NULL

Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerungen

WILLI KAFITZ*)

Abstract:

The zero as a symbol, as a numeral and as a number, especially in a positional system, can only be clearly proven in a few early cultures. These clearly include the Sumerians in Mesopotamia, the Maya in Yucatan and also the Incas in South America. However, the range of the American peoples was too remote, and their influence was not great enough to be able to pass on relevant knowledge in their respective areas. In contrast, the geographical location of the Indians was much better suited. Nonetheless, this should not belittle their intellectual achievement because their decimal system with the zero was the almost perfect basis for today's arithmetic.

Noteworthy is the fact that the culture with the most amazing mathematical achievements, Ancient Greece, did not know the concept of zero. In contrast, Islamic Arabia adopted the Indian method of calculation relatively quickly. However, it was many centuries before it arrived in the Christian West through contacts with Moorish southern Spain. Despite obvious disadvantages, Roman numerals survived almost 1000 years after the discovery of zero and a decimal place value system.

Today, the zero has not only arrived in international arithmetic, but it is also often taken up in mathematical generalizations and beyond. In mathematics, it is mainly abstract algebra and topology. Other terms related to zero can be found in economics or cartography.

Keywords: Zero, positional system, generalizations of zero

Zusammenfassung:

Die Null als Symbol, als Ziffer und als Zahl, vor allem in einem Positionssystem, kann in nur wenigen frühen Kulturen eindeutig nachgewiesen werden. Dazu gehören eindeutig die Sumerer im Zweistromland, die Maya in Yucatan oder Guatemala und auch die Inkas in Südamerika. Doch das Verbreitungsgebiet der amerikanischen Völker war zu abgelegen. Ihr Einfluss reichte nicht aus, um ihr diesbezügliches Wissen in diesem Bereich weitergeben zu können. Dagegen war die geografische Lage der Inder wesentlich besser geeignet. Das soll ihre intellektuelle Leistung nicht schmälern. Ihr Dezimalsystem mit der Null war die fast perfekte Grundlage für heutiges Rechnen.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Kultur mit den erstaunlichsten mathematischen Leistungen, das antike Griechenland, die Null nicht kannte. Dagegen hat das islamische Arabien die indische Rechenmethode relativ rasch übernommen. Bis sie allerdings im christlichen Abendland über Kontakte mit dem maurischen Südspanien ankam, dauerte es noch viele Jahrhunderte. Die römischen Zahlen hielten sich trotz offensichtlicher Nachteile noch fast 1000 Jahre nach Entdeckung der Null und einem dezimalen Stellenwertsystem.
Heute ist die Null nicht nur beim internationalen Rechnen angekommen, sondern wird auch vielfach in mathematischen Verallgemeinerungen und darüber hinaus aufgegriffen. In der Mathematik ist es vor allem die abstrakte Algebra und Topologie. Andere Begriffe mit Bezug zur Null finden sich in Wirtschaftswissenschaften oder der Kartografie.

Schlüsselworte: Null, Positionssystem, Verallgemeinerungen der Null

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

Bemerkenswertes

Wir sprechen deutsch, wir schreiben römisch und wir rechnen indisch.[1]

Karl Menninger (1898 – 1963)

Null ist auch eine Ordinalzahl und Mathematiker beginnen oft damit zu zählen. Folgende Anekdote des polnischen Mathematikers *Waclaw Sierpinski* zeigt, dass das nicht immer sinnvoll ist. Auf einer Reise geriet er plötzlich in Panik, weil er ein Gepäckstück vergessen zu haben glaubte. „Aber Liebling" beruhigte ihn seine Frau, „alle sechs Koffer sind da." „Das kann nicht sein" entgegnete der Gemahl, „ich habe zweimal nachgezählt: null, eins, zwei, drei, vier, fünf."[2]

Waclaw Sierpinski (1882 – 1969)

Ich stimme mit der Mathematik nicht überein. Ich meine, daß die Summe von Nullen eine gefährliche Zahl ist.[3]

Stanislaw Jerzy Lec (1909 - 1966)

Eine Größe ist etwas oder nichts; wenn sie etwas ist, ist sie noch nicht verschwunden; wenn sie nichts ist, ist sie wirklich verschwunden. Die Annahme, es gebe einen dazwischen liegenden Zustand, ist ein Hirngespinst.[4]

Jean Le Rond d´Alembert (1717 – 1783)

Oh, I got plenty o' nuttin'
An' nuttin's plenty fo' me[5]

Aus Porgy and Bess von George Gershwin

Now thou art an 0 without a figure.[6]

Shakespeare

Die Mathematik entsteht, wo man, statt zu zählen, dazu übergeht, Beziehungen zwischen Mengen herzustellen.[7]

Robert Kaplan

---

[1] Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen, 1958, zitiert nach Wußing, ebenda, S. 97. (Menninger promovierte übrigens über Bernhard Bolzano und war temporär Gastdozent an der Universität Gießen.)
[2] Zitiert nach http://peter-ripota.de/mathe/ordinalzahlen-einfach-weiterzaehlen/von-der-null-zur-eins/
[3] https://gutezitate.com/zitat/185952
[4] Zitiert nach Charles Seife, Zwilling der Unendlichkeit, S 141
[5] Porgy and Bess, George Gershwin, 1935, Liedtext DuBose Heyward und Ira Gershwin (nuttin ist der Slangausdruck für nothing)
[6] Shakespeare, König Lear, 1. Akt, 4. Szene, Fool to King Lear
[7] Robert Kaplan, zitiert nach dajolens.de/blog/vorgeschichte-mathematik

Inhalt

Big Picture

Vorliegender Beitrag handelt von der Null. Er ist in einen historischen und einen mathematischen Teil gegliedert. Eigentlich sollte der Begriff „Null“ in beiden Teilen unterschiedlich gekennzeichnet werden, denn er bezeichnet unterschiedliche Dinge oder zumindest eine historisch-dynamische Sicht und eine mathematisch gefestigte und damit wissenschaftlich-stabile Sicht.

Abb. 1: Tarot-Karte „Der Narr“ als Null

In der Mathematik ist die Null unbestritten eine Zahl, gleichberechtigt und sogar in ihrer mathematisch begründeten Sonderstellung herausgehoben. Es ist die einzige reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist. Es ist eine Kardinalzahl, denn sie beschreibt die Anzahl an Elementen in der leeren Menge. Oft ist es auch sinnvoll, sie als Ordinalzahl zu verwenden, d.h. Zählen damit zu beginnen. Die Null ist eine gerade Zahl, da sie durch 2 ohne Rest d.h. mit Rest 0 teilbar ist (0/2=0). Sie ist somit neben der Eins Repräsentant in der Restklasse 2. In den Verallgemeinerungen der Null ist sie starker sprachlicher und mathematischer Bezugspunkt. Sie ist eine starke Säule in der Mathematik und in ihren wichtigsten Anwendungen inkl. der Informatik bzw. digitalen Elektronik. Sie ist aus unserem Alltag nicht mehr wegzudenken.

Ganz anders ist die Null im historischen Teil zu verstehen. Die geschilderte historische Entwicklung ist zwar grundsätzlich richtig, aber doch in vieler Beziehung zu relativieren. Es ist historisch belegt, dass ca. 773 n. Chr. die Null der indischen Stellenwertschreibung nach Bagdad kam und es war al-Hwarizmi, der 825 mit seinem Buch über Arithmetik den Grundstein für den weiteren Weg der Null im arabischen und darauf folgend im westlichen Kulturraum legte. Wir wissen auch mittlerweile von der Entwicklung bei den Sumerern im Zweistromland und den Leistungen der Maya im von der übrigen Welt isolierten Yucatan. Außerdem können wir dank archäologischer Erkenntnisse einigermaßen den Stand bei den großen Hochkulturen der Welt in den letzten 7-8000 Jahren einschätzen.

Trotzdem ergibt sich oft ein unklares und verschwommenes Bild. Es ist noch keinesfalls die stolze Zahl Null der Mathematik von heute zu erkennen. Man sieht undeutliche Aspekte und Momentaufnahmen einer Evolution, in der nichts geradlinig und stringent gelaufen ist. Nichts kann darin als absolut betrachtet werden. Die Symbole und wie sie entstanden sind, die Begriffe, ihre Bedeutung, ihren ungewissen Beginn, die zeitlichen Entwicklungen, die Einflüsse der Kulturen untereinander, die Mehrdeutigkeit der Quellen und ihrer Interpretationen, liegen wie Puzzlesteine da, von denen zu viele, aber keine zwingend zusammenpassen wollen. Vor allem in frühen Phasen war die extrem unterschiedliche Wertschätzung der Null, nachdem es sie als Idee gab, aus heutiger Sicht verwirrend, mögliche Verbindungen der historischen Fakten sind auch heute noch höchst spekulativ. Es gibt zahlreiche Hinweise und mögliche Deutungen, aber wenig belastbare Beweise in der frühen Entwicklungsphase. Relativ eindeutig ist, dass die Null in ihrer frühesten Phase eine Leerstelle oder ein Interpunktionszeichen war. Das konnte auch über den Zeichen angebracht sein. „Zahl“ konnte man das jedenfalls nicht nennen.

Sicher ist, dass die indische Mathematik erheblichen Einfluss auf die weitere Entwicklung hatte. So schreibt Bramagupta 600 n. Chr.: *Jede Zahl minus sich selbst ergibt Null.* Trotzdem wurde der Null zunächst nicht die Ehre zuteil, als gleichberechtigte Zahl akzeptiert zu werden. Ihr Name, der bis heute Bestand hat, kommt nach vielen Irrungen und Wirrungen eindeutig vom mittellateinischen *nulla figura*, d.h. keine Zahl.[8]

Diese Haltung bleibt fast 1.000 Jahre bestehen und so lange dauerte auch der Paradigmenwechsel. Im 15. Jahrhundert schrieb ein Franzose: *So wie die Stoffpuppe ein Adler sein möchte, der Esel ein Löwe und der Affe eine Königin, so tat die Null vornehm und gab vor, eine Zahl zu sein.*[9]

Die Null galt dann auch später mehr oder weniger und zumindest außerhalb der Gelehrtenwelt als „Paria“ unter den Zahlen, war aber immerhin auf dem Weg zu einer Zahl. Sie hatte lange den gleichen unvorteilhaften Status wie die negativen Zahlen. Die Situation erinnert an die Entdeckung der irrationalen Zahlen, die oft Hipassos von Metapont zugeschrieben wird und bei den Pythagoreern einen Schock ausgelöst haben soll.

Interessanterweise verlief der Paradigmenwechsel im westlichen Abendland besonders zäh. Das lag zum einen am „Beharrungsvermögen“ der römischen Zahlen. Ein fadenscheiniges Argument war z.B. ihre bessere Fälschungssicherheit. An der Universität Padua verpflichtete man deshalb die Buchhändler, ihre Preise römisch zu schreiben. 1494 verlangte der Bürgermeister von Frankfurt in seiner Verwaltung auf das neue Ziffernrechnen zu verzichten. Noch 1594 wurde in Antwerpen gewarnt, arabische Ziffern in Wechseln oder Verträgen zu verwenden. Arabische Ziffern und die Null wurden

[8] Robert Kaplan, Die Geschichte der Null, S. 80
[9] Robert Kaplan, ebenda, S. 82

lächerlich gemacht oder heidnisch genannt. *„Ein gehörntes Vieh, ein Schaf / Eine arabische Ziffer / Ist ein Priester, der an solch einem Festtag / nicht die Gottesmutter preist.*“[10] Es war „sarazenische Magie“.

Der Mönch Gerbert von Aurillac, der spätere Papst Sylvester der Zweite, soll sich in Cordoba als Araber verkleidet haben und ließ sich dadurch unerkannt im Gebrauch der indo-arabischen Zahlen und der Null unterrichten. Dies wurde als Blasphemie gewertet. Noch im 17. Jahrhundert ließ die katholische Kirche seinen Sarg in der Erzbasilika San Giovanni in Rom öffnen. Eine Ungeheuerlichkeit bei einem Papst! Man wollte sehen, ob der Teufel darin sitzt.[11,12] Gerbert sollte aber trotz der Legenden als bedeutender Wissenschaftler der Scholastik gesehen werden, der in zahlreichen Bereichen bedeutende Ergebnisse beisteuerte und vor allem auch Neuem aufgeschlossen gegenüber stand.[13]

Ein weiterer Grund war die Schwierigkeit, inmitten einer Umwelt mit zwei grundverschiedenen Zahlensystemen konfrontiert zu sein, die mehrere Jahrhunderte parallel betrieben wurden. Oder sollte man statt parallel rivalisierend sagen? Es gab Abakisten und Algoristen, die längere Zeit im Philosophiestreit lagen. Die eine Methode war unhandlich und sperrig, die andere zumindest neu, wurde skeptisch beäugt oder sogar als heidnisch-sarazenisch abgelehnt. Sie war bei Fehlern bestimmt im Zweifel eher der Sündenbock und Fehler waren so verbreitet, dass *„faire par algorisme“* (per Algorithmus rechnen), zwischenzeitlich ein Synonym für „Verrechnen“ bedeutete.[14]

Wichtige Messungen und Justierungen wurden römisch gezählt und begannen deshalb mit Eins. So wurden jedes Jahr zur Frühjahrs-Tag-und-Nacht-Gleiche die 360 Längengrade gemessen. Dieser Tag fällt in das Sternbild des Widders und müsste eigentlich 0 Grad sein. Die unterschiedlichen Zählweisen wirken bis jetzt noch nach. Heute setzen wir die Startlinie auf Null, die Römer setzten sie auf Eins. Drei Tage nach Sonntag war für sie Dienstag. Wir nennen die zwei Noten von C nach E noch heute eine große Terz. Ganz schlimm war die Konfusion bei den Jahreszahlen, die auch heute noch aus ästhetischen Gründen manchmal römisch geschrieben werden. Es fängt an, dass es zwischen dem Jahr 1 v.Chr. und 1 n.Chr. kein Jahr null gab. Erst eine erneute

---

[10] Kaplan S. 114
[11] Quelle der Geschichte:
https://www.deutschlandfunk.de/die-geschichte-der-null-100.html
[12] https://de.wikipedia.org/wiki/Silvester_II., siehe auch
[13] https://de.wikibrief.org/wiki/Pope_Sylvester_II
[14] Kaplan S. 113

Kalenderreform von 1740 führte es endlich ein.[15] Jahreszahlen, die auf null enden, waren und sind bis heute problematisch. Das 3. Jahrtausend begann eigentlich formal am 1. Januar 2001. Ein Jahr vorher feierten Enthusiasten und zitterten Abergläubige. Zu denen soll auch Papst Silvester II gehört haben, als er voller Angst vor dem Weltuntergang zur ersten Jahrtausendwende die Mitternachtsmesse zelebrierte.[16]

1299 erließ der Stadtrat von Florenz, dass es illegal sei Geldsummen mit arabischen Ziffern in Kontobücher zu schreiben,[17] obwohl das dezimale Stellenwertsystem bereits über das Buch *liber abaci* von Fibonacci bekannt war. Allerdings bedurfte es noch weiterer wichtiger Impulse und Fürsprecher, z.B. Luca Pacioli in Italien, Adam Ries in Deutschland oder der junge, geniale Regiomontanus, der seinen Namen Johannes Müller nach seiner Heimatstadt Königsberg (Joannes de Monteregio) latinisierte. Doch Pacioli hat in seinem Buch nicht nur mathematische und wirtschaftliche Themen (siehe doppelte Buchführung) angesprochen, sondern ist auch ausführlich auf das Fingerzählen eingegangen. Noch 1522 kommt in Nürnberg ein Buch dazu heraus: *Abacus atque vetustissima veterum Latinorum per digitos manusque numerandi consuetudo* (Abakus und der uralte Gebrauch der alten Lateiner, an den Händen und Fingern zu zählen.) Es erklärt ausführlich, wie Abakus und Fingerzählen optimal zusammenspielen können. Das einfache Volk auf den Märkten und in den Zunftgassen hatte bei der überwältigenden Verbreitung dieser Kulturtechniken deshalb keinen großen Druck, auf das „neue" Zahlensystem zu wechseln.[18]
Man sollte das Fingerzählen und –rechnen nicht als Spielerei abtun. Es war ca. 1.500 Jahre ein bewährtes System. Es fußt auf einer Praxis, die sich bereits bei den Römern herausgebildet hat und sich auf bemerkenswert große Zahlen erstreckt, die mit Fingerhaltungen, evtl. unterstützt durch Gesten, dargestellt werden können. Auf dem römischen Forum stand eine Statue des Gottes Janus, des doppelgesichtigen Gottes vom Anfang und Ende. Es ist ein sehr alter römischer Gott ohne griechische Entsprechung in der Mythologie. Der Monat „Januar" geht auf ihn zurück. Er soll in der Fingerhaltung abgebildet worden sein, die der Zahl 365 entspricht. Dies berichtete Macrobius, ein römischer Zeitgenosse von Augustinus (gest. 430), dessen Bericht fast wörtlich auf Plinius zurückgeht. Auch der Kirchenvater Augustinus, der Bischof von Hippo in Nordafrika, beschäftigte sich mit möglichen Allegorien der Fingerzahlen in der

---

[15] Kaplan, S. 115
[16] de.m.wikipedia.org/wiki/silvester_II.
[17] Kaplan, S. 114
[18] Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer, eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen 1958, digitalisiert im Münchner Digitalisierungszentrum, siehe z.B. Zahlzeichen des Volkes, Kerbhölzer, digitalisiert ab S. 253 (Original Bd. 2, S. 26)

Bibel. Ihnen liegen eindeutig auch Rechenvorgänge zugrunde, die über eine reine Zahlendarstellung hinausgehen.[19] Das zeigt, wie tief die Ursprünge dieser Kulturtechnik gewesen sind.

Die erste vollständige schriftliche Überlieferung geht auf den Abt Beda, genannt Venerabilis (der Ehrfürchtige) zurück. Der Benediktinermönch, einer der wichtigsten Lehrer des frühen Mittelalters, ist 735 gestorben. Es ist die erste vollständige Aufzeichnung der Fingerzahlen und in seinem Werk *„De temporum ratione*“ (Über die Zeitrechnung) enthalten. Damit meinte man damals die Berechnung des beweglichen Oster-festdatums, zu dem mindestens eine Person in jedem Kloster fähig sein sollte. An Ostern hängen weitere kirchliche Feiertage, die im 1. Konzil von Nicäa (325), zunächst nach dem Julianischen Kalender, festgelegt wurden.[20] Es durfte keinesfalls mit dem jüdischen Passahfest (Pessach) zusammenfallen, das am Abend des Frühlingsvollmondes gefeiert wird. Es war scheinbar Beda wichtig, in seinem Werk gleich am Beginn das „Werkzeug“ zu beschreiben. *„De computo vel loquela digitorum*“ („Über das Rechnen und die Sprache der Finger“). Offenbar waren die Fingerzahlen bis ca. 10.000 (genau 9.999) allgemein seit Jahrhunderten in allen Völkern Europas bekannt! Sie wurden mündlich von

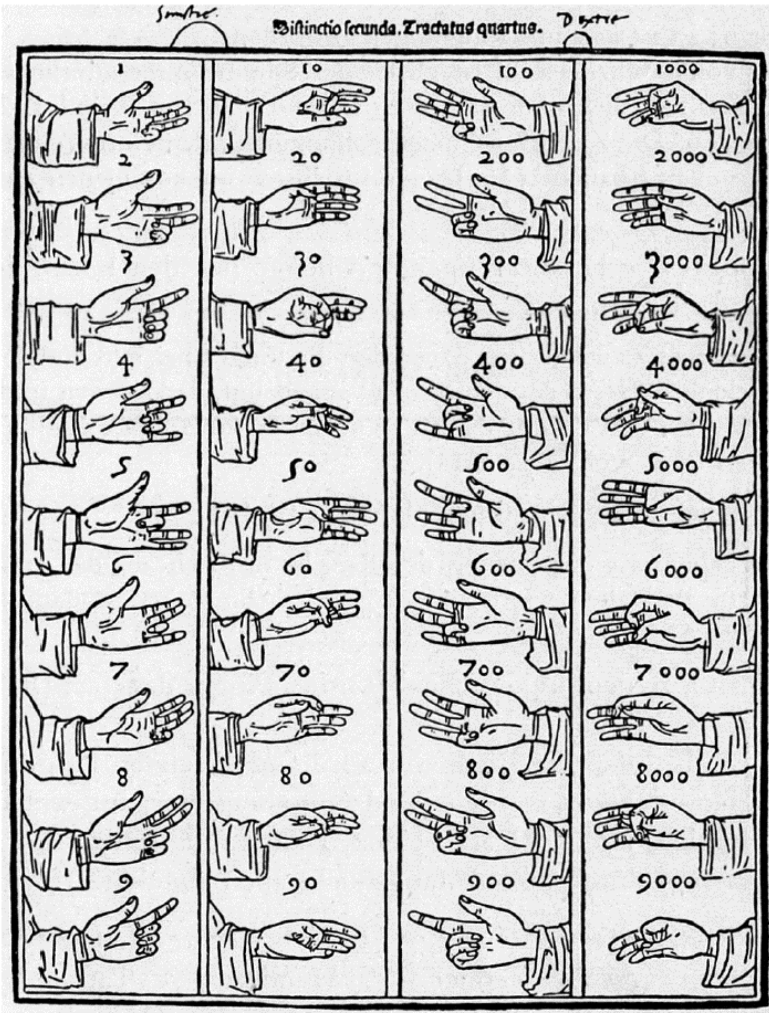


Abb. 2: Fingerzahlen aus dem 1492 gedruckten Werk von Pacioli. Bis auf die handvertauschten 100-er und 1000-er ist es exakt die Darstellung von Beda.

[19] Menninger, ebenda, digitalisiert S. 240 (Bd. 2, S. 5)
[20] https://de.wikipedia.org/wiki/Ostern

Generation zu Generation weitergegeben und waren deshalb so selbstverständlich. Dass Beda in England und nicht auf dem Kontinent lebte und wirkte, erklärt vielleicht, dass er diese Kulturtechnik zunächst dokumentieren wollte.

Es war ein äußerst ausgefeiltes System, das nichts mit primitiven Zahlzeichen von Naturvölkern zu tun hat. Beda versuchte diese Grenze zu erweitern, aber offenbar war der Bedarf für größere Zahlen nicht vorhanden. Seine Vorschläge setzten sich nicht durch.

Seien nun abgekürzt K=Kleiner Finger, R=Ringfinger[21], M=Mittelfinger, Z=Zeigefinger und D=Daumen.

Linke Hand		Rechte Hand	
Einer	Zehner	Hunderter	Tausender
K – R – M	Z – D	D – Z	M – R – K

Der Anzeigende blickt dabei auf seine Handrücken und sein Gegenüber sieht die Zahl, so wie wir sie heute schreiben: T – H Z – E.[22]

Nun kann man verstehen, was der römische Satiriker Juvenal über den altersweisen Nestor sagt: „*Ja, glücklich ist, wer so oft wie er im Laufe der Zeit trotzte dem Tod und seine Jahre schon zählt an der Rechten.*“ Die rechte Hand brauchte man erst ab den Hunderten.

Manche Fingerstellungen führten auch im übertragenden Sinne zu Assoziationen. So ist noch heute in der Gegend rund um Neapel die „Dreißig“ ein Zeichen für Heirat und wohl eher auch für Liebe. Das hat sich seit der Zeit der Römer gehalten: *Molli osculo se complectans* (… umarmte ihn mit einem zarten Kuss) beschreibt die verschlungene Fingerstellung für „30“. In römischer Zeit diente die gleiche Haltung (allerdings mit der rechten Hand) zur Anbetung der Venus. Bereits der Kirchenvater Hieronymus (gest. 420) hat darauf hingewiesen. Die Legende, die sich um ihn rankt, dass er einem Löwen einen Dorn entfernt haben soll, hat ihn besonders populär gemacht und auch das Liebessymbol glaubhaft unterstrichen. Er übersetzte die Bibel ins zeitgenössisch Lateinische (*Vulgata*), also in eine Form, die im Prinzip heute noch in der katholischen Kirche in Gebrauch ist. Dürer hat ihn 1513 in einem meisterhaften Kupferstich voller allegorischer Hinweise in seiner Studierstube

[21] Der Ringfinger hieß auch Medicus, weil eine Ader vom Herzen zu ihm führe. Er bildete die Zahl 6, die seit den Griechen als vollkommene Zahl gilt (Summe ihrer Teiler, 1 gilt als Teiler). Er war deshalb prädestiniert, einen Ring zu tragen.
[22] Menninger, ebenda, S. 233

portraitiert.[23] Menninger weist auch auf andere symbolische Hinweise hin, die für den umfassenden und selbstverständlichen Umgang in der Bevölkerung aller Schichten mit Fingerzahlen sprechen.[24]

In mittelalterlichen Rechenbüchern für Klosterschüler unterschied man gemäß den Fingerstellungen in digiti (1 – 9), articuli (Zehner) und numeri composti (zusammengesetzte Zahlen bis zu 9.999). Das war für die Rechenregeln sinnvoll und nützlich und wird auch heute in der Grundschule gebraucht um z.B. bei der Addition den „Überlauf" in den nächsten Zehnerbereich zu behandeln.

Z.B. 7+5=12, *scribe digitum 2, transfer articulum 1;* oder *2 schreib hin, 1 im Sinn*

Es muss betont werden, dass sowohl fast 500 bzw. 800 Jahre später mit Fibonacci und Pacioli zwei Verfechter der indo-arabischen Ziffern, die Fingerzahlen als nützlich gewürdigt haben. Auch wenn die „amtlichen" Zahlzeichen meist noch die römischen Zahlen waren, so galten überall in Europa die Fingerzahlen als gängige Konvention. Bis auf eine kleine Änderung bzw. Vertauschung hat Pacioli 1492 in seiner „*Summa*" die Ausführungen von Beda bestätigt. Dies kann bei dieser großen zeitlichen Distanz keinesfalls ein Plagiat gewesen sein. Die Zahlzeichen des Volkes, flüchtige Fingerzahlen und beständige Kerbhölzer, Müllerknoten oder ähnliche Dokumentationsformen, existierten unabhängig von der „Amtssprache" und waren extrem ungleich wichtiger im Alltag. Auch existierte wohl durchaus eine Arbeitsteilung bei wichtigen Prozessen in der Verwaltung, sowohl beim Staat oder den großen Handelshäusern: Einer sagte die Posten an, ein Zweiter rechnete mit den Fingern evtl. gemeinsam mit dem Abakus und ein Dritter dokumentierte (gleich, ob römisch oder indisch-arabisch).[25]

Johannes Aventinus, (eigentlich Johann Georg Turmair, latinisierter Name nach seinem Geburtsort Abensberg in Niederbayern), war bayerischer Historiker und Hofhistoriograph. Er gibt, wie schon erwähnt, noch 1522 in Nürnberg ein Buch heraus, das die nützliche Kombination von Abakus und Fingerrechnen betont:

Abakus und der uralte Gebrauch der alten Lateiner, an den Händen und Fingern zu zählen. [26]

George Ifrah weist darauf hin, dass die Griechen, die Sabäer, die Lykier, die Palmyrener, die Etrusker und eben auch die Römer für die Fünf ein eigenes Zeichen hatten und von sechs bis neun das Quinärsystem (Basis 5) anwandten. Dies gilt übrigens auch für die Maya. Mengen werden nur bis vier „auf einen

---

[23] https://de.wikipedia.org/wiki/Der_heilige_Hieronymus_im_Gehäus
[24] Menninger, ebenda, S. 238 ff (Bd. 2, ab S. 5)
[25] Menninger, ebenda S. 231 ff
[26] Menninger, ebenda S. 245f und https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Aventinus

Blick“ erfasst. Dann benötigt man eine optische Zäsur. Er sieht den eigentlichen Ursprung im Zählen mit den Fingern, das sich nach und nach im ursprünglichen Einflussbereich des Römischen Reiches zu einer international verbreiteten Kulturtechnik weiterentwickelt hat.[27] Das hatte zwangsläufig auch Einfluss auf alle Dokumentationsformen. Fingerzahlen und z.B. Kerbhölzer korrespondierten somit in ihren prinzipiellen Darstellungsformen.

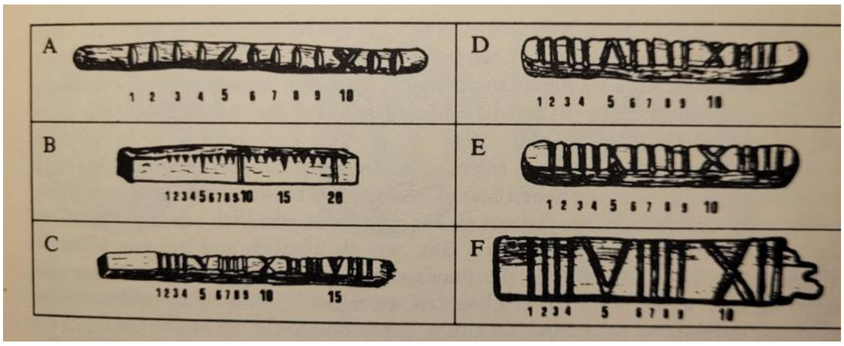


Abb. 3: Einfache Kerbhölzer orientierten sich immer am quinären System, wie auch die Fingerzahlen.

Man sollte also nicht schwarz-weiß denken! Selbst Leonardo von Pisa/Fibonacci weist, wie betont, auch bei Verwendung der neuen Zahlen auf die Bedeutung des Fingerzählens hin. Er verwendet das Verb *servare,* also bewahren, heute würden wir sagen „im Kopf behalten“. *Ponens semper in manibus numeros ex divisione euntes.* (Haltet dabei immer die Zahlen, die bei der Teilung herauskommen, an den Händen fest.)[28] Mit dem Buchdruck, preiswerterem Papier und der Verbreitung der indisch-arabischen Zahlen verschwanden nach und nach die alten Kulturtechniken des Volkes, allerdings in einem Prozess, der Jahrhunderte dauerte.

Erst nach einigem Widerstand und auf Druck der (großen) Händler wurde im Bankwesen und der Verwaltung in den italienischen Stadtstaaten, insbesondere der Medici in Florenz, das Dezimalsystem eingeführt. Es löste mit den „arabisch“ genannten neun Ziffern plus der Null endlich die unhandlichen römischen Zahlen in diesem Bereich ab. Das Ziffernrechnen löste langsam, sehr langsam auch den Abakus bei den professionellen Handelshäusern und staatlichen Verwaltungen ab. Doch selbst von dem jungen Goethe ist bekannt, dass sein Vater noch einen Abakus besaß und der junge Johann Wolfgang ihn zweckentfremdete, in dem er Sternbilder mit den Zählsteinen legte. Der Abakus hieß übrigens auch Zählbank und danach hat die Bankenbranche ihren Namen. Größere Handelshäuser waren auch immer Geldverleiher. Gerade auf der

[27] Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Campus, Frankfurt 1986, S. 173.
[28] Zitiert nach Menninger, ebenda, S. 246 (Als Seitenzahl wird in diesem Beitrag immer die Seite der digitalisierten Form angegeben.)

Zählbank oder dem Abakus war die Null ein flüchtiger Zustand, dem kein wichtiger Name gegeben werden musste.

Der Abakus wurde früher oft mit Sand bestreut und Autoren, wie Kaplan, spekulieren, ob der verbliebene Abdruck der entfernten, runden Zählsteine im Sand nicht das spätere runde Symbol der Null hervorgebracht hat.

Das wichtigste Argument, wieso sich römische Zahlen so lange hielten, ist aber die Tatsache, dass der weitaus größte Teil der Bevölkerung weder lesen und schreiben, noch bis zu größeren (römischen) Zahlen zählen musste bzw. konnte. Jedenfalls wurden die „offiziellen" Zahlzeichen gar nicht im Alltag der breiten Bevölkerung gebraucht. Sie hatten die Fingerzahlen bzw. das Fingerrechnen und dazu kamen im weitesten Sinn noch die herausragende Stellung der Kerbhölzer oder ähnlich einfacher Dokumentationsformen, auf die hier einzugehen ist. Es sind Zahlzeichen, deren Verbindlichkeit lokal begrenzt war oder sogar individuelle Gedächtnishilfen darstellten. Man nennt sie zwar Bauernzahlen; sie sind aber nicht auf diese Bevölkerungsgruppe beschränkt. Es sind Zeichen aus dem Volk für das Volk; das Trägermedium ist meist Holz, manchmal Schnur, erst später Kreide auf Tafeln und oft erst viel später bis weit ins 20. Jahrhundert hinein dann Papier.

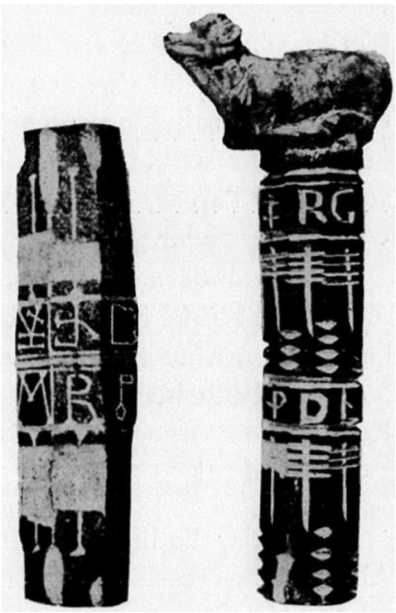


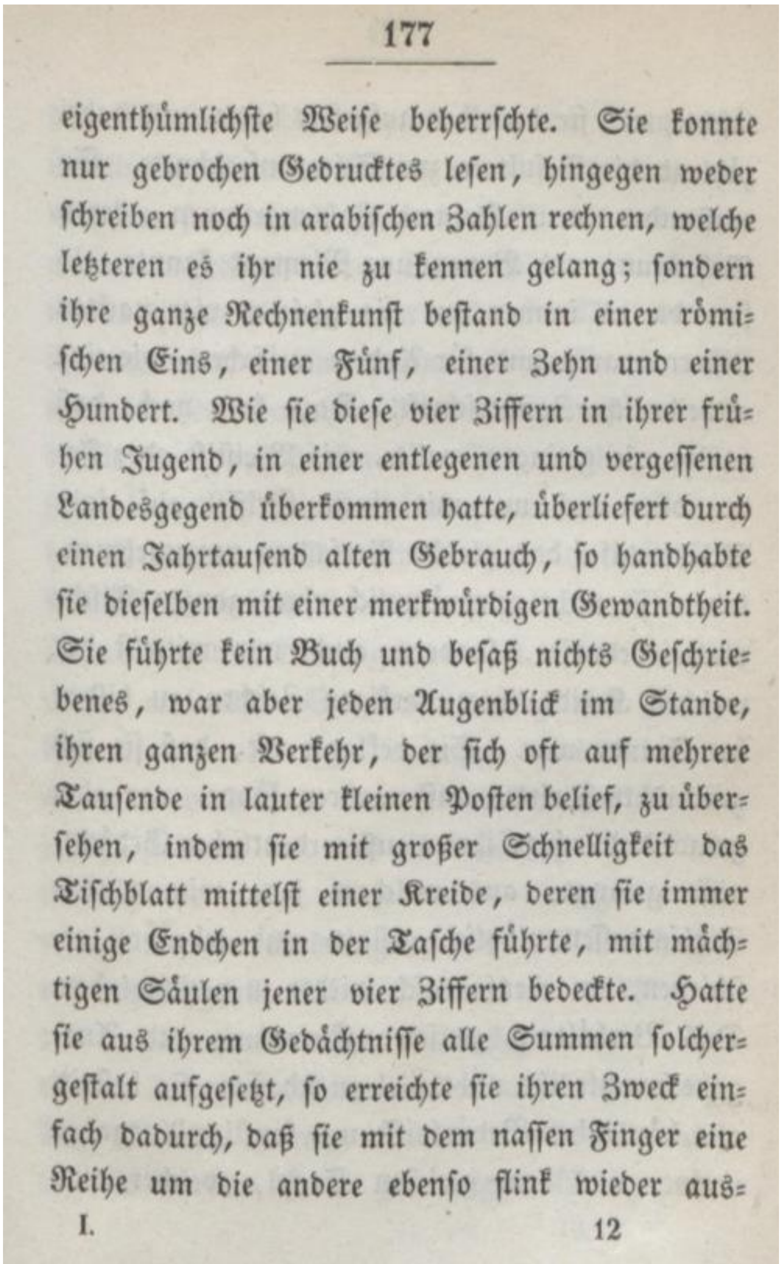
Abb. 4: Kerbholz zur Abrechnung von Milch einer Dorfgemeinschaft durch einen Sennhirten.

Karl Menninger hat zu dieser These in seinem epochalen Standardwerk eine Fülle von Belegen zusammengetragen.[29] Das reicht von Fundstücken mit selbsterstellten Zeichen, die individuell verstanden wurden oder die man bestenfalls noch in einem Dorf, Tal oder Gau kannte. Dazu gehören die Alpscheite. Bekannt ist auch der Müllerknoten. Durch diese Knotentechnik wurde direkt am Sack Mehl Menge und Qualität des Inhaltes festgehalten. Diese „Beschriftungen" gehen bis zu weltweit nachweißbaren Praktiken.

Sie machen aber auch eine intellektuelle Entwicklung mit. Die Kerben beziehen sich z.B. auf Anzahl, Schafe, Ziegen, Galtiere (Rinder) oder Kühe eines Bauern, der sein Vieh, wie andere Viehhalter auch, einem Hirten überantwortet. Der Hirte hat ein Gegenstück. Das Kerbholz, auch Almscheit genannt, ist noch

[29] Menninger, ebenda, S. 245, Abbildung links „abgetesselt", rechts noch aktuell. In der Almwirtschaft wurden Kerbhölzer bis in das 20. Jahrhundert hinein verwendet.

auf die konkreten Objekte (Anzahl Vieh je Art) bezogen. Oft wurde aber die Rückseite zu anderen Dokumentationszwecken benutzt, vielleicht für die Anzahl der produzierten Käse für alle Tiere der Dorfgemeinschaft. Man kann es eine einfache, genossenschaftliche „Buchführung“ nennen. Hier kann eine frühe Zahlschrift entstehen, die unabhängig vom Inhalt ist, also das, was abstrakte Zahlen ausmacht. Dieses Prinzip entstand unabhängig von städtischen Entwicklungen, insbesondere bei größeren Händlern, der staatlichen Verwaltung oder gar dem akademischen Leben. Der praxisorientierten Erfindungsgabe waren dabei einerseits kaum Grenzen gesetzt; andererseits entstanden ähnliche Praktiken unabhängig voneinander.



177

eigenthümlichste Weise beherrschte. Sie konnte nur gebrochen Gedrucktes lesen, hingegen weder schreiben noch in arabischen Zahlen rechnen, welche letzteren es ihr nie zu kennen gelang; sondern ihre ganze Rechnenkunst bestand in einer römischen Eins, einer Fünf, einer Zehn und einer Hundert. Wie sie diese vier Ziffern in ihrer frühen Jugend, in einer entlegenen und vergessenen Landesgegend überkommen hatte, überliefert durch einen Jahrtausend alten Gebrauch, so handhabte sie dieselben mit einer merkwürdigen Gewandtheit. Sie führte kein Buch und besaß nichts Geschriebenes, war aber jeden Augenblick im Stande, ihren ganzen Verkehr, der sich oft auf mehrere Tausende in lauter kleinen Posten belief, zu übersehen, indem sie mit großer Schnelligkeit das Tischblatt mittelst einer Kreide, deren sie immer einige Endchen in der Tasche führte, mit mächtigen Säulen jener vier Ziffern bedeckte. Hatte sie aus ihrem Gedächtnisse alle Summen solchergestalt aufgesetzt, so erreichte sie ihren Zweck einfach dadurch, daß sie mit dem nassen Finger eine Reihe um die andere ebenso flink wieder aus-

I. 12

Abb. 5: Umgang mit „Bauernzahlen“ bei Gottfried Kellers „Grüner Heinrich“

Aus einem Zahlensystem, wie den römischen Zahlzeichen, werden nur bestimmte Elemente entnommen, für eigene Zwecke umgedeutet und mehr oder weniger individuell benutzt. In dem Roman „Der grüne Heinrich“ von Gottfried Keller, findet sich eine schöne Passage, die diesen Sachverhalt illustriert:[30] Aus dem Text von Keller lässt sich durchaus eine gewisse Anerkennung für die Frau erkennen. Das kann man getrost verallgemeinern. Die Menschen waren nicht dumm, sie waren nur sehr „bildungsfern“ aufgewachsen und hatten vom römischen

[30] Keller, Gottfried: Der grüne Heinrich. Bd. 1. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1854, S. 177. https://www.deutschestextarchiv.de/book/show/keller_heinrich01_1854

Zahlensystem nur einen Teil aufgeschnappt. Menninger bestätigt, dass z.B. L=50, D=500 oder M=1000 in den Bauernzahlen fast gar nicht vorkommen.[31] Bauernzahlen sind keine Kulturtechnik, die gelehrt werden musste. Doch sie leisten ihren Beitrag, dass die „amtlichen" Zahlzeichen schon viele Jahrhunderte fast ein Schattendasein führten. Sie hatten kaum Einfluss auf den Lebensalltag der einfachen Bevölkerung

Die Kreide hatte ihren Zweck für schnelle Markierungen, aber man kann mit Recht sagen, dass das mit großem Abstand am meisten verbreitete Medium das Kerbholz war. Archäologische Funde beweisen, dass diese Praxis bis weit in die vorgeschichtliche Zeit reichte. Man hat an der Grenze zwischen Swasiland und Südafrika 1973 in Form eines Pavianknochens mit systematischen Einkerbungen eines der ältesten Artefakte gefunden.[32]
Obwohl Papier vor 2.000 Jahren in China erfunden wurde, erreicht es Deutschland erst im 14. Jahrhundert und war anfangs viel zu teuer für den profanen Gebrauch. Das „*Papier des Volkes ist das Holz*" (Menninger) und das gilt praktisch für die ganze Welt. Beschränkt man sich auf Europa, so geben allein schon die Namen Aufschluss. Im Mittel- und Niederdeutschen gibt es das Kerbholz, den *Dagstock*, in Bayern und Tirol den *Span, Kärm* oder das *Raitholz* (=Rechenholz), andere Alpenländer kennen *Tessel oder Taessle*[33]*.* Österreich und Wien haben den *Robasch* oder *Robitsch*, von slawisch *rovaš* (Kerbholz). Der Böhme sagt, wenn er borgen muss, *„es ist mir in die Rabuse gegangen*". Schweden kennt den *karvstock*, Holland den *kerf*. Im Lateinischen bedeutet *talea* Stab. Daraus bildete sich im mittellateinischen *talare* und im italienischen *tagliare*, woraus französisch *tailleur* (Schneider) und englisch *tailor* wurde. In Italien heißt das Kerbholz *taglia* oder *tessera*, in Spanien *tarja*, in Frankreich *taille* und in England *tally*. Ein *tallyman* war Jahrhunderte lang ein Ladungskontrolleur in einem Seehafen.[34] Auch der „Scheck" geht auf das Kerbholz zurück. Die Staatsbank hatte bei ihrer Gründung eine Million Pfund aufgenommen und gab einen *tally stick* mit den Anteilsbeträgen in Form genormter Kerben den Berechtigten. Die konnten den Betrag einlösen, nachdem die Berechtigung geprüft wurde (*„to check"* heißt überprüfen).
Von René Jouglet wird eine Szene im Hennegau, (Province de Hainaut, wallonisch Hinnot, westflämisch Enegouwn), um 1900, geschildert: *Der Bäcker ging mit seinem Karren von Tür zu Tür. Er rief die Hausfrau heraus. Sie brachte ihre „taille". Es war dies ein schmales Brettchen, so lang wie die Klinge einer Schere; der Bäcker besaß das Gegenstück dazu. Er legte beide aufeinander*

[31] Menninger, ebenda, S. 282
[32] Bottazzini, ebenda, S. 18
[33] http://www.walser-alps.eu/handel-und-wirtschaft/wirtschaft/taessle
[34] https://de.wikipedia.org/wiki/Tallymann

und sägte an ihrer Kante soviel Kerben ein, wie er Brote zu sechs Pfund verkaufte.[35]
Selbst bei den Bantu bedeutet „kerben“ auch gleichzeitig „zählen“ oder „rechnen.“[36]
Das Kerbholz wurde dann immer mehr zu einem rechtssicheren Medium. Kerben wurden in Ulmenholzstäbe geschnitten und diese geteilt, also gespalten. So wurde Betrug von beiden Parteien verhindert, weil beide Hälften exakt zusammenpassen mussten. Dies wurde vor allem bei Schulden angewendet („etwas auf dem Kerbholz haben“). Man findet das Prinzip sogar im Code Napoleon, dem 1804 eingeführten Code Civil, wo der Kerbstock als rechtsgültige Urkunde anerkannt wird.

Abb. 6: Kerbholz zum Nachweis für Dienstleistungen.

Auch die preußische Prozessordnung von 1781 lässt sie als Beweisstück zu:

"beweiseskraft haben die auf dem lande gewoehnlichen kerbhoelzer, wenn beyde stuecke uebereinstimmen. kann eine parthey das ihrige nicht herbeyschaffen, so muß der gegner zur eidlichen bestaerckung des seinigen verstattet werden, in so ferne er nicht ueberfuehrt werden kann, daß das fehlende kerbholz durch seine schuld abhaenden gekommen".[37]

In England wurden für die Staatsfinanzen ebenfalls bis ins 19. Jahrhundert (Bank von England bis 1826) hinein Kerbhölzer benutzt. Es existierten durch lange Archivierungszeiten von Steuerquittungen eine große Menge davon. Am 16. Oktober 1834 entschloss man sich, diese im Hof des Parlamentsgebäudes *Palace of Westminster* zu verbrennen. Es fing dabei Feuer und brannte zum größten Teil ab.[38] Rechtsgeschäfte, insbesondere Zahlungsverpflichtungen, gehen bis ins fränkische oder alemannische Volksrecht zurück. Bei geleisteten Verpflichtungen wurden die Kerbhölzer oft ausgekerbt und wiederverwendet („glatt“ gemacht, „getesselt“). Sie waren besonders in der Land- und Forstwirtschaft und im Fischereiwesen üblich. Wasserrechte, Lohnforderungen, Fangmengen oder Liefermengen wurden so dokumentiert. So bedeutete eine Kerbe einen ganzen Tag geleistete Arbeit, eine halbe Kerbe einen halben Tag.

[35] Zitiert nach Georges Ifrah, Universalgeschichte der Zahlen, S. 112
[36] Menninger, ebenda, S. 255
[37] Corpus Iuris Fridericianum, 1. Buch „Von der Prozeß-Ordnung“, Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1781, Teil IV, Abschnitt 6, § 71
[38] https://de.wikipedia.org/wiki/Kerbholz

Viel profaner wurden Kerbhölzer beim „Anschreiben“ in Kneipen benutzt, wo man nicht unbedingt Rechtssicherheit benötigte. Ein italienisches Sprichwort sagt:

Come è bello vivere in questo regno:
si mangia, si beve e si segna
tutto su un pezzo di legna!

Herrlich lässt es sich in diesem Land leben:
man isst und trinkt und kerbt
alles auf ein Stück Holz!

Das Kerbholz in der Gastronomie ist nicht auf das gemeine Volk beschränkt. Zu Ehren von Wallensteins General Piccolomini spendierte die Marketenderin in Friedrich Schillers Stück, *Wallensteins Lager*, eine Flasche Wein: *Das kommt nicht aufs Kerbholz. Ich geb es gern. Gute Verrichtung, meine Herren.* [39]

Später setzte sich Tafel und Kreide durch und es entstand der Ausdruck *„etwas ankreiden“*.

Wichtiger als Zählen, war die Kenntnis von Geld- oder Sachwerten. Die Kerben konnte man vergleichen ohne die (An)Zahl benennen zu können. Die *minutiae* (Kleinheiten), also die römischen Zwölferbrüche und ihre Umrechnung, musste man zu seinem eigenen Vorteil kennen. Wichtig waren die *minutiae usitates* (die „gebräuchlichen“ Hauptbrüche), im Gegensatz dazu die *minutiae intellectualis*. Einige Begriffe haben sich bis heute erhalten: Von *scrupulus* leitet sich Skrupel („Bedenken“) ab, ein halber Scrupel ist ein Obolus, ein Viertel der Cerates, von dem das Karat stammt. Ein Skrupel ist $\frac{1}{24}$ Unze $=\frac{1}{288}$ As = 8 Calcus.[40] Die Begriffe gehen unmittelbar auf das griechische System zurück.[41]

Brauchte man mehr Platz, so entstand das „Buch“, das sich von der Buche ableitet, die sich leicht und glatt spalten ließ und aus der in Europa Holztafeln geschnitten wurden. „*Codex*“ wird heute nur für Bücher aus Pergament verwendet. Aber der Begriff stammt von *caudex*, dem Holzstück, aus dem *tabulae* geschnitten wurden. Sie wurden schon bei den Römern mit Wachs überzogen (*tabula cerata*) und mit einem Griffel (*stilius*) beschrieben.
Eine schöne sprachliche Brücke bildet auch das Lateinische *putare* (u.a. beschneiden), dessen Sprachstamm sich auch in *computare* (berechnen) findet, womit wir beim heutigen Computer wären.

Es gibt also eine ganze Reihe von Hindernissen, die einer Überwindung eines unpraktischen Zahlensystems im Wege stehen. Über allen logischen,

[39] Friedrich Schiller, Wallensteins Lager, 11. Auftritt
[40] Menninger, ebenda, S. 174
[41] https://de.wikipedia.org/wiki/Obolus

praktischen oder vorgeschobenen Argumenten sollte man am Schluss religiöse, philosophische und abergläubige Überlegungen nicht vergessen: Schon vom Hof Karls des Großen ist eine Diskussion über das Nichts, ob es existiert oder nicht, überliefert. Sie hat den Kaiser zu einer Erkundigung bei dem irischen Mönch Dungalus inspiriert. Die Welt soll laut der Bibel *„ex nihilo“*, aus dem Nichts erschaffen worden sein. Was war dieses „Nichts“ vor der Schöpfung?“
Erst in der Renaissance erkannte man die Bedeutung auch des Nichtseins an und Leonardo da Vinci schreibt im Codex Atlanticus, *„dass unter den großen Dingen, die sich unter uns befinden, das Nichtsein das allergrößte ist.“*[42]

Dies ist offenbar keine Haarspalterei. Als die Mathematik vor gut 100 Jahren auf eine neue axiomatische und mengentheoretische Grundlage gestellt wurde, haben sich große Mathematiker und Philosophen, aber auch andere Fachrichtungen, mit ähnlichen Fragen auseinandergesetzt – allerdings mit teilweise unterschiedlichen Antworten. Zu nennen ist zunächst Richard Dedekind mit seinen Gedanken über Zahlen, Georg Cantor über unendliche Mengen, Bertrand Russell und Gottlob Frege als Logiker. Intensive Studien gab es aus einer Gruppe von interdisziplinären Wissenschaftlern, die als der „Wiener Kreis“ bekannt wurden, darunter Kurt Gödel. Sie versuchten die Metaphysik vollkommen durch einen logischen Empirismus zu ersetzen. Dies galt für die Mathematik als weitgehend gelungen. Bei den Naturwissenschaften brachten noch immer der Atomismus und schon die neue Quantenmechanik neue Fragen, aber auch die Sozialwissenschaften und insbesondere die Sprachwissenschaft (Rudolf Carnap).[43] Martin Heidegger findet spöttische Worte über das Nichts in seiner Antrittsvorlesung „Was ist Metaphysik“ (1929), aber das hat nichts mehr mit der Null zu tun.

Erst mit der Renaissance, dem wachsenden Bildungsstand und den mathematischen Leistungen in dieser Zeit, setzte ein wirklicher Paradigmenwechsel ein und die Null bekam im wahrsten Sinne des Wortes den Stellenwert, der ihr gebührt (siehe unten). Null als Zahl und als Begriff der Kardinalität der leeren Menge wird heute kaum mehr mit dem „Nichts“, „Niemand“ oder „Nichtsein“ gleichgesetzt. Die finden sich nur bei Gedankenspielen und Wortspielereien, siehe Shakespeares King Lear oder der Arie von Porgy aus Gershwins Oper *Porgy and Bess* eingangs dieses Beitrags unter „Bemerkenswertes“. Auch bei Lewis Carolls *„Alice hinter den Spiegeln“* (1871) finden sich entsprechende Wortspielereien zu „Nichts“ und „Niemand“,

---

[42] Umberto Bottazzini: Wie die Null aus dem Nichts entstand, dtv, München 2021, deutsche Erstausgabe, S. 39f
[43] Karl Sigmund; Sie nannten sich Der Wiener Kreis, Springer. 2. wesentlich erweiterte Ausgabe, 2018

die „niemand“ mehr mathematisch interpretieren würde. Dagegen ist die „leere Menge“ zu einem reinen *Terminus technicus* der Mathematik geworden.

In Indien begann dieser Prozess der „Entmystifizierung“ früher. Dort wurden Regeln entwickelt, wie man mit der Null umzugehen habe. Mahavira, der um 830 n. Chr. lebte, schrieb, dass eine Zahl mit Null multipliziert, Null ergibt und dass die Zahl unverändert bleibt, wenn Null (…) von ihr abgezogen wird. Bramagupta und Bhaskar stimmten (zu unterschiedlichen Zeiten) dem zu. Ganz anders wird die Division durch Null bewertet. Hier gehen die Meinungen der großen Koryphäen diametral auseinander. Doch nach und nach entstand der Satz an plausiblen Regeln, wie die Null in der Arithmetik einzusetzen ist.

Man muss sich jedoch fragen, wieso ausgerechnet in Indien diese Klarheit in der Einbettung der Null in ein dezimales Stellenwertsystem entstand. Die Antwort könnte in einem 1.800 Jahre alten Text eines Autors namens *Nagarjuna* liegen, das zu einem klassischen Referenzwerk der buddhistischen Philosophie wurde. Ein Essay von Carlo Rovelli, Mitbegründer der Schleifenquanten-gravitation und vielbelesener Wissenschaftler, befasst sich unter dem Titel *„Leere ist leer: Nagarjuna“* mit der altindischen Schrift. Er kommt zu dem Schluss, dass als Kernargument von Nagarjuna nur die wahre Wechselbeziehung zählt. Leere allein ist ohne Essenz, jede Perspektive existiert nur über Abhängigkeiten. Für sich allein sind alles nur leere Entitäten.[44]

Die damit verbundene Relation zu anderen Zahlen und vor allem im dezimalen Positionssystem stellte die Null immer mehr und unumkehrbar auf die gleiche Stufe mit den „normalen“ Zahlen, wenn es oft auch quälend langsam ging.

Es gab aber sowieso eine Fülle von anderen Problemen. So besteht z.B. eine Gleichung der Form $x^2 + 4x - 22 = 0$ verwirrender Weise aus einer Fläche (x^2), einer Länge (4x) und einer Konstante (–22). Es wurden also drei Dimensionen in einem Ausdruck zusammengefasst. Das konnte man sich noch vorstellen. Doch was ist mit x^4 oder $\sqrt[5]{x}$? Dabei kommt man mit Anschaulichkeit nicht mehr weiter und es hilft nur konsequentes, regelbasiertes Rechnen, in das die Null emotionslos integriert werden muss.

Dieses Kaleidoskop an Bildern soll dem Verständnis dienen, um welchen Antagonismus sich ein Beitrag zum historischen und mathematischen Aspekt der Null kümmern sollte.

Vor diesem Hintergrund und auch im Rückgriff auf genannte Argumente und Fakten, kann man sich die einzelnen Kulturkreise ansehen und analysieren, ob

---

[44] Carlo Rovelli, Es gibt Orte auf der Welt, an denen Regeln weniger wichtig sind als Freundlichkeit, Essays, Rowoldt, Hamburg, 2022, S. 158 f

bzw. wie die Null die jeweilige zeitgenössische und spätere Mathematik beeinflusst hat. Es bleiben dabei sicherlich immer noch eine Reihe von Fragen bei der historischen Bewertung offen.

Von den einstigen Ressentiments sind nur in der Umgangssprache noch Hinweise, entsprechende Begriffe, Bekräftigungen und Zuspitzungen zu finden. Einen vermeintlich unnützen Menschen bezeichnet man abschätzig als Null, Null Bock ist ein Ausdruck für Unlust, Null Toleranz steht für ein hartes Durchgreifen, Null Spielraum bedeutet extreme Handlungszwänge, bei einem Nullspiel beim Skat darf der Einzelspieler keinen Stich machen, sogar ein Null-Sterne-Hotelzimmer unter freiem Himmel wurde kreiert.

Die Umgangssprache benutzt also Null als unterstes Extrem von eher abschätzigen Charakterisierungen. Für die Mathematik zählen nur die Eigenschaften und Folgerungen aufgrund des besonderen Bezugs zur Null. Wie alle anderen Elemente unterliegt sie in allen mathematischen Begriffen und Verallgemeinerungen streng dem logischen Positivismus, der nur ausreichend klar Definiertes akzeptiert.

Entstehungsgeschichte und Verbreitung

Noch vor wenigen Jahren konnte der „Rote Faden“ zur Geschichte und Verbreitung der Null in wenigen Sätzen skizziert werden. Die geografische Nähe zum indischen Subkontinent hat den arabischen Islam mit den indischen Ziffern und der Null im Positionssystem (Stellenwertschrift) in Berührung gebracht. Um die Jahrtausendwende gelangten diese Erkenntnisse vor allem über Nordafrika nach Andalusien im maurischen Südspanien.

Abb. 7: Urkunde des Königs Devendravarman aus Kalinga (heute Orissa in Ostindien) aus dem Jahr 596 n.Chr. galt lange als ältestes Zeugnis der Stellenwertschrift mit der Null.

Erste Kontakte zwischen christlichen und arabischen Gelehrten und Händlern brachten zwar Impulse, aber erst mit dem ausgefeilten Bankwesen der italienischen Stadtstaaten explodierte der Bedarf an effizienter Buchführung und die „arabischen“ Ziffern verbreiteten sich über ganz Europa. Auf der wissenschaftlichen Seite entwickelten Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz die Infinitesimalrechnung. Newton, um physikalische Bewegungen und Veränderungen berechnen zu können, Leibniz eher aus Interesse an reiner Mathematik. Die weitere Entwicklung führte über mehrere

Generationen zu einem (im wahrsten Sinne des Wortes) differenzierten Umgang mit der Null und unscharfe Begriffe, wie das unendlich Kleine, wurden ausgemerzt. Dieser scheinbar geradlinige Weg über ca. 1300 Jahre Mathematikgeschichte muss relativiert werden. Dies wurde bereits im Eingangskapitel deutlich gemacht.

Da ist zunächst die bisher in der Forschung akzeptierte Chronologie, die sich als falsch herausgestellt hat: Die Null ist bedeutend älter als gedacht.[45] 1881 wurde auf einem Feld nahe Bakhshali bei Mardan, Pakistan, ein auf Birkenrinde verfasstes Manuskript gefunden. Es befindet sich seit 1902 in den Bodleian Libraries der University of Oxford.

Es war schnell klar, dass es sich um mathematische Texte handelt, in denen häufig auch die Null als Punkt auftaucht. Meist wurde die Entstehung des 70-seitigen Manuskriptes irgendwann zwischen dem 7. bis 12. Jahrhundert angenommen. Eine exakte Datierung war jedoch erst jetzt mit der Radio-Carbon-Methode möglich und offenbarte eine große Überraschung. Die Handschriften stammen aus dem 2. bis 4. Jahrhundert. Damit müssen auch die zeitlichen Aspekte bei der Entdeckung und Verbreitung der Null anders bewertet werden. [46]

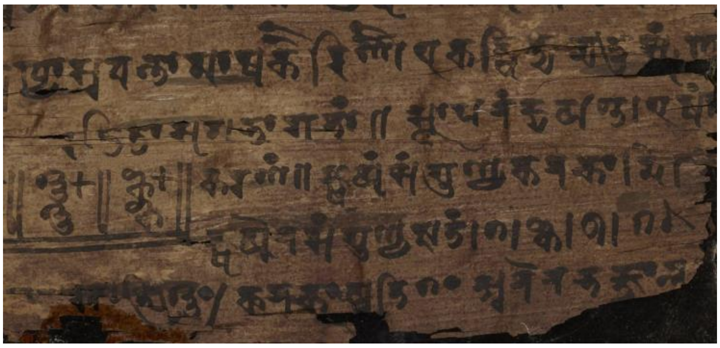


Abb. 8: Die Zahl "Null" als Punkte im Bakhshali-Manuskript

Abb. 9: 70 Seiten Birkenrinde – das Bakhshali-Manuskript

Im 7. Jahrhundert war die Zählweise und das Zahlensystem in Indien schon stark ausgeprägt. Sinnbilder für Zahlen waren eigentlich nicht nötig. Allerdings gehörte es zum „guten Ton“, mathematische bzw. astronomisch/astrologische Texte in Versen zu schreiben. Die Astronomie mit

[45] https://en.wikipedia.org/wiki/Bakhshali_manuscript

[46] George Ifrah schreibt in der Sonderausgabe seiner Universalgeschichte der Zahlen 1998, S. 500: *Der Begriff der Null und das Positionsprinzip waren also in Indien schon im 5. Jahrhundert unserer Zeitrechnung bekannt und möglicherweise über die Gelehrtenwelt hinaus verbreitet – die Konzeption unseres modernen Ziffernsystems geht damit mindestens auf diese Zeit zurück.*

ihren mathematischen Anforderungen wird auch noch heute als „Hilfswissenschaft“ für die Astrologie gesehen, die im indischen Alltag bis in die heutige Zeit eine dominierende Rolle spielt. Diese Sitte, Sinnbilder für Zahlen in poetischer Form zu verwenden, findet man im ostasiatischen Raum bis Tibet und Java und macht für interessierte Fremde das Verständnis nicht gerade einfach. Für bestimmte Zahlen gibt es sozusagen lyrische oder poetische Synomyme. Für die „Eins“ sind ca. 300 bekannt, darunter sogar „Nashorn“. Für die Zahl 1021 findet sich z.B. die poetisch umgestaltete, dezimale Darstellung im Stellenwertsystem:

eins – zwei – null – eins (von rechts nach links gelesen)

śaš – paksa – kha – eka

(Mond – Flügel – Loch – eins)

kha steht also für die Null und das Zeichen 0 sieht wie ein Loch aus.[47]

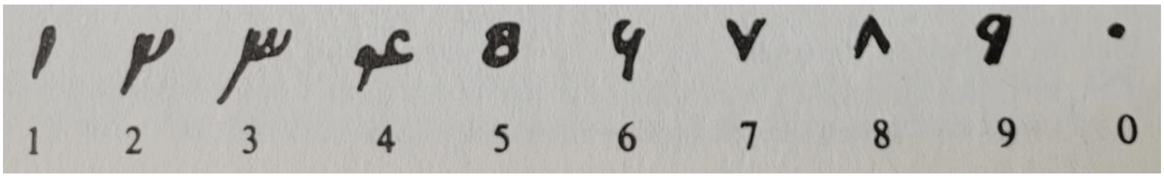


Abb. 10: Die ersten indischen Ziffern

Der arabische Dichter Khalīl ibn Aybak al-Ṣafadī (1296 – 1363)[48] berichtet, die indische Nation sei auf drei Dinge stolz: Ihre eigene Rechenmethode, das Schachspiel und das Buch Calila wa Dimna (Fabeln und Legenden).[49]

Der Begriff „Null“ leitet sich von lateinisch *„nullus“* (keiner, niemand) ab. Doch es wäre falsch zu vermuten, dass die Null den Römern bzw. den Griechen, von deren Tradition die römische Antike viel übernommen hat, bekannt war. Gerade

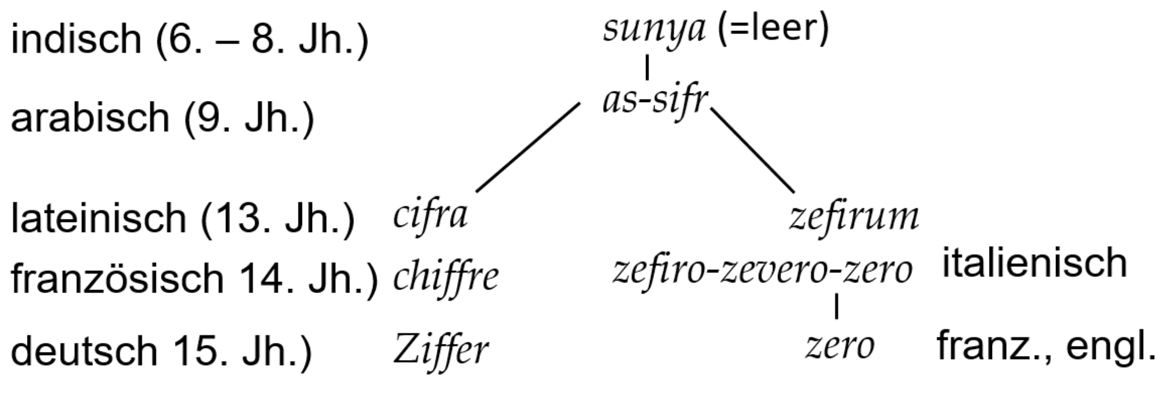


Abb. 11: Sprachliche Entwicklung des Begriffes Ziffer oder Zero.

---

[47] Menninger, ebenda, Bd. 1, S. 129 bzw. 133 digitalisiert
[48] https://en.wikipedia.org/wiki/Al-Safadi
[49] Zitiert nach Georges Ifrah, Universalgeschichte der Zahlen, S. 482

bei den Griechen verwundert das am meisten. Warum wurde dort nie die Idee eines Stellenwertsystems und eines Symbols oder gar einer Zahl für leere Positionen in der Zahl geboren? Vielleicht liegt der Grund darin, dass die Griechen in Strecken oder Flächen und ihren Relationen dachten. Jedenfalls ist das vollkommene Fehlen einer entsprechenden abstrakten Idee, die man als „Null“ identifizieren könnte, der Grund, wieso das restliche Europa erst sehr spät von der Bedeutung der Null erfahren hat.

Sprachlich lässt sich der Weg des Begriffs ziemlich genau verfolgen. Aus dem indischen sunya (leer) oder auch sunya-bindu (Leerpunkt) haben die Araber wörtlich übersetzt as-sifr gemacht. Eigentlich müsste unter den beiden s jeweils ein Punkt stehen, aṣ-ṣifr, um die korrekte Aussprache zu verdeutlichen. Im Prinzip wird der Begriff im Abendland übernommen, allerdings latinisiert in cifra oder cefirum, wie es auch Leonardo von Pisa in *Liber abaci* schreibt. Die beiden lateinischen Worte werden als Lehnworte in die einzelnen Sprachen integriert.

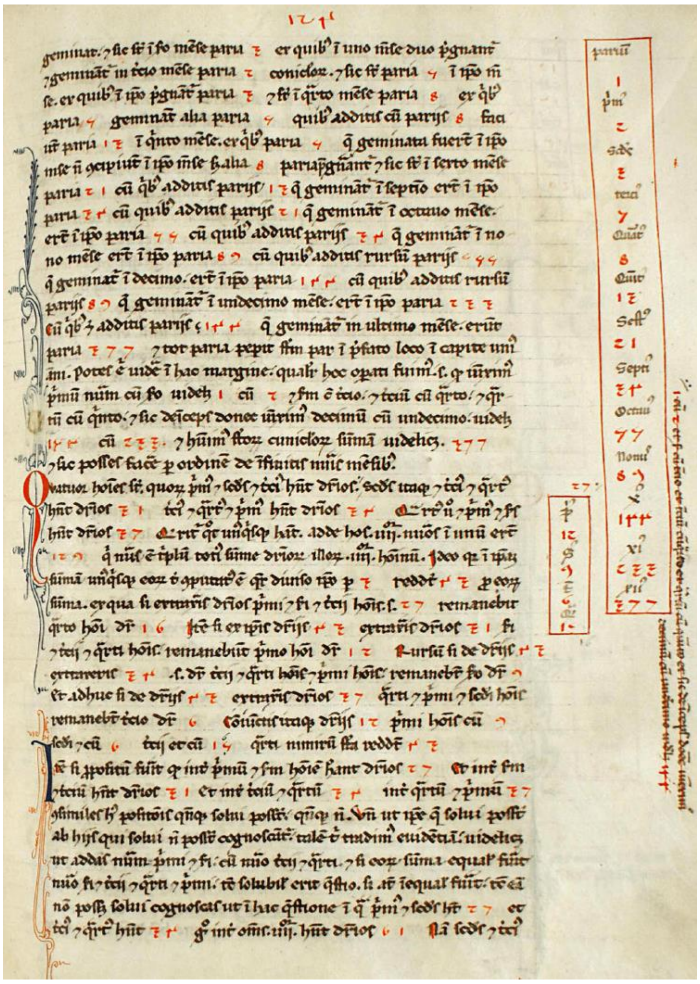


Abb. 12: Seite aus *liber abaci* von Leonardo di Pisa mit dem berühmten Kaninchen-Problem; rechts die ersten Fibonacci-Zahlen.

Allerdings finden sich bei Johannes von Sacrobosco in seinem Werk *De arithmetica* (zwischen 1225 – 1230 entstanden) auch alternative Begriffe, wie theca, Zirkel, Ziffer oder Nullzeichen.[50] In den italienischen Mundarten entstehen drei Worte, wobei das venezianische zero zunächst parallel neben chiffre im Französischen für die Null übernommen wird. Mit der Zeit setzte sich zero für null durch und chiffre bzw. deutsch *Ziffer* standen ursprünglich für die Null. Heute ist im Deutschen jede einstellige Zahl eine Ziffer; allerdings wird der Begriff auch gelegentlich im

[50] Bozzazini, ebenda, S. 55

übertragenden Sinn verwendet („Ziffern in Ordnung bringen"). Im Französischen benutzt man heute chiffre wie im Deutschen für die einstelligen Zahlen.[51] Das ist seit über 500 Jahren der Fall. In einem französischen Lehrbuch für Kaufleute von 1485 heißt es: *An chiffres gibt es nur 10 Zahlzeichen, von denen 9 Wert haben und das zehnte (selbst) nichts gilt, aber den anderen Zahlzeichen höheren Wert verleiht, und sie heißt zero oder chiffre.*[52] Der Text zeigt nicht nur die Koexistenz der beiden gleichen Begriffe, sondern offenbart die Unsicherheit, die der Mensch noch im ausgehenden Mittelalter und Beginn der Neuzeit mit der Null hatte. Menninger bringt es auf den Punkt: Es sind zwei Namen für die gleiche Sache (der Null) und einen Namen für zwei Dinge (Null und Wertziffer). Die Sprache könnte gar nicht besser die „Unordnung im Kopf" demonstrieren, die noch an der Schwelle zur Renaissance bei den Menschen bzgl. der Null herrschte.

Es war vor allem Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, der als Sohn eines italienischen Handelsvertreters in Bugia, einer Handelsenklave von Pisa in Marokko, die Vorteile der arabischen Ziffern und der Null erkannte. Dort genoss er seine erste Ausbildung in Mathematik. Er vervollkommnete sein mathematisches Wissen auf ausgedehnten Reisen in Ägypten, Syrien, der Provence und Byzanz. Leonardo hat in bewundernswerter Ausprägung das Euklidische fundamentale Prinzip von Definition, Satz und Beweis verinnerlicht und angewendet. Bei der Algebra wurde er sehr von al-Khwārizmī beeinflusst. Er hat am Hof von Friedrich II. auf Sizilien die neuen Zahlen propagiert und hat in seinem einflussreichen Buch „*Liber abaci*", veröffentlicht 1202, die Null als nützliches Zeichen (also noch nicht Zahl) erwähnt.[53,54] Dass der eigentliche Ursprung der Ziffern in Indien lag, wurde erst später erkannt. Ein früher Verfechter der indischen Zahlen war Johannes de Sacrobosco (auch Joannis de Sacro Bosco, englisch John of Holywood), ein englischer Mathematiker und Astronom, der an der Pariser

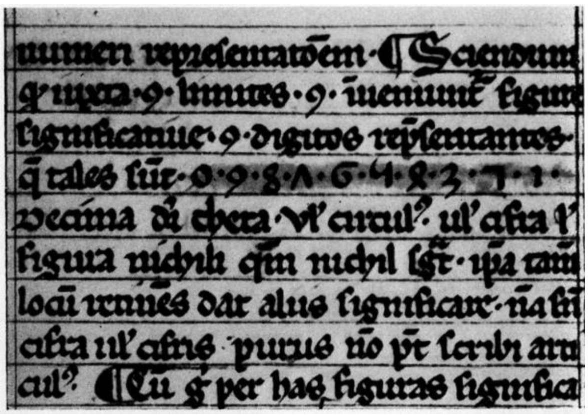


Abb. 13: 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 (vierte Zeile) aus dem Lehrbuch des Johannes de Sacrobosco († 1256)

[51] Menninger, ebenda, S. 442
[52] Menninger, ebenda, S. 442
[53] Lat. *liber* heißt Buch, aber auch Bast, wie griech. *biblos*, Papyrus bedeutet. Das Schreibmedium hat den Namen geprägt.
[54] Digitalisiertes Originalmanuskript https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=49

Universität lehrte, deren Anfänge bis ins 12. Jahrhundert zurückreichen.

Eindeutig haben die Araber, die den Süden der iberischen Halbinsel kontrollierten („*Al-Andalus*“), die „arabischen Ziffern“ etabliert. Belegt ist auch, wie bereits erwähnt, dass der als Araber verkleidete Mönch Gerbert von Aurillac, der spätere Papst Silvester II., sich in Córdoba, über die Bedeutung der arabischen Zahlen informiert haben soll.[55,56] Das schließt noch kein Zeichen für Null ein, wie man an einem von ihm erfundenen Abakus erkennen kann.[57] Frühere Anstrengungen hatten keinen Erfolg. So wurden die indischen Ziffern mit ihrem Dezimalsystem schon im 7. Jahrhundert zum Beispiel von dem syrischen Bischof Severus Sebokht beschrieben, der sich lobend darüber geäußert hat.[58] Das war lange Zeit der wissenschaftliche Erkenntnisstand. Erst jüngere Forschungen, mit modernen physikalischen Datierungsmethoden, zeichneten eine viel genauere Entstehungsgeschichte.

Der weitere Weg der Null in die Mathematik des späten Mittelalters und der frühen Neuzeit ist mühsam und verschlungen und hängt von mehreren Einflussfaktoren, u.a. vom praktischen Rechnen mit Hilfe unterschiedlicher Abaki (Plural von Abakus) ab. Das Stellenwertsystem auf Basis 10, das heute weltweit mit ihren Nuancen, wie Leerzeichen, Dezimalschreibweise etc., sogar als ISO-Norm 80 000 bzw. 80 000-1 genutzt wird und die Null sinnvoll macht, ist das Eine. Doch erst nachdem die negativen Zahlen im 15. oder 16. Jahrhundert als reale Zahlen akzeptiert wurden und die Null als Grenze zwischen positiven und negativen Zahlen auf dem Zahlenstrahl ihren Platz eingenommen hatte, hatte die Null auch mathematiktheoretisch ihren Platz gefunden. Mit der Entwicklung im Volk beim Zählen, Schreiben und Rechnen von Zahlenwerten hat das wenig zu tun. Hier behaupteten sich bis ins 20. Jahrhundert hinein allseits genutzte Methoden und Dokumentationsformen, die wir heute belächeln oder nur noch in Sprichworten identifizieren können.

Ein weiteres Hindernis für eine zügige Verbreitung der indisch-arabischen Ziffern inkl. der Null lag im Beharrungsvermögen bei etablierten Systemen und ihren Verfechtern. Erst 1494 gingen z.B. die Medici in ihren Verwaltungen

[55] Siehe Chronologie der Naturwissenschaften, S. 80, datiert auf „um 980“. https://slub.qucosa.de/api/qucosa%3A7968/attachment/ATT-0/

[56] auch Gerbert von Reims; (um 950 – 1003), https://www.welt.de/wissenschaft/article168698195/Die-Zahl-Null-ist-aelter-als-gedacht.html

[57] Rekonstruiertes Bild seines Abakus mit modernen Ziffern siehe de.m.wikipedia.org/wiki/silvester_II.

[58] ebenda oder https://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalsystem

generell zu den arabischen Zahlen inkl. der Null über.[59] Dabei hatte sich die professionelle Geschäfts- und Bankenwelt gegenüber den Herrschenden durchgesetzt, denn der Umgang mit den Zahlen einschließlich der damit verbundenen schriftlichen Rechenmethoden war einfach praktischer und besser nachvollziehbar als bei den unhandlichen römischen Zahlen. Die Medici hatten in einer konservativen Grundhaltung heraus die arabischen Ziffern aus fadenscheinigen Gründen abgelehnt. Noch 1299 wurden die arabischen Ziffern z.B. in Florenz verboten.[60,61] Der Wechsel zu den neuen Zahlen verlief jedoch, wie bereits dargestellt, nicht reibungslos. Araber und die Völker in ihrem Einflussbereich standen zunächst unter griechischem oder hebräisch-syrischem Einfluss, wo in spätantiker Zeit z.B. griechische Buchstaben des Alphabets als Zahlzeichen ohne Positionssystem verwendet wurden. Die Araber übernahmen anfangs dieses Prinzip und nahmen stattdessen ihr eigenes Alphabet mit 28 Buchstaben. Der Einfluss der indischen Ziffern und der Null entwickelte sich geografisch von Osten nach Westen. Im 8. Jahrhundert begann er im östlichen Orient, im 9. Jahrhundert erreichte er Nordafrika und von dort aus *Al-Andalus*, den maurischen Teil der iberischen Halbinsel. Im Westen entwickelten sich auch geringfügig andere Schreibweisen, die durch die Kontakte mit dem lateinischen Europa dann auch dort übernommen wurden. Dort wurden die unpraktischen römischen Zahlen verwendet, die vor allem als Ordinalzahlen bis in die heutige Zeit überdauert haben. Wie das Beispiel der Medici in Florenz zeigt, dauerte es bis zum Beginn der Neuzeit, bis sich die arabischen Ziffern, die Null und ein Stellenwertsystem auf Basis 10 durchgesetzt hatte. Diese Entwicklung muss man immer abgrenzen von den einfachen Praktiken im Volk oder für das einfache Volk (Stichwort Kerbhölzer, Fingerzahlen), die sich deutlich länger gehalten haben und mit dem mathematisch-akademischen Prozess wenig gemeinsam haben.

Ein weiterer Punkt sind die verwendeten Hilfsmittel, allen voran der Abakus.[62] Auf dem sogenannten „Klosterabakus“ tauchten arabische Zahlzeichen auf den Rechensteinen auf; der Klosterabakus verschwand aber aus dem Gebrauch und damit gerieten zunächst auch die Zahlzeichen in Vergessenheit.

Zwei Namen verhalfen dem indo-arabischen System zum, wenn auch langsamen, Durchbruch: der bereits erwähnte Leonardo di Pisa oder Pisane (de filiis Bonacci, kurz Fibonacci) und vorher Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi.

---

[59] https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/geschichte/artikel/leonardo-fibonacci-von-pisa
[60] Charles Seife, Zwilling der Unendlichkeit, Goldmann, München, 2002, S. 92
[61] Siehe auch Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 70, Gießen 2022, W. Kafitz. Formeln, S. 124
[62] In diesem Beitrag wird die Schreibweise mit „k“ verwendet. Oft findet man auch in der Literatur „Abacus“ mit “c“ geschrieben.

Fibonacci hatte sein Wissen in den westarabischen Ländern erworben, denn sein Vater Guglielmo war nach Bugia (heute Bejaia, Algerien), eine wichtige Hafenstadt in Nordafrika, geschickt worden. Sein Sohn konnte mit seinem 1202 veröffentlichten und 1228 überarbeiten epochalem 500 Seiten Werk „Liber abaci“ (Das Rechenbuch, manchmal auch Liber abbaci) einen nicht zu unterschätzenden Impuls liefern. Andere folgten ihm bis in die Formulierungen hinein. Das erste gedruckte Rechenbuch von 1483 stammt von dem Nürnberger Ulrich Wagner: *Es sein neun bedeutlich figur. 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Und die zehent ist 0 und bedeut all ein nichts.*[63] Er dreht damit die Reihenfolge gegenüber Fibinacci um. 1 – 9, 0 steht heute noch auf Computertastaturen.

Das Buch von al-Chwarizmi beginnt ebenfalls mit einem ähnlichen Satz über die neun Ziffern. Aber er führte explizit die Null ein und war damit der eigentliche Urheber der weiteren Entwicklung. Chwarizmi (um 780 bis 850) heißt ausführlich *Abū Ǧaʿfar Muḥammad bin Mūsā al-Ḫwārizmī* und stammt aus Usbekistan. Er nutzte wie selbstverständlich die neuen Ziffern in seinen mathematischen Werken. Um 825 entstand aber auch eine populärwissenschaftliche Schrift. Es ist das Kitāb al-Dschamʿ wa-l-tafrīq bi-ḥisāb al-Hind („Über das Rechnen mit indischen Ziffern“), das bewusst an mathematische Laien adressiert war und auf einfach verständliche Weise das Ziffernsystem und darauf beruhende schriftliche Grundrechenarten behandelte.

Abb. 14: Das Ziffernrechnen (repräsentiert durch Boetius) gewinnt die Oberhand gegen den Abakus (Archimedes).

Vom Titel seines Werkes *al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-ʾl-muqābala*[64] (Abhandlung über die Berechnung durch Ergänzung und Bilanzierung bzw. Ausgleichen) leitet sich auch der Begriff Algebra ab. Aus seinem latinisierten Namen stammt der Begriff Algorithmus. Über den Handel mit dem Orient, vor allem über die Achse Venedig-Augsburg, wurde es erst dann entdeckt und übersetzt. Es ist nicht im Original, sondern nur in lateinischer Übersetzung erhalten und entfaltete

[63] Zitiert nach De Padova, Thomas: Alles wird Zahl, S. 72
[64] Schreibweisen aus https://de.wikipedia.org/wiki/Al-Chwarizmi, Inhalte siehe Bottazzini, ebenda, S. 52f

dadurch erst deutlich später seine Wirkung in Westeuropa. Entlang der südlichen Mittelmeerküste und in Al-Andalus war es deutlich früher bekannt.

Im 13. Jahrhundert war der Abakus im kaufmännischen und im Finanzwesen zumindest durch das Rechnen auf Linien flankiert worden. Dokumentiert wurde das Ergebnis aber römisch. Das änderte sich 200 Jahre später. Doch eines der frühesten gedruckten Lehrbücher rechnete überraschend noch 1514 mit römischen Zahlen: Es stammt von dem Oppenheimer Stadtschreiber und Eichmeister Jakob Köbel. Seiner Ansicht nach erschweren die indisch-arabischen Zahlen dem „Gemainen Laien" das Rechnen.[65]

Die reine Mathematik, die Mathematik der Gelehrten, wurde nach Jahrhunderten der Lähmung oder gar der Stagnation durch eine Epoche, die wir Renaissance nennen, geradezu explosionsartig vorangetrieben. Während vorher die Klöster die wichtigsten Bildungseinrichtungen waren, so sind es jetzt die Universitäten. In Nürnberg gab es um 1471, dem Geburtsjahr von Dürer, vier sogenannte Lateinschulen. Sie waren Institutionen der Kirche und ursprünglich dem Klerus zur Ausbildung von Priestern vorbehalten, öffneten sich dann aber auch für Laien. Trotzdem waren sie für den Bedarf an Bildung für die Nürnberger Kaufleute und ambitionierten Handwerker nicht mehr ausreichend. Es entstanden aber auch zeitgleich deutsche Schreib- und Rechenschulen.
Kaiser Friedrich II hat durch einen landesfürstlichen Willensakt die erste freie Universität 1224 in Neapel gegründet.[66] Vor allem im oberitalienischen Raum konkurrieren die Universitäten der Stadtstaaten, allerdings geht es nicht um wissenschaftliche Hegemonie, sondern um Einfluss und Macht und es wird vielfach die gegenseitige Anerkennung der Abschlüsse verweigert. Z.B. gehört die Universität Pavia zum Herzogtum Mailand. Wer als Mailänder in Padua studiert, das zu Venedig gehört, muss Strafe zahlen. In Padua hat man aber begonnen, nach Fachrichtungen zu trennen und wurde damit praxisorientierter. Jura war trotzdem fast überall dominant. Als Hochburg wurde Bologna anerkannt. Padua hatte in einem neuen Konzept Medizin und die sogenannten Freien Künste, wozu Mathematik gehörte, von der damals meist übermächtigen juristischen Ausbildung eigenständig gemacht.[67]

1463 kommt Regiomontanus für eine Vorlesungsreihe nach Padua. Sein Ruf eilt ihm bereits voraus. Mit 27 Jahren überblickt er bereits die zeitgenössische Mathematik, insbesondere der Griechen, Astronomie und die damals

---

[65] De Padova, ebenda, S. 273
[66] https://slub.qucosa.de/api/qucosa%3A7968/attachment/ATT-0/ Chronologie der Naturwissenschaften Der Weg der Mathematik und der Naturwissenschaften von den Anfängen in das 21. Jahrhundert
[67] De Padova, Thomas: Alles wird Zahl, Verlag Carl Hanser, München 2021, S. 32

unvermeidliche Astrologie. Er steht in Diensten von Kardinal Bessarion, der u.a. Agenten beschäftigt, um nach antiken Handschriften zu suchen. Regiomontanus hat das Glück, ein verschollenes Exemplar von Diophantos zu finden. Es korrigiert etwas sein Weltbild, denn der übermächtigen Geometrie der Griechen mit ausgefeilten geometrischen Beweisen hat Diophant mit seiner Arithmetik zumindest etwas dagegengesetzt. Regiomontanus war bereits in jungen Jahren ein exzellenter, unvoreingenommener Wissenschaftler. Er erstellte wichtige trigonometrische Tabellenwerke der Astronomie, wie die *„Tabula declinationum generalis*“.[68] Er beginnt in seinen Tabellen mit 0, 1, 2, …, verwendet also die Null ganz selbstverständlich als Ordinalzahl. In Briefen verwendete er anfangs auch für die 4 das Zeichen 🎗.[69]


Lern wol mit fleiß das ein malein So wirt dir alle rechnung gemein

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Abb. 15: Einmaleins-Tafel aus einem Rechenbuch des 16. Jahrhunderts.

In seinen dezimal ausgeführten Rechnungen ist 0 natürlich eine Kardinalzahl. Das widerspricht vollkommen der römischen Tradition, nach der eine Zahl eine Anzahl sein muss. Zu allem Überfluss betrachteten die Griechen die Eins zwar als Ursprung der Zahlen, aber (noch) nicht als Zahl. Dieser Zwiespalt blieb einige Dekaden bestehen, verhinderte aber nicht die Ausbreitung der neuen Ziffern. Im Regensburger Dom wird auf einer Grabplatte in den neuen Zahlen erstmals das Datum 1464 eingraviert.[70]

Abb. 16: Süddeutsche Rechenpfennige zum Rechnen „auf der Linien“ (flacher Abakus).

Für die akademische Mathematik waren die neuen Ziffern regelrecht eine Befreiung. Erstmals war schriftliches Rechnen damit möglich und es entstand relativ schnell eine Formelsprache. Pacioli schlägt vor, p kurz für „plus“ (italienisch: più = *mehr*) und m für „minus“ (italienisch: *meno*) zu schreiben, außerdem verwendet er das Symbol R für die

[68] De Padova, ebenda, S. 61, s.a. zu Regiomontanus https://www.deutsche-biographie.de/pnd118641913.html

[69] Quelle ist unklar, heute wäre es die Gedenkschleife (Unicode U+1F397). Später verwendete er durchgängig die eckige 4.

[70] De Padova, ebenda, S. 58f

Quadratwurzel (*radix*).[71] Plus (+) und Minus (–) etablierten sich wenig später in den Arbeiten von Michael Stifel, Pfarrer, der zunächst den Weltuntergang prophezeite, später eng mit Luther befreundet war und ein sehr guter Mathematiker wurde. Er wurde der erste Mathematikprofessor an der 1558 neu gegründeten Universität Jena.

Negative Lösungen von Gleichungen wurden zögernd akzeptiert, (entsprechende Erkenntnisse von Diophantos sind umstritten). Im Gegensatz zu den großen griechischen Mathematikern, die ausschließlich Geometrie betrieben, war er als Arithmetiker evtl. für negative Lösungen offen.[72] Leonardo di Pisa hat offenbar mit negativen Zahlen bereits intensiv gerechnet.[73] Einer der Ersten war Gerolamo Cardano (1501 – 1576), eine schillernde Persönlichkeit, hervorragender Arzt, der aus seiner Spielsucht heraus die Wahrscheinlichkeitstheorie begründete, ein Wegbereiter der Gleichungslehre war und ebenfalls als Erster mit komplexen Zahlen rechnete.[74] Das war eine Fülle an neuen Impulsen. Cardano hat in seinen mathematischen Arbeiten stark abstrahiert und formalisiert.

Abb. 17: Deckblatt des Lehrbuchs von Adam Ries.

Andererseits schaffte das neue Zeitalter auch die wissenschaftlichen Anforderungen für effektiveren Handel, Technik, Verwaltung, Militär oder Schifffahrt. Menschen wurden mobiler. Bevor nördlich der Alpen Bildungseinrichtungen im gleichen Niveau entstanden, zog es viele Studenten nach Italien. Auffallend viele waren es von den großen

[71] Zitat aus https://www.spektrum.de/wissen/luca-pacioli-1445-1517/1009133

[72] Die russische Diophant-Spezialistin Isabella Baschmakowa und der deutsche Mathematikhistoriker Klaus Barner sprechen sich für diese These aus.

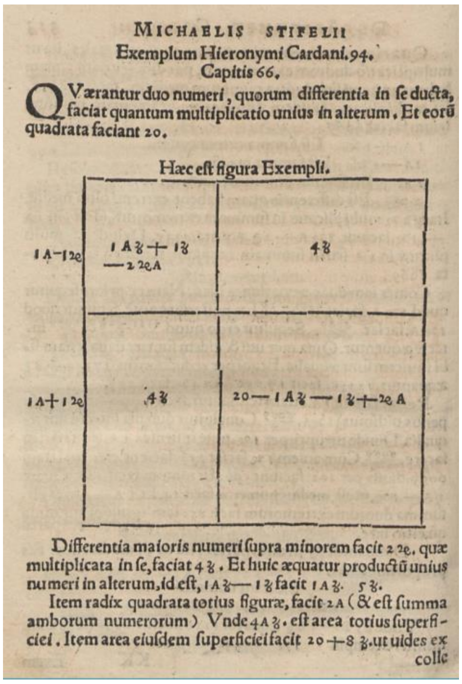
[73] Siehe Erläuterungen zum Liber abaci in „A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation, Springer 2002, Translated with Notes by Laurence Sigler, S. 9, kritisch kommentiert von Heinz Lüneburg unter http://www.mifami.org/eLibrary/Fibonacci-LiberAbaci-QuadClass-2pp.pdf, https://web.archive.org/web/20090321083707/http://www.mathematik.uni-kl.de/~luene/miszellen/abbaci.html

[74] https://de.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano

Handelsmetropolen, insbesondere Nürnberg. Ein Rückschlag war zweifellos die grassierende Pest in ganz Europa.

Die indischen Ziffern fanden also langsam Akzeptanz. In Italien etwas früher, in Deutschland hielten sich die römischen Zahlen vereinzelt bis ins 15. oder 16. Jahrhundert. Es gingen aber nicht nur Personen vom gehobenen Stand, sondern auch viele Studenten aus dem merkantilen Bürgertum im ausgehenden 15. Jahrhundert und Anfang des 16. Jahrhunderts an die italienischen Universitäten, um dort das neue Zahlensystem zu studieren.

Nützlichkeit und Wertschätzung bei der Null klaffen jedoch immer noch auseinander. Als gleichberechtigte Zahl wurde die Null erst zu Beginn der Neuzeit betrachtet. Sie galt nur als ein Lückenzeichen im Positionssystem ohne echte mathematische Bedeutung. Die Araber nannten sie al-sifr, („die Leere"). Daraus leiten sich die in Europa verwendeten Bezeichnungen cifra, zephirum bei Leonardo v. Pisa und sciffula bei Jordanus Nemorarius ab. Die Namen haben nicht unbedingt die Bedeutung der Null im Zahlensystem gewürdigt. In der Renaissance war diese Bedeutung „Leere" nicht mehr bekannt oder nicht mehr wichtig. In der mathematik-historischen Literatur[75] taucht eine andere Erklärung auf. In der alexandrinischen Epoche des antiken Griechenlands wurden ω und α als Zahlzeichen nicht mehr verwendet. Sie wurden ωα Zyphra, also wegen ihrer Form „nutzlose, mit Luft gefüllte Eier" genannt. Die Araber haben den Begriff aufgegriffen. Als „Ziffer" hat er sich in der deutschen Sprache für Zahlzeichen etabliert und wurde im Italienischen irrtümlich zu „Zero". Zumindest zeigt diese eigenwillige Deutung, dass die Entwicklung zur heutigen Bedeutung der Zahl Null nicht geradlinig lief. Immerhin zeigt auch die herausragende Stellung von Alpha und Omega in der Bibel, als Beginn und Ende schlechthin, dass diesen Ziffern eine Sonderstellung eingeräumt wurden. Es war aber noch ein großer Schritt zum reinen Dezimalsystem und zu indo-arabischen Ziffern im allgemeinen Sprachgebrauch. So schrieb man in einem Codex, der unter der Nummer 4753 in der österreichischen Nationalbibliothek aufbewahrt wird: *anno domini 1000 mo 300 mo 15 mo* anstatt gleich 1315. Es tauchen sogar


MICHAELIS STIFELII
Exemplum Hieronymi Cardani. 94.
Capitis 66.

QVærantur duo numeri, quorum differentia in se ducta, faciat quantum multiplicatio unius in alterum. Et eorū quadrata faciant 20.

Hæc est figura Exempli.

Differentia maioris numeri supra minorem facit 2 2e. quæ multiplicata in se, faciat 4 ʒ. Et huic æquatur productū unius numeri in alterum, id est, 1 A ʒ — 1 ʒ facit 1 A ʒ. 5 ʒ.
Item radix quadrata totius figuræ, facit 2 A (& est summa amborum numerorum) Vnde 4 A ʒ. est area totius superficiei. Item area eiusdem superficiei facit 20 + 8 ʒ. ut uides ex colle

Abb. 18: Quadratische Ergänzung, geometrisch

[75] https://www.hpt.at/sites/default/files/schulbuch_plus_downloads/M_1000_01.pdf

hybride Varianten wie $MCCC_{43}$ und $MCCC_{44}$ für 1343 und 1344 auf.[76] 1479 wird in Venedig das erste Rechenbuch gedruckt. Von dem vier Jahre später gedruckten Rechenbuch des Nürnberger Rechenmeisters Ulrich Wagner auf Basis der indischen Ziffern und der Null sind nur noch zwei Exemplare erhalten. Es werden kaufmännisch orientierte Praxisbeispiele behandelt.[77] Im Jahr 1522 wirbt der Rechenmeister Adam Ries(e) (1492 ─ 1559) ebenfalls für dieses neue Rechensystem und das schriftliche Rechnen. Offenbar war die Zeit reif und er hatte einen großen Erfolg. Er ist sprichwörtlich für Rechnen und Rechenregeln geworden. Sein Lehrbuch *„Rechnung auff der Linihen und Federn*“[78] wurde bis ins 17. Jahrhundert mindestens 120-mal aufgelegt. Es wurde vollkommen unüblich für die damalige Zeit in Deutsch verfasst. Er machte nicht nur die arabischen Zahlen mit der Null populär, sondern hat damit in gewissem Sinne zur Vereinheitlichung der deutschen Sprache beigetragen.[79] „Auf der Linien“ heißt allerdings Benutzung des linierten Abakus, eines Zähltisches mit eingeritzten Linien oder eines mobilen Zähltuchs. Er kombiniert also die beiden vorherrschenden Methoden mit Erfolg. Wo beim Abakus noch eine Leerstelle blieb, ist beim Schreiben mit den „*Federn*“ eine „0“ zu setzen. Während Wagner vornehmlich für seine Schüler Übungsmaterial bereitstellte, hat Ries ein echtes, didaktisch fundiertes Lehrbuch geschrieben. Es enthält bis heute gängige Begriffe wie „*Zehler*“ und „*Nenner*“ und ist in der gleichen Sprache geschrieben, wie die im gleichen Jahr 1522 erschienene Bibel (Neues Testament) von Martin Luther (Deckname Junker Jörg).[80] Ries hat sich bewusst auf Rechentechniken („Hausrechnung“) beschränkt.

Stifel will darüber hinaus arithmetische Operationen beschreiben („Kunstrechnung“), aber er möchte es behutsam machen. Schließlich hat er sich sein enormes Wissen autodidaktisch erarbeitet. In Italienischen gibt es bereits für die Algebra (genauer für die Unbekannte, die wir meist x nennen) den Begriff „Coss“ (Coß), den Christoph Rudolff (1499 – 1543) auch benutzt. Rudolff´s Werk heißt „*Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeinicklich die Coß genennt werden*“ und ist 1515 in Straßburg erschienen. Die Zielgruppe sind Händler. Er benutzt als Quelle unter anderem eine lateinische Übersetzung von Robert von Chester der Algebra von Al-Chwarizmi und Algebra-Texte von Johann Vögelin in Wien.[81] Rudolff behandelt

[76] De Padova, ebenda, S. 76
[77] De Padova, ebenda, S. 271
[78] Deutsches Museum: http://digital.bib-bvb.de/view/bvbmets/viewer.0.6.4.jsp?folder_id=0&dvs=1674647467387~953&pid=2471296&locale=de&usePid1=true&usePid2=true
[79] https://de.wikipedia.org/wiki/Adam_Ries
[80] De Padova, ebenda, S. 276
[81] https://de.wikipedia.org/wiki/Christoph_Rudolff

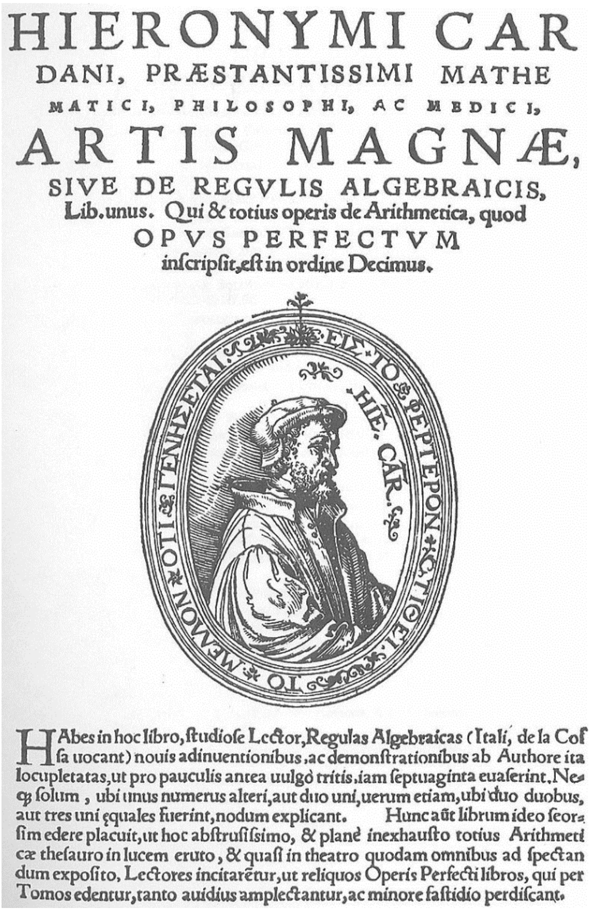
unter anderem die Lösung linearer und quadratischer Gleichungen. Dieses Buch überarbeitet und ergänzt Stifel enorm.[82] Er übernimmt den „Wurzelhaken“, der sich auch international durchsetzen wird. Rudolff hat auch sinnvollerweise definiert, dass $x^0=1$ ist.

Die Abbildung 18 zeigt einen quadratischen Ausdruck, den wir heute in der Form schreiben:

$$x^2+8x=20 \text{ oder } x^2+8x-20=0.$$

Das kleine Quadrat hat die Seitenlänge x. Ein Rechteck 8x (Länge 8, Höhe x) wird in zwei Rechtecke der Länge 4 aufgeteilt und das ergänzte Quadrat rechts unten hat somit die Fläche 4x4=16.

Das so gebildete große Quadrat hat also die Fläche $x^2+4x+4x+16$.


HIERONYMI CARDANI, PRÆSTANTISSIMI MATHEMATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,

ARTIS MAGNÆ,

SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS, Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod OPVS PERFECTVM inſcripſit, eſt in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, ſtudioſe Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Coſſa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonſtrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam ſeptuaginta euaſerint. Neq; ſolum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aût librum ideo ſeorſim edere placuit, ut hoc abſtruſiſſimo, & planè inexhauſto totius Arithmeticæ theſauro in lucem eruto, & quaſi in theatro quodam omnibus ad ſpectandum expoſito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore faſtidio perdiſcant.

Abb. 19: Deckblatt von Gerolamo Cardanos Werk über Algebra

Da laut Aufgabenstellung $x^2+8x=20$ ist, ergibt sich die Fläche des großen Quadrates zu 20+16=36. Also hat das große Quadrat die Seitenlänge 6.

Aus dem Vergleich des großen und des ergänzten Quadrats ergibt sich für die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats 6–4=2

Das eindeutige Ergebnis ist für Michael Stifel x=2.

Die negative Wurzel, die $x_2=-10$ ergibt, ignoriert Stifel, da das kleine Quadrat keine negative Seitenlänge haben kann.

Schaut man sich heute die sogenannte p-q-Formel an,

$$x_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2-q}$$

so sieht man, dass p vor und unter der Wurzel als $\frac{p}{2}$ bzw. $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ auftaucht.

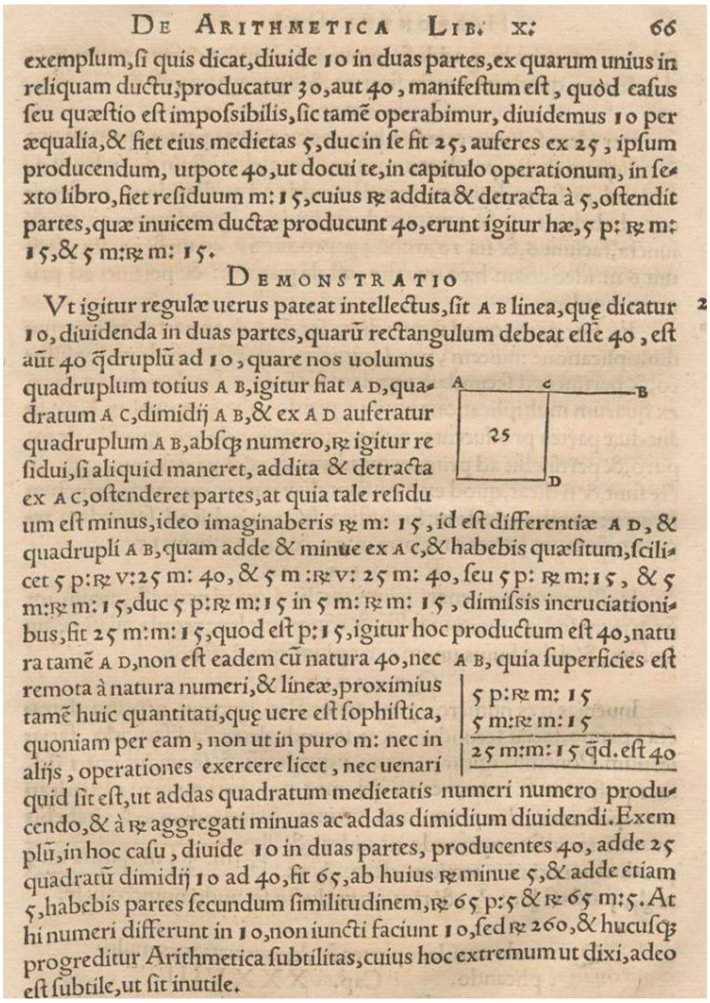
[82] https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/1317/1

Der Kunstgriff p·x, aufgefasst als Rechteck, in zwei Rechtecke aufzuteilen, hat also einen tieferen Sinn.

Entsprechende Beispiele sehen bei Cardano[83] total anders und extrem unübersichtlich, aber auch kürzer aus. Allerdings kümmert er sich mehr um kubische und quartäre Gleichungen. Zweifellos sind seine Beiträge zur Algebra in der frühen Neuzeit eine herausragende Leistung. Über seine Charaktereigenschaften spricht er selbst ein vernichtendes Urteil. Sein Name ist aber mit einem anderen Gebiet der Mathematik untrennbar verbunden.

Er stellt sich die Aufgabe: Teile die Zahl 10 in zwei Teile, deren Produkt 40 ist.[84]

Die erste Reaktion mancher Leser wird sein, dass das unmöglich ist. Selbst 5x5 ergibt nur 25, das weit entfernt von 40 ist. Die Lösung erschließt sich über ein Verfahren, bei dem die Quadratwurzel einer negativen Zahl eine Rolle spielt. Das war die Geburtsstunde der komplexen Zahlen, die die Mathematik und ihre Anwendungen bis heute maßgeblich prägen.



DE ARITHMETICA LIB. X. 66

exemplum, ſi quis dicat, diuide 10 in duas partes, ex quarum unius in reliquam ductu, producatur 30, aut 40, manifeſtum eſt, quòd caſus ſeu quæſtio eſt impoſsibilis, ſic tamẽ operabimur, diuidemus 10 per æqualia, & fiet eius medietas 5, duc in ſe fit 25, auferes ex 25, ipſum producendum, utpote 40, ut docui te, in capitulo operationum, in ſexto libro, fiet reſiduum m: 15, cuius ℞ addita & detracta à 5, oſtendit partes, quæ inuicem ductæ producunt 40, erunt igitur hæ, 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15.

DEMONSTRATIO

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus, ſit A B linea, quę dicatur 10, diuidenda in duas partes, quarũ rectangulum debeat eſſe 40, eſt aũt 40 q̃druplũ ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B, igitur fiat A D, quadratum A C, dimidij A B, & ex A D auferatur quadruplum A B, abſq; numero, ℞ igitur reſidui, ſi aliquid maneret, addita & detracta ex A C, oſtenderet partes, at quia tale reſiduum eſt minus, ideo imaginaberis ℞ m: 15, id eſt differentiæ A D, & quadrupli A B, quam adde & minue ex A C, & habebis quæſitum, ſcilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, ſeu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15, duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimiſsis incruciationibus, fit 25 m: m: 15, quod eſt p: 15, igitur hoc productum eſt 40, natura tamẽ A D, non eſt eadem cũ natura 40, nec A B, quia ſuperficies eſt remota à natura numeri, & lineæ, proximius tamẽ huic quantitati, quę uere eſt ſophiſtica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid ſit eſt, ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo, & à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplũ, in hoc caſu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratũ dimidij 10 ad 40, fit 65, ab huius ℞ minue 5, & adde etiam 5, habebis partes ſecundum ſimilitudinem, ℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10, non iuncti faciunt 10, ſed ℞ 260, & hucuſq; progreditur Arithmetica ſubtilitas, cuius hoc extremum ut dixi, adeo eſt ſubtile, ut ſit inutile.

5 p: ℞ m: 15
5 m: ℞ m: 15
25 m: m: 15 q̃d. eſt 40

Abb. 20: Seite aus Cardanos *Ars magna* mit der Aufgabe x+y=10 und x·y=40

Die Lösung: Man zieht von einem Faktor 5 etwas ab und addiert es zum 2. Faktor 5.

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right) = 25+5\sqrt{-15} - 5\sqrt{-15} - \sqrt{-15}\sqrt{-15} =$$

$$25-(-15) = 40$$

Notation von Cardano: 5p: $R_{|2}$ m: 15 et 5m $R_{|2}$ m: 15 25m: m:15 d.i 40[85]

[83] Hieronymus Cardano, Nürnberg 1545, Ars magna, https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/2690143

[84] Die Argumentation folgt De Padova, ebenda, S. 337ff

[85] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1927, S. 77, H. Wieleitner, Zur Frühgeschichte des Imaginären

Um die Lösung nicht zu erraten, sondern zu errechnen, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$x+y=10 \text{ und } x\cdot y=40$$

Daraus ergibt sich $x\cdot(10-x) = 40$

also die quadratische Gleichung $x^2-10x + 40 = 0$

Analog zu Stifel kann Cardano wieder geometrisch argumentieren und das „Rechteck" $-10x$ in zwei „Rechtecke" a´ $-5x$ aufteilen:

$$x^2-5x - 5x + 25 = -15$$

$$(x - 5)(x - 5) = -15 \text{ also}$$

$$x - 5 = \pm\sqrt{-15} \text{ und damit die Teilstücke bzw. Faktoren}$$

$$\left(5 + \sqrt{-15}\right)\left(5 - \sqrt{-15}\right) = 40$$

Er schreibt zwar: *„So schreitet die Arithmetik listig voran….Das Ende von alldem aber ist, wie gesagt, so raffiniert, wie es nutzlos ist."*[86] Er behandelt aber weitere Probleme erfolgreich nach dieser Methode. Er sollte mit der „Nutzlosigkeit" gründlich Unrecht haben, wobei offen ist, ob er es so meinte. Es sicherte auf jeden Fall seinem Namen einen Platz in der Geschichte der Mathematik.

Neben Geralomo Cardano sollte man Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia und insbesondere Raffael Bombelli, der die Theorie maßgeblich etabliert hat, unbedingt für die Anfänge in der Renaissance nennen. Die Wurzeln negativer Zahlen wurden bei der Untersuchung von Gleichungen benötigt, egal ob sie quadratisch, kubisch oder von höherer Dimension sind. Es stellte sich heraus, dass jede Gleichung lösbar ist, wenn man alle Zahlentypen zulässt. Später wurde die Theorie der komplexen Zahlen von großen Namen der Mathematik vorangetrieben. Der Begriff stammt von Gauß, der den Fundamentalsatz der Algebra bewies, der die algebraische Abgeschlossenheit im Rahmen der komplexen Zahlen feststellt. Die imaginären Zahlen verdanken René Descartes ihren Namen. Den Vorschlag, ihre Einheit $i=\sqrt{-1}$ zu nennen, wird Leonhard Euler zugeschrieben. Zur Geschichte siehe z.B. [87]. Siehe auch den mathematischen Teil dieses Beitrags. Wesentliche technische Errungenschaften unserer Zeit sind ohne komplexe Zahlen nicht denkbar.

---

[86] Zitiert nach De Padova, ebenda, S. 338, im lateinischen Original siehe Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,1927, S. 77, H. Wieleitner, Zur Frühgeschichte des Imaginären

[87] https://www.mathematik.tu-dortmund.de/sites/funktionentheorie-i-wise-1718/download/Komplexe_Zahlen_Historie.pdf

Auch Albrecht Dürer (1471 – 1528) beschäftigt sich mit Erfolg als Mathematiker und veröffentlicht ebenfalls in Deutsch. Auch in seinen künstlerischen Arbeiten tauchen immer wieder mathematische Sujets auf. In seinem Kupferstich Melencolia I hat er auf der Wand ein magisches Quadrat platziert, das nicht nur bei den Zeilen, Spalten und Diagonalen die Summe 34 ergibt, sondern auch bei den vier Quadranten. Es stammt aus dem Jahr 1514, das sich in der letzten Zeile in Form von 15 und 14 findet, flankiert von 4 und 1, die den Initialen A und D entsprechen, mit denen Albrecht Dürer signiert. Er gilt als „mathematischer Kopf“ unter den Künstlern seiner Zeit.[88] Wahrscheinlich, weil Leonardo da Vinci zwar als Universalgenie überaus produktiv war, aber kaum etwas publiziert hatte. Für beide war Mathematik sowohl Erkenntnisgewinn per se, als auch Mittel, um ihre Kunst zu vervollkommnen. Sie suchten mit großem Fleiß, der manchmal an Besessenheit grenzte, nach Symmetrieeigenschaften, den Anforderungen an die Zentralperspektive, an die Wirkung des goldenen Schnitts auf die Betrachter oder sie bauten Hilfsmittel, wie Perspektographen. Sie betrachteten die Mathematik als einen weiteren Weg, neben der intensiven Naturbetrachtung, als Schlüssel zur Ästhetik in ihrer Kunst. Auch wenn sie um die Grenzen von beiden Wegen wussten, denn die Natur bleibt immer etwas Rätselhaftes. Dürer schrieb einmal in einem der frühen Entwürfe zu einem Lehrbuch der Malerei: „*Waß aber dy schonheit sey, daz weis jch nit.*“[89] Für beide Künstler der noch jungen Renaissance war das kein Grund zur Resignation. Die Freundschaft zwischen dem Mönch und Mathematiker Pacioli und dem Maler wurde eine echte „win-win-Situation“. Leonardo da Vinci ermunterte seinen Lehrer Luca Pacioli zu seinem Werk über den goldenen Schnitt und steuerte 60 Polyederzeichnungen von einzigartiger Plastizität bei.[90]

Abb. 21: Melencolia I, Albrecht Dürer, 1514

[88] C. J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. 2. Auflage. Springer, Berlin/ Heidelberg 2005, zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Albrecht_Dürer
[89] Zitiert nach De Padova, ebenda, S. 221
[90] Elisabeth Tiller, Luca Paciolis De divina proportione (1509), https://edoc.hu-berlin.de/bitstream/handle/18452/8291/tiller.pdf, S. 7

Renaissance bedeutet Rückbesinnung auf antike Tugenden, aus denen heraus Kunst, Wissenschaft, Kultur, aber auch die Wirtschaft sich revolutionierten. Passend wurde 1543 in Nürnberg ein Werk namens „*De revolutionibus*" gedruckt, das, nach dem Autor benannt, ein neues, das kopernikanische Weltbild einleitete.

Eine Nivellierung in der Notation und der Sprache lieferte die Erfindung des Buchdrucks. Papier ist übrigens über den gleichen Weg, wie die indisch-arabischen Zahlen, über Nordafrika und Spanien ins Abendland gekommen. Allerdings entwickelt sich die Technik anders als in China oder den arabischen Ländern. Die erste nennenswerte Papierproduktion etablierte sich in Fabbriano bei Ancona bereits im 13. Jahrhundert. Trotzdem war es noch ein kostbares Medium. Es musste mühsam mit einem Leim behandelt werden, damit die Tinte nicht verlief. Der Buchdruck veränderte die Situation und verbreitete sich zuerst in Italien und dann ebenso schnell wie in Deutschland, wo er erfunden wurde, in ganz Mitteleuropa. Nur gedruckte Werke verbreiteten sich von nun an rasch, denn alle anderen Publikationen mussten händisch kopiert werden. Selbst das *Liber abaci* fand lange keinen Verleger. Pioniere in Italien waren Arnold Pannartz und Konrad Sweynheim, die ihr Handwerk in Mainz gelernt hatten. Allerdings hatten praktisch alle Buchdrucker nur ihr Know-how und wenig Eigenkapital mitbringen können. Die Durststrecke bis zum „Break-even" haben manche nicht überstanden. Selbst Gutenberg musste seine Druckerei dem Investor überlassen. Pannartz und Sweynheim überlebten wirtschaftlich nur durch kirchliche Hilfe. Doch der Wirtschaftszweig hatte Potential und „*der Kulturtransfer über die Alpen*" (de Padova) lohnte sich wirtschaftlich und kulturell. Bis zur Jahrhundertwende 1500 sollen in Rom 40 Druckerwerkstätten, vornehmlich von Deutschen, entstanden sein, die 1800 Buchtitel in einer Gesamtauflage von einer halben Million gedruckt haben. Parallel entstanden Hunderte von Papiermühlen für das neue Medium.[91] Das immer effizienter herstellbare Papier veränderte fundamental die europäische Schriftkultur. Im Alltag des Volkes wurde Papier anfangs noch selten benutzt. In Handel, Verwaltung, Wissenschaft und Kunst entwickelten sich rapide die neuen Möglichkeiten. Schriftliches, nachvollziehbares Rechnen war einer der wesentlichen Faktoren und die neuen Zahlen mit der Null machten es deutlich effektiver. Der Druck wurde zum Multiplikator auch für das mathematische Wissen. Die Renaissance sei nicht aus Purpur und Gold gemacht, so der

---

Digitalisiertes Original https://ia904605.us.archive.org/11/items/de-divina-proportione/De-Divina-Proportione.pdf

[91] De Padova, ebenda, S. 101f

Historiker Bernd Roeck: „*Die eigentlichen Stoffe, die sie bilden, sind jenseits der Kunstwerke Papier, Tinte und Druckerschwärze*."[92]

Im Frühjahr 1471 kommt Regiomontanus nach Nürnberg und gründet dort den ersten mathematisch-naturwissenschaftlichen Fachverlag. Er ist zwar kein gelernter Buchdrucker, aber erkennt die Tragweite des Mediums. Sowohl der Standort, als auch das Repertoire sind sehr gut gewählt. Nürnberg liegt im Schnittpunkt der großen Handelswege, sowohl nach Norden, aber auch nach Wien, Genf und über den Brennerpass nach Italien. Das Verlagsprogramm umfasst Werke von Jordanus Nemorarius und Johannes de Muris, die auf die gleichen arabischen Quellen zurückgriffen, wie auch Leonardo de Pisa.[93] Das waren die unmittelbaren Impulse für die indo-arabischen Ziffern inkl. der Null. Ebenso wichtig waren Werke von Ptolemäus, die Elemente von Euklid, die bis dahin unbekannten Kegelschnitte des Apollonius von Perge und natürlich Archimedes. Diese erstmals gedruckt vorliegenden Meisterwerke beeinflussten massiv die kommenden großen Wissenschaftler, nicht zuletzt Galileo Galilei. Obwohl Regiomontanus bereits mit 40 Jahren in Rom stirbt, ist die Wirkung seiner akribischen Arbeit noch lange unmittelbar zu spüren. Seine Impulse tragen dazu bei, dass der Julianische Kalender reformiert werden kann. Sein genauer Almanach mit den auf ca. 30 Jahre im Voraus berechneten Positionen der Himmelskörper, Mondfinsternisse und Planetenkonjugationen hat Kolumbus nachweislich auf seine Reise nach Westen mit an Bord genommen und benutzt.[94,95]

Abschließend kann man zu dieser Entwicklung feststellen, dass zu Beginn der Neuzeit die Null und die indo-arabischen Ziffern in der europäischen akademischen Mathematik, im Handel, der Verwaltung sowie Architektur und Technik fast vollständig angekommen waren. Es entwickelte sich in der Renaissance eine Blütezeit der Mathematik. Die Null wurde eine Zahl wie jede andere, aber für sich auch besonders.

Allerdings hatte eine besondere Stellung unter den frühen Mathematikern die Frage nach der Division durch Null. Noch Leonard Euler hatte einen durchaus unbekümmerten Umgang mit dieser Frage. 1 durch 0 setzte er einfach als Unendlich und spekulierte sogar über „Klassen von Unendlich" bei 2 durch 0, 3 durch 0 usw. Der Astronom und Mathematiker Brahmagupta formulierte es im siebten Jahrhundert in der Sache ähnlich, aber weniger unbekümmert: "*Dividiert*

---

92 Zitiert nach De Padova, ebenda, S. 107
93 De Padova, ebenda, S. 115f
94 De Padova, ebenda, S. 157
95 Chronik der Naturwissenschaften, Jahr 1474, https://slub.qucosa.de/api/qucosa%3A7968/attachment/ATT-0/

man irgendeine Zahl durch das Nichts, so wird Unendlichkeit".[96] Bei der Infinitesimalrechnung wurde nochmals leidenschaftlich über das Thema diskutiert. Mit der systematischen Verbesserung der Infinitesimalrechnung im Hinblick auf korrekte Sprache und Methodik wurde der Umgang mit verschwindenden Werten beim Grenzwertprozess mathematisch sauber definiert. Im Bereich der reellen und komplexen Zahlen, oder auch Schiefkörpern, wie den Quaternionen, wird eine Division durch Null, sozusagen in ihrer Eigenschaft als Kardinalität der leeren Menge, ausgeschlossen.

Nur in wenigen Bereichen werden heute noch römische Zahlen eingesetzt. Beispiele sind dekorative Jahreszahlen über Eingangstüren, zählender Namenszusatz beim Adel oder bei Päpsten („Elisabeth II.“), Ziffernblätter von Uhren, Ordinalzahlen z.B. bei Vorworten von Büchern, etc.

Kennzeichnend sind meist übertrieben ausgeprägte, ornamentale Serifen. Sie unterstreichen den Schmuckcharakter oder auch die herausragende Bedeutung dieser Zahlen im betreffenden Verwendungszweck.

Es setzte sich der Einfluss der Null sogar in Bereichen durch, die nur indirekt mathematisch motiviert waren. 1625 zeichnete Brunelleschi das Baptisterium, also die Taufkirche, die neben dem Dom in Florenz steht. Er nutzte zur Strukturierung des Bildes erstmals einen nulldimensionalen Fluchtpunkt. Das war der Beginn der Zentralperspektive in der darstellenden Kunst. Die Perspektive bewirkt, dass der Blick des Betrachters ins Unendliche geführt wird.

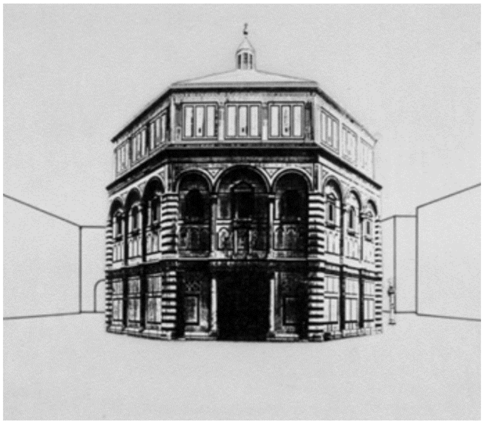


Abb. 22: Entdeckung der Zentralperspektive durch Filippo Brunelleschi (1425)

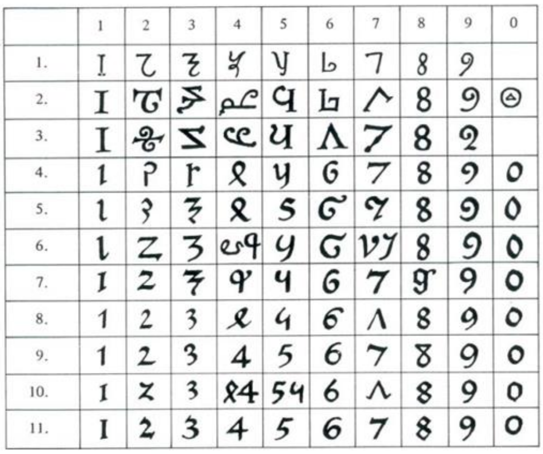
Die Null wird zum „Zwilling der Unendlichkeit“ (Charles Seife). Leonardo da Vinci, der sich intensiv mit Mathematik und anderen Naturwissenschaften befasste, schrieb einen mathematisch fundierten Leitfaden, um korrekt perspektivische Darstellungen malen zu können.[97] Im übertragenen Sinne fand die Null auch in andere Disziplinen Eingang. Besonders dramatische Diskussionen um das „Nichts“ und das „Unendliche“ fanden in der Theologie zu Beginn der Renaissance statt, die die katholische Kirche anfangs vollkommen unterschätzt hat. Die aristotelische

[96] https://www.derstandard.de/story/2000064375746/die-zahl-null-ist-aelter-als-angenommen
[97] Seife, ebenda, S. 99 f, siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Codex_Madrid_(Leonardo_da_Vinci)

Lehre geriet in Gefahr. Der deutsche Theologe und begeisterte Mathematiker Nikolaus von Kues, der 1448 zum Kardinal ernannt wurde, griff die neuen Ideen unbekümmert auf. Für seinen Ausspruch: „*Terra non est centrum mundi*“[98] wäre er 150 Jahre später, wie Bruno Giordano, wegen Ketzerei auf dem Scheiterhaufen gelandet.

Der Angriff gegen die katholische Kirche gipfelte 1517 als Martin Luther seine Thesen an die Schlosskirche zu Wittemberg anschlug und 1530 als Heinrich VIII sich zum Oberhaupt der englischen Kirche erklärte. Die katholische Kirche reagierte nicht durch Öffnung, sondern durch harte Bekräftigung der alten Doktrin. 1543 begann die spanische Inquisition Protestanten zu verbrennen; im gleichen Jahr wurde vom Vatikan der Index verbotener Bücher verkündet; in diesem Jahr starb Nikolaus Kopernikus, nachdem er kurz vor seinem Tod seine Ideen veröffentlicht hatte. Die Kirche bezog sich wieder konsequent auf Aristoteles und seine Metaphysik, die z.B. kein „Nichts“ zulässt („*Horror vacui*“).

Diese Bastion wurde durch Evangelista Torricelli, einem Schüler von Galileo Galilei, 1643 erobert. Er füllte eine einseitig verschlossene Röhre mit Quecksilber und tauchte sie umgekehrt in ein Quecksilberbad. Das Quecksilber in der Röhre sank auf ca. 76 cm. Am oberen Ende der Röhre entstand ein Leerraum, der ein Vakuum sein musste. Blaise Pascal entdeckte mit dem Versuchsaufbau von Torricelli Luftdruckschwankungen. Die Luftsäule über uns



1. Cod. Vigilianus (976 n.Chr.)
2. Cod. Erlangen (Mitte des 11.Jhs.)
3. „Boetius“-Geometrie (13.Jh)
4. Cod. Vindobonensis [al-Hwarizmi] (1143 n.Chr.)
5. Cod.Par.bibl.nat.16208 (vor 1180)
6. Cod.Par.bibl.nat.16202 (Anfang des 13.Jhs.), Cod.Par.bibl.nat.7359 (um 1300)
7. Columbia-Algorismus (14. Jh.)
8. Algorismus Ratisbonensis (vor 1450)
9. Treviso-Arithmetik (1478)
10. Bamberger Rechenbuch von 1483
11. Albrecht Dürer

Abb. 23: Entwicklung der indischen Ziffern im Abendland

musste ein leicht veränderliches Gewicht haben. Luft hatte also ein Gewicht, nur das Vakuum hatte das Gewicht Null.

98 „Die Erde ist nicht der Mittelpunkt des Kosmos“, zitiert nach Seife, Null - Zwilling der Unendlichkeit, S. 99

Erst als der Weg frei zu Verallgemeinerungen war, die heute am häufigsten in der Algebra, aber auch der Topologie, zu finden sind, muss man genauer hinschauen. Am bekanntesten und durchaus wichtigsten ist das Nullelement in additiven Gruppen. In der Funktionentheorie sind Nullstellen von großer Bedeutung. Die wichtigste Erkenntnis in diesem Bereich heißt Fundamentalsatz der Algebra (Gauß-d'Alembert). Aber auch Begriffe wie Nullfläche, Nullfolge, Nullring, Nullideal, Nullmenge oder Nullteiler können im weitesten Sinne als algebraische oder topologische Verallgemeinerungen der Null angesehen werden. Weitere Begriffe tragen die Null im Namen, wie Nullhomotoper Weg, Nullsummenspiel, Nullfläche oder Nullhypothese. Die Zahl 0, oft in Verbindung mit der 1, bestimmen wichtige Sätze. Nicht zuletzt das binäre System hat eine digitale Revolution hervorgerufen. Dazu mehr im mathematischen Teil dieses Beitrags.

Die Null in frühen Kulturen

<u>Sumerer</u>

Die Sumerer gelten als erste Hochkultur der Geschichte. Sie geht bis zum 3. Jahrtausend vor Christi zurück. Ihre Schrift und die bürokratische Organisation ihres Staatswesens prägten viele Kulturen nach ihnen. Ihre ausgefeilten Bewässerungstechniken machten wesentlich komplexere Organisationsformen der Gesellschaft nötig.

Die Schrift der Sumerer, später Babylonier, heißt mit Recht Keilschrift. Diese Schrift entwickelte sich von einer Bilderschrift zu einer Silbenschrift, aus der eine phonetische Konsonantenschrift hervorging, die mehrere Sprachen abbilden konnte. Akkadier, Babylonier, Assyrer, Hethiter oder Perser benutzten sie, bevor sie durch nachfolgende Schriftformen, wie die phönizische und daraus die aramäische verdrängt wurde. Damit war sie auch Stammbaum vieler späterer Schriften inkl. der europäischen Schreibweisen.

Mit einem Halm oder Griffel wurden Zeichen in feuchten Ton geritzt und bei Bedarf diesen durch Brennen konserviert. Abertausende dieser Tontäfelchen sind erhalten geblieben und viele warten noch auf die Entzifferung. Das Material ist viel beständiger als z.B. der in Ägypten verwendete, sehr empfindliche Papyrus.

Sie kannten anfangs zwar keine Null als Zeichen oder gar Zahl. Es gab aber einen Hinweis, wenn Minuend und Subtrahend bei einer Differenz gleich waren. Der Schritt, diesem Ergebnis ein Zeichen oder Namen zuzuordnen, wurde noch nicht vollzogen. Nur in wenigen frühen Texten wurden Fehlstellen durch eine

Leerstelle gekennzeichnet; meist musste darauf aus dem Zusammenhang geschlossen werden.[99]

Die Sumerer[100] und spätere, daraus hervorgehende Kulturen, verwendeten für ihre Zahlen ein Sexagesimalsystem (auch Hexagesimalsystem oder Sechziger-System, von lateinisch sexagesimus, der Sechzigste). Man nimmt an, dass die gute Teilbarkeit der Zahl 60 entscheidend für die Wahl dieser Basis war. Zunächst kann man es noch nicht Stellenwertsystem nennen, denn es gab noch kein Zeichen, das man als Null identifizieren könnte. Nur in wenigen frühen Texten wurden Fehlstellen im Sexagesimalsystem durch eine Leerstelle gekennzeichnet; meist musste darauf aus dem Zusammenhang geschlossen werden. Ein Hexagesimalsystem ist durchaus nichts Ungewöhnliches, denn es wird weltweit auch heute noch verwendet, um Winkel und geografische Längen und Breiten anzugeben. Ein Grad hat 60 Winkelminuten und eine Minute hat 60 Sekunden. Auch bei der Uhrzeit hat dieses System überdauert. Ein Versuch während der französischen Revolution, beide sechziger (Restklassen)Systeme auf eine dezimale Uhrzeit umzustellen, scheiterte am Widerstand der Bevölkerung. Es sind Uhren mit einer 10-Stundenskala a‘ 100 Minuten und 100 Sekunden pro Minute als kuriose Einzelstücke erhalten geblieben. 60 Minuten pro Stunde bzw. Sekunden pro Minute sind jedoch fast ohne Erinnerung an die historischen Bezüge weltweit selbstverständlich geworden.

Abb. 24: Mathematische Tafel aus Uruk, eines der ältesten Zeugnisse zur Verwendung der Null.

Die Sumerer hatten bis zur Zahl 60 jeweils ein Zeichen für Einer und für Zehner. Fünfer gab es nicht. Es wurde auch nicht wie bei den römischen Zahlen

[99] https://de.wikipedia.org/wiki/Null

[100] Wesentliche Informationen zur sumerischen Zahlendarstellung in verdichteter Form stammen von Kaplan, S. 14 ff, ausführlicher bei Ifrah, z.B. S. 319f

zwischen vorgestellten und nachgestellten Zahlzeichen unterschieden. (römisch IX entspricht z.B. 9, XI entspricht bekanntlich 11).

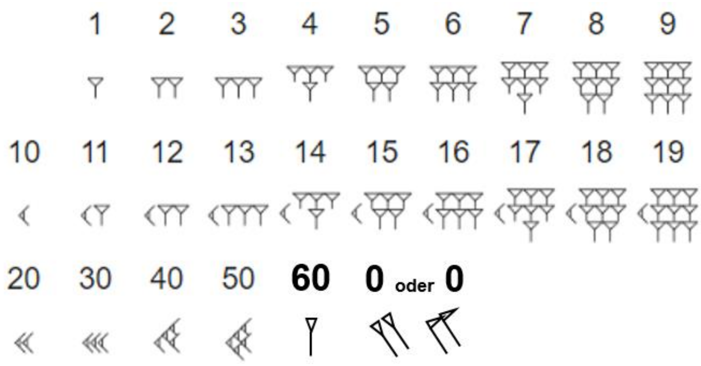


Abb. 25: Sumerische Zahlzeichen.

Nach 59 kommt das Hexagesimalsystem zum Tragen. Die 60 sieht aus wie eine Eins, ist aber deutlich größer. Ähnlich, wie wir heute, werden die Ziffern von rechts nach links, also von den kleineren zu den größeren Elementen einer Zahl gelesen, auch wenn von links nach rechts geschrieben wird. Durch die ähnliche Form bei Sechzigern und Einer war die Größe ein entscheidender Faktor.

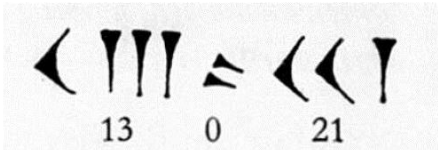


Abb. 26: Die Zahl 13021

Im Prinzip werden nur zwei Zeichen gebraucht, ein Winkel für 10 und Eins bzw. Sechzig, wobei sich 1 und 60 nur in der Größe unterscheiden. Die Null wurde schräggestellt.

Stellenwert

	3.600		60		1		
sumerische Zahl		;	1	;	5		
Dezimalzahl	0	+	60	+	5	=	65
sumerische Zahl		;	5	;	36		
Dezimalzahl	0	+	300	+	36	=	336
sumerische Zahl	1	;	1	;	1		
Dezimalzahl	3.600	+	60	+	1	=	3.661
sumerische Zahl	1	;	55	;	14		
Dezimalzahl	3.600	+	3300	+	14	=	6.914
sumerische Zahl	4	;	7	;			
Dezimalzahl	14.400	+	420	+	0	=	14.820
sumerische Zahl	59	;	59	;	59		
Dezimalzahl	212.400	+	3540	+	59	=	215.999

Abb. 27: Hexagesimales Stellenwertsystem

Doch die Gesellschaft wuchs und damit die Anforderungen im Handel und der Verwaltung an schriftlichen Aufzeichnungen. Die Zahlen wurden größer und unhandlicher. Schnelles Schreiben produziert zudem immer und überall Fehler. Dann setzte eine Entwicklung ein, deren Beginn schwer zeitlich und örtlich zu lokalisieren ist. Es war aber offenbar schon bzw. erst in der babylonischen Zeit. Es entstanden zunächst Leerstellen und schließlich kennzeichnete man bei großen „runden“ Zahlen (bezogen auf 60 und die Mehrzahl von 60) auch Positionen, die keine 60-er enthielten. Sie entsprachen somit 0 x 60, 0 x 60^2, 0 x 60^3 etc. Es waren zwei schräg liegende Zeichen, wie sie auch bei der Zahl Zwei benutzt werden, aber eben schrägliegend. Damit war die Null erfunden und in einem Stellenwertsystem auf Basis 60 integriert worden. Dies war eine fundamentale mathematische Abstraktion in einer bereits weit entwickelten Kultur. Aber es war noch keine „vollgültige“ Zahl, denn mit Zahlen kann man rechnen und sie nicht nur als Platzhalter benutzen. Trotzdem: Es wurde dem „Nichts“ ein Symbol zugeordnet und nicht nur eine Leerstelle gelassen.

Doch es gab auch Fallstricke. So wurden fehlende Einer nicht gekennzeichnet. Ebenso war 3 x 60 = 180 unter Umständen nicht von 3 x 1 = 3 zu unterscheiden, da sich die Zeichen/Ziffern nicht in der Form, sondern nur durch die Größe abgrenzten. Hier gilt, wie bei allen Mehrdeutigkeiten: Es kommt auf den Zusammenhang an. Im Gegenteil, Grundrechenverfahren bleiben unabhängig von der Größenordnung gleich leicht und nur der Kontext entscheidet.

<u>Maya</u>

Unter Maya werden die sprachverwandten Völker auf der Halbinsel Yucatan und im heutigen Guatemala verstanden. Die Kultur war hochentwickelt und hatte zwei Blütezeiten im 5. – 7. Jahrhundert und im 10. – 12. Jahrhundert. Ohne das brutale Vorgehen der Spanier beschönigen zu wollen, war die Kultur zu diesem Zeitpunkt 1524 schon im Niedergang. Die Zahlzeichen der Maya beruhten auf dem Vigesimalsystem, also Zahlen mit der Basis 20. Bis 19 wurde eine Punkt-Strich-Darstellung angewendet, wobei Fünferschritte gewählt wurden. Jede Zahl hatte einen eigenen Namen. Größere Zahlen, besonders kalendarische Daten, drückte man in Potenzen von 20 aus. Die Zahl 20 wurde also in einem nichtlinearen Stellenwertsystem benutzt, in dem jeweils das 20-fache die nächste Stufe darstellt. Diese haben eigene Namen, wie um die grundsätzliche Bedeutung dieser Stufen herauszustellen. Sie sind auch kaum vergleichbar mit unseren großen Zahlen, wie Million, Milliarde, Billion, etc., die in Zehnerpotenzen von wesentlich kleinerer Schrittfolge ausgedrückt werden.

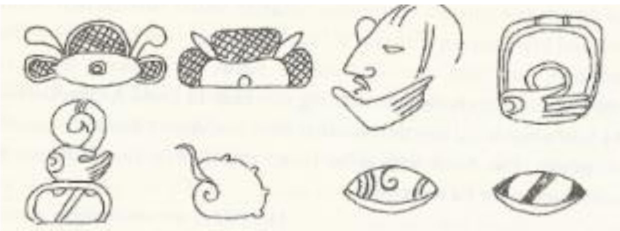


Abb. 28: Unterschiedliche Darstellungen

Maya-Zahlen	20^1=20,	20^2=400,	20^3=8.000,	20^4=160.000. [101]
Maya-Namen	hun	bak	pik	calab

[101] Umberto, Bottazzini: Wie die Null aus dem Nichts entstand, dtv, München 2021, deutsche Erstausgabe, S. 31f

Die 20-er Schritte wurden von Zehnern unterbrochen, Fünfer, wie bei den Römern, wurden besonders markiert, aber es gab nicht vorgestellte Einer, wie IV=4, die das Rechnen mit römischen Zahlen so quälend unhandlich machen. Hauptschritte waren zweifellos die 20-er. Bei Menninger ist die verwendete Systematik genau dargestellt.[102] Offenbar sind die Einer, also von 1 – 19 aus dem Volk heraus gewachsene Namen, wobei 1-9 Eigennamen besitzen (gezählt wurde aber ab 0). Von 20 bis 29 folgt man dem ersten 20-er Schritt aufwärts. Doch ab 30, das keinen Eigennamen erhält, denkt bzw. zählt man im zweiten 20-er-Schritt und geht zurück. Dies erinnert an das Französische, wo z.B. die 78 soixante-dix-huit, also 60´10´8, genannt wird.

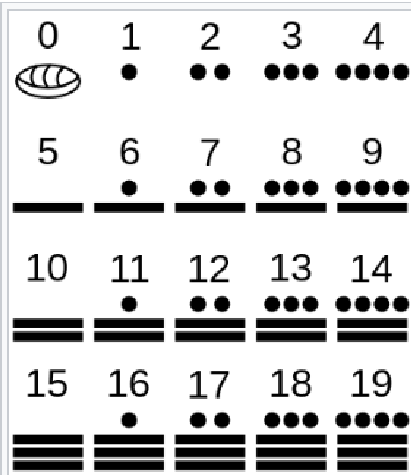


Abb. 29: Maya-Zahlen in Punkt-Strich-Darstellung

Dann wird es artifiziell und wie auf dem Reißbrett geplant. Man geht davon aus, dass die höheren Zahlenreihen, die in ihrer schieren Größe auch nur akademisch-kalendarischen Charakter haben konnten, von Priestern entworfen wurden. Wir haben somit ein Beispiel für ein Zahlensystem, das aus der herrschenden Klasse gebildet wurde und nur bei kleinen Zahlen aus dem Volk. Die ganz hohen Zahlen haben überhaupt keine praktische Bedeutung, auch nicht im Kalender. Es sind scheinbar „Zähltürme“, um den Göttern nahe zu sein.

Deshalb weicht die Systematik auch bei der Darstellung von Kalenderdaten teilweise unlogisch ab. Man versuchte vermutlich gewachsene Strukturen und künstliche Ergänzungen zu integrieren. Der Monat hatte bei den Maya 20 Tage. Kalendarisch genutzte Zahlen und ihre Darstellung waren stark mit Ritualen und Göttern verbunden, die an diesen Tagen besonderen Einfluss auf die Menschen hatten. Der Kalender hatte somit eine herausragende Bedeutung, die auch die Zählweise regelrecht dominierte.
Die Maya verwendeten zwar positive ganze Zahlen, aber gezählt wurde ab der Null. Hier geht die zweite Stufe nur von 0 bis 17 und folgt dann der normalen Vorgehensweise. Dadurch ergibt sich statt 400 nur 360, was den Tagen im Sonnenjahr näherkommt und für die Monatslänge von 20 Tagen besser passt. Die restlichen 5 Tage galten als Unglückstage. Die Maya bauten Nulltage in den Kalender ein, an denen sie sich nicht wuschen oder kämmten oder wichtige Tätigkeiten anfingen.[103] Für die Null wurden verschiedene Zeichen verwendet,

[102] Menninger, ebenda, S. 73
[103] www.wienerzeitung.at/themen_channel/literatur/buecher_aktuell/350025_Kaplan-Die-Geschichte-der-Null.html

die sich in ihrem Ornament-Charakter unterschieden. [104,105] Man vermutet plausibel, dass die natürliche Unterteilung in Finger und Zehen den Anstoß zu diesem vigesimalen System bildeten.

Inka

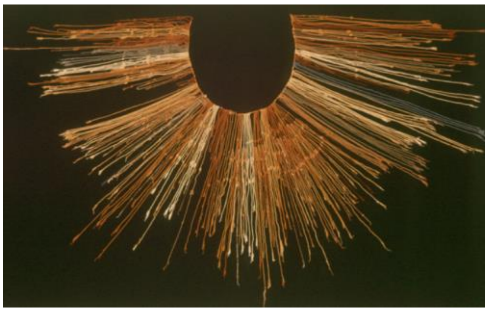


Abb. 30: Quipu aus dem archäolog. Museum in Lima

Die Inkas haben trotz der ungewöhnlichen Form ihrer „schriftlichen“ Aufzeichnungen ohne archäologische Zweifel ein dezimales Stellenwertsystem besessen. Sie verwendeten *Quipus,* Schnüre mit Knoten. Diese konnten sehr aufwendig und kunstvoll sein und auch mehrstellige Zahlen abbilden.

Oft wird die Hauptschnur durch Nebenschnüre oder gar noch eine Stufe weiter ergänzt. Die Null stellt sich in Form von Leerstellen, also größeren Abständen zwischen zwei Knoten, dar.

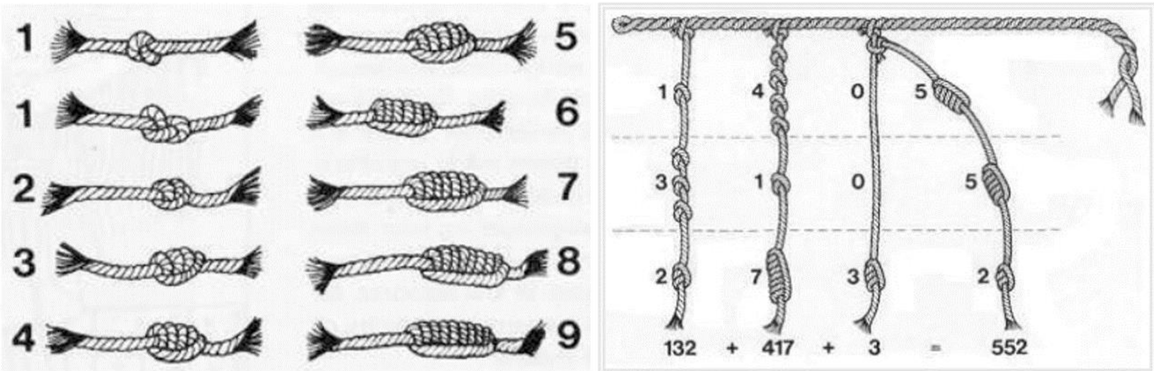


Abb. 31: Links „Ziffernknoten“ der Inkas, rechts ein Rechenbeispiel.

Kambodscha

Die Null ist eindeutig belegt. Eine Inschrift zu einer Götterstatue aus Sambor Prei Kuk, das im heutigen Kambodscha liegt, datiert ein Datum im Jahr 598 nach unserer Zeitrechnung und kann Tag genau auf die Śaka-Ära umgerechnet werden. Das entsprechende Jahr ist 520 und die Null wird mit dem mit dem Begriff „*kha*“ bezeichnet, der „Luftraum“ bedeutet. Weitere Nachweise belegen diese Deutung der Verwendung der Ziffer „0“. Auch in Sumatra sind Inschriften gefunden worden, die Jahreszahlen mit „0“ enthalten und die Kenntnis der Null

104 Grafik: Robert Kaplan, Geschichte der Null, S. 94
105 https://de.wikipedia.org/wiki/Maya-Zahlschrift, Text und Grafik

sehr wahrscheinlich machen.[106] Indischer Einfluss erscheint in beiden Kulturen wahrscheinlich.

China

Zu China gibt es unterschiedliche Meinungen in der Literatur. Das ansonsten gut recherchierte Buch von Bottazzini spricht von einem „positionellen Prinzip", das in China in Gebrauch sein sollte.[107] Ob es in Verbindung mit der Null angewendet wurde, bleibt zunächst offen. Wikipedia sagt dagegen, in China kannte man keine Null. Dieser Ansicht ist auch Ifrah, wenn es um die Zeit vor 800 n.Chr. geht. Auch negative Lösungen kannte man gemäß dem Wikipedia-Eintrag zunächst nicht. Diese Aussage ist eindeutig nicht korrekt. Sie wurden erstmals in dem chinesischen Mathematikbuch „Neun Kapitel der Rechenkunst" (Jiǔ Zhāng Suànshù, 1. Jh.n.Chr.) erwähnt.[108] Das dort erklärte chinesische Zahlensystem verwendet rote Stäbchen für positive Zahlen und schwarze Stäbchen für negative Zahlen. Zahlen wurden in einem dezimalen System durch Stäbchen repräsentiert. Darin sind sich die Quellen einig. Erst durch indischen Einfluss wurde ein Fehlzeichen in Form eines Punktes identifiziert.[109] Den indisch-buddistischen Einfluss bereits ab dem 1. Jahrhundert nach Christus betont auch Wußing.[110] Battazzini beruft sich schließlich auf Joseph Needham und (offenbar) der in Cambridge herausgegebenen Buchreihe „Science and Civilisation in China", demzufolge bereits im 13. Jahrhundert vor Christus sich ein positionelles dezimales System auf Orakelknochen der Shang-Periode findet. Doch auch hier kann man kein Symbol für eine Art Null, sondern nur eine Leerstelle identifizieren. Es bleibt deshalb der indische Einfluss als plausibelste Theorie. So wird ein Symbol für die Null im *Khai-Yuan Chan Ching* erwähnt, einer Sammlung von astronomischen und astrologischen Texten aus dem 8. Jahrhundert. Es enthält ein Kapitel über indische Rechenmethoden. Der Autor schreibt*: Wenn die eine oder andere der neun Ziffern die Zehn erreicht, wird sie in ein Feld vor die anderen Ziffern gestellt, und jedesmal, wenn ein leeres Feld in der Reihe auftaucht, wird ein Punkt angebracht, um es symbolisch*

---

[106] https://de.wikipedia.org/wiki/Null
[107] Bottazzini, ebenda, S. 43
[108] Siehe z.B. Begriffs- und Namensklärungen bei
https://www.enzyklo.de/Begriff/Jiu_Zhang_Suanshu
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-0348-6379-7_4 (Klassische mathematische Werke)
Wußing, Band 2, ebenda S. 46f und in der Zusammenfassung S. 66
[109] https://de.wikipedia.org/wiki/Null
[110] Wußing, Hans: 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008, S. 47f

darzustellen.[111] Es ist an gleicher Stelle offenbar auch bemerkenswert, dass die indischen Ziffern (in einer Zahl) alle in einem Zug geschrieben werden.

<u>Ägypten</u>

Die regelmäßigen, jährlichen Überschwemmungen durch den Nil machten immer wieder neue Vermessungen nötig, um die Eigentumsverhältnisse neu zu bestimmen. Durch das unregelmäßige Gelände war z.B. ein regelmäßiges Verfahren wie ein Schachbrettmuster unmöglich. Ländereien wurden deshalb wahrscheinlich durch Vierecke und Dreiecke angenähert. Dabei wurden die Flächeninhalte der Vierecke über ihre Seitenlängen berechnet. Bei den Dreiecken wurde die fehlende 4. Seite mit der Hieroglyphe („nichts") bezeichnet. Dies hat jedoch nichts mit dem zu tun, was eine irgendwie geartete Null in einem Positions- oder Stellenwertsystem leistet. Im Horus-Tempel von Edfu findet sich eine entsprechende Inschrift mit Maßen von Tempelländereien. Der Tempel entstand im 2. Jh.v.Chr. Es ist bezeichnend, dass ausgerechnet ein Horustempel über diese Sachverhalte Aufschluss gibt. Das Horus-Auge in seiner Strichdarstellung lieferte den Ägyptern im täglichen Gebrauch die Zahlzeichen für das Bruchrechnen bei Gewichten und in Form von Unterteilungen beim Hohlmaß hequt, also sozusagen dem Scheffel, mit dem z.B. Getreidemengen gemessen wurden.[112]

Abb. 32. Zahlschrift aus dem Karnak-Tempel, 3. Jahrtausend v.Chr.

<u>Minoer</u>

Auch auf Kreta wurden Tontafeln mit schriftlichen Aufzeichnungen gefunden, die Zahlen enthalten. Die Schriften Linear A sind auf Kreta beschränkt.

Linear B ist vollkommen anders, nämlich eine mykenische Silbenschrift, die weit im Mittelmeerraum Verbreitung fand.

---

[111] Ifrah, ebenda, S. 489

[112] Siehe Oberhess. Naturw. Zeitschrift, Kafitz, Zahlen, http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-8380, S. 18 f

Sie wurde wegen des ähnlichen Schriftbildes zunächst ebenfalls für minoisch gehalten.

Die Namensgebung stammt von Sir Arthur Evans, dem Ausgräber von Knossos. Die Null war nicht bekannt und dies gilt offenbar für keine mögliche Vorläuferform.

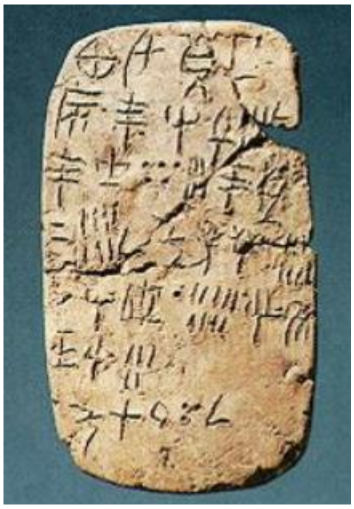


Abb. 33: Tontafel mit Zahlen, (Kreta, Mitte des 15. Jh.v.Chr.)

Griechen

Trotz teilweise genialer Mathematiker und beispielloser mathematischer Fortschritte kannten die Griechen keine Null und kein Stellenwertsystem. Erst in der späteren hellenistischen Zeit deutlich nach Christi Geburt tauchen erste mehr formale Elemente auf, denen man aber keinen Zahlcharakter zuordnen konnte. So weiß man, dass der große Astronom und Mathematiker Claudius Ptolemäus (um 100 – nach 160 n.Chr.) in seinem epochalen Werk Almagest das Fehlzeichen o verwendete, das im Griechischen für οὐδέν, *ouden* („nichts“) steht.[113] Es sind auch zweifellos Kontakte in den asiatischen Raum vorhanden gewesen. Schließlich ist Alexander der Große bis nach Indien gekommen, auch wenn damals die Erkenntnisse der indischen Mathematik noch nicht ausgeprägt waren. Aber er hatte zwischenzeitlich sein Hauptquartier in Babylon. Deshalb sollten Griechen mit dem sumerischen System in Berührung gekommen sein. Das frühe Griechenland bewunderte Ägypten, aber übernahm in Bezug auf das Thema dieses Beitrags wenig von asiatischen Kulturen. Doch die Ablehnung war vor allem auch philosophisch motiviert. *Nichts kann aus nichts geschaffen werden.* (Lukrez, *De Rerum Natura*). Diese Philosophie überdauerte viele Jahrhunderte, als die antiken Kulturen längst dem Mittelalter Platz gemacht hatten. Zahlen und Philosophie waren untrennbar miteinander verbunden. Hier wirkt das pythagoreische Denken sehr lange nach. Eher konnte man irrationale Zahlen in das Denken integrieren als das „Nichts“.

Römer

In der lateinischen Sprache gab es kein Zeichen für die Null und es gibt auch keinerlei indirekte Hinweise. Die römischen Zahlen hielten sich trotz ihrer unpraktischen Verwendung in Europa fast 2.000 Jahre. Bei den Römern im Westen sind wenig herausragenden Mathematiker bekannt, was andererseits auf das Zahlensystem zurückgeführt werden kann. Zu nennen ist Varro (116-27

---

113 https://de.wikipedia.org/wiki/Claudius_Ptolemäus

v.Chr.), Vitruv (geb. um 84 v. Chr.), Columella (nach 64), und Balbus (um 100).[114] Das oströmische Reich führte die griechisch-hellenistische Tradition bis in die byzantinische Zeit und die Spätantike weiter. Athen und Alexandria mit ihren mathematischen Traditionen und Akademien gehörten zum oströmischen Reich. Einer der Baumeister der Hagia Sophia, Anthemios von Tralleis (gest. 534), war zugleich ein guter Mathematiker.[115] Im römischen Reich wurde das Christentum 380 unter Kaiser Theodosius zur Staatsreligion erklärt. Antike Traditionen einschließlich der Mathematik wurden zu „heidnischen“ Ideen erklärt. Unter Justinian wurden Akademien gewaltsam geschlossen. Erst arabischer Einfluss führte zu einer neuen Blüte der Mathematik.

Die Stagnation lag zum wesentlichen Teil an den römischen Zahlen. Schon eine einfache Addition von mehreren 3- bis 4-stelligen römischen Zahlen fällt ohne jeweilige Übertragung in unser Dezimalsystem äußerst schwer. Multiplikation oder gar Division ist nur über den Umweg von Hilfskonstruktionen und viel Kopfrechnen oder Fingerrechnen möglich. Das Ziffernsystem lässt grundsätzlich keine Regelwerke für schriftliches Rechnen zu. Die römischen Ziffern sind „keine Recheneinheiten, sondern Abkürzungen“ (Ifrah). Damit können Ergebnisse notiert werden, die auf dem Abakus oder anderen Hilfsmitteln bereits gelöst wurden. Die mittelalterliche Arithmetik hat dies durchaus erkannt und entsprechende Versuche unternommen. Trotzdem tat man sich lange Zeit sehr schwer, den entscheidenden Schritt zu gehen und zu dem indischen Stellenwertsystem zu wechseln.

Die Null in der Mathematik

Infinitesimalrechnung

Nachdem die Null in der Mathematik endlich angekommen war, entbrannte schon wieder eine heftige Diskussion. Leibniz und Newton machten sich unabhängig voneinander Gedanken, wie die Entwicklung von Kurven einer Funktion auf jeden Punkt genau beschrieben werden können. Dazu mussten sie das Steigungsdreieck an dem jeweiligen Punkt immer kleiner machen, um schließlich die Tangente an dem Punkt zu identifizieren. Beide entwickelten jeweils ein mathematisches Kalkül, das dieses leistete. Doch die grandiose Leistung hatte mathematisch formal und psychologisch-menschlich einen gewaltigen Preis zu zahlen. Mathematisch musste zuerst durch eine kleine, aber nicht verschwindende Größe geteilt werden, um anschließend den Grenzwert zu bilden. Das kam der Division durch Null bedenklich nahe. Das Verfahren

---

[114] Wörtlich aus https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/roemische-mathematik/9057
[115] Wußing, ebenda, Bd. 1, S. 213

funktionierte bestens, aber viele Mathematiker hatten zumindest ein schlechtes Gefühl dabei oder lehnten es sogar ganz ab.

Die Infinitesimalrechnung oder Analysis ist heute eine Erfolgsgeschichte in der Mathematik. Doch der Umgang mit der Annäherung an infinitesimal kleine Größen, die notwendig schien, um die Tangente in einem Punkt der Kurve bestimmen zu können, stieß mit Recht auf harsche Kritik. Die äußerst erfolgreiche Methode mit ihrem fragwürdigen Umgang mit verschwindenden Größen drohte die Mathematik in Befürworter und Gegner zu spalten. Nur der Erfolg in der Praxis war überzeugend, nicht die Vorgehensweise im Kalkül. Der französische Mathematiker, Physiker und Philosoph Jean Le Rond d´Alembert (1717 – 1783) schrieb: *Eine Größe ist etwas oder nichts; wenn sie etwas ist, ist sie noch nicht verschwunden; wenn sie nichts ist, ist sie wirklich verschwunden. Die Annahme, es gebe einen dazwischen liegenden Zustand, ist ein Hirngespinst.*[116]

Die menschliche Seite führte dazu, dass um diese grandiose wissenschaftliche Leistung ein heftiger Prioritätenstreit entbrannte, der mit den jeweiligen Anhängern zu einem wahren Stellvertreterkrieg eskalierte.

Heute gelten beide Aspekte als geklärt. Folgende Mathematikergenerationen fanden ein korrektes Verfahren, das nicht in dem Verdacht steht, dass durch Null dividiert wird und das auch durch sprachlich saubere Begriffe Unklarheiten und Mehrdeutigkeiten vermeidet.

Weder Leibniz noch Newton haben sich eines Plagiats schuldig gemacht. Im Gegenteil, sie hatten vollkommen unterschiedliche Intentionen. Leibniz hat den Punkt auf der Kurve als Objekt gesehen und dieser nulldimensionale Punkt kann durch sein Kalkül als Grenzwertprozess umfassend genau beschrieben werden. Newton dagegen interessierte die Physik und die Dynamik von Massen, die sich auf den Kurven durch die Zeit bewegen und Kräften bzw. Wirkungen unterliegen.

Beide Sichtweisen haben sowohl der Mathematik unschätzbare Impulse gegeben, als auch die Naturwissenschaften revolutioniert und ihren Gültigkeitsbereich auf den Himmel und seine Mechanik ausgedehnt.

Erst Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) und Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 – 1897) haben durch eine logisch fundierte Aufarbeitung der Analysis den Widerspruch aufgelöst. Begriffe, wie das unendlich Kleine, wurden ausgemerzt.

---

[116] Zitiert nach Seife, ebenda, S 141

Nullstellen von Funktionen

Von großer Bedeutung in der Mathematik sind Nullstellen von Funktionen bzw. von differenzierbaren Funktionen und ihren Ableitungen. Ein Gutteil des Mathematikunterrichts in der Oberstufe ist der sogenannten Kurvendiskussion reeller Funktionen gewidmet. D.h. man untersucht markante Punkte der Funktion. Interessant sind bei einer stetig differenzierbaren Funktion f(x) die Nullstellen, also Schnittpunkte mit der x-Achse, oder Extrempunkte. Aufschluss geben oft Nullstellen der Ableitungen über (lokale) Minima oder Maxima (Nullstellen der Ableitung f´(x)) und Sattelpunkte und Wendepunkte (Nullstellen der 2. Ableitung f´´(x)).

Dort ist die z.B. die Tangente waagrecht zur x-Achse und damit hat die erste Ableitung f´(x) der Funktion eine Nullstelle. Dies sind Hoch- und Tiefpunkte, aber können auch Sattelpunkte sein.

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten, Nullstellen, Hochpunkte, Tiefpunkte, Sattelpunkte oder Wendepunkte zu bestimmen. Dies kann bis zur 3. Ableitung gehen, denn ein Wendepunkt wechselt lediglich die Krümmungsrichtung der Kurve ohne dass die Tangente waagrecht wird. In diesem Fall ist

$f''(x_0) = 0$ aber $f'''(x_0) \neq 0$.

In der höheren Mathematik können mehrere Veränderliche auftreten oder es müssen komplexe Funktionen betrachtet werden. Historisch gesehen, war mit dem Namen „Algebra“ ursprünglich vor allem Lösungen von Polynomen der Form

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$, a_i, $x \in \mathbb{R}$, verbunden.

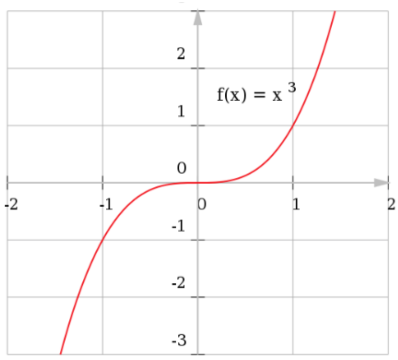


Abb. 34: Sattelpunkt von $f(x)=x^3$ im Punkt x=0

Später wurde das Interesse auf die komplexwertigen Funktionen erweitert:

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$, a_i, $z \in \mathbb{C}$

Aus diesem Grund kommt dem Fundamentalsatz der Algebra eine große Bedeutung zu. Die Beweisgrundlage wurde 1746 von Jean-Baptiste le Rond d’Alembert gelegt und von Carl Friedrich Gauß 1799 in seiner Dissertation wesentlich verbessert. Erst mit den Erkenntnissen der Analysis konnten für die damalige Zeit vermeintlich selbstverständliche Voraussetzungen mitbewiesen werden (Stichwort Zwischenwertsatz).

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass ein komplexwertiges, nicht konstantes Polynom n-ten Grades (n>0) mindestens eine Nullstelle hat. Berücksichtigt man mehrfache Nullstellen, so existieren genau n Nullstellen. Z.B.

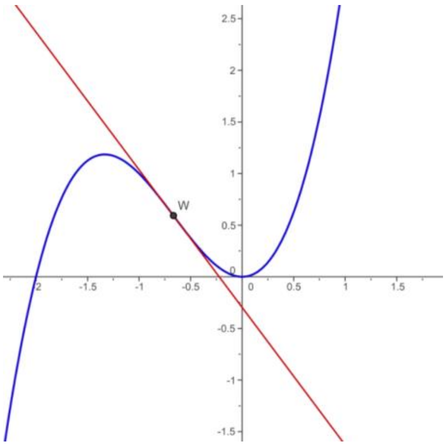


Abb. 35: Bei W hat die Kurve einen Wendepunkt, aber die Tangente in W (rot) ist nicht waagrecht.

f(x)=x hat eine Nullstelle in $x_0=0$;
$f(x)=x^2$ hat zwei Nullstellen in $x_0=0$;
$f(x)=x^3$ hat drei Nullstellen in $x_0=0$;
usw.

Man kann den Fundamentalsatz der Algebra auch als Faktorisierung eines Polynoms über dem Körper der komplexen Zahlen ausdrücken:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - b_k)$$

Die b_k sind dann unter Berücksichtigung mehrfacher Nullstellen genau die gesuchten n Nullstellen des ausmultiplizierten Polynoms.

<u>Nullfolge</u>

Man betrachte die Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit der „normalen“, allseits bekannten Metrik. Sie wird archimedische Metrik genannt.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ bzw. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt Nullfolge, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0.$$

D.h. der Konvergenzpunkt dieser Folgen ist 0.

Klassisches Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$

Aber auch $a_n = 0$, also die Folge, die nur aus Nullen besteht, ist eine Nullfolge.

Die Folgenglieder können wie im nächsten Beispiel alternierend positiv und negativ sein:

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$a_n = \sqrt[n]{5} - 1$$

Hier konvergieren die (positiven) Wurzeln bei zunehmendem n gegen 1 und a_n wird dadurch zur Nullfolge.

$$a_n = (-0{,}5)^n$$

ist eine Nullfolge im Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ unter Berücksichtigung der archimedischen Metrik, also der normalen Abstandsdefinition.

Legt man aber die 2-adische Metrik zugrunde, so divergiert die Folge. Bei dem Betrag von p-adischen Zahlen kommt es nur darauf an, wie häufig die Primzahl p in einer Zahl m vorkommt. p soll hier im Beispiel gleich 2 sein, m ist 0,5 = ½.

Auch der p-adische Betrag einer Zahl m ist definitionsgemäß der „Abstand“ von m zur 0.

Der für jede Primzahl p auf den rationalen Zahlen definierte p-adische Betrag:

$$|m|_p := \begin{cases} 0 \; f\text{ür} \; m = 0 \\ p^{-n} \; f\text{ür} \; m = p^n \frac{a}{b} \; mit \; a, b, p \; paarweise \; teilerfremd \; und \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Man nutzt, dass sich jede rationale Zahl eindeutig als $m = p^n \frac{a}{b}$ mit paarweise teilerfremden Zahlen und n ∈ ℕ darstellen lässt.

Oft wird die Darstellung $|m|_p = \frac{1}{p^{\vartheta_p(m)}}$ benutzt um deutlich zu machen, dass der negative Exponent sowohl von p als auch von m abhängt.

Dabei zählt $\vartheta_p(m)$ wie oft die Primzahl, hier im Beispiel p=2, in m vorkommt. Kommt 2 in m nicht vor (2 ist z.B. kein Teiler von 1), so ist $\vartheta_2(m) = 0$ also $\frac{1}{2^{\vartheta_2(1)}} = \frac{1}{2^0} = 1$

Außerdem definiert man $\vartheta_2\left(\frac{a}{b}\right) = \vartheta_2(a) - \vartheta_2(b)$.

Die Folgenglieder errechnen sich also nach der 2-adischen Metrik wie folgt:

$$a_1 = d_2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^{\vartheta_2\left(\frac{1}{2}\right)}} = -\frac{1}{2^{\vartheta_2(1)-\vartheta_2(2)}} = -\frac{1}{2^{0-1}} = -2$$

$$a_2 = d_2\left(+\frac{1}{4}\right) = +\frac{1}{2^{\vartheta_2\left(\frac{1}{4}\right)}} = -\frac{1}{2^{\vartheta_2(1)-\vartheta_2(4)}} = -\frac{1}{2^{0-2}} = +4$$

$$a_3 = d_2\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{2^{\vartheta_2\left(\frac{1}{8}\right)}} = -\frac{1}{2^{\vartheta_2(1)-\vartheta_2(8)}} = -\frac{1}{2^{0-3}} = -8$$

usw.

$$a_n = d_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^n 2^n \to \infty$$

Es ist sehr einfach einzusehen, dass in der p-adischen Metrik jede konvergierende Folge eine Nullfolge sein muss. Man betrachte z.B. $a_n = 2^n$ in der 2-adischen Metrik. Die Folgenglieder sind ½, ¼, ⅛, usw. Die Folge konvergiert und ist eine Nullfolge. Immer müssen konvergierende Folgen durch immer häufigeres Auftreten der betreffenden Primzahl p erzeugt werden. Dies führt zu immer kleineren Beträgen und damit zum Konvergenzpunkt 0.

Der Satz von Ostrowski besagt, dass ein auf den rationalen Zahlen definierter, nichttrivialer Absolutbetrag entweder zur archimedischen oder zur p-adischen Metrik äquivalent ist.

Es kann jedoch in anderen Räumen andere Metriken geben. Dies führt zu Verallgemeinerungen des Begriffs Nullfolge.

Sei {(G,+,d)} eine metrisierbare topologische Gruppe, d. h. eine Gruppe, die mit einer Metrik so ausgestattet ist, dass die Gruppenverknüpfung und die Inversenbildung stetig sind. Ein einfacher Fall ist die additive Gruppe in den Körpern $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder der Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

Eine Folge heißt genau dann Nullfolge, wenn sie gegen das neutrale Element konvergiert. In den Beispielen ist es gerade die 0 als neutrales Element der Addition in den additiven Gruppen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ oder der Nullvektor $\binom{0}{0}$ in $\mathbb{R}^2$.

Stellenwertsysteme

Die Bedeutung der indo-arabischen Zahlen inklusive der Null, wird erst deutlich, wenn man bedenkt, dass im Dezimalsystem mit den 10 Ziffern 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 unter Berücksichtigung der Position in der mehrstelligen Zahl beliebig große Zahlen aus wenigen Zeichen übersichtlich und kompakt gebildet werden können.

Zur Erinnerung: Die Sumerer hatten von 1 – 59 nur zwei Zeichen (Eins, Zehn), die sie kombinierten. Die 60 sah aus, wie die Eins, war nur größer. Die Maya hatten ebenfalls nur zwei Zeichen (Eins, Fünf) in ihrem 20-er system.

Beispiel: Die Zahl 1042=1x1000+0x100+4x10+2 d.h. die 1 steht für die Tausender, die 0 für die Hunderter, die 2 für die Zehner und die 4 für die Einer. Das Stellenwertsystem heißt auch Positionssystem oder auch polyadisches System. Die „10“ heißt in diesem Fall Basis. Es ist das weltweit gebräuchlichste Stellenwertsystem.

Das Computerzeitalter hat weitere Basen sinnvoll gemacht. Das ist vor allem das Binär- oder Dualsystem (seltener dyadisch) auf Basis 2, das Zahlen, Buchstaben und andere Objekte in Nullen und Einsen darstellt. Das Oktalsystem arbeitet auf Basis 8 und das Hexadezimalsystem auf Basis 16. Hier werden noch über die Ziffern 0 - 9 noch 6 Buchstaben A, B, C, D, E, F benötigt. Man notiert, wenn Verwechslungen drohen, die verwendete Basis als tiefgestellte Zahl am Ende der Umwandlung.

$1042_{10} = 10000010010_2$
$1042_{10} = 2022_8$
$1042_{10} = 412_{16}$

Das lässt sich auf beliebige Basen ausdehnen. Interessant sind vor allem Primzahlen.

$1042_{10} = 1102121_3$
$1042_{10} = 13132_5$
$1042_{10} = 3016_7$ usw.

Verfahrensweise: 1042 soll in das 5-System entwickelt werden: [117]

(1) Teile die Zahl mit Rest durch 5.
(2) Der Divisionsrest ist die nächste Ziffer (von rechts nach links).
(3) Falls der (ganzzahlige) Quotient = 0 ist, bist du fertig,
andernfalls nimm den (ganzzahligen) Quotienten als neue Zahl
und wiederhole ab (1).

1042 : 5 = 208 Rest: 2
208 : 5 = 41 Rest: 3
41 : 5 = 8 Rest: 1
8 : 5 = 1 Rest: 3
1 : 5 = 0 Rest: 1

Resultat: 13132 (Reste von oben nach unten von rechts nach links)

Diese Entwicklung nennt man auch p-adische Entwicklung, p ist immer eine Primzahl.

[117] Unter Zuhilfenahme von https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/Zahlensysteme.htm

Generell lässt sich jedes Positionssystem auch auf ganze Zahlen, rationale Zahlen (Brüche) und sogar irrationale Zahlen, z.B. Φ, anwenden.

n	$a_n=\Phi^n$	
5	≈11,090	$\Phi^5=5\,\Phi+3$
4	≈6,854	$\Phi^4=3\,\Phi+2$
3	≈4,236..	$\Phi^3=2\,\Phi+1$
2	≈2,618..	$\Phi^2=\Phi+1$
1	≈1,618..	Φ
0	$a_0=1{,}00$	$\Phi^0=1$
–1	≈0,618..	$\Phi^{-1}=\Phi-1$
–2	≈0,382..	$\Phi^{-2}=-\Phi+2$
–3	≈0,236..	$\Phi^{-3}=2\,\Phi-3$
–4	≈0,146..	$\Phi^{-4}=-3\,\Phi+5$
–5	≈0,090..	$\Phi^{-4}=5\,\Phi-8$

Abb. 36: Von 3 Werten der Φ-Potenzen liegt der Mittlere (a_n) im Goldenen Schnitt Φ
$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$

Im Dezimalsystem ist 1024= $1\cdot10^3+0\cdot10^2+2\cdot10^1+4\cdot10^0$.
Für negative Zahlen wechselt eben das Vorzeichen:
–1024 = – $(1\cdot10^3+0\cdot10^2+2\cdot10^1+4\cdot10^0)$
Stellen hinter dem Komma werden durch Zehnerpotenzen mit negativen Exponenten dargestellt.
1024,174 $=1\cdot10^3+0\cdot10^2+2\cdot10^1+4\cdot10^0+1\cdot10^{-1}+7\cdot10^{-2}+4\cdot10^{-3}$
Dabei ist bekannt, dass rationale Zahlen eine abbrechende Entwicklung haben oder dass eine Periode auftritt.

Irrationale Zahlen haben im Prinzip unendlich viele Stellen hinter Komma, die nicht periodisch sind. Je nach gewünschtem Genauigkeitsgrad bricht man die dezimale Darstellung ab einer bestimmten Stelle hinter dem Komma ab.

Diese Aussagen gelten für jedes Positionssystem.

Auch nicht natürliche Basen können Verwendung finden. Dies gilt auch für irrationale Basen. Z.B. kann die Regelmäßigkeit der Potenzen des Goldenen Schnitts ausgenützt werden. Ebenfalls können komplexe Zahlen als Basis dienen.

Verallgemeinerungen der Null

Null als neutrales Element der Addition

Der Begriff der algebraischen Struktur (oder universellen Algebra, allgemeinen Algebra oder nur Algebra) ist ein Grundbegriff und zentraler Untersuchungsgegenstand des mathematischen Teilgebietes der universellen Algebra.[118] Eine algebraische Struktur ist in der Regel eine endliche oder unendliche Menge M, auf der Verknüpfungen, allgemein als ○ bezeichnet, definiert sind. Viele der Strukturen, wie Gruppen, Ringe oder Körper, sind spezielle algebraische Strukturen mit einem sogenannten neutralen Element e:

[118] https://de.wikipedia.org/wiki/Algebraische_Struktur

Für alle Elemente $a \in M$ gilt $a \circ e = e \circ a = a$. D.h. die Verknüpfung mit e bildet jedes Element der Menge M auf sich selbst ab.

Die Null ist das neutrale Element bzgl. der Addition in Mengen, wie z.B. den reellen Zahlen, den rationalen Zahlen oder den komplexen Zahlen.

Es gilt z.B. für alle $a \in \mathbb{R}$: $a+0=0+a=a$

Aber in der abstrakten Algebra kennt man weitere Differenzierungen. Gruppen gehören schon zu algebraischen Strukturen mit einem hohen Grad an speziellen Eigenschaften. In der Algebra treten auch neutrale Elemente bei der Betrachtung von Strukturen mit inneren Verknüpfungen auf, z. B. bei Halbgruppen bzw. Monoide, Ringen, Halbringen, Körpern und Schiefkörpern. Es soll hier im Folgenden in mathematischen Strukturen nach Verallgemeinerungen der Null gesucht werden.

Ist die Verknüpfung die „normale" Addition in z.B. den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, oder auch $\mathbb{N}_0$, also den natürlichen Zahlen ergänzt um die Null, so ist das neutrale Element die Zahl 0.

Selbst bei den Quaternionen, obwohl man oft von „Werten" und nicht Zahlen spricht, ist die „0", wie wir sie kennen, das neutrale Element der Addition. Die additive Gruppe ist kommutativ; die multiplikative Gruppe nicht. Das macht die Quaternionen nur zu einem Schiefkörper. Bei anderen Mengen und Verknüpfungen kommt es auf die Natur der Verknüpfung an. Bei der Multiplikation ist das neutrale Element in diesen Mengen die 1. Nimmt man z.B. die Drehungen eines Quadrates um 0 Grad, 90 Grad, 180 Grad, 270 Grad und 360 Grad=0 Grad[119], so wird man die Null-Grad-Drehung als Null bezeichnen, denn die Verknüpfung

„Drehe das Quadrat um einen Winkel α, α=0, 90, 180, 270 Grad"

hat hier additiven Charakter.

Bei der Multiplikation ist die Null kein neutrales Element. Man bezeichnet sie in diesen Mengen M als „Absorbierendes Element", denn es gilt für alle $a \in M$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

[119] Im Gegensatz dazu nennt man einen Winkel von 360 Grad einen Vollwinkel (er umschließt die volle Fläche). Einen Winkel von 0 Grad, (der nur die leere Fläche umschließt), nennt man Nullwinkel.

Die saloppe Bezeichnung ist „Nullelement“ und bezieht sich auf die multiplikative Verknüpfung.

Bei der Multiplikation sorgt die Null ebenfalls für eine Ausnahme, die man fordern muss:
5. Axiom der Multiplikation: Jede Zahl außer dem neutralen Element der Addition (Null) hat ein multiplikatives Inverses.

Eine Erweiterung bzw. Verallgemeinerung der Null in der Addition findet man bei der Matrizenaddition. Zwei Matrizen kann man addieren, wenn sie jeweils die gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten haben. Man addiert jeweils die gleichen Positionen. Hier am Beispiel 2x2-Matrizen.

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}+b_{00} & a_{01}+b_{01} \\ a_{10}+b_{10} & a_{11}+b_{11} \end{bmatrix}$$

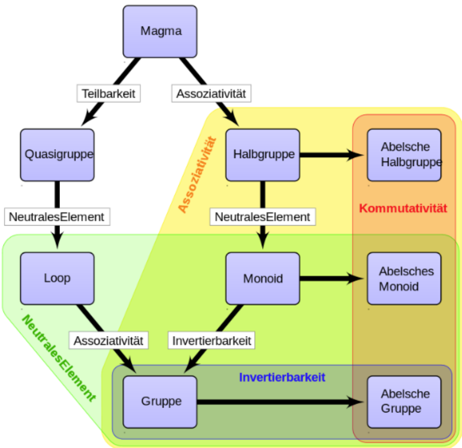


Abb. 37: Hierarchie algebraischer Strukturen (obere erfüllen weniger, untere mehr Gesetze) bis zur abelschen Gruppe.

Das neutrale Element der Addition bei 2x2-Matrizen ist die 2x2-Nullmatrix:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Dies gilt analog für alle nxm-Matrizen, mit n, m $\in \mathbb{N}_0$.

Ein Sonderfall ist die Vektoraddition in einem Vektorraum der Dimension n. Hier ist m=0. Das neutrale Element bzgl. der Addition ist der Nullvektor im Beispiel n=3:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

<u>Nullteiler</u>

Es sei m eine von 0 verschiedene ganze Zahl und a eine beliebige ganze Zahl. Die Restklasse von a modulo m ist die Menge der ganzen Zahlen, die bei Division durch m den gleichen Rest wie a ergeben. Sie besteht somit aus allen ganzen Zahlen b, die sich aus a durch die Addition ganzzahliger Vielfachen von m ergeben.

Ein Element einer Restklasse bezeichnet man auch als Repräsentant der Restklasse. Häufig verwendet man die Standardrepräsentanten 0,1,…,m-1.[120]

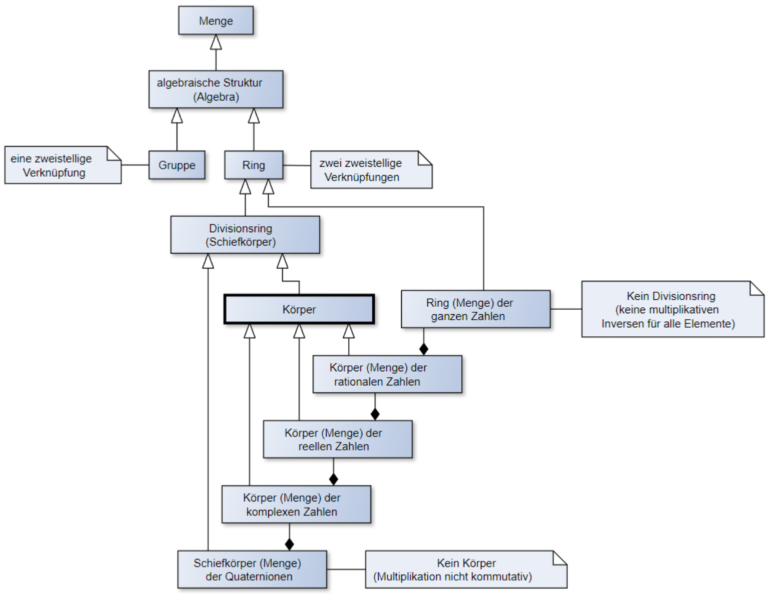


Abb. 38: Algebraische Strukturen bis zu Körper und Schiefkörper

Die Restklasse bildet die algebraische Struktur eines Ringes R, der ganze Zahlen hinsichtlich ihres Restes bei der Division durch m klassifiziert. Ein Ring bildet bzgl. der Addition eine Gruppe. Es entsteht erst dann ein Körper, wenn dies auch für die Multiplikation gilt.

Man nennt ein Element $a \in R$ einen Nullteiler, wenn es ein von 0 verschiedenes Element b gibt, sodass $a \cdot b=0$. Man sieht leicht, dass wenn a ein Nullteiler ist, so ist auch b ein Nullteiler. Das Produkt $a \cdot b$ wird auch Nullprodukt genannt.

Ein Restklassenring ist genau dann Nullteiler-frei, wenn m=p eine Primzahl ist. Dann bilden die Repräsentanten sogar einen endlichen Körper bzgl. Addition und Multiplikation.

Beispiel: In der Restklasse mod 6 sind 2 und 3 Nullteiler, da $2 \cdot 3 \equiv 0 \mod 6$ ist (kongruent 0 modulo 6). Dagegen gibt es in der Restklasse mod 7 keine Nullteiler.

Nullhomotoper Weg, Nullhomotope Abbildung

In der Topologie ist eine Homotopie eine stetige Deformation zwischen zwei Abbildungen von einem topologischen Raum in einen anderen, z.B. von einer Kurve in eine andere. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation, d.h. jede stetige Abbildung f ist zu sich selbst homotop (reflexiv); ist f zu g homotop, so ist es auch g zu f (symmetrisch) und ist f zu g homotop und g zu h, so ist f auch zu h homotop (transitiv).

[120] https://de.wikipedia.org/wiki/Restklassenring

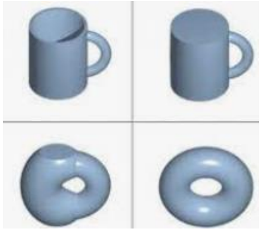


Abb. 39: Stetige Deformation

Bildlich stelle man sich eine Kaffeetasse mit einem Henkel aus einem deformierbaren, aber unzerreißbaren Material vor. Diese lässt sich stetig zu einem Volltorus deformieren, denn beide Körper haben nur ein Loch und können ohne Schnitt ineinander überführt werden. Sie sind homöomorph. Der Stetigkeitsbegriff in der Topologie ist dabei sehr weit gefasst.

Entsprechende topologische Transformationen lassen sich z.B. bei Kurven untersuchen. Es stellt sich dabei die Frage, ob es eine stetige Möglichkeit gibt, zwei Kurven durch stetige Verformung zur Deckung zu bringen.

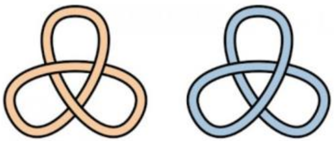


Abb. 40: Die linke Figur zeigt einen Knoten, die rechte ist kein Knoten

Ein Teilgebiet der Topologie ist die Knotentheorie, d.h. welche Knoten sind gleich, also sehen nur unterschiedlich aus. Diese mathematische Disziplin hat sogar praktische Bedeutung. Z.B. ist ein menschlicher DNA-Strang über einen Meter lang. Im Zellkern ist er auf ein Fünfmillionstel Meter zusammen geknäuelt. Trotzdem funktioniert Replikation und Trennung der beiden Stränge. Genetiker und Knotentheoretiker versuchen seit einiger Zeit gemeinsam dazu neue Erkenntnisse zu gewinnen, indem ihre jeweiligen Kompetenzen auch auf DNA-Moleküle angewendet werden.

Ein wichtiger Spezialfall ist die Homotopie von Wegen relativ der Endpunkte: Dabei ist ein „Weg“ eine stetige Abbildung γ: $[0,1] \rightarrow X$; dabei ist $[0,1]$ das Einheitsintervall und X ein topologischer Raum (z.B. die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$) Zwei Wege heißen homotop relativ der Endpunkte, wenn die Homotopie die Anfangs- und Endpunkte festhält.

Ein Weg heißt nullhomotop genau dann, wenn er homotop zum konstanten Weg ist.

Beispiel: Man betrachte die Abbildung $H(0,\varphi)$. φ läuft im Intervall $[0,2\pi]$ und bildet den Einheitskreis. Einmal soll H den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ abbilden und einmal den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ ohne die Null.

$H(0,\varphi):[0,2\pi]\rightarrow \mathbb{C}$ ist nullhomotop.

$H(0,\varphi):[0,2\pi]\rightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist nicht nullhomotop, da die Null ein Zusammenziehen verhindert.

D.h. Nullhomotopie hängt vom topologischen Raum ab, in den abgebildet wird.

Nullfläche (Mathematik)

In der Mathematik ist mit dem Begriff „Nullfläche" eine Diskussion verknüpft, die 2.500 Jahre alt ist. Man betrachte drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen. Intuitiv wird man sofort sagen, dass die kürzeste Verbindung zwischen A und C die gerade Linie zwischen A und C ist. A, B, C bilden dann ein Dreieck und der gesunde Menschenverstand sagt, dass der direkte Weg immer kleiner (oder gleich) dem Umweg ist. Das ist die sogenannte Dreiecksungleichung. Doch wann gilt das Gleichheitszeichen? Eben, wenn A, B, C auf einer Geraden liegen. Das dadurch entstehende Dreieck ist eigentlich gar kein wirkliches Dreieck. Man nennt es deshalb auch entartet. Seine Fläche ist Null. Es ist, im mathematischen Sinne, eine Nullfläche.

Die intuitive Richtigkeit der Dreiecksungleichung in der euklidischen Ebene ist natürlich zu beweisen und man muss es sich klarmachen, dass sie im Zweifel nur auf der Ebene, die von den Punkten aufgespannt wird, gültig sein wird.

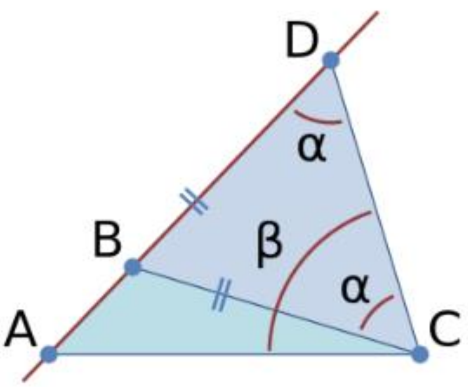


Abb. 41: Euklids Beweis der Dreiecksungleichung

Euklid hat für die Dreiecksungleichung folgenden Beweis angegeben.

Sei A, B, C ein Dreieck. Zu zeigen ist, dass

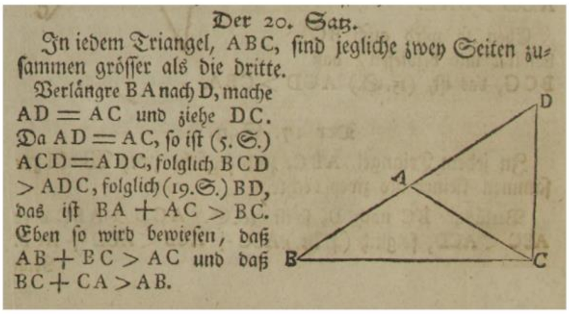
$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$$

Konstruieren wir über dem Dreieck Δ ABC ein gleichseitiges Dreieck Δ BDC mit dem Winkel α, der bei C mit der Seite $\overline{BC}$ gebildet und ebenfalls bei D, wobei die Seite $\overline{AB}$ um die Strecke $\overline{BC}$ verlängert wird. Bei C entsteht im großen Dreieck Δ ADC ein Winkel β, der größer α ist. Damit wird $\overline{AD} > \overline{AC}$. Für $\overline{AD}$ gilt aber:

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC}$. Daraus folgt $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. q.e.d.

Wenn sich die Längen $\overline{AD}$ und $\overline{AC}$ immer mehr annähern, heißt das also, dass der Punkt B sich immer mehr der Seite $\overline{AC}$ nähert, d.h. das Dreieck entartet, wenn B auf $\overline{AC}$ zu liegen kommt. Es wird zur Nullfläche.

Dieser Beweis gilt für die 2-dimensionale Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ oder für höherdimensionale euklidische Räume. Es kommt auf die Metrik an, also das, was Betrag einer Länge und was Abstand bedeutet. Dies hat Euklid und Archimedes definiert und die Dreiecksungleichung bewiesen. Wie immer bei den Griechen, geschah das ausschließlich mittels geometrischer Argumente.



Der 20. Satz.

In iedem Triangel, ABC, sind jegliche zwey Seiten zusammen grösser als die dritte.

Verlängre BA nach D, mache AD = AC und ziehe DC. Da AD = AC, so ist (5. S.) ACD = ADC, folglich BCD > ADC, folglich (19. S.) BD, das ist BA + AC > BC. Eben so wird bewiesen, daß AB + BC > AC und daß BC + CA > AB.

Abb. 42: Euklids Elemente, Buch 1, 20. Satz, „Beweis der Dreiecksungleichung“

Heute wird sie in der Lehre meist aus dem Cosinus-Satz hergeleitet. Über die Dreiecksungleichung kann man schnell entscheiden, ob bei gegebenen Seitenlängen ein Dreieck konstruierbar ist. Ein Dreieck mit den Seitenlängen 2cm, 3cm und 6cm ist nicht konstruierbar, da die Dreiecksungleichung verletzt wäre, dagegen bildet ein „Dreieck“ mit 2cm, 3cm und 5cm eine Nullfläche.

Die Erdoberfläche ist aber nicht eben und ein Flugzeug fliegt Treibstoff sparend nicht auf einer geraden Linie, z.B. von Frankfurt nach Madrid, unabhängig von der Erdrotation (die beim Fliegen zusätzlich zu berücksichtigen ist und oft entscheidend ist, ob ein Ziel von Osten oder Westen angeflogen werden sollte). Drei Punkte auf einer 2-Sphäre, also einer Kugeloberfläche im 3-dimensionalen (euklidischen) Raum, bilden ein Dreieck, das einer anderen Metrik unterliegt. Hier gilt die Dreiecksungleichung im Allgemeinen nicht. Sie gilt aber für den Fall, dass man sich auf sogenannte Eulersche Dreiecke beschränkt, deren Seiten alle kürzer als ein halber Großkreis sind.[121]

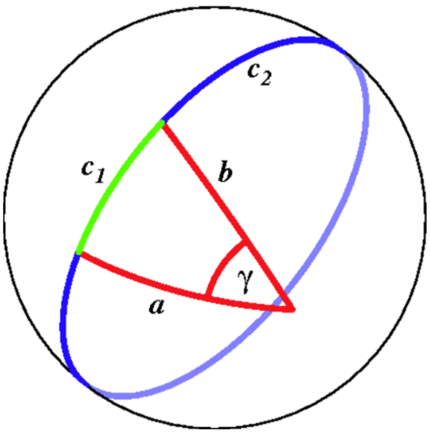


Abb. 43: Sphärisches Dreieck

Die Null ist bei allen Zahlenmengen unverzichtbar. Ausnahme bildet höchstens die Menge der natürlichen Zahlen mit ihrer Bedeutung in der Kulturgeschichte und der Mathematik. Genauso ist bei jeder Punktmenge die leere Menge eine Untermenge. Wir brauchen uns also nicht auf Dreiecke zu beschränken. Eine Nullfläche kann man in der Regel immer identifizieren.

Ein abstraktes Polytop ist dabei eine Abbildung (Injektion) von abstrakten Eigenschaften, wie Scheitelpunkt (0-Fläche), Kante (1-Fläche) oder allgemein einer k-Fläche in einen realen Raum (z.B. R^3). Man versteht jedoch „Fläche“ als lokal-kompakte, zusammenhängende 2-dimensionale Punktmenge, die flach

[121] Siehe Wikipedia Dreiecksungleichung

oder gekrümmt sein kann. In diesem Sinne ist eine Nullfläche eine Fläche der Form

$x_1x^2+y_1y^2+z_1z^2=0$.

Die Lösungsmenge besteht nur aus dem Punkt (0,0,0).

Nullmengenaxiom

Georg Cantor gilt als Begründer der Mengenlehre. Sein Verdienst ist mittlerweile unbestritten. Nach zunächst unterschiedlichen Terminologien hat er 1895 erstmals den Begriff der Menge korrekt definiert.

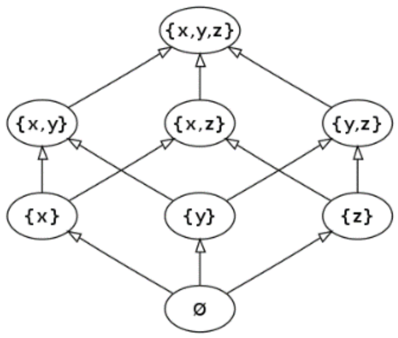


Abb. 44: Hasse-Diagramm für die Potenzmenge der drei Elemente x, y, z.

Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen. (Math. Annalen Bd. 46, S. 481)

Allerdings hat er noch keine axiomatische Herangehensweise gewählt. Dies ist Ernst Zermelo 1907 gelungen. Er hat dabei sieben Axiome formuliert, die in ihrer Weiterentwicklung als Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (ZF) die Grundlage fast des ganzen mathematischen Gebäudes darstellen. Cantors Mengenlehre kann damit abgeleitet werden.

Das zweite Axiom von Zermelo wird oft Nullmengenaxiom genannt:

Axiom der Elementarmengen:

Es gibt eine Menge, die Nullmenge 0, welche gar keine Elemente enthält.
Ist a irgendein Ding des Bereiches, so existiert eine Menge {a}, welche a und nur a als Element enthält.

Sind a, b irgend zwei Dinge des Bereiches, so existiert immer eine Menge {a,b} welche sowohl a als auch b, aber kein von beiden verschiedenes Ding x als Element enthält.

Zermelo hat seine Axiome noch verbal formuliert. In einem nächsten Formalisierungsschritt kann man die Axiome in Form sogenannter Prädikatenlogik formulieren.

John von Neumann (1923 bzw. 1928) definierte Ordinalzahlen als eine Hierarchie und gab Cantors Ideen damit einen endgültigen formalen Rahmen.

Sein Vorschlag lautet, das ganze Mengenuniversum rekursiv aus der Nullmenge heraus über Potenzmengen zu entwickeln. Sie bilden dann eine Hierarchie und man kann innerhalb ZF zeigen, dass jede Menge in einer Stufe dieser Hierarchie vertreten ist. Er beginnt bei der leeren Menge ∅, dann der Menge bestehend nur aus der leeren Menge {∅}, weiter der zwei-Elemente großen Menge bestehend aus leerer Menge und Menge aus der leeren Menge usw. Er definierte dadurch die natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen ab der Null über Mengen und nutzte dabei die Iteration von Potenzmengen.

$0 := V_0 = \emptyset$
$1 := V_1 = \{\emptyset\} = \wp(\emptyset)$
$2 := V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \wp(\wp(\emptyset))$
$3 := V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \wp(\wp(\wp(\emptyset)))$
…
$n := V_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Man kann sagen, die natürlichen und die transfiniten Zahlen wurden somit in der abstrakten Mengenlehre aus der leeren Menge (ø) heraus entwickelt.[122]

Boolesche Algebra

Man überlege sich zwei Aussagen A und B, die jeweils entweder wahr oder falsch sein sollen, z.B. Hunde singen und Katzen tanzen. Wahr kennzeichne man mit 1 und falsch mit 0. Die folgenden Tabellen charakterisieren eine logische „UND“ und eine „ODER“ Beziehung:

A	B	A und B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

A	B	A oder B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Abb. 45: Boolesche Wahrheitstabellen für
logische UND bzw. logische ODER-Beziehung

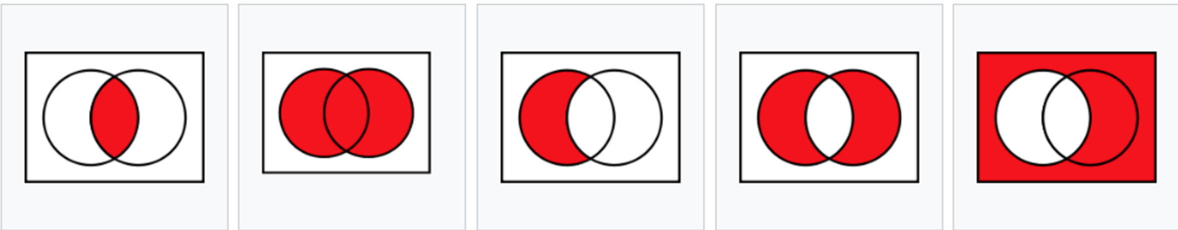
Dann kennzeichnet obige Tabelle eine Und-Bedingung, d.h. nur wenn sowohl A als auch B wahr sind, ist auch A UND B wahr (1), ansonsten falsch (0). Es ist eine „Wahrheitstabelle“ und es gibt 16 verschiedene Möglichkeiten, die Spalten

122 Siehe Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Kafitz, Unendlich, Bd. 70, S. 86

mit Nullen und Einsen zu füllen. Sie entsprechen Und, Oder, Wenn-Dann, Und/Oder, etc.

Als Erster hat sich der US-amerikanische Philosoph Charles Sanders Peirce mit diesem Thema befasst und 1880 einen Aufsatz geschrieben, ihn aber nicht veröffentlicht. 1913 stieß Henry Maurice Scheffer auf die Problemstellung. Er hat sich in der Mathematik durch den Scheffer-Strich oder Scheffer-Operator verewigt, A|B, d.h. wahr überall, wo „nicht UND" gilt (siehe Venn Diagramme).

Die Boolesche Algebra ist ein integraler Bestandteil jeder digitalen Technik und unverzichtbare Funktionalität jeder modernen Programmiersprache. In der heutigen Elektronik müssen ständig Schaltvorgänge zwischen wahr und falsch, 0 oder 1, unterscheiden. Erst ein Quantencomputer kann in Überlagerungen,



$A \cap B$	$A \cup B$	$A \setminus B$	$A \Delta B$	A^c
Schnittmenge	Vereinigungsmenge	Differenzmenge	Symmetrische Differenz	Komplement von A

Abb. 46: Venn-Diagramme betrachten alle Relationen zwischen Mengen, inkl. solcher, die leer sind.

sogenannten Superpositionen, Rechenoperationen ausführen.

Was ist 0^0?

Dazu kann man sich heuristisch einfach der 0 schrittweise mit Hilfe eines wissenschaftlichen Taschenrechners nähern. Zunächst auf der positiven Seite: 1^1=1, 2^2=4, 3^3=27, …Die Kurve steigt also schnell.

$0{,}5^{0{,}5} = 0{,}70710 \ldots$

$0{,}4^{0{,}4} = 0{,}69314 \ldots$

$0{,}3^{0{,}3} = 0{,}696845 \ldots$

$0{,}2^{0{,}1} = 0{,}72477 \ldots$

$0{,}1^{0{,}1} = 0{,}7943 \ldots$

$0{,}01^{0{,}01} = 0{,}95499 \ldots$

$0{,}001^{0{,}001} = 0{,}99311 \ldots$

$0{,}0001^{0{,}0001} = 0{,}99907 \ldots$

Der Grenzwert für 0^0 (von rechts) scheint 1 zu sein.

Man betrachte nun x-Werte auf der linken, negativen Seite:

$(-0{,}1)^{-0{,}1} = error$, $(-0{,}1)^{-0{,}1}$ ist für den Rechner eine unzulässige Eingabe.

$$\frac{1}{(-0{,}1)^{0{,}1}} = \frac{1}{(-0{,}1)^{\frac{1}{10}}} = \frac{1}{\sqrt[10]{-0{,}1}}$$

Nebenstehende komplexe Zahlen sind die Lösungen der Wurzel und können im Nenner stehen. Sie liegen alle auf einem Kreis um den Ursprung und bilden bei n-ten Wurzeln ein regelmäßiges n-Eck (hier n=10). Somit ist der Bruch ebenfalls immer eine komplexe Zahl!

z_0= 0.7555 + 0.2455í
z_1= 0.4669 + 0.6426í
z_2= 0.7943í
z_3= -0.4669 + 0.6426í
z_4= -0.7555 + 0.2455í
z_5= -0.7555 - 0.2455í
z_6= -0.4669 - 0.6426í
z_7= -0.7943í
z_8= 0.4669 - 0.6426í
z_9= 0.7555 - 0.2455í

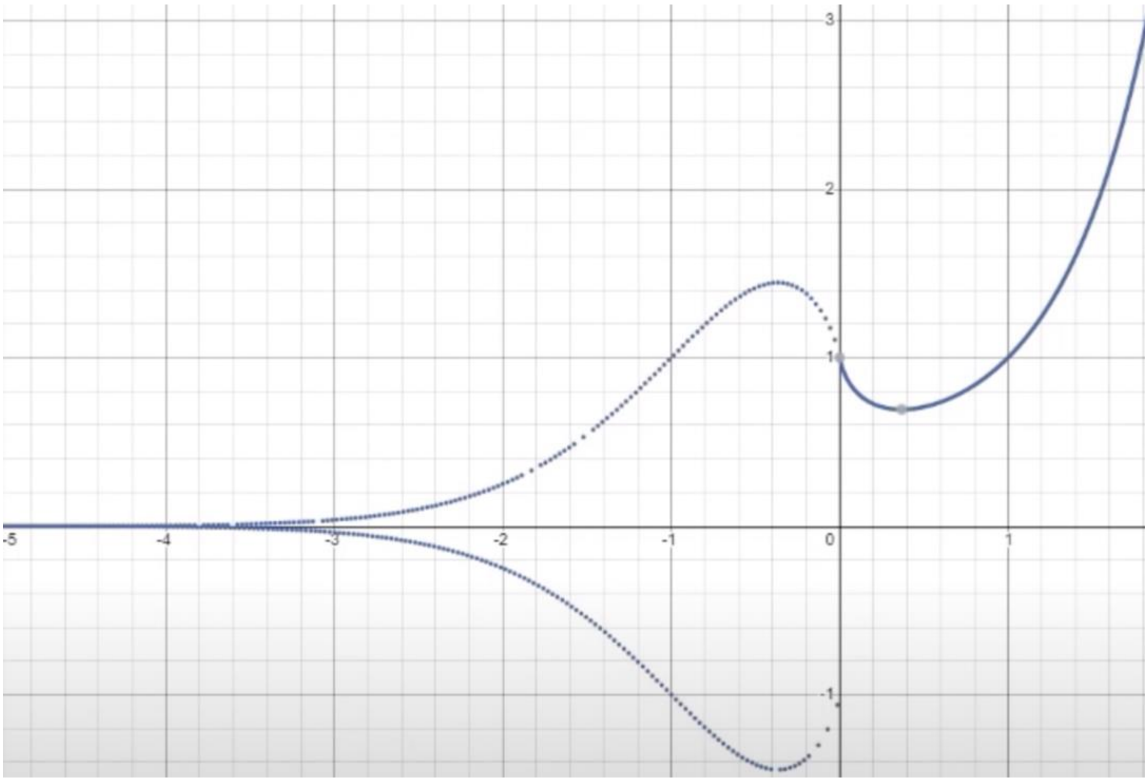


Abb. 47: Graph der Funktion y=x^x. Im negativen x-Bereich ergeben sich reelle positive, reelle negative und komplexe Funktionswerte.

$(-0{,}2)^{-0{,}2} = -1{,}3797\ldots$

$$\frac{1}{(-0{,}2)^{0{,}2}} = \frac{1}{(-0{,}2)^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{-0{,}2}}$$

z_2 ist reell und negativ. Somit hat der Bruch eine reelle, negative Lösung.

z_0= 0.5864 + 0.426í
z_1= -0.224 + 0.6893í
z_2= -0.7248 + 0í
z_3= -0.224 - 0.6893í
z_4= 0.5864 - 0.426í

$(-0{,}4)^{-0{,}4} = +1{,}44267 \ldots$

$\frac{1}{(-0{,}4)^{0{,}4}} = \frac{1}{(-0{,}4)^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(-0{,}4)^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{0{,}16}} = 1{,}44267 \ldots$

z_0 Ist reell und positiv. Somit hat der Bruch eine reelle, positive Lösung.

z_0= 0.6931 + 0í
z_1= 0.2142 + 0.6592í
z_2= -0.5608 + 0.4074í
z_3= -0.5608 - 0.4074í
z_4= 0.2142 - 0.6592í

Wir haben also über die drei Beispiele für negative x-Werte sowohl komplexe Zahlen, reelle positive Zahlen und reelle negative Zahlen als Funktionswerte von $y = x^x$ erhalten.[123] Schon allein diese Beispiele belegen die Unstetigkeit der Funktion x^x bei negativen Werten.

Auch wenn $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = 1$ sinnvoll erscheint, so ist diese Aussage durchaus in der Geschichte der Mathematik umstritten. Der französische Mathematiker Augustin-Louis Cauchy, (1789-1857), listete die Frage unter seine Liste der undefinierten Ausdrücke, ebenso wie z.B. 0/0.[124]

In vielen Fällen muss man aber in diesem Fall per Definition 0^0=1 fordern. Beispiele sind der binomische Satz, die Potenzreihe für die Exponentialfunktion oder die Formel für die Geometrische Reihe.

Auch 0^0:=0 erscheint plausibel, da 0^a=0 für alle a∈ℝ\0.

Im Folgenden wird die Situation insbesondere bei negativem x an einer Umformung untersucht:

$$x^x = e^{x \ln x}$$

Jede komplexe Zahl ω, für die gilt $e^{\omega} = z$ heißt natürlicher, komplexer Logarithmus von z, d.h. es gilt $x = e^{\ln x}$.

Der komplexe Logarithmus ist aber nicht eindeutig, da nach der Eulerschen Identität (siehe „schönste Gleichung aller Zeiten") gilt: $e^{2k\pi i} = 1, k \in \mathbb{Z}$

123 Nach https://www.youtube.com/watch?v=Bnp1-Xd-Eo4

124 Augustin-Louis Cauchy: Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique. 1821, Œuvres Complètes, Teil 2, Band 3, Seite 70. Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Unbestimmter_Ausdruck_(Mathematik)

Meist schränkt man die Vieldeutigkeit auf einen Streifen in der komplexen Ebene ein und nennt dies den Hauptzweig ω ∈ ℂ: $\pi < Im\,\omega \; \leq \; \pi\}$. Im ist der Imaginärteil von ω. Trotzdem muss man sich der Vieldeutigkeit bewusst sein.

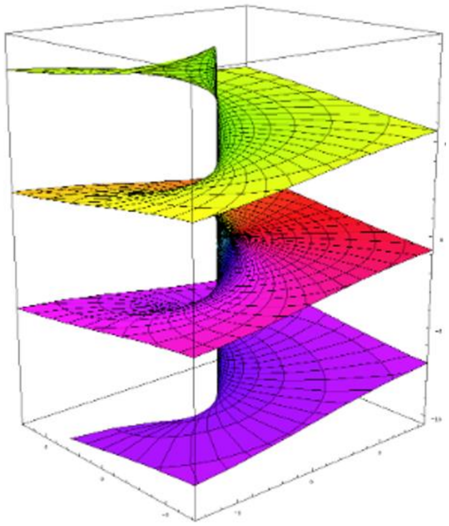


Abb. 48: „Blätter“ des natürlichen komplexen Logarithmus im Abstand 2 π, ab dem Punkt 0.

$\omega = \ln z$ nennt man Hauptwert des Logarithmus.

In Polarkoordinaten:

$\omega = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\; k\in\mathbb{Z}$ bzw.

$\ln z = \ln|z| + i \arg z,$ für k=0

Damit kann man den Logarithmus von negativen reellen Zahlen bestimmen:

$\ln(-x) = \ln|-x| + i\arg(-x) = \ln x + i\pi,$ x∈$\mathbb{R}^+$

Hier muss man beachten, dass im Komplexen die Rechenregeln für Logarithmen nur modulo $2\pi i$ gelten.

Nullmenge

Die euklidische oder archimedische Metrik bestimmt ein Maß in euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$, also z.B. elementargeometrischen Punktmengen, wie Strecken, Flächen oder Räumen. Es ist benannt nach Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941). Es ist das natürliche Maß für viele Formen von Inhalten inkl. der aller offenen und abgeschlossenen Mengen. Man kann das Maß als Funktion auffassen, das einem Objekt eine reelle Zahl größer/gleich Null zuordnet, die als Streckenlänge, Flächeninhalt oder Rauminhalt interpretiert werden kann. Es ist translationsinvariant und invariant gegenüber Spiegelungen oder Drehungen. Auch das Maß unendlich kann auftreten. Ein Beispiel ist die unendliche Mantelfläche von Gabriels Horn (Torricellis Trompete) bei endlichem Volumen.

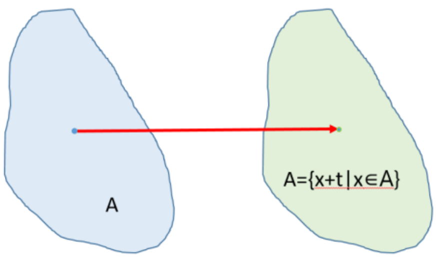


Abb. 49: Translations-Invarianz beim Lebesgue-Maß.

Eine Menge vom Lebesgue-Maß Null nennt man Lebesgue-Nullmenge oder einfach nur Nullmenge. Alle abzählbaren Mengen sind Nullmengen. Die Menge aller rationalen Zahlen ist abzählbar und deshalb eine Nullmenge. Dies gilt ebenso für die algebraischen Zahlen. Auch ein klassisches Beispiel für ein nicht abzählbares Diskontinuum, wie die Cantor-Menge, hat das Lebesgue-Maß Null. Ebenso für Punktmengen, wie z.B. den ganzen p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$, zwischen denen eine bijektive Abbildung (Homomorphismus) zur Cantor-Menge besteht.

Andrei Kolmogorov veröffentlichte 1933 sein Lehrbuch Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in dem er die Maßtheorie zur axiomatischen Fundierung nutzte. Damit kann man auch die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Teil eines Ereignisraumes als Maß ausdrücken, dem man auch das Lebesgue-Maß null zuordnen kann.

Rein formal ist eine Lebesgue-Nullmenge eine Teilmenge z.B. des euklidischen Raumes, die mit beliebig kleinen, offenen „Quadern" überdeckt werden kann. Teilmengen von Nullmengen sind wieder Nullmengen. Jede Menge, die sich mit höchstens abzählbar vielen Nullmengen überdecken lässt, ist wieder eine Nullmenge.

Der „kleine Fermat" und die schönste Gleichung aller Zeiten

Von Pierre von Fermat wurde bereits im 17. Jahrhundert eine Beziehung gefunden, die als kleiner Satz von Fermat, kurz „kleiner Fermat", bekannt ist. Als großer Satz von Fermat wird die sogenannte Fermatsche Vermutung bezeichnet, dass es keine natürliche Zahl n>2 gibt, dass $a^n+b^n=c^n$ mit ganzzahligen a, b, c gilt. $a^2+b^2=c^2$ sind die pythagoräischen Zahlentripel, von denen das bekannteste a=3, b=4 und c=5 ist.

Fermat fand, dass

$$a^p \equiv a \ (mod\ p), a \in \mathbb{Z}, \text{p Primzahl}$$

Falls a kein Vielfaches von p ist, kann man durch a kürzen und der Satz hat die bekannte Form

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$$

Robert Kaplan formuliert den Sachverhalt schon fast poetisch:

In der Welt von p
Kann man nicht a^{p-1} weniger 1
Vom Nichts unterscheiden.

Der Beweis ist nicht schwierig. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass man den kleinen Satz von Fermat über unterschiedlichste Teilgebiete der Mathematik beweisen kann. Das zeigt meistens, welcher tiefe Wahrheitsgehalt in einer mathematischen Beziehung steckt. Im Beweisarchiv von Wikipedia finden sich vier verschiedene Beispiele aus vier verschiedenen Bereichen.[125]

[125] https://de.wikibooks.org/wiki/Beweisarchiv:_Zahlentheorie:_Elementare_Zahlentheorie:_Kleiner_Satz_von_Fermat

- Vollständige Induktion mit Hilfe von Binomialkoeffizienten
- Kombinatorik
- Bijektivität der Multiplikation mit a
- Gruppentheorie

Auch weitere Beweismethoden existieren.

Noch viel auffälliger ist der Bezug zu den wichtigen Zahlen 0 und 1 bei der Eulerschen Identität.

Die Eulersche Identität lässt sich aus einer Taylor-Reihe mit Entwicklungsstelle $x_0=0$ der Funktionen $e^y, \cos(y)\ und\ \sin(y)$ mit $y\in\mathbb{R}$ herleiten. Durch Umgruppieren der Koeffizienten in der Reihe erhält man die trigonometrischen Funktionen als Reihenentwicklung:

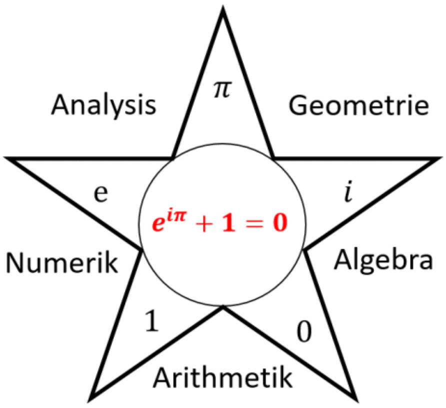


Abb. 50: Fünf der wichtigsten Symbole in der „schönsten Gleichung" aller Zeiten.

$$e^{iy} = 1 + i \cdot y + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i \cdot \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos(y) + i \cdot sin(y),\ \text{mit}\ i^2 = -1$$

Für $y = \pi$ ergibt sich die Eulersche Identität oder Eulersche Formel

$$e^{i\pi} = -1\ oder\ e^{i\pi} + 1 = 0$$

Dies wird als die „schönste Gleichung aller Zeiten" bezeichnet. Sie verbindet fünf der wichtigsten Symbole in der Mathematik.

Das Dualsystem

Gottfried Wilhelm Leibniz hatte am 16. Mai 1696 eine Audienz bei seinem Dienstherrn, Rudolf August, Herzog von Braunschweig-Wolfenbüttel. Wie so oft, vermischen sich theologische und mathematische Argumentationen. Ausgangspunkt ist eine Stelle im Lukasevangelium (10,42): *Unum nessessarium (Eins aber ist nötig)*." Leibniz erklärt dem Herzog ein Zahlensystem, das nur aus der Eins und der Null besteht und verdeutlicht es an den vier Grundrechenarten. Er sinniert darüber später in einer Notiz und wieder sind theologische und mathematische Argumente miteinander verknüpft. Er sieht die Tragweite und greift das Thema mehrfach auf und entwirft sogar eine Silbermünze oder ein Medaillon, das der Herzog tatsächlich als Siegel mit der Inschrift *unus ex nihilo omnia fecit* mit einer stilisierten Eins und Null prägen lässt.

Leibniz hatte damit das Dualsystem entdeckt, das 300 Jahre danach einem neuen Zeitalter seinen Namen geben wird: Die digitale Revolution wird nach der neolithischen und der industriellen Revolution von wesentlichen Forschungsrichtungen als dritten großen Umbruch in der Menschheitsgeschichte gesehen.

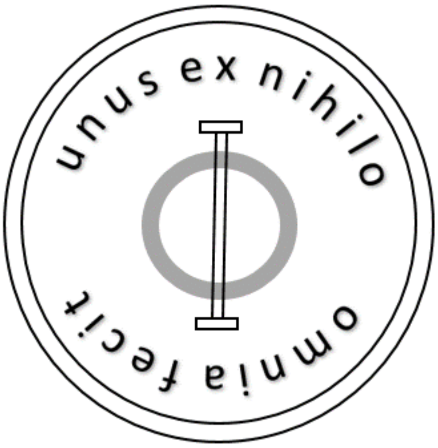


Abb. 51: Siegel zu Ehren der Erfindung des dualen Zahlensystems durch Leibniz.

Im Jahre 1703 veröffentlichte Leibniz die neue binäre Arithmetik im Artikel *Explication de l´arithmétique binaire.* Er erschien in Paris in den *Mémoires de mathématique er de physique de l´Académie royale des sciences.*[126]

Wie jede (b-adische bzw. im Falle einer Primzahl p-adische) Entwicklung einer Zahl wird hier statt der üblichen 10 die Basis 2 gewählt.

Die ersten 11 dezimalen Zahlen lauten in Binärform:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

An je einem Beispiel soll die Multiplikation, Division und Subtraktion von zwei Binärzahlen demonstriert werden. Die Addition ist selbsterklärend.

Es wird zunächst dezimal 9 x 11 = 99 gerechnet, das entspricht 1001*1011.

[126] Bottazzini, ebenda, S. 59

1001 * 1011 = 1100011

1	**0 0**	**0 0 1**	**1 0 0 1**	 **0 0 0**	 **1 0**	 **1**
1	**+1**	**+1 2→0**	**2→0**	**0**	**1**	**1**
1	**1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**

Abb. 52: Binärzahlen multiplizieren

Man multipliziert 1001 zeilenweise mit 1011, beginnend mit der linken 1.
Dabei rückt man pro Zeile eine Position nach rechts.
In der 1. Zeile steht somit 1001 * 1 = 1 0 0 1.
In der 2. Zeile steht 1001 * 0 = 0 0 0 0
In der 3. Zeile steht 1001 * 1 = 1 0 0 1
In der 4. Zeile steht 1001 * 1 = 1 0 0 1
Am Ende wird spaltenweise addiert. Nach der Addition steht im Zwischenergebnis zweimal eine 2, die es im Dualsystem nicht gibt. Sie wird zu 0.

Es soll die Binärzahl 10010 (dezimal 18) durch die Binärzahl 110 (dezimal 6) geteilt werden. Ergebnis ist binär 11 (dezimal 3).

Die führende 1 wird heruntergeschrieben und mit dem Divisor verglichen. Da 1 kleiner 110 steht 0 an erster Stelle des Ergebnisses.

Die 1 wird übernommen und die nächste Ziffer, eine 0, heruntergeschrieben. Wieder ist 10 kleiner als der Divisor, also steht eine weitere 0 im Quotienten.

10 wird übernommen und die 3. Ziffer, eine 0, heruntergeschrieben. Wieder ist 100 kleiner als der Divisor, also hat der Quotient 3 führende Nullen.

100 wird übernommen und 1 heruntergeschrieben. 1001 ist größer 110, d.h. im Quotienten erscheint eine 1.

Nun wird 1001 – 110 = 11 gerechnet und die letzte 0 heruntergeholt. 110 geteilt durch 110 ergibt Rest 0 und damit ergibt sich als Quotient 00011.

Zuletzt eine Subtraktion von binär 10110 (dezimal 22) minus binär 01100 (dezimal 12) = 01010 (dezimal 10).

1) Schritt: vom Subtrahenden das Einserkomplement bilden

   0 1 1 0 0 wird zu
   1 0 0 1 1

2) Schritt: Davon Zweierkomplement bilden

```
        1 0 0 1 1
  +             1
          +1 +1
        _________
        1 0 1 0 0
```

3) Schritt: Addition

```
        1 0 1 1 0
  +     1 0 1 0 0
         +1
        _________
        0 1 0 1 0
```

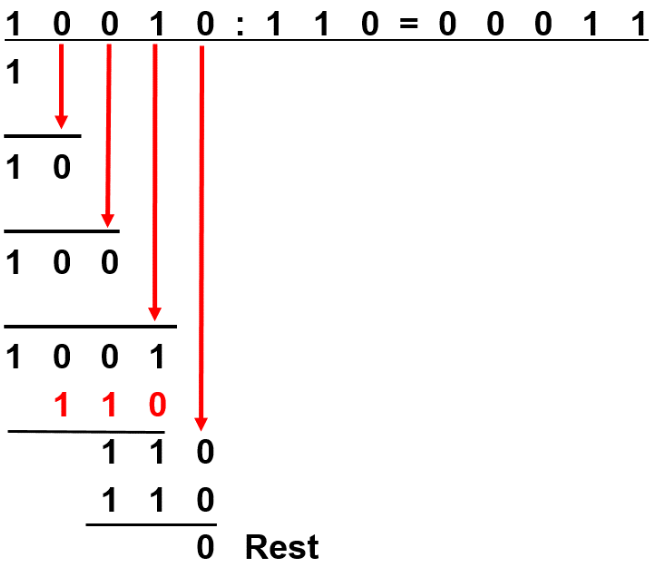


Abb. 53: Binärzahlen dividieren.

Weitere Bezüge zur Null

<u>Nullsummenspiele</u>

Spiele oder auch ökonomische Situationen, bei denen die Gewinne einer oder mehrerer Spielpartner oder ökonomische Parteien (Firmen, Staaten, etc.) und die Verluste der gegnerischen Partei sich zu Null addieren nennt man Nullsummenspiele. Was die eine Partei gewinnt verliert exakt die andere Partei.

Dazu gehören alle Strategiespiele, bei denen der Sieger einen Punkt bekommt und der Verlierer einen Punkt abgezogen bekommt, bei null Punkten im Fall von Unentschieden.

Ein weniger gut passendes Beispiel ist Turnierschach. Wer gewinnt bekommt einen Punkt, wer verliert, bekommt keinen Punkt. Ein Remis bedeutet einen halben Punkt für jeden Spieler.
Fußball ist definitiv kein Nullsummenspiel. Gewonnene Spiele bringen 3 Punkte, ein Unentschieden nur einen Punkt. Die Tordifferenz passt ebenfalls nicht ins Bild.
Jedes Spiel nach dem Motto „The winner takes it all“ ist ein klassisches Nullsummenspiel.
Ökonomisch ist eine Win-Win-Situation, also das ideale Geschäft, kein Nullsummenspiel. Jedoch ist jede Konkurrenzsituation, in der Gewinne der einen Partei, gleiche Verluste für die konkurrierende Partei bedeuten, ein Nullsummenspiel.

<u>Doppelte Buchführung</u>

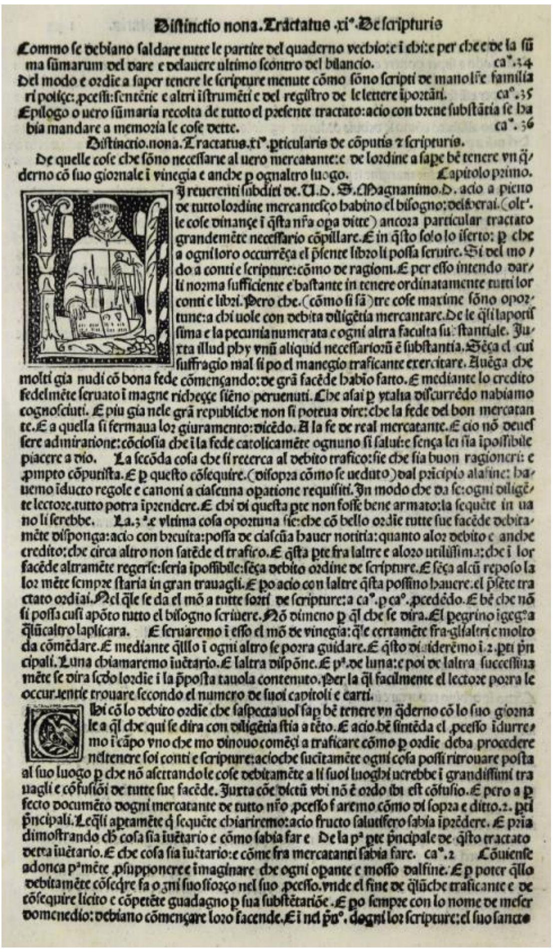
Luca Pacioli war ein sehr produktiver Franziskanermönch, der wichtige Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik geleistet hat. Sein Hauptwerk ist *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*, Venedig 1494, kurz *Summa* genannt.[127] In diesem Werk fasst er das damals bekannte mathematische Wissen zusammen. Unter anderem stellt er nochmals die Ideen aus *liber abaci* von Fibonacci vor und steigert damit deutlich den Bekanntheitsgrad und die Akzeptanz der arabischen Ziffern und der Null. Bemerkenswert ist die bereits erwähnte Tatsache, dass

Abb. 54: Luca Pacioli 1494 – 1994.
Italienische 500-Lire Münze

[127] https://www.cervantesvirtual.com/obra/summa-de-arithmetica-geometria-proportioni-et-proportionalita-1048443

Pacioli in diesem Werk dem Fingerzählen ein eigenes Kapitel widmet.[128] Das zeigt die herausragende Bedeutung, die diese Technik im ausgehenden Mittelalter und zu Beginn der Renaissance immer noch hatte. Auch dies stützt die These vom „Beharrungsvermögen" der römischen Ziffern mangels ausreichendem Bedarf, auf das indisch-arabische Zahlensystem umzusteigen.

De Divina Proportione, ist die erste nennenswerte Zusammenfassung vom Goldenen Schnitt. Die Grafiken in diesem Werk, das digitalisiert vorliegt, stammen zum Großteil von Leonardo da Vinci. Er war Paciolis Schüler in Mathematik und hat seinen Lehrer zu diesem Werk angeregt.[129] Pacioli hat sogar ein Buch über das Schachspiel herausgegeben und es der begeisterten Schachspielerin, der Markgräfin von Mantua, Isabelle d´Este, gewidmet.


Distinctio nona. Tractatus .xi°. De scripturis

Commo se debiano saldare tutte le partite del quaderno vecchio: e i chi: e per che e de la sũma sũmarum del dare e delavere ultimo scontro del bilancio. ca°.34
Del modo e ordine a saper tenere le scripture menute cõmo sono scripti de mano lẽe familiari police: ꝓcessi: sentẽtie e altri istrumẽti e del registro de le lettere iportãti. ca°.35
Epilogo o uero sũmaria recolta de tutto el presente tractato: acio con breue substãtia se habia mandare a memoria le cose dette. ca°.36

Distinctio. nona. Tractatus. xi°. ꝑticularis de cõputis e scripturis.

De quelle cose che sono necessarie al uero mercatante: e de lordine a sape bẽ tenere vn q̃derno cõ suo giornale i vinegia e anche ꝑ ognaltro luogo. Capitolo primo.

I reuerenti subditi de. V. D. S. Magnanimo. D. acio a pieno de tutto lordine mercantesco habino el bisogno: deliberai. (oltre le cose dinançe i q̃sta nr̃a opa ditte) ancora particular tractato grandemẽte necessario cõpillare. E in q̃sto solo lo iserto: ꝑ che a ogni loro occurrẽça el p̃sente libro li possa seruire. Si del modo a conti e scripture: cõmo de ragioni. E per esso intendo darli norma sufficiente e bastante in tenere ordinatamente tutti lor conti e libri. Pero che. (cõmo si sa) tre cose maxime sono oportune: a chi uole con debita diligẽtia mercantare. De le q̃li laportissima e la pecunia numerata e ogni altra faculta sustantiale. Iuxta illud ph'y vnũ aliquid necessariorũ ẽ substantia. Sẽça el cui suffragio mal si po el manegio traficante exercitare. Auẽga che molti gia nudi cõ bona fede cõmençando: de grã facẽde habio fatto. E mediante lo credito fedelmẽte seruato i magne richeçce sieno peruenuti. Che asai ꝑ ytalia discurrẽdo nabiamo cognosciuti. E piu gia nele grã republiche non si poteua dire: che la fede del bon mercatante. E a quella si fermaua lor giuramento: dicẽdo. A la fe de real mercatante. E cio nõ deue essere admiratione: cõciosia che i la fede catolicamẽte ognuno si salui: e sença lei sia ipossibile piacere a dio. La secõda cosa che si recerca al debito trafico: sie che sia buon ragioneri: e ꝓmpto cõputista. E ꝑ questo cõsequire. (disopra cõmo se ueduto) dal pricipio alafine: hauemo iducto regole e canoni a ciascuna opatione requisiti. In modo che da se: ogni diligẽte lectore. tutto potra iprendere. E chi di questa pte non fosse bene armato: la sequẽte in uano li serebbe. La. 3ª. e vltima cosa oportuna sie: che cõ bello ordie tutte sue facẽde debitamẽte disponga: acio con breuita: possa de ciascũa hauer notitia: quanto alor debito e anche credito: che circa altro non satẽde el trafico. E q̃sta pte fra laltre e aloro utilissima: che i lor facẽde altramẽte regerse: seria ipossibile: sẽça debito ordine de scripture. E sẽça alcũ reposo la lor mẽte sempre staria in gran trauagli. E ꝑo acio con laltre q̃sta possino hauere: el p̃sẽte tractato ordiai. Nel q̃le se da el mõ a tutte sorti de scripture: a ca°. ꝑ ca°. ꝓcedẽdo. E bẽ che nõ si possa cusi apõto tutto el bisogno scriuere. Nõ dimeno ꝑ q̃l che se dira. El pegrino igegno a q̃lũcaltro laplicara. E seruaremo i esso el mõ de vinegia: q̃le certamẽte fra glialtri e molto da cõmẽdare. E mediante q̃llo i ogni altro se porra guidare. E q̃sto diuideremo i. 2. pti p̃ncipali. Luna chiamaremo iuẽtario. E laltra dispõne. E pª. de luna: e poi de laltra successiuamẽte se dira scdo lordie i la ꝓposta tauola contenuto. Per la q̃l facilmente el lectore porra le occurrentie trouare secondo el numero de suoi capitoli e carti.

Chi cõ lo debito ordie che saspecta uol sap bẽ tenere vn q̃derno cõ lo suo giornale a q̃l che qui se dira con diligẽtia stia a tẽto. E acio bẽ sintẽda el ꝓcesso idurremo i cãpo vno che mo dinouo comẽçi a traficare cõmo ꝑ ordie deba procedere nel tenere soi conti e scripture: aciochе sucitamẽte ogni cosa possi ritrouare posta al suo luogo ꝑ che nõ asettando le cose debitamẽte a li suoi luoghi ucrebbe i grandissimi trauagli e cõfusiõi de tutte sue facẽde. Iuxta cõe dictũ vbi nõ ẽ ordo ibi est cõfusio. E pero a ꝑfecto documẽto dogni mercatante de tutto nr̃o ꝓcesso faremo cõmo di sopra e ditto. 2. pti p̃ncipali. Le q̃li apramẽte q̃ sequẽte chiariremo: acio fructo salutifero sabia ipẽdere. E pria dimostrando ch̃ cosa sia iuẽtario e cõmo sabia fare. De la pª pte p̃ncipale de q̃sto tractato detta iuẽtario. E che cosa sia iuẽtario: e cõme fra mercatanti sabia fare. ca°.2 Cõuiense adonca p°mẽte ꝓsupponere e imaginare che ogni opante e mosso dal fine. E ꝑ poter q̃llo debitamẽte cõseq̃re fa ogni suo sforço nel suo ꝓcesso. vnde el fine de q̃lũche traficante e de cõsequire licito e cõpetẽte guadagno ꝑ sua substẽtatiõe. E ꝑo sempre con lo nome de meser domenedio: debiano cõmençare loro facende. E i nel p̃n°. dogni lor scripture: el suo sancto

Abb. 55: *Tractatus particularis de computis et scripturis* ist der Beginn der 20-seitigen Abhandlung von Luca Pacioli über die Doppelte Buchführung als Teil der „Summa".

1494 beschreibt Pacioli umfassend das Prinzip der doppelten Buchführung in der ersten Druckschrift zu diesem Thema.

Die Buchführung über getrennte Konten wurde in ersten Formen, zunächst in Venedig, bis zurück ins 13. Jahrhundert praktiziert. Die Vorteile einer ausgeglichenen Bilanz wurden schnell erkannt und sie wurde in den italienischen Stadtstaaten nach und nach eingeführt. Bekanntlich beruht das Prinzip auf streng ausgeglichenen Konten auf der Soll- und Habenseite. Weißt die Gesamtbilanz eine Null aus, so sind die insgesamt doppelt geführten Konten bei Kasse, Lagerbestand, Einkauf, etc. ausgeglichen und somit alles korrekt verbucht. Z.B. bewirkt ein Verkauf eine Abbuchung im Lagerbestand und eine entsprechende Gutschrift im Kassenbestand. Jede

128 Menninger, ebenda, digitalisierte Version S. 245
129 https://archiviostorico.mediobanca.com/wp-content/uploads/2021/01/De-Divina-Proportione.pdf, siehe auch die Hinweise auf Pacioli und Leonardo da Vinci im Kapitel Entstehungsgeschichte und Verbreitung

Transaktion führt in der Summe aller Kontenbuchungen zu einer Null. Luca Pacioli macht aus dem Rechnungswesen eine transparente, mathematische und damit logische Technik.

Auch im übrigen Europa wurden die Vorteile rasch erkannt. Mattäus Schwartz, der Buchhalter von Jacob Fugger dem Reichen, schrieb 1518 in sein Handbuch, dass die doppelte Buchführung „ein Spiegel“ sei, „in den man sowohl sich selbst wie andere sieht, sowohl Fragen wie Antworten.“[130]
Vielleicht ist es Zufall, vielleicht aber auch eine naheliegende Analogie, dass in dieser Zeit wichtige Erhaltungssätze der Physik formuliert wurden.

Nullfläche (Physik, Kartografie)

Lösungen der allgemeinen Relativitätstheorie sehen vor, dass die Innenfläche einer Kugel, die dem Ereignishorizont einbeschrieben ist, eine „geschlossene, eingeschlossene Oberfläche“ ist. Der Begriff geht auf Roger Penrose zurück, der ihn 1985 prägte (*closed trapped surfaces*).[131] Synonym wird der Begriff „eingefangene Nullfläche“ verwendet.

In der Kartografie ist es eine horizontale Fläche ohne Höhenlinien oder Bergrücken, die als Referenz für die abgebildete Karte dienen kann. Global gesehen, ist die mittlere Meereshöhe („Normalnull“, NN) die Referenz für Karten von Landmassen. Es ist die geodätische Nullfläche. Geht es um Seekarten, so ist Normalnull im umgekehrten Sinne die Nullfläche.

Nullwert

Der britische Mathematiker und Informatiker Edgar Frank „Ted“ Codd (1923-2003) war ein Pionier bei relationalen Datenbanken. Er unterschied zwischen zwei Null-Zuständen in der Informatik, die das Fehlen eines Wertes anzeigen: die Abwesenheit eines Wertes, weil keiner existiert ("*property inapplicable*"), oder die Abwesenheit, da man den Wert (noch) nicht kennt ("*value at present unknown*"). Ein Nullwert steht für die Abwesenheit eines Wertes, ein Nullwert ist aber gleichzeitig ein Wert. Z.B. kann das Nullzeichen (NUL, Unicode U+2400) dafür verwendet werden
Man denke sich z.B. eine Datenbank für eine medizinische Reihenuntersuchung. Zu Beginn sind die Ergebnisfelder alle unbearbeitet, entsprechende Werte sind noch unbekannt und sind somit alle mit Nullwerten belegt. Ist der zu untersuchende Befund negativ, so kann dies der konkrete Wert „0“ repräsentieren und gleichzeitig anzeigen, dass der Proband untersucht wurde.

---

[130] Zitiert nach Kaplan, ebenda, S. 112
[131] https://de.wikibrief.org/wiki/Trapped_surface

Der Nullwert ist somit verschieden von der Zahl 0, da diese eine konkrete Information darstellt und dient lediglich der Vorbelegung des Feldes in der Datenbank.[132]
Es gibt aber auch in Programmiersprachen die Integritätsbeziehung NOT Null. Sie verhindert, dass Nullwerte im Sinne nicht festgelegter Werte eingegeben werden können.

Fazit

Die Entdeckung der Null war ein kognitiver Geniestreich in der Menschheitsgeschichte. Sie ist vergleichbar in der Bedeutung für die Mathematik mit der Erfindung des Rades für die Technikgeschichte. Sie war zunächst Leerzeichen, entwickelte aber ihre Bedeutung vor allem in einem Positionssystem oder Stellenwertsystem. Das kommt mit wenigen Ziffern aus, die je nach Position in der dargestellten Zahl und je nach Basis (binär, oktal, dezimal, hexadezimal, etc.) unterschiedliche Werte darstellen. Im täglichen Gebrauch hat sich das Dezimalsystem weltweit durchgesetzt, doch in Spezialgebieten, vor allem in der Informatik, erweist sich das Binärsystem, Oktal- oder Hexadezimalsystem als wichtig.

Die Null in einem Stellenwertsystem wurde von den Sumerern aber auch der Maya und Inka entdeckt und vervollkommnet. Doch die geografische Abgeschiedenheit der Maya verhinderte die Weitergabe. Dies gilt auch für die Inkas. Zweifellos gebührt das hauptsächliche Verdienst für Entdeckung und Verbreitung den Indern. Die besondere Bedeutung liegt an den entscheidenden Unterschieden bei den Kulturen mit einer Zahlschrift in einem Positions- oder Stellenwertsystem. Die Sumerer und Babylonier hatten in ihrem 60-er System nur die Eins und die Zehn, aus denen sie alle Zahlen bis 59 bildeten. Die Maya ordneten ebenfalls nur der Eins und der Fünf eigene Zeichen in ihrem 20-er System zu. Die Inder gingen den logischen Schritt, den Ziffern von 1 bis 9 bzw. 0 bis 9 eigene Zeichen zuzuordnen, die sich im Schriftbild klar absetzten und auch in größeren Zahlen übersichtlich und mathematisch handhabbar blieben. Durch Kontakte mit dem islamisch-arabischen Kulturkreis wurden die Zahlen 0 bis 9 im arabischen Raum adaptiert. Es entstanden leichte Unterschiede in den Schreibweisen zwischen ostarabischer und westarabischer Kultur. Die westarabische Kultur manifestierte sich im Süden der iberischen Halbinsel. Friedliche Kontakte und kriegerische Auseinandersetzungen führten dort dazu, dass die Vorteile der indisch-arabischen Ziffern in westarabischer Notation sowie der Null im christlichen Abendland erkannt wurden. Aber teils irrationales Beharrungsvermögen blockierte lange Zeit das neue Rechnen und verhinderte,

[132] Quelle: de.m.wikipedia.org/wiki/nullwert

dass die unpraktischen römischen Zahlen an Bedeutung verloren. Das lag aber auch am Bedarf in großen Teilen der Bevölkerung, die wenig oder gar nicht lesen und schreiben konnte. Das Kerbholz und andere Dokumentationsmittel erfüllten gemeinsam mit dem „international standardisierten“ Fingerzählen und –rechnen bis ins 20. Jahrhundert hinein ihren Zweck. Erst der wachsende Bildungsstand und durch die Anforderungen spätestens seit der Renaissance in Handel, Verwaltung, Bankwesen, Technik und Wissenschaft wurde in einem dezimalen Stellenwertsystem gerechnet und mit arabischen Ziffern notiert. Die römischen Zahlen haben heute fast nur noch dekorativen Charakter.

Die Null wurde zuerst verspottet und dann letztendlich als vollwertige Ziffer akzeptiert. Heute ist sie aber mehr als nur eine Ziffer unter mehreren. Als Zahl hat sie in zahlreichen Gebieten der Mathematik eine herausragende Bedeutung. Sie wird aber auch in zahlreichen Begriffen verallgemeinert. Dazu gehören die abstrakte Algebra, algebraische Zahlentheorie, mengentheoretische Topologie, Funktionentheorie, usw. Der Fundamentalsatz der Algebra ist ein zentraler Baustein im Mathematikgebäude geworden. Auch andere Wissensbereiche haben die Null in speziellen Begriffen verallgemeinert; so z.B. das Nullsummenspiel in der Spieltheorie und den Wirtschaftswissenschaften oder die Nullfläche in der Kartografie.

Der Null gebührt also Respekt. Sie ist längst mehr als nichts.

Literaturhinweise

Beutelspacher, Albrecht: Null, unendlich und die wilde 13, Verlag C. H. Beck, München 2020

Bottazzini, Umberto: Wie die Null aus dem Nichts entstand, dtv, München 2021, deutsche Erstausgabe, italienische Originalausgabe 2019

Cardano, Hieronymus; Nürnberg 1545, Ars magna, https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/2690143

Deiser, Oliver; Lasser, Caroline; Vogt, Elmar; Werner, Dirk: 12 x 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2016

De Padova, Thomas: Alles wird Zahl, Verlag Carl Hanser, München 2021

Gericke, Helmuth: Geschichte des Zahlbegriffs. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970

Euklid, Elemente,
Übersetzung aus dem Griechischen Johann Friedrich Lorenz, Halle, 1781
https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/6750/32

Gericke, Helmuth: Mathematik in Antike und Orient. Springer, Berlin u. a. 1984

Glosauer, Tobias: Elementar(st)e Gruppentheorie, Springer Spektrum, Wiesbaden 2016

Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Campus, Frankfurt 1986.

Kaplan, Robert: Die Geschichte der Null. 6. Taschenbuchausgabe, Piper, München 2006, (englisches Original 1999).

Leonardo di Pisa , Liber abaci, 1202 (MCCII), digitalisiert Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze, https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=1. Dazu wurde ein Download beantragt und vom Museo Galileo zur Verfügung gestellt.

Menninger, Karl: Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahl. 3. Aufl., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1979, https://digi20.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/goToPage/bsb00107066.html?pageNo=50

Menninger, Karl, Zahlschrift und Rechnen, Bd. 2, ebenda, digitalisiert ab S. 224

Meschkowski, Herbert; Mathematisches Begriffswörterbuch, BI Hochschultaschenbücher Band 99, Mannheim 1971

Mukherjee (oder Parthasarathi Mukhopadhyay): Discovery of Zero and its impact on indian mathematics, Calcutta 1991, https://www.researchgate.net/publication/337212771_Origin_of_Zero-An_Eternal_Enigma/link/617a9f563c987366c3f5fb3b/download

Pacioli, Luca; Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita, Venedig 1494, https://www.cervantesvirtual.com/obra/summa-de-arithmetica-geometria-proportioni-et-proportionalita-1048443

Ries, Adam, Rechnung auff der Linihen und Federn, digitalisiert durch Deutsches Museum: http://digital.bib-bvb.de/view/bvbmets/viewer.0.6.4.jsp?folder_id=0&dvs=1674737473716~317&pid=2471296&locale=de&usePid1=true&usePid2=true

Rinkens, Hans-Dieter; Krüger, Katja; Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer-Spektrum, Wiesbaden 2020

Rotman, Brian: Die Null und das Nichts. Eine Semiotik des Nullpunkts. Aus dem Englischen von Petra Sonnenfeld. Kulturverlag Kadmos, Berlin 2000, ISBN 978-3-931659-17-2.

Rovelli, Carlo; Es gibt Orte auf der Welt, an denen Regeln weniger wichtig sind als Freundlichkeit, Essays, Rowoldt, Hamburg, 2022

Schlote, Karl-Heinz Hsgr.; Chronologie der Naturwissenschaften Der Weg der Mathematik und der Naturwissenschaften von den Anfängen in das 21. Jahrhundert, https://slub.qucosa.de/api/qucosa%3A7968/attachment/ATT-0/

Seife, Charles: Zwilling der Unendlichkeit: Eine Biographie der Zahl Null. München 2002.

Sigmund, Karl; Sie nannten sich „Der Wiener Kreis“, Springer. 2. wesentlich erweiterte Ausgabe, 2018

Stifel, Michael, Arithmetica Integra, Norimbergae (Nürnberg) 1544 https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/1317/1

Sturm, Klaus (Hrsg.): Diagonal. Nr. 0. Siegen, o. J. ISSN 0938-7161 (Null-Nummer der Zeitschrift Diagonal mit zahlreichen Beiträgen zum Thema „Null“.) https://dewiki.de/Lexikon/Null

Vogel, Kurt: Vorgriechische Mathematik II: Die Mathematik der Babylonier. Schroedel, Hannover und Schöningh, Paderborn 1959

Wußing, Hans: 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Wußing, Hans: 6000 Jahre Mathematik, Band 2, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Abbildungsnachweise:

Abb. 1: Tarot-Karte, „Der Narr“ als Null https://de.wikipedia.org/wiki/Der_Narr_%28Tarot%29#/media/Datei:RWS_Tarot_00_Fool.jpg

Abb. 2: Fingerzahlen aus dem 1492 gedruckten Werk von Pacioli. Bis auf die handvertauschten 100-er und 1000-er ist es exakt die Darstellung von Beda. Quelle: Menninger, Bd. 2, digitalisiert S. 232, Original Bd. 2, S. 5

Abb. 3: Einfache Kerbhölzer orientierten sich am quinären System, wie auch die Fingerzahlen.
Bidquelle: Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Campus, Frankfurt 1986, S. 175

Abb. 4: Kerbholz zur Abrechnung von Milch einer Dorfgemeinschaft durch einen Sennhirten. Bildquelle: Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahl. Digitalisierte Version S. 260

Abb. 5: Umgang mit „Bauernzahlen“ bei Gottfried Kellers „Grüner Heinrich“, https://www.deutschestextarchiv.de/book/show/keller_heinrich01_1854

Abb. 6: Kerbholz zum Nachweis für Dienstleistungen. https://www.redensarten.net/etwas-auf-dem-kerbholz-haben/

[133] Die Beschriftung in Wikipedia ist nicht korrekt. Den höchsten Grad an Regeln erfüllen Abelsche Gruppen.

Personenverzeichnis

Danksagung

Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl bin ich zuallererst dankbar, dass er klaglos innerhalb relativ kurzer Zeit wieder als Mentor zur Verfügung stand. Wieder waren es die kleinen, aber feinen Impulse, die eine sinnvolle Ergänzung bewirkten. Ich bin darüber hinaus Prof. Köhl insbesondere für seine Unterstützung, dass ich meinen bescheidenen Beitrag zur Popularisierung der Mathematik leisten kann, zu großem Dank verpflichtet.

Herr Dr. Michael Serafin bleibt für mich der wichtigste Kontakt zur „Oberhessischen naturwissenschaftlichen Gesellschaft“. Mit bewundernswerter Akribie hat er das Manuskript gelesen und seine Qualitätssicherung sorgt immer dafür, dass möglichst jede Unregelmäßigkeit entdeckt wird. Mit seinem Engagement sorgt er über die Zeitschrift hinaus für einen wichtigen Beitrag zur Sichtbarkeit der wissenschaftlichen Gesellschaft. Herrn Dr. Serafin danke ich dafür als Autor und als Mitglied.

FÜR FARI