

Lineare partielle Differentialoperatoren
mit kompakter Einbettung

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Mathematik der
Ludwig-Maximilians-Universität
München

vorgelegt von
Hans-Otto Walther
aus München

im Oktober 1973

Herrn Prof. Dr. E. Wienholtz möchte ich hier danken, besonders für seine tolerante Unterstützung bei der Wahl des Schwerpunkts dieser Arbeit und für die wertvollen Anregungen, die er in späteren Gesprächen gab.

Mein Dank gilt auch Herrn Dr. C. G. Simader. Die vielen Unterhaltungen mit ihm und seine Anregungen trugen sehr zu meinen Kenntnissen der Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen bei.

1. Berichterstatter: Prof. Dr. E. Wienholtz

2. Berichterstatter: Dr. C. G. Simader

Tag der mündlichen Prüfung: 8. Februar 1974

Inhaltsverzeichnis

	Bezeichnungen	S. 1
1	Einleitung	2
2	Lineare Abbildungen in Banachräumen mit der kEE	7
3	kEE - Kriterien	13
4	Differentialoperatoren mit kompakter Einbettung	21
	Anhang zu Abschnitt 4	33
5	Erweiterungen von kEE - Differentialopera- toren mit diskreten Spektren	42
	Literatur	53

Bezeichnungen:

\mathbb{R}	Körper der reellen Zahlen,
\mathbb{C}	Körper der komplexen Zahlen,
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen,
\mathbb{Z}	Menge der ganzen Zahlen,
$L_c(X, Y)$	Menge der stetigen linearen Abbildungen des normierten Raums X in den normierten Raum Y .
$C^k(\Omega)$	Menge der k mal stetig differenzierbaren Abbildungen der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in \mathbb{C} .
$C^\infty(\Omega)$	Menge der beliebig oft differenzierbaren Abbildungen von Ω in \mathbb{C} ,
$C_0^\infty(\Omega)$	Menge der beliebig oft differenzierbaren Funktionen von Ω in \mathbb{C} mit kompaktem Träger
$\text{supp } u$	$:= \overline{\{x \in \Omega \mid u(x) \neq 0\}}$ in Ω .
	Für Multi-Indizes $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n = (\mathbb{N} \cup \{0\})^n$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$ setzen wir
ξ^α	$:= \xi_1^{\alpha_1} \dots \xi_n^{\alpha_n}$,
$ \alpha $	$:= \sum_1^n \alpha_i$. Für $u \in C^{ \alpha }(\Omega)$:
$D^\alpha u$	$:= (-i\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \dots (-i\partial/\partial x_n)^{\alpha_n} u$.
\mathbb{R}^+	$:= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda > 0\}$,
\mathbb{R}_0^+	$:= \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \lambda \geq 0\}$.
(x, y)	$:= \sum_1^n x_i y_i$; ist in den ersten vier Abschnitten das Skalarprodukt in \mathbb{R}^n . Für $p \in [1, \infty)$:
$L_p(\Omega)$	ist der Banachraum der Äquivalenzklassen der Lebesgue-messbaren Funktionen f von der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ in \mathbb{C} mit $\int_\Omega f ^p < \infty$ nach der Relation der "Gleichheit bis auf Mengen vom Lebesgue-Mass Null". Im folgenden verwenden wir für die Funktionen und ihre Klassen jeweils das gleiche Symbol, aus dem Zusammenhang ist dann zu entnehmen, ob im Einzelfall die Klasse oder ein Repräsentant gemeint ist.

1 Einleitung

F. E. Browder zeigte in seiner 1961 erschienenen Arbeit [4], dass gleichmässig elliptische Differentialoperatoren A_e Fredholmoperatoren in $L_p(\Omega)$ ($p \in [1, \infty)$) sind, wenn Ω eine beschränkte offene Menge in \mathbb{R}^n ist und wenn der Definitionsbereich D_{A_e} von A_e durch Dirichlet - Randbedingungen gegeben ist. Dabei lässt sich der Beweis, dass A_e ein Semi - Fredholmoperator mit endlichdimensionalem Kern ist^{*)}, auf einen funktionalanalytischen Satz (Theorem VII.2.1 in [9]) zurückführen. Dessen Voraussetzungen sind für den Operator A_e erfüllt, weil Rellichs Auswahlatz gilt - da Ω beschränkt ist - und weil die gleichmässige Elliptizität folgende a - priori - Abschätzung impliziert:

$$(1) \quad \forall u \in D_{A_e} = H^{2m,p}(\Omega) \cap H_0^{m,p}(\Omega):$$

$$\|u\|_{H^{2m,p}(\Omega)} \leq c(\|A_e(u)\|_{L_p(\Omega)} + \|u\|_{L_p(\Omega)})$$

(siehe S. Agmon, The L_p - approach to the Dirichlet problem I: Regularity theorems, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 13 (1959), 405 - 448; vgl. [2] und [4]).

Insbesondere implizieren Rellichs Auswahlatz und die Ungleichung (1), dass auch die Voraussetzungen des folgenden Satzes, einer einfachen Konsequenz aus Theorem VII.2.1 [9], erfüllt sind:

Satz 2.5: Ist T ein abgeschlossener linearer Operator in einem Banachraum X und ist die Einbettung $i_T: (D_T, \|\cdot\|_T) \rightarrow X$ kompakt, so ist T ein Semi - Fredholmoperator mit endlichdimensionalem Kern.

Dabei bezeichnet $\|\cdot\|_T$ die Graphennorm zu T . Wenn für einen Operator T in einem Banachraum X die Einbettung i_T kompakt ist, so sagen wir, T habe die Eigenschaft der kompakten Einbettung (abgekürzt: kEE).

^{*)} siehe Definition 2.6, S. 8

Die vorliegende Arbeit soll dazu beitragen, einer Charakterisierung der linearen partiellen Differentialoperatoren $A: L_p(\Omega) \supset D_A \rightarrow L_p(\Omega)$ mit der kEE für nicht notwendig beschränkte Mengen Ω näherzukommen. Dieses Vorhaben motivieren zusätzlich zu Satz 2.5 die Ergebnisse von Abschnitt 2, in dem die Eigenschaft der kompakten Einbettung von linearen Operatoren T in einem Banachraum X untersucht wird: Für abgeschlossene Operatoren mit nicht - leerer Resolventenmenge erhält man die Äquivalenz von kEE und Kompaktheit der Resolventen (Lemma 2.12), damit haben diese Operatoren diskrete Spektren. Wir erhalten in Satz 2.13 unter diesen Voraussetzungen an T ausserdem, dass $T - \lambda Id$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Fredholmoperator vom Index Null ist. Die Aussage über den Index scheint zumindest nicht allgemein bekannt zu sein; die Endlichkeit der Kodimension des Bildes $R_{T-\lambda Id}$ kann man auch aus einem Ergebnis von F. E. Browder (vgl. Lemma 17 in [4]) ableiten, allerdings unter Benutzung vektorwertiger Integration, die wir im Beweis von Satz 2.13 nicht benötigen.

In Abschnitt 3 leiten wir aus einem Satz von A. N. Kolmogorov, A. N. Tulaikov [17] und M. Riesz [15] über relativ-kompakte Mengen in L_p - Räumen eine Charakterisierung der kompakten linearen Abbildungen T eines normierten Raums X in einen L_p - Raum durch L_p - Abschätzungen ab. Dabei zeigt sich, dass für die kEE eine Koerzitivitätsungleichung notwendig ist und nicht nur hinreichend wie oben die Abschätzung (1) für die Operatoren A_e .

Wir können die Kompaktheit der stetigen linearen Operatoren T von X in einen L_p - Raum mit gewichteter Norm auch dadurch charakterisieren, dass Abbildungen $r_\mu \circ T$ mit ($r_\mu(f) = f|_{\Omega_\mu}$ und $\Omega_\mu \subset \Omega$ beschränkt) kompakt sind und dass eine Konvergenzbedingung erfüllt ist (Satz 3.7). Die Formulierung solcher Bedingungen geht auf F. Rellich zurück, der in [14] die Kompaktheit der Einbettung $H_0^{1,2}(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ in beliebigen Gebieten $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ charakterisierte. Rellich zeigte dann, dass seine Kompaktheitsbedingung in unbeschränkten Gebieten erfüllt

ist, die für $|x| \rightarrow \infty$ beliebig schmal werden. Rellichs Ergebnis folgt nun auch mit Hilfe des allgemeineren Kriteriums Satz 3.7 - siehe Anhang zu Abschnitt 4.

In Abschnitt 4 finden wir schwache hinreichende Bedingungen für die Koeffizienten von Differentialoperatoren, die die kEE nach den Kriterien aus Abschnitt 3 implizieren. Aus Ergebnissen von L. Hörmander [11] und aus Lemma 2.7 erhält man eine Charakterisierung der kEE von linearen partiellen Differentialoperatoren $L = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha$ mit konstanten Koeffizienten a_α und Definitionsbereich $C_0^\infty(\Omega)$ in $L_2(\Omega)$, wenn Ω beschränkt ist, durch eine Aussage über die a_α . Weil Differentialoperatoren A in $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $D_A = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, deren Einbettung kompakt ist, wenigstens einen unbeschränkten Koeffizienten haben (Satz 4.1), betrachten wir Operatoren der Form $A = L + P$ auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dabei hat L konstante Koeffizienten a_α , und für P gilt $P(u) = pu$ mit $\text{Re } p(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} +\infty$, $\text{Re } p$ nach unten beschränkt.

Die schwächste Bedingung an L , die wir unter diesen Voraussetzungen an p verlangen müssen, damit i_A noch kompakt ist, lautet:

$$(4) \exists (s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : s(0) = 0 \wedge s \text{ in } 0 \text{ stetig}) \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \\ \forall t \in \mathbb{R}^n: \int_{\mathbb{R}^n} |u(\cdot + t) - u|^2 \leq s(t) [\text{Re}(L(u), u)_{L_2} + c \|u\|_{L_2}^2].$$

Wir charakterisieren die Abschätzung (4) durch die Koeffizienten - Eigenschaft $\text{Re} \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha \xi^\alpha \xrightarrow{|\xi| \rightarrow +\infty} +\infty$.

Beim Schluss von (4) auf die Konvergenzaussage kann man nicht wie bei den bekannten Beweisen für die Notwendigkeit von Koeffizientenbedingungen für gewisse Koerzivitätsabschätzungen mit der verallgemeinerten Leibnizregel von L. Hörmander arbeiten (vgl. [11], [12]), da die linke Seite von (4) keine Ableitungsterme enthält. Wir verschaffen uns stattdessen mit Hilfe der Beschreibung der Abschliessung \tilde{L} nach Simader und Louhivaara [12] eine geeignete δ - Folge, die aus der L_2 - Abschätzung eine punktweise Abschätzung der Integranden macht. - Wir erhalten ausserdem, dass für die speziellen Operatoren L auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ die Abschätzung (4) äquivalent ist

zur Koerzivitätsungleichung

$$(5) \exists (a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : a(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} +\infty) \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n): \\ \int_{\mathbb{R}^n} (a + 1) |Fu|^2 \leq \text{Re}(L(u), u)_{L_2} + c \|u\|_{L_2}^2.$$

(Fu ist die Fouriertransformierte von u).

Für beliebige Operatoren gilt nur: (5) \implies (4). Der Beweis dieser Implikation und das allgemeine Kompaktheitskriterium aus Abschnitt 3 liefern nebenbei einen neuen Beweis einer Verallgemeinerung von Rellichs Auswahlssatz, die von B. Malgrange stammt [13]: Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ beschränkt, ist $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ eine stetige Funktion mit $a(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} +\infty$ und gilt $(\forall u \in C_0^\infty(\Omega): \|u\|_Y^2 := \int_{\mathbb{R}^n} (a + 1) |Fu|^2 < \infty)$, so ist die Einbettung $Y := (C_0^\infty(\Omega), \| \cdot \|_Y) \ni u \mapsto u \in L_2(\Omega)$ kompakt. -

Aus Kriterium 3.7 und aus Browders Verbesserung der a - priori - Abschätzung (1) (Theorem 2' in [4]) erhalten wir die kEE für elliptische Differentialoperatoren $A_e = \sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha + p$, p wie oben, in unbeschränkten offenen Mengen Ω , wobei A_e nicht gleichmässig stark elliptisch sein muss. D_{A_e} ist durch Dirichlet - Randbedingungen gegeben. (Satz 4.9).

Für gleichmässig stark elliptische Differentialoperatoren A_e mit beschränkten a_α und p wie oben folgt die kEE auch aus Browders Theorem 24 in [4]. Dort zeigt er, dass die Resolventenmenge nicht leer ist und dass die Resolventen kompakt sind. Im allgemeineren Fall von Satz 4.9 ist nicht bekannt, ob die Resolventenmenge der Abschliessung \tilde{A}_e nicht - leer ist.

Eine weitere Anwendung von Satz 3.7 geben wir im Anhang zu Abschnitt 4. Da wird ein Kriterium für die Gültigkeit von Rellichs Auswahlssatz für Sobolev - Räume mit gewichteten Normen in beliebigen offenen Mengen $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ abgeleitet. Wir konstruieren dann zu jedem Ω Gewichtsfunktionen, die dieses Kriterium erfüllen. - Da wir für gewisse gleichmässig stark elliptische Sesquilinearformen erster Ordnung zeigen können, dass sie in Sobolev - Räumen mit gewichteter Norm beschränkt sind und einer Gårding - Ungleichung genügen, erhält man die Fredholm - Alternative für

das verallgemeinerte Dirichlet - Problem in diesen Räumen mit gewichteter Norm, falls noch das Auswahlkriterium erfüllt ist. Ein Beispiel, bei dem alle Bedingungen im Fall eines unbeschränkten Gebietes Ω erfüllt sind, geben wir auf S.39 an.

Lemma 2.12, Satz 2.13 und die Ergebnisse von F. E. Browder [4] und von K. Friedrichs [7] (1934) motivieren die Frage, ob es Erweiterungen A_φ zu den in Abschnitt 4 untersuchten Operatoren $A = L + P$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit der kEE gibt, deren Resolventenmengen nicht leer sind und die selbst auch die kEE besitzen. Wir zeigen in Abschnitt 5, dass die Operatoren $A = L + P$ aus Abschnitt 4 den Voraussetzungen eines Satzes von Browder [3] über formaladjungierte Paare von Abbildungen genügen, der die Existenz einer der gesuchten Erweiterungen sichert. -

Betrachtet man den Operator $A = -\Delta + p$ auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ (p wie oben), so besitzt die aus A konstruierbare Friedrichs - Erweiterung A_F ein diskretes Spektrum (Friedrichs 1934 [7]). Auch zu nicht - symmetrischen Operatoren im Hilbertraum, die regulär akkretiv sind, kann man (siehe M. Schechter [46]) Friedrichs - Erweiterungen konstruieren (mit dem eingeschränkten Ziel, Fortsetzungen mit nicht - leerer Resolventenmenge zu erhalten. Friedrichs wollte sich selbstadjungierte Fortsetzungen zu symmetrischen Operatoren verschaffen.). M. Schechter gibt in [46] Voraussetzungen an die Operatoren $A = L + q$ an (q darf beschränkt sein), die die Konstruktion einer Friedrichs - Erweiterung ermöglichen. Man sieht, dass diese Voraussetzungen an A und diejenigen, die die kEE implizieren, verträglich sind. Wir beweisen: Wenn ein Operator $A = L + P$ eine Friedrichs - Erweiterung besitzt und wenn A die hinreichenden kEE - Bedingungen aus Abschnitt 4 erfüllt, so hat A_F auch die kEE. Damit ist eine Klasse auch nicht - elliptischer Operatoren der Form $A = L + P$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ gefunden, deren Friedrichs - Erweiterungen diskrete Spektren besitzen.

2 Lineare Abbildungen in Banachräumen mit der kEE

Seien X und Y Banachräume, $D_T \subset X$ ein linearer Teilraum, $T: D_T \rightarrow Y$ eine lineare Abbildung. N_T bezeichne ihren Kern $\{x \in D_T \mid T(x) = 0\}$ und R_T ihr Bild, $\|\cdot\|_T$ die Graphennorm $D_T \ni x \mapsto \|T(x)\|_Y + \|x\|_X$. Dann ist die Einbettung $i_T: (D_T, \|\cdot\|_T) \rightarrow X$ stetig.

2.1 Definition: T hat die Eigenschaft der kompakten Einbettung kEE: $\Leftrightarrow i_T$ ist kompakt.

Dabei heisst eine lineare Abbildung eines normierten linearen Raumes X_1 in einen normierten linearen Raum Y_1 kompakt, wenn das Bild der abgeschlossenen Einheitskugel relativkompakt in Y_1 ist. Jede kompakte lineare Abbildung ist stetig, Kompositionen kompakter linearer Abbildungen und stetiger linearer Abbildungen sind kompakt.

2.2 Lemma: $(D_T, \|\cdot\|_T)$ ist ein Banachraum $\Leftrightarrow T$ ist abgeschlossen.

Beweis: T abgeschlossen \Leftrightarrow Graph $G(T)$ in $X \times Y$ abgeschlossen $\Leftrightarrow G(T)$ vollständig in $X \times Y$. Sei $G(T)$ vollständig, $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(D_T, \|\cdot\|_T)$. Dann ist $(u_n, T(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $G(T)$, konvergiert gegen ein $(u, T(u))$, also gilt $u_n \rightarrow u$ in $(D_T, \|\cdot\|_T)$, und $(D_T, \|\cdot\|_T)$ ist vollständig. Die Umkehrung ist klar.

2.3 Lemma: Seien $X_1 \subset X$, $Y_1 \subset Y$ lineare dichte Teilräume und sei $T_1: X_1 \rightarrow Y_1$ eine kompakte lineare Abbildung (bezüglich der durch die eingeschränkten Normen induzierten Topologien). Die eindeutig bestimmte stetige Fortsetzung T von T_1 auf X ist kompakt, und es gilt $T(X) \subset Y_1$.

Beweis: [18], S. 209.

Lemma 2.3 wird benutzt, um den Nachweis der kEE einer Abschliessung auf den der kEE des abzuschliessenden Ope-

rators zu reduzieren.

2.4 Lemma: Sei T abschliessbar mit Abschliessung \tilde{T} . Dann gilt: T hat die kEE $\Leftrightarrow \tilde{T}$ hat die kEE.

Beweis: T habe die kEE. Dann folgt: $G(\tilde{T}) = \overline{G(T)}$, $(D_T, \|\cdot\|_T)$ liegt daher dicht in $(D_{\tilde{T}}, \|\cdot\|_{\tilde{T}})$ mit $\|\cdot\|_{\tilde{T}}|_{D_T} = \|\cdot\|_T$. Nach 2.2 ist $(D_{\tilde{T}}, \|\cdot\|_{\tilde{T}})$ ein Banachraum. 2.3 für $i_T, X = (D_{\tilde{T}}, \|\cdot\|_{\tilde{T}})$, $X_1 = (D_T, \|\cdot\|_T)$, $Y = Y_1 = X$ gibt nun die Behauptung für \tilde{T} .

Hat \tilde{T} die kEE, so ist i_T die Einschränkung von $i_{\tilde{T}}$ auf $(D_T, \|\cdot\|_T)$, es gilt $i_T(\{x \in D_T | \|x\|_T \leq 1\}) \subset i_{\tilde{T}}(\{x \in D_{\tilde{T}} | \|x\|_{\tilde{T}} \leq 1\})$, daher ist mit der rechten Menge auch die linke relativ-kompakt in X.

2.5 Satz: T sei abgeschlossen und habe die kEE. Dann gilt: $\dim N_T < \infty \wedge R_T$ abgeschlossen.

Zum Beweis: Der normierte Raum $(D_T, \|\cdot\|_T)$ ist nach 2.2 vollständig. Mit $\mathcal{D}_1 := (D_T, \|\cdot\|_T)$ sind alle Voraussetzungen von Theorem VII.2.1, Teil ii) in [9] erfüllt. - In [5], S. 94 wird eine Version von Satz 2.5 in lokalkonvexen Räumen bewiesen, aber da in den folgenden Abschnitten nur Operatoren in Banachräumen betrachtet werden, genügt hier die Aussage von Satz 2.5.

Mit der nächsten Definition sagt Satz 2.5: " Jeder abgeschlossene lineare Operator mit der kEE ist ein Semi-Fredholmoperator mit endlichdimensionalem Kern ".

2.6 Definition: Eine lineare Abbildung $T: X \supset D_T \rightarrow Y$ heisst Fredholmoperator, wenn gilt: T ist abgeschlossen, N_T ist endlich-dimensional, R_T ist abgeschlossen, die Kodimension von R_T ist endlich.

$\alpha(T) := \dim N_T - \text{codim } R_T$ heisst dann Index von T.

T heisst Semi-Fredholmoperator, wenn T abgeschlossen ist, wenn R_T abgeschlossen ist und wenn $\dim N_T$ oder $\text{codim } R_T$ endlich ist.

Die Umkehrung von Satz 2.5 ist falsch: Sei A_1 die Abschliessung des Operators $L_2(\mathbb{R}^n) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \Delta u \in L_2(\mathbb{R}^n)$. Wegen $\mathcal{G}(A_1) = \mathbb{R}_0^+$ nach [12] etwa gilt $-1 \in \mathcal{G}(A_1)$ (Resolventenmenge zu A_1), also ist $A := A_1 - \text{Id}$ abgeschlossen (Lemma 2.8 und 2.2) mit $N_A = \{0\}$, $R_A = L_2(\mathbb{R}^n)$, damit ein Fredholmoperator. Hätte A die kEE, so auch $A|C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ (Lemma 2.4). $A|C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten. Nach Satz 4.1 folgt daraus ein Widerspruch gegen die Aussage " A hat die kEE ".

2.7 Lemma: Sei T abgeschlossen und injektiv. Dann gilt: T hat die kEE $\Leftrightarrow T^{-1}: (R_T, \|\cdot\|_T | R_T) \rightarrow X$ ist kompakt.

Beweis: " \Rightarrow ": T hat die kEE $\Rightarrow R_T = \overline{R_T}$ (nach 2.5). Dann ist T^{-1} beschränkt (denn T^{-1} ist eine lineare Abbildung des Banachraums $(R_T, \|\cdot\|_T | R_T)$ in den Banachraum X mit abgeschlossenem Graphen). Für $y \in R_T$ folgt $\|T^{-1}(y)\|_T = \|T^{-1}(y)\|_X + \|y\|_Y \leq c\|y\|_Y + \|y\|_Y$, also ist die von T^{-1} durch $\hat{T}^{-1}(y) := T^{-1}(y)$ induzierte Abbildung \hat{T}^{-1} von R_T in $(D_T, \|\cdot\|_T)$ stetig. Wegen $T^{-1} = i_T \circ \hat{T}^{-1}$ und wegen der Kompaktheit von i_T folgt die von T^{-1} . " \Leftarrow ": Sei \hat{T} die von T induzierte Abbildung von $(D_T, \|\cdot\|_T)$ in $(R_T, \|\cdot\|_T | R_T)$. Es gilt $i_T = T^{-1} \circ \hat{T}$, aus der Kompaktheit von T^{-1} folgt die von i_T , da \hat{T} stetig ist.

Im folgenden werden für (abgeschlossene) lineare Abbildungen in einem Banachraum X über dem Körper \mathbb{C} die Zusammenhänge zwischen der kEE und dem Spektrum untersucht.

2.8 Lemma: Sei $T: X \supset D_T \rightarrow X$ linear. Dann gilt: Die Graphennormen zu den Abbildungen $T + \lambda \text{Id}: X \supset D_T \ni x \mapsto T(x) + \lambda x \in X$ sind für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ untereinander äquivalent.

Beweis: Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, dann gilt für $x \in D_T$: $\|x\|_{T+\lambda \text{Id}} = \|x\| + \|T(x) + \lambda x\| = \|x\| + \|T(x) + \mu x + (\lambda - \mu)x\| \leq (1 + |\lambda - \mu|)(\|x\| + \|T(x) + \mu x\|) = (1 + |\lambda - \mu|)\|x\|_{T+\mu \text{Id}}$.

2.9 Lemma: T hat die kEE $\Leftrightarrow (\forall \lambda \in \mathbb{C}: T + \lambda \text{Id} \text{ hat die kEE })$.

Beweis von " \Rightarrow ": Die Einheitskugel in $(D_T, \|\cdot\|_{T+\lambda Id})$ liegt nach 2.8 in der Kugel vom Radius $(1 + |\lambda|)$ im Raum $(D_T, \|\cdot\|_T)$, daher gilt $i_{T+\lambda Id}(\{x \in D_T \mid \|x\|_{T+\lambda Id} \leq 1\}) \subset i_T(\{x \in D_T \mid \|x\|_T \leq (1 + |\lambda|)\}) \subset K$ mit einer kompakten Menge K in X wegen der kEE von T .

2.10 Definition: Sei $T: X \supset D_T \rightarrow X$ abgeschlossen. Die Resolventenmenge $\rho(T)$ ist die Menge $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid T - \lambda Id \text{ hat eine Rechtsinverse in } L_c(X, X)\}$. Diese Rechtsinverse $R(T, \lambda)$ zu $\lambda \in \rho(T)$ und $T - \lambda Id$ heisst Resolvente von T im Punkt λ .

Das Spektrum von T ist die Menge $\sigma(T) := \mathbb{C} \setminus \rho(T)$. $\sigma_p(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid 0 < \dim N_{T-\lambda Id} < \infty\}$ heisst Punktspektrum von T , $\sigma_r(T) := \{\lambda \in \sigma(T) \mid \dim N_{T-\lambda Id} = 0 \wedge R_{T-\lambda Id} \text{ abgeschlossen} \wedge R_{T-\lambda Id} \neq X\}$ heisst Restspektrum von T , $\sigma_c(T) := \sigma(T) \setminus (\sigma_p(T) \cup \sigma_r(T))$ heisst kontinuierliches Spektrum von T .

$L_c(X, X)$ bezeichnet dabei die stetigen linearen Abbildungen von X in X . $\sigma(T)$ ist dann Vereinigung der paarweise disjunkten Mengen $\sigma_p(T), \sigma_r(T), \sigma_c(T)$. Diese Zerlegung des Spektrums ist motiviert durch

2.11 Satz: $T: X \supset D_T \rightarrow X$ sei abgeschlossen und linear. T habe die kEE. Dann gilt: $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$.

Beweis: Mit T sind alle $T + \lambda Id, \lambda \in \mathbb{C}$, abgeschlossen (vgl. den Beweis von Lemma 2.12). Nach Satz 2.5 und Lemma 2.9 gilt dann für alle $\lambda \in \mathbb{C}$: $\dim N_{T+\lambda Id} < \infty$ und $R_{T+\lambda Id} = \overline{R_{T+\lambda Id}}$, also: $\sigma(T) \subset \sigma_p(T) \cup \sigma_r(T)$.

2.12 Lemma: Sei T abgeschlossen und sei $\rho(T)$ nicht leer. Dann gilt:

- i) T hat die kEE $\Rightarrow \forall \lambda \in \rho(T): R(T, \lambda)$ ist kompakt,
- ii) $(\exists \lambda \in \rho(T): R(T, \lambda) \text{ kompakt}) \Rightarrow T$ hat die kEE.

Beweis: von i): Sei $\lambda \in \rho(T)$, nach 2.9 hat $T - \lambda Id$ die kEE, ist injektiv und abgeschlossen, nach Lemma 2.7 ist die Resolvente kompakt.

Zu ii): Sei für $\lambda \in \rho(T)$ $R(T, \lambda)$ kompakt. $T - \lambda Id$ ist dann injektiv. Mit T ist $T - \lambda Id$ abgeschlossen (Lemma 2.2

und Lemma 2.8), Lemma 2.7 gibt: $T - \lambda Id$ hat die kEE, also nach dem Beweis von Lemma 2.9 auch T .

Zum Beweis von Lemma 2.12 braucht man nur eine schwächere Version von Lemma 2.7: Man darf die Stetigkeit der Inversen voraussetzen, da die Resolventen stetig sind, und kommt daher im Beweis ohne den Satz vom abgeschlossenen Graphen aus. - Aus Lemma 2.12 folgt, dass alle Resolventen kompakt sind, wenn $R(T, \lambda)$ für ein $\lambda \in \mathbb{C}$ kompakt ist. Sonst zeigt man das über die Resolventengleichung.

2.13 Satz: Sei $T: X \supset D_T \rightarrow X$ eine abgeschlossene lineare Abbildung, $\rho(T)$ sei nicht leer und die Resolventen seien kompakt. Dann gilt:

- i) $\forall \lambda \in \mathbb{C}: T - \lambda Id$ ist ein Fredholmoperator vom Index Null,
- ii) $\sigma(T)$ ist in \mathbb{C} diskret, und es gilt: $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

Beweis: von i): Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\lambda_0 \in \rho(T)$. $T - \lambda Id$ ist ein Fredholmoperator: Es gilt der Satz (Mol, S. 111):

Seien X_1, Y_1 Banachräume. $T_1 \in L_c(X_1, Y_1)$ ist genau dann ein Fredholmoperator, wenn es Abbildungen $S_1, S_2 \in L_c(Y_1, X_1)$ gibt mit $S_1 \circ T_1 - Id_{X_1}, T_1 \circ S_2 - Id_{Y_1}$ kompakt.

Die Voraussetzungen dieses Satzes sind erfüllt, wenn T_1 der von $T - \lambda Id$ induzierte Operator von $(D_T, \|\cdot\|_{T-\lambda Id})$ in $Y_1 := X$, $S_1 := S_2 :=$ (von $R(T, \lambda_0)$ induzierter Operator von X in $(D_T, \|\cdot\|_{T-\lambda Id})$) ist:

$(D_T, \|\cdot\|_{T-\lambda Id})$ ist ein Banachraum, da T abgeschlossen ist und die Lemmata 2.8 und 2.2 gelten. $T - \lambda Id$ induziert eine stetige lineare Abbildung von $(D_T, \|\cdot\|_{T-\lambda Id})$ in X . $R(T, \lambda_0)$ ist kompakt und (vgl. den Beweis von Lemma 2.7) induziert eine stetige lineare Abbildung von X in $(D_T, \|\cdot\|_{T-\lambda_0 Id})$, also wegen Lemma 2.8 in $(D_T, \|\cdot\|_{T-\lambda Id})$.

Nach Lemma 2.12 hat T die kEE, nach Lemma 2.9 auch $T - \lambda Id$, also ist $i_{T-\lambda Id}$ kompakt, für alle $x \in X$ gilt $(R(T, \lambda_0) \upharpoonright D_T)(x) = ((R(T, \lambda_0) \upharpoonright D_T) \circ i_{T-\lambda Id})(x)$, die von $R(T, \lambda_0) \upharpoonright D_T$ induzierte Abbildung von $(D_T, \|\cdot\|_X \upharpoonright D_T)$ in $(D_T, \|\cdot\|_{T-\lambda_0 Id})$ ist stetig (vgl. Beweis von 2.7),

die Komposition einer stetigen und einer kompakten linearen Abbildung ist kompakt - also induziert $R(T, \lambda_0) | D_T$ eine kompakte lineare Abbildung von $(D_T, \|\cdot\|_{T-\lambda Id})$ in $(D_T, \|\cdot\|_{T-\lambda_0 Id})$, wegen Lemma 2.8 von $(D_T, \|\cdot\|_{T-\lambda Id})$ in $(D_T, \|\cdot\|_{T-\lambda Id})$.

Es gilt ersichtlich für alle $x \in D_T$:
 $R(T, \lambda_0) \circ (T - \lambda Id)(x) = R(T, \lambda_0) \circ (T - \lambda_0 Id) + (\lambda_0 - \lambda) Id(x)$
 $= Id_{D_T}(x) + (\lambda_0 - \lambda) R(T, \lambda_0) | D_T(x)$.

Für alle $x \in X$:
 $(T - \lambda Id) \circ R(T, \lambda_0)(x) = Id_X(x) + (\lambda_0 - \lambda) R(T, \lambda_0)(x)$.

Aus dem zitierten Satz folgt nun: $\dim N_{T-\lambda Id} < \infty$, $\text{codim } R_{T-\lambda Id} < \infty$, $R_{T-\lambda Id}$ abgeschlossen in X . Nach Lemma 2.8 und 2.2 ist $T - \lambda Id$ abgeschlossen, daher ein Fredholmoperator in X nach Definition 2.6.

Es gilt $(\forall \lambda \in \mathbb{C}: \alpha(T - \lambda Id) = 0)$, denn:
 Jede Abbildung $T - \lambda Id$ induziert einen stetigen Fredholmoperator $F_\lambda: (D_T, \|\cdot\|_T) \rightarrow X$ mit $\alpha(F_\lambda) = \alpha(T - \lambda Id)$ (Lemma 2.8) nach dem bisher bewiesenen. Die Abbildung $a: \{\lambda \mapsto F_\lambda \in L_C((D_T, \|\cdot\|_T), X)\}$ ist stetig:

$$\forall x \in D_T: \|(F_\lambda - F_\mu)(x)\| = \|T(x) - \lambda x - T(x) + \mu x\| = |\lambda - \mu| \|x\|, \text{ daher } \|F_\lambda - F_\mu\| \leq |\lambda - \mu|.$$

Die Abbildung $b: \{F' \in L_C((D_T, \|\cdot\|_T), X) \mid F' \text{ Fredholmoperator}\} \rightarrow \mathbb{Z}$ mit $F' \mapsto \alpha(F')$ ist stetig bezüglich der von \mathbb{C} und $L_C((D_T, \|\cdot\|_T), X)$ induzierten Topologien ([10], S. 107). Also ist $b \circ a$ stetig, als Abbildung einer zusammenhängenden Menge in die Menge \mathbb{Z} konstant. Für $\lambda \in \rho(T)$ ist offenbar $\alpha(T - \lambda Id) = 0$, also verschwindet der Index überall in \mathbb{C} .

Zu ii): $\sigma(T) = \sigma_p(T)$ folgt aus i): Wegen 2.12 und 2.11 ist zu zeigen: $\sigma_R(T) = \emptyset$. Sei $\lambda \in \sigma_R(T)$. Wegen $\alpha(T - \lambda Id) = 0$ ist $T - \lambda Id$ surjektiv und injektiv, die Rechtsinverse ist stetig, weil $T - \lambda Id$ mit T abgeschlossen ist und weil X ein Banachraum ist. Daher gilt $\lambda \in \rho(T)$ im Widerspruch zu $\rho(T) \cap \sigma(T) = \emptyset$.

Die Aussage " $\sigma(T)$ diskret in \mathbb{C} " kann man wie üblich ableiten: Aus der Kompaktheit der Resolventen und aus den bekannten Sätzen über Spektren kompakter Abbildungen in Banachräumen folgt, dass $\sigma(R(T, \lambda))$ für $\lambda \in \rho(T)$ eine sich höchstens gegen 0 häufende abzählbare Menge ist, ferner gilt: $\lambda \in \sigma(T) \Leftrightarrow (\lambda - \lambda')^{-1} \in \sigma(R(T, \lambda'))$.

3 KEE - Kriterien

Um möglichst schwache hinreichende Bedingungen für die KEE von Differentialoperatoren in L_p -Räumen zu finden, wird die Kompaktheit von linearen Abbildungen T eines normierten Raumes X in $L_p(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, nicht leer, $p \in [1, \infty)$) charakterisiert durch Abschätzungen. In der Anwendung ist T die Einbettung i_A zum linearen partiellen Differentialoperator A .

T ist kompakt, wenn das Bild der Einheitskugel in X unter T relativkompakt in $L_p(\Omega)$ ist. Die Relativkompaktheit von Mengen in $L_p(\Omega)$ charakterisiert ein Kriterium von A. N. Kolmogorov und M. Riesz:

3.1 Satz: Sei $p \in [1, \infty)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Sei $M \subset L_p(\Omega)$. Dann gilt: M relativkompakt in $L_p(\Omega) \Leftrightarrow$

- i) M beschränkt \wedge
- ii) (Es gibt eine Ausschöpfung $(\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ von Ω mit $\int_{\Omega_\mu} |u|^p \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0$ gleichmässig auf M) \wedge
- iii) ($\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(\cdot + t) - \tilde{u}|^p \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ gleichmässig auf M).

Dabei bezeichnet \tilde{u} die Fortsetzung von u durch den Wert 0 auf \mathbb{R}^n , und $\tilde{u}(\cdot + t)$ ist durch $x \mapsto \tilde{u}(x + t)$ definiert. Unter einer Ausschöpfung von Ω verstehen wir eine Folge offener beschränkter Teilmengen von Ω mit $\Omega_\mu \subset \Omega_{\mu+1}$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$ und mit $\bigcup_{\mu \in \mathbb{N}} \Omega_\mu = \Omega$. - Der Beweis von Satz 3.1 ergibt sich aus dem des entsprechenden Satzes für $\Omega = \mathbb{R}^n$ in [18], S. 201, mit Null-Fortsetzung.

3.2 Satz: Sei $p \in [1, \infty)$, sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Dann gilt für eine Teilmenge $M \subseteq L_p(\Omega)$:

M relativkompakt \Leftrightarrow (Bedingung i) und Bedingung iii) aus Satz 3.1 sind für M erfüllt).

Beweis: Folgt aus Satz 3.1 mit $\Omega_\mu := \Omega$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$. -

Aus Satz 3.1 erhält man:

3.3 Satz: Sei X ein normierter linearer Raum über dem Körper \mathbb{C} . Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und sei $p \in [1, \infty)$. Sei

$T \in L_c(X, L_p(\Omega))$. Dann gilt: T kompakt \iff

- i) ((Es gibt eine Ausschöpfung $(\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ von Ω mit:

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |T(u)|^p \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0$$
 gleichmässig auf $\{T(u) \mid \|u\|_X \leq 1\}$) \wedge
- ii) ($\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{T(u)}(\cdot + t) - \widetilde{T(u)}|^2 \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$ gleichmässig auf $\{T(u) \mid \|u\|_X \leq 1\}$).

Beweis: Die Implikation " \implies " folgt aus Satz 3.1 und den Bemerkungen davor. Die Implikation " \impliedby " folgt aus Satz 3.1, weil wegen $T \in L_c(X, L_p(\Omega))$ die Menge $\{T(u) \mid \|u\|_X \leq 1\}$ beschränkt ist und daher die Bedingung i) aus Satz 3.1 erfüllt ist, und aus den Bemerkungen vor Satz 3.1.

3.4 Satz (Kriterium mit Abschätzungen): Sei X ein normierter linearer Raum über dem Körper \mathbb{C} , sei die Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $p \in [1, \infty)$ und sei T aus $L_c(X, L_p(\Omega))$. Dann gilt: T kompakt \iff

- i) (Es gibt eine Ausschöpfung $(\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ von Ω und eine Folge $(s_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ mit $s_\mu \geq 0$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$ und mit $s_\mu \rightarrow 0$, sodass für alle $\mu \in \mathbb{N}$ und für alle $u \in X$ gilt:

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |T(u)|^p \leq s_\mu \|u\|_X^p \quad \wedge$$
- ii) (Es gibt eine Abbildung $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $s(0) = 0$, die in 0 stetig ist, sodass für alle $t \in \mathbb{R}^n$ und für alle $u \in X$ gilt: ($\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{T(u)}(\cdot + t) - \widetilde{T(u)}|^p \leq s(t) \|u\|_X^p$).

Die Abbildung s und die Folgenglieder s_μ sind dabei von T abhängig.

Beweis von Satz 3.4: Zu zeigen ist: (Bedingung i) aus Satz 3.4) \iff (Bedingung i) aus Satz 3.3) und (Bedingung ii) aus Satz 3.4) \iff (Bedingung ii) aus Satz 3.3).

Sei Bedingung i) in Satz 3.4 erfüllt. Für alle $u \in X$ mit $\|u\|_X \leq 1$ folgt:

$$\left(\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |T(u)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq s_\mu \rightarrow 0,$$

damit Bedingung i) in Satz 3.3.

Analog ergibt Bedingung ii) aus Satz 3.4 die Bedingung ii) aus Satz 3.3.

Sei Bedingung i) aus Satz 3.3 erfüllt. Es folgt:

$$\sup \left\{ \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |T(u)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \mid u \in X \wedge \|u\|_X \leq 1 \right\} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0.$$

Setze $s_\mu := \sup \{ \dots \} \geq 0$. Für $u = 0$ ist die Behauptung richtig, für alle $u \in X \setminus \{0\}$ folgt: $\|u\|_X \neq 0$ und $\|u\|_X^{-1} u \|u\|_X = 1$, also für alle $\mu \in \mathbb{N}$

$$\left(\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |T(\|u\|_X^{-1} u)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq s_\mu,$$

daraus folgt die behauptete Ungleichung für u.

Sei Bedingung ii) aus Satz 3.3 erfüllt. Wie oben folgt

$$\text{für } s(t) := \sup \left\{ \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{T(u)}(\cdot + t) - \widetilde{T(u)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \mid \|u\|_X \leq 1 \right\}$$

für alle $t \in \mathbb{R}^n$: $s(t) \geq 0$ und $s(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0$.

Für $u \in X \setminus \{0\}$ und für alle $t \in \mathbb{R}^n$ gilt dann:

$$s(t) \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{T(\|u\|_X^{-1} u)}(\cdot + t) - \widetilde{T(\|u\|_X^{-1} u)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\|u\|_X^{-1} \widetilde{T(u)}(\cdot + t) - \|u\|_X^{-1} \widetilde{T(u)}|^p \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\|u\|_X^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{T(u)}(\cdot + t) - \widetilde{T(u)}|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

also ist Bedingung ii) von Satz 3.4 erfüllt.

Aus Satz 3.4 kann man wie oben ein Kriterium für den Fall einer beschränkten Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ herleiten, welches die Kompaktheit von T durch Bedingung ii) aus Satz 3.4 charakterisiert.

Angewendet wird Satz 3.4 auf die Einbettungsabbildung i_A für einen linearen partiellen Differentialoperator A in $L_p(\Omega)$ mit Definitionsbereich $C_0^\infty(\Omega)$ oder $\{u \mid u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \wedge (|\alpha| < m \implies D^\alpha u|_{\partial\Omega} = 0)\}$ - letzterer, wenn A elliptisch und von der Ordnung 2m ist.

Bedingung ii) aus Satz 3.4 lässt sich dann als eine schwache Koerzivitätsungleichung für A auffassen. Sie lautet für i_A :

$$(2) \exists (s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : s(0) = 0 \wedge s \text{ in } 0 \text{ stetig})$$

$$\forall t \in \mathbb{R}^n \quad \forall u \in D_A:$$

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widetilde{u}(\cdot + t) - \widetilde{u}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq s(t) (\|u\|_{L_p(\Omega)} + \|A(u)\|_{L_p(\Omega)}).$$

Man schätzt also - falls $s(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^+$ - die Differenzenquotienten bezüglich s(t) - statt |t| - der $u \in D_A$

gleichmässig in t durch die Graphennorm zu A ab. Sonst wird von Koerzitivitätsungleichungen gesprochen, wenn die Ableitungen bis zu einer gewissen Ordnung in L_p - Norm durch die Graphennorm zu A abgeschätzt werden.

Die folgende Überlegung motiviert die Auffassung von Bedingung ii) in Satz 3.4 als schwache Koerzitivitätsungleichung zusätzlich: Betrachtet man auf $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ die von Polynomen $P(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha \xi^\alpha$ ($a_\alpha \in \mathbb{C}$) definierten Differentialoperatoren $L: u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha u$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$, so kann man zeigen:

$$(\exists c \in \mathbb{R}^+ \forall u \in D_L: \|u\|_{H^{1,2}(\mathbb{R}^n)} \leq c(\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \|L(u)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)})$$

$$\Leftrightarrow (\exists c' \in \mathbb{R}^+ \exists d \in \mathbb{R}^+ \forall \xi \in \mathbb{R}^n: |\xi| \geq d \Rightarrow |P(\xi)| \geq c'|\xi|)$$

- Beweis der Äquivalenz wie in [12] für 2t - koerzitive Operatoren. Die Differentialoperatoren mit diesen beiden Eigenschaften heissen dann 1 - koerzitiv. Im nächsten Abschnitt wird gezeigt, dass solche Operatoren die Eigenschaft (2) besitzen, (2) ist daher für Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten eine schwächere Aussage als die der 1 - Koerzitivität.

Für die Einbettung i_A lautet Bedingung i) von Satz 3.4:

$$\exists (\text{Ausschöpfung } (\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}} \text{ von } \Omega) \exists ((s_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}: s_\mu \rightarrow 0 \wedge (\forall \mu \in \mathbb{N}: s_\mu \in \mathbb{R}_0^+)) \forall u \in D_A \forall \mu \in \mathbb{N}:$$

$$(\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |u|^p)^{\frac{1}{p}} \leq s_\mu \|u\|_A.$$

Wir geben eine äquivalente Bedingung an, die sich leichter verifizieren lässt:

$$(3) \exists (\text{Ausschöpfung } (\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}} \text{ von } \Omega) \exists (\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ messbar: } \inf \varphi|_{\Omega \setminus \Omega_\mu} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \infty) \forall u \in D_A:$$

$$(\int_{\Omega} |u|^p \varphi)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_A.$$

Wir zeigen zunächst:

3.5 Satz: Sei T eine lineare Abbildung eines normierten linearen Raumes X in $L_p(\Omega)$. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ sei offen, es gelte $p \in [1, \infty)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

$$i) \exists (\text{Ausschöpfung } (\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}} \text{ von } \Omega) \exists (\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+ \text{ messbar: } \inf(\varphi|_{\Omega \setminus \Omega_\mu}) \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} \infty) \forall x \in X:$$

$$(\int_{\Omega} |T(x)|^p \varphi)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|,$$

$$ii) \exists (\text{Ausschöpfung } (\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}} \text{ von } \Omega) \exists (\text{Folge } (s_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{R}^+: s_\mu \rightarrow 0 \wedge \sum_1^\infty s_\mu < \infty) \forall x \in X \forall \mu \in \mathbb{N}:$$

$$(\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |T(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq s_\mu \|x\|.$$

Beweis: " \Rightarrow ": Aus der Voraussetzung über φ folgt, dass eine Ausschöpfung $(\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ von Ω existiert mit $\inf(\varphi|_{\Omega \setminus \Omega_\mu}) \geq \mu^{2p}$ für alle μ (man wähle eine Teilfolge von $(\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$). Bezeichnet χ_μ die charakteristische Funktion zu Ω_μ ($\chi_\mu(x) = 1$ für $x \in \Omega_\mu$ und $= 0$ sonst), so folgt mit $s_\mu := \mu^{-2}$ die Behauptung aus

$$\forall \mu \in \mathbb{N} \forall x \in X: ((\int_{\Omega} |T(x)|^p \frac{(1-\chi_\mu)^p}{\mu^{-2p}})^{\frac{1}{p}} \leq ((\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} \varphi |T(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$((\int_{\Omega} \varphi |T(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|, \text{ also: } \forall \mu \in \mathbb{N} \forall x \in X: \mu^2 (\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |T(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|x\|$$

Zu " \Leftarrow ": Setze für $\xi \in \Omega$ $\varphi(\xi) := (\sum_1^\infty (1 - \chi_{\Omega_\mu}(\xi)))^p$. Die Summe aus nichtnegativen Gliedern konvergiert für alle $\xi \in \Omega$, da stets fast alle Glieder verschwinden.

φ^1 ist messbar als punktweiser Limes messbarer Funktionen.

$$a) \text{ Behauptung: } \forall x \in X: ((\int_{\Omega} \varphi^1 |T(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_1^\infty s_\mu) \|x\|.$$

Beweis mit dem Satz von B. Levi ([10], S. 47): Setze

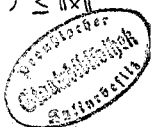
$$f_m(\xi) := [\sum_1^m (1 - \chi_{\Omega_\mu}(\xi))]^p |T(x)(\xi)|^p. \text{ Der Summenfaktor } [\dots]^p \text{ ist in } \Omega \text{ beschränkt und messbar, also ist wegen}$$

$T(x) \in L_p(\Omega)$ f_m summierbar. Die Folge $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ ist punktweise monoton wachsend und hat eine beschränkte Integralfolge:

$$((\int_{\Omega} f_m)^{\frac{1}{p}} = ((\int_{\Omega} (\sum_1^m (1 - \chi_{\Omega_\mu})^p |T(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_1^m s_\mu s_\mu^{-1} ((\int_{\Omega} (1 - \chi_{\Omega_\mu})^p |T(x)|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\sum_1^m s_\mu) \|x\| \leq (\sum_1^\infty s_\mu) \|x\|.$$

Nach dem Satz von B. Levi konvergiert $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ fast überall in Ω gegen eine summierbare Funktion f mit $f = \lim_{m \rightarrow \infty} f_m$. Da $(f_m)_{m \in \mathbb{N}}$ punktweise in Ω gegen $\varphi^1 |T(x)|^p$ geht, folgt die Behauptung a).

$$b) \text{ Setze } \varphi^1|_{\Omega \setminus \Omega_\mu} := \varphi^1, \varphi^1|_{\Omega_\mu} := 1. \text{ Dann gilt: } \varphi^1 \text{ positiv}$$



und messbar, und: $\mu \geq 2 \Rightarrow \inf \varphi^{\mu} | \Omega \setminus \Omega_{\mu} = \mu^P (\rightarrow \infty)$, und:

$$\int_{\Omega} \varphi^{\mu} |T(x)|^p = \int_{\Omega_{\mu}} |T(x)|^p + \int_{\Omega \setminus \Omega_{\mu}} \varphi^{\mu} |T(x)|^p \leq$$

$$\|T(x)\|_{L_p(\Omega)}^p + (\sum_{\lambda}^{\infty} s_{\mu})^p \|x\|^p \leq (\|T\|^p + (\sum_{\lambda}^{\infty} s_{\mu})^p) \|x\|^p.$$

Für $\varphi := (\|T\|^p + (\sum_{\lambda}^{\infty} s_{\mu})^p)^{-1} \varphi^{\mu}$ folgt die Behauptung.

Die Äquivalenzbehauptung vor Satz 3.5 ergibt sich nun aus

3.6 Lemma: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty)$, $T: X \rightarrow L_p(\Omega)$ linear. Dann ist Bedingung i) aus Satz 3.4 für die Abbildung T äquivalent zu:

$$\exists (\text{Ausschöpfung } (\Omega_{\mu})_{\mu \in \mathbb{N}} \text{ von } \Omega) \exists (\text{Folge } (s_{\mu})_{\mu \in \mathbb{N}} \text{ in } \mathbb{R}^+ :$$

$$\sum_{\lambda}^{\infty} s_{\mu} < \infty) \forall x \in X \forall \mu \in \mathbb{N}: \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_{\mu}} |T(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq s_{\mu} \|x\|.$$

Beweis von " \Rightarrow ": Sei $(\Omega_{\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung und $(s_{\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in \mathbb{R}^+ , sodass Bedingung i) in Satz 3.4 für die Abbildung T erfüllt ist. Eine Teilfolge $(s_{\mu\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ von $(s_{\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$ erfüllt $\sum_{\lambda}^{\infty} s_{\mu\nu} < \infty$, $(\Omega_{\mu\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ ist eine Ausschöpfung von Ω , und für $(\Omega_{\mu\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ und $(s_{\mu\nu})_{\nu \in \mathbb{N}}$ gelten die behaupteten Abschätzungen.

In zwei Anwendungen in Abschnitt 4 werden die Bedingungen der folgenden "approximativen" Kriterien nachgewiesen.

Sei $\varphi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^+)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. $L_p(\Omega, \varphi)$ ist für $p \in [1, \infty)$ definiert als Menge der Äquivalenzklassen messbarer Funktionen $f: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\int_{\Omega} |f|^p \varphi < \infty$ nach der Relation der Gleichheit bis auf Lebesgue - Nullmengen. Mit der Norm $\|f\|_{L_p(\Omega, \varphi)} := \left(\int_{\Omega} |f|^p \varphi \right)^{\frac{1}{p}}$ wird $L_p(\Omega, \varphi)$ ein Banachraum über \mathbb{C} .

3.7 Satz: Sei X ein normierter linearer Raum, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty)$, $\varphi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^+)$. Sei $T \in L_c(X, L_p(\Omega, \varphi))$. Dann gilt: T ist kompakt \Leftrightarrow (Es gibt eine Ausschöpfung $(\Omega_{\mu})_{\mu \in \mathbb{N}}$ von Ω , sodass gilt:

- i) $\int_{\Omega \setminus \Omega_{\mu}} |T(x)|^p \varphi \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0$ gleichmässig auf $\{T(x) \mid \|x\| \leq 1\}$ und
- ii) $i_{\mu} \circ r_{\mu} \circ T$ ist für alle $\mu \in \mathbb{N}$ kompakt.)

Dabei sind i_{μ} und r_{μ} die Abbildungen $L_p(\Omega_{\mu}, \varphi|_{\Omega_{\mu}}) \ni f \mapsto (\text{Fortsetzung von } f \text{ durch } 0 \text{ auf } \Omega) \in L_p(\Omega, \varphi)$ und $L_p(\Omega, \varphi) \ni g \mapsto g|_{\Omega_{\mu}} \in L_p(\Omega_{\mu}, \varphi|_{\Omega_{\mu}})$.

Beweis von Satz 3.7: Zu " \Rightarrow ": ii) folgt für beliebige Ausschöpfungen aus der Kompaktheit von T und der Stetigkeit von i_{μ} und r_{μ} . i) zeigt man wie den entsprechenden Beweisteil von Satz 3.1: Sei $M := \{T(x) \mid \|x\| \leq 1\}$. M ist relativkompakt in $L_p(\Omega, \varphi)$, also existiert zu $\varepsilon > 0$ eine endliche Menge $\{g_{\lambda_1}, \dots, g_{\lambda_k}\} \subset L_p(\Omega, \varphi)$ mit:

$\forall f \in M \exists \lambda \in \{1, \dots, k\} \exists \mu \in \mathbb{N} : \|f - g_{\lambda}\|_{L_p(\Omega, \varphi)} \leq 2^{-1} \varepsilon.$
 Zu $\varepsilon > 0$ und zu jedem g_{λ} gibt es eine Treppenfunktion t_{λ} mit kompaktem Träger K_{λ} in Ω und $\|t_{\lambda} - g_{\lambda}\|_{L_p(\Omega, \varphi)} \leq 2^{-1} \varepsilon$
 (Diese Treppenfunktionen liegen auch für $\varphi \equiv 1$ dicht in $L_p(\Omega, \varphi)$, denn in $L_p(\Omega, \varphi)$ sind die Funktionen mit kompakten Trägern in Ω dicht, wie man durch Abschneiden leicht sieht, auf Kompakta Ω_{λ} in Ω sind $L_p(\Omega_{\lambda}, \varphi|_{\Omega_{\lambda}})$ - Norm und $L_p(\Omega_{\lambda}, 1)$ - Norm äquivalent, daher kann man auf die Funktionen mit Träger in Ω_{λ} den bekannten Satz für $\varphi = 1$ anwenden, um auch die Approximation durch Treppenfunktionen in $L_p(\Omega_{\lambda}, \varphi|_{\Omega_{\lambda}})$ - Norm zu erhalten.)

Zu Ω konstruiert man unabhängig von ε eine Ausschöpfung - etwa durch $\Omega_{\mu} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < \mu\} \cap \Omega$. Es gibt ein $\mu_0^{(\varepsilon)} \in \mathbb{N}$ mit: $\mu \geq \mu_0^{(\varepsilon)} \Rightarrow \Omega_{\mu} \supset \cup K_{\lambda}$. Für $\mu \geq \mu_0^{(\varepsilon)}$ und für alle $f \in M$ folgt, wenn man λ geeignet wie oben zu f wählt:

$$\left(\int_{\Omega \setminus \Omega_{\mu}} |f|^p \varphi \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_{\mu}} |f - g_{\lambda}|^p \varphi \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_{\mu}} |g_{\lambda}|^p \varphi \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$\|f - g_{\lambda}\|_{L_p(\Omega, \varphi)} + \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_{\mu}} |g_{\lambda} - t_{\lambda}|^p \varphi \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_{\mu}} |t_{\lambda}|^p \varphi \right)^{\frac{1}{p}} \leq$$

$$2^{-1} \varepsilon + 2^{-1} \varepsilon + 0, \text{ das war für i) zu zeigen.}$$

Beweis von " \Leftarrow ": Die Menge der kompakten linearen Abbildungen in $L_c(X, Y)$ (Y ein Banachraum) ist abgeschlossen ([18], S. 207). T lässt sich in $L_c(X, L_p(\Omega, \varphi))$ - Norm durch die kompakten $i_{\mu} \circ r_{\mu} \circ T$ approximieren: $\forall x \in X:$

$$\|(i_{\mu} \circ r_{\mu} \circ T - T)(x)\|_{L_p(\Omega, \varphi)} = \left(\int_{\Omega} |i_{\mu} \circ r_{\mu} \circ T(x) - T(x)|^p \varphi \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$\left(\int_{\Omega \setminus \Omega_{\mu}} |T(x)|^p \varphi \right)^{\frac{1}{p}} \leq s_{\mu} \|x\| \text{ mit } s_{\mu} \rightarrow 0, \text{ denn Bedingung i)}$$

impliziert Bedingung i) aus Satz 3.4. Es folgt:

$$\|i_{\mu} \circ r_{\mu} \circ T - T\| \leq s_{\mu} \rightarrow 0.$$

3.8 Satz: Sei A ein linearer Operator in $L_p(\Omega)$ ($\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $p \in [1, \infty)$). Für alle $\omega \subset \Omega$ mit ω offen, beschränkt und für alle $u \in D_A$ liege $u|_\omega$ in $H^{1,p}(\omega) \subset L_p(\omega)$.

Es gebe eine Ausschöpfung $(\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ von Ω , sodass für alle μ Ω_μ einen C^1 -glatten Rand besitzt, mit

i) $\exists \varphi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^+)$: $\inf(\varphi|_{\Omega \setminus \Omega_\mu}) \rightarrow \infty \wedge (\forall u \in D_A$:

$$\left(\int_\Omega |u|^p \varphi\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_A \quad \text{und mit}$$

ii) $\forall \mu \in \mathbb{N} \exists k_\mu \in \mathbb{R}_0^+ \forall u \in D_A: \|u|_{\Omega_\mu}\|_{H^{1,p}(\Omega_\mu)} \leq k_\mu \|u\|_A$.
Dann hat A die kEE.

Dabei ist $H^{1,p}(\omega)$ als Teilmenge von $L_p(\omega)$ definiert:
 $H^{1,p}(\omega) := \{f \in L_p(\omega) \mid \exists (u_m)_{m \in \mathbb{N}}: (\forall m \in \mathbb{N}: u_m \in C^\infty(\omega) \wedge \int_\omega |u_m|^p < \infty) \wedge u_m \rightarrow f \text{ in } L_p(\omega) \wedge (\alpha \in (\mathbb{N}_0^n) \wedge |\alpha| = 1 \Rightarrow (D^\alpha u_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } L_p(\omega))\}$.

Beweis von Satz 3.8: Die Voraussetzungen in Satz 3.7 für die Kompaktheit von $T := i_A$ sind erfüllt: i) in Satz 3.7 wegen i) in Satz 3.8 mit dem üblichen Schluss auf

$(\|u\|_A \leq 1 \Rightarrow \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |u|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq (\inf(\varphi|_{\Omega \setminus \Omega_\mu}))^{-\frac{1}{p}}$ und der Konvergenz der rechten Seite gegen Null.

Zu ii), Satz 3.7: $\|u\|_A \leq 1 \Rightarrow \|u|_{\Omega_\mu}\|_{H^{1,p}(\Omega_\mu)} \leq k_\mu$. Also liegt das Bild der Einheitskugel in $(D_A, \|\cdot\|_A)$ unter $r_\mu \circ i_A$ im Bild der Kugel um Null vom Radius k_μ in $H^{1,p}(\Omega_\mu)$ unter der Abbildung $j_\mu: H^{1,p}(\Omega_\mu) \ni u \mapsto u \in L_p(\Omega_\mu)$ (Es gilt ja $r_\mu \circ i_A(u) = j_\mu(u|_{\Omega_\mu})$).

j_μ ist wegen der Glattheitsvoraussetzungen an Ω_μ kompakt ([6], S. 31), also ist $(r_\mu \circ i_A)(\{u \in D_A \mid \|u\|_A \leq 1\})$ relativkompakt. Dann sind $r_\mu \circ i_A$ und $i_\mu \circ r_\mu \circ i_A$ kompakt, das war zu zeigen.

Die Glattheitsvoraussetzung in Satz 3.8 lässt sich durch die Bedingung $(\forall \mu \in \mathbb{N}: \bar{\Omega}_\mu \subset \Omega_{\mu+1})$ ersetzen. Statt des Satzes aus [6] ist im Beweis von Satz 3.8 dann eine Folgerung aus Rellichs Auswahlssatz zu verwenden:
" Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, $\bar{\omega} \subset \Omega$, ω offen und beschränkt. Dann

ist die Abbildung $H^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto u|_\omega \in L_p(\omega)$ kompakt".

4 Differentialoperatoren mit kompakter Einbettung

Betrachtet werden zuerst Differentialoperatoren $A: L_2(\mathbb{R}^n) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^n) = D_A \ni u \mapsto L(u) + pu \in L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $L(u) := \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha u$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $|\alpha| \leq r$, und mit $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ messbar und lokal wesentlich beschränkt. Letzteres heisst: $\forall x \in \mathbb{R}^n \exists U \in \mathcal{U}(x) \exists K_x \in \mathbb{R}_0^+ \exists (N \subset U: N \text{ Nullmenge}) \forall \tilde{x} \in U \setminus N: |p(\tilde{x})| \leq K_x$.

Denn aus den Sätzen über Differentialoperatoren mit kompakter Inverser in L. Hörmanders Dissertation [11] ergibt sich eine Charakterisierung der durch Polynome mit komplexen Koeffizienten $L(\cdot)$ auf $C_0^\infty(\Omega)$ definierten Operatoren L in $L_2(\Omega)$ mit der kEE, wenn Ω beschränkt ist: L hat die kEE genau dann, wenn die Abschliessung \tilde{L} die kEE hat. Diese Abschliessung ist injektiv ([11]). Mit $L_1(\cdot) := (\sum |L^{(\alpha)}(\cdot)|^2)^{\frac{1}{2}}$, $L^{(\alpha)}(\cdot) = (\partial/\partial \xi_1)^{\alpha_1} \dots (\partial/\partial \xi_n)^{\alpha_n} L(\cdot)$ gilt nach Theorem 2.15 in [11]: \tilde{L} hat eine kompakte Inverse auf $(R_L, \|\cdot\|_{L_2(\Omega)}|_{R_L}) \Leftrightarrow L_1(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} \infty$. Wegen Lemma 2.7 folgt: L hat die kEE $\Leftrightarrow L_1(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} \infty$.

Für unbeschränkte Gebiete liegt die einfachste Situation im Fall $\Omega = \mathbb{R}^n$ vor. Dann gilt:

4.1 Satz: Ist $A_1: L_2(\mathbb{R}^n) \supset D_{A_1} \ni u \mapsto A_1(u) \in L_2(\mathbb{R}^n)$ ein Differentialoperator mit $D_{A_1} = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $A_1(u) = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha u$ mit Koeffizienten $a_\alpha: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, so gilt: A_1 hat die kEE \Rightarrow ein Koeffizient a_{α_0} von A_1 ist unbeschränkt.

Insbesondere dürfen nicht alle Koeffizienten von A konstant sein. Daher ist es sinnvoll, zunächst in der oben dargestellten Situation mit unbeschränktem p nach schwachen hinreichenden Bedingungen für die kEE zu suchen.

Beweis von Satz 4.1: Hätte A_1 die kEE und wären alle a_α wesentlich beschränkt, so würde folgen:
 $\exists k \in \mathbb{R}^+ \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n): \|u\|_{A_1} \leq k \|u\|_{H_0^2(\mathbb{R}^n)}$, die Einheitskugel von $(D_{A_1}, \|\cdot\|_{A_1})$ würde die Kugel vom Radius k^{-1} in

$C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \cap H_0^{\gamma,2}(\mathbb{R}^n)$ um 0 umfassen, wegen der kEE von A_1 wäre diese relativkompakt in $L_2(\mathbb{R}^n)$. Das würde zum Widerspruch führen.

Zum Nachweis der Aussagen (2) und (3) für A_1 , die nach Abschnitt 3 die kEE für A liefern, wird die "Realteilmethode" benutzt:

4.2 Satz: Sei $D \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ ein linearer Teilraum. $P: D \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ sei ein linearer Operator, gegeben durch Multiplikation mit einer messbaren Funktion $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\text{Re } p \geq -k$ für ein $k \in \mathbb{R}$ und mit $\text{Re } p(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty$.

$L_1: D \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ sei ein linearer Operator mit

(4) $\exists k_0 \in \mathbb{R}_0^+ \exists (s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : s(0) = 0 \wedge s \text{ in } 0 \text{ stetig})$
 $\forall t \in \mathbb{R}^n \forall u \in D :$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(\cdot + t) - u|^2 \leq s(t) [\text{Re}(L_1(u), u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + k_0 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2]$$

Dann hat $A_1 := L_1 + P$ die kEE.

Beweis: $u \in D \Rightarrow pu \in L_2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow pu \cdot \bar{u} \in L_1(\mathbb{R}^n) \Rightarrow (\text{Re } p) |u|^2 = \text{Re}(pu \cdot \bar{u}) \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Folgt für alle $u \in D$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (\text{Re } p + k + 1) |u|^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \text{Re } p |u|^2 + (k + 1) \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\leq \text{Re}(L_1(u), u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \text{Re}(pu \cdot \bar{u} + (k + k_0 + 1) |u|^2)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \\ &\quad (\text{wegen (4) gilt } \text{Re}(L_1(u), u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + k_0 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \geq 0) \\ &\leq \text{Re}(A_1(u), u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + (k_0 + |k| + 1) \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \\ &\leq 2^{-1} \|A_1(u)\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 + (k_0 + |k| + 2^{-1} 3) \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2, \end{aligned}$$

mit $\text{Re } p(x) \rightarrow \infty$ erhält man (3):
 Mit $(\forall \mu \in \mathbb{N} \exists R_\mu \in \mathbb{R}^+ : |x| \geq R_\mu \Rightarrow \text{Re } p(x) \geq \mu)$ kann man die Ausschöpfung definieren durch $\Omega_\mu := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R_\mu\}$.
 O.B.d.A. gilt stets $R_\mu < R_{\mu+1}$ und $R_\mu \rightarrow \infty$, daher:
 $\Omega_\mu \subset \Omega_{\mu+1}$, $\cup \Omega_\mu = \mathbb{R}^n$ und $\inf(\text{Re } p + k + 1) |_{\Omega_\mu} \geq \mu + k + 1$.
 Analog folgt (2) aus (4):

$$\forall u \in D \forall t \in \mathbb{R}^n: \int |u(\cdot + t) - u|^2 \leq s(t) [\text{Re}(L_1(u), u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \text{Re}(P(u), u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + k \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 + k_0 \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2] \leq s(t) [\text{Re}(A_1(u), u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + (|k| + k_0) \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2] \leq$$

$s(t)(2^{-1} + k_0 + |k|) \|u\|_{L_1}^2$.
 Mit $\tilde{s}(t) := s^{\frac{1}{2}}(t)(k_0 + |k| + 2^{-1})$ folgt (2).

Bemerkungen zur Realteilmethode: Die Forderung an p garantiert Bedingung (3) für A_1 , die an L_1 (2) für A_1 . Die Realteilveraussetzungen sichern, dass sich die Eigenschaften von p, L_1 auf A_1 übertragen, ohne dass der jeweils andere Anteil L_1, p stört. Dabei muss der Anteil L_1 die Bedingung (2) liefern, und - wenigstens wenn L_1 ein Differentialoperator mit konstanten Koeffizienten auf $D = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ ist - der Anteil p gerade (3), nicht umgekehrt, denn

i) L_1 allein kann keine Abschätzung der Form

$$\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n): (\int |\varphi| |u|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \|u\|_{L_1} \text{ mit } \varphi(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty$$

erfüllen, weil die rechte Seite invariant gegen Verschiebung von u ist und die linke nicht, und

ii) $\text{Re } p$ (mit $\text{Re } p > 0$ lokal wesentlich beschränkt und messbar) allein kann keine Abschätzung folgender Form erfüllen:

$$\exists (s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : s(0) = 0 \wedge s \text{ in } 0 \text{ stetig}) \forall t \in \mathbb{R}^n \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n): (\int |u(\cdot + t) - u|^p)^{\frac{1}{p}} \leq s(t) [(\text{Re } p) |u|^p]^{\frac{1}{p}}$$

Beweis: Wähle $x \in \mathbb{R}^n$, auf einer Umgebung U von x sei $\text{Re } p$ durch k beschränkt (abgesehen von einer Nullmenge). Wähle ein $t_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mit $(|t| < |t_0| \Rightarrow s(t)k^{\frac{1}{p}} \leq 1)$. Für geeignete $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und kleine $t \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ gilt dann: $\text{supp } u \cap \text{supp } u(\cdot + t) = \emptyset$, $\text{supp } u \neq \emptyset$, $\text{supp } u \subset U$, $\text{supp } u(\cdot + t) \subset U$. Aus der Annahme einer Abschätzung wie oben folgt: $2 \|u\|_{L_p} \leq k^{\frac{1}{p}} k^{\frac{1}{p}} \|u\|_{L_p}$, also $u = 0$, Widerspruch.

Ein Nachweis von ((2) \wedge (3)) ohne die Realteilmethode wurde gesucht, aber nicht gefunden. Bekannte Abschätzungen der Form $\|\varphi u\|_{L_2} \leq k \|u\|_A$ mit φ messbar, für alle $u \in D_A$, die ohne die Realteilmethode bewiesen werden (etwa in [16]), benötigen Beschränktheitsvoraussetzungen an φ , die (3) ausschliessen.

Eine (2) verwandte Koerzitivitätsungleichung wie in Be-

dingung ii) von Satz 3.8 lässt sich für gewisse elliptische Differentialoperatoren mit variablen, nicht beschränkten Koeffizienten beweisen: Siehe Satz 4.9.

Bedingung (4) für einen linearen Operator L_1 in $L_2(\mathbb{R}^n)$ folgt aus einer Koerzivitätsungleichung ohne unbequeme Differenzenquotienten:

$$(5) \exists (a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : a(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} +\infty) \exists k \in \mathbb{R}_0^+ \forall u \in D_{L_1} :$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (a + 1) |Fu|^2 \leq \operatorname{Re}(L_1(u), u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + k \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 .$$

Dabei bezeichnet F die Fouriertransformation in $L_2(\mathbb{R}^n)$.

(5) ist - mehr noch als (4) - eine Koerzivitätsungleichung bekannter Form: Für $a := (1 \cdot |\cdot|^2 + 1)^{\frac{5}{2}}$ bekommt man im linken Term von (5) die Norm von $H^{5,2}(\mathbb{R}^n)$ zurück.

Beweis von "(5) \Rightarrow (4)": Konstruiere eine stetige Minorante b von $a + 1$ mit $b \geq 1$, $b(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} \infty$. Setze für $t \in \mathbb{R}^n$ $s(t) := \sup_{\xi \in \mathbb{R}^n} |1 - \exp(i(\xi, t))|^2 \cdot b^{-1}(\xi)$. Folgt $s(0) = 0$, $s \geq 0$.

4.3 Lemma: s ist in 0 stetig.

Beweis: Sei $(t_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge in \mathbb{R}^n . Zu jedem t_ν gibt es ein $\xi_\nu \in \mathbb{R}^n$ mit $s(t_\nu) = |1 - \exp(i(\xi_\nu, t_\nu))|^2 b^{-1}(\xi_\nu)$; denn für $s(t_\nu) = 0$ kann man $\xi_\nu = 0$ setzen, und für $s(t_\nu)$ positiv existiert wegen $b(\xi) \rightarrow +\infty$ ein $R \in \mathbb{R}^+$ mit: $|\xi| \geq R \Rightarrow |1 - \exp(i(t_\nu, \xi))|^2 b^{-1}(\xi) \leq 4(8 s(t_\nu))^{-1} = 2^{-1} s(t_\nu)$, und auf $\{\xi \mid |\xi| \leq R\}$ nimmt die stetige Funktion $\xi \mapsto |1 - \exp(i(t_\nu, \xi))|^2 b(\xi)^{-1}$ ihr Maximum an, das dann gleich $s(t_\nu)$ ist.

i) Falls $|\xi_\nu| \rightarrow \infty$, folgt aus den Voraussetzungen über b $s(t_\nu) = |\dots|^2 b(\xi_\nu)^{-1} \leq 4 b(\xi_\nu)^{-1} \rightarrow 0$, was zu zeigen war.

ii) Falls $(\xi_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ beschränkt ist - etwa durch k - gilt: $s(t_\nu) = |1 - \exp(i(t_\nu, \xi_\nu))|^2 b(\xi_\nu)^{-1} \leq |\dots|^2 (\inf\{b(\xi) \mid |\xi| \leq k\})^{-1}$.

Wegen $b > 0$ und wegen der Kompaktheit der Kugel vom Radius k ist das Infimum positiv, es folgt:

$$s(t_\nu) \leq \left| \sum_{\lambda} (\mu!)^{-1} (i(t_\nu, \xi_\nu))^\lambda \right|^2 (\inf\{\dots\})^{-1} \leq$$

$$\begin{aligned} & (\inf\{\dots\})^{-1} \left(\sum_{\lambda} (\mu!)^{-1} |t_\nu|^\lambda |\xi_\nu|^\lambda \right)^2 \leq \\ & (\dots)^{-1} \left(\sum_{\lambda} (\mu!)^{-1} |t_\nu|^\lambda k^\lambda \right) = \\ & (\dots)^{-1} [\exp(kt_\nu) - 1] \rightarrow 0, \text{ was zu zeigen war.} \end{aligned}$$

iii) Sei nun $(t_{\nu\lambda})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(t_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$, die besitzt eine weitere Teilfolge $(t_{\nu\lambda})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ mit $(\xi_{\nu\lambda})_{\lambda \in \mathbb{N}}$ beschränkt oder $|\xi_{\nu\lambda}| \rightarrow \infty$, nach i) und ii) gilt: $s(t_{\nu\lambda}) \rightarrow 0$.

iv) Die Stetigkeitsbehauptung folgt aus der leicht zu zeigenden Aussage: Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathbb{R} . Dann gilt: $a_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow$ Jede Teilfolge von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt eine gegen 0 konvergente Teilfolge.

Nach Konstruktion gilt:

$$\forall t \in \mathbb{R}^n \forall \xi \in \mathbb{R}^n : s(t)(1 + a(\xi)) \geq s(t)b(\xi) \geq |1 - \exp(i(\xi, t))|^2$$

Multiplikation mit $|Fu(\xi)|^2$ für $u \in D_{L_1} \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ und Integration ergibt für alle $t \in \mathbb{R}^n$:

$$s(t) \int_{\mathbb{R}^n} (1 + a) |Fu|^2 \geq \int_{\mathbb{R}^n} |1 - \exp(i(\xi, t))|^2 |Fu(\xi)|^2 d\xi .$$

Die behauptete Implikation folgt nun aus

4.4 Lemma: $\forall f \in L_2(\mathbb{R}^n) \forall t \in \mathbb{R}^n$:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(\cdot + t) - f|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |1 - \exp(i(t, \xi))|^2 |Ff(\xi)|^2 d\xi .$$

Beweis: Für alle $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und für alle $t \in \mathbb{R}^n$ existiert

$$\int |1 - \exp(i(t, \xi))|^2 |Fu(\xi)|^2 d\xi, \text{ weil } |1 - \exp(i(t, \cdot))|^2 \leq 4$$

messbar ist. Es gilt:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |u(\cdot + t) - u|^2 &= \int |F(u(\cdot + t) - u)|^2 = \\ &= \int |F(u(\cdot + t)) - Fu|^2, \end{aligned}$$

$$\text{mit } F(u(\cdot + t))(x) = c \int \exp(-i(\xi, x)) u(\xi + t) d\xi =$$

$$c \int \exp(-i(\xi - t, x)) u(\xi) d\xi = \exp(i(t, x)) Fu(x) \text{ folgt die}$$

Behauptung des Lemmas für die $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Für beliebige $f \in L_2(\mathbb{R}^n)$ ergibt sie sich mit der Stetigkeit der Fouriertransformation, der Translation und mit der Beschränktheit von $|1 - \exp(i(t, \cdot))|^2$ aus $\overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n)} = L_2(\mathbb{R}^n)$.

Wir haben bewiesen:

4.5 Satz: Sei $D \subset L_2(\mathbb{R}^n)$ ein linearer Teilraum. P sei ein linearer Operator von D in $L_2(\mathbb{R}^n)$, gegeben durch Multiplikation mit einer messbaren Funktion $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} p \geq -k$ für ein $k \in \mathbb{R}$ und mit $\operatorname{Re} p(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty$.
 $L_1: D \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ sei ein linearer Operator mit
 (5) $\exists (a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : a(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} +\infty) \exists k \in \mathbb{R}_0^+ \forall u \in D:$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (a + 1) |Fu|^2 \leq \operatorname{Re}(L_1(u), u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + k \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2.$$

Dann hat der Operator $A = L_1 + P$ die kEE.

Wir charakterisieren (5) für $D = C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $L_1 = L: D \ni u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha u$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $|\alpha| \leq r$, durch eine Eigenschaft des L definierenden Polynoms $L(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha \xi^\alpha$.

4.6 Satz: (Für L gilt (5) mit einer messbaren Funktion a)
 $\Leftrightarrow \operatorname{Re} L(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} +\infty$.

Beweis: " \Leftarrow " folgt mit Fouriertransformation: $\operatorname{Re} L(\xi) \rightarrow +\infty \Rightarrow \operatorname{Re} L(\cdot)$ nach unten beschränkt, etwa durch k_1 . Setze $a := \operatorname{Re} L(\cdot) + |k_1|$. a ist messbar mit Werten in \mathbb{R}_0^+ , erfüllt $a(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} +\infty$, und es gilt für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:
 $(a + 1) |Fu|^2 = \operatorname{Re} L(\cdot) |Fu|^2 + (|k_1| + 1) |Fu|^2$,
 nach Integration erhält man (5).

Zu " \Rightarrow ": L ist abschliessbar zum Operator \tilde{L} in $L_2(\mathbb{R}^n)$ - etwa wegen des dicht definierten adjungierten Operators L^* , $L^* \supset \tilde{L}$ mit $\tilde{L}(u) = \sum_{|\alpha| \leq r} \bar{a}_\alpha D^\alpha u$.

i) Es gilt: $\forall f \in D_{\tilde{L}}: \int (a + 1) |Ff|^2 \leq \int (\operatorname{Re} L(\cdot) + k) |Ff|^2$.

Denn: Sei $f \in D_{\tilde{L}}$. Dann gibt es eine Folge $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $u_m \rightarrow f$ und $L(u_m) \rightarrow \tilde{L}(f)$ in L_2 -Norm.

$L(u_m) \rightarrow \tilde{L}(f) \Rightarrow FL(u_m) \rightarrow F\tilde{L}(f)$. Es gilt ([12], S. 20)

für fast alle $\xi \in \mathbb{R}^n: F\tilde{L}(f)(\xi) = L(\xi)Ff(\xi)$, und:

$$FL(u_m)(\xi) = L(\xi)Fu_m(\xi).$$

Daher: $L(\cdot)Fu_m(\cdot) \rightarrow L(\cdot)Ff(\cdot)$ in L_2 -Norm.

Mit $|\operatorname{Re} L(\cdot)| \leq |L(\cdot)|$ und mit $Fu_m \rightarrow Ff$ folgt

$(\operatorname{Re} L(\cdot) + k)Fu_m \rightarrow (\operatorname{Re} L(\cdot) + k)Ff$, mit der Schwarz -

Ungleichung:

$$((\operatorname{Re} L(\cdot) + k)Fu_m, Fu_m)_{L_2(\mathbb{R}^n)} \rightarrow ((\operatorname{Re} L(\cdot) + k)Ff, Ff)_{L_2(\mathbb{R}^n)}.$$

Aus (5) erhält man nach Fouriertransformation der rechten Seite:

$(Fu_m)_{m \in \mathbb{N}}$ definiert eine Cauchyfolge im Hilbertraum $L_2(\mathbb{R}^n, a + 1)$, der durch die Norm $(\int_{\mathbb{R}^n} (a + 1) |h|^2)^{\frac{1}{2}}$ gegeben ist, die gegen ein g in $L_2(\mathbb{R}^n, a + 1)$ konvergiert. Wegen $a \geq 0$ definiert g ein Element von $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit $Fu_m \rightarrow g$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$, damit $g = Ff$. Zusammen:

$$\int (a + 1) |Fu_m|^2 \rightarrow \int (a + 1) |Ff|^2.$$

Die Behauptung i) ergibt sich nun aus (5) durch Grenzübergang.

ii) Es gilt: $v \in L_2(\mathbb{R}^n) \wedge L(\cdot)v \in L_2(\mathbb{R}^n) \Rightarrow F^{-1}v \in D_{\tilde{L}}$.

Beweis: [12], S. 19 und 20.

iii) Sei $\xi \in \mathbb{R}^n$. Wähle eine Folge $(u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ in $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit Trägern in der Kugel vom Radius 1 um ξ , sodass die von den $|u_m|^2$ definierten Distributionen $(|u_m|^2)_d$ die Evaluation in ξ (δ -Distribution in ξ) approximieren (in der Topologie von $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$). Dann ist für alle m $L(\cdot)u_m$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$, also $F^{-1}u_m \in D_{\tilde{L}}$, und $F \circ F^{-1}u_m = u_m$. Wegen $\operatorname{supp} u_m \subset \{\xi' \in \mathbb{R}^n \mid |\xi - \xi'| < 1\}$ darf man in der in i) gezeigten Abschätzung (für die $F^{-1}u_m$ noch ein $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ mit $\eta\{\dots\} = 1$ unter die Integrale nehmen. Man findet:

$$(|u_m|^2)_d(\eta(\operatorname{Re} L(\cdot) + k)) \geq (|u_m|^2)_d(\eta(a + 1)).$$

Für $m \rightarrow \infty$ folgt
 $(a(\xi) + 1) \leq (\operatorname{Re} L(\xi) + k)$. Daraus ergibt sich die gesuchte Implikation.

4.7 Korollar: Sei $L(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha \xi^\alpha$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten, es gelte $\operatorname{Re} L(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} +\infty$.

Sei $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ eine messbare lokal wesentlich beschränkte Funktion mit $\operatorname{Re} p(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty$ und mit $\operatorname{Re} p \geq -k$ für ein $k \in \mathbb{R}$.

Dann hat der Operator

$$A: L_2(\mathbb{R}^n) \supset C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha u + pu \in L_2(\mathbb{R}^n)$$

die kEE.

Beweis: Satz 4.6 und 4.5.

Anmerkungen:

i) Wie Satz 4.6 zeigt man: $|L(\xi)| \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} \infty \Leftrightarrow$

$\exists (a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : a(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty) \forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n):$
 $(\int (a+1)|Fu|^2)^{\frac{1}{2}} \leq \|u\|_L.$

ii) Die 1 - koerzitativen Operatoren aus Abschnitt 3 erfüllen $L(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} +\infty$ und haben daher für $p = 2$ die in 3 behauptete Eigenschaft (2).

iii) Die (5) charakterisierende Eigenschaft von $L(\cdot)$ ist analog zu der Eigenschaft, die für beschränkte Gebiete Ω die kEE von $L_\Omega: L_2(\Omega) \rightarrow C_0^\infty(\Omega) \ni u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha u \in L_2(\Omega)$ charakterisiert.

iv) Für Operatoren L , die durch Polynome $L(\cdot)$ definiert sind, ist (5) äquivalent zu (4):

4.8 Satz: Sei $L(\cdot): \xi \mapsto \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha \xi^\alpha$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten. Der Differentialoperator $L: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \ni u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha u \in L_2(\mathbb{R}^n)$ erfülle (4). Dann gilt: $\text{Re } L(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow \infty} +\infty.$

Anmerkung iv) ergibt sich aus Satz 4.8, Satz 4.6 und dem Schluss von (5) auf (4). Es wäre interessant zu wissen, ob es Differentialoperatoren gibt, die (4), aber nicht (5) erfüllen, und wie man sie beschreiben kann.

Beweis von Satz 4.8: Aus (4) folgt zunächst nach Lemma 4.4, dass für $t \in \mathbb{R}^n$ und für $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |1 - \exp(i(\xi, t))|^2 |Fu(\xi)|^2 d\xi \leq s(t) \int_{\mathbb{R}^n} (\text{Re } L(\xi) + k_0) |Fu(\xi)|^2 d\xi.$$

Wie beim Beweis von Satz 4.6, " \Rightarrow ", schliesst man auf:

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n \forall t \in \mathbb{R}^n: |1 - \exp(i(\xi, t))|^2 \leq s(t) [\text{Re } L(\xi) + k_0].$$

Daraus folgt $s(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset \mathbb{R}^+$: $s(t) = 0 \Rightarrow$

$$(\forall \xi \in \mathbb{R}^n: |1 - \exp(i(\xi, t))| = 0) \Rightarrow$$

$$(\forall \lambda \in \mathbb{R}: \exp(i\lambda|t|^2) = 1) \Rightarrow t = 0.$$

Sei $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Mit $t := |\xi|^{-2} \xi$ folgt:

$$|1 - \exp(i)|^2 s(|\xi|^{-2} \xi)^{-1} \leq \text{Re } L(\xi) + k_0.$$

Wir zeigen die behauptete Limes - Aussage: Sei $R \in \mathbb{R}^+$. Es

gibt ein $\delta \in \mathbb{R}^+$ zu R^{-1} mit $(|t| \leq \delta \Rightarrow s(t) \leq R^{-1})$.

Für $|\xi| \geq \delta^{-1}$ folgt: $\xi \neq 0$ und $||\xi|^{-2} \xi| \leq \delta$, also

$$s(|\xi|^{-2} \xi) \leq R^{-1}. \text{ Damit: } |1 - \exp(i)|^2 R \leq$$

$$|1 - \exp(i)|^2 s(|\xi|^{-2} \xi)^{-1} \leq \text{Re } L(\xi) + k_0.$$

v) Beim Beweis von (5) \Rightarrow (4) hatten wir gezeigt:

" Sei $a: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $a(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} \infty$ und mit

$(\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n): \int (a+1)|Fu|^2 < \infty)$ gegeben. Dann existiert

eine Funktion $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ mit $s(0) = 0$, s in 0 stetig, sodass für alle $t \in \mathbb{R}^n$ und für alle $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$s(t) \int (a+1)|Fu|^2 \geq \int |u(\cdot + t) - u|^2.$$

Der Beweis bleibt richtig, wenn man statt $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ $C_0^\infty(\Omega)$ für $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt betrachtet. Mit dieser Abschätzung erhält man für den normierten Raum

$X := (C_0^\infty(\Omega), (\int_{\mathbb{R}^n} (a+1)|F(\cdot)|^2)^{\frac{1}{2}})$ folgende Verallgemeinerung von Rellichs Auswahlatz, die B. Malgrange mit

einer anderen Methode in [13] zeigte (vgl. dort den Beweis von Lemma 1.2.2):

" Ist Ω beschränkt, so ist die Einbettung $i: X \ni u \mapsto u \in L_2(\Omega)$ kompakt ".

Beweis: Wegen $a \geq 0$ ist i stetig. Da Ω beschränkt ist, bleibt nach Satz 3.4 und der Bemerkung danach zu zeigen:

$$\exists (s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : s(0) = 0 \wedge s \text{ in } 0 \text{ stetig}) \forall t \in \mathbb{R}^n \forall u \in C_0^\infty(\Omega) (\int_{\mathbb{R}^n} |\tilde{u}(\cdot + t) - \tilde{u}|^2)^{\frac{1}{2}} \leq s(t) \|u\|_X, \text{ und das folgt aus der oberen Abschätzung.}$$

Mit den Kriterien aus Abschnitt 3 erhält man die kEE für elliptische Differentialoperatoren, die nicht gleichmässig elliptisch sein müssen.

Voraussetzungen:

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und gleichmässig regulär von der Klasse C^{2m} (Definition: S. 28 in [4]).

Für $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ und $|\alpha| = \sum_1^n \alpha_i \leq 2m$ seien $a_\alpha: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ stetige, auf jeder beschränkten Teilmenge von Ω beschränkte Funktionen.

Zu jeder beschränkten Teilmenge $\omega \subset \Omega$ gebe es eine Funktion $\tilde{\omega}: [0,1) \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, stetig in 0 mit $\tilde{\omega}(0) = 0$ und mit: $|\alpha| \leq 2m \wedge |x - y| \leq \delta < 1 \wedge x \in \omega \wedge y \in \omega \Rightarrow$

$$|a_\alpha(x) - a_\alpha(y)| \leq \tilde{\omega}(\delta).$$

$V: \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ sei stetig, auf jeder beschränkten Teilmenge $\omega \subset \Omega$ beschränkt, und es gelte auch für V :

$$x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge |x - y| \leq \delta < 1 \Rightarrow |V(x) - V(y)| \leq \tilde{\omega}(\delta).$$

Dann ist auf

$$D_A := \{u|_\Omega \mid u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \wedge (|\beta| < m \Rightarrow D^\beta u|_{\partial\Omega} = 0)\}$$

$A: u|_\Omega \mapsto \sum a_\alpha D^\alpha u + Vu$ ein wohldefinierter Differentialoperator in $L_2(\Omega)$, D_A ist durch Dirichlet-Randbedingungen gegeben.

A sei abschliessbar (Das kann durch zusätzliche Glattheitsvoraussetzungen an die Koeffizienten erreicht werden, die garantieren, dass A^* dicht definiert ist).

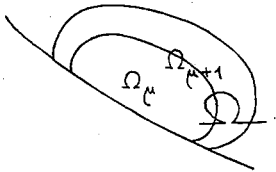
Für jede beschränkte Teilmenge $\omega \subset \Omega$ sei der durch $\omega \times \mathbb{R}^n \ni (x, \xi) \mapsto \sum a_\alpha(x) \xi^\alpha + V(x)$ definierte Differentialoperator A_ω in $L_2(\omega)$ regulär elliptisch in ω (Definition: gleichmässig elliptisch in ω , Wurzelbedingung erfüllt. Siehe S. 44 in [4]) von der Ordnung $2m$.

Es gelte: $\exists k \in \mathbb{R}^+ \forall u \in D_A: \operatorname{Re}(\sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha u, u)_{L_2(\Omega)} \geq -k \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$.

Es gebe eine Ausschöpfung $(\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ von Ω mit:

$$\forall \mu \in \mathbb{N}: \Omega_\mu \text{ gleichmässig regulär von der Klasse } C^{2m} \wedge \bar{\Omega}_\mu = \Omega_{\mu+1} \cup ((\partial\Omega_{\mu+1}) \cap (\partial\Omega))^\circ \wedge \inf(\operatorname{Re} V|_{\Omega \setminus \Omega_\mu}) \rightarrow +\infty.$$

Dabei ist $((\partial\Omega_{\mu+1}) \cap (\partial\Omega))^\circ$ der offene Kern von (...) in der Topologie von $\partial\Omega_{\mu+1}$, die von \mathbb{R}^n induziert ist.



$\operatorname{Re} V$ sei durch ein $\tilde{k} \in \mathbb{R}$ nach unten beschränkt.

4.9 Satz: A und die Abschliessung \tilde{A} haben die KEE.

Beweis: Mit einer a-priori-Abschätzung von F. E. Browder wird Bedingung ii) von Satz 3.8 für A nachgewiesen. Wegen der Realteilvoraussetzungen ergibt sich auch Bedingung i) von Satz 3.8. Mit Lemma 2.4 und Satz 3.8

folgt die Behauptung.

Zunächst ist offenbar erfüllt, dass für $\omega \subset \Omega$ beschränkt und offen und für $u \in D_A$ $u|_\omega$ in $H^{1,2}(\omega)$ liegt.

Zu Bedingung i): V ist stetig, also auch $\operatorname{Re} V$. Für $\varphi' := \operatorname{Re} V + \tilde{k} + 1$ gilt $\inf(\varphi'|_{\Omega \setminus \Omega_\mu}) \rightarrow +\infty$, und für $u \in D_A$:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varphi' |u|^2 &= \int_\Omega (\operatorname{Re} V + \tilde{k} + 1) |u|^2 = (\tilde{k} + 1) \int_\Omega |u|^2 + \operatorname{Re}(Vu, u)_{L_2(\Omega)} \\ &\leq (k + \tilde{k} + 1) \int_\Omega |u|^2 + \operatorname{Re}(\sum a_\alpha D^\alpha u, u)_{L_2(\Omega)} + \operatorname{Re}(Vu, u)_{L_2(\Omega)} \\ &\leq (k + \tilde{k} + 1) \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \operatorname{Re}(A(u), u)_{L_2(\Omega)} \\ &\leq (k + \tilde{k} + 1 + 2^{-1}) (\|u\|_{L_2(\Omega)} + \|A(u)\|_{L_2(\Omega)})^2. \end{aligned}$$

Setze $\varphi := (k + \tilde{k} + 1 + 2^{-1})^{-1} \varphi'$.

Zu Bedingung ii): Theorem 2' in [4] besagt:

4.10 Satz: Sei $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$ offen und gleichmässig regulär von der Klasse C^{2m} . Sei $\Gamma \subset \partial\Omega'$ offen. Sei $C \subset \Omega'$ offen mit $\bar{C} \subset \Omega' \cup \Gamma$ kompakt gegeben.

Seien für $\alpha \in (\mathbb{N}_0)^n$ und $|\alpha| \leq 2m$ ($m \in \mathbb{N}$) $a'_\alpha: \Omega' \rightarrow \mathbb{C}$ beschränkte Funktionen. Es gebe eine Funktion $\omega: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$, stetig in 0 mit $\omega(0) = 0$ und mit

$$(|\alpha| \leq 2m \wedge x \in \Omega' \wedge y \in \Omega' \wedge |x - y| \leq \delta < 1 \Rightarrow |a'_\alpha(x) - a'_\alpha(y)| \leq \omega(\delta) < \tilde{\gamma}).$$

Der durch $w \mapsto \sum a'_\alpha D^\alpha w$ auf $\{v|_{\Omega'} \mid v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \wedge (|\beta| < m \Rightarrow D^\beta v|_\Gamma = 0)\}$ definierte Operator A' in $L_2(\Omega')$ sei regulär elliptisch von der Ordnung $2m$.

Dann gibt es eine von C, Ω' und A' abhängige Konstante K mit $(w \in D_{A'} \Rightarrow \|w|_C\|_{H^{2m,2}(C)} \leq K \|w\|_{A'})$.

Satz 4.10 lässt sich mit Ideen aus [4] beweisen.

Sei nun $\mu \in \mathbb{N}$ und $u \in D_A$, dann liegt $u|_{\Omega_{\mu+1}}$ in

$$\{v|_{\Omega_{\mu+1}} \mid v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \wedge (|\beta| < m \Rightarrow D^\beta v|_{((\partial\Omega_{\mu+1}) \cap (\partial\Omega))^\circ} = 0)\}.$$

Es gilt: $\bar{\Omega}_\mu = \Omega_{\mu+1} \cup ((\partial\Omega_{\mu+1}) \cap (\partial\Omega))^\circ$, Ω_μ offen, $\bar{\Omega}_\mu$ kompakt, $\Omega_\mu \subset \Omega_{\mu+1}$.

Auf $\Omega_{\mu+1}$ sind die a_α und V beschränkt. $A_{\Omega_{\mu+1}}$ ist auf $\{...\}$ definiert und regulär elliptisch von der Ordnung $2m$. Die Koeffizienten $a_\alpha|_{\Omega_{\mu+1}}$, $V|_{\Omega_{\mu+1}}$ haben die in

Satz 4.10 verlangten Stetigkeitseigenschaften. Aus Satz 4.10 folgt mit $u|_{\Omega_\mu} = (u|_{\Omega_{\mu+1}})|_{\Omega_\mu}$ für $u \in D_A$:

$$\|u|_{\Omega_\mu}\|_{H^{2m,2}(\Omega_\mu)} = \|(u|_{\Omega_{\mu+1}})|_{\Omega_\mu}\|_{H^{2m,2}(\Omega_\mu)} \leq K \cdot (\|A_{\Omega_{\mu+1}}(u|_{\Omega_{\mu+1}})\|_{L_2(\Omega_{\mu+1})} + \|u|_{\Omega_{\mu+1}}\|_{L_2(\Omega_{\mu+1})}) \leq K \cdot (\|A(u)\|_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}),$$

das ist Bedingung ii) von Satz 3.8.

Setzt man für A noch voraus, dass der Anteil $\sum a_\alpha D^\alpha$ gleichmässig elliptisch in Ω ist mit beschränkten a_α und globaler $\tilde{\omega}$ -Bedingung für die a_α (nicht für V), so erhält man die KEE einfacher - ohne Satz 4.10 - aus der Garding - Ungleichung

$$\forall u \in D_A: \|u\|_{H^{m,2}(\Omega)}^2 \leq c (\operatorname{Re}(\sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha u, u)_{L_2(\Omega)} + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2),$$

der Realteilmethode, den Wachstumseigenschaften von Re V und aus Satz 3.8. Die Stetigkeitsvoraussetzung an V und Re V kann dann abgebaut werden.

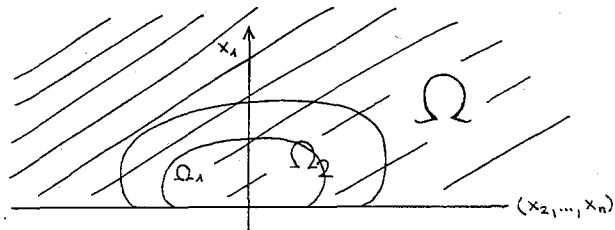
Ein Beispiel für einen nicht gleichmässig stark elliptischen Differentialoperator, der die Voraussetzungen von Satz 4.9 erfüllt:

Sei $m = 1, \Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$,
 $\sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha(x) \xi^\alpha = \sum_2^n \xi_\nu^2 + \exp(-x_1) \xi_1^2$ für $x \in \Omega$ und $\xi \in \mathbb{R}^n$,

V erfülle die Voraussetzungen in Satz 4.9.

Wegen $\exp(-x_1) \xrightarrow{x_1 \rightarrow \infty} 0$ ist der zugeordnete Differentialoperator nicht gleichmässig stark elliptisch.

Für geeignete Ausschöpfungen von Ω sind dann alle Voraussetzungen von Satz 4.9 erfüllt.



Wir zeigen: $\exists k \in \mathbb{R} \forall u \in D_A: \operatorname{Re}(\sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha D^\alpha u, u)_{L_2(\Omega)} \geq -k \|u\|_{L_2(\Omega)}^2$.
 Sei $u \in D_A$, dann folgt mit partieller Integration wegen der Randbedingung:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\sum_{|\alpha| \leq 2} a_\alpha D^\alpha u, u)_{L_2(\Omega)} &= \operatorname{Re} \sum_2^n \|D^{(0, \dots, 1, \dots, 0)} u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \operatorname{Re}(D^{(1, 0, \dots, 0)} u, D^{(1, 0, \dots, 0)} \exp(-pr_1) u)_{L_2(\Omega)} \\ &(\text{nach Produktregel}) \geq \|D^{(1, 0, \dots, 0)} u\|_{L_2(\Omega, \exp(-c-pr_1))}^2 - |(D^{(1, 0, \dots, 0)} u, u D^{(1, 0, \dots, 0)} \exp(-pr_1))|_{L_2(\Omega)} \\ &\geq \dots - \|(D^{(1, 0, \dots, 0)} u) | D^{(1, 0, \dots, 0)} \exp(-pr_1) |^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(\Omega)} \cdot \|u | D^{(1, 0, \dots, 0)} \exp(-pr) |^{\frac{1}{2}}\|_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Mit $|D^{(1, 0, \dots, 0)} \exp(-pr_1)| = \exp(-pr_1)$ und mit $1 \geq \exp(-pr_1)$ in Ω folgt weiter:

$$\begin{aligned} &\geq \dots - \|D^{(1, 0, \dots, 0)} u\|_{L_2(\Omega, \exp(-c-pr_1))} \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)} \geq \\ &\dots - 2^{-1} \|D^{(1, 0, \dots, 0)} u\|_{L_2(\Omega, \exp(-c-pr_1))}^2 - 2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq -2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Ebenso findet man Beispiele A mit unbeschränkten Koeffizienten a_α , die die Voraussetzungen von Satz 4.9 erfüllen: Man betrachte in Ω den durch $(d \cdot pr_1)(x) \xi_1^2 + \sum_2^n \xi_\nu^2 + V(x)$ gegebenen Operator mit $0 < |d|^2 \leq d$ auf Ω und d unbeschränkt (Die Voraussetzung an d' ermöglicht wieder die globale Abschätzung nach unten).

Anhang

Satz 3.7 liefert einen Auswahlssatz für Sobolevräume mit gewichteten Normen.

4.11 Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $\varphi = (\varphi_\alpha)_{|\alpha| \leq 1}$ mit $\varphi_\alpha \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^+)$ gegeben. Dann gilt für $p \in [1, \infty)$:

i: $H^{1,p}(\Omega, \varphi) \ni f \mapsto f \in L_p(\Omega, \varphi_0)$ kompakt \iff

$$\exists ((\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}} \text{ Ausschöpfung von } \Omega: \mu \in \mathbb{N} \Rightarrow \overline{\Omega_\mu} \subset \Omega_{\mu+1}): \sup \left\{ \int_{\Omega_\mu} |u|^p \varphi_0 \mid u \in H^{1,p}(\Omega, \varphi) \wedge \|u\|_{H^{1,p}(\Omega, \varphi)} \leq 1 \right\} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0.$$

Dabei gilt: $H^{1,p}(\Omega, \varphi) := \{f \in L_p(\Omega, \varphi_0) \mid \exists \text{ Folge } (u_m)_{m \in \mathbb{N}} \text{ in } C^\infty(\Omega) \cap L_p(\Omega, \varphi_0):$

$u_m \rightarrow f$ in $L_p(\Omega, \varphi_0) \wedge (|\alpha| = 1 \Rightarrow (D^\alpha u_m)_{m \in \mathbb{N}}$ Cauchyfolge in $L_p(\Omega, \varphi_\alpha)$ }
 mit $\varphi_0 := \varphi_{(0, \dots, 0)}$. $H^{1,p}(\Omega, \varphi)$ wird durch
 $\|f\|_{H^{1,p}(\Omega, \varphi)} := \left(\sum_{|\alpha| \leq 1} \lim_m \int |D^\alpha u_m|^p \varphi_\alpha \right)^{\frac{1}{p}}$ zum Banachraum.

Beweis von Satz 4.11: " \Rightarrow " folgt aus Satz 3.7, Bedingung i): Zu zeigen ist noch, dass in Bedingung i) die Konvergenzaussage für eine Ausschöpfung mit $\bar{\Omega}_\mu \subset \Omega_{\mu+1}$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$ gilt. Beim Beweis von Satz 3.7 wurde die Konvergenzbehauptung für eine beliebige Ausschöpfung gezeigt, zu jeder offenen Menge in \mathbb{R}^n gibt es eine Ausschöpfung mit $\bar{\Omega}_\mu \subset \Omega_{\mu+1}$.

Zu " \Leftarrow ": Bedingung i) in Satz 3.7 ist dann für $T = i$ erfüllt. Wir müssen noch Bedingung ii) in Satz 3.7 nachweisen, also die Kompaktheit der Abbildungen $r_\mu \circ i$ bezüglich $L_p(\Omega_\mu, \varphi_0|_{\Omega_\mu})$. Offenbar gilt $r_\mu \circ i = I_{\mu+1}^M \circ R_{\mu+1}$, wobei $R_{\mu+1}: H^{1,p}(\Omega, \varphi) \rightarrow H^{1,p}(\Omega_{\mu+1}, \varphi|_{\Omega_{\mu+1}})$ durch Einschränkung definiert ist (mit $(\varphi|_{\Omega_{\mu+1}})_\alpha := \varphi_\alpha|_{\Omega_{\mu+1}}$) und wobei $I_{\mu+1}^M$ die Abbildung $H^{1,p}(\Omega_{\mu+1}, \varphi|_{\Omega_{\mu+1}}) \ni f \mapsto f|_{\Omega_\mu} \in L_p(\Omega_\mu, \varphi_0|_{\Omega_\mu})$ ist. $R_{\mu+1}$ ist stetig. Zu zeigen bleibt, dass $I_{\mu+1}^M$ kompakt ist. Wegen Rellichs Auswahlssatz und wegen $\bar{\Omega}_\mu \subset \Omega_{\mu+1}$, $\Omega_{\mu+1}$ offen ist die Abbildung $J_{\mu+1}^M: H^{1,p}(\Omega_{\mu+1}) \ni g \mapsto g|_{\Omega_\mu} \in L_p(\Omega_\mu)$ kompakt. Wegen $\bar{\Omega}_{\mu+1} \subset \Omega$, wegen der Stetigkeit der φ_α und wegen $\varphi_\alpha(\Omega) \subset \mathbb{R}^+$ gilt $I_{\mu+1}^M = B \circ J_{\mu+1}^M \circ A$ mit stetigen linearen Abbildungen $A: H^{1,p}(\Omega_{\mu+1}, \varphi|_{\Omega_{\mu+1}}) \rightarrow H^{1,p}(\Omega_{\mu+1})$ und $B: L_p(\Omega_\mu) \rightarrow L_p(\Omega_\mu, \varphi_0|_{\Omega_\mu})$, daraus folgt die Behauptung.

Der Beweis zeigt, dass Satz 4.11 richtig bleibt, wenn man darin $H^{1,p}(\Omega, \varphi)$ durch $H_0^{1,p}(\Omega, \varphi)$ ersetzt (analog zu $H^{1,p}(\Omega, \varphi)$ definiert). Wir konstruieren Gewichtsfunktionen φ , sodass Kriterium 4.11 für $H_0^{1,p}(\Omega, \varphi)$ und eine unbeschränkte offene Menge Ω erfüllt ist:

4.12 Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gibt es Gewichtsfunktionen $\varphi = (\varphi_\alpha)_{|\alpha| \leq 1}$, sodass die Einbettung $i: H_0^{1,p}(\Omega, \varphi) \ni f \mapsto f \in L_2(\Omega, \varphi_0)$ kompakt ist.

Beweis: Es genügt zu zeigen:
 $\exists ((\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ Ausschöpfung von $\Omega: \forall \mu \in \mathbb{N}: \bar{\Omega}_\mu \subset \Omega_{\mu+1}) \exists \varphi$
 $\forall u \in C_0^\infty(\Omega) \forall \mu \in \mathbb{N}: \int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |u|^2 \varphi_0 \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 \varphi_\alpha$,
 denn wegen der Definition von $H_0^{1,p}(\Omega, \varphi)$ folgt daraus die entsprechende Abschätzung für alle u aus $H_0^{1,p}(\Omega, \varphi)$, und damit ist die Kompaktheitsbedingung von Satz 4.11 erfüllt
 Wegen Lemma 4.13 hat man nur Gewichtsfunktionen zu finden, die folgende Abschätzung erfüllen:

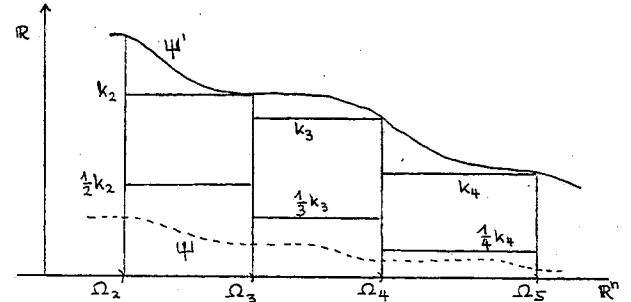
$$\forall (\alpha: |\alpha| = 1) \forall u \in C_0^\infty(\Omega): \int_{\Omega} |u|^2 \varphi'_0 \leq \sum_{|\alpha| \leq 1} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 \varphi_\alpha.$$

4.13 Lemma: Sei $(\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ eine Ausschöpfung von Ω mit $\bar{\Omega}_\mu \subset \Omega_{\mu+1}$ für alle $\mu \in \mathbb{N}$. Dann gibt es zu jedem $\psi \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^+)$ ein $\psi' \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^+)$ mit

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |u|^2 \psi' \leq \int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |u|^2 \psi \quad \text{für alle } \mu \in \mathbb{N} \text{ und alle } u \in C_0^\infty(\Omega).$$

Zum Beweis von Lemma 4.13: ψ' definiert auf den $\Omega_{\mu+1} \setminus \Omega_\mu$ eine Folge von positiven unteren Schranken k_μ , die man monoton fallend wählen kann. Es gibt deshalb (mit $\bar{\Omega}_\mu \subset \Omega_{\mu+1}$) eine positive stetige Minorante ψ zu den Schranken $\mu^{-1} k_\mu$ auf $\Omega_{\mu+1} \setminus \Omega_\mu$. Für ψ' folgt:

$\forall \mu \in \mathbb{N}: \psi|_{\Omega \setminus \Omega_\mu} \leq \mu^{-1} (\psi'|_{\Omega \setminus \Omega_\mu})$, daraus ersieht man die Behauptung des Lemmas.



Die Abschätzung, die wir noch zeigen müssen für geeignete Gewichtsfunktionen, ist eine verallgemeinerte Poincare - Ungleichung. Das liefert die Idee der folgenden Konstruktion.

Bezeichnungen: Für $x \in \mathbb{R}^n$ sei $x' := (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Für $u \in C_0^\infty(\Omega) \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ sei zu $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$ $\tilde{u}_{x'}$ die durch $x_1 \mapsto u(x_1, x')$ definierte Funktion in $C_0^\infty(\mathbb{R})$. χ_Ω sei die charakteristische Funktion zu Ω . pr' bezeichne die Projektion $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto x' \in \mathbb{R}^{n-1}$, analog sei pr_1 die Projektion $\mathbb{R}^n \ni x \mapsto x_1 \in \mathbb{R}$.

Dann gilt für $x_1 \in \mathbb{R}$ und für alle $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$:

$$\tilde{u}_{x'}(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} (\tilde{u}_{x'})_\xi, \text{ daher für alle } x' \in \mathbb{R}^{n-1} \text{ und für alle } x_1 \in \mathbb{R}:$$

$$|\tilde{u}_{x'}(x_1)|^2 \leq \left(\int_{-\infty}^{x_1} |(\tilde{u}_{x'})_\xi| \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{x_1} |u_{x'}| \chi_\Omega(\cdot, x') \right)^2.$$

Es gibt eine Funktion $\psi \in C^0(pr_1(\Omega) \times pr'(\Omega), \mathbb{R}^+)$ mit

$$(\forall x' \in pr'(\Omega): 1 \in L_2(pr_1(\Omega), \psi(\cdot, x')) \text{ und}$$

$$(\exists A \in \mathbb{R}^+ \forall x' \in pr'(\Omega): \int_{pr_1(\Omega)} \psi(\cdot, x') \leq A).$$

- Man hat dazu nur zu überlegen, dass es so eine Funktion zu $\Omega = \mathbb{R}^n$ gibt. Diese ist dann auf $pr_1(\Omega) \times pr'(\Omega)$ einzuschränken. Man suche etwa ein $\psi_1 \in C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^+)$ mit $\int_{\mathbb{R}} \psi_1 < \infty$ und setze $\psi(x) := \psi_1(x_1)$. -

Es folgt:

$$\left(\int_{-\infty}^{x_1} |(\tilde{u}_{x'})_\xi| \chi_\Omega(\cdot, x') \right)^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |(\tilde{u}_{x'})_\xi| \chi_\Omega(\cdot, x') \psi^{\frac{1}{2}}(\cdot, x') \psi^{-\frac{1}{2}}(\cdot, x') \right)^2.$$

Wegen $\text{supp}(\tilde{u}_{x'})_\xi \subset pr_1(\Omega)$ und $(\tilde{u}_{x'})_\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ und

$$\int_{pr_1(\Omega)} \psi(\cdot, x') \leq A \text{ wird mit der Schwarz - Ungleichung}$$

weiter abgeschätzt:

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}} |(\tilde{u}_{x'})_\xi|^2 \psi^{-1}(\cdot, x') \right) \cdot A.$$

Multiplikation mit ψ und Integration über \mathbb{R} nach x_1 gibt:

$$\int_{\mathbb{R}} |\tilde{u}_{x'}|^2 \psi(\cdot, x') \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |(\tilde{u}_{x'})_\xi|^2 \psi^{-1}(\cdot, x') \right) \cdot A^2.$$

Mit $(\tilde{u}_{x'})_\xi(x_1) = (\partial u / \partial x_1)(x_1, x')$, mit dem Satz von Fubini über mehrfache Integration und $|D^{(1,0,\dots,0)} u| = |\partial u / \partial x_1|$ erhält man nach Integration über \mathbb{R}^{n-1} :

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^2 \psi \leq A^2 \int_{\mathbb{R}^n} |D^{(1,0,\dots,0)} u|^2 \psi^{-1}, \text{ das ergibt die gesuchte}$$

Abschätzung mit $\varphi_{(0,1,\dots,0)} := A^{-2} \psi$ und $\varphi_{(1,0,\dots,0)} := \psi^{-1}$ und

$\varphi_\alpha := 1$ sonst.

Mit Satz 4.11 in der Version für $H_0^{1,2}(\Omega, \varphi)$ erhält man

für das verallgemeinerte Dirichlet - Problem zu stark elliptischen Sesquilinearformen mit Ableitungstermen bis zur ersten Ordnung und geeignet anwachsenden Koeffizienten die Fredholm - Alternative in $L_2(\Omega, \varphi_0)$. Diese Verallgemeinerung der bekannten Aussage über die Lösungen auf den Fall nicht notwendig beschränkter Gebiete Ω wollen wir nun zeigen.

Wenn die Einbettung $H_0^{1,2}(\Omega, \varphi) \ni u \mapsto u \in L_2(\Omega, \varphi_0)$ kompakt ist und wenn die auf $H_0^{1,2}(\Omega, \varphi) \times H_0^{1,2}(\Omega, \varphi)$ beschränkte Sesquilinearform B eine Gårding - Ungleichung erfüllt:

$$(6) \exists c_1 \in \mathbb{R}^+ \exists c_2 \in \mathbb{R}_0^+ \forall u \in H_0^{1,2}(\Omega, \varphi):$$

$$|B(u, u)| \geq c_1 \|u\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi)}^2 - c_2 \|u\|_{L_2(\Omega, \varphi_0)}^2,$$

so gilt für die Lösungen von

$$(*) (\forall \phi \in H_0^{1,2}(\Omega, \varphi): B(u, \phi) = (f, \phi)_{L_2(\Omega, \varphi_0)}) \text{ für } f \in L_2(\Omega, \varphi_0)$$

die Fredholm - Alternative. Das zeigt man etwa wie in [1], die Fredholm - Alternative bezieht sich dann auf das Problem (*) für B und für die " adjungierte Form " B^* , die durch $B^*(u, v) = \overline{B(v, u)}$ gegeben ist.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen. Wir betrachten auf $C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$ eine Sesquilinearform

$$B: (u, v) \mapsto \int_{\Omega} \left(\sum_{i,k} a_{i,k} \partial_i u \overline{\partial_k v} + \sum_i a_i \overline{\partial_i u} v + \sum_i a_i' u \overline{\partial_i v} + au\overline{v} \right)$$

mit stetigen komplexwertigen Koeffizienten auf Ω . Zur Abkürzung setzen wir dabei $\partial_i u := \partial u / \partial x_i$.

4.14 Satz: Es gelte

i) $\text{Re} \sum_{i,k} a_{i,k}(x) \xi_i \overline{\xi_k} \geq \sum_i e_i(x) |\xi_i|^2$ für alle $x \in \Omega, \xi \in \mathbb{C}^n$ mit stetigen Funktionen $e_i: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$,

ii) $\exists c_3 \in \mathbb{R}^+ : \max |a_{i,k}| \leq c_3 \min e_i$ und

iii) $\max \{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_n|, |a_1'|, |a_2'|, \dots, |a_n'|\} > 0$ in Ω .

Sei $\epsilon \in (0, 1)$. Für

$$\varphi_\alpha^{(\epsilon)} := |a| + (2\epsilon)^{-1} \left(\sum_i e_i^{-1} (|a_i|^2 + |a_i'|^2) \right) \text{ und für}$$

$$\varphi_\alpha^{(\epsilon)} := e_i \text{ für } |\alpha| = 1, \alpha_i = 1 \text{ folgt:}$$

iv) $\exists c_\epsilon \in \mathbb{R}^+ \forall (\phi, \psi) \in C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega):$

$$|B(\phi, \psi)| \leq c_\epsilon \|\phi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi)} \|\psi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi)} \text{ und}$$

v) $\exists c_{1,\epsilon} \in \mathbb{R}^+ \exists c_{2,\epsilon} \in \mathbb{R}_0^+ \forall \phi \in C_0^\infty(\Omega):$

$$|B(\phi, \phi)| \geq c_{1,\epsilon} \|\phi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi)}^2 - c_{2,\epsilon} \|\phi\|_{L_2(\Omega, \varphi_0)}^2.$$

Beweis: Zu v): Sei $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. Folgt:

$$|B(\phi, \phi)| \geq \operatorname{Re} B(\phi, \phi) \geq \int_{\Omega} \sum_1^n e_i |\partial_i \phi|^2 + \operatorname{Re} \int_{\Omega} \sum_1^n a_i \bar{\phi} \partial_i \phi + \operatorname{Re} \int_{\Omega} \sum_1^n a_i' \phi \overline{\partial_i \phi} + \operatorname{Re} \int_{\Omega} a |\phi|^2$$

1) $\operatorname{Re} \int_{\Omega} \sum_1^n a_i \bar{\phi} \partial_i \phi = \operatorname{Re} \int_{\Omega} \sum_1^n e_i^{\frac{1}{2}} \partial_i \phi e_i^{-\frac{1}{2}} a_i \bar{\phi} \geq - \sum_1^n \left(\int_{\Omega} e_i |\partial_i \phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |a_i|^2 e_i^{-1} |\phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ (Schwarz - Ungleichung)

$$\geq - \sum_1^n \left(2^{-1} \epsilon \int_{\Omega} e_i |\partial_i \phi|^2 + (2\epsilon)^{-1} \int_{\Omega} |a_i|^2 e_i^{-1} |\phi|^2 \right),$$

2) wie in 1) folgt:

$$\operatorname{Re} \int_{\Omega} \sum_1^n a_i' \phi \overline{\partial_i \phi} \geq - \sum_1^n \left(2^{-1} \epsilon \int_{\Omega} e_i |\partial_i \phi|^2 - (2\epsilon)^{-1} \int_{\Omega} |a_i|^2 e_i^{-1} |\phi|^2 \right),$$

zusammen:

$$|B(\phi, \phi)| \geq (1 - \epsilon) \sum_1^n \int_{\Omega} e_i |\partial_i \phi|^2 - (2\epsilon)^{-1} \int_{\Omega} |\phi|^2 \cdot \sum_1^n (|a_i|^2 + |a_i'|^2) e_i^{-1} - \int_{\Omega} |a| |\phi|^2.$$

Folgt:

$$|B(\phi, \phi)| \geq (1 - \epsilon) \left[\int_{\Omega} \sum_1^n e_i |\partial_i \phi|^2 + \int_{\Omega} |\phi|^2 (|a| + (2\epsilon)^{-1} \sum_1^n (|a_i|^2 + |a_i'|^2) e_i^{-1}) - [(1 - \epsilon) \int_{\Omega} |\phi|^2 (\dots) + \int_{\Omega} |\phi|^2 (\dots)] \right] = (1 - \epsilon) \|\phi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})}^2 - (2 - \epsilon) \|\phi\|_{L_2(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})}^2.$$

Zu iv): Seien ϕ und ψ aus $C_0^\infty(\Omega)$. Für $i \in \{1, \dots, n\}$ gilt:

$$3) \left| \int_{\Omega} a_i \bar{\psi} \partial_i \phi \right| = \left| \int_{\Omega} e_i^{\frac{1}{2}} \partial_i \phi a_i e_i^{-\frac{1}{2}} \bar{\psi} \right| \leq \left(\int_{\Omega} e_i |\partial_i \phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |a_i|^2 e_i^{-1} |\psi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\phi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})} (2\epsilon)^{\frac{1}{2}} \|\psi\|_{\dots},$$

4) wie in 3) folgt:

$$\left| \int_{\Omega} a_i' \phi \overline{\partial_i \psi} \right| \leq (2\epsilon)^{\frac{1}{2}} \|\phi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})} \|\psi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})}.$$

$$5) \text{ Offenbar gilt: } \left| \int_{\Omega} a \phi \bar{\psi} \right| \leq \left(\int_{\Omega} |a| |\phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} |a| |\psi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|\phi\|_{H^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})} \|\psi\|_{H^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})}.$$

6) Mit Voraussetzung ii) folgt:

$$\left| \int_{\Omega} a_{ik} \partial_i \phi \overline{\partial_k \psi} \right| \leq c_3 \left(\int_{\Omega} e_i |\partial_i \phi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} e_k |\partial_k \psi|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c_3 \|\phi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})} \|\psi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})}.$$

. Zusammen:

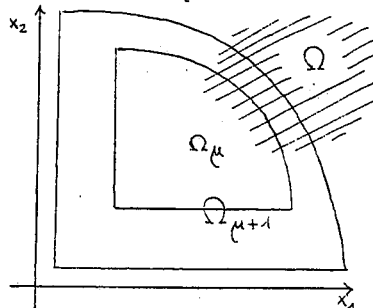
$$|B(\phi, \psi)| \leq (c_3 n^2 + 1 + (8\epsilon)^{\frac{1}{2}} n) \|\phi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})} \|\psi\|_{H_0^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})}.$$

Damit ist Satz 4.14 bewiesen.

Wegen der Stetigkeitsvoraussetzung an die Koeffizienten von B sind die φ_α stetig, wegen der Voraussetzungen i) und iii) positiv.

4.15 Korollar: Sei $\epsilon \in (0, 1)$. Unter den Voraussetzungen von Satz 4.14 an B gilt für das verallgemeinerte Dirichlet - Problem (*) die Fredholm - Alternative in $H_0^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)})$, wenn $\varphi^{(\epsilon)}$ die Bedingung von Satz 4.11 (Version mit $H_0^{1,2}(\Omega, \varphi)$) erfüllt.

Beispiel: Sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 > 0 \wedge x_2 > 0\}$. Eine Ausschöpfung, wie sie in Satz 4.11 benötigt wird, ist gegeben durch $\Omega_\mu := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < \mu\} \cap \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \mu^{-1}\}$.



Der Beweis von Satz 4.12 zeigt, dass für jedes $\varphi_0 \in C^0(\Omega, \mathbb{R}^+)$ mit:

$$\forall \mu \in \mathbb{N} : \mu \varphi_0 |(\Omega_{\mu+1} \setminus \Omega_\mu)| \leq \varphi_0' |(\Omega_{\mu+1} \setminus \Omega_\mu)|,$$

$$\varphi_0'(x) := (1 + x_1^2)^{-1} \text{ für } x \in \Omega$$

und $\varphi_\alpha := \varphi_0'^{-1}$ für $|\alpha| = 1$ gilt: Die Einbettung $H_0^{1,2}(\Omega, \varphi) \ni u \mapsto u \in L_2(\Omega, \varphi_0)$ ist kompakt.

Wir betrachten die Sesquilinearform B, die durch

$$B(\phi, \psi) = \int_{\Omega} \left(\sum_1^n (1 + x_1^2) \partial_i \phi(x) \overline{\partial_i \psi(x)} + a(x) \phi(x) \overline{\psi(x)} + \varphi_0(x) \phi(x) \overline{\psi(x)} \right) dx$$

mit $|a(x)| \leq \mu^{-\frac{1}{2}}$ auf $\Omega_{\mu+1} \setminus \Omega_\mu$ gegeben ist. a sei eine Funktion im Raum $C^0(\Omega)$, für φ_0 gelte:

$$\forall \mu \in \mathbb{N} : \mu \varphi_0 |(\Omega_{\mu+1} \setminus \Omega_\mu)| \leq \varphi_0' |(\Omega_{\mu+1} \setminus \Omega_\mu)|.$$

Dann erfüllt B die Voraussetzungen von Satz 4.14 mit $e_i(x) = 1 + x_1^2$, und es gilt für $\epsilon \in (0, 1)$:

$$\varphi_0^{(\epsilon)} = \varphi_0 + (2\epsilon)^{-1} (1 + px_1^2)^{-1} |a|^2,$$

$$\forall x \in \Omega_{\mu+1} \setminus \Omega_\mu : \varphi_0^{(\epsilon)}(x) \leq \varphi_0(x) + (2\epsilon)^{-1} (\mu^{-1} / (\varphi_0'(x))^{-1}) = \varphi_0(x) + (2\epsilon)^{-1} \mu^{-1} \varphi_0'(x),$$

$\varphi_0^{(\epsilon)}$ kann wie φ_0 abgeschätzt werden.

Mit $\varphi_\alpha^{(\epsilon)}(x) = \varphi_0'^{-1}(x) = 1 + x_1^2$ für $|\alpha| = 1$ ergibt sich

nach den vorigen Bemerkungen, dass die Einbettung $H_0^{1,2}(\Omega, \varphi^{(\epsilon)}) \ni u \mapsto u \in L_2(\Omega, \varphi_0^{(\epsilon)})$ für $\epsilon \in (0, 1)$ kompakt ist.

Nach Korollar 4.15 gilt für die Lösungen der Aufgabe (*) zu $B, \varphi^{(\epsilon)}$ die Fredholm - Alternative in $L_2(\Omega, \varphi_0^{(\epsilon)})$.

Die Koeffizienten a_{ik} von B wachsen für $|x_i| \rightarrow \infty$ gegen ∞ , die anderen Koeffizienten verschwinden für $|x_i| \rightarrow \infty$ und für $x \rightarrow \partial\Omega$.

Die Sätze 3.7 und 4.11 verallgemeinern Ergebnisse von F. Rellich [14], der zeigte, dass für unbeschränkte Gebiete Ω , die für $|x| \rightarrow \infty$ beliebig schmal werden, der Auswahlatz richtig bleibt. Sein Resultat lässt sich daher aus Satz 3.7 ableiten. Wie Satz 4.11 folgt

4.16 Satz: Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, sei $p \in [1, \infty)$. Wenn es eine Ausschöpfung $(\Omega_\mu)_{\mu \in \mathbb{N}}$ mit C^1 -glatten Rändern $\partial\Omega_\mu$ von Ω gibt mit

$$\sup \left\{ \left(\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left\| u \right\|_{H^{1,p}(\Omega)} \leq 1 \right\} \xrightarrow{\mu \rightarrow \infty} 0,$$

so ist die Einbettung $H^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto u \in L_p(\Omega)$ kompakt.

Zum Beweis: Auf die Relativkompaktheitsvoraussetzung von Satz 4.11 kann verzichtet werden, da hier $\varphi_\alpha = 1$ für alle α mit $|\alpha| \leq 1$ gilt und weil man statt Rellichs Auswahlatz im Beweis von Satz 4.11 auch den Auswahlatz "Die Einbettung $H^{1,p}(\Omega) \ni u \mapsto u \in L_p(\Omega)$ ist kompakt, wenn $\partial\Omega$ C^1 -glatt und wenn Ω beschränkt ist" verwenden kann.

Satz 4.16 bleibt richtig, wenn man $H^{1,p}(\Omega)$ durch $H_0^{1,p}(\Omega)$ ersetzt.

Wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) für $|x| \rightarrow \infty$ in einer Dimension beliebig schmal wird - man kann wie Rellich das Schmalwerden mit dem kleinsten Eigenwert der Dirichlet - Randwertaufgabe für den Laplace - Operator auf Querschnitten von Ω messen - , lässt sich die Kompaktheitsbedingung aus Satz 4.16 für $H_0^{1,2}(\Omega)$ nachweisen.

Vorausgesetzt werde etwa:

$$\forall \epsilon > 0 \exists R_\epsilon > 0 \forall \xi \in \mathbb{R}^n: |\xi_2| \geq R_\epsilon \wedge \xi \in \Omega \Rightarrow |\xi_i| < \epsilon,$$

ferner, dass Ω C^1 -glatten Rand hat. Man sucht eine Ausschöpfung von Ω mit C^1 -glatten Rändern und mit:

$\forall \mu \in \mathbb{N} \exists R_\mu \in \mathbb{R}^+: (\Omega \setminus \Omega_\mu) \subset \Omega \setminus \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi_2| < R_\mu\} \wedge R_\mu \rightarrow \infty$ und zeigt dann zu $\epsilon > 0, R_\epsilon$ und einem μ_ϵ mit $R_{\mu_\epsilon} > R_\epsilon$ für $\mu \geq \mu_\epsilon$, dass für $u \in C_0^\infty(\Omega)$ mit $\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq 1$ und für $\mu \geq \mu_\epsilon$ die Abschätzung

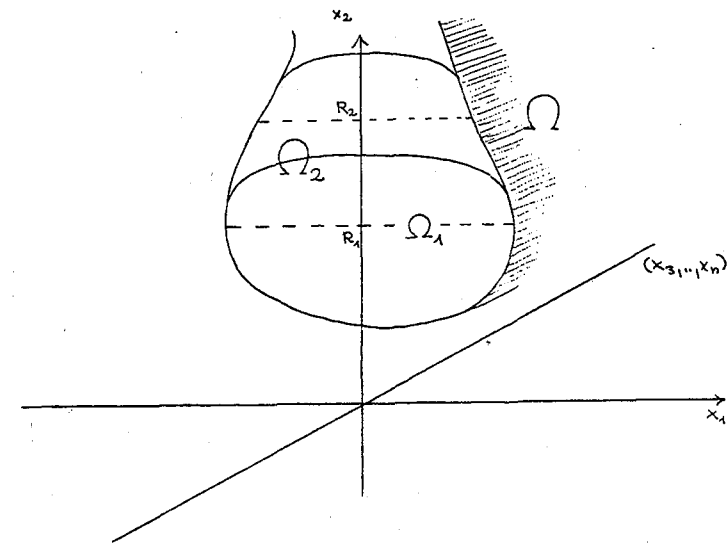
$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |u|^2 \leq \int_{\Omega \cap \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid |\xi_2| > R_\epsilon\}} |u|^2 \text{ gilt, schreibt dann den}$$

rechten Term als Integral nach x_1 und nach (x_2, \dots, x_n) , erhält für das x_1 - Integral nach einer bekannten Abschätzung (weil u kompakten Träger besitzt):

$$\int_{\{x_1 \in \mathbb{R} \mid |x_1| < \epsilon\}} |u(x_1, \dots, x_n)|^2 dx_1 \leq 4c\epsilon^2 \int_{\{\dots\}} |\partial u(x_1, \dots, x_n) / \partial x_1|^2 dx_1$$

mit einer nur von n abhängigen Konstanten c . Integration nach (x_2, \dots, x_n) ergibt mit $\|u\|_{H^{1,2}(\Omega)} \leq 1$:

$$\int_{\Omega \setminus \Omega_\mu} |u|^2 \leq 4c\epsilon^2, \text{ nun folgt leicht die gesuchte Bedingung.}$$



5 Erweiterungen von kEE - Differentialoperatoren mit diskreten Spektren

Die Differentialoperatoren A = L + P besitzen abgeschlossene Erweiterungen in L2(R^n) mit nicht-leerer Resolventenmenge, wenn sie die Voraussetzungen von Satz 4.2 erfüllen. Dies wird sich aus einem Satz von F. E. Browder [3] über die Existenz kompakter Inverser zu Paaren formaladjungierter linearer Abbildungen in reflexiven Banachräumen ergeben. Wegen der Anwendung für Operatoren in L2(R^n) werden im folgenden nur Operatoren in einem C-Hilbertraum betrachtet. Allgemeine Existenzsätze für kompakte Inverse finden sich in [3].

5.1 Definition: Ein Paar (T0, T0') von linearen Abbildungen in einem C-Hilbertraum H heisst formaladjungiert, wenn gilt: D_T0 = H = D_T0' ^ (forall x in D_T0, forall y in D_T0': (y, T0(x)) = (T0'(y), x)).

Ist (T0, T0') ein formaladjungiertes Paar in H, so folgt T0 = (T0')* (die Hilbertraumadjungierte existiert wegen D_T0' = H). Daher ist T0 abschliessbar zu T0-tilde mit T0-tilde = T1 := (T0')*. T0-tilde heisst minimaler Operator zum Paar (T0, T0'), T1 heisst maximaler Operator zum Paar (T0, T0').

5.2 Satz: Sei (T0, T0') ein formaladjungiertes Paar abgeschlossener linearer Abbildungen im Hilbertraum H.

Wenn die Inversen T0^-1 und T0'^-1 auf R_T0 und R_T0' existieren und als Abbildungen von (R_T0, ||.||_H|_R_T0) und (R_T0', ||.||_H|_R_T0') in H kompakt sind, gibt es eine abgeschlossene Erweiterung T von T0 mit kompakter Inverser auf H und mit T0 = T < T1.

Zum Beweis: Ein entsprechender Satz ist in [3] als Theorem 3.5 für Paare formaladjungierter linearer Abbildungen in reflexiven Banachräumen bewiesen. Der Beweis überträgt sich auf den Fall eines Hilbertraums, bei dem T1 durch die Hilbertraumadjungierte definiert ist.

Die Operatoren A: L2(R^n) -> C0^inf(R^n) : u -> L(u) + pu in L2(R^n) und A': L2(R^n) -> C0^inf(R^n) : u -> L-tilde(u) + p-tilde u in L2(R^n)

mit L(u) = sum_{|alpha| <= r} a_alpha D^alpha u, L-tilde(u) = sum_{|alpha| <= r} a-tilde_alpha D^alpha u, a_alpha in C für |alpha| <= r, p: R^n -> C messbar und lokal wesentlich beschränkt,

bilden in L2(R^n) ein formaladjungiertes Paar, wie man durch partielle Integration sieht. Es folgt leicht, dass auch die Abschliessungen ein formaladjungiertes Paar in L2(R^n) bilden.

Wenn A die Voraussetzungen von Satz 4.2 erfüllt, so auch A' mit den gleichen Konstanten k0 und k in den Abschätzungen. A und A' haben die kEE und erfüllen (siehe Beweis von Satz 4.2):

forall u in C0^inf(R^n): integral_R^n (Re p + k + 1) |u|^2 <= Re(A(u), u)_L2(R^n) + (k0 + k + 1) ||u||_L2(R^n)^2 = Re(A'(u), u)_L2(R^n) + (k0 + k + 1) ||u||_L2(R^n)^2.

Daher gibt es ein k1 in R+, sodass für A + k1 Id und A' + k1 Id gilt:

forall u in C0^inf(R^n): integral_R^n |u|^2 <= Re((A + k1 Id)(u), u)_L2(R^n) = Re((A' + k1 Id)(u), u)_L2(R^n).

Wegen Lemma 2.9 haben A + k1 Id und A' + k1 Id die kEE, sie bilden ein formaladjungiertes Paar in L2(R^n), weil (A, A') eines ist. Die Abschliessungen A + k1 Id und A' + k1 Id haben nach Lemma 2.4 auch die kEE, und sie bilden ein formaladjungiertes Paar in L2(R^n). Aus den Abschätzungen oben ergibt sich durch Abschliessen auch die Injektivität von A + k1 Id und A' + k1 Id. Nach Lemma 2.7 erfüllen A + k1 Id und A' + k1 Id alle Voraussetzungen von Satz 5.2. Deshalb existiert eine abgeschlossene surjektive lineare Fortsetzung T von A + k1 Id mit kompakter Inverser T^-1 und mit:

T <= (A' + k1 Id)* = ((A' + k1 Id)**)* = ((A' + k1 Id)*)** = (A' + k1 Id)* = (A + k1 Id)_1.

Damit ist fast bewiesen, dass gilt:

5.3 Satz: Der Differentialoperator $A: u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha u + pu$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$ für $|\alpha| \leq r$ und mit p messbar, lokal wesentlich beschränkt und den Eigenschaften

- i) $\operatorname{Re} p \geq -k$ für ein $k \in \mathbb{R}$ und $\operatorname{Re} p(x) \rightarrow +\infty$, $|x| \rightarrow \infty$,
 - ii) $\operatorname{Re} \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha \xi^\alpha \rightarrow +\infty$, $|\xi| \rightarrow \infty$
- besitzt eine abgeschlossene lineare Erweiterung A_ϱ mit den Eigenschaften
- iii) $A_\varrho \subset A_\lambda = (A')^*$,
 - iv) $\varrho(A_\varrho) \neq \emptyset$,
 - v) $\forall \lambda \in \varrho(A_\varrho): R(A_\varrho, \lambda)$ ist kompakt.

Beweis: Für $A_\varrho := T - k_1 \operatorname{Id}$ gilt: A_ϱ ist abgeschlossen, $-k_1 \in \varrho(A_\varrho)$, $R(A_\varrho, -k_1) = T^{-1}$ ist kompakt, also sind alle Resolventen kompakt. Aus $T \supset \widetilde{A} + k_1 \operatorname{Id} = \widetilde{A} + k_1 \operatorname{Id}$ (leicht zu sehen) folgt $\widetilde{A} \subset A_\varrho$.

Es gilt: $T \subset (A + k_1 \operatorname{Id})_\lambda = A_\lambda + k_1 \operatorname{Id}$.
 Beweis der Gleichung: Wegen $(A + k_1 \operatorname{Id})_\lambda = (A' + k_1 \operatorname{Id})^*$ und wegen $A_\lambda + k_1 \operatorname{Id} = A'^* + k_1 \operatorname{Id}$ ist zu zeigen:
 $(A' + k_1 \operatorname{Id})^* = A'^* + k_1 \operatorname{Id}$. - Dies wird im Lemma 5.4 bewiesen, damit erhält man:

$A_\varrho = T - k_1 \operatorname{Id} \subset A_\lambda$, Satz 5.3 ist bewiesen.

5.4 Lemma: $T: H \supset D_T \rightarrow H$ sei eine dicht definierte lineare Abbildung im \mathbb{C} -Hilbertraum H . Dann existieren für alle $c \in \mathbb{C}$ die Hilbertraumadjungierten $(T + c \operatorname{Id})^*$, und es gilt:
 $T^* + \bar{c} \operatorname{Id} = (T + c \operatorname{Id})^*$.

Beweis: $x^* \in D_{T^* + \bar{c} \operatorname{Id}} = D_{T^*} \Rightarrow (\forall x \in D_T: (T(x), x^*) = (x, T^*(x^*))) \Rightarrow (\forall x \in D_T: ((T + c \operatorname{Id})(x), x^*) = (x, T^*(x^*)) + (x, \bar{c} x^*) = (x, (T^* + \bar{c} \operatorname{Id})(x^*))) \Rightarrow$

$x^* \in D_{(T + c \operatorname{Id})^*} \wedge (T + c \operatorname{Id})^*(x^*) = (T^* + \bar{c} \operatorname{Id})(x^*)$.

Bleibt zu zeigen: $D_{(T + c \operatorname{Id})^*} \subset D_{T^* + \bar{c} \operatorname{Id}}$. Für $x^* \in D_{(T + c \operatorname{Id})^*}$ folgt:

$(\forall x \in D_{T + c \operatorname{Id}} = D_T: ((T + c \operatorname{Id})(x), x^*) = (x, (T + c \operatorname{Id})^*(x^*))) \wedge ((T + c \operatorname{Id})(x), x^*) = (T(x), x^*) + (cx, x^*) \Rightarrow (\forall x \in D_T: (T(x), x^*) = (x, (T + c \operatorname{Id})^*(x^*))) - (x, \bar{c} x^*) = (x, ((T + c \operatorname{Id})^* - \bar{c} \operatorname{Id})(x^*))) \Rightarrow x^* \in D_{T^* + \bar{c} \operatorname{Id}}$.

5.5 Korollar: Der Differentialoperator A erfülle die Voraussetzungen in Satz 5.3. Dann gilt:

- i) $\sigma_p(\widetilde{A})$ ist in \mathbb{C} diskret (und damit höchstens abzählbar),
- ii) es gibt eine abgeschlossene Erweiterung A_ϱ von A mit $\widetilde{A} \subset A_\varrho \subset A_\lambda$, sodass $\sigma(A_\varrho)$ in \mathbb{C} diskret ist und dass gilt: $\sigma(A_\varrho) = \sigma_p(A_\varrho)$.
 Für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $A_\varrho - \lambda \operatorname{Id}$ ein Fredholm - Operator vom Index Null.

Beweis: ii) folgt aus Satz 5.3 und aus Satz 2.13. i) folgt aus ii) mit $\sigma_p(\widetilde{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 < \dim N_{\widetilde{A} - \lambda \operatorname{Id}} < \infty\} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid 0 < \dim N_{A_\varrho - \lambda \operatorname{Id}}\} \subset \sigma(A_\varrho) = \sigma_p(A_\varrho)$.

Der Beweis von Satz 5.3 beruhte auf dem Nachweis der KEE und der Injektivität für die Operatoren $A + k_1 \operatorname{Id}$ und $A' + k_1 \operatorname{Id}$. Die Injektivität ergab sich aus den Realteilvoraussetzungen. Wie oben kann man deshalb unter zusätzlichen Voraussetzungen für die Existenz eines formaladjungierten Paares (A, A') für die Operatoren A von Satz 4.9 ein Analogon zu Satz 5.3 beweisen.

Wenn der Anteil $\sum_{|\alpha| \leq 2m} a_\alpha D^\alpha$ noch gleichmäßig stark elliptisch in Ω ist und wenn die a_α in Ω beschränkt sind, gilt sogar $\varrho(\widetilde{A}) \neq \emptyset$ (siehe Theorem 24 in [4]), und deshalb nach Lemma 2.12, Satz 2.13, Satz 4.9 (siehe auch die Bemerkungen nach dem Beweis von Satz 4.9): $\sigma(\widetilde{A}) = \sigma_p(\widetilde{A})$ ist in \mathbb{C} diskret, für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\widetilde{A} - \lambda \operatorname{Id}$ ein Fredholm - Operator vom Index Null.

Wenn die Differentialoperatoren $A = L + P$, die die

Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllen, eine Friedrichs - Erweiterung A_F besitzen, so hat auch A_F die kEE.

Friedrichs - Erweiterungen sind regulär akkretiv und haben deshalb nicht - leere Resolventenmengen. In diesem Fall hat also eine konstruierbare Erweiterung von A diskretes Spektrum.

Das soll nun gezeigt werden.

Seien H_1 und H \mathbb{C} - Hilberträume und sei $e: H_1 \rightarrow H$ eine stetige, lineare und injektive Abbildung mit $e(H_1) = H$. Sei $a: H_1 \times H_1 \rightarrow \mathbb{C}$ eine beschränkte Sesquilinearform. Setze

$D_{T_a} := \{x \in R_e \mid \exists y \in H \forall x_1 \in H_1: a(e^{-1}(x), x_1) = (y, e(x_1))\}$. y ist dann zu $x \in D_{T_a}$ eindeutig bestimmt, da $e(H_1)$ dicht in H ist. Daher definiert $D_{T_a} \ni x \mapsto y \in H$ eine lineare Abbildung T_a in H . T_a heisst der zu a assoziierte Operator.

5.6 Definition: Eine lineare Abbildung T im \mathbb{C} - Hilbertraum H heisst regulär akkretiv, wenn existieren: ein \mathbb{C} - Hilbertraum H_1 und eine stetige lineare injektive Abbildung e von H_1 in H mit dichtem Bild, eine beschränkte Sesquilinearform a auf $H_1 \times H_1$ mit $(\exists N \in \mathbb{R}_0^+ \exists c \in \mathbb{R}_0^+ \forall x_1 \in H_1: \|x_1\|_{H_1}^2 \leq c(\operatorname{Re} a(x_1, x_1) + N\|e(x_1)\|_H^2))$, und wenn T der zu a assoziierte Operator ist.

5.7 Lemma: Ein regulär akkretiver Operator in H ist abgeschlossen.

Beweis: Siehe Theorem 6.14 in [16], S. 29.

5.8 Satz: Seien H_1 und H \mathbb{C} - Hilberträume. H_1 sei durch eine Abbildung e stetig, linear und mit $e(H_1) = H$ in H eingebettet. Sei $U \subset H_1$ ein dichter Teilraum. Sei T ein linearer Operator in H mit $D_T \subset e(U)$. Es gebe eine beschränkte Sesquilinearform $a: U \times U \rightarrow \mathbb{C}$ mit: $\exists C \in \mathbb{R}_0^+ \exists N \in \mathbb{R}_0^+ \forall u \in U: \|u\|_{H_1}^2 \leq C(\operatorname{Re} a(u, u) + N\|e(u)\|_H^2)$, und es gelte: $\forall u \in U \forall x \in D_T: a(e^{-1}(x), u) = (T(x), e(u))$.

Dann lässt sich a stetig zu einer beschränkten Sesquilinearform a_F auf $H_1 \times H_1$ fortsetzen, und der zu a_F assoziierte Operator T_F in H ist regulär akkretiv mit a_F als zugehöriger Sesquilinearform. a_F erfüllt auf H_1 die gleiche Abschätzung wie a auf U .

T_F heisst Friedrichs - Erweiterung zu T .

Beweis zu Satz 5.8: Siehe Theorem 6.6 in [16], S. 24.

5.9 Satz: Sei $T: H \supset D_T \rightarrow H$ regulär akkretiv. Dann gilt $\sigma(T) \subset \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > -N\}$ mit der Konstanten N aus der regulär - akkretiv - Abschätzung der zugehörigen Sesquilinearform.

Beweis: Siehe S. 25, S. 26 in [16] und Lemma 5.7.

Insbesondere haben also Friedrichs - Erweiterungen nicht - leere Resolventenmengen.

5.10 Satz: T erfülle mit einer Sesquilinearform a die Voraussetzungen von Satz 5.8. Es gelte $D_T = e(U)$, und es sei die Menge $M_T := \{x \in D_T \mid |(T(x), x)| + \|x\|_H^2 \leq 1\}$ relativkompakt in H .

Dann hat T_F die kEE.

Beweis: Wegen $\{x \in D_{T_F} \mid \|x\|_{T_F} \leq 1\} \subset \{x \in D_{T_F} \mid |a_F(e^{-1}(x), e^{-1}(x))| + \|x\|_H^2 \leq 2^{-1}\}$ (" \subset ", weil $|a_F(e^{-1}(x), e^{-1}(x))| = |(T_F(x), x)| \leq 2^{-1}(\|T_F(x)\|_H^2 + 2^{-1}\|x\|_H^2)$)

folgt die Behauptung aus der Relativkompaktheit von $M(a_F) := \{x \in D_{T_F} \mid |a_F(e^{-1}(x), e^{-1}(x))| + \|x\|_H^2 \leq 1\}$. -

Nach Voraussetzung ist M_T relativkompakt in H , also auch

$M(a) := \{x \in e(U) = D_T \mid |a(e^{-1}(x), e^{-1}(x))| + \|x\|_H^2 \leq 1\} = M_T$ und damit für alle $c \in \mathbb{R}^+$

$M(a, c) := \{x \in e(U) \mid |a(e^{-1}(x), e^{-1}(x))| + \|x\|_H^2 \leq c\} = c^{\frac{1}{2}} M(a)$. Die Relativkompaktheit von $M(a_F)$ folgt nun aus:

$\exists c \in \mathbb{R}^+ : M(a_F) \subset \overline{M(a, c)}$.

Beweis davon: Sei $x \in M(a_F)$. Wegen

$$\|e^{-1}(x)\|_{H_1}^2 \leq C(\operatorname{Re} a_F(e^{-1}(x), e^{-1}(x)) + N\|x\|_H^2)$$

- da $x \in M(a_F) \subset D_{T_F} = e(H_1)$ nach Konstruktion der Friedrichs - Erweiterung als assoziierter Operator zu a_F -

$$\leq C(N + 1)(|a_F(e^{-1}(x), e^{-1}(x))| + \|x\|_H^2) \leq C(N + 1),$$

wegen $\bar{U} = H_1$ und der Stetigkeit von e gibt es eine Folge

$$(u_n^{(x)})_{n \in \mathbb{N}} \text{ in } U \text{ mit } u_n^{(x)} \rightarrow e^{-1}(x) \text{ und } e(u_n^{(x)}) \rightarrow x,$$

$$\|e(u_n^{(x)})\|_H^2 \leq 2 \text{ und } \|u_n^{(x)}\|_{H_1}^2 \leq C(N + 1) + 1 \text{ f\"ur alle } n \in \mathbb{N}.$$

Zu zeigen bleibt:

$$\exists c \in \mathbb{R}^+ \forall x \in M(a_F) \forall n \in \mathbb{N} : e(u_n^{(x)}) \in M(a, c).$$

Es gilt:

$$\forall x \in M(a_F) \forall n \in \mathbb{N} : e(u_n^{(x)}) \in e(U) = D_T \quad \wedge$$

$$|a(e^{-1}(e(u_n^{(x)})), e^{-1}(e(u_n^{(x)})))| + \|e(u_n^{(x)})\|_H^2 \leq$$

$$K(a)\|u_n^{(x)}\|_{H_1}^2 + \|e(u_n^{(x)})\|_H^2 \leq K(a)[C(N + 1) + 1] + 2,$$

weil a auf $U \times U$ beschränkt ist, und nach Wahl der Folgen

$$(u_n^{(x)})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Mit $c := K(a)[C(N + 1) + 1] + 2$ folgt $e(u_n^{(x)}) \in M(a, c)$

für alle $x \in M(a_F)$, mit $e(u_n^{(x)}) \rightarrow x$ gilt also $M(a_F) \subset \overline{M(a, c)}$, damit ist der Satz bewiesen.

Für Differentialoperatoren $A = L + P$, die die Voraussetzungen von Satz 5.3 erfüllen, ist die Menge M_A relativkompakt in $H := L_2(\mathbb{R}^n)$:

Wegen Satz 4.6 sind die Voraussetzungen von Satz 4.5 erfüllt, daher die von Satz 4.2. Man geht wie im Beweis von Satz 4.2 vor und erhält die Abschätzungen:

$$\forall u \in D_A : \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{Re} p + k + 1)|u|^2 \leq (k_0 + |k| + 1) \cdot$$

$$\cdot (\operatorname{Re}(A(u), u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + \|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2) \text{ und:}$$

$$\exists (s : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_0^+ : s(0) = 0 \wedge s \text{ in } 0 \text{ stetig}) \forall u \in D_A \forall t \in \mathbb{R}^n :$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u(\cdot + t) - u|^2 \leq s(t)[\operatorname{Re}(A(u), u)_{L_2(\mathbb{R}^n)} + (k_0 + |k|)\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2]$$

Daraus folgt:

$\forall u \in M_A : \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{Re} p + k + 1)|u|^2 \leq k_0 + |k| + 1$, und:

$$\forall u \in M_A \forall t \in \mathbb{R}^n : (\int_{\mathbb{R}^n} |u(\cdot + t) - u|^2)^{\frac{1}{2}} \leq s^{\frac{1}{2}}(t)(k_0 + |k| + 1)^{\frac{1}{2}}$$

Mit den vorausgesetzten Grenzwerteigenschaften von $\operatorname{Re} p$ und mit $s(0) = 0$, s in 0 stetig erhält man aus Satz 3.1 die Relativkompaktheit von M_A (M_A ist beschränkt, da $M_A \subset$ (Einheitskugel in $L_2(\mathbb{R}^n)$) nach Definition von M_A).

Hinreichende Bedingungen dafür, dass A die in Satz 5.10 benötigten Voraussetzungen von Satz 5.8 erfüllt, werden in [16] angegeben. Diese Bedingungen sind mit den Voraussetzungen in Satz 5.3, die die Relativkompaktheit von M_A garantieren, verträglich.

5.11 Satz: Sei ein Polynom $L(\cdot) : \mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha \xi^\alpha \in \mathbb{C}$ mit $a_\alpha \in \mathbb{C}$ gegeben mit:

$$\exists C \in \mathbb{R}^+ \exists M \in \mathbb{R} \forall \xi \in \mathbb{R}^n : |\operatorname{Im} L(\xi)| \leq C(\operatorname{Re} L(\xi) + M).$$

Sei $p : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, lokal wesentlich beschränkt gegeben mit:

$$- \min(\operatorname{Re} p, 0) \text{ beschränkt } \wedge \exists C_1 \in \mathbb{R}^+ :$$

$$|\operatorname{Im} p| \leq C_1(\max(\operatorname{Re} p, 0) + 1).$$

Dann besitzt der Differentialoperator

$A : u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha u + pu$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Friedrichs - Erweiterung A_F in $L_2(\mathbb{R}^n)$. A erfüllt die Voraussetzungen in Satz 5.8.

Beweis (Reduktion auf Theorem 2.2, S. 123 in [16] nach M. Schechter): Für A sind die Voraussetzungen von Satz 5.8 zu konstruieren. Setze $H := L_2(\mathbb{R}^n)$, $U := C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Die Sesquilinearform

$$(\cdot, \cdot)_U : (\varphi, \psi) \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} (\operatorname{Re} L(\cdot) + M + 1)F\varphi\overline{F\psi} + \int_{\mathbb{R}^n} \max(\operatorname{Re} p, 0)\varphi\overline{\psi}$$

macht U zu einem Skalarproduktraum $(U, (\cdot, \cdot)_U)$.

Sei H_1 die Vervollständigung von $(U, (\cdot, \cdot)_U)$ in H , also

$$H_1 = \{f \in H \mid \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } (U, (\cdot, \cdot)_U) : u_n \xrightarrow{H} f\}.$$

Wegen $(\varphi \in U \subset H_1 \Rightarrow \|\varphi\|_H^2 = \|\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 = \|F\varphi\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \leq (\varphi, \varphi)_U = \|\varphi\|_U^2)$ ist H_1 , versehen mit der stetigen Fortsetzung

$(\cdot, \cdot)_1$ von $(\cdot, \cdot)_U$ auf $H_1 \times H_1$ als Skalarprodukt, ein Hilbertraum, und die Einbettung $e : H_1 \ni x \mapsto x \in H$ ist stetig

mit dichtem Bild ($H \subset \bar{U} = \overline{e(U)} \subset \overline{e(H_1)}$).

Nach Konstruktion ist U in H_1 dicht.

$a(\varphi, \psi) := (A(\varphi), \psi)_{L_2(\mathbb{R}^n)}$ für φ und ψ aus U definiert auf $U \times U$ eine Sesquilinearform. Es gilt $e(U) = U = D_A$ und:

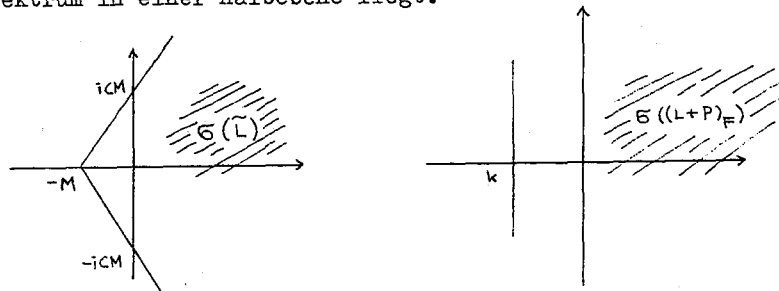
$$\forall \varphi \in U \forall \psi \in D_A: a(e^{-1}(\psi), \varphi) = (A(\psi), e(\varphi))_H.$$

Damit folgt die Behauptung von Satz 5.11 aus Satz 5.8, wenn noch gezeigt werden kann:

- i) a ist auf $U \times U$ beschränkt bezüglich $\|\cdot\|_1$,
- ii) $\exists C \in \mathbb{R}_0^+ \exists N \in \mathbb{R}_0^+ \forall u \in U: \|u\|_1^2 \leq C(\operatorname{Re} a(u, u) + N\|e(u)\|_H^2)$.

Diese beiden Aussagen ergeben sich nach Theorem 2.2 in [16], S.123 aus den Voraussetzungen an L und p . Die garantieren im wesentlichen, dass die mit $L + P$ definierte Form a durch die nur mit $\operatorname{Re} L(\cdot)$ und $\operatorname{Re} p$ definierte H_1 -Norm abgeschätzt werden kann. Die Forderungen an L und p , die das Wachstum der Real- und Imaginärteile verknüpfen, können noch abgeschwächt werden - vergleiche Theorem 2.3 in [16], S. 123.

Speziell bedeuten sie für $L(\cdot)$ mit $\sigma(\tilde{L}) = \overline{L(\mathbb{R}^n)}$:
 $\sigma(\tilde{L}) = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \leq C(\operatorname{Re} z + M)\}$. Satz 5.11 und Satz 5.9 sagen dann: Wenn $\sigma(\tilde{L})$ in einem Winkelgebiet liegt, dann gibt es eine Erweiterung $(L + P)_F$ von $L + P$, deren Spektrum in einer Halbebene liegt.



5.12 Korollar: Sei $L(\cdot): \mathbb{R}^n \ni \xi \mapsto \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha \xi^\alpha \in \mathbb{C}$ ein Polynom mit komplexen Koeffizienten und den Eigenschaften:

- i) $\operatorname{Re} L(\xi) \xrightarrow{|\xi| \rightarrow +\infty} +\infty$,
 - ii) $\exists C \in \mathbb{R}^+ \exists M \in \mathbb{R}^+ \forall \xi \in \mathbb{R}^n: |\operatorname{Im} L(\xi)| \leq C(\operatorname{Re} L(\xi) + M)$.
- Sei $p: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ messbar, lokal wesentlich beschränkt, und es gelte:
- iii) $\operatorname{Re} p(x) \xrightarrow{|x| \rightarrow \infty} +\infty$,

iv) $\exists C_1 \in \mathbb{R}^+: |\operatorname{Im} p| \leq C_1(\max(\operatorname{Re} p, 0) + 1)$.

Dann hat der Differentialoperator $A: u \mapsto \sum_{|\alpha| \leq r} a_\alpha D^\alpha u + pu$ in $L_2(\mathbb{R}^n)$ mit Definitionsbereich $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ eine Friedrichs - Erweiterung A_F mit kompakten Resolventen. Für das Spektrum $\sigma(A_F)$ gilt $\sigma(A_F) = \sigma_p(A_F)$, es ist höchstens abzählbar, diskret in \mathbb{C} und liegt in einer Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > k\}$ mit $k \in \mathbb{R}$. $A_F - \lambda \operatorname{Id}$ ist für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Fredholm - Operator vom Index Null.

Für A gilt: $\tilde{A} - \lambda \operatorname{Id}$ ist für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Semi - Fredholm-Operator mit endlich-dimensionalem Kern. $\sigma_p(\tilde{A})$ ist höchstens abzählbar, diskret in \mathbb{C} , enthalten in einer Halbebene $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > k\}$ mit $k \in \mathbb{R}$. Es gilt $\sigma(\tilde{A}) = \sigma_p(\tilde{A}) \cup \sigma_R(\tilde{A})$.

Beweis: Die Existenz von A_F folgt aus Satz 5.11, ebenso, dass die Voraussetzungen von Satz 5.10 ausser der Relativ-kompaktheit von M_A erfüllt sind. Die folgt aus den Bemerkungen vor Satz 5.11. Satz 5.10 gibt dann die kEE von A_F . Satz 5.9 liefert $\varphi(A_F) \neq \emptyset$ und $\sigma(A_F) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > k\}$ für ein $k \in \mathbb{R}$. Lemma 2.12 und Satz 2.13 ergeben die übrigen Behauptungen über A_F .

$\sigma_p(\tilde{A}) \subset \sigma_p(A_F)$ folgt wie im Beweis von Korollar 5.5.

A hat die kEE nach Satz 4.6 und Satz 4.5, daher \tilde{A} nach Lemma 2.4 und $\tilde{A} - \lambda \operatorname{Id}$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ nach Lemma 2.9.

Satz 2.5 ergibt, dass alle $\tilde{A} - \lambda \operatorname{Id}$ Semi - Fredholmoperatoren mit endlichem Kern sind, da sie abgeschlossen sind. Satz 2.11 liefert $\sigma(\tilde{A}) = \sigma_p(\tilde{A}) \cup \sigma_R(\tilde{A})$.

Die Relationen $A_F = \tilde{A}$ und $A_F = \tilde{A}$ lassen sich durch Eigenschaften von \tilde{A} funktionalanalytisch charakterisieren:

5.13 Lemma: Sei $T: X \supset D_T \rightarrow X$ eine abgeschlossene lineare Abbildung im Banachraum X über \mathbb{C} . Sei T_f eine abgeschlossene lineare Fortsetzung von T mit der kEE und mit nicht-leerer Resolventenmenge $\varphi(T_f)$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- i) $T = T_f$,
- ii) $\varphi(T) \neq \emptyset$,
- iii) $\exists \lambda \in \mathbb{C}: T - \lambda \operatorname{Id}$ Fredholm - Operator vom Index Null,

iv) $\exists \lambda \in \mathbb{C}: T - \lambda \text{Id}$ surjektiv.

Beweis: " i) \Rightarrow ii) " ist klar.

" ii) \Rightarrow iii) ": Mit T_f hat T die KEE wegen

$$i_T(\{x \in D_T \mid \|x\|_T \leq 1\}) = \{x \in D_T \mid \|x\|_T \leq 1\} \subset$$

$$\{x \in D_{T_f} \mid \|x\|_{T_f} \leq 1\} = i_{T_f}(\{x \in D_{T_f} \mid \|x\|_{T_f} \leq 1\}).$$

Lemma 2.12 und Satz 2.13 geben mit $\varphi(T) \neq \emptyset$ dann iii).

" iii) \Rightarrow ii) ": $T_f - \lambda \text{Id}$ ist dann eine abgeschlossene lineare Fortsetzung von $T - \lambda \text{Id}$, und beide sind Fredholm - Operatoren vom Index 0. Nach Theorem 3.4, S. 12, [46]

folgt $T_f - \lambda \text{Id} = T - \lambda \text{Id}$, daraus $T_f = T$.

Wegen Lemma 2.12 und Satz 2.13 gilt " i) \Rightarrow iv) ".

" iv) \Rightarrow iii) ": $T - \lambda \text{Id}$ surjektiv $\Rightarrow T_f - \lambda \text{Id}$ surjektiv \Rightarrow

(da nach Lemma 2.12, Satz 2.13 Fredholm - Operator vom Index 0)

$T_f - \lambda \text{Id}$ injektiv $\Rightarrow T - \lambda \text{Id}$ injektiv $\Rightarrow T - \lambda \text{Id}$ Fredholm -

Operator vom Index Null.

Literatur:

- [1] S. Agmon, Lectures on Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand, Princeton 1965,
- [2] S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Estimates near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Differential Equations satisfying General Boundary Conditions I, Comm. Pure Appl. Math. 12 (1959), 623 - 727,
- [3] F. E. Browder, Functional Analysis and Partial Differential Equations I, Math. Ann 138 (1959), 55 - 79,
- [4] - - - - -, On the Spectral Theory of Elliptic Differential Operators, Math. Ann. 142 (1961), 22 - 130,
- [5] - - - - -, Functional Analysis and Partial Differential Equations II, Math. Ann. 145 (1962), 81 - 226,
- [6] A. Friedman, Partial Differential Equations, Holt, Rinehart and Winston, New York 1969,
- [7] K. Friedrichs, Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren mit Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren, Erster und Zweiter Teil, Math. Ann. 109 (1934), 465 - 487 und 685 - 713,
- [8] I. C. Gohberg, M. G. Krein, The basic propositions on defect numbers, root numbers and indices of linear operators, Am. Math. Soc. Transl. (2) 13 (1960), 185 - 264
(Russisches Original in: Uspehi Mat. Nauk (N. S.) 12 (1957) no 2 (74), 43 - 118),
- [9] S. Goldberg, Unbounded Linear Operators, McGraw - Hill, New York 1966,
- [10] F. Hirzebruch, W. Scharlau, Funktionalanalysis, Bibliographisches Institut, Mannheim 1971,
- [11] L. Hörmander, On the Theory of General Partial Differential Operators, Acta Math. 94 (1955), 161 - 248,
- [12] I. S. Louhivaara, C. G. Simader, Über nichtelliptische lineare partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten, Mathematisches In-

- stitut der Universität Jyväskylä, Jyväskylä 1972,
- [13] B. Malgrange, Sur une classe d'opérateurs différentiels hypoelliptiques, Bull. Soc. Math. France 85 (1957), 283 - 306,
 - [14] F. Rellich, Das Eigenwertproblem von $\Delta u + \lambda u = 0$ in Halbröhren, Courant Anniversary Volume 1948,
 - [15] M. Riesz, Sur les ensembles compacts de fonctions sommables, Acta Sci. Math. Szeged 6 (1933), 136 - 142,
 - [16] M. Schechter, Spectra of Partial Differential Operators, North - Holland Publ. Comp., Amsterdam 1971,
 - [17] A. N. Tulaikov, Zur Kompaktheit im Raum L_p für $p = 1$, Gött. Nachr. 1933, 167 - 170,
 - [18] J. Wloka, Funktionalanalysis und Anwendungen, de Gruyter, Berlin 1971.

Lebenslauf:

Am 14. März 1948 wurde ich in Homberg (bei Kassel) geboren. Zwei Jahre später zogen meine Eltern Karl und Elsbeth Walther mit meinem jüngeren Bruder und mir nach Kassel, wo mein Vater am Landgericht als Richter tätig war und heute noch ist.

In Kassel besuchte ich die Grundschule und dann die Wilhelmschule, ein neusprachliches und mathematisch-naturwissenschaftliches Gymnasium.

Im November 1966 legte ich dort die Reifeprüfung ab und begann in Göttingen Mathematik zu studieren. Ich verbrachte nach der Diplom-Vorprüfung ein Semester in Heidelberg, dann wieder zwei in Göttingen und kam im Sommer 1970 nach München, wo auch meine Frau studierte.

Im Juli 1971 bestand ich die Diplomprüfung in Mathematik mit " ausgezeichnet ". In der Diplomarbeit, die von Dr. Königsberger betreut worden war, hatte ich mich mit L. Hörmanders Untersuchung der Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen in C^n befasst.

Während meines Studiums tendierte ich zunehmend zur angewandten Mathematik. So arbeitete ich mich nach der Diplomprüfung am Lehrstuhl von Prof. Wienholtz in das Gebiet der linearen partiellen Differentialgleichungen ein.

Seit Mai 1973 bin ich " Verwalter der Dienstgeschäfte eines wissenschaftlichen Assistenten " am Mathematischen Institut der Universität München.