Oberhess. Naturwiss. Zeitschr. 2023, 71: 6-66, Gießen *ISSN 0340-4498*

ZAHLEN

Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung

des Zahlbegriffes

WILLI KAFITZ*)

Abstract:
Numbers are as old as there are people of a level of development who can abstract accordingly and only see the number of objects as a commonality. This is how counting and natural numbers came about. In early high cultures, calculations were already being made intensively with fractions. However, negative numbers were sometimes vehemently rejected up to the 15th century. The zero does not appear in India until the middle of the first millennium AD. The discovery of irrational numbers was long considered the first crisis in ancient mathematics. That is put into perspective today. Only towards the end of the 19th century was it recognized that a gapless continuum is formed by all real numbers and thus continuity could be given a consistent basis. The complex numbers gave mathematics a significant expansion and allowed e.g. theorems of great generality, scope and aesthetics in the theory of functions. However, attempts to expand the concept of numbers beyond complex numbers had to accept limitations. These restrictions are based on the system that has been established by algebra for around 200 years. A variety of terms such as field, group, ring, vector space 3and numerous gradations have emerged that describe the degree of systematization of mathematical objects and make calculations with them possible. There are often generalizations of the numbers in individual aspects, which no longer deserve this term, but are of interest both in mathematics and in their applications. But in order to meet the algebraic, geometric and analytical requirements and last but not least the applications in the natural and engineering sciences, the real and complex numbers and, with considerable drawbacks, the quaternions proved to be suitable. A new and already fruitful way of looking at the connection between numbers and geometry is also proving useful.

Keywords:

history of different types of numbers, generalization of numbers, systematization by algebraic structures, quaternions, p-adic numbers

Zusammenfassung:
Zahlen sind so alt wie es Menschen einer Entwicklungsstufe gibt, die entsprechend abstrahieren können und nur die Anzahl von Objekten als Gemeinsamkeit sehen. So endstand das Zählen und die natürlichen Zahlen. In frühen Hochkulturen wurde auch bereits intensiv mit Brüchen gerechnet. Negative Zahlen wurden jedoch teilweise bis ins 15. Jahrhundert vehement abgelehnt. Auch die Null taucht erst Mitte des ersten Jahrtausends nach Christus in Indien auf. Die Entdeckung von irrationalen Zahlen galt lange Zeit als erste Krise der antiken Mathematik. Das wird heute relativiert. Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde erkannt, dass durch alle reellen Zahlen ein lückenloses Kontinuum gebildet wird und somit der Stetigkeit eine konsistente Grundlage gegeben werden konnte. Die komplexen Zahlen schenkten der Mathematik eine bedeutende Erweiterung und erlaubten z.B. in der Funktionentheorie Sätze von großer Allgemeinheit, Tragweite und Ästhetik. Versuche zu Erweiterungen des Zahlbegriffes über die komplexen Zahlen hinaus mussten aber Einschränkungen hinnehmen. Diese Einschränkungen orientieren sich an der Systematik, die seit etwa 200 Jahren durch die Algebra begründet wurde. Es sind vielfältige Begriffe, wie Körper, Gruppe, Ring, Vektorraum sowie zahlreiche Abstufungen entstanden, die den Systematisierungsgrad mathematischer Objekte beschreiben und ein Rechnen damit möglich machen. Es sind oft in einzelnen Aspekten Verallgemeinerungen der Zahlen, verdienen zwar nicht mehr diesen Begriff, sind aber sowohl in der Mathematik als auch in ihren Anwendungen von Interesse. Doch um den algebraischen, geometrischen und analytischen Anforderungen gerecht zu werden und nicht auch zuletzt den Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften, erwiesen sich die reellen und komplexen Zahlen und mit erheblichen Abstrichen die Quaternionen als tauglich. Eine neue und bereits fruchtbare Sichtweise auf den Zusammenhang von Zahlen und Geometrie erweist sich aber auch als nützlich.

Schlüsselworte:

Geschichte verschiedener Arten von Zahlen, Verallgemeinerung von Zahlen, Systematisierung durch algebraische Strukturen, Quaternionen, p-adische Zahlen

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

Zitate

Aberglaube bringt Unglück[1]
Nach Umberto Eco (1932 – 2016)

Wir sprechen deutsch, wir schreiben römisch und wir rechnen indisch.[2]
Karl Menninger (1898 – 1963)

Es gibt nichts weniger als Nichts.[3]
Gottlieb Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)

Wie ich schon andeutete, schloß sich Hamilton eine Schule an, die ihren Meister an Starrheit und Intoleranz noch überbot. […] Die Quaternionen sind gut und brauchbar an ihrem Platze; sie reichen aber in ihrer Bedeutung an die gewöhnlichen komplexen Zahlen nicht heran.[4]
Felix Klein (1849 – 1925)

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Aussagen über reelle Zahlen führt über komplexe Zahlen.[5]
Jaques Hadamard (1865–1963)

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.[6]
Leopold Kronnecker (1823 – 1891)

To admire is, to me, questionless, the highest pleasure of life.[7]
William Rowan Hamilton (1805 – 1865)

Rationale und irrationale Größen gehören beide nicht zu dem an sich Gedachten, sondern zu dem mit Anderem Verglichenen.[8]
Heron von Alexandria (10 n.Chr. – 70 n.Chr.)

Math is like love, a simple idea but it can get complicated.[9]
George Pólya (1887–1985)

---

[1] zitiert nach Umberto Eco: Das Foucaultsche Pendel, Hanser, München 1989. S. 5
[2] Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen, 1958, zitiert nach Wußing, ebenda, S. 97.
[3] Zitiert nach https://www.matheretter.de/wiki/negative-zahlen-geschichte
[4] Felix Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926, S. 184 ff
[5] Sigg, Markus: Humor in der Mathematik. In: Lexikon der Mathematik Band 2, Heidelberg (Spektrum) 2001, S. 444-451
[6] zitiert nach: Courant, Richard/Robbins, Herbert: Was ist Mathematik, Springer 2010, S. 1
[7] Letter to the Marquess of Northampton (June 17, 1838), in Robert Perceval Graves, Life of Sir William Rowan Hamilton Vol. 2 (1885) pp. 260-261.
[8] Zitiert nach https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf
[9] Wird G. Polya und R. Drabek zugerechnet, zitiert nach https://angewandte-didaktik.mathematik.uni-mainz.de/files/2020/08/MATpHorismEn-2020-08-31.pdf

Inhalt

Einleitung und Fokus

Der Begriff Zahl ist vielschichtiger als man denkt. Deshalb soll vor allem der Fokus des vorliegenden Beitrags möglichst gut abgegrenzt werden und wird deshalb ausführlicher als üblich.

Eine der wichtigsten Abstraktionen in der Menschheitsgeschichte und in der geistigen Entwicklung eines Kindes ist der abstrakte, vom Dinglichen losgelöste Zahlbegriff. Es macht einen entscheidenden Unterschied aus, ob immer nur die Anzahl von Dingen, wie zwei Äpfel, drei Steine oder fünf Menschen bezeichnet werden, oder indem Gemeinsamkeiten bei Mengen durch eine Zahl, z.B. eine sogenannte natürliche Zahl, ausgedrückt werden. Sie sind die Grundlage für den intellektuell anspruchsvollen, nächsten Entwicklungsschritt, das Zählen,[10] sollten aber noch nicht damit gleichgesetzt werden. Das zeigen kinderpsychologische und anthropologische Untersuchungen. Ein „Zahlgefühl“ ist aber erst die Vorstufe zum Zählen.[11] Es scheint auch sicher zu sein, dass diese Vorstufe viele Jahrhunderte anhielt. Ethnographische Untersuchungen in Afrika, Ozeanien und Amerika belegen, dass es noch heute Naturvölker gibt, die sozusagen auf einen Blick Mengen ziemlich genau taxieren können ohne über einen Zahlbegriff zu verfügen.

Zählen ist dann ein bedeutsamer, nicht selbstverständlicher Entwicklungsschritt. Die natürlichen Zahlen werden als gemeinsames Kriterium von Mengen von Einheiten gleicher Mächtigkeit begriffen. Diese bilden virtuelle Paare. Wenn in einem Theater alle Plätze besetzt sind, greift die Paarbildung zwischen Platz und Besucher. Es gibt dann genauso viele Besucher wie Plätze. Man kann jedem Platz einen Besucher zuordnen und umgekehrt. Diese Einheiten sind auch das rekursive Element, denn es wird beim Zählen immer um eine Einheit also Eins vergrößert. Doch so einfach ist „Zahl“ doch nicht. Ein Beispiel: Das Jahr hat immer 12 Monate, d.h. die Menge aller Monate eines Jahres bleibt gleich. Es handelt sich bei der 12 um eine Kardinalzahl. Der 12. Monat des Jahres ist dagegen eine Ordinalzahl; sie dient dazu, diesen einen Monat Dezember innerhalb eines Jahres zu kennzeichnen. Es gibt ihn nur einmal pro Jahr. Kardinalzahlen bezeichnen eine Anzahl; Ordinalzahlen nummerieren. Man beachte auch: Sowohl die Kardinalzahl 12 als auch die Ordinalzahl 12 bestehen aus zwei Ziffern. Ihre Bedeutung als Zahl erlangen sie erst in einem Stellenwertsystem. Weltweit am meisten verbreitet ist die Basis 10, also das Dezimalsystem. Die 1 in der 12 steht hier also für 10.

---

[10] Ein ca. 20.000 Jahre alter Wolfsknochen mit 55 Kerben, aufgeteilt in zwei Reihen mit Fünfergruppen, 1937 in der Tschechoslowakei gefunden, gilt als ältestes Hilfsmittel zum Zählen (Universal Geschichte der Zahlen, S. 14). Damit ist es älter als das Rad; nur die Beherrschung des Feuers ist älter.

[11] Ebenda, S.23

Dieser Beitrag wird eher den Zahlbegriff als Wert thematisieren; damit sind Begriffe wie Ziffern oder Ordinalzahlen nachgeordnet. Weltweit haben sich verschiedene Konventionen herausgebildet, wie z.B. wie mit den Fingern gezählt wird. Es gibt zahlreiche Beispiele, wie ganzen Zahlen abstrakt schriftliche, anschauliche, Buchstaben bezogene, mündliche oder figürliche Zeichen zugeordnet wurden. Das sind hochinteressante ethnologische Aspekte, die aber wenig Bezug zur Mathematik haben und deshalb nur in wenigen Beispielen in diesen Beitrag gehören. Auch die Art des Zählens hat sich unterschiedlich entwickelt. So zählen Kaufleute rund um Bombay in Indien heute noch nach einem „quinären“ (Basis 5) System mit den Fingern. Die rechte Hand zählt dabei die Fünfer von 5 bis 25; die linke Hand die Einer von 1 bis 5. Auch bei den Azteken finden sich Anzeichen für ein Fünfer-System. Die Mayas zählten auf Basis 20, ein Vigesimalsystem, da ein Monat 20 Tagen entsprach und auch Zyklen, wie 20 Jahre, 400 Jahre oder sogar 8.000 Jahre eine Rolle spielten.[12] Die 20 taucht auch heute in der französischen Sprache als quatre-vingts, also 80, auf (4 mal 20). Das Sexagesimalsystem auf Basis 60 geht auf das Zweistromland Mesopotamien zurück und hat sich bis heute bei der (Uhr)Zeit und bei der Kreis- und Winkelberechnung gehalten. Versuche während der französischen Revolution Uhrzeit auf das Dezimalsystem umzustellen, wurden in der Bevölkerung nicht akzeptiert.

Doch sobald in den Entwicklungsstufen einer Kultur gezählt werden kann, geht es relativ schnell. Es ist wiederum Voraussetzung für Relationen zwischen den natürlichen Zahlen und schließlich dem Rechnen. Zahl als reine Abstraktion sollte man nicht zu wörtlich nehmen. Auch heute noch wird dabei z.B. in der Auvergne, in China, Indien und Russland die Hand zu Hilfe genommen und man multipliziert ohne weitere Hilfsmittel. Körperbezogenes Zählverhalten kann dabei sehr komplex werden. So differenzieren verschiedene Insulaner von der Torres-Straße über Körperteile 33 verschiedene Zahlen im Sinne von Mengen, bei den Ureinwohnern von Papua Neuguinea sind es immerhin noch 22, bei den Elema Neuguineas können über 23 bezeichneten Körperteilen unterschiedliche Mengen kommuniziert werden. Es sind Kardinalzahlen, aber es liegt eine Konvention zugrunde, welches Körperteil welcher Zahl zugeordnet ist. In dieser Konvention steht Zeigefinger oder linker Ellenbogen immer für eindeutige Kardinalzahlen.[13] Man kann durchaus mit größeren Zahlen umgehen. Darüber hinaus werden Bündel mit Stöckchen benützt.[14]

[12] Universal Geschichte, ebenda, S. 53-65
[13] In einem Telefonbuch sucht man in der Regel alphabetisch. Hier nehmen die Buchstaben des Alphabets im Prinzip die Funktion von Ordinalzahlen ein.
[14] Universal Geschichte, ebenda, S. 31

Auch die kindliche Entwicklung folgt in grober Näherung den Entwicklungsstufen der Menschheit. Eins und Eins ist Zwei, ist der Beginn des Zählens und gleichzeitig die erste Gleichung, die ein modernes Kind lernt.

Man ist dann relativ schnell in frühen Hochkulturen beim Teilen und dabei bei Brüchen. Das war eine Forderung im Handel und anderen gesellschaftlichen Anforderungen, wie der Verwaltung. Aber es hat lange gedauert, bis sich negative Zahlen durchgesetzt haben. Sie wurden im antiken Griechenland zunächst schlichtweg als unmöglich ignoriert, später waren sie zumindest suspekt. In Indien und China erwiesen sie sich bereits länger als nützlich. Die arabische Mathematik hat sie deshalb auch früher als das Abendland, gemeinsam mit der Null, übernommen.

Darüber später mehr im Rahmen weiterer „Zahlentypen“ über die natürlichen Zahlen hinaus.

Sehr früh haben Zahlen auch eine mythische Bedeutung bekommen. Dies hält bis in die heutige Zeit an. Vor allem auf Pythagoras von Samos (um 570 – nach 519 v.Chr.) und seiner Schule gehen Mystifizierungen bestimmter Zahlen zurück. Er hat die Zahl als „Urprinzip aller Dinge“ postuliert. Zahlen repräsentieren für ihn und seine Jünger die harmonische Ordnung als höchste Regel in der Kosmologie. Bestimmte Zahlen sind für die Griechen „schöner“ als andere. Dazu gehören Quadrat oder Dreieckszahlen, wie

1
1 + 2 = 3
1 + 2 + 3 = 6
1 + 2 + 3 + 4 = 10
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
usw.

Die „10“ war das Symbol für den pythagoreischen Eid. Es entstand ebenfalls der Begriff der „perfekten Zahl“. Sie galten als Zahlen göttlicher Natur. Es sind Zahlen, die die Summe ihrer Teiler sind (inkl. 1, exkl. der Zahl selbst). Die Griechen kannten vier perfekte Zahlen (6, 28, 496, und 8128).[15,16]

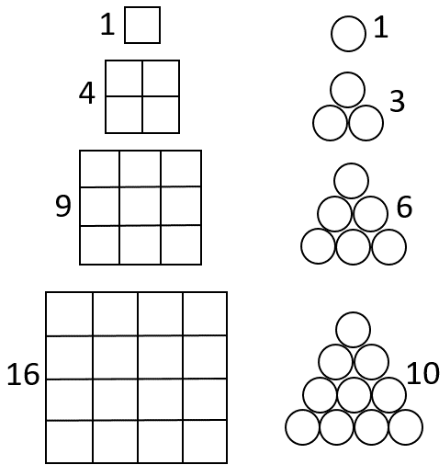

Abb. 1: Heilige Quadrat- und Dreieckszahlen

[15] Claudi Alsina, Der Satz des Pythagoras, deutsch bei Librero RBA, 2016, S. 32, heute kennt man 43. Sie sind alle gerade. Man weiß nicht, ob ungerade existieren und ob es unendlich viele gibt.
[16] Eigene Abbildung

Doch man muss für solche Beispiele nicht in die Antike zurückgehen. Glaube und Aberglaube können auch im christlichen Abendland nahe beisammen liegen. So wird z.B. im Johannes-Evangelium mit „666“ der Antichrist assoziiert.[17] Im Hebräischen hat der Name „Kaiser Nero“ diesen Zahlenwert, ebenfalls Diokletian – beides römische Kaiser, unter denen Christenverfolgungen stattfanden. Wichtige Zahlen in der Bibel sind die „Sieben“ (Schöpfungsgeschichte, sieben fette, sieben magere Jahre, das Buch mit sieben Siegeln des Johannes, sieben Engel blasen sieben Posaunen). Die „Zwölf“ (Zwölf Stämme des Volkes Israel, zwölf Apostel, zwölf Tore Jerusalems). Die „Vierzig“ (Zeit der Buße zwischen Ostern und Pfingsten, vierzig Tage Regen bei der Sintflut, vierzig Tage war Moses auf dem Berg Sinai, vierzig Tage hat Jesus in der Wüste gefastet). Diese und andere biblische Zahlen finden sich in weltlichen wie religiösen Zusammenhängen wieder.
Auch heute ordnet man in vielen Kulturkreisen Zahlen eine besondere Bedeutung zu. In China gilt die Vier als Unglücksbringer. In Shanghai z.B. wird man höchst selten ein Nummernschild mit einer „Vier“ finden. In vielen Gebäuden fehlt sogar der 4. Stock als Bezeichnung. In anderen Ländern ist die „Vier“ eher ein Ordnungsprinzip (Vier Jahreszeiten, vier Himmelsrichtungen). Die „9“ ist dagegen eine Glückszahl in China, aber in Japan soll sie Unglück bringen. Sie klingt im Japanischen wie das Wort „Leid“.
Auch in den meisten Flugzeugen wird man die Sitzreihe 13 vergeblich suchen. Die Fluglinien gehen damit möglichen Protesten abergläubiger Passagiere aus dem Weg, die die 13 als Unglückszahl ansehen. Aber für Italiener oder Brasilianer ist die 17 Unglückszahl.[18] Bei der Lufthansa wird man auf einem Flug nach Rio de Janeiro keine Reihe 13 und 17 in ihren Maschinen finden.
Die Zahl 39 ist in Afghanistan das Sinnbild für das Böse. Bei Telefon- oder Hausnummern ist sie vollkommen unerwünscht und wird unter Protest abgelehnt. Sogar als Altersangabe wird sie oft übersprungen – nach 38 gibt man als Alter 40 Jahre an.[19]
Dagegen assoziiert man mit manchen Zahlen oder Daten glückliche oder unglückliche Perspektiven – Beispiel ist Freitag, der 13. Allerdings fiel der 2.2.2022 auf einen Mittwoch, der 22.2.2022 auf einen Dienstag, so dass eine Rekordzahl an Eheschließungen nicht verzeichnet wurde.
Da in einigen Kulturen zwischenzeitlich Buchstaben mit Zahlen gleichgesetzt wurden, entwickelte sich insbesondere bei Namen oder Versen eine eigene literarische Gattung, die Isopsephie. Es wurde dabei als Grundprinzip der Zahlenwert einer Buchstabengruppe ermittelt. In Pergamon fand man

---

[17] Der katholische Theologe Petrus Bungus veröffentlichte ein Buch, in dem er numerologisch „bewies“, dass der Name „Martin Luther“ den Zahlenwert 666 hat.
[18] https://www.geo.de →reisen →reisewissen
[19] https://de.style.yahoo.com/ → Unglückszahlen

entsprechende Inschriften; in Pompeji gibt es ein Graffiti mit dem Satz: „Ich liebe die, deren Zahl 545 ist“. Manche Zahlenspiele sind harmlos oder amüsant. Gnostiker versuchten jedoch darüber tiefschürfende Erkenntnisse zu gewinnen, was dann doch die Grenze zum Aberglauben überschreitet.
Die „Numerologie“ erfreut sich also in vieler Beziehung und nicht nur beim Glücksspiel oder wichtigen Terminen und persönlichen Daten immer noch einer großen Beliebtheit. Auch wenn der Aberglaube durch statistische Belege, die ihn wissenschaftlich unzweifelhaft widerlegen, kaum auszurotten ist, haben numerologische Überlegungen keinen Anspruch auf einen Status als exakte Wissenschaft.

Diese Beispiele sollen deshalb genügen und gleichzeitig die Abgrenzung im Fokus bilden. Der vorliegende Beitrag will diese sogenannten numerologischen Aspekte vollkommen ausklammern und sich allein um Zahlenstrukturen im mathematischen und kulturhistorischen Sinn konzentrieren.

Zahlen und Mathematik

Es gibt einen entscheidenden Unterschied in der Motivation, in dem sich z.B. mesopotamische, ägyptische, aber auch chinesische Mathematik, von der Mathematik in griechisch-hellenistischer Zeit bzw. der Spätantike unterscheiden. Im Einflussbereich des Zweistromlandes und der Kultur am Unterlauf des Nils dienten mathematische Fragen und Methoden ausschließlich praktischen Zwecken und somit Anforderungen des Bauwesens, der Wirtschaft, des Handels oder der Vermessung. Eine gewisse Ausnahme bildete die Astronomie, die nur im weitesten Sinne, z.B. über die Bedeutung exakter Kalender, praktischen Interessen diente. Auch sie war aber lediglich eine Anwendung von Mathematik.
Eine wichtige Unterscheidung ist dabei Zahl als technische Größe und Zahl als Geldwert. Eine erste Tauschwährung sowohl in vorhellenistischer Zeit als auch bei den Römern vor dem 4. Jahrhundert v. Chr. war der Ochse. Weltweit entwickelten sich die unterschiedlichsten „Währungen“. Schildkrötenschalen, Muscheln insbesondere Kaurimuscheln, Leder, Stoffe, Korn, Waffen, Baumwolle, Jade, Bitumen, Kakao u.v.m. dienten als Währungseinheiten. Die russische Regierung erhob bis 1917 die Steuern in manchen Teilen Sibiriens in Pelzen.[20] Erst später z.B. im alten Ägypten, setzten sich Metalle, wie Kupfer und Bronze, seltener Silber und Gold, als Tauschobjekte durch. Dies war dann auch der Beginn der Geldwirtschaft. Schon in der Bibel wird der Silberschekel im Alten Testament (z.B. im Buch Mose) als Währung genannt. Der nächste Schritt war das Münzgeld, das durch Guss- und Prägetechnik, Legierung, Normung, Recht auf Prägung, usw. gewissen technischen und rechtlichen Anforderungen

[20] Universal Geschichte, ebenda, S. 129f

entsprechen musste. Heute geht man davon aus, dass das griechische Kleinasien, etwa im 7. Jahrhundert v.Chr., dieses System erfunden hat und das sich dann aufgrund seiner Vorteile fast weltweit verbreitete.

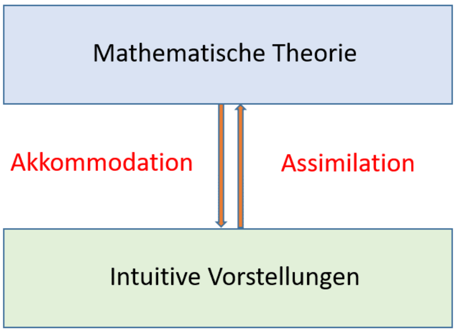

Abb. 2: Wechselwirkungen zwischen mathematischer Theorie und intuitiven Vorstellungen

Die Griechen bedienten sich durchaus auch mathematischer Methoden in der Praxis, aber das ursprüngliche Interesse lag im Verständnis idealer Konstrukte, wie regelmäßigen geometrischen Formen und Körpern oder abstrakten Fragen, wie z.B. der axiomatische Aufbau der ebenen Geometrie durch Euklid oder die Integration von „inkommensurablen" Größen (irrationale Werte) in das mathematische Weltbild. Insbesondere wurde seit dem Wirken von Pythagoras der strenge mathematische Beweis mit Definitionen, Voraussetzungen, Sätzen und logischen Beweisen propagiert.

Aus dieser Sicht auf die Mathematik konnten aber dann auch praktische Problemlösungen im Bereich des Wasserbaus, bei der Statik von Gewölben oder bei militärischen Anwendungen gefunden werden. Voraussetzung ist aber in der Regel die Einsicht, dass zu Beginn des Erkenntnisprozesses die Abstraktion auf rein mathematische Fragestellungen steht. Ein gutes Beispiel für diese Denkweise bietet Heron von Alexandria (10 n.Chr. – 70 n.Chr.).

Pauschalierend kann man sagen, dass bei früheren Kulturen der Sinneseindruck das Denken beherrschte und im antiken Griechenland zum ersten Mal das abstrakte Denkmodell. Trotzdem treibt auch heute die Intuition die mathematische Forschung.[21] Dies ist bis heute prägend für die Mathematik und soll auch im vorliegenden Beitrag helfen, um schließlich zu Verallgemeinerungen des Zahlbegriffes zu führen.

Zählbarkeit und Wissensgrenzen

Vor scheinbar beliebig großen Zahlen haben viele Menschen zu allen Zeiten resigniert. Sie haben angezweifelt, dass menschliches Wissen die schiere Größe ermessen kann und haben daraus den voreiligen Schluss gezogen, dass auch der Wissenserwerb an sich prinzipiell begrenzt ist. Diese Haltung schien unabhängig von Religionen und Kulturkreisen zu bestehen. Noch heute werden sogar in westlichen Ländern, wie den USA, bestimmte Fragen als

[21] Grafik nach https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf

„gotteslästerlich“ betrachtet und werden im Schulunterricht per Gesetz ausgeklammert.

Diese Meinung, dass bestimmtes Wissen für Menschen nicht zugänglich ist, manifestiert sich im Christentum in einer zentralen Passage des Alten Testaments. Es sind die ersten Worte des Buches Ecclesiasicus, oft als Jesus Sirach oder Buch des Sirach (englisch Book of Ben Sira) bezeichnet. Es ist nach seinem Verfasser benannt, der es in Jerusalem um 180/190 v.Chr., also während der hellenistischen Epoche, niederschrieb. Es spiegelt sicherlich nicht nur die damals aktuelle Meinung, sondern durchaus die Meinung vergangener und nachfolgender Jahrhunderte wider:

„Wer kann sagen, wie viel Sand das Meer, wie viel Tropfen der Regen und wie viel Tage die Welt hat? Wer kann erforschen, wie hoch der Himmel, wie breit die Erde, wie tief das Meer ist? Wer kann Gottes Weisheit ergründen, die doch allem voraufgeht?“ (Sir, 1, 2-3)[22]

Diese Fragen suggerieren, dass nur eine übermenschliche Macht Antworten darauf haben kann und sie sind zu jeder Zeit ein Alibi gewesen, um die Grenzen der Zählbarkeit und damit des Wissenserwerbs viel zu schnell oder zu früh zu setzen.

Dabei waren wesentliche Erkenntnisse bereits vorhanden, um ein Teil der Fragen wenigstens im Prinzip beantworten zu können.

Eratosthenes von Kyrene (276 – 195 v.Chr.) war aufgefallen, dass es in Syene, dem heutigen Assuan nahe dem nördlichen Wendekreis, einen tiefen Brunnen gab, in dessen Wasser sich an bestimmten Tagen die Sonne spiegelte. An gleichen Tagen warf ein Obelisk bekannter Höhe in Alexandria einen Schatten messbarer Länge. Dort stand also die Sonne nie ganz senkrecht. Aus der Entfernung zwischen Syene und Alexandria, gemessen in Kamelreisetagen, konnte Eratosthenes unter der plausiblen Annahme, dass die Strahlen der Sonne als parallel angenommen werden können, den Erdumfang berechnen. Der Fehler lag im Vergleich zu heutigen Präzisionsberechnungen im einstelligen Prozentbereich. Dass die Erde kugelförmig ist, war damals ebenfalls bekannt. So warf die Erde bei einer Mondfinsternis zuerst einen kreisförmigen Schatten auf den Mond.

Aristarch(os) von Samos (310 – 230 v.Chr.) fand, dass die Beobachtung der Planetenbahnen besser zu einer heliozentrischen als zu einer geozentrischen Annahme passten – mehr als 1500 Jahre vor Kopernikus. Er postulierte mit

---

[22] https://www.bibelwissenschaft.de/bibelstelle/Sir+1,1-10.
Siehe auch Carlo Rovelli, Es gibt Orte auf der Welt, an denen Regeln weniger wichtig sind als Freundlichkeit, Essays, Rowohlt Verlag Hamburg, Mai 2022, S. 89 ff

rationalen Argumenten die „Höhe des Himmels“ und er beschrieb nach dem damaligen Kenntnisstand ein Modell als grobe Dimension für die Größe des Sonnensystems.

Es war Archimedes, der diese und andere Erkenntnisse mit Quellenangaben aufgriff und anfing damit zu rechnen. Zu Aristarch, dessen Werk später verlorenging, schreibt er in seiner Abhandlung „Der Sandrechner (Psammites, Ψαμμίτης)“[23]:

„Aristarch aber hat ein Buch verfasst, das aus bestimmten Hypothesen besteht, und das, aus diesen Annahmen folgernd, zeigt, dass das Universum um ein Vielfaches größer ist als das ‚Universum‘, welches ich eben erwähnte. Seine Thesen sind, dass die Fixsterne und die Sonne unbeweglich sind, dass die Erde sich um die Sonne auf der Umfangslinie eines Kreises bewegt, wobei sich die Sonne in der Mitte dieser Umlaufbahn befindet, und dass die Sphäre der Fixsterne, deren Mitte diese Sonne ist und innerhalb derer sich die Erde bewegt, eine so große Ausdehnung besitzt, dass der Abstand von der Erde zu dieser Sphäre dem Abstand dieser Sphäre zu ihrem Mittelpunkt gleichkommt.“[24]

Archimedes ging der Frage nach, wieviel Sandkörner in dieses Universum, gemäß den Thesen des Aristarchos, passen würden. Er musste mit einem riesigen, aber endlichen Wert rechnen. Fast wichtiger ist aber die Tatsache, dass er die „Unzählbarkeit“ einer solchen Zahl in Frage stellte und damit der Selbstbeschränkung des Wissenserwerbs entgegentrat. Er wollte ohne Rückgriff auf metaphysische Argumentation und rein auf rationaler Basis die Zählbarkeit auch solcher riesigen Zahlen nachweisen. Er wusste sicherlich, wir werden nie alles wissen, aber wir sollten keine künstlichen Schranken für Wissen errichten. Der erste Schritt ist dabei, dass es keine prinzipiellen Grenzen für die Zählbarkeit, Messbarkeit und der Anwendung plausibler Logik gibt.

Das war ein revolutionärer Gedanke und ein Aufbegehren gegen jede Form wissenschaftlicher Selbstbeschränkung.

Es mussten allerdings praktische Voraussetzungen für den Umgang mit großen Zahlen geschaffen werden, die es zur damaligen Zeit noch nicht gab. Die Griechen besaßen kein Dezimalsystem mit der so wichtigen Null. Aber selbst wenn es der geniale Archimedes erfunden hätte, war es im Sinne dieser aufklärerischen und populärwissenschaftlichen Schrift sinnvoller, an bestehende Denkmodelle anzuknüpfen. Man konnte Zahlen bis zur sogenannten „Vielzahl“ (griechisch Myriad, μυριάς) benennen.[25] Sie hatte den

[23] de.wikibrief.org/wiki/The_Sand_Reckoner bzw.
https://wiki.edu.vn/wiki29/2021/10/19/der-sandrechner-wikipedia/

[24] Zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Aristarchos_von_Samos

[25] Siehe en.m.wikipedia.org/wiki/Myriad

Wert 10.000, wurde aber meist im Sinne von undefiniert groß verwendet. Verwendet man Myriade als Einheit, so kann man leicht bis einer Myriade Myriaden zählen, also (dezimal gedacht) 10^8. Archimedes nannte die Zahlen bis 10^8 Zahlen 1. Ordnung und mit 10^8 als neuer Einheit bildete er Zahlen 2. Ordnung also bis $10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}$ usw. Dies kann man fortsetzen bis $10^{8 \cdot 10^8}$ Archimedes ging noch einen Schritt weiter bis zur größten Zahl, die er verwendete und hat damit einen gewaltigen Zahlenvorrat:

$$(10^8)^{(10^8)^{(10^8)}} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$$

In heutiger Schreibweise ist es eine Eins gefolgt von 80 Billiarden Nullen ($80 \cdot 10^{15}$).
Man beachte, dass kein Stellenwertsystem zur Verfügung stand, in dem die Regeln für Multiplikation und Potenzierung feststehen, sondern ein quasi Positionszahlensystem mit der Basis 10^8 (wohlgemerkt in der Einheit „Myriad"). D.h. Archimedes musste auch selbst Regeln bzw. Befehle für dieses System festlegen. Er entdeckte dabei auch die Regel (in moderner Schreibweise), dass $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$ ist.

Er nannte die definierten Rechenregeln „Befehle der ersten Periode" und den letzten Wert „Einheit der zweiten Periode" und setzte dieses Prinzip fort.

Auf Basis des heliozentrischen Modells von Aristarchos von Samos sowie einigen Annahmen konnte Archimedes nun die Größe des Universums abschätzen. Aristarch nahm also an (gemäß den zitierten Erläuterungen aus dem „Sandrechner"), dass das „Universum" kugelförmig ist. Dabei war „Universum" für ihn die Sonne als Zentralgestirn und die Fixsterne auf einer Kugelsphäre. Dabei entspricht die Sternparalaxe der Sonnenparalaxe, denn die Griechen waren noch nicht in der Lage, winzige Winkeländerungen im Laufe eines Jahres zu registrieren oder gar zu messen.

Archimedes benötigte zudem Obergrenzen. So ging er davon aus, dass die Sonne etwa das 30-fache der Mondgröße besitzt oder dass Entfernungen der Winkeldurchmesser der Sonne (von der Erde gesehen) größer als 1/200 eines rechten Winkels war ($\pi/400$ Radiant = 0,45 Grad).

Die Annahmen zu Größen und erwiesen sich im Vergleich zu heutigem Wissen als viel zu klein. Das sind für aktuelles Wissen teils lächerliche Größenordnungen. Doch auch Archimedes verwies immer wieder auf Rundungen und unbewiesene Annahmen.
Aber darauf kam es nicht an. Das Ziel war der Nachweis prinzipieller Berechenbarkeit.

Heute lassen sich noch mehr Fragen aus Ecclesiasicus viel exakter beantworten. Wir beherrschen meteorologische Fragen nach der Regenmenge, Satelliten bestimmen Meerestiefen zentimetergenau und die Kosmologie ist in den letzten Jahrzehnten zur exakten Wissenschaft geworden, die die Zeit seit dem Urknall ziemlich genau bestimmen konnte.

Der Zählbarkeit als erstem Schritt zum Wissen über die Welt sind somit zumindest prinzipiell keine Grenzen gesetzt.

Negative Zahlen

Im antiken Griechenland wurden negative Zahlen abgelehnt und das hatte einen guten Grund. Man dachte und rechnete in Strecken und Flächeninhalten. Eine negative Länge oder Fläche macht jedoch keinen Sinn. Diophantos von Alexandria[26], wohl der bedeutendste Algebraiker und Zahlentheoretiker der Antike, hat in seinem Buch „Arithmetica", die lineare Gleichung $4 = 4x + 20$ gelöst und ein negatives Ergebnis erhalten. Er nannte das Ergebnis „absurd". Selbst Michael Stifel (1487 – 1567), der aber schon mit negativen Werten rechnete, nannte sie 1553 noch „numeri absurdi, numeri ficti infra nihil (erdachte oder fingierte) und schrieb sie (0–a).[27] Er hatte die „Coß" von Christoph Rudolff (1499 – 1545) überarbeitet und herausgegeben. Diese Haltung gilt auch für andere Autoren. Die negativen Zahlen wurden bis ins 16. Jahrhundert, wie bei Michael Stifel, als Differenzen natürlicher Zahlen geschrieben wurden (3–5, 8–11, etc., erst später wurde dafür –2, –3, etc. geschrieben). Verwirrend war in der damaligen Zeit auch die Tatsache, dass Subtraktion nicht zur Verringerung, sondern zur Vermehrung führen konnte (z.B. 8– (–5) =13).

Sogar noch Gottlieb Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) fand es unsinnig, von „Nichts" noch etwas wegzunehmen. Für ihn war das nur zulässig als Zwischenschritt, um über eine anschließende Addition wieder in den „sicheren Bereich" zu gelangen. Auch Mathematiker wie Blaise Pascal (1623 – 1662) lehnten die negativen Zahlen ab. Leonhard Euler (1707 – 1783) befürwortete sie dann 1767 in seiner *„Vollständigen Anleitung zur Algebra (Opera Omnia)"*.[28] Allerdings hat Leonardo von Pisa (um 1170 – nach 1240), als Leonardo Fibonacci bekannt, in seinem Buch *liber abbaci* eine negative Zahl unter dem Begriff „Schulden" als Lösung einer Gleichung erwähnt. Dies scheint ein kurioser Einzelfall gewesen zu sein. Dagegen widmet sich ein ganzes Kapitel *De extractione minorum numerorum ex maioribus* (Von der Subtraktion kleinerer

---

[26] Genaue Lebensdaten sind unbekannt. Wußing gibt „vermutlich 250 n.Chr." an. Schriften anderer, ihn zitierende Autoren deuten auf eine Zeit um 250 n.Chr. hin, sicher vor 364 n.Chr. Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Diophantos_von_Alexandria

[27] Nach Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008, S. 342

[28] https://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/Euler_Algebra.ocr.pdf

Zahlen von größeren). Er hat sich am Hof Friedrich II in Sizilien vehement für die arabischen Ziffern eingesetzt.

In China tauchten negative Zahlen bereits im 2. Jahrhundert vor Christus auf, also deutlich früher als zu Lebzeiten von Diophantos. Sie wurden erstmals in dem chinesischen Mathematikbuch „Neun Kapitel der Rechenkunst“ (Jiǔ Zhāng Suànshù, 1. Jh.n.Chr.) erwähnt.[29] Das dort erklärte chinesische Zahlensystem verwendet rote Stäbchen für positive Zahlen und schwarze Stäbchen für negative Zahlen; also entgegengesetzte Farben zu unserer heutigen Konvention. Kulturgeschichtlich wird gerne auf das allgegenwärtige philosophische Prinzip des Yin-Yang verwiesen, das die Akzeptanz für negative Zahlen in China gefördert haben soll. Es beschreibt generell polare Gegensätze, die aber zusammengehören. Es fußt auf Kräften, die sich nicht bekämpfen, sondern ergänzen.

Indien erlebt ab ca. 600 nach Christus eine Blüte der Mathematik und hat damit auch die arabische Mathematik maßgeblich beeinflusst. Man muss besonders den Mathematiker Brahmagupta (598 – 670) nennen, der vor allem ein Regelwerk zum Rechnen mit negativen Zahlen festlegte. Negative Zahlen nannte er „Schulden“ und positive „Vermögen“. Sein wichtigstes Verdienst ist aber die Einführung der Null, die Schulden und Vermögen trennt.[30]

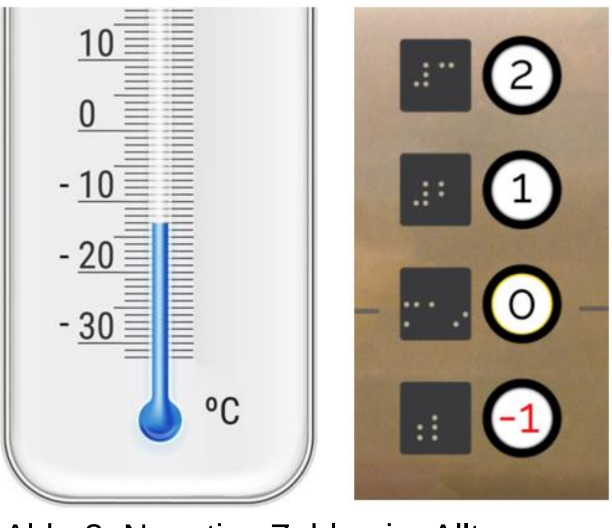

Abb. 3: Negative Zahlen im Alltag – am Beispiel Thermometer und Fahrstuhl

Über Indien kamen viele mathematische Erkenntnisse zur muslimischen Welt. Insbesondere unter dem aufgeklärten Kalifen Harun ar-Rashid (763 – 809 n.Chr.), erkannte man die Bedeutung der indischen Erkenntnisse, aber widmete sich auch den antiken Schriften. Erst durch den Fall von Toledo 1085 und der Eroberung der umfangreichen Bibliothek gelangten wesentliche Impulse in die christliche Hemisphäre. Ähnliches

[29] Siehe z.B. Begriffs- und Namensklärungen bei
https://www.enzyklo.de/Begriff/Jiu_Zhang_Suanshu
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-0348-6379-7_4 (Klassische mathematische Werke)
Wußing, Band 2, ebenda S. 46f und in der Zusammenfassung S. 66

[30] Bildquelle https://www.matheretter.de/wiki/negative-zahlen-alltag

gilt für Cordoba 1492, das eine Bibliothek mit 400.000 Werken besessen haben soll.

Es war dann John Wallis (1616 – 1703), dem wir auch das Zeichen für Unendlich (∞) verdanken, der über den heute selbstverständlichen Zahlenstrahl eine wichtige logische Grundlage für die negativen Zahlen legte. Darüber werden negative Zahlen korrekt definiert und anschaulich im Unterricht eingeführt.

Einen wichtigen Impuls lieferte 1494 „Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita (kurz: Summa)" von Luca Pacioli (1445 – 1517). Es beschreibt das Prinzip der „doppelten Buchführung" unter Verwendung der negativen Zahlen.[31] Die Buchhaltung von Unternehmen beruht auf doppelter Buchführung und verdrängt auch im Behördenumfeld zunehmend die Kameralistik, also das Denken in „Töpfen", z.B. als Budget für ein Jahr.

Negative und positive ganze Zahlen bilden zusammen mit „+" und „·" einen „Zahlenring", den man mit ℤ bezeichnet; die natürlichen Zahlen alleine haben das Symbol ℕ. Bei den rationalen Zahlen sollen jetzt die Körperaxiome besprochen werden.[32] Eine wichtige Forderung ist die Abgeschlossenheit der Menge bzgl. der darauf definierten Verknüpfungen Addition und Multiplikation. Man kann leicht sehen, dass ℤ kein „algebraischen Körper" oder kurz „Körper"

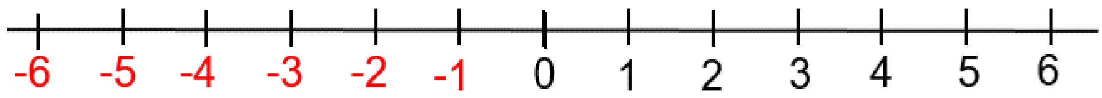

Abb. 4: Der Zahlenstrahl bildete die logische Grundlage für die negativen Zahlen.

ist. Z.B. hat in „ℤ" die Zahl 3 kein Inverses bzgl. der Multiplikation. Das müsste 3^{-1} sein, also ⅓, was jedoch als Bruch nicht mehr in ℤ liegt.

---

[31] Der Franziskanermönch Pacioli hatte auch mit *Divina Proportione*, einer Abhandlung zum Goldenen Schnitt unter Beteiligung von Leonardo da Vinci für die Illustrationen, ein bahnbrechendes Werk verfasst. Die „*Summa de arithmetica*" fasste zudem auf 600 eng bedruckten Seiten das mathematische Wissen der damaligen Zeit zusammen und begründete eine Blütezeit der italienischen Mathematik.
Siehe z.B. https://www.spektrum.de/wissen/luca-pacioli-1445-1517/1009133

[32] In der Mathematik und besonders in der Algebra finden sich viele Begriffe, die ihr eigentliches „semantisches Soziotop" verlassen haben.

Rationale Zahlen ℚ

Die rationalen Zahlen kennt man schon seit Jahrtausenden in Form von Brüchen. Bekanntlich ist ein Bruch der Quotient aus zwei ganzen Zahlen. Doch man muss bedenken, dass frühe Hochkulturen weder das Zehnerstellenwertsystem mit der Null kannten und negative Zahlen als unsinnig ablehnten. Die Ägypter rechneten zwar (auch) dezimal, besaßen aber kein Positionssystem mit der Null, d.h. jede Zehnerpotenz hatte ein eigenes Zahlzeichen. Außerdem waren nur Brüche kleiner Eins interessant, weil man die nötige natürliche Zahl dazu addieren konnte. Eine weitere Einschränkung war die Schwierigkeit oder der Umstand, ggfs. ein kleinstes gemeinsames Vielfaches bilden zu müssen. Die Griechen konnten meisterhaft mit Brüchen umgehen. Die Abschätzung von Archimedes für π hatte weit über ein Jahrtausend Bestand. Verhältnisse wurden jedoch nicht als Zahl akzeptiert. Das verbietet der antike, griechische Zahlbegriff. Sie wurden durch Gebrauch wahrscheinlich zu eigenständigen Denkobjekten. Erst in der alexandrinischen Zeit, in der Theon von Alexandria (335 – 405) lebte und wirkte, kommt der Begriff „Wert eines Verhältnisses“ auf und geht in Bedeutungsrichtung „Zahl“, zeugt aber andererseits von dem Zwiespalt. Die Araber hatten indische, chinesische, griechische Mathematik adaptiert und waren in der Lage, einen erweiterten Zahlbegriff zu akzeptieren und haben in der Scholastik das Abendland immer mehr beeinflusst. Barlaam von Kalabrien (1290 – 1348) schreibt im 13. Jahrhundert noch sehr verklausuliert:
„Der Wert eines Verhältnisses ist die Zahl, welche mit dem Hinterglied multipliziert das Vorderglied ergibt.“

Erst Petrus Ramus (1515 – 1572), ein französischer Philosoph, ließ den griechischen Zahlbegriff hinter sich und definierte eine Zahl sauber:
Numerus est secundum quem unumquodque numeratur (Eine Zahl ist, womit wir zählen und rechnen).[33]

Nach diesen philosophischen Bemerkungen soll nun der Umgang mit rationalen Zahlen in Form von historischen Beispielen thematisiert werden.

Die Ägypter schrieben bevorzugt komplizierte Brüche als Summe von Stammbrüchen. Das kann zu Missverständnissen führen, wenn im Schriftbild nicht auf eine eindeutige Gliederung geachtet wird und die triviale Zerlegung vermieden wird. Im Papyrus-Rhind[34], der als eines der ersten

---

[33] https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf
[34] https://de-academic.com/dic.nsf/dewiki/1076123

Mathematikbücher (für höhere Beamte) gelten kann, wird z.B. die Kreiszahl Pi als Summe von Stammbrüchen dargestellt:

$$\pi = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \approx 3{,}12\ldots$$

Man kann sagen, dass in der Antike generell gebrochen rationale Zahlen als Summe von Stammbrüchen dargestellt wurden. Dies kann man sich als Einzelgewichte auf einer Balkenwaage vorstellen, die ebenfalls zum Gesamtgewicht addiert werden mussten. Addieren bedeutete „hintereinander schreiben"; die 1 im „Zähler" bei Stammbrüchen wurde weggelassen.

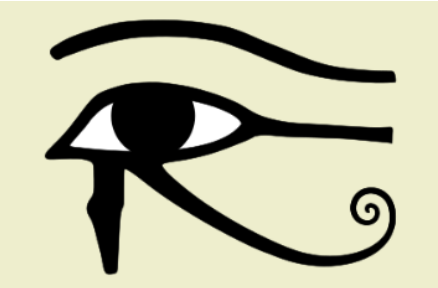

Abb. 5: Das Horus-Auge

Der Umgang mit Brüchen in Ägypten lässt sich am schönsten mit der Sage zum Horus-Auge[35] verdeutlichen, ein Teil der ägyptischen Mythologie. Die Augen des Horus sind Sonne und Mond; der Mond wird das „Udjat-Auge" genannt. Seth, der Bruder von Osiris, riss im Kampf um den Thron Horus ein Auge aus und es zerbrach in viele Stücke. Thot, der Mondgott, Schutzgott der Wissenschaften und der Schreibkunst, versuchte es wieder zusammenzusetzen.

Das größte Bruchstück war die Hälfte des Auges, das Zweitgrößte ein Viertel, das Drittgrößte ein Achtel usw. Thot kam bis 63/64-tel des Auges. Der Begriff „Bruchzahl" ist treffend gewählt, denn das Horus-Auge wurde aus Bruchstücken wieder weitgehend rekonstruiert.[36] Hätte Thot beliebig lange weiter gemacht, so hätte er unendlich viele Splitter zusammensetzen müssen, hätte also das ganze Auge erhalten:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 1$$

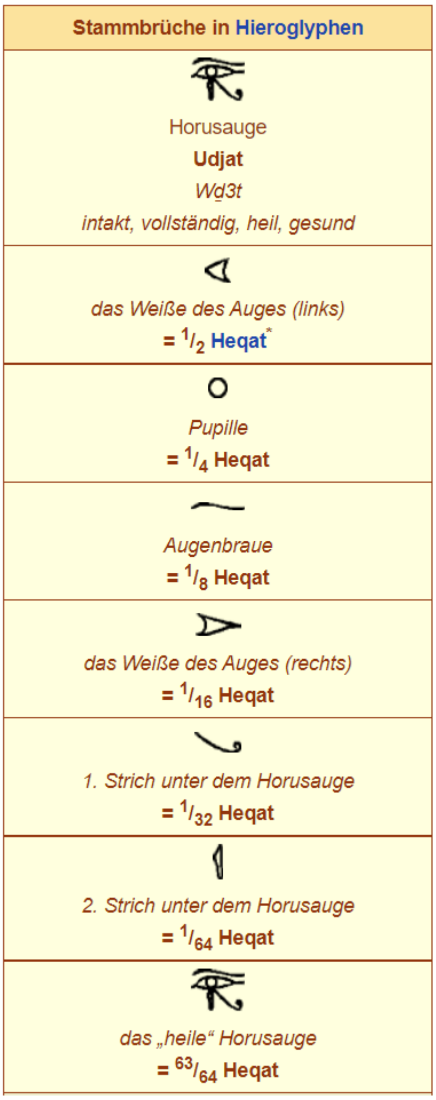

Abb. 6: Stammbrüche der Bruchstücke des Horus-Auges

35 Beide Grafiken aus https://de.wikipedia.org/wiki/Horusauge, siehe auch die künstlerische Darstellung auf Papyrus im Anhang.

36 Siehe auch, Rudolf Taschner, Die Zahl die aus der Kälte kam, S. 70f

Die Stammbrüche sind Teile des ägyptischen Hohlmaßes Heqat, es entspricht etwa 4,75 Liter. Teile des Heqat wurden mit den Hieroglyphen in der Abbildung geschrieben, die den Splittern des Horus-Auges nachempfunden sind.[37]

Brüche wurden im antiken Rom als *Minutiae* bezeichnet. Es wurde in einer Art Unzenrechnung in Form von Zwölferbrüchen gerechnet. Die Zahl 12 hat eine hohe Teilbarkeit.
In Mesopotamien entschied man sich für 60. Da meist noch ein Rest blieb, blieben Näherungen nicht aus. Jeder der Zwölferbrüche hatte ein eigenes Zeichen und eine eigene Bezeichnung. Neben den Zwölferbrüchen existierten noch kleinere Unterteilungen:
1/24, 1/48, 1/72, 1/288, 1/1728 mit den Bezeichnungen semuncia, sicilius, sextula, scripulum, siliqua.

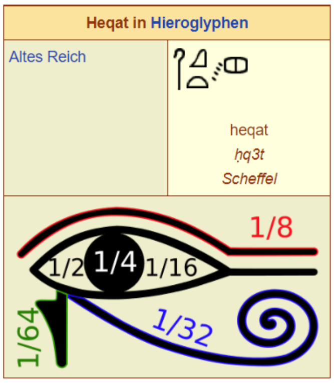

Abb. 7: Das Hohlmaß Heqat, also der ägyptische Scheffel

Für flüchtige Notizen und Rechnungen verwendeten die Römer eine Wachstafel (*tabula cerata)* mit einem Griffel (*stilius*). Dieses Gerät ist bis ins Mittelalter in Gebrauch und wurde in einigen Regionen noch im 20. Jahrhundert verwendet.[38]


Abb. 8: Römische Wachstafel, Griffel

Die römischen Zahlzeichen sollen als bekannt vorausgesetzt werden. Interessant ist der Einfluss der älteren griechischen Zahlzeichen. Seit der Zeit des Gesetzgebers Solon (ca. 638 – 558 v.Chr.) entsprechen in erster Näherung griechische Zahlzeichen den römischen, die bis zum Ende der römischen Republik verwendet wurden.

12er Bruch	Reduziert	In 60stel	Bezeichnung	Zeichen	In %
1/12		5	uncia	—	8,33
2/12	1/6	10	sextans	=	16,67
3/12	1/4	15	quadrans	=—	25,00
4/12	2/6 o. 1/3	20	triens	==	33,33
5/12		25	quincunx	==—	41,67
6/12	3/6 o. 1/2	30	semis oder dimidium	S	50,00
7/12		35	septunx	S—	58,33

[37] Grafik und Texthinweise, https://de.wikipedia.org/wiki/Heqat
[38] Quelle der Abbildung: der-roemer-shop.de/

8/12	4/6 o. 2/3	40	bes	S=	66,67
9/12	3/4	45	dotrans oder tres quintae	S=–	75,00
10/12	5/6	50	dextans	S==	83,33
11/12		55	deunx	S==–	91,67
12/12	1	60	as	I	100,00

Abb. 9: Die römischen Bruchzahlen[39]

Noch größere Zahlen wurden als Produkte dargestellt. Man konnte ebenso damit rechnen, wie später mit den römischen Zahlzeichen.[40]

Neben dem Bruch mit beliebigen ganzen Zahlen in Zähler und Nenner gibt es noch die Dezimalbruchdarstellung.[41] Sie setzt ein Zehnersystem und die Null voraus und kann als ein Bruch mit einer Zehnerpotenz im Nenner aufgefasst werden. Auch hier scheint Indien die entsprechenden Methoden schon sehr früh entwickelt zu haben. Sie wurden aber erst durch den arabischen Mathematiker al-Uqlidisi (920 – 980) im 10. Jahrhundert beschrieben. Sein Buch Kitab al-fusul fi'l-hisab al-hindi existiert in nur einem Exemplar und ist auf ca. 952/953 datiert.

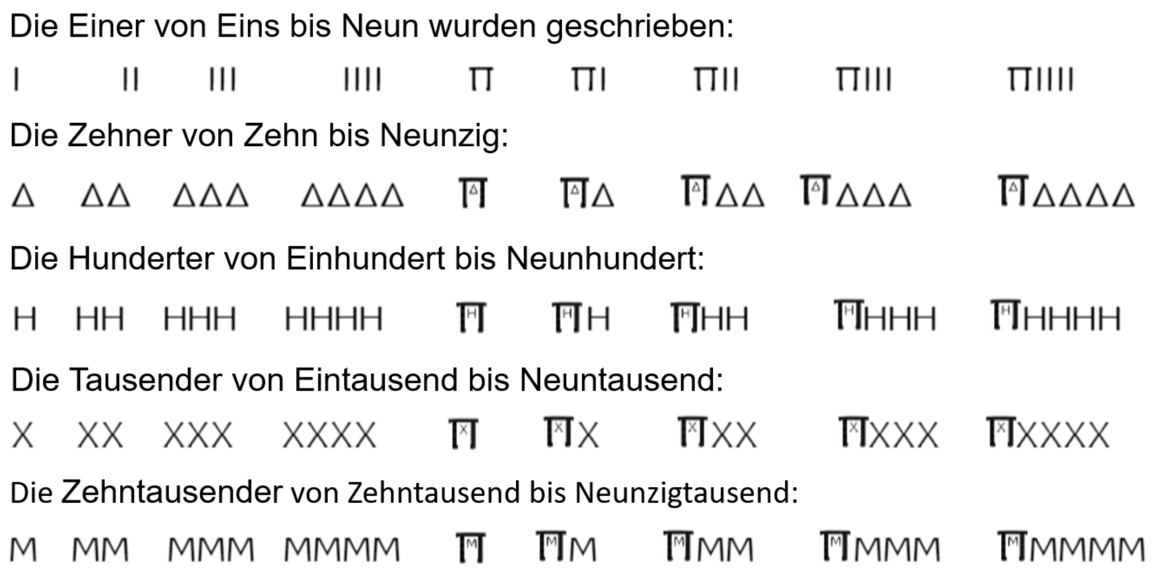

Abb. 10: Die älteren griechischen Zahlzeichen

[39] Nach G. Ifrah, Universalgeschichte der Zahlen
[40] Text und eigene Abbildung nach Rudolf Haller, Die Zahlzeichen bei den Griechen und Römern der Antike, https://docplayer.org/23974612-Die-zahlzeichen-bei-den-griechen-und-roemern-der-antike.html
[41] Die Schreibweise und Gliederung von Zahlen regelt die internationale Norm EN ISO 80000–1.

Es gilt als ältestes arabisches Buch über Arithmetik.[42] Der Zusatz al-hindi im Titel deutet schon auf die Bedeutung, die er z.B. dem indischen Stellenwertsystem zumisst. Das Werk gibt auch didaktische Hinweise. Er wollte schon auf den noch allseits im Gebrauch befindlichen Abakus verzichten. Insbesondere beim „Sand-Abakus" wurden Zwischenrechnungen gelöscht und waren damit nicht mehr nachvollziehbar.[43]

Rationale Zahlen mit ihren Verknüpfungen Addition und Multiplikation werden mit einem stilisierten Buchstaben $\mathbb{Q}$ genannt.

$\mathbb{Q}$ hat eine bemerkenswerte, ausgezeichnete Struktur, die man im algebraischen Sinn einen Körper nennt. Für diesen Beitrag sind die Axiome, die einen Körper ausmachen, so zentral, dass sie an dieser Stelle am Beispiel von der Menge $\mathbb{Q}$ und den Verknüpfungen Addition und Multiplikation besprochen werden sollen. Dazu sind einige Grundbegriffe notwendig, die man sich aneignen muss und deren algebraische Eigenschaften aus den Axiomen unmittelbar ersichtlich sind: Dies sind vor allem:

Gruppe, Vektorraum, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz, neutrales Element, inverses Element.

Abb. 11: Das Ziffernrechnen gewinnt die Oberhand über den Abakus

Auf einer endlichen oder hier unendlichen Menge sind zwei Verknüpfungen definiert, die hier die gewöhnliche Addition und Multiplikation sein sollen. Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen bzgl. beider Verknüpfungen, d.h. sowohl das Element $c=a+b$, als auch das Element $c'=a\cdot b$ ist wieder ein Element der Menge, also hier der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Zu jeder Verknüpfung gibt es ein neutrales Element, so dass bei Anwendung des neutralen Elements auf ein beliebiges Element a sich wieder a ergibt. Dies ist augenscheinlich die Null bei der Addition und 1 bei der Multiplikation.

Denn $a+0=a$ und $a\cdot 1=a$

[42] Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Al-Uqlidisi, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Uqlidisi/

[43] Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Gregor_Reisch,_Margarita_Philosophica,_1508_(1230x1615).png

Außerdem wird gefordert, dass es zu jedem Element bzgl. der Addition und der Multiplikation a ein inverses Element a´ gibt, sodass

$a + a' = 0$ und $a \cdot a' = 1$.

Man sieht leicht, dass $a' = -a$ bei der Addition und $a' = \frac{1}{a}$ bei der Multiplikation ist. Dabei muss man verlangen, dass $a \neq 0$ ist.

Bei den geltenden Gesetzen unterscheidet man in additive und multiplikative Eigenschaften, sowie in Gesetze, die bei der Kombination von Addition und Multiplikation gelten müssen.

Die folgende Rubrik der Definitionen und Axiomen findet sich auch in übersichtlicher und kompakter Form bei wikipedia:[44]

Allgemeine Definition

Eine Gruppe besteht aus einer Menge M mit einer Verknüpfung ○, die zwei Elementen a, b aus M ein drittes Element c zuordnet, das ebenso Element von M ist ($a \circ b = c$). Jede Gruppe besitzt ein neutrales Element n, so dass $a \circ n = n \circ a = a$. Zu jedem Element a existiert ein inverses Element a´, so dass $a \circ a' = n$. Gilt $a \circ b = b \circ a$, so nennt man die Gruppe kommutativ oder abelsch.

Ein Körper ist eine Menge K, versehen mit zwei inneren zweistelligen Verknüpfungen „+“ und „·“, die Addition und Multiplikation genannt werden.

1. $(K, +)$ ist eine kommutative (=abelsche) Gruppe (neutrales Element 0)
2. $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist eine kommutative (abelsche) Gruppe (neutrales Element 1)
3. Distributivgesetz
   $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ und $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ für alle $a, b, c \in K$

Einzelaufzählung der benötigten Axiome

Ein Körper muss also folgende Einzelaxiome erfüllen:

1. Additive Eigenschaften:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$ für alle $a, b, c \in K$ (Assoziativgesetz)
2. $a + b = b + a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
3. Es gibt ein Element $0 \in K$, sodass $0 + a = a$ für alle $a \in K$ (neutrales Element)

---

[44] https://de.wikipedia.org/wiki/Körper_(Algebra). Die Darstellung hat den Vorteil, dass sie alles auf einen Blick enthält. Man muss sich lediglich elementare Einzeldefinitionen und Begriffe, wie z.B. Gruppe, kommutativ=abelsch, verdeutlichen.

4. Zu jedem $a \in K$ existiert ein additives Inverses $-a$ mit $(-a)+a=0$

2. Multiplikative Eigenschaften:

1. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ (Assoziativgesetz)
2. $a\cdot b=b\cdot a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
3. Es gibt ein Element $1\in K$, so dass $1\cdot a=a$ für alle $a \in K$ (neutrales Element)
4. Zu jedem $a \in K$ existiert ein multiplikatives Inverses a^{-1} mit $a^{-1}\cdot a=1$

3. Zusammenspiel von additiver und multiplikativer Struktur

1. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ (Links-Distributivgesetz)
2. $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ für alle $a, b, c \in K$ (Rechts-Distributivgesetz)

Aufgrund der multiplikativen Kommutativität in einem Körper würde es hier ausreichen, nur ein Distributivgesetz anzugeben. Diese Differenzierung in „Rechts" und „Links" wird an späterer Stelle benötigt (Quaternionen).

Irrationale Zahlen

Platon hatte erheblichen Einfluss auf die griechische Philosophie. Er war in Tarent von dem Herrscher Archytas (ca. 428 – 365 v.Chr.) in die Mathematik eingeführt worden und durch dessen pythagoreische Haltung geprägt worden. Platons Musiktheorie, worin die Töne richtigerweise als Bruchteile einer Grundsaite interpretiert wurden, galt als Beleg, dass rationale Zahlen (im griechischen Sinn Verhältnisse von Strecken) die Welt erklären konnten. Dies bestätigte die Weltsicht der Pythagoreer.[45]

Die Griechen definierten Irrationalität als „Inkommensurabilität". Schon früh bemerkte man, dass in der Regel „gewöhnliche" Zahlen stets zueinander kommensurabel waren, d. h. zwei natürliche Zahlen a und b ließen sich stets als Vielfache einer weiteren natürlichen Zahl c auffassen. Mit dem Euklidischen Algorithmus ließ sich c, der größte gemeinsame Teiler (ggT), berechnen. Die beiden Zahlen a und b, die bei den Griechen grundsätzlich Strecken oder Flächen bedeuteten, standen dann in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander. Heute würde man sagen, der durch c gekürzte Bruch aus a und b ist eine rationale Zahl. Doch nach und nach tauchten immer mehr (geometrische) Beziehungen auf, bei denen inkommensurable Beziehungen auftraten. In manchen wissenschaftlichen Auffassungen soll es das Verhältnis von der Seite eines Quadrates zur Diagonale sein ($\sqrt{2}$), es gibt gute Gründe,

---

[45] Wußing, Band 1, ebenda, S 177

dass Untersuchungen am Pentagramm zur Entdeckung geführt haben.[46] Doch diese als Zahlen zu begreifen stand nicht zur Debatte. Archimedes hat π als eine inkommensurable Größe begriffen, die zwischen zwei kommensurablen, also Brüchen, liegt und angenähert werden kann. Bei den Chinesen (Jiǔ Zhāng Suànshù, Neun Kapitel der Rechenkunst, einem der ältesten Mathematikbücher überhaupt im 1. Jahrhundert n.Chr., im Gegensatz zur griechischen Tradition ohne Beweise) scheint schon erkannt worden zu sein, dass man beliebig genau, also mit unendlich vielen Stellen, π beschreiben kann.[47]

Lange Zeit hielt sich in der Forschung die Auffassung, dass Hippasos von Metapont (um 450 v.Chr.) diese heile Welt erschüttert hatte und mit der Entdeckung bzw. schriftlichen Bekanntmachung der Irrationalität die damalige mathematische Welt in eine tiefe Krise gestürzt habe. Alte Legenden behaupten, er wäre deshalb ertränkt worden. Heute geht man davon aus, dass er durch einen Schiffbruch ums Leben gekommen, was aber ebenfalls als gerechte göttliche Strafe angesehen wurde.[48]

Die Theorien, es hätte durch die Entdeckung ein „Erdbeben“ in der griechischen Mathematik gegeben, gelten heute als überholt.[49,50] Es gab erheblichen Interpretationsbedarf, aber es ist wohl übertrieben, von einer Grundlagenkrise zu sprechen. Diese „Größenverhältnisse“ wurden einfach bald als nützlich erkannt und der Begriff „Verhältnis“ hatte sich bei den Brüchen schon eingebürgert und wurde einfach ergänzt. Es war kein Verhältnis von Zahlen (im absoluten griechischen Verständnis als natürliche Zahlen), sondern wieder ein Verhältnis von Strecken oder Flächen, aber inkommensurabler Natur. Heron von Alexandria schrieb:

„Rationale und irrationale Größen gehören beide nicht zu dem an sich Gedachten, sondern zu dem mit Anderem Verglichenen.“[51]

---

[46] Kurt von Fritz: Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont, in: Kurt von Fritz: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft, Berlin u. a. 1971, S. 545- 575

[47] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Nine_chapters/,
viele Literaturangaben bei https://de-academic.com/dic.nsf/dewiki/2427532

[48] Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl

[49] Walter Burkert: *Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*. Hans Carl, Nürnberg 1962

[50] Leonid Zhmud: Hippasos aus Metapont. In: Hellmut Flashar u. a. (Hrsg.): Frühgriechische Philosophie (= Grundriss der Geschichte der Philosophie. Die Philosophie der Antike, Band 1), Halbband 1, Schwabe, Basel 2013, ISBN 978-3-7965-2598-8, S. 412–415

[51] https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf

Nichtsdestotrotz wurde weiter gerechnet. Selbst Archytas von Tarent, als erklärter Pythagoreer, hat die Irrationalität von $\sqrt{\frac{m+1}{m}}$ für $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ bewiesen. Euklid hat in den Elementen explizit den Beweis für $\mathrm{m}=1$, also $\sqrt{2}$, erbracht und sogar allgemein $\sqrt[n]{\frac{m+1}{m}}$ bewiesen.[52]

Historisch kann man diese Ergebnisse in das Ende der Ionischen Epoche und den Beginn der athenischen Periode eingruppieren. In der athenischen Periode wurden die „Inkommensurablen“, also der irrationalen Zahlen in Form von konstruierbaren Strecken eines der zentralen Themen in der Mathematik dieser Zeitspanne. Wesentliche Einzelbeiträge kamen von Theodoros von Kyrene (gest. um 390 v.Chr.). Die Beweise wurden grundsätzlich geometrisch geführt und gingen bis hin zu quadratischen Wurzelschachtelungen. Die vielen einzelnen Ergebnisse manifestierten auf jeden Fall die Existenz der inkommensurablen Werte.

Vermutlich schon sehr früh konnte man die Gleichheit zweier Verhältnisse zeigen, indem das angewendet wurde, was wir heute als Euklidischen Algorithmus bezeichnen und der wahrscheinlich von Eudoxos stammt, aber im 5. Buch der „Elemente“ des Euklid beschrieben ist. Es ist eine „Wechselwegnahme“ (Antanatesis oder Anthyphairesis) und definiert zwei Verhältnisse genau dann als gleich, wenn sie dieselbe endliche oder unendliche Folge von Resten ergeben. Doch erst der herausragende Eudoxos von Knidos (397 – 345/338 v. Chr.) schaffte einen konzeptuellen Rahmen, der das Irrationale in das Gesamtgebäude der Mathematik integriert hat und aus den inkommensurablen Fremdkörpern „kommensurable“, hier im Sinne von gleichberechtigten Größen, gemacht hat. Das führte zu einer sauberen, aber umständlichen Definition, die sowohl auf rationale wie auch auf irrationale Verhältnisse anwendbar ist. Heute würde man schreiben:[53]

Vier Größen a, b, c, d stehen in Proportion (a : b=c : d), wenn für alle natürlichen Zahlen m, n jeweils genau eine der folgenden Aussagen gilt:

1) $m \cdot a < n \cdot b$ und $m \cdot c < n \cdot d$
2) $m \cdot a = n \cdot b$ und $m \cdot c = n \cdot d$
3) $m \cdot a > n \cdot b$ und $m \cdot c > n \cdot d$

Damit hat man im Prinzip auch die irrationalen Zahlen (also inkommensurable Größen) in das Zahlensystem integriert. „Dies war in der damaligen Zeit ein

[52] https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl
[53] Wörtliche Übernahme aus www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf

kühner, aber folgerichtiger Schritt und hat den Weg zum heutigen Verständnis des Zahlensystems maßgeblich geebnet."[54]

Doch wie musste man sich das vorstellen? Es gibt unendlich viele rationale Zahlen, also Brüche mit einem endlichen Nenner. Aber man kann zwischen zwei beliebig kleinen Brüchen immer noch weitere Brüche finden, indem man z.B. den Abstand halbiert. „Zwischen" diesen unendlich vielen und beliebig dicht gesäten rationalen Zahlen passen aber immer noch ebenfalls unendlich viele irrationale Zahlen. Im Gegenteil, Georg Cantor (1845 – 1918) bewies, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar unendlich groß ist. D.h. er fand eine verblüffende Methode, jeder rationalen Zahl eine natürliche Zahl zuzuordnen, sie also durchzuzählen. Dies funktioniert bei den irrationalen Zahlen nicht: Sie sind überabzählbar groß. Damit war jedoch nicht die Frage beantwortet, ob es trotz der beiden unendlichen Zahlmengen immer noch Lücken auf dem Zahlenstrahl geben könnte. Diese Frage ist entscheidend für die Stetigkeit.

Es war Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916), der letzte Schüler von Carl Friedrich Gauß, der eine Methode fand, um zu zeigen, dass der Zahlenstrahl, das „Kontinuum", tatsächlich keine noch so kleinen Lücken aufweist, also das Kriterium erfüllt, das für die Stetigkeit erforderlich ist.

Mit den Dedekind´schen Schnitten hat er alle reellen Zahlen, genannt $\mathbb{R}$, über beliebig nah liegende rationale Zahlen definiert (siehe Abb.). Mit dieser Definition ist die Menge $\mathbb{R}$ nichts anderes als die Menge aller (Dedekind´schen) Schnitte in der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Er konstruierte geeignete Intervalle, die einseitig offen oder geschlossen sind und nennt sie Oberklasse bzw. Unterklasse. Damit ist die Lückenlosigkeit des Kontinuums garantiert und somit sozusagen eine Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen erreicht worden – eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$.

Heute wird dieser „Vervollständigungsprozess" von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ formal genauer mit Hilfe der Betrags- bzw. der daraus folgenden Abstandsfunktion sowie über konvergierende Folgen („Cauchy-Folgen") durchgeführt. Weil diese Gedanken später nochmals benötigt werden, sollen sie hier schon kurz diskutiert werden. Man definiert den (euklidischen bzw. archimedischen) Betrag einer (zunächst) rationalen Zahl x bekanntlich als

$$|x| = \begin{cases} x, f\text{ür } x \geq 0, \\ -x, f\text{ür } < 0, \end{cases}$$

[54] Zum Thema siehe Wußing, ebenda, S184f, Zitat aus W. Kafitz, Unendlich, Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift Band 70, S. 21 oder https://jlupub.ub.uni-giessen.de/handle/jlupub/220, S. 16

Die Abstandsfunktion ist dann einfach $d(x, y) = |x - y|$.
Auch hier im 1-dimensionalen Zahlenstrahl gilt trivialerweise die Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Salopp formuliert, sagt sie aus, dass der Umweg immer größer-gleich dem direkten Weg ist.

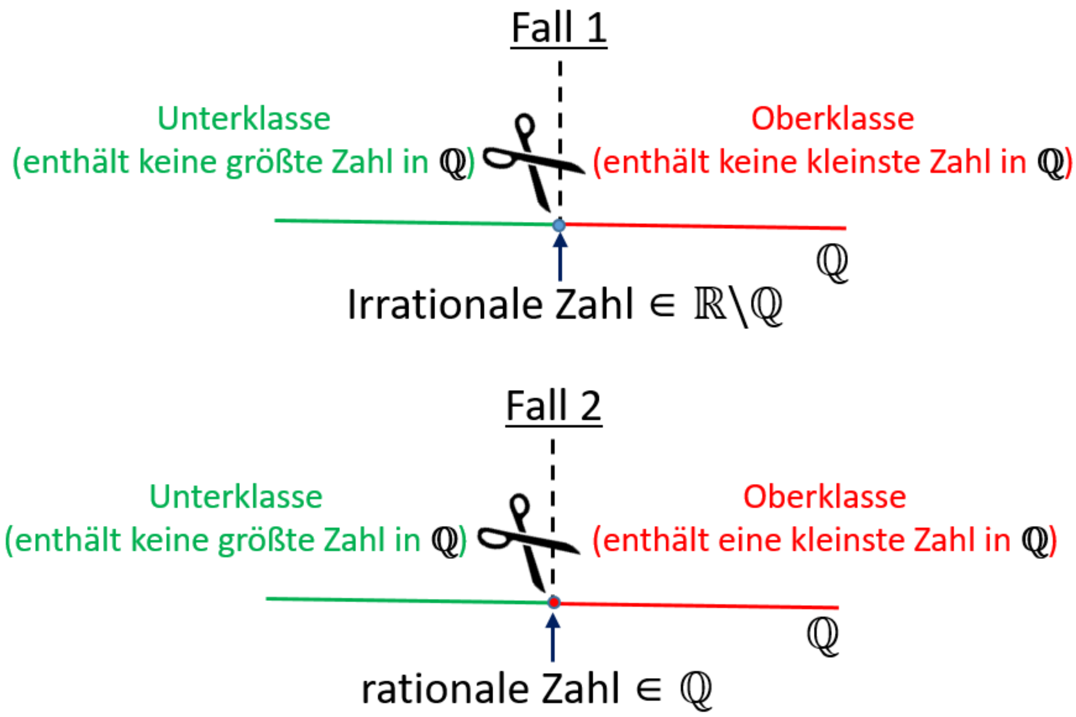

Abb. 12: Dedekind´sche Schnitte in der Menge der rationalen Zahlen ℚ ergeben entweder eine irrationale oder eine rationale Zahl.

Mathematisch sauberer als die Dedekindschen Schnitte ist die folg. Aussage:

Eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen (x_n), n∈ℕ, konvergiert gegen x∈ℚ, wenn zu jedem ε>0 ein N∈ℕ mit $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle n,m ≥ N existiert.

Wegen der Dreiecksungleichung ist jede konvergierende Folge in ℚ auch gleichzeitig eine Cauchy-Folge.

Der Konvergenzpunkt x muss aber nicht immer rational sein. Ein Beispiel sind Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen, die bekanntlich gegen die irrationale Zahl, genannt Goldener Schnitt $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, konvergieren.

$$\frac{f_n}{f_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1},$$

Mit Hilfe des klassischen euklidischen oder archimedischen Abstandsbegriffes erreicht man eine Erweiterung von ℚ zu ℝ. Wir werden sehen, dass es auch eine andere Definition des Abstands geben kann.

Der Briefwechsel zwischen Dedekind und Cantor inspirierte Cantor zu seinen bahnbrechenden Erkenntnissen zu unendlichen Mengen. Dabei stand das Kontinuum am Anfang als unendliche Zahlenmenge. Die Untermenge der rationalen Zahlen ist abzählbar; die Untermenge der irrationalen Zahlen ist bewiesenermaßen nicht abzählbar. Auch deren Untermenge transzendente Zahlen (z.B. π oder e) ist nicht abzählbar. Auch ein beliebig dimensionales zusammenhängendes und abgeschlossenes Gebilde lässt sich auf jede Untermenge des Kontinuums (z.B. die Strecke [0,1]) umkehrbar eindeutig („bijektiv") abbilden und hat somit die gleiche Mächtigkeit.

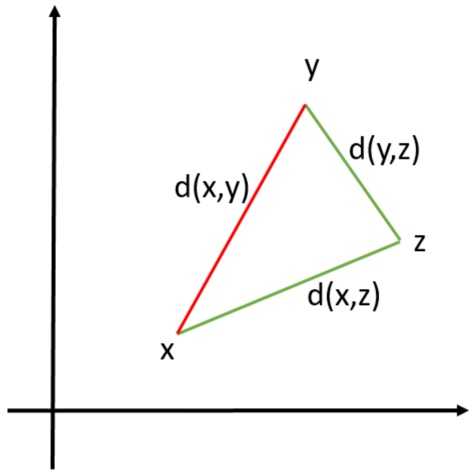

Abb. 13: Dreiecksungleichung im euklidischen Raum, z.B. hier $\mathbb{R}^2$

Schon mehr als eine Fußnote der Geschichte stellen die oben erwähnten transzendenten Zahlen dar. Sie gehören auf jeden Fall zu den irrationalen Zahlen. In der Mathematik heißt eine reelle Zahl transzendent, wenn sie nicht Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Andernfalls handelt es sich um eine algebraische Zahl, die also im weitesten Sinne eine Wurzeldarstellung hat. Algebraische Zahlen sind z.B. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, wie oben erwähnt bekannt als der Goldene Schnitt. Transzendente Zahlen sind z.B. die Kreiszahl π oder die Eulersche Zahl e. In vielen Fällen konnte man bei durchaus „prominenten" Vertretern noch nicht entscheiden, ob sie transzendent, nur irrational oder sogar beides nicht sind. Ein Beispiel ist die in der Zahlentheorie oder Funktionentheorie wichtige Konstante γ (Gamma), benannt nach Euler und Mascheroni.

Sie hat den Wert γ = 0,57721 56649 ……[55]

Von $e + \pi$, $e - \pi$, $e \cdot \pi$, $\frac{e}{\pi}$ kennt man noch nicht den Status; die Irrationalität wird lediglich vermutet.

Man kann sich irren, was eine transzendente Zahl sein könnte. Das indische Wunderkind Srinavasa Ramanujan (1887 – 1920) vermutete es und 1974 bewies es John Brillo von der University of Arizona:

---

[55] Julian Havil, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013, S. 33

$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,744$ ist exakt eine ganze Zahl.[56]

Mit Dedekind und Cantor konnte nach $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{R}$ die 2. Zahlenmenge identifiziert und sauber konstruiert werden, die die Körper-Axiome, wie bei den rationalen Zahlen besprochen, erfüllt. Sie wird gerne über das Bild des Zahlenstrahls verdeutlicht. Wichtige Kennzeichen sind, dass die Zahlenpunkte lückenlos dicht liegen und dass zu zwei Zahlen a und b immer $a < b$, $a=b$ oder $a > b$ gilt. Die Relation „<" ist eine Ordnungsrelation in $\mathbb{R}$.

Der Vollständigkeit sei erwähnt, dass Cantor über „unendlich" hinaus weitere sog. „Transfinite Zahlen" definiert und untersucht hat. Es sind hochinteressante Überlegungen rein mathematischer Natur.[57] Er wurde deshalb stark angefeindet, insbesondere von seinem Doktorvater Leopold Kronecker (1823 – 1891). Er verurteilte Cantor nicht nur für seine Ideen zum Unendlichen, er bekämpfte ihn sogar persönlich wegen seiner Forschungen zum Unendlichen und machte ihm das Leben zur Hölle („Verderber der Jugend"). Die Forschungen zu „Unendlich" haben andererseits Georg Cantor Weltruhm verschafft. Sie haben aber kaum praktische Bedeutung in der angewandten Mathematik. Man kann sagen, im Gegenteil. Da, wo unendliche Werte in einer Theorie auftreten, zeigen sich meist bereits die Grenzen dieser Theorie. Beispiele sind die quasi unendliche Dichte in Schwarzen Löchern bei Anwendung der Allgemeinen Relativitätstheorie oder das Versagen der Hydrodynamik, wenn Flüssigkeiten an feinen Öffnungen atomar austreten und deshalb die Theorie unendliche Werte voraussagt.

Eine ähnliche Definition, wie die transfiniten Zahlen bei Cantor, führte John Horton Conway (1937 – 2020) zu den surrealen Zahlen. Ihre Entdeckung entstand bei der Untersuchung des äußerst komplexen Strategiespiels Go.[58]

Komplexe Zahlen

In der Renaissance stiegen die Anforderungen an Handel, Schifffahrt, Bauwesen, Militärwesen u.v.m. enorm und hatten entsprechend auch Auswirkungen auf Technik und Mathematik. Es war vor allem eine Blütezeit der neuen italienischen, französischen und englischen Mathematiker.
Der Italiener Raffael Bombelli (1526 – 1572) veröffentlichte *L'Algebra 1572* in Bologna, es wurde aber wahrscheinlich deutlich früher zwischen 1557 und 1560

---

[56] Siehe Toenniessen, Fridtjof; Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Spektrum, Heidelberg, 2010, S. 424

[57] Ausführlich siehe dazu den Beitrag „Unendlich", Kafitz, Willi; Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Gießen 2022, Band 70, S. 6 f oder http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-166

[58] SdW 10/22 S. 51

geschrieben. Der ebenfalls italienische Mathematiker Geralomo Cardano (1501 – 1576) publizierte *Ars magna* in Nürnberg 1545.
Sie beschäftigten sich, wie auch andere Mathematiker in dieser Zeit, mit dem Lösen von polynomialen Gleichungen, also Funktionen der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dabei stießen sie auf Lösungswege, die schließlich den Weg zu den komplexen Zahlen wiesen. Aber zunächst war es undenkbar, dass das Quadrat einer Zahl negativ sein könnte. Auch die imaginäre Einheit i war nichts weiter als ein Denkmodell. Bombelli verwendete als Erster Methoden bei kubischen Gleichungen um reelle Lösungen zu finden, die man als komplexe Zahlen identifizieren kann und erkannte dadurch die enormen Möglichkeiten.
Viele interessante Ergebnisse sind in der Algebra, Analysis, der Geometrie über einen solchen Umweg über das „Komplexe" entstanden. Die komplexe Funktionentheorie erstaunt immer wieder, wie elegant Ergebnisse im Komplexen erzielt werden können.
Obwohl über René Descartes (1596 – 1650) die imaginäre Einheit i eingeführt wurde, waren viele Begriffe und Anschauungen noch eher diffus. Eine formal korrekte Definition der komplexen Zahlen verdanken wir erst dem norwegisch-dänischen Mathematiker Caspar Wessel (1745 – 1818), dem 1797 wichtige Resultate gelangen und Sir Rowan William Hamilton im Jahr 1833. Auf ihn wird bei den Quaternionen noch einzugehen sein. Ein Gigant unter den Mathematikern war Leonhard Euler. In „Introductio in analysin infinitorum" publizierte er 1748 die Formel, die allgemein als die schönste Gleichung aller Zeiten bezeichnet wird (s.u.). Sie ist die Krönung seiner Ergebnisse über den Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen, der nur über komplexe Zahlen möglich sind.[59] Die Beiträge von Gauß sind ebenfalls wegweisend, allerdings nicht wie Euler im Bereich der aufstrebenden Analysis, sondern in der Geometrie und Algebra. Im Jahr 1811 fand er eine Möglichkeit komplexe Zahlen als Punkte und Vektoren in der Ebene darzustellen. Sie ist als Gaußsche Zahlenebene bekannt und berühmt. „Komplexe Zahlen" als Begriff wurde auch von Carl Friedrich Gauß in seiner *Theoria residuorum biquadraticorum*, 1831, eingeführt. Eine zentrale Anforderung ist die Ermittlung von Nullstellen in einem Polynom mit der höchsten Potenz x^n, $n \neq 0$, also oben genannter Form

$a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$.

[59] Siehe dazu auch ausführlicher https://www.mathematik.de/dmv-blog/2451-270-jahre-eulersche-identität-eine-kurze-geschichte-der-komplexen-zahlen

Eins seiner vielen Hauptverdienste ist der Beweis des Hauptsatzes der Algebra (Fundamentalsatz), also der Erkenntnis, dass ein Polynom n-ten Grades genau n Nullstellen im Komplexen hat.

Ab Anfang des 19. Jahrhunderts setzte dann eine Entwicklung ein, deren Ergebnisse nach 200 Jahren praktisch unverändert im Mathematik-Grundstudium gelehrt werden. Es sind in ihrer Tragweite unglaublich tiefliegende Erkenntnisse in der Analysis, Funktionentheorie und nach und nach in anderen Bereichen entstanden, die nur über komplexe Zahlen entdeckt werden konnten. Bernhard Riemann (1826 – 1866), Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) und Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 – 1897) muss man unbedingt nennen. Sie haben das Kalkül der Differential- und Integralrechnung auf die komplexen Zahlen erweitert. Cauchy und Weierstraß haben dabei den historischen sprachlichen Ballast („unendlich klein") überwunden und moderne Definitionen für den Grenzwertprozess gefunden. Riemann hat wichtige Impulse bei der Funktionentheorie gegeben und war darüber hinaus mit der nach ihm benannten Riemannschen Geometrie Wegbereiter für die Physik der Allgemeinen Relativitätstheorie. Doch auch mit weiteren Namen sind wichtige Ergebnisse auf Basis der komplexen Zahlen verbunden, so z.B. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859).

Es lohnt sich, an dieser Stelle einige allgemeine Überlegungen anzustellen, welchen Anforderungen eine Erweiterung des Zahlbereiches genügen müssen. Dazu ist ein Blick in die bisherige Entwicklung sinnvoll.

Die reellen Zahlen bildeten einen zwangsläufigen, historisch gewachsenen Abschluss des Zahlensystems, wie es sich im Zahlenstrahl als Kontinuum darstellt.[60,61] Dabei hat man zunächst mehr intuitiv die wunderbaren Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, die sich als algebraische Körper bestehend aus einer Menge mit zwei Verknüpfungen definieren lassen, berücksichtigt. $\mathbb{R}$ ist darüber hinaus ein „vollständig geordneter Körper", was wie dargestellt, für die Stetigkeit von entscheidender Bedeutung ist, die wiederum Voraussetzung für viele weitere mathematische Methoden darstellt.

Geht man darüber hinaus in Verallgemeinerungen des Zahlbegriffs, sollten die Erweiterungen des Zahlbereichs immer zwei wesentlichen Anforderungen genügen:[62]

---

[60] Abbildungsquelle: matheguru.com/algebra/komplexe-zahlen.html
[61] Eigene Abbildung
[62] Die folg. Überlegungen finden sich in abgewandelter und z.T. erweiterter Form in einem Beitrag des Autors: Kafitz, Willi; Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Gießen 2022, Band 70, S. 129 f oder http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-551, S. 17 f.

Einbettungsprinzip

Die bisherigen Zahlen sollten in die Erweiterung eingebettet sein. Die neu definierten Zahlen sind also eine Obermenge, die sich algebraisch genauso verhält, wie die „alten“ Zahlen.

Permanenzprinzip

Die Rechenregeln sollen sich nicht wesentlich ändern. Die Erweiterung soll die bisherigen Rechenregeln weitgehend erhalten.

Es war also ein konkreter Handlungsdruck vorhanden, um über die reellen Zahlen hinaus zu denken. Aber andererseits gab es Restriktionen und Denkverbote, die man erst überwinden musste. Dies ist in etwa vergleichbar mit Subtraktionen, die eine negative Lösung haben und die ganzen Zahlen erforderlich machten.

Doch man sollte genau analysieren, was bei der Erweiterung des reellen Zahlenraums passiert.

$x^2 + 1 = 0$, als Polynom 2. Ordnung hat in den reellen Zahlen keine Lösung und das gilt auch für anspruchsvollere Polynome. Die Lösung $x = \pm\sqrt{-1}$ muss außerhalb des reellen Zahlenstrahls liegen. Sie wird seit René Descartes und dann Leonhard Euler per Definition i oder imaginäre Einheit genannt. i ist also nicht nur die Nullstelle des einfachsten Polynoms, sondern die Einheit eines neuen Zahlbereichs, den imaginären Zahlen.[63] Eine komplexe Zahl $z=x+iy$ besteht aus zwei Komponenten, dem Realteil $x \in \mathbb{R}$ und dem Imaginärteil $i \cdot y$, wobei $y \in \mathbb{R}$ ebenfalls reell ist. Ist $y=0$, erhält man die reellen Zahlen.

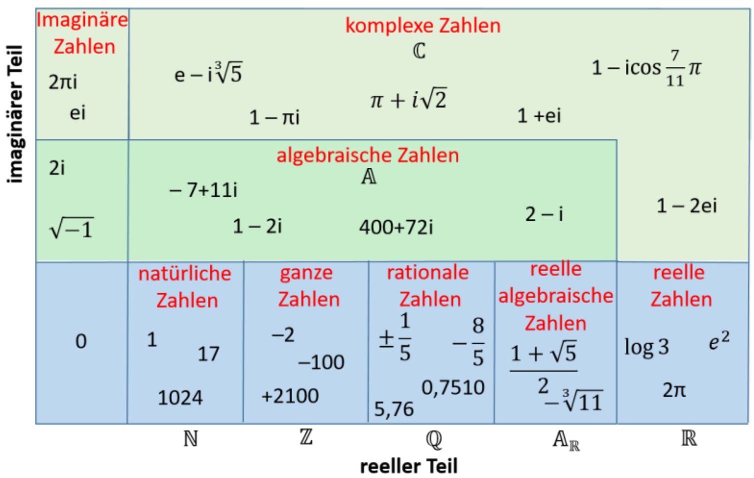

Abb. 14: Beispiele verschiedener Zahlentypen

Auch hier sind die von der Algebra entwickelten Axiome entscheidend, die, ggfs. mit Anpassungen bei den Rechenregeln, im Prinzip unter den Begriff „algebraischer Körper“ fallen oder von ihm abgeleitet sind.

[63] In der Elektrotechnik wird der Buchstabe j verwendet. i bzw. i(t) ist die zeitlich abhängige Stromstärke und kann deshalb zu Verwechslungen führen.

Schon alleine das impliziert, dass das Einbettungsprinzip nicht wörtlich zu nehmen ist. Eine imaginäre Zahl b·i mit b∈ℝ ist definiert als $(b \cdot i)^2 := -b^2$. Die imaginären Zahlen betten die reellen Zahlen also nicht ein, sondern stehen gleichberechtigt daneben. Nur die Null haben sie gemeinsam, denn i·0=0. Die reellen Zahlen enthalten die reell algebraischen und rationalen Zahlen und diese wieder die ganzen Zahlen und schließlich die natürlichen Zahlen. Aber die imaginären Zahlen enthalten nicht die reellen Zahlen; sie haben nur die Null gemeinsam. Erst wenn man beide, reelle und imaginäre Zahlbereiche zu den komplexen Zahlen ℂ „geschickt" zusammenfasst, also zu einer Zahlenmenge mit zwei Verknüpfungen, genannt Addition (+) und Multiplikation (·), die die Axiome und algebraischen Eigenschaften eines Körpers erfüllen, dann kann man von einer Erweiterung des Zahlenbereichs sprechen, der das Einbettungsprinzip und das Permanenzprinzip einhält.

Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet man mit dem Symbol ℂ. ℂ hat noch mehr als ℝ eine Reihe von Eigenschaften, die zu einem Siegeszug in Mathematik, Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften und darüber hinaus geführt haben. Die Körperaxiome werden vollständig erfüllt. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jede Gleichung positiven Grades in ℂ eine Lösung hat. Das trifft auf ℝ, wie das Beispiel $x^2+1=0$ zeigt, nicht zu. Damit ist ℂ algebraisch abgeschlossen.

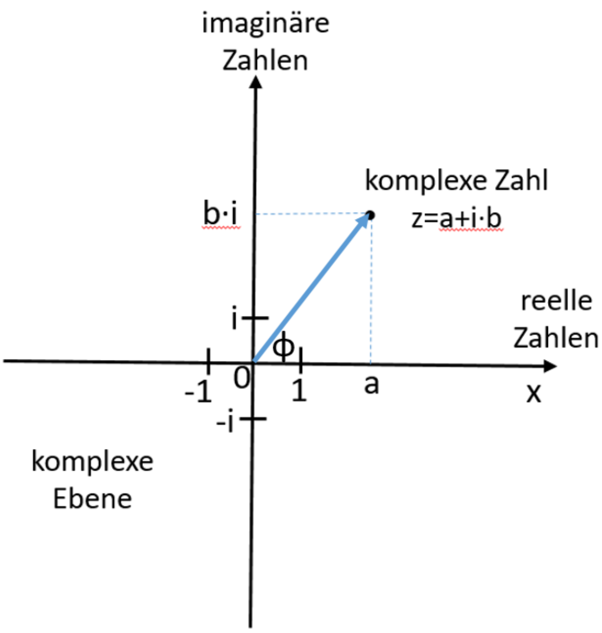

Abb. 15: Kartesische Darstellung einer komplexen Zahl.

Es zeigt sich, dass die „Kombination" von reellen Zahlen und imaginären Zahlen zu ℂ einen Vektorraum in $\mathbb{R}^2$ bildet (der Ebene, die durch zwei senkrecht stehende Achsen aufgespannt wird). Die Punkte sind also Tupel mit einer reellen Komponente (Realteil) und einer imaginären Komponente (genannt Imaginärteil). Das garantiert, dass ℂ sowohl ℝ als auch sozusagen „𝕀" als echte Teilmengen enthält. Geometrisch bzw. vektoriell veranschaulicht, stehen imaginäre Zahlen senkrecht, also orthogonal zu reellen Zahlen. Diese Sichtweise verdanken wir Gauß. Der Vektorraum wird durch alle Linearkombinationen von 1 und i (der Basis) erzeugt.

Die „Kombination“ nennt man die komplexe Ebene oder Gaußsche Zahlenebene.[64] Die komplexen Zahlen entsprechen Punkten in der komplexen Ebene. Die reellen Zahlen sind eine Untermenge und ebenso die imaginären Zahlen, die auf dem imaginären Zahlenstrahl liegen. Beide haben nur die Null gemeinsam, auch wenn man sich diese Tatsache erst bewusstmachen muss. Die reellen Zahlen haben den Imaginärteil 0 und die imaginären den Realteil 0. Die Erweiterung des Zahlenraums durch $\mathbb{C}$ ist also nicht unbedingt vergleichbar mit der Erweiterung von $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{R}$, da $\mathbb{C}$ eben einen zweidimensionalen Vektorraum bildet.

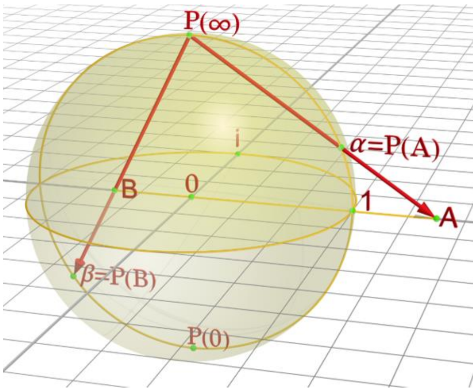

Abb. 16: Stereographische Rückprojektionen der komplexen Zahlen A und B auf die Punkte α und β der Riemannschen Zahlenkugel.

Wie oben angesprochen ist auch besonders der von Euler gefundene Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und komplexen Zahlen bemerkenswert und soll in diesem Kapitel gewürdigt werden. Die Beziehung

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

gilt als die schönste Formel aller Zeiten. Sie resultiert aus der Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl (kurz: Polarform oder trigonometrische Form)

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),$$

die sich in dem zweidimensionalen Vektorraum anbietet. Setzt man r=1 und betrachtet φ als Variable, so erhält man den Einheitskreis, also allen komplexen Zahlen, die auf dem Kreis mit Radius 1 und der Null als Mittelpunkt liegen. Ist

$$z = a + i \cdot b$$

so ist die „Länge“ von z, also der Betrag nach Pythagoras $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$. Damit wird eine Metrik im Körper der komplexen Zahlen definiert.

Die Zahlen auf dem Einheitskreis bilden eine Gruppe, was man leicht überprüfen kann.

[64] Eine alternative Darstellung findet sich in der Riemannschen Zahlenkugel (Quelle https://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsche_Zahlenkugel#/media/Datei:Riemann_sphere1.svg)

Eine Vorzeichenänderung des Imaginärteils nennt man konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = a - i \cdot b$, in der Physik wird sie gerne z^* geschrieben. Sie entspricht einer Spiegelung an der x-Achse. Die reellen Zahlen werden dabei auf sich selbst abgebildet. Diese konjugiert komplexe Zahl wird sehr oft benötigt. Es soll hier nur kurz auf $z \cdot \bar{z},\ z + \bar{z}\, und\ z - \bar{z}$ eingegangen werden

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

also das Quadrat ihres Betrages. Die komplexen Zahlen sind ein Beispiel einer sogenannten C^*-Algebra

Abschließend sei noch erwähnt, dass

$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a,$ also 2·Re z ist. Entsprechend ist

$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2b,$ also 2·Im z ist.

Bildung des multiplikativ Inversen und die Division können so einfach gebildet werden:

$$z^{-1} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z^2|}$$

Sei $y, z \in \mathbb{C}$, dann ist $\quad \dfrac{y}{z} = \dfrac{y}{z}\dfrac{\bar{z}}{\bar{z}} = \dfrac{y\bar{z}}{|z^2|}$

Die Einführung der komplexen Zahlen war nicht nur ein Segen für die Mathematik, sondern es ergeben sich mit ihnen eine Fülle von Anwendungsmöglichkeiten in der Physik und darüber hinaus.

Quaternionen

Der Erfolg der komplexen Zahlen war zur Mitte des 19. Jahrhunderts unübersehbar. Vor allem im Bereich der Analysis konnten wunderbare Sätze bewiesen werden. Aufstrebend war zu diesem Zeitpunkt auch die analytische Zahlentheorie. Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), einer der Pioniere der Analysis und vor allem speziell der komplexen Funktionentheorie, soll pro Woche eine Publikation eingereicht haben.

Es war folgerichtig, dass man nach weiteren Verallgemeinerungen des Zahlbegriffes suchte. Dies war 1840 durch den Franzosen Benjamin Olinde Rodrigues (1795 – 1851) erfolgreich. Der Erfolg wird aber vorwiegend Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) zugerechnet, der 1843 unabhängig von Rodrigues die Quaternionen entdeckte und ihre Mathematik maßgeblich vorantrieb. Er hatte schon Beiträge zu den komplexen Zahlen geliefert, stellte sie als Zahlenpaare im zweidimensionalen Raum, dem $\mathbb{R}^2$, dar und suchte nun nach einem Äquivalent im $\mathbb{R}^3$. Er war erfolglos, weil er erfolglos sein musste. Heute weiß man, dass eine entsprechende algebraische Struktur nicht existiert. Dagegen kann man den Zahlbegriff im $\mathbb{R}^4$ verallgemeinern – allerdings mit Einschränkungen, weshalb man heute Quaternionen als „Größen" und nicht als Zahlen bezeichnet. Trotzdem löste die Entdeckung einen regelrechten Hype aus. Das Thema wurde sogar Prüfungsfach an der Universität in Dublin. Sir Hamilton war so stolz, dass er eine Gedenktafel mit den Multiplikationsregeln aufstellen ließ. Im Jahr 1895 wurde sogar ein „Weltbund zur Förderung der Quaternionen" gegründet.[65]

Ein Quaternion q hat in Anlehnung an komplexe Zahlen die Form

$$q := x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \text{ mit den } x_i \in \mathbb{R}.$$

Mit der Basis {1, i, j, k} wird somit ein vierdimensionaler Vektorraum aufgespannt, der isomorph zu $\mathbb{R}^4$ ist, also die gleiche Struktur wie der vierdimensionale Raum hat. Analog zu den komplexen Zahlen nennt man x_1 den Realteil und $x_2 i + x_3 j + x_4 k$ den Imaginärteil von q.

Abb. 17: Gedenktafel von Hamilton selbst an der Broom Bridge in Dublin.

Weiterhin sollen folgende Regeln gelten („Hamilton-Regeln"):

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

$ij = +k,\ jk = +i;\ ki = +j$

$ji = -k,\ kj = -i;\ ik = -j$

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ erfüllen gemeinsam mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation die Axiome, die sie zu einem algebraischen Körper machen.

Das analog dazu entstehende mathematische Gebilde bei den Quaternionen $\mathbb{H}$, erfüllt jedoch nur mit Einschränkungen die Körperaxiome. Bzgl. der Addition werden die entsprechenden Körperaxiome erfüllt. Ursache der Einschränkungen sind die Gruppeneigenschaften bzgl. der Multiplikation.[66]

Eine einfache Rechnung zeigt, dass das Kommutativgesetz bei der Multiplikation nicht gilt: Seien q_1 und q_2 zwei Quaternionen obiger Form, so ist

[65] Grafik und Quelle https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion#Geschichte
[66] Bildquelle https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion#/media/File:Cayley_Q8_quaternion_multiplication_graph.svg

$$q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$$

Für sich genommen bilden Q_8: $=\{1, i, j, k, -1, -i, -j, -k\}$ eine Struktur, in der alle Gesetze einer algebraischen Gruppe gelten, die Quaternionengruppe.

Wie oben bei der nichtkommutativen („nichtabelschen“) Multiplikation von $ij \neq ji$, $jk \neq kj$ oder $ki \neq ik$ deutlich wird, ist die Quaternionengruppe jedoch nichtabelsch. Es ist neben der Diedergruppe D_4, entsprechend den 4 Drehungen und 4 Spiegelungen bei einem Quadrat, die einzige nichtabelsche, 8-elementige Gruppe. Aber beide Gruppen sind nicht isomorph, d.h. es existiert keine bijektive Abbildung, die D_4 in Q_8 überführen kann oder umgekehrt. Die Tatsache, dass die Quaternionengruppe nichtabelsch bzgl. der Multiplikation ist, verhindert, dass die Quaternionen mit den beiden Verknüpfungen Addition und Multiplikation einen „echten“ Körper bilden.
Man nennt $\{\mathbb{H}, +, \cdot\}$ deshalb einen Schiefkörper.

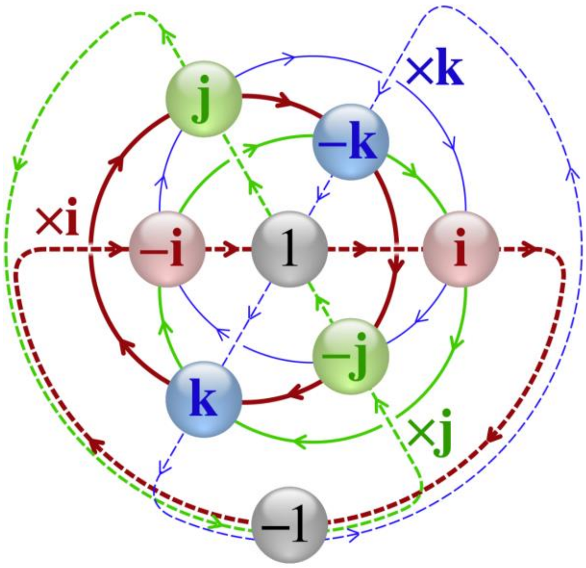

Abb. 18: Verknüpfungen in der Quaternionengruppe

Quaternionen sind nicht nur als rein mathematische Objekte interessant, sondern haben mittlerweile Bedeutung in einigen Anwendungsbereichen gewonnen. Bei wikipedia[67] finden sich Anwendungsbeispiele aus der Physik und der Mathematik. Im Computerzeitalter ist ein gänzlich neuer Bereich entstanden, dessen mathematische Grundlage bereits Hamilton erkannt hat. So dienen sie, heute versteckt in entsprechend einfach durch Entwickler benutzbaren Bibliotheken, im 3D-Bereich, z.B. zur virtuellen Rotation von beliebigen Objekten am Bildschirm.[68]

---

[67] https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion#Anwendungen
[68] https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation
Man findet auch eine Reihe von youtube-Videos zu dem Thema, z.B. https://www.youtube.com/watch?v=zjMuIxRvygQ.
Die Gruppe U_1(H) der Quaternionen der Länge 1 ist isomorph zur Gruppe SU_2(C) der unitären komplexen 2x2 Matrizen der Determinante 1, welche wieder isomorph ist zur Gruppe Spin_3, der doppelten Spinüberlagerung der Gruppe SO_3. Das ist der Grund, warum man mit Quaternionen Drehungen im Raum beschreiben kann. Siehe Salzmann, et al. über Compact Projective Planes: https://pnp.mathematik.uni-

Eine besondere Bedeutung hat der Fahrzeugbau. Hier ist auch die Ausrichtung eines vektoriell beschriebenen Körpers im Koordinatensystem in einer DIN-Verordnung (DIN70000) geregelt. Die DIN-Norm ermöglicht eine 3D-Rotation eines Vektors mit Euler-Winkeln nach ZYX-Konvention. Euler-Winkel sind ein Satz von drei Winkeln, mit denen die Orientierung eines festen Körpers im dreidimensionalen euklidischen Raum beschrieben werden kann.[69] Man definiert dabei das Koordinatensystem wie folgt:

- x-Achse verläuft in Längsrichtung (des Fahrzeugs) zu positiven Werten
- y-Achse nach links zu positiven Werten
- z-Achse nach oben zu positiven Werten
- Drehungen beschreibt man mit der rechten Hand-Regel, d.h. der Daumen zeigt in Richtung der Achse und die Finger zeigen in die positive Drehrichtung

Nach ZYX-Konvention werden Drehungen wie folgt definiert:

- Drehung um Z-Achse, auch Gierachse [englisch Yaw genannt] ist bei Linkskurve positiv (mathematisch positive Drehrichtung).
- Drehung um Y-Achse, Nickachse [englisch Pitch], beim Eintauchen der Fahrzeugfront positiv
- Drehung um X-Achse, Rollachse auch „Wanken", [englisch ebenfalls Roll], beim Eintauchen der Beifahrerseite positiv

Die Rotationsmatrix R setzt sich aus den 3 Matrizen für Z-Rotation, Y-Rotation und X-Rotation zusammen:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dabei steht $\psi =$Gieren, $\theta =$Nicken, $\varphi =$Wanken (von rechts multiplizieren).[70]

In Computerprogrammen benutzt man entsprechende Bibliotheken und gibt der Rotationsmatrix beim Aufruf der Funktion die drei Rotationswinkel als Argument mit.

---

stuttgart.de/lexmath/Stroppel/cpp/ (Privatmitteilung von Prof. Ralf Köhl, Univ. Kiel). Anwendungen sind auch in der Quantenmechanik beim Spindrehimpuls.

[69] Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Winkel

[70] Grafik und inhaltliche Orientierung https://www.cbcity.de/tutorial-rotationsmatrix-und-quaternion-einfach-erklaert-in-din70000-zyx-konvention

Quaternionen werden zur Abgrenzung von den Körpern der ganzen Zahlen, rationalen Zahlen, reellen Zahlen und komplexen Zahlen, wie bereits betont, „Größen“ genannt und stellen als Schiefkörper eine eingeschränkte Verallgemeinerung des Zahlbegriffs dar. Dabei sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ enthalten, während $\mathbb{C}$ trotz der Körpereigenschaft eine gewisse Sonderstellung als zweidimensionaler Vektorraum wahrnimmt.

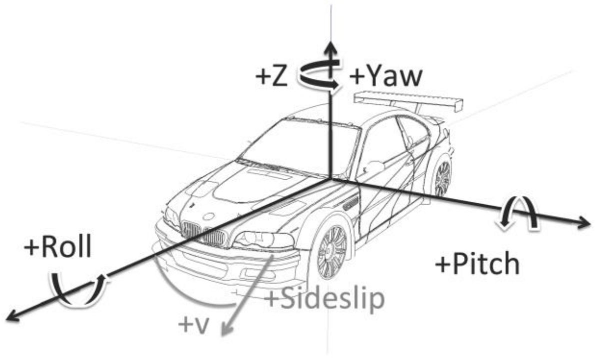

Abb. 19: Rotationsmatrix nach DIN70000 in ZYX-Konvention zur Berechnung mit Quaternionen.

Im Folgenden werden weitere Größen mit entsprechenden algebraischen Strukturen beschrieben. Die Orientierung der Themen erfolgt u.a. nach der deutschen Ausgabe von L. S. Pontrjagin, Verallgemeinerungen der Zahlen (siehe Literaturverzeichnis).

Restklassenringe modulo p

Sucht man nach weiteren Verallgemeinerungen, so muss man ggfs. weitere Abstriche bei den algebraischen Eigenschaften machen. Man findet sie bei algebraischen Ringen. Wikipedia weist darauf hin, dass die Bezeichnung Ring sich an die wenig benutzte, deutsche Wortbedeutung anlehnt, die man heute noch in Vereinen wie „Weisser Ring“ (Hilfe für Kriminalitätsopfer) oder Begriffen wie „Verbrecherring“, „Tauschring“ oder auch „Ringvorlesung“ vorfindet. Das mathematische Konzept geht auf Dedekind zurück; der Name wurde von David Hilbert vergeben.[71]

Sei $\mathrm{n} \geq 1$ eine natürliche Zahl, dann werden ganze Zahlen mit gleichem Rest bei Division durch n zu sogenannten Restklassen modulo n zusammengefasst. Zwei ganze Zahlen A und B sind also genau dann in derselben Restklasse modulo n, wenn ihre Differenz A–B durch n teilbar ist. A und B heißen dann kongruent. Dies ist eine Äquivalenzrelation, d.h. es gilt

Reflexivität: $A \equiv \ A \, mod \, n$

Symmetrie: $A \equiv \ B \, mod \, n \Leftrightarrow \ B \equiv \ A \, mod \, n$

Transitivität: $A \equiv \ B \, mod \, n \, und$

[71] https://de.wikipedia.org/wiki/Ring_(Algebra)

$$B \equiv C \bmod n \implies A \equiv C \bmod n$$

Die Restklassen bilden zusammen mit der unten definierten Addition und Multiplikation den Restklassenring modulo n. Ist n eine Primzahl, so setzt man $n=p$. Es gibt n Repräsentanten $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.[72] Das algebraische Konstrukt bezeichnet man mit $\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ oder kurz $\mathbb{Z}_n$. Es bildet mit der Addition eine Gruppe $(\mathbb{Z}/n,+)$ und mit der Multiplikation eine Halbgruppe $(\mathbb{Z}/n,\cdot)$. Bei der Halbgruppe $(\mathbb{Z}/n,\cdot)$ interessieren insbesondere die invertierbaren Elemente x für die es ein x´ gibt, so dass x·x´=1. Diese bilden eine Gruppe $U(\mathbb{Z}/n,\cdot)$. Man sieht, dass auch $n=0$ Sinn ergibt. Das entspricht allen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, genauer jede ganze Zahl bildet eine eigene Restklasse. Man kann deshalb unmittelbar sehen, dass $\mathbb{Z}$ ein Ring ist. Zur Körpereigenschaft fehlt das inverse Element, das außerhalb von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ liegen würde. Vorsicht mit der Bezeichnung $\mathbb{Z}_p$ für einen Restklassenring mit einer Primzahl. Hier besteht Verwechslungsgefahr mit der Menge der ganzen p-adischen Zahlen (s.u.), die ebenfalls $\mathbb{Z}_p$ genannt wird. Deshalb ist die Bezeichnung $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eindeutig.

Abb. 20: Eine analoge Uhr zeigt Sekunden und Minuten modulo 60 und Stunden modulo 12 an.

Die Restklasse einer Zahl a soll [a] heißen. Die Verknüpfungen werden unabhängig vom Repräsentanten definiert:

$$[a]+[b] := [a+b]$$
$$[a]\cdot[b] := [a\cdot b]$$

Die Verknüpfungen sind wohldefiniert, denn seien a_1, a_2, b_1, b_2 ganze Zahlen mit

$[a_1] = [b_1]$
$[a_2] = [b_2]$, dann gilt nach Definition der Restklassen:

$$[a_1+a_2] = [b_1+b_2]$$
$$[a_1\cdot a_2] = [b_1\cdot b_2]$$

Der Einfachheit halber lässt man die eckigen Klammern weg, wenn der Zusammenhang eindeutig ist. Der Restklassenring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ besteht also aus den Zahlen/Resten 0, 1, …, $n-1$.

---

[72] Beispiel p=7, Restklasse besteht aus {0, 1, …, 5, 6},
[5]+[6]=[4], da 11:7=1 Rest 4; [5]·[6]=[2], da 30:7=4 Rest 2

Die kleinsten Ringe sind der Nullring $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$, der nur aus der $\{0\}$ besteht, da alle ganzen Zahlen bei der Division durch 1 nur den Rest 0 haben, d.h. $n \equiv 0 \ mod\ 1$ für alle n∈ℤ. Bei der Division einer ganzen Zahl durch 2 können nur die Reste 0 oder 1 entstehen. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ besteht also aus der Menge {0,1}.

Man betrachte nun das Beispiel n=4. Die Restklasse besteht aus den Repräsentanten {0,1,2,3}. Man sieht, dass 2·2 mod 4 = 0.
2 nennt man einen Nullteiler. Nullteiler besitzen kein multiplikatives Inverses und die Struktur ($\mathbb{Z}_4$, +, ·) kann deshalb kein Körper sein. Analog n=10 bzgl. Multiplikation: 2 und 5 sind Nullteiler. Für beliebiges n ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit der Restklasse $n\mathbb{Z}$ als Nullelement und der Restklasse 1+ $n\mathbb{Z}$ als Eins.

Was ist nun das Besondere, wenn n eine Primzahl p ist?

•	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

•	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Abb. 21: Verknüpfungstafeln des Restklassenrings $\mathbb{Z}_4$ bzw. des Restklassenkörpers $\mathbb{Z}_3$ bzgl. Multiplikation und Addition.

Dann ist ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, +, ·) sogar ein endlicher Körper, der $\mathbb{F}_p$ genannt wird (im mathematischen Englisch bedeutet „field“ einen algebraischen Körper). Er hat dann p–1 Restklassen als Elemente. Inverse bezüglich der Multiplikation lassen sich dann eindeutig mittels des erweiterten euklidischen Algorithmus berechnen.[73] Der euklidische Algorithmus zweier natürlicher Zahlen a und b berechnet bekanntlich den größten gemeinsamen Teiler ggT(a,b). Die Erweiterung bestimmt zusätzlich zwei Zahlen s und t, so dass

$$ggT(a,b) = s{\cdot}a + t{\cdot}b$$

Für das Kapitel zu p-adischen Zahlen sind zum besseren Verständnis elementare Definitionen und Sätze über Restklassengruppen bzw. Restklassenringe und insbesondere Aussagen zu Restklassenringen modulo einer Primzahl bzw. Primzahlpotenzen sinnvoll.

So gilt für $0 \leq a \leq p\text{-}1$: $\quad a^{p-1} \equiv 1 \ mod\ p$ („kleiner Fermat“)

[73] https://de.wikipedia.org/wiki/Erweiterter_euklidischer_Algorithmus

Eine einfache Folgerung daraus ist: $a^p \equiv a \, mod \, p$

Topologisch-algebraische Strukturen

Mit topologischen Aspekten ist der Begriff der Konvergenz stark verbunden. In $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ und sogar $\mathbb{H}$ (hier alle allgemein K genannt) ist eine Metrik, d.h. ein Abstand definiert. Damit kann man Konvergenz einführen:

Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \in K$ (aus den drei genannten (Zahlen)räumen) konvergiert gegen a, wenn der Abstand[74] $d(a_n, a)$ mit wachsenden n gegen Null geht. Man drückt es gerne so aus:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ für alle } a_n \in K$$

Körper oder Schiefkörper, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, nennt man topologische Räume.

Wie sieht es nun mit den algebraischen Eigenschaften der Schiefkörper bzgl. ihrer Verknüpfungen aus?

Sei $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots \in K$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

Bzgl. Addition und Multiplikation gilt dann

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Die Konvergenz für Subtraktion und Division kann man mit den inversen Elementen verdeutlichen, denn

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = a^{-1}$$

Man nennt diese algebraischen Objekte topologische (Schief)körper.[75] Mit der Konvergenz sind die Verknüpfungen stetig.

$\mathbb{R}$ ist eindimensional, $\mathbb{C}$ zweidimensional und $\mathbb{H}$ hat die Dimension 4. Es sind euklidische Räume, in denen ein Abstand definiert ist, über den die Konvergenz nachgewiesen wird. Im Kapitel über p-adische Zahlen wird näher darauf eingegangen.

Unter gewissen Umständen kann sogar eine Punktmenge der Dimension 0 ein topologischer Raum sein. Ein Beispiel ist die Cantor-Menge $\mathbb{C}$. Sie ist zwar als „Diskontinuum" total unzusammenhängend und nirgends dicht. Aber jeder Punkt ist ein Randpunkt und als solcher ein Häufungspunkt. Mit diesen

[74] Hier ist zunächst der klassische euklidisch-archimedische Abstand gemeint.

[75] Diese Bezeichnung wird nicht für die triviale Konvergenz verwendet. Die a_n sollen damit alle unterschiedlich sein und nicht ab einem gewissen a_n gleich sein, d.h. für zwei Zahlen a_i und a_j gilt immer $|a_i - a_j| > 0$

eingeschränkten Eigenschaften bezeichnet man auch die nulldimensionale[76] Cantor-Menge und alle zu ihr homöomorphen Räume als Cantor-Raum (s.u.).

Dazu gehört auch die Koch-Kurve und andere Fraktale. Hier nutzt man die Tatsache aus, dass wenn der Abstand a_n-a gegen Null strebt, dies äquivalent zur Aussage ist, dass die Differenz a_n-a gegen Null geht. Beim Cantor-Staub, bei dem man in der Regel das Intervall [0,1] betrachtet und iterativ jeweils das mittlere Drittel eines Streckenstückes eliminiert, ist es das Gleiche. Aber für analoge Objekte, z.B. Fraktale in mehreren Dimensionen und beliebiger Orientierung, ist die Unterscheidung bedeutsam. Mit geeigneten Definitionen kann man die Konvergenz auf weitere topologische Schiefkörper übertragen, bei denen jedoch immer Abstriche bei den symmetrischen Eigenschaften gemacht werden müssen.

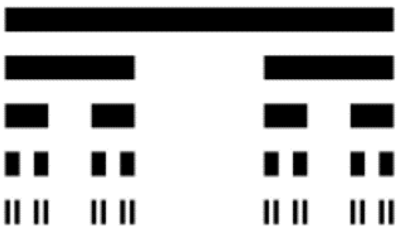

Abb. 22: Cantor-Staub oder Cantor-Menge nach 5 Iterationen

p-adische Zahlen

p-adische Zahlen wurden erstmals 1897 von Kurt Hensel (1861 – 1941) beschrieben. Er hat wesentliche Beiträge zu der Theorie und zu weiteren (zahlentheoretischen) Themen geliefert. Er stammt aus einer Familie, die zahlreiche Künstler und Wissenschaftler hervorgebracht hat. Hensel hat bei Kronecker promoviert und sich ebenfalls bei ihm habilitiert. Nach einer außerordentlichen Professur in Berlin wurde er 1901 auf einen Lehrstuhl nach Marburg berufen. Trotz weiterer Angebote und trotz zwangsweisem Ruhestand durch seine jüdische Herkunft blieb er dort bis zu seinem Tod.

Zahlen werden in der Regel in einem Stellenwertsystem zur Basis 10 dargestellt, also dezimal. So ist z.B.

$$30215=3\cdot10^4+0\cdot10^3+2\cdot10^2+1\cdot10^1+5\cdot10^0.$$

In der Informatik ist die Binärdarstellung wichtig, also ein Stellenwertsystem zur Basis b=2. So ist

45_{10} (dezimal) entspricht $1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0 = 101101_2$ (binär)

Das Gleiche macht man mit rationalen Zahlen. So ist

$30,215=3\cdot10^1+0\cdot10^0+2\cdot10^{-1}+1\cdot10^{-2}+5\cdot10^{-3}$.

[76] Gemeint ist nicht die fraktale Hausdorffdimension, $D=\frac{\ln 2}{\ln 3}\approx 0,63$, sondern die topologische Dimension einer unzusammenhängenden Punktmenge.

Man nennt es allgemein eine b-adische Entwicklung zu beliebigen Basen.[77]

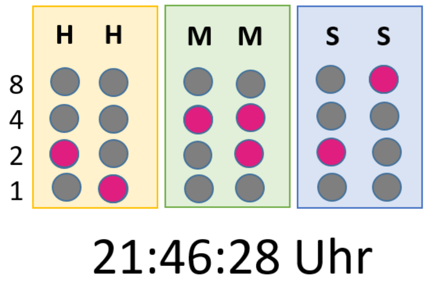

Abb. 23: sexagesimale BCD-Codierung einer binären Uhr

Dieses Prinzip lässt sich auf jede Basis übertragen.[78]

Im Rahmen der Restklassenarithmetik entsteht eine Ringstruktur. Ein solcher Ring ist genau dann nullteilerfrei[79], wenn die Basis („Grundzahl“) eine Primzahl p ist.

In diesem Kapitel sollen durch die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung deshalb ohne Einschränkung der Allgemeinheit nur Primzahlen als Basis betrachtet werden, also p∈ℙ:={2,3,5,7,11,13,17,…} $= \{p_1, p_2, p_3, \ldots\}$.

Jede ganze Zahl m lässt sich wie folgt in Primfaktoren schreiben,

$$m = \pm \prod_{p\ Primzahl} p^{\vartheta_p(m)}$$

$\vartheta_p(m)$ ist hier die größte natürliche Zahl, für die $p^{\vartheta_p(m)}$ ein Teiler von m ist oder 0, wenn das entsprechende p kein Teiler von m ist. Diese Bezeichnung wurde gewählt, um deutlich zu machen, dass $\vartheta_p(m)$ von p und m abhängig ist.

Z.B. $\vartheta_2(500) = \vartheta_2(2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 2;\ \vartheta_3(500) = 0;\ \vartheta_5(500) = 3;\ \vartheta_7(500) = 0;$

Ist p eine beliebige, aber fest gewählte Primzahl, so kann jede natürliche Zahl m p-adisch entwickelt werden mit natürlichen Zahlen a_i.

$$\mathrm{m} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot p^{\vartheta_p(m)}$$

Beispiele 2-adische, 5-adische, 7-adische Entwicklung von dezimal 500:

$500_{10}=1\cdot2^8+1\cdot2^7+1\cdot2^6+1\cdot2^5+1\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0=111110100_2$ (Basis 2)

$500_{10}=2\cdot3^5+0\cdot3^4+0\cdot3^3+1\cdot3^2+1\cdot3^1+2\cdot3^0=200112_3$ (Basis 3)

---

[77] Mittels Leuchtdioden kann eine binäre Uhr binäre Werte darstellen. In der Abbildung ist jede Spalte von Leuchtdioden eine BCD-Codierung (Binary Coded Decimal) der traditionell sexagesimalen (Basis 60) Zeitdarstellung.

[78] In Computerprogrammen muss über die Programmiersprache das Format einer rationalen Zahl gewählt werden. Damit wird sozusagen die Position des Kommas festgelegt. So werden mit 8 Bit EBCDIC-Code z.B. binäre Festkommazahlen codiert, bei größeren Zahlen werden entsprechend mehr Byte verwendet. Der EBCDIC ist aus dem älteren Binary Coded Decimal Interchange Code entstanden, der wiederum auf dem 4-Bit-Code BCD basiert (siehe binäre Uhr). Eine andere Codierung ist die Gleitkomma-Codierung (floating Point). Sie folgt in der Regel dem IEEE-Format 754 (Single Precision Format). Der 7-Bit ASCII-Zeichencode gilt als veraltet und wurde durch UTF-8 (8 Bit) ersetzt.

[79] Ein Nullteiler eines Ringes R ist ein Element a, für das es ein vom Nullelement 0 verschiedenes Element b gibt, sodass a·b=0. In einem Restklassenring mod 6 sind 2 und 3 Nullteiler da 2·3=6=0 mod 6.

$500_{10}=4\cdot5^3+0\cdot5^2+0\cdot5^1+0\cdot5^0=4000_5$ (Basis 5)
$500_{10}=1\cdot7^3+3\cdot7^2+1\cdot7^1+3\cdot7^0=1313_7$ (Basis 7); usw.

Diese bekannte Darstellung einer natürlichen Zahl m zur Basis p lässt sich problemlos auf ganze Zahlen übertragen.

$$m = \pm \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^{\vartheta_p(m)} \ , a_i \in \{0,1,\ldots \mathrm{p}-1\}$$

heißt ganze p-adische Zahl

Dass man i formal bis unendlich laufen lässt, ist unerheblich. Die a_i und die Potenz von p ist beschränkt, aber kann beliebig groß werden.
Die entsprechende Menge heißt Menge der ganzen p-adischen Zahlen:

$$\mathbb{Z}_p := \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^{\vartheta_p(m)} \ , a_i \in \{0,1,\ldots \mathrm{p}-1\}\}$$

Die ganzen p-adischen Zahlen wurden damit über Potenzreihen definiert.

Es ist aber auch eine Betrachtung über Restklassen möglich. Es lässt sich leicht über vollständige Induktion beweisen:

$$a \equiv a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} mod\ p^n$$

$$a_i \in \{0,1,\ldots \mathrm{p}-1\}$$ [80]

Beispiel: $29 \equiv 2\ mod\ 3 \equiv 2 + 0 \cdot 3\ mod\ 3^2 \equiv 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3^2\ mod\ 3^3$

Diese doppelte Betrachtung der p-adischen Zahlen aus analytischer Sichtweise über Potenzreihen und aus algebraischer Sicht über Restklassenringe zieht sich durch viele Überlegungen über p-adische Zahlen.

Der p-adische Betrag:

Der neue p-adische Betrag von $m = \pm\frac{a}{b}p^n$ wird dann definiert als:

$|m|_p := p^{-n} = p^{-\vartheta_p(m)}$ und $|0|_p := 0$ mit $n = \vartheta_p(m)$, um deutlich zu machen, dass n sowohl von p als auch von m abhängig ist. Diese Schreibweise wird weiterhin angewendet.

Außerdem sei $m_1=a\cdot p^k$ und $m_2=b\cdot p^l$ mit k+l=n dann ist

$|m_1\cdot m_2|_p=|a\cdot p^k\cdot b\cdot p^l|_p=|a\cdot p^k|_p\cdot|b\cdot p^l|_p=|m_1|_p\cdot|m_2|_p=p^{-k}\cdot p^{-l}=p^{-n}$

[80] Nur so viel sei dazu erwähnt: Das ist die Ausgangsüberlegung, um Folgen von Restklassen betrachten zu können, die zwar in verschiedenen Ringen liegen, aber miteinander sukzessive durch Homomorphismen in einem „projektiven System“ korreliert sind. $\mathbb{Z}_p$ ist dann der „projektive Limes“ der Folgen von Restklassen, abhängig von geeignet gewählten Homomorphismen.

Beispiele (500_{10}):

$|111110100|_2=2^{-2}=1/4$; $|200112|_3=0$; $|4000|_5=5^{-3}=1/125$; $|1313|_7=0$, usw.

Der negative Exponent von p, also $-\vartheta_p(m)$, wird deshalb so „kompliziert“ bezeichnet, weil er abhängig vom gerade betrachteten Primfaktor p von m und der Zahl m selbst ist. Er sagt, genau wie bei den Potenzreihen, wie oft dieses p in der Primfaktorzerlegung von m enthalten ist. Der p-adische Betrag einer Zahl m wird also umso kleiner je häufiger sie sich durch p teilen lässt.[81]

Bevor wir zum p-adischen Abstand $|m_1-m_2|_p$ und seiner Einordnung als neue Metrik kommen, hier zunächst ein Beispiel mit $m_2=0$ und der Basis 3 bei den Zahlen $m_1=1, 2, \ldots, 29, 30$.
Es geht also um den 3-adischen Abstand zur 0, um Verwechslungen zum archimedischen Betrag zu vermeiden, genannt $d_3(m_1,0)$. Das entspricht dem Betrag von m_1 zur Basis 3. Man bestimmt, wie oft der Primteiler 3 in der Primfaktorzerlegung bei den ersten 30 Zahlen auftaucht.

Z.B. $d_3(4,0)=1$, da $3^{-0}=1$ (3 ist kein Teiler von 4), $d_3(6,0)=d_3(2\cdot3,0)=3^{-1}=1/3$, $d_3(9,0)=d_3(3\cdot3,0)=3^{-2}=1/9$, $d_3(18,0)=d_3(2\cdot3\cdot3,0)=3^{-2}=1/9$, usw.

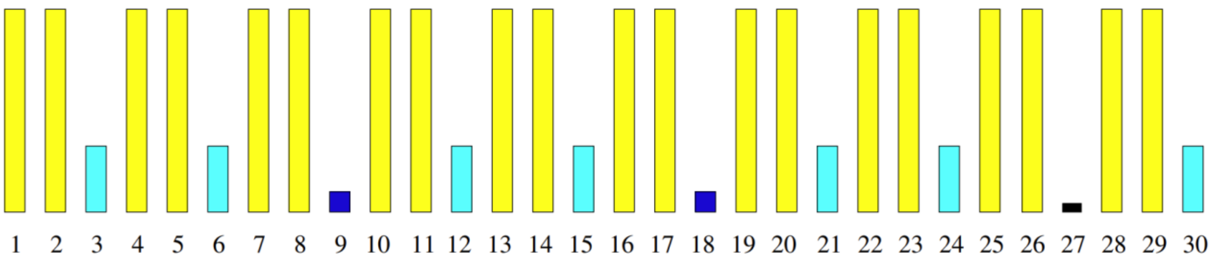

Abb. 24: 3-adischer Abstand zur 0 für alle Zahlen m=1, … , 30.[82]
(Legende: gelb=1, türkis=1/3, blau=1/9, schwarz=1/27)

Die Grafik soll eine Einschätzung über die Größenverhältnisse in der p-adischen Welt vermitteln. Dies wird nun über den Abstandsbegriff fortgesetzt. Dazu soll auch zur Wiederholung der Vergleich mit dem klassischen, archimedischen Abstand dienen.

<u>Archimedischer Abstand:</u>

Wie bereits dargelegt, erweitert man $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$, in dem man über sogenannte rationale Cauchy-Folgen argumentiert. Also konvergierender Folgen rationaler Zahlen gemäß der bekannten (archimedischen) Abstandsdefinition, in der die Abstände immer kleiner werden. Der Konvergenzpunkt kann rational, aber auch irrational sein. Dies führt erst zur Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu den irrationalen Zahlen

[81] Man hätte auch $p^{-\infty} := 0$ setzen können und kommt ohne Fallunterscheidung aus.
[82] Bildquelle: https://www.uni-frankfurt.de/50581176/werner.pdf, auch die Argumentation folgt in Teilen dem Artikel von Annette Werner: Ein Ausflug in die p-adische Welt.

und damit zu $\mathbb{R}$. Es sind im Prinzip die Überlegungen, die Richard Dedekind in seinen Dedekind´schen Schnitten skizziert hat. Man beachte, es wird hier die „normale“, euklidisch-archimedische Metrik, also der klassische Abstand bzw. Betrag, angewendet. Er hat auch übrigens sein Äquivalent in $\mathbb{C}$ und auch im Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$ als Länge des Vektors x gemessen vom Nullpunkt.

Für eine komplexe Zahl $z = x_1 + ix_2$ ist $|z| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,
für ein Quaternion $q = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ ist $|q| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$
Es gilt unabhängig von den Körpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, bzw. dem Schiefkörper $\mathbb{H}$, dass

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| = |y| \cdot |x|$, da die Beträge reell sind.

Es ist also eine Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ und weiter zu $\mathbb{C}$ unter Verwendung der klassischen Metrik. Sie lässt sich sogar auf $\mathbb{H}$ übertragen.

Man kann neben dem analytischen Ansatz einen algebraischen Ansatz wählen und dabei eine gänzlich andere Metrik, den p-adischen Absolutbetrag, nutzen und darüber zu einem neuen Abstandsbegriff $d_p(m,n)$ kommen:

<u>Definition p-adischer Abstand:</u>

Seien m, n (oben noch m_1 und m_2 genannt) zwei ganze Zahlen und $p \in \mathbb{P}$ eine beliebige, aber feste Primzahl, so gelte $d_p(m,n) = 0$ wenn $m=n$ und bei $m \neq n$

$$d_p(m,n) = \frac{1}{p^{\vartheta_p(m-n)}}$$

Dieser Abstand erfüllt die drei wesentlichen Forderungen an eine Metrik:

1) Ein Abstand muss immer ≥ 0 sein. Negative Abstände machen keinen Sinn.
2) Es ist egal von welcher Seite man misst, d.h. $d_p(m,n) = d_p(n,m)$
3) Es gilt die Dreiecksungleichung $d_p(l,n) \leq d_p(l,m) + d_p(m,n)$ für drei Punkte $l, m\ und\ n.$ Da die p-adischen Zahlen mit dieser Metrik einem total unzusammenhängenden topologischen Raum bilden, ist das gewohnte, streckenorientierte Bild der archimedischen Dreiecksungleichung nicht dafür zutreffend (s.u.).

Beispiel: $d_2(262{,}256) = d_2(2 \cdot 131, 2^8) = \frac{1}{2^{\vartheta_2(262-256)}} = \frac{1}{2^{\vartheta_2(6)}} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$;

Wenn $(m-n)$ nicht durch p teilbar ist, so ist $\vartheta_p(m-n) = 0, also\ d_p(m,n) = 1.$

Über negative Potenzen der Basis p, also über Laurent-Polynome, lassen sich auch <u>rationale</u> Zahlen der Form $\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$, p-adisch entwickeln.

Man definiert außerdem $\vartheta_p(m/n) := \vartheta_p(m) - \vartheta_p(n)$.
Z.B. $\vartheta_3(1/6) = \vartheta_3(1) - \vartheta_3(2 \cdot 3) = 0 - 1 = -1$

$$d_3\left(\frac{1}{6},0\right)=\frac{1}{3^{\vartheta_3(\frac{1}{6})-\vartheta_3(0)}}=\frac{1}{3^{-1}}=3$$

Analog zu den ganzen p-adischen Zahlen kann man $\frac{m}{n}$ in eine Potenzreihe (genauer Laurent-Polynom oder Laurent-Reihe, d.h. auch mit negativen Exponenten) entwickeln. Die Koeffizienten a_i liegen natürlich ebenfalls alle in der Restklasse von p und damit p^n für alle k=1,…,n (nach dem eingangs erwähnten Satz).
Ab $\mathrm{i}=-1$ bis $-\mathrm{k}$ stehen die „Nachkommastellen".

$$\frac{m}{n}=\sum_{i=-k}^{\infty} a_i\, p^i, a_i \in \{0,1,\ldots \mathrm{p}-1\}$$

heißt dann p-adische Zahl

$$\mathbb{Q}_p \coloneqq \{\sum_{i=-k}^{\infty} a_i\, p^i, a_i \in \{0,1,\ldots \mathrm{p}-1\}\}$$

heißt Menge der p-adischen Zahlen

Dahinter steckt die Erkenntnis, dass die ganzen Zahlen als b-bzw. p-adische Polynome aufgefasst werden können und die rationalen Zahlen als Laurent-Polynome.[83]

Für jede Primzahl p bilden die p-adischen Zahlen einen p-spezifischen Erweiterungskörper $\mathbb{Q}_\mathrm{p}$ des Körpers $\mathbb{Q}$. Außerdem ist $\mathbb{Q}_\mathrm{p}$ der sogenannte Quotientenkörper des Ringes $\mathbb{Z}_p$.

Über die Restklassenarithmetik kann man Addition, Subtraktion, Multiplikation und mit entsprechenden Einschränkungen die Division über die abschnittsweise Berechnung der Folgenglieder definieren. So ist

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\cdot(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq (x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Der p-adische Abstand („p-Abstand") zweier rationalen Zahlen x und y lässt sich übrigens auch über die algebraische Sicht über Restklassenschreibweise verdeutlichen:

$$d_p(x,y)\leq p^{-\vartheta_p(x-y)} \quad\Leftrightarrow\quad x\equiv y\; mod\; p^{\vartheta_p(x-y)}$$

Es existiert somit durch den p-adischen Betrag eine eindeutige Abstandsregelung und als metrischer Raum ist $\mathbb{Q}_\mathrm{p}$ genau wie $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ vollständig. Mit Hilfe von Cauchy-Reihen bzgl. der p-adischen Definition des

[83] Nach Pierre Alphonse Laurent, (1813 – 1854). Die Laurent-Polynome bilden einen Ring, der isomorph zum Gruppenring von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{R}$ ist.

Abstands kann man mit den Reihen rechnen und p-Konvergenz und p-Stetigkeit nachweisen.[84] Der p-Abstand vervollständigt den Ring $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Z}_p$. Die zentrale Aussage ist jedoch:

$\mathbb{Q}$ kann mit Hilfe des archimedischen Betrags zu $\mathbb{R}$ vervollständigt werden. $\mathbb{Q}$ kann aber auch mit Hilfe des p-adischen Betrags zu $\mathbb{Q}_p$ vervollständigt werden.

Mit der p-adischen Metrik kann man ganz analog konvergierende Folgen und Reihen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}_p$ behandeln – allerdings mit einem anderen Konvergenzbegriff. Entwickelt man eine Zahl p-adisch in eine Reihe mit Koeffizienten x_n der Potenzen von p aus {0,1,…,p-1}, so konvergiert sie nur dann, wenn nur endlich viele der x_n ungleich Null sind. Es wird dadurch sogar punktuell einfacher, da eine Reihe mit $x_n \in \mathbb{Q}_p$ der Form $\sum_{n\geq 1} x_n$ genau dann in $\mathbb{Q}_p$ konvergiert, wenn die Folge der x_n eine Nullfolge ist (Null ist Konvergenzpunkt). Es gilt nämlich nicht nur die euklidisch-archimedische Dreiecksungleichung (s.o), sondern die deutlich stärkere nicht-archimedische Form (manchmal ultrametrisch genannt):

Für drei Zahlen k, m, n $\in \mathbb{Q}_p$ gilt:[85]

$$d_p(k,n) \leq \max\{d_p(k,m), d_p(m,n)\}$$

Man kann in diesem Körper mit p-konvergenten Potenzreihen eine Analysis mit Differential- und Integralrechnung etc. entwickeln, teilweise im Umfang vergleichbar mit $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$.[86]
Man muss allerdings bei solchen Vergleichen immer berücksichtigen, dass die Körper der reellen und komplexen Zahlen topologisch zusammenhängend sind. Das ist bei den p-adischen Zahlen in extremer Weise nicht der Fall. Sie sind topologisch total unzusammenhängend, ein „Diskontinuum“. Das macht ihre Geometrie in hohem Maß unanschaulich. Dabei muss man sich im Vorstellungsvermögen vollkommen von den Geometrien in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ lösen. So ist z.B. jeder Punkt in einer Kreisscheibe in $\mathbb{Q}_p$ auch zugleich der Mittelpunkt. Jedes Dreieck ist gleichschenklig.

---

[84] Vergleiche Torsten Wedhorn, Über einige Aspekte der Arbeit von Peter Scholze Aus der Zeitschrift Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung https://doi.org/10.1515/dmvm-2018-0026 oder https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/dmvm-2018-0026/html
[85] Zum Beweis siehe den Beitrag von Annette Werner: Ein Ausflug in die p-adische Welt, S. 5. Der Artikel lieferte eine wichtige Orientierungshilfe für dieses Kapitel.
[86] Weiterführende Literatur: https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/p-adische-zahl/9392, https://de.wikipedia.org/wiki/P-adische_Zahl, Pontrjagin, ebenda, S. 127f

Oben wurde $\mathbb{Z}_p$, die Menge der ganzen p-adischen Zahlen, definiert. Es zeigt sich, dass $\mathbb{Z}_p$ homöomorph zur Cantor-Menge $\mathbb{C}$ ist, d.h. es existiert eine bijektive, stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen $\mathbb{Z}_p$ und der Cantor-Menge $\mathbb{C}$. D.h. auch, dass $\mathbb{Z}_p$ überabzählbar ist.[87] Damit enthält $\mathbb{Z}_p$ nicht nur irrationale und nicht-algebraische, sondern auch transzendente Zahlen. $\mathbb{Q}_p$ ist bzgl. der p-adischen Metrik metrisch ein vollständiger Raum, obwohl er nicht angeordnet werden kann. Das gilt aber auch für den komplexen Zahlenkörper $\mathbb{C}$. Die Cantor-Menge $\mathbb{C}$ hat eine 3-adische Darstellung, es kommen nur die Ziffern 0 und 2 vor.[88] Gleichbedeutend ist die ternäre Darstellung, also die Menge aller Zahlen im Intervall [0, 1], die eine Darstellung als Kommazahlen zur Basis 3 besitzen. Also analog zum dezimalen Stellenwertsystem mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, … , 9 bietet sich bei der Cantor-Menge das ternäre Stellenwertsystem an, in dem nur die Ziffern 0, 1, 2 vorkommen. Bei der Cantor-Menge $\mathbb{C}$ benötigt man durch das Konstruktionsprinzip der Menge nur 0 und 2.

Wir haben die klassische, archimedische Metrik und die p-adische Metrik kennengelernt und beide gegenübergestellt. Im ersten Fall vervollständigt man damit $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$; im zweiten Fall wird $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{Q}_p$ erweitert. Die Frage ist, ob es weitere Metriken mit entsprechenden Eigenschaften geben kann. Die Antwort gibt ein bereits 1916 von Alexander Ostrowski (1893 – 1986) bewiesener Satz. Danach ist jeder (nichttriviale) Absolutbetrag entweder zur archimedischen Betragsfunktion oder zum p-adischen Betrag äquivalent. Eine weitere Metrik kann es also nicht geben.

Ist das nur eine exotische Spielerei? Keineswegs!
Im Jahr 2018 erhielt der junge deutsche Mathematiker Peter Scholze die Fields-Medaille, vergleichbar dem Nobelpreis für Mathematik. Scholze arbeitet an der Schnittstelle von Zahlentheorie und algebraischer Geometrie an der Universität Bonn. Diese Disziplin hat sich ursprünglich mit Lösungen von polynomialen Gleichungen in Bereich der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ beschäftigt, auch als diophantische Gleichungen bezeichnet.[89] In manchen Fällen kann aus der Lösbarkeit diophantischer Gleichungen modulo aller Primzahlen auf die Lösbarkeit der ursprünglichen Gleichung geschlossen werden.[90] Man bezeichnet das heute als Lokal-Global-Prinzip. D.h. die Lösbarkeit in globalen Körpern, wie $\mathbb{Q}$, wird aus der Lösbarkeit in deren Vervollständigungen (den

---

[87] Der Beweis gelingt über das 2. Cantorsche Diagonalargument, mit der Georg Cantor auch die Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen bewiesen hat.

[88] $C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mid (a_k)_{k\geq 1} \ ist\ Folge\ in\ \{0, 2\} \right\}$

Z.B. $\frac{2}{3} = (0{,}666\ldots)_{10} = (0{,}2)_3$

[89] Siehe auch SdW, 10.22, S. 70f

[90] Siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Hasse-Minkowski_theorem

lokalen Körpern, wie $\mathbb{Q}_p$) gefolgert. Dies kann man als Geburtsstunde der Bedeutung der p-adischen Zahlen für die Zahlentheorie bezeichnen. Wenn eine Funktion eine quadratische Form ist, also ein Polynom mit ausschließlich Termen zweiten Grades, mit Koeffizienten in einem Zahlkörper (zum Beispiel dem Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$) ist, dann folgt aus der Existenz von nichttrivialen Nullstellen in $\mathbb{R}$ und in allen p-adischen Vervollständigungen (den $\mathbb{Q}_p$ für alle p) bereits die Existenz einer nichttrivialen Nullstelle im Zahlkörper. Dies wurde in einem Satz von Hermann Minkowski (1864 – 1909) und seiner Verallgemeinerung durch Helmut Hasse (1898 – 1979) bewiesen.
Die p-adischen Zahlen bieten die Möglichkeit, eine enge Verbindung zwischen ihrer Analysis und der Zahlentheorie über das Rechnen in Restklassen modulo Primzahlpotenzen zu schaffen.
Scholze hat in diesem mathematischen Bereich eine ganze Reihe bahnbrechender Ergebnisse erzielt.

Fazit

Im vorliegenden Beitrag wurde die Entwicklung des Zahlbegriffs unter historischen und ebenso unter mathematischen Gesichtspunkten betrachtet. Die algebraischen Körper der reellen und komplexen Zahlen und ihre Beziehungen bei Veränderlichen (Funktionentheorie) haben dabei die Mathematik und viele Anwendungen dominiert. Die Quaternionen spielen nur eine deutlich untergeordnete Rolle, weil die Multiplikation nicht kommutativ ist. Sie bilden einen Schiefkörper, genauer gesagt einen topologischen Schiefkörper, der bzgl. Konvergenz und Stetigkeit jedoch durchaus die gewünschten Eigenschaften für Zahlenräume hat. Auch weitere algebraische Konstrukte mit interessanten Eigenschaften wurden entdeckt. p-adische Mathematik eröffnet neue Möglichkeiten und hat sich zu einem riesigen Forschungsthema entwickelt.

Es stellt sich die berechtigte Frage, ob die historische Entwicklung des Zahlbegriffs zwangsläufig war. Oder ob es seitens der Mathematik weitere Körper und Schiefkörper mit diesen universellen Eigenschaften gibt, die die Stelle der reellen oder komplexen Zahlen oder bedingt der Quaternionen in der kulturhistorischen Entwicklung hätten einnehmen können.[91]

Provokativ gefragt: Würden wir vielleicht bei einer anderen Entwicklung heute mit einem „p-adisch kalibrierten“ Maßstab messen?

Die Antwort wurde im Jahr 1931 von Lew Semjonowitsch Pontrjagin (1908 – 1988) gegeben, der folgenden Satz bewiesen hat:

---

[91] Eigene Abbildung

Jeder lokalkompakte, zusammenhängende topologische Schiefkörper ist entweder der Körper der reellen Zahlen oder der Körper der komplexen Zahlen oder der Schiefkörper der Quaternionen.[92]

Die Voraussetzung „lokalkompakt und zusammenhängend“ schließt p-adische Zahlen aus und es kann nach Ostrowski keine weiteren Metriken geben. Damit wird auch mathematisch deutlich, dass die historische Entwicklung des Zahlbegriffs über mehrere Jahrtausende menschlicher Kulturgeschichte, wie im vorliegenden Beitrag plakativ dargestellt, eine zwangsläufige Entwicklung war.

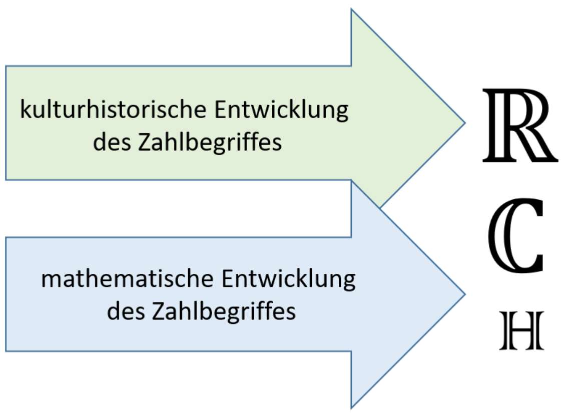

Abb. 25: Die kulturhistorische und die mathematische Entwicklung des Zahlbegriffs liefen synchron und zwangsläufig.

Zu dieser historischen und mathematischen Entwicklung gab es keine Alternative. Das bedeutet aber nicht, dass ein anderer Ansatz in der arithmetischen Geometrie, etwa ein Wechsel zur p-adischen Sichtweise, nicht in manchen Fällen mathematisch zielführender sein kann. Sich allgemein einem neuen Zusammenhang zwischen Zahlen und Geometrie zu widmen, kann zu neuen Erkenntnissen führen.[93]

Die Metrik eines Zollstockes wird sich aber dadurch nicht ändern.

Literaturhinweise

Alsina, Claudi; Der Satz des Pythagoras, deutsch bei Librero RBA

De Padova, Thomas; Alles wird Zahl, Hanser, München, 2. Auflage 2021

Glosauer, Tobias; Elementare Gruppentheorie, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016

Havil, Julian; GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013

Ifrah, Georges; Universalgeschichte der Zahlen, Campus, Frankfurt / New York, dt. Ausgabe 1991

[92] Zitiert nach Pontrjagin, L. S.; Verallgemeinerungen der Zahlen, Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt am Main, 1995, S. 127

[93] „Zahlen und Geometrie“ war der Titel der Antrittsvorlesung von Peter Scholze am 9. Juni 2017 (siehe https://www.youtube.com/watch?v=NdgQQfQLtWw).

Lüneburg, Heinz; Gruppen, Ringe, Körper, R. Oldenburg Verlag, München Wien, 1999

Kowalsky, Hans-Joachim; Lineare Algebra, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1972

Meschkowski, Herbert; Mathematisches Begriffswörterbuch, B-I Hochschul-taschenbücher, Band 99, Mannheim, 1971

Pontrjagin, L. S.; Verallgemeinerungen der Zahlen, Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt am Main, 1995

Rovelli, Carlo; Es gibt Orte auf der Welt, an denen Regeln weniger wichtig sind als Freundlichkeit, Essays, Rowohlt Verlag Hamburg, Mai 2022

Taschner, Rudolf; Die Zahl die aus der Kälte kam, Goldmann, München, 2015

Toenniessen, Fridtjof; Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Spektrum, Heidelberg, 2010

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 2, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Abbildungsnachweise:

Abb. 1: Heilige Quadrat- und Dreieckszahlen (eigene Grafik)
Abb. 2: Wechselwirkungen zwischen mathematischer Theorie und intuitiven Vorstellungen (nach https://www.kai- friederike.de /materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf
Abb. 3: Negative Zahlen im Alltag – am Beispiel Thermometer und Fahrstuhl (Bildquelle https://www.matheretter.de/wiki/negative-zahlen-alltag)
Abb. 4: Der Zahlenstrahl bildete die logische Grundlage für die negativen Zahlen (eigene Grafik)
Abb. 5: Das Horus-Auge
Abb. 6: Stammbrüche der Bruchstücke des Horus-Auges (beide Grafiken aus https://de.wikipedia.org/wiki/Horusauge
Abb. 7: Das Hohlmaß Heqat, also der ägyptische Scheffel (https://de.wikipedia.org/wiki/Heqat)
Abb. 8: Römische Wachstafel, Griffel (Quelle der Abbildung: der-roemer-shop.de/)
Abb. 9: Die römischen Bruchzahlen (Nach G. Ifrah, Universalgeschichte der Zahlen)

Personenregister

Stichwortregister

Anhang

Abb. 26: Künstlerische Darstellung des Horus-Auges,
moderner Druck auf Papyrus mit Originalfarben (eigene Fotografie)

Danksagung

Herr Prof. Dr. Ralf Köhl war wieder ein Mentor der kleinen, aber feinen Impulse. Sie haben dem Text geholfen, aber fast noch mehr haben sie dem Autor geholfen, größere Zusammenhänge zu verstehen. Ich bin wie immer Prof. Köhl zu großem Dank verpflichtet.

Herr Dr. Michael Serafin war und ist für mich der wichtigste Kontakt zur „Oberhessischen naturwissenschaftlichen Gesellschaft". Gerade in der Pandemie, wo weitgehend Vorträge und Exkursionen fehlen, sorgt er mit seinem Engagement für die Sichtbarkeit der wissenschaftlichen Gesellschaft. Dafür danke ich ihm als Autor und als Mitglied.

Schlussbemerkung

In diesen turbulenten, politischen Zeiten, bei einem sinnlosen Angriffskrieg in Europa, bei Unterdrückung und Folterung nicht nur im mittleren Osten, bei Hunger, Leid und Tod, verursacht von Despoten, sollten wir mit dem Begriff „irrational“ nicht nur bestimmte Zahlen verbinden.

> “When I carefully consider the curious habits of dogs
> I am compelled to conclude
> That man is the superior animal.
>
> When I consider the curious habits of man
> I confess, my friend, I am puzzled”
>
> EZRA POUND (1885 – 1972)

Für Fari – in Liebe und Dankbarkeit