Albrecht Beutelspacher

Mathematik zum Anfassen: Auf dem Weg zu einem mathematischen Mitmachmuseum in Gießen

1. Die Motivation

„Denk ich an Mathe in der Nacht, bin ich um den Schlaf gebracht." So denken, frei nach Heinrich Heine, viele Zeitgenossen und vermeiden es daher konsequent, überhaupt an Mathematik zu denken. Ihre Vorurteile gegenüber der Mathematik und insbesondere dem Mathematikunterricht sind zahlreich und wohlfeil: Es sei langweilig, es gehe um primitive Kulturtechniken wie Lesen, Rechnen, Schreiben, man müsse Formeln anwenden und Vorschriften beachten, und es sei kein Wunder, dass Schülerinnen und Schüler nicht nur sagen: „Ohne mich", sondern sich oft viel drastischer ausdrücken.

Es gibt viele Versuche, diesem Bild der Mathematik etwas entgegenzusetzen. Unser Versuch besteht darin, Ausstellungen unter dem Motto *„Mathematik zum Anfassen"* zu veranstalten. Diese Ausstellungen sind durch folgende Charakteristika gekennzeichnet: Sie machen Lust auf Mathematik, es geht um Tun, Beobachten und Staunen, man erlebt Überraschungen und erhält echte Erkenntnisse; viele Besucher sind aus den Ausstellungen kaum mehr wegzubringen.

Das Ziel ist *Mathematik für alle* zu präsentieren, also Mathematik so erfahrbar zu machen, dass prinzipiell keine Bevölkerungsgruppe ausgeschlossen ist. In den Ausstellungen werden mathematische Phänomene direkt erfahren und sinnlich erlebt. Eine solche Ausstellung besteht nicht darin, die Seiten eines Lehrbuchs vergrößert an die Wand zu hängen, im Gegenteil: Es wird eine Erlebniswelt Mathematik ohne jeden belehrenden Ton inszeniert.

Es geht nicht um mathematische formale Beweise, schon gar nicht um Definitionen, sondern bestenfalls um Sätze, die sich in Phänomenen realisieren. Allerdings soll durch die Exponate auch Einsicht in das Phänomen vermittelt werden. Es werden keine formalisierten, zunächst vielleicht nicht einmal verbalisierte Beschreibungen, aber unvergessliche Erlebnisse vermittelt. Kurz: Es geht nicht um die Vermittlung von Wissen, sondern um die Ermöglichung von Erfahrungen.

Die Konzeption der Ausstellung, die Entwicklung der Exponate und die Organisation der Ausstellungen wird seit einigen Jahren von einem Team von Mathematikerinnen und Mathematikern der Justus-Liebig-Universität Gießen durchgeführt. Dazu kommt Beratung von außen, durch Museumsfachleute oder Ausstellungsgestalter. Im Sommer 1998 und 1999 wurde das Konzept von internationalen Experten evaluiert. Dabei wurde nicht nur die inhaltliche Konzeption, sondern auch der Finanzplan und insbesondere der Standort Gießen für sehr gut befunden.

2. Interaktive Exponate

Die Ausstellungen *„Mathematik zum Anfassen"* bauen auf den Erfahrungen der amerikanischen und europäischen Science Centres auf, die seit 30 Jahren erfolgreich versuchen, physikalische und technische Phänomene einer breiten Öffentlichkeit zu vermitteln. Das erste Science Centre war das von Frank Oppenheimer ins Leben gerufene *„Exploratorium"* in San Francisco, das bis heute ein Vorbild ist. Dort wurde der Begriff „hands-on" kreiert, der den neuen Ansatz der Science Centres gut beschreibt.

Während traditionelle naturwissenschaftliche Museen, wie etwa das Deutsche Museum in München oder das Liebig-Museum in Gießen typischerweise historisch einmalige Objekte, wie etwa den Experimentiertisch von Otto Hahn oder das Laborbuch von Klaus von Klitzing ausstellen und dadurch Wissenschaft vermitteln wollen, stellt sich der Prozess aus Sicht der interaktiven Exponate („hands-on exhibits") komplementär dazu dar.

In unseren Ausstellungen werden keine historischen Unikate (Schreibtisch von Hilbert) ausgestellt. Die Experimente sind nicht einmalig, sind in ihrer Grundform vielleicht nicht einmal ästhetisch ansprechend.
Ein Science Centre ist das Gegenteil einer Gemäldesammlung. In einer Kunstausstellung werden einmalige, schöne Objekte ausgestellt, und die Ausstellungstechnik setzt alles daran, dass sie durch die Besucher nicht verändert werden können: Die Mona Lisa lächelt immer gleich, unabhängig davon, wer sie wie anschaut oder ob sie überhaupt von jemandem angeschaut wird.
Ein interaktives Exponat ist das Gegenteil davon: Es hat an sich nur einen geringen Wert, es ist wiederbeschaffbar, und es wird durch die Besucher verändert, ja soll sogar häufig durch die Besucher verändert werden.
Ein Beispiel macht dies klar. Mit die schönsten mathematischen Experimente sind Experimente mit Seifenhäuten. Von ferne sieht man auf einem Tisch eine Schüssel stehen und daneben merkwürdige Drahtgestelle liegen. Vielleicht ist auch ein bißchen Seifenschaum auf dem Tisch. Nicht sonderlich anziehend.

Wenn aber ein Besucher an den Tisch herantritt, ein solches Drahtgebilde (das vielleicht ein Kantenmodell eines Würfels ist) nimmt und dieses in die in der Schüssel befindliche Seifenlauge taucht, dann passiert etwas. Dann passiert etwas im Kopf des Besuchers. Er oder sie stellt sich vor, was wohl passieren wird, wenn das Drahtgebilde aus der Lauge herausgezogen wird. Wer das Experiment zum ersten Mal macht, wird, da bin ich mir sicher, glauben, dass sich eine Seifenhaut um die sechs Seiten des Würfels bildet.
Wenn dann der Würfel herausgezogen wird, erlebt man eine Überraschung: Es bildet sich eine ganz andere, viel interessantere und schönere Struktur. Zum Beispiel könnte sich in der Mitte ein kleines Quadrat bilden, von dem aus sich Häute zu den Kanten des Würfels spannen. Wenn man den Würfel ein bisschen schüttelt, legt sich das Quadrat um; es kann sich parallel zu jeder Würfelebene legen. Vielleicht zerstört der Besucher auch einige Häute mit dem Finger, dann bilden sich noch viel interessantere, gewölbte Minimalflächen. Kinder und Jugendliche haben keine Scheu davor, sich die Finger in der Seifenlauge nass zu machen; dann können sie eine Seifenhaut durchstechen, ohne dass diese zerstört wird.
Wenn der Besucher genug gespielt hat, verlässt er den Tisch wieder; vermutlich ist jetzt noch mehr Seifenschaum auf dem Tisch und die Drahtteile liegen anders ... bis der nächste Besucher kommt und das Gestell in die Lauge taucht.
Zur Beschreibung eines Experiments werden die Begriffe „attraction power" und „holding power" benutzt. Das eben beschriebene Experiment hat eine enorme holding power: Wer einmal damit angefangen hat, geht nicht so schnell wieder weg. Die attraction power muss in diesem Fall durch Zusatzelemente, etwa Bilder realisiert werden. Die beste Attraktion überhaupt besteht aber darin, dass schon vor einem andere Besucher dieses Experiment begeistert durchführen; dann wird man fast magnetisch angezogen.

3. Einige Exponate

In diesem Abschnitt werden drei Exponate vorgestellt, die in verschiedener Weise einen Eindruck vom Umgang der Besucher mit den Exponaten geben.

3.1 Tetraeder im Würfel

Die Besucher sehen einen oben offenen Würfel und daneben ein offenbar viel größeres Tetraeder. Passt das Tetraeder in den Würfel?
Dieses einfache Experiment vereinigt in sich viele Eigenschaften eines guten Experiments, und so ist es kein Wunder, dass es trotz seines einfachen Aufbaus ein Klassiker geworden ist.

- Das Experiment ist altersunabhängig; 8-jährige Schülerinnen und Schüler haben die gleiche Chance wie Mathematikprofessoren: manche können's und manche können's eben nicht.
- Man braucht eine gute Raumvorstellung, um das Ergebnis zu sehen. Aber man kann auch systematisch vorgehen: Mit der Ecke nach unten geht es nicht, mit einer Fläche nach unten auch nicht, also ... versuchen wir es mit einer Kante nach unten!
- Das Experiment hat ein überzeugendes Ergebnis: Es passt! Es besteht kein Zweifel, dass man die richtige Lösung gefunden hat.
- Wenn man es geschafft hat, kann man sich Fragen stellen. Zum Beispiel „magische Zahlen": Wie viele Seiten hat ein Würfel? Natürlich 6. Wie viele Kanten hat ein Tetraeder? An der Spitze 3 und unten 3, also auch 6. Ist es Zufall, dass sich beidemal dieselbe Zahl ergibt? Nein, denn man sieht: jede Kante des Tetraeders wird von einer Fläche des Würfels bedeckt.
- Auf wie viele verschiedene Arten kann man das Tetraeder in den Würfel einpassen? Die unterste Kante ist eine Diagonale des Quadrats. Da ein Quadrat zwei Diagonalen hat, gibt es auch zwei Arten, wie das Tetraeder in den Würfel passt.
- Wir versuchen, uns die beiden Tetraeder gleichzeitig vorzustellen. Welchen Körper bilden sie gemeinsam? Das ist schwer vorzustellen. Es ergibt sich die „stella octangula", ein achtzackiger Stern, der von Johannes Kepler (1571–1630) entdeckt wurde. An der

stella octangula erkennt man die beiden Tetraeder einfach wieder.

- Eine schwierigere Frage: Welchen Teil des Würfelraums nimmt ein eingepasstes Tetraeder ein? Diese Frage beantwortet man am besten so, dass man nicht den Rauminhalt des Tetraeders ausrechnet, sondern den der vier restlichen „Ecken". Jede dieser Ecken ist eine Pyramide. Die Grundseite der Pyramide ist die halbe Quadratfläche (also $\frac{1}{2}a^2$, wenn der Würfel die Kantenlänge a hat), die Höhe a. Die Formel zur Berechnung des Rauminhalts einer Pyramide ergibt jetzt $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}a^2 \cdot a = \frac{1}{6}a^3$. Da es vier solche Pyramiden gibt, ist deren Gesamtrauminhalt $4 \cdot \frac{1}{6}a^3 = \frac{2}{3}a^3$, und für das Tetraeder bleiben gerade noch $\frac{1}{3}a^3$. Also nimmt das Tetraeder genau ein Drittel des gesamten Rauminhalts ein.

3.2 Surprise, surprise!

Auf einem Tisch vor dem Besucher liegen viele Spielwürfel. Der Besucher hat zunächst die Aufgabe, mit allen Würfeln zu würfeln und sie dann in einer Reihe anzuordnen.
Nun macht er folgendes Spiel. Der Besucher liest die Augenzahl, die der erste Würfel zeigt, und zählt um so viele Würfel weiter. Wenn also der erste Würfel eine 5 zeigt, zählt er fünf Würfel weiter und landet also auf dem sechsten. Dort liest er wieder die Augenzahl und zählt um so viele Würfel weiter. Wenn also der sechste Würfel 4 zeigt, dann landet er jetzt auf dem Würfel Nr. 10. Dort liest er wieder die Augenzahl und zählt um genau so viele Würfel weiter.
Dies macht der Besucher so lange, wie er diese Prozedur durchführen kann. Wahrscheinlich werden am Ende ein paar Würfel übrig bleiben, diese legt er einfach auf die Seite und berücksichtigt sie für den weiteren Verlauf nicht mehr. Dies war der erste Akt – zugegebenermaßen nicht sehr aufregend.
Nun kommt aber der zweite Akt. Der Besucher beginnt jetzt mit einer anderen Zahl, er würfelt mit dem ersten Würfel noch einmal (lässt aber alle andern Würfel unverändert). Dann spielt er so weiter wie im ersten Akt. Wenn der erste Würfel eine 4 zeigt, zählt er um vier weiter; wenn der Würfel, auf den er dann trifft, eine 6 zeigt, zählt er um sechs weiter usw.
Und wenn er ans Ende der Würfelschlange kommt, erlebt er eine Überraschung: Diesmal bleibt kein Würfel übrig!
Er würfelt nochmals mit dem ersten Würfel und führt das Spiel durch – wieder bleibt nichts übrig! Er beschummelt und startet mit einer Zahl, die es auf dem Würfel gar nicht gibt, etwa der Zahl 8 – auch diesmal geht das Spiel auf! Woran liegt das?
Das Experiment hat einen schwierigen Einstieg, denn man muss die Spielanleitung verstehen, aber es ist unser Experiment mit der höchsten Verweildauer: Nicht selten grübelt ein Besucher eine halbe Stunde, bis er schließlich von dem Phänomen überzeugt ist und vielleicht sogar die Erklärung findet.
Diese ist so einfach, dass man sie auch jüngeren Besuchern einsichtig machen kann. Wir markieren die Würfel, auf die wir im Laufe des ersten Akts gestoßen sind. (In unserem Beispiel sind das die Würfel Nr. 1, 6, 10 usw.) Eines ist klar: Wenn man im zweiten Durchgang irgendwann mal auf einen dieser Würfel stößt, dann kommt man vom rechten Weg nicht mehr ab und gelangt sicher ins Ziel.
Die Frage ist also: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, irgendwann einmal auf einen solchen Würfel zu treffen. Noch besser fragt man umgekehrt: Wie klein ist die Wahrscheinlichkeit, nie auf einen der markierten Würfel zu treffen?
Wenn die Frage so gestellt ist, ergibt sich die Antwort fast von selbst. Vor jedem Würfeln liegt mindestens ein markierter Würfel in Reichweite (denn zwei aufeinanderfolgende markierte Würfel haben höchstens Abstand 6). Also gibt es höchstens 5 Möglichkeiten, auf keinen markierten Würfel zu treffen. Mit anderen Worten: Mit höchstens der Wahrscheinlichkeit 5/6 trifft man auf keinen markierten Würfel. Bei n Würfeln ist also die Wahrscheinlichkeit, nie auf einen markierten Würfel zu treffen, höchstens $(5/6)^n$. Diese Zahlen werden sehr schnell sehr klein. Für $n = 10$ ist die Wahrscheinlichkeit etwa 16%, für $n = 16$ nur 5%. Mit etwa 60 Würfeln funktioniert das Experiment zuverlässig.

3.3 Mein Geburtstag in Pi

An einer Wand sieht der Besucher ein großes griechisches π, und beim Näherkommen erkennt er eine Unmenge von Ziffern; es handelt sich um die ersten 30 000 Ziffern von π.

Obwohl dieses Experiment nicht gerade interaktiv ist, übt es eine große Faszination auf die Besucher aus. Dies liegt zunächst an der Faszination der Zahl π selbst. Auch Menschen, für die bereits die linke Seite der binomischen Formel eine Erkenntnis darstellt, haben eine – zugegebenermaßen vage – Vorstellung von π.

Viele wissen allerdings nur, dass $\pi = 3{,}14$ gilt und dass π „immer weiter geht". Die erste konkrete Faszination sind dann die drei Pünktchen, die nach 30 000 Stellen kommen.

Mit diesem Exponat soll allerdings noch auf etwas anderes aufmerksam gemacht werden. Für viele Mathematiker ist die Dezimalbruchentwicklung von π ein Musterbeispiel von Zufälligkeit. Nun ist die Dezimalbruchentwicklung von π natürlich alles andere als zufällig, denn jede Ziffer liegt ja eindeutig fest. „Zufällig" bedeutet hier also, dass ein Abschnitt der Dezimalbruchentwicklung von π nicht von einer echten dezimalen Zufallsfolge unterschieden werden kann.

Wie könnte man versuchen, eine solche Unterscheidung zu treffen? Wenn eine Folge von Ziffern zufällig ist, muss die 0 irgendwann vorkommen. Irgendwann muss auch das Paar 00 vorkommen, irgendwann mein Geburtstag usw. Kurz: Jede endliche Folge von Ziffern müsste irgendwann einmal vorkommen. Eine Zahl, deren Dezimalbruchentwicklung diese Eigenschaft hat, nennen die Mathematiker, etwas phantasielos, „normal". Die Frage ist also, ob π normal ist. Dieses Problem ist bis heute ungelöst.

Die Besucher können die Normalität natürlich auch nicht ansatzweise verifizieren, wir Menschen sind nicht dafür gemacht, in einer Folge von Ziffern etwas zu suchen. Aber wir können etwas finden: Die Besucher stehen vor der Pi-Wand und schauen sich einen Bereich von Ziffern an – und entdecken sofort „interessante" Muster wie etwa 007,999 u.ä.

4. Unsere Erfahrungen

Die Ausstellungen „Mathematik zum Anfassen" werden seit 1994 mit zunehmendem Erfolg durchgeführt. Inzwischen haben über 150 000 begeisterte Besucher die Ausstellung erlebt. Die Erfahrungen der Besucher (und die der Ausstellungsmacher mit den Besuchern) sind außerordentlich positiv. Ich hebe hier die folgenden Aspekte heraus:

- Diese Art der Vermittlung von Mathematik kommt an. Die Reaktionen der Besucher belegen eindeutig: Es gibt einen großen Markt für diese Ausstellungen. Bemerkenswert ist, dass dies für Städte unterschiedlichster Größe und Struktur gilt: die Ausstellung gastierte u.a. in Gießen, Nürnberg, Vilsbiburg, Berlin, Hamburg, Leverkusen, bei einem der weltweiten EXPO-Projekte in Göttingen, beim 1. deutschen Science Festival in Freiburg und – anlässlich des internationalen Jahrs der Mathematik – im Mai 2000 in Kanada. Die Ausstellung hatte jeweils einen Besucherzustrom, welcher die Organisatoren mitunter vor erhebliche Probleme stellte. Es wurde ganz deutlich: So macht Mathe Spaß.
- Die Ausstellung ist aber nicht nur ein Freizeitpark, sie besteht nicht aus Stationen, an denen man bis zur Bewusstlosigkeit spielt. Viele Besucher konzentrieren sich nach dem ersten Rundgang auf ein Exponat, halten sich sehr lange daran auf, bis sie es verstanden haben.
- Viele Lehrerinnen und Lehrer, die mit ihrer Klasse die Ausstellung besucht haben, berichten, dass sich die Schülerinnen und Schüler noch lange an die Ausstellung erinnern. Und zwar nicht nur an den anschließenden Besuch eines Fast-Food-Restaurants, sondern zum Beispiel an das Experiment „Tetraeder im Würfel" in der Weise, dass sie sich noch ein halbes Jahr später vorstellen können, wie ein Tetraeder im Würfel eingepasst ist.

Zusammenfassend kann man sagen, daß mit diesen Ausstellungen ein nachhaltiger Beitrag zum „Public understanding of science" gelungen ist.

Auch im Lichte der TIMS-Studie (Third International Mathematics and Science Study), die den deutschen Schülerinnen und Schülern bestenfalls mittelmäßige Leistungen in Mathematik bescheinigt hat, sind diese Erfahrungen wichtig. Aus der TIMS-Studie ging mindestens zweierlei hervor: Zum einen hängt der Lernerfolg entscheidend von der Einstellung zum Fach ab (hätten wir das schon vorher wissen können?), zum anderen besteht ein entscheidender Mangel des deutschen Mathematikunterrichts darin, dass die Schülerinnen und Schüler nur den jeweils aktuellen Stoff präsent haben (was für den traditionellen Unterricht ja durchaus eine vernünftige Überlebensstrategie ist).

Zu beiden Punkten gibt die Ausstellung *„Mathematik zum Anfassen"* deutliche Impulse: Zum einen wird für viele deutlich, dass Mathematik Spaß machen kann, und so ergibt sich die Chance eines Neueinstiegs. Zum andern bleiben, wie oben beschrieben, erlebte mathematische Sachverhalte außerordentlich lange im Gedächtnis.

Zusätzlich zur Ausstellung werden in der Regel Vorträge organisiert; außerdem gibt es einen Katalog mit Hintergrundinformation. Im Shop kann man Bücher, Knobelspiele, Pi-Shirts u.ä. kaufen – alles Dinge, die einen engen Bezug zu den Exponaten haben. Gerade dieser Mix hat sich außerordentlich bewährt.

5. Die Zukunft

Die Ausstellungen „Mathematik zum Anfassen" waren von Anfang an so erfolgreich, dass schon bald die Frage nach einer ständigen Ausstellung auftauchte. Diese Idee macht unter dem Stichwort *„Mathematikmuseum"* seit einigen Jahren Furore.

Die Chancen, ein solches „mathematisches Mitmachmuseum" (Science Centre) in Gießen einzurichten, stehen gut. Es gibt ein hervorragend geeignetes Gebäude, das ehemalige Hauptzollamt in unmittelbarer Bahnhofsnähe und direkt neben dem Liebig-Museum, wo u.a. das Originallabor von Justus von Liebig präsentiert wird. Dadurch entsteht an dieser Stelle ein naturwissenschaftliches Museumsensemble. Das Mathematikmuseum wird, unglaublich aber wahr, das erste mathematische Science Centre der Welt sein.

Es gibt bereits einen ausgearbeiteten Finanzplan, aus dem hervorgeht, dass der laufende Betrieb des Mathematikmuseums sich selbst trägt, dass finanzielle Unterstützung von außen nur für die Anfangsphase (Erwerb und Umbau des Gebäudes, Ersteinrichtung) notwendig ist. Schon 1996 wurde ein Förderverein gegründet, dessen Aufgabe die Vorbereitung eines Mathematikmuseums in Gießen ist.

Übrigens: Das Mathematikmuseum wird sicher nicht „Mathematikmuseum" heißen, denn, wie mal jemand sagte, „Mathematik" und „Museum" seien zwei negativ besetzte Begriffe, die man nicht kombinieren sollte.

Über den jeweilig aktuellen Stand der Realisierung kann man sich unter der Internetseite www.math.de informieren.