# Der zweite Frühling

## Renaissance und Mathematik

WILLI KAFITZ*)

**Abstract:**
Renaissance means "rebirth." On the one hand, it represents a return to the intellectual achievements of antiquity, but also a departure from the Middle Ages into the modern era. Greek philosophy, including Greek, Arabic, and Persian mathematics, was rediscovered. This required a long historical journey into the 2nd millennium AD and favorable conditions on the western-eastern Eurasian continent. Ultimately, this era saw significant developments that made this period so significant for art and cultural history and paved the way to the modern era. These included the founding of independent universities, the Latin language as the basis of scholarly discourse throughout Europe, the invention of movable type printing with a corresponding paper industry as a multiplier effect for the rapid spread of new ideas, central perspective in the visual arts with its geometric basis, the spread of Indo-Arabic numerals and zero, urbanization with its transition from a barter to a monetary economy, and a new concept of humanity propagated by humanist scholars based on ancient models.

Mathematics experienced a rapid evolution during this era. Here, too, Greek mathematics served as the starting point. Euclid provided the fundamental logic of assertion and proof, based on a few axioms and definitions, which remains valid to this day. Archimedes taught fundamental mathematical techniques, and Apollonios of Perga demonstrated with his conic sections that the circle is not the measure of all things, thus paving the way for a new heliocentric Copernican worldview in which the planets orbit the sun in elliptical orbits. The new digits and zero were first propagated by Leonardo di Pisa, known as Fibonacci. His Liber abaci made mathematical history. Despite his early death, Johannes Regiomontanus was of outstanding importance as a mathematician, astronomer, and mathematics publisher. His works accompanied explorers such as Christopher Columbus to new continents. Gerolamo Cardano influenced several mathematical disciplines; together with Michael Stifel, he founded a new algebra that went beyond Arabic models. Luca Pacioli brought together the mathematical knowledge of his time. He was a teacher and friend of Leonardo da Vinci, who illustrated his book on the golden ratio. He is considered an important promoter of double-entry bookkeeping. Central perspective in art goes back to Brunelleschi, the builder of the mighty dome of the cathedral in Florence, the Renaissance metropolis in Tuscany. North of the Alps, Albrecht Dürer shaped this new art movement.

**Keywords:**
Polis, Magna Graecia, Indo-Arabic numerals, zero, algebra, central perspective, Leonardo di Pisa, Regiomontanus, Brunelleschi, Stifel, Cardano, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer

**Zusammenfassung:**
Renaissance steht für „Wiedergeburt“. Es ist einerseits eine Rückbesinnung auf geistige Errungenschaften der Antike, aber auch ein Aufbruch nach dem Mittelalter hin zur Neuzeit. Die griechische Philosophie inklusive der griechischen, arabischen und persischen Mathematik wurde wiederentdeckt. Dazu bedurfte es einen langen historischen Weg bis in das 2. nachchristliche Jahrtausend und günstigen Rahmenbedingungen auf dem west-östlichen, eurasischen Kontinent. Schließlich fallen in diese Epoche bedeutende Entwicklungen, die diese Zeit so bedeutsam für die Kunst- und Kulturgeschichte machen und den Weg zur Neuzeit ebneten. Dazu gehören die Gründung von unabhängigen Universitäten, die lateinische Sprache als Grundlage der europaweiten Gelehrtensprache, die Erfindung des Buchdrucks mit beweglichen Lettern mit einer entsprechenden Papierindustrie als Multiplikatoreffekt für die rasante Verbreitung neuer Ideen, die Zentralperspektive in der bildenden Kunst mit ihrer geometrischen Grundlage, die Verbreitung der indisch-arabischen Ziffern und der Null, die Urbanisierung mit ihrem Übergang von der Natural- zur Geldwirtschaft und ein neues Menschenbild, das von humanistischen Gelehrten in Anknüpfung an antike Vorbilder propagiert wurde.
Die Mathematik erlebte in dieser Epoche eine rasche Evolution. Auch hier war die griechische Mathematik Ausgangspunkt. Euklid lieferte auf Basis weniger Axiome und Definitionen die grundsätzliche und bis heute gültige Logik von Voraussetzung, Behauptung und Beweis. Archimedes vermittelte grundlegende mathematische Techniken, Apollonios von Perge zeigte mit seinen Kegelschnitten, dass der Kreis nicht das Maß aller Dinge ist und wies damit den Weg für ein neues heliozentrisches kopernikanisches Weltbild, in dem die Planeten auf Ellipsenbahnen die Sonne umkreisen. Die neuen Ziffern und die Null wurden zuerst von Leonardo di Pisa, genannt Fibonacci, propagiert. Sein *Liber abaci* schrieb Mathematikgeschichte. Johannes Regiomontanus hatte trotz seines frühen Todes als Mathematiker, Astronom und Mathematik-Verleger eine herausragende Bedeutung. Seine Werke begleiteten Entdecker wie Christoph Columbus zu neuen Kontinenten. Gerolamo Cardano befruchtete gleich mehrere mathematische Disziplinen; gemeinsam mit Michael Stifel begründete er eine neue Algebra, die über arabische Vorbilder hinausging. Luca Pacioli bündelte das mathematische Wissen seiner Zeit. Er war Lehrer und Freund von Leonardo da Vinci, der sein Buch über den Goldenen Schnitt illustrierte. Er gilt als wichtiger Förderer der doppelten Buchführung. Die Zentralperspektive in der Kunst geht auf Brunelleschi zurück, den Erbauer der mächtigen Kuppel des Doms zu Florenz, der Renaissance-Metropole in der Toscana. Nördlich der Alpen prägt Albrecht Dürer mit viel mathematischem Sachverstand diese neue Kunstrichtung.

**Schlüsselwörter:**
Polis, Magna Graecia, Indo-arabische Ziffern, Null, Algebra, Zentralperspektive, Leonardo di Pisa, Regiomontanus, Brunelleschi, Stifel, Cardano, Leonardo da Vinci, Albrecht Dürer

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

**Zitate**

*Scribite, scriptores, ut discant posteriores*.[1]
Inschrift im Kloster Notre Dame de Lyre

Waß aber dy schonheit sey, daz weis jch nit.
*Albrecht Dürer*[2]

*Die Null ist ein Zeichen, das da sein muss, um auszusagen, dass nichts da ist.*
*Karl Menninger*[3]

Die eigentlichen Stoffe, die sie bilden, sind jenseits der Kunstwerke Papier, Tinte und Druckerschwärze.
*Bernd Roeck*[4]

Ich habe ein kaltes Herz und einen heißen Kopf.
*Gerolamo Cardano*[5]

Die Zentralperspektive rationalisiert unsere Visualität; die Kalkulisierung rationalisiert unsere Sprachlichkeit.
*Sybille Regina Krämer*[6]

Die moderne Naturwissenschaft…beginnt mit jener gewaltigen Epoche, die den Feudalismus durch das Bürgertum brach, … , die große Monarchien in Europa schuf, die geistige Diktatur des Papstes brach, das griechische Altertum wieder heraufbeschwört und mit ihm die höchste Kunstentwicklung der neuen Zeit, die Grenzen des alten Orbis durchbrach und die Erde erst eigentlich entdeckte.
*Friedrich Engels*[7]

verba vana aut risui apta non loqui
*Jorge von Burgos in Umberto Eco´s Der Name der Rose*[8]

---

[1] „Schreibe, Schreiber, dass die Nachkommen lernen.“ Inschrift im Kloster Notre Dame de Lyre
[2] Rupprich, H. (Hsgr.), Dürer, Schriftlicher Nachlass, Berlin (156 – 1969), Bd. 3, S. 293, zitiert nach Thomas De Padova, Alles wird Zahl, S. 201
[3] Menninger, Karl, Zahlschrift und Rechnen, Bd. 2, ebenda, digitalisiert S. 214
[4] Bernd Roeck, Der Morgen der Welt, S. 345
[5] Des Girolamo Cardano von Mailand eigene Lebensbeschreibung, übertragen und eingeleitet von Hermann Hefele, https://resources.warburg.sas.ac.uk/pdf/nah3725b2324426.pdf, S. 31
[6] Krämer, Sybille; Leerstellen-Produktivität. Über die mathematische Null und den zentralperspektivischen Fluchtpunkt, Berlin 2006, S. 505 zitiert nach De Padova, ebenda, S. 351
[7] Engels, Friedrich; Dialektik der Natur, zitiert nach Wußing, Hans; Arnold, Wolfgang; Biographien bedeutender Mathematiker, S. 88
[8] Sprich keine leeren oder zum Lachen reizende Worte. Umberto Eco, Der Name der Rose, S. 105 (Der Roman spielt im Jahre 1327)

**Inhalt**

Einleitung 5
Historische Ursachen 6
Mathematische Grundlagen der Griechen 9
Mathematik in der Renaissance 29
Historische Rahmenbedingungen
Renaissance, Mathematik, Technik, Wissenschaft 41
Mathematik und Verbreitung durch Buchdruck 52
Fazit 89
Abbildungsverzeichnis 93
Literaturverzeichnis 95
Danksagung 98
Anschließend Personenregister

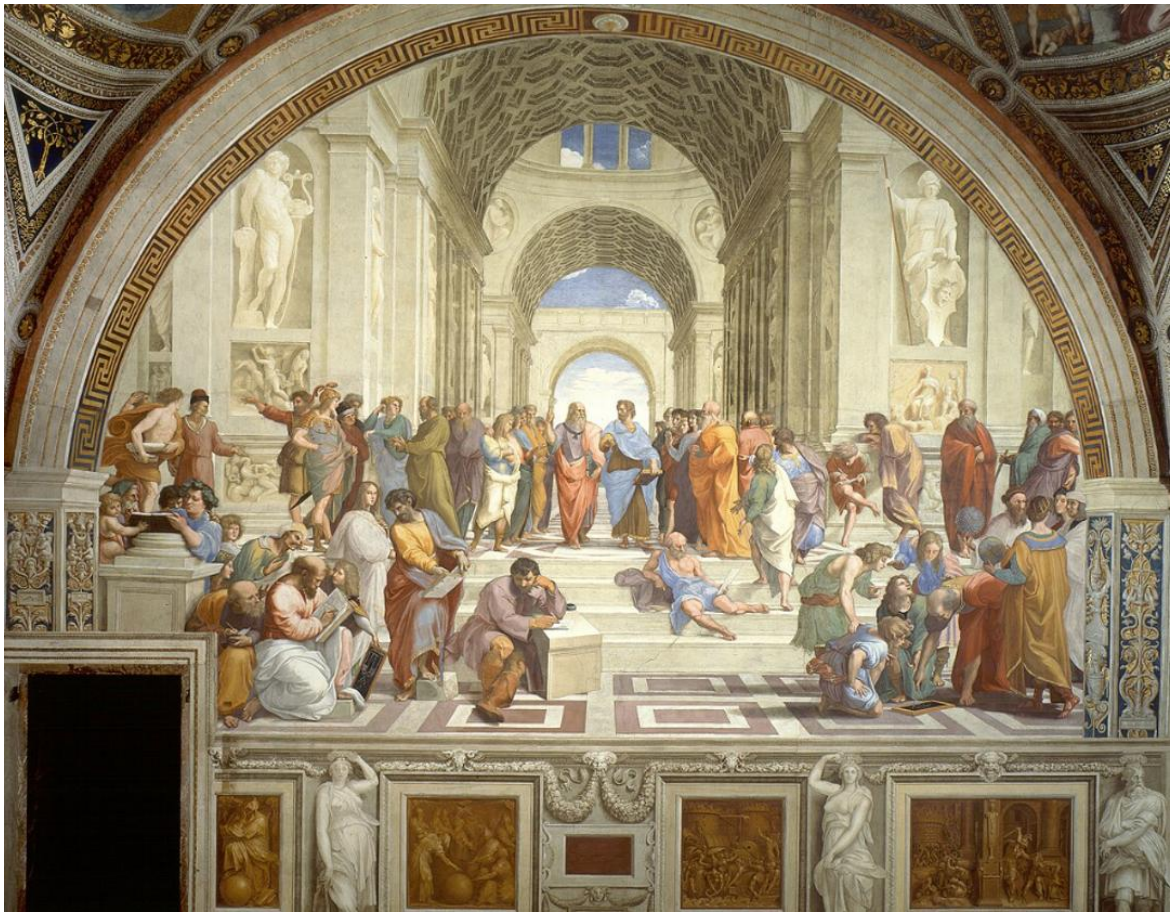


Abb. 1: Raffael, Die Schule von Athen (1510 bis 1511)
Fresko in der Stanza della Segnatura des Vatikans für Papst Julius II.

## Einleitung

Es geht zunächst um das große historische Verständnis, was zur Epoche der Renaissance und darüber hinaus in die Neuzeit geführt hat. Dieses Verständnis muss die Begründung liefern, wieso viele Neuerungen in dieser turbulenten Epoche passierten, die schließlich auch die mathematische Wissenschaft entscheidend förderten. Viele Ereignisse bleiben unerwähnt, weil sie die mathematische Entwicklung nicht oder kaum beeinflussten. Dazu gehören die zahlreichen machtpolitischen oder religiösen Auseinandersetzungen, die Eroberungen in Amerika bzw. der neuen Welt, die Reformation, Gegenreformation, die Abspaltung der englischen Kirche, Calvinismus, Bauernkriege usw. Es war eine turbulente Zeit. Man muss sich höchstens fragen, wieso trotzdem in der Mathematik, aber nicht nur dort, erstaunliche Erkenntnisse gewonnen wurden. Es fand offenbar zu diesem Zeitpunkt ein deutlich erkennbarer kulturgeschichtlicher Durchbruch statt. Renaissance kann man nicht auf die Entdeckung von antikem griechischem Wissen, fast 2.000 Jahre nach dem „goldenen Zeitalter“ der großen griechischen Philosophen,

Naturphilosophen und Mathematikern reduzieren. Aber es war zweifelsohne der Anlass und soll hier erwähnt werden.

**Historische Ursachen**

*Ich glaube, dass der Versuch Mathematik ohne Bezug auf ihren kulturellen, sozialen, philosophischen und historischen Hintergrund zu lehren, ein schwerwiegender Irrtum und ein strategischer Fehler ist.* (R.L.Hayes)[9]

Wieso ist die griechische Kultur, das wissenschaftliche Denken und insbesondere die griechische Mathematik solch ein wichtiger Ausgangspunkt.
Die Entwicklung der Schrift ist eine bedeutende kulturelle Errungenschaft und wird gern als erste Medienrevolution bezeichnet. Dabei kann man grob die Hieroglyphen als Bilderschrift bezeichnen, die Keilschrift als Silbenschrift. Immerhin hatte sich in Ugarit eine Keilschrift auf Basis von 30 Buchstaben entwickelt. Bei allem Fortschritt, war jedoch die Keilschrift darauf angelegt, Silben zu kombinieren. Aber die Idee einer kompakten Buchstabenschrift hat sich gehalten und wurde von den Phönikern oder den Aramäern bewahrt. Die Griechen ergänzten das phönikische Alphabet um Vokale. Diese einfache, aber vielseitige Schrift war nun nicht mehr nur den Privilegierten vorbehalten. Die Konsequenz war ein merklicher Anstieg und Durchdringung von Bildung.
Die Buchstabenschrift hat sich durchgesetzt. Perfektioniert wurde sie kontinuierlich von den Griechen. Sie benutzten zuerst semitische Zeichen, deren ursprüngliche Bedeutung irrelevant war. Sie entwickelten sich zum ionischen Alphabet mit 24 Buchstaben. Sie wurde die zweckunabhängige Basis für jegliche Art von Literatur, Verwaltungsdokumenten oder Korrespondenz. Und sie benutzte diese Buchstaben als Zahlzeichen, erkennbar aus dem Kontext. Auch die lateinische Schrift kann man mit Fug und Recht von der griechischen als abgeleitet betrachten. Die wichtigste Eigenschaft ist Einfachheit und Vielseitigkeit. Schreiben war damit nicht mehr ein Privileg von Spezialisten – Schreiber genannt. Schreiben wurde eine grundlegende Kulturtechnik. Die Buchstabenschrift muss man als zweite Medienrevolution betrachten.
Griechische Schriften beeinflussten fast alle Lebensbereiche und finden sich bis heute in zahlreichen Begriffen wieder. Trotzdem gelten wichtige Werke als verschollen und wurden auch nicht über arabische Übersetzungen überliefert.

[9] R.L.Hayes; 6th International Congress on Mathematical Education, Budapest 1988, zitiert nach Dietmar Herrmann, Die antike Mathematik, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2014, S. 1

Mathematische Werke von Archimedes sind im Laufe der Jahrhunderte verschollen, obwohl er seit der Antike neben Euklid zu den berühmtesten Mathematikern gehörte. Im Jahr 1204 wurde Konstantinopel im Rahmen des 4. Kreuzzuges geplündert und barbarisch Kulturschätze mutwillig zerstört. Damals gingen die drei Bücher des Archimedes verloren, die die Codices A, B und C genannt werden. Die „*Quadratur der Parabel*“ gelangte über wundersame Wege an den Hof von Friedrich II. im 12. Jahrhundert. Das Exemplar konnte bis ins 15. Jahrhundert verfolgt werden, bevor sich die Spur verliert. Sogar ein Exemplar in päpstlichem Besitz ging im 14. Jahrhundert verloren. Andere

Abb. 2: Jacopo Robusti Tintoretto,
Die Eroberung Konstantinopels im Jahr 1204

Verluste zeigen Hinweise auf Archimedes in Werken von Plutarch, Athenaios, Vitruv oder Heron.[10]

Es ist die einhellige Meinung, dass der Schwierigkeitsgrad seiner Werke der Grund dafür war, dass Archimedes wenig kopiert wurde. Aber seine Methodenlehre der Codices A, B und C hatte sicherlich das Zeug zu einer

[10] Russo, Lucio; Die vergessene Revolution, Springer, Berlin Heidelberg, 2005, S. 60-61

Revolution in der mathematisch-physikalischen Welt. Hinweise stimmen hoffnungsvoll, aber das meiste ist seit 2.000 Jahren durch die Wirren der Geschichte, aber wohl auch durch Unwissenheit und Ignoranz unwiederbringlich verloren. Dies sind nur einzelne, prominente Beispiele. Lucio Russo stellt in „Die vergessene Revolution“ die gut begründete These auf, dass die meisten Primärtexte verschollen sind.[11] D.h. es existieren nicht nur Lücken in der Überlieferung, sondern es fehlt ein überwiegender Teil. Es ist bestimmt nicht der Frust des historisch interessierten Mathematikers, der erzürnt ist, dass die 37 Bücher des Plinius über Naturgeschichte erhalten blieben, deren Informationswert bereits von Francesco Petrarca (1304 – 1374) oder Giovanni Boccaccio kritisch gesehen wurde. Dagegen ging die mit großer Sicherheit zukunftsweisende Abhandlung des Archimedes von deutlich geringerem Umfang mangels erhaltener Kopien verloren. In dem rekonstruierten Palimpsest wendet er entsprechende Methoden an, wie Grenzwertbildung oder Berücksichtigung des Schwerpunktes in geometrischen Körpern, die später erst in der Infinitesimalrechnung zur Verfügung standen. Die Methoden wurden mit an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit in dem verschollenen Text behandelt.

Natürlich haben große Katastrophen, wie der Brand der Bibliothek in Alexandria, die Zerstörung des Serapis-Tempels oder die Plünderung von Konstantinopel durch Kreuzritter (Abb. 2) die ohnehin raren Handschriften dezimiert. Entscheidend waren aber eher die „kleinen“ Katastrophen, bei denen Werke verloren gingen, die nur in wenigen Abschriften existierten. Kopien der mathematischen Monographien wurden meist durch fachfremde Mönche hergestellt. Dadurch entstanden immer wieder korrupte Textpassagen oder Inhalte bezogen sich auf verschollene Werke, so dass eine sinnvolle Interpretation schwierig bis unmöglich wurde. Mathematische Texte waren auch nicht unbedingt von bevorzugtem Interesse. Das Beispiel vom oben angesprochenen Palimpsest des Archimedes ist in gewisser Weise symptomatisch. Das Pergament, auf dem es geschrieben war, galt als so wertvoll, dass die Schrift abgeschabt wurde und Platz für ein mittelalterliches Gebetbuch schaffen musste. Erst mit modernsten Mitteln konnte ein Teil des Werks dieses genialen Mathematikers rekonstruiert werden.[12]
Insbesondere der Mittelmeerraum im weitesten Sinn war bereits in der frühen Antike fest in griechischer Hand.[13] Die Erfindung des Pflugs ermöglichte zwar bessere Ernten, aber irgendwann konnte das Land die wachsende Bevölkerung

[11] Russo, ebenda, S. 10
[12] Reviel Netz, William Noel. The Archimedes Codex, Weidenfeld & Nicolson, 2007, dt. Der Kodex des Archimedes: Das berühmteste Palimpsest der Welt wird entschlüsselt, C. H. Beck, München 2007
[13] Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Antike

Abb. 3: Magna Graecia, griechische Kolonien im Mittelmeerraum, hier am Beispiel des dorischen Tempels in Segesta (Sizilien)

nicht mehr ernähren. Die Migration hatte also meist keine kriegerischen Ursachen.
Kernbegriff war die Polis. Auswanderung und Kolonisation rund um das Mittelmeer, das Marmarameer bis hin zum Schwarzen Meer erfolgte durch Gründung von Siedlungen. Das Mittelmeer war kein trennendes Meer, sondern verband die griechische Kultur. Da das Mittelmeer das verbindende Element war, wurden die griechischen Siedlungen in Küstennähe gegründet. Platon (428/27 – 348/47 v.Chr.) spottete: „*Wie Frösche um einen Teich*“. Die griechische Kultur war auch in den Enklaven eine Diskurskultur.
Rund um den Mittelmeerraum verbreitete sich die griechische Kultur und verkraftete das Ende der bronzezeitlichen Epoche am besten. Die griechische Besiedlung gilt als wichtigster Impuls für die entstehende westliche Kultur.

**Mathematische Grundlagen der Griechen**

In der zweiten Hälfte des 6. Jahrhunderts propagierte Pythagoras den Gedanken: *Alles ist Zahl*. Es entstand eine mit Mystik durchsetzte Zahlentheorie. Auch seine Musiktheorie ist mathematisch begründet. Heuristische Argumentationen und Erfahrungswerte waren sicherlich in früheren Kulturen bekannt. So ist sicher, dass der bekannte Satz des Pythagoras schon lange vorher bekannt und angewandt wurde. Pythagoras hat wahrscheinlich den Satz in Mesopotamien kennengelernt und so etwas wie einen Beweis oder eine Plausibilitätsargumentation formuliert. Das ist immerhin mehr als Heuristik und würde zu dem passen, was wir über die Persönlichkeit von Pythagoras wissen.
Nachdem babylonische und ägyptische Mathematik auch in der Archaik und Klassik bekannt war, folgt nun eine „Kreativitätsexplosion“ in der hellenischen Epoche. Hier muss man genauer analysieren was „bekannt“ heißt. So ist der Satz des Pythagoras oder später Thales (624/23 – 548/544 v.Chr.) zugeschriebene Sätze schon den Babyloniern und Ägyptern bekannt gewesen.

Aber Babylonier und Ägypter kannten diese Aussagen nur als empirische Tatsachen, nicht als deduktiv bewiesene Sätze. Die Forschung ist sich einig, dass mit Thales von Milet sich die griechische Mathematik scheinbar von der ägyptischen und babylonischen Mathematik absetzte. Thales hat aber nicht nur geometrische Größen nach erkannten Vorschriften berechnet – er hat Sätze formuliert. Ob damit schon die deduktive Methode, also der strenge mathematische Beweis etabliert war, darf bezweifelt werden. Helmuth Gericke ist skeptisch. Er spricht davon, dass Thales „*allgemeine Sätze aufgestellt und gelegentlich nach den Ursachen ihrer Gültigkeit“* gefragt hatte.[14] Als Beleg dafür kann nach Aussage von Proklos (412 – 485 n.Chr.), der das 1. Buch von Euklids Elementen kommentiert hat, ein Beispiel dienen. Thales kannte die Tatsache (und hat sie offenbar als selbstverständlich angesehen), dass Scheitelwinkel gleich groß sind und dass in jedem gleichschenkligen Dreieck die Winkel an der Grundlinie gleich groß sind. Aber erst Euklid hat diese Sätze in den „Elementen“ deduktiv bewiesen (1. Buch, §5, L.2). Thales hat zumindest in einem anderen Fall eine Begründung angegeben. Proklos formuliert es so, „*Man sagt, dass Thales [es] bewiesen habe*“. Dies scheint eher auf eine Plausibilitätsbegründung hinzudeuten. Hippokrates von Chios (um 470 – 410 v. Chr.) hat ein mathematisches Lehrbuch geschrieben, das nicht mehr erhalten ist. Er soll darin mehr oder weniger streng bewiesene mathematische Beweise beschrieben haben. Sie wurden jedenfalls noch nicht selbstverständlicher Bestandteil der griechischen Mathematik, denn es gab nach ihm immer noch Ausnahmen, die Sätze postulierten, aber nicht bewiesen (z.B. Eudoxos, 408 – 355 v. Chr.) und Theaitetos (417 – 369 v. Chr.). Erst Aristoteles (384 – 322 v. Chr.) forderte wohl eine aufeinander aufbauende Logik ein. Sein Beitrag zur Aussagelogik ist bedeutend. Er prägte den Begriff „*Syllogismus“,* der Zusammenfassung von zwei Prämissen zu einer Schlussfolgerung.[15] Auch eine Reihe von geometrischen Erkenntnissen gehen auf ihn zurück oder hat er klar formuliert. Mit Sicherheit kann man nur feststellen: Die eigentliche moderne deduktive Beweismethode wurde von Euklid von Alexandria (ca. 300 v. Chr.) eingeführt. Sie beruht auf Begriffsklärungen von undefinierten Termen, deren Wahrheitsgehalt unstrittig ist und Axiomen, die nicht bewiesen werden müssen (griechisch *axios*, „Wertvolles“). Mittels deduktiver Logik wurden immer komplexere Theoreme bewiesen. Euklids Elemente waren in Lateineuropa bis Mitte des 20. Jahrhunderts Pflichtlektüre für das gebildete Bürgertum. Die Elemente behandeln in erster Linie Geometrie; aber auch Zahlentheorie, wie

[14] Gericke, Helmuth: Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Marixverlag Wiesbaden, 2005 9. Auflage, Copyright© by Springer, Berlin u. a. 1984 und 1990, S. 72.

[15] Beispiel: Alle Menschen sind sterblich; Sokrates war ein Mensch; daraus folgt Sokrates ist sterblich.

den berühmten euklidischen Primzahlsatz, dass es unendlich viele Primzahlen gibt (genauer: dass man zu jeder endlichen Menge an Primzahlen immer noch eine weitere finden kann.)

Man sollte nicht vergessen, dass im 10. und frühen 11. Jahrhundert auch die islamische Mathematik sich beweistechnischer Methoden annäherte. So ist ein induktiver Beweis von dem in Bagdad arbeitenden Perser Al-Karaji aus seinem Werk *Al-Fakhri* (um 1000) bekannt.[16] Er bewies den Binomischen Lehrsatz. Das Pascalsche Dreieck ist noch heute im Iran als Chayyām-Dreieck bekannt.

Das Jahr 300 v. Chr. kann man als Höhepunkt und im Wesentlichem Abschluss des wissenschaftlichen Weltbildes der Griechen betrachten:

Mit Thales, Pythagoras, aber auch Heraklit und Parmenides wurde der Grundstein gelegt. Eine systematische Ordnung und die Perspektive eines Programms schuf Platon, der mit seiner Philosophie praktisch alle Teile der Wissenschaft beeinflusst hat. Eudoxos, Aristoteles und Euklid setzten es um.[17]

Die euklidische Methode ist fast unverändert bis heute gültig – mit einem Unterschied: ein Axiom muss nicht mehr per se unbestreitbar gültig sein. Beispiel ist das Parallelen-Axiom. Ist es gültig, erhält man die euklidische Geometrie. Wird es nicht als gültig angenommen, ist eine hyperbolische oder elliptische Raumgeometrie konstruierbar (Nichteuklidische Geometrie).

Die Liste der Namen muss unvollständig bleiben. Fest steht: In dieser Epoche wirkte z.B. Archimedes mit seiner wegweisenden Methodenlehre oder Eratosthenes berechnete erstaunlich genau den Erdumfang. Es entstanden z.B. der Pergamonaltar als ein Höhepunkt des Hellenismus. Es gab aber immer noch Ungereimtheiten, die sich teilweise bis in die Renaissance hielten. So herrschte noch im 5. vorchristlichen Jahrhundert, insbesondere bei den Pythagoreern, die Meinung vor, dass eine Strecke aus endlich vielen Punkten besteht. Eigentlich ist dies leicht zu widerlegen, wurde aber offenbar lange nicht hinterfragt.

Annahme: Konstruiert man ein Quadrat, dessen Seite aus ungerade vielen Punkten k besteht. Dann besteht die Diagonale aus n Punkten, wobei nach dem Satz des Pythagoras $n^2$ gleich $2k^2$ ist und somit gerade. Nur gerade Zahlen haben gerade Quadrate, somit ist n gerade. Damit ist aber $n^2$ ein Vielfaches von 4, aber $2k^2$ ist es nicht, weil k ungerade ist. Damit müsste n auch ungerade sein, was ein Widerspruch ist. Da den Pythagoreern der Unterschied zwischen geraden und ungeraden Zahlen aus mythischen Gründen wichtig war, ist dies

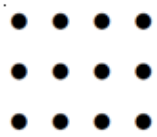
[16] https://www.encyclopedia.com/science/encyclopedias-almanacs-transcripts-and-maps/al-karaji, https://en.wikipedia.org/wiki/Al-Karaji

[17] Platon und Aristoteles waren keine Mathematiker. Ihr methodisch-philosophischer Einfluss war aber oft auch in der Mathematik deutlich spürbar.

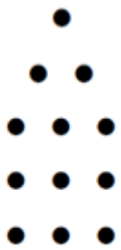
mit Sicherheit aufgefallen. Stichwort ist Tetraktys, die Vierheit und ihre mythische Bedeutung.[18]
Die Pythagoräer beschäftigten sich mit der „Lehre von geraden und ungeraden Zahlen“ mit den Summe- und Produktregeln. So ist die Summe zweier ungeraden oder zweier geraden Zahlen gerade. Das Produkt zweier Zahlen, von denen eine gerade ist, ist gerade. Dies sind immerhin erste Beispiele für logische Schlüsse aus vorherigen Definitionen.
Weiter beschäftigten sich die Pythagoräer mit sogenannten „figurierten Zahlen“, zu denen Tetraktys gehört.

Allgemein $1 + 2 + 3 + \ \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Allgemein $1 + 3 + 5 + \cdots 2n - 1 = n^2$



Allgemein $2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$



Allgemein $1 + 4 + 7 + \ \ldots + 3n - 2 = \frac{n(3n-1)}{2}$

Abb. 4: Figurierte Zahlen der Pythagoreer

Weiterhin untersuchte man „Vollkommene Zahlen“, wie $1 + 2 + 3 = 6$ als Summe ihrer Teiler, d.h. allgemein

[18] https://de.wikipedia.org/wiki/Pythagoreer und insbesondere https://de.wikipedia.org/wiki/Tetraktys. So ist die 10 heilig als Summe von 1, 2, 3, 4. Sie war das Symbol für den pythagoreischen Eid. Es ist auch die 4. Dreieckszahl

$$n = \sum_{d|n,\ 1<d<n} d$$

Oder $n = \binom{2^k}{2}$

Euklid gab in den Elementen (Elemente [6], IX, § 36) eine Darstellung, aus der man die „Vollkommenen Zahlen“ 28, 496, 8128 erkennen konnte. Nur diese waren in der Antike bekannt.[19]

Euklid bewies, dass $2^{k-1}(2^k - 1)$ dann vollkommen ist, wenn $M_k = 2^k - 1$ prim ist. Dies sind die sogenannten Mersenne Primzahlen. Leonhard Euler bewies, dass vollkommene Zahlen und Mersenne Primzahlen umkehrbar eindeutig zugeordnet sind. Es gibt also so viele „Dreieckszahlen“ wie es Mersenne Primzahlen gibt. Als Vorgriff auf mathematische Erkenntnisse der Renaissance: Noch bis zum Jahr 1536 glaubte man, dass alle $2^p - 1$ prim sind.

Der deutsche Rechenmeister Ulrich Rieger (lat. Hudalrichus Regius) veröffentlicht in seinem Rechenbuch *Utriusque Arithmetices epitome* als erster die fünfte vollkommene Zahl $2^{12}\cdot(2^{13}–1) = 4096 \cdot 8191 = 33.550.336$. Nachdem die Zahlen 511 und 2047 in seiner tabellarischen Übersicht nicht vorkommen, darf man annehmen, dass er $2^{11}–1 = 2047 = 23 \cdot 89$ als zusammengesetzt erkannt hat.[20] Das zeigt die zahlentheoretischen Leistungen in der Renaissance. Derzeit (2024) sind 52 vollkommene Zahlen entdeckt worden. Die 52. bekannte Mersenne-Primzahl M(136.279.841) wurde vom GIMPS-Projekt am 12. Oktober 2024 entdeckt.[21] Bisher sind alle vollkommenen Zahlen gerade. Ob es ungerade gibt, ist bis heute offen.

Viele weitere Beispiele siehe.[22] An dieser Stelle auch der Hinweis auf das Editorial in Band 72.[23]

Unbestreitbar sind schon in der Ionischen Epoche (Ende 7.Jhdt. – Mitte 5.Jhdt. v. Chr.) wichtige geometrische Erkenntnisse gewonnen worden. Dazu gehört der Beweis, dass die Winkelsumme im Dreieck 180 Grad beträgt. Der Beweis benötigt Eigenschaften von Parallelen und den Gegenwinkelsatz von Thales.

Ein geradezu mystisches Untersuchungsobjekt der Pythagoräer war das Pentagramm oder der Drudenfuß. Er soll lange Zeit das geheime Zeichen der Pythagoräer gewesen sein. Mathematisch interessant ist der Goldene Schnitt, der mehrfach in Beziehungen zwischen Seiten und Diagonalen auftritt.

---

[19] Nicht in der Ausgabe laut Literaturverzeichnis enthalten
[20] Gronau, ebenda, S. 23
[21] https://www.mersenne.org/primes/?press=M136279841
[22] https://de.wikipedia.org/wiki/Vollkommene_Zahl
[23] Oberhessische naturwissenschaftliche Gesellschaft, Band 72, Gießen 2025

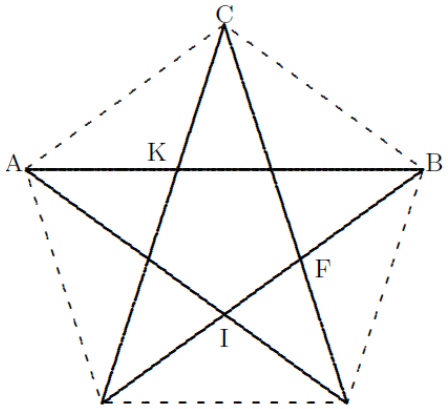



Abb. 5: Pentagramm oder Drudenfuß

$$\overline{AB} = a$$
$$\overline{KB} = x = \overline{BC} = \overline{AC}$$
$$\overline{AK} = a - x$$

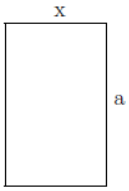
Strahlensatz $(\overline{KF} \parallel \overline{AI})$

Die Dreiecke AIB und KFB sind ähnlich

$$\overline{AB}:\overline{KB} = \overline{AI}:\overline{KF}$$

$$a : x = x : (a - x)$$

„Das Ganze zum größeren Teil verhält sich wie der größere Teil zum kleineren Teil."
Dies ist die Definition des Goldenen Schnitts.




$$a : x = x : (a - x)$$
$$x^2 = a^2 - ax$$
$$x = -\frac{a}{2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + a^2}$$
$$x = a\,\frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

Die dadurch festgelegte Verhältniszahl $\varphi$ kann man berechnen.

$$\varphi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 0.618033 \ldots$$

Ein großer Konfliktherd war die Frage nach der Kommensurabilität, z.B. bei dem Verhältnis von Seite n und Diagonale k in einem Quadrat. Gelöst wurde das Problem durch den Begriff der Inkommensurabilität. n und k sind nicht kommensurabel, sie sind also keine ganzzahligen Vielfache einer geeignet gewählten reellen Zahl c. Das Verhältnis $\frac{n}{k}$ ist also keine rationale Zahl; $\frac{n}{k} = \sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl.[24] Außerdem musste man sich von der Vorstellung lösen, dass eine Strecke aus endlich vielen Punkten (also einer natürlichen Zahl von Punkten) besteht. Das blieb aber kontrovers; siehe Atomismus bei Aristoteles und den Ansichten der Eleaten und Zenon von Elea, nach deren Philosophie die Materie ein Kontinuum darstellt. Die Entdeckung der Inkommensurabilität schreibt man mit einer gewissen Plausibilität dem Pythagoräer Hippasos von Metapont zu (Spätes 6. bis frühes 5. Jahrhundert). In der älteren historischen Forschungsliteratur ist man noch davon ausgegangen, dass Hippasos dieses Geheimnis widerrechtlich verraten hat und damit eine erste Grundlagenkrise in der Mathematik ausgelöst hat. Diese Ansicht wird heute unter Historikern

[24] Lucio Russo, Die vergessene Revolution, Springen 2003, S. 41/42, (der Fehler in der Rechnung wurde korrigiert). *Irrationalis* (unvernünftig) ist eine aus dem Griechischen wörtlich entlehnte Entsprechung der Nichtexistenz eines Verhältnisses. Die moderne Bedeutung stammt aus hellenistischer Zeit.

abgelehnt. Noch der geniale Heron von Alexandria, der noch mindestens 65 n. Chr. gelebt hat, hat eine Sprachregelung beigesteuert.
*„Rationale und irrationale Größen gehören beide nicht zu dem an sich Gedachten, sondern zu dem mit Anderem Verglichenen.“*[25]
Auch zu diesem Zeitpunkt war der Zahlbegriff also noch nicht verallgemeinert. Zahlen waren auch in der hellenistischen Epoche nur die natürlichen Zahlen; alles andere waren Strecken oder Flächen und sie waren untereinander kommensurabel oder inkommensurabel.
Erst Petrus Ramus (Pierre de la Ramée, 1515 – 1572), ein französischer Philosoph der Renaissance, ließ den griechischen Zahlbegriff hinter sich und definierte eine Zahl sauber:
*Numerus est secundum quem unumquodque numeratur* (Eine Zahl ist, womit wir zählen und rechnen).[26] Noch später im 19. Jahrhundert wurde von Baron Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) und Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916) der Zahlbegriff noch präziser definiert.

Schon in der Athener Periode begegnen wir Mathematik, die man als „geometrische Arithmetik (oder Algebra)“ bezeichnen kann. *Arithmos* (αριθμός) heißt Anzahl, also natürliche Zahl. Inkommensurable Größen bedeutet, dass man nicht alle Streckenverhältnisse als Brüche mit ganzen Zahlen ausdrücken kann. Die Griechen wollten den Zahlbegriff nicht ändern. Sie entschieden sich, Rechnungen geometrisch in Form von Strecken und Flächen auszuführen und konnten mit realen Größen rechnen, ohne sich um Inkommensurabilitäten kümmern zu müssen.
Beispiel: (Euklid: II. Buch, § 11) *Eine gegebene Strecke so zu teilen, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und dem einen Abschnitt dem Quadrat über dem anderen Abschnitt gleich ist.*
Übersetzt in moderne Formelsprache bedeutet dies: Ist a die gegebene Strecke und sind a − x und x die beiden anderen Strecken, dann wird gefordert, dass gilt: a(a − x) = $x^2$. Das ist die Definition des goldenen Schnittes. Es ist also die Gleichung $x^2 + ax = a^2$ zu lösen.

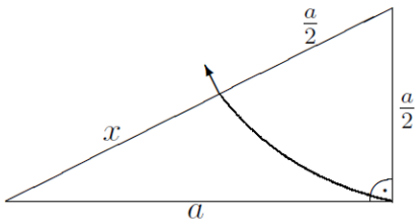


Abb. 6: Lösungsweg zur Aufgabe II. Buch, § 11

[25] https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf
[26] Zitiert nach https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf, siehe auch Kafitz, W., Zahlen - Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung des Zahlbegriffes, http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-8380, S. 17

Entgegen der Lösung von Euklid ist quadratische Ergänzung einfacher.

$$(x + \frac{a}{2})^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

Die Zeichnung erläutert den Lösungsweg.

Aus der athenischen Periode sollen noch drei Mathematiker genannt werden:

Theodoros von Kyrene (~ 465− ~ 399). Er untersuchte irrationale Zahlen und soll die Irrationalität von $\sqrt{n}$ für n = 2, 3, 5, ..., 17 bewiesen haben. Er entwickelte eine Spirale, die Spirale von Theodorus.[27]

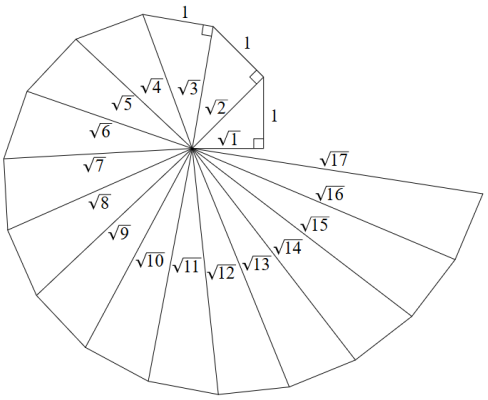



Abb. 7: Spirale des Theodorus

Theaitetos von Athen, (~417 − 368) untersuchte irrationale Zahlen im Zusammenhang mit den fünf platonischen Körpern. Er ordnete diesen die vier Elemente Feuer, Luft, Erde und Wasser zu und assoziierte die Welt oder den Himmel mit dem (Pentagon)Dodekaeder.

Eudoxos von Knidos (~ 408 − 355). Er war eine vielseitige Persönlichkeit.[28] Wir kennen heute den
Satz von Eudoxos: Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein n ∈ $\mathbb{N}$ mit der Eigenschaft:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

Zwei wichtige methodische Errungenschaften dieser Epoche für die Mathematik ist die Proportionenlehre und die Exhaustionsmethode. Sie scheinen im Wesentlichen von Eudoxos zu stammen. Man kann die Proportionen als Konstrukt sehen, mit dem er sich einer späteren Theorie der reellen Zahlen angenähert hat. Zwei Größen a und b (Strecken, Flächen, etc.) müssen von der gleichen Art sein. Sind sie kommensurabel, so lässt sich ihr Verhältnis als normaler Bruch darstellen (heute „rationale Zahl“). Sind sie nicht kommensurabel, so nennt man es Proportion (heute „irrationale Zahl“). Mit dem Begriff „Proportion“ umging man eine Tatsache, die den damaligen Zahlbegriff überstiegen hat.[29] Die Exhaustionsmethode ist ein Verfahren zur Berechnung von Flächen, also eine frühe Methode der Integration. Es geht darum, krummlinig berandete Flächen durch einbeschriebene und umbeschriebene

[27] https://de.wikipedia.org/wiki/Wurzelschnecke
[28] Sein Mathematikerverzeichnis der Akademie, überliefert durch Proklos, gibt einen guten Überblick.
[29] https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/proportionenlehre/8141

Polygonzüge zu approximieren. Eudoxos hat offenbar die Bücher V und XII der Elemente stark geprägt.

Die wichtigsten Mathematiker der alexandrinischen oder hellenistischen Epoche hatten unmittelbaren Einfluss auf die weitere mathematische Entwicklung in der Renaissance. In Alexandria wirkten große Namen der griechischen Wissenschaft. Als Mathematiker muss man zuerst Euklid von Alexandria mit seinem epochalen Werk „Elemente“ nennen. Euklid soll in Athen um 360 v. Chr. geboren worden sein und hat dort in Platons Akademie seine Ausbildung genossen. Auch Archimedes soll zumindest einige Zeit in Alexandria gewirkt haben. Zweifellos stellen die „Elemente“ eine Zusammenfassung und methodische Aufbereitung des mathematischen Wissens seiner Zeit dar. Trotzdem ist eine Menge an eigenen Erkenntnissen darin enthalten. Hier sollen repräsentativ zwei Beispiele besprochen werden:

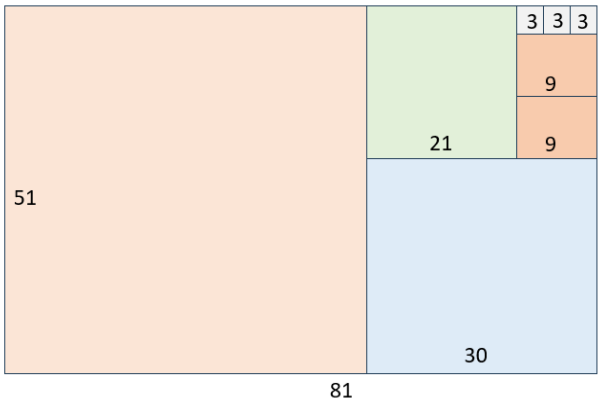



Abb. 8: Algorithmus zur ggT-Ermittlung

Ein methodisches Beispiel von zeitloser Bedeutung ist die Berechnung des „größten gemeinsamen Teilers“ (ggT). Zahlenbeispiel: ggT(81,51):

$$81 = 51 \cdot 1 + 30$$
$$51 = 30 \cdot 1 + 21$$
$$30 = 21 \cdot 1 + 9$$
$$21 = 9 \cdot 2 + 3$$
$$9 = 3 \cdot \boxed{3}$$

Ergebnis: ggT(81,51) = 3

Diese wechselseitige Wegnahme kann man grafisch verdeutlichen.

Die Rationalität der Zahl $\frac{81}{51}$ zeigt sich sowohl grafisch als auch durch einen endlichen Kettenbruch:

$$81 = 51 \cdot 1 + 30 \Rightarrow \frac{81}{51} = 1 + \frac{30}{51}$$
$$51 = 30 \cdot 1 + 21 \Rightarrow \frac{51}{30} = 1 + \frac{21}{30}$$
$$30 = 21 \cdot 1 + 9 \Rightarrow \frac{30}{21} = 1 + \frac{3}{9}$$

$$21 = 9 \cdot 2 + 3 \Longrightarrow \frac{21}{9} = 2 + \frac{3}{9}$$

$$9 = 3 \cdot \boxed{3}$$

Setzt man die Brüche zusammen, so entsteht der Kettenbruch

$$\frac{81}{51} = 1 + \frac{30}{51} = 1 + \frac{1}{\frac{51}{30}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{21}{30}} = 1 + \frac{1}{\frac{30}{21}}$$

$$\Longrightarrow \frac{81}{51} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{3}{21}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{3}}}} = [1; 1; 1; 2; 3]$$

Die Berechnung des Kettenbruchs liefert die gekürzte Form

$$\frac{81}{51} = \frac{27}{17} = 1{,}588235294117647$$

Der Kettenbruch endet, also ist der Bruch $\frac{81}{51}$ rational.

Das Kettenbruchverfahren kann auch auf irrationale Zahlen ausgedehnt werden. Je nach gewünschter Genauigkeit kann man letzte Glieder weglassen.

$$\sqrt{7} = 2 + \frac{1}{x_1} \Longrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{7} - 2} = \frac{\sqrt{7} + 2}{3} \Longrightarrow [x_1] = 1$$

$$x_1 = 1 + \frac{1}{x_2} \Longrightarrow x_2 = \frac{1}{x_1 - 1} = \frac{\sqrt{7} + 1}{2} \Longrightarrow [x_2] = 1$$

$$x_2 = 1 + \frac{1}{x_3} \Longrightarrow x_3 = \frac{1}{x_2 - 1} = \frac{\sqrt{7} + 1}{3} \Longrightarrow [x_3] = 1$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{x_4} \Longrightarrow x_4 = \frac{1}{x_3 - 1} = \sqrt{7} + 2 \Longrightarrow [x_4] = 4$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{x_5} \Longrightarrow x_5 = \frac{1}{x_4 - 4} = \frac{\sqrt{7} + 2}{3} = x_1$$

Der erste und der fünfte Teilnenner sind gleich; es liegt also eine Periode der Länge 4 vor. $\sqrt{7}$ ist ein periodischer Kettenbruch ab der 2. Stelle.

$$\sqrt{7} = [2; 1; 1; 1; 4; 1; 1; 1; 4; \ldots] = [2; \overline{1; 1; 1; 4}]$$

Über den Dezimalbruch ist das nicht unbedingt offensichtlich.

$$\sqrt{7} = 2{,}645751311064590590501615753639 3\ldots$$

Ein typisches Beispiel für die konsequente deduktive Beweismethode von Euklid ist die heute selbstverständliche Tatsache, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck 180° oder zwei rechte Winkel beträgt (Euklid, Buch I, §32).

Beweis:[30]

Im Δ ABC wird bis zum Punkt D die Seite AB verlängert; im Punkt B wird die Parallele BE ∥ AC gezogen.
Da das Parallelenpaar AC bzw. BE von der Geraden BC geschnitten wird, sind die Wechselwinkel $\measuredangle ACB = \measuredangle CBE$ kongruent. Die Gerade AD schneidet ebenfalls das Parallelenpaar; somit ist die Winkelsumme $\measuredangle CAB + \measuredangle ABE = 2R$ und die Winkel $\measuredangle CAB = \measuredangle EBD$ sind kongruent. Da der Winkel $\measuredangle ABD$ ein gestreckter ist, folgt

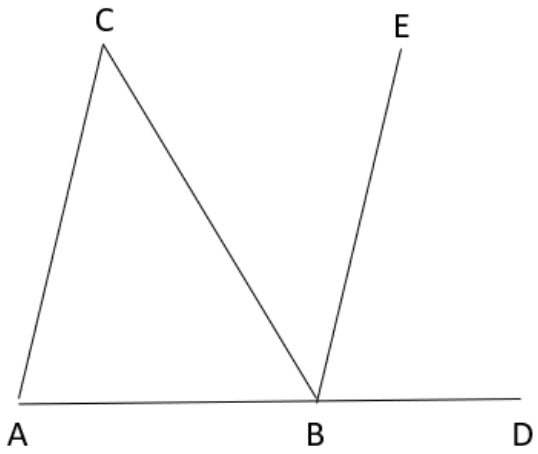



Abb. 9: Zum Beweis, die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt zwei rechte Winkel (2R=180°). Elemente Buch I, § 32

$$\measuredangle ABD = \measuredangle ABC + \measuredangle CBE + \measuredangle EBD = \measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle CAB = 2R$$

Damit ist gezeigt, dass die Innenwinkelsumme im Dreieck gleich zwei Rechten ist. Ferner folgt, dass der Außenwinkel $\measuredangle CBD$ gleich ist der Winkelsumme der beiden nicht anliegenden Innenwinkel

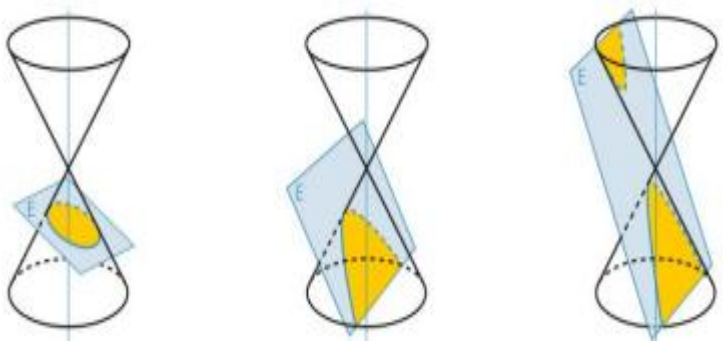


Abb. 10: Apollonios untersuchte Eigenschaften von ebenen Schnitten durch einen Doppelkegel und erhielt die Kurven Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel.

[30] Wörtlich aus Herrmann, ebenda, S.131 übernommen; entspricht ebenfalls fast wörtlich Euklid, Euklid, Die Elemente, Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main, 1997, Buch I, §32 (L.22), S. 23

$$\measuredangle CBD = \measuredangle CAB + \measuredangle ACB$$[31]

Apollonios aus Perge (~ 262–~ 190) ist mit seinem Werk „*Conica*“ unsterblich durch seine Studien zu den Kegelschnitten.[32]

Archimedes von Syrakus (~285 – 212 v. Chr.) war sowohl als Mathematiker als auch als Physiker der herausragende Wissenschaftler seiner Zeit. Dabei sind einige wesentliche Werke verschollen, insbesondere seine Methodenlehre in den Codices A, B und C. Bemerkenswert ist seine näherungsweise Berechnung der Kreiszahl $\pi$. Die Rechnung läuft darauf hinaus, dass er ein eingeschriebenes und umbeschriebenes 96-Eck berechnete. Durch geeignete Rundung erhielt er die Ungleichung

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{10}{70}$$

Es war für fast 2.000 Jahre die beste Näherung für $\pi$.

Aristarchos von Samos (~310 − ~230 v.Chr.) war Zeitgenosse von Archimedes. Er hat sich für das Heliozentrische System ausgesprochen. Er hat Abstände zwischen Himmelskörpern versucht zu ermitteln. Dabei spielte der heute so genannte Sinus eine Rolle.

Eratosthenes von Kyrene (~276 − ~195) war Mathematiker, Geograph, Astronom, Historiker, Philologe, Philosoph und Dichter. Seine erstaunlich genaue Berechnung des Erdumfangs war eine wissenschaftliche Meisterleistung. Er nutzte aus, dass am 21. Juni die Sonne am nördlichen Wendekreis genau senkrecht steht. Das als parallel angesehene Sonnenlicht fällt in Syene, dem heutigen Assuan, auf den Wasserspiegel eines tiefen Brunnens. Gleichzeitig wurde die Schattenlänge eines senkrecht stehenden Obelisken in Alexandria von bekannter Länge vermessen. Daraus errechnet sich ein Einfallswinkel von 7,2º oder 7 Grad, 12 Minuten. Da eine Kamelkarawane mit Tagesmärschen a´ 17 km 50 Tage von Alexandria bis Syene braucht, ist die Distanz 850 km. Daraus ergibt sich das Verhältnis $\frac{7{,}2^0}{850\ km} = \frac{360^0}{Erdumfang}$ . Heutige Berechnung mittels GPS ergeben 40.030 km und infolge der Abplattung an den Polen am Äquator 40.075 km. Die erstaunliche Genauigkeit lag in diesem Beispiel insbesondere auch an der Streckenmessung auf der sehr langen Distanz.
Der Fehler von Eratosthenes liegt im einstelligen Bereich.

---

[31] Euklid entnimmt hier die Anschauung, dass die Gerade BE nicht im Inneren des Dreiecks ABC verläuft.

[32] Auch in diesem Fall ist das griechische Original verschollen und nur die arabische Übersetzung überliefert worden.

Es gilt allgemein als falsch, dass das Wissen um die Kugelgestalt der Erde im Mittelalter verloren ging. Dies trifft zumindest für die Gelehrtenwelt nicht zu.

Bekannt ist heute noch das „Sieb des Eratosthenes“, das man nutzen kann, um die Primzahlen bis zu einer vorgegebenen Schranke zu ermitteln.

Heron v. Alexandrien (um 60 n. Chr.) war Mathematiker, Physiker und genialer Ingenieur. Überliefert ist sein Werk “*Geometrica*“ und Werke aus der angewandten Geometrie und Mechanik.

Ptolemaios v. Alexandrien (~85 – 165) hat im „*Almagest*“ das Ptolemäische Weltbild beschrieben und dabei Grundzüge der Trigonometrie entwickelt.
Diophantos von Alexandrien (um 250 n. Chr.) war einer der ersten Algebraiker.

Pappos (Pappus) von Alexandrien (um 320 n. Chr.). Er war Mathematiker, Astronom und Geograph. Sein Hauptwerk sind die “*Collectiones*”.

Hypatia (~370 − 418 n. Chr.) ist eine der wenigen bekannten und geachteten Frauen in der Mathematik. Sie war eine kompetente und angesehene Wissenschaftlerin und schrieb Kommentare zu Diophantos, Apollonios und Ptolemaios, die aber alle verlorengegangen sind.
Mit ihr ging endgültig die alexandrinische Epoche zu Ende.

Ein wichtiges Merkmal der griechischen Wissenschaft war die schon früh einsetzende Säkularisierung. Sie begann schon in der ionischen Naturphilosophie. Natürlich wurden die Götter verehrt und gefürchtet. Aber zunehmend wurden Naturphänomene nicht als Wirken der Götter, sondern als Konsequenz von Naturgesetzen verstanden. Die Erklärungen waren dabei durchaus unterschiedlich. So erklärte Demokrit (460/59 – 570 v. Chr.) bis hin zur Seele des Menschen alles atomistisch. Anaximander (bis nach 547 v. Chr.) suchte nach dem Urstoff. Thales von Milet vermutete einen Zusammenhang zwischen Erdbeben und dem Meer und bezog den Meeresgott Poseidon nicht in seine Überlegungen ein. Hippokrates von Kos (um 460-um 370 v. Chr.) suchte nach rationalen Ursachen und Heilung ohne spirituelle Hilfe von Krankheiten. Aristarch von Samos (um 310 – um 230 v. Chr.) postulierte gar, dass die Erde die Sonne umkreist. Doch das war dann doch des Guten zu viel. Er soll wegen Gottlosigkeit angeklagt worden sein.[33]

Doch das allein rechtfertigt nicht das Attribut „wissenschaftlich“. Eine Definition von „Wissenschaft“ versucht Russo zeitlos zu formulieren.[34]

- *Ihre Aussagen beziehen sich nicht auf konkrete Objekte, sondern auf bestimmte theoretische Begriffe.*
- *Die Theorie hat eine streng deduktive Struktur.*

[33] Roeck, ebenda, S. 47
[34] Lucio Russo, Die vergessene Revolution, Springen 2003, S. 20/21

- *Anwendungen auf die wirkliche Welt basieren auf Korrespondenzregeln zwischen theoretischen Gebilden und konkreten Objekten.*

Ein gutes Beispiel ist die Euklidische Geometrie. Sie macht Aussagen zu idealen Dreiecken oder Parallelen, die es in der Realität nicht gibt. Sie definiert Objekte und legt nicht diskutierbare Axiome zugrunde. In begrenzt gültigen Anwendungen ist die euklidische Geometrie verifizierbar. Bis hin zu Immanuel Kant (1724 – 1804) war diese Geometrie alternativlos (a priori richtig).
Claudius Ptolemaios von Alexandria (Lebensdaten unbekannt), ist der Schöpfer des ptolemäischen Weltbildes. Heron ist im heutigen Schulunterricht bekannt durch seine Formel für die Fläche F eines Dreiecks:

$$F = \sqrt{s \cdot (s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \text{mit } s = \frac{a+b+c}{2}$$

Die Formel war bereits Archimedes bekannt, doch Heron bewies sie und veröffentlichte den Beweis in seiner Formelsammlung *Geometrica.*

Ptolemaios sollte man aus heutiger Sicht nicht unterschätzen. Seine astronomischen Studien beruhten auf soliden Anwendungen der Trigonometrie (Dreiecksrechnung) in der Astronomie. Als Berechnungsmethode verwendete er die "Sehnenrechnung". Sein berühmtestes Werk *Almagest* (Die große Zusammenfassung) kennen wir nur aus arabischen Übersetzungen.

Abb. 11: Sehnenrechnung des Ptolemaios

Ptolemaios rechnete im babylonischen Sexagesimalsystem. Das bedeutet eine Einteilung des Vollkreises in 360 = 6 · 60 Grade, 1 Grad = 60 Minuten, 1 Minute = 60 Sekunden. [35] Dies hat sich trotz Dezimalsystem bis heute erhalten. Ähnliches gilt für die Uhrzeit.

Auch Diophantos von Alexandria († 284 n. Chr.) lebte in dieser Zeit. Er war der bedeutendste Algebraiker der Antike, wo die Geometrie eher dominierte. Algebra und Geometrie muss man seitdem als gleichberechtigt ansehen. Diophantos untersuchte Gleichungen mit rationalen Lösungen, was zu ganzzahligen Ergebnissen führt. Ihm zu Ehren nennt man heute Gleichungen mit ganzzahligen Lösungen „Diophantische Gleichungen". Der Richter und passionierte Mathematiker Pierre Fermat (1601 - 1665) stieß bei der Lektüre von Diophantos auf die Frage, wie ein gegebenes Quadrat in eine Summe zweier Quadrate zerlegt werden kann und ob das auch für kubische und höhere Potenzen möglich ist. Er schrieb an den Rand der Seite folgende Bemerkung:

[35] Vergleiche tw. wörtlich Gronau, Detlef, Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, Institut für Mathematik der Karl-Franzens-Universität Graz, 2009; https://imsc.uni-graz.at/gronau/Gm.pdf, S. 48

"*Cubum in duos cubos aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos et generaliter nullam in infinitum, ultra quadratum, potestam in duas ejusdem nominis fas est dividere. Cujus rei demonstrationem mirabilem sane detexi, hanc marginis exiguitas non caperet*."[36]

Die Aussage des Großen Fermatschen Satzes ist damit, dass die Gleichung $x^n + y^n = z^n$ nur für n$\leq 2$ gilt. Man nennt bekanntlich solche Zahlentripel „pythagoräische Zahlen", da entsprechende Seiten eines Dreiecks zu rechtwinkligen Dreiecken führen, für die der Satz des Pythagoras gilt. Der Beweis der Fermat´schen Vermutung durch Andrew Wiles (*1953) im Jahr 1994 nutzte teilweise vollkommen neu entwickelte mathematische Theorien.

Ebenfalls nach unserer Zeitrechnung lebte Pappos (Pappus) von Alexandrien (um 340 n. Chr.). Er formulierte einen Satz, der viele Jahrhunderte später von zentraler Bedeutung für die affine[37] und projektive Geometrie wurde. Die affine Geometrie ist eine Verallgemeinerung der Euklidischen Geometrie. Beispiel sind durch Vektorräume über einem Körper erzeugte affine Räume. Die projektive Geometrie untersucht Zentralprojektionen von Punktmengen in die zweidimensionale Ebene, nutzt also keine Parallelprojektion.[38]

Satz von Pappos: Die Schnittpunkte der Diagonalen eines 6-Eckes, von dem je 3 auf einer Geraden liegen, liegen ebenfalls auf einer Geraden.[39]

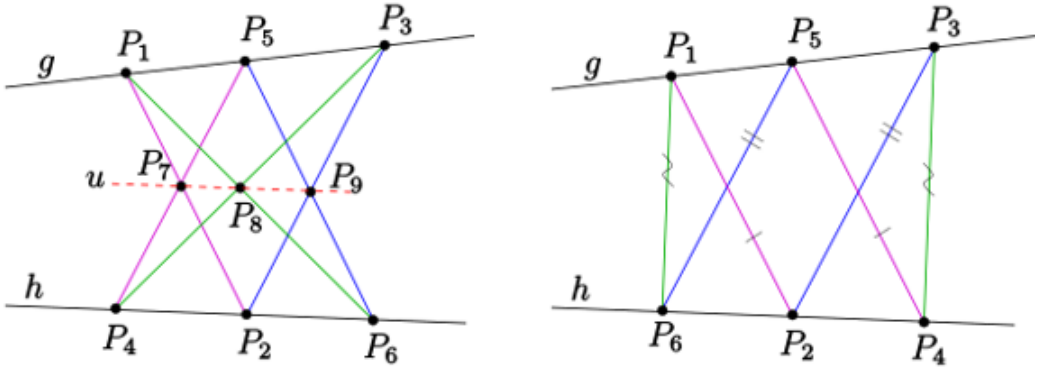



Abb. 12: Satz von Pappos, links projektive Form, rechts affine Form.

Die Algebra hatte seit Diophantos aufzuholen und tat dies auch erneut in der Renaissance mit Stifel oder Cardano (s.u.). Die Geometrie blieb aber ein wichtiger Pfeiler, etwa beim Kraftbegriff (Kräfteparallelogramm von Simon

[36] Es ist jedoch nicht möglich, einen Kubus in 2 Kuben, oder ein Biquadrat in 2 Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in 2 Potenzen mit ebendemselben Exponenten zu zerlegen: Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen. Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Großer_Fermatscher_Satz
[37] https://de.wikipedia.org/wiki/Affine_Geometrie
[38] https://de.wikipedia.org/wiki/Projektive_Geometrie
[39] https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Pappos

Stevin (1548 – 1620)) oder bei der allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein, einer rein geometrischen Interpretation der Schwerkraft.

Das Kernmerkmal von griechischer Philosophie ist das Interesse an Sachverhalten – an sich ohne unmittelbaren Nutzen. In vielen großen Kulturen stand die Interpretation von kanonischen, quasi „heiligen“ überlieferten Texten im Mittelpunkt. Diese Texte stammten nicht selten von übermächtigen Autoritäten. Sie wurden höchstens milde angepasst. Logische Schlüsse waren nicht die primäre Erkenntnis. Griechische Philosophie versteht die „Kunst der Kritik“ grundsätzlicher. Natürlich war Sokrates (469 – 399 v. Chr.) die moralische Instanz schlechthin und sein quasi Schüler Platon dokumentierte sein Suchen, Leben und Streben nach Erkenntnis mittels ständigem Hinterfragen und Abwägen von Argumenten. Für seine Jünger und Anhänger wird er zu einer Figur vom Format eines Buddha oder Jesus. Platon sieht in der sokratischen Gesprächsführung, der Dialektik, eine „Gabe der Götter“, die ein Prometheus wie das Feuer den Menschen gebracht hat. Roeck fasst es zusammen: „*Der sokratische Dialog ist die mächtigste Waffe der Aufklärung, der Wahrheits- und Weisheitssuche geweiht, ethisch und ätzend zugleich.*“[40]

Als wichtige methodische Leistungen kann man festhalten:

Der Hauptverdienst von Euklid ist die konsequente Ausarbeitung der deduktiven Beweismethode. Er hat aber auch einen zahlentheoretischen Beweis zum $\sqrt{2}$-Problem in Buch X, Proposition 117 der *Elemente geliefert*. Dieser wird durch Widerspruch (*Reductio ad absurdum*) geführt und gilt als einer der ersten Widerspruchsbeweise in der Geschichte der Mathematik. Aristoteles erwähnt ihn in seinem Werk *Analytica priora* als Beispiel für dieses Beweisprinzip.[41]
An dieser Entwicklung, von Pythagoras bis Euklid, sieht man das veränderte Mathematik-Verständnis. Eine zeitliche Zwischenstellung nimmt Platon ein (428/427 v. Chr.; † 348/347 v. Chr.) In Platons *Parmenides* findet sich sogar ein Beweis durch vollständige Induktion, was man schon ebenfalls den modernen Beweisverfahren zurechnen muss.[42] Platon formuliert, mathematische Objekte seien mit einem höheren Wirklichkeitsniveau ausgestattet, als ihre sichtbaren Abbilder. „*Ein*

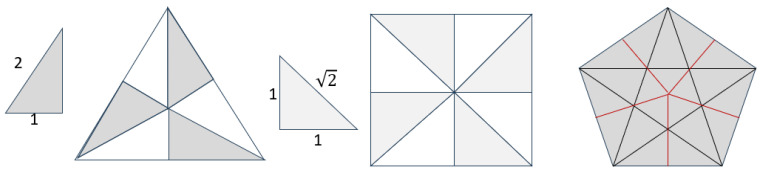
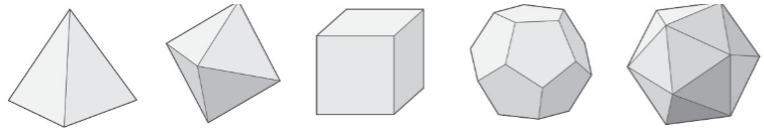



Abb. 13: Platons schönste Dreiecke

[40] Roeck. Ebenda, S. 52
[41] https://de.wikipedia.org/wiki/Beweis_der_Irrationalität_der_Wurzel_aus_2_bei_Euklid
[42] Fabio Acerbi, zitiert nach Russo, ebenda, S. 44 oder http://opera-platonis.de/Parmenides.pdf, 149a:7-c:3 (http://www.opera-platonis.de/Didot3/Parmenides149.htm)

*wichtiger Schritt in dem Prozess, der zur bewussten Konstruktion theoretischer Begriffe führt*.“[43]

Man kann davon ausgehen, dass Platon zwar keine mathematische Ausbildung,



| Platonische Körper | | |
|---|---|---|
| Tetraeder | 4 Dreiecke | Feuer |
| Würfel | 6 Quadrate | Erde |
| Oktaeder | 8 Dreiecke | Luft |
| Dodekaeder | 12 Fünfecke | Welt |
| Ikosaeder | 20 Dreiecke | Wasser |

Abb. 14: Die 5 platonischen Körper und ihre Symbolik

aber intensiven Kontakt mit Pythagoreern hatte und sich autodidaktisch weiterbildete. Aus dem pythagoreischen Gedankengut heraus ist Platons Interesse für die Dreieckslehre plausibel. Nach ihm sind die fünf platonischen Körper benannt, deren Flächen, außer Quadrat und Pentagon, regelmäßige Dreiecke bilden. Er versucht, auch deren Flächen durch Dreiecke zu strukturieren. Er erhält so „Platons schönes Dreieck Nr. 1“ (1, 2, $90°$), bzw. Nr. 2 (Seiten 1, 1, $\sqrt{2}$), von dem acht ein Quadrat bilden. Er weiß, dass die Dreiecke (30°; 60°; 90°) und Dreiecke mit den Seiten $(1;\sqrt{3};2)$ ähnlich sind. Auch ein Pentagramm lässt sich in rechtwinklige Dreiecke zerlegen.

Ein Hauptwerk von Platon ist das Buch *Menon*, das in Dialogform fiktive Gespräche von Sokrates mit dem Thessalier *Menon von Pharsalos* und dem Politiker *Anytos* behandelt. Es geht darum, ob Tugend, im Sinne von „Vortrefflichkeit, Weisheit, Tüchtigkeit“ angeboren oder erlernbar ist. Mathematische Fragen dienen insbesondere als Kriterien. Berühmt ist der Dialog mit einem Sklaven, in dem Sokrates durch gezielte Fragen die Erkenntnis beim Schüler fördert, wie aus einem Quadrat ein weiteres mit doppelter Fläche konstruiert werden kann.[44] Man findet aber durchaus anspruchsvolle Probleme, z.B. Menon 87A, die nach moderner Notation auf eine Gleichung 4. Grades führt, also durchaus höhere Mathematik adressiert.[45]

Offene Probleme sind seit dem 5. Jahrhundert die Paradoxa des Zenon von Elea. Vier der Paradoxa (der Bewegung) bespricht Aristoteles ausführlich in seiner Physik. Bekannt ist vor allem das Paradoxon vom Wettlauf mit Achilles, dem schnellsten Läufer der Antike und einer Schildkröte. Die Schildkröte soll einen leichten Vorsprung haben, aber wenn Achilles ihren Startpunkt erreicht, ist die Schildkröte schon wieder etwas weiter. Das Paradoxon lautet, dass Achilles die Kröte nie erreicht. In griechischer Zeit war Aristoteles eine

[43] Russo, ebenda, S. 45

[44] https://mathothek.de/katalog/verdoppelung-eines-quadrats-sokrates-und-der-sklave/

[45] Siehe Herrmann, ebenda S. 66-67

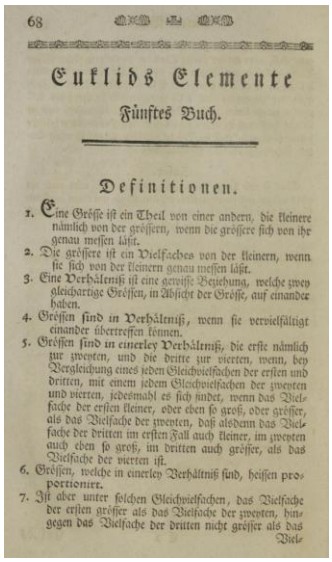
übermächtige Autorität. Seine Beschäftigung mit diesem Thema hat die Meinung darüber entscheidend geprägt. Dazu muss man bedenken, dass in der griechischen Mathematik das aktual Unendliche konsequent abgelehnt wurde. Eine Menge mit unendlich vielen Elementen wurde nicht akzeptiert (nur potenziell unendlich). So sagte Euklid nicht, es gibt unendlich viele Primzahlen, sondern er bewies aus der Annahme heraus, dass es eine größte Primzahl gibt, dass dies zum Widerspruch führt. Egal, wie weit man geht, es gibt immer eine größere Primzahl (potenziell unendlich). Analog postulierte Aristoteles, dass eine Linie nicht als Summe ihrer Punkte aufzufassen ist; eine potenziell unendliche Teilbarkeit nicht möglich sei. Der beliebig kleine Vorsprung der Schildkröte ist nicht unendich teilbar. Dies war auch ein Argument für den Atomismus, also die konzeptuelle Einführung von atomaren kleinen, aber nicht beliebig kleinen Größen. Das Problem beschäftigte die Philosophie und Mathematik viele Jahrhunderte und wurde erst durch die Betrachtungen von Georg Cantor (1845 – 1918) zur Unendlichkeit und den Maßtheorien von Émile Borel (1871 – 1956) und Henri Lebesgue (1845 – 1941) aufgelöst. Der Atomismus hat sich in der Physik durchgesetzt, aber ist nicht auf die Mathematik übertragbar.

Doch welche Rechenhilfen und –verfahren wurden bei Rechnungen in kleineren Maßstäben benutzt? Über Hilfsmittel ist wenig bekannt. Man geht von einem Vorläufer des römischen Abakus aus, aber weder sind Exemplare überliefert noch in Bildern nachweisbar. Sie werden im Bereich der natürlichen Zahlen benutzt worden sein. Ansonsten war die Geometrie mit Zirkel und Lineal für gebrochene Zahlenwerte das Mittel der Wahl. Dabei waren „Zahlen“ immer Streckenlängen oder Flächenvolumen. Das sollte man nicht belächeln. Noch vor wenigen Jahrzehnten war der Rechenschieber das Hilfsmittel des Ingenieurs. Seine Genauigkeit war, wenn überhaupt, nicht viel besser als eine sorgfältige geometrisch durchgeführte Rechnung. Vielleicht schon in der klassischen, zumindest aber in der hellenistischen Epoche war die Kombination von auf der Geometrie basierenden Algorithmen in Verbindung mit exakten Papyruszeichnungen von maximal möglicher Genauigkeit. Der Fehler wird im Bereich der Liniendicke liegen.[46] Mit diesem Fehlerquotienten sind Bauwerke, wie die Akropolis, entstanden, die bis heute überdauert haben. Hier erklärt sich auch der Vorteil, den das Medium Papyrus gegenüber den Tontafeln in Mesopotamien hatte. Auf Tontafeln ließ sich nicht gut zeichnen. Man hatte sich deshalb im Zweistromland eher auf numerische Methoden verlegt.

Man weiß auch, das Kurven bekannt waren, die nicht mit Zirkel und unkalibriertem Lineal gezeichnet werden konnten. So ist die Quadratrix des Dinostratos oder Trisektrix des Hippias eine kinematisch erzeugte Kurve, die

[46] Russo, ebenda, S. 49

bereits seit dem 5. Jahrhundert vor Christus bekannt war. Hippias verwendete sie um 420 v. Chr. zur Dreiteilung des Winkels (daher Trisektrix) und Dinostratos um 350 v. Chr. zur (näherungsweisen) Quadratur des Kreises (daher Quadratrix).[47] Eine Quadratur des Kreises ist bekanntlich exakt nicht möglich. Das liegt an der Tatsache, dass $\pi$ nicht algebraisch, (etwa wie $\sqrt{2}$), sondern transzendent ist und sich deshalb als Strecke nicht mit Zirkel und Lineal ohne Maßeinteilung konstruieren lässt. Auch eine exakte Dreiteilung eines Winkels ist nur in speziellen Fällen möglich;[48] eine exakte n-Teilung ist nur in abzählbaren Fällen möglich, etwa bei Zweierpotenzen. Das Problem ist klassisch; wurde aber erst mit den Methoden der Algebra endgültig gelöst. Es entstanden aber eine Fülle von Näherungslösungen. Die berühmtesten Autoren sind Archimedes, Pappos von Alexandria, aber auch z.B. Albrecht Dürer. Der exakte Beweis der Unmöglichkeit stammt von Pierre Wantzel (1814 – 1848) im Jahr 1837. Das Problem wird auf eine algebraische Gleichung dritten Grades reduziert und gezeigt, dass deren Lösungen in endlich vielen Schritten, ausgehend von der Länge 1, nicht konstruierbar sind. Selbst der konstruierbare Winkel von 60 Grad lässt sich nicht dritteln, da 20 Grad nicht konstruierbar ist.


68

Euklids Elemente

Fünftes Buch.

Definitionen.

1. Eine Größe ist ein Theil von einer andern, die kleinere nämlich von der größern, wenn die größere sich von ihr genau messen läßt.
2. Die größere ist ein Vielfaches von der kleinern, wenn sie sich von der kleinern genau messen läßt.
3. Eine Verhältniß ist eine gewisse Beziehung, welche zwey gleichartige Größen, in Absicht der Größe, auf einander haben.
4. Größen sind in Verhältniß, wenn sie vervielfältigt einander übertreffen können.
5. Größen sind in einerley Verhältniß, die erste nämlich zur zweyten, und die dritte zur vierten, wenn, bey Vergleichung eines jeden Gleichvielfachen der ersten und dritten, mit einem jedem Gleichvielfachen der zweyten und vierten, jedesmahl es sich findet, wenn das Vielfache der ersten kleiner, oder eben so groß, oder größer, als das Vielfache der zweyten, daß alsdenn das Vielfache der dritten im ersten Fall auch kleiner, im zweyten auch eben so groß, im dritten auch größer, als das Vielfache der vierten ist.
6. Größen, welche in einerley Verhältniß sind, heißen proportionirt.
7. Ist aber unter solchen Gleichvielfachen, das Vielfache der ersten größer als das Vielfache der zweyten, hingegen das Vielfache der dritten nicht größer als das Viel-

Abb. 15: Definitionen Buch V, Ausgabe von 1781

Die klassischen Probleme haben Generationen von Mathematikern und Amateure bis ins 19. Jahrhundert beschäftigt. Zu nennen wäre auch als drittes klassisches Problem die Würfelverdoppelung. Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) und Évariste Galois (1811 – 1832) leisteten bei Würfelverdoppelung und Winkeldreiteilung Vorarbeiten; aber gelöst wurden diese drei klassischen Probleme erst 1837 durch Wantzel und 1882 durch den Nachweis der Transzendenz der Kreiszahl $\pi$ durch Ferdinand von Lindemann (1852 – 1939).

Die große Scheu der hellenistischen Mathematiker vor dem Unendlichen findet sich nicht in kontinuierlichen Größen und ihren Rechenoperationen. Die Interpretation findet geometrisch statt und bezieht sich auf Strecken und Flächen. Addition und Subtraktion sind einfach, wobei es keine negativen Strecken geben kann. Multiplikation mit einer natürlichen Zahl ist ebenfalls trivial, da man sie als fortgesetzte Addition begreifen kann. Schwieriger ist die Frage nach dem Verhältnis a:b. Existieren zwei ganze Zahlen k und h, so dass $k \cdot a = h \cdot b$, so definiert man widerspruchsfrei a:b=h:k. Das Verhältnis h:k ist also

[47] https://de.wikipedia.org/wiki/Quadratrix_des_Hippias
[48] https://de.wikipedia.org/wiki/Dreiteilung_des_Winkels

ein gekürzter Bruch mit ganzen Zahlen in Zähler und Nenner und somit eine rationale Zahl. Gibt es keine zwei ganzen Zahlen h und k, wie es bei Seitenlänge und Diagonale eines Quadrats der Fall ist, so sagt man, dass die Größen a und b inkommensurabel sind. Wenn mindestens eine der Zahlen irrational ist, kann man in der Regel nicht ohne weiteres von einem Verhältnis reden, wenn irrationale Größen im Spiel sind. Es sei denn, etwa ein algebraischer Faktor lässt sich wegkürzen (z.B. bei a:b=$2\sqrt{2}:\sqrt{2}$). Diese ganze Problematik löst Euklid mit seinen Definitionen am Anfang von Buch V der *Elemente*. Wichtig für kontinuierliche Betrachtungen ist insbesondere Definition 5, Buch V.[49]

*Man sagt, dass Größen in demselben Verhältnis stehen, die erste zur zweiten wie die dritte zur vierten, wenn bei beliebiger Vervielfältigung die Gleichvielfachen der ersten und dritten den Gleichvielfachen der zweiten und vierten gegenüber, paarweise entsprechend genommen, entweder zugleich größer oder zugleich gleich oder zugleich kleiner sind.*[50]

In moderner, algebraischer Notation[51] soll also definitionsgemäß gelten: Die Proportion $a:b = c:d$ trifft zu, wenn auf alle gewählten natürlichen Zahlen h und k zutrifft:

(A) $ka > hb$ und gleichzeitig $kc > hd$.
(B) $ka = hb$ und gleichzeitig $kc = hd$.
(C) $ka < hb$ und gleichzeitig $kc > hd$.

Die Notwendigkeit für eine solche Komplexität wurde, man kann sagen viele Jahrhunderte, nicht erkannt. Doch Euklid benötigte eine Definition, die inkommensurabel und kommensurabel unter einem Dach behandelte. Erst die Arbeiten von Richard Dedekind (1831 – 1916) mit seiner Konzeption der Dedekind´schen Schnitte[52] und von Georg Cantor (1845 – 1918) zu seinen Betrachtungen zur Abzählbarkeit von rationalen und algebraischen Zahlen bzw. der Nichtabzählbarkeit des Kontinuums zeigten die Tragweite. Dazu kamen die sauberen Konzepte von Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) bzw. von Karl Weierstraß (1815 – 1897), die eine Grenzwertbildung ohne Rückgriff auf obskure Begriffe wie das „unendlich Kleine“ ermöglichten. Zweifellos hat Euklid und andere Mathematiker auf dem wissenschaftlichen Stand der hellenistischen

---

[49] Euklid, Elemente, Definitionen Anfang Buch V
Übersetzung aus dem Griechichen Johann Friedrich Lorenz, Halle, 1781
https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/6750/32
[50] Buch V, Def. 5, nach der Ausgabe Euklid, Die Elemente,
Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main, 1997
[51] Die Argumentation folgt Russo, ebenda, S. 54
[52] Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1872, online unter https://publikationsserver.tu-braunschweig.de /servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs_derivate_00005740/Aa_2043.pdf

Epoche ein tiefes Gespür für die exakten Anforderungen entwickelt und damit über 2.000 Jahre vorher moderne Konzepte teilweise vorweggenommen. Gerade die Definition 5 in Buch 5 führt zu einer modernen Theorie der irrationalen Zahlen.

Euklid hat sicherlich mit den *Elementen* als Autor eine herausragende Bedeutung in der Mathematikgeschichte. Aber man muss davon ausgehen, dass viele Ergebnisse schon vorher bekannt waren und lediglich in den *Elementen* in strukturierter Form nochmals wiedergegeben wurde. Das tut der Leistung von Euklid keinen Abbruch, sondern wertet vor allem das breite mathematische Wissen des hellenistischen Zeitalters auf. Euklid hat dafür gesorgt, dass das Wissen, in vielfach verloren gegangenen Schriften, in den *Elementen* gebündelt konserviert wurde.

Die griechische Mathematik blieb in vielen Fragen widersprüchlich. Man hatte aber erkannt, dass sich aus scheinbar offensichtlichen Erkenntnissen durch logische Schlüsse tiefgreifende Ergebnisse erzielen lassen. Das war der eigentliche, strukturierte Beginn der deduktiven Methode, die Euklid in den *Elementen* zur Perfektion machte und die bis heute als Prinzip Bestand hat.
In der Renaissance musste man sich an diesen Erkenntnisstand zuerst mühsam erinnern und konnte erst dann darauf aufbauen.

**Mathematik in der Renaissance**

- **Historische Rahmenbedingungen**:

Bis zur beginnenden Neuzeit wurde und blieb Latein die Verkehrssprache und damit quasi „*lingua franca*“ in ganz Europa. Eins wird aber heute oft vergessen. So kannte man im ganzen ehemaligen römischen Reich das Fingerzählen. Dies war viel mehr als eine primitive Spielerei. Es war eine Kommunikationsmethode für Zahlen mit erheblicher wirtschaftlicher Bedeutung und das 1.500 Jahre in den alten Grenzen des Imperium Romanum und wahrscheinlich im Grenzhandel darüber hinaus.
Es gibt vom Abt Beda (genannt *Venerabilis*, der Ehrfürchtige, gestorben 735) eine genaue schriftliche Überlieferung, wonach man das Zeichensystem mit den zehn Fingern Zahlen bis 9.999 darstellen kann. Beda war ein angelsächsischer Benediktiner und Kirchengelehrter. Er wirkte sein ganzes kirchliches Leben im Kloster Jarrow in der heutigen Grafschaft *Tyne and Wear*, nahe Newcastle upon Tyne. Sein Ziel war, dass in jedem Kloster ein Mönch existieren sollte, der das Datum des Osterfestes berechnen konnte.

In seinem Werk *„De temporum ratione*“ („Über die Zeitrechnung“, insbesondere Berechnung von Ostern ohne Kollision mit dem jüdischen Passahfest) frischte er deshalb das Wissen um das Fingerzählen auf. Das war im fernen England, in dem die Römer nicht so lange herrschten wie in den südlichen Ländern, besonders wichtig. Die Bedeutung des Fingerzählens zeigt eine Statue des doppelgesichtigen Gottes Janus auf dem zentralen römischen Forum. Der Name des Monats Januar geht auf ihn zurück.[53] Das Denkmal soll den Gott in der Fingerhaltung dargestellt haben, die der Zahl 365 als Anzahl der Tage im Jahr entsprechen. Dies ist von Macrobius überliefert, der etwa zeitgleich mit dem Kirchenvater Augustinus lebte, der 430 n. Chr. als Bischof im nordafrikanischen Hippo gestorben ist.[54] Auch Berichte von Plinius d. Jüngeren (61/62 – 113/115) zeigen, dass man Fingerzählen als wichtige Kulturtechnik bezeichnen muss. Die unhandlichen römischen Zahlen haben sich wahrscheinlich deshalb so lange gehalten, weil sie nur zu Dokumentationszwecken benutzt wurden und im täglichen Gebrauch praktisch europaweit Fingerzählen zum Einsatz kam. Selbst viele Jahrzehnte später haben z.B. Fibonacci oder Luca Pacioli, die wahrhaftig Verfechter der indo-arabischen Zahlen waren, das Fingerzählen gewürdigt.

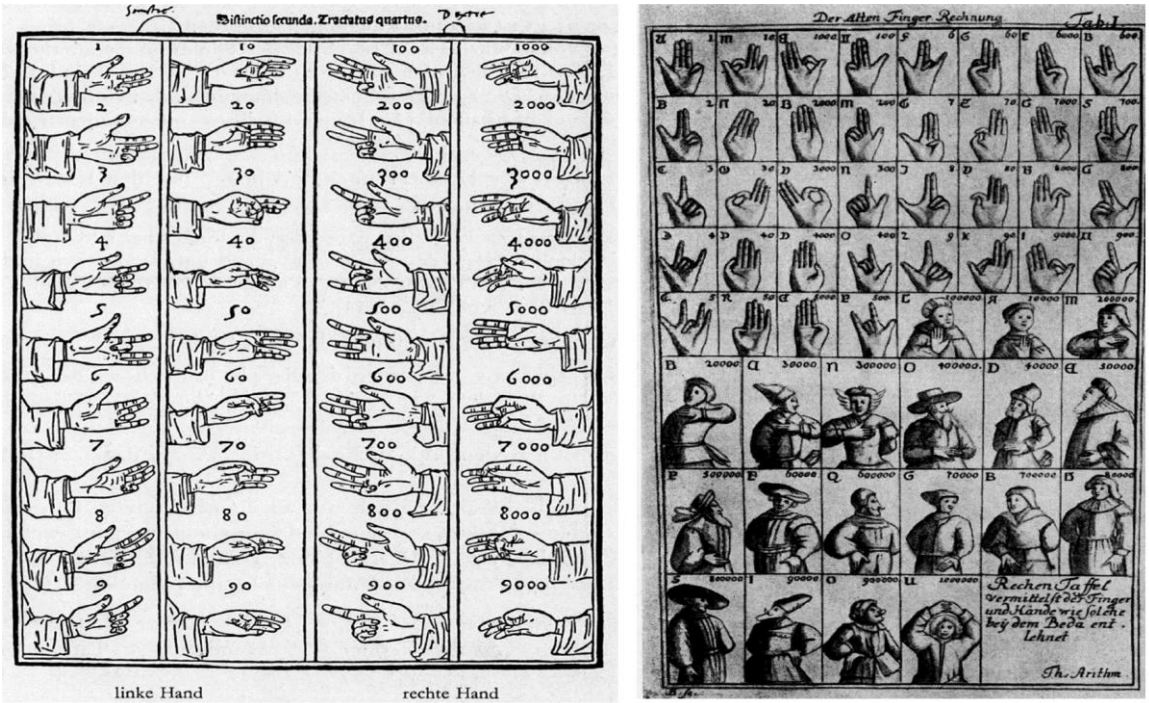



Abb. 16: Die Fingerzahlen waren 1.500 Jahre in ganz Lateineuropa verbreitet. Römische Zahlen hatten fast nur dokumentarischen Charakter.

[53] Es ist einer der wenigen Gottheiten ohne griechische Entsprechung
[54] Menninger, ebenda, digitalisiert S. 240 (Bd. 2, S. 5)

Lateinische Sprache und diese praxisorientierte Zahlendarstellung und Rechenmethode waren römische Kulturtechniken, die bis in die Renaissance internationale Bedeutung hatten. Ansonsten übertreibt man nicht, wenn man die wirklich herausragenden kulturellen und wissenschaftlichen Errungenschaften im Wesentlichen auf griechischen oder später auch arabischen und persischen Einfluss zurückführt.

Dies ist eine zutiefst grundlegende Haltung, die in einem „Zweiten Frühling", in der Renaissance, wieder aufgegriffen wurde und sich in der Neuzeit weiter manifestierte. Der Zweck steht, wenn überhaupt, erst an zweiter Stelle. Griechische Forschung fragt zuerst nach dem philosophischen Sinn, nicht nach dem praktischen Zweck. Nachdenken über das Wissen über der Natur, Mathematik oder Verständnis von menschlichem Zusammenleben konnte zwecklos, aber nie sinnlos sein. Das unterscheidet die Griechen von Ägyptern oder Babylonier. Im Zweistromland hatte Astronomie und die dafür benötigte Mathematik eine religiöse Motivation, Ägypten benötigte geometrisches Wissen, um bei den jährlichen Nilüberschwemmungen den Landbesitz wieder korrekt vermessen zu können. Motivation bei den Griechen war das „Erstaunen" über die Welt (Roeck). Deshalb entstand dort auch echte, zuerst zweckfreie Wissenschaft. Auch heute ist Grundlagenforschung die Basis, quasi der Fundus, aus dem man irgendwann auch praktischen, wirtschaftlichen Nutzen ziehen kann. Anwendungsorientierte Forschung hätte nie eine Relativitätstheorie oder Quantenmechanik hervorgebracht. Nichteuklidische Geometrie wurde anfangs als mathematische Spielerei ohne praktische Bedeutung gesehen. Sie ist unverzichtbar für die Relativitätstheorie, der wir viele Jahre später u.a. das Satelliten gestützte Navigationssystem verdanken.

„*Fortschritt zu feiern, ist eine griechische Idee. In buddhistischen und anderen fernöstlichen Kulturen scheint sie sich nicht zu finden.*"[55]

Von den Römern wurde griechisches Wissen und griechische Kunst adaptiert, ja, es galt sogar als chic, „*griechische Brocken ins Gespräch zu streuen*".[56] Aber man konnte wohl nie von einem Geben und Nehmen sprechen. Die Verse des Dichters Horaz bringen es auf den Punkt: „*Griechenland, gefangen, nahm die wilden Sieger gefangen und brachte die Künste ins bäurische Latium*."[57].

Mehr als 2000 Städte entstanden im römischen Reich. Oft war die Keimzelle eine Garnison.

---

[55] George Ovitt in Lindberg, David C./Shank, Michael (Hrsg.); The Cambridge History of Science, Bd. 2, New York, zitiert nach Roeck, ebenda, S. 66
[56] Roeck, ebenda, S. 70
[57] Horaz, epistel 2,1, 156 zitiert nach Roeck, ebenda, S. 70

Griechische Kultur brachte auch eine entscheidende Innovation in das junge römische Handelswesen: Man führte zumindest in Teilbereichen die Geldwirtschaft ein. Der lateinische Begriff „*pecunia*“ deutet auf den Wortursprung *pecus* (Vieh) aus dem Tauschhandel hin.

Diese kulturelle Basis wurde in der Renaissance wieder entdeckt und weiterentwickelt.

Systematische Wissenschaft fand in Europa im ersten Jahrtausend kaum statt. Es waren turbulente, unstete Jahrhunderte. Sie waren zuerst geprägt von der Völkerwanderung und dem Niedergang und schließlich Untergang des weströmischen Reiches. Es ist nicht das Ziel dieses Beitrags, die weitere Geschichte nachzuzeichnen. Eine Zahl aber ist bezeichnend für die Entwicklung eines ganzen Jahrtausends: Zwischen dem 6. bis 15. Jahrhundert stieg die Anzahl der Klöster von ca. 1.000 auf über 20.000 an.[58] Ein positiver Effekt stellte sich jedoch dadurch ein, dass die Klöster *Scriptorien* unterhielten, in denen Bücher bzw. Handschriften kopiert wurden. Es war ein mühsames Geschäft. Man kann von sieben Seiten pro Tag a´ 25 Zeilen pro Seite ausgehen. „*Scribite, scriptores, ut discant posteriores*“.[59] Priorität hatte aber nicht antikes Wissen. Die Texte von Kirchenvätern, Chroniken oder Heiligenlegenden wurden kopiert. Aber auch von Zeit zu Zeit war ein Werk eines antiken Autors dabei.

Einen Mittelweg schlug zum Glück für die weitere Entwicklung der heilige Augustinus ein, der das antike Bildungssystem ergänzt um eine christliche Basis restituieren wollte.

Renaissance war kein plötzlich eintretendes Ereignis – es gab Vorstufen der Renaissance. Diese Vorstufen im Sinne von Rückbesinnung und Wertschätzung von antikem Wissen gab es mehrere. Eine beginnt mit dem „arabischen Frühling“. Der Wohlstand führte zu einer regelrechten Sammelwut von antiken Schriften. Ihr haben wir es zu verdanken, dass viele Werke griechischer Autoren der Nachwelt erst über arabische Übersetzungen erhalten blieben. Als Protegé kann man stellvertretend Harun-ar-Rashid (786 – 809) nennen, den die Weltliteratur aus den Erzählungen von 1001-er Nacht kennt.

In Europa begann das, was man „Karolingische Renaissance“ nennen kann. Karl der Große (747/48 – 814) vereinigte viele Charaktere in sich. Er war Machtmensch, Taktiker, aber auch beharrlich bemüht um Bildung und Kunst bei seinen Völkern. Er konnte lesen und beherrschte Latein, aber nicht schreiben.[60] Er schätzte aber wohl vielfältiges Wissen und zog Gelehrte an seinen Hof. Es

[58] Roeck, ebenda, S. 112
[59] „Schreibe, Schreiber, dass die Nachkommen lernen.“ Inschrift im Kloster Notre Dame de Lyre
[60] Roeck, ebenda, S. 131

entstand eine intellektuell hochstehende Diskussionskultur. Die „Sieben freien Künste“ der Griechen feierten ein Comeback, zu denen die Mathematik gehörte. Man orientierte sich (wieder) an antiken Standards, wie dem römischen Flächenmaß und anderen schriftlich dokumentierten Erfahrungen.

Man kann mit Fug und Recht behaupten, dass die karolingische Zeit eine Vorstufe der „großen“ Renaissance war und deren kulturelles Erbe der „großen“ Renaissance ihre Grundlage und damit Genese gab.

Diese Epoche hatte das Potential zu einer Zeitenwende zur Neuzeit. Doch in der Folge verhinderten kriegerische Auseinandersetzungen, dass diese Epoche sich weiter verselbständigte.

Die Geldwirtschaft dominierte gegenüber dem Eigenanbau – mit erheblichen gesellschaftlichen Folgen. Indiz ist die Tatsache, dass vom 10. Jahrhundert mehr Münzen erhalten sind als in dem ganzen Zeitraum davor. Auch von Münzgeld aus Afghanistan, Samarkand oder Bagdad wird berichtet und beweist die Weitläufigkeit der Handelsbeziehungen. Die Geldwirtschaft ist auch die wichtigste gesellschaftliche Veränderung zwischen dem 11. und 14. Jahrhundert mit vielfältigsten Anforderungen an die Rechenfertigkeit. Es kam nach und nach zur Aufweichung der traditionellen Hofverbände.[61] Bauern waren früher entweder Freie oder Unfreie und sogar Leibeigene. Der Hofverband konnte zugleich Fronhof und Schutz in der Not sein. Nun wird zunehmend nicht über Kost und Logis die Arbeitskraft abgegolten, sondern über Heller und Pfennig. Folgen zeigten sich auch und gerade in der Urbanisierung. Menschen waren nicht mehr an ihre Scholle gebunden. Es wurde viel mehr als früher gebaut. Das 12. Jahrhundert war das Jahrhundert der Kathedralen und war gleichzeitig der Gipfel der Urbanisierung. Allein in Mitteleuropa entstanden gut 4.000 Städte.[62] Vor allem die bedeutenden Handelsstädte in Italien hatten über 10.000 Seelen. Köln (Coellen oder Coelln) war die größte deutsche Stadt mit kaum 40.000 Einwohnern und musste im 12. Jahrhundert zweimal seinen Mauerring erweitern.[63] Die Städte bauten ihre Handelsbeziehungen über die christliche Sphäre hinaus über die See und Karawanenwege aus. Es entstanden Zweckgemeinschaften, die den Gewinn je nach investiertem Kapitalanteil teilten. Absicherung erfolgte über Seeversicherungen und dem wichtigen Geschäftsinstrument des Wechselbriefes (*Cambiales*), mit dem Gold in Papier und bei Bedarf zurückgetauscht werden konnte. Er diente aber auch dazu, „sündige“ Zinseinnahmen zu vertuschen. Dieses Finanzinstrument wurde

[61] Roeck, ebenda, S. 202f
[62] Roeck, ebenda, S. 206
[63] http://www.koelnwiki.de/wiki/Das_mittelalterliche_Köln

schon mit der Erfindung des Kompasses verglichen.[64] In dieser Zeit entstanden Banken, ein Name, der ursprünglich von Geldgeschäften auf Bänken herrühren soll. Den Start markierte 1252 die Prägung des Goldflorins. Doch bereits am Ende des Jahrhunderts existierten etwa 80 Banken in Florenz mit einem funktionierenden Kredit- und Wechselgeschäft.[65]

Brunelleschi (1377 – 1446), der Baumeister der mächtigen Domkuppel in Florenz, ist der Initiator eines bahnbrechenden Experiments. Irgendwann zwischen 1400 und 1410 fertigte er eine 30 x 30 cm große Holztafel an, auf der ein Bild des Baptisteriums seitenverkehrt aufgemalt war und in das ein trichterförmiges Loch auf der Rückseite angebracht war. Man konnte vor das Bild einen Spiegel stellen und das Baptisterium, nun seitenrichtig, vollkommen naturgetreu erkennen. Damals waren die optischen Gesetze und die physikalischen Grundlagen des Sehens noch nicht bekannt. Gehen Lichtstrahlen von den Objekten aus? Oder gar vom Auge zu den Gegenständen? Das Experiment zeigte, dass allein die geometrische Konstruktion das Bild unabhängig von der physikalischen Erklärung auf der Netzhaut erzeugt. Brunelleschi zeigte, dass Mathematik eine perfekte Illusion der räumlichen Realität ermöglicht. Die Zentralperspektive war für die Architektur entdeckt und revolutionierte die Kunstwelt. Tommasio di Ser Cassai kommt das Verdienst zu, das erste zentralperspektivische Bild der Weltgeschichte gemalt zu haben. Sein voller Name lautet Tommaso di ser Giovanni di Mone di Andreuccio (genannt Masaccio, 1401 – 1428). Masaccio bedeutet „großer oder grober Thomas“. Er starb jung, aber seine überzeugenden, mathematisch begründeten Raumkonstruktionen, durch den innovativen Einsatz der Zentralperspektive, machten ihn berühmt und er galt bereits Zeitgenossen neben Filippo Brunelleschi, Lorenzo Ghiberti (1378 – 1455) und Donatello (1386 – 1466) als Erneuerer der Florentiner Kunst.[66]

Es fällt auf, dass die Mobilität steigt. Man kann auch mit Sicherheit sagen, dass Europa mehr von Asien wusste als umgekehrt. Der Kompass wurde entdeckt und leitete so etwas wie eine „nautische Revolution“ ein, mit allen Konsequenzen für mathematische und astronomische Anforderungen. Der „trockene Kompass“, die auf einem Stift beweglich aufgehängte Magnetnadel, wird erstmals 1269 in der *Epistola de magnete* von Petrus Perigrinus de Maricourt erwähnt. Roger Bacon (um 1220 – 1292) kann man als seinen Schüler betrachten.[67]

---

[64] Roeck, ebenda, S. 207
[65] https://newsv2.orf.at/stories/2096146/2096150/
[66] https://de.wikipedia.org/wiki/Masaccio
[67] https://de.wikipedia.org/wiki/Petrus_Peregrinus_de_Maricourt

Der Fernhandel war aber trotz eklatanter Unsicherheit äußerst lukrativ. So hatten vier Zobelfelle und ein Hermelinpelz den Wert von 86 Ochsen.[68] Die nautische Revolution ab dem 15. Jahrhundert hatte verschiedene Ursachen. Die Magnetnadel und der im 15. Jh. vom Nürnberger Kaufmann Martin Behaim (1459 – 1507) erfundene Jakobsstab waren entscheidend für die Navigation abseits der Küsten. Mit Hilfe des Jakobsstabs konnte die Höhe der Sonne und anderer Himmelskörper berechnet werden. Somit wurde möglich, zumindest über den Breitengrad die geografische Position eines Schiffes auf dem offenen Meer zu bestimmen. Zu Ehren von Amerigo Vespucci (1454 – 1512) nannten die Kartographen das weiter westlich gelegene *terra incognita* „America“.[69]
Nicht nur der Fernhandel brachte enormen Aufschwung, auch einige Erfindungen hatten erhebliche Konsequenzen. So wurde eine effizientere Papierproduktion mit Papiermühlen angestoßen, die den wachsenden Bedarf abdeckten. Es ist aber lediglich eine „Vorrevolution“; der explodierende Bedarf kam eigentlich erst mit dem Buchdruck mit beweglichen Lettern.

Eine heute fast unscheinbar wirkende Erfindung waren Brillen mit zwei Gläsern. Dazu war ein Paradigmenwechsel in der Medizin/Physik nötig. Die schwindende Sehfähigkeit wollte man mit Tinkturen behandeln bzw. konnte sie vorher nur unzureichend durch vergrößernde Lesesteine aus Bergkristall kompensiert werden. In dieser Epoche fand die Brille auch zu ihrem Namen: „Brille“ leitet sich ab von „Beryll“ beziehungsweise dessen Plural „Berylle“ – so der Name des Bergkristalls, aus dem die ersten Linsen geschliffen wurden. Eine Erfindung, die im 13. Jahrhundert in den berühmten Glashütten von Murano gemacht wurde, geht den nächsten Schritt. Murano ist eine kleine Insel nördlich von Venedig und ist auch heute noch als Zentrum der Glasherstellung Touristenattraktion. Streng wurden die Erkenntnisse der Glasmacherkunst von den sogenannten *Cristalleri* dort gehütet. Murano hatte eine Zeitlang das Monopol für weißes Glas, aus dem für Brillen die Linsen geschliffen werden konnten. Es ist Kalk-Natron-Glas aus Quarzsand ($SiO_2$), Soda ($Na_2CO_3$) aus Syrien und Ägypten und Kalk ($CaCO_3$). Früher hat man sehr mühsam Glas aus Pottasche (Kaliumcarbonat als Flussmittel, $K_2CO_3$) hergestellt. Das Flussmittel wurde vorher aus Buchen- und

[68] Roeck, ebenda, S. 335
[69] Roeck, ebenda, S. 716

Eichenresten durch Eindampfen gewonnen. Es heißt heute oft noch Waldglas.[70] Die „*Cristalleri*“ sind nun mit dem neuen Glas in der Lage, zwei konvexe Linsen zu schleifen. Sie fassen diese in einen hölzernen Ring mit Stiel und verbinden die Teile mit einer Niete. Es ist damit die sogenannte Nietbrille erfunden. Die Befestigung am Kopf kam später.[71] Es entstand das Berufsbild der Brillenmacher in den Städten mit Murano-Glas als Rohmaterial.[72] Siehe auch Nikolaus von Kues (1401 – 1464): De beryllo / Über den Beryll (1458)[73]

Abb. 17: Die Jakobskirche in Rothenburg ob der Tauber mit dem Altar von Friedrich Herlin. Petrus hält sich eine Nietbrille vor die Augen.

Dieses Instrument einer Zwei-Glas-Brille mit einigermaßen individuell angepassten Gläsern soll die durchschnittliche Lebensarbeitszeit in der Renaissance glattweg verdoppelt haben! Der volkswirtschaftliche Effekt war entsprechend gewaltig. Außerdem erlaubte die Brille genaueres Arbeiten, z.B. in der Feinmechanik. Einen Beitrag zur wissenschaftsgeschichtlichen Zeitenwende leistete Dietrich von Freiberg (um 1245 – 1320), durch Untersuchungen zu Reflexion und Brechung. Es war eine im Wesentlichen wissenschaftlich korrekte Schrift, die nur und ausschließlich Optik behandelte – ohne metaphysische Ausschweifungen. Ohne Kenntnis vom anderen hat der Perser Kamāl al-Dīn al-Fārisī ähnliche Ergebnisse gefunden.[74] Doch während die arabische Wissenschaft verkümmerte, holte Lateineuropa

[70] https://forsterklaert.de/waldglas
[71] https://www.zeiss.de/vision-care/rund-ums-sehen/sehen-verstehen/die-geschichte-der-brille.html,
https://www.monumente-online.de/de/ausgaben/2013/1/petrus-mit-brille.php
[72] Man beachte auch eine Passage in Eco´s Der Name der Rose ab S. 114. Der gut recherchierte Roman spielt im Jahr 1327. William von Baskerville hat bereits eine Brille und verweist auf die ca. 40 Jahre zurückliegende Erfindung.
[73] https://cusanus-portal.de/content/fw.php?werk=7&ln=dupre&dupre_fw=1
[74] Kamāl al-Dīn al-Fārisī, https://de.wikipedia.org/wiki/ Kamāl al-Dīn al-Fārisī

mit großen Schritten auf. Auch Dietrich war Dominikaner, der als Naturwissenschaftler entscheidende Impulse gab.

In diese Phase fallen auch auf kulturellem Gebiet Arbeiten, die den Humanismus begründeten. Für die Humanisten bedeutete es nicht, dass der „Stein der Weisen“ damit gefunden wurde. Es bedeutete zunächst, dass man sich auf griechische Originale beziehen musste: *ad fontes* (zu den Quellen).[75]

Florenz ist die Renaissance-Metropole schlechthin. Die ungekrönten Herrscher der Florentiner Republik waren wirtschaftlich und politisch die Familie Medici. Zunächst hielt sich der Patriarch Cosimo de Medici (genannt il Vecchio „der Alte“; 1389 – 1464) einige Jahrzehnte. Er mehrte das Familienvermögen, dessen Grundstein sein Vater Giovanni gelegt hatte. Er war aber ein geschickter Staatsmann und bedeutender Kunstmäzen. Sein großes Ansehen spiegelte sich in der posthumen Verleihung des Titels *Pater patriae* wider. Sein Enkel Lorenzo wurde 1469 sein Nachfolger, genannt *Lorenzo il Magnifico*; (1449 – 1492). Die Medici waren ursprünglich bürgerlich, haben sich aber ein hohes patriarchalisches Ansehen verschafft, das an den Hochadel erinnerte. Erst Lorenzo wurde in den päpstlichen Adelsstand erhoben. Die Familie bildete vom 15. bis ins 18. Jahrhundert eine einflussreiche Dynastie, aus der Großherzöge der Toskana, drei Päpste und zwei Königinnen von Frankreich hervorgingen.[76] Sie waren Bankiers, wenn auch nicht immer glücklich bei der Einschätzung der Kreditwürdigkeit mächtiger Schuldner. Zum Habitus gehörte Reichtum durch die *Banco Medici*, Wohltätigkeit, Mäzenatentum und Bildung, die sich durch den Besitz von Büchern repräsentierte.
Trotz einiger verlustreichen militärischen Eskapaden in dieser Zeit wurde der Reichtum der Stadt besonders durch die Textilindustrie erworben. Hier gibt es Parallelen zu den Fuggern in Augsburg im 14. Jahrhundert oder zu Städten in Flandern und England, wo dieses Gewerbe verbreitet war. In Florenz ernährte die Textilbranche ein gutes Drittel der 90.000 Einwohner innerhalb der Stadtmauern und weitere Tuchwalker und Spinnereien im Umland. Wolle aus fast ganz Europa und dann auch Seide aus eigener Produktion bildeten den Rohstoff, der in zahlreichen Arbeitsgängen verarbeitet wurde. Wollhändler stellten meist nicht nur das Rohmaterial, sondern auch die Webstühle. Diese Zunft, die „*Arte della lana*“[77], war durchaus mächtig. Die Weiterverarbeitung war ihr aber nicht erlaubt. Was in Florenz gefärbt, gespannt, gewalkt, kalandriert und veredelt wurde war den Händlern (Händler veredelter Wolle, auch „Banken“, *Arte di calimala*) vorbehalten, die mächtigste Oligarchie in der Stadt.[78] Es ist

[75] https://de.wikipedia.org/wiki/Ad_fontes
[76] https://de.wikipedia.org/wiki/Medici
[77] https://en.wikipedia.org/wiki/Arte_della_Lana
[78] https://www-britannica-com.translate.goog/money/Calimala

kein Zufall, dass auch das Bankwesen in dieser Zunft etabliert wurde. Dabei wurden die „Wuchergrenzen“ von der Kirche überwacht und die vielfältigen Arten von Geld- und Warengeschäften, gerade im Fernhandel, wurden von Theologen intensiv diskutiert. Trotzdem entstand im Florenz des 13. Jahrhunderts ein ausgeprägter Kapitalismus.[79] Der Benediktinermönch und Mathematiker Luca Pacioli hat in seiner in Venedig 1494 erschienen Schrift *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita*, zum ersten Mal die doppelte Buchführung beschrieben, die das Ausmaß der Geschäfte erforderlich machte.

Stabile Währung war die Silberlira, die seit 1252 um den *Fiorino d'oro* ergänzt wurde. Dies war eine Konsequenz aus dem geschäftlichen Aufschwung der Stadt, vor allem in Konkurrenz zu Siena,[80] der eine hochwertige Währung erforderte. Gleiches gilt für Venedig, das ab 1280 Goldmünzen ausgab. Die Münze wurde zwischen 1252 und 1533 in Florenz geprägt. Der Name leitet sich von der Lilie auf der Prägung ab; die Rückseite hatte ein Bildnis von Johannes dem Täufer als Schutzpatron von Florenz. Der Fiorino war der „Dollar“ des ausgehenden Mittelalters, flankiert von dem Venezianischen Dukaten. Der Fiorino bestand aus 3,54 Gramm Gold. Gewicht und Feingehalt wurden sehr genau überwacht. Sogar eine Qualitätssicherung und Maßnahmen gegen Korruption wurden eingeführt. So besaßen die ab 1300 geprägten Fiorentini eine Münzmeisterprägung. Dies ermöglichte eine exakte Datierung des Prägedatums. Das Edelmetall wurde fast überall in der damals bekannten Welt besorgt, vor allem soll schon Gold aus Ghana importiert worden sein. Es gelangte angeblich mit Kamelkarawanen zur Küste und wurde dort verschifft.[81] Das Florentiner Münzamt hatte damals in guten Jahren einen Ausstoß von bis zu 350.000 Fiorinen geprägt, das entspricht etwa 1,2 Tonnen Gold.[82] Der Fiorin war besonders für den Fernhandel gedacht und war praktisch 300 Jahre unverändertes Zahlungsmittel. Insbesondere im Fernhandel entstanden erhebliche mathematische Bedürfnisse und eine ausgeprägte Buchhaltung. Luca Pacioli erfand die doppelte Buchführung, in der Ausgaben und Einnahmen, inklusive Gewinn oder Verlust, sich zu Null ausgleichen mussten.

Das 14. Jahrhundert kann man als Beginn des mechanischen Zeitalters[83] begreifen und Uhren waren das Sinnbild der Mechanisierung. Insgesamt

---

[79] https://en-m-wikipedia-org.translate.goog/wiki/Arte_di_Calimala
[80] https://de.wikipedia.org/wiki/Dom_zu_Siena
[81] Roeck, ebenda, S. 365, die Behauptung kann nicht verifiziert werden. Belegt ist nur eine frühestens im Jahr 1470 erfolgte Besetzung durch Portugiesen. Damals entstand der Begriff „Goldküste“.
[82] https://de.wikipedia.org/wiki/Florentiner_(Goldmünze)
[83] Vergleiche auch Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 69, Gießen 2021, W. Kafitz, Zeit, S. 64ff

beschleunigte sich auch das Leben. Vor allem im merkantilen Bürgertum wurde „Zeit gleich Geld“.

Die Mechanisierung mit der Uhr als Sinnbild hat die Basis zur Objektivierung der Zeit geschaffen. Technisch war die um 1300 erfundene Spindelhemmung ein Wendepunkt. Ab diesem Zeitpunkt spielten Uhren ohne Taktgeber, wie Sanduhren oder Sonnenuhren nur eine untergeordnete Rolle, hatten aber eine Nischenfunktion. Es gibt wichtige Ausnahmen beim Einsatz von Sanduhren. So wurde in der Seefahrt das „Glas“ (Plural Glasen) als Einheit verwendet. Die Zeiteinheit ist eine halbe Stunde. Es soll im 8. Jahrhundert von einem französischen Mönch eingeführt worden sein und war ursprünglich für das stark reglementierte Klosterleben gedacht. In regelmäßigen „kanonischen“ Zeiten mussten Gebete und Gottesdienste stattfinden. In der Seefahrt wurden die Wachdienste damit strukturiert.

Zwischenzeitlich spielten die sichtbaren vier Jupitermonde, die 1610 von Galileo Galilei entdeckt wurden, eine Rolle. Er gab ihnen den Namen Sidera Medicea, die „Mediceischen Gestirne“, zu Ehren der Medici, des florentinischen Adelshauses. Diese Bezeichnung wird nur noch selten verwendet. Es sind die Jupitermonde Io, Europa, Ganymed und Kallisto. Es wurde sofort erkannt, dass diese Himmelkörper als eine astronomische Uhr aufgefasst werden können, weil sie von jedem Punkt auf der Erde gesehen werden können und genaue Umlaufzeiten um den Planeten haben. Man muss nur den wechselnden Abstand zwischen Erde und Jupiter mit einzubeziehen, da das reflektierte Licht deshalb unterschiedlich lange benötigt. Bald entstanden Tabellen, mit denen man es den Navigatoren einfacher machte, den Längengrad zu bestimmen, indem sie die Eklipsen der Monde beobachten. Man könnte es als eine Revolution in der Navigation betrachten. Doch praktische Gründe sprachen dagegen. Die astronomischen Beobachtungen verlangten ruhige See und eine gute Sicht.[84]
Auch die Zeit, also Zeitmentalität, Zeitmessung und Zeitverständnis erfuhr einen schnelleren Wandel in Folge der Renaissance. Später erfand Christiaan Huygens (1629 – 1695) im Jahr 1673 die Pendeluhr. Der Nürnberger Peter

[84] Dazu soll auf das Buch von Dava Sobel, Längengrad, Berlin Verlag, 1999, verwiesen werden. Es schildert anhand des schottischen Uhrmachers John Harrison die militärisch und wirtschaftlich bedeutende Problematik der Längengradbestimmung auf langen Seereisen. Harrison konzentrierte sich deshalb früh auf den Uhrenbau. Ihm wurden trotz wichtiger Erfolge nach 40 Jahren verbissener Arbeit nur ein Teil der, von der Admiralität ausgelobten Summe, zugebilligt. Erst sehr spät, drei Jahre vor seinem Tod, wurde ihm erst nach massiver Intervention des Königs weniger als die Hälfte des Preisgeldes zugebilligt. Aber er kann als Pionier für bedeutende Erfindungen und technische Neuerungen für den Bau von Präzisionsuhren mit wichtigen Komponenten, wie Unruh, Temperaturbeständigkeit und Unempfindlichkeit gegen Feuchtigkeit und Bewegungen, gelten.

Henlein (1479/85 – 1542) erfand die Taschenuhr bereits 1511, genannt Sackuhr, mit einem aufziehbaren Federantrieb mit Hemmmechanismus.[85] Überhaupt ist Nürnberg damals eine Hochburg des Instrumentenbaus gewesen. Astrolabien, hochwertige Kompasse, Uhren oder Quadranten wurden hergestellt. Man nannte Nürnberg des „Reiches Schatzkästlein“. Besonders die Metallverarbeitung war hier zuhause. Dazu gehörten Stecknadelmacher, Fingerhüter, Feilenhauer, Brillenmacher, Orgelbauer, Haubenschmiede, Büchsenfasser und Harnischbalbierer.[86]

Die (mechanische) Uhr, mit dem meist verborgenen, schwer durchschaubaren Uhrwerk, dient bis heute als Metapher für einen geordneten Ablauf. Es wird auf viele komplexe Sachverhalte angewendet – egal, ob technische Funktionalität, reibungslose Organisation, funktionierenden Staat oder kosmische Dimensionen. Diesen Gedanken hat Nicole Oresme (um 1330 – 1382) zuerst geäußert.

Im Europa des 12. und 13. Jahrhunderts entstanden erstmals vermehrt Universitäten als Institutionen von überragender Bedeutung. Sie waren eine der Antworten auf die Umbrüche, die die Mittelalterliche Warmzeit, Urbanisierung, Handel und Geldwirtschaft, aber auch politische und soziale Verunsicherung verursachten. Sie markierten einen bildungsgeschichtlichen Umbruch, denn bisher waren die Künste und die theologische Lehre fest an kirchlich-religiöse Institutionen gebunden. Neben Klosterschulen, die den klerikalen Nachwuchs ausbildeten, entstanden Dom- und Domstiftschulen, in Frankreich hießen sie Kathedralschulen. Verstärkt entstanden sie auch in Italien, um den sprunghaft wachsenden Bedarf an Schreibfertigkeit, Buchhaltungskompetenz und juristischen Sachverstand zu decken. Daneben agierten „Scholare“, die ihr Wissen an private Schüler vermarkteten.[87]
Oresme war in mehrfacher Beziehung Wegbereiter. Seine Überlegungen zu naturwissenschaftlichen Problemen enthalten einige neue Betrachtungsweisen. Er äußerte sich auch fundiert zur Geldpolitik.

Auf ihn als Mathematiker wird noch einzugehen sein.

Die Universitäten befriedigten den sprunghaft wachsenden Bedarf nach Rechtskundigen, Schriftkundigen und Verwaltungskundigen sowohl im Wirtschaftsleben als auch im Staat. Philipp von Frankreich hat zu Beginn seiner Amtszeit (1285) nur durchschnittlich 30 Urkunden pro Jahr anfertigen lassen; am Ende im Jahr 1314 waren es 110. Dabei war eine Urkunde nur „die Spitze

[85] https://de.wikipedia.org/wiki/Taschenuhr
[86] De Padova, ebenda, S. 112, Harnischbalbierer ist das Anpassen eines Harnisches, balbieren ist das Ausbuchten der eingefallenen Wangen zum Rasieren nach Zahnextraktionen
[87] Roeck, ebenda, S. 252

des Eisbergs“ an dokumentiertem Verwaltungsaufwand. Dieser verlangte nach Professionalität und damit nach Bürokratie. „*Aufzeichnungen markieren einen Triumph der Schriftlichkeit.*“[88]

Will man ein Datum nennen, so markiert das Jahr 1400 den Beginn der „großen Renaissance“. Sie begann zweifellos zunächst in Italien. Niccolò Machiavelli (1469 – 1527) feiert es als Land, das dazu geboren sei, die toten Dinge wiederzuentdecken, „*per risuscitare le cose morte*“.[89]

**Renaissance, Mathematik, Technik, Wissenschaft**

In der Geschichte der Menschheit gab es selten ruhige und friedliche Phasen. Doch die Renaissance als Übergang vom Mittelalter in die Neuzeit war besonders unruhig und widersprüchlich.[90] Da ist der Übergang von der Natural- zur Geldwirtschaft, Erhebungen der Bauern und Erhebungen der Stadtbewohner gegen Feudalherren, Bildung von Nationen und Nationalstaaten. Da muss man aber auch parallel die innere Unruhe der Menschen sehen, der Bewusstseinswechsel vom Kollektivismus zum Individualismus, die fast explosionsartige Entwicklung von Kunst und Wissenschaft. Es ist müßig zu fragen, was Ursache und was Wirkung war, was Henne und was Ei. Dazu kommt die Rückbesinnung oder gar Forderung nach Rückgriff (wenn möglich) auf die griechischen Originale ohne Berücksichtigung von nachträglichen Streichungen oder Ergänzungen, also „Verschlimmbesserungen“. Die zentrale Forderung am Anfang der Renaissance war „*ad fontes*“ (zu den Quellen). Als Beschleuniger wirkte die Erfindung des Buchdrucks und die Säkularisierung der Bildungseinrichtungen, weg von reinen Kloster- oder Kathedralschulen zur Ausbildung des Klerus bis hin zu Universitätsgründungen in ganz Lateineuropa. Die Forderung nach „*ad fontes“* erwies sich als Impuls für die Renaissance der Mathematik als besonders fruchtbar. Über weitere wichtige Einflussfaktoren auf die mathematische Entwicklung, wie die Transformation des Zahlensystems, wird noch gesondert zu sprechen sein.
Wußing (1927 – 2011) listet die wichtigsten griechisch-hellenistischen Autoren mit Bezug zur Mathematik auf und wann sie gedruckt zur Verfügung standen:[91]

| | |
|---|---|
| Apollonius | Konika, Buch I-IV, latein. 1537 (Kegelschnitte) |
| Archimedes | Gesamtausg. griech. 1544, latein. 1558, Auswahl 1270 |
| Aristoteles | mehrere Gesamtausgaben, latein. 1472, 1495/98, 1533 |
| Diophant | latein. 1575 |

[88] Roeck, ebenda, S. 259, Zitat S. 260
[89] Roeck, ebenda, S, 447
[90] Siehe dazu sinngemäß Wußing, Bd. 1, ebenda, S. 301
[91] Wußing, Bd. 1, ebenda, S. 302

| | |
|---|---|
| Euklid | latein. 1505, griech. 1533 |
| Heron | Auswahl griech.-latein. 1571, 1589, 1616, „mechanicus“ |
| Menelaos | latein. 1558, Mathematiker / Astronom |
| Nikomachos | griech. 1538, 1554 (von Gerasa), Zahlentheorie |
| Pappos | latein. 1588, Mathematiker / Astronom |
| Platon | Gesamt. latein. 1483/84, griech. 1513, 1578 |
| Ptolemaios | „*Almagest*“ griech. 1538, „*Tetrabiblos*“ latein. 1484, griech. 1535 |

Diese einfache Liste lässt nicht erkennen, wie mühsam der Weg bis zu ihr war. Einmal endlich vorhanden, lieferte die Antike dann zweifellos die Grundlage, aber es war eher ein Impuls für weitergehende Erkenntnisse. Die Welt hatte sich um fast zwei Jahrtausende weitergedreht. Neue geographische, botanische, zoologische Tatsachen wurden entdeckt, die in der Antike vollkommen unbekannt waren. Das Maß an technischen Entwicklungen überstieg jegliche Vorstellungskraft: Brillen, Spinnräder, Feuerwaffen, mechanische Uhren und Feinmechanik, Fortschritte bei Schifffahrt, Bergbau, Metallverarbeitung u.v.m. waren seitdem entdeckt worden. Es gab keinen Grund, bei den Erkenntnissen der „Alten“ im Bereich der Mathematik stehen zu bleiben. Wo noch Zweifel über die Bedeutung der Mathematik als Grundlage aller exakten Wissenschaften bestanden, spricht Leonardo da Vinci (1452 – 1519) ein vernichtendes Urteil über diese Kritiker:

*Der Mann, der die höchste Gewissheit der Mathematik tadelt, nährt die Verwirrung und kann nie die Widersprüche der sophistischen Wissenschaft zum Schweigen bringen, die zu unendlichen Konflikten führen. Es gibt keine Sicherheit in der Wissenschaft, wo nicht die Mathematik angewendet werden kann.*[92]

Bevor auf einzelne Mathematiker eingegangen werden soll, muss zunächst die ungeheure Umwälzung gewürdigt werden, die die römischen Zahlen bis zur heutigen, fast bedeutungslosen Rolle geführt haben.
Indien lieferte mit den indischen Ziffern und der Null die Basis für das moderne Zahlensystem. Auch die Maya und Inka kannten die Null und ein Stellenwertsystem, aber sie waren geografisch so isoliert, dass ein Wissensaustausch nicht stattfinden konnte. Das bis heute erfolgreiche dezimale Positionssystem gehört zu den bedeutendsten kulturellen Leistungen der indischen Kultur. Bis zum 7. Jahrhundert nach Christus ist das dezimale Stellenwertsystem in Indien voll entwickelt. Ab 500 n. Chr. kann man ein Zeichen für die Null nachweisen.[93] Die arabisch-persische Welt adaptierte

[92] Zitiert nach Wußing, Bd. 1, ebenda, S. 304
[93] Wußing, Hans; Arnold, Wolfgang; Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen, Berlin 1975, S. 66

indisches Wissen. Man kann sogar davon ausgehen, dass chinesische Einflüsse vom fernen Osten über den Nahen Osten oder über die Seidenstraße nach Indien und auch weiter nach Europa gelangten. Ein Einfluss auf die mathematische Entwicklung in Indien kann jedoch nicht nachgewiesen werden. Auf jeden Fall existierte ein Fernhandel mit chinesischer Seide (lateinisch *sericum*) schon zu Beginn der christlichen Zeitrechnung.[94] Es war ein sehr begehrter Exportartikel. Über indische und arabische Händler gelangte die Ware bis nach Rom. Versuche, Seide in gleicher Qualität herzustellen, scheiterten jahrhundertelang. Die Seidenstraße verband fernöstliche, indische, arabische, persische und europäische Kulturen. Sie war die Grundlage für den Wissenstransfer. Das indische System war dann bereits im 8. Jahrhundert in Bagdad bekannt. Man muss also als gesichert annehmen, dass die arabische Welt den genialen Vorteil erkannte und die Weitervermittlung in die westliche arabische Welt inklusive des maurischen Teils der iberischen Halbinsel besorgte. Das eher engstirnige europäische Frühmittelalter verhinderte anfangs kulturelle Kontakte, insbesondere in die arabische Welt. Vor allem auf der iberischen Halbinsel hatten sich in mehreren Emiraten die moslemischen Mauren gehalten, die sich ab dem Jahr 711 dort festgesetzt hatten. Erst im 12. und 13. Jahrhundert fand ein erheblicher Widerstand seitens der Christen statt, der als „*Reconquista*“ (Wiedereroberung) bekannt ist.[95] Dabei war die Rivalität zwischen den christlichen Königreichen Kastilien und Aragon zunächst nicht hilfreich. Immerhin wurde 1232 das Emirat Cordoba erobert und wenig später 1241 und 1248 Murcia und Sevilla. Die Bibliothek von Cordoba umfasste 400.000 Titel. Die Stadt war damals die größte in Europa mit einer halben Million Einwohnern. Es verblieb als maurische Insel im christlichen Iberien das Emirat Granada, das die Gefahr erkannte, sich erheblich aufrüstete und durch Befestigungen verstärkte.

1469 heiratete die Erbin von Kastilien, Isabella (1451 – 1504), den Kronprinzen von Aragón, Ferdinand (1452 – 1516). Diese Vereinigung der beiden iberischen Reiche erbrachte die militärische Stärke und den politischen Willen, um Granada anzugreifen. 1492 fiel Granada[96] und das war auch der Anlass, dass Königin Isabella das Geld für die Expedition von Christoph Kolumbus (1451 – 1506) bewilligte, der sieben Monate nach dem Fall von Granada nach Westen segelte. Auch die Bibliothek von Granada war bemerkenswert umfangreich. Doch beim Fall des Emirats wurden allerdings zahlreiche Bücher als angebliche „Korane“ verbrannt.

Im Laufe der Reconquista drangen langsam wesentliche Impulse von der moslemischen in die christliche Hemisphäre. Schon die Bibliothek von Toledo

---

[94] https://de.wikipedia.org/wiki/Seide
[95] https://en.wikipedia.org/wiki/Reconquista
[96] https://de.wikipedia.org/wiki/Belagerung_von_Granada

brachte beim Fall der Stadt 1085 moslemisches Wissen. Zusammenfassend kann man sagen, dass die wahrhaft epochale Entdeckung in Indien stattfand, aber die Araber die Vermittlerrolle bis schließlich nach Lateineuropa einnahmen. Die erste arabische Zahl in indischer Schrift findet sich interessanterweise in Ägypten auf Papyrus. Man kennt das Entstehungsjahr 873 n. Chr. Es sind noch Vorläufer der heutigen Ziffern, insbesondere der westarabischen Gubar-Ziffern. Von besonderer Bedeutung ist das Werk von Chwarizmi, arabisch al-Chwarizmi, kurz für Abu Dschaʿfar Muhammad ibn Musa al-Chwārizmī (780 – 835/850). Er hat die Rechenweise der Inder sorgfältig interpretiert und dargestellt.[97]

Karl Menninger (1898 – 1963) hat es schön auf den Punkt gebracht:[98]

*Wir sprechen deutsch, wir schreiben römisch und wir rechnen indisch.*

Bestenfalls in den Kloster- oder Domschulen lebte die Erinnerung an großartige Kulturepochen weiter. Von vielen Werken der klassischen Antike wissen wir über Querverweise anderer Autoren, dass sie existierten, aber sie sind verschollen oder der Nachwelt nur über arabische oder persische Übersetzungen erhalten. Vor allem die arabischen und persischen Mathematiker sind nicht bei Übersetzungen stehen geblieben, sondern haben die mathematische Wissenschaft in den „dunklen Zeiten“ des europäischen Mittelalters vorangetrieben. Zentrale Persönlichkeit war *Alfraganus bzw. Al-Farghani (um 800 - 870)*[99] im 9. Jahrhundert. Sein Kompendium der griechischen Himmelskunde, ergänzt um eigene Berechnungen, insbesondere von Planetenpositionen und des Erdumfangs, der zu 99% genau war, fanden viel Beachtung. Grundlage der Genauigkeit war, dass er Diener des Kalifen 224 km Wüste per Hand vermessen ließ. Geboren wurde er im heutigen Usbekistan; in Taschkent wurde die Universität nach ihm benannt. Er wirkte aber vorwiegend in Bagdad, wo im „Haus der Weisheit“ ein wissenschaftliches Forum unter der Schirmherrschaft des Kalifen *al-Ma´mun* (786 – 833) in der Ära der Abbasiden entstand.

Überliefert sind auch einzelne, unbestätigte, verwegene Aktionen. So soll Gerbert von Aurillac (950 – 1003)[100], später als Silvester der Zweite (oder engl. Sylvester II.) zum Papst gewählt, sich als Maure verkleidet haben und sich über die Null und die indisch-arabischen Ziffern in Cordoba informiert haben. Er schrieb zunächst die indischen Zahlen auf seine Abacus-Steine, was

---

[97] https://de.wikipedia.org/wiki/Al-Chwarizmi und Wußing, Arnold, ebenda, S. 66
[98] Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen, 1958, zitiert nach Wußing, ebenda, S. 97.
[99] Abu´l-Abbas Ahmad ibn Muhammad ibn Kathir al-Farghani al-Hasib
[100] Siehe Bay. Akademie der Wissenschaften, mit ausführlicher Literatursammlung, https://geschichtsquellen.de/autor/4782 und https://de.wikipedia.org/wiki/Silvester_II.

vollkommen nutzlos war und zeigt, dass er das neue System nicht vollständig verstanden hatte. Diese angebliche Tat aus Cordoba galt in fundamentalistischen Kreisen als Blasphemie. Jahrhunderte später wurde sein Sarg in der Basilika San Giovanni in Rom geöffnet, weil man darin den Teufel identifizieren wollte. Die neuere Forschung bestätigt zwar Studien von Gerbert in *al-Andalus*, insbesondere in Cordoba und Sevilla, aber nicht die abenteuerliche Geschichte. Auch der Gebrauch der Null scheint ihm nicht bekannt zu sein, auch wenn sein sehr erfolgreicher Abakus einen Stein für das Leerzeichen/Null im Dezimalsystem enthielt (s.o.). Endgültig bekannt wurde die Null durch *al-Chwarizmi* und seinem Buch über indo-arabische Zahlen und der Null. Es wurde bereits 825 unter dem Namen Al- Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ğabr wal-muqābala verfasst, aber erst 1175 in Spanien ins Lateinische unter dem Titel *Algoritmi de numero* übersetzt. Über die arabische Ausgabe entstand wohl „Algebra“ aus al-ğabr, einem Teil des Namens; über den latinisierten Titel entstand der Begriff Algorithmus.[101] Das arabische Original ist zwar verschollen, man kann aber *al-Chwarizmi* als Begründer der Algebra betrachten. Er beeinflusste maßgeblich den italienischen Mathematiker Leonardo di Pisa (Fibonacci, ca. 1170 - 1240), den Autor von *Liber abaci*. Der Übersetzer war Robert von Chester, ein englischer Arabist und Mathematiker. Er verwendete erstmals den trigonometrischen Begriff „Sinus“. Er wirkte in den 1140er-Jahren in Spanien (Segovia) und ist danach nach England zurückgekehrt.[102]

Die Gründe für das Aufblühen der Mathematik (im weitesten Sinne) ist nur verständlich, wenn man die Umwälzungen dieser Zeit betrachtet, versteht und schließlich ermessen kann, welche Anforderungen und Auswirkungen auf die Mathematik daraus abzuleiten sind.
Einige Stichworte sollen die veränderten oder sogar neuen Rahmenbedingen charakterisieren und ein vages Gefühl vermitteln, welche teilweise revolutionären gesellschaftlichen Prozesse und Veränderungen zu dem wurden, was wir heute als Zeitalter der Renaissance bezeichnen. Welche Konsequenzen ergeben sich daraus für die Entwicklung und den Umgang mit Zahlen, Methoden und Rechentechniken?

---

[101] Siehe https://www.digitale-sammlungen.de/de/details/bsb10218746
[102] https://www.encyclopedia.com/science/encyclopedias-almanacs-transcripts-and-maps/robert-chester

Es war kein einfacher Ersetzungsprozess, die immer noch gebräuchlichen römischen Zahlen durch indisch-arabische Ziffern zu ersetzen. Die Römer kannten keine Null und damit kein Stellenwertsystem, wie es heute weltweit sich durchgesetzt hat. Durch die in ganz Lateineuropa etablierte Kulturtechnik des Fingerzählens war der Bedarf nicht beliebig groß. Mit den 10 Fingern konnte man bis 9.999 rechnen. Offenbar waren römische Zahlen nur zu Dokumentationszwecken genutzt worden, nicht zum (schriftlichen) Rechnen. Man hat mit den Fingern gerechnet und nur in sehr wichtigen Fällen wurde das Ergebnis in römischen Zahlen „notiert“. Papier war jedoch noch knapp.

Abb. 18: Doppelt ausgelegtes Kerbholz

Kerbhölzer und andere Methoden, die uns heute abenteuerlich erscheinen, mussten Zahlen oder Werte repräsentieren. Das Kerbholz war bis in das frühe 20. Jahrhundert in Gebrauch. In seiner Bedeutung als Schuld“schein“ war es doppelt ausgelegt. Nachdem die Kerben eingeritzt waren, wurde das Holz längs geteilt, so dass je eine Hälfte beim Schuldner und die andere Hälfte beim Gläubiger verblieb. Damit war fälschungssicher die Schuld dokumentiert, wenn die beiden Hälften exakt zusammenpassten.[103] In England wurden noch bis zum Beginn des 19. Jahrhunderts Steuergelder auf Kerbhölzern „notiert“ und diese erst 1826 abgeschafft.[104] Kerbhölzer dienten zu ganz unterschiedlichen Zwecken.

Ein Beispiel für ein ganz besonderes Dokumentationsmedium ist der Müllerknoten. Um Menge und Sorte des Mehls in einem zugebundenen Sack zu dokumentieren, benutzte der Müller die Sackschnur. Das Mengenmaß wurde in Form von Knoten veranschaulicht; die Qualität, also Mehlsorte, wurde als Schleifchen oder Zöpfchen dargestellt. Als Hohlmaß wurde im südlichen Deutschland, der Schweiz, aber auch z.B. in Straßburg das Sester verwendet. Sein Volumen differierte jedoch regional. Es hat sich bis zur Einführung der metrischen Maße gehalten. In der römischen Antike kannte man den

[103] Siehe auch die Analogie zur Bitcoin-Technologie, https://obolite.com/die-blockchain-als-kerbholz/

[104] Ifrah, Georges; Universalgeschichte der Zahlen, Sonderausgabe 1998, Parkland Verlag Köln, S. 113. Die riesige Menge an Kerbhölzern sollte 8 Jahre später in einem Ofen im Oberhaus verbrannt werden. Dabei geriet die Wandvertäfelung in Brand, das Unterhaus fing ebenfalls Feuer und beide Häuser des Parlamentsgebäudes brannten ab.

*sextorius*.[105] Auch Häufchen von Kieselsteinen, etwa beim Zählen von Vieh, hatten dokumentarischen Charakter. Es war nicht unbedingt erforderlich, dass ein Hirte die damit verbundene Zahl benennen konnte, aber er konnte den Bestand der ihm anvertrauten Herde, z.B. differenziert nach Nutztierart, kontrollieren. Das Wort „Kalkül“ kommt vom lateinischen *calculus* (kleiner Kieselstein). Entsprechendes trifft für die arabische Sprache zu.[106] *Calcul* ist heute noch im Französischen z.B. ein Harnstein oder Gallenstein. Kaufleute erkannten zuerst die Vorteile der neuen Zahlschrift. Sie mussten sich gegen das Beharrungsverhalten der römischen Zahlen bei der öffentlichen Verwaltung und vielen anderen Lebensbereichen behaupten. Schriftliches Rechnen war mit römischen Zahlen zu keiner Zeit üblich oder überhaupt möglich. Schon Summenbildung nur mäßig großer Zahlen ist sehr kompliziert; Multiplikation oder Division ist vollkommen unpraktikabel. Ein weiteres Gegenargument ist wohl die Tatsache, dass bei einfachen Rechnungen der Abacus, in welcher Form auch immer, seit der Antike gleichwertig war. War ein schriftliches Fixieren des Ergebnisses nötig, dann wurde das in römischen Ziffern gemacht. Zum

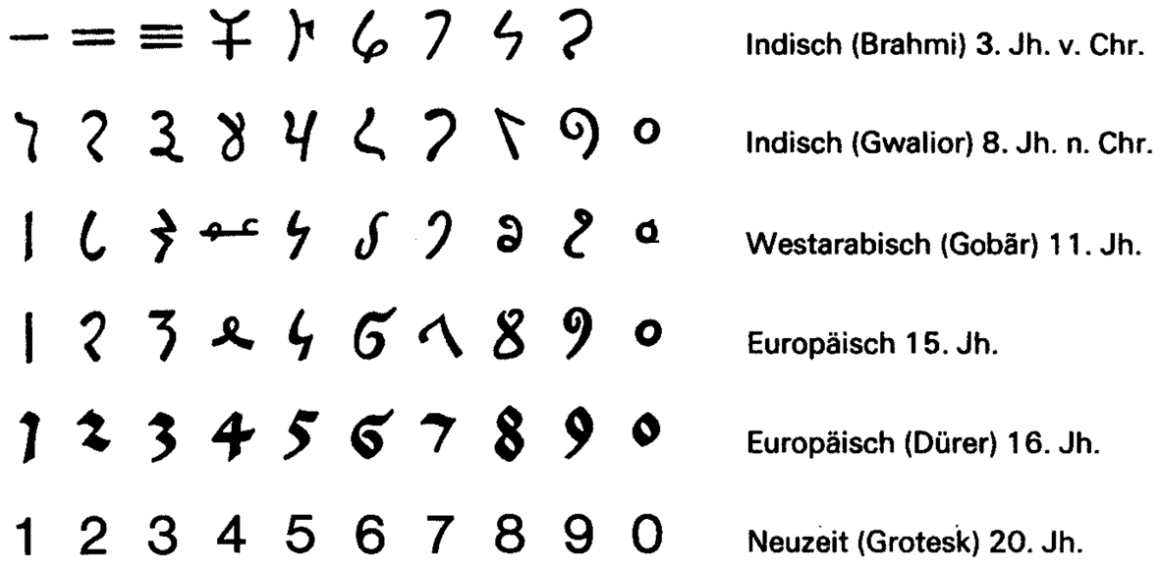



Abb. 19: Entwicklungsstufen der indischen Ziffern über arabisch zu europäisch

Rechnen wurde also entweder Fingerrechnen oder der Abacus verwendet, zum Dokumentieren, wenn nötig, römische Zahlen. Die einfachen Menschen irritierte aber anfangs vor allem die fehlende Logik oder Systematik bei den indisch-arabischen Ziffern (1,2,3,4…10) – das Wort Zahlen kommt schließlich von „zählen“. Dies ist bei den römischen Zahlen (I,II,III, …bis X) leichter erkennbar. Amtlich anerkannte Kerbhölzer insbesondere für geldwerte Beträge, die römische Zahlen verwendeten, blieben lange in Umlauf. Bis sich die indisch-

[105] https://de.wikipedia.org/wiki/Sester
[106] Ifrah, ebenda, S. 117

arabischen Zahlzeichen endgültig durchsetzten, bezeichnete man sie oft als „Figuren“.[107] Manche übereifrige Chronisten übertrieben die „Migrationsphase“ zwischen den Zahlensystemen (Beispiele s.u.).

Die Renaissance, mit ihren stark erhöhten wirtschaftlichen Transaktionen, erforderte schließlich ein Umdenken. Die Null wurde lange nicht als vollgültige Zahl betrachtet und sogar verspottet. In Italien erfolgte der Wechsel zum indischen System schneller; nördlich der Alpen dauerte es länger. Man bestand oft auf den römischen Zahlen, weil man befürchtete, dass durch Anhängen einer Null betrogen wird. So verpflichtete man an der Universität Padua die Buchhändler, ihre Preise römisch zu schreiben. Der Bürgermeister von Frankfurt verlangte 1494 von seiner Verwaltung römische Zahlschreibweise. Vor arabischen Zahlen wurden in Antwerpen noch 1594 bei Wechseln oder Verträgen gewarnt. Nach wie vor tauchten Spottgedichte auf, mit denen die Null lächerlich gemacht wurde und ihr der Zahlencharakter abgesprochen wurde.[108] Später mussten Zahlen als Wörter ausgeschrieben werden. Das ist auch heute in notariellen Dokumenten oder sogar Mietverträgen Standard. Auch an anderer Stelle gab es Irritationen. Bei der griechischen Mathematik galt die „Eins“ nicht als Zahl, sondern als Einheit. Dies ist eine weitere Widersprüchlichkeit in der griechischen Mathematik: Die „1“ galt sogar sowohl als gerade als auch ungerade – eine Ambiguität, die beim Rechnen zu Widersprüchen führen musste. Sie war auch das Symbol für den obersten Gott. Euklid definiert in den Elementen, Buch VII, Definitionen 6 bzw. 7: *Gerade ist die Zahl, die sich halbieren lässt, und ungerade die, die sich nicht halbieren lässt, oder die sich um eine Einheit von einer geraden Zahl unterscheidet.* Bei Jakob Köbel heißt es: *Darauss verstehstu das 1. kein zal ist / sonder es ist ein geberin / anfang / vnd fundament aller andern zalen*.[109] Selbst Nikolaus von Kues, Cusanus, schließt sich noch der griechischen Meinung von Aristoteles und Euklid an. Diese griechische Auffassung überwand erst Simon Stevin 1585 in *L’arithmetique*. Er bezog in seine Argumentation „modernes“ Wissen inklusive der „Null“ ein: Subtrahiert man von der Zahl 3 eine Nicht-Zahl (Null), so bleibt die 3. Aber 3 – 1 = 2, also kann 1 keine Nicht-Zahl sein. Man muss ihr den Status einer Zahl zubilligen. Im Englischen heißen die Einer *digits* (eigentlich Ziffer), im Französischen *doigtes*. Man sieht, wie lange es gedauert hat, die griechischen Vorstellungen zur Zahlnatur und andererseits das Beharrungsvermögen der

[107] De Padova, ebenda, S. 50
[108] Siehe Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 71, Gießen 2023, W. Kafitz, Null, S. 72f
[109] Jakob Köbel, zwey rechenbüchlin: uff der Linien vnd Zipher, Mit eym angehenckten Visirbuch, Oppenheim 1537, zitiert nach Freinbichler, ebenda, S. 2

römischen Zahlen zu überwinden. Ähnliches gilt für römische Gepflogenheiten. Heute setzen wir die Startlinie bei einer Zählung auf Null, ein Schritt weiter ist Eins. Die Römer setzten sie auf Eins. Drei Tage nach Sonntag war für sie Dienstag. Wir nennen die zwei Noten von C nach E noch heute eine große Terz. Stevin kann man nicht zuletzt durch sein Verständnis, was eine Zahl ist, als Pionier der Dezimalbrüche und Dezimalarithmetik ansehen. Der Dezimalpunkt als Notation wurde zwar erst im frühen 17. Jahrhundert populär, Stevin legte aber den Grundstein für diese revolutionäre Neuerung. Er sah sehr klar, dass das Dezimalsystem die Berechnungen sehr viel einfacher macht. Das wurde sofort bei den Ingenieurwissenschaften und im Handel deutlich. Diese wurden bisher von komplizierten Brüchen und Größen beherrscht, die miteinander im Verhältnis stehen.

Abb. 20: Leonardo di Pisa

Fragt man nach der wichtigsten Schrift, die den Anfang der Umstellung markiert, so ist es eindeutig das 1202 erschienene „*Liber abaci*“ von Leonardo di Pisa (~1180 – ~1250) genannt Fibonacci. Das Buch ist rein praxisorientiert. Umständliche theoretische Ausschweifungen fehlen.

*Liber abaci* ist insofern typisch für die Mathematik, aber auch der Naturwissenschaft und Technik der Renaissance. Das Charakteristikum ist die enge Verbindung und Verflechtung mit der gesellschaftlichen Entwicklung. Man wollte Kuppelbauten bauen, also entwickelte man die Statik und die zentralperspektivische Geometrie und konstruierte Maschinen für die Realisierung. Entsprechendes gilt für das Ingenieurswesen bei Manufakturen, Windrädern, Webstühlen und vielen anderen Bereiche handwerklicher Produktivität. Sogar in der Kunst war eine Weiterentwicklung der Mathematik erforderlich. So machte die Mathematik in der Renaissance einen erheblich größeren Fortschritt als im Mittelalter. Insbesondere löste sie sich stark vom Gegenständlichen – die Algebra entwickelte sich zur Formelsprache und beeinflusste danach weitere mathematische Disziplinen. Ohne den Umgang mit veränderlichen Größen in der Algebra der Renaissance wären die zunehmenden Erfolge der Analysis in den folgenden Jahrhunderten nicht möglich geworden. Das Spätmittelalter bis zur Gründung der ersten Universitäten im 11., 12. und teilweise im 13. Jahrhunderts hat sich beim zweiten Abschnitt der Grundausbildung, des Quadriviums, für den mathematisch-astronomischen Teil der Bildung im Wesentlichen auf die

*Elemente* von Euklid, den *Almagest* von Ptolemaios und auf Aussagen zur Mathematik bei Platon und Aristoteles beschränkt. Im 13. Jahrhundert findet man die ersten, oft praxisgetriebenen Weiterentwicklungen. *Liber abaci* ist ein gutes Beispiel. Folgerichtig kommen diese neuen Anforderungen und Entwicklungen nicht aus Klöstern und dem Klerus. Die Rechenmeister in den Städten nahmen die Anforderungen der Kaufleute, Seeleute, innovativen Handwerker, Architekten, Ingenieure oder des Militärs auf und entwickelten nicht nur Lösungen, sondern vermittelten ihr Wissen als Geschäftsmodell.[110] In allen Bereichen war der Übergang von Natural- zur Geldwirtschaft und der sprunghafte Anstieg des Geldumlaufs Teil der mathematischen Anforderungen. Umrechnungen, Buchhaltung, Finanztransaktionen, wie Wechselbriefe, trafen alle Branchen. Dazu kamen branchenspezifische Themen, wie Navigation, Schiffbau, Statik oder Ballistik.
Die Astronomie wurde mit nicht weniger als einem neuen Weltbild konfrontiert. Gleichzeitig stieg das Ansehen der Mathematik. Sie migrierte vom bloßen Bildungselement hin zur wirtschaftlichen Bedeutung. Zum Teil konnte man die griechische Mathematik integrieren. Das stieß aber an die Grenzen der Anforderungen, die die Antike noch nicht hatte. In der Renaissance entwickelte die Mathematik einen deutlichen Gebrauchswert.

In den sogenannten dunklen Zeiten, vom 4. bis 10. Jahrhundert sind so gut wie keine wichtigen Impulse zu verzeichnen. Gerne wird als Beispiel für die „Probleme“ dieser Zeit aufgeführt, dass man sich mit metaphysischen Fragen der Art beschäftigte, wieviel Engel auf eine Nadelspitze passen. Einen Namen sollte man aber aus dem Mittelalter nennen, das ist Anicius Manlius Severinus Boethius (480 – 524). Er war ein sehr produktiver Autor und Übersetzer aus dem Griechischen. „*Boethius verfasste Lehrbücher aller vier Fächer des Quadriviums (Arithmetik, Musik, Geometrie und Astronomie), von denen die zur Arithmetik und zur Musik erhalten sind. Das Studium dieser Fächer wurde als Propädeutik für die Philosophie betrachtet*.“[111]
Neben mathematischen Lehrbüchern verdanken wir ihm Übersetzungen, vor allem zur Logik des Aristoteles. Boethius wurde in einem Gerichtsverfahren verurteilt und hingerichtet. Man geht heute davon aus, dass das Urteil politisch motiviert war. Boethius wird in der Diözese Pavia als Seliger verehrt; dies wurde von Papst Leo XIII. (1810 – 1903) 1883 bestätigt.

Ein weiteres Hindernis für eine zügige Verbreitung der indisch-arabischen Ziffern inkl. der Null lag im Beharrungsvermögen bei etablierten Systemen und ihren Verfechtern. Erst im Jahr 1494 gingen z.B. die Medici in Florenz in ihren

[110] Vergleiche Wußing, Arnold, ebenda, S. 90
[111] Zitat https://de.wikipedia.org/wiki/Boethius

Verwaltungen zu den indisch-arabischen Zahlen inkl. der Null über.[112] Der Druck kam eindeutig aus der Geschäfts- und Bankenwelt. Insbesondere die schriftlichen Rechenmethoden, die im Gegensatz zu römischen Zahlen rasch erkannt wurden, gaben den Ausschlag bei der anspruchsvollen Buchführung. Aus fadenscheinigen Gründen hatten die Medici in ihren Verwaltungen die arabischen Ziffern abgelehnt und sogar noch 1299, z.B. in Florenz, verboten.[113,114] Der Einfluss der indischen Ziffern und der Null vollzog sich von Osten nach Westen. Im östlichen Orient begann er im 8. Jahrhundert, ging weiter im 9. Jahrhundert nach Nordafrika und erreichte *Al-Andalus*, also den maurischen Teil der iberischen Halbinsel. Der lange Weg führte im Westen zu leicht anderen Schreibweisen. Das lateinische Europa hat diese dann auch übernommen. Die römischen Zahlen hielten sich schließlich nur als Ordinalzahlen (z.B. König Charles III.). Dass sich z.B. bei den Medici die neuen Zahlen erst bis zum Beginn der Neuzeit durchsetzen, sollte man nicht überbewerten. Die einfachen Praktiken im Volk oder für das einfache Volk (Stichwort Kerbhölzer, Fingerzahlen), haben sich deutlich länger gehalten. Sie sind mit dem mathematisch-akademischen Prozess nicht zu vergleichen. Entscheidend waren jedoch die vielfältigen Anforderungen im Geschäftsleben des sich entwickelnden Frühkapitalismus in der reinen Geldwirtschaft des merkantilen Bürgertums. Dabei kam man in neue Größenordnungen, sowohl was die Menge an mathematischen Anforderungen als auch die Qualität der Aufgaben anbelangt. Buchhaltung, Umrechnung von Währungen, Maßen und Gewichten, effektive Rechenverfahren, sinnvolle und übersichtliche Zahlenschreibweise, Zins- und Zinseszinsrechnung, erste algebraische Anforderungen, symbolische Notation waren die Anforderungen im professionellen Geschäftsleben, bei denen man mit Fingerrechnen hoffnungslos an Grenzen stieß. Es entstand ein neues Berufsbild, das der Rechenmeister.[115] Dazu kamen Aufgabenbereiche, wie der Navigation auf See, als sich die Schifffahrt immer mehr von den Küstenrouten löste und sowohl verbesserte Trigonometrie und genauere astronomische Kenntnisse erforderten. Weiter kamen militärische Anforderungen, z.B. in der Ballistik immer weitertragender Geschütze und nicht zuletzt im Bauwesen bei den mächtigen Kathedralen mit ihren gewaltigen Kuppelbauten. Mathematik war plötzlich nicht nur Bildungselement, sondern nützliches und notwendiges Mittel, um komplexe Aufgaben aus der Praxis der täglichen Lebensanforderungen zu

---

[112] https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/geschichte/artikel/leonardo-fibonacci-von-pisa

[113] Charles Seife, Zwilling der Unendlichkeit, Goldmann, München, 2002, S. 92

[114] Siehe auch Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 70, Gießen 2022, W. Kafitz. Formeln, S. 124

[115] https://de.wikipedia.org/wiki/Rechenmeister

lösen. Das verlieh ihr eine neue herausragende oder zumindest gleichberechtigte Stellung unter den renommierten Wissenschaften, wie der Theologie und der Jurisprudenz.

**Mathematik und Verbreitung durch Buchdruck**

Nikolaus von Kues (1401 – 1464)[116], mit bürgerlichem Namen Nikolaus Krebs und in dem Winzerstädtchen Kues an der Mosel geboren, latinisiert Nicolaus Cusanus, überträgt am Beginn der Renaissance und früher Neuzeit theologische und philosophische Ansichten auf mathematische Probleme, er will über mathematische Perfektion zu metaphysischen Einsichten kommen. Er ging neue Wege vom Spätmittelalter hin zur beginnenden neuen Epoche und kann auch als einer der ersten Humanisten bezeichnet werden. Er war Islam-Kenner und für seine Zeit sehr tolerant.

Hier sollen einige seiner untersuchten Probleme ausführlicher besprochen werden. Er vertrat Ansichten, für die Galilei verurteilt wurde, wie das heliozentrische Weltbild und dass Sterne ferne Sonnen sind. Aber er war ein erfolgreicher Repräsentant der Kirche, Kardinal und als päpstlicher Legat war er jedoch weniger angreifbar. Cusanus war Vertreter der römisch-katholischen Kirche beim Konzil von Ferrara-Florenz zur Aussöhnung zwischen Rom und

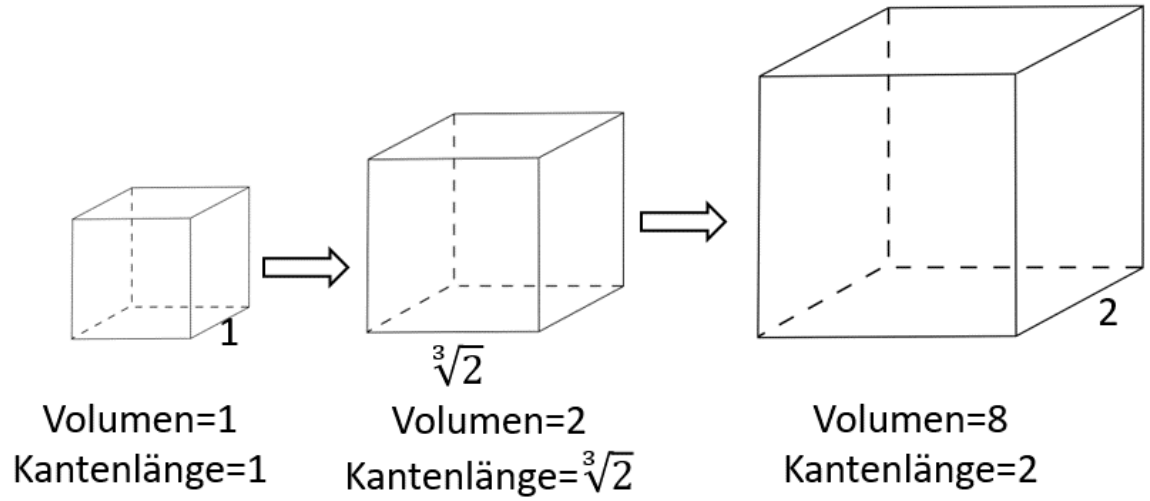



Abb. 21: Cusanus bejaht erstmals die philosophisch umstrittene Frage, ob sich eine irrationale Zahl höherer Ordnung wie $\sqrt[3]{2}$ in der Realität geometrisch darstellen lässt.

Byzanz. Albrecht Dürer (1471 – 1528) liest seine Schriften mit Bewunderung;

[116] Siehe zu Nikolaus von Kues weitgehend wörtlich zitiert: Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 70, Gießen 2022, W. Kafitz, Unendlich, S. 37 ff

Giordano Bruno (1548 – 1600) sagt über ihn, „… *dass er dem Pythagoras nicht gleich sei, sondern ein Größerer*…“[117]

Er kümmerte sich u.a. um mathematische Grundsatzfragen und fand zu offenen Fragen teilweise spektakuläre Antworten. So z.B. bei der grundsätzlichen Frage, ob man irrational-algebraische Zahlen höherer Ordnung („Wurzeln“) geometrisch darstellen kann. Vergrößert man nämlich einen Würfel der Kantenlänge 1 kontinuierlich zu einem der Kantenlänge 2, so muss irgendwann dazwischen das Volumen 2 mit der Kantenlänge $\sqrt[3]{2}$ erreicht werden. In der euklidischen Geometrie wurde $\sqrt[3]{2}$ nicht als reelle Zahl betrachtet, da man sie nicht konstruieren konnte. Räumliche Größen mussten immer endlich und darstellbar sein und unterlagen dem Zahlenbegriff, den erst Dedekind überwand. Andererseits stellt Cusanus der reinen Bücherweisheit praktisches oder besser praxisorientiertes Wissen zur Seite. Als Forum sieht er den Marktplatz, wo Geld gezählt, Ware abgewogen, Öl abgefüllt wird, also gemessen wird.[118]

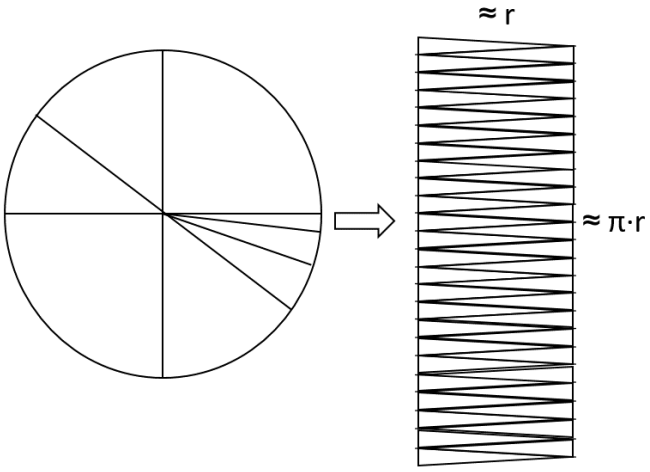



Abb. 22: Kreisflächenberechnung des Nikolaus von Kues.

Ähnlich zu Galilei Galileo war seine Ablehnung von Aristoteles und seine Bewunderung für Platon. In Analogien zu zahlreichen arithmetischen und geometrischen Fragestellungen will er zeigen, dass wir mit unserem beschränkten, endlichen Verstand Gott nicht nahekommen können. Die aktuale Einheit des Unendlichen können Menschen nicht erfassen. Beschreibt man z.B. in einen Kreis ein Polygon mit immer mehr Ecken ein, so ist es dennoch unmöglich, beides zur Deckung zu bringen. Auch eine Quadratur des Kreises gehört zu diesen Problemen, an denen er sich in mehreren Werken versucht hat, obwohl dieses tatsächlich unmöglich ist. Aber erfolgreich war seine Approximation des Kreises durch kleine Segmente / “Kuchenstücke“, die man versetzt aufeinanderlegen kann (Abb. 22) [119]. Es entsteht in der Näherung ein

[117] Zitiert nach https://badw.de/fileadmin/pub/akademieAktuell/2008/26/04_Bulirsch.pdf
[118] Freely, John; Platon in Bagdad; dt. Ausgabe Klett-Cotta, Stuttgart, 2012, S. 231
[119] Inhalt des Abschnitts siehe Brian Clegg, ebenda, S.140; dort findet sich auch die analoge Grafik, die im Wesentlichen kopiert wurde.

Rechteck, das ca. π·r hoch und r breit ist; also die Fläche ungefähr π $r^2$ hat. Doch seine 2. Methode ist besser (Abb. 23).
Archimedes ging von einem festen Kreis aus und näherte diesen durch Polygone an. Cusanus machte es umgekehrt. Er ging von einem Polygon der festen Länge 2 mit $2^n$ Ecken aus (wobei $2^n$=4, 8, 16, 32, ...) und zwei in- und umbeschriebenen Kreisen. Der innere Kreis hat für jedes n den Umfang $2\pi r_n$; der äußere Kreis $2\pi R_n$. Abb. 22 ist mit n=4 (Quadrat) dargestellt. Beim Quadrat ist $r_4=\frac{1}{4}$ und $R_4=\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Somit ist allgemein

$$2\pi r_n < 2 < 2\pi R_n \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{r_n} > \pi > \frac{1}{R_n}$$

Mittels elementarer Geometrie (Sehne im regelmäßigen 2n-Eck und Kathetensatz) findet man die Iterationsvorschriften

$$r_{2n}=\frac{R_n+r_n}{2} \quad \text{und} \quad R_{2n}=\sqrt{R_n \cdot r_{2n}}$$

Im Fall $2^{15}$=32768 ist $\frac{1}{R_{2n}}$=3,141592652 und $\frac{1}{r_{2n}} = 3{,}141592656$

und die Abweichung von π=3,141592653… beträgt 0,000000001.

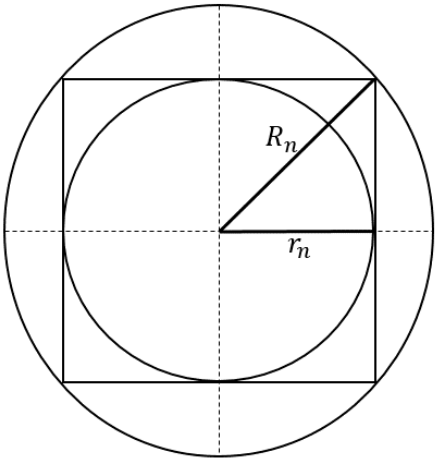



Abb. 23: Verfeinerte Methode

Es ist beides eine Anwendung von dem, was später Indivisiblen genannt wird und im 17. Jahrhundert einen regelrechten Hype in der Mathematik ausgelöst hat. Es wurde von Newton (1643 – 1727) praxisorientiert mit epochalem Erfolg angewendet und von Leibniz (1646 – 1716) mathematisch ausgearbeitet.

Von Nicolas Chuquet (ca. 1445 – 1488) liegen nur wenige Informationen vor. Sein Manuskript *Le triparty en la science des nombres,* wurde 1484 geschrieben und hat als Ganzes überlebt, obwohl es erst 1880 teilweise gedruckt wurde. Trotzdem hat das Werk Einfluss gehabt. Das Rechnen mit rationalen und irrationalen Zahlen sowie die Theorie der Gleichungen wird vermittelt. Er hat offenbar Werke von Boethius, Euklid, Campanus von Novara, sowie Archimedes oder Ptolemaios gekannt und daraus zitiert.[120]

[120] Wußing, 6000 Jahre Mathematik, Band I, S. 321

Ein wichtiger Protagonist, der zwischen den Disziplinen vermittelte, war Regiomontanus. Er wurde als Johannes Müller 1436 im bayerischen Königsberg geboren und latinisierte seinen Namen nach seiner Geburtsstadt (Joannes de Monteregio, 1436 – 1476). Seine wissenschaftlichen Lehrer an der Universität Wien waren Johannes von Gmunden (1380 – 1442) und vor allem dessen Nachfolger Georg von Peurbach (1423 – 1461). Diese Männer machten die 1365 gegründete Universität zur herausragenden Hochburg der Mathematik im 15. Jahrhundert.

Kurz nach 1500 wirkte noch Johannes Stöber aus Steyr. Er beschäftigte sich mit flächentreuen Projektionen der Erdkugel auf die Ebene.[121] Dann ging die Bedeutung der Mathematik in Wien deutlich zurück. Regiomontanus war nicht nur der geniale Schüler Peurbachs, sondern der wichtigste Mathematiker des 15. Jahrhunderts. Man muss es hier nochmals betonen, schon im Alter, in dem heute mit einem Studium begonnen wird, beherrschte er das mathematische und astronomische Wissen seiner Zeit mit Schwerpunkt der bewunderten griechischen Geometrie. Dazu gehörte damals auch die Astrologie. Bereits mit 12 Jahren errechnete er dafür ein astronomisches Jahrbuch.[122] Er war zeitweise Mitarbeiter von Kardinal Bessarion (um 1400 – 1472), der sich 1461 in Wien aufhielt und in dessen Auftrag er ein verschollenes Exemplar von Diophantos ermittelte – ausgerechnet der griechische Mathematiker, der weit über die Geometrie hinausging.

Bessarion stammte vom Schwarzen Meer und gehörte ursprünglich zum griechisch-orthodoxen Klerus und wurde als „Basilios“ (Patriarch von Konstantinopel) angesehen.[123] Er wechselte als Kardinal zur katholischen Kirche.[124] Er war ein leidenschaftlicher Sammler und Kenner antiker Handschriften und soll fast 1000 Codices besessen haben. Er beschäftigte ein Heer von Agenten, um verschollene Exemplare aufzufinden. Bessarions Bibliothek enthielt einzigartige Codices, die er teilweise eigenhändig aus Konstantinopel nach Italien mitgebracht hatte und auf die Regiomontanus als sein Vertrauter Zugriff hatte. Doch das Ziel des Kardinals, der sehen musste wie seine Heimat immer mehr unter osmanische Herrschaft geriet, war die Einheit des Christentums durch einen neuen Kreuzzug.

Regiomontanus verwendete wie selbstverständlich in seinen Aufzählungen die indisch-arabischen Ziffern in der Reihenfolge 0, 1, 2, …. , 9 und benutzte also die Null als Ordinalzahl. Als „4“ benutzte er „ 𝔎 “, heute dargestellt mit der

---

[121] Gronau, Detlef, Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, Institut für Mathematik der Karl-Franzens-Universität Graz, 2009, S. 68
[122] https://de.wikipedia.org/wiki/Regiomontanus
[123] https://encyclopedia.pub/entry/38622
[124] Roeck, ebenda, S. 482

Abb. 24: Regiomontanus, ein Gelehrter der Renaissance.

Gedenkschleife (U+1F397). Das zeigt, dass die einheitliche Zahlenschreibweise durch häufig benutzte Konvention sich damals noch längst nicht durchgesetzt hatte. Das Leben von Johann Müller aus Königsberg in Bayern stellt ein typisches Gelehrtenleben in der Renaissance dar.[125]

Der Übergang von römisch zu indisch-arabisch blieb ein mühsamer Prozess. So findet man deshalb noch viel später amtlich anerkannte Kerbhölzer z.B. für Kredite, die römische Zahlen verwendeten. Bis sich die indisch-arabischen Zahlzeichen endgültig durchsetzen, bezeichnete man sie oft als „Figuren“.[126] Manche übereifrige Chronisten übertrieben die „Migrationsphase“ zwischen den Zahlensystemen. In einem Codex Nummer 4753 in der österreichischen Nationalbibliothek heißt es für 1315: *anno domini 1000 mo 300 mo 15 mo*. Hybride Varianten wie $MCCC_{43}$ und $MCCC_{44}$ für 1343 und 1344 versuchen sich ebenfalls in einem „sanften Übergang“.[127]

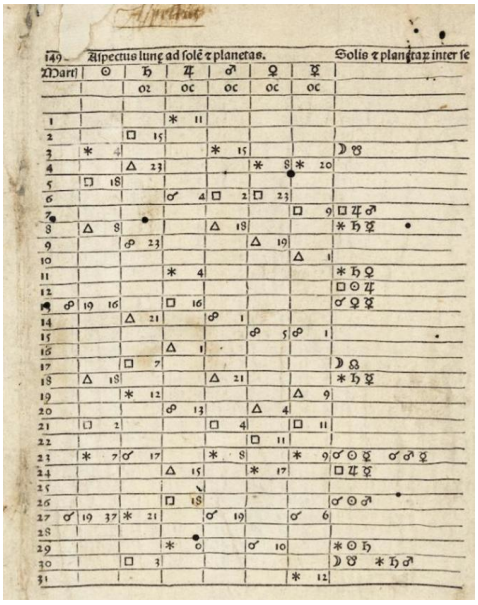


Abb. 25: Auszug aus den Ephemerides (Nürnberg 1484 bzw. Venedig 1506) von Johannes Regiomontanus für Sonne ☉, Saturn ♄, Jupiter ♃, Mars ♂, Venus ♀ und Merkur ☿ (2. Zeile).

Regiomontanus war bewusst, dass viele griechische Werke nur über arabische Übersetzungen überliefert wurden und die Originalhandschriften verschollen waren. Darüber hinaus haben arabische Mathematiker viele eigenständige mathematische Entdeckungen gemacht. Er wollte die Verdienste der islamischen Gelehrtenwelt betonen und widmete ihnen 1464 in Padua eine leider nicht vollständig erhaltene Vorlesung. Dies steht auch vermutlich im politischen Kontext zu einer Zeit, in der Kardinal Bessarion Arbeitgeber von Regiomontanus war und sich für einen neuen Kreuzzug einsetzte. Allerdings sieht auch Regiomontanus durch den

[125] https://de.wikipedia.org/wiki/Regiomontanus
[126] De Padova, ebenda, S. 50
[127] De Padova, ebenda, S. 76, vergleiche auch Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 71, S. 97-98

Machthunger der Osmanen das Christentum bedroht. Das soll aber insbesondere nicht die Leistung von *Abu´l-Abbas Ahmad ibn Muhammad ibn Kathir al-Farghani*, genannt Alfraganus schmälern.[128] Regiomontanus beginnt seine Vorlesung in Padua mit einer Geschichte der Mathematik und würdigt insbesondere den mathematischen Beweis als Krönung der logisch-mathematischen Schlussfolgerung. Diese Vorlesung gilt heute als eine der ersten wissenschaftlich - geschichtlichen Lehrveranstaltungen.[129] Diese Eröffnungsvorlesung ist als Einzige erhalten. In Padua erstellt Regiomontanus eine Tabelle, *Tabula declinationum generalis*, mit den Positionsangaben der Sonne als kalkulierte Winkelabstände vom Himmelsäquator. Regiomontanus erarbeitete sich in seinem Manuskript „*De triangulus omnimodis libri quinque*“ (Fünf Bücher über alle Arten von Dreiecken) wie Winkel, Seitenlängen und andere Größen in Dreiecken in Verbindung stehen (1462/63 geschrieben, erst 1533 gedruckt). Es ist das erste systematische Trigonometrielehrbuch in Westeuropa. Er führte die Tangens-Funktion ein. Man kann sagen, dass die Trigonometrie zur selbständigen mathematischen Disziplin wurde und auch eine gewisse Emanzipation von der Astronomie stattfand. Die arabische Wissenschaft hatte sich bereits vorher mit Sinus, Cosinus und Tangens beschäftigt. Das Werk von Regiomontanus hatte hohen praktischen Nutzen für die Astronomie, Landvermessung und Navigation. Sie ist mittlerweile Teil eines Werkes mit dem Titel „*Tabulae directionum et profectium“.* Das Original ist nicht erhalten; eine wertvolle Kopie, ungewöhnlicherweise auf Pergament, ist heute in der Herzog August Bibliothek in Wolfenbüttel aufbewahrt.[130] Die Arbeit von Regiomontanus wurde im 16. Jahrhundert fortgeführt. Es entstanden genauere, teils siebenstellige Tafelwerke und die theoretischen Grundlagen wurden ergänzt.

Insbesondere beschäftigte sich der Pfarrer und Amateurastronom Johannes Werner aus Nürnberg (1468 – 1528) mit den Ergebnissen von Regiomontanus. Er schrieb dann eigene Bücher zur Trigonometrie. Er fand die in heutiger Terminologie ausgedrückte Formel

$$\sin\alpha \cdot sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

Dadurch kann die Multiplikation von Sinus-Werten auf deutlich praktikablere Additionen und Subtraktionen zurückgeführt werden.[131] Diese Methode wurde in den nächsten Jahren zur sog. “Prosthaphäretischen Rechenmethode”

[128] https://en.wikipedia.org/wiki/Al-Farghani, De Padova, ebenda, S. 33-34
[129] austria-forum.org/af/Biographien/regiomontanus
[130] De Padova, ebenda, S. 56, siehe auch Suche im Bestand der Herzog August Bibliothek, https://www.hab.de/?s=Regiomontanus&source=int
[131] https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Werner_(Kartograf)

ausgebaut. Bis in das 17. Jahrhundert hinein wurde sie in der Astronomie benutzt.[132]

Die genaueren Winkeltabellen lieferte der Wittenberger Mathematikprofessor G.J. Rheticus (1514 – 1576).[133] Rheticus hat sich als Schüler von Kopernikus auch erheblich für die Drucklegung des Hauptwerkes von Kopernikus eingesetzt und diesen nach langem Zögern überredet. Das Manuskript war bereits 1530 fertig und Kopernikus (1473 – 1543) hatte 13 Jahre gezaudert. Es fand auch in kirchlichen Kreisen Befürworter, wurde aber schließlich 1616 auf den Index gesetzt. Das epochale Werk von Kopernikus enthält Darstellungen zur ebenen und sphärischen Trigonometrie. Die Trigonometrie war nach der Veröffentlichung von großer Bedeutung zur Überprüfung des heliozentrischen Weltbildes. Weitere bedeutende Tafelwerke stammen von Erasmus Reinhold (1511 – 1553), der sich offen für das kopernikanische Weltbild bekannte und im Rahmen des „*Canon*“ von François Viète (1540 – 1603). Zu nennen ist auch Jost Bürgi (1552 – 1632), der geniale Autodidakt als Uhr- und Instrumentenbauer. Wegen seiner kunsthandwerklichen Begabung und Geschicklichkeit wurde er an die damals führende Sternwarte in Kassel berufen. Die Anforderungen dort förderten sein ohnehin vorhandenes mathematisches Talent. Er wechselte später nach Prag, wo ihn Johannes Kepler (1571 – 1630) sehr schätzte. Nach diversen tastenden Versuchen wandte er sich dem logarithmischen Rechnen zu. Seine Tafeln fanden wenig Resonanz. Sie entstanden um 1600, wurden erst 1620 veröffentlicht, also mitten im 30-jährigen Krieg. Erfolgreicher waren die Bemühungen von John Napier (1550 – 1617). Ausgehend von einem mechanischen Problem berechnete er Logarithmen zu einer zu $\frac{1}{e}$ proportionalen Basis. Die Publikation trägt den Titel „*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*“, trägt also „Logarithmen“ erstmals im Titel. Sie enthält siebenstellige Logarithmen der nach Minuten fortschreitenden Sinus- und Kosinus-Werte sowie deren Differenzen (log tan x). Neper einigte sich mit Henry Briggs (1561 – 1630), Inhaber eines naturwissenschaftlichen Lehrstuhls am Gresham-College in London, auf die Festlegung

$$\log 1 = 0, \qquad \log 10 = 1$$

Als Neper starb, berechnete Briggs allein diese Tafeln. Sie erschienen 14-stellig ab 1617 und wurden in Europa gebräuchlicher Standard.[134]

Die Renaissance verdankt bekanntlich Übersetzungen aus der islamischen Welt und ihren Weiterentwicklungen in einem durchaus beträchtlichen Teil von indirekt überliefertem antikem Wissen und daraus entstandenen Impulsen aus

---

[132] Gronau, Detlef, Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, S. 68

[133] Eigentlich Georg Joachim Iserin,
https://de.wikipedia.org/wiki/Georg_Joachim_Rheticus

[134] Vergleiche tw. wörtlich Wußing, Arnold, ebenda, S. 96

islamischen Forschungsergebnissen, die mehrere Jahrhunderte vor Beginn der Renaissance zurücklagen und nur zögernd rezipiert wurden. So wurde Al-Farghanis wichtiges Buch zu den Planetenbewegungen, „*Elemente der Himmelskunde*", bereits ca. 833 n. Chr. verfasst. Es basiert auf Claudius Ptolemaios klassischem Hauptwerk der theoretischen Astronomie, die *Syntaxis Mathematica* (entstanden ca. 138 n. Chr.), genannt Almagest. Doch die „Elemente der Himmelskunde" wurde erst 1135 ins Lateinische übersetzt und behielt dann seine Rolle als Standardwerk bis weit ins 17. Jahrhundert hinein. Auch dieses Werk begleitete Columbus auf seinen Reisen. Dante Alighieri verarbeitete das weiterentwickelte astronomische Wissen von Al-Farghani in seiner „Göttlichen Komödie".

Immerhin gehörte schon früh zum Bildungsbegriff das Studium von Euklid. Sein klares Verständnis von einem axiomatischen Aufbau galt als beste Schulung für den Verstand. Wenige Axiome, Definition, Satz, Beweis setzte schlicht den Maßstab für zwei Jahrtausende Mathematik infolge der griechischen Tradition. Die 13 Bücher der „Elemente" sind das erfolgreichste Werk der mathematischen Weltliteratur;[135] ihre Verbreitung lässt sich mit der Bibel vergleichen. „ … *an englischen Schulen hat man noch in der 2. Hälfte des 20. Jh. nach einer englischen Bearbeitung der Elemente Geometrie gelernt, daher heißt die Schulgeometrie in England einfach Euclid*.[136] Die ungeheuer große Popularität von Euklids „Elemente" führte allerdings dazu, dass den Mathematikern der Renaissance bis etwa 1570 im Wesentlichen zwei höchst unterschiedliche Versionen zur Verfügung standen, nämlich die Ausgaben von Campanus von Novara (um 1220 – 1296), die dann 1482 in Venedig gedruckt wurde, nachdem Regiomontanus schon 1460 vorgearbeitet hatte. Weiterhin die Ausgabe von Bartolomeo Zamberti (oder Zamberto, 1473 bis nach 1543). Diese konnte dann 1505 gedruckt werden.[137] Beide Versionen hatten aber eklatante Defizite. Martin Frank nennt auch das Beispiel von Archimedes „Über schwimmende Körper" (1543). Niccolo Tartaglia (1499 – 1557), durchaus ein respektabler Mathematiker aus Brescia, auf den noch zu sprechen sein wird, hatte nur das erste Buch editiert und hat sich die Mühe einer anspruchsvollen Rekonstruktion des zweiten Buches erspart.[138] Diese „Sünden" der frühen Renaissance wurden von der „Schule von Urbino", besonders Federico Commandino (1506 – 1575)

---

[135] Eine kompakte Übersicht der 13 Bücher der Elemente siehe W.-D. Geyer: Vorlesung über antike Mathematik SS 2001
https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf

[136] Ebenda W.-D. Geyer, S.1

[137] https://de.wikipedia.org/wiki/Elemente_(Euklid)

[138] Siehe Frank, Martin, Mathematik der Renaissance: Studien zur Herausbildung und Verbreitung der neuzeitlichen Wissenschaften, Deutsches Museum Verlag, München 2016, Preprint 11, S. 9

überwunden.[139] *Commandinos qualitativ hochwertige Übersetzungen, Kommentare und Vervollständigungen leiteten eine neue Phase der Rezeption ein.*

Seine Euklid-Edition, die mit der Clavius Ausgabe von 1574 erstellt wurde, lieferte endlich einen verlässlichen Text der *Elemente* und man musste sich nicht mehr zwischen Campanus und Zamberti entscheiden. Im Falle „*Über schwimmende Körper*“ wird seine extreme Sorgfalt deutlich. Er musste penible Studien zur Theorie der Kegelschnitte durchführen, auf denen die Arbeit von Archimedes beruht. Das war auch der Anlass, eine Ausgabe von Apollonios Kegelschnitten zu veröffentlichen. Archimedes Arbeit zum Schwerpunkt dreidimensionaler Körper ist nicht erhalten geblieben und musste neu entwickelt werden. In dem eingangs erwähnten Palimpsest erkennt man, dass Archimedes dort seine eigenen Erkenntnisse aus dem verschollenen Codex C zum Schwerpunkt anwendete. Nur über solche Umwege konnten komplexe Werke der griechischen Mathematik rekonstruiert werden. Nach Commandinos Tod im Jahre 1575 wurden seine Bemühungen zur Renaissance der griechischen Mathematik von seinen Schülern Guidobaldo dal Monte (1545 – 1607) und Bernardino Baldi (1553 – 1617) fortgesetzt. Im Stile von Commandino hat sich Guidobaldo mit Herons „*Theorie der einfachen Maschinen*“, in Pappus *Collectio mathematica* überliefert, auseinandergesetzt und in seiner Schrift *Mechanicorum liber* (1577) weiterentwickelt.[140]

Das Zeitalter der Renaissance steht für Wiederentdeckung, gelehrte humanistische Beschäftigung und vergleichsweise enorme Verbreitung von antikem, vor allem griechischen Wissens mit den Mitteln des neu entwickelten Buchdrucks mit beweglichen, genauer bewegbaren, Lettern. Doch man tut dieser Epoche unrecht, wenn man sie nur auf die reine Vermittlung und bloße Rezeption antiker Erkenntnisse reduziert. Renaissance war darüber hinaus Keimzelle für wissenschaftliches Denken im modernen Sinne.

Gerade für die Mathematik, aber weit darüber hinaus, gilt für diese Epoche: „*Aber sie schaute wie jede Renaissance zurück und nach vorne zugleich*.“[141]

Beispielhaft soll hier ein Mathematiker der frühen Renaissance, aber noch mit Bindungen in die Scholastik betrachtet werden. Das zeichnet die frühe Renaissance aus: Man legt an Aussagen antiker Autoritäten strenge logische Maßstäbe an. Verharren in der Scholastik ist typisch für das praktisch

[139] https://de.wikipedia.org/wiki/Federico_Commandino
[140] Frank, Martin, ebenda, S. 11
[141] Roeck, ebenda S. 75

vollständige Fehlen von Experimenten. Nicole Oresme (1325 – 1382),[142] ab 1377 Bischof von Lisieux, war Schüler von Jean Buridan (um 1300 – nach 1358) und ein herausragender französischer Gelehrter. Trotz seiner klerikalen Bezüge war er nicht nur in seinem mathematischen Schaffen erstaunlich eigenständig. Generell verfasste er das Werk *Algorismus proportionum*. Erstmal seit der Antike hat er sich mit unendlichen Reihen beschäftigt, also dem in der Antike spektakulären Versuch, die Summe von unendlich vielen Zahlen zu bilden. Im Auftrag von Kaiser Karl V sollte er Aristoteles neu übersetzen. Er war damit sicherlich mit der Ansicht von Aristoteles über das aktual Unendliche vertraut. Er konnte in seiner Schrift beweisen, dass die harmonische Reihe divergiert.

Er hat auch das Ergebnis der Reihe der reziproken Zweierpotenzen richtig vorhergesagt:

1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64+⋯=1

Nicht sicher ist, ob Oresme sich mit folgender Reihe intensiv beschäftigte:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots$$

Er ahnte aber, dass sie beschränkt ist (<2). Der Wert wurde erst viel später über die Riemannsche Zeta-Funktion bestimmt. Es ist in der Geschichte der Mathematik als Basler Problem bekannt. Die Bernoulli-Brüder Jacob (1655 – 1705) und Johann (1667 – 1748) aus Basel waren bei dem Problem erfolglos, ebenso auch Isaac Newton (1643 – 1727) und Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) sowie Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital (1661 – 1704). Erst Leonhard Euler (1707 – 1783), ebenfalls aus Basel, war erfolgreich.

Der Wert beträgt $\zeta(2)=\frac{\pi^2}{6}\approx 1{,}64493\ldots$

Nikole von Oresme formt die Begriffe der Stetigkeit, der Unendlichkeit und der Funktion, die entscheidend sind für die neuere Mathematik und legt die Grundlagen zur graphischen Darstellung. Wegweisend war sein Versuch, mathematische Konzepte auf naturwissenschaftliche Erscheinungen anzuwenden. Dies wird besonders deutlich bei der erstmaligen Verwendung von Koordinaten.[143]

Die Mathematik erfand sich mit Impulsen aus der griechischen Antike nach den Zeiten des „dunklen" Mittelalters durchaus neu und ebenso beginnt die Geschichte der komplexen Zahlen in diesem faszinierenden Zeitalter – der Renaissance.

---

[142] Wußing ebenda, S. 293, sowie Rudolf Taschner; Die Farben der Quadratzahlen, Hanser, München 2019, S. 67, siehe auch Kafitz, W., Unendlich, Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Bd. 70, Gießen 2022, S. 36

[143] Abschnitt wörtlich aus https://de.wikipedia.org/wiki/Nikolaus_von_Oresme

In den wenigsten Fällen war ein Mathematiker oder Astronom so wohlhabend, dass er seine Forschung quasi als Hobby betreiben konnte. Materielle Sicherheit, *h*ochwertige Instrumente oder auch gut ausgestattete Bibliotheken fanden sich insbesondere an den Fürstenhöfen. Bekannte Beispiele sind Simon Stevin (1548 – 1620), einflussreicher flandrischer Mathematiker, Physiker oder Ingenieur, Lehrer für Mathematik des Prinzen Moritz von Oranien (1567 – 1625).[144] Stevin überwand als Erster die griechische Auffassung, dass die „Eins“ keine Zahl ist. Weiteres Beispiel ist Johannes Kepler (1571 – 1613), zuerst Mitarbeiter von Tycho Brahe (1546 – 1601) am kaiserlichen Hof zu Prag und dann dessen Nachfolger. Später war Galileo Galilei (1544 – 1642) ab 1610 Hofmathematiker der Medici in Florenz. Wichtig für die italienische Renaissance der Mathematik an den Fürstenhöfen in Turin und Urbino waren Giovanni Battista Benedetti (1530 – 1590) und Guidobaldo dal Monte (1545 – 1607) Beispiele. Benedetti beeinflusste Galilei durch seine Erkenntnisse zum „Freien Fall“. Dal Montes Erstlingswerk *Mechanicorum liber* (1577) galt als wichtigste Publikation zu diesem Thema seit der Antike.[145]

Wie oben beschrieben, wurden noch im Jahr 1299 von den Medici in Florenz die neuen Ziffern verboten.[146,147] Doch das merkantile Bürgertum hatte die Bedeutung erkannt und wollte sie anwenden. Es führte schließlich zu entsprechenden Lehrinhalten bei den Universitäten, vor allem in den

Abb. 26: Revolution der Renaissance: Buchdruck mit beweglichen Lettern

[144] https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/stevin-simon/10011
[145] https://de.wikipedia.org/wiki/Guidobaldo_del_Monte
[146] Charles Seife, Zwilling der Unendlichkeit, Goldmann, München, 2002, S. 92
[147] Siehe auch Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 70, Gießen 2022, W. Kafitz. Formeln, S. 124

italienischen Stadtstaaten. Nicht nur Gelehrte, sondern Kaufmannsöhne nördlich der Alpen wollten lernen und strömten nach Italien, da die dortigen Universitäten in der Regel breiter aufgestellt waren. Latein und in zweiter Linie Griechisch war generell Bestandteil der Basisbildung, aber der Fächerkanon wurde je nach Universität profiliert. In Bologna dominierte nach wie vor die juristische Ausbildung; in Padua entwickelte sich daneben die Medizin und die sogenannten „Freien Künste“, zu denen die Mathematik gehörte. Genau diese mehr praxisorientierten Lehrinhalte machte für die mitteleuropäischen Studenten die Attraktivität aus.[148]

Überhaupt kann man in dieser Zeit eine Erweiterung des Aktionsradius nicht nur beim wirtschaftlichen Handeln beobachten. Natürlich wurden schon früher Waren überregional gehandelt und in akademischen Kreisen Wissen durch Reisen ausgetauscht. Aber Zentrum war viele Jahrhunderte der Marktflecken, den man zu Fuß oder mit Fuhrwerken erreichen konnte. Das Verständnis für überregionales Handeln wuchs, auch wenn die Entfernungen oft noch falsch eingeschätzt wurden.[149]

Der Buchdruck mit beweglichen Lettern wurde 1440 in Mainz von Johannes Gutenberg (Gensfleisch) (1393/1406 – 1468) erfunden. Wie bei vielen Erfindern, führte er bestehende Techniken geschickt zusammen und entwickelte sie weiter oder füllte Lücken. In dem kleinen Weinstädtchen Mainz am Rhein und Main mit damals gerade 7.000 Einwohnern fand er eine Reihe von Anregungen. Druck mittels Metallplatten gab es schon, besonders bei der Herstellung von Spielkarten. Eine Presse fand er bei den Mainzer Weinbauern in Form von Spindelkeltern, die schon auf römische Zeit zurück reichten. Als Druckerschwärze benutzte er eine Mischung aus Ruß, Leinölfirniss und Eiweiß sowie weiteren Zutaten, wie sie auch Maler verwendeten. Tatsächlich wurden damit nur die

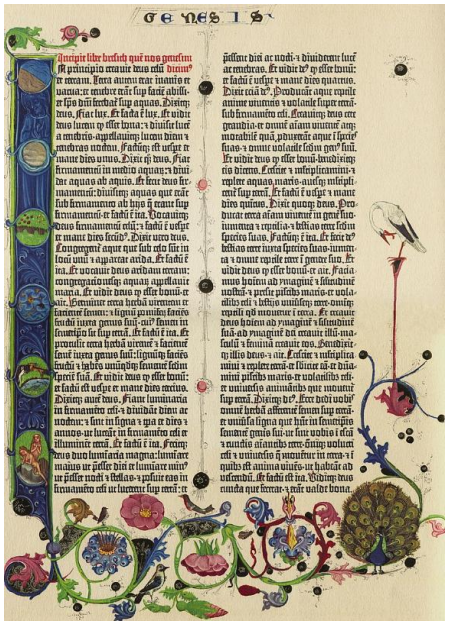


Abb. 27: 1. Seite Genesis aus der Gutenberg-Bibel von 1454

[148] Thomas de Padova, Alles wird Zahl, S. 32

[149] Erst um 1668 legte man in Frankreich einen Nullmeridian in Paris fest und es begann eine systematische Vermessung. Bei zunächst großer Begeisterung zeigte sich aber schnell, dass Frankreich mit ca. ein Fünftel kleiner war, als ursprünglich angenommen. Genauere Messungen ergaben z.B., dass es von Paris nach Brest nur knapp 600 km sind und damit 140 km weniger als gedacht. Das Ende der Renaissance war aber noch gut 150 Jahre von dieser Entwicklung entfernt.

schwarzen Teile gedruckt. Die farbigen Elemente wurden nachträglich eingefügt. Nach ersten Versuchen mit der neuen Technik wagte sich Gutenberg in den Jahren 1452 bis 1454 an die Bibel, genauer die *Vulgata*, die im Mittelalter verbreitete lateinische Ausgabe. Für 1282 Seiten mit 42 Zeilen benötigte man ca. 100.000 Typen und 108 „Ries“, also Packen mit jeweils 500 Blatt Papier, das damals aus Italien kam und noch relativ teuer war.[150] Er hatte jedoch den Kapitalbedarf heillos unterschätzt, so dass sein Hauptgläubiger Johannes Fust (1400 – 1466)[151] Werkstatt, Druckerpresse, Werkzeuge und die ersten „Gutenberg-Bibeln“ übernahm. Dabei war die erste Auflage von 180 Exemplaren, noch weitgehend ungedruckt, schon auf der Frankfurter Messe 1454 verkauft worden. Die Qualität war so gut, dass Fust beim Verkauf in Paris ein Pakt mit dem Teufel unterstellt wurde. Es war ein Prestigeerfolg, aber führte Gutenberg wirtschaftlich zum Bankrott. Weder ein Portrait noch ein Grabstein ist von ihm erhalten. Nur durch die Gunst des Erzbischofs und Kurfürsten Adolf II. von Nassau (1423 – 1475) konnte er einen bescheidenen ruhigen Lebensabend verbringen.[152]
Insgesamt war es der Beginn der dritten Medienrevolution, nach Schrift und Buchstabenalphabet.

Wie fast jede Erfindung brachte der Buchdruck Segen und Leid. 1486 wurde eines der schlimmsten Bücher aller Zeiten gedruckt: „*Malleus malficarum*“, der Hexenhammer. Bis 1523 verzeichnet man 13 Auflagen. Autor war der Dominikanermönch Heinrich Kramer (um 1439 – 1505). Kramer rühmte sich, dass er allein 200 Frauen auf den Scheiterhaufen gebracht hat,[153] insgesamt sollen in Europa zwischen 1550 bis 1650 auf dem Höhepunkt der Hexenverfolgung 40.000 bis 60.000 Opfer verbrannt worden sein – fünf von sechs waren Frauen.[154] Das neue Medium hatte seinen ersten Sündenfall.

Doch die Entwicklung des Buchdrucks hat allerdings trotzdem verzögert stattgefunden. Das einfache Volk hat durchaus schriftliche Aufzeichnungen benötigt. Aber das „*Papier des Volkes war Holz*“ (Menninger).

In Italien fanden die indischen Ziffern infolge der Dichte an herausragenden Mathematikern in der Renaissance früher Akzeptanz als nördlich der Alpen. Dies war nicht immer so! Cicero urteilt über seine Zeitgenossen:[155]

---

[150] Roeck, ebenda, S. 581
[151] https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Fust
[152] Roeck, ebenda, S. 582
[153] Roeck, ebenda, S. 613
[154] https://de.wikipedia.org/wiki/Hexenverfolgung
[155] *Daher standen in Griechenland die Musiker in hohem Ansehen, und niemand galt für ausreichend gebildet, der nicht musikalische Grundkenntnisse hatte. Bei jenen erfuhr auch die Geometrie höchste Wertschätzung, niemand war demnach*

*ergo in Graecia musici floruerunt, discebantque id omnes, nec, qui nesciebat, satis excultus doctrina putabatur. In summo apud illos honore geometria fuit, itaque nihil mathematicis illustrius; at nos metiendi ratiocinandique utilitate huius artis terminavimus modum.*

Cicero zeigt trotzdem keine Einsicht, sondern akzeptiert, dass Arithmetik und Geometrie auf ihren praktischen Nutzen reduziert werden und dass sich ein hochgestellter römischer Aristokrat nicht damit befassen muss. Diese Haltung überwand die Renaissance.

In Deutschland fanden sich vor allem in Verwaltungsdokumenten römische Zahlen sogar bis in das 16. Jahrhundert hinein. Interessant ist die Tatsache, dass die Durchdringung mit den „neuen" Zahlen eher von „unten nach oben" stattfand. Es waren vorwiegend Söhne aus dem merkantilen Bürgertum, aus anspruchsvollen Handwerkbetrieben oder aus Handelsgeschäften, die als Studenten nach Italien gingen.

Allerdings hafteten der „Null" immer noch Vorurteile an. Richtig akzeptiert als Ziffer und wichtige Zahl wurde die Null erst in der Neuzeit, als man die Bedeutung eines Stellenwertsystems in seiner ganzen Tragweite erkannte.

Der Buchdruck sorgte aber für Dynamik. Das erste Rechenbuch wurde 1479 in Venedig gedruckt; 1483 ein praxisorientiertes Lehrbuch von dem Nürnberger Ulrich Wagner (gest. um 1490) zu den indisch-arabischen Ziffern und der Null.

*Es sein neun bedeutlich figur. 1 2 3 4 5 6 Λ 8 9 . Und die zehent ist o und bedeut all ein nichts*.[156] Die Zeitgenossen wunderten sich anfangs über dieses Zahlzeichen und nannten es „*nulla figura*" oder kurz „*nulla*", woraus heute Null entstanden ist. 1488 heißt es in einer deutschen Handschrift über das Rechnen mit indo-arabischen Zahlen: *Ziffra wird och genannt nulla oder figura nihel*.[157]

Insbesondere Leonardo von Pisa (Fibonacci) nennt in „*liber abbaci*" zahlreiche Beispiele und versucht die neue ungewohnte Sichtweise in einer Verbindung von Addition und Multiplikation zu erläutern:

1010 = 1 mal 1000 + 0 mal 100 + 1 mal 10 + 0 mal 1

Man muss hier die ausgelassenen Hunderter und Einer trotzdem mitdenken, damit die neue Schreibweise eindeutig wird. Sie hat den großen Vorteil, dass man bei jeder beliebig großen Zahl mit 10 Ziffern auskommt. Dies kommt so

---

*angesehener als ein Mathematiker; wir aber haben diese Wissenschaft auf die Zweckmäßigkeit des Messens und Rechnens beschränkt.*
Cicero, Tusc.disp. I 4 f., zitiert nach Walter Freinbichler – Warum steht M für 1000?, S. 4

[156] De Padova, ebenda, S. 73. In dieser Reihenfolge sehen wir die Ziffern auf unserer Computertastatur. Die Null wird erst als erste Leerstelle wichtig.

[157] De Padova, ebenda, S. 73

richtig nach der Renaissance im frühen Kapitalismus zum Tragen, wenn z.B. die Fugger in Augsburg oder die Medici in Florenz mit riesigen Summen operieren.[158]

Ein großer Durchbruch gelang im Jahr 1522 dem Rechenmeister Adam Ries(e) (1492 ─ 1559). Er verfasst drei Werke – für die Jugend, Rechnen mit dem Abakus und Rechnen mit den indo-arabischen Zahlen. Im dritten Buch fokussiert er sich auf das schriftliche Rechnen und drückt dies im Titel seines Lehrbuchs aus: *„Rechnung auff der Linihen und Federn*“.[159] Das Werk in Deutsch wurde mindestens 120-mal aufgelegt und war so erfolgreich, dass es sogar zur Harmonisierung der deutschen Sprache beitrug.[160] Ries hat nicht nur Übungsmaterial zusammengetragen, sondern ein methodisch und didaktisch fundiertes mathematisches Lehrbuch verfasst. Allerdings ohne Anspruch auf höhere Mathematik, sondern es geht um Rechentechniken für das merkantile

Abb. 28: Die drei Rechenbücher von Adam Ries(e).

Bürgertum. Er verzichtet also auf das, was wir heute Gleichungslehre nennen. Seine Begriffsdefinitionen wie „*Zehler*“ und „*Nenner*“ haben bis heute Bestand. Man muss sich vergegenwärtigen, dass „*auff der Linihen*“ sich zunächst auf den Abakus bezog, ein Rechenbrett mit senkrechten und waagrechten Linien. Immer dann, wenn sich vier Steine auf einer Linie befanden, wurde „bereinigt“, also zusammengefasst und dazu ein Stein in das Spatium oberhalb der Linie

[158] De Padova, ebenda, S. 77
[159] Siehe Frank, Martin, Mathematik der Renaissance: Studien zur Herausbildung und Verbreitung der neuzeitlichen Wissenschaften, Deutsches Museum Verlag, München 2016, Preprint 11, https://www.deutsches-museum.de/assets/Verlag/Download/Preprint/preprint-11.pdf
[160] https://de.wikipedia.org/wiki/Adam_Ries

gelegt. Ries hatte aber durchaus die neuen Zahlen im Blick. Das schriftliche Rechnen ist aber ein weiterer Abstraktionsschritt, der nicht so gegenständlich wie der Abakus mit seinen abzählbaren Rechensteinen ist. *„Rechnung auff der Linihen und Federn“* adressiert somit den Umgang mit den indo-arabischen Zahlen und zwar in deutscher, nicht lateinischer Sprache – er spricht damit nicht in erster Linie die Gelehrtenwelt an. Es war ein Prozess, der viele Jahrzehnte dauerte: Man verließ die Gegenständlichkeit und wechselte zudem das Zahlensystem. Das waren erhebliche Anforderungen an das mathematische Denken der Menschen in der Renaissance. Sie führten aber schließlich zu einem erneuten Aufblühen der Mathematik nach den Erfolgen der griechischen Antike – zu ihrem zweiten Frühling.

Leonardo de Pisa, genannt Fibonacci (*um 1170 – nach 1240), ging in seinem *Liber abaci* wesentlich radikaler vor. Obwohl er eigentlich dem europäischen Mittelalter zuzurechnen ist, wird er als „erster moderner Mathematiker“ des christlichen Europas bezeichnet.[161] Aufgewachsen in Pisa, wurde er etwa im Jahr 1192 von seinem Vater, der in die Niederlassung der Pisaner Kaufmannschaft im algerischen Bougie, dem heutigen Bejaia, als öffentlicher Notar wechselte, nach Nordafrika mitgenommen. Schon in jungen Jahren hatte er Talent und Begeisterung für Zahlen. In Bougie hatte er zudem das Glück einen Lehrer zu bekommen, der ihn weiter förderte und ihm die Vorzüge der indischen Zahlen und die Erfolge der arabischen Mathematik vermittelte. Wieder zurück in Pisa, verfasste er sein *Liber abaci* als Lehrbuch zum Selbststudium ohne Bezug zum Abakus und den römischen Zahlen zu nehmen. Das Buch geht weit über das hinaus, was im lateinischen Mittelalter

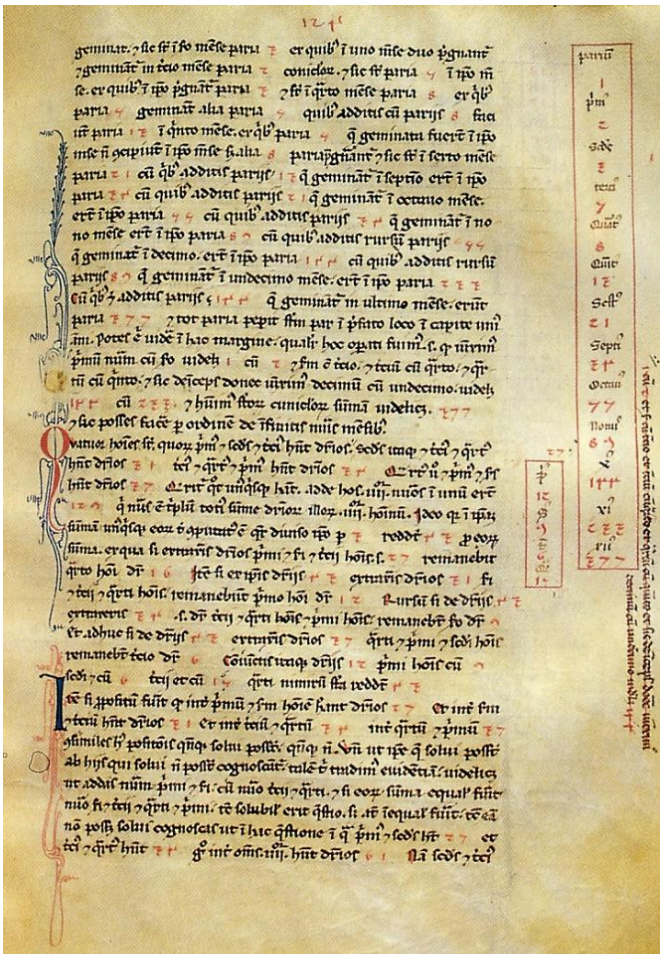


Abb. 29: Die Seite in Liber abaci mit der berühmten Fibonacci-Folge (rechter Rand)

[161] H. Wußing, 6000 Jahre Mathematik, Bd. 1, S. 313

bekannt war.[162] Es hat ein theoretisches Fundament, geht aber auf viele praktische Beispiele aus dem Alltagsleben der Kaufleute ein. Vor allem Umrechnen war das tägliche Brot im Handel. Alleine in Deutschland gab es 28 regional unterschiedliche, verschiedene Ellen. In Italien dürften zumindest die Stadtstaaten eigene Maße und Gewichte gehabt haben. Dazu kommen noch unterschiedlichste Währungen in den Fürstentümern. Entsprechend hat Leonardo in einer Vielzahl an Beispielen den Dreisatz („*regula de tri*“) auf Umrechnungen angewendet. Insbesondere beim Geld musste man sich auf Referenzwährungen konzentrieren. Es waren der *bizantus* in Konstantinopel, arabische Goldmünzen in Spanien oder *liba, soldus und denarius*, wenn es um Pfund, Schilling und Pfennige ging. Der Fiorino wurde erst 1252 eingeführt. In der Renaissance weitet sich der Fernhandel stark aus. Bei der Gewinnermittlung in geschäftlichen Konsortien entstanden neue Anforderungen an Korrespondenz und Buchhaltung. Fernhandel bedeutet einerseits Diversifizierung des Warensortiments und andererseits Zölle bei jeder Grenzüberschreitung. Leonardo hat aber auch Aufgaben behandelt, die einfach seine Lust auf das Problemlösen dokumentieren. Unbedingt erwähnt werden muss das Kapitel *De reliquis erraticis, que ad invicem in eorum regulis variantur,*[163] das die berühmte Kaninchenaufgabe enthält und zur Fibonacci-Folge führt.

Michael Stifel (1487 – 1567) hat dagegen höhere Ambitionen. Er möchte verständlich arithmetische Operationen erklären, die man als „Kunstrechnung“ bezeichnete. Man kann ihn trotz seines fundierten Wissens als lupenreinen Autodidakten bezeichnen. Michael Stifel ist zuerst bekannt geworden als Weltuntergangsprophet. Motiv waren Zahlenspielereien in der Bibel. Er war enger Freund von Martin Luther, der ihn von dem politisch gefährlichen Weg abbrachte, so dass er in Zukunft sich durchaus mit Erfolg fast nur mit reiner Mathematik beschäftigte. Er wurde nach einigen Stationen als protestantischer Pfarrer 1559 erster Mathematikprofessor an der neugegründeten Universität Jena. Sein Hauptwerk ist die 1544 in Nürnberg erschienene a*rithmetica integra*. Der Verleger/Drucker mit besonderem Gespür war übrigens Johannes Petreius (1497 – 1550), der ein Jahr vorher *De revolutionibus* von Nikolaus Kopernikus herausgebracht hatte.[164] Durch die Verbreitung dieses Buches und der Überarbeitung der Coß von Christoff Rudolff (1499 – 1545) aus dem Jahre 1524 konnte Stifel die mathematische Nomenklatur stark beeinflussen. Er führte Plus- und Minus-Zeichen ein, Wurzeln, Bestimmung von Wurzeln, Regeln für

---

[162] https://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

[163] „*Von den übrigen erratischen Aufgaben, die sich untereinander in ihren Lösungswegen unterscheiden“*. Siehe De Padova, ebenda, S. 81 – 92 und https://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

[164] https://archive.org/details/bub_gb_fndPsRv08R0C/page/n121/mode/2up

Potenzrechnung und Vieles mehr. Er nannte die negativen Zahlen noch „*nummeri obscuri*“, rechnete aber damit. Er entwickelte das allgemeine Lösungsverfahren für quadratische Gleichungen. Die heutigen Schüler nennen es die PQ-Formel. Die Lösungen setzen den Umgang mit Wurzeln voraus und die Lösung kann auch negativ sein.

Er hat sich sehr intensiv mit der Coss (Coß, Cos) von Christoph Rudolff (1499 – 1543/45) auseinandergesetzt. Auf Bitte von Christof Ottendorfer, der auch den Druck des Buches finanzierte, gab Michael Stifel eine um mehr als das Doppelte erweiterte Überarbeitung der inzwischen vergriffenen Rudolffschen Ausgabe im Jahr 1553 heraus. „Coss“ steht im Italienischen für die Unbekannte, die wir heute meist x nennen. Rudolff´s Werk trägt den Titel „*Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeinicklich die Coß genennt werden*“. Es ist 1525 in Straßburg erschienen. Auch hier ist wieder die Zielgruppe das geschäftliche Bürgertum, vornehmlich Händler in anspruchsvollen Handelsunternehmen. Grundlage war unter anderem die Algebra von Al-Chwarizmi in einer lateinischen Übersetzung von Robert von Chester sowie Algebra-Texte von Johann Vögelin (vor 1500 - 1549).[165] Wahrscheinlich kannte er auch Johannes Widmann (1460 – 1505), der 1486 in Leipzig die erste Algebra-Vorlesung in Deutschland hielt. Der Text ist überliefert und befindet sich als Handschrift C 80 in der Sächsischen Staats- und Landesbibliothek in Dresden. Auch der Benediktinermönch Fridericus Amann († 1465) aus St. Emmeram bei Regensburg beschäftigte sich mit Algebra. Schon fast selbstverständlich ist die Tatsache, dass Regiomontanus ebenfalls Beiträge, insbesondere zur Nomenklatur, lieferte. Vier Jahre vor Rudolff´s Buch erschien ein Beitrag von Heinrich Schreyber, genannt Grammateus (vor 1496 – 1525/1526).[166] Diese Männer prägten das, was man heute die „Deutsche Coss“ nennt. Es geht bei Rudolff et. al. unter anderem um die Lösung linearer und quadratischer Gleichungen. Dieses Werk

Abb. 30: Arithmetica Integra von Michael Stifel (1544) und seine deutlich erweiterte „Cos“ von Christoff Rudolff (1553)

[165] https://de.wikipedia.org/wiki/Christoph_Rudolff
[166] Wußing, Bd. 1, S. 332,

war prägend für die Deutsche Coss, wurde von Stifel erheblich überarbeitet und ergänzt und hat Mathematikgeschichte geschrieben.[167] Das Wurzelzeichen hat sich seitdem international durchgesetzt; ebenso die Definition $x^0=1$.

Im Folgenden wird hier eine Passage des Autors aus [168] wiedergegeben. Sie soll die Vorgehensweise und den Stil von Michael Stifel verdeutlichen.

Abb. 30 zeigt einen quadratischen Ausdruck, den wir heute in der Form schreiben:

$$x^2+8x=20 \text{ oder } x^2+8x-20=0.$$

Das kleine Quadrat hat die Seitenlänge x. Ein Rechteck 8x (Länge 8, Höhe x) wird in zwei Rechtecke der Länge 4 aufgeteilt und das ergänzte Quadrat rechts unten hat somit die Fläche 4x4=16.

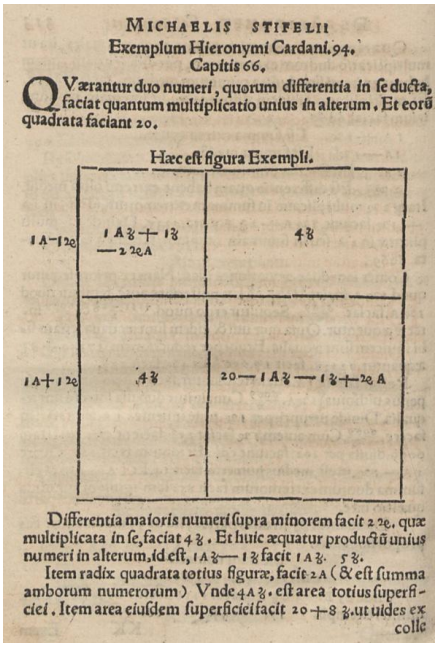

MICHAELIS STIFELII
Exemplum Hieronymi Cardani, 94.
Capitis 66.
QVærantur duo numeri, quorum differentia in se ducta, faciat quantum multiplicatio unius in alterum. Et eorũ quadrata faciant 20.
Hæc est figura Exempli.
1 A ☍ + 1 ☌ — 2 20 A
4 ☌
1 A — 1 20
1 A + 1 20
4 ☌
20 — 1 A ☍ — 1 ☌ + 20 A
Differentia maioris numeri supra minorem facit 2 2ę. quæ multiplicata in se, faciat 4 ☍. Et huic æquatur productũ unius numeri in alterum, id est, 1 A ☍ — 1 ☌ facit 1 A ☍. 5 ☌.
Item radix quadrata totius figuræ, facit 2 A (& est summa amborum numerorum) Vnde 4 A ☍. est area totius superficiei. Item area eiusdem superficiei facit 20 + 8 ☍. ut uides ex colle

Abb. 31: Quadratische Ergänzung bei Michael Stifel

Das so gebildete große Quadrat hat also die Fläche $x^2+4x+4x+16$.

Da laut Aufgabenstellung $x^2+8x=20$ ist, ergibt sich die Fläche des großen Quadrates zu 20+16=36. Also hat das große Quadrat die Seitenlänge 6.

Aus dem Vergleich des großen und des ergänzten Quadrats ergibt sich für die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats 6–4=2

Das eindeutige Ergebnis ist für Michael Stifel x=2.

Die negative Wurzel, die $x_2= -10$ ergibt, ignoriert Stifel, da das kleine Quadrat keine negative Seitenlänge haben kann.

Schaut man sich heute die sogenannte p-q-Formel an,

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

[167] https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/1317/1
[168] Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 71, Gießen 2023, W. Kafitz, Null-Geschichte Bedeutung und Verallgemeinerungen, S. 97f

so sieht man, dass p vor und unter der Wurzel als $\frac{p}{2}$ bzw. $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ auftaucht. Der Kunstgriff p·x, aufgefasst als Rechteck, in zwei Rechtecke aufzuteilen, hat also einen tieferen Sinn. (Zitatende)

An dieser Stelle auch zwei Textaufgaben von Michael Stifel:

> *Etliche sitzen in einer zech haben verzeret 75 pfennig. Gibt yeder so vil pfenning al der dritte teyl der gesellen sind. Wie vil sind yhr?*
>
> *Etliche Haubtleute liegen zu feld. Hat yeder vundersich gleych so vil fenlun als der Haubtleut sind. Sind vunder yedem fenlin 30 mal si vil knecht als fenlum im feld sind. Mangibt yedem Haubtman zu Monat sold 150 fl. Vund yedem Knecht gibt zu Monat sold/gleych so vilfloren/als der haubtleuth sind. Befindt sich´sdas die knecht zu Monat sold entpfahen 125 mal so vil als die Hauptleuth. Wie vil sind der Hauptleuth?*
>
> Lösungen: 1. Aufgabe 15 Gesellen. 2. Aufgabe 25 Hauptleute, 625 Fähnlein, 18 750 Knechte.

Sie sind mit einfachen Gleichungen lösbar und beweisen die Leistungsfähigkeit der Coss.

Ein Beispiel von Adam Ries:

> *Item, einer spricht: Gott grüß euch Gesellen alle dreyssig. Antwortet einer/wann vunser noch so viel vund halb so viel weren/so weren vunser dreyssig. Die frag/wie vil jhr gewesen?*

Heute würden wir die Gleichung $x + x + \frac{x}{2} = 30$ ansetzen und als Lösung 12 erhalten. Adam Ries muss aber, weil er auf die „cossischen“ Methoden verzichten will, die sog. Methode des doppelten falschen Ansatzes verwenden.[169]

Neben seinen wissenschaftlichen Verdiensten erkannte Regiomontanus, dass insbesondere im Bereich der Mathematik ein Verlagswesen nötig war. Obwohl er kein Buchdrucker war, gründete er 1471 in Nürnberg einen ersten Fachverlag für mathematisch-astromisch-naturwissenschaftliche Literatur. Es war ein großes wirtschaftliches Wagnis, mit diesen Titeln ein erfolgreiches Verlagsprogramm zu gestalten. Die bis heute nachwirkenden Ergebnisse seines Verlagsprogramms (Euklid, Archimedes, Apollonios von Perge) waren für berühmte Wissenschaftler, wie Galilei Galileo oder Tycho Brahe (1546 – 1601), wichtige Lektüre. Die Physik von Galileo ist ohne Archimedes kaum denkbar. Die hervorragenden Tabellenwerke von Regiomontanus, teilweise auf Basis eigener Beobachtungen und Berechnungen, begleiteten Christoph

[169] Beispiel zitiert nach Wußing, Bd. 1, S. 344-345

Kolumbus und andere Entdecker auf ihren Reisen. Für die damalige Zeit waren 11 gedruckte Werke eine beachtliche Zahl. Weitere verhinderte sein früher Tod mit gerade mal 40 Jahren. Der Papst hatte ihn wegen der notwendigen Kalenderreform nach Rom gerufen. Trotzdem muss man ihn als größten Mathematiker und Astronom seines Jahrhunderts bezeichnen. Auch wenn Regiomontanus eine herausragende Stelle beim Druck von mathematischer Literatur der griechischen Antike in dieser Zeit einnimmt, so sind auch wenig später andere Beispiele bekannt und wichtige Werke waren in wenigen Jahrzehnten für die mathematisch Interessierten gedruckt verfügbar.[170] Die Multiplikatorwirkung des Buchdrucks wirkte sich auf enorme Weise aus.

Den Entdeckungen im Bereich der Kunst geht eine intensive Rückbesinnung auf die Geometrie voraus. Euklid wird intensiv studiert und bereits 1482 wird in Nürnberg eine lateinische Druckausgabe veröffentlicht. Interessant ist die Tatsache, dass nicht nur rein akademische Kreise oder allein Bildungsideale und technischer Fortschritt die Beschäftigung mit der Geometrie idealisieren. Im Jahr 1543 wird die Gesellschaft Jesu gegründet. Mit äußerst rigiden Methoden strebt sie eine Rekatholisierung an. In den sogenannten Jesuitenkollegs spielt die Geometrie eine herausragende Rolle. Der deutsche Jesuit Christoph Clavius (1537 – 1612) brachte eine deutlich erweiterte Euklid Ausgabe 1574 heraus. So wie man davon ausgehen kann, dass Euklid das geometrische Wissen seiner Zeit bündelte, so ergänzt Clavius die antiken Bücher XIV und XV um Ergebnisse, die fast 2.000 Jahre nach Euklid noch erzielt wurden. Man gab Clavius den Ehrentitel „Euklid des 16. Jahrhunderts“. Auch mit der Astronomie hat er sich erfolgreich beschäftigt und hat an der Verbesserung des Julianischen Kalenders gearbeitet.[171]

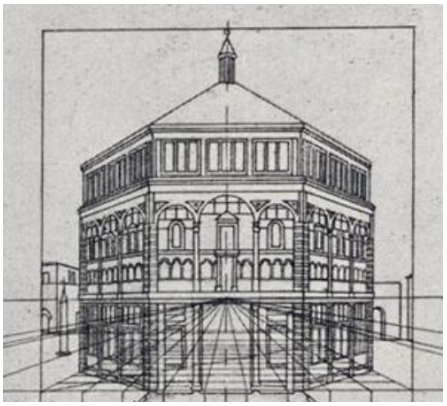


Abb. 32: Erfindung der Zentralperspektive durch Filippo Brunelleschi

[170] Siehe Frank, Martin, Mathematik der Renaissance: Studien zur Herausbildung und Verbreitung der neuzeitlichen Wissenschaften, Deutsches Museum Verlag, München 2016, Preprint 11, S. 9

[171] Wußing, Bd. 1, S. 346

Vor allem die italienischen Maler entdeckten die Zentralperspektive, allen voran Filippo Brunelleschi (1377 – 1446). Sein Verdienst liegt auch im architektonischen Bereich. Er entwarf beim Dom von Florenz, der *Cattedrale Metropolitana di Santa Maria del Fiore*, die gigantische Kuppel. Sie hat eine Fundamentbreite von 90 Metern. Bei Beginn des Kirchenbaus war ein Plan und eine verlässliche Statik der Kuppel noch nicht verfügbar. Brunelleschi entstammte nicht aus der Zunft der Steinmetze, hatte aber fundierte Kenntnisse von Kuppelbauten in ganz Europa und der arabisch-persischen Welt. Er ging bei der Konstruktion neue Wege und musste auch bei der Realisierung äußerst innovative Maschinen bauen, die in der frühen Renaissance Neuland beschritten. Die Bauzeichnungen klassischer Art waren oft untauglich, da sie eine ebene, planare Geometrie benutzten, die räumliche Vorstellungskraft nicht begünstigte. Brunelleschi stützte sich viel stärker auf die Mathematik insbesondere auf die Geometrie, denn er benötigte in seinen exakten Zeichnungen perspektivische Tiefe. So entstand aus der Praxis heraus die projektive Geometrie.[172] Siehe dazu auch im historischen Teil das Experiment von Brunelleschi und Tommasio di Ser Cassai als Maler des ersten zentralperspektivische Bild der Weltgeschichte. Wie bereits darauf hingewiesen, galt er bereits Zeitgenossen neben Filippo Brunelleschi, Lorenzo Ghiberti (1378 – 1455) und Donatello (1386 – 1466) als Erneuerer der Florentiner Kunst.

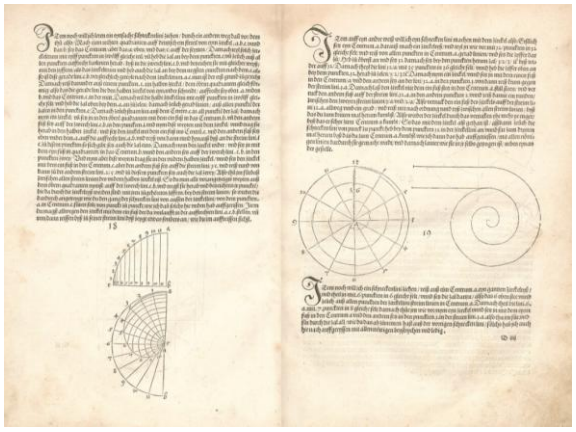


Abb. 33: Dürer als Mathematiker, Doppelseite aus der „Unterweisung“

Abb. 34: Albrecht Dürer, Melencolia I, 1514

Man konnte die Welt wie mit einem Blick durch das Fenster naturgetreu abbilden. Albrecht Dürer (1471 – 1528) hat die Vorteile ebenfalls erkannt und sich mathematisch damit auseinandergesetzt. Allerdings waren die italienischen Künstler nicht sehr mitteilungsfreudig. Dürer soll sich deshalb in

[172] Siehe Manon Bischoff, Eine neue Art der Geometrie dank dem Dom zu Florenz, Spektrum der Wissenschaft 2/25, S. 71

Bologna mit Luca Pacioli getroffen und sogar angefreundet haben.[173] Er hat viele seiner Erkenntnisse veröffentlicht. Wie andere prominente Persönlichkeiten der Renaissance, ist auch Dürer aus der Praxis heraus zur Mathematik gekommen. Ein Beispiel ist sein Kupferstich „Melencolia I“. Das Bild enthält eine Fülle von Allegorien.[174] Interessant ist das Magische Quadrat, das scheinbar auf einer Metallplatte in die Südwand des Turmes oder Pfeilers unter einer Glocke eingelassen ist. Man erkennt in der untersten Reihe links die 4 (sie steht für D als 4. Buchstaben des Alphabets) und rechts die 1 für A als ersten Buchstaben. Sie weisen auf Dürers AD-Signatur hin und schließen die Jahreszahl 1514 ein, in der das Kunstwerk entstanden ist. Die Summe aller Reihen, Spalten, Diagonalen, Quadranten und der Ecken des Magischen Quadrats ergeben jeweils 34. Der Engel trägt Zirkel und Buch, zu seinen Füßen ein Lineal (Richtscheyd) und ist umgeben von geometrischen Körpern und einer Waage, einer Sanduhr und Sonnenuhr. Michael Stifel beschreibt in seinem ersten Buch seiner Arithmetica Integra die systematische Erstellung von Magischen Quadraten. Das Bild ist eine Hommage Dürers an die Mathematik, mit der er sich intensiv beschäftigt hat und weist auf die Bedeutung des Messens auch in der Kunst hin. Von Dürer ist ein Stich bekannt, in dem ein Maler durch ein Velum („Fadengitter“) eine liegende Person abzeichnet (Vermessung einer Liegenden, Albrecht Dürer (1525)).[175]

Dürer steht damit in einer Reihe mit dem Ingenieur Simon Stevin, dem Kartographen Gerhard Mercator (1512 – 1594), dem Juristen und passionierten Mathematiker François Viète, dem Uhrmacher, Erfinder von Instrumenten, Mathematiker und Astronom Jost Bürgi und anderen Künstlern, wie Leonardo da Vinci oder Piero della Francesca. Piero della Francesca (um 1416 − 1492) war ein hoch geschätzter Maler. Er hat aber auch mathematische Bücher verfasst. Themen waren geometrische Studien zur Perspektive, über die fünf platonischen Körper und auch zu Arithmetik und Algebra.

François Viète musste sich aufgrund politischer Intrigen einige Zeit aufs Land zurückziehen. Maßgebliche Werke, etwa von Stifel oder die Artis magna von Cardano, lagen ihm vor und er war profunder Diophantos-Kenner. Er hat sich auf dieser Basis einen Ruf als Begründer der Algebra in der Neuzeit erworben. Insbesondere führte er die moderne Notation ein und reduzierte mathematische Operationen möglichst auf Formeln. Er differenzierte zwischen *logistica numerosa* (Zahlenrechnen) und abstraktem „Buchstabenrechnen“, dem „*logistica speciosa*“. Aus einer Nebenbeschäftigung heraus wurde er zum Begründer der modernen Algebra. Als Beispiel für seine Notation:

---

[173] https://badw.de/fileadmin/pub/akademieAktuell/2008/26/04_Bulirsch.pdf
[174] https://de.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I
[175] https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Dürer-_Frau-_Vermessung,1525.jpg

Moderne Schreibweise: $\frac{B \cdot A}{D} + \frac{B \cdot A - B \cdot H}{F} = B$

Bei Viète: $\frac{B\ in\ A}{D} + \left\{ \frac{\frac{B\ in\ A}{-B\ in\ H}}{F} \right\}\ aequale\ B$

Bei folg. Schreibweise wirkt das griechische Erbe deutlich nach.

Modern: $B \cdot A^2 + D \cdot A = Z$

Bei Viète: $B\ in\ A\ Quadratum, plus\ D\ plano\ in\ A, aequari\ Z\ solido.$

Um die euklidisch-geometrische Exaktheit einzuhalten, ist D als Fläche und Z als Körper deklariert worden.[176]
Er stand in Kontakt zu Jacques Peletier, auch Jacques Peletier du Mans (1517 – 1582).[177] Auch er war gelernter Jurist und Sohn eines Juristen. Wandte sich aber davon ab und studierte autodidaktisch Griechisch, Medizin und Mathematik.

Jost Bürgi fällt bei den genannten Namen vollkommen aus dem Rahmen. Er konnte kein Latein, soll sogar Legastheniker gewesen sein, hatte keine klassische Bildung. Über Elternhaus und Jugend weiß man fast nichts. Er wurde Silberschmied. Er wurde jahrhundertelang vorwiegend als Instrumentenbauer angesehen (Schöpfer der ersten astronomisch genutzten Sekundenuhr, Hersteller präziser Himmelsgloben und als Konstrukteur wissenschaftlicher

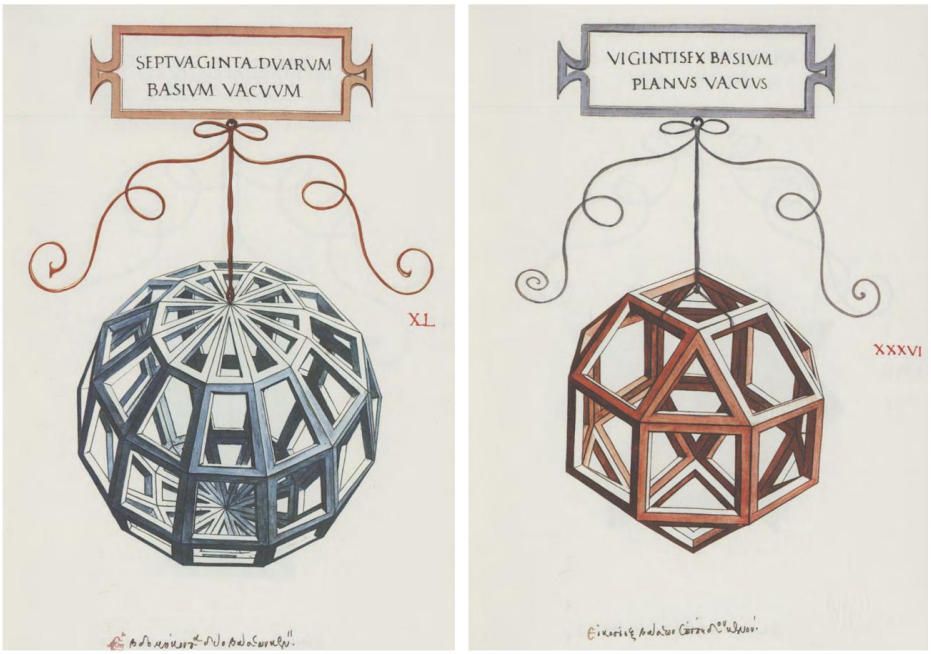



Abb. 35: Zwei der zahlreichen Grafiken von Leonardo da Vinci als Anhang in der *Divina Proportione* von Luca Pacioli.

[176] Zitiert nach Gronau, ebenda, S. 73
[177] https://de.wikipedia.org/wiki/Jacques_Peletier

Messgeräte). Weiter wurde bekannt, dass er auch Erfinder der Logarithmen war, stand aber immer im Schatten von Napier. Trotz seiner geringen Vorbildung stellte er aber in seinen praktischen Leistungen seine mathematisch-technische Genialität unter Beweis. In der Wissenschafts-, Astronomie-, Mathematik- und Instrumentengeschichte ist dieses geballte Können schon fast einmalig. Er verließ sich nicht auf Tabellenwerke, sondern sammelte sein Datenmaterial selbst – teilweise in dem er eigene Instrumente dafür entwarf und baute. Dazu zählt ein Sextant aus Metall und eine auf Sekunden genaue Observationsuhr. Erst auf diese eigenen Daten wendete er seine von ihm entwickelten mathematischen Methoden an, wie Sinus-Bestimmung, Logarithmenrechnung und genauen Methoden für die Positionen der Himmelskörper.[178] Da er fast kein Latein kannte, ließ sich Bürgi *De revolutionibus* von Raimarus Ursus (1551 − 1600) in Deutsch übersetzen. Es ist die erste Übersetzung ins Deutsche und wird heute in der Universitätsbibliothek in Graz aufbewahrt.[179]

Im Gegensatz zu Leonardo da Vinci, der sich teilweise autodidaktisch beschäftigte und dessen bahnbrechende Ergebnisse sich oft erst aus seinem Nachlass erschließen, hat Piero della Francesca (um 1410/20 – 1492) aus der Praxis heraus auch komplizierte geometrische Probleme der Zentralperspektive mathematisch bewältigt. Er stammte aus Borgo San Sepolcro in der Toscana und hatte somit den gleichen Heimatort wie Luca Pacioli. Trotzdem muss man Leonardo da Vinci zweifellos als herausragenden Künstler der Renaissance mit einer Fülle von wegweisenden Interessen bezeichnen. Sein wichtiger „Sparringspartner“ und Lehrer war Luca Pacioli (1445 – 1517), Franziskanermönch und Mathematiker, der ein einflussreiches Buch über den „Goldenen Schnitt“ veröffentlichte („*Divina Proportione*“).[180] Der Goldene Schnitt hat seit der Antike eine herausragende Bedeutung in der Architektur. In der Renaissance wurde er ein wichtiges Kriterium in der darstellenden Kunst. Die wunderbaren Grafiken im Anhang von Pacioli´s Buch stammen von Leonardo da Vinci. Auf jeden Fall entsteht hier eine Allianz aus Ästhetik und Mathematik, die über die Kunst hinausreicht. Pacioli hat 1494 auch als Erster die doppelte Buchführung proklamiert, die sich weltweit in den Wirtschaftswissenschaften durchgesetzt hat („*Summa de arithmetica*“).[181]

Die Revolution der Renaissance setzt sich aus vielen mehr oder weniger spektakulären Erfindungen, globalen Entwicklungen und Einzelprozessen zusammen. Sie gehen sehr weit über die Mathematik hinaus und es wäre

---

[178] https://de.wikipedia.org/wiki/Jost_Bürgi#Mathematisches_Werk
[179] https://imsc.uni-graz.at/gronau/Gm.pdf
[180] https://archiviostorico.mediobanca.com/wp-content/uploads/2021/01/De-Divina-Proportione.pdf mit über 60 Seiten corpi regolari von Leonardo da Vinci
[181] https://library.si.edu/digital-library/book/summadearithmeti00paci

vermessen, sie auf ein Fachgebiet zu reduzieren. Aber sehr oft gibt es mehr oder weniger große oder kleine mathematische Konsequenzen. So muss man die Null als Zahl akzeptieren, aber auch die negativen Zahlen. „*Die Null ist ein Zeichen, das da sein muss, um auszusagen, dass nichts da ist.*“[182] Nicht nur aus praktisch-technischen Gründen erfolgte eine Aufwertung der Mathematik. Die Mathematik wurde als wichtige Säule des Fortschritts verstanden. Eine bemerkenswerte Entdeckung ergänzte schließlich die Welt der Zahlen.

Gerolamo Cardano, (1501 – 1576), wurde als unehelicher Sohn des Juristen Fazio Cardano (1444 – 1524), eines Freundes von Leonardo da Vinci, im Herzogtum Mailand in Pavia geboren. Es ist nicht leicht, ihn anhand der teils widersprüchlichen Quellenlage in der Literatur zu charakterisieren. Er studierte Medizin und wechselte mehrmals die Universität, wurde aber 1525 noch als Student (!) zum Rektor der Universität Padua gewählt. Allerdings hatte das Amt vor allem Repräsentationspflichten. 1526 promovierte er zum Doktor der Medizin. Es folgte eine unermüdliche Autorentätigkeit. Sein enormes Wissen und seine Gelehrsamkeit wurden anerkannt. Aber sein hochmütiger Charakter und sein aneckender Lebensstil machten ihn unbeliebt.[183] Mathematiker würdigen besonders, dass er sich systematisch mit kubischen Gleichungen beschäftigte und Lösungen entdeckte, deren Quadrat eine negative Zahl ergab. Dies wurde zunächst als Spielerei und Kuriosum angesehen, war aber die Geburtsstunde der komplexen Zahlen, die von da an einen Siegeszug in der Geschichte der Mathematik antraten. Er relativiert dies mit einer geheimnisvollen Bemerkung: *So schreitet die Arithmetik scharfsinnig voran. Das Ende ist, wie gesagt, so raffiniert, wie es unnütz ist*.[184] Fest steht: Er war notorischer Spieler mit einer schillernden Persönlichkeit. In seiner Autobiographie spricht er selbst über seinen Charakter ein vernichtendes Urteil.[185] Aber zugleich wurde er zum führenden Kopf und Humanisten seines

---

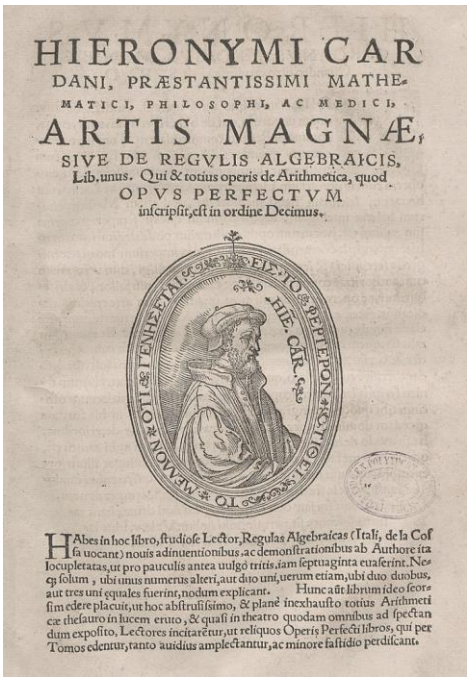
[182] Menninger, Karl, Zahlschrift und Rechnen, Bd. 2, ebenda, digitalisiert S. 214

[183] Wußing, Hans; Arnold, Wolfgang; Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen, Berlin 1975, S. 114

[184] Cardano, G., 1545, Artis Magnae, sive de Regulis Algebraicis, Liber unus, Nürnberg, zitiert nach Wußing, ebenda, Bd. 1, S. 392

[185] *„Über meinen natürlichen Charakter bin ich mir durchausklar geworden: ich bin heftig von Temperament, naiv, der Sinnlichkeit ergeben. Und aus diesen Eigenschaften, gleichwie aus Prämissen, folgen die weiteren: Grausamkeit, hartnäckige Streitsucht, eine gewisse Rauhheit des Charakters, Unvorsichtigkeit, Jähzorn und eine Rachgier, die das Maß meiner Kräfte und Mittel weit übersteigt, jedenfalls aber ein stets zur Vergeltung geneigter Wille, der dem alten Worte huldigte, das so viele — mit dem Munde wenigstens — verdammen »Süßeres Gut noch als selbst mein Leben dünkt mir die Rache.« Im Allgemeinen habe ich nie gewollt, daß der berühmte Satz an mir seine Gültigkeit verliere: »Unsere Natur ist geneigt zum Bösen.«* Des Girolamo Cardano von Mailand eigene Lebensbeschreibung, übertragen und eingeleitet von Hermann Hefele, Jena, 1914, verlegt bei Eugen Diederichs.

Jahrhunderts. Zunächst war er in den ersten vier Jahrzehnten seines Lebens bitterarm, wurde aber später erfolgreicher Arzt und sogar Medizinprofessor in Bologna. Allerdings waren die politischen Verhältnisse in dieser Zeit äußerst prekär. Die italienischen Kriege und die Eroberung Mailands durch die Franzosen hinterließen tiefe politische und wirtschaftliche Spuren. Cardano kämpfte viele Jahre um eine Aufnahme in die Ärztekammer, die ihm ein einigermaßen geregeltes Einkommen verschaffen würde. Fast nebenbei wird er zum Pionier der algebraischen Gleichungslehre. Cardano nur als Mathematiker zu charakterisieren wird seinem Naturell nicht gerecht. Er hat ca. 130 Bücher zu unterschiedlichen Themen geschrieben.[186] Er erfand die kardanische Aufhängung; die Kardanwelle trägt seinen Namen. Er verzeichnete bedeutende Erfolge als europaweit bekannter Arzt mit spektakulären Erfolgen. Er war ruhelos auf der Suche nach Ruhm, aber man konnte ihn trotzdem nur schwer als Universalgelehrten bezeichnen. Vor allem die Astrologie machte ihn damals berühmt und wirtschaftlich erfolgreich. Er wollte sie zu einer empirischen Wissenschaft machen und sammelte eine Fülle von Daten zu vielen Personen und Persönlichkeiten, darunter Päpste und gekrönte Häupter und stellte sogar für Jesus das Horoskop. Mit diesem Fokus war er für Petreius als Verleger interessant. Weiterhin war er Begründer der Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Dass seine Motivation seine Spielsucht war, hindert ihn nicht, zum ersten Mal eine systematische Abhandlung zu verfassen und damit eine ganze Disziplin der Mathematik zu begründen. Im Alter veröffentlicht er seine Erkenntnisse in „Das Buch der Glücksspiele (*Liber de Ludo Aleae*). Er hilft die Algebra zu etablieren und hat die Anfänge der komplexen Zahlen gefunden. Er lässt also Wurzeln aus negativen Zahlen zu. Das alles


HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE-
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cosa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Nec ea solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni quales fuerint, nodum explicant. Hunc aũ librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Abb. 36: Gerolamo Cardano: *Artis magna*, 1545

https://resources.warburg.sas.ac.uk/pdf/nah3725b2324426.pdf, S. 38

[186] Nach einer Aufzählung von Hermann Hefele, ebenda, S. 36: „*Moralwissenschaft und Moralphilosophie, Lebenskunst und Politik, Gedächtniskunst, Orthographie, Logik, Dialektik, Metaphysik und Mystik, Naturgeschichte und Naturphilosophie, physikalische Experimente und Theorien, alle Disziplinen der Mathematik, Geometrie und Algebra, theoretische Untersuchungen über Probleme der Musik, des Schach und der verschiedenen Glücksspiele, Astronomie und Astrologie und endlich eine Reihe Kommentare zu klassischen Werken der Heilkunde und selbständige Abhandlungen aus dem Gebiet der theoretischen und praktischen Medizin.*“

macht ihn alleine schon zu einem herausragenden Mathematiker. Wie Stifel musste er eine mathematische Nomenklatur definieren und will insbesondere die Algebra zu einer abstrakten Formelsprache entwickeln. Er lehnt sich an die lateinische Sprache bei der Einführung der Symbole an. So nimmt er „p“ für Plus und „m“ für Minus; Stifel und Cardano erkennen beide die Notwendigkeit, mathematische Operationen von der Sprache zu entkoppeln. Stifel definiert behutsam „+“ und „–“, die sich auch durchsetzen werden. Für die Multiplikation schreibt Stifel „mal“ einfach aus. In einem nicht veröffentlichten Entwurf für eine Algebra („Coss“) benutzt Adam Ries Malpunkte. Im Gegensatz zu Plus und Minus bürgert sich der Malpunkt deutlich später ein.[187] Die Mathematik ist in dieser Zeit von einer einheitlichen, international verbindlichen Formelsprache weit entfernt. Seine Studien hat Cardano als Medizinstudent mit astrologischen Themen begonnen und auch mit seinem 1534 veröffentlichten „*Prognosticon*“ eine Schrift veröffentlicht. Er wendet sich gegen Weltuntergangstheorien und positioniert sich aus dieser Haltung heraus zum Gegner von Martin Luther (1483 – 1546). Luther sympathisiert mit diesen Thesen, erkennt aber deren politische Brisanz und holt auch seinen Freund und Schützling Michael Stifel aus der Schusslinie. Cardano ist zweifellos eine der schillersten, aber auch genialsten Persönlichkeiten dieser Epoche. Seine „Gratwanderungen“ führten zu einem Konflikt mit der Inquisition. Viele seiner Bücher wurden in Nürnberg, Basel und Lyon gedruckt und haben damit die Zensur umgangen. Er wird teilweise rehabilitiert, muss aber seine Professur aufgeben, darf nicht mehr veröffentlichen, wird aber mit einer päpstlichen Pension in Rom versorgt und „ruhiggestellt“. Die eigentlichen Vorwürfe wurden selbst bei einer Öffnung der Archive nach dem Jahr 2000 nicht vollständig aufgeklärt.[188]

Die italienischen Mathematiker sind zwar in mancher Beziehung Vorreiter; bei der Nomenklatur setzt sich z.B. Stifel oder Ries weitgehend durch bzw. sie machen Vorschläge in die sinnvolle Richtung. So schreibt Stifel eine Zahl, die 11-mal mit sich selbst multipliziert 38 ergibt, als $11\sqrt{38}$. Daraus wurde schließlich $\sqrt[11]{38}$. Tatsächlich haben aus unterschiedlichen Gründen deutsche Mathematiker in ihren Harmonisierungsbestrebungen der Formelsprache die Nase vorn. Mathematikhistoriker bezeichnen diese Phase als „Deutsche Coss“. Ein Grund kann in der deutschen Kleinstaaterei gelegen haben und im gewachsenen System der Rechenschulen, anders etwa als in Frankreich. Der Buchdruck war zudem ein Multiplikator. Der Wandel zur einheitlichen Formelsprache erfolgte kontinuierlich, nicht plötzlich. Die Übersetzungen ins Lateinische förderten die europäische Verbreitung.[189] Es folgten die heute gebräuchlichen runden Klammern zur Trennung von Teilausdrücken. Einen

[187] De Padova, ebenda, S. 280
[188] https://de.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano
[189] De Padova, ebenda, S. 282

Beitrag lieferte auch der wallisische Arzt und Mathematiker Robert Recorde (1510 – 1558). Obwohl er prominente Patienten als Arzt behandelte, soll er in Schuldhaft gestorben sein. In seinem „*Whetstone of Witte*“ (1557 gedruckt, Wetzstein des Geistes) führt er mit Begründung für das gewählte Symbol das Gleich(heits)zeichen „═“ ein und vermeidet damit leidige Wiederholungen wie „ist gleich“ in den jeweiligen Sprachen. Er steht in der Tradition der Deutschen Coss und trůg als Wegbereiter der Algebra in England zur Entwicklung der Mathematik auf der Insel bei.[190]
Der schon genannte Simon Stevin (1548 – 1620) war ein bemerkenswert vielseitiger Naturforscher, Ingenieur und Mathematiker. Auch ihn kann man zu den Pionieren der Algebra zählen und er bemühte sich, diese als eigenständige Disziplin zu etablieren. Er schaffte Grundlagen sowohl in kommerziell-merkantilen Anwendungen als auch in seiner Eigenschaft als Zivil- und Militäringenieur. Als die Türken bis vor die Tore von Wien gelangten, bekam Stevin Kenntnis über die „Türkischen Zahlen“, das sind Dezimalbrüche mit einer speziellen Notation. Stevins Verdienst ist die Einführung der Dezimalbrüche in Europa. Er publizierte 1585 ein Buch mit dem Titel „*De Thiende*“ (Der Zehntel). Für die Dezimalzahl 6,3759 verwendete er die Schreibweise

6⓪3①7②5③9④

Die eingekreisten Ziffern kann man als den ganzen, zehnten, hundertsten, tausendsten, usw. Teil der Zahl davor lesen.[191]
Für kubische Gleichungen verwendet er die Notation

③ gleich ①⓪ (entspricht $x^3 = ax + b$)

③ gleich ②⓪ (entspricht $x^3 = ax^2 + b$)

Stevin wirkte von Flamen aus als ein Pionier bei der mathematischen Notation und der Etablierung der Dezimalbrucharithmetik. Er erkannte, dass damit die Ausdrucksmöglichkeiten der Mathematik stark gesteigert wurden.

Insbesondere von Luca Pacioli wurde Pedro Nunes (1502 – 1578, lat. Nonius) maßgeblich beeinflusst. Er übernahm seine Nomenklatur. Er wurde in Alcácer do Sal an der Algarve als Sohn einer jüdischen Familie geboren. Er studierte in Salamanca / Spanien und heiratete nach seinem Abschluss in Medizin die Tochter eines spanischen Christen. Mathematische Kenntnisse wurden in diesem Studiengang ebenfalls vermittelt und Nunes erwies sich als so begabt, dass er zuerst in Lissabon und 1537 in Coímbra Mathematik-Professuren

[190] Wußing, Bd. 1, ebenda, S. 322
[191] Wußing, Bd. 1, ebenda, S. 324

erhielt. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker und Astronomen Portugals. Er erwarb sich große Verdienste im Bereich Navigation und speziell in der Winkelmessung und ihrer genaueren Ablesung. Von seinem lateinischen Namen stammt heute noch die Bezeichnung „Nonius“. Portugal war in seiner Zeit im 16. Jahrhundert eine der führenden Seefahrernationen und wie Spanien im Besitz eines Weltreichs. Gutes Kartenmaterial und effektive Navigation waren wirtschaftlich wie militärisch extrem wichtig. Er erkannte, dass in der Mercator-Projektion, in der die Erdoberfläche flach dargestellt ist, ein scheinbar geradliniger Kurs nicht die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten auf der Erde entspricht. Als Erster beschrieb er etwa um 1550 das Prinzip der Loxodrome. Der gewünschte optimale Kurs besteht darin, immer den gleichen Winkel zum Meridian einzuhalten.[192] Nunes schrieb auch 1532 ein Buch über Algebra in Portugiesisch, wollte es eigentlich in Spanisch gedruckt sehen, aber Cardano kam ihm 1545 mit der *Artis magna* zuvor. Nunes hat sich allerdings mit der deutschen Coss wohl kaum beschäftigt. Sein großes Verdienst liegt in den mathematischen Bezügen von Navigation und Kartographie. Auch als Lehrer hatte er berühmte Schüler, wie der bedeutende Seefahrer und spätere Vizekönig von Indien João de Castro (1500 – 1548).[193]

Abb. 37: Weltkarte von Mercator mit dem Riesen Atlas

Der oben genannte Mercator-Entwurf oder – Projektion ist benannt nach dem flämischen Geographen und Kartographen Gerhard Mercator (eigentlich Kremer, 1512 – 1594). Die Meridiane und Breitenkreise stehen senkrecht zueinander. Das führt zu einer Verzerrung, insbesondere in der Nähe der Polregionen, die allerdings damals sowieso von den Seefahrern gemieden wurden. Loxodrome erscheinen als Geraden. Nunes hat daraus ein klares Navigationsprinzip entwickelt. Der Ruhm von Mercator hält bis heute an. Noch posthum gab sein Sohn eine auf den Arbeiten des Vaters basierende, gedruckte Weltkarte heraus. Auf dem Titelblatt trägt der Riese Atlas die

[192] https://de.wikipedia.org/wiki/Pedro_Nunes
[193] https://de.wikipedia.org/wiki/João_de_Castro_(Vizekönig)

Erdkugel. So entstand der Name „Atlas“ als Begriff für geographisches Kartenmaterial.
Ein weiterer Protagonist der ersten Stunde war der schon genannte Niccolo Tartaglia (1500? – 1557). Er war ein bettelarmer Sohn eines Briefträgers in Brescia. Als er etwa mit 12 Jahren während der Plünderung seiner Heimatstadt durch die Franzosen schwer am Kopf verwundet wurde, entstand eine Sprachstörung. Da er seinen Nachnamen nicht kannte, wurde er Tartaglia – der Stotterer – genannt. Er war lupenreiner Autodidakt, der sich nach nur 14 Tagen Schulunterricht das Lesen und Schreiben beibrachte. Bis zu seinem Tod lebte er in ärmlichen Verhältnissen. Er lehrte aber auf durchaus hohem Niveau Mathematik, allerdings nie in einer Festanstellung. Cardano und Tartaglia sind in der Mathematikgeschichte bekannt durch einen heftigen Prioritätenstreit im Zusammenhang mit Lösungen für kubische Gleichungen. Cardano wurde nach einem gegebenen Versprechen an Tartaglia des Wortbruchs beschuldigt. Das muss man mittlerweile relativieren.[194] Scipione dal Ferro (1465 – 1526)[195], Inhaber eines Lehrstuhls für Arithmetik und Geometrie an der Universität von Bologna, hatte bereits früher die Lösungen gefunden, aber offenbar nicht veröffentlicht, da er sie zu Prüfungszwecken verwenden wollte. Cardano erfuhr davon und fühlte sich nicht mehr an sein Versprechen gebunden. So entstand der Streit, der bei der Geburt eines neuen Zahlentyps Mathematikgeschichte schrieb.
Während man heute mit

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

eine einzige Gleichung als Polynom schreibt, wobei a, b, c positiv, negativ oder 0 sein können, wurden damals negative Zahlen noch abgelehnt und bei einem Koeffizienten 0 eine eigene Lösung gesucht. Daher entstehen aus damaliger Sicht 13 verschiedene Lösungen. Der große Luca Pacioli hatte die rechnerische Auflösung der kubischen Gleichungen der Typen

$ax^3 + cx + d = 0$ und $ax^3 + d = cx$, jeweils mit positiven Koeffizienten,

für unmöglich erklärt. Cardano präsentierte in seiner *Artis magna*, die 1545 in Nürnberg erschien, eine Lösung unter Nennung aller Beteiligten.
Eine Gleichung 3. Grades kann in der Form geschrieben werden.

$$x^3 = bx + c, \qquad b, c \in \mathbb{R}$$

Die Cardano-Formel lautet

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \omega} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \omega} \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{b}{3}\right)^3}$$

Es ist also eine Quadratwurzel unter einer Kubikwurzel.
Hier kann aber der sogenannte *Casus irreducibilis* auftreten.

---

[194] Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Niccolo_Tartaglia
[195] https://de.wikipedia.org/wiki/Scipione_del_Ferro

Man betrachte $x^3 = 15x + 4$. Sie hat die Lösungen 4, $\sqrt{3} - 2$, $-\sqrt{3} - 2$.
Die Cardano-Formel liefert jedoch

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

Das sind Quadratwurzeln aus negativen Zahlen, mit denen damals noch nicht umgegangen werden konnte. Cardano schreckte davon nicht zurück.
Tartaglia lieferte interessante Beiträge in der damaligen mathematischen Diskussion, u.a. Lösungen der drei kubischen Gleichungen ohne quadratisches Glied. Er wollte die Flugbahnen von Kanonenkugeln berechnen und war damit Vorreiter der Ballistik.
Auch das ist ein Kennzeichen der mathematischen Diskussion in der Renaissance. Es wurde nicht sofort veröffentlicht, sondern die „Rechenmeister" traten vor allem im Renaissance-Italien des 16. Jahrhunderts zu öffentlichen Wettkämpfen gegeneinander an und stellten sich Aufgaben. Es war also von Vorteil, eigene Ergebnisse zunächst zurückzuhalten. Vor allem die Universität Bologna war bekannt für ihre öffentlich ausgetragenen Mathematikwettbewerbe. Es war ein Schaulaufen der Rechenmeister bzw. der akademischen mathematischen Elite in Form eines gesellschaftlichen Ereignisses. Die angetretenen Protagonisten mussten komplizierte Probleme meist unter Zeitdruck lösen. Das Schauspiel erinnert an Gladiatorenkämpfe auf mathematischer Ebene.
Als nächster Name muss Rafael Bombelli (1526 – 1572) genannt werden. Bombelli war eher als Ingenieur im Landbau und bei der Entwässerung von Sümpfen tätig. Er veröffentlichte 1572 sein Werk „*Algebra*" (ital. *L´Algebra*). Er soll als Erster die heute standardisierte mathematische Klammerschreibweise mit verschachtelten runden Klammern eingeführt haben. In der „*Algebra*" verwendete er negative Zahlen und auch imaginäre Zahlen. Sie erschien zunächst als fünfbändiges Werk und wurden erst aus seinem Nachlass 1929 um zwei weitere Bände ergänzt. Er erweiterte die Lösungstheorien von Cardano und Tartaglia um eigene Erkenntnisse. Leibniz und Euler haben sich offenbar wohlwollend positiv über Bombellis Werk geäußert.[196] Bombelli führt einige komplexe Rechnungen korrekt aus: So ist

$(2 \pm i)^3 = 2 \pm 11i$ also $\sqrt[3]{2 \pm \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$

Mit Bezug auf Cardano wendet er diese Identität auf die Gleichung

$x^3 = 15x + 4$ an.[197]

Dort lautet die Cardanosche Lösungsformel

[196] https://de.wikipedia.org/wiki/Rafael_Bombelli
[197] Ebbinghaus, Heinz-Dieter (Hrsg.), Zahlen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 3. Auflage 1992, S. 47

$$x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$$

$\left(2 \pm \sqrt{-1}\right)^3 = 2 \pm \sqrt{-121}$ also ist $\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = 2 \pm \sqrt{-1}$

Aus der Cardano-Formel folgt dann $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$

Der *Casus irreducibilis* zeigt, dass man zwingend mit Wurzeln aus negativen Zahlen rechnen muss, wenn alle drei Lösungen einer kubischen Gleichung reell sind. Man kann sagen, dass der *Casus irreducibilis* der eigentliche Grund für die Einführung der komplexen Zahlen war. Bombelli rechnete ganz selbstverständlich damit, allerdings nur in komplexen Zahlen der Form $a \pm \sqrt{-b}, a, b \in \mathbb{R}$. Die heutige Schreibweise mit $i = \sqrt{-1}$ wurde von Leonhard Euler 1777 eingeführt. Er zeigte auch den ersten Schritt, dass bezüglich der vier Grundrechenarten die komplexen Zahlen abgeschlossen sind und dass Wurzelziehen und Logarithmieren sinnvoll sind. Das ist die Voraussetzung, dass es sich bei den komplexen Zahlen um einen mathematischen Körper handelt. Mit Euler waren die komplexen Zahlen endgültig in der Mathematik nicht mehr wegzudenken.

Interessant ist, dass der geniale und für Neues aufgeschlossene Mathematiker Simon Stevin die komplexen Zahlen konsequent ablehnte. Ein anderer Niederländer, Albert Girard (1595 − 1632), lässt komplexe Lösungen zu, weil er damit schon eine erste Fassung des Fundamentalsatzes der Algebra formulieren kann. René Descartes (1569 − 1650) prägte den Begriff „imaginär“. Abraham de Moivre (1667−1754) beweist die nach ihm benannte Formel:

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}\left(\cos n\alpha \pm \sqrt{-1}\sin n\alpha\right)^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}\left(\cos n\alpha \pm \sqrt{-1}\sin n\alpha\right)^{-\frac{1}{n}}$$

An dieser Stelle darf der Hinweis auf die „schönste Gleichung der Mathematik“ nicht fehlen $e^{i\pi} + 1 = 0$

Euler hat sie aus der Formel hergeleitet:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Mit den Namen Cardano, Tataglia, Scipione dal Ferro und Bombelli hat ein neues bzw. erweitertes Zahlensystem, die imaginären und komplexen Zahlen, in der Renaissance das Licht der mathematischen Welt erblickt.

Aus der mehr spielerischen Entdeckung ist ein äußerst fruchtbares Feld entstanden, das auch in der Physik und Technik unverzichtbar geworden ist.

Doch nicht nur Mathematiker setzen wichtige Impulse, wie das Beispiel Petreius zeigt. Im 16. Jahrhundert etabliert sich der in Basel gelernte Drucker Johann Petreius in Nürnberg. Er taucht erstmals 1526 im Ämterbüchlein der Stadt Nürnberg auf. Gerade in dieser bedeutenden Stadt muss er sich gegen starke Konkurrenz behaupten und darf sich bei Aufträgen anfangs nicht um fachliche

Präferenzen kümmern. Doch schon Anfang der 1530-er Jahre ist eine Spezialisierung erkennbar. Er wird auf das noch unvollendete Verlagsprogramm von Joannis de Regiomonte aufmerksam. Er möchte die Schriften von Regiomontanus selbst auflegen. Parallel werden an anderer Stelle wichtige Werke der griechischen Mathematik gedruckt: 1533 die Elemente des Euklid in griechischer Sprache, 1537 die Kegelschnitte des Apollonios und 1544 ein enorm wichtiger Kodex des Archimedes, den Regiomontanus inhaltlich behutsam überarbeitet und sprachlich korrekt übersetzt hat. Dazu kommt noch sein „*De triangulis omnimodus*“, die umfassende Darstellung der Trigonometrie und zu guter Letzt sein fünfbändiges Hauptwerk, nämlich das vereinigte Wissen zu Dreiecken in der Ebene und im Raum aus der griechischen und arabischen Mathematik.[198] Diese Werke haben einen enormen Einfluss, der kaum zu unterschätzen ist. So zeigen die Kegelschnitte Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln, dass es mehr gibt als den einfachsten Kegelschnitt, den Kreis. Das kopernikanische Weltbild kann sich nur durchsetzen, weil Kepler erkannt hat, dass die Planeten auf Ellipsen die Sonne umkreisen. Für die Navigation ist mathematisches Wissen um Dreiecke in der Fläche und im Raum um entsprechende trigonometrische Beziehungen in Verbindung mit fundierten astronomischen Tabellenwerken unverzichtbar. Es war das mathematische Rüstzeug für die kommende Epoche der Entdecker. Tatsächlich druckt Petreius 1543 ein Buch mit enormer Sprengkraft: der Autor ist Nikolaus Copernikus (Kopernikus). Er hat erkannt, dass sich die Himmelsbewegungen wesentlich einfacher mathematisch erklären lassen, wenn man akzeptiert, dass die Sonne im Mittelpunkt der Planetenbewegung steht. Der Astronom und Domherr zu Frauenberg Kopernikus ist sich der Tragweite bewusst. Erst kurz vor seinem Tod entschließt er sich zur Publikation von „*De revolutionibus orbium coelestium*“. Der Verleger Johann Petreius mit seinem Gespür für innovative Werke übernimmt 1543 den Druck in der Freien Reichsstadt Nürnberg. Durch ein unautorisiertes Vorwort versuchte der Theologe Andreas Osiander (1498 – 1552), quasi als Lektor, zunächst die Sprengkraft des Werkes zu entschärfen, indem er ihm lediglich Modellcharakter unterstellte. Er unterließ es, sich als Autor des Vorworts zu bezeichnen und

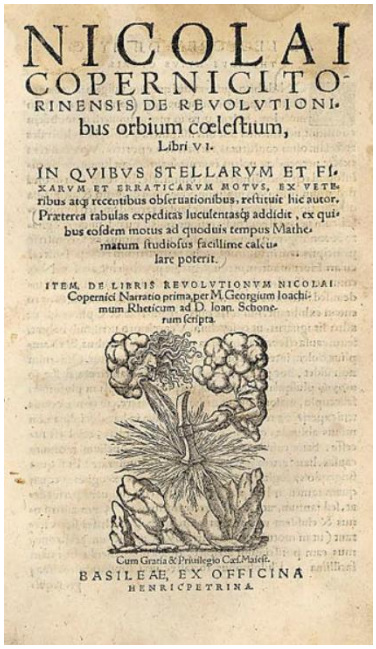

NICOLAI
COPERNICI TO-
RINENSIS DE REVOLVTIONI-
bus orbium cœlestium,
Libri VI.
IN QVIBVS STELLARVM ET FI-
XARVM ET ERRATICARVM MOTVS, EX VETE-
ribus atq; recentibus obseruationibus, restituit hic autor.
Præterea tabulas expeditas luculentasq; addidit, ex quibus eosdem motus ad quoduis tempus Mathe-
matum studiosus facillime calcu-
lare poterit.
ITEM, DE LIBRIS REVOLVTIONVM NICOLAI
Copernici Narratio prima, per M. Georgium Ioachi-
mum Rheticum ad D. Ioan. Schone-
rum scripta.
Cum Gratia & Priuilegio Cæs. Maiest.
BASILEAE, EX OFFICINA
HENRICPETRINA.

Abb. 38: Deckblatt von *De revolutionibus orbium coelestium* in der 2. Auflage

[198] De Padova, ebenda, S. 289 - 292

änderte oder strich auch ganze Sätze im Werk selbst.[199] Kopernikus soll daraufhin einen Schlaganfall erlitten haben, von dem er sich nicht mehr erholte. Eine Klage gegen das Verlagshaus wurde abgewiesen.[200] Die Orientierung an den Beobachtungen hatte zwar leichte Verbesserungen des Modells gebracht. Epizykeln[201] konnte er nicht alle verhindern – er versuchte die Kreisbahnen zu „retten". Erst Johannes Kepler (1571 – 1630) erkannte, dass die Planetenbahnen elliptisch sind. Wesentlich drastischer waren die philosophischen Einwände in dieser Zeit. So musste die die Erde im Zentrum stehen, weil alle schweren Elemente nach „unten" fallen. Die Sonne hat man aber mit dem leichtesten Element gleichgesetzt, nämlich dem Feuer. Das Schwere ist das Böse und damit die Hölle tief unten in der Erde. Das Spirituelle und immer Vollkommenere ist der Himmel bis hin zu Gott. Gegen die Verbindung von physikalischer und moralischer Hierarchie war mit logischen Argumenten schwer beizukommen. Im Großen und Ganzen bestimmten nicht Mathematiker die Diskussion, sondern Theologen. Luther lehnte die Theorie ab, ebenso sein Freund Philipp Melanchthon (1497 – 1560) oder Johannes Calvin (1509 – 1564). Das Gleiche gilt auch für die seltenen Persönlichkeiten, die beides vereinen, wie Nicolaus von Kues.

Mit Osiander (deutsch A. Hosemann), dem aggressiv-rechthaberischem Rektor der Universität Königsberg, geriet auch Stifel unweigerlich in Streit. Immerhin erschien in Königsberg die stark überarbeitete Rudolfsche Coß.

Im Jahr 1544 erscheint bei Petreius die „*Arithmetica integra*" von Michael Stifel und ein weiteres Jahr später, 1545, die „*Artis magna*" von Gerolamo Cardano. Petreius hat beide unter Vertrag genommen und es entstand eine perfekte Symbiose. Cardano zitierte Stifel und umgekehrt. Obwohl die Interessen von Cardano weit über die Algebra hinausweisen, hat dieses Autorenduo in ihrer Kombination Entscheidendes zur Gleichungslehre und damit verbunden zum Zahlenverständnis beigetragen. Heute weiß man: Alles, was Lösung einer Gleichung ist, ist eine Zahl. Sie kann ein Bruch sein (rational), sie kann nicht als Bruch darstellbar sein (irrational), sie kann negativ sein, sie kann Null sein oder sie kann, mit sich selbst multipliziert, negativ sein (komplex bzw. imaginär). Bei der Untersuchung von kubischen Gleichungen in ihrer allgemeinen Form stieß Cardano auf rätselhafte Wurzeln aus negativen Zahlen. Er klammerte zwar solche Fälle aus, beschäftigte sich aber doch damit (*Casus irreducibilis*[202]). Auch als die komplexen Zahlen akzeptiert waren, war lange die Frage offen, ob jedes Polynom überhaupt Lösungen der genannten Form (rational, irrational,

---

[199] https://de.wikipedia.org/wiki/Andreas_Osiander

[200] https://de.wikipedia.org/wiki/De_revolutionibus_orbium_coelestium

[201] https://de.wikipedia.org/wiki/Epizykeltheorie

[202] https://en.wikipedia.org/wiki/Casus_irreducibilis, siehe auch für einen speziellen und einen allgemeinen Fall https://de.wikipedia.org/wiki/Cardanische_Formeln

komplex) haben kann. Genauer reduziert sich das Problem, wieviel Lösungen, sprich Nullstellen, ein Polynom n-ten Grades hat. Diese Frage wurde im Prinzip 1746 von Jean d'Alembert (1717 – 1783) und 1799 durch Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) beantwortet. Es ist der Fundamentalsatz der Algebra, der viele Formulierungen besitzt und in voller mathematischer Strenge erst mit den Ergebnissen der Analysis im 19. Jahrhundert vollendet werden konnte. Danach hat ein Polynom n-ten Grades höchstens n Nullstellen im Reellen und genau n Nullstellen im Bereich der komplexen Zahlen (inkl. reell).[203]

Cardano stellte sich die Aufgabe: „Teile die Zahl 10 in zwei Teile, deren Produkt 40 ist." Wählt man für die Teilstücke die Bezeichnungen x und y, so lautet die Frage: $x + y = 10$ und $x \cdot y = 40$.

Diese Aufgabe ist im Körper der reellen Zahlen nicht lösbar.

Cardano bzw. wie er betont, sein Schüler Ludovico Ferrari (1522 – 1565), kommt auf die Lösung:

$$x = 5 + \sqrt{-15}, \qquad y = 5 - \sqrt{-15}.$$

Man sieht leicht, dass $x + y = 10$ ist.

$$x \cdot y = (5 + \sqrt{-15}) \cdot \left(5 - \sqrt{-15}\right) = 25 + 5\sqrt{-15} - 5\sqrt{-15} - \sqrt{-15} \cdot \sqrt{-15} =$$
$$25 - (-15) = 40$$

Es ist ein Verfahren des Ausgleichens und Ergänzens von Quadraten und Rechtecken, ähnlich wie es Stifel geometrisch praktiziert hat. Nur dass man es sich im vorliegenden Fall nicht mehr geometrisch vorstellen kann.

Die Lösung einer ganzen Klasse an kubischen Gleichungen war eine riesige Sensation. Besonders bemerkenswert war die Tatsache, dass es sich bei Tartaglia um einen absoluten Außenseiter, einen „nobody" handelte, der mit verbissenem Fleiß als Autodidakt zu solchen Leistungen fähig war. Obwohl noch nicht für alle Typen kubischer Gleichungen Lösungsformeln gefunden waren, reizten schon die „quartischen" Gleichungen, also Gleichungen mit $x^4$-Termen. Das führte zu einer neuen Qualität der Auseinandersetzung. Tartaglias Grundlagen griff Lodovico Ferrari auf, Schüler und späterer Mitarbeiter von Cardano. Ihre Lösungen wurden in Cardanos „*Artis magna*" veröffentlicht. Cardano hat darin sehr fair die Leistung Ferraris gewürdigt und auch die Teile benannt, wo Tartaglia Urheber war. Er stand jedoch bei Tartaglia unter Eid auf Verschwiegenheit. Daran fühlte er sich nicht mehr gebunden, als er hörte, dass Scipione dal Ferro den Lösungsweg kannte. Ein klärendes Gespräch wäre hilfreich gewesen, der folgende jahrelange Urheberstreit war jedoch heftig. Es soll sogar zu Duellen zwischen den Anhängern beider Lager gekommen sein.[204]

Cardano, Tartaglia und Ferrari haben aber Mathematikgeschichte geschrieben, denn Gleichungen 4. Grades konnten in bestimmten Fällen nur gelöst werden,

---

[203] https://de.wikipedia.org/wiki/Fundamentalsatz_der_Algebra

[204] https://geschichtedermathematik.de/mathematik-des-16-jahrhunderts/

wenn man Wurzeln aus negativen Zahlen akzeptierte. Später nannte man diese „komplexe Zahlen“ bzw. „imaginär“, wenn der Wert auf der sogenannten imaginären Achse liegt. Komplexe Zahlen werden heute meist als Punkte der komplexen Ebene angesehen und haben einen Realteil, die Projektion auf die x-Achse und einen Imaginärteil (y-Achse).
Das Potential, was in dieser neuen Zahlenklasse und ihrer Mathematik steckt, wurde insbesondere von Rafael Bombelli, ebenfalls aus Bologna, erahnt. Er erklärte, wie man imaginäre Zahlen auffassen muss und skizzierte ihr Nutzungspotential in der Mathematik. Das war der Beginn für die moderne, komplexe Analysis. Sie führte nicht nur die reine Mathematik zu neuen Ufern, sondern ermöglichte bei wichtigen Anwendungen erst eine exakte mathematische Herangehensweise.

Die Renaissance der griechischen Mathematik, ihre behutsame Weiterentwicklung in der arabischen und teilweise persischen Welt und ihre Funktion als Basis für Wissenschaft und Technik, Statik, Architektur, Nautik, Mechanik veränderte Grundsätzliches. Indisch-arabische Ziffern setzten sich durch, negative Zahlen, noch von Leibniz abgelehnt, wurden akzeptiert, irrationale Zahlen sind zumindest in Gelehrtenkreisen selbstverständlich, imaginäre und komplexe Zahlen werden von der Spielerei zu seriösen Lösungen und aus einer Gleichungslehre wird die Algebra, die über arabisches Wissen hinausgeht. Die Algebra emanzipiert sich von der griechischen Geometrie; römische Zahlen engen nicht mehr ein. Leider bricht hier „*die Kette innovativer italienischer Mathematiker (zunächst) ab“* (Wußing).
Mathematisch bleiben aber deutlich mehr Erkenntnisse erhalten, als griechische Handschriften die Wirren der Geschichte überdauert haben. Der Buchdruck hat die Chance deutlich erhöht, dass gedruckte Schriften aus der Renaissance die unruhigen Jahre danach überstanden haben. Der Buchdruck war ein Segen für den Wissenstransfer in Europa und später in der ganzen Welt. Dies gilt für antike Schriften und neue Werke gleichermaßen bis hin zum neuen kopernikanischen Weltbild. Die mathematisch-geometrischen Aspekte der Zentralperspektive waren aus der Kunst nicht mehr wegzudenken. Für Leonardo da Vinci gehört der geometrische Beweis zu den schönsten Geschenken, die uns unser Denkvermögen gemacht hat.[205] Ihm war früh klar, dass die Wissenschaft das Wesen und die Wirkung der Naturgesetze erkennen muss und dass diese in der Sprache der Mathematik formuliert werden müssen. Das berühmte Zitat von Galilei Galileo bringt diesen Gedanken auf den Punkt: „Das Buch der Natur ist in der Sprache der Mathematik geschrieben.“ Leonardo

[205] De Padova, ebenda, S. 352

formuliert es noch schärfer: „*Es gibt keine Sicherheit in der Wissenschaft, wo nicht die Mathematik angewendet werden kann*.“[206]
Die Algebra hat in der Renaissance diesen Weg begonnen und hat, beginnend mit Stifel, Cardano, Viète und anderen, zu einer Formelsprache geführt, die in der Folge weitergeführt wurde und erst dadurch in der Lage war, die Mathematik über das Anschauliche hinaus zu führen. De Padova weist auf die These der Philosophin Sybille Krämer hin, die eine Verbindung zwischen Zentralperspektive und Formelsprache sieht: „*Die Zentralperspektive rationalisiert unsere Visualität; die Kalkulisierung rationalisiert unsere Sprachlichkeit.*“[207]

**Fazit**

Innerhalb des großen eurasischen Kontinents mit seinen Handelswegen und damit Kontakten und Wissenstransfer hatte der lateineuropäische Teil die besten Voraussetzungen für eine Epoche wie die Renaissance. Die frühen Hochkulturen mussten verwaltet werden und es bedurfte einer asynchronen Kommunikation und Dokumentation also einer Schrift. Während die Keilschrift silbenorientiert war und die Hieroglyphen im Grunde eine Bilderschrift darstellte, perfektionierten die Griechen eine Buchstabenschrift. Dies stellte sich als kulturhistorischer Vorteil heraus. Ab dem 8. Jahrhundert vor Christus setzte die griechische Kolonisation ein. Dies ist ein missverständlicher Begriff, denn es entstanden in weiten Teilen des Mittelmeerraumes eigenständige, friedliche Ausgründungen, etwa, weil das Land die wachsende Bevölkerung nicht mehr ernähren konnte. Es entstand Großgriechenland oder die *magna graecia*. Kern war die *polis*, also das politische und soziale Zentrum griechischen Lebens. Entscheidender Unterschied zu den anderen frühen Hochkulturen war die Tatsache, dass Wissenschaft und Philosophie nicht nur zweckorientiert betrieben wurde. In Ägypten entstand die Mathematik, z.B. um die Vermessung des Landes nach den jährlichen Nilüberschwemmungen zu gewährleisten. Die griechische Mathematik hat mit Axiomen, Sätzen und Beweisen Kategorien entwickelt, die bis heute gültig sind.
Die griechische Kultur behielt auch die Oberhand, als das Römische Reich entstand und die politisch und militärisch führende Macht wurde. Vereinfacht gesagt, waren die Römer Politiker, Krieger und Praktiker; die griechische Kunst aber dominierte selbst unter römischer Herrschaft. Für das Abendland wurde aber Latein die „*Lingua franca*“ und hielt sich auch lange als Gelehrtensprache.

---

[206] Zitiert nach Wußing, Hans: 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008, S. 304
[207] Krämer, Sybille; Leerstellen-Produktivität. Über die mathematische Null und den zentralperspektivischen Fluchtpunkt, Berlin 2006, S. 505 zitiert nach De Padova, ebenda, S. 351

Ein kleines, aber wichtiges kulturelles Erbe der Römer ist das Fingerrechnen. Es hat dafür gesorgt, dass das Beharrungsvermögen der unpraktischen römischen Zahlen lange anhielt, ehe sie von den indisch-arabischen Ziffern abgelöst werden konnten.

Nach dem Ende des weströmischen Reiches folgten unstete Jahrhunderte der Bildung von Völkern und Staaten. Ab dem 6. Jahrhundert stieg die Zahl der Klöster von ca. 1.000 auf 20.000 an. Immerhin unterhielten die Klöster *Scriptorien,* in denen Bücher auf Pergament kopiert wurden. Priorität hatten kirchliche Texte, aber es wurden doch auch antike Handschriften kopiert. Ihnen verdankt die Nachwelt die vergleichsweise wenige Überlieferung.

Auch wenn das 15. und 16. Jahrhundert als zentrale Epoche der Renaissance bezeichnet wird, so beginnt die Entwicklung schon im 11. Jahrhundert mit der Gründung der ersten Universitäten in großen Städten, d.h. zwischen 10.000 und mehr Einwohnern. Köln war mit 40.000 Einwohnern die größte deutsche Stadt. Es war die Zeit der Urbanisierung; ca. 4.000 Städte entstanden europaweit. Das 12. Jahrhundert war auch das Jahrhundert der Kathedralen. Vor allem wirtschaftliche Argumente in den großen Handelsmetropolen forcierten das „neue“ Zahlensystem. Die Entwicklung begann in Italien als Schrittmacher der Renaissance und weitete sich auf West- und Mitteleuropa aus. Politisch war die Zeit geprägt durch Urbanisierung und Ausbildung von Stadtkulturen. Man sollte aber die erheblichen sozialen Spannungen und Verwerfungen, wie gewaltsame Auflehnung der Städter gegen Feudalherren und die Bauernkriege 1524/1525 nicht vergessen. Es gärte überall. Gewaltsame Konflikte und geistige, kulturelle Bewegungen liefen parallel. Viele Söhne von Kaufleuten pilgerten trotzdem über die Alpen und wollten lernen. Es war ein Übergang von der Natural- zur Geldwirtschaft mit all ihren Chancen und Risiken. Die wichtigste Erfindung der Renaissance war zweifellos der Buchdruck um 1450. Er potenzierte den Wissenstransfer; es wurden sowohl die antiken Klassiker neu bearbeitet und gedruckt als auch neue Erkenntnisse. Die Rechenbücher von Adam Ries in deutscher Sprache halfen sogar die noch stark regional geprägten Dialekte zu harmonisieren. Adam Ries hat sich auch als „Cossist“ betätigt. Dies wurde zwar Ende des 19. Jahrhunderts bekannt, aber erst anlässlich seines 500. Geburtstags gewürdigt. Hier zeigt er, dass er mehr beherrscht als elementares Rechnen und verwendet auch typische „cossische“ Symbole. Ansonsten hat er seine Rechenbücher bewusst von Symbolsprache und Gleichungen freigehalten.[208]

Bücher bildeten die Stufen, die nach den Religionskriegen in die Neuzeit führten. Die mathematischen Aspekte findet man kaum in der Literatur über die

[208] Wußing, Bd. 1, S. 334

Renaissance. Und doch war es zuerst die Rückbesinnung auf das antike Erbe. Eine zentrale Forderung hieß „*ad fontes*“ (zu den Quellen). Damit wurde in der Mathematik die Geometrie die Grundlage für die Revolution in der Kunst durch die Zentralperspektive und auch die Revolution unseres Weltbildes durch Kopernikus. Ptolemaios sah die Planeten noch auf „kristallenen Sphären“ in vollkommenen Kreisbahnen sich bewegen. Dieses naive Weltbild wurde in der Renaissance zunehmend angezweifelt, wurde aber von der Kirche verteidigt. Doch schon Regiomontanus hatte fundiertes Wissen über die Planetenbahnen und es ist bekannt, dass seine ursprüngliche Motivation, 1471 nach Nürnberg zu gehen, die Verbesserungen der Beobachtung zur Planetenbewegung war. Dies war keine zweckfreie Wissenschaft. Die Astrologie wurde nicht in Abrede gestellt. Überhaupt war Aberglaube sogar im Klerus stark verbreitet. Aber ein Horoskop, dessen Vorhersagen nicht zutrafen, wurde nicht als falsch angesehen, sondern man zweifelte eher an der Richtigkeit der Himmelsdaten. Die Astrologie war also Treiber für eine bessere Astronomie. Sie wurde nie verboten, im Gegensatz zur Alchemie[209], die als „Schwester“ von Astrologie und Magie gesehen werden kann. Heute kann man ihr einen nützlichen Platz im Übergang zur modernen Chemie zubilligen. Durch „*trial and error*“ wurden von Alchimisten wichtige Erkenntnisse über die Stoffe gewonnen.

Es gab schon Brillen, aber das Fernrohr war noch nicht erfunden. Aber die Genauigkeit der Himmelsbeobachtungen reichte auf jeden Fall für die Gewissheit aus, dass alle Planeten auf elliptischen Bahnen laufen. Der Kreis als Sinnbild der Vollkommenheit wurde vom Thron gestoßen. Nikolaus Kopernikus hält offenbar an der Kreisbahn fest, denn er benutzt Epizykeln.[210] Johannes Kepler und Galileo Galilei war dies bekannt; sie ziehen den radikalen Schluss und verwerfen das ptolemäische, geozentrische Weltbild. Heute kennt man Beispiele für offene Hyperbelbahnen, z.B. bei Partikeln außerhalb des Sonnensystems und den Grenzfall zwischen Ellipse und Hyperbel, die Parabel. Das sind die Kegelschnitte, die erstmals Apollonios von Perge in der „*Conica*“ untersucht hat. In der Renaissance waren nur die ersten vier Bücher aus einer arabischen Übersetzung von 1270 bekannt, hatten zunächst aber kaum merklichen Einfluss. Regiomontanus will sie laut Ankündigung in seinem Verlagsprogramm drucken und kennt sie deshalb offenbar.[211] Buch V – VII

---

[209] https://en.m.wikipedia.org/wiki/Spondent_quas_non_exhibent, päpstliches Dekret, das 1317 von Papst Johannes XXII erlassen wurde und die Ausübung der Alchemie verbot. Es richtete sich vor allem gegen Falschmünzer.

[210] Eine Handzeichnung von Kopernikus suggeriert zwar Kreisbahnen; die Abweichung ist aber minimal, so dass die Darstellung akzeptiert werden kann. https://commons.wikimedia.org/wiki/Nicolaus_Copernicus#/media/File:Hypothesis_Copernicana.png

[211] https://www.digitale-sammlungen.de/en/view/bsb00093397?page=,1

wurde erst zufällig wieder nur in einer arabischen Übersetzung in Florenz entdeckt und dort (übersetzt) 1661 veröffentlicht. Buch VIII gilt als verschollen.[212] Die *Conica* ist eines dieser hier bewusst gewählten repräsentativen tragischen Beispiele, zum Glück mit „Happy-End“, wie fundamentales, griechisches Wissen nur über den arabischen Umweg erhalten und überliefert werden konnte. Kepler waren diese Werke nicht bekannt; erst Newton waren sie zugänglich. Er schrieb 1684 auf ihrer Grundlage seine Abhandlung „*Motu Corporum in Gyrum*“.

Gerade der Übergang zur Geldwirtschaft erforderte mathematisches Wissen auch in nicht akademischen Kreisen. Buchhaltung, Umrechnungen vielfältiger Art, Rechenverfahren und die mehrfach genannte neue Zahlendarstellung waren die Anforderungen. Damit war Mathematik nicht mehr reines Bildungsgut als Teil der sieben freien Künste, sondern hatte erhebliche wirtschaftliche Bedeutung auch für einfache Leute, die tagtäglich mit Geld und unterschiedlichen Währungen, Maßen und Gewichten umgehen mussten. Rechnen wurde zur Kulturtechnik mit größerer Bedeutung als Lesen und Schreiben.

Navigation erforderte Trigonometrie, verbessertes Geschützwesen und damit verbunden der stärkere Festungsbau erzeugten neue mathematische Anforderungen. Am Geschützwesen hatte sich schon Tartaglia versucht. Es entstanden nun Näherungslösungen für die Flugbahn. Erst Galilei und Bonaventura Francesco Cavalieri (1598 –1647) erkannten, dass die Flugbahn parabolisch ist.

Eine riesige Herausforderung war der Bau der Kathedralen und insbesondere die riesigen Kuppelbauten, z.B. beim Petersdom und dem Dom in Florenz.

In der Renaissance entstand das Berufsbild des Rechenmeisters. Sie unterhielten Rechenschulen und unterrichteten gegen Bezahlung einfachste Techniken. Es ging um Grundrechenarten, Bruchrechnung, Umrechnungen und andere Beispiele aus der Praxis. Die neuen indo-arabischen Zahlen spielten eine wachsende Rolle. Aus der Berufselite dieses neuen Berufsbildes heraus entwickelte sich auch das Rechnen mit Unbekannten („Coss“) und damit der Beginn der Algebra. Zunächst nur mit Abkürzungen hat nach heutigem Wissen Regiomontanus begonnen.[213] Cardanos Formelsprache konnte sich nicht durchsetzen; Stifel machte Vorschläge, die sich bis heute im Prinzip hielten. Der Einfluss der entstehenden Formelsprache auf die weitere Entwicklung der

[212] Lucio Russo, Die vergessene Revolution, Springer 2003, S. 11; http://www.astrolehrbuch.de/Geschichte/WG16.pdf
[213] Wußing, ebenda, Bd. 1, S. 331

Mathematik ist nicht zu unterschätzen. Algebra wird zu einer eigenständigen, von der Geometrie emanzipierten mathematischen Disziplin.

Wenn die Renaissance „Der Morgen der Welt“ war (Bernd Roeck), so war sie für die Mathematik „Der zweite Frühling“.

**Abbildungsverzeichnis**

Abb. 1: Raffael, Die Schule von Athen (1510 bis 1511)
Fresko in der Stanza della Segnatura des Vatikans für Papst Julius II.
Bildquelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:“The_School_of_Athens“ _by_Raffaello_Sanzio_da_Urbino.jpg

Abb. 2: Tintoretto, Die Eroberung von Konstantinopel 1204, Bildquelle https://www.meisterdrucke.com/kunstdrucke/Jacopo-Robusti-Tintoretto/185883/Die-Eroberung-von-Konstantinopel-1204.html

Abb. 3: Magna Graecia, griechische Kolonien im Mittelmeerraum, hier am Beispiel des dorischen Tempels in Segesta (Sizilien), Bildquelle https://www.calvendo.de/galerie/magna-graecia-griechische-antike-staetten-in-sueditalien/

Abb. 4: Figurierte Zahlen, eigene Grafik

Abb. 5: Pentagramm oder Drudenfuß, Bildquelle Gronau, Detlef, Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, Institut für Mathematik der Karl-Franzens-Universität Graz, 2009; https://imsc.uni-graz.at/gronau/Gm.pdf, S. 24

Abb. 6: Lösungsweg zur Aufgabe II. Buch, § 11, eigene Grafik

Abb. 7: Spirale des Theodorus, https://de.wikipedia.org/wiki/Wurzelschnecke

Abb. 8: Algorithmus ggT, eigene Grafik

Abb. 9: Zum Beweis, die Summe der Innenwinkel im Dreieck beträgt zwei rechte Winkel (2R=180°). Elemente Buch I, § 32, eigene Grafik

Abb. 10: Apollonios untersuchte Eigenschaften von ebenen Schnitten durch einen Doppelkegel und erhielt die Kurven Kreis, Ellipse, Parabel, Hyperbel. (lizenzfreies Bild, https://www.oebv.at/internal/c9d69faf-7b43-409a-bc15-71aec796ee9a)

Abb. 11: Sehnenrechnung des Ptolemaios, eigene Grafik nach Detlef Gronau

Abb. 12: Satz von Pappos, links projektive Form, rechts affine Form. Bildquelle https://de.wikipedia.org/wiki/Satz_von_Pappos

Abb. 13: Platons schönste Dreiecke

Abb. 14: Die 5 platonischen Körper und ihre Symbole

Abb. 15: Definitionen in Euklids „Elemente“, Buch V, Ausgabe von 1781

Abb. 16: Die Fingerzahlen waren 1.500 Jahre in ganz Lateineuropa verbreitet. Römische Zahlen hatten fast nur dokumentarischen Charakter. Rechts Fingerzahlen des Mönchs Beda Bildquelle, Im Theatrum Arithmetica-Geometricum, Jacob Leupold, 1727, nach Menninger, Band 2, S. 10. Links aus Summa de Arithmetica, Luca Pacioli, Venedig 1494, nach Menninger, Band 2, S. 5

Abb. 17: Die Jakobskirche in Rothenburg ob der Tauber mit dem Altar von Friedrich Herlin. Petrus hält sich eine Nietbrille vor die Augen. https://www.monumente-online.de/de/ausgaben/2013/1/petrus-mit-brille.php

Abb. 18: Doppelt ausgelegtes Kerbholz, Bildquelle: https://no.m.wikipedia.org/wiki/Fil:SAM_PC_1_-_Tally_sticks_1_-_Item_06.jpg

Abb. 19: Entwicklung der indischen Ziffern über arabisch zu europäisch, https://sfabel.tripod.com/mathematik/themen_arithmetik_hz.html

Abb. 20: Leonardo di Pisa, https://de.wikipedia.org/wiki/Leonardo_Fibonacci

Abb. 21: Cusanus bejaht erstmals die philosophisch umstrittene Frage, ob sich eine irrationale Zahl höherer Ordnung wie $\sqrt[3]{2}$ in der Realität geometrisch darstellen lässt. (Eigene Grafik)

Abb. 22: Kreisflächenberechnung des Nikolaus von Kues. (Eigene Grafik)

Abb. 23: Verfeinerte Methode (Eigene Grafik)

Abb. 24: Regiomontanus – ein herausragender Gelehrter der Renaissance, https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Johannes_Regiomontanus?uselang=de#/media/File:Johannes_Regiomontanus2.jpg

Abb. 25: Ephimerides von Regiomontanus https://digi.ub.uni-heidelberg.de/diglit/ir00107000/0001/image,info,thumbs

Abb. 26: Revolution der Renaissance: Der Buchdruck mit beweglichen Lettern, Bildquelle: https://www.planet-wissen.de/geschichte/neuzeit/erfindung_buchdruck/erfindung-buchdruck-wie-gehts-100.html

Abb. 27: 1. Seite Genesis aus der Gutenberg-Bibel von 1454, https://de.wikipedia.org/wiki/Gutenberg-Bibel

Abb. 28: Die drei Rechenbücher von Adam Ries(e), Bildquellen https://de.wikipedia.org/wiki/Adam_Ries, https://www.adam-ries-bund.de/forschung/drittes/, https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Rechnung_auff_der_Linihen_und_Federn.JPG

Abb. 29: Seite aus Liber abaci mit der Fibonacci-Folge, Bildquelle: https://en.wikipedia.org/wiki/Liber_Abaci#/media/File:Liber_abbaci_magliab_f124r.jpg

Abb. 30: Arithmetica Integra von Michael Stifel (1544) und seine deutlich erweiterte „Cos“ von Christoff Rudolff (1553), Bildnachweis https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasures-michael-stifels-arithmetica-integra, https://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1238793

Abb. 31: Quadratische Ergänzung, geometrisch erklärt,
aus der digitalisierten Version Arithmetica Integra von Michael Stifel, S. 313
https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/1317/642

Abb. 32: Erfindung der Zentralperspektive durch Filippo Brunelleschi, Bildquelle: https://nelson-atkins.org/gates/gaining-perspective.html, Motiv: Baptisterium am Dom von Florenz

Abb. 33: Albrecht Dürer als Mathematiker, Doppelseite aus „Underweysung der messung mit dem zirckel un[d] richtscheyt, in Linien ebnen unnd gantzen corporen“, S. 22

Abb. 34: Albrecht Dürer, Melecolia I, Kupferstich, 1514, Bildquelle https://en.wikipedia.org/wiki/Melencolia_I

Abb. 35: Zwei der zahlreichen Grafiken von Leonardo da Vincis als Anhang in der *Divina Proportione* von Luca Pacioli.
https://archiviostorico.mediobanca.com/wp-content/uploads/2021/01/De-Divina-Proportione.pdf, S. 221 und S. 225

Abb. 36: Gerolamo Cardano, *Artis magna*, 1545,
https://de.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano#/media/Datei:Cardano-Ars.jpg.

Abb. 37: Titelbild von Mercators Weltkarte mit dem Riesen Atlas, https://de.wikipedia.org/wiki/Atlas_sive_cosmographicae_meditationes_de_fabrica_mundi_et_fabricati_figura#/media/Datei:Mercator_-_Atlas_-_1595.png

Abb. 38: *De revolutionibus orbium coelestium,* 2. Auflage, Basel, https://de.wikipedia.org/wiki/De_revolutionibus_orbium_coelestium

**Literaturverzeichnis**

Bottazzini, Umberto: Wie die Null aus dem Nichts entstand, dtv, München 2021, deutsche Erstausgabe, italienische Originalausgabe 2019.

Cardano, Hieronymus; Nürnberg 1545, Artis magna, https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/2690143.

Dante Alighieri; Die Göttliche Komödie, Reclam Bd. 9813, 1986.

Deiser, Oliver; Lasser, Caroline; Vogt, Elmar; Werner, Dirk: 12 x 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2016

De Padova, Thomas: Alles wird Zahl, Verlag Carl Hanser, München 2021.

Dürer, Albrecht; Underweysung der messung mit dem zirckel un[d] richtscheyt, in Linien ebnen unnd gantzen corporen, https://www.digitale-sammlungen.de/de/details/bsb00084858

Ebbinghaus, Heinz-Dieter (Hrsg.), Zahlen, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 3. Auflage 1992.

Eco, Umberto; Der Name der Rose, Carl Hanser Verlag München Wien, 1982.

Euklid, Elemente,
Übersetzung aus dem griechischen Johann Friedrich Lorenz, Halle, 1781
https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/6750/32.

Euklid, Die Elemente, Verlag Harry Deutsch, Frankfurt am Main, 1997.

Frank, Martin, Mathematik der Renaissance: Studien zur Herausbildung und Verbreitung der neuzeitlichen Wissenschaften, Deutsches Museum Verlag, München 2016, Preprint 11, https://www.deutsches-museum.de/assets/Verlag/Download/Preprint/preprint-11.pdf.

Freinbichler, Walter; Warum steht M für 1000? Lateinische Texte zur Frühgeschichte der Mathematik, Braumüller Verlag, Wien, https://www.hpt.at/sites/default/files/schulbuch_plus_downloads/M_1000_01.pdf.

Gericke, Helmuth: Geschichte des Zahlbegriffs. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970.

Gericke, Helmuth: Mathematik in Antike, Orient und Abendland. Marixverlag Wiesbaden, 2005, 9. Auflage, Springer, Berlin u. a. 1984 und 1990.

Glosauer, Tobias: Elementar(st)e Gruppentheorie, Springer Spektrum, Wiesbaden 2016.

Gronau, Detlef, Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, Institut für Mathematik der Karl-Franzens-Universität Graz, 2009; https://imsc.uni-graz.at/gronau/Gm.pdf.

Hefele, Hermann; Des Girolamo Cardano von Mailand eigene Lebensbeschreibung, übertragen und eingeleitet von Hermann Hefele, Jena, 1914, verlegt bei Eugen Diederichs
https://resources.warburg.sas.ac.uk/pdf/nah3725b2324426.pdf.

Herrmann, Dietmar; Die antike Mathematik, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg, 2014.

Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Campus, Frankfurt 1986.

Kaplan, Robert: Die Geschichte der Null. 6. Taschenbuchausgabe, Piper, München 2006, (englisches Original 1999).

Leonardo di Pisa , Liber abaci, 1202 (MCCII), digitalisiert Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze,
https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=1. Dazu wurde ein Download beantragt und vom Museo Galileo zur Verfügung gestellt.

Menninger, Karl: Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahl. 3. Aufl., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1979, https://digi20.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/goToPage/bsb00107066.html?pageNo=50.

Menninger, Karl, Zahlschrift und Rechnen, Bd. 2, ebenda, digitalisiert ab S. 224.

Merzbach, Uta C., Boyer Carl B.; A History of Mathematics, 3rd Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2011, https://atiekubaidillah.wordpress.com/wp-content/uploads/2013/03/a-history-of-mathematics-3rded.pdf.

Meschkowski, Herbert; Mathematisches Begriffswörterbuch, BI Hochschultaschenbücher Band 99, Mannheim 1971.

Mukherjee (oder Parthasarathi Mukhopadhyay): Discovery of Zero and its impact on indian mathematics, Calcutta 1991, https://www.researchgate.net/publication/337212771_Origin_of_Zero-An_Eternal_Enigma/link/617a9f563c987366c3f5fb3b/download.

Pacioli. Luca; *Divina Proportione* mit Grafiken von Leonardo da Vincis als Anhang, https://archiviostorico.mediobanca.com/wp-content/uploads/2021/01/De-Divina-Proportione.pdf.

Pacioli, Luca; Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita, Venedig 1494, https://www.cervantesvirtual.com/obra/summa-de-arithmetica-geometria-proportioni-et-proportionalita-1048443.

Ries, Adam, Rechnung auff der Linihen und Federn,
digitalisiert durch Deutsches Museum: http://digital.bib-bvb.de/view/bvbmets/viewer.0.6.4.jsp?folder_id=0&dvs=1674737473716~317&pid=2471296&locale=de&usePid1=true&usePid2=true.

Rinkens, Hans-Dieter; Krüger, Katja; Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer-Spektrum, Wiesbaden 2020.

Roeck, Bernd; Der Morgen der Welt, C.H.Beck Verlag, München 2017, Sonderausgabe 2019.

Rotman, Brian: Die Null und das Nichts. Eine Semiotik des Nullpunkts. Aus dem Englischen von Petra Sonnenfeld. Kulturverlag Kadmos, Berlin 2000, ISBN 978-3-931659-17-2.

Russo, Lucio, Die vergessene Revolution, Springer, Berlin Heidelberg, 2005.

Schlote, Karl-Heinz Hsgr.; Chronologie der Naturwissenschaften: Der Weg der Mathematik und der Naturwissenschaften von den Anfängen in das 21. Jahrhundert, https://slub.qucosa.de/api/qucosa%3A7968/attachment/ATT-0/.

Seife, Charles: Zwilling der Unendlichkeit: Eine Biographie der Zahl Null. München 2002.

Sigmund, Karl; Sie nannten sich „Der Wiener Kreis“, Springer. 2. wesentlich erweiterte Ausgabe, 2018.

Stifel, Michael, Arithmetica Integra, Norimbergae (Nürnberg) 1544 https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/1317/1.

Sturm, Klaus (Hrsg.): Diagonal. Nr. 0. Siegen, o. J. ISSN 0938-7161 (Null-Nummer der Zeitschrift Diagonal mit zahlreichen Beiträgen zum Thema „Null“.) https://dewiki.de/Lexikon/Null.

Vogel, Kurt: Vorgriechische Mathematik II: Die Mathematik der Babylonier. Schroedel, Hannover und Schöningh, Paderborn 1959.

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 2, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

Wußing, Hans; Arnold, Wolfgang; Biographien bedeutender Mathematiker, Volk und Wissen, Berlin 1975.

Zellini, Paolo; Eine kurze Geschichte der Unendlichkeit, C.H.Beck, München, 2010.

## Danksagung

Mein aufrichtiger Dank geht an **Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl** vom Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. Er hat sicher anspruchsvollere Aufgaben in Forschung und Lehre zu erfüllen als einen Hobbywissenschaftler zu unterstützen. Stattdessen hat er mir in diesem Jahr gleich zweimal geholfen. Sein unaufgeregter Rat hat mich dazu bewogen, dass ich ein Manuskript, das streng nach den Vorgaben der DFG mit Hilfe eines generativen Textsystems (KI) entstanden ist, wieder zurückgezogen habe und auf dem wissenschaftlichen „Pfad der Tugend“ geblieben bin. Auch wenn er bei dem vorliegenden mehr historischen Beitrag weniger eingreifen musste: Seine Impulse und seine Qualitätskontrolle als Mentor haben bereits einige meiner Beiträge unterstützt und sogar erst möglich gemacht.

Einen wichtigen Freundschaftsdienst habe ich **Herrn Privatdozent em. Dr. Stefan Schneckenburger** zu verdanken. Er hat durch seine konstruktive Kritik den ersten, zu stark historisch überlasteten Entwurf auf ein einigermaßen vernünftiges Maß zurechtgestutzt. Stefans Kompetenzen erinnern mich immer wieder an die umfassend gebildeten Wissenschaftler vergangener Zeiten. Er ist ein exzellenter Botaniker und hatte bis zu seiner Emeritierung die Leitung des Botanischen Gartens der TU Darmstadt. Vielseitig belesen, bemüht er sich erfolgreich um den Brückenschlag zwischen Literatur und Botanik. Er ist ein sehr guter Renaissance-Kenner und engagiert sich im Vorstand der Deutschen

Shakespeare Gesellschaft. Im Jahr 2023 hat er ein monumentales 680-Seiten Werk zur Botanik in Shakespeares Dichtung vorgelegt.

Auch bei dieser Veröffentlichung in der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Zeitschrift stand mir **Herr Dr. Michael Serafin** zur Seite. Er war mir immer mehr als formaler Schriftleiter. Er ist Sparringspartner, engagiert sich inhaltlich für die Themen und sorgt für die formale Qualitätssicherung durch eine äußerst gründliche Durchsicht des Manuskripts. Da wo der Autor durch zahlreiche Überarbeitungen „betriebsblind“ geworden ist, findet er noch kleine Fehler und Ungenauigkeiten, im Ausdruck oder bei der Formatierung. Ihm gilt wie immer mein freundschaftlicher Dank.

**Man sieht nur mit dem Herzen gut.**
**Das Wesentliche ist für die Augen unsichtbar.**

***Antoine de Saint-Exupéry***

FÜR FARI

**Personenverzeichnis**


| Name, Vorname | Lebensdaten | Bemerkung | Seite |
|---|---|---|---|
| | | | |
| Adolf II. von Nassau | 1423 – 1475 | Kurfürst, Erzbischof v. Mainz | 64 |
| al-Chwarizmi | 780 – 855/50 | Arab. Math. | 44 |
| Al-Farghani | | | |
| Alfraganus (Al-Farghani) | Um 800 – 870 | Arab. Math. | 44,57 |
| Alighieri, Dante | 1265 – 1321 | It. Dichter, Philosoph | 59,95 |
| al-Karaji, Abu Bakr | 933 – 1029 n.Chr. | Pers. Math., Ingenieur | 11 |
| Al-Ma´mun | 780 – 833 | Kalif der Abbasiden | 44 |
| Amann, Fridericus | ? – 1465 | Dt. Math., Benediktiner | 69 |
| Anaximander von Milet | Gest. nach 547 v.Chr. | Griech. Philosoph | 21 |
| Apollonios von Perge | Um 265 – um 190 v.Chr. | Griech. Math. | 1,2,19-21,60,71,85,91,93 |
| Archimedes von Syrakus | 285(?) - 212 v.Chr. | Griech. Math., Physiker, Ingenieur | 7,8,11,17,20,22,27,41,54,59,60,71,85 |
| Aristarchos von Samos | Um 310 – um 230 v.Chr. | Griech. Astronom, Math. | 20 |
| Aristoteles | 384 – 322 v.Chr. | Griech. Philosoph | 10,11,14,24-26,41,48,50,53,61 |
| Athenaios | Um 200 v.Chr. | Griech. Rhetoriker, Grammatiker | 7 |
| Augustinus von Hippo | 354 – 430 | Kirchenvater | 30,32 |
| Bacon, Roger | Um 1220 – 1292 | Engl. Franziskaner, Philosoph | 34 |
| Baldi, Bernardino | 1553 – 1617 | It. Math. | 60 |
| Beda Venerabilis | Gest. 735 | Angl. Benediktinerabt | 29,33,35,40,46,64,94 |
| Behaim, Martin | 1459 – 1507 | Nürnberger Kaufmann, Erfinder Jakobsstab | 35 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Benedetti, Battista | 1530 – 1590 | It. Math. | 62 |
| Bernoulli, Jacob | 1655 – 1705 | Schweizer Math. | 61 |
| Bernoulli, Johann | 1667 – 1748 | Schweizer Math. | 61 |
| Bessarion, Kardinal | 1399/1408 – 1472 | Byzant./später latein. Patriarch v. Konstantinopel | 55,56 |
| Boccaccio, Giovanni | 1313 – 1375 | It. Schriftsteller, Dichter | 8 |
| Boethius, Anicius Manlius Severinus | 480 – 524 | Spätantiker Gelehrter | 50,54 |
| Bombelli, Rafael | 1526 – 1579 | It. Ingenieur, Math. | 83,84,88 |
| Brahe, Tycho | 1546 – 1601 | Dän. Astronom | 62,71 |
| Briggs, Henry | 1561 – 1630 | Engl. Math. | 58 |
| Brunelleschi, Filippo | 1377 – 1446 | It. Architekt, Bildhauer, Ingenieur | 1,2,34,72,73,95 |
| Bruno, Giordano | 1548 – 1600 | It. Mönch, Priester, Philosoph | 53 |
| Bürgi, Jost | 1552 – 1632 | Schweizer Instrumenten-bauer, Astronom, Math. | 58,74,75,76 |
| Buridan, Johannes | Um 1300 – nach 1358 | Franz. Philos., Physiker, Logiker | 61 |
| Calvin, Johannes | 1509 – 1564 | Schweizer Reformator | 5,86 |
| Campanus von Novara | Um 1220 - 1296 | It. Astronom, Math., Astrologe, Arzt | 54,59,60 |
| Cantor, Georg | 1871 – 1956 | Dt. Math. | 26,28 |
| Cardano, Gerolamo | 1501 – 1576 | It. Arzt, Math., Philosoph | 1,2,3,23,74,77-79,81-84, 86,87,89,92,95,96 |
| Cauchy, Baron Augustin-Louis | 1789 – 1857 | Franz. Math. | 15,28 |
| Cavalieri, Bonaventura Francesco | 1598 – 1647 | It. Physiker | 92 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Chuquet, Nicolas | 1445 -1488 | Franz. Math. | 54 |
| Clavius, Christoph | 1537 – 1612 | Dt. Math., Jesuit | 60,72 |
| Commandino, Federico | 1506 – 1575 | It. Math. | 59,60 |
| Cosimo de Medici | 1389 – 1464 | Florentiner Patriarch | 37 |
| d'Alembert, Jean-Baptiste le Rond | 1717 – 1783 | Franz. Math., Physiker | 87 |
| Dedekind, Julius Wilhelm Richard | 1831 – 1916 | Dt. Math. | 15,28,53 |
| Demokrit von Abdera | 460/59 – 370 v.Chr. | Griech. Philosoph | 21 |
| Descartes, René | 1569 – 1650 | Franz. Math. | 84 |
| Dietrich von Freiberg | Um 1245 – 1320 | Spätmittelalterl. Dominikaner, Physiker | 36 |
| Diophantos von Alexandria | Gest. 284 n.Chr. | Griech. Algebraiker | 21-23,55,74 |
| Donatello (Donato di Niccolo) | 1386 – 1466 | It. Bildhauer | 34,73 |
| Dürer, Albrecht | 1471 – 1528 | Dt. Maler, Grafiker, Math., Kunsttheoretiker | 1-3,27,52,73,74,95 |
| Einstein, Albert | 1879 – 1955 | Dt./Schweitz/US-am. Physiker | 24 |
| EratosthFerrarienes von Kyrene | Um 276 – 195 v.Chr. | Griech. Math., Geograph, Astronom, Philosoph, Dichter | 11,20,21 |
| Eudoxos | 408 – 355 v.Chr. | Griech. Math. | 10,11,16,17 |
| Euklid von Alexandria | 3. Jht. v.Chr. | Griech. Math. | 1,2,7,10,11,13,15-17,19,20,22-24,26 28,29,31,42,48,50,53,54,59,60,71,72,75 85,93,96 |
| Euler, Leonhard | 1707 – 1783 | Schweiz. Math., Physiker | 13,61,83,84 |
| Ferdinand von Aragon | 1452 – 1516 | Kronprinz von Aragon | 43 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Fermat, Pierre | 1601 – 1665 | Franz. Richter, Math. | 22,23 |
| Ferrari, Ludovico | 1522 – 1565 | It. Math. | 87 |
| Fibonacci | Um 1170 – 1240 | s.a. Leonardo di Pisa | 1,2,30,45,49,51,65,67,68,94 |
| Fibonacci (Leonardo di Pisa) | Um 1170 – 1240 | It. Rechenmeister, Math. | 1,2,30,45,49,51,65,67,68,94 |
| Frank, Martin | ? | Dt. Math.historiker | 59 |
| Friedrich II. | 1194 - 1250 | Römisch-deutscher Kaiser | 7 |
| Fust, Johannes | 1400 – 1466 | Verleger, Drucker | 64 |
| Galileo Galilei | 1564 – 1642 | It. Physiker, Univeralgelehrter | 39,53,62,71,88,91,96 |
| Galois, Evariste | 1811 – 1832 | Franz. Math. | 27 |
| Gauß, Carl Friedrich | 1777 – 1855 | Dt. Math. | 27,87 |
| Gerbert von Aurillac (später Silvester II) | 950 – 1003 | Papst | 44,45 |
| Gericke, Helmuth | 1909 – 2007 | Dt. Math., Math.historiker | 10,96 |
| Ghiberti, Lorenzo | 1378 – 1455 | It. Bildhauer, Goldschmied, Erzgießer | 34,73 |
| Girard, Albert | 1595 – 1632 | Niederl. Math. | 84 |
| Gmunden, Johannes von | 1380 – 1442 | Österr. Math., Astronom | 55 |
| Guidobaldo dal Monte | 1545 – 1607 | It. Math. | 60,62 |
| Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hospital | 1661 – 1704 | Franz. Math. | 61 |
| Gutenberg, Johannes | 1393/1406 – 1468 | Buchdrucker | 63,64,94 |
| Harun-ar-Rashid | 786 – 809 | Kalif von Bagdad | 32 |
| Hayes, R.L. | ? | Mathematik-Didaktiker | 6 |
| Henlein, Peter | Um 1479/85 – 1542 | Nürnberger Uhrmacher | 40 |
| Heraklit von Ephesos | 520 – 460 v.Chr. | Griech. Vorsokratiker | 11 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Heron von Alexandria | Bis 70 n.Chr. | Griech. Math., Ingenieur | 7,15,21,22,42,60 |
| Hippasos von Metapont | Spät. 6. – frühes 5. Jht. v.Chr. | Pythagoräer | 14 |
| Hippias von Elis | 5. Jht. v.Chr. | Griech. Math.,Uni.gelehrter | 26,27 |
| Hippokrates von Kos (Chios) | Um 460 – um 370 v.Chr. | Griech. Arzt | 10,21 |
| Horaz, Quintus Horatius Flaccus | 65 - 8 v.Chr. | Röm. Dichter | 31 |
| Huygens, Christiaan | 1629 – 1695 | Niederl. Astronom, Math., Physiker, Uhrmacher | 39 |
| Hypatia | Um 370 – 418 n.Chr. | Griech. Mathematikerin | 21 |
| Isabella von Kastilien | 1451 – 1504 | Kastilische Königin | 43 |
| João de Castro | 1500 – 1548 | Port. Seefahrer, Vizekönig von Indien | 81 |
| Julius II. | 1487 – 1555 | Papst | 5,93 |
| Kamāl al-Dīn al-Fārisī | 1266/67 – 1319 | Pers. Math., Physiker | 36 |
| Kant, Immanuel | 1724 – 1804 | Dt. Philosoph | 22 |
| Karl der Große | 747/48 – 814 | Dt. Kaiser | 32 |
| Kepler, Johannes | 1571 – 1630 | Dt. Astronom, Math., Astrologe | 58,62,85,86,91,92 |
| Kolumbus, Christoph | 1451 – 1506 | It. Seefahrer in kastilischen Diensten | 43,72 |
| Kopernikus, Nikolaus | 1475 – 1543 | Preuß. Astronom, Domherr, Arzt, Math. | 58,68,85,86,91 |
| Kramer, Heinrich | Um 1439 – 1505 | Dominikaner, Hexenverfolger | 64 |
| Krämer, Sybille | *1951 | Dt. theoretische Philosophin | 3,89 |
| Lebesgue, Henri Leon | 1845 – 1941 | Franz. Math. | 26 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Leibniz, Gottfried Wilhelm | 1646 - 1716 | Dt. Philosoph, Math., Universalgelehrter | 54,61,83,88 |
| Leo XIII | 1810 – 1903 | Papst | 50 |
| Leonardo da Vinci | 1452 – 1519 | It. Maler, Bildhauer, Universalgenie | 1,2,42,74-77,88,95,97 |
| Leonardo di Pisa | Um 1170 – 1240 | Siehe auch Fibonacci | 1,2,45,49,94,96 |
| Lindemann, Ferdinand v. | 1852 – 1939 | Dt. Math. | 27,37 |
| Lorenzo de Medici | 1449 – 1492 | Florentiner Patriarch | 37 |
| Luther, Martin | 1483 – 1546 | Dt. Reformator | 68,79, 86 |
| Machiavelli, Niccolo | 1469 – 1527 | It. Philos., Diplomat, Chronist | 41 |
| Macrobius, Ambrosius Theodosius | 385/90 – um 430 | Spätantiker röm. Philosoph | 30 |
| Melanchthon, Philipp | 1497 – 1560 | Dt. Reformator | 86 |
| Menelaos von Alexandria | Um 45/50 – 110/120 | Griech. Math., Astronom | 42 |
| Menninger, Karl | 1898 – 1963 | Dt. Math.historiker | 3,30,44,64,77,94,96,97 |
| Mercator, Gerhard | 1512 – 1594 | Dt. Kartograph | 74,81,95 |
| Mersenne, Marin | 1588 – 1648 | Franz. Theologe, Math. | 13 |
| Moivre, Abraham de | 1667 – 1754 | Franz. Math. | 84 |
| Moritz von Oranien | 1567 – 1625 | Prinz von Oranien, Graf von Nassau-Dillenburg | 62 |
| Napier, John (lat. Neper) | 1530 – 1617 | Schott. Math., Naturwiss., Theologe | 58,76 |
| Netz, Reviel | *1968 | Israel. Altphilologe, Math.historiker | 8 |
| Newton, Isaac | 1643 – 1727 | Engl. Physiker | 54,61,92 |
| Nikolaus von Kues | 1401 – 1464 | Dt. Theologe, Kardinal, Math., Philosoph | 36,48,52,53,61,94 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Nikomachos von Gerasa | Früh. 1. Jht. – spät. 2. Jht. | Griech. Philosoph, Math., Musiktheoretiker | 42 |
| Noel, William | 1965 – 2024 | Brit. Archivar | 8 |
| Nunes, Pedro | 1502 – 1578 | Port. Math., Navigation | 80,81 |
| Oresme, Nicole | Vor 1330 – 1382 | Franz. Bischof, Math. | 40,61 |
| Osiander, Andreas | 1498 – 1552 | Rektor, Lektor (unautorisiert) | 85,86 |
| Ottendorfer, Christof | ? | Sponsor von Michael Stifel | 69 |
| Pacioli, Luca | 1445 – 1517 | It. Math., Franziskaner | 1,2,30,38,74,75,76,80,82,94,95,97 |
| Pappos von Alexandria | 4. Jht. n.Chr., nach 320 | Griech. Math., Astronom | 21,23,27,42,93 |
| Parmenides von Elea | 520/15-460/55 v.Chr. | Griech. Vorsokratiker | 11,24 |
| Peletier, Jacques | 1517 – 1582 | Franz. Autodidact (Griechisch, Math., Medizin) | 75 |
| Perigrinus, Petrus da Maricourt | 13. Jht. | Franz. Gelehrter | 34 |
| Petrarca, Francesco | 1304 – 1374 | It. Dichter | 8 |
| Petreius, Johannes | 1497 – 1550 | Drucker, Verleger | 68,78,84,85,86 |
| Peurbach, Georg von | 1423 – 1461 | Österr. Humanist, Astronom | 55 |
| Piero della Francesca | Um 1416 – 1492 | It. Maler, Math. in Malerei | 74,76 |
| Platon | 428/27-348/47 v.Chr. | Griech. Philosoph | 9,11,14,17,24,25,42,50,53,74,93 |
| Plinius der Jüngere (Gaius Plinius Caecilius Secundus) | 61/62 – 113/115 | Röm. Chronist | 8,30 |
| Plutarch (Plutarchos von Chaironeia) | Um 45 – um 125 | Griech. Schriftsteller | 7 |
| Proklos | 412 – 485 n.Chr. | Griech. Philosoph | 10,16 |
| Ptolemaios, Claudius | Um 85 – 165 n.Chr. | Astronom, Math. | 21,22,42,50,59,91,93 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pythagoras | Um 570 – nach 510 v.Chr. | Griech. Vorsokratiker, Math. | 9,11,23,24,53 |
| Raffaello, Sanzio da Urbino | 1483 – 1520 | Ital. Maler, Architekt | 5,93 |
| Ramus, Petrus (Pierre de la Ramée) | 1515 – 1572 | Franz. Philosoph | 15 |
| Recorde, Robert | 1510 – 1558 | Walisischer Arzt, Math. | 80 |
| Regiomontanus (Johann Müller) | 1436 – 1476 | Dt. Math., Astronom, Verleger | 1,2,55-57,59,69,71,72,85,91,92,94 |
| Reinhold, Erasmus | 1511 – 1553 | Dt. Astronom, Math., Astrologe, | 58 |
| Rheticus, Georg Joachim | 1514 – 1574 | Dt. habsburgerischer Math., Astronom | 58 |
| Rieger, Ulrich (lat. Hudalrichus Regius) | Nach 1500 – 1540 | Dt. Rechenmeister | 13 |
| Ries(e), Adam | 1492 – 1559 | Rechenmeister | 66,71,79,90,94 |
| Robert von Chester | 12. Jht. | Engl. Arabist u. Math. | 45,69 |
| Roeck, Bernd | *1953 | Dt. Historiker | 3,21,24,31-35,38,40,41,55,60,64,93,97 |
| Rudolff, Christoff | 1499 – 1543/45 | Dt. Math. | 68,69,94 |
| Russo, Lucio | 1944 – 2025 | It. Math.,Physiker, Wissenschaftsautor | 7,8,14,21,24-26,28,92,97 |
| Schreyber, Heinrich (Grammateus) | Vor 1496 – 1525/26 | Dt. Math. | 69 |
| Scipione dal Ferro | 1465 – 1526 | It. Math. | 82,84,87 |
| Sokrates | 469 – 399 v.Chr. | Griech. Philosoph | 10,24,25 |
| Stevin, Simon | 1548 – 1620 | Fläm. Math., Physiker, Ingenieur | 24,48,49,62,74,80,84 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Stifel, Michael | Um 1487 – 1567 | Dt. Theologe, Math.,Reformator | 1,2,23,68-71, 74,79,86,87,89,92,94,95,98 |
| Tartaglia, Niccolo | 1499 – 1557 | It. Math. | 59,82,83,87,92 |
| Thales von Milet | 624/25 - 548/44 v.Chr. | Griech. Vorsokratiker, Math., Geometer, Astronom | 9-11,13,21 |
| Theaitetos | 417 – 369 v.Chr. | Griech. Math. | 10,16 |
| Theodoros von Kyrene | Um 465 – um 399 v.Chr. | Griech. Philosoph | 16 |
| Tintoretto, Jacopo | 1518 . 1594 | It. Maler | 7,93 |
| Tommaso di ser Giovanni di mone cassai | 1401 – 1428 | It. Maler | 34 |
| Ursus, Raimarus | 1551 – 1600 | Übersetzer | 76 |
| Vespucci, Amerigo | 1454 – 1512 | It. Kaufmann, Seefahrer, Entdecker | 35 |
| Viète, François | 1540 – 1603 | Franz. Advokat, Math. | 58,74,75,89 |
| Vitruv | 80-70-1.Jht.v.Chr. | Röm. Architekt, Ingenieur | 7 |
| Wagner, Ulrich | ? – um 1490 | Rechenmeister | 65 |
| Wantzel, Pierre | 1814 – 1848 | Franz. Math. | 27 |
| Weierstraß, Karl | 1815 – 1897 | Dt. Math. | 28 |
| Werner, Johannes | 1468 – 1528 | Pfarrer, Amateurastronom | 57 |
| Widmann, Johannes | 1460 – 1505 | Dt. Math. | 69 |
| Wiles, Andrew | *1953 | Brit. Math. | 23 |
| Wußing, Hans | 1927 – 2011 | Dt. Math/Wissens.historiker | 42,44,50,54,58,61,67,69,71,72,77,80,88, 89,90,92,98 |
| Zamberti, Bartolomeo | 1473 – 1539 | It. Math. | 59,60 |
| Zenon von Elea | Um 490 – um 430 v.Chr. | Griech. Philosoph | 14,25 |