MITTEILUNGEN
aus dem
MATHEM. SEMINAR GIESSEN

Herausgegeben von den Professoren
des Mathematischen Instituts der Universität Giessen

Geschäftsführung: D. Gaier, F. Timmesfeld

Heft 176

Karl-Goswin Große-Erdmann

Holomorphe Monster
und universelle Funktionen

GIESSEN 1987

SELBSTVERLAG DES MATHEMATISCHEN INSTITUTS
ISSN 0373-8221 CODEN: MMUGAU

Die vorliegende Arbeit wurde vom Fachbereich IV - Abteilung Mathematik der Universität Trier als Dissertation angenommen.

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0. Einführung

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit holomorphen Monstern, wie sie kürzlich von LUH [32] definiert wurden, und mit dem Begriff der Universalität von Elementen eines topologischen Raumes bezüglich einer Familie stetiger Abbildungen, den wir in Kapitel 1 einführen. Universelle Elemente sind in vielfältiger Weise in der Analysis in Erscheinigung getreten (beispielsweise als holomorphe Monster).

Seit CASORATI und WEIERSTRASS ist bekannt, daß holomorphe Funktionen in der Umgebung einer wesentlichen Singularität jedem komplexen Wert beliebig nahe kommen. 1929 bewies BIRKHOFF [5] die Existenz einer ganzen Funktion, die im Randpunkt ∞ ein noch stärker singuläres Verhalten aufweist: durch geeignete Translation dieser Funktion läßt sich jede ganze Funktion approximieren. Zwar konnte bis heute keine Funktion mit dieser Eigenschaft konkret angegeben werden, doch zeigte VORONIN 1975 in einer bemerkenswerten Arbeit ([53]), daß die RIEMANNsche Zeta-Funktion eine verwandte Eigenschaft besitzt: durch geeignete Translation einer auf $|z| \leq r$ $(r < \frac{1}{4})$ stetigen und im Inneren holomorphen nullstellenfreien Funktion f entlang dem Streifen $\{z\colon \frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, z < 1\}$ kann man f durch die Zeta-Funktion approximieren. In der Folge wurden Funktionen gefunden, die das gleiche leisten unter Wegfall der Voraussetzung der Nullstellenfreiheit; beispielsweise gilt dieses für die Ableitung ζ' der RIEMANNschen Zeta-Funktion (vgl. BAGCHI [3]). Ersetzt man nun Translationen durch lineare Transformationen $\tau(z) = az + b$, so kann man eine analoge Approximationseigenschaft in beliebigen Randpunkten des Holomorphiebereiches holomorpher Funktionen betrachten. Damit beschäftigte sich LUH in einer Reihe von Arbeiten ([28], [29], [30], [32]). Sein Hauptergebnis ist dabei folgendes: Zu jeder offenen Menge $\mathcal{O} \neq \mathbb{C}$ mit einfach zusammenhängenden Komponenten existiert eine in $\mathcal{O}$ holomorphe Funktion φ, so daß für φ sowie für alle Ableitungen $\varphi^{(j)}$ $(j \in \mathbb{N})$ und alle Stammfunktionen $\varphi^{(j)}$ $(-j \in \mathbb{N})$ gilt: Zu jedem Randpunkt ζ von $\mathcal{O}$ und zu jeder in einem JORDAN-Gebiet G holomorphen Funktion f existiert eine Folge (τ_n) von linearen Transformationen

$\tau_n(z) = a_n z + b_n$ mit

$$\tau_n(G) \subset \mathcal{O} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\text{"}\tau_n(G) \to \zeta\text{" und } \varphi^{(j)}(\tau_n(z)) \underset{G}{\Rightarrow} f(z) \quad \text{für } n \to \infty.$$

LUH nannte solche Funktionen holomorphe Monster und bewies, daß die Menge der holomorphen Monster dicht liegt im Raum $H(\mathcal{O})$.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß die Menge der Monster sogar so groß ist, daß ihr Komplement in $H(\mathcal{O})$ nur von erster BAIREscher Kategorie ist (Abschnitte 3.1 und 3.2). Ferner verallgemeinern wir den Begriff des holomorphen Monsters in geeigneter Weise auf allgemeine offene Mengen (Abschnitt 3.3). Eine wörtliche Übernahme der Definition von LUH scheitert allerdings daran, daß im allgemeinen Fall gewissermaßen zu wenig Funktionen existieren, die Stammfunktionen beliebiger Ordnung besitzen. Es gelingt jedoch, die Definition in natürlicher Weise so zu modifizieren, daß wir auch hier Existenz und Reichhaltigkeit holomorpher Monster nachweisen können.

Beim Beweis stützen wir uns im wesentlichen auf zweierlei: Auf allgemeine Ergebnisse über Universalitäten, die wir in Kapitel 1 herleiten, und den Approximationssatz von RUNGE, um jene Ergebnisse anwenden zu können. Motiviert durch das Auftreten diverser "Universalitäten" in der Analysis führen wir in Kapitel 1 einen allgemeinen Begriff der Universalität von Elementen eines topologischen Raumes bezüglich einer Familie stetiger Abbildungen ein. Wir beweisen einen zentralen Satz über Existenz und Reichhaltigkeit universeller Elemente (Abschnitt 1.2). Sein Beweis beruht auf der sogenannten Kategorien-Methode (vgl. OXTOBY [38]).

Mit den Ergebnissen aus Kapitel 1 gelingt es uns, vielfältige "Universalitäten" aus verschiedenen Bereichen der Analysis einheitlich zu behandeln und neue Ergebnisse zu gewinnen. Das ist Gegenstand von Kapitel 2. Unter anderem beweisen wir die Existenz einer universellen TAYLOR-Reihe, geben einen funktionentheoretischen Beweis für die Existenz einer universellen trigonometrischen Reihe und zeigen in diesen und weiteren Fällen, daß die Menge der universellen Elemente ein Komplement von erster Kategorie in ihrem Grundraum hat.

Unsere hauptsächliche Anwendung jedoch sind die LUHschen Monster, die als spezielle universelle Elemente nachgewiesen werden.

Ich möchte Herrn Prof. Dr. Wolfgang Luh für die grundlegenden Anregungen und für vielfältige Hinweise zu dieser Arbeit herzlich danken. Herrn Prof. Dr. Wolfgang Gawronski danke ich für die freundliche Übernahme des Koreferates.

Kapitel 1. Universelle Elemente in topologischen Räumen

1.0 Motivation

Die Arbeit [39] von 1915 dürfte die erste sein, in der eine Art von "Universalität" beobachtet wurde. FEKETE bewies darin als einfache Anwendung des MÜNTZschen Satzes die Existenz einer Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ mit der Eigenschaft, daß sich jede auf $[-1,1]$ stetige Funktion mit Nullstelle in 0 als Grenzwert einer Folge $(\sum_{\nu=1}^{n_k} a_\nu x^\nu)_{k\in\mathbb{N}}$ von Teilsummen darstellen läßt.

Das Wort "universell" wurde 1935 erstmals von MARCINKIEWICZ [35] verwendet. Ist (h_n) eine positive Nullfolge, so existiert eine auf $[0,1]$ stetige Funktion φ derart, daß sich jede auf $[0,1]$ meßbare Funktion als Grenzwert im Sinne der fast-überall-Konvergenz einer Folge $\left(\frac{\varphi(x+h_{n_k})-\varphi(x)}{h_{n_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ darstellen läßt.
MARCINKIEWICZ nannte φ eine "universelle Stammfunktion".

1952 bewies MAC LANE [34] die Existenz einer ganzen holomorphen Funktion φ mit der Eigenschaft, daß sich jede ganze Funktion als Grenzwert einer Teilfolge $(\varphi^{(n_k)})_{k\in\mathbb{N}}$ der Folge aller Ableitungen von φ im Sinne der kompakten Konvergenz auf $\mathbb{C}$ darstellen läßt.

Die drei aufgeführten Sätze haben eine gemeinsame Struktur. In ihnen wird die Existenz eines Elementes u eines topologischen Raumes X nachgewiesen, das bezüglich einer Folge (L_n) von stetigen Abbildungen aus X in einen zweiten topologischen Raum Y die Eigenschaft hat, daß die Menge aller $L_n u$ $(n \in \mathbb{N})$ dicht in Y liegt. Beispielsweise ist bei MAC LANE $X = Y = H(\mathbb{C})$ und $L_n\varphi = \varphi^{(n)}$ für $\varphi \in H(\mathbb{C})$.

Mitunter tritt jedoch auch der Fall auf, daß man mit der Folge $(L_n u)$ nicht alle Elemente aus Y approximieren kann. Ein extremes, aber typisches Beispiel liefert der POINCARÉsche Wiederkehrsatz:

Es sei $\mathcal{O}$ eine beschränkte offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$, und $T: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ ein Homöomorphismus, der zudem volumentreu ist, d.h. für jede offene Teilmenge U von $\mathcal{O}$ haben U und T(U) das gleiche Maß. Dann existiert ein Element $x \in \mathcal{O}$, so daß es eine Folge (n_k) gibt mit $T^{n_k} x \to x$ für $k \to \infty$. Der Punkt x heißt dann rekurrent. (Vgl. OXTOBY [38]).

Betrachtet man hier die Abbildungen $L_n := T^n - I$, wobei I die identische Abbildung ist, so sieht man, daß die Rekurrenz des Punktes x nur besagt, daß man den Nullpunkt aus der Menge $\{(T^n-I)(x): n \in \mathbb{N}\}$ heraus approximieren kann.

Wir geben uns also im allgemeinen Fall neben zwei topologischen Räumen X und Y sowie einer Familie $\Lambda := (L_j)_{j\in I}$ (mit einer Indexmenge I) von stetigen Abbildungen $L_j: X \to Y$ noch eine abgeschlossene Teilmenge A von Y vor und werden ein Element $x \in X$ Λ-universell bezüglich A nennen, falls A im Abschluß der Menge $\{L_j x: j \in I\}$ enthalten ist.

Im nächsten Abschnitt stellen wir einige Hilfsmittel bereit.

1.1 BAIREsche Kategorien und ein Satz vom FUBINIschen Typ

BAIRE führte 1899 den Begriff der Kategorie als Maß für die Größe von Teilmengen topologischer Räume ein. In diesem Zusammenhang bewies er den nach ihm benannten Kategoriensatz, den wir als wesentliches Hilfsmittel zum Nachweis von Existenz und Reichhaltigkeit universeller Elemente benötigen. Wir fassen dazu hier die betreffenden Definitionen und Ergebnisse zusammen.

Definition 1.1.1 Es sei X ein topologischer Raum. Eine Teilmenge E von X heißt

(1) nirgends dicht (in X), falls der Abschluß von E keine inneren Punkte hat: $\overset{\circ}{\overline{E}} = \emptyset$,

(2) von erster (BAIREscher) Kategorie (in X), falls E die Vereinigung abzählbar vieler nirgends dichter Teilmengen von X ist,

(3) von zweiter (BAIREscher) Kategorie (in X), falls E nicht von erster Kategorie ist.

Ferner setzen wir:

Definition 1.1.2 Es sei X ein topologischer Raum und E und F zwei Teilmengen von X. Wir nennen E dicht bezüglich F, falls F im Abschluß von E enthalten ist: $F \subset \overline{E}$.

Man beachte, daß eine Menge E dicht bezüglich einer Menge F sein kann, ohne daß F in E enthalten ist. Im Sonderfall F = X erhalten wir den üblichen Begriff der Dichte.

Wir stellen nun einige elementare Eigenschaften der BAIREschen Kategorien zusammen, die wir im folgenden meist stillschweigend benutzen:

<u>Satz 1.1.3</u> Es seien E, A und A_n ($n \in \mathbb{N}$) Teilmengen eines topologischen Raumes. Dann gilt:

(1) Ist E von 1. Kategorie und $A \subset E$, so ist auch A von 1. Kategorie.

(2) Ist E von 2. Kategorie und $E \subset A$, so ist auch A von 2. Kategorie.

(3) Sind alle A_n ($n \in \mathbb{N}$) von 1. Kategorie, so ist auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ von 1. Kategorie.

(4) Ist E von 2. Kategorie und A von erster Kategorie, so ist $E \setminus A$ von 2. Kategorie, insbesondere nicht leer.

Gegebenenfalls muß man von einem topologischen Raum nicht nur verlangen, daß er von 2. Kategorie in sich ist, sondern eine stärkere Eigenschaft besitzt:

<u>Definition 1.1.4</u> Ein topologischer Raum X heißt BAIREscher Raum, falls der Durchschnitt jeder Familie abzählbar vieler offener dichter Teilmengen von X dicht ist in X.

Damit haben wir:

<u>Satz 1.1.5</u> Es sei X ein BAIREscher Raum. Dann gilt:
(1) X ist von 2. Kategorie in sich.
(2) Jede offene nicht leere Teilmenge von X ist von 2. Kategorie in X.
(3) Das Komplement einer Menge von 1. Kategorie in X ist dicht in X.

Schließlich benötigen wir den BAIREschen Kategoriensatz, der eine große Klasse BAIREscher Räume liefert:

<u>Satz 1.1.6 (BAIRE)</u> Jeder vollständige metrische Raum ist ein BAIREscher Raum.

Beweise zu den obigen Sätzen findet man in SCHUBERT ([47], p. 133 f).

Unser erstes Ergebnis beschäftigt sich mit folgender Fragestellung:
Es sei M eine Teilmenge des Produktes $X\times Y$ zweier topologischer Räume X und Y, das in üblicher Weise mit der Produkttopologie versehen sei. Ist nun M dicht, so stellt sich die Frage, ob auch für Elemente x von X die Schnitte

$$M_x := \{y \in Y: (x,y) \in M\}$$

dicht in Y sind.

Setzen wir für Teilmengen E von Y

$$M^{-1}(E) := \{x \in X: \text{es gibt ein } y \in E \text{ mit } (x,y) \in M\},$$

so erhalten wir:

<u>Satz 1.1.7</u> Es sei X ein BAIREscher Raum, Y ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis und A eine nicht leere abgeschlossene Teilmenge von Y. Es sei M eine Teilmenge von $X\times Y$ mit der Eigenschaft, daß $M^{-1}(\mathcal{O})$ offen in X ist für alle offenen Teilmengen $\mathcal{O}$ von Y. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) M ist dicht bezüglich $X\times A$.
(2) $\{x: M_x$ ist dicht bezüglich $A\}$ ist dicht in X.
(3) $\{x: M_x$ ist dicht bezüglich $A\}$ hat ein Komplement von 1. Kategorie in X.

<u>Beweis:</u> 1. Es gelte (1). Ist $\mathcal{B} = \{\mathcal{O}_\nu: \nu \in \mathbb{N}\}$ eine Basis der Topologie von Y, so werde $\mathcal{B}^A := \{\mathcal{O}_\nu: \mathcal{O}_\nu \in \mathcal{B}$ und $A \cap \mathcal{O}_\nu \neq \emptyset\}$ betrachtet. Dann ist für ein Element $x \in X$ die zugehörige Menge M_x genau dann nicht dicht bezüglich A, wenn es ein Element $a \in A$ und eine Menge $\mathcal{O}_\nu \in \mathcal{B}$ gibt mit $a \in \mathcal{O}_\nu$ und $M_x \subset \mathcal{O}_\nu^c$, also genau dann, wenn es ein $\mathcal{O}_\nu \in \mathcal{B}^A$ gibt mit $M_x \subset \mathcal{O}_\nu^c$. Da genau dann M_x in $\mathcal{O}_\nu^c$ enthalten ist, wenn $x \notin M^{-1}(\mathcal{O}_\nu)$, erhalten wir:

$$\{x: M_x \text{ dicht bezüglich } A\} = \bigcup_{\mathcal{O}_\nu \in \mathcal{B}^A} (M^{-1}(\mathcal{O}_\nu))^c.$$

Nach Voraussetzung ist $M^{-1}(O_\nu)$ für jedes $O_\nu \in B^A$ offen, jedes $(M^{-1}(O_\nu))^c$ also abgeschlossen; folglich genügt es zum Nachweis von (3) zu zeigen, daß kein $(M^{-1}(O_\nu))^c$ innere Punkte hat. Wir betrachten also ein $O \in B^A$. Es sei $x \notin M^{-1}(O)$ und U eine offene Umgebung von x. Da M bezüglich $X \times A$ dicht und O eine offene Umgebung eines Punktes $a \in A$ ist, gibt es ein Paar $(\xi,\eta) \in M$ mit $\xi \in U$ und $\eta \in O$. Mithin ist $\xi \in M^{-1}(O)$: Jede Umgebung von x enthält Punkte aus $M^{-1}(O)$, so daß x kein innerer Punkt von $(M^{-1}(O))^c$ sein kann.

2. Es gelte (3). Da X ein BAIREscher Raum ist, ist in ihm nach Satz 1.1.5(3) das Komplement jeder Menge von 1. Kategorie dicht; es gilt also (2).

3. Es gelte (2). Es seien $x \in X$, $a \in A$ und U, V offene Umgebungen von x beziehungsweise a. Wegen (2) gibt es ein $\xi \in U$, so daß M_ξ dicht bezüglich A ist. Daraus folgt, daß V ein Element $\eta \in M_\xi$ enthält. Insgesamt erhalten wir $(\xi,\eta) \in U \times V$ und $(\xi,\eta) \in M$. In jeder Umgebung von (x,a) gibt es also Punkte aus M, womit (1) folgt, da $x \in X$ und $a \in A$ beliebig waren. □

<u>Bemerkung 1.1.8</u> Die Voraussetzung, daß $M^{-1}(O)$ offen sei für alle offenen Teilmengen O von Y, kann noch abgeschwächt werden, ist aber für unsere Zwecke ausreichend. Sie kann nicht ganz fallengelassen werden, wie das Beispiel $X = Y = A = \mathbb{R}$ und $M = \mathbb{Q}^2$ lehrt.

Durch Spezialisierung auf den Fall A = Y erhalten wir:

<u>Satz 1.1.9</u> Es sei X ein BAIREscher Raum und Y ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis. Ist M eine Teilmenge von $X \times Y$ mit der Eigenschaft, daß $M^{-1}(O)$ offen in X ist für jede offene Teilmenge O von Y, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) M ist dicht in $X \times Y$.
(2) $\{x\colon M_x$ ist dicht in $Y\}$ hat ein Komplement von 1. Kategorie in X.

Man vergleiche hierzu einen bekannten Satz von FUBINI, der folgendes besagt:
Es seien $(A,\mathcal{A},\mu)$ und $(B,\mathcal{B},\nu)$ σ-endliche Maßräume und M eine meßbare Teilmenge von $A \times B$. Dann ist M genau dann eine $\mu\times\nu$-Nullmenge, wenn μ-fast alle M_x ν-Nullmengen sind (siehe HALMOS [17], p. 147).

1.2 Universelle Elemente: Definition und Existenz

Nach diesen Vorbereitungen und motiviert durch die Beispiele in Abschnitt 1.0 definieren wir nun:

Definition 1.2.1 Es seien X und Y topologische Räume, I eine Indexmenge und $\Lambda = (L_j)_{j\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $L_j: X \to Y$. Ferner sei A eine nicht leere abgeschlossene Teilmenge von Y. Dann heißt ein Element $x \in X$ Λ-universell bezüglich A (kurz universell bezüglich A), falls die Menge $\{L_j x: j \in I\}$ dicht ist bezüglich A. Im Falle A = Y heißt x auch Λ-universell (kurz universell). Mit $\mathcal{U}_\Lambda^A$ (oder $\mathcal{U}^A$) bezeichnen wir die Menge der bezüglich A Λ-universellen Elemente, im Falle A = Y mit $\mathcal{U}_\Lambda$ (oder $\mathcal{U}$).

Die grundlegenden Fragen sind nun:

(1) Für welche Familien Λ und Mengen A ist $\mathcal{U}_\Lambda^A$ nicht leer?
(2) Wie "groß" ist $\mathcal{U}_\Lambda^A$?
(3) Wie verhält sich $\mathcal{U}_\Lambda^A$ in Abhängigkeit von Λ und A?

Während sich die Familien Λ mit $\mathcal{U}_\Lambda^A \neq \emptyset$ nur in Ausnahmefällen charakterisieren lassen (vgl. Satz 1.2.6 und 1.4.2), findet man ein allgemeines notwendiges und hinreichendes Kriterium dafür, daß $\mathcal{U}_\Lambda^A$ "groß" im Sinne der BAIREschen Kategorien ist. Mit Frage (3) beschäftigen wir uns in Abschnitt 1.3, während wir uns im darauffolgenden Abschnitt auf den Fall linearer Räume X, A und linearer Abbildungen $L_j: X \to Y$ spezialisieren.

Als direkte Folgerung aus Satz 1.1.7 erhalten wir als zentrales Ergebnis dieses Kapitels:

Satz 1.2.2 Es sei X ein BAIREscher Raum, Y ein topologischer Raum mit abzählbarer Basis und $\Lambda = (L_j)_{j\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $L_j: X \to Y$. Weiter sei A eine nicht leere abgeschlossene Teilmenge von Y. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) U_Λ^A hat ein Komplement von 1. Kategorie in X.

(2) U_Λ^A ist dicht in X.

(3) Die Menge $\{(x,L_j x): x \in X,\ j \in I\}$ ist dicht bezüglich $X \times A$.

<u>Beweis:</u> Wir setzen $M := \{(x,L_j x): x \in X,\ j \in I\}$. Für Teilmengen O von Y gilt dann $M^{-1}(O) = \{x:$ es gibt ein $y \in O$ mit $(x,y) \in M\} = \{x:$ es gibt ein $j \in I$ mit $L_j x \in O\} = \bigcup_{j\in I} L_j^{-1}(O)$. Wegen der Stetigkeit aller L_j $(j \in I)$ ist folglich $M^{-1}(O)$ offen für offene Mengen O. Beachtet man noch, daß $M_x = \{y \in Y: (x,y) \in M\} = \{L_j x: j \in I\}$ gilt, so folgt die Behauptung mit Satz 1.1.7. □

<u>Bemerkung 1.2.3</u> Sind X und Y metrische Räume, so ist die Bedingung (3) erfüllt, wenn gilt: zu $x \in X$ und $a \in A$ gibt es Folgen $(x_n) \subset X$ und $(j_n) \subset I$ mit

$$x_n \to x \quad \text{in } X \quad (n \to \infty),$$

sowie

$$L_{j_n} x_n \to a \text{ in } Y \quad (n \to \infty).$$

Dabei genügt es offensichtlich, diese Aussage für alle x und a aus dichten Teilmengen von X beziehungsweise A nachzuprüfen.

Die Bedingung (3) läßt sich geometrisch deuten: Wie üblich heißt die Menge

$$G := \{(x,Lx): x \in X\}$$

der <u>Graph</u> der Abbildung $L: X \to Y$. (3) besagt nun, daß die Vereinigung der Graphen aller L_j $(j \in I)$ dicht bezüglich $X \times A$ ist. Wegen der Wichtigkeit dieser Bedingung für die vorliegende Arbeit setzen wir:

<u>Definition 1.2.4</u> Es seien X und Y topologische Räume, $\Lambda = (L_j)_{j\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $L_j: X \to Y$ und A eine nicht leere abgeschlossene Teilmenge von Y. Ist dann $\bigcup_{j\in I} \{(x,L_j x): x \in X\}$ dicht bezüglich $X \times A$, so sagen wir, daß die Familie Λ der <u>Graphenbedingung bezüglich A</u> genügt. Im Falle A = Y sagen wir, daß Λ der <u>Graphenbedingung</u> genügt.

Die bisher einzige Behandlung eines allgemeinen Universalitätsbegriffs findet sich bei JOÓ [22]. Er betrachtet eine abzählbare Familie stetiger linearer Operatoren von einem vollständigen in einen separablen metrischen Vektorraum (vgl. Abschnitt 1.4) und gibt Bedingungen dafür an, daß $\mathcal{U}_\Lambda^c$ von 1. Kategorie ist. Sie sind jedoch nicht notwendig, wie man sich am Beispiel $X = Y = \mathbb{R}$ und $L_n x = a_n \cdot x$ $(n \in \mathbb{N})$ mit einer in $\mathbb{R}$ dichten Teilmenge $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ leicht klarmacht.

Der Nachweis der Existenz universeller Elemente erfolgte in der Literatur bisher stets so, daß implizit eine Form der Graphenbedingung benutzt wurde, um sukzessiv eine Folge von Elementen aus X zu konstruieren, die in X gegen einen Grenzwert konvergiert, der universell ist. Eine solche Konstruktion erübrigt sich mit Satz 1.2.2; sie kann jedoch dann ein neues Ergebnis liefern, wenn man universelle Elemente mit gewissen zusätzlichen Eigenschaften (z.B. einer Wachstumsbedingung bei ganzen holomorphen Funktionen) erhalten will: Vergleiche dazu MAC LANE [34], DUYOS RUIZ [10], TOMM-TRAUTNER [52].

<u>Satz 1.2.5</u> Es seien (X,d) und $(Y,\tilde{d})$ metrische Räume, wobei (X,d) vollständig ist. Ferner sei $\Lambda = (L_j)_{j\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $L_j : X \to Y$, $A \neq \emptyset$ eine abgeschlossene Teilmenge von Y ohne isolierte Punkte und $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine bezüglich A dichte Teilmenge von Y. Dann gilt:

(1) Es sei $x_o \in X$ und für jedes $n \in \mathbb{N}$ seien Elemente $x_n \in X$ und $j_n \in I$ gegeben mit den Eigenschaften:

(a) $\quad d(x_n, x_{n-1}) < \frac{1}{2^n}$,

(b) $\quad \tilde{d}(L_{j_\nu} x_n, L_{j_\nu} x_{n-1}) < \frac{1}{2^n} \quad$ für $\nu = 1,2,\ldots,n-1$,

(c) $\quad \tilde{d}(L_{j_n} x_n, a_n) < \frac{1}{n}$.

Dann konvergiert (x_n) gegen ein Element $x \in \mathcal{U}_\Lambda^A$.

(2) Genügt Λ der Graphenbedingung bezüglich A, so gibt es Elemente $x_n \in X$ und $j_n \in I$ $(n \in \mathbb{N})$ mit (a), (b) und (c).

<u>Beweis</u> 1. Es seien x_o, $x_n \in X$ und $j_n \in I$ $(n \in \mathbb{N})$ Elemente mit den Eigenschaften (a), (b) und (c). Für $m,n \in \mathbb{N}$ und $m \geq n$ erhalten wir mit (a)

$$d(x_m,x_n) \leq \sum_{\nu=n+1}^{m} d(x_\nu,x_{\nu-1}) < \frac{1}{2^n} ,$$

so daß die Folge (x_n) als CAUCHY-Folge in einem vollständigen metrischen Raum konvergiert. Es bezeichne x ihren Grenzwert. Wegen (b) und (c) erhalten wir für $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{d}(L_{j_n}x,a_n) &\leq \tilde{d}(L_{j_n}x,L_{j_n}x_n) + \tilde{d}(L_{j_n}x_n,a_n) \\
&= \lim_{m\to\infty} \tilde{d}(L_{j_n}x_m,L_{j_n}x_n) + \tilde{d}(L_{j_n}x_n,a_n) \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{\nu=n+1}^{m} \tilde{d}(L_{j_n}x_\nu,L_{j_n}x_{\nu-1}) + \frac{1}{n} \\
&\leq \frac{1}{2^n} + \frac{1}{n} .
\end{aligned}$$

Es sei nun $a \in A$. Da $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ dicht bezüglich A ist und a kein isolierter Punkt ist, gibt es eine Folge (n_k) mit $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$. Dann gilt aber auch $\lim_{k\to\infty} L_{j_{n_k}} x = a$, und x ist universell bezüglich A, da $a \in A$ beliebig war.

2. Es genüge Λ der Graphenbedingung bezüglich A. Man wähle $x_o \in X$ beliebig. Es seien nun $x_o,x_1,\ldots,x_{n-1}$ in X und $j_1,j_2,\ldots,j_{n-1}$ in I gegeben mit (a), (b) und (c). Dann gibt es Folgen $(x_\nu^{(n)})_\nu$ und $(j_\nu^{(n)})_\nu$ mit $x_\nu^{(n)} \to x_{n-1}$ sowie $L_{j_\nu^{(n)}} x_\nu^{(n)} \to a_n$ für $\nu \to \infty$. Da die Abbildungen $L_{j_1},L_{j_2},\ldots,L_{j_{n-1}}$ stetig sind, können wir ein $x_n := x_\nu^{(n)}$ und ein $j_n := j_\nu^{(n)}$ wählen, so daß (a), (b) und (c) gelten. Durch vollständige Induktion folgt die Behauptung. $\square$

In einem Sonderfall läßt sich die Existenz eines universellen Elementes charakterisieren.

Satz 1.2.6 Es sei X ein vollständiger, separabler metrischer Raum ohne isolierte Punkte. Ferner sei $\Lambda = (L_j)_{j\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen L_j: $X \to X$ mit folgender Eigenschaft: Für jedes $j \in I$ lassen sich fast alle $L_\kappa \in \Lambda$ darstellen in der Form $L_\kappa = L_\lambda \circ L_j$ mit einem $\lambda \in I$.

Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Es existiert ein Λ-universelles Element.

(2) Die Familie Λ genügt der Graphenbedingung.

Beweis: 1. Mit Satz 1.2.2 ist klar, daß unter den gegebenen Voraussetzungen die Graphenbedingung die Existenz eines universellen Elementes impliziert.

2. Es gelte (1); es sei $x \in \mathcal{U}_\Lambda$, das heißt, $\{L_j x: j \in I\}$ sei dicht in X.
Wir betrachten nun ein $j \in I$. Nach Voraussetzung unterscheiden sich die Mengen $\{L_\kappa x: \kappa \in I\}$ und $\{L_\lambda(L_j x): \lambda \in I\}$ nur um endlich viele Elemente. Die erste Menge ist aber dicht in X, also auch die zweite, da X keine isolierten Punkte enthält. Mithin ist auch $L_j x \in \mathcal{U}_\Lambda$, und da $\{L_j x: j \in I\}$ dicht in X ist, ist $\mathcal{U}_\Lambda$ dicht in X. Mit Satz 1.2.2 folgt nun (2). □

Die oben an die Familie Λ gestellte Bedingung tritt typischerweise dann auf, wenn es sich um die Familie aller Iterierten T^n ($n \in \mathbb{N}$) einer festen Abbildung T: $X \to X$ handelt. (Man erhält T^n rekursiv durch $T^n = T \circ T^{n-1}$, wobei $T^1 = T$ gesetzt ist.) Für den Spezialfall, daß T: $X \to X$ ein Homöomorphismus ist, gab OXTOBY ([37]) 1937 den obigen Satz ohne Beweis an. Einen ähnlichen Satz bewiesen RAO-RAO [42]. Die Beweisidee des zweiten Beweisschrittes findet sich auch bei DUYOS RUIZ [11].

1.3 Das Verhalten der Menge $\mathcal{U}_\Lambda^A$ in Abhängigkeit von Λ und A

In diesem Abschnitt studieren wir die Abhängigkeit der Menge $\mathcal{U}_\Lambda^A$ aller bezüglich A Λ-universellen Elemente von den beiden Parametern Λ und A.

<u>Satz 1.3.1</u> Es seien X und Y topologische Räume, $\Lambda = (L_j)_{j\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $L_j: X \to Y$ und A eine nicht leere abgeschlossene Teilmenge von Y. Es sei X' ein topologischer Raum und $D: X' \to X$ eine stetige Abbildung.
Dann gilt für die Familie $\Lambda' := (L_j \circ D)_{j\in I}$:

(1) Es gilt $\mathcal{U}_{\Lambda'}^A = D^{-1}(\mathcal{U}_\Lambda^A)$.

(2) Ist D offen und surjektiv, so gilt:
Λ' genügt der Graphenbedingung bezüglich A genau dann, wenn Λ ihr genügt.

<u>Beweis:</u> 1. Es ist offensichtlich, daß ein Element $x' \in X'$ genau dann Λ'-universell bezüglich A ist, wenn D(x') ein bezüglich A Λ-universelles Element ist, also genau dann, wenn $x \in D^{-1}(\mathcal{U}_\Lambda^A)$ ist. Das beweist die erste Aussage.

2. Es sei nun D überdies offen und surjektiv.

a. Λ' erfülle die Graphenbedingung bezüglich A, d.h. die Menge $\{(x',(L_j \circ D)(x')): x' \in X', j \in I\}$ sei dicht bezüglich $X'\times A$. Es sei U eine nichtleere offene Menge in X und V eine offene Menge in Y mit $V\cap A \neq \emptyset$. Da D stetig und surjektiv ist, existiert eine offene nichtleere Menge U' in X' mit $D(U') \subset U$. Dann gibt es Elemente $x' \in X'$ und $j \in I$ mit $x' \in U'$ und $L_j(D(x')) \in V$. Folglich gilt für $x := D(x')$, daß $x \in U$ und $L_j(x) \in V$ ist, also $(x,L_jx) \in U\times V$. Somit gilt die Graphenbedingung bezüglich A auch für Λ.

b. Λ erfülle die Graphenbedingung bezüglich A. Es sei U' eine nichtleere offene Menge in X' und V eine offene Menge in Y mit $V \cap A \neq \emptyset$. Da D offen ist, ist $U := D(U')$ offen in X. Dann gibt es Elemente $x \in X$ und $j \in I$ mit $x \in U$ und

$L_j(x) \in V$. Folglich gilt für ein $x' \in U'$ mit $D(x') = x$, daß $L_j(D(x')) \in V$ ist, also $(x', (L_j \circ D)(x')) \in U' \times V$. Somit gilt die Graphenbedingung bezüglich A auch für Λ'. □

Für die neue Familie Λ' schreiben wir auch $\Lambda' =: \Lambda \circ D$.

Als nächstes betrachten wir den Fall, daß den Elementen der Familie Λ eine Abbildung D nachgeschaltet wird.

Satz 1.3.2 Es seien X und Y topologische Räume, $\Lambda = (L_j)_{j \in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $L_j\colon X \to Y$ und A eine nicht leere abgeschlossene Teilmenge von Y. Es sei Y' ein topologischer Raum, $D\colon Y \to Y'$ eine stetige Abbildung und A' eine nicht leere abgeschlossene Teilmenge von Y'. Ist D(A) dicht bezüglich A', so gilt für die Familie $\Lambda' := (D \circ L_j)_{j \in I}$:

(1) Es gilt $\mathcal{U}_\Lambda^A \subset \mathcal{U}_{\Lambda'}^{A'}$.

(2) Genügt Λ der Graphenbedingung bezüglich A, so genügt Λ' der Graphenbedingung bezüglich A'.

Beweis: 1. Λ genüge der Graphenbedingung bezüglich A. Es sei U eine offene nichtleere Menge in X und V' eine offene Menge in Y' mit $V' \cap A' \neq \emptyset$. Da D(A) bezüglich A' dicht ist, gibt es ein $a \in A$ mit $D(a) \in V'$. Wegen der Stetigkeit von D gibt es nun eine offene Umgebung V von a mit $D(V) \subset V'$.

Dann gibt es Elemente $x \in X$ und $j \in I$ mit $x \in U$ und $L_j x \in V$. Also gilt $D(L_j x) \in V'$. Insgesamt haben wir $(x, (D \circ L_j)(x)) \in U \times V'$, und Λ' erfüllt die Graphenbedingung bezüglich A'. Das beweist (2).

2. In sehr ähnlicher Weise folgert man (1). □

Für die neue Familie Λ' schreiben wir auch $\Lambda' =: D \circ \Lambda$.

Sind abzählbar viele Familien Λ_n $(n \in \mathbb{N})$ gegeben, die den gleichen Definitionsbereich X besitzen, und gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, daß $\mathcal{U}_{\Lambda_n}^c$ von 1. Kategorie ist, so ist auch $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{U}_{\Lambda_n} \right)^c$

von 1. Kategorie: Es gibt also Elemente $x \in X$, die bezüglich jeder Familie Λ_n universell sind, falls X ein BAIREscher Raum ist. Wir zeigen hier, daß diese Elemente universell bezüglich einer neuen Familie Λ von Abbildungen sind.

Satz 1.3.3 Es seien X und Y_n ($n = 1,2,\ldots$ oder $n = 1,2,\ldots,N$) topologische Räume und für jedes n sei $\Lambda_n = (L_j^{(n)})_{j\in I_n}$ eine Familie stetiger Abbildungen $L_j^{(n)}: X \to Y_n$. Weiter seien A_n nicht leere abgeschlossene Teilmengen von Y_n und $A := \times_n A_n$. Für jede Folge (j_n) mit $j_n \in I_n$ sei definiert:

$$L_{(j_n)} : \begin{cases} X \to & \times_n Y_n \\ x \mapsto (L_{j_1}^{(1)}x,\ L_{j_2}^{(2)}x, \ldots) \end{cases} .$$

Dann gilt für die Familie Λ dieser Abbildungen:

(1) Es gilt $\mathcal{U}_\Lambda^A = \bigcap_n \mathcal{U}_{\Lambda_n}^{A_n}$.

(2) Λ genügt der Graphenbedingung bezüglich A genau dann, wenn jedes Λ_n die Graphenbedingung bezüglich A_n erfüllt.

Beweis: Wir beschränken uns auf den Fall, daß n alle natürlichen Zahlen durchläuft. Der endliche Fall verläuft analog.

1. Bezeichnet p_n die kanonische Projektion $p_n: \times_\nu Y_\nu \to Y_n$, so gilt $p_n \circ \Lambda = \Lambda_n$. Satz 1.3.2 ergibt nun, daß $\mathcal{U}_\Lambda^A$ in $\bigcap_n \mathcal{U}_{\Lambda_n}^{A_n}$ enthalten ist, und daß jedes Λ_n die Graphenbedingung bezüglich A_n erfüllt, falls Λ ihr bezüglich A genügt.

2. Es gelte nun die Graphenbedingung bezüglich A_n für jede Familie Λ_n. Es seien U und $O_1\times\ldots\times O_m\times Y_{m+1}\times\ldots$ offene Mengen in X bzw. $\times_n Y_n$ mit $U \neq \emptyset$ und $O_\nu \cap A_\nu \neq \emptyset$ für alle ν. Dann gibt es Elemente $x_1 \in U$ und $j_1 \in I_1$ mit $L_{j_1}^{(1)}x_1 \in O_1$. Da $L_{j_1}^{(1)}$ stetig ist, gibt es eine offene Menge U_1 mit $x_1 \in U_1 \subset U$ und $L_{j_1}^{(1)}(U_1) \subset O_1$. Nun existieren Elemente $x_2 \in U_1 \subset U$ und $j_2 \in I_2$ mit $L_{j_2}^{(2)}x_2 \in O_2$; also gilt auch $L_{j_1}^{(1)}(x_2) \in O_1$. So fortfahrend

erhält man Elemente $x := x_m \in U$ und $j_i \in I_i$ $(i = 1,2,\dots,m)$ mit $L^{(i)}_{j_i} x \in \mathcal{O}_i$ für $i = 1,2,\dots,m$.
Also gilt $(x, L_{(j_i)}x) \in U \times \mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_m \times Y_{m+1} \times \dots$ bei beliebiger Wahl der $j_i \in I_i$ für $i > m$. Da jede Umgebung eines Punktes $(a_n) \in \underset{n}{X}\, A_n$ eine Menge der Form $\mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_m \times Y_{m+1} \times \dots$ mit $\mathcal{O}_\nu \cap A_\nu \neq \emptyset$ für alle ν umfaßt, genügt Λ der Graphenbedingung bezüglich A.

3. In sehr ähnlicher Weise folgert man, daß $\bigcap_n \mathcal{U}^{A_n}_{\Lambda_n}$ in $\mathcal{U}^{A}_{\Lambda}$ enthalten ist. □

Für die neue Familie Λ schreiben wir auch $\underset{n}{X}\, \Lambda_n$.

1.4 Universelle Elemente in linearen Räumen

Wir betrachten in diesem Abschnitt topologische Räume, die zusätzlich eine Vektorraumstruktur besitzen. Im Hinblick auf die Anwendungen von Satz 1.2.2 in den folgenden Kapiteln betrachten wir metrische topologische Vektorräume; das sind Vektorräume X, auf denen eine Metrik in der Weise definiert ist, daß die Abbildungen $(x,y) \mapsto x+y$ und $(\lambda,x) \mapsto \lambda\cdot x$ $(x,y \in X$, λ im Skalarenkörper) stetig sind. Als Grundraum der zu betrachtenden Abbildungen L_j $(j \in I)$ werden wir einen vollständigen metrischen topologischen Vektorraum zugrunde legen (der nach Satz 1.1.6 ein BAIREscher Raum ist) und als Bildraum einen separablen metrischen topologischen Vektorraum (der, wie man sich leicht überlegt, eine abzählbare Basis besitzt).

Wir geben hier zusammengefaßt die metrischen topologischen Vektorräume an, die wir in der Folge benötigen. Sie sind alle vollständig.

Beispiel 1.4.1 (1) Jeder BANACH-Raum X ist ein metrischer topologischer Vektorraum. Als Metrik wird wie üblich $d(x,y) := \|x-y\|$ für $x,y \in X$ mit der Norm $\|\cdot\|$ von X gesetzt. Spezielle BANACH-Räume sind:

(a) Für $a < b$ und $1 \leq p < \infty$ sei $L^p[a,b]$ der Raum aller auf $[a,b]$ bezüglich dem LEBESGUE-Maß meßbaren Funktionen mit $\int_a^b |f(x)|^p\,dx < \infty$. Die Norm sei durch $\|f\|_p = (\int_a^b |f(x)|^p\,dx)^{1/p}$ definiert.

(b) Für kompakte Mengen K sei $C(K,\mathbb{R})$ $(C(K,\mathbb{C}))$ der Raum aller auf K stetigen reellen (komplexen) Funktionen mit der Norm $\|f\| = \max_K |f(x)|$. Sind Verwechslungen ausgeschlossen, so schreiben wir für beide Räume kurz C(K).

(c) Für kompakte Teilmengen K von $\mathbb{C}$ sei $A(K)$ der Raum aller auf K stetigen und im Inneren von K holomorphen Funktionen mit der Norm $\|f\| = \max_K |f(z)|$. Es ist $A(K)$ ein abgeschlossener Teilraum von $C(K,\mathbb{C})$ und separabel in dem Fall, daß K ein zusammenhängendes Komplement hat (das folgt aus dem Approximationssatz von MERGELYAN; siehe RUDIN [46], 20.5).

(2) Den wohl wichtigsten metrischen topologischen Vektorraum, der kein BANACH-Raum ist, liefert der Raum $H(\Omega)$ aller auf der offenen Teilmenge Ω von $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen. Ist $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω durch kompakte Mengen mit $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \Omega$ (zur Existenz siehe RUDIN [46], 13.3) und $\chi: \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}_o^+$ eine streng monoton wachsende und beschränkte Funktion mit $\chi(0) = 0$ (beispielsweise $\chi(x) = \frac{x}{1+x}$ oder $\chi(x) = \arctan x$) sowie $p_n(f) := \max_{K_n} |f(z)|$ für $n \in \mathbb{N}$ und $f \in H(\Omega)$, so werde als Metrik gesetzt:

$$d_{H(\Omega)}(f,g) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\cdot\chi(p_n(f-g)) \quad \text{für } f,g \in H(\Omega).$$

Die Dreiecksungleichung für $d_{H(\Omega)}$ folgt wegen der Monotonie von χ aus der Dreiecksungleichung für p_n $(n \in \mathbb{N})$. Ist $d_{H(\Omega)}(f,g) = 0$, so muß $f(z) = g(z)$ für alle $z \in K_n$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gelten; somit ist $f = g$. Die anderen Eigenschaften einer Metrik sind offensichtlich erfüllt.

Die Konvergenz bezüglich $d_{H(\Omega)}$ ist äquivalent mit der kompakten Konvergenz, das heißt, mit der gleichmäßigen Konvergenz auf allen kompakten Teilmengen von Ω. Daraus ergibt sich die Vollständigkeit von $H(\Omega)$. Der Approximationssatz von RUNGE (siehe RUDIN [46], 13.9) impliziert, daß $H(\Omega)$ für jede offene Menge Ω mit einfach zusammenhängenden Komponenten separabel ist.

(3) Es sei $C^\infty = C^\infty(\mathbb{R})$ der Raum aller beliebig oft differenzierbaren reellen Funktionen auf $\mathbb{R}$ und $C(\mathbb{R})$ der Raum aller reellen stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$. Setzt man $p_n(f) = \max\{|f^{\nu}(x)| : |x| \le n,\ \nu = 0,1,\dots,n\}$ für $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

und $p_n(f) = \max\limits_{|x|\leq n} |f(x)|$ für $f \in C(\mathbb{R})$, so definiert man Metriken für $C^\infty(\mathbb{R})$ und $C(\mathbb{R})$ wie in (2).

(4) Es sei s der Raum aller reellen Folgen $(a_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$. Hier definiert man wie in (2) eine Metrik vermittels $p_n((a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}) = |a_n|$ für $n \in \mathbb{N}$.

(5) Für $a < b$ sei $M[a,b]$ der Raum aller auf $[a,b]$ LEBESGUE-meßbaren reellen Funktionen mit der Metrik $d(f,g) = \inf\limits_{\alpha>0} (\alpha+\lambda^1(\{x: |f(x)-g(x)| > \alpha\}))$ für $f,g \in M[a,b]$, wobei λ^1 das LEBESGUE-Maß ist. Konvergenz bezüglich d ist äquivalent zur Maßkonvergenz. Die Separabilität folgt aus dem Satz von LUSIN. Man beachte, daß eine Teilmenge E von $M[a,b]$ genau dann dicht ist, wenn es zu jeder Funktion $f \in M[a,b]$ eine Folge (φ_n) aus E gibt mit $\varphi_n(x) \to f(x)$ fast überall auf $[a,b]$ für $n \to \infty$ (vgl. BAUER [4], p. 101).

Wir wenden uns nun wieder der Betrachtung universeller Elemente zu. Es liegt nahe, im Fall linearer Räume X und Y auch lineare stetige Abbildungen $L: X \to Y$ zu betrachten, die wir auch stetige lineare Operatoren nennen.

Es stellt sich die folgende interessante Eigenschaft heraus: Wenn eine abzählbare Familie $\Lambda = (L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetiger linearer Operatoren auf einer dichten Teilmenge konvergiert, so reicht bereits die Existenz eines universellen Elementes dafür aus, daß $\mathcal{U}_\Lambda^c$ nur von 1. Kategorie ist (immerhin enthält $\mathcal{U}_\Lambda^c$ aber eine dichte Teilmenge). Dieser Sonderfall tritt in Anwendungen häufig auf. Etwas allgemeiner gilt:

Satz 1.4.2 Es seien X und Y metrische topologische Vektorräume, wobei X vollständig und Y separabel ist, und es sei A ein nicht leerer abgeschlossener Unterraum von Y. Weiter sei $\Lambda = (L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie stetiger linearer Operatoren $L_n: X \to Y$. Existiert dann eine dichte Teilmenge C von X derart, daß für alle $x \in C$ die Folge $(L_n x)$ gegen ein Element aus A konvergiert, so sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(1) Es existiert ein bezüglich A Λ-universelles Element.

(2) Λ erfüllt die Graphenbedingung bezüglich A.

<u>Beweis:</u> 1. Mit Satz 1.2.2 ist klar, daß unter den gegebenen Voraussetzungen die Graphenbedingung die Existenz eines universellen Elementes impliziert.

2. Wir zeigen die umgekehrte Richtung: Mit Satz 1.2.2 genügt es zu zeigen, daß aus der Aussage (1) folgt, daß $\mathcal{U}_\Lambda^A$ dicht in Y ist. Es sei u ein festes universelles Element aus $\mathcal{U}_\Lambda^A$. Weiter seien $x \in C$ und $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Nach Voraussetzung konvergiert $(L_n x)$ gegen ein Element $a \in A$. Betrachten wir ein $\tilde{a} \in A$, so ist $N\cdot(\tilde{a}-a) \in A$, und es gibt eine Folge (n_k) mit

$$L_{n_k} u \to N(\tilde{a}-a) = N(\tilde{a} - \lim_{n\to\infty} L_n x) \text{ für } k \to \infty.$$

Wir erhalten daraus: $L_{n_k}(\frac{u}{N} + x) \to \tilde{a}$ für $k \to \infty$.

Also ist auch $\frac{u}{N} + x$ Λ-universell bezüglich A für jedes $x \in C$ und $N \in \mathbb{N}$. Da C dicht in X ist, gilt damit das gleiche auch für $\mathcal{U}_\Lambda^A$. □

Der zweite Beweisschritt findet sich im Fall A = Y implizit bei TOMM-TRAUTNER [52] und LUH [32].

MEN'ŠOV bewies in seiner Arbeit [36], daß sich jede trigonometrische Reihe mit gegen null konvergenten Koeffizienten als Summe zweier universeller trigonometrischer Reihen darstellen läßt. Eine entsprechende Aussage gewannen SELEZNEV-DODUNOVA [49] für ihre universellen Elemente. Allgemein gilt:

<u>Satz 1.4.3</u> Es sei X ein vollständiger metrischer topologischer Vektorraum und $\mathcal{U}$ eine Teilmenge von X, deren Komplement von 1. Kategorie ist. Dann läßt sich jedes Element aus X als Summe zweier Elemente aus $\mathcal{U}$ darstellen, d.h., es gilt:

$$X = \mathcal{U} + \mathcal{U}.$$

<u>Beweis:</u> Es sei x_o ein Element aus X. Da in topologischen Vektorräumen die Abbildung $(a,b) \mapsto a-b$ stetig ist, ist die Abbildung $h: X \to X$ mit $h(x) = x_o - x$ ein Homöomorphismus. Also hat mit $\mathcal{U}^c$ auch $(h(\mathcal{U}))^c$ erste Kategorie in X, so daß $(h(\mathcal{U}))^c \cup \mathcal{U}^c \neq X$ ist. Folglich ist $h(\mathcal{U}) \cap \mathcal{U} \neq \emptyset$: Es gibt Elemente u und v in $\mathcal{U}$ mit $x_o - u = v$, so daß x_o die Darstellung $x_o = u+v$ besitzt. $\square$

<u>Bemerkung 1.4.4</u> Es seien X und Y metrische topologische Vektorräume, wobei X vollständig und Y separabel ist, und es sei $A \neq \emptyset$ ein abgeschlossener Unterraum von Y. Ist $\Lambda = (L_j)_{j \in I}$ eine Familie stetiger linearer Operatoren $L_j: X \to Y$, die bezüglich A der Graphenbedingung genügt, so ist mit Satz 1.2.2 $(\mathcal{U}_\Lambda^A)^c$ von erster Kategorie. Es sei $x_o \in X$ fest und $h: X \to X$ der Homöomorphismus $h(x) = x_o - x$. Dann erfüllt nach den Sätzen 1.3.1 und 1.3.3 auch $\Lambda \times (\Lambda \circ h^{-1})$ die Graphenbedingung bezüglich $A \times A$. Mit Satz 1.2.5 kann man nun ein Element $u \in \mathcal{U}^{A \times A}_{\Lambda \times (\Lambda \circ h^{-1})}$ konstruieren. Wieder mit den Sätzen 1.3.1 und 1.3.3 sind u und $h^{-1}(u) = x_o - u$ bezüglich A Λ-universell, und es gilt $x_o = u + (x_o - u)$. Man kann also in diesem Fall die Zerlegung aus Satz 1.4.3 konstruktiv gewinnen.

Kapitel 2. Anwendungen (I)

In diesem Kapitel studieren wir Anwendungen der bisher gewonnenen Ergebnisse auf Universalitäten in der reellen und komplexen Analysis.

2.1 Anwendungen in der reellen Analysis

a) Universelle TAYLOR-Reihen

Bekanntlich existieren auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbare Funktionen, deren TAYLOR-Reihen mit Entwicklungsmittelpunkt 0 nur im Nullpunkt gegen ihre erzeugende Funktion konvergieren. Wir zeigen hier die Existenz universeller TAYLOR-Reihen im folgenden Sinne:

Definition 2.1.1 Die TAYLOR-Reihe $\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu}$ einer beliebig oft differenzierbaren Funktion $f \in C^{\infty}$ mit $f(0) = 0$ heißt universell, wenn gilt:

Zu jeder auf $\mathbb{R}$ stetigen Funktion g mit $g(0) = 0$ existiert eine Folge (n_k) derart, daß gilt

$$\sum_{\nu=1}^{n_k} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^{\nu} \to g(x) \qquad \text{mit } k \to \infty,$$

und zwar gleichmäßig auf jedem endlichen Intervall.

Für die folgenden Untersuchungen sind die Räume $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ (kurz C_0^{∞}), $C_0(\mathbb{R})$ (kurz C_0) und $C_0[a,b]$ von Bedeutung. Sie bestehen aus allen Funktionen aus $C^{\infty}(\mathbb{R})$, $C(\mathbb{R})$ bzw. $C[a,b]$, die eine Nullstelle in 0 haben. Als abgeschlossene Teilräume ihrer Grundräume sind sie vollständige metrische topologische Vektorräume.

Zum Existenzbeweis für universelle TAYLOR-Reihen benötigen wir zwei Lemmata.

Lemma 2.1.2 Es seien $a > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ gegeben. Dann liegen die Polynome

$$P(x) = \sum_{\nu=N}^{m} a_{\nu} x^{\nu} \text{ mit } m \geq N \text{ und } a_{\nu} \in \mathbb{R} \text{ für } \nu = N,\dots,m$$

dicht in $C_0[-a,a]$.

Beweis: Es sei $f \in C_o[-a,a]$ und $\varepsilon > 0$. Bekanntlich kann man f zerlegen in die Summe $f = f_g + f_u$ aus einer geraden und einer ungeraden Funktion aus $C_o[-a,a]$. Die Zahlenmengen $M_g := \{\nu: \nu \geq n,\ \nu \text{ gerade}\}$ und $M_u := \{\nu: \nu \geq n,\ \nu \text{ ungerade}\}$ erfüllen beide die MÜNTZsche Bedingung $\sum\limits_{\nu \in M} \frac{1}{\nu} = \infty$. Nach dem Satz von MÜNTZ (siehe beispielsweise RUDIN [46], Theorem 15.26) gibt es somit ein Polynom P_g mit Exponenten aus M_g und ein Polynom P_u mit Exponenten aus P_u, so daß gilt:

$$\max_{[0,1]} |f_g(a\cdot x)-P_g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad \max_{[0,1]} |f_u(a\cdot x)-P_u(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Insgesamt erhalten wir daraus:

$$\max_{[-a,a]} |f(x)-P_g(\tfrac{x}{a})-P_u(\tfrac{x}{a})| \leq \max_{[0,1]} |f_g(a\cdot x)-P_g(x)| + \max_{[0,1]} |f_u(a\cdot x)-P_u(x)| < \varepsilon,$$

und das Polynom $P(x) := P_g(\frac{x}{a})+P_u(\frac{x}{a})$ ist ein Polynom, das die Funktion f gleichmäßig auf $[-a,a]$ bis auf einen Fehler ε approximiert und die gewünschte Form besitzt. $\square$

Lemma 2.1.3 Die Menge der Polynome mit Nullstelle in 0 liegt dicht in C_o^∞.

Beweis: Es sei $f \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ und $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Mit WEIERSTRASS gibt es ein Polynom Q_n mit

$$\max_{[-n,n]} |f^{(n)}(x)-Q_n(x)| < \frac{1}{n^{n+1}}\,.$$

Es sei nun P_n ein Polynom mit $P_n^{(\nu)}(0) = f^{(\nu)}(0)$ für $\nu = 0,1,\ldots,n-1$ und $P_n^{(n)}(x) = Q_n(x)$. Dann ist $P_n \in C_o^\infty(\mathbb{R})$ und $\max\limits_{[-n,n]} |(f-P_n)^{(n)}(x)| < \frac{1}{n^{n+1}}$.
Da für alle $h \in C_o(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $|h(x)| \leq \int_0^x |h'(\xi)|d\xi$ gilt, erhalten wir durch mehrfache Anwendung:

$$\max_{[-n,n]} |(f-P_n)^{(\nu)}(x)| < \frac{1}{n^{n+1}}\cdot n^{n-\nu} \leq \frac{1}{n} \text{ für } \nu = 0,1,\ldots,n.$$

Also konvergiert (P_n) gegen f in der Topologie von $C^\infty(\mathbb{R})$, was zu zeigen war. $\square$

Damit können wir nun beweisen:

Satz 2.1.4 Es gibt universelle TAYLOR-Reihen. Die Menge der Funktionen aus C_0^∞, deren TAYLOR-Reihe universell ist, hat ein Komplement von 1. Kategorie in C_0^∞.

Beweis: Wir betrachten die Familie Λ der Abbildungen $L_n: C_0^\infty \to C_0$, die durch $(L_n f)(x) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$ $(n \in \mathbb{N}\,,\ x \in \mathbb{R})$ definiert sind.

Nach Definition 2.1.1 ist klar, daß eine Funktion $f \in C_0^\infty$ genau dann eine universelle TAYLOR-Reihe besitzt, wenn f ein Λ-universelles Element ist. C_0^∞ ist ein vollständiger metrischer Vektorraum, und C_0 ist ein separabler metrischer Vektorraum. Nach Satz 1.2.2 ist also zum Beweis der Behauptung nur noch zu zeigen, daß Λ die Graphenbedingung erfüllt, daß es also zu jedem Polynom $P \in C_0^\infty$ und jeder Funktion $g \in C_0$ Folgen (f_n) in C_0^∞ und (k_n) gibt mit

$$f_n \to P \text{ in } C_0^\infty \quad \text{und} \quad L_{k_n} f_n \to g \text{ in } C_0 \qquad \text{für } n \to \infty$$

(vergleiche Bemerkung 1.2.3: die Polynome liegen dicht in C_0^∞ nach Lemma 2.1.3).

Es sei etwa $P(x) = \sum_{\nu=1}^{k} a_\nu x^\nu$ und $n \in \mathbb{N}$ gewählt. Nach Lemma 2.1.2 gibt es zunächst ein Polynom

$$R_n(x) = \sum_{\nu=0}^{l} b_\nu x^\nu \quad ,$$

für das

$$\max_{[-n,n]} |x^n \cdot R_n(x) - (g(x) - P(x))| < \frac{1}{n} \text{ gilt,}$$

und ein weiteres Polynom S_n, für das

$$\max_{[-n,n]} |x^{k_n - n+1} \cdot S_n(x) - (x^n \cdot R_n(x))^{(n)}| < \frac{1}{n^{n+1}} \quad \text{gilt,}$$

wobei $k_n := \max(k, l+n)$ gesetzt sei.

Es sei nun T_n ein Polynom mit $T_n^{(n)}(x) = x^{k_n - n+1} \cdot S_n(x)$

und für $\nu = 0,1,\ldots,n-1$: $T_n^{(\nu)}(0) = 0 = (x^n \cdot R_n(x))^{(\nu)}|_{x=0}$.

Mit der im Beweis zu Lemma 2.1.3 erwähnten Abschätzung folgt hier:

$$\max_{[-n,n]} |T_n^{(\nu)}(x) - (x^n \cdot R_n(x))^{(\nu)}| < \frac{1}{n} \qquad \text{für } \nu = 0,1,\ldots,n.$$

Wir betrachten nun die Funktion $f_n(x) := P(x) + x^n \cdot R_n(x) - T_n(x)$. Es ist $f_n \in C_0^\infty$, und wir erhalten für $\nu = 0,1,\ldots,n$:

$$\max_{[-n,n]} |(f_n - P)^{(\nu)}(x)| = \max_{[-n,n]} |(x^n R_n(x) - T_n(x))^{(\nu)}| < \frac{1}{n} .$$

Mithin konvergiert (f_n) gegen P in Raum C_0^∞. Da aber der niedrigste Exponent von T_n mindestens k_n+1 und der größte Exponent von $P(x) + x^n \cdot R_n(x)$ höchstens k_n ist, gilt:

$$(L_{k_n} f_n)(x) = P(x) + x^n \cdot R_n(x) \quad , \text{ und wir erhalten:}$$

$$\max_{[-n,n]} |(L_{k_n} f_n)(x) - g(x)| = \max_{[-n,n]} |(P(x) + x^n R_n(x)) - g(x)| < \frac{1}{n} .$$

Somit konvergiert $(L_{k_n} f_n)$ gegen g im Raum C_0. Damit ist alles gezeigt. □

<u>Bemerkung 2.1.5</u> Der Beweis des Satzes läßt sich auch folgendermaßen erbringen.
Es ist eine leichte Verallgemeinerung des Satzes von FEKETE (siehe PÁL [39]), daß eine Potenzreihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu x^\nu$ mit folgender Eigenschaft existiert: Zu jeder auf $\mathbb{R}$ stetigen Funktion g mit $g(0) = 0$ existiert eine Folge (n_k) derart, daß $\sum_{\nu=1}^{n_k} a_\nu x^\nu$ gleichmäßig auf jedem endlichen Intervall gegen g konvergiert für $k \to \infty$. Nun besagt ein Satz von BOREL (vgl. REMMERT [45], p. 208), daß es zu der Folge (a_ν) der Koeffizienten eine Funktion $f \in C_0^\infty$ gibt mit $f^{(\nu)}(0) = \nu! \cdot a_\nu$ für $\nu \in \mathbb{N}$. Mithin hat diese Funktion f eine universelle TAYLOR-Reihe. Die im Beweis des letzten Satzes definierten Operatoren L_n konvergieren auf der Menge aller Polynome mit Nullstelle in 0. Diese Menge ist aber dicht in C_0^∞. Wir können nun Satz 1.4.2 anwenden, um aus der Existenz einer universellen TAYLOR-Reihe die Graphenbedingung für $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit Satz 2.1.4 zu folgern.

<u>Bemerkung 2.1.6</u> Ist f eine Funktion in C_o^∞ mit universeller TAYLOR-Reihe, so gilt für alle Funktionen $f_c := f + c$ mit einer Konstanten $c \in \mathbb{R}$, daß die Teilsummen $\sum_{\nu=0}^{n} \frac{f_c^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$ $(n \in \mathbb{N})$ in jeder Menge $C[a,b]$ mit $0 \notin [a,b]$ dicht liegen. Man sieht leicht, daß die Menge aller Funktionen in C^∞ mit dieser Eigenschaft ein Komplement von 1. Kategorie in C^∞ hat.

Universelle TAYLOR-Reihen können sicher keine ganzzahligen Koeffizienten besitzen, da für den Grenzwert g einer auf $[-1,1]$ konvergenten Folge von Polynomen mit ganzen Koeffizienten stets gilt, daß $g(1)$ und $g(-1)$ ganze Zahlen sind und $g(1)-g(-1)$ eine gerade Zahl ist. Es existiert jedoch eine TAYLOR-Reihe mit ganzen Koeffizienten, die bezüglich der Menge aller Funktionen $g \in C_o[-1,1]$ mit diesen Eigenschaften universell ist. Zum Nachweis benötigen wir den

<u>Hilfssatz 2.1.7 (FERGUSON - VON GOLITSCHEK [12]).</u> Es sei M eine Teilmenge von $\mathbb{N}$ mit $\sum_{\nu \in M} \frac{1}{\nu} = \infty$. Dann ist die Menge aller Polynome mit Exponenten in M und ganzzahligen Koeffizienten dicht im Raum $C_o[0,1]$ bezüglich der Menge aller Funktionen mit einem ganzen Funktionswert an 1.

Damit gilt:

<u>Satz 2.1.8</u> Es gibt eine beliebig oft differenzierbare Funktion $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $f(0) = 0$, deren TAYLOR-Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu$ ganze Koeffizienten hat und folgende Eigenschaft besitzt: Zu jeder auf $[-1,1]$ stetigen Funktion g mit $g(0) = 0$, $g(1) \in \mathbb{Z}$, $g(-1) \in \mathbb{Z}$ und $g(1)-g(-1)$ gerade existiert eine Folge (n_k) derart, daß gilt:

$$\sum_{\nu=1}^{n_k} \frac{f^{(\nu)}(0)}{\nu!} x^\nu \underset{[-1,1]}{\Rightarrow} g(x) \qquad \text{für } k \to \infty.$$

<u>Beweis:</u> Es sei $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge der Menge $\{f \in C_o[-1,1]: f(-1) \in \mathbb{Z}, f(1) \in \mathbb{Z}, f(1)-f(-1)$ gerade$\}$. Wir konstruieren eine Reihe $\sum_{\nu=o}^{\infty} a_\nu x^\nu$:

Im ersten Schritt sei $a_o = 0$ und $n_1 = 0$.

Wurde im k-ten Schritt das Polynom $\sum_{\nu=o}^{n_k} a_\nu x^\nu$ mit $a_\nu \in \mathbb{Z}$ für $\nu = 0,1,\dots,n_k$ konstruiert, so folgt nach Satz 2.1.7 und einer zu Lemma 2.1.2 analogen Überlegung, daß es ein Polynom Q_k mit ganzen Koeffizienten gibt, so daß

$$\max_{[-1,1]} \left|\left(P_{k+1}(x) - \sum_{\nu=o}^{n_k} a_\nu x^\nu\right) - x^{n_k+1} \cdot Q_k(x)\right| < \frac{1}{k} \quad \text{gilt.}$$

Für das Polynom $\sum_{\nu=o}^{n_{k+1}} a_\nu x^\nu := \sum_{\nu=o}^{n_k} a_\nu x^\nu + x^{n_k+1} \cdot Q_k(x)$ gilt folglich

$$\max_{[-1,1]} \left|\sum_{\nu=o}^{n_{k+1}} a_\nu x^\nu - P_{k+1}(x)\right| < \frac{1}{k} ,$$

und alle a_ν sind ganzzahlig.

Ist nun g eine auf $[-1,1]$ stetige Funktion mit $g(0) = 0$, $g(-1) \in \mathbb{Z}$, $g(1) \in \mathbb{Z}$ und $g(1)-g(-1)$ gerade, so existiert eine Folge (k_μ), so daß $(P_{k_\mu}(x))$ gleichmäßig auf $[-1,1]$ gegen $g(x)$ konvergiert. Folglich konvergiert auch $\sum_{\nu=o}^{n_{k_\mu}} a_\nu x^\nu$ gleichmäßig auf $[-1,1]$ gegen $g(x)$. Beachtet man nun, daß nach BOREL (vgl. Bemerkung 2.1.5) die a_ν TAYLOR-Koeffizienten einer Funktion f aus C_o^∞ sind, so erhalten wir mit f die gewünschte Funktion. □

b) Universelle Orthogonalreihen

MEN'ŠOV bewies in [36] die Existenz einer universellen trigonometrischen Reihe, was später von TALALYAN [50] auf beliebige vollständige Orthogonalsysteme ausgedehnt wurde.

Definition 2.1.9 Es sei $(\varphi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}_0}$ ein vollständiges Orthogonalsystem in $L^2[-\pi,\pi]$. Dann heißt die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu$ eine universelle Orthogonalreihe, falls zu jeder auf $[-\pi,\pi]$ meßbaren Funktion f eine Folge (n_k) existiert mit

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{\nu=0}^{n_k} a_\nu \varphi_\nu(x) = f(x) \quad \text{fast überall auf } [-\pi,\pi].$$

Wir betrachten den Raum s aller reellen Folgen und den Raum $M[-\pi,\pi]$ aller auf $[-\pi,\pi]$ meßbaren Funktionen (vgl. Beispiel 1.4.1 (4) und (5)). Dann definieren wir für $n \in \mathbb{N}$ die Operatoren

$$L_n: s \to M[-\pi,\pi]$$

durch $L_n((a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu \varphi_\nu$. Jeder Operator L_n ist linear, und da für alle $\delta > 0$

$$\lambda^1(\{x\in[-\pi,\pi]: |L_n((a_\nu))(x)|>\delta\}) \le \frac{1}{\delta}\int_{-\pi}^{\pi} |L_n((a_\nu))(x)|dx \le \frac{1}{\delta}\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|\cdot\|\varphi_\nu\|_1 \le$$

$$\le \frac{\sqrt{2\pi}}{\delta}\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu|\cdot\|\varphi_\nu\|_2$$ gilt, ist jeder Operator L_n auch stetig (dabei sei λ^1 das LEBESGUE-Maß in $\mathbb{R}$). Eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu$ ist genau dann eine universelle Orthogonalreihe, wenn die Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ ein (L_n)-universelles Element von s ist (man beachte die Bemerkung in Beispiel 1.4.1 (5)).

Wir geben hier einen neuen Beweis für die Existenz einer universellen trigonometrischen Reihe, das heißt einer universellen Orthogonalreihe bezüglich des trigonometrischen Systems $(1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \dots)$.

Satz 2.1.10 Für das trigonometrische System erfüllt die Familie $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Graphenbedingung.

<u>Beweis:</u> Es folgt leicht aus dem Satz von FEJÉR, daß die trigonometrischen Polynome im Raum $M[-\pi,\pi]$ dicht liegen. Mit Bemerkung 1.2.3 genügt es also zu zeigen:

Zu jeder reellen Folge $(a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ und jedem trigonometrischen Polynom t existieren Folgen $(a_\nu^{(n)})_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ für $n\in\mathbb{N}$ und $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so daß mit $n\to\infty$ gilt:

$a_\nu^{(n)}\to a_\nu$ für alle $\nu\in\mathbb{N}_0$ und $L_{k_n}((a_\nu^{(n)})_{\nu\in\mathbb{N}_0})(x)\to t(x)$ fast überall auf $[-\pi,\pi]$.

Es sei also $n\in\mathbb{N}$ gewählt. Wir betrachten dazu das trigonometrische Polynom $\tau_n := t - L_{2n}((a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0})$. Es sei etwa $\tau_n(\theta) = \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{N_n}(\alpha_\nu\cos\nu\theta+\beta_\nu\sin\nu\theta)$. Dann gilt

$$\tau_n(\theta) = \operatorname{Re}(\alpha_0+\sum_{\nu=1}^{N_n}(\alpha_\nu e^{i\nu\theta}-i\beta_\nu\, e^{i\nu\theta})) = \operatorname{Re}(P_n(e^{i\theta}))\ ,$$

wobei $P_n(z) := \alpha_0 + \sum_{\nu=1}^{N_n}(\alpha_\nu - i\beta_\nu)z^\nu$ ein (komplexes) Polynom ist.

Da die Funktion $\varphi_n(z) = \dfrac{P_n(z)}{z^{n+1}}$ auf $\mathbb{C}\setminus\{z:\ z \text{ reell und } z\geq 0\}$ holomorph ist, gibt es nach dem Satz von RUNGE ein Polynom Q_n mit

$$\max_{\substack{|z|=1\\ \pi\geq|\arg z|\geq\frac{1}{n}}} |Q_n(z) - \frac{P_n(z)}{z^{n+1}}| < \frac{1}{n}\ .$$

Also gilt auch $\max_{\substack{|z|=1\\ \pi\geq|\arg z|\geq\frac{1}{n}}} |z^{n+1}\cdot Q_n(z)-P_n(z)| < \frac{1}{n}$.

Ist $Q_n(z) = \sum_{\nu=0}^{M_n}\gamma_\nu z^\nu$, so betrachten wir das trigonometrische Polynom $\tilde{\tau}_n(\theta) := \sum_{\nu=0}^{M_n}(\operatorname{Re}\gamma_\nu\cdot\cos(n+1+\nu)\theta - \operatorname{Im}\gamma_\nu\cdot\sin(n+1+\nu)\theta)$,

und es gilt $\operatorname{Re}(z^{n+1}\cdot Q_n(z)) = \tilde{\tau}_n(\theta)$, falls $z = e^{i\theta}$ ist. Folglich erhalten wir:

$$\max_{\frac{1}{n}\le|\theta|\le\pi} |\tilde{\tau}_n(\theta)-\tau_n(\theta)| = \max_{\substack{z=e^{i\theta}\\ \frac{1}{n}\le|\theta|\le\pi}} |\mathrm{Re}(z^{n+1}\cdot Q_n(z)-P_n(z))| < \frac{1}{n} .$$

Es sei nun $(a_\nu^{(n)})_{\nu\in\mathbb{N}_0} := (a_0,a_1,\ldots,a_{2n},\mathrm{Re}\gamma_0,-\mathrm{Im}\gamma_0,\ldots,\mathrm{Re}\gamma_{M_n},-\mathrm{Im}\gamma_{M_n},0,0,\ldots)$ und $k_n := 2\cdot(n+M_n)$. Dann erhalten wir:

$$L_{k_n}((a_\nu^{(n)})_{\nu\in\mathbb{N}_0})(\theta) = L_{2n}((a_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0})(\theta) + \tilde{\tau}_n(\theta) \quad \text{für } \theta\in[-\pi,\pi],$$

so daß

$$\max_{\frac{1}{n}\le|\theta|\le\pi} |L_{k_n}((a_\nu^{(n)})_{\nu\in\mathbb{N}_0})(\theta)-t(\theta)| = \max_{\frac{1}{n}\le|\theta|\le\pi} |\tilde{\tau}_n(\theta)-\tau_n(\theta)| < \frac{1}{n}$$

gilt. Es konvergiert folglich $(L_{k_n}((a_\nu^{(n)})_{\nu\in\mathbb{N}_0})(\theta))$ fast überall gegen $t(\theta)$ für $n\to\infty$, und offensichtlich gilt auch $a_\nu^{(n)} \to a_\nu$ für $n\to\infty$ und alle $\nu\in\mathbb{N}_0$. □

<u>Satz 2.1.11 (MEN'ŠOV-JOÓ)</u> Es existiert eine universelle trigonometrische Reihe. Die Menge aller reellen Folgen (a_ν), deren trigonometrische Reihe $\frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty}(a_{2\nu-1}\cos\nu x + a_{2\nu}\sin\nu x)$ universell ist, hat ein Komplement von 1. Kategorie in s.

<u>Beweis:</u> folgt direkt aus Satz 1.2.2 und Satz 2.1.10. □

Ein sehr kurzer Beweis für die Existenz von beliebigen Universalreihen $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu\varphi_\nu$ für jedes in $M[-\pi,\pi]$ vollständige System (φ_ν) findet sich bei GOFFMAN-WATERMAN [15]. MEN'ŠOV [36] und KOZLOV [25] zeigten für das trigonometrische System und TALALYAN [50] (siehe ALEXITS [1], pp. 143-152) für beliebige in $L^2[-\pi,\pi]$ vollständige Orthogonalsysteme, daß es universelle Orthogonalreihen gibt, deren Koeffizienten eine Nullfolge bilden. Und auch diese bilden nach JOÓ [22] eine Menge mit einem Komplement von 1. Kategorie im Raum c_0 aller Nullfolgen.

Von besonderem Interesse ist, ob es sogar universelle Orthogonalreihen gibt, die FOURIER-Reihen einer auf $[-\pi,\pi]$ LEBESGUE-integrablen Funktion bezüglich eines gegebenen Orthogonalsystems von <u>beschränkten</u> Funktionen sind. (Die Beschränktheit garantiert die Existenz der FOURIER-Reihe jeder integrablen Funktion.) Es ist eine leichte Folgerung aus einem Ergebnis von POGOSYAN ([40], Theorem 1), daß es eine Umordnung des trigonometrischen Systems gibt, bezüglich der eine universelle FOURIER-Reihe existiert. Für das trigonometrische System selbst scheint das Problem noch offen zu sein.

Es gilt jedoch stets:

<u>Satz 2.1.12</u> Es sei $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ ein vollständiges beschränktes Orthogonalsystem in $L^2[-\pi,\pi]$. Entweder ist die Menge aller auf $[-\pi,\pi]$ LEBESGUE-integrablen Funktionen mit universeller FOURIER-Reihe bezüglich $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ leer oder sie hat ein Komplement von 1. Kategorie in $L^1[-\pi,\pi]$.

<u>Beweis:</u> Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Operatoren L_n: $L^1[-\pi,\pi] \to M[-\pi,\pi]$, definiert durch $L_n f = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu^f \varphi_\nu$, wobei die a_ν^f die FOURIER-Koeffizienten von f bezüglich $(\varphi_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ sind. Eine Funktion $f \in L^1[-\pi,\pi]$ hat nun genau dann eine universelle FOURIER-Reihe, wenn f ein (L_n)-universelles Element ist. Ferner ist jeder Operator L_n $(n \in \mathbb{N})$ linear; wegen

$$\lambda^1(\{x\in[-\pi,\pi]: |(L_nf)(x)|>\delta\}) \leq \frac{1}{\delta}\int_{-\pi}^{\pi}\Big(\sum_{\nu=0}^{n}|a_\nu^f|\,|\varphi_\nu(x)|\Big)dx \leq \frac{2}{\delta}\sum_{\nu=0}^{n}\|f\|_1\cdot\Big(\max_{[-\pi,\pi]}|\varphi_\nu(x)|\Big)^2$$

für alle $\delta > 0$ ist er auch stetig. Nun konvergiert $(L_nf)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle endlichen Linearkombinationen f aus Elementen von $\{\varphi_\nu: \nu\in\mathbb{N}_0\}$. Da diese Funktionen eine in $L^2[-\pi,\pi]$ dichte Menge bilden, liegen sie wegen der SCHWARZschen Ungleichung auch in $L^1[-\pi,\pi]$ dicht. Aus den Sätzen 1.2.2 und 1.4.2 folgt nun, daß die Menge der (L_n)-universellen Elemente von $L^1[-\pi,\pi]$ ein Komplement von 1. Kategorie hat, falls sie nicht leer ist. □

Es sei noch erwähnt, daß TALALYAN neben der oben betrachteten Universalität von Orthogonalreihen noch andere Arten von Universalitäten definierte. Beispielsweise heißt eine Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu \varphi_\nu$ permutationsuniversell, wenn es zu jeder meßbaren Funktion f eine Permutation π von $\mathbb{N}_0$ gibt, so daß $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\pi(\nu)} \varphi_{\pi(\nu)}(x) = f(x)$ fast überall gilt (für einen kurzen Überblick siehe IVANOV [21]).

2.2 Anwendungen in der komplexen Analysis

Wir beschäftigen uns nun mit Anwendungen aus der Funktionentheorie, wobei wir die wichtigste Anwendung, die holomorphen Monster, getrennt in Kapitel 3 behandeln.

a) Äquivalente Definitionen universeller Elemente

Wir beginnen mit einem allgemeinen Ergebnis, das für mehrere funktionentheoretische Universalitäten von Bedeutung ist.

Dazu seien einige Bezeichnungen eingeführt. Für eine offene Teilmenge Ω von $\mathbb{C}$ bezeichne $P(\Omega)$ die Menge aller in Ω holomorphen Funktionen, die Grenzwert einer Folge von Polynomen im Sinne der kompakten Konvergenz auf Ω sind. Analog stehe für eine kompakte Teilmenge K von $\mathbb{C}$ die Bezeichnung $P(K)$ für die Menge aller Funktionen auf K, die Grenzwert einer Folge von Polynomen im Sinne der gleichmäßigen Konvergenz in K sind. $P(\Omega)$ und $P(K)$ sind als abgeschlossene Teilräume von $H(\Omega)$ und $C(K)$ separable und vollständige metrische Vektorräume. Sind E und F offene oder kompakte Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit $F \subset E$, so werde mit i_E^F die Restriktionsabbildung $P(E) \to P(F)$ mit $i_E^F(\varphi) = \varphi|_F$ für $\varphi \in P(E)$ bezeichnet. Man macht sich leicht klar, daß i_E^F wohldefiniert und stetig ist.

Es sei nun X ein topologischer Raum, Ω eine nicht leere offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $\Lambda = (L_j)_{j\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $L_j: X \to P(\Omega)$. Ferner sei $\mathcal{E}$ eine Klasse von offenen oder kompakten Teilmengen von Ω. Für jede Menge $E \in \mathcal{E}$ betrachten wir die neue Familie $\Lambda^E := i_\Omega^E \circ \Lambda$ aller Abbildungen $L_j^E: X \to P(E)$ mit $L_j^E x = (i_\Omega^E \circ L_j)(x) = (L_j x)|_E$. Es werde nun ein Element x aus X universell genannt, wenn x für jede Menge $E \in \mathcal{E}$ ein Λ^E-universelles Element ist. Das liefert unter Umständen für verschiedene Klassen $\mathcal{E}$ verschiedene Mengen universeller Elemente. So betrachtet etwa BIRKHOFF [5] für eine gewisse Familie $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Operatoren $L_n: H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ nur Approximation ganzer Funktionen, also den Fall $\mathcal{E} = \{\mathbb{C}\}$, während SEIDEL-WALSH [48] für die gleichen Operatoren die Klasse aller einfach zusammenhängenden Gebiete in $\mathbb{C}$ und LUH [28] die Klasse aller kompakten Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit zusammenhängendem Komplement betrachten.

Wir zeigen hier, daß man unter gewissen Voraussetzungen die gleichen Mengen universeller Elemente erhält. Dazu definieren wir:

Definition 2.2.1 Es seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ Klassen von nicht leeren offenen oder kompakten Mengen in $\mathbb{C}$.

(1) Die Klasse $\mathcal{E}$ heißt schwächer als die Klasse $\mathcal{F}$, falls zu jeder kompakten Teilmenge K einer Menge $E \in \mathcal{E}$ eine Menge $F \in \mathcal{F}$ existiert mit $K \subset F$.

(2) Die Klassen $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ heißen äquivalent, wenn $\mathcal{E}$ schwächer als $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}$ schwächer als $\mathcal{E}$ ist.

Es ist offensichtlich, daß wir damit eine Äquivalenzrelation definiert haben.

Es gilt nun:

Satz 2.2.2 Es sei Ω eine nicht leere offene Menge, X ein topologischer Raum und $\Lambda = (L_j)_{j\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $L_j\colon X \to \mathcal{P}(\Omega)$. Ferner seien $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ zwei Klassen nichtleerer offener oder kompakter Teilmengen von Ω.

(1) Ist $\mathcal{E}$ schwächer als $\mathcal{F}$, so gilt:

(a) Ist x ein $\Lambda^E := (i_\Omega^E \circ L_j)_{j\in I}$-universelles Element für alle $E \in \mathcal{F}$, so auch für alle $E \in \mathcal{E}$: $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathcal{U}_{\Lambda^F} \subset \bigcap_{E\in\mathcal{E}} \mathcal{U}_{\Lambda^E}$.

(b) Erfüllt Λ^E die Graphenbedingung für alle $E \in \mathcal{F}$, so auch für alle $E \in \mathcal{E}$.

(2) Sind $\mathcal{E}$ und $\mathcal{F}$ äquivalent, so gilt:

(a) Es ist $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} \mathcal{U}_{\Lambda^F} = \bigcap_{E\in\mathcal{E}} \mathcal{U}_{\Lambda^E}$.

(b) Λ^F erfüllt die Graphenbedingung für alle $F \in \mathcal{F}$ genau dann, wenn Λ^E die Graphenbedingung für alle $E \in \mathcal{E}$ erfüllt.

Beweis: 1. Offensichtlich genügt es, Teil (1) zu beweisen.

2. Es sei E ein Element in $\mathcal{E}$. Wir nehmen zunächst an, daß E offen ist. Es sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von E mit kompakten Mengen, das heißt, es gelte $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = E$. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ nach Voraussetzung eine Menge $F_n \in \mathcal{F}$ mit $K_n \subset F_n$.

Es erfülle nun jedes Λ^F die Graphenbedingung ($F \in \mathcal{F}$). Es sei $x \in X$ und $h \in \mathcal{P}(E)$. Schließlich sei U eine offene Umgebung von x und $\varepsilon > 0$. Da $h \in \mathcal{P}(E)$ ist, gibt es eine Folge (P_n) von Polynomen mit $\max\limits_{K_n}|h(z)-P_n(z)| < \frac{1}{2n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Weil jedes Λ^{F_n} die Graphenbedingung erfüllt, existieren $x_n \in U$ und $k_n \in \mathbb{N}$ mit $\max\limits_{K_n}|(L_{k_n}x_n)(z)-P_n(z)| < \frac{1}{2n}$. Insgesamt gilt
$\max\limits_{K_n}|(L_{k_n}x_n)(z)-h(z)| < \frac{1}{n}$ für $n \in \mathbb{N}$. Für genügend großes n gilt also mit $\tilde{x} := x_n \in U$ und $k := k_n$: $d_{H(E)}(L_k\tilde{x},h) < \varepsilon$ mit der Metrik $d_{H(E)}$ in $H(E)$.
Folglich erfüllt Λ^E die Graphenbedingung.

Ganz ähnlich folgert man, daß $\bigcap\limits_{F\in\mathcal{F}} \mathcal{U}_{\Lambda^F}$ in $\mathcal{U}_{\Lambda^E}$ enthalten ist.

3. Ist E ein Element von $\mathcal{E}$, das kompakt ist, so folgert man analog. □

Bemerkung 2.2.3

(1) Für beliebige nichtleere offene Mengen Ω sind folgende Klassen äquivalent:

(a) $\mathcal{E} = \{K \subset \Omega$: K kompakt, K^c zusammenhängend$\}$,

(b) $\mathcal{E} = \{\mathcal{O} \subset \Omega$: $\mathcal{O}$ offen mit einfach zusammenhängenden Komponenten$\}$,

(c) $\mathcal{E} = \{\mathcal{O} \subset \Omega$: $\mathcal{O}$ endliche disjunkte Vereinigung von JORDAN-Gebieten$\}$,

(d) $\mathcal{E} = \{\mathcal{O} \subset \Omega$: $\mathcal{O}$ endliche disjunkte Vereinigung von offenen Polyedern mit rational-komplexen Eckpunkten$\}$.

(2) Ist Ω eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten, so sind zu (a)-(d) weiterhin äquivalent:

(e) $\mathcal{E} = \{K \subset \Omega$: K kompakt$\}$,

(f) $\mathcal{E} = \{\mathcal{O} \subset \Omega$: $\mathcal{O}$ offen$\}$,

(g) $\mathcal{E} = \{\Omega\}$.

(3) Ist Ω ein Gebiet, so ist zu (a)-(g) weiterhin äquivalent:

(h) $\mathcal{E} = \{G \subset \Omega$: G JORDAN-Gebiet$\}$.

Allein die Äquivalenz von (a) und (b) ist dabei nicht offensichtlich. Sie ergibt sich direkt aus dem folgenden Satz, den wir in dieser Allgemeinheit in Kapitel 3 benötigen.

Satz 2.2.4 Es sei Ω ein Gebiet und K eine kompakte Teilmenge von Ω mit zusammenhängendem Komplement. Dann existiert ein einfach zusammenhängendes beschränktes Gebiet U mit $K \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$ derart, daß $\overline{U}^c$ zusammenhängend ist.

Beweis: 1. Es sei N eine natürliche Zahl mit $K \subset \{x+iy: |x| < N \text{ und } |y| < N\}$. Man zerlege dieses Quadrat in Quadrate $q_{n,i}$ $(i = 1,2,\ldots)$ der Kantenlänge $\frac{1}{n}$. Ist U_n das Innere der Menge $\bigcup_i \{\overline{q_{n,i}}: K \cap \overline{q_{n,i}} \neq \emptyset\}$, so sieht man leicht, daß K in jedem U_n enthalten ist und daß es ein $\tilde{N} \in \mathbb{N}$ gibt, so daß $\overline{U}_n$ in Ω enthalten ist für alle $n \geq \tilde{N}$.

Wir nehmen nun an, daß zu jedem $n \geq \tilde{N}$ ein Punkt $z_n \in \Omega^c$ existiert, der ganz von $\overline{U}_n$ umschlossen ist. Da die Folge $(z_n)_{n \geq \tilde{N}}$ beschränkt ist, gibt es ein $z_o \in \mathbb{C}$ und eine Teilfolge (z_{n_k}) mit $z_{n_k} \to z_o$ für $k \to \infty$, und es ist $z_o \in \Omega^c$, also $z_o \notin K$, da Ω^c abgeschlossen ist. Weil K^c zusammenhängend ist, gibt es eine Kurve Γ, die z_o mit dem Punkt $N+1$ außerhalb K verbindet. Wegen der Kompaktheit von K und Γ und wegen $\min_{z \in K}|\zeta - z| \leq \frac{\sqrt{2}}{n}$ für alle Punkte $\zeta \in \overline{U}_n$ gibt es ein $\delta > 0$ und ein $k_\delta \in \mathbb{N}$, so daß $U_\delta(\Gamma) \cap \overline{U}_{n_k} = \emptyset$ für alle $k \geq k_\delta$ gilt, wobei $U_\delta(\Gamma)$ für die Menge $\{\zeta:$ es gibt ein $z \in \Gamma$ mit $|z-\zeta| < \delta\}$ steht. Für genügend große k ist jedoch $z_{n_k} \in U_\delta(\Gamma)$. Also existiert eine Kurve Γ_1, die ein z_{n_k} $(k \geq k_\delta)$ mit z_o innerhalb $U_\delta(\Gamma)$ verbindet. Mithin verbindet die Kurve $\Gamma_1 \cup \Gamma$ die Punkte z_{n_k} und $N+1$ außerhalb $\overline{U}_{n_k}$, und z_{n_k} kann nicht ganz von $\overline{U}_{n_k}$ umschlossen sein. Aus diesem Widerspruch folgt, daß eine gewisse Menge $\overline{U}_m$ nur Löcher mit Elementen aus Ω enthält.

Es sei nun A die Menge $\overline{U}_m$ vermehrt um ihre Löcher und $\mathcal{O}$ das Innere von A. Es ist dann $K \subset \mathcal{O} \subset \overline{\mathcal{O}} \subset \Omega$, und $\overline{\mathcal{O}}^c$ ist zusammenhängend.

2. Man verbinde nun die Zusammenhangskomponenten von $\tilde{U}$ durch Polygonzüge in Ω derart, daß die Vereinigung $\tilde{K}$ von $\tilde{U}$ mit diesen Polygonzügen eine zusammenhängende kompakte Teilmenge von Ω mit zusammenhängendem Komplement ist. Die Überlegungen von 1. auf $\tilde{K}$ angewendet liefern eine beschränkte offene Menge U mit $K \subset \tilde{K} \subset U \subset \overline{U} \subset \Omega$ und mit $\overline{U}^c$ zusammenhängend. Man sieht aber leicht, daß U auch zusammenhängend ist, weil $\tilde{K}$ es ist. Folglich erfüllt U alle geforderten Bedingungen. □

SELEZNEV-DODUNOVA [49], TOMM-TRAUTNER [52] und LUH ([32],[33]) beschäftigen sich auch mit Approximation meßbarer Funktionen auf meßbaren Teilmengen. Sie zeigen dabei im wesentlichen folgendes:

Ist Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$, X ein topologischer Raum und $(L_j)_{j\in I}$ eine Familie stetiger Abbildungen $L_j\colon X \to P(\Omega)$, so hat jedes (L_j)-universelle Element $x \in X$ folgende Eigenschaft: Zu jeder auf Ω definierten und meßbaren Funktion f existiert eine Folge (n_k) mit $(L_{n_k}x)(z) \to f(z)$ fast überall auf Ω für $k \to \infty$.

Wir wenden uns nun wieder einzelnen Universalitäten zu.

b) Holomorphe Funktionen mit universellen Ableitungen

Nach MAC LANE [34] existiert eine ganze Funktion, mit deren Ableitungen man auf jedem einfach zusammenhängenden Gebiet in $\mathbb{C}$ jede dort holomorphe Funktion kompakt approximieren kann. Das läßt sich verallgemeinern:

Definition 2.2.5 Es sei Ω eine offene Menge. Eine in Ω holomorphe Funktion φ besitzt universelle Ableitungen in Ω, falls gilt:

> Zu jeder offenen Menge $O \subset \Omega$ mit einfach zusammenhängenden Komponenten und jeder in O holomorphen Funktion f existiert eine Folge (n_k) mit
> $$\varphi^{(n_k)}(z) \underset{O}{\Rightarrow} f(z) \text{ für } k \to \infty.$$

Zum Nachweis der Existenz holomorpher Funktionen mit universellen Ableitungen betrachten wir zunächst die Differentiationsoperatoren

$$D^n : \begin{cases} H(\Omega) \to H(\Omega) \\ \varphi \mapsto \varphi(n) \end{cases}$$

für $n \in \mathbb{N}$. Es gilt:

Lemma 2.2.6 Jede Abbildung D^n $(n \in \mathbb{N})$ ist stetig.

Beweis: Es sei $K \subset \Omega$ kompakt. Dann gibt es endlich viele rektifizierbare, geschlossene in $\Omega \backslash K$ verlaufende JORDAN-Kurven γ_i $(i=1,\dots,N)$, so daß für $\Gamma := \bigcup_{i=1}^{N} \gamma_i$ gilt: Für alle $z \in K$ ist die Windungszahl von Γ bezüglich z gleich 1 (siehe RUDIN [46], Satz 13.5: Beweis.) Mit der verallgemeinerten CAUCHY-Formel gilt dann:

$$(D^n\varphi)(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta \qquad \text{für } z \in K ,$$

mithin

$$\max_K |(D^n\varphi)(z)| \le \frac{n!}{2\pi} \frac{\max_\Gamma |\varphi(\zeta)|}{\min\limits_{\substack{\zeta\in\Gamma \\ \tilde{\zeta}\in K}} |\zeta-\tilde{\zeta}|^{n+1}} \cdot \sum_{i=1}^{N} \ell(\gamma_i) ,$$

wobei $\ell(\gamma_i)$ die Länge von γ_i ist.

Konvergiert also eine Folge $(\varphi_\nu) \subset H(\Omega)$ kompakt gegen ein Element $\varphi \in H(\Omega)$, so folgt $\max_K |(D^n\varphi_\nu)(z) - (D^n\varphi)(z)| \to 0$ für $\nu \to \infty$ für alle kompakten Teilmengen K von Ω. Es gilt also $D^n\varphi_\nu \to D^n\varphi$ in $H(\Omega)$ für $\nu \to \infty$. Daraus folgt die Behauptung. □

<u>Satz 2.2.7</u> Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen mit einfach zusammenhängenden Komponenten. Dann erfüllt die Familie $(D^n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Graphenbedingung.

<u>Beweis:</u> Die Menge der Polynome liegt dicht in $H(\Omega)$. Mit Bemerkung 1.2.3 genügt es also zu zeigen: Zu Polynomen P und Q existiert eine Folge $(\varphi_n) \subset H(\Omega)$ mit $\varphi_n(z) \underset{\Omega}{\Rightarrow} P(z)$ und $\varphi_n^{(n)}(z) \underset{\Omega}{\Rightarrow} Q(z)$ für $n \to \infty$.

Es sei etwa $Q(z) = \sum_{\nu=0}^{m} a_\nu z^\nu$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$Q^{(-n)}(z) := \sum_{\nu=0}^{m} \frac{a_\nu}{(\nu+1)\cdot\ldots\cdot(\nu+n)} z^{\nu+n} .$$

Dann gilt $(Q^{(-n)})^{(n)}(z) = Q(z)$ und

$$|Q^{(-n)}(z)| \le \sum_{\nu=0}^{m} \frac{|a_\nu|}{(\nu+1)\cdot\ldots\cdot(\nu+n)} |z|^{\nu+n} \le \left(\sum_{\nu=0}^{m} |a_\nu|\,|z|^\nu\right) \frac{|z|^n}{n!} \le$$
$$\le C_R \cdot \frac{R^n}{n!}$$

für alle z mit $|z| \le R$, wobei C_R eine nur von R und Q abhängige Konstante ist. Folglich gilt

$$Q^{(-n)}(z) \underset{\mathbb{C}}{\Rightarrow} 0 \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Es werde nun für $n \in \mathbb{N}$ gesetzt: $\varphi_n = P + Q^{(-n)}$. Dann gilt:

$\varphi_n \in H(\Omega)$ und $\varphi_n^{(n)} = Q$ für $n > \text{grad } P$, sowie $\varphi_n(z) \underset{\Omega}{\Rightarrow} P(z)$ für $n \to \infty$.
□

Damit erhalten wir nun:

<u>Satz 2.2.8</u> Zu jeder offenen Menge Ω existieren Funktionen $\varphi \in H(\Omega)$ mit universellen Ableitungen in Ω. Hat Ω einfach zusammenhängende Komponenten, so hat die Menge aller in Ω holo-

morphen Funktion mit universellen Ableitungen in Ω ein Komplement von 1. Kategorie in $H(\Omega)$.

<u>Beweis:</u> Es sei zunächst Ω eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten. Eine in Ω holomorphe Funktion φ hat genau dann universelle Ableitungen in Ω, wenn φ bezüglich jeder Familie $(i_\Omega^{\mathcal{O}} \circ D^n)_{n \in \mathbb{N}}$ für jede offene Teilmenge $\mathcal{O}$ von Ω mit einfach zusammenhängenden Komponenten universell ist. Nach Satz 2.2.2 und Bemerkung 2.2.3 (b) und (g) ist das äquivalent dazu, daß φ ein $(D^n)_{n \in \mathbb{N}}$-universelles Element ist. Mit Satz 1.2.2 folgt nun, daß es in Ω holomorphe Funktionen gibt mit universellen Ableitungen, und daß die Menge dieser Funktionen ein Komplement von erster Kategorie in $H(\Omega)$ hat. Insbesondere gibt es eine ganze Funktion mit universellen Ableitungen in $\mathbb{C}$. Ist Ω eine beliebige offene Menge, so liefert die Einschränkung dieser ganzen Funktion auf Ω eine in Ω holomorphe Funktion mit universellen Ableitungen in Ω. □

Die Beweisidee geht auf MAC LANE [34] zurück und wurde kürzlich nochmals von BLAIR-RUBEL [6] gefunden. MAC LANE zeigte, daß es sogar eine ganze Funktion φ mit universellen Ableitungen gibt, so daß φ folgender Wachstumsbedingung genügt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert eine Konstante M_ε mit $|\varphi(z)| \leq M_\varepsilon e^{(1+\varepsilon)|z|}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Eng verwandt ist folgendes Ergebnis von LUH [33]:
Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten. Dann existiert zu jeder in Ω holomorphen Funktion φ eine Folge (φ_n) von Stammfunktionen der Ordnung n von φ derart, daß gilt

$$\varphi_n' = \varphi_{n-1} \text{ für } n \in \mathbb{N} \; (\varphi_0 := \varphi) \text{ und } \{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ ist dicht in } H(\Omega).$$

Im Fall $\Omega = \mathbb{C}$ wurde das von BLAIR-RUBEL [7] bewiesen.

c) Holomorphe Funktionen mit universell überkonvergenten Potenzreihenentwicklungen

Bekanntlich divergiert eine Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$ mit Konvergenzradius $R < \infty$ für alle Punkte z mit $|z| > R$. Existiert dennoch eine Teilfolge $(s_{n_k}(z))_{k \in \mathbb{N}}$ von Partialsummen $s_n(z) := \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^\nu$, die in einem Punkt z mit $|z| > R$ konvergiert, so spricht man von Überkonvergenz der Potenzreihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} a_\nu z^\nu$.

Dabei können zwei Phänomene auftreten. Konvergiert die Teilfolge $(s_{n_k}(z))$ kompakt in einem Gebiet G, das die Menge $\{z: |z| < R\}$ echt umfaßt, so liefert dieses eine holomorphe Fortsetzung der durch die Potenzreihe dargestellten Funktion φ nach G. Konvergiert $(s_{n_k}(z))$ kompakt in einem Gebiet G, das zu der Menge $\{z: |z| \leq R\}$ fremd ist, so zeigen Ergebnisse von LUH [27] und CHUI-PARNES [9], daß der Grenzwert auf G völlig unabhängig von φ sein kann.

LUH zeigte kürzlich ([31]), daß es zu jeder offenen Menge O mit einfach zusammenhängenden Komponenten eine in O holomorphe Funktion φ und eine Folge (n_k) derart gibt, daß gilt:

(1) Für jedes $\zeta \in O$ gilt

$$\sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{\varphi^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!} (z-\zeta)^\nu \underset{O}{\Rightarrow} \varphi(z) \quad , \text{ und}$$

(2) zu jeder offenen Menge $U \subset \overline{O}^c$ mit einfach zusammenhängenden Komponenten und jeder in U holomorphen Funktion f existiert eine Teilfolge $(n_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ von $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$ mit

$$\sum_{\nu=0}^{n_{k_l}} \frac{\varphi^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!} (z-\zeta)^\nu \underset{U}{\Rightarrow} f(z) \quad \text{für alle } \zeta \in O.$$

Wegen (2) sagt man, daß die Funktion φ eine <u>universell überkonvergente Potenzreihenentwicklung</u> um ζ besitzt.

Wir geben hier einen neuen Beweis für die Existenz derartiger Funktionen und zeigen, daß sie in $H(O)$ eine Menge mit einem Komplement von erster Kategorie bilden.

Es sei $\mathcal{O}$ eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten und z_o ein fest gewählter Punkt in $\mathcal{O}$. Wir definieren Abbildungen auf $H(\mathcal{O})$.

Für jeden Punkt $\zeta \in \mathcal{O}$ und für $n \in \mathbb{N}$ sei S_n^ζ: $H(\mathcal{O}) \to H(\mathbb{C})$ definiert durch

$$(S_n^\zeta\varphi)(z) = \sum_{\nu=o}^{n} \frac{\varphi^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!} (z-\zeta)^\nu .$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei F_n: $H(\mathcal{O}) \to H(\mathcal{O})$ definiert durch

$$(F_n\varphi)(z) = \sum_{\nu=o}^{n} \frac{\varphi^{(\nu)}(z_o)}{\nu!} (z-z_o)^\nu - \varphi(z) = (S_n^{z_o}\varphi)(z) - \varphi(z).$$

Es sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von $\mathcal{O}$ mit kompakten Mengen derart, daß $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n = \mathcal{O}$ und $z_o \in K_1$ gilt.

Für natürliche Zahlen n und m sei nun

M_n^m: $H(\mathcal{O}) \to \mathbb{R}_o^+$ definiert durch $M_n^m\varphi = \max\limits_{\substack{\zeta\in K_m \\ |z|\le m}} |(S_n^\zeta\varphi - S_n^{z_o}\varphi)(z)|$.

<u>Lemma 2.2.9</u> Die Abbildungen S_n^ζ, F_n und M_n^m ($\zeta \in \Omega$, $n,m \in \mathbb{N}$) sind wohldefiniert und stetig.

<u>Beweis:</u> 1. Mit Lemma 2.2.6 ist für festes $\zeta \in \mathcal{O}$ und $n \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\varphi \to \varphi^{(\nu)}(\zeta)$ stetig auf $H(\mathcal{O})$. Daraus folgt leicht die Stetigkeit von S_n^ζ und somit auch die von F_n für $\zeta \in \mathcal{O}$ und $n \in \mathbb{N}$.

2. Für jedes $\varphi \in H(\mathcal{O})$ und $n \in \mathbb{N}$ ist die Abbildung

$$(\zeta,z) \mapsto (S_n^\zeta\varphi - S_n^{z_o}\varphi)(z) = \sum_{\nu=o}^{n} \left(\frac{\varphi^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!} (z-\zeta)^\nu - \frac{\varphi^{(\nu)}(z_o)}{\nu!} (z-z_o)^\nu\right)$$

für $\zeta \in \mathcal{O}$ und $z \in \mathbb{C}$ stetig. Da die Menge $K_m \times \{z: |z| \le m\}$ kompakt in $\mathbb{C}^2$ ist, ist auf dieser Menge das Supremum von $|(S_n^\zeta\varphi - S_n^{z_o}\varphi)(z)|$ für jedes $\varphi \in H(\mathcal{O})$ und $n \in \mathbb{N}$ endlich, und es wird angenommen, so daß $M_n^m\varphi$ wohldefiniert ist.

3. Es seien φ_k $(k \in \mathbb{N})$ und φ Elemente aus $H(\mathcal{O})$ mit $\varphi_k(z) \underset{\mathcal{O}}{\Rightarrow} \varphi(z)$ für $k \to \infty$. Nach Lemma 2.2.6 existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit

$|\varphi_k^{(\nu)}(\zeta)-\varphi^{(\nu)}(\zeta)| < \varepsilon$ für alle $\zeta \in K_m$, $\nu = 0,1,\dots,m$ und alle $k \geq k_\varepsilon$.

Setzt man $R_m = \max\limits_{K_m}|z|$, so gilt für $\zeta \in K_m$, $|z| \leq m$ und $k \geq k_\varepsilon$ folglich:

$$|(S_n^\zeta \varphi_k - S_n^{z_0}\varphi_k)(z) - (S_n^\zeta \varphi - S_n^{z_0}\varphi)(z)| =$$
$$= \left|\sum_{\nu=0}^{n}\left(\frac{\varphi_k^{(\nu)}(\zeta)-\varphi^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!}(z-\zeta)^\nu - \frac{\varphi_k^{(\nu)}(z_0)-\varphi^{(\nu)}(z_0)}{\nu!}(z-z_0)^\nu\right)\right| \leq 2\varepsilon \cdot \sum_{\nu=0}^{n}\frac{(R_m+m)^\nu}{\nu!}.$$

Daraus ergibt sich auch $|M_n^m\varphi_k - M_n^m\varphi| \leq 2\varepsilon \cdot \sum\limits_{\nu=0}^{n}\frac{(R_m+m)^\nu}{\nu!}$ für alle $k \geq k_\varepsilon$.

Folglich ist für alle natürlichen Zahlen n und m die Abbildung M_n^m stetig. □

Es sei nun U eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten und $U \subset \bar{\mathcal{O}}^c$. Wir betrachten folgende Abbildungen:

Ist $U \neq \emptyset$, so sei für $n \in \mathbb{N}$: $L_n^U = \begin{cases} H(\mathcal{O}) \to H(U)\times H(\mathcal{O})\times (\mathbb{R}_0^+)^{\mathbb{N}} \\ \varphi \mapsto ((i_{\mathbb{C}}^U \circ S_n^{z_0})(\varphi),\ F_n\varphi, (M_n^m\varphi)_{m\in\mathbb{N}}). \end{cases}$

Ist $U = \emptyset$, so sei für $n \in \mathbb{N}$: $L_n^\emptyset = \begin{cases} H(\mathcal{O}) \to H(\mathcal{O})\times (\mathbb{R}_0^+)^{\mathbb{N}} \\ \varphi \mapsto (F_n\varphi,\ (M_n^m\varphi)_{m\in\mathbb{N}}). \end{cases}$

Damit gilt nun:

<u>Satz 2.2.10</u> Es seien $\mathcal{O}$ und U offene Mengen mit einfach zusammenhängenden Komponenten und $U \subset \bar{\mathcal{O}}^c$. Ist $U \neq \emptyset$, so erfüllt die Familie $(L_n^U)_{n\in\mathbb{N}}$ die Graphenbedingung bezüglich $A := H(U)\times\{0\}\times\{0\}^{\mathbb{N}}$. Die Familie $(L_n^\emptyset)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllt die Graphenbedingung bezüglich $A := \{0\}\times\{0\}^{\mathbb{N}}$.

<u>Beweis:</u> 1. Wir betrachten zunächst den Fall, daß U nicht leer ist. Es sei φ eine in $\mathcal{O}$ holomorphe Funktion und P ein Polynom. Dann existiert nach dem Satz von RUNGE eine Folge (P_n) von Polynomen mit

$$P_n(z) \underset{\mathcal{O}}{\Rightarrow} \varphi(z) \text{ und } P_n(z) \underset{U}{\Rightarrow} P(z) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Setzen wir $k_n = \text{grad}\, P_n$, so folgt für $n \to \infty$:

$$(i_{\mathbb{C}}^{U} \circ S_{k_n}^{z_o})(P_n)(z) = P_n(z) \underset{U}{\Rightarrow} P(z) \ ,$$

$$(F_{k_n} P_n)(z) = 0 \underset{\mathcal{O}}{\Rightarrow} 0$$

und für $m \in \mathbb{N}$: $\quad M_{k_n}^{m} P_n \quad = 0 \to 0 \text{ in } \mathbb{R}_o^{+}$.

Insgesamt erhalten wir $L_{k_n}^{U} P_n \to (P, 0, (0)_{m \in \mathbb{N}})$ für $n \to \infty$.

Mit Bemerkung 1.2.3 folgt, daß die Familie $(L_n^U)_{n \in \mathbb{N}}$ die Graphenbedingung bezüglich $H(U) \times \{0\} \times \{0\}^{\mathbb{N}}$ erfüllt.

2. Im Fall $U = \emptyset$ schließt man ganz analog. □

Wir können nun den erwähnten Satz von LUH beweisen und zeigen, daß die Menge der von LUH betrachteten Funktionen ein Komplement von 1. Kategorie hat.

<u>Satz 2.2.11</u> Es sei $\mathcal{O}$ eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten. Dann existiert eine Funktion $\varphi \in H(\mathcal{O})$ mit folgender Eigenschaft:
Es gibt eine Folge (n_k), so daß gilt:

(1) Für alle $\zeta \in \mathcal{O}$ konvergiert $((S_{n_k}^{\zeta}\varphi)(z))_{k \in \mathbb{N}}$ kompakt auf $\mathcal{O}$ gegen $\varphi(z)$.

(2) Ist $\overline{\mathcal{O}} \neq \mathbb{C}$ und U eine offene Teilmenge von $\overline{\mathcal{O}}^c$ mit einfach zusammenhängenden Komponenten, so gibt es zu jeder in U holomorphen Funktion f eine Teilfolge $(n_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ von $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so daß $((S_{n_{k_l}}^{\zeta}\varphi)(z))_{l \in \mathbb{N}}$ für alle $\zeta \in \mathcal{O}$ kompakt auf U gegen f(z) konvergiert.

Die Menge solcher Funktionen hat ein Komplement von 1. Kategorie in $H(\mathcal{O})$.

<u>Beweis:</u> 1. Wir betrachten zunächst den Fall, daß $\overline{\mathcal{O}} \neq \mathbb{C}$ ist. Es sei $\mathcal{E}$ die abzählbare Menge aller endlichen disjunkten Vereinigungen von offenen Polyedern in $\overline{\mathcal{O}}^c$ mit rational-komplexen Eckpunkten (d.h. $\mathcal{E}$ ist die Menge in (d) von Bemerkung 2.2.3). Wir betrachten die Familie $\underset{U\in\mathcal{E}}{\times} (L_n^U)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Satz 2.2.10 folgt vermittels Satz 1.3.3, daß $\underset{U\in\mathcal{E}}{\times} (L_n^U)_{n\in\mathbb{N}}$ die Graphenbedingung bezüglich $\underset{U\in\mathcal{E}}{\times} (H(U)\times\{0\}\times\{0\}^{\mathbb{N}})$ erfüllt. Nach Satz 1.2.2 existieren also in $\mathcal{O}$ holomorphe Funktionen, die bezüglich $H(U)\times\{0\}\times\{0\}^{\mathbb{N}}$ für alle $U \in \mathcal{E}$ ein $(L_n^U)_{n\in\mathbb{N}}$-universelles Element sind, und diese Funktionen bilden eine Menge mit Komplement von 1. Kategorie in $H(\mathcal{O})$. Zum Beweis des Satzes bleibt noch zu zeigen, daß diese Funktionen die gewünschten Eigenschaften besitzen.

Es sei also φ eine in $\mathcal{O}$ holomorphe Funktion, die $(L_n^U)_{n\in\mathbb{N}}$-universell bezüglich $H(U)\times\{0\}\times\{0\}^{\mathbb{N}}$ ist für alle $U \in \mathcal{E}$. Weiter sei $((U_n,P_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Paaren $U_n \in \mathcal{E}$ und Polynomen P_n, so daß für jedes $U \in \mathcal{E}$ und jedes Polynom P mit rational-komplexen Koeffizienten das Paar (U,P) beliebig oft vorkommt. Dann existiert zu jeder natürlichen Zahl k eine Zahl $n_k \in \mathbb{N}$ mit

$$d_{H(U_k)}\left(\left(i_{\mathbb{C}}^{U_k} \circ S_{n_k}^{z_0}\right)(\varphi), P_k\right) < \frac{1}{k}\,, \qquad (*)$$

$$d_{H(\mathcal{O})}\left(F_{n_k}\varphi, 0\right) < \frac{1}{k}$$

$$\text{und} \quad |M_{n_k}^m \varphi| < \frac{1}{k} \qquad \text{für } m = 1,2,\ldots,k\,.$$

Aus der zweiten Ungleichung folgt $d_{H(\mathcal{O})}(S_{n_k}^{z_0}\varphi, \varphi) < \frac{1}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$,

also gilt $\quad (S_{n_k}^{z_0}\varphi)(z) \underset{\mathcal{O}}{\Rightarrow} \varphi(z) \quad$ für $k \to \infty$.

Aus der dritten Ungleichung folgt $\quad \max\limits_{\substack{\zeta\in K_m \\ |z|\le m}} \left|(S_{n_k}^{\zeta}\varphi - S_{n_k}^{z_0}\varphi)(z)\right| < \frac{1}{k}$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $m = 1,2,\ldots,k$, also gilt für alle $\zeta \in \mathcal{O}$:

$$(S_{n_k}^{\zeta}\varphi)(z) - (S_{n_k}^{z_0}\varphi)(z) \underset{\mathbb{C}}{\Rightarrow} 0 \quad \text{für } k \to \infty. \quad (**)$$

Somit konvergiert für alle $\zeta \in \mathcal{O}$ die Folge $((S^{\zeta}_{n_k}\varphi)(z))_{k \in \mathbb{N}}$ kompakt auf $\mathcal{O}$ gegen $\varphi(z)$, und (1) ist nachgewiesen.

Da zu jedem $U \in \mathcal{E}$ und jedem Polynom P mit rational-komplexen Koeffizienten das Paar (U,P) beliebig oft in der Folge $((U_n,P_n))_{n \in \mathbb{N}}$ vorkommt, folgt aus (*), daß für alle $U \in \mathcal{E}$ die Menge $\{(i^U_{\mathbb{C}} \circ S^{z_o}_{n_k})(\varphi)\colon k \in \mathbb{N}\}$ dicht in H(U) ist. Es ist also φ ein $(i^U_{\mathbb{C}} \circ S^{z_o}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$-universelles Element für alle $U \in \mathcal{E}$.

Aus Satz 2.2.2 und der Bemerkung 2.2.3 folgt, daß φ ein $(i^U_{\mathbb{C}} \circ S^{z_o}_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$-universelles Element für alle offenen Teilmengen U von $\overline{\mathcal{O}}^c$ mit einfach zusammenhängenden Komponenten ist. Daraus folgt (2), wenn man noch (**) beachtet.

2. Der Beweis im Fall $\overline{\mathcal{O}} = \mathbb{C}$ erfolgt analog. □

Die Existenz einer universell überkonvergenten Potenzreihe im Einheitskreis wurde unabhängig voneinander von LUH [27] und CHUI-PARNES [9] bewiesen, wobei LUH allgemeiner Überkonvergenzeigenschaften der A-Transformierten der Teilsummen von Potenzreihen betrachete, wobei $A = (\alpha_{n\nu})$ eine beliebige vorgegebene untere Dreiecksmatrix mit $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{\nu=0}^{n} \alpha_{n\nu} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_{n\nu} = 0$ für $\nu \in \mathbb{N}$ ist. TOMM-TRAUTNER [52] untersuchen Überkonvergenz von Potenzreihen, die eine Funktion in $A(\{z\colon |z| \le R\})$ darstellen ($R \ge 0$ vorgegeben). Auch die von LUH und TOMM-TRAUTNER betrachteten universellen Potenzreihen bilden jeweils eine Menge mit einem Komplement von erster Kategorie in ihrem Grundraum: Für die zugehörigen Familien stetiger linearer Operatoren läßt sich sehr leicht mit dem Satz von RUNGE die Graphenbedingung nachweisen.

Bekanntlich sind die Monome z^n ($n \in \mathbb{N}_o$) die FABER-Polynome des Gebietes $\mathbb{D}$. Als Verallgemeinerung untersuchen SELEZNEV-DODUNOVA [49] für allgemeinere JORDAN-Gebiete G Universalitätseigenschaften von Reihen $\sum\limits_{n=o}^{\infty} a_n F_n(z)$ mit den zu G gehörigen FABER-Polynomen $F_n(z)$ ($n \in \mathbb{N}_o$).

Eng verwandt mit der universellen Überkonvergenz ist der Begriff der universellen Matrix, mit dem sich LUH, FAULSTICH und TOMM in einer Reihe von Arbeiten beschäftigt haben (siehe etwa [51], Literaturverzeichnis). Die geometrische Reihe ist sicher keine, bei der Überkonvergenz auftritt. Stattdessen existiert zu jedem einfach zusammenhängenden Gebiet G mit $\mathbb{D} \subset G$ und $1 \notin G$ eine "universelle" Matrix A mit gewissen Regularitätseigenschaften, für die gilt:

(1) $\sigma_n^A(z) \underset{G}{\Rightarrow} \frac{1}{1-z}$ für $n \to \infty$, und

(2) zu jeder offenen Menge $U \subset \overline{G}^c$ mit einfach zusammenhängenden Komponenten und jeder in U holomorphen Funktion existiert eine Folge (n_k) mit

$$\sigma_{n_k}^A(z) \Rightarrow f(z) \text{ für } k \to \infty.$$

Dabei ist $\sigma_n^A(z)$ die n-te Komponente der A-Transformierten von $\left(\sum_{\nu=0}^{m} z^\nu\right)_{m \in \mathbb{N}}$.

2.3 Bericht über weitere Anwendungen

In diesem Abschnitt geben wir Ergebnisse über weitere Universalitäten an, die sich mit den Resultaten aus Kapitel 1 gewinnen lassen.

a) Wohl angeregt durch BANACHs bekannten Satz, daß die nirgends differenzierbaren stetigen reellen Funktionen auf $[0,1]$ im Raum $C[0,1]$ eine Menge mit Komplement von 1. Kategorie bilden, zeigte MARCINKIEWICZ [35] folgendes:

Es sei (h_n) eine positive Nullfolge. Dann existiert eine auf $[0,1]$ stetige Funktion f mit folgender Eigenschaft: Zu jeder auf $[0,1]$ meßbaren Funktion g existiert eine Folge (n_k), so daß gilt: $\frac{f(x+h_{n_k})-f(x)}{h_{n_k}} \to g(x)$ fast überall auf $[0,1]$ für $k \to \infty$.

Die Menge aller derartigen Funktionen hat ein Komplement von 1. Kategorie in $C[0,1]$.

Man sieht direkt, daß die von MARCINKIEWICZ betrachteten Funktionen genau diejenigen sind, die bezüglich den Operatoren $L_n\colon C[0,1] \to M[0,1]$ $(n \in \mathbb{N})$, definiert durch $(L_n f)(x) = \frac{f(x+h_n)-f(x)}{h_n}$, universell sind. Die Graphenbedingung ergibt sich durch Anwendung eines Satzes von LUSIN (siehe [35]).

Verallgemeinerungen des Ergebnisses von MARCINKIEWICZ finden sich bei HOÃNG [20] (anderer Ableitungsbegriff), AVERSA-CARRESE [2] (im $\mathbb{R}^n$) und LAMB [26] (eine Martingal-Version).

b) Es gilt folgendes kategorielle Analogon zum bekannten Wiederkehrsatz von POINCARÉ: Es sei X eine beschränkte offene

Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und $T\colon X \to X$ eine maßtreue stetige Abbildung, das heißt, für jede offene Menge $U \subset X$ habe $T(U)$ das gleiche LEBESGUE-Maß wie U. Dann existiert eine Menge $N \subset X$ von 1. Kategorie in X, so daß für alle $x \in X\setminus N$ eine Folge (n_k) existiert mit $\lim_{k\to\infty} T^{n_k}x = x$.

Man sieht direkt, daß die Punkte $x \in X \setminus N$ genau diejenigen sind, die $(T^n - I)_{n \in \mathbb{N}}$-universell bezüglich $\{0\}$ sind, wobei I die identische Abbildung ist. Die Graphenbedingung von $(T^n - I)_{n \in \mathbb{N}}$ bezüglich $\{0\}$ ergibt sich daraus, daß wegen der Maßtreue für keine offene Menge U die Mengen $T^{-n}(U)$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ paarweise disjunkt sein können.

HILMY [19] bewies das POINCARÉ-Analogon unter etwas allgemeineren Voraussetzungen. Man vergleiche dazu auch GOTTSCHALK-HEDLUND ([16], 3.31) und OXTOBY ([38], Kapitel 17).

c) Im Komplexen zeigte BIRKHOFF ([5]) die Existenz einer ganzen Funktion φ, für die gilt: Zu jeder ganzen Funktion f existiert

eine Folge (c_n) komplexer Zahlen mit $\varphi(z+c_n) \underset{\mathbb{C}}{\Rightarrow} f(z)$ für $n \to \infty$.

Die Menge aller derartigen Funktionen hat ein Komplement von 1. Kategorie in $H(\mathbb{C})$, wie DUYOS RUIZ [11] kürzlich zeigte. Man sieht direkt, daß diese Funktionen genau diejenigen sind, die bezüglich den Operatoren $L_c\colon H(\mathbb{C}) \to H(\mathbb{C})$ $(c \in \mathbb{C})$, definiert durch $(L_c\varphi)(z) = \varphi(z+c)$, universell sind. Die Graphenbedingung ergibt sich durch den Satz von RUNGE.

d) In Analogie dazu bewiesen SEIDEL-WALSH ([48]) die Existenz einer in $\mathbb{D}$ holomorphen Funktion φ, für die gilt: Zu jedem ein-

fach zusammenhängenden Gebiet $G \subset \mathbb{D}$ und jeder in G holomorphen Funktion f existiert eine Folge $(\alpha_n) \subset \mathbb{D}$ mit

$$\varphi\left(\frac{z+\alpha_n}{1+\bar{\alpha}_n z}\right) \underset{G}{\Rightarrow} f(z) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Man sieht direkt, daß derartige Funktionen genau diejenigen sind, die bezüglich den Operatoren $L_\alpha\colon H(\mathbb{D}) \to H(\mathbb{D})$ $(\alpha \in \mathbb{D})$, definiert durch $(L_\alpha\varphi)(z) = \varphi\left(\frac{z+\alpha}{1+\bar{\alpha}z}\right)$, universell sind. Die Graphenbedingung ergibt sich durch eine geeignete Anwendung des Satzes von RUNGE (siehe [48]). Wir können also auch hier feststellen, daß die Menge der Funktionen von SEIDEL-WALSH in $H(\mathbb{D})$ ein Komplement von 1. Kategorie hat.

HEINS beweis in [18] die Existenz eines BLASCHKE-Produkts, das $(L_\alpha)_{\alpha\in[0,1)}$-universell ist bezüglich der Menge aller $f \in H(\mathbb{D})$ mit $\sup_{z\in\mathbb{D}} |f(z)| \leq 1$. Das wurde von CHEE [8] verallgemeinert auf $\mathbb{C}^n$.

Kapitel 3. Holomorphe Monster (Anwendungen II)

3.0 Einführung

In der Theorie holomorpher Funktionen fand stets das Verhalten bei Annäherung an den Rand des Definitionsbereiches ein besonderes Interesse. Neben Fragen z.B. nach Stetigkeit und analytischer Fortsetzbarkeit wird andererseits untersucht, wie "wild" sich holomorphe Funktionen am Rand verhalten können. Es sei nur an den bekannten Satz von CASORATI und WEIERSTRASS erinnert. 1975 bewies VORONIN [53] für den Randpunkt ∞ der in $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ holomorphen RIEMANNschen ζ-Funktion folgendes Ergebnis:

Für jede positive Zahl $r < \frac{1}{4}$ und zu jeder nullstellenfreien Funktion $f \in A(\{z: |z| \leq r\})$ existiert eine Folge (T_n) reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty}|T_n| = \infty$, für welche gilt:

$$\zeta(z+(\tfrac{3}{4}+i\cdot T_n)) \underset{|z|\leq r}{\Rightarrow} f(z) \qquad \text{für } n \to \infty.$$

Entsprechende Aussagen wurden daraufhin für ganze Klassen weiterer Funktionen von REICH ([43], [44]) und BAGCHI [3] gewonnen. BAGCHI konnte Funktionen angeben, die im gleichen Sinne sogar jede Funktion f aus $A(\{z: |z| \leq r\})$ approximieren. Unter anderem gilt das für die Ableitung ζ' der RIEMANNschen ζ-Funktion (vgl. [3], 3.4 Corollary). Eine weitere solche Funktion wurde von GAVRILOV-KANATNIKOV [14] angegeben. Beachtet man nun, daß sich jedes JORDAN-Gebiet G durch eine lineare Transformation $\tau(z) = az+b$ in jedes Gebiet $\{z: |z-(\frac{3}{4}+iT)| < r\}$ $(T \in \mathbb{R})$ abbilden läßt und daß man nach dem Satz von RUNGE jede in G holomorphe Funktion f kompakt durch Polynome approximieren kann, so sieht man (vergleiche den Beweis von Satz 3.0.2), daß für die Funktion ζ' gilt:

Zu jedem JORDAN-Gebiet G und zu jeder in G holomorphen Funktion f existiert eine Folge (τ_n) von linearen Transformationen $\tau_n(z) = a_n z + b_n$, für welche gilt:
$\tau_n(G) \not\subset \{z: \frac{1}{2} < \mathrm{Re}\, z < 1\}$, $\min\limits_{\overline{G}}|\tau_n(z)| \to \infty$ und $(\zeta' \circ \tau_n)(z) \underset{G}{\Rightarrow} f(z)$ für $n \to \infty$.

Ein analoges Approximationsverhalten kann nun in jedem Randpunkt einer offenen Menge Ω studiert werden.

Zur Vereinfachung der Schreibweise setzen wir für beschränkte Mengen $E \subset \mathbb{C}$, lineare Transformationen $\tau_n(z) = a_n z + b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $\zeta \in \hat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

$$\tau_n(E) \to \zeta \text{ für } n \to \infty,$$

falls gilt:

$$\max_{z \in \overline{E}} |\zeta - \tau_n(z)| \to 0 \quad \text{für } n \to \infty, \text{ falls } \zeta \in \mathbb{C},$$

und

$$\min_{z \in \overline{E}} |\tau_n(z)| \to \infty \quad \text{für } n \to \infty, \text{ falls } \zeta = \infty.$$

Man beachte, daß, sofern nur E mehr als einen Punkt enthält, die Aussage $\tau_n(E) \to \zeta$ für $n \to \infty$ im Fall $\zeta \in \mathbb{C}$ gleichbedeutend ist damit, daß $a_n \to 0$ und $b_n \to \zeta$ für $n \to \infty$ gilt.

Wir setzen nun:

Definition 3.0.1 Es sei Ω eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und ζ ein Randpunkt aus $\hat{\mathbb{C}}$ von Ω. Eine in Ω holomorphe Funktion φ heißt τ-universell in ζ (bezüglich Ω), falls sie folgende Eigenschaft (T) erfüllt:

Zu jedem JORDAN-Gebiet G und jeder in G holomorphen Funktion $f \in H(G)$ existiert eine Folge (τ_n) von linearen Transformationen $\tau_n(z) = a_n z + b_n$, für welche gilt:

$$\tau_n(G) \subset \Omega \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\tau_n(G) \to \zeta \text{ und } (\varphi \circ \tau_n)(z) \underset{G}{\Rightarrow} f(z) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Die Ableitung ζ' der RIEMANNschen Zetafunktion ist also τ-universell im Randpunkt ∞. Ferner sieht man, daß auch jede im Sinne von BIRKHOFF universelle ganze Funktion (siehe Abschnitt 2.3) τ-universell im Randpunkt ∞ ist.

Der folgende Satz geht i.w. auf LUH [32] zurück.

Satz 3.0.2 Es sei Ω eine offene Menge, ζ ein Randpunkt von Ω und φ eine in Ω holomorphe Funktion. Dann gilt:

(1) φ ist bereits dann τ-universell in ζ, falls sie die Eigenschaft (T) nur für das Gebiet $G = \mathbb{D}$ erfüllt.

(2) Ist φ τ-universell, so gilt:

a) Zu jeder offenen und beschränkten Menge O und jeder Funktion $f \in P(O)$ existiert eine Folge (τ_n) linearer Transformationen $\tau_n(z) = a_n z + b_n$, für welche

$$\tau_n(O) \subset \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\tau_n(O) \to \zeta \text{ und } (\varphi \circ \tau_n)(z) \underset{O}{\Rightarrow} f(z) \text{ für } n \to \infty$$

gilt.

b) Zu jeder kompakten Menge K und jeder Funktion $f \in P(K)$ existiert eine Folge (τ_n) linearer Transformationen $\tau_n(z) = a_n z + b_n$, für welche

$$\tau_n(K) \subset \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\tau_n(K) \to \zeta \text{ und } (\varphi \circ \tau_n)(z) \underset{K}{\Rightarrow} f(z) \text{ für } n \to \infty$$

gilt.

c) Zu jeder beschränkten LEBESGUE-meßbaren Menge E und jeder meßbaren Funktion $f: E \to \mathbb{C}$ existiert eine Folge (τ_n) linearer Transformationen $\tau_n(z) = a_n z + b_n$, für welche

$$\tau_n(E) \subset \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\tau_n(E) \to \zeta \text{ und } (\varphi \circ \tau_n)(z) \to f(z) \text{ fast überall auf } E \text{ für } n \to \infty$$

gilt.

Beweis: 1. Die Funktion φ erfülle die Bedingung (T) für den Einheitskreis $\mathbb{D}$. Es sei G ein JORDAN-Gebiet, f eine in G holomorphe Funktion und $n \in \mathbb{N}$. Zu G existiert eine lineare Transformation $\tau(z) = az + b$ mit $\tau(G) \subset \mathbb{D}$. Nach dem Satz von RUNGE existiert ein Polynom P_n mit $d_{H(G)}(f, P_n) < \frac{1}{2n}$.

Da nun φ in ζ die Bedingung (T) für $\mathbb{D}$ erfüllt, existiert eine Folge $(\tau_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ von linearen Transformationen $\tau_{n,m}(z) = a_{n,m}z + b_{n,m}$, für die $\tau_{n,m}(\mathbb{D}) \subset \Omega$ für alle $m \in \mathbb{N}$, $\tau_{n,m}(\mathbb{D}) \to \zeta$ und $(\varphi\circ\tau_{n,m})(z) \underset{\mathbb{D}}{\Rightarrow} (P_n\circ\tau^{-1})(z)$ für $m \to \infty$ gilt. Folglich haben wir auch $(\varphi\circ\tau_{n,m}\circ\tau)(z) \underset{G}{\Rightarrow} P_n(z)$ für $m \to \infty$, und es existiert ein $m_n \in \mathbb{N}$, so daß $d_{H(G)}(P_n,\varphi\circ\tau_{n,m_n}\circ\tau) < \frac{1}{2n}$ gilt, sowie $\min\limits_{\overline{\mathbb{D}}}|\tau_{n,m_n}(z)| > n$, falls $\zeta = \infty$, und $\max\limits_{\overline{\mathbb{D}}}|\tau_{n,m_n}(z) - \zeta| < \frac{1}{n}$, falls $\zeta \in \mathbb{C}$. Betrachten wir die lineare Transformation $\tilde{\tau}_n := \tau_{n,m_n}\circ\tau$, so erhalten wir: $\tilde{\tau}_n(G) = \tau_{n,m_n}(\tau(G)) \subset \Omega$,

$d_{H(G)}(f,\varphi\circ\tilde{\tau}_n) \leq d_{H(G)}(f,P_n) + d_{H(G)}(P_n,\varphi\circ\tau_{n,m_n}\circ\tau) < \frac{1}{n}$ sowie $\min\limits_{\overline{G}}|\tilde{\tau}_n(z)| > n$, falls $\zeta = \infty$, und $\max\limits_{\overline{G}}|\tilde{\tau}_n(z)-\zeta| < \frac{1}{n}$, falls $\zeta \in \mathbb{C}$.

Folglich stellt $(\tilde{\tau}_n)$ die gewünschte Folge linearer Transformationen dar, und φ ist τ-universell in ζ. Damit wurde (1) gezeigt.

2. Die Behauptungen (2) a)-c) beweist man ganz analog. Dabei ist beim Beweis in Teil c) zu beachten, daß man jede auf einer meßbaren Menge definierte meßbare Funktion durch Polynome im Sinne der fast-überall-Konvergenz approximieren kann (vgl. TOMM-TRAUTNER [52]). □

Monster sollen nun solche holomorphen Funktionen φ genannt werden, für welche im wesentlichen gilt: φ selbst, jede ihrer Ableitungen und jede ihrer Stammfunktionen ist in jedem Randpunkt des Definitionsbereiches τ-universell.

3.1 Monster in einfach zusammenhängenden Gebieten

Wir betrachten zunächst spezielle offene Mengen, nämlich einfach zusammenhängende Gebiete. Wir definieren mit LUH [32]:

Definition 3.1.1 Es sei $O \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und φ eine in O holomorphe Funktion. Dann heißt φ (holomorphes) Monster auf O, falls alle Ableitungen $\varphi^{(j)}$ für $j \in \mathbb{N}$, alle Stammfunktionen von φ der Ordnung j für $j \in \mathbb{N}$ und φ selbst in jedem (eigentlichen) Randpunkt $\zeta \in \mathbb{C}$ von O τ-universell ist.

Bemerkung 3.1.2 LUH fordert in seiner Definition τ-Universalität für alle Randpunkte, gegebenenfalls auch für ∞. Jedes einfach zusammenhängende Gebiet $O \neq \mathbb{C}$ mit Randpunkt ∞ hat aber diesen Punkt als Häufungspunkt seines eigentlichen Randes. Ein direkter Diagonalschluß (siehe LUH [32], Theorem 2) zeigt nun, daß in diesem Fall die τ-Universalität in jedem eigentlichen Randpunkt die im Punkte ∞ nach sich zieht, so daß wir gegenüber LUHs Definition nichts verloren haben.

Von nun an werde unter einem Randpunkt stets ein eigentlicher Randpunkt verstanden, wenn nichts anderes gesagt wird.
Wir benötigen eine Reihe von Lemmata, um die Ergebnisse aus Kapitel 1 anwenden zu können. In LUH [32] findet sich implizit:

Lemma 3.1.3 Es sei $O \neq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $j \in \mathbb{N}$. Ist dann eine Stammfunktion der Ordnung j von $\varphi \in H(O)$ τ-universell im Randpunkt ζ von O, so gilt dies auch für jede andere Stammfunktion von φ der gleichen Ordnung.

Beweis: Es seien ψ_1 und ψ_2 zwei Stammfunktionen der Ordnung j von φ. Dann existiert ein Polynom P vom Grad höchstens $j-1$, so daß $\psi_1 = \psi_2 + P$ gilt. Ist etwa ψ_1 τ-universell im Randpunkt ζ von O, so gibt es zu jedem JORDAN-Gebiet G und jeder in G holomorphen Funktion f eine Folge (τ_n) von linearen Transformationen mit $\tau_n(G) \subset O$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n(G) \to \zeta$ und $(\psi_1 \circ \tau_n)(z) \underset{G}{\Rightarrow} f(z)+P(\zeta)$ für $n \to \infty$. Da $(P \circ \tau_n)(z) \underset{G}{\Rightarrow} P(\zeta)$ für $n \to \infty$ gilt, erhalten wir: $(\psi_2 \circ \tau_n)(z) = (\psi_1 \circ \tau_n)(z) - (P \circ \tau_n)(z) \underset{G}{\Rightarrow} f(z)$ für $n \to \infty$. Es ist also auch ψ_2 τ-universell in ζ. □

Man beachte, daß im Beweis die Endlichkeit von ζ entscheidend eingeht. Aus diesem Grund wurde in der Definition der Monster der Punkt ∞ ausgenommen.

Wir definieren nun Operatoren, die für die τ-Universalität von Wichtigkeit sind.

Es sei Ω eine offene Menge und $\tau(z) = az+b$ eine lineare Transformation mit $\tau(\mathbb{D}) \subset \Omega$. Wir betrachten dann den Operator

$$L_\tau : \begin{cases} H(\Omega) \to H(\mathbb{D}) \\ \varphi \mapsto \varphi \circ \tau \,. \end{cases}$$

Stetigkeit und Linearität von L_τ sind offensichtlich.

Wir interessieren uns aber nur für solche Transformationen τ, die $\mathbb{D}$ "in die Nähe" des Randpunktes ζ abbilden. Deshalb betrachten wir für jedes $\delta > 0$ die Mengen

$$T(\zeta,\delta,\Omega) := \{\tau\colon\ \tau(z) = az+b,\ \tau(\mathbb{D}) \subset \Omega \text{ und } \max_{\overline{\mathbb{D}}} |\tau(z)-\zeta| < \delta\}.$$

Versteht sich die Bezugsmenge Ω aus dem Zusammenhang, so schreiben wir kürzer $T(\zeta,\delta)$.

Ferner betrachten wir Differentiations- und Integrationsoperatoren:

Für $j \in \mathbb{N}_0$ sei

$$D^j : \begin{cases} H(\Omega) \to H(\Omega) \\ \varphi \mapsto \varphi^{(j)} \end{cases} .$$

Für $-j \in \mathbb{N}$ setzen wir ein einfach zusammenhängendes Gebiet O und einen Punkt $z_0 \in O$ voraus. Dann seien die Operatoren $D^{-j}\colon H(O) \to H(O)$ rekursiv durch

$$(D^{-1}\varphi)(z) = \int_{z_0}^{z} \varphi(\zeta)d\zeta \text{ für } z \in O$$

und

$$D^{-j}\varphi = D^{-1}(D^{-j+1}\varphi) \quad \text{für } j \geq 2 \quad \text{definiert.}$$

Diese Operatoren liefern spezielle Stammfunktionen. Ein Bezugspunkt z_0 sei dabei im folgenden, wenn nicht gesondert vermerkt, stillschweigend angenommen.

Die Operatoren D^j sind für $j \in \mathbb{Z}$ offensichtlich linear und für $j \in \mathbb{N}_0$ nach Lemma 2.2.6 stetig. Es gilt aber auch:

<u>Lemma 3.1.4</u> Jeder Operator D^{-j}: $H(\mathcal{O}) \to H(\mathcal{O})$ ist für $j \in \mathbb{N}$ stetig.

<u>Beweis:</u> Es sei $K \subset \mathcal{O}$ kompakt und $\{U_{r_i}(z_i): i = 1,2,\dots,m\}$ eine endliche Überdeckung von K mit $z_i \in K$ und $\overline{U_{r_i}(z_i)} \subset \mathcal{O}$ für $i = 1,2,\dots,m$. Es seien für $i = 1,2,\dots,m$ rektifizierbare Kurven Γ_i in $\mathcal{O}$ mit Anfangspunkt z_o und Endpunkt z_i gewählt. Setzen wir $l = \max\limits_{i=1,\dots,m} l(\Gamma_i)$ und $r = \max\limits_{i=1,\dots,m} r_i$, wobei $l(\Gamma_i)$ die Länge von Γ_i ist, so gilt für $z \in U_{r_i}(z_i)$:

$$|(D^{-1}\varphi)(z)| = \left|\int_{z_o}^{z} \varphi(\zeta)d\zeta\right| \leq \left|\int_{\Gamma_i} \varphi(\zeta)d\zeta\right| + \left|\int_{z_i}^{z} \varphi(\zeta)d\zeta\right| \leq$$

$$\leq l(\Gamma_i)\cdot \max_{\Gamma_i}|\varphi(\zeta)| + r_i \cdot \max_{\overline{U_{r_i}(z_i)}}|\varphi(\zeta)| \leq$$

$$\leq (l+r)\cdot \max_{\tilde{K}}|\varphi(\zeta)| \;.$$

Dabei ist $\tilde{K}$ die kompakte Menge $\bigcup\limits_{i=1}^{m} \overline{U_{r_i}(z_i)} \cup \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Gamma_i$. Folglich haben wir $\max\limits_{K}|(D^{-1}\varphi)(z)| \leq (l+r) \max\limits_{\tilde{K}}|\varphi(\zeta)|$. Gilt also $\varphi_n(z) \underset{\mathcal{O}}{\Rightarrow} 0$ für $n \to \infty$ für eine Folge (φ_n) aus $H(\mathcal{O})$, so gilt insbesondere $\varphi_n(z) \underset{\tilde{K}}{\Rightarrow} 0$ und wir erhalten $(D^{-1}\varphi_n)(z) \underset{K}{\Rightarrow} 0$ für $n \to \infty$. Wegen der Linearität von D^{-1} ist damit D^{-1} und durch Induktion jeder Operator D^{-j} mit $j \in \mathbb{N}$ stetig. □

Wir zeigen nun, daß Monster spezielle universelle Elemente sind:

<u>Lemma 3.1.5</u> Es sei $\mathcal{O} \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und φ eine in $\mathcal{O}$ holomorphe Funktion. Dann gilt:

(1) φ ist genau dann τ-universell im Randpunkt ζ von $\mathcal{O}$, wenn φ universell bezüglich der Familie $\mathop{X}\limits_{m\in\mathbb{N}} (L_\tau)_{\tau\in T(\zeta,\frac{1}{m})}$ ist.

(2) Es sei $\{\zeta_n: n \in \mathbb{N}\}$ eine in $\partial\mathcal{O}$ dichte Teilmenge von $\partial\mathcal{O}$. Dann ist φ ein Monster auf $\mathcal{O}$ genau dann, wenn φ universell bezüglich der Familie

$$\mathop{\times}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ m\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{Z}}} (L_\tau \circ D^j)_{\tau\in T(\zeta_n,\frac{1}{m})} \text{ ist.}$$

<u>Beweis:</u> 1. Ist φ τ-universell im Randpunkt ζ von $\mathcal{O}$, so gibt es insbesondere zu jeder in $\mathbb{D}$ holomorphen Funktion $f \in H(\mathbb{D})$ eine Folge (τ_n) von linearen Transformationen mit $\tau_n(\mathbb{D}) \subset \mathcal{O}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n(\mathbb{D}) \to \zeta$ und $\varphi\circ\tau_n \underset{\mathbb{D}}{\Rightarrow} f$ für $n \to \infty$. Ist $m \in \mathbb{N}$ fest, so gilt $\tau_n \in T(\zeta,\frac{1}{m})$, falls n groß genug ist, und wir erhalten $L_{\tau_n}\varphi \to f$ in $H(\mathbb{D})$ für $n \to \infty$. φ ist also $(L_\tau)_{\tau\in T(\zeta,\frac{1}{m})}$-universell für jedes $m \in \mathbb{N}$ und somit nach Satz 1.3.3 $\mathop{\times}_{m\in\mathbb{N}} (L_\tau)_{\tau\in T(\zeta,\frac{1}{m})}$-universell.

Es sei nun andererseits φ ein $\mathop{\times}_{m\in\mathbb{N}} (L_\tau)_{\tau\in T(\zeta,\frac{1}{m})}$-universelles Element von $H(\mathcal{O})$. Nach Satz 1.3.3 ist dann φ für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein $(L_\tau)_{\tau\in T(\zeta,\frac{1}{m})}$-universelles Element. Zu jeder in $\mathbb{D}$ holomorphen Funktion $f \in H(\mathbb{D})$ existiert somit ein Element τ_m aus $T(\zeta,\frac{1}{m})$ mit $d_{H(\mathbb{D})}(f,L_{\tau_m}\varphi) < \frac{1}{m}$. Wir erhalten eine Folge (τ_m) von linearen Transformationen mit $\tau_m(\mathbb{D}) \subset \mathcal{O}$, $\tau_m(\mathbb{D}) \to \zeta$ und $\varphi\circ\tau_m(z) \underset{\mathbb{D}}{\Rightarrow} f(z)$ für $m \to \infty$. Nach Satz 3.0.2 (1) bedeutet dies, daß φ τ-universell in ζ ist. Damit ist (1) gezeigt.

2. Ist φ Monster auf $\mathcal{O}$ und $\{\zeta_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine dichte Teilmenge von $\partial\mathcal{O}$, so folgt direkt aus dem soeben bewiesenen vermittels der Sätze 1.3.1 und 1.3.3, daß φ ein $\mathop{\times}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ m\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{Z}}} (L_\tau \circ D^j)_{\tau\in T(\zeta_n,\frac{1}{m})}$-universelles Element ist.

Es sei andererseits φ ein $\mathop{\times}_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ m\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{Z}}} (L_\tau \circ D^j)_{\tau\in T(\zeta_n,\frac{1}{m})}$-universelles Element. Nach den Sätzen 1.3.1 und 1.3.3 und (1) ist dann $D^j\varphi$ τ-universell im Randpunkt ζ_n für alle $j \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$. Es sei nun ζ ein beliebiger Randpunkt von $\mathcal{O}$ und $j \in \mathbb{Z}$. Weiter sei G ein JORDAN-Gebiet und f eine in G holomorphe Funktion. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ zunächst ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|\zeta - \zeta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und sodann, da $D^j\varphi$ in ζ_n τ-universell ist, eine lineare Transformation τ mit $\tau(G) \subset \mathcal{O}$, $\max_{\overline{G}}|\tau(z)-\zeta_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $d_{H(G)}((D^j\varphi)\circ\tau, f) < \varepsilon$. Folglich gilt auch $\max_{\overline{G}}|\tau(z)-\zeta| \leq \max_{\overline{G}}|\tau(z)-\zeta_n|+|\zeta_n-\zeta|<\varepsilon$. Da $\varepsilon > 0$, das Gebiet G und $f \in H(G)$ beliebig waren, ist $D^j\varphi$ für jedes $j \in \mathbb{Z}$ τ-universell in jedem Randpunkt ζ von $\mathcal{O}$. Da $D^j\varphi$ für $j < 0$ eine spezielle Stammfunktion der Ordnung j von φ ist, folgt nun (2) mit Hilfe von Lemma 3.1.3. □

Für die nach (2) Monster auf $\mathcal{O}$ charakterisierende Familie schreiben wir

$$\Lambda_{\mathcal{O}}^{M} := \underset{\substack{m\in\mathbb{N}\\ n\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{Z}}}{\times} (L_\tau \circ D^j)_{\tau\in T(\zeta_n,\frac{1}{m},\mathcal{O})} \quad .$$

Bemerkung 3.1.6 Es sei an dieser Stelle vermerkt, daß man auch den von LUH in [29] eingeführten verallgemeinerten Begriff der cluster set $C_K(\varphi,\zeta,\Omega)$ durch den Begriff der Universalität charakterisieren kann. Es sei Ω eine offene Menge, ζ ein Randpunkt aus $\hat{\mathbb{C}}$ von Ω und φ eine in Ω holomorphe Funktion. Für kompakte Mengen K versteht man dann unter der cluster set $C_K(\varphi,\zeta,\Omega)$ die Menge aller Funktionen $f \in P(K)$, für welche eine Folge (τ_n) linearer Transformationen $\tau_n(z) = a_n z + b_n$ existiert mit $\tau_n(K) \subset \Omega$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n(K) \to \zeta$ und $(\varphi\circ\tau_n)(z) \underset{K}{\rightrightarrows} f(z)$ für $n \to \infty$. Es ist klar, daß jede Menge $C_K(\varphi,\zeta,\Omega)$ eine abgeschlossene Teilmenge von $P(K)$ ist.

Wir betrachten für jede kompakte Menge K und jede lineare Transformation τ mit $\tau(K) \subset \Omega$ den Operator

$$L_\tau^K : \begin{cases} H(\Omega) \to P(K) \\ \varphi \mapsto \varphi\circ\tau \end{cases},$$

sowie für $\delta > 0$ die Mengen $T^K(\zeta,\delta,\Omega) = \{\tau\colon \tau(z) = az+b,$ $\tau(K) \subset \Omega$, $\max_K|\tau(z)-\zeta|<\delta$, falls $\zeta \in \mathbb{C}$ und $\min_K|\tau(z)| > \frac{1}{\delta}$, falls $\zeta = \infty\}$.

Man zeigt nun genau wie im Beweis zu Lemma 3.1.5 folgende Charakterisierung von $C_K(\varphi,\zeta,\Omega)$:

Es ist $C_K(\varphi,\zeta,\Omega)$ die größte abgeschlossene Teilmenge von $P(K)$, bezüglich der φ für alle $m \in \mathbb{N}$ ein $(L_\tau^K)_{\tau\in T^K(\zeta,\frac{1}{m},\Omega)}$-universelles Element ist.

Zum Nachweis der Existenz von holomorphen Monstern stellt sich nun angesichts der Sätze 1.2.2 und 1.3.3 die Aufgabe, für jede Familie $(L_\tau \circ D^j)_{\tau\in T(\zeta,\delta,\mathcal{O})}$ mit $j \in \mathbb{Z}$, $\delta > 0$ und ζ im Rand von $\mathcal{O}$ die Graphenbedingung zu beweisen. Im Hinblick auf Abschnitt 3 zeigen wir hier gleich mehr.
Wir denken uns $\mathcal{O}$ in ein größeres Gebiet Ω eingebettet, das nicht einfach zusammenhängend sein muß, und es sei ζ ein gemeinsamer Randpunkt von $\mathcal{O}$ und Ω.

Es bezeichne wieder

$$i_\Omega^{\mathcal{O}} : \begin{cases} H(\Omega) \to H(\mathcal{O}) \\ \varphi \mapsto \varphi|_{\mathcal{O}} \end{cases}$$

die stetige und lineare Einbettung von $H(\Omega)$ in $H(\mathcal{O})$.

Dann erhalten wir als zentralen Satz dieses Kapitels:

<u>Satz 3.1.7</u> Es sei Ω ein Gebiet, $\mathcal{O} \subset \Omega$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und ζ ein Randpunkt von $\mathcal{O}$ und Ω. Für jedes $j \in \mathbb{Z}$ und $\delta > 0$ erfüllt dann die Familie aller Abbildungen

$$L_\tau \circ D^j \circ i_\Omega^{\mathcal{O}} : \begin{cases} H(\Omega) \to H(\mathbb{D}) \\ \varphi \mapsto D^j(\varphi|_{\mathcal{O}}) \circ \tau \end{cases}$$

mit $\tau \in T(\zeta,\delta,\mathcal{O})$ die Graphenbedingung.

<u>Beweis:</u> Es seien $\delta > 0$ und $\zeta \in \partial\mathcal{O} \cap \partial\Omega$ fest gewählt.

1. Es sei $(K_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Ausschöpfung von Ω mit kompakten Mengen derart, daß gilt: $K_n \subset K_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}_0$, $\bigcup_{n=0}^{\infty} K_n = \Omega$ und jede $\hat{\mathbb{C}}$-Zusammenhangskomponente jeder Menge K_n^c enthält ein Element aus $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ (siehe RUDIN [46], 13.3). Es sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Bezugspunkt z_0 der Operatoren D^j $(j < 0)$ in K_0 enthalten.

Es sei n eine natürliche Zahl. Da ζ Randpunkt von $\mathcal{O}$ und von Ω ist, kann man eine lineare Transformation $\tau_n(z) = a_n z + b_n$

wählen, für welche $\tau_n(3\cdot\overline{\mathbb{D}}) \subset O\setminus K_{n+1}$ und $\max_{2\overline{\mathbb{D}}}|\tau_n(z)-\zeta| < \delta$ gilt. Dabei stehe für eine Teilmenge E von $\mathbb{C}$ und $\rho > 0$ die Bezeichnung $\rho\cdot E$ für die Menge $\{\rho z\colon z \in E\}$. Es ist somit $\tau_n \in T(\zeta,\delta,O)$. Da $\tau_n(2\cdot\overline{\mathbb{D}})$ eine zusammenhängende Teilmenge von K_n^c ist, liegt sie in genau einer $\hat{\mathbb{C}}$-Zusammenhangskomponente, etwa V_n, von K_n^c. Offensichtlich ist dann auch $V_n\setminus\tau_n(2\cdot\overline{\mathbb{D}})$ zusammenhängend. Nach der Konstruktion von $(K_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}_0}$ enthält V_n einen Punkt von $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$, also auch $V_n\setminus\tau_n(2\cdot\overline{\mathbb{D}})$, weil $\tau_n(2\cdot\overline{\mathbb{D}})$ in Ω enthalten ist. Insgesamt ist also $\tilde{K}_n := K_n \cup \tau_n(2\cdot\overline{\mathbb{D}})$ eine in Ω liegende kompakte Menge derart, daß jede $\hat{\mathbb{C}}$-Zusammenhangskomponente von $\tilde{K}_n^c$ ein Element aus $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ enthält.

2. Es sei nun eine in Ω holomorphe Funktion φ und ein Polynom $P \in H(\mathbb{D})$ gewählt. Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei Q_n ein Polynom, für das

$$Q_n^{(j)} = P\circ\tau_n^{-1}, \text{ falls } j \geq 0, \text{ und } Q_n = (P\circ\tau_n^{-1})^{(-j)}, \text{ falls } j < 0$$

gilt.

Die Funktion

$$\psi_n(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{für } z \in \mathring{K}_{n+1} \\ Q_n(z) & \text{für } z \in \tau_n(3\cdot\mathbb{D}) \end{cases}$$

ist holomorph in $\mathring{K}_{n+1} \cup \tau_n(3\cdot\mathbb{D})$, weil $\tau_n(3\cdot\mathbb{D}) \cap \mathring{K}_{n+1}$ leer ist. Beachtet man nun, daß jede $\hat{\mathbb{C}}$-Zusammenhangskomponente von $(K_n \cup \tau_n(2\cdot\overline{\mathbb{D}}))^c$ ein Element aus $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$ enthält, so existiert nach dem Satz von RUNGE eine rationale Funktion φ_n mit Polen in $\hat{\mathbb{C}}\setminus\Omega$, also eine in Ω holomorphe Funktion, mit

$$\max_{\tilde{K}_n} |\psi_n(z)-\varphi_n(z)| < \frac{1}{n}\cdot\min\left(1, \frac{|a_n|^j}{2\cdot|j|!}\right) .$$

Es gilt also

$$\max_{K_n} |\varphi(z)-\varphi_n(z)| < \frac{1}{n}$$

und $$\max_{\tau_n(2\cdot\overline{\mathbb{D}})} |Q_n(z)-\varphi_n(z)| < \frac{1}{n}\cdot\frac{|a_n|^j}{2\cdot|j|!} .$$

3. Es sei nun zunächst $j \geq 0$ betrachtet. Dann folgt mit der CAUCHYschen Ungleichung bei Integration über den Rand von $\tau_n(2\cdot\overline{\mathbb{D}})$:

$$\max_{\overline{\mathbb{D}}}|P(z)-\varphi_n^{(j)}(\tau_n(z))| = \max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |(P\circ\tau_n^{-1})(z)-\varphi_n^{(j)}(z)| =$$

$$= \max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |(Q_n-\varphi_n)^{(j)}(z)| \leq$$

$$\leq \frac{j!}{2\pi}\cdot 2\cdot|a_n|\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{|a_n|^{j+1}}\cdot\max_{\tau_n(2\cdot\overline{\mathbb{D}})}|Q(z)-\varphi_n(z)|<$$

$$< \frac{1}{n} .$$

Insgesamt erhalten wir: $\varphi_n(z) \underset{\Omega}{\Rightarrow} \varphi(z)$ und $((^{\varphi_n}|_{0})^{(j)}\circ\tau_n)(z) \underset{\mathbb{D}}{\Rightarrow} P(z)$

für $n \to \infty$.

Da die Polynome dicht in $H(\mathbb{D})$ liegen, folgt nach Bemerkung 1.2.3 die Graphenbedingung für $(L_\tau\circ D^j\circ i_\Omega^0)_{\tau\in T(\zeta,\delta,0)}$ im Fall $j \geq 0$.

4. Es werde nun der Fall $j < 0$ betrachtet. Nach 2. erhalten wir

$$\max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |(P\circ\tau_n^{-1})^{(-j)}(z)-\varphi_n(z)| < \frac{1}{n}\cdot\frac{|a_n|^j}{2} .$$

Es existiert ein Polynom R_n vom Grad $< -j$, so daß $(D^j\varphi_n+R_n)^{(\nu)}(b_n) = (P\circ\tau_n^{-1})^{(\nu)}(b_n)$ für $\nu = 0,1,\ldots,-j-1$ gilt. Es folgt

$$\max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |(P\circ\tau_n^{-1}-D^j\varphi_n-R_n)^{(-j)}(z)| < \frac{1}{n}\cdot\frac{|a_n|^j}{2} .$$

Für jede Funktion $h \in A(\tau_n(\overline{\mathbb{D}}))$ mit $h' \in A(\tau_n(\overline{\mathbb{D}}))$ und $h(b_n) = 0$ gilt die Abschätzung

$$\max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |h(z)| = \max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} \left|\int_{b_n}^{z} h'(\zeta)d\zeta\right| \leq |a_n|\cdot\max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |h'(\zeta)| .$$

Durch $(-j)$-fache Anwendung erhalten wir

$$\max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |(P\circ\tau_n^{-1}-D^j\varphi_n-R_n)(z)| < \frac{1}{2n} .$$

Zum Beweis der Graphenbedingung ist nun noch das Einfügen eines Korrekturterms zur Beseitigung von R_n notwendig. Wir betrachten dazu die auf $\mathring{K}_{n+1} \cup \tau_n(3\cdot\mathbb{D})$ holomorphe Funktion

$$\rho_n(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } z \in \mathring{K}_{n+1} \\ R_n(z) & \text{falls } z \in \tau_n(3\cdot\mathbb{D}) \end{cases} .$$

Wie in 2. gibt es dann nach dem Satz von RUNGE eine Folge $(\sigma_{n,m})_{m\in\mathbb{N}}$ von in Ω holomorphen Funktionen mit $\max_{\mathring{K}_n} |\sigma_{n,m}(z)-\rho_n(z)| < \frac{1}{m}$ für $m \in \mathbb{N}$.

Es sei $d_n = \max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |z-z_0|$. Nach Lemma 2.2.6 sind die Abbildungen

$$D^{\nu}: \begin{cases} H(\mathring{K}_n) \to H(\mathring{K}_n) \\ \quad h \quad \mapsto h^{(\nu)} \end{cases} \quad \text{für } \nu = 0,1,\dots,-j$$

stetig. Da $\sigma_{n,m}(z) \underset{K_n}{\rightrightarrows} 0$ für $m \to \infty$ gilt, existiert eine natürliche Zahl $m_n \geq 2n$, so daß für $\tilde{\varphi}_n := \sigma_{n,m_n}$ gilt:

$$\max_{K_{n-1}} |\tilde{\varphi}_n^{(\nu)}(z)| < \frac{1}{2n}\cdot\min\left(1,\frac{\nu!}{(-j)\cdot d_n^{\nu}}\right) \quad \text{für } \nu = 0,1,\dots,-j.$$

Es sei S_n ein Polynom vom Grad $< -j$, für das gilt:

$$S_n^{(\nu)}(z_0) = \tilde{\varphi}_n^{(\nu)}(z_0) \quad \text{für } \nu = 0,1,\dots,-j-1 .$$

Da $z_0 \in K_{n-1}$ ist, gilt $|S_n^{(\nu)}(z_0)| < \frac{1}{2n}\cdot\frac{\nu!}{(-j)\cdot d_n^{\nu}}$, und für $z \in \tau_n(\overline{\mathbb{D}})$ erhalten wir

$$|S_n(z)| \leq \sum_{\nu=0}^{-j-1} \frac{|S_n^{(\nu)}(z_0)|}{\nu!}\cdot|z-z_0|^{\nu} \leq \frac{1}{2n} .$$

Wir zeigen nun, daß $\phi_n := \tilde{\varphi}_n^{(-j)}$ die gewünschte Korrekturfunktion ist.

Es ist $D^j\phi_n = D^j(D^{-j}\tilde{\varphi}_n) = \tilde{\varphi}_n - S_n$ sowie

$$\max_{K_{n-1}} |\phi_n(z)| = \max_{K_{n-1}} |\tilde{\varphi}_n^{(-j)}(z)| < \frac{1}{2n} .$$

Wegen $D^j\phi_n = \tilde{\varphi}_n - S_n = \sigma_{n,m_n} - S_n$ und $m_n \geq 2n$ erhalten wir weiter

$$\max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |D^j\phi_n(z)-R_n(z)| \leq \max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |\sigma_{n,m_n}(z)-R_n(z)| + \max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |S_n(z)| < \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} .$$

Insgesamt folgt nun

$$\max_{K_{n-1}} |\phi_n(z)+\varphi_n(z)-\varphi(z)| \leq \max_{K_{n-1}} |\phi_n(z)| + \max_{K_n}|\varphi_n(z)-\varphi(z)| < \frac{1}{n}$$

und

$$\max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |D^j(\phi_n+\varphi_n)(z)-P\circ\tau_n^{-1}(z)| \leq \max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |P\circ\tau_n^{-1}(z)-D^j\varphi_n(z)-R_n(z)| +$$

$$+ \max_{\tau_n(\overline{\mathbb{D}})} |R_n(z)-D^j\phi_n(z)| < \frac{2}{n} .$$

Es folgt, daß $(\phi_n+\varphi_n)(z) \underset{\Omega}{\Rightarrow} \varphi(z)$ und $(D^j(\phi_n+\varphi_n)\circ\tau_n)(z) \underset{\mathbb{D}}{\Rightarrow} P(z)$ für $n \to \infty$ gilt, was wieder die Graphenbedingung für die Familie $(L_\tau \circ D^j \circ i_\Omega^{\mathcal{O}})_{\tau \in T(\zeta,\delta,\mathcal{O})}$ impliziert. □

Im Falle $\Omega = \mathcal{O}$ erhalten wir nun sofort:

<u>Satz 3.1.8</u> Es sei $\mathcal{O} \neq \mathbb{C}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet. Dann existieren holomorphe Monster auf $\mathcal{O}$. Die Menge aller holomorphen Monster auf $\mathcal{O}$ hat ein Komplement von 1. Kategorie in $H(\mathcal{O})$.

<u>Beweis:</u> Nach Satz 3.1.7 erfüllt jede Familie $(L_\tau \circ D^j)_{\tau \in T(\zeta,\delta,\mathcal{O})}$ für $\zeta \in \partial\mathcal{O}$, $\delta > 0$ und $j \in \mathbb{Z}$ die Graphenbedingung, also nach Satz 1.3.3 auch $\Lambda_{\mathcal{O}}^M$. Da nach Lemma 3.1.5 die Monster genau die $\Lambda_{\mathcal{O}}^M$-universellen Elemente sind, folgt die Behauptung aus Satz 1.2.2. □

<u>Bemerkung 3.1.9</u> Ein genaueres Studium des Beweises zu Satz 3.1.7 lehrt folgendes: Legt man zu jedem ζ_n aus einer dichten Randmenge eine Folge $(\tau_{n,\nu})_{\nu\in\mathbb{N}}$ mit $\tau_{n,\nu}(\mathbb{D}) \subset \mathcal{O}$ für $\nu \in \mathbb{N}$ und $\tau_{n,\nu}(\mathbb{D}) \to \zeta$ für $\nu \to \infty$ a priori fest, so gibt es spezielle

Monster, die das gewünschte Approximationsverhalten entlang dieser vorgegebenen Mengen $(\tau_{n,\nu}(\mathbb{D}))_{\nu,n\in\mathbb{N}}$ besitzen, und auch die Menge dieser Monster hat ein Komplement von erster Kategorie in $H(\mathcal{O})$. (LUH konstruierte in [32] gerade ein derartiges Monster.) Insbesondere kann man die Mengen $\tau_{n,\nu}(\mathbb{D})$ so einrichten, daß sie einer Wachstumsbedingung genügen, etwa

$$\sup_{\zeta_{1,2}\in\tau_{n,\nu}(\mathbb{D})} |\zeta_1-\zeta_2| = o\Big(\inf_{\substack{\zeta_1\in\tau_{n,\nu}(\mathbb{D})\\ \zeta_2\in\partial\mathcal{O}}} |\zeta_1-\zeta_2|^p\Big) \quad \text{für } \nu\to\infty$$

und alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $p > 0$ ein vorgegebener Parameter ist.

Die cluster sets, die sich bei derartiger Einschränkung an die Zugangswege zum Rand ergeben, wurden von GAVRILOV, KANATNIKOV und PIGHETTI ([13], [23], [24]) untersucht.

3.2 Monster in offenen Mengen mit einfach zusammenhängenden Komponenten

Jede offene Menge zerfällt in höchstens abzählbar viele Zusammenhangskomponenten. Sind diese einfach zusammenhängend, so kann man auf sie die Betrachtungen des letzten Abschnitts anwenden.

Definition 3.2.1 Es sei $\mathcal{O} \neq \mathbb{C}$ eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten $\mathcal{O}_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots)$. Eine in $\mathcal{O}$ holomorphe Funktion φ heißt (holomorphes) Monster auf $\mathcal{O}$, falls für jede Komponente $\mathcal{O}_\nu$ die Einschränkung $\varphi|_{\mathcal{O}_\nu}$ ein Monster auf $\mathcal{O}_\nu$ ist.

Bemerkung 3.2.2 Diese Definition ist echt strikter als die von LUH [32], bei der τ-Universalität aller Ableitungen und aller Stammfunktionen in jedem Randpunkt aus $\hat{\mathbb{C}}$ gefordert wird. Ein direkter Diagonalschluß zeigt, daß dieses für Monster gemäß obiger Definition gilt (siehe LUH [32], Theorem 2); jedoch zeigt die auf $\mathcal{O} := \{z: \operatorname{Re} z \neq 0\}$ definierte Funktion

$$\psi(z) = \begin{cases} 0 & \text{falls } \operatorname{Re} z > 0 \\ \varphi(z) & \text{falls } \operatorname{Re} z < 0 \end{cases}$$

mit einem Monster φ auf $\{z: \operatorname{Re} z < 0\}$, daß LUHsche Monster keine Monster im Sinne obiger Definition zu sein brauchen. Es sei aber angemerkt, daß LUH in [32] ein Monster im obigen Sinne konstruierte.

Satz 3.2.3 Es sei $\mathcal{O} \neq \mathbb{C}$ eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten $\mathcal{O}_\nu$ $(\nu = 1,2,\ldots)$. Dann gilt:

(1) Eine in $\mathcal{O}$ holomorphe Funktion φ ist genau dann ein Monster auf $\mathcal{O}$, wenn φ universell ist bezüglich der Familie

$$\Lambda_{\mathcal{O}}^M := \underset{\nu}{X} \left(\Lambda_{\mathcal{O}_\nu}^M \circ i_{\mathcal{O}}^{\mathcal{O}_\nu}\right) .$$

(2) Die Familie $\Lambda_{\mathcal{O}}^M$ erfüllt die Graphenbedingung.

Beweis: 1. Nach Definition 3.2.1 und Lemma 3.1.5 ist φ genau dann ein Monster auf φ, wenn jedes $\varphi|_{\mathcal{O}_\nu}$ eine $\Lambda_{\mathcal{O}_\nu}^M$-universelle Funktion ist $(\nu = 1,2,\ldots)$, also nach Satz 1.3.1 und Satz 1.3.3

genau dann, wenn φ ein X_ν $(\Lambda_{\mathcal{O}_\nu}^M \circ i_{\mathcal{O}}^{\mathcal{O}_\nu})$-universelles Element ist. Das beweist (1).

2. Jede Abbildung $i_{\mathcal{O}}^{\mathcal{O}_\nu}$ ist surjektiv, offen und stetig. Also folgt aus Satz 1.3.1 mit Hilfe der Sätze 1.3.3 und 3.1.5, daß $\Lambda_{\mathcal{O}}^M$ die Graphenbedingung erfüllt. Das beweist (2). □

<u>Satz 3.2.4</u> Es sei $\mathcal{O} \neq \mathbb{C}$ eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten. Dann existieren holomorphe Monster auf $\mathcal{O}$. Die Menge aller Monster auf $\mathcal{O}$ hat ein Komplement von 1. Kategorie in $H(\mathcal{O})$.

<u>Beweis:</u> klar mit Satz 1.2.2 und Satz 3.2.3. □

Zusammen mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.2 erhalten wir nun:

<u>Satz 3.2.5</u> Es sei $\mathcal{O} \neq \mathbb{C}$ eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten. Dann existiert eine in $\mathcal{O}$ holomorphe Funktion φ mit folgenden Eigenschaften:

(1) φ ist ein holomorphes Monster auf $\mathcal{O}$.

(2) φ hat universelle Ableitungen.

(3) Es gibt eine Folge (n_k), so daß gilt:

(a) Für alle $\zeta \in \mathcal{O}$ konvergiert $\left(\sum_{\nu=0}^{n_k} \frac{\varphi^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!} (z-\zeta)^\nu \right)_{k \in \mathbb{N}}$ kompakt auf $\mathcal{O}$ gegen $\varphi(z)$.

(b) Ist $\overline{\mathcal{O}} \neq \mathbb{C}$ und U eine offene Teilmenge von $\overline{\mathcal{O}}^c$ mit einfach zusammenhängenden Komponenten, so gibt es zu jeder in U holomorphen Funktion f eine Teilfolge $(n_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ von $(n_k)_{k \in \mathbb{N}}$, so daß $\left(\sum_{\nu=0}^{n_{k_l}} \frac{\varphi^{(\nu)}(\zeta)}{\nu!} (z-\zeta)^\nu \right)_{l \in \mathbb{N}}$ für alle $\zeta \in \mathcal{O}$ kompakt auf U gegen $f(z)$ konvergiert.

Die Menge solcher Funktionen hat ein Komplement von 1. Kategorie in $H(\mathcal{O})$.

<u>Beweis:</u> folgt direkt vermittels Satz 1.3.3 aus den Sätzen 3.2.4, 2.2.11 und 2.2.8. □

3.3 Monster in allgemeinen offenen Mengen

Wir betrachten nun den allgemeinen Fall beliebiger offener Mengen und zeigen zunächst, daß eine direkte Übernahme der Definition von Monstern aus Abschnitt 3.1 nicht möglich ist.

a) Ergebnisse negativen Charakters

Bekanntlich hat in nicht einfach zusammenhängenden Gebieten nicht jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion. Genauer gilt:

Satz 3.3.1 Es sei Ω eine offene Menge, die eine nicht einfach zusammenhängende Komponente besitzt. Dann ist die Menge aller in Ω holomorphen Funktionen, die eine Stammfunktion besitzen, nirgends dicht in $H(\Omega)$.

Beweis: Es bezeichne $S(\Omega)$ die Menge aller in Ω holomorphen Funktionen mit einer Stammfunktion in Ω. Da Ω eine nicht einfach zusammenhängende Komponente besitzt, gibt es ein $z_o \notin \Omega$ und eine geschlossene rektifizierbare JORDAN-Kurve Γ in Ω, die z_o in ihrem Inneren enthält. Es ist also $\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{1}{\zeta - z_o}\, d\zeta \neq 0$, und die Funktion $f(z) = \frac{1}{z-z_o}$ ist eine in Ω holomorphe Funktion ohne Stammfunktion. Es sei nun $\varphi \in S(\Omega)$. Dann kann $\varphi_n(z) := \varphi(z) + \frac{1}{n}\frac{1}{z-z_o}$ $(n \in \mathbb{N})$ keine Stammfunktion besitzen. Andererseits gilt: $\varphi_n(z) \underset{\Omega}{\Rightarrow} \varphi(z)$ für $n \to \infty$. Folglich hat $S(\Omega)$ keine inneren Punkte.

Bekanntlich hat eine in Ω holomorphe Funktion eine Stammfunktion genau dann, wenn ihr Integral über jede geschlossene rektifizierbare JORDAN-Kurve in Ω verschwindet. Letztere Eigenschaft bleibt aber unter kompakter Konvergenz erhalten, so daß $S(\Omega)$ abgeschlossen ist.

Insgesamt ist $S(\Omega)$ also nirgends dicht. $\square$

Bei direkter Übernahme von Definition 3.1.1 bzw. Definition 3.2.1 wäre also die Menge der Monster nirgends dicht. Wir zeigen, daß sie sogar leer wäre, da in Gebieten holomorphe Funktionen, die Stammfunktionen beliebiger Ordnung haben, in eventuelle "Löcher" fortgesetzt werden können, an deren Rändern also nicht τ-universell sein können. Wir benötigen dazu folgenden Hilfssatz:

Lemma 3.3.2 Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Dann gibt es eine Folge $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Mengen mit folgenden Eigenschaften:

(1) Jedes O_n ist disjunkte Vereinigung endlich vieler JORDAN-Gebiete, deren Ränder rektifizierbar sind und in Ω liegen.

(2) Es gilt $O_n \subset O_{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$ und $\Omega \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$.

(3) $\check{\Omega} := \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$ ist das kleinste einfach zusammenhängende Gebiet, das Ω umfaßt.

Beweis: Zu jeder natürlichen Zahl n betrachten wir eine Zerlegung des Quadrats $\{x+iy: |x| \leq n, |y| \leq n\}$ in abgeschlossene Quadrate $q_{n,i}$ der Kantenlänge $\frac{1}{2^n}$. Es sei $A_n := \bigcup_i \{q_{n,i}: q_{n,i} \subset \Omega\}$ und $\tilde{A}_n$ die Menge A_n, vermehrt um alle Quadrate $q_{n,i}$, die ganz von A_n umschlossen sind. $\tilde{A}_n$ ist Vereinigung endlich vieler Polyeder, deren Ränder in Ω liegen und die paarweise höchstens Ecken gemeinsam haben. Schließlich sei O_n das Innere von $\tilde{A}_n$. Man überlegt sich leicht, daß (1) und (2) gilt.

Wir betrachten nun $\check{\Omega} := \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$. Diese Menge ist wegen (1) und (2) eine offene, Ω umfassende Menge. Da offenbar jede Menge $O_n \cup \Omega$ zusammenhängend ist, folgt aus $\bigcup_{n=1}^{\infty} (O_n \cup \Omega) = \check{\Omega}$ und $O_n \cup \Omega \subset O_{n+1} \cup \Omega$ für $n \in \mathbb{N}$, daß auch $\check{\Omega}$ zusammenhängend ist. Schließlich sei Γ eine geschlossene JORDAN-Kurve in $\check{\Omega}$. Dann gibt es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $\Gamma \subset O_m$. Wegen (1) liegt dann auch das Innere von Γ in O_m, also in $\check{\Omega}$, und $\check{\Omega}$ ist einfach zusammenhängend. Ist Ω_o ein weiteres Ω umfassendes einfach zusammenhängendes Gebiet, so muß Ω_o die Ränder der JORDAN-Gebiete der O_n $(n \in \mathbb{N})$ umfassen, also auch diese Gebiete selbst, folglich auch O_n, und somit gilt $\Omega_o \supset \check{\Omega}$. $\check{\Omega}$ ist daher das kleinste einfach zusammenhängende Ω umfassende Gebiet. □

Demgemäß können wir definieren:

<u>Definition 3.3.3</u> Es sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Das kleinste einfach zusammenhängende Gebiet, das Ω umfaßt, heißt <u>einfach zusammenhängender Abschluß</u> von Ω und wird mit $\check{\Omega}$ bezeichnet.

Damit sind wir in der Lage, den angekündigten Satz zu beweisen:

<u>Satz 3.3.4</u> Es sei Ω ein Gebiet und f eine in Ω holomorphe Funktion. Hat f Stammfunktionen beliebiger Ordnung, so kann sie auf den einfach zusammenhängenden Abschluß $\check{\Omega}$ von Ω holomorph fortgesetzt werden.

<u>Beweis:</u> 1. Es sei Γ eine rektifizierbare geschlossene JORDAN-Kurve in Ω. Ist $n = 0$, so gilt $\int_\Gamma f(\zeta)\zeta^n d\zeta = 0$, weil f eine Stammfunktion hat. Es sei nun $n \in \mathbb{N}$, und für $\nu \in \mathbb{N}$ sei F_ν eine Stammfunktion der Ordnung ν von f. Dann gilt für $\zeta \in \Omega$ und $m \in \mathbb{N}$:

$$\frac{d}{d\zeta}(F_\nu(\zeta)\cdot\zeta^m) = F_{\nu-1}(\zeta)\cdot\zeta^m + m\cdot F_\nu(\zeta)\cdot\zeta^{m-1} ,$$

und wir erhalten durch Integration über Γ die Beziehung

$$\int_\Gamma F_{\nu-1}(\zeta)\cdot\zeta^m d\zeta = -m\cdot\int_\Gamma F_\nu(\zeta)\zeta^{m-1}d\zeta .$$

Durch n-fache Anwendung erhält man:

$$\int_\Gamma f(\zeta)\zeta^n d\zeta = (-1)^n\cdot n!\cdot \int_\Gamma F_n(\zeta)d\zeta = 0 ,$$

weil auch F_n eine Stammfunktion hat.
Die Funktion f hat also die Eigenschaft: $\int_\Gamma f(\zeta)\zeta^n d\zeta = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Es folgt nun aus dem Satz von GOLUBEW-PRIWALOW (siehe PRIWALOW [41], p.145), daß

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta \quad \text{für } z \text{ im Inneren von } \Gamma$$

eine Fortsetzung von f in das Innere von Γ liefert.

2. Es sei $\check{\Omega}$ der einfach zusammenhängende Abschluß von Ω und $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von $\check{\Omega}$ mit den Eigenschaften (1) und (2) von Lemma 3.3.2. Wendet man 1. auf die Ränder der

JORDAN-Gebiete der $\mathcal{O}_n$ an, so sieht man, daß man f nach $\mathcal{O}_n$ fortsetzen kann. Da für $m > n$ aber $\partial\mathcal{O}_n \subset \overline{\mathcal{O}}_m \cap \Omega$ gilt, stimmen auf $\mathcal{O}_n$ die Fortsetzungen von f für $\mathcal{O}_m$ und $\mathcal{O}_n$ $(m > n)$ überein. So erhält man eine Fortsetzung von f auf $\check{\Omega}$. □

Satz 3.3.5 Ist Ω ein nicht einfach zusammenhängendes Gebiet, so gibt es keine auf Ω holomorphe Fuhktion, die samt allen ihren Stammfunktionen in jedem Randpunkt von Ω τ-universell ist.

Beweis: Ist φ holomorph in Ω und hat sie Stammfunktionen beliebiger Ordnung, so ist sie nach Satz 3.3.4 auf den einfach zusammenhängenden Abschluß $\check{\Omega}$ von Ω fortsetzbar. Da Ω nicht einfach zusammenhängend ist, schneidet $\check{\Omega}$ sowohl Ω als auch Ω^c, also auch den Rand von Ω, da $\check{\Omega}$ ein Gebiet ist. In $\zeta \in \partial\Omega \cap \check{\Omega}$ ist φ also stetig nach ζ fortsetzbar und somit dort nicht τ-universell. □

b. Definition und Existenz holomorpher Monster in allgemeinen offenen Mengen

Wir haben gesehen, daß man Definition 3.1.1 nicht direkt auf beliebige Gebiete verallgemeinern kann. Es ist aber zu beachten, daß das an der zu starken Forderung scheitert, die Funktion möge auf dem Gebiet Ω Stammfunktionen beliebiger Ordnung haben. also einer globalen Forderung. Andererseits ist aber τ-Universalität von der Idee her nur eine lokale Eigenschaft. Da nun holomorphe Funktionen auf einfach zusammenhängenden Teilgebieten ihres Definitionsbereichs stets Stammfunktionen besitzen, wird man darauf geführt zu fordern, daß es zu jedem Randpunkt ζ von Ω ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet $\mathcal{O}_\zeta$ von Ω mit ζ als Randpunkt gibt, so daß jede Stammfunktion von φ auf $\mathcal{O}_\zeta$ in ζ τ-universell ist. Dabei stellt sich die Frage, ob es überhaupt stets ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet $\mathcal{O}_\zeta$ gibt mit $\zeta \in \partial\mathcal{O}_\zeta$. Wir zeigen hier sogar mehr:

Satz 3.3.6 Es sei Ω ein Gebiet. Dann gibt es ein einfach zusammenhängendes Gebiet $\mathcal{O} \subset \Omega$, so daß jeder Randpunkt von Ω auch Randpunkt von $\mathcal{O}$ ist: $\partial\Omega \subset \partial\mathcal{O}$.

<u>Beweis:</u> Es sei $\{\zeta_n: n = 1,2,\ldots\}$ eine im Rand von Ω dicht liegende Teilmenge des Randes und $(\tilde{\zeta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\{\zeta_n: n = 1,2,\ldots\}$ mit der Eigenschaft, daß jeder Punkt ζ_ν unendlich oft vorkommt ($\nu = 1,2,\ldots$). Wir definieren induktiv beschränkte einfach zusammenhängende Gebiete O_n ($n \in \mathbb{N}$) mit folgenden Eigenschaften:

$O_{n-1} \subset O_n \subset \overline{O}_n \subset \Omega$, $\overline{O}_n^c$ ist zusammenhängend, und es gibt ein $z_n \in O_n$ mit $|z_n-\tilde{\zeta}_n| < \frac{1}{n}$.

Es sei $O_o = \emptyset$.

Es seien $O_o, O_1, \ldots, O_{n-1}$ mit den angegebenen Eigenschaften konstruiert. Dann ist $\overline{O}_{n-1}$ eine kompakte Teilmenge von Ω, und es existiert ein Punkt $z_n \in \Omega\backslash\overline{O}_{n-1}$ mit $|z_n-\tilde{\zeta}_n| < \frac{1}{n}$, sowie ein $\varepsilon_n>0$ mit $\overline{U_{\varepsilon_n}(z_n)}\subset\Omega$ und $\overline{U_{\varepsilon_n}(z_n)} \cap \overline{O}_{n-1} = \emptyset$. Dann ist $\overline{U_{\varepsilon_n}(z_n)} \cup \overline{O}_{n-1}$ eine kompakte Teilmenge von Ω mit zusammenhängendem Komplement, so daß es nach Satz 2.2.4 ein beschränktes einfach zusammenhängendes Gebiet O_n gibt mit $\overline{U_{\varepsilon_n}(z_n)} \cup \overline{O_{n-1}} \subset O_n \subset \overline{O}_n \subset \Omega$, wobei $\overline{O_n}^c$ zusammenhängend ist. Da noch $z_n \in O_n$ ist, hat O_n die gewünschten Eigenschaften.

Wir setzen nun $O = \bigcup_{n=1}^{\infty} O_n$. O ist offen und zusammenhängend, da dieses für jedes O_n gilt und $\bigcap_{n=1}^{\infty} O_n$ nicht leer ist. Ist Γ eine geschlossene JORDAN-Kurve in O, so gibt es ein $m \in \mathbb{N}$, so daß bereits $\Gamma \subset O_m$ gilt, weil Γ kompakt ist. Aber O_m ist einfach zusammenhängend. Also gehört auch das Innere von Γ zu O_m, also auch zu O. Folglich ist auch O einfach zusammenhängend. Es sei schließlich ζ ein Randpunkt von Ω. Dann gibt es zu $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|\zeta-\zeta_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ und somit nach Konstruktion von $(\tilde{\zeta}_n)$ ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|\zeta-\tilde{\zeta}_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $n > \frac{2}{\varepsilon}$.
Da $|z_n-\tilde{\zeta}_n| < \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ gilt, folgt $|z_n-\zeta| < \varepsilon$, und weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $\zeta \in \overline{O}$. Wegen $O \subset \Omega$ gilt aber auch $\zeta \in \overline{O}^c$, und somit haben wir $\zeta \in \partial O$.

Insgesamt erfüllt O die gewünschten Bedingungen. □

Die Aussage dieses Satzes ermöglicht uns die folgende

Definition 3.3.7 Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ offen und φ eine in Ω holomorphe Funktion.

(1) Ist Ω ein Gebiet, so heißt φ ein (holomorphes) Monster auf Ω, falls zu jedem Randpunkt ζ von Ω ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet O_ζ von Ω mit ζ als Randpunkt derart existiert, daß $\varphi|O_\zeta$ samt allen Ableitungen und allen Stammfunktionen (bezüglich O_ζ) τ-universell in ζ ist.

(2) φ heißt (holomorphes) Monster auf Ω, falls für jede Zusammenhangskomponente Ω_ν ($\nu = 1,2,\dots$) von Ω die Funktion $\varphi|_{\Omega_\nu}$ ein Monster auf Ω_ν ist.

Wir zeigen zunächst, daß diese Definition jene aus Abschnitt 3.2 verallgemeinert.

Satz 3.3.8 Ist $O \neq \mathbb{C}$ eine offene Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten, so stimmen Definition 3.3.7 und Definition 3.2.1 überein.

Beweis: Offensichtlich genügt es, die Übereinstimmung von Definition 3.3.7 (1) mit Definition 3.1.1 nachzuprüfen. Es sei also O ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

1. Ist φ auf O ein Monster nach Definition 3.1.1, so wähle man als Teilgebiet O_ζ für jeden Randpunkt gerade O selbst, und wir erhalten ein Monster nach Definition 3.3.7.

2. Ist φ auf O ein Monster nach Definition 3.3.7, so ergibt sich aus Definition 2.0.1 sofort, daß φ ein Monster nach Definition 3.1.1 ist, weil jede Ableitung und jede Stammfunktion von φ auf einem Teilgebiet O_ζ zu einer Ableitung beziehungsweise einer Stammfunktion von φ auf ganz O fortgesetzt werden kann. □

Ebenso ist klar, daß man, was die Ableitungen anbetrifft, Definition 3.1.1 (beziehungsweise Definition 3.2.1) direkt hätte übernehmen können:

<u>Satz 3.3.9</u> Es sei φ Monster auf der offenen Menge $O \neq \mathbb{C}$. Dann ist für jedes $j \in \mathbb{N}_0$ und jede Zusammenhangskomponente Ω_ν von Ω die Funktion $\varphi^{(j)}|_{\Omega_\nu}$ τ-universell in jedem Randpunkt von Ω_ν.

<u>Beweis:</u> wie im zweiten Beweisschritt von Satz 3.3.8. □

Kommen wir zur Existenz von Monstern:

<u>Satz 3.3.10:</u> Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ eine offene Menge und φ eine in Ω holomorphe Funktion.

(1) Ist Ω ein Gebiet, $\{\zeta_n : n = 1,2,\ldots\}$ eine in Ω dichte Teilmenge von $\partial\Omega$ und O ein einfach zusammenhängendes Teilgebiet von Ω mit $\partial\Omega \subset \partial O$, so ist φ ein Monster auf Ω, falls sie bezüglich der Familie $\Lambda_\Omega^M := \underset{\substack{n\\ m\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{Z}}}{X} (L_\tau \circ D^j \circ i_\Omega^O)_{\tau\in T(\zeta_n,\frac{1}{m},O)}$ universell ist, und Λ_Ω^M erfüllt die Graphenbedingung.

(2) Sind Ω_ν $(\nu = 1,2,\ldots)$ die Zusammenhangskomponenten von Ω, so ist φ ein Monster auf Ω, falls sie bezüglich der Familie

$$\Lambda_\Omega^M := \underset{\nu}{X} (\Lambda_{\Omega_\nu}^M \circ i_\Omega^{\Omega_\nu})$$

universell ist, und Λ_Ω^M erfüllt die Graphenbedingung.

<u>Beweis:</u> 1. Es sei zunächst Ω ein Gebiet. Ist φ universell bezüglich $\Lambda_\Omega^M = \underset{\substack{n\\ m\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{Z}}}{X} (L_\tau \circ D^j \circ i_\Omega^O)_{\tau\in T(\zeta_n,\frac{1}{m},O)}$, so ist nach den Sätzen 1.3.3 und 1.3.1 sowie Lemma 3.1.5 (1) die Restriktion $\varphi|_O$ in jedem Randpunkt ζ_n samt allen Ableitungen und allen Stamm-

funktionen (bezüglich $\mathcal{O}$) τ-universell. Ein Diagonalschluß wie im Beweis von Lemma 3.1.5 (2) zeigt nun, daß das gleiche in jedem Randpunkt ζ von Ω gilt. Somit ist φ ein Monster auf Ω.

Nach Satz 3.1.7 folgt mit Satz 1.3.3, daß Λ_Ω^M die Graphenbedingung erfüllt. Das beweist (1).

2. Der Beweis von (2) erfolgt analog zum Beweis von Satz 3.2.3. □

Satz 3.3.11 Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ eine offene Menge. Dann existieren holomorphe Monster auf Ω. Die Menge aller Monster auf Ω hat ein Komplement von 1. Kategorie in $H(\Omega)$.

Beweis: Nach Satz 3.3.10 (2) erfüllt die Familie Λ_Ω^M die Graphenbedingung, und jede Λ_Ω^M-universelle Funktion ist ein Monster. Mit Satz 1.2.2 folgt nun die Behauptung. □

Kehren wir nochmals zu dem Versuch einer direkten Verallgemeinerung von Definition 3.2.1 beziehungsweise Definition 3.1.1 auf beliebige offene Mengen $\Omega \neq \mathbb{C}$ zurück. Nach Satz 3.3.5 kann keine in Ω holomorphe Funktion τ-universelle Stammfunktionen beliebiger Ordnung haben. Immerhin erhalten wir aber als leichte Folgerung aus der Existenz von Monstern:

Satz 3.3.12 Es sei $\Omega \neq \mathbb{C}$ eine offene Menge und N eine natürliche Zahl. Dann existiert eine auf Ω holomorphe Funktion φ derart, daß für jede Zusammenhangskomponente Ω_ν $(\nu = 1,2,\ldots)$ von Ω die Restriktion $\varphi|_{\Omega_\nu}$ samt allen Ableitungen $(\varphi|_{\Omega_\nu})^{(j)}$ $(j \in \mathbb{N})$ und allen Stammfunktionen bis zur Ordnung N in jedem Randpunkt ζ von Ω_ν τ-universell ist. Ist nicht jede Komponente von Ω einfach zusammenhängend, so ist die Menge dieser Funktionen nirgends dicht in $H(\Omega)$.

Beweis: Im Fall einer offenen Menge mit einfach zusammenhängenden Komponenten erfüllt jedes Monster die geforderte Bedingung, und es ist nichts zu zeigen.

Andernfalls sei φ ein Monster auf Ω, dessen Existenz durch Satz 3.3.11 gesichert ist. Wir behaupten, daß dann die Funktion $\psi := \varphi^{(N)}$ die geforderte Bedingung erfüllt. Nach Satz 3.3.9 ist für jede Zusammenhangskomponente Ω_ν von Ω die Funktion $\varphi^{(N+j)}|_{\Omega_\nu}$ τ-universell in jedem Randpunkt ζ von Ω_ν, und zwar für jede ganze Zahl $j \geq -N$. Für $j \geq 0$ ist also jede Funktion $\psi^{(j)}|_{\Omega_\nu}$ τ-universell in jedem Randpunkt ζ von Ω_ν. Für $-N \leq j < 0$ ist $\varphi^{(N+j)}|_{\Omega_\nu}$ eine spezielle Stammfunktion der Ordnung $-j$ von ψ.
Mit Lemma 3.1.3 folgt nun, daß jede Stammfunktion von ψ bis zur Ordnung N in jeder Zusammenhangskomponente auf dem gesamten Rand τ-universell ist. Also erfüllt ψ die geforderte Bedingung. Die letzte Behauptung des Satzes folgt aus Satz 3.3.1. □

KANATNIKOV ([23], [24]) untersuchte das Randverhalten meromorpher Funktionen. Er zeigte im wesentlichen, daß zu jeder offenen Menge Ω meromorphe Funktionen φ existieren mit folgender Eigenschaft: Zu jedem Randpunkt $\zeta \in \hat{\mathbb{C}}$ von Ω, zu jedem

JORDAN-Gebiet G und jeder in G meromorphen Funktion f existiert eine Folge (τ_n) von linearen Transformationen $\tau_n(z) = a_n z + b_n$, für welche gilt:

$$\tau_n(G) \subset \Omega \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

$$\tau_n(G) \to \zeta \text{ und } (\varphi \circ \tau_n)(z) \underset{G}{\Rightarrow} f(z) \quad \text{für } n \to \infty.$$

Dabei ist die Konvergenz von $(\varphi \circ \tau_n)(z)$ gegen $f(z)$ im Raum $\hat{\mathbb{C}}$ zu verstehen. Er zeigte zudem, daß die Menge derartiger Funktionen ein Komplement von 1. Kategorie hat im Raum aller auf Ω meromorphen Funktionen, der in natürlicher Weise mit einer Topologie versehen ist.

Man kann ohne Schwierigkeiten analog zu den Betrachtungen in Abschnitt 3.1 eine Familie von Operatoren angeben, die als Menge der universellen Elemente gerade die von KANATNIKOV betrachteten Funktionen hat und die die Graphenbedingung erfüllt.

Literaturverzeichnis

[1] Alexits, G.: *Konvergenzprobleme der Orthogonalreihen*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1960.

[2] Aversa, V.; Carrese, R.: Una primitiva universale per funzioni di più variabili. *Rend. Circ. Mat. Palermo* (2) 32 (1983), no. 1, 131-138. MR 85b: 26012.

[3] Bagchi, B.: A joint universality theorem for Dirichlet L-functions. *Math. Z.* 181 (1982), no. 3, 319-334. MR 84c: 10038.

[4] Bauer, H.: *Wahrscheinlichkeitstheorie und Grundzüge der Maßtheorie*. Dritte Auflage. Walter de Gruyter, Berlin - New York, 1978.

[5] Birkhoff, G.D.: Démonstration d'un théorème élémentaire sur les fonctions entières. *C.R. Acad. Sci. Paris* 189 (1929), 473-475. Jbuch 55, 192.

[6] Blair, C.E.; Rubel, L.A.: A universal entire function. *Amer. Math. Monthly* 90 (1983), no. 5, 331-332. MR 85a: 30046.

[7] Blair, C.E.; Rubel, L.A.: A triply universal entire function. *Enseign. Math.* (2) 30 (1984), no. 3-4, 269-274. MR 86b: 30034.

[8] Chee, P.S.: Universal functions in several complex variables. *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 28 (1979), no. 2, 189-196. MR 81c: 32014.

[9] Chui, C.K.; Parnes, M.N.: Approximation by overconvergence of a power series. *J. Math. Anal. Appl.* 36 (1971), 693-696. MR 45 # 563.

[10] DUYOS RUIZ, S.M.: On the existence of universal functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 268 (1983), no. 1, 18-22 (russisch). Englische Übersetzung in: *Soviet Math. Dokl.* 27 (1983), no. 1, 9-13. MR 84d: 30047.

[11] DUYOS RUIZ, S.M.: Universal functions and the structure of the space of entire functions. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 279 (1984), no. 4, 792-795 (russisch). Englische Übersetzung in: *Soviet Math. Dokl.* 30 (1984), no. 3, 713-716. MR 86c: 30055.

[12] Ferguson, L.B.O.; Golitschek, M.v.: Müntz-Szász theorem with integral coefficients. II. *Trans. Amer. Math. Soc.* 213 (1975), 115-126. MR 55 # 3624.

[13] Gavrilov, V.I.; Kanatnikov, A.N.; Pighetti, C.: Ensembles d'accumulation généralisés. *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 292 (1981), no. 7, 393-396. MR 82c: 30051.

[14] Gavrilov, V.I.; Kanatnikov, A.N.: An example of a universal holomorphic function. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 265 (1982), no. 2, 274-276 (russisch). Englische Übersetzung in: *Soviet Math. Dokl.* 26 (1982), no. 1, 52-54. MR 83j: 10047.

[15] Goffman, C.; Waterman, D.: A remark converning universal series. *J. Math. Anal. Appl.* 40 (1972), 735-737. MR 47# 7409.

[16] Gottschalk, W.H.; Hedlund, G.A.: *Topological dynamics*. American Mathematical Society, Providence, R.I., 1955.

[17] Halmos, P.R.: *Measure theory*. Springer-Verlag, New York - Heidelberg - Berlin, 1974.

[18] Heins, M.: A universal Blaschke product. *Arch. Math. (Basel)* 6 (1954), 41-44. MR 16, 460.

[19] Hilmy, H.: Sur les théorèmes de récurrence dans la dynamique générale. *Amer. J. Math.* 61 (1939), 149-160. Zbl. 20, 316.

[20] Hoãng, T.: The "universal primitive" of J. Marcinkiewicz. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 24 (1960), 617-628. MR 22# 3770.

[21] Ivanov, V.I.: Coefficients of universal and null orthogonal series. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 272 (1983), no. 1, 19-23 (russisch). Englische Übersetzung in: *Soviet Math. Dokl.* 28 (1983), no. 2, 312-315. MR 85d: 42028.

[22] Joó, I.: Note to a theorem of Talaljan on universal series and to a problem of Nikišin. *Fourier Analysis and approximation theory* (Proc. Collog., Budapest, 1976), Vol. I, pp. 451-458, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 19, North-Holland, Amsterdam, 1978. MR 81k: 42025.

[23] Kanatnikov, A.N.: Limiting sets along sequences of compacta. *Dokl. Akad. Nauk SSSR* 253 (1980), no. 1, 14-17 (russisch). Englische Übersetzung in: *Soviet Math. Dokl.* 22 (1980), no. 1, 5-9. MR 82g: 30056.

[24] Kanatnikov, A.N.: Cluster sets of meromorphic functions relative to sequences of compact sets. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 48 (1984), no. 6, 1196-1213 (russisch). Englische Übersetzung in: *Math. USSR-Izv.* 25 (1985), no. 3, 501-517. Zbl. 563: 30028.

[25] Kozlov, V.Y.: On complete systems of orthogonal functions. *Mat. Sbornik N.S.* 26 (68) (1950), 351-364 (russisch). MR 12, 174.

[26] Lamb, C.W.: Representation of functions as limits of martingales. *Trans. Amer. Math. Soc.* 188 (1974), 395-405. MR 49# 4087.

[27] Luh, W.: Approximation analytischer Funktionen durch überkonvergente Potenzreihen und deren Matrix-Transformierten. *Mitt. Math. Sem. Gießen* 88 (1970). MR 43# 6411.

[28] Luh, W.: On universal functions. *Fourier analysis and approximation theory* (Proc. Colloq., Budapest, 1976), Vol. II, pp. 503-511, Colloq. Math. Soc. János Bolyai, 19, North-Holland, Amsterdam, 1978. MR 80m: 30003.

[29] Luh, W.: Über cluster sets analytischer Funktionen. *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 33 (1979), no. 1-2, 137-142. MR 80f: 30022.

[30] Luh, W.: Universalfunktionen in einfach zusammenhängenden Gebieten. *Aequationes Math.* 19 (1979), no. 2-3, 183-193. MR 80m: 30040.

[31] Luh, W.: Universal approximation properties of overconvergent power series on open sets. *Analysis* 6 (1986), no. 2-3, 191-207.

[32] Luh, W.: Holomorphic monsters. Erscheint in: *J. Approx. Theory.*

[33] Luh, W.: Approximation by antiderivatives. *Constr. Approx.* 2 (1986), no. 2, 179-187.

[34] Mac Lane, G.R.: Sequences of derivatives and normal families. *J. Analyse Math.* 2 (1952), 72-87. MR 14, 741.

[35] Marcinkiewicz, J.: Sur les nombres dérivés. *Fund. Math.* 24 (1935), 305-308. Zbl. 11, 107.

[36] Men'šov, D.: On partial sums of trigonometric series. *Mat. Sbornik N.S.* 20 (62) (1947), 197-238 (russisch). MR 8, 577.

[37] Oxtoby, J.C.: Note on transitive transformations. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* 23 (1937), 443-446. Zbl. 17, 136.

[38] Oxtoby, J.C.: *Maß und Kategorie.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1971.

[39] Pál, J.: Zwei kleine Bemerkungen. *Tôhoku Math. J.* 6 (1914/15), 42-43. Jbuch 45, 634.

[40] Pogosyan, N.B.: Universal Fourier series. *Uspekhi Mat. Nauk* 38 (1983), no. 1 (229), 185-186 (russisch). Englische Übersetzung: *Russian Math. Surveys* 38 (1983), no. 1, 211-212. MR 84c: 42007.

[41] Priwalow, I.: *Randeigenschaften analytischer Funktionen.* Zweite Auflage. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1956.

[42] Rao, M.B.; Rao, K.P.S.: A category analogue of the Hewitt-Savage zero-one law. *Proc. Amer. Math. Soc.* 44 (1974), 497-499. MR 49# 9823.

[43] Reich, A.: Universelle Werteverteilung von Eulerprodukten. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl. II* 1977, no. 1, 1-17. MR 58# 27862.

[44] Reich, A.: Werteverteilung von Zetafunktionen. *Arch. Math. (Basel)* 34 (1980), no. 5, 440-451. MR 82b: 10051.

[45] Remmert, R.: *Funktionentheorie I.* Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York - Tokyo, 1984.

[46] Rudin, W.: *Real and complex analysis.* Zweite Auflage. McGraw-Hill Book Co., New York - Düsseldorf - Johannesburg, 1974.

[47] Schubert, H.: *Topologie. Eine Einführung.* Vierte Auflage. B.G. Teubner, Stuttgart, 1975.

[48] Seidel, W.; Walsh, J.L.: On approximation by euclidean and non-euclidean translations of an analytic function. *Bull. Amer. Math. Soc.* 47 (1941), 916-920. MR 4, 10.

[49] Seleznev, A.I.; Dodunova, L.K.: Some classes of universal series. *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika* 1977, no. 12 (187), 92-98 (russisch). Englische Übersetzung in: *Soviet Math. (Iz. VUZ)* 21 (1977), no. 12, 69-73. MR 58# 17056.

[50] Talalyan, A.A.: On the convergence almost everywhere of subsequences of partial sums of general orthogonal series. *Akad. Nauk Armyan. SSR Izv. Fiz.-Mat. Estest. Tehn. Nauki* 10 (1957), no. 3, 17-34 (russisch). MR 19, 742.

[51] Thorpe, B.; Tomm, L.: Universal approximation by regular weighted means. *Pacific J. Math.* 117 (1985), no. 2, 443-455. MR 86f: 30002.

[52] Tomm, L.; Trautner, R.: A universal power series for approximation of measurable functions. *Analysis* 2 (1982), no. 1-4, 1-6. MR 85e: 30004.

[53] Voronin, S.M.: A theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.* 39 (1975), no. 3, 475-486, 703 (russisch). Englische Übersetzung in: *Math. USSR-Izv.* 9 (1975), no. 3, 443-453. MR 57# 12419.