Vollkommene und befreundete Zahlen

Von **Hans-Joachim Kanold.**

Dieser Aufsatz wendet sich in erster Linie nicht an einen Mathematiker, sondern einen gebildeten Nichtfachmann. Das Ziel soll sein, an einem ganz kleinen Ausschnitt der Mathematik, an einem speziellen Problemkreis der Zahlentheorie, der zu den ältesten mathematischen Fragestellungen überhaupt gehört, aufzuzeigen, welche Rolle die reine Mathematik in der Kulturgeschichte spielt. Gerade das gewählte Beispiel ist dazu geeignet, da sich die Beschäftigung mit vollkommenen und befreundeten Zahlen seit rund zweieinhalb Jahrtausenden wie ein roter Faden durch die Mathematikgeschichte hindurchzieht, und wir so an einem klar umrissenen, eng begrenzten Fragenkomplex den Einfluß der Antike, des Arabertums, der mittelalterlichen Denker und schließlich der Mathematiker der Neuzeit darlegen können. Wir wollen dabei keine bibliographische Vollständigkeit anstreben. Der kurze geschichtliche Abriß soll uns in erster Linie auch dazu dienen, den Leser bis an die neuesten Ergebnisse und die, zum Teil noch ungelösten, Fragestellungen heranzuführen. Selbstverständlich werden wir in diesem Aufsatz nicht alles beweisen, sondern vieles nur plausibel machen können. Für ein weiteres Studium sei deshalb auf das Literaturverzeichnis am Schluß hingewiesen.

Jede natürliche Zahl n, also jede Zahl der Zahlenfolge 1, 2, 3 usw., ist durch gewisse Zahlen, zumindestens durch sich selbst, ohne Rest teilbar. Wir nennen diese Zahlen bekanntlich die Teiler von n. Jeder Teiler von n, der kleiner als n selbst ist, heißt ein echter Teiler von n. Die Zahl n heißt eine v o l l k o m m e n e oder p e r f e k t e Zahl, wenn sie gleich der Summe aller ihrer echten Teiler ist. Das einfachste Beispiel einer vollkommenen Zahl ist 6. Die echten Teiler von 6 sind 1, 2 und 3. Ihre Summe ist gleich 6. Ein zweites Beispiel ist 28. Die echten Teiler von 28 sind 1, 2, 4, 7 und 14; deren Summe ist gleich 28.

In einer etwas mehr mathematischen Formulierung, die in mancherlei Hinsicht den Problemen angemessener ist, lautet die Definition einer vollkommenen Zahl so: n sei eine positive, ganze Zahl (eine natürliche Zahl), $\sigma(n)$ bedeute die Summe aller Teiler von n, einschließlich 1 und n. Dann heißt n eine vollkommene Zahl, wenn $\sigma(n) = 2n$ ist.

Zwei Zahlen heißen befreundet, wenn jede gleich der Summe der echten Teiler der anderen ist. Anders ausgedrückt: n_1, n_2 heißen ein Paar von befreundeten Zahlen, wenn die Bedingungen $n_1 + n_2 = \sigma(n_1) = \sigma(n_2)$ erfüllt sind. Die Funktion $\sigma(n)$ hat dabei die gleiche Bedeutung wie oben. Das einfachste Beispiel bildet das Paar 220, 284. Die Summe dieser beiden Zahlen beträgt 504. Die Teiler von 220 sind 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 und 220. Ihre Summe ist 504. Die Teiler von 284 sind 1, 2, 4, 71, 142 und 284. Ihre Summe ist ebenfalls 504. Wir beachten, daß jede vollkommene Zahl mit sich selbst befreundet ist. Wir brauchen ja nur $n_1 = n_2 = n$ zu setzen.

Wenn wir nun versuchen wollen, uns einen historischen Überblick über die Beschäftigung der Mathematiker und Liebhaber der Mathematik mit vollkommenen und befreundeten Zahlen im Laufe der Jahrhunderte zu verschaffen, so stehen uns zur Verfügung einmal eine Heidelberger Dissertation von Herrn Otto Gmelin aus dem Jahre 1917 [1] und dann vor allem das ausgezeichnete historische Handbuch der Zahlentheorie von L. E. Dickson, History of the theory of numbers, das in drei Bänden von insgesamt etwa 1500 Seiten vorliegt und 1919 erschienen ist [2]. Gleich die ersten 50 Seiten dieses Werkes liefern uns alle Ergebnisse bis zum Beginn dieses Jahrhunderts.

Bereits die Babylonier sollen die Zahl 6 als vollkommen erkannt haben. Den Pythagoräern wird nachgesagt, daß sie vor rund zweieinhalb Jahrtausenden wußten, daß 220 und 284 ein Paar befreundeter Zahlen bilden. Bei Euklid jedenfalls wird im 7. Buch der „Elemente" Begriff und Name der vollkommenen Zahl festgelegt und im 9. Buch eine Regel zur Bildung gerader vollkommener Zahlen abgeleitet. In Platons „Staat" handelt eine dunkle Stelle auch von „vollkommenen" Zahlen, jedoch ist nicht ganz klar, ob darunter der oben erklärte Begriff zu verstehen ist. Iamblichos (von Chalcis, etwa 320 n. Chr.) führt die oben genannten befreundeten Zahlen 220, 284 an. Aber erst sein arabischer Übersetzer und Kommentator Tâbit ben Korrah (Tâbit ibn Qurra 826—901) gibt eine Regel zur Bildung befreundeter Zahlenpaare an, ohne allerdings von seiner Regel Gebrauch zu machen. Augustinus (354—430) erwähnt in seinem Werk „De Civitate Dei", im 11. Buch, die 6 als vollkommene Zahl im Zusammenhang damit, daß Gott die Welt in 6 Tagen geschaffen hat. Auch die späteren arabischen Schriften, sowohl der Westaraber wie auch der Ostaraber, erwähnen die vollkommenen und befreundeten Zahlen, meist in mystischer Betrachtungsweise, ohne aber neue mathematische Erkenntnisse hinzuzufügen. Bis zum Jahre 1636 gibt es keinen wesentlichen Fortschritt, obwohl die vollkommenen und befreundeten Zahlen in zahlreichen Arithmetik- und Algebrabüchern erwähnt werden, z. B. in Büchern von Michael Stifel (1544/45) und Niccolo Tartaglia (1556). Erst von Fermat (1601—1665) und Descartes (1596—1650) an werden wieder selbständige Untersuchungen aufgenommen.

Während bereits Nikomachos (um 100 n. Chr.) die vier kleinsten vollkommenen Zahlen 6, 28, 496 und 8128 kannte, gibt erst Fermat im Jahre 1636 das zweite Paar befreundeter Zahlen an: $n_1 = 2^4 \cdot 23 \cdot 47$; $n_2 = 2^4 \cdot 1151$. Descartes veröffentlicht 1638 das dritte Paar: $n_1 = 2^7 \cdot 191 \cdot 383$; $n_2 = 2^7 \cdot 73727$. Diese beiden Paare sind nach der oben erwähnten Regel von Tâbit ben Korrah gefunden worden. Es dauert über weitere hundert Jahre, ehe neue Paare von befreundeten Zahlen entdeckt werden. Dann gibt L. Euler um das Jahr 1750 gleich weitere 59 Paare an. Heute sind etwas mehr als 400 Paare von befreundeten Zahlen bekannt, von denen die meisten erst nach 1930 gefunden worden sind. Allein 233 Paare wurden 1934 von E. B. Escott entdeckt und 1946 veröffentlicht [3].

L. Euler zeigte auch, daß die von Euklid angegebene Regel zur Bildung von geraden vollkommenen Zahlen alle geraden vollkommenen Zahlen liefert. Wir wollen dieses Ergebnis genauer formulieren und dazu von den oben angeführten Beispielen 6, 28, 496 und 8128 ausgehen. Die Struktur dieser vier Zahlen ist von der Art: $n = 2^{p-1} (2^p-1)$, wobei sowohl p als auch 2^p-1 Primzahlen sind. Die obigen vier Zahlen erhalten wir, indem wir für p die Werte 2, 3, 5 und 7 einsetzen. Euler hat nun bewiesen, daß eine gerade Zahl genau dann vollkommen ist, wenn sie die obige Struktur besitzt. Eine wesentliche Bedingung ist dabei, daß 2^p-1 Primzahl sein muß. Primzahlen dieser Gestalt heißen Mersennesche Primzahlen. Euler hat das Problem, alle geraden vollkommenen Zahlen zu finden, auf die Bestimmung aller Mersenneschen Primzahlen zurückgeführt. Heute kennen wir 17 Mersennesche Primzahlen, von denen 5 erst seit 1950 gefunden worden sind, und zwar in Amerika mit Hilfe moderner Rechenanlagen. Die größte bisher bekannte Mersennesche Primzahl, zugleich die größte bekannte Primzahl, ist $2^{2281}-1$. Sie führt zu einer geraden vollkommenen Zahl, die im dekadischen System 1373 Stellen besitzt [4]. Euler fand auch für ungerade vollkommene Zahlen notwendige Bedingungen. So muß jede ungerade vollkommene Zahl n bei Division durch 4 den Rest 1 lassen und jeden Primteiler, bis auf einen einzigen, in einer geraden Vielfachheit enthalten.

Wir können an dieser Stelle bereits einige Fragen formulieren, die bis heute unbeantwortet sind.

1. Gibt es eine einzige ungerade vollkommene Zahl?
2. Gibt es unendlich viele vollkommene Zahlen oder nur endlich viele?
3. Gibt es ein einziges Paar von befreundeten Zahlen, die zu einander teilerfremd sind?
4. Gibt es ein einziges Paar von befreundeten Zahlen, dessen Summe ungerade ist?
5. Gibt es unendlich viele befreundete Zahlenpaare oder nur endlich viele?

Wir können zwar diese Fragen nicht vollständig beantworten, aber heute immerhin zu den einzelnen Punkten über eine Reihe von Ergebnissen berichten. Dies soll jetzt, soweit in diesem Rahmen möglich, geschehen.

Bevor wir dazu übergehen, wollen wir den Leser mit zwei Grundtatsachen bekannt machen, die zum Bestand jeder Vorlesung über elementare Zahlentheorie gehören. Jede natürliche Zahl n läßt sich in eindeutiger Weise darstellen als ein Produkt von Primzahlpotenzen, d. h.

$$n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k},$$

wobei wir uns die verschiedenen Primzahlen $p_1, p_2, \dots$ z. B. der Größe nach angeordnet denken können. Die Exponnenten α_1, $\alpha_2, \dots, \alpha_k$ sind alle positive, ganze Zahlen. Für die so dargestellte Zahl n ist die Summe aller ihrer Teiler gegeben durch die Formel

$$\sigma(n) = \left(1 + p_1 + p_1^2 + \dots + p_1^{\alpha_1}\right)\left(1 + p_2 + p_2^2 + \dots + p_2^{\alpha_2}\right)\dots$$
$$\dots\left(1 + p_k + p_k^2 + \dots + p_k^{\alpha_k}\right).$$

Es sei erwähnt, daß man die rechte Seite auffassen kann als ein Produkt von sog. Kreisteilungspolynomen, über die man eine ganze Reihe von algebraischen und zahlentheoretischen Sätzen kennt [5]. Zu der Frage 1 können wir eine Reihe von einschränkenden Bedingungen für die Existenz einer ungeraden vollkommenen Zahl angeben. So muß jede eventuelle ungerade vollkommene Zahl größer als eine Trillion (10^{18}) sein und mindestens 6 verschiedene Primteiler besitzen [6]. Ihr größter Primteiler muß das Doppelte des größten Exponenten, der bei der Zerlegung in Primzahlpotenzen auftritt, übertreffen [7]; es gibt höchstens endlich viele ungerade vollkommene Zahlen, die eine feste Anzahl verschiedener Primteiler besitzen [8]; eine Reihe weiterer einschränkender Bedingungen, deren genaue Formulierung zu umständlich ist, um hier angegeben zu werden, macht Aussagen über die Struktur der Primzahlpotenzzerlegung einer eventuellen ungeraden vollkommenen Zahl [9].

Zu den Fragen 2 und 5 können wir seit neuester Zeit teilweise Antwort geben. Wir können nämlich sagen, wie dicht die vollkommenen Zahlen oder diejenigen Zahlen, die zu mindestens einem befreundeten Zahlenpaar gehören, in der Folge aller natürlichen Zahlen höchstens liegen. In einer etwas anderen Formulierung lautet das Ergebnis so: Greifen wir aus der Menge aller natürlichen Zahlen eine beliebige heraus, so ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß wir eine vollkommene Zahl oder eine Zahl, die mit einer anderen befreundet sein kann, erhalten, gleich Null [10]. Das weitestgehende Resultat in Richtung der Frage 3 lautet: Wenn es ein Paar von befreundeten Zahlen n_1, n_2 gibt, die zueinander teilerfremd sind, so müssen beide Zahlen zusammen mehr als 20 verschiedene Primteiler besitzen und jede der Zahlen muß größer als 10^{23} sein. Zwei teilerfremde Quadratzahlen können nicht ein befreundetes Zahlenpaar bilden [11].

Wenden wir uns schließlich der Frage 4 zu, so sehen wir sogleich, daß die Summe zweier Zahlen nur dann ungerade sein kann, wenn die eine der beiden Zahlen gerade, die andere ungerade ist. Wir nehmen also an, n_1 sei eine gerade, n_2 eine ungerade Zahl. Es ist leicht zu zeigen, daß dann n_2 eine Quadratzahl sein muß und n_1 entweder auch eine Quadratzahl oder das Doppelte einer solchen. Zwei vierte Potenzen (Biquadrate) können nie ein Paar befreundeter Zahlen bilden [11].

Da ich meinen Leser nicht mit der Aufzählung allzu vieler Einzelergebnisse ermüden möchte, wollen wir darauf verzichten, noch weitere zu erwähnen. Ebenso wollen wir nicht auf Verallgemeinerungen der Fragestellungen, z. B. auf die sogenannten mehrfach vollkommenen Zahlen, eingehen.

Leider muß ich es mir aus mehreren Gründen auch versagen, einen genaueren Einblick in die Beweise und die Beweismethoden zu geben. Diese sind meist elementar, d. h. sie verlaufen ganz im Bereich der natürlichen Zahlen und fußen auf sog. Kongruenzbetrachtungen und Größenabschätzungen. Nur an wenigen Stellen, so z. B. bei den erwähnten Kreisteilungspolynomen, werden auch Kenntnisse aus der Algebra, bei den Dichteabschätzungen (Wahrscheinlichkeitssaussagen) ferner die einfachsten Begriffsbildungen eines modernen Zweiges der Mathematik, der additiven Zahlentheorie, herangezogen.

Es sei mir zum Schluß gestattet, unsere Betrachtungen noch auf einige allgemeinere Dinge zu lenken. Der Gegenstand, von dem der vorliegende Aufsatz handelt, ist ein schmales Teilgebiet der Zahlentheorie, die zu den ältesten Disziplinen der Mathematik gehört; sie befaßte sich ursprünglich nur mit den Eigenschaften der natürlichen Zahlen, also der Zahlen 1, 2, 3 usw. Heute ist die

Zahlentheorie zu einem mächtigen Bau entwickelt worden, in dem auch Teile der komplexen Funktionentheorie und der modernen Algebra Platz gefunden haben. Es wird dem Leser vielleicht bekannt sein, daß C. F. Gauß eine besondere Liebe zur Zahlentheorie hegte. Er hat in seinem langen Leben immer mit besonderem Eifer zahlentheoretische Untersuchungen durchgeführt. Sein erstes großes Werk, die Disquisitiones arithmeticae, ist ganz dieser Richtung gewidmet. Auch der am Anfange des letzten Krieges verstorbene große Göttinger Mathematiker David Hilbert teilte diese Vorliebe mit seinem berühmten Vorgänger. Er schreibt im Vorwort zu seinem „Zahlbericht", einer fast 400 Seiten langen Abhandlung, in der das Wissen über algebraische Zahlen bis zum Jahre 1897 zusammenfassend dargestellt ist: „An der Zahlentheorie werden von jeher die Einfachheit ihrer Grundlagen, die Genauigkeit ihrer Begriffe und die Reinheit ihrer Wahrheiten gerühmt; ihr kommen diese Eigenschaften von Hause aus zu, während andere mathematische Wissenszweige erst eine mehr oder minder lange Entwicklung haben durchmachen müssen, bis die Forderungen der Sicherheit in den Begriffen und der Strenge in den Beweisen überall erfüllt worden sind."

Es wird sich vielleicht bei manchem Leser die Frage erheben: „Wozu treibt man eigentlich Zahlentheorie?" Oder die andere: „Wozu können diese Erkenntnisse nützlich sein?" Wir wollen versuchen, auf diese Fragen Antwort zu geben. Zunächst möchte ich feststellen, daß eine Anwendung zahlentheoretischer Ergebnisse in größerem Umfange etwa in der Physik, den übrigen Naturwissenschaften, den Wirtschaftswissenschaften oder in anderen Gebieten meines Wissens unmittelbar bisher nicht erfolgt ist. Das bedeutet aber keineswegs, daß ich eine solche „praktische" Anwendung prinzipiell für unmöglich, ja auch nicht, daß ich sie für sehr unwahrscheinlich halte. Gerade die Entwicklung in der modernen theoretischen Physik liefert Beispiele dafür, daß sehr abstrakte Theorien der reinen Mathematik in der Physik plötzlich zu einer überragenden Bedeutung gelangen können. Um dies näher zu erläutern, möchte ich einen Abschnitt aus der Antrittsvorlesung, die der bekannte Zahlentheoretiker Professor Helmut Hasse 1951 in Hamburg vor der Mathematisch-

Naturwissenschaftlichen Fakultät hielt, zitieren [12]: „Man denke etwa an die R i e m a n n sche Geometrie, die zwei Menschenalter später zur entscheidenden Grundlage der Relativitätstheorie und Kosmologie wurde, oder — um ein weniger oft angeführtes Beispiel zu nennen — an die von G a u s s im Rahmen seiner zahlentheoretischen Untersuchungen geschaffenen komplexen Zahlen, die in der heutigen Physik und insbesondere in der Elektrotechnik eine gar nicht mehr wegzudenkende Rolle spielen. Die meisten der Mathematik und theoretischen Physik Fernstehenden sind auch überrascht, wenn sie hören, daß der Physiker H e i s e n b e r g wesentliche Anregung zu seiner Konzeption der Quantenmechanik, der Grundlage der Atomphysik, aus der Berührung mit dem Arbeitskreis über abstrakte Algebra der großen Göttinger Mathematikerin E m m y N o e t h e r geschöpft hat."

Die soeben angeführten Beispiele zeigen, daß die Wirkung und der Nutzen abstrakter mathematischer Theorien oft erst Jahrzehnte nach ihrer Entdeckung offenbar werden, zum anderen aber auch, daß eine wesentliche Aufgabe des reinen Mathematikers in der Erziehung und Anregung jüngerer Vertreter auch anderer Wissenschaften liegt. Gerade durch die mathematische Schulung werden diese Menschen oft erst fähig, in ihrer eigenen Disziplin Neues und für die menschliche Gemeinschaft Wertvolles zu leisten. Darin scheint mir die Tätigkeit des reinen Mathematikers verwandt zu sein etwa mit der eines Altphilologen oder der eines Künstlers. Diese Erziehungsaufgabe des Mathematikers, insbesondere des Hochschullehrers, darf nun vor allem nicht zu eng aufgefaßt werden. Im Gegensatz zu einer reinen Fachschule darf sich die Hochschule nicht nur auf das beschränken, was in den nächsten Jahren augenscheinlich benötigt wird. Damit hoffe ich einem geneigten Leser, wengstens in groben Zügen, die Fragen nach dem „Wozu" beantwortet zu haben.

Wir wollen diesen Aufsatz schließen mit der Andeutung eines Gedankens, dessen Durchführung für sich eine Abhandlung beanspruchen würde. Er stammt aus einem Vortrag, den der Ehrendoktor der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Justus-Liebig-Hochschule, Professor Rolf N e v a n l i n n a, vor einiger Zeit in Gießen vor einem größeren Zuhörerkreis gehalten hat. Darin wurde u. a. darauf hingewiesen, daß das Gebäude der Mathematik als ein Abbild der Struktur des menschlichen Geistes angesehen werden kann. Von so hoher Warte aus gesehen ist die Frage nach dem Nutzen gegenstandslos. Denn dann geht es in der Mathematik ja offenbar — ganz wie in der Sprache — um die letzten Fragen der Geisteswissenschaften. Und das trifft sogar — wieder wie in der Sprache — für jedes Stückchen echter Mathematik zu.

Literatur

[1] O. Gmelin: Über vollkommene und befreundete Zahlen. Diss. Heidelberg 1917, Halle (Saale) 1917.

[2] L. E. Dickson: History of the theory of numbers, Washington 1919.

[3] E. B. Escott: Amicable numbers, Scripta math. **12** (1946).

[4] H. S. Uhler: On the 16th and 17th perfect numbers, Scripta math. **19,** (1953).

[5] H. J. Kanold: Sätze über Kreisteilungspolynome und ihre Anwendungen auf einige zahlentheoretische Probleme, I, II. Journ. f. die reine u. ang. Math. **187, 188** (1949, 1950).

[6] U. Kühnel: Verschärfung der notwendigen Bedingungen für die Existenz von ungeraden vollkommenen Zahlen. Math. Zeitschr. **52** (1950). Die Schranke 10^{18} ist bisher noch nicht veröffentlicht.

[7] H. J. Kanold: Untersuchungen über ungerade vollkommene Zahlen. Journ. f. die reine u. ang. Math. **183** (1941).

[8] L. E. Dickson: Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors. Amer. Journ. of Math. **35** (1913).

[9] H. J. Kanold: Folgerungen aus dem Vorkommen einer Gaußschen Primzahl in der Primfaktorenzerlegung einer ungeraden vollkommenen Zahl. Journ. f. die reine u. ang. Math. **186** (1944). Einige neuere Bedingungen für die Existenz ungerader vollkommener Zahlen, **192** (1953). Siehe auch [5] und [7].

[10] H. J. Kanold: Über die Dichten der Mengen der vollkommenen und der befreundeten Zahlen. Math. Zeitschr. **61** (1954). Daß die Dichte der Menge der befreundeten Zahlen gleich Null ist, verdanke ich einer brieflichen Mitteilung von Herrn P. Erdös (vom 20. 1. 1955).

[11] H. J. Kanold: Untere Schranken für teilerfremde befreundete Zahlen. Archiv d. Math. **6** (1953). Über befreundete Zahlen II. Math. Nachrichten **10** (1953).

[12] H. Hasse: Mathematik als Wissenschaft, Kunst und Macht. Verlag für angewandte Wissenschaften, Wiesbaden 1952.