

Justus-Liebig-Universität Gießen
Mathematisches Institut

Periodische Lösungen von Differentialgleichungen
unter zustandsabhängiger Verzögerung:
Verzweigung im Monodromie-Spektrum

Therese Mur Voigt

1. Gutachter:

Prof. Dr. Hans-Otto Walther

2. Gutachter:

apl. Prof. Dr. Bernhard Lani-Wayda



15. Dezember 2019

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung	ii
I Einleitung	1
II Eine periodische Lösung einer Differentialgleichung mit konstanter Verzögerung	7
II.1 Das Anfangswertproblem	7
II.2 Eine periodische Lösung $p: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$	8
II.3 Der Monodromieoperator	12
III Der Einfluss einer zustandsabhängigen Verzögerung	14
III.1 Zustandsabhängige Verzögerung, Monodromieoperator	14
III.2 Der Monodromieoperator ist kompakt	16
III.3 Zustandsabhängige Verzögerung, die nichts ändert	19
III.4 Konstante Verzögerung als Spezialfall	21
III.5 Eine Klasse nichtinvasiver Verzögerungsfunktionale	22
III.6 Der Eigenwert 0 von M_c	24
III.7 Ein Randwertproblem mit Parameter	26
III.8 Charakteristische Gleichung und Resolventenberechnung	33
III.9 Die charakteristische Funktion	38
III.10 Suche nach Lösungen, Verzweigung von Eigenwerten	46
III.11 Vielfachheiten von Eigenwerten	55
III.12 Zur Periodenverdopplung beim Parameter Δ_*	62
A Untermannigfaltigkeiten, periodische Orbits	65
B Komplexifizierung	67
B.1 Anwendungen	69
C Spektrale Eigenschaften kompakter Operatoren	70
Literaturverzeichnis	71
Abbildungsverzeichnis	72
Selbständigkeitserklärung	73

Zusammenfassung

Es geht darum, die Stabilität einer periodischen Funktion $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die sowohl Lösung einer Differentialgleichung mit konstanter Verzögerung als auch Lösung einer Familie von Gleichungen mit variabler Verzögerung ist, zu vergleichen.

Als Ausgangsgleichung mit konstanter Verzögerung wurde folgende Gleichung betrachtet:

$$x'(t) = g(x(t-1)) \quad \text{für } t > 0,$$

wobei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade stetig differenzierbare Abbildung ist. Bei der Gleichung mit konstanter Verzögerung besteht das Spektrum des Monodromieoperators nur aus den Werten 0 und dem einfachen Multiplikator 1, also ist die periodische Lösung extrem attraktiv, während bei der Familie von Gleichungen mit variabler Verzögerung ein Eigenwert λ von der 0 abzweigt und gegen $-\infty$ wandert, wenn man die variable Verzögerung groß macht. Wenn der Eigenwert λ den Einheitskreis bei -1 überkreuzt, gibt es eine Periodenverdopplungsverzweigung und die periodische Lösung p verliert Stabilität.

I Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist, das Stabilitätsverhalten einer periodischer Lösung unter dem Einfluss variabler Verzögerung zu untersuchen. Allgemeiner geht es um den Einfluss variabler, zustandsabhängiger Verzögerung auf das Verhalten eines sonst einfach strukturierten dynamischen Systems. Bei konstanten Lösungen von Differentialgleichungen wie zum Beispiel

$$x'(t) = g(x(t-r))$$

mit $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, $g(0) = 0$, und konstanter Verzögerung $r > 0$ ändert sich die Variationsgleichung längs der konstanten Lösung $t \mapsto 0$ nicht, wenn man $r > 0$ durch eine zustandsabhängige Verzögerung $d(x_t)$ mit $d(0) = r$ ersetzt, die von der Lösung oder allgemeiner von ihrer Vorgeschichte

$$x_t: [-r, 2] \ni s \mapsto x(t+s) \in \mathbb{R}$$

auf $[t-r, t]$ abhängt. Daher bleibt das Stabilitätsverhalten der Lösung $t \mapsto 0$ bezüglich beider Differentialgleichungen auf dem Niveau von Linearisierungen dasselbe (wenn man beide Gleichungen im Rahmen der für zustandsabhängige Verzögerung entwickelten Theorie betrachtet [8]). Ein Einfluss zustandsabhängiger Verzögerung auf die (lineare) Stabilität ist also erst bei größeren invarianten Mengen möglich, etwa bei periodischen Orbits an Stelle von stationären Punkten.

In Kapitel II wird eine autonome Gleichung mit konstanter Verzögerung wie oben betrachtet, mit $r = 1$ und $\xi g(\xi) < 0$ für $\xi \neq 0$. Die Gleichung beschreibt negative Rückkopplung bezüglich der konstanten Lösung $t \mapsto 0$. Die Funktion g ist wie in [8, Chapter XV.2] so gewählt, dass man eine periodische Lösung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit Symmetrie $p(t) = -p(t+2)$ und minimaler Periode 4 explizit ausrechnen kann. Die Differentialgleichung definiert auf dem Banachraum $C = C([-2, 0], \mathbb{R})$ mit der Maximumsnorm einen stetigen Halbfluss $S: [0, \infty) \times C \rightarrow C$ durch

$$S(t, \phi) = x_t^\phi.$$

Hier ist $x^\phi: [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ die eindeutig bestimmte Lösung mit Anfangswert $x_0^\phi = x^\phi|_{[-2, 0]} = \phi$, und die Segmente x_t sind wie oben definiert durch

$$x_t(s) = x(t+s) \quad \text{für } t \geq 0 \quad \text{und } s \in [-2, 0].$$

Die “Lösungsoperatoren” $S_t = S(t, \cdot)$, $t \geq 0$, sind stetig differenzierbar. Über die Stabilität des periodischen Orbits

$$\mathcal{O} = \{p_t \in C \mid t \in \mathbb{R}\} = \{p_t \in C \mid 0 \leq t < 4\}$$

entscheidet das Spektrum $\sigma(M_I)$ des *Monodromieoperators* $M_I = DS_4(p_0)$, also der Linearisierung des Zeit-4-Lösungsoperators am Fixpunkt p_0 von S_4 . Der Mo-

nodromieoperator M_I ist ähnlich wie bei Gewöhnlichen Differentialgleichungen gegeben durch

$$M\chi = v_4^{p_0, \chi}$$

mit der Lösung $v^{p_0, \chi} : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der Variationsgleichung längs p ,

$$v'(t) = g(p(t-1))v(t-1)$$

zum Anfangswert $v_0^{p_0, \chi} = \chi \in C$. Da die Ableitung p' der Variationsgleichung genügt, ist das Segment p'_0 Eigenvektor von M_I zum Eigenwert 1. Der stetige lineare Operator $M_I : C \rightarrow C$ ist kompakt, daher besteht das Spektrum in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ nur aus isolierten Eigenwerten mit endlichdimensionalen verallgemeinerten Eigenräumen. Wenn zum Beispiel der Eigenwert 1 einfach ist (Dimension 1 des verallgemeinerten Eigenraums) und wenn alle anderen Eigenwerte $|\lambda| < 1$ erfüllen, ist der periodische Orbit stabil und exponentiell attraktiv mit asymptotischer Phase. In Kapitel II wird

$$C = M_I^{-1}(0) \oplus \mathbb{R}p'_0$$

gezeigt. Damit ist auch $0 \in \mathbb{C}$ Eigenwert, und der geometrische Eigenraum $M_I^{-1}(0)$ ist maximal mit Kodimension 1; der Eigenwert 1 ist einfach. Beim Beweis wird verwendet, dass Lösungen der nichtlinearen Differentialgleichung, die von Segmenten nah am periodischen Orbit starten, den periodischen Orbit mit ihren Segmenten x_t für $t \rightarrow \infty$ nicht nur exponentiell approximieren, sondern ihn in endlicher "Zeit" erreichen und dann auf ihm bleiben. Mehr Attraktivität geht nicht.

In Kapitel III werden nichtinvasive Verzögerungsfunktionale eingeführt. Das sind Abbildungen $d : C \rightarrow [0, 2]$, die auf dem periodischen Orbit den Wert 1 haben. Dann genügt die periodische Funktion p auch der Gleichung

$$x'(t) = g(x(t-d(x_t)))$$

mit zustandsabhängiger Verzögerung. Auf Anfangswertprobleme mit Delay-Differentialgleichungen dieser Art lassen sich die Resultate über Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen, die aus Monographien über Funktionaldifferentialgleichungen [3, 4] bekannt sind, nicht anwenden [8]. Wenn d stetig differenzierbar ist oder allgemeiner, wenn d nur auf dem kleineren Banachraum $C^1 = C^1([-2, 0], \mathbb{R}) \subseteq C$, mit $\|\varphi\|_{C^1} = \|\varphi\|_C + \|\varphi'\|_C$, definiert ist und stetig differenzierbar ist und einer weiteren Glattheitsbedingung genügt, dann ist die "Lösungsmannigfaltigkeit"

$$X = \{\phi \in C^1 \mid \phi'(0) = g(\phi(-d(\phi)))\}$$

eine stetig differenzierbare Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 in C^1 , und die stetig differenzierbaren Lösungen $[-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ der Differentialgleichung definieren auf X einen stetigen Halbfluss F mit stetig differenzierbaren Lösungsoperatoren [8]. Deshalb kann man wieder nach dem Spektrum des zu p gehörigen Monodromieoperators $M = M_d = DF_4(p_0)$ fragen. M bildet den Tangentialraum

$$Y = T_{p_0}X = \{\chi \in C^1 \mid \chi'(0) = 0\} \subset C^1$$

der Lösungsmannigfaltigkeit X in sich ab und ist kompakt (Abschnitt III.2). Der Monodromieoperator M_I aus Kapitel II, bzw. die von ihm auf Y induzierte Abbildung, ordnet sich als Spezialfall mit konstantem Funktional d ein (Abschnitt III.4).

In Abschnitt III.3 wird gezeigt, dass für gewisse nichtinvasive Verzögerungsfunktionale analog zum Fall konstanter Verzögerung in Kapitel II die Zerlegung

$$Y = M^{-1}(0) \oplus \mathbb{R}p'_0$$

besteht. Andere spektrale Eigenschaften sind nur möglich, wenn die Werte $d(\phi)$ abhängen von den Werten von ϕ nah bei $t = -2$. In Abschnitt III.5 wird eine Klasse solcher Funktionale eingeführt. Sie sind von der Form

$$d(\phi) = 1 + \delta(\phi(0) + \phi(-2))$$

mit stetig differenzierbaren Funktionen $\delta : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$, die $\delta(0) = 0$ erfüllen. Man nutzt hier die Symmetrie von p , um $d(p_t) = 1$ zu bekommen.

In Abschnitt III.6 und den folgenden wird komplexifiziert mit dem Banachraum $C_c^1 = C^1([-2, 0], \mathbb{C})$ an Stelle von C^1 und mit

$$Y_c = \{\chi \in C_c^1 \mid \chi'(0) = 0\}$$

sowie

$$M_c : Y_c \ni \chi \mapsto v_4^x \in Y_c.$$

Hier ist $v^x : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ komplexwertige Lösung der Variationsgleichung

$$v'(t) = g'(p(t-1))\{v(t-1) - p'(t-1)\Delta[v(t) + v(t-2)]\}, \quad \text{mit } \Delta = \delta'(0),$$

zum Anfangswert $v_0^x = \chi \in Y_c$. Für die Verzögerungsfunktionale aus Abschnitt III.5 mit

$$\Delta = \delta'(0) \neq 0$$

wird gezeigt, dass die spektralen Eigenschaften des Monodromieoperators M_c nicht mehr so einfach sind wie in den früheren Fällen. Der Punkt $0 \in \sigma(M_c)$ ist immer noch halbeinfacher Eigenwert, aber es gilt

$$M_c^{-1}(0) \oplus \mathbb{C}p'_0 \neq Y_c.$$

Gibt es nun auch Eigenwerte des Monodromieoperators, die von 0 und 1 verschieden sind? Um dies zu klären, wird in den Abschnitten III.7 - III.8 eine charakteristische Gleichung für Eigenwerte $\lambda \neq 0$ hergeleitet. Die Herleitung beginnt in Abschnitt III.7 mit einer Übersetzung der Gleichung

$$(M_c - \lambda)\chi = \eta$$

für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\chi \in Y_c$ und $\eta \in Y_c$ in ein Randwertproblem, die durch ein Verfahren aus [7] inspiriert ist. Man nutzt aus, dass die Periode 4 der Koeffizienten in der Variationsgleichung ein Vielfaches der "maximalen Verzögerung" 2 ist. Ist $\eta \in Y_c$

gegeben und gilt für $\chi \in Y_c$

$$\eta = M_c \chi - \lambda \chi = v_4^x - \lambda \chi,$$

so genügen $(u, w) : [-b, b] \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit

$$u(t) = v(t+3), \quad w(t) = v(t+1)$$

und geeignetem $b \in (0, 1)$ einer Differentialgleichung, die den Anfangswert $(u, w)(-b)$ sowie λ und η als Parameter enthält, und einer Randbedingung, die $(u, w)(-b)$, $(u, w)(b)$, λ und η verknüpft. Mit Hilfe der Variation-der-Konstanten-Formel für inhomogen lineare Gewöhnliche Differentialgleichungen und einer Fundamentalmatrixlösung ergibt sich eine Darstellung von (u, w) als Funktion von λ und η . Diese Darstellung liefert für λ in der Resolventenmenge $\rho(M_c) = \mathbb{C} \setminus \sigma(M_c)$, wenn also $M_c - \lambda : Y_c \rightarrow Y_c$ invertierbar ist, eine Formel für die Berechnung der Resolvente

$$(M_c - \lambda)^{-1} : Y_c \rightarrow Y_c.$$

Für Eigenwerte $\lambda \in \sigma(M_c) \setminus \{0\}$ gibt es nichttriviale Lösungen des Randwertproblems mit Parameter $\eta = 0$. Dies drückt sich im Verschwinden einer Determinante aus: So erhält man die charakteristische Gleichung

$$P(\lambda, \Delta) = 0$$

für die Eigenwerte $\lambda \neq 0$ des Monodromieoperators M_c (Abschnitt III.8).

Die Darstellung der *charakteristischen Funktion* $P(\cdot, \Delta) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ in Abschnitt III.8 ist noch nicht explizit genug für die Suche nach Nullstellen. Im nächsten Abschnitt III.9 wird $P(\lambda, \Delta)$ für $\Delta \neq 0$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ausgerechnet als Kombination von Polynomen, Wurzeln, Cosinus hyperbolicus und Sinus hyperbolicus. Es folgt, dass $P(\cdot, \Delta)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ holomorph ist mit einer hebaren Singularität bei $\lambda = 1$. Damit lässt sich zeigen, dass die Ordnung einer Nullstelle $\lambda \neq 0$ von $P(\cdot, \Delta)$ mit der Ordnung von λ als Pol der Resolvente von M_c übereinstimmt. Bewiesen wird davon am Ende des Abschnitts III.8 nur eine \geq -Beziehung, die im Folgenden benötigt wird, um Vielfachheiten von Eigenwerten (die Dimensionen von geometrischen und verallgemeinerten Eigenräumen) zu bestimmen.

Die Abschnitte III.10-III.12 enthalten die Hauptergebnisse der Arbeit. Darin wird eine 1-Parameterfamilie von nichtinvasiven Verzögerungsfunktionalen $d_\Delta : C \rightarrow [0, 2]$ mit Parameter $\Delta \in \mathbb{R}$ betrachtet,

$$d_\Delta(\chi) = 1 + \tilde{\delta}(\chi(0) + \chi(-2), \Delta) \quad \text{für alle } \chi \in C,$$

mit $\tilde{\delta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow (-1, 1)$ stetig differenzierbar,

$$\tilde{\delta}(0, \Delta) = 0, \quad \tilde{\delta}(\xi, 0) = 0, \quad \partial_1 \tilde{\delta}(0, \Delta) = \Delta.$$

Für $\Delta = 0$ hat man den Fall konstanter Verzögerung 1. In Abschnitt III.10 wird am Ende bewiesen, dass bei $\Delta = 0$ ein negativer Eigenwert $\lambda = \Lambda(\Delta) < 0$ von $M = M_{d_\Delta}$ weg von $\lambda = 0$ verzweigt und für wachsenden Parameter $0 < \Delta \rightarrow \infty$ streng monoton fallend nach $-\infty$ wandert. Dabei wird der Einheitskreis bei $\lambda = -1$ mit

von Null verschiedener Geschwindigkeit überquert. Weitere negative Eigenwerte außer $\Lambda(\Delta)$ gibt es nicht. In $(0, \infty)$ gibt es auch keine Eigenwerte. Was in $(0, 1)$ passiert, wird ohne detaillierte Beweise nur beschrieben: In $(0, 1)$ entstehen für gewisse kritische Parameter $\Delta_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise reelle Eigenwerte, deren Fortsetzungen $\lambda_n(\Delta)$ für $\Delta_n < \Delta \rightarrow \infty$ alle gegen 1 konvergieren. Für Parameter $\Delta < \Delta_n$ sollten Verzweigungen zu komplex konjugierten Paaren vorliegen.

Abschnitt III.11 behandelt Vielfachheiten von Eigenwerten im Blick auf Verzweigungen weg vom periodischen Orbit \mathcal{O} : Der Eigenwert 1 ist für alle $\Delta > 0$ einfach, und der Eigenwert -1 , den es für genau einen Parameter Δ_* gibt, ist ebenfalls einfach. Dass auch Eigenwerte höherer Vielfachheit vorkommen, zeigen die Betrachtungen aus Abschnitt III.10 über Eigenwerte in $(0, 1)$.

In Abschnitt III.12 wird beschrieben, wie aus den bewiesenen spektralen Eigenschaften der Monodromieoperatoren M_Δ auf eine Periodenverdopplungsverzweigung am kritischen Parameter Δ_* geschlossen werden kann.

Die Arbeit hat 3 Anhänge über Untermannigfaltigkeiten von Banachräumen, Komplexifizierung sowie Eigenschaften kompakter Operatoren, in denen Definitionen und Hilfsmittel zusammengestellt sind.

Bezeichnungen, Konventionen, Fakten. $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ bezeichnet die nicht-negativen ganzen Zahlen.

A^B bezeichnet die Menge aller Abbildungen einer Menge B in eine Menge A .

Der Abschluss einer Teilmenge $M \subset T$ eines topologischen Raums T wird \overline{M} oder $cl M$ geschrieben.

Für komplexe Zahlen $z \neq 0$, $z = |z|e^{i\theta}$ mit $0 \leq \theta < 2\pi$, wird

$$\sqrt{z} = \sqrt{|z|} e^{i\theta/2}$$

definiert.

$\mathbb{C}^{n \times m}$ steht für den Vektorraum aller Matrizen mit komplexen Einträgen, n Zeilen und m Spalten.

Nullraum $L^{-1}(0)$ und Wertemenge $L(V)$ einer linearen Abbildung $L : V \rightarrow W$ werden mit $\text{Ker}(L)$ und $\text{Bild}(L)$ bezeichnet.

Ist V ein Vektorraum über \mathbb{K} , $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und ist $L : V \rightarrow V$ linear und ist $\lambda \in \mathbb{K}$ gegeben, so wird gelegentlich

$$L - \lambda = L - \lambda I = L - \lambda Id$$

abgekürzt, mit $Id(v) = v$.

$L_c(V, W)$ steht für den normierten Raum alle stetigen linearen Abbildungen des normierten Raums V in den normierten Raum W , mit der durch

$$|T| = \sup_{|v| \leq 1} |Tv|$$

gegebenen Norm.

Die Evaluationsabbildung

$$C([a, b], \mathbb{C}) \times [a, b] \ni (\phi, t) \mapsto \phi(t) \in \mathbb{C}$$

ist stetig, aber nicht lokal Lipschitzstetig, vergleiche z. B. [8].

II Eine periodische Lösung einer Differentialgleichung mit konstanter Verzögerung

II.1 Das Anfangswertproblem

Betrachte folgendes Anfangswertproblem mit konstanter Verzögerung

$$(II.1) \quad x'(t) = g(x(t-1)) \quad \text{für } t > 0,$$

$$(II.2) \quad x(t) = \varphi(t) \quad \text{für alle } t \in [-2, 0],$$

wobei $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade stetig differenzierbare Abbildung ist mit

$$g(x) = 1 \quad \text{für } x \leq -b, \quad g(x) = -1 \quad \text{für } x \geq b, \quad 0 < b < 1/3,$$

und mit $g'(x) < 0$ für $-b < x < b$. Insbesondere gilt $g(x)x < 0$ für alle $x \neq 0$, und Gleichung (II.1) beschreibt negative Rückkopplung mit Verzögerung 1 bezüglich der konstanten Lösung $t \mapsto 0$. Die Funktion g wird in der Abbildung II.1 dargestellt:

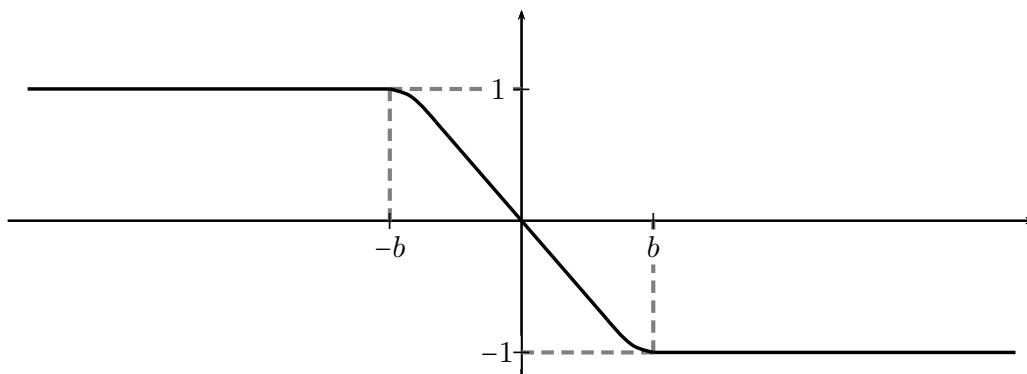


Abbildung II.1: Die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Wir betrachten den Raum

$$C := \{\varphi: [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R} \mid \varphi \text{ ist stetig}\}$$

mit der durch $\|\varphi\|_C := \max_{-2 \leq t \leq 0} |\varphi(t)|$ gegebenen Norm.

Sei $x: I \rightarrow \mathbb{R}$, eine Funktion. Im Fall $[t-2, t) \subseteq I$, mit $t \in \mathbb{R}$ wird das Segment oder die Vorgeschichte durch $x_t(s) = x(t+s)$ erklärt.

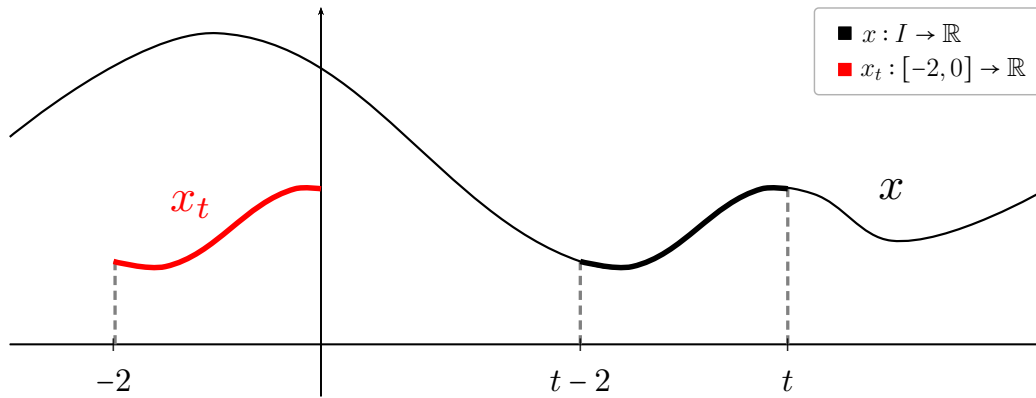


Abbildung II.2: Die Segmente x_t

Definition II.1.1 (Lösung). Eine Lösung des Anfangswertproblem (II.1) ist eine stetige Abbildung $x : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x_0 = \varphi$, die für alle $t > 0$ differenzierbar ist und bei $t = 0$ eine rechtsseitige Ableitung hat, so dass Gleichung (II.1) für alle $t \geq 0$ erfüllt ist (bei $t = 0$ mit der rechtsseitigen Ableitung).

Durch wiederholte Integration der rechten Seite von der Gleichung (II.1) auf den Intervallen $[n, n + 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ kann man zeigen, dass es zu jedem $\varphi \in C$ genau eine Lösung $x^\varphi : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ zu Gleichung (II.1) gibt.

Außerdem hängen die Lösungen stetig von den Anfangswerten ab:

Proposition II.1.2. Sei $\varphi \in C$, zu jedem $T > 0$ und zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung \mathcal{U} von $\varphi \in C$ mit

$$|x^\chi(t) - x^\varphi(t)| < \varepsilon \text{ für alle } \chi \in \mathcal{U} \text{ und alle } t \in [-2, T].$$

Siehe dazu [3, Section XV.1].

Da g ungerade ist, sieht man, dass mit einer Lösung x von Gleichung (II.1) auch $-x$ Lösung von Gleichung (II.1) ist.

Anmerkung II.1.3. Um Lösungen des Anfangswertproblems zu Gleichung (II.1) zu bekommen, würde es genügen, Anfangswerte nur auf $[-1, 0]$ vorzuschreiben. Wir betrachten Anfangswerte, die im Intervall $[-2, 0]$ definiert sind, im Blick auf die Differentialgleichungen mit zustandsabhängiger Verzögerung, die im Kapitel III untersucht werden.

II.2 Eine periodische Lösung $p : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$

Sei $\varphi : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $\varphi(t) = t$ für alle $t \in [-b, 0]$ und $\varphi(t) \leq -b$ für alle $t \in [-1, -b]$.

Wir konstruieren, ähnlich wie in [3, Section XV.2], zuerst die zugehörige Lösung schrittweise auf den Intervallen $[0, 1 - b] \cup [1 - b, 1 + b] \cup [1 + b, 2]$.

- Für alle $t \in [0, 1 - b]$ setzt man $p(t) = t$. Dann gilt

$$p'(t) = 1 = g(\underbrace{\varphi(t-1)}_{\leq -b}) \quad \text{auf} \quad [0, 1 - b].$$

- Für $t \in [1 - b, 1 + b]$ setzen wir

$$\begin{aligned} p(t) &= p(1 - b) + \int_{1-b}^t g(p(s-1)) ds \\ &= 1 - b + \int_{1-b}^t g(s-1) ds \\ &= 1 - b + \int_{-b}^{t-1} g(s) ds \end{aligned}$$

Dann ist p auf $[1 - b, 1 + b]$ differenzierbar und erfüllt die Gleichung (II.1). Man sieht, dass p auf $[1 - b, 1]$ monoton wachsend ist und auf $[1, 1 + b]$ fallend ist. Da g ungerade ist, folgt

$$\begin{aligned} p(1+t) - p(1-t) &= \int_{1-t}^{1+t} g(p(s-1)) ds \\ &= \int_{-t}^{+t} g(p(s)) ds \\ &= \int_{-t}^{+t} g(s) ds \\ &= 0 \quad \text{für } 0 \leq t \leq b, \end{aligned}$$

also insbesondere $p(1+b) = p(1-b)$.

- Auf $[1 + b, 2]$ definiert man $p(t) = 2 - t$. Man sieht leicht, dass p auf $[0, 2]$ differenzierbar ist. Gleichung (II.1) ist auf $[1 + b, 2]$ erfüllt, wegen $p'(t) = -1$ und weil für $t \in [1 + b, 2]$ gilt: $b \leq t - 1 \leq 1$, also $b \leq p(t - 1)$, also $g(p(t - 1)) = -1$.

Das Segment $-p_2$ hat nun die gleichen Eigenschaften wie φ . Man geht analog wie oben vor und definiert schrittweise p auf $[2, 4] = [2, 3 - b] \cup [3 - b, 3 + b] \cup [3 + b, 4]$. Für $\varphi = p_4$ erhält man eine differenzierbare Funktion $p: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$, die Gleichung (II.1) auf $[0, 4]$ erfüllt, mit $p(t) = -p(-t)$ auf $[0, 2]$ und mit der Symmetrie $p(t) = -p(t - 2)$ für alle $t \in [2, 4]$.

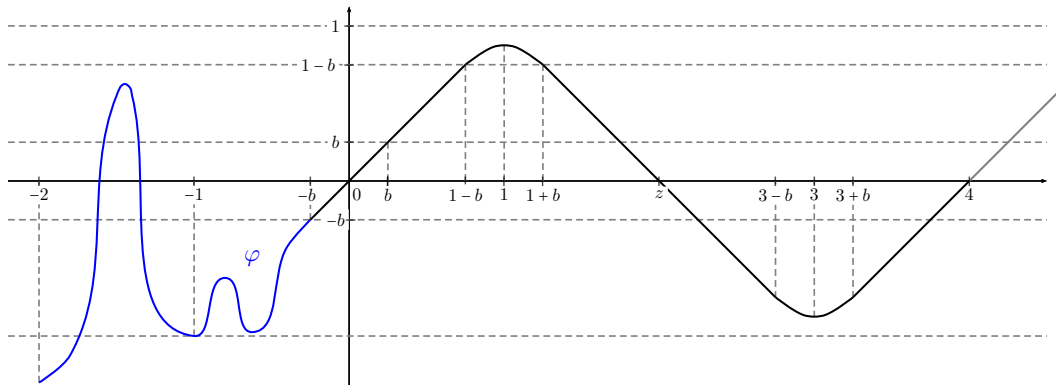


Abbildung II.3: Die Lösung $p: [-2, \infty) \rightarrow (-1, 1)$

Periodische Fortsetzung von $p|_{[0,4]}$ liefert eine periodische Lösung $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von Gleichung (II.1) mit den folgenden Eigenschaften.

Proposition II.2.1 (Periodische Lösung). *Es gibt eine Lösung $p: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ von (II.1) mit $p(t) = -p(t-2)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ (insbesondere hat p die Periode 4) und*

- (i) $p(0) = 0$,
- (ii) $p'(t) = 1$ auf $[0, 1-b]$,
- (iii) $p(1+t) = p(1-t)$ für alle $t \in [0, 1]$.

Gleichung (II.1) zeigt, dass p zweimal stetig differenzierbar ist. Wir werden im Folgenden zeigen, dass der Orbit

$$\mathcal{O} := \{p_t \in C \mid t \in \mathbb{R}\}$$

extrem attraktiv ist, im Sinn der nächsten Proposition.

Proposition II.2.2. (i) *Zu jedem $t \in [0, 4]$ gibt es eine Umgebung \mathcal{U}_{p_t} von p_t , sodass zu jedem $\varphi \in \mathcal{U}_{p_t}$ ein $t_\varphi \in [0, 5]$ existiert mit*

$$x^\varphi(t_\varphi + t) = p(t) \text{ für alle } t \geq -b.$$

(ii) *Im Fall $t = 0$ existiert eine Umgebung \mathcal{U}_{p_0} von p_0 mit $x_4^\varphi \in \mathcal{O}$.*

Beweis. (i) Sei $t_0 \in [0, 4]$, $\psi := p_{t_0}$. Dann gilt $x^\psi(u) = p(t_0 + u)$ für alle $u \geq 2$. Es gibt ein $s_0 \in [0, 4]$ mit

$$-1 < p(t_0 + s_0 + u) = x^\psi(s_0 + u) < -b \text{ für alle } u \in [-1, 0].$$

Es folgt

$$-1 < \min_{t_0+s_0-1 \leq t \leq t_0+s_0} p(t) \text{ und } \max_{t_0+s_0-1 \leq t \leq t_0+s_0} p(t) < -b.$$

Wähle $\varepsilon > 0$ mit

$$-1 < \min_{t_0+s_0-1 \leq t \leq t_0+s_0} p(t) - \varepsilon \text{ und } \max_{t_0+s_0-1 \leq t \leq t_0+s_0} p(t) + \varepsilon < -b.$$

Proposition II.1.2 liefert eine Umgebung U_ψ von $\psi \in C$ mit

$$|x^\chi(t) - p(t_0 + t)| < \varepsilon \text{ für alle } \chi \in U_\psi \text{ und alle } t \in [-2, s_0].$$

Es folgt für alle $\chi \in U_\psi$ und alle $t \in [s_0 - 1, s_0]$, dass

$$-1 < p(t_0 + t) - \varepsilon < x^\chi(t) < p(t_0 + t) + \varepsilon < -b$$

Die Differenzialgleichung (II.1) liefert für $y := x^\chi$ und für $t \in [s_0, s_0 + 1]$

$$y'(t) = g(\underbrace{y(t-1)}_{\in [-1, -b]}) = 1,$$

also gilt für alle $t \in [s_0, s_0 + 1]$:

$$y(t) = y(s_0) + (t - s_0).$$

Mit $-1 < y(s_0) < -b$ folgt für $t = s_0 - y(s_0) < s_0 + 1$, dass

$$\underbrace{y(s_0 - y(s_0))}_{=t} = y(s_0) + \underbrace{(s_0 - y(s_0) - s_0)}_{=t} = 0.$$

Beachte, dass $y_{s_0 - y(s_0)}$ die gleichen Eigenschaften wie φ bei der Konstruktion von p hat:

$$y(s_0 - y(s_0) + u) = u = \varphi(u) \text{ auf } [-b, 0] \text{ und } y(s_0 - y(s_0) + u) \leq -b \text{ auf } [-1, b].$$

Ähnlich wie bei der Konstruktion von p folgt $y(s_0 - y(s_0) + u) = p(u)$ für alle $u \geq -b$. Beachte $s_0 - y(s_0) \leq 4 + 1 = 5$.

(ii) Im Fall $t_0 = 0$ gilt

$$b < p(t) < 1 \text{ für alle } t \in (b, 2 - b).$$

Für $s_0 := 1 + 2b$ (mit $s_0 < 2 - b$ wegen $b < \frac{1}{3}$) und alle $t \in [-1, 0]$ also $b < p(s_0 + t) < 1$. Beachte, dass auch $p(2 + b) < 0$. Wegen Proposition II.1.2 findet man eine Umgebung \mathcal{U}_{p_0} von p_0 , sodass für alle $y = x^\varphi$ mit $\varphi \in \mathcal{U}_{p_0}$ gilt:

$$b < y(t) < 1 \text{ auf } [s_0 - 1, s_0] = [2b, 1 + 2b],$$

und

$$y(2 + b) < 0$$

Wie oben erhält man

$$y'(t) = -1 \text{ auf } [s_0, s_0 + 1] = [1 + 2b, 2 + 2b].$$

Mit $0 < b < y(s_0) = y(1 + 2b)$ sowie $1 + 2b < 2 + b < 2 + 2b$ und $y(2 + b) < 0$ folgt, dass die Nullstelle $z_0 = s_0 + y(s_0)$ vor $2 + b$ liegt.

Ebenso folgt aus $s_0 = 1 + 2b < z_0$, $b < y(s_0)$, $y'(t) = -1$ auf $[s_0, z_0]$ die Ungleichung

$$s_0 < z_0 - b \quad (< z_0 < s_0 + 1).$$

Insbesondere ergibt sich $y'(t) = -1$ auf $[z_0 - b, z_0]$ (und $b < y(t)$ auf $[z_0 - 1, z_0 - b] \subseteq [s_0 - 1, z_0]$).

Nun erhält man ähnlich wie bei der Konstruktion von p

$$y(z_0 + t) = p(2 + t) \text{ für alle } t \geq -b.$$

Es gilt $z_0 - b + 2 \leq 4$ wegen $z_0 < 2 + b$, und für alle $t \in [-2, 0]$ gilt

$$y_{z_0 - b + 2}(t) = y(z_0 - b + 2 + t) = p(2 + (-b + 2 + t)) = p_{4-b}(t),$$

also $y_{z_0 - b + 2} = p_{4-b}$.

Daraus folgt (mit Hilfe der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems (II.1)-(II.2))

$$y_4^\varphi = y_4 = y_{z_0-b+2+(4-(z_0-b+2))} = p_{4-b+(4-(z_0-b+2))} \in \mathcal{O}$$

□

Anmerkung II.2.3. Proposition II.2.2 zeigt, dass es eine Umgebung \mathcal{U} des periodischen Orbits \mathcal{O} gibt mit $x_t^\varphi \in \mathcal{O}$ für alle $\varphi \in \mathcal{U}$ und alle $t \geq 7$.

II.3 Der Monodromieoperator

Ähnlich wie bei Gewöhnlichen Differentialgleichungen sind die Stabilitätseigenschaften des periodischen Orbits \mathcal{O} durch das Spektrum eines Monodromieoperators gegeben.

Vorbereitungen dazu nach [3]: Das Anfangswertproblem (II.1)-(II.2) definiert einen Halbfluss (ein Semidynamisches System) $S : [0, \infty) \times C \rightarrow C$ durch $S(t, \varphi) = x_t^\varphi$. Jede Abbildung $S_t : C \ni \varphi \mapsto S(t, \varphi) \in C, t \geq 0$, ist stetig differenzierbar, und für alle $\varphi \in C, t \geq 0, \chi \in C$ gilt $DS_t(\varphi)\chi = v_t^{\varphi, \chi}$ mit der Lösung $v^{\varphi, \chi} : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$(II.3) \quad v'(t) = g'(x^\varphi(t-1))v(t-1) \text{ für alle } t > 0,$$

$$(II.4) \quad v_0 = \chi \in C.$$

Die Gleichung (II.3) heißt lineare Variationsgleichung längs der Lösung x^φ von Gleichung (II.1)

Ähnlich wie bei Gleichung (II.1) gibt es zu jedem φ, χ in C eine Lösung $v^{\varphi, \chi}$ des Anfangswertproblem (II.3)-(II.4), sodass jede weitere Lösung desselben Anfangswertproblems Einschränkung von $v^{\varphi, \chi}$ ist.

Definition II.3.1. Die stetigen linearen Abbildungen $DS_4(p_t), 0 \leq t \leq 4$, heißen Monodromieoperatoren zum periodischen Orbit \mathcal{O} .

Sei $M_I = DS_4(p_0)$.

Anmerkung II.3.2. Es gilt $M_I p'_0 = p'_0$, denn Differenziation von Gleichung (II.1) mit $x = p$ zeigt, dass p' der Variationsgleichung längs p genügt, also

$$M_I p'_0 = v_4^{p_0, p'_0} = p'_4 = p'_0.$$

Die Zahl 1 ist also Eigenwert von M_I . Wenn 1 Eigenwert mit algebraischer Vielfachheit 1 ist und wenn alle anderen Punkte des Spektrums von M_I im Inneren des Einheitskreises von \mathbb{C} liegen, so ist der periodische Orbit \mathcal{O} stabil und exponentiell attraktiv mit asymptotischer Phase [3].

Wir kommen zu spektralen Eigenschaften von M_I .

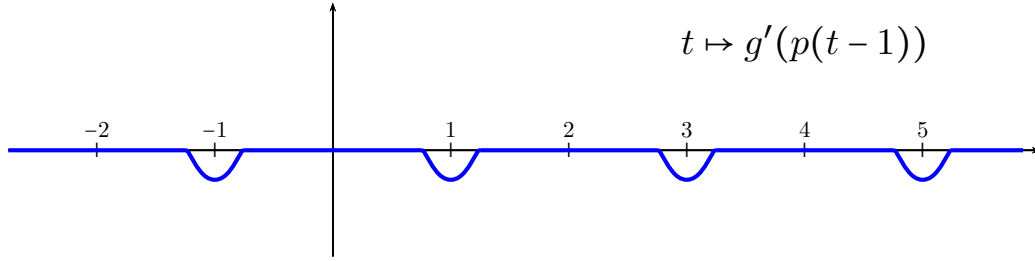


Abbildung II.4: Der Koeffizient $t \mapsto g'(p(t-1))$ der Variationsgleichung

Proposition II.2.2 liefert $S_4(\varphi) \in \mathcal{O}$ für alle φ in einer Umgebung von p_0 . Daraus folgt mit $S_4(p_0) = p_4$, dass die Ableitung $M_I = D_2S(4, p_0)$ den ganzen Raum C in den eindimensionalen Tangentialraum

$$T_{S(4, p_0)}\mathcal{O} = T_{p_4}\mathcal{O} = T_{p_0}\mathcal{O} = \mathbb{R}p'_0$$

des periodischen Orbits \mathcal{O} abbildet, siehe Anhang A.

Folgerung II.3.3.

$$C = M_I^{-1}(0) \oplus \mathbb{R}p'_0.$$

Beweis. $M_I^{-1}(0)$ als Urbild der abgeschlossenen Menge $\{0\}$ unter der stetigen linearen Abbildung M_I sowie der eindimensionalen Raum $\mathbb{R}p'_0$ sind abgeschlossene Unterräume von C .

Zu zeigen bleibt: $C \subseteq M_I^{-1}(0) + \mathbb{R}p'_0$ und $M_I^{-1}(0) \cap \mathbb{R}p'_0 \subseteq \{0\}$.

Beweis der ersten Inklusion: Ist $\varphi \in C$, so gilt $\varphi = (\varphi - M_I\varphi) + M_I\varphi$, und $M_I\varphi \in \mathbb{R}p'_0$.

Wegen $M_I p'_0 = p'_0$ gilt für alle $\chi \in \mathbb{R}p'_0$ die Gleichung $M_I\chi = \chi$.

Damit:

$$M_I(\varphi - M_I\varphi) = M_I\varphi - M_I(M_I\varphi) = M_I\varphi - M_I\varphi = 0,$$

also $\varphi - M_I\varphi \in M_I^{-1}(0)$.

Beweis der zweiten Inklusion: Ist $\varphi \in M_I^{-1}(0) \cap \mathbb{R}p'_0$, so gelten $M_I\varphi = 0$ und $\varphi = rp'_0$ mit $r \in \mathbb{R}$. Es folgt

$$0 = M_I\varphi = M_Irp'_0 = rM_Ip'_0 = rp'_0,$$

und daraus wegen $p'_0 \neq 0$: $r = 0$, also $\varphi = rp'_0 = 0$. □

Dies spiegelt die extrem starke Attraktivität des periodischen Orbits \mathcal{O} als Eigenschaft des Monodromieoperators wieder.

Folgerung II.3.4. Der (reellen) Operator M_I hat nur die Eigenwerte 0 und 1.

Beweis. Sei $M_I\varphi = \lambda\varphi$, $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$, $0 \neq \varphi \in C$. Dann gilt $\lambda\varphi = M_I\varphi \in \mathbb{R}p'_0$, folglich $\varphi \in \mathbb{R}p'_0$, daher $\varphi = M_I\varphi$ ($= \lambda\varphi$), schließlich $\lambda = 1$. □

Folgerung II.3.3 sagt, dass der geometrische Eigenraum des Eigenwerts 0 die Kodimension 1 hat.

III Der Einfluss einer zustandsabhängigen Verzögerung

III.1 Zustandsabhängige Verzögerung, Monodromieoperator

Sei C^1 der Banachraum der stetig differenzierbaren $\varphi \in C$ mit der durch $\|\varphi\|_{C^1} := \|\varphi\|_C + \|\varphi'\|_C$ gegebenen Norm.

Sei $d: C^1 \rightarrow (0, 2)$ stetig differenzierbar mit $d(p_t) = 1$ für alle $t \in [0, 4]$. Dann ist p auch Lösung der Differentialgleichung

$$(III.1) \quad x'(t) = g(x(t - d(x_t)))$$

mit zustandsabhängiger Verzögerung. Deswegen nennt man d nichtinvasiv. Mit dem Funktional

$$f: C^1 \ni \varphi \mapsto g(\varphi(-d(\varphi))) \in \mathbb{R}$$

nimmt die Gleichung (III.1) die Form

$$(III.2) \quad x'(t) = f(x_t)$$

an. Für f gilt

$$f = g \circ ev \circ (id \times (-d))$$

mit der Evaluationsabbildung

$$ev: C^1 \times (-2, 0) \ni (\varphi, t) \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R},$$

die stetig differenzierbar ist mit

$$Dev(\varphi, t)(\chi, s) = D_1 ev(\varphi, t)\chi + D_2 ev(\varphi, t)s,$$

$$D_1 ev(\varphi, t)\chi = ev(\chi, t) \text{ und } D_2 ev(\varphi, t)1 = \varphi'(t),$$

siehe [8].

Proposition III.1.1 (Siehe [8]). *Die Abbildung f ist stetig differenzierbar, mit*

$$Df(\varphi)\chi = g'(\varphi(-d(\varphi)))\{\chi(-d(\varphi)) - \varphi'(-d(\varphi))Dd(\varphi)\chi\}.$$

Beweis. Mit Hilfe der Kettenregel folgt:

$$\begin{aligned} Df(\varphi)\chi &= D(g \circ ev \circ (id \times (-d)))(\varphi)\chi \\ &= Dg(\varphi(-d(\varphi)))\{D_1 ev(\varphi, -d(\varphi))\chi \\ &\quad + D_2 ev(\varphi, -d(\varphi))D(-d)(\varphi)\chi\} \\ &= g'(\varphi(-d(\varphi)))\{\chi(-d(\varphi)) - \varphi'(-d(\varphi))Dd(\varphi)\chi\}. \end{aligned}$$

□

Die Abbildung f hat auch folgende Erweiterungseigenschaft:

- (E) Jede Abbildung $Df(\varphi) : C^1 \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine lineare Fortsetzung $D_e f(\varphi) : C \rightarrow \mathbb{R}$, und $C^1 \times C \ni (\varphi, \chi) \mapsto D_e f(\varphi)\chi \in \mathbb{R}$ ist stetig,

falls d die Eigenschaft (E) hat. Dies soll in diesem Kapitel vorausgesetzt werden. In [5, 8] wird mit Hilfe der Erweiterungseigenschaft gezeigt, dass die Menge

$$X := \{\varphi \in C^1 \mid \varphi'(0) = f(\varphi)\}$$

eine stetig differenzierbare Untermannigfaltigkeit von C^1 mit Kodimension 1 ist, und dass zu jedem $\varphi \in X$ eine Lösung $x : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ von (III.2) mit $x_0 = \varphi$ existiert, so dass jede weitere Lösung desselben Anfangswertproblems eine Einschränkung von x ist. Diese maximale Lösung wird mit x^φ bezeichnet.

Dabei verstehen wir unter einer Lösung von Gleichung (III.2) eine stetig differenzierbare Funktion $x : [-2, t_e) \rightarrow \mathbb{R}$, $0 < t_e \leq \infty$, welche für alle $t \in [0, t_e)$ die Gleichung (III.2) erfüllt. Etwas allgemeiner betrachten wir auch Lösungen auf Intervallen $[t_0 - 2, t_e) \rightarrow \mathbb{R}$, $t_0 < t_e \leq \infty$, und Lösungen auf ganz \mathbb{R} .

Die Gleichung $F(t, \varphi) = x_t^\varphi$ definiert einen stetigen Halbfluss

$$F : [0, \infty) \times X \rightarrow X,$$

sodass alle Lösungsoperatoren

$$F(t, \cdot) : X \rightarrow X, \quad t \geq 0,$$

stetig differenzierbar sind.

Für alle $t \geq 0$, $\varphi \in C^1$ und $\chi \in C^1$ gilt

$$D_2 F(t, \varphi)\chi = v_t^{\varphi, \chi}$$

mit der stetig differenzierbaren Lösung $v = v^{\varphi, \chi}$ des Anfangswertproblems

$$(III.3) \quad \begin{aligned} v'(t) &= Df(F(t, \varphi))v_t \quad \text{für } t \geq 0, \\ v_0 &= \chi \in T_\varphi X \end{aligned}$$

zur Variationsgleichung (III.3). Dabei bildet $D_2 F(t, \varphi)$ den Tangentialraum

$$T_\varphi X = \{\chi \in C^1 \mid \chi'(0) = Df(\varphi)\chi\}$$

in den Tangentialraum $T_{F(t, \varphi)} X$ ab.

Im Folgenden betrachten wir den Monodromieoperator

$$M = D_2 F(4, p_0),$$

der $Y := T_{p_0}X$ in sich abbildet, also $M\chi = v_4^{p_0, \chi}$ für alle $\chi \in Y$. Es gilt

$$Y = \{\varphi \in C^1 \mid \varphi'(0) = 0\},$$

denn für alle $\chi \in C^1$ gilt wegen $p(-1) < -b$

$$Df(p_0)\chi = g'(p(-1))\{\dots\} = 0.$$

Wie in Anmerkung II.3.2 gilt

$$Mp'_0 = p'_0,$$

wobei p'_0 als Tangentenvektor der stetig differenzierbaren Kurve $\mathbb{R} \ni t \mapsto p_t \in X \subseteq C^1$ im Tangentialraum $Y = T_{p_0}X \subseteq C^1$ liegt, vergleiche Anhang A.

Mit Proposition III.1.1 wird aus der Variationsgleichung (III.3) mit $\varphi = p_0$ die Gleichung

$$(III.4) \quad v'(t) = g'(p(t-1))\{v(t-1) - p'(t-1)Dd(p_t)v_t\}$$

Proposition III.1.2. *Jede Lösung der Variationsgleichung (III.4) ist auf Intervallen der Form $(2n+1+b, 2n+3-b)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ konstant.*

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$, für jedes $t \in (2n+1+b, 2n+3-b)$, ist $t-1 \in (2n+b, 2n+2-b)$, also $p(t-1) \in (-\infty, -b) \cup (b, +\infty)$, wegen der Definition von g ist $g'(p(t-1)) = 0$, daher ist jede Lösung v von Gleichung (III.4) auf $(2n+1+b, 2n+3-b)$ konstant wegen $v'(t) = g'(p(t-1))\{\dots\} = 0$. \square

III.2 Der Monodromieoperator ist kompakt

Proposition III.2.1. *Der Monodromieoperator M ist kompakt.*

Beweis. (i) Sei $B \subseteq Y \subseteq C^1$ beschränkt. Zu zeigen ist, dass $MB \subseteq Y \subseteq C^1$ kompakten Abschluss hat. Dies folgt, falls jede Folge $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in MB eine bezüglich $\|\cdot\|_{C^1}$ konvergente Teilfolge hat. Dazu genügt, dass $(\eta_j)_{j \in \mathbb{N}}$ und $(\eta'_j)_0^\infty$ beide bezüglich $\|\cdot\|_C$ konvergente Teilfolgen haben.

Letzteres gilt, falls man den Satz von Arzelà-Ascoli [11] auf MB und

$$\partial MB := \{\eta' \in C \mid \eta \in MB\}$$

anwenden kann. Dazu müssen MB und ∂MB bezüglich der Norm $\|\cdot\|_C$ beschränkt sowie gleichgradig stetig sein.

(ii) Behauptung [5, 8]: Zu jedem $\varphi \in C^1$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $\|D_e f(\psi)\|_{L_c(C, \mathbb{R})} \leq 1/\delta$ für alle $\psi \in C^1$ mit $\|\psi - \varphi\|_{C^1} < \delta$.

Beweis davon: Sei $\varphi \in C^1$. Wegen der Stetigkeit von $C^1 \times C \ni (\varphi, \tilde{\chi}) \rightarrow D_e f(\varphi)\tilde{\chi} \in \mathbb{R}$ an der Stelle $(\varphi, 0)$ kann $\varepsilon = 1$ gewählt werden, dann gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $\psi \in C^1$ und alle $\tilde{\chi} \in C$ mit $\|\psi - \varphi\|_{C^1} \leq \delta$ und mit $\|\tilde{\chi} - 0\|_C \leq \delta$ gilt

$$|D_e f(\psi)\tilde{\chi}| = |D_e f(\psi)\tilde{\chi} - \underbrace{D_e f(\varphi)(0)}_{=0}| < 1.$$

Sei $\psi \in C^1$ mit $\|\psi - \varphi\|_{C^1} \leq \delta$ und sei $\chi \in C$ mit $\|\chi\|_C \leq 1$ gegeben. Mit $\tilde{\chi} = \delta\chi$ folgt $|D_{ef}(\psi)\chi| < 1/\delta$. Dies liefert $\|D_{ef}(\psi)\|_{L_c(C, \mathbb{R})} \leq 1/\delta$.

(iii) Behauptung: Die Menge $\{D_{ef}(p_s) \in L_c(C, \mathbb{R}) \mid 0 \leq s \leq 4\}$ ist beschränkt.

Beweis davon: Die Abbildung $\mathbb{R} \ni s \mapsto p_s \in C^1$ ist stetig, weil der Halbfluss stetig ist. Es folgt, dass der periodische Orbit kompakt ist. Nach (ii) existieren zu jedem $\chi \in \mathcal{O}$ eine Umgebung U_χ in C^1 und ein $K_\chi > 0$ mit $\|D_{ef}(\varphi)\|_{L_c(C, \mathbb{R})} \leq K_\chi$ für alle $\varphi \in U_\chi$.

Wegen der Kompaktheit von \mathcal{O} überdecken endlich viele $U_{\chi_1}, \dots, U_{\chi_n}$ die Menge \mathcal{O} , also

$$\mathcal{O} \subseteq \bigcup_{\nu=1}^n U_{\chi_\nu}.$$

Sei $K := \max_{\nu=1, \dots, n} K_{\chi_\nu}$, es folgt für alle $s \in [0, 4]$, dass

$$p_s \in \mathcal{O} \subseteq \bigcup_{\nu=1}^n U_{\chi_\nu},$$

also gibt es ein $\nu \in \{1, \dots, n\}$ mit $p_s \in U_{\chi_\nu}$, also $\|D_{ef}(p_s)\|_{L_c(C, \mathbb{R})} \leq K_{\chi_\nu} \leq K$.

(iv) Behauptung: $\tilde{B} := \{v^{p_0, \beta} \in C^1 \mid \beta \in B, 0 \leq s \leq 4\} \supseteq MB$ ist bezüglich $\|\cdot\|_C$ durch $L_1 = \sup_{\beta \in B} \|\beta\|_C e^{4K}$ beschränkt.

Beweis davon: Sei $t \in [0, 4]$, und $\beta \in B$ und $v = v^{p_0, \beta}$. Es gilt:

$$\begin{aligned} |v(t)| &\leq |v(0)| + \int_0^t |v'(s)| ds \\ &\leq \max_{-2 \leq u \leq 0} |v(u)| + \int_0^t |D_{ef}(p_s)v_s| ds \\ &\leq \|v_0\|_C + K \int_0^t \|v_s\|_C ds, \end{aligned}$$

Sei $s \in [0, t]$. Betrachte $v_s : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$. Dazu gibt es ein $u \in [-2, 0]$ mit

$$\|v_s\|_C = \max_{-2 \leq \tilde{u} \leq 0} |v_s(\tilde{u})| = \max_{-2 \leq \tilde{u} \leq 0} |v(s + \tilde{u})| = |v(s + u)|.$$

Im Fall $0 \leq s + u$ ($\leq t \leq 4$) ist

$$\|v_s\|_C = |v(s + u)| \leq \|v_0\|_C + K \int_0^{s+u} \|v_\tau\|_C d\tau \leq \|v_0\|_C + K \int_0^s \|v_\tau\|_C d\tau.$$

Im Fall $s + u < 0$ gilt

$$\|v_s\|_C = |v(s + u)| \leq \|v_0\|_C \leq \underbrace{\|v_0\|_C + K \int_0^s \|v_\tau\|_C d\tau}_{\geq 0}.$$

Also gilt für alle $s \in [0, t]$

$$\|v_s\|_C \leq \|v_0\|_C + K \int_0^s \|v_\tau\|_C d\tau.$$

Durch Verwendung des Gronwallschen Lemmas erhält man, dass für alle $s \in [0, t]$ mit $t \in [0, 4]$ die Ungleichung

$$\|v_s\|_C \leq \|v_0\|_C e^{Ks} \text{ gilt, das heisst, } \|v_s\|_C \text{ ist durch } L_1 := \sup_{\tilde{\beta} \in B} |\tilde{\beta}|_C e^{4K} \text{ beschränkt.}$$

Also sind \tilde{B} und auch MB durch L_1 beschränkt.

(v) Behauptung: Für alle $\beta \in B$ und alle $t \in [0, 4]$ gilt $|(v^{p_0, \beta})'(t)| \leq KL_1$, und ∂MB ist beschränkt.

Beweis davon: Sei $\beta \in B$, $v = v^{p_0, \beta}$. Für alle $t \in [0, 4]$ gilt wegen Teil (iii) und (iv) des Beweises

$$|v'(t)| = |Df(p_t)v_t| = |D_e f(p_t)v_t| \leq \|D_e f(p_t)\|_{L_c(C, \mathbb{R})} \|v_t\|_C \leq KL_1.$$

Es folgt: $\|(v_s^{p_0, \beta})'\|_C \leq KL_1$ für alle β aus B und alle $s \in [2, 4]$.

(vi) Wegen Teil (v) ist KL_1 eine Lipschitzkonstante für alle Funktionen in

$$B_0 = \{v_s^{p_0, \beta} \in C^1 \mid \beta \in B, 2 \leq s \leq 4\} \supseteq MB.$$

Daher sind MB und B_0 gleichgradig stetig.

(vii) Da MB und B_0 auch beschränkt sind (Teil (iv)), sind die Voraussetzungen des Satzes von Arzelà-Ascoli für MB und B_0 erfüllt. Insbesondere ist der Abschluss von B_0 in C kompakt.

(viii) Nach Teil (v) ist ∂MB bezüglich $\|\cdot\|_C$ beschränkt. Es bleibt zu zeigen, dass ∂MB gleichgradig stetig ist.

Beweis davon: Sei $\varepsilon > 0$. Die Abbildung $[2, 4] \ni \tau \mapsto p_\tau \in X \subseteq C^1$ ist stetig, ebenso die Abbildung $[2, 4] \times C \ni (\tau, \chi) \mapsto D_e f(p_\tau)\chi \in \mathbb{R}$. Auf der kompakten Menge $[2, 4] \times \overline{B_0}$ ist sie gleichmäßig stetig. Also gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$\|D_e f(p_\sigma)\chi - D_e f(p_\tau)\lambda\| < \varepsilon/2$$

für alle χ, λ in $\overline{B_0}$ mit $\|\chi - \lambda\|_C < \delta$ und σ oder τ in $[2, 4]$ mit $|\sigma - \tau| < \delta$.

Für alle s, t in $[-2, 0]$ und für alle $\beta \in B$ folgt mit $v = v^{p_0, \beta}$

$$\begin{aligned} |v'_4(s) - v'_4(t)| &= |v'(4+s) - v'(4+t)| \\ &= |Df(p_{4+s})v_{4+s} - Df(p_{4+t})v_{4+t}| \\ &= |D_e f(p_{4+s})v_{4+s} - D_e f(p_{4+t})v_{4+t}| \\ &\leq |D_e f(p_{4+s})v_{4+s} - D_e f(p_{4+s})v_{4+t}| \\ &\quad + |D_e f(p_{4+s})v_{4+t} - D_e f(p_{4+t})v_{4+t}| \\ &= |D_e f(p_{4+s})(v_{4+s} - v_{4+t})| \\ &\quad + |D_e f(p_{4+s})v_{4+t} - D_e f(p_{4+t})v_{4+t}| \\ &\leq \|D_e f(p_{4+s})\|_{L_c(C, \mathbb{R})} \|v_{4+s} - v_{4+t}\|_C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |D_e f(p_{4+s})v_{4+t} - D_e f(p_{4+t})v_{4+t}| \\
& \leq K^2 L_1 |s - t| + |D_e f(p_{4+s})v_{4+t} - D_e f(p_{4+t})v_{4+t}|,
\end{aligned}$$

wegen Teil (iii) und weil aus (v) folgt

$$\|v_{4+s} - v_{4+t}\|_C = \max_{-2 \leq u \leq 0} |v(4+s+u) - v(4+t+u)| \leq K L_1 |s - t|.$$

Weiter erhalten wir im Fall $|s - t| < \delta$ und $|s - t| < \frac{\varepsilon}{2K^2 L_1 + 1}$

$$|v'_4(s) - v'_4(t)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

□

Erinnerung: Ist B ein unendlichdimensionaler Banachraum über \mathbb{C} und ist $L : B \rightarrow B$ linear, stetig und kompakt, dann enthält das Spektrum

$$\sigma(L) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (L - \lambda I) \text{ nicht bijektiv}\}$$

$0 \in \mathbb{C}$ und besteht sonst aus höchstens abzählbar vielen Eigenwerten von endlicher algebraischer Vielfachheit, die sich nur bei 0 häufen können, siehe Anhang C, Bemerkung C.2.

III.3 Zustandsabhängige Verzögerung, die nichts ändert

In diesem Abschnitt betrachten wir ein stetig differenzierbares Verzögerungsfunktional $d : C^1 \rightarrow (0, 2)$ mit Eigenschaft (E) und setzen voraus, dass längs des periodischen Orbits die Richtungsableitungen $Dd(p_t)\varphi$ mit $\varphi \in C^1$ nicht von den Werten von φ nah bei -2 abhängen, genauer

$$(H) \quad Dd(p_t)\varphi = Dd(p_t)\psi \text{ für alle } \varphi, \psi \in C^1 \text{ mit } \varphi(s) = \psi(s) \text{ für } 2b - 2 \leq s \leq 0, \text{ und für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Wir zeigen im Folgenden unter der Voraussetzung (H), dass das Spektrum des Monodromieoperators M nur aus 0 und 1 besteht, analog zu den Eigenschaften von M_I (Folgerungen II.3.3 und II.3.4).

Proposition III.3.1. *Für $\eta \in Y$ mit $M\eta = 0$ gilt $v^{p_0, \eta}(1 + b) = 0$. Ist (H) erfüllt, so gilt auch die Umkehrung: $M\eta = 0$ für alle $\eta \in Y$ mit $y^{p_0, \eta}(1 + b) = 0$.*

Beweis. Teil 1. Sei $M\eta = 0$ für ein $\eta \in Y$. Sei $v = v^{p_0, \eta}$.

• Behauptung: $v(2) = 0$. Wegen $v_4 = 0$ gilt $v(4 + t) = 0$ für alle $t \in [-2, 0]$, also $v(t) = 0$ für $2 \leq t \leq 4$, insbesondere $v(2) = 0$.

• Behauptung: $v'(t) = 0$ für alle $t \in [1 + b, 2]$. Sei $t \in [1 + b, 2]$, dann ist $p(t - 1) \geq b$, also $g'(p(t - 1)) = 0$, daraus folgt $v'(t) = 0$.

Wegen beiden Behauptungen ist v auf $[1 + b, 2]$ konstant mit $v(2) = 0$, also $v(1 + b) = 0$.

Teil 2. Angenommen, die Voraussetzung (H) ist erfüllt. Sei $\eta \in Y$ ein Anfangswert und $v = v^{p_0, \eta}$ mit $v(1 + b) = 0$. Zu zeigen ist $M\eta = 0$, also $v_4(t) = 0$ für alle $t \in [-2, 0]$, das heißt $v(t) = 0$ für alle $t \in [2, 4]$.

• Behauptung: $v(t) = 0$ für alle $t \in [1 + b, 3 - b]$. Nach Voraussetzung ist $v(1 + b) = 0$. Sei $t \in [1 + b, 3 - b]$, dann ist $p(t - 1) \geq b$, also $g'(p(t - 1)) = 0$. Also $v'(t) = 0$ für alle $t \in [1 + b, 3 - b]$ und $v(1 + b) = 0$, folglich ist $v(t) = 0$ für alle $t \in [1 + b, 3 - b]$.

• Behauptung: $v(t) = 0$ für alle $t \geq 3 - b$. Betrachte die Abbildung $\tilde{v}: [1 - b, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v(t) & \text{für } 1 - b \leq t \leq 1 + b, \\ 0 & \text{für } 1 + b < t. \end{cases}$$

Es folgt, dass $v(t) = \tilde{v}(t)$ für alle $t \in [1 + b, 3 - b]$. Die Abbildung \tilde{v} erfüllt für alle $t \geq 3 - b$ die Differentialgleichung (III.4): Sei $t \geq 3 - b$. Dann gilt $\tilde{v}'(t) = 0$, ferner $\tilde{v}(t - 1) = 0$ (wegen $t - 1 \geq 2 - b > 1 + b$).

Für \tilde{v}_t und für alle $s \in [-2 + 2b, 0]$ gilt: $t + s \geq 3 - b - 2 + 2b = 1 + b$, also $\tilde{v}_t(s) = \tilde{v}(t + s) = 0$.

Eigenschaft (H) liefert:

$$Dd(p_t)\tilde{v}_t = Dd(p_t)0 = 0.$$

Zusammen folgt:

$$\tilde{v}'(t) = 0 = g'(p(t - 1))\{\tilde{v}(t - 1) - p'(t - 1)Dd_t(p_t)\tilde{v}_t\}.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Lösung des Anfangswertproblems und $\tilde{v}_{3-b} = v_{3-b}$ folgt für alle $t \geq 3 - b$: $v(t) = \tilde{v}(t) = 0$.

Schließlich gilt für alle $t \geq 2$: $v(t) = 0$, daher $M\eta = v_4 = 0$. □

Proposition III.3.2. *Es gelten $Y = M^{-1}(0) \oplus \mathbb{R}p'_0$, $Y_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \oplus \mathbb{C}p'_0$, und das Spektrum von M ist $\sigma(M_{\mathbb{C}}) = \{0, 1\}$.*

Beweis. Sei $H := \{\eta \in Y \mid v^\eta(1 + b) = 0\} = M^{-1}(0)$.

• Behauptung: H ist eine abgeschlossene Hyperebene im Banachraum Y . Sei $F: Y \ni \eta \mapsto v^\eta(1 + b) \in \mathbb{R}$, dann ist $\text{Ker}(F) = H$, außerdem ist F stetig und linear, da $F = l \circ \tilde{F}$ ist, wobei $\tilde{F}: Y \ni \eta \mapsto D_2S(1 + b, p_0)\eta \in T_{p_{1+b}}X \subseteq C^1 \subseteq C$ und $l: C \ni \chi \mapsto \chi(0) \in \mathbb{R}$ lineare und stetige Abbildungen sind.

Beachte $F(p'_0) = p'(1 + b) \neq 0$, also $F \neq 0$. Folglich ist H eine abgeschlossene Hyperebene.

- Behauptung: Der Banachraum Y kann in $Y = H \oplus \mathbb{R}p'_0$ ($= M^{-1}(0) \oplus \mathbb{R}p'_0$) zerlegt werden. Wegen $p'(1+b) \neq 0$ gilt $p'_0 \notin H$. Daraus folgt

$$Y = H \oplus \mathbb{R}p'_0 = M^{-1}(0) \oplus \mathbb{R}p'_0 \quad \text{mit Proposition III.3.1}$$

- Behauptung: $Y_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \oplus \mathbb{C}(p'_0, 0)$.

Für $Y_{\mathbb{C}} = Y \times Y$ und

$$M_{\mathbb{C}} : Y \times Y \ni (\eta, \tilde{\eta}) \mapsto (M\eta, M\tilde{\eta}) \in Y \times Y$$

erhalten wir

$$\begin{aligned} M_{\mathbb{C}}^{-1}(0) &= \{(\eta, \tilde{\eta}) \in Y \times Y \mid M_{\mathbb{C}}(\eta, \tilde{\eta}) = (0, 0)\} \\ &= \{(\eta, \tilde{\eta}) \in Y \times Y \mid (M\eta, M\tilde{\eta}) = (0, 0)\} \\ &= \{(\eta, \tilde{\eta}) \in Y \times Y \mid \eta \in M^{-1}(0), \tilde{\eta} \in M^{-1}(0)\} \\ &= M^{-1}(0) \times M^{-1}(0). \end{aligned}$$

Beachte $\mathbb{C}(p'_0, 0) = \mathbb{R}p'_0 \times \mathbb{R}p'_0$ (folgt mit Hilfe von

$$i(p'_0, 0) = (0 + i \cdot 1)(p'_0, 0) = (0, 1 \cdot p'_0) = (0, p'_0) \quad).$$

Es gilt

$$\begin{aligned} Y \times Y &\subseteq (M^{-1}(0) + \mathbb{R}p'_0) \times (M^{-1}(0) + \mathbb{R}p'_0) \\ &\subseteq (M^{-1}(0) \times M^{-1}(0)) + (\mathbb{R}p'_0 \times \mathbb{R}p'_0) \\ &= M_{\mathbb{C}}^{-1}(0) + \mathbb{C}(p'_0, 0) \end{aligned}$$

und für alle $(\eta, \tilde{\eta}) \in M_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \mathbb{C}(p'_0, 0) = M_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap (\mathbb{R}p'_0 \times \mathbb{R}p'_0)$ haben wir $\eta \in M^{-1}(0) \cap \mathbb{R}p'_0$ sowie $\tilde{\eta} \in M^{-1}(0) \cap \mathbb{R}p'_0$, folglich $\eta = 0 = \tilde{\eta}$.

Daher $M_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \cap \mathbb{C}(p'_0, 0) = \{(0, 0)\}$, und es folgt

$$Y_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \oplus \mathbb{C}(p'_0, 0).$$

- Behauptung: $\sigma(M_{\mathbb{C}}) = \{0, 1\}$.

Da M linear, stetig und kompakt ist, gilt dies auch für $M_{\mathbb{C}}$ (Siehe Anhang B). Jedes $\lambda \in \sigma(M) \setminus \{0\} = \sigma(M_{\mathbb{C}}) \setminus \{0\}$ ist dann Eigenwert. Wie im Beweis von Folgerung II.3.4 ergibt sich, dass 1 der einzige von Null verschiedene Eigenwert ist. Damit

$$\{0, 1\} \subseteq \sigma(M_{\mathbb{C}}) \subseteq \{0, 1\}.$$

□

III.4 Konstante Verzögerung als Spezialfall

Im Fall von Gleichung (III.1) mit

$$d(\varphi) = 1 \quad \text{für alle } \varphi \in C^1$$

wird Gleichung (III.1) zu (II.1), d ist stetig differenzierbar, die Erweiterungseigenschaft gilt mit $D_e d(\varphi)\chi = 0$ für alle $\varphi \in C^1$ und alle $\chi \in C$, und die Voraussetzung (H) aus Abschnitt III.3 wird erfüllt.

Daher gelten $\sigma(M) = \sigma(M_{\mathbb{C}}) = \{0, 1\}$ und

$$Y_{\mathbb{C}} = M_{\mathbb{C}}^{-1}(0) \oplus \mathbb{C}(p'_0, 0)$$

für dem Monodromieoperator $M : Y \rightarrow Y$, analog zu den Eigenschaften des Monodromieoperators $M_I : C \rightarrow C$ aus Abschnitt II.3.

III.5 Eine Klasse nichtinvasiver Verzögerungsfunktionale

Wir sind jetzt an Verzögerungsfunktionalen mit $d(p_t) = 1$ längst des periodischen Orbits interessiert, für die die Bedingung (H) aus Abschnitt III.3 verletzt ist und für die deshalb die einfache Situation aus Proposition III.3.2 (mit Spektrum von M gleich $\{0, 1\}$ und $M^{-1}(0) \oplus \mathbb{R}p'_0 = Y$) nicht mehr vorliegen muss. Das stetige lineare Funktional $L : C \rightarrow \mathbb{R}$, $L\varphi = \varphi(0) + \varphi(-2)$, verschwindet längst des periodischen Orbits \mathcal{O} . Ist $\delta : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $\delta(0) = 0$, so betrachten wir das Verzögerungsfunktional

$$d : C \ni \varphi \mapsto 1 + \delta(L(\varphi)) \in [0, 2] \subseteq \mathbb{R}.$$

Dann gilt $d(p_t) = 1 + \delta(L(p_t)) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beachte, dass für alle $\varphi \in C$ und alle $\chi \in C$ gilt

$$Dd(\varphi)\chi = D\delta(L(\varphi))L\chi = L\chi D\delta(L\varphi)1 = L\chi\delta'(L\varphi)$$

also für alle $t \in \mathbb{R}$ und alle $\chi \in C$:

$$Dd(p_t)\chi = L\chi\delta'(0) = \delta'(0)[\chi(0) + \chi(-2)]$$

Man sieht, dass im Fall $\delta'(0) \neq 0$ die Bedingung (H) verletzt ist.

Proposition III.5.1. $d|_{C^1}$ hat die Eigenschaft (E).

Beweis. Da $d : C \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist und da die Inklusionsabbildung $j : C^1 \ni \varphi \mapsto \varphi \in C$ stetig und linear ist, ist auch $d|_{C^1} = d \circ j$ stetig differenzierbar.

Mit $D_e \left(d|_{C^1} \right) (\varphi)\chi := Dd(j(\varphi))\chi$ für alle $\varphi \in C^1$ und alle $\chi \in C$ lässt sich für $d|_{C^1}$ die Eigenschaft (E) zeigen. □

Ab jetzt wird $\Delta := \delta'(0)$ gesetzt.

Die Variationsgleichung (III.4) wird zu

$$(III.5) \quad v'(t) = g'(p(t-1))\{v(t-1) - p'(t-1)\Delta[v(t) + v(t-2)]\}.$$

Uns interessieren die spektralen Eigenschaften des zugehörigen Monodromieoperators $M : Y \rightarrow Y$, also Eigenschaften der Komplexifizierung $M_{\mathbb{C}} : Y_{\mathbb{C}} \rightarrow Y_{\mathbb{C}}$.

Diese lassen sich bequemer studieren, wenn man komplexwertige Lösungen der Variationsgleichung betrachtet (Anhang B). Sei C_c der Banachraum über \mathbb{C} der stetigen Funktionen $[-2, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ mit der durch

$$\|\varphi\|_{C_c} = \max_{-2 \leq t \leq 0} |\varphi(t)|$$

gegebenen Norm, und sei C_c^1 der Banachraum über \mathbb{C} der stetig differenzierbaren Funktionen $[-2, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ mit der durch

$$\|\varphi\|_{C_c^1} = \max_{-2 \leq t \leq 0} |\varphi(t)| + \max_{-2 \leq t \leq 0} |\varphi'(t)|$$

gegebenen Norm.

Sei

$$Y_c = \{\zeta \in C_c^1 \mid \zeta'(0) = 0\}.$$

Der Monodromieoperator

$$M_c : Y_c \ni \zeta \mapsto v_4^\zeta \in Y_c$$

mit der eindeutig bestimmten Lösung $v^\zeta : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ der Variationsgleichung zum Anfangswert $v^\zeta \Big|_{[-2, 0]} = \zeta \in Y_c$ erfüllt

$$J(M_c \zeta) = M_{\mathbb{C}}(J\zeta) \quad \text{für alle } \zeta \in C_c,$$

mit dem Isomorphismus

$$J : \mathbb{C}^{[-2, 0]} \rightarrow (\mathbb{R}^{[-2, 0]})_{\mathbb{C}},$$

$$(J\zeta)(t) = ((\operatorname{Re} \circ \zeta)(t), (\operatorname{Im} \circ \zeta)(t)) \quad \text{für alle } \zeta \in \mathbb{C}^{[-2, 0]} \text{ und } t \in [-2, 0],$$

$$\operatorname{Re} : \mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{2}(z + \bar{z}) \in \mathbb{R}, \quad \operatorname{Im} : \mathbb{C} \ni z \mapsto \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \in \mathbb{R}.$$

Siehe Anhang B.

M_c ist wie $M_{\mathbb{C}}$ linear, stetig und kompakt: die Spektren von M_c und von $M_{\mathbb{C}}$ stimmen überein, und die algebraischen Vielfachheiten der gemeinsamen Eigenwerte $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ sind gleich; es gilt

$$M_c J^{-1}(p'_0, 0) = J^{-1}(p'_0, 0).$$

(oder einfacher: $M_c p'_{c,0} = p'_{c,0}$ mit $p_c : \mathbb{R} \ni t \mapsto p(t) \in \mathbb{C}$).

Der Spektrum $\sigma(M_c)$ ist höchstens abzählbar, jedes $\lambda \in \sigma(M_c) \setminus \{0\}$ ist Eigenwert von endlicher algebraischer Vielfachheit

$$\dim(G_\lambda) < \infty, \quad G_\lambda := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} ((M_c - \lambda Id)^n)^{-1}(0),$$

$$0 \in \sigma(M_c),$$

$$1 \in \sigma(M_c) \text{ mit } \mathbb{C}p'_{c,0} \subseteq E_1 = (M_c - Id)^{-1}(0),$$

vergleiche Anhang C.

Für $\Delta = 0$ reduziert sich Gleichung (III.5) auf die Variationsgleichung aus Kapitel II.

Im nächsten Abschnitt betrachten wir den Fall $\Delta \neq 0$ und sammeln erste Eigenschaften von $\sigma(M_c)$.

Beachte, dass auch in diesem Fall $\sigma(M_c) = \{0, 1\}$ gelten kann, obwohl die Voraussetzung (H) aus Abschnitt III.3 verletzt ist. Im folgenden wird verwendet, dass die Aussage von Proposition III.1.2 auch für komplexwertige Lösungen der Variationsgleichung (III.5) gilt.

III.6 Der Eigenwert 0 von M_c

In diesem Abschnitt ist $\Delta \neq 0$ vorausgesetzt. In den nächsten Bemerkungen untersuchen wir den Kern von M_c .

Proposition III.6.1. *Es gilt $M_c^{-1}(0) \subseteq \{\eta \in Y_c : v^\eta(s) = 0 \text{ auf } [0, 4]\}$.*

Beweis. Sei $\eta \in M_c^{-1}(0)$, es soll gezeigt werden, dass $v^\eta(s) = 0$ auf $[0, 4]$.

- Behauptung: $v^\eta(t) = 0$ auf $[1 + b, 4]$. Aus $\eta \in M_c^{-1}(0)$ folgt $v_4^\eta = 0$ das heißt $v^\eta(t) = 0$ auf $[2, 4]$. Wegen $v^\eta(3 - b) = 0$ und da v^η konstant auf $[1 + b, 3 - b]$ ist, gilt $v^\eta = 0$ auf $[1 + b, 4]$.

- Behauptung: $v^\eta(t) = 0$ auf $[0, 1 + b]$. Sei $s \in (3 - b, 3 + b)$, nach vorheriger Behauptung gilt $(v^\eta)'(s) = 0$, daher ist

$$\begin{aligned} 0 &= g'(p(s-1)) \underbrace{\{v^\eta(s-1) - p'(s-1) \Delta[v^\eta(s) + v^\eta(s-2)]\}}_{=0} \\ &= g'(p(s-1)) \Delta v^\eta(s-2). \end{aligned}$$

Beachte $g'(p(s-1)) = g'(-p(s-3)) = g'(3-s) \neq 0$. Mit $\Delta \neq 0$ ergibt sich $v^\eta(s-2) = 0$, also $v^\eta(t) = 0$ auf $[1 - b, 1 + b]$, und da $v^\eta(t)$ auf $[0, 1 - b]$ konstant ist und $v^\eta(1 - b) = 0$ ist, gilt schließlich $v^\eta(t) = 0$ auf $[0, 1 + b]$.

Aus beiden Behauptungen folgt $v^\eta(s) = 0$ für alle $s \in [0, 4]$, also

$$M_c^{-1}(0) \subseteq \{\eta \in Y_c : v^\eta(s) = 0 \text{ auf } [0, 4]\}.$$

□

Die nächste Proposition zeigt, dass 0 ein Eigenwert von M_c ist mit unendlichdimensionalem Eigenraum.

Proposition III.6.2. *Es gilt*

$$M_c^{-1}(0) = \{\eta \in Y_c \mid \eta(t) = 0 \text{ auf } [-1, -1 + b] \text{ und } \eta(t) = \Delta \eta(t-1) \text{ auf } [-b, 0]\}.$$

Beweis. (\subseteq) Sei $\eta \in M_c^{-1}(0)$, dann ist $\eta \in Y_c$ und wegen Proposition III.6.1 gilt $v^\eta(t) = 0$ auf $t \in [0, 4]$.

- Behauptung: $\eta(t) = \Delta\eta(t-1)$ auf $[-b, 0]$. Sei $s \in (1-b, 1]$, dann gilt

$$0 = (v^\eta)'(s) = \underbrace{g'(p(s-1))}_{\neq 0} \{ \underbrace{\eta(s-1)}_{=1} - \underbrace{p'(s-1)}_{=0} \Delta[v^\eta(s) + \eta(s-2)] \}.$$

Daraus folgt $0 = \eta(s-1) - \Delta\eta(s-2)$, also gilt $\eta(t) = \Delta\eta(t-1)$ auf $[-b, 0]$.

- Behauptung: $\eta(t) = 0$ auf $[-1, -1+b]$. Sei $s \in [1, 1+b]$, dann gilt

$$0 = (v^\eta)'(s) = \underbrace{g'(p(s-1))}_{\neq 0} \{ \underbrace{v^\eta(s-1)}_{=0} - \underbrace{\Delta}_{\neq 0} \underbrace{p'(s-1)}_{=1} \underbrace{[v^\eta(s) + \eta(s-2)]}_{=0} \},$$

also $\eta(s-2) = 0$ das heißt $\eta(t) = 0$ auf $[-1, -1+b]$.

Aus beiden Behauptungen folgt

$$M_c^{-1}(0) \subseteq \{ \eta \in Y_c \mid \eta(t) = 0 \text{ auf } [-1, -1+b] \text{ und } \eta(t) = \Delta\eta(t-1) \text{ auf } [-b, 0] \}.$$

(\supseteq) Sei η aus Y_c mit $\eta(t) = 0$ auf $[-1, -1+b]$ und $\eta(t) = \Delta\eta(t-1)$ auf $[-b, 0]$ gegeben. Dann wird folgende Abbildung definiert:

$$v^\eta(t) = \begin{cases} \eta(t) & \text{für } -2 \leq t \leq 0, \\ 0 & \text{für } 0 < t \leq 4. \end{cases}$$

Man bemerkt, dass v stetig und differenzierbar ist und die Variationsgleichung auf $[2, 4]$ erfüllt. Wegen $g'(p(t-1)) = 0$ auf $[0, 1-b] \cup [1+b, 2]$ ist die Variationsgleichung auch auf diesem Intervall erfüllt. Zu zeigen bleibt, dass v^η die Variationsgleichung in $[1-b, 1+b]$ erfüllt.

- Behauptung: v^η erfüllt die Gleichung für $t \in (1-b, 1]$. Sei $t \in (1-b, 1]$, dann gilt $v^\eta(t) = 0$, also $(v^\eta)'(t) = 0$, daher gilt

$$\begin{aligned} & g'(p(t-1)) \{ v(t-1) - p'(t-1) \Delta[v^\eta(t) + v^\eta(t-2)] \} \\ &= \underbrace{g'(p(t-1))}_{\neq 0} \{ \underbrace{\eta(t-1)}_{=1} - \underbrace{p'(t-1)}_{=0} \Delta[v^\eta(t) + \eta(t-2)] \} \\ &= g'(p(t-1)) \{ \Delta\eta(t-2) - \Delta\eta(t-2) \} \\ &\quad (\text{wegen } \eta(t) = \Delta\eta(t-1) \text{ auf } [-b, 0]) \\ &= 0 = (v^\eta)'(t). \end{aligned}$$

- Behauptung: v^η erfüllt die Gleichung für $t \in [1, 1+b]$. Sei $t \in [1, 1+b]$, dann gilt $v^\eta(t) = 0$, also $(v^\eta)'(t) = 0$, daher ist

$$g'(p(t-1)) \{ \underbrace{v^\eta(t-1)}_{=0} - \underbrace{p'(t-1)}_{=1} \underbrace{\Delta}_{=0} \underbrace{[v^\eta(t) - \eta(t-2)]}_{=0} \} = 0 = (v^\eta)'(t).$$

□

Proposition III.6.3. $M_c^{-1}(0) \oplus \mathbb{C}p'_{c,0} \not\subseteq Y_c$.

Beweis. Die Summe ist direkt, weil wegen $M_c p'_{c,0} = p'_{c,0} \neq 0$ gilt: $p'_{c,0} \notin M_c^{-1}(0)$. Für alle $z \in \mathbb{C}$ und alle $\eta \in M_c^{-1}(0)$ gilt

$$(\eta + zp'_{c,0})(-1) = 0,$$

für alle ζ aus Y_c mit $\zeta(-1) \neq 0$ gilt daher $\zeta \notin M_c^{-1}(0) + \mathbb{C}p_{c,0}$. \square

Der Eigenwert 0 von M_c ist halbeinfach im Sinn folgender Aussage.

Proposition III.6.4. *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(M_c^n)^{-1}(0) = M_c^{-1}(0)$.*

Beweis. • Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $(M_c^n)^{-1}(0) \subseteq (M_c^{n+1})^{-1}(0)$, denn aus $M_c^n \varphi = 0$ folgt $M_c^{n+1} \varphi = 0$.

• Behauptung: $(M_c^2)^{-1}(0) \subseteq M_c^{-1}(0)$. Beweis davon: Sei $\zeta \in (M_c^2)^{-1}(0)$, also $0 = M_c^2 \zeta = M_c(M_c \zeta)$, $M_c \zeta \in M_c^{-1}(0)$.

v^ζ ist auf beiden Intervallen $[2, 3 - b], [3 + b, 4]$ konstant. Daher ist $M_c \zeta$ auf den Intervallen $[-2, -1 - b], [-1 + b, 0]$ konstant. Mit Proposition III.6.2 folgt $(M_c \zeta)(t) = 0$ auf $[-1, -1 + b] \cup [-1 + b, 0]$, und weiter, für alle t aus $[-1 - b, -1]$, $\Delta(M_c \zeta)(t) = (M_c \zeta)(t+1) = 0$. Schließlich folgt $(M_c \zeta)(t) = 0$ auch auf $[-2, -1 - b]$. Insgesamt $M_c \zeta = 0$, also $\zeta \in M_c^{-1}(0)$.

• Wir führen den Beweis mit Induktion zu Ende. Angenommen es gilt für ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 1$ $(M_c^n)^{-1}(0) \subseteq M_c^{-1}(0)$. Sei $\zeta \in (M_c^{n+1})^{-1}(0)$. Dann $0 = (M_c)^{n+1} \zeta = M_c^n(M_c \zeta)$,

$$M_c \zeta \in (M_c^n)^{-1}(0) \subseteq M_c^{-1}(0) \quad (\text{mit Induktionsvoraussetzung}),$$

$M_c(M_c(\zeta)) = 0$, daraus wie oben $M_c(\zeta) = 0$ und $\zeta \in M_c^{-1}(0)$. Gezeigt

$$(M_c^{n+1})^{-1}(0) \subseteq M_c^{-1}(0).$$

\square

III.7 Die Gleichung $M_c \zeta - \lambda \zeta = \eta$ und ein Randwertproblem mit Parameter

Im diesem Abschnitt charakterisieren wir die Lösbarkeit der Gleichung $M_c \zeta - \lambda \zeta = \eta$ für $\eta \in C_c$ und $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ durch die Lösbarkeit eines Randwertproblems für ein System von zwei Differenzialgleichungen, welche den Parameter λ enthalten. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist dieses System

$$(\lambda, \eta) \quad \begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix} (t) = A_\lambda(t) \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} (t) + g'(t) \begin{pmatrix} u(-b) \\ \frac{1}{\lambda} u(b) \end{pmatrix} + g'(t) \begin{pmatrix} 0 \\ z(\lambda, \eta, t) + \frac{\Delta}{\lambda} \eta(t-1) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in [-b, b]$, mit der Abbildung

$$A_\lambda : \mathbb{R} \ni t \mapsto g'(t) \Delta \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/\lambda & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

und $z : (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times C_c \times [-b, b] \rightarrow \mathbb{C}$,

$$z(\lambda, \eta, t) = \begin{cases} -\frac{1}{\lambda} \eta(t) & t \in [-b, 0], \\ -\frac{1}{\lambda} \eta(0) & t \in [0, b]. \end{cases}$$

Die Randbedingung ist

$$(\lambda, \eta, RB) \quad \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(-b) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(b) - \eta(0) \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\lambda \end{pmatrix}.$$

Proposition III.7.1. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(i) Sei $\eta \in Y_c$ und sei $v : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ Lösung von (III.5) mit $v_0 \in Y_c$ und $M_c v_0 - \lambda v_0 = v_4 - \lambda v_0 = \eta$. Dann ist durch $u(t) = v(t+3)$ und $w(t) = v(t+1)$ für $t \in [-b, b]$ eine Lösung des Randwertproblems (λ, η) - (λ, η, RB) gegeben.

(ii) Sei $\eta \in Y_c$ und sei $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} : [-b, b] \rightarrow \mathbb{C}^2$ Lösung von (λ, η) - (λ, η, RB) , dann ist die durch

$$v(t) = \begin{cases} w(-b) & \text{auf } [0, 1-b], \\ w(t-1) & \text{auf } [1-b, 1+b], \\ w(b) & \text{auf } [1+b, 3-b], \\ u(t-3) & \text{auf } [3-b, 3+b], \\ u(b) & \text{auf } [3+b, 4], \\ \frac{1}{\lambda} [v(4+t) - \eta(t)] & \text{auf } [-2, 0], \end{cases}$$

definierte Funktion $v : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar, genügt für alle $s \in [0, 4]$ der Variationsgleichung (III.5), und erfüllt $v'(0) = 0$ (also $v_0 \in Y_c$), sowie

$$v_4 - \lambda v_0 = \eta$$

Im Fall $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt $v_0 \neq 0$.

Beweis. (i) Seien $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\zeta \in Y_c$, sodass

$$M_c \zeta - \lambda \zeta = \eta \in Y_c,$$

und sei $v : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ Lösung der Variationsgleichung (III.5) mit $v_0 = \zeta \in Y_c$. Dann ist v konstant auf $[0, 1-b]$, $[1+b, 3-b]$, $[3+b, 4]$ wegen $v'(t) = g'(p(t-1)) \{ \dots \} = 0$ auf diesen Intervallen, vergleiche Proposition III.1.2. Betrachte $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} : [-b, b] \rightarrow \mathbb{C}^2$ mit

$$\begin{aligned} u(t) &:= v(3+t) \\ w(t) &:= v(1+t). \end{aligned}$$

Beachte, dass $z(\lambda, \eta, t) + \frac{u(b)}{\lambda}$ mit $v(t)$ für alle $t \in [-b, b]$ übereinstimmt, in der

Tat, sei $t \in [0, b]$ und $z(t) = z(\lambda, \eta, t)$, dann gilt

$$\begin{aligned}
 z(t) + \frac{u(b)}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda}(u(b) - \eta(0)) \\
 &= \frac{1}{\lambda}(u(b) + \lambda v(0) - v(4)) \\
 &= \frac{1}{\lambda}(u(b) + \lambda v(t) - v(3+b)) \\
 &= \frac{1}{\lambda}(u(b) + \lambda v(t) - u(b)) \\
 &= v(t);
 \end{aligned}$$

sei $t \in [-b, 0]$, dann gilt

$$\begin{aligned}
 z(t) + \frac{u(b)}{\lambda} &= \frac{1}{\lambda}[u(b) - \eta(t)] \\
 &= \frac{1}{\lambda}[u(b) - (v(4+t) - \lambda v(t))] \\
 &= \frac{1}{\lambda}[u(b) - (v(3+b) - \lambda v(t))] \\
 &= \frac{1}{\lambda}[u(b) - (u(b) - \lambda v(t))] \\
 &= v(t).
 \end{aligned}$$

- Behauptung: $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} : [-b, b] \rightarrow \mathbb{C}^2$ genügt dem Randwertproblem (λ, η) - (λ, η, RB) .

Beweis davon: Nach Definition von u, v gelten für alle $t \in [-b, b]$:

$$\begin{aligned}
 u'(t) &= v'(t+3) \\
 &= g'(p(t+2))\{v(t+2) - p'(t+2)\Delta[v(t+3) + v(t+1)]\} \\
 &= g'(-p(t))\{v(1+b) + p'(t)\Delta[u(t) + w(t)]\} \\
 &= g'(p(t))\{w(b) + p'(t)\Delta[u(t) + w(t)]\} \\
 &= g'(t)\{w(b) + p'(t)\Delta[u(t) + w(t)]\} \\
 &= g'(t)\Delta u(t) + g'(t)\Delta w(t) + g'(t)w(b) \\
 &= g'(t)\Delta u(t) + g'(t)\Delta w(t) + g'(t)u(-b)
 \end{aligned}$$

(mit $w(b) = v(1+b) = v(3-b) = u(-b)$), und

$$\begin{aligned}
 w'(t) &= v'(t+1) \\
 &= g'(p(t))\{v(t) - p'(t)\Delta[v(t+1) + v(t-1)]\} \\
 &= g'(t)\left\{z(t) + \frac{u(b)}{\lambda} - \Delta\left[w(t) + \frac{v(3+t) - \eta(t-1)}{\lambda}\right]\right\} \\
 &= g'(t)\left\{z(t) + \frac{u(b)}{\lambda} - \Delta\left[w(t) + \frac{u(t)}{\lambda} - \frac{\eta(t-1)}{\lambda}\right]\right\} \\
 &= g'(t)\Delta\left(-\frac{1}{\lambda}u(t) - w(t)\right) + g'(t)\frac{u(b)}{\lambda} + g'(t)\left(z(t) + \Delta\frac{\eta(t-1)}{\lambda}\right).
 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen kann man als lineares inhomogenes System umschreiben und die Gleichung (λ, η) erhalten. Außerdem ist die Randbedingung erfüllt:

$$u(-b) = v(3-b) = v(1+b) = w(b)$$

$$w(-b) = v(1-b) = v(0) = \frac{1}{\lambda}[v(4) - \eta(0)] = \frac{1}{\lambda}[v(3+b) - \eta(0)] = \frac{1}{\lambda}[u(b) - \eta(0)]$$

und kann in die Form (λ, η, RB) umgeschrieben werden.

(ii) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. $\eta \in Y_c$ und $\left(\frac{u}{w}\right) : [-b, b] \rightarrow \mathbb{C}^2$ eine Abbildung, die (λ, η) - (λ, η, RB) genügt. Definiere $v : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{C}$ durch

$$v(t) = \begin{cases} w(-b) & \text{auf } [0, 1-b], \\ w(t-1) & \text{auf } [1-b, 1+b], \\ w(b) & \text{auf } [1+b, 3-b], \\ u(t-3) & \text{auf } [3-b, 3+b], \\ u(b) & \text{auf } [3+b, 4], \\ \frac{1}{\lambda}[v(4+t) - \eta(t)] & \text{auf } [-2, 0], \end{cases}$$

Man sieht mit Hilfe der Randbedingung, dass die Definition sinnvoll ist und dass $v : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist.

- Behauptung: $v : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{C}$ ist stetig differenzierbar.

Da v konstant auf $[0, 1-b]$, $[1+b, 3-b]$, $[3+b, 4]$ ist, genügt es zu zeigen, dass

$$\lim_{t \searrow 1-b} v'(t) = \lim_{t \nearrow 1+b} v'(t) = \lim_{t \searrow 3-b} v'(t) = \lim_{t \nearrow 3+b} v'(t) = \lim_{t \nearrow 0} v'(t) = 0.$$

Es gelten

$$\lim_{t \searrow 1-b} v'(t) = \lim_{t \searrow 1-b} w'(t-1) = w'(-b) = \underbrace{g'(-b)}_{=0} \{\dots\} = 0,$$

$$\lim_{t \nearrow 1+b} v'(t) = \lim_{t \nearrow 1+b} w'(t-1) = w'(b) = \underbrace{g'(b)}_{=0} \{\dots\} = 0,$$

und

$$\lim_{t \searrow 3-b} v'(t) = \lim_{t \searrow 3-b} u'(t-3) = u'(-b) = \underbrace{g'(-b)}_{=0} \{\dots\} = 0,$$

$$\lim_{t \nearrow 3+b} v'(t) = \lim_{t \nearrow 3+b} u'(t-3) = u'(b) = \underbrace{g'(b)}_{=0} \{\dots\} = 0,$$

sowie

$$\lim_{t \neq 0} v'(t) = \lim_{t \neq 0} \frac{1}{\lambda} [v'(4+t) - \eta'(t)] = \frac{1}{\lambda} \underbrace{[-\eta'(0)]}_{\in Y_c} = 0,$$

also ist $v : [-2, 4] \rightarrow \mathbb{C}$ stetig differenzierbar.

- Behauptung: v genügt der Variationsgleichung (III.4). v ist konstant auf diesen Intervallen $[0, 1-b]$, $[1+b, 3-b]$, $[3+b, 4]$, folglich ist $v'(t) = 0$ auf diesen Intervallen. Außerdem ist $g'(p(t-1)) = 0$ auf denselben Intervallen, also genügt v der Variationsgleichung (III.4) auf $[0, 1-b]$, $[1+b, 3-b]$, $[3+b, 4]$.

Es wird gezeigt, dass v der Variationsgleichung auf $[1-b, 1+b]$ und $[3-b, 3+b]$ genügt:

- Sei $t \in [1-b, 1]$, dann gilt

$$\begin{aligned} v'(t) &= w'(t-1) \\ &= g'(t-1) \left\{ -\frac{\Delta}{\lambda} u(t-1) - \Delta w(t-1) + z(t-1) + \frac{u(b)}{\lambda} + \frac{\Delta}{\lambda} \eta(t-2) \right\} \\ &= g'(t-1) \left\{ -\frac{\Delta}{\lambda} [u(t-1) - \eta(t-2)] - \Delta w(t-1) + z(t-1) + \frac{u(b)}{\lambda} \right\} \\ &= g'(t-1) \left\{ -\frac{\Delta}{\lambda} [u((t+2)-3) - \eta(t-2)] - \Delta w(t-1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\lambda} [u(b) - \eta(t-1)] \right\} \\ &= g'(p(t-1)) \left\{ -\frac{\Delta}{\lambda} [v(t+2) - \eta(t-2)] - \Delta v(t) + \frac{1}{\lambda} [u(b) - \eta(t-1)] \right\} \\ &= g'(p(t-1)) \left\{ -\frac{\Delta}{\lambda} [v(4+(t-2)) - \eta(t-2)] - \Delta v(t) + \frac{1}{\lambda} [u(b) - \eta(t-1)] \right\} \\ &= g'(p(t-1)) \left\{ -\Delta [v(t-2) + v(t)] + \frac{1}{\lambda} [u(b) - \eta(t-1)] \right\} \\ &= g'(p(t-1)) \left\{ -\Delta [v(t-2) + v(t)] + \frac{1}{\lambda} [v((t-1)+4) - \eta(t-1)] \right\} \\ &= g'(p(t-1)) \left\{ -\Delta [v(t-2) + v(t)] + v(t-1) \right\} \\ &= g'(p(t-1)) \left\{ v(t-1) - \Delta [v(t-2) + v(t)] \right\} \\ &= g'(p(t-1)) \left\{ v(t-1) - p'(t-1) \Delta [v(t-2) + v(t)] \right\}. \end{aligned}$$

- Sei $t \in [1, 1+b]$. Wie in (i) gilt für $z(t-1) = z(\lambda, \eta, t-1)$: $z(t-1) + \frac{u(b)}{\lambda} = v(t-1)$. Damit folgt

$$\begin{aligned} v'(t) &= w'(t-1) \\ &= g'(t-1) \left\{ -\frac{\Delta}{\lambda} u(t-1) - \Delta w(t-1) + z(t-1) + \frac{u(b)}{\lambda} + \frac{\Delta}{\lambda} \eta(t-2) \right\} \\ &= g'(p(t-1)) \left\{ z(t-1) + \frac{u(b)}{\lambda} - \Delta \left[\frac{u(t-1) - \eta(t-2)}{\lambda} \right] - \Delta w(t-1) \right\} \\ &= g'(p(t-1)) \left\{ v(t-1) - \Delta \left[\frac{u((t+2)-3) - \eta(t-2)}{\lambda} + v(t) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= g'(p(t-1)) \left\{ v(t-1) - \Delta \left[\frac{v(t+2) - \eta(t-2)}{\lambda} + v(t) \right] \right\} \\
&= g'(p(t-1)) \left\{ v(t-1) - \Delta \left[\frac{v(4 + (t-2)) - \eta(t-2)}{\lambda} + v(t) \right] \right\} \\
&= g'(p(t-1)) \{ v(t-1) - p'(t-1) \Delta [v(t-2) + v(t)] \}.
\end{aligned}$$

- Sei $t \in [3-b, 3+b]$, dann gilt

$$\begin{aligned}
v'(t) &= u'(t-3) \\
&= g'(t-3) \Delta u(t-3) + g'(t-3) \Delta w(t-3) + g'(t-3) u(-b) \\
&= g'(t-3) \{ w(b) + \Delta [u(t-3) + w(t-3)] \} \\
&= g'(p(t-3)) \{ v(t-1) + \Delta [v(t) + v(t-2)] \} \\
&= g'(-p(t-1)) \{ v(t-1) - p'(t-1) \Delta [v(t) + v(t-2)] \} \\
&= g'(p(t-1)) \{ v(t-1) - p'(t-1) \Delta [v(t) + v(t-2)] \}.
\end{aligned}$$

Zur letzten Aussage: Sei $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt nach Definition von v , dass $v(t) \neq 0$ für ein $t \geq 0$. Wäre $v_0 = 0$, so auch $v(s) = 0$ für alle $s \geq -2$. \square

Proposition III.7.2. (i) *Gilt in Proposition III.7.1(i) $\eta = 0$ und $v_0 \neq 0$, so auch $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(-b) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.*

(ii) *Gilt in Proposition III.7.1(ii) $\eta = 0$ und $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(-b) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, so auch $v_0 \neq 0$.*

Beweis. (i) Sei $\eta = 0$ und $v_0 \neq 0$, dann gilt wegen $v_4 - \lambda v_0 = \eta$, dass $v_4 = \lambda v_0 \neq 0$, also $v_4 \neq 0$, daher $v(t) \neq 0$ für ein $t \in [2, 4]$.

Behauptung: Es gibt ein $t \in (3-b, 3+b)$, sodass $v(t) \neq 0$. Angenommen, dass $v(t) = 0$ auf ganz $(3-b, 3+b)$ ist. Dann ist wegen Stetigkeit $v(t) = 0$ auf $[3-b, 3+b]$. Da v konstant auf $[2, 3-b]$ und $[3+b, 4]$ ist, würde gelten, dass $v(t) = 0$ auf $[2, 4]$ wäre. Folglich gilt die Behauptung.

Behauptung: Es gibt ein $t \in (3-b, 3+b)$ mit $u(t-3) \neq 0$. Es gibt ein $t \in (3-b, 3+b)$ mit $v(t) \neq 0$, also $u(t-3) \neq 0$.

Angenommen $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(-b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dann ergibt sich mit $\eta = 0$ aus der Randbedingung $\frac{u(b)}{\lambda} = w(-b) = 0$, und es folgt, dass $z(\lambda, \eta, t) + \frac{u(b)}{\lambda} + \frac{\Delta}{\lambda} \eta(t-1) = 0$ auf $[-b, b]$. Daher genügt $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ einer linearen Differentialgleichung. Es folgt $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(s) = 0$ auf $[-b, b]$ im Widerspruch zu $u(t-3) \neq 0$.

(ii) Es soll gezeigt werden, dass $v_0 \neq 0$. Angenommen $v_0 = 0$, dann gilt $v_4 = 0$, also $v(s) = 0$ auf $[2, 4]$. Da $3-b \in [2, 4]$ ist, gilt insbesondere, dass $u(-b) = v(3-b) = 0$ ist.

Da $v_0 = 0$ ist und v konstant auf $[-1+b, 1-b]$ ist, folgt $v = 0$ auf $[-2, 1-b]$. Daher gilt $0 = v(1-b) = w(-b)$.

Also $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(-b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, im Widerspruch zur Voraussetzung. \square

Proposition III.7.3. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(i) Es gilt $\lambda \in \rho(M_c)$ genau dann wenn zu jedem $\eta \in Y_c$ genau eine Lösung $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ des Randwertproblems (λ, η) - (λ, η, RB) existiert.

(ii) Sei $\lambda \in \rho(M_c)$ und $\eta \in Y_c$. Dann gilt

$$(M_c - \lambda)^{-1}\eta = \frac{1}{\lambda} \left(V \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} - \eta \right)$$

mit der Lösung $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} : [-b, b] \rightarrow \mathbb{C}^2$ von (λ, η) - (λ, η, RB) und mit

$$(III.6) \quad V \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(t) = \begin{cases} w(b) & \text{für } -2 \leq t \leq -1-b, \\ u(1+t) & \text{für } -1-b \leq t \leq -1+b, \\ u(b) & \text{für } -1+b \leq t \leq 0. \end{cases}$$

Beweis. (i) Sei $\lambda \in \rho(M_c)$ und $\eta \in Y_c$, $\psi := (M_c - \lambda)^{-1}\eta$, v die (durch ψ eindeutig bestimmte) Lösung von (III.5) mit $v_0 = \psi$. Nach Proposition III.7.1(i) existiert eine Lösung (u, w) des Randwertproblems (λ, η) - (λ, η, RB) . Für diese gilt nach, Proposition III.7.1(ii), dass es eine Lösung $\bar{v} : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ von (III.5) gibt mit $\bar{v}(t) = w(t-1)$ auf $[1-b, 1+b]$ und $\bar{v}(t) = u(t-1)$ auf $[3-b, 3+b]$; es gilt $\bar{v}_4 - \lambda \bar{v}_0 = \eta$, folglich $(M_c - \lambda)\bar{v}_0 = \eta$, also $\bar{v}_0 = (M_c - \lambda)^{-1}\eta = v_0$. Es folgt $\bar{v} = v$, damit auf $[-b, b]$:

$$w(t) = \bar{v}(t+1) = v(t+1), \quad u(t) = \bar{v}(t+3) = v(t+3).$$

Wenn umgekehrt zu jedem $\eta \in Y_c$ genau eine Lösung $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ von (λ, η) - (λ, η, RB) existiert, so liefert für gegebenes $\eta \in Y_c$ die Proposition III.7.1(ii) zunächst eine Lösung $v : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ der Variationsgleichung mit $v_0 \in Y_c$ und $v_0 = \frac{1}{\lambda}(v_4 - \eta)$, also $v_0 = \frac{1}{\lambda}(v_4 - \eta)$, also $(M_c - \lambda)v_0 = v_4 - \lambda v_0 = \eta$; folglich ist $M_c - \lambda$ surjektiv. Zur Injektivität von $M_c - \lambda$: Sei $(M_c - \lambda)\xi = 0$, sei $v : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ die Lösung der Variationsgleichung (III.5) mit $v_0 = \xi \in Y_c$.

Nach Proposition III.7.1(i) erhält man aus v eine Lösung $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ von (λ, η) - (λ, η, RB) . Man sieht, dass $[-b, b] \ni t \mapsto 0 \in \mathbb{C}^2$ eine Lösung hiervon ist. Wegen der vorausgesetzten Eindeutigkeit ergibt sich $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und daraus nach Proposition III.7.1(i) $v(t) = 0$ auf $[1-b, 1+b] \cup [3-b, 3+b]$. Da v auf $[0, 1-b]$, $[1+b, 3-b]$ und $[3+b, 4]$ konstant ist, folgt $v(t) = 0$ auf $[0, 4]$. Mit $\lambda \neq 0$ erhält man

$$v_0 = \frac{1}{\lambda}(v_4 - \eta) = \frac{1}{\lambda}(0 - 0) = 0.$$

Also ist $M_c - \lambda : Y_c \rightarrow Y_c$ eine Bijektion. Der Satz von der offenen Abbildung liefert, dass $(M_c - \lambda)^{-1}$ stetig ist. Es folgt $\lambda \in \rho(M_c)$.

(ii) Sei $\lambda \in \rho(M_c)$, $\eta \in Y_c$. Wegen (i) gibt es eine Lösung $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ von (λ, η) - (λ, η, RB) . Proposition III.7.1(ii) liefert dazu eine Lösung $v : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ der Variationsgleichung (III.5) mit $v_0 \in Y_c$ und

$$v_0 = \frac{1}{\lambda}(v_4 - \eta).$$

Aus der Definition von v in Proposition III.7.1(ii) ersieht man auch $v_4 = V\left(\begin{smallmatrix} u \\ w \end{smallmatrix}\right)$. Es folgt

$$\eta = v_4 - \lambda v_0 = (M_c - \lambda)v_0$$

beziehungsweise

$$(M_c - \lambda)^{-1}\eta = v_0 = \frac{1}{\lambda}(v_4 - \eta) = \frac{1}{\lambda}\left(V\left(\begin{smallmatrix} u \\ w \end{smallmatrix}\right) - \eta\right).$$

□

Proposition III.7.4. (i) Die Abbildung $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R} \ni (\lambda, t) \mapsto A_\lambda(t) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ist stetig.

(ii) Die Abbildung $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times Y_c \times [-b, b] \ni (\lambda, \eta, t) \mapsto z(\lambda, \eta, t) \in \mathbb{C}$ ist stetig.

Beweis. (i) Jede Komponente der matrixwertigen Abbildung ist stetig.

(ii) Die Abbildung $l: Y_c \rightarrow C_c([-b, b], \mathbb{C})$, $l\eta(t) = \eta(t)$ auf $[-b, 0]$ und $l\eta(t) = \eta(0)$ auf $[0, b]$, für jedes $\eta \in Y_c$, ist linear und stetig.

Für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $\eta \in Y_c$, $t \in [-b, b]$ gilt

$$z(\lambda, \eta, t) = \frac{1}{\lambda}(l\eta)(t).$$

Daraus folgt mit der Stetigkeit von der Evaluation auf $C_c([-b, b], \mathbb{C}) \times [-b, b]$ und l die Stetigkeit von z . □

III.8 Charakteristische Gleichung und Resolventenberechnung

Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $\eta \in Y_c$ kann das Randwertproblem (λ, η) - (λ, η, RB) mit $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(-b)$ wegen $\frac{1}{\lambda}u(b) = w(-b) + \frac{\eta(0)}{\lambda}$ zu

$$\begin{aligned} (\lambda, \eta, c) \quad \begin{pmatrix} u' \\ w' \end{pmatrix}(t) &= A_\lambda(t) \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(t) \\ &\quad + g'(t)c + g'(t) \begin{pmatrix} 0 \\ z(\lambda, \eta, t) + \frac{\Delta}{\lambda}\eta(t-1) + \frac{\eta(0)}{\lambda} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\lambda, \eta, RB, c) \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(b) - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta(0)}{\lambda} \end{pmatrix}.$$

umgeschrieben werden. Die Matrizen $A_\lambda(t)$, $t \in \mathbb{R}$, sind bei Multiplikation vertauschbar.

Deshalb ist mit

$$S_\lambda: [-b, b] \ni t \mapsto \exp\left(\int_{-b}^t A_\lambda(s) ds\right) \in \mathbb{C}^{2 \times 2},$$

die Lösung zu Gleichung (λ, η, c) mit Anfangswert $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(-b) = c \in \mathbb{C}^2$ durch

$$\begin{pmatrix} u_c \\ w_c \end{pmatrix}(t) = S_\lambda(t)c + S_\lambda(t) \int_{-b}^t (S_\lambda(s))^{-1} g'(s) c ds \\ + S_\lambda(t) \int_{-b}^t (S_\lambda(s))^{-1} g'(s) \begin{pmatrix} 0 \\ z(\lambda, \eta, s) + \frac{\Delta}{\lambda} \eta(s-1) + \frac{\eta(0)}{\lambda} \end{pmatrix} ds$$

gegeben (Variation-der-Konstanten Formel).

Eine Lösung des Randwertproblems (λ, η, RB) ergibt sich, falls der Anfangswert $c = \begin{pmatrix} u_c \\ w_c \end{pmatrix}(-b)$ die Gleichung

$$(III.7) \quad c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ w_c \end{pmatrix}(b) - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta(0)}{\lambda} \end{pmatrix}$$

löst, also falls

$$\begin{aligned} c &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \left\{ S_\lambda(b)c + S_\lambda(b) \int_{-b}^b (S_\lambda(s))^{-1} g'(s) c ds \right. \\ &\quad \left. + S_\lambda(b) \int_{-b}^b (S_\lambda(s))^{-1} g'(s) \begin{pmatrix} 0 \\ z(\lambda, \eta, s) + \frac{1}{\lambda} \eta(s-1) + \frac{\eta(0)}{\lambda} \end{pmatrix} ds \right\} \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta(0)}{\lambda} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} S_\lambda(b)c + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \left\{ S_\lambda(b) \int_{-b}^b (S_\lambda(s))^{-1} g'(s) c ds \right\} \\ &\quad + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} S_\lambda(b) \int_{-b}^b (S_\lambda(s))^{-1} g'(s) \begin{pmatrix} 0 \\ z(\lambda, \eta, s) + \frac{1}{\lambda} \eta(s-1) + \frac{\eta(0)}{\lambda} \end{pmatrix} ds \\ &\quad - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta(0)}{\lambda} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung kann umgeschrieben werden als

$$E(\lambda, \eta) = H(\lambda, \Delta)c$$

mit $E(\lambda, \eta)$ und $H(\lambda, \Delta)$ als

$$E(\lambda, \eta) := - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} S_\lambda(b) \int_{-b}^b (S_\lambda(s))^{-1} g'(s) \begin{pmatrix} 0 \\ z(\lambda, \eta, s) + \frac{1}{\lambda} \eta(s-1) + \frac{\eta(0)}{\lambda} \end{pmatrix} ds \\ + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\eta(0)}{\lambda} \end{pmatrix},$$

$$(III.8) \quad H(\lambda, \Delta) := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \left\{ S_\lambda(b) + \right. \\ \left. S_\lambda(b) \int_{-b}^b (S_\lambda(s))^{-1} g'(s) Ids \right\} - I$$

definiert.

Proposition III.8.1 (Charakteristische Gleichung). *Für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt $\lambda \in \sigma(M_c)$ genau dann, wenn $\det(H(\lambda, \Delta)) = 0$*

Beweis. Proposition III.7.2 besagt für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$: Es gibt ein $\zeta \in Y_c \setminus \{0\}$ mit $v_4^\zeta = \lambda \zeta$ genau dann, wenn es eine Lösung $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} : [-b, b] \rightarrow \mathbb{C}^2$ von $(\lambda, 0, c)$ mit $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(-b) = c \neq 0$, gibt, welche $(\lambda, 0, RB, c)$ erfüllt.

Dies ist äquivalent dazu, dass es ein $c \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ gibt, sodass für

$$\begin{pmatrix} u_c \\ w_c \end{pmatrix} : [-b, b] \ni t \mapsto S_\lambda(t)c + S_\lambda(t) \int_{-b}^t S_\lambda(s)^{-1} g'(s) c ds \in \mathbb{C}^2$$

gilt

$$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ w_c \end{pmatrix} (b)$$

beziehungsweise

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_c \\ w_c \end{pmatrix} (b) - c = H(\lambda, \Delta)c.$$

(Hier wurden $z(\lambda, 0, t) = 0$ auf $[-b, b]$ und $\eta = 0$ verwendet). Die letzte Aussage ist äquivalent zu $\det(H(\lambda, \Delta)) = 0$. \square

Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, dann definiert

$$\widehat{H}(\lambda, \Delta)_{j,k} := (-1)^{j+k} H(\lambda, \Delta)_{j,k} \det \bar{H}_{j,k} \quad \text{für alle } j, k \text{ in } \{1, \dots, n\},$$

wobei $\bar{H}_{j,k}$ aus $H(\lambda, \Delta)$ durch Streichen der j -ten Zeile und der k -ten Spalte sowie Transposition entsteht, eine Matrix $\widehat{H}(\lambda, \Delta) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$. Im Fall $\lambda \in \rho(M_c)$ beziehungsweise $\det(H(\lambda, \Delta)) \neq 0$ gilt $\widehat{H}(\lambda, \Delta) = \det(H(\lambda, \Delta))(H(\lambda, \Delta))^{-1}$.

Wir definieren

$$P(\lambda, \Delta) = \det(H(\lambda, \Delta))$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Proposition III.8.2. *Sei $\lambda \in \rho(M_c) \subseteq \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann ist mit*

$$\begin{aligned} J(\lambda, \eta, t) &:= S_\lambda(t) \left[I + \int_{-b}^t (S_\lambda(s))^{-1} g'(s) ds \right] \widehat{H}(\Delta, \lambda) E(\lambda, \eta) \\ B(\lambda, \eta, t) &:= S_\lambda(t) \int_{-b}^t (S_\lambda(s))^{-1} g'(s) \begin{pmatrix} 0 \\ z(\lambda, \eta, s) + \frac{1}{\lambda} \eta(s-1) + \frac{\eta(0)}{\lambda} \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$

für $\eta \in Y_c$ und $-b \leq t \leq b$ die Lösung von (λ, η, RB) gegeben durch

$$\begin{pmatrix} u_\eta \\ w_\eta \end{pmatrix} (t) = \frac{1}{\det(H(\lambda, \Delta))} J(\lambda, \eta, t) + B(\lambda, \eta, t),$$

und für alle $\eta \in Y_c$ gilt

$$(M_c - \lambda)^{-1} \eta = \frac{1}{\lambda} (V \begin{pmatrix} u_\eta \\ w_\eta \end{pmatrix} - \eta).$$

Beweis. Siehe die Bemerkungen vor Proposition III.8.1 und Proposition III.7.3(ii). \square

Proposition III.8.3. (i) *Die Abbildungen*

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni \lambda &\longmapsto \det(H(\lambda, \Delta)) \in \mathbb{C} \\ (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times Y_c \times [-b, b] \ni (\lambda, \eta, t) &\longmapsto J(\lambda, \eta, t) \in \mathbb{C}^2 \\ (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times Y_c \times [-b, b] \ni (\lambda, \eta, t) &\longmapsto B(\lambda, \eta, t) \in \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

sind stetig.

(ii) Für alle $(\lambda, \eta, t) \in (\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times Y_c \times [-b, b]$ existieren die partiellen Ableitungen $\partial_t J(\lambda, \eta, t) \in \mathbb{C}^2$ und $\partial_t B(\lambda, \eta, t) \in \mathbb{C}^2$, und die Ableitungen $\partial_t J$ und $\partial_t B$ sind stetig.

(iii) Für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $t \in [-b, b]$ sind die Abbildungen

$$J(\lambda, \cdot, t) : Y_c \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad \text{und} \quad B(\lambda, \cdot, t) : Y_c \rightarrow \mathbb{C}^2$$

linear.

Beweis. Mit Hilfe von Proposition III.7.4 und mit den Definitionen von $S_\lambda(t)$, $\widehat{H}(\Delta, \lambda)$, $E(\lambda, \eta)$ ergeben sich die Behauptungen (i) und (ii) aus elementaren Regeln über die algebraische Zusammensetzung stetiger Funktionen, über stetige Abhängigkeit von Parametern für Integrale, und über Differenzierbarkeit von Integralen nach der oberen Grenze.

Aussage (iii) ergibt sich mit Hilfe der Linearität von $z(\lambda, \cdot, t)$ und $E(\lambda, \cdot)$. \square

Proposition III.8.4. *Durch (III.6) ist eine lineare Abbildung V des abgeschlossenen Teilraums*

$$\left\{ \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \in C^1([-b, b], \mathbb{C}^2) \mid \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}'(-b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}'(b) \right\}$$

von $C^1([-b, b], \mathbb{C}^2)$ nach Y_c gegeben, die stetig (bezüglich der C^1 -Norm) ist.

Beweis. Die Behauptung ergibt sich leicht aus der Formel (III.6). \square

Proposition III.8.5 (Lokalbeschränktheit). *Zu jedem $\lambda \in \sigma(M_c) \setminus \{0\}$ existieren ein $\delta > 0$ mit $\{\mu \in \mathbb{C} \mid 0 < |\mu - \lambda| < \delta\} \subseteq \rho(M_c)$ und ein $c > 0$ mit $|\det(H(\mu, \Delta))(M_c - \mu)^{-1}|_{L_c(Y_c, Y_c)} < c$ für alle $\mu \in \{\mu \in \mathbb{C} \mid 0 < |\mu - \lambda| < \delta\}$.*

Beweis. • Für alle $\mu \in \rho(M_c)$ und alle $\eta \in Y_c$ gilt wegen Proposition III.8.2

$$\begin{aligned} &\det(H(\mu, \Delta))(M_c - \mu)^{-1}\eta \\ &= \frac{1}{\mu} \left\{ V \left(J(\mu, \eta, \cdot) + \det(H(\mu, \Delta))B(\mu, \eta, \cdot) \right) - \det(H(\mu, \Delta))\eta \right\}, \end{aligned}$$

folglich gilt

$$\begin{aligned} & |\det(H(\mu, \Delta))(M_c - \mu)^{-1}\eta|_{C_c^1} \\ & \leq \frac{1}{|\mu|} \left\{ |V|_{L_c(C^1([-b,b], \mathbb{C}^2), Y_c)} \left(|J(\mu, \eta, \cdot)|_{C^1([-b,b], \mathbb{C}^2)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + |\det(H(\mu, \Delta))| |B(\mu, \eta, \cdot)|_{C^1([-b,b], \mathbb{C}^2)} \right) \right. \\ & \quad \left. + |\det(H(\mu, \Delta))| \cdot |\eta|_{C_c^1} \right\}. \end{aligned}$$

Sei $\lambda \in \sigma(M_c) \setminus \{0\}$. Da

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni \mu \mapsto \det(H(\mu, \Delta)) \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \mathbb{C} \setminus \{0\} \ni \mu \mapsto \frac{1}{\mu} \in \mathbb{C}$$

stetig sind, gibt es zu $\varepsilon_0 := \frac{|\lambda|}{2}$ ein $c > 0$ mit

$$\frac{1}{|\mu|} \leq c \quad \text{und} \quad |\det(H(\mu, \Delta))| \leq c \quad \text{für alle } \lambda \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |\mu - \lambda_0| \leq \varepsilon_0.$$

(beachte $\mu \neq 0$ für diese μ). Da λ isolierter Punkt von $\sigma(M_c)$ ist, gibt es ein $\delta_0 \in (0, \varepsilon_0]$ mit $\mu \in \rho(M_c)$ für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $0 < |\mu - \lambda| < \delta_0$. Es folgt für diese μ und für alle $\eta \in Y_c$:

$$\begin{aligned} & |\det(H(\mu, \Delta))(M_c - \mu)^{-1}\eta|_{C_c^1} \\ & \leq c \left\{ |V|_{L_c(C^1([-b,b], \mathbb{C}^2), Y_c)} \left(|J(\mu, \eta, \cdot)|_{C^1([-b,b], \mathbb{C}^2)} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + c|B(\mu, \eta, \cdot)|_{C^1([-b,b], \mathbb{C}^2)} + c|\eta|_{C_c^1} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung und die Beziehung

$$|\det(H(\mu, \Delta))(M_c - \mu)^{-1}|_{L_c(Y_c, Y_c)} = \sup_{\{\eta \in Y_c: |\eta|_{C^1} \leq 1\}} |\det(H(\mu, \Delta))(M_c - \mu)^{-1}\eta|_{C_c^1}$$

zeigen, dass nur noch das Folgende bewiesen werden muss:

Es gibt ein $\delta \in (0, \delta_0)$ und ein $k \geq 0$, sodass für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu - \lambda| \leq \delta$ und alle $\eta \in Y_c$ mit $|\eta|_{C^1} \leq 1$ gilt:

$$|J(\mu, \eta, \cdot)|_{C^1([-b,b], \mathbb{C}^2)} \leq k \quad \text{und} \quad |B(\mu, \eta, \cdot)|_{C^1([-b,b], \mathbb{C}^2)} \leq k.$$

• Behauptung: Es gibt ein $\delta_J \in (0, \delta_0]$ und ein $k \geq 0$, sodass für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu - \lambda| \leq \delta_J$ und für alle $\eta \in Y_c$ mit $|\eta|_{C^1} \leq 1$ gilt:

$$|J(\mu, \eta, \cdot)|_{C^1([-b,b], \mathbb{C}^2)} \leq k_J.$$

Beweis. $\{\lambda\} \times \{0\} \times [-b, b]$ ist eine kompakte Teilmenge von $(\mathbb{C} \setminus \{0\}) \times Y_c \times [-b, b]$; darauf sind J und $\partial_t J$ gleichmäßig stetig, zu $\varepsilon = 1$ gibt es daher ein $\delta_1 > 0$, so

dass für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu - \lambda| < \delta_1$ und für alle $\eta \in Y_c$ mit $|\eta - 0|_{C_c^1} \leq \delta_1$ und für alle $t \in [-b, b]$ gilt:

$$|J(\mu, \eta, t)| = |J(\mu, \eta, t) - \underbrace{J(\lambda, 0, t)}_{=0 \text{ wegen Linearität}}| \leq 1.$$

Analog existiert ein $\delta_J \in (0, \delta_1] \subseteq (0, \delta_0]$, so dass für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu - \lambda| \leq \delta_J$ und für alle $\eta \in Y_c$ mit $|\eta - 0|_{C_c^1} \leq \delta_J$ und für alle $t \in [-b, b]$ gilt:

$$|\partial_t J(\mu, \eta, t)| \leq 1.$$

Zusammen, für diese μ und η :

$$|J(\mu, \eta, \cdot)|_{C^1([-b, b], \mathbb{C}^2)} = \max_{t \in [-b, b]} |J(\mu, \eta, t)| + \max_{t \in [-b, b]} |\partial_t J(\mu, \eta, t)| \leq 2$$

weiter folgt für diese μ und für alle $\eta \in Y_c$ mit $|\eta|_{C_c^1} \leq 1$, dass $|\delta_J \eta|_{C_c^1} \leq \delta_J$, daher

$$|J(\mu, \delta_J \eta, \cdot)|_{C^1([-b, b], \mathbb{C}^2)} \leq 2$$

und weiter mit Linearität,

$$|J(\mu, \eta, \cdot)|_{C^1([-b, b], \mathbb{C}^2)} \leq \frac{2}{\delta_J} \quad (=: k_J).$$

• Behauptung: Es gibt ein $\delta \in (0, \delta_J]$ und ein $k_B \geq 0$ so dass für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\mu - \lambda| \leq \delta$ und für alle $\eta \in Y_c$ mit $|\eta|_{C_c^1} \leq 1$ gilt:

$$|B(\mu, \eta, \cdot)|_{C^1([-b, b], \mathbb{C}^2)} \leq k_B.$$

Beweis. Analog zum Beweis der vorigen Behauptung. Setze $k := \frac{2}{\delta_J} + k_B$. \square

III.9 Die charakteristische Funktion

Für $\lambda \neq 0$ sei $\mathbb{K}_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/\lambda & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition III.9.1. Für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$S_\lambda(b) + S_\lambda(b) \int_{-b}^b [S_\lambda(s)]^{-1} g'(s) Ids = e^{-2\Delta \mathbb{K}_\lambda} + \frac{1}{\Delta} [e^{-2\Delta \mathbb{K}_\lambda} - I] \mathbb{K}_\lambda^{-1}.$$

Beweis. Wegen

$$\int_{-b}^t g'(s) \Delta \mathbb{K}_\lambda ds = \int_{-b}^t g'(s) ds \Delta \mathbb{K}_\lambda = (g(t) - 1) \Delta \mathbb{K}_\lambda \text{ auf } [-b, b],$$

gilt $S_\lambda(t) = e^{(g(t)-1)\Delta \mathbb{K}_\lambda}$, insbesondere $S_\lambda(b) = e^{-2\Delta \mathbb{K}_\lambda}$.

Es folgt für alle $s \in [-b, b]$, dass

$$[S_\lambda(s)]^{-1} = e^{-(g(s)-1)\Delta\mathfrak{K}_\lambda} = e^{(1-g(s))\Delta\mathfrak{K}_\lambda} = e^{\Delta\mathfrak{K}_\lambda} e^{-g(s)\Delta\mathfrak{K}_\lambda},$$

und es gilt

$$\frac{d}{ds} (e^{-g(\cdot)\Delta\mathfrak{K}_\lambda})(s) = e^{-g(s)\Delta\mathfrak{K}_\lambda} (-g'(s)\Delta\mathfrak{K}_\lambda).$$

Wegen $\lambda \neq 1$ ist \mathfrak{K}_λ invertierbar. Wir erhalten

$$\begin{aligned} \int_{-b}^b [S_\lambda(s)]^{-1} g'(s) Ids &= \int_{-b}^b g'(s) S_\lambda(s)^{-1} ds \\ &= e^{\Delta\mathfrak{K}_\lambda} \int_{-b}^b g'(s) e^{-g(s)\Delta\mathfrak{K}_\lambda} ds \\ &= -e^{\Delta\mathfrak{K}_\lambda} \int_{-b}^b [-g'(s) e^{-g(s)\Delta\mathfrak{K}_\lambda} \Delta\mathfrak{K}_\lambda] ds \frac{1}{\Delta} \mathfrak{K}_\lambda^{-1} \\ &= -e^{\Delta\mathfrak{K}_\lambda} [e^{-g(\cdot)\Delta\mathfrak{K}_\lambda}]_{-b}^b \frac{1}{\Delta} \mathfrak{K}_\lambda^{-1} \\ &= -\frac{1}{\Delta} e^{\Delta\mathfrak{K}_\lambda} [e^{\Delta\mathfrak{K}_\lambda} - e^{-\Delta\mathfrak{K}_\lambda}] \mathfrak{K}_\lambda^{-1} \\ &= -\frac{1}{\Delta} [e^{2\Delta\mathfrak{K}_\lambda} - I] \mathfrak{K}_\lambda^{-1} \\ &= \frac{1}{\Delta} (I - e^{2\Delta\mathfrak{K}_\lambda}) \mathfrak{K}_\lambda^{-1}. \end{aligned}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} S_\lambda(b) \left[I + \int_{-b}^b [S_\lambda(s)]^{-1} g'(s) Ids \right] &= e^{-2\Delta\mathfrak{K}_\lambda} + \frac{e^{-2\Delta\mathfrak{K}_\lambda}}{\Delta} [I - e^{2\Delta\mathfrak{K}_\lambda}] \mathfrak{K}_\lambda^{-1} \\ &= e^{-2\Delta\mathfrak{K}_\lambda} + \frac{1}{\Delta} [e^{-2\Delta\mathfrak{K}_\lambda} - I] \mathfrak{K}_\lambda^{-1}. \end{aligned}$$

□

Die charakteristische Gleichung $\det(H(\lambda, \Delta)) = 0$ für $\sigma(M_c) \setminus \{0\}$ aus Proposition III.8.1 lautet für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ also

$$\det \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \left[e^{-2\Delta\mathfrak{K}_\lambda} + \frac{1}{\Delta} [e^{-2\Delta\mathfrak{K}_\lambda} - I] \mathfrak{K}_\lambda^{-1} \right] - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

Anmerkung III.9.2. Sei $P_{\mathfrak{K}}(z)$ das charakteristische Polynom von \mathfrak{K}_λ , dann sind $z_1 = i\sqrt{1/\lambda - 1}$ und $z_2 = -i\sqrt{1/\lambda - 1}$ Nullstellen von $P_{\mathfrak{K}}$, und es gilt

$$(III.9) \quad \mathfrak{K}_\lambda = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1-1} & \frac{-1}{z_1+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & -z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1+1} \\ -1 & \frac{1}{z_1-1} \end{pmatrix} \frac{z_1^2 - 1}{2z_1}.$$

Beweis. Sei $P_{\mathfrak{K}}$ das charakteristische Polynom von \mathfrak{K}_λ , also

$$\begin{aligned} P_{\mathfrak{K}}(z) &= \det(\mathfrak{K}_\lambda - zI) \\ &= \det \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1/\lambda & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} z & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \det \begin{pmatrix} 1-z & 1 \\ -1/\lambda & -(1+z) \end{pmatrix} \\
 &= -(1-z^2) + 1/\lambda \\
 &= z^2 - (1-1/\lambda) \\
 &= (z - i\sqrt{1/\lambda-1})(z + i\sqrt{1/\lambda-1}),
 \end{aligned}$$

und $z_1 = i\sqrt{1/\lambda-1}$, $z_2 = -i\sqrt{1/\lambda-1}$ sind die Eigenwerte von $P_{\mathcal{K}}(z)$. Eigenvektoren v_1 zu z_1 und v_2 zu z_2 sind durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1-1} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_2 = \begin{pmatrix} \frac{-1}{1-z_2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben. Daher ist

$$\begin{aligned}
 \mathcal{K}_\lambda &= \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1-1} & \frac{-1}{1-z_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & z_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1-1} & \frac{-1}{1-z_2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1-1} & \frac{-1}{z_1+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & -z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1+1} \\ -1 & \frac{1}{z_1-1} \end{pmatrix} \frac{z_1^2-1}{2z_1},
 \end{aligned}$$

mit $z_2 = -z_1$. □

Anmerkung III.9.3. Für jedes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und jedes $\Delta \in \mathbb{R}$ gilt

$$(III.10) \quad e^{-2\Delta\mathcal{K}_\lambda} = \begin{pmatrix} \text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{z_1} & \frac{-\text{Sh}}{z_1} \\ \frac{\text{Sh}}{\lambda z_1} & \text{Ch} + \frac{\text{Sh}}{z_1} \end{pmatrix},$$

mit $\text{Ch} = \cosh(2\Delta z_1) = \cosh(2i\Delta\sqrt{1/\lambda-1})$, $\text{Sh} = \sinh(2\Delta z_1) = \sinh(2i\Delta\sqrt{1/\lambda-1})$ und $z_1 = i\sqrt{1/\lambda-1}$.

Beweis. Seien $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und $\Delta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 e^{-2\Delta\mathcal{K}_\lambda} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\Delta)^n}{n!} \mathcal{K}_\lambda^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\Delta)^n}{n!} \left[\begin{pmatrix} \frac{1}{z_1-1} & \frac{-1}{z_1+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 & 0 \\ 0 & -z_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1+1} \\ -1 & \frac{1}{z_1-1} \end{pmatrix} \frac{z_1^2-1}{2z_1} \right]^n \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\Delta)^n}{n!} \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1-1} & \frac{-1}{z_1+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1^n & 0 \\ 0 & (-z_1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1+1} \\ -1 & \frac{1}{z_1-1} \end{pmatrix} \frac{z_1^2-1}{2z_1} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1-1} & \frac{-1}{z_1+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\Delta z_1)^n}{n!} & 0 \\ 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2\Delta z_1)^n}{n!} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1+1} \\ -1 & \frac{1}{z_1-1} \end{pmatrix} \frac{z_1^2-1}{2z_1} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{1}{z_1-1} & \frac{-1}{z_1+1} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-2\Delta z_1} & 0 \\ 0 & e^{2\Delta z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{z_1+1} \\ -1 & \frac{1}{z_1-1} \end{pmatrix} \frac{z_1^2-1}{2z_1} \\
 &= \begin{pmatrix} \frac{e^{-2\Delta z_1}}{z_1-1} & \frac{-e^{2\Delta z_1}}{z_1+1} \\ e^{-2\Delta z_1} & e^{2\Delta z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{1+z_1} \\ -1 & \frac{1}{z_1-1} \end{pmatrix} \frac{z_1^2-1}{2z_1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{e^{2\Delta z_1}}{1+z_1} + \frac{e^{-2\Delta z_1}}{z_1-1} & -\frac{e^{2\Delta z_1}}{z_1^2-1} + \frac{e^{-2\Delta z_1}}{z_1^2-1} \\ -(e^{2\Delta z_1} - e^{-2\Delta z_1}) & \frac{e^{2\Delta z_1}}{z_1-1} + \frac{e^{-2\Delta z_1}}{z_1+1} \end{pmatrix} \frac{z_1^2 - 1}{2z_1} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(z_1-1)e^{2\Delta z_1} + e^{-2\Delta z_1}(1+z_1)}{z_1^2-1} & \frac{-(e^{2\Delta z_1} - e^{-2\Delta z_1})}{z_1^2-1} \\ -(e^{2\Delta z_1} - e^{-2\Delta z_1}) & \frac{e^{2\Delta z_1}(z_1+1) + e^{-2\Delta z_1}(z_1-1)}{z_1^2-1} \end{pmatrix} \frac{z_1^2 - 1}{2z_1} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{(z_1-1)e^{2\Delta z_1} + e^{-2\Delta z_1}(1+z_1)}{2} & \frac{-(e^{2\Delta z_1} - e^{-2\Delta z_1})}{2} \\ -\frac{(z_1^2-1)(e^{2\Delta z_1} - e^{-2\Delta z_1})}{2} & \frac{e^{2\Delta z_1}(z_1+1) + e^{-2\Delta z_1}(z_1-1)}{2} \end{pmatrix} \frac{1}{z_1} \\
&= \frac{1}{z_1} \begin{pmatrix} \frac{z_1(e^{2\Delta z_1} + e^{-2\Delta z_1}) - (e^{2\Delta z_1} - e^{-2\Delta z_1})}{2} & \frac{-(e^{2\Delta z_1} - e^{-2\Delta z_1})}{2} \\ -\frac{(z_1^2-1)(e^{2\Delta z_1} - e^{-2\Delta z_1})}{2} & \frac{(e^{2\Delta z_1} - e^{-2\Delta z_1}) + z_1(e^{2\Delta z_1} + e^{-2\Delta z_1})}{2} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{z_1} \begin{pmatrix} z_1 \operatorname{Ch} - \operatorname{Sh} & -\operatorname{Sh} \\ -(z_1^2 - 1) \operatorname{Sh} & \operatorname{Sh} + z_1 \operatorname{Ch} \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{z_1} \begin{pmatrix} z_1 \operatorname{Ch} - \operatorname{Sh} & -\operatorname{Sh} \\ \frac{\operatorname{Sh}}{\lambda} & z_1 \operatorname{Ch} + \operatorname{Sh} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \operatorname{Ch} - \frac{\operatorname{Sh}}{z_1} & -\frac{\operatorname{Sh}}{z_1} \\ \frac{\operatorname{Sh}}{\lambda z_1} & \operatorname{Ch} + \frac{\operatorname{Sh}}{z_1} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Anmerkung III.9.4. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$(III.11) \quad H(\lambda, \Delta) = \begin{pmatrix} -1 + \frac{\alpha}{\lambda} & \left(\operatorname{Ch} - \frac{\operatorname{Sh}}{i\Delta\sqrt{1/\lambda-1}} \right) + \alpha \\ \frac{1}{\lambda} \left(\operatorname{Ch} - \frac{\operatorname{Sh}}{i\Delta\sqrt{1/\lambda-1}} \right) - \frac{\alpha}{\lambda} & -1 - \frac{\alpha}{\lambda} \end{pmatrix}$$

mit $\operatorname{Sh} = \sinh(2i\Delta\sqrt{1/\lambda-1})$, $\operatorname{Ch} = \cosh(2i\Delta\sqrt{1/\lambda-1})$ und
 $\alpha := \frac{\operatorname{Sh}}{i\sqrt{1/\lambda-1}} - \frac{\operatorname{Ch}-1}{\Delta(1-1/\lambda)}$.

Beweis. Wegen $z_1 = i\sqrt{1/\lambda-1}$ gilt $\alpha = \frac{\operatorname{Sh}}{z_1} - \frac{(\operatorname{Ch}-1)}{\Delta z_1^2}$. Indem (III.9) und (III.10) in (III.8) eingesetzt werden, erhält man

$$\begin{aligned}
H(\lambda, \Delta) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \left[e^{-2\Delta\mathcal{K}\lambda} + \frac{1}{\Delta} (e^{-2\Delta\mathcal{K}\lambda} - I) \mathcal{K}\lambda^{-1} \right] - I \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \left[e^{-2\Delta\mathcal{K}\lambda} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\Delta} \left(\begin{pmatrix} \operatorname{Ch} - \frac{\operatorname{Sh}}{z_1} & -\frac{\operatorname{Sh}}{z_1} \\ \frac{\operatorname{Sh}}{\lambda z_1} & \operatorname{Ch} + \frac{\operatorname{Sh}}{z_1} \end{pmatrix} - I \right) \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1/\lambda & 1 \end{pmatrix} \frac{\lambda}{1-\lambda} \right] - I \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \left[e^{-2\Delta\mathcal{K}\lambda} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\lambda}{\Delta(1-\lambda)} \begin{pmatrix} (\operatorname{Ch}-1) - \frac{\operatorname{Sh}}{z_1} & -\frac{\operatorname{Sh}}{z_1} \\ \frac{\operatorname{Sh}}{\lambda z_1} & (\operatorname{Ch}-1) + \frac{\operatorname{Sh}}{z_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1/\lambda & 1 \end{pmatrix} \right] - I
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \left[e^{-2\Delta\mathcal{K}\lambda} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{\Delta z_1^2} \begin{pmatrix} \frac{\text{Sh}}{z_1} - (\text{Ch}-1) - \frac{\text{Sh}}{\lambda z_1} & \frac{\text{Sh}}{z_1} - (\text{Ch}-1) - \frac{\text{Sh}}{z_1} \\ -\frac{\text{Sh}}{\lambda z_1} + \frac{\text{Ch}-1}{\lambda} + \frac{\text{Sh}}{\lambda z_1} & -\frac{\text{Sh}}{\lambda z_1} + (\text{Ch}-1) + \frac{\text{Sh}}{z_1} \end{pmatrix} \right] - I \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{z_1} & -\frac{\text{Sh}}{z_1} \\ \frac{\text{Sh}}{\lambda z_1} & \text{Ch} + \frac{\text{Sh}}{z_1} \end{pmatrix} \right. \\
&\quad \left. + \begin{pmatrix} \frac{(\text{Ch}-1)}{\Delta z_1^2} - \frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} & \frac{(\text{Ch}-1)}{\Delta z_1^2} \\ -\frac{(\text{Ch}-1)}{\lambda \Delta z_1^2} & -\frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} - \frac{(\text{Ch}-1)}{\Delta z_1^2} \end{pmatrix} \right] - I \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} - \left(\frac{\text{Sh}}{z_1} - \frac{(\text{Ch}-1)}{\Delta z_1^2} \right) & \frac{(\text{Ch}-1)}{\Delta z_1^2} - \frac{\text{Sh}}{z_1} \\ \frac{1}{\lambda} \left(\frac{\text{Sh}}{z_1} - \frac{(\text{Ch}-1)}{\Delta z_1^2} \right) & \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} \right) + \left(\frac{\text{Sh}}{z_1} - \frac{(\text{Ch}-1)}{\Delta z_1^2} \right) \end{pmatrix} \right] - I \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{i\Delta\sqrt{1/\lambda-1}} - \alpha & -\alpha \\ \frac{\alpha}{\lambda} & \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{i\Delta\sqrt{1/\lambda-1}} \right) + \alpha \end{pmatrix} \right] - I \\
&= \begin{pmatrix} -1 + \frac{\alpha}{\lambda} & \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{i\Delta\sqrt{1/\lambda-1}} \right) + \alpha \\ \frac{1}{\lambda} \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{i\Delta\sqrt{1/\lambda-1}} \right) - \frac{\alpha}{\lambda} & -1 - \frac{\alpha}{\lambda} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

□

Proposition III.9.5. Seien $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann gilt
 $P(\lambda, \Delta) = \det(H(\lambda, \Delta)) = \frac{z(\lambda, \Delta)}{\Delta^2(\lambda-1)}$ mit

$$(III.12) \quad z(\lambda, \Delta) = 2(1 - \text{Ch}) + \frac{\Delta^2}{\lambda}(\lambda - 1)^2 + 2i\Delta\sqrt{1/\lambda - 1} \text{Sh}.$$

Beweis. Seien $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, dann gilt

$$\begin{aligned}
P(\lambda, \Delta) &= \det \begin{pmatrix} -1 + \frac{\alpha}{\lambda} & \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{i\Delta\sqrt{1/\lambda-1}} \right) + \alpha \\ \frac{1}{\lambda} \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{i\Delta\sqrt{1/\lambda-1}} \right) - \frac{\alpha}{\lambda} & -1 - \frac{\alpha}{\lambda} \end{pmatrix} \\
&= \left(-1 + \frac{\alpha}{\lambda} \right) \left(-1 - \frac{\alpha}{\lambda} \right) - \frac{1}{\lambda} \left[\left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} \right) - \alpha \right] \left[\left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} \right) + \alpha \right] \\
&= 1 - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \left[\left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} \right)^2 - \alpha^2 \right] \\
&= 1 - \frac{\alpha^2}{\lambda^2} + \frac{\alpha^2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} \right)^2 \\
&= 1 + \alpha^2 \frac{(1 - 1/\lambda)}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} \right)^2 \\
&= 1 + \frac{z_1^2}{\lambda} \alpha^2 - \frac{1}{\lambda} \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} \right)^2 \\
&= 1 + \frac{z_1^2}{\lambda} \left(\frac{\text{Sh}}{z_1} - \frac{(\text{Ch}-1)}{\Delta z_1^2} \right)^2 - \frac{1}{\lambda} \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{(mit } \alpha = \frac{\text{Sh}}{z_1} - \frac{(\text{Ch}-1)}{\Delta z_1^2}, \text{ siehe Anfang des Beweises von Bemerkung III.9.4)} \\
& = 1 + \frac{1}{\lambda} \left(\text{Sh} - \frac{(\text{Ch}-1)}{\Delta z_1} \right)^2 - \frac{1}{\lambda} \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta z_1} \right)^2 \\
& = \frac{1}{\lambda \Delta^2 z_1^2} \left[\lambda z_1^2 \Delta^2 + (\Delta z_1 \text{Sh} - (\text{Ch}-1))^2 - (\Delta z_1 \text{Ch} - \text{Sh})^2 \right] \\
& = \frac{1}{\lambda \Delta^2 z_1^2} \left[\lambda \Delta^2 z_1^2 + \Delta^2 z_1^2 \text{Sh}^2 - 2\Delta z_1 \text{Sh}(\text{Ch}-1) + (\text{Ch}-1)^2 \right. \\
& \quad \left. - \Delta^2 z_1^2 \text{Ch}^2 + 2\Delta z_1 \text{Sh Ch} - \text{Sh}^2 \right] \\
& = \frac{1}{\lambda \Delta^2 z_1^2} \left[\lambda \Delta^2 z_1^2 + (-2\Delta z_1 \text{Sh Ch} + 2\Delta z_1 \text{Sh Ch}) - \Delta^2 z_1^2 (\text{Ch}^2 - \text{Sh}^2) \right. \\
& \quad \left. + (\text{Ch}^2 - \text{Sh}^2) + 2\Delta z_1 \text{Sh} - 2\text{Ch} + 1 \right] \\
& = \frac{1}{\lambda \Delta^2 z_1^2} \left[\lambda \Delta^2 z_1^2 - \Delta^2 z_1^2 + 1 + 2\Delta z_1 \text{Sh} - 2\text{Ch} + 1 \right] \\
& = \frac{1}{\lambda \Delta^2 z_1^2} \left[2(1 - \text{Ch}) + (\lambda - 1)\Delta^2 z_1^2 + 2\Delta z_1 \text{Sh} \right] \\
& = \frac{1}{\Delta^2(\lambda - 1)} \left[2(1 - \text{Ch}) + \frac{\Delta^2}{\lambda}(\lambda - 1)^2 + 2i\Delta\sqrt{1/\lambda - 1} \text{Sh} \right]
\end{aligned}$$

□

Anmerkung III.9.6. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und $z(\lambda, \Delta) \neq 0$, dann kann die Inverse zu $H(\lambda, \Delta)$ als

$$H^{-1}(\lambda, \Delta) = \frac{\Delta^2(\lambda - 1)}{z(\lambda, \Delta)} \widehat{H}(\lambda, \Delta)$$

ausgedrückt werden, mit

$$(III.13) \quad \widehat{H}(\lambda, \Delta) = \begin{pmatrix} -1 - \frac{\alpha}{\lambda} & -\left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta\sqrt{1-1/\lambda}} \right) - \alpha \\ -\frac{1}{\lambda} \left(\text{Ch} - \frac{\text{Sh}}{\Delta\sqrt{1-1/\lambda}} \right) + \frac{\alpha}{\lambda} & -1 + \frac{\alpha}{\lambda} \end{pmatrix}$$

und $z(\lambda, \Delta) = 2(1 - \text{Ch}) + \frac{\Delta^2}{\lambda}(\lambda - 1)^2 + 2\Delta\sqrt{1-1/\lambda} \text{Sh}$.

Proposition III.9.7. Für jedes $\Delta > 0$ ist die Abbildung $P(\cdot, \Delta) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ analytisch (holomorph).

Beweis. Seien $\Delta > 0$, $\lambda_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Setze $\mu_0 = \frac{1}{\lambda_0} - 1$ ($\in \mathbb{C} \setminus \{0\}$). Dann existiert ein $\varepsilon \in (0, |\mu_0|)$ und eine holomorphe Funktion $Wu : \mathcal{U}_\varepsilon(\mu_0) \rightarrow \mathbb{C}$ mit $Wu^2(z) = z$ für alle $z \in \mathcal{U}_\varepsilon(\lambda_0)$. (Man findet Wu mit Hilfe des Satzes über inverse holomorphe Abbildungen, als lokale Inverse von $\mathbb{C} \ni \omega \mapsto \omega^2 \in \mathbb{C}^2$.)

Für alle $z \in \mathcal{U}_\varepsilon(\mu_0)$ gilt mit der Festlegung von \sqrt{z} aus der Einleitung $Wu(z) \in \{\sqrt{z}, -\sqrt{z}\}$.

Aus Stetigkeitsgründen gibt es ein $\delta > 0$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ für alle $\lambda \in \mathcal{U}_\delta(\lambda_0)$.

Für solche λ mit $\frac{1}{\lambda} - 1 \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ folgt aus Proposition III.9.5, und weil \cosh gerade und \sinh ungerade, ist die Darstellung

$$\begin{aligned}
 \text{(III.14)} \quad P(\lambda, \Delta) &= \frac{2 \left(1 - \cosh \left(2i\Delta \sqrt{1/\lambda - 1} \right) \right) + \frac{\Delta^2}{\lambda} (\lambda - 1)^2}{\Delta^2 (\lambda - 1)} \\
 &\quad + \frac{2i\Delta \sqrt{1/\lambda - 1} \sinh \left(2i\Delta \sqrt{1/\lambda - 1} \right)}{\Delta^2 (\lambda - 1)} \\
 &= \frac{2 \left(1 - \cosh \left(2i\Delta \operatorname{Wu} \left(1/\lambda - 1 \right) \right) \right) + \frac{\Delta^2}{\lambda} (\lambda - 1)^2}{\Delta^2 (\lambda - 1)} \\
 &\quad + \frac{2i\Delta \operatorname{Wu} \left(1/\lambda - 1 \right) \sinh \left(2i\Delta \operatorname{Wu} \left(1/\lambda - 1 \right) \right)}{\Delta^2 (\lambda - 1)}
 \end{aligned}$$

Damit ist $P(\cdot, \Delta) \Big|_{\mathcal{U}_\delta(\lambda_0)}$ holomorph.

Es folgt, dass $P(\cdot, \Delta) \Big|_{\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}}$ holomorph ist.

Nach Proposition III.8.3 ist $P(\cdot, \Delta)$ stetig, also lokalbeschränkt, deshalb hat $P(\cdot, \Delta) \Big|_{\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}}$ bei $\lambda_0 = 1$ eine hebbare Singularität, daraus ergibt sich, dass $P(\cdot, \Delta) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph ist. \square

Korollar III.9.8. *Für jedes $\lambda \in \sigma(M_c) \setminus \{0\}$ ist die Ordnung von λ als Pol der Resolvente*

$$\rho(M_c) \ni \mu \longmapsto (M_c - \mu)^{-1} \in L_c(Y_c, Y_c)$$

höchstens gleich der Ordnung von λ als Nullstelle von

$$\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni \lambda \longmapsto \det(H(\mu, \Delta)) \in \mathbb{C}.$$

Beweis. Seien $\lambda \in \sigma(M_c) \setminus \{0\}$ und

$$K_\varepsilon(\lambda) = \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\lambda - \mu| < \varepsilon\}.$$

Dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $\{\mu \in \mathbb{C} \mid 0 < |\mu - \lambda| < \varepsilon\} \subseteq \rho(M_c)$, und es gibt $p \in \mathbb{N}$, sowie $L_n \in L_c(Y_c, Y_c)$, $-p \leq n \in \mathbb{Z}$, mit $L_{-p} \neq 0$ mit

$$(M_c - \mu)^{-1} = \sum_{n=1}^p (\mu - \lambda)^{-n} L_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n L_n \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{C} \text{ mit } |\mu - \lambda| < \varepsilon,$$

p ist die Ordnung des Pols der Resolvente an der Stelle λ .

Weiter existieren $q \in \mathbb{N}$ und $\zeta_n \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, mit $\zeta_q \neq 0$ und

$$\det(H(\mu, \Delta)) = \sum_{n=q}^{\infty} (\mu - \lambda)^n \zeta_n \quad \text{für alle } \mu \in K_\varepsilon(\lambda),$$

$q \geq 1$ ist die Ordnung der Nullstelle λ von $\det(H(\cdot, \Delta))$.

Für alle $\mu \in \mathbb{C}$ mit $0 < |\mu - \lambda| < \varepsilon$ folgt (im Fall $p \geq 2$)

$$(M_c - \mu)^{-1} = \frac{1}{(\mu - \lambda)^p} L_{-p} + \sum_{n=1}^{p-1} (\mu - \lambda)^{-n} L_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n L_n.$$

Für alle $\mu \in \{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - \lambda| < \varepsilon\}$ gilt

$$\det(H(\mu, \Delta)) = (\mu - \lambda)^q \sum_{n=q}^{\infty} (\mu - \lambda)^{n-q} \zeta_n = (\mu - \lambda)^q \left[\zeta_q + \sum_{n=q+1}^{\infty} (\mu - \lambda)^{n-q} \zeta_n \right],$$

und durch

$$s(\mu) = \sum_{n=q+1}^{\infty} (\mu - \lambda)^{n-q} \zeta_n$$

ist eine holomorphe Funktion auf $K_\varepsilon(\lambda)$ gegeben.

Angenommen, $q < p$, also $p - (q+1) \geq 0$. Dann erhalten wir für alle $\mu \in K_\varepsilon(\lambda) \setminus \{\lambda\}$, dass

$$\begin{aligned} & (\mu - \lambda)^{p-(q+1)} \det(H(\mu, \Delta))(M_c - \mu)^{-1} \\ &= (\mu - \lambda)^{p-1} (\zeta_q + s(\mu)) \left[(\mu - \lambda)^{-p} L_{-p} + \sum_{n=1}^{p-1} (\mu - \lambda)^{-n} L_{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^n L_n \right] \\ &= (\mu - \lambda)^{-1} \zeta_q L_{-p} + \sum_{n=1}^{p-1} (\mu - \lambda)^{p-1-n} \zeta_q L_{-n} + \zeta_q \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^{p-1+n} L_n \\ &\quad + (\mu - \lambda)^{-1} s(\mu) L_{-p} + s(\mu) \sum_{n=1}^{p-1} (\mu - \lambda)^{p-1-n} L_{-n} + s(\mu) \sum_{n=0}^{\infty} (\mu - \lambda)^{p-1+n} L_n. \end{aligned}$$

Auf der kompakten Umgebung $K := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu - \lambda| \leq \varepsilon/2\}$ sind die zweiten, dritten, fünften und sechsten Terme beschränkt, weil sie durch konvergente Potenzreihen gegeben sind.

Es gilt

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow \lambda \\ \mu \neq \lambda}} |(\mu - \lambda)^{-1} \zeta_q L_{-p}| = \infty,$$

wegen $0 \neq \zeta_q L_{-p} \in L_c(Y_c, Y_c)$.

Für den vierten Term haben wir

$$(\mu - \lambda)^{-1} s(\mu) L_{-p} = \sum_{n=q+1}^{\infty} (\mu - \lambda)^{n-(q+1)} \zeta_n L_{-p} \text{ für alle } \mu \in \mathbb{C} \text{ mit } 0 < |\mu - \lambda| < \varepsilon.$$

Dies zeigt, dass auch der vierte Term auf K beschränkt ist.

Insgesamt folgt

$$\lim_{\substack{\mu \rightarrow \lambda \\ \mu \neq \lambda}} |(\mu - \lambda)^{p-(q+1)} \det(H(\mu, \Delta))(M_c - \mu)^{-1}| = \infty,$$

woraus sich (mit $p - (q+1) \geq 0$) ein Widerspruch zur Lokalbeschränktheit aus Proposition III.8.5 ergibt. \square

III.10 Suche nach Lösungen der charakteristischen Gleichung, Verzweigung von Eigenwerten des Monodromieoperators

Im letzten Teil dieses Abschnitts betrachten wir eine 1-Parameter-Familie von Verzögerungsfunktionalen $d_\Delta : C \rightarrow (0, 2)$, $\Delta \in \mathbb{R}$, mit $d_\Delta(p_t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$, sodass $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodische Lösung von der Gleichung (III.1) mit $d = d_\Delta|_{C^1}$ ist, $\Delta \in \mathbb{R}$, und suchen nach Eigenwerten $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ des zu p gehörigen Monodromieoperators $M_{\Delta, c} : C_c \rightarrow C_c$. Genauer: Wir wählen dazu eine Funktion $\tilde{\delta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow (-1, 1)$, sodass für alle $\Delta \in \mathbb{R}$ gilt: $\tilde{\delta}(0, \Delta) = 0$, und $\tilde{\delta}(\cdot, \Delta) : \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ ist stetig differenzierbar mit $\partial_1 \tilde{\delta}(0, \Delta) = \Delta$. Und für alle $\xi \in \mathbb{R}$: $\tilde{\delta}(\xi, 0) = 0$. Dann betrachten wir zu jedem $\Delta \in \mathbb{R}$ das Funktional $d_\Delta : C \rightarrow (0, 2)$, $d_\Delta(\chi) = 1 + \tilde{\delta}(\chi(0) + \chi(-2), \Delta)$.

Die Einschränkung $d_\Delta|_{C^1}$ hat die Eigenschaft (E), siehe Proposition III.5.1.

Dann ist $\mathbb{R} \ni t \mapsto p(t) \in \mathbb{R}$ periodische Lösung der Gleichung (III.1) mit $d = d_\Delta$. Die zugehörige Variationsgleichung längs p ist (III.5). Die Eigenwerte des zugehörigen Monodromieoperators $M_{\Delta, c} : C_c \rightarrow C_c$ in $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ sind gegeben durch die Nullstellen von

$$P(\cdot, \Delta) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}.$$

Anmerkung III.10.1. Betrachte

$$\begin{aligned} Z : \{(u, \Delta) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \mid 4\Delta^2 \neq u\} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (u, \Delta) &\longmapsto \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(n-1)u^n}{(2n)!} + \frac{u^2}{4(4\Delta^2 - u)}. \end{aligned}$$

(i) Sei $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Sei $w = 2i\Delta\sqrt{1/\lambda - 1}$ und sei $u = w^2 = 4\Delta^2(1 - 1/\lambda)$. Dann gilt $u \neq 4\Delta^2$, und der Zähler von $P(\lambda, \Delta)$ ist gegeben durch

$$z(\lambda, \Delta) = 2(1 - \cosh(w)) + w \sinh(w) + \frac{u}{4}(\lambda - 1) = Z(u, \Delta).$$

(ii) Mit $r(u) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(n-1)}{(2n)!} u^n$ für $u \in \mathbb{C}$ gilt $Z(u, \Delta) = r(u) + \frac{u^2}{4(4\Delta^2 - u)}$ für alle $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $u \in \mathbb{C}$ mit $4\Delta^2 \neq u$.

(iii) Mit $R(u) := \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(n-1)}{(2n)!} u^{n-2}$ für $u \in \mathbb{C}$ ($= \frac{r(u)}{u^2}$ im Fall $u \neq 0$) gilt

$$Z(u, \Delta) = u^2 \left(R(u) + \frac{1}{4(4\Delta^2 - u)} \right) = u^2 \left(\frac{4(4\Delta^2 - u)R(u) + 1}{4(4\Delta^2 - u)} \right)$$

für $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $u \in \mathbb{C}$ mit $4\Delta^2 \neq u$.

Beweis. (i) Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $u = 4\Delta^2(1 - \frac{1}{\lambda})$.

- Behauptung: $u \neq 4\Delta^2$.

Beweis davon: Angenommen $u = 4\Delta^2$, dann folgt $4\Delta^2(1 - 1/\lambda) = 4\Delta^2$, das heisst

$$0 = 4\Delta^2((1 - 1/\lambda) - 1) = -\frac{4\Delta^2}{\lambda},$$

also $\Delta = 0$, Widerspruch. Folglich ist $u \neq 4\Delta^2$.

- Behauptung: Sei $w = 2i\Delta\sqrt{1/\lambda - 1}$, dann gilt $u = w^2$ und

$$2(1 - \text{Ch}) + 2i\Delta\sqrt{1/\lambda - 1} \text{Sh} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(n-1)}{(2n)!} u^n,$$

mit $\text{Ch} = \cosh(2i\Delta\sqrt{1/\lambda - 1})$ und $\text{Sh} = \sinh(2i\Delta\sqrt{1/\lambda - 1})$.

Beweis davon: Es gilt

$$\begin{aligned} & 2\left(1 - \cosh\left(2i\Delta\sqrt{1 - 1/\lambda}\right)\right) + 2i\Delta\sqrt{1 - 1/\lambda} \sinh\left(2i\Delta\sqrt{1 - 1/\lambda}\right) \\ &= 2(1 - \cosh(w)) + w \sinh(w) \\ &= 2\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n}}{(2n)!}\right) + w \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= 2 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2w^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^{2n+2}}{(2n+1)!} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2w^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w^{2(n-1)+2}}{(2(n-1)+1)!} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2w^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nw^{2n}}{(2n-1)!(2n)} \\ &= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2w^{2n}}{(2n)!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nw^{2n}}{(2n)!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(n-1)}{(2n)!} w^{2n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(n-1)}{(2n)!} w^{2n} \\ &= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(n-1)}{(2n)!} u^n \end{aligned}$$

- Behauptung:

$$\frac{u}{4}(\lambda - 1) = \frac{u^2}{4(4\Delta^2 - u)}.$$

Beweis davon: Wegen $\lambda u = 4\Delta^2(\lambda - 1) = 4\Delta^2\lambda - 4\Delta^2$ gilt $\lambda = \frac{4\Delta^2}{4\Delta^2 - u}$, daher ist

$$\begin{aligned} \frac{u}{4}(\lambda - 1) &= \frac{u}{4} \left(\frac{4\Delta^2}{4\Delta^2 - u} - 1 \right) \\ &= \frac{u}{4} \left(\frac{4\Delta^2 - (4\Delta^2 - u)}{4\Delta^2 - u} \right) \\ &= \frac{u^2}{4(4\Delta^2 - u)}. \end{aligned}$$

Also gilt insgesamt

$$z(\lambda, \Delta) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(n-1)u^n}{(2n)!} + \frac{u^2}{4(4\Delta^2 - u)} = Z(u, \Delta).$$

(ii) Es gilt für alle $u \in \mathbb{C}$ mit $u \neq 4\Delta^2$ und für alle $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$Z(u, \Delta) = \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2(n-1)}{(2n)!} u^n}_{=r(u)} + \frac{u^2}{4(4\Delta^2 - u)} = r(u) + \frac{u^2}{4(4\Delta^2 - u)}.$$

(iii) Es gilt für alle $u \in \mathbb{C}$ mit $u \neq 4\Delta^2$ und für alle $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} Z(u, \Delta) &= r(u) + \frac{u^2}{4(4\Delta^2 - u)} \\ &= u^2 \left(R(u) + \frac{1}{4(4\Delta^2 - u)} \right) \\ &= u^2 \left(\frac{4(4\Delta^2 - u)R(u) + 1}{4(4\Delta^2 - u)} \right). \end{aligned}$$

□

Zunächst wird die Existenz von Nullstellen des charakteristischen Polynoms $P(\cdot, \Delta)$ auf $(1, +\infty)$ ausgeschlossen.

Proposition III.10.2. *Die Abbildung $z(\cdot, \Delta)$ mit $\Delta \in \mathbb{R}$ hat keine Nullstellen in $(1, +\infty)$, also hat $M_{\Delta, c}$ keine Eigenwerte in $(1, +\infty)$.*

Beweis. Sei $\lambda > 1$, dann gilt für $u = 4\Delta^2(1 - \frac{1}{\lambda})$: $0 < u < 4\Delta^2$, daher $z(\lambda, \Delta) = \underbrace{r(u)}_{>0} + \underbrace{\frac{u^2}{4(4\Delta^2 - u)}}_{>0} > 0$, also hat $z(\cdot, \Delta)$ keine Nullstellen in $(1, \infty)$, und $M_{\Delta, c}$ hat keine Eigenwerte in $(1, \infty)$.

□

Gibt es für geeignete Δ auch Nullstellen in $(0, 1)$?

Wir kommentieren kurz die Frage nach Nullstellen in $(0, 1)$, ohne die Beweise im Detail auszuführen. Insbesondere sieht man, dass es auch Nullstellen höherer Ordnung gibt.

Für $\lambda \in (0, 1)$ ist $\sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}$ reell und positiv.

Mit den Beziehungen

$$\cosh(iv) = \cos(v) \quad \sinh(iv) = i \sin(v)$$

und mit $v = 2\Delta\sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1} > 0$ ergibt sich für $\lambda \in (0, 1)$ und $\Delta > 0$ die Beziehung

$$z(\lambda, \Delta) = 2(1 - \cos(v)) - v \sin(v) + \frac{v^4}{4v^2 + 16\Delta^2}.$$

Mit den Abbildungen

$$A : \mathbb{R} \ni v \mapsto 2(1 - \cos(v)) - v \sin(v) \in \mathbb{R}$$

und

$$N : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \ni (v, \Delta) \mapsto \frac{v^4}{4v^2 + 16\Delta^2} \in \mathbb{R}$$

und mit der bijektiven Transformation

$$T : (0, 1) \times (0, \infty) \ni (\lambda, \Delta) \mapsto \left(2\Delta \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1}, \Delta \right) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$$

erhalten wir

$$z(\lambda, \Delta) = A(T_1(\lambda, \Delta)) + N(T(\lambda, \Delta)) = A(T_1(\lambda, \Delta)) + N(T_1(\lambda, \Delta), \Delta).$$

Um für $\Delta > 0$ Nullstellen von $z(\cdot, \Delta)$ in $(0, 1)$ zu finden, suchen wir zuerst Nullstellen $v \in (0, \infty)$ der Abbildung $A + N(\cdot, \Delta)$; aus diesen erhalten wir wegen

$$z((T^{-1}(v, \Delta))_1, \Delta) = z(T^{-1}(v, \Delta)) = A(v) + N(v, \Delta)$$

die Nullstellen $\lambda = (T^{-1}(v, \Delta))_1 = \frac{4\Delta^2}{v^2 + 4\Delta^2} \in (0, 1)$ von $z(\cdot, \Delta)$.

Für kleine $\Delta > 0$ und für alle $v > 0$ gilt

$$A(v) > -N(v, \Delta),$$

es gibt also keine Nullstellen von $A + N(\cdot, \Delta)$ von $(0, \infty)$.

Mit wachsendem $\Delta > 0$ wird der Graph von $-N(\cdot, \Delta)$ flacher und wandert nach oben zur Achse $\mathbb{R} \times \{0\}$, siehe Abbildung III.1.

Bei einem ersten kritischen Wert $\Delta_1 > 0$ berühren sich A und $-N(\cdot, \Delta_1)$ für ein v_1 zwischen den beiden kleinsten Nullstellen $n_1 < n_2$ von A in $(0, \infty)$, anschließend verzweigt die doppelte Nullstelle v_1 von $A + N(\cdot, \Delta_1)$ zu zwei einfachen Nullstellen $v_{1-}(\Delta) < v_{1+}(\Delta)$ von $A + N(\cdot, \Delta)$ im Intervall (n_1, n_2) . Für $\Delta \nearrow +\infty$ strebt $v_{1-}(\Delta)$ gegen n_1 und $v_{1+}(\Delta)$ gegen n_2 .

Der doppelten Nullstelle v_1 von $A + N(\cdot, \Delta_1)$ entspricht eine doppelte Nullstelle $\lambda_1 \in (0, 1)$ von $z(\cdot, \Delta_1)$, welche für $\Delta_1 < \Delta$ zu zwei einfachen Nullstellen $\lambda_{1-}(\Delta) < \lambda_{1+}(\Delta)$ in $(0, 1)$ verzweigt, die für $\Delta \nearrow +\infty$ beide gegen 1 konvergieren.

Für fallende $\Delta < \Delta_1$ sollte eine Verzweigung von λ_1 zu zwei nicht-reelle komplex konjugierte einfache Nullstellen $\lambda_{1c}(\Delta) \neq \overline{\lambda_{1c}(\Delta)}$ von $z(\cdot, \Delta)$ vorliegen, die für $\Delta \searrow 0$ vermutlich gegen 0 streben.

Für $\Delta \in (\Delta_1, \infty)$ wiederholt sich das vorige Szenario abzählbar oft, zuerst ab einem kritischen $\Delta_2 > \Delta_1$ mit Nullstellen $v_{3-}(\Delta) < v_{3+}(\Delta)$ von $A + N(\cdot, \Delta)$ zwischen den dritten und vierten Nullstellen $n_3 < n_4$ von A , und Nullstellen $\lambda_{3-}(\Delta) < \lambda_{3+}(\Delta)$ von $z(\cdot, \Delta)$ in $(0, 1)$.

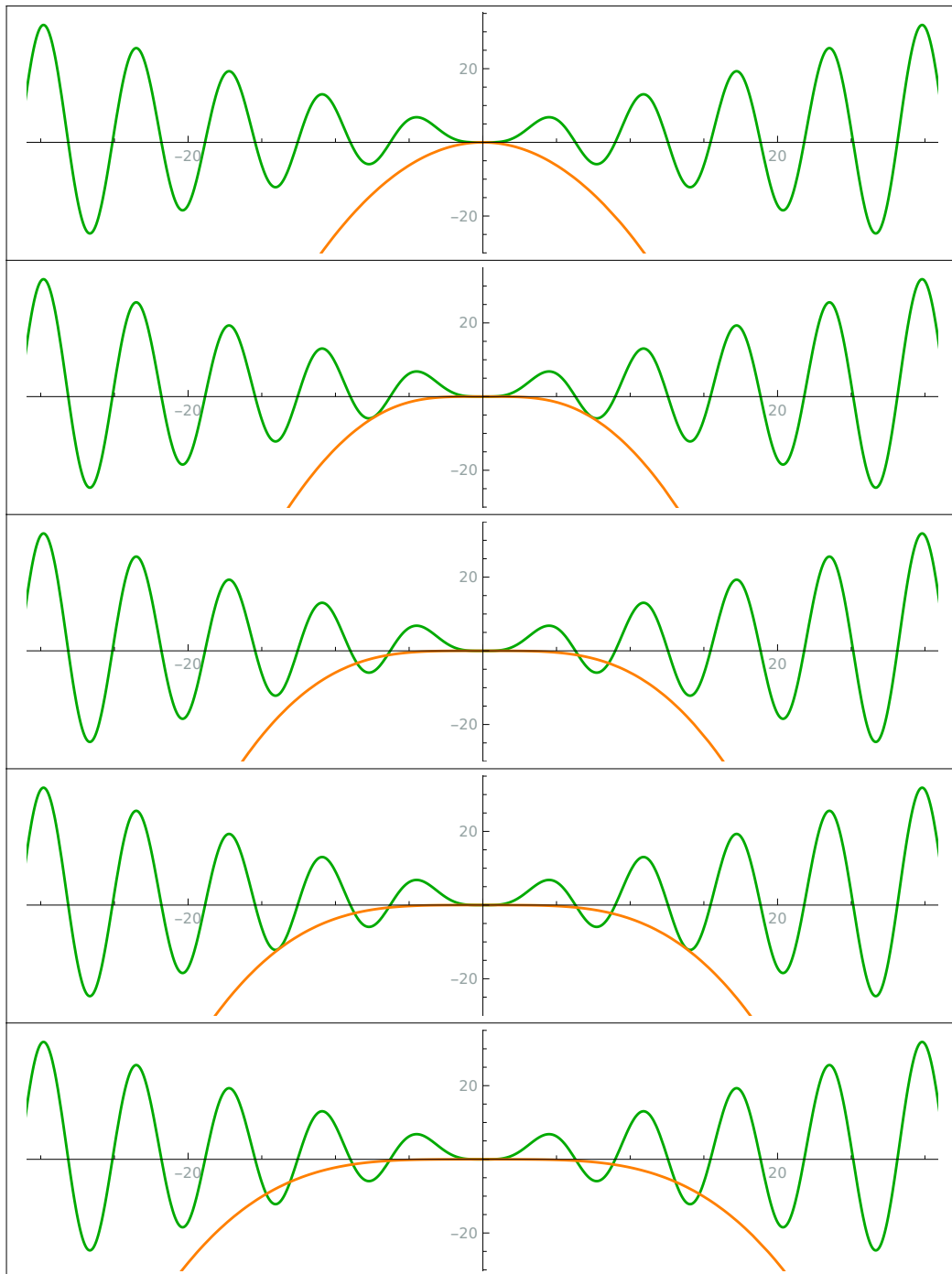


Abbildung III.1: Das Auftreten von Nullstellen in $(0, 1)$
für wachsende Δ

Jetzt werden die Nullstellen von $z(\cdot, \Delta)$ in $(-\infty, 0)$ untersucht.

Anmerkung III.10.3. Für

$$Q = \{(u, \Delta) \in \mathbb{C} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \mid 4\Delta^2 \neq u\} \ni (u, \Delta) \mapsto 4(4\Delta^2 - u)R(u) + 1 \in \mathbb{C}$$

und für alle $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und alle $u \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ mit $u \neq 4\Delta^2$ gilt:

$$Z(u, \Delta) = 0 \iff Q(u, \Delta) = 0,$$

wegen $Z(u, \Delta) = u^2 \left(R(u) + \frac{1}{4(4\Delta^2 - u)} \right)$.

Proposition III.10.4. $Q(\cdot, \Delta)$, $\Delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, hat keine Nullstellen in $(0, 4\Delta^2)$.

Beweis. Sei $u \in (0, 4\Delta^2)$, dann gilt $4\Delta^2 - u > 0$, und wegen $R(u) > 0$ für alle $u > 0$ ist $Q(u, \Delta) = 4 \underbrace{(4\Delta^2 - u)}_{>0} \underbrace{R(u)}_{>0} + 1 > 0$, das heißt $Q(\cdot, \Delta)$ hat keine Nullstellen in

$(0, 4\Delta^2)$. □

Anmerkung III.10.5. Sei $\Delta > 0$, dann gilt $\partial_1 Q(u, \Delta) < 0$ für alle $u > 4\Delta^2$

Beweis. Sei $\Delta > 0$ und $u > 4\Delta^2$, dann gilt $4\Delta^2 - u < 0$. Außerdem ist $R'(u) > 0$ für alle $u > 0$ und $R(u) > 0$ für alle $u > 0$. Folglich gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 Q(u, \Delta) &= \left((4(4\Delta^2 - id(\cdot))R(\cdot) + 1) \right)'(u) \\ &= \left((16\Delta^2 R(\cdot) - 4id(\cdot)R(\cdot) + 1) \right)'(u) \\ &= 16\Delta^2 R'(u) - 4R(u) - 4uR'(u) \\ &= 4 \underbrace{(4\Delta^2 - u)}_{<0} \underbrace{R'(u)}_{>0} - 4 \underbrace{R(u)}_{>0} < 0. \end{aligned}$$

□

Proposition III.10.6. Für jedes $\Delta > 0$ gibt es genau ein $u \in (4\Delta^2, +\infty)$ mit $Q(u, \Delta) = 0$.

Beweis. Sei $\Delta > 0$.

Behauptung: Es gibt wenigstens ein $u \in (4\Delta^2, +\infty)$ mit $Q(u, \Delta) = 0$. Man bemerkt, dass

$$\lim_{u \searrow 4\Delta^2} Q(u, \Delta) = 1 > 0 \quad \text{und} \quad \lim_{u \nearrow +\infty} Q(u, \Delta) = -\infty,$$

daraus folgt mit dem Zwischenwertsatz, dass es ein $u \in (4\Delta^2, +\infty)$ gibt mit $Q(u, \Delta) = 0$.

Behauptung: Es gibt ein einziges $u_0 \in (4\Delta^2, +\infty)$ mit $Q(u_0, \Delta) = 0$.

Beweis: Wegen Anmerkung III.10.5 ist $Q(\cdot, \Delta)$ auf $(4\Delta^2, +\infty)$ streng monoton fallend, also injektiv. □

Jetzt definieren wir $\mathcal{U} : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, durch $Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta) = 0$ und $\mathcal{U}(\Delta) > 4\Delta^2$.

Proposition III.10.7. \mathcal{U} ist analytisch.

Beweis. Die Abbildung

$$\widehat{Q} : \{(u, \Delta) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : 4\Delta^2 \neq u\} \ni (u, \Delta) \mapsto 4(4\Delta^2 - u)R(u) + 1 \in \mathbb{R}$$

ist analytisch, und es gilt nach Anmerkung III.10.5

$$\partial_1 Q(u, \Delta) \neq 0.$$

Sei $\Delta_0 > 0$, $u_0 := \mathcal{U}(\Delta_0) \in (4\Delta_0^2, \infty)$. Dann gelten

$$\widehat{Q}(u_0, \Delta_0) = 0 \quad \text{und} \quad \partial_1 \widehat{Q}(u_0, \Delta_0) \neq 0.$$

Der Satz über Implizite Funktionen im analytischen Fall [12, Corollary 4.23] liefert $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$, mit

$$(u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \times (\Delta_0 - \delta, \Delta_0 + \delta) \subseteq \{(u, \Delta) \in \mathbb{R} \times (0, \infty) : 4\Delta^2 \neq u\}$$

und eine analytische Funktion

$$\widehat{\mathcal{U}} : (\Delta_0 - \delta, \Delta_0 + \delta) \longrightarrow (u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R},$$

so dass $\widehat{\mathcal{U}}(\Delta_0) = u_0 = \mathcal{U}(\Delta_0)$ und

$$\begin{aligned} & \{(u, \Delta) \in (u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \times (\Delta_0 - \delta, \Delta_0 + \delta) : \widehat{Q}(u, \Delta) = 0\} \\ & = \{(u, \Delta) \in (u_0 - \varepsilon, u_0 + \varepsilon) \times (\Delta_0 - \delta, \Delta_0 + \delta) \mid u = \widehat{\mathcal{U}}(\Delta)\} \end{aligned}$$

gelten.

Mit Hilfe von $Q(\widehat{\mathcal{U}}(\Delta), \Delta) = \widehat{Q}(\widehat{\mathcal{U}}(\Delta), \Delta) = 0$ für alle Δ in einer genügend kleinen Umgebung $N \subseteq (\Delta_0 - \delta, \Delta_0 + \delta)$ von Δ_0 (so dass $\widehat{\mathcal{U}}(\Delta) > 4\Delta^2$) folgt für alle $\Delta \in N$: $\mathcal{U}(\Delta) = \widehat{\mathcal{U}}(\Delta)$. Damit ist $\mathcal{U}|_N$ analytisch. \square

Proposition III.10.8. $\mathcal{U}'(\Delta) > 0$ für alle $\Delta > 0$.

Beweis. Durch Differenzieren von $0 = Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta)$ für jedes $\Delta > 0$ gilt

$$0 = \partial_1 Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta) \mathcal{U}'(\Delta) + \partial_2 Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta),$$

also

$$\mathcal{U}'(\Delta) = -\frac{\partial_2 Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta)}{\partial_1 Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta)}.$$

Außerdem gilt wegen $\partial_2 Q(u, \Delta) = 32\Delta R(u)$ für alle $u \in \mathbb{R}$:

$$\partial_2 Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta) = 32\Delta R(\mathcal{U}(\Delta)) > 0.$$

Mit Anmerkung III.10.5 folgt

$$\mathcal{U}'(\Delta) = -\frac{\partial_2 Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta)}{\partial_1 Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta)} > 0 \quad \text{für jedes } \Delta > 0.$$

\square

Proposition III.10.9. *Es existiert $\lim_{\Delta \searrow 0} \mathcal{U}(\Delta) =: u_*$ mit $u_* > 0$ und*

$$u_* R(u_*) = \frac{1}{4}.$$

Beweis. \mathcal{U} ist nach unten beschränkt, außerdem ist \mathcal{U} wegen Proposition III.10.8 monoton steigend, das heisst $u_* := \lim_{\Delta \searrow 0} \mathcal{U}(\Delta) \geq 0$.

Da für alle $\Delta > 0$ die Gleichung $0 = Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta) = 4(4\Delta^2 - \mathcal{U}(\Delta))R(\mathcal{U}(\Delta)) + 1$ gilt, folgt insbesondere für $\Delta \searrow 0$, dass $0 = -4u_*R(u_*) + 1$, also $u_*R(u_*) = 1/4$. Insbesondere: $u_* > 0$. \square

Proposition III.10.10. *Für alle $\Delta > 0$ gilt*

$$1 < \frac{\mathcal{U}(\Delta)}{4\Delta^2} \quad \text{und} \quad \lim_{\Delta \nearrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(\Delta)}{4\Delta^2} = 1.$$

Beweis. Wegen $Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta) = 0$ gilt

$$0 = 4(4\Delta^2 - \mathcal{U}(\Delta))R(\mathcal{U}(\Delta)) + 1 = 16\Delta^2 R(\mathcal{U}(\Delta)) - 4\mathcal{U}(\Delta)R(\mathcal{U}(\Delta)) + 1,$$

also gilt $0 = 1 - \frac{\mathcal{U}(\Delta)}{4\Delta^2} + \frac{1}{16\Delta^2 R(\mathcal{U}(\Delta))}$. Mit $R(\mathcal{U}(\Delta)) \geq R(0) > 0$ folgt

$$\lim_{\Delta \nearrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(\Delta)}{4\Delta^2} = \lim_{\Delta \nearrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{16\Delta^2 R(\mathcal{U}(\Delta))} \right) = 1.$$

\square

Proposition III.10.11. *Sei $\Delta > 0$, dann gilt $z(\Lambda(\Delta), \Delta) = 0$ mit der analytischen Funktion $\Lambda : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0)$, $\Lambda(\Delta) := \frac{4\Delta^2}{4\Delta^2 - \mathcal{U}(\Delta)}$.*

Beweis. Sei $\Delta > 0$. Wegen der Definition von \mathcal{U} gilt $\Lambda(\Delta) = \frac{4\Delta^2}{4\Delta^2 - \mathcal{U}(\Delta)} < 0$.

Mit $4\Delta^2 - \mathcal{U}(\Delta) = \frac{4\Delta^2}{\Lambda(\Delta)}$ folgt

$$\mathcal{U}(\Delta) = 4\Delta^2 - \frac{4\Delta^2}{\Lambda(\Delta)} = 4\Delta^2 \left(1 - \frac{1}{\Lambda(\Delta)} \right).$$

Mit Anmerkung III.10.1 ergibt sich

$$z(\Lambda(\Delta), \Delta) = Z \left(4\Delta^2 \left(1 - \frac{1}{\Lambda(\Delta)} \right), \Delta \right) = Z(\mathcal{U}(\Delta), \Delta),$$

wegen $Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta) = 0$ liefert Anmerkung III.10.3: $Z(\mathcal{U}(\Delta), \Delta) = 0$. Also $z(\Lambda(\Delta), \Delta) = 0$. \square

Satz III.10.12. *Zu jedem $\Delta > 0$ gibt es genau einen Eigenwert $\lambda = \Lambda(\Delta) \in (-\infty, 0)$ von M_c .*

Die Funktion $\Lambda : (0, \infty) \rightarrow (-\infty, 0)$ ist analytisch mit

$$\Lambda'(\Delta) < 0 \quad \text{für alle } \Delta > 0,$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \Lambda(\Delta) = 0,$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \Lambda(\Delta) = -\infty.$$

Beweis. • Beweis zur Existenz: Proposition III.10.11 gibt

$$P(\Lambda(\Delta), \Delta) = \frac{z(\Lambda(\Delta), \Delta)}{\Delta^2(\Lambda(\Delta) - 1)} = 0,$$

daher $\Lambda(\Delta) \in \sigma(M_c)$.

• Beweis zur Eindeutigkeit: Sei $\Delta > 0$. Sei $\lambda < 0$ Eigenwert von M_Δ . Dann ist $P(\lambda, \Delta) = 0$, also $z(\lambda, \Delta) = 0$.
Für $u = 4\Delta^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) > 4\Delta^2$ gilt nach Anmerkung III.10.1(i):

$$Z(u, \Delta) = z(\lambda, \Delta) = 0.$$

Nach Anmerkung III.10.3 gilt $Q(u, \Delta) = 0$.

Proposition III.10.6 und die Definition von \mathcal{U} liefern: $u = \mathcal{U}(\Delta)$.

Daraus

$$\mathcal{U}(\Delta) = u = 4\Delta^2 \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right).$$

Es folgt

$$\lambda = \frac{4\Delta^2}{4\Delta^2 - \mathcal{U}(\Delta)} = \Lambda(\Delta).$$

• Behauptung: $\lim_{\Delta \searrow 0} \Lambda(\Delta) = 0$.

Beweis davon:

$$\lim_{\Delta \searrow 0} \Lambda(\Delta) = \lim_{\Delta \searrow 0} \frac{4\Delta^2}{4\Delta^2 - \mathcal{U}(\Delta)} = \frac{0}{0 - u^*} = 0$$

• Behauptung: $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \Lambda(\Delta) = -\infty$. Beweis davon: Sei $\Delta > 0$, dann gilt wegen

Proposition III.10.10, dass $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \frac{\mathcal{U}(\Delta)}{4\Delta^2} = 1$, und für alle $\Delta > 0$: $0 > 1 - \frac{\mathcal{U}(\Delta)}{4\Delta^2}$. Also

gilt $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \Lambda(\Delta) = \lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{\mathcal{U}(\Delta)}{4\Delta^2}} = -\infty$.

• Behauptung: Für alle $\Delta > 0$ gilt $\Lambda'(\Delta) < 0$.

Beweis davon: Indem

$$0 = Q(\mathcal{U}(\Delta), \Delta) = 4(4\Delta^2 - \mathcal{U}(\Delta))R(\mathcal{U}(\Delta)) + 1$$

abgeleitet wird, erhält man, dass

$$0 = \underbrace{(8\Delta - \mathcal{U}'(\Delta)) R(\mathcal{U}(\Delta))}_{>0} + \underbrace{(4\Delta^2 - \mathcal{U}(\Delta)) R'(\mathcal{U}(\Delta))}_{<0} \underbrace{\mathcal{U}'(\Delta)}_{>0},$$

also $8\Delta > \mathcal{U}'(\Delta)$, und $8\Delta^2 > \Delta \mathcal{U}'(\Delta)$. Das wird in $\Lambda'(\Delta)$ eingesetzt und gibt (mit $4\Delta^2 < \mathcal{U}(\Delta)$)

$$\Lambda'(\Delta) = \frac{8\Delta(4\Delta^2 - \mathcal{U}(\Delta)) - 4\Delta^2(8\Delta - \mathcal{U}'(\Delta))}{(4\Delta^2 - \mathcal{U}(\Delta))^2} < 0.$$

□

III.11 Vielfachheiten von Eigenwerten

Proposition III.11.1. Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ein Eigenwert von $M_{\Delta,c}$, dann ist

$$\dim(\text{Ker}(H(\lambda, \Delta))) = 1.$$

Beweis. Behauptung: Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, so ist $H(\lambda, \Delta) \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Beweis davon: Die Nebendiagonalelemente von $H(\lambda, \Delta)$ sind von der Form $-1 + \frac{\alpha}{\lambda}$, $-1 - \frac{\alpha}{\lambda}$ siehe Bemerkung III.9.4, also ist wenigstens eines davon von Null verschieden.

Behauptung: $\dim(\text{Bild}(H(\lambda, \Delta))) \geq 1$. Beweis davon: Wegen $H(\lambda, \Delta) \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, gibt es einen Vektor $\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ mit $H(\lambda, \Delta)\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, daher ist

$$\dim(\text{Bild}(H(\lambda, \Delta))) \geq 1.$$

Behauptung: Falls $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ ein Eigenwert von $M_{\Delta,c}$ ist, dann gilt

$$\dim(\text{Ker}(H(\lambda, \Delta))) = 1.$$

Beweis davon: Wegen der Dimensionsformel gilt

$$\underbrace{\dim(\text{Bild}(H(\lambda, \Delta)))}_{\geq 1} + \dim(\text{Ker}(H(\lambda, \Delta))) = \underbrace{\dim(\mathbb{C}^2)}_{=2},$$

daraus folgt, dass $\dim(\text{Ker}(H(\lambda, \Delta))) \leq 1$.

Da $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ Eigenwert von $M_{\Delta,c}$ ist, gilt $\det(H(\lambda, \Delta)) = 0$, folglich $\dim(\text{Ker}(H(\lambda, \Delta))) \geq 1$.

Also gilt insgesamt, dass $\dim(\text{Ker}(H(\lambda, \Delta))) = 1$ ist. □

Anmerkung III.11.2. Für $\lambda = 1$ sind $S_\lambda(s)$ und $S_\lambda^{-1}(s)$ durch

$$S_1(s) = \begin{pmatrix} 1 + \Delta(g(s) - 1) & -\Delta(1 - g(s)) \\ \Delta(1 - g(s)) & 1 - \Delta(g(s) - 1) \end{pmatrix}$$

und

$$S_1^{-1}(s) = \begin{pmatrix} 1 - \Delta(g(s) - 1) & \Delta(1 - g(s)) \\ -\Delta(1 - g(s)) & 1 + \Delta(g(s) - 1) \end{pmatrix}$$

gegeben. Insbesondere gilt

$$S_1(b) = \begin{pmatrix} 1 - 2\Delta & -2\Delta \\ 2\Delta & 1 + 2\Delta \end{pmatrix}.$$

Beweis. Aus der Definition von A_λ in Sektion III.7 und aus der Definition von der Abbildung S_λ in Sektion III.8 ergibt sich für jedes $s \in [-b, b]$

$$S_1(s) = \exp\left(\int_{-b}^s A_1(t)dt\right) = \exp\left(\int_{-b}^s g'(t)\Delta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} dt\right).$$

$S_1 : [-b, b] \ni t \rightarrow \exp\left(\int_{-b}^t A_1(s)ds\right) \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ ist Lösung von $S' = A_1(t)S$ mit Anfangswert $S(-b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Die Spalten $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} : [-b, b] \rightarrow \mathbb{C}^2$ und $\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{pmatrix} : [-b, b] \rightarrow \mathbb{C}^2$ lösen die Gleichung

$$(III.15) \quad y' = A_1(t)y$$

mit den Anfangswerten $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(-b) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{pmatrix}(-b) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Zur Berechnung der Lösungen $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \hat{u} \\ \hat{w} \end{pmatrix}$ beachten wir

$$A_1(t) = g'(t)\Delta\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{für alle } t \in [-b, b]$$

Für jede Lösung $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} : [-b, b] \rightarrow \mathbb{C}^2$ von der Gleichung (III.15) gelten

$$y_1'(t) = g'(t)\Delta(y_1(t) + y_2(t))$$

$$\begin{aligned} y_2'(t) &= g'(t)\Delta(-y_1(t) - y_2(t)) \\ &= -g'(t)\Delta(y_1(t) + y_2(t)), \end{aligned}$$

daher $(y_1 + y_2)'(t) = 0$ für alle $t \in [-b, b]$, folglich ist $y_1 + y_2$ konstant auf $[-b, b]$. Es folgt für alle $t \in [-b, b]$, dass

$$u(t) + w(t) = u(0) + w(0) = 1 + 0 = 1;$$

damit ergibt sich

$$u'(t) = g'(t)\Delta \cdot 1 \quad \text{für alle } t \in [-b, b],$$

beziehungsweise

$$u(t) = u(-b) + \Delta \int_{-b}^t g'(s)ds = 1 + \Delta(g(t) - g(-b)) = 1 + \Delta(g(t) - 1),$$

und

$$w(t) = 1 - u(t) = \Delta(1 - g(t)).$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} u(b) &= 1 - 2\Delta \\ w(b) &= 1 - u(b) = 2\Delta \end{aligned}$$

Analog findet man für alle $t \in [-b, b]$:

$$\hat{u}(t) + \hat{w}(t) = \hat{u}(0) + \hat{w}(0) = 0 + 1 = 1$$

$$\hat{u}'(t) = g'(t)\Delta \cdot 1;$$

$$\hat{u}(t) = \hat{u}(-b) + \int_{-b}^t g'(s)\Delta ds = 0 + \Delta(g(t) - g(-b)),$$

$$\hat{w}(t) = 1 - \hat{u}(t) = 1 - \Delta(g(t) - g(-b))$$

und es folgt

$$\hat{u}(b) = -2\Delta$$

und

$$\hat{w}(b) = 1 - \hat{u}(b) = 1 + 2\Delta.$$

Zusammen

$$S_1(s) = \begin{pmatrix} 1 + \Delta(g(s) - 1) & \Delta(g(s) - 1) \\ \Delta(1 - g(s)) & 1 - \Delta(g(s) - 1) \end{pmatrix}, \quad S_1(b) = \begin{pmatrix} 1 - 2\Delta & -2\Delta \\ 2\Delta & 1 + 2\Delta \end{pmatrix}$$

□

Proposition III.11.3. *Für alle $\Delta > 0$ gilt*

$$\dim(\text{Ker}(H(1, \Delta))) = 1.$$

Beweis. Wegen derselben Argumente wie im Beweis von Proposition III.11.1 gilt $\dim(\text{Ker}(H(1, \Delta))) = 1$, falls $H(1, \Delta) \neq 0$. Also genügt es zu zeigen, dass $H(1, \Delta) \neq 0$.

Da $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Abbildung ist, ist $g': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine gerade Abbildung und $g \cdot g': \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine ungerade Abbildung. Folglich gelten

$$\int_{-b}^b g(s)ds = 0, \quad \int_{-b}^b g(s)g'(s)ds = 0$$

und

$$\int_{-b}^b g'(s)ds = 2 \int_0^b g'(s)ds = 2[g(b) - g(0)] = -2.$$

Indem dieses in $H(1, \Delta)$ eingesetzt wird, erhält man

$$H(1, \Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ S_1(b) + S_1(b) \int_{-b}^b (S_1(s))^{-1} g'(s) I ds \right\} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ S_1(b) \right. \\
 &\quad \left. + S_1(b) \int_{-b}^b \begin{pmatrix} 1 - \Delta(g(s) - 1) & \Delta(1 - g(s)) \\ -\Delta(1 - g(s)) & 1 + \Delta(g(s) - 1) \end{pmatrix} g'(s) Ids \right\} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ S_1(b) \right. \\
 &\quad \left. + S_1(b) \int_{-b}^b \begin{pmatrix} (1 + \Delta)g'(s) - \Delta g'(s)g(s) & \Delta g'(s) - \Delta g(s)g'(s) \\ -\Delta g'(s) + \Delta g(s)g'(s) & (1 - \Delta)g'(s) + \Delta g'(s)g(s) \end{pmatrix} ds \right\} \\
 &\quad - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ S_1(b) + S_1(b) \begin{pmatrix} -2(1 + \Delta) & -2\Delta \\ 2\Delta & -2(1 - \Delta) \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 2\Delta & -2\Delta \\ 2\Delta & 1 + 2\Delta \end{pmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{pmatrix} 1 - 2\Delta & -2\Delta \\ 2\Delta & 1 + 2\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2(1 + \Delta) & -2\Delta \\ 2\Delta & -2(1 - \Delta) \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 2\Delta & -2\Delta \\ 2\Delta & 1 + 2\Delta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2(1 - \Delta) & 2\Delta \\ -2\Delta & -2(1 + \Delta) \end{pmatrix} \right\} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 2\Delta - 2 + 2\Delta & -2\Delta + 2\Delta \\ 2\Delta - 2\Delta & 1 + 2\Delta - 2 - 2\Delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

□

Proposition III.11.4 (Geometrische Vielfachheit). *Sei $\lambda \neq 0$ ein Eigenwert von $M_{\Delta,c}$, dann ist die Dimension des geometrischen Eigenraums $(M_{\Delta,c} - \lambda)^{-1}(0)$ dazu gleich 1.*

Beweis. Um das zu beweisen, muss eine Beziehung zwischen $\text{Ker}(H(\lambda, \Delta))$ und $(M_{\Delta,c} - \lambda)^{-1}(0)$ hergestellt werden. Dazu wird ein Isomorphismus von $(M_{\Delta,c} - \lambda)^{-1}(0)$ auf $\text{Ker}(H(\lambda, \Delta))$ definiert.

- Behauptung: Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ Eigenwert von $M_{\Delta,c}$. Es gibt einen Isomorphismus

$$(M_{\Delta,c} - \lambda)^{-1}(0) \xrightarrow{\varphi} \left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \mid H(\lambda, \Delta) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Beweis davon: Sei $\chi \in (M_{\Delta,c} - \lambda)^{-1}(0)$. Zu χ hat man die Lösung $v^\chi : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ der Variationsgleichung (III.4). Damit ist

$$L_1 : (M_{\Delta,c} - \lambda)^{-1}(0) \ni \chi \mapsto v^\chi \in C([-2, \infty), \mathbb{C})$$

ein linearer Operator, weil die Lösung der Variationsgleichung linear ist. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} L_2 & : C([-2, \infty), \mathbb{C}) \ni w \mapsto \begin{pmatrix} w^{(+3)} \\ w^{(+1)} \end{pmatrix} \in C([-b, b], \mathbb{C}^2) \\ L_3 & : C([-b, b], \mathbb{C}^2) \ni \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} y^{(-b)} \\ z^{(-b)} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

sind linear, also ist $L_3 \circ L_2 \circ L_1$ insgesamt linear.

• Behauptung: Die Gleichung $\varphi(\chi) = L_3 \circ L_2 \circ L_1(\chi)$ definiert eine lineare Abbildung φ von $(M_{\Delta,c} - \lambda)^{-1}(0)$ nach $\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \mid H(\lambda, \Delta) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$.

Beweis davon: Ist $\chi = v_0 \in Y_c \setminus \{0\}$ Eigenvektor von $M_{\Delta,c}$ zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, also $(M_{\Delta,c} - \lambda)\chi = 0$, so liefert Proposition III.7.1(i), dass $\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = (L_2 \circ L_1)\chi$ das Randwertproblem (λ, η, c) - (λ, η, RB, c) für $\eta = 0$ mit $c = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(-b)$ löst. Also

$c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(b)$ beziehungsweise

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1/\lambda & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(b) - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} c = H(\lambda, \Delta)c,$$

folglich $0 = H(\lambda, \Delta)(L_3 \circ L_2 \circ L_1)\chi$.

• Behauptung: φ ist injektiv.

Beweis davon: Sei $\chi \in C_c \setminus \{0\}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ , also $\chi \in (M_{\Delta,c} - \lambda)^{-1}(0)$, dann gilt $\varphi(\chi) = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix}(-b) \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ wegen Proposition III.7.2(i), also $\varphi(\chi) \neq 0$ für alle $\chi \neq 0$, das heisst φ ist injektiv.

Folglich gilt

$$1 \leq \dim\left((M_{\Delta,c} - \lambda)^{-1}(0)\right) \leq \dim\left(\left\{ \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C} \mid H(\lambda, \Delta) \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}\right) = 1$$

(mit Proposition III.11.1 und Proposition III.11.3). □

Für den Beweis, dass die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte -1 und 1 von $M_{\Delta,c}$ gleich 1 sind, benötigen wir die folgenden Propositionen.

Proposition III.11.5. *Für $\Delta > 0$ mit $P(-1, \Delta) = 0$ gilt $\partial_1 P(-1, \Delta) \neq 0$.*

Beweis. Sei $\Delta > 0$. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ gilt

$$P(\lambda, \Delta) = \frac{1}{\Delta^2(\lambda - 1)} z(\lambda, \Delta)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \text{(III.16)} \quad z(\lambda, \Delta) &= 2 \left(1 - \cosh \left(2i\Delta \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1} \right) \right) + \frac{\Delta^2}{\lambda} (\lambda - 1)^2 \\
 &\quad + 2i\Delta \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1} \sinh \left(2i\Delta \sqrt{\frac{1}{\lambda} - 1} \right) \\
 &= 2 \left(1 - \cosh \left(2\Delta \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} \right) \right) + \frac{\Delta^2}{\lambda} (\lambda - 1)^2 \\
 &\quad + 2\Delta \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} \sinh \left(2\Delta \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} \right).
 \end{aligned}$$

Mit $f : (-\infty, 0) \ni \lambda \mapsto \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda}} = \sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}} \in (0, \infty)$ ergibt sich für $\lambda < 0$:

$$z(\lambda, \Delta) = 2(1 - \cosh(2\Delta f(\lambda))) + \frac{\Delta^2}{\lambda} (\lambda - 1)^2 + 2\Delta f(\lambda) \sinh(2\Delta f(\lambda)).$$

Beachte

$$f'(\lambda) = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda-1}{\lambda}}} \frac{1}{\lambda^2} \{\lambda - (\lambda - 1)\} = \frac{1}{2\lambda^2} \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda-1}} > 0 \quad \text{für alle } \lambda \in (-\infty, 0).$$

Für $\lambda \in (-\infty, 0)$ gilt im Fall $P(\lambda, \Delta) = 0$:

$$\partial_\lambda P(\lambda, \Delta) = \frac{1}{\Delta^4} \frac{\partial_\lambda z(\lambda, \Delta) \Delta^2 (\lambda - 1) - z(\lambda, \Delta) \Delta^2}{(\lambda - 1)^2} = \frac{1}{\Delta^2 (\lambda - 1)} \partial_\lambda z(\lambda, \Delta)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \text{(III.17)} \quad \partial_\lambda z(\lambda, \Delta) &= -2 \sinh(2\Delta f(\lambda)) 2\Delta f'(\lambda) \\
 &\quad + \Delta^2 \frac{2\lambda(\lambda - 1) - (\lambda - 1)^2}{\lambda^2} + 2\Delta f'(\lambda) \sinh(2\Delta f(\lambda)) \\
 &\quad + 2\Delta f(\lambda) \cosh(2\Delta f(\lambda)) f'(\lambda) 2\Delta.
 \end{aligned}$$

Für $\lambda = -1$ mit $P(-1, \Delta) = 0$ ergibt sich

$$\partial_\lambda z(-1, \Delta) = 2\Delta f'(\lambda) \{2\Delta f(\lambda) \cosh(2\Delta f(\lambda)) - \sinh(2\Delta f(\lambda))\}.$$

Beachte: $f'(-1) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} > 0$.

Für alle $x > 0$ gilt

$$x \cosh(x) > \sinh(x) \quad \text{beziehungsweise} \quad x > \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

denn $g : \mathbb{R} \ni x \mapsto \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} \in \mathbb{R}$ erfüllt $g(0) = 0$ und

$$g'(x) = \frac{\frac{1}{4} \{(e^x + e^{-x})(e^x - (-e^{-x})) - (e^x - e^{-x})(e^x - e^{-x})\}}{\frac{1}{4}(e^x + e^{-x})^2} < 1,$$

daher $g(x) < x$ für alle $x > 0$.

Damit:

$$\{2\Delta f(-1) \cosh(2\Delta f(-1)) - \sinh(2\Delta f(-1))\} > 0,$$

es folgt $\partial_\lambda z(-1, \Delta) \neq 0$ und $\partial_\lambda P(-1, \Delta) \neq 0$ (für $\Delta > 0$ mit $P(-1, \Delta) \neq 0$). \square

Proposition III.11.6. Sei $\Delta > 0$. Es gilt $\partial_1 P(1, \Delta) \neq 0$.

Beweis. Für $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ und $\Delta > 0$ seien $\text{Ch} = \cosh(2\Delta\sqrt{1-1/\lambda})$ und $\text{Sh} = \sinh(2\Delta\sqrt{1-1/\lambda})$, dann gilt

$$\begin{aligned} \partial_1 P(1, \Delta) &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \neq 1}} \frac{P(\lambda, \Delta) - P(1, \Delta)}{\lambda - 1} \\ &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \neq 1}} \frac{P(\lambda, \Delta)}{\lambda - 1} \\ &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \neq 1}} \frac{2(1 - \text{Ch}) + \frac{\Delta^2}{\lambda} (\lambda - 1)^2 + 2\Delta\sqrt{1-1/\lambda} \text{Sh}}{\Delta^2(\lambda - 1)^2} \\ &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \neq 1}} \frac{2(1 - \text{Ch}) + 2\Delta\sqrt{1-1/\lambda} \text{Sh}}{\lambda^2 \Delta^2 (1 - 1/\lambda)^2} + \frac{1}{\lambda} \\ &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \neq 1}} \frac{16\Delta^2}{\lambda^2} \left[\frac{2(1 - \text{Ch}) + 2\Delta\sqrt{1-1/\lambda} \text{Sh}}{(2\Delta\sqrt{1-1/\lambda})^4} \right] + \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

Man fügt $z = 2\Delta\sqrt{1-1/\lambda}$, $C(z) = \text{Ch}$ und $S(z) = \text{Sh}$ ein und erhält

$$\begin{aligned} &\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 1 \\ \lambda \neq 1}} \frac{2(1 - \text{Ch}) + 2\Delta\sqrt{1-1/\lambda} \text{Sh}}{(2\Delta\sqrt{1-1/\lambda})^4} \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{2}{z^4} \left[1 - \left(\frac{1}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \right) \right] + \frac{z}{z^4} \left[\frac{z}{1!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots \right] \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{1}{z^4} \left[-\frac{2z^2}{2!} - \frac{2z^4}{4!} - \frac{2z^6}{6!} - \dots \right] + \frac{1}{z^4} \left[\frac{z^2}{1!} + \frac{z^4}{3!} + \frac{z^6}{5!} + \dots \right] \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{1}{z^4} \left[-\frac{2z^2}{2} - \frac{2z^4}{24} - \frac{2z^6}{720} - \dots \right] + \frac{1}{z^4} \left[z^2 + \frac{z^4}{6} + \frac{z^6}{120} + \dots \right] \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{1}{z^4} \left[-z^2 - \frac{z^4}{12} - \frac{z^6}{360} - \dots \right] + \frac{1}{z^4} \left[z^2 + \frac{z^4}{6} + \frac{z^6}{120} + \dots \right] \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{1}{z^4} \left[(-z^2 + z^2) + \left(-\frac{z^4}{12} + \frac{z^4}{6} \right) + \left(-\frac{z^6}{360} + \frac{z^6}{120} \right) \dots \right] \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{1}{z^4} \left[\left(-\frac{z^4}{12} + \frac{2z^4}{12} \right) + \left(-\frac{z^6}{360} + \frac{3z^6}{360} \right) + \dots \right] \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{1}{z^4} \left[\frac{z^4}{12} + \frac{2z^6}{360} + \dots \right] \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \frac{1}{z^4} \left[\frac{z^4}{12} + \frac{z^6}{180} + \dots \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \neq 0}} \left[\frac{1}{12} + \frac{z^2}{180} + \dots \right] \\
 &= \frac{1}{12},
 \end{aligned}$$

also gilt:

$$\begin{aligned}
 \partial_1 P(1, \Delta) &= \lim_{\lambda \rightarrow 1} \frac{16\Delta^2}{\lambda^2} \left[\frac{2(1 - \text{Ch}) + 2\Delta\sqrt{1 - 1/\lambda} \text{Sh}}{(2\Delta\sqrt{1 - 1/\lambda})^4} \right] + \frac{1}{\lambda} \\
 &= 16\Delta^2 \cdot \frac{1}{12} + 1 \neq 0.
 \end{aligned}$$

□

Proposition III.11.7. (i) *Es gibt genau ein $\Delta = \Delta_* > 0$ mit $\Lambda(\Delta_*) = -1$, und es gilt $\Lambda'(\Delta_*) < 0$.*

(ii) *Für alle $\Delta > 0$ hat der Eigenwert 1 des Monodromieoperators $M_{\Delta,c}$ die algebraische Vielfachheit 1.*

(iii) *Der Eigenwert -1 von $M_{\Delta_*,c}$ hat die algebraische Vielfachheit 1.*

Beweis. Zu (i) siehe Satz III.10.12.

Zu (ii). Sei $\Delta > 0$. Da 1 Eigenwert von $M_{\Delta,c}$ ist, ist 1 auch Nullstelle von $P(\cdot, \Delta)$. Bezeichnet $o(1, \Delta)$ die Ordnung der Nullstelle 1 von $P(\cdot, \Delta)$ und $\omega(1, \Delta)$ die Ordnung des Poles 1 der Resolvente von $M_{c,\Delta}$, so erhalten wir mit Korollar III.9.8 und Proposition III.11.6

$$1 \leq \omega(1, \Delta) \leq o(1, \Delta) = 1,$$

also $\omega(1, \Delta) = 1$. Nach Satz 101.2 [6] hat der Eigenwert 1 von $M_{\Delta,c}$ die Kettenlänge $\omega(1, \Delta) = 1$. Deshalb sind der geometrische und der algebraische Eigenraum des Eigenwerts 1 gleich. Nach Proposition III.11.4 haben beide die Dimension 1.

Zu (iii). Für $\Delta = \Delta_*$ und den Eigenwert -1 von $M_{\Delta_*,c}$ ergibt sich wie bei (ii), unter Verwendung von Korollar III.9.8 und Proposition III.11.5, dass

$$1 \leq \omega(-1, \Delta_*) \leq o(-1, \Delta_*) = 1.$$

Wie bei (ii) folgt, dass die geometrische und algebraische Vielfachheit 1 sind. □

III.12 Der Weg zum Beweis einer Verzweigung mit Periodenverdopplung beim Parameter Δ_*

Von Proposition III.11.7 über Eigenwerte des Monodromieoperators M_Δ lässt sich auf eine Periodenverdopplungsverzweigung weg von der periodischen Lösung

$p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Gleichungen

$$(III.18) \quad x'(t) = g(x(t - (1 + \tilde{\delta}(x(t) + x(t - 2), \Delta)))) \quad \Delta > 0,$$

beim Parameterwert Δ_* schließen.

Im Folgendem wird beschrieben, welche Schritte dazu noch auszuführen sind. Zuerst geht es um Wiederkehrabbildungen $R(\cdot, \Delta)$ auf Transversalen zum periodischen Orbit $\mathbb{R} \ni t \mapsto p_t \in C^1$, mit Fixpunkt p_0 .

Wegen $p'(0) \neq 0$ liegt p'_0 nicht in der abgeschlossene Hyperebene

$$H := \{\varphi \in C^1 \mid \varphi(0) = 0\} \subseteq C^1,$$

und es gilt $C^1 = H \oplus \mathbb{R}p'_0$.

Sei $\Delta > 0$. Da der Halbfluss F_Δ zur Gleichung (III.18) auf der Lösungsmannigfaltigkeit

$$X_\Delta := \{\varphi \in C^1 \mid \varphi'(0) = g(\varphi(-1 - \tilde{\delta}(\varphi(0) + \varphi(-2), \Delta)))\}$$

für $t > 2$ stetig differenzierbar ist [10] und da für den Tangentialraum

$$Y = T_{p_0}X_\Delta = \{\chi \in C^1 \mid \chi'(0) = 0\}$$

(der unabhängig von Δ ist) die Zerlegung $C^1 = H \oplus \mathbb{R}p'_0$ besteht, gibt es eine stetige differenzierbare Wiederkehrzeit $\tau: \mathcal{U}_\Delta \rightarrow (0, \infty)$, mit \mathcal{U}_Δ eine offene Umgebung von p_0 in X_Δ , mit $\tau(p_0) = 4$ und $F_\Delta(\tau(\varphi), \varphi) \in X_\Delta \cap H$ für alle $\varphi \in \mathcal{U}_\Delta$.

Die Wiederkehrabbildung

$$w_\Delta: \mathcal{U}_\Delta \cap (X_\Delta \cap H) \rightarrow X_\Delta \cap H,$$

mit $w_\Delta(\varphi) = F_\Delta(\tau(\varphi), \varphi)$ für alle $\varphi \in \mathcal{U}_\Delta \cap (X_\Delta \cap H)$, ist stetig differenzierbar, und für die Ableitung

$$Dw_\Delta(p_0): Y \cap H \rightarrow Y \cap H$$

gilt

$$Dw_\Delta(p_0)\chi = \text{Pr}(M_\Delta\chi) \quad \text{für alle } \chi \in Y \cap H$$

mit der Projektion $\text{Pr}: Y \rightarrow Y$ längs $\mathbb{R}p'_0$ auf H .

Wenn 1 algebraisch einfacher Eigenwert des Monodromieoperators M_Δ ist (was für alle $\Delta > 0$ zutrifft), so ist das Spektrum von $Dw_\Delta(p_0)$ gegeben durch

$$\sigma(Dw_\Delta(p_0)) = \sigma(M_\Delta \setminus \{1\}),$$

und die algebraischen Vielfachheiten der Eigenwerte $\lambda \neq 0$ stimmen bezüglich beider Abbildungen $Dw_\Delta(p_0)$ und M_Δ überein.

Da nun 1 kein Eigenwert von $Dw_\Delta(p_0)$ ist, ist 0 nicht in Spektrum von $id_{Y \cap H} - Dw_\Delta(p_0)$, und diese Abbildung ist ein Isomorphismus.

Nun müsste mit Hilfe des Satzes über Implizite Funktionen gezeigt werden, dass es Umgebungen I_* von Δ_* in \mathbb{R} sowie \mathcal{U}_* von p_0 in C^1 gibt, sodass für jedes $\Delta \in I_*$ die Abbildung w_Δ in $\mathcal{U}_\Delta \cap X_\Delta$ nur den Fixpunkt p_0 hat. Dies würde bedeuten,

dass es für diese Δ in der Nähe des periodischen Orbits $\mathcal{O} = \{p_t \mid t \in \mathbb{R}\}$ keine weiteren Orbits periodischer Lösungen von Gleichung (III.18) mit einer Periode nah bei 4 gibt.

Bei der Ausführung dieser Überlegung ist zu beachten, dass die Wiederkehrabbildungen w_Δ unterschiedliche Definitionsbereiche in verschiedenen Lösungsmannigfaltigkeiten X_Δ haben. Gleiches gilt für die nun folgende abschließende Betrachtung.

Die Iterierten

$$w_\Delta^2 : \{\varphi \in \mathcal{U}_\Delta \cap (X_\Delta \cap H) \mid w_\Delta(\varphi) \in \mathcal{U}_\Delta\} \rightarrow X_\Delta \cap H, \quad \Delta > 0,$$

haben ebenfalls den Fixpunkt p_0 .

Die Kettenregel sowie die Fixpunktgleichung $w_\Delta(p_0) = p_0$ liefern

$$Dw_\Delta^2(p_0) = [Dw_\Delta(p_0)]^2,$$

und $\Lambda(\Delta)^2 > 0$ ist ein Eigenwert von $Dw_\Delta^2(p_0)$ mit der algebraischen Vielfachheit $a(\Lambda(\Delta), \Delta) = 1$, welcher bei $\Delta = \Delta_*$ den Einheitskreis von innen nach außen mit positiver Geschwindigkeit kreuzt.

Für $\Delta \neq \Delta_*$ nah bei Δ_* ist der Abbildungsgrad [2] von $id - w_\Delta^2$ auf einer genügend kleinen offenen Umgebung N_Δ in p_0 von $X_\Delta \cap H$ gegeben durch

$$\deg(id - w_\Delta^2, N_\Delta, 0) = (-1)^{\Sigma(\Delta)}$$

mit

$$\Sigma(\Delta) = \sum_{\lambda \in A} a(\lambda, \Delta),$$

$$A = \{\lambda \in \sigma(Dw_\Delta^2(p_0) \cap (1, \infty))\},$$

$a(\lambda, \Delta)$ die algebraische Vielfachheit von λ als Eigenwert von $Dw_\Delta^2(p_0)$.

Der Abbildungsgrad von $id - w_\Delta^2$ ändert sich also bei $\Delta = \Delta_*$ um den Wert 1. Hieraus folgt mit Hilfe der Homotopie-Eigenschaft des Abbildungsgrads, dass bei $\Delta = \Delta_*$ vom Fixpunkt p_0 eine Schar von Fixpunkten $\varphi_\Delta \neq p_0$, $\Delta = \tilde{\Delta}(\varepsilon)$, $|\varepsilon| < 1$, von w_Δ^2 abzweigt. Diese können nach den früheren Bemerkungen keine Fixpunkte von w_Δ sein, und sie definieren periodische Lösungen p_Δ mit Perioden q_Δ nah bei $2 \cdot 4 = 8$; die Orbits dieser periodischen Lösungen liegen nah beim Orbit $\mathcal{O} = \{p_t \in C^1 \mid t \in \mathbb{R}\}$. Die "doppelte Periode" $q_\Delta \approx 8$ ist auch die minimale Periode von p_Δ . (Andernfalls wäre $q_\Delta/2 \approx 4$ auch eine Periode von p_Δ . Mit Hilfe der Nähe der Orbits zu \mathcal{O} ergäbe sich der Widerspruch, dass $p_{\Delta,0} = \varphi_\Delta \neq p_0$ ein Fixpunkt von w_Δ wäre.)

A Untermannigfaltigkeiten, periodische Orbits

Sei B ein Banachraum über \mathbb{R} in diesem Anhang.

Definition A.1. $M \subseteq B$ ist eine stetig differenzierbare Untermannigfaltigkeit, falls gilt:

$B = B_1 \oplus B_2$ mit abgeschlossenen Unterräumen B_1, B_2 , und zu jedem $p \in M$ existieren eine offene Umgebung N und ein C^1 -Diffeomorphismus $\Phi : N \rightarrow B_1 \oplus B_2$ mit

$$\Phi(N \cap M) = \Phi(N) \cap B_1.$$

Dabei heißt Φ C^1 -Diffeomorphismus, falls $V = \Phi(N)$ offen, Φ stetig differenzierbar, Φ injektiv, $\Phi^{-1} : V \rightarrow B$ stetig differenzierbar.

Definition A.2 (Tangentialkegel). Sei $M \subseteq B, p \in M$. Ein Tangentenvektor an M im Punkt p ist ein Vektor $v = c'(0) \in B$, mit einer stetig differenzierbaren Kurve $c : I \rightarrow B, I \subseteq \mathbb{R}$ offenes Intervall, $0 \in I, c(0) = p, c(I) \subseteq M$.

Der Tangentialkegel $T_p M$ ist die Menge alle Tangentialvektoren an M im Punkt p .

Bemerkung A.3. $T_p M \neq \emptyset$. (da für $c : (-1, 1) \ni t \mapsto p \in M$ gilt: $0 = c'(0) \in T_p M$.)

Ferner gilt $\mathbb{R}T_p M \subseteq T_p M$.

Ist M C^1 -Untermannigfaltigkeit von B wie oben, so ist jeder Tangentialkegel $T_p M \subseteq B$ ein abgeschlossener Unterraum von B , der topologisch isomorph zu B_1 ist.

Definition A.4. Im Fall $\dim(B_1) < \infty$ hat M die Dimension $\dim(M) := \dim(B_1)$.

Im Fall $\dim(B_2) < \infty$ hat M die Kodimension $\text{codim}(M) := \dim(B_2)$.

Definition A.5 (Stetig differenzierbare Abbildungen auf Untermannigfaltigkeiten). Sei $M \subseteq B$ C^1 -Untermannigfaltigkeit. Sei $U \subseteq M$ offen (in der Relativtopologie)

(i) Eine Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt stetig differenzierbar, falls für jedes $p \in M$ und ein Φ wie in Definition A.1 und mit $N \subseteq U$ die Abbildung

$$V \cap B_1 \ni b_1 \mapsto f(\Phi^{-1}(b_1)) \in \mathbb{R}^n$$

stetig differenzierbar ist.

(ii) Ist $\widetilde{M} \subseteq \widetilde{B}$ eine (weitere) C^1 -Untermannigfaltigkeit, so heißt eine Abbildung $f : U \rightarrow \widetilde{M}$ stetig differenzierbar, falls für jedes $p \in M$ ein Φ wie in Definition A.1 mit $N \subseteq U$ und ein $\widetilde{\Phi} : \widetilde{U} \rightarrow \widetilde{B}_1 \oplus \widetilde{B}_2$ zu $\widetilde{p} = f(p)$ gemäß Definition A.1 existieren, sodass die Abbildung

$$\{b_1 \in V \cap B_1 \mid f(\Phi^{-1}(b_1)) \in \widetilde{U}\} \ni b_1 \mapsto \widetilde{\text{Pr}}_1 \widetilde{\Phi}(f(\Phi^{-1}(b_1))) \in \widetilde{B}_1,$$

mit der durch $\widetilde{B} = \widetilde{B}_1 \oplus \widetilde{B}_2$ gegebenen Projektion $\widetilde{\text{Pr}}_1 : \widetilde{B} \rightarrow \widetilde{B}$ längst \widetilde{B}_2 auf \widetilde{B}_1 , stetig differenzierbar ist.

(iii) Ist $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, so ist für jedes $p \in U$ die Ableitung

$$Df(p) : T_p M \rightarrow \mathbb{R}^n$$

gegeben durch

$$Df(p)v = (f \circ c)'(0),$$

mit einer beliebigen stetig differenzierbaren Kurve $c : I \rightarrow B$, für die gilt: I offen, $0 \in I$, $c(I) \subseteq U \subseteq M$, $c(0) = p$, $v = c'(0)$.

(iv) Ist $f : U \rightarrow \widetilde{M}$ stetig differenzierbar, so ist für jedes $p \in U$ die Ableitung

$$Df(p) : T_p M \rightarrow \widetilde{B}$$

wie in (iii) gegeben.

Bemerkung A.6. (i) $Df(p)T_p M \subseteq T_{f(p)}\widetilde{M}$;

(ii) $Df(p)$ ist stetig und linear.

Sei nun $S : [0, \infty) \times B \supseteq \Omega \rightarrow B$ ein Halbfluss [1]. Eine ganze Flusslinie von S ist eine Abbildung $q : \mathbb{R} \rightarrow B$ mit $[0, \infty) \times q(\mathbb{R}) \subseteq \Omega$ und $S(t, q(u)) = q(t+u)$ für alle $u \in \mathbb{R}$ und alle $t \geq 0$. q heißt periodisch mit Periode $\omega > 0$, falls $q(t+\omega) = q(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Der periodische Orbit $\mathcal{O}_q = q(\mathbb{R}) = q([0, \omega))$ heißt stabil und exponentiell attraktiv mit asymptotischer Phase, wenn es eine Umgebung V von \mathcal{O}_q , Konstanten $c > 0$ und $\varepsilon > 0$, sowie eine Abbildung $\alpha : V \rightarrow [0, \omega)$ gibt mit $[0, \infty) \times V \subseteq \Omega$ und

$$|S(t, \psi) - q(t + \alpha(\psi))| \leq ce^{-\varepsilon t} \text{dist}(\psi, \mathcal{O}_q)$$

für alle $\psi \in V$ und alle $t \geq 0$.

B Komplexifizierung

Definition B.1. Sei $(E, +, \cdot)$ ein reeller Vektorraum und $T : E \rightarrow E$ ein linearer Operator.

(i) Der komplexifizierte \mathbb{C} -Vektorraum $(E_{\mathbb{C}}, +_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}})$ ist durch die Menge $E_{\mathbb{C}} := E \times E$ gegeben mit den Operationen

$$\begin{aligned} +_{\mathbb{C}} : \quad & E_{\mathbb{C}} \times E_{\mathbb{C}} && \longrightarrow && E_{\mathbb{C}} \\ & ((x_1, x_2), (y_1, y_2)) && \longmapsto && (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \\ \\ \cdot_{\mathbb{C}} : \quad & \mathbb{C} \times E_{\mathbb{C}} && \longrightarrow && E_{\mathbb{C}} \\ & (\alpha + i\beta, (x_1, x_2)) && \longmapsto && (\alpha x_1 - \beta x_2, \alpha x_2 + \beta x_1). \end{aligned}$$

(ii) Falls E normiert ist, wird $E_{\mathbb{C}}$ mit der Norm

$$\|(x_1, x_2)\|_{\mathbb{C}} := \sup_{-\pi \leq \theta \leq \pi} \|x_1 \cos(\theta) + x_2 \sin(\theta)\|_E$$

versehen.

(iii) Der komplexifizierte Operator von T ist durch

$$T_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \ni (x_1, x_2) \mapsto (Tx_1, Tx_2) \in E_{\mathbb{C}}$$

gegeben.

Bemerkung B.2. Sei $(E, \cdot, +)$ ein reeller Vektorraum und $(E_{\mathbb{C}}, \cdot_{\mathbb{C}}, +_{\mathbb{C}})$ seine Komplexifizierung.

(i) Für alle $x_1, x_2 \in E$ gilt die Abschätzung

$$\max\{\|x_1\|_E, \|x_2\|_E\} \leq \|(x_1, x_2)\|_{\mathbb{C}} \leq \|x_1\|_E + \|x_2\|_E$$

(ii) E ist ein Banachraum genau dann, wenn $E_{\mathbb{C}}$ ein Banachraum ist.

(iii) Sei T ein stetiger linearer Operator, dann ist auch $T_{\mathbb{C}}$ ein stetiger linearer Operator mit $\|T\| = \|T_{\mathbb{C}}\|$ und $\text{Ker}(T_{\mathbb{C}}) = (\text{Ker}(T))_{\mathbb{C}}$.

(iv) Sei T kompakt, so ist $T_{\mathbb{C}}$ auch kompakt.

Dabei heißt ein linearer Operator in einem normierten Raum kompakt, wenn er beschränkte Mengen in Mengen mit kompaktem Abschluss abbildet.

Beweis. (iv) Sei B beschränkt in $E_{\mathbb{C}}$. Wegen Teil (i) gibt es $r > 0$ mit

$$\|x_i\|_E \leq \|(x_1, x_2)\|_{\mathbb{C}} \leq r \text{ für alle } (x_1, x_2) \in B \text{ und } i = 1, 2.$$

Die Menge $B_E := \{x \in E \mid \|x\|_E \leq r\}$ ist beschränkt, daher ist $\overline{TB_E}$ kompakt (weil T kompakt ist).

Außerdem gilt $T_{\mathbb{C}}B \subseteq TB_E \times TB_E$ (wegen $T_{\mathbb{C}}(b_1, b_2) = (Tb_1, Tb_2) \in TB_E \times TB_E$). Zu zeigen: Jede Folge in $T_{\mathbb{C}}B$ hat eine konvergente Teilfolge. Sei $(x_{1n}, x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in $T_{\mathbb{C}}B$, dann ist $(x_{1n})_{n \in \mathbb{N}}$ Folge in TB_E , hat daher eine konvergente Teilfolge $(x_{1n_j})_{j \in \mathbb{N}}$. Nun betrachte $(x_{2n_j})_{j \in \mathbb{N}}$; ist Folge in TB_E , hat daher konvergente Teilfolge $(x_{2n_{j_k}})_{k \in \mathbb{N}}$. Die Folge $(x_{1n_{j_k}}, x_{2n_{j_k}})_{k \in \mathbb{N}}$ konvergiert dann in $E_{\mathbb{C}}$, wie man wegen Teil (i) leicht sieht. \square

Im Folgenden wird gezeigt, dass komplexifizierte Lösungsoperatoren zu linearen Differenzialgleichungen mit Verzögerung konjugiert sind zu Lösungsoperatoren, die mit komplexwertigen Lösungen der Differenzialgleichung definiert sind.

Komplexwertige stetig differenzierbare Funktionen $z : I \rightarrow \mathbb{C}$, $I \subseteq \mathbb{R}$, definiert man dadurch, dass $Re \circ z$ und $Im \circ z$ stetig differenzierbar sind, wobei $Re : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ und $Im : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}$ linear bezüglich \mathbb{C} als \mathbb{R} -Vektorraum sind. In diesem Fall definiert man

$$z'(t) := (Re \circ z)'(t) + i(Im \circ z)'(t).$$

Seien $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann existiert zu jedem $\varphi \in C$ genau eine Lösung $x : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$(B.1) \quad x'(t) = a(t)x(t) + b(t)x(t-1) + c(t)x(t-2) \text{ für alle } t > 0$$

$$(B.2) \quad x_0 = \varphi,$$

nämlich eine stetige Abbildung x^φ , mit $x^\varphi|_{[0, \infty)}$ differenzierbar, sodass $x^\varphi|_{[0, \infty)}$ die Differentialgleichung (B.1) erfüllt und $x_0^\varphi = \varphi$ gilt. Dies zeigt man ähnlich wie in Abschnitt II.1 mit Hilfe der Formel

$$x(t) = \mathcal{U}(t, n)x(n) + \int_n^t \mathcal{U}(t, s)[b(s)x(s-1) + c(s)x(s-2)]ds$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und alle $t \in [n, n+1]$, mit den durch

$$\mathcal{U}(t, s)\xi = e^{\int_s^t a(u)du}\xi \text{ für alle } s, t \in \mathbb{R} \text{ und alle } \xi \in \mathbb{R}$$

gegebenen Lösungsoperatoren $\mathcal{U}(t, s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zur gewöhnlichen Differenzialgleichung $x'(t) = a(t)x(t)$.

Wir definieren Lösungsoperatoren zum Anfangswertproblem (B.1)-(B.2) durch

$$T_t : C \ni \varphi \mapsto x_t^\varphi \in C, \quad t \geq 0.$$

Jeder Lösungsoperator ist linear und stetig.

In Abschnitt III.5 wurde der Banachraum C_c der stetigen komplexwertigen Funktionen $\zeta : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{C}$ eingeführt, mit $\|\zeta\|_{C_c} = \max_{-2 \leq t \leq 0} |\zeta(t)|$.

Komplexwertige Lösungen $z : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ des Anfangswertproblems

$$(B.3) \quad z'(t) = a(t)z(t) + b(t)z(t-1) + c(t)z(t-2) \text{ für alle } t > 0$$

$$(B.4) \quad z_0 = \zeta,$$

sind definiert als stetige Funktionen, deren Einschränkungen auf $[0, \infty)$ differenzierbar sind und Gleichung (B.3) genügen und die die Anfangsbedingung (B.4) erfüllen.

Dabei sind Segmente $z_t : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{C}$, $t \geq 0$, von z durch $z_t(s) = z(t+s)$ für alle $s \in [-2, 0]$ definiert.

Bemerkung B.3. $z : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ ist genau dann Lösung von (B.3), wenn $Re \circ z$ und $Im \circ z$ beide Lösungen von (B.1) sind. Zu jedem $\zeta \in C_c$ gibt es genau eine Lösung $z : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ des Anfangswertproblems (B.3)-(B.4).

Die eindeutige Lösung aus der obigen Bemerkung wird mit z^ζ bezeichnet. Zum Anfangswertproblem (B.3)-(B.4) betrachten wir die Lösungsoperatoren

$$T_{c,t} : C_c \ni \zeta \mapsto z_t^\zeta \in C_c, \quad t \geq 0.$$

Die Beziehung zwischen den Lösungsoperatoren T_t und $T_{c,t}$ lässt sich mit dem Isomorphismus $J : \mathbb{C}^{[-2,0]} \rightarrow (\mathbb{R}^{[-2,0]})_{\mathbb{C}}$,

$$J\zeta = (Re \circ \zeta, Im \circ \zeta) \text{ für alle } \zeta \in \mathbb{C}^{[-2,0]},$$

beschreiben. Es gilt

$$(J^{-1}(\chi, \eta))(t) = \chi(t) + i\eta(t) \text{ für alle } \chi, \eta \in \mathbb{R}^{[-2,0]} \text{ und für alle } t \in [-2, 0].$$

J induziert einen topologischen Isomorphismus $J_0 : C_c \ni \zeta \mapsto J\zeta \in C_{\mathbb{C}}$.

Proposition B.4. Für alle $t \geq 0$ gilt $J_0 \circ T_{c,t} = T_{t, \mathbb{C}} \circ J_0$.

Beweis. Sei $t \geq 0$, $\zeta \in C_c$; $(\chi, \eta) := J_0\zeta$, also $\chi = Re \circ \zeta$ und $\eta = Im \circ \zeta$. Setze $u := x^\chi$ und $v := x^\eta$. Es gilt

$$T_{t, \mathbb{C}}(J_0 \circ \zeta) = (T_t\chi, T_t\eta).$$

Für die Lösung $z^\zeta : [-2, \infty) \rightarrow \mathbb{C}$ von (B.3)-(B.4) gilt (siehe Bemerkung oben): $Re \circ z^\zeta$ und $Im \circ z^\zeta$ sind beide Lösungen von (B.1).

Beachte: $(Re \circ z^\zeta)_0 = Re \circ \zeta = \chi$ und $(Im \circ z^\zeta)_0 = Im \circ \zeta = \eta$. Es folgt (Eindeutigkeit der Lösungen zu (B.1)-(B.2)), dass für alle $s \geq -2$ gilt

$$z^\zeta(s) = (Re \circ z^\zeta)(s) + i(Im \circ z^\zeta)(s) = x^\chi(s) + ix^\eta(s).$$

Daher ist $z_t^\zeta(u) = x_t^\chi(u) + ix_t^\eta(u)$ für alle $u \in [-2, 0]$.

Also,

$$J_0(T_{c,t}\zeta) = (Re \circ z_t^\zeta, Im \circ z_t^\zeta) = (x_t^\chi, x_t^\eta) = (T_t\chi, T_t\eta) = T_{t, \mathbb{C}}(\chi, \eta) = T_{t, \mathbb{C}}(J_0\zeta).$$

□

B.1 Anwendungen

Sei

$$Y_c := \{\varphi \in C_c^1 \mid \varphi'(0) = 0\}.$$

Folgerung B.5. J induziert einen topologischen Isomorphismus J_1 von C_c^1 auf $(C^1)_{\mathbb{C}}$ und von Y_c auf $Y_{\mathbb{C}}$. Für alle $\varphi \in Y_c$ gilt $J_1(M_c\varphi) = M_{\mathbb{C}}(J_1\varphi)$.

C Spektrale Eigenschaften kompakter Operatoren

Definition C.1 (Spektrum). Sei $(E, \|\cdot\|)$ ein reeller Banachraum und $L : E \rightarrow E$ ein linearer stetiger Operator, dann ist das Spektrum $\sigma(L)$ von L definiert als das Spektrum $\sigma(L_{\mathbb{C}})$ der Komplexifizierung $L_{\mathbb{C}} : E_{\mathbb{C}} \rightarrow E_{\mathbb{C}}$ von L ,

$$\sigma(L_{\mathbb{C}}) := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (L_{\mathbb{C}} - \lambda I) \text{ ist nicht bijektiv}\}$$

Sei V ein \mathbb{C} -Vektorraum und $L : V \rightarrow V$ linearer Operator.

Ein Eigenwert von L ist ein $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass ein $v \in V \setminus \{0\}$ existiert mit $Lv = \lambda v$.

Der geometrische Eigenraum von L zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ von L ist

$$E_{\lambda} := \{v \in V \mid Lv = \lambda v\} = \{v \in V \mid (L - \lambda I)v = 0\} = \text{Ker}(L - \lambda I).$$

Für die Kerne der Iterierten gilt

$$E_{\lambda} = \text{Ker}(L - \lambda I) \subseteq \dots \subseteq \text{Ker}(L - \lambda I)^j \subseteq \text{Ker}(L - \lambda I)^{j+1} \subseteq \dots \subseteq \dots V \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Bemerkung C.2. [11, Theorem VI.2.5] Sei B ein unendlichdimensionaler Banachraum über \mathbb{C} und $T : B \rightarrow B$ linear, stetig und kompakt.

Das Spektrum $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ ist kompakt mit $0 \in \sigma(T)$ und höchstens abzählbar.

Jedes $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ ist Eigenwert und isolierter Punkt des Spektrums. Es gibt ein kleinstes $n = n(\lambda) \in \mathbb{N}$ mit

$$\text{Ker}(T - \lambda I)^j = \text{Ker}(T - \lambda I)^n \text{ für alle } j \in \mathbb{N} \text{ mit } j > n,$$

$$\dim \text{Ker}(T - \lambda I)^n < \infty,$$

$\text{Ker}(T - \lambda I)^n$ ist positiv invariant unter T . Ferner existiert ein unter T positiv invarianter abgeschlossener Unterraum $N(\lambda) \subseteq B$ mit

$$B = N(\lambda) \oplus \text{Ker}(T - \lambda I)^{n(\lambda)}.$$

Für $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ heißt der endlichdimensionale Unterraum

$$G_{\lambda} = \text{Ker}(T - \lambda I)^{n(\lambda)}$$

verallgemeinerter Eigenraum von T zum Eigenwert λ .

Im Fall $\sigma(T) = \{0, 1\}$ gibt es einen abgeschlossenen, unter T positiv invarianten Unterraum $G_0 \subseteq B$ (von endlicher Kodimension) mit

$$B = G_0 \oplus G_1.$$

Literaturverzeichnis

- [1] H. AMANN, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, (De-Gruyter-Lehrbuch) Walter de Gruyter, Berlin-New York, 1995.
- [2] K. DEIMLING, *Nichtlineare Gleichungen und Abbildungsgrade*, (Hochschultext) Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974.
- [3] O. DIEKMANN, S. A. VAN GILS, S. M. VERDUYN LUNEL, AND H. O. WALTHER, *Delay Equations: Functional-, Complex- and Nonlinear Analysis*, (Applied Mathematical Sciences 110) Springer Verlag, New York, 1995.
- [4] J. K. HALE AND S. M. VERDUYN LUNEL, *Introduction to Functional Differential Equations*, (Applied Mathematical Sciences 99) Springer Verlag, New York, 1993.
- [5] F. HARTUNG, T. KRISZTIN, H. O. WALTHER, AND J. WU, *Functional Differential Equations with State-Dependent Delays: Theory and Applications*, In HANDBOOK OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, Ordinary Differential Equations, volume 3, pp. 435-545, ed. by A. Cañada, P. Drábek and A. Fonda, Elsevier Science B. V., North Holland, Amsterdam 2006.
- [6] H. HEUSER, *Funktionalanalysis: Theorie und Anwendungen*, Teubner, Stuttgart, 1986.
- [7] H. O. WALTHER, *Bifurcation from Periodic Solutions in Functional Differential Equations*, Math. Z. **182** (1983), 269-290.
- [8] H. O. WALTHER, *The solution manifold and C^1 -smoothness for differential equations with state dependent delay*, J. Differential Equations **195** (2003), 46-65.
- [9] H. O. WALTHER, *Differentiable semiflows for differential equations with state-dependent delays*, Univ. Iagel. Acta Math. **XLI** (2003), 57-66 .
- [10] H. O. WALTHER, *Smoothness Properties of Semiflows for Differential Equations with State-Dependent Delays*, J. Math. Sci. (N.Y.) **124** (2004), 5193-5207.
- [11] D. WERNER, *Funktionalanalysis*, (Springer-Lehrbuch) Springer Verlag, Berlin-Heidelberg, 2011.
- [12] E. ZEIDLER, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications I: Fixed-Point Theorems*, Springer-Verlag, New York, 1986.

Abbildungsverzeichnis

II.1	Die Funktion $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$	7
II.2	Die Segmente x_t	8
II.3	Die Lösung $p: [-2, \infty) \rightarrow (-1, 1)$	9
II.4	Der Koeffizient $t \mapsto g'(p(t-1))$ der Variationsgleichung	13
III.1	Das Auftreten von Nullstellen in $(0, 1)$ für wachsende Δ	50

Selbständigkeitserklärung

Ich erkläre: Ich habe die vorgelegte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt, die ich in der Dissertation angegeben habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Ich stimme einer evtl. Überprüfung meiner Dissertation durch eine Antiplagiat-Software zu. Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der "Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis" niedergelegt sind, eingehalten.

Therese Mur Voigt