

Über das Liebigsche Gesetz vom Minimum und das Mitscherlichsche Ertragsgesetz

In der Arbeit von B. Baule (2) aus dem Jahre 1954, »Eine Analogie zum Pflanzenertragsgesetz« wird auch das »Gesetz vom Minimum« von Justus von Liebig und das Mitscherlichsche »Wirkungsgesetz der Wachstumsfaktoren« theoretisch näher untersucht. Sehr treffend beschreibt Baule Liebigs Gesetz vom Minimum auf folgende Weise: »Der Aufbau der Pflanzensubstanz aus gewissen Grundnährstoffen (Stickstoff, Phosphorsäure, Kali, Kalk) erfolgt in der gleichen Art und nach den gleichen Gesetzen wie der Aufbau der chemischen Verbindungen aus den chemischen Elementen. Konkreter gesprochen heißt das, daß nach Liebigs Vorstellung die Grundnährstoffe, Stickstoff, Phosphorsäure, Kali und Kalk in einem ganz bestimmten festen Verhältnis an der Bildung von lebender Pflanzensubstanz beteiligt sind und daß daher die Menge an Pflanzensubstanz, die im Laufe der Vegetationszeit von einer Pflanze aufgebaut wird, einzig und allein von der Menge jenes Nährstoffes abhängt, der verhältnismäßig am wenigsten im Boden vorhanden ist.«

*Aufbau der
Pflanzensubstanz*

Im Jahre 1926 kam Mitscherlich (9) in dem Artikel »Das Liebigsche Gesetz vom Minimum und das Wirkungsgesetz der Wachstumsfaktoren« im Gegensatz zu seiner früheren Auffassung (7) über das Minimumgesetz zu folgendem Schluß: »Die Mineraltheorie Liebigs hat ihre Bedeutung noch heutigentags behalten, wenn sie auch aus der einseitigen Lehre gerade durch die Erweiterungen des Minimumgesetzes hervorgehoben wurde; das Gesetz selbst als solches existiert nicht!«

Ein voreiliger Schluß

Diesen Schluß zog Mitscherlich aus der Annahme, daß das Liebigsche Gesetz in mathematischer Darstellungsweise der Funktion einer einfachen Geraden entspricht:

$$y = c \cdot x + C \quad (I)$$

Dabei ist y der Ertrag an Pflanzensubstanz und x die Menge des Minimumfaktors. C ist eine Konstante.

Der Differentialquotient für diese Funktion ist:

$$\frac{dy}{dx} = c \quad (II)$$

Das bedeutet, daß der Ertragszuwachs dy dem Mengenzuwachs des Minimumfaktors dx einfach proportional ist.

Im Gegensatz dazu hatte Mitscherlich aber gefunden, daß bei seinen Versuchen der Ertrag nicht proportional dem Minimumfaktor steigt, sondern daß die Er-

tragssteigerung proportional dem an dem Höchstertrag jeweilig fehlenden Ertrag verläuft, das heißt mathematisch formuliert:

*Der Ertrag pro
Flächeneinheit*

$$\frac{dy}{dx} = c(A - y) \quad (\text{III})$$

Integriert lautet diese Gleichung nach Baule (siehe Mitscherlich (9)):

$$y = A(1 - e^{-cx}) \quad (\text{IV})$$

y ist der Ertrag an Trockensubstanz der Pflanzen je Mitscherlichgefäß bzw. je Hektar

A ist der Höchstertrag je Gefäß bzw. je Hektar

x entspricht der Nährstoffmenge, die je Flächeneinheit gegeben wurde

c ist eine Konstante, die man als »Wirkungsfaktor« bezeichnet.

Baule schreibt darüber 1954 (2):

»Dieses Mitscherlichsche Gesetz zeigt, solange man sich darauf beschränkt, nur einen einzelnen Nährstoff zu variieren, eine ausgezeichnete Übereinstimmung mit der Erfahrung. Sobald man aber die Forderung aufstellt, daß es für jeden der Grundnährstoffe gelten muß, ergeben sich Folgerungen aus ihm, die mit den Erfahrungstatsachen beim besten Willen nicht in Einklang zu bringen sind.« Hieran im Anschluß geht Baule in seiner Arbeit auf die widersprüchlichen Folgerungen ein, die aus einer Verallgemeinerung der Formel (IV) für die gleichzeitige Steigerung mehrerer Nährstoffe $x_1, x_2 \dots$ gezogen werden müßten.

*„Wirkungsfaktor“
ist konstant!*

Baule entwickelte deshalb für den Fall der Steigerung mehrerer Nährstoffe eine neue Formel. Die Einzelheiten darüber findet man in besagtem Artikel (2).

Hier in dieser Arbeit interessiert jedoch lediglich die Formulierung des Mitscherlichschen Ertragsgesetzes in seiner Form der ersten Annäherung (Formel IV). Mitscherlich fand nämlich, daß der »Wirkungsfaktor« c für die einzelnen Wachstumsfaktoren bzw. Nährstoffe x , unabhängig von der Pflanzenart bei entsprechenden Bedingungen, konstant und typisch für den Nährstoff ist ((10) S. 169, 173, 174 u. a.). Die Bedingung für die Konstanz des Wirkungsfaktors c_1 bei Variation eines Nährstoffes x_1 ist, daß alle übrigen Wachstumsfaktoren konstant gehalten werden und in optimaler, d. h. ausreichender Menge vorhanden sind. Vergleiche hierzu die Arbeit von E. von Boguslawski (3) »Das Ertragsgesetz« im Handbuch für Pflanzenphysiologie, IV. Seite 962 . . . Auch in der Arbeit von N. Atanasiu und H. Thiele (1) »Das Ertragsgesetz bei Steigerung mehrerer Faktoren« Seite 242 findet man diese Bedingungen und es wird bestätigt, daß das Mitscherlichsche Ertragsgesetz in seiner ersten Form (Formel IV) sich immer wieder als gültig erwiesen hat.

Haben beide recht?

Ist es nun aber möglich, daß beide einander angeblich widersprechenden Gesetze von Liebig und Mitscherlich gültig sein können?

Um dies zu beantworten ist es nötig, einen kurzen Einblick in die Entstehung des Liebig'schen Gesetzes vom Minimum zu geben. Am besten wird hierzu die

umstrittene Formulierung von Justus von Liebig etwas ausführlicher zitiert. Man findet diese Stelle in der 1878 erschienenen 6. Auflage des Buches »Chemische Briefe« von Justus von Liebig (6). Hierin heißt es auf Seite 458 wie folgt:

»Die Auseinandersetzung der wissenschaftlichen Grundsätze datiert nicht von gestern, und ist jetzt bereits dreiundzwanzig Jahre alt, und es hätte sich der Standpunkt der landwirtschaftlichen Lehre (siehe den 37. Brief) gegen die Macht der Wahrheit und des gesunden Menschenverstandes so lange Zeit nicht behaupten lassen, wäre sie nicht wie durch eine Mauer davon abgeschlossen und gegen ihren Eingriff geschützt gewesen.

Liebigs Formulierung

Die chemischen Wahrheiten in diesen Briefen lassen sich in einer einfachen Formel ausdrücken, welche von weitem wie eine mathematische aussieht, die aber ein jeder versteht:

$$E = N - W.$$

Das große E in dieser Formel bedeutet Ertrag (Korn, Kartoffeln, Rüben etc.), das N bedeutet Nahrung (Phosphorsäure, Kali, Kalk, Ammoniak etc.), W heißt Widerstand.

In Worten ausgedrückt heißt die Formel:

Die Höhe des Ertrages (eines Feldes) entspricht oder steht im Verhältnis zur Nahrung im Boden (zu den Bedingungen der Erzeugung des Ertrages) weniger (minus) aller der Ursachen und Widerstände, welche die Nahrung an der Erzeugung des Ertrages hindern. Wenn der Buchstabe N sechs Apfelschnitten und W drei Finger bedeuten, welche zwei Apfelschnitten von den sechs festhalten, so sind nur die vier anderen frei, und könnten z. B. von einem anderen gegessen werden.«

Soweit das Zitat, es ergeben sich daraus einige wichtige Tatsachen. Zunächst hat Liebig diese Formel nicht in dem Sinne, wie dies Mitscherlich getan hat, als eine streng mathematische Formulierung des Zusammenhanges zwischen der Menge der im Boden befindlichen Nährstoffe und der Höhe des mit diesem Boden erreichbaren Ertrages aufgefaßt. Denn er schreibt ausdrücklich, daß diese Formel nur von weitem wie eine mathematische aussieht. Wenn man die »Chemischen Briefe« Liebigs und das Buch »Die Chemie in ihrer Anwendung auf Agricultur und Physiologie« von Justus von Liebig (5) aufmerksam liest, so entgeht es einem nicht, daß es Liebig vollkommen bewußt war, daß der auf einem Boden erzielbare Ertrag nicht ohne weiteres in geradlinigem, direktem Verhältnis steht zu den in diesem Boden vorhandenen Nährstoffmengen. Aus einer Menge ähnlicher Bemerkungen sei lediglich folgende zitiert, die man auf Seite 266 des Buches »Die Chemie in ihrer Anwendung auf Agricultur und Physiologie« (5) findet.

Boden und Ertrag

»Die Ernteerträge der Samen zeigen ferner, daß sie nicht im Verhältnis standen zu dem Gehalt des Bodens an Nährstoffen, sondern daß die daran ärmere

Mischung weit mehr Samen lieferte als sie nach dem Gehalte der reicheren hätte liefern sollen. Bei den verschiedenen Töpfen verhielten sich:

| | 2. Topf $\frac{1}{4}$ gesättigt | 3. Topf $\frac{1}{2}$ gesättigt | 4. Topf $\frac{1}{1}$ gesättigt |
|--------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|------------------------------------|
| Die Düngermenge: | 1 | 2 | 4 |
| Die Ernteerträge hingegen wie: | 2 | 2,8 | 4 |

Der Grund hiervon ist nicht schwer einzusehen; das Ergebnis, daß der $\frac{1}{4}$ gesättigte Topf doppelt so viel an Ertrag lieferte, als der Düngung entsprach, beweist, daß die aufnehmenden Wurzeloberflächen mit doppelt soviel ernährenden Torfteilchen in Berührung gekommen waren . . . «

Nährstoffe in der Pflanze

Aus solchen Gründen fügt Liebig in seiner bekannten »Formel« noch den Buchstaben W ein, mit dem er den Widerstand bezeichnet. Es ist jedoch nicht anzunehmen, daß Liebig diesen Widerstand als einfach proportional der Größe E des Ertrages bzw. der Menge N der Nahrung auffaßte. Daß er jedoch *den Ertrag E als proportional der Menge N an ertragswirksamen Nährstoffen betrachtet, ist eine logische Folgerung aus seinen chemischen Pflanzenanalysen, wie dies schon zu Beginn dieser vorliegenden Arbeit in dem Zitat nach Baule (2) zum Ausdruck kommt.*

Blättert man in der tabellarischen Übersicht der Analysen der verschiedenen Pflanzenaschen die von Liebig seinem Buch »Die Chemie in ihrer Anwendung . . . « (5) angefügt wurde, so sieht man sehr wohl, daß die Aschen- bzw. Mineralstoffprozentage bei den verschiedenen Pflanzenarten nur einen relativ geringen Anteil an der Trockensubstanz haben und daß die einzelnen Nährstoffanteile nicht allzu große Schwankungen aufweisen. Dies erkennt man jedoch noch viel besser, wenn man die Angaben über die »Nährelementgehalte der Pflanzen als Maß für die Nährstoffversorgung« (Tab. 1) in dem Artikel »Grenzwerte der Nährelementgehalte in Pflanzen und ihre Auswertung zur Ermittlung des Düngerbedarfs« von A. Finck (4) aus dem Jahre 1968 überprüft. Die unteren Grenzwerte der Hauptnährelemente, bei deren Unterschreitung ein Mangel mit Symptomen auftritt, sind nämlich verhältnismäßig sehr niedrig und zeigen für die einzelnen Nährstoffe charakteristische Unterschiede. Schon allein aus dieser Tabelle läßt sich schließen, daß Liebigs Auffassung durchaus gültig erscheint.

Eine Verbindung beider Gesetze

Wenn nun aber Mitscherlichs Ertragsgesetz und auch Liebigs Gesetz des Minimums gleichzeitig gültig sind, so ist es nur logisch, daß zwischen diesen beiden Gesetzen eine exakte Verbindung besteht, die lediglich bis heute noch nicht erkannt wurde. Die Verbindung dieser beiden Gesetze kann man aber, auf die einfachste und überzeugendste Weise, dadurch herstellen, daß man das gesetzmäßige Formwachstum der Pflanzen selbst analysiert und formuliert. Wie in der Arbeit des Verfassers (12) »Eine neuartige Erklärung des Mitscherlichschen Ertragsgesetzes« dargestellt wird, kann man das Ertragsgesetz von Mitscher-

lich (Formel IV) präzise ableiten, wenn man annimmt, daß die auf einer Flächeneinheit wachsenden Pflanzen als Körper gleichen Widerstandes gegen Druck durch Eigengewicht und Fremdbelastung aufgebaut sind. Daß das durchschnittliche Durchmesser- und Höhenwachstum der Bäume sich analog einem Körper gleichen Widerstandes entwickelt, wurde schon in der Arbeit »Die einfache Exponentialfunktion und das Wachstum der Bäume« (11) dargelegt.

Die Pflanzen als Rotationskörper gleichen Widerstandes

Für die Entwicklung des Radius y eines Rotationskörpers gleichen Widerstandes in Abhängigkeit von der Höhe x gilt folgende Formel: (siehe Abbildung 1)

$$y = a \cdot e^{-\frac{\rho}{2\sigma} x} \quad (V)$$

a bedeutet den konstanten Radius für den senkrecht auf dem Boden stehenden Rotationskörper bei der Höhe $x = 0$. ρ ist die Dichte des Materials in Gramm pro Kubikzentimeter. σ bedeutet die Tragfestigkeit in Gramm pro Quadratzentimeter. Die Größen y , x und a sind in Zentimeter angegeben. e ist die Basis des natürlichen Logarithmus.

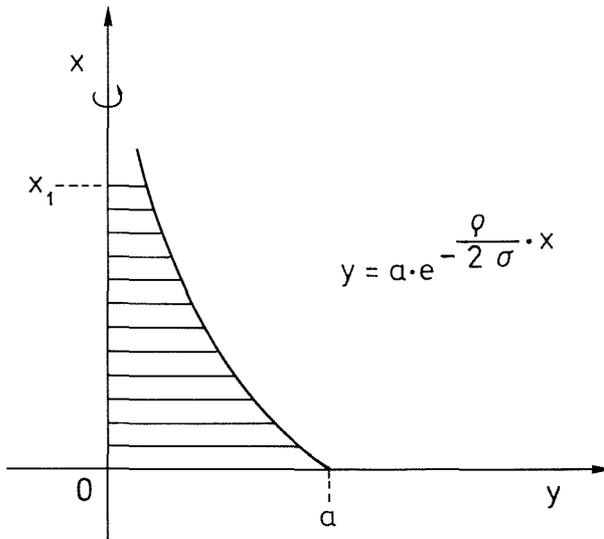


Abbildung 1: Der Zusammenhang zwischen dem Radius y und der Höhe x für einen Rotationskörper gleichen Widerstandes gegen Druck durch Eigengewicht und Fremdbelastung (siehe Text).

Berechnet man aus dieser Formel die Volumenzunahme eines solchen Rotationskörpers in Abhängigkeit von der Höhe x , so erhält man folgende Formel:

$$V = \frac{a^2 \pi \cdot \sigma}{\rho} \left(1 - e^{-\frac{\rho}{\sigma} \cdot x} \right). \quad (VI)$$

Hieraus ergibt sich für die Gewichtsentwicklung G dieses Rotationskörpers:

$$V \cdot \rho = G = a^2 \pi \cdot \sigma \left(1 - e^{-\frac{\rho}{\sigma} \cdot x} \right) \quad (VII)$$

Setzt man G gleich dem Ertrag y nach Mitscherlich, $a^2 \pi \cdot \sigma$ gleich dem Maximalertrag A und $\frac{1}{\sigma} = c$, so ergibt sich das altbekannte Mitscherlich'sche Ertragsgesetz Formel IV.

Tragfestigkeit und Dichte der Zellwand

Für das Wachstum der Bäume stellte sich heraus, daß das physiologische Tragmodul bzw. die Tragfestigkeit σ unabhängig von der Baumart gleichbleibend $\sigma = 500 \text{ g/cm}^2$ ist (11). Dies resultiert offenbar daraus, daß der tragende Baustoff der Bäume bzw. die aus Lignin und Zellulose bestehenden reinen Zellwandsubstanzen bei allen Bäumen den gleichen Reinwichtewert $\gamma_H = 1,56 \text{ g/cm}^3$ haben. Dieser Wert steht schon in dem Buch von J. Sachs (13) »Vorlesung über Pflanzenphysiologie« aus dem Jahre 1887, ist also seit langer Zeit bekannt. Da jedoch Lignin und Zellulose durch chemische Formeln darstellbar sind, in denen — außer einem ganz geringen Prozentsatz — die Pflanzennährstoffe Stickstoff, Kali, Phosphor und Kalk nicht auftreten, erscheint der Schluß erlaubt, daß die Zellwandsubstanz allein die Tragfestigkeit der Pflanzen bestimmt. Die Hauptnährelemente, die zur Bildung von Pflanzensubstanzen notwendig sind, werden demnach zusätzlich zur Trockenmasse aus Lignin und Zellulose in der Pflanze abgelagert.

ertragswirksamer Stickstoff

Folgt man dem nach Baule (2) zur Erklärung des Liebig'schen »Gesetzes vom Minimum« zitierten Gedankengang über den Aufbau der Pflanzensubstanzen aus gewissen Grundnährstoffen, so ergibt sich zwingend, daß der Mitscherlich'sche »Wirkungsfaktor« c lediglich das für den entsprechenden Nährstoff typische und konstante Nährstoffverhältnis zu der tragenden Pflanzensubstanz mit der Reinwichte γ_H zum Ausdruck bringt. Daß nun beispielsweise bei Hafer der Stickstoff N tatsächlich, so weit er ertragswirksam in Erscheinung tritt, praktisch genau 1 Prozent der Trockensubstanz ausmacht, wurde vom Verfasser schon früher gezeigt (12). Eine Auswertung des INV-Versuches aus dem Jahre 1957 und die Auswertung des IDV Dauerversuches 1957—1966 bestätigt dies für den Gesamtertrag Korn plus Stroh bei Weizen und Hafer sehr präzise. Auf den verschiedensten Standorten schwankt der prozentuale Anteil von Stickstoff am Gesamtertrag der Trockenmasse von Korn und Stroh nur sehr eng um 1 Prozent. Dies ist im übrigen auch der untere Grenzwert den A. Finck (4) 1968 für Stickstoff angibt.

Nach Atanasiu/Thiele (1) findet man für Stickstoff folgende Formel, wenn man die Nährstoffgabe und den Ertrag je Mitscherlichgefäß bestimmt:

$$y = A(1 - 10^{-0,64x}) \quad (\text{VIII})$$

Berechnung ohne H_2O !

der Wert $c_1 = 0,64$ entspricht dabei fast ganz genau dem reziproken Wert der Reinwichte γ_H der reinen Zellwandsubstanz, $c_1 \approx \frac{1}{\gamma_H}$. Folglich läßt sich daraus ableiten, daß zur Bildung eines hypothetischen Höchstertrages in Höhe von $A = 173,5 \text{ g}$ Trockenmasse, genau $1,735 \text{ g}$ Stickstoff benötigt würden, das ist

gleich 1 Prozent der Trockenmasse der reinen Zellwandsubstanz. Aus übrigen »Wirkungsfaktoren« für Kali und Phosphor folgt, daß zur Bildung von 173,5 g Trockenmasse ebenso noch 0,835 g K_2O und 0,556 g P_2O_5 nötig sind.

Zählt man das alles zusammen so ergibt sich:

| | | | |
|------------------------|---|-------|---------|
| Reine Zellwandsubstanz | = | 173,5 | g |
| N | = | 1,735 | g |
| K_2O | = | 0,835 | g |
| P_2O_5 | = | 0,556 | g |
| Summe | | <hr/> | 176,626 |

Theoretisch dürfte der pro Mitscherlichgefäß für Hafer erzielbare Höchstertag bei $\sqrt{\pi} \cdot 100 \text{ g} = 177,245 \text{ g}$ Gesamttrockengewicht liegen. Demnach wären für die übrigen ertragswirksamen Nährstoffe z. B. Ca., Mg. usw. noch 0,619 g übrig.

Zusammenfassend läßt sich aus all dem folgern, daß das Mitscherlichsche Ertragsgesetz in seiner ersten Fassung Formel IV das Liebigsche »Gesetz vom Minimum« nicht widerlegt, sondern im Gegenteil präzise bestätigt. Nach der von Mitscherlich selbst gegebenen Anweisung wird, wenn alle anderen Nährstoffe optimal und ausreichend vorhanden sind, lediglich der Nährstoff verändert, der sich im Minimum befindet. Dieser variierte Nährstoff bestimmt aber, wie das Liebig annahm, die Höhe des je Flächeneinheit des Bodens erzielbaren Ertrages. Da jedoch Gesetze der Statik bzw. die Erdbeschleunigung das Formwachstum der Pflanzen bestimmen, kann der Ertrag pro Flächeneinheit nur analog der von Mitscherlich beschriebenen Exponentialfunktion (Formel IV.) anwachsen. Dabei bleibt offenbar der ertragswirksame Nährstoffanteil gegenüber der Dichte ρ der tragenden Zellwandsubstanz im Sinne Liebigs konstant.

*Liebig und
Mitscherlich haben
recht!*

Die Zusammenhänge wurden hier — auch durch die Ausklammerung des Problems der Fremdbelastung durch den Wind — etwas vereinfacht dargestellt. Die Betrachtung der Pflanzen als Rotationskörper gleichen Widerstandes gegen Eigengewicht und Fremdbelastung ermöglicht jedoch zweifellos eine sinnvollere Erklärung der Wachstumsgesetze der Pflanzen als bisher.

Literatur:

1. Atanasiu, N./Thiele, H., „Das Ertragsgesetz bei Steigerung mehrerer Faktoren“. Zeitschrift für Acker- und Pflanzenbau, Band 105, Heft 3, 1958, Seite 241–257. Paul Parey Verlag, Berlin und Hamburg.
2. Baule, B., „Eine physikalische Analogie zum Pflanzenertragsgesetz. Zeitschrift für Acker- und Pflanzenbau, Band 98, 1954, Paul Parey Verlag, Berlin und Hamburg.
3. Boguslawski, E. von, „Das Ertragsgesetz“. Handbuch der Pflanzenphysiologie, IV. Springer, Heidelberg, 1958.

4. *Finck, A.*, „Grenzwerte der Nährelementgehalte in Pflanzen und ihre Auswertung zur Ermittlung des Düngerbedarfs“. Zeitschrift für Pflanzenernährung und Bodenkunde, Band 119, Heft 3, Seite 197–208, Verlag Chemie, Weinheim, 1968.
5. *Liebig, J. von*, „Die Chemie in ihrer Anwendung auf Agricultur und Physiologie“. Verlag F. Vieweg, Braunschweig, 1876, IX. Auflage.
6. *Liebig, J. von*, „Chemische Briefe“. Leipzig und Heidelberg, 1878, VI. Auflage.
7. *Mitscherlich, E. A.*, „Steigerung der Pflanzenerträge unter dem Einfluß der Vegetationsfaktoren und der Bodenbearbeitung. I. Die Vegetationsfaktoren in ihrem Einfluß auf die Pflanzenproduktion“. Landwirtschaftliche Hefte, P. Parey, Berlin, 1913.
8. *Mitscherlich, E. A.*, „Über allgemeine Naturgesetze“. Schriften der Königsberger Gelehrten Gesellschaft, Deutsche Verlagsgesellschaft für Politik und Geschichte, Berlin, Heft 3, 1924.
9. *Mitscherlich, E. A./Dühring, F.*, „Das Liebigsche Gesetz vom Minimum und das Wirkungsgesetz der Wachstumsfaktoren“. Deutsche Verlagsgesellschaft für Politik und Geschichte, Berlin, 1926.
10. *Mitscherlich, E. A.*, „Bodenkunde“. Paul Parey, Berlin und Hamburg, 1954.
11. *Müller, G. R.*, „Die einfache Exponentialfunktion und das Wachstum der Bäume“. Gießen, 1968 noch unveröffentlicht.
12. *Müller, G. R.*, „Eine neuartige Erklärung des Mitscherlichschen Ertragsgesetzes“. Gießen, 1968 noch unveröffentlicht.
13. *Sachs, J.*, „Vorlesungen über Pflanzen-Physiologie“. Engelmann, Leipzig, 1887, 2. Auflage.