

Explizite Berechnung kugelkonjugierter Kegelradpaare durch das sphärische Verzahnungsgesetz.

Dissertation

vorgelegt von
Dipl.-Math. Florian Dort

zur Erlangung des akademischen Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
(Dr. rer. nat.)

am Fachbereich:
Mathematik und Informatik, Physik, Geographie
der Justus-Liebig-Universität Gießen

eingereicht am 30. November 2012
Disputation am 16. Januar 2013

Erster Gutachter: Prof. Dr. rer. nat. Tomas Sauer
Zweiter Gutachter: Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Papiernik
Dritter Gutachter: Univ.-Prof. Dr. techn. Johannes Wallner

Danksagung:

Die Erstellung dieser Dissertation hat nicht nur meinen beruflichen Alltag in den letzten drei Jahre geprägt, sondern hatte auch einen maßgeblichen Einfluss auf die Wahl meines zukünftigen Berufsweges. Ich möchte daher die Gelegenheit nutzen, um einigen Personen zu danken, die mich begleitet, unterstützt und inspiriert haben. Zuvorderst gilt mein Dank meinem Doktorvater Prof. Tomas Sauer der mit Erreichbarkeit, Motivation und Engagement eine herausragende Betreuung geleistet und ein angenehmes Umfeld geschaffen hat. Des Weiteren danke ich Prof. Wolfgang Papiernik und Dr. Carsten Hamm für die sehr gute siemensseitige Betreuung, Unterstützung und den Durchblick durch alle organisatorischen Fragen. Ebenfalls von der Siemens AG möchte ich Andreas Uhlich, Martin Demming und Björn Rosenbaum danken, die mich von technologischen bis diplomatischen Aspekten immer in die richtige Richtung geleitet haben. Im Arbeitsalltag haben mir die produktiven Gespräche mit Loay Alkafafi häufig weitergeholfen. Shokran. Abschließend möchte ich noch meiner Partnerin Jennifer Zimmermann danken. Ich konnte viel von deinem Schreibstil, deiner Arbeitsweise und deiner Fähigkeit zur Selbsteinschätzung lernen.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung & Grundlagen	5
1.1. Aufgabenstellung	5
1.2. Grundsätzliches zu Zahnrädern	5
1.2.1. Arten von Zahnrädern	6
1.2.2. Bezeichnungen	7
1.2.3. Geschichte der Zahnräder	9
1.2.4. traditionelle Herstellung von Stirnrädern	10
1.2.5. traditionelle Herstellung von Kegelrädern	10
1.3. Geometrische Grundlagen	12
1.3.1. Koordinatensysteme	12
1.3.2. Momentanpol	14
1.3.3. Kontaktbedingungen	14
1.3.4. Die Verlustleistung	15
2. Stirnradpaare	17
2.1. Ein Problem der ebenen Kinematik	17
2.2. Das ebene Verzahnungsgesetz	18
2.2.1. Verwendete Koordinatensysteme	18
2.2.2. Die Gleitgeschwindigkeit	20
2.2.3. Verzahnungsgesetz	20
2.3. Berechnung im Stirnschnitt	22
2.3.1. Mit vorgegebener Profillinie und Übersetzung	22
2.3.2. Mit vorgegebenem Kontaktweg und Übersetzung	25
2.3.3. Beide Profillinien vorgegeben ohne Übersetzung	27
2.3.4. Die Profilüberdeckung	29
2.4. Die Evolventenverzahnung	30
2.4.1. Berechnung der Profillinien	31
2.4.2. Berechnung des Kontaktwegs	33
2.4.3. Berechnung der Profilüberdeckung	35
2.5. Schrägverzahnung beim Stirnrad	35
2.6. Die erzeugende Zahnstange	36

3. Kegelradpaare	39
3.1. Ein Problem der sphärischen Kinematik	40
3.2. Das sphärische Verzahnungsgesetz	41
3.2.1. Verwendete Koordinatensysteme	42
3.2.2. Die Gleitgeschwindigkeit	44
3.2.3. Verzahnungsgesetz	45
3.3. Berechnungen im Kugelschnitt	48
3.3.1. Mit vorgegebener Profillinie und Übersetzung	48
3.3.2. Mit vorgegebenem Kontaktweg und Übersetzung	51
3.3.3. Beide Profillinien vorgegeben ohne Übersetzung	54
3.3.4. Die Profilüberdeckung	56
3.4. Die Kugevolventenverzahnung	57
3.4.1. Berechnung der Profillinien	58
3.4.2. Berechnung des Kontaktwegs	58
3.4.3. Berechnung der Profilüberdeckung	59
3.5. Schrägverzahnungen beim Kegelrad	60
3.6. Die erzeugende Planverzahnung	61
3.7. Das Stirnrad als Grenzfall eines Kegelrads	63
4. Herstellung	67
4.1. Die Prozesskette	67
4.2. Splines	69
4.2.1. Definitionen	70
4.2.2. Auswertung und Manipulationen	73
4.2.3. Interpolation und Approximation	75
4.2.4. Ein neues Verfahren zur Hermite-Interpolation	79
4.2.5. Darstellung von Kegelschnitten	81
4.3. Flächendaten	83
4.3.1. Punktwolke	84
4.3.2. Polynomiale Splinefläche	85
4.3.3. Rationale Splinefläche	86
4.4. Prototyp	87
5. Fazit	89
A. Bezeichnungen	90
A.1. Verzahnung	90
A.2. Splines	92
B. Literaturverzeichnis	94
C. Abbildungsverzeichnis	97

1. Einleitung & Grundlagen

1.1. Aufgabenstellung

Die Herstellung von Kegelrädern erfolgt traditionell mit Spezialwerkzeugen. Durch die aus dem Herstellungsprozess resultierenden Zwangsbedingungen müssen Einschränkungen an die Abrollgeometrie der Zahnräder in Kauf genommen werden. Die Freiformherstellung mittels Universalmaschinen ermöglicht es dagegen erstmals mit einer hinreichenden Genauigkeit eine *beliebige* Zahnradgeometrie zu erzeugen. Es stellt sich nun ganz natürlich die Frage nach einer vollständigen geometrischen Analyse der Abrollung und einer darauf aufbauenden expliziten Berechnung der Verzahnungsprofile. Da für die verwandten Stirnräder bereits eine solche Berechnung existiert, [1], bietet es sich an, bestehende Konzepte auf Kegelräder zu übertragen. Dafür müssen die Betrachtungen aus der ebenen Kinematik in die sphärische Kinematik überführt werden. In der Geometrie ist bereits ein allgemeines Verzahnungsgesetz und seine Anwendung für Kegelräder bekannt, [37]. Diese Arbeit hat damit die folgende Zielsetzung:

- Die bestehenden Rechenverfahren für Stirnräder sollen untersucht werden.
- Analog sollen explizite Rechenverfahren für Kegelräder entwickelt werden, welche sich an der geometrischen Beschreibung des allgemeinen Verzahnungsgesetzes orientieren und somit im Grenzfall die Stirnradtheorie beinhalten.
- Die (Kreis-)Evolventenverzahnung stellt den Standard für Stirnräder dar. Es soll überprüft werden, inwiefern sich die bekannte Kugelevolventenverzahnung als ein Standard für Kegelräder nutzen lässt.
- Für die Herstellung mittels Universalmaschinen soll eine effiziente Darstellung der Verzahnungsgeometrie gefunden werden.

1.2. Grundsätzliches zu Zahnrädern

Ein Zahnrad ist ein Maschinenelement zur Übertragung von Drehmomenten. Beim paarweisen Einsatz rotierend gelagerter Zahnräder erfolgt die Übertragung durch den Kontakt aus dem Grundkörper hervorstehender, miteinander kämmender Zähne. Die Form des Grundkörpers und die relative Lage der Zahnräder bestimmt die Art des Zahnradpaars. Die gebräuchlichsten Arten von Zahnradpaaren werden in Kapitel 1.2.1 vorgestellt. Daran anschließend liefert Kapitel 1.2.2 eine Beschreibung wichtiger Zahnradbegriffe. In Kapitel 1.2.3 wird die historische Entwicklung der Zahnräder beschrieben, die zu den in Kapitel 1.2.4 bzw. 1.2.5 beschriebenen traditionellen Herstellungsverfahren für Stirn- und Kegelräder geführt hat.

1.2.1. Arten von Zahnrädern

Das meist verwendete Zahnrad hat als Grundkörper einen Zylinder und wird als *Stirnrad* bezeichnet. Zwei Stirnräder mit parallelen Drehachsen bezeichnet man als *Stirnradpaar*. Ein Stirnradpaar ist ein sogenanntes Wälzgetriebe, da die beiden Grundkörper geometrisch sauber aufeinander abrollen können. Demgegenüber stehen *Beveloidradpaare* aus zwei Stirnrädern mit sich schneidenden Drehachsen oder *Schraubradpaare* aus zwei Stirnrädern mit windschiefen Drehachsen. Eine *Zahnstange* besitzt als Grundkörper eine Ebene und kann als Stirnrad mit unendlich großem Radius betrachtet werden.

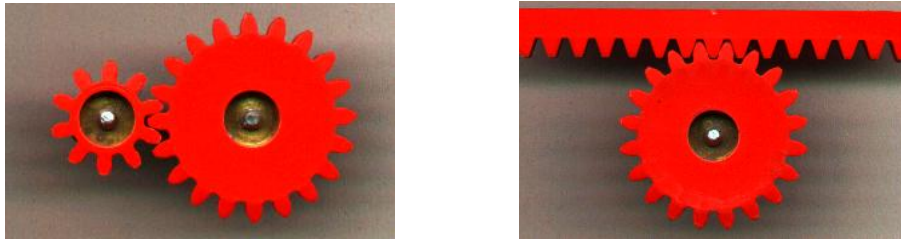


Abbildung 1.1.: Ein Stirnradpaar und ein Zahnstange.

Sollen sich schneidende Drehachsen mit einem Wälzgetriebe realisiert werden, wählt man als Grundkörper einen Kegel bzw. Kegelstumpf. Die entsprechenden Zahnräder werden als *Kegelräder* bezeichnet. Zwei Kegelräder mit passendem Achsenwinkel bezeichnet man als *Kegelradpaar*. Werden zwei Kegelräder mit windschiefen Drehachsen verwendet spricht man von einem *Hypoidradpaar*. Diese gehören jedoch wie die Schraub- und Beveloidradpaare nicht zu den Wälz- sondern zu den Schraubgetrieben.

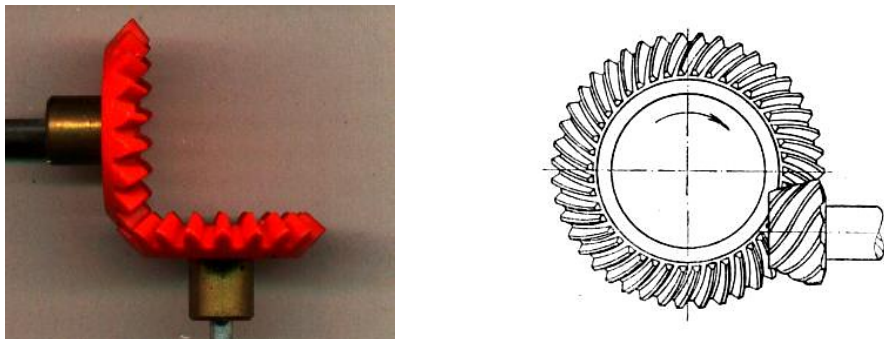


Abbildung 1.2.: Ein Kegelradpaar und ein Hypoidradpaar.

Neben den zuvor genannten Zahnradpaaren gibt es noch eine Vielzahl von Kombinationen und Formen. Das Kronenradpaar beispielsweise besteht aus einem Stirnrad und einem flachem Kegelrad, das Ellipsenradpaar besteht aus unrunder Stirnrädern und das Schneckenradpaar besteht aus einem Stirnrad und einem Gewinde. In dieser Arbeit beschränken wir uns jedoch auf die geometrisch geeignetsten Wälzgetriebe, und analysieren in Kapitel 2 Stirnradpaare und in Kapitel 3 Kegelradpaare.

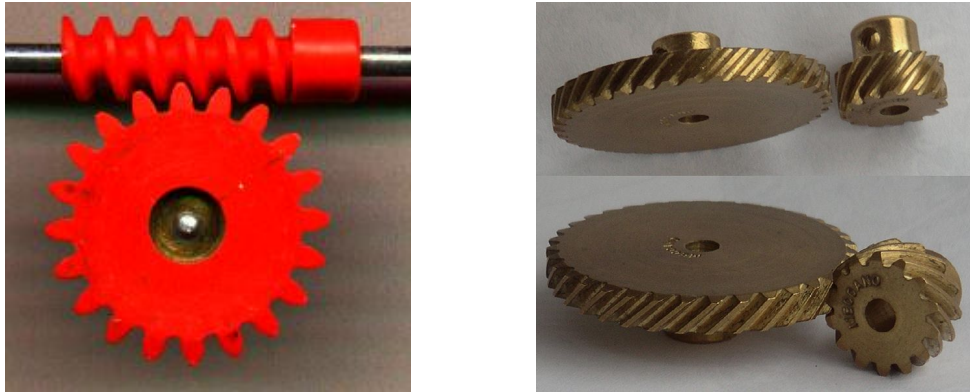


Abbildung 1.3.: Ein Schneckenradpaar und ein Schraubradpaar.

1.2.2. Bezeichnungen

Dieses Kapitel gibt einen Überblick über einige allgemeinen Begriffe zu Zahnrädern. Speziellere Begriffe werden wir bei ihrer Verwendung in den jeweiligen Kapiteln definieren. Eine vollständige Liste von Begriffen und Bestimmungsgrößen findet sich für Zahnräder im Allgemeinen in [17] und [20], für evolventenverzahnte Stirnräder in [18] und für Kegelräder in [19].

Zahnradpaar Ein Zahnradpaar besteht aus zwei Zahnrädern in definierter Lage mit jeweils einer definieren Rotationsachse.

Zahnradgetriebe Ein Zahnradgetriebe besteht aus einem oder mehreren Zahnradpaaren zusammen mit den physischen Achsen, Achslagern und dem Gehäuse.

Bezugsfläche Die Bezugsfläche ist die Mantelfläche der Grundform eines Zahnrads. Die Verzahnung wird gegen die Bezugsfläche beschrieben und gemessen.

Wälzfläche Die Wälzflächen eines Zahnradpaares sind gedachte Fläche die ohne Verzahnung dieselbe Abrollbewegung wie das Zahnradpaar beschreiben.

Wälzgetriebe Zahnradpaare sind Wälzgetriebe, wenn ihre Wälzflächen schlupfrei aufeinander abrollen. In diesem Fall entsprechen die Bezugsflächen der Zahnräder den Wälzflächen des Zahnradpaares.

Schraubgetriebe Zahnradpaare deren Wälzflächen nicht schlupfrei aufeinander abrollen bezeichnen wir als Schraubradgetriebe.

Leistungsgetriebe Leistungsgetriebe sind Getriebe die zur Drehleistungsübertragung eingesetzt werden. In diesem Fall ist ein hoher Wirkungsgrad besonders relevant.

Verzahnung/ Zahnflanke Die Verzahnung eines Zahnrads ist ein abstrakter Begriff für die Form der Zähne gegenüber der Bezugsfläche. Die Zahnflanke ist die konkrete Fläche einer Seite eines Zahns. Sie kann durch die Profillinie und die Flankenlinie beschrieben werden.

Nutzflanke Die Nutzflanke ist der Bereich der Zahnflanke der während der Abrollung mit dem Gegenrad in Kontakt kommt.

Profilverschiebung Eine Profilverschiebung liegt vor wenn die Verzahnung nachträglich gegenüber der Bezugsfläche verschoben wird. Strenggenommen sind Zahnradpaare mit Profilverschiebung keine Wälzgetriebe.

Außen-/ Innenverzahnung Bei einer Außenverzahnung befindet sich der Grundkörper des Zahnrads innerhalb des von der Verzahnung umschlossenen Bereichs. Die Zähne zeigen somit nach Außen. Bei einer Innenverzahnung befindet sich der Grundkörper hingegen außerhalb, die Zähne zeigen somit nach Innen. Innenverzahnungen sind nur für Stirnräder gebräuchlich.

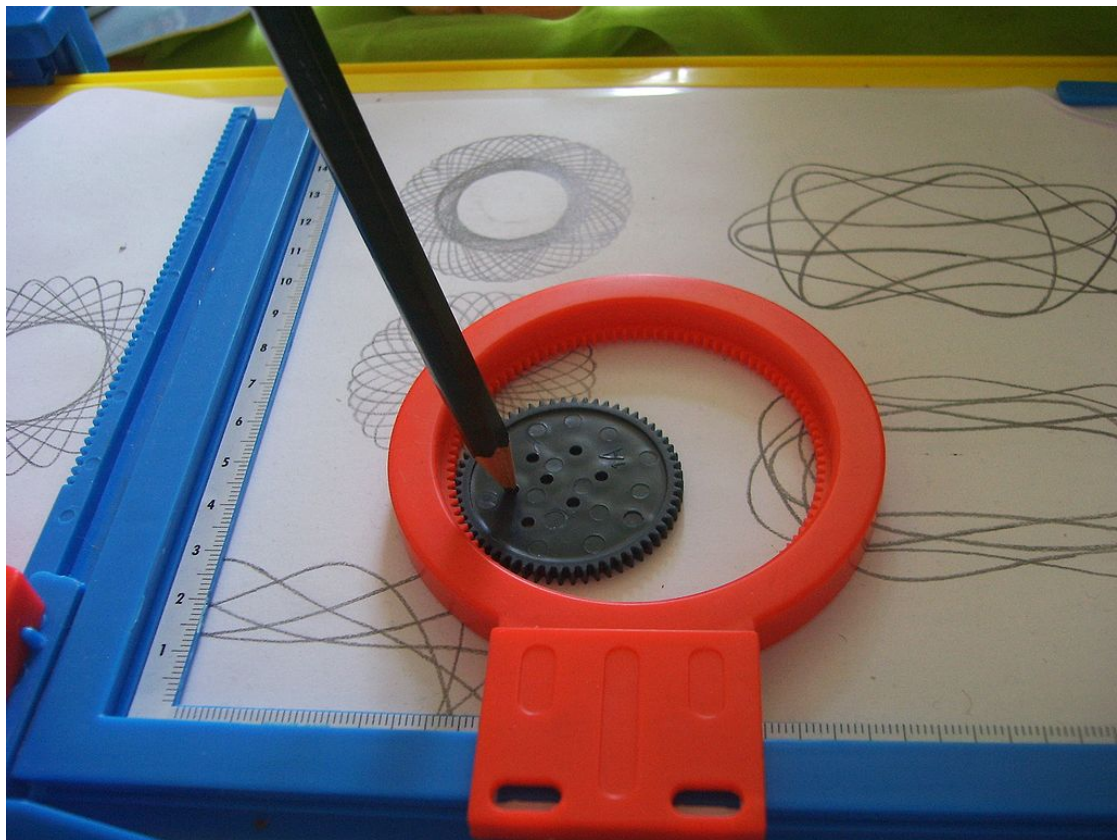


Abbildung 1.4.: Ein Spirograph bestehend aus einem innen- und einem außenverzahnten Stirnrad.

1.2.3. Geschichte der Zahnräder

Die älteste geschichtlich nachweisbare Form von Zahnrädern stellen nach [15, S.221] die altägyptischen Göpel dar. „[...] *ein Holzrad in dessen Umfang man Pflöcke hineinsteckte.*“ Diese großen, von Menschen oder Tieren betriebenen, mechanischen Vorrichtungen waren eng mit dem Tretrad verwandt und kamen besonders in Mühlen zur Anwendung. Bereits um das Jahr -100 existierte mit dem Mechanismus von Antikythera eine komplexe mechanische Apparatur, die aus über 35 bronzenen Stirnrädern bestand, die jedoch nur eine primitive Verzahnung besaßen, welche nicht dem ebenen Verzahnungsgesetz genügte. Dennoch waren einzelne Zahnräder zu einem Differentialgetriebe zusammengesetzt, [9] einer Getriebetechnik, die in den darauffolgenden Jahrhunderten wieder in Vergessenheit geriet und erst um das Jahr 1500 von Leonardo da Vinci¹ erneut erfunden wurde.



Abbildung 1.5.: Rekonstruktion eines Göpels und des Mechanismus von Antikythera.

Die Form der Verzahnung fand erst um das beginnende 18. Jahrhundert größeres Interesse. Philippe de la Hire² entwickelte 1694 eine (Epi-)Zykloidenverzahnung die dem Verzahnungsgesetz genügte, [8, S.8]. Leonhard Euler³ entdeckte 1760 die (Kreis-)Evolventenverzahnung, die bis heute den Standard bei Stirnradpaaren bildet, [6]. Das ebene Verzahnungsgesetz wurde 1870 von Louis Saalschütz⁴ in seiner heutigen Form ausformuliert, [14, S.21]. Für Kegelradverzahnungen hat sich dagegen ein von Thomas Tredgold⁵ 1822 vorgeschlagene Verfahren durchgesetzt, das näherungsweise eine Ersatzstirnradverzahnungen berechnet, [33].

¹Leonardo da Vinci, italienischer Universalgelehrter, 1452-1519

²Philippe de la Hire, französischer Mathematiker, 1640-1780

³Leonhard Euler, schweizer Mathematiker, 1707-1783

⁴Louis Saalschütz, deutscher Mathematiker, 1835-1913

⁵Thomas Tredgold, englischer Ingenieur, 1788-1829

1.2.4. traditionelle Herstellung von Stirnrädern

Das wichtigste Herstellungsverfahren für Stirnräder ist das (Schraub-)Wälzfräsen. Es wurde 1897 von Hermann Pfauter⁶ zum Patent angemeldet. Dabei wird eine Evolventenverzahnung durch einen zylinderförmigen Schneckenfräser mit geraden Schnittflanken erzeugt. Die Rotation des Schneckenfräasers entspricht somit der linearen Bewegung einer Zahnstange. Durch eine Schrägstellung des Wälzfräasers kann darüber hinaus eine Evolventenverzahnung mit konstantem Schrägungswinkel und entsprechend verändertem Eingriffswinkel erzeugt werden. Auch Profilverschiebungen sind mit einem Wälzfräser realisierbar. Die Vorteile des WälzfräSENS kommen besonders in der Großserienfertigung zum Tragen, wenn sich das Spezialwerkzeug durch den Dauereinsatz rechtfertigt, [29, S.434f].

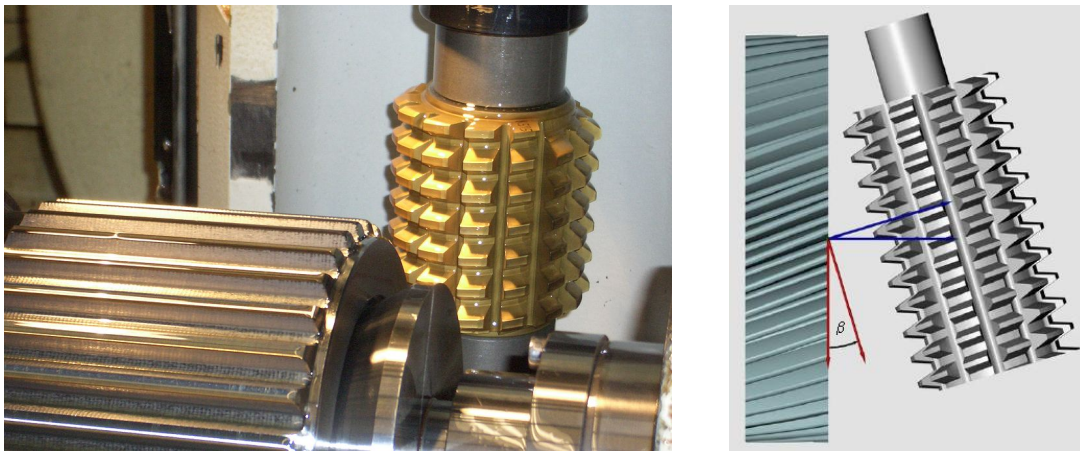


Abbildung 1.6.: Ein Wälzfräser und die schematische Darstellung des SchrägwälzfräSENS.

1.2.5. traditionelle Herstellung von Kegelrädern

Den Beginn der maschineller Fertigung von Kegelrädern kann man in der 1882 von Hugo Bilgram⁷ entwickelten Kegelradhobelmaschine sehen. Erstmals wurde damit für die Herstellung beider Kegelräder ein verwandter Abrollprozess verwendet. Generell ist die Herstellung von Kegelrädern entgegen der Herstellung von Stirnrädern in viele unterschiedliche Verfahren aufgeteilt. [11, S.22] zählt dabei zwölf der wichtigsten Verzahnungsverfahren allein für Spiralkegelräder auf. Aufgrund der unterschiedlichen Zwangsbedingungen durch das verwendete Werkzeug und dessen Bewegung erzeugt jedes dieser Herstellungsverfahren eine grundverschiedene Verzahnungsform. Der überwiegende Anteil der Verzahnungsformen weist eine konstante Zahnhöhe entlang der Zahnbreite auf. Diese Eigenschaft steht in direktem Widerspruch zur sphärischen Kinematik des Abrollprozesses, wie er in Kapitel 3 beschrieben wird. Heutzutage kommt als Werkzeug

⁶Robert Hermann Pfauter, deutscher Ingenieur, 1854-1914

⁷Hugo Bilgram, deutsch-amerikanischer Ingenieur, 1847-1932

meist ein rotierender Messerkopffräser zum Einsatz, der aufgrund seiner Rotationssymmetrie nicht in der Lage ist, ein gleichmäßiges Profil entlang der Zahnbreite zu erzeugen. Die Stärke der traditionellen Herstellungsverfahren liegt jedoch auch bei den Kegelrädern in der Großserienfertigung. Die Werkzeuge sind hochgradig spezialisiert, bis hin zu sogenannten kontinuierlichen Verfahren bei denen gleichzeitig unterschiedliche Messerköpfe unterschiedliche Zahnücken fertigen. Aufgrund der steigenden Leistungsfähigkeit der Mehrachsbearbeitungsmaschinen gibt es für die Kleinserienfertigung neue Entwicklungen zur Emulation der bestehenden Herstellungsverfahren und damit der Fertigung der traditionellen Verzahnungsformen durch Universalwerkzeuge.

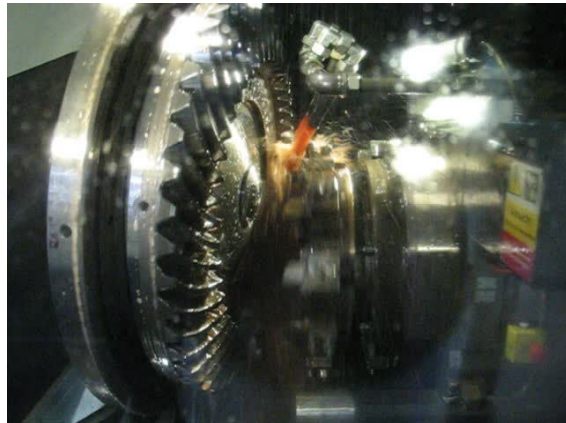
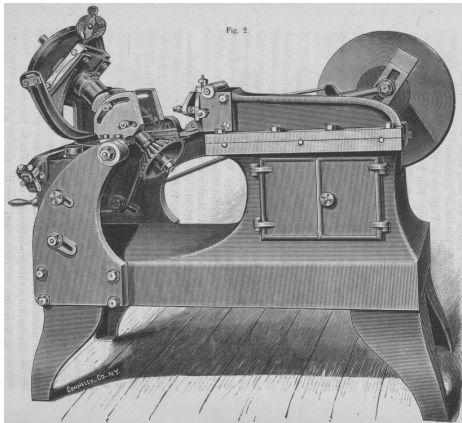


Abbildung 1.7.: H. Bilgrams Kegelradhobelmaschine und ein moderner Messerkopffräser.

1.3. Geometrische Grundlagen

1.3.1. Koordinatensysteme

Sei \mathbf{x} ein Punkt in einem d -dimensionalen Vektorraum V über dem Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} . Zur eindeutigen Beschreibung der Lage von \mathbf{x} können wir verschiedene Koordinatensysteme nutzen. Ein *Koordinatensystem* Σ ist definiert durch einen Ortsvektor, den wir als *Ursprung* \mathbf{o} bezeichnen und durch d Richtungsvektoren, die wir als *Einheitsvektoren* $\mathbf{E} = (\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d)$ bezeichnen. Sind die Einheitsvektoren unabhängig von \mathbf{x} sprechen wir von einem *geradlinigen Koordinatensystem*. Der Punkt \mathbf{x} lässt sich dann eindeutig durch die folgende Linearkombination beschreiben:

$$\mathbf{x} = \mathbf{o} + x_1 \cdot \mathbf{e}_1 + \dots + x_d \cdot \mathbf{e}_d.$$

Wir bezeichnen die Koeffizienten $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ als Koordinaten des Punkts \mathbf{x} , und definieren das Koordinatensystem

$$\Sigma := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d \mid \mathbf{o} + \mathbf{E} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in V \right\} \cong \mathbb{R}^d.$$

Möchten wir \mathbf{x} in Σ darstellen, können wir den Punkt mit seinen Koordinaten identifizieren und schreiben $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d)^T \in \Sigma$.

Die Einheitsvektoren sind genau dann orthonormal wenn $\det \mathbf{E} = \pm 1$. In diesem Fall sprechen wir von einem rechts- bzw. linkshändigen *affinen Koordinatensystem*. Ein geradlinigen, affines Koordinatensystem bezeichnen wir als *kartesisches Koordinatensystem* und verwenden im folgenden die Notation Σ .

Polarkoordinatensysteme

Auch nicht geradlinige, sogenannte krummlinige Koordinatensysteme können durch die Angabe des Ursprungs und der Einheitsvektoren beschrieben werden. Am gebräuchlichsten sind das zweidimensionale *ebene Polarkoordinatensystem* $\underline{\Theta}$ und das dreidimensionale *räumliche Polarkoordinatensystem* $\hat{\Theta}$. Beides sind rechtshändige affine Koordinatensysteme, wie wir an den Einheitsvektoren $\underline{\mathbf{E}}$ und $\hat{\mathbf{E}}$ sehen können.

$$\underline{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \sin \vartheta & -\sin \varphi & -\cos \varphi \cos \vartheta \\ \sin \varphi \sin \vartheta & \cos \varphi & -\sin \varphi \cos \vartheta \\ \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Dabei bezeichnet man den Parameter $\varphi \in [0, 2\pi)$ als *Azimutalwinkel* und den Parameter $\vartheta \in [0, \pi)$ als *Polarwinkel*. Zusammen mit einem weiteren Parameter dem Radius $r \in \mathbb{R}_+$ ist der Punkt $\mathbf{x} = r \cdot (\cos \varphi, \sin \varphi)^T \in \underline{\Sigma}$ bzw. $\mathbf{x} = r \cdot (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)^T \in \hat{\Sigma}$ eindeutig bestimmt. Umgekehrt lassen sich aus einem Bezugskordinatensystem Σ die Parameter wie folgt berechnen.

$$\begin{aligned}
 r &= \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} & \text{für } \hat{\Theta} \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & \text{für } \underline{\Theta} \end{cases} \in \mathbb{R}_+, \\
 \varphi &= \begin{cases} 0 & \text{für } x_1 = x_2 = 0 \\ \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{für } x_2 \geq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{für } x_2 < 0 \end{cases} \in (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}), \\
 \vartheta &= \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{x_3}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \in [0, \pi] \subset \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Die Polarkoordinaten werden auch als Kugelkoordinaten bezeichnet, da ihre Parameterlinien den Kugelradien entsprechen bzw. auf der Kugeloberfläche verlaufen, wie in Abbildung 1.8 zu sehen ist.

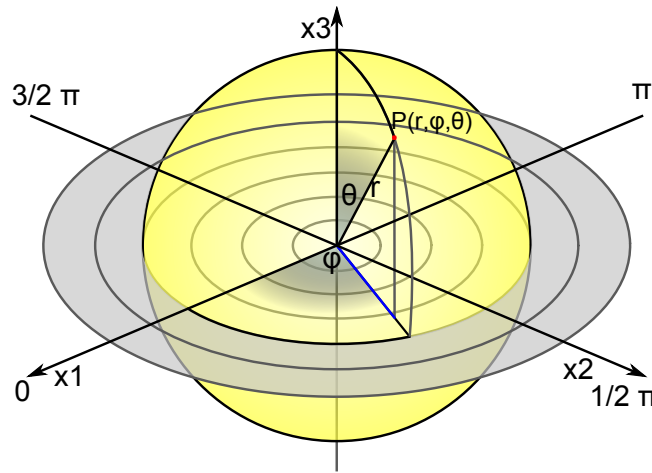


Abbildung 1.8.: Ein Punkt P in einem Polarkoordinatensystem mit einigen Parameterlinien.

Homogene Koordinatensysteme

Homogene Koordinatensysteme dienen der Beschreibung eines projektiven Raums \mathbb{P}^d . Die Elementen von projektiven Räumen sind Äquivalenzklassen bezüglich skalarer Multiplikation $\mathbb{P}^d \ni \bar{x} \sim \lambda \bar{x} \in \mathbb{P}^d$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Diese Eigenschaft wird häufig in der Computergeometrie genutzt um affine Abbildungen durch Matrixmultiplikationen darzustellen. In Kapitel 4.2 nutzen wir homogene Koordinaten, um inhomogene Gleichungssysteme in höherdimensionale homogene Gleichungssysteme zu überführen. Die Rücktransformation erfolgt mittels einer Zentralprojektion auf die Einheitssphäre.

$$H^- : \mathbb{P}^d \ni \bar{x} := \begin{pmatrix} x_0 \\ x_0 x_1 \\ \vdots \\ x_0 x_d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^d.$$

1.3.2. Momentanpol

Seien Σ_1 und Σ_2 zwei relativ zueinander bewegte Koordinatensysteme. O.B.d.A betrachten wir Σ_1 als ruhendes sogenanntes *Rastsystem* und $\Sigma_2(t)$ als bewegtes sogenanntes *Gangsystem* bezüglich des Parameters t . Wir nennen einen Punkt \mathbf{g} Fixpunkt in Σ_2 wenn $\mathbf{0} = \frac{d}{dt}\mathbf{g} \in \Sigma_2 \cong \mathbb{R}^d$. Der Punkt \mathbf{g} folgt damit einer zwangsläufigen Bewegung dem sogenannten *Zwangslauf* Σ_2/Σ_1 . Der Satz von Chasles [2] besagt nun:

„In jedem Augenblick einer zwangsläufigen Bewegung eines starren ebenen Systems bilden die Bahnnormalen aller Systempunkte, ein Strahlbüschel, dessen Zentrum das Momentanzentrum heißt.“

Anschaulich, wenn auch etwas unscharf, können wir nach [36] dieses Zentrum als Pol einer „infinitesimalen“ Drehung betrachten. Wir bezeichnen das Zentrum daher auch als *Momentandrehpol* der Bewegung. Dieses Kapitel bietet nur einen sehr kurzen Einblick in die Theorie der Kinematik. Für ein tieferes Verständnis seien die Bücher [36] und [13] empfohlen.

1.3.3. Kontaktbedingungen

Zur Ermittlung einer passenden Verzahnung gehen wir in der Theorie von starren unverformbaren Zahnflanken aus. Im Allgemeinen berühren sich zwei Flächen im Raum, wenn sie in einem Punkt eine gemeinsame Normalebene besitzen. Findet in jeder noch so kleinen Umgebung um diesen Punkt kein weiterer Kontakt statt, sprechen wir von einem *Punktkontakt*. In Kapitel 2 und 3 betrachten wir die Abrollbewegung dagegen einzeln in ebenen Schnitten bzw. Kugelschnitten. Durch einen kontinuierlichen Punktkontakt in mehreren zusammenhängenden Schnitten erreichen wir insgesamt einen *Linienkontakt* im Raum.

In der Praxis sind Zahnflanken jedoch elastische Körper, die sich durch den Kontakt verformen. Der Kontakt fester elastischer Körper wurde in [10] näherungsweise berechnet. Demnach herrscht die höchste Spannung im eigentlichen Kontaktpunkt um den sich eine Kontaktellipse ausbreitet. Liegt in der Theorie ein Linienkontakt vor, so verkleinert sich diese Spannung, die man als Hertzsche Pressung bezeichnet, mit der Länge der Kontaktlinie.

Neben der Form der Verzahnung ist die Abrollung auch von praktischen Parametern wie der Schmierung des Zahnradpaares abhängig, [5]. Auch Einbau- und Herstellungsabweichungen haben einen großen Einfluß auf die Abrolleigenschaften. Um die Verzahnung unempfindlicher gegenüber Abweichungen zu machen, werden üblicherweise Verzahnungsmodifikationen aufgebracht. Diese Modifikationen orientieren sich an den traditionellen Herstellungsverfahren. Ihr genauer Einfluß insbesondere bei der Freiformherstellung bedarf noch weiterer eigenständiger Untersuchungen, und ist nicht Gegenstand dieser Arbeit.

1.3.4. Die Verlustleistung

Die verschiedenen Anteile der Verlustleistung

Nach [21] setzt sich die momentane Verlustleistung P_V eines Getriebes aus verschiedenen Anteilen zusammen. Zuerst wird hierbei die lastabhängige Verlustleistung P_{VP} von der lastunabhängigen Verlustleistung P_{VO} abgespalten.

Die lastunabhängige Verlustleistung wird häufig auch als Leerlaufverlust bezeichnet. Sie entsteht in verschiedenen Getriebeteilen durch praxisbedingte Umgebungsvoraussetzungen. Dies kann eine Quetschung des Schmiermittels in Verzahnung, Lagern und Kuppelungen, Reibung von Dichtungen auf den Wellen oder sogar die Leistungsaufnahme von zusätzlichen Bauteilen, wie z.B. einer Pumpe für den Transport des Schmiermittels sein. Wie in [5] herausgestellt wird, ist eine genaue Berechnung von lastunabhängigen Verlustleistungen ein schwieriges Unterfangen, sodass in der Regel auf Messungen oder starke Näherungen zurückgegriffen werden muss.

Die lastabhängigen Verlustleistungen können weiterhin nach ihrer Entstehung in den Zahnradern: P_{VZP} oder in den Lagern: P_{VLP} unterschieden werden. Für die Lager werden von den jeweiligen Herstellern unterschiedliche Berechnungsverfahren vorgeschlagen. Auch hier ist eine experimentelle Bestimmung möglich.

Im Weiteren wollen wir uns mit den lastabhängigen Verlustleistungen der Zahnräder und insbesondere dem rein von der Verzahnungsgeometrie abhängigen Zahnverlustfaktor H_V beschäftigen.

Der Zahnverlustfaktor

Die momentane Verzahnungsverlustleistung P_{VZP} lässt sich nach [24] rein auf die beim Abrollprozess entstehende Reibung zurückführen. Sie entspricht, wie in [16] definiert, dem negativen Skalarprodukt des antiparallelen Vektorpaares der Reibungskraft \mathbf{F}_r und der Gleitgeschwindigkeit \mathbf{v}_g , also dem Produkt der Beträge F_r, v_g .

$$P_{VZP} = -\langle \mathbf{F}_r, \mathbf{v}_g \rangle = \|\mathbf{F}_r\| \|\mathbf{v}_g\| = F_r v_g.$$

Nach dem 2. Amontonschen Gesetz kann der Betrag der Reibungskraft zwischen zwei Flächen durch das Produkt der Normalkraft F_n und eines Reibungskoeffizienten μ dargestellt werden.

$$P_{VZP} = \mu F_n v_g.$$

Nach [21] wird zur Definition des Zahnverlustfaktors die momentane Verlustleistung in allen Kontaktpunkten eines Eingriffs, und damit über dem sogenannten Kontaktweg \mathbf{k} , gemittelt.

$$\bar{P}_{VZP} := \frac{\int P_{VZP} d\mathbf{k}}{\int d\mathbf{k}} = \frac{1}{p_e} \int \mu F_n v_g d\mathbf{k}.$$

Die Länge des Kontaktwegs wird als Eingriffsteilung p_e bezeichnet. Wir gehen davon aus, dass der Antrieb mit konstanter Leistung P_A erfolgt. Nach [31] kann auch der Reibungskoeffizient μ für die Integration näherungsweise als konstant angenommen werden.

$$\bar{P}_{VZP} = P_A \mu \frac{1}{p_e} \int \frac{F_n v_g}{P_A} d\mathbf{k} =: P_A \mu H_V.$$

Die Gleichung definiert den Zahnverlustfaktor $H_V = \frac{1}{p_e} \int \frac{F_n v_g}{P_A} d\mathbf{k}$. Die Antriebsleistung P_A lässt sich als Produkt der Antriebskraft in Tangentialrichtung F_1 und der Tangentialgeschwindigkeit der Rotation v_1 darstellen.

$$H_V = \frac{1}{p_e} \int \frac{F_n}{F_1} \frac{v_g}{v_1} d\mathbf{k}.$$

Den Quotient aus der Gleit- und Tangentialgeschwindigkeit bezeichnet man als spezifisches Gleiten $\zeta = \frac{v_g}{v_1}$.

Abschliessend sei noch erwähnt, dass bei der praktischen Berechnung in der Regel ein in [21] beschriebenes Verfahren zum Einsatz kommt. Dieses Verfahren baut auf [22] auf und verwendet lineare Näherungen für den Verlauf der Normalkraft und der Gleitgeschwindigkeit. Die Näherungen reduzieren den Einfluss der Verzahnungsgeometrie auf den Zahnverlustfaktor soweit, dass ihre Verwendung im Kontext dieser Arbeit nicht sinnvoll wäre.

2. Stirnradpaare

Ein *Stirnradpaar* ist ein Wälzgetriebe aus zwei Zahnrädern mit parallelen Drehachsen. Der *Achsabstand* wird mit $d \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ bezeichnet. Die Bezugsfläche eines Stirnrads ist nach [17] ein Kreiszylinder. Genau genommen dient nur die Mantelfläche des Zylinders als Bezugsfläche. In dieser Arbeit werden nur Außenverzahnungen mit einem Einbau ohne Profilverschiebung betrachtet. Die Bezugsflächen der Stirnräder sind somit auch die Wälzflächen des Getriebes.

2.1. Ein Problem der ebenen Kinematik

Wir betrachten zwei Punkte des Stirnradpaares die zu einem beliebigen Zeitpunkt während der Abrollung in Kontakt zueinander kommen. Verfolgen wir nun die Bewegung dieses Kontaktpunktpaares, so erhalten wir durch die Rotationen der beiden Stirnräder um ihre jeweilige Drehachse zwei Kreise. Diese liegen durch die Parallelität der Drehachsen in einer gemeinsamen Normalebene. Die Ebene ist durch ihre Lage auf der Zahnbreite, der *Schnittthöhe* $h \in \mathbb{R}_+$ der Drehachse, vollständig charakterisiert. Wir bezeichnen diese Betrachtung als *Stirnschnitt* der Höhe h . Die Abrollung eines Strinradpaares kann somit in einzelnen voneinander unabhängigen Ebenen betrachtet werden. Man spricht hierbei von einem Problem der *ebenen Kinematik*, [36].

Die Analyse der Abrollung kann damit o.B.d.A. unabhängig von der Zahnbreite, oder bildlich gesprochen für unendlich dünne Zähne, erfolgen.

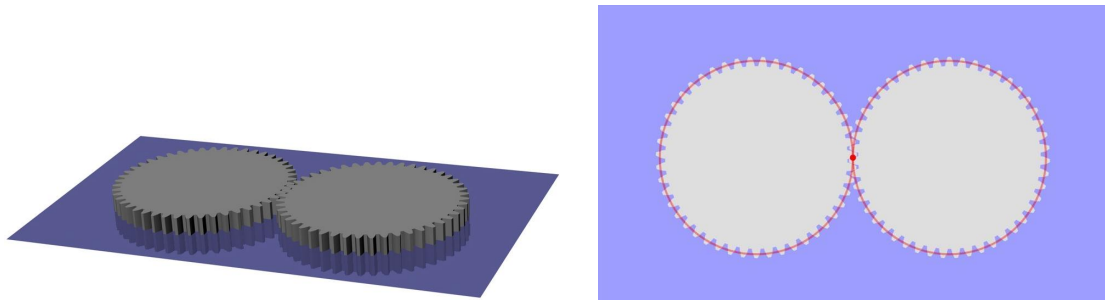


Abbildung 2.1.: Ein Stirnradpaar mit der Trajektorie des Kontaktpunktpaares und dem zugehörigen Stirnschnitt.

2.2. Das ebene Verzahnungsgesetz

Das *ebene Verzahnungsgesetz* ist eine geometrische Bedingung an die Zahnform eines Stirnradpaares, die einen kontinuierlichen Kontakt in einem Stirnschnitt ermöglicht. Die heute gebräuchliche Formulierung wurde 1870 von Louis Saalschütz eingeführt, [14, S.22]. Die Grundlagen des Verzahnungsgesetzes sind aber bereits 100 Jahre früher bei Leonhard Euler zu finden, [6]. Eine erste analytische Beschreibung des ebenen Verzahnungsgesetzes erfolgte 2003 durch Gert Bär, [1]. Demgegenüber verzichte ich in dieser Arbeit auf die Verwendung der komplexen Zahlenebene, um die Verallgemeinerung zu Kegelrädern in Abschnitt 3.2 zu vereinfachen.

2.2.1. Verwendete Koordinatensysteme

Als Bezugssystem definieren wir ein kartesisches Koordinatensystem Σ_0 mit Ursprung im *Drehpunkt* $\mathbf{o}_1 := (0, 0)^T$ des *ersten Stirnrads* S_1 im Stirnschnitt der Höhe h . Analog dazu legen wir auch in den *Drehpunkt* $\mathbf{o}_2 := (0, d)^T$ des *zweiten Stirnrads* S_2 ein kartesisches Koordinatensystem Σ_3 . Zu jedem Koordinatensystem Σ_i definieren wir ein zugehöriges Polarkoordinatensystem Θ_i .

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \middle| \mathbf{o}_0 + \mathbf{E}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \mathbf{o}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \Sigma_3 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \middle| \mathbf{o}_3 + \mathbf{E}_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \mathbf{o}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ d \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \Theta_i &:= \left\{ (r_i, \varphi_i) \middle| \mathbf{o}_i + r_i \mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \mathbf{o}_i, \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \\ \sin \varphi_i & \cos \varphi_i \end{pmatrix} \mathbf{E}_i \right\}.\end{aligned}$$

S_1 rotiere mit einer *Drehgeschwindigkeit* $\omega_1 := \frac{d}{dt}\varphi_1$ um \mathbf{o}_1 . S_2 rotiere mit dazu proportionaler *Drehgeschwindigkeit* $\omega_2 := -\frac{\omega_1}{u} = \frac{d}{dt}\varphi_2$ im entgegengesetzten Drehsinn um \mathbf{o}_2 . Die Variable t repräsentiert die *Zeit*, d ist der Achsabstand und die Konstante u wird als *Übersetzungsverhältnis* bezeichnet. Ein konstantes Übersetzungsverhältnis ist nach [25, S.34ff] bei fast allen Getriebeanwendungen erwünscht, und wird insbesondere bei Leistungsgetrieben gefordert. Zu jedem Stirnrad definieren wir ein mitrotierendes Koordinatensystem $\Sigma_1(t)$ bzw. $\Sigma_2(t)$, so dass $\Sigma_1(0) = \Sigma_0$ bzw. $\Sigma_2(0) = \Sigma_3$ gilt.

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \middle| \mathbf{o}_1 + \mathbf{E}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \mathbf{o}_1, \mathbf{E}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t) & -\sin(\omega_1 t) \\ \sin(\omega_1 t) & \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix} \right\}, \\ \Sigma_2 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \middle| \mathbf{o}_2 + \mathbf{E}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \mathbf{o}_2, \mathbf{E}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) & -\sin(\omega_2 t) \\ \sin(\omega_2 t) & \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} \right\}.\end{aligned}$$

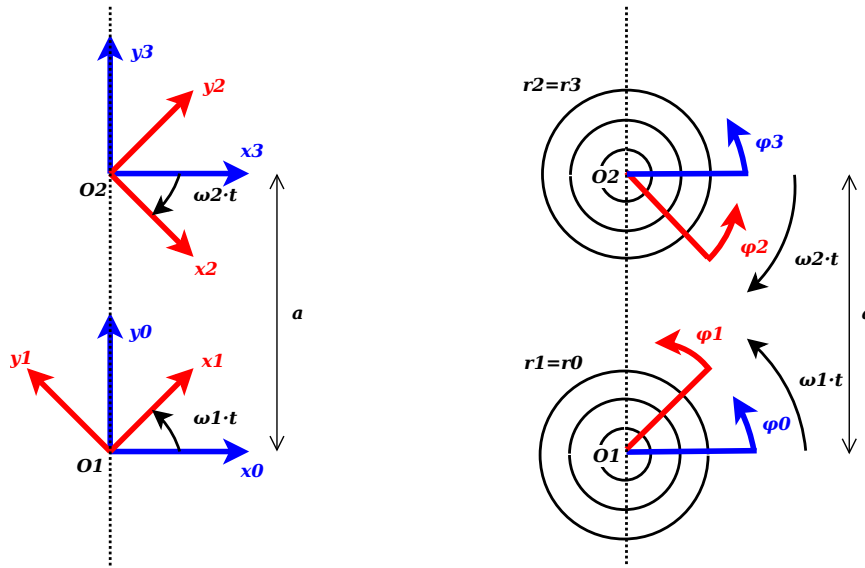


Abbildung 2.2.

- (a): Die Koordinatenachsen der kartesischen Systeme Σ_i
 (b): Die generalisierten Koordinaten der Polarkoordinatensysteme Θ_i

In einem Stirnschnitt bilden die Nutzflanken der beiden Stirnräder ebene Kurven \mathbf{f} und \mathbf{g} , die wir als *Profillinien* bezeichnen. Sie können von der Zeitvariable t unabhängig im mitrotierenden Koordinatensystem Σ_1 bzw. Σ_2 beschrieben werden. Das Verzahnungsgesetz garantiert, dass sich die beiden Zahnprofillinien in einem Kontaktpunkt $\mathbf{k}(t_k)$ zum Zeitpunkt t_k berühren. Die Trajektorie des Kontaktpunkts in Σ_0 bezeichnen wir als *Kontaktweg* \mathbf{k} . Im Optimalfall sind sowohl der Kontaktweg als auch die Profillinien nach dem *Kontaktzeitpunkt* parametrisiert.

$$\begin{aligned} \mathbf{k} : \quad \mathbb{R} \ni t_k &\longmapsto \mathbf{k}(t_k) \in \Sigma_0, \\ \mathbf{f} : \quad \mathbb{R} \ni t_k &\longmapsto \mathbf{f}(t_k) \in \Sigma_1, \\ \mathbf{g} : \quad \mathbb{R} \ni t_k &\longmapsto \mathbf{g}(t_k) \in \Sigma_2. \end{aligned}$$

Die Umrechnungen zwischen $\mathbf{k}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ und die Parametrisierung nach dem Kontaktzeitpunkt werden in Kapitel 2.3 mithilfe des Verzahnungsgesetzes ausführlich erläutert. Die *Koordinatentransformation* von Σ_i in Σ_j bezeichnen wir mit κ_{ij} .

$$\begin{aligned} \kappa_{30} : \Sigma_3 \ni \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 + d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + \mathbf{o}_3 \in \Sigma_0, \\ \kappa_{10} : \Sigma_1 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \cos(\omega_1 t) - y_1 \sin(\omega_1 t) \\ x_1 \sin(\omega_1 t) + y_1 \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix} = \mathbf{E}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \Sigma_0, \\ \kappa_{23} : \Sigma_2 \ni \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cos(\omega_2 t) - y_2 \sin(\omega_2 t) \\ x_2 \sin(\omega_2 t) + y_2 \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} = \mathbf{E}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \Sigma_3. \end{aligned}$$

2.2.2. Die Gleitgeschwindigkeit

Die in der Verzahnung eines Getriebes auftretende *Gleitgeschwindigkeit* \mathbf{v}_g ist nach [11, S.60f] die Differenz der Tangentialgeschwindigkeiten der Rotationen der einzelnen Zahnräder. Um die *Tangentialgeschwindigkeit* \mathbf{v}_1 von S_1 zu errechnen betrachten wir einen Fixpunkt \mathbf{p}_1 in Σ_1 , und bilden die erste Ableitung nach der Zeit in Σ_0 .

$$\mathbf{v}_1 = \frac{d}{dt}\mathbf{p}_1 = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t) \\ r_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t) \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} -r_1 \sin(\varphi_1 + \omega_1 t) \\ r_1 \cos(\varphi_1 + \omega_1 t) \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Analog bestimmen wir die Tangentialgeschwindigkeit \mathbf{v}_2 von S_2 .

$$\mathbf{v}_2 = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t) \\ r_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) + d \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} -r_2 \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) \\ r_2 \cos(\varphi_2 + \omega_2 t) \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} -y_0 + d \\ x_0 \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Als Gleitgeschwindigkeit \mathbf{v}_g aus der Perspektive von S_1 erhalten wir damit:

$$\mathbf{v}_g := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \omega_1 \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \end{pmatrix} - \omega_2 \begin{pmatrix} -y_0 + d \\ x_0 \end{pmatrix} = (\omega_1 - \omega_2) \begin{pmatrix} -y_0 - d \frac{\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \\ x_0 \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Nutzen wir das Übersetzungsverhältnis $u = -\frac{\omega_1}{\omega_2}$ erhalten wir die Darstellung:

$$\mathbf{v}_g = \omega_1 \cdot \frac{u+1}{u} \begin{pmatrix} -y_0 + \frac{d}{u+1} \\ x_0 \end{pmatrix}.$$

In Kapitel 1.3.4 benötigen wir für die Berechnung des Zahnverlustfaktors H_V das *spezifische Gleiten* ζ . [21, S.39f] definiert dieses als Verhältnis der Beträge der Gleit- und Tangentialgeschwindigkeit.

$$\zeta = \frac{\|\mathbf{v}_g\|}{\|\mathbf{v}_1\|} = \sqrt{\frac{(x_0^2 + y_0^2) \cdot (u+1)^2 - 2dy_0 \cdot (u+1) + d^2}{(x_0^2 + y_0^2) \cdot u^2}}$$

2.2.3. Verzahnungsgesetz

Nach [21, S.34] muss die gemeinsame Normale der beiden Zahnflanken im Kontaktpunkt den Achsabstand stets im umgekehrten Verhältnis der momentanen Winkelgeschwindigkeiten teilen. Diesen Zusammenhang bezeichnet man als *Verzahnungsgesetz für ebene Verzahnungen*. Der Schnittpunkt der Normalen und des Achsabstands d wird als *Wälzpunkt* \mathbf{c} , der Kreis um \mathbf{o}_1 durch \mathbf{c} als *Wälzkreis 1* und der Kreis um \mathbf{o}_2 durch \mathbf{c} als *Wälzkreis 2* bezeichnet.

Im Normalfall soll ein konstantes Übersetzungsverhältnis $u = -\frac{\omega_1}{\omega_2}$ erzeugt werden. Der Wälzpunkt ist damit ein zeitunabhängiger Fixpunkt in Bezugskoordinatensystem Σ_0 .

Satz 1 (Ebenes Verzahnungsgesetz) *In einem Stirnschnitt besitzt ein Stirnradpaar zu einem Zeitpunkt t_k genau dann einen Kontaktpunkt $\mathbf{k}(t_k) \neq \mathbf{c}$, wenn auf jeder Profillinie \mathbf{f}, \mathbf{g} ein Punkt $\mathbf{f}(t_k) = \mathbf{g}(t_k) =: \mathbf{k}(t_k)$ existiert, sodass die folgende Gleichung erfüllt ist.*

$$(\mathbf{f}(t_k) - \mathbf{c})^T \mathbf{f}'(t_k) = 0 = (\mathbf{g}(t_k) - \mathbf{c})^T \mathbf{g}'(t_k)$$

Wird die Gleichung über ein Zeitintervall entlang einer Linie \mathbf{k} von Kontaktpunkten erfüllt, so sprechen wir von einem kontinuierlichen Punktkontakt in diesem Stirnschnitt entlang eines Kontaktwegs \mathbf{k} .

Beweis: Die Relativbewegung \mathbf{v}_g der beiden Stirnräder kann durch eine Rotation um den Punkt $\mathbf{c} := \left(0, \frac{-d\omega_2}{\omega_1 - \omega_2}\right)^T \in \Sigma_0$ mit Winkelgeschwindigkeit $\omega_g := \omega_1 - \omega_2$ ersetzt werden.

$$\mathbf{v}_g = (\omega_1 - \omega_2) \cdot \begin{pmatrix} -y_0 - \frac{d\omega_2}{\omega_1 - \omega_2} \\ x_0 \end{pmatrix} = \omega_g \cdot \begin{pmatrix} -(y_0 - c_y) \\ (x_0 - c_x) \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Der Punkt \mathbf{c} stellt den Momentanpol der gekoppelten Bewegung dar.

„ \Rightarrow “:

Ein Stirnradpaar besitze zu einem Zeitpunkt t_k einen Kontaktpunkt $\mathbf{k}(t_k)$. Auf den Profillinien bezeichnen wir den Kontaktpunkt mit $\mathbf{f}(t_k)$ bzw. $\mathbf{g}(t_k)$. Um ein physikalisch unmögliches Durchdringen der Zahnräder auszuschließen, muss am Kontaktpunkt die Tangente der Profillinie $\mathbf{f}'(t_k)$ bzw. $\mathbf{g}'(t_k)$ parallel zur Bewegungstangente \mathbf{v}_g verlaufen. Diese beschreibt eine Rotation um \mathbf{c} und steht somit senkrecht zu $(\mathbf{k}(t_k) - \mathbf{c})$.

„ \Leftarrow “:

Existiert ein Paar von Punkten $\mathbf{f}(t_k) = \mathbf{g}(t_k)$ so besitzen die Zahnprofillinien einen gemeinsamen Punkt, den wir mit $\mathbf{k}(t_k)$ bezeichnen. Setzen wir diesen in die Gleichung ein, erhalten wir die Parallelität der Tangenten. Damit ist $\mathbf{k}(t_k)$ ein Berührungspunkt.

$$(\mathbf{f}(t_k) - \mathbf{c})^T \mathbf{f}'(t_k) = (\mathbf{g}(t_k) - \mathbf{c})^T \mathbf{g}'(t_k) \xRightarrow{\mathbf{f}(t_k) = \mathbf{g}(t_k)} \mathbf{f}'(t_k) \parallel \mathbf{g}'(t_k).$$

Da die Tangenten parallel zur Rotation stehen, wird die Abrollung nicht beeinträchtigt.

Unter der bei außenverzahnten Stirnradpaaren zwingenden Voraussetzung der entgegengesetzten Drehrichtungen teilt der Punkt \mathbf{c} den Achsabstand im umgekehrten Verhältnis der Winkelgeschwindigkeiten. Er stellt den Wälzpunkt der Verzahnung dar. Bei konstantem Drehübersetzungsverhältnis $u = -\frac{\omega_1}{\omega_2}$ bildet der Wälzpunkt $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{u+1} \end{pmatrix}$ einen Fixpunkt in Σ_0 . \square

Bemerkung *Findet der Kontakt direkt im Wälzpunkt statt $\mathbf{k}(t_k) = \mathbf{c}$, reicht es um die Abrollung zu ermöglichen bereits, die Parallelität der Tangenten der Zahnprofillinien $\mathbf{f}'(t_k) \parallel \mathbf{g}'(t_k)$ zu fordern. Durch die verschwindende Gleitgeschwindigkeit im Wälzpunkt*

$\mathbf{v}_g(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ ist die Orthogonalität zur Rotation trivial erfüllt. Statt einer gesonderten Betrachtung kann dieser Fall jedoch auch durch stetige Fortsetzung der Zahnprofillinien behandelt werden.

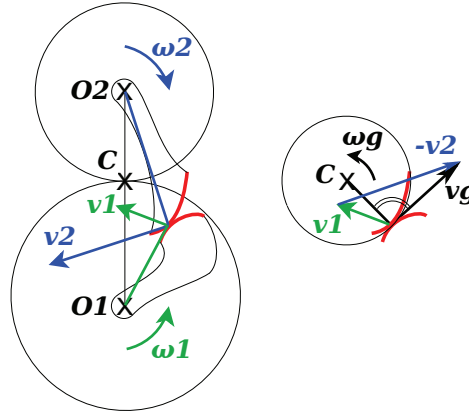


Abbildung 2.3.: Ein einzelnes Profillinienpaar mit entgegengesetzten Drehrichtungen und dem dazugehörige Momentanpol \mathbf{c} .

2.3. Berechnung im Stirnschnitt

In Kapitel 2.2.1 wurden die beiden Profillinien \mathbf{f}, \mathbf{g} und der Kontaktweg \mathbf{k} als durch den Kontaktzeitpunkt t_k parametrisierte Kurven definiert. Im Allgemeinen, und insbesondere bei Messwerten, ist jedoch nur die Form der Kurven bekannt. Mit dem Verzahnungsgesetz kann aus einer beliebigen, sinnvollen Parametrisierung einer der Kurven eine *Kontaktfunktion* bestimmt werden, die die Kurve entsprechend umparametrisiert. Sind die Kontaktzeitpunkte erst einmal bekannt, erfolgt die Umrechnung in die anderen Kurven durch zeitabhängige Koordinatentransformationen $\kappa(t_k)$.

Dieses Vorgehen setzt die Kenntnis des Übersetzungsverhältnisses in diesem Stirnschnitt voraus. Ist das Übersetzungsverhältnis unbekannt, wird zur Bestimmung der Kontaktfunktion eine weitere Kurve benötigt.

Der für die Praxis relevante Fall, in dem beide Profillinien bekannt sind, wird in Kapitel 2.3.3 untersucht.

In Kapitel 2.3.4 wird die Kontaktfunktion genutzt um die Dauer des Eingriffs zu bestimmen. Daraus ergibt sich die Profilüberdeckung, die mittlere Anzahl der sich in einem Strinschnitt gleichzeitig in Eingriff befindenden Zähne.

2.3.1. Mit vorgegebener Profillinie und Übersetzung

Im betrachteten Stirnschnitt sei eine der Profillinien \mathbf{f} oder \mathbf{g} mit regulärer *Parametrisierung* s vorgegeben. Es gilt also, $\frac{d}{ds}\mathbf{f}(s) \neq 0$ bzw. $\frac{d}{ds}\mathbf{g}(s) \neq 0$. Sie kann beispielsweise aus Messwerten bestimmt worden sein. Gerade in diesem Fall ist es wichtig den *Anfangspunkt* $\mathbf{f}(s_a)$ bzw. $\mathbf{g}(s_a)$ und *Endpunkt* $\mathbf{f}(s_e)$ bzw. $\mathbf{g}(s_e)$ mit Bedacht festzulegen, da jeder

Punkt der Profillinie mit der Gegenflanke in Eingriff gebracht wird. Die Profillinie darf daher nur der Nutzflanke der Verzahnung entsprechen. Wir nehmen zunächst an, dass es sich um die Profillinie \mathbf{f} von S_1 handelt.

$$\mathbf{f}: [s_a, s_e] \ni s \longmapsto \mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} f_x(s) \\ f_y(s) \end{pmatrix} = f_r(s) \begin{pmatrix} \cos f_\varphi(s) \\ \sin f_\varphi(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_1.$$

Desweiteren sei ein Übersetzungsverhältnis $u > 0$ vorgegeben, welches den Wälzpunkt \mathbf{c} bestimmt. Wie bereits erwähnt wird im Allgemeinen ein konstantes Übersetzungsverhältnis angestrebt. Die Formeln lassen sich jedoch auch mit nicht konstantem Übersetzungsverhältnis $u(s)$ anwenden, wenn dies z.B. beim Reverse Engineering von bestehenden Stirnradpaaren erforderlich ist.

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{u+1} \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Für das Verzahnungsgesetz benötigen wir die Tangente der Profillinie $\frac{d}{ds}\mathbf{f}(s)$ und die Darstellung des Wälzpunktes in Σ_1 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\mathbf{f}(s) &= \frac{d}{ds}f_r(s) \begin{pmatrix} \cos f_\varphi(s) \\ \sin f_\varphi(s) \end{pmatrix} + f_r(s) \frac{d}{ds}f_\varphi(s) \begin{pmatrix} -\sin f_\varphi(s) \\ \cos f_\varphi(s) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} f'_x(s) \\ f'_y(s) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{f}'(s) =: f'_r(s) \begin{pmatrix} \cos f'_\varphi(s) \\ \sin f'_\varphi(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_1, \\ \kappa_{01}\mathbf{c} &= \begin{pmatrix} c_x \cos(\omega_1 t) + c_y \sin(\omega_1 t) \\ -c_x \sin(\omega_1 t) + c_y \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix} = \frac{d}{u+1} \begin{pmatrix} \sin(\omega_1 t) \\ \cos(\omega_1 t) \end{pmatrix} \in \Sigma_1. \end{aligned}$$

Mit der im Verzahnungsgesetz geforderten Bedingung, dass die Tangente $\mathbf{f}'(s)$ in einem Kontaktpunkt orthogonal zur Richtung des Wälzpunktes $\mathbf{f}(s) - \mathbf{c}$ steht, können wir die Kontaktfunktion $t_k(s)$ herleiten.

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{f} - \mathbf{c}(t_k))^T \mathbf{f}' \\ &= f'_r \left(\frac{d}{u+1} (\sin(\omega_1 t_k) \cos f'_\varphi + \cos(\omega_1 t_k) \sin f'_\varphi) - f_r (\cos f_\varphi \cos f'_\varphi + \sin f_\varphi \sin f'_\varphi) \right). \end{aligned}$$

Das gilt genau dann wenn,

$$\frac{d}{u+1} \sin(\omega_1 t_k + f'_\varphi(s)) = f_r \cos(f_\varphi - f'_\varphi). \quad (2.1)$$

Wenn wir Gleichung (2.1) nach $\omega_1 t_k$ auflösen, erhalten wir die folgenden zwei Basislösungen. Durch den Wechsel zu einem negativen Übersetzungsverhältnis $\hat{u} := -u - 2 < 0$ sehen wir, dass es sich bei den beiden Lösungen um die gesuchte Außen-, und eine unerwünschte Innenverzahnung handelt.

$$\begin{aligned} \omega_1 t_k(s) &= \pm \arcsin \left(\frac{u+1}{d} f_r(s) \cos(f_\varphi(s) - f'_\varphi(s)) \right) - f'_\varphi \\ &= \mp \arcsin \left(\frac{\hat{u}+1}{d} f_r(s) \cos(f_\varphi(s) - f'_\varphi(s)) \right) - f'_\varphi \end{aligned} \quad (2.2)$$

Mit der Kontaktfunktion $t_k(s)$ können wir den Kontaktweg \mathbf{k} und die Profillinie \mathbf{g} des Gegenrads S_2 berechnen, indem wir abhängig vom Kontaktzeitpunkt ins entsprechende Koordinatensystem transformieren.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t_k) &= \mathbf{f}(t_k(s)) \in \Sigma_1, \\ \mathbf{k}(t_k) &= \kappa_{10}(t_k) \mathbf{f}(t_k) = \begin{pmatrix} f_x \cos(\omega_1 t_k) - f_y \sin(\omega_1 t_k) \\ f_x \sin(\omega_1 t_k) + f_y \cos(\omega_1 t_k) \end{pmatrix} = f_r \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi + \omega_1 t_k) \\ \sin(f_\varphi + \omega_1 t_k) \end{pmatrix} \in \Sigma_0, \\ \mathbf{g}(t_k) &= \kappa_{12}(t_k) \mathbf{f}(t_k) = f_r \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi + (\omega_1 - \omega_2) \cdot t_k) \\ \sin(f_\varphi + (\omega_1 - \omega_2) \cdot t_k) \end{pmatrix} - d \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t_k) \\ \cos(\omega_2 t_k) \end{pmatrix} \in \Sigma_2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Zur Unterscheidung der beiden Lösungen können die Normalen der Profillinien $\frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{f}'(s)}{\|\mathbf{f}'(s)\|} \right)$ und $\frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{g}'(s)}{\|\mathbf{g}'(s)\|} \right)$ in einem Kontaktpunkt verglichen werden. In einem gemeinsamen Koordinatensystem besitzen Außenverzahnungen entgegengesetzte Krümmungsvektoren und Innenverzahnungen gleichgerichtete:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{f}'(s)}{\|\mathbf{f}'(s)\|} \right)^T \cdot \kappa_{21}(t_k(s)) \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{g}'(s)}{\|\mathbf{g}'(s)\|} \right) \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{Innenverzahnung} \\ > 0 \Rightarrow \text{Außenverzahnung} \end{cases}.$$

Ist nun zu Beginn statt der Profillinie \mathbf{f} von S_1 , die Profillinie \mathbf{g} von S_2 vorgegeben, so führt ein analoges Vorgehen zur Kontaktfunktion t_k .

$$\begin{aligned} \mathbf{g} : [s_a, s_e] \ni s &\longmapsto \mathbf{g}(s) = \begin{pmatrix} g_x(s) \\ g_y(s) \end{pmatrix} = g_r(s) \begin{pmatrix} \cos g_\varphi(s) \\ \sin g_\varphi(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_2, \\ \frac{d}{ds} \mathbf{g}(s) &= \frac{d}{ds} g_r(s) \begin{pmatrix} \cos g_\varphi(s) \\ \sin g_\varphi(s) \end{pmatrix} + g_r(s) \frac{d}{ds} g_\varphi(s) \begin{pmatrix} -\sin g_\varphi(s) \\ \cos g_\varphi(s) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} g'_x(s) \\ g'_y(s) \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{g}'(s) =: g'_r(s) \begin{pmatrix} \cos g'_\varphi(s) \\ \sin g'_\varphi(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_1, \\ \kappa_{02} \mathbf{c} &= \begin{pmatrix} c_x \cos(\omega_2 t) + (c_y - d) \sin(\omega_2 t) \\ -c_x \sin(\omega_2 t) + (c_y - d) \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} = \frac{-ud}{u+1} \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t) \\ \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} \in \Sigma_2. \end{aligned}$$

Wir wenden das Verzahnungsgesetz für \mathbf{g} an:

$$0 = (\mathbf{g} - \mathbf{c}(t_k))^T \mathbf{g}'.$$

Auch in diesem Fall erhalten wir für $\omega_2 t_k$ zwei Basislösungen. Durch den Wechsel zu einem negativen Übersetzungsverhältnis $\hat{u} := \frac{-u}{2u+1} < 0$ sehen wir, dass es sich wieder um die gesuchte Außen-, und eine unerwünschte Innenverzahnung handelt.

$$\begin{aligned} \omega_2 t_k(s) &= \pm \arcsin \left(\frac{u+1}{-ud} g_r(s) \cos(g_\varphi(s) - g'_\varphi(s)) \right) - g'_\varphi \\ &= \mp \arcsin \left(\frac{\hat{u}+1}{-\hat{u}d} g_r(s) \cos(g_\varphi(s) - g'_\varphi(s)) \right) - g'_\varphi. \end{aligned}$$

2.3.2. Mit vorgegebenem Kontaktweg und Übersetzung

Im betrachteten Stirnschnitt sei ein Kontaktweg \mathbf{k} mit regulärer Parametrisierung s vorgegeben. Es gilt also, $\frac{d}{ds}\mathbf{k}(s) \neq 0$. Der Kontaktweg ist als Auslegungsparameter der Stirnradverzahnung besonders geeignet, da durch ihn Kontakteigenschaften wie der Eingriffswinkel oder die Profilüberdeckung direkt festgelegt werden können. Häufig wird eine Gerade als Kontaktweg verwendet, dies führt, wie in Kapitel 2.4 beschrieben, zu einer Evolventenverzahnung.

$$\mathbf{k} : [s_a, s_e] \ni s \mapsto \mathbf{k}(s) = \begin{pmatrix} k_x(s) \\ k_y(s) \end{pmatrix} = k_r(s) \begin{pmatrix} \cos k_\varphi(s) \\ \sin k_\varphi(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Desweiteren sei wie im vorangegangenen Kapitel das Übersetzungsverhältnis u und damit der Wälzpunkt \mathbf{c} vorgegeben. Auch hier ist es möglich, ein vom Parameter s abhängiges Übersetzungsverhältnis $u(s)$ zu verwenden. Diese Form der Auslegung stellt aber noch mehr als im vorangegangenen Fall ein akademisches Beispiel dar, das nur in Spezialfällen Praxisrelevanz besitzt.

$$\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{u+1} \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Um das Verzahnungsgesetz anwenden zu können benötigen wir eine Profillinie. O.B.d.A berechnen wir \mathbf{f} . Wir erhalten die Profillinie indem wir eine Koordinatentransformation auf $\mathbf{k}(s)$ anwenden, die von der noch unbekannten Kontaktfunktion $t_k(s)$ abhängt. Desweiteren bilden wir die Tangente der Profillinie $\mathbf{f}'(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{f}(s) \in \Sigma_1$.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t_k(s)) &= \kappa_{01}(t_k(s))\mathbf{k}(s) = \begin{pmatrix} k_x(s) \cos(\omega_1 t_k(s)) - k_y(s) \sin(\omega_1 t_k(s)) \\ k_x(s) \sin(\omega_1 t_k(s)) + k_y(s) \cos(\omega_1 t_k(s)) \end{pmatrix} \in \Sigma_1, \\ \mathbf{f}' &= \begin{pmatrix} (k'_x + \omega_1 t'_k k_y) \cos(\omega_1 t_k) + (k'_y - \omega_1 t'_k k_x) \sin(\omega_1 t_k) \\ -(k'_x + \omega_1 t'_k k_y) \sin(\omega_1 t_k) + (k'_y - \omega_1 t'_k k_x) \cos(\omega_1 t_k) \end{pmatrix} \in \Sigma_1. \end{aligned}$$

Wir wenden das Verzahnungsgesetz jeweils zum Kontaktzeitpunkt t_k in Σ_0 an. Dafür transformieren wir die Profillinie und ihre Tangente wieder zurück in Σ_0 .

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t_k(s)) &= \kappa_{10}(t_k(s))\mathbf{k}(s) = \begin{pmatrix} k_x(s) \\ k_y(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0, \\ \mathbf{f}'(t_k(s)) &= \begin{pmatrix} k'_x(s) + \omega_1 t'_k(s) k_y(s) \\ k'_y(s) - \omega_1 t'_k(s) k_x(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0. \end{aligned}$$

Die Orthogonalitätsbedingung des Verzahnungsgesetzes lässt sich nach der Ableitung der Kontaktfunktion auflösen.

$$\begin{aligned} 0 &= (\mathbf{f}(s) - \mathbf{c})^T \mathbf{f}'(s) \\ &= \begin{pmatrix} k_x(s) \\ k_y(s) - \frac{d}{u+1} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k'_x(s) + \omega_1 t'_k(s) k_y(s) \\ k'_y(s) - \omega_1 t'_k(s) k_x(s) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Dies gilt genau dann wenn,

$$t'_k(s) = \frac{\frac{d}{u+1}k'_y(s) - k_x(s)k'_x(s) - k_y(s)k'_y(s)}{\frac{d}{u+1}k_x(s)\omega_1} = \frac{k'_y(s) - \frac{u+1}{d}\mathbf{k}^T(s)\mathbf{k}'(s)}{\omega_1 k_x(s)}.$$

Durch Integration erhalten wir die Kontaktfunktion $t_k(s)$. Die Integrationskonstante $t_0 = t(s_0)$ bildet einen Bezugszeitpunkt für den Kontakt in einem Punkt $\mathbf{k}(s_0)$ mit $s_0 \in [s_a, s_e]$. In Kapitel 2.5 werden wir die Konstante zur Konstruktion der Flankenlinie nutzen. Betrachtet wir jedoch ausschließlich einen Stirnschnitt können wir $t_0 = 0$ setzen.

$$t_k(s) = \int_{s_0}^s \frac{k'_y(\sigma) - \frac{u+1}{d}\mathbf{k}^T(\sigma)\mathbf{k}'(\sigma)}{\omega_1 k_x(\sigma)} d\sigma + t_0. \quad (2.4)$$

An Gleichung (2.4) können wir erkennen, dass die Kontaktfunktion eine Singularität in $k_x = 0$ aufweist. Um diese Stelle genauer zu untersuchen, betrachten wir den Kontaktweg und seine Ableitung in Polarkoordinaten Θ_0 .

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(s) &= k_r(s) \begin{pmatrix} \cos k_\varphi(s) \\ \sin k_\varphi(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0, \\ \mathbf{k}'(s) &= \frac{d}{ds}\mathbf{k}(s) = \frac{d}{ds}k_r(s) \begin{pmatrix} \cos k_\varphi(s) \\ \sin k_\varphi(s) \end{pmatrix} + k_r(s) \frac{d}{ds}k_\varphi(s) \begin{pmatrix} -\sin k_\varphi(s) \\ \cos k_\varphi(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0, \\ \omega_1 t'(s) &= \frac{d}{ds}k_\varphi(s) + \frac{d}{ds}k_r(s) \frac{\sin k_\varphi(s) - \frac{u+1}{d}k_r(s)}{\cos k_\varphi(s)k_r(s)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Betrachten wir nun den Fall, dass der Kontaktweg \mathbf{k} durch den Wälzpunkt \mathbf{c} verläuft.

$$\begin{aligned} \exists s_c \in [s_a, s_e] \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}(s_c) = \mathbf{c} &\iff k_\varphi(s_c) = \frac{\pi}{2}, \quad k_r(s_c) = \frac{d}{u+1} \\ \lim_{s \rightarrow s_c} \omega_1 t'(s) &= \frac{d}{ds}k_\varphi(s_c) - \frac{d}{ds}k_r(s_c) \frac{u+1}{d} \lim_{s \rightarrow s_c} \frac{\sin k_\varphi(s) - 1}{\cos k_\varphi(s)} = \frac{d}{ds}k_\varphi(s_c). \end{aligned}$$

Als weiterer Fall kann die Ableitung des Radius k_r an der Singularität verschwinden. Dieser Fall ist in der praktischen Umsetzung unbrauchbar, da eine flache Stelle in der Verzahnung entsteht, an der kein Drehmoment übertragen wird.

$$\begin{aligned} \exists s_c \in [s_a, s_e] \quad \text{mit} \quad k_\varphi(s_c) = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{d}{ds}k_r(s_c) &= 0 \\ \lim_{s \rightarrow s_c} \omega_1 t'(s) &= \frac{d}{ds}k_\varphi(s_c) + \lim_{s \rightarrow s_c} \frac{\frac{d}{ds}k_r(s) (\sin k_\varphi(s) - \frac{u+1}{d}k_r(s))}{\cos k_\varphi(s)k_r(s)} \\ &= \frac{d}{ds}k_\varphi(s_c) + \lim_{s \rightarrow s_c} \frac{\frac{d^2}{ds^2}k_r(s) (\sin k_\varphi(s) - \frac{u+1}{d}k_r(s))}{\cos k_\varphi(s) \frac{d}{ds}k_r(s) - \sin k_\varphi(s) \frac{d}{ds}k_\varphi(s)k_r(s)} \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow s_c} \frac{\frac{d}{ds}k_r(s) (\frac{d}{ds}k_\varphi(s) \cos k_\varphi(s) - \frac{u+1}{d} \frac{d}{ds}k_r(s))}{\cos k_\varphi(s) \frac{d}{ds}k_r(s) - \sin k_\varphi(s) \frac{d}{ds}k_\varphi(s)k_r(s)} \\ &= \frac{d}{ds}k_\varphi(s_c) + \frac{d^2}{ds^2}k_r(s_c) \frac{\frac{u+1}{d} - \frac{1}{k_r(s_c)}}{\frac{d}{ds}k_\varphi(s_c)}. \end{aligned}$$

Mit der Kontaktfunktion können wir nun durch die entsprechenden Koordinatentransformationen die Profillinien \mathbf{f} und \mathbf{g} berechnen.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(t_k) &= \mathbf{k}(t_k(s)) \in \Sigma_0, \\ \mathbf{f}(t_k) &= \kappa_{01}(t_k)\mathbf{k}(t_k) = \begin{pmatrix} k_x \cos(\omega_1 t_k) + k_y \sin(\omega_1 t_k) \\ -k_x \sin(\omega_1 t_k) + k_y \cos(\omega_1 t_k) \end{pmatrix} \in \Sigma_1, \\ \mathbf{g}(t_k) &= \kappa_{02}(t_k)\mathbf{k}(t_k) = \begin{pmatrix} k_x \cos(\omega_2 t_k) + (k_y - d) \sin(\omega_2 t_k) \\ -k_x \sin(\omega_2 t_k) + (k_y - d) \cos(\omega_2 t_k) \end{pmatrix} \in \Sigma_2. \end{aligned} \quad (2.6)$$

2.3.3. Beide Profillinien vorgegeben ohne Übersetzung

Im betrachteten Stirnschnitt sei eine Profillinie \mathbf{f} mit regulärer Parametrisierung s vorgegeben. Es gilt also, $\frac{d}{ds}\mathbf{f}(s) \neq 0$. Die zweite Profillinie \mathbf{g} liege diskretisiert als aufeinander folgende Punkte \mathbf{g}_i vor. Die Punkte können aus Messwerten übernommen oder aus der Abtastung einer Parametrisierung von \mathbf{g} bestimmt worden sein. Die Begrenzungen sind nur bei \mathbf{f} relevant. Für die Profillinie \mathbf{g} können die Punkte \mathbf{g}_i auch über die Nutzflanke hinausgehen.

$$\begin{aligned} \mathbf{f} : \quad [s_a, s_e] \ni s &\longmapsto \mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} f_x(s) \\ f_y(s) \end{pmatrix} = f_r(s) \begin{pmatrix} \cos f_\varphi(s) \\ \sin f_\varphi(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_1, \\ \mathbf{g}_i &= \begin{pmatrix} g_{i,x} \\ g_{i,y} \end{pmatrix} \in \Sigma_2 \quad i = 1, \dots, k. \end{aligned}$$

Aus je zwei Punkten \mathbf{g}_i und \mathbf{g}_{i+1} bilden wir ein Linearsegment $\overline{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}}$. Wir setzen die Linearsegmente an den Punkten \mathbf{g}_i zusammen und erhalten eine Näherung für die Profillinie \mathbf{g} .

$$\mathbf{g} \approx \bigcup_{i=1, \dots, k-1} \overline{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}} \quad \text{mit} \quad \overline{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}} : [0, 1] \ni \xi \longmapsto \mathbf{g}_{i+1} + \xi(\mathbf{g}_i - \mathbf{g}_{i+1}) \in \Sigma_2.$$

Das Übersetzungsverhältnis u sei unbekannt und soll bestimmt werden. Da es sich bei dieser Berechnung um eine allgemeine Analyse bestehender Verzahnungen handelt, können wir nicht von einer Konstanz des Übersetzungsverhältnis ausgehen. Mit dem Übersetzungsverhältnis ändert sich auch der Wälzpunkt \mathbf{c} abhängig vom Parameter s :

$$\mathbf{c}(s) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{u(s)+1} \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Mit Gleichung (2.3) und (2.2) können wir abhängig von $u(s)$ die Profillinie $\mathbf{g}(s)$ errechnen.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t_k(s)) &= f_r(s) \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi(s) + \frac{u(s)+1}{u(s)}\omega_1 t_k(s)) \\ \sin(f_\varphi(s) + \frac{u(s)+1}{u(s)}\omega_1 t_k(s)) \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \sin(\frac{1}{u(s)}\omega_1 t_k(s)) \\ -\cos(\frac{1}{u(s)}\omega_1 t_k(s)) \end{pmatrix} \in \Sigma_2, \\ \omega_1 t_k(s) &= \pm \arcsin\left(\frac{u(s)+1}{d}f_r(s)\cos(f_\varphi(s) - f'_\varphi(s))\right) - f'_\varphi(s). \end{aligned}$$

Wir prüfen, wie in Kapitel 2.3.1 beschrieben, bei welcher der beiden Lösungen es sich um die gesuchte Außenverzahnung handelt. Nun können wir für einen einzelnen Parameterwert s bestimmen, bei welcher Übersetzung $u(s)$ ein Linearsegment der vorgegebene Profillinie $\overline{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}}$ geschnitten wird.

$$\mathbf{g}(u(s)) \in \overline{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}} \iff \mathbf{g}(u(s)) = \mathbf{g}_{i+1} + \xi_i \cdot (\mathbf{g}_i - \mathbf{g}_{i+1}) \quad \text{mit} \quad 0 \leq \xi_i \leq 1$$

Das entspricht der Nullstelle der Gleichung:

$$(\mathbf{g}(u(s)) - \mathbf{g}_{i+1})^T \begin{pmatrix} g_{i,y} - g_{i+1,y} \\ -g_{i,x} + g_{i+1,x} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{mit} \quad 0 \leq \frac{g_x(u(s)) - g_{i+1,x}}{g_{i,x} - g_{i+1,x}} \leq 1.$$

Zur Bestimmung der Nullstelle wenden wir das Newton-Verfahren an. Als Startwert u_0 eignet sich das umgekehrte Verhältnis der Zähnezahle von S_1 und S_2 .

$$\begin{aligned} u_0 &= \frac{n_2}{n_1}, \\ u_{j+1} &= u_j - \frac{(\mathbf{g}(u_j) - \mathbf{g}_{i+1})^T \begin{pmatrix} g_{i,y} - g_{i+1,y} \\ -g_{i,x} + g_{i+1,x} \end{pmatrix}}{\frac{d}{du} \mathbf{g}^T(u_j) \begin{pmatrix} g_{i,y} - g_{i+1,y} \\ -g_{i,x} + g_{i+1,x} \end{pmatrix}}, \\ \frac{d}{du} \mathbf{g}(u) &= \left(\frac{1}{u} \omega_1 t_k(u) + \frac{u+1}{u} \frac{d}{du} \omega_1 t_k(u) \right) \\ &\quad \left(f_r \begin{pmatrix} -\sin(f_\varphi + \frac{u+1}{u} \omega_1 t_k(u)) \\ \cos(f_\varphi + \frac{u+1}{u} \omega_1 t_k(u)) \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{u} \omega_1 t_k(u)) \\ \sin(\frac{1}{u} \omega_1 t_k(u)) \end{pmatrix} \right), \\ \frac{d}{du} \omega_1 t_k(u) &= \frac{f_r \cos(f_\varphi - f'_\varphi)}{\sqrt{d^2 - (u+1)^2 f_r^2 \cos^2(f_\varphi - f'_\varphi)}}. \end{aligned}$$

Das errechnete Übersetzungsverhältnis $u(s)$ bezeichnen wir als *momentanes Übersetzungsverhältnis* zum Zeitpunkt $t_k(s)$. Für die Genauigkeit der Berechnung ist vor allem die Diskretisierung der Profillinie \mathbf{g} entscheidend. Mit der Kontaktfunktion $t_k(s)$ können wir einzelne Punkte des Kontaktwegs \mathbf{k} berechnen:

$$\mathbf{k}(t_k(s)) = \kappa_{10}(t_k(s)) \mathbf{f}(s) = f_r(s) \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi(s) + \omega_1 t_k(s)) \\ \sin(f_\varphi(s) + \omega_1 t_k(s)) \end{pmatrix} \in \Sigma_0$$

2.3.4. Die Profilüberdeckung

In diesem Kapitel wird die *Profilüberdeckung* ϵ_α eines Profillinienpaars betrachtet. Sie gibt die relative Dauer des Kontakts eines Zahnpaars in einem Stirnschnitt wieder. Zusammen mit der *Sprungüberdeckung* ϵ_β die durch die Schrägverzahnung in Kapitel 2.5 bestimmt wird, kann die *Gesamtüberdeckung* ϵ berechnet werden. Die Gesamtüberdeckung gibt die relative Dauer des Kontakts eines Zahnflankenpaars an. Ist das Stirnrad aus identischen Zähne aufgebaut, entspricht die Überdeckung der durchschnittlichen Anzahl sich gleichzeitig in Kontakt befindender Zähne.

Um die Profilüberdeckung zu bestimmen nutzen wir die zuvor in Gleichung (2.2) bzw. (2.4) berechnete Kontaktfunktion. Mit dem ersten Kontaktzeitpunkt $t_k(s_a)$ und dem letzten Kontaktzeitpunkt $t_k(s_e)$, kann die *Kontakttdauer* $\Delta t = t_k(s_e) - t_k(s_a)$ errechnet werden. Wenn wir diese durch den Anteil eines Zahns an der Gesamtumdrehungsdauer teilen, erhalten wir die Profilüberdeckung ϵ_α . Hierbei bezeichnet $n_1 \in \mathbb{N}$ die Zähnezahzahl des Strinrads S_1 und $n_2 \in \mathbb{N}$ die Zähnezahzahl des Strinrads S_2 .

$$\begin{aligned}\epsilon_\alpha &= \frac{n_1 \omega_1 \Delta t}{2\pi} = \frac{n_1 \omega_1 (t(s_e) - t(s_a))}{2\pi} \\ &= \frac{n_2 \omega_2 \Delta t}{2\pi} = \frac{n_2 \omega_2 (t(s_e) - t(s_a))}{2\pi}.\end{aligned}$$

2.4. Die Evolventenverzahnung

In diesem Kapitel werden die zuvor hergeleiteten Formeln an einem Beispiel veranschaulicht. Zunächst geben wir in Kapitel 2.4.1 eine Gerade als Kontaktweg vor. Bei den entstehenden Profillinien handelt es sich um sogenannte (Kreis-)Evolventen. Diese Form der Verzahnung wurde bereits 1760 von Leonhard Euler vorgeschlagen, [6]. In Kapitel 2.4.2 werden wir als Profillinie eine Evolvente vorgeben und zeigen, dass unabhängig vom Achsabstand d erneut eine Gerade als Kontaktweg resultiert. Diese Unempfindlichkeit gegenüber Achsabstandsänderungen ist, neben der aus dem geraden Kontaktweg resultierenden, konstanten Richtung der Kontaktkraft, eine wichtige Eigenschaft der Evolventenverzahnung. Diese Eigenschaften sind zusammen mit der in Kapitel 2.6 beschriebenen einfachen Herstellung, der Grund warum sich die Evolvente als Standard bei Stirnradverzahnungen durchgesetzt hat, [21, S.42].

In 2.4.3 werden wir die Profilüberdeckung der Evolventenverzahnung berechnen.

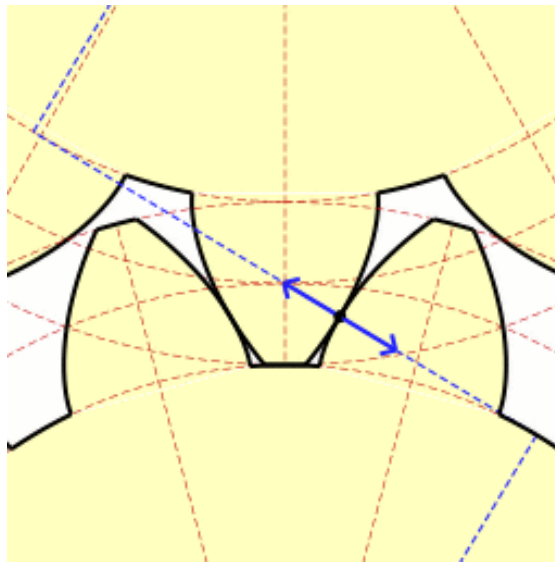


Abbildung 2.4.: Ein evolventenverzahntes Stirnradpaar mit geradem Kontaktweg.

2.4.1. Berechnung der Profillinien

Als Kontaktweg \mathbf{k} wählen wir eine Gerade im Bezugssystem Σ_0 . In Kapitel 2.3.2 wurde hergeleitet, dass für eine geeignete Verzahnung der Kontaktweg durch den Wälzpunkt $\mathbf{c} = \left(0, \frac{d}{u+1}\right)^T$ verlaufen muss.

$$\mathbf{k}(s) = s \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{u+1} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Wir bezeichnen den Parameter α als Eingriffswinkel und schränken diesen wie folgt ein: $|\alpha| \in (0, \frac{\pi}{2})$. Für die Bestimmung der Kontaktfunktion benötigen wir außerdem die Ableitung des Kontaktwegs.

$$\mathbf{k}'(s) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Als Bezugspunkt wählen wir den Wälzpunkt. $\mathbf{k}(s_0) = \mathbf{c} = \mathbf{k}(0)$ Nach Gleichung (2.4) resultiert damit die folgende Kontaktfunktion.

$$\begin{aligned} t_k(s) &= \int_0^s \frac{k'_y(\sigma) - \frac{u+1}{d} \mathbf{k}^T(\sigma) \mathbf{k}'(\sigma)}{\omega_1 k_x(\sigma)} d\sigma + t_0 \\ &= \int_0^s \frac{1}{\frac{\omega_1 d}{u+1} \sin \alpha} d\sigma + t_0 = \frac{s}{\frac{\omega_1 d}{u+1} \sin \alpha} + t_0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Durch den linearen Zusammenhang können wir nach s auflösen:

$$s = \frac{d}{u+1} \omega_1 (t_k - t_0) \sin \alpha. \quad (2.9)$$

Nun können wir Gleichungen (2.6) nutzen, um den umparametrisierten Kontaktweg und die Profillinien zu errechnen.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(t_k) &= \begin{pmatrix} -s \sin \alpha \\ s \cos \alpha + c_y \end{pmatrix} = \frac{d}{u+1} \begin{pmatrix} -\omega_1 (t_k - t_0) \sin^2 \alpha \\ \omega_1 (t_k - t_0) \sin \alpha \cos \alpha + 1 \end{pmatrix} \in \Sigma_0, \\ \mathbf{f}(t_k) &= \begin{pmatrix} s \sin (\omega_1 t_k(s) - \alpha) + c_y \sin (\omega_1 t_k(s)) \\ s \cos (\omega_1 t_k(s) - \alpha) + c_y \cos (\omega_1 t_k(s)) \end{pmatrix} \\ &= \frac{d}{u+1} \begin{pmatrix} \omega_1 (t_k - t_0) \sin \alpha \sin (\omega_1 t_k - \alpha) + \sin (\omega_1 t_k) \\ \omega_1 (t_k - t_0) \sin \alpha \cos (\omega_1 t_k - \alpha) + \cos (\omega_1 t_k) \end{pmatrix} \in \Sigma_1, \\ \mathbf{g}(t_k) &= \begin{pmatrix} s \sin (\omega_2 t_k(s) - \alpha) - u c_y \sin (\omega_2 t_k(s)) \\ s \cos (\omega_2 t_k(s) - \alpha) - u c_y \cos (\omega_2 t_k(s)) \end{pmatrix} \\ &= -\frac{ud}{u+1} \begin{pmatrix} \omega_2 (t_k - t_0) \sin \alpha \sin (\omega_2 t_k - \alpha) + \sin (\omega_2 t_k) \\ \omega_2 (t_k - t_0) \sin \alpha \cos (\omega_2 t_k - \alpha) + \cos (\omega_2 t_k) \end{pmatrix} \in \Sigma_2. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Satz 2 Die durch die Gerade \mathbf{k} erzeugten Profillinien \mathbf{f}, \mathbf{g} sind Evolventen des Grundkreises $\mathbf{b}_f(s) = c_y \sin \alpha \left(\cos \left(\frac{s}{c_y \sin \alpha} + \omega_1 t_0 - \alpha \right), -\sin \left(\frac{s}{c_y \sin \alpha} + \omega_1 t_0 - \alpha \right) \right)^T$ bzw. $\mathbf{b}_g(s) = -uc_y \sin \alpha \left(\cos \left(\frac{s}{-uc_y \sin \alpha} + \omega_1 t_0 - \alpha \right), -\sin \left(\frac{s}{-uc_y \sin \alpha} + \omega_1 t_0 - \alpha \right) \right)^T$ mit Anfangsparameter $s_0 = -c_y \cos \alpha$ bzw. $s_0 = uc_y \cos \alpha$.

Beweis: Die Evolvente $\text{Inv}_{\mathbf{b}}$ einer ebenen Kurve \mathbf{b} kann durch Abwicklung der Bogenlänge in Gegenrichtung der Tangente bestimmt werden, [12, S.64f].

$$\text{Inv}_{\mathbf{b}}(s) = \mathbf{b}(s) - \int_{s_0}^s \left\| \frac{d}{d\sigma} \mathbf{b}(\sigma) \right\|_2 d\sigma \frac{\frac{d}{ds} \mathbf{b}(s)}{\left\| \frac{d}{ds} \mathbf{b}(s) \right\|_2}.$$

Aus $\mathbf{b}_f(s)$ und $\mathbf{b}_g(s)$ resultieren die beiden Profillinien $\mathbf{f}(s)$ bzw. $\mathbf{g}(s)$:

$$\begin{aligned} \text{Inv}_{\mathbf{b}_f}(s) &= c_y \sin \alpha \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_k - \alpha) \\ -\sin(\omega_1 t_k - \alpha) \end{pmatrix} - (s + c_y \cos \alpha) \begin{pmatrix} -\sin(\omega_1 t_k - \alpha) \\ -\cos(\omega_1 t_k - \alpha) \end{pmatrix} \\ &= c_y \begin{pmatrix} \sin(\omega_1 t_k) \\ \cos(\omega_1 t_k) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \sin(\omega_1 t_k - \alpha) \\ \cos(\omega_1 t_k - \alpha) \end{pmatrix} = \mathbf{f}(s), \\ \text{Inv}_{\mathbf{b}_g}(s) &= -uc_y \sin \alpha \begin{pmatrix} \cos(-\frac{\omega_1}{u} t_k - \alpha) \\ -\sin(-\frac{\omega_1}{u} t_k - \alpha) \end{pmatrix} - (s - uc_y \cos \alpha) \begin{pmatrix} -\sin(-\frac{\omega_1}{u} t_k - \alpha) \\ -\cos(-\frac{\omega_1}{u} t_k - \alpha) \end{pmatrix} \\ &= -uc_y \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t_k) \\ \cos(\omega_2 t_k) \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t_k - \alpha) \\ \cos(\omega_2 t_k - \alpha) \end{pmatrix} = \mathbf{g}(s). \end{aligned}$$

□

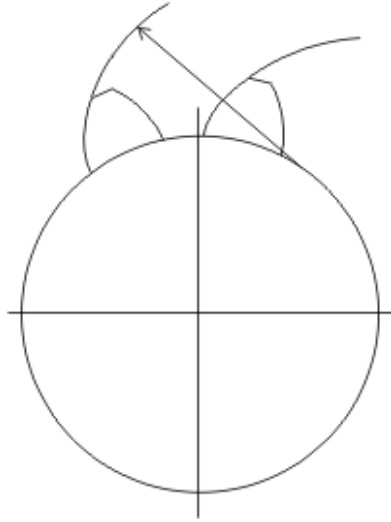


Abbildung 2.5.: Die Abwicklung einer Evolvente vom Grundkreis.

2.4.2. Berechnung des Kontaktwegs

Wir nehmen die Profillinie \mathbf{f} aus Gleichung 2.10 in Kapitel 2.4.1 und berechnen den Kontaktweg zu einem potentiell verschiedenen Achsabstand \hat{d} bei identischem Übersetzungsverhältnis u .

$$\mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} s \sin \left(\frac{\frac{d}{u+1} \sin \alpha}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \omega_1 t_0 - \alpha \right) + \frac{d}{u+1} \sin \left(\frac{\frac{d}{u+1} \sin \alpha}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \omega_1 t_0 \right) \\ s \cos \left(\frac{\frac{d}{u+1} \sin \alpha}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \omega_1 t_0 - \alpha \right) + \frac{d}{u+1} \cos \left(\frac{\frac{d}{u+1} \sin \alpha}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \omega_1 t_0 \right) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\hat{d}}{u+1} \end{pmatrix}.$$

Für die Berechnung der Kontaktfunktion benötigen wir zusätzlich die Ableitung $\mathbf{f}'(s)$ der Profillinie.

$$\begin{aligned} \mathbf{f}'(s) &= \frac{d}{ds} \mathbf{f}(s) = \frac{s}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\frac{d}{u+1} \sin \alpha}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \omega_1 t_0 - \alpha \right) \\ - \sin \left(\frac{\frac{d}{u+1} \sin \alpha}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \omega_1 t_0 - \alpha \right) \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{\sin \alpha} \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\frac{d}{u+1} \sin \alpha}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \omega_1 t_0 \right) (-\sin^2 \alpha + 1) + \sin \left(\frac{\frac{d}{u+1} \sin \alpha}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \omega_1 t_0 \right) \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin \left(\frac{\frac{d}{u+1} \sin \alpha}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \omega_1 t_0 \right) (+\cos^2 \alpha - 1) + \cos \left(\frac{\frac{d}{u+1} \sin \alpha}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \omega_1 t_0 \right) \sin \alpha \cos \alpha \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{s}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \cot \alpha \right) \begin{pmatrix} \cos \left(\frac{\frac{d}{u+1} \cos \alpha}{\frac{d}{u+1} \cos \alpha} + \omega_1 t_0 - \alpha \right) \\ - \sin \left(\frac{\frac{d}{u+1} \cos \alpha}{\frac{d}{u+1} \cos \alpha} + \omega_1 t_0 - \alpha \right) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nach Gleichung (2.2) gilt für die Kontaktfunktion:

$$\begin{aligned} \omega_1 t_k(s) &= \pm \arcsin \left(\frac{u+1}{\hat{d}} f_r(s) \cos(f_\varphi(s) - f'_\varphi(s)) \right) - f'_\varphi \\ &= \pm \arcsin \left(\frac{u+1}{\hat{d}} \frac{\mathbf{f}^T(s) \mathbf{f}'(s)}{f'_r(s)} \right) - f'_\varphi \\ &= \frac{s}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} + \omega_1 t_0 - \alpha \pm \arcsin \left(\frac{d}{\hat{d}} \sin \alpha \right). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Gleichung (2.11) legt nahe, dass es sich bei der ersten Lösung um die gesuchte Außenverzahnung handelt. Wir verwenden die Kontaktfunktion um mit Gleichung (2.3) den zur

Profillinie \mathbf{f} gehörenden Kontaktweg \mathbf{k}_f zu berechnen.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{k}_f(t_k) &= \begin{pmatrix} f_x \cos(\omega_1 t_k) - f_y \sin(\omega_1 t_k) \\ f_x \sin(\omega_1 t_k) + f_y \cos(\omega_1 t_k) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} s \sin\left(\mp \arcsin\left(\frac{d}{\hat{d}} \sin \alpha\right)\right) + \frac{d}{u+1} \sin\left(\alpha \mp \arcsin\left(\frac{d}{\hat{d}} \sin \alpha\right)\right) \\ s \cos\left(\mp \arcsin\left(\frac{d}{\hat{d}} \sin \alpha\right)\right) + \frac{d}{u+1} \cos\left(\alpha \mp \arcsin\left(\frac{d}{\hat{d}} \sin \alpha\right)\right) \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} s + \frac{\frac{d}{u+1} \sin\left(\alpha \mp \arcsin\left(\frac{d}{\hat{d}} \sin \alpha\right)\right)}{\sin\left(\mp \arcsin\left(\frac{d}{\hat{d}} \sin \alpha\right)\right)} \\ \frac{\frac{d}{u+1} \cos\left(\alpha \mp \arcsin\left(\frac{d}{\hat{d}} \sin \alpha\right)\right)}{\cos\left(\mp \arcsin\left(\frac{d}{\hat{d}} \sin \alpha\right)\right)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\hat{d}}{u+1} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} s - \frac{c_y \sin(\alpha - \hat{\alpha})}{\sin \hat{\alpha}} \\ -\frac{\sin \hat{\alpha}}{\cos \hat{\alpha}} \end{pmatrix} + \hat{\mathbf{c}} \in \Sigma_0 \quad \text{mit } \hat{\alpha} = \pm \arcsin\left(\frac{d}{\hat{d}} \sin \alpha\right).
 \end{aligned}$$

Nun nehmen wir auch die zweite Profillinie \mathbf{g} aus Kapitel 2.4.1 und berechnen analog den zugehörigen Kontaktweg \mathbf{k}_g bei Achsabstand \hat{d} mit Übersetzungsverhältnis u .

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}(s) &= \begin{pmatrix} s \sin\left(\frac{\frac{-ud}{u+1} \sin \alpha}{\sin \alpha} + \omega_2 t_0 - \alpha\right) + \frac{-ud}{u+1} \sin\left(\frac{\frac{-ud}{u+1} \sin \alpha}{\sin \alpha} + \omega_2 t_0\right) \\ s \cos\left(\frac{\frac{-ud}{u+1} \sin \alpha}{\sin \alpha} + \omega_2 t_0 - \alpha\right) + \frac{-ud}{u+1} \cos\left(\frac{\frac{-ud}{u+1} \sin \alpha}{\sin \alpha} + \omega_2 t_0\right) \end{pmatrix}, \\
 \mathbf{g}'(s) &= \begin{pmatrix} \frac{s}{\frac{-ud}{u+1} \sin \alpha} + \cot \alpha \\ -\sin\left(\frac{\frac{-ud}{u+1} \cos \alpha}{\cos \alpha} + \omega_2 t_0 - \alpha\right) \end{pmatrix}, \\
 \omega_2 t_k(s) &= \frac{s}{\frac{-ud}{u+1} \sin \alpha} + \omega_2 t_0 - \alpha \pm \arcsin\left(\frac{d}{\hat{d}} \sin \alpha\right), \\
 \mathbf{k}_g(s) &= \begin{pmatrix} s + u \frac{c_y \sin(\alpha - \hat{\alpha})}{\sin \hat{\alpha}} \\ -\frac{\sin \hat{\alpha}}{\cos \hat{\alpha}} \end{pmatrix} + \hat{\mathbf{c}} = \mathbf{k}_f \begin{pmatrix} s - d \frac{\sin(\alpha - \hat{\alpha})}{\sin \hat{\alpha}} \\ \frac{\sin \hat{\alpha}}{\cos \hat{\alpha}} \end{pmatrix} \in \Sigma_0.
 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass es sich bei beiden Kontaktwegen um Parametrisierungen einer Gerade durch den Wälzpunkt $\hat{\mathbf{c}}$ mit Eingriffswinkel $\hat{\alpha}$ handelt und folgern:

Satz 3 *Konjugierte Evolventenverzahnungen bleiben auch bei einer Veränderung des Achsabstands zueinander konjugierte Evolventenverzahnungen.*

Diese Eigenschaft bezeichnet man als Invarianz oder Unempfindlichkeit der Evolventenverzahnung gegenüber Änderungen des Achsabstands. Der Eingriffswinkel ändert sich wie beschrieben. Die Profilüberdeckung der Verzahnung verkleinert sich durch die Translation des Parameters s , wie wir im nächsten Kapitel sehen werden.

2.4.3. Berechnung der Profilüberdeckung

Wie in Kapitel 2.3.4 beschrieben, können wir aus der Kontaktfunktion (2.8) die Profilüberdeckung einer Evolventenverzahnung berechnen. Wir gehen zuerst von einer Verzahnung ohne Achsabstandsänderung mit dem Parameter s_a des ersten Kontaktpunkts und dem Parameter s_e des letztem Kontaktpunkts aus. Die Profilüberdeckung ϵ_α erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned}\epsilon_\alpha &= \frac{n_1 \omega_1 (t(s_e) - t(s_a))}{2\pi} = \frac{n_1}{2\pi} \frac{s_e - s_a}{c_y \sin \alpha} \\ &= \frac{n_2 \omega_2 (t(s_e) - t(s_a))}{2\pi} = \frac{n_2}{2\pi} \frac{s_e - s_a}{-u c_y \sin \alpha}.\end{aligned}$$

Wie in Kapitel 2.4.2 beschrieben verschiebt sich durch eine Veränderung des Achsabstands der Parameterbereich des Kontaktwegs der Profillinie \mathbf{f} auf $\left[s_a - \frac{c_y \sin(\alpha - \hat{\alpha})}{\sin \hat{\alpha}}, s_e - \frac{c_y \sin(\alpha - \hat{\alpha})}{\sin \hat{\alpha}} \right]$ und der Profillinie \mathbf{g} auf $\left[s_a + u \frac{c_y \sin(\alpha - \hat{\alpha})}{\sin \hat{\alpha}}, s_e + u \frac{c_y \sin(\alpha - \hat{\alpha})}{\sin \hat{\alpha}} \right]$. Gehen wir von einer technisch relevanten Vergrößerung des Achsabstands aus, so steht für die gemeinsame Nutzflanke nur noch der Bereich $[\hat{s}_a, \hat{s}_e] := \left[s_a + u \frac{c_y \sin(\alpha - \hat{\alpha})}{\sin \hat{\alpha}}, s_e - \frac{c_y \sin(\alpha - \hat{\alpha})}{\sin \hat{\alpha}} \right]$ zur Verfügung. Die Profilüberdeckung $\epsilon_{\hat{\alpha}}$ verkleinert sich daher wie folgt:

$$\begin{aligned}\epsilon_{\hat{\alpha}} &= \frac{n_1}{2\pi} \frac{\hat{s}_e - \hat{s}_a}{\hat{c}_y \sin \hat{\alpha}} \\ &= \epsilon_\alpha - \frac{n_1}{2\pi} (u + 1) \frac{\sin(\alpha - \hat{\alpha})}{\sin^2 \hat{\alpha}}.\end{aligned}$$

2.5. Schrägverzahnung beim Stirnrad

Bisher haben wir das Stirnradpaar ausschließlich im Stirnschnitt betrachtet. Für die ebene Kinematik und das Verzahnungsgesetz reicht diese Darstellung vollkommen aus. Sobald wir jedoch äußere Eigenschaften wie die Kräfte auf die Getriebeachsen oder das allgemeine Verlagerungsverhalten betrachten, müssen wir die verschiedenen Stirnschnitte wieder zu einem dreidimensionalen Stirnrad zusammensetzen. Im einfachsten Fall setzen wir die Profillinien $\mathbf{f}(h)$ der unterschiedlichen Schnitthöhen $h \in [0, b]$ übereinander in gerader Linie zusammen und erhalten ein *geradverzahntes Stirnrad* der Zahnbreite b .

In Kapitel 2.3.2 wurde die Integrationskonstante $t_0 = t_k(s_0)$ eingeführt. Mit dieser Bezugsgröße ist es möglich den Zeitpunkt des Kontakts eines Bezugspunktes s_0 festzulegen. Bei einer einheitlichen Wahl des Bezugspunktes in allen Stirnschnitten wird die Profillinie $\mathbf{f}(h)$ um den Winkel $\omega_1 t_0(h)$ verdreht. Dies kann als Drehung der Stirnschnitte gegeneinander um die Drehachse des ersten Stirnrads aufgefasst werden. Wir erhalten damit die Flankenlinie $[0, h] \ni h \mapsto \omega_1 t_0(h) \in [0, 2\pi)$. In der Praxis wird die Flankenlinie häufig über den *Schrägungswinkel* $\tan \beta(h) = \frac{d}{dh} \omega_1 t_0(h)$ angegeben. Bei einem konstanten Schrägungswinkel erhalten wir ein *schrägverzahntes Stirnrad*. Eine Schrägverzahnung ermöglicht auch bei Profilüberdeckungen $\epsilon_\alpha < 1$ eine kontinuierlichere Kraftübertragung

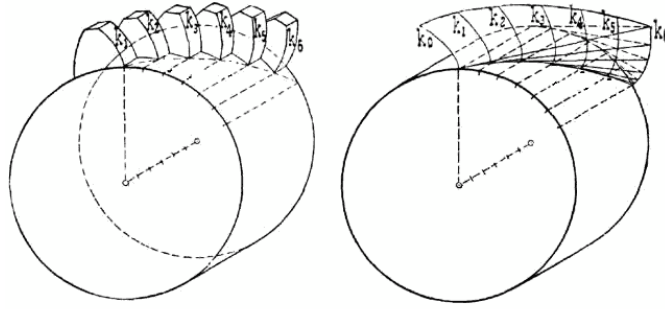


Abbildung 2.6.: Die Entwicklung eines schrägverzahnten Strinrads aus der Verdrehung einzelner Stirnschnitte.

während der Abrollung des Stirnradpaares. Während die Profilüberdeckung die Dauer des Kontakts in einem Stirnschnitt wiedergibt, beschreibt die Sprungüberdeckung $\epsilon_\beta := \frac{n_1}{2\pi} (\max(\omega_1 t_0(h)) - \min(\omega_1 t_0(h)))$ die Dauer des Kontakts entlang der Zahnbreite. Insgesamt addieren sich beide Überdeckungen zur Gesamtüberdeckung $\epsilon = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta$ welche der praxisrelevanten Gesamtdauer des Kontakts Rechnung trägt.

2.6. Die erzeugende Zahnstange

In diesem Kapitel leiten wir die Verzahnung einer Zahnstange her, indem wir den Achsabstand d vergrößern während wir den Wälzpunkt \mathbf{c} fixiert halten. Da der Ursprung $\mathbf{o}_2 = (0, d)^T$ des Koordinatensystems Σ_2 mit dem Achsabstand ins Unendliche wandert, betrachten wir das verschobene Koordinatensysteme Σ_c mit dem Ursprung $\mathbf{o}_c := \mathbf{o}_2 + \mathbf{E}_2(0, -d + c_y)^T$.

$$\Sigma_c = \left\{ \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \middle| \mathbf{o}_c + \mathbf{E}_c \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \mathbf{E}_c(t) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t) & -\sin(\omega_2 t) \\ \sin(\omega_2 t) & \cos(\omega_2 t) \end{pmatrix} \right\}.$$

Zu einem Zeitpunkt t beträgt der Bogenabstand zum Wälzpunkt auf dem zweiten Wälzkreis $\omega_2 t(d - c_y)$. Während die Krümmung des zweiten Wälzkreises $\varepsilon := (d - c_y)^{-1}$ gegen Null geht, soll der Bogenabstand konstant dem des ersten Wälzkreises entsprechen: $\omega_2 t \varepsilon^{-1} = -\omega_1 t c_y =: v_c t$. Damit gilt für den Ursprung \mathbf{o}_c und für die Einheitsvektoren \mathbf{E}_c :

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{o}_c &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\sin(v_c t \varepsilon)}{\varepsilon} \\ c_y + \frac{1 - \cos(v_c t \varepsilon)}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} v_c t \cos(v_c t \varepsilon) \\ c_y + v_c t \sin(v_c t \varepsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_c t \\ c_y \end{pmatrix}, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{E}_c &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \cos(v_c t \varepsilon) & -\sin(v_c t \varepsilon) \\ \sin(v_c t \varepsilon) & \cos(v_c t \varepsilon) \end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Im Grenzfalle verhält sich damit das Koordinatensystem Σ_c wie folgt:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Sigma_c = \left\{ \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \middle| \mathbf{o}_c + \mathbf{E}_c \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ mit } \mathbf{o}_c = \begin{pmatrix} v_c t \\ c_y \end{pmatrix}, \mathbf{E}_c = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Beim Übergang des Koordinatensystems Σ_2 mit der zugrundeliegenden Rotation in das linear bewegte Koordinatensysteme $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \Sigma_c$ bleibt der Wälzpunkt \mathbf{c} als Momentanpol der Gleitgeschwindigkeit und damit das Verzahnungsgesetz unverändert. Dies lässt sich an der Gleitgeschwindigkeit \mathbf{v}_g zeigen:

$$\begin{aligned} \Sigma_2 \ni \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{v}_g &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\omega_1 - \omega_2(\varepsilon)) \begin{pmatrix} -(y_0 + c_y) \\ x_0 \end{pmatrix} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (u(\varepsilon) + 1) \omega_2(\varepsilon) \begin{pmatrix} y_0 + c_y \\ -x_0 \end{pmatrix} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} v_c \varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon c_y} + 1 \right) \begin{pmatrix} y_0 + c_y \\ -x_0 \end{pmatrix} = -\frac{v_c}{c_y} \begin{pmatrix} -(y_0 + c_y) \\ x_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit können wir die Profillinie der Zahnstange als Grenzfall der Profillinie $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{g} \in \Sigma_c$ berechnen. Wenn der Kontaktweg \mathbf{k} vorgegeben ist verwenden wir Gleichung (2.6) mit der zugehörigen Kontaktfunktion t_k :

$$\begin{aligned} \Sigma_c \ni \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{g}(t_k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} k_x \cos(\omega_2(\varepsilon)t_k) + (k_y - d(\varepsilon)) \sin(\omega_2(\varepsilon)t_k) \\ -k_x \sin(\omega_2(\varepsilon)t_k) + (k_y - d(\varepsilon)) \cos(\omega_2(\varepsilon)t_k) + (d(\varepsilon) - c_y) \end{pmatrix} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} k_x \cos(v_c t_k \varepsilon) + (k_y - \varepsilon^{-1} - c_y) \sin(v_c t_k \varepsilon) \\ -k_x \sin(v_c t_k \varepsilon) + (k_y - \varepsilon^{-1} - c_y) \cos(v_c t_k \varepsilon) + \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_x - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sin(v_c t_k \varepsilon)}{\varepsilon} \\ k_y - c_y - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\cos(v_c t_k \varepsilon) - 1}{\varepsilon} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x - v_c t_k \\ k_y - c_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x + \omega_1 t_k c_y \\ k_y - c_y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wenn die Profillinie \mathbf{f} vorgegeben ist benötigen wir dafür Gleichung (2.3):

$$\begin{aligned} \Sigma_c \ni \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{g}(t_k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_r \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi + (\omega_1 - \omega_2(\varepsilon))t_k) \\ \sin(f_\varphi + (\omega_1 - \omega_2(\varepsilon))t_k) \end{pmatrix} - d(\varepsilon) \begin{pmatrix} \sin(\omega_2(\varepsilon)t_k) \\ \cos(\omega_2(\varepsilon)t_k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ d(\varepsilon) - c_y \end{pmatrix} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_r \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi - \frac{\varepsilon^{-1} + c_y}{c_y} v_c t_k \varepsilon) \\ \sin(f_\varphi - \frac{\varepsilon^{-1} + c_y}{c_y} v_c t_k \varepsilon) \end{pmatrix} - (\varepsilon^{-1} + c_y) \begin{pmatrix} \sin(v_c t_k \varepsilon) \\ \cos(v_c t_k \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \varepsilon^{-1} \end{pmatrix} \\ &= f_r \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi - \frac{v_c t_k}{c_y}) \\ \sin(f_\varphi - \frac{v_c t_k}{c_y}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ c_y \end{pmatrix} - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \frac{\sin(v_c t_k \varepsilon)}{\varepsilon} \\ \frac{\cos(v_c t_k \varepsilon) - 1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \\ &= f_r \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi - \frac{v_c t_k}{c_y}) \\ \sin(f_\varphi - \frac{v_c t_k}{c_y}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -v_c t_k \\ c_y \end{pmatrix} = f_r \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi + \omega_1 t_k) \\ \sin(f_\varphi + \omega_1 t_k) \end{pmatrix} + c_y \begin{pmatrix} \omega_1 t_k \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Insbesondere können wir die Profillinie der Zahnstange einer Evolventenverzahnung aus

Gleichung (2.10) berechnen.

$$\begin{aligned}
 \Sigma_c \ni \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathbf{g}(t_k) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} s \sin(\omega_2(\varepsilon)t_k(s) - \alpha) - u(\varepsilon)c_y \sin(\omega_2(\varepsilon)t_k(s)) \\ s \cos(\omega_2(\varepsilon)t_k(s) - \alpha) - u(\varepsilon)c_y \cos(\omega_2(\varepsilon)t_k(s)) + (d(\varepsilon) - c_y) \end{pmatrix} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} s \sin\left(\frac{s}{-u(\varepsilon)c_y \sin \alpha} - \alpha\right) - u(\varepsilon)c_y \sin\left(\frac{s}{-u(\varepsilon)c_y \sin \alpha}\right) \\ s \cos\left(\frac{s}{-u(\varepsilon)c_y \sin \alpha} - \alpha\right) - u(\varepsilon)c_y \cos\left(\frac{s}{-u(\varepsilon)c_y \sin \alpha}\right) + (d(\varepsilon) - c_y) \end{pmatrix} \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{pmatrix} s \sin\left(\frac{-\varepsilon s}{\sin \alpha} - \alpha\right) - \frac{\sin\left(\frac{-\varepsilon s}{\sin \alpha}\right)}{\varepsilon} \\ s \cos\left(\frac{-\varepsilon s}{\sin \alpha} - \alpha\right) - \frac{\cos\left(\frac{-\varepsilon s}{\sin \alpha}\right) - 1}{\varepsilon} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -s \sin \alpha + \frac{s}{\sin \alpha} \\ s \cos \alpha \end{pmatrix} = s \cot \alpha \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ -\sin \alpha \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Wir sehen, dass die Profillinie der Zahnstange einer Evolventenverzahnung eine Gerade mit Steigungswinkel $\alpha - \frac{\pi}{2}$ ist.

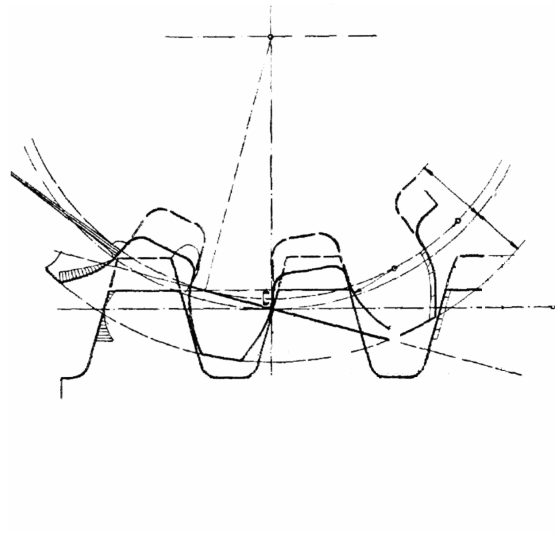


Abbildung 2.7.: Ein evolventenverzahntes Stirnrad und die erzeugende Zahnstange.

3. Kegelradpaare

Aufbauend auf der in Kapitel 2 beschriebenen Analyse von Stirnradpaaren, wird in diesem Kapitel eine Analyse für Kegelradpaare hergeleitet. Zum direkten Vergleich der entsprechenden Analogien sind die Kapitel identisch aufgebaut, und gleichen sich weitest möglich.

Ein *Kegelradpaar* ist ein Wälzgetriebe aus zwei Zahnrädern mit sich schneidenden Drehachsen. Der Schnittwinkel δ wird als *Achsenwinkel* bezeichnet und kann in einem sinnvollen Rahmen beliebige Werte annehmen:

$$\delta \in (0, \pi).$$

Er liegt in Theorie und Praxis jedoch in der Regel bei $\delta = \frac{\pi}{2}$. Der Grenzfall $\delta = 0$ wird in Kapitel 3.7 als Stirnradgetriebe identifiziert. Im Grenzfall $\delta = \pi$ liegt eine Kupplung vor, die in dieser Arbeit nicht weiter von Interesse sein wird.

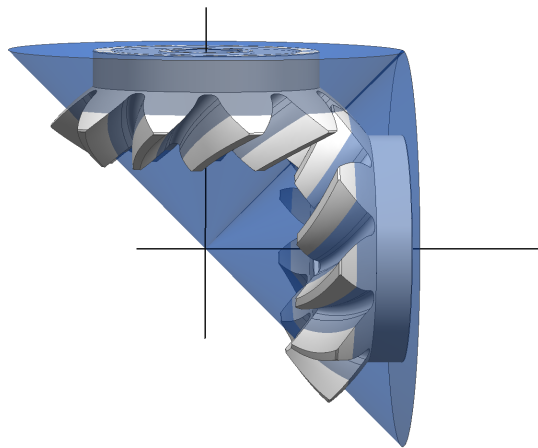


Abbildung 3.1.: Ein Kegelradpaar mit zugehörigen Wälzflächen bei einem Achsenwinkel von $\delta = \frac{\pi}{2}$.

Die Bezugsfläche eines Kegelrads ist nach [17] ein Kreiskegel. Genaugenommen dient nur die Mantelfläche des Kreiskegelstumpfs als Bezugsfläche. Wir betrachten ausschließlich Kegelradpaare ohne Profilverschiebung wie in Kapitel 1.2.2 beschrieben. Die Bezugsflächen der Kegelräder sind somit auch die Wälzflächen des Getriebes. Hypoidradpaare, die durch windschiefe Drehachsen entstehen, sind keine Wälzgetriebe. Sie besitzen eine grundverschiedene Kinematik, und sind daher nicht Gegenstand dieser Arbeit.

3.1. Ein Problem der sphärischen Kinematik

Wir betrachten zwei Punkte des Kegelradpaares die zu einem beliebigen Zeitpunkt während der Abrollung in Kontakt zueinander kommen. Verfolgen wir nun die Bewegung dieses Kontaktpunktpaares, so erhalten wir durch die Rotationen der beiden Kegelräder um ihre jeweilige Drehachse zwei Kreise. Da die Kontaktpunkte einen konstanten Abstand r zum Kreuzungspunkt der Drehachsen halten, liegen die Kreise auf einer gemeinsamen Kugeloberfläche (Sphäre). Die Kugeloberfläche ist durch ihre Lage auf der Zahnbreite, also ihrem *Radius* $r \in \mathbb{R}_+$, vollständig charakterisiert. Wir bezeichnen diese Betrachtung als *Kugelschnitt* des Radius r . Die Abrollung eines Kegelradpaares kann somit in einzelnen voneinander unabhängigen Sphären betrachtet werden. Man spricht hierbei von einem Problem der *sphärischen Kinematik*, [13].

Analog zum Stirnschnitt bei Stirnradpaaren kann die Analyse der Abrollung damit o.B.d.A. unabhängig von der Zahnbreite, oder bildlich gesprochen für unendlich dünne Zähne, erfolgen.

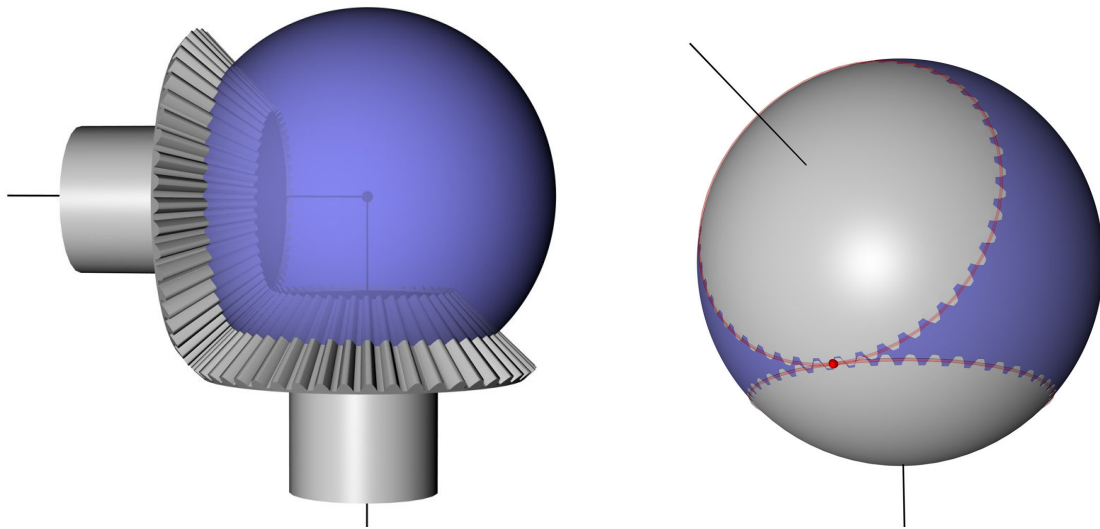


Abbildung 3.2.: Ein Kegelradpaar mit der Trajektorie eines Kontaktpunktpaares und dem zugehörigen Kugelschnitt.

3.2. Das sphärische Verzahnungsgesetz

Das *sphärische Verzahnungsgesetz* ist, analog zum ebenen Verzahnungsgesetz, eine geometrische Bedingung an die Zahnform eines Kegelradpaares, die einen kontinuierlichen Kontakt in einem Kugelschnitt ermöglicht. In [21, S.35] und anderen Standardwerken der Verzahnungstechnik wird ein kontinuierlicher Kontakt nicht in jedem Kugelschnitt, sondern nur einmalig über der gesamten Zahnbreite gefordert. Dafür wird das Kegelradpaar in einem ebenen Schnitt ähnlich dem Stirnschnitt betrachtet und das ebene Verzahnungsgesetz angewendet. Diese Herangehensweise geht auf die Tredgoldsche Näherung zurück. Dabei nutzt man statt des Kugelschnitts einen zum Wälzkegel senkrecht stehenden Ergänzungskegel, um eine im Kontaktbereich angenäherte Strinradverzahnung als Ersatz der Kegelradverzahnung zu erzeugen, [32, S.28,69]. Diese Herangehensweise führt in der Theorie zu einem Punktkontakt der beiden Kegelräder. In Abschnitt 1.3.3 wird beschrieben wie dieser theoretische Punktkontakt zu kleineren Kontaktflächen in der Praxis führt. In dieser Arbeit wird nun eine analytische Beschreibung des Verzahnungsgesetz hergeleitet, das die bekannten geometrischen Zusammenhänge nutzt, [37], um in jedem Kugelschnitt einen kontinuierlichen Kontakt zu gewährleisten. Dadurch entsteht in der Theorie analog zu Stirnradpaaren zu jedem Zeitpunkt ein Linienkontakt entlang der Zahnbreite.

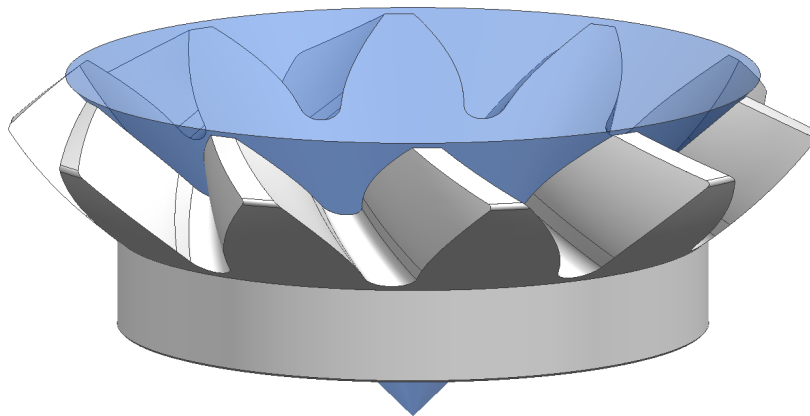


Abbildung 3.3.: Der Ergänzungskegel einer Kegelradverzahnung

3.2.1. Verwendete Koordinatensysteme

Als Bezugssystem definieren wir ein Koordinatensystem Σ_0 mit Ursprung im *Kreuzungspunkt der Drehachsen* \mathbf{o} , die z -Achse von Σ_0 entspreche der Drehachse des *ersten Kegelrads* K_1 . Analog dazu legen wir auch entlang der Drehachse des *zweiten Kegelrads* K_2 ein Koordinatensystem Σ_3 . Zu jedem kartesischen Koordinatensystem Σ_i definieren wir ein zugehöriges Kugelkoordinatensystem Θ_i .

$$\begin{aligned}\Sigma_0 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \middle| \mathbf{o} + \mathbf{E}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}, \\ \Sigma_3 &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \middle| \mathbf{o} + \mathbf{E}_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \right\}, \\ \Theta_i &:= \left\{ (r_i, \varphi_i, \vartheta_i) \middle| \mathbf{o} + r_i \mathbf{e}_1 \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_i \sin \vartheta_i & -\sin \varphi_i & -\cos \varphi_i \cos \vartheta_i \\ \sin \varphi_i \sin \vartheta_i & \cos \varphi_i & -\sin \varphi_i \cos \vartheta_i \\ \cos \vartheta_i & 0 & \sin \vartheta_i \end{pmatrix} \mathbf{E}_i \right\}.\end{aligned}$$

K_1 rotiere mit einer *Drehgeschwindigkeit* $\omega_1 := \frac{d}{dt}\varphi_1$ um \mathbf{e}_{z_0} . K_2 rotiere mit dazu proportionaler *Drehgeschwindigkeit* $\omega_2 := -\frac{\omega_1}{u} = \frac{d}{dt}\varphi_2$ im entgegengesetzten Drehsinn um \mathbf{e}_{z_3} . Die Variable t repräsentiert die *Zeit*, der Winkel $0 < \delta < \pi$ wird als Achsenwinkel und die Proportionalitätskonstante u wird als *Übersetzungsverhältnis* bezeichnet. Ein konstantes Übersetzungsverhältnis ist nach [25, S.34ff] bei fast allen Getriebeanwendungen erwünscht, und wird insbesondere bei Leistungsgetrieben gefordert. Zu jedem Kegelrad definieren wir ein mitrotierendes Koordinatensystem $\Sigma_1(t)$ bzw. $\Sigma_2(t)$, so dass $\Sigma_1(0) = \Sigma_0$ bzw. $\Sigma_2(0) = \Sigma_3$ gilt.

$$\begin{aligned}\Sigma_1(t) &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \middle| \mathbf{o} + \mathbf{E}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{E}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t & 0 \\ \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}_0 \right\}, \\ \Sigma_2(t) &:= \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \middle| \mathbf{o} + \mathbf{E}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \mathbf{E}_2(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega_2 t & -\sin \omega_2 t & 0 \\ \sin \omega_2 t & \cos \omega_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}_3 \right\}.\end{aligned}$$

In einem Kugelschnitt bilden die Nutzflanken der beiden Kegelhäder sphärische Kurven \mathbf{f} und \mathbf{g} , die wir als *Profillinien* bezeichnen. Sie können von der Zeitvariable t unabhängig im mitrotierenden Koordinatensystem Σ_1 bzw. Σ_2 beschrieben werden. Das sphärische Verzahnungsgesetz garantiert, dass sich die beiden Zahnprofillinien in einem Kontaktpunkt $\mathbf{k}(t_k)$ zu einem Zeitpunkt t_k berühren. Die Trajektorie des Kontaktpunkts in Σ_0 bezeichnen wir als *Kontaktweg* \mathbf{k} . Im Optimalfall sind sowohl der Kontaktweg als auch die Profillinien nach dem *Kontaktzeitpunkt* parametrisiert.

$$\begin{aligned}\mathbf{k} : \quad \mathbb{R} \ni t_k &\longmapsto \mathbf{k}(t_k) \in \Sigma_0, \\ \mathbf{f} : \quad \mathbb{R} \ni t_k &\longmapsto \mathbf{f}(t_k) \in \Sigma_1, \\ \mathbf{g} : \quad \mathbb{R} \ni t_k &\longmapsto \mathbf{g}(t_k) \in \Sigma_2.\end{aligned}$$

Die Umrechnungen zwischen $\mathbf{k}, \mathbf{f}, \mathbf{g}$ und die Parametrisierung nach dem Kontaktzeitpunkt werden in Kapitel 3.3 mithilfe des sphärischen Verzahnungsgesetzes ausführlich erläutert. Die *Koordinatentransformation* von Σ_i nach Σ_j bezeichnen wir mit κ_{ij} .

$$\begin{aligned}\kappa_{30} : \Sigma_3 \ni \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \cos \delta + z_3 \sin \delta \\ -y_3 \sin \delta + z_3 \cos \delta \end{pmatrix} = \mathbf{E}_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \Sigma_0, \\ \kappa_{10} : \Sigma_1 \ni \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \cos(\omega_1 t) - y_1 \sin(\omega_1 t) \\ x_1 \sin(\omega_1 t) + y_1 \cos(\omega_1 t) \\ z_1 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \Sigma_0, \\ \kappa_{23} : \Sigma_2 \ni \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} &\longmapsto \begin{pmatrix} x_2 \cos(\omega_2 t) - y_2 \sin(\omega_2 t) \\ x_2 \sin(\omega_2 t) + y_2 \cos(\omega_2 t) \\ z_2 \end{pmatrix} = \mathbf{E}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \Sigma_3.\end{aligned}$$

3.2.2. Die Gleitgeschwindigkeit

Die in der Verzahnung eines Getriebes auftretende *Gleitgeschwindigkeit* \mathbf{v}_g ist nach [11, S.60f] die Differenz der Tangentialgeschwindigkeiten der Rotationen der einzelnen Zahnräder. Um die *Tangentialgeschwindigkeit* \mathbf{v}_1 von K_1 zu errechnen betrachten wir einen Fixpunkt $\mathbf{p}_1 \in \Sigma_1$, und bilden die erste Ableitung nach der Zeit in Σ_0 .

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \frac{d}{dt} \mathbf{p}_1 = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \cos(\varphi_1 + \omega_1 t) \sin \vartheta_1 \\ r \sin(\varphi_1 + \omega_1 t) \sin \vartheta_1 \\ r \cos \vartheta_1 \end{pmatrix} \\ &= \omega_1 \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi_1 + \omega_1 t) \sin \vartheta_1 \\ r \cos(\varphi_1 + \omega_1 t) \sin \vartheta_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_1 \begin{pmatrix} -y_0 \\ x_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \Sigma_0. \end{aligned}$$

Analog bestimmen wir die Tangentialgeschwindigkeit \mathbf{v}_2 der Rotation von K_2 :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= \frac{d}{dt} \mathbf{p}_2 = \frac{d}{dt} \kappa_{30} \begin{pmatrix} r \cos(\varphi_2 + \omega_2 t) \sin \vartheta_2 \\ r \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) \sin \vartheta_2 \\ r \cos \vartheta_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \cos(\varphi_2 + \omega_2 t) \sin \vartheta_2 \\ r \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) \sin \vartheta_2 \cos \delta + r \cos \vartheta_2 \sin \delta \\ -r \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) \sin \vartheta_2 \sin \delta + r \cos \vartheta_2 \cos \delta \end{pmatrix} \\ &= \omega_2 \begin{pmatrix} -r \sin(\varphi_2 + \omega_2 t) \sin \vartheta_2 \\ r \cos(\varphi_2 + \omega_2 t) \sin \vartheta_2 \cos \delta \\ -r \cos(\varphi_2 + \omega_2 t) \sin \vartheta_2 \sin \delta \end{pmatrix} = \omega_2 \begin{pmatrix} -y_0 \cos \delta + z_0 \sin \delta \\ x_0 \cos \delta \\ -x_0 \sin \delta \end{pmatrix} \in \Sigma_0. \end{aligned}$$

Als Gleitgeschwindigkeit \mathbf{v}_g aus der Perspektive von K_1 erhalten wir damit

$$\mathbf{v}_g := \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} -y_0(\omega_1 - \omega_2 \cos \delta) - z_0 \omega_2 \sin \delta \\ x_0(\omega_1 - \omega_2 \cos \delta) \\ x_0 \omega_2 \sin \delta \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Nutzen wir das Übersetzungsverhältnis $u = -\frac{\omega_1}{\omega_2}$ erhalten wir die Darstellung

$$\mathbf{v}_g = \frac{\omega_1}{u} \begin{pmatrix} -y_0(u + \cos \delta) + z_0 \sin \delta \\ x_0(u + \cos \delta) \\ -x_0 \sin \delta \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

In Kapitel 1.3.4 benötigen wir für die Berechnung des Zahnverlustfaktors H_V das *spezifische Gleiten* ζ . [21, S.39f] definiert dieses als Verhältnis der Beträge der Gleit- und Tangentialgeschwindigkeit.

$$\zeta = \frac{\|\mathbf{v}_g\|}{\|\mathbf{v}_1\|} = \sqrt{\frac{(x_0^2 + y_0^2)(u + \cos \delta)^2 - 2y_0 z_0(u + \cos \delta) \sin \delta + (x_0^2 + z_0^2) \sin^2 \delta}{(x_0^2 + y_0^2)u^2}}.$$

3.2.3. Verzahnungsgesetz

Analog zum Verzahnungsgesetz für ebene Verzahnungen fordert das *Verzahnungsgesetz für sphärische Verzahnungen*, dass in jedem Kugelschnitt die beiden Profillinien im Kontaktpunkt eine gemeinsame Normale besitzen, die einen durch das Übersetzungsverhältnis bestimmten Wälzpunkt \mathbf{c} schneidet. Zur besseren Veranschaulichung kann, wie in Abbildung 2.3, statt der gesamten Normalebene nur die geodätische Normale im Kugelschnitt betrachtet werden.

Der *Wälzpunkt* \mathbf{c} liegt in der von den beiden Drehachsen aufgespannten Ebene. Er wird durch den *Teilkegelwinkel* γ definiert welcher den Achsenwinkel δ teilt. Im Normalfall soll wie bei Stirnradpaaren ein konstantes Übersetzungsverhältnis $u = -\frac{\omega_1}{\omega_2}$ erzeugt werden. Der Wälzpunkt ist damit auch bei Kegelnrädern ein zeitunabhängiger Fixpunkt in Bezugskoordinatensystem Σ_0 .

$$\mathbf{c} := r \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \in \Sigma_0 \quad \text{mit } \gamma := \operatorname{arccot} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta} \right) = \operatorname{arccot} \left(\frac{u + \cos \delta}{\sin \delta} \right).$$

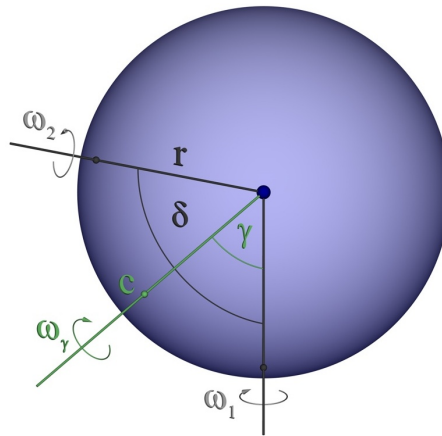


Abbildung 3.4.: Die Drehachsen, der Achsenwinkel δ und der Wälzwinkel γ .

Satz 4 (Sphärisches Verzahnungsgesetz) *In einem Kugelschnitt besitzt ein Kegelnradpaar zu einem Zeitpunkt t_k genau dann einen Kontaktpunkt $\mathbf{k}(t_k) \neq \mathbf{c}$, wenn auf jeder Profillinie \mathbf{f}, \mathbf{g} ein Punkt $\mathbf{f}(t_k) = \mathbf{g}(t_k) =: \mathbf{k}(t_k)$ existiert, sodass die folgende Gleichung erfüllt ist:*

$$(\mathbf{f}(t_k) - \mathbf{c})^T \mathbf{f}'(t_k) = 0 = (\mathbf{g}(t_k) - \mathbf{c})^T \mathbf{g}'(t_k).$$

Wird die Gleichung über ein Zeitintervall entlang einer Linie \mathbf{k} von Kontaktpunkten erfüllt, so sprechen wir von einem kontinuierlichen Punktkontakt in diesem Kugelschnitt entlang eines Kontaktwegs \mathbf{k} .

Beweis: Analog zur Herleitung von \mathbf{v}_2 definieren wir eine Rotation um die um γ verdrehte z -Achse mit Winkelgeschwindigkeit $\omega_g := \sqrt{\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \delta + \omega_2^2}$. Die Relativbewegung \mathbf{v}_g der beiden Kegelnräder kann durch diese Rotation ersetzt werden.

$$\begin{aligned}
 & \omega_g \begin{pmatrix} -y_0 \cos \gamma + z_0 \sin \gamma \\ x_0 \cos \gamma \\ -x_0 \sin \gamma \end{pmatrix} \\
 &= \omega_g \begin{pmatrix} -y_0 \cos \left(\operatorname{arccot} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta} \right) \right) + z_0 \sin \left(\operatorname{arccot} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta} \right) \right) \\ x_0 \cos \left(\operatorname{arccot} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta} \right) \right) \\ -x_0 \sin \left(\operatorname{arccot} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta} \right) \right) \end{pmatrix} \\
 &= \omega_g \begin{pmatrix} -y_0 \frac{\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta} \right)^2}} + z_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta} \right)^2}} \\ x_0 \frac{\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta} \right)^2}} \\ -x_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta} \right)^2}} \end{pmatrix} \\
 &= \sqrt{\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \delta + \omega_2^2} \begin{pmatrix} -y_0 \frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{\sqrt{\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \delta + \omega_2^2}} - z_0 \frac{\omega_2 \sin \delta}{\sqrt{\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \delta + \omega_2^2}} \\ x_0 \frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{\sqrt{\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \delta + \omega_2^2}} \\ x_0 \frac{\omega_2 \sin \delta}{\sqrt{\omega_1^2 - 2\omega_1\omega_2 \cos \delta + \omega_2^2}} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -y_0(\omega_1 - \omega_2 \cos \delta) - z_0\omega_2 \sin \delta \\ x_0(\omega_1 - \omega_2 \cos \delta) \\ x_0\omega_2 \sin \delta \end{pmatrix} = \mathbf{v}_g \in \Sigma_0.
 \end{aligned}$$

Der Punkt \mathbf{c} stellt den Momentanpol der gekoppelten Bewegung dar.

„ \Rightarrow “:

Ein Kegelradpaar besitze zu einem Zeitpunkt t_k einen Kontaktpunkt $\mathbf{k}(t_k)$. Auf den Profillinien bezeichnen wir den Kontaktpunkt mit $\mathbf{f}(t_k)$ bzw. $\mathbf{g}(t_k)$. Um ein physikalisch unmögliches Durchdringen der Zahnräder auszuschließen, muss am Kontaktpunkt die Tangente der Zahnflanke $\mathbf{f}'(t_k)$ bzw. $\mathbf{g}'(t_k)$ parallel zur Bewegungstangente \mathbf{v}_g verlaufen. Diese beschreibt eine Rotation um \mathbf{c} und steht somit senkrecht zu $(\mathbf{k}(t_k) - \mathbf{c})$.

„ \Leftarrow “:

Existiert ein Paar von Punkten $\mathbf{f}(t_k) = \mathbf{g}(t_k)$ so besitzen die Profillinien einen gemeinsamen Punkt den wir mit $\mathbf{k}(t_k)$ bezeichnen. Setzen wir diesen in die Gleichung aus Satz 4 ein, folgt, dass die Tangenten $\mathbf{f}'(t_k), \mathbf{g}'(t_k)$ in der Normalebene von $\mathbf{k}(t_k) - \mathbf{c}$ liegen. Zusammen mit der Beschränkung auf einen Kugelschnitt folgt die Parallelität von $\mathbf{f}'(t_k)$ und $\mathbf{g}'(t_k)$.

Damit ist $\mathbf{k}(t_k)$ ein Berührungspunkt der Zahnprofillinien.

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{f}(t_k) - \mathbf{c})^T \mathbf{f}'(t_k) &= 0 = (\mathbf{g}(t_k) - \mathbf{c})^T \mathbf{g}'(t_k) \implies \mathbf{f}'(t_k), \mathbf{g}'(t_k) \in (\mathbf{k}(t_k) - \mathbf{c})^\perp, \\
 \mathbf{f}^T(t_k) \mathbf{f}'(t_k) &= 0 = \mathbf{g}^T(t_k) \mathbf{g}'(t_k) \xRightarrow{\mathbf{f}(t_k) = \mathbf{g}(t_k) = \mathbf{k}(t_k)} \mathbf{f}'(t_k), \mathbf{g}'(t_k) \in \mathbf{k}^\perp(t_k), \\
 \mathbf{k} \neq \mathbf{c}, r \neq 0 &\xRightarrow{\mathbf{k}(t_k) \perp (\mathbf{k}(t_k) - \mathbf{c})} \dim \left(\mathbf{k}^\perp(t_k) \cap (\mathbf{k}(t_k) - \mathbf{c})^\perp \right) = 1, \\
 &\implies \mathbf{f}'(t_k) \parallel \mathbf{g}'(t_k).
 \end{aligned}$$

Da die Tangenten parallel zur Rotation stehen, wird die Abrollung nicht beeinträchtigt.

Unter der bei außenverzahnten Kegelradpaaren zwingenden Voraussetzung der entgegengesetzten Drehrichtungen, teilt der Teilkegelwinkel γ den Achsenwinkel δ .

$$\begin{aligned}
 0 < \gamma < \delta &\Leftrightarrow 0 < \operatorname{arccot} \left(\frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta} \right) < \delta \Leftrightarrow \frac{\omega_1 - \omega_2 \cos \delta}{-\omega_2 \sin \delta} > \frac{\cos \delta}{\sin \delta} \\
 &\Leftrightarrow -\frac{\omega_1}{\omega_2 \sin \delta} > 0 \xLeftrightarrow_{0 < \delta < \pi} \operatorname{sgn}(\omega_1) \operatorname{sgn}(\omega_2) = -1.
 \end{aligned}$$

Der Teilkegelwinkel definiert den Wälzpunkt der Verzahnung. Bei konstantem Übersetzungsverhältnis $u = -\frac{\omega_1}{\omega_2}$ bildet der Wälzpunkt einen Fixpunkt in Σ_0 .

$$\mathbf{c} = r \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{pmatrix} = \frac{r}{\sqrt{u^2 + 2u \cos \delta + 1}} \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \delta \\ u + \cos \delta \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

□

Bemerkung Findet der Kontakt im Wälzpunkt statt $\mathbf{k}(t_k) = \mathbf{c}$, reicht bereits die Parallelität der Tangenten der Zahnprofillinien $\mathbf{f}'(t_k) \parallel \mathbf{g}'(t_k)$, um die Abrollung zu ermöglichen. Durch die verschwindende Gleitgeschwindigkeit im Wälzpunkt $\mathbf{v}_g(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ ist die Orthogonalität zur Rotation trivial erfüllt. Statt einer gesonderten Betrachtung kann dieser Fall jedoch auch durch stetige Fortsetzung der Zahnprofillinien behandelt werden.

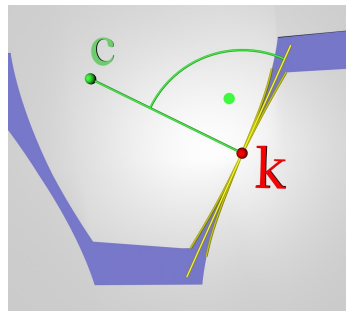


Abbildung 3.5.: Die Tangente im Kontaktpunkt \mathbf{k} steht orthogonal zum Wälzpunkt \mathbf{c} .

3.3. Berechnungen im Kugelschnitt

In Kapitel 3.2.1 wurden die beiden Profillinien \mathbf{f}, \mathbf{g} und der Kontaktweg \mathbf{k} als durch den Kontaktzeitpunkt t_k parametrisierte sphärische Kurven definiert. Im Allgemeinen ist jedoch meist nur die Form der Kurven bekannt. Darüberhinaus muss insbesondere bei Messwerten darauf geachtet werden, dass die Kurven wirklich auf einer gemeinsamen Sphäre verlaufen.

$$\|\mathbf{f}(s)\|_2 = \|\mathbf{g}(s)\|_2 = \|\mathbf{k}(s)\|_2 = r \quad \text{für alle } s.$$

Mit dem sphärischen Verzahnungsgesetz kann aus einer beliebigen, sinnvollen Parametrisierung einer der Kurven eine *Kontaktfunktion* bestimmt werden, die die Kurve entsprechend umparametrisiert. Sind die Kontaktzeitpunkte erst einmal bekannt, erfolgt die Umrechnung in die anderen Kurven durch zeitabhängige Koordinatentransformationen $\kappa(t_k)$.

Dieses Vorgehen setzt die Kenntnis des Übersetzungsverhältnisses in diesem Kugelschnitt voraus. Ist das Übersetzungsverhältnis unbekannt, wird zur Bestimmung der Kontaktfunktion eine weitere Kurve benötigt. Der für die Praxis relevante Fall, in dem beide Profillinien bekannt sind wird in Kapitel 3.3.3 untersucht.

In Kapitel 3.3.4 wird die Kontaktfunktion genutzt um die Dauer des Eingriffs zu bestimmen. Daraus ergibt sich der Profilüberdeckungsfaktor, die mittlere Anzahl der sich in einem Kugelschnitt gleichzeitig in Eingriff befindenden Zähne.

3.3.1. Mit vorgegebener Profillinie und Übersetzung

Im betrachteten Kugelschnitt sei eine der Profillinien \mathbf{f} oder \mathbf{g} mit regulärer *Parametrisierung* s vorgegeben. Es gilt also, $\frac{d}{ds}\mathbf{f}(s) \neq 0$ bzw. $\frac{d}{ds}\mathbf{g}(s) \neq 0$. Sie kann beispielsweise aus Messwerten bestimmt worden sein. Gerade in diesem Fall ist es wichtig den *Anfangspunkt* $\mathbf{f}(s_a)$ bzw. $\mathbf{g}(s_a)$ und *Endpunkt* $\mathbf{f}(s_e)$ bzw. $\mathbf{g}(s_e)$ genau festzulegen, da jeder Punkt der Profillinie mit der Gegenflanke in Eingriff gebracht wird. Die Profillinie darf daher nur der Nutzflanke der Verzahnung entsprechen. Wir nehmen zunächst an, dass es sich um die Profillinie \mathbf{f} von K_1 handelt.

$$\mathbf{f} : [s_a, s_e] \ni s \mapsto \mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} f_x(s) \\ f_y(s) \\ f_z(s) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos f_\varphi(s) \sin f_\vartheta(s) \\ \sin f_\varphi(s) \sin f_\vartheta(s) \\ \cos f_\vartheta(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_1.$$

Desweiteren sei ein Übersetzungsverhältnis $u > 0$ vorgegeben, welches den Wälzpunkt \mathbf{c} bestimmt. Wie bereits erwähnt, wird im Allgemeinen ein konstantes Übersetzungsverhältnis angestrebt. Die Formeln lassen sich jedoch auch mit nicht konstantem Übersetzungsverhältnis $u(s)$ anwenden, wenn dies z.B. beim Reverse Engineering von bestehenden Kegelradpaaren erforderlich ist.

$$\mathbf{c} = r \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Für das Verzahnungsgesetz benötigen wir die Tangente der Profillinie $\frac{d}{ds}\mathbf{f}(s)$ und die Darstellung des Wälzpunktes in Σ_1 .

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\mathbf{f}(s) &= r \frac{d}{ds}f_\vartheta(s) \begin{pmatrix} \cos f_\varphi(s) \cos f_\vartheta(s) \\ \sin f_\varphi(s) \cos f_\vartheta(s) \\ -\sin f_\vartheta(s) \end{pmatrix} + r \frac{d}{ds}f_\varphi(s) \begin{pmatrix} -\sin f_\varphi(s) \cos f_\vartheta(s) \\ \cos f_\varphi(s) \cos f_\vartheta(s) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &=: \begin{pmatrix} f'_x(s) \\ f'_y(s) \\ f'_z(s) \end{pmatrix} = \mathbf{f}'(s) =: f'_r(s) \begin{pmatrix} \cos f'_\varphi(s) \sin f'_\vartheta(s) \\ \sin f'_\varphi(s) \sin f'_\vartheta(s) \\ \cos f'_\vartheta(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_1, \\ \kappa_{01}\mathbf{c} &= \begin{pmatrix} c_x \cos(\omega_1 t) + c_y \sin(\omega_1 t) \\ -c_x \sin(\omega_1 t) + c_y \cos(\omega_1 t) \\ c_z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin(\omega_1 t) \sin \gamma \\ \cos(\omega_1 t) \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \in \Sigma_1.\end{aligned}$$

Im sphärischen Verzahnungsgesetz wird gefordert, dass die Tangente $\mathbf{f}'(s)$ in einem Kontaktpunkt orthogonal zur Richtung des Wälzpunktes $\mathbf{f}(s) - \mathbf{c}$ steht. Für eine sphärische Kurve gilt $\mathbf{f}^T \mathbf{f}' = 0$. Die Bedingung ist daher äquivalent zur Orthogonalität zum Wälzpunkt \mathbf{c} . Damit können wir die Kontaktfunktion $t_k(s)$ herleiten.

$$\begin{aligned}0 &= (\mathbf{f} - \mathbf{c}(t_k))^T \mathbf{f}' = -\mathbf{c}(t_k)^T \mathbf{f}' \\ &= r f'_r (\sin \omega_1 t \sin \gamma \cos f'_\varphi \sin f'_\vartheta + \cos \omega_1 t \sin \gamma \sin f'_\varphi \sin f'_\vartheta + \cos \gamma \cos f'_\vartheta).\end{aligned}$$

Das gilt genau dann wenn,

$$-\cos f'_\vartheta \cos \gamma = \sin \gamma \sin f'_\vartheta \sin (f'_\varphi + \omega_1 t). \quad (3.1)$$

Wenn wir diese Gleichung nach $\omega_1 t_k$ auflösen und die Definition von γ einsetzen, erhalten wir die folgenden zwei Basislösungen. Dieselben Lösungen erhalten wir bei einem Übersetzungsverhältnis $\hat{u} := -u - 2 \cos \delta$. Für den praxisrelevanten Fall $\gamma < \pi - \delta \Leftrightarrow u > -2 \cos \delta \Leftrightarrow \hat{u} < 0$ handelt es sich daher bei den beiden Lösungen um die gesuchte Außen-, und eine unerwünschte Innenverzahnung.

$$\begin{aligned}\omega_1 t_k(s) &= \mp \arcsin \left(\frac{u + \cos \delta}{\sin \delta} \cot f'_\vartheta(s) \right) - f'_\varphi(s) \\ &= \pm \arcsin \left(\frac{\hat{u} + \cos \delta}{\sin \delta} \cot f'_\vartheta(s) \right) - f'_\varphi(s).\end{aligned} \quad (3.2)$$

Mit der Kontaktfunktion t_k können wir den Kontaktweg \mathbf{k} und die Profillinie \mathbf{g} des Gegenrads K_2 berechnen, indem wir abhängig vom Kontaktzeitpunkt ins entsprechende Koordinatensystem transformieren.

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(t_k) &= \mathbf{f}(t_k(s)) \in \Sigma_1, \\ \mathbf{k}(t_k) &= \kappa_{10}(t_k) \mathbf{f}(t_k) = \begin{pmatrix} f_x \cos(\omega_1 t) - f_y \sin(\omega_1 t) \\ f_x \sin(\omega_1 t) + f_y \cos(\omega_1 t) \\ f_z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ \sin(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ \cos f_\vartheta \end{pmatrix} \in \Sigma_0,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}(t_k) &= \kappa_{12}(t_k) \mathbf{f}(t_k) = \kappa_{02}(t_k) \mathbf{k}(t_k) \\
 &= r \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t_k) & \sin(\omega_2 t_k) \cos \delta & -\sin(\omega_2 t_k) \sin \delta \\ -\sin(\omega_2 t_k) & \cos(\omega_2 t_k) \cos \delta & -\cos(\omega_2 t_k) \sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ \sin(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ \cos f_\vartheta \end{pmatrix} \\
 &= r \sin \delta \begin{pmatrix} -\sin(\omega_2 t_k) \cos f_\vartheta \\ -\cos(\omega_2 t_k) \cos f_\vartheta \\ \sin(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t_k) \cos(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ -\sin(\omega_2 t_k) \cos(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\quad + r \cos \delta \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t_k) \sin(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ \cos(\omega_2 t_k) \sin(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ \cos f_\vartheta \end{pmatrix} \in \Sigma_2. \tag{3.3}
 \end{aligned}$$

Zur Unterscheidung der beiden Lösungen können wir die Hauptnormalen der Profillinien $\frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{f}'(s)}{\|\mathbf{f}'(s)\|} \right)$ und $\frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{g}'(s)}{\|\mathbf{g}'(s)\|} \right)$ in einem Kontaktpunkt vergleichen. In einem gemeinsamen Koordinatensystem besitzen Außenverzahnungen entgegengesetzte Krümmungsvektoren, und Innenverzahnungen gleichgerichtete.

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{f}'(s)}{\|\mathbf{f}'(s)\|} \right)^T \kappa_{21}(t_k(s)) \frac{d}{ds} \left(\frac{\mathbf{g}'(s)}{\|\mathbf{g}'(s)\|} \right) \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{Innenverzahnung} \\ > 0 \Rightarrow \text{Außenverzahnung} \end{cases}.$$

Nun sei zu Beginn statt der Profillinie \mathbf{f} von K_1 , die Profillinie \mathbf{g} von K_2 vorgegeben:

$$\mathbf{g}: [s_a, s_e] \ni s \mapsto \mathbf{g}(s) = \begin{pmatrix} g_x(s) \\ g_y(s) \\ g_z(s) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos g_\varphi(s) \sin g_\vartheta(s) \\ \sin g_\varphi(s) \sin g_\vartheta(s) \\ \cos g_\vartheta(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_2.$$

Durch ein analoges Vorgehen gelangen wir zur Kontaktfunktion t_k .

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \mathbf{g}(s) &= r \frac{d}{ds} g_\vartheta(s) \begin{pmatrix} \cos g_\varphi(s) \cos g_\vartheta(s) \\ \sin g_\varphi(s) \cos g_\vartheta(s) \\ -\sin g_\vartheta(s) \end{pmatrix} + r \frac{d}{ds} g_\varphi(s) \begin{pmatrix} -\sin g_\varphi(s) \cos g_\vartheta(s) \\ \cos g_\varphi(s) \cos g_\vartheta(s) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &=: \begin{pmatrix} g'_x(s) \\ g'_y(s) \\ g'_z(s) \end{pmatrix} = \mathbf{g}'(s) =: g'_r(s) \begin{pmatrix} \cos g'_\varphi(s) \sin g'_\vartheta(s) \\ \sin g'_\varphi(s) \sin g'_\vartheta(s) \\ \cos g'_\vartheta(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_2, \\
 \kappa_{02} \mathbf{c} &= r \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t) \sin(\gamma - \delta) \\ \sin(\omega_2 t) \cos(\gamma - \delta) \\ \cos(\gamma - \delta) \end{pmatrix} \in \Sigma_2.
 \end{aligned}$$

Mit dem Verzahnungsgesetz $0 = -\mathbf{c}(t_k)^T \mathbf{g}'$ erhalten wir für $\omega_2 t_k$ auch in diesem Fall zwei Basislösungen. Dieselben Lösungen erhalten wir bei einem Übersetzungsverhältnis $\hat{u} := \frac{-u}{1+2u \cos \delta}$. Da $\gamma < \pi \Leftrightarrow \hat{u} < 0$, handelt es sich bei den beiden Lösungen wieder um die gesuchte Außen-, und eine unerwünschte Innenverzahnung.

$$\begin{aligned}\omega_2 t_k(s) &= \pm \arcsin \left(\frac{\frac{1}{u} + \cos \delta}{\sin \delta} \cot g'_\vartheta(s) \right) - g'_\varphi(s) \\ &= \mp \arcsin \left(\frac{\frac{1}{u} + \cos \delta}{\sin \delta} \cot g'_\vartheta(s) \right) - g'_\varphi(s).\end{aligned}$$

3.3.2. Mit vorgegebenem Kontaktweg und Übersetzung

Im betrachteten Kugelschnitt sei ein Kontaktweg \mathbf{k} mit regulärer Parametrisierung s vorgegeben. Es gilt also, $\frac{d}{ds}\mathbf{k}(s) \neq 0$. Der Kontaktweg ist als Auslegungsparameter besonders geeignet, da durch ihn Kontakteigenschaften wie der Eingriffswinkel oder die Profilüberdeckung direkt festgelegt werden können. Bei Stirnradpaaren stellt die Gerade den Standard für die Wahl des Kontaktwegs dar. Analog bietet es sich an, bei Kegelpaaren einen Großkreis zu verwenden, dies führt wie in Kapitel 3.4 beschrieben zur Kugelevoventenverzahnung.

$$\mathbf{k} : [s_a, s_e] \ni s \mapsto \mathbf{k}(s) = \begin{pmatrix} k_x(s) \\ k_y(s) \\ k_z(s) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos k_\varphi(s) \sin k_\vartheta(s) \\ \sin k_\varphi(s) \sin k_\vartheta(s) \\ \cos k_\vartheta(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Desweiteren sei wie im vorangegangenen Kapitel das Übersetzungsverhältnis u , und damit der Wälzpunkt \mathbf{c} vorgegeben. Auch hier ist es möglich ein vom Parameter s abhängiges Übersetzungsverhältnis $u(s)$ zu verwenden. Diese Form der Auslegung stellt aber noch mehr als im vorangegangenen Fall, ein akademisches Beispiel dar, das bisher in der Praxis keine Anwendung findet.

$$\mathbf{c} = r \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

Um das sphärische Verzahnungsgesetz anwenden zu können benötigen wir eine Profillinie. O.B.d.A berechnen wir \mathbf{f} . Wir erhalten die Profillinie, indem wir eine Koordinatentransformation auf $\mathbf{k}(s)$ anwenden, die von der noch unbekannten Kontaktfunktion $t(s)$ abhängt. Desweiteren bilden wir die Tangente der Profillinie $\mathbf{f}'(s) = \frac{d}{ds}\mathbf{f}(s) \in \Sigma_1$.

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(t_k(s)) &= \kappa_{01}(t_k(s))\mathbf{k}(s) = \begin{pmatrix} k_x(s) \cos(\omega_1 t_k(s)) + k_y(s) \sin(\omega_1 t_k(s)) \\ -k_x(s) \sin(\omega_1 t_k(s)) + k_y(s) \cos(\omega_1 t_k(s)) \\ k_z(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_1, \\ \mathbf{f}' &= \begin{pmatrix} (k'_x + \omega_1 t'_k k_y) \cos(\omega_1 t_k) - (k'_y - \omega_1 t'_k k_x) \sin(\omega_1 t_k) \\ +(k'_x + \omega_1 t'_k k_y) \sin(\omega_1 t_k) + (k'_y - \omega_1 t'_k k_x) \cos(\omega_1 t_k) \\ k'_z \end{pmatrix} \in \Sigma_1.\end{aligned}$$

Wir wenden das Verzahnungsgesetzes jeweils zum Kontaktzeitpunkt t_k in Σ_0 an. Dafür transformieren wir die Profillinie und ihre Tangente wieder zurück in Σ_0 .

$$\begin{aligned}\mathbf{f}(t_k(s)) &= \kappa_{10}(t_k(s))\mathbf{k}(s) = \begin{pmatrix} k_x(s) \\ k_y(s) \\ k_z(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0, \\ \mathbf{f}'(t_k(s)) &= \begin{pmatrix} k'_x(s) + \omega_1 t'_k(s) k_y(s) \\ k'_y(s) - \omega_1 t'_k(s) k_x(s) \\ k'_z(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0.\end{aligned}$$

Die Orthogonalitätsbedingung des sphärischen Verzahnungsgesetzes lässt sich weiter vereinfachen, da \mathbf{f} eine sphärische Kurve ist. Diese Eigenschaft hat die Profillinie durch die zentrale Rotation vom Kontaktweg geerbt. Wir lösen die Orthogonalitätsbedingung nach der Ableitung der Kontaktfunktion t'_k auf.

$$\begin{aligned}0 &= (\mathbf{f}(s) - \mathbf{c})^T \mathbf{f}'(s) = \mathbf{k}(s)^T \mathbf{k}'(s) - \mathbf{c}^T \mathbf{f}'(s) = -\mathbf{c}^T \mathbf{f}'(s) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ r \sin \gamma \\ r \cos \gamma \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} k'_x(s) + \omega_1 t'_k(s) k_y(s) \\ k'_y(s) - \omega_1 t'_k(s) k_x(s) \\ k'_z(s) \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Dies gilt genau dann wenn,

$$t'_k(s) = \frac{\cot \gamma k'_z(s) + k'_y(s)}{\omega_1 k_x(s)}.$$

Durch Integration erhalten wir die Kontaktfunktion $t_k(s)$. Die Integrationskonstante $t_0 = t(s_0)$ bildet einen Bezugszeitpunkt für den Kontakt in einem Punkt $\mathbf{k}(s_0)$ mit $s_0 \in [s_a, s_e]$. In Kapitel 3.5 werden wir die Konstante zur Konstruktion der Flankenlinie nutzen. Betrachten wir jedoch ausschließlich einen Kugelschnitt, können wir $t_0 = 0$ setzen.

$$t_k(s) = \int_{s_0}^s \frac{\cot \gamma k'_z(\sigma) + k'_y(\sigma)}{\omega_1 k_x(\sigma)} d\sigma + t_0. \quad (3.4)$$

An Gleichung (3.4) können wir erkennen, dass die Kontaktfunktion eine Singularität in $k_x = 0$ aufweist. Um diese Stelle genauer zu untersuchen, betrachten wir den Kontaktweg und seine Ableitung in sphärischen Koordinaten Θ_0 .

$$\begin{aligned}\mathbf{k}(s) &= r \begin{pmatrix} \cos k_\varphi(s) \sin k_\vartheta(s) \\ \sin k_\varphi(s) \sin k_\vartheta(s) \\ \cos k_\vartheta(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0, \\ \mathbf{k}'(s) &= \frac{d}{ds} \mathbf{k}(s) = \begin{pmatrix} \frac{d}{ds} k_\varphi(s) \\ \frac{d}{ds} k_\vartheta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -r \sin k_\varphi(s) \sin k_\vartheta(s) \\ r \cos k_\varphi(s) \sin k_\vartheta(s) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} \frac{d}{ds} k_\vartheta(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos k_\varphi(s) \cos k_\vartheta(s) \\ r \sin k_\varphi(s) \cos k_\vartheta(s) \\ -r \sin k_\vartheta(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0, \\ \omega_1 t'(s) &= \frac{d}{ds} k_\varphi(s) + \frac{d}{ds} k_\vartheta(s) \frac{\sin k_\varphi(s) \cot k_\vartheta(s) - \cot \gamma}{\cos k_\varphi(s)}.\end{aligned} \quad (3.5)$$

Betrachten wir nun den Fall, dass der Kontaktweg \mathbf{k} durch den Wälzpunkt \mathbf{c} verläuft.

$$\begin{aligned} \exists s_c \in [s_a, s_e] \quad \text{mit} \quad \mathbf{k}(s_c) = \mathbf{c} &\iff k_\varphi(s_c) = \pi, \quad k_\vartheta(s_c) = \gamma \\ \lim_{s \rightarrow s_c} \omega_1 t'(s) &= \frac{d}{ds} k_\varphi(s_c) + \frac{d}{ds} k_\vartheta(s_c) \cot \gamma \lim_{s \rightarrow s_c} \frac{\sin k_\varphi(s) - 1}{\cos k_\varphi(s)} = \frac{d}{ds} k_\varphi(s_c). \end{aligned}$$

Als weiterer Fall kann die Ableitung des Polarwinkels k_ϑ an der Singularität verschwinden. Dieser Fall ist in der praktischen Umsetzung unbrauchbar, da eine flache Stelle in der Verzahnung entsteht, an der kein Drehmoment übertragen wird.

$$\begin{aligned} \exists s_c \in [s_a, s_e] \quad \text{mit} \quad k_\varphi(s_c) = \pi, \quad \frac{d}{ds} k_\vartheta(s_c) = 0, \quad k_\vartheta(s_c) \neq 0 &\neq \frac{d}{ds} k_\varphi(s_c) \\ \lim_{s \rightarrow s_c} \omega_1 t'(s) &= \frac{d}{ds} k_\varphi(s_c) + \lim_{s \rightarrow s_c} \frac{\frac{d}{ds} k_\vartheta(s) (\sin k_\varphi(s) \cot k_\vartheta(s) - \cot \gamma)}{\cos k_\varphi(s)} \\ &= \frac{d}{ds} k_\varphi(s_c) + \lim_{s \rightarrow s_c} \frac{\frac{d^2}{ds^2} k_\vartheta(s) (\sin k_\varphi(s) \cot k_\vartheta(s) - \cot \gamma)}{-\sin k_\varphi(s) \frac{d}{ds} k_\varphi(s)} \\ &\quad + \lim_{s \rightarrow s_c} \frac{\frac{d}{ds} k_\vartheta(s) \left(\cos k_\varphi(s) \cot k_\vartheta(s) \frac{d}{ds} k_\varphi(s) + \frac{-\sin k_\varphi(s)}{\sin^2 k_\vartheta(s)} \frac{d}{ds} k_\vartheta(s) \right)}{-\sin k_\varphi(s) \frac{d}{ds} k_\varphi(s)} \\ &= \frac{d}{ds} k_\varphi(s_c) + \frac{d^2}{ds^2} k_\vartheta(s_c) \frac{-\cot k_\vartheta(s_c) + \cot \gamma}{\frac{d}{ds} k_\varphi(s_c)}. \end{aligned}$$

Mit der Kontaktfunktion können wir nun durch die entsprechenden Koordinatentransformationen die Profillinien \mathbf{f} und \mathbf{g} berechnen.

$$\mathbf{k}(t_k) = \mathbf{k}(t_k(s)) \in \Sigma_0,$$

$$\mathbf{f}(t_k) = \kappa_{01}(t_k) \mathbf{k}(t_k) = \begin{pmatrix} k_x \cos(\omega_1 t) + k_y \sin(\omega_1 t) \\ -k_x \sin(\omega_1 t) + k_y \cos(\omega_1 t) \\ k_z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos(k_\varphi - \omega_1 t_k) \sin k_\vartheta \\ \sin(k_\varphi - \omega_1 t_k) \sin k_\vartheta \\ \cos k_\vartheta \end{pmatrix} \in \Sigma_1,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t_k) &= \kappa_{02}(t_k) \mathbf{k}(t_k) \\ &= r \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t_k) & \sin(\omega_2 t_k) \cos \delta & -\sin(\omega_2 t_k) \sin \delta \\ -\sin(\omega_2 t_k) & \cos(\omega_2 t_k) \cos \delta & -\cos(\omega_2 t_k) \sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos k_\varphi \sin k_\vartheta \\ \sin k_\varphi \sin k_\vartheta \\ \cos k_\vartheta \end{pmatrix} \\ &= -r \sin \delta \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t_k) \cos k_\vartheta \\ \cos(\omega_2 t_k) \cos k_\vartheta \\ -\sin k_\varphi \sin k_\vartheta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t_k) \cos k_\varphi \sin k_\vartheta \\ -\sin(\omega_2 t_k) \cos k_\varphi \sin k_\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + r \cos \delta \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t_k) \sin k_\varphi \sin k_\vartheta \\ \cos(\omega_2 t_k) \sin k_\varphi \sin k_\vartheta \\ \cos k_\vartheta \end{pmatrix} \in \Sigma_2. \end{aligned} \tag{3.6}$$

3.3.3. Beide Profillinien vorgegeben ohne Übersetzung

Im betrachteten Kugelschnitt sei eine Profillinie \mathbf{f} mit regulärer Parametrisierung s vorgegeben. Es gilt also, $\frac{d}{ds}\mathbf{f}(s) \neq 0$. Die zweite Profillinie \mathbf{g} liege diskretisiert als auf einander folgende Punkte \mathbf{g}_i im selben Kugelschnitt vor. Diese Punkte können aus Messwerten entnommen oder aus der Abtastung einer Parametrisierung von \mathbf{g} bestimmt worden sein. Die Begrenzungen sind nur bei \mathbf{f} relevant. Für die Profillinie \mathbf{g} können die Punkte \mathbf{g}_i auch über die Nutzflanke hinausgehen.

$$\mathbf{f} : [s_a, s_e] \ni s \mapsto \mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} f_x(s) \\ f_y(s) \\ f_z(s) \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos f_\varphi \sin f_\vartheta \\ \sin f_\varphi \sin f_\vartheta \\ \cos f_\vartheta \end{pmatrix} \in \Sigma_1,$$

$$\mathbf{g}_i = \begin{pmatrix} g_{i,x} \\ g_{i,y} \\ g_{i,z} \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos g_{i,\varphi} \sin g_{i,\vartheta} \\ \sin g_{i,\varphi} \sin g_{i,\vartheta} \\ \cos g_{i,\vartheta} \end{pmatrix} \in \Sigma_2 \quad \text{für } i = 1, \dots, k.$$

Aus je zwei Punkten \mathbf{g}_i und \mathbf{g}_{i+1} bilden wir eine Kurve $\widehat{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}}$ im Kugelschnitt. Wir setzen die Kurven an den Punkten \mathbf{g}_i zusammen und erhalten eine Näherung für die Profillinie \mathbf{g} . Als Kurven wählen wir sogenannte Loxodrome, sphärische Kurven mit konstanter Steigung des Polarwinkels. Diese eignen sich aufgrund ihrer einfachen mathematischen Beschreibung besonders für eine Schnittpunktberechnung auf der Kugeloberfläche.

$$\mathbf{g} \approx \bigcup_{i=1, \dots, k-1} \widehat{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}} \quad \text{mit} \quad \widehat{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}} : [0, 1] \ni \xi \mapsto \widehat{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}}(\xi) \in \Sigma_2,$$

$$\widehat{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}}(\xi) = r \begin{pmatrix} \cos(g_{i+1,\varphi} + \xi(g_{i,\varphi} - g_{i+1,\varphi})) \sin(g_{i+1,\vartheta} + \xi(g_{i,\vartheta} - g_{i+1,\vartheta})) \\ \sin(g_{i+1,\varphi} + \xi(g_{i,\varphi} - g_{i+1,\varphi})) \sin(g_{i+1,\vartheta} + \xi(g_{i,\vartheta} - g_{i+1,\vartheta})) \\ \cos(g_{i+1,\vartheta} + \xi(g_{i,\vartheta} - g_{i+1,\vartheta})) \end{pmatrix}.$$

Das Übersetzungsverhältnis u sei unbekannt und soll bestimmt werden. Da es sich bei dieser Berechnung um eine allgemeine Analyse bestehender Verzahnungen handelt, können wir nicht von einer Konstanz des Übersetzungsverhältnisses ausgehen. Mit dem Übersetzungsverhältnis ändert sich auch der Wälzpunkt \mathbf{c} abhängig vom Parameter s

$$\mathbf{c}(s) = r \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \gamma(s) \\ \cos \gamma(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0 \quad \text{mit} \quad \gamma(s) = \operatorname{arccot} \left(\frac{u(s) + \cos \delta}{\sin \delta} \right).$$

Mit Gleichung (3.3) und (3.2) können wir abhängig von $u(s)$ die Profillinie $\mathbf{g}(s)$ errechnen.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t_k(s)) &= r \sin \delta \begin{pmatrix} \sin(\frac{1}{u(s)} \omega_1 t_k(s)) \cos f_\vartheta(s) \\ -\cos(\frac{1}{u(s)} \omega_1 t_k(s)) \cos f_\vartheta(s) \\ \sin(f_\varphi(s) + \omega_1 t_k(s)) \sin f_\vartheta(s) \end{pmatrix} \\ &\quad + r \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{u(s)} \omega_1 t_k(s)) \cos(f_\varphi(s) + \omega_1 t_k(s)) \sin f_\vartheta(s) \\ \sin(\frac{1}{u(s)} \omega_1 t_k(s)) \cos(f_\varphi(s) + \omega_1 t_k(s)) \sin f_\vartheta(s) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad + r \cos \delta \begin{pmatrix} -\sin(\frac{1}{u(s)} \omega_1 t_k(s)) \sin(f_\varphi(s) + \omega_1 t_k(s)) \sin f_\vartheta(s) \\ \cos(\frac{1}{u(s)} \omega_1 t_k(s)) \sin(f_\varphi(s) + \omega_1 t_k(s)) \sin f_\vartheta(s) \\ \cos f_\vartheta(s) \end{pmatrix} \\ &=: r \begin{pmatrix} \cos g_\varphi(s) \sin g_\vartheta(s) \\ \sin g_\varphi(s) \sin g_\vartheta(s) \\ \cos g_\vartheta(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_2, \\ \omega_1 t_k(s) &= \mp \arcsin \left(\frac{u + \cos \delta}{\sin \delta} \cot f'_\vartheta(s) \right) - f'_\varphi(s). \end{aligned}$$

Wir prüfen wie in Kapitel 3.3.1 beschrieben bei welcher der beiden Lösungen es sich um die gesuchte Außenverzahnung handelt. Nun können wir für einen einzelnen Parameterwert s bestimmen, bei welcher Übersetzung $u(s)$ ein Kurvensegment der vorgegebene Profillinie $\widehat{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}}$ geschnitten wird.

$$\mathbf{g}(u(s)) \in \widehat{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}} \iff \begin{pmatrix} g_\varphi(u(s)) \\ g_\vartheta(u(s)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{i+1,\varphi} \\ g_{i+1,\vartheta} \end{pmatrix} + \xi \left(\begin{pmatrix} g_{i,\varphi} \\ g_{i,\vartheta} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} g_{i+1,\varphi} \\ g_{i+1,\vartheta} \end{pmatrix} \right) \text{ mit } 0 \leq \xi \leq 1.$$

Das entspricht der Nullstelle der Gleichung:

$$\begin{pmatrix} g_\varphi(u(s)) - g_{i+1,\varphi} \\ g_\vartheta(u(s)) - g_{i+1,\vartheta} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{i,\vartheta} - g_{i+1,\vartheta} \\ -g_{i,\varphi} + g_{i+1,\varphi} \end{pmatrix} = 0 \text{ mit } 0 \leq \frac{g_\varphi(u(s)) - g_{i+1,\varphi}}{g_{i,\varphi} - g_{i+1,\varphi}} \leq 1.$$

Zur Bestimmung der Nullstelle der Gleichung wenden wir das Newton-Verfahren an. Als Startwert u_0 eignet sich das umgekehrte Verhältnis der Zähnezahl von K_1 und K_2 .

$$u_0 = \frac{n_2}{n_1}, \quad u_{j+1} = u_j - \frac{\begin{pmatrix} g_\varphi(u_j) - g_{i+1,\varphi} \\ g_\vartheta(u_j) - g_{i+1,\vartheta} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{i,\vartheta} - g_{i+1,\vartheta} \\ -g_{i,\varphi} + g_{i+1,\varphi} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \frac{d}{du} g_\varphi(u_j) \\ \frac{d}{du} g_\vartheta(u_j) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} g_{i,\vartheta} - g_{i+1,\vartheta} \\ -g_{i,\varphi} + g_{i+1,\varphi} \end{pmatrix}}.$$

Das errechnete Übersetzungsverhältnis $u(s)$ bezeichnen wir als *momentanes Übersetzungsverhältnis* zum Zeitpunkt $t_k(s)$. Für die Genauigkeit der Berechnung ist vor allem die Diskretisierung der Profillinie \mathbf{g} ausschlaggebend. Mit der Kontaktfunktion $t_k(s)$ können wir einzelne Punkte des Kontaktwegs \mathbf{k} berechnen.

$$\mathbf{k}(t_k(s)) = \kappa_{10}(t_k(s)) \mathbf{f}(s) = r \begin{pmatrix} \cos(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ \sin(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ \cos f_\vartheta \end{pmatrix} \in \Sigma_0.$$

3.3.4. Die Profilüberdeckung

In diesem Kapitel wird die *Profilüberdeckung* ϵ_α eines Profillinienpaars betrachtet. Sie gibt die relative Dauer des Kontakts eines Zahnpaars in einem Kugelschnitt wieder. Zusammen mit der *Sprungüberdeckung* ϵ_β die durch die Schrägverzahnung in Kapitel 3.5 bestimmt wird, kann die *Gesamtüberdeckung* ϵ berechnet werden. Die Gesamtüberdeckung gibt die relative Dauer des Kontakts eines Zahnflankenpaars an. Ist das Kegelrad aus identischen Zähne aufgebaut, entspricht die Überdeckung der durchschnittlichen Anzahl sich gleichzeitig in Kontakt befindender Zähne.

Um die Profilüberdeckung zu bestimmen nutzen wir die zuvor in Gleichung (3.3) bzw. (3.2) berechnete Kontaktfunktion. Mit dem ersten Kontaktzeitpunkt $t_k(s_a)$ und dem letzten Kontaktzeitpunkt $t_k(s_e)$, kann die *Kontakttdauer* $\Delta t = t_k(s_e) - t_k(s_a)$ errechnet werden. Wenn wir diese durch den Anteil eines Zahns an der Gesamtumdrehungsdauer teilen, erhalten wir die Profilüberdeckung ϵ_α . Hierbei bezeichnet $n_1 \in \mathbb{N}$ die Zähnezahzahl des Kegelrads K_1 und $n_2 \in \mathbb{N}$ die Zähnezahzahl des Kegelrads K_2 .

$$\begin{aligned}\epsilon_\alpha &= \frac{n_1 \omega_1 \Delta t}{2\pi} = \frac{n_1 \omega_1 (t(s_e) - t(s_a))}{2\pi} \\ &= \frac{n_2 \omega_2 \Delta t}{2\pi} = \frac{n_2 \omega_2 (t(s_e) - t(s_a))}{2\pi}.\end{aligned}$$

3.4. Die Kugelevolventenverzahnung

Wie bei den Stirnrädern veranschaulichen wir die zuvor hergeleiteten Formeln an einem Beispiel. Analog zur Gerade aus Kapitel 2.4.1 werden wir in Kapitel 3.4.1 einen Großkreis als Kontaktweg vorgegeben. Durch die geometrischen Einfachheit des Großkreises lassen sich die Profillinien daraus analytisch berechnen. Wir bezeichnen die Profillinien als Kugelevolventen, und zeigen in Kapitel 3.7 die Verwandtschaft zu den ebenen Kreis-evolventen. Kugelevolventen sind in der Verzahnungstheorie bereits bekannt, besitzen aber keine praktische Bedeutung, [11, S.29]. Das liegt daran, dass sie sich nicht mit traditionellen Verfahren herstellen lassen, wie wir in Kapitel 3.6 sehen werden.

In Kapitel 3.4.2 geben wir als Profillinie eine Kugelevolvente vor und berechnen zu einem beliebigen Achsenwinkel $\hat{\delta}$ den Kontaktweg. Abschließend berechnen wir die Profilüberdeckung der Kugelevolventenverzahnung in Kapitel 3.4.3.

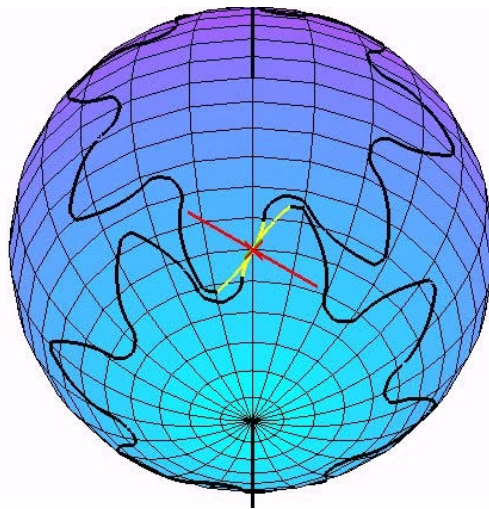


Abbildung 3.6.: Ein kugelevolventenverzahntes Kegelradpaar mit einem Großkreis als Kontaktweg.

3.4.1. Berechnung der Profillinien

Als Kontaktweg \mathbf{k} wählen wir einen Großkreis im Bezugskordinatensystem Σ_0 . In Kapitel 3.3.2 wurde hergeleitet, dass für eine geeignete Verzahnung der Kontaktweg durch den Wälzpunkt $\mathbf{c} = (0, \sin \gamma, \cos \gamma)^T$ verlaufen muss.

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(s) &= r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \cos s \\ \sin s \end{pmatrix} \\ &= r \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sin s \\ \sin \gamma \cos s + \cos \gamma \cos \alpha \sin s \\ \cos \gamma \cos s - \sin \gamma \cos \alpha \sin s \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Wir bezeichnen den Parameter $\alpha \in [0, \pi]$ als Eingriffswinkel. Für die Bestimmung der Kontaktfunktion benötigen wir außerdem die Ableitung des Kontaktwegs:

$$\mathbf{k}'(s) = r \begin{pmatrix} -\sin \alpha \cos s \\ -\sin \gamma \sin s + \cos \gamma \cos \alpha \cos s \\ -\cos \gamma \sin s - \sin \gamma \cos \alpha \cos s \end{pmatrix}.$$

Als Bezugspunkt wählen wir den Wälzpunkt. $\mathbf{k}(0) = \mathbf{c}$ Nach Gleichung (3.4) resultiert damit die Kontaktfunktion

$$\begin{aligned} t_k(s) &= \int_0^s \frac{\cot \gamma k'_z(\sigma) + k'_y(\sigma)}{\omega_1 k_x(\sigma)} d\sigma + t_0 \\ &= \int_0^s \frac{1}{\omega_1 \sin \gamma \sin \alpha} d\sigma + t_0 = \frac{s}{\omega_1 \sin \gamma \sin \alpha} + t_0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Nun können wir die Gleichungen (3.6) nutzen, um die Profillinien zu errechnen.

$$\mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sin s \cos(\omega_1 t) + (\sin \gamma \cos s + \cos \gamma \cos \alpha \sin s) \sin(\omega_1 t) \\ \sin \alpha \sin s \sin(\omega_1 t) + (\sin \gamma \cos s + \cos \gamma \cos \alpha \sin s) \cos(\omega_1 t) \\ \cos \gamma \cos s - \sin \gamma \cos \alpha \sin s \end{pmatrix} \in \Sigma_1, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{g}(s) = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sin s \cos(\omega_1 t) + (\sin(\gamma - \delta) \cos s + \cos(\gamma - \delta) \cos \alpha \sin s) \sin(\omega_1 t) \\ \sin \alpha \sin s \sin(\omega_1 t) + (\sin(\gamma - \delta) \cos s + \cos(\gamma - \delta) \cos \alpha \sin s) \cos(\omega_1 t) \\ \cos(\gamma - \delta) \cos s - \sin(\gamma - \delta) \cos \alpha \sin s \end{pmatrix} \in \Sigma_2.$$

3.4.2. Berechnung des Kontaktwegs

Für die Profillinie \mathbf{f} aus Kapitel 2.4.1 berechnen wir den Kontaktweg $\hat{\mathbf{k}}$ zu einem potentiell verschiedenen Achsenwinkel $\hat{\delta}$ bei identischem Übersetzungsverhältnis u .

$$\mathbf{f}(s) = \begin{pmatrix} k_x(s) \cos \omega_1 t_k + k_y(s) \sin \omega_1 t_k \\ -k_x(s) \sin \omega_1 t_k + k_y(s) \cos \omega_1 t_k \\ k_z(s) \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \gamma \\ \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Um die Kontaktfunktion $\hat{t}_k(s)$ zu bestimmen, setzen wir den der Profillinie zugrunde liegenden Kontaktweg \mathbf{k} in Gleichung (3.4) ein. Alternativ können wir hier auch direkt Gleichung (3.2) verwenden. Dies erfordert jedoch die komplizierte Berechnung der Polarkoordinaten von \mathbf{f}' .

$$\omega_1 \hat{t}_k(s) = \int_{s_0}^s \frac{\cot \hat{\gamma} k'_z(\sigma) + k'_y(\sigma)}{k_x(\sigma)} d\sigma + \omega_1 t_0$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \omega_1 t_k(s) - \omega_1 \hat{t}_k(s) &= \int_{s_0}^s \frac{(\cot \gamma - \cot \hat{\gamma}) k'_z(\sigma)}{k_x(\sigma)} d\sigma \\ &= (\cot \gamma - \cot \hat{\gamma}) \int_0^s \left(\frac{\cos \gamma}{\sin \alpha} + \cot \sigma \sin \gamma \cot \alpha \right) d\sigma \\ &= (\cot \gamma - \cot \hat{\gamma}) \left(s \frac{\cos \gamma}{\sin \alpha} + \ln(|\sin s|) \sin \gamma \cot \alpha \right). \end{aligned}$$

Aus der Differenz der beiden Kontaktfunktionen können wir nun den Kontaktweg $\hat{\mathbf{k}}$ errechnen:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{k}}(s) &= \begin{pmatrix} f_x(s) \cos \omega_1 \hat{t}_k + f_y(s) \sin \omega_1 \hat{t}_k \\ -f_x(s) \sin \omega_1 \hat{t}_k + f_y(s) \cos \omega_1 \hat{t}_k \\ f_z(s) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} k_x(s) \cos(\omega_1 t_k - \omega_1 \hat{t}_k) + k_y(s) \sin(\omega_1 t_k - \omega_1 \hat{t}_k) \\ -k_x(s) \sin(\omega_1 t_k - \omega_1 \hat{t}_k) + k_y(s) \cos(\omega_1 t_k - \omega_1 \hat{t}_k) \\ k_z(s) \end{pmatrix} \in \Sigma_0. \end{aligned}$$

3.4.3. Berechnung der Profilüberdeckung

Wie in Kapitel 3.3.4 beschrieben, können wir aus der Kontaktfunktion (3.8) die Profilüberdeckung einer Kugelevolventenverzahnung berechnen. Die Parameter s_a und s_e beschreiben dabei den ersten und den letzten Kontaktpunkt. Die Profilüberdeckung ϵ_α erhalten wir wie folgt:

$$\begin{aligned} \epsilon_\alpha &= \frac{n_1 \omega_1 (t(s_e) - t(s_a))}{2\pi} = \frac{n_1}{2\pi} \frac{s_e - s_a}{\sin \gamma \sin \alpha} \\ &= \frac{n_2 \omega_2 (t(s_e) - t(s_a))}{2\pi} = \frac{n_2}{2\pi} \frac{s_e - s_a}{\sin(\gamma - \delta) \sin \alpha}. \end{aligned}$$

3.5. Schrägverzahnungen beim Kegelrad

Bisher haben wir das Kegelradpaar ausschließlich im Kugelschnitt betrachtet. Für die sphärische Kinematik und das sphärische Verzahnungsgesetz reicht diese Darstellung vollkommen aus. Sobald wir jedoch äußere Eigenschaften, wie die Kräfte auf die Getriebeachsen oder das allgemeine Verlagerungsverhalten betrachten, müssen wir die verschiedenen Kugelschnitte wieder zu einem dreidimensionalen Kegelrad zusammensetzen. Im einfachsten Fall setzen wir die Profillinien $\mathbf{f}(r)$ der unterschiedlichen Schnittradien $r \in [r_a, r_e]$ zentralsymmetrisch zusammen und erhalten ein geradverzahntes Kegelrad mit der Zahnbreite $r_e - r_a$.

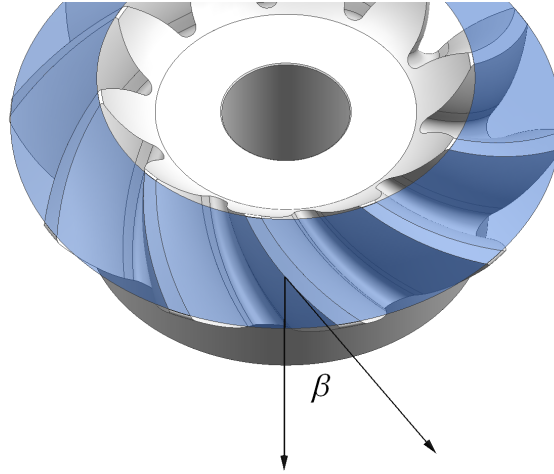


Abbildung 3.7.: Ein bogenverzahntes Kegelrad mit Schrägungswinkel β .

In Kapitel 3.3.2 wurde die Integrationskonstante $t_0 = t_k(s_0)$ eingeführt. Mit dieser Bezugsgröße ist es möglich den Zeitpunkt des Kontakts eines Bezugspunktes s_0 festzulegen. Bei einer einheitlichen Wahl des Bezugspunktes in allen Kugelschnitten wird die Profillinie $\mathbf{f}(r)$ um den Winkel $\omega_1 t_0(r)$ verdreht. Dies kann als Drehung der Kugelschnitte gegeneinander um die Drehachse des ersten Kegelrads aufgefasst werden. Wir erhalten damit die Flankenlinie $[r_a, r_e] \ni r \mapsto \omega_1 t_0(r) \in [0, 2\pi)$. In der Praxis wird die Flankenlinie über den Schrägungswinkel $\tan \beta(r) = \frac{d}{dr} \omega_1 t_0(r)$ angegeben. Aufgrund der Herstellungspraxis mit rotationssymmetrischen Werkzeugen werden Kegelräder in der Regel mit einem über die Zahnbreite veränderlichem Schrägungswinkel hergestellt. Entspricht die Flankenlinie grob einer Bogenform spricht man von einem bogenverzahnten Kegelrad. Eine Schrägverzahnung ermöglicht auch bei Profilüberdeckungen $\epsilon_\alpha < 1$ eine kontinuierlichere Kraftübertragung während der Abrollung des Kegelradpaares. Während die Profilüberdeckung die Dauer des Kontakts in einem Kugelschnitt wiedergibt, beschreibt die Sprungüberdeckung $\epsilon_\beta := \frac{n_1}{2\pi} (\max(\omega_1 t_0(r)) - \min(\omega_1 t_0(r)))$ die Dauer des Kontakts entlang der Zahnbreite. Insgesamt addieren sich beide Überdeckungen zur Gesamtüberdeckung $\epsilon = \epsilon_\alpha + \epsilon_\beta$ welche der praxisrelevanten Gesamtdauer des Kontakts Rechnung trägt.

3.6. Die erzeugende Planverzahnung

In diesem Kapitel sehen wir uns das Analogon einer Zahnstange für Kegelräder an. Aufgrund der Kugelsymmetrie ist die ebene Bezugsfläche eine Kreisscheibe um den Achsenschnittpunkt. Ein Zahnrad mit dieser Bezugsfläche bezeichnen wir als Planrad. Wir leiten die Verzahnung des Planrads her, indem wir den Achsenwinkel zu $\delta = \gamma + \frac{\pi}{2}$ vergrößern, während wir den Wälzpunkt \mathbf{c} fixiert halten. Da mit dem Wälzpunkt auch der Wälzwinkel $\gamma = \operatorname{arccot} \frac{u + \cos \delta}{\sin \delta}$ konstant bleibt, ändert sich das Übersetzungsverhältnis zu $u = \cot \gamma \sin \delta - \cos \delta = \frac{1}{\sin \gamma}$. Dies führt zu einer nicht zwingend ganzzahligen Zähnezahzahl für das Planrad. Daher muss eine Betrachtung für einzelne Zähne und nicht für eine gesamte Umdrehung erfolgen. Mit dem Wälzpunkt \mathbf{c} als Momentanpol der Gleitgeschwindigkeit bleibt auch das Verzahnungsgesetz unverändert. Dies lässt sich an der Gleitgeschwindigkeit \mathbf{v}_g zeigen:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_g &:= \frac{\omega_1}{u} \begin{pmatrix} -y_0(u + \cos \delta) + z_0 \sin \delta \\ x_0(u + \cos \delta) \\ -x_0 \sin \delta \end{pmatrix} = \omega_1 \sin \gamma \begin{pmatrix} -y_0(\frac{1}{\sin \gamma} - \sin \gamma) + z_0 \cos \gamma \\ x_0(\frac{1}{\sin \gamma} - \sin \gamma) \\ -x_0 \cos \gamma \end{pmatrix} \\ &= \omega_1 \cos \gamma \begin{pmatrix} -y_0 \cos \gamma + z_0 \sin \gamma \\ x_0 \cos \gamma \\ -x_0 \sin \gamma \end{pmatrix} \in \Sigma_0. \end{aligned}$$

Damit können wir die Profillinie des Planrads aus der Profillinie $\mathbf{g} \in \Sigma_2$ mit dem Achsenwinkel $\delta = \gamma + \frac{\pi}{2}$ berechnen. Je nachdem ob der Kontaktweg \mathbf{k} oder die Profillinie \mathbf{f} vorgegeben ist nehmen wir dafür Gleichung (3.6) bzw. (3.3) mit der zugehörigen Kontaktfunktion $t_k(s)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(t_k) &= r \cos \gamma \begin{pmatrix} -\sin(\omega_2 t_k) \cos f_\vartheta \\ -\cos(\omega_2 t_k) \cos f_\vartheta \\ \sin(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t_k) \cos(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ -\sin(\omega_2 t_k) \cos(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - r \sin \gamma \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t_k) \sin(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ \cos(\omega_2 t_k) \sin(f_\varphi + \omega_1 t_k) \sin f_\vartheta \\ \cos f_\vartheta \end{pmatrix} \in \Sigma_2, \\ \mathbf{g}(t_k) &= -r \cos \gamma \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t_k) \cos k_\vartheta \\ \cos(\omega_2 t_k) \cos k_\vartheta \\ -\sin k_\varphi \sin k_\vartheta \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} \cos(\omega_2 t_k) \cos k_\varphi \sin k_\vartheta \\ -\sin(\omega_2 t_k) \cos k_\varphi \sin k_\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\quad - r \sin \gamma \begin{pmatrix} \sin(\omega_2 t_k) \sin k_\varphi \sin k_\vartheta \\ \cos(\omega_2 t_k) \sin k_\varphi \sin k_\vartheta \\ \cos k_\vartheta \end{pmatrix} \in \Sigma_2. \end{aligned}$$

Insbesondere können wir die Profillinie des Planrads einer Kugelevolventenverzahnung

aus Gleichung (3.9) berechnen.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{g}(s) &= r \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sin s \cos(\omega_1 t) + (\sin(\gamma - \delta) \cos s + \cos(\gamma - \delta) \cos \alpha \sin s) \sin(\omega_1 t) \\ \sin \alpha \sin s \sin(\omega_1 t) + (\sin(\gamma - \delta) \cos s + \cos(\gamma - \delta) \cos \alpha \sin s) \cos(\omega_1 t) \\ \cos(\gamma - \delta) \cos s - \sin(\gamma - \delta) \cos \alpha \sin s \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sin s \cos\left(\frac{s}{\sin \gamma \sin \alpha} + \omega_1 t_0\right) - \cos s \sin\left(\frac{s}{\sin \gamma \sin \alpha} + \omega_1 t_0\right) \\ \sin \alpha \sin s \sin\left(\frac{s}{\sin \gamma \sin \alpha} + \omega_1 t_0\right) - \cos s \cos\left(\frac{s}{\sin \gamma \sin \alpha} + \omega_1 t_0\right) \\ \cos \alpha \sin s \end{pmatrix} \\
 &= r \begin{pmatrix} \cos(\omega_1 t_k) & \sin(\omega_1 t_k) & 0 \\ -\sin(\omega_1 t_k) & \cos(\omega_1 t_k) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos s \\ \sin s \end{pmatrix}. \quad (3.10)
 \end{aligned}$$

Da die Kontaktfunktion der Kugelevolvente vom Profillinienparamter s abhängig ist, $\frac{d}{ds}(\omega_1 t_k) \neq 0$ für $\gamma \neq 0 \neq \alpha$, erkennen wir an Gleichung (3.10) dass die Profillinie des Planrads wider Erwarten kein Großkreis ist. Der Großkreis ist als Analogon der geraden Flanken einer Zahnstange für die Kegelradherstellung von besonderem Interesse. Aufgrund der Selbstähnlichkeit ist es möglich durch eine verminderte Eintauchtiefe des Werkzeugs eine konische Zahnhöhe mit ähnlicher Profillinie zu erzeugen. Legt man als Planrad einen Großkreis fest, so erhält man statt der Kugelevolventenverzahnung eine sogenannte Oktoidverzahnung. Die Oktoidverzahnung hat als Kontaktweg statt eines Großkreises eine Oktoide und somit keinen konstanten Eingriffswinkel α . Desweiteren führt die Verwendung eines rotationssymmetrischen Werkzeugs zu einer Veränderung der Profillinie des Planrads entlang der Zahnbreite, wie in Kapitel 3.5 beschrieben.

3.7. Das Stirnrad als Grenzfall eines Kegelrads

In diesem Kapitel werden wir zeigen, dass die Stirnradtheorie aus Kapitel 2 als Grenzfall der Kegelradtheorie aus Kapitel 3 hervorgeht. Der Vergleich dient der Bestätigung und Vervollständigung der Theorie. Für die praktische Berechnung und Auslegung von Zahnradern sind die Formeln zu sperrig und stellen keinen Vorteil gegenüber der separaten Stirnradtheorie dar.

Wir betrachten den Kugelschnitt mit Radius r . Der geodätische Abstand zwischen den Durchstoßpunkten der Drehachsen beträgt $r\delta$. Während wir den Achsenwinkel δ gegen null gehen lassen, soll der Abstand sich dem Achsabstand d annähern. Daraus folgt:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} r = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{\delta} \rightarrow \infty.$$

Da der Ursprung \mathbf{o} der Koordinatensysteme Σ_i, Θ_i für Kegelräder mit dem Achsenschnittpunkt durch $\delta \rightarrow 0$ ins Unendliche wandert, betrachten wir verschobene Koordinatensysteme $\hat{\Sigma}_i, \hat{\Theta}_i$ mit dem Ursprung $\hat{\mathbf{o}}_i = \mathbf{o} + \mathbf{E}_i(0, 0, r)^T$. Als Bezugssystem wählen wir:

$$\hat{\Sigma}_0 := \left\{ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \middle| \hat{\mathbf{o}}_0 + \mathbf{E}_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \hat{\mathbf{o}}_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \underline{\Sigma}_0.$$

Wir betten das Bezugskoordinatensystem der Stirnräder $\underline{\Sigma}_0$ in das neue Bezugskoordinatensystem der Kegelräder $\hat{\Sigma}_0$ ein, und schreiben dafür $\underline{\Sigma}_0 \hookrightarrow \hat{\Sigma}_0$. Zur einfacheren Unterscheidung bezeichnen wir in diesem Kapitel die Koordinatensystem der Stirnräder mit $\underline{\Sigma}_i, \underline{\Theta}_i$. Wir betrachten die Grenzwerte von $\hat{\mathbf{o}}_2$ und $\hat{\mathbf{E}}_2$ für $\lim_{\delta \rightarrow 0}$:

$$\begin{aligned} \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\mathbf{o}}_3 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r(\delta) \end{pmatrix} + r(\delta) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix} = d \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sin \delta}{\delta} \\ \frac{\cos \delta - 1}{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\mathbf{E}}_3 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & \sin \delta \\ 0 & -\sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nun sehen wir, dass im Grenzfall auch das Stirnradkoordinatensystem $\underline{\Sigma}_2$ in das Kegelradkoordinatensystem $\hat{\Sigma}_2$ eingebettet werden kann.

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\Sigma}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \middle| \hat{\mathbf{o}}_3 + \mathbf{E}_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \hat{\mathbf{o}}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \underline{\Sigma}_3.$$

Analog betrachten wir auch die Grenzwerte von $\hat{\mathbf{o}}_1, \hat{\mathbf{o}}_3$ und $\hat{\mathbf{E}}_1, \hat{\mathbf{E}}_3$:

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\mathbf{o}}_1 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r(\delta) \end{pmatrix} + r(\delta) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\mathbf{o}}_2 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r(\delta) \end{pmatrix} + r(\delta) \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix} = d \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\sin \delta}{\delta} \\ \frac{\cos \delta - 1}{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\mathbf{E}}_1(t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t & 0 \\ \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{E}_0 = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t & 0 \\ \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\mathbf{E}}_2(t) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t & 0 \\ \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \hat{\mathbf{E}}_3 = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t & 0 \\ \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\mathbf{E}}_3 \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t & 0 \\ \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Nun betten wir wieder die Stirnradkoordinatensystem $\underline{\Sigma}_1, \underline{\Sigma}_2$ in den Grenzfall der Kegelradkoordinatensystem $\hat{\Sigma}_1, \hat{\Sigma}_2$ ein:

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\Sigma}_1 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \middle| \hat{\mathbf{o}}_1 + \hat{\mathbf{E}}_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \hat{\mathbf{o}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{E}}_3 = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t & 0 \\ \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \underline{\Sigma}_1, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \hat{\Sigma}_2 &= \left\{ \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \middle| \hat{\mathbf{o}}_2 + \hat{\mathbf{E}}_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mit } \hat{\mathbf{o}}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{\mathbf{E}}_3 = \begin{pmatrix} \cos \omega_1 t & -\sin \omega_1 t & 0 \\ \sin \omega_1 t & \cos \omega_1 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} \leftrightarrow \underline{\Sigma}_2.\end{aligned}$$

Durch den Übergang der Koordinatensysteme und der ihnen zugrunde liegenden Bewegungen wird auch die sphärische Kinematik in den ebenen Fall überführt, wie wir an der Gleitgeschwindigkeit \mathbf{v}_g und am Wälzpunkt \mathbf{c} sehen können.

$$\begin{aligned}\hat{\Sigma}_0 \ni \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{v}_g &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -y_0(\omega_1 - \omega_2 \cos \delta) - (z_0 + r)\omega_2 \sin \delta \\ x_0(\omega_1 - \omega_2 \cos \delta) \\ x_0 \omega_2 \sin \delta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -y_0(\omega_1 - \omega_2) - \omega_2 d \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin \delta}{\delta} \\ x_0(\omega_1 - \omega_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_g \in \underline{\Sigma}_0, \\ \hat{\Sigma}_0 \ni \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{c} &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} 0 \\ r \sin \operatorname{arccot} \left(\frac{u + \cos \delta}{\sin \delta} \right) \\ r \left(\cos \operatorname{arccot} \left(\frac{u + \cos \delta}{\sin \delta} \right) - 1 \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{u+1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin \delta}{\delta} \\ \frac{d}{u+1} \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\cos \delta - 1}{\delta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{d}{u+1} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{c} \in \underline{\Sigma}_0.\end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass das ebene Verzahnungsgesetz einen Grenzfall des sphärischen Verzahnungsgesetz darstellt. Der in Kapitel 3.3.2 beschriebene Kontaktweg \mathbf{k} , kann durch die Grenzwertbetrachtung in den Stirnradfall überführt werden. Analog zum Achsenwinkel δ halten wir dafür den geodätischen Abstand für den Azimutalwinkel $k_\vartheta r = k_r$ konstant.

$$\begin{aligned} \widehat{\Sigma}_0 \ni \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{k}(s) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} r \begin{pmatrix} \cos k_\varphi(s) \sin k_\vartheta(s) \\ \sin k_\varphi(s) \sin k_\vartheta(s) \\ \cos k_\vartheta(s) - 1 \end{pmatrix} = d \begin{pmatrix} \cos k_\varphi(s) \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{k_r(s)}{d} \delta\right)}{\delta} \\ \sin k_\varphi(s) \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{k_r(s)}{d} \delta\right)}{\delta} \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\cos\left(\frac{k_r(s)}{d} \delta\right) - 1}{\delta} \end{pmatrix} \\ &= k_r(s) \begin{pmatrix} \cos k_\varphi(s) \lim_{\delta \rightarrow 0} \cos\left(\frac{k_r(s)}{d} \delta\right) \\ \sin k_\varphi(s) \lim_{\delta \rightarrow 0} \cos\left(\frac{k_r(s)}{d} \delta\right) \\ - \lim_{\delta \rightarrow 0} \sin\left(\frac{k_r(s)}{d} \delta\right) \end{pmatrix} = \mathbf{k}(s) \in \underline{\Sigma}_0. \end{aligned}$$

Mit den Polarkoordinaten des Kontaktweg, können wir im Grenzfall die Äquivalenz der Kontaktgleichung für Kegelräder (3.5) und der Kontaktgleichung für Stirnräder (2.5) nachweisen.

$$\begin{aligned} \widehat{\Sigma}_0 : \lim_{\delta \rightarrow 0} \omega_1 t' &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{d}{ds} k_\varphi + \frac{d}{ds} k_\vartheta \frac{\sin k_\varphi \cot k_\vartheta - \cot \gamma}{\cos k_\varphi} \\ &= \frac{d}{ds} k_\varphi + \frac{\frac{d}{ds} k_r}{d \cos k_\varphi} \lim_{\delta \rightarrow 0} \left(\sin k_\varphi \delta \cot\left(\frac{k_r}{d} \delta\right) - \delta \frac{u + \cos \delta}{\sin \delta} \right) \\ &= \frac{d}{ds} k_\varphi + \frac{d}{ds} k_r \frac{\sin k_\varphi - k_r \frac{u+1}{d}}{k_r \cos k_\varphi} = \omega_1 t' : \underline{\Sigma}_0. \end{aligned}$$

Sehen wir uns nun den Kontaktweg an. Der Großkreis aus Gleichung (3.7) geht in die Gerade aus Gleichung (2.7) über, wenn wir den geodätischen Abstand für den Parameter $\hat{s}r = s$ fixieren.

$$\begin{aligned} \widehat{\Sigma}_0 \ni \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{k}(\hat{s}) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} r \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sin \hat{s} \\ \sin \gamma \cos \hat{s} + \cos \gamma \cos \alpha \sin \hat{s} \\ \cos \gamma \cos \hat{s} - \sin \gamma \cos \alpha \sin \hat{s} - 1 \end{pmatrix} \\ &= d \lim_{\delta \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -\sin \alpha \frac{\sin\left(\frac{s}{d} \delta\right)}{\delta} \\ \frac{\sin \gamma}{\delta} \cos\left(\frac{s}{d} \delta\right) + \cos \gamma \cos \alpha \frac{\sin\left(\frac{s}{d} \delta\right)}{\delta} \\ \frac{\cos \gamma}{\delta} \cos\left(\frac{s}{d} \delta\right) - \frac{\delta}{\delta} - \frac{\sin \gamma}{\delta} \cos \alpha \sin\left(\frac{s}{d} \delta\right) \end{pmatrix} \\ &= d \begin{pmatrix} -\sin \alpha \frac{s}{d} \\ \frac{1}{u+1} + \cos \alpha \frac{s}{d} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{k}(s) \in \underline{\Sigma}_0. \end{aligned}$$

Für die Profillinie sehen wir wie die Kugelevolvente aus Gleichung (3.9) in die Kreisevolvente aus Gleichung (2.10) übergeht. Zur einfacheren Darstellung setzen wir dabei

$t_0 = 0$.

$$\begin{aligned}
 \widehat{\Sigma}_1 &\ni \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathbf{f}(\hat{s}) \\
 &= \lim_{\delta \rightarrow 0} r \begin{pmatrix} -\sin \alpha \sin \hat{s} \cos \left(\frac{\hat{s}}{\sin \gamma \sin \alpha} \right) + (\sin \gamma \cos \hat{s} + \cos \gamma \cos \alpha \sin \hat{s}) \sin \left(\frac{\hat{s}}{\sin \gamma \sin \alpha} \right) \\ \sin \alpha \sin \hat{s} \sin \left(\frac{\hat{s}}{\sin \gamma \sin \alpha} \right) + (\sin \gamma \cos \hat{s} + \cos \gamma \cos \alpha \sin \hat{s}) \cos \left(\frac{\hat{s}}{\sin \gamma \sin \alpha} \right) \\ \cos \gamma \cos \hat{s} - \sin \gamma \cos \alpha \sin \hat{s} - 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -s \sin \alpha \cos \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sin \gamma} \frac{s}{d \sin \alpha} \right) + \left(\frac{d}{u+1} + s \cos \alpha \right) \sin \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sin \gamma} \frac{s}{d \sin \alpha} \right) \\ s \sin \alpha \sin \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sin \gamma} \frac{s}{d \sin \alpha} \right) + \left(\frac{d}{u+1} + s \cos \alpha \right) \cos \left(\lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\delta}{\sin \gamma} \frac{s}{d \sin \alpha} \right) \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -s \sin \alpha \cos \left(\frac{\frac{s}{d}}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} \right) + \left(\frac{d}{u+1} + s \cos \alpha \right) \sin \left(\frac{\frac{s}{d}}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} \right) \\ s \sin \alpha \sin \left(\frac{\frac{s}{d}}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} \right) + \left(\frac{d}{u+1} + s \cos \alpha \right) \cos \left(\frac{\frac{s}{d}}{\frac{d}{u+1} \sin \alpha} \right) \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{f}(s) \in \underline{\Sigma}_1.
 \end{aligned}$$

4. Herstellung

Wir richten nun den Fokus auf die praktische Herstellung der entwickelten Kegelräder. Dafür werden wir uns in Kapitel 4.1 einen Überblick über die vollständige Prozesskette der Herstellung verschaffen. Daran anschließend folgt in Kapitel 4.2 ein Einschub über Splines, die wir in Kapitel 4.3 zur Darstellung der Zahnflanken benötigen. Abschließend werden wir uns in Kapitel 4.4 die physische Fertigung der Kegelräder ansehen. Dabei erhalten wir einen kurzen Einblick in technologische Aspekte, die unabhängig von der hergestellten Geometrie eigene ingenieurwissenschaftliche Forschungsinhalte darstellen.

4.1. Die Prozesskette

Die Abfolge der Arbeitsschritte zur Herstellung von Kegelrädern bezeichnen wir als *Prozesskette*, und die dafür verwendeten Programme als *Programmkette*.

Am Anfang steht die Wahl der Einflußgrößen des Herstellungsprozesses, der sogenannten *Verzahnungsparameter*. Diesen Schritt bezeichnet man als *Auslegung* eines Getriebes. Die Auslegung ist ein komplizierter Prozess, der sicherstellt, dass das Getriebe später die gewünschten Eigenschaften aufweist und den spezifizierten Ansprüchen genügt. Für viele der Parameter ist jedoch nur eine heuristische Auswahl möglich, die durch Herstellungs- und Abrollsimulationen bestätigt und wenn nötig korrigiert werden muss. Durch die in Kapitel 3 entwickelte sphärische Kegelradanalyse wird die Anzahl der Verzahnungsparameter stark verkleinert. Insbesondere durch den Abbau von Redundanzen und den direkteren Einfluss der Parameter auf die Kontaktgeometrie, ist es möglich, die Auslegung deutlich zu vereinfachen. Die neuen Verzahnungsparameter werden im Moment gemeinsam mit der Siemens AG in der Praxis erprobt und in Testreihen überprüft.

Wenn die Verzahnungsparameter festgelegt wurden, erfolgt die Berechnung mit Hilfe der in Kapitel 3 hergeleiteten Formeln. Für Kugelevolventenprofile können wir die Gleichungen analytisch lösen. Für andere Profillinien ist eine numerische Berechnung erforderlich. Aufgrund der relativ geringen Komplexität erhalten wir in annehmbarer Zeit die Berechnung in hinreichender Genauigkeit. Die Auswertung der Formeln findet im Moment im Programm Matlab statt. Es ist jedoch genauso denkbar, ein Stand-Alone-Programm zu erstellen. Die Ausgabe der Nutzflanken des Kegelrads geschieht vorerst in Form einer dreidimensionalen Punktwolke im ASCII-Format.

Die Punktwolke wird an das CAD/CAM-Programm NX übergeben. Der CAD-Part rekonstruiert daraus wieder die Nutzflanke. Für die Flächenberechnung kommt ein interner Blackbox-Algorithmus zum Einsatz. Wir erhalten daher von NX keine Informationen über die Genauigkeit der Rekonstruktion. Zusätzlich gestalten wir in diesem Schritt manuell den übrigen, für die Abrollung nur indirekt relevanten Bereich des Kegelrads.

Mit der Auswahl des Fertigungswerkzeugs und der Fertigungsstrategie endet der Design-

prozess. Der CAM-Part von NX berechnet nun vollautomatisch alle für die Herstellung relevanten Angaben, wie beispielsweise die Bahn und Orientierung des Werkzeugs. In diesem Schritt steckt eine Menge Know-how, dass durch einen selbst generierten Fertigungsablauf nicht genutzt werden könnte. An dieser Stelle ist daher im Gegensatz zum CAD-Part der Blackbox-Algorithmus vorzuziehen. Der Export aus NX erfolgt durch eine Datei mit direkten Programmanweisungen für die CNC-Steuerung, den sogenannten G-Code. Im letzten Schritt stellt nun die 5-Achs-CNC-Maschine das Kegelrad physisch her.

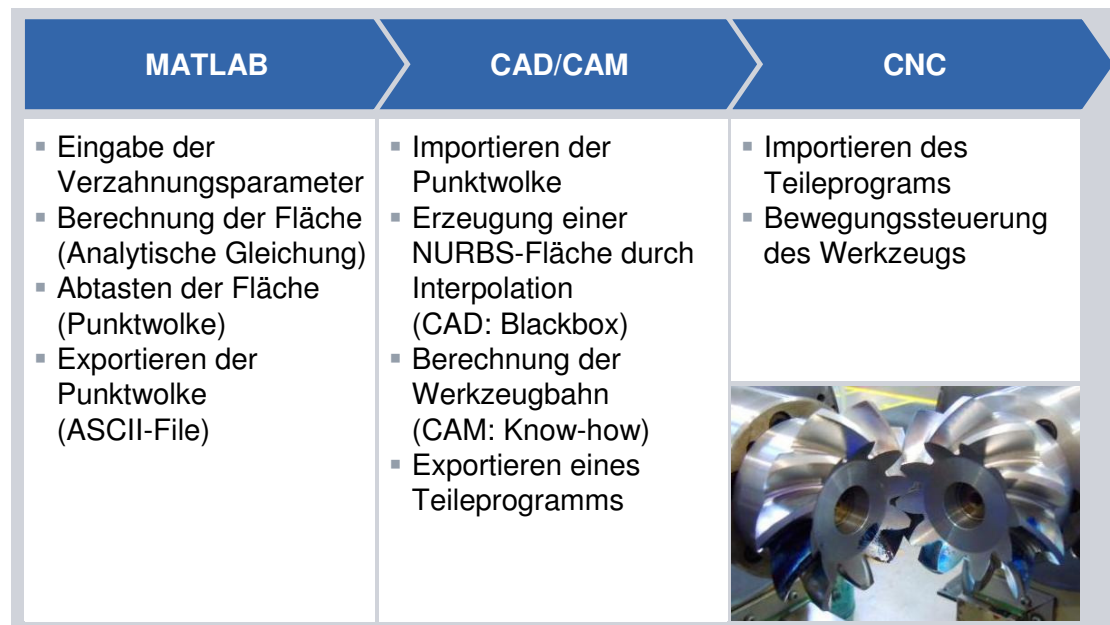


Abbildung 4.1.: Die Programmkette mit den einzelnen Prozessschritten

Abbildung 4.1 illustriert die zuvor beschriebene Prozesskette. Bei genauerer Betrachtung fällt auf, dass wir eine Fläche erst abtasten, um dann aus den Abtastpunkten die Fläche zu rekonstruieren. Alternativ können wir die Fläche auch direkt in MATLAB in einem in NX importierbaren Format generieren. Auf diesem Weg behalten wir die Kontrolle über den Approximationsfehler und vermeiden eine potentielle Fehlerquelle. Hier bietet sich die Verwendung des International Graphics Exchange Format (IGES) an, das es ermöglicht die Nutzflanke als NURBS-Fläche zu übertragen. In Kapitel 4.3 beschäftigen wir uns mit der Approximation der Fläche und vergleichen den Approximationsfehler und den Aufwand. In Abbildung 4.2 wird die neue Prozesskette illustriert.

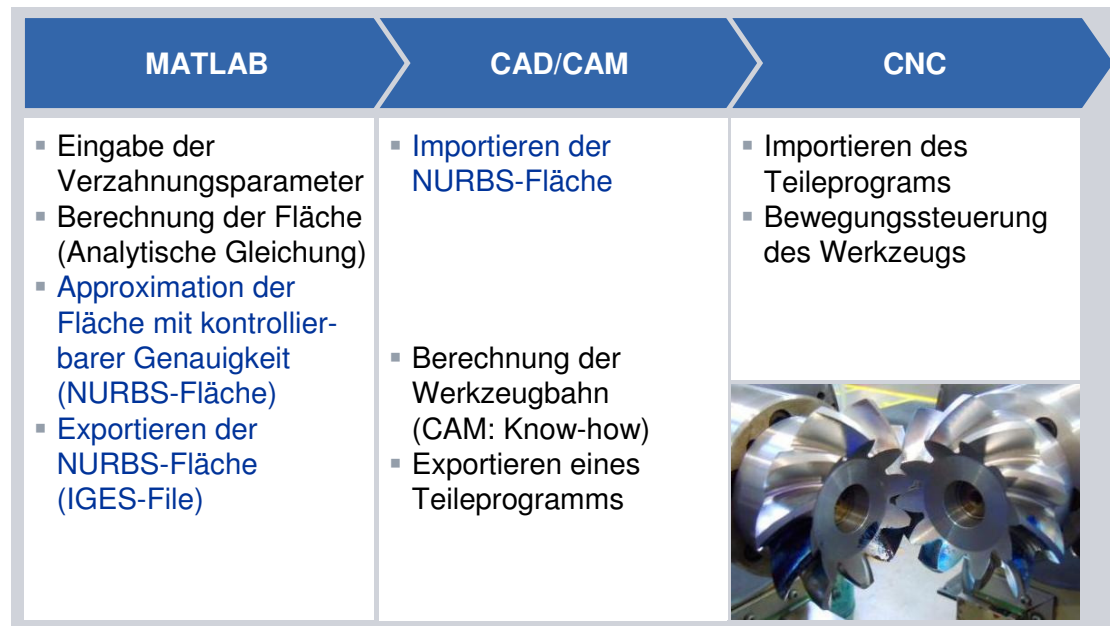


Abbildung 4.2.: Die Programmkette mit Übergabe von NURBS-Flächen

4.2. Splines

Splines sind stückweise definierte Funktionen mit gewissen Glattheitsbedingungen an den Bruchstellen. Handelt es sich bei den Funktionsstücken um Polynome, spricht man von einem polynomialen Spline. Die Menge aller polynomialen Splines bildet einen Vektorraum, den wir als Splineraum bezeichnen. Die B-Splines bilden eine Basis des Splineraums mit minimalem Träger. Die Koeffizienten eines Splines in der B-Spline-Basis bezeichnen wir als Kontrollpunkte. Sie sind nicht nur als intuitiv erfassbare Modellierungsparameter des Splines im CAD sehr hilfreich, sondern bilden auch eine numerisch besonders geeignete Darstellung. Als Erweiterung der polynomialen Splines können rationale Splines mit rationalen Funktionsstücken betrachtet werden. Auch die Menge aller rationalen Splines mit gleichem polynomialen Nennerspline bildet einen Vektorraum. Gerade im Umfeld von CAD-Anwendungen wird häufig von NURBS gesprochen. Die *Non-Uniform-Rational-B-Splines* bezeichnen rationale Splines mit nicht zwingend gleichverteilten Bruchstellen in der B-Spline-Darstellung. Dieses Kapitel beschreibt die Grundlagen der angewendeten Verfahren. Einen tieferen Einblick in Theorie und Anwendung polynomialen Splines ermöglicht [28] und eine umfassende Darstellung rationaler Splines findet sich in [23].

4.2.1. Definitionen

Die Parameterwerte der Bruchstellen eines Splines bezeichnen wir als *Knoten*. Setzen wir diese unter der Möglichkeit mehrfacher Knoten zusammen, erhalten wir eine Knotenfolge.

Definition (Knotenfolge) *Eine Knotenfolge T der Ordnung $m \in \mathbb{N}$ ist eine aufsteigend sortierte, endliche Menge mit maximal $m+1$ aufeinander folgenden identischen Elementen:*

$$T = T_{m,n} := \{t_1, \dots, t_{n+m+1}\} \subset \mathbb{R},$$

$$t_1 \leq \dots \leq t_{n+m+1}, \quad t_j < t_{j+m+1} \quad \text{für } j = 1, \dots, n.$$

Wir bezeichnen die $m+1$ kleinsten Knoten als *linke Randknoten* und die $m+1$ größten Knoten als *rechte Randknoten*. Das Intervall (t_{m+1}, t_{n+1}) wird als *inneres Knotenintervall* bezeichnet. Die polynomialen B-Splines lassen sich rekursiv aus den charakteristischen Funktionen der Knotenfolge definieren.

Definition (polynomialer B-Spline) *Der i -te polynomiale B-Spline $N_i = N_i^m(\cdot|T)$ der Ordnung m zur Knotenfolge T ist für $i = 1, \dots, n$ wie folgt definiert:*

$$N_j^k(\cdot|T) := \frac{\cdot - t_j}{t_{j+k} - t_j} N_j^{k-1}(\cdot|T) + \frac{t_{j+k+1} - \cdot}{t_{j+k+1} - t_{j+1}} N_{j+1}^{k-1}(\cdot|T),$$

$$N_j^0(\cdot|T) := \chi_{[t_j, t_{j+1})},$$

wobei $j = 1, \dots, n+m-k$, $k = 1, \dots, m$.

Für mehrfache Knoten liefert diese Definition formal eine Division durch Null, welche durch die dann verschwindende charakteristische Funktion χ jedoch keine Auswirkungen auf den B-Spline hat. Zur Vereinfachung der Notation fassen wir die polynomialen B-Splines in einem Vektor $\mathbf{N} = (N_1 \dots N_n)^T$ zusammen, und verzichten auf die Angabe der Ordnung und Knotenfolge, wenn sich diese aus dem Kontext ergeben. Zusätzlich definieren wir einen Vektor der *Gewichte* $\mathbf{w} := (w_1 \dots w_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Damit lassen sich die polynomialen B-Splines zu den rationalen B-Splines erweitern.

Definition (rationaler B-Spline) *Der i -te rationale B-Spline R_i der Ordnung m zur Knotenfolge T mit dem Gewichten \mathbf{w} ist für $i = 1, \dots, n$ wie folgt definiert:*

$$R_i = R_i^m(\cdot|T|\mathbf{w}) := \frac{w_i N_i}{\mathbf{w}^T \mathbf{N}}.$$

Wir fassen auch die rationalen B-Splines in einem Vektor $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^T$ zusammen und betrachten einige grundlegende Eigenschaften die sich in [23, S.118] finden lassen.

Satz 5 (Eigenschaften der B-Splines) *Die B-Splines sind nichtnegative, stückweise rationale Polynome vom Höchstgrad m mit kompaktem Träger und bilden eine Teilung der Eins auf dem inneren Knotenintervall.*

(i) $R_i(s) \geq 0$ für alle $s \in \mathbb{R}$,

- (ii) $R_i(s) = 0$ für alle $s \notin [t_i, t_{i+m+1}]$,
- (iii) $R_i|_{(t_l, t_{l+1})} \in \frac{\Pi_m}{\Pi_m}$ für $l = 1, \dots, n+m$,
- (iv) $\sum_{i=1}^n R_i(s) = 1$ für alle $s \in (t_{m+1}, t_{n+1})$.

Die Gewichte sind skalierungsunabhängig und im polynomialen Fall identisch.

- (v) $R_i^m(\cdot|T, \mathbf{w}) = N_i(\cdot|T)$ für $\mathbf{w} = \mathbf{1}_n \in \mathbb{R}^n$,
- (vi) $R_i^m(\cdot|T, u\mathbf{w}) = R_i(\cdot|T, \mathbf{w})$ für alle $u \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Eine Splinekurve erzeugen wir indem wir eine Linearkombination der B-Splines bilden. Die Koeffizienten $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^d$ der Linearkombination bezeichnen wir als *Kontrollpunkte* der Splinekurve und fassen sie zu einer Matrix $\mathbf{D} := (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n) \in \mathbb{R}^{d \times n}$ zusammen.

Definition (Splinekurve) Eine rationaler Splinekurve $S_m \mathbf{D} : [t_{m+1}, t_{n+1}] \rightarrow \mathbb{R}^d$ der Ordnung m zur Knotenfolge T mit Gewichten \mathbf{w} ist definiert als:

$$S_m \mathbf{D} = S(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n, \mathbf{w}, m, T) := \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i R_i(\cdot|T, \mathbf{w}) = \mathbf{D} \mathbf{R}. \quad (4.1)$$

Alle rationalen Splinekurven mit gleicher Ordnung, Knotenfolge und Gewichten bilden einen Vektorraum den wir als Splineraum bezeichnen.

Definition (Splineraum) Der Splineraum $\mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ der Ordnung m zur Knotenfolge T mit Gewichten \mathbf{w} ist der Vektorraum aller stückweisen rationalen Polynome $\frac{\mathbf{p}}{q}$ auf dem Intervall (t_{m+1}, t_{n+1}) mit $q := \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{N}$ und folgenden Bedingungen:

- (i) $\mathbf{p}|_{(t_j, t_{j+1})} \in \Pi_m^d$ für $j = m+1, \dots, n$,
- (ii) $q|_{(t_j, t_{j+1})} \in \Pi_m$ für $j = m+1, \dots, n$,
- (iii) $t_{j-1} < t_j = \dots = t_{j+\mu_j-1} < t_{j+\mu_j}$ $\mathbf{p}, q \in \mathcal{C}^{m-\mu_j}(t_j, t_{j+\mu_j})$.

Wir bezeichnen μ_j als *Vielfachheit* des Knotens t_j . Aus dem Satz von Curry-Schönberg für polynomiale Splines, zu finden in [4, S.97f] oder in der Originalquelle [3] folgt direkt:

Satz 6 (Curry-Schönberg) Die rationalen B-Splines bilden eine Basis des Splineraums.

Der Splineraum ist daher der Raum aller Splinekurven mit einer vorgegebener Ordnung, Knotenfolge und Gewichten, und eine Splinekurve kann eindeutig durch ihre Kontrollpunkte $\mathbf{d}_i \in \mathbb{R}^d$ beschrieben werden.

In homogenen Koordinaten lassen sich alle Splineräume mit gleicher Ordnung und Knotenfolge zusammenfassen. Mithilfe der Zentralprojektion $H^- : \mathbb{P}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ aus Kapitel 1.3.1 können diese Splinekurven im \mathbb{R}^d ausgewertet werden.

Definition (Der projektive Splineraum) *Wir bezeichnen das Bild der Vereinigung aller Splineräume $\mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ der Ordnung m zur Knotenfolge T im projektiven Raum \mathbb{P}^d als projektiven Splineraum $\bar{\mathbb{S}}_m^d(T)$.*

$$\bar{\mathbb{S}}_m^d(T) := H \left(\bigcup_{\mathbf{w}} \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T) \right)$$

mit $H(S(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n, \mathbf{w}, m, T)) = S(\bar{\mathbf{d}}_1, \dots, \bar{\mathbf{d}}_n, \mathbf{1}_n, m, T) \in \mathbb{S}_m^{d+1}(\mathbf{1}_n, T)$ und

$$\bar{\mathbf{d}}_i := \begin{pmatrix} w_i \\ \mathbf{d}_i w_i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d+1}, \quad \bar{\mathbf{D}} := (\bar{\mathbf{d}}_1, \dots, \bar{\mathbf{d}}_n) \in \mathbb{R}^{d+1 \times n}.$$

Der projektive Splineraum ermöglicht es viele Problemstellungen der rationalen Splinekurven in die Theorie der polynomialen Splinekurven zu übertragen. Es ist jedoch wichtig, zu beachten, dass zwischen dem Zusammenschluss der Splineräume der rationalen Splinekurven und dem $d+1$ -dimensionalen Splineraum der polynomialen Splinekurven keine Isomorphie besteht.

Sehen wir uns nun einige Eigenschaften der rationalen Splinekurven aus [23, S.118f] an.

Satz 7 (Eigenschaften der Splinekurven) *Die Gewichte sind skalierungsunabhängig. Im folgenden verwenden wir positive Gewichte, $\mathbf{w} > 0$, da die rationale Splinekurve dann frei von Singularitäten ist.*

$$(i) \quad S_m \mathbf{D} = S(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n, \alpha \mathbf{w}, m, T) \stackrel{!}{=} S(\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n, \mathbf{w}, m, T) \quad \text{für } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\},$$

$$(ii) \quad w_j > 0 \quad \text{für } j = 1, \dots, n \quad \Rightarrow \quad q(t) > 0 \quad \text{für } t \in [t_{m+1}, t_{n+1}].$$

Rationale Splinekurven mit positiven Gewichten sind nur auf dem inneren Knotenintervall $[t_{m+1}, t_{n+1}]$ definierte, stückweise rationale Funktionen $\frac{p}{q}$ vom Höchstgrad m . Die Splinekurve liegt innerhalb der konvexen Hülle ihrer Kontrollpunkte, dem sogenannten Kontrollpolygon. An einem Knoten der Vielfachheit μ_j sind sie $m - \mu_j$ -fach stetig differenzierbar, ansonsten glatt.

$$(iii) \quad S_m \mathbf{D}([t_{m+1}, t_{n+1}]) \subset [\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n],$$

$$(iv) \quad S_m \mathbf{D} \Big|_{(t_j, t_{j+1})} \in \frac{\Pi_m^d}{\Pi_m} \subset C^\infty \quad \text{für } j = m+1, \dots, n,$$

$$(v) \quad S_m \mathbf{D} \Big|_{(t_{j-1}, t_{j+1})} \in C^{m-\mu_j}.$$

Wählt man die Randknoten mit Vielfachheit $m+1$, oder einen inneren Knoten mit Vielfachheit m verläuft die Kurve exakt durch den entsprechende Kontrollpunkt.

$$(vi) \quad \mu_1 = m+1 \Rightarrow S_m \mathbf{D}(t_{m+1}) = \mathbf{d}_1 \quad \mu_{n+1} = m+1 \Rightarrow S_m \mathbf{D}(t_{n+1}) = \mathbf{d}_n,$$

$$(vii) \quad \mu_j = m \Rightarrow S_m \mathbf{D}(t_j) = \mathbf{d}_{j-1} \quad \text{für } j = 3, \dots, n.$$

Wenn wir die Kontrollpunkte \mathbf{d}_i einer Splinekurve als Punkte einer weiteren Splinekurve $\mathbf{d}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{d}_{ij} \mathbf{N}_j(t)$ betrachten entsteht eine Splinefläche. Der Definitionsbereich der Fläche ist das Tensorprodukt der Definitionsbereiche der beiden Kurven. Daher bezeichnen wir diesen Flächentyp als *Tensorproduktfläche*.

Definition (Splinefläche) *Eine rationaler Splinefläche $F_m \mathbf{D}_\otimes : [t_{m_1+1}, t_{n_1+1}] \times [t_{m_2+1}, t_{n_2+1}] \rightarrow \mathbb{R}^d$ der Ordnung (m_1, m_2) zur Knotenfolge $T_1 \times T_2$ mit Gewichten \mathbf{W} ist definiert als das Skalarprodukt ihrer Kontrollpunkte \mathbf{d}_{ij} und rationalen B-Splines R_i, R_j .*

$$F_m \mathbf{D}_\otimes = F(\mathbf{D}_\otimes, \mathbf{W}, m_1, m_2, T_1, T_2) := \sum_{i=1}^{n_1} \sum_{j=1}^{n_2} \mathbf{d}_{ij} R_{ij} = \mathbf{D}_\otimes \mathbf{R}_\otimes$$

mit $\mathbf{W} := (w_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n_1 \\ j=1, \dots, n_2}} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$,

$$\mathbf{D}_\otimes := (\mathbf{d}_{11}, \dots, \mathbf{d}_{1n_2}, \dots, \mathbf{d}_{n_11}, \dots, \mathbf{d}_{n_1n_2}) \in \mathbb{R}^{d \times n_1 \cdot n_2},$$

$$\mathbf{R}_\otimes := (R_{11}, \dots, R_{1n_2}, \dots, R_{n_11}, \dots, R_{n_1n_2})^T,$$

$$R_{ij} = R_{ij}^{m_1 m_2}(\cdot | T_1 \times T_2, \mathbf{W}) := R_i^{m_1}(\cdot | T_1, \mathbf{w}_{i1}, \dots, \mathbf{w}_{in_2}) \cdot R_j^{m_2}(\cdot | T_2, \mathbf{w}_{1j}, \dots, \mathbf{w}_{n_1j}).$$

Die Eigenschaften von Splinekurven lassen sich direkt auf Splineflächen übertragen. Es gilt jedoch zu beachten, dass die Voraussetzungen für beide Splinekurven erfüllt sein müssen. So findet z.B. bei $m+1$ -fachen Randknoten in beiden Splinekurven, nur an den Eckpunkten und nicht am gesamten Rand eine Endpunktinterpolation statt.

4.2.2. Auswertung und Manipulationen

Das Zusammenfassen der Kontrollpunkte in einer Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{d \times n}$ und der Gewichte in einem Vektor $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ vereinfacht die Auswertung und Manipulation der Splinekurve. Viele grundlegende Operationen lassen sich so durch eine Matrixmultiplikation darstellen.

Satz 8 (Auswertungen) *Eine rationale Splinekurve kann parallel an den Stellen $\mathbf{x}^T := (x_1 \dots x_{\#\mathbf{x}})$ ausgewertet werden. Dafür wertet man zuerst die rationalen B-Splines \mathbf{R} an \mathbf{x}^T aus, und multipliziert die resultierende Matrix mit der Kontrollpunktmatrix \mathbf{D} .*

$$S_m \mathbf{D}(\mathbf{x}^T) = \mathbf{D} \mathbf{R}(\mathbf{x}^T) \in \mathbb{R}^{d \times \#\mathbf{x}}.$$

Satz 9 (Affine Transformationen) *Rationale Splinekurven sind invariant bezüglich affiner Transformationen. Somit können Verschiebungen, Drehungen und Skalierungen direkt auf die Kontrollpunkte angewendet werden.*

$$\mathbf{A} S_m \mathbf{D}(t) + \mathbf{b} = S_m \tilde{\mathbf{D}}(t) \quad \text{für } \tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{A} \mathbf{D} + \mathbf{b} \quad \text{mit } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n.$$

Nach [23, S.83].

Satz 10 (Knoteneinfügen) *Durch Hinzufügen eines Knotens \hat{t} , einer sogenannten Verfeinerung \hat{T} einer Knotenfolge T entsteht ein neuer Splineraum $\mathbb{S}_m^d(\hat{\mathbf{w}}, \hat{T}) \supset \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$. Eine Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ lässt sich durch eine Multiplikation der Kontrollpunkte und Gewichte mit der Matrix $\mathbf{K}(\hat{t}) \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ in diesen Splineraum einbetten.*

$$S_m \mathbf{D} = S(\mathbf{D}, \mathbf{w}, m, T) \cong S(\mathbf{DK}, \mathbf{wK}, m, \hat{T}) \in \mathbb{S}_m^d(\hat{\mathbf{w}}, \hat{T}),$$

$$\mathbf{K} := \begin{pmatrix} \alpha_1 & 1 - \alpha_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_n & 1 - \alpha_{n+1} \end{pmatrix} \quad \text{mit } \alpha_j(\hat{t}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \hat{t} \geq t_{j+m} \\ \frac{\hat{t} - t_j}{t_{j+m} - t_j} & \text{für } \hat{t} \in (t_j, t_{j+m}) \\ 0 & \text{für } \hat{t} \leq t_j \end{cases}.$$

Nach [23, S.141ff].

Satz 11 (Ableitung und Integration einer polynomialen Splinekurve) *Die Ableitung einer polynomialen Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{1}_n, T)$ ist eine polynomiale Splinekurve vom Grad $m - 1$ zur selben Knotenfolge. Die Berechnung der Ableitung bzw. Stammfunktion erfolgt über die Multiplikation der Kontrollpunktmatrix mit $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$ bzw. \mathbf{G}^{-1} .*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_m \mathbf{D}(t) &= \mathbf{D} \frac{d}{dt} \mathbf{N}^m(t) = \mathbf{DGN}^{m-1}(t) = S_{m-1} \mathbf{DG}(t), \\ \int_{-\infty}^{\hat{t}} S_m \mathbf{D}(t) dt &= \mathbf{D} \int_{-\infty}^{\hat{t}} \mathbf{N}^m(t) dt = \mathbf{DG}^{-1} \mathbf{N}^{m+1}(\hat{t}) = S_{m+1} \mathbf{DG}^{-1}(\hat{t}). \end{aligned}$$

Für Ableitungen der Ordnung $r = 1, \dots, m$ definieren wir $\mathbf{G}_r = \mathbf{G}_r(m, T) := \mathbf{G}(m, T) \cdot \dots \cdot \mathbf{G}(m - r + 1, T) \in \mathbb{R}^{n \times (n+r)}$ mit:

$$\begin{aligned} \mathbf{G} = \mathbf{G}(m, T) &:= \begin{pmatrix} \frac{m}{\Delta t_1} & -\frac{m}{\Delta t_2} & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \frac{m}{\Delta t_n} & -\frac{m}{\Delta t_{n+1}} \end{pmatrix}, \\ \Delta t_j = \Delta t_j(m, T) &:= t_{j+m} - t_j \quad \text{für } j = 1, \dots, n+1 \\ \text{bzw. } \Delta t_j^{-1} &:= 0 \quad \text{wenn } t_{j+m} = t_j \quad \text{für } j = 1, n+1. \end{aligned}$$

Nach [28, S.19ff].

Rationale Polynome können beim Ableiten ihren Polynomgrad verdoppeln. Daher gestaltet sich auch das Ableiten von rationaler Splinekurven im Allgemeinen schwieriger als im Spezialfall von polynomialen Splinekurven. Die r -te Ableitung einer rationalen Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}_n, T)$ kann wie folgt rekursiv bestimmt werden:

$$\begin{aligned} \frac{d^r}{dt^r} S_m \mathbf{D}(t) &= \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i \frac{d^r}{dt^r} R_i(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i \frac{d^r}{dt^r} \frac{\mathbf{w}_i N_i(t)}{\mathbf{w}^T \mathbf{N}(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i \frac{w_i \frac{d^r}{dt^r} N_i(t) - \sum_{s=1}^r \binom{r}{s} \frac{d^{r-s}}{dt^{r-s}} R_i(t) \mathbf{w}^T \mathbf{G}_s \mathbf{N}(t)}{\mathbf{w}^T \mathbf{N}(t)}. \end{aligned}$$

Für $r = 1$ entspricht das der Ableitung mithilfe der Kettenregel. Für ein allgemeines $r \in \mathbb{N}$ erhalten wir die Formel indem wir $\mathbf{w}^T \mathbf{N}(t) \cdot R_i(t)$ mithilfe der Leibniz Regel ableiten und nach $\frac{d^r}{dt^r} R_i(t)$ umstellen, wie in [23, S.125] beschrieben.

4.2.3. Interpolation und Approximation

In Fragestellungen der Interpolation oder Approximation mittels Splinekurven im \mathbb{R}^d wird eine Splinekurve gesucht, die eine bestimmte Bedingung erfüllen soll. Dabei wird durch Vorgabe der Ordnung m und Knotenfolge T die Auswahl der Splinekurven eingeschränkt. Darüber hinaus werden üblicherweise auch die Gewichte \mathbf{w} festgelegt, sodass sich die Menge der zulässigen Splinekurven auf einen Splineraum $\mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ beschränkt. In diesem linearen Vektorraum wird nun eine Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}_n, T)$ gesucht die die Bedingung erfüllt. Es gilt somit einzig, die Kontrollpunkte \mathbf{D} zu bestimmen.

Definition (Klassische Lagrange-Interpolation) *Aus einem vorgegebenem Splineraum $\mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ der Ordnung m zur Knotenfolge T mit Gewichten \mathbf{w} wird eine Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ gesucht, die an den Stellen $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_k) \in [t_{m+1}, t_{n+1}]^k$ die Werte $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k) \in \mathbb{R}^{d \times k}$ annimmt.*

$$S_m \mathbf{D}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{D} \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{P} \quad \text{mit } \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}) \in \mathbb{R}^{n \times k}.$$

Die klassische Lagrange-Interpolation für Splinekurven lässt sich also auf die Lösung eines inhomogenes linearen Gleichungssystems zurückführen. Im folgenden Satz aus [26, S.157ff] wird gezeigt, dass dieses LGS genau dann eine eindeutige Lösung besitzt wenn jedem B-Spline eine Interpolationsstelle zugeordnet werden kann.

Satz 12 (Schönberg&Whitney) *Die klassische Lagrange-Interpolation an den Stellen $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_k)$ mit $\tau_1 < \dots < \tau_k$ hat genau dann eine eindeutige Lösung, wenn:*

$$k = n \quad \text{und} \quad t_i < \tau_i < t_{i+m+1} \quad \text{für alle } i = 1, \dots, n.$$

Definition (Klassische Hermite-Interpolation) *Aus einem vorgegebenem Splineraum $\mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ der Ordnung m zur Knotenfolge T mit Gewichten \mathbf{w} wird eine Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ gesucht, die an den Stellen $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_k) \in [t_{m+1}, t_{n+1}]^k$ die Werte und Ableitungen $\mathbf{P}, \mathbf{P}', \dots, \mathbf{P}^{(r)} \in \mathbb{R}^{d \times k}$ annimmt:*

$$S_m \mathbf{D}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{D} \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{P},$$

$$\vdots$$

$$\frac{d^r}{dt^r} S_m \mathbf{D}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{D} \frac{d^r}{dt^r} \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{P}^{(r)}.$$

Das ist äquivalent zu

$$\mathbf{D} \left(\mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}), \dots, \frac{d^r}{dt^r} \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau}) \right) = \left(\mathbf{P}, \dots, \mathbf{P}^{(r)} \right).$$

Neben der klassischen Interpolation eignet sich die Minimierung eines Glattheitsfunktional als zusätzliche Bedingung an eine Splinekurve.

Definition (Glättungsspline) *Aus einem vorgegebenem Spliner Raum $\mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ der Ordnung m zur Knotenfolge T mit Gewichten \mathbf{w} wird die Splinekurve $S_m \mathbf{D}^* \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}_n, T)$ gesucht, welche das Glattheitsfunktional $S_m \mathbf{D} \mapsto \int_{t_{m+1}}^{t_{n+1}} \left\| \frac{d^r}{dt^r} S_m \mathbf{D}(t) \right\|_2 dt$ minimiert und dabei die klassische Interpolationsbedingung $\mathbf{D} \cdot \mathbf{R}(\tau) = \mathbf{P} \Leftrightarrow \mathbf{d}^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}(\tau)) = \mathbf{p}^T$ erfüllt.*

$$\min_{\mathbf{D}} \int_{t_{m+1}}^{t_{n+1}} \left\| \frac{d^r}{dt^r} S_m \mathbf{D}(t) \right\|_2 dt = \min_{\mathbf{d}} \underbrace{\mathbf{d}^T \begin{pmatrix} \mathbf{M} & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{M} \end{pmatrix} \mathbf{d}}_{=: \mathbf{I} \otimes \mathbf{M} \in \mathbb{R}^{nd \times nd}}$$

mit $\mathbf{M} := \int_{t_{m+1}}^{t_{n+1}} \frac{d^r}{dt^r} \mathbf{R}(t) \frac{d^r}{dt^r} \mathbf{R}^T(t) dt \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\mathbf{d} := (\mathbf{d}_{x_1}^T, \dots, \mathbf{d}_{x_d}^T)^T \in \mathbb{R}^{nd}$,
 $\mathbf{p} := (\mathbf{p}_{x_1}^T, \dots, \mathbf{p}_{x_d}^T)^T \in \mathbb{R}^{kd}$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_{x_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{d}_{x_d}^T \end{pmatrix} = \mathbf{D}, \quad \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{x_1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{x_d}^T \end{pmatrix} = \mathbf{P}, \quad \mathbf{I} \otimes \mathbf{R}(\tau) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}(\tau) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{R}(\tau) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{nd \times kd}.$$

Satz 13 *Der Glättungsspline $S_m \mathbf{D}^*$ kann als Lösung des quadratischen Optimierungsproblems $\min \mathbf{d}^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}) \mathbf{d}$ mit linearen Nebenbedingungen $\mathbf{d}^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R})(\tau) = \mathbf{p}^T$ durch die Lösung des folgenden linearen Gleichungssystems mit Hilfsvariablen $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)^T \in \mathbb{R}^k$ bestimmt werden.*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{I} \otimes \mathbf{M} & \mathbf{I} \otimes \mathbf{R}(\tau) \\ (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}(\tau))^T & \mathbf{0}_{k \times k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{nd} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}.$$

Beweis: Wir stellen die Lagrangefunktion des Optimierungsproblem auf:

$$\Lambda(\mathbf{d}, \boldsymbol{\lambda}) = \mathbf{d}^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}) \mathbf{d} + (\mathbf{d}^T (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}(\tau)) - \mathbf{p}^T) \boldsymbol{\lambda}.$$

Durch Nullsetzen des Gradienten der Lagrangefunktion erhalten wir das LGS:

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda &= \begin{pmatrix} 2(\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}) \mathbf{d} + (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}(\tau)) \boldsymbol{\lambda} \\ (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}(\tau))^T \mathbf{d} - \mathbf{p} \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{nd+k} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2(\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}) & \mathbf{I} \otimes \mathbf{R}(\tau) \\ (\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}(\tau))^T & \mathbf{0}_{k \times k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0}_{nd} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Lösung ist eindeutig, wenn $\frac{d^r}{dt^r} S_m \mathbf{D} = \frac{d^r}{dt^r} \mathbf{R}^T \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$, die Splinekurve also nicht polynomial von Grad r ist. Denn genau dann ist die Matrix \mathbf{M} und damit auch $\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}$ nicht nur positiv definit sondern strikt positiv definit. Siehe auch [28, S.45] für polynomiale Splines. \square

Satz 14 (numerische Integration einer Splinekurve) *Die Matrix $\mathbf{M} = \mathbf{M}(\mathbf{w}, T, r) = \int_{t_{m+1}}^{t_{n+1}} \frac{d^r}{dt^r} \mathbf{R}(t) \frac{d^r}{dt^r} \mathbf{R}^T(t) dt \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist symmetrisch, positiv definit und (m, m) -bandiert. Im polynomialen Fall ist eine exakte Berechnung mittels zusammengesetzter Gaußquadratur vom Grad $m - r$ möglich.*

Beweis: Die Symmetrie und positive Definitheit folgt direkt aus der Definition von M als Quadrat der Vektoren $\frac{d^r}{dt^r} \mathbf{R}(t)$. Für den Beweis der Bandiertheit sehen wir uns die einzelnen Einträge m_{ij} der Matrix M an.

$$m_{ij} = \int_{t_{m+1}}^{t_{n+1}} \frac{d^r}{dt^r} R_i(t) \frac{d^r}{dt^r} R_j(t) dt = 0 \text{ für } |i - j| > m,$$

da $\text{supp}(R_i) \cap \text{supp}(R_j) = [\max(t_i, t_j), \min(t_{i+m+1}, t_{j+m+1})]$. Im polynomialen Fall vereinfacht sich die Matrix M zu:

$$M(\mathbf{1}_n, T, r) = \int_{t_{m+1}}^{t_{n+1}} \mathbf{G}_r \mathbf{N}(t) \mathbf{N}^T(t) \mathbf{G}_r^T dt$$

$$\mathbf{G}_r \mathbf{N} \Big|_{(t_l, t_{l+1})} \in \Pi_{m-r} \Rightarrow \mathbf{G}_r \mathbf{N} \mathbf{N}^T \mathbf{G}_r^T \Big|_{(t_l, t_{l+1})} \in \Pi_{2(m-r)} \quad \text{für } l = 1, \dots, n + m.$$

Eine Gaussquadratur vom Grad $m - r$ ist in der Lage, Polynome vom Grad $2(m - r) + 1$ exakt zu berechnen, [27, S.90ff]. Wir wählen eine aus den Knotenintervallen (t_l, t_{l+1}) zusammengesetzte Gaussquadratur und erhalten eine exakte Berechnung von M . \square

In allen zuvor beschriebenen Verfahren wurden die Gewichte der rationalen Splinekurve vorgegeben. Die Ergebnisse zu unterschiedlichen Gewichten unterscheiden sich zwar deutlich, die Wahl der Gewichte ist jedoch reine Heuristik. In [7, S.240] schreibt Farin dazu folgendes:

We have not yet addressed the problem of how to choose the weights [...] for the data points [...]. No known algorithms exist for this problem. It seems reasonable to assign high weights in regions where the interpolant is expected to curve sharply..

Es erscheint daher sinnvoll auch einen Ansatz zu betrachten, der ohne die Vorgabe von Gewichten auskommt. Werden die Gewichte als zusätzliche Freiheitsgrade betrachtet, erweitert sich der zulässige Bereich auf den projektiven Splineraum $\bar{\mathbb{S}}_m^d(T)$. In [30, S.43ff] wird ein Verfahren vorgestellt, das in diesem Raum eine Lagrange-Interpolation berechnet und das Ergebnis mittels der Zentralprojektion H^- in den \mathbb{R}^d überführt.

Definition (Lagrange-Interpolation mit freien Gewichten) *Aus der Vereinigung $H^-(\bar{\mathbb{S}}_m^d(T))$ der Splineräume der Ordnung m zur Knotenfolge T wird eine Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ mit zugehörigen Gewichten $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ gesucht, die an den Stellen $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_k) \in [t_{m+1}, t_{n+1}]^k$ die Werte $\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_k) \in \mathbb{R}^{d \times k}$ annimmt.*

$$S_m \mathbf{D}(\tau_j) = \sum_{i=1}^n \mathbf{d}_i \frac{w_i N_i(\tau_j)}{\mathbf{w}^T \mathbf{N}(\tau_j)} = \mathbf{p}_j \quad j = 1, \dots, k.$$

Satz 15 Die Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ mit zugehörigen Gewichten $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung des Lagrange-Interpolationsproblems mit freien Gewichten wenn:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}} \in \ker \mathfrak{N}_0 \quad \text{mit} \quad \mathfrak{N}_0 &:= \begin{pmatrix} -\mathbf{p}_1 \mathbf{N}^T(\tau_1) & (\mathbf{I} \otimes \mathbf{N}(\tau_1))^T \\ \vdots & \vdots \\ -\mathbf{p}_k \mathbf{N}^T(\tau_k) & (\mathbf{I} \otimes \mathbf{N}(\tau_k))^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{kd \times n(d+1)}, \\ \bar{\mathbf{d}} &:= \begin{pmatrix} \mathbf{w}^T & \bar{\mathbf{d}}_{x_1}^T & \dots & \bar{\mathbf{d}}_{x_d}^T \end{pmatrix}^T \in \mathbb{R}^{n(d+1)}, \quad \text{wobei} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{w}^T \\ \bar{\mathbf{d}}_{x_1}^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{d}}_{x_d}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}^T \\ \mathbf{D}\mathbf{W} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{D}}, \\ (\mathbf{I} \otimes \mathbf{N}(\tau_j))^T &= \begin{pmatrix} \mathbf{N}^T(\tau_j) & & \\ & \ddots & \\ & & \mathbf{N}^T(\tau_j) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{d \times nd}, \quad \mathbf{W} := \begin{pmatrix} w_1 & & \\ & \ddots & \\ & & w_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}. \end{aligned}$$

Beweis: Der Beweis in der ursprünglichen Arbeit [30, S.43ff] verwendet die lineare Abhängigkeit der Interpolationspunkte in homogenen Koordinaten und der Splinedarstellung im \mathbb{R}^{n+1} . Dabei wird mittels eines Determinatenkriterium ein homogenes LGS hergeleitet. Im folgenden werde ich den Beweis konstruktiv aufbauen. Zum einen erhalten wir so einen Einblick in den Übergang zum projektiven Splineraum, und zum anderen kann dieser Ansatz im nächsten Abschnitt auf Hermite-Interpolation erweitert werden. Für $j = 1, \dots, k$ gilt

$$\mathbf{p}_j = \sum_{i=1}^n d_i \frac{w_i N_i(\tau_j)}{\mathbf{w}^T \mathbf{N}(\tau_j)} = \frac{\mathbf{D}\mathbf{W} \mathbf{N}(\tau_j)}{\mathbf{w}^T \mathbf{N}(\tau_j)}.$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} \mathbf{0}_d &= -\mathbf{p}_j \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\tau_j) + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}}_{x_1}^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{d}}_{x_d}^T \end{pmatrix} \mathbf{N}(\tau_j) = -\mathbf{p}_j \mathbf{N}^T(\tau_j) \mathbf{w} + \begin{pmatrix} \mathbf{N}^T(\tau_j) \bar{\mathbf{d}}_{x_1} \\ \vdots \\ \mathbf{N}^T(\tau_j) \bar{\mathbf{d}}_{x_d} \end{pmatrix} \\ &= (-\mathbf{p}_j \mathbf{N}^T(\tau_j), (\mathbf{I} \otimes \mathbf{N}(\tau_j))^T) \bar{\mathbf{d}}. \end{aligned}$$

□

In [30, S.45f] wird ein weiteres Verfahren mit freien Gewichten vorgestellt. Das Verfahren ermöglicht zusätzlich die Interpolation von Ableitungswerten des projektiven Splines. Da sich die Ableitungen des projektiven Splines jedoch von den Ableitungen im euklidischen Raum unterscheiden, stellt dieses Verfahren keine echte Hermite-Interpolation dar.

$$H^- \left(\frac{d}{dt} \bar{\mathbf{D}} \mathbf{N}(t) \right) = \sum_{i=1}^n d_i \frac{w_i \frac{d}{dt} N_i(t)}{\mathbf{w}^T \mathbf{G} \mathbf{N}(t)} \neq \sum_{i=1}^n d_i \frac{w_i \frac{d}{dt} N_i(t) - R_i(t) \mathbf{w}^T \mathbf{G} \mathbf{N}(t)}{\mathbf{w}^T \mathbf{N}(t)} = \frac{d}{dt} \mathbf{D} \mathbf{N}(t).$$

4.2.4. Ein neues Verfahren zur Hermite-Interpolation

Im diesem Kapitel werden wir die Lagrange-Interpolationsbedingungen mit freien Gewichten zu Hermite-Interpolationsbedingungen erweitern. Aus diesem Ansatz lassen sich verschiedene Verfahren zur echten Hermite-Interpolation mit freien Gewichten herleiten.

Definition (Hermite-Interpolation mit freien Gewichten) *Aus der Vereinigung $H^-(\mathbb{S}_m^d(T))$ der Splineräume der Ordnung m zur Knotenfolge T werden Gewichte $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ und eine Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ gesucht, deren Ableitungen an den Stellen $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_k) \in [t_{m+1}, t_{n+1}]^k$ die Werte $\mathbf{P}, \mathbf{P}', \dots, \mathbf{P}^{(r)} \in \mathbb{R}^{d \times k}$ annehmen.*

$$\frac{d^s}{dt^s} S_m \mathbf{D}(\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{P}^{(q)} = \left(\mathbf{p}_1^{(q)}, \dots, \mathbf{p}_k^{(q)} \right) \quad \text{für } q = 0, \dots, r.$$

Satz 16 *Die Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ mit zugehörigen Gewichten $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ ist genau dann Lösung der Hermite-Interpolation mit freien Gewichten wenn:*

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}} \in \ker \mathfrak{N} \quad \text{mit} \quad \mathfrak{N} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{N}_0 \\ \vdots \\ \mathfrak{N}_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{kd(r+1) \times n(d+1)}, \\ \mathfrak{N}_q &:= \begin{pmatrix} -\sum_{s=0}^q \binom{q}{s} \mathbf{p}_1^{(q-s)} \mathbf{N}^T(\tau_1) \mathbf{G}_s^T & (\mathbf{I} \otimes \mathbf{N}(\tau_1))^T \\ \vdots & \vdots \\ -\sum_{s=0}^q \binom{q}{s} \mathbf{p}_k^{(q-s)} \mathbf{N}^T(\tau_k) \mathbf{G}_s^T & (\mathbf{I} \otimes \mathbf{N}(\tau_k))^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{kd \times n(d+1)} \quad \text{für } q = 0, \dots, r, \\ \bar{\mathbf{d}} &:= \left(\mathbf{w}^T, \bar{\mathbf{d}}_{x_1}^T, \dots, \bar{\mathbf{d}}_{x_d}^T \right)^T \in \mathbb{R}^{n(d+1)}, \quad \text{wobei} \quad \begin{pmatrix} \mathbf{w}^T \\ \bar{\mathbf{d}}_{x_1}^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{d}}_{x_d}^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{w}^T \\ \mathbf{D} \mathbf{W} \end{pmatrix} = \bar{\mathbf{D}}. \end{aligned}$$

Beweis: Wir nutzen die Definition der Ableitung einer rationalen Splinekurve aus Satz 4.2.2 um analog zur Lagrange-Interpolation ein homogenes LGS aufzustellen. Für $j = 1, \dots, k$ $q = 0, \dots, r$ gilt:

$$\mathbf{p}_j^{(q)} = \frac{-\sum_{s=1}^q \binom{q}{s} \mathbf{p}_j^{(q-s)} \mathbf{w}^T \mathbf{G}_s \mathbf{N}(\tau_j) + \mathbf{D} \mathbf{W} \mathbf{N}(\tau_j)}{\mathbf{w}^T \mathbf{N}(\tau_j)}$$

Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{0}_d &= -\mathbf{p}_j^{(q)} \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\tau_j) - \sum_{s=1}^q \binom{q}{s} \mathbf{p}_j^{(q-s)} \mathbf{w}^T \mathbf{G}_s \mathbf{N}(\tau_j) + \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{d}}_{x_1}^T \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{d}}_{x_d}^T \end{pmatrix} \mathbf{N}(\tau_j) \\
 &= -\sum_{s=0}^q \binom{q}{s} \mathbf{p}_j^{(q-s)} \mathbf{N}^T(\tau_j) \mathbf{G}_s^T \mathbf{w} + \begin{pmatrix} \mathbf{N}^T(\tau_j) \bar{\mathbf{d}}_{x_1} \\ \vdots \\ \mathbf{N}^T(\tau_j) \bar{\mathbf{d}}_{x_d} \end{pmatrix} \\
 &= \left(-\sum_{s=0}^q \binom{q}{s} \mathbf{p}_1^{(q-s)} \mathbf{N}^T(\tau_1) \mathbf{G}_s^T, \mathbf{I} \otimes \mathbf{N}(\tau_j) \right)^T \bar{\mathbf{d}}.
 \end{aligned}$$

□

Damit die Lösung bis auf Normierung der Gewichte eindeutig ist, muss $\text{rang } \mathfrak{N} = n(d+1) - 1$ gelten. Wir gehen davon aus, dass sich die Interpolationspunkte in allgemeiner Lage befinden, so dass $\mathfrak{N} \in \mathbb{R}^{kd(r+1) \times n(d+1)}$ keinen Rangdefekt aufweist. Die Splineraumdimension muss dann wie folgt gewählt werden:

$$n = \frac{kd(r+1) + 1}{d+1}.$$

Selbst bei freier Anzahl der Interpolationsstellen $k \in \mathbb{N}$ existiert damit leider nicht immer eine ganzzahlige Splineraumdimension $n \in \mathbb{N}$, wie man am Beispiel einer Hermite-Interpolation der ersten Ableitung $r = 1$ im \mathbb{R}^3 überprüfen kann.

Um dieses Problem zu umgehen kann die Hermite-Interpolation als Nebenbedingung eines Optimierungsproblems betrachtet werden. Zusätzlich lassen sich dann auch positive Gewichte garantieren.

Definition (Lineare Optimierung mit Hermite-Nebenbedingungen) *Aus der Vereinigung $H^-(\mathbb{S}_m^d(T))$ der Splineräume der Ordnung m zur Knotenfolge T wird die Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ gesucht, die unter Einhaltung der Hermite-Interpolationsbedingung bei normierten Gewichten $\mathbf{w}^T \mathbf{1}_n = n$, das größte minimale Gewicht w_i besitzt, dass nicht negativ ist:*

$$\min \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0}_{n(d+1)}^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \bar{\mathbf{d}} \end{pmatrix}$$

$$\text{mit NB: } (\mathbf{0}_{dk(r+1)}, \mathfrak{N}) \begin{pmatrix} u \\ \bar{\mathbf{d}} \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{dk(r+1)}, \mathbf{1}_n^T \mathbf{w} = n \text{ und } \begin{pmatrix} -\mathbf{1}_n & \mathbf{I}_n \\ 1 & \mathbf{0}_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \mathbf{w} \end{pmatrix} \geq \mathbf{0}_{n+1}.$$

Der zuvor beschriebene Ansatz löst zwar das Problem nicht ganzzahliger Splineraumdimensionen, die Zielfunktion trägt jedoch nicht zur Approximation der Vorgabedaten bei. Wählen wir eine größere Splineraumdimension als zur Interpolation benötigt, nähert sich die Lösung schnell einer polynomialen Splinekurve an, welche das Zielfunktional ohne Nebenbedingungen optimieren würde.

Sind die Interpolationswerte Abtastwerte einer zu approximierenden Kurve $\mathbf{p}(\tau) \in \mathbb{R}^d$ mit $\mathbf{p}_j = \mathbf{p}(\tau_j)$ für $j = 1, \dots, k$ und liegen hinreichend Zwischenwerte der Kurve vor, können wir eine Zielfunktion formulieren, die eine bessere Approximation der Zwischenwerte ermöglicht. Wir setzen dafür \mathfrak{M} analog \mathbf{p} für alle $\tau \in \mathbb{R}$ fort.

Definition (Quadratische Optimierung mit Hermite-Nebenbedingungen) *Aus der Vereinigung $H^-(\mathbb{S}_m^d(T))$ der Splineräume der Ordnung m zur Knotenfolge T wird die Splinekurve $S_m \mathbf{D} \in \mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$ gesucht, die unter Einhaltung der Hermite-Interpolationsbedingung bei normierten Gewichten $\mathbf{w}^T \mathbf{1}_n = n$, den gewichteten Abstand zur Funktion $\mathbf{p}(\cdot)$ minimiert.*

$$\min \bar{\mathbf{d}}^T \mathfrak{M} \bar{\mathbf{d}} \quad \text{mit } \mathfrak{M} := \int_{t_{m+1}}^{t_{n+1}} \mathfrak{M}_0^T(t) \mathfrak{M}_0(t) dt$$

mit Nebenbedingungen: $\mathfrak{M}(\tau_1, \dots, \tau_k) \bar{\mathbf{d}} = \mathbf{0}_{dk(r+1)}$, $\mathbf{1}_n^T \mathbf{w} = n$.

Analog zu Satz 13 kann das quadratische Optimierungsproblem mittels Lagrange-Multiplikatoren in ein LGS umgewandelt werden. Die Matrix $\mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n(d+1) \times n(d+1)}$ lässt sich ähnlich zu Satz 14 effizient mittels zusammengesetzter Gaußquadratur berechnen, wie an folgender Umformung ersichtlich wird.

$$\mathfrak{M} = \int_{t_{m+1}}^{t_{n+1}} \begin{pmatrix} \|\mathbf{p}(t)\|_2^2 \mathbf{N}^T \mathbf{N}(t) & -p_{x_1}(t) \mathbf{N}^T \mathbf{N}(t) & \dots & -p_{x_d}(t) \mathbf{N}^T \mathbf{N}(t) \\ -p_{x_1}(t) \mathbf{N}^T \mathbf{N}(t) & \mathbf{N}^T \mathbf{N}(t) & & \mathbf{0} \\ \vdots & & \ddots & \\ -p_{x_d}(t) \mathbf{N}^T \mathbf{N}(t) & \mathbf{0} & & \mathbf{N}^T \mathbf{N}(t) \end{pmatrix} dt$$

4.2.5. Darstellung von Kegelschnitten

Der große Vorteil von rationalen gegenüber polynomialen Splines liegt darin, dass sie neben der Freiformdarstellung von Kurven und Flächen auch genutzt werden können, um Kegelschnitte exakt darzustellen, [23, S.281]. Im folgenden werden wir exemplarisch die exakte Darstellung eines Kreissegments durch eine rationale Splinekurve berechnen. Eine detailliertere Beschreibung unter dem Aspekt der effizienten Nutzung in CAD-Programmen inklusive des Exports als IGES-File ist in [35] zu finden. Die Darstellung von beliebigen über Kreissegmente hinausgehende Kegelschnitte wird in [23, Kapitel 7] und [7, Kapitel 12] ausführlich behandelt.

Da Splinekurven wie in Satz 9 beschrieben, invariant bezüglich Verschiebung, Drehung und Skalierung sind, betrachten wir o.B.d.A nur die Darstellung eines symmetrisch um die negative y -Achse geöffneten Segments des Einheitskreises. Der Einheitskreis lässt sich in rationaler Parametrisierung wie folgt beschreiben.

$$\kappa(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)^T \quad t \in \mathbb{R}.$$

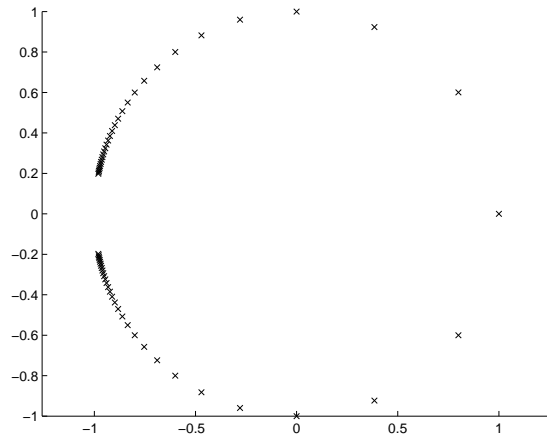


Abbildung 4.3.: Darstellung der rationalen Parametrisierung eines Kreises $\kappa(t)$ durch Auswertung an den Stellen $t = -10, 9.6, \dots, 10$.

Das Kreissegment mit dem Öffnungswinkel α ist dann die Kurve

$$\kappa : [-\tau, \tau] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad \tau = 2 \arctan \frac{2t}{1-t^2}.$$

Bei Kegelschnitten ist es ausreichend als Splinedarstellung quadratische Bezierbögen zu verwenden, [23, Kapitel 7.3]. Dies sind Splinekurven mit Splinegrad $m = 2$, Splineraumdimension $n = 3$ und einer Knotenfolge ohne innere Knoten. Zusätzlich bietet es sich an $m + 1$ -fache Randknoten zu verwenden und die Parametrisierung beizubehalten. Somit erhalten wir eine Knotenfolge $T = \{-\tau, -\tau, -\tau, \tau, \tau, \tau\}$. Durch die Endpunktinterpolation Satz 7(iii) der Splinekurve und des polynomialen Gewichtssplines $\mathbf{w}^T \mathbf{N}$ sind die äußeren Kontrollpunkte und Gewichte bereits vorgegeben:

$$\mathbf{d}_1 = \kappa(-\tau) = \left(\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \frac{-2\tau}{1+\tau^2} \right)^T, \quad \mathbf{d}_3 = \kappa(\tau) = \left(\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}, \frac{2\tau}{1+\tau^2} \right)^T, \quad \mathbf{w}_1 = 1 + \tau^2 = \mathbf{w}_3.$$

Den mittleren Kontrollpunkt und das fehlende Gewicht erhält man durch Einsetzen eines Kurvenpunkts. Insbesondere eignet sich hier der Achsenschnittpunkt $\kappa(0) = (1, 0)^T$ mit zugehörigem Wert der Nennerfunktion $\mathbf{w}^T \mathbf{N}(0) = 1$.

$$\mathbf{d}_2 = \left(\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}, 0 \right)^T, \quad \mathbf{w}_2 = 1 - \tau^2.$$

Für $\tau \rightarrow 1$ wandert der Kontrollpunkt \mathbf{d}_2 ins Unendliche während das zugehörige Gewicht w_2 gegen Null geht. In [23, Kapitel 7.4] wird beschrieben, wie man den Splinebegriff auch auf solche Kurven erweitern kann. Für $\tau > 1$ erhalten wir ein negatives Gewichte w_2 . Möchte man diese Effekte vermeiden kann das Kreissegment in mehrere Teilstücke zerlegt werden. Der Preis hierfür ist jedoch ein Glattheitsverlust an der Bruchstelle, [35, S.50]. Insgesamt erhalten wir die Splinekurve $S_2\mathbf{D} \in \mathbb{S}_2^2(\mathbf{w}, T)$.

$$\begin{aligned} S_2\mathbf{D}(t) &= \sum_{i=1}^3 \mathbf{d}_i \cdot R_i^2(\cdot|T|\mathbf{w}) \\ &= \left(\frac{\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}}{\frac{-2\tau}{1+\tau^2}} \right) \frac{(1+\tau^2)(\tau-t)^2}{4\tau^2(1+t^2)} + \left(\frac{\frac{1+\tau^2}{1-\tau^2}}{0} \right) \frac{(1-\tau^2)(\tau^2-t^2)}{2\tau^2(1+t^2)} + \left(\frac{\frac{1-\tau^2}{1+\tau^2}}{\frac{2\tau}{1+\tau^2}} \right) \frac{(1+\tau^2)(\tau+t)^2}{4\tau^2(1+t^2)} \\ &= \left(\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{\frac{-2t}{1+t^2}} \right) = \mathbf{k}(t) \quad \text{für } t \in [-\tau, \tau]. \end{aligned}$$

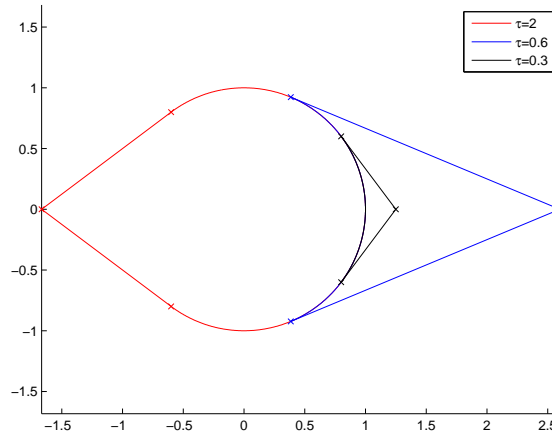


Abbildung 4.4.: NURBS-Kreissegmente mit zugehörigem Kontrollpolygon

4.3. Flächendaten

Wie in Kapitel 4.1 beschrieben, stehen uns für den Export der Nutzflanke verschiedene Datenformate zur Verfügung. Die einfachste Variante, die punktweise Auswertung wird in Kapitel 4.3.1 diskutiert. Darüber hinaus bietet es sich an, die Nutzflanke mit einer NURBS-Fläche zu approximieren. Hierbei unterscheiden wir zwei Ansätze: Zum einen können wir aus Komplexitätsgründen die Gewichte des NURBS eins setzen, und mit einer polynomialen Splinefläche arbeiten. Diesen Fall behandeln wir in Kapitel 4.3.2. Zum anderen können wir die Flexibilität der NURBS ausnutzen und rationale Splineflächen verwenden, wie wir in Kapitel 4.3.3 sehen werden.

4.3.1. Punktwolke

Durch *Abtasten* der Nutzflanke erhalten wir eine Menge von Punkten die wir als *Punktwolke* bezeichnen. Aufgrund des symmetrischen Aufbaus von Kegelrädern bietet es sich an, die Nutzflanke auf einem rechteckigen Gitter von Funktionsstellen über dem Kugelradius $r \in [r_a, r_e]$ und dem Profillinienparameter $s \in [s_a, s_e]$ abzutasten. Damit bleibt die Struktur der Flankenlinien und Profillinien erhalten was unter anderem für die Berandung der Nutzflanke vorteilhaft ist. Für viele Anwendungen ist es sinnvoll, zusätzlich die Flächennormale an jedem Abtastwert auszuwerten. Zum Speichern bietet sich ein einfache ASCII-Kodierung an wobei der Syntax und die Sortierung der Punkte abhängig vom Anwendungsprogramm leicht variieren kann.

Die Abtastung ermöglicht aufgrund der relativ geringen Krümmung der Zahnflanke eine recht gute Beschreibung der Nutzflanke. Übliche Programme zur Analyse und Simulation von Zahnradern arbeiten intern häufig gerade einmal mit 15×15 Abtastwerten einer Nutzflanke. Zur genauen Beurteilung des durch die Abtastung entstandenen Fehlers $\rho_{i,j}$ verfeinern wir das Auswertungsgitter um den Wert $(\hat{r}_i, \hat{s}_j) := (\frac{r_i+r_{i+1}}{2}, \frac{s_j+s_{j+1}}{2})$ und berechnen den Abstand zum entsprechenden Punkt auf der konvexen Hülle der Abtastpunkte.

$$\rho_{i,j} := \left\| \mathbf{f}(\hat{r}_i, \hat{s}_j) - \frac{1}{4} \cdot (\mathbf{f}(r_i, s_j) + \mathbf{f}(r_{i+1}, s_j) + \mathbf{f}(r_i, s_{j+1}) + \mathbf{f}(r_{i+1}, s_{j+1})) \right\|.$$

In der folgenden Tabelle ist für verschiedene Gittergrößen der maximale relative Fehler, der Speicherplatz und die Berechnungsdauer¹ unter typischen Bedingungen dargestellt.

$\#\{r_i\}$	$\#\{s_j\}$	$\max \frac{\rho}{r}$	SPEICHERBEDARF	BERECHNUNGSDAUER
15	15	$1.3 \cdot 10^{-3}$	11kB	$\approx 0.5s$
135	135	$1.5 \cdot 10^{-5}$	846kB	$\approx 4s$
405	405	$1.6 \cdot 10^{-6}$	7.6MB	$\approx 30s$
1215	1215	$1.8 \cdot 10^{-7}$	68.5MB	$\approx 600s$

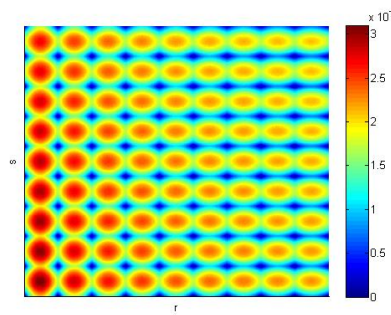


Abbildung 4.5.: Der Verlauf des relativen Fehlers $\frac{\rho}{r}$ über der Zahnflanke $\mathbf{f}(r, s)$ bei bilinearer Interpolation von 10×10 Punkten.

¹Berechnungsdauer auf einer Intel® Atom™ CPU N270 @1.6GHz mit 1GB RAM

4.3.2. Polynomiale Splinefläche

Statt einer bilinearen Interpolation zwischen den Abtastpunkten werden wir nun eine polynomiale Splinefläche höherer Ordnung erzeugen. Neben der Interpolation der Funktionswerte fordern wir dafür auch die Interpolation der partiellen Ableitung. Die Ableitung ist, wie wir in Kapitel 3.2 beschrieben, für die Abrollung des Zahnradpaars besonders wichtig. Mit einer klassischen Hermite-Interpolation nach Definition 4.2.3 berechnen wir eine polynomiale Splinefläche. Wie in Kapitel 4.3.1 erhalten wir die Interpolationswerte $\mathbf{f}(r_i, s_j)$, $\mathbf{f}'(r_i, s_j)$ durch Abtastung der Profillinie \mathbf{f} und ihrer partiellen Ableitung $\mathbf{f}' = \frac{d}{ds}\mathbf{f}$ an einem rechteckigen Gitter $\{(r_i, s_j)\}$ über dem Kugelradius $r_i \in [r_a, r_e]$ und dem Profillinienparameter $s_j \in [s_a, s_e]$. Damit überträgt sich die Struktur der Flanken- und Profillinien weitest möglich auf die Splinefläche, was unter anderem für die Berandung der Nutzflanke vorteilhaft ist. Zum Speichern verwenden wir NURBS-Flächen, Entity Type 128 des IGES-Formats. Diese ist in [34, S.126] detailliert beschrieben.

Die polynomiale Splinefläche ermöglicht eine deutlich bessere Approximation als die einfache Abtastung der Zahnflanke. Durch Auswertung der Splinefläche und der Zahnflanke kann der Approximationsfehler genau bestimmt werden, wie in Abbildung 4.6 zu sehen ist. Die Berechnung besteht hauptsächlich aus dem Lösen eines inhomogenen linearen Gleichungssystems, und ist damit verhältnismäßig schnell und stabil durchzuführen. Die berechnete Fläche stellt jedoch immer nur eine Näherung der Zahnflanke dar, da sphärische Kurven im Allgemeinen nicht als polynomiale Splines darstellbar sind.

$\#\{r_i\}$	$\#\{s_j\}$	$\dim \mathbb{S}_{3,3}$	$\max \frac{\rho}{r}$	$\max \frac{\rho'}{r}$	SPEICHER	DAUER
4	3	4×6	$7.6 \cdot 10^{-5}$	$9.8 \cdot 10^{-4}$	6kB	$\approx 0.4s$
8	8	8×16	$4.8 \cdot 10^{-7}$	$1.5 \cdot 10^{-5}$	24kB	$\approx 0.5s$
10	15	10×30	$5.2 \cdot 10^{-8}$	$2.2 \cdot 10^{-6}$	53kB	$\approx 0.7s$
17	35	17×70	$2.1 \cdot 10^{-9}$	$1.6 \cdot 10^{-7}$	197kB	$\approx 5s$

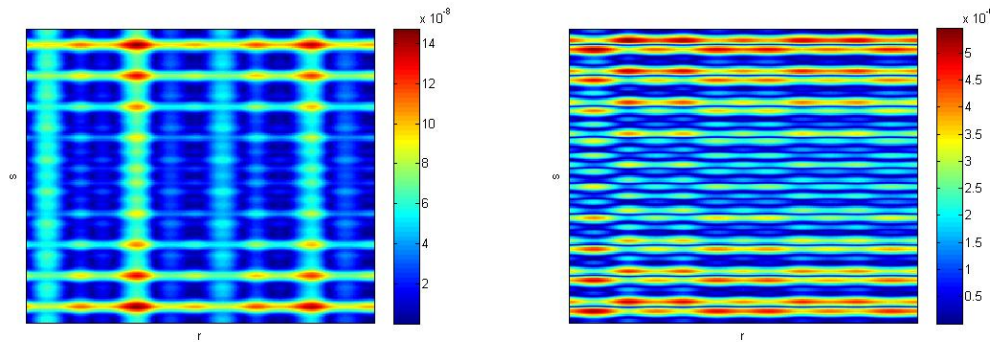


Abbildung 4.6.: Der relative Fehlers der Funktionswerte $\frac{\rho}{r}$ und partiellen Ableitung $\frac{\rho'}{r}$ bei Hermite-Interpolation von 11×9 Punkten.

4.3.3. Rationale Splinefläche

Rationale Splines sind wie in Kapitel 4.2.5 beschrieben, in der Lage, Kreisbögen und damit Großkreissegmente exakt darzustellen. Aus dieser Motivation heraus erweitern wir die Flächenapproximation aus Kapitel 4.3.2 auf rationale Splineflächen. Durch die besser an das Problem angepasste Funktionsklasse erhoffen wir eine bessere Approximation der Zahnflanke. Wir fordern wieder die Interpolation der Funktionswerte und der partiellen Ableitungen. Mit einer quadratischen Optimierung mit Hermite-Nebenbedingungen nach Definition 4.2.4 berechnen wir eine rationale Splinefläche. Wieder erhalten wir die Interpolationswerte $\mathbf{f}(r_i, s_j)$, $\mathbf{f}'(r_i, s_j)$ durch Abtastung der Profillinie \mathbf{f} und ihrer partiellen Ableitung $\mathbf{f}' = \frac{d}{ds}\mathbf{f}$ an einem rechteckigen Gitter $\{(r_i, s_j)\}$ über dem Kugelradius $r_i \in [r_a, r_e]$ und dem Profillinienparameter $s_j \in [s_a, s_e]$. Auch für rationale Splinekurven gilt, dass sphärische Kurven im Allgemeinen nicht exakt dargestellt werden können. Die Struktur der Flanken- und Profillinien überträgt sich zwar näherungsweise wieder auf die Splinefläche, die Parameterlinien für den fixierten Parameter r verlaufen jedoch nicht exakt auf einer Sphäre. Zum Speichern verwenden wir wieder Entity Type 128 des IGES-Formats, [34, S.126].

Die rationale Splinefläche ermöglicht bei gleicher Parameterzahl gegenüber der polynomialen eine bessere Approximation. Der Fehler kann genauso einfach als Differenz der Auswertung der Splinefläche und der Zahnflanke bestimmt werden. Beide Fehler werden in Abbildung 4.7 illustriert.

Die Lösung wird durch die Minimierung eines quadratischen Gleichungssystems mit einer Vielzahl von Gleichheitsnebenbedingungen bestimmt. Durch die verhältnismäßig kleine zulässige Menge wird das Problem ab einer gewissen Größe instabil. Es bietet sich daher an, in einem ersten Schritt die Gewichtsfunktion z.B. für die Approximation einer einzelnen Profillinie zu bestimmen. In einem zweiten Schritt kann dann mit der entsprechenden fixierten Gewichtsfunktion das eigentliche Problem gelöst werden. In Abbildung 4.8 sehen wir, dass die Gewichtsfunktion annähernd unabhängig von der Größe des Problems ist.

$\#\{r_i\}$	$\#\{s_j\}$	$\dim \mathbb{S}_{3,3}$	$\max \frac{\rho}{r}$	$\max \frac{\rho'}{r}$	SPEICHER	DAUER
4	3	4×6	$5.1 \cdot 10^{-5}$	$3.7 \cdot 10^{-4}$	6kB	$\approx 10s$
8	8	8×16	$2.7 \cdot 10^{-7}$	$3.5 \cdot 10^{-6}$	24kB	$\approx 30s$
10	15	10×30	$3.6 \cdot 10^{-8}$	$6.6 \cdot 10^{-7}$	53kB	$\approx 120s$

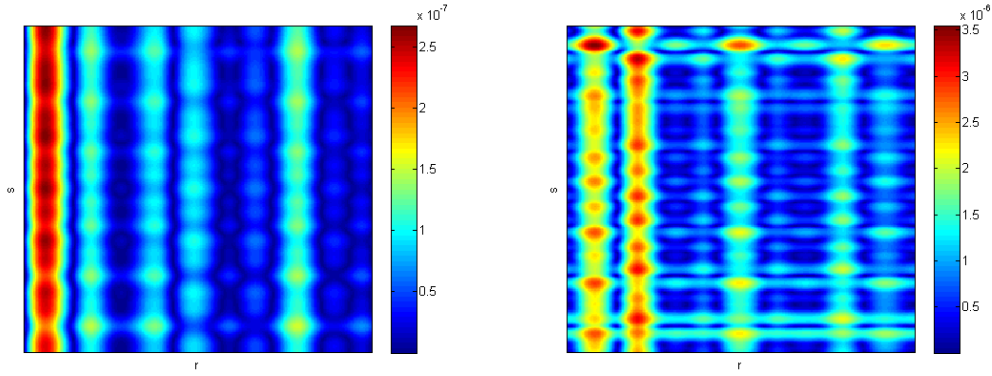


Abbildung 4.7.: Der relative Fehlers der Funktionswerte $\frac{\rho}{r}$ und partiellen Ableitung $\frac{\rho'}{r}$ bei Hermite-Interpolation von 8×8 Punkten.

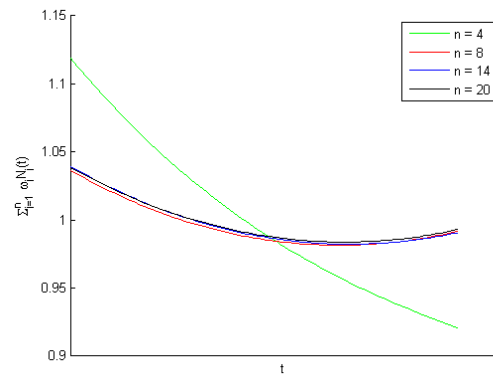


Abbildung 4.8.: Die Gewichtsfunktion $w^T N(t)$ einer Profillinie $f(s)$ für unterschiedliche Dimensionen des Splineraums $n = \dim \mathbb{S}_3$.

4.4. Prototyp

Im Zuge des Dissertationsprojekts wurde in Zusammenarbeit mit der Siemens AG der Prototyp einer kugelkonjugierten Verzahnung gefertigt. Für die CAD/CAM-Berechnung kam das Siemens eigene Programm NX zum Einsatz. Die Herstellung erfolgte auf einer 5-Achs-CNC-Maschine der Firma Schütte des Typs 305linear.

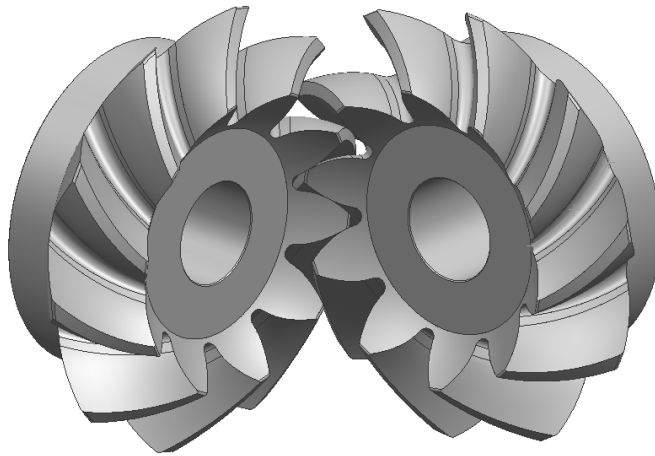


Abbildung 4.9.: Das verwendete Model im CAD/CAM-Programm: NX.

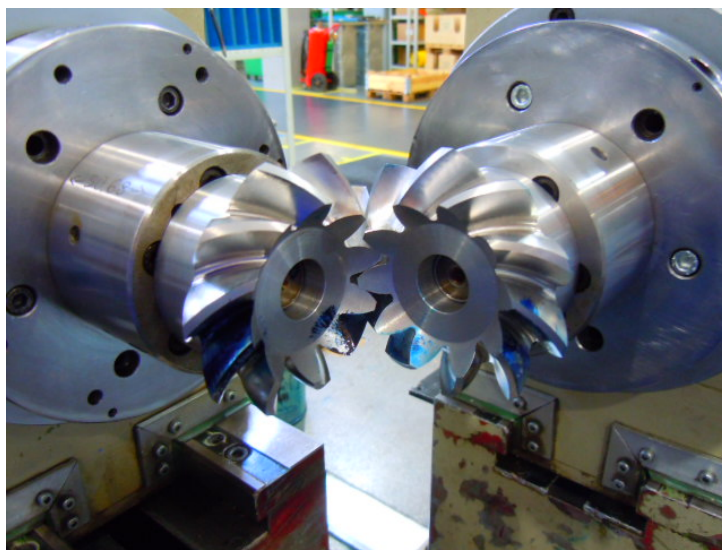


Abbildung 4.10.: Der gefertigte Prototyp auf einem Prüfstand.

5. Fazit

In dieser Arbeit wurde ein explizites Berechnungsverfahren für kugelkonjugierte Kegelradverzahnungen hergeleitet. Durch die geometrische Analyse des Abrollverhaltens konnten die Berechnungsverfahren von Stirnradpaaren auf Kegelradpaare übertragen werden. Dafür wurde das aus der Geometrie bekannte sphärische Verzahnungsgesetz in eine analytische Darstellung gebracht, die analog zum ebenen Verzahnungsgesetz ermöglicht, konjugierte Profilpaare explizit zu berechnen. Insbesondere bildet die bekannte Stirnradberechnung einen Grenzfall der entwickelten Kegelradberechnung. Die Kreisevolventenverzahnung, der Standard bei Stirnradverzahnungen, konnte dadurch auf die Kugelevolventenverzahnung im Kegelradfall übertragen werden.

Diese Form der Geometriebestimmung bietet eine Vielzahl von neuen Freiheitsgraden, die der Auslegung von Getrieben neue Möglichkeiten eröffnet. In diesem Bereich wurde eng mit traditionellen Herstellern von Zahnrädern zusammengearbeitet. Aus der gemeinsamen Arbeit mit der Siemens AG ist ein Patent mit der Nummer EP2484474A1 hervorgegangen.

Darüberhinaus wurde die Übertragung von Zahnflanken in ein CAD/CAM-Programm untersucht. Es konnten mehrere Verfahren hergeleitet werden, welche es ermöglichen zwischen der Komplexität der Berechnung und der Genauigkeit der Geometrie zu variieren. Das genaueste Verfahren ist eine neu entwickelte Methode zur Hermite-Interpolation mittels NURBS-Flächen. Die Besonderheit des Verfahrens stellt die automatische Festlegung der Gewichte dar, die in diesem Fall nicht wie üblich vorher festgelegt werden, sondern zusammen mit den Kontrollpunkten aus der Lösung eines Optimierungsproblems resultieren.

A. Bezeichnungen

A.1. Verzahnung

Formelzeichen	Einheit	Bezeichnung	DIN	Seite
α	rad	Eingriffswinkel	α	31 bzw. 58
b	mm	Zahnbreite	b	35
β	rad	Schrägungswinkel	β	35 bzw. 60
\mathbf{b}_f	$:\mathbb{R} \rightarrow \Sigma_1$	Grundkreis der Profillinie \mathbf{f}	-	32
\mathbf{b}_g	$:\mathbb{R} \rightarrow \Sigma_2$	Grundkreis der Profillinie \mathbf{g}	-	32
\mathbf{c}	$\in \Sigma_0$	Wälzpunkt	C	20 bzw. 45
γ	rad	Teilkegelwinkel	δ	45
d	mm	Achsabstand	a	17
δ	rad	Achsenwinkel	Σ	39
ε	1	Krümmung von Wälzkreis 2	—	36
ϵ	1	Gesamtüberdeckung	ϵ	36 bzw. 60
ϵ_α	1	Profilüberdeckung	ϵ_α	29 bzw. 56
ϵ_β	1	Sprungüberdeckung	ϵ_β	36 bzw. 60
\mathbf{f}	$:\mathbb{R} \rightarrow \Sigma_1$	Profillinie erstes Zahnrad	-	19 bzw. 43
φ_i	rad	Azimutalwinkel in Θ_i	-	18 bzw. 42
\mathbf{g}	$:\mathbb{R} \rightarrow \Sigma_2$	Profillinie zweites Zahnrad	-	19 bzw. 43
$\overline{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}}$	$:\mathbb{R} \rightarrow \Sigma_2$	Linearsegment der Punkte $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_{i+1}$	-	27
$\widehat{\mathbf{g}_i \mathbf{g}_{i+1}}$	$:\mathbb{R} \rightarrow \Sigma_2$	Linearsegment der Punkte $\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_{i+1}$	-	54
h	mm	Schritthöhe	-	17
$\text{Inv} \mathbf{b}$	$:\mathbb{R} \rightarrow \Sigma_i$	Evolvente der Kurve $\mathbf{b} \in \Sigma_i$	-	32
\mathbf{k}	$:\mathbb{R} \rightarrow \Sigma_0$	Kontaktweg	-	19 bzw. 43
K_i	-	i -tes Kegelrad	-	42
κ_{ij}	$:\Sigma_i \rightarrow \Sigma_j$	Koordinatentransformation	-	19 bzw. 43
\mathbf{o}	$\in \Sigma_0$	Kreuzungspunkt der Kegelradachsen	-	42
\mathbf{o}_i	$\in \Sigma_i$	Drehpunkt des i -ten Stirnrads	-	18
ϑ_i	rad	Polarwinkel in Θ_i	-	42
Θ_i	-	Polarkoordinatensystem	-	18 bzw. 42
r	mm	Kugelradius	-	40
r_i	mm	ebener Radius in Θ_i	-	18

Formelzeichen	Einheit	Bezeichnung	DIN	Seite
s	$\in [s_a, s_e]$	Profillinienparameter	-	22 bzw. 48
S_i	-	i -tes Stirnrad	-	18
Σ_i	-	kartesisches Koordinatensystem	-	18 bzw. 42
t	s	Zeit	-	18 bzw. 42
t_k	s	Zeitpunkt des Kontakts im Punkt \mathbf{k}	-	19 bzw. 43
Δt	s	Kontaktdauer	$\omega_1 \tau_1$	29 bzw. 56
u	1	Übersetzungsverhältnis	i	18 bzw. 42
$u(t_k)$	1	momentanes Übersetzungsverhältnis	-	29 bzw. 55
\mathbf{v}_g	$\frac{\text{mm}}{\text{s}}$	Gleitgeschwindigkeit	\vec{v}_{gw}	20 bzw. 44
v_c	$\frac{\text{mm}}{\text{s}}$	Lineargeschwindigkeit der Zahnstange	—	36
\mathbf{v}_i	$\frac{\text{mm}}{\text{s}}$	Tangentialgeschwindigkeit des i -ten Zahnrads	\vec{v}_{wi}	20 bzw. 44
ω_i	$\frac{\text{rad}}{\text{s}}$	Drehgeschwindigkeit i -tes Zahnrads	ω_i	18 bzw. 42
x_i, y_i, z_i	mm	kartesische Koordinaten in Σ_i	-	18 bzw. 42
ζ	1	spezifisches Gleiten	ζ	20 bzw. 44

A.2. Splines

Formelzeichen	Struktur	Bezeichnung	Seite
d	$\in \mathbb{N}$	Dimension des Anschauungsraums	71
\mathbf{d}	$\in \mathbb{R}^{nd}$	Kontrollpunktvektor	76
\mathbf{d}_i	$\in \mathbb{R}^d$	i -ter Kontrollpunkt	71
$\bar{\mathbf{d}}_i$	$\in \mathbb{R}^{d+1}$	i -ter Kontrollpunkt (Projektion)	72
\mathbf{D}	$\in \mathbb{R}^{d \times n}$	Kontrollpunktmatrix	71
$\bar{\mathbf{D}}$	$\in \mathbb{R}^{(d+1) \times n}$	Kontrollpunktmatrix (Projektion)	72
\mathbf{D}_{\otimes}	$\in \mathbb{R}^{d \times (n_1 \cdot n_2)}$	Kontrollpunktmatrix (Fläche)	73
$F_m \mathbf{D}_{\otimes}$	$: T_1 \times T_2 \rightarrow \mathbb{R}^d$	Splinefläche	73
\mathbf{G}_r	$\in \mathbb{R}^{n \times (n+r)}$	Matrix der r -ten Ableitung	74
H	$: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{P}^d$	NURBS-Projektion	72
H^-	$: \mathbb{P}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$	Zentralprojektion	13
$\mathbf{K}(\hat{t})$	$\in \mathbb{R}^{n \times (n+1)}$	Matrix zum Knoteneinfügen	74
κ	$: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$	Kreis in rationaler Parametrisierung	82
$\boldsymbol{\lambda}$	$\in \mathbb{R}^k$	Vektor der Lagrangemultiplikatoren	76
m	$\in \mathbb{N}$	Splineordnung	70
\mathbf{M}	$\in \mathbb{R}^{n \times n}$	Matrix des Glattheitsfunktional	76
$\mathbf{I} \otimes \mathbf{M}$	$\in \mathbb{R}^{nd \times nd}$	Matrix des Glattheitsfunktional (im \mathbb{R}^d)	76
\mathfrak{M}	$\in \mathbb{R}^{n(d+1) \times n(d+1)}$	Matrix des Approximationsfunktional (freie Gewichte)	81
μ_j	$\in \{1, \dots, m+1\}$	Vielfachheit des j -ten Knoten	71
n	$\in \mathbb{N}$	Spliner Raumdimension	70
\mathbf{N}	$: T \rightarrow \mathbb{R}^n$	polynomialer B-Spline-Vektor	70
$N_i^m(\cdot T)$	$: T \rightarrow \mathbb{R}$	i -ter polynomialer B-Spline	70
\mathfrak{N}	$\in \mathbb{R}^{kd(r+1) \times n(d+1)}$	Zusammengesetzte Matrix der Hermite-Interpolationsbedingungen (freie Gewichte)	79
$\mathfrak{N}(\cdot)$	$: t \mapsto \mathfrak{N}(t)$	Fortsetzung der Matrix der Hermite- Interpolationsbedingungen	81
\mathfrak{N}_q	$\in \mathbb{R}^{kd \times n(d+1)}$	Matrix der Interpolationsbedingun- gen der q -ten Ableitung (freie Ge- wichte)	79
\mathbf{p}	$\in \mathbb{R}^{kd}$	Vektor der Interpolationswerte	76
$\mathbf{p}(\cdot)$	$: t \mapsto \mathbf{p}(t)$	Fortsetzung der Interpolationswerte	81
$\mathbf{p}_i^{(r)}$	$\in \mathbb{R}^d$	i -ter Interpolationswert der r -ten Ableitung	75
$\mathbf{P}^{(r)}$	$\in \mathbb{R}^{d \times k}$	Matrix der Interpolationswerte der r -ten Ableitung	75

Formelzeichen	Struktur	Bezeichnung	Seite
\mathbf{R}	$: T \rightarrow \mathbb{R}^n$	rationaler B-Spline-Vektor	70
$\mathbf{I} \otimes \mathbf{R}(\boldsymbol{\tau})$	$\in \mathbb{R}^{nd \times kd}$	Matrix der B-Splines (Vektor- Auswertung)	76
$R_i^m(\cdot T, \mathbf{w})$	$: T \rightarrow \mathbb{R}$	i -ter rationaler B-Spline	70
\mathbf{R}_{\otimes}	$: T_1 \times T_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n_1 \cdot n_2}$	rationaler B-Spline-Vektor (Fläche)	73
$S_m \mathbf{D}$	$: T \rightarrow \mathbb{R}^d$	Splinekurve	71
$\mathbb{S}_m^d(\mathbf{w}, T)$	$\subset \mathcal{C}^{m-\max \mu_j}$	Splinerraum	71
$\bar{\mathbb{S}}_m^d(T)$	$\subset \mathcal{C}^{m-\max \mu_j}$	projektiver Splinerraum	72
t_j	$\in T_{m,n}$	j -ter Knoten	70
$T_{m,n}$	$\in \mathcal{P}(\mathbb{R})$	Knotenfolge	70
$\boldsymbol{\tau}$	$\in \mathbb{R}^k$	Vektor der Interpolationsstellen	75
τ_i	$\in [t_{m+1}, t_{n+1}]$	i -te Interpolationsstelle	75
\mathbf{w}	$\in \mathbb{R}^n$	Gewichtsvektor	70
w_i	$\in \mathbb{R}$	i -tes Gewicht	70
\mathbf{W}	$\in \mathbb{R}^{n_1 \times n_2}$	Gewichtsmatrix	73
\mathbf{x}	$\in \mathbb{R}^{\#\mathbf{x}}$	Auswertungsvektor	73

B. Literaturverzeichnis

- [1] Bär, G.: *Explicit Calculation Methods for Conjugate Profiles.*, Journal for Geometry and Graphics. Vol.7, No.2, 201-210, **2003**
- [2] Chasles, M.: *Note sur les propriétés générales du système de deux corps semblables entr'eux et placés d'une manière quelconque dans l'espace; et sur le déplacement fini ou infiniment petit d'un corps solide libre.*, Bulletin des Sciences Mathématiques, Astronomiques, Physiques et Chimiques 14: 321-326 **1830**
- [3] Curry, H. B./ Schoenberg, I. J.: *On Pólya frequency functions IV: The fundamental spline functions and their limits*, J. d'Analyse Math. 17, 71-107, **1966**
- [4] de Boor, C.: *A Practical Guide to Splines*, Springer, New York, **2001**
- [5] Doleschel, A.: *Wirkungsgradberechnung von Zahnradgetrieben in Abhängigkeit vom Schmierstoff*, Dissertation TU München, **2003**
- [6] Euler, L.: *De aptissima figura rotarum dentibus tribuenda*, Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 5, 299-316, **1760**
- [7] Farin, G.: *Curves and Surfaces for CAGD*, Academic Press, San Diego, **2002**
- [8] Felten, K.: *Verzahnungstechnik: Das aktuelle Grundwissen über Herstellung und Prüfung von Zahnrädern*, expert-verlag, Renningen, **2008**
- [9] Freeth, T./ Bitsakis, Y.: *Decoding the ancient Greek astronomical calculator known as the Antikythera Mechanism.*, Nature Publishing Group, Artikel Ausgabe **11/2006**
- [10] Hertz, H.: *Über die Berührung fester elastischer Körper.*, Journal für reine und angewandte Mathematik 92, 156-171, **1881**
- [11] Klingelnberg, J.: *Kegelräder: Grundlagen, Anwendungen*, Springer, Berlin, **2008**
- [12] Kreyszig, E.: *Differential geometry*, Dover publications, Dover, **1991**
- [13] Müller, H. R.: *Sphärische Kinematik*, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, **1962**
- [14] Naunheimer, H./ Bertsche, B./ Lechner, G.: *Fahrzeuggetriebe: Grundlagen, Auswahl, Auslegung und Konstruktion*, Springer, Berlin, **2007**

- [15] Neuburger, A.: *Die Technik des Altertums*, R. Voiglnder Verlag, Leipzig, 212-221, **1919**,
- [16] Nolting, W.: *Grundkurs Theoretische Physik 1 - Klassische Mechanik*, Springer, Berlin, **2008**
- [17] Norm, DIN 868: *Allgemeine Begriffe und Bestimmungsgrößen für Zahnräder, Zahnradpaare und Zahnradgetriebe*, **1976**
- [18] Norm, DIN 3960: *Begriffe und Bestimmungsgrößen für Stirnräder und Stirnradpaare mit Evolventenverzahnung*, **1987**
- [19] Norm, DIN 3971: *Begriffe und Bestimmungsgrößen für Kegelräder und Kegelradpaare*, **1980**
- [20] Norm, DIN 3998: *Benennungen an Zahnrädern und Zahnradpaaren*, **1976**
- [21] Niemann, G./ Winter, H.: *Maschinenelemente Band II*, Springer, Berlin, **1985**
- [22] Ohlendorf, H.: *Verlustleistung und Erwärmung von Stirnrädern*, Dissertation TH München, **1958**
- [23] Piegl, L./ Tiller, W.: *The NURBS Book*, Springer, Berlin, **1997**
- [24] Richter, M.: *Der Verzahnungswirkungsgrad und die Fretragfahigkeit von Hypoid- und Schraubenradgetrieben.*, Dissertation TU München, **1976**
- [25] Roth, K.: *Untersuchungen über die Eignung der Evolventen-Zahnform für eine allgemein verwendbare feinwerktechnische Normverzahnung.*, Dissertation TH München, **1963**
- [26] Sauer, T.: *Numerische Mathematik I*, Vorlesungsskript JLU-Gießen, **2006**
- [27] Sauer, T.: *Numerische Mathematik II*, Vorlesungsskript JLU-Gießen, **2007**
- [28] Sauer, T.: *Splinekurven und -flächen in Theorie und Anwendung*, Vorlesungsskript JLU-Gießen, **2008**
- [29] Schlecht, B.: *Maschinenelemente 2: Getriebe-Verzahnungen-Lagerungen*, Pearson Studium, München **2010**
- [30] Schneider, F.-J.: *Interpolation, Approximation und Konvertierung mit rationalen B-Splines*, Dissertation TH Darmstadt, **1993**
- [31] Stößel, K.: *Reibungszahlen unter elasto-hydrodynamischen Bedingungen*, Dissertation TH München, **1971**
- [32] Thomas, A. K.: *Grundzüge der Verzahnung*, Carl Hanser Verlag, München, **1957**
- [33] Tredgold, Th.: *A Practical Essay on the Strength of Cast Iron and other Metals*, London, **1822**

- [34] U.S. Product Data Association: *Initial Graphics Exchange Specification IGES 5.3*, http://www.uspro.org/documents/IGES5-3_forDownload.pdf, **1996**
- [35] Wagenführ, D.: *Visualisierung von Fräsfehlern auf Basis von CAD-Daten*, Dissertation JLU-Gießen, **2008**
- [36] Wunderlich, W. *Ebene Kinematik*, Bibliographisches Institut, Mannheim **1970**
- [37] Wunderlich, W. *Über abwickelbare Zahnflanken und eine neue Kegelradverzahnung*, Betrieb und Fertigung 2. Jahrgang, Heft 5, 81-87, **1948**

C Abbildungsverzeichnis

1.1.	Stirnradpaar und Zahnstange.	
	Quelle: <i>Wikimedia, Benutzer: Honina</i>	
	Rechte: <i>Creative Commons by-sa 3.0 unported</i>	6
1.2.	Kegelradpaar und Beveloidradpaar.	
	Quelle: <i>Wikimedia, Benutzer: Honina/ W.Rebel</i>	
	Rechte: <i>Creative Commons by-sa 3.0 unported</i>	6
1.3.	Schneckenradpaar und Schraubradpaar.	
	Quelle: <i>Wikimedia, Benutzer: Yuri r/ Arthur Clarke</i>	
	Rechte: <i>Creative Commons by-sa 3.0 unported/ gemeinfrei</i>	7
1.4.	Spirograph	
	Quelle: <i>Wikimedia, Benutzer: Kungfuman</i>	
	Rechte: <i>Creative Commons by-sa 3.0 unported</i>	8
1.5.	Göpel und Mechanismus von Antikythera.	
	Quelle: <i>Wikimedia, Benutzer: Rj1997/Mogi</i>	
	Rechte: <i>gemeinfrei/Creative Commons by-sa 3.0 unported</i>	9
1.6.	Wälzfräsverfahren.	
	Quelle: <i>Wikimedia, Benutzer: Dirk Gräfe/ Sven Tauchmann</i>	
	Rechte: <i>Creative Commons by-sa 3.0 unported/ Siemens AG</i>	10
1.7.	Kegelradwälzverfahren	
	Quelle: <i>Polytechnischen Journal/ Andreas Uhlich</i>	
	http://dingler.culture.hu-berlin.de/article/pj257/ar257174	
	Rechte: <i>Creative Commons by-sa 3.0 unported/ Siemens AG</i>	11
1.8.	Polarkoordinatensystem	
	Quelle: <i>Wikimedia, Benutzer: Ichijiku</i>	
	Rechte: <i>Creative Commons by-sa 3.0 unported</i>	13
2.1.	Ein Stirnradpaar in einem Stirnschnitt.	
	Quelle: <i>Dort, F./ Rosenbaum, B. angefertigt mit Cinema4D</i>	
	Rechte: <i>Siemens AG</i>	17

2.2.	(a): Die Koordinatenachsen der kartesischen Systeme Σ_i	
	Quelle: <i>Dort, F. angefertigt in DIA</i>	
	Rechte: <i>Siemens AG</i>	
	(b): Die generalisierten Koordinaten der Polarkoordinatensysteme Θ_i	
	Quelle: <i>Dort, F. angefertigt in DIA</i>	
	Rechte: <i>Siemens AG</i>	19
2.3.	Veranschaulichung des Verzahnungsgesetzes	
	Quelle: <i>Dort, F. angefertigt in DIA</i>	
	Rechte: <i>Siemens AG</i>	22
2.4.	Evolventenverzahnte Stirnräder	
	Quelle: <i>Wikimedia, Benutzer: Claudio Rocchini</i>	
	Rechte: <i>Creative Commons by-sa 3.0 unported</i>	30
2.5.	Abwicklung einer Evolvente	
	Quelle: <i>Wikimedia, Benutzer: Lidingo</i>	
	Rechte: <i>Creative Commons by-sa 3.0 unported</i>	32
2.6.	Ein schrägverzahntes Stirnrad.	
	Quelle: <i>Dort, F./ Rosenbaum, B. angefertigt mit Cinema4D</i>	
	Rechte: <i>Siemens AG</i>	36
2.7.	Die erzeugende Zahnstange	
	Quelle: <i>Lueger, O.: Lexikon der gesamten Technik, Deutsche Verlags-Anstalt, Stuttgart, 1904</i>	
	Rechte: <i>gemeinfrei</i>	38
3.1.	Ein Kegelradpaar mit zugehörigen Wälzflächen.	
	Quelle: <i>Dort, F./ Rosenbaum, B. angefertigt mit NX</i>	
	Rechte: <i>Siemens AG</i>	39
3.2.	Ein Kegelradpaar mit einem Kugelschnitt.	
	Quelle: <i>Dort, F./ Rosenbaum, B. angefertigt mit Cinema4D</i>	
	Rechte: <i>Siemens AG</i>	40
3.3.	Der Ergänzungskegel.	
	Quelle: <i>Dort, F./ Rosenbaum, B. angefertigt mit NX</i>	
	Rechte: <i>Siemens AG</i>	41
3.4.	Drehachsen, Achsenwinkel und Wälzwinkel	
	Quelle: <i>Dort, F./Rosenbaum, B., angefertigt in Cinema4D</i>	
	Rechte: <i>Siemens AG</i>	45
3.5.	Das sphärische Verzahnungsgesetz.	
	Quelle: <i>Dort, F./Rosenbaum, B., angefertigt in Cinema4D</i>	
	Rechte: <i>Siemens AG</i>	47
3.6.	Kugelevolventenverzahnte Kegelräder	
	Quelle: <i>Dort, F., angefertigt in MATLAB</i>	
	Rechte: <i>Siemens AG</i>	57

3.7. Ein bogenverzahntes Kegelrad.	
Quelle: <i>Dort, F./ Rosenbaum, B. angefertigt mit NX</i>	
Rechte: <i>Siemens AG</i>	60
4.1. Die Programmkette - Punktwolke	
Quelle: <i>Dort, F. angefertigt mit MS Powerpoint</i>	
Rechte: <i>Siemens AG</i>	68
4.2. Die Programmkette - NURBS-Fläche	
Quelle: <i>Dort, F. angefertigt mit MS Powerpoint</i>	
Rechte: <i>Siemens AG</i>	69
4.3. Ein Kreis in rationaler Parametrisierung	
Quelle: <i>Dort, F. angefertigt mit MATLAB</i>	
Rechte: <i>Siemens AG</i>	82
4.4. NURBS-Kreissegmente mit Kontrollpolygon	
Quelle: <i>Dort, F. angefertigt mit MATLAB</i>	
Rechte: <i>Siemens AG</i>	83
4.5. Relativer Fehler bei linearer Interpolation	
Quelle: <i>Dort, F. angefertigt mit MATLAB</i>	
Rechte: <i>Siemens AG</i>	84
4.6. Relativer Fehler der Spline-Approximation.	
Quelle: <i>Dort, F. angefertigt mit MATLAB</i>	
Rechte: <i>Siemens AG</i>	85
4.7. Relativer Fehler der NURBS-Approximation.	
Quelle: <i>Dort, F. angefertigt mit MATLAB</i>	
Rechte: <i>Siemens AG</i>	87
4.8. unterschiedliche Gewichtsfunktionen	
Quelle: <i>Dort, F. angefertigt mit MATLAB</i>	
Rechte: <i>Siemens AG</i>	87
4.9. Das verwendete Model in NX.	
Quelle: <i>Rosenbaum, B.: angefertigt mit NX</i>	
Rechte: <i>Siemens AG</i>	88
4.10. Der gefertigte Prototyp.	
Quelle: <i>Uhlich, A.</i>	
Rechte: <i>Siemens AG</i>	88

Ich erkläre: Ich habe die vorgelegte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt, die ich in der Dissertation angegeben habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der „Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ niedergelegt sind, eingehalten.

Gießen, November 2012