhängig voneinander, auch wird jede Teilaufgabe separat bewertet.

Im *Aufgabenstamm* sind die Komponenten Text, Grafik und weitere Angaben zu finden. Es werden zwei Sätze verwendet, wobei es sich um eine Frage (*Wie viele kleine Quadrate passen in die Figur?*) und eine konkrete Aufforderung (*Schreibe zu jeder Figur eine passende Rechnung und gib das Ergebnis an!*) handelt. Als Grafik werden die beiden nebeneinander abgebildeten Figuren bezeichnet, deren Flächeninhalt durch das gedankliche Aus-

legen mit den Einheitsquadraten ermittelt werden soll. Die Kennzeichnung der Teilaufgaben befindet sich jeweils links von der Figur. Bei Teilaufgabe A5a handelt es sich um ein Rechteck der Länge 8 und der Breite 5, das im Folgenden 8x5-Rechteck genannt wird. Die Figur zu Teilaufgabe A5b wird als 6x4-Rechteck mit 2x2-Ausschnitt bezeichnet. In der linken oberen Ecke der Figuren ist jeweils ein Einheitsquadrat abgebildet. Zusätzlich werden an den inneren Seiten beider Figuren die äußeren Einheitsquadrate mit Strichen ange deutet. Werden die abgebildeten Einheitsquadrate einbezogen, lassen sich bei Teilaufgabe A5a 22 solcher Striche, bei der zweiten Teilaufgabe 16 Striche ausmachen. Zusätzlich sind weitere Angaben im Aufgabenstamm vorhanden. So ist unterhalb der Grafiken jeweils die Angabe 'Rechnung' zu finden, hinter der eine Notationslinie gedruckt ist. Unterhalb dieser Anordnung ist das bereits erwähnte Textfeld zur Eintragung der Ergebniszahl zu finden, neben dem das Wort 'Quadrate' vermerkt ist.

In Anlehnung an die in der Literatur angeführten *Antwortformate* handelt es um ein freies geschlossenes Antwortformat. Der Aufgabenbearbeiter formuliert und notiert eigenständig eine Rechnung mit zugehöriger Ergebniszahl. Diese wird in den hierfür vorbereiteten Aufgabenstamm, das Textfeld und die Notationslinie, eingetragen.

Inhaltliche Perspektive

Bezüge zum hessischen *Rahmenplan Grundschule* sind deutlich aufzuzeigen. Die vorliegende Aufgabe ordnet sich nach ihrer Intention dem Arbeitsbereich Geometrie zu. Einer der sechs inhaltlichen Bereiche wird explizit mit Fläche und Umfang von Figuren überschrieben. Zu den hier formulierten Zielen gehören das Legen zunehmend komplexerer geometrischer Figuren mit Stäbchen sowie das Auslegen mit Formenplättchen. Für die Arbeit im dritten und vierten Schuljahr wird ergänzt, dass die Kinder nun im Vorfeld die Anzahl der zum Auslegen benötigten Quadrate oder Dreiecke bestimmen können sollten. Bezüglich der analysierten Aufgabe ist auffällig, dass die im Rahmenplan festgeschriebenen Ziele stets mit konkreten Handlungen verbunden sind. Diese enaktive Ebene kann im Konstrukt einer schriftlichen Leistungserhebung nicht berücksichtigt werden.

Auch zu den für das Ende der Grundschulzeit formulierten Kompetenzen der länderübergreifenden *Bildungsstandards Mathematik für die Primarstufe* lassen sich konkrete Bezüge herstellen. Dies geschieht jedoch lediglich in der Kategorie der inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen, da die Aufgabe keine der fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen direkt anspricht. Inhaltlich siedelt sich Aufgabe A5 in der Kategorie Raum und Form an, in welcher der Vergleich und das Messen von Flächen- sowie Rauminhalten aufgeführt sind. Weiterhin ist konkret das gedankliche Auslegen von Figuren mit einer gegebenen Einheitsfläche formuliert.

Im Sinne einer *Sachanalyse* wird angemerkt, dass bei Verwendung des Begriffs Fläche in Zusammenhang mit Aufgabe A5 stets der Flächeninhalt gemeint ist. Der Gebrauch dieser Kurzform ist in der Fachliteratur üblich. Der Flächeninhalt gilt in der Geometrie als ein

Maß für die Größe einer Fläche. Als Fläche wird ein zweidimensionaler, demnach flacher Gegenstand definiert, der eben oder gekrümmt sein kann. Eine Fläche kann einen dreidimensionalen Körper begrenzen, aber nicht füllen. Eine Reihe von Formeln ermöglicht es, den Flächeninhalt verschiedenster geometrischer Figuren anzugeben und zu berechnen. Dabei wird in der Mathematik und der Physik üblicherweise der Großbuchstabe A als Formelzeichen verwendet. Dieser leitet sich vom lateinischen Wort *area* ab, welches Grundfläche bedeutet.

Bei der Bestimmung des *schuljahrbezogenen Niveaus* fällt erneut auf, dass die Aufgabenintention im Unterricht der Klassen 3 und 4 stets mit konkreten Handlungen gekoppelt wird. Damit wird den offiziellen Ausführungen zu dieser Aufgabe widersprochen (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005, S. 49), da eine Bearbeitung ausschließlich auf symbolischer Ebene stattfindet. Die ikonische Ebene der Grafik dient zunächst der Veranschaulichung. Zeichnungen, die einer Lösungsfindung durchaus dienlich sein können, scheinen laut dem offiziellen Aufgabenkommentar nicht erwünscht. Bereits angeführt wird die plötzliche Erwähnung einer zeichnerischen Lösung in den rückblickenden Kommentaren. Während die Schüler bereits in den ersten beiden Schuljahren Erfahrungen mit dem konkreten Auslegen von Formen mit Einheitsfiguren sammeln, ist die vorherige Bestimmung der benötigten Anzahl ab, jedoch nicht zwingend in der dritten Klasse vorgesehen. Es ist demnach nicht davon auszugehen, dass derartige Aufgabenstellungen und damit einhergehende Aufgabenformate den Schülern Mitte der dritten Klasse bekannt sind.

Der *Kontext* der Aufgabe ist innermathematisch.

Kognitive Perspektive

Eine Untersuchung der *sprachlogischen Komplexität* zeigt, dass die Reihenfolge der Sätze und ihrer Satzteile der Reihenfolge der Bearbeitungsschritte entspricht. Ein gedankliches Sortieren der Information zum Verständnis der Aufgabe ist somit nicht nötig. Frage und Aufforderung sind Hauptsätze, wobei eine Verknüpfung mit der Konjunktion ‘und’ verwendet wird. Der Aufgabenstamm enthält keine irrelevanten Informationen. Die sprachlogische Komplexität der Aufgabe A5 wird insgesamt als gering eingeschätzt.

Im Rahmen der *kognitiven Komplexität* wird die Organisation der Denkvorgänge durchdacht. An dieser Stelle erfolgt eine differenzierte Betrachtung der beiden Teilaufgaben. Unabhängig vom Bearbeitungsweg sind zur Ergebnisfindung in Teilaufgabe A5a mehrere Denkvorgänge nötig. Je nach Bearbeitungsweg erhöht sich jedoch Anzahl sowie Komplexität der einzelnen Denkvorgänge. Ergebnisse vorheriger Denkvorgänge, beispielsweise die Bestimmung der Seitenlängen der Figuren, müssen genutzt werden. Somit ist eine Verarbeitung mehrerer Informationen bei einem Denkschritt durchaus erforderlich. Das eingezeichnete Einheitsquadrat sowie die angedeuteten Randquadrate bieten eine Wahrnehmungsunterstützung und sollen demnach eine Hilfe darstellen. Ist dem Aufgabenbearbeiter die Grundidee des Flächeninhaltes oder das Aufgabenformat bereits bekannt, kann die

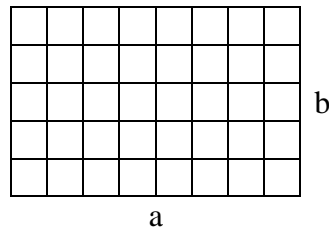
Aufgabe durch das Abarbeiten eines vorhandenen Denkschemas gelöst werden. Die Aussagen sind auch für Teilaufgabe A5b zutreffend. Jedoch erhöhen sich aufgrund der komplexeren geometrischen Figur sowohl Anzahl als auch Anspruch der Denkvorgänge. Die Anzahl der benötigten Einheitsquadrate ermittelt sich hier erst nach dem gedanklichen Zusammensetzen zweier Quadrate beziehungsweise Rechtecke oder dem Abspalten eines Quadrates von einem Rechteck (siehe Abschnitt 8.1.3).

Je nach Vorkenntnissen und Erfahrungen des Schülers lassen sich sämtliche drei *Anforderungsbereiche* in dieser Aufgabe wiederfinden. Reproduktiv ist die Aufgabe einzuordnen, wenn die Grundidee des Flächeninhaltes, also eine Multiplikation der Seiten a und b , sowie die präsentierten Aufgabenformate bekannt sind. Dies sollte auf jeden Fall für Figur A5a, jedoch prinzipiell auch für die komplexere Figur A5b gelten. Der Anspruch der Aufgabenstellung ändert sich, wenn das Aufgabenformat A5a und somit die zuvor beschriebene Bearbeitungsvariante geläufig, jedoch das Aufgabenformat A5b unbekannt ist. Es handelt sich dann um eine Aufgabe im Anforderungsbereich Verknüpfung. Bereits bekannte Fähigkeiten und Fertigkeiten werden für die Bearbeitung der ersten Teilaufgabe angewendet und für das weitere Vorgehen in Teilaufgabe A5b modifiziert. Zusammenhänge zwischen den beiden Figuren der Teilaufgaben werden hergestellt und können genutzt werden. Die Analyse der inhaltlichen Bezüge sowie die Ausführungen zum schuljahrbezogenen Niveau verdeutlichen, dass den Drittklässlern sowohl Aufgabenformat als auch inhaltliche Intention der Aufgabe gänzlich unbekannt sein können. Die Aufgabe entspricht dann dem Anforderungsbereich der Reflexion und Verallgemeinerung, was die Anforderung des Problemlösens impliziert. Allgemeingültige Aussagen hinsichtlich des Anforderungsbereichs erweisen sich somit besonders bei dieser Aufgabe als schwierig. Festgehalten wird eine grundlegend höhere Anforderung der zweiten Teilaufgabe infolge ihrer komplexeren Figur. Diese Feststellungen erklären die für das Hessische Kultusministerium überraschend mittelmäßigen Ergebnisse zu der Aufgabe.

Welche theoretischen Bearbeitungsvarianten sind nun auf Grundlage der Rationalen Aufgabenanalyse anzuführen?

Die beiden Teilaufgaben der Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ erfordern eine getrennte Konstruktion möglicher Bearbeitungsvarianten. Zunächst folgt die Darstellung der theoretischen Bearbeitungsvarianten zu Teilaufgabe A5a, bei welcher es sich um die Figur eines 8×5 -Rechtecks handelt. Anschließend steht die Figur aus Teilaufgabe A5b, das 6×4 -Rechteck mit 2×2 -Ausschnitt, im Fokus der Untersuchung.

8.1.2 Bearbeitungsvarianten Teilaufgabe A5a



In der ersten Teilaufgabe sind drei Bearbeitungskonzepte denkbar, die sich wiederum in diverse Bearbeitungsvarianten gliedern lassen. Nachfolgend sind Erläuterungen zu den drei Bearbeitungskonzepten **Fläche**, **Umfang** und **Zählen** sowie ihren zugehörigen Bearbeitungsvarianten formuliert. Wie der Zeichnung zu entnehmen ist, wird für die Seitenlänge von acht Quadraten die Bezeichnung a verwendet, die Seitenlänge von fünf Quadraten erhält die Bezeichnung b.

Entsprechend der Aufgabenintention wird im Rahmen des **Bearbeitungskonzeptes Fläche** das Rechteck als Fläche gedeutet und die Anzahl der auszufüllenden Einheitsquadrate wird rechnerisch bestimmt. Innerhalb des Bearbeitungskonzeptes kann die Anzahl der Quadrate sowohl mithilfe multiplikativer als auch additiver Rechnungen ermittelt werden. Bei beiden Optionen können Denk- oder Rechenfehler für nicht korrekte Ergebnisse verantwortlich sein.

1. Multiplikation Seiten, $a * b, 8 * 5 = 40$

Der Aufgabenbearbeiter löst die Aufgabe im Sinne ihrer Intention: Der Grundgedanke des Flächeninhalts als Multiplikation der Seitenlängen a und b wird auf die vorliegende Figur übertragen. Als Multiplikator fungiert die Grundseite des Rechtecks (8 Quadrate), als Multiplikand wird entsprechend die kürzere Seitenlänge (5 Quadrate) verwendet.

2. Multiplikation Seiten, $b * a, 5 * 8 = 40$

Der zuvor beschriebene Gedanke ist ebenso anhand der Tauschaufgabe fixierbar. Hier wird nun der Multiplikator durch die kürzere Seitenlänge ausgedrückt (5 Quadrate) und die Grundseite wird als Multiplikand angefügt (8 Quadrate). Bei beiden Bearbeitungsvarianten gelangt der Aufgabenlöser zu dem korrekten Ergebnis 40 Quadrate.

3. Multiplikation Seiten, $a * b, 8 * 5 \neq 40$, Rechenfehler

4. Multiplikation Seiten, $b * a, 5 * 8 \neq 40$, Rechenfehler

Der Aufgabenbearbeiter hat die zuvor beschriebenen Bearbeitungswege gewählt. Die Multiplikation wird jedoch nicht korrekt ausgeführt, was zu einem falschen Ergebnis führt.

5. Multiplikation Seiten, $a_{+/-n} * b_{+/-n}, x*y \neq 40$ (Rechenfehler)⁶⁷

6. Multiplikation Seiten, $b_{+/-n} * a_{+/-n}, y*x \neq 40$ (Rechenfehler)

Die Grundidee der Multiplikation wird auch hier angewendet, wobei die Seitenlängen jedoch fehlerhaft bestimmt werden. So können einer oder sogar beiden Seitenlängen falsche Maße zugeordnet werden. Ergänzend sind Rechenfehler bei der Ergebnisbestimmung denkbar.

7. Fortgesetzte Addition, Summand Seite a, $8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$

Auch in additiven Rechnungen kann das Bearbeitungskonzept Fläche deutlich werden. Durch die zeilenweise Aneinanderreihung der Seitenlängen (8 Quadrate) bis hin zur Gesamtfigur gelangt der Aufgabenbearbeiter durch eine fünffach fortgesetzte Addition zum korrekten Ergebnis 40 Quadrate.

8. Fortgesetzte Addition, Summand Seite b, $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40$

Vollzieht der Aufgabenbearbeiter diese Aneinanderreihung spaltenweise (5 Quadrate), führt eine achtfach fortgesetzte Addition zum richtigen Ergebnis.

9. Fortgesetzte Addition, Summand Seite a, $8 + 8 + 8 + 8 + 8 \neq 40$, Rechenfehler

10. Fortgesetzte Addition, Summand Seite b, $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 \neq 40$, Rechenfehler

Auch bei Anwendung der fortgesetzten Addition, sowohl bei spalten- als auch bei zeilenweiser Ausführung, sind Rechenfehler möglich.

11. Fortgesetzte Addition, Summand Seite, $8 + 8 + 8 + \dots + 8 \neq 40$

12. Fortgesetzte Addition, Summand Seite, $5 + 5 + 5 + \dots + 5 \neq 40$

Eine weitere Bearbeitungsvariante ist die Ausführung einer fortgesetzten Addition, bei welcher der Summand zwar korrekt gewählt, jedoch die Fortführung nicht ausreichend oder überzählig ausgeführt wird.

13. Fortgesetzte Addition, Summand Seite $a_{+/-n}, x + \dots + x \neq 40$, (Rechenfehler)

14. Fortgesetzte Addition, Summand Seite $b_{+/-n}, y + \dots + y \neq 40$, (Rechenfehler)

Ebenso ist die zeilen- oder spaltenweise Zusammensetzung der Fläche mit nicht korrekter Seitenlänge möglich. In diesem Fall lässt sich der Summand der fortgesetzten Addition als $8_{+/-n}$ oder $5_{+/-n}$ beschreiben. Darüber hinaus kann dieser fehlerhafte Summand zusätzlich in falscher Anzahl verwendet werden.

Die Rationale Aufgabenanalyse der Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ zeigt auf, dass im Falle der fehlenden Kenntnis der Grundidee zum Flächeninhalt nicht von einer reproduktiven Bearbeitung der Aufgabe auszugehen ist. Ferner verleitet der Aufgabenstamm durch die angedeuteten Randquadrate zu einer Fokussierung des Umfangs anstatt des Flächeninhaltes. Da Mitte des dritten Schuljahres ebenfalls von fehlenden Erfahrungen mit Umfangberechnungen auszugehen ist, sind auch hier diverse Bearbeitungsvarianten anzuführen.

⁶⁷ Der Zusatz Rechenfehler in Klammern meint die Eibeziehung fehlerhafter Berechnungen über die beschriebene Bearbeitungsvariante hinaus.

Diese führen im Hinblick auf die intendierte Aufgabenstellung allesamt zu einem fehlerhaften Ergebnis. Eine Interpretation der in der Grafik angedeuteten Quadrate als Längen führt zu der Ergebniszahl 26. Diese wird als korrekter Umfang der rechteckigen Figur angesehen. Auch im **Bearbeitungskonzept Umfang** werden additive (Seiten werden einzeln verwendet) und multiplikative (Seiten werden zusammengefasst verwendet) Rechnungsnotationen unterschieden. Die Reihenfolge der Summanden erfolgt in den Erläuterungen als prototypische Notation und wird aufgrund des geltenden Kommutativgesetzes nicht als absolut verstanden.

15. Seiten einzeln, $a + a + b + b, 8 + 8 + 5 + 5 = 26 \neq 40$

Der Aufgabenbearbeiter setzt den Umfang mittels einer Addition der vier Seitenlängen zusammen. Diese Rechnung führt zu einem Umfang von 26 Quadraten.

16. Seiten einzeln, $a + a + b + b, 8 + 8 + 5 + 5 \neq 26 \neq 40$, Rechenfehler

Auch bei Formulierung einer korrekten Rechnung können bei oben angeführter Bearbeitungsvariante Rechenfehler auftreten.

17. Seiten einzeln, $a_{+/-n} + a_{+/-n} + b_{+/-n} + b_{+/-n}, x + x + y + y \neq 26 \neq 40$ (Rechenfehler)

Wird ein falsches Seitenmaß a und/oder b verwendet, führt das nicht nur zu einem prinzipiell falschen Ergebnis, sondern ebenfalls zu einem fehlerhaften Umfang. Auch an dieser Stelle sind Rechenfehler möglich.

18. Seiten einzeln, $a + \dots + b + \dots, 8 + \dots + 5 + \dots \neq 26 \neq 40$ (Rechenfehler)

Bei der Zusammensetzung des Umfangs werden einzelne Seiten außer Acht gelassen oder mehrfach bedacht.

19. Seiten zusammengefasst, $2*a + 2*b, 2*8 + 2*5 = 26 \neq 40$

Der Aufgabenbearbeiter ermittelt den korrekten Umfang von 26 Quadraten, indem er jeweils beide Seitenlängen a und b mit dem Faktor 2 multipliziert und die erhaltenen Teilergebnisse addiert.

20. Seiten zusammengefasst, $2*a + 2*b, 2*8 + 2*5 \neq 26 \neq 40$, Rechenfehler

Das Konzept Umfang wird wie zuvor erläutert umgesetzt, ein Rechenfehler verhindert jedoch das Ergebnis 26 Quadrate.

21. Seiten zusammengefasst, $2*a_{+/-n} + 2*b_{+/-n}, 2*x + 2*y \neq 26 \neq 40$ (Rechenfehler)

Auch beim Bearbeitungskonzept Umfang kann eine Verwendung fehlerhafter Seitenlängen a und/oder b zu einem nicht korrekten Ergebnis führen. Hinzu kann eine fehlerhafte Berechnung des aufgestellten Zahlersatzes kommen.

22. Seiten zusammengefasst, $2_{+/-n} * a + 2_{+/-n} * b, s*a + t*b \neq 26 \neq 40$ (Rechenfehler)

Bei der multiplikativen Notation ist es denkbar, dass der Aufgabenbearbeiter die Anzahl der Seitenlängen fehlerhaft in seine Rechnung aufnimmt. Erneut sind zusätzliche Rechenfehler möglich.

Das dritte **Bearbeitungskonzept Zählen** fasst die Ergebnisermittlung durch Auszählen der zum Füllen des Rechtecks benötigten Einheitsquadrate. Es wird prinzipiell zwischen zwei Bearbeitungsvarianten entschieden. Der Aspekt des Zeichnens in die abgebildete Figur ist hier von besonderem Interesse, da das Auszählen auf diese Weise erheblich vereinfacht werden kann. Eindeutige Aussagen hierzu können jedoch erst nach der Empirischen Aufgabenanalyse formuliert werden (siehe Abschnitt 8.5).

23. Auszählen ohne Zählfehler = 40

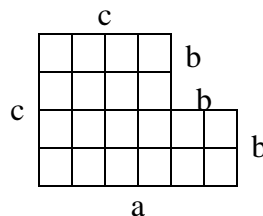
Der Aufgabenbearbeiter ermittelt durch das Auszählen sowohl der sichtbaren als auch der vorzustellenden Quadrate die korrekte Anzahl 40.

24. Auszählen mit Zählfehler $\neq 40$

Bei der Ermittlung der Anzahl verzählt sich der Aufgabenbearbeiter. Denkbar ist an dieser Stelle der in der Literatur für Zählstrategien so oft beschriebene +/-1-Fehler, also ein Abweichen des tatsächlichen Ergebnisses um 1 (vgl. bspw. PADBERG 2005, S. 85f).

Ein tabellarischer Überblick der theoretisch konstruierten Bearbeitungsvarianten zu Teilaufgabe A5a befindet sich im Anhang der Arbeit.

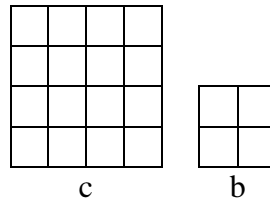
8.1.3 Bearbeitungsvarianten Teilaufgabe A5b



Als Konsequenz der Rationalen Aufgabenanalyse lassen sich zu dieser Teilaufgabe vier unterschiedliche Bearbeitungskonzepte beschreiben. Die Bearbeitungsvarianten der Konzepte **Zusammensetzen**, **Abspalten**, **Umfang** und **Zählen** sind aufgrund der Komplexität der abgebildeten Figur weitaus diffiziler als noch in Teilaufgabe A5a. Entsprechend der obigen Abbildung wird in den folgenden Ausführungen die Seitenlänge von sechs Quadraten a , die mehrmals vorhandene Seitenlänge von zwei Quadraten b genannt. Die dritte Größe c beschreibt eine Seitenlänge von vier Quadraten.

Die Grundidee des Flächeninhalts wird bei der Konstruktion von möglichen Bearbeitungsvarianten zu Teilaufgabe A5b nochmals anhand zweier Konzepte differenziert, um die Unterschiede in den Bearbeitungswegen deutlich hervorzuheben. So beschreibt das **Bearbeitungskonzept Fläche-Zusammensetzen** ein Vorgehen, bei dem die Figur gedanklich zunächst in zwei kleinere Teilfiguren zerlegt wird. Die Fläche als Anzahl auszufüllender Quadrate wird für beide Teilfiguren ermittelt. Die Summe der Teilergebnisse spiegelt das gedankliche Zusammensetzen beider Teile wider und liefert das Ergebnis der Aufgabe.

Eine Zerlegung der Figur ist vielfältig möglich. Das *vertikale Zusammensetzen* beschreibt eine Trennung der Figur in zwei Quadrate. Das größere der beiden Quadrate besitzt die Seitenlänge c , das kleinere die Seitenlänge b .



1. großes Quadrat + kleines Quadrat, $c*c + b*b$, $4*4 + 2*2 = 20$

Die gedankliche Zerlegung der Figur gelingt. Auch die Multiplikationen werden korrekt ausgeführt, sodass die Summe der beiden Teilergebnisse zur gesuchten Lösung 20 Quadrate führt.

2. kleines Quadrat + großes Quadrat, $b*b + c*c$, $2*2 + 4*4 = 20$

Der Grundgedanke der Zerlegung in zwei Quadrate kann sich ebenso in der Notation der Tauschaufgabe manifestieren. Auch in diesem Beispiel gelingen sowohl die Ermittlung der beiden Produkte als auch die Summenbildung.

3. großes Quadrat + kleines Quadrat, $c*c + b*b$, $4*4 + 2*2 \neq 20$, Rechenfehler

4. kleines Quadrat + großes Quadrat, $b*b + c*c$, $2*2 + 4*4 \neq 20$, Rechenfehler

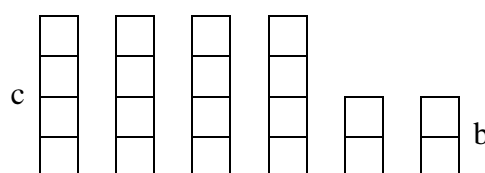
Setzt der Aufgabenbearbeiter seine Überlegungen korrekt um, können dennoch Rechenfehler zu einem falschen Ergebnis führen. Das ist auf eine fehlerhafte Multiplikation oder eine nicht korrekte Addition der Teilergebnisse zurückzuführen. Ob der Fehler in einer oder beiden Multiplikationen, der Summenbildung oder sogar in verschiedenen Rechnungen vorliegt, wird hier nicht unterschieden.

5. großes Quadrat + kleines Quadrat, $c_{+/-n} * c_{+/-n} + b_{+/-n} * b_{+/-n}$, $x+x+y+y \neq 20$ (Rechenfehler)

6. kleines Quadrat + großes Quadrat, $b_{+/-n} * b_{+/-n} + c_{+/-n} * c_{+/-n}$, $y+y+x+x \neq 20$ (Rechenfehler)

Gelingt die Zerlegung der Figur in zwei Quadrate, wird jedoch mit falschen Seitenlängen gerechnet, führt auch dieser Fehler nicht zum korrekten Ergebnis. Bei dieser Variante ist es denkbar, dass eine oder auch beide Seitenlängen fehlerhaft ermittelt werden. Rechenfehler sind zusätzlich möglich.

Ein vertikales Zusammensetzen ist ebenfalls durch das spaltenweise Zusammenfügen der Reihen in der Figur möglich. Eine differenzierte Betrachtung führt zu der Konstruktion verschiedener Bearbeitungsvarianten.



7. spaltenweise vertikal, $c + c + c + c + b + b, 4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 = 20$

Der Aufgabenbearbeiter fügt die Figur spaltenweise zusammen. Dabei werden die korrekten Seitenlängen c und b verwendet. Ebenso arbeitet er mit der richtigen Spaltenanzahl, die ebenfalls die Zahl der Summanden bestimmt. Er erhält das korrekte Ergebnis 20 Quadrate.

8. spaltenweise vertikal, $c + c + c + c + b + b, 4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 \neq 20$, Rechenfehler

Aufgrund eines Rechenfehlers ermittelt der Aufgabenbearbeiter trotz Verwendung der korrekten Seitenlängen und der richtigen Anzahl von Summanden ein falsches Ergebnis.

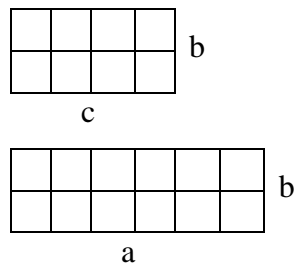
9. spaltenweise vertikal, $c + \dots + b + \dots, 4 + \dots + 2 + \dots \neq 20$ (Rechenfehler)

Verwendet der Aufgabenbearbeiter die korrekten Seitenlängen, aber nicht die richtige Spaltenanzahl, differiert das Ergebnis von der gesuchten Zahl 20. Ergänzend sind jederzeit Rechenfehler möglich.

10. spaltenweise vertikal, $c_{+/-n} + c_{+/-n} + c_{+/-n} + c_{+/-n} + b_{+/-n} + b_{+/-n}, x+x+x+x+y+y \neq 20$ (Rechenfehler)

Die Idee des spaltenweisen Zusammensetzens wird mit einer oder beiden falschen Seitenlängen umgesetzt, sodass auch hier kein korrektes Ergebnis ermittelt werden kann. Zusätzlich wird mit einer falschen Anzahl Summanden hantiert und es können Rechenfehler auftreten.

In der Subkategorie *horizontales Zusammensetzen* wird die Figur der Teilaufgabe durch eine horizontale Trennung in zwei Rechtecke zerlegt. Das kleinere der beiden Rechtecke besitzt die Seitenlängen c und b , das Größere die Seitenlängen a und b .



11. kleines Rechteck + großes Rechteck, $c*b + a*b, 4*2 + 6*2 = 20$

Der Aufgabenbearbeiter vollzieht die gedankliche Zerlegung korrekt. Ebenso werden die beiden Multiplikationen zur Ermittlung der Teilflächen richtig durchgeführt und auch die abschließende Addition der Teilergebnisse gelingt.

12. großes Rechteck + kleines Rechteck, $a*b + c*b, 6*2 + 4*2 = 20$

Auch hier ist es möglich, dass sich die zuvor beschriebenen Denk- und Rechenwege anhand der Notation der Tauschaufgabe präsentieren und so das korrekte Ergebnis 20 Quadrate ermittelt wird.

13. kleines Rechteck + großes Rechteck, $c*b + a*b, 4*2 + 6*2 \neq 20$, Rechenfehler

14. großes Rechteck + kleines Rechteck, $a*b + c*b, 6*2 + 4*2 \neq 20$, Rechenfehler

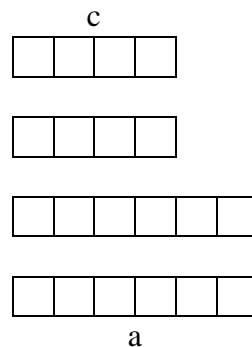
Auch wenn der Aufgabenbearbeiter einen korrekten Denkweg einschlägt, kann er aufgrund diverser Rechenfehler dennoch ein falsches Ergebnis erhalten. So wird mindestens eine der Multiplikationen fehlerhaft durchgeführt. Auch bei Addition der Teilergebnisse sind Rechenfehler ebenso möglich wie eine Kombination sämtlicher Fehlervarianten.

15. kleines Rechteck + großes Rechteck, $c_{+/-n} * b_{+/-n} + a_{+/-n} * b_{+/-n}, z*y + x*y \neq 20$ (Rechenfehler)

16. großes Rechteck + kleines Rechteck, $a_{+/-n} * b_{+/-n} + c_{+/-n} * b_{+/-n}, x*y + z*y \neq 20$ (Rechenfehler)

Die Zerlegung in zwei Rechtecke gelingt. Allerdings werden die Rechnungen mit falschen Seitenlängen ausgeführt, wodurch das korrekte Ergebnis 20 Quadrate verhindert wird. Zusätzlich sind Rechenfehler möglich.

Die Subkategorie horizontales Zusammensetzen impliziert nicht nur das Zusammenfügen zweier Teilfiguren, sondern auch das zeilenweise Zusammensetzen der Reihen zu der in Teilaufgabe A5b präsentierten Figur.



17. zeilenweise horizontal, $a + a + c + c, 6 + 6 + 4 + 4 = 20$

Der Aufgabenbearbeiter fügt die vier Zeilen gedanklich korrekt aneinander und formuliert eine entsprechende Rechnung. Dabei werden jeweils die richtigen Seitenlängen verwendet sowie die erwünschte Summe 20 Quadrate ermittelt.

18. zeilenweise horizontal, $a + a + c + c, 6 + 6 + 4 + 4 \neq 20$, Rechenfehler

Bei Addition der vier Zeilen als Seitenlängen der Figur verrechnet sich der Aufgabenbearbeiter und ein fehlerhaftes Ergebnis kommt zustande.

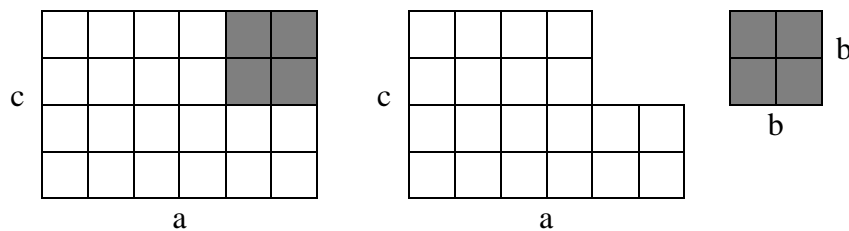
19. zeilenweise horizontal, $a + \dots + c, 6 + \dots + 4 + \dots \neq 20$ (Rechenfehler)

Die Grundidee des Zusammensetzens wird berücksichtigt, wobei allerdings nicht die richtigen Zeilenanzahlen verwendet werden. Unabhängig von einer korrekten Addition der Seitenlängen oder einem Rechenfehler, ergibt sich ein fehlerhaftes Ergebnis.

20. zeilenweise horizontal, $a_{+/-n} + a_{+/-n} \cdot c_{+/-n} + c_{+/-n}$, $x + x + z + z \neq 20$ (Rechenfehler)

Die Umsetzung der Idee des Zusammenfügens geschieht hier mit falschen Seitenlängen. Zudem können Rechenfehler oder eine fehlerhafte Zeilenanzahl hinzu kommen.

Ein grundlegend anderer Gedanke liegt dem **Bearbeitungskonzept Fläche-Abspalten** zugrunde. Die in Teilaufgabe A5b präsentierte Figur wird hier als Teilfigur eines imaginären Rechtecks mit den Seitenlängen sechs Quadrate und vier Quadrate interpretiert, im folgenden a und c benannt. Von dieser Ausgangsfigur wird ein Quadrat der Seitenlänge 2 an der oberen rechten Ecke abgespalten. Seine Seitenlänge wird mit der Bezeichnung b versehen.



21. Rechteck, kleines Quadrat abspalten, $a \cdot c - b \cdot b$, $6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 20$

Der Aufgabenbearbeiter stellt sich das Rechteck gedanklich vor und ermittelt anhand der Multiplikation beider Seitenlängen dessen Flächeninhalt. Auch die Fläche des abzuspaltenden Quadrates wird korrekt bedacht, berechnet und entsprechend subtrahiert.

22. Rechteck, kleines Quadrat abspalten, $a \cdot c - b \cdot b$, $6 \cdot 4 - 2 \cdot 2 \neq 20$, Rechenfehler

Der zuvor beschriebene Bearbeitungsweg wird richtig umgesetzt, es schleichen sich jedoch Rechenfehler ein. So kann die Berechnung des Flächeninhalts des Rechtecks fehlerhaft sein oder der Flächeninhalt des abzuspaltenden Quadrats wird nicht korrekt ermittelt. Auch sind Rechenfehler bei der abschließenden Subtraktion nicht auszuschließen.

23. Rechteck, kleines Quadrat abspalten, $a_{+/-n} \cdot c_{+/-n} - b_{+/-n} \cdot b_{+/-n}$, $x \cdot z - y \cdot y \neq 20$ (Rechenfehler)

Ebenso wie bei den Bearbeitungsvarianten der vorherigen Bearbeitungskonzepte kann es geschehen, dass der Aufgabenbearbeiter die erforderlichen Rechnungen mit falschen Seitenlängen durchführt. Wie erwähnt, sind auch dann zusätzliche Rechenfehler möglich.

24. Rechteck, Abspalten wird vergessen, $a \cdot c$, $6 \cdot 4 = 24 \neq 20$ (Rechenfehler)

Diese Bearbeitungsvariante beschreibt den korrekten Lösungsansatz des Abspaltens. Allerdings werden nicht alle notwendigen Bearbeitungsschritte ausgeführt, sodass letztlich die Fläche des Rechtecks (24 Quadrate) als Ergebnis fungiert. Aufgrund von Rechenfehlern sind auch hier andere Ergebniszahlen denkbar.

Die durchgeführte Rationale Aufgabenanalyse zeigt, dass trotz der erhöhten Komplexität der Figur des Aufgabenteils A5b der zugrunde liegende Aufgabenstamm als Einheit beider Teilaufgaben gleichermaßen bedeutsam ist. Aufgrund der in der Grafik angedeuteten

Randquadrate ist es somit unabdingbar, die Implikation des **Bearbeitungskonzeptes Umfang** für Teilaufgabe A5b erneut zu berücksichtigen. Untermauert wird diese Annahme durch den nicht eindeutig zu bestimmenden Anforderungsbereich (siehe Abschnitt 8.1.1, Inhaltliche Perspektive). Auch hier liegt der Ermittlung des Umfangs eine Interpretation der Randquadrate als Längen zugrunde. Es zeigt sich, dass bei dieser Teilaufgabe sowohl Flächeninhalt als auch Umfang der Figur ein Ergebnis von 20 haben. Diese Tatsache erschwert den weiterführenden Schritt der Empirischen Aufgabenanalyse, worauf in Abschnitt 8.2.5 jedoch noch eingegangen wird. Die Differenzierung in additive (Seiten werden einzeln verwendet) und multiplikative (Seiten werden zusammengefasst verwendet) Rechnungsnotationen wird aufgrund der Kontinuität beibehalten. Die Reihenfolge der angeführten Summanden bleibt aufgrund der geltenden Rechengesetze erneut unbeachtet.

25. Seiten einzeln, $a + b + b + b + c + c, 6 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 = 20$

Der Aufgabenbearbeiter ermittelt den Umfang durch das Aneinanderfügen der sechs Seitenlängen, was in einer Addition ausdrückt wird. Hierbei werden alle nötigen Seitenlängen korrekt verwendet, die Berechnungen erfolgen korrekt.

26. Seiten einzeln, $a + b + b + b + c + c, 6 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 \neq 20$, Rechenfehler

Die Berechnung des Umfangs erfolgt korrekt anhand der Formulierung der entsprechenden Addition. Die Ermittlung der Summe wird jedoch fehlerhaft durchgeführt.

27. Seiten einzeln, $a_{+/-n} + b_{+/-n} + b_{+/-n} + b_{+/-n} + c_{+/-n} + c_{+/-n}, x + y + y + y + z + z \neq 20$ (Rechenfehler)

Erneut ist es denkbar, dass bei der Umfangsberechnung mittels Addition eine oder mehrere fehlerhafte Seitenlängen verwendet werden und sich weiterhin Rechenfehler anschließen.

28. Seiten einzeln, $a + b + \dots + c + \dots, 6 + 2 + \dots + 4 + \dots \neq 20$ (Rechenfehler)

Bei dem Zusammenfügen der Seitenlängen werden Seiten ausgelassen oder mehrfach bedacht.

29. Seiten zusammengefasst, $a + 3b + 2c, 6 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 = 20$

Die Notation zusammengefasster gleicher Summanden wird hier als multiplikative Bearbeitungsvariante verstanden. Sowohl die Zusammenfassungen als auch die multiplikativen Teilberechnungen und die anschließende Addition gelingen fehlerfrei.

30. Seiten zusammengefasst, $a + 3b + 2c, 6 + 3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 \neq 20$, Rechenfehler

Erneut können bei der Zusammenfassung gleicher Summanden, den auszuführenden Multiplikationen oder der zusammenführenden Addition Rechenfehler auftreten.

31. Seiten zusammengefasst, $a_{+/-n} + 3b_{+/-n} + 2c_{+/-n}, x + 3y + 2z \neq 20$ (Rechenfehler)

Bei den zuvor beschriebenen Denk- und Bearbeitungswegen ist eine fehlerhafte Ermittlung der Seitenlängen möglich. Auch können Rechenfehler hinzukommen.

32. Seiten zusammengefasst, $a + 3_{+/-n} * b + 2_{+/-n} * c, a + s * b + t * c \neq 20$ (Rechenfehler)

Trotz gedanklich korrekter Bearbeitungswege werden die Seiten in falscher Anzahl zusammengefasst, wodurch das Ergebnis verfälscht wird.

Das vierte **Bearbeitungskonzept Zählen** beschreibt erneut ein Auszählen der fiktiven Einheitsquadrate.

33. Auszählen ohne Zählfehler = 20

Der Aufgabenbearbeiter ermittelt durch Auszählen der sichtbaren und fiktiven Quadrate die korrekte Anzahl 20.

34. Auszählen mit Zählfehler $\neq 20$

Bei der Ermittlung der Anzahl verzählt sich der Aufgabenbearbeiter. Denkbar ist an dieser Stelle der in der Literatur für Zählstrategien beschriebene +/-1-Fehler, also das Abweichen des tatsächlichen Ergebnisses um 1 (vgl. PADBERG 2005, S. 85f).

Ein tabellarischer Überblick der theoretisch konstruierten Bearbeitungsvarianten zu Teilaufgabe A5b befindet sich im Anhang der Arbeit.

8.2 Empirische Aufgabenanalyse A5 „Quadrate in Figur“ mit Ausschärfung zu Bearbeitungskategorien

8.2.1 Vorbemerkung zur Empirischen Aufgabenanalyse A5

Die zuvor konstruierten Bearbeitungsvarianten der Rationalen Aufgabenanalyse stellen einen Überblick möglicher Bearbeitungswege dar, die sich in den Notationen der Aufgabenbearbeiter ausdrücken. Jede der Bearbeitungsvarianten wird als gleichwertige Option ohne hierarchischen Charakter angesehen. In dem sich nun anschließenden Schritt der Empirischen Aufgabenanalyse zeigt sich, welche der benannten Bearbeitungsvarianten tatsächlich in den vorliegenden Daten zu finden sind. Lassen sich diese mit entsprechenden Häufigkeiten belegen und weiter differenzieren, erfolgt eine Ausschärfung der Bearbeitungsvariante in eine nachweisliche Bearbeitungskategorie. Ebenso können aufgrund geringer Häufigkeiten verschiedene theoretische Bearbeitungsvarianten in einer faktischen Bearbeitungskategorie zusammengefasst werden (siehe Abschnitt 6.2.3).

Die Rationale Aufgabenanalyse zeigt zudem auf, dass die formale Präsentation der Aufgabe Anlass zur Kritik bietet. Es ist undeutlich, wo die Ergebniszahl zu notieren ist und in welchen Fällen eine Lösung als korrekt beurteilt wird (siehe Abschnitt 8.1.1). Die Problematik einer objektiven Bewertung von Aufgaben in schriftlichen Leistungserhebungen ist nicht das Thema der vorliegenden Arbeit. Dennoch ist die Form der Ergebnisnotation im Vorfeld der Empirischen Analyse der Aufgabe A5 zu klären. Die Notation der Ergebnisse wird sowohl in dem vorgesehenen Textfeld als auch auf der Notationslinie akzeptiert. Folgende Varianten der Ergebnisnotation werden unterschieden:

Der Aufgabenbearbeiter notiert auf der vorgesehenen Linie den Zahlensatz ‘ $8 * 5 = 40$ ’ und trägt die Ergebniszahl 40 zusätzlich in das abgebildete Textfeld ein.

Rechnung: $8 * 5 = 40$	
40	Quadrate

In einer anderen Aufgabenbearbeitung findet sich die Notation ‘ $8 * 5 = 40$ ’, das Textfeld bleibt jedoch ungenutzt.

Rechnung: $8 * 5 = 40$	
	Quadrate

Weiterhin kann der Aufgabenbearbeiter seine Rechnung auf der Notationslinie vermerken und trägt die Ergebniszahl ausschließlich in dem Textfeld ein.

Rechnung: <u>8 * 5</u>	
40	Quadrate

Die korrekte Ergebniszahl wird in dem dafür vorgesehenen Textfeld vermerkt, ohne dass eine Rechnung notiert wird.

Rechnung: _____	
40	Quadrate

Eine Lösung wird bei der Empirischen Aufgabenanalyse als korrekt betrachtet, wenn die richtige Ergebniszahl in einer der oben aufgeführten Varianten notiert ist. In Teilaufgabe A5a ist 40 die korrekte Lösungszahl, während bei Teilaufgabe A5b 20 die gesuchte Anzahl von Einheitsquadraten ist. Unterschiede in den Notationen und sämtliche Variationen werden bei der Analyse fixiert und inklusive ihrer Häufigkeiten gesondert aufgeführt.

Laut Aufgabenintention und Kommentar des Hessischen Kultusministeriums handelt es sich bei Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ um ein Ausfüllen der Flächen „in der Vorstellung“ (HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 49). Zeichnungen in den beiden abgebildeten Grafiken sind zunächst unerwünscht. Auch dieser Aspekt wird bei der Empirischen Aufgabenanalyse vermerkt, um in einem späteren Abschnitt detailliert darauf eingehen zu können (siehe Abschnitt 8.4).

8.2.2 Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse Teilaufgabe A5a

Die Empirische Aufgabenanalyse von Teilaufgabe A5a wird auf Basis von 1975 Datensätzen durchgeführt. Von 47 Kindern ist dieser Aufgabenteil nicht bearbeitet worden, daher werden deren Daten ausgeschlossen, um keine separate Bearbeitungskategorie eröffnen zu müssen (siehe Abschnitt 6.2.3).

Als Ergebnis der Empirischen Aufgabenanalyse werden vier Bearbeitungskonzepte angeführt, welche im Folgenden erläutert werden und deren Entwicklung aufgezeigt wird. Es unterscheiden sich die **Bearbeitungskonzepte Fläche multiplikativ, Fläche additiv, Umfang** und **Anderes**.

In den Erläuterungen werden erneut verschiedene Häufigkeitsverteilungen angegeben (siehe Abschnitt 6.2.3). Weiterhin werden die theoretischen Bearbeitungsvarianten und ihre Modifikationen in die empirischen Bearbeitungskategorien einbezogen. Auch wird die Vielfalt der Bearbeitungsnotationen zu jeder Bearbeitungskategorie angeführt. Exemplarische Beispiele aus der Interviewstudie runden die Darstellungen ab und validieren die benannten Bearbeitungskategorien. Ergänzend wird eine Zusammenschau der Bearbeitungskategorien mit Rückblick auf die zuvor konstruierten theoretischen Bearbeitungsvarianten präsentiert. Abschließend folgt ein Überblick der Interviewstudie zu der vorliegenden Teilaufgabe.

Das **Bearbeitungskonzept Fläche multiplikativ** umfasst sämtliche Bearbeitungsnotationen, in denen ein Vorgehen als Grundaufgabe zur Flächenberechnung erkennbar ist. Hier ordnen sich insgesamt 1463 Aufgabenbearbeitungen ein, was einer relativen Häufigkeit von 74,1 % entspricht. Anhand dieses Ergebnisses scheint sich die Aufgabenintention des Hessischen Kultusministeriums zunächst zu bestätigen. Ein genauer Blick in die differenzierbaren Bearbeitungen zeigt jedoch, dass sich die Situation weitaus diffiziler präsentiert.

In einer ersten Bearbeitungskategorie 1.1 ~8*5~ befinden sich sämtliche Notationen, die sich durch eine Formulierung der Multiplikation der Seiten a und b äußern. Hier sind 539 Aufgabenbearbeitungen zu finden, was einem relativen Anteil von 27,3 % sowie einer relativen internen Häufigkeit von 36,8 % entspricht. Es bestätigt sich Bearbeitungsvariante 1 der Rationalen Aufgabenanalyse, die den multiplikativen Grundgedanken der Gruppierung repräsentiert. Inkludiert wird Bearbeitungsvariante 3, eine korrekt formulierte Multiplikation $8 \cdot 5$ mit einem fehlerhaften Ergebnis. Diese Zusammenfassung wird legitimiert, da von den 539 Aufgabenbearbeitungen lediglich sechs Datensätze ein falsches Ergebnis aufweisen. Eine Untersuchung der individuellen Notationen ergibt, dass 29 unterscheidbare Bearbeitungsnotationen vorliegen. Wie zuvor erläutert, handelt es sich hierbei sowohl um Differenzierungen der Rechnungen als auch der Form und Platzierung der Notation (siehe Abschnitt 8.2.1).

Die Notation der Tauschaufgabe Seite b * Seite a repräsentiert die Bearbeitungskategorie 1.2 ~5*8~ mit 777 Schülerbearbeitungen und somit einem relativen internen Anteil von 53,1 %. Diese Form der Notation findet sich in der theoretischen Bearbeitungsvariante 2 wieder, die somit ebenfalls anhand eines relativen Anteils von 39,4 % empirisch belegt wird. Auch in diesem Fall wird die entsprechende Bearbeitungsvariante 4 mit Rechenfehler inkludiert, da nur ein geringer Anteil von 16 Schülerbearbeitungen ein falsches Ergebnis aufweist. Eine Untersuchung der Notationen ergibt, dass in dieser Bearbeitungskategorie 30 verschiedene Bearbeitungsnotationen existieren.

Ein Blick in die Interviewstudie zeigt, dass den Notationen der Produkte $8 \cdot 5$ und $5 \cdot 8$ nachweisbar eine multiplikative Denkweise zugrunde liegt. *Jennifers* Bearbeitung verdeutlicht das Vorgehen für die aktuelle Bearbeitungskategorie. Das Mädchen liest die Aufgabenstellung und gibt sie anschließend mit eigenen Worten wieder. Sie füllt die Figur mit Quadraten, indem sie zügig horizontale und vertikale Linien einzeichnet.

Beginn Interview Jennifer bei 1:21:45

1:23:14 K: Ich weiß schon, wie ich's leicht raus krieg!

1:23:15 I: Ja, und wie?

1:23:17 K: 5 mal 8 einfach rechnen.

1:23:19 I: Mh.

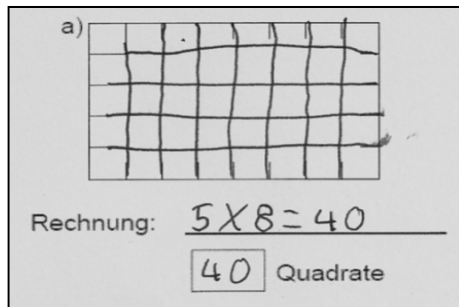
K: Weil das sind 5 und das 8 (K zeigt mit Stift auf erste Spalte und dann auf erste Zeile in der Figur).

1:23:20 I: Mh, dann schreib's mal hin!

1:23:22 K: 5 mal 8 sind...

K schreibt.

Jennifer ist sich darüber bewusst, dass sie anhand der Multiplikation der beiden Seiten das korrekte Ergebnis ermitteln kann und formuliert „ich weiß schon, wie ich’s leicht raus



krieg⁶⁸“. Auf Nachfrage äußert sie spontan das später notierte Produkt der Zahlen 5 und 8. Indem *Jennifer* die Seitenlängen der Figur abfährt, erklärt sie das Zustandekommen ihrer Rechnung. Lediglich die Notation des Rechenzeichens verunsichert sie kurzzeitig. *Jennifer* gelingt es, sowohl die Rechnung, als auch das korrekte Ergebnis zu notieren.

Ebenfalls lassen sich die Bearbeitungsvarianten 5 und 6 zu einer gemeinsamen Bearbeitungskategorie ausschärfen. Es handelt sich dabei um die Multiplikationen fehlerhafter Seitenlängen. In der aufgestellten Bearbeitungskategorie 1.3 ~Nachbaraufgaben~ werden jedoch ausschließlich Bearbeitungsnotationen mit den verwendeten Seitenlängen $a_{+/-1}$ und $b_{+/-1}$ berücksichtigt, um Fehlinterpretationen der untersuchten Aufzeichnungen zu vermeiden. Diese Gruppierung umfasst 113 Notationen, womit 7,7 % der Schülerbearbeitungen des übergeordneten Bearbeitungskonzeptes hier eingeordnet sind. Das entspricht einem relativen Anteil von 5,7 %. Weiterhin kann zwischen 33 Bearbeitungsnotationen unterschieden werden.

Eine weitere Gruppierung stellt Bearbeitungskategorie 1.4 ~weitere Multiplikationen~ dar. Hierin sind 34 Datensätze mit insgesamt 1,7 % der Schülerbearbeitungen zu finden. Auch der relative interne Anteil ist mit 2,3 % gering. Die Bearbeitungsnotationen lassen durchaus auf eine Vorstellung der Grundidee des Flächeninhalts schließen. Trotz der Notation fehlerhafter Rechnungen weisen die Aufgabendokumente meist das richtige Ergebnis auf, wobei nochmals 20 verschiedene Bearbeitungsnotationen vorhanden sind.

In einem zweiten **Bearbeitungskonzept Fläche additiv** finden sich all jene Bearbeitungen wieder, denen eine additive Notationsform zugrunde liegt. Mit relativen 8,6 % ordnen sich 169 aller 1975 Schülerbearbeitungen dieser Kategorie zu. Innerhalb des Bearbeitungskonzeptes werden vier Gruppierungen unterschieden. Die im ersten Teil der Analyse aufgezeigten Bearbeitungsvarianten 7 bis 14 zur fortgesetzten Addition sind jedoch nicht ohne Weiteres empirisch zu bestätigen. Die Übersicht der Bearbeitungsvarianten zeigt, dass hier theoretisch zwischen acht verschiedenen Varianten und Bearbeitungsnotationen differenziert wird (siehe Anhang). Anders als bei den zuvor erläuterten multiplikativen Optionen ist die theoretische Differenzierung im Fall der fortgesetzten Addition nicht haltbar.

Sämtliche als fortgesetzte Addition interpretierbaren Bearbeitungsnotationen werden in der Bearbeitungskategorie 2.1 ~fortgesetzte Addition~ zusammengefasst. So werden Rechenfehler, eine falsche Anzahl Summanden oder die Verwendung falscher Seitenlängen inklu-

⁶⁸ Zitat aus Transkript 5, A5, Zeitleiste 1:23:14

diert. Es zeigt sich, dass die Bearbeitungskategorie mit einem relativen internen Anteil von 16,0 % sowie einer relativen Häufigkeit von 1,4 % als unwesentlich anzusehen ist. Es werden zwölf verschiedene Bearbeitungsnotationen fixiert. Alle 27 Bearbeitungen enthalten das korrekte Ergebnis 40.

Anhand der Bearbeitungsnotationen zeigt sich, dass jedoch weitere additive Bearbeitungswege genutzt werden. Die Bearbeitungsnotation '20 + 20 = 40' wird immerhin von 68 Aufgabenbearbeitern verwendet, was einer relativen Häufigkeit von 3,4 % entspricht. Demnach finden sich die acht differenzierbaren Bearbeitungsnotationen in der Bearbeitungskategorie 2.2 ~Hälften~ wieder. Mit einem relativen internen Anteil von 40,2 % ist sie die größte Gruppierung des Bearbeitungskonzeptes. Bis auf eine Ausnahme ist in allen zugehörigen Datensätzen das korrekte Ergebnis vermerkt.

Eine zuvor ebenfalls nicht konstruierte, jedoch höchst interessante Variante, findet sich in der Bearbeitungskategorie 2.3 ~Außenband und Innenfigur~. Knapp 1,6 % der Stichprobe, also 31 Aufgabenbearbeiter, haben zunächst die Anzahl der Quadrate des Außenbandes (22) ermittelt, um anschließend die Anzahl der Quadrate der verbleibenden Innenfigur (18) zu addieren. Im Rahmen des Bearbeitungskonzeptes entspricht das einem relativen internen Anteil von 18,3 %. Die Anzahl der Quadrate des Außenbandes wird meist korrekt ermittelt, was auf die angedeuteten Seiten der Quadrate in der Grafik zurückgeführt wird (siehe Abschnitt 8.1.1, Formale Perspektive). Hingegen wird für die Anzahl der Quadrate in der Innenfigur keine grafische Hilfe mehr angeboten. Entsprechend zahlreich sind auch die differierenden Bearbeitungsnotationen. Die Übersicht präsentiert 23 Notationsvarianten, die allesamt auf den zuvor beschriebenen Bearbeitungsweg hinweisen. Insgesamt erhalten lediglich elf der Aufgabenbearbeiter ein richtiges Ergebnis, was auf die Fehleranfälligkeit dieser Bearbeitungskategorie schließen lässt.

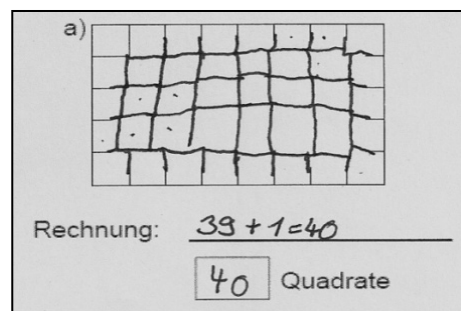
Es sind weitere additive Bearbeitungsnotationen vorhanden, die keiner der drei bisher beschriebenen Bearbeitungskategorien explizit zugeordnet werden können. Somit ist auch in diesem Fall für 43 Schülerbearbeitungen eine separate Bearbeitungskategorie 2.4 ~weitere Additionen~ zu eröffnen. Hier sind jene Additionen zu finden, die dem Flächenkonzept eindeutig zuzuordnen sind. Ähnlich wie die Bearbeitungskategorie ~weitere Multiplikationen~ enthält diese Bearbeitungskategorie relative 2,2 % aller Schülerbearbeitungen, was einer relativen internen Häufigkeit von 25,0 % entspricht. Es sind 30 unterscheidbare Bearbeitungsnotationen vorhanden, wobei in 32 Datensätzen das korrekte Ergebnis vermerkt ist.

Die Interviewstudie belegt, dass diese Bearbeitungskategorie auch zählende Bearbeitungswege auffängt. Zum Ausdruck kommen solche Lösungen häufig durch additive Bearbeitungsnotationen, wie das nachfolgende Beispiel zeigt.

Beginn Interview Claudia bei 52:08

- 52:45 I: Super. Kannst du herausbekommen, wie viele kleine Quadrate in die Figur a passen?
 52:52 K: Wenn ich hier (K zeigt mit Stift auf Figur a) die kleinen Quadrate zeichne, dann ja.
 52:55 I: Dann kannst du das tun.
 52:56 K zeichnet Quadrate ein, zunächst Außenband, dann Innenzeilen.
 ...
 54:47 K: Sind 40 Quadrate mit dem (K zeigt mit Stift unter Figur a).
 54:50 I: Mh. 40 ist dein Ergebnis...
 K: Ja.
 I: ... Kannst du auch eine Rechnung dazu schreiben, wie du darauf gekommen bist?
 54:59 K: Mm, eins war schon vordruckt (K zeigt mit Finger auf Quadrat in Figur a) und dann hab ich jetzt noch 39 dazu getan.
 55:11 I: Mh.
 55:12 K: Also 39 plus 1 gleich 40.
 55:16 K schreibt.

Claudia zeigt keine Schwierigkeiten bei der Erfassung und Wiedergabe der Aufgabenstellung. Auch sie fügt im Vorfeld die Quadrate als ungenaues Gitternetz in die Figur ein. *Claudia* ergänzt zunächst die angedeuteten Quadrate des Außenbandes, bevor sie die Quadrate der Innenfigur einzeichnet. Der Zählprozess wird bereits während dieser Arbeit deutlich, die Punkte auf dem Schülerdokument belegen dies zusätzlich. Die Form ihrer notierten Rechnung erscheint ihr aufgrund des Bearbeitungsweges selbstverständlich: Ein Quadrat war bereits in der Grafik vorhanden, 39 Quadrate hat sie ergänzt, so kann die passende Rechnung in ihren Augen nur $39+1=40$ lauten.

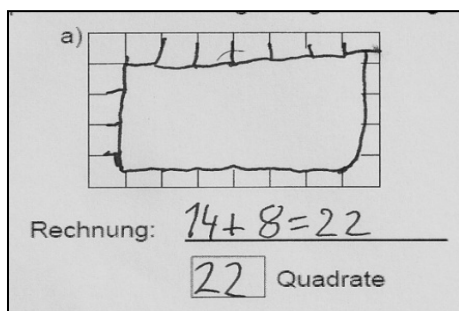


Das **Bearbeitungskonzept Umfang** bestätigt sich aufgrund der Empirischen Aufgabenanalyse ebenfalls. In 166 der insgesamt 1975 Schülerbearbeitungen ist auf eine Ermittlung des Umfanges statt einer Berechnung des Flächeninhaltes zu schließen, was einer relativen Häufigkeit von 8 % entspricht. Multiplikative sowie additive Bearbeitungsnotationen werden charakterisiert, wobei sich hier die Bearbeitungsvarianten 15 bis 22 der Rationalen Aufgabenanalyse wiederfinden. Das bereits herausgestellte Problem der formalen Präsentation bestätigt sich und kann präzisiert werden. Das Bearbeitungskonzept Umfang beinhaltet drei Bearbeitungswege, die anhand der schriftlichen Notationen jedoch nicht immer eindeutig nachvollziehbar sind: Der Aufgabenbearbeiter ermittelt mit 26 Quadraten den tatsächlichen Umfang der Figur, wobei die Randquadrate als Längen interpretiert werden. Jedoch verleitet der Aufgabenstamm zu einem bloßen Auszählen der Striche, durch welche die Quadrate des Außenbandes angedeutet werden. Auf diesem Weg gelangt der Aufgabenbearbeiter zu einem Ergebnis von 22, bei Ausschluss des eingezeichneten Einheitsquadrates zu der Ergebniszahl 20. Wird nicht die Anzahl der angedeuteten Striche, sondern die Anzahl der vollständigen Quadrate im Außenband ermittelt, gelangt der Aufgabenbearbeiter zu einem Ergebnis von 22 Quadraten, bei Ausschluss des abgedruckten

Einheitsquadrates zu der Lösung 21 Quadrate. Die Differenzierung des Bearbeitungskonzeptes erfolgt anhand der Bearbeitungsnotationen, wobei die zuvor genannten Unterscheidungen sich in allen Gruppierungen wiederfinden können.

Die Bearbeitungskategorie 3.1 ~Umfang additiv~ umfasst sämtliche 124 Additionen, die bis zu vier Summanden in den Zahlensätzen enthalten. Aufgrund der Varianz von 66 unterscheidbaren Notationen wird von einer weiteren Differenzierung abgesehen. Somit werden die theoretisch konstruierten Bearbeitungsvarianten 15 bis 18 in dieser Bearbeitungskategorie zusammengeschlossen und ergänzt. Mit relativen internen 74,7 % bilden diese additiven Bearbeitungen die größte Gruppierung, die relative Häufigkeit beträgt 6,3 %. Auch wenn bei Umsetzung dieses Lösungsweges ausschließlich von falschen Ergebnissen auszugehen ist, findet sich im Textfeld der Aufgabe in Ergänzung zu den additiven Zahlensätzen bei zwei Aufgabebearbeitern das korrekte Ergebnis 40.

Eine Untersuchung der zugeordneten Bearbeitungen aus der Interviewstudie zeigt, dass auch diese Bearbeitungskategorie sowohl zählende als auch nicht zählende Denkwege verein-



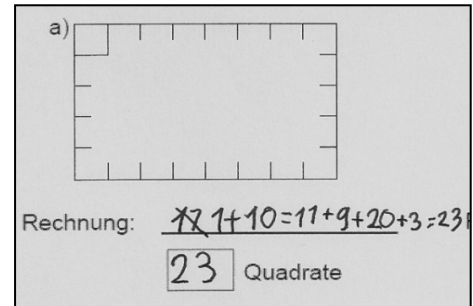
eint. Die analysierte Unterscheidung wird anhand zweier Beispiele skizziert. So arbeitet *Andreas* mit dem Bearbeitungskonzept Umfang, indem er die Anzahl der Quadrate des Außenbandes ermittelt. Es zeigt sich, dass er diese Anzahl tatsächlich berechnet und nicht zählend bestimmt. Nachdem die Aufgabenstellung gemeinsam geklärt wurde, ergänzt der Junge zunächst die angedeuteten Quadrate in der

Grafik. Das Außenband wird so vollständig sichtbar. Spontan formuliert *Andreas*, dass 22 Quadrate in die Figur hineinpassen und beharrt auf seiner Rechnung $14+8$. Er erklärt, dass er zunächst die acht Quadrate der ersten Zeile hernimmt und dann jeweils die drei verbleibenden Quadrate der ersten sowie letzten Spalte ergänzt. So erhält *Andreas* seinen ersten Summanden 14. Hinzu addiert er abschließend die acht sichtbaren Quadrate der letzten Zeile und berechnet so das Ergebnis 22.

Benedikt hingegen ermittelt sein Ergebnis 23, indem er die Quadrate des Außenbandes abzählt. Somit begeht er den für die Zählstrategien typischen Fehler der Differenz um 1 (vgl. bspw. PADBERG 2005, S. 85f). Bereits zu Interviewbeginn wird sein Abzählprozess deutlich.

Beginn Interview Benedikt bei 05:50	
06:57	K tippt mit Finger auf Außenband Figur a entgegen Uhrzeigersinn.
07:12	K: Dreiundzwanzig.
07:15	I: Wenn das dein Ergebnis ist, trag es bitte ein.
07:17	K schreibt.
07:24	I: Und jetzt finde eine Rechnung, wie du auf deine Ergebniszahl 23 gekommen bist.
07:30	K: Mm.
07:36	K schreibt.
07:59	I: Welche Rechnung hast du aufgeschrieben?
08:01	K: 1 plus 10 gleich 11 plus 9 gleich 20 plus 3 gleich 23.

Benedikt tippt nacheinander alle angedeuteten Quadrate des Außenbandes an und kommt auf das Ergebnis 23. Nach Aufforderung formuliert er eine mehrschrittige Addition, da diese laut seiner Aussagen „einfach zu rechnen ist“⁶⁹. Es ist offensichtlich, dass *Benedikt* sich seine Rechnung im Anschluss an den Zählprozess überlegt. Sie weist somit keine Parallelen zu seinem Bearbeitungsweg auf.



Ähnliches spiegelt sich in Bearbeitungskategorie 3.2 ~Umfang multiplikativ~ wider. Es findet eine Zusammenführung der Bearbeitungsvarianten 19 bis 22 statt. In dieser Bearbeitungskategorie sind jedoch lediglich 1,2 % aller Aufgabenbearbeitungen enthalten. Das entspricht einer relativen internen Häufigkeit von 14,5 %. Die 24 zugeordneten Bearbeitungen weisen 15 verschiedene Notationsvarianten auf. Auch hier notiert ein Aufgabenbearbeiter trotz des fehlerhaften Denkweges das richtige Ergebnis.

Die Bearbeitungskategorie 3.3 ~Umfang andere~ beinhaltet Datensätze, in denen sich der Bearbeitungsweg Umfang zeigt, jedoch eine ausschließlich additive oder multiplikative Zuordnung nicht möglich ist. Es sind 18 Schülerbearbeitungen in diese Gruppierung eingeordnet, sodass die Bearbeitungskategorie nur mit einem relativen Anteil von 0,9 % ins Gewicht fällt. Jede der 18 Notationen stellt dabei eine individuelle Variante dar.

Dem vierten **Bearbeitungskonzept Anderes** ist kein kennzeichnender Bearbeitungsweg zugewiesen. Anhand der Notationen ist eine eindeutige Zuordnung in bisherige Bearbeitungskategorien nicht möglich oder eine neue Kategorienbildung wird aufgrund zu geringer Häufigkeiten ausgeschlossen.

Bearbeitungskategorie 4.1 ~Ergebniszahl~ erfasst diejenigen Datensätze, in denen ausschließlich ein Ergebnis, aber kein zugehöriger Rechenweg vermerkt ist. Mit 68 zugeordneten Datensätzen liegt eine relative Häufigkeit von 3,4 % vor. Ergebniszahlen werden hier auf der Notationslinie, in dem abgebildeten Textfeld oder an beiden Positionen notiert. Es treten 28 verschiedene Notationsvarianten auf, wobei in 21 Datensätzen die korrekte Ergebniszahl 40 vermerkt ist. Der relative interne Anteil beträgt 38,4 %.

Eine weitere Bearbeitungskategorie 4.2. ~Zeichnungen~ wird der Vollständigkeit halber aufgenommen. Es sind 12 Schülerbearbeitungen vorhanden, bei denen weder eine Rechnung, noch eine Ergebniszahl notiert wird. Jedoch sind Zeichnungen in der Grafik vorhanden, wobei dieser Fakt aufgrund der Erläuterungen in der Rationalen Aufgabenanalyse trotz der geringen relativen Häufigkeit von 0,6 % bedacht wird.

In einer letzten Bearbeitungskategorie werden all jene Notationen aufgenommen, die hinsichtlich des Bearbeitungsweges kaum zu interpretieren sind und somit keine Zuordnung in

⁶⁹ Zitat aus Transkript 22, A5, Zeitleiste 08:11

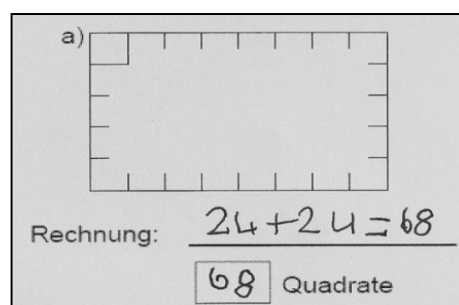
eine der anderen Bearbeitungskategorien vorgenommen werden kann. 97 Schülerbearbeitungen sind in dieser Bearbeitungskategorie 4.3. ~weitere Bearbeitungen~ zu finden, was lediglich einem relativen Anteil von 4,9 % entspricht. Die relative interne Häufigkeit liegt bei 54,8 %. Bis auf eine Ausnahme stellen alle 97 Bearbeitungsnotationen individuelle Varianten dar, wobei 32 Datensätze das korrekte Ergebnis enthalten.

In dieser Bearbeitungskategorie sind zahlreiche kreative, wenn auch meist fehlerhafte, Bearbeitungsansätze zu finden. Anhand der ausschließlich schriftlich vorliegenden Notationen ist ein Rückschluss auf die zugrunde liegenden Denk- und Bearbeitungswege meist nicht möglich. Die Gesprächssituationen in den durchgeführten Interviews bieten hingegen einen eindrucksvollen Einblick in diese individuellen Bearbeitungen. *Silvia* zum Beispiel notiert die Rechnung $24+24=68$. Eine Interpretation dieses Zahlensatzes gestaltet sich schwierig, das Interviewtranskript ermöglicht jedoch Aufschluss über ihr Vorgehen.

Beginn Interview Silvia bei 41:24

42:51 K: Erst einmal hier außen die zählen (K fährt mit Stift über Außenband Figur a).
 42:54 I: Mh.
 42:55 K: Das sind zwölf.
 42:57 I: Mh.
 42:59 K: Und dann noch mal zwölf (K zeigt mit Stift in Figur a), sind vierundzwanzig.
 43:05 I: Warum noch mal zwölf? Erklär mir das mal!
 43:07 K: Weil man da immer mehr dazu tun muss.
 43:10 I: Mh.
 43:11 K schaut auf AB.
 43:44 K: Achtundsechzig?
 43:45 I: Mh. Erklär mir mal, wie du auf die achtundsechzig kommst.
 43:49 K: Ich hab immer so welche gerechnet dazu.
 43:53 I: Was heißt so welche? Versuch das mal mit Worten genauer zu beschreiben...
 43:56 K: Ehm...
 I: oder zu zeigen.
 43:58 K: ...immer so kleine Quadrate gerechnet (K zeigt mit Stift in Figur a).
 44:00 I: Mh.
 44:01 K Erster sind zwölf, vierundzwanzig-
 44:04 I: Zeig mir mal, wo sind zwölf?
 44:07 K: Hier (K fährt mit Finger über Außenband Figur a), außen überall.
 44:10 I: Mh.
 44:11 K: Dann vierundzwanzig (K zeigt mit Finger in Figur a)...
 44:13 I: Mh.
 44:14 K: ... noch mal..und dann noch mal vierund äh noch mal zwölf. Das sind dann vierund, ne, sechsundvierzig...Und dann noch mal zwölf sind dann achtundsechzig

Silvia ermittelt zunächst die Anzahl der Quadrate für das Außenband. Sie addiert die acht Quadrate der ersten Zeile mit den verbleibenden vier Quadraten der letzten Spalte und erhält das Ergebnis 12. Da dies nur die eine Hälfte des Außenbandes darstellt, verdoppelt sie diese Zahl und gelangt so zu dem Ergebnis 24. *Silvia* geht davon aus, dass im



Inneren der Figur nochmals die gleiche Anzahl Quadrate Platz findet. So addiert sie in den beiden folgenden Schritten jeweils 12, wobei ihr Rechenfehler unterlaufen. Da sie jeweils einen Zehner zu viel addiert, erhält sie die Ergebniszahl 68 statt 48. Eben diese Rechnung vermerkt *Silvia* auf ihrem Aufgabendokument.

Ähnlich wie *Silvias* dargestellter Lösungsweg und die zugehörige Notation weisen zahlreiche Bearbeitungen auf die nicht reproduktive Anlage dieser Teilaufgabe hin (siehe Abschnitt 8.1.1, Inhaltliche und Kognitive Perspektive). So ist nicht von einer Bearbeitung als Grundaufgabe zum Thema Flächeninhalt auszugehen. Die Lösungswege werden von den Drittklässlern häufig individuell erarbeitet, was anhand der Vielfalt der Bearbeitungskategorien bestätigt wird.

8.2.3 Zusammenschau der Bearbeitungskategorien Teilaufgabe A5a

Die Konstruktion der theoretischen Aufgabenbearbeitungen gliedert sich in drei Bearbeitungskonzepte mit vierundzwanzig Bearbeitungsvarianten. Zweiundzwanzig Bearbeitungsvarianten werden empirisch bestätigt, wobei vereinzelte Zusammenfassungen vorgenommen werden. Ergänzend zu den bestätigten Bearbeitungsvarianten können acht weitere Bearbeitungskategorien benannt werden, sodass zu Teilaufgabe A5a letztlich ein Kategoriensystem mit vier Bearbeitungskonzepten und 14 Bearbeitungskategorien aufgestellt wird.

Das Bearbeitungskonzept Fläche wird in zwei Gruppen gegliedert, um den zahlreichen additiven und multiplikativen Notationen in den empirischen Daten gerecht zu werden. Im **Bearbeitungskonzept Fläche multiplikativ** wird eine Kategorie mit sonstigen Multiplikationen ergänzt. Im Rahmen des **Bearbeitungskonzeptes Fläche additiv** werden drei weitere Kategorien eröffnet: die Addition der Hälften, die Addition des Außenbandes und der Innenfigur sowie andere Additionen. Das **Bearbeitungskonzept Umfang** ist ebenfalls bestätigt und beinhaltet zusätzlich zu den acht zusammengefassten Bearbeitungsvarianten 15 bis 22 eine weitere Kategorie, sodass neben additiven und multiplikativen Bearbeitungsnotationen auch andere Varianten bedacht werden. Auch ist ein **Bearbeitungskonzept Anderes** notwendig, um in diesen Bearbeitungskategorien den ausschließlichen Vermerk von Ergebniszahlen, Zeichnungen in der Grafik oder anderen Notationen gerecht zu werden.

Das theoretische Bearbeitungskonzept Zählen sowie die zugehörigen Bearbeitungsvarianten 23 und 24 sind aufgrund der ausschließlich schriftlich vorliegenden Bearbeitungen nicht nachweisbar. Die Interviewstudie offenbart jedoch zählende Bearbeitungen, deren schriftliche Notationen sich in verschiedenen Bearbeitungskategorien wiederfinden.

8.2.4 Überblick über die Interviewstudie Teilaufgabe A5a

Der Untersuchung zu Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ liegen 28 halbstandardisierte Interviews zugrunde (siehe Abschnitt 5.2.2). Zunächst findet eine Synopse der vorliegenden Bearbeitungsnotationen mit den jeweiligen mündlichen Äußerungen der Kinder statt. Un-

abhängig von der Interviewsituation werden die schriftlichen Bearbeitungsnotationen in das zuvor konzipierte Kategoriensystem eingeordnet. Ebenso findet eine unabhängige Zuweisung der verbal geäußerten Bearbeitungswege statt (siehe Anhang). Der anschließende Vergleich der vorgenommenen Zuordnungen führt zu einer Unterscheidung von drei Gruppen, die nachfolgend dargestellt werden.

Bei elf Kindern erfolgt die Einordnung der mündlichen sowie schriftlichen Äußerungen in identische Bearbeitungskategorien. Für *Jennifer*, *Florian* und *Marco* ist eindeutig Bearbeitungskategorie 1.2 ~Fläche multiplikativ $a*b$ ~ nachweisbar. Sowohl schriftlich als auch mündlich wird der Bearbeitungsweg als eine Multiplikation der Seitenlängen formuliert. *Gabriele* ist im Rahmen der Interviewstudie das einzige Kind, das die Lösung mithilfe der fortgesetzten Addition ermittelt, womit ihre Bearbeitung in Kategorie 2.1 ~fortgesetzte Addition~ wiederzufinden ist. *Luisas* Rechnung $21+20=41$ ist in Bearbeitungskategorie 2.3 ~Außenband und Innenfigur~ einzuordnen. Dieser Bearbeitungsweg bestätigt sich anhand ihrer verbalen Äußerungen. *Andreas* und *Lukas* finden sich im Bearbeitungskonzept Umfang wieder. *Andreas* formuliert eine additive Rechnung, die der Bearbeitungskategorie 3.1 ~Umfang additiv~ entspricht. *Lukas* zählt den Umfang aus, was er entsprechend mit Worten notiert. Diese Variante wird Bearbeitungskategorie 3.3 ~Umfang weitere~ zugeschrieben. Die vier Kinder *Anna*, *Andrea*, *Tatjana* und *Silvia* versuchen die Aufgabe auf individuelle und kreative Art zu lösen, wobei jedoch keines der Mädchen zum korrekten Ergebnis gelangt. Es erfolgt eine Einordnung in die Bearbeitungskategorie 4.3 ~Anderes - Weiteres~.

Bei einer weiteren Gruppe von acht Kindern erfolgt die Einordnung der verbalen Äußerung im Vergleich zur Einordnung der Bearbeitungsnotation in unterschiedliche Bearbeitungskategorien, die jedoch innerhalb des entsprechenden Bearbeitungskonzeptes verbleiben. Dabei kommt es bei allen Kindern zu einer Verschiebung in diejenige Kategorie, die weitere Bearbeitungswege des jeweiligen Konzeptes vereint. Zudem verdeutlicht die Interviewstudie die zählende Ergebnisermittlung aller acht Kinder. *Steffi*, *Samuel*, *Kathrin*, *Steffen*, *Julia* und *Benedikt* notieren additive Rechnungen, welche allesamt der Bearbeitungskategorie 3.1 ~Umfang additiv~ entsprechen. Die verbalen Erläuterungen veranschaulichen, dass sie jeweils zählend zu ihren Ergebnissen gelangen. In keinem der Fälle wird jedoch der tatsächliche Umfang von 26 Quadraten ermittelt. *Steffi* und *Samuel* bestimmen die Anzahl der abgebildeten Striche, die übrigen vier Kinder zählen das Außenband der Figur aus. Auch *Fiona* agiert mit dem Bearbeitungskonzept Umfang. Sie formuliert eine multiplikative Rechnung, erklärt jedoch verbal das Auszählen des Außenbandes. Entsprechend findet auch hier eine Verschiebung von Bearbeitungskategorie 3.2 ~Umfang multiplikativ~ in 3.3 ~Umfang weitere~ statt. *Anna-Lena* notiert lediglich ihre Ergebniszahl. Diese Bearbeitungsnotation ist Bearbeitungskategorie 4.1 ~nur Ergebnis~ beigeordnet. Aufgrund des zugehörigen Interviews wird transparent, dass sie die Quadrate der eingezeichneten Innenfigur auszählt, was Bearbeitungskategorie 4.3 ~Weiteres~ entspricht.

Auch in der dritten Gruppe gelangen die meisten der neun Kinder zählend zu ihren Ergebnissen. Im Unterschied zu der vorherigen Gruppe findet bei der Einordnung ihrer mündli-

chen und schriftlichen Dokumentationen jedoch eine Verschiebung in differente Bearbeitungskonzepte statt. *Sandra* stellt eine Ausnahme dar, da sie ihr Ergebnis nicht zählend bestimmt und ihren Bearbeitungsweg mit einer multiplikativen Rechnung, konkret Bearbeitungskategorie 1.1 ~8*5~ erklärt. Fixiert wird allerdings eine fortgesetzte Addition, sodass hier eine Zuordnung in 2.1 ~fortgesetzte Addition~ stattfindet. *Franzi*, *Claudia* und *Norman* weisen eine Rechnung in Bearbeitungskategorie 2.4 ~weitere Additionen~ vor. Verbal ist erkennbar, dass sie den Flächeninhalt der Figur auszählen, somit eine Einordnung in Bearbeitungskategorie 4.3 ~Weiteres~ erforderlich wird. Drei Kinder notieren lediglich ihre Ergebniszahlen, also liegt erneut Bearbeitungskategorie 4.1 ~nur Ergebnis~ vor. Auch *Artur*, *Nadine* und *Lenka* erklären, dass sie gezählt haben, konkret die Quadrate des Außenbandes. Demnach findet die Einordnung in Bearbeitungskategorie 3.3 ~Umfang weitere~ statt. *Lennox'* Notation der Multiplikation $4*5=20$ wird zunächst in Bearbeitungskategorie 4.3 ~Weiteres~ eingeordnet. Aufgrund seiner verbalen Erläuterung kommt eine Verschiebung in Bearbeitungskategorie 3.3 ~Umfang weitere~ zustande. *Lea* gibt zu ihrer Ergebniszahl 24 an, gezählt zu haben, womit von einer Bearbeitung im Konzept Umfang ausgegangen wird. Verbal äußert sich das Mädchen jedoch dahin gehend, dass sie die Innenfigur ausgezählt hat, womit ihre Variante in Bearbeitungskategorie 4.3 ~Weiteres~ gehört.

8.2.5 Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse Teilaufgabe A5b

Für die Empirische Aufgabenanalyse der zweiten Teilaufgabe werden 76 Datensätze aufgrund einer fehlenden Bearbeitung ausgesondert, sodass noch 1946 Schülerbearbeitungen die Basis der Analyse darstellen. Die nachfolgenden Erläuterungen der Bearbeitungskonzepte und -kategorien erfolgt strukturell ebenso wie bei Teilaufgabe A5a. Neben einer inhaltlichen Erläuterung erfolgt die Präsentation der absoluten, relativen und relativen internen Häufigkeiten (siehe Abschnitt 6.2.3). Ferner wird der Bezug zu den Bearbeitungsvarianten der Rationalen Aufgabenanalyse hergestellt und die Varianz der Bearbeitungsnotationen aufgezeigt. Weiterhin dienen Beispiele der Interviewstudie der ergänzenden Illustration, bevor ein Überblick über die gesamte Untersuchung folgt.

Als Ergebnis der Empirischen Aufgabenanalyse werden sechs Bearbeitungskonzepte angeführt: **Fläche - Zusammensetzen vertikal**, **Fläche - Zusammensetzen horizontal**, **Fläche - Zusammensetzen sonstiges**, **Fläche - Abspalten**, **Umfang** und **Anderes**.

Das Bearbeitungskonzept **Fläche - Zusammensetzen vertikal** umfasst sämtliche Schülerbearbeitungen, bei denen anhand der Bearbeitungsnotation auf ein gedankliches Zusammensetzen der abgebildeten Figur aus einem $4*4$ -Quadrat und einem $2*2$ -Quadrat geschlossen wird. Hier ordnen sich 592 Datensätze ein, was einer relativen Häufigkeit von 30,4 % entspricht. Dabei sind 567 präsentierte Ergebnisse als korrekt zu beurteilen. Die aus der Rationalen Aufgabenanalyse ersichtlichen Bearbeitungsvarianten 1 bis 10 finden sich allesamt in diesem Bearbeitungskonzept wieder. Aufgrund der variantenreichen Bearbei-

tungsnotationen werden im Sinne des kategorienorientierten Vorgehens nochmals vier Bearbeitungskategorien unterschieden.

Zunächst werden in Bearbeitungskategorie 1.1 $\sim 4*4+2*2 \sim$ all jene Schülerbearbeitungen erfasst, bei denen der Flächeninhalt beider Quadrate mit einer separaten Multiplikation fixiert wird. Mit 258 Bearbeitungsnotationen entspricht dies einer relativen internen Häufigkeit von 43,6 %. Es wird ein relativer Anteil von 13,3 % vermerkt und weiterhin werden 249 korrekte Ergebnisse notiert. Unter Beachtung der bei Teilaufgabe A5a erläuterten Kriterien sind 53 differente Bearbeitungsnotationen vorhanden.

Aufgrund des häufigen Auftretens wird für eine ähnliche Notationsvariante die gesonderte Bearbeitungskategorie 1.2 $\sim 4*4+4 \sim$ eröffnet. Die Multiplikation der kleinen quadratischen Teilfigur wird hier nicht separat notiert. Diese Kategorie stellt mit relativen internen 47,3 % und 280 vorliegenden Schülerbearbeitungen die größte Gruppierung des Bearbeitungskonzeptes dar. Das entspricht immerhin einem relativen Anteil von 14,4 %. Es werden 33 unterschiedliche Bearbeitungsnotationen verzeichnet, 265 der 280 Aufgabenbearbeiter kommen zu dem korrekten Ergebnis.

Die dritte Bearbeitungskategorie 1.3 $\sim 4+4+4+4+2+2 \sim$ beschreibt Schülerbearbeitungen, aus denen ein spaltenweises Zusammensetzen der Gesamtfigur abzuleiten ist, womit sich Bearbeitungsvariante 7 hier wiederfindet. Da die Datensätze keinerlei fehlerhaften Bearbeitungen beinhalten, bestätigen sich die entsprechenden Bearbeitungsvarianten 8, 9 und 10 nicht. Jedoch ist der relative Anteil dieses Bearbeitungsweges mit 0,6 % sehr gering. Verglichen mit den übrigen Bearbeitungskategorien machen die elf Schülerbearbeitungen nur einen relativen internen Anteil von 1,9 % aus. Alle Aufgabenbearbeiter präsentierten das richtige Ergebnis und es werden vier Bearbeitungsnotationen unterschieden.

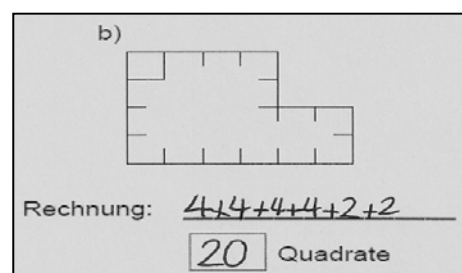
Sandra's Bearbeitung aus der Interviewstudie illustriert diese Form der Bearbeitung. Nach Aufforderung zur Lösung der zweiten Teilaufgabe notiert *Sandra* schon nach kurzer Zeit ihr Ergebnis und die zugehörige Rechnung.

Beginn Interview Sandra Teilaufgabe b bei 31:58

32:51 I: Mh. Hier ist 20 dein Ergebnis. Wie bist du hier auf die 20 gekommen?

32:58 K: Hier (K zeigt mit Stift auf Figur b) können ja, hier können immer 4 (K fährt mit Finger über erste Spalte in Figur b) und hier ist 4 mal 4 (K zeigt mit Finger auf große quadratische Teilfigur in Figur b) und hier (K zeigt mit Stift auf kleine quadratische Teilfigur in Figur b) sind dann noch mal, noch mal 2 und noch mal 2. Und nur hier hier die (K zeigt mit Stift auf große quadratische Teilfigur in Figur b) sind 16, plus 2 18, plus 2 zwa, sind 20.

Sandra antwortet zeitnah und kann ihren Bearbeitungsweg erläutern. Die Spaltenlänge von vier Quadraten erfasst sie schnell und erklärt, dass diese in der größeren quadratischen Teilfigur viermal enthalten ist. Die kleinere quadratische Teilfigur bezeichnet sie mit „noch mal 2 und noch mal 2“ (siehe Transkriptausschnitt). Mündlich agiert sie mit dem Zwischen-



ergebnis 16 Quadrate zu der ersten Teilfigur und addiert nacheinander jeweils zwei Quadrate.

Eine Anzahl von 43 Datensätzen weist die Notation $16+4$ auf, sodass für diese Variante die Bearbeitungskategorie 1.4 $\sim 16+4$ angelegt wird. Die multiplikativen Teilrechnungen erscheinen hier nicht mehr, es werden direkt die beiden Zwischenergebnisse als Summanden einer Addition notiert. Die relative Häufigkeit dieser Bearbeitungsnotation entspricht 2,2 %, die relative interne Häufigkeit beträgt 7,3 %. Mit Ausnahme eines Aufgabenbearbeiters wird die Teilaufgabe korrekt gelöst. Die Analyse der Bearbeitungsnotationen zeigt, dass hier sechs Varianten zu unterscheiden sind.

In den vorliegenden Datensätzen findet eine Bearbeitung der Aufgabe ebenfalls durch das Zusammensetzen zweier rechteckiger Teilfiguren statt. Es bestätigen sich die theoretisch erarbeiteten Bearbeitungsvarianten 11 bis 20. Im Ganzen wenden 167 Aufgabenbearbeiter, demnach relative 8,6 %, das Bearbeitungskonzept **Fläche - Zusammensetzen horizontal** an. Das richtige Ergebnis ermitteln hier 155 Schüler. Bei der Benennung von Bearbeitungskategorien wird erneut die Vielfalt der Bearbeitungsnotationen gruppiert, um entsprechende Kategorien zu finden.

Insgesamt notieren 105 Kinder eine Rechnung, in der die Flächenermittlung beider Teilfiguren deutlich wird. Somit wird ein relativer interner Anteil von 62,9 % vermerkt. In der Bearbeitungskategorie 2.1 $\sim 2*6+2*4$ kommt in 95 Datensätzen das korrekte Ergebnis auf diesem Wege zustande. Demnach bestätigen sich die Bearbeitungsvarianten 11 bis 16 aufgrund der empirischen Daten. Relativ betrachtet fasst diese Kategorie 5,4 % der Aufgabenbearbeiter, wobei 52 verschiedene Bearbeitungsnotationen gezählt werden.

Einige Aufgabenbearbeiter notieren nicht die beiden Multiplikationen, sondern gleich eine Addition der Teilprodukte. Die Bearbeitungskategorie 2.2 $\sim 12+8$ fasst 34 Aufgabenbearbeitungen zusammen, die allesamt das richtige Ergebnis aufweisen. Somit wählt ein relativer Anteil von 1,8 % diesen Bearbeitungsweg, was einer relativen internen Häufigkeit von 20,4 % entspricht. Es werden sechs Bearbeitungsnotationen unterschieden.

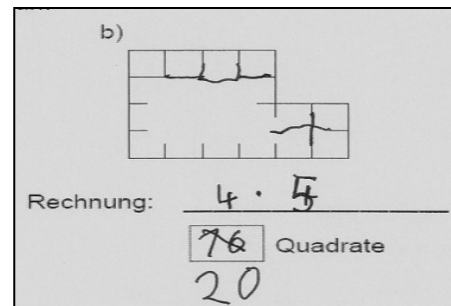
Eine dritte Gruppierung bildet das zeilenweise Zusammensetzen der Gesamtfigur ab. In dieser Bearbeitungskategorie 2.3 $\sim 6+6+4+4$ sind die Bearbeitungsvarianten 17, 19 und 20 inkludiert. Da kein Rechenfehler analysiert wird, entfällt Bearbeitungsvariante 18. Eine entsprechende Rechnung ist in 28 Datensätzen zu finden, was einer relativen Häufigkeit von 1,4 % sowie einer relativen internen Häufigkeit von 16,8 % entspricht. Es geben 26 Kinder das korrekte Ergebnis 20 an, weiterhin existieren zehn differente Bearbeitungsnotationen.

In den Datensätzen sind zahlreiche Aufgabenbearbeitungen zu finden, die zwar auf ein Zusammensetzen der Figur hinweisen, jedoch nicht in die beiden zuvor beschriebenen Bearbeitungskonzepte einzuordnen sind. Somit ist ein weiteres Bearbeitungskonzept **Fläche -**

Zusammensetzen sonstiges notwendig, um diese 404 Bearbeitungen mit stolzen 327 korrekten Lösungen und einem relativen Anteil von 20,8 % zu gruppieren. Innerhalb des Konzeptes können abermals weitere Unterscheidungen getroffen werden.

Die größte Gruppierung des Konzeptes stellt mit insgesamt 300 Bearbeitungen und relativen internen 74,3 % die Bearbeitungskategorie 3.1 ~5*4~ dar. Das entspricht einem relativen Anteil von 15,4 %. Beeindruckend ist die Tatsache, dass alle Datensätze das richtige Ergebnis aufweisen. Dabei sind lediglich 19 differente Bearbeitungsnotationen festzuhalten.

Auch in der Interviewstudie zeigt sich diese Form der Bearbeitung, sodass aufgrund der überraschenden Häufigkeit das folgende Beispiel angeführt wird. Gleich zu Beginn der Teilaufgabe formuliert *Florian*, dass sich diese Figur von der Ersten unterscheidet, da „da noch das dran⁷⁰“ ist. Er überlegt, das kleine Quadrat zunächst außer Acht zu lassen, um später mit den vier darin enthaltenen Einheitsquadraten zu rechnen.



Er zeichnet die Einheitsquadrate der ersten Zeile sowie die des kleinen Quadrates in die Figur ein. Nach kurzem Überlegen und Nachfragen der Interviewerin errechnet *Florian* 16 Quadrate als Ergebnis der größeren Teilfigur.

Beginn Interview Florian Teilaufgabe b) bei 12:55

- 13:20 K: Mm. (K zeichnet erste Zeile Quadrate, tippt dann mit Stift)
 13:31 K: 4 mal 3.....12.....das gibt 16.
 13:45 I: Mh.
 13:46 K schreibt.
 13:49 K schaut auf AB.
 13:56 K tippt auf erste Zeile der Figur.
 13:59 K: 3, das ist dann auch...4 mal 4.
 14:07 K schreibt.
 14:18 K: 1,2,3,4,5 (K tippt mit Stift auf Figur).
 14:22 I: Mh.
 K schreibt.
 14:24 I: OK. Erklärst du mir jetzt noch mal kurz, wie du auf das vier mal vier jetzt gekommen bist?
 14:27 K: Weil da oben (K zeigt mit Stift auf das große Quadrat in Figur b) einfach die Kästchen zählen und dann sind's ja 1, 2, 3 plus das 4 und hier unten das (K zeigt mit Stift auf das kleine Quadrat in Figur b) dann noch.
 14:40 I: Mh.
 14:41 K: Oder ich glaub sogar, das sind 5 mal 4.
 14:46 I: Du kannst auch gerne noch was ändern, wenn du meinst, das stimmt so nicht.
 14:50 K: 5 mal 4

Diese Zahl notiert er als Lösung in dem Textfeld, wobei *Florian* unzufrieden wirkt. Der Junge tippt mit seinem Stift auf die Figur, zählt und schreibt. Bei den Erläuterungen seines Vorgehens wird *Florian* bewusst, dass er die vier Quadrate der zunächst unbeachteten

⁷⁰ Zitat aus Transkript 6, A5, Zeitleiste 13:03

Teilfigur hinzufügen muss. Er revidiert sein Ergebnis, korrigiert die Rechnung in $4 \cdot 5$ und notiert das Ergebnis 20.

In einer weiteren Bearbeitungskategorie 3.2 $\sim 4 \cdot 4$ finden sich Bearbeitungsnotationen zusammen, bei denen aufgrund der unvollständigen Bearbeitung ein fehlerhaftes Ergebnis vermerkt wird. So präsentieren lediglich elf der 66 Drittklässler das richtige Ergebnis 20. Die relative Häufigkeit dieses Vorgehens beträgt 3,4 %, der relative interne Anteil 16,3 %. Insgesamt werden elf verschiedene Bearbeitungsnotationen verzeichnet.

Trotz dieser Differenzierung ist eine zusätzliche Bearbeitungskategorie 3.3 \sim weitere Zusammensetzungen zu eröffnen. Die Datensätze zeigen 38 weitere Aufgabenbearbeitungen, bei denen eine Zuordnung in bereits aufgestellte Kategorien nicht möglich ist. Der relative interne Anteil der Kategorie beträgt 9,4 %, der relative Anteil 2,0 %. Immerhin 16 Kinder notieren das korrekte Ergebnis 20. Mit 36 differenten Bearbeitungsnotationen stellt weitestgehend jede Notation eine individuelle Variante dar.

Mit 108 enthaltenen Schülerbearbeitungen und einem relativen Anteil von 5,6 % stellt das Bearbeitungskonzept **Fläche - Abspalten** das am wenigsten genutzte der sechs Konzepte dar. Mit 52 Kindern kommt knapp die Hälfte der Drittklässler zu einem richtigen Ergebnis.

Ein adäquater Denkweg spiegelt sich in der Bearbeitungskategorie 4.1 $\sim 6 \cdot 4 - 4$ wider, der bereits in der theoretischen Bearbeitungsvariante 21 bedacht wurde. Auch hier sind keine Rechenfehler zu verzeichnen, womit Bearbeitungsvariante 22 sich nicht bestätigt. Mittels der Multiplikation $6 \cdot 4$ wird zunächst die rechteckige Grundfigur berechnet, um anschließend den vorhandenen $2 \cdot 2$ -Ausschnitt zu subtrahieren. Insgesamt arbeiten 35 Kinder auf diesem Weg, was einem relativen Anteil von 1,8 % entspricht. Der relative interne Anteil beträgt 32,4 %. Es werden 18 Bearbeitungsnotationen unterschieden, 30 Kinder ermitteln das richtige Ergebnis.

Mehr als doppelt so viele Aufgabenbearbeiter, genau 73 Kinder, sind der Bearbeitungskategorie 4.2 $\sim 6 \cdot 4$ zugeordnet. Hier wird die theoretische Bearbeitungsvariante 24 inkludiert. Es liegt die bereits zuvor erläuterte Denkstruktur zugrunde, wobei jedoch nur die Berechnung des Rechtecks erfolgt, ohne die nötige Subtraktion auszuführen oder zu notieren. Indiz für eine vergessene Notation ist die Angabe von 22 richtigen Lösungen. Mit einer relativen internen Häufigkeit von 67,8 % sowie einem relativen Anteil von 3,8 % ist die Bearbeitungskategorie nicht unbedeutend.

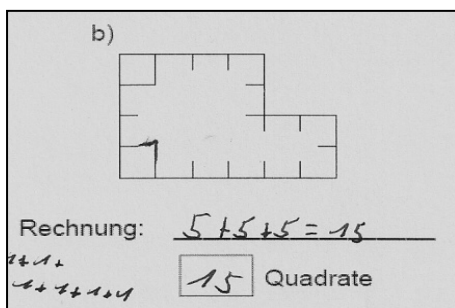
Wie bereits in Teilaufgabe A5a lässt sich auch hier das **Bearbeitungskonzept Umfang** benennen. Dieses inkludiert erneut die Bestimmung des tatsächlichen Umfangs (20), des Außenbandes (16 beziehungsweise 15) oder die Ermittlung der Anzahl von Strichen in der Grafik (16 beziehungsweise 14). Insgesamt finden sich hier 181 Schülerbearbeitungen, also bearbeiten 9,3 % aller Kinder die Aufgabe mit diesem Konzept. Es wird lediglich in

13 Datensätzen das richtige Ergebnis angeführt, was aufgrund des fehlerhaften Aufgabenverständnisses jedoch nicht verwundert.

Die theoretischen Bearbeitungsvarianten 25 bis 28 finden sich neben weiteren Varianten in der Bearbeitungskategorie 5.1 ~Umfang additiv~ wieder. Hier versammeln sich 145 Additionen der meist einzeln aufgeführten Seiten der Figur, wobei Seitenlängen- als auch Rechenfehler erfolgen. Mit relativen internen 80,1 % stellt die Kategorie die größte Gruppierung des Bearbeitungskonzeptes dar. Die relative Häufigkeit beträgt 7,5 % und es werden 101 Bearbeitungsnotationen unterschieden. In elf Datensätzen wird trotz des falschen Denkweges ein korrektes Ergebnis notiert.

Julia liefert ein anschauliches Beispiel dieses Bearbeitungsweges. Die erste Teilaufgabe wird gelöst, indem sie die Quadrate des Außenbandes auszählt und somit einen fehlerhaften Umfang von 22 ermittelt.

Beginn Interview Julia Teilaufgabe b	
1:30:35	I: Kannst du bitte auch herausbekommen, wie viele kleine Quadrate in die zweite Figur hineinpassen?
1:30:39	K tippt mit Stift auf Zwischenfelder gegen den Uhrzeigersinn.
1:30:51	K: Fünfzehn.
1:30:52	K schreibt.
1:30:55	I: Wie bist du auf deine Ergebniszahl 15 gekommen?
1:30:58	K: Genauso wie da (K zeigt mit Stift auf Figur a).
1:31:00	I: Sag noch mal, was das heißt „Genauso wie da“!
1:31:02	K: Mm, ich hab hier (K zeigt mit Finger auf Figur b) die Kästchen wieder zusammen gezählt (K zeichnet Quadrat unten links ein, murmelt dabei unverständlich).
1:31:14	K: Hier, hier ist ein Quadrat...in der komischen Ecke.
1:31:17	I: Mh.
1:31:19	K schreibt.
1:31:29	I: Für welche Rechnung hast du dich hier entschieden?
1:31:32	K: Für die Fünfer-Reihe.
1:31:36	K: 5 plus 5 plus 5.
	I: Warum?
1:31:37	K: Weil die kürzer ist, dann geht's schneller, muss man net so viel schreiben.



Auch den zweiten Aufgabenteil geht *Julia* auf diese Weise an. Sie zählt zunächst die Quadrate des Außenbandes ab, wobei sie jedes Feld nacheinander und gegen den Uhrzeigersinn antippt. Sie erklärt, dass sie „die Kästchen wieder zusammengezählt“ (siehe Transkriptausschnitt) hat und notiert ihre Rechnung. Sie erläutert auf Nachfrage, dass sie sich für eine Rechnung der Fünfer-Reihe entschieden hat, damit sie

nicht so viel zu schreiben hat. Ihren Zählprozess bei Teilaufgabe A5a fixiert *Julia* als fortgesetzte Addition mit dem Summanden 1, für deren Notation sie mehrere Minuten benötigt.

Lediglich 16 Schülerbearbeitungen sind in der Bearbeitungskategorie 5.2 ~Umfang multiplikativ~ zu finden. So wird ein relativer Anteil von 0,8 % und ein relativer interner Anteil von 8,4 % verzeichnet. Vereinzelt bestätigen sich hier die Bearbeitungsvarianten 29 bis 32. Nur einmal ist das richtige Ergebnis fixiert und es werden 14 unterschiedliche Bearbeitungsnotationen vermerkt.

Eine letzte Gruppierung des Bearbeitungskonzeptes Umfang ist mit Bearbeitungskategorie 5.3 ~Umfang andere~ überschrieben. Die darin enthaltenen 20 Schülerbearbeitungen bilden somit einen relativen internen Anteil von 11,1 %, während der relative Anteil mit 1,0 % gering ist. Auch hier ist nur bei einer Bearbeitung das richtige Ergebnis notiert und es werden 16 Bearbeitungsnotationen unterschieden.

Die Datensätze enthalten zahlreiche Schülerbearbeitungen, die sich in keine der bisherigen Bearbeitungskonzepte und -kategorien einreihen lassen. Aus diesem Grund wird ein **Bearbeitungskonzept Anderes** eröffnet. In fünf Bearbeitungskategorien versammeln sich 494 Schülerbearbeitungen, was einem relativen Anteil von 25,4 % entspricht. Insgesamt ist in 254 Datensätzen das richtige Ergebnis abzulesen.

Auch hier wird mit 101 Datensätzen Bearbeitungskategorie 6.1 ~Ergebnis~ eröffnet, in der 55 Kinder die korrekte Zahl 20 auf ihrem Aufgabendokument fixieren. Die relative interne Häufigkeit beträgt 20,5 %, der relative Anteil 5,2 %. Es werden 27 verschiedene Notationen analysiert.

Auch für diese Teilaufgabe existiert der Vollständigkeit halber eine Bearbeitungskategorie 6.1 ~Zeichnung~. Die Aufgabendokumente weisen ausschließlich Zeichnungen der Aufgabenbearbeiter in den Grafiken auf, weitere Notationen sind nicht vorhanden. In dieser Kategorie sind zehn Datensätzen zu finden, womit der relative interne und der relative Anteil mit 2,0 % beziehungsweise 0,5 % äußerst gering ist.

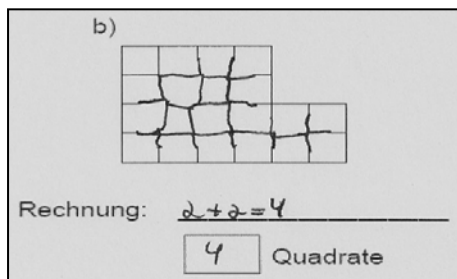
Die Bearbeitungskategorie 6.3 ~sonstige Additionen~ beinhaltet 148 Datensätze, in denen 106 richtige Ergebnisse gezählt werden können. Die relative interne Häufigkeit beträgt 30,0 %, der relative Anteil wird mit 7,6 % verzeichnet. Es sind 60 differente Bearbeitungsnotationen vorhanden. In dieser Bearbeitungskategorie sind zahlreiche schwer zu interpretierende Notationen zu finden. Erneut bietet auch hier die ergänzende Interviewstudie Einblick in die Bearbeitungen, deckt Fehlinterpretationen der Aufgabenstellung auf oder zeigt die kreativen Bearbeitungen der Aufgabe.

So wird *Lea* mit ihrer Notation der Rechnung „ $2+2=4$ “ Bearbeitungskategorie 6.3 ~sonstige Additionen~ zugeordnet. Ein Blick in das Gesprächstranskript zeigt, dass *Lea* die Fragestellung der Aufgabe (*Wie viele kleine Quadrate passen in die Figuren?*) nicht im Sinne der Aufgabenintention deutet. *Lea* interpretiert das Wort ‘in’, indem sie unabhängig von den angedeuteten Quadraten des Außenbandes, die Anzahl der innerhalb der Figur liegenden Quadrate ermitteln möchte. Diese Analyse bestätigt sich durch die Untersuchung

ihrer Bearbeitung zur ersten Teilaufgabe und unterstreicht die Missverständlichkeit der Aufgabenformulierung.

Beginn Interview Lea Teilaufgabe b bei 1:07:41
 1:07:48 K zeichnet Kästchen ein, zunächst Außenband entgegen Uhrzeigersinn, dann Innenfigur gegen Uhrzeigersinn.
 1:08:22 K schaut auf AB.
 1:08:28 K: Vier.
 1:08:30 I: Mh.
 1:08:31 K: Weil die anderen (K zeigt mit Finger in Figur b) musst ich ja nur noch so ehm nur in die Reihe, die waren ja schon halb da.
 1:08:37 I: Mh. Wenn das dein Ergebnis ist, trag's unten wieder ein.
 1:08:42 K schreibt.
 1:08:44 I: Findest du hierzu eine Rechnung?
 1:08:46 K: Ich hab einfach ehm ehm das waren zwei (K zeigt mit Finger in Figur b) und da hab ich noch mal zwei dazu und das waren dann vier.

Nachdem *Lea* die Figur zu Teilaufgabe A5b zeichnerisch mit Quadraten ausgefüllt hat,



blickt sie auf das Arbeitsblatt und formuliert mündlich ihre Ergebniszahl vier. Sie erklärt, dass die anderen „ja schon halb da“ (siehe Transkriptausschnitt) waren. Die bereits angedeuteten und von ihr nur vervollständigten Quadrate gehören somit nicht zum gefragten Ergebnis. So ergänzt *Lea* lediglich die vier vollständigen Quadrate der Innenfigur - eben zwei und nochmals zwei - und formuliert hieraus ihre vermerkte Addition.

Ebenso gruppieren sich 161 multiplikative Schülerbearbeitungen in der Bearbeitungskategorie 6.4 ~sonstige Multiplikationen~. Hier notieren 72 Drittklässler das richtige Ergebnis und es werden 87 Bearbeitungsnotationen unterschieden. Die Häufigkeiten entsprechen einem relativen internen Anteil von 32,6 % sowie einem relativen Anteil von 8,3 %.

Eine letzte Bearbeitungskategorie 6.5 ~Weiteres~ nimmt die verbleibenden 74 Schülerbearbeitungen auf. Diese sind objektiv keiner der übrigen Gruppierungen zuzuordnen, was anhand 74 individueller Bearbeitungsnotationen belegt wird. Die relative interne Häufigkeit beträgt 15,0 %, der relative Anteil 3,8 %. In dieser Kategorie formulieren 21 Aufgabenbearbeiter das korrekte Ergebnis.

8.2.6 Zusammenschau der Bearbeitungskategorien Teilaufgabe A5b

Die Rationale Aufgabenanalyse erbringt vier theoretische Bearbeitungskonzepte mit 34 detaillierten Bearbeitungsvarianten. Als Ergebnis der Empirischen Aufgabenanalyse werden nun sogar sechs Bearbeitungskonzepte mit 20 verschiedenen Bearbeitungskategorien beschrieben. Dabei finden sich bis auf sieben Ausnahmen die übrigen 27 Bearbeitungsvarianten in dem aufgestellten Kategoriensystem wieder, elf weitere Bearbeitungskategorien werden ergänzt.

Das theoretische Bearbeitungskonzept Fläche - Zusammensetzen bestätigt sich. Aufgrund der auftretenden Häufigkeiten und den vorgefundenen Differenzierungen werden die drei Bearbeitungskonzepte Fläche - Zusammensetzen vertikal, Fläche - Zusammensetzen horizontal sowie Fläche - Zusammensetzen sonstiges weiterführend unterschieden. Im Rahmen des **Bearbeitungskonzeptes Fläche - Zusammensetzen vertikal** erfolgt aufgrund der Vielfalt der Bearbeitungsnotationen eine Differenzierung der Kategorien $\sim 4 \cdot 4 + 2 \cdot 2 \sim$, $\sim 4 \cdot 4 + 4 \sim$ und $\sim 16 + 4 \sim$. Die vierte Bearbeitungskategorie $\sim 4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 \sim$, also das spaltenweise Zusammensetzen, bestätigt sich hingegen nur bedingt. Hingegen sind keine der drei fehlerhaften Bearbeitungsvarianten aufzufinden. Um den Notationen des **Bearbeitungskonzeptes Fläche - Zusammensetzen horizontal** gerecht zu werden, eröffnen sich auch hier zwei Bearbeitungskategorien $\sim 2 \cdot 6 + 2 \cdot 4 \sim$ und $\sim 12 + 8 \sim$. Ein zeilenweises Zusammensetzen gemäß der konstruierten Bearbeitungsvariante $\sim 6 + 6 + 4 + 4 \sim$ bestätigt sich, wobei auch hier die Variante der auftretenden Rechenfehler entfällt. Das **Bearbeitungskonzept Fläche - Zusammensetzen sonstiges** mit seinen drei Bearbeitungskategorien wird bei der Konstruktion von Bearbeitungsvarianten noch nicht bedacht, validiert sich jedoch aufgrund seiner Häufigkeit von 20,7 % in Bezug zu sämtlichen untersuchten Datensätzen. Es enthält die Bearbeitungskategorien $\sim 5 \cdot 4 \sim$, $\sim 4 \cdot 4 \sim$ und $\sim \text{weitere Zusammensetzungen} \sim$. Die übrigen Kategorien des **Bearbeitungskonzeptes Fläche - Abspalten** bestätigen sich mit Ausnahme der Bearbeitungsvariante zu Rechenfehlern in den Bearbeitungskategorien $\sim 6 \cdot 4 - 4 \sim$ und $\sim 6 \cdot 4 \sim$.

Erneut bestätigt sich die Annahme, dass Kinder die Teilaufgabe mithilfe des **Bearbeitungskonzeptes Umfang** lösen. Hier werden in der Bearbeitungskategorie Umfang additiv die theoretischen Bearbeitungsvarianten inkludiert, bei denen die einzelnen Seiten der Figur verwendet werden. Zahlreiche Modifizierungen in den Bearbeitungsnotationen werden analysiert. Das gilt ebenso für die Bearbeitungskategorie Umfang multiplikativ, in der die Seiten der Figur als Multiplikation zusammengefasst werden. Darüber hinaus existiert eine Bearbeitungskategorie mit anderen Umfangberechnungen.

Ein zusätzliches Bearbeitungskonzept, das **andere Bearbeitungen** auffängt, ist auch bei der Analyse der Teilaufgabe A5b unabdingbar. Ähnlich wie in der ersten Teilaufgabe gibt es Schülerbearbeitungen, die lediglich die Notation einer Ergebniszahl oder eine Zeichnung in der Grafik aufweisen. Alle weiteren Bearbeitungsnotationen lassen sich erneut gruppieren, sodass zusätzliche Bearbeitungskategorien für sonstige Additionen, sonstige Multiplikationen und andere Bearbeitungen aufgestellt werden.

Der zählende Bearbeitungsweg lässt sich auch bei dieser Teilaufgabe anhand der schriftlichen Bearbeitungen nicht als eigenständiges und nachweisbares Bearbeitungskonzept formulieren.

8.2.7 Überblick über die Interviewstudie Teilaufgabe A5b

Grundlage der Untersuchung bilden die bereits in Abschnitt 8.2.4 genannten 28 halbstandardisierten Interviews. Die schriftlichen Notationen der Kinder sowie ihre verbalen Äußerungen im Interviewgespräch werden abermals zunächst unabhängig voneinander in das aufgestellte Kategoriensystem eingeordnet. Es erfolgt die Darstellung eines Vergleichs der Zuordnungen, bei welchem wiederum drei Gruppen erkennbar sind.

Sowohl die schriftlichen als auch mündlichen Bearbeitungen von sieben Kindern sind jeweils in identischen Bearbeitungskategorien zu finden.

Sandra setzt die Gesamtfigur horizontal zusammen, womit ihre Bearbeitung eindeutig Bearbeitungskategorie 1.3 $\sim 4+4+4+4+2+2$ zugeordnet wird. Auch verbal erläutert sie ihren Bearbeitungsweg als ein spaltenweises Zusammensetzen der Figur. Vertikal zusammengefügt wird die Gesamtfigur hingegen von *Marco*. Auch in seinen Dokumentationen wiederholt sich die Bearbeitungskategorie 2.1 $\sim 2*6+2*4$ eindeutig und er erklärt seine formulierte Rechnung. *Florian* nutzt, wie im vorherigen Abschnitt illustriert, mit der Bearbeitungskategorie 3.1 $\sim 5*4$ eine weitere Variante des Konzeptes Fläche zusammensetzen und notiert die Rechnung $5*4$. Mithilfe des Transkriptes wird deutlich, welche Überlegungen nach anfänglichem Zögern hinter seiner Notation stehen. *Gabriele* setzt die Gesamtfigur auf individuelle Weise zusammen, was sie in ihrer Rechnung $5+5+5+2+2$ ausdrückt und entspricht somit Bearbeitungskategorie 3.3 \sim weiteres Zusammensetzen.

Auch das Bearbeitungskonzept Umfang, explizit Bearbeitungskategorie 5.1 \sim Umfang additiv, findet sich in der Interviewserie wieder. *Andreas* fasst seine mündlich präsentierten Überlegungen zur Ermittlung des Außenbandes mithilfe der Addition $12+4=16$ zusammen. Abgeschlossen wird diese erste Gruppe von *Jennifer* und *Tatjana*, die Bearbeitungskategorie 6.5 \sim Weiteres zugeordnet werden. Während *Jennifer* den Flächeninhalt auszählt und ihr Vorgehen entsprechend in Worten notiert, erarbeitet *Tatjana* sich einen individuellen und kreativen Bearbeitungsansatz.

Die Analyse zeigt weiterhin, dass sich bei zwölf Kindern eine Einordnung der schriftlichen und mündlichen Äußerungen innerhalb eines Bearbeitungskonzeptes verlagert. Die Schriftdokumente von *Steffi*, *Samuel*, *Kathrin*, *Steffen*, *Julia*, *Benedikt* und *Nadine* finden sich eindeutig in Bearbeitungskategorie 5.1 \sim Umfang additiv wieder. Alle Kinder notieren additive Rechnungen, die deutlich auf das Bearbeitungskonzept Umfang hinweisen. Die Analyse der Interviews zeigt, dass alle sieben Kinder ihre Ergebnisse auszählen und retrospektiv eine Rechnung zu der ermittelten Ergebniszahl formulieren. *Steffi* und *Samuel* zählen die Striche, durch die weitere Randquadrate angedeutet werden. Die übrigen Kinder ermitteln die Anzahl der Quadrate des Außenbandes. *Anna-Lena* und *Lenka* notieren lediglich eine Ergebniszahl, repräsentieren also Bearbeitungskategorie 6.1 \sim Ergebniszahl. In *Anna-Lenas* Interview wird deutlich, dass sie die Quadrate der Innenfigur auszählt, hier also eine Verschiebung in Bearbeitungskategorie 6.5 \sim Weiteres stattfindet. *Lenka* hingegen zählt die Quadrate des Außenbandes aus, deren Anzahl sie mit den Quadraten der Innenfigur addiert. Somit wird sie ebenfalls dieser Bearbeitungskategorie zugeordnet. Die additiven Notationen einer weiteren Gruppe von fünf Kindern - *Luisa*, *Claudia*, *Norman*,

Lea und *Silvia* - sind in Bearbeitungskategorie 6.3 ~sonstige Additionen~ eingeordnet, da auf Grundlage der Ergebniszahl 20 keine Zuweisung in ein anderes Bearbeitungskonzept möglich ist⁷¹. Erst eine Analyse der Gespräche zeigt, dass alle fünf Kinder in Bearbeitungskategorie 6.5 ~Weiteres~ einzureihen sind, wobei unterschiedliche Bearbeitungswege deutlich werden. *Claudia* und *Norman* zählen den Flächeninhalt der Figur aus, während *Lea* nur die Anzahl der Quadrate der Innenfigur ermittelt. *Luisa* und *Silvia* erhalten ihre Ergebnisse, indem sie Außenband und Innenfigur auszählen.

Bei sieben Kindern ist aufgrund der Synopse von schriftlicher und mündlicher Bearbeitung eine Verschiebung in ein gänzlich anderes Bearbeitungskonzept notwendig. Anhand der Transkripte wird deutlich, dass die mündlichen Äußerungen von fünf Kindern eindeutig in Bearbeitungskategorie 5.3 ~Umfang weitere~ einzuordnen sind. Alle Kinder gelangen zählend zu einem Ergebnis. *Lukas* notiert die Worte „Ich habe gezählt“, wobei anhand der Ergebniszahl nicht ersichtlich ist, ob er Flächeninhalt oder Umfang bestimmt hat. Im Interview wird deutlich, dass er tatsächlich den Umfang der Figur ermittelt. *Fiona* fixiert die Multiplikation $4*4$, wobei diese Notation Bearbeitungskategorie 3.2 ~ $4*4$ ~ entspricht. Das Interview zeigt, dass sie die Rechnung im Nachhinein formuliert und diese nicht ihrem tatsächlichen Vorgehen, dem Auszählen des Außenbandes, entspricht. Auch *Artur* und *Lennox* zählen die Anzahl der Quadrate des Außenbandes aus, wobei schriftlich ausschließlich eine Ergebniszahl beziehungsweise eine Multiplikation notiert wird. *Franziska* Notation $18+1$ ist in Bearbeitungskategorie 6.3 ~sonstige Additionen~ zu finden. Wie auch andere Kinder der Interviewstudie zählt das Mädchen die abgebildeten Striche. *Anna* scheint aufgrund ihrer Notation den Umfang der Figur additiv zu ermitteln. Doch die Bearbeitungskategorie 5.1 ~Umfang additiv~ bestätigt sich aufgrund des Interviews nicht, da ihr Bearbeitungsweg undeutlich ist und somit Bearbeitungskategorie 6.5 ~Weiteres~ zugeschrieben wird. *Andreas* Rechnung $4*5$ weist eindeutig auf Bearbeitungskategorie 3.1 ~ $5*4$ ~ hin. Nach der Analyse des Interviews ist jedoch eine Verlagerung in Bearbeitungskategorie 6.5 ~Weiteres~ nötig.

8.3 Zusammenführung der Bearbeitungswege Teilaufgaben A5a und A5b

Im Folgenden wird der Blick auf die erstellten Kontingenztafeln gerichtet, die einen Überblick über die Bearbeitungskonzepte beider Teilaufgaben ermöglichen. Hierzu werden sämtliche Datensätze herangezogen, aus denen die Bearbeitung beider Teilaufgaben abzulesen ist (N=1946). Es folgt eine Auszählung der paarweisen Kombinationen der Bearbeitungskonzepte zu jedem Aufgabenbearbeiter und die Abbildung der absoluten Häufigkeiten in verschiedenen Übersichten. Diese bieten Hinweise für die Konsequenz des verfolgten Bearbeitungsweges über beide Teilaufgaben hinweg. Zunächst werden die zeilenweise größten Häufigkeiten betrachtet. Neben den in Klammern genannten absoluten Häufigkeiten werden ebenfalls die relativen Häufigkeiten in Prozent angegeben⁷².

⁷¹ Anmerkung: In Teilaufgabe A5b betragen sowohl Flächeninhalt als auch Umfang 20 Quadrate.

⁷² Die Kontingenztafel mit allen Häufigkeitsangaben befindet sich im Anhang.

Bearbeitungskonzepte A5a	Bearbeitungskonzepte A5b						
	1. Fl ZS - ver	2. Fl ZS - hor	3. Fl ZS - son	4. Fl Absp	5. Umfang	6. Anderes	Summe _z
1. Fl- multi	39,1 % (567)	9,9 % (143)	25,8 % (374)	7,3 % (106)	2,6 % (37)	15,3 % (222)	100 % (1449)
2. Fl- add	12,6 % (21)	10,2 % (17)	7,8 % (13)	0,0 % (0)	5,4 % (9)	64,1 % (107)	100 % (167)
3. Umfang	1,2 % (2)	1,8 % (3)	3,7 % (6)	0,0 % (0)	74,2 % (121)	19,0 % (31)	100 % (163)
4. Anderes	1,2 % (2)	2,4 % (4)	6,7 % (11)	1,2 % (2)	8,4 % (14)	80,2 % (134)	100 % (167)

Tabelle 6: Kontingenztafel Aufgabe A5 mit markierten Zeilenhäufigkeiten und der Darstellung absoluter Häufigkeiten in Anzahlen und Prozent.

Mit Blick auf die vierte und fünfte Zeile der Kontingenztafel fällt auf, dass sich hier die größten Häufigkeiten innerhalb des jeweiligen Bearbeitungskonzeptes treffen. 74,2 % der Aufgabenbearbeiter, die Teilaufgabe A5a mithilfe des Bearbeitungskonzeptes Umfang lösen, kommen auch mit einem solchen Bearbeitungsweg bei Teilaufgabe A5b zu einem Ergebnis.

Den Tabellenwerten lässt sich Ähnliches für das Bearbeitungskonzept Anderes entnehmen. Hier sind es knapp 80,2 %, die bei beiden Teilaufgaben in dieser Gruppe zu finden sind. Die eindeutig größte Häufigkeit bei einer Bearbeitung der ersten Teilaufgabe mittels des Bearbeitungskonzeptes Fläche multiplikativ ist in Kombination mit einer Bearbeitung der Teilaufgabe A5b anhand eines vertikalen Zusammensetzens der Gesamtfigur zu verzeichnen. Knapp 39,1 % der multiplikativen Aufgabenbearbeitungen finden sich in dieser Gruppe wieder.

Interessant ist die Beobachtung, dass nur wenige Bearbeitungen der Teilaufgabe A5a im Sinne einer additiven Flächenberechnung in einem der vier Flächenkonzepte der zweiten Teilaufgabe wiederzufinden sind. Die größte Häufigkeit ist hier mit 64,1 % in Kombination mit dem Bearbeitungskonzept Anderes zu finden. Es wird vermutet, dass diese Aufgabenbearbeiter ihre additive Rechnung in der Retrospektive formuliert haben und das Flächenkonzept nicht bewusst angewendet haben.

Die zuvor getroffenen Aussagen bestätigen sich mit dem Abgleich der Spaltenhäufigkeiten und werden weiter ausgeführt.

Bearbeitungskonzepte A5a	Bearbeitungskonzepte A5b					
	1. Fl ZS - ver	2. Fl ZS - hor	3. Fl ZS - son	4. Fl Absp	5. Umfang	6. Anderes
1. Fl- multi	95,8 % (567)	85,6 % (143)	92,6 % (374)	98,2 % (106)	20,4 % (37)	44,9 % (222)
2. Fl- add	3,6 % (21)	10,1 % (17)	3,2 % (13)	0,00 % (0)	5 % (9)	21,7 % (107)
3. Umfang	0,3 % (2)	1,8 % (3)	1,5 % (6)	0,00 % (0)	66,9 % (121)	6,3 % (31)
4. Anderes	0,3 % (2)	2,4 % (4)	2,7 % (11)	1,2 % (2)	7,7 % (14)	27,1 % (134)
Summe _{sp}	100 % (592)	100 % (167)	100 % (404)	100 % (108)	100 % (181)	100 % (494)

Tabelle 7: Kontingenztafel Aufgabe A5 mit markierten Spaltenhäufigkeiten und der Darstellung absoluter Häufigkeiten in Anzahlen und Prozent.

Auch diese Perspektive bestätigt explizit die Konsequenz des Bearbeitungskonzeptes Umfang: 66,9 % der Ausgabenbearbeiter, die in Teilaufgabe A5b diesen Bearbeitungsweg wählen, wenden ihn ebenfalls in der ersten Teilaufgabe an. Die prinzipielle Annahme, dass Bearbeitungskonzepte des Flächeninhaltes über die Aufgabe hinweg ebenfalls beibehalten werden, verstärkt sich. Bei allen entsprechenden Bearbeitungskonzepten zu Teilaufgabe A5b ist die deutliche Affinität mit dem Bearbeitungskonzept Fläche multiplikativ in Teilaufgabe A5a herausstechend. Die relativen Häufigkeiten liegen hier bei wenigstens 85,6 % und steigen bis 98,8 % an. Fasst man die Aufgabenbearbeitungen der Flächenkonzepte zusammen, erhält man folgendes Ergebnis: Von den 1271 Aufgabenbearbeitungen der zweiten Teilaufgabe finden sich 93,6 %, also 1190 Datensätze, im Bearbeitungskonzept Fläche multiplikativ der ersten Teilaufgabe wieder⁷³.

Wird zuvor aus der Perspektive der Teilaufgabe A5a die häufigste Kombination mit dem Bearbeitungskonzept Anderes und dem entsprechenden Konzept der zweiten Teilaufgabe verzeichnet, findet nun eine leichte Verschiebung statt. Knapp 44,9 % der Aufgabenbearbeiter, die sich bei Betrachtung der zweiten Teilaufgabe in diesem Konzept wiederfinden, bearbeiten Teilaufgabe A5a mittels des Bearbeitungskonzeptes Fläche multiplikativ.

Zusammenfassend ist also festzuhalten, dass die Aufgabenbearbeiter ihr Bearbeitungskonzept über beide Teilaufgaben betrachtet, weitestgehend beibehalten. Mit Blick auf die Kontingenztafel der Interviewstudie bestätigt sich diese Annahme. Die Übersicht stellt die Bearbeitungskonzepte der mündlichen Erläuterungen dar.

Bearbeitungskonzepte A5a	Bearbeitungskonzepte A5b						
	1. Fl ZS - ver	2. Fl ZS - hor	3. Fl ZS - son	4. Fl Absp	5. Umfang	6. Anderes	Summez
1. Fl multi	1	1	1	0	0	1	4
2. Fl add	0	0	1	0	0	1	2
3. Umfang	0	0	0	0	12	1	13
4. Anderes	0	0	0	0	0	9	9

Tabelle 8: Kontingenztafel Aufgabe A5 zur Interviewstudie mit Darstellung absoluter Häufigkeiten.

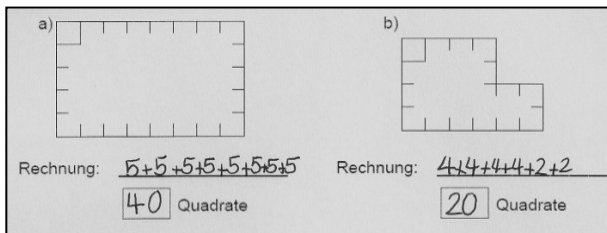
Unabhängig von der Betrachtung auftretender Zeilen- und Spaltenhäufigkeiten werden folgende Erkenntnisse festhalten:

- Kinder, die Teilaufgabe A5a mit dem Bearbeitungskonzept Fläche multiplikativ angehen, arbeiten bei Teilaufgabe A5b ebenfalls mit einem der Flächenkonzepte.
- Alle 12 Kinder, die Teilaufgabe A5a mit dem Bearbeitungskonzept Umfang bearbeiten, führen dies auch in Teilaufgabe A5b weiter.
- Die Bearbeitungen von neun Kindern werden für beide Teilaufgaben dem Konzept Anderes zugeordnet.

⁷³ Die Summe 1190 ergibt sich aus der Addition der Anzahlen 567, 143, 374 und 106 (siehe Tabelle 7).

Darüber hinaus ermöglicht die Interviewstudie einen detaillierten Blick auf die Konsequenz der verwendeten Bearbeitungskategorien. Anhand einiger Beispiele bestätigt sich die konsequente Bearbeitung beider Teilaufgaben erneut. Darüber hinaus ähneln sich auch die Bearbeitungsnotationen in beiden Teilaufgaben auffallend.

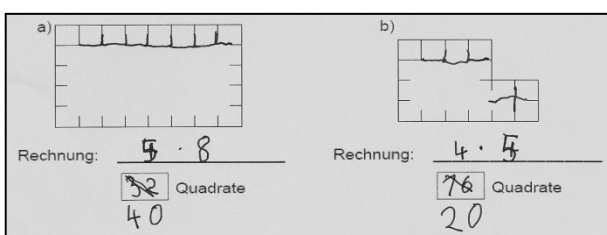
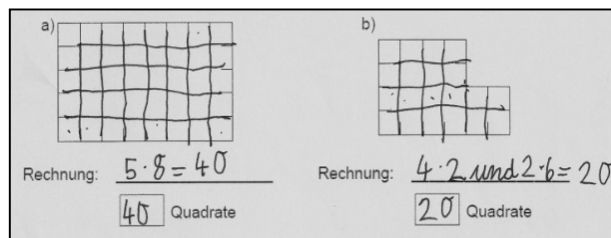
Sandra, *Marco* und *Florian* arbeiten in Teilaufgabe A5a mit dem Bearbeitungskonzept Fläche multiplikativ. Auch die zweite Teilaufgabe lösen diese Kinder mithilfe eines Flächenkonzepts.



Sandra notiert ihre Überlegung zur ersten Teilaufgabe “8 mal 5 sind 40“ als fortgesetzte Addition, bei der die Anzahl der Quadrate pro Spalte als Summand dient. Die zweite Teilaufgabe löst sie mithilfe des vertikalen Zusammensetzens. Auch

hier formuliert das Mädchen eine Variante der fortgesetzten Addition, wobei die einzelnen Summanden jeweils der Anzahl der Quadrate pro Spalte entsprechen.

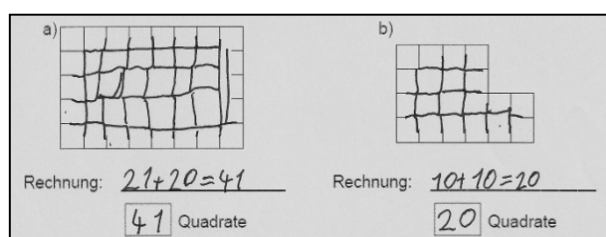
Nachdem *Marco* die Figur zu Teilaufgabe A5a zeichnerisch mit Quadraten ausgefüllt hat, formuliert er seine Rechnung als Multiplikation. Bei der zweiten Teilaufgabe nutzt er ein horizontales Zusammensetzen der Gesamtfigur. Auch diese Überlegungen werden als multiplikative Rechnungen festgehalten.



Florian füllt in beiden Grafiken jeweils die erste Zeile mit Quadraten aus. Ausgehend von seinen Zeichnungen notiert er in Teilaufgabe A5a die Zeilenlänge als Multiplikand. Bei der Benennung des Multiplikators widerfährt ihm zunächst ein

Fehler, den er jedoch im weiteren Verlauf der Bearbeitung selbstständig korrigiert. Ähnlich verfährt *Florian* bei der zweiten Teilaufgabe, wobei die Zeilenlänge nun als Multiplikator der Rechnung fungiert. Da er das angesetzte Quadrat der Figur zunächst unbeachtet lässt, notiert er zunächst auch hier eine fehlerhafte Rechnung, die jedoch zügig korrigiert wird.

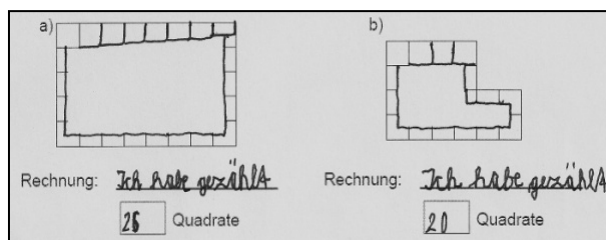
Luisa bestimmt die Fläche der ersten Teilfigur, indem sie eine additive Rechnung notiert. Durch das Gespräch wird deutlich, dass *Luisa* die Anzahl der Quadrate zu Außenband sowie Innenfigur zählend ermittelt und als Summanden notiert. Zuvor zeichnet das Mädchen die Quadrate in die Figur ein, wobei ein undeutliches Gitternetz



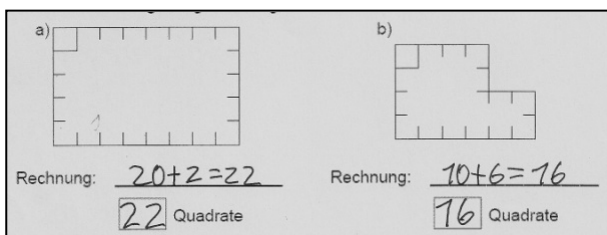
entsteht. In Teilaufgabe A5b geht *Luisa* ebenso vor. Sie zeichnet die Quadrate in die Figur ein, zählt jeweils eine kurze sowie eine lange Zeile zusammen und notiert anschließend die Addition $10+10$.

Die Dokumentationen der zwölf Kinder, die in beiden Teilaufgaben das Konzept Umfang angewendet haben, belegen sowohl die Konsequenz der Bearbeitungskategorien als auch die sich ähnelnde Form der Bearbeitungsnotation. Drei exemplarische Beispiele verdeutlichen dabei die gedankliche Differenzierung des Bearbeitungskonzeptes Umfang.

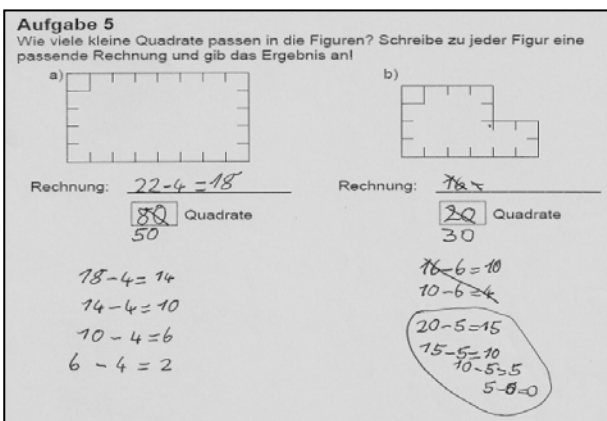
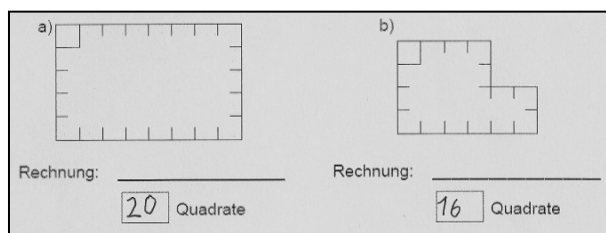
Lukas ergänzt in beiden Teilaufgaben die angedeuteten Quadrate des Außenbandes. Zählend ermittelt er die tatsächlichen Umfänge beider Figuren. Die Formulierung zugehöriger Rechnungen erscheint ihm wenig sinnvoll, sodass er nach Impuls der Interviewerin seine zählende Vorgehensweise in Worten notiert.



Steffis Beispiel zeigt eindrücklich, dass die formale Präsentation der Aufgabe zu einem Abzählen der Striche des Außenbandes verführt (siehe Abschnitt 8.1.1). Sie notiert zunächst ihre Ergebniszahlen, um dann rückblickend eine Rechnung zu konstruieren und diese auf dem Arbeitsblatt zu vermerken.



Auf *Arturs* Dokument sind lediglich zwei Ergebniszahlen vermerkt. Erst das Gespräch gibt Aufschluss, wie der Junge bei der Bearbeitung der beiden Teilaufgaben vorgegangen ist. *Artur* formuliert völlig selbstverständlich, dass er „einfach weitergezählt“⁷⁴ hat, womit er die Anzahl der Quadrate in den Außenbändern der Figuren meint. Rechnungen zu seiner Vorgehensweise kann er nicht formulieren.



Eine weitere kreative und individuelle Bearbeitung der Aufgabe präsentiert *Tatjana*. Sie setzt die Figuren gedanklich aus einzelnen Bändern zusammen. Durch Auszählen bestimmt sie zunächst die Anzahlen der Quadrate in den Außenbändern. Die Anzahlen in den inneren Bändern berechnet *Tatjana*, indem sie jeweils die vier Ecken des vorherigen Bandes

⁷⁴ Zitat aus Transkript 16, A5, Zeitleiste 1:11:37

subtrahiert, „weil dann wird’s ja immer kleiner“⁷⁵. Dies wiederholt sie, bis eine Subtraktion nicht mehr möglich ist und das Ergebnis sich im Bereich der negativen Zahlen befinden würde. Ihre Denkweise behält *Tatjana* bei sämtlichen Berechnungen zur ersten Teilaufgabe konsequent und ohne Fehler bei. Bei der zweiten Teilaufgabe verfährt sie ebenso und auch die Notation von adäquaten Rechnungen gelingt ihr erneut.

8.4 Zeichnungen

Laut dem offiziellen Kommentar zu der Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ sind die in der Aufgabe vorgegebenen Flächen von den Drittklässlern „in der Vorstellung“ (HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a, S. 49) auszufüllen, sodass keine Zeichnungen in die Grafiken eingefügt werden sollen. Hingegen wird nach der zentralen Auswertung der Leistungserhebung in den rückblickenden Anmerkungen eine ebenfalls mögliche Lösung durch Zeichnungen angeführt. Dieser Aspekt findet jedoch weder in den Aufgabenkommentaren noch in den Hinweisen zur Aufgabenlösung und ihrer Bewertung Berücksichtigung.

Die Aufgabenbearbeitungen der Schrift- als auch Interviewdaten ermöglichen eine genaue Analyse des Aspektes Zeichnungen. Es wird untersucht, ob anhand der empirischen Daten Hinweise auf Einflüsse und Zusammenhänge von Zeichnungen auf den Bearbeitungsweg sowie auf das Ergebnis erkennbar sind. Bei der Kategorisierung der Datensätze ist die Präsenz von Zeichnungen und deren Charakterisierung vermerkt worden, sodass Aussagen zu diesem Detail möglich sind.

Eine erste grundlegende Untersuchung der Datensätze offenbart, dass tatsächlich ein Großteil der Drittklässler Einzeichnungen in die Grafiken vornimmt. In Teilaufgabe A5a sind in 1270 von 1975 Dokumenten Zeichnungen vorhanden, was einem relativen Anteil von 64,3 % entspricht. Ähnliches zeigt sich für die zweite Teilaufgabe: Hier finden sich bei 64,1 %, nämlich bei 1248 von 1946 Aufgabenbearbeitern, Einzeichnungen in der Grafik (siehe Anhang).

Zudem lassen sich Aussagen zu der Korrektheit der Datensätze mit Zeichnungen formulieren. In der ersten Teilaufgabe ist in 1003 der oben genannten 1270 Datensätze die korrekte Ergebniszahl 40 vermerkt, womit 79 % der Datensätze mit Zeichnungen die richtige Lösung enthalten. Auch in Teilaufgabe A5b präsentiert sich der Prozentsatz der Aufgabenbearbeitungen mit Zeichnung und richtiger Lösung mit 76,8 % ähnlich. Hier weisen 959 der oben genannten Datensätze mit Zeichnungen die korrekte Ergebniszahl 20 auf. Dabei führt die Verwendung von Zeichnungen bei der Aufgabenbearbeitung häufig zu einem richtigen Ergebnis.

Ausgehend von sämtlichen Datensätzen mit korrektem Ergebnis zeigt die Analyse, dass ein Großteil dieser Aufgabenbearbeitungen Zeichnungen aufweist. So enthält Teilaufgabe A5a bei 1535 Datensätzen mit korrektem Ergebnis in 65,3 % der Bearbeitungen Zeichnungen. Für Teilaufgabe A5b ergibt bei 1368 Datensätzen mit korrektem Ergebnis ein Anteil von 70,1 %. Somit bestätigt sich auch aus dieser Perspektive die Annahme, dass

⁷⁵ Zitat aus Transkript 26, A5, Zeitleiste 1:22:43

Zeichnungen eine Hilfe zur Bearbeitung der Aufgabe mit korrektem Ergebnis darstellen und häufiger als Bearbeitungen ohne Zeichnung ein richtiges Ergebnis aufweisen.

Ferner wird das Verhältnis von Datensätzen mit und Datensätzen ohne Zeichnungen in den einzelnen Bearbeitungskonzepten beider Teilaufgaben untersucht. Das abgebildete Diagramm zeigt zunächst die Relationen in den Gruppen zu Teilaufgabe A5a.

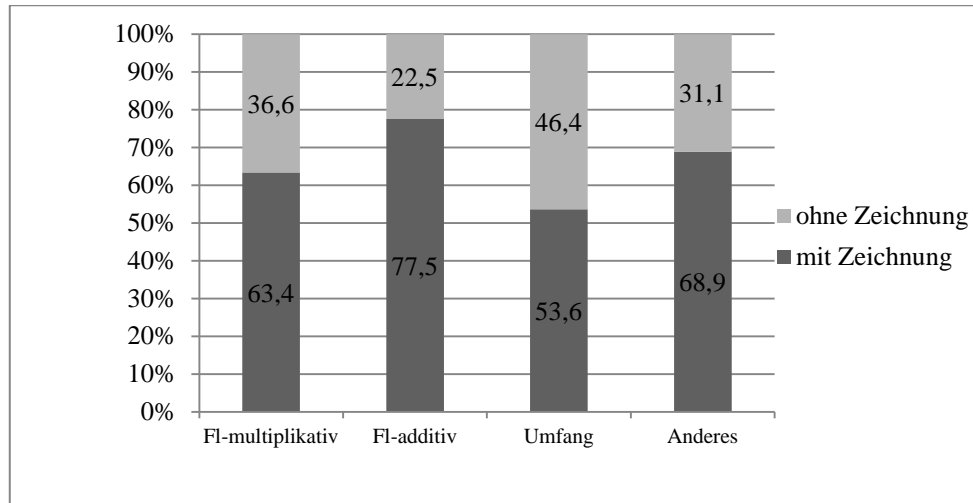


Abbildung 13: Säulendiagramm zum Verhältnis mit Zeichnung/ohne Zeichnung Teilaufgabe A5a.

Zunächst wird festgehalten, dass in allen vier Bearbeitungskonzepten der Anteil der Aufgabenbearbeitungen mit Zeichnungen überwiegt. Die einzelnen Relationen sind jedoch unterschiedlich groß. Der größte Anteil von Aufgabenbearbeitungen mit Zeichnung ist mit 77,5 % in Bearbeitungskonzept Fläche additiv zu verzeichnen. Mit einem Anteil von 68,9 % nur wenig geringer folgt das Bearbeitungskonzept Anderes. Bearbeitungskonzept Fläche multiplikativ weist mit 63,4 % von Bearbeitungen mit Zeichnungen ebenfalls einen großen Anteil auf. Mit immerhin noch 53,6 % ist in Bearbeitungskonzept Umfang der geringste Anteil vorhanden.

Für einen direkten Vergleich der Anteile wird das entsprechende Diagramm zu Teilaufgabe A5b herangezogen.

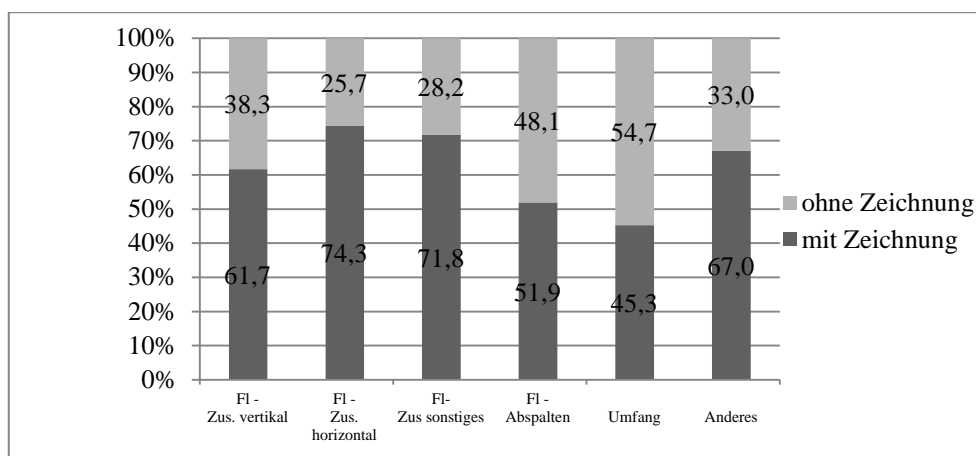


Abbildung 14: Säulendiagramm zum Verhältnis mit Zeichnung/ohne Zeichnung Teilaufgabe A5b.

Anhand der Darstellung wird deutlich, dass auch hier - bis auf eine Ausnahme - der jeweils überwiegende Anteil der Datensätze Zeichnungen enthält. Die Relationen in den drei Flächenkonzepten Zusammensetzen vertikal, Zusammensetzen horizontal und Zusammensetzen sonstiges sind mit 61,7 %, 74,3 % und 71,8 % ähnlich wie die zuvor dargestellten Werte der beiden Flächenkonzepte in Teilaufgabe A5a. Auch das Bearbeitungskonzept Anderes weist mit 67,0 % ein ähnliches Verhältnis auf. Im Flächenkonzept Abspalten arbeiten mit 51,9 % noch knapp über die Hälfte der Drittklässler mit Zeichnungen. Das Bearbeitungskonzept Umfang liefert erneut den geringsten Anteil, wobei der Wert bei dieser Teilaufgabe mit 45,3 % sogar knapp unter der Hälfte liegt.

Nicht nur die Ermittlung der Häufigkeiten, sondern auch eine Charakterisierung der Zeichnungen ist Bestandteil der Untersuchung. Die vorgenommenen Einzeichnungen weisen durchaus Unterschiede auf, wobei die beiden typischsten Varianten nachfolgend exemplarisch dargestellt werden.

Häufig werden die auf dem Aufgabenbogen abgebildeten Flächen zeichnerisch mit Einheitsquadraten gefüllt, sodass ein **Gitternetz** entsteht. Wie in den Abbildungen zu sehen, ist die Ausführung der Zeichnungen qualitativ durchaus verschieden, sodass unterschiedlich präzise Gitter entstehen.

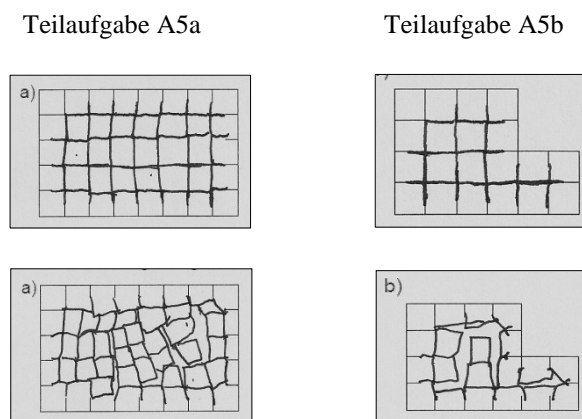


Abbildung 15: Beispiele für Zeichnungen A5 Gitternetz.

Ebenfalls ist in zahlreichen Datensätzen eine zeichnerische Ergänzung der angedeuteten Randquadrate vorhanden. Somit erhalten die Schüler anschließend ein sichtbares **Außenband** der Figuren.

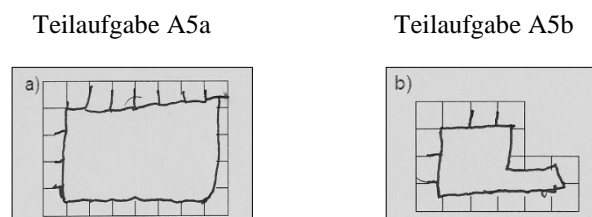


Abbildung 16: Beispiele für Zeichnungen A5 Außenband.

Eine Untersuchung der beiden präsentierten Varianten Gitternetz und Außenband zeigt, dass bei dem Bearbeitungskonzept Umfang in den meisten Dokumenten eben nicht die Einzeichnung des vollständigen Gitternetzes erfolgt ist. Hier werden tatsächlich lediglich die Randquadrate ergänzt. Konkret lassen sich 80 % der vorhandenen Zeichnungen im Bearbeitungskonzept Umfang der Teilaufgabe A5a als eingezeichnetes Außenband ausmachen. Somit ist die Ermittlung des Umfangs quasi initiiert und unterstützt die in Abschnitt 8.1.1 angeführte Kritik an der formalen Präsentation der Aufgabe. Auch bei Teilaufgabe A5b sind immerhin 59,8 % der vorgenommenen Einzeichnungen entsprechend einzuordnen.

Im Vergleich dazu werden die Flächenkonzepte der beiden Teilaufgaben betrachtet. Die Flächenkonzepte werden jeweils zusammengefasst und hinsichtlich der vorhandenen Zeichnungen untersucht. So liegen in Teilaufgabe A5a in 89,6 % der Datensätze mit Zeichnungen Gitternetze vor und auch in der zweiten Teilaufgabe ist der Anteil mit 89,5 % fast identisch groß.

Zusammenfassend wird ausdrücklich bestätigt, dass die Mehrheit der Kinder im Rahmen der Aufgabenbearbeitung A5 „Quadrate in Figur“ Zeichnungen einbezieht. Auch bei einer differenzierten Betrachtung der Bearbeitungskonzepte beider Teilaufgaben trifft diese Aussage zu. Darüber hinaus enthalten mehr als 75 % der Aufgabenbearbeitungen mit Zeichnungen das jeweils richtige Ergebnis. In Bezug zu allen korrekten Lösungen ist anzumerken, dass über zwei Drittel dieser Aufgabenbearbeitungen Zeichnungen in den Aufgabendokumenten aufweisen.

Weiterhin lassen sich speziell in den Bearbeitungskonzepten Fläche und Umfang unterschiedliche Zeichnungen charakterisieren. Während in den Bearbeitungskonzepten Fläche fast ausschließlich Gitternetze vorzufinden sind, ergänzen die Schüler in Bearbeitungskonzept Umfang größtenteils die Außenbänder der Figuren. Dies wird auf die angedeuteten Randquadrate der formalen Präsentation zurückgeführt, die bereits an anderer Stelle kritisch erörtert wird (siehe Abschnitt 8.1.1, Formale Perspektive).

8.5 Zusammenfassung und Kennzeichnung der Aufgabe A5

Ein Zusammenschluss der analysierten Auffälligkeiten unter Einbezug der empirischen Daten ermöglicht abschließend eine Kennzeichnung der Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ und eine Einschätzung ihres diagnostischen Potentials.

Der durch das Kultusministerium vorgenommenen inhaltlichen Einordnung der Aufgabe in den Arbeitsbereich Geometrie ist aufgrund der Analyseergebnisse ausdrücklich zu widersprechen. Die empirischen Daten weisen auf zahlreiche weitere Bearbeitungswege der Kinder hin. Auch ohne geometrisches Wissen und Vorkenntnisse zum Flächeninhaltsbegriff ist die vorliegende Aufgabe angemessen lösbar. Aufgrund der geforderten Ergebnisnotation im Sinne einer „passenden Rechnung“ steht der Aufgabenbearbeiter zudem eher vor einer arithmetischen als einer geometrischen Herausforderung.

Auch der Einordnung der Aufgabe in den reproduktiven Anforderungsbereich ist deutlich zu widersprechen. Die Rationale Aufgabenanalyse zeigt, dass von einer Behandlung der Grundlagen zur Flächenberechnung Mitte des dritten Schuljahres nicht selbstredend auszugehen ist. Der hessische Rahmenplan Grundschule sieht dieses Thema für das dritte und vierte Schuljahr vor, wobei statt einer gedanklichen Lösung und einer symbolischen Notation stets aktive Handlungen im Vordergrund stehen sollten. Die Untersuchung der empirischen Daten belegt anhand der Vielfalt und Kreativität der Aufgabebearbeitungen, dass die Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ weit mehr als die Lösung eines bekannten Aufgabenformats zur Flächenberechnung darstellt. Das intendierte Verfahren zur Lösung der Aufgabe ist vielfach unbekannt, sodass ein angemessener Bearbeitungsweg von den Drittklässlern zunächst erarbeitet werden muss. Das äußert sich anhand der vielfältigen Bearbeitungsnotationen, die auf ebenso zahlreiche Bearbeitungswege hinweisen. Die unten abgebildeten Diagramme der ausgeschärften Bearbeitungskonzepte und -kategorien belegen die Bandbreite an unterschiedlichen Herangehensweisen der Schüler. Diese gehen weit über die multiplikative Lösung als Grundaufgabe zum Thema Flächeninhalt hinaus.

Den größten Anteil der Bearbeitung zu Teilaufgabe A5a stellt mit 74,1 % aller Datensätze das Bearbeitungskonzept Fläche multiplikativ dar. Allein in dieser Gruppe vereinen sich jedoch vier Bearbeitungskategorien, die anhand einer multiplikativen Notation in den Aufgabendokumenten vermerkt sind. Auf die Grundidee des Flächeninhaltes lassen ebenso die Datensätze des Bearbeitungskonzeptes Fläche additiv schließen, in dem zahlreiche kreative Lösungswege, wie in Bearbeitungskategorie 2.2 ~Hälften~ oder 2.3 ~Außenband und Innenfigur~, identifiziert werden.

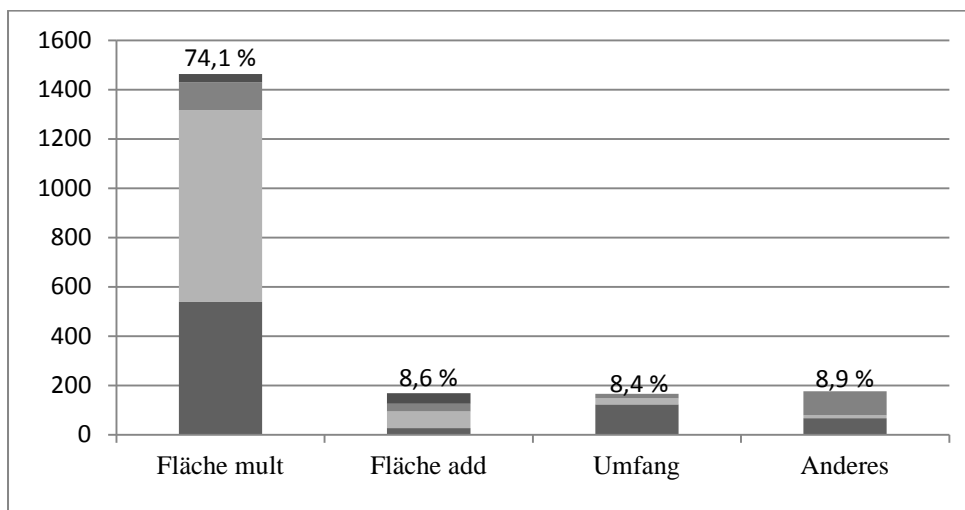


Abbildung 17: Säulendiagramm Bearbeitungskonzepte und -kategorien Teilaufgabe A5a⁷⁶.

⁷⁶ Bearbeitungskonzepte und -kategorien A5a, Nennung aufsteigend

Fläche multiplikativ: $a*b$, $b*a$, Nachbaraufgaben, andere Multiplikationen;

Fläche additiv: fortgesetzte Addition, Hälften, Außenband + Innenfigur, andere Additionen;

Umfang: Umfang additiv, Umfang multiplikativ, Umfang andere

Weiteres: nur Ergebnis, nur Zeichnung, Anderes

Während die erste Teilaufgabe somit zwei Bearbeitungskonzepte zu der Grundidee Flächeninhalt bietet, ist zu Teilaufgabe A5b eine weiterführende Differenzierung möglich. Insgesamt werden 65,3 % der Drittklässler in eines von vier Flächenkonzepten eingeordnet. Aufgrund der auszulegenden Figur der zweiten Teilaufgabe wird hier zwischen verschiedenen Formen des Zusammensetzens oder auch einem Abspalten unterschieden. Eine entsprechende Zuordnung der Datensätze gelingt anhand der Bearbeitungsnotationen eindeutig. In beiden Teilaufgaben ist darüber hinaus jeweils das Bearbeitungskonzept Umfang und Anderes nötig, um den vielfältigen Notationen der Schüler gerecht zu werden.

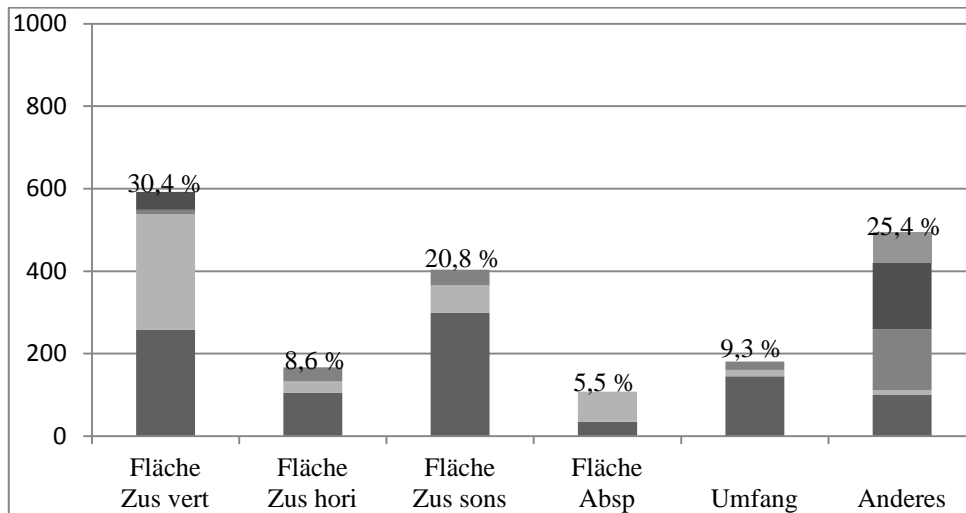


Abbildung 18: Säulendiagramm Bearbeitungskonzepte und -kategorien Teilaufgabe A5b⁷⁷.

Die multiple Lösbarkeit der Aufgabe bestätigt sich anhand der Auswertung der vorliegenden empirischen Daten. So ist die Aufgabe entgegen der Intention des Hessischen Kultusministeriums auf verschiedenen adäquaten Bearbeitungswegen zu lösen.

Aufgrund der Bearbeitungsvielfalt lässt sich auch das schuljahrbezogene Niveau der Aufgabe nicht eindeutig festlegen. Während einige Aufgabenbearbeiter sicher Erfahrungen mit Grundaufgaben zur Flächenberechnung aufweisen, präsentiert sich die Aufgabe für andere Kinder ohne solche Vorerfahrungen als Aufgabe zum Problemlösen. Die Entwicklung adäquater Bearbeitungswege bedeutet dann zunehmend die Anforderungen der Verknüpfung und der Reflexion. Hinzu kommt, dass beide Teilaufgaben ein und demselben Anforderungsbereich zugeordnet werden, womit der nachweislich erhöhten Komplexität der Figur in Teilaufgabe A5b nicht entsprochen wird. Selbst wenn der erste Aufgabenteil ein reproduktives Arbeiten der Kinder verlangt, ist dies nicht selbstredend für den nachfolgenden Aufgabenteil A5b der Fall.

⁷⁷ Bearbeitungskonzepte und -kategorien A5b, Nennung aufsteigend

Fläche-Zusammensetzen vertikal: $4*4+2*2$, $4*4+4$, $4+4+4+4+2+2$, $16+4$;

Fläche-Zusammensetzen horizontal: $2*6+2*4$, $12+8$, $6+6+4+4$;

Fläche-Zusammensetzen sonstiges: $5*4$, $4*4$, anderes Zusammensetzen;

Fläche-Abspalten: $6*4-4$, $6*4$;

Umfang: Umfang additiv, Umfang multiplikativ, Umfang andere;

Weiteres: nur Ergebnis, nur Zeichnung, sonstige Additionen, sonstige Multiplikationen, Anderes

Desgleichen sind die Vorkenntnisse und -erfahrungen weiterhin dafür verantwortlich, ob die Aufgabe für den Schüler eine Verstehens- oder Verfahrensorientierung bedeutet. Wie oben ausgeführt kann sowohl die Entwicklung eines Bearbeitungsweges oder die Ergebnisermittlung durch Anwendung eines bereits bekannten Verfahrens im Vordergrund stehen.

Die inhaltliche Validität der Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ ist demnach nicht gegeben. Für eine diagnostische Nutzung einer Aufgabe ist die inhaltliche Deutlichkeit von besonderer Bedeutung. Sowohl die Voraussetzungen der Bearbeitung als auch der inhaltliche Bezug der Aufgabe sind zu klären, um die Ergebnisse produktiv und handlungsorientiert deuten zu können.

Mit erneutem Blick auf die formale und sprachliche Präsentation zeigt sich, dass sich die in der Rationalen Aufgabenanalyse beschriebenen Auffälligkeiten in den realen Bearbeitungen der Kinder tatsächlich wiederfinden. Die formulierte Aufgabenstellung im Aufgabestamm fordert den Schüler lediglich zur Beantwortung der Frage nach der Anzahl der in die Figur passenden Quadrate und zur Formulierung einer entsprechenden Rechnung auf. Die Aufgabenstellung ist durchaus missverständlich formuliert und ermöglicht verschiedene Interpretationen. Die Analyse der empirischen Daten zeigt zahlreiche adäquate Deutungen und Bearbeitungen der Aufgabenstellung. An dieser Stelle wird auf die angeführten Beispiele der Interviewstudie hingewiesen (siehe bspw. A5a: Silvia, A5b: Lea). So führt die verwendete Formulierung zu angemessenen Bearbeitungen, die jedoch von der ursprünglichen Intention der Aufgabenautoren abweichen.

Die empirische Aufgabenanalyse zeigt, dass die Mehrheit der Drittklässler bei der Bearbeitung der Aufgabe Zeichnungen einfügt, die Einfluss auf die Ergebnisfindung haben. Die Zeichnungen werden unterschiedlich charakterisiert und weisen in ihrer Art durchaus Zusammenhänge mit den verfolgten Bearbeitungswegen auf.

Die geforderte Ergebnisnotation als weiterer Aspekt der formalen Präsentation führt zu einer Unsicherheit der Aufgabenbearbeiter⁷⁸. Das Kultusministerium erwartet eine Fixierung der Rechnung auf der abgebildeten Notationslinie sowie den Vermerk der Ergebniszahl in dem vorgesehenen Textfeld. Entsprechend ist die Bewertung der Aufgabe vorgesehen (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005, S. 55). Häufig werden die Ergebnisse nicht wie in der von den Aufgabenautoren gewünschten Form notiert, sondern sind in verschiedensten Variationen vorhanden.

Weiterhin wird festgehalten, dass das Bearbeitungskonzept Umfang bei beiden Teilaufgaben von knapp zehn Prozent der Aufgabenbearbeiter angewendet wird. Dies ist einerseits auf fehlende inhaltliche Vorkenntnisse zurückzuführen. Allerdings initiiert die grafische

⁷⁸ Anmerkung zur Korrektur der Lehrkräfte: Auch hier sind Unsicherheiten deutlich erkennbar. Häufig wird die volle Punktzahl nur dann erteilt, wenn das Ergebnis der Rechnung zusätzlich in das abgebildete Kästchen eingetragen wird. So erhalten einige Kinder trotz passender Rechnungen mit korrekten Ergebnissen lediglich die Hälfte der zu erreichenden Punktzahl.

Betonung des Außenbandes durch die angedeuteten Quadrate den Fokus auf das Konzept Umfang statt Fläche. Bestätigt wird dies durch die jeweiligen Differenzierungen der Konzepte in den Notationen, aber auch in der bereits erläuterten Unterscheidung Umfang, Außenband und Striche (siehe Abschnitt 8.2.2 und Abschnitt 8.2.5). Ferner zeigt die Untersuchung der angefertigten Zeichnungen, dass in diesem Bearbeitungskonzept mehrheitlich die Außenbänder der Figuren eingefügt werden.

Eine Fehleranalyse ist anhand des Abgleichs von Rechnung und Ergebniszahl ansatzweise möglich. Hier bieten die eingefügten Zeichnungen der Kinder deutliche Hinweise, die bei der Interpretation nützlich sind und der Präzisierung der Bearbeitungswege dienen. Wird bei der Analyse Abstand von einer defizitorientierten Sichtweise genommen, werden die kreativen und individuellen Potentiale der Kinder deutlich erkennbar.

Eine Untersuchung der Konsequenz der Bearbeitungskonzepte in beiden Teilaufgaben mittels erstellter Kontingenztafeln zeigt, dass die Drittklässler das in Teilaufgabe A5a verwendete Bearbeitungskonzept auch in Teilaufgabe A5b weitestgehend weiterführen.

Das diagnostische Potential der Aufgabe „Quadrate in Figur“ wird mit Blick auf die Bearbeitungswege der Drittklässler hoch eingestuft. Jedoch erlaubt die Aufgabe kaum Aussagen über die geometrischen Kompetenzen der Kinder, da einer ausschließlichen Einordnung in diesen Inhaltsbereich deutlich widersprochen wird. Aufgrund der formalen Präsentation der Aufgabe und der geforderten Ergebnisnotation stellt die Aufgabe eher arithmetische Anforderungen an die Bearbeitung. Die inhaltliche Undeutlichkeit und die unterschiedlichen Vorkenntnisse der Schüler führen zu einer möglichen Anforderung der Aufgabe von Reproduktion bis hin zur Reflexion. Weiterhin ist die formale Präsentation der Aufgabe durch die angedeuteten Randquadrate der Figuren für das Bearbeitungskonzept Umfang verantwortlich, da der Blick des Aufgabenbearbeiters deutlich auf das Außenband gelenkt wird. Ein Abgleich sowie eine Fehleranalyse der notierten Ergebnisse und Rechnungen ist möglich. Weiterführende Einblicke in die Denkwege der Kinder bietet die Kombination mit vorliegenden Zeichnungen, die in der Aufgabenstellung jedoch nicht ausdrücklich gefordert sind. Es zeigt sich, dass diese die Lösungsfindung der Aufgabe positiv beeinflussen. Ferner zeigen die Kontingenztafeln zu den Bearbeitungskonzepten, dass die Bearbeitungswege über die beiden Teilaufgaben hinweg weitestgehend beibehalten werden.

9 Darstellung der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse A8 „Zucker“

Die Aufgabe A8 „Zucker“

Aufgabe 8
In vielen Lebensmitteln versteckt sich Zucker:

	Gewicht	Zuckeranteil
Schokokuss	25 g	15 g
Cornflakes	200 g	18 g
Schokolade	100 g	60 g
1 Flasche Ketchup	800 g	150 g

Paul behauptet: „In Schokolade ist genau so viel Zucker drin wie in Schokoküssen.“

a) Hat Paul Recht? ja nein

b) Begründe deine Antwort!

Abbildung 19: Aufgabe A8 „Zucker“ der hessischen Orientierungsarbeit 2005.

9.1 Rationale Aufgabenanalyse A8 „Zucker“ mit Konstruktion von Bearbeitungsvarianten

9.1.1 Die Analyseperspektiven

Anmerkungen des Hessischen Kultusministeriums⁷⁹

Dem *Aufgabenkommentar* zur vorliegenden Aufgabe A8 „Zucker“ wird eine Zuordnung zu dem Arbeitsfeld Größen und Sachrechnen entnommen. Das Hessische Kultusministerium beschreibt die Anforderung der Aufgabe als Reflexion und Verallgemeinerung, womit ein Strukturieren, Beurteilen und Verallgemeinern impliziert wird. Konkret soll der Schüler die in der Tabelle präsentierten Informationen zueinander in Beziehung setzen und interpretieren. Daraufhin ist die vorgegebene Aussage zu beurteilen und eine Begründung für die getroffene Entscheidung zu formulieren.

Gemäß der intendierten *Aufgabenlösung* ist die Aussage zu bestätigen, also das Kreuz in Teilaufgabe A8a bei ‘Ja’ zu setzen. Als Begründung hierfür wird ein relativer Vergleich herangezogen: Die Schokolade wiegt viermal so viel wie der Schokokuss, also ist auch viermal so viel Zucker in ihr enthalten. Demnach ist der Zuckeranteil beider Lebensmittel

⁷⁹ Die folgenden Darstellungen beruhen auf den offiziellen Ausführungen des Hessischen Kultusministeriums zur ersten hessenweiten Durchführung der Orientierungsarbeiten (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005a).

identisch und die Aussage ist korrekt. Der Schüler sollte in Teilaufgabe A8b folgende Rechnung für seine Begründung heranziehen:

$$\begin{array}{r} 25 \text{ g} \quad 15 \text{ g} \\ \downarrow \bullet 4 \quad \bullet 4 \downarrow \\ 100 \text{ g} \quad 60 \text{ g} \end{array}$$

Auf Grundlage dieser Musterlösung erfolgt die *Aufgabenbewertung*. Unabhängig von der in Teilaufgabe A8b notierten Begründung wird in der ersten Teilaufgabe ein Punkt für ein bei 'Ja' gesetztes Kreuz vergeben. Die anschließende Erklärung ist mit bis zu zwei Punkten zu bewerten. Hierzu erfolgt der vage Hinweis, dass der Schüler den Bezug der Zuckermenge zu der Gesamtmenge anführen sollte. Durch einen jeweiligen Vergleich der beiden Mengen wird das höhere Gewicht der Schokolade gegenüber dem Schokokuss deutlich.

Somit sind im Ganzen drei Punkte zu erhalten. Die *Ergebnisdarstellung* der landesweiten Durchführung zeigt einen hessischen Durchschnitt von 0,45 Punkten, was einem mittleren Lösungsprozentsatz von lediglich 15 % entspricht.

Rückblickend wird in den Ausführungen zu *Schwierigkeiten und Anforderungen* vermerkt, dass es sich bei der Aufgabe um eine Sachsituation mit proportionaler Zuordnung handelt. Die Aufgabenautoren räumen ein, diesen Fakt bei der Aufgabenkonstruktion nicht bedacht zu haben. Die Lehrer kritisieren weiterhin, dass das Interpretieren von Daten sowie das Bewerten von Aussagen ein für die Grundschule noch neues Aufgabenformat sei. Das Erkennen von Zusammenhängen bei proportionalen Zuordnungen kommt im Unterricht der Grundschule kaum vor. Ergo wird die vorliegende Aufgabe als nicht altersgemäß, zu schwer und außerhalb der eigentlichen Unterrichtsinhalte beurteilt.

Zielperspektive Diagnose

Unabhängig von den Bearbeitungswegen beider Teilaufgaben wird offensichtlich eine *Verstehensorientierung* bezweckt. Eine Interpretation und Beurteilung der vorliegenden Informationen ist unumgänglich, um sich eine Meinung bezüglich der präsentierten Aussage bilden zu können und diese anschließend zu begründen. Der Einsatz bekannter Rechenverfahren ohne eine vorherige Strukturierung der Aufgabe führt zu keiner Lösung. Die Aufgabe ist somit prozessorientiert, da die Aufgabenbearbeitung und das zugrunde liegende Verständnis des Schülers anhand der getroffenen Entscheidung sowie der notierten Begründung transparent werden sollen.

Ob dieser Intention mit der faktischen Aufgabenkonstruktion tatsächlich entsprochen wird, geht die Frage nach der *inhaltlichen Validität* der Aufgabe nach. Bezüglich Teilaufgabe A8a wird angemerkt, dass die inhaltliche Validität deutlich zu verneinen ist. Der Schüler kann sich bei Setzen des Kreuzes zwischen zwei Möglichkeiten entscheiden, ohne sich mit dem Inhalt der Aufgabe auseinanderzusetzen. Ein Verständnis der Aufgabenstellung oder eine anschließende Begründung für die getroffene Entscheidung ist für Teilaufgabe A8a

zunächst vollkommen irrelevant. Das zeigt sich ebenfalls in der zuvor erläuterten Aufgabenbewertung: Bestätigt ein Schüler durch sein gesetztes Kreuz die zu beurteilende Aussage, liefert jedoch in der zweiten Teilaufgabe keine Begründung, so erhält er dennoch einen Punkt. Dieser Punkt entspricht immerhin einem Drittel der hier insgesamt zu erreichenden Punktzahl. Da der Schüler gefordert ist, seine Meinung zu begründen und Argumente zu liefern, wird Teilaufgabe A8b dagegen in sich valide genannt. Damit wird der Intention der Aufgabe sowie dem offiziell formulierten Anforderungsniveau der Reflexion und Verallgemeinerung entsprochen.

Die Einschätzung hinsichtlich eines *offenen Antwortformates* erfordert eine differenzierte Betrachtung der beiden Teilaufgaben. Bei Teilaufgabe A8a handelt es sich um ein gebundenes Antwortformat, da die Notation der Lösung lediglich durch das Setzen eines Kreuzes erfolgt. Die getroffene Entscheidung wird mittels einer frei formulierten Begründung erläutert, sodass das Antwortformat der Teilaufgabe A8b hingegen als freies offenes Format charakterisiert wird.

Entgegen der Intention und Musterlösung ist die erste Teilaufgabe in Abhängigkeit von dem Aufgabenverständnis des Schülers unterschiedlich lösbar. In Kombination mit einer notierten Begründung sind diagnostische Rückschlüsse auf den Denk- und Bearbeitungsweg möglich und die *multiple Lösbarkeit* der Aufgabe wird bestätigt. Das Hessische Kultusministerium führt in seiner Musterlösung lediglich einen Denk- und Bearbeitungsweg für die Bestätigung der zu beurteilenden Aussage in Teilaufgabe A8b an. Nur die positive Beantwortung der Frage aufgrund einer relativen Betrachtung der Gewichts- und Zuckeranteile wird als korrekte Lösung akzeptiert. Sowohl mögliche Rechenwege als auch ein völlig differentes Aufgabenverständnis werden völlig außer Acht gelassen (siehe Abschnitt 9.1.2).

Eigenproduktionen werden im Sinne der selbstständig formulierten Begründung in Teilaufgabe A8b durchaus angeregt. In den Köpfen der Schüler sollte der Grund für die getroffene Entscheidung bereits bei Bearbeitung der ersten Teilaufgabe deutlich sein. Durch das simple Setzen eines Kreuzes in Teilaufgabe A8a, das wie zuvor erläutert ohne jegliches Aufgabenverständnis erfolgen kann, ist die Anregung von Eigenproduktionen hier zu verneinen.

Formuliert und notiert der Schüler seine Begründung, reflektiert er während dieser Tätigkeiten den vollzogenen Lösungsprozess unvermeidlich. Somit werden in Teilaufgabe A8b *Reflexionen* implizit durch die zu verfassenden Schülertexte eingefordert.

Ebenso besteht unter diagnostischen Gesichtspunkten die Möglichkeit einer *Fehleranalyse*. In der abhängigen Betrachtung beider Teilaufgaben wird der Bezug zwischen der Beurteilung der Aussage und der anschließenden Begründung deutlich. Widerspricht ein Schüler der Aussage, kann mithilfe der Ausführungen in Teilaufgabe A8b die Argumentationsbasis transparent werden. Anhand der freien Formulierungen sind Rückschlüsse auf Denk- und Bearbeitungswege der Schüler sowie denkbare Fehlerursachen durchaus möglich.

Zielperspektive Leistungserhebung

Wie bereits in Abschnitt 4.5.3 erläutert, werden die testtheoretischen Gütekriterien Objektivität, Reliabilität und Validität in der hessischen Orientierungsarbeit 2005 nicht eingehalten. Ebenso ist aufgrund fehlender Vergleichsdaten keine soziale Normierung möglich (siehe ebd.).

Eine Beurteilung des Antwortverhaltens in Bezug auf vergleichbare Aufgaben, das *Itemuniversum*, ist aufgrund des gebundenen Antwortformates der ersten Teilaufgabe nicht möglich. Die Aufgabe „Zucker“ verlangt die Beurteilung und Begründung eines spezifischen Sachverhaltes, wobei verschiedene Aspekte der Aufgabenpräsentation die Komplexität der Aufgabenstellung steigern lassen (siehe Formale Perspektive). Somit ist eine Übertragung des Antwortverhaltens aufgrund der Besonderheiten der Aufgabe auf ähnliche Begründungssachverhalte schwierig.

Es handelt sich bei der Aufgabe um die achte und somit vorletzte Aufgabe der untersuchten Leistungserhebung. Ihre *Position* befindet sich auf der vierten Seite im unteren Seitenbereich. Ebenso ist auf dieser Seite die vorherige Aufgabe A7 „Tabelle“ im oberen Seitenbereich abgebildet. In beiden Aufgabenstämmen werden Tabellen verwendet. Somit sind bei einer chronologischen Bearbeitung der Aufgaben durchaus *Reihenfolgeeffekte* denkbar. Wirkungen auf die nachfolgende Aufgabe sind jedoch nicht zu erwarten, da sich diese auf der folgenden Seite befindet und einen völlig anderen Inhaltsbereich anspricht. Weiterhin differieren Antwortformat sowie Aufgabenstamm der beiden Aufgaben.

Die *sprachliche Formulierung* der Aufgabe wird kritisch beurteilt, da die Verständlichkeit stark eingeschränkt ist. Aufgrund der sprachlichen Einkleidung sowie der verwendeten Begriffe werden Schwierigkeiten bei der Bearbeitung erwartet (siehe Formale Perspektive).

Mittels der *Erwartungstransparenz* wird die Klarheit und Forderung der Aufgabenstellung beschrieben. Es wird deutlich, dass der Schüler in Teilaufgabe A8a lediglich ein Kreuz setzen soll. Wie erwähnt, ist hier ein bloßes Raten möglich. Allerdings ist für eine sinnvolle Entscheidung ein gedanklicher Lösungsweg mit Blick auf die in Teilaufgabe A8b geforderte Begründung sinnvoll. In der zweiten Teilaufgabe wird eine entsprechende Argumentation für die getroffene Entscheidung gefordert. Dieser inhaltliche Bezug beider Teilaufgaben ist für den Aufgabenbearbeiter nicht deutlich.

Die *Ergebnisrelation* der vorliegenden Aufgabe wird kritisch beurteilt. Der Bezug zu Teilaufgabe A8b ist nicht unmittelbar gegeben, da das Kreuz in der ersten Teilaufgabe unüberlegt gesetzt werden kann. Bestenfalls wird die Entscheidung aufgrund einer bewussten Überlegung getroffen und anschließend begründet. In beiden Fällen ist das Verhältnis zu der vorgesehenen Bewertung jedoch unausgewogen. Mit einer doppelten Punktzahl fällt Teilaufgabe A8b bei der Bewertung ins Gewicht. Es fließen hier Teilargumentationen in die Bewertung ein, was durchaus angemessen ist.

Unabhängig von dem eingeschlagenen Bearbeitungs- und Lösungsweg der Aufgabe ist eine bewusste und überlegte Beurteilung der Aussage zu treffen, womit eine deutliche *Verstehensorientierung* gegeben ist.

Formale Perspektive

Die Aufgabe A8 „Zucker“ enthält zwei Teilaufgaben, welche mit den Aufzählungszeichen a) und b) gekennzeichnet werden. Die Bearbeitungen und Ergebnisse sind inhaltlich deutlich voneinander abhängig, da die Entscheidung in Teilaufgabe A8a durch eine Erklärung in Teilaufgabe A8b begründet werden soll. Dass dieser Zusammenhang jedoch nicht zwingend gegeben sein muss, zeigen die Ausführungen der Zielperspektive Diagnose. Es bleibt abzuwarten, welche diesbezüglichen Ergebnisse aus der empirischen Analyse abzuleiten sind.

Der *Aufgabenstamm* weist drei Aufgabenkomponenten auf: Text, Grafik sowie weitere Angaben. Einleitend findet ein Satz Verwendung, der in die Situation einführt (*In vielen Lebensmitteln versteckt sich Zucker*). Darunter folgt die Abbildung einer Tabelle, die in drei Spalten und fünf Zeilen die nötigen Informationen für die Bearbeitung der Aufgabe liefert. Es gibt zwei Spaltenüberschriften (*Gewicht, Zuckeranteil*) sowie vier Zeilenüberschriften (*Schokokuss, Cornflakes, Schokolade, 1 Flasche Ketchup*). In den inneren Zellen der Tabelle sind die jeweiligen Gewichtsangaben in Gramm (Schreibweise x g) angeführt. Es folgt eine Erläuterung, in welcher wörtliche Rede verwendet wird (*Paul behauptet: „In Schokolade ist genau so viel Zucker drin wie in Schokoküssen.“*). In Teilaufgabe A8a folgt sogleich die zu entscheidende Frage (*Hat Paul Recht?*). Zur Beantwortung werden zwei Antwortmöglichkeiten ‘Ja’ und ‘Nein’ mit jeweiliger Ankreuzmöglichkeit angeboten. Teilaufgabe A8b beginnt mit der Aufforderung zur Begründung der Entscheidung (*Begründe deine Antwort!*). Für die Notation der Erklärung sind drei Schreiblinien in Lineatur 3 vorgesehen.

Die vorliegende Aufgabe enthält zwei *Antwortformate*. In der ersten Teilaufgabe kommt ein gebundenes Antwortformat zum Einsatz. Da die Schüler zwischen zwei Antwortmöglichkeiten wählen können, handelt es sich um eine Alternativaufgabe. Das Antwortformat der Teilaufgabe A8b ist eine freie offene Antwort, da hier die Formulierung einer Begründung mit Worten gefordert wird.

Inhaltliche Perspektive

Mit Blick auf den hessischen *Rahmenplan Grundschule* finden sich im Inhaltsbereich Sachrechnen und Umwelterschließung zahlreiche Berührungspunkte, welche die Komplexität der vorliegenden Aufgabe widerspiegeln. Zu den formulierten Zielen des dritten und vierten Schuljahres gehört es, zunehmend komplexere Zusammenhänge in lebensnahen Situationen auf ihre mathematische Struktur hin zu durchschauen. Es gilt, zwischen notwendigen und unnötigen Informationen zu unterscheiden sowie sich gegebenenfalls feh-

lende Informationen zu beschaffen. Beide Aspekte, sowohl das Durchdringen der Situation als auch die Frage nach den nötigen Informationen, sind für eine sinnvolle Bearbeitung der Aufgabe A8 „Zucker“ von besonderer Bedeutung. In den Unterrichts Anregungen und Beispielen des hessischen Rahmenplans wird zudem die Behandlung von Zweisatzaufgaben genannt. Hier sollen Aufgaben, bei denen von der Einheit zur Mehrheit oder umgekehrt, geschlossen wird, mit Hilfe von Tabellen gelöst werden. Dieser Aufgabentyp bereitet auf Aufgaben mit proportionalen Zuordnungen in der Sekundarstufe vor.

Auch zu den *Bildungsstandards Mathematik für die Primarstufe* lassen sich diverse Bezüge aufzeigen. Vier der fünf allgemeinen mathematischen Kompetenzen werden bei der Bearbeitung der Aufgabe gefordert. Konkret ist ein Problem zu lösen. Hierzu müssen mathematische Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten angewendet werden, um eine Lösungsstrategie zu entwickeln und zu nutzen. Das Erkennen von Zusammenhängen und die Übertragung auf ähnliche Sachverhalte erweisen sich hierbei als hilfreich. Ebenso ist eine Modellierung notwendig. Sachtexten und anderen Darstellungen, hier einer Tabelle, sind für die Aufgabebearbeitung relevante Informationen zu entnehmen. Anschließend ist das identifizierte Sachproblem in die Sprache der Mathematik zu übersetzen, um es innermathematisch zu lösen und das erhaltene Ergebnis auf die Ausgangssituation zu beziehen. Die Einschätzung der zu beurteilenden Aussage erfolgt bestenfalls nach einer erfolgreichen Modellierung. Für die anschließende Formulierung der Begründung rücken die Kompetenzbereiche Kommunizieren und Argumentieren in den Vordergrund. Mathematische Zusammenhänge werden erkannt und Vermutungen entwickelt, um eine Begründung zu suchen. Diese wird anschließend mithilfe einer sachgerechten Verwendung mathematischer Zeichen und Fachbegriffe formuliert.

Ebenfalls spielen zwei inhaltsbezogene mathematische Kompetenzen eine bedeutsame Rolle. Im Bereich der Zahlen und Operationen geht es um ein Rechnen in Kontexten. Eine Sachaufgabe wird gelöst, die Beziehung zwischen der Sache und den einzelnen Lösungsschritten beschrieben sowie das Ergebnis letztendlich auf Plausibilität geprüft. Bezüglich der proportionalen Beziehung sollten die vorhandenen Muster und Strukturen zusätzlich in den Blick genommen werden. Die Komplexität der vorliegenden Aufgabe ist hoch, sodass der offiziellen Einordnung als einfache Sachaufgabe zur Proportionalität deutlich widersprochen wird. Funktionale Beziehungen zu erkennen und zu beschreiben entspricht durchaus den Anforderungen der Bildungsstandards. Fraglich bleibt jedoch, ob der Einsatz der Aufgabe in einer Leistungserhebung unter den gegebenen Voraussetzungen sich als sinnvoll herausstellt.

Hinsichtlich der Relevanz für die vorliegende Aufgabe sind der Modellierungsprozess und der Aspekt der proportionalen Zuordnung hervorzuheben. Diese *Sachaspekte* besitzen grundlegenden Einfluss auf das Verständnis der Aufgabenstellung sowie die Bearbeitung der Aufgabe. HINRICHS (2008, S. 106) beschreibt das mathematische Modellieren in der Grundschule als Teil des Sachrechnens. Seiner Einschätzung nach können bereits Grundschüler bedeutende Modellierungskompetenzen erwerben und anwenden, wobei grundsätzlich von einem geringeren Systematisierungs- und Reflexionsniveau als in späteren Schuljahren auszugehen ist (vgl. HINRICHS 2008, S. 103 ff). In der Fachliteratur werden diverse

Modellierungskreisläufe präsentiert, welche identische Grundstrukturen aufweisen, im Prozess der zu durchlaufenden Schritte jedoch verschiedene Detaillierungen und Differenzierungen vornehmen. Für eine Erläuterung der Grundstrukturen wird an dieser Stelle der Modellierungszyklus nach BLUM (vgl. HINRICHS 2008, S. 33) herangezogen und anhand der vorliegenden Aufgabenstellung erläutert.

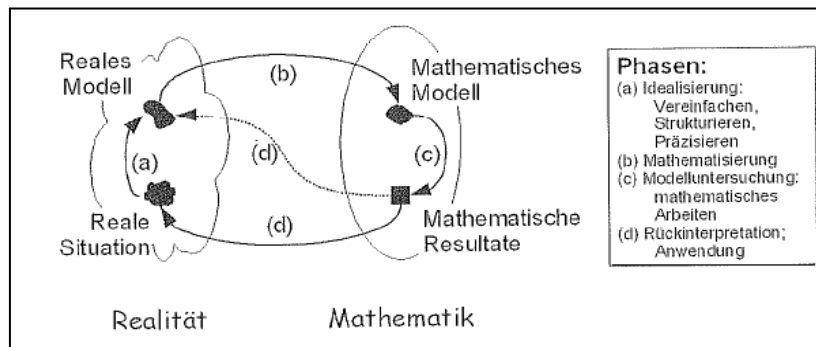


Abbildung 20: Modellierungskreislauf nach BLUM.

Die in der Aufgabe präsentierte reale Situation wird erfasst. Die Tabelle bildet Zuckeranteile und Gewichtsangaben verschiedener Lebensmittel ab. Ein Junge trifft zu zwei dieser Lebensmittel, Schokolade und Schokokuss, die Aussage über die Gleichheit des Zuckergehaltes. Diese Aussage ist zu beurteilen und die getroffene Entscheidung anschließend zu begründen. Bei der Übertragung der angebotenen Informationen in ein reales Modell ist eine Strukturierung vorzunehmen, da für die Aufgabenstellung unnötige Angaben vorhanden sind. Pauls Aussage ist in Beziehung zu den nötigen Informationen zu setzen, um anschließend den Transfer in ein mathematisches Modell leisten zu können. Besonders an dieser Stelle sind diverse Aufgabenmerkmale für die unterschiedlichen Mathematisierungen verantwortlich, die über die eigentliche Aufgabenintention hinausgehen. Das relative oder eben auch absolute Verständnis der präsentierten Angaben beeinflusst die weitere Bearbeitung der Aufgabe maßgeblich. Die Bearbeitung des mathematischen Modells erfolgt anhand einfach durchzuführender Rechnungen oder Vergleiche (siehe Abschnitt 9.1.2). Das auf mathematischer Ebene erhaltene Ergebnis wird auf die Realsituation zurückgeführt, indem Pauls Aussage beurteilt wird. Da diese Beurteilung weitergehend begründet werden soll, findet implizit eine Validierung und Reflexion des erhaltenen Ergebnisses statt.

Neben der für einen Drittklässler komplexen Modellierung erweist sich der mathematische Gehalt der Aufgabe ebenfalls als anspruchsvoll. Die Gewichts- und Zuckerangaben der Lebensmittel sollen laut Aufgabenintention für den anzustellenden Vergleich in Relation zueinander gesetzt werden. Hierfür ist eine gleiche Gewichts- oder Zuckerbasis zu wählen. Unabhängig von dieser Entscheidung erfolgt nun ein Denk- und sich anschließender Rechenweg im Sinne einer proportionalen Zuordnung, die einen Spezialfall der linearen Zu- oder Abnahme beschreibt (vgl. WITTMANN, G. 2008, S. 62ff). Auch wenn die Aufgabenautoren widersprechen, ist ein Denken im Dreisatz für die Lösung der Aufgabe unumgänglich, was am folgenden Beispiel der Aufgabenlösung und -berechnung dargestellt wird. Die in der Tabelle angegebenen 25 Gramm Schokokuss enthalten 15 Gramm Zucker.

Es stellt sich die Frage, wie viel Zucker dementsprechend in 100 Gramm Schokokuss enthalten ist. Für eine Antwort wird die Angabe 15 Gramm Zucker mit dem Faktor 4 multipliziert. Das erhaltene Ergebnis 60 Gramm Zucker stimmt mit der Zuckerangabe zu 100 Gramm Schokolade überein. Also besitzen Schokolade und Zucker den gleichen Zuckeranteil. Ein Blick zurück zu den Aufgabenkommentaren des Hessischen Kultusministeriums zeigt, dass dieser verbalisierte Bearbeitungsweg der in der Musterlösung abgebildeten Operatorarstellung entspricht (siehe Anmerkungen des Hessischen Kultusministeriums). Unter Einbezug der Entwicklungsstufen im Kindesalter nach PIAGET ist eine derartige Aufgabenlösung der formal-operativen Stufe (siehe Fußnote 5) zuzuordnen. Mit einem Alter von 11 bis 15 Jahren sind Kinder in der Lage logische Schlussfolgerungen zu ziehen und entwickeln mit Hilfe dieses beweglichen Denkens ein Verständnis von Proportionen (vgl. SIEGLER ET AL. 2008, S. 195ff). Da ein proportionaler Lösungsweg von Kindern der dritten Klasse nicht erwartet werden kann, ist von der intendierten Aufgabenlösung des Hessischen Kultusministeriums nicht auszugehen.

Somit wird bei Einschätzung des *schuljahrbezogenen Niveaus* kritisch festgehalten, dass die Aufgabe in Bezug auf den Anspruch der Modellbildung im Rahmen des Sachrechnens mindestens dem Ende der Grundschulzeit, also der vierten Klasse, entspricht. Bezüglich des Anspruches als Aufgabe zur Proportionalität im Sachkontext ist die Aufgabe sogar erst der Klasse 6 zuzuordnen⁸⁰.

Die Aufgabe ist in einen außermathematischen *Kontext* eingebettet. Der Umgang mit und das Wissen über Lebensmittel wird als realitätsbezogener Kontext verstanden. Da mit Größenangaben in Gramm gerechnet wird, ist weiterhin die Arbeit mit dem Größenbereich Gewichte gefordert.

Kognitive Perspektive

Die Untersuchung der *Sprachlogischen Komplexität* verdeutlicht, dass neben den inhaltlichen Ansprüchen weitere Faktoren die Komplexität der Aufgabe verantworten. Zunächst entspricht die Reihenfolge der dargebotenen Sätze durchaus der Reihenfolge der Bearbeitung. Hinweise auf den Lösungs- und Bearbeitungsweg werden jedoch nicht gegeben. Es werden ausschließlich Hauptsätze mit einfachem Satzbau verwendet, Nebensätze sind nicht vorhanden. Eine Aussage verwendet neben der Personifizierung ebenfalls wörtliche Rede. Der hierin verwendete Ausdruck 'genau so viel Zucker drin wie in' besitzt besonderen Bedeutungsgehalt. Zunächst weist diese Formulierung auf den intendierten Vergleich der Zuckermenge hin, wobei zunächst ein relativer als auch absoluter Vergleich denkbar ist. Laut offiziellem Aufgabenkommentar hat der Vergleich auf Basis einer gleichen Gewichtsmenge stattzufinden, womit ein relativer Bezug hergestellt werden soll. Hervorgehoben wird dies durch den Gebrauch der verwendeten Begriffe 'Zucker' und 'Zuckeranteil'. Es ist jedoch nicht davon auszugehen, dass Kinder der dritten Jahrgangsstufe sich

⁸⁰ Hauptschule, Realschule und Gymnasium Klasse 7 (vgl. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2005c, Lehrpläne auf CD-ROM)

über die Unterscheidung und Bedeutung dieser beiden Begriffe bewusst sind. Der implizite Hinweis auf einen relativen Vergleich bleibt somit undeutlich. Im Fokus der Aufgabe steht weiterhin der Begriff 'Schokokuss'. Zahlreiche Synonyme kommen hier im alltäglichen Sprachgebrauch zum Einsatz, wobei zusätzliche regionale Unterschiede nicht ungewöhnlich sind. Erzeugt dieser Begriff differierende inhaltliche Vorstellungen, kann dies den nötigen Modellierungsprozess der Aufgabe maßgeblich beeinflussen. Weiterhin können die der angelsächsischen Sprache entlehnten Begriffe 'Cornflakes' sowie 'Ketchup' im Schriftgebrauch zu Irritationen führen. Des Weiteren wird die zuvor beschriebene inhaltliche Abhängigkeit der beiden Teilaufgaben aufgrund der sprachlichen Wendungen und deren Anordnungen keinesfalls unterstützt.

Die *Kognitive Komplexität* der Aufgabe wird bereits aufgrund des nötigen Modellierungsprozesses hoch eingeschätzt. Es sind zahlreiche Denkvorgänge zu erbringen, von denen einige durchaus parallel stattfinden können. Wahrnehmungsunterstützungen sind in keinerlei Hinsicht vorhanden. Die notwendige Identifikation nötiger und unnötiger Informationen in der Tabelle erhöht den Organisationsaufwand der Denkprozesse zusätzlich. Auch das Abarbeiten eines bekannten Schemas ist nicht möglich.

Die Aufgabe wird aufgrund der beschriebenen Komplexität sowie der speziellen Bedingungen eindeutig dem *Anforderungsbereich* der Reflexion zugeordnet. Die in der Tabelle vorliegenden Daten sind zunächst zu strukturieren und mit Pauls Aussage in Verbindung zu bringen. Es erfolgt die Einschätzung der Aussage, die anschließend schriftlich zu begründen ist.

Es schließt sich die Darstellung der theoretischen Bearbeitungsvarianten zu Aufgabe A8 an, deren Konstruktion auf Basis der Rationalen Aufgabenanalyse erfolgt. Aufgrund der beschriebenen Abhängigkeiten findet eine getrennte Betrachtung der beiden Teilaufgaben in diesem Falle nicht statt. Die Konstruktion der Bearbeitungsvarianten basiert auf der Argumentation der zu formulierenden Begründung. Bereits aufgrund der Erkenntnisse der Rationalen Aufgabenanalyse wird die intendierte Aufgabenbearbeitung des Hessischen Kultusministeriums kritisiert. Die Einschätzung der Analyseaspekte deutet auf zahlreiche angemessene Auffassungen der Aufgabe und Bearbeitungswege hin, die kein proportionales Denken voraussetzen.

9.1.2 Bearbeitungsvarianten Aufgabe A8

Im Hinblick auf die gelieferten Argumentationen sind im Rahmen der theoretischen Erarbeitung vier Bearbeitungskonzepte vorstellbar. Diese werden nachfolgend inklusive der differenzierten Bearbeitungsvarianten beschrieben.

Das **Bearbeitungskonzept Relativer Bezug** umfasst Bearbeitungsvarianten, bei denen im Sinne der Aufgabenintention des Hessischen Kultusministeriums ein Vergleich der Zuckermengen bei relativem Bezug der Angaben durchgeführt wird. Die Musterlösung des Hessischen Kultusministeriums sieht hierfür jedoch lediglich eine Variante vor (siehe Abschnitt 9.1.1). In den nachfolgenden Ausführungen wird deutlich, dass zahlreiche Ansätze eines relativen Bezuges zu einem korrekten Ergebnis und somit einer Bestätigung der zu beurteilenden Aussage führen. Dem Aufgabebearbeiter ist bei diesen Varianten stets bewusst, dass ein Vergleich der Zuckermenge nur auf Grundlage einer gleichen Bezugsmenge erfolgen kann. Diese Voraussetzung ist auf Basis der in der Tabelle präsentierten Daten zunächst noch zu schaffen. Denkbar ist einerseits ein Vergleich der Zuckermenge bei gleicher Gewichtsmenge. Andererseits kann ebenfalls überlegt werden, welche Menge (gemeint ist hier das Gewicht) des einen Lebensmittels verzehrt werden müsste, um genau so viel Zucker wie bei Verzehr des anderen Lebensmittels aufzunehmen.

1. Vergleich bei gleichem Gewicht, Basis 100 g, $25 \text{ g} * 4 = 100 \text{ g}$

Der Aufgabebearbeiter verwendet ausgehend vom Gewicht der Schokolade die Gewichtsangabe des Schokokusses, um eine gleiche Bezugsmenge zu schaffen. Demzufolge erhöht er das Gewicht des Schokokusses durch eine Multiplikation mit dem Faktor 4 auf 100 Gramm. Anschließend verfährt er mit den Zuckerangaben des Schokokusses ebenso.

2. Vergleich bei gleichem Gewicht, Basis 25 g, $100 \text{ g} : 4 = 25 \text{ g}$

Bei dieser Bearbeitungsvariante wird vom Gewicht des Schokokusses ausgegangen. Hierzu wird das Gewicht der Schokolade mithilfe des Dividenden 4 auf 25 Gramm reduziert, um eine Ausgangslage für den Vergleich zu schaffen. Auch hier wird mit den Zuckerangaben der Schokolade entsprechend verfahren.

3. Vergleich bei gleichem Gewicht, Basis 50 g, $25 \text{ g} * 2 = 50 \text{ g}$ und $100 \text{ g} : 2 = 50 \text{ g}$

Ebenso kann eine unabhängige Gewichtsmenge als Bezug herangezogen werden. So erfolgt der Vergleich der Zuckermengen beispielsweise bei einem Bezugsgewicht von 50 Gramm. Hierzu ist das Gewicht der Schokolade zu halbieren, das Gewicht des Schokokusses hingegen zu verdoppeln und entsprechend mit den beiden Zuckerangaben zu verfahren.

4. Vergleich bei gleichem Zucker, Basis 60 g Zucker, $15 \text{ g Zucker} * 4 = 60 \text{ g Zucker}$

Hier findet ein relativer Vergleich aufgrund des Bezuges zur Zuckermenge statt. Der Aufgabebearbeiter überlegt, wie oft die Zuckermenge des Schokokusses in der Schokolade enthalten ist, beziehungsweise wie viele Schokoküsse ebenfalls eine Zuckermenge von 60 Gramm aufweisen. Prototypisch wird dies mittels einer Multiplikation der Zuckermenge des Schokokusses mit dem Faktor 4 symbolisiert. Entsprechend kann mit dem Gewicht verfahren werden.

5. Vergleich bei gleichem Zucker, Basis 15 g Zucker, 60 g Zucker : 4 = 15 g Zucker

Die zuvor erläuterten Überlegungen finden sich ebenfalls in einer Rechnung wieder, bei der die Zuckermenge der Schokolade mit dem Dividenden 4 geteilt wird.

6. Vergleich bei gleichem Zucker, Basis 30 g Zucker, 60 g Zucker : 2 = 30 g Zucker und 15 g Zucker * 2 = 30g Zucker

Aufgrund dieses Denkweges ist es möglich, ein drittes unabhängiges Bezugsgewicht auf Basis der angegebenen Zuckermenge zu schaffen. Hierzu wird beispielsweise die Zuckermenge des Schokokusses mit dem Faktor 2 multipliziert. Die Zuckermenge der Schokolade hingegen wird mittels des Dividenden 2 dividiert. Mit den Gewichtsangaben wird entsprechend verfahren, sodass die erhaltenen Angaben erneut übereinstimmen.

Im Rahmen des **Bearbeitungskonzeptes Absoluter Bezug** beurteilt der Aufgabenbearbeiter die Aussage des Jungen Paul auf Grundlage eines direkten Vergleiches der vorhandenen Angaben. Da die Notwendigkeit einer gleichen Bezugsmenge bei diesem Aufgabenverständnis nicht nötig ist, werden die in der Tabelle präsentierten Informationen ohne vorherige Modifikation gegenübergestellt. Bei jeder der vorgestellten Bearbeitungsvarianten erhält der Aufgabenbearbeiter eine Größendifferenz. Als Konsequenz sollte somit jede Variante dieses Bearbeitungskonzeptes zu einer Verneinung der zu beurteilenden Aussage führen.

7. Vergleich Zucker, Schokokuss weniger Zucker, 15 g Zucker < 60 g Zucker

Die Zuckeranteile für Schokolade und Schokokuss werden der Tabelle entnommen und direkt miteinander verglichen. Da 15 Gramm Zucker weniger sind als 60 Gramm Zucker, wird auf einen geringeren Zuckergehalt des Schokokusses geschlossen.

8. Vergleich Zucker, Schokolade mehr Zucker, 60 g Zucker > 15 g Zucker

Auch hier erfolgt ein direkter Vergleich der beiden Zuckerangaben. Die Argumentation 60 Gramm sind mehr als 15 Gramm, führt zu der Feststellung, dass Schokolade mehr Zucker als Schokokuss enthält.

9. Vergleich Gewicht, Schokokuss weniger Gewicht, 25 g < 100 g

Der direkte Vergleich erfolgt hier ausgehend von den absolut präsentierten Gewichtsangaben. In diesem Fall sind 25 Gramm weniger als 100 Gramm, der Schokokuss hat demnach weniger Gewicht. Ausgehend von dieser Erkenntnis wird auf den Zuckeranteil der Lebensmittel geschlossen.

10. Vergleich Gewicht, Schokolade mehr Gewicht, 100 g > 25 g

Ebenso kann der Aufgabenbearbeiter aufgrund eines direkten Gewichtsvergleiches zu dem Schluss gelangen, dass Schokolade mehr Gewicht als Schokokuss besitzt und auf einen entsprechenden Zuckeranteil folgern.

11. Vergleich Zucker und Gewicht, Schokokuss weniger Zucker und Gewicht,

15 g Zucker < 60 g Zucker und 25 g < 100 g

Gleichermaßen ist ein direkter Vergleich der Gewichtsangaben als auch der Angaben des Zuckeranteils möglich. Auch hier findet ein direkter Vergleich der Größenangaben statt. Da 15 Gramm weniger als 60 Gramm und 25 Gramm gleichermaßen weniger als 100 Gramm sind, enthält der Schokokuss somit weniger Zucker und Gewicht.

12. Vergleich Zucker und Gewicht, Schokolade mehr Zucker und Gewicht,

60 g Zucker > 15 g Zucker und 100 g > 25 g

Ähnlich verhält es sich bei dieser Bearbeitungsvariante. Der direkte Vergleich der Angaben führt zu dem Ergebnis, dass Schokolade mehr Gewicht und Zucker als Schokokuss enthält: 60 Gramm sind mehr als 15 Gramm und 100 Gramm sind mehr als 25 Gramm.

13. Vergleich mit anderen Lebensmitteln der Tabelle, Ketchup mehr Zucker/mehr Gewicht, 150 g Zucker > 60 g Zucker/15 g Zucker, 800 g > 100 g/25 g

Filtert der Aufgabenbearbeiter die für die Lösung der Aufgabe irrelevanten Informationen nicht heraus, können diese durchaus zur Bearbeitung herangezogen werden. So ist es realistisch, dass für einen absoluten Vergleich die Angaben zu Ketchup herangezogen werden. Da dieser mehr Zucker und mehr Gewicht als Schokolade oder Schokokuss enthält, ist Pauls Aussage auch dann zu verneinen.

14. Vergleich mit anderen Lebensmitteln der Tabelle, Cornflakes mehr Zucker/mehr Gewicht, 18 g Zucker > 15 g Zucker, 200 g > 25 g

Entsprechend können die Angaben zu Cornflakes für einen direkten Vergleich verwendet werden. Korrekt wäre dann jedoch lediglich die Erkenntnis, dass Cornflakes mehr Zucker und Gewicht als Schokokuss enthalten. Bei einem Vergleich mit Schokolade besitzen Cornflakes zwar mehr Gewicht, jedoch nicht mehr Zucker.

Des Weiteren ist es realistisch, dass der Aufgabenbearbeiter aufgrund des außermathematischen Kontextes der Aufgabe keine mathematische Begründung auf Grundlage der Tabelleninformationen liefert. Derartige Argumentationen werden mittels des **Bearbeitungskonzeptes Lebenswelt** gefasst. Hier greift der Aufgabenbearbeiter auf Erfahrungswerte und Alltagsbezug zurück. In den auf Basis dieses Bearbeitungskonzeptes entstandenen Texten dürften keinerlei Größenangaben oder Berechnungen enthalten sein. Die in Redezeichen gesetzten Überschriften der Bearbeitungsvarianten sind als prototypische Aussagen aufzufassen.

15. Schokolade/Schokokuss ist beides süß, „Schmeckt beides süß.“

In dieser Bearbeitungsvariante argumentiert der Aufgabenbearbeiter mit dem süßen Geschmack der beiden zu vergleichenden Lebensmittel. Aufgrund der persönlichen Erfahrungen schmecken sowohl die Schokolade als auch der Schokokuss süß. Dieser Erfahrungswert ist nicht mit Pauls Aussage in Einklang zu bringen, deren Sinn dann unverständlich bleibt. Es ist zu erwarten, dass die Beurteilung der Aussage negativ ausfällt.

16. Schokolade/Schokokuss enthält beides Zucker, „In beidem ist Zucker drin.“

Dem Aufgabenbearbeiter ist bewusst, dass beide Lebensmittel Zucker enthalten. Der tatsächliche Anteil ist hierbei unbedeutend, die Notwendigkeit eines Vergleichs wird nicht erkannt. Erneut ist eine Verneinung der Aussage zu erwarten.

17. Schokolade/Schokokuss enthält beides Schokolade, „In beidem ist Schokolade.“

Auch diese Bearbeitungsvariante liefert eine Begründung für die Verneinung der zu beurteilenden Aussage. Da Schokolade und Schokokuss Schokolade enthalten, ist die Ähnlichkeit beider Lebensmittel erwiesen. Die Menge des enthaltenen Zuckers ist unbedeutend, Paul behält in diesem Fall Recht.

18. Weitere Bestandteile Schokolade/Schokokuss, „Schokokuss hat noch Waffel.“

Bei dieser Bearbeitungsvariante durchdenkt der Aufgabenbearbeiter die Beschaffenheit von Schokolade und Schokokuss. Der Schokokuss besteht aus diversen Bestandteilen, enthält zum Beispiel eine weniger süße Waffel. Demnach erscheint die Schokolade süßer, besitzt als Konsequenz dieser Überlegung mehr Zucker. Aufgrund dieser Argumentation wird der Aussage widersprochen.

19. Bezug zu weiteren Lebensmitteln, „Gummibärchen haben auch Zucker.“

Erfahrungswerte, die über die in der Tabelle angesprochenen Lebensmittel hinausgehen, werden hinzugezogen. Paul vergleicht in seiner Aussage Schokolade und Schokoküsse. Der Aufgabenbearbeiter bezieht in seine Überlegungen noch andere süße Lebensmittel, wie zum Beispiel Gummibärchen, ein. Dieses Argument wird angeführt, um die Aussage zu verneinen.

Das vierte Bearbeitungskonzept **Keine Argumentation** zeigt Bearbeitungsvarianten auf, bei denen sich in Teilaufgabe A8a für eine Bestätigung oder einen Widerspruch der Aussage entschieden wurde. In der anschließenden Begründung werden jedoch keine Argumente für diese Entscheidung angeführt.

20. Bestätigung Aussage, „Paul hat Recht“

Der Aufgabenbearbeiter wiederholt Pauls Aussage, ohne diese weiter zu begründen.

21. Verneinung Aussage, „Paul hat nicht Recht“

Entsprechendes ist bei der Verneinung der zu beurteilenden Aussage möglich.

23. Ohne Aussage, „Weil das so ist“

Die Entscheidung wird mit einem Ringschluss begründet und nicht weiter ausgeführt

24. Unwissenheit, „Weiß ich auch nicht.“

Die Entscheidung wird intuitiv getroffen und kann nicht begründet werden.

Eine Übersicht der theoretisch konstruierten Bearbeitungsvarianten zu der Aufgabe A8 befindet sich im Anhang der Arbeit.

9.2 Empirische Aufgabenanalyse A8 mit Ausschärfung zu Bearbeitungskategorien

Die theoretische Analyse der Aufgabe A8 „Zucker“ zeigt diverse Aspekte auf, die nun anhand des vorliegenden empirischen Datenmaterials ausführlich untersucht werden. So legt die Rationale Aufgabenanalyse unter anderem dar, dass die vorhandenen Teilaufgaben im Gegensatz zu anderen Aufgaben der Untersuchung inhaltlich voneinander abhängig zu betrachten sind. In Teilaufgabe A8a entscheidet sich der Aufgabenbearbeiter durch das Setzen eines Kreuzes für die Bestätigung beziehungsweise den Widerspruch der zu beurteilenden Aussage. Anschließend wird diese Entscheidung in Teilaufgabe A8b begründet. Im Fokus der Empirischen Aufgabenanalyse steht zunächst die formulierte Begründung des Aufgabenbearbeiters, die somit den Bearbeitungsweg dieser Aufgabe repräsentiert. Bei der Kodierung der Begründungen wird zwischen einer bloßen Aussage, also der Darstellung eines Sachverhaltes oder Meinung, und einer echten Argumentation unterschieden. Weiter sind die Begründungen der Schüler auf unterschiedliche Denkweisen zurückzuführen, die in den entwickelten Bearbeitungskonzepten Ausdruck finden. Es wird erwartet, dass sich in einigen Begründungen durchaus mehrere Argumente identifizieren lassen. Für die Kodierung der Aufgabenbearbeitung wird das zuerst genannte Argument als ausschlaggebendes Kriterium herangezogen. Zusätzlich wird vermerkt, ob die zu beurteilende Aussage bestätigt oder verneint wird, worauf in Abschnitt 9.3 eingegangen wird.

9.2.1 Darstellung der Empirischen Aufgabenanalyse A8

Für die Empirische Aufgabenanalyse werden erneut nur jene Datensätze herangezogen, die eine Bearbeitung der Aufgabe A8 vorweisen. Insgesamt bearbeiten 76 Kinder die Aufgabe nicht, sodass 1946 Datensätze in die Analyse einfließen.

In Abgleich und Ergänzung der Rationalen Aufgabenanalyse werden sechs Bearbeitungskonzepte formuliert: **Relativer Bezug Tabelle**, **Absoluter Bezug Tabelle - Vergleich**, **Absoluter Bezug Tabelle - Verwendung Angaben**, **Lebenswelt**, **Keine Argumentation** und **Anderes**. Jedes der angeführten Konzepte ist in diverse Bearbeitungskategorien gegliedert, um die differierenden Schülerbearbeitungen erfassen und beschreiben zu können. Neben der Angabe verschiedener Häufigkeiten (siehe Abschnitt 6.2.3) werden die vorgenommenen Ausschärfungen und Zusammenfassungen der Bearbeitungsvarianten dargestellt. An ausgewählten Stellen dienen Ausschnitte der Interviewstudie sowie Beispiele aus den Datensätzen der Illustration und Ergänzung der beschriebenen Bearbeitungskategorien.

Das Bearbeitungskonzept **Relativer Bezug Tabelle** fasst 162 Aufgabenbearbeitungen zusammen, bei denen basierend auf einer gleichen Bezugsmenge ein Vergleich der Zuckermenge von Schokolade und Schokokuss durchgeführt wird. Lediglich ein relativer Anteil von 8,3 % arbeitet entsprechend dieser ursprünglichen Aufgabenintention. Nur in dieser kleinen Gruppe ist von einem Bewusstsein über die Grundvorstellung einer proportionalen Zuordnung auszugehen.

Den Aufgabenbearbeitungen der Bearbeitungskategorie 1.1 ~Basis Gewicht~ ist zu entnehmen, dass bei einem Vergleich der beiden Lebensmittel zunächst von derselben Gewichtsmenge ausgegangen wird. Die in der theoretischen Konstruktion der Bearbeitungsvarianten bedachten Differenzierungen der Gewichtsmenge lassen sich nicht belegen. So werden die Bearbeitungsvarianten 1 bis 3 (Vergleich Basis Gewicht-100 g/25 g/50 g) in dieser Bearbeitungskategorie zusammengefasst. Die erste Bearbeitungsvariante entspricht der Musterlösung des Hessischen Kultusministeriums, bei der ausgehend vom Gewicht der Schokolade das Gewicht der Schokoküsse mit dem Faktor 4 multipliziert wird. Vergleichbare Bearbeitungen sind selten in den Datensätzen zu verzeichnen: „ $4 \cdot 25 \text{ g} = 100 \text{ g}$ $4 \cdot 15 \text{ g} = 60 \text{ g}$ Man muss das kleine Gewicht mal vier nehmen, um das Gewicht der schweren Masse zu erreichen. Also muss man auch den Zuckeranteil mal vier nehmen⁸¹“. Jedoch werden noch andere relative Vorgehensweisen bestätigt, wie das folgende Beispiel zeigt: „Schokoküsse haben 15 g Zucker und sie wiegen 25 g und die Schokolade 100 g Gewicht und 60 g Zucker, wenn man das teilt $100 : 4 = 25 \text{ g}$ Gewicht und $60 : 4 = 15$, also gleich viel⁸²“. Der Aufgabenbearbeiter geht hier von dem Gewicht des Schokokusses aus und dividiert das Gewicht der Schokolade entsprechend. Mit 95 Aufgabenbearbeitungen beläuft sich der relative interne Anteil mit 58,6 % auf über die Hälfte der Bearbeitungen, die relative Häufigkeit beträgt 4,9 %.

Ebenso zeigen 37 Aufgabenbearbeitungen den Schluss auf das Gewicht der Lebensmittel ausgehend von einer gleichen Zuckermenge, wobei die konkrete Bezugsmenge unbedeutend ist. Die Bearbeitungsvarianten 4 bis 6 (Vergleich Basis Zucker-60 g/15 g/30 g) konzentrieren sich somit in der Bearbeitungskategorie 1.2 ~Basis Zucker~. Die relative interne Häufigkeit entspricht 22,8 %, wobei ein relativer Anteil von 1,9 % dieses Vorgehen aufweist. Auch in dieser Bearbeitungskategorie werden ergänzend zu den Überlegungen des Hessischen Kultusministeriums diverse Vorgehensweisen registriert.

Des Weiteren erweist sich eine Bearbeitungskategorie 1.3 ~Lösungsidee~ als angemessen. In 30 Aufgabenbearbeitungen findet sich der Grundgedanke eines relativen Bezuges wieder, wobei die weitere Konkretisierung und somit eindeutige Lösung in diesen Bearbeitungen noch fehlt. Die relative interne Häufigkeit entspricht 18,5 %. In relativer Betrachtung finden sich in dieser Bearbeitungskategorie 1,5 % aller Aufgabenbearbeitungen.

Die Interviewstudie bietet ein repräsentatives Beispiel, das die Bedeutung dieser eröffneten Bearbeitungskategorie unterstreicht. Ein Blick in das Transkript der Aufgabenbearbeitung von *Franzi* zeigt, dass das Mädchen zunächst einen Vergleich der absoluten Zuckerangaben durchführt. Da die in der Tabelle präsentierten Zahlen nicht identisch sind, entscheidet sie sich somit für einen Widerspruch der Aussage.

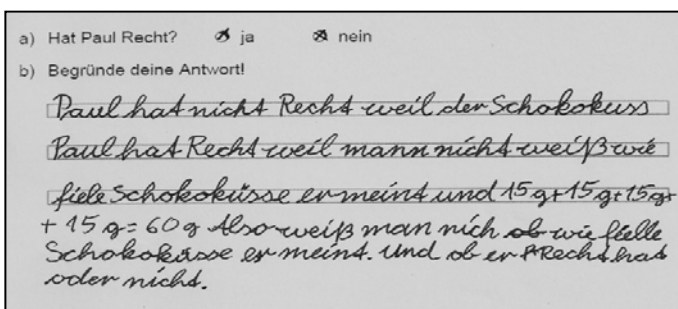
⁸¹ Zitat aus Datensatz AS-c-08

⁸² Zitat aus Datensatz BV-d-20

Beginn Interview Franzi bei 30:25

- 35:20 K schaut.
 K: Also, ehm, vielleicht hat er auch Recht, weil ehm...in Schokoküssen...also ein Schokokuss ist ja ehm 15g hat er Zuckeranteil. Und eine Schokolade 60g und da steht ja ehm „Paul behauptet, in Schokolade ist genau so viel Zucker drin wie in Schokoküssen.
 35:51 I: Mh... warum hat er dann vielleicht doch Recht? Versuch das noch mal ein bisschen weiter zu erklären.
 35:59 K: Mm, weil 15, weil man weiß ja nicht, wie viel ehm Schokoküsse der damit meint und...(K räuspert sich) 15... das kann man ja auch rechnen +15+15+15 und so. Und das kann ja dann auch ehm 60g ergeben.
 36:22 I: Mh...Du kannst deine Entscheidung gerne noch mal ändern, wenn du meinst, dass Paul doch Recht hat.
 36:31 K schaut auf AB.
 36:41 K kreuzt Ja an.
 36:44 I: Du möchtest deine Entscheidung ändern?
 36:46 K nickt.

Sie kommt der Aufforderung der Interviewerin nach und widmet sich der Notation ihrer Begründung. Es vergehen 90 Sekunden, in denen *Franzi* über ihre zu formulierende Begründung nachdenkt. Vor Vollendung des ersten Satzes äußert sie schließlich, dass die Aussage doch korrekt sein könnte. Was bewegt sie zu dieser Entscheidung?



Sie stützt sich auf die in der Aussage verwendete Mehrzahl der Schokoküsse. Von welcher Menge Schokoküsse Paul spricht, ist jedoch nicht bekannt. Anhand der vierfachen Addition der Zuckermenge eines Schokokusses verdeutlicht sie den Erhalt der Zuckermenge 60

Gramm, was den Zuckerangaben der Schokolade entspricht. Trotz dieser Überlegungen bleibt eine gewisse Unsicherheit deutlich spürbar, was sich auch in dem Aufgabendokument niederschlägt. *Franzi* formuliert mündlich als auch schriftlich die Ungewissheit über die Anzahl der Schokoküsse. Aus diesem Grunde hat das Mädchen das zuvor bei 'Nein' gesetzte Kreuz nicht unkenntlich gemacht, sondern ihr Kreuz bei Antwort 'Ja' bewusst hinzugefügt. Somit wird ihre Bearbeitung lediglich der Kategorie Lösungsidee zugeordnet, da trotz des Argumentationsansatzes eine stringente Begründung fehlt.

Das zweite **Bearbeitungskonzept Absoluter Bezug Tabelle - Vergleich** beinhaltet Aufgabenbearbeitungen, bei denen die Argumentation auf einen konkreten Vergleich der in der Tabelle präsentierten Angaben zurückgeführt wird. Mit insgesamt 702 Datensätzen und somit einer relativen Häufigkeit von 36,1 % stellt diese Gruppe das insgesamt umfangreichste Bearbeitungskonzept dar. Die Individualität der Begründungen erfordert jedoch eine Differenzierung in sieben Bearbeitungskategorien. Es wird bereits an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Ergebnisse zu diesem Bearbeitungskonzept die in der Rationalen Aufgabenanalyse beschriebenen schwierigkeitsbeeinflussende Aspekte unterstreichen und so anhand des empirischen Materials belegt werden können.

In Bearbeitungskategorie 2.1 ~60 g > 15 g~ sammeln sich all jene Aufgabenbearbeitungen, in denen ein Vergleich der Zuckermengen von Schokolade und Schokokuss formuliert ist und die zugehörigen Angaben der Tabelle in der Begründung konkret herangezogen werden. Der Größenvergleich zeigt, dass 60 Gramm mehr als 15 Gramm sind, sodass 61 Aufgabenbearbeiter einen höheren Zuckeranteil der Schokolade anführen. Ein prototypisches Beispiel bietet die folgende Formulierung: „In Schokokuss ist 15 g Zucker und in Schokolade ist 60 g Zucker. Schokolade hat mehr Zucker⁸³“. Diese Gruppierung entspricht einem relativen internen Anteil von 8,7 % sowie einer relativen Häufigkeit von 3,1 %.

Eine nicht geringe Anzahl von Datensätzen enthält die Aussage, dass Schokolade mehr Zucker enthält. Woher diese Information und Entscheidung rührt, wird nicht weiter dargelegt, lässt jedoch ebenfalls auf den konkreten Vergleich der beiden Zuckerangaben schließen. Gefasst werden diese Aufgabenbearbeitungen in Bearbeitungskategorie 2.2. ~Schokolade mehr Zucker~. Mit 148 Datensätzen werden hier 7,6 % aller Aufgabenbearbeitungen zusammengeführt, was einem relativen internen Anteil von 21,1 % entspricht.

Der Charakter dieser Bearbeitungskategorie wird anhand eines Beispiels der Interviewstudie transparent. *Tatjana*s Schriftdokument bildet genau die zuvor beschriebene Formulierung ab. Das Mädchen begründet ihren Widerspruch mit der Aussage, dass Schokolade mehr

a) Hat Paul Recht? ja nein
 b) Begründe deine Antwort!
 In Schokolade ist mehr Zucker
 wie in Schokoküssen.

Zucker als Schokoküsse enthält. Der Blick in das entsprechende Transkript identifiziert die zu Grunde liegende Überlegung dieser Aussage.

Beginn Interview Tatjana bei 09.08	
10:13	I: Hat Paul Recht?
10:15	K: Mm...nn.
10:21	I: Warum hat er nicht Recht?
10:23	K: Hier oben (K zeigt auf Tabelle) sieht man ja Schokolade ist 60 und Schokokuss nur 15.
10:29	I: Mh, und warum hat er dann nicht Recht?
10:32	K: Weil er ja gesagt hat, dass es gleich viel ist.

Tatjana stellt zunächst einen Vergleich der absoluten Zuckerangaben an. Da die Schokolade 60 Gramm Zuckeranteil und der Schokokuss „nur“ 15 Gramm enthält, bestätigt sich ihr Widerspruch anhand der nicht identischen Mengenangaben. Im weiteren Verlauf des Gespräches formuliert *Tatjana* mündlich genau jenen Satz, den sie anschließend auf ihrem Arbeitsblatt notiert. Der vorausgegangene Vergleich der Angaben ist hier, wie zuvor bei der Erläuterung der Bearbeitungskategorie angeführt, nur noch implizit herauszulesen.

⁸³ Zitat aus Datensatz AP-a-13

Die beschriebene Differenzierung der beiden Bearbeitungskategorien, also die Formulierung einer bloßen Aussage oder die Begründung mit echten Argumenten, wird bei der theoretischen Konstruktion der Bearbeitungsvarianten in dieser Konkretheit nicht bedacht. In beiden Gruppen findet sich die Grundidee der Bearbeitungsvariante 8 (Vergleich Zuckerschokolade mehr Zucker) wieder. Gemeinsam ist beiden Bearbeitungskategorien der absolute Bezug der Angaben bei einem stattfindenden Vergleich der Zuckermenge. Die Kodierung wird jedoch dahingehend erweitert, dass die konkreten Angaben bei einer Variante explizit genannt werden (2.1.), während in den Begründungen der zweiten Variante (2.2.) lediglich die resultierende Feststellung formuliert ist.

Die Bearbeitungskategorie 2.3. ~15 g < 60 g~ beschreibt ebenfalls Begründungen, in denen aufgrund des konkreten Vergleichs der Zuckermengen argumentiert wird. In dieser Variante wird jedoch die Tatsache herangezogen, dass der Schokokuss mit 15 Gramm weniger Zucker als die Schokolade enthält. Diese Kodierung schließt ebenfalls Begründungen ein, die in ihrer Formulierung die Nennung beider Zuckerangaben enthalten und der geringere Zuckeranteil des Schokokusses mit den Worten ‘nur’ oder ‘aber’ ausgedrückt wird: „Weil Schokolade ist 60 Gramm Zucker drin und in Schokoküssen nur 15 Gramm⁸⁴“. Mit 193 enthaltenen Schülerbearbeitungen verzeichnet diese Bearbeitungskategorie einen relativen internen Anteil von 27,5 %, was einer relativen Häufigkeit von 9,9 % entspricht.

Entsprechend der Differenzierungen in den ersten beiden Bearbeitungskategorien des Konzeptes findet sich in den Begründungen oftmals lediglich die Aussage über den geringeren Zuckergehalt des Schokokusses, ohne den expliziten Vergleich der Zuckerangaben zu formulieren. Diese Bearbeitungen versammeln sich in Bearbeitungskategorie 2.4. ~Schokokuss weniger Zucker~. Die Empirische Aufgabenanalyse zeigt, dass 79 Aufgabenbearbeiter explizit diese Formulierung in ihrer Begründung verwenden. Der relative interne Anteil beträgt hier 11,3 %, während eine relative Häufigkeit von 4,1 % vorhanden ist. Die theoretisch konstruierte Bearbeitungsvariante 7 (Vergleich Zucker- Schokokuss weniger Zucker) wird aufgrund dieser beiden unterschiedlichen Kodierungen somit weiterführend differenziert.

Die Analyse der Schülerbearbeitungen liefert innerhalb des Bearbeitungskonzeptes eine zuvor nicht bedachte Bearbeitungskategorie 2.5. ~Differenz Zucker~. Die 70 zugeordneten Aufgabenbearbeiter berechnen konkret die Differenz der angegebenen Zuckermengen von Schokolade und Schokokuss. Das Ergebnis ist rechnerisch auf eine Subtraktion ($60 \text{ g} - 15 \text{ g}$) oder Ergänzung ($15 \text{ g} + _ = 60 \text{ g}$) zurückzuführen und dient als Argument dafür, dass Schokolade mehr beziehungsweise Schokokuss weniger Zucker enthält. In den Begründungen der Aufgabenbearbeiter schlägt sich dieses Vorgehen wie folgt nieder: „Denn zwischen 15 g und 60 g ist ganz viel Unterschied. Um genauer zu sagen, 45g Unterschied⁸⁵“ oder „In den Schokoküssen sind nur 15 g Zucker. In der Schokolade sind 60 g Zucker. Und von 15 g bis 60 g sind es 45 g die fehlen dann war bei beiden gleich viel Zucker drin⁸⁶“.

⁸⁴ Zitat aus Datensatz BQ-a-02

⁸⁵ Zitat aus Datensatz AL-c-17

⁸⁶ Zitat aus Datensatz BK-a-13

Diese Kategorie weist eine relative Häufigkeit von 3,6 % auf, während der relative interne Anteil 10,0 % beträgt.

Eine weitere Bearbeitungskategorie 2.6. ~Vergleich Gewicht~ fasst Bearbeitungen, in denen mit dem leichteren Gewicht des Schokokusses oder dem schwereren Gewicht der Schokolade argumentiert wird, zusammen. Eine Nennung der konkreten Gewichtsangaben ist in den Formulierungen jedoch selten zu finden. Zugeordnete Bearbeitungen weisen oftmals die Formulierungen 'schwerer', 'größer' oder 'wiegt mehr' auf. Diese Bearbeitungskategorie vereint die beiden theoretischen Bearbeitungsvarianten 9 und 10 (Vergleich Gewicht - Schokokuss weniger Gewicht/Schokolade mehr Gewicht). Dieser Bearbeitungskategorie sind 69 Datensätze zugeordnet, was einem relativen internen Anteil von 9,8 % sowie einem relativen Anteil von 3,6 % entspricht.

In einer letzten Bearbeitungskategorie 2.7. ~Vergleich Zucker und Gewicht~ finden sich 82 Aufgabenbearbeitungen wieder. Kodiert werden diese aufgrund einer Argumentation, die einen Vergleich der Zucker- als auch der Gewichtsangaben aufweist. Wurde in den vorherigen Bearbeitungskategorien jeweils eines dieser Argumente angeführt, wird hier nun ein konkreter Vergleich beider Angaben vollzogen oder es findet ein Schluss von der Zucker- auf die Gewichtsangabe (auch umgekehrt) statt: „Schokoküsse wiegen weniger, deswegen ist da auch weniger Zucker drin⁸⁷“ oder „Die Schokolade wiegt mehr deshalb hat sie mehr Zuckeranteil als der Schokokuss⁸⁸“. Da eine Differenzierung an dieser Stelle aufgrund geringer Häufigkeiten unnötig ist, werden hier die beiden Bearbeitungsvarianten 11 und 12 (Vergleich Zucker und Gewicht - Schokokuss weniger Zucker und Gewicht/Schokolade mehr Zucker und Gewicht) zusammengefasst und, wie zuvor beschrieben, erweitert. Mit 82 Bearbeitungen wird ein relativer Anteil von 4,2 % vermerkt, während die relative interne Häufigkeit 11,7 % beträgt.

Die detaillierte Analyse der 1946 vorliegenden Schülerbearbeitungen zeigt, dass die Begründungen zumeist eine konkrete oder, wie zuvor beschrieben, auch implizite Verwendung der absoluten Angaben in der Tabelle aufweisen. Während die Argumentationen des vorherigen Bearbeitungskonzeptes deutlich auf einen Vergleich der vorhandenen Angaben hinweisen, gibt es weiterhin eine beachtliche Zahl von Bearbeitungen, bei denen diverse Daten der Tabelle in den Begründungen verwendet werden. Jedoch sind die formulierten Argumente nicht explizit auf einen Vergleich dieser Angaben zurückzuführen. Diese Kodierung spiegelt das **Bearbeitungskonzept Absoluter Bezug Tabelle - Verwendung Angaben** wider. Insgesamt weisen 496 der schriftlichen Bearbeitungen die Verwendung der in der Tabelle enthaltenen Angaben in ihrer Argumentation auf. Mit einem relativen Anteil von 25,5 % entspricht dies einem Viertel aller untersuchten Aufgabenbearbeitungen.

Die größte Gruppierung des Bearbeitungskonzeptes stellt mit 378 Aufgabenbearbeitungen und somit relativen internen 76,2 % die Bearbeitungskategorie 3.1. ~Nennung Zucker/

⁸⁷ Zitat aus Datensatz BJ-a-13

⁸⁸ Zitat aus Datensatz BV-b-10

Gewicht dar. In all diesen Begründungen werden konkrete Informationen zu Gewichts- oder Zuckerangaben aus der Tabelle übernommen und angeführt. In keiner dieser Formulierungen findet sich jedoch ein Hinweis auf einen Vergleich der Angaben. Es handelt sich ausschließlich um eine Präsentation der Fakten, der daraus resultierende Schluss ist nicht herauszulesen. Weiterhin wurde im Rahmen der Empirischen Aufgabenanalyse zunächst eine Differenzierung hinsichtlich der Nennung von Angaben vorgenommen. So wurde beispielsweise unterschieden, ob ausschließlich Angaben des Schokokusses, Angaben der Schokolade oder Angaben zu beiden Lebensmitteln aufgeführt werden. Die geringen Häufigkeiten⁸⁹ führen jedoch zur Vereinigung dieser Varianten in einer Bearbeitungskategorie. Die Konstruktion der Bearbeitungsvarianten vernachlässigt diese Form der Bearbeitung, die jedoch mit relativen 19,4 % einen enormen Anteil der realen Bearbeitungen aufweist.

Bearbeitungskategorie 3.2. ~Rechnungen~ beschreibt Argumentationen, die zum Teil irrationale und außergewöhnliche Rechnungen mit den präsentierten Zahlen enthalten. Mit 78 kodierten Datensätzen beträgt die relative interne Häufigkeit hier 15,7 %, der relative Anteil somit 4,0 %. In der Bearbeitungskategorie sind weitere Gruppierungen anzuführen. Die nachfolgend exemplarisch angeführten Beispiele werden zwar inklusive ihrer Häufigkeiten erläutert, dienen jedoch ausschließlich der Illustration der Bearbeitungsvariationen. In 20 Begründungen findet sich das Argument der so genannten internen Differenz. Hier wird jeweils der Zuckeranteil der Schokolade und des Schokokusses von dem zugehörigen Gewicht subtrahiert: $25 \text{ g} - 15 \text{ g} = 10 \text{ g}$ und $100 \text{ g} - 60 \text{ g} = 40 \text{ g}$. Da die Differenzen nicht identisch sind, wird der zu beurteilenden Aussage widersprochen. Insgesamt verfahren 16 Aufgabebearbeiter entsprechend, indem sie Gewicht und Zuckeranteil der Lebensmittel schlicht addieren: $25 \text{ g} + 15 \text{ g} = 40 \text{ g}$ und $100 \text{ g} + 60 \text{ g} = 160 \text{ g}$. Auch hier führt ein abschließender Vergleich der Ergebnisse zu einem Widerspruch. Interessant ist eine Gruppe von Aufgabebearbeitungen, bei denen die vorhandenen Angaben unter Einsatz der Grundrechenarten bis zu dem Erhalt einer bereits bekannten oder identischen Ergebniszahl miteinander kombiniert werden, was zu einer Bestätigung der Aussage führt. Eine Begründung lautet „Weil wenn man $100 - 25$ nimmt ist es 75 und $75 - 60 = 15$ “⁹⁰. Hier subtrahiert der Schüler das Gewicht des Schokokusses von dem Gewicht der Schokolade und erhält die Differenz 75 . Mit dieser Zahl wird weitergerechnet, indem der Zuckergehalt der Schokolade von diesem Zwischenergebnis subtrahiert wird. Inhaltlich betrachtet ergibt dieses Vorgehen keinen Sinn. Zufällig stimmt die erhaltene Differenz von 15 Gramm mit dem Zuckergehalt des Schokokusses überein, womit in den Augen des Aufgabebearbeiters ein ausreichendes Argument für die Bestätigung der Aussage erbracht ist. Der Verfasser folgender Formulierung fühlt sich aufgrund seiner Berechnung ebenfalls bestätigt: „Bei Schokolade sind 60 g Zucker drin und wiegt 100 g . $100 \text{ g} - 60 \text{ g}$ gleich 40 g und in Schokoküsse sind 25 g Zucker und wiegt $25 \text{ g} + 15 = 40 \text{ g}$ “⁹¹. Mittels einer Subtraktion wird

⁸⁹Ergebnisse der differenzierten Häufigkeiten

Nennung Zucker/ Gewicht von Schokokuss und Zucker/ Gewicht von Schokolade: 23,

Nennung Gewicht Schokolade und Nennung Gewicht Schokokuss: 14,

Nennung Zucker und/oder Gewicht Schokolade: 19,

Nennung Zucker und/oder Gewicht Schokokuss: 7,

Nennung Zucker Schokolade und Zucker Schokokuss, 315

⁹⁰ Zitat aus Datensatz BS-a-05

⁹¹ Zitat aus Datensatz BC-c17

zunächst die interne Differenz der Schokolade bestimmt. Die Angaben des Schokokusses werden hingegen mit einer Addition kombiniert. Da jedoch beide Rechnungen die Ergebniszahl 40 erbringen, ist die zu beurteilende Aussage bestätigt. Zahlreiche ähnliche Beispiele sind vorhanden, werden jedoch an dieser Stelle nicht aufgeführt.

In Bearbeitungskategorie 3.3. ~Lebensmittel Tabelle~ werden die theoretischen Bearbeitungsvarianten 13 und 14 (Vergleich mit anderen Lebensmitteln Tabelle - Ketchup/ Cornflakes) zusammengefasst. Eine Differenzierung erweist sich aufgrund der geringen Häufigkeit von 40 Aufgabebearbeitungen als unnötig. Ebenso werden in dieser Kategorie alle Argumentationen gefasst, die einen Bezug zu den Lebensmitteln der Tabelle aufweisen, ohne dass zwangsläufig ein konkreter Vergleich der Angaben vorhanden sein muss. Die relative Häufigkeit dieser Bearbeitungskategorie entspricht 2,1 %, der relative interne Anteil beträgt 8,1 %.

Es existieren zahlreiche Begründungen, in denen von den präsentierten Angaben in der Tabelle Abstand genommen wird. Stattdessen werden lebensweltliche Argumente angeführt und es erfolgt eine Beurteilung der Aussage aufgrund persönlicher Erfahrungen. Das **Bearbeitungskonzept Lebenswelt** umfasst 214 Aufgabebearbeitungen, entspricht also einem relativen Anteil von 11,0 %. Die Empirische Aufgabenanalyse offenbart jedoch, dass eine Ausweitung der theoretischen Bearbeitungsvarianten erneut notwendig ist.

Zunächst bestätigt sich Bearbeitungsvariante 18 (Lebenswelt - Weitere Bestandteile Schokolade/Schokokuss) in Bearbeitungskategorie 4.1. ~Beschaffenheit Schokolade/ Schokokuss~. Die 75 Argumentationen dieser Aufgabebearbeitungen sind allesamt auf der Ebene der Zusammensetzung beider Lebensmittel zu finden. Begründungen für die Beurteilung der Aussage werden so beispielsweise auf die noch enthaltene Waffel des Schokokusses oder die in der Schokolade versteckten Nüsse zurückgeführt⁹². Mit einer relativen internen Häufigkeit von 35,1 % stellt die Bearbeitungskategorie die größte Gruppierung innerhalb des Konzeptes dar, das entspricht einem relativen Anteil von 3,9 %. Auch *Lea* verwendet diese generalisierende Form der Argumentation.

Beginn Interview Lea bei 1:09:20

1:10:25 I: Warum meinst du, dass er nicht Recht hat?

1:10:28 K: Weil, ehm, in in den Lebensmitteln ist ja dann noch was anderes drin.

1:10:36 I: Mh.

1:10:37 K: Und dann kann´s ja auch sein, dass, dass in den Sachen, die da noch drin sind auch noch Zucker drin ist und dann kann es ja auch viel mehr sein.

1:10:48 I: Mh. Ok, also du meinst, Paul hat nicht Recht. Dann kannst du das auch ankreuzen.

1:10:54 K kreuzt Nein an.

1:10:56 I: Und hier möchte ich deine Erklärung wieder in Worten untendrunter geschrieben bekommen.

1:11:04 K überlegt: Mm.

1:11:13 I: Auch hier kannst du gerne noch mal sagen, was du schreiben möchtest.

1:11:16 K. Weil in Lebensmitteln ist is ja noch was anderes drin.

⁹² Es interessiert an dieser Stelle die Frage, ob die angeführten Argumente für oder gegen eine Bestätigung der Aussage führen. Diesem Aspekt wird sich in Abschnitt 9.3 ausführlich gewidmet,

Im Verlauf des Interviews spricht *Lea* immer wieder davon, dass die Lebensmittel aus weiteren Bestandteilen zusammengesetzt sind und diese ebenfalls Zucker enthalten können. Ihre Aussage führt sie nicht weiter aus und benennt auch keine konkreten Bestandteile von Schokolade oder Schokokuss. Die schriftliche Formulierung auf dem Aufgabendokument entspricht ihrer mündlichen Argumentation.

The image shows a survey form with two questions. Question a) asks 'Hat Paul Recht?' with radio buttons for 'ja' and 'nein'. The 'nein' option is selected. Question b) asks 'Begründe deine Antwort!'. The handwritten answer in the first text box is 'Weil in jedem Lebensmittel stecken' and in the second text box is 'andere Zuckern.' There is an empty text box below.

Die Aufgabenbearbeiter der Bearbeitungskategorie 4.2. ~Ähnlichkeit Schokolade/ Schokokuss~ führen eine Gleichartigkeit beider Lebensmittel als Argument in ihren Begründungen an. So ist aus den 64 gruppierten Bearbeitungen vielfach herauszulesen, dass beide Lebensmittel aus Schokolade bestehen, also „die Sorten fast gleich sind“⁹³ oder „Weil das aus dem gleichen Material ist“⁹⁴. Diese Kategorie stellt eine Ausschärfung der Bearbeitungsvariante 17 (Lebenswelt - Schokolade/Schokokuss enthält beides Schokolade) dar. Ihre Häufigkeit entspricht einem relativen internen Anteil von 29,9 % sowie einem relativen Anteil von 3,3 %.

Eine weitere Variante der Argumentation erfolgt in Bearbeitungskategorie 4.3. ~Argument süß~, indem hier die Süße der Lebensmittel die ausschlaggebende Erklärung für eine Beurteilung der Aussage darstellt. Mit 27 zugeordneten Bearbeitungen erweist sich diese Gruppierung mit relativen internen 12,6 % und relativen 1,4 % als verhältnismäßig klein. Dennoch stellt sie für die weiteren Analysen eine Ausschärfung der Bearbeitungsvariante 15 (Lebenswelt - Schokolade/Schokokuss schmeckt beides süß) dar. Zwei Beispiele aus den Datensätzen verdeutlichen, dass diese Ebene der Argumentation aufgrund ihrer Subjektivität eine differente Beurteilung der Aussage stützt: „Schokoküsse sind genau so süß wie Schokolade“⁹⁵. In diesem Beispiel wird angeführt, dass Schokoküsse und Schokolade eine identische Süße besitzen, womit ein Beleg für die Bestätigung der Aussage gefunden ist. Ebenso lassen sich in anderen Aufgabendokumenten konträre Aussagen finden, die eine Argumentation für den Widerspruch darstellen: „Schokokuss ist süßer als Schokolade. Schokokuss hat mehr Zucker als die Schokolade“⁹⁶.

Auch Bearbeitungsvariante 16 (Lebenswelt - Schokolade/Schokokuss enthält beides Zucker) bestätigt sich in der Bearbeitungskategorie 4.4. ~Argument Zucker~. Verglichen mit den theoretischen Überlegungen finden sich hier jedoch variantenreiche Formulierungen, die allesamt das Argument Zucker aus einer lebensweltlichen Perspektive aufzeigen. So sind in den 48 gruppierten Begründungen Aussagen wie „Schokolade hat mehr Zucker weil sie durch Zucker besser schmeckt“⁹⁷ oder „Zucker ist ungesund und schädlich für die

⁹³ Zitat aus Datensatz AD-b-10

⁹⁴ Zitat aus Datensatz BV-e-08

⁹⁵ Zitat aus Datensatz AI-a-08

⁹⁶ Zitat aus Datensatz AD-b-05

⁹⁷ Zitat aus Datensatz AI-a-06

Zähne⁹⁸“ zu finden. Das entspricht einem relativen Anteil von 2,5 % sowie einer relativen internen Häufigkeit von 22,4 %.

Die Rationale Aufgabenanalyse lässt vermuten, dass Aufgabenbearbeiter die zu beurteilende Aussage lediglich redundant bestätigen oder verneinen. Bestätigt wird diese Annahme im **Bearbeitungskonzept Keine Argumentation**, das solche wiederholten Aussagen enthält. Nur 84 Aufgabenbearbeiter verwenden entsprechende Formulierungen, womit dieses Bearbeitungskonzept mit relativen 4,3 % die kleinste Gruppe der Empirischen Aufgabenanalyse darstellt.

Die erste Bearbeitungskategorie 5.1. ~Bestätigung~ vereint die nochmals differenzierten Überlegungen der Bearbeitungsvarianten 20 und 22 (Bestätigung Aussage - Paul hat Recht/Weil das so ist). Eine Unterscheidung ist aufgrund einer Häufigkeit von 36 zugeordneten Aufgabenbearbeitungen jedoch unnötig. Typische Formulierungen dieser Bearbeitungskategorie sind schlichte Aussagen wie ‘Paul hat Recht’ oder wiederholende Ergänzungen wie ‘Ja, in Schokolade ist genauso viel Zucker wie in Schokoküssen’. Die relative interne Häufigkeit beträgt 42,9 %, das entspricht einem relativen Anteil von 1,9 %.

In Bearbeitungskategorie 5.2. ~Verneinung~ versammeln sich Antworten, welche die Aussage ohne weitere Argumente verneinen, so zum Beispiel ‘Paul hat nicht Recht’ oder ‘Nein, es stimmt nicht’. Somit bestätigt sich Bearbeitungsvariante 21 (Verneinung Aussage - Paul hat nicht Recht), deren Kodierung um einige individuelle, jedoch sinngemäße, Formulierungen erweitert wird. Insgesamt liefern 24 Aufgabenbearbeiter eine derartige Begründung, was einem relativen Anteil von 1,2 % und einer relativen internen Häufigkeit von 28,6 % entspricht.

Weiterhin erbringt die Analyse eine Gruppierung von 24 Aufgabenbearbeitungen, aus denen keine konkrete Aussage oder Erklärung herauszulesen ist und Aussagen nicht vollendet werden. Für diese Begründungsebene ohne substantielle Argumentation wird Bearbeitungskategorie 5.3. ~ohne Aussage~ eröffnet. Zwei Beispiele illustrieren diese Kodierung: „Was Paul meint das mein ich auch⁹⁹“ oder „Er hat nicht Recht, weil es nicht sein kann¹⁰⁰“. Ebenso wie bei der zuvor beschriebenen Bearbeitungskategorie liegen eine relative Häufigkeit von 1,2 % sowie eine relative interne Häufigkeit von 28,6 % vor. In diese Bearbeitungskategorie ist Bearbeitungsvariante 23 (Unwissenheit - Weiß ich nicht) integriert. Auch hier ist jedoch aufgrund der vielfältigen Formulierungen eine Erweiterung der Kodierung nötig.

Darüber hinaus sind drei zusätzliche Gruppierungen zu verzeichnen, denen jedoch kein gemeinsames Bearbeitungskonzept zuzuschreiben ist. Aufgrund der differierenden Begründungsebenen erübrigt sich eine Zuordnung in bereits erläuterte Bearbeitungskonzepte.

⁹⁸ Zitat aus Datensatz BL-a-03

⁹⁹ Zitat aus Datensatz AO-b-14

¹⁰⁰ Zitat aus Datensatz BP-a-04

Somit eröffnet sich ein zusätzliches **Bearbeitungskonzept Anderes**, das mit 288 enthaltenen Bearbeitungen einem relativen Anteil von 14,8 % entspricht.

In der ersten Bearbeitungskategorie 6.1. ~nur Kreuz~ sammeln sich 201 Datensätze, bei denen ausschließlich ein Kreuz in Teilaufgabe A8a gesetzt wurde. Aufgabenteil A8b weist nicht einmal den Versuch einer Begründung für die getroffene Entscheidung auf. Mit einer relativen internen Häufigkeit von 69,8 % ist diese Bearbeitungskategorie die größte Gruppierung des Bearbeitungskonzeptes. Relativ betrachtet entspricht dies einem Anteil von immerhin 10,3 %.

Bearbeitungskategorie 6.2. ~Schokokuss hat mehr Zucker~ vereint jene Begründungen, die bezüglich der in der Tabelle angebotenen Informationen eine konträre Aussage über die Zuckermenge enthalten. Dies wird anhand der benannten Bearbeitungskategorie 'Schokokuss hat mehr Zucker' ausgedrückt. Gleichwertige Aussagen über den Zuckergehalt der Schokolade werden jedoch einbezogen. So finden sich Begründungen auf folgender Ebene: „In Schokokuss ist mehr Zucker drin als in Schokolade¹⁰¹“ oder „Die Schokolade hat 30g weniger Zucker als der Schokokuss¹⁰²“. Insgesamt lassen sich 32 Aufgabenbearbeitungen dieser Art in den Daten identifizieren. Somit wird ein relativer Anteil von 1,6 % sowie ein relativer interner Anteil von 11,1 % verzeichnet.

Auch die Interviewstudie bestätigt derartige Bearbeitungen der Aufgabe, wobei die parallele Analyse des Transkriptes Hinweise auf die zugrunde liegenden Überlegungen liefert.

Beginn Interview	Benedikt bei 09:40
11:16	I. Warum meinst du, dass Paul nicht Recht hat?
11:18	K. Weil Sch also Schokolade ist anders wie Schokoküssen.
11:23	I: Was heißt anders? Beschreib es bitte genauer!
11:27	K: Schokolade hat weniger also mehr Zucker als...ne, Schokokuss hat mehr Schokolade mehr Zucker also mehr Zucker als Schokolade.
11:43	I: Woher weißt du das?
11:45	K: Weil Schokoküsse sind süß und da ist noch Schokolade drin und ehm und bei der Schokolade ist nur Schokolade drin und Nüsse also Schokolade und Zucker.
11:58	I: Also meinst du, Paul hat Recht?
12:00	K: Nein.
12:02	K kreuzt Nein an.

Benedikt beschreibt zunächst, dass Schokolade „anders“ als Schokoküsse sei. Nach Aufforderung der Interviewerin folgt eine Aussage über den höheren Zuckergehalt des Schokokusses, was anschließend auf dessen Süße zurückgeführt wird.

a) Hat Paul Recht? ja nein

b) Begründe deine Antwort!

weil in der Schokolade ist weniger Zucker als in Schokoküssen.

Von Interesse ist, dass der Junge in diesem Abschnitt des Gespräches diverse Argumente des Bearbeitungskonzeptes Lebenswelt verwendet. Hierbei ist er zunächst ver-

¹⁰¹ Zitat aus Datensatz BD-a-10

¹⁰² Zitat aus Datensatz BU-b-11

unsichert, ob er von Schokolade oder Schokokuss spricht. Auch seine Aussage hinsichtlich des Zuckergehalts revidiert er mehrmals. Letztlich erläutert er, dass seine Entscheidung sowohl auf die Süße des Schokokusses als auch auf die Bestandteile beider Lebensmittel zurückzuführen ist. Die schriftlich formulierte Begründung hingegen enthält ausschließlich die zu Beginn des Gespräches formulierte Aussage über den höheren Zuckergehalt des Schokokusses.

Aufgabenbearbeitungen, die nicht weiter gruppiert werden können oder bei denen keine andere Zuordnung möglich erscheint, konzentrieren sich in Bearbeitungskategorie 6.3. ~Weiteres~. Hier werden insgesamt 55 Datensätze verzeichnet, was einem relativen Anteil von 2,8 % und einem relativen internen Anteil von 19,1 % entspricht. Eine objektive Interpretation der zugeordneten Aufgabenbearbeitungen ist nicht zu gewährleisten, was die folgenden Beispiele verdeutlichen: „Ich habe nachgerechnet¹⁰³“ oder „Äpfel, Eis, Bonbons, Zuckerguss, Süßigkeiten¹⁰⁴“.

9.2.2 Zusammenschau der Bearbeitungskategorien Aufgabe A8

Es zeigt sich, dass die Bearbeitungsvielfalt statt der vier theoretischen Bearbeitungskonzepte sogar eine Kategorisierung in sechs Gruppen erfordert. Neben einer Differenzierung des Bearbeitungskonzeptes Relativer Bezug ist ein Bearbeitungskonzept Anderes für die individuellen Argumentationen der Drittklässler sinnvoll. Ein Abgleich der theoretisch konstruierten Bearbeitungsvarianten mit den empirischen Bearbeitungskategorien zeigt, dass 22 der 23 Bearbeitungsvarianten anhand des vorliegenden Datenmaterials letztlich in unterschiedlichen Ausprägungen bestätigt werden und sieben zusätzliche Bearbeitungskategorien eröffnet werden.

Die sechs konstruierten Bearbeitungsvarianten des **Bearbeitungskonzeptes Relativer Bezug** werden aufgrund der geringen Häufigkeiten in zwei Bearbeitungskategorien mit der Basis Zucker und der Basis Gewicht zusammengefasst. In diese Gruppierung reiht sich eine zusätzliche Bearbeitungskategorie ein, welche Lösungsansätze eines relativen Bezuges versammelt. Das theoretisch konstruierte **Bearbeitungskonzept Absoluter Bezug** wird in zwei Bearbeitungskonzepte gegliedert. Eine Gruppe kodiert sämtliche Aufgabenbearbeitungen, die auf einen konkreten **Vergleich** der in der Tabelle präsentierten Angaben schließen lassen. Sechs Bearbeitungsvarianten werden hier in drei Bearbeitungskategorien zusammengefasst. Bei zwei Bearbeitungsvarianten zeigt sich darüber hinaus die Notwendigkeit einer Differenzierung, welche durch unterscheidbare Bearbeitungskategorien zum Ausdruck kommt. In der zweiten Gruppe dieses Konzeptes sammeln sich diejenigen Aufgabenbearbeitungen, bei denen eine bloße **Verwendung** der in der Tabelle angeführten Angaben festzustellen ist. Neben der Ausschärfung einer Bearbeitungsvariante legitimieren sich anhand der empirischen Daten zwei zusätzliche Gruppierungen.

Das **Bearbeitungskonzept Lebenswelt** bestärkt vier hierzu konstruierte Bearbeitungsvarianten, eine weitere Variante erweist sich an dieser Stelle als irrelevant.

¹⁰³ Zitat aus Datensatz BP-b-04

¹⁰⁴ Zitat aus Datensatz BC-b-12

Auch das **Bearbeitungskonzept Keine Argumentation** wird anhand des Datenmaterials ausgeschärft. Alle vier theoretischen Bearbeitungsvarianten bestätigen sich und werden mit einer Zusammenfassung übernommen.

Erneut ist ein **Bearbeitungskonzept Anderes** notwendig. Um die Objektivität der Kategorisierung zu gewährleisten, sammeln sich hier drei Gruppierungen, die in ihrer Verschiedenheit und Interpretierbarkeit keinesfalls bereits existierenden Bearbeitungskategorien zugeordnet werden können.

Die Vielfalt der Bearbeitungswege beeindruckt und widerspricht der einseitigen Intention des Hessischen Kultusministeriums deutlich. Einerseits sind bei relativem Bezug der Angaben weitaus mehr Berechnungen, als in der offiziellen Musterlösung angeführt, möglich und angemessen. Andererseits führt auch eine Bearbeitung mit absolutem Bezug oder einem Bezug zur Lebenswelt in Anbetracht der Aufgabenpräsentation zu rationalen Lösungen. Im Anschluss folgen ergänzende Erkenntnisse aus der Interviewstudie, anhand derer die getroffenen Aussagen weiter gestützt werden.

9.2.3 Überblick der Interviewstudie Aufgabe A8

Die Interviewdaten der 28 Drittklässler werden entsprechend ihrer Argumentationsebenen kodiert (siehe Abschnitt 9.2.1). Die Analyse der Interviewtranskripte zeigt, dass die Kinder in ihren mündlichen Begründungen meist mehrere Argumente für ihre Entscheidung anführen. Die zugehörigen Schriftdokumente weisen, bis auf eine Ausnahme, ausschließlich ein Argument auf. Die Synopse hält neben der Anzahl mündlich angeführter Argumente weiterhin fest, welche dieser Argumentationsaspekte in den Schriftdokumenten wiederzufinden sind. Ferner interessiert, ob die Argumente zu einer Bestätigung oder einem Widerspruch der Aussage führen.

Die schriftlichen als auch mündlichen Bearbeitungen von achtzehn Kindern lassen sich in jeweils identische Bearbeitungskategorien einordnen. Das in den Schriftdokumenten notierte Argument wird auch im Verlauf des Interviews angeführt. Acht Kinder begründen ihre Entscheidung sowohl schriftlich als auch mündlich jeweils mit einem und darüber hinaus identischem Argument. Fünf andere Kinder führen mündlich zwei oder drei Argumente an, von denen jeweils das letztgenannte auf den Aufgabendokumenten notiert wird. Weiter vermerken fünf Kinder in ihren Begründungen das im Interviewverlauf zuerst genannte Argument. Hier kann nochmals zwischen zwei oder drei mündlich angeführten Argumenten unterschieden werden.

Eine Gruppe von zehn Kindern verwendet schriftliche Argumente, die in den zugehörigen Interviewgesprächen hingegen nicht verbalisiert werden. Meist sind diese Argumente sogar verschiedenen Bearbeitungskonzepten zugeordnet. Fünf Kinder verwenden im Verlauf des Interviews jeweils nur ein Argument. Vier andere Kinder führen jeweils zwei Argumente für die Begründung ihrer Entscheidung an. *Marco*, dessen Bearbeitung noch detailliert vorgestellt wird, führt mündlich sogar vier Argumente an.

Die Tabelle zeigt einen Abgleich der mündlich verwendeten Argumente mit den schriftlichen Kodierungen. Zunächst erfolgt eine Gliederung aller 28 Interviews nach der Anzahl mündlich verwendeter Argumente. Weiterhin ist der Vergleich mit den kodierten Bearbeitungskategorien der Schriftdokumente vermerkt, der zwischen identischen und unterschiedlichen Argumenten differenziert.

Anzahl Argumente	Anzahl gesamt	Identität Schriftdokument	
		Anzahl Identität	Anzahl Unterschied
Ein Argument	46,4 % (13)	61,5 % (8)	38,5 % (5)
Zwei Argumente	39,3 % (11)	63,6 % (7)	36,4 % (4)
Drei Argumente	10,7 % (3)	100 % (3)	0 % (0)
Mehr Argumente	3,6 % (1)	0 % (0)	100 % (1)
Summe	100 % (28)	64,3 % (18)	35,7 % (10)

Tabelle 9: Anzahl genannter Argumente Interviewstudie A8 mit Angabe der absoluten Häufigkeiten in Anzahl und Prozent.

Während des Gesprächsverlaufes führen mit 13 der 28 Kinder 46,4 % der gesamten Gruppe nur ein Argument an. In acht Schriftdokumenten erfolgt eine identische Argumentation, was einem Anteil von 61,5 % entspricht. Die schriftlichen Begründungen von fünf Kindern, also 38,5 %, sind jeweils verschiedenen Bearbeitungskategorien zuzuordnen. Eine ähnliche Verteilung liegt bei der Gruppe mit elf Kindern vor, die mündlich zwei Argumente formulieren, was 39,3 % aller Kinder der Interviewserie entspricht. Auch hier sind es mit sieben Kindern knapp über 60 %, die im Vergleich ihrer mündlichen und schriftlichen Begründungen identische Bearbeitungskategorien aufweisen. Genau vier Kinder, also 36,4 %, geben in ihrer Notation andere Begründungen an. Drei Kinder, in Bezug zur gesamten Interviewgruppe also 10,7 %, führen während der Gespräche sogar drei Argumente an. In den zugehörigen Schriftdokumenten findet sich jeweils eines dieser Argumente wieder. Im Rahmen der Interviewstudie führt ein Kind mehr als drei, explizit vier, Argumente an, was einem Anteil von 3,6 % entspricht. In der zugehörigen schriftlichen Bearbeitung wird die Entscheidung nochmals durch ein weiteres Argument belegt (siehe Abschnitt 9.2.4),

Die Analyse der Interviewdaten bestätigt die Variationen der ausgeschärften Bearbeitungskategorien. Alle sechs erläuterten Bearbeitungskonzepte treten bei der Kodierung der schriftlichen und auch mündlichen Argumentationen auf. Wird der direkte Vergleich der schriftlichen und mündlichen Bearbeitung eines Kindes herangezogen, sind zwei Erkenntnisse von Bedeutung: Zum Einen verwenden in der Interviewstudie 96,4 % aller Kinder schriftlich lediglich ein Argument zur Begründung ihrer Entscheidung. Hingegen führen im Verlaufe der parallelen Gespräche mit 15 Kindern über die Hälfte mehrere Argumente an. Zum Anderen wird deutlich, dass unabhängig von der Anzahl der verwendeten Argu-

mente 18 aller 28 Kinder, also 64,3 %, bei einem Vergleich ihrer mündlichen und schriftlichen Dokumente identische Bearbeitungskategorien aufweisen. Weiterhin deuten die Dokumente der Interviewstudie auf den Zusammenhang einzelner Bearbeitungskategorien hin. Bei der Empirischen Aufgabenanalyse der Schrift Dokumente fällt auf, dass in 378 schriftlichen Bearbeitungen lediglich die Zucker- beziehungsweise Gewichtsangaben notiert werden (Bearbeitungskategorie 3.1. ~Nennung Zucker/Gewicht~). Weitere Gedankengänge oder Schlussfolgerungen der Aufgabenbearbeiter sind nur zu erahnen. Die Interviewgespräche zeigen, dass bei zehnmaligem Auftreten dieser Bearbeitungskategorie in sieben Fällen ein zusätzliches Argument des Bearbeitungskonzeptes Absoluter Bezug Tabelle - Vergleich angeführt wird. Die Kinder nennen zunächst die jeweiligen Angaben von Schokolade und Schokokuss, um anschließend einen direkten Größenvergleich durchzuführen. Der Vergleich oder dessen Ergebnis wird jedoch in der schriftlichen Notation nicht mehr dargelegt.

Darüber hinaus illustrieren die Bearbeitungen erneut die vielfältige Deutung der Aufgabenstellung und legitimieren ein Verständnis der in der Tabelle präsentierten Angaben als absolute Werte.

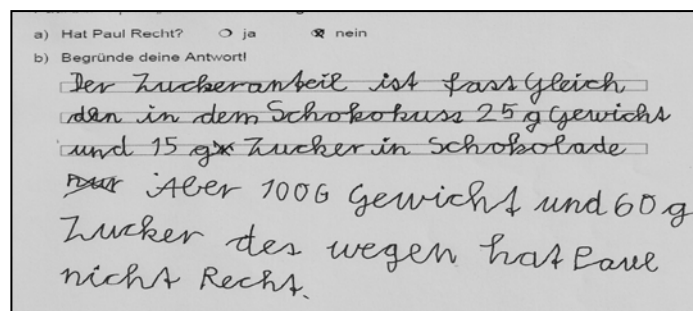
9.2.4 Exkurs: Einzelfallbeschreibung Marco

Der ausführliche Einblick in *Marcos* Bearbeitung verdeutlicht die verbale Nutzung verschiedener Argumente. *Marco* nutzt sowohl für seine schriftliche wie auch mündliche Argumentation die in der Tabelle präsentierten Gewichts- und Zuckerangaben der beiden Lebensmittel Schokolade und Schokokuss. Seine Argumentationskette wird anhand der nachfolgenden Fallstudie deutlich.

Beginn Interview Marco bei 0:20	
1:46	K kreuzt Nein an.
1:48	I: Warum hast du Nein angekreuzt?
1:49	K: Weil's nicht stimmt. Hier Zuckeranteil. Hier beim Schokokuss nur 15, bei Schokolade 60.
1:57	I: Mh, also hat Paul Recht?
2:00	K: Ne, würd ich nicht ganz genau sagen.
2:02	I: Mh.
2:03	K: Weil Schokolade wiegt mehr. Also muss sie nicht, muss nicht nur Schokolade drinne sein. Der Zucker ist ja vielleicht gar nicht das Schlimmste. Es gibt ja noch andere Sachen, die aus Zucker auch bestehen, teilweise Zuckeranteil haben. Also... deswegen ist fast gleich.
2:26	I: Also meinst du Paul hat nicht Recht?
2:31	K: Ne, nicht ganz genau. Aber fast! Weil da nur 15 sind (K zeigt auf Tabelle.), das ist ja fast nur ein Schritt...über...4...über das sind ja ein Schritt über 35g Unterschied...Deswegen glaub ich nicht, dass er Recht hat.

Nachdem *Marco* die Aufgabenstellung erfasst und mit der Interviewerin geklärt hat, widmet sich der Junge zunächst der Tabelle und deren Angaben. Anschließend entscheidet er sich für eine Beantwortung der Frage in Teilaufgabe A8a mit 'Nein'. Auf Nachfrage der Interviewerin antwortet *Marco*, die Aussage sei nicht korrekt („Weil's nicht stimmt“, Bearbeitungskategorie 5.2 ~Verneinung~). Anschließend weist *Marco* sofort auf die in der Tabelle angeführten Zuckerangaben hin. Zunächst erfolgt deren Nennung, wobei die Ver-

wendung des Wortes „nur“ auf einen konkreten Vergleich hindeutet (siehe Abschnitt 9.2.1, Bearbeitungskategorie 2.3). Die Zuckermenge des Schokokusses wird von ihm als die kleinere Größenangabe identifiziert (Bearbeitungskategorie 2.3. ~15 g < 60 g~). Nach einem Impuls der Interviewerin begründet *Marco* seine Entscheidung mit dem höheren Gewicht der Schokolade („Weil Schokolade wiegt mehr“, Bearbeitungskategorie 2.6. ~Vergleich Gewicht~). Er führt aus, dass Schokolade durchaus weitere Bestandteile besitzen kann, die ebenfalls Zucker enthalten („Es gibt ja noch andere Sachen, die aus Zucker bestehen, teilweise Zuckeranteil haben.“, Bearbeitungskategorie 4.1. ~Bestandteile Schokolade/Schokokuss~). Seinen Widerspruch ergänzt er nun durch die Aussage, dass der Zuckeranteil fast gleich ist. Abschließend kehrt *Marco* im Rahmen seiner Argumentationskette wieder zu den in der Tabelle angegebenen Zuckerangaben zurück. Um deren Unterschied zu verdeutlichen, argumentiert er mit den errechneten Differenzen von 60 und 15 (Bearbeitungskategorie 2.5. ~Differenz Zucker~). Hierbei unterläuft ihm ein Rechenfehler („...ein Schritt über 35g Unterschied...“). Für die anschließende Notation seiner Begründung benötigt *Marco* weit mehr als sieben Minuten. Sein Schriftdokument weist die Nennung der Zucker- und Gewichtsangaben beider Lebensmittel auf. Darüber hinaus belegt seine Ausdrucksweise den Vergleich dieser Größen, womit eine Zuordnung in Bearbeitungskategorie 2.7. ~Vergleich Zucker und Gewicht~ vorgenommen wird.



Zusammenfassend ist festzuhalten, dass *Marco* während des Gesprächsverlaufes vier verschiedene Argumente für seine Entscheidung anführt (2.3. – 2.6. – 4.1. – 2.5.). In seiner schriftlichen Begründungen notiert *Marco* hingegen ausschließlich den Vergleich der Zucker- und Gewichtsangaben, wobei dieses Argument einer weiteren Differenzierung des angesprochenen Bearbeitungskonzeptes entspricht (2.7.).

9.3 Zusammenführung der Bearbeitungswege A8

In den Vorbemerkungen der Empirischen Aufgabenanalyse wird die deutliche inhaltliche Abhängigkeit der beiden Teilaufgaben betont. Nachdem zunächst die Kategorisierung der Bearbeitungswege hinsichtlich der Argumentation erfolgt ist, wird nun der Bezug zu den jeweils gesetzten Kreuzen, also der Entscheidung für eine Bestätigung oder für einen Widerspruch der Aussage, hergestellt. Im Zuge der Kodierung ist dieser Aspekt für jede der 1946 Aufgabenbearbeitungen vermerkt worden.

Die nachstehende Übersicht fasst die Häufigkeiten der einzelnen Bearbeitungskategorien zusammen und bildet die nach Bearbeitungskonzepten geordneten absoluten sowie prozentualen Anteile¹⁰⁵ ab.

¹⁰⁵ Eine detaillierte Übersicht mit sämtlichen Bearbeitungskategorien befindet sich im Anhang.

Bearbeitungskonzept	<u>H_{ges}</u>	<u>Kr_{Ja}</u>	<u>% rel_{Ja}</u>	<u>Kr_{Nein}</u>	<u>% rel_{Nein}</u>
1. Konzept Relativer Bezug Tabelle	162	141	87,0 %	21	13,0 %
2. Konzept Absoluter Bezug Tabelle – Vergleich	702	21	3,00 %	681	97,0 %
3. Konzept Absoluter Bezug Tabelle – Verwendung Angaben	496	49	9,9 %	447	90,1 %
4. Konzept Lebenswelt	214	108	50,5 %	106	49,5 %
5. Konzept keine Argumentation	84	44	52,4 %	40	47,6 %
6. Konzept Weiteres	288	83	28,8 %	205	71,2 %
Summe	1946	446	22,9 %	1500	77,1 %

Tabelle 10: Häufigkeiten der Kreuze Ja/Nein A8 mit Angabe der absoluten Anzahlen und relativen Prozentzahlen.

In den verschiedenen Bearbeitungskonzepten sind deutliche Verteilungen hinsichtlich der Bestätigung oder des Widerspruchs der zu beurteilenden Aussage abzulesen. Die jeweils größten Anteile sind durch Fettdruck hervorgehoben.

Das Bearbeitungskonzept Relativer Bezug spiegelt die ursprüngliche Intention der Aufgabe wider. Aufgrund des relativen Vergleichs der Zucker- und Gewichtsangaben ist die Aussage zu bestätigen, das Kreuz demnach bei 'Ja' zu setzen. Tatsächlich entscheiden sich 141 Aufgabenbearbeiter dieses Bearbeitungskonzeptes für eine Bestätigung der Aussage, was immerhin einem relativen Anteil von 87 % entspricht. Eine der drei Bearbeitungskategorien ist eine Gruppierung, in der lediglich Lösungsideen und -ansätze versammelt sind. In diesen Begründungen wird der relative Bezug der Angaben angedeutet, jedoch nicht konsequent weitergeführt (siehe Abschnitt 9.2.1). Wird diese Bearbeitungskategorie vernachlässigt, bestätigen sogar 121 von 132 Aufgabenbearbeitern Pauls Aussage, womit sich der relative Anteil auf 91,7 % erhöht.

Aufgabenbearbeiter, die mit den Angaben in der Tabelle als absolute Werte umgehen und konkrete Vergleiche durchführen, gelangen aufgrund der unterschiedlichen Größenangaben schnell zu einem Widerspruch der Aussage (Bearbeitungskonzept Absoluter Bezug Tabelle - Vergleich). Hier ist ein Ankreuzen der Möglichkeit 'Nein' vorhersehbar. Auch diese Vermutung bestätigt sich in den vorliegenden Daten. Zunächst rückt das zweite Bearbeitungskonzept in den Mittelpunkt, in das 702 Aufgabenbearbeitungen eingeordnet werden. Knapp 97 % dieser Gruppierung, genau 681 Aufgabenbearbeitungen, weisen einen Widerspruch der zu beurteilenden Aussage auf, also ein Kreuz bei 'Nein', auf.

Ähnlich verhält es sich bei dem nachfolgenden Bearbeitungskonzept (Bearbeitungskonzept Absoluter Bezug Tabelle - Verwendung Angaben). Hier werden die in der Tabelle präsentierten Informationen als absolute Angaben verwendet, wobei den schriftlichen Bearbeitungen der konkrete Vergleich als Grundlage der Begründung nicht explizit zu ent-

nehmen ist. Auch in dieser Gruppierung entscheiden sich 447 der 496 Aufgabenbearbeiter für einen Widerspruch der Aussage, was einem Anteil von 90,1 % entspricht.

Interessant präsentiert sich die Verteilung in Bearbeitungskonzept Lebenswelt. Mit 108 gesetzten Kreuzen bei 'Ja' und 106 gesetzten Kreuzen bei 'Nein' liegt hier eine weitestgehende Gleichverteilung vor (50,5 % und 49,5 %). Die auf lebensweltlichen Erfahrungen basierenden Begründungen liefern sowohl Argumente für eine Bestätigung als auch für einen Widerspruch der Aussage.

Ähnlich ist die Verteilung in Bearbeitungskonzept Keine Argumentation zu beschreiben. Redundante Formulierungen oder Unwissenheit deuten hier auf eine Unsicherheit bei der Entscheidung hin. Insgesamt versammeln sich 84 Aufgabenbearbeitungen in dieser Gruppierung, wobei 44 Dokumente das Kreuz bei 'Ja' aufweisen und in 40 Dokumenten 'Nein' angekreuzt ist. Somit stellen sich die relativen Anteile mit 52,4 % und 47,6 % ähnlich wie in dem zuvor beschriebenen Bearbeitungskonzept dar.

In der letzten Gruppierung (Bearbeitungskonzept Anderes) liegt eine ungefähre Verteilung von einem Drittel zu zwei Dritteln vor. Insgesamt 83 der 288 Aufgabenbearbeitungen bestätigen die zu beurteilende Aussage, während 205 Dokumente einen Widerspruch verzeichnen.

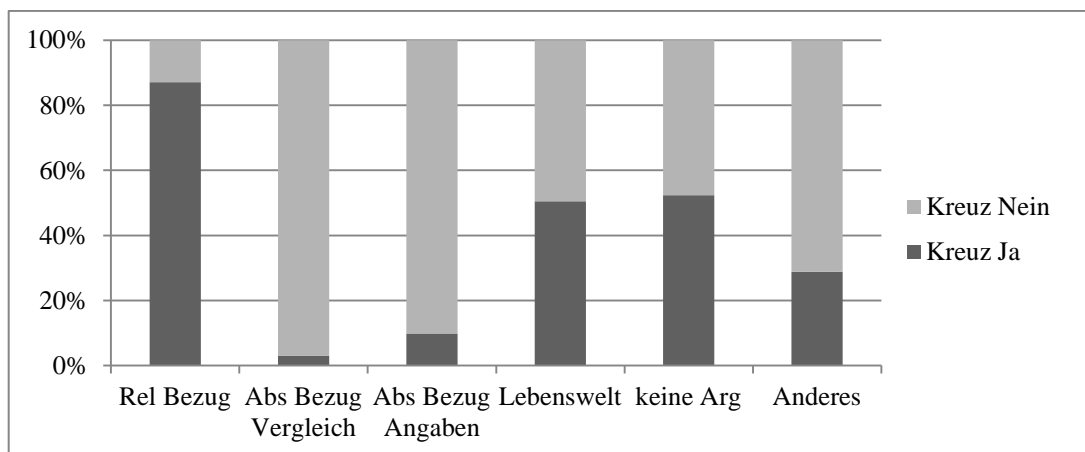


Abbildung 21: Relative Anteile der gesetzten Kreuze Ja/Nein A8 zu den Bearbeitungskonzepten.

Der Bezug zwischen Bearbeitungskonzept und Beurteilung der Aussage wird mithilfe des Diagramms zusammengefasst. Die zuvor beschriebenen Verhältnisse einer Bestätigung oder eines Widerspruches der zu beurteilenden Aussage werden wie folgt beschrieben.

- Im Bearbeitungskonzept Relativer Bezug Tabelle wird eine deutliche Mehrheit bei der Bestätigung der Aussage analysiert.
- Ebenso aussagekräftig erweisen sich die beiden Bearbeitungskonzepte Absoluter Bezug Tabelle bezüglich des Widerspruches der Aussage.
- Die Verteilungen der Bearbeitungskonzepte Lebenswelt sowie Keine Argumentation präsentieren sich hinsichtlich der Beurteilung der Aussage ausgeglichen.
- Das Bearbeitungskonzept Anderes weist eine Verteilung im Verhältnis 1 zu 2 auf.

9.4 Zusammenfassung und Kennzeichnung der Aufgabe A8

Die Rationale Aufgabenanalyse bestätigt die Komplexität und Anforderung der Aufgabe A8 „Zucker“. Dem durch das Hessische Kultusministerium intendierten ausschließlich relativen Aufgabenverständnis sowie dem in der Musterlösung exklusivem Rechenweg ist vehement zu widersprechen. Mit Blick auf die Erkenntnisse der Empirischen Aufgabenanalyse wird die tatsächliche Variation der Bearbeitungen deutlich.

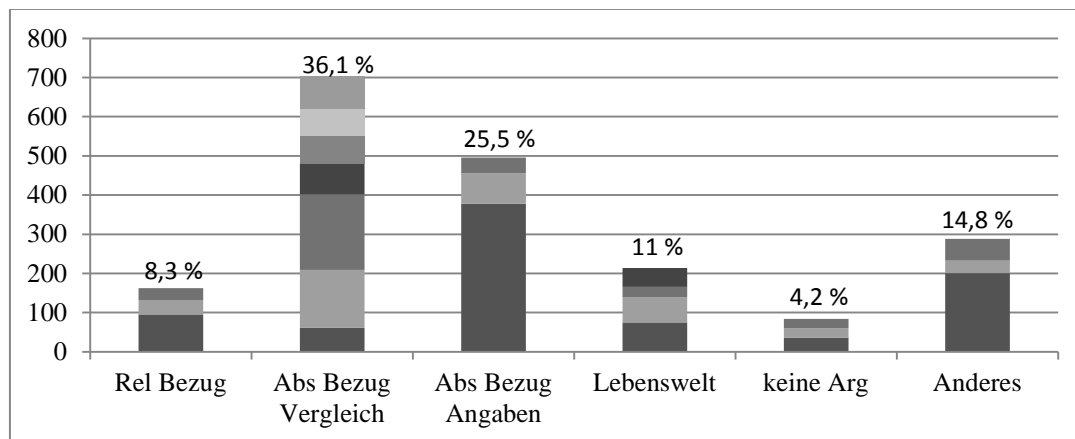


Abbildung 22: Säulendiagramm Bearbeitungskonzepte und -kategorien A8¹⁰⁶.

Das abgebildete Diagramm verdeutlicht im Überblick, dass lediglich knapp 8 % der Aufgabenbearbeiter die Aufgabe den Vorstellungen der Aufgabenautoren entsprechend lösen (Bearbeitungskonzept 1 - Relativer Bezug Tabelle). Nur in dieser Gruppe wird der ursprünglich angedachte relative Bezug der Zucker- und Gewichtsangaben realisiert. Die Analyse der empirischen Daten bestätigt eine häufige, von der Aufgabenintention des Kultusministeriums abweichende und doch angemessene Deutung der Aufgabenstellung. Adäquate Bearbeitungen der Aufgabe sind durchaus ohne proportionales Denken möglich und werden aufgrund der nachfolgend angeführten Aufgabenmerkmale legitimiert.

Auffallend sind die beiden mächtigsten Gruppen (Bearbeitungskonzept 2 - Absoluter Bezug Tabelle/Vergleich, Bearbeitungskonzept 3 - Absoluter Bezug Tabelle/Verwendung Angaben), die in ihren zugeordneten Bearbeitungen jeweils eine Verwendung der absoluten Angaben gemeinsam haben. Differenziert werden diese Konzepte anhand des konkreten Vergleiches der Zucker- oder Gewichtsangaben und der bloßen Angabe von in der Tabelle präsentierten Daten. Zusammengefasst formulieren knapp 61 % aller Aufgabenbearbeiter Erklärungen auf dieser Argumentationsbasis. Darüber hinaus werden in 11 % aller Schriftdokumente die in der Tabelle präsentierten Informationen völlig außer Acht gelas-

¹⁰⁶ Übersicht der Bearbeitungskonzepte und -kategorien, Abbildung erfolgt aufsteigend

Relativer Bezug Tabelle: Basis Gewicht, Basis Zucker, Lösungsidee

Absoluter Bezug Tabelle/Vergleich: 60g>15g, Schokolade mehr Zucker, 15g<60g, Schokokuss weniger Zucker, Differenz Zucker, Vergleich Gewicht, Vergleich Zucker und Gewicht

Absoluter Bezug Tabelle/Verwendung Angaben: Nennung Zucker/Gewicht, Rechnungen, Lebensmittel Tabelle

Lebenswelt: Beschaffenheit Schokolade/Schokokuss, Ähnlichkeit Schokolade/Schokokuss, Argument süß, Argument Zucker

Keine Argumentation: Bestätigung, Verneinung, keine Aussage

Weiteres: nur Kreuz, Schokokuss mehr Zucker, Anderes

sen. Diese Begründungen (Bearbeitungskonzept 4 - Lebenswelt) basieren auf lebensweltlichen Erfahrungen. Lediglich 4 % der Aufgabenbearbeitungen weisen keine echten Belege für die getroffene Entscheidung auf oder formulieren redundante Aussagen (Bearbeitungskonzept 5 - Keine Argumentation). Die weiteren Bearbeitungen zusammenfassende Gruppierung (Bearbeitungskonzept 6 - Anderes) enthält vielfältige Lösungen, die lediglich eine Beurteilung der Aussage anhand des gesetzten Kreuzes bieten, ohne im zweiten Aufgabenteil eine Begründung zu formulieren. Werden diese 201 Datensätze aus der Betrachtung extrahiert, sind nur knapp 3 % aller Aufgabenbearbeitungen nicht in bereits aufgestellte Bearbeitungskonzepte und -kategorien einzuordnen. Im Ganzen werden auf Grundlage der Empirischen Aufgabenanalyse und der eingehenden Untersuchung von 1946 Aufgabenbearbeitungen sechs Bearbeitungskonzepte mit 23 untergeordneten Bearbeitungskategorien benannt. Dieses Ergebnis belegt die in der Rationalen Aufgabenanalyse vermerkte Komplexität der vorliegenden Aufgabe, die sich in dieser Vielfalt der Bearbeitungskategorien widerspiegelt.

Das nachfolgende Diagramm visualisiert erneut die Verteilung der Bearbeitungskonzepte, wobei hier die Bearbeitungskategorien 2 und 3 sowie die Bearbeitungskategorien 5 und 6 in Folge des sich ähnelnden zugrundeliegenden Aufgabenverständnisses zusammengefasst werden.

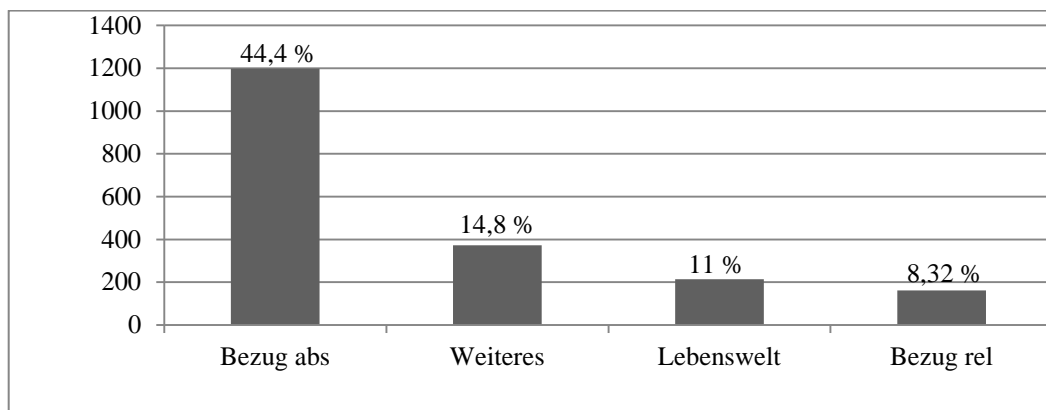


Abbildung 23: Säulendiagramm der zusammengefassten Bearbeitungskonzepte und -kategorien A8.

Es wird deutlich, dass die Mehrheit der Aufgabenbearbeiter mit 1198 Zuordnungen die Aufgabe auf Grundlage eines absoluten Verständnisses bearbeitet. Den durch das Hessische Kultusministerium geforderten Bearbeitungsweg des relativen Bezuges verfolgt mit 162 Aufgabenbearbeitern die kleinste der vier betrachteten Gruppierungen.

Anhand der zahlreichen Bearbeitungskategorien und der jeweils zugeordneten Aufgabenbearbeitungen wird erneut die multiple Lösbarkeit der Aufgabe deutlich. Ein Blick zurück in den offiziellen Aufgabenkommentar ruft die dort präsentierte Musterlösung in Erinnerung. Diese stellt den relativen Bezug der Gewichts- und Zuckermenge in den Vordergrund, offeriert jedoch lediglich eine Berechnungsvariante. Die Schülerdokumente des Bearbeitungskonzeptes Relativer Bezug verdeutlichen hingegen, dass auch auf dieser Ebene diverse Zugänge möglich sind. Des Weiteren wird hervorgehoben, dass eine sinnvolle Beurteilung der Aussage auch aufgrund anderer, dennoch rationaler Begründungen mög-

lich ist. Ein durchdachtes und lösungsorientiertes Umgehen mit der zu bearbeitenden Aufgabe ist demnach weit über die Aufgabenintention hinaus möglich, sei es anhand eines absoluten Bezuges der Angaben oder aufgrund lebensweltlicher Argumentationen.

Werden die beiden Teilaufgaben aufgrund ihrer inhaltlichen Abhängigkeit vereint betrachtet, ist die inhaltliche Validität der Aufgabe deutlich zu verneinen. Bereits durch das Setzen eines Kreuzes in der ersten Teilaufgabe ist die Aufgabe laut der Aufgabenautoren als teigelöst zu betrachten. Dies setzt jedoch kein inhaltliches Verständnis der Aufgabe voraus und kann durchaus zufällig geschehen. Ein Blick in die aufgestellten Bearbeitungskategorien zeigt, dass mit 201 immerhin 11,5 % der Bearbeitungen lediglich eine derartige Bearbeitung der ersten Teilaufgabe vorweisen. Die zweite Teilaufgabe hingegen ist in sich als valide zu beurteilen. Die zuvor kenntlich gemachte Beurteilung der Aussage wird hier mit Worten begründet. Unabhängig vom verfolgten Bearbeitungskonzept ist der Aufgabenbearbeiter angehalten, seine Beurteilung zu reflektieren und zu belegen. Das Ergebnis der Empirischen Aufgabenanalyse identifiziert mit 84 Datensätzen eine nur kleine Gruppe von Aufgabenbearbeitungen, aus denen keine tatsächliche Begründung für die getroffene Entscheidung herauszulesen ist.

Die Untersuchung der vorliegenden Schriftdokumente sowie im Besonderen die Kombination mit den Daten der ergänzenden Interviewstudie veranschaulichen die Vielschichtigkeit und Komplexität der Aufgabe. Gerade zu Beginn der Interviewgespräche wird der Aufgabenanspruch immer wieder deutlich. Das Erfassen sämtlicher Informationen, die mittels Text und Grafik transportiert werden sowie das Verständnis für die Aufgabenstellung erweisen sich als bedeutungsvoll und keinesfalls lapidar. Bereits in dieser Phase entscheidet sich, ob das Kind einen relativen oder absoluten Bearbeitungsweg einschlägt.

Die möglichen, jedoch hinsichtlich des Bearbeitungsweges deutlich differierenden, Auffassungen der Aufgabe erklären sich ebenfalls anhand der formalen und sprachlichen Aspekte. Der Aufgabenstamm weist Text, Grafik und weitere Angaben auf, deren ungeschickte Anordnung keinesfalls zu einem besseren Aufgabenverständnis beiträgt. Sowohl die inhaltliche Verzahnung der beiden Aufgabenteile als auch die Beziehung zu den zuvor in der Tabelle präsentierten Informationen ist aufgrund der gegliederten Darstellung im Vorspann und in den Teilaufgaben undeutlich. Hinzu kommt die formale Gliederung in zwei Teilaufgaben, in denen zwei unterschiedliche Antwortformate verwendet werden. Spannend erscheinen hier eine formale Umstrukturierung der Aufgabe und die anschließende Untersuchung hinsichtlich des positiven Beitrags zum Aufgabenverständnis.

Die beschriebenen Aspekte verdeutlichen den hohen kognitiven Anspruch der Aufgabe. Die zuvor in der Rationalen Aufgabenanalyse herausgearbeiteten Bedenken bezüglich der sprachlogischen Komplexität der Aufgabe bestätigen sich unter Einbeziehung der empirischen Daten. Die in der Aufgabenstellung verwendeten Begriffe und Formulierungen führen zu deutlichen Irritationen bei den Aufgabenbearbeitern. So werden die beiden Begriffe 'Zucker' und 'Zuckeranteil', deren Verwendung implizit auf den angedachten relativen Bezug hinweist, in ihrer Unterscheidung nicht wahrgenommen. Keiner der Aufgabenbear-

beiter weist auf diese sprachliche Differenzierung und ihre Bedeutung hin oder argumentiert hiermit. Im Gegenteil: Die Begriffe werden schriftlich, als auch mündlich im Interview, synonym aufgefasst und verwendet, was eine Bearbeitung der Aufgabe mit absolutem Bezug geradezu legitimiert. Ebenso ist auch die Verwendung weiterer Begriffe kritisch anzumerken. Die dem angelsächsischen Sprachgebrauch entlehnten Begriffe ‘Cornflakes’ und ‘Ketchup’ sind aufgrund ihrer differenten Aussprache für Kinder der dritten Jahrgangsstufe schwer verständlich. In der durchgeführten Interviewstudie zeigt sich, dass die Kinder zu Beginn der Aufgabenbearbeitung den Fokus häufig auf diese unverstandenen Worte richten, auch wenn diese zu den irrelevanten Informationen gehören. Von besonderer Bedeutung ist die Verwendung des Begriffes ‘Schokokuss’. Häufig wird dieses Wort missverstanden und fehlinterpretiert. So schreiben und sprechen die Aufgabenbearbeiter von „Schokoguss“ oder auch einem „Schokoküsschen“, meinen hiermit die mit Nuss gefüllte Schokoladenpraline einer Süßwarenfirma. Gerade wenn die in der Tabelle präsentierten Informationen für die Beantwortung ausgeblendet werden, sind eine Fehlinterpretation des Begriffes und die damit einhergehende Vorstellung von enormer Bedeutung. In der Interviewstudie ist ein solches Missverständnis bei einem Viertel der Kinder zu beobachten. Die Komplexität der Aufgabe und die für eine sinnvolle Bearbeitung nötige inhaltliche Strukturierung und Erfassung wird durch die beschriebenen formalen Aspekte unnötig erschwert.

Mit Bezug auf die inhaltliche Perspektive wird die Einordnung der Aufgabe in den Arbeitsbereich des Sachrechnens bestätigt. Konkret ist ein Modellierungsprozess zu vollziehen, bei dessen Durchlaufen zahlreiche schwierigkeitsbestimmende Faktoren der Aufgabe deutlich werden. Der Umgang mit der Tabelle, das Herausfiltern relevanter und nicht relevanter Informationen oder die Bearbeitung der Aufgabe auf der mathematischen Ebene werden an dieser Stelle als drei bedeutsame Aspekte angeführt. Häufig wird in den Interviews deutlich, dass der Umgang mit und das Lesen von Tabellen nicht vorauszusetzen ist. Bei der Erstellung des Interviewleitfadens (siehe Anhang) wurde diese Problematik bedacht, sodass mit Hilfe der Anregungen situativ entsprechend reagiert werden konnte. So wurden entsprechende Impulse, die den Blick auf die Tabelle und die darin enthaltenen Informationen lenkt, gesetzt. Ebenso zeigen die ausgeschärfte Bearbeitungskategorien, dass diverse Gruppierungen die in der Tabelle angebotenen Informationen bei der Formulierung einer Begründung völlig außer Acht lassen oder Informationen der Tabelle verwendet werden, die für die Beantwortung der Frage prinzipiell irrelevant sind.

Aufgrund des komplexen Modellierungsprozesses ist die Aufgabe als Problemlöseaufgabe einzustufen, womit ein sehr hohes Anforderungsniveau für die dritte Jahrgangsstufe vorliegt und zudem eine Betonung der allgemeinen mathematischen Kompetenzen erfolgt. Neben dem Anspruch des Modellierungsprozesses steht weiterhin der Anspruch als Sachaufgabe, der eine proportionale Zuordnung zugrunde liegt. Im Rahmen der Rationalen Aufgabenanalyse wird dieser Aspekt auf Grundlage der curricularen Vorgaben sowie entwicklungspsychologischer Argumente bereits intensiv diskutiert. PIAGET betont, dass Kinder im Alter von neun Jahren noch nicht über ein vollständig ausgebildetes Proportionalitätsschema verfügen. Einfache Proportionen bei anschaulichen Größen können bereits er-

fasst werden. Da hinsichtlich des Umgangs mit Zahlverhältnissen jedoch noch nicht die vollständige Reversibilität erreicht ist, wird das Prinzip der funktionalen Abhängigkeiten noch nicht verstanden (vgl. KESSELRING 1999, S. 137ff). Von der intendierten relativen Bearbeitung der Aufgabe ist bei einem Kind der dritten Klasse im durchschnittlichen Alter von neun Jahren somit nicht auszugehen. Nach HINRICHS (2008, S. 97) wird die Aufgabe A8 „Zucker“ als vorgezogen gestellte Anwendungsaufgabe deklariert, die mit Hilfe dieser Methode zu einer offenen Problemaufgabe wird. Für die Grundschule werden die proportionalen Zuordnungen als geeigneter Inhalt solcher Aufgaben explizit angeführt. In einer Leistungserhebung ist dem Einsatz solcher Aufgaben deutlich zu widersprechen. So ist das schuljahresbezogene Niveau aufgrund dieser Erkenntnisse weit über dem Anspruch der dritten Klasse anzusiedeln.

Zwei bedeutsame Erkenntnisse der Empirischen Aufgabenanalyse werden an dieser Stelle weiterhin angeführt. In der allgemeinen didaktischen Diskussion herrscht Uneinigkeit bezüglich der Beurteilung und Einordnung schriftlich vorliegender Begründungen und Argumentationen. Fortwährend stellt sich die Frage nach der Reliabilität vorliegender Schriftdokumente. Im Rahmen der Interviewstudie liegen sowohl die schriftlichen Bearbeitungen der Kinder als auch die Videoaufnahmen der Gespräche vor. Eine synoptische Analyse zeigt, dass die Kinder schriftlich meist ausschließlich ein einzelnes Argument anführen. Im Gegensatz hierzu führen über 60 % dieser Kinder in den parallelen Gesprächen bis zu vier Argumente an. Bedeutsam ist jedoch die Identität von schriftlichen und mündlichen Argumentationen bei fast 65 % der Aufgabebearbeitungen. Entschärfend ist der Zusammenhang diverser Bearbeitungskategorien zu nennen, der bei den als nichtidentisch eingestuften Argumenten aufgezeigt wird (siehe Abschnitt 9.2.4).

Ferner präsentiert eine Untersuchung der Bearbeitungskategorien und der gesetzten Kreuze deutliche Zusammenhänge bezüglich der Beurteilung der Aussage. So lässt sich eine Gruppe benennen (Bearbeitungskonzept 1 - Relativer Bezug Tabelle), welche die Aussage mit knapp 87 % bestätigt. Weiterhin widersprechen die Aufgabebearbeiter zweier Gruppen (Bearbeitungskonzept 2 - Absoluter Bezug Tabelle/Vergleich, Bearbeitungskonzept 3 - Absoluter Bezug Tabelle/ Verwendung Angaben) der Aussage mit jeweils über 90 % deutlich. Im Gegensatz hierzu verzeichnet sich in zwei Fällen eine Gleichverteilung der Entscheidung (Bearbeitungskonzept 4 - Lebenswelt, Bearbeitungskonzept 5 - Keine Argumentation). Hier bestätigen sich die auftretenden Argumentationsebenen der Empirischen Aufgabenanalyse.

Die durch die Aufgabenautoren intendierte Verstehensorientierung der Aufgabe erweist sich bei einer ganzheitlichen Betrachtung der Teilaufgaben als zutreffend. Allerdings ist die eingeschränkte Sichtweise auf den Lösungsweg der Aufgabe zu relativieren. Aufgrund der vorliegenden Aufgabenpräsentation ist sowohl eine Bearbeitung mit relativem Bezug als auch eine Bearbeitung mit absolutem Bezug als legitim anzuerkennen. Des Weiteren sind diverse adäquate und zu einer rationalen Lösung führende Rechenwege möglich. Der Aufgabebearbeiter legt Argumente für seine getroffene Entscheidung dar, wobei die Beurteilung zunächst unabhängig von einer Bearbeitung der Aufgabe auf der Sach- oder Ma-

thematikebene erfolgt. Ein bloßes Anwenden und Abarbeiten bereits bekannter Fähigkeiten und Fertigkeiten ist bei der Lösung der Aufgabe in keinem Fall möglich.

Das frei angelegte Antwortformat der zweiten Teilaufgabe regt zu einer Eigenproduktion an, die einen Blick in den Denk- und Bearbeitungsweg des Kindes erlaubt. Das diagnostische Potential der Aufgabe wird so unterstützt. Darüber hinaus erfolgt während der Notation eine implizite Reflektion der Entscheidung und des dorthin führenden Lösungsweges. Ausschließlich die Kombination der Entscheidung mit der zu liefernden Begründung ermöglicht eine Fehleranalyse der Aufgabe. Auch Bearbeitungen entgegen der Aufgabenintention können interpretiert werden. Die Untersuchung der vorliegenden Begründungen sowie die anhand des gesetzten Kreuzes angegebene Beurteilung der Aussage ermöglichen eine grundsätzliche Fehleranalyse der Aufgabenbearbeitungen.

Das diagnostische Potential der Aufgabe A8 „Zucker“ wird zusammenfassend als grundlegend hoch eingeschätzt. Die dargelegten Erkenntnisse verdeutlichen jedoch, dass aufgrund der individuellen Aufgabenmerkmale, speziell der formalen Präsentation und der inhaltlichen Komplexität, eine Verzerrung dieses angelegten Potentials vorliegt. Eine Übertragbarkeit der Ergebnisse auf andere Aufgaben erweist sich aufgrund des sehr speziellen Sachverhaltes der Aufgabe als schwierig. Eine inhaltliche Reduktion sowie die formale Modifikation der Aufgabe lassen eine Erhöhung des diagnostischen Potentials erwarten.

10 Konstruktion einer Bearbeitungstypologie

In einem weiteren Untersuchungsschritt werden die Bearbeitungswege der Drittklässler über die drei analysierten Aufgaben hinweg analysiert. Hierzu wird das sozialwissenschaftliche Konzept der Typenbildung angewandt, um Häufungen der in den empirischen Daten kombinierten Bearbeitungskonzepte zu finden und zu beschreiben. Weiterführend ist interessant, ob auf Grundlage der identifizierten Typen Rückschlüsse auf charakteristische Bearbeitungskombinationen möglich sind.

Der einführende Abschnitt erörtert das grundlegende Verständnis der Typenbildung, bevor die Umsetzung im Rahmen des Forschungsvorhabens dargestellt wird. Hierzu gehört eine wiederholte Reduktion des Merkmalsraums ebenso wie der Einsatz einer computergestützten Clusteranalyse. Die erhaltenen Cluster werden anhand ihrer Ausprägungsgrade in den einzelnen Aufgaben beschrieben. Unter Einbeziehung der Clustergüte erfolgt eine Charakterisierung der inhaltlichen Clusterschwerpunkte, was die Frage nach einer eindeutigen Bearbeitungstypologie beantwortet.

10.1 Das Verständnis der Typenbildung und die Umsetzung in der vorliegenden Arbeit

Bereits seit Ende des 19. Jahrhunderts wird dem Typusbegriff in den Sozialwissenschaften eine wesentliche Rolle zugeschrieben¹⁰⁷. Eine Typologie beschreibt das Ergebnis eines Gruppierungsprozesses aufgrund des Vergleichs zuvor definierter Merkmale. Dabei wird der Forschungsbereich anhand dieser Merkmale in mindestens zwei Gruppen eingeteilt. Die gebildeten Gruppen werden mit dem Begriff Typus bezeichnet (vgl. LAMNEK 2005; KELLE/KLUGE 2010). Die Zusammenfassung von Objekten zu einem Typus erfolgt aufgrund gemeinsamer Eigenschaften, die den Typus beschreiben und charakterisieren. Die einzelnen Typen hingegen differieren deutlich in ihren Ausprägungen, sodass „sich die Elemente eines Typus möglichst ähnlich sind [...] und sich die Typen voneinander möglichst stark unterscheiden“ (KLUGE 2000, S. 2).

KLUGE (1999, S. 43ff) bezeichnet die angemessene Reduktion und damit erreichbare Übersichtlichkeit eines komplexen Forschungsraums als bedeutendsten Vorteil der Typenbildung. Speziell diese Tatsache ist für die vorliegende Untersuchung von großer Bedeutung: Bis zu dieser Phase der Untersuchung wurden zwischen 1500 und 2000 Bearbeitungswege zu jeweils sechs Teilaufgaben analysiert. Als Ergebnisse der Empirischen Aufgabenanalyse konnten zahlreiche aufgabenspezifische Bearbeitungskonzepte mit untergeordneten Bearbeitungskategorien beschrieben werden¹⁰⁸. Mit der Erstellung einer Bearbeitungstypolo-

¹⁰⁷ Aufgrund der Impulssetzung sei an dieser Stelle auf die Arbeiten von Max WEBER und Alfred SCHÜTZ verwiesen. Max WEBER erarbeitete bereits 1904 idealisierte Handlungstypen und prägte den Begriff des Idealtypus. Alfred SCHÜTZ gilt als Begründer der phänomenologischen Soziologie und beeinflusste in den 1970er Jahren das Verständnis der Typenbildung als allgemeines Merkmal des sozialen Handelns.

¹⁰⁸ A4a: 2 Bearbeitungskonzepte - 5 Bearbeitungskategorien, A4b: 3 Bearbeitungskonzepte - 9 Bearbeitungskategorien
A4c: 3 Bearbeitungskonzepte - 15 Bearbeitungskategorien, A5a: 4 Bearbeitungskonzepte - 14 Bearbeitungskategorien
A5b: 6 Bearbeitungskonzepte - 20 Bearbeitungskategorien, A8: 6 Bearbeitungskonzepte - 23 Bearbeitungskategorien

gie über die untersuchten Teilaufgaben hinweg werden nun empirische Bearbeitungskombinationen identifiziert und die vorliegenden Daten strukturiert. Konkret wird das Konzept empirisch begründeter Typenbildung nach KLUGE (1999,2000) umgesetzt, womit eine Kombination aus der Analyse empirischer Daten und theoretischer Überlegungen realisiert wird. Ist keine eindeutige Bearbeitungstypologie erstellbar, so lassen sich dennoch bedeutende Charakteristika und inhaltliche Zusammenhänge herausarbeiten. Es wird betont, dass eine Bearbeitungstypologie nicht das angestrebte Ziel des Forschungsvorhabens darstellt, sondern als weiteres Instrument der in Abschnitt 5.3.3 beschriebenen Methodentriangulation verwendet wird. Auch KLUGE (1999, S. 43ff) betont, dass Typologien nicht immer das Ziel eines Untersuchungsprozesses darstellen müssen, sondern oft ein notwendiger Zwischenschritt auf dem Weg der Theoriebildung sind. Die ideale Passung des Konzeptes mit der Anlage der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse sowie den aufgeworfenen Fragestellungen der Untersuchung wird deutlich. Die Intention der Typenbildung im aktuellen Forschungsrahmen wird von KLUGE (1999) wie folgt zusammengefasst:

„Die Einteilung eines Untersuchungsbereichs in wenige Gruppen erhöht die Übersichtlichkeit, indem die Informationsfülle eines komplexen Forschungsbereichs angemessen reduziert wird. Dabei können sowohl die Breite und die Vielfalt des Bereichs, als auch charakteristische Züge, eben das ‘Typische’ von Teilbereichen verdeutlicht werden. [...] Kurz: Mittels Typen und Typologien kann eine komplexe Realität auf wenige Gruppen beziehungsweise Begriffe reduziert werden, um sie greifbar, und damit begreifbar zu machen.“
(KLUGE 1999, S. 85)

KLUGE (1999) unterscheidet im Prozess der Typenbildung vier Teilschritte. Es handelt sich bei ihrem Konzept keinesfalls um ein lineares Auswertungsschema. Vielmehr bietet die Stufenfolge empirisch begründeter Typenbildung eine offene Rahmung, in welche der relevante Forschungsgegenstand individuell und flexibel eingebettet wird.

In einem ersten Schritt erfolgt die *Erarbeitung relevanter Vergleichsdimensionen*, da die Erstellung einer Typologie erst nach der Identifikation der zugrundeliegenden Merkmale Sinn macht. Die Dimensionalisierung bezeichnet die erarbeiteten Kategorien und Subkategorien, anhand derer die Ähnlichkeiten und Unterschiede zwischen den Untersuchungsobjekten charakterisiert werden. Einfluss hierauf haben die leitenden Forschungsfragen sowie in die Untersuchung eingehendes theoretisches Vorwissen. Einzelfallanalysen und Fallvergleiche können die Dimensionalisierung sowie die anschließende Kodierung des Datenmaterials ergänzen.

Ziel der zweiten Stufe ist die *Gruppierung der Fälle und eine Analyse der empirischen Regelmäßigkeiten*. Typen werden prinzipiell als Merkmalskombinationen aufgefasst (vgl. KLUGE 1999, S. 34ff), sodass die Untersuchungsobjekte anhand ihrer Ausprägungen als Merkmalskombinationen gruppiert und untersucht werden können. Empfohlen wird der Einsatz des Konzeptes des Merkmalsraums nach BARTON und LAZARFELD (vgl. KLUGE 1999, S. 92ff; KELLE/KLUGE 2010, S. 87ff). Kontingenztafeln der Merkmale und ihrer Ausprägungen ermöglichen so einen umfassenden Überblick über alle potentiellen Kombinationsmöglichkeiten. Nach einer Zuordnung der Untersuchungselemente in die Zellen des aufgespannten Merkmalsraums, ist eine Analyse der empirischen Regelmäßigkeiten ebenso realisierbar wie eine Reduktion des Merkmalsraums aus forschungsrelevanten Gründen.

Die weiterführende Stufe ist mit *Erklärung und Verstehen von Sinnzusammenhängen* überschrieben. Nach der Konstruktion des Merkmalsraums sowie der beschreibenden Darstellung der empirisch bedeutsamen Gruppen und ihrer Merkmale erfolgt das Aufdecken der inhaltlichen Zusammenhänge, wodurch Gemeinsamkeiten und Unterschiede erklärt werden. Ausgehend von dem Verständnis, „daß das Zusammentreffen bestimmter Merkmale nicht zufällig ist, sondern daß sich hinter diesen ‘äußeren’ Korrelationen ‘innere’ Sinnzusammenhänge verbergen, mit deren Hilfe die einzelnen Typen (‘Ebene des Typus’) sowie das Gesamtgefüge (‘Ebene der Typologie’) verstanden und erklärt werden kann“ (KLUGE 1999, S. 277), mündet dieser Schritt in der Typenbildung.

Abschließend erfolgt eine möglichst genaue *Charakterisierung der gebildeten Typen*. Im Fokus steht das Gemeinsame eines Typus, da sich nicht alle zugeordneten Untersuchungsobjekte in allen Merkmalsausprägungen gleichen. Unterschieden wird hier zwischen der Beschreibung von Realtypen und der Beschreibung von Idealtypen. Während der Realtypus tatsächlich in den empirischen Daten zu finden ist und das Charakteristische des Typus repräsentiert, geht der Idealtypus aus der theoretischen Überzeichnung eines möglichst optimalen realen Falls hervor (vgl. LAMNEK 1995, S. 231ff). Ziel der vorliegenden Arbeit ist die Abbildung empirischer Verteilungen und die Erklärung von Zusammenhängen, sodass die Form des Realtypus bevorzugt wird.

10.2 Adaption und Umsetzung der Stufenfolge empirisch begründeter Typenbildung

KELLE und KLUGE (2010, S. 107) betonen die vielfältigen Einsatzmöglichkeiten der skizzierten Stufenfolge für qualitativ orientierte Fragestellungen und für die Auswertung unterschiedlichster Daten. Abhängig von den Forschungsanliegen und dem Forschungsgegenstand weisen sie auf den flexiblen Einsatz verschiedener Forschungsmethoden und -instrumente innerhalb der einzelnen Erarbeitungsstufen hin. Die zuvor erläuterte Stufenfolge empirisch begründeter Typenbildung nach KLUGE (1999, 2000) wird im Hinblick auf das eigene Forschungsvorhaben modifiziert. Speziell die Datenreduktion und Strukturierung ist aufgrund der vorliegenden Datenmenge von besonderer Bedeutung. Die Erarbeitung von Vergleichsdimensionen und eine bereits erfolgte erste Reduktion basiert auf den abgeschlossenen Rationalen und Empirischen Aufgabenanalysen. Eine weiterführende Strukturierung erfolgt sowohl anhand einer theoretischen als auch einer empirischen Reduktion.

10.2.1 Konkretisierung der relevanten Vergleichsdimensionen auf Grundlage der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse

Die Typenbildung stellt eine methodische Komponente der siebten Untersuchungsphase, dem Aufdecken von Zusammenhängen und Beziehungen der Bearbeitungen zwischen den Aufgaben, dar (siehe Abschnitt 5.4.2). Die Besonderheiten des Datenmaterials wurden bereits in Abschnitt 5.2 ausführlich dargestellt. Bedeutsam ist jedoch, dass in die nachfolgend beschriebene Phase ausschließlich die 1475 Datensätze eingehen, bei denen eine Bearbeitung aller sechs untersuchten Teilaufgaben vorliegt. So ist die Berücksichtigung einer Ausprägung „Nicht bearbeitet“ unnötig.

Zunächst stellt sich die Frage nach den relevanten Vergleichsdimensionen, auf denen die Typenbildung aufbaut. Auf Basis der theoretisch konstruierten Bearbeitungsvarianten der Rationalen Aufgabenanalyse fand im Rahmen der Empirischen Aufgabenanalyse eine kategorienorientierte Kodierung der vorliegenden Schrift- und Interviewdaten statt (siehe Kapitel 7, 8, 9). Die in Abschnitt 10.1 beschriebene Dimensionalisierung ist somit bereits durch die Erarbeitung der Bearbeitungskonzepte und Bearbeitungskategorien der sechs Teilaufgaben erfolgt. Um eine weitere Strukturierung des Forschungsbereiches zu realisieren, werden für eine Konkretisierung des Merkmalsraums lediglich die übergeordneten Bearbeitungskonzepte herangezogen. Da Typen als mögliche Merkmalskombinationen verstanden werden, würde im Fall der Weiterarbeit mit den Anzahlen der Bearbeitungskategorien ein Merkmalsraum von 4.347.000 möglichen Merkmalskombinationen¹⁰⁹ die Basis dieser Untersuchungsphase bilden. Aufgrund der Datenfülle ist diese Variante kaum durchführbar. Neben diesem Argument wird die inhaltliche Ähnlichkeit der Datensätze innerhalb eines Bearbeitungskonzeptes angeführt. Die Anforderung an die Ähnlichkeit der Elemente eines Typus und einer gleichzeitigen Unterschiedlichkeit der Typen voneinander wird dennoch erfüllt. Als Grundlage für eine Gruppierung der Bearbeitungen über die analysierten Teilaufgaben hinweg reicht die Einbeziehung der Bearbeitungskonzepte demnach aus.

Bereits bei der Empirischen Aufgabenanalyse erweist sich Teilaufgabe A4a als auffällig, was auf den inhaltlich reproduktiven Anspruch der Aufgabenstellung zurückgeführt wird (siehe Abschnitt 7.1.1). Insgesamt wurden für die Empirische Aufgabenanalyse dieser Teilaufgabe 2013 Datensätze ausgewertet. Mit einer Häufigkeit von 1902 und 94,5 % ist der Anteil korrekter Lösungen extrem hoch. Lediglich 111 Datensätze weisen Fehler bei der Eintragung der vier Zahlen in die Hundertertafel auf. Die Verteilung der Ergebniskonzepte „Zahlen korrekt“ und „Zahlen nicht korrekt“ ist für die Schnittmenge ähnlich: Nur 80 der 1475 Aufgabenbearbeitungen weisen eine oder mehrere falsche Zahlen auf, sodass auch hier Fehleintragungen von lediglich 5,4 % vorliegen. In 1395 Datensätzen, also 94,6 %, sind alle gesuchten Zahlen korrekt eingetragen.

Um diesen Fakt inhaltlich weiter zu verfolgen, wurden Kontingenztafeln der Bearbeitungen A4a mit den jeweiligen Bearbeitungen der anderen fünf Teilaufgaben erstellt (siehe Anhang). Die Häufigkeiten des Ergebniskonzeptes „Zahlen nicht korrekt“ in Kombination mit den übrigen Bearbeitungskonzepten verhalten sich relational ähnlich zu den Häufigkeiten mit dem Ergebniskonzept „Zahlen korrekt“. Es bestehen demnach keine inhaltlichen Zusammenhänge zwischen der Bearbeitung der Teilaufgabe A4a und den Bearbeitungen der übrigen untersuchten Aufgaben und Teilaufgaben. Zusätzlich bestätigt sich diese inhaltliche Unabhängigkeit anhand der durchgeführten Chi-Quadrat-Tests, da alle fünf errechneten Kontingenzkoeffizienten nicht signifikant sind¹¹⁰.

¹⁰⁹ Die Zahl ergibt sich aus dem kombinatorischen Produkt der jeweiligen Anzahl von Bearbeitungskategorien zu den 6 analysierten Teilaufgaben: $5 \cdot 9 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 20 \cdot 23 = 4.347.000$

¹¹⁰ A4a-A4b: $p=0,056$, A4a-A4c: $p=0,194$, A4a-A5a: $p=0,304$, A4a-A5b: $p=0,809$, A4a-A8: $p=0,171$

Ein signifikantes Ergebnis liegt vor, wenn ein Signifikanztest wie beispielsweise der Chi-Quadrat-Test eine äußerst geringe Irrtumswahrscheinlichkeit errechnet. Diese gilt erst ab einem Wert von $p < 0,05$, bei besonders strenger Prüfung von $p < 0,01$, als bestätigt. Für den vorliegenden Fall bedeutet dies konkret, dass die gefundenen Ergebnisse sich nicht mit der Annahme eines Zusammenhangs der Bearbeitung vereinbaren lassen und somit die Alternativhypothese des Nicht-Zusammenhangs anzunehmen ist.

Aufgrund der angeführten Argumente geht Teilaufgabe A4a nicht in den Prozess der Typenbildung ein. So findet bereits an dieser Stelle eine spezifische Reduktion des aufzuspännenden Merkmalsraums statt. Aufgrund der Verminderung der zu betrachtenden Dimensionen wird diese Reduktion als Vereinfachung der Dimensionen aufgefasst (vgl. KLUGE 1999, S. 101).

10.2.2 Gruppierung der Daten und Reduktion des Merkmalsraums

Nach dem begründeten Ausschluss der Teilaufgabe A4a gehen somit die Aufgabenbearbeitungen A4b, A4c, A5a, A5b und A8 als relevante Vergleichsdimensionen in den weiteren Prozess der Typenbildung ein. Einen Überblick über die Merkmalsmöglichkeiten bietet das Konzept des Merkmalsraums nach LAZARSELD und BARTON (vgl. KLUGE 1999, S. 92ff). Die Darstellung des Merkmalsraums in der vorliegenden Untersuchung erfolgt aufgrund der zahlreichen Merkmale und ihrer Ausprägungen jedoch nicht als Kontingenztafel, sondern anhand einer Liste. Nach Ausschluss der Teilaufgabe A4a verbleiben fünf Merkmale, sodass ein 5-dimensionaler Merkmalsraum aufgespannt wird. Anhand des kombinatorischen Produkts der Anzahlen der jeweiligen Merkmalsausprägungen (A4b: 3, A4c: 3, A5a: 4, A5b: 6, A8:6) wird die Fülle möglicher Merkmalskombinationen deutlich: Es ergeben sich 1296 theoretische Merkmalskombinationen der Aufgabenbearbeitungen.

Da diese Vielzahl von Kombinationsmöglichkeiten keine strukturierte Analyse ermöglicht, finden weitere Reduktionen statt. KLUGE (1999) beschreibt den Nutzen „darin, eine transparente, systematische und nachvollziehbare Datenanalyse zu unterstützen, da es zu einer ausdrücklichen Bestimmung der Merkmale und ihrer Ausprägungen zwingt, einen guten Überblick über *alle* Kombinationen ermöglicht (was durch verschiedene graphische beziehungsweise tabellarische Darstellungsmöglichkeiten unterstützt wird) und die Reduktion des ursprünglichen Merkmalsraums auf einige wenige Gruppen veranschaulicht“ (KLUGE 1999, S. 109).

10.2.2.1 Die theoretische Reduktion

Zunächst erfolgt eine theoretische Reduktion der Merkmalskombinationen aus forschungspragmatischen Gründen (vgl. KLUGE 1999, S. 101), um einzelne Ausprägungen zusammenzufassen:

„Da oft nicht alle Kombinationsmöglichkeiten in der Realität existieren beziehungsweise die Unterschiede zwischen einzelnen Merkmalskombinationen für die Forschungsfrage nicht relevant sind, werden meist einzelne Felder des Merkmalsraums zusammengefasst.“
(KLUGE 1999, S. 258)

In Abschnitt 5.1 wird die Forschungsfrage nach einer eindeutigen Bearbeitungstypologie formuliert. Die Zusammenlegung aufgabeninterner Bearbeitungskonzepte beeinflusst das Ziel der Untersuchung nicht, da es sich bei den Zusammenfassungen um inhaltlich ähnliche Ausprägungen handelt.

Die aufgestellten Ergebniskonzepte zu Teilaufgabe A4b (6. Zeilensumme, x. Zeilensumme, Anderes) bleiben aufgrund ihrer inhaltlichen Differenzen bestehen. Ebenfalls ohne inhaltliche Zusammenfassung fließen die Bearbeitungskonzepte zu Teilaufgabe A4c (Strukturmathematische Argumentation, Argumentation mit Bezug zur Aufgabenfolge, Anderes) in den weiteren Prozess der Typenbildung ein.

Zwei der vier aufgestellten Bearbeitungskonzepte zu Teilaufgabe A5a werden hingegen aufgrund des ihnen zugrundeliegenden Flächenkonzepts (Konzept Fläche multiplikativ und Konzept Fläche additiv) vereint. Um die zusammenführende Analyse zu erleichtern, werden in Teilaufgabe A5b ebenso die vier Bearbeitungskonzepte Zusammensetzen vertikal, Zusammensetzen horizontal, Zusammensetzen Sonstiges und Abspalten aufgrund des gemeinsamen Flächenkonzepts zusammengefasst.

In Aufgabe A8 finden zwei weitere Zusammenlegungen statt. Zum Einen werden die Bearbeitungskonzepte Absoluter Bezug Tabelle Vergleich und Absoluter Bezug Tabelle Verwendung Angaben zu einer inhaltlichen Ausprägung verschmolzen. Da eine Unterscheidung für die Erstellung einer Bearbeitungstypologie nicht relevant ist, erfolgt eine zweite Zusammenlegung der Bearbeitungskonzepte Keine Argumentation und Anderes.

Aufgrund dieser ersten inhaltlichen Reduktion vermindert sich die Anzahl der Ausprägungen wie folgt:

Aufgabe	A4b	A4c	A5a	A5b	A8	Produkt
Anzahl Ausprägungen	3	3	4	6	6	1296
Anzahl red. Ausprägungen	3	3	3	3	4	324

Tabelle 11: Anzahlen möglicher Merkmalsausprägungen der Teilaufgaben nach theoretischer Reduktion.

Das kombinatorische Produkt der Ausprägungen reduziert sich von 1296 auf 324 mögliche Bearbeitungskombinationen, womit der Merkmalsraum weitaus überschaubarer wird.

Es ist zu beachten, dass dieses Produkt nicht mehr die Anzahl der ursprünglichen theoretischen Merkmalskombinationen abbildet. Es handelt sich nun um theoretische Merkmalsblöcke, die abhängig von den vorgenommenen Zusammenfassungen unterschiedliche Anzahlen der theoretischen Merkmalskombinationen beinhalten.

10.2.2.2 Die empirische Reduktion

Die sich anschließende empirische Reduktion der Merkmalsblöcke ist ebenfalls dem Motiv der forschungspragmatischen Reduktion zuzuschreiben. Die 1475 Datensätze werden hinsichtlich der empirischen Belegungen der 324 theoretisch möglichen Merkmalsblöcke analysiert. Hierzu werden die empirischen Daten in die erstellten Übersichten der theoretischen Merkmalskombinationen eingeordnet. Als Ergebnis lassen sich 163 der 324 aufgeführten Merkmalsblöcke empirisch belegen. In diesen empirischen Merkmalsblöcken sind

798 der 1296 theoretischen Merkmalskombinationen inkludiert, die sich wiederum in 376 empirisch belegbare und 422 nicht belegbare Bearbeitungskombinationen teilen.

Insgesamt sind 161 theoretische Merkmalsblöcke mit 498 enthaltenen theoretischen Merkmalskombinationen nicht in den empirischen Daten zu finden. So sind zusammengefasst 376 Merkmalskombinationen empirisch belegt, während 920 Merkmalskombinationen nicht in dem untersuchten Datensatz erscheinen. Eine zusammenführende Übersicht hält die Ergebnisse der forschungspragmatischen Reduktion des Merkmalsraums durch die theoretische und die empirische Reduktion grafisch fest:

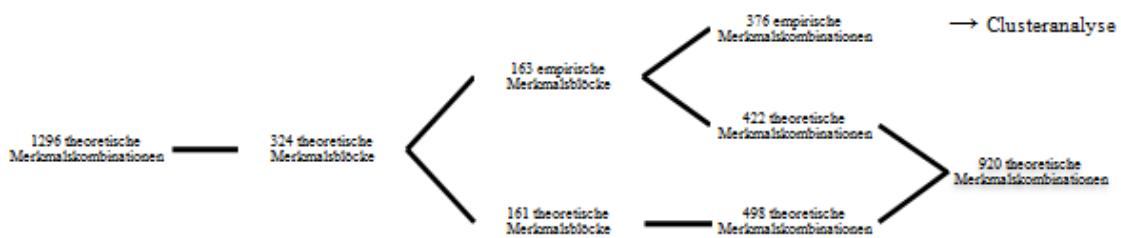


Abbildung 24: Übersicht des Merkmalsraums

10.3 Die computergestützten Clusteranalyse

Trotz der in Abschnitt 10.2 erläuterten Reduktion des Merkmalsraums ist die Datenfülle für den Versuch einer manuellen Gruppierung noch zu groß, sodass der Einsatz einer computergestützten Clusteranalyse naheliegt. Ziel ist eine Zusammenfassung der Daten in Gruppen, die mit Blick auf ihre Bearbeitungskombinationen in sich homogen sind. Die Gruppen sollen jedoch möglichst große Heterogenität aufweisen (vgl. bspw. BACKHAUS ET AL. 2008, S. 391; BORTZ 2005, S. 565), womit dem in Abschnitt 10.1 dargelegten Ziel einer Typenbildung entsprochen wird.

Die Typenbildung im vorliegenden Untersuchungsvorhaben dient sowohl der Identifikation von inhaltlich ähnlichen Aufgabebearbeitungen als auch dem Aufdecken eventueller Zusammenhänge zwischen Aufgabebearbeitungen und den gestellten Aufgaben. Da die Ergebnisse der Gruppierung nicht vorhersehbar sind, wird der Einsatz einer Clusteranalyse als Methode der multivariaten explorativen Datenanalyse favorisiert. BACKHAUS ET AL. (2008) betonen deren Vorzüge eingehend:

„Weiterhin zählen Clusterungsmethoden zu den explorativen Verfahren der multivariaten Datenanalyse, da dem Forscher die Gruppen im Ausgangspunkt *unbekannt* sind und er mit Hilfe eines Clusterverfahrens erst eine solche Gruppierung herbeiführt, d.h. Objektgruppen in der Erhebungsgesamtheit identifiziert.“

(BACKHAUS ET AL. 2008, S. 391)

10.3.1 Einsatz des hierarchischen Clusterverfahrens Ward

Da die Anzahl der Gruppen im Vorfeld unbekannt ist, wird ein hierarchisches agglomeratives Clusterverfahren angewandt. Grundsätzlich gehen diese Verfahren von der kleinsten Partition aus. Das heißt, zu Beginn der Clusteranalyse stellt jedes Untersuchungsobjekt eine einzelne Gruppe dar. In der vorliegenden Untersuchung wird demnach jeder der 1475 Datensätze zu Beginn des Gruppierungsprozesses als eigenständiges Cluster verstanden. Aufgrund der kleinsten Distanz beziehungsweise der größten Ähnlichkeit zueinander werden die einzelnen Gruppen so lange zusammengefasst, bis alle Untersuchungsobjekte in einer Gruppe enthalten sind (vgl. BACKHAUS ET AL. 2008, S. 416ff; BORTZ 2005, S. 571ff).

Die Entscheidung für eines der hierarchischen agglomerativen Clusterverfahren beruht unter anderem auf dem Skalenniveau der vorliegenden Daten. Die Clusteranalyse der vorliegenden Untersuchung mit nominal skalierten Datengrundlage (siehe Abschnitt 5.2) wird mit Hilfe des Ward-Verfahrens durchgeführt, da dieses auch bei nicht-metrischen Ausgangsdaten angewandt werden kann. Des Weiteren wird in der Fachliteratur betont, „dass das Ward-Verfahren im Vergleich zu anderen Algorithmen in den meisten Fällen *sehr gute Partitionen* findet und die Elemente *‘richtig’* den Gruppen zuordnet“ (BACKHAUS ET AL. 2008, S. 424). Die Clusterbildung des Ward-Verfahrens erfolgt nach der Prämisse der geringstmöglichen Erhöhung der Fehlerquadratsumme bei jedem Fusionierungsschritt, womit eine möglichst geringe Streuung innerhalb der Cluster gewährleistet werden soll (vgl. BACKHAUS ET AL. 2008, S. 420ff). Voraussetzung für die Berechnung der Cluster ist eine Transformation der nominalskalierten Daten in eine binäre Variablenstruktur. Da der Merkmalsraum sich nicht aus dichotomen nominalen Daten, sondern aus nominal skalierten Daten mit Mehrfachausprägungen zusammensetzt (siehe Abschnitt 10.2.2), wurden die Daten mittels Binärzerlegung transformiert. Jeder möglichen Ausprägung einer Aufgabebearbeitung wird der Wert 0 (trifft nicht zu) oder 1 (trifft zu) zugewiesen. Das bedeutet eine Umwandlung der bisherigen Notation als Aneinanderreihung der fünf angewandten Bearbeitungskonzepte in einen jeweils sechzehnstelligen Vektor. Die Komponentenzahl ergibt sich aus der Summe der existierenden Ausprägungen zu den einzelnen Teilaufgaben (siehe Abschnitt 10.2.2). In jedem Vektor wird den fünf Komponenten, die dem angewandten Bearbeitungskonzept entsprechen, die Ziffer 1 zugewiesen. Alle übrigen Stellen des Tupels werden mit 0 besetzt. Diese Transformation der Daten wird nachfolgend anhand zweier Beispiele veranschaulicht:

Schüler BT-b-22

Bearbeitungscode Ursprung:	4b-1	4c-1	5a-1	5b-1	8-1
Bearbeitungscode nach theoretischer Reduktion:	4b-1	4c-1	5a-12	5b-1234	8-1
Binärzerlegung:	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0	1 0 0 0

Schüler AE-a-13

Bearbeitungscode Ursprung:	4b-3	4c-1	5a-2	5b-6	8-1
Bearbeitungscode nach theoretischer Reduktion:	4b-3	4c-1	5a-1	5b-3	8-1
Binärzerlegung:	0 0 1	1 0 0	1 0 0	0 0 1	1 0 0 0

Die vollständig transformierte Datentabelle ist anschließend in das Softwareprogramm IBM SPSS Statistics importiert worden. Dieses modular aufgebaute Programmpaket ermöglicht umfangreiche Datenanalysen mit den gängigsten statistischen Verfahren innerhalb weniger Sekunden¹¹¹.

10.3.2 Bestimmung der optimalen Clusterzahl

Wie bereits angemerkt, arbeiten sämtliche hierarchischen Verfahren ausgehend von der Clusterzahl n bis hin zur Vereinigung aller Fälle in einem letzten Fusionierungsschritt, also der Clusterzahl 1. Dabei gilt die optimale Clusterzahl als sichere Basis für die inhaltliche Interpretation der Cluster. Die Bestimmung der optimalen Clusterzahl kann auf statistische Kriterien gestützt werden, die aufgrund des individuellen Forschungskontextes sensibel auszuwählen sind. So werden der *Test von Mojena* sowie die *Stopping Rule von Calinski und Harabasz* für die vorliegende Untersuchung ausgeschlossen, da eine metrische Datenausgangslage Voraussetzung für die Anwendung dieser Verfahren ist¹¹².

Ein weiterer Anhaltspunkt zur Bestimmung der optimalen Clusterzahl ist das *Elbow-Kriterium*, das auch bei nicht metrischen Ausgangsdaten einsetzbar ist. Je weiter die Clusterzahl während des Fusionierungsprozesses sinkt, umso höher steigt hingegen die Fehlerquadratsumme an. Um einen sprunghaften Anstieg dieses Varianzkriteriums zu identifizieren, wird die in der Zuordnungsübersicht einsehbare Heterogenitätsentwicklung gegen die zugehörige Clusterzahl in ein Koordinatensystem abgetragen. In diesem Scree-Plot ist bei einer existierenden Clusterstruktur eine Unregelmäßigkeit im Verlauf des entstandenen Diagramms als Knick im Graphen erkennbar. Diese Stelle, der so genannte Elbow, zeigt eine überproportionale Entwicklung der Fehlerquadratsumme an und liefert einen Hinweis auf die optimale Clusterzahl, die sich unterhalb dieses Anstiegs befindet (vgl. BORTZ 2005, S. 577; BACKHAUS ET AL. 2008, S. 430f).

Im Scree-Plot der eigenen Untersuchung ist aufgrund der Datenmenge kein deutlicher Elbow erkennbar. Die Anstiege des Varianzkriteriums werden jedoch anhand der sich erhöhenden Abstände bei sinkender Clusterzahl gegen Ende des Fusionierungsprozesses sichtbar (siehe Anhang). Der unten abgebildete Ausschnitt des Scree-Plots ermöglicht jedoch die optische Identifikation eines ersten Sprunges bei der Clusterzahl 4, womit die optimale Clusterzahl bei fünf Gruppen liegt (siehe Markierung).

¹¹¹ An dieser Stelle danke ich Herrn Dr. Johannes Herrmann von der Statistik-Beratung am Hochschulrechenzentrum der Justus-Liebig-Universität Gießen für seine Hilfe beim Umgang mit der Software. In vielen Fragen der Umsetzung stand er stets als kompetenter und aufgeschlossener Gesprächspartner zur Verfügung.

¹¹² Der Test von Mojena berechnet einen standardisierten Fusionskoeffizienten. Gesucht wird die Fusionierungsdistanz zwischen zwei Clustern, bei welcher dieser Schwellenwert das erste Mal überschritten wird. In diesem Schritt werden sehr heterogene Cluster fusioniert, womit der vorherige Fusionierungsschritt als optimale Clusterzahl verstanden wird. Die Stopping Rule von CALINSKI und HARABASZ basiert auf der Streuung in und zwischen den Clustern. Ausgewählt wird jene Clusterzahl, bei der die gefundenen Cluster untereinander möglichst heterogen sind. Dieser Fall tritt ein, wenn die Summe der Varianzen zwischen den Clustern maximal ist und die Summe der Varianzen in den Clustern hingegen minimal ist.

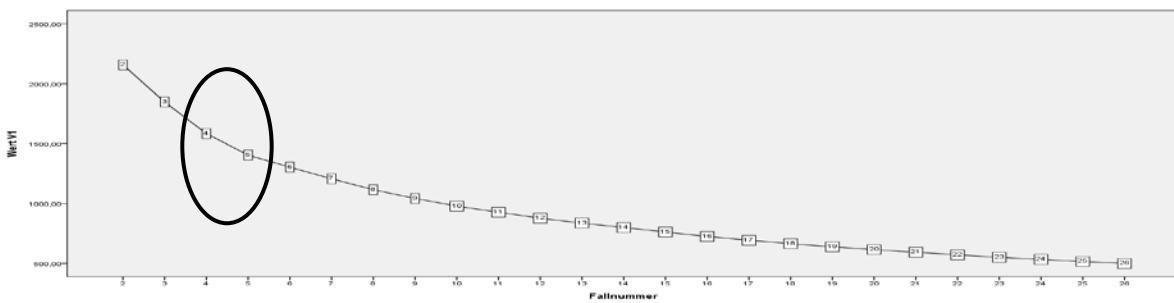


Abbildung 25: Ausschnitt des Scree-Plots zur durchgeführten Clusteranalyse.

Die zugehörige *Zuordnungsübersicht* bildet anhand des angegebenen Koeffizienten die Entwicklung der Fehlerquadratsumme in den Fusionierungsschritten ab. Eine erste Erhöhung des Varianzkriteriums ist bei der Clusterzahl 4 abzulesen (siehe Anhang). So belegt auch die Zuordnungsübersicht eine optimale Clusterzahl von 5, da in diesem Schritt noch keine auffällige Erhöhung des Koeffizienten erfolgt.

Die Fusionierungsstufen der Clusteranalyse werden graphisch in einem *Dendrogramm* veranschaulicht. Hier werden die Gruppierungsprozesse der Fälle in Zusammenhang mit der entsprechenden Heterogenitätsentwicklung abgebildet. SPSS normiert die Heterogenitätsentwicklung bei den erzeugten Diagrammen auf einer Skala von 0 bis 25, sodass dem Endstadium der Einclusterlösung der Wert 25 zugeteilt wird. Mit Hilfe dieser Darstellungen sind sinnvolle Gruppentrennungen optisch gut erkennbar (vgl. BACKHAUS ET AL. 2008, S. 425). Auch im abgebildeten Dendrogramm der durchgeführten Clusteranalyse ist eine erste angemessene Gruppentrennung bei der Clusterzahl 5 erkennbar (siehe Markierung). Die vertikalen Fusionierungsgeraden verlängern sich nach diesem Gruppierungsschritt aufgrund des steigenden Heterogenitätsmaßes überproportional.

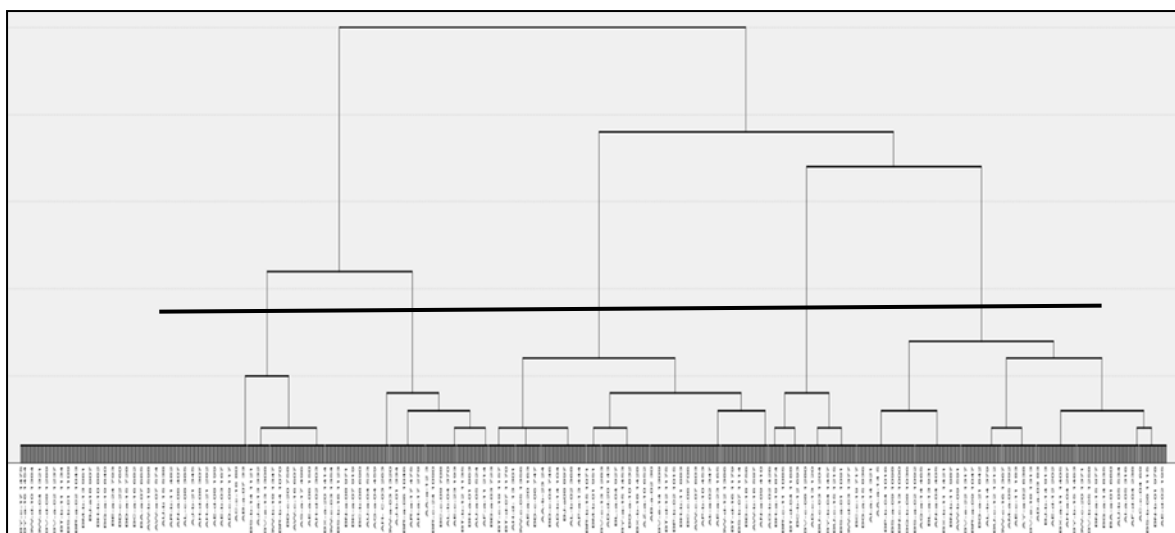


Abbildung 26: Dendrogramm der durchgeführten Clusteranalyse.

Die statistischen Kriterien belegen eine Gliederung der Daten in fünf Cluster. Um die auf diesen Gruppen basierenden Auswertungen und Interpretationen zu validieren, erfolgte ein *Vergleich der Clusterlösungen* mit drei, vier, fünf, sechs und sieben Gruppen. Die Cluster-

lösungen wurden auf den verschiedenen Fusionierungsstufen anhand der absoluten Anzahlen der Datensätze und der relativen internen Häufigkeitsanteile der Aufgabenbearbeitungen untersucht. Auch der Vergleich der clusterinternen Häufigkeiten und ihrer Ausprägungsgrade bestätigt die Gruppierung der Daten in fünf Cluster (siehe Anhang).

10.3.3 Beschreibung der Clusterlösung C₅

Die folgenden Untersuchungen und Interpretationen basieren auf der in Abschnitt 10.3.2 begründeten Clusterlösung mit fünf Clustern, welche im Folgenden anhand ihrer Ausprägungen dargestellt werden. Grundlage der inhaltlichen Erläuterungen sind zunächst die quantitativen Verteilungen über die (Teil)Aufgabenbearbeitungen. Neben den absoluten Anzahlen werden ergänzend die relativen internen Häufigkeiten in Prozent verwendet. Die unterschiedlichen Färbungen der Zellen kennzeichnen Auffälligkeiten in einem Cluster, wobei folgende Ausprägungsgrade definiert werden:

Prägnant beschreibt die relative interne Häufigkeit eines Bearbeitungskonzeptes ab 90 %. In diesem Fall ist die Verwendung der Formulierung „(fast) alle“ legitim. Diese Häufigkeit wird in der Tabelle durch eine dunkelgraue Färbung betont. Als inhaltlich charakteristisch werden Ausprägungsgrade zwischen 75 % und 90 % aufgefasst, welche anhand der sprachlichen Formulierung „die meisten“ ausgedrückt werden. Die entsprechenden Zellen in der Übersicht sind mittelgrau unterlegt. Sind bei der Bearbeitung einer Teilaufgabe Häufigkeiten zwischen 60 % und 75 % abzulesen, werden die Ausprägungen als auffällig berücksichtigt. Hellgrau gefärbte Zellen in der Tabelle markieren diesen Ausprägungsgrad, der mit dem Begriff „viele“ umschrieben wird.

Die Beschreibungen der einzelnen Cluster berücksichtigen ebenso Ausprägungsgrade um 50 % oder das Nichtauftreten von Aufgabenbearbeitungen in einer Gruppe. Zu jedem Cluster wird weiterhin der Modus als die jeweils am häufigsten auftretende Bearbeitungskombination angeführt.

Cluster	Bearbeitungskonzept															
	4b-1	4b-2	4b-3	4c-1	4c-2	4c-3	5a-12	5a-3	5a-4	5b-1234	5b-5	5b-6	8-1	8-23	8-4	8-56
1	318	7	35	0	235	125	314	7	39	241	10	109	21	241	51	47
	88 %	2 %	10 %	0 %	65 %	35 %	87 %	2 %	11 %	67 %	3 %	30 %	6 %	67 %	14 %	13 %
2	0	267	132	222	107	70	372	3	24	295	17	87	22	259	49	69
	0 %	67 %	33 %	56 %	27 %	18 %	93 %	1 %	6 %	74 %	4 %	22 %	6 %	65 %	12 %	17 %
3	210	0	0	203	0	7	203	1	6	165	2	43	104	0	52	54
	100 %	0 %	0 %	97 %	0 %	3 %	97 %	0 %	3 %	79 %	1 %	20 %	50 %	0 %	25 %	26 %
4	390	0	2	386	0	6	363	10	19	299	11	82	0	392	0	0
	99 %	0 %	1 %	98 %	0 %	2 %	93 %	3 %	5 %	76 %	3 %	21 %	0 %	100 %	0 %	0 %
5	53	33	28	54	23	37	0	93	21	1	87	26	2	63	28	21
	46 %	29 %	25 %	47 %	20 %	32 %	0 %	82 %	18 %	1 %	76 %	23 %	2 %	55 %	25 %	18 %

Tabelle 12: Ausprägungsgrade der Clusterlösung C₅.

Cluster 5₁, N = 360

4b-1, 5a-12	charakteristisch
4c-2, 5b-1234, 8-23	auffällig
4c-1	0 %
4b-1, 4c-2, 5a-12, 5b-1234, 8-23	Modus 91

Auffällig in Cluster 5₁ ist die Bearbeitung der Teilaufgabe A4b. Hier notieren die meisten Aufgabenbearbeiter die gesuchte sechste Zeilensumme der Hundertertafel (4b-1). Quantitativ ähnlich auffällig ist eine Bearbeitung der Teilaufgabe A5a durch Anwendung des Flächenkonzeptes zur Berechnung der in die Figur passenden Einheitsquadrate (5a-12).

Bei der Bearbeitung von Teilaufgabe A4c notiert keiner der Aufgabenbearbeiter eine strukturmathematische Begründung für die Erhöhung der Zeilensumme. Viele Drittklässler beziehen sich in ihren Erklärungen auf die gegebene Aufgabenfolge und lassen entsprechende Aspekte in ihre Begründungen einfließen. So liegt der Schwerpunkt der Teilaufgabe A4c deutlich auf einer Argumentation mit Bezug zur Aufgabenfolge (4c-2). Ähnlich verhält es sich mit Teilaufgabe A5b und Aufgabe A8. Viele Aufgabenbearbeiter lösen nicht nur Teilaufgabe A5a auf Grundlage des Flächenkonzeptes, sondern wenden diesen Bearbeitungsweg ebenso bei der zweiten Teilaufgabe an (5b-1234). Mit Blick auf die Verteilung zu Aufgabe A8 wird ersichtlich, dass die meisten Zuordnungen im Bearbeitungskonzept Relativer Bezug zu finden sind. Die Aufgabenbearbeiter ziehen die gegebenen Größenangaben direkt heran, ohne sie in Relation zu setzen (8-23).

Cluster 5₂, N = 399

5a-12	prägnant
4b-2, 5b-1234, 8-23	auffällig
4-b1, 5a-3	0 %, 1 %
4c-1	56 %
4b-2, 4c-1, 5a-12, 5b-1234, 8-23	Modus 80

Prägnant für eine Beschreibung von Cluster 5₂ ist die Bearbeitung der Teilaufgabe A5a. Die Ermittlung der Anzahl von Einheitsquadraten erfolgt hier meistens durch die Anwendung des Flächenkonzeptes (5a-12).

Die Bearbeitung von Teilaufgabe A5b mit einem Flächenkonzept ist ebenfalls charakteristisch für dieses Cluster (5b-1234). Auch anhand der Bearbeitung von Aufgabe A8 mit einem absoluten Verständnis der Zucker- und Gewichtsangaben weist diese Gruppe noch keine Unterschiede zu der Beschreibung des ersten Clusters auf (8-23). Anhand der Ausprägung in Teilaufgabe A4b wird jedoch eine Besonderheit deutlich: In vielen Aufgabenbearbeitungen wird eine andere als die gesuchte Zeilensumme (4b-2) notiert, wobei keine Aufgabenbearbeitung die gefragte Zeilensumme 555 aufweist. Ergänzt wird diese Besonderheit durch Teilaufgabe A4c, da mehr als die Hälfte der Aufgabenbearbeiter in diesem Cluster eine strukturmathematische Begründung für die Erhöhung der Zeilensummen formuliert (4-c1). Dabei wird zumindest einer der drei geforderten Argumentationsaspekte angeführt (siehe Abschnitt 8.1.1).

Cluster 5₃, N = 210

4b-1, 4c-1, 5a-12	prägnant
5b-1234	charakteristisch
4b-2, 4b-3, 4c-2, 5a-3, 5b-5, 8-23	0 %, 1 %
8-1	50 %
4b-1, 4c-1, 5a-12, 5b-1234, 8-1	Modus 83

In dieser Gruppe ist sowohl die Bearbeitung der Teilaufgabe A4b als auch der Teilaufgabe A4c prägnant. Ohne Ausnahme notieren alle Aufgabenbearbeiter die korrekte Zeilensumme 555 (4b-1) und führen anschließend eine strukturmathematische Begründung für die Erhöhung der Zeilensumme an (4c-1). Ebenso eindeutig ist die Ermittlung der Einheitsquadrate in Teilaufgabe A5a, die fast alle Aufgabenbearbeiter auf Grundlage des Flächenkonzeptes vornehmen (5a-12). Darüber hinaus ist eine analoge Bearbeitung der Teilaufgabe A5b mit Hilfe des Flächenkonzeptes charakteristisch (5b-1234). In Aufgabe A8 ist in diesem Cluster keine Aufgabenbearbeitungen mit Argumentationen auf Basis eines absoluten Bezuges der Angaben zu finden (8-23). Die Hälfte der Drittklässler löst die Aufgabe mit einer relativen Verwendung der präsentierten Gewichts und Zuckerangaben (8-1).

Cluster 5₄, N = 399

4b-1, 4c-1, 5a-12, 8-23	prägnant
5b-1234	charakteristisch
4b-2, 4b-3, 4c-2, 4c-3, 8-1, 8-4, 8-56	0 %, 1 %
4b-1, 4c-1, 5a-12, 5b-1234, 8-2	Modus 292

Cluster 5₄ zeichnet sich aufgrund einer deutlichen Prägnanz in den Bearbeitungen der Teilaufgaben A4b und A4c aus. Ähnlich wie in Cluster 5₃ weisen weitestgehend alle Aufgabenbearbeitungen die korrekte Zeilensumme (4b-1) und eine Argumentation auf strukturmathematischer Basis (4c-1) auf. Deutlich konträr ist in diesem Cluster die Bearbeitung von Aufgabe A8, da die Argumentation ausschließlich auf Grundlage eines absoluten Verständnisses erfolgt (8-23). In allen Aufgabenbearbeitungen werden die gegebenen Informationen direkt und ohne weitere Modifikation verwendet.

Die meisten, beziehungsweise viele, Aufgabenbearbeiter lösen Aufgabe A5 durch Anwendung des Flächenkonzeptes (5a-12, 5b-1234). So ist die Bearbeitung der Teilaufgabe A5a auffällig, während die Ausprägung in Teilaufgabe A5b zumindest charakteristisch ist.

Cluster 5₅, N = 114

5a-3, 5b-5	charakteristisch
5a-12, 5b-1234, 8-1	0 %, 1 %, 2 %
4b-1, 4c-1, 8-23	46 %, 47 %, 55 %
4b-1, 4c-1, 5a-3, 5b-5, 8-23	Modus 12

In diesem Cluster sammeln sich die Aufgabenbearbeitungen, bei welchen die Berechnung der Einheitsquadrate in Aufgabe A5 mittels des Umfangkonzeptes versucht wird (siehe Abschnitt 8.2.2 und Abschnitt 8.2.5, Bearbeitungskonzept Umfang). Die Ausprägungen in den Teilaufgaben A5a und A5b sind auffällig beziehungsweise charakteristisch. Andere Bearbeitungswege sind zu dieser Aufgabe kaum vorhanden.

In den übrigen Teilaufgaben werden Ausprägungen um 50 % verzeichnet. In Teilaufgabe A4b nennt die Hälfte der Aufgabenbearbeiter die gesuchte Zeilensumme 555 (4b-1) und liefert eine strukturmathematische Begründung in Teilaufgabe A4c (4c-1). Auch in Aufgabe A8 „Zucker“ weist die Verwendung des Bearbeitungskonzeptes Absoluter Bezug eine entsprechende Häufigkeit auf (8-23) und nur ein sehr kleiner Anteil benutzt die Größenangaben relativ.

10.3.4 Charakterisierung der inhaltlichen Clusterschwerpunkte anhand von Prototypen

Die einzelnen Cluster wurden zuvor auf Grundlage ihrer quantitativen Ausprägungsgrade in den einzelnen Teilaufgaben untersucht, um Besonderheiten der fünf Cluster zu verdeutlichen. Es schließt sich eine inhaltliche Charakterisierung und Interpretation der Gruppen an, für die zusätzliche Aspekte hinzugezogen werden.

Eine Besonderheit des vorliegenden Forschungsvorhabens ist die große Anzahl authentischer Datensätze. Wie bereits in Abschnitt 10.1 angemerkt, werden empirische Auffälligkeiten und Zusammenhänge identifiziert, die als Charakterisierung von Realtypen beschrieben werden. Diese „stellen also eine Kombination von Merkmalen dar, die im Gegensatz zum Idealtypus empirisch nachweisbar, d.h. in der Regel vorhanden und vorfindbar sind“ (KLUGE 1999, S. 60). Im Vordergrund steht das Aufdecken der in der Realität vorhandenen Merkmalskombinationen der Aufgabenbearbeitungen. Konkret wird untersucht, ob anhand der vorliegenden Clusterlösung eine Beschreibung prototypischer Aufgabenbearbeitungen möglich ist. Als Prototypen veranschaulichen sie das Charakteristische jedes Clusters und weisen somit auf Zusammenhänge der Aufgabenbearbeitungen hin.

Anhand der in Abschnitt 10.3.3 definierten Ausprägungsgrade wurden Schwerpunkte der Cluster dargelegt und ihre Modi angeführt. Für die anstehende inhaltliche Charakterisierung der Cluster hinsichtlich ihrer Gemeinsamkeiten und Unterschiede der empirischen Bearbeitungskombinationen reichen die quantitativen Ausprägungsgrade jedoch nicht aus. Zusätzlich werden die berechneten t-Werte einbezogen, die als „primäre Anhaltspunkte zur Interpretation der Cluster“ (BACKHAUS ET AL. 2011, S. 447) empfohlen werden. Der für jede Variable des Clusters errechnete t-Wert¹¹³ gibt Auskunft über deren Repräsentation in der betrachteten Gruppe im Vergleich zur gesamten Datenmenge. Aufgrund seiner Normierung zeigt ein negativer t-Wert die Unterrepräsentation, ein positiver t-Wert hingegen die Überrepräsentation der Variablen in dem jeweiligen Cluster an. Anhand der positiven t-

¹¹³ Formel für Berechnung des t-Wertes: $t = \frac{X(J,G) - X(J)}{S(J)}$ mit $X(J,G)$ = Mittelwert der Variable J in Cluster G, $V(J)$ = Mittelwert der Variable J in Erhebungsgesamtheit und $S(J)$ = Standardabweichung der Variable J in der Erhebungsgesamtheit.

Werte kann ein Cluster somit inhaltlich gekennzeichnet werden (vgl. BACKHAUS ET AL. 2011, S. 446ff).

Neben der in Abschnitt 10.3.2 erörterten Bestimmung der optimalen Clusterzahl wurden Untersuchungen zur Clustergröße durchgeführt (siehe Anhang). Die *Clusterstabilität* als Stichprobenunabhängigkeit der Gruppenbildung ist nachgewiesen. Wie ein Vergleich unterschiedlicher Clusterlösungen mit Clusterzahl 5 zeigt, ist auch die *Clusterzugehörigkeit* der einzelnen Datensätze stabil. Die Homogenität ist ein weiterer Aspekt zur Beurteilung der Güte einer Clusterlösung und bestimmt die Präzision der inhaltlichen Charakterisierung. Um Aussagen über die *Clusterhomogenität* zu treffen, wurden Streuungswerte mit Hilfe des so genannten F-Werts¹¹⁴ berechnet (vgl. BACKHAUS ET AL. 2008, S. 446). Diese Werte ermöglichen Aussagen über die Streuungen der Variablen in einer Gruppe im Vergleich zur Erhebungsgesamtheit. Je mehr F-Werte in einem Cluster kleiner 1 sind, desto homogener ist die Gruppe und umso einheitlicher sind die vereinigten Bearbeitungskombinationen, was als Voraussetzung für eine eindeutige Charakterisierung des Clusters gilt.

Zu jedem Cluster existiert eine Übersicht, welche die untergeordneten Bearbeitungskombinationen, den Modus sowie die errechneten t-Werte enthält. Unter Berücksichtigung der F-Werte wurde analysiert, in welchen Clustern Prototypen zu identifizieren sind und anhand welcher Aufgabenbearbeitungen diese charakterisiert werden können.

Die Beurteilung der Clusterhomogenität und die damit einhergehende mögliche Charakterisierung führt zu unterschiedlichen Ergebnissen in den einzelnen Gruppen. So können einzig für Cluster 5₃ und für Cluster 5₄ Prototypen gekennzeichnet werden.

Cluster 5₄ ist völlig homogen, da alle F-Werte kleiner als 1 sind (vgl. BACKHAUS ET AL. 2008, S. 446). In jeder der fünf untersuchten Teilaufgaben ist nur ein positiver t-Wert verzeichnet, sodass eine eindeutige inhaltliche Charakterisierung vorgenommen werden kann. In diesem Cluster entsprechen 292 der 392 enthaltenen Datensätze dem identifizierten **Prototyp A**. Dieser benennt die gefragte sechste Zeilensumme in Teilaufgabe A4b korrekt und erklärt in der nachfolgenden Teilaufgabe A4c die Erhöhung der Zeilensummen in der Hundertertafel anhand der geforderten Argumentationsaspekte. Beide Teilaufgaben A5 werden gelöst, indem die Anzahl von benötigten Einheitsquadraten anhand eines Flächenkonzepts bestimmt wird. Die Beurteilung des Zuckergehaltes in Aufgabe A8 erfolgt ausschließlich mit einem absoluten Verständnis der Angaben. Somit werden alle Teilaufgaben adäquat bearbeitet, auch wenn die angewandten Bearbeitungskonzepte nicht immer den intendierten Aufgabenlösungen entsprechen (siehe hierzu Kapitel 7, 8 und 9). Der in Abschnitt 10.3.3 angeführte Modus des Clusters ist in Prototyp A enthalten und stellt diesen im speziellen Fall sogar dar.

Auch Cluster 5₃ ist mit drei positiven von insgesamt 16 F-Werten homogen, sodass der **Prototyp B** charakterisiert wird. In dieser Gruppe entsprechen 164 von 210 Datensätzen der nachfolgend beschriebenen Bearbeitungskombination. Prototyp B benennt die Zeilen-

¹¹⁴ Formel für Berechnung des F-Wertes: $F = \frac{V(J,G)}{V(J)}$ mit $V(J,G)$ = Varianz der Variable J in Cluster G und $V(J)$ = Varianz der Variable J in Erhebungsgesamtheit

summe in Teilaufgabe A4b korrekt und verwendet mindestens einen der angeführten Argumentationsaspekte in Teilaufgabe A4c. Die beiden Teilaufgaben A5a und A5b werden konsequent mittels eines Flächenkonzepts gelöst. Die Bearbeitung der Aufgabe A8 weist hingegen Alternativen auf. So kann die Beurteilung des Zuckergehaltes mit einem relativen Verständnis der Größenangaben erfolgen. Ebenso ist auch eine Beantwortung mit Lebensweltbezug oder eine weitere Erklärung empirisch in diesem Prototyp verankert. Die Aufgabenbearbeitungen erfolgen auch hier allesamt vernünftig und nachvollziehbar. Bei einer Bearbeitung der Aufgabe A8 mit relativem Verständnis wird sogar der Intention der Aufgabenautoren entsprochen. An dieser Stelle wird jedoch an das in den Kapiteln 7, 8 und 9 häufig eingeschränkte Verständnis einer korrekten Aufgabenbearbeitung erinnert. Auch der im vorherigen Abschnitt angeführte Modus dieses Clusters ist in Prototyp B enthalten. Wie den obigen Beschreibungen zu entnehmen ist, ergänzen jedoch noch andere Bearbeitungskombinationen diesen Typus.

Es fällt auf, dass Prototyp A und Prototyp B sich ausschließlich in der Bearbeitung von Aufgabe A8 unterscheiden, wobei sie sich hier sogar komplementär verhalten. Dieser einzige Unterschied ist ein deutlicher Hinweis dafür, dass keine Kausalität zwischen den Aufgabenbearbeitungen existiert. Somit können von der Bearbeitung der einen Aufgabe keine Schlüsse auf die Bearbeitungen anderer Aufgaben gezogen werden.

In den übrigen drei Clustern werden aufgrund der fehlenden Homogenität und der zahlreichen positiven t-Werte **keine weiteren Prototypen** charakterisiert. Es wird festgehalten, dass keine eindeutige Bearbeitungstypologie unter Einbeziehung aller Cluster aufgestellt werden kann. Die Untersuchung der Cluster C5₁, C5₂ und C5₅ führt dennoch zu interessanten und ergänzenden Erkenntnissen.

Die Bearbeitung der Teilaufgaben A4b in Cluster C5₁ deckt sich mit den verwendeten Bearbeitungskonzepten der beiden Prototypen. In Teilaufgabe A4c wird die Erhöhung der Zeilensumme hingegen unter Bezug auf die präsentierte Aufgabenfolge oder einer weiteren Erklärung begründet. Wird Cluster C5₂ einbezogen, verhält sich die Bearbeitung der Teilaufgabe A4b bei identischer Bearbeitung der Teilaufgabe A4c komplementär. Weiterhin sprechen sowohl die F-Werte als auch die t-Werte deutlich für nicht existierende Zusammenhänge zu den anderen Aufgabenbearbeitungen.

Wurde im Rahmen der Reduktion des Merkmalsraums Teilaufgabe A4a aufgrund fehlender Bearbeitungszusammenhänge ausgeschlossen (siehe Abschnitt 10.2.2.1), zeigt sich nun die voneinander unabhängige Bearbeitung der weiteren Teilaufgaben A4 „Hundertertafel“. Dieser Fakt deckt sich mit Einzelanalyse der Aufgabe, durch welche eine häufig voneinander unabhängige Bearbeitung der drei Teilaufgaben aufgedeckt wurde (siehe Abschnitt 7.3).

Auch Aufgabe A5 wird in beiden Clustern unterschiedlich bearbeitet, wobei für beide Gruppen keine eindeutige inhaltliche Bearbeitungskombination angeführt werden kann. Trotz dieser Unterschiede in den Bearbeitungen der Aufgaben A4 und A5 sind die in Aufgabe A8 verzeichneten Bearbeitungen interessanterweise identisch und entsprechen sich sogar in ihren quantitativen Verteilungen. Die aus der Beschreibung der Prototypen A und

B resultierende Erkenntnis, dass keine kausalen Beziehungen zwischen den Aufgabenbearbeitungen bestehen, wird somit unterstrichen.

Auch Cluster C5₅ zeigt unterschiedliche mögliche Bearbeitungen der Aufgaben A4 und A8. In einer Besonderheit grenzt sich diese Gruppe jedoch von allen anderen Clustern ab. Für die Bestimmung der Anzahl von Einheitsquadraten in Aufgabe A5 wird überwiegend auf das in Kapitel 8 definierte Bearbeitungskonzept Umfang zurückgegriffen. Dieser Bearbeitungsweg wird in 82 von 114 Datensätzen konsequent in beiden Teilaufgaben verwendet. Auch diese Erkenntnis der Clusteranalyse weist Parallelen zu den Ergebnissen der Einzelanalyse dieser Aufgabe auf.

Kapitel 10 - Bearbeitungstypologie

TEIL IV: ZUSAMMENFASSUNG UND FAZIT

11 Zusammenführung der Ergebnisse

In diesem Kapitel werden die Ergebnisse der Untersuchung zusammengefasst und die in Abschnitt 5.1 angeführten Forschungsanliegen 1 bis 8 beantwortet.

Zunächst erfolgt eine ausführliche Reflexion der entwickelten Aufgabenanalyse, in welcher das zweistufige Analysemodell mit seinen vier Untersuchungskomponenten beurteilt wird. Es schließt sich eine Zusammenfassung der detaillierten Aufgabenanalysen an, in der anhand der empirischen Ergebnisse und der aufgedeckten Besonderheiten Aussagen zu den untersuchten Aufgaben der vergleichenden Leistungserhebung formuliert werden. Rückblickend wird die zusätzliche Konstruktion einer Bearbeitungstypologie unter dem Aspekt der explorativen Datenanalyse dargestellt. Mit Hilfe dieser Ergebnisse werden die Aussagen zu Aufgaben in vergleichenden Leistungserhebungen und zu möglichen Zusammenhängen der Aufgabenbearbeitungen erweitert.

11.1 Rückblick auf das Instrument der Aufgabenanalyse

In Kapitel 6.1 wurde die Aufgabenanalyse als Forschungsinstrument in der Didaktik der Mathematik eingehend erläutert. Verschiedene Beispiele zu Aufgabenanalysen wurden vorgestellt, wobei eine häufig eingeschränkte Untersuchungsperspektive dieser Analysen deutlich wurde. Allerdings können Aufgabenanalysen individuell umgesetzt und nach Bedarf modifiziert werden. Entsprechend Forschungsanliegen 1 war die Entwicklung einer multiperspektivischen Aufgabenanalyse für eine umfassende Untersuchung von Aufgaben in vergleichenden Leistungserhebungen primäres Anliegen der vorliegenden Arbeit. Neben einer theoretischen, möglichst objektiven Analyse der Aufgaben, war die Einbeziehung des realen Umgangs der Schüler mit den in diesen Prüfungen gestellten Aufgaben wichtig. Um eine profunde Analyse der Aufgaben und ebenso eine Analyse der Aufgabenbearbeitungen umsetzen zu können, erfolgte die Gliederung der Aufgabenanalyse als zweistufige Untersuchung. Dabei umfasst das im Rahmen des vorliegenden Forschungsvorhabens entwickelte Modell der Aufgabenanalyse letztlich vier Komponenten¹¹⁵: Die Rationale Aufgabenanalyse der Aufgabe, die Konstruktion eines theoretischen Kategoriensystems möglicher Aufgabenbearbeitungen, die Empirische Aufgabenanalyse der realen Aufgabenbearbeitungen und die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen Bearbeitungen innerhalb einer Aufgabe (siehe Abbildung 4).

Wie in Forschungsanliegen 2 formuliert, wurde das entwickelte Analysemodell auf ausgewählte Aufgaben einer vergleichenden Leistungserhebung im dritten Schuljahr und die hierzu vorliegenden 2022 Datensätze angewendet, um Erkenntnisse über den sinnvollen Einsatz des erarbeiteten Modells sowie die untersuchten Aufgaben zu gewinnen.

¹¹⁵ Die Einordnung der vier Komponenten in den Forschungsprozess ist den Abschnitten 5.4.2 und 5.4.3 zu entnehmen.

So wurde in der ersten Untersuchungskomponente ein Modell für eine ausführliche a priori Analyse (siehe Abschnitt 6.1) der Aufgaben erarbeitet. Unter der Betonung fachdidaktischer Belange enthält die Rationale Aufgabenanalyse die fünf Analyseperspektiven Zielperspektive Diagnose, Zielperspektive Leistungserhebung, Formale Perspektive, Inhaltliche Perspektive und Kognitive Perspektive mit insgesamt 27 untergeordneten Analyseaspekten (siehe Abschnitt 6.2.2). In der Anwendung auf die exemplarischen Aufgaben der Untersuchung zeigte sich, dass sich diese Struktur sehr gut zu einer detaillierten theoretischen Analyse jeder Aufgabe eignet. Hervorzuheben ist hierbei der offene Blick auf die betrachtete Aufgabe, ohne eine Klassifikation oder eine Festschreibung vornehmen zu müssen.

Auf Grundlage der Rationalen Aufgabenanalyse wurden zu jeder untersuchten Aufgabe verschiedene theoretische Bearbeitungskonzepte und untergeordnete Bearbeitungsvarianten konstruiert, die mögliche Bearbeitungswege der Kinder abbilden. Zu betonen ist die Berücksichtigung möglicher Fehllösungen. In dieser Untersuchungskomponente hat es sich bewährt, nicht nur eine als optimal anzusehende Performanz der Aufgabebearbeitung zu konstruieren, sondern auch andere, nicht immer korrekte Bearbeitungswege zu durchdenken. Dadurch werden Besonderheiten der Aufgabe identifiziert oder eingeschränkte Aufgabenintentionen aufgedeckt.

Das theoretische Kategoriensystem der Bearbeitungskonzepte und -varianten bot einen geeigneten Orientierungsrahmen für den zweiten Schritt der Untersuchung. Im Zuge der Empirischen Aufgabenanalyse wurden jeweils über 2000 Bearbeitungen der zuvor theoretisch analysierten Aufgaben untersucht. Die realen Schülerlösungen werden als Reaktionen der Drittklässler auf die Aufgaben interpretiert und mit den theoretischen Ergebnissen der Rationalen Aufgabenanalyse verknüpft. Unter der Bedingung des kategorienorientierten Arbeitens gelang es, die realen Bearbeitungen zu jeder der untersuchten Aufgaben inhaltlich zu strukturieren. Aufgrund der Auswertung der empirischen Daten wurden die Ergebnisse der Rationalen Aufgabenanalysen differenziert und ergänzt. Unter der Prämisse der Modifikation gelang es, die theoretischen Bearbeitungsvarianten jeder Aufgabe zu empirisch belegten Bearbeitungskategorien auszuscharfen. In keiner der Analysen blieb das theoretische Kategoriensystem bestehen, wobei die Modifikationen detailliert in den Zusammenschauen der Bearbeitungskategorien nachzulesen sind (siehe Abschnitte 7.2.6, 8.2.3, 8.2.6, 9.2.2).

Es ist demnach bezüglich des Forschungsanliegens 3 gelungen, die Aufgabebearbeitungen zu den drei untersuchten Aufgaben mit insgesamt sechs Teilaufgaben inhaltlich zu strukturieren. Zu jeder Teilaufgabe wurde ein gesättigtes Kategoriensystem aufgestellt, das neben den übergeordneten grundlegenden Bearbeitungskonzepten detaillierte Bearbeitungskategorien beschreibt.

Die vorgenommenen Modifikationen sprechen für eine notwendige Kombination theoretischer Analysen mit der Untersuchung empirischer Daten. Es wird deutlich, dass eine ausschließlich theoretische Untersuchung von Aufgaben prinzipiell unvollständig bleibt und die realen Möglichkeiten der Aufgabebearbeitungen kaum abbilden kann. Erst die zusätz-

liche Analyse der empirischen Daten zeigte die tatsächliche Bandbreite der Aufgabenbearbeitungen und ermöglichte Rückschlüsse auf Merkmale der Aufgaben. Durch die empirischen Ausschärfungen gewannen die theoretischen Kategoriensysteme der Rationalen Aufgabenanalysen an Qualität und Aussagekraft.

Sämtliche aufgestellten Kategoriensysteme der Empirischen Aufgabenanalyse genügen den in Abschnitt 6.2.3 dargestellten Anforderungen für Kategorien qualitativer Merkmale. Die erstellten Kategoriensysteme sind genau, exklusiv sowie exhaustiv und stellen somit eine aussagekräftige Klassifizierung der untersuchten Aufgabenbearbeitungen dar.

Um die Zuverlässigkeit des Urteilsprozesses während der Kodierung der empirischen Daten zu prüfen, wurde eine ergänzende Untersuchung der Interraterreliabilität durchgeführt. Aus den Datensätzen zu jeder der sechs untersuchten Teilaufgaben wurde eine zehnpromtente Zufallsstichprobe generiert. Diese Stichproben wurden von einem zweiten Kodierer mithilfe eines Kodierleitfadens gruppiert (siehe Anhang). Die Übereinstimmung zwischen den Beurteilungen wurden anhand des Koeffizienten Cohens κ als gängiges Übereinstimmungsmaß berechnet (vgl. WIRTZ/CASPAR 2002, S. 55ff). Dieser Koeffizient ist ein Maß für den zufallskorrigierten Anteil übereinstimmender Bewertungen, wobei sein Wert zwischen -1 und +1 liegt (vgl. ebd.). Für die untersuchten Teilaufgaben ergeben sich folgende Beurteilungen der Güte nach FLEISS und COHEN (vgl. WIRTZ/CASPAR 2002, S. 59).

Teilaufgabe	κ	Stärke der Übereinstimmung
A4a	1	sehr gut
A4b	0,99	sehr gut
A4c	0,49	akzeptabel
A5a	0,83	sehr gut
A5b	0,81	sehr gut
A8	0,77	sehr gut

Tabelle 13: Beurteilung der κ -Werte nach FLEISS und COHEN.

Die Beurteilungsübereinstimmung aller Koeffizienten ist mit Ausnahme eines Wertes sehr gut, womit die Qualität der erstellten Kategoriensysteme unterstrichen wird. Der akzeptable Wert zu Teilaufgabe A4c wird auf die Informationsfülle in den Aufgabenbearbeitungen der Kinder zurückgeführt.

Bei Aufgaben, die formal in Teilaufgaben gegliedert waren und bei denen die Rationale Aufgabenanalyse diese Gliederung bestätigte, erfolgte die Aufgabenanalyse zunächst getrennt nach den Teilaufgaben. So konnte eine konzentrierte Rationale und Empirische Analyse jeder Teilaufgabe stattfinden, um anschließend Zusammenhänge der Bearbeitungen innerhalb einer Aufgabe zu untersuchen. Die Ergebnisse zeigen, dass auch dieser Anspruch mit dem entwickelten Modell gut umgesetzt wird und zahlreiche Beziehungen der Aufgabenbearbeitungen innerhalb einer Aufgabe identifiziert werden (siehe Abschnitte 7.3, 8.3, 9.3).

Die Gliederung der Aufgabenanalyse in zwei Stufen mit vier Untersuchungskomponenten und die anschließende Kombination der Erkenntnisse aus Rationaler und Empirischer Aufgabenanalyse haben sich somit in der Anwendung bewährt und werden für zukünftige Aufgabenanalysen empfohlen. Auf Grundlage der vier Untersuchungskomponenten und dem erörterten Zusammenspiel von Theorie und Empirie wurden zahlreiche aufgabenspezifische Besonderheiten herausgearbeitet (siehe Abschnitt 11.2).

Das Analysemodell offenbarte die Bandbreite der Aufgabenbearbeitungen, was anhand der Fülle der empirisch bestätigten Bearbeitungskategorien der untersuchten Aufgaben belegt wurde. Konkrete Hinweise ergaben sich bereits aus den auffälligen Analyseaspekten der Rationalen Aufgabenanalyse. Es wird betont, dass mit Hilfe des entwickelten Modells Aufgabenanalysen in dieser Tiefe erstmalig möglich waren.

Die Größe der untersuchten Datensätze ($1561 \leq N \leq 2013$) ermöglichte über die zuvor beschriebene Konstruktion der Kategoriensysteme hinaus aufgabenspezifische Aussagen über empirische Häufigkeiten und Verteilungen zu den jeweils angewandten Bearbeitungskonzepten und -kategorien (siehe Kapitel 7, 8, 9).

Die Empirische Aufgabenanalyse deckte Besonderheiten der Aufgabenbearbeitungen auf, welche Rückschlüsse auf die Ergebnisse der Rationalen Aufgabenanalyse zuließen. Anhand der kombinierten Erkenntnisse aus den einzelnen Komponenten der Analyse wurden Kennzeichnungen aller untersuchten Aufgaben formuliert (siehe Abschnitte 7.4, 8.5, 9.4), was Forschungsanliegen 4 bestätigt.

Darüber hinaus ist es möglich, aus den aufgabenspezifischen Besonderheiten allgemeine Aussagen mit Bezug zu den Aufgabenanalysen abzuleiten (siehe Abschnitte 11.2 und 12.1). Fortführend werden Impulse für die Weiterarbeit mit dem Modell der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse im Rahmen eines Ausblicks in Abschnitt 12.2 gegeben.

11.2 Ergebnisse aus den Aufgabenanalysen

Aus den ausführlichen Einzelanalysen der Aufgaben werden allgemeine Erkenntnisse herausgearbeitet, die nachfolgend als Ergebnisse aus den Aufgabenanalysen formuliert werden. Forschungsanliegen 5 fragt nach den identifizierten Besonderheiten der Aufgaben hinsichtlich einer entwicklungsdiagnostischen Nutzung. Diese werden nachfolgend dargestellt.

Die erste grundlegende Erkenntnis ist die **mehrdeutige inhaltliche Zuordnung** einer Aufgabe in vergleichenden Leistungserhebungen. Die Rationalen Aufgabenanalysen und die Analysen der empirischen Daten zeigten zahlreiche Bearbeitungen und Lösungen fernab der offiziellen Aufgabenintentionen sowie der inhaltlichen Einordnungen der Aufgaben. Die für eine adäquate Aufgabenbearbeitung inhaltlich relevanten Kompetenzen waren nicht immer eindeutig zu bestimmen, womit die inhaltliche Validität fragwürdig ist.

Die Einzelanalyse der Aufgabe A8 „Zucker“ (siehe Kapitel 9) konkretisiert das Problem der Inhaltsvalidität und zeigt die Auswirkungen auf die Bearbeitungswege der Drittklässler. Die Aufgabe wird von den Aufgabenautoren als Sachsituation mit proportionaler Zuordnung bezeichnet. Das Thema Proportionalität ist für diese Altersstufe prinzipiell un-

angemessen, was sich sowohl anhand curricularer Vorgaben als auch mit den entwicklungspsychologischen Erkenntnissen von PIAGET belegen lässt (siehe Abschnitt 9.4). Der Bearbeitungszugang der Aufgabe A8 wird daher in der Rationalen Aufgabenanalyse nicht nur aufgrund der inhaltlich intendierten Zuordnung konstruiert. Zudem werden im Zuge der Aufgabenanalyse zahlreiche Merkmale angeführt, die neben dem inhaltlichen Anspruch eine zusätzliche Komplexität der Aufgabe bedingen. Die empirischen Ergebnisse zeigen, dass aufgrund des Zusammenspiels der inhaltlichen Schwierigkeit und der komplexen Präsentation der Aufgabe A8 „Zucker“ verschiedene angemessene Bearbeitungswege möglich sind, die den Aspekt der proportionalen Zuordnung außer Acht lassen.

Eine Beurteilung der inhaltlichen Validität von Aufgaben in vergleichenden Leistungserhebungen kann aufgrund verschiedener möglicher Bearbeitungswege nicht immer eindeutig erfolgen. Da die inhaltliche Zuordnung mitverantwortlich für eine grundlegende Einschätzung und anschließende Beurteilung der Aufgabebearbeitungen ist, sollte sie sensibel und umfassend vorgenommen werden.

Darüber hinaus wird die Anforderung einer Aufgabe maßgeblich durch die Vorkenntnisse des Schülers beeinflusst, sodass für eine **Einordnung des Anforderungsbereichs** einer Aufgabe im Rahmen einer schriftlichen Leistungserhebung Fallunterscheidungen hinsichtlich der Vorkenntnisse vorzunehmen sind.

Deutlich wird dieser Aspekt ebenfalls anhand der Aufgabe A8 „Zucker“. Haben die Schüler bereits im Vorfeld der vergleichenden Leistungserhebung Erfahrungen zu dem Thema Proportionalität sammeln können, sind deren Anwendung auf die Aufgabe und somit ein relativer Lösungszugang vorstellbar. In diesem Fall kann die Aufgabe A8 dem Anforderungsbereich Verknüpfung zugeschrieben werden. Besitzen die Drittklässler diese Vorkenntnisse nicht, wird die Aufgabe zur Problemaufgabe und kann erst durch die Konstruktion eines Lösungszuganges auf Basis des vorhandenen Vorwissens bearbeitet werden. Bei dieser Anforderung der Reflexion und Verallgemeinerung ist nicht mehr von einer Bearbeitung mithilfe eines proportionalen Zugangs auszugehen (siehe Abschnitt 9.4).

Auch Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ als intendierte Grundaufgabe zum Thema Flächeninhalt veranschaulicht dieses Problem. Die Anforderung der Reproduktion kann die Aufgabe nur dann erfüllen, wenn das Lösen entweder Grundwissen oder das Ausführen von Routinetätigkeiten erfordert (vgl. KULTUSMINISTERKONFERENZ 2005, S. 13). Besitzen die Kinder keine Vorerfahrungen und Vorkenntnisse zum Thema Flächeninhalt, wird der offiziellen Aufgabenanforderung der Reproduktion widersprochen und die Anforderung an die Bearbeitung erhöht sich (siehe Abschnitt 8.5).

Ebenso belegen die Ergebnisse sämtlicher Empirischer Aufgabenanalysen die **multiple Lösbarkeit** der untersuchten Aufgaben und Teilaufgaben. Einbezogen wurden sowohl verschiedene Varianten der Berechnung als auch unterschiedliche Bearbeitungswege und -zugänge bei der Aufgabenlösung. Diese Erkenntnis ist prinzipiell für eine reproduktive Aufgabenanforderung bis hin zu einem reflexiven Anspruch von Aufgaben gültig. So zeigten sich bei der Analyse der Interviewdaten zu Aufgabe A4 „Hundertertafel“ selbst bei Eintragung der fehlenden Zahlen in der Hundertertafel verschiedene Bearbeitungszugänge

der Drittklässler, die über die intendierte Nutzung der Struktur dieser Zahldarstellung hinausgingen (siehe Abschnitt 7.2.2).

Die als Ergebnisse der Rationalen Aufgabenanalyse konstruierten theoretischen Bearbeitungsvarianten wurden bei allen Empirischen Aufgabenanalysen modifiziert, um den vielfältigen vorliegenden Bearbeitungen gerecht zu werden. Zahlreiche adäquate Bearbeitungen entgegen den Aufgabenintentionen wurden herausgearbeitet. Bei der Aufgabenkonstruktion und der Formulierung von Beurteilungskriterien für vergleichende Leistungserhebungen ist diese multiple Lösbarkeit unbedingt zu berücksichtigen und einzubeziehen.

Der Aspekt der Schriftlichkeit von vergleichenden Leistungserhebungen besitzt für das Grundschulalter eine besondere Bedeutung. Wie in Abschnitt 2.4 dargestellt, eignen sich die Kinder neben der Mathematik auch die schulischen Fähigkeiten des Lesens und Schreibens erst in dieser Zeit an. So ist der Anspruch der Aufgabenerfassung und des Aufgabenverständnisses in schriftlichen Leistungserhebungen für ein Kind im Grundschulalter äußerst hoch. Der Einfluss der **formalen Aufgabenpräsentation** in schriftlichen Leistungserhebungen der Grundschule wurde in den Aufgabenanalysen immer wieder deutlich. Speziell die im Aufgabenstamm und im Antwortformat verwendeten Begriffe und Formulierungen, aber ebenso die Anordnung der formalen Elemente erwiesen sich als schwierigkeitsbestimmender Aspekt und können die Komplexität einer Aufgabe in vergleichenden Leistungserhebungen erhöhen. Die Empirischen Aufgabenanalysen veranschaulichten das oft fehlende Verständnis der Drittklässler für Formulierungen mit besonderem Bedeutungsgehalt oder die Unkenntnis mancher Begriffe. Dies hatte Einfluss auf die Interpretation der Aufgaben sowie den Bearbeitungsweg und führte zu zahlreichen individuellen Aufgabenbearbeitungen.

Besonders offensichtlich wurde die Auswirkung der Unkenntnis von Begriffen in Aufgabe A8 „Zucker“. Hier soll der Zuckergehalt von Schokoladen und Schokoküssen verglichen werden, um eine vorgegebene Aussage beurteilen zu können. Die in den Schrift- und Interviewdaten identifizierten individuellen Interpretationen des Begriffs Schokokuss sind verantwortlich für zahlreiche Bearbeitungskategorien, die aufgrund der veränderten Aufgabensituation nicht der angestrebten Aufgabenlösung entsprechen (siehe Abschnitt 9.2).

Zusätzlich fordern die Aufgaben in schriftlichen Leistungserhebungen häufig Begründungen und Erläuterungen von Ergebnissen, die im Rahmen der Prüfung schriftlich artikuliert werden müssen. Dank der kombinierten Analyse von Schrift- und Interviewdaten werden zwei Ergebnisse zum diesem Aspekt festgehalten. Bereits die auf Grundlage der Schriftdaten aufgestellten Kategoriensysteme der Empirischen Aufgabenanalyse waren derart erschöpfend, dass jeweils alle Aufgabenbearbeitungen der Interviewstudie eindeutig zugeordnet werden konnten. Die Analyse der komplementären Interviewdaten (Aufgabendokumente, Videoaufnahmen, Transkripte) erforderte in keiner der Empirischen Aufgabenanalysen die zusätzliche Konstruktion von Bearbeitungskategorien. Darüber hinaus ermöglichten die Interviewdaten einen konkreten Vergleich der mündlichen und schriftlichen Aufgabenbearbeitungen der Drittklässler zu Aufgabe A8 „Zucker“. Zusammenfassend wird festgehalten, dass die Zuordnungen in die Bearbeitungskonzepte sich weitestgehend entsprachen und Aussagen über den Bearbeitungsweg aus beiden Datenformen möglich waren. Allerdings waren die mündlichen Bearbeitungen der Kinder meist umfassender

und ausführlicher. So konnten ihnen im Vergleich zu den Schriftdaten detailliertere Informationen über die Bearbeitungs- und Denkwege entnommen werden (siehe Abschnitt 9.2.3).

Des Weiteren wird im Zusammenhang mit der Schriftlichkeit vergleichender Leistungserhebungen die Bedeutung von Zeichnungen als zusätzliche Arbeitsprodukte der Schüler angeführt. Die Interpretation von Aufgabenbearbeitungen in schriftlichen Leistungserhebungen wird durch den Einbezug vorhandener **Schülerzeichnungen** erleichtert. Von einem schriftlich vorliegenden Arbeitsbogen mit Zeichnungen des Kindes konnte, wenn auch nicht immer eindeutig, auf seinen Denkweg geschlossen werden. Darüber hinaus wurde eine grundlegende Beeinflussung der Bearbeitungswege durch Zeichnungen festgestellt. In Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ wiesen fast zwei Drittel der untersuchten Datensätze Zeichnungen auf, wobei die Aufgabenstellung dies nicht explizit forderte. Im Zuge der Analyse wurde eine Charakterisierung vorgenommen und unterschiedliche Arten von Zeichnungen wurden beschrieben. Als lohnend wurde die anschließende Untersuchung des Zusammenhangs zwischen der Art der Zeichnung und dem Bearbeitungsweg der Aufgabe beurteilt, welcher belegt werden konnte (siehe Abschnitt 8.4).

Weiterhin werden aufgrund der separaten Analyse von Teilaufgaben und der anschließenden Untersuchung von Zusammenhängen der Bearbeitungen zwei weitere Ergebnisse festgehalten. Eine **hierarchisch aufgebaute Aufgabe**, welche in Teilaufgaben gegliedert ist, wird vom Aufgabenbearbeiter nicht selbstverständlich als Einheit angesehen.

Die Ergebnisse der Empirischen Aufgabenanalyse zu Aufgabe A4 „Hundertertafel“ belegen eindrucksvoll, dass bei Gliederung einer Aufgabe in voneinander abhängige Teilaufgaben diese durchaus als unabhängige Aufgabenstellungen verstanden und bearbeitet wurden. Auch hier wurde der Einfluss der formalen Präsentation auf das Aufgabenverständnis deutlich. Dieser legitimiert die voneinander unabhängige Bearbeitung der Teilaufgaben. Bezogen die Kinder die Aufgabenteile hingegen aufeinander, beeinflusste dies die Bearbeitung der nachfolgenden Teilaufgaben positiv. Das wurde in Aufgabe A4 anhand der aufgezeigten Kontingenz zwischen einer korrekt angegebenen Zeilensumme in Teilaufgabe A4b und einer strukturmathematischen Begründung in der folgenden Teilaufgabe A4c deutlich (siehe Abschnitt 7.3).

Ebenso zeigt das Aufdecken der Intra-Beziehungen von Aufgaben eine **Konsequenz der verwendeten Bearbeitungskonzepte** bei der Bearbeitung von Teilaufgaben mit gleicher Aufgabenstellung. Deutlich wurde dieser Aspekt anhand der Zusammenführung der Bearbeitungswege in Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“. Auf Basis der erstellten Kontingenztafeln wurde aufgezeigt, dass das in Teilaufgabe A5a analysierte Bearbeitungskonzept auch weitestgehend in Teilaufgabe A5b angewandt wurde (siehe Abschnitt 8.3).

11.3 Ergebnisse aus der Konstruktion einer Bearbeitungstypologie

Mit der konstruierten Bearbeitungstypologie wurden in der vorliegenden Forschungsarbeit die Bearbeitungen der Drittklässler über die drei analysierten Aufgaben und ihre Teilaufgaben hinweg untersucht, womit Strukturen und Häufungen der Aufgabenbearbeitungen aufgedeckt werden sollten. Angesichts der Datenfülle zu den Bearbeitungskonzepten und -kategorien der Teilaufgaben erfolgte eine mehrmalige Reduktion des Merkmalsraums, der in der vorliegenden Untersuchung die Bearbeitungskombinationen der analysierten Aufgaben umfasst. Neben dem in 10.2.1 begründeten Ausschluss der Teilaufgabe A4a wurden die Daten aus forschungspragmatischen Gründen inhaltlich reduziert. Die Frage nach auffälligen Häufungen wurde nicht anhand der aufgestellten Bearbeitungskategorien, sondern mit Hilfe der übergeordneten Bearbeitungskonzepte untersucht, wobei einzelne Bearbeitungskonzepte zusätzlich aufgrund ihrer inhaltlichen Ähnlichkeit zusammengefasst wurden. Beide Reduktionen waren angemessen, da die Bearbeitungsdetails der Einzelanalysen für eine Analyse der grundlegenden Bearbeitungskombinationen unbedeutend sind. Zahlreiche Bearbeitungskombinationen sind in den empirischen Daten nicht vorhanden, daher reduzierte sich der Merkmalsraum auf letztlich 376 Bearbeitungskombinationen (siehe Abschnitt 10.2.2).

Nach einer binären Transformation floss der Datensatz in die computergestützte Clusteranalyse mit dem in Abschnitt 10.3 erläuterten hierarchischen Clusterverfahren Ward ein. Da eine optimale Clusterzahl Kriterium für die inhaltliche Interpretation der Clusterlösung und deren Aussagekraft ist, wurden das Elbow-Kriterium, die Zuordnungsübersicht und das Dendrogramm zur errechneten Clusteranalyse in die Entscheidung für die optimale Clusterzahl einbezogen. In Kombination mit einer Untersuchung der Knotenpunkte des Fusionierungsprozesses wurde eine sinnvolle Clusterung in fünf Gruppen als optimale Clusterlösung identifiziert (siehe Abschnitt 10.3.2).

Diese intensive Auseinandersetzung sowohl mit der Methode der computergestützten Clusteranalyse als auch mit den dafür notwendigen Gegebenheiten lieferte die Basis für den Erhalt einer qualitativ wertvollen Clusterlösung. Nur anhand der beschriebenen Kriterien kann eine solche Clusterlösung inhaltlich interpretiert werden.

Eine erste Beschreibung der Cluster erfolgte anhand einer Kennzeichnung mit Hilfe definierter clusterinterner Ausprägungsgrade in den einzelnen Bearbeitungskonzepten (siehe Abschnitt 10.3.3). Für die inhaltliche Charakterisierung der fünf Cluster wurde der F-Wert zur Bestimmung der Clusterhomogenität als Gütekriterium ebenso herangezogen wie der für jedes Bearbeitungskonzept in jedem Cluster berechnete t-Wert. Unter Einbeziehung der Modi war nach dem Vergleich dieser Werte deutlich, dass entgegen Forschungsanliegen 6 keine eindeutige Bearbeitungstypologie zu den untersuchten Aufgaben existiert. Allgemeine Aussagen zu Bearbeitungshäufungen oder Bearbeitungszusammenhängen können somit nicht getroffen werden.

Forschungsanliegen 7 fragt nach typischen Bearbeitungsmustern der untersuchten Aufgaben. Lediglich zwei Prototypen, die jeweils die Charakteristika der Cluster abbilden, lassen sich beschreiben. Dabei weisen diese beiden Prototypen in Aufgabe A4 „Hundertertafel“ sowie Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ identische Bearbeitungskombinationen auf und verhalten sich lediglich in der Bearbeitung von Aufgabe A8 „Zucker“ komplementär zueinander. Bereits diese Erkenntnis gibt eine erste Antwort auf Forschungsanliegen 8, das nach Schlüssen aus der Konstruktion einer Bearbeitungstypologie fragt. Zwischen den untersuchten Aufgabebearbeitungen existieren keine kausalen Beziehungen. Es kann somit nicht von dem Bearbeitungsweg einer Aufgabe auf den Bearbeitungsweg einer anderen Aufgabe geschlossen werden.

Die inhaltliche Analyse der übrigen drei Cluster unterstreicht diese Erkenntnis und lässt weitere Schlüsse zu. Diese sind in ihren Bearbeitungskombinationen äußerst heterogen. Häufig werden die Cluster nur durch eine Aufgabe gekennzeichnet, wobei verschiedene Bearbeitungen der kennzeichnenden Aufgabe in der Gruppe existieren. Da die empirischen Bearbeitungskombinationen in den untersuchten Clustern derart unterschiedlich sind, können keine kausalen Beziehungen zwischen den Aufgabebearbeitungen beschrieben werden.

Es ist interessant, dass sich trotz der Untersuchungsperspektive auf alle Aufgaben auch in der Clusteranalyse einige der in den Einzelanalysen identifizierten aufgabenspezifischen Phänomene zeigten. Beispiele dafür sind die unabhängige Bearbeitung der Teilaufgaben in Aufgabe A4 „Hundertertafel“ (siehe Abschnitt 7.3) und die Konsequenz des Bearbeitungsweges Umfang in Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ (siehe Abschnitt 8.3).

Kapitel 11 - Zusammenführung der Ergebnisse

12 Fazit mit Ausblick

Das letzte Kapitel widmet sich den Aufgaben im Spannungsfeld von Diagnose und Leistungserhebung und einer entwicklungsdiagnostischen Nutzung auf der Mikroebene des Kindes. Die in Abschnitt 5.1 angeführten Forschungsanliegen 9 bis 11 werden hier anhand der Ergebnisse der vorliegenden Forschungsarbeit beantwortet und mithilfe der erzielten Erkenntnisse erörtert. Ein letzter Abschnitt enthält im Rahmen des Untersuchungsprozesses aufgekommene Fragen und Forschungsimpulse, die über das Anliegen der vorliegenden Arbeit hinausgehen.

12.1 Ergebnisse zum Spannungsfeld Diagnose und vergleichende Leistungserhebung

Mit Bezug auf die in Abschnitt 2.2 dargestellten Funktionen von Diagnose mit dem Ziel der Optimierung des Lernens und der Lernerfolge wird speziell die Frage nach der entwicklungsdiagnostischen Nutzung vergleichender Leistungserhebungen gestellt. Gerade für das Grundschulalter besitzt diese Entwicklungsfunktion mit Blick auf den individuellen Lernprozess des Kindes einen hohen Stellenwert (siehe Abschnitt 2.4), sodass den Leistungserhebungen in der Grundschule eine besondere Bedeutung zukommt. Im Rahmen der vorliegenden Arbeit ist mithilfe des erarbeiteten Modells und des mehrphasigen Untersuchungsvorhabens eine qualitativ orientierte Analyse der vorliegenden Daten mit ergänzenden Quantifizierungen gelungen. Phänomene der Aufgaben sowie ihrer Bearbeitungen wurden identifiziert und beschrieben. So werden empiriegestützte Ergebnisse formuliert, die erste Antworten auf die Forschungsanliegen 9 bis 11 liefern.

Die **Relevanz der Aufgaben als Instrumente der Leistungserhebung und der Diagnose** (Forschungsanliegen 9) wird anhand der vielschichtigen Ergebnisse des Forschungsvorhabens belegt. Die in den Prüfungen gestellten Aufgaben sollen von den Aufgabenautoren intendierte Kompetenzen aktivieren, die als Performanzen in den individuellen Aufgabebearbeitungen abgebildet werden. Die Aufgabenintentionen werden ausschließlich in schriftlicher Form anhand der Aufgabendokumente transportiert. Ergebnisse werden von den Schülern ebenfalls in schriftlicher Form festgehalten, sodass auch die Auswertung einer vergleichenden Leistungserhebung auf den schriftlichen Aufgabendokumenten basiert. Die Untersuchungsergebnisse verdeutlichen die häufig eingeschränkte Aufgabenintention in schriftlichen Prüfungen. Die analysierten Aufgabebearbeitungen zeigen eine Bearbeitungsvielfalt, die neben den intendierten Aufgabenlösungen immer wieder adäquate Aufgabebearbeitungen entgegen der Aufgabenintention aufdeckt.

Hier spiegelt sich das in Abschnitt 11.2 dargelegte Problem der inhaltlichen Validität einer Aufgabe wider. Für die Interpretation von schriftlichen Aufgabebearbeitungen ist zuvor eine sorgfältige Operationalisierung der Inhalte und Anforderungen notwendig, damit das Bearbeitungsspektrum definiert werden kann. Erst mit diesen Informationen kann eine Aufgabebearbeitung sinnvoll eingeschätzt werden, so dass diagnostisch verwendbare Informationen für die Förderung des einzelnen Kindes entnommen werden können.

Die Ergebnisse der Clusteranalyse verdeutlichen zudem die Heterogenität und die fehlenden Zusammenhänge der untersuchten Aufgabenbearbeitungen. Die in den Handreichungen vergleichender Leistungserhebungen häufig angestrebte Analyse grundlegender Stärken und Schwächen einzelner Schüler (vgl. bspw. HESSISCHES KULTUSMINISTERIUM 2009, S. 18) kann anhand der Ergebnisse der untersuchten vergleichenden Leistungserhebungen nicht erfolgen. Dies ist der Fall, obwohl im vorliegenden Forschungsvorhaben sogar die Bearbeitungen selbst untersucht wurden. In der Regel werden den Aufgabenbearbeitungen in einer Prüfung Punktbewertungen zugeordnet. Der Zahlenwert selbst lässt keinen Rückschluss mehr auf den zugrundeliegenden Bearbeitungsweg der Aufgabe zu. Das Herauslesen entwicklungsdiagnostisch nutzbarer Informationen ist dann gänzlich unmöglich.

Vergleichende Leistungserhebungen sind eine Form der Schulleistungsmessung und werden prinzipiell der Statusdiagnostik zugeordnet (siehe Abschnitt 2.2.2). Die Prüfungen sollen Umfang, Qualität und Niveau des vom Schüler erworbenen Wissens erfassen (HELLER/HANY 2001, S. 89), was sich in den Aufgabenbearbeitungen abbilden soll. Dieser Anspruch einer Prüfung ist somit prozessdiagnostisch ausgerichtet, was dem angeführten statischen Aspekt der Leistungsmessung und dem Auswertungsverfahren der Punktebewertung widerspricht. Das Problem der **konkurrierenden Funktionen Leistungserhebung und Diagnose** (Forschungsanliegen 10) wird deutlich.

Mithilfe des entwickelten Analysemodells ist es gelungen, die untersuchten Aufgaben umfassend zu beschreiben und die zahlreichen vorliegenden Aufgabenbearbeitungen zu kategorisieren. Die Ergebnisse der untersuchten Leistungserhebung bieten jedoch kaum Aufschluss für entwicklungsdiagnostische Maßnahmen, was anhand der in Abschnitt 3.3 dargestellten Theorie der drei Ebenen des Bildungssystems nach FEND erläutert wird. Neben den ausführlichen Aufgabenkennzeichnungen (siehe Abschnitte 7.4, 8.5, 9.4) erbrachten die Rationalen und Empirischen Aufgabenanalysen umfangreiche Kategoriensysteme der Aufgabenbearbeitungen. Die Kategorien jeder Aufgabe beziehungsweise Teilaufgabe verdeutlichten die Bandbreite der realen Aufgabenbearbeitungen, indem verschiedene Bearbeitungskonzepte und -kategorien der schriftlichen Aufgabenbearbeitungen angeführt wurden. Auf der Mesoebene der Schule oder auch im Vergleich verschiedener Schulen könnten anhand kumulierter Datensätze Aussagen zu Verteilungen und Häufigkeiten getroffen werden. Begründete Rückschlüsse auf das Zustandekommen der Bearbeitungen sowie auf mögliche Ursachen für die Verteilungen sind jedoch erst aufgrund zusätzlicher Informationen möglich. Aufgrund der non-reaktiven Datenbasis (siehe Abschnitt 5.2.1.1) lagen für die eigene Untersuchung keine Kontextvariablen vor. Die vorliegende Arbeit bezieht sich so ausschließlich die Mikroebene des Kindes. Es zeigt sich, dass die schriftlichen Bearbeitungen die tatsächlichen Denkwege und mögliche Ursachen im Detail kaum abbilden. Konkrete Anknüpfungspunkte für die individuelle Förderung des Kindes konnten den Daten nur spärlich entnommen werden. Zudem zeigte sich in der vorliegenden Untersuchung, dass die analysierten Aufgabenbearbeitungen keine kausalen Zusammenhänge aufweisen. Aufgrund der Heterogenität der Aufgaben können kaum Schlüsse von einzelnen Aufgabenbearbeitungen der untersuchten vergleichenden Leistungserhebung auf Bearbeitungen anderer Aufgaben gezogen werden.

Der untersuchten Orientierungsarbeit als ein Beispiel für vergleichende Leistungserhebungen in der Grundschule wird die von den Verantwortlichen intendierte entwicklungsdiagnostische Funktion (siehe Abschnitt 4.5.1) auf Grundlage des offiziellen Bewertungsverfahrens abgesprochen.

Während die intendierte Vergleichbarkeit von Leistungen sich deutlich auf die Mesoebene der Schulen und Klassen bezieht, betrifft die entwicklungsdiagnostische Zielsetzung hingegen den individuellen Schüler, womit die Mikroebene angesprochen wird. Die beiden Funktionen vergleichende Leistungserhebung und entwicklungsorientierte Diagnose zielen somit auf verschiedene Ebenen des Bildungssystems ab und können nicht in einem Aufgabenset mit einem einseitigen Auswertungsverfahren vereint werden. Die in Abschnitt 5.1 aufgeworfene Frage nach der zweidimensionalen Funktionalität eines Aufgabensets als Instrument der Leistungserhebung einerseits und als Diagnoseinstrument andererseits wird zunächst verneint. Eine Prüfung und ihr Aufgabenset können entweder mit der Funktion der Leistungserhebung oder mit der Funktion der Diagnose eingesetzt werden. Dabei können die Aufgaben jeweils für eine der beiden Funktionen optimiert werden, wofür die im Rahmen der Rationalen Aufgabenanalyse erarbeiteten Analyseaspekte der Zielperspektive Leistungserhebung und der Zielperspektive Diagnose herangezogen werden können. Hierzu gehört auch ein angemessenes Auswertungsverfahren, das beide Funktionen gleichermaßen berücksichtigt.

Der in Abschnitt 4.3 angeführten Aussage von LEUTNER ET AL. (2008, S. 169) über die formale Ähnlichkeit von Aufgaben für unterschiedliche Zwecke wird somit explizit widersprochen. Um eine optimierte Nutzung der Aufgabebearbeitungen und der Ergebnisse einer Prüfung zu ermöglichen, erfordern die unterschiedlichen Funktionen von Aufgaben ebenfalls unterschiedliche formale Präsentationen.

Aus der vorliegenden Untersuchung geht eindeutig hervor, dass die Ergebnisse der vergleichenden Leistungserhebung auf der Mikroebene des Schülers für diagnostische Handlungsentscheidungen wenig Aussagekraft besitzen. Ein nutzbares diagnostisches Potential hingegen liegt in den analysierten Aufgaben selbst, dieses wird jeweils in den Zusammenfassungen und Kennzeichnungen beschrieben (siehe Abschnitte 7.4, 8.5, 9.4). Das diagnostische Potential, das die Möglichkeit transparenter, detaillierter und eindeutiger Informationen zu den Bearbeitungs- und Denkwegen der Schüler beschreibt, variiert mit den kennzeichnenden Merkmalen der jeweiligen Aufgabe. Soll die Aufgabe über die Leistungserhebung hinaus für entwicklungsdiagnostische Zwecke genutzt werden, ist sie hinsichtlich der Zielperspektive Diagnose und unter Berücksichtigung der in Abschnitt 6.2.2 angeführten Analyseaspekte zu modifizieren und detailliert auszuwerten. Konkrete Hinweise für eine mögliche Optimierung der untersuchten Aufgaben werden in den jeweiligen Kennzeichnungen beschrieben.

Aus dem vorliegenden Forschungsvorhaben lassen sich somit **Konsequenzen für die Konstruktion von Aufgaben mit entwicklungsdiagnostischer Funktion** (Forschungsanliegen 11) ableiten. Bedeutsam ist die Schriftlichkeit der Aufgaben und ihrer Bearbeitungen, die besondere Anforderungen an die Aufgabenkonstruktion stellt. Für eine entwick-

lungsorientierte Diagnose mithilfe schriftlich gestellter Aufgaben ohne den direkten Dialog mit dem Schüler, werden die folgenden Schlüsse aus dem Forschungsvorhaben hergeleitet. Je freier die Antwortformate gewählt werden, umso mehr Informationen kann die schriftliche Aufgabenlösung bieten. Die Verwendung gebundener Antwortformate ermöglicht kaum Rückschlüsse von der schriftlichen Aufgabenbearbeitung auf den zugrundeliegenden Denk- und Bearbeitungsweg des Kindes. Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass selbst bei freien geschlossenen Antwortformaten die Aussagekraft der Notation variieren kann und ein begründeter Rückschluss auf die Bearbeitung nicht immer möglich ist (siehe Aufgabe A4b, Aufgabe A5). Die notierten Ergebnisse der Drittklässler in den freien Antwortformaten hingegen lassen Rückschlüsse für die Beschreibung der Bearbeitungskonzepte und Kategorien grundsätzlich zu.

Im Zusammenhang mit der Frage nach dem diagnostischen Potential verschiedener Antwortformate wird auf die häufig noch begrenztere Aussagekraft von Multiple-Choice-Aufgaben hingewiesen. Im Kontext der vorliegenden Forschungsarbeit führte SCHANKWEILER (2006) eine ergänzende Untersuchung zu den Denk- und Rechenwegen von Grundschulern beim Lösen der Multiple-Choice-Aufgaben A2 „Stellenwerte“ und A3 „Überschlag“ (siehe Abschnitt 4.5.2) durch. Die Auswertung der Interviewstudie mit 32 Drittklässlern zeigt, dass einer gleichen Antwortoption der Kinder durchaus verschiedene Bearbeitungs- und Lösungswege zugrundeliegen (vgl. SCHANKWEILER 2006, S.110ff). Trotz bewusst gewählter Distraktoren bleibt die Multiple-Choice-Aufgabe ein theoretisches Konstrukt, das die realen Motive und Ursachen der Antwortauswahl kaum zu fassen vermag. Die von GRANZER (2006b, S. 19) formulierte Chance dieses gebundenen Antwortformates zur Überprüfung von Kenntnissen und Fertigkeiten kann nur auf die Mesoebene der Klasse bezogen werden, da lediglich eine Rückmeldung hinsichtlich zu wiederholender und zu intensivierender Inhalte des Mathematikunterrichts erfolgt. Für die Förderung des einzelnen Schülers auf der Mikroebene besitzen derartige Antwortformate eine zu geringe Aussagekraft.

Um den vielfältigen Bearbeitungswegen gerecht zu werden und das diagnostische Potential freier Antwortformate nutzen zu können, werden umfassende Beurteilungs- und Bewertungsmodelle benötigt. Die mögliche Niveauzuteilung von Bearbeitungen in freien Antwortformaten wird anhand der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit hervorgehoben und kann für eine Entwicklung angemessener Beurteilungsmodelle genutzt werden (siehe Abschnitt 12.2), womit die Kritik an der scheinbar dichotomen Beurteilung in mathematischen Leistungserhebungen unterstrichen wird (vgl. FRÖHLICH ET AL. 2006, S.2, vgl. KÄPNICK 1998, S. 27).

Neben den schriftlichen Äußerungen der Kinder in freien Antwortformaten erhöhen Zeichnungen als weitere Form der Eigenproduktion die diagnostische Aussagekraft einer Aufgabenbearbeitung. Insbesondere die Kombination von schriftlichen Texten mit angefertigten Zeichnungen der Kinder bietet eine angemessene Interpretationsgrundlage, um auf Bearbeitungs- und Denkwege zu schließen (siehe Aufgabe A5).

Einwände, dass sich die schriftlichen und die mündlichen Äußerungen der Kinder grundlegend voneinander unterscheiden, werden anhand der komplementären Interviewstudie des vorliegenden Forschungsvorhabens relativiert. Der von WOLLRING (2004a, S. 5) vorge-

schlagenen Differenzierung von mündlicher und schriftlicher Performanz wird grundsätzlich zugestimmt. Allerdings unterscheiden sich diese Performanzen eines Kindes in der eigenen Untersuchung nicht grundlegend. Anhand eines Vergleichs der schriftlichen und mündlichen Bearbeitungen der Interviewstudie zeigte sich, dass die mündlichen Ausführungen der Kinder oftmals umfangreicher waren und eine Vielzahl von Begründungsaspekten aufwiesen. Diesen Umfang besaßen die zugehörigen schriftlichen Äußerungen selten. Das zugrundeliegende Bearbeitungskonzept stimmte jedoch bei der schriftlichen und der mündlichen Erläuterung eines Kindes weitestgehend überein (siehe Aufgabe A8).

Für die diagnostische Nutzung einer schriftlich gestellten Aufgabe sollte gründlich analysiert werden, welche inhaltlichen Bereiche bedeutsam sind und aktiviert werden. Dann wird offensichtlich, dass unterschiedliche Wissensbereiche und Fähigkeiten angesprochen werden können, die darüber hinaus auch die in den Bildungsstandards beschriebenen allgemeinen mathematischen Kompetenzen erfordern. Es ist stets zu durchdenken, welche Inhalte und welche Fähigkeiten die gestellte Aufgabe diagnostizieren soll und welche Aspekte die schriftlichen Aufgabenbearbeitungen tatsächlich abbilden. Auch das zuvor angeführte Antwortformat einer Aufgabe beeinflusst diese Überlegungen maßgeblich. So wurde im Rahmen der eigenen Aufgabenanalyse deutlich, dass eine verstehensorientierte Aufgabe, deren Lösung jedoch in einem freien geschlossenen Antwortformat notiert wird, keinerlei Rückschluss auf die tatsächlichen Kenntnisse und Denkwege des Schülers zulässt (siehe Aufgabe A4b, Abschnitt 7.2.4). Die Forderung nach der sorgfältigen inhaltlichen Analyse einer Aufgabe weitet die angeführte Aussage SCHERERS (2004) hinsichtlich der Interpretation von Aufgabenbearbeitungen aus.

„Es bedarf allerdings immer einer sorgfältigen Interpretation der Ergebnisse und der Reflexion, unter welchen Bedingungen bei welchem Kinde Leistungen zu Stande gekommen sind, welche Folgerungen gezogen werden können und welche nicht.“
(SCHERER 2004, S. 279)

Zur Umsetzung einer entwicklungsdiagnostischen Funktion von Aufgaben auf der Mikroebene des Kindes wird jedoch der Dialog mit dem einzelnen Schüler empfohlen. Die in die eigene Untersuchung eingebundene Interviewstudie bestätigt den Vorteil dieser direkten Situationen und ermöglichte darüber hinaus vielfältige Dokumentationsmöglichkeiten. Im Rahmen eines diagnostischen Interviews oder eines diagnostischen Gesprächs¹¹⁶ wird die gestellte Aufgabe direkt bearbeitet. So kann gezielt nach den Denk- und Bearbeitungsprozessen gefragt werden und das Kind kommentiert seine Aufgabenlösung. Die vorliegende Untersuchung legt die Transparenz des Denkens der Kinder in derartigen Gesprächssituationen anschaulich dar (siehe Abschnitte zu den Interviewstudien in den Kapiteln 7, 8, 9).

¹¹⁶Sowohl bei einem diagnostischen Interview als auch bei einem diagnostischen Gespräch ist die grundlegende Intention eine Erfassung der Denk- und Lösungswege der Kinder. Nach BRÄUNING und NÜHRENBÖRGER (2010, S. 298f) wird für das diagnostische Interview ein Leitfaden verwendet, während das diagnostische Gespräch ohne diese Orientierung erfolgt.

12.2 Ausblick

Aus dem vorliegenden Untersuchungsvorhaben lassen sich anhand der erzielten Ergebnisse nicht nur Schlüsse hinsichtlich der formulierten Forschungsanliegen ziehen. Darüber hinaus ergeben sich Impulse für die Weiterentwicklung des Instrumentes der Aufgabenanalyse und weitere Forschungsansätze zu Aufgaben im Spannungsfeld Leistungserhebung und Diagnose.

Das im Rahmen der vorliegenden Forschungsarbeit konstruierte zweistufige **Modell der Rationalen und Empirischen Aufgabenanalyse** gilt es, für die mathematikdidaktische Forschung weiterzuentwickeln und in seiner Anwendung zu optimieren. In der vorliegenden Untersuchung wurde das erarbeitete Modell auf ausgewählte Aufgaben einer vergleichenden Leistungserhebung in der Grundschule angewendet. Im Zentrum des Forschungsinteresses stand das Spannungsfeld zwischen Diagnose und Leistungserhebung, um Erkenntnisse zu den diagnostischen Potentialen der Aufgaben und der Aufgabebearbeitungen zu erzielen. Zukünftig kann das Instrument auf weitere Aufgaben sowie auf vollständige Aufgabensets anderer Leistungserhebungen in der Grundschule angewendet werden. Zusätzliche Erkenntnisse würde der Einsatz auf Aufgaben aus der Sekundarstufe erbringen, da dann ein Vergleich der jeweils relevanten und auffälligen Analyseaspekte erfolgen könnte. Beispielsweise der Aspekt der Schriftlichkeit könnte sich in seiner Bedeutung in den weiterführenden Schuljahren ändern.

Die Rationale Aufgabenanalyse erwies sich als angemessenes Instrument für die multiperspektivische Untersuchung von Aufgaben. Aufgabenspezifische Merkmale wurden transparent und führten zu Kennzeichnungen der einzelnen Aufgaben. In einem folgenden Schritt bietet es sich an, die aufgestellten Analyseperspektiven und untergeordneten Analyseaspekte zu überarbeiten und auf diese Weise den Katalog der Analyseaspekte auszuweiten. Ebenso lassen sich einzelne Aspekte differenzieren oder zusammenfassen. Diente die Aufgabenanalyse in der vorliegenden Arbeit zunächst der Kennzeichnung einer Aufgabe, kann das Instrument mit dem Ziel einer Klassifizierung von Aufgaben erweitert werden. Hierfür wären die für die Analyseaspekte jeweiligen Ausprägungsgrade zu definieren, um die Aufgabe einordnen zu können und aufgrund dieser Einordnungen zu einer abschließenden Bezeichnung der Aufgabe zu gelangen. Die in der vorliegenden Arbeit identifizierten Zusammenhänge einzelner Analyseaspekte sollten dann weiterführend untersucht werden.

Neben der Rationalen Aufgabenanalyse der gestellten Aufgabe wird die ergänzende Empirische Aufgabenanalyse realer Schülerbearbeitungen der Aufgabe unbedingt empfohlen (siehe Abschnitt 11.1). Die vorliegende Untersuchung belegt, dass erst diese kombinierte Form der Analyse aussagekräftige Ergebnisse zu den gestellten Aufgaben der vergleichenden Leistungserhebung und ihren Besonderheiten erbringt. Der Einfluss der Aufgabenmerkmale auf die anschließenden Bearbeitungen der Grundschüler wurde nachgewiesen. Diese Erkenntnisse können bei der gezielten Konstruktion und Variation von Aufgaben für eine entwicklungsdiagnostische Funktion verwendet werden. Nach COHORS-FRESENBORG (2004, S. 109) ist das Anspruchsniveau von Aufgaben bei Kenntnis der schwierigkeitsbe-

stimmenden Merkmale präziser einzuschätzen, sodass die zielführende Konstruktion und Konzeption von Aufgaben erleichtert würde. Fachdidaktisch sinnvolle und entwicklungsdiagnostisch nutzbare Aufgabensets könnten dann ausgearbeitet werden.

Die Kennzeichnungen der untersuchten Aufgaben enthalten Impulse für eine mögliche Modifikation der einzelnen Aufgaben, mit denen das Aufgabenverständnis der Grundschüler verbessert werden könnte. Weiterführend sind Studien zu modifizierten Aufgaben denkbar, die Auswirkungen von Veränderungen der Aufgaben auf die Aufgabenbearbeitungen untersuchen. Die in den Konsequenzen für die Konstruktion von Aufgaben mit entwicklungsdiagnostischen Funktion auf der Mikroebene des Kindes dargelegten Aufgabenmerkmale (siehe Abschnitt 12.1) könnten damit konkretisiert werden.

Die vorliegende Forschungsarbeit verneint den multifunktionalen Einsatz eines Aufgabensets einer vergleichenden Leistungserhebung. Für die diagnostische Nutzung einer schriftlichen Aufgabe werden Aufgabenmerkmale angeführt, die aus den Ergebnissen der Arbeit abgeleitet werden. Gleichzeitig wird jedoch auf den Vorteil einer direkten Aufgabenbearbeitung in einer interviewähnlichen Situation hingewiesen. Denk- und Bearbeitungswege können hier im Gespräch mit dem Kind rekonstruiert werden, diagnostische Informationen als Grundlage der Förderung des Lernprozesses werden zugänglich. Die Wirkungen und diagnostischen Möglichkeiten einer Aufgabe in unterschiedlichen Bearbeitungssituationen könnten weiterführend untersucht und verglichen werden.

Die in der eigenen Untersuchung ergänzend durchgeführte Clusteranalyse erbrachte weitere Einsichten über die detaillierten Einzelanalysen hinaus. Für die ausgewählten Aufgaben konnten keine kausalen Zusammenhänge der Bearbeitungen oder eindeutige Bearbeitungsmuster identifiziert werden (siehe Abschnitt 10.3.4). Auch für zukünftige fachdidaktische Forschungsvorhaben ist der ergänzende Einsatz einer explorativen multivarianten Datenanalyse, wie beispielsweise einer Clusteranalyse oder einer Faktorenanalyse, zu durchdenken. Aufgrund einer solchen erweiterten Datenanalyse können weiterführende Erkenntnisse zu den untersuchten Aufgaben sowie zu Zusammenhängen der Bearbeitungen gewonnen werden.

Doch nicht nur auf der Ebene der mathematikdidaktischen Forschung kann das entwickelte Modell der Aufgabenanalyse eingesetzt werden. Auch der direkte Einsatz des Analyseinstrumentes auf der Ebene der Schule ist möglich. Wie in Abschnitt 2.5 erläutert, ist die diagnostische Kompetenz eine der anerkannten Lehrerkompetenzen. Neben einer kompetenten Einschätzung von Aufgaben wird von den Lehrern das Wissen über Lösungen und Bearbeitungen von Aufgaben erwartet. So ist es einerseits denkbar, zukünftig eine reduzierte Variante des Analysemodells für den direkten Einsatz durch den Lehrer anzubieten. Die diagnostische Kompetenz würde dann aufgrund der eigenen Anwendung und Analyseergebnisse erweitert. Andererseits könnten die erzielten Resultate aus der vorliegenden Forschungsarbeit sowie aus künftigen Aufgabenanalysen auf Schulebene kommuniziert und beispielsweise in Fortbildungsveranstaltungen eingesetzt werden.

Über die Entwicklung und Anwendung des Modells der Aufgabenanalyse hinaus werden weitere **Forschungsanliegen im Spannungsfeld Leistungserhebung und Diagnose** ange-

führt. Die Ergebnisse der Studie weisen auf, dass die Funktionen Leistungserhebung und Diagnose kaum gleichzeitig zu erfüllen sind. Die verwendeten Aufgaben bedingen für die unterschiedlichen Funktionen ebenso unterschiedliche Präsentationen. In Abschnitt 11.2 werden wichtige Merkmale schriftlicher Aufgaben für eine entwicklungsdiagnostische Nutzung dargelegt.

Unter anderem belegt die eigene Untersuchung, dass ein möglichst freies Antwortformat die Denk- und Bearbeitungswege eines Kindes durchaus abbilden kann. Um diagnostische Hinweise zu erhalten, muss die einzelne Aufgabenbearbeitung angemessen beurteilt werden. Zukünftig gilt es, das diagnostische Potential freier Antwortformate in schriftlichen Prüfungen mithilfe umfassender Beurteilungs- und Bewertungsmodelle zu nutzen. Wie bereits DICKER (1977, S. 171ff) gezeigt hat, erhöht sich die Beurteilungsqualität schriftlicher Prüfungen unter Einbeziehung sorgfältig erstellter Kriterienkatalogs maßgeblich. Um derart umfassende Beurteilungsmodelle erstellen zu können und das diagnostische Potential schriftlicher Prüfungen zu erhöhen, sind weitere Forschungsvorhaben zu Aufgaben und deren Bearbeitungen notwendig. Die Erkenntnisse der eigenen Arbeit zeigen, dass Beurteilungs- und Bewertungsmodelle nicht ausschließlich theoretisch konstruiert werden sollten, sondern dass empirische Daten unbedingt einzubeziehen sind.

Aus dem vorliegenden Forschungsvorhaben wurden mithilfe des zweistufigen Modells der Aufgabenanalyse zahlreiche Ergebnisse zu Aufgaben und deren Bearbeitungen durch Grundschüler gewonnen. Ebenso wurden explorative Erkenntnisse zu Aufgaben im Spannungsfeld Leistungserhebung und Diagnose abgeleitet. Vielfältige Forschungsperspektiven und Impulse für die Weiterarbeit lassen sich formulieren, damit auch in Zukunft an Aufgaben im Mathematikunterricht gearbeitet werden kann.

„Aufgaben ereignen sich nicht, sie gelingen auch nicht zufällig.

Gute Aufgaben zu stellen ist eine anspruchsvolle Tätigkeit

- um nicht zu sagen: Aufgabe.“

(EIKENBUSCH 2008, S. 9)

Abbildungen

Abbildung 1: Haus der Pädagogischen Diagnostik zur Visualisierung des grundlegenden Ziels sowie der Funktionen, Strategien und Modelle.	11
Abbildung 2: Übersicht zu Antwortformaten einer Aufgabe in Anlehnung an GAGE und BERLINER (1996).	26
Abbildung 3: Aufgaben im Spannungsfeld Diagnose und Leistungserhebung.	35
Abbildung 4: Zusammenspiel Rationale und Empirische Aufgabenanalyse.	74
Abbildung 5: Analyseperspektiven und .Analyseaspekte der Rationalen Aufgabenanalyse.	82
Abbildung 6: Aufgabe A4 „Hundertertafel“ der hessischen Orientierungsarbeit 2005.	88
Abbildung 7: Säulendiagramm Ergebniskonzepte Teilaufgabe A4a.	128
Abbildung 8: Säulendiagramm Bearbeitung Teilaufgabe A4a Interviewstudie.	129
Abbildung 9: Säulendiagramm Bearbeitungskonzepte und -kategorien Teilaufgabe A4b.	130
Abbildung 10: Säulendiagramm Bearbeitungskonzepte und -kategorien Teilaufgabe A4c.	132
Abbildung 11: Säulendiagramm Kontingenztafel Teilaufgabe A4b und A4c.	133
Abbildung 12: Aufgabe A5 „Quadrate in Figur“ der Hessischen Orientierungsarbeit 2005.	135
Abbildung 13: Säulendiagramm zum Verhältnis mit Zeichnung/ohne Zeichnung Teilaufgabe A5a.	179
Abbildung 14: Säulendiagramm zum Verhältnis mit Zeichnung/ohne Zeichnung Teilaufgabe A5b.	179
Abbildung 15: Beispiele für Zeichnungen A5 Gitternetz.	180
Abbildung 16: Beispiele für Zeichnungen A5 Außenband.	180
Abbildung 17: Säulendiagramm Bearbeitungskonzepte und -kategorien Teilaufgabe A5a.	182
Abbildung 18: Säulendiagramm Bearbeitungskonzepte und -kategorien Teilaufgabe A5b.	183
Abbildung 19: Aufgabe A8 „Zucker“ der hessischen Orientierungsarbeit 2005.	187
Abbildung 20: Modellierungskreislauf nach BLUM.	193
Abbildung 21: Relative Anteile der gesetzten Kreuze Ja/Nein A8 zu den Bearbeitungskonzepten.	217
Abbildung 22: Säulendiagramm Bearbeitungskonzepte und -kategorien A8.	218
Abbildung 23: Säulendiagramm der zusammengefassten Bearbeitungskonzepte und -kategorien A8.	219
Abbildung 24: Übersicht des Merkmalsraums.	231
Abbildung 25: Ausschnitt des Scree-Plots zur durchgeführten Clusteranalyse.	234
Abbildung 26: Dendrogramm der durchgeführten Clusteranalyse.	234

Tabellen

Tabelle 1:	Offizielle Einordnung des Aufgabensets der hessischen Orientierungsarbeit 2005 in Inhalts- und Anforderungsbereiche.	43
Tabelle 2:	Kontingenztafel A4b/A4c mit absoluten Anzahlen und relativen Häufigkeiten.	122
Tabelle 3:	Kontingenztafel A4b/A4c zu Ergebniskategorien 1 und Bearbeitungskategorien 1 mit absoluten Anzahlen	122
Tabelle 4:	Kontingenztafel A4b/A4c mit markierten Zeilenhäufigkeiten sowie mit absoluten Anzahlen und relativen Häufigkeiten.	123
Tabelle 5:	Kontingenztafel A4b/A4c Interviewstudie mit absoluten Anzahlen und relativen Häufigkeiten.	124
Tabelle 6:	Kontingenztafel Aufgabe A5 mit markierten Zeilenhäufigkeiten und der Darstellung absoluter Häufigkeiten in Anzahlen und Prozent.....	174
Tabelle 7:	Kontingenztafel Aufgabe A5 mit markierten Spaltenhäufigkeiten und der Darstellung absoluter Häufigkeiten in Anzahlen und Prozent	174
Tabelle 8:	Kontingenztafel Aufgabe A5 zur Interviewstudie mit Darstellung absoluter Häufigkeiten.	175
Tabelle 9:	Anzahl genannter Argumente Interviewstudie A8 mit Angabe der absoluten Häufigkeiten	213
Tabelle 10:	Häufigkeiten der Kreuze Ja/Nein A8 mit Angabe der absoluten Anzahlen und	216
Tabelle 11:	Anzahlen möglicher Merkmalsausprägungen der Teilaufgaben nach theoretischer Reduktion.....	230
Tabelle 12:	Ausprägungsgrade der Clusterlösung C ₅	235
Tabelle 13:	Beurteilung der κ -Werte nach FLEISS und COHEN.	245

Literatur

- Ackeren, Isabell von (2005): "Vom Daten- zum Informationsreichtum. Erfahrungen mit standardisierten Vergleichstests in ausgewählten Nachbarländern". In: Pädagogik, H. 5, S. 24–28.
- Atteslander, Peter/Cromm, Jürgen (2008): Methoden der empirischen Sozialforschung. 12., durchgesehene Auflage. Berlin: E. Schmidt.
- Backhaus, Klaus (2008): Multivariate Analysemethoden. Eine anwendungsorientierte Einführung, vollständig überarbeitete Auflage Berlin: Springer.
- Ball, Helga et al. (Hg.) (2003): Aufgaben. Lernen fördern - Selbstständigkeit entwickeln. Friedrich Jahresheft, H. XXI. Seelze: Erhard Friedrich GmbH.
- Bartnitzky, Horst (Hg.) (2004): Pädagogische Leistungskultur Leistungen der Kinder wahrnehmen - würdigen - fördern. Frankfurt am Main: Grundschulverband - Arbeitskreis Grundschule.
- Beck, Christian/Maier, Hermann (1993): "Das Interview in der mathematikdidaktischen Forschung". In: Journal für Mathematikdidaktik 14, H. 1/2, S. 147–179.
- Beck, Christian/Maier, Hermann (1994): "Mathematikdidaktik als Textwissenschaft. Zum Status von Texten als Grundlage empirischer mathematikdidaktischer Forschung". In: Journal für Mathematikdidaktik 15, H. 1/2, S. 35–78.
- Becker, Gerold et al. (Hg.) (2006): Diagnostizieren und Fördern. Stärken entdecken-Können entwickeln. Friedrich Jahresheft 2006. Friedrich Jahresheft, H. XXIV. Seelze: Erhard Friedrich GmbH.
- Beiträge zum Mathematikunterricht 1984. Bad Salzdetfurth: Franzbecker. (1984)
- Bender, Peter (2004): "Die etwas andere Sicht auf den mathematischen Teil der internationalen Vergleichsuntersuchungen PISA sowie TIMSS und IGLU". In: DMV-Mitteilungen 12, H. 2, S. 60–67.
- Bildungsserver Hessen (Hg.): "Aufgaben der Grundschule". Online im Internet: <http://grundschule.bildung.hessen.de/rahmenplan/Einfuehrung/Einf1.html> [Stand: 25. Juli 2011].
- Blömeke, Sigrid et al. (2006): "Analyse der Qualität von Aufgaben aus didaktischer und fachlicher Sicht. Ein allgemeines Modell und seine exemplarische Umsetzung im Unterrichtsfach Mathematik". In: Unterrichtswissenschaft 34, H. 4, S. 330–357.
- Bortz, Jürgen/Döring, Nicola (2006): Forschungsmethoden und Evaluation. Für Human- und Sozialwissenschaftler; mit 87 Tabellen. 4., überarbeitete Auflage Heidelberg: Springer Medizin.

Bortz, Jürgen/Weber, René (2005): Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler. Mit 242 Tabellen. 6., vollständig überarbeitete und aktualisierte Aufl. Heidelberg: Springer Medizin.

Bos, Wilfried (Hg.) (2008): TIMSS 2007. Mathematische und naturwissenschaftliche Kompetenzen von Grundschulkindern in Deutschland im internationalen Vergleich. Münster: Waxmann.

Bräuning, Kerstin/Nührenbörger, Marcus (2010): "Diagnoseaufgaben und Förderideen im mathematischen Anfangsunterricht". In: Hanke, Petra et al. (Hg.): *Anspruchsvolles Fördern in der Grundschule*. Zentrum für Lehrerbildung. Münster: ZfL-Verlag, S. 297–304.

Bromme, Rainer/Seeger, Falk/Steinbring, Heinz (1990): "Aufgaben, Fehler und Aufgabensysteme". In: Bromme, Rainer/Seeger, Falk/Steinbring, Heinz (Hg.): *Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler*. Köln: Aulis-Verl. Deubner, S. 1–30.

Bromme, Rainer/Seeger, Falk/Steinbring, Heinz (Hg.) (1990): Aufgaben als Anforderungen an Lehrer und Schüler. Köln: Aulis-Verl. Deubner.

Brüggelmann, Hans (2005): Bildungsstandards und zentrale Kompetenztests. Ansprüche, Probleme, Perspektiven. Manuskript für Recht und Bildung.

Büchter, Andreas (2006): "Verstehensorientierte Aufgaben als Kern einer neuen Kultur der Leistungsüberprüfung. Erläuterung zu Modul 10, SINUS-Transfer".

Büchter, Andreas/Leuders, Timo (2005a): Mathematikaufgaben selbst entwickeln. Lernen fördern - Leistung überprüfen. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Büchter, Andreas/Leuders, Timo (2005b): "Zentrale Tests und Unterrichtsentwicklung... bei guten Aufgaben und gehaltvollen Rückmeldungen". In: Pädagogik, H. 5, S. 14–18.

Burkhard, Christoph/Peek, Rainer (2005): "Anforderungen an zentrale Lernstandserhebungen. Ein Werkstattbericht aus Nordrhein-Westfalen". In: Pädagogik, H. 5, S. 24–27.

Christiansen, Bent/Howson, Albert Geoffrey (Hg.) (1986): Perspectives on mathematics education. Papers submitted by members of the Bacomet Group. Dordrecht: Reidel.

Clauß, Günter/Ebner, Heinz (1979): Grundlagen der Statistik für Psychologen, Pädagogen und Soziologen. 3., verb. Aufl. Thun: Deutsch.

Clauß, Günter/Finze, Falk-Rüdiger/Partzsch, Lothar (1999): Statistik für Soziologen, Pädagogen, Psychologen und Mediziner. 3., überarbeitete und erweiterte Aufl. Thun, Frankfurt am Main: Deutsch.

Cohors-Fresenborg, Elmar/Sjuts, Johann/Sommer, Norbert (2004): "Komplexität von Denkvorgängen und Formalisierung von Wissen". In: Neubrand, Michael (Hg.): *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000*. 1. Aufl. Deutsches PISA-Konsortium. Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwissenschaften, S. 109–144.

Creutzburg, Constanze (2006): "Die externe Evaluation in Hessen - Konzept". In: Institut für Qualitätsentwicklung (Hg.): *Qualitätsentwicklung durch externe Evaluation. Dokumentation der Fachtagung vom 30. Juni - 01. Juli 2005*. Institut für Qualitätsentwicklung, Wiesbaden, S. 99–114.

Criblez, Lucien et al. (2009): Bildungsstandards. [mit CD-ROM]. 1. Aufl. Seelze-Velber: Klett und Balmer; Klett/Kallmeyer.

Davier, Matthias von/Hansen, Henning (Oktober 1998): Prüfen: Erfassen und Rückmelden von Kompetenzzuwachs. Erläuterung zu Modul 10. Institut für die Pädagogik der Naturwissenschaften an der Universität Kiel.

Deutscher Gesellschaft für Erziehungswissenschaft (2004): Stellungnahme zur Leistungsvergleichen in Schulen.

Deutscher Verein zur Förderung des mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterrichts e.V. (2006): "Empfehlungen zur Evaluation von Schülerkompetenzen im Fach Mathematik auf Grundlage der Bildungsstandards der KMK". In: MNU 59, H. 4, S. Beilage.

Dicker, Heinz (1977): "Untersuchung zur Beurteilung von Mathematikaufgaben". In: Ingenkamp, Karlheinz (Hg.): *Schüler- und Lehrerbeurteilung. Empirische Untersuchungen zur pädagogischen Diagnostik*. 1. Aufl. Weinheim: Beltz, S. 171–194.

Diehl, Joerg M./Kohr, Heinz U. (2004): Deskriptive Statistik. 13., überarbeitete Auflage Eschborn bei Frankfurt am Main: Klotz.

Diekmann, Andreas (2007): Empirische Sozialforschung. Grundlagen, Methoden, Anwendungen. 17. Aufl., Original-Ausgabe Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl.

Dubs, Rolf (2008): "Qualitätsvolle Aufgaben als Voraussetzung für sinnvolles Benchmarking". In: Thonhauser, Josef (Hg.): *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen. Eine zentrale Komponente organisierten Lehrens und Lernens aus der Sicht von Lernforschung, Allgemeiner Didaktik und Fachdidaktik*. Münster: Waxmann, S. 259–280.

Eder, Ferdinand (Hg.) (2006): Qualität durch Standards? Beiträge zum Schwerpunktthema der 67. Tagung der AEPF. Münster: Waxmann.

Eikenbusch, Gerhard (2008): "Aufgaben, die Sinn machen. Wege zu einer überlegten Aufgabenpraxis im Unterricht". In: *Pädagogik* 60, H. 3, S. 6–10.

EMSE (17. Dezember 2008): Nutzung und Nutzen von Schulrückmeldungen im Rahmen standardisierter Lernerhebungen/ Vergleichsarbeiten. Zweites Positionspapier des EMSE-Netzwerkes - verabschiedet auf der 9. EMSE-Fachtagung am 16.--17. Dezember in Nürnberg.

EMSE (2006): Positionspapier des Netzwerkes Empiriegestützte Schulentwicklung zu Zentrale standardisierte Lernstandserhebungen. Berlin.

Engel, Joachim/Klose, Karl-Dieter (Hg.) (2005): Strukturieren - Modellieren - Kommunizieren. Leitbilder mathematischer und informatischer Aktivitäten; Festschrift für Karl-

Dieter Klose, Siegfried Krauter, Herbert Löthe und Heinrich Wölpert. Hildesheim: Franzbecker.

Fend, Helmut (2008): *Schule gestalten. Systemsteuerung, Schulentwicklung und Unterrichtsqualität*. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden.

Fend, Helmut (2009): *Neue Theorie der Schule. Einführung in das Verstehen von Bildungssystemen*. 2., durchgesehene Auflage. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden.

Fischer, Claudia/Walther, Gerd (2009): "Lehrkräfte verändern mit SINUS ihren Mathematikunterricht an Grundschulen". In: *Grundschulunterricht* 56, H. 3, S. 4–8.

Flick, Uwe (1998): *Qualitative Forschung. Theorie, Methoden, Anwendung in Psychologie und Sozialwissenschaften*. Original-Ausgabe, 3. Aufl. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl..

Flick, Uwe (2005): "Triangulation in der qualitativen Forschung". In: Flick, Uwe/Kardorff, Ernst von/Steinke, Ines (Hg.): *Qualitative Forschung. Ein Handbuch*. 4. Aufl., Original-Ausgabe Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl., S. 309–318.

Flick, Uwe/Kardorff, Ernst von/Steinke, Ines (Hg.) (2005): *Qualitative Forschung. Ein Handbuch*. 4. Aufl., Original-Ausgabe Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl..

Flick, Uwe/Kardorff, Ernst von/Steinke, Ines (2005): "Was ist qualitative Forschung? Einleitung und Überblick". In: Flick, Uwe/Kardorff, Ernst von/Steinke, Ines (Hg.): *Qualitative Forschung. Ein Handbuch*. 4. Aufl., Orig.-Ausg. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl. S. 13–29.

Fritz, Annemarie (2003): "Bedingungsvariation und Fehleranalysen als Beobachtungszugänge zur Diagnostik arithmetischer Kompetenz". In: Fritz, Annemarie/Ricken, Gabi/Schmidt, Siegbert (Hg.): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch*. Weinheim: Beltz, S. 283–308.

Fritz, Annemarie/Ricken, Gabi/Schmidt, Siegbert (Hg.) (2003): *Rechenschwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch*. Weinheim: Beltz.

Fröhlich, Ines/Smolinski, Birgit/Stern, Thomas (2006): "Leistungen fair bewerten - Lernen individuell unterstützen". In: *Praxis Mathematik* 48, H. 10, S. 1–8.

Fuchs, Karl Josef/Blum, Werner (2008): "Selbständiges Lernen im Mathematikunterricht mit 'beziehungsreichen' Aufgaben". In: Thonhauser, Josef (Hg.): *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen. Eine zentrale Komponente organisierten Lehrens und Lernens aus der Sicht von Lernforschung, Allgemeiner Didaktik und Fachdidaktik*. Münster: Waxmann, S. 135–149.

Gage, Nathaniel Lees/Berliner, David Charles. (1996): *Pädagogische Psychologie*. 5., vollständig überarbeitete Auflage Weinheim: Beltz Psychologie Verlag.-Union.

Girmes, Renate (2003): "Die Welt als Aufgabe?! Wie Aufgaben Schüler erreichen". In: Friedrich Jahresheft, S. 6–11.

Graf, Ulrike/Moser Opitz, Elisabeth (2007): "Lernprozesse wahrnehmen, deuten und begleiten". In: Graf, Ulrike/Moser Opitz, Elisabeth (Hg.): *Diagnostik und Förderung im Elementarbereich und Grundschulunterricht. Lernprozesse wahrnehmen, deuten und begleiten*. Baltmannsweiler: Schneider-Verl. Hohengehren, S. 5-11.

Graf, Ulrike/Moser Opitz, Elisabeth (Hg.) (2007): *Diagnostik und Förderung im Elementarbereich und Grundschulunterricht. Lernprozesse wahrnehmen, deuten und begleiten*. Baltmannsweiler: Schneider-Verl. Hohengehren.

Granzer, Dietlinde (2006a): "Teaching to the test?". In: *Grundschule*, H. 5, S. 6–7.

Granzer, Dietlinde (2006b): "Von guten und "anderen" Aufgaben". In: *Grundschule*, H. 5, S. 18–20.

Granzer, Dietlinde (Hg.) (2009): *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. [Leistungsmessung in der Grundschule]*. Weinheim: Beltz.

Granzer, Dietlinde/Walther, Gerd (2008): "Standards, keine Standardaufgaben. Gute Aufgaben für länderübergreifende Bildungsstandards in Deutschland". In: *Grundschule*, H. 4, S. 6–10.

Graumann, Günter (Hg.) (2005): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2005. Vorträge auf der 39. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 28.2. bis 4.3.2005 in Bielefeld [... verbunden mit 2. Kongress der Gesellschaft für Fachdidaktik]*. Hildesheim: Franzbecker.

Griep, Mathilde: "Bemerkungen zur Kategorie "Aufgaben mit multiplen Lösungswegen" unter Aspekten kognitiver Mathematik".

Groß Ophoff, Jana et al. (2007): "Unterstützungsangebote im Zusammenhang mit den Vergleichsarbeiten in Mecklenburg-Vorpommern". In: Möller, Kornelia et al. (Hg.): *Qualität von Grundschulunterricht. Entwickeln, erfassen und bewerten*. 1. Aufl. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden, S. 83–86.

Grüßing, Meike/Peter-Koop, Andrea (Hg.) (2006): *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten - Fördern - Dokumentieren]*. 2. Aufl. Offenburg: Mildenerger.

Habermehl, Werner (1992): *Angewandte Sozialforschung*. München: Oldenbourg.

Hafner, Thomas/Vom Hofe, Rudolf (2008): "Aufgaben analysieren und Schülervorstellungen erkennen. Diagnostische Interviews zur Prozentrechnung". In: *mathematik lehren*, H. 150, S. 14–19.

Hagemeister, Volker (2000): "Irrwege und Wege zur "Testkultur". Kann die "empirische Wende" zur Qualitätssicherung beitragen?". In: *Die Deutsche Schule* 92, H. 1,

Hanke, Petra (2010): "Einleitung". In: Hanke, Petra et al. (Hg.): *Anspruchsvolles Fördern in der Grundschule*. Zentrum für Lehrerbildung. Münster: ZfL-Verlag, S. 1–2.

Hanke, Petra et al. (Hg.) (2010): Anspruchsvolles Fördern in der Grundschule. Münster: ZfL-Verlag.

Hasselhorn, Marcus/Marx, Harald/Schneider, Wolfgang (2005): "Diagnostik von Mathematikleistungen, -kompetenzen und -schwächen. Eine Einführung". In: Hasselhorn, Marcus/Marx, Harald/Schneider, Wolfgang (Hg.): *Diagnostik von Mathematikleistungen*. Göttingen: Hogrefe, S. 1–4.

Hasselhorn, Marcus/Marx, Harald/Schneider, Wolfgang (Hg.) (2005): *Diagnostik von Mathematikleistungen*. Göttingen: Hogrefe.

Häußler, Erich: Statistik für Hörer aller Fachbereiche.

Heller, Kurt A. (1984): "Einleitung und Übersichtsreferat". In: Heller, Kurt A./Bartnitzky, Horst (Hg.): *Leistungsdiagnostik in der Schule*. 4., völlig neubearbeitete Auflage Bern: Huber, S. 15–38.

Heller, Kurt A./Bartnitzky, Horst (Hg.) (1984): *Leistungsdiagnostik in der Schule*. 4., völlig neubearbeitete Auflage Bern: Huber.

Heller, Kurt A./Hany, Ernst A. (2001): "Standardisierte Schulleistungsmessungen". In: Weinert, Franz-Emanuel/Weinert, Franz Emanuel (Hg.): *Leistungsmessungen in Schulen*. Dr. nach Typoskript. Weinheim: Beltz, S. 87–101.

Helmke, Andreas (2004): "Von der Evaluation zur Innovation: Pädagogische Nutzbarmachung von Vergleichsarbeiten in der Grundschule". In: Seminar, H. 2, S. 90–112.

Herbig, Manfred (1978): "Aufgabenanalyse, Testanalyse und Normierung bei lehrzielorientierter Messung. Theoretische Aspekte". Entwicklung von Meßinstrumenten. In: Klauer, Karl Josef (Hg.): *Handbuch der pädagogischen Diagnostik*. Düsseldorf: Schwann, S. 301–316.

Hessisches Kultusministerium (1995): Rahmenplan Grundschule.

Hessisches Kultusministerium (2005a): Erste hessenweite Durchführung der Orientierungsarbeiten. Online im Internet: http://www.mathematik.uni-kassel.de/didaktik/HomePersonal/lilitakis/home/uebungen/uebungenWS0708/Orientierungsarbeiten_2004-05.pdf [Stand: 25. Juli 2011].

Hessisches Kultusministerium (2005b): Hessische Grundschüler schreiben erstmals verbindliche Orientierungsarbeiten. Wiesbaden: Hessisches Kultusministerium, 21. April 2005. Online im Internet :http://www.hessisches-ultusministerium.de/irj/zentral_Internet?rid=zentral_15/zentral_Internet/nav/bd7/bd75058e-6897-0701-33e2-dc44e9169fcc,5bc75942-50c9-0133-e2dc-44e9169fccd5,22222222-2222-2222-2222-222222222222,22222222-2222-2222-2222-222222222222,11111111-2222-3333-4444-100000005004.htm [Stand: 18. September 2010].

Hessisches Kultusministerium (2005c): Lehrpläne.

Hessisches Kultusministerium (2006): Verordnung über die Förderung von Schülerinnen und Schülern mit besonderen Schwierigkeiten beim Lesen, Rechtschreiben oder Rechnen. VOLRR. Online im Internet : http://www.hessisches-kultusministerium.de/irj/HKM_Internet?rid=HKM_15/HKM_Internet/nav/594/5943019a-8cc6-1811-f3ef-ef91921321b2,8c940e80-ce07-e611-f3ef-ef91921321b2,22222222-2222-2222-2222-222222222222, [Stand: 25. Juli 2011].

Hessisches Kultusministerium (2007): "Orientierungsarbeiten". Wiesbaden. Online im Internet: http://www.hessisches-kultusministerium.de/irj/HKM_Internet?rid=HKM_15/HKM_Internet/nav/ee4/ee470c89-8666-1a01-e76c-d97ccf4e69f2,8be15d15-307f-611f-3efe-f91921321b2c,22222222-2222-2222-2222-222222222222,22222222-2222-2222-2222-222222222222,11111111-2222-3333-4444-100000005003.htm&uid=ee470c89-8666-1a01-e76c-d97ccf4e69f2 [Stand: 25. Juli 2011].

Hessisches Kultusministerium (2008): Gesamtbericht der diesjährigen Orientierungsarbeiten an hessischen Grundschulen veröffentlicht. Wiesbaden: Hessisches Kultusministerium, 13. Juni 2008. Online im Internet: http://www.hessisches-kultusministerium.de/irj/zentral_Internet?rid=zentral_15/zentral_Internet/nav/dea/dea5072f-a961-6401-e76c-d1505eb31b65,9e23e05f-a318-a112-6684-144e9169fccd,22222222-2222-2222-2222-222222222222,22222222-2222-2222-2222-222222222222,11111111-2222-3333-4444-100000005004.htm [Stand: 25. Juli 2011].

Hessisches Kultusministerium (2009): Lernstandserhebungen. Hessisches Kultusministerium (Hg.). Wiesbaden. Online im Internet: http://www.iq.hessen.de/irj/servlet/prt/portal/prtroot/slimp.CMReader/HKM_15/IQ_Internet/med/a10/a1030223-a781-5c11-53a1-6e91921321b2,22222222-2222-2222-2222-222222222222 [Stand: 25. Juli 2011].

Heymann, Hans Werner (2005): "Tests und Unterrichtsqualität. Einführung in den Themenschwerpunkt". In: Pädagogik, H. 5, S. 6–9.

Hinrichs, Gerd (2008): Modellierung im Mathematikunterricht. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl..

Homeister, Jürgen: Analyse von Aufgaben als Element der Unterrichtsvorbereitung.

Horstkemper, Marianne (2006): "Fördern heißt diagnostizieren. Pädagogische Diagnostik als wichtige Voraussetzung für individuellen Lernerfolg". In: Becker, Gerold et al. (Hg.): *Diagnostizieren und Fördern. Stärken entdecken-Können entwickeln*. Friedrich Jahresheft, H. XXIV, S. 4.-7.

Ingenkamp, Karlheinz (1962): Die deutschen Schulleistungstests. Weinheim: Beltz.

Ingenkamp, Karlheinz (Hg.) (1977): Schüler- und Lehrerbeurteilung. Empirische Untersuchungen zur pädagogischen Diagnostik. 1. Aufl. Weinheim: Beltz.

Ingenkamp, Karlheinz/Lissmann, Urban (2008): Lehrbuch der pädagogischen Diagnostik. 6., neu ausgestattete Aufl. Weinheim: Beltz.

Interdisziplinäres Zentrum für Lern- und Lehrforschung der Universität Potsdam (2005): Fachdidaktik 2005c. Potsdam: Univ.-Verl..

Institut für Qualitätsentwicklung (2010): "Lernstandserhebungen in Hessen". Wiesbaden. Online im Internet: http://www.iq.hessen.de/irj/IQ_Internet?cid=9873e93f36b78ddb225f50089d93994 [Stand: 25. Juli 2011].

Institut für Qualitätsentwicklung (Hg.) (2006): Qualitätsentwicklung durch externe Evaluation. Dokumentation der Fachtagung vom 30. Juni - 01. Juli 2005. Institut für Qualitätsentwicklung. Wiesbaden.

Isaac, Kevin (2010): "Diagnostisches Potenzial von Vergleichsarbeiten". In: Kliemann, Sabine (Hg.): *Diagnostizieren und Fördern. Kompetenzen erkennen, unterstützen und erweitern; Beispiele und Anregungen; für die Jahrgänge 1 bis 4*. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 59–65.

Jäger, Reinhold S./Petermann, Franz/Jäger-Petermann (Hg.) (1999): Psychologische Diagnostik. Ein Lehrbuch. 4. Aufl. Weinheim: Beltz Psychologie-Verl.-Union.

Jordan, Alexander/Vom Hofe, Rudolf (2008): "Diagnose von Schülerleistungen. „Schlüssel" zur individuellen Förderung". In: *mathematik lehren*, H. 150, S. 4–12.

Jürgens, Eiko (2006): "Auf dem besten Weg?". In: *Grundschule*, H. 5, S. 11–13.

Kaiser, Gabriele (2000): "Internationale Vergleichsuntersuchungen im Mathematikunterricht - eine Auseinandersetzung mit ihren Möglichkeiten und Grenzen". In: *Journal für Mathematikdidaktik* 21, H. 3/4, S. 171–192.

Käpnick, Friedhelm (1998): "Richtig oder falsch? Probleme bei Leistungsbewertungen im Mathematikunterricht". In: *Grundschulunterricht*, H. 11, S. 25–27.

Kauertz, Alexander et al. (2008): "Kompetenzmessung durch Leistungstests". In: *MNU*, S. 75–79.

Kaune, Christa (2000): "Analyse einer TIMSS-Aufgabe mit den Methoden der kognitiven Mathematik". In: Neubrand, Michael (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 34. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Februar bis 3. März 2000 in Potsdam*. Tagung für Didaktik der Mathematik; Gesellschaft für Didaktik der Mathematik; Gesellschaft für Fachdidaktik. Hildesheim: Franzbecker, S. 330–333.

Kelle, Udo/Erzberger, Christian (2005): "Qualitative und quantitative Methoden: kein Gegensatz". In: Flick, Uwe/Kardorff, Ernst von/Steinke, Ines (Hg.): *Qualitative Forschung. Ein Handbuch*. 4. Aufl., Original-Ausgabe Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl. S. 299–309.

Kelle, Udo/Kluge, Susann (2010): Vom Einzelfall zum Typus. Fallvergleich und Fallkontrastierung in der qualitativen Sozialforschung. 2., überarbeitete Auflage Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwissenschaften.

Kesselring, Thomas (1999): Jean Piaget. Original-Ausgabe, 2., aktualisierte und um ein Nachwort erweiterte Auflage, München: Beck

Klauer, Karl Josef (Hg.) (1978): Handbuch der pädagogischen Diagnostik. Düsseldorf: Schwann.

Kleinknecht, Marc (2008): Offene und anspruchsvolle Aufgaben - eine Frage der Schulart? Forschungsstelle für Schulpädagogik. Tübingen.

Kliemann, Sabine (2010): "Schülerkompetenzen erkennen und ausbauen". In: Kliemann, Sabine (Hg.): *Diagnostizieren und Fördern. Kompetenzen erkennen, unterstützen und erweitern; Beispiele und Anregungen; für die Jahrgänge 1 bis 4*. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 8–12.

Kliemann, Sabine (Hg.) (2010): Diagnostizieren und Fördern. Kompetenzen erkennen, unterstützen und erweitern; Beispiele und Anregungen; für die Jahrgänge 1 bis 4. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Klieme, Eckhard (2004): "Was sind Kompetenzen und wie lassen sie sich messen?". In: Pädagogik, H. 6, S. 10–13.

Klieme, Eckhard (2006): "Perspektiven der Qualitätssicherung für Schulen am Beispiel Hessen". In: Institut für Qualitätsentwicklung (Hg.): *Qualitätsentwicklung durch externe Evaluation. Dokumentation der Fachtagung vom 30. Juni - 01. Juli 2005*. Institut für Qualitätsentwicklung. Wiesbaden, S. 191–199.

Kluge, Susann (1999): Empirisch begründete Typenbildung. Zur Konstruktion von Typen und Typologien in der qualitativen Sozialforschung. Univ., Diss.--Bremen, 1998. Opladen: Leske + Budrich.

Kluge, Susann (Januar 2000): Empirisch begründete Typenbildung in der qualitativen Sozialforschung. Forum: Qualitative Sozialforschung (= Volume 1, No 1, Art. 14).

Knoche, Norbert/Lind, Detlef (2000): "Eine Analyse der Aussagen und Interpretationen von TIMSS unter der Betonung methodologischer Aspekte". In: Journal für Mathematikdidaktik 21, H. 1, S. 3–27.

Köller, Olaf/Stanat, Petra/Reiss, Kristina (2010): Antwort auf den offenen Brief von Prof. Dr. Dr. h.c. Erich Wittmann zur Lernstandserhebung VERA 3 Mathematik 2010. Berlin. Online im Internet: http://www.mathematik.uni-dortmund.de/ieem/mathe2000/pdf/vera3/Reaktion%20auf%20Wittmann_Update_OkO_HAP_KR2.pdf [Stand: 25. Juli 2011].

Kretschmann, Rudolf (2006): "'Pädagnostik'-Optimierung pädagogischer Angebote durch differenzierte Lernstandsdiagnosen, unter besonderer Berücksichtigung mathematischer Kompetenzen". In: Grüßing, Meike/Peter-Koop, Andrea (Hg.): *Die Entwicklung mathematischen Denkens in Kindergarten und Grundschule. [Beobachten - Fördern - Dokumentieren]*. 2. Aufl. Offenburg: Mildenerger, S. 29–54.

Kultusministerkonferenz (2003): 304. Plenarsitzung der Kultusministerkonferenz am 04. Dezember 2003 in Bonn. Beschluss zur Entwicklung von Bildungsstandards. Bonn: Kultusministerkonferenz, 04. Dezember 2003. Online im Internet: <http://www.kmk.org/presse-und-aktuelles/pm2003/ergebnisse-der-304plenarsitzung.html> [Stand: 25. Juli 2011].

Kultusministerkonferenz (2005): Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. (Jahrgangsstufe 4) ; [Beschluss vom 15.10.2004]. Neuwied: Luchterhand.

Kultusministerkonferenz (2006): Gesamtstrategie der Kultusministerkonferenz zum Bildungsmonitoring. Online im Internet: http://www.kmk.org/fileadmin/Veroeffentlichungen_beschluesse/2006/2006_01_01-Gesamtstrategie-Endf.pdf [Stand: 25. Juli 2011].

Lamnek, Siegfried (2005): Qualitative Sozialforschung. Lehrbuch. 4., vollständig. Überarbeitete Auflage Weinheim: Beltz PVU.

Lederer, Andrea (2008): Prüfungen kritisch überprüft. Probleme der schulischen Prüfungs- und Beurteilungspraxis untersucht an schriftlichen Prüfungen und Prüfungsaufgaben in ausgewählten Fächern der Realschule. Univ., Diss.--Erlangen-Nürnberg. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Lenné, Helge (1969): Analyse der Mathematikdidaktik in Deutschland. 1. Aufl. Stuttgart: Ernst Klett Verlag.

Leuders, Timo (2006): "'Erläutere an einem Beispiel...". Mathematische Kompetenzen erkennen und fördern - mit offenen Aufgaben". In: Becker, Gerold et al. (Hg.): *Diagnostizieren und Fördern. Stärken entdecken-Können entwickeln*. Friedrich Jahresheft, H. XXIV, S. 78–83.

Leutner, Detlev, Fischer, Hans E. et al. (2008): "Instruktionspsychologische und fachdidaktische Aspekte der Qualität von Lernaufgaben und Testaufgaben im Physikunterricht". In: Thonhauser, Josef (Hg.): *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen. Eine zentrale Komponente organisierten Lehrens und Lernens aus der Sicht von Lernforschung, Allgemeiner Didaktik und Fachdidaktik*. Münster: Waxmann, S. 169–182.

Levin, Anne (2009): Qualitätsprobleme mathematischer Vergleichsarbeiten. Erfassung mathematischer Kompetenzen und psychometrische Modellierung einer landesweiten Prüfungsarbeit in Klassenstufe 10. Techn. Univ., Habil.-Schr.--Berlin. Münster: Waxmann.

Lienert, Gustav A./Raatz, Ulrich/Lienert-Raatz (1994): Testaufbau und Testanalyse. 5., völlig neubearbeitete und erweiterte Auflage Weinheim: Beltz Psychologie-Verl.-Union.

Lorenz, Jens Holger (1987): "Zur Methodologie der Fehleranalyse in der mathematikdidaktischen Forschung - oder: Wieweit sind Rezeptionen der Fehleranalyse fehlerhaft?". In: *Journal für Mathematikdidaktik*, S. 205–228.

Lorenz, Jens Holger (2005): "Zentrale Lernstandsmessung in der Primarstufe - Vergleichsarbeiten Klasse 4 (VERA) in sieben Bundesländern". In: *ZDM* 37, H. 4, S. 317–322.

Lukesch, Helmut (1998): Einführung in die pädagogisch-psychologische Diagnostik. 2., vollständig neu bearbeitete Aufl. Regensburg: Roderer.

- Maier, Uwe (2007): "Welche Konsequenzen ziehen Mathematiklehrkräfte aus verpflichtenden Diagnose- und Vergleichsarbeiten? Ergebnisse einer Interviewstudie". In: *mathematica didactica* 30, H. 2, S. 5–32.
- Mayer, Horst O. (2004): Interview und schriftliche Befragung. Entwicklung, Durchführung und Auswertung. 2., verb. Aufl. München: Oldenbourg.
- Meyerhöfer, Wolfram (2004): "Zum Kompetenzstufenmodell von PISA". In: *Journal für Mathematikdidaktik* 25, H. 3/4, S. 294–305.
- Meyerhöfer, Wolfram (2005a): "Was misst TIMSS? Einige Überlegungen zum Problem der Interpretierbarkeit der erhobenen Daten". Regensburg: Institut für Mathematik. Online im Internet: <http://opus.kobv.de/ubp/volltexte/2005/22/> [Stand: 25. Juli 2011].
- Meyerhöfer, Wolfram (2005b): "Was testen Tests? Objektiv-hermeneutische Analysen am Beispiel TIMSS und PISA". In: *Journal für Mathematikdidaktik* 26, H. 1, S. 88–89.
- Meyerhöfer, Wolfram (2005): "Untersuchungen zum PISA- Mathematik-Test". In: *Fachdidaktik 2005c*. Zentrum für Lehrerbildung. Potsdam: Univ.-Verl, S. 73–91.
- Möller, Kornelia et al. (Hg.) (2007): Qualität von Grundschulunterricht. Entwickeln, erfassen und bewerten. 1. Aufl. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden.
- Moser Opitz, Elisabeth (2010): Diagnose und Förderung: Aufgaben für die Mathematikdidaktik und die mathematikdidaktische Forschung. München.
- Müller, Andreas/Helmke, Andreas (2008): "Qualität von Aufgaben als Merkmale der Unterrichtsqualität verdeutlicht am Fach Physik". In: Thonhauser, Josef (Hg.): *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen. Eine zentrale Komponente organisierten Lehrens und Lernens aus der Sicht von Lernforschung, Allgemeiner Didaktik und Fachdidaktik*. Münster: Waxmann, S. 31–46.
- Neubrand, Johanna (2000): "Ein Klassifikationssystem für Aufgaben". In: Neubrand, Michael (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 34. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Februar bis 3. März 2000 in Potsdam*. Tagung für Didaktik der Mathematik; Gesellschaft für Didaktik der Mathematik; Gesellschaft für Fachdidaktik. Hildesheim: Franzbecker, S. 466–469.
- Neubrand, Johanna (2003): "Aufgabe = Aufgabe ? Mathematische Aufgaben im internationalen Vergleich". In: Friedrich Jahresheft, S. 30–31.
- Neubrand, Michael (2008): Von den "großen" Studien zur Umsetzung "im Kleinen": Welche (mathematikdidaktischen) Impulse können Lehrerinnen und Lehrer aus "PISA & Co" ziehen? Dokumentation zum Symposium "Lernen aus Evaluationsergebnissen - Verbesserungen planen und implementieren im Rahmen der didacta- die Bildungsmesse 20. und 21.02.2008, Stuttgart.

Neubrand, Michael (Hg.) (2000): Beiträge zum Mathematikunterricht: Vorträge auf der 34. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 28. Februar bis 3. März 2000 in Potsdam. Hildesheim: Franzbecker.

Neubrand, Michael (Hg.) (2004): Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000. 1. Aufl. Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwissenschaften

Neubrand, Michael et al. (2004): "Grundlagen der Ergänzung des internationalen PISA-Mathematiktests in der deutschen Zusatzerhebung". In: Neubrand, Michael (Hg.): *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland. Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA 2000*. 1. Aufl. Deutsches PISA-Konsortium. Wiesbaden: VS Verl. für Sozialwissenschaften [ZDM 2001 Vol.33 (2)], S. 227–258.

OECD (Organisation for Economic Co-operation and Development) (2010), Online im Internet: http://www.pisa.oecd.org/pages/0,2987,en_32252351_32235731_1_1_1_1_1,00.html [Stand: 25. Juli 2011].

Padberg, Friedhelm (2009): Didaktik der Arithmetik. Für Lehrerbildung und Lehrerfortbildung. 3., erweiterte, völlig überarbeitete. Auflage., Nachdruck Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Paradies, Liane/Linser, Hans Jürgen/Greving, Johannes (2008): Diagnostizieren, Fordern und Fördern. 2. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor.

Peek, Rainer (2007): "Wie aussagekräftig sind zentrale Tests? Über den Umgang mit Individualergebnissen aus Schulleistungsstudien, Lernstandserhebungen und zentralen Prüfungen". In: *forum schule*, H. 1, S. 8–11.

Peschek, Werner (Hg.) (2002): Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt. Hildesheim: Div-Verl. Franzbecker.

Posch, Peter (2009): "Zur schulpraktischen Nutzung von Daten: Konzepte, Strategien, Erfahrungen". In: *Die Deutsche Schule* 101, H. 2, S. 119–135.

Prediger, Susanne/Selter, Christoph (2008): "Diagnose als Grundlage für individuelle Förderung im Mathematikunterricht". In: *Schule NRW* 60, H. 3, S. 113–116.

Rahm, Sibylle/Mammes, Ingelore/Schratz, Michael (Hg.) (2006): Unterrichtsforschung. Innsbruck: Studienverl..

Ricken, Gabi (2003): "Psychometrische und entwicklungsorientierte Verfahren zur Diagnostik des Rechnens". In: Fritz, Annemarie/Ricken, Gabi/Schmidt, Siegbert (Hg.): *Rechen-schwäche. Lernwege, Schwierigkeiten und Hilfen bei Dyskalkulie ; ein Handbuch*. Weinheim: Beltz, S. 260–281.

Risse, Jana/Blömeke, Sigrid (2008): "Kriterien lernprozessanregender Aufgaben und deren Umsetzung bei der Konstruktion von Aufgaben zum Thema Differentialgleichung". In: *Der Mathematik-Unterricht* 54, H. 2, S. 3–45.

Rohde-Clare, Karin (2008): ""Und dazu habe ich euch ein Arbeitsblatt mitgebracht...". Ein Gespräch mit einer Fachleiterin und Aufgaben-Entwicklerin über gute Aufgaben". In: Pädagogik 60, H. 3, S. 26–29.

Rosch, Jens (2006): "Aufgabenanalyse als Methode der Bildungsforschung - Ein mikrologischer Zugang zum Problemfeld von Didaktik und Lernen". In: Rahm, Sibylle/Mammes, Ingelore/Schratz, Michael (Hg.): *Unterrichtsforschung*. Innsbruck: Studienverl., S. 167–186.

Rost, Jürgen (2004): *Lehrbuch Testtheorie - Testkonstruktion*. 2. vollständig überarbeitete und erweiterte Auflage Bern: Huber.

Sacher, Werner/Rademacher, Stephan (2009): *Leistungen entwickeln, überprüfen und beurteilen. Bewährte und neue Wege für die Primar- und Sekundarstufe*. 5., überarbeitete und erweiterte Auflage. Bad Heilbrunn: Klinkhardt.

Schankweiler, Maren (2006): *Die Umsetzung von Bildungsstandards für die Grundschule. Analyse von Schülerbearbeitungen zu Multiple Choice Aufgaben aus einer hessischen Orientierungsarbeit. Wissenschaftliche Hausarbeit im Rahmen der Ersten Staatsprüfung für das Lehramt an Grundschulen im Fach Mathematikdidaktik*. Didaktik der Mathematik. Gießen.

Schaub, Horst/Zenke, Karl G. (2007): *Wörterbuch Pädagogik*. Original-Ausgabe, grundlegend überarbeitete, aktualisierte und erweiterte Neuausgabe München: Dt. Taschenbuch-Verl.

Scherer, Petra (2004): "Was "messen" Mathematikaufgaben? - Kritische Anmerkungen zu Aufgaben in den Vergleichsstudien". In: Bartnitzky, Horst (Hg.): *Pädagogische Leistungskultur Leistungen der Kinder wahrnehmen - würdigen - fördern*. Grundschulverband. Frankfurt am Main: Grundschulverband - Arbeitskreis Grundschule, S. 270–281.

Scherer, Petra/Opitz, Elisabeth Moser (2010): *Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe*. Heidelberg: Spektrum Akademischer Verlag.

Schipper, Wilhelm (1998): "Prozessorientierte Leistungsbewertung im Mathematikunterricht". In: *Grundschulunterricht*, H. 11, S. 21–24.

Schipper, Wilhelm (2005): "Rücksicht auf die Bildungsstandards im Fach Mathematik - Jahrgangstufe 4". In: Engel, Joachim/Klose, Karl-Dieter (Hg.): *Strukturieren - Modellieren - Kommunizieren. Leitbilder mathematischer und informatischer Aktivitäten ; Festschrift für Karl-Dieter Klose, Siegfried Krauter, Herbert Löthe und Heinrich Wölpert*. Hildesheim: Franzbecker, S. 351–360.

Schmidt, Christiane (2005): "Analyse von Leitfadeninterviews". In: Flick, Uwe/Kardorff, Ernst von/Steinke, Ines (Hg.): *Qualitative Forschung. Ein Handbuch*. 4. Aufl., Original-Ausgabe Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl., S. 447–456.

Schrader, Friedrich-Wilhelm et al. (2006): "Komponenten der Diagnosegenauigkeit von Lehrkräften: Ergebnisse aus Vergleichsarbeiten in der Grundschule". In: Eder, Ferdinand (Hg.): *Qualität durch Standards? Beiträge zum Schwerpunktthema der 67. Tagung der*

AEPPF. Deutsche Gesellschaft für Erziehungswissenschaft. Münster: Waxmann, S. 265–278.

Selter, Christoph (2003): Der nordrhein-westfälische Mathematik-Lehrplan für die Grundschule und die Diskussion um Bildungsstandards. Tabarz: Arbeitskreis Grundschule der GDM.

Selter, Christoph/Spiegel, Hartmut (2007): Wie Kinder rechnen. 1. Aufl., Nachdruck Leipzig: Klett-Grundschulverl.

Selter, Christoph/Wittmann, Erich Ch (1993): Eigenproduktionen im Arithmetikunterricht der Primarstufe. Grundsätzliche Überlegungen und Realisierungen in einem Unterrichtsversuch zum multiplikativen Rechnen im zweiten Schuljahr. Univ., Diss.--Dortmund, 1994. Wiesbaden: Dt. Univ.-Verl.

Siegler, Robert et al. (2008): Entwicklungspsychologie im Kindes- und Jugendalter. [Nachdruck]. Heidelberg: Spektrum Akad. Verl.

Siemes, Anne (2010): "Diagnosetheorien". In: Kliemann, Sabine (Hg.): *Diagnostizieren und Fördern. Kompetenzen erkennen, unterstützen und erweitern; Beispiele und Anregungen; für die Jahrgänge 1 bis 4*. 1. Aufl. Berlin: Cornelsen Scriptor, S. 13–24.

Sill, Hans-Dieter (2006): "Funktionen und Ziele von Leistungserhebungen im Mathematikunterricht". In: Beiträge zum Mathematikunterricht 2006. Vorträge auf der 40. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 6.3. bis 10.3.2006 in Osnabrück. Tagung für Didaktik der Mathematik. Hildesheim: Franzbecker, S. 497–500.

Sill, Hans-Dieter/Sikora, Christine (2007): Leistungserhebungen im Mathematikunterricht. Theoretische und empirische Studien. Hildesheim: Franzbecker.

Sjuts, Johann (2002): "Analyse von Denkvorgängen und ihre Bedeutung für die Gestaltung von Lernprozessen". In: Peschek, Werner (Hg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht 2002. Vorträge auf der 36. Tagung für Didaktik der Mathematik vom 25. Februar bis 1. März 2002 in Klagenfurt*. Tagung für Didaktik der Mathematik; Gesellschaft für Didaktik der Mathematik. Hildesheim: Div-Verl. Franzbecker, S. 467–470.

Sjuts, Johann (2007): "Kompetenzdiagnostik im Lernprozess. auf theoriegeleitete Aufgabenstellung und -auswertung kommt es an". In: *mathematica didactica* 30, H. 2, S. 33–52.

Sjuts, Johann (2008): "Aufgaben diagnostisch gestalten. Denkprozesse aufdecken und Verstehen fördern". In: *mathematik lehren*, H. 150, S. 58–61.

Steffens, Ulrich (2010a): Lernstandserhebungen in den deutschen Ländern - Teil 1: Problembeschreibung, Manuskript.

Steffens, Ulrich (2010b): Lernstandserhebungen in den deutschen Ländern - Problembeschreibung und Perspektiven, Teil 2: Handlungsperspektiven, Manuskript.

Steinke, Ines (2005): "Gütekriterien qualitativer Forschung". In: Flick, Uwe/Kardorff, Ernst von/Steinke, Ines (Hg.): *Qualitative Forschung. Ein Handbuch*. 4. Aufl., Original-Ausgabe Reinbek bei Hamburg: Rowohlt-Taschenbuch-Verl., S. 319–331.

Stern, Elsbeth (1998): Die Entwicklung des mathematischen Verständnisses im Kindesalter. Lengerich: Pabst.

Strittmatter, Anton (2003): Fünf Handlungsfelder der Qualitätspolitik. Biel-Bienne.

Thonhauser, Josef (2008): "Warum (neues) Interesse am Thema ‚Aufgaben‘?". In: Thonhauser, Josef (Hg.): *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen. Eine zentrale Komponente organisierten Lehrens und Lernens aus der Sicht von Lernforschung, Allgemeiner Didaktik und Fachdidaktik*. Münster: Waxmann, S. 13–27.

Thonhauser, Josef (Hg.) (2008): Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen. Eine zentrale Komponente organisierten Lehrens und Lernens aus der Sicht von Lernforschung, Allgemeiner Didaktik und Fachdidaktik. Münster: Waxmann.

Van den Heuvel-Panhuizen, Mara (2007): "Teaching-to-the-test; or: Do assessment items have didactical potential? WTO mini-Experiments". In: Möller, Kornelia et al. (Hg.): *Qualität von Grundschulunterricht. Entwickeln, erfassen und bewerten*. 1. Aufl. Wiesbaden: VS Verlag für Sozialwissenschaften / GWV Fachverlage GmbH Wiesbaden, S. 87–90.

Walther, Gerd (1984): "Zur Rolle von Aufgaben im Mathematikunterricht". In: *Beiträge zum Mathematikunterricht*: Franzbecker, S. 28–42.

Walther, Gerd (2004): Gute und andere Aufgaben. Modul 1, Sinus Transfer, Online im Internet: <http://www.sinus-grundschule.de/fileadmin/Materialien/Modul1.pdf> [Stand: 25. Juli 2011].

Walther, Gerd/Christiansen, Bent (1986): "Task and activity". In: Christiansen, Bent/Howson, Albert Geoffrey (Hg.): *Perspectives on mathematics education. Papers submitted by members of the Bacomet Group*. Bacomet Group. Dordrecht: Reidel, S. 243–307.

Walther, Gerd/Granzer, Dietlinde (2009): "Kompetenzmodell Mathematik". In: Granzer, Dietlinde (Hg.): *Bildungsstandards Deutsch und Mathematik. [Leistungsmessung in der Grundschule]*. Weinheim: Beltz, S. 108–119.

Wartha, Sebastian (2009): "Zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs - Didaktische Analysen und empirische Befunde". In: *Journal für Mathematikdidaktik* 30, H. 1, S. 55–79.

Weinert, Franz-Emanuel (2001): "Vergleichende Leistungsmessung in Schulen-eine unstrittene Selbstverständlichkeit". In: Weinert, Franz-Emanuel/Weinert, Franz Emanuel (Hg.): *Leistungsmessungen in Schulen*. Dr. nach Typoskript. Weinheim: Beltz, S. 17–31.

Weinert, Franz-Emanuel/Weinert, Franz Emanuel (Hg.) (2001): Leistungsmessungen in Schulen. Dr. nach Typoskript. Weinheim: Beltz.

Wieczerkowski, Wilhelm/Quintanilla, S. Antonio Ruiz (1978): "Aufgabenanalyse, Testanalyse und Normierung auf Basis der klassischen Testtheorie. Theoretische Aspekte". Entwicklung von Meßinstrumenten. In: Klauer, Karl Josef (Hg.): *Handbuch der pädagogischen Diagnostik*. Düsseldorf: Schwann, S. 281–300.

Winter, Felix (2006): "Diagnosen im Dienst des Lernens. Diagnostizieren und Fördern gehören zum Unterrichten". In: Becker, Gerold et al. (Hg.): *Diagnostizieren und Fördern. Stärken entdecken-Können entwickeln*. Friedrich Jahresheft, H. XXIV, S. 22–25.

Winter, Felix (2008): "Mit Aufgaben das Lernen sondieren". In: Thonhauser, Josef (Hg.): *Aufgaben als Katalysatoren von Lernprozessen. Eine zentrale Komponente organisierten Lehrens und Lernens aus der Sicht von Lernforschung, Allgemeiner Didaktik und Fachdidaktik*. Münster: Waxmann, S. 115–132.

Wirtz, Markus/Caspar, Franz (2002): Beurteilerübereinstimmung und Beurteilerreliabilität. Methoden zur Bestimmung und Verbesserung der Zuverlässigkeit von Einschätzungen mittels Kategoriensystemen und Ratingskalen. Göttingen: Hogrefe Verl. für Psychologie.

Wittmann, Gerald (2008): Elementare Funktionen und ihre Anwendungen. Berlin: Spektrum Akad.-Verl.

Wodzinski, Christoph (März 2006): Lerndiagnose und Leistungsbeurteilung - Perspektiven aus Theorie und Forschung. Kiel: IPN Kiel.

Wollring, Bernd (2004a): Individualdiagnostik im Mathematikunterricht der Grundschule als Impulsgeber für Fördern, Unterrichten und Ausbilden. Teil 1: Vergleichsstudien: Unterstützung zum Unterricht?

Wollring, Bernd (2006): "Welche Zeit zeigt deine Uhr?". Handlungsleitende Diagnostik für den Mathematikunterricht der Grundschule". In: Becker, Gerold et al. (Hg.): *Diagnostizieren und Fördern. Stärken entdecken-Können entwickeln*. Friedrich Jahresheft, H. XXIV, S. 64–67.

Anhang

Anhang I:	Aufgabenanalysen	
	Übersicht Bearbeitungsvarianten A4a	280
	Übersicht Bearbeitungsvarianten A4b	281
	Übersicht Bearbeitungsvarianten A4c	282
	Übersicht Bearbeitungskategorien A4a	283
	Übersicht Bearbeitungskategorien A4b	284
	Übersicht Bearbeitungskategorien A4c	285
	Übersicht Interviewstudie A4	287
	Kontingenztafeln Bearbeitungskategorien A4b/A4c	289
	Kontingenztafel Interviewstudie Bearbeitungskategorien A4b/A4c	290
	Übersicht Bearbeitungsvarianten A5a	291
	Übersicht Bearbeitungsvarianten A5b	292
	Übersicht Bearbeitungskategorien A5a	294
	Übersicht Bearbeitungskategorien A5b	396
	Übersicht Interviewstudie A5	398
	Kontingenztafeln Bearbeitungskategorien A5a/A5b	300
	Kontingenztafel Interviewstudie Bearbeitungskategorien A5a/A5b	301
	Übersicht Zeichnungen A5a	302
	Übersicht Zeichnungen A5b	303
	Übersicht Bearbeitungsvarianten A8	304
	Übersicht Bearbeitungskategorien A8	305
	Übersicht Beurteilung Aussage A8	307
	Übersicht Interviewstudie A8	308
	Übersicht Anzahl Argumente Interviewstudie A8	310
Anhang II:	Interviewstudie	
	Interviewleitfaden A4	311
	Interviewleitfaden A5	312
	Interviewleitfaden A8	313
Anhang III:	Interraterreliabilität	
	Kodieranweisung A4a	314
	Kodieranweisung A4b	315
	Kodieranweisung A4c	316
	Kodieranweisung A5a	319
	Kodieranweisung A5b	321
	Kodieranweisung A8	324
Anhang IV:	Clusteranalyse	
	Ausschluss A4a – Kontingenztafeln	327
	Dendrogramm der Clusteranalyse	328
	Anmerkungen zur Clustergüte der Clusterlösung C5	330

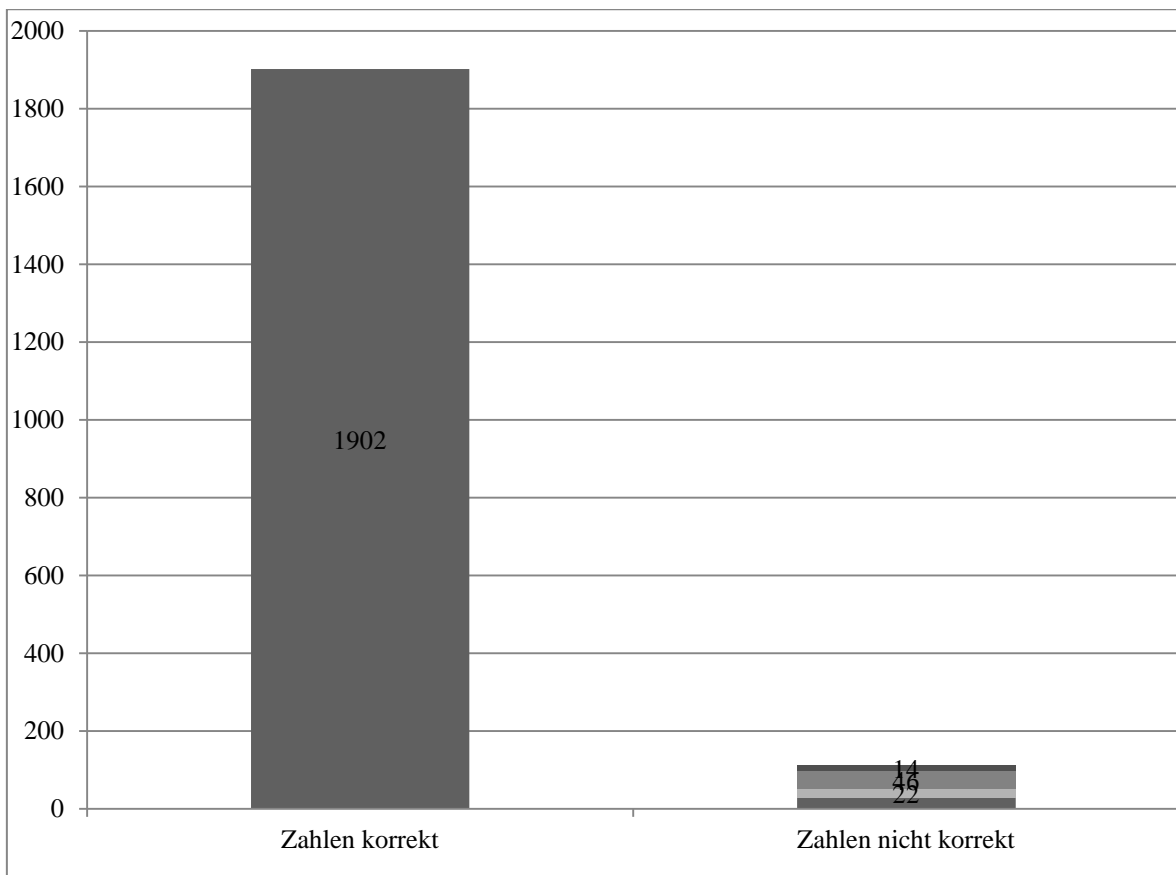
	Ergebniskonzept	Ergebnisvariante	Bearbeitungsnotation- exemplarische Darstellung
1	Zahlen korrekt	Ergebniszahlen vollständig richtig	32, 42, 63, 88
2	Zahlen nicht korrekt	Ergebniszahlen unvollständig	32, __, 63, 88
3		Ergebniszahlen falsch, Nachbarzahlen	32, 43, 63, 88
4		Ergebniszahlen falsch, Nachbarzehner	32, 52, 63, 88
5		Ergebniszahlen falsch, Weitere	32, 50, 63, 88

	Ergebniskonzept	Ergebnisvariante	Bearbeitungsnotation- exemplarische Darstellung
1	Ergebniszahl korrekt	Ergebniszahl 6. Zeilensumme = 555	555
2		Ergebniszahl 6. Zeilensumme = 555 und Notation Zeilenaddition	$51+52+53+54+55+56+57+58+59+60=555$
3	Ergebniszahl nicht korrekt	Ergebniszahl 7. Zeilensumme = 655	655
4		Ergebniszahl 7. Zeilensumme = 655 und Notation Zeilenaddition	$61+62+63+64+65+66+67+68+69+70=655$
5		Ergebniszahl 4. Zeilensumme = 355	355
6		Ergebniszahl 4. Zeilensumme = 355 und Notation Zeilenaddition	$31+32+33+34+35+36+37+38+39+40=355$
7		Ergebniszahl x. Zeilensumme = x55	x55
8		Ergebniszahl x. Zeilensumme = x55 und Notation Zeilenaddition	$x1+x2+x3+x4+x5+x6+x7+x8+x9+x0=x55$
9		Ergebniszahl 6. Zeilensumme \neq 555 = 55x oder 5xx	55x oder 5xx
10		Ergebniszahl 6. Zeilensumme \neq 555 = 55x oder 5xx und Notation Zeilenaddition	$51+52+53+54+55+56+57+58+59+60=55x$ oder 5xx
11		Ergebniszahl Summe der angegebenen Zeilensummen = 465	$55+155+255=465$

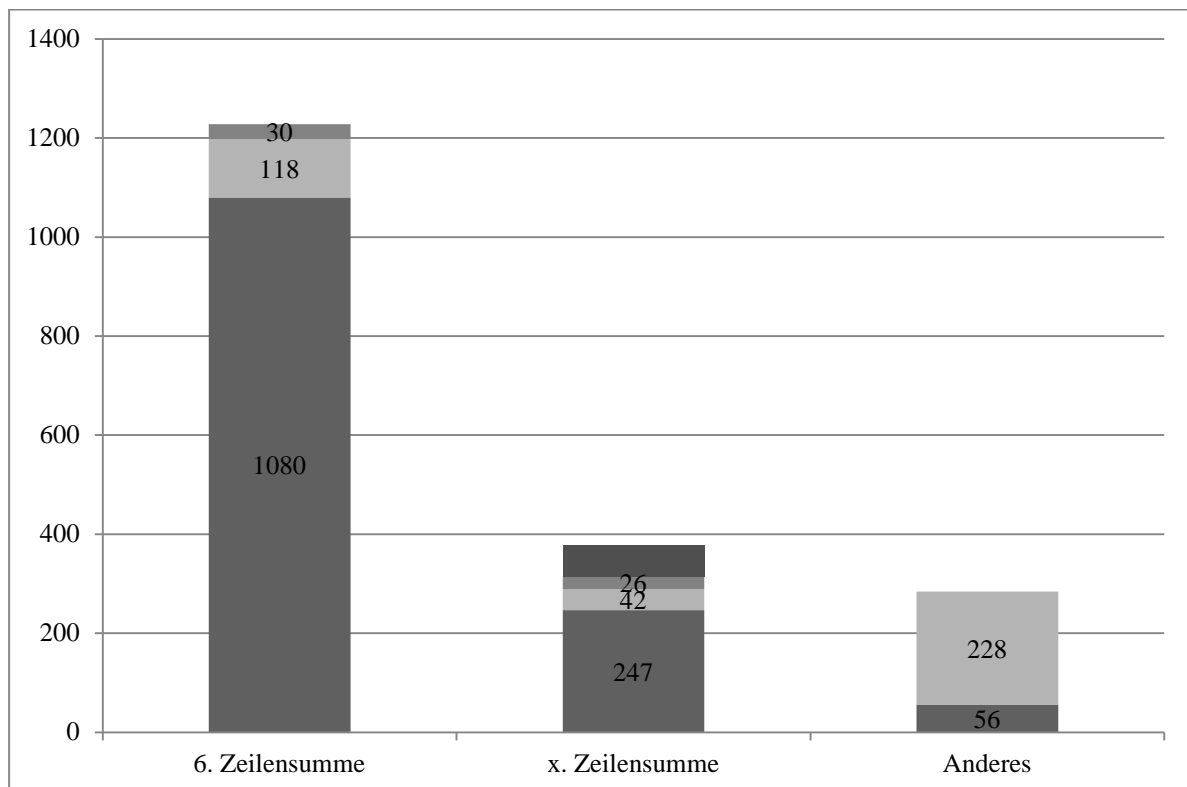
	Bearbeitungskonzept	Bearbeitungsvariante	Bearbeitungsnotation-exemplarische Darstellung
1	Strukturmathematische Begründung ¹¹⁷	Ein Aspekt wird genannt	Zu jeder Zahl kommen 10 dazu.
2		Zwei Aspekte werden genannt	Zu jeder Zahl kommen 10 dazu. 10*10 gleich 100
3		Drei Aspekte werden genannt	Zu jeder Zahl kommen 10 dazu. In jeder Zeile stehen 10 Zahlen. 10*10 gleich 100
4	Begründung mit Aufgabenbezug	Erhöhung Summanden/Zeilensumme	Es werden immer mehr.
5		Bezug zur Addition	Weil Julia addiert.
6	Weiteres	Ringschluss	Weil das so ist
7		Wiederholung	Weil sie 100 dazu tut.

¹¹⁷ Vollständige Begründung besteht aus drei Teilargumenten (Einverständnis mit KM): Zu jeder Zahl kommen 10 dazu. In jeder Reihe stehen 10 Zahlen. 10*10 ergibt 100.

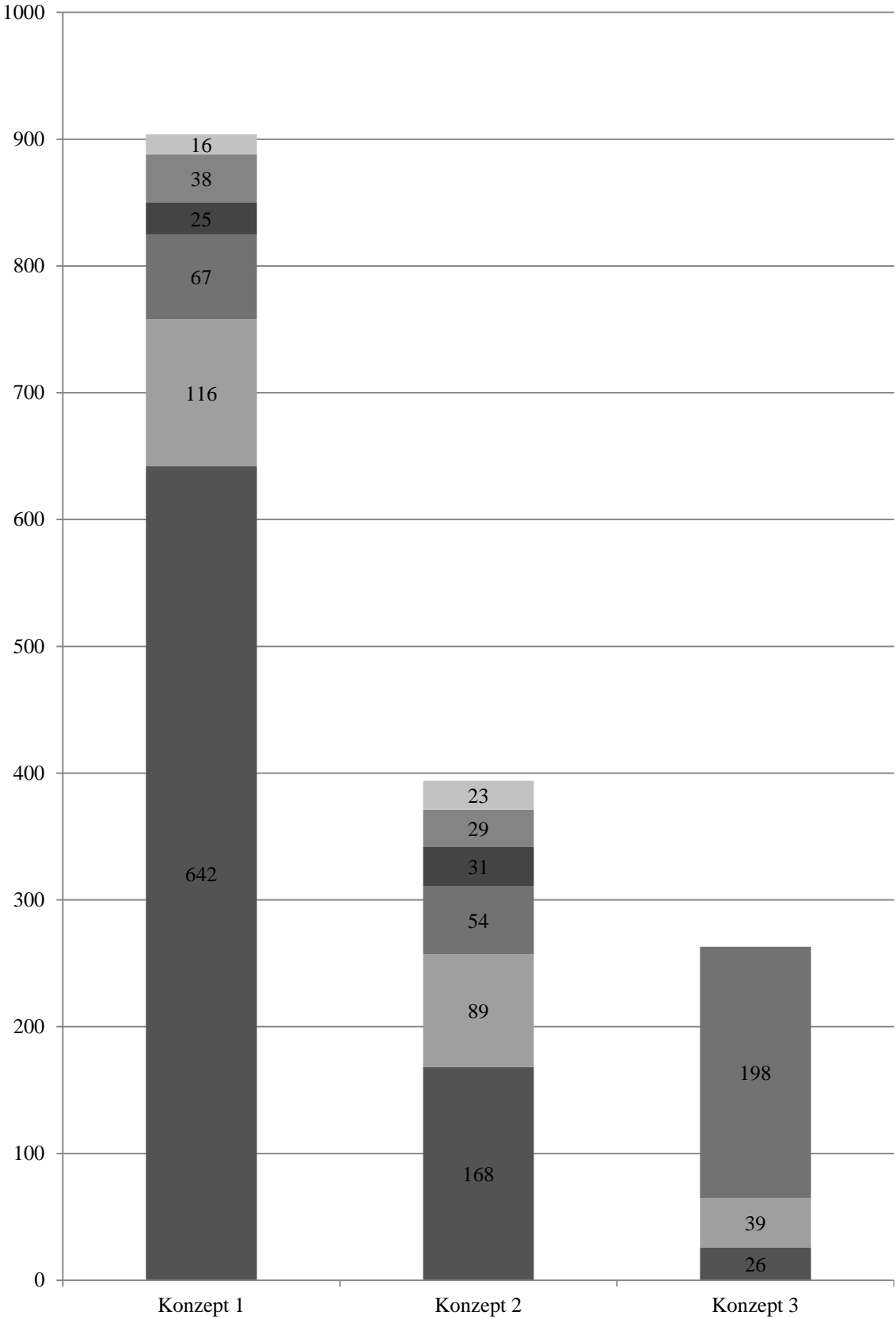
1. Ergebniskonzept Zahlen korrekt		2. Ergebniskonzept Zahlen nicht korrekt	
	H _{ges}		H _{ges}
1.1. Alle Zahlen korrekt	1902 (94,5%)	2.1. Zahlen fehlen	29 (1,4%)
		2.2. Zahlen falsch - Nachbarzahlen	22 (1,1%)
		2.3. Zahlen falsch - Nachbarzehner	46 (2,3%)
		2.4. Zahlen falsch - Weitere	14 (0,7%)
Summe	1902 (94,5%)		111 (5,5%)



1. Ergebniskonzept 6. Zeilensumme		2. Ergebniskonzept x. Zeilensumme		3. Ergebniskonzept Anderes	
	H _{ges}		H _{ges}		H _{ges}
1.1. Ergebniszahl 555	1080 (58,1%)	2.1. Ergebniszahl 655	247 (13,3%)	3.1. Summe Zeilensummen	56 (3,0%)
1.2. Ergebniszahl 55x/5xx	118 (6,3%)	2.2. Ergebniszahl 355	42 (2,3%)	3.2. Ergebniszahl 48	24 (1,3%)
		2.3. Ergebniszahl 455	26 (1,4%)	3.3. Weitere Zahlen	204 (11,0%)
		2.4. Ergebniszahl x55	62 (3,3%)		
	1198 (64,4%)		377 (20,3%)		284 (15,3%)



1. Konzept Strukturmathematische Begründung			
	<u>H_{ges}</u>	<u>% abs</u>	<u>% rel</u>
1.1. Ein Argumentationsaspekt - Erhöhung 10 abstrakt	642	41,1%	71,0%
1.2. Ein Argumentationsaspekt - Erhöhung 10 konkret	116	7,4%	12,8%
1.3. Zwei Argumentationsaspekte - 10 Zahlen/ Erhöhung 10	67	4,3%	7,4%
1.4. Zwei Argumentationsaspekte - Erhöhung 10/ 10*10	25	1,6%	2,8%
1.5. Drei Argumentationsaspekte	38	2,4%	4,2%
1.6. Andere	16	1,0%	1,8%
Summe	904	57,9%	100,0%
2. Konzept Argumentation Bezug Aufgabenfolge			
	<u>H_{ges}</u>	<u>% abs</u>	<u>% rel</u>
2.1. Erhöhung Summanden/ Summe	168	10,8%	42,6%
2.2. Wiederholung	89	5,7%	22,6%
2.3. Bezug Zeilensumme	54	3,5%	13,7%
2.4. Struktur Zeilensumme	31	2,0%	7,9%
2.5. Hundertertafel	29	1,9%	7,4%
2.6. Eigenschaft Addition	23	1,5%	5,8%
Summe	394	25,2%	100,0%
3. Konzept Weiteres			
	<u>H_{ges}</u>	<u>% abs</u>	<u>% rel</u>
3.1. Zeilenadditionen	26	1,7%	9,9%
3.2. Rechnungen	39	2,5%	14,8%
3.3. Anderes	198	12,7%	75,3%
Summe	263	16,9%	
Gesamtsumme	1561	100,0%	100,0%



			Aufgabe 4a		Aufgabe 4b		Aufgabe 4c	
K	Name	Kl	Notation	Bearbeitung	Notation	Ekst		Bkst
1	Steffi	3b	32,42,63,88	Nachfolger	$61+62+63+64+65+66+67+68+69+70=655$	2.1.	Das weiß ich nicht.	3.3.
2	Anna	3b	32,42,63,88	Hundertertafel	555	1.1.	Bei den zweistelligen Zahlen kann man immer einen Zehner dazu tun.	1.1.
3	Samuel	3b	32,42,63,88	Nachfolger	13	3.2.	Die Zehner hab ich in Hunderter gezählt.	3.3.
4	Kathrin	3b	32,42,63,88	Nachfolger	51 52 53 54 56 57 58 59 60=60	3.2.	110 120 130 140 150 160 170 180 190 100	3.3.
5	Jennifer	3b	32,42,63,88	Hundertertafel	555	1.1.	Immer eine Zeile davor.	3.3.
6	Florian	3b	32,42,63,88	Nachfolger	459	3.2.	Weil immer 100 mehr da zu gerechnet wird.	2.2.
7	Anna-Lena	3b	32,42,63,88	Hundertertafel	655 $61+62+63+64+65+66+67+68+69$	2.1.	Der 1 ist kleiner wie der 2.	2.1.
8	Gabriele	3b	32,42,63,88	Nachbarzahlen	455	2.3.	---	---
9	Marco	3b	32,42,63,88	Nachfolger	555	1.1.	In der ersten Zeile sind es nur Einer in der 2. Zeile werden es immer zehn Punkte mehr.	1.2.
10	Lukas	3a	32,42,63,88	Nachfolger	$51+52+53+54+55+56+57+58+59+60=555$	1.1.	Weil $10*10=100$ ist. Weil in jeder Zeile 100 Zahlen dazu kommen.	1.6.
11	Steffen	3a	32,42,63,88	Nachbarzahlen	551	1.2.	Weil Julia in den 3 Zeile fachidenen (verschiedenen) aufgaben sind.	3.3.
12	Luisa	3a	32,42,63,88	Nachfolger	489	3.2.	---	---
13	Fiona	3a	32,32,42,63,88	Nachfolger	555	1.1.	20 ist größer als Zahl 10 deshalb ist bei den größeren Zahlen ein größeres Ergebnis.	2.1.

14	Franzi	3a	32,42,63,88	Hundertertafel	655	2.1.	In der 1. Zeile fängt es mit der 1 an. Dann wird es immer einen Zehner größer. Und wenn man in der Zeile alles	1.2.
15	Claudia	3a	32,42,63,88	Nachfolger	855 51+52+53+54+55+56+57+58+59+60=	2.4.	Weil das immer langweilig ist, wenn es immer die gleiche Zahl ist.	3.3.
16	Artur	3a	32,42,63,88	Nachfolger	655	2.1.	---	---
17	Andreas	3a	32,42,63,88	Nachfolger	555	1.1.	50+50=100 100+5=105 105+5=110 und das ist glaub ich auch so bei 255.	3.2.
18	Sandra	3a	32,42,63,88	Nachbarzahlen	545	1.2.	---	---
19	Norman	3a	32,42,63,88	Nachfolger	655	2.1.	Weil sich die Zehnerzahlen immer um 1 Zehner mehr werden und dann werden die Hunderter auch mehr.	1.1.
20	Andrea	3a	32,42,63,88	Nachbarzahlen	255	2.4.	Es werden immer mehr Hunderter.	3.3.
21	Julia	3a	32,42,63,88	Hundertertafel	67 687	3.2.	Weil es immer Zehner mehr werden.	1.1.
22	Benedikt	3a	32,42,63,88		555 655			---
23	Lennox	3a	32,42,63,88	Nachbarzahlen	6, 16, 26	3.2.	100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 1000	3.2.
24	Nadine	3a	32,42,63,88	Nachbarzahlen	6+16+26+36+46+56+66+76+86+96=	3.2.	---	---
25	Lea	3b	32,42,63,88	Nachfolger	555	1.1.	Weil es immer 10 mehr werden.	1.1.
26	Tatjana	3b	32,42,63,88	Nachfolger	636	3.2.	Weil es immer eine größere Zahl wird.	2.1.
27	Lenka	3b	32,42,63,88	Nachbarzahlen	555	1.1.	---	---
28	Silvia	3b	32,42,63,88	Nachfolger	756	3.2.	---	---

	1. Strukturmathematische Argumentation	2. Argumentation Bezug Aufgabenfolge	3. Konzept Anderes	
1. Ergebniskonzept 6. Zeilensumme	41,2% (633)	14,4% (221)	10,0% (154)	
2. Ergebniskonzept x. Zeilensumme	11,6% (178)	6,2% (95)	3,0% (46)	
3. Ergebniskonzept Anderes	5,3% (82)	4,6% (70)	3,6% (56)	
				100%

	1. Strukturmathematische Argumentation	2. Argumentation Bezug Aufgabenfolge	3. Konzept Anderes	
1. Ergebniskonzept 6. Zeilensumme	<i>70,9%</i> (633)	<i>57,3%</i> (221)	<i>60,2%</i> (154)	
2. Ergebniskonzept x. Zeilensumme	19,9% (178)	24,6% (95)	18,0% (46)	
3. Ergebniskonzept Anderes	9,2% (82)	18,1% (70)	21,9% (56)	
	100% (893)	100% (386)	100% (893)	

	1. Strukturmathematische Argumentation	2. Argumentation Bezug Aufgabenfolge	3. Konzept Anderes	
1. Ergebniskonzept 6. Zeilensumme	<i>62,8%</i> (633)	21,9% (221)	15,3% (154)	100% (1008)
2. Ergebniskonzept x. Zeilensumme	<i>55,8%</i> (178)	29,8% (95)	14,4% (46)	100% (319)
3. Ergebniskonzept Anderes	<i>39,4%</i> (82)	33,7% (70)	26,9% (56)	100% (208)

	1. Strukturmathematische Argumentation	2. Argumentation Bezug Aufgabenfolge	3. Konzept Anderes	
1. Ergebniskonzept 6. Zeilensumme	20% (4)	5% (1)	15% (3)	8
2. Ergebniskonzept x. Zeilensumme	5% (1)	10% (2)	15% (3)	6
3. Ergebniskonzept Anderes	5% (1)	10% (2)	15% (3)	6
	6	5	9	

	Bearbeitungs-konzept	Bearbeitungs-variante	Notation-Formelhafte Darstellung	Notation-Prototypischer Zahlensatz
1	<u>Fläche</u>	Multiplikation Seiten	$a * b$	$8 * 5 = 40$
2			$b * a$	$5 * 8 = 40$
3		Multiplikation Seiten, Rechenfehler	$a * b$	$8 * 5 \neq 40$
4			$b * a$	$5 * 8 \neq 40$
5		Multiplikation Seiten, falscher Seitenlängen (Rechenfehler)	$a+/-n * b+/-n$	$x * y \neq 40$
6			$b+/-n * a+/-n$	$y * x \neq 40$
7		Fortgesetzte Addition	$a + a + a + a + a$	$8 + 8 + 8 + 8 + 8 = 40$
8			$b + b + b + b + b + b + b + b$	$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 40$
9		Fortgesetzte Addition, Rechenfehler	$a + a + a + a + a$	$8 + 8 + 8 + 8 + 8 \neq 40$
10			$b + b + b + b + b + b + b + b$	$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 \neq 40$
11		Fortgesetzte Addition, falsche Anzahl Summanden	$a + a + \dots + a$	$8 + 8 + 8 + \dots + 8 \neq 40$
12			$b + b + \dots + b$	$5 + 5 + 5 + \dots + 5 \neq 40$
13		Fortgesetzte Addition, falsche Seitenlänge (Rechenfehler)	$a+/-n + a+/-n + \dots + a+/-n$	$x + x + x + x + x \neq 40$
14			$b+/-n + b+/-n + \dots + b+/-n$	$y + y + y + y + y + y + y + y \neq 40$
15	<u>Umfang</u>	Seiten einzeln	$a + a + b + b$	$8 + 8 + 5 + 5 = 26 \neq 40$
16		Seiten einzeln, Rechenfehler	$a + a + b + b$	$8 + 8 + 5 + 5 \neq 26 \neq 40$
17		Seiten einzeln, falsche Seitenlängen (Rechenfehler)	$a +/-n + a +/-n + b +/-n + b +/-n$	$x + x + y + y \neq 26 \neq 40$
18		Seiten einzeln, Seiten vergessen/zu viel	$a + \dots + b + \dots$	$8 + \dots + 5 + \dots \neq 26 \neq 40$
19		Seiten zusammengefasst	$2*a + 2*b$	$2*8 + 2*5 = 26 \neq 40$
20		Seiten zusammengefasst, Rechenfehler	$2*a + 2*b$	$2*8 + 2*5 \neq 26 \neq 40$
21		Seiten zusammengefasst, falsche Seitenlängen (Rechenfehler)	$2*a+/-n + 2*b+/-n$	$2 * x + 2y \neq 26 \neq 40$
22		Seiten zusammengefasst, Seiten vergessen/ zu viel	$2+/-n * a + 2+/-n * b$	$s*a + t*b \neq 26 \neq 40$
23	<u>Zählen</u>	Auszählen ohne Zählfehler		40
24		Auszählen mit Zählfehler		$40 +/-n$

	Bearbeitungs-konzept	Bearbeitungs-variante	Notation-Formelhafte Darstellung	Notation-Prototypischer Zahlensatz
1	<u>Fläche-Zusammensetzen</u>	großes Quadrat + kleines Quadrat	$c*c + b*b$	$4*4 + 2*2 = 20$
2			$b*b + c*c$	$2*2 + 4*4 = 20$
3		großes Quadrat + kleines Quadrat, Rechenfehler	$c*c + b*b$	$x + y \neq 20$
4			$b*b + c*c$	$y + x \neq 20$
5		großes Quadrat + kleines Quadrat, falsche Seitenlängen, (Rechenfehler)	$c+/-n * c+/-n + b+/-n * b+/-n$	$x*x + y*y \neq 20$
6			$b+/-n * b+/-n + c+/-n * c+/-n$	$y*y + x*x \neq 20$
7		spaltenweise vertikal	$c + c + c + c + b + b$	$4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 = 20$
8		spaltenweise vertikal, Rechenfehler	$c + c + c + c + b + b$	$4 + 4 + 4 + 4 + 2 + 2 \neq 20$
9		spaltenweise vertikal, falsche Anzahl Summanden, (Rechenfehler)	$c + \dots + b + \dots$	$4 + \dots + 2 + \dots \neq 20$
10		spaltenweise vertikal, falsche Seitenlänge, (Rechenfehler)	$c+/-n + c+/-n + c+/-n + c+/-n + b+/-n + b+/-n$	$x + x + x + x + y + y \neq 20$
11		kleines Rechteck + großes Rechteck	$c*b + a*b$	$4*2 + 6*2 = 20$
12			$a*b + c*b$	$6*2 + 4*2 = 20$
13		kleines Rechteck + großes Rechteck, Rechenfehler	$c*b + a*b$	$4*2 + 6*2 \neq 20$
14			$a*b + c*b$	$6*2 + 4*2 \neq 20$
15		kleines Rechteck + großes Rechteck, falsche Seitenlängen (Rechenfehler)	$c+/-n * b+/-n + a+/-n * b+/-n$	$z*y + x*y \neq 20$
16			$a+/-n * b+/-n + c+/-n * b+/-n$	$x*y + z*y \neq 20$
17		zeilenweise horizontal	$a + a + c + c$	$6 + 6 + 4 + 4 = 20$
18		zeilenweise horizontal, Rechenfehler	$a + a + c + c$	$6 + 6 + 4 + 4 \neq 20$
19		zeilenweise horizontal, falsche Anzahl Summanden, (Rechenfehler)	$a + \dots + c + \dots$	$6 + \dots + 4 + \dots \neq 20$

20		zeilenweise horizontal, , falsche Seitenlänge, (Rechenfehler)	$a+/-n + a+/-n + c+/-n + c+/-n$	$x + x + z + z \neq 20$
21	<u>Fläche- Abspalten</u>	Rechteck – kleines Quadrat	$a*c - b*b$	$6*4 - 2*2 = 20$
22		Rechteck – kleines Quadrat, Rechenfehler	$a*c - b*b$	$6*4 - 2*2 \neq 20$
23		Rechteck – kleines Quadrat, falsche Seitenlänge	$a+/-n *c+/-n - b+/-n *b+/-n$	$x*z - y*y \neq 20$
24		Rechteck, Abspalten vergessen (Rechenfehler)	$a*c$	$6*4 \neq 20$
25	<u>Umfang</u>	Seiten einzeln	$a + b + b + b + c + c$	$6 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 = 20 (\neq A)$
26		Seiten einzeln , Rechenfehler	$a + b + b + b + c + c$	$6 + 2 + 2 + 2 + 4 + 4 \neq 20$
27		Seiten einzeln, falsche Seitenlängen (Rechenfehler)	$a +/-n +b+/-n +b+/-n +b+/-n +c+/-n +c+/-n$	$x + y + y + y + z + z \neq 20$
28		Seiten einzeln, Seiten vergessen/ zu viel	$a + b + \dots + c + \dots$	$6 + 2 + \dots + 4 + \dots \neq 20$
29		Seiten zusammengefasst	$a + 3b + 2c$	$6 + 3*2 + 2*4 = 20$
30		Seiten zusammengefasst, Rechenfehler	$a + 3b + 2c$	$6 + 3*2 + 2*4 \neq 20$
31		Seiten zusammengefasst, falsche Seitenlängen (Rechenfehler)	$a+/-n + 3b+/-n + 2c+/-n$	$x + 3y + 2z \neq 20$
32		Seiten zusammengefasst, Seiten vergessen/ zu viel (Rechenfehler)	$a + 3+/-n*b + 2+/-n*c$	$a + s*b + t*c \neq 20$
33	<u>Zählen</u>	Auszählen ohne Zählfehler		20
34		Auszählen mit Zählfehler		20 +/-n

1. Konzept Fläche - multiplikativ

	<u>H_{ges}</u>	<u>korrekt</u>	<u>% rel_{int}</u>	<u>% rel</u>	<u>Varianz_{Not}</u>
1.1. a*b	539	533	36,84	27,29	29
1.2. b*a	777	761	53,11	39,34	30
1.3. Nachbaraufgaben	113	11	7,72	5,72	33
1.4. andere Multiplikationen	34	32	2,32	1,72	20
Summe	1463	1336	100,00	74,08	

2. Konzept Fläche - additiv

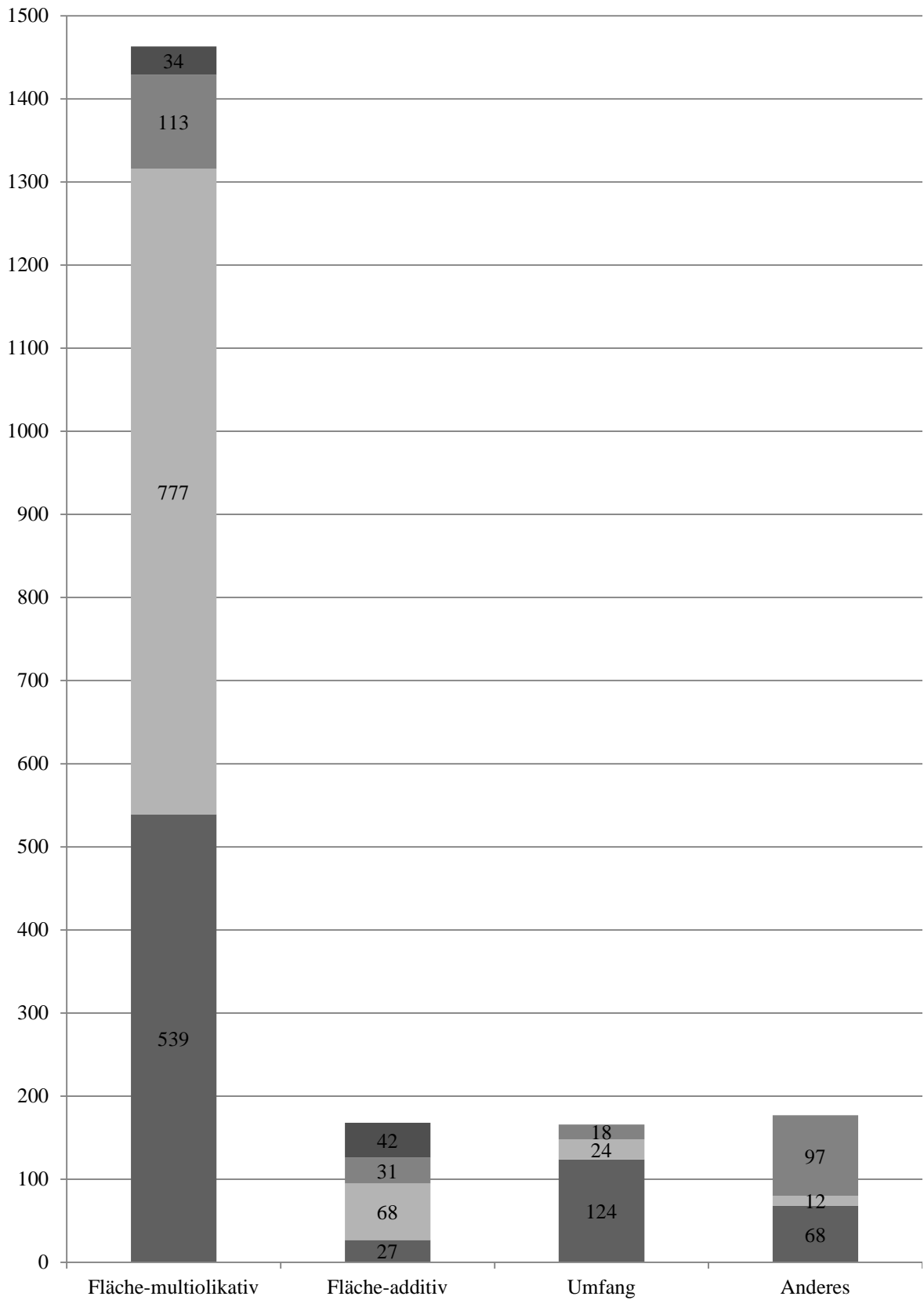
	<u>H_{ges}</u>	<u>H_{korrekt}</u>	<u>% rel_{int}</u>	<u>% rel</u>	<u>Varianz_{Not}</u>
2.1. fortgesetzte Addition	27	27	15,98	1,37	12
2.2. Hälften	68	67	40,24	3,44	8
2.3. Außenband+Innenfigur	31	11	18,34	1,57	23
2.4. andere Additionen	43	32	25,44	2,18	30
Summe	169	137	100,00	8,56	

3. Konzept Umfang

	<u>H_{ges}</u>	<u>H_{korrekt}</u>	<u>% rel_{int}</u>	<u>% rel</u>	<u>Varianz_{Not}</u>
3.1. Umfang additiv	124	2	74,70	6,28	66
3.2. Umfang multiplikativ	24	1	14,46	1,22	0
3.3. Umfang andere	18	0	10,84	0,91	18
Summe	166	3	100,00	8,41	

4. Konzept Anderes

	<u>H_{ges}</u>	<u>H_{korrekt}</u>	<u>% rel_{int}</u>	<u>% rel</u>	<u>Varianz_{Not}</u>
4.1. kR- nur Ergebnis	68	26	38,42	3,44	28
4.2. kR- nur Zeichnung	12	0	6,78	0,61	0
4.3. Weiteres	97	32	54,80	4,91	97
Summe	177	58	100,00	8,96	
Gesamtsumme	1975	1534		100,00	



1. Konzept Fläche-Zusammensetzen vertikal

	<u>H_{ges}</u>	<u>H_{korrekt}</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>	<u>Varianz_{Not}</u>
1.1 $4*4+2*2$	258	249	43,58	13,26	53
1.2 $4*4+4$	280	265	47,30	14,39	33
1.3 $4+4+4+4+2+2$	11	11	1,86	0,57	4
1.4 $16+4$	43	42	7,26	2,21	6
Summe	592	567	100,00	30,42	

2. Konzept Fläche-Zusammensetzen horizontal

	<u>H_{ges}</u>	<u>H_{korrekt}</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>	<u>Varianz_{Not}</u>
2.1 $2*6+2*4$	105	95	62,87	5,40	52
2.2 $12+8$	34	34	20,36	1,75	6
2.2 $6+6+4+4$	28	26	16,77	1,44	10
Summe	167	155	100,00	8,58	

3. Konzept Fläche-Zusammensetzen sonstiges

	<u>H_{ges}</u>	<u>H_{korrekt}</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>	<u>Varianz_{Not}</u>
3.1 $5*4$	300	300	74,26	15,42	19
3.2 $4*4$	66	11	16,34	3,39	11
3.3 anderes Zusammensetzen	38	16	9,41	1,95	36
Summe	404	327	100,00	20,76	

4. Konzept Fläche-Abspalten

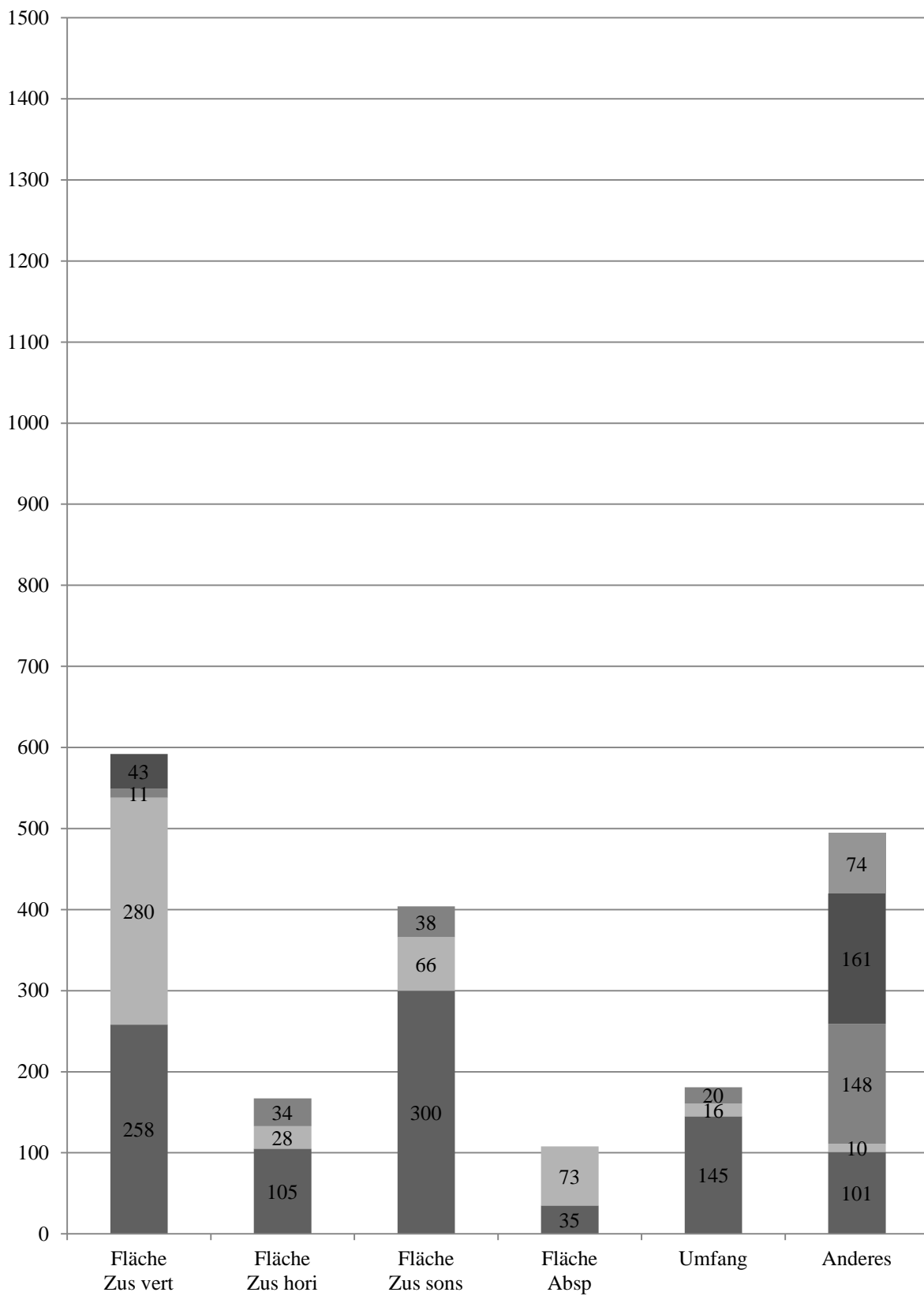
	<u>H_{ges}</u>	<u>H_{korrekt}</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>	<u>Varianz_{Not}</u>
4.1 $6*4-4$	35	30	32,41	1,80	18
4.2 $6*4$	73	22	67,59	3,75	18
Summe	108	52	100,00	5,55	

5. Konzept Umfang

	<u>H_{ges}</u>	<u>H_{korrekt}</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>	<u>Varianz_{Not}</u>
5.1 Umfang additive	145	11	80,11	7,45	101
5.2 Umfang multiplikativ	16	1	8,84	0,82	14
5.3 Umfang andere	20	1	11,05	1,03	16
Summe	181	13	100,00	9,30	

6. Konzept Anderes

	<u>H_{ges}</u>	<u>H_{korrekt}</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>	<u>Varianz_{Not}</u>
6.1 kR-Ergebnis	101	55	20,45	5,19	27
6.2 kR-Zeichnung	10	0	2,02	0,51	0
6.3 sons. Add	148	106	29,96	7,61	60
6.4 sons. Multi	161	72	32,59	8,27	87
6.5 Weiteres	74	21	14,98	3,80	74
Summe	494	254	100,00	25,39	
Gesamtsumme	1946	1368		100,00	



K	Name	KI	Aufgabe 5a				Aufgabe 5b			
			schr.	BK	mdl.	Ze	schr.	BK	mdl.	Ze
1	Steffi	3b	$20+2=22$ (22)	3.1	3.3 (zählt Str)	---	$10+6=16$ (16)	5.1	5.3 (zählt Str)	---
2	Anna	3b	$1+2+3+4\dots$ (61)	4.3	4.3	---	$4+1+\dots+1=22$ (22)	5.1	6.5	---
3	Samuel	3b	$20+4=24$ (24)	3.1	3.3 (zählt Str)	---	$13+6=19$ (19)	5.1	5.3 (zählt Str)	---
4	Kathrin	3b	$1+\dots+1+$ (22)	3.1	3.3 (zählt AB)	---	$1+\dots+1+$ (16)	5.1	5.3 (zählt AB)	---
5	Jennifer	3b	$5 \times 8=40$ (40)	1.2	1.2	x	Gezählt (20)	6.5	6.5 (zählt A)	x
6	Florian	3b	5×8 (40)	1.2	1.2	x	4×5 (20)	3.1	3.1	x
7	Anna-Lena	3b	30 (30)	4.1	4.3 (zählt IF)	X	4 (4)	6.1	6.5 (zählt IF)	x
8	Gabriele	3b	$5+5+5+5+5+5+5$ (35)	2.1	2.1	---	$5+5+5+2+2$ (19)	3.3	3.3	---
9	Marco	3b	$5 \times 8=40$ (40)	1.2	1.2	x	4×2 und $2 \times 6=20$ (20)	2.1	2.1	x
10	Lukas	3a	Ich habe gezählt (26)	3.3	3.3 (zählt U)	X	Ich habe gezählt (20)	6.5	5.3 (zählt U)	x
11	Steffen	3a	$15+7=22$ (22)	3.1	3.3 (zählt AB)	x	$10+6=16$ (16)	5.1	5.3 (zählt AB)	x
12	Luisa	3a	$21+20=41$ (41)	2.3	2.3 (zählt A+I)	x	$10+10=20$ (20)	6.3	6.5 (zählt A+I)	x
13	Fiona	3a	$3 \times 8=24$ (24)	3.2	3.3 (zählt AB)	---	$4 \times 4=16$ (16)	3.2	5.3 (zählt AB)	x
14	Franzi	3a	$40+1=41$ (41)	2.4	4.3 (zählt A)	---	$18+1$ (19)	6.3	5.3 (zählt St)	---
15	Claudia	3a	$39+1=40$ (40)	2.4	4.3 (zählt A)	x	$19+1=20$ (20)	6.3	6.5 (zählt A)	x
16	Artur	3a	(20)	4.1	3.3 (zählt AB)	---	(16)	6.1	5.3 (zählt AB)	---
17	Andreas	3a	$14+8=22$ (22)	3.1	3.1	x	$12+4=16$ (16)	5.1	5.1	x
18	Sandra	3a	$5+5+5+5+5+5+5+5$ (40)	2.1	1.1	---	$4+4+4+4+2+2$ (20)	1.3	1.3	---
19	Norman	3a	$25+12=37$ (37)	2.4	4.3 (zählt A)	X	$3+17=20$ (20)	6.3	6.5 (zählt A)	x
20	Andrea	3a	4×4 (3)	4.3	4.3	---	4×5 (5)	3.1	6.5	---
21	Julia	3a	$1+\dots+1=22$ (22)	3.1	3.3 (zählt AB)	X	$5+5+5=15$ (15)	5.1	5.3 (zählt AB)	x

22	Benedikt	3a	$1+10=11+9+20$ $+3=23$ (23)	3.1	3.3 (zählt AB)	---	$2+10=12+4=16$ (16)	5.1	5.3 (zählt AB)	---
23	Lennox	3a	$4*5=20$ (20)	4.3	3.3 (zählt AB)	---	$3*5=15$ (15)	6.4	5.3 (zählt AB)	---
24	Nadine	3a	(22)	4.1	3.3 (zählt AB)	---	$8+8=16$ (16)	5.1	5.3 (zählt AB)	---
25	Lea	3b	Ich habe gezählt (24)	3.3	4.3 (zählt IF)	x	$2+2=4$ (4)	6.3	6.5 (zählt IF)	x
26	Tatjana	3b	$22-4=18$ $18-4=14$ $14-4=10$ $10-4=6$ $6-4=2$ (50)	4.3	4.3	---	$20-5=15$ $15-5=10$ $10-5=5$ $5-5=0$ (30)	6.5	6.5	---
27	Lenka	3b	(21)	4.1	3.3 (zählt AB)	---	(23)	6.1	6.5 (zählt A+I)	---
28	Silvia	3b	$24+24=68$ (68)	4.3	4.3	---	$10+25=35$ (35)	6.3	6.5 (zählt A+I)	---

	1 Zusammensetzen - vertikal	2 Zusammensetzen - horizontal	3 Zusammensetzen - sonstiges	4 Abspalten	5 Umfang	6 Anderes	
1 Fläche- multiplikativ	29,1% (567)	7,4% (143)	19,2% (374)	5,5% (106)	1,9% (37)	11,4% (222)	1449
2 Fläche- additiv	1,1% (21)	0,9% (17)	0,7% (13)	0% (0)	0,5% (9)	5,5% (107)	167
3 Umfang	0,1% (2)	0,2% (3)	0,3% (6)	0% (0)	6,2% (121)	1,6% (31)	163
4 Anderes	0,1% (2)	0,2% (4)	0,5% (11)	0,1% (2)	0,7% (14)	6,9% (134)	167
	592	167	404	108	181	494	100% (1946)

	1 Zusammensetzen - vertikal	2 Zusammensetzen - horizontal	3 Zusammensetzen - sonstiges	4 Abspalten	5 Umfang	6 Anderes	
1 Fläche- multiplikativ	1	1	1	0	0	1	4
2 Fläche- additiv	0	0	1	0	0	1	2
3 Umfang	0	0	0	0	12	1	13
4 Anderes	0	0	0	0	0	9	9
	1	1	2	0	12	12	28

Kategorie	H _{gesamt}	H _{mitZ}	H _{ohneZ}	rel H _{mitZ}	H _{mitZkorrekt}	rel H _{mitZkorrekt}	H _{korrekt}	rel H _{mitZkorrektges}
1.1	539	345	194	64,01%	341	98,84%	533	63,98%
1.2	777	491	286	63,19%	482	98,17%	761	63,34%
1.3	113	63	50	55,75%	8	12,70%	11	72,73%
1.4	34	29	5	85,29%	28	96,55%	32	87,50%
2.1	27	17	10	62,96%	17	100,00%	27	62,96%
2.2	68	57	11	83,82%	56	98,25%	67	83,58%
2.3	31	20	11	64,52%	9	45,00%	11	81,82%
2.4	43	37	6	86,05%	27	72,97%	32	84,38%
3.1	24	22	2	91,67%	0	0,00%	1	0,00%
3.2	124	58	66	46,77%	2	3,45%	2	100,00%
3.3	18	9	9	50,00%	0	0,00%	0	0,00%
4.1	68	47	21	69,12%	21	44,68%	26	80,77%
4.2	12	12	0	100,00%	0	0,00%	0	0,00%
4.3	97	63	34	64,95%	12	19,05%	32	37,50%
gesamt	1975	1270	705	64,30%	1003	78,98%	1535	65,34%

Kategorie	H _{gesamt}	H _{mitZ}	H _{ohneZ}	rel H _{mitZ}	H _{mitZkorrekt}	rel H _{mitZ-korrekt}	H _{korrekt}	rel H _{mitZkorrektges}
1.1	258	142	116	55,04%	137	96,48%	249	55,02%
1.2	280	185	95	66,07%	171	92,43%	265	64,53%
1.3	11	7	4	63,64%	6	85,71%	11	54,55%
1.4	43	31	12	72,09%	30	96,77%	42	71,43%
2.1	105	78	27	74,29%	70	89,74%	95	73,68%
2.2	28	17	11	60,71%	17	100,00%	26	65,38%
2.3	34	29	5	85,29%	29	100,00%	34	85,29%
3.1	300	227	73	75,67%	227	100,00%	300	75,67%
3.2	66	40	26	60,61%	10	25,00%	11	90,91%
3.3	38	23	15	60,53%	12	52,17%	16	75,00%
4.1	35	16	19	45,71%	15	93,75%	30	50,00%
4.2	73	40	33	54,79%	18	45,00%	22	81,82%
5.1	16	9	7	56,25%	1	11,11%	1	100,00%
5.2	145	65	80	44,83%	7	10,77%	11	63,64%
5.3	20	8	12	40,00%	1	12,50%	1	100,00%
6.1	101	70	31	69,31%	46	65,71%	55	83,64%
6.2	10	10	0	100,00%	0	0,00%	0	0,00%
6.3	148	121	27	81,76%	94	77,69%	106	88,68%
6.4	161	91	70	56,52%	56	61,54%	72	77,78%
6.5	74	39	35	52,70%	12	30,77%	21	57,14%
gesamt	1946	1248	698	64,13%	959	76,84%	1368	70,10%

Nr	Bearbeitungskonzept	Bearbeitungsvariante	Bearbeitungsnotation-exemplarische Darstellung	Bearbeitungsnotation-Prototypischer Zahlensatz
1	<u>Relativer Bezug</u>	Vergleich bei gleichem Gewicht	auf 100g	$25g \cdot 4 = 100g$, dann $15g \text{ Zucker} \cdot 4 = 60g \text{ Zucker}$
2			auf 25g	$100g : 4 = 25g$, dann $60g \text{ Zucker} : 4 = 15g \text{ Zucker}$
3			auf 50g	$25g \cdot 2 = 50g$, dann $15g \text{ Zucker} \cdot 2 = 30g \text{ Zucker}$ $100g : 2 = 50g$, dann $60g \text{ Zucker} : 2 = 30g \text{ Zucker}$
4		Vergleich bei gleichem Zucker	auf 60g Zucker	$15g \text{ Zucker} \cdot 4 = 60g \text{ Zucker}$, dann $25g \cdot 4 = 100g$
5			auf 15g Zucker	$60g \text{ Zucker} : 4 = 15g \text{ Zucker}$ dann $100g : 4 = 25g$
6			auf 30g Zucker	$15g \text{ Zucker} \cdot 2 = 30g \text{ Zucker}$, dann $25g \cdot 2 = 50g$, $60g \text{ Zucker} : 2 = 30g \text{ Zucker}$, dann $100g : 2 = 50g$
7	<u>Absoluter Bezug</u>	Vergleich Zucker	Schokokuss weniger Zucker	$15g \text{ Zucker} < 60g \text{ Zucker}$
8			Schokolade mehr Zucker	$60g \text{ Zucker} > 15g \text{ Zucker}$
9		Vergleich Gewicht	Schokokuss weniger Gewicht	$25g < 100g$
10			Schokolade mehr Gewicht	$100g > 25g$
11		Vergleich Zucker und Gewicht	Schokokuss weniger Gewicht und Zucker	$25g < 100g$ und $15g \text{ Zucker} < 60g \text{ Zucker}$
12			Schokolade mehr Gewicht und Zucker	$100g > 25g$ und $60g \text{ Zucker} > 15g \text{ Zucker}$
13		Vergleich mit anderen Lebensmittel Tabelle	Ketchup mehr Zucker/ mehr Gewicht	$150g \text{ Zucker} > 60g \text{ Zucker} > 15g \text{ Zucker}$ $800g > 100g > 25g$
14			Cornflakes mehr Zucker/ mehr Gewicht	$18g \text{ Zucker} > 15g \text{ Zucker}$, $200g > 25g$, $200g > 100g$
15	<u>Lebenswelt/ Alltagsbezug</u>	Schokolade/ Schokokuss ist beides süß	Schmeckt beides süß	
16		Schokolade/ Schokokuss enthält beides Zucker	In beidem ist Zucker	
17		Schokolade/ Schokokuss enthält beides Schokolade.	In beidem ist Schokolade.	
18		Weitere Bestandteile Schokolade/ Schokokuss	Schokokuss hat noch Waffel.	
19		Bezug zu anderen Lebensmittel	Gummibärchen sind auch süß.	
20	<u>Keine Argumentation</u>	Bestätigung Aussage	Paul hat Recht.	
21		Verneinung Aussage	Paul hat nicht Recht.	
22		Ohne Aussage	Weil das so ist.	
23		Unwissenheit	Weiß ich nicht.	

1. Konzept Relativer Bezug Tabelle

	<u>Hges</u>	<u>KrJa</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>
1.1. Basis Gewicht	95	85	58,64%	4,88%
1.2. Basis Zucker	37	36	22,84%	1,90%
1.3. Lösungsidee	30	20	18,52%	1,54%
Summe	162	141	100,00%	8,32%

2. Konzept Absoluter Bezug Tabelle - Vergleich

	<u>Hges</u>	<u>KrJa</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>
2.1. 60g > 15g	61	0	8,69%	3,13%
2.2. Schokolade mehr Zucker	148	6	21,08%	7,61%
2.3. 15g < 60g	193	1	27,49%	9,92%
2.4. Schokokuss weniger Zucker	79	0	11,25%	4,06%
2.5. Differenz Zucker	70	2	9,97%	3,60%
2.6. Vergleich Gewicht	69	7	9,83%	3,55%
2.7. Vergleich Zucker und Gewicht	82	5	11,68%	4,21%
Summe	702	21	100,00%	36,07%

3. Konzept Absoluter Bezug Tabelle – Verwendung Angaben

	<u>Hges</u>	<u>KrJa</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>
3.1. Nennung Zucker/Gewicht	378	14	76,21%	19,42%
3.2. Rechnungen	78	21	15,73%	4,01%
3.3. Lebensmittel Tabelle	40	14	8,06%	2,06%
Summe	496	49	100,00%	25,49%

4. Konzept Lebenswelt

	<u>Hges</u>	<u>KrJa</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>
4.1. Beschaffenheit Schokolade/Schokokuss	75	9	35,05%	3,85%
4.2. Ähnlichkeit Schokolade/Schokokuss	64	60	29,91%	3,29%
4.3. Argument süß	27	13	12,62%	1,39%
4.4. Argument Zucker	48	26	22,43%	2,47%
Summe	214	108	100,00%	11,00%

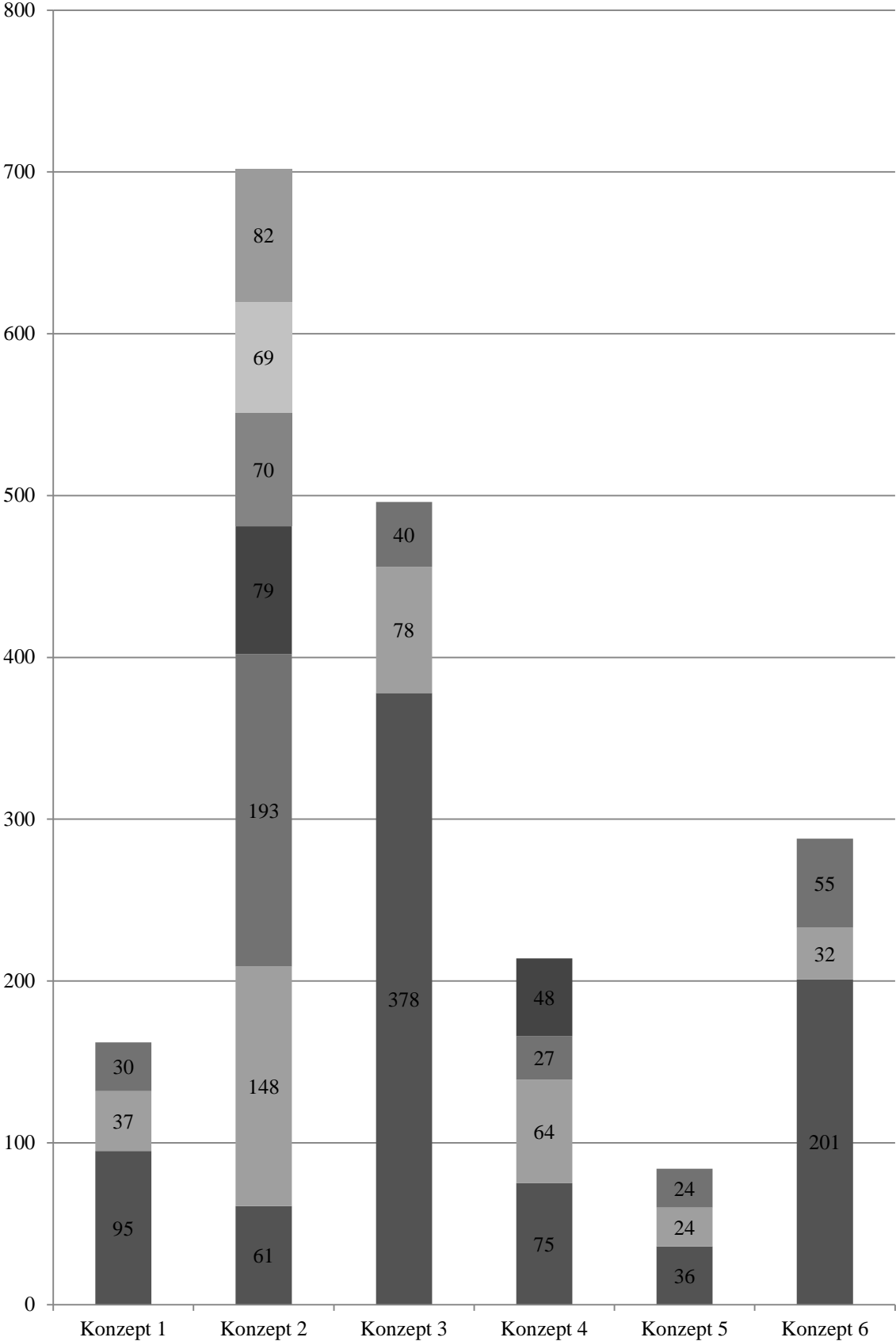
5. Konzept keine Argumentation

	<u>Hges</u>	<u>KrJa</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>
5.1. Bestätigung	36	34	42,86%	1,85%
5.2. Verneinung	24	0	28,57%	1,23%
5.3. ohne Aussage	24	10	28,57%	1,23%
Summe	84	44	100,00%	4,32%

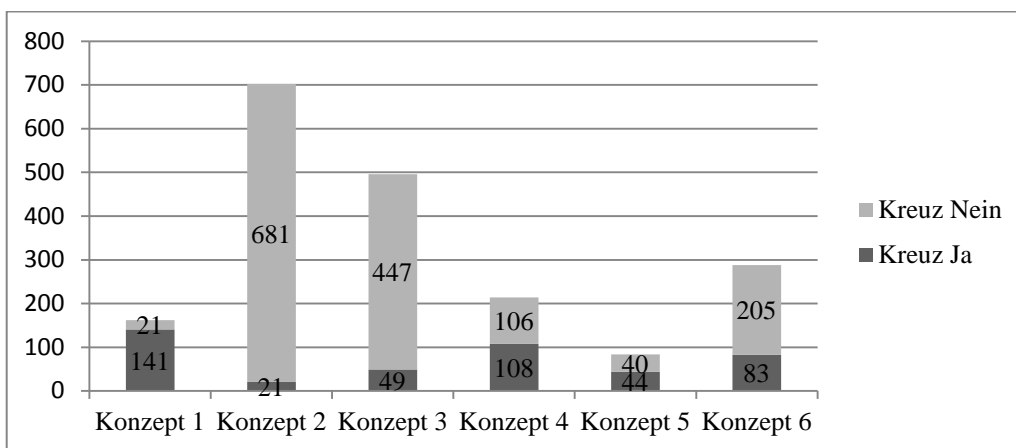
6. Konzept Anderes

	<u>Hges</u>	<u>KrJa</u>	<u>% rel</u>	<u>% abs</u>
6.1. nur	201	61	69,79%	10,33%
6.2. Schokokuss mehr Zucker	32	3	11,11%	1,64%
6.3. Weiteres	55	19	19,10%	2,83%
Summe	288	83	100,00%	14,80%

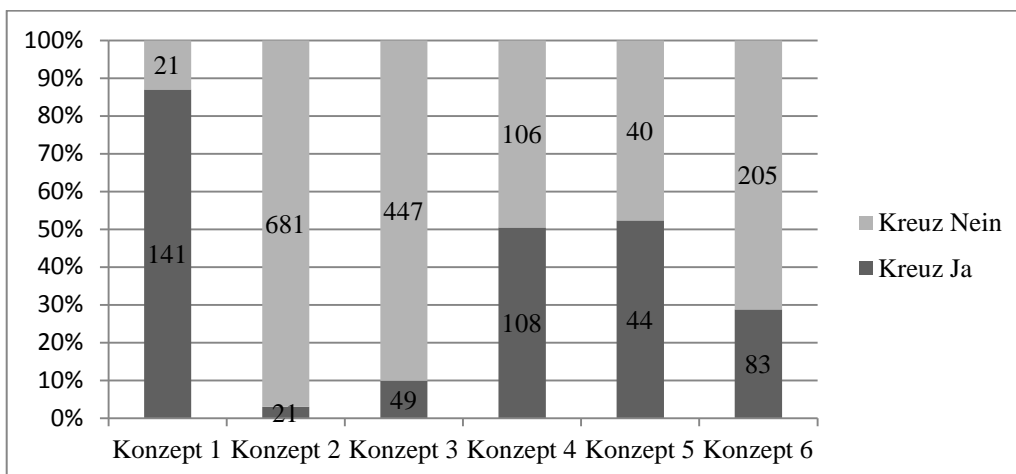
Gesamtsumme	1946	305	100,00%	
-------------	------	-----	---------	--



Bearbeitungskonzept	<u>H_{ges}</u>	<u>Kr_{Ja}</u>	<u>% rel_{Ja}</u>	<u>Kr_{Nein}</u>	<u>% rel_{Nein}</u>
1. Konzept Relativer Bezug Tabelle	162	141	87,04%	21	12,96%
2. Konzept Absoluter Bezug Tabelle – Vergleich	702	21	2,99%	681	97,01%
3. Konzept Absoluter Bezug Tabelle – Verwendung Angaben	496	49	9,88%	447	90,12%
4. Konzept Lebenswelt	214	108	50,47%	106	49,53%
5. Konzept keine Argumentation	84	44	52,38%	40	47,62%
6. Konzept Anderes	288	83	28,82%	205	71,18%
Summe	1946	446	22,92%	1500	71,18%



Häufigkeiten Ja/Nein mit abs. Werten



Häufigkeiten Ja/Nein mit rel. Werten

K	Name	Kl	Kreuz Ja	Kreuz Nein	schriftlich	BK	mündlich	BK
1	Steffi	3b		X	Sk 25g, 15g Sch 100g, 60g	3.1.	Sch mehr Z	3.1. 2.2.
2	Anna	3b		X	Sch weniger Z wie Sch	6.1.	Beschaffenheit Sk/Sch,	4.1.
3	Samuel	3b		X	Sk weniger Z wie Sch	2.4.	Beschaffenheit Sk	2.4. 4.1.
4	Kathrin	3b		X	Sch größer/süßer als Sk	2.6./4.3.	Sch größer/mehr	2.6.
5	Jennifer	3b		X	Muss sonst immer dasselbe sein	6.3.	Z/G gleich viel	3.1. 6.3.
6	Florian	3b		X	Sch 60% Z, Sk nur 15% Z	2.3.	Sch 60 Z, Sk nur 15 Z	2.3.
7	Anna-Lena	3b	X		Weil die Sahne innen ist	4.1.	Beschaffenheit Sk	4.1.
8	Gabriele	3b		X	Sk 15g, Sch 60g	3.1.	Weil das nicht gleich ist	3.1. 6.3.
9	Marco	3b		X	Sk 25g/15g Z Sch 100g/ 60g Z	2.7.	Vergleich Z/G	2.3./2.6./4.1./2 .5. 2.7.
10	Lukas	3a		X	Sk weniger Z als Sch	2.4.	Sk weniger Z als Sch	2.3./ 6.3. 2.4.
11	Steffen	3a		X	Sch ist nur Sch drin	4.1.	Nur 15g Z in Sk, Sch mehr Zucker drin	2.3. 2.2.
12	Luisa	3a		X	Sch mehr Zuckeranteil	2.2.	Sch 60g Z, Sk 15g Z, großer Unterschied	2.1.
13	Fiona	3a		X	Nicht gleich viel drinnen	5.2.	Sch 60g Z, Sk (nur)15g Z	3.1. 2.3.
14	Franzi	3a	x	(x)	Weiß Anzahl Sk nicht, $15g + 15g + 15g + 15g = 60g$	1.3.	Weiß Anzahl Sk nicht, $15g + 15g + 15g + 15g = 60g$	3.1./6.3. 1.3.
15	Claudia	3a		X	Sch ist viel weiter weg von Sk	6.3.	15 weiter weg von 60	3.1. 2.3.
16	Artur	3a		X	Sk 25g, Sch 100g	3.1.	$25g < 100g$	2.6.
17	Andreas	3a		X	60g mehr als 15g	2.1.	$60g > 15g$	2.1.
18	Sandra	3a		X	Sk 15g, Sch 60g 60 mehr als 15	2.1.	$60g > 15g$	2.1.
19	Norman	3a		x	Sk weniger Z als Sk	2.4.	Sk hat zu wenig	3.1. 2.4.

20	Andrea	3a	X		In beidem ist gleich viel	5.1.	Zu Hause gemacht	6.3.
21	Julia	3a	X		Sch ist Sch	4.2.	Sch ist Sch	4.2.
22	Benedikt	3a		X	Sch weniger Z als Sk	6.2.	Beschaffenheit	6.2./4.3. 4.1.
23	Lennox	3a		X	P hat nicht Recht	5.2.	15 < 60	3.1. 2.3.
24	Nadine	3a		X	Sk 15, Sch 60	3.1.	15 < 60	3.1. 2.3.
25	Lea	3b		X	In jedem Lebensmittel stecken andere Zutaten.	4.1.	Beschaffenheit	4.1.
26	Tatjana	3b		X	Sch mehr Z	2.2.	Sch mehr Z	2.3. 2.2.
27	Lenka	3b		X	Beschaffenheit	4.1.	Beschaffenheit	4.1.
28	Silvia	3b		X	Sch mehr Z	2.2.	Vergleich G	3.1. 2.6.

Identische Bearbeitungskategorien		Unterschiedliche Bearbeitungskategorien	
Ein Argument		Ein Argument	
Andreas, Sandra	2.1. – 2.1.	Luisa	2.2. – 2.1.
Florian	2.3. – 2.3.	Silvia	2.2. – 3.1.
Kathrin	2.6./4.3. – 2.6.	Artur	3.1. – 2.6.
Anna-Lena, Lenka, Lea	4.1. – 4.1.	Andrea	5.1. – 6.3.
Julia	4.2. – 4.2.	Anna	6.1.- 4.1.
Zwei Argumente – erstgenanntes		Zwei Argumente	
Samuel	2.4. – (2.4.) 4.1.	Steffen	4.1. – 2.3./2.2.
Steffi	3.1. – (3.1.) 2.2.	Fiona, Lennox	5.2. – 3.1./2.3.
Nadine	3.1. – (3.1.) 2.3.	Claudia	6.3. – 3.1./2.3.
Gabriele	3.1. – (3 1.) 6.3.		
Drei Argumente – erstgenanntes		Mehr Argumente	
Benedikt	6.2. – (6.2.) 4.3./3.1.	Marco	2.7. – 2.3./2.6./4.1./2.5.
Zwei Argumente – letztgenanntes			
Jennifer	6.3. – 3.1. (6.3.)		
Tatjana	2.2. – 2.3. (2.2.)		
Norman	2.4. – 3.1. (2.4.)		
Drei Argumente – letztgenanntes			
Franzi	1.3. – 3.1./6.3. (1.3.)		
Lukas	2.4. – 2.3./6.3. (2.4.)		

Aufgabe 4

Pflichtfragen	Kontrollfragen	Hilfsfragen
I: „Hier siehst du die erste Aufgabe.“	I: „Die Hundertertafel kennst sie sicher aus dem Matheunterricht.“ K: „Ja.“ (evtl. folgt hier weitere Erläuterung des Kindes).	
I: „Lies die Aufgabe a)! Erkläre mir, was Du machen sollst!“ K erklärt.		Kind kann die Aufgabe nicht erklären. I: „Was verstehst Du nicht?“
I gibt ggf. Impuls: „Tue es!“ K füllt die Lücken aus: 32, 42, 63, 88.		Falls das Kind nicht beginnt: I: „An welchen Stellen fehlen Zahlen?“ oder „Welche Zahl steht li/ re/ oberhalb/ unterhalb des freien Kästchens?“
	I: „Warum hast Du diese Zahlen eingetragen?“ oder I: „Wie hast Du diese Zahlen gefunden?“ Erkläre!“ K erklärt z. B. „nach rechts/links bedeutet +/- 1, nach oben/unten +/- 10“ oder „ich gucke hier, dann ...“	
		Falls die eingetragenen Zahlen falsch sind: I: „Wie bist du auf die Zahl gekommen?“ oder „Warum hast Du hier xy eingetragen?“ „Bist Du sicher?“
b) I: „Lies bitte die Aufgabe vor!“ K liest.		
I: „Beantworte bitte die Frage!“ K rechnet und (sagt und) notiert das Ergebnis.	I: „Hast Du verstanden was Julia macht? Erkläre!“ K erklärt.	I: „Hast Du verstanden was Julia macht? Überlege!“
		I: „Betrachte auch die Hundertertafel!“ Zeit lassen „Rechne selbst wie Julia!“
	I: „Zahl XYZ. Wie kommst du darauf?“ Kind erklärt	
c) I: „Lies bitte die Aufgabenstellung vor!“ K liest. I: „Erkläre!“ K erklärt.		I: „Hat Julia Recht? Was denkst Du?“
I: „Bitte schreibe es auf (was Du gerade erklärt hast).“ K schreibt auf.	I: „Warum werden es immer 100 mehr? Erkläre!“	I: „Hast du eine Idee, wie Julia es herausgefunden hat?“ Zeit lassen „Erkläre das!“ I: „Kannst Du es nicht erklären? – Schreibe es auf!“
I: „Bist Du fertig? Möchtest Du zu der Aufgabe noch etwas sagen?“ Evtl. äußert sich das Kind		
I: „Danke, Du hast die Aufgabe prima bearbeitet.“		

Aufgabe 5

Pflichtfragen	Kontrollfragen	Hilfsfragen
I: „So, nun kommt die nächste Aufgabe. Lies doch bitte wieder vor.“ <i>Kind liest (evtl. laut)</i>		
I: „Erkläre den Auftrag mit deinen eigenen Worten.“	I: „Was sollst du zu den kleinen Quadraten überlegen“ <i>Kind erläutert.</i> I: „Wie ist das mit den Figuren und den kleinen Quadraten zu verstehen?“ <i>Kind erläutert.</i>	I: „Weißt du, was mit Figur/kleinem Quadrat gemeint ist?“
a) I: „Kannst Du ausrechnen, wie viele kleine Quadrate in die erste Figur passen?“		
<i>Kind beschreibt Zahlensatz und Ergebnis.</i>	I: „Wie bist Du dar auf gekommen?“ <i>Kind erklärt seine Rechnung.</i>	<i>Kind findet keinen Zahlensatz</i> I: „Wie könntest du herausbekommen, wie viele kleine Quadrate dort hineinpassen?“
b) I: „Kannst du es auch bei der zweiten Figur ausrechnen?“ <i>Kind antwortet</i>	I: „Ist das genauso wie bei a)“ <i>Kind erklärt seine Entscheidung.</i>	I: „Die Figur bei b) sieht etwas anders aus. Beschreibe!“ <i>Kind beschreibt</i>
I: „Bitte schreibe deine Rechnung auf!“ <i>K schreibt auf.</i>	I: „Erkläre mir bitte, wie du auf deine Rechnung gekommen bist.“ <i>Kind erklärt.</i>	
I: „Bist Du fertig? Möchtest Du zu der Aufgabe noch etwas sagen?“ <i>Kind äußert sich ggf.</i>		
I: „Danke, Du hast die Aufgabe prima bearbeitet. Wir sind jetzt fertig.“		

Aufgabe 8

Pflichtfragen	Kontrollfragen	Hilfsfragen
<p>I: „Hier siehst Du die nächste Aufgabe. Lies bitte!“ <i>Kind liest (evtl. laut)</i></p>		
	<p>I: „Was sagt Dir die Tabelle?“ <i>Kind erläutert und gibt Infos der Tabelle.</i></p> <p>I: „Was behauptet Paul?“ <i>Kind wiederholt Pauls Aussage.</i></p>	
<p>a) Kannst Du die Frage beantworten?</p>		
<p><i>Kind kreuzt Antwort an.</i></p>	<p>I: „Wie bist Du darauf gekommen?“ <i>Kind erklärt seine Entscheidung.</i></p> <p>I: „Du brauchtest ja gar nichts zu rechnen - oder doch?“ <i>Kind äußert sich.</i></p>	<p><i>Kind kann keine Entscheidung treffen</i></p> <p>I: „Wie könntest du prüfen, ob Paul Recht hat?“</p> <p>„Benutze die Tabelle!“</p>
		<p><i>Falls Kind „nein“ ankreuzt:</i></p> <p>I: „Ist das wirklich so? Warum?“</p>
<p>b) I: „Begründe deine Antwort!“ <i>Kind erklärt.</i></p>	<p>I: „Du hast ... angekreuzt. Erkläre!“ <i>Kind erklärt seine Entscheidung.</i></p>	<p>I: „Du hast ... angekreuzt. Erkläre!“</p>
<p>I: „Bitte schreibe es auf (was Du gerade erklärt hast).“ <i>K schreibt auf.</i></p>		
<p>I: „Bist Du fertig? Möchtest Du zu der Aufgabe noch etwas sagen?“ <i>Kind äußert sich ggf.</i></p>		
<p>I: „Danke, Du hast die Aufgabe prima bearbeitet. Wir sind jetzt fertig.“</p>		

Kodieranweisung Teilaufgabe 4a

1. Ergebniskonzept Zahlen korrekt

1.1. Alle Zahlen korrekt

Die geforderten Ergebniszahlen 32, 42, 63 und 88 sind korrekt und vollständig eingetragen

2. Ergebniskonzept Zahlen nicht korrekt

2.1. Zahlen fehlen

Ein oder höchstens zwei Zahlen fehlen. Die übrigen Zahlen sind korrekt angegeben.

2.2. Zahlen falsch - Nachbarzahlen

Bei den eingetragenen Zahlen handelt es sich um Nachbarzahlen der gesuchten Ergebniszahlen.

2.3. Zahlen falsch – Nachbarzehner

Hier werden die Nachbarzehner der gesuchten Zahlen eingesetzt, wobei die Einerstelle meist korrekt belegt ist.

2.4. Zahlen falsch - Weiteres

Die Notation falscher Ergebniszahlen weist keinen Bezug zu den eigentlich gesuchten Zahlen auf.

Kodieranweisung Teilaufgabe 4b

1. Ergebniskonzept 6. Zeilensumme

1.1. Ergebniszahl 555

Die Zahl 555 ist als die gesuchte Ergebniszahl eingetragen.

1.2. Ergebniszahl 55x/5xx

Ermittelt der Aufgabenbearbeiter die Zeilensumme durch Berechnung, sind Fehler bei der Addition der einzelnen Zeilensummen denkbar. Die Ergebniszahlen liegen im Bereich der korrekten Ergebniszahl 555: Das nicht korrekte Ergebnis zeigt die Ziffer 5 in der Hunderterstelle oder sogar in der Hunderter- und Zehnerstelle.

2. Ergebniskonzept x. Zeilensumme

2.1. Ergebniszahl 655

Die Zeilensumme 655 der 7. Zeile der Hundertertafel wird als Ergebniszahl notiert. Diese Aufgabenbearbeiter haben nicht beachtet, dass die Anzahl der Zeilen nicht der Hunderterstelle des Ergebnisses entspricht, sondern um eins verringert werden muss.

2.2. Ergebniszahl 355

Die Zeilensumme 355 der 4. Zeile der Hundertertafel wird als Ergebniszahl notiert. Der Aufgabenbearbeiter führt hier lediglich die nächste, also vierte, Zeilensumme fort und notiert diese Zahl als Ergebnis.

2.3. Ergebniszahl 455

Die Zeilensumme 455 der 5. Zeile der Hundertertafel wird als Ergebniszahl notiert.

2.4. Ergebniszahl x55

Auch sind in den analysierten Datensätze noch weitere Zeilensummen als notierte Ergebniszahlen zu finden.

3. Ergebniskonzept Anderes

3.1. Summe Zeilensummen

Die Aufgabenbearbeiter dieser Kategorie arbeiten nicht mit den Zeilenadditionen der Hundertertafel, sondern addieren lediglich die drei bereits angegebenen Zeilensummen 55, 155 und 255. Die notierte Ergebniszahl entspricht somit der Summe 465.

3.2. Ergebniszahl 48

Geht der Aufgabenbearbeiter statt der sechsten Zeile von der sechsten Spalte aus und hat darüber hinaus die drei angeführten Zeilenadditionen im Blick, rücken die 3 Zahlen 6, 16 und 26 in den Fokus. Diese ergeben in der Summe, *Julia* addiert schließlich, die Zahl 48.

3.3. Weitere Zahlen

Der Aufgabenbearbeiter notiert andere als die bisher beschriebenen Ergebniszahlen.

Kodieranweisung Teilaufgabe 4c

1. Bearbeitungskonzept Strukturmathematische Argumentation

Bemerkung: In Aufgabe 4 geht es um die Zeilenadditionen der Hundertertafel und die dadurch erhaltenen Zeilensummen. Teilaufgabe c) gibt Julias Erkenntnis wieder, deren Aussage eine Erhöhung der Zeilensummen um jeweils 10 darstellt. Einer detaillierten Begründung dieser Aussage liegen drei Aspekte zugrunde, die auf der Struktur der Hundertertafel beruhen: 1. Zum Einen werden die Zahlen in der Hundertertafel von Zeile zu Zeile um jeweils 10 erhöht. 2. In jeder Zeile befinden sich 10 Zahlen. 3. Die Erhöhung der Zeilensumme errechnet sich somit aus der Multiplikation 10 mal 10. Diese drei Argumentationsaspekte bilden die Grundlage für das hier beschriebene Bearbeitungskonzept.

Es ergeben sich zwei Bearbeitungskategorien mit jeweils einem Argumentationsaspekt, ebenso zwei Bearbeitungskategorien mit jeweils zwei angeführten Argumentationsaspekten.

1.1. Ein Argumentationsaspekt- Erhöhung 10 abstrakt

Der Aufgabenbearbeiter führt die Erhöhung der Zahlen von Zeile zu Zeile an. Dabei wird nicht auf konkrete Zahlen oder Zeilen der Aufgabenfolge hingewiesen, sondern eine allgemeine Formulierung (Bsp. „*Es kommen immer zehn dazu*“) verwendet.

1.2. Ein Argumentationsaspekt- Erhöhung 10 konkret

Auch diese Aufgabenbearbeiter nutzen in ihren Begründungen den Argumentationsaspekt der jeweiligen Erhöhung um 10. In dieser Gruppe wird dieser Sachverhalt jedoch mit einem Beispiel der Aufgabenfolge konkretisiert und dargestellt. So wird beispielsweise die Erhöhung einer Zahl von Zeile zu Zeile angeführt (Bsp. „*Es kommt immer 100 dazu weil immer 1,11,21 oder 2,12,22*“)

1.3. Zwei Argumentationsaspekte- 10 Zahlen/ Erhöhung 10

Die Aufgabenbearbeiter argumentieren in ihren Begründungen mit den Aspekten der Erhöhung der Zahlen um jeweils 10 sowie der Tatsache, dass sich in einer Zeile stets 10 Zahlen befinden. Häufig verwenden die Aufgabenbearbeiter auch den Begriff 10 Zehner, der sowohl den Aspekt der Erhöhung als auch die Anzahl der Zahlen vereint.

1.4. Zwei Argumentationsaspekte- Erhöhung 10/ $10 \cdot 10$

Hier findet sich neben dem bereits bekannten Argumentationsaspekt der Erhöhung um 10 der schlussfolgernde Aspekt, dass sich aufgrund dieser Erhöhung und der Anzahl Zahlen in einer Zeile die Zeilensumme stets um 10 mal 10, also um die angegebenen 100 erhöht

1.5. Drei Argumentationsaspekte

Der Aufgabenbearbeiter nennt explizit alle drei o.g. Argumentationsaspekte.

1.6. Weitere

Diese Kategorie vereint jene Gruppen mit der Nennung von ein oder zwei Argumentationsaspekten, die nicht den zuvor beschriebenen Kategorien zugehörig sind.

2. Bearbeitungskonzept Argumentation Bezug zur Aufgabenfolge

Bemerkung: Die Argumentationen stützen sich jeweils auf einen konkreten Gesichtspunkt der zu beurteilenden Aufgabenfolge, ohne jedoch die strukturmathematischen Zusammenhänge erkennbar zu nutzen oder zu beschreiben

2.1. Erhöhung Summanden/ Summe

Der Aufgabenbearbeiter argumentiert mit einer Erhöhung der Zahlen im Allgemeinen. Oft ist den Formulierungen nicht zu entnehmen, ob eine Erhöhung der einzelnen Summanden oder schlussendlich die Erhöhung der Zeilensumme gemeint ist. Auch die Mächtigkeit der Erhöhung wird in den Begründungen nicht angeführt

2.2. Wiederholung

Zusammenfassung der Aufgabenbearbeitungen, die eine Wiederholung der in der Aufgabenstellung formulierten Erkenntnis der Erhöhung um 100 nutzen, ohne weitere Aspekte anzuführen.

2.3. Bezug Zeilensumme

Hier wird mit Hilfe der zu erhaltenen Zeilensumme argumentiert, sozusagen der Umkehrschluss der eigentlichen zugrundeliegenden Struktur gezogen: Es werden 100 addiert, damit die gewünschte Summe erhalten wird und nicht ein anderes Ergebnis erhalten wird.

2.4. Struktur Zeilensumme

Andere Datensätze weisen die Struktur der Zeilensummen der Aufgabenfolge als primäres Argument der Begründung auf. Die Veränderung der Zeilensummen um jeweils einen Hunderter bei gleich bleibender Besetzung der Zehner- und Einerstelle ist aus diesen Begründungen deutlich abzulesen.

2.5. Hundertertafel

Die Erhöhung der Zeilensumme um den Betrag 100 erscheint hier selbstverständlich, da es sich um eine Aufgabe im Kontext der Hundertertafel handelt. Diese wird in den Argumentationen genannt.

2.6. Eigenschaft Addition

Diese Aufgabenbearbeiter betrachten die Aufgabenfolge im Hinblick auf eine additive Aufgabenfolge. Addition bedeutet per se eine Erhöhung, wobei der Betrag der Erhöhung oder die Summanden der Addition hier nicht von Belang zu sein scheinen.

3. Bearbeitungskonzept Anderes

3.1. Zeilenadditionen

Diese Aufgabenbearbeiter formulieren konkrete Zeilenadditionen, indem die Zahlensätze als Notation auf symbolischer Ebene vorzufinden sind. Häufig sind die vierte, fünfte und sechste Zeilenaddition als Rechnungen fixiert: „ $31+32+33+34+35+36+37+38+39+40=355$, $41+42+43+44+45+46+47+48+49+50=455$, $51+52+53+54+55+56+57+58+59+60=555$ “.

Ebenso werden auch einzelne Zeilenadditionen mit wenigen erläuternden Worten als eine Begründung herangezogen:

3.2. Rechnungen

Desweiteren werden in den Datensätzen zum Teil nicht nachvollziehbare Rechnungen angeführt, die Julias Erkenntnis begründen sollen. Interessant ist die Tatsache, dass bei diesen Rechnungen den Zahlen 50 und 55 besondere Beachtung geschenkt wird. Auch andere, nicht den übrigen Bearbeitungskategorien zu zuordnende, Rechnungen sind hier zu finden.

3.3. Weiteres

Innerhalb dieser Kategorie sind diverse Gruppen aufzufinden, bei denen die Eröffnung einer separaten Bearbeitungskategorie aufgrund der hierfür zu geringen Häufigkeiten unangemessen ist.

So gibt es Aufgabenbearbeiter, die einen Ringschluss formulieren oder aussagen, dass sich das Ergebnis stets verdoppelt. Ebenso ist einige Male die Formulierung der Regel um eine Erhöhung um 55 zu lesen.

Kodieranweisung Teilaufgabe 5a

Bemerkung: Die Kodierung erfolgt aufgrund des Bearbeitungsweges, nicht aufgrund des Ergebnisses!

1. Bearbeitungskonzept Fläche- multiplikativ

Diese Gruppe umfasst sämtliche Bearbeitungsnotationen, in denen ein Vorgehen im Sinne der Aufgabenintention, also als Grundaufgabe zur Flächenberechnung, erkennbar ist.

1.1. $8 * 5$

Sämtliche Notationen, die sich durch eine Formulierung der Multiplikation Seite a * Seite b äußern, sind hier enthalten

1.2. $5 * 8$

Die Notation der Tauschaufgabe Seite b * Seite a repräsentiert diese Bearbeitungskategorie.

1.3. Nachbaraufgaben

Hier handelt es sich um die Multiplikation falscher Seitenlängen. Es werden in der aufgestellten Bearbeitungskategorie jedoch ausschließlich Bearbeitungsnotationen mit den verwendeten Seiten $a_{+/-1}$ und $b_{+/-1}$ berücksichtigt, um Fehlinterpretationen der untersuchten Aufzeichnungen entgegenzuwirken.

1.4. andere Multiplikationen

Die Bearbeitungsnotationen weisen durchaus auf eine Vorstellung der Grundidee des Flächeninhalts hin und besitzen meist das richtige Ergebnis, präsentieren sich jedoch aufgrund der schriftlichen Fixierung oftmals nicht korrekt, da nicht den Seitenlängen entsprechende Faktoren notiert werden.

2. Bearbeitungskonzept Fläche- additiv

Hier finden sich all jene Bearbeitungen wieder, denen eine additive Notationsform zugrunde liegt.

2.1. fortgesetzte Addition

Sämtliche, deutlich als fortgesetzte Addition interpretierbaren Bearbeitungsnotationen werden zusammengefasst, wobei Rechenfehler, eine falsche Anzahl Summanden und/ oder eine falsche Seitenlänge bereits inkludiert sind.

2.2. Hälften

Dieser Kategorie liegt die Bearbeitungsnotation „ $20 + 20 = 40$ “ zugrunde, was auf ein Halbieren der Gesamtfläche hinweist.

2.3. Außenband und Innenfigur

Die Aufgabenbearbeiter ermitteln zunächst die Anzahl der Quadrate des Außenbandes (22), um anschließend die Quadrate der noch verbleibenden Innenfigur (18) zu addieren. Die Anzahl des Außenbandes, also 22 Quadrate, ist meist korrekt ermittelt, was auf die angedeuteten Seiten der Quadrate in der Grafik zurückzuführen ist. Hingegen ist für die Anzahl der Quadrate in der Innenfigur, das sind 18 Quadrate, keine grafische Hilfe mehr gegeben. Dies ist wohl mit ein Grund für die große Variation dieser Anzahlen. Entsprechend zahlreich sind auch die differierenden Bearbeitungsnotationen.

2.4. andere Additionen

Ebenso wie in den Differenzierungen des vorherigen Bearbeitungskonzeptes finden sich auch hier im Prozess der Kategorienbildung additive Bearbeitungsnotationen, die keiner der drei bisher beschriebenen Bearbeitungskategorien explizit zugeordnet werden können. Die Ergebniszahl 40 ist hier dennoch oftmals korrekt.

3. Bearbeitungskonzept Umfang

Es findet eine Ermittlung des Umfangs anstatt der des Flächeninhaltes statt. Das in der Rationalen Aufgabenanalyse herausgestellte Problem der formalen Präsentation bestätigt sich und kann präzisiert werden. Das Bearbeitungskonzept Umfang beinhaltet drei Bearbeitungswege, die jedoch aufgrund der schriftlichen Notationen nicht immer eindeutig interpretierbar sind: Der Aufgabenbearbeiter ermittelt den tatsächlichen Umfang der Figur, also 26 Quadrate.

Der Aufgabenstamm verleitet jedoch ebenso zu einem Auszählen der Striche, durch welche die Quadrate des Außenbandes angedeutet werden. Auf diesem Weg gelangt der Aufgabenbearbeiter zu einem Ergebnis von 22, bei Ausschluss des eingezeichneten Einheitsquadrates zu der Ergebniszahl 20.

Wird die Anzahl der Quadrate des Außenbandes ermittelt, gelangt der Aufgabenbearbeiter zu dem Ergebnis von 22 beziehungsweise 21 Quadraten bei Ausschluss des abgebildeten Einheitsquadrates.

Die Differenzierung des Bearbeitungskonzeptes erfolgt aufgrund der der angestrebten Objektivität erneut anhand der Bearbeitungsnotationen, wobei die oben genannten Unterscheidungen in sämtlichen Gruppierungen zu finden sind.

3.1. Umfang additiv

Es sind bis zu vier Summanden in den notierten Zahlensätzen enthalten. Bei Umsetzung dieses Bearbeitungsweges ist prinzipiell von falschen Ergebnissen auszugehen.

3.2. Umfang multiplikativ

Ähnliches wie zuvor spiegelt sich in dieser Bearbeitungskategorie in den multiplikativen Notationen der Umfangsbestimmung wider.

3.3. Umfang andere

Das Bearbeitungskonzept Umfang beinhaltet diese weitere Bearbeitungskategorie, in der sich der Bearbeitungsweg Umfang zeigt, jedoch eine ausschließlich additive oder multiplikative Zuordnung nicht möglich ist.

4. Bearbeitungskonzept Anderes

Die Einteilung in ein kennzeichnendes Konzept ist nicht möglich, da es sich hier um Notationen handelt, denen kein spezifischer Bearbeitungsweg zuzuschreiben ist oder eine weitere Kategorienbildung nicht durchführbar ist.

4.1. Ergebniszahl

Diese Gruppe erfasst diejenigen Datensätze, in denen ausschließlich ein Ergebnis, aber kein zugehöriger Rechenweg vermerkt ist.

4.2. Zeichnungen

Der Vollständigkeit halber wird diese Kategorie eröffnet. Bei den Schülerbearbeitungen sind weder eine Rechnung, noch eine Ergebniszahl notiert. Jedoch sind Einzeichnungen in der Grafik vorhanden.

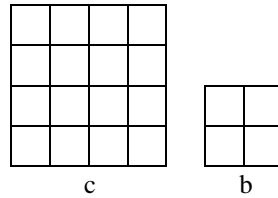
4.3. Weiteres

In einer letzten Bearbeitungskategorie werden all jene Bearbeitungsnotationen aufgenommen, die in keinsten Weise hinsichtlich eines Bearbeitungsweges zu interpretieren sind und keine Zuordnung in eine der anderen Bearbeitungskategorien möglich ist.

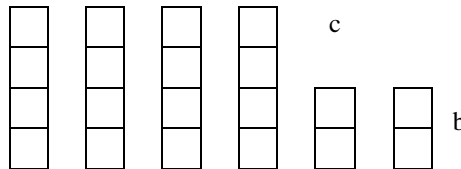
Kodieranweisung Teilaufgabe 5b

Info zu den möglichen Zusammensetzungen der Figur

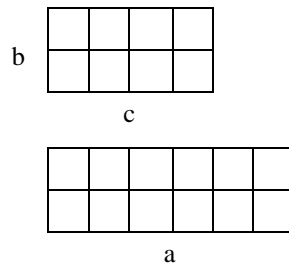
Das vertikale Zusammensetzen beschreibt eine vertikale Trennung der Figur in zwei Quadrate. Das größere der beiden Quadrate besitzt die Seitenlänge c, das Kleinere die Seitenlänge b.



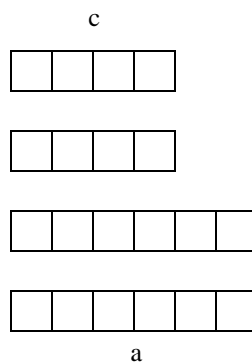
Ein vertikales Zusammensetzen ist ebenfalls durch das spaltenweise Zusammenfügen der Reihen in der Figur möglich:



Das Pendant der Subkategorie vertikales Zusammensetzen stellt die Subkategorie horizontales Zusammensetzen dar. Die Figur der Teilaufgabe wird hier durch eine horizontale Trennung in zwei Rechtecke zerlegt.



Die Subkategorie horizontales Zusammensetzen impliziert nicht nur das Zusammenfügen zweier Teilfiguren, sondern auch das zeilenweise Zusammensetzen der Reihen zu der in Teilaufgabe b) präsentierten Figur.



1. Bearbeitungskonzept Fläche- Zusammensetzen vertikal

Umfasst sämtliche Schülerbearbeitungen, bei denen anhand der Bearbeitungsnotation auf ein gedankliches Zusammensetzen der abgebildeten Figur aus einem $4*4$ -Quadrat und einem $2*2$ -Quadrat zu schließen ist.

1.1. $4*4 + 2*2$

Zunächst werden in der Bearbeitungskategorie all jene Schülerbearbeitungen erfasst, bei denen der Flächeninhalt beider Quadrate mittels der entsprechenden Multiplikation fixiert wird. Die Notation zu dem kleineren der Teilquadrate entspricht explizit der Multiplikation $2*2$.

1.2. $4*4 + 4$

Für diese inhaltlich sehr ähnliche Notationsvariante wird eine gesonderte Bearbeitungskategorie eröffnet. Die Fläche des kleineren Quadrates wird hier mit 4 in der Notation genannt.

1.3. $4+4+4+4+2+2$

Diesen Aufgabenbearbeitungen ist ein spaltenweises Zusammensetzen der Gesamtfigur abzuleiten.

1.4. $16+4$

Die multiplikativen Teilrechnungen der Zerlegung (siehe 1.1. und 1.2.) erscheinen hier nicht mehr, es werden direkt die beiden Zwischenergebnisse als Summanden einer Addition notiert.

2. Bearbeitungskonzept Fläche zusammensetzen – horizontal

2.1. $2*6 + 2*4$

Die Notation einer Rechnung, in der Flächenermittlung der beiden Teilfiguren deutlich wird, liegt hier zugrunde.

2.2. $6+6+4+4$

Die Gesamtfigur wird zeilenweise zusammengesetzt, symbolisiert durch die Rechnung $6+6+4+4$.

2.3. $12 + 8$

Vergleichbar mit dem zuvor beschriebenen Bearbeitungskonzept notieren einige Aufgabenbearbeiter nicht mehr die Multiplikationen der Zerlegungen, sondern gleich die Addition der Teilergebnisse

3. Bearbeitungskonzept Fläche zusammensetzen – sonstiges

3.1 $5*4$

Die Notation der Rechnung $5*4$ weist auf ein Zusammensetzen der Gesamtfigur aus 5 kleinen Quadraten hin.

3.2. $4*4$

Es finden sich Bearbeitungsnotationen zusammen, bei denen von einer Intention des Zusammensetzens der 4 kleinen Quadrate auszugehen ist, jedoch in den meisten Fällen aufgrund der Unvollständigkeit ein fehlerhaftes Ergebnis vermerkt wird.

3.3. andere Zusammensetzungen

Die Datensätze zeigen noch weitere Aufgabenbearbeitungen, aus denen ein Zusammensetzen der Gesamtfigur ersichtlich ist, eine Zuordnung in bereits existente Kategorien jedoch unmöglich erscheint.

4. Bearbeitungskonzept Fläche- Abspalten

4.1. $6*4 - 4$

Zunächst wird die rechteckige Grundfigur mittels der Multiplikation $6*4$ berechnet, um anschließend den vorhandenen $2*2$ -Ausschnitt zu subtrahieren.

4.2. $6*4$

Es liegt die bereits zuvor erläuterte Denkstruktur zugrunde. Jedoch wird lediglich der erste Schritt, die Berechnung des Rechtecks, ausgeführt oder die Notation der sich anschließenden Subtraktion wird vergessen.

5. Bearbeitungskonzept Umfang

Dieses inkludiert erneut die Bestimmung des tatsächlichen Umfangs und des Außenbandes sowie die Ermittlung der Anzahl von Strichen in der Grafik. (vgl. 5a).

Es zeigt sich bei dieser Teilaufgabe, dass sowohl Flächeninhalt als auch Umfang der Figur ein Ergebnis von 20 haben. Diese Tatsache erschwert den weiterführenden Schritt der Empirischen Aufgabenanalyse wird. Die Differenzierung in additive (Seiten einzeln) und multiplikative (Seiten zusammengefasst) Rechnungsnotationen wird aufgrund der Kontinuität beibehalten. Die Reihenfolge der Summanden wird aufgrund der geltenden Rechengesetze nicht beachtet.

5.1. Umfang additiv

Additive Notation einer Umfangsberechnung.

5.2. Umfang multiplikativ

Multiplikative Notation einer Umfangsberechnung.

5.3. andere Bearbeitungen

Das Bearbeitungskonzeptes Umfang beinhaltet diese weitere Bearbeitungskategorie, in der sich der Bearbeitungsweg Umfang zeigt, jedoch eine ausschließlich additive oder multiplikative Zuordnung nicht möglich ist.

6. Bearbeitungskonzept Anderes

6.1. Ergebnis

Auch in den Bearbeitungen der zweiten Teilaufgabe notieren Aufgabenbearbeiter ausschließlich eine Ergebniszahl.

6.1. Zeichnung

Der Vollständigkeit halber wird diese Kategorie eröffnet. Bei den Schülerbearbeitungen sind weder eine Rechnung, noch eine Ergebniszahl notiert. Jedoch sind Einzeichnungen in der Grafik vorhanden

6.3. sonstige Additionen

Additive Notationen, die in keine der weiteren Kategorien zugeordnet werden können.

6.4. sonstige Multiplikationen

Multiplikative Notationen, die in keine der weiteren Kategorien zugeordnet werden können.

6.5. Weiteres

Weitere Notationen, die in keine der übrigen Kategorien zugeordnet werden können.

Kodieranweisung Aufgabe 8

1. Bearbeitungskonzept Relativer Bezug Tabelle

Ein Vergleich der Zuckermenge von Schokolade und Schokokuss wird anhand einer gleichen Bezugsmenge durchgeführt wird.

1.1. Basis Gewicht

Bei einem Vergleich der beiden Lebensmittel Schokolade und Schokokuss wird zunächst von einer gleichen Gewichtsmenge ausgegangen (100g Schokolade, 25g Schokokuss, Vergleichsgewicht).

1.2. Basis Zucker

Ausgehend von einer gleichen Zuckermenge wird auf das entsprechende Gewicht der Lebensmittel geschlossen, wobei sich auch hier die konkrete Bezugsmenge (60g in Schokolade, 15g in Zucker, Vergleichsgröße) zunächst als unbedeutend erweist.

1.3. Lösungsidee

In diesen Aufgabenbearbeitungen findet sich der Grundgedanke des relativen Bezuges wieder, wobei die weitere Konkretisierung und somit eine eindeutige Lösung jedoch fehlt.

2. Bearbeitungskonzept Absoluter Bezug Tabelle – Vergleich

Aufgabenbearbeitungen, bei denen die Argumentation auf einen konkreten Vergleich der in der Tabelle präsentierten Angaben zurückzuführen ist.

2.1. 60g > 15g

Es sammeln sich all jene Aufgabenbearbeitungen, in denen ein Vergleich der Zuckermengen von Schokolade und Schokokuss formuliert ist und diese konkret als 60 Gramm sind mehr als 15 Gramm formuliert werden (konkrete Angabe).

2.2. Schokolade mehr Zucker

Begründung enthält lediglich die Aussage, dass Schokolade mehr Zucker enthält. Woher diese Information und Entscheidung rührt, wird nicht weiter dargelegt resultierende Feststellung, lässt jedoch ebenfalls auf den konkreten Vergleich der beiden Zuckerangaben schließen.

2.3. 15g < 60g

In dieser Variante wird jedoch nun die Tatsache herangezogen, dass der Schokokuss mit 15 Gramm Zucker weniger als die Schokolade mit 60 Gramm enthält. Diese Kodierung schließt ebenfalls Begründungen ein, die in ihrer Formulierung die Nennung beider Zuckerangaben enthalten, die geringere Größe des Zuckeranteils des Schokokusses mit dem Wort 'nur' oder 'aber' ausgedrückt wird.

2.4. Schokokuss weniger Zucker

Entsprechend der Differenzierung in den ersten beiden Bearbeitungskategorien des Konzeptes findet sich in den Begründungen oftmals lediglich die Aussage über den geringeren Zuckergehalt des Schokokusses, ohne den expliziten Vergleich der Zuckerangaben zu formulieren und mit diesem zu argumentieren.

2.5. Differenz Zucker

Diese Aufgabenbearbeiter berechnen konkret die Differenz der Zuckermengen Schokolade und Schokokuss. Das Ergebnis, rechnerisch zurückzuführen auf eine Subtraktion (60g - 15g) oder Ergänzung (15g + ___ = 60g) dient als Argument, dass Schokolade mehr beziehungsweise Schokokuss weniger Zucker enthält.

2.6. Vergleich Gewicht

Die Kategorie fasst Bearbeitungen zusammen, in welchen mit dem leichteren Gewicht des Schokokusses oder dem schwereren Gewicht der Schokolade argumentiert wird. Eine Nennung der konkreten Gewichtsangaben findet sich in

den Formulierungen jedoch selten. Zugeordnet Bearbeitungen weisen oftmals Formulierungen „schwerer“, „größer“ oder „wiegt mehr“ auf.

2.7. Vergleich Zucker und Gewicht

Kodiert werden diese aufgrund einer Argumentation, die einen Vergleich sowohl der Zucker- als auch der Gewichtsangaben aufweist. Wurde in den vorherigen Bearbeitungskategorien jeweils eines dieser Argumente angeführt, wird hier nun ein konkreter Vergleich beider Angaben vollzogen oder es findet ein Schluss von der Zucker- auf die Gewichtsangabe (auch umgekehrt) statt.

3. Bearbeitungskonzept Absoluter Bezug Tabelle – Verwendung Angaben

Während die Argumentationen des vorherigen Bearbeitungskonzeptes deutlich auf einen Vergleich der vorhandenen Angaben hindeuten, gibt es weiterhin eine beachtliche Zahl von Bearbeitungen, bei denen diverse Daten der Tabelle in den Begründungen Verwendung finden. Jedoch sind die formulierten Argumente nicht explizit auf einen Vergleich dieser Angaben zurückzuführen.

3.1. Nennung Zucker/ Gewicht

In diesen Bearbeitungen werden konkrete Information zu Gewichts- und/ oder Zuckerangaben aus der Tabelle übernommen und angeführt. In keiner dieser Formulierungen findet sich jedoch ein Hinweis auf einen Vergleich von Angaben. Es handelt sich ausschließlich um eine Präsentation der Fakten, der daraus zu ziehende Schluss ist nicht herauszulesen.

3.2. Rechnungen

Diese Kategorie beschreibt Argumentationen, die zum Teil irrationale und exotische Rechnungen mit den präsentierten Zahlen enthalten.

3.3. Lebensmittel Tabelle

Es findet in der Begründung ein Vergleich der Angaben mit anderen, in der Tabelle genannten, Lebensmittel statt. Ebenso werden in dieser Kategorie alle Argumentationen gefasst, die einen Bezug zu den Lebensmitteln der Tabelle aufweisen, ohne dass zwangsläufig ein konkreter Vergleich der Angaben vorhanden sein muss.

4. Bearbeitungskonzept Lebenswelt

Begründungen, in denen von den präsentierten Angaben in der Tabelle Abstand genommen wird. Stattdessen werden lebensweltliche Argumente angeführt und eine Beurteilung aufgrund persönlicher Erfahrungen getroffen.

4.1. Beschaffenheit Schokolade/ Schokokuss

Die Argumentationen dieser Aufgabebearbeitungen sind allesamt auf der Ebene der Zusammensetzung der beiden Lebensmittel zu finden. Begründungen für die Beurteilung der Aussage werden so beispielsweise auf die noch enthaltene Waffel des Schokokusses oder die in der Schokolade versteckten Nüsse zurückgeführt.

4.2. Ähnlichkeit Schokolade/ Schokokuss

Die Aufgabenbearbeiter führen eine gewisse Gleichartigkeit beider Lebensmittel als Argument in ihren Begründungen an. So ist herauszulesen, dass beide Lebensmittel aus Schokolade bestehen.

4.3. Argument süß

Die Süße der Lebensmittel dient als ausschlaggebende Erklärung für eine Beurteilung der Aussage darstellt.

4.4. Argument Zucker

Es finden sich hier variantenreiche Formulierungen, die allesamt das Argument Zucker aus einer lebensweltlichen Perspektive aufzeigen.

5. Bearbeitungskonzept Keine Argumentation

Die zu beurteilende Aussage wird redundant bestätigt oder verneint beziehungsweise werden Aussagen des Aufgabentextes wiederholt.

5.1. Bestätigung

Die Begründung enthält die Aussage, dass Paul Recht hat, ohne dies mit Argumenten zu belegen.

5.2. Verneinung

Antworten, welche die Aussage ohne weitere Argumente verneinen, ohne dies mit Argumenten zu belegen. Belegen.

5.3. ohne Aussage

Gruppe von Aufgabenbearbeitungen, aus denen keine konkrete Aussage mit zugehöriger Erklärung herauszulesen ist oder Aussagen nicht vollendet werden.

6. Bearbeitungskonzept Anderes

6.1. nur Kreuz

Die Aufgabenbearbeiter haben bei Teilaufgabe a) lediglich ein Kreuz gesetzt, ohne dies in b) zu begründen.

6.2. Schokokuss hat mehr Zucker

Begründungen, die in Bezug auf die in der Tabelle angebotenen Informationen eine konträre Aussage über die Zuckermenge enthalten. Dies wird anhand der Überschrift der Bearbeitungskategorie, Schokokuss hat mehr Zucker, ausgedrückt, impliziert jedoch gleichwertige Aussagen über den Zuckergehalt der Schokolade.

6.3. Weiteres

Aufgabenbearbeitungen, die in sich nicht weiter gruppiert werden können oder keine andere Zuordnung möglich erscheint, konzentrieren sich hier.

Kontingenztafeln A4a mit allen Teilaufgaben

	4b1	4b2	4b3	Summen
4a1	919	284	192	1395
4a2	52	23	5	80
Summen	971	307	197	1475

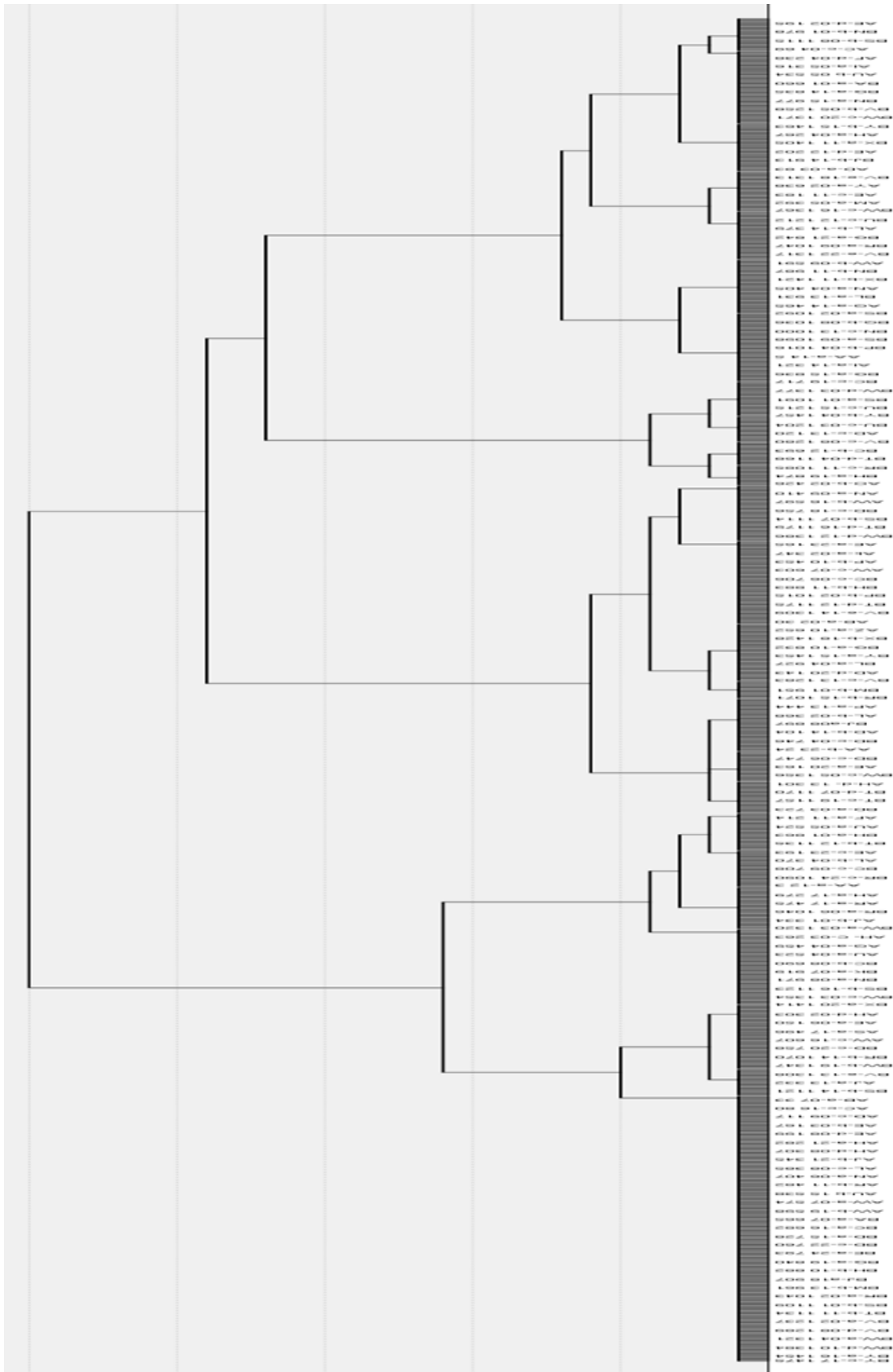
	4c1	4c2	4c3	Summen
4a1	813	352	230	1395
4a2	52	13	15	80
Summen	865	365	245	1475

	5a1	5a2	5a3	5a4	Summen
4a1	1070	116	107	102	1395
4a2	64	2	7	7	80
Summen	1134	118	114	109	1475

	5b1	5b2	5b3	5b4	5b5	5b6	Summen
4a1	472	124	276	79	119	325	1395
4a2	23	5	18	4	8	22	80
Summen	495	129	294	83	127	347	1475

	8b1	8b2	8b3	8b4	8b5	8b6	Summen
4a1	143	527	380	171	55	119	1395
4a2	6	27	21	9	3	14	80
Summen	149	554	401	180	58	133	1475

Dendrogramm der durchgeführten Clusteranalyse



Ausschnitte aus Zuordnungsübersicht der durchgeführten Clusteranalyse

Clusterzahl	Fusionierungsschritt	Koeffizienten	Quotient Cluster n/ Cluster n-1	Zusammengeführte Cluster	
				Cluster 1	Cluster 2
1475	1	,000		1472	1475
1474	2	,000		1213	1474

7	1468	1206,701	1,082	2	31
6	1469	1303,390	1,080	1	24
5	1470	1404,428	1,076	2	5
4	1471	1583,547	1,128	3	4
3	1472	1847,140	1,166	2	55
2	1473	2157,659	1,168	1	2
1	1474	2568,172	1,190	1	3

Anmerkungen zur Clustergüte der Clusterlösung C₅

Clusterstabilität

In der Fachliteratur ist das Problem der Stichprobenabhängigkeit von Clusterlösungen hinreichend bekannt (vgl. bspw. BORTZ 2005, S. 580). Dies impliziert ebenso eine veränderte Sortierung der ursprünglichen Datenliste und ihre eventuellen Auswirkungen auf die Clusterbildung. Auf Basis von Zufallsvariablen werden in der vorliegenden Arbeit vier differierende Sortierungen in SPSS erzeugt, um auf deren Grundlage wiederholte Clusterlösungen mit jeweils fünf Clustern zu berechnen. Für die entstandenen Clusterlösungen werden jeweils tabellarische Übersichten zu den inhaltlichen Schwerpunkten der einzelnen Teilaufgaben erstellt. Somit lassen sich zu jeder der errechneten Clusterlösung Clusterschwerpunkte formulieren. Ein Vergleich dieser inhaltlichen Schwerpunkte pro Teilaufgabe zeigt, dass diese in jeder der untersuchten Clusterlösungen völlig übereinstimmen. Die unterschiedliche Nummerierung der Cluster ist hierbei ohne Belang und lässt sich durch eine Transformation in identische Bezeichnungen angleichen. Da die absoluten Anzahlen in den einzelnen Clusterlösungen differieren, findet ein Vergleich der relativen Anteile in den einzelnen Teilaufgaben statt, der aufgrund genereller Übereinstimmung positiv ausfällt (siehe ebd.).

Das Ziel der Clusteranalyse und der Typenbildung als eine Gruppierung der Daten mit möglichst großen, jedoch stabilen Unterschieden zwischen den Clustern, ist für die vorliegende Untersuchung demnach bestätigt.

Clusterzugehörigkeit

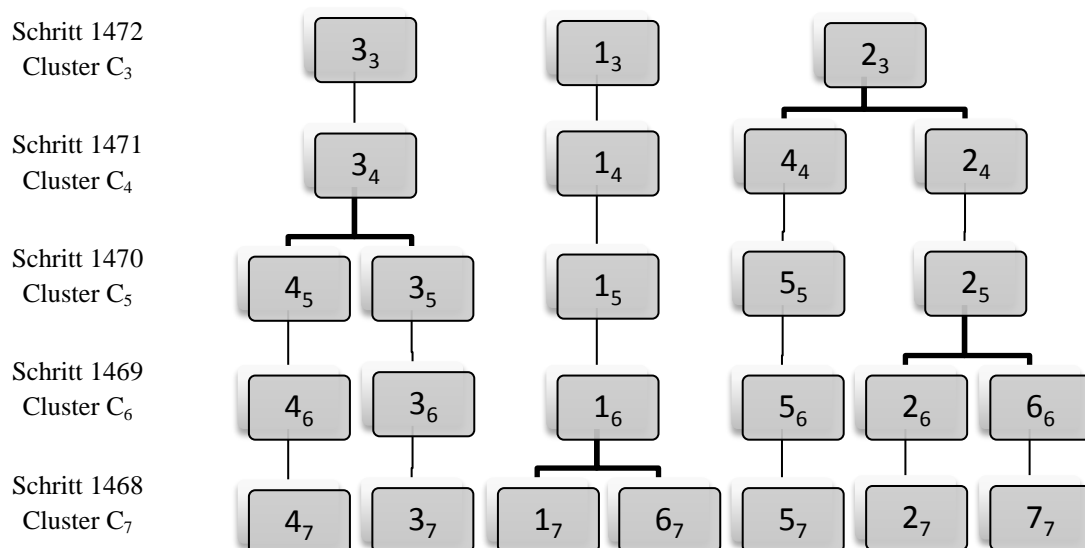
Für die Untersuchung der Clusterzugehörigkeit werden erneut die zuvor generierten Clusterlösungen mit jeweils fünf Clustern herangezogen. Auf Grundlage jeder Berechnung liegt eine tabellarische Übersicht mit der Zuordnung jedes Datensatzes in ein Cluster vor. Wie bereits angeführt, stimmen die numerischen Bezeichnungen der Cluster der verschiedenen Lösungen trotz inhaltlicher Identität nicht überein, sodass basierend auf dem bereits durchgeführten inhaltlichen Vergleich der Cluster einheitliche Bezeichnungen vergeben werden.

Die Einheitlichkeit der Bezeichnungen stellt eine wichtige Voraussetzung für die anschließend erstellten Kontingenztafeln dar, die einen Vergleich von jeweils zwei Clusterlösungen präsentieren. Mit Hilfe dieser Übersichten können die Clusterzugehörigkeiten zu den verschiedenen Clusterlösungen als stabil bezeichnet werden.

Vergleich der Clusterlösungen

Die statistischen Kriterien sprechen demnach für eine Gliederung der Daten in fünf Gruppen. Um die nachfolgend auf diesen Clustern basierenden Auswertungen und Interpretationen zu validieren, erfolgt ein *Vergleich der Clusterlösungen* mit 3, 4, 5, 6 und 7 Gruppen. Die Zusammenfassungen der einzelnen Cluster auf den verschiedenen Fusionierungsstufen werden anhand

Für jede Clusterlösung existieren Übersichten, die neben den absoluten Anzahlen der Datensätze die relativen Häufigkeitsanteile der Aufgabenbearbeitungen enthalten. Somit ist ein Vergleich der jeweiligen clusterinternen Häufigkeiten möglich. Die inhaltlichen Merkmale werden sowohl bezogen auf die Clusterlösung als auch mit Bezug zu den Fusionierungsschritten untersucht¹¹⁸.



Organigramm zu den Knotenpunkten der Clusteranalyse

Knotenpunkt C₇-C₆

Die Zusammenfassung der Cluster 1₇ und 6₇ ermöglicht eine inhaltliche Schwerpunktsetzung in allen Teilaufgaben. Zuvor wiesen beide Gruppierungen unterschiedliche Merkmale in den Bereichen A4b, A4c, A5a und A5b auf. Die Verteilungen zu den Bearbeitungen von Aufgabe A8 hingegen waren bereits hier ähnlich (8-23). In Cluster 1₆ zeichnen sich aufgrund der Fusionierung Schwerpunkte in den Aufgabenbearbeitungen 4b-1, 4c-2, 5a-12 und 5b-1234 ab¹¹⁹. Der zuvor erläuterte Schwerpunkt in Aufgabe A8 bleibt erhalten. Eine weitere Zusammenführung dieser Gruppe findet in den nachfolgenden Fusionierungsschritten nicht mehr statt.

¹¹⁸ Mit dieser Form der Übersicht findet auch die spätere inhaltliche Beschreibung der Clusterlösung C₅ statt (siehe Abschnitt 10.3.3), sodass auf eine beispielhafte Abbildung an dieser Stelle verzichtet wird.

¹¹⁹ Das Cluster 1₆ entspricht dem Cluster 1₅, womit eine detaillierte inhaltliche Beschreibung dieser Gruppe in Abschnitt 10.3.3 zu finden ist.

Knotenpunkt C₆-C₅

Die in diesem Schritt vereinigten Cluster 2₆ und 6₆ sind sich in ihren Verteilungen innerhalb der Aufgabenbearbeitungen sehr ähnlich. Differenzierungen sind ausschließlich in Aufgabe A8 abzulesen. Während der Schwerpunkt in Cluster 2₆ deutlich in dem Bearbeitungskonzept 8-23 liegt, ist in 6₆ hier keine Aufgabenbearbeitung zu finden. Die Zusammenführung dieser Gruppierung führt zu einem aussagekräftigen Cluster mit aufgabeninternem Schwerpunkt 8-23 (siehe Abschnitt 10.3.3).

Knotenpunkt C₅-C₄

Die Fusionierung der Gruppierungen 3₅ und 4₅ bedeutet eine inhaltliche Auflösung der identifizierbaren Differenzierung in Aufgabe A8. Während in Cluster 4₅ alle Aufgabenbearbeitungen das Merkmal 8-23 aufweisen, verteilen sich die Aufgabenbearbeitungen in Cluster 3₅ auf die drei weiteren Aufgabenbearbeitungen 8-1, 8-4 und 8-56. Nach der Zusammenführung verhalten sich die Verteilungen zu A8 in allen Clustern der Lösung ähnlich. Ein entscheidendes charakteristisches Merkmal der Clusterlösung C₅ geht durch diese Fusionierung demnach verloren.

Knotenpunkt C₄-C₃

Bereits die zuvor beschriebene Fusionierung spricht deutlich gegen ein Clusterzahl kleiner 5, was durch die Untersuchung des Knotenpunkts C₄-C₃ weiter gestützt wird. Unterscheiden sich die Gruppierungen 4₄ und 2₄ noch deutlich aufgrund der Bearbeitungen von Aufgabe A5a und A5b, vereinheitlicht die Zusammenführung der Cluster diese charakteristischen Merkmale zusehends. Das entstandene Cluster 2₅ ist sehr homogen, die aufgabeninternen Anteile lassen eine charakteristische Beschreibung nicht mehr zu.

Homogenität der Cluster

F-Werte

	Cluster 1	Cluster2	Cluster 3	Cluster 4	Cluster 5
4b1	0,46	0,00	0,00	0,02	1,12
4b2	0,12	1,35	0,00	0,00	1,26
4b3	0,76	1,92	0,00	0,04	1,61
4c1	0,00	1,02	0,13	0,06	1,04
4c2	1,22	1,06	0,00	0,00	0,87
4c3	1,64	1,05	0,23	0,11	1,60
5a12	0,87	0,49	0,25	0,54	0,00
5a3	0,27	0,11	0,07	0,36	2,12
5a4	1,41	0,83	0,41	0,68	2,21
5b1234	1,02	0,89	0,78	0,83	0,04
5b5	0,34	0,52	0,12	0,35	2,32
5b6	1,18	0,95	0,91	0,92	0,99
81	0,61	0,57	2,76	0,00	0,19
823	0,97	1,00	0,00	0,00	1,09
84	1,14	1,01	1,75	0,00	1,74
856	1,01	1,27	1,70	0,00	1,34

Versicherung

Ich erkläre: Ich habe die vorgelegte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt, die ich in der Dissertation angegeben habe.

Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht.

Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der „Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ niedergelegt sind, eingehalten.

Gießen, den 21.12.2011

Eva Susanne Hoffart