

WAHRHEIT und REALITÄT

Gedanken zu mathematischen und physikalischen Grundsatzfragen

WILLI KAFITZ*)

Abstract:

David Hilbert wanted to achieve a complete axiomatization of mathematics. But Kurt Gödel showed that not only the Peano axioms, but any axiom system, even one with infinitely many rules/axioms, is incomplete. He further showed that if a given system of axioms for arithmetic appears to be free of contradictions, then the system itself is not able to prove its freedom from contradictions. Gödel's incompleteness theorem showed the limits of mathematics. Truth and proof are not the same.

For a jubilee volume for Einstein's 70th birthday, Kurt Gödel wrote an article concerning science of his friend Albert Einstein. He found: There is a whole class of solutions to general relativity that lead to rotating universes and that have disturbing implications for our understanding of time.

Quantum theory poses great challenges to common sense. Locally realistic explanations are ruled out. Hidden variables cannot exist (Bell's inequality). In this case, if the wave function is non-local, nature seems to give up the principle of locality. The de Broglie-Bohm theory follows this path.

The Copenhagen interpretation denies that quantum mechanics even allows for a realistically oriented explanation. The initial state is in principle inaccessible.

Keywords:

Axiomatization, incompleteness theorem, continuum hypothesis, Gödel-universe, uncertainty principle, abandonment of locality, Copenhagen interpretation, De-Broglie-Bohm theory

Zusammenfassung:

David Hilbert wollte eine vollständige Axiomatisierung der Mathematik erreichen. Doch Kurt Gödel zeigte, dass nicht nur die Peano-Axiome, sondern jedes Axiomensystem, sogar eines mit unendlich vielen Regeln/Axiomen, unvollständig ist. Er zeigte weiterhin, wenn ein gegebenes Axiomensystem für die Arithmetik frei von Widersprüchen scheint, so ist das System selbst nicht in der Lage, seine Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Der gödelsche Unvollständigkeitssatz zeigte die Grenzen der Mathematik auf. Wahrheit und Beweis sind nicht dasselbe.

Für einen Jubiläumsband zu Einsteins 70. Geburtstag verfasste Kurt Gödel einen Beitrag aus dem Bereich seines Freundes Albert Einstein. Er fand heraus: Es gibt eine ganze Klasse von Lösungen der Allgemeinen Relativitätstheorie,

die zu rotierenden Universen führen und die verstörende Implikationen auf unser Zeitverständnis haben.

Die Quantentheorie stellt den gesunden Menschenverstand vor große Herausforderungen. Lokal-realistische Erklärungen scheiden aus. Verborgene Variablen können nicht existieren (Bellsche Ungleichung). Wenn die Wellenfunktion nicht-lokal ist, so scheint in diesem Fall die Natur das Prinzip der Lokalität aufzugeben. Die De Broglie-Bohm-Theorie geht ebenfalls diesen Weg. Die Kopenhagener Deutung bestreitet, dass die Quantenmechanik überhaupt einen realistisch orientierten Erklärungsansatz zulässt. Der Ausgangszustand sei prinzipiell unzugänglich.

Schlüsselwörter:

Axiomatisierung, Unvollständigkeitssatz, Kontinuumshypothese, Gödel-Universen, Unschärferelation, Aufgabe der Lokalität, Kopenhagener Deutung, De-Broglie-Bohm Theorie

Zitate

In der Welt der Mathematik ist alles im Gleichgewicht und perfekt geordnet. Sollte man nicht dasselbe für die Welt der Realität annehmen?

Kurt Gödel

Vor Allem aber möchte ich unter den zahlreichen Fragen, welche hinsichtlich der Axiome gestellt werden können, dies als das wichtigste Problem bezeichnen, zu beweisen, daß dieselben untereinander widerspruchslos sind, d.h. daß man auf Grund derselben mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu Resultaten gelangen kann, die miteinander in Widerspruch stehen.¹

David Hilbert

Wir müssen uns daran erinnern, dass das, was wir beobachten, nicht die Natur selbst ist, sondern Natur, die unserer Art der Fragestellung ausgesetzt ist.²

Werner Heisenberg

Hinter den offenbar grundlegenden Sinneseindrücken, die vom Bewusstsein reflektiert werden, existiert keine materielle Welt.³

George Berkley

Es gibt triviale Wahrheiten und es gibt große Wahrheiten. Das Gegenteil einer trivialen Wahrheit ist einfach falsch. Das Gegenteil einer großen Wahrheit ist auch wahr.⁴

Niels Bohr

"Genügend reichhaltig" oder nicht:

Widerspruchsfreiheit

ist eine Mangelerscheinung

oder ein Widerspruch.⁵

Hans Magnus Enzensberger, aus: Hommage an Gödel

¹ Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900

² Zitiert nach G. Rasche und B. L. van der Waerden, „Werner Heisenberg und die moderne Physik“, in: Werner Heisenberg, Physik und Philosophie (Stuttgart: Hirzel 4/1984), S. 41

³ Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, 1710

⁴ Quelle: https://www.science-at-home.de/wiki/index.php/Niels_Bohr

⁵ Zitiert nach <http://www.ingo-tessmann.de/goedel/enzensberger.html>

Inhalt

Einleitung und Fokus	4
Einige Grundsatzfragen der Mathematik	6
Einige Grundsatzfragen der Physik	28
Fazit	57
Literaturverzeichnis	60
Danksagung	63
Personenregister	64

Einleitung und Fokus

Zweifellos war David Hilbert der einflussreichste Mathematiker zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Viele seiner Impulse führten zu neuen Forschungsgebieten und schufen klarere Begriffe, Beweise und Methoden. Ein wichtiges Anliegen war ihm die vollständige Axiomatisierung der Mathematik. Es war deshalb ein riesiger „Schlag ins Kontor“, als Kurt Gödel seinen „Unvollständigkeitssatz“ bewies und 1931 veröffentlichte. Damit wurde deutlich, dass es eine vollständig bewiesene Widerspruchsfreiheit in der Mathematik nicht geben kann. Es wird immer wieder Sätze geben, die unentscheidbar in jedem beliebig großen und zumindest in einem Axiomensystem sind, das so reichhaltig wie die Arithmetik ist. Sie können wahr sein, aber sie sind nicht beweisbar. Gödel lieferte später ein Beispiel mit der sogenannten „Kontinuumshypothese“. Ob es zwischen dem abzählbar Unendlichen, z.B. den natürlichen Zahlen und dem nicht abzählbar Unendlichen des Kontinuums der reellen Zahlen auf dem Zahlenstrahl noch Zwischenstufen gibt, ist im gängigen Axiomensystem nicht entscheidbar. Immerhin führt die Annahme, die Kontinuumshypothese sei korrekt, zu keinem Widerspruch. Mathematische Wahrheit und mathematischer Beweis müssen also nicht dasselbe sein.

Immanuel Kant prägte den Ausdruck „das Ding an sich“ und meinte damit das, was man mit objektiver Realität bezeichnen kann. Er stritt dabei aber ab, dass Menschen in der Lage sind, diese objektive Realität wahrzunehmen. Für Kant sind „Dinge-an-sich“ Bestandteile der Außenwelt, die nur über Wahrnehmungen schlaglichtartig zugänglich sind. Er erkennt aber an, dass diese Wahrnehmungen in gleicher Weise in das menschliche Bewusstsein gelangen und deshalb überprüfbar sind. Hier kann man ansetzen, um insbesondere in der Naturbeschreibung sich möglichst nahe einer „objektiven Realität“ zu nähern. Das gilt für die Quantenphysik, die unser Weltbild und unser Realitätsverständnis verändert hat, aber auch für die Kosmologie. Auch hierzu hat Kurt Gödel einen Beitrag geliefert. Für einen Jubiläumsband aus Anlass vom 70. Geburtstag seines Freundes Albert Einstein stürzte er sich in die Mathematik

der Allgemeinen Relativitätstheorie. Er fand eine ganze Klasse von Lösungen, die alle ein rotierendes Universum beschreiben und verstörende Auswirkungen auf das Verständnis der „Zeit“ haben.

David Bohm, Doktorand von J. Robert Oppenheimer, Schüler von Albert Einstein und Schöpfer einer alternativen Interpretation der Quantentheorie, hat Möglichkeiten und Grenzen der Erkenntnis in seinem Werk „Die implizite Ordnung“⁶ untersucht. Als „Explizite Ordnung“ bezeichnet er die dreidimensionale Welt der Objekte, des Raumes und der Zeit. Verständnis (der Realität) ist nur auf einer tieferen Ebene möglich – der „Impliziten Ordnung“. Doch er erkennt an, dass nur die Summe unserer individuellen Erfahrungen (physisch, psychologisch, spirituell) Zugang zu dieser Ebene schafft. Er beginnt insbesondere bei sprachlichen Strukturen, die zweifellos Denkstrukturen zumindest stark beeinflussen, wenn nicht gar determinieren. Bedeutung ist für ihn eine Form des Seins.⁷ Wir verstehen die Welt nur so weit, wie wir sie beschreiben können. Aber wir schaffen auch die Welt, in dem wir sie beschreiben. Und die Welt verändert sich, wenn wir im Dialog mit ihr zu einem modifizierten Verständnis kommen. Weiterhin kann man über Sprache teilweise die Brücke zur Logik und damit zur Mathematik schlagen. Bohm konstatiert, dass in allen modernen Sprachen eine Subjekt-Prädikat-Objekt Struktur vorherrscht. Dabei kann das Objekt sich auf das Subjekt beziehen und damit eine reflexive Aussage treffen. Diese generell vorherrschende Struktur führt nach Bohm dazu, dass lediglich fragmentierte Aussagen möglich sind und damit insbesondere dynamische Vorgänge schlechter beschrieben werden können. Bohm stand in der ersten Reihe führender theoretischer Physiker seiner Zeit. In seinen späteren Werken wandte er sich verstärkt der Philosophie und Mystik zu und hat in dem „Dreiklang“ aus Wissenschaft, Mystik und Philosophie wesentliche Beiträge geliefert. *„Ich glaube, man macht damit einen Rückzieher. Wenn man die theoretische Physik zu schwer findet, wendet man sich der Mystik zu.“* Dieser böse Satz von Stephen Hawking trifft auf David Bohm nicht zu.⁸

Jahrzehntelang dominierte die sogenannte „Kopenhagener Deutung“ der Quantentheorie. Den freundschaftlichen Streit zwischen Albert Einstein und Niels Bohr hat Bohr nach Ansicht vieler Physiker für sich entschieden. Die mathematische Seite der Theorie ist die genaueste Beschreibung eines naturwissenschaftlichen Modells, das wir kennen. Dies gilt vor allem für die

⁶ David Bohm; Die implizite Ordnung, Deutsche Ausgabe 2. Auflage 2021, Crotona Verlag, Amerang

⁷ Vergleiche dazu Renée Weber, Alles Leben ist Eins, Crotona Verlag, Dt. Ausgabe 2019, S. 38

⁸ Zitiert nach Weber, ebenda, S. 39

Quantenfeldtheorie (QFT), die Teilchen und Felder einheitlich beschreibt. Bisher gibt es kein Experiment, das Diskrepanzen zur Theorie aufgezeigt hat. Warum also nach dem fragen, was man nicht beantworten kann: Was ist die eigentliche Realität hinter dieser perfekt funktionierenden, faszinierend präzisen Theorie? Es war deshalb viele Jahre ein „Karrierekiller“, wenn man sich mit alternativen Interpretationen beschäftigen wollte. „*Shut up and calculate*“⁹ wurde jungen Wissenschaftlern geraten, wenn sie philosophische Ambitionen entwickelten. Die Frage nach der eigentlichen physikalischen Realität wurde lange zurückgestellt oder besser zurückgedrängt und dies ist nach wie vor eine verbreitete Haltung. Man hat kein Problem mit der Realität, weil eine fast perfekte Theorie keinen Anlass gibt, über die Realität nachzudenken. Der vorliegende Beitrag soll Gedanken zur mathematischen Wahrheit und der physikalischen Realität ansprechen. Der Autor ist ein mathematischer Naturwissenschaftler und kein „gelernter“ Philosoph. Trotzdem sind Rückgriffe auf die Philosophie unvermeidlich, aber müssen deshalb unvollkommen bleiben.

Einige Grundsatzfragen der Mathematik

Man kann sagen, dass bis zur 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts die Mathematik (wieder) auf festen Füßen stand. Sie hatte zwei große Krisen überwunden. Da war zuerst die Entdeckung der irrationalen Zahlen, die dem Pythagoräer Hippassos von Metapont zugeschrieben wird und die die griechische Mathematik stark erschütterte. Doch auch rationale Zahlen, die als „kommensurabel“ galten, waren für die Griechen lediglich Werte. So konnten über diesen Weg schließlich die irrationalen Zahlen in das Gesamtgebäude der Mathematik integriert werden. Heron von Alexandria schrieb:

*„Rationale und irrationale Größen gehören beide nicht zu dem an sich Gedachten, sondern zu dem mit Anderem Verglichenen.“*¹⁰

Eine zweite Krise stellte die Entdeckung der Infinitesimalrechnung durch Leibnitz und Newton dar. Sie „funktioniert“ hervorragend, trug aber anfangs den Makel eines mathematischen Tricks in sich. Eine positive Größe dx nähert sich der Null und wird am Ende der Umformungen gleich Null gesetzt, obwohl vorher durch dx dividiert wurde. Erst Cauchy und Weierstraß haben eine saubere Formulierung gefunden, die diesen Konflikt beseitigt hat.

Mit dem Namen Georg Cantor begann eine turbulente Phase in der Mathematik. Schon die Griechen haben nur das potentiell Unendliche indirekt akzeptiert.

⁹ N. David Mermin 1990, *Boojums All the Way Through: Communicating Science in a Prosaic Age* (Cambridge), S. 199

¹⁰ https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf

Man musste es schließlich nicht „unendlich“ nennen, denn zu den natürlichen Zahlen, geraden Zahlen oder Primzahlen fand man immer noch eine weitere Zahl. Das aktuell Unendliche, wir würden es heute eine unendliche Menge nennen, war streng verpönt. Cantor war klar, dass es mindestens zwei verschiedene „Unendlich“ geben musste, denn es gibt keine Surjektion von einer abzählbar unendlichen Menge in ihre Potenzmenge. Damit konnte er sogar ganze Klassen von Unendlichkeiten durch jeweilige Bildung der Potenzmenge postulieren. Diese Mengen (nicht ihre jeweiligen Elemente) sind abzählbar unendlich. Seine Thesen spalteten die „reine“ Mathematik, er wurde sogar von seinem einflussreichen Doktorvater Leopold Kronecker persönlich als „Verderber der Jugend“ angegriffen. Für die Positivisten, denen die a priori Wissenschaft Mathematik schon vorher zu weit ging, war nun endgültig eine Grenze überschritten. David Hilbert, obgleich im Grunde seines Herzens ebenfalls Positivist, stand auf der Seite Cantors, da er das Potential der neuen Möglichkeiten sah. Allerdings hat der naive Mengenbegriff Cantors schnell Paradoxien aufgezeigt, zuerst durch Bertrand Russell, Autor von *The Principles of Mathematics*,¹¹ der Aussagen zur Menge aller Mengen als widersprüchlich erkannte.¹² Cantor sah dies, trotz vieler verletzender Anfeindungen, gelassen. Er war sich sicher, dass das Axiomensystem so erweitert werden könnte, dass Paradoxien ausgeschlossen werden können. Doch die Unsicherheiten vergrößerten sich, je mehr sich die Ansicht durchsetzte, dass Mathematik nur erweiterte und angewandte Logik sei. Man konnte drei Gruppen von Logikern unterscheiden: Formalisten (wie Hilbert), Intuitionisten (wie Brouwer) und Logizisten (wie Frege). Hilbert kämpfte vor allem gegen Brouwer, der die mangelhafte Konsistenz der Grundlagen z.B. in der Anwendung des Widerspruchsbeweises sah: *Tertium non datur*, das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten, ist eine uralte, etablierte Methode der Beweisführung. Um eine Aussage A zu beweisen, nimmt man an, dass A nicht gilt und führt dies zum Widerspruch. Brouwer lehnte dies ab. Später etablierte sich u.a. dafür der Begriff „Konstruktivismus“. Heute hat sich ein gewisser Kompromiss herausgebildet. Im Zweifel ist ein direkter Beweis vorzuziehen. Erst wenn dies nicht möglich ist, sollte man per Widerspruch beweisen. Man muss sich jedoch darüber im Klaren sein, dass dann sowohl ein Widerspruch zur Annahme als auch ein subtiler Widerspruch im Axiomensystem vorliegen kann.

Man beachte, dass dem Standpunkt von Brouwer und dem von Hilbert verschiedene Wahrheitstheorien zugrunde liegen. Alle Aussagen mit rein syntaktischen Eigenschaften und zwar unabhängig von ihrer Form bzw. ob sie

¹¹ <https://people.umass.edu/klement/pom/pom.pdf>

¹² Bekannte Beispiele: 1) Ein Friseur hat ein Schild im Laden: „Ich rasiere alle, die sich nicht selbst rasieren“. Rasiert er sich nun selbst oder nicht?

2) Der Kreter Epimenides sagt: „Alle Kreter sind Lügner“. Lügt er oder lügt er nicht?

verifiziert oder falsifiziert werden können, sind wahre oder falsche mathematische Aussagen. Das gilt erst recht für Formeln einer beliebigen Metatheorie (z.B. Mengenlehre, Zahlentheorie, Topologie, etc.).

Der konstruktivistische Ansatz schaut zwar ebenfalls auf die Syntax, aber auf Basis einer realistischen Semantik, lässt aber nur Implikationen mit zulässigen konstruktiven Methoden zu. Deshalb kann es darin nicht entscheidbare Aussagen geben.¹³ Die Dichotomie von wahr und falsch war für Brouwer nicht absolut, etwa so wie gerade Zahlen und ungerade Zahlen oder rationale und irrationale Zahlen. Für jede reelle Zahl gilt jeweils nur das eine oder das andere. Er unterschied vier Möglichkeiten von wahr und falsch:

- 1) Eine Aussage kann direkt als wahr oder falsch bewiesen werden
- 2) Wenn der direkte Beweis nicht möglich ist, liegt ein Algorithmus als Kriterium für Wahrheit oder Falschheit vor
- 3) Ein Algorithmus ist nicht bekannt; die Entscheidung ist (zunächst) offen
- 4) Einen Algorithmus kann es prinzipiell nicht geben. Die Aussage, ob wahr oder falsch, ist nicht entscheidbar.

Heute wird der vollkommen unabhängig von der Semantik betriebene reine Formalismus nicht mehr unbedingt propagiert und ist nur in abstrakten Theorien nützlich. Eine nicht-realistische Semantik in Form einer syntaktischen Verifikationstheorie der Bedeutung würde eine rein syntaktische Verifikationstheorie der Wahrheit bedeuten. Das hat Gödel für mathematische Aussagensysteme, die ausreichend reichhaltig sind, widerlegt. Der radikale Ansatz von Hilbert wurde also dadurch deutlich zurückgenommen. Trotzdem hat Hilbert unschätzbare Impulse in vielen Bereichen der Mathematik geliefert und damit zur Präzisierung maßgeblich beigetragen. Brouwers Intuitionismus bzw. Konstruktivismus hatte ebenfalls großen Einfluss in seiner Zeit des Umbruchs der Mathematik und Logik. Der Widerspruchsbeweis oder z.B. das Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem der noch jungen Mengenlehre, die er ablehnte, haben sich aber durchgesetzt. Doch gerade bei der doppelten Negation hat er Klarheit in die (intuitionistische) Logik gebracht. So verwendet er für bestimmte Fragestellungen alternativ die Begriffe „Absurdität und Korrektheit“ anstelle von „wahr und falsch“.¹⁴ Man muss dies wohl so verstehen, dass er vor Gödels Unvollständigkeitssatz „intuitiv“ erkannte, dass es auch in der Mathematik Aussagen gibt, die sich der Dichotomie wahr/falsch verweigern.

Im Jahr 1902 erfuhr Gottlob Frege in Jena, ein herausragender Logiker und Vertreter des logizistischen Standpunkts, Mathematiker und Philosoph, von den

¹³ Vergleiche Rosemarie Rheinwald, Der Formalismus und seine Grenzen, Untersuchungen zur neueren Philosophie der Mathematik, Königstein/Taunus, Hain 1984, S. 66ff

¹⁴ Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Luitzen_Egbertus_Jan_Brouwer

russellschen Paradoxien. Eines seiner großen Verdienste ist die Entwicklung einer formalen Sprache als Grundlage für formale Beweise. Die Erkenntnis von Russell musste nicht nur ihn verunsichern, aber trotzdem irgendwie berücksichtigt werden. Er war kurz vor der Veröffentlichung eines grundlegenden Werkes und konnte nur in einem zerknirschten Addendum auf Russell reagieren, dem er großmütig dankte: *Solatium miseris, socios habuisse malorum.*¹⁵ Kurt Gödel formulierte es später so: *[Russell] brachte Licht in die erstaunliche Tatsache, dass unsere logische Intuition ... in sich selbst widersprüchlich ist.*¹⁶

Hilbert hatte in Göttingen das internationale Zentrum für Mathematik aufgebaut. In relativ kurzer Zeit hatte es auch viele geniale Köpfe im Bereich der jungen theoretischen Quantenmechanik angezogen. Für ihn war der inkonsistente Zustand der Mathematik schlichtweg inakzeptabel. Im ersten Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts hatte er noch eine Fülle von Impulsen aus unterschiedlichsten Fachbereichen der Mathematik geliefert und nicht zuletzt auch damit neue Disziplinen ins Leben gerufen. Ein Beispiel ist sein berühmter Vortrag im Jahr 1900 auf dem 2. internationalen Mathematikerkongress, der in Paris anlässlich der Weltausstellung zur Jahrhundertwende stattfand. Er stellte 23 „Jahrhundertprobleme“ aus den unterschiedlichsten Bereichen der Mathematik vor, von denen einige immer noch ungelöst sind. Bekanntestes Beispiel heute ist die Riemannsche Vermutung zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion. Von ihrem Beweis erhofft man sich Erkenntnisse über das Wesen der Primzahlen, also ebenfalls eine Grundsatzfrage. Sein größtes Anliegen war unter den 23 Problemen die Nummer 2: Die Widerspruchsfreiheit der arithmetischen Axiome. In seiner Rede lieferte er eine flammende Begründung: *„Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!“*¹⁷

Doch nun war Hilberts größtes Projekt, die vollständige Axiomatisierung der Mathematik, in ernsthafter Gefahr und er konzentrierte sich voll unter Einsatz seiner beträchtlichen Möglichkeiten auf diese Aufgabe. Noch deutlich themenbezogener war Hilberts Vortrag auf dem Mathematikerkongress 1928 in Bologna. Deutschlands Mathematiker waren nach dem verlorenen 1. Weltkrieg

¹⁵ Es ist ein Trost für Unglückliche, Leidensgenossen zu haben. Zitiert nach Budiansky, Stephen; *Reise zu den Grenzen der Vernunft*, Kurt Gödel und die schwerste Krise der Mathematik, Propyläen 2. Auflage 2023, S. 151

¹⁶ Zitiert nach Yourgrau, Palle; *Gödel, Einstein und die Folgen*, C.H.Beck, S. 64

¹⁷ <https://www.math.uni-goettingen.de/historisches/hilbert/rede.html>
(Ignorabimus = Wir werden nicht wissen)

1920 und 1924 nicht zur Teilnahme zugelassen worden. 1928 waren sie mit 67 Personen vertreten und wurden von Hilbert angeführt, der auch den Eröffnungsvortrag halten durfte und mit Applaus begrüßt wurde. In seinem Vortrag mit dem Titel „*Probleme der Grundlegung der Mathematik*“ isolierte er gleich vier markante Grundsatzfragen: Beweis der Widerspruchsfreiheit mathematischer Systeme in zweierlei Hinsicht, Vollständigkeit, also der Forderung, dass jede gültige Aussage aus Axiomen ableitbar sein muss und Vollständigkeit des zugrunde liegenden Logiksystems erster Ordnung, auch Prädikatenlogik genannt.¹⁸

Der Grundkonflikt liegt immer in der Frage, ob Mathematik und Logik a priori im kantischen Sinne entstehen oder sich als das Ergebnis von Erfahrung, also a posteriori, entwickeln. Das ist die Position der Empiristen.

Kurt Gödel wurde 1906 in Brünn (Mähren) in einem wohlhabenden Elternhaus geboren. Nach dem 1. Weltkrieg wurde die Stadt als Brno tschechisch. Er war ein sehr guter Schüler und später auch ein Student, der sich selbst ein enormes Pensum an Vorlesungen zumutete und dieses Pensum auch bewältigte. Gödel studierte in Wien zunächst theoretische Physik, wandte sich aber bald der Mathematik und Logik, aber auch der Philosophie, zu. Gödel stieß zu einem Kaffeehauszirkel aus Mathematikern und Philosophen, von denen die meisten später berühmt wurden: Karl Menger, Rudolf Carnap, Olga Tausky, Herbert Feigl oder Alfred Tarski. Auf den weißen Marmortischen des Café Herrenhof oder des Café Central wurden Gleichungen geschrieben. Gödel, gerade mal 22 Jahre alt als Hilbert in Bologna die vier grundlegenden Ziele formulierte, wandte sich der vierten Aufgabe zu. Nach nur sechs Monaten vollendete er 1929 seine Dissertation „*Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*“ und wurde Anfang 1930 promoviert. Er hatte damit einen riesigen Beitrag zum hilbertschen formalistischen Programm geliefert. Es geht um die Prädikatenlogik erster Stufe, also um grundlegende Aussagen, Beziehungen oder logischen Verknüpfungen wie „und“, „oder“, „nicht“, „wenn ... dann“, usw. Diese kann man zur weiteren Formalisierung mit entsprechenden Symbolen ausstatten, die auf Frege zurückgehen. Man benutzt dazu sogenannte Quantoren. Z.B. x sei ein Element der Menge aller Katzen und $F(x)$ stehe für die Aussage „ x ist schwarz“. Dann schreibt man $(\exists x)F(x)$ \exists ist der Existenzquantor. Die Aussage „alle Katzen sind schwarz“ schreibt man mit dem Allquantor \forall : $(\forall)F(x)$

Die Arbeit war bemerkenswert kurz und umfasste in der Veröffentlichung in den „Monatsheften für Mathematik und Physik“ gerade mal 12 Seiten.¹⁹

¹⁸ Budiansky, Stephen; Reise zu den Grenzen der Vernunft, Kurt Gödel und die schwerste Krise der Mathematik, Propyläen 2. Auflage 2023, S. 110-111

¹⁹ Kurt Gödel, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. 37, S. 349–360 (1930)

Zweifellos machte erst sein 2. „Unvollständigkeitssatz“ Gödels späteren Ruhm aus. Trotzdem ist der „Vollständigkeitssatz“ durchaus ein Meilenstein. Die Axiome reichen aus, dass alle universell gültigen logischen Aussagen daraus hergeleitet werden können. Sie sind auch alle nötig, keines ist zu viel und keines zu wenig.²⁰

Noch während seines Studiums wurde Gödel von Hans Hahn eingeladen und schloss sich dem „Wiener Kreis“ an.²¹ Man konnte die Einladung durchaus als Auszeichnung verstehen. Die Teilnehmerzahl lag immer zwischen 10 und 20 Personen. Eine Einladung war Voraussetzung zur Teilnahme. Heute wie damals berühmte Persönlichkeiten, wie der Wissenschaftstheoretiker Karl Popper, wären gerne dabei gewesen und Popper stand dann später eher in Opposition zu dem Kreis.²² Die Treffen fanden alle zwei Wochen donnerstags um 18:00 Uhr statt. Es war ein hochrangig besetzter Diskussionszirkel, der sich zunächst in der Tradition von Ernst Mach sah, aber dann eine eigene Linie des logischen Empirismus verfolgte. Der sprachgewaltige Mach, nach dem die Skala für Überschallgeschwindigkeiten benannt ist und der die Hochgeschwindigkeitsfotographie entwickelte, übertrieb den Empirismus nicht nur gelegentlich. Er führte ihn in neue Extreme. So leugnete er trotz überzeugender Belege zeitlebens die Existenz von Atomen („*Hamm's welche g'sehn*“). Er war Vordenker einer positivistischen Wissenschaftsphilosophie, die sogar so weit ging, Atome als Forschungsgegenstand generell abzulehnen. Von a priori Erkenntnissen wollte er nichts wissen. Eine Realität im objektiven Sinn lehnte er ab. Er war erbitterter Gegner von Ludwig Boltzmann, der aus der Atomistik heraus die Thermodynamik entscheidend vorantrieb. Boltzmann definierte die Entropie statistisch und verwendete erstmals den Begriff der Wahrscheinlichkeit in der Physik. Die Entropie S eines Makrozustands kann man berechnen durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Mikrozustände. Weiterhin sprach er 1896 die Vermutung aus, dass die Brownsche Bewegung von Schwebeteilchen in Flüssigkeiten von wechselnden Drucken auf ihre Oberfläche herrührt, die von der unregelmäßigen Wärmebewegung von Atomen oder Molekülen herrührt. Mit diesen kontroversen Themen wurden entscheidende Entwicklungen Anfang des 20. Jahrhunderts angestoßen. So wies Albert Einstein 1905 mit mathematischen Mitteln aus dem Radius der Zitterbewegung nach, wie man experimentell vorgehen musste.

²⁰ Vergleiche Budiansky, S. 161f

²¹ Siehe auch Karl Sigmund; Sie nannten sich „Der Wiener Kreis“, Springer, Wiesbaden 2015, 2. Auflage 2018

²² Ebenda, S. 16

Er zeigte, „..., dass die Existenz des osmotischen Druckes eine Konsequenz der molekularkinetischen Theorie der Wärme ist, ...“.²³ Als Autodidakt, der mit 26 Jahren als Experte 3. Klasse im Berner Patentamt arbeite, hatte er erst im Laufe seiner Überlegungen von der „Brownschen Molekularbewegung“ erfahren und in seiner Publikation den Bezug dazu hergestellt. Der französische Physiker Jean Perrin führte 1908 sorgfältige Experimente und Messungen durch, die Einsteins Rechnungen bestätigten.²⁴ Es war der Durchbruch der Atomtheorie.²⁵

In der Tradition des logischen Empirismus wurde also im Wiener Kreis debattiert, auch wenn sich die Gruppe durchaus mit der Zeit etwas von Mach emanzipierte, weil sich zu viele Niederlagen der Positivisten abzeichneten. Gödel war fasziniert von den tiefschürfenden Diskussionen im Wiener Kreis, geleitet durch den Physiker und Philosophen Moritz Schlick, auch wenn er sich nicht in den Vordergrund drängte und beileibe nicht alle Meinungen teilte. Er erkannte aber das hohe intellektuelle Niveau an. Ständige Teilnehmer waren z.B. Rudolf Carnap, analytischer Philosoph und eigentlicher Vordenker des logischen Empirismus, der sich bereits früh mit Frege, Whitehead und Russell auseinandergesetzt hatte. Schlick galt als äußerst seriöser, unprätentiöser, zurückhaltender, aber selbstsicherer Mensch. Er hatte Aufsätze und populäre Bücher über die Relativitätstheorie geschrieben, die auch Einstein lobte. Er stand im Briefwechsel mit Einstein, insbesondere über die philosophischen Implikationen der Relativität. Er war sehr von Ludwig Wittgensteins „*Tractatus*“ beeindruckt.

Gödel schloss in diesem Kreis langandauernde Freundschaften; erregte aber auch Entsetzen durch seine „atemberaubende Naivität“²⁶ bzgl. des Nazieinflusses in Wien und schließlich der Machtergreifung. In dieser Zeit war nichts und niemand unpolitisch. Jede öffentliche oder halböffentliche Aktivität wurde in eine „Ecke gestellt“: individualistisch, antinational, sozialistisch, jüdisch, undeutsch, sogar Psychoanalyse, Positivismus oder neuere ökonomische Theorien. Der Gegenpol waren Ultrationalismus und

²³ A. Einstein: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. In: Annalen der Physik. Band 17, 1905, S. 549–560, Zitat: S. 553

Online: https://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eckern/adp/history/einstein-papers/1905_17_549-560.pdf

²⁴ A. Einstein, Elementare Theorie der Brownschen Bewegung, Zeitschrift für Elektrochemie und angewandte physikalische Chemie, Band 14, 1908, S. 235–239. Ausführlichere Darstellung von Einstein.

Jean Perrin: Mouvement brownien et réalité moléculaire. In: Annales de chimie et de physique. ser. 8, 18, 1909, S. 5–114.

²⁵ John von Neumann hat übrigens analog zur klassischen Definition in der Quantenmechanik einen Entropiebegriff eingeführt, der auf Verschränkung beruht (S. Carroll, Was ist die Welt ..., S. 320)

²⁶ Budiansky, ebenda S. 125

Antisemitismus, die an den Universitäten sich vor allem in das Deutschtum glorifizierenden Burschenschaften formierten. Gödel beteiligte sich nicht und behielt seine Ansichten links von der Mitte für sich. Doch auch er war durch seine (wissenschaftlich motivierten) Kontakte zu Schlick, Carnap, Hahn, Neurath und anderen für die Ultrakonservativen eher verdächtig geworden. Man lebte auf jeden Fall gefährlicher, zudem beide Seiten zunehmend zur Gewalt griffen und paramilitärische Organisationen aufbauten. Man kann aber davon ausgehen, dass für die weitere Entwicklung seiner mathematisch/logischen und seiner philosophischen bzw. wissenschafts-philosophischen Ansichten vom Wiener Kreis maßgebliche Impulse ausgingen. In Gödels „Philosophischen Notizbüchern“ finden sich immer wieder Anspielungen.²⁷ Es war seine frühe Angewohnheit, Notizbücher zu führen, die er bis ins Alter beibehielt. Sie schärften sein Bewusstsein für philosophische Strömungen und halfen ihm, seine eigene Position zu finden. Sie scheinen bei oberflächlicher Betrachtung oft nur eine Fülle von Aphorismen zu enthalten. Erst bei näherem Hinsehen finden sich kognitive Entwicklungsschritte (ein Beispiel ist die Frage „Was ist Erkenntnis?“). Als Vorgriff auf seine Einschätzung seiner Arbeit in den letzten Jahren soll folgende Passage aus einem Brief dienen:

Ich betrachte meine Arbeit nicht als „Facette der intellektuellen Atmosphäre des frühen 20. Jahrhunderts“, ganz im Gegenteil. Zwar wurde mein Interesse an den Grundlagen der Mathematik in der Tat durch den „Wiener Kreis“ geweckt, aber die philosophischen Konsequenzen meiner Ergebnisse, sowie die heuristischen Prinzipien, die zu ihnen führten, sind alles andere als positivistisch oder empiristisch. Meine Arbeit weist mithin in Richtung einer gänzlich anderen Weltsicht.²⁸

Korrespondierend dazu ein Eintrag in sein Notizbuch:

Mathematische und logische Erkenntnis ist von prinzipiell anderer Art als Wirklichkeitserkenntnis. Nur diese ist eine eigentliche Erkenntnis und für diese interessiert sich die Philosophie in erster Linie.²⁹

²⁷ Beispiel eines Notizbucheintrags: *Durch Leibniz ging die Logik von der spekulativen Philosophie auf die Mathematik über.* Kurt Gödel, Philosophische Notizbücher, Bd. 1, S. 48, bei Schlick heißt es: *Erst durch Leibniz ging die Logik aus den Händen von der bloss spekulativen Philosophen in die Hände der Mathematiker.* Schlick, MSGA, Abt. II, Bd. 1.3, S. 360, zitiert aus den Kommentaren, ebenda S. 48. Moritz Schlick, führender Kopf des Wiener Kreises, wurde am 22. Juni 1936 von dem Nazi und ehemaligen Studenten Schlicks, Hans Nelböck, ermordet. Dies markierte auch im Prinzip das endgültige Ende des Wiener Kreises.

²⁸ Kurt Gödel an Burke D. Grandjean, Januar 1976, Collected Works, Bd. 4, S443f, zitiert nach Budiansky, ebenda S. 139

²⁹ Kurt Gödel, Philosophische Notizbücher, Bd. 1, S. 57

Heute wissen wir: Kurt Gödel hat die Hilbertsche Agenda zerstört, weil sie sich als falsch herausgestellt hat. Aber im Rückblick auch auf sein philosophisches Werk zeigt sich, dass er immer Suchender war. Die „*Wirklichkeitserkenntnis*“, dazu hat er Kant zu gut studiert, ist eine a posteriori Erkenntnis. In Mathematik und Logik suchte er sein ganzes Leben nach der a priori Wahrheit.

Gödel als Wissenschaftler begann nicht als „Revolutionär“ seines Faches. Sein von ihm bewunderter Doktorvater Hans Hahn unterstützte das hilbertsche Programm und Gödel war ebenso der Ansicht, dass intuitive Mathematik und Logik durch ein auf Axiomen aufgebautes Gebäude ersetzt werden musste, um versteckten Widersprüchen und offenen Paradoxien keinen Raum zu geben.

Hilbert begann mit der Neuformulierung der euklidischen Geometrie, in der die Semantik der Begriffe, wie Punkte, Geraden, Dreiecke, Ebenen keine Rolle mehr spielte, sondern lediglich die logischen Beziehungen zwischen den „implizit definierten“ Elementen. Die Jahrtausende alte euklidische Geometrie, a priori Struktur des Raumes für Immanuel Kant, hatte im 19. Jahrhundert „Konkurrenz“ bekommen. Die nichteuklidische Geometrie wurde von János Bolyai, Nikolai Lobatschewski und Carl Friedrich Gauß entdeckt. Sie wurde vom Gauß-Schüler Bernhard Riemann zur Differentialgeometrie gekrümmter Räume weiterentwickelt und 1854 in seinem Aufsehen erregenden Habilitationsvortrag vorgestellt. Sie führte zunächst zur Verunsicherung unter den Mathematikern; auch rechnete niemand damit, dass sie einmal physikalische Bedeutung erlangen sollte. Aber sie verlangte nach einer Nachjustierung der geometrischen Axiome, Definitionen und Begriffe. So galt auf jeden Fall das klassische Parallelenaxiom in der nichteuklidischen Mathematik nicht mehr. Gottlob Frege, einer der Väter einer formalen Herangehensweise, hat übrigens die radikale, sinnentleerende Sicht abgelehnt. Er war einer der Autoren, die auch im „Wiener Kreis“ ausführlich diskutiert wurden. Für Hilbert war formale Widerspruchsfreiheit, nicht semantisch identifizierte Wahrheit, das Ziel seines formalen Systems.

Gödel, durchaus wohlwollend zum Hilbertschen Programm eingestellt, nahm trotzdem die Sicht „von oben“ ein. Hofstadter formuliert es so: *Seine Idee war es, mathematisches Denken zur Erforschung des mathematischen Denkens selbst zu verwenden.*³⁰ Mathematik wurde „introspektiv“ benutzt. Nach dem Erfolg in seiner Dissertation machte er zunächst im Stillen weiter. Er untersuchte, ob man in einem solchen formalen Axiomensystem überhaupt Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit beweisen kann. Er begann, gemäß Hilberts zweitem, 1900 noch allgemein formulierten Problem, mit der arithmetischen Zahlentheorie als Teilgebiet der Analysis. Sie wurde von Gottlob

³⁰ Hofstadter, Douglas R.; Gödel, Escher, Bach. Ein Endloses Geflochtenes Band, Klett-Cotta, Stuttgart 1985, S. 19

Frege (Jena), Richard Dedekind (Braunschweig) und Giuseppe Peano (Turin) axiomatisiert. Sie hatte den gleichen hohen Status wie die Jahrtausende alten Axiome der klassischen euklidischen Geometrie.

Es stellt sich die Frage, wie man die Konsistenz beweist und Kurt Gödel erkannte: Es geht einerseits nur durch formalisierte Logik, wie sie Frege im Prinzip in seiner „*Begriffsschrift*“ entwickelt hat.³¹ Aber die Auseinandersetzung Hilbert-Brouwer hatte auch gezeigt, dass es einen Unterschied ausmacht, ob man zeigen kann, dass ein System richtig ist, also keine falschen Aussagen abgeleitet werden können und dass es nicht widersprüchlich ist, also daraus „wahr“ und „nichtwahr“ abgeleitet werden kann. Im ersten Fall liegt eine semantische Frage vor, im zweiten Fall eine syntaktische. Dies hatte Gödel verstanden. Ein sinnvolles Vorgehen musste beide Aspekte enthalten.

Ausgangspunkt für das von Hilbert formulierte Problem war Alfred North Whiteheads und Bertrand Russells *Principia Mathematica*,³² worin diese versuchten, die Korrektheit der Mathematik nachzuweisen, indem sie sie auf selbstevidente Prinzipien reduzierten.³³ Doch dass sollte sich als schwieriges Unterfangen erweisen. Schon allein der Zahlbegriff stellte sich als Problem heraus, die nötige Nomenklatur war unübersichtlich und lag für einfachste Sachverhalte keineswegs auf der Hand. Russell und Whitehead benötigten 700 Seiten, um zum Ergebnis zu kommen, dass $1 + 1 = 2$ ergibt. In typisch englischer Ironie bezeichneten sie dies als „mitunter nützliche“ Aussage.³⁴

Doch Gödel wollte eben mehr als bloße Formalisierung und ging einen Schritt weiter. Er wollte zeigen, dass dann, wenn ein gegebenes Axiomensystem für die Arithmetik frei von Widersprüchen scheint, so ist das System selbst nicht in der Lage, seine Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Erst wenn das System widersprüchlich ist, kann es seine Widerspruchsfreiheit (also nicht Widersprüchlichkeit!) beweisen. Damit wären beide Seiten der Medaille bewiesen: Widerspruchsfreiheit lässt sich so oder so nicht beweisen. Es gibt also doch ein *Ignorabimus!*³⁵

³¹ Gottlob Frege: *Begriffsschrift*, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens;

<https://www.marilia.unesp.br/Home/Instituicao/Docentes/RicardoTassinari/B.pdf>

³² <https://lesharmoniesdelesprit.files.wordpress.com/2015/11/whiteheadrussell-principiamathematicavolumei.pdf>

³³ Vergleiche Buidiansky, ebenda S. 148f

³⁴ Die „*Principia*“ war übrigens wirtschaftlich eine rekordverdächtige Katastrophe. Die beiden Autoren machten trotz Zuschüsse von der Royal Society und anderen Institutionen jeweils 50 Pfund Sterling Verlust. Gödel war einer der wenigen Leser.

³⁵ Der Satz findet sich als Behauptung VI in der 1931 erschienenen Arbeit „Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme“:

Gödel hatte sich für einen Vortrag auf der großen Konferenz am 5. – 7. September 1930 in Königsberg angemeldet, wo er auf jeden Fall über das (gesicherte) Thema seiner Dissertation sprechen wollte. Dort trafen sich die Deutsche Mathematiker Vereinigung, die deutsche physikalische Gesellschaft und die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Doch Gödel hatte seinen Vollständigkeitsatz schon als erledigt abgehakt und dachte intensiv über nächste Schritte nach. Ein vorsichtiger erster Hinweis auf einen Durchbruch findet sich in den Tagebucheinträgen von Carnap kurz vor Weihnachten 1929:

Café Arkaden 23.12.29, 5:45-8:30. Gespräch mit Gödel, Über die Unausschöpflichkeit der Mathematik. Er ist durch Brouwers Wiener Vorlesung angeregt worden. Mathematik nicht vollständig formalisierbar. Er scheint recht zu haben.

Kurz vor der Konferenz im September trafen sich einige Teilnehmer wieder im Café um über die Reise zu sprechen. Gödel enthüllte zum ersten Mal, dass er der Lösung des Problems entscheidend nahegekommen ist. Wieder ist Carnaps Tagebucheintrag die einzige Aufzeichnung eines historischen Moments in der Geschichte der Mathematik.³⁶ In seinem Vortrag besprach Gödel ausführlich seinen Vollständigkeitsatz. Doch die abschließenden Ausführungen über seine nächsten Schritte hat er in den wenigen Tagen vor seinem Referat mehrfach geändert. In seiner typischen Bescheidenheit formuliert er zum Schluss die Sensation:

Könnte man den Vollständigkeitsatz auch für die höheren Teile der Logik (den erweiterten Funktionenkalkül) beweisen, so würde ... daraus die Lösbarkeit jedes in der Principia Mathematica ausdrückbaren Problems der Arithmetik und Analysis folgen.

Indessen ist eine solche Ausdehnung des Vollständigkeitsatzes, wie ich ihn in letzter Zeit bewiesen habe, unmöglich, d.h. es gibt mathematische Probleme, die sich in der Principia Mathematica ausdrücken, aber mit den logischen Elementen der Principia Mathematica nicht lösen lassen ... Doch es würde zu weit führen, auf diese Dinge näher einzugehen.³⁷

In der die Konferenz abschließenden Diskussion konnte Gödel die Tragweite erläutern und weitere Einzelheiten und mögliche Beispiele präsentieren. Sie finden sich in einer Protokollnotiz von Hans Hahn. Die Beispiele enthielten noch

Zu jeder ω -widerspruchsfreien rekursiven Klasse k von Formeln gibt es rekursive Klassenzeichen r , so dass weder $v\text{Gen } r$ noch $\text{Neg}(v\text{Gen } r)$ zu $\text{Fig}(k)$ gehört (wobei v die freie Variable aus r ist). Zitiert nach D. Hofstadter, ebenda, S. 19

³⁶ Vergleiche Buidiansky, ebenda S. 167f

³⁷ Kurt Gödel, Vortrag in Königsberg, Collected Works, Bd. 3, S. 28, zitiert nach Buidiansky, ebenda S. 168

nicht die Kontinuumshypothese. Sie sollte ein weiteres Glanzstück von Kurt Gödel werden. Der Beweis des Unvollständigkeitssatzes wurde im Folgejahr veröffentlicht.³⁸ Er bildete die Basis für seine Habilitationsschrift.³⁹

Durch ein ausgefeiltes Verfahren, auf das noch einzugehen ist, zeigte Gödel, dass nicht nur die Peano-Axiome, sondern jedes Axiomensystem, sogar eines mit unendlich vielen Regeln/Axiomen, unvollständig ist.⁴⁰ Es kann zwar durch einen endlichen Verstand mit vernünftigen mathematischen Kriterien überprüft werden. Aber es werden immer in Beweisen nicht entscheidbare Fragen sich ergeben. Beweis und Wahrheit sind nicht dasselbe. Mathematische Wahrheit lässt sich nicht durch formale, mechanistische Regelanwendung, heute würde man sagen „wie mit einem Computer“, erzielen. Ein mathematischer Beweis nimmt zwar immer auch Bezug auf das zugrundeliegende Regelsystem. Wahrheit geht aber darüber hinaus. Sie ist mehr als bloße Konformität zur Syntax. Sie ist auch eine Frage der Semantik. Es geht um Inhalte, Sinn und Bedeutungen logischer Objekte und ihre Kombination. Ohne (menschliche) Intuition kommt selbst das einfachste Axiomensystem, nämlich das der Arithmetik, auf das die ganze Mathematik aufbaut, nicht aus. Es bleibt abzuwarten, ob eine künstliche Intelligenz (KI) mehr ist als ein wenn auch komplexes Computerprogramm und bis zur Qualität von menschlicher Intuition vorstoßen kann. Chatbots, wie das Sprachmodell ChatGPT, sind von der Konzeption her wohl nicht geeignet. Sie machen neben seltenen, aber krassen sprachbasierten und logischen Fehlern auch simple Rechenfehler. Sprachmodelle können ihre Fehler nicht selbst erkennen. Ein anderes Konzept steckt hinter dem Begriff „*Reinforcement Learning*“. Modelle auf Basis dieser Algorithmen zeigen erstaunliche Leistungen bei strategischen Spielen, wie Schach oder Go. Ausgestattet mit diesen Algorithmen können mathematische Aussagen formalisiert werden. Den formalen Code kann dann ein „Beweisassistent“ überprüfen. Einen komplexen Beweis so zu formalisieren, übersteigt noch die technischen und vor allem semantischen Möglichkeiten. Vor allem muss verhindert werden, dass das Modell mathematische Begriffe von

³⁸ Kurt Gödel: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. In: Monatshefte für Mathematik und Physik. 38, 1931, S. 173–198, online doi:10.1007/BF01700692. Siehe auch Kurt Gödel: Diskussion zur Grundlegung der Mathematik: Erkenntnis 2. In: Monatshefte für Math. und Physik. 39, 1931–32, S. 147–148.

³⁹ Siehe auch Dawson, John W. jr; Kurt Gödel und die Grenzen der Logik, Spektrum der Wissenschaft 9 / 1999, Seite 74f

⁴⁰ Die Peano-Axiome enthalten auch die Beweismethode der „vollständigen Induktion“. D.h., wenn eine Aussage für 0 bzw. 1 gilt und unter der Annahme, sie gelte für natürliches n , sie dann auch für $n+1$ beweisbar ist, so gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen. Manche Mathematiker sahen dieses Axiom problematisch, da es auch Eigenschaften der natürlichen Zahlen beinhaltet (z.B. vollkommene Zahlen).

ihrer Bedeutung nicht kennt und sie deshalb erfindet. Richtige Antworten bei Mathematikaufgaben können auch daran liegen, dass das Modell eine analoge Aufgabe und seinen Lösungsweg kennt. Insgesamt sind 70% falsche Antworten nicht selten, was immerhin bedeutet, dass 30% richtig sind und evtl. durch *Reinforcement Learning* gesteigert werden können. Trotzdem ist die Mathematik ein ideales Betätigungsfeld für die KI-Forschung.⁴¹ Leider ist diese Forschung weitgehend in privater Hand. Die USA und die EU haben 2021 jeweils etwas mehr als eine Milliarde Euro an Forschungsgeldern für KI ausgegeben. Der Google Mutterkonzern Alphabet soll geschätzte 320 Milliarden Euro investiert haben.⁴² Zudem wandern begabte Absolventen in die Industrie ab und schlagen zu selten den mühsamen Weg bis zu einer Festanstellung in der akademischen Welt ein.

Diese Situation und diese Anstrengungen im Bereich der modernen Informatik zeigen aber auch, welche intellektuelle Leistung Kurt Gödel mit seinem Unvollständigkeitssatz vor fast 100 Jahren vollbracht hat.

Doch wie kann man eine solche weitreichende Tatsache beweisen, die das Hilbertsche Programm als letzten Endes für undurchführbar erklärte? Mehr noch: Das Ergebnis der beiden Teile des Unvollständigkeitssatzes von Kurt Gödel hatten das Potential, zur nächsten großen Krise der Mathematikgeschichte zu werden. Es zeigt, dass alle widerspruchsfreien, axiomatischen Formulierungen der Zahlentheorie unentscheidbare Aussagen enthalten. Dabei ist die Logik der natürlichen Sprache nicht ausreichend.

Der Beweis findet in der Kombination dreier „sprachlicher“ Ebenen statt.

Die erste Ebene ist die intuitive Arithmetik. Sie kann über Wahrheiten oder Unwahrheiten von Zahlen entscheiden. Wahrheiten heißen mathematische Sätze. Sie sind Bestandteil der Lehrbücher und enthalten neben der mathematischen Formelsprache in der Regel auch normale, natürliche Sprache. Damit werden Inhalte (also Semantik) adressiert.

Die zweite Ebene ist geprägt von reiner Syntax, also den Elementen der freigeschriebenen Begriffsschrift, die von Bertrand Russell und Alfred North Whitehead weiterentwickelt wurden. Damit lässt sich die Arithmetik als rein formales, deduktives System beschreiben. Es hat Axiome und Deduktionsregeln, aber ohne Bezug zu semantischen Inhalten. Auf dieser Ebene spielt es keine Rolle, ob eine Formel, also eine rein deduktive Herleitung, mit Bezug auf Inhalte wahr oder falsch ist. Die Formeln sind jedoch aus der formalen Arithmetik heraus beweisbar.

⁴¹ Kevin Hartnett, Spektrum der Wissenschaft (SdW), 7/23, S. 28f

⁴² Michael Springer, SdW, 7/23, S. 33

Die dritte Ebene reichert nun die formale Ebene um eine Metatheorie an. Sie stellt erst das „Bedienungshandbuch“ für die formale Arithmetik dar.

Gödels eigentliche geniale Leistung liegt in der Kombination der drei Ebenen, von denen keine verzichtbar ist, aber trotzdem zum Teil durch die beiden anderen ausgedrückt werden und so verzahnt werden kann. Die formale Arithmetik kann teilweise die intuitive Arithmetik ersetzen oder besser repräsentieren. Gleiches gilt für die Metatheorie der formalen Arithmetik, also der Repräsentation der eigenen Metatheorie durch die formale Arithmetik selbst (soweit möglich).

Gödel gelang es, in der formalen Arithmetik eine Beziehung zu finden, die Metatheorie und intuitive Arithmetik sinnvoll in „Beziehung setzen“ konnte ohne in Details gehen zu müssen, die einer Verallgemeinerung im Wege stehen würden. Man nennt dieses Vorgehen heute „Arithmetisierung der Syntax“. Eine solche Beziehung ist im Prinzip eine Formel, die mit formaler Arithmetik nicht beweisbar ist, aber auf den beiden semantischen Ebenen wahr ist. Man kann somit beweisen, dass sie formal unbeweisbar ist. Intuitiv macht diese Formel wahre Aussagen bis „herunter“ zu den natürlichen Zahlen. Die Metaebene macht andererseits die wahre Aussage zur eigenen Unbeweisbarkeit.

Gödel hatte damit u.a. die Russellschen Paradoxien oder Antinomien (wie Aussagen zur Menge aller Friseur oder der Menge aller Kreter) eliminiert und entsprechende Fragen „unentscheidbar“ gemacht. Aussagen über solche selbstbezüglichen Fragen bzw. Mengen können nicht bewiesen werden.

Hier sei darauf hingewiesen, dass bereits Decartes über seine kartesischen Koordinaten auch eine „Arithmetisierung der (euklidischen) Geometrie“ erreicht hat. Jede geometrische Figur lässt sich somit arithmetisch in einem kartesischen Koordinatensystem behandeln, was sogar bis in die Schulmathematik Anwendung findet. Gödel verwendet für die formale Arithmetik ein Nummerierungssystem, das eine Aussage zur Syntax in eine Aussage über Ordinalzahlen umsetzt („Gödel-Nummerierung“). Die Anforderung geht allerdings darüber hinaus, denn eine beliebige Formel in der formalen Arithmetik muss für sich genommen „wohl formuliert“ sein und in der Abfolge mit anderen Formeln einen Beweis ergeben. Gödel gelang es zu zeigen, dass dieser Anforderung über bestimmten rekursiven Funktionen in der intuitiven Arithmetik entsprochen werden kann. Genauer: Die fundamentalen Objekte der Metatheorie, die die Beweistheorie der formalen Arithmetik enthalten, entsprechen bestimmten rekursiven Funktionen der intuitiven Arithmetik. Wenn es zu einer rekursiven Funktion auf der intuitiven Ebene eine Wahrheit gibt, so muss es auf der formalen Ebene einen beweisbaren Satz geben.

Gödel hat mit der Aussage, aber noch mehr mit seiner Terminologie und Methodik, die Grundlage der modernen Informatik in Form der sogenannten Rekursions- oder Berechenbarkeitstheorie geschaffen. Seine „intuitive Arithmetik“ im Unvollständigkeitsbeweis entspricht in etwa dem, was heute in der Rekursionstheorie „formale Semantik“ genannt wird. Die heutige Kenntnis über die prinzipiellen Grenzen von digitalen Berechnungen sind somit Folgen seiner Ideen. Eine Konsequenz ist auch, dass das berühmte „Halteproblem“ einer Turingmaschine (sprich Computer mit beliebigem Input) nicht lösbar ist (s.u.). Er kann immer in eine Endlosschleife geraten. In der Informationstechnologie (IT) entspricht das Betriebssystem in einer einfachen Analogie dem Axiomensystem der Mathematik bzw. Logik. Ein Virenprogramm muss deshalb Eingriffe in das Betriebssystem machen können um Viren zu erkennen, die dies tun.

Eine weitere große Herausforderung stellte die sogenannte Kontinuumshypothese von Georg Cantor dar. Cantor hatte erkannt, dass die abzählbar unendlichen Zahlen die unterste Stufe von Unendlich darstellen und nannte dieses Unendlich \aleph_0 , gesprochen Aleph Null, nach dem ersten Buchstaben im hebräischen Alphabet. Die Potenzmenge einer endlichen Menge mit n Elementen ist 2^n groß. Also ist die Potenzmenge einer abzählbar unendlichen Menge $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Aber \aleph_1 ist nach \aleph_0 nichtabzählbar unendlich und hat damit die Mächtigkeit der reellen Zahlen. Die Kontinuumshypothese lautet also, dass es kein weiteres Unendlich zwischen \aleph_0 und \aleph_1 geben kann. Eine solche Hypothese ist natürlich abhängig vom zugrundeliegenden Axiomensystem. Dies ist nach Zermelo-Fraenkel benannt und wird mit ZF benannt. Wenn das sogenannte Auswahlaxiom hinzu genommen wird, wird es ZFC genannt (C für choice).⁴³ Das Kontinuumproblem war übrigens ein wichtiger Impuls für Felix Hausdorff⁴⁴, auch wenn sich an den Ergebnissen von Gödel und Cohen später zeigte, dass seine Strategie nicht erfolgreich sein konnte. Er entwickelte aber eine Theorie der wohlgeordneten Mengen und baute diese zu einer umfassenden „Theorie der Mengenlehre“ aus, die weit über das Wissen seiner Zeit hinausging. Man kann sie mit Recht als sein „opus magnum“ bezeichnen, das neben der allgemeinen Mengenlehre auch die

⁴³ Siehe dazu Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 70, Beitrag Unendlich, W. Kafitz, S. 89 ff

⁴⁴ In einem Brief an Hilbert vom 29. September 1904 spricht er davon, dass dieses Problem ihn „beinahe wie eine Monomanie geplagt hatte“. (Quelle https://de.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff, nach Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek zu Göttingen, Handschriftenabteilung, NL Hilbert, Nr. 136.)

Theorie der Punktmengen sowie die Inhalts- und Maßtheorie enthielt und um eine Fülle neuer Ergebnisse ergänzt wurde.⁴⁵

Gödel bewies, als er schon im Exil in Princeton war, dass bzgl. ZF und ZFC die als wahr angenommene Kontinuumshypothese nicht zu Widersprüchen führt. Im Jahr 1963 bewies ein junger US-Amerikaner namens Paul Cohen auch die negierte Aussage. Wird die Kontinuumshypothese als falsch angenommen, führt es ebenfalls zu keinem Widerspruch in ZF/ZFC. Cohen führte dazu eine sensationell neue Methode ein, das Forcing.⁴⁶ Um beide Ergebnisse voneinander abzugrenzen heißt Gödels Ergebnis „relativer Konsistenzbeweis“ und Cohens Resultat „Unabhängigkeitsbeweis“ jeweils der Kontinuumshypothese. Beide Arbeiten gehören zusammen, beide sind gleich genial. Cohen wurde für seine Leistung mit der Fields-Medaille ausgezeichnet. Beide Ergebnisse sprechen kein Urteil über wahr oder falsch der Kontinuumshypothese. Sie sagen lediglich, dass beide Ansichten konform mit dem Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem der Mengenlehre sind, auf dem mittlerweile große Teile der Mathematik fußen. Es ist eine nicht entscheidbare Hypothese. Es kann keinen Forscher geben, der mit noch so scharfsinnigen Argumenten eine Entscheidung für oder wider herbeiführen kann. Die Kontinuumshypothese ist in ZF/ZFC weder wahr noch falsch.

Die Gödelsche Logik und Vorgehensweise hat durchaus Konsequenzen auf die Philosophie der neueren Mathematik. Der Begriff der Folgerung oder Implikation ist seit Jahrtausenden grundlegend und alle Mathematiker können sich darauf einigen, dass mathematische Aussagen Implikationsaussagen sind. Doch eine Differenzierung nach formalen oder semantischen Ebenen verdeutlicht erst, auf welcher Ebene die Implikation stattgefunden hat. Rosemarie Rheinwald⁴⁷ unterscheidet zwischen syntaktischer Implikation, semantischer Implikation und strikter Implikation im Sinne von notwendiger Folgerung (engl. *entailment*).

⁴⁵ In diese Zeit fallen auch Hausdorffs philosophische Betrachtungen und Erkenntniskritik zu Raum und Zeit, die er unter dem Pseudonym Paul Mongré publizierte. Hausdorff setzte sich zwar intensiv mit Friedrich Nietzsche auseinander, wurde aber zweifellos ebenso wie Gödel von Immanuel Kant beeinflusst. Mit der Speziellen Relativitätstheorie sind diese Überlegungen nur noch historisch interessant, aber physikalisch überholt. Für die Entwicklung zum genialen Mathematiker, Begründer der Topologie, waren diese philosophische Studien aber wichtige Zwischenschritte zur mathematischen Erkenntnis. Der Name Hausdorff steht für viele mathematische Anwendungen wie Hausdorff-Raum, Hausdorff-Maß, Hausdorff-Dimension, Hausdorff-Konvergenz oder Hausdorff-Metrik. In wesentlichen Teilen hat er die Mathematik in die Moderne geführt.

⁴⁶ Siehe Paul Cohen; Wie ich „Forcing“ entdeckte, Paul Cohens Vortrag über die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese 2001, enterprise e< Lemgo 2017, mit Kommentaren von Marietta Ehret

⁴⁷ Rheinwald, Rosemarie; Der Formalismus und seine Grenzen, Untersuchungen zur neueren Philosophie der Mathematik, Königstein/Taunus, Hain 1984, S. 11

Entsprechend der „formalen Arithmetik“ bei Gödel, liegt das Hauptproblem bei der syntaktischen Implikation bei Beweisen zur Negierung von Aussagen. Konsistenz-, Unentscheidbarkeits-, Unvollständigkeits- und Unabhängigkeitsaussagen⁴⁸ können ohne Bezug zur Semantik kaum getroffen werden. Bedeutung, Wahrheit, Verifikation machen einen ontologischen Bezugsrahmen für Implikationen nötig, der sich nicht nur auf syntaktisch-linguistische Entitäten beschränken kann. Hier könnte der eigentliche „Geburtsfehler“ des hilbertschen Programms liegen.

Gödels Unvollständigkeitssatz wird von einigen Physikern und Mathematikern in Verbindung mit Phänomenen in chaotischen Systemen diskutiert. So ist bekannt, dass unvermeidliche Rundungsfehler zu einer „Informationslücke“ führen können, die bei nichtlinearen Abhängigkeiten zu einer extrem hohen Sensibilität von den Anfangsbedingungen führt. Abweichungen z.B. in der Millionstel Nachkommastelle beim Start von zwei Systemen können durch Rückkopplungseffekte, wie fortgesetzte Iterationen, zu gänzlich anderen Ergebnissen führen. Typisches physikalisches Beispiel ist das Wetter. Einer der Pioniere ist Edward Lorenz, der in einem Vortrag die Frage stellte, ob der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien in Texas einen Tornado auslösen kann.⁴⁹ Peitgen et. al.⁵⁰ zeigen den Effekt z.B. bei der altbekannten logistischen Gleichung, die bereits 1837 von Pierre François Verhulst z.B. zur Beschreibung von Jäger–Beute-Beziehungen genutzt wurde.⁵¹ Chaos darf man nicht als zufällig oder regellos betrachten. „Nicht-Vorhersagbarkeit“ und „Zufall“ sind zwei verschiedene Dinge. Man spricht auch von „deterministischem Chaos“. Iterationen oder Rückkopplungseffekte können zwar „durch die Schwerkraft eines Elektrons am Rande der Milchstraße“ jede Vorhersagbarkeit zunichtemachen“, (Crutchfield et. al.). Andererseits findet sich im Chaos auch erstaunlich viel Ordnung: Dem „Zufall“ liegt eine mehr oder weniger komplexe geometrische Form zugrunde („Attraktoren“). Ein Startpunkt im Phasenraum wird durch fortgesetzte Iterationen, wie Faltung, Strecken und Stauchung, an immer unbestimmtere Positionen verschoben. Er bleibt aber im Bereich des „Seltsamen Attraktors“. Chaos setzt der Vorhersage grundlegende Grenzen, zeigt aber auch kausale Zusammenhänge auf, wo zuvor keine vermutet

⁴⁸ Rheinwald, ebenda, S. 12

⁴⁹ Edward N. Lorenz, Predictability: Does the Flap of a butterfly's wings in Brazil set off a Tornado in Texas? American Association for the Advancement of Science, 139th Meeting, New York, December 29, 1972

⁵⁰ Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S.43

⁵¹ Pierre-François Verhulst: *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*. In: *Correspondance Mathématique et Physique*. Band 10, 1838, S. 113–121, zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Logistische_Gleichung

wurde.⁵² Für das Wetter bedeutet das beispielsweise, dass es lokal unvorhersagbar ist, aber global stabil bleibt.⁵³

Gödels Methoden, mit denen er seinen Unvollständigkeitssatz bewies, lassen sich ohne weiteres auf die Informationstheorie übertragen. In ihrem schon 1990 erschienen Standardwerk „Die Entdeckung des Chaos“⁵⁴ verweisen Briggs und Peat auf Gregory Chaitin⁵⁵, IBM Forschungslab in Yorktown Heights, New York. Ihn interessiert, ganz in der Tradition von Kurt Gödel und Alan Turing, die Grenzen der Berechenbarkeit und Beweisbarkeit. Er nutzt u.a. für diese Argumentationen einen informationstheoretischen Beweis von Gödels Satz. Dieses Theorem - betrachtet in einem neuem Zusammenhang - kann man in Verbindung zu den Erkenntnissen des englischen Mathematikers Alan Turing sehen, nämlich dass es Computerprogramme gibt, die ein Rechner aus Prinzip nie analysieren kann. Anders formuliert, es lässt sich zeigen, dass Gödels Unvollständigkeitssätze der Behauptung entsprechen, dass es keine allgemeine Methode geben kann, um systematisch zu entscheiden, ob ein Computerprogramm jemals anhalten wird. Gödel entdeckte also die Unvollständigkeit, Turing die Unberechenbarkeit. Chaitin hat sich in seinem wissenschaftlichen Leben bemüht, den Begriff der Komplexität bzw. des algorithmischen Informationsgehaltes besser zu beschreiben. Er möchte damit explizit an die grundlegenden Arbeiten von Gödel und Turing anknüpfen. Es geht ihm darum, die Grenzen mathematischer Methoden sowohl in der Logik als auch in der Informationstheorie weiter zu erforschen. Ein bemerkenswertes frühes Ergebnis seiner Arbeiten in algorithmischer Informationstheorie ist die Erkenntnis, dass es den „Zufall“ sogar in der als „reinen Zweig der Mathematik“ bekannten Zahlentheorie geben kann.⁵⁶

⁵² https://csc.ucdavis.edu/~chaos/courses/poci/Readings/Chaos_SciAm1986/Chaos_SciAm1986.html, James P. Crutchfield, J. Doyne Farmer, Norman H. Packard, and Robert S. Shaw, Chaos, SCIENTIFIC AMERICAN, December, 1986 VOL. 254 NO. 12, 46-57, („If the player ignored an effect even as minuscule as the gravitational attraction of an electron at the edge of the galaxy, the prediction would become wrong after one minute!“).

⁵³ John Briggs, F. David Peat, Die Entdeckung des Chaos, Hanser, München Wien 1990, S. 106

⁵⁴ Briggs, Peat, ebenda S. 107

⁵⁵ https://de.wikipedia.org/wiki/Gregory_Chaitin

Die Titel von Chaitins Werken sind oft Programm:

The Limits of Mathematics, Springer-Verlag, 1998.

The Unknowable, Springer-Verlag, 1999.

Exploring Randomness, Springer-Verlag, 2001.

Thinking about Gödel and Turing - Essays on Complexity 1970-2007, Singapore 2007.

Randomness and mathematical proof, Scientific American 1975

⁵⁶ Siehe auch Gregory J. Chaitin, Randomness in Arithmetic,

An dieser Stelle könnte man die Ausführungen zu Kurt Gödel schließen und auf einschlägige biografische Literatur verweisen. Doch ein wichtiger Lebensabschnitt in seinem Leben war die tiefe Freundschaft, die sich in der gemeinsamen Zeit in Princeton zwischen Albert Einstein und ihm entwickelte. Diese Freundschaft fand durchaus auf gleicher Augenhöhe statt. Im Gegenteil, Einstein sagte einmal, er gehe nur ins Institut, um das Privileg zu haben, mit Gödel zusammen nach Hause gehen zu können. Die beiden machten lange Spaziergänge und diskutierten zentrale Themen der Wissenschaft, Philosophie oder Politik in ihrer Muttersprache Deutsch. Natürlich kannte Einstein Gödels Verdienste in der Logik und seine philosophischen Ansichten und umgekehrt hatte sich Gödel mit Einsteins Physik auseinandergesetzt und seiner Philosophie als Naturforscher.

Gödel wurde gebeten, für den von P.A. Schilpp aus Anlass des 70. Geburtstags herausgegebenen Band „*Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher*“ einen Essay zu verfassen. Gödel nahm die Aufgabe sehr ernst, sagte sogar seinen obligatorischen Sommerurlaub ab und stürzte sich auch noch intensiver in die Mathematik der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART). Er fand eine Klasse von Lösungen der ART, die „Zeitreisen“ in einem rotierenden Universum theoretisch möglich machten. Der Band war ein großer Erfolg, aber Gödels Beitrag wurde zunächst kaum beachtet und sogar von Chandrasekhar und J.P. Wright als fehlerhaft bezeichnet.⁵⁷ Vor allem das Wort des Astrophysikers Subrahmanyan Chandrasekhar hatte Gewicht. Er war bekannt durch seine Untersuchungen zum Aufbau und der Dynamik von Sternen und der mathematischen Theorie von Schwarzen Löchern. Doch Gödel hatte recht. Das bewies ausgerechnet ein Philosoph, Howard Stein.⁵⁸

Zeitreisen hört sich nach *science fiction* an, doch dahinter stecken fundamentale Überlegungen über die Natur der Zeit. Immanuel Kant hat Raum und Zeit als a priori gegeben angesehen. Er nannte sie die beiden essentiellen „Formen der sinnlichen Anschauung des Menschen“. Es war für ihn der Newtonsche, starre Euklidische Raum und die gleichmäßig fließende Zeit. Einsteins spezielle und allgemeine Relativitätstheorie hat diese a priori Annahmen beide widerlegt. In der Physik gibt es keinen absoluten Raum und keine absolute Zeit. Nach den neuesten Messungen des Planck-Teleskop sprechen wir vom Alter des

Scientific American 259, No. 1 (July 1988), pp. 80-85
 online: <https://jillian.rootaction.net/~jillian/science/chaitin/www.cs.umaine.edu/chaitin/sciamer2.html>. Er bemüht darin sogar die Analogie zu Einsteins berühmten Zitat: God sometimes plays dice with whole numbers!

⁵⁷ Chandrasekhar S., J.P. Wright, The Geodesics in Godel's Universe, DOI: 10.1073/pnas.47.3.341

⁵⁸ Siehe Yourgrau, Palle; Gödel, Einstein und die Folgen, C.H.Beck, München 2005, S. 141f, nach John W. Dawson jr., Kurt Gödel, Leben und Werk, Wien/New York 1999, S. 158

Universums ($13,81 \pm 0,04$ Milliarden Jahre). Genau genommen ist dies ein Schnappschuss unseres Inertialsystems, der besagt, dass in unserem „Jetzt“ diese Anzahl an Jahren seit dem Urknall vergangen ist. Es ist unzulässig, diese Zahl auf das gesamte Universum, also alle Inertialsysteme der vierdimensionalen Raumzeit, zu übertragen. Einstein war das vollkommen bewusst:

„Das vierdimensionale Kontinuum ist nicht mehr objektiv in Abschnitte auflösbar, die alle gleichzeitige Ereignisse enthalten. Das „Jetzt“ verliert für die dreidimensionale Welt seine objektive Bedeutung.“⁵⁹

Unsere Alltagserfahrung und damit unsere Sprache hat diesen gedanklichen Schritt immer noch nicht vollzogen. Wir gehen einerseits immer noch davon aus, dass der „Fluss der Zeit“ und die Spezielle Relativitätstheorie, aus unserer lokalen Sicht heraus, vereinbar sind. Das muss falsch sein, denn der „Fluss der Zeit“ ist keine Frage der Geometrie und daher nicht nur lokal beurteilbar. Wie sieht es bei der Allgemeinen Relativitätstheorie mit der „Zeit“ aus? Sie ist nicht beschränkt auf isolierte Inertialsysteme. Es gilt weiterhin die Äquivalenz von Masse und Energie. Die ART behandelt auch die Gravitation, also eine beschleunigende Kraft, die Schwerkraft und Raumzeitkrümmung miteinander in Beziehung setzt, sie sogar als identisch ansieht. Sie ist somit die Grundlage für die moderne Kosmologie. Diese macht Aussagen über das ganze Universum und somit auch Aussagen über die Zeit seit dem Urknall in einer Art und Weise, die viel mit der intuitiven Zeit vor Einstein gemeinsam hat.

An dieser Stelle setzt Gödel an!

Wieder ist es die dialektische Beziehung zwischen formal und intuitiv, die sich wie ein roter Faden durch sein Lebenswerk zieht.⁶⁰

Er gab seinem Beitrag deshalb den Titel: *„Eine Bemerkung über die Beziehungen zwischen der Relativitätstheorie und der idealistischen Philosophie“*. Eine gewisse Ergänzung stellt seine Arbeit mit dem Titel *„Ein Beispiel für einen neuen Typ kosmologischer Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation“*, publiziert im gleichen Jahr 1949 in den *„Reviews of Modern Physics“*. Weiter ergänzend ist eine Protokollnotiz zu einem Vortrag am 7. Mai 1949 im „Institute for Advanced Study“ in Princeton, wo Gödel seine kosmologischen Erkenntnisse vorstellte. Ein Begleitartikel des österreichischen Rundfunks zur Sendung „Ö1 Nachtjournal“ zum 100. Geburtstag von Kurt Gödel vermerkt: *„Die Reaktion war eine Mischung aus Bewunderung, Erstaunen und Unverständnis.“⁶¹* Gödel hatte mit einer eigenen Technik Lösungen aus der ART gefunden, die einem Universum entsprechen,

⁵⁹ Albert Einstein, Relativity. The Special and General Theory, New York 1962, S. 149, zitiert nach Yourgrau, ebenda, S. 145

⁶⁰ Vergleiche die Argumentation von Yourgrau, ebenda, S. 147f

⁶¹ <https://oe1.orf.at/artikel/204398/Die-rotierende-Welt-des-Herrn-Warum>

in der die Materie so stark rotiert, dass sich geschlossene zeitartige Kurven ergeben. Allerdings war dieses erste Modell noch auf Basis eines statischen, sich nicht ausdehnenden Universums. Seit der Entdeckung von Hubble 1929 wurde aber immer deutlicher, dass sich das Weltall ausdehnt. Dies berücksichtigte Gödel in einer Überarbeitung des Modells, wobei die geschlossenen zeitartigen Kurven entfielen, also theoretisch mögliche Zeitreisen nicht mehr möglich wären. Trotzdem sind seine Erkenntnisse über die Zeit höchst bemerkenswert. Sie stellen laut Einstein schon an sich einen bedeutenden Beitrag zur Relativitätstheorie dar. Die verblüffende und geniale Beweisführung in einer komplizierten Abfolge von logischen Schlüssen erinnert stark an den Unvollständigkeitssatz. Sie basiert wieder auf der Dialektik zwischen der formalen und der intuitiven Ebene, die unterschiedlich sind, aber doch in einer gewissen Beziehung zueinanderstehen. Der Unterschied beider Begriffe besteht vor allem in der Tatsache, dass die intuitive Ebene einer formalen Darstellung nicht zugänglich ist.

Formale Zeit, insbesondere in der Einstein-Minkowski Darstellung der vierdimensionalen Raumzeit der SRT (also das kleine „t“ in den Formeln) ist nicht identisch mit der intuitiven Zeit unserer alltäglichen Erfahrung. Das „Jetzt“ unserer Erfahrung fließt, aber ein „Jetzt“ in der SRT gibt es nicht.⁶² Für Gödel ist der Schluss zwangsläufig: Wenn die Relativitätstheorie richtig ist, kann es keine intuitive Zeit geben. Das was wir für die Zeit halten, ist eigentlich eine Illusion, z.B. durch ständige Beobachtung von Vorgängen in unserer Wahrnehmung, deren „zeitliche“ Umkehrung extrem unwahrscheinlich ist, die aber nicht die Wahrscheinlichkeit Null haben. Berühmtes Beispiel ist das zerbrochene Ei – ein Ereignis, das praktisch nicht umkehrbar ist. Solche Ereignisse, die uns ein Fließen der Zeit vorspiegeln, sind bedingt durch die damit verbundene Entropiezunahme.⁶³

Die SRT ist bekanntlich ein Sonderfall der ART. Während die SRT nur unbeschleunigte Bewegung auf geraden Bahnen kennt und deshalb kein Inertialsystem bevorzugt, definiert die ART die Gravitation geometrisch als Raumzeitkrümmung, deren Krümmung andererseits wieder durch die Materieverteilung (und Energie) bestimmt wird. John Archibald Wheeler hat diese gegenseitigen Abhängigkeiten so formuliert:

Matter tells space how to curve.

⁶² Siehe auch Muller, Richard A.; JETZT – Die Physik der Zeit, deutsche Ausgabe S. Fischer Verlag, Frankfurt am Main, 2018

⁶³ Vergleiche Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, W. Kafitz, ZEIT, Bd. 69, Gießen 2021, S. 84, online <http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-1091>

*Space tells matter how to move.*⁶⁴

Die ART aber privilegiert doch einige Bezugssysteme, nämlich die, die laut Gödel „*der mittleren Bewegung der Materie im Universum folgen*.“⁶⁵

Über die ART kommt damit, im Gegensatz zur SRT, ein „Rest“ von Zeit ins Spiel, nämlich die kosmische Zeit, von der wir das Alter des Universums ableiten.

Im nächsten Schritt muss man sich klarmachen, dass über die ART die vierdimensionale Raumzeit (und nicht nur der Raum) vollständig geometrisiert wurde. Dabei erlaubt die ART mathematisch und physikalisch unterschiedliche Lösungen, die jeweils ein anderes Universum, eine andere Welt, darstellen. Gödel hat eine ganze „Schar“ von Lösungen entdeckt, die Wege zulässt, die in unserer vertrauten Welt als unmöglich gelten. Mit der Verfeinerung der Theorie auf expandierende Welten entfällt zwar die Möglichkeit zu Zeitreisen, insbesondere in die Vergangenheit. Dies liegt auch an der Geschwindigkeit der Expansion des Universums, die die Lichtgeschwindigkeit übersteigen kann. Die Expansion des Raums kann schneller sein als elektromagnetische Wellen. Was auf jeden Fall bleibt ist die Rotation. Es gibt jedoch keinen newtonschen absoluten Raum, um den sich die Materie drehen kann. Stattdessen gibt es ein Inertialfeld, das die Bewegung der Körper bestimmt, auf die keine Kraft ausgeübt wird. Dieses Inertialfeld bestimmt das Verhalten der Achse eines vollkommen frei hängenden Kreisels.⁶⁶ Auch in diesen rotierenden Gödel-Universen gibt es zwar keine geschlossenen zeitartigen Kurven und damit keine Zeitreisen, aber auch keine objektive Zeit. Es bleiben also trotzdem verstörende Implikationen, die die Zeit in diesen Welten in Frage stellen.

Doch diese Welten sind nicht unsere Welt. Welche Konsequenzen haben die mathematisch fundierten, also nicht spekulativen Überlegungen auf die „wirkliche Welt“?

Das ist nun der subtilste Schluss, den Gödel ins Felde führt. Lösungen der ART sind mathematische Objekte, die erstmal grundsätzlich existieren. Sie sind möglich und damit also notwendigerweise wirklich, also real. Es ist der berühmte platonische Schluss vom Möglichen zum real Existierenden. Das prinzipiell Mögliche ist Teil der Realität, sonst müsste man keine Wahrscheinlichkeitsrechnung betreiben. Es kann höchstens eine Bewertung des prinzipiell Möglichen vorgenommen werden, wie wahrscheinlich die Möglichkeit ist. Die physikalischen Gesetze gelten auch im Gödel-Universum, da dieses aus dem

⁶⁴ Das Zitat steht im 1973 erschienen Standardwerk Gravitation, von Charles W. Misner, Kip S. Thorne and John A. Wheeler, S. 5. Siehe auch [https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitation_\(book\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitation_(book))

⁶⁵ Zitiert nach Yourgrau, ebenda, S. 162, vergleiche auch die dortige Argumentation

⁶⁶ Kurt Gödel, Lecture on Rotating Universe (1949), in Solomon Feferman et. al. (Hsgr.), Kurt Gödel, Collected Works, Bd. III, New York 1995, S. 269-287, hier 271, zitiert nach Yourgau, ebenda S. 157

physikalischen Gesetz der ART hervorgeht. Wenn es aber im Gödel-Universum keine Zeit gibt, wäre es philosophisch unbefriedigend unserer Welt eine Zeit zuzuschreiben, auch wenn dies nicht zum Widerspruch führt.

Der ansonsten geniale Stephen Hawking war sehr irritiert von Gödels kosmologischen Modellen. Er sah nur die Möglichkeit, die ART so abzuwandeln, dass die so veränderten Einstein-Gleichungen keine Lösung für ein Gödel-Universum ergeben könnten. Er schlug ein „*Chronology Protection Conjecture*“ vor.⁶⁷ Der Ad-hoc-Charakter war jedoch zu offensichtlich und fand keinen Anklang.

Einige Grundsatzfragen der Physik

Hermann Weyl schreibt 1928 in seinem Buch „Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften“: „*Das objektive Weltbild darf keine Verschiedenheiten zulassen, die nicht in Verschiedenheiten der Wahrnehmung sich kundgeben können.*“⁶⁸ Er bemüht David Hume, der auf dem Standpunkt steht, dass das Gegebene nicht die volle Wirklichkeit ist. Über das Gegebene hinaus führen physikalische Theorien. Sie müssen falsifizierbar sein, sich bewähren, Experimente und Beobachtungen erklären können, Voraussagen machen können und werden möglicherweise nach vielen Prüfungen zu Naturgesetzen. Wenn Menschen unterschiedliche Sichten auf die Wirklichkeit haben, benötigt man Methoden, um den Menschen als Faktor auszuschließen. Die Physik liefert entsprechende Methoden. Doch was ist die Aufgabe der Physik? Welches Verständnis haben große Physiker von ihrem Aufgabengebiet? Niels Bohr hat es so formuliert: *Es ist falsch zu denken, es wäre Aufgabe der Physik herauszufinden, wie die Natur beschaffen ist. Aufgabe ist vielmehr, herauszufinden, was wir über die Natur sagen können.* Das ist die Haltung der Positivisten. Zulässige Erkenntnisse über die Realität sind nur beobachtbare Tatsachen. Oder noch klarer: Nur das, was sich konkret beobachten lässt, kann als real anerkannt werden. Man kann hinzufügen: Alles andere sind unzulässige Schlüsse.

Stephen S hat sich in seinem Buch *Der Traum von der Einheit des Universums* mit der Frage nach der Realität beschäftigt und bringt einen weiteren, differenzierenden Aspekt ein. Es geht Weinberg um die Realität der Naturgesetze; „... *nicht der Glaube an die objektive Realität an sich, sondern der Glaube an die Realität der Naturgesetze*“ ist ihm wichtig. Unter Wissenschaftlern, nicht nur Physikern, ist diese Haltung durchaus

⁶⁷ Stephen Hawking, *Chronology Protection Conjecture*, Physical Review D46. Nr. 2 (15. Juli 1992), zitiert nach Yourgrau, S. 156

⁶⁸ Herrmann Weyl; *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, R. Oldenburg Verlag, 8. Auflage, München 2009, S. 152

konsensfähig. Naturgesetze sind nicht nur anpassbare Spielregeln eines Spiels, nach ihnen funktioniert die Welt. Doch ist es nun nur die Aufgabe der Physik, die Naturgesetze zu finden? Hier scheiden sich die Geister. Die einen betrachten es als Selbstbeschränkung, die anderen vermissen die Frage nach der „eigentlichen Realität“. Vor allem in der Quantentheorie ist eine Antwort noch offen, auch wenn viele Physiker auch ohne Antwort gut leben und arbeiten können.

Dieses Kapitel beschäftigt sich insbesondere mit Theorien, die auf Basis der heute verfügbaren Experimental- und Messtechnik dieselben experimentell überprüfbar Aussagen machen und zu gleichen mathematischen Schlussfolgerungen kommen. Insofern ist das Erklärungspotential beider Theorien in letzter Konsequenz gleich. Es werden auch gleiche Grundannahmen gemacht, denn eine Theorie mit weniger Annahmen ist einer Theorie mit stärkeren Annahmen vorzuziehen. Die eine, vollkommen plausible Theorie betrachtet die Frage nach der „eigentlichen Realität“ als irrelevant oder sogar als unzulässig. Die andere, ebenso plausible Theorie, bietet ein Modell der Wirklichkeit an, ein durchaus konsistentes Bild, wie die Realität aussehen kann bzw. könnte. Die erste Theorie ist bequemer, weil sie unbequeme Fragen erst gar nicht zulässt. Die andere Theorie ist zweifellos physikalisch, wirft aber auch philosophische Fragen auf, die zuerst einmal für Physiker fachfremd sind, denn Physiker müssen keine Philosophen sein.

Unabhängig von Interpretationen muss man sich vergegenwärtigen, dass am Anfang der Quantenmechanik zwei oder drei willkürliche, nur mathematisch, nicht nach klassischen Kriterien physikalisch begründbare Postulate standen. Das war die Erkenntnis von Max Planck, dass sich die Wärmestrahlung „Schwarzer Körper“ nur korrekt beschreiben lässt, wenn man die Existenz eines kleinsten Energiepaketes annimmt.⁶⁹ Er postulierte eine neue Naturkonstante als Proportionalitätsfaktor, die mit h abgekürzt wird. Die Existenz von h in einer Gleichung ist ein untrügliches Zeichen, dass es um Quantenmechanik geht. Ein Quant⁷⁰ wird in der Physik als ein Objekt definiert, das durch einen Zustandswechsel in einem System mit diskreten Werten einer physikalischen Größe (meist Energie) erzeugt wird. Daher können Quanten immer nur mit bestimmten „Portionen“ dieser physikalischen Größe auftreten. Insbesondere Energie ist somit gequantelt, nicht kontinuierlich skalierbar, sondern in kleinsten Skalen diskret – ein damals ungeheuerliches Ergebnis, das allen klassischen Prinzipien widersprach. Trotzdem ist die Behauptung von Einstein, 5 Jahre

⁶⁹ Max Planck: Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. In: Annalen der Physik. Band 309, Nr. 3, 1901

⁷⁰ Definition siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Quant> oder z.B. wortgleich <https://www.chemie.de/lexikon/Quant.html>

später, noch radikaler. Energie wird nicht nur in einzelnen Paketen emittiert, sie besteht nach Einstein aus einzelnen Teilchen, den Photonen. Das hat er aus dem „Lichtelektrischen Effekt“ abgeleitet, den Einstein 1905 als Strom von Lichtteilchen interpretierte, die Elektronen aus einer Metalloberfläche schlagen können.⁷¹ Dieser photoelektrische Effekt hängt nicht von der Intensität, sondern allein von der Frequenz ab, wie auch die Energie eines Photons proportional zur Frequenz ist mit h als Proportionalitätsfaktor. Dies widersprach der bisher fest etablierten Wellennatur des Lichts, die sich in vielfach bestätigten Interferenzeffekten manifestiert. Licht, generell elektromagnetische Strahlung, hat also sowohl Wellen, als auch Teilchencharakter. Einstein führte den Begriff „Lichtquant“ ein. Der Proportionalitätsfaktor in der Einsteinschen Rechnung stimmt tatsächlich mit dem bereits bekannten Planckschen Wirkungsquantum überein. Das ist das experimentelle Resultat von Robert Andrews Millikan rund 10 Jahre später.⁷² Einstein hat für die Entdeckung den Nobelpreis 1921 bekommen und nicht, wie viele glauben, für die Relativitätstheorie. Millikan wurde 1923 für die Messung der Elementarladung ausgezeichnet. Dies waren die Anfänge der Quantenmechanik oder Quantentheorie.

Das zweite Postulat betrifft die Interpretation des Wasserstoffspektrums, insbesondere der sogenannten Balmer-Serie. Niels Bohr hat dazu Annahmen getroffen, die sich nur rechtfertigen ließen, weil sie das richtige Ergebnis lieferten. Das erste Bohrsche Modell sieht definierte Elektronenbahnen als „Schalenmodell“ vor und das Atomspektrum resultiert aus Absorption und Emission von Photonen, die durch Sprünge von Elektronen zwischen den Schalen hervorgerufen werden.

Der erst 25 Jahre alte Werner Heisenberg verfasste im März 1927 eine Arbeit, die Physikgeschichte schreiben sollte.⁷³ Sie trägt den Titel „*Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.*“ Er war kein Unbekannter in der wissenschaftlichen Gemeinschaft. Zwei Jahre vorher war ihm die mathematische Beschreibung der Quantenmechanik gemeinsam mit Max Born und Pascual Jordan in einer für Physiker damals ungewöhnlichen Sprache gelungen, der Matrizenmechanik. Einstein hielt nicht viel davon: *Ein wahres Hexeneinmaleins ... höchst geistreich und durch große*

71 Albert Einstein: Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. In: Annalen der Physik. Band 322, Nr. 6, 1905, S. 132–148

72 A Direct Photoelectric Determination of Planck's "h", R. A. Millikan, Phys. Rev. 7, 355, nicht zu verwechseln mit der Bestimmung der elektrischen Elementarladung e , für die Millikan mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde. Das Experiment führte Millikans Doktorand Harvey Fletcher aus.

73 <http://www.fisicafundamental.net/relicario/doc/Heisenberg1927.pdf>

*Kompliziertheit gegen den Beweis der Unrichtigkeit abgesichert.*⁷⁴ Hier sollte er sich irren.

Die Formulierung über Matrizen konkurrierte einige Zeit mit der Wellenmechanik von Erwin Schrödinger, bis sie als mathematisch äquivalent erkannt wurde (Diese Äquivalenz wurde zuerst von Schrödinger, dann auch von Pauli, Eckart, Dirac, Jordan sowie durch von Neumann auf unterschiedliche Art nachgewiesen).

Heisenberg spricht nun in der Arbeit von 1927 von „Ungenauigkeit“, Niels Bohr hat Heisenberg genötigt es auch „Unsicherheit“ (*uncertainty*) zu nennen. Im Deutschen heißt es mittlerweile Unschärferelation oder Unbestimmtheitsrelation, im angelsächsischen Sprachraum hat sich „*uncertainty principle*“ durchgesetzt.

Während man im makroskopischen Bereich, etwa durch sich ergänzende Experimente, z.B. bei Ort und Impuls bzw. Geschwindigkeit, beide Parameter beliebig genau bestimmen kann, ist dies im Quantenbereich nicht gleichzeitig möglich.

Die Heisenbergsche Unschärferelation ist unstrittig: In ihrer ursprünglichen Formulierung sagt sie aus, dass das Produkt aus Ortsunschärfe und Impulsunschärfe nicht kleiner als die Größenordnung der sehr kleinen Planck-Konstante sein kann. Gleichberechtigt daneben steht die Erkenntnis von Max Planck, dass alle Materie und Energie quantisiert vorliegt, salopp formuliert, die Welt ist granular. Energie und damit Materie tritt nur in Paketen mit einer unteren Grenze auf. Insbesondere Lichtteilchen/Photonen unterliegen dieser nach unten beschränkten Granularität. Energie bildet kein beliebig teilbares Kontinuum.

Die Unschärferelation lässt sich für eine Reihe von komplementären Paaren oder Observablen⁷⁵ zu gültigen, unstrittigen Naturgesetzen in Form einer einfachen Formel herleiten oder durch Experimente bestätigen. Sie ist elementar und steht außerhalb von Interpretationen der Quantenmechanik. Mathematisch bedeutet das, dass die beschreibenden Gleichungen für alle Wellenphänomene sich nicht in Form von trigonometrischen oder Exponentialfunktionen entwickeln lassen (Fourier-Theorem). Man beachte: Das

⁷⁴ Zitiert nach Sean Carroll, Was ist die Welt ..., deutsche Ausgabe, Stuttgart 2021, S. 75, siehe auch David Botanis, Einsteins Irrtum

⁷⁵ Ein Beispiel ist die experimentell nachgewiesene Korrelation von Winkelstellung und Drehimpuls (Quelle: Sonja Franke-Arnold et al.: Uncertainty Principle for angular position and angular momentum, in: New Journal of Physics Vol. 6 (2004) S. 103). Bei einem Spin-1/2-Teilchen sind je zwei Spinkomponenten, die zueinander senkrecht stehen, komplementär. Beim Photon ist die Unterscheidung der Polarisationsrichtung horizontal/vertikal komplementär zu der Unterscheidung der um 45° gedrehten Polarisationsrichtungen, sowie zur Zirkularpolarisation (linkszirkular/rechtszirkular). (Quelle: https://www.chemie.de/lexikon/Komplementäre_Observablen.html)

Unschärfeprinzip ist keine direkte Konsequenz der Quantisierung, sondern folgt aus der prinzipiellen Unmöglichkeit komplementäre Parameterpaare gleichzeitig beliebig genau messen zu können. Doch es geht nicht nur um Messgenauigkeit. So ist eine Konsequenz der Unschärfe, dass das, was man Vakuum nennt, keineswegs ein absolut leerer Raum ist, sondern Raum, in dem ständig „virtuelle“ Teilchen entstehen und vergehen.

Man betrachte die Konsequenzen am Beispiel des Paares Geschwindigkeit/Impuls und Ort/Position eines Teilchens: Natürlich kann man zuerst die Geschwindigkeit eines Teilchens mit großer Genauigkeit messen und anschließend (also nicht gleichzeitig) seinen Ort. Allerdings hat sich dann die Geschwindigkeit entscheidend und selbst bei mehreren Messungen an identisch präparierten Systemen nicht kausal vorhersagbar verändert. Die Unbestimmtheitsrelation ist Ursache für den probabilistischen Aspekt der Quantenmechanik – außerhalb von ihren verschiedenen Interpretationen. Man sollte auch beachten, dass sich die Messergebnisse unterscheiden, wenn zuerst die Position und dann der Impuls oder umgekehrt gemessen wird. Der Vorgang und die damit verbundene Rechnung sind nicht kommutativ. Deshalb war Heisenberg auch mit dem mathematischen Hilfsmittel der Matrizenrechnung erfolgreich, in der in der Regel das Kommutativgesetz nicht gilt. Es ist nichtkommutative Algebra.

Heisenberg konnte konstatieren:⁷⁶ *„An der scharfen Formulierung des Kausalgesetzes: „Wenn wir die Gegenwart genau kennen, können wir die Zukunft berechnen“, ist nicht der Nachsatz, sondern die Voraussetzung falsch. Wir können die Gegenwart in allen Bestimmungsstücken prinzipiell n i c h t kennenlernen.“*

Diese Haltung ist beispiellos in der klassischen Wissenschaftsgeschichte der Physik. Hier ging es nicht um die Empfindlichkeit eines Experiments und seiner Messgenauigkeiten oder der Komplexität von Ergebnissen, die den wissenschaftlichen Verstand überforderten. Hier ging es um eine Erkenntnisgrenze, die die Natur selbst gesetzt hat. Das Ideal, dass der Messvorgang unabhängig vom zu messenden Objekt stattfinden kann, ist nur in makroskopischen Dimensionen erreichbar. In der klassischen Mechanik hat ein Messvorgang keine Auswirkungen auf das zu messende System. Die Newtonsche Mechanik hat kein Messproblem. Auf der Quantenebene aber gilt: *Der Beobachter verändert das, was er beobachtet.*⁷⁷

Dieses Prinzip kann man bei direkter Beobachtung (und damit Energieaustausch) unbedenklich unterschreiben.⁷⁸ Doch muss man dazu die

⁷⁶ Heisenberg, ebenda, S. 26 der Abhandlung (Hervorhebung gemäß Original)

⁷⁷ Lindley, David; Die Unbestimmbarkeit der Welt, DVA, München, 2008, S. 16

⁷⁸ Es gibt ein Gedankenexperiment von M. Renninger, das sehr wohl indirekte Rückschlüsse über den Weg eines Photons zulässt, ohne dass eine Wechselwirkung

eigentliche Frage nach der Realität einfach als „unwissenschaftlich“ abtun? Die sogenannte Kopenhagener Deutung der Quantenphysik haben Niels Bohr und Werner Heisenberg gemeinsam entwickelt. Die Frage nach der eigentlichen Realität wird von beiden als unzulässig betrachtet. Doch während Heisenberg sich anfangs vor allem auf physikalische Grenzen der Messung bezog, war die Haltung von Bohr restriktiver. Für ihn gab es Grenzen der Erkenntnis, die man nicht hinterfragen darf. Ein über die mathematische Theorie hinausgehendes Verständnis der Realität war nicht messtechnisch verstellbar, sondern erkenntnistheoretisch unzulässig. Doch es gab Abweichler von der Kopenhagener Deutung. Die Interpretation von Hugh Everett mit seiner Viele-Welten-Version besagt, dass nach jeder Verzweigung der Wellenfunktion sich eine neue, gleichzeitig und parallel zu den bisherigen existierenden multiplen Welten, sogenannte „Multiversen“, aufteilen. Diese Deutung, die mathematisch nicht zu Widersprüchen führt, wurde manchmal belächelt, aber meist als zu extrem eingestuft, auch wenn sich Fürsprecher in den letzten Jahrzehnten häufiger zu Wort melden. Z.B. hat der bereits erwähnte David Bohm einen alternativen Ansatz für die Quantenmechanik entwickelt, der ebenfalls die mathematische Genauigkeit und Vorhersagekraft der Theorie beibehält und dabei die Frage nach der Realität nicht ausklammert.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, über den Begriff der Kausalität in der Quantenmechanik nachzudenken. Eine einfache kausale Erklärung wäre: Ein Ereignis A beeinflusst Ereignis B, indem maximal mit Lichtgeschwindigkeit eine Information von A nach B übertragen wird, die zu einer kausalen, also vom Informationsgehalt der „Nachricht“ abhängigen Beeinflussung von B führt. Die Quantenmechanik selbst verlangt diese Beschränkung der Geschwindigkeit nicht. Erst wenn man relativistische Aspekte berücksichtigt, ergibt sich als Konsequenz, dass Überlichtgeschwindigkeit durch relativistische, nicht durch quantenmechanische Gesetze ausgeschlossen wird. Weiterhin beschreibt die Quantenmechanik im Prinzip lediglich eine feste Anzahl an Teilchen. Schon allein die Experimente am Large Hadron Collider (LHC) benötigen eine erweiterte Quantenmechanik. Das bedeutet zunächst die Einbeziehung von relativistischen Aspekten und andererseits eine Quantenfeldtheorie im Sinne

unter Energieaustausch stattgefunden hat. Er bezieht sich auf einen Satz von Jordan: *„Es ergibt sich unausweichlich, dass jede messende Beobachtung mit einem nicht zu vernachlässigenden Eingriff in das Objekt naturgesetzlich verbunden ist.“*

Sein Gedankenexperiment steht dazu im Widerspruch. Er hat mit Heisenberg korrespondiert. Dieser hat eine subjektivistische Erklärung und plädiert für eine Änderung der Wellenfunktion bevor ein Weg genommen wird, der zu keiner Messung führt. Im Gegensatz zum Doppelspaltexperiment, wo die Kopenhagener Deutung wegen der Welle/Teilchen-Dualität auf Interferenz der Wellenfunktion mit sich selbst verweisen kann, ist diese Erklärung hier nicht schlüssig.

M. Renninger, Messung ohne Störung des Messobjekts, Z. Physik 158 (1960) 417

einer variablen Anzahl an Teilchen, weil im LHC Teilchen erzeugt oder vernichtet werden können.⁷⁹ Der Sprung von der Quantenmechanik zur (von Natur aus auch relativistischen) Quantenfeldtheorie gewährleistet zudem die Kausalität, da diese bereits in der Speziellen Relativitätstheorie gilt.

Das Interessante an der Quantenfeldtheorie ist die Tatsache, dass es nun nicht um die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Wellenfunktion geht, ein Teilchen an einer bestimmten Position zu sehen. Es geht um einen „Schnappschuss“ des gesamten Feldes in Form einer großen Wellenfunktion, die jedem Punkt des Raumes eine zu quadrierende Amplitude zuordnet, die der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass sich Teilchen dort nachweisen lassen. In dieser Form lässt sich „Verschränkung“ relativ einfach beschreiben. Es ist eine Wellenfunktion der Menge aller Konfigurationen. In ihrem „Modus“ mit niedrigster Energie entspricht sie dem, was man „Vakuum“ nennt. Dabei ist die Energie nicht Null, sondern es können spontan ständig Paare sogenannter virtueller Teilchen bzw. Antiteilchen entstehen, die sich wieder vernichten können und deren Einfluss sich in Experimenten nachweisen, also messen, lässt. Sogar eine Superposition eines Null-Teilchen-Zustands mit einem Ein-Teilchen-Zustand ist in der Quantenfeldtheorie denkbar. Es ist ein Zustand ohne eine ganzzahlige Anzahl an Teilchen. Paul Dirac nennt das Superpositionsprinzip die *konzeptionelle Grundlage der Quantentheorie*.⁸⁰ Auch in angeregten Zuständen kann die scheinbare Anzahl an Teilchen variieren, denn Teilchen können zerfallen oder gebildet werden. Trotzdem wird erst durch Beobachtung ein konkreter Ort des Teilchens festgelegt. Das Teilchen ist also nicht an zwei oder mehreren Orten beobachtbar, aber durch die beobachtbare Quanteninterferenz können wir indirekt auf die Superposition schließen. Die ursprüngliche Fassung der Quantenmechanik betrachtet Teilchen und Wellen als zwei Seiten einer Medaille. In der Quantenfeldtheorie sind die Felder wesentlich elementarer. Teilchen manifestieren sich erst bei einer Messung. Paul Davies hat 1984 einen Artikel betitelt: *Particles do not Exist*.⁸¹ In manchen Fällen sind das, was wir der Einfachheit halber als Teilchen, wie die Quarks und Gluonen in Protonen und Neutronen, bezeichnen, überhaupt nicht isoliert beobachtbar. Hier sind wir wieder bei dem Begriff der Messung und was die „eigentliche Realität“ ist.

Die gegensätzlichen Grundpositionen werden in einem Gespräch zwischen Einstein und Heisenberg deutlich, das Heisenberg der Nachwelt überliefert

⁷⁹ Vergleiche Ecker, Gerhard; Teilchen, Felder, Quanten, Springer Spektrum, Berlin 2017, S. 33f

⁸⁰ Carlo Rovelli, Helgoland, S. 50

⁸¹ Paul C.W. Davies, Quantum Theory of Gravity: Essays in honor of the 60th birthday of Bryce S. DeWitt. Edited by Bryce S. DeWitt. Published by Adam Hilger Ltd., Bristol, England, 1984., p.66

hat.⁸² Nach seinen beispiellosen Erfolgen wurde Heisenberg zu einem Vortrag 1926 in der Berliner Universität eingeladen und wurde im Nachgang von Einstein in sein Appartement zu einem Gespräch gebeten.

Heisenberg weigerte sich in dem Vortrag, die Bahnen der Elektronen in Atomen zu diskutieren, weil man sie nicht beobachten kann und bezieht sich deshalb nur auf die beobachtbaren Lichtspektren. Einstein war schockiert und fragte, ob Heisenberg allen Ernstes glaube, dass man in eine Theorie nur direkt beobachtbare Größen aufnehmen kann. Heisenberg bezog sich auf den Empiriker Ernst Mach, den Einstein auch bei seiner Relativitätstheorie zitierte. Einstein lehnte jedoch dessen extreme Art ab: *Mach tut so, als wisse man schon was „beobachten“ bedeutet ... und er glaubt, sich an dieser Stelle um die Entscheidung objektiv oder subjektiv drücken zu können.*⁸³

Heisenberg beginnt seine bahnbrechende, auf Helgoland erarbeitete Arbeit mit dem Satz: *In der Arbeit soll versucht werden, Grundlagen zu gewinnen für eine quantentheoretische Mechanik, die ausschließlich auf Beziehungen zwischen prinzipiell beobachtbaren Größen basiert ist.*⁸⁴ Es wird die Geburtsstunde der theoretischen Quantenphysik, die dann gemeinsam mit Max Born, der die Matrixstruktur in der Arbeit erkannte und Pascual Jordan zur Matrizenmechanik ausgestaltet wurde. Es ist ein Plädoyer für eine ausschließlich auf Beobachtung fokussierte, wenn nicht sogar reduzierte Haltung des Logischen Empirismus oder Positivismus, wie sie vor allem Ernst Mach proklamierte. Für Mach war alles, was nach der „wahren Realität“ hinter den beobachteten Phänomenen fragte, Metaphysik.

Beobachten heißt messen, doch was ist eine Messung? Egal, ob in der unanschaulichen Matrizenmechanik oder der äquivalenten, aber leichter anwendbaren Wellenmechanik von Schrödinger blieb die strenge Kausalität auf der Strecke. Wellenfunktionen der Teilchen verhalten sich anders, wenn sie gemessen werden. Noch wichtiger ist die Frage, was die Wellenfunktion, die die Natur so fast perfekt beschreibt, eigentlich bedeutet. *Welches physikalische Phänomen repräsentiert sie, wenn sie überhaupt eines repräsentiert.*⁸⁵ Max Born hatte im Jahr 1929 immerhin eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation der quantenmechanischen Wellenfunktion vorgeschlagen und eine statistische Lösung erarbeitet. Das Quadrat der Wellenfunktion entspricht danach der Wahrscheinlichkeit, mit der sich ein Teilchen gerade an einem bestimmten Ort

⁸² Werner Heisenberg, *Der Teil und das Ganze*, Piper, München 1971

⁸³ Ebenda, S. 95, zitiert nach Becker, Adam; *Was ist real?* deutsch bei Springer Sachbuch 2021, S. 23

⁸⁴ Werner Heisenberg, *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*. *Zeitschrift für Physik* 33 (1): 879–893. Online: <http://www.psiquadrat.de/downloads/heisenberg1925.pdf>

⁸⁵ Sean Carroll, *Was ist die Welt ...*, deutsche Ausgabe, Stuttgart 2021, S. 82

aufhält, wenn man es dort messen würde. Doch die Messung bewirkt, dass die Wellenfunktion „kollabiert“; ein umstrittener Begriff. Teilchen scheinen sogar die Messung, z.B. die Frage nach dem Weg des Teilchens durch einen Doppelspalt, gemäß ausgeklügelten Experimenten regelrecht zu „ahnen“. Hier kommt die „Unbestimmtheitsrelation“ und die Grenzen des Beobachtbaren wieder ins Spiel. Bohr griff das Unschärfeprinzip auf der International Physics Conference im September 1926 am Comer See auf. *„Deshalb kann eine unabhängige Realität im üblichen physikalischen Sinn weder dem Phänomen noch dem Beobachtungsmedium zugeschrieben werden.“*⁸⁶ Man kann also, nach Bohr, prinzipiell nicht danach fragen, was die „unabhängige Realität“ ist. Bohrs wichtigste Philosophie war das Komplementaritätsprinzip, das insbesondere eine Konsequenz aus der „Welle-Teilchen-Dualität“ ist. Jedes Objekt beliebiger Masse hat nach Louis Victor De Broglie Teilchen- und Wellencharakter. De Broglie hat die bekannten Gesetze für masselose Photonen in seiner Dissertation 1924 auf massebehaftete Teilchen angewendet und im klassischen wie relativistischen Fall entsprechende Wellenlängen je nach Impuls hergeleitet.⁸⁷ Wellen haben jedoch keinen Ort, Teilchen schon. Für Bohr offenbart sich hierbei kein Widerspruch, sondern eine komplementäre Beziehung. Eine vollständige Beschreibung eines Quantenobjektes ist nach Bohr nicht möglich, sondern nur eine komplementäre. Aus dieser Position heraus wurde die bereits angesprochene Kopenhagener Deutung oder Kopenhagener Interpretation entwickelt.

*Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen.*⁸⁸

Nach diesem vielzitierten letzten Satz aus dem „Tractatus“ von Ludwig Wittgenstein, ein wichtiger Philosoph für den „Wiener Kreis“, wird heute noch durch viele Physiker die Kopenhagener Deutung verteidigt. Doch andere Deutungen sind mittlerweile veröffentlicht worden. Es gibt sie also, egal ob sie die „wahre Realität“ richtig deuten oder nicht. Sie sind jedenfalls voll kompatibel mit der unbestrittenen mathematischen Theorie. Ihre Autoren haben ein Jahrzehnte altes Denkverbot des übermächtigen Nestors der Quantentheorie, Niels Bohr, ignoriert.

Die ebenfalls zahlreichen Verfechter der Kopenhagener Deutung betrachten bis heute Einstein als Verlierer der hochrangigen Diskussionen mit Bohr, bis hin zu

⁸⁶ zitiert nach Becker, Adam; Was ist real? Springer Sachbuch, Berlin 2021, S. 33

⁸⁷ Für einen mit $v = 15$ km/h laufenden Menschen von $m = 70$ kg kommt man auf eine deBroglie-Wellenlänge von $\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} \approx 2,27 \cdot 10^{-36}$ m. Den relativistischen Fall setzt man meist bei $0,1 \cdot c$ an ($c =$ Lichtgeschwindigkeit, $h =$ Plancksches Wirkungsquantum, $m =$ Masse, $v =$ Geschwindigkeit)

⁸⁸ Ludwig Wittgenstein, Tractatus logico-philosophicus, https://zs.thulb.uni-jena.de/rsc/viewer/jportal_derivate_00229770/00000268.tif.original.jpg?logicalDiv=jportal_jparticle_00326119 Satz 7. Seite 262

den Duellen auf der berühmten 5. Solvay-Konferenz im September 1927 in Brüssel.⁸⁹ Alles in allem wurde von Bohr, Born, Heisenberg und anderen Teilnehmern in Brüssel die Quantentheorie als mathematisch und physikalisch abgeschlossen und ausgereift betrachtet, bei der es keinen Grund gab, nach einer objektiven Realität zu fragen. Hier ist man wieder bei den Gedanken des „Wiener Kreis“, der sich in der Nachfolge von Ernst Mach sieht und im „Logischen Positivismus“ die Ansicht vertritt, dass das, was nicht beobachtet werden kann, bedeutungslos ist.⁹⁰ Einstein und Bohr trennte die Antwort auf eine grundsätzliche Frage, die Bohr in für ihn ungewöhnlicher Klarheit folgendermaßen beantwortet:

*Es ist falsch zu denken, die Aufgabe der Physik sei herauszufinden, wie die Natur ist. Physik beschäftigt sich damit, was wir über die Natur sagen können.*⁹¹

Die Grundhaltung von Einstein drückt sich in dem viel zitierten Zitat aus:

Das Wichtigste ist, dass man nicht aufhört zu fragen.

Diese Haltung schließt Denkverbote kategorisch aus. *Das programmatische Ziel der ganzen Physik [war] die vollständige Beschreibung aller (individueller) realer Situationen (die vermeintlich unabhängig von jedem Akt der Beobachtung oder Begründung sind).*⁹² Er erkannte klar im Positivismus und seinen Anhängern das philosophische Problem und verglich ihre Haltung mit dem Prinzip [des irischen Philosophen George] Berkeley: „esse est percipi“ [Sein ist Wahrgenommen werden]. Auch Heisenberg macht in einem Vortrag 1955 in St. Andrews (Schottland) deutlich, dass er voll die Linie Bohrs vertritt. Die „Vorstellung einer objektiven, realen Welt, deren kleinste Teile in der gleichen Weise objektiv existieren wie Steine und Bäume, gleichgültig, ob wir sie beobachten oder nicht“, ist unmöglich. „Wenn wir beschreiben wollen, was in einem Atomvorgang geschieht, so müssen wir davon ausgehen, dass das Wort „geschieht“ sich nur auf die Beobachtung beziehen kann, nicht auf die Situation zwischen zwei Beobachtungen.“⁹³ Die Frage, was passiert, wenn wir nicht hinschauen und das Besondere am Messvorgang, also das bis heute bestehende Messproblem, darf nicht gestellt werden. Physiker, wie Hans-Peter Dürr, nehmen eine differenzierte Haltung ein. Obwohl er Einstein widerspricht, werden extreme Positionen der Kopenhagener Deutung, wie leugnen der Existenz von Quantenobjekten, bevor sie durch Messung identifiziert wurden,

⁸⁹ Ausgerichtet vom belg. Unternehmer Ernest Solvay und initiiert von Walther Nernst

⁹⁰ Siehe Becker, ebenda S. 43

⁹¹ N. David Mermin 1985, „Ist he Moon There When Nobody Looks? Reality and the Quantum Theory“, Physics Today 38 (4): 38-47, zitiert nach Becker, ebenda, S. 45

⁹² Albert Einstein, Reply to Criticisms, in Schilpp Hsgr. 1949, Albert Einstein Philosopher-Scientist, MJF Books, New York, zitiert nach Becker, ebenda S. 45

⁹³ W. Heisenberg, Physik und Philosophie, Ullstein TB, Frankfurt a. M. 1990, zitiert nach Becker, ebenda S. 59

nicht übernommen. Als Schüler von Werner Heisenberg ist aber klar, welches Lager er vertritt:

„Unter dem starken Einfluss der Naturwissenschaft ... haben wir uns daran gewöhnt, unsere Wahrnehmung von der Wirklichkeit mit der Wirklichkeit gleichzusetzen und diese Wirklichkeit sogar im Sinne einer materiell fundierten, in Teile zerlegbaren Realität zu interpretieren. Die moderne Physik hat uns da jedoch eine interessante Lektion erteilt, die zu einer tief greifenden Korrektur dieser Vorstellung führte. Sie hat uns bedeutet, dass die Vorstellung einer objektiven Realität, einer materiell ausgeprägten Wirklichkeit wohl in einer gewissen Näherung angemessen, aber als absolutes Naturprinzip unzulässig und falsch ist, ja, dass diese Vorstellung uns sogar einen tieferen Einblick in das Wesen der eigentlichen Wirklichkeit versperrt.“⁹⁴

Interessant ist der Zusatz *„... einen tieferen Einblick in das Wesen der eigentlichen Wirklichkeit versperrt.“* Es ist also nach Dürr nicht nur erlaubt zu fragen. Die Formulierung ein *„tiefere[r] Einblick“* kann ein Physiker wie er nicht nur philosophisch oder metaphysisch verstehen, sondern als zumindest potentielle Möglichkeit, physikalisch tiefergehende Antworten zu geben.

Es ist nicht vorhersagbar, wann ein radioaktives Atom zerfällt. Man kann lediglich statistische Aussagen über die Häufigkeit des Zerfalls, in Form der Halbwertszeit, machen. Sie sagt aus, in welchem Zeitraum die Hälfte der Atome zerfallen ist. Die Standardlehrmeinung ist, dass der Zerfall eines Atoms rein zufällig ist. Insbesondere das Prinzip der strengen Kausalität wird dabei aufgegeben. Einstein schrieb in einem auf den 4. Dezember 1926 datierten Brief an Max Born:

„Die Quantenmechanik ist sehr achtunggebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, daß das noch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß der nicht würfelt.“⁹⁵

Allerdings muss man diese Haltung differenziert betrachten. Man kann in identisch konzipierten Experimenten Konstellationen von Teilchen betrachten und vermessen, die exakte Kopien darstellen (siehe Verschränkung). Man erhält dabei aber in der Regel verschiedene Messwerte für Position und Impuls.

⁹⁴ Zitiert nach [https://de.wikipedia.org/wiki/Realismus_\(Philosophie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Realismus_(Philosophie)), Hans Peter Dürr auf der Tagung Geist und Natur 1988, zitiert nach: Fritz Schäfer: *Der Buddha sprach nicht nur für Mönche und Nonnen*. 2. Aufl. Kristkeitz, Heidelberg-Leimen 2000, S. 10

⁹⁵ Nach Wikipedia https://de.wikipedia.org/wiki/Gott_würfelt_nicht

Albert Einstein, Hedwig und Max Born: Briefwechsel 1916–1955. Rowohlt Taschenbuchverlag, Reinbek bei Hamburg, 1972, S. 97f, Online: https://wuecampus.uni-wuerzburg.de/moodle/pluginfile.php/2044577/mod_resource/content/1/Einstein,Born - Briefwechsel.pdf

Max Born: Physik im Wandel meiner Zeit. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1959, 3. Auflage, S. 244

Sie sind nicht beliebig willkürlich oder zufällig, sondern es lassen sich für jede Observable Wahrscheinlichkeiten bestimmen und diese statistisch verifizieren. Man muss also deshalb Observable, Zustände und Abhängigkeiten unterschiedlicher Messungen getrennt behandeln. Der Begriff „Observable“ hat deshalb in der Quantenmechanik eine vollkommen unterschiedliche Bedeutung als in der klassischen Mechanik. Determinismus ist zumindest eingeschränkt. Wesentlich verstörender als die Unschärferelation oder der Aufgabe des Determinismus, in dem der Zufall akzeptiert wird, ist jedoch ein anderes Phänomen der Quantenmechanik. Es geht um sogenannte verschränkte Teilchen. Zwei oder mehr verschränkte Teilchen haben bestimmte, voneinander abhängige Eigenschaften, z.B. hat ein Teilchen Spin up und das andere Spin down. Es steht aber vor der Messung nicht fest, welches Teilchen welche Eigenschaft hat. Werden diese Teilchen beliebig weit voneinander getrennt und wird an einem der Teilchen eine Messung des Spins vorgenommen, so wird instantan, also sofort ohne Zeitverzögerung und unabhängig von der Entfernung das eine Teilchen Spin up und das andere Teilchen Spin down annehmen. Dabei spielt die Relativitätstheorie bzw. die Lichtgeschwindigkeit keine Rolle. Eine Informationsübermittlung ist auch nicht möglich, da sich das Verhalten der Teilchen nicht vorhersagen lässt. Es wird zunehmend deutlich, dass der Vorgang technisch von Bedeutung werden wird. Anwendungen in der Kryptographie und bei den Möglichkeiten von Quantencomputern sind greifbar nahe. Trotzdem ist die reine physikalische Tatsache verstörend für unser Weltbild. Erst zum Zeitpunkt der Messung hat man wieder unverschränkte Systeme; zum Zeitpunkt der Verschränkung ist das Gesamtsystem wohlgeordnet und nicht in Einzelsysteme separabel. Einstein sprach von „*spukhafter Fernwirkung*“⁹⁶, heute sind die durch Verschränkung verursachten Korrelationen unbestreitbar und in vielen Experimenten zweifelsfrei nachgewiesen. Das letzte Aufbäumen in der Auseinandersetzung Einstein - Bohr fand 1935 statt, als Einstein mit zwei Kollegen, Boris Podolsky und Nathan Rosen, ein Gedankenexperiment publizierte, das nach den Initialen der Autoren EPR-Papier genannt wird. Das Szenario: Zwei Teilchen, A und B, die anfänglich durch Verschränkung miteinander wechselwirken, fliegen diametral auseinander und können an weit voneinander entfernten Orten gemessen werden. Wenn der Impuls von A gemessen wird, ist verzögerungslos der Impuls von B festgelegt.⁹⁷ Ein solches System wird durch einen einzigen, speziellen quantenmechanischen Zustand beschrieben. Dieser Zustand ist kein Produktzustand, sondern die beiden Teilchen befinden sich in einem speziellen, korrelierten Zustand, für den Erwin Schrödinger den Begriff „Verschränkung“ eingeführt hat.

⁹⁶ spooky action at a distance

⁹⁷ Vergleiche <https://de.wikipedia.org/wiki/Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon>

An den räumlich getrennten Teilchen werden zwei sog. komplementäre Messgrößen betrachtet, z. B. Ort und Impuls, oder zwei verschieden-gerichtete Spins („Drehimpulsbestandteile“). Die gleichzeitige exakte Bestimmung dieser Messgrößen ist nach der Heisenbergschen Unschärferelation unmöglich.

Es kann gezeigt werden, dass die Werte dieser Messgrößen für die beiden Teilchen, trotz der Trennung und trotz der Unschärferelation, streng korreliert sind: Eines der beiden Teilchen befindet sich nach der Messung in einem Eigenwert der ersten Messgröße, das andere im dazu komplementären Wert der zweiten Größe. Welches der beiden Teilchen den einen Messwert und welches den anderen ergibt, das muss dabei nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermittelt werden. Dieses experimentelle Ergebnis wäre bei einer klassischen Theorie nicht möglich. Einstein sprach deshalb von einer „spukhaften Fernwirkung/ spooky action at a distance“. Das EPR-Papier brachte zunächst nochmal Bewegung in die Diskussion. Podolsky lancierte übrigens die Information unabgestimmt an die Presse, die eine reißerische Schlagzeile daraus machte. Einstein intervenierte und brach auch die Zusammenarbeit mit Podolsky ab, der das Papier auch letztlich nicht unbedingt in der nötigen Klarheit formuliert hatte. Bohr antwortete sechs Wochen später in der gleichen Zeitschrift und auch seine Replik war ebenfalls schwammig. Damit endete die Diskussion der zwei wichtigen Protagonisten. Was bleibt, ist die übermächtige Stellung der Kopenhagener Deutung. Lange Zeit stand ein Beweis des brillanten John von Neumann im Raum, der bewies, dass die Kopenhagener Deutung die einzige konsistente Theorie ohne verborgene Variablen sei. Von Neumanns Ergebnis, der noch dazu ein vielbeachtetes Buch zur Quantentheorie veröffentlicht hatte, wurde gar nicht bezweifelt. Doch Jahre später fand Grete Hermann,⁹⁸ leider weitgehend unbeachtet, eine Lücke in diesem Beweis.

Trotzdem muss man konstatieren: Es gibt konkurrierende Erklärungsansätze, von denen die De Broglie-Bohm-Theorie wohl noch am meisten ernst zu nehmen ist. Auf diese muss noch eingegangen werden. Auf jeden Fall wurde viel später (1966) durch die sogenannte Bellsche Ungleichung⁹⁹ ausgeschlossen, dass verborgene Variablen existieren können. John Stewart Bell hat ähnlich wie Hermann argumentiert, aber darüber hinaus überprüfbare Voraussagen gemacht. Eine lokal-realistische Erklärung, wie sie Einstein favorisierte, ist demnach nicht möglich.

Die Kopenhagener Deutung bestreitet, dass die Quantenmechanik überhaupt einen realistisch orientierten Erklärungsansatz zulässt. Realistisch bedeutet in diesem Zusammenhang, dass Aussagen über den Zustand auch vor der

⁹⁸ https://de.wikipedia.org/wiki/Grete_Hermann

⁹⁹ https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Ungleichung,
https://cds.cern.ch/record/111654/files/vol1p195-200_001.pdf

Messung gemacht werden können. Eine Messung ermittele nicht den Zustand, wie er vor der Messung vorlag, sondern schreibe einen gänzlich neuen Zustand fest. Der Ausgangszustand sei prinzipiell unzugänglich. Das Messproblem besteht in der willkürlichen Annahme, dass die Wellenfunktion durch die Messung kollabiert, ein Modell, das von Neumann eingeführt hat. Damit wird ein altes Prinzip verletzt: *Natura non facit saltus* (Die Natur macht keine Sprünge). Schon die Griechen postulierten diesen Grundsatz über Prozesse in der physikalischen Welt. Gottfried Wilhelm Leibniz formulierte es als „*loi de continuité*“. Ein Objekt passiert jeden Punkt und wenn es aufgehalten wird, so erzeugt es auf jeden Fall durch seinen Impuls eine Wirkung. Das ist aber nicht das eigentliche Problem. Eine Wellenfunktion hat nach der Kopenhagener Deutung gemäß Friebe et. al. nämlich tatsächlich zwei diametral unterschiedliche zeitliche Dynamiken:¹⁰⁰

- *Eine kontinuierliche, deterministische und zeitlich-reversible, unitäre Zeitentwicklung ...*
- *Eine diskontinuierliche, indeterministische, zeitlich-irreversible Zeitentwicklung ...*

Außerdem müsste eigentlich Messsystem und das zu messende Quantenobjekt als ein Ganzes betrachtet werden. Die Kopenhagener Deutung trennt bewusst zwischen dem klassisch zu beschreibenden Messsystem und dem Quantenobjekt. Man bezeichnet diese Trennlinie als *Heisenberg Schnitt*. Es gibt aber kein physikalisches Kriterium, wo man die Grenze ziehen sollte, ab der ein Objekt makroskopische Eigenschaften hat; wann also Dekohärenz stattfindet. Neuere Experimente zeigen, dass immer schwerere Teilchen Quanteneigenschaften besitzen können. Man kann aber Zeiten angeben, wann Teilchen unter welchen Bedingungen kohärente Eigenschaften verlieren:

Z.B. ein freies Elektron bei 300 K im Ultrahochvakuum in 10 Sekunden (s), ein Staubteilchen 10 μm in 10^{-4} s, eine Bowlingkugel in 10^{-12} s. Unter Einfluss von Sonnenlicht auf der Erde schon in 10^{-9} bzw. 10^{-10} bzw. 10^{-18} s.¹⁰¹

Im Jahr 1932 hat John von Neumann den Kollaps in seinem Buch *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* als ein Postulat eingeführt, also als eine willkürliche Festlegung. Ein Kollaps der Wellenfunktion bleibt daher eine unbefriedigende Erklärung ohne physikalischen Beleg. Wenn Quantensysteme mit ihrer Umgebung wechselwirken und dabei kohärente Eigenschaften verlieren, nennt man es also Dekohärenz. Der Begriff geht auf Hans Dieter Zeh zurück, der von seinem Doktorvater gewarnt wurde, dass

¹⁰⁰ Vergleiche Friebe, Cord; Kuhlmann, Meinard; Lyre, Holger, Näger, Paul; Pason, Oliver; Stöckler, Manfred; Philosophie der Quantenphysik, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2015, S. 58f

¹⁰¹ Quelle der Zahlenwerte: <https://de.wikipedia.org/wiki/Dekohärenz>

solche Forschungen die Karriere kosten können. Sie bietet immerhin eine lokale physikalische Erklärung, wieso Superpositionen aufbrechen und die Objekte des „ehemaligen“ Quantensystems makroskopische Eigenschaften annehmen. Die Idee lässt sich durchaus auf den Messvorgang ausdehnen. Es liegt eben kein abgeschlossenes System zwischen Messgerät und Quantenobjekten vor, sondern betrifft die gesamte Umgebung inkl. des Einflusses von Licht bzw. elektromagnetischer Strahlung. Friebe et. al. verweisen auf Pionierarbeiten z.B. von Hans Dieter Zeh und einen bei Erscheinen ihres Buches aktuellen Stand bei Maximilian Schlosshauer.¹⁰² Es sind immerhin Modelle entstanden, warum der lokale Beobachter keine Superpositionen mehr sieht. Die Modelle sind kontinuierlich(!), da lokal die Interferenzterme in einem zwar schnellen, aber stetigen Vorgang verschwinden. Diskontinuierliche Erklärungen und Begriffe, wie Kollaps oder Beobachterabhängigkeit, werden dadurch vermieden. Es gibt darin keine wie auch immer geartete Subjektabhängigkeit der Wirklichkeit. Und vor allem: *Natura non facit saltus* - Die Natur macht keine Sprünge.

Die meisten Physiker beteiligen sich nicht an Fragen zur Interpretation der Quantentheorie. Eine moderate Kopenhagener Deutung ist der bequemste *modus vivendi* für sie. Für die meisten Physiker stellt sich die Frage nach der Realität nicht, sie halten sich aus der Interpretation der Quantentheorie heraus und nutzen ihre zweifellos beispiellos exakte mathematische Beschreibung, kurzum, sie rechnen nur damit (siehe *shut up and calculate*). Nur für einige wenige Physiker und Philosophen ist die Frage nach der „*eigentlichen Wirklichkeit*“ (Dürr), noch offen. Sie fragen immer noch: Was ist Realität?

Oppenheimer, bei dem Bohm studiert hatte, sagte einmal: *Wenn wir Bohm nicht widerlegen können, müssen wir uns darauf verständigen, ihn zu ignorieren.*

Der Herausgeber von *Physical Review*, Samuel Goudsmit, wies 1973 seine Redakteure schriftlich an, keine Veröffentlichung von Artikeln zu Grundlagen der Quantenmechanik auch nur in Betracht zu ziehen, wenn sie keine neuen Voraussagen machten.¹⁰³

Mit dem Namen Aharonov verbindet sich eine bezeichnende Geschichte, die Sean Carroll berichtet.¹⁰⁴ David Albert ist heute Philosophie-Professor an der Columbia-University und führend in Bezug auf die Grundlagen der Quantenmechanik. Das interessierte ihn schon als Doktorand und er veröffentlichte mehrere Artikel gemeinsam mit dem heute renommierten

¹⁰² Schlosshauer, Maximilian; *Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition*, Berlin/Heidelberg 2007, Springer

Zeh, Heinz-Dieter; *On the interpretation of measurement in quantum theory*, *Foundations of Physics* 1, 1970, S. 69-76

¹⁰³ Beispiele zitiert nach Sean Carroll, *Was ist die Welt ...*, S. 209-211

¹⁰⁴ Carroll, ebenda, S. 209

israelischen Physiker Yakir Aharonov und ehemaligem Mitarbeiter von David Bohm zu diesen Themen. Er wollte dann diese wichtigen Beiträge zu seiner Dissertation zusammenfassen. Man drohte ihm daraufhin, ihn aus dem Promotionsprogramm auszuschließen und verdonnerte ihn, seine Arbeit in mathematischer Physik zu schreiben. Das Ganze war eindeutig als Strafe gedacht und sollte seinen „Charakter festigen“.

An dieser Stelle ist ein kurzer historischer Rückblick hilfreich.

Die Machtergreifung Hitlers, das Ausbluten der „großdeutschen“¹⁰⁵ Wissenschaft durch die Judenverfolgung, die Entwicklung der Atombombe in den USA setzten andere Prioritäten. Heisenberg und andere hochrangige Physiker, darunter Otto Hahn, der Entdecker der Kernspaltung als Chemiker, wurden in Farm Hill unter komfortabelsten Bedingungen interniert.¹⁰⁶ Ziel der sogenannten Epsilon-Mission war der erfolgreiche Versuch, möglichst umfassende Kenntnis über den Stand der deutschen Kernphysikforschung zu erlangen. Die zehn Internierten, acht Physiker und zwei Chemiker, spotteten noch über die harmlosen Restriktionen im Vergleich zu Gestapo-Methoden, doch ihre Quartiere waren gespickt mit Mikrofonen und die Alliierten konnten hören, dass das deutsche Atomprogramm mit Heisenberg als wissenschaftlichem Leiter nie eine ernsthafte Gefahr für den Kriegsverlauf dargestellt hat. Heisenberg erzählte Zeit seines Lebens die Geschichte, dass er nur an Grundlagenforschung interessiert war. Niels Bohr war nach der Besetzung Dänemarks nach Schweden geflohen und dann über England nach Amerika gereist. In den USA arbeiteten im Krieg 125.000 Menschen am Nuklearprogramm, dem Manhattan-Projekt. Wigner, Szillard und Teller hatten die militärischen Möglichkeiten erkannt und befürchtet, dass auch Deutschland an der Bombe arbeitet. Sie gewannen Albert Einstein, einen Brief an Roosevelt zu unterschreiben, der dazu beitrug, dass schließlich in Los Alamos die erste Atombombe auf Basis Uran-235 testweise gezündet wurde. Am 6.8.1945 wurde die Bombe aus hochangereichertem Uran auf Hiroshima abgeworfen; drei Tage später eine Plutonium-Bombe auf Nagasaki. Otto Hahn wurde in Farm Hill vom britischen Offizier informiert. Erst durch einen BBC-Bericht konnten die deutschen Physiker die Nachricht glauben.

In den Nachkriegsjahren boomte die physikalische Forschung insbesondere in den USA. Noch 1938 wurden 17 Millionen US-Dollar für die physikalische Forschung in den USA ausgegeben; 1953 waren es knapp 400 Millionen Dollar,

¹⁰⁵ Viele Physiker mit jüdischen Wurzeln, die am Manhattan-Projekt arbeiten, stammte aus dem ehemaligen Vielvölkerstaat Österreich-Ungarn, wie Edward Teller, John von Neumann, Leó Szillárd, Eugene Wigner, Paul Erdős, Geoge Pólya und andere. Aber auch Theodore von Kármán, als genialen Aerodynamikexperten, der 1934 in die USA auswanderte.

¹⁰⁶ https://de.wikipedia.org/wiki/Operation_Epsilon

davon 98% vom Pentagon oder militärnahen Institutionen.¹⁰⁷ Doch für philosophische Interpretationen war wenig Platz. Die Quantentheorie funktionierte mathematisch unglaublich gut. Von der Entwicklung immer kleinerer Siliziumtransistoren bis zum LASER nahm ihre Bedeutung zur Entwicklung militärischer, ziviler und Dual-Use-Produkten bis heute stetig zu. Die Quantentheorie als mächtige und äußerst präzise Theorie funktioniert hervorragend.

Die De Broglie-Bohm-Theorie änderte an der praxisorientierten Situation kaum etwas. Sie macht keine neuen bzw. weitergehenden Voraussagen, die durch experimentelle Überprüfung neue Argumente für sie liefern könnte. Theoretische Weiterentwicklungen, etwa im relativistischen Bereich, finden eher dort statt, wo nicht über den Ausgangszustand spekuliert werden muss. Damit hinkt bei der De Broglie-Bohm-Theorie auch die Verallgemeinerung, hin zur Quantenfeldtheorie, hinterher.

Wenn die Wellenfunktion das gesamte verschränkte System beschreibt, so scheint in diesem Fall die Natur das Prinzip der Lokalität aufzugeben. Die De Broglie-Bohm-Theorie geht diesen Weg. Teilchen werden von einer Führungswelle geleitet und hängen von der Wellenfunktion der Schrödingergleichung ab, aber auch von allen anderen Positionen aller beliebig weit entfernten Teilchen. Das macht die Nichtlokalität aus. Vor allem: Teilchen existieren nach dieser Theorie, auch wenn sie nicht beobachtet werden. Das Chaos und der Zufall werden weitgehend ferngehalten. Die Theorie bleibt deterministisch und alle Zustandsänderungen sind durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Alle Teilchen unterliegen der Kontrolle von „Steuerwellen“, die ihre Bewegung bestimmen, die geordnet und vorhersehbar bleibt. Damit hat die Theorie kein Messproblem. Die Positionen der Teilchen sind nicht willkürlich, sondern so verteilt, dass die Bornsche Regel gilt. Hier ist eher die Natur „willkürlich“, aber das entspricht eben den Messergebnissen im Experiment. Dabei ist die De Broglie-Bohm-Theorie mathematisch vollkommen äquivalent zur Quantenmechanik, die gemäß „Kopenhagen“ interpretiert wurde. Plötzlich hatten auch alternative Interpretationen, wie die Natur auf Quantenebene funktioniert, wieder eine Chance. Die Frage: Was ist Realität, hatte wieder ihre Existenzberechtigung.

Während die Bohmsche Quantenmechanik einen ontologischen Ansatz vertritt, existieren mittlerweile epistemische Strategien; d.h. Wellenfunktionen sind für diese Interpretationen nicht real, sondern rein subjektive Beschreibungen. Die bekannteste ist das Modell namens Quanten-Bayesianismus – kurz QBismus (gesprochen wie Kubismus). Sie kombiniert Quanten- und

¹⁰⁷ Quelle Becker, ebenda, S. 80

Wahrscheinlichkeitstheorie.¹⁰⁸ Ein interessanter Bestandteil ist die Herleitung der Bornschen Regel fast ausschließlich aus der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Im Jahr 1966 formulierte John Stewart Bell und Michael Nauenberg schon fast trotzig: *Wir betonen nicht nur, dass unsere Ansicht die einer Minderheit ist, sondern auch, dass das Interesse an diesen Fragen derzeit gering ist. Der normale Physiker hat das Gefühl, dass sie längst beantwortet sind und dass er vollkommen verstehen würde, wie, wenn er nur einmal 20 freie Minuten hätte, um sich darüber Gedanken zu machen.*¹⁰⁹

Das war 15 Jahre nach einem Gespräch von David Bohm mit Albert Einstein. Bohm hatte ein Buch veröffentlicht, das zwar die Kopenhagener Deutung noch vertrat, aber doch eine differenziertere Sicht auf das Thema einnahm. Einstein akzeptierte voll die mathematische Seite der Theorie, erneuerte aber seine Kritik an der Kopenhagener Deutung. Diese Deutung schwieg beharrlich auf die Frage: Was ist real und untersagte sogar die Frage. Er forderte eine Theorie, die diese Frage nicht ausklammert und die sich nicht ständig auf einen Beobachter beziehen muss, wenn man nach der Realität auf Quantenebene fragt. Für Bohm war das ein Impuls, der ihn eine neue Sichtweise finden ließ. Es entstanden in kurzer Zeit einige Artikel, die er bei der angesehenen Fachzeitschrift *Physical Review* einreichte.

Leider war Bohm in die Untersuchungen der McCarthy-Ära geraten. Er hatte während des Kriegs lose Kontakte zur kommunistischen Studentenbewegung. Obwohl er am 31. Mai 1951 von allen Anklagepunkten freigesprochen wurde, landete er auf der schwarzen Liste und verlor seine Anstellung in Princeton. Scheinbar stand er auch unter Beobachtung durch das FBI. Empfehlungsschreiben von Einstein oder Oppenheimer hatten innerhalb der USA keinen Erfolg, er bekam lediglich an der Universität von São Paulo in Brasilien eine Stelle. Er hoffte auf eine positive Reaktion der Fachöffentlichkeit auf seine Artikel, fürchtete aber gleichzeitig, dass sie als für die Praxis irrelevant eingestuft werden. Als falsch konnte man sie nicht abtun, denn die Mathematik, also die Beschreibung mittels der Schrödinger-Gleichung, blieb vollkommen unberührt. Auch die Heisenbergsche Unschärferelation gilt darin unverändert. Die Teilchen „surfen“ auf einer Steuerwelle, wodurch ihre Bewegung jederzeit gesteuert wird. Dadurch wird insbesondere dem Bereich, den die Kopenhagener Deutung tabuisiert, eine von der Beobachtung unabhängige Realität gegeben. Die berühmte Schrödingersche Katze ist also, gemäß dieser Interpretation, ohne dass man die Kiste öffnet nicht in einem „Überlagerungszustand zwischen tot und lebendig“, sondern eindeutig

¹⁰⁸ Siehe Hans Christian von Baeyer, Eine neue Quantentheorie, Spektrum der Wissenschaft, 2013/11 S. 46-51

¹⁰⁹ Becker, ebenda, S. 87

entweder tot oder lebendig. Genau wie der Mond existiert, auch wenn er nicht beobachtet wird (Einstein).¹¹⁰

Ist das nun die „wirkliche physikalische Realität“? Das kann man noch nicht beantworten. Die Antwort muss ein Experiment geben. Aber es ist eine Alternative.

Das wichtigste Experiment der Quantenmechanik ist der Doppelspaltversuch. Photonen oder andere Quantenobjekte werden durch zwei sehr nahe beieinanderliegende Spalte geschickt und dahinter auf einer Fotoplatte registriert. Es bilden sich nicht zwei senkrechte Striche, sondern ein Interferenzmuster aus Maxima und Minima. Licht hat Wellen- und Teilchencharakter. De Broglie hat diese komplementäre Eigenschaft auch für alle Materieteilchen angenommen. Man kann nun die Intensität so weit reduzieren, dass nur einzelne Quanten durch die Spalte fliegen. Auch dann entsteht ein Interferenzmuster. Wenn man jedoch einen Detektor dazwischenschaltet und damit den Weg der Quanten ermittelt, so verschwindet das Muster. Es sieht so aus, als „wüssten“ die Quanten, dass sie beobachtet werden.

Die Kopenhagener Deutung erklärt das Phänomen so: Auch einzelne Photonen/Quanten haben Wellen- und Teilchencharakter. Sie sind gemäß der Wellennatur in der Lage, mit sich selbst zu interferieren und somit beide Spalte gleichzeitig zu passieren. Wenn sie aber detektiert werden, also der genaue Aufenthaltsort bestimmt wird, werden sie gezwungen, sich wie Teilchen zu verhalten und damit nur durch einen Spalt zu fliegen. Die Frage, wo sie vor der Messung waren, ist bedeutungslos, weil man einer Welle keinen genauen Ort zuordnen kann.

Genau diese nach „Kopenhagen“ scheinbar grundsätzlich unmögliche Unkenntnis des Aufenthaltsortes erklärt die Bohmsche Theorie. Für Bohm sind Quanten Teilchen, die auf ihren Steuerwellen surfen.¹¹¹ Das Teilchen kann nur durch einen Spalt fliegen, aber die ihm zugeordnete Welle passiert beide Spalte und ist auch in der Lage mit sich selbst zu interferieren. Weil aber das Teilchen durch seine Steuerwelle geführt wird, werden beliebig gut konstruierte Detektoren die Steuerwelle und damit das Teilchen beeinflussen. Es tritt der gleiche Effekt ein – es entsteht kein Interferenzmuster mehr. Allerdings ist zu jedem Zeitpunkt die Flugbahn der Teilchen determiniert.

Hier prallen zwei unterschiedliche Philosophien aufeinander.

¹¹⁰ Ein anderes Paradoxon, genannt Wigners Freund, beschreibt Eugene Wigner. Er verknüpfte den Bohrschen „Beobachter“ mit dem Problem des Bewusstseins. Auch hier spielt die Frage nach der makroskopischen Bedeutung von Superpositionen eine Rolle. Näheres siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Wigners_Freund

¹¹¹ Becker, ebenda S. 103

Ist eine Theorie nur ein Modell, um mathematisch genaue Vorhersagen machen zu können? Zählt nur die Rechnung, alles andere ist irrelevantes Beiwerk?

Oder möchten wir uns ein Bild der Welt machen können, ohne die Genauigkeit der mathematischen Seite aufzugeben?

Natürlich denken wir auch in Bildern und Abstraktionen, wenn wir von Teilchen und ihren Steuerwellen sprechen. Doch ist es nicht befriedigender, wenn das Bild, das wir uns von der Realität machen, keine willkürlichen Lücken aufweist, die mit prinzipieller Unkenntnis erklärt werden?

Die Unschärferelation oder verschränkte Teilchen über beliebige Entfernungen verlangen dem „gesunden Menschenverstand“ bei der Quantenmechanik sowieso eine ganze Menge ab. Die Forderung nach Lokalität müssen wir aufgeben. Ein deterministisches Modell erhält zumindest die strenge Kausalität. Es erscheint den Vertretern der Bohmschen Ideen auf jeden Fall sinnvoll, dass man ein Bild der Realität hat, auch wenn es zunächst noch nicht beobachtbar ist. Der Positivismus kann Erkenntnis behindern, dazu ist Ernst Mach ein Beispiel, der die Existenz von Atomen bis zu seinem Tod abgelehnt hat. Ein gänzlich anderes Beispiel stellen zwei Ergebnisse dar, die Paul Dirac 1928 im Rahmen der relativistischen Quantenmechanik erhielt. Eines war plausibel und das andere scheinbar unsinnig. Er nahm es trotzdem ernst und postulierte ein neues Teilchen, das Positron, also erstmals Antimaterie, das vier Jahre später von Carl David „Charles“ Anderson in der kosmischen Strahlung entdeckt wurde.

Bohr tat alles, was Kopenhagen widersprach, als zu dumm ab. Andere setzten sich immerhin mit der Theorie auseinander und es wurden weitere Zweifel geäußert, ob die Bohmsche Theorie tatsächlich alle Aspekte der Quantenphysik abdeckt. Von Neumann und Pauli bezweifelten, ob das Phänomen „Spin“ integriert werden kann – sie irrten sich. Von Neumann sah die Theorie als konsistent an und sogar für sehr elegant. Pauli, übrigens Patenkind von Ernst Mach, betrachtete die Theorie nach langen Briefwechseln mit Bohm ebenfalls endlich als konsistent, sah aber keine Möglichkeit sie gegen die Kopenhagener Interpretation zu testen. Sie sei deshalb *„ein Scheck, der nicht eingelöst werden kann“*.¹¹² Einstein störte sich an der Nicht-Lokalität. Heute gibt es zahllose ausgefeilte Experimente, die im Prinzip Abwandlungen des EPR-Gedankenexperiments sind, die zeigen, dass man einerseits die Lokalität nicht mehr fordern kann und andererseits durch die Überlegungen von John Bell verborgene Variablen ausgeschlossen sind.

¹¹² Brief von Wolfgang Pauli an David Bohm, ca. 1951, Pauli Archives am CERN, <https://cds.cern.ch/record/80946>

Für Positivisten gibt es bis heute nicht nur kein Anlass für eine Neuinterpretation. Für sie gibt es überhaupt keinen Grund zur Interpretation. Ihnen reicht die Mathematik. Philosophie ist für sie brotlose Kunst. Sie bleiben in der „Komfortzone des Physikers“ (Sean Carroll).

In einem Brief an seinen Freund Arthur Wightman (undatiert ca. 1952) schreibt David Bohm aus Brasilien:¹¹³

Vorläufige Konzepte werden gebraucht, selbst bevor empirische Beweise zur Verfügung stehen, um uns vor eine Wahl zu stellen und Experimente zu entwerfen und auch, um bei ihrer Interpretation zu helfen.

Es geht also Bohm bei der Frage nach der Realität in erster Linie um Physik und ihre Weiterentwicklung; philosophische Einordnung ist dabei durchaus nützlich bei der Suche nach einem besseren Naturverständnis, wenn sie nicht zum Selbstzweck wird. Entscheidend ist seine Definition von Wissenschaft. Es ist mehr als eine „Mess- und Experimentiermethode“. In dieser Definition gibt es keine Überlappung zur Philosophie oder zur Mystik. Für Bohm ist Wissenschaft *„Der Versuch, die Wirklichkeit der Natur in ihrer Ganzheit zu begreifen.“*¹¹⁴ Er geht sogar so weit, dass das wahre Verständnis der Realität auf der Quantenebene mittlerweile durch zu viel Mathematik verdeckt wird. Er plädiert dafür, „kreative Imagination“ niemals auszublenden, die die *„Bedeutung der Mathematik direkt wiedergibt“*. Dabei muss immer wieder betont werden, dass die Mathematik bei allen führenden Physikern vollkommen unstrittig ist. In einem Gespräch mit Renée Weber sagt er *„... man erkennt sonst nicht den ganzen Gehalt dieser Mathematik, [sondern] beschränkt sie darauf, empirische Voraussagen zu machen.“*¹¹⁵

Bohm konnte sich schließlich mit Hilfe einiger Gönner aus dem Exil in Brasilien befreien und erhielt die brasilianische Staatsbürgerschaft und damit einen Pass. Es folgten Stationen in Israel und Großbritannien. Trotz Angebote aus den USA scheiterte ein Wechsel an seiner vermeintlich politischen Vergangenheit – er stand einfach auf einer schwarzen Liste. Er hatte als Einzelkämpfer keine Chance gegen die Phalanx der Kopenhagen-Befürworter und die Steuerwellentheorie blieb eine zunächst weitgehend ignorierte, aber wissenschaftlich korrekte Einzelmeinung. Seine Lebensleistung beinhaltet aber neben der Quantenphysik und Relativität vor allem auch seine späteren Beiträge zur Philosophie, zur Kognitionspsychologie und zur Mystik. Etwa ab dem Jahr 1985 oder etwas früher änderte sich die Einstellung der öffentlichen Meinung gegenüber seiner Person. Er konnte eine Vortragsreise durch die

¹¹³ Zitiert nach Becker, ebenda S. 107

¹¹⁴ Renée Weber, Alles Leben ist Eins, Die Begegnung von Quantenphysik und Mystik, Crotona Verlag 2019, S. 196,

¹¹⁵ Weber ebenda, S. 60/61 sowie folgend S. 194/195.

Vereinigten Staaten beginnen; darunter Stationen auch von besonderer persönlicher Bedeutung, wie Princeton und die University of Texas in Austin auf Einladung von John A. Wheeler. Ein Vortrag vor der UNO zu seiner Theorie der Impliziten Ordnung mit möglicher Bedeutung für den Weltfrieden war ein weiterer Höhepunkt. Seine Schriften wurden jetzt viel stärker beachtet und er gilt nun als kompetenter Brückenbauer zwischen Wissenschaft und spirituellen Wegen.

Ein physikalischer Effekt trägt immerhin auch seinen Namen und ist Beleg für seine Qualifikation als Quantenphysiker. Sein israelischer Kollege Yakir Aharonov und er haben ihn vorausgesagt.¹¹⁶ Die Quantenmechanik kennt einige Phänomene, die dem gesunden Menschenverstand zuwiderlaufen. Der Aharonov-Bohm-Effekt (AB-Effekt) gehört zweifellos dazu. Der Versuchsaufbau entspricht dem Doppelspalt-Experiment, mit dem Unterschied, dass zwischen den Spalten eine „ideale“ Spule sitzt; d.h. außerhalb der Spule existiert praktisch kein Magnetfeld. Trotzdem „spürt“ ein Teilchen den Einfluss, obwohl es ihm scheinbar gar nicht ausgesetzt ist. Benutzt man z.B. Elektronen, so verschiebt sich ihre Phase proportional zur entsprechenden Stärke des Magnetfeldes. Auch bei ungeladenen Teilchen, wie Photonen wurde der Effekt nachgewiesen.¹¹⁷ Im Jahr 2022 wurde durch den AB-Effekt sogar gezeigt, dass die Gravitation Quanteneigenschaften haben muss.¹¹⁸ Die elektromagnetische Feldstärke galt früher in der klassischen Physik als einzige reale Größe, ist aber schwer punktgenau berechenbar. Sie ist hier idealerweise Null im gut abgeschirmten Experiment. In der quantenmechanischen Beschreibung tauchen dagegen Vektorpotentiale auf. Sie wurden zuerst als mathematische Hilfskonstruktion gesehen, dessen Gleichungen wesentlich besser handhabbar sind. Das Vektorpotential deckt sich veranschaulicht mit den Feldlinien, wie man sie bei der Darstellung von Ferromagneten kennt. Der AB-Effekt zeigt: *Das Kreisintegral über dem Potential liefert die im Experiment beobachtete Interferenzmuster-Verschiebung.*¹¹⁹ Zusammenfassend kann man sagen: In der klassischen Betrachtung sind die Felder messbar; das Vektorpotential ist nur Rechenhilfe. Der AB-Effekt zeigt, dass das Vektorpotential nicht nur eine Hilfsgröße ist.

Scheinbar wurde der Effekt schon 1939 von Walter Franz auf einer Konferenz erwähnt. Auf jeden Fall haben ihn Werner Ehrenberg und Raymond Siday 1949 in einer kaum beachteten Veröffentlichung ohne Erwähnung im Abstract

¹¹⁶ Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. *Physical Review*, 115(3):485{491, August 1959.

¹¹⁷ <https://www.nature.com/articles/ncomms4225>

¹¹⁸ <https://science.orf.at/stories/3210961/>

¹¹⁹ Formulierung: Friebe et. al; *Philosophie der Quantenphysik*, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2015, S. 283

geschildert. Erst im Jahr 1959 haben Bohm und Yakir Aharonov ohne Kenntnis der Ergebnisse von Ehrenberg und Siday den Effekt mit dem nötigen Nachdruck auf seine Bedeutung vorausgesagt. Robert Chambers¹²⁰ führte 1960 das bestätigende Experiment durch. Ein sehr sorgfältig bzgl. der Abschirmung geplanter Versuch von Tonomura et. al. beseitigte alle Zweifel.¹²¹

Was bedeuten diese Ergebnisse für den Wettstreit der Interpretationen? Was bedeuten sie für die Grundsatzfrage im vorliegenden Beitrag: Was ist Realität? Hier eine Meinung von Ralf Köhl, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel:¹²²

Meiner Meinung nach ist das der Durchbruch der Quantenphysik, weil klar wurde, dass bei den Teilchen Phasenverschiebungen stattfinden, je nachdem, welchen Weg sie um das Magnetfeld laufen, obwohl das Magnetfeld nicht auf sie wirken kann! Das ist die Geburtsstunde der topologischen Physik! Die Windungszahl taucht in einem Experiment auf!

Die Windungszahl oder auch Umlaufzahl bzw. Index genannt, gibt die Zahl der Umrundungen im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) einer Kurve um einen Punkt an.¹²³

Der AB-Effekt stützt durchaus die De Broglie-Interpretation der Quantentheorie. Für die Kopenhagener Deutung ist die Frage, wo Teilchen vor einer Messung waren, ohne Bedeutung. Es wird argumentiert, dass man Wellen keinen genauen Ort zuordnen kann und deshalb eine Welle durch beide Spalte gleichzeitig geht, solange man sie nicht zwingt Teilcheneigenschaften anzunehmen. Eine Abhängigkeit vom Weg um das Magnetfeld konterkariert diese Argumentation und macht das Steuerwellenprinzip wahrscheinlicher.

Einstein war Bohms Weg übrigens immer noch nicht radikal genug, obwohl er ihn als talentierten jungen Kollegen schätzte. Bohm interpretierte die Experimente auf Basis der Mathematik der Quantentheorie neu. Einstein wollte eine neue, „vollständige“ Theorie unterhalb der Quantentheorie. Aus dieser Theorie sollte die Quantenphysik hervorgehen.

Ähnlich, wie die Newtonsche Gravitationstheorie als Grenzfall aus der Allgemeinen Relativitätstheorie hervorgeht und wie seine Suche nach einer

¹²⁰ R. G. Chambers. Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux. *Physical Review Letters*, 5(1):3{5, July 1960.

¹²¹ Akira Tonomura, Tsuyoshi Matsuda, Ryo Suzuki, Akira Fukuhara, Nobuyuki Osakabe, Hiroshi Umezaki, Junji Endo, Kohsei Shinagawa, Yutaka Sugita, and Hideo Fujiwara. Observation of Aharonov-Bohm Effect by Electron Holography. *Physical Review Letters*, 48(21):1443–1446, May 1982.

¹²² Privatmitteilung von Prof. Köhl am 17.7.2023

¹²³ [https://de.wikipedia.org/wiki/Umlaufzahl_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Umlaufzahl_(Mathematik))

vereinheitlichten Feldtheorie angelegt war. Max Born sagte dazu nach Einsteins Tod im Vergleich beider Konzepte:

*Seine Ideen waren radikaler, aber Zukunftsmusik.*¹²⁴

Im EPR-Paradoxon werden diese Forderungen als notwendige und hinreichende Bedingungen folgendermaßen definiert:

“Jedes Element in der physikalischen Realität muss eine Entsprechung in der physikalischen Theorie besitzen.”

Korrespondierend wird dort die „*physikalische Realität*“ als hinreichende Bedingung definiert:

*“Wenn wir, ohne das System in irgendeiner Weise zu stören, mit Gewissheit (d.h., mit einer Wahrscheinlichkeit von 1) den Wert einer physikalischen Größe vorhersagen können, dann existiert ein physikalisch reales Element, welches dieser physikalischen Größe entspricht.”*¹²⁵

Unabhängig von der quantenmechanischen Deutung (Kopenhagen versus Alternativen) werden die EPR-Grundannahmen „Lokalität und (im einsteinschen Sinn lokalen) Realismus“ widerlegt. Messergebnisse verschränkter Teilchen korrelieren viel stärker, als durch die Bellsche Ungleichung in einer klassischen Theorie gefordert ist. Das wären nur in 50% aller Fälle. Korrelation bedeutet, dass bei vielen Messungen 71% (1 geteilt durch $\sqrt{2}$), der Ergebnisse eine gegenseitige Abhängigkeit zeigen. Damit sind die „verborgenen Variablen“, wie von Einstein hartnäckig gefordert, keine Erklärung des EPR-Paradoxons.

Aharonov und Bohm haben das EPR-Gedankenexperiment nochmals 1957 aufgegriffen, denn es gab damals experimentell keine Möglichkeit der Überprüfung.¹²⁶ Im Gegensatz zu Einstein, Podolsky und Rosen, die Ort und Impuls als komplementäre Parameter angenommen haben, haben Bohm und Aharonov mit gutem Grund die Spinverschränkung gewählt. Solche Konstellationen werden heute Bell-Zustände genannt. Die Namensnennung von David Bohm wurde erneut übergangen.

Der Stern-Gerlach-Versuch, der in der Nacht vom 7. auf den 8. Februar 1922 in den Räumen der heutigen Physikalischen Gesellschaft in Frankfurt am Main gelang, zeigt, dass das Elektron einen Eigendrehimpuls besitzt.¹²⁷ Dieser Spin genannte Impuls hat eine enorme Trennschärfe, denn es gibt bei Spin $\frac{1}{2}$

¹²⁴ Max Born, Albert Einstein Max Born Briefwechsel 1916-1955, Nymphenburger, München 1969, S. 271, zitiert nach Becker, ebenda, S. 117

¹²⁵ Einstein, A., Podolsky, B. & Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, Physical review 47(10): 777

¹²⁶ Bohm, D. & Aharonov, Y. (1957). Discussion of experimental proof for the paradox of einstein, rosen, and podolsky, Physical Review 108(4): 1070.

¹²⁷ Wolfgang Trageser, Der Stern-Gerlach-Versuch, Springer Spektrum, Berlin 2022

Teilchen und gegebener Richtung nur zwei Möglichkeiten der Einstellung, nämlich $\pm\hbar/2$, wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, gesprochen h-quer, das sogenannte reduzierte Plancksche Wirkungsquantum ist. Die erste Idee dazu hatte Heisenberg. Sein akademischer Lehrer Arnold Sommerfeld versuchte mit einer vierten (ganzzahligen) Quantenzahl Ordnung in die Interpretation der Atomspektren zu bringen. Heisenberg präsentierte eine Formel, in der halbzahlige Werte für das, was später Spin genannt wurde, auftauchten. Sowohl für Sommerfeld als auch für seinen weiteren hochbegabten Schüler Wolfgang Pauli war dies eine Zumutung für ihr ästhetisches Empfinden. Publiziert wurde die Idee dann, ärgerlich für Heisenberg, durch Alfred Landé.¹²⁸ Doch er blieb hartnäckig und erfolgreich an der theoretischen Erklärung des Themas dran. Der Stern-Gerlach Versuch brachte die experimentelle Bestätigung. Zusammen mit den drei Raumrichtungen hat das Elektron damit nur vier Freiheitsgrade. Mit der Eigenbewegung des Elektrons als bewegte Ladung ist ein magnetisches Moment μ_B verknüpft. Das Verhältnis von magnetischem Moment zum Drehimpuls ist doppelt so groß wie bei der Bahnbewegung. Im homogenen Magnetfeld wirkt auf einen Dipol nur ein Drehmoment und damit keine signifikante Kraft. Der Stern-Gerlach-Versuch wurde deshalb in einem inhomogenen Magnetfeld mit Silberatomen durchgeführt. Silber hat ein einzelnes 5s-Elektron und ist deshalb fast immer einwertig. Dieses 5s-Elektron ist für den Effekt verantwortlich: Es werden zwei getrennte Punkte auf dem Film gefunden, denn das Magnetfeld spaltet den Strahl nach den beiden Spinrichtungen auf. Es ist ein direkter Nachweis der Richtungsquantelung.

Soviel als Vorbemerkungen zu Bohms Neuformulierung des EPR-Paradoxons. Er geht von einer Spinverschränkung aus und betrachtet zwei Ausgangssysteme, (die jeweils zusammengesetzt sind als Linearkombination der Basisvektoren) und ein System Spin-up und ein System Spin-down bilden. Es existieren genau zwei Zustände des zusammengesetzten Systems, die sich nicht als reine Linearkombination der Einzelsysteme schreiben lassen, nämlich ein Singulett-Zustand mit Spin $S_S = 0$ und ein Triplett-Zustand mit Spin $S_T = \hbar^2$.

Man kann sie einzeln durch eine Messung des Gesamtspins unterscheiden.

In einem so verschränkten Zwei-Spin-System wird man jeweils 50% der Spin-Zustände messen.

In dieser Form ist ein EPR-Experiment durchführbar.

Der Spin ist die typische quantenmechanische Eigenschaft schlechthin. Materieteilchen haben halbzahligen Spin (Fermionen) und kraftvermittelnde

¹²⁸ Alfred Landé, "Über den anomalen Zeemaneffekt (Teil I)," ZS. f. Phys., 5 (23. Juni 1921), 231–241

Teilchen den Spin 1 (Bosonen). Das Higgs-Teilchen hat Spin 0. Andere postulierte Teilchen, wie das Graviton, sind bisher hypothetisch geblieben. Es gibt für den Spin keine Entsprechung in der klassischen Physik. Die Eigenrotation ist nur eine anschauliche Hilfe. Eine eigentliche Erklärung liefert erst die relativistische Quantentheorie.

*Der halbzahlige Spin der Elektronen und Quarks führt über das Spin-Statistik-Theorem weiter zum Pauli-Prinzip, das grundlegend für den Aufbau der Atomkerne und der Atomhüllen ist. Das Pauli-Prinzip bestimmt damit auch das chemische Verhalten der Atome, wie es sich im Periodensystem der Elemente ausdrückt. Demnach spielt der halbzahlige Spin beim Aufbau der Materie bis hin zu ihren makroskopischen Eigenschaften eine bestimmende Rolle.*¹²⁹

Der Spin ist somit ein zentraler Baustein in der theoretischen Physik. Der Weg führte zunächst über eine Arbeit, die Satyendranath Bose aus Indien 1924 an Einstein zu Begutachtung geschickt hat.¹³⁰ Er leitete das Plancksche Strahlungsgesetz unter der Annahme ab, dass die Photonen nicht unterscheidbare Teilchen sind, was der klassischen Maxwell-Boltzmann-Theorie und Statistik widerspricht. Einstein erkannte die Bedeutung, übersetzte die Arbeit und reichte sie unter Boses Namen zur Publikation ein. Er übernahm die Idee und wandte sie in einer eigenen Veröffentlichung auf einatomige neutrale Gase an.¹³¹ Sie sagt u.a. Bose-Einstein-Kondensate voraus, also makroskopische Systeme, die sich wie ein Quantenobjekt verhalten. Erst 1995 wurde dies experimentell bestätigt. Elektronen können sich so nicht verhalten, da sie sonst gleiche Quantenzahlen haben müssten, was das Paulische Ausschließungsprinzip verbietet. Enrico Fermi und Paul Dirac schlugen unabhängig voneinander eine entsprechende Statistik vor, die Fermi-Dirac-Statistik. Teilchen, wie das Elektron mit halbzahligem Spin, bezeichnet man deshalb als Fermionen, Teilchen mit ganzzahligem Spin als Bosonen. Die Bezeichnung betrifft nicht nur Elementarteilchen, sondern auch zusammengesetzte Systeme (z.B. Cooper-Paare bei der Supraleitung, Mesonen, also Quark-Antiquark-Teilchen). Nur die Fermionen im Standardmodell der Teilchenphysik (nicht zusammengesetzte Teilchen) haben

¹²⁹ <https://de.wikipedia.org/wiki/Spin>

¹³⁰ Satyendranath Bose: Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. In: Zeitschrift für Physik. Band 26, 1924, S. 178–181 (Übersetzung Albert Einstein), Online: <https://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/09qm/lec15-16-BoseEinsteinCondensation/Bose1924.pdf>

¹³¹ Albert Einstein: Quantentheorie des einatomigen idealen Gases – Zweite Abhandlung. In: Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften. 1925, S. 3–10, Online: https://www.lorentz.leidenuniv.nl/history/Einstein_archive/Einstein_1925_publication/index.html#paper_1925_00.html

einen Spin von $\frac{1}{2}$. Sie haben die quantenmechanische Eigenschaft, dass ihre Wellenfunktion nach einer ganzen Drehung das Vorzeichen ändert und erst nach einer doppelten Drehung (Rotation um 720°) wieder im Ausgangszustand ist. Dies erklärt den Spin von $\frac{1}{2}$.

An dieser Stelle soll noch eine extreme Interpretation der Quantentheorie erwähnt werden. Sie kann regelrecht radikal genannt werden und stammt von einem Doktoranden, der Einsteins letzte Vorlesung in Princeton am 14.4.1954 gehört hatte. Es war ein Gastvortrag in John Archibald Wheelers Seminar und sollte eigentlich die Relativität behandeln. Doch es wurde eine „Pro und Contra Kopenhagen Veranstaltung“. Die Argumente von Einstein beeindruckten Hugh Everett. Er schuf in seiner Dissertation¹³² eine Interpretation der Quantenphysik, die man eigentlich fast nicht „Theorie“ nennen kann. Die Grundidee ist dabei, dass die Wellenfunktion verzweigt und jeder Zweig wird als real in einer eigenen Welt angesehen. Man kann es auch so formulieren, dass ein Teilchen nicht nur potentiell, sondern real alle möglichen Zustände seiner Wellenfunktion (in Superposition mit dem Messapparat), die bei einer Messung realisiert werden können, tatsächlich annimmt, aber in einer jeweils anderen Welt. Es gibt kein Messproblem und keinen Kollaps. Kausalität und Determiniertheit sind gewährleistet, aber jeweils in einer eigenen, fast identischen Welt. Es ist die einfachste, optimal ökonomische und vielleicht ästhetisch schönste Erklärung der Quantenmechanik. Es ist eine perfekte Anwendung von „Ockham’s Rasiermesser“, dem „*lex parsimoniae*“ oder Sparsamkeitsprinzip der Scholastik, das besagt, dass das einfachste Prinzip in der Natur auch realisiert wird. Der Charme von Everetts Theorie liegt in der Tatsache, dass er nur und ausschließlich eine Wellenfunktion und die Schrödingergleichung benötigt. Eigentlich ist es auch keine „Interpretation“, denn in einer Superposition sind alle Möglichkeiten, nennen wir sie Welten, schon ursprünglich angelegt. Allerdings liegt darin auch ein gewisses Problem: Wie passt die exakt berechenbare Verteilung von Wahrscheinlichkeiten nach der Bornschen Regel mit der Verzweigung zusammen? Aber viele schrecken vor diesem drastischen Schritt zurück, dass in jeder Millisekunde viele Billionen neue Verzweigungen unserer Welt entstehen sollten. Erst später im Jahr 1970 publizierte der amerikanische Physiker Bryce DeWitt einen Aufsatz mit dem Titel *Quantum mechanics and reality*. Er griff darin die Everett’sche Interpretation auf und verwendete den Begriff *Many-Worlds-Interpretation*. Die Viele-Welten-Interpretation wurde kurzfristig populär. Das lag einerseits daran, weil sie an *science fiction* erinnerte, aber auch die Idee der Dekohärenz unterstützt einige Aspekte. Diese geht von einer möglichst weitreichenden Gültigkeit der

¹³² *The relative state formulation of quantum mechanics*. In: *Reviews of Modern Physics*. Band 29, 1957, S. 454–462, mit einem Kommentar von Wheeler, S. 463–365

Schrödinger-Gleichung aus. Dies widerspricht dem Konzept der Kopenhagener Deutung.¹³³ Everett konnte aber damals ebenfalls wie Bohm in der wissenschaftlichen Gemeinschaft nur Teilerfolge verbuchen, seine Theorie wurde kaum richtig ernst genommen und er war frustriert, denn er konnte nicht in der Klarheit argumentieren, wie er es für nötig erachtete, denn sein Doktorvater Wheeler war trotz Unterstützung immerhin Schüler von Niels Bohr. Everett hatte noch ein zweites wissenschaftliches Standbein, die mathematische Spieltheorie und wechselte damit noch vor Fertigstellung seiner Dissertation in die militärische Forschung zur *Weapons Systems Evaluation Group* des US-Verteidigungsministeriums.

Die Kopenhagener Deutung hatte sich auf der ganzen Linie behauptet. Sie ist wahr unter einem reduzierten Realitätsbegriff; sie ist unvollständig, legt man höhere Ansprüche an die „physikalische Realität“.

Weitere seriöse Interpretationen finden sich in einem Wikipedia-Artikel.¹³⁴ Mehrere neuere Ansätze, die einer generellen Tendenz zum informationsbasierten Denken in der Physik folgen, nehmen eine informationstheoretische Perspektive ein. Auch die Kopenhagener Deutung enthält subjektivistische Elemente. Gerade einige „Gründerväter“ beharren auf einer Interpretation der Theorie als das, was wir über ein Quantensystem wissen (können). Carlo Rovelli hat den Standpunkt eingenommen, den Einstein bei der Relativitätstheorie vertreten hat und eine „Relationale Interpretation“ als rekonstruktiven, informationstheoretischen Ansatz formuliert.¹³⁵ Siehe auch dazu einen aktuellen Übersichtsartikel aus dem Jahr 2019 von Federico Laudisa und Carlo Rovelli.¹³⁶

Rob Clifton, Jeffrey Bub und Hans Halvorson haben 2003 ebenfalls mit ihrem CBH-Theorem (nach den Anfangsbuchstaben) eine informationstheoretische Rekonstruktion der Quantenmechanik ausgearbeitet.¹³⁷

Ähnlich argumentiert Anton Zeilinger.¹³⁸

Die Kopenhagener Interpretation ist weiterhin unvollständig, aber das gilt fairerweise nicht nur für sie allein, wenn man die Quantentheorie in den großen physikalischen Zusammenhang stellt: Ursprung des Universums oder Urknall, Quantenverschränkung und Raumzeit, insbesondere Krümmung der Raumzeit,

¹³³ Vergleiche <https://de.wikipedia.org/wiki/Viele-Welten-Interpretation>

¹³⁴ https://de.wikipedia.org/wiki/Interpretationen_der_Quantenmechanik

¹³⁵ C. Rovelli, Relational Quantum Mechanics, Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2008.

¹³⁶ <https://plato.stanford.edu/entries/qm-relational/>

¹³⁷ <https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0211089.pdf>

¹³⁸ A. Zeilinger, A foundational principle for quantum mechanics, Found. Phys. 29 (1999), S. 631–643.

also Quantentheorie der Gravitation sind nur einige der sich daraus ergebenden Megathemen. Steven Weinberg hat mit seinem berühmten Buch „*The First Three Minutes*“, das 1973 erschien, erstmals den Bogen zwischen Quantenphysik und Kosmologie geschlagen. Das damals bekannte Teilchenmodell reichte aus, um den Urknall aus Sicht der Quantenphysik prinzipiell zu rekonstruieren.¹³⁹

Nach wie vor ungelöst ist es, die beiden großen Theorien Allgemeine Relativitätstheorie (ART) und Quantentheorie miteinander zu verbinden. Ein neuer Ansatz lässt zumindest aufhorchen. Bei der ART ist in diesem Zusammenhang der entscheidende Gedanke, dass sie die Expansion des Universums vorhersagt. Zwei unabhängige Astronomenteams haben sogar 1998 entdeckt, dass sich das Universum beschleunigt ausdehnt und dafür 2011 den Nobelpreis erhalten. Vieles spricht dafür, dass die treibende Kraft die Vakuumenergie ist. Versuche, diese zu berechnen, liefern jedoch geradezu skurril paradoxe Ergebnisse. Es ist die größte Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung in der gesamten Physik. Man nennt es „Problem der kosmologischen Konstanten“, mit Bezug auf die Ergänzung seiner ART-Gleichungen, die Einstein nachträglich eingefügt hat um ursprünglich sogar die voraussagbare Expansion zu verhindern. Er nannte dies einmal die „größte Eselei seines Lebens“ (*"biggest blunder"*).

Das zentrale mathematische Element der Quantenphysik ist bekanntlich die Schrödingergleichung. Sie beschreibt insbesondere auch die zeitliche Entwicklung und ihre Lösungsmenge beinhaltet auch die Menge aller Wege oder Möglichkeiten, die ein Teilchen gehen kann. Dabei ist auch klar, dass einer der Wege auf jeden Fall beschritten wird und es war bisher selbstverständlich, dass sich alle Wahrscheinlichkeiten, die jeweils nach der Bornschen Regel berechnet werden können, zu 1 addieren müssen. Dies ist das Prinzip der Unitarität – alle potentiellen Möglichkeiten ergeben zusammen 100%.¹⁴⁰ Bei den mathematischen Sprachmitteln tauchen deshalb immer unitäre Elemente auf, z.B. Unitäre Abbildung, Unitärer Charakter, Unitäre Gruppe, Unitäre Matrix, Unitärer Operator, Unitärer Ring, Unitärer Vektorraum, etc. In der Quantenphysik spielt vor allem die Unitäre Gruppe $U(H)$ eine zentrale Rolle, also die Menge aller unitären, komplex linearen Abbildungen über einem komplexen Hilbert-Raum. Sie beschreiben die Symmetrien der Wellenfunktion, also transformationsinvariante Umformungen. Sie werden durch unitäre $n \times n$ -Matrizen gebildet, d.h. die Zeilen und Spalten der Matrix, als Vektoren

¹³⁹ https://en.wikipedia.org/wiki/The_First_Three_Minutes

¹⁴⁰ Genaueres siehe Charlie Wood, Ein neues Konzept der Zeit, Spektrum der Wissenschaft 2023-09, S. 12-19, Kurzfassung online unter: [spektrum.de/magazin/quantenzeit-ein-neues-konzept-der-zeit/2160270](https://www.spektrum.de/magazin/quantenzeit-ein-neues-konzept-der-zeit/2160270)

aufgefasst, sind orthonormal. Die Bezeichnung „Ortho“ steht für senkrecht zueinander und „normal“ heißt normiert auf die Länge 1. Multiplikation mit einer unitären Matrix lässt die Abstände unverändert und hier liegt das Problem.

Der Kosmos dehnt sich bekanntlich aus; seine Zukunft sieht also vollkommen unterschiedlich zu seiner Vergangenheit aus. In der Quantenphysik ist eine Umkehrung des Zeitpfeils rein mathematisch denkbar; zumindest verlangt sie eine saubere Symmetrie zwischen Vergangenheit und Zukunft. Unitarität ist dabei ein entscheidendes Element. In einschlägigen Standardwerken, wie dem theoretischen Minimum der Quantenmechanik von Leonhard Susskind und Art Friedman wird Unitarität als feststehendes „Prinzip“ (*principle*) behandelt.¹⁴¹ Für die Quantengravitation ist das ein zunächst unüberwindlicher Dissens.

Die bestehende Schrödingergleichung und die einschränkende Unitarität schließen die mathematische Beschreibung von Dehnungen und Stauchungen aus. Die Abstände zwischen zwei Punkten bleiben gleich. Es wird deshalb vorgeschlagen, die Unitarität hin zur sogenannten Isometrie aufzuweichen. Cotler und Strominger formulieren dies mit Bezug zum Phänomen „Zeit“ folgendermaßen:

*This motivates the hypothesis that quantum mechanical time evolution is always isometric, in the sense of preserving inner products, but not necessarily unitary.*¹⁴²

Hier bleiben im Rahmen einer isometrischen Abbildung in der nichteuklidischen Riemannschen Geometrie die Länge von Vektoren und Kurven zwar gleich, die Abstände zwischen zwei Punkten können sich aber ändern. Isometrie kann nun den expandierenden Raum berücksichtigen, in dem Teilchen mehr Möglichkeiten haben, ohne mit den mathematischen Zwängen der Unitarität konfrontiert zu sein.

Fazit

Mathematik und Physik zählt man zu den exakten Wissenschaften. Aber es stellt sich heraus, dass beide jeweils „Körper und Seele“ haben. Dabei soll „Körper“ für die etablierte, gesicherte, greifbare Wissenschaft stehen. „Seele“ ist viel schwerer zu definieren. Es sind die schwerer greifbaren, dem hehren, exakten Verständnis der exakten Wissenschaft zuwiderlaufenden oder nicht in ihr integrierten Erkenntnisse. Dazu gehört auch die Philosophie bzw. die philosophischen Strömungen, sowie die „seriöse“ Mystik, weit entfernt von

¹⁴¹ Susskind, Leonhard, Friedman, Art; Quantenmechanik – Das theoretische Minimum, Springer 2020, S. 64-65

¹⁴² Siehe z.B. Cotler, Jordan, Strominger, Andrew: The universe as a quantum encoder, <https://arxiv.org/pdf/2201.11658.pdf>

jeglicher Art von okkultem Mystizismus. Sie werden zwar in philosophische Kategorien gefasst, sind aber trotzdem in der Regel vielfältig.

Viel wichtiger ist jedoch ein grundsätzliches Argument: Wissenschaft darf nicht als die Verkörperung der Wahrheit missverstanden werden und Wissenschaftler dürfen nicht der Arroganz des Wissens verfallen. Dadurch bleibt Wissenschaft ein offener Prozess, offen auch für neue Ideen und neue Fragen. Kein Gebiet ist per se abgeschlossen. Information ist heute allgegenwärtig, Wissen ist viel mehr wert, aber die Suche nach Erkenntnis sollte andauern. Das Streben nach Wahrheit und Realität sollten ein zentrales, wenn auch nie erreichbares Ziel bleiben. Dabei sollte der Fokus keinesfalls bei der Wissenschaft allein bleiben. Oft zieht eine wissenschaftliche Disziplin ihren eigenen Rahmen zu eng. Der in diesem Text in der Einleitung so genannte „Dreiklang“ aus Wissenschaft, Philosophie und (seriöser) Mystik bleibt treibende Kraft der Erkenntnis. Die Trennung der Kultur in eine humanistische und eine wissenschaftliche Seite bezeichnet der Philosoph und Chemie-Nobelpreisträger Ilya Prigogine deshalb als „Schisma“. Er muss auch für manchen Wissenschaftler schmerzhaft extreme Positionen, wie z.B. die von Rupert Sheldrake, verkraften. Sein 1981 veröffentlichtes Buch „Das schöpferische Universum“ hat die angesehene Zeitschrift *nature* „den besten Kandidaten seit vielen Jahren für eine Bücherverbrennung“ genannt. Der *New Scientist* schrieb dagegen „Sicherlich liegt hiermit eine der wichtigsten wissenschaftlichen Untersuchungen über die Natur der biologischen und physikalischen Wirklichkeit vor.“¹⁴³

In der Mathematik drückt der sprachlich negativ besetzte Begriff der „Unvollständigkeit“ diese „Seele“ nur sehr unvollkommen aus. Natürlich wollen alle Mathematiker zu einem Problem den Beweis sehen oder finden. Das Vorgehen ist aber nicht unbedingt rational zu erklären. Bohm sagte dazu in einem Gespräch mit Frau Weber: „Und doch haben viele Mathematiker höchsten Ranges – wie Gödel und andere – eine fast mystische Haltung der Quelle ihrer mathematischen Erkenntnis gegenüber.“ Er übertrug dies auch auf Physiker: „Ich glaube, viele Physiker spüren, dass sie an etwas rühren, das über ihr Wissen hinausgeht – an eine Art Wahrheit.“¹⁴⁴ Dieses Bestreben im „Dreiklang“ bringt die Dynamik in diese alte und doch immer wieder kreative Wissenschaft. Der Unvollständigkeitssatz von Kurt Gödel zeigt ein Manko auf, hat aber auch etwas Tröstliches. Es gibt Grenzen der Beweisbarkeit und dahinter liegt durchaus Wahrheit. Wahrheit als Seele der Mathematik zu

¹⁴³ Siehe https://www.datadiwan.de/netzwerk/index.htm?experten/he_003d_.htm, https://en.wikipedia.org/wiki/Rupert_Sheldrake, A book for burning?. *Nature* 293, 245–246 (1981). <https://doi.org/10.1038/293245b0>

¹⁴⁴ Renée Weber, ebenda S. 205

bezeichnen ist sicherlich zu pathetisch. Aber es gibt zweifellos Wahrheit jenseits der Beweisbarkeit. Und nach Enzensbergers „Hommage an Gödel“:

*Du kannst dein eignes Gehirn / mit deinem eignen Gehirn erforschen: / aber nicht ganz.*¹⁴⁵

Jede Analogie ist nie vollständig korrekt. Aber um bei dem (hinkenden) Vergleich zu bleiben: Auch die Physik hat so etwas wie Körper und Seele. Man muss auf der Ebene der beobachtbaren Phänomene bleiben. Das Experiment und die Beobachtung sind das Maß aller Dinge. Sie führen zu Hypothesen und nach langer Prüfung zu Naturgesetzen, die evtl. wieder in ihrem Geltungsbereich relativiert werden müssen, wenn ein genaueres Gesetz gefunden wird. Die Allgemeine Relativitätstheorie ersetzt das Newtonsche Gravitationsgesetz, das aber immer noch für einen Flug zum Mars vollkommen ausreicht. Einstein hat ein Weltbild verändert; die a priori Erkenntnisse von Immanuel Kant zu Raum und Zeit mussten radikal korrigiert werden. Kants Art der Fragestellungen aber bleiben prinzipiell bestehen. Besonders verstörend waren aber die experimentellen Ergebnisse im ganz Kleinen. Sie rüttelten an einem uralten Grundverständnis von Lokalität oder Kausalität. Sie führten aber zu der mathematisch genauesten Naturbeschreibung, die es in der Physik gibt und die eine beispiellose Technologieentwicklung der letzten 100 Jahre bewirkt hat – im Schlechten wie im Guten, von der Atombombe bis zum MRT.

Doch unser Realitätsverständnis ist immer noch gespalten: Die einen wollen nicht fragen und die anderen stellen die Frage nach der „eigentlichen Realität“. Den einen genügt ein fast perfektes Gesetz und sie verzichten auf vermeintliche Spekulationen, die anderen möchten keine Denkverbote akzeptieren und fragen nach der Realität hinter den Naturgesetzen.

Die faustische Frage, was die Welt im Innersten zusammenhält, interpretieren beide Seiten unterschiedlich:

Ist sie mit einem Naturgesetz beantwortet oder bedarf es mehr?

¹⁴⁵ Aus dem Gedicht von Hans Magnus Enzensberger, Hommage an Gödel, zitiert aus <http://ulrichnortmann.net/Aufsätze/Anarcho-Logik.pdf>

Literaturverzeichnis

Audretsch, Jürgen; Mainzer, Klaus; Wieviele Leben hat Schrödingers Katze? B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich, 1990

Becker, Adam; Was ist real? Amerikanische Ausgabe Basic Books 2018, deutsch bei Springer Sachbuch 2021

Bohm, David; Die implizite Ordnung, Deutsche Ausgabe 2. Auflage 2021, Crotona Verlag, Amerang

Briggs, John; Peat, F. David; Die Entdeckung des Chaos, Hanser, München Wien 1990

Budiansky, Stephen; Reise zu den Grenzen der Vernunft, Kurt Gödel und die schwerste Krise der Mathematik, Propyläen 2. Auflage 2023

Carroll, Sean; Was ist die Welt und wenn ja, wie viele, Klett-Cotta, Stuttgart, 2. Auflage 2011

Cohen, Paul; Wie ich „Forcing“ entdeckte, Paul Cohens Vortrag über die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese 2001, enterprise e_c Lemgo 2017, mit Kommentaren von Marietta Ehret

Dawson, John W. jr; Kurt Gödel und die Grenzen der Logik, Spektrum der Wissenschaft 9 / 1999, Seite 74

Ecker, Gerhard; Teilchen, Felder, Quanten, Springer Spektrum, Berlin 2017

Gödel, Kurt; Philosophische Notizbücher, Bd. 1, De Gruyter, Berlin/München/Boston 2021 (deutsch und englisch)

Fischer, Ernst Peter; Der Physiker – Max Planck und das Zerfallen der Welt, Siedler Verlag, München, 2007

Fischer, Ernst Peter; Niels Bohr, Siedler Verlag, München, 2012

Fischer, Ernst Peter; Schrödingers Katze auf dem Mandelbrotbaum, Goldmann, TB, München 2008

Gottlob Frege: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens; online: www.marilia.unesp.br/Home/Instituicao/Docentes/RicardoTassinari/B.pdf

Frege, Gottlob; Über Sinn und Bedeutung. In: Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, N. F., Bd. 100/1 (1892), S. 25-50.

Friebe, Cord; Kuhlmann, Meinard; Lyre, Holger, Näger, Paul; Pason, Oliver; Stöckler, Manfred; Philosophie der Quantenphysik, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2015

Genz, Henning; Gedankenexperimente, Wiley-VCH, Weinheim 1999

- Genz, Henning; Wie die Naturgesetze Wirklichkeit schaffen – über Physik und Realität, Hanser, München Wien 2002
- Gribbin, John; Schrödingers Kätzchen und die Suche nach der Wirklichkeit, S. Fischer, Frankfurt 1996
- Hofstadter, Douglas R.; Gödel, Escher, Bach. Ein Endloses Geflochtenes Band, Klett-Cotta, Stuttgart 1985
- Holt, Jim; Als Einstein und Gödel spazieren gingen, Rowohlt, Juni 2020
- Knorr-Cetina, Karin; Die Fabrikation von Erkenntnis, Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft, Frankfurt am Main, 1991
- Korsch, Hans Jürgen; Mathematik der Quantenmechanik, Hanser, München 2019
- Lindley, David; Die Unbestimmbarkeit der Welt, DVA, München, 2008
- Muller, Richard A.; Jetzt – Die Physik der Zeit, S. Fischer, Frankfurt a. Main, 2018
- Penrose, Roger; Der Weg zur Wirklichkeit, Springer Spektrum, Heidelberg 2010
- Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994
- Prigogine, Ilya; Stengers, Isabelle; Das Paradox der Zeit, Piper, München Zürich 1993
- Rennert, Peter; Chassé, Angelika; Hergert, Wolfram; Einführung in die Quantenphysik, Springer Spektrum, Wiesbaden 2013
- Rheinwald, Rosemarie; Der Formalismus und seine Grenzen, Untersuchungen zur neueren Philosophie der Mathematik, Königstein/Taunus, Hain 1984
- Rovelli, Carlo; Helgoland, Rowohlt, Hamburg, Nov. 2021
- Scarani, Valerio; Physik in Quanten, Spektrum Akademischer Verlag, München 2007
- Scherer, Wolfgang; Mathematik der Quanteninformatik, Springer Spektrum, Heidelberg 2016
- Schrödinger, Erwin; Mein Leben, meine Weltansicht, dtv, München, 2006
- Selleri, Franco; Die Debatte um die Quantentheorie, Vieweg, Braunschweig 1990
- Stillwell, John; Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2014
- Susskind, Leonhard; Friedman, Art; Quantenmechanik – Das theoretische Minimum, Springer 2020

Trageser, Wolfgang; Der Stern-Gerlach-Versuch, Springer Spektrum, Berlin 2022

Von Wallwitz, Georg; Meine Herren, dies ist keine Badeanstalt, Berenberg, Berlin, 5. Auflage, Feb. 2019

Von Weizsäcker, C.F.; Zum Weltbild der Physik, S. Hirzel, Stuttgart 1990

Wang, Hao; Reflections on Kurt Gödel, MIT-Press, 1987

Weber, Renée; Alles Leben ist eins, Crotona Verlag, Dt. Ausgabe 2019

Weyl, Hermann; Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, R. Oldenburg Verlag, 8. Auflage, München 2009

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1 und Band 2, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Yourgrau, Palle; Gödel, Einstein und die Folgen, C.H.Beck, München 2005

Zeilinger, Anton; Einsteins Schleier, Die neue Welt der Quantenphysik, C.H.Beck, München 2003

Zeilinger, Anton; Einsteins Spuk, Goldmann, München, 2007

Danksagung

Prof. Dr. Ralf Köhl hat sich wieder spontan als Mentor bereit erklärt. Sein Engagement für die Popularisierung von mathematisch-naturwissenschaftlichen Themen, auch außerhalb des Mainstreams, ist ungebrochen. Verblüfft haben mich auch seine fundierten Impulse zum physikalischen Teil des vorliegenden Aufsatzes. Er war mir in den letzten Arbeiten immer eine verlässliche Stütze als Mentor und Garant für Qualität und Seriosität. Mein tiefer Dank geht deshalb weit über seine Impulse für diese Publikation hinaus.

Privatdozent Dr. Bernd-Jochen Schaefer habe ich trotz seiner massiven gesundheitlichen Probleme wertvolle Hinweise im Physikteil des Aufsatzes zu verdanken.

Es ist noch nicht entschieden, ob der vorliegende Beitrag auch in der Printausgabe der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Zeitschrift veröffentlicht wird. Es gibt Kritik an zu viel mathematisch-physikalischen Aufsätzen, wobei andererseits kaum andere Beiträge in den letzten Jahren eingereicht wurden. Umso mehr geht mein Dank an **Dr. Michael Serafin**, dass er sich dieses Mal nicht als Schriftleiter, sondern aus langjähriger Verbundenheit und Zusammenarbeit für eine redaktionelle Qualitätssicherung zur Verfügung gestellt hat.

Love comforteth like sunshine after rain¹⁴⁶

FÜR FARI

¹⁴⁶ William Shakespeare - Venus and Adonis,
<https://www.gutenberg.org/cache/epub/1045/pg1045.txt>, Zeile 799

Personenregister

Name	Lebens- daten	Bemerkung	Seite
Aharonov, Jakir	*1932	Israel. Physiker	42,43,49-51
Albert, David Z.	*1954	US-am. Philosoph	42
Anderson, Carl David	1905-1991	US-am. Physiker, Nobelp. 1936	47
Balmer, Johann Jakob	1825-1898	Schweizer Math./Physiker	30
Becker, Adam	*1984	US-am. Astrophysiker, Autor	35-37,44-46,48,51,60
Bell, John Stewart	1928-1990	Irisch. Physiker	40,45,47,51
Berkley, George	1685-1753	Irisch. Theologe u. Philosoph	3
Bohm, David	1917-1992	US-am. Quantenphysiker	1,2,5,33,40,42-52,55,58,60
Bohr, Niels	1885-1962	Dän. Physiker, Nobelpreis 1922	3,5,28,30,31,33,36,37,39,40,43,46,47,55,60
Bolgai, János	1802-1860	Ung. Mathematiker	14
Boltzmann, Ludwig	1844-1906	Öst. Physiker	11,53
Born, Max	1882-1970	Dt. Physiker, Nobelpreis 1954	30,35,37,38,44,45,51,54,56
Bose, Satyendramath	1894-1974	Ind. Physiker	53
Briggs, John	*1945	US-am. Psychologe u. Autor	23,60
Brown, Robert	1773-1858	Botaniker	11,12
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan	1881-1966	Niederl. Mathematiker	7,8,15,16
Bub, Jeffrey	*1942	US-am. Physiker/Philosoph	55
Budiansky, Stephen	*1957	US-am. Wissenschaftsjournalist	9,10-13,15,16,60
Cantor, Georg	1845-1918	Dt. Mathematiker	6,7,20
Carnap, Rudolf	1891-1970	Dt. Philosoph	10,12,16
Cauchy, Aigustin-Louis	1789-1857	Franz. Mathematiker	6
Chaitin, Gregory	*1947	US-am. Mathematiker u. Informat.	23,24
Chambers, Robert	1924-2016	Brit. Physiker	50
Clifton, Robert (Rob) K.	1964-2002	Geschichte, Philos. Physik	55
Chandrasekhar, Subrahmanyan	1888-1970	Ind. Physiker, Nobelpreis 1930	24
Cohen, Paul	1934-2007	US-am. Mathem., Fields-Med.	20,21,60

Cooper, Leon Neil	*1930	US-am. Physiker	53
Cotler, Jordan	?	US-am. Physiker	57
Crutchfield, James P.	*1955	US-am. Physiker	22,23
Dawson, John W. jr.	*1944	US-am. Mathematiker	17,24,60
De Broglie, Luis Victor	1892-1987	Franz. Physiker, Nobelpreis 1929	1,2,36,40,44,46,50
Dedekind, Richard	1831-1916	Dt. Mathematiker	14
DeWitt, Bryce	1923-2004	US-am. Physiker	34,54
Dirac, Paul	1902-1984	Brit. Physiker, Nobelpreis 1933	31,34,47,53
Dürr, Hans-Peter	1929-2014	Dt. Physiker	37,38,42
Ehrenberg, Werner	1901-1975	Dt. Physiker	49,50
Ehret, Marietta	?	Dt. Mathematikerin/Informatikerin	21,60
Einstein, Albert	1879-1955	Dt./schweiz./US-am. Physiker, Nobelpreis 1922	1,4,5,9,11,12,24-31,34-40,43,45,47,50,51, 53-56,59,61,62
Enzensberger, Hans M.	1929-2022	Dt. Dichter	3,59
Epimenides	5./6./7.Jht.	v.Chr., griech. Philosoph	7
Everett, Hugh	1939-1982	US-am. Physiker	33,54,55
Farmer, Doyne J.	*1952	US-am. Physiker	23
Feigl, Herbert	1902-1988	Öst. Physiker u. Philosoph	10
Fermi, Enrico	1901-1954	Ital. Physiker	52,53
Fletcher, Harvey	1884-1981	US-am. Physiker	30
Fraenkel, Abraham A.	1891-1965	Dt.-israel. Mathematiker	8,20,21
Franz, Walter	1911-1992	Dt. Physiker	49
Frege, Gottlob	1848-1925	Dt. Logiker	7,8,10,12,14,15,18,60
Friebe, Cord	*1968	Dt. Philosoph	41,42,49,60
Friedman, Art	*1950	US-am. Autor	57,61
Gauß, Carl Friedrich	1777-1855	Dt. Mathematiker	14
Gerlach, Walther	1889-1979	Dt. Physiker	51,52,62
Gödel, Kurt	1906-1978	Öst./US-am. Mathematiker	1,2,3,4,8-28,58-62
Goudsmit, Samuel	1902-1978	Niederl. Physiker	42
Hahn, Hans	1879-1934	Öst. Mathematiker	11,12,14,16
Hahn, Otto	1879-1968	Dt. Chemiker, Nobel. 1945(für 44)	43

Halvorson, Hans P.	*1973	US-am. Philosoph der Physik	55
Hao, Wang	1921-1995	Chin./US-am. Logiker	62
Hausdorff, Felix	1868-1942	Dt. Mathematiker	20,21
Hawking, Stephen	1942-2018	Brit. Physiker	5,28
Heisenberg, Werner	1901-1976	Dt. Physiker, Nobel. 1933 (für 32)	3,30-35,37,38,40,41,45,52
Hermann, Grete	1901-1984	Dt. Mathematikerin	28,40
Heron von Alexandria	?-70 n.Chr.	Griech. Mathematiker	6
Higgs, Peter	*1929	Brit. Physiker, Nobelpr. 2013	53
Hilbert, David	1862-1943	Dt. Mathematiker	1,3,4,7-10,13-15,18,20,22,56
Hippassos von Metapont	6.-5.Jht.	v.Chr., gr. Mathematiker	6
Hofstadter, Douglas	*1945	US-am. Physiker, Autor	14,15,61
Hubble, Edwin	1889-1953	US-am. Astronom	26
Hume, David	1711-1776	Schott. Philosoph	28
Jordan, Pascual	1902-1980	Dt. Physiker	30,31,33,35,57
Jürgens, Hartmut	1955-2017	Dt. Mathematiker u. Informatiker	22,61
Kálman, Theodore von	1881-1963	Ungar./US-am. Physiker	43
Kant, Immanuel	1724-1804	Dt. Philosoph	4,10,13,14,21,24,52,59
Köhl, Ralf (gb. Gramlich)	*1976	Dt. Mathematiker	50,63
Kronecker, Leopold	1828-1891	Dt. Mathematiker	7
Landé, Alfred	1888-1976	Dt. Physiker	52
Laudisa, Federico	*1965	Ital. Philosoph der Physik	55
Leibniz, Gottfried-Wilh.	1646-1716	Dt. Philosoph	6,13,41
Lobatschewski, Nikolai	1792-1856	Russ. Mathematiker	14
Lorenz, Edward Norton	1917-2008	US-am. Mathem. und Meterologe	22
Mach, Ernst	1838-1916	Öst. Physiker, Philosoph	11,35,37,47
McCarthy, Joseph	1908-1957	US-am. Politiker	45
Menger, Karl	1902-1985	Öst. Mathematiker	10
Mermin, N. David	*1935	US-am. Physiker	6,37
Millikan, Robert Andrews	1868-1953	US-am. Physiker, Nobelpr. 1923	30
Minkowski, Hermann	1864-1909	Russ.-dt. Mathematiker	26

Misner, Charles W.	*1932	US-am. Physiker	27
Nauenberg, Michael	1934-2019	US-am. Physiker	45
Nelböck, Hans	1903-1954	Öst. Student, Mörder M. Schlick	13
Nernst, Walther	1864-1941	Dt. Physiker/Chem., Nobelp. 1920	36
Neurath, Otto	1882-1945	Öst. Ökonom	13
Newton, Isaac	1643-1727	Engl. Physiker, Astronom, Math.	6,24,27,32,50,59
Nietzsche, Friedrich	1844-1900	Dt. Philosoph	21
Ockham, Wilhelm von	1288-1347	Engl. Philosoph	54
Oppenheimer, Robert	1904-1967	US-am. Physiker	5,42,45
Packard, Norman H.	*1954	US-am. Physiker	23
Pauli, Wolfgang	1900-1958	Öst. Physiker, Nobelpreis 1945	31,47,52,53
Peano, Giuseppe	1858-1932	Ital. Mathematiker	1,14,17
Peat, F. David	1938-2017	US-am. Physiker	23,60
Peitgen, Heinz-Otto	*1945	Dt. Informatiker	22,61
Perrin, Jean	1870-1942	Franz. Physiker	12
Planck, Max	1858-1945	Dt. Physiker	24,29-31,36,52,53,60
Podolsky, Boris	1896-1966	US-am. Physiker	39,40,51
Popper, Karl	1902-1994	Öst.-brit. Philosoph	11
Prigogine, Ilya	1917-2003	Rus./belg. Chem/Phil Nobel 1977	58,61
Rasche, Günther	*1934	Dt. Physiker	3
Renninger, Mauritius	1905-1987	Dt. Physiker und Kristallograph	32,33
Rheinwald, Rosemarie	1948-2009	Dt. Math.-Philosophin	8,21,22,61
Riemann, Bernhard	1826-1866	Dt. Mathematiker	9,14,57
Rosen, Nathan	1909-1995	US-am.-israel. Physiker	39,51
Rovelli, Carlo	*1956	It. Physiker	34,55,61
Russell, Bertrand	1872-1970	Brit. Philosoph u. Logiker	7-9,12,15,18,19
Saupe, Dietmar	*1954	Dt. Informatiker	22,61
Schilpp Paul Arthur	1897-1993	Dt.-US-am. Philosoph	24,37
Schlick, Moritz	1882-1936	Dt. Physiker u. Philosoph	12,13
Schrödinger, Erwin	1887-1961	Öst. Physiker, Nobelpreis 1933	31,35,39,44,45,54-57,60,61
Shaw, Robert S.	*1946	US-am. Physiker	23

Sheldrake, Rupert	*1942	Brit. Autor und Biologe	58
Siday, Raymond	1912-1956	Brit. Quantenmathematiker	49,50
Sigmund, Karl	*1945	Öst. Mathematiker	11
Solvay, Ernest	1838-1922	Belg. Unternehmer	36
Sommerfeld, Arnold	1868-1951	Dt. Mathematiker u. Physiker	52
Strominger, Andrew	*1955	Brit./US-am. Physiker	57
Susskind, Leonhard	*1940	US-am. Physiker	57,61
Stein, Howard	*1929	US-am. Philosoph	24
Stern, Otto	1888-1969	Dt.-US-am. Physiker, Nobel 1943	51,52,62
Tarski, Alfred	1901-1983	Pol.-US-am. Mathematiker	10
Taussky, Olga	1906-1995	Öst./tsch.-US-am. Mathematikerin	10
Thorne, Kip S.	*1940	US-am. Physiker, Nobelpr. 2017	27
Tonomura, Akira	1942-2012	Jap. Physiker	50
Turing, Alan	1912-1954	Brit. Logiker/Math./Informatiker	20,23
Van der Waerden, Bartel Leendert	1903-1996	Niederl. Mathematiker	3
Verhulst, Pierre- François	1804-1849	Belgischer Mathematiker	22
Von Neumann, John	1903-1957	Ungar.-US-am. Mathematiker	12,31,40,41,43,47
Weber, Renée	*1986	US-am. Philosophin	5,48,58,62
Weierstraß, Karl	1815-1897	Dt. Mathematiker	6
Weinberg, Steven	1933-2021	US-am. Physiker, Nobel 1979	28,56
Weyl, Hermann	1885-1965	Dt. Mathematiker und Physiker	28,62
Wheeler, John Archibald	1911-2008	US-am. Physiker	26,27,49,54,55
Whitehead, Alfred North	1861-1947	Brit. Philosoph u. Mathematiker	12,15,18
Wigner, Paul Eugene	1902-1995	Ungar./US-am. Phys., Nobel 1963	43,46
Wightman, Arthur	1922-2013	US-am. Physiker	48
Wittgenstein, Ludwig	1889-1951	Öst. Philosoph	12,36
Wood, Charlie	?	US-am. Redakteur Physik	56
Wright, James P.	?	US-am. Physiker	24
Yourgrau, Palle	*1950	US-am. Philosoph	9,24,25,27,28,62

Zeh, Hans Dieter	1932-2018	Dt. Physiker	41,42
Zeilinger, Anton	*1945	Österr. Physiker, Nobelpr. 2022	55,62
Zermelo, Ernst	1871-1953	Dt. Mathematiker	8,20,21