

Dissoziation von Charmonium mit Mesonen in einem nichtrelativistischen Quarkmodell

Diplomarbeit

vorgelegt von
Annette Gail
aus Haiger-Offdilln

Institut für Theoretische Physik I
Justus-Liebig-Universität Gießen

Gießen, Januar 2000

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	5
2	Wichtige Begriffe der Quantenchromodynamik	9
2.1	Quarks	9
2.2	Gluonen	10
2.3	Die starke Kopplungskonstante der QCD	11
2.4	Quark-Potential-Modelle	13
2.5	Die Lagrange-Dichte der QCD	16
2.6	Quarks und Gluonen bei hohen Temperaturen und hohen Dichten	18
3	Das nichtrelativistische Quark-Potential-Modell	22
3.1	Hamiltonoperator für die Quark-Antiquark-Wechselwirkung . . .	22
3.2	Eigenfunktionen der Mesonen im Ortsraum	24
3.3	Impulsraumdarstellung	28
3.4	Meson-Meson-Streuung mit Konstituentenquark austausch	30
4	Dissoziationsquerschnitte für das Charmonium	37
4.1	Kinematische Betrachtungen	37
4.2	Totale Wirkungsquerschnitte	42
4.3	Vergleich der berechneten Wirkungsquerschnitte mit den Rechnungen von Wong und Barnes	44
4.4	Interpretation der Ergebnisse	45
5	Zusammenfassung	46
A	Die Gell-Mann-Matrizen der SU(3)-Symmetriegruppe	48
B	Vergleich der Monte-Carlo-Integration mit analytischen Resultaten von Streuamplituden	50

Kapitel 1

Einleitung

Die traditionelle Kernphysik hat sich mit dem Studium der Strukturen in Atomkernen befaßt, welche auf eine effektive Wechselwirkung der Protonen und Neutronen zurückgeführt wurde. Schon bald zeigte sich, daß die Wechselwirkung von Protonen und Neutronen im Vakuum stärker ist (insbesondere bei kleinen Relativimpulsen) als die effektive Wechselwirkung in Atomkernen. Dieses ist einerseits zurückzuführen auf das Pauli-Prinzip, andererseits auf eine Abschirmung der starken Wechselwirkung im Medium durch die benachbarten Nukleonen. Durch den Austausch von Teilchen, hier dominant die skalaren (σ -) und vektoriellen (ω -) Mesonen, wird sowohl die effektive Masse des Nukleons um nahezu $1/3$ abgesenkt als auch deren Impuls reduziert, d.h. die Nukleonen zeigen eine andere Dispersion im Medium als im Vakuum. Zudem bewirken die Wechselwirkungsprozesse, daß ein Nukleon im Kern nicht geradlinig, gleichförmig propagiert, sondern von seiner Bahn weggestreut werden kann, d.h. seine Lebensdauer oder inverse Teilchenbreite wird endlich. Beide Phänomene, das der modifizierten Dispersion sowie das der endlichen Breite, werden im Begriff der In-Medium-Spektralfunktion zusammengefaßt.

Hochenergetische Elektron-Myon-Streuexperimente haben weiterhin gezeigt, daß Protonen und Neutronen selbst eine Substruktur haben bzw. raum-zeitliche Bindungszustände von elementaren Feldern sind, die als Partonen (Quarks und Gluonen) bezeichnet werden und als zugrundeliegende Felder in der QCD¹ auftreten. Es sollten folglich die Bindungskräfte der Atomkerne in engem Zusammenhang mit dem Austausch von Partonen stehen, welche allerdings infolge des „Confinements“ der QCD bei großen Abständen nicht im Vakuum frei beobachtet werden können. Confinement bezeichnet hier die experimentelle Beobachtung, daß Partonen nur als farbneutrale Bindungszustände im Vakuum auftreten, entweder als Baryonen (wie Protonen und Neutronen) oder als Mesonen. Durch hochenergetische Anregung dieser Zustände werden nicht Partonen frei emittiert, sondern stets farbneutrale Quark-Antiquark-Paare neu gebildet. Dieses

¹Quanten-Chromo-Dynamik

Phänomen hat zur Stringphänomenologie geführt, welche effektiv die Erzeugung von Quark-Antiquark-Paaren aus dem Vakuum und deren Kondensation in farbneutrale mesonische und baryonische Zustände beschreibt.

Eine Folgerung aus der endlichen Ausdehnung der Hadronen (mit Radien unterhalb von 1 fm) ist, daß bei hohen Hadronendichten die Zustände überlappen müssen und Partonen dann relativ frei mit ihren Farbladungen propagieren können. Dieses Phänomen, das auch als „Deconfinement“ bezeichnet wird, geht einher mit der Erhöhung der Zahl der Freiheitsgrade; einerseits um einen Faktor 3 wegen der Zahl der unabhängigen Farbladungen, andererseits um 16 zusätzliche Freiheitsgrade für die Gluonen, was thermodynamisch eine drastische Erhöhung der Entropie bei einer kritischen Hadronendichte ρ_c beinhaltet. Diese Erhöhung der Entropie ist thermodynamisch wiederum verknüpft mit einem Maximum in der spezifischen Wärme, welche einen Phasenübergang kennzeichnet. Neben hohen Baryondichten können auch starke thermische Anregungen des Vakuums, die (bei kleineren Temperaturen) zu endlichen, reellen Dichten von Mesonen führen, ein Schmelzen der mesonischen Zustände bewirken, so daß die Partonen wiederum relativ frei propagieren können. In der Tat haben „ab-initio“-Rechnungen der Gitter-QCD gezeigt, daß dieser Schmelzprozeß bei etwa einer Energiedichte von $1 \text{ GeV}/\text{fm}^3$ auftritt, was einer Temperatur von $\approx 160 \text{ MeV}$ entspricht.

Die Gitter-QCD-Rechnungen zeigen zudem, daß mit dem Übergang zum Quark-Gluon-Plasma (QGP) ein weiterer Phasenübergang unmittelbar verknüpft ist, welcher eine Wiederherstellung der chiralen Symmetrie bei Temperaturen oberhalb der kritischen Temperatur T_c entspricht. Unter der chiralen Symmetrie versteht man ein Symmetriephänomen, welches der Ununterscheidbarkeit von links- und rechtshändigen Strömen entspricht. In der Natur ist diese Symmetrie bei Temperaturen unterhalb von T_c nicht erfüllt; man spricht von einer Brechung der chiralen Symmetrie. Diese Symmetriebrechung ist insofern von Bedeutung, da sie nahezu direkt mit den Anregungen des Vakuums und insbesondere mit der Pionenmasse verknüpft ist. In der Tat zeigt das experimentelle Massenspektrum, daß auch die Vektormesonen (ρ, ω) eine wesentlich kleinere Masse haben als der chirale Symmetrie-Partner, das a_1 -Meson. Die Spektroskopie von Mesonen bei hohen Temperaturen und/oder Dichten ermöglicht somit das experimentelle Studium des chiralen Phasenübergangs.

Die zugrundeliegende Theorie der starken Wechselwirkung (QCD) ist theoretisch und experimentell wohl verstanden bei kurzen Abständen $\Delta r \ll 1 \text{ fm}$ oder hohen Impulsüberträgen $Q^2 \gg 1 \text{ GeV}^2$. In diesem Bereich ist die Wechselwirkung weitgehend analog zur Quanten-Elektro-Dynamik (QED) und kann systematisch in Störungsrechnung endlicher Ordnung ausgewertet werden. In diesem Limes bewegen sich die Partonen nahezu unabhängig voneinander über kurze Distanzen; sie sehen das langreichweitige Confinement-Potential nicht, welches sie in endliche Wellenfunktionen (nicht-störungstheoretisch) bindet. Bei Abständen, welche größer als die Dimensionen der Hadronen sind, treten letztere als effektive Frei-

heitsgrade auf; die partonischen Freiheitsgrade erscheinen als eingefroren und der konventionelle Ansatz der Kernphysik mit effektiven Meson-Austausch-Strömen und baryonischen Zuständen wird eine ökonomische Betrachtungsweise. In der modernen Hadronenphysik [1, 2, 3] richtet sich das Interesse gerade auf diesen Zwischenbereich, d. h. auf partonische Abstände in der Größenordnung von hadronischen Radien, wo weder die traditionellen Ansätze noch die QCD-Störungstheorie anwendbar sind. Man mag erwarten, daß in diesem Fall nicht-störungstheoretische Verfahren der Vielteilchenphysik die gewünschte Information liefern sollten. Allerdings stößt man hier auf prinzipielle Grenzen: Einerseits versagen Entwicklungen in endlicher Ordnung von fundamentalen Feldern wegen der lokalen $SU(3)_c$ Eichinvarianz oder sie liefern nicht-hermitesche Energiedichten, andererseits ist die Gitter-QCD bisher nicht in der Lage, zuverlässige Aussagen bei endlicher Quark- (Baryonen-) Dichte zu liefern. Weiterhin ist man noch weit entfernt davon, die QCD-Gleichungen für Nicht-Gleichgewichtskonfigurationen, wie sie in energetischen Schwerionenstößen auftreten, zu lösen. Aus diesem Grund ist ein Fortschritt in den Fragestellungen und Lösungen in erster Linie von experimenteller Seite zu erwarten, wenn auch in enger Verknüpfung mit den theoretischen Modellvorstellungen wie z.B. den String-Modellen. Die Herausforderung, die Dynamik der frühen Phasen des Universums nachzuvollziehen und zu verstehen, ist sicherlich von vergleichbarer Ordnung für Experimentatoren wie Theoretiker.

In der vorliegenden Arbeit wird der Weg verfolgt, mit Hilfe eines effektiven String-Modells sowohl die Wellenfunktionen von Mesonen - bestehend aus Quark-Antiquark-Paaren - zu berechnen, als auch mit der gleichen Wechselwirkung die Streuung von „charmanten“ Mesonen, d.h. Mesonen mit einem „Charm“-Quark, da bei niedrigen Energien oder mittleren bis großen Abständen störungstheoretische Verfahren der QCD nicht anwendbar sind. Es sollen insbesondere die Wirkungsquerschnitte für die Dissoziation von J/Ψ -Mesonen mit leichteren Mesonen auf der Basis der gleichen Wechselwirkung berechnet werden. Die letzteren Querschnitte sind speziell von Bedeutung für die Interpretation der Unterdrückung von J/Ψ -Mesonen in Schwerionenstößen am CERN, welche von der NA50 Kollaboration als Evidenz für das Entstehen eines Quark-Gluon-Plasmas in diesen Reaktionen herausgestellt wurde [4]. Weiterhin erlaubt die Berechnung der totalen Reaktionsquerschnitte die Bestimmung von „dynamischen“ Breiten oder Lebensdauern der Teilchen im Medium, d.h. die Bestimmung ihrer In-Medium-Spektralfunktion.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: In Kapitel 2 werden die Grundbegriffe der QCD erläutert sowie die Ergebnisse von Gitter-QCD-Rechnungen bei verschiedenen Temperaturen im thermodynamischen Gleichgewicht beschrieben. Die Gitter-QCD-Analysen für die Energie von schweren Quark-Antiquark-Paaren im Abstand r führen sodann auf eine effektive Parametrisierung der Wechselwirkung in Form von Coulomb-, String- und Hyperfein-Wechselwirkung. In Kapitel 3 werden die freien Parameter der Wechselwirkung über die nicht-relativistische Be-

rechnung von mesonischen Wellenfunktionen und deren Energien bestimmt. Die Streuung von verschiedenen Mesonen, insbesondere von Mesonen mit Charm-Quarks, wird in Kapitel 4 berechnet. Das letzte Kapitel 5 dient als Zusammenfassung der Arbeit und beinhaltet einen Ausblick auf weiterführende Untersuchungen.

Kapitel 2

Wichtige Begriffe der Quantenchromodynamik

2.1 Quarks

Die Struktur des Nukleons wurde in den letzten 30 Jahren mit der tiefinelastischen Streuung untersucht. Dabei werden entweder Leptonen oder Neutrinos am Nukleon gestreut; die gemessenen Wirkungsquerschnitte und Impulsüberträge dienen zur Überprüfung des theoretischen Modells für die Struktur der Nukleonen.

Dabei stellte sich heraus, daß die Nukleonen selbst aus punktförmigen Teilchen ohne Substruktur bestehen, den Quarks, welche wiederum über den Austausch von Gluonen miteinander wechselwirken. Die Quarks sind elektrisch geladen und tragen den Spin $\frac{1}{2}$. Man bezeichnet die sechs vorhandenen Typen der Quarks als „flavours“. Die Quarks unterliegen der starken (Farb-)Wechselwirkung, der elektromagnetischen Kraft, sowie der schwachen Wechselwirkung und der Gravitationskraft. Die starke Wechselwirkung zwischen den farbgeladenen Quarks ist bei weitem die stärkste Kraft. Mit den bekannten Quantenzahlen Ort, Spin und flavour, die sich aus dem Quarkmodell ergeben, gerät die Zusammensetzung

Quarksorte	Ladung in Einheiten der Elementarladung	Masse [GeV]
up	$2/3$	0.0015-0.005
down	$-1/3$	0.003-0.009
charm	$2/3$	0.060-0.170
strange	$-1/3$	1.1-1.4
top	$2/3$	4100-4400
bottom	$-1/3$	~ 170

Tabelle 2.1: Quarksorten, ihre elektrischen Ladungen und die freie Masse der Quarks [5].

Kraft	Stärke in willkürlichen Einheiten
starke Kraft	10
elektromagnetische Kraft	10^{-2}
schwache Kraft	10^{-13}
Gravitationskraft	10^{-42}

Tabelle 2.2: Übersicht der vier auf Quarks wirkenden Grundkräfte und Vergleich ihrer Stärke.

einiger Teilchen in Widerspruch zum Pauli-Prinzip, welches besagt, daß zwei Fermionen sich nie in Quantenzuständen mit den gleichen Quantenzahlen befinden dürfen.

Die Spin- $\frac{3}{2}$ -Resonanz Δ^{++} , die aus drei up-Quarks mit parallelem Spin besteht, ist ein Beispiel dafür. Die Gesamtwellenfunktion

$$\psi_{ges} = \psi_{Ort} \times \psi_{Spin} \times \psi_{flavour} \quad (2.1)$$

ist im Falle der Δ^{++} -Resonanz symmetrisch unter Vertauschung zweier Quarks und symmetrisch unter Vertauschung der Spins, da alle Spins in dieselbe Richtung zeigen. Die Ortswellenfunktion ist ebenfalls symmetrisch gegenüber der Vertauschung zweier Quarks, da die Quarks in der Δ^{++} -Resonanz keinen relativen Drehimpuls besitzen sollten.

1964 wurde, um das Pauli-Prinzip zu gewährleisten, eine neue Quantenzahl für die Quarks eingeführt, die Farbe. Da ein Baryon nur drei Quarks enthält, wird die neue Farbquantenzahl nur in drei Farbzuständen benötigt, die mit rot, grün und blau bezeichnet werden. Die Gesamtwellenfunktion erhält deshalb einen zusätzlichen Farbanteil:

$$\psi_{ges} = \psi_{Ort} \times \psi_{Spin} \times \psi_{flavour} \times \psi_{Farbe}. \quad (2.2)$$

Antiquarks tragen die entsprechende Antifarbe.

Aus der Symmetriegruppe $SU(3)_{Farbe}$ ergeben sich Farbmultipletts, von denen in der Natur nur die Quarkkonfigurationen mit niedrigster Energie vorkommen, die durch farbneutrale Farb-Singulett-Zustände gegeben sind. Diese Farb-Singulett-Zustände sind die Mesonen und Baryonen. Andere Quarkzustände sind entweder schwächer gebunden oder haben ein abstoßendes Potential.

2.2 Gluonen

In der Quanten-Chromo-Dynamik (QCD) wird wie in der Quanten-Elektro-Dynamik (QED) die Wechselwirkung durch ein masseloses Vektorboson vermittelt. Das Austauscheteilchen der starken Wechselwirkung ist das Gluon. Es trägt gleichzeitig eine Farbe und eine andere Antifarbe, da das Gluon die Wechselwirkung

zwischen den Quarks vermittelt und ein Quark und ein Antiquark in ein Gluon übergehen können (siehe Abb. 2.1). Aus den Farbtuplettzuständen (rgb) des Quarks und des Antiquarks ergibt sich ein farbneutrales Singulett und ein Multiplett mit acht Zuständen:

$$3 \otimes 3^* = 1 \oplus 8. \quad (2.3)$$

Die Zustände des Oktetts entsprechen den 8 Gluonen; das Singulett ist invariant unter einer Rotation im Farbraum und kann daher nicht als Austauschteilchen dienen. Die Gluonen vermitteln nicht nur die Wechselwirkung zwischen Quarks, sie können auch untereinander wechselwirken; dies ist ein großer Unterschied zur Quanten-Elektro-Dynamik, deren Feldquanten ungeladen sind. Theoretisch können auch Teilchen existieren, die nur aus Gluonen bestehen; sie werden Gluebälle genannt. Der Grund ist, daß eine Verbindung von zwei Farbtupletts immer ein erlaubtes Farbsingulett neben den nichterlaubten Farbmultipletts ergibt:

$$8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 10 \oplus 10 \oplus 27. \quad (2.4)$$

Zur Zeit gibt es aber noch keine endgültigen experimentellen Hinweise auf Gluebälle.

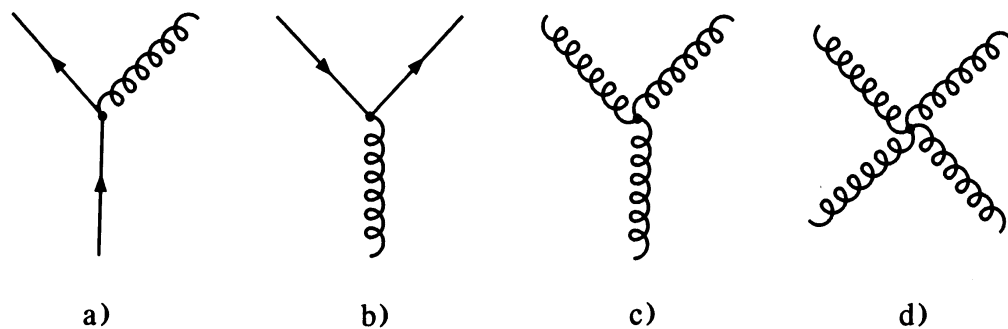


Abbildung 2.1: Fundamentale Wechselwirkungsgraphen der starken Wechselwirkung: a) Abstrahlung eines Gluons von einem Quark, b) Aufspaltung eines Gluons in ein Quark-Antiquark-Paar, c)+d) Selbstkopplung der Gluonen.

2.3 Die starke Kopplungskonstante der QCD

Die Stärke der Wechselwirkung zwischen zwei Quarks wird durch die starke Kopplungskonstante α_s beschrieben. Die zugrundeliegenden Prozesse, die die Stärke der Kopplung bestimmen, sind folgende: Die nackte Farbladung des einzelnen Quarks wird durch eine Wolke von virtuellen Quark-Antiquark-Paaren und virtuellen Gluonen abgeschirmt. Der Unterschied zur QED besteht in der zusätzlichen

Abschirmung der Ladung durch die Selbstwechselwirkung der Austauschbosonen. Die dominierende Gluonabschirmung in der QCD führt zu einer Vergrößerung der effektiven Ladung des Quarks bei großen Abständen. Dies bedeutet, daß die Farbkraft zwischen zwei Quarks bei kleinen Abständen gering ist und die Quarks als nahezu freie Teilchen angesehen werden können. Dieses Phänomen ist auch unter dem Begriff der „asymptotischen Freiheit“ bekannt. Möchte man diese kleinen Abstände zum Beispiel mit der tiefinelastischen Streuung eines Leptons an einem Hadron untersuchen, dann braucht man hohe Impulsüberträge des Leptons. Deshalb wird die starke Kopplungskonstante α_s in Abhängigkeit des quadrierten Impulsübertrags Q^2 angegeben (siehe Abb. 2.2). Nur innerhalb einer nicht-abelschen Eichtheorie kann es asymptotische Freiheit geben. Bedingung dafür ist auch, daß die Anzahl der Fermionen begrenzt ist und diese im Falle der QCD nicht mehr als $n_f = 16$ flavours annehmen; dieses ist in der Tat bei der maximalen Flavourzahl $n_f = 6$ erfüllt,

$$\alpha_s(Q^2) = \frac{12\pi}{(33 - 2n_f) \cdot (Q^2/\Lambda^2)}. \quad (2.5)$$

In der Formel ist n_f die Anzahl der an der Reaktion beteiligten Quark-flavours und Λ ist ein Parameter, der experimentell bestimmt werden muß; Λ hat etwa folgende Größenordnung:

$$0.1 \text{ GeV} \leq \Lambda \leq 0.3 \text{ GeV}. \quad (2.6)$$

In der Quanten-Chromo-Dynamik sind die starken Kräfte so groß, daß die Werte der Kopplung zwischen Quark und Gluon bzw. zwischen Gluonen Werte annehmen können, die größer als 1 sind. Das führt dazu, daß kompliziertere Prozesse - im Gegensatz zur QED - stärker beitragen und berücksichtigt werden müssen. Dies ist der Grund, weshalb in der QCD keine Störungsrechnung angewendet werden kann, abgesehen von Bereichen, in denen die Quarks als asymptotisch frei angesehen werden können.

Die nicht-abelsche Eichtheorie der QCD kann auch die „Confinement“-Kraft begründen, die zur Folge hat, daß keine freien, d.h. außerhalb von Hadronen existierenden, farbgeladenen Teilchen gefunden werden. Der Einschlußmechanismus (oder das Confinement) für farbgeladene Teilchen wird wieder mit der Selbstkopplung der Gluonen begründet: In der QED werden die Feldlinien zwischen zwei Ladungen bei wachsendem Abstand zwischen diesen Ladungen auseinandergezogen (siehe Abb. 2.3 oben). Dabei verringert sich die Dichte der Feldlinien und damit auch die Stärke der Kraft zwischen den Ladungen. Im Gegensatz dazu können sich die Feldlinien in der QCD, z.B. in einem Meson, nicht unendlich ausdehnen, da die Gluonen miteinander wechselwirken. Die Folge ist, daß die Feldlinien mit wachsendem Abstand eine konstante Dichte beibehalten und einen Flußschlauch (String) bilden (siehe Abb. 2.3 Mitte). Die Kraft zwischen den Quarks bleibt dabei konstant. Werden die Quarks immer weiter auseinandergezogen, dann besitzt das System irgendwann genügend Energie, um aus einem

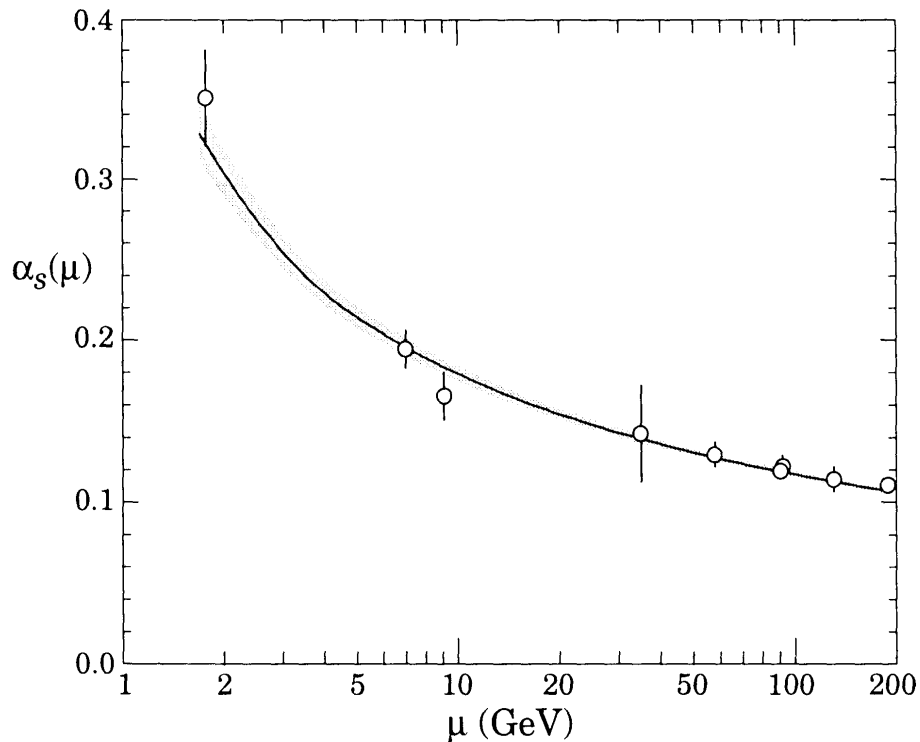


Abbildung 2.2: Die starke Kopplungskonstante α_s in Abhängigkeit vom Impulsübertrag $\mu = \sqrt{Q^2}$ [6].

virtuellen Quark-Antiquark-Paar ein reales Paar zu erzeugen, d.h. es entsteht ein Meson (siehe Abb. 2.3 unten). Dies wurde auch experimentell nachgewiesen in der Proton-Proton- bzw. Elektron-Positron-Streuung.

2.4 Quark-Potential-Modelle

In der Quanten-Chromo-Dynamik existiert kein einheitlicher Ansatz für das Quark-Quark- oder Quark-Antiquark-Potential. Folgende Aspekte sind aber in den meisten Quark-Potential-Modellen enthalten:

1. ein Spin- und flavour-unabhängiges, langreichweitiges Potential
2. ein Spin- und flavour-abhängiges, kurzreichweitiges Potential
3. ein Coulomb-artiges Potential
4. relativistische Korrekturen

In manchen Quark-Potential-Modellen wird jedoch zumeist angenommen, daß sich die Quarks nichtrelativistisch innerhalb der Hadronen bewegen. Dies ist aber nur für schwere Quarks gültig. Die Wechselwirkung der QCD umgibt jedes Quark mit einer Wolke von virtuellen Gluonen und virtuellen Quark-Antiquark-Paaren und die resultierende dynamische Massenverteilung ist so groß, daß sich

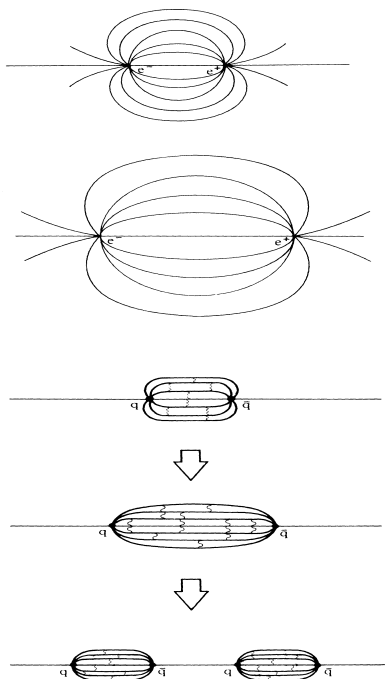


Abbildung 2.3: Die oberen beiden Bilder zeigen ein elektrisches Feld für verschiedene Abstände der entgegengesetzten Ladungen; die drei unteren Bilder illustrieren die Flußröhre des Quark-Antiquark-Potentials bei verschiedenen Abständen und die Bildung eines Mesons bei hoher Systemenergie.

die Quarks nichtrelativistisch bewegen. Quarks, die von einer virtuellen Wolke aus Quarks und Gluonen umgeben werden, nennt man Konstituentenquarks; ihre Massen werden als Konstituentenmassen bezeichnet. Die Konstituentenmassen sind von den Massen zu unterscheiden, die in der Lagrange-Funktion der QCD auftreten. Die Eigenwerte und Wellenfunktionen der Hadronen erhält man, indem die nichtrelativistische Schrödinger-Gleichung in Abhängigkeit von den Konstituentenmassen und der Potentialfunktion gelöst wird.

Die Bestätigung für die Annahmen, daß die Quarkkräfte bei kurzen Abständen zu asymptotischer Freiheit führen und bei großen Abständen zum Confinement, fand man in den 70er Jahren. In Streuexperimenten $e^+e^- \rightarrow \text{Hadronen}$ wurde eine schmale Resonanz bei 3.096 GeV gefunden. Dies ist das J/Ψ -Meson (Charmonium), das aus einem Charm- und einem Anticharm-Quark besteht. Da das J/Ψ -Meson sehr schwer ist, kann es nichtrelativistisch beschrieben werden. Die Massen des Charmoniumspektrums, die sich aus folgendem Grundansatz für das Quark-Antiquark-Potential ergeben, stimmen gut mit den experimentellen Daten

überein:

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + br, \quad (2.7)$$

wobei b die Stärke des Strings bezeichnet.

Die Parameter vieler Potentialmodelle wurden mit Hilfe des Spektrums des J/Ψ -Mesons oder des Spektrums des Υ -Mesons, das aus einem Bottom- und einem Antibottom-Quark besteht, bestimmt. Das J/Ψ -Meson und sein erster radial

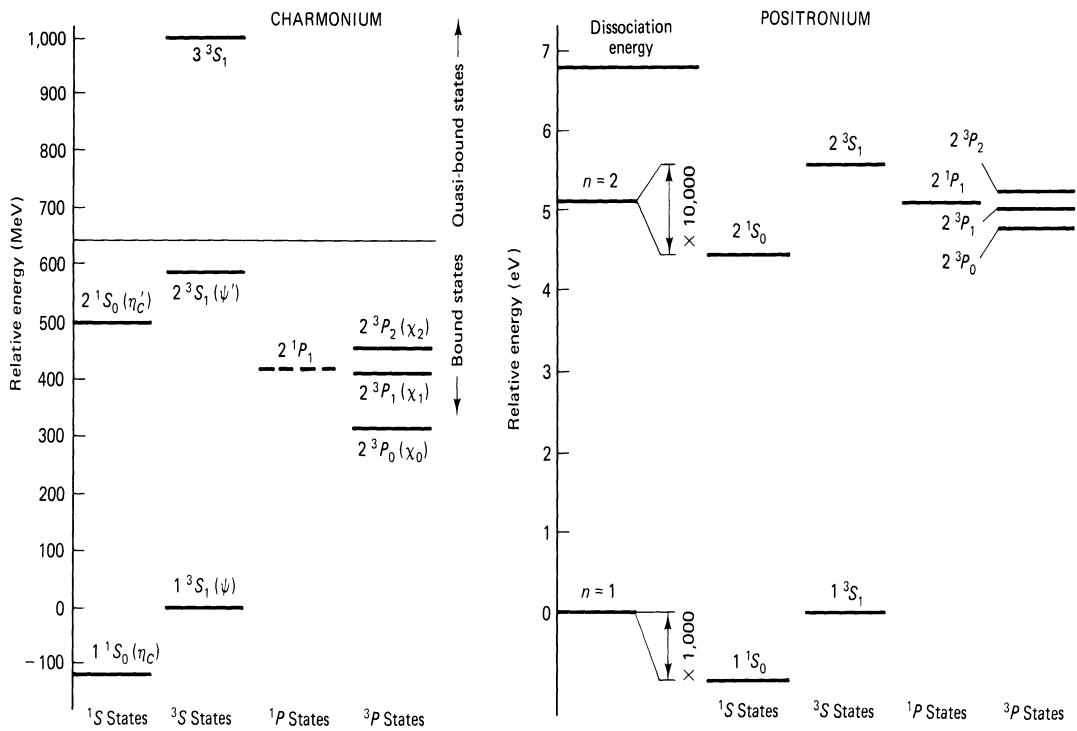


Abbildung 2.4: Die Spektren des J/Ψ -Mesons (links) und des Positroniums (rechts) weisen eine große Ähnlichkeit auf, da sie beide aus einer Kombination von Teilchen und Antiteilchen aufgebaut sind [7].

angeregter Zustand, die Resonanz Ψ' , sind ungewöhnlich schmal, d.h. langlebig. Erst der zweite radial angeregte Zustand Ψ'' hat eine normale Breite. Der Grund dafür ist, daß die Mesonen J/Ψ und Ψ' unterhalb der Produktionsschwelle für zwei D-Mesonen von 3.72 GeV liegen, die aus einem Charm-Quark und aus einem Up- oder Down-Quark zusammengesetzt sind. Bei der Berechnung von Dissoziationsquerschnitten des J/Ψ mit leichteren Mesonen kann man daher deutlich die

Schwelle sehen, wenn die Gesamtenergie die Schwellenenergie für die Produktion von zwei D-Mesonen überschreitet.

2.5 Die Lagrange-Dichte der QCD

Die Lagrange-Dichte der QCD berücksichtigt, daß die Quarks als Fermionen den Spin $\frac{1}{2}$ tragen und daß sie die Quantenzahl Farbe tragen. Die Formulierung der Lagrangedichte einer Eichtheorie erfolgt so, daß sie invariant unter einer lokalen Eichtransformation ist.

Als Grundlage der QCD-Lagrangedichte dient die Lagrangedichte der QED, die, abgesehen von der Farbe, schon alle weiteren Eigenschaften der Teilchen beschreibt.

Ausgangspunkt für die Überlegungen in der QED ist die freie Dirac-Gleichung, aus der sich die folgende Lagrangefunktion für die Fermionen ergibt:

$$\mathcal{L}_0 = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\partial_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi. \quad (2.8)$$

Eine Wechselwirkung zwischen den Fermionen führt man ein durch minimale Kopplung, d.h. durch Forderung der Invarianz von \mathcal{L} unter lokalen Phasentransformationen:

$$\Psi'(x) \rightarrow e^{i\varphi(x)}\Psi(x); \quad (2.9)$$

dabei ist $\varphi(x)$ ein Parameter, der von Raum und Zeit abhängt ($x = (\vec{r}, t)$). Transformationen der Form

$$U(x) \equiv e^{i\varphi(x)} \quad (2.10)$$

bilden eine unitäre abelsche Gruppe, die als $U(1)$ -Symmetriegruppe bezeichnet wird.

Die Einführung der kovarianten Ableitung

$$D_\mu \equiv \partial_\mu - ieA_\mu(x) \quad (2.11)$$

gewährleistet nun die Invarianz der Lagrangefunktion unter einer lokalen $U(1)$ Eichtransformation, wozu das Vektorfeld A_μ eingeführt wird. Die Größe e hat die Bedeutung der Kopplungskonstanten der QED; für sie gilt:

$$e^2 = 4\pi\alpha; \quad \alpha \approx \frac{1}{137}. \quad (2.12)$$

Das Eichfeld A_μ entspricht dem Feld des Photons, also dem Austauscheteilchen der QED, das an das Lepton mit der Ladung e (Elementarladung) koppelt. Zur kompletten Lagrangefunktion wird noch ein Term benötigt, der die kinetische

Energie des Photon-Feldes darstellt. Dieser Term wird durch den eichinvarianten Feldstärke-Tensor beschrieben:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.13)$$

Damit erhält man die vollständige Lagrangefunktion der QED:

$$\mathcal{L}_{QED} = \bar{\Psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi + e\bar{\Psi}\gamma^\mu A_\mu\Psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (2.14)$$

In der Quantenchromodynamik werden die Grundlagen der QED übernommen, und die Theorie wird auf die zusätzliche Quantenzahl Farbe erweitert. Dazu wird die lokale $U(1)$ -Gruppe durch die lokale $SU(3)$ -Gruppe ersetzt. Ausgangspunkt ist wieder die freie Lagrangefunktion, die in der QCD von den drei Farbquantenzahlen (rot, grün und blau) abhängt, sowie von der Summation über alle sechs Quark-flavours. Die Gesamtwellenfunktion und ihre Farbanteile sind wie folgt gegeben:

$$\Psi_j = \psi(\vec{r}, t)_j \cdot \chi_{j, \text{Farbe}} \quad (2.15)$$

mit folgenden Farbanteilen der Wellenfunktion (in der Standard-Darstellung):

$$\chi_{\text{rot}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\text{grün}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\text{blau}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Die Dirac-Gleichung für Quarks im Vakuum ohne Wechselwirkung lautet dann:

$$\mathcal{L}_0 = \sum_{j=1}^6 i\bar{\Psi}_j \gamma^\mu \partial_\mu \Psi_j - m_j \bar{\Psi}_j \Psi_j, \quad (2.17)$$

wobei m_j die Lagrange-Massen für den flavour j sind. Die Quarks haben in allen drei Farbzuständen die gleiche Masse; dies gewährleistet die Invarianz unter einer $SU(3)_{\text{Farbe}}$ -Transformation.

Eine lokale Eichtransformation für die $SU(3)_{\text{Farbe}}$ -Symmetriegruppe ist gegeben durch:

$$\Psi'_j = \exp\left(\sum_{k=1}^8 i\alpha_s \frac{\lambda_k}{2} \beta_k(x)\right) \Psi_j, \quad (2.18)$$

wobei α_s die starke Kopplungskonstante und λ_k die 3×3 Gell-Mann-Matrizen sind (siehe Anhang A). Die Farbtransformation, die durch das Farbmultiplett von acht Gluonen vermittelt wird, ist hier durch eine Phasenverschiebung in Abhängigkeit von acht linear unabhängigen Transformationswinkeln $\beta_k(x)$ beschrieben worden. Die Invarianz der Dirac-Gleichung unter Eichtransformationen wird wieder durch

das Einführen von Vektorfeldern und der kovarianten Ableitung gewährleistet. Im Fall der QCD sind dies die Eichfelder der Gluonen G_j^μ . Da die QCD eine nicht-abelsche Eichtheorie ist, koppeln die Eichfelder an alle Teilchen mit der gleichen Kopplungsstärke g_s :

$$g_s^2 = 4\pi\alpha_s. \quad (2.19)$$

Die kovariante Ableitung und die Transformation der Eichfelder lauten:

$$\begin{aligned} D^\mu &= \partial^\mu + ig_s \frac{\lambda_k}{2} G_k^\mu, \\ G_k'^\mu &= G_k^\mu - \partial^\mu \beta_k - g_s f_{klm} \beta_l G_m^\mu, \end{aligned} \quad (2.20)$$

wobei f_{klm} die $SU(3)$ -Strukturkonstanten sind (siehe Anhang A). Durch Vergleich mit (2.11) sieht man, daß die Kopplungskonstante e aus der QED in der QCD gerade dem Ausdruck $g_s \lambda_k / 2$ entspricht.

Schließlich wird noch die kinetische Energie der Eichfelder benötigt; sie ist durch das Produkt der Feldstärketensoren $F_k^{\mu\nu}$ gegeben:

$$F_k^{\mu\nu} = \partial^\mu G_k^\nu - \partial^\nu G_k^\mu - g_s f_{klm} G_l^\mu G_m^\nu. \quad (2.21)$$

Die gesamte Lagrangedichte der QCD für alle sechs Quarksorten ist durch die Summe über den potentiellen und den kinetischen Anteil gegeben:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{j=1}^6 \bar{\Psi}_j (i\gamma^\mu D_\mu - m_j) \Psi_j - \frac{1}{4} F_{k,\mu\nu} F_k^{\mu\nu}. \quad (2.22)$$

Die $SU(3)_{Farbe}$ -Gruppe wird auch „ungebrochen“ genannt, da das Austauscheteilchen der QCD, das Gluon, masselos ist. Eine Theorie mit einer gebrochenen Eichgruppe ist dagegen die elektroschwache Theorie; ihre Austauscheteilchen Z und W besitzen eine (sogar große) Masse.

2.6 Quarks und Gluonen bei hohen Temperaturen und hohen Dichten

Es wird angenommen, daß in Schwerionenstößen bei hohen Energien in der Wechselwirkungszone ein Quark-Gluon-Plasma entsteht, aus dem dann die Reaktionsprodukte in Form von Hadronen wieder ausfrieren [8, 9, 10]. Im Quark-Gluon-Plasma soll es keine gebundenen Quark-Zustände mehr geben [9], d.h. alle Quarks liegen in freien, ungebundenen Zuständen vor.

Die Theorie, die bei hohen Temperaturen zu einem Quark-Gluon-Plasma führt, soll anhand des J/Ψ -Mesons untersucht werden. Das J/Ψ -Meson, bzw. seine gemessenen Wirkungsquerschnitte bei Schwerionenstößen [4], werden außerdem

als Hinweis auf die Bildung eines Quark-Gluon-Plasmas während der Schwerionenreaktion angesehen [10]. Dies wird im folgenden näher erläutert.

Das allgemeine Quark-Quark-Potential bei der Temperatur $T = 0$ hat in etwa folgende Form (2.7):

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s}{r} + br. \quad (2.23)$$

Bei hochenergetischen Schwerionenstößen sollte zu Anfang der Reaktion ein Phasenübergang zwischen hadronischer Materie und der Quark-Materie erfolgen, d.h. die Quarks sollten in einem freien, ungebundenen Zustand (Plasma) vorliegen. Hinweise auf einen solchen Phasenübergang zwischen gebundener Materie und ungebundener Quark-Materie liefert die Gitter-Eichtheorie bei endlichen Temperaturen [11], da es nicht möglich ist, für den Phasenübergang zu freien Quarks und Gluonen Störungstheorie anzuwenden.

Bei Schwerionenstößen entstehen zu Beginn des Kollisionsprozesses auch J/Ψ -($c\bar{c}$)-Mesonen. Wegen ihrer hohen Masse ($3,096 \text{ GeV}$) können die J/Ψ -Mesonen nur durch harte Stöße erzeugt werden; diese Voraussetzungen sind aber nur zu Beginn des Kollisionsprozesses gegeben [12]. Bildet sich nun Quark-Materie, dann werden die Farbladungen des Charm- und des Anticharm-Quarks durch die Neuordnung der Dichten von Quarks und Gluonen voneinander abgeschirmt. Dies führt zu einem schwächeren Bindungspotential für das J/Ψ -Meson und bei genügend hoher Energie schließlich zur Dissoziation des J/Ψ in ein freies Charm- und in ein freies Anticharm-Quark [9, 10].

Das Potential zwischen einem Quark und einem Antiquark bei endlichen Temperaturen hat nun folgende Gestalt nach [13]:

$$V(r, m_D(T)) = \frac{b}{m_D(T)} (1 - e^{-r m_D(T)}) - \frac{\alpha_s(T)}{r} e^{-r m_D(T)}, \quad (2.24)$$

wobei $m_D(T)$ die Debye-Abschirmlänge ist; sie wird auch manchmal durch ihr Inverses, den Debye-Radius, angegeben: $m_D = r_D^{-1}(T)$. Die Debye-Abschirmlänge $m_D(T)$ hat nach Gitter-QCD-Rechnungen folgende Abhängigkeit von der Temperatur [13]:

$$m_D(T) = \sqrt{\left(\frac{N_c}{3} + \frac{N_f}{6}\right) g_s^2 T^2}. \quad (2.25)$$

Dabei ist N_c die Anzahl der möglichen Farbzustände der Quarks; $N_c = 3$. N_f ist die Anzahl der Quarksorten ($N_f = 3$ bis 6 je nach Energie). g_s ist die temperaturabhängige Kopplungsstärke, die nur zur Bestimmung der Debye-Abschirmmasse verwendet wird [14],

$$g_s = \frac{6\pi}{(33 - 2N_f) \ln(\frac{\chi T}{T_C})}; \quad \alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} \quad (2.26)$$

Resonanz	Masse [GeV]	mittl. quadr. Radius [fm]	m_D [GeV]	r_D [fm]
J/Ψ	3.07	0.453	0.7	0.28
Ψ'	3.698	0.875	0.36	0.548

Tabelle 2.3: Massen und mittlere quadratische Radien zur Temperatur $T = 0$ sowie die Abschirmmassen bzw. die Abschirmradien für die Dissoziation von J/Ψ -Mesonen und dem ersten radial angeregten Zustand, dem Ψ' -Meson, nach [16, 17].

mit einer Konstanten $\chi \approx 8$.

Der Phasenübergang zwischen hadronischer Materie und dem Quark-Gluon-Plasma wird durch eine kritische Temperatur T_C gekennzeichnet. T_C wurde in Gitter-QCD berechnet, außerdem wurden die kritischen Abschirmmassen $m_C = m(T_C) \approx 0.4 - 0.6 \text{ GeV}$ und die entsprechenden Abschirmradien zu $r_C = r(T_C) \approx 0.3 - 0.5 \text{ fm}$ berechnet [15].

Beim Erreichen der kritischen Temperatur geht der abgeschirmte lineare Term des Gesamtpotentials

$$V_{lin}(r, m_D(T)) = \frac{b}{m_D(T)} (1 - e^{-r m_D(T)}) \quad (2.27)$$

schneller gegen Null als der abgeschirmte Coulombanteil des Gesamtpotentials

$$V_{Coulomb}(r, m_D(T)) = -\frac{\alpha_s(T)}{r} e^{-r m_D(T)}. \quad (2.28)$$

Das J/Ψ -Meson benötigt eine etwas größere Energie als die Energie des Phasenübergangs, um zu schmelzen, denn es ist beim Phasenübergang noch schwach durch den Yukawa-artigen Coulombterm gebunden; es kann also noch weiter als (ausgedehntes) Meson im Plasma bestehen. Sein erster radial angeregter Zustand, das Ψ' -Meson, schmilzt jedoch schon beim Phasenübergang, da es als radial angeregter Zustand instabiler ist als das Charmonium im Grundzustand (J/Ψ) (siehe Tab. 2.3).

Gerade das J/Ψ -Meson wird als Hinweis auf die Bildung eines Quark-Gluon-Plasmas während des Schwerionenstoßes gesehen [9, 10, 18, 19, 20, 21]. Wie schon erwähnt, wird das J/Ψ wegen seiner großen Masse hauptsächlich zu Beginn des Kollisionsprozesses in einem harten Stoß erzeugt [22, 23, 24]. Wenn sich dann ein Quark-Gluon-Plasma mit genügend hoher Energie bildet, wird das J/Ψ in ein Charm- und in ein Anticharm-Quark dissoziiert. Auf die Phase des Quark-Gluon-Plasmas folgt bei wieder einsetzender Abkühlung die Hadronisationsphase, in der die Hadronen aus dem Plasma ausfrieren, d.h. in der die Quark-Antiquark-Paare in Bindungszuständen weiter propagieren. Dieses Ausfrieren erfolgt durch „weiche“ Stöße zwischen den Bestandteilen der Quarkmaterie, weil beim Abkühlen nicht mehr so viel Energie vorhanden ist. Es ist aber unwahrscheinlich, daß in solch einem weichen Stoß wieder ein J/Ψ -Meson erzeugt wird,

denn ein weicher Stoß liefert nicht die benötigte Energie für schwere Mesonen. Nach der Hadronisation ist es aber möglich, daß die gebundenen Charm- und Anticharm-Quarks mit leichten Mesonen reagieren [18, 19, 20, 21, 25, 26], wobei ein Charm-Quark mit einem leichten Quark ausgetauscht wird; es bilden sich D-Mesonen und deren Antiteilchen, wobei letztere aus einem Charm-Quark und einem Up- oder einem Down-Quark bestehen. Ist nun der Wirkungsquerschnitt für J/Ψ -Mesonen mit häufig bei einer Schwerionenkollision auftretenden Mesonen, wie π , ρ oder ω gering, dann kann davon ausgegangen werden, daß ein Quark-Gluon-Plasma in der frühen Phase des Stoßes vorgelegen haben muß. Gegenwärtig sind diese Wirkungsquerschnitte speziell bei kleinen Relativenergien sehr umstritten [27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34], da keine experimentellen Daten vorliegen bzw. einfach gemessen werden können. Eine Abschätzung der relevanten Querschnitte ist daher von großer Bedeutung und soll im nächsten Kapitel im Rahmen des Quark-Austauschmodells explizit durchgeführt werden. Da die interessanten Relativenergien bei den Stößen recht gering sind (siehe Kap.4), d.h. klein gegen die Masse der J/Ψ - oder auch ρ -Mesonen, erscheint eine nichtrelativistische Betrachtung als hinreichend. Zunächst ist jedoch eine genauere Form der Quark-Quark-Wechselwirkung zu bestimmen.

Kapitel 3

Das nichtrelativistische Quark-Potential-Modell

3.1 Hamiltonoperator für die Quark-Antiquark-Wechselwirkung

Um die nichtrelativistische Quark-Antiquark-Wechselwirkung in einem Meson hinreichend zu beschreiben, genügt der allgemeine Ansatz (2.23) für das Potential mit einem Coulomb-Term und einem linearen Term nicht. Das Modell muß noch um die Spin-Spin-Wechselwirkung der Quarks und eine konstante Energieverschiebung erweitert werden, um die experimentell bestimmten Spektren der schwereren Mesonen zu reproduzieren [32, 35]:

$$H_{ij} = \frac{\lambda(i)}{2} \frac{\lambda(j)}{2} \left\{ \frac{\alpha_s}{r_{ij}} - \frac{3}{4} b r_{ij} - \frac{4\pi\alpha_s}{3m_i m_j} S_i S_j \left(\frac{\sigma^3}{\pi^{\frac{3}{2}}} \right) e^{-\sigma^2 r_{ij}^2} - V_{con} \right\}. \quad (3.1)$$

Die 3×3 Matrizen $\lambda(i)$ und $\lambda(j)$ sind die Generatoren der $SU(3)$ -Symmetriegruppe (siehe Anhang A), die auch als Gell-Mann-Matrizen bezeichnet werden. Weiterhin ist α_s die starke Kopplungskonstante, die in dem verwendeten Ansatz den Wert $\alpha_s = 0.6$ hat; r_{ij} ist der Abstand der beiden Quarks im Meson und $b = 0.18 \text{ GeV}^2 \approx 0.914 \text{ GeV}/fm$ ist die String-Konstante. Die Massen der beiden Quarks im Meson sind m_i und m_j , während die Spins der Quarks durch die beiden Pauli-Spin-Matrizen S_i und S_j dargestellt werden. σ ist der inverse Reichweite-Parameter der Spin-Spin-Wechselwirkung mit dem Wert $\sigma = 0.897 \text{ GeV}$. Der Wechselwirkungs-Hamiltonoperator wird schließlich noch um einen konstanten Term $V_{con} = -0.68 \text{ GeV}$ in der Energie verschoben. Die aus dem Ansatz (3.1) resultierenden Potentiale $V(r) \equiv H_{ij}$ sind in den Abbildungen 3.1 und 3.2 explizit für verschiedene pseudoskalare Mesonen und Vektormesonen dargestellt.

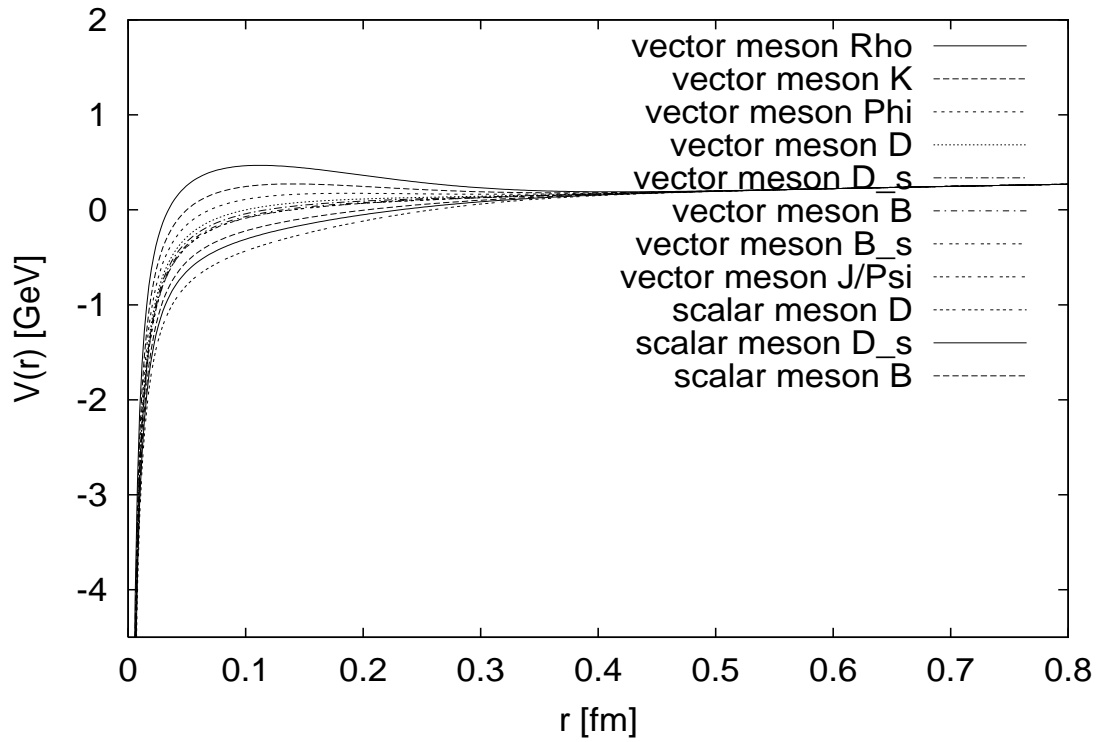


Abbildung 3.1: Quark-Antiquark-Wechselwirkungspotential $V(r)$ für verschiedene Mesonen.

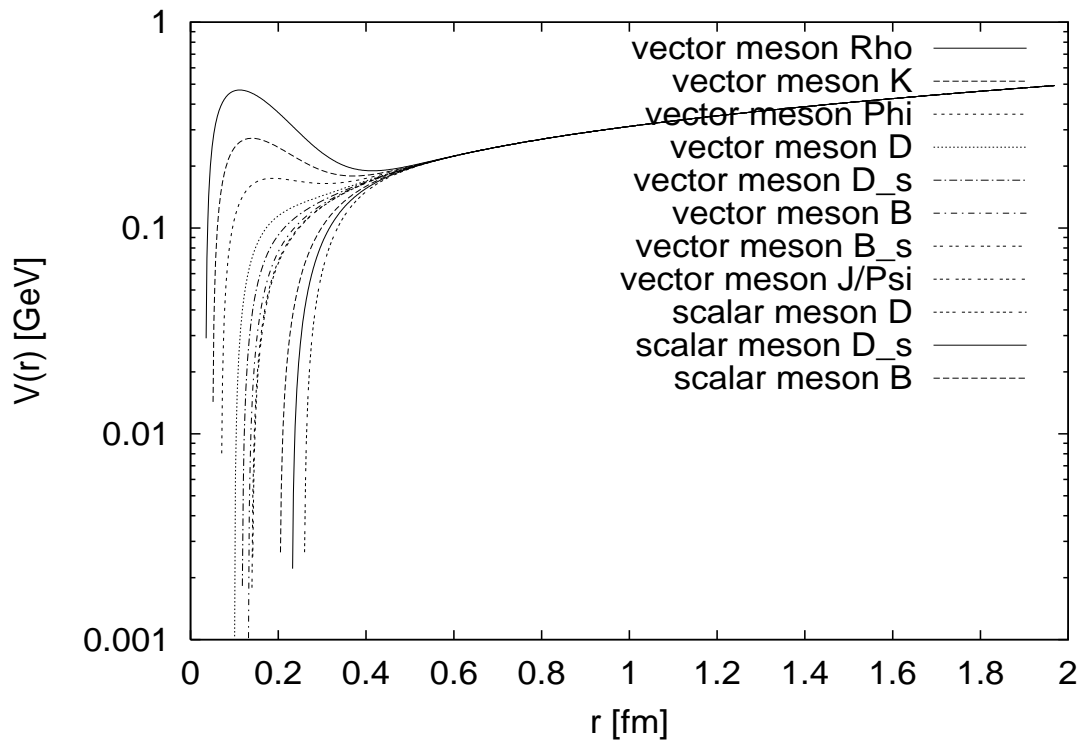


Abbildung 3.2: Quark-Antiquark-Wechselwirkungspotential in logarithmischer Darstellung, um die Hyperfeinaufspaltung zwischen den Potentialen besser zu sehen.

Bei den pseudoskalaren Mesonen stehen die Spins von Quark und Antiquark antiparallel zueinander, bei Vektormesonen stehen die Spins von Quark und Antiquark parallel zueinander.

Für das Produkt der Pauli-Spin-Matrizen $S_i S_j$ aus 3.1 ergeben sich folgende Werte:

$$S_i S_j = \begin{cases} -3 & \text{für pseudoskalare Mesonen} \\ +1 & \text{für Vektormesonen} \end{cases} \quad (3.2)$$

3.2 Eigenfunktionen der Mesonen im Ortsraum

Zunächst wird die Schrödinger-Gleichung gelöst, um die Eigenfunktionen der Mesonen im Ortsraum zu bestimmen:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + H_{ij}\right) \Psi = E_{nr} \Psi. \quad (3.3)$$

Dabei ist μ die reduzierte Masse:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.4)$$

Da es sich um ein radialsymmetrisches Problem handelt, kann ein Separationsansatz in der folgenden Form angewendet werden:

$$\Psi(\vec{r}) = R(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi). \quad (3.5)$$

Übrig bleibt die Radialgleichung, die mit dem klassischen Runge-Kutta-Verfahren integriert wurde:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} + H_{ij}\right) R(r) = E_{nr} R(r). \quad (3.6)$$

Die Anfangsbedingung für die Integration der Radialgleichung mit einem konstanten, durch Normierung zu bestimmendem Faktor c lautet:

$$R(r) = c r^l \quad (3.7)$$

für $r \neq 0$. Durch Integration der Schrödingergleichung mit der Randbedingung $R(\infty) = 0$, welche durch Iteration in der Energie E_{nr} erfüllt wird, ergeben sich die Eigenfunktionen und die Energieeigenwerte der Mesonen.

Die Gesamtenergie des Mesons (relativistisch) ist dann durch die Summe der beiden Quarkmassen und des (nichtrelativistischen) Energieeigenwerts E_{nr} des Mesons gegeben:

$$E_{ges} = E_{nr} + m_q + m_{\bar{q}}. \quad (3.8)$$

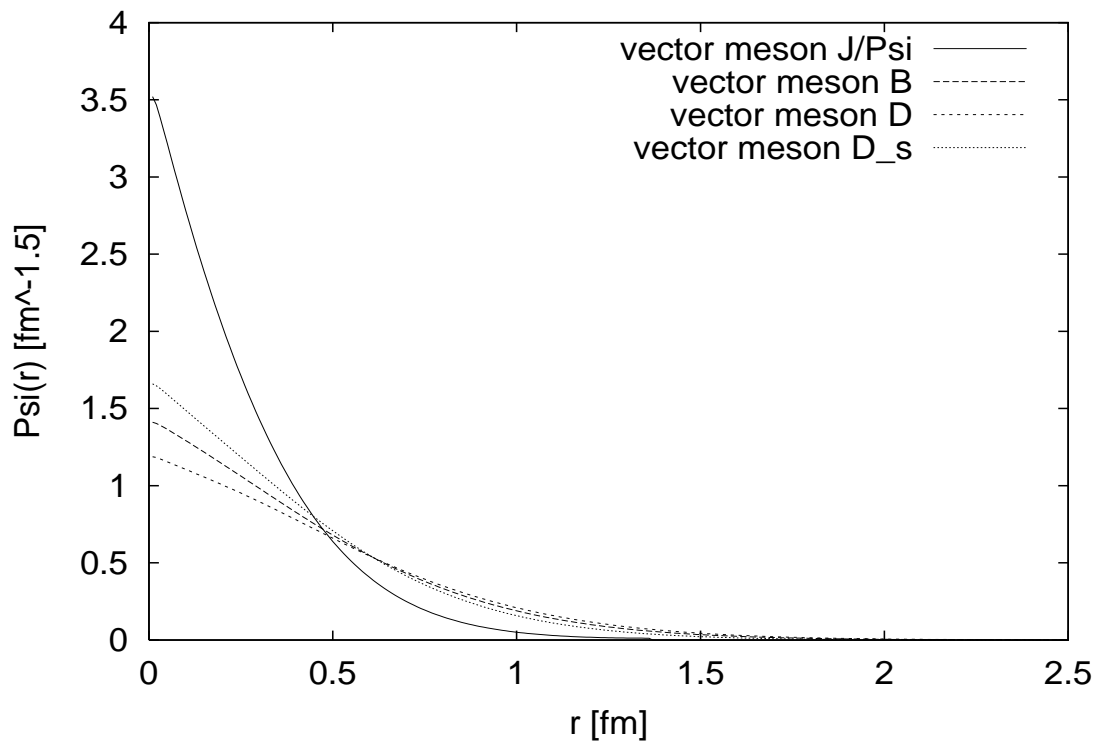


Abbildung 3.3: Eigenfunktionen der Vektormesonen J/Ψ , B^* , D^* und D_s^* im Ortsraum.

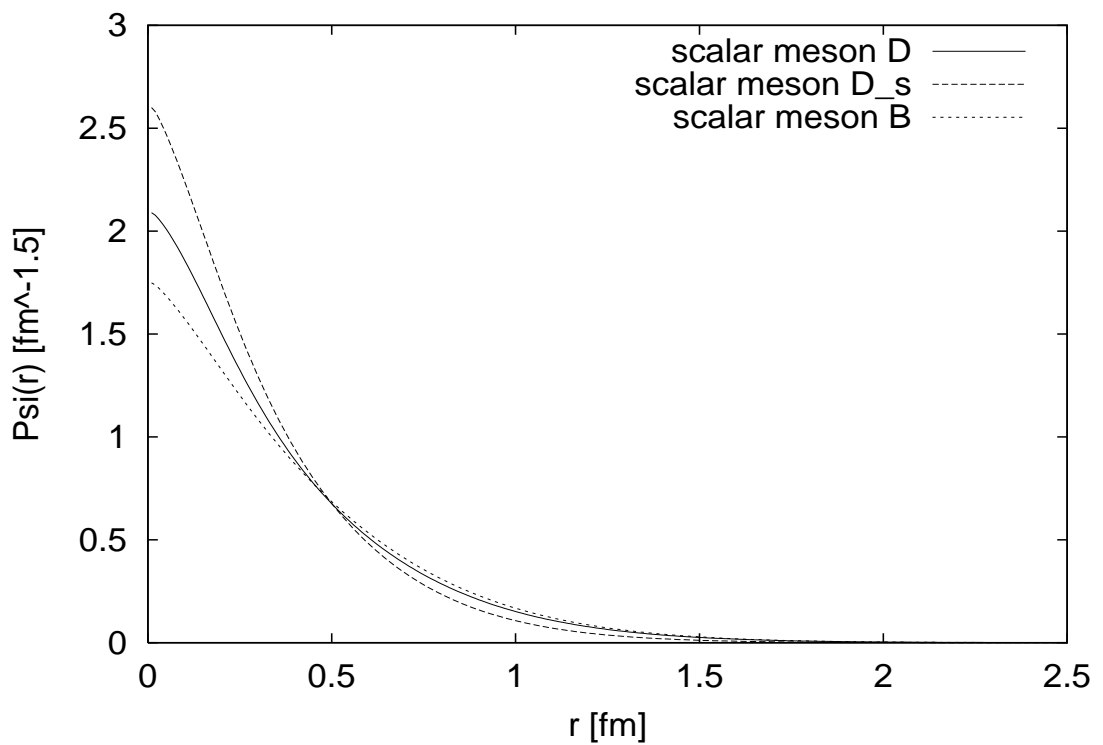


Abbildung 3.4: Eigenfunktionen der pseudoskalaren Mesonen D , D_s und B im Ortsraum.

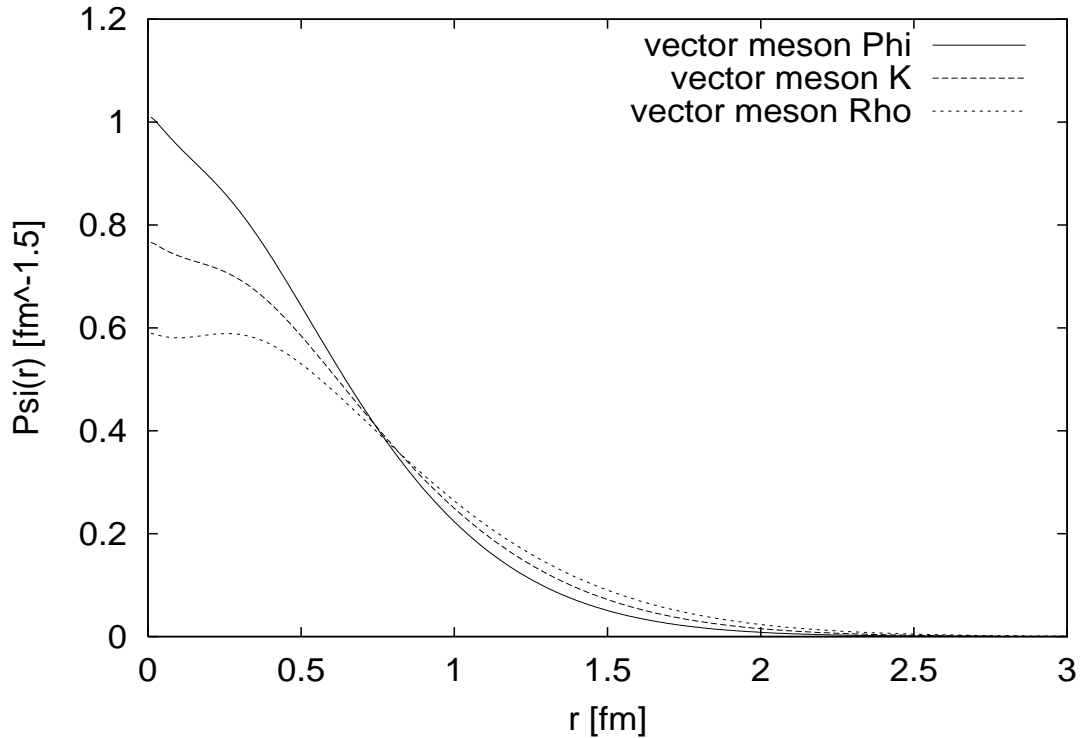


Abbildung 3.5: Eigenfunktionen der leichtesten Vektormesonen ϕ , K^* und ρ im Ortsraum.

In Abb. 3.3 sind die numerisch berechneten Eigenfunktionen der Vektormesonen J/Ψ , B^* , D^* und D_s^* im Ortsraum dargestellt. Dabei hat die Wellenfunktion des J/Ψ -Mesons die geringste Ausdehnung wegen des schweren $c\bar{c}$ -Quark Anteils; die anderen Vektormesonen sind ausgedehnter, da ein leichtes Up-, Down- oder Strange-Quark in der Wellenfunktion enthalten ist.

Die Eigenfunktionen der pseudoskalaren Mesonen D , D_s und B sind in Abb. 3.4 als Funktion der radialen Ausdehnung r gezeigt. Sie sind aufgrund der attraktiven Spin-Spin-Wechselwirkung weniger breit als die Vektormesonen, bei denen die Spin-Spin-Wechselwirkung repulsiv ist.

Die Eigenfunktionen der leichtesten Vektormesonen ϕ , K^* und ρ sind in Abb. 3.5 dargestellt; sie haben sogar noch einen etwas größeren Radius im Ortsraum als die schweren Vektormesonen in Abb. 3.3, da die Spin-Spin-Wechselwirkung repulsiv und $\sim 1/(m_1 m_2)$ ist, d.h. stärker als im Fall der schweren Vektormesonen.

Die Konstituentenquarkmassen für die 5 Quarks, die auch in Streuexperimenten wichtig sind, sind von den Lagrange-Massen der QCD Lagrangedichte (2.22) zu unterscheiden, da sie die skalare Kopplung an den Dirac-See sowie Anteile der nichtstörungstheoretischen Wechselwirkung beinhalten (vgl. Kap. 2.4). In effektiven Quark-Modellen ergibt die skalare Kopplung eine Erhöhung der

Quark	Konstituentenmasse [GeV]
up	0.34
down	0.34
strange	0.55
charm	1.8
bottom	5.17

Tabelle 3.1: Die Konstituentenmassen der Quarks in den aufgeführten Rechnungen.

Meson	Quarkinhalt	$S_1 S_2$	E_{nr} [GeV]	E_{ges} [GeV]	$E_{ges}^{exp.}$ [GeV]
ρ	(u, d)	1	+0.0862	0.7662	0.7700
K^*	(u, s) oder (d, s)	1	-0.0021	0.8878	0.8916 für $K^{*+}(u\bar{s})$
ϕ	(s, s)	1	-0.1035	0.9964	1.020
D^*	(u, c) oder (d, c)	1	-0.1415	1.9984	2.0100 für $D^{*+}(cd)$
D_s^*	(s, c)	1	-0.2724	2.0775	2.1124
J/Ψ	(c, c)	1	-0.5380	3.0620	3.0968
B^*	(u, b) oder (d, b)	1	-0.1970	5.3130	5.3249
B_s^*	(s, b)	1	-0.3446	5.3753	5.3693
D	(u, c) oder (d, c)	-3	-0.3130	1.8269	1.8693 für $D^+(cd)$
D_s	(s, c)	-3	-0.4272	1.9227	1.9685
B	(u, b) oder (d, b)	-3	-0.2556	5.2543	5.2789 für $B^+(ub)$

Tabelle 3.2: Vergleich zwischen berechneten Energien und experimentellen Gesamtenergien [6]. Beim Vektormeson B^* gibt es nur einen sehr geringen Unterschied zwischen B^* -Mesonen mit einem Up-Quark und B^* -Mesonen mit einem Down-Quark, da das B^* sehr schwer ist.

Lagrange-Masse um etwa 330 MeV [11], d.h. die Konstituentenquarkmasse für Up- und Down-Quarks erhöht sich auf $\approx 340 \text{ MeV}$. Die in dieser Arbeit verwendeten Konstituentenmassen sind in Tabelle 3.1 aufgeführt.

Die so berechneten Energien oder Massen der Mesonen sind in Tabelle 3.2 im Vergleich zu den experimentellen Resultaten aufgelistet. Die Stärke der Spin-Spin-Wechselwirkung, der Quarkinhalt sowie die nichtrelativistischen Eigenwerte E_{nr} sind ebenfalls angegeben. Die recht gute Übereinstimmung zwischen den berechneten Werten und den experimentellen Massen zeigt, daß die einfache Form der Wechselwirkung (3.1) offensichtlich durchaus realistisch ist.

3.3 Impulsraumdarstellung

Um die Übergangsmatrixelemente in der Meson-Meson-Streuung zu berechnen, werden die Mesoneneigenfunktionen im Impulsraum benötigt. Wegen der Radialsymmetrie erfolgt die Fouriertransformation hier in Kugelkoordinaten. Die allgemeine Fouriertransformation in drei Dimensionen lautet:

$$F(p_x, p_y, p_z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy dz f(x, y, z) e^{i(xp_x + yp_y + zp_z)}. \quad (3.9)$$

In Kugelkoordinaten transformiert ergibt sich dann nach elementarer Substitution:

$$F(p) = \int_0^{\infty} dr r^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\vartheta e^{ipr \cos \vartheta} f(r). \quad (3.10)$$

Da die Schrödinger-Gleichung des Mesons radialsymmetrisch ist, bleibt folglich nur noch eine eindimensionale r -Integration übrig,

$$F(p) = 4\pi \int_0^{\infty} dr r^2 \frac{\sin(pr)}{pr} f(r), \quad (3.11)$$

die numerisch mit guter Genauigkeit durchgeführt werden kann. Die Eigenfunktionen der Mesonen J/Ψ , B , ρ und D im Impulsraum sind in der Abb. 3.6 dargestellt. Aufgrund der Unschärferelation zwischen Ort und Impuls werden im Ortsraum breite Wellenfunktionen im Impulsraum schmaler.

Um die Genauigkeit der numerischen Integration zu testen, wurden die berechneten Wellenfunktionen vom Impulsraum in den Ortsraum zurücktransformiert,

$$f(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} 4\pi \int_0^{\infty} dp p^2 \frac{\sin(pr)}{pr} F(p). \quad (3.12)$$

Die in Abb. 3.7 dargestellten numerischen Ergebnisse zeigen, daß im Rahmen der Linienbreite die Wellenfunktionen übereinstimmen und somit „gute“ Impulsraumwellenfunktionen vorliegen.

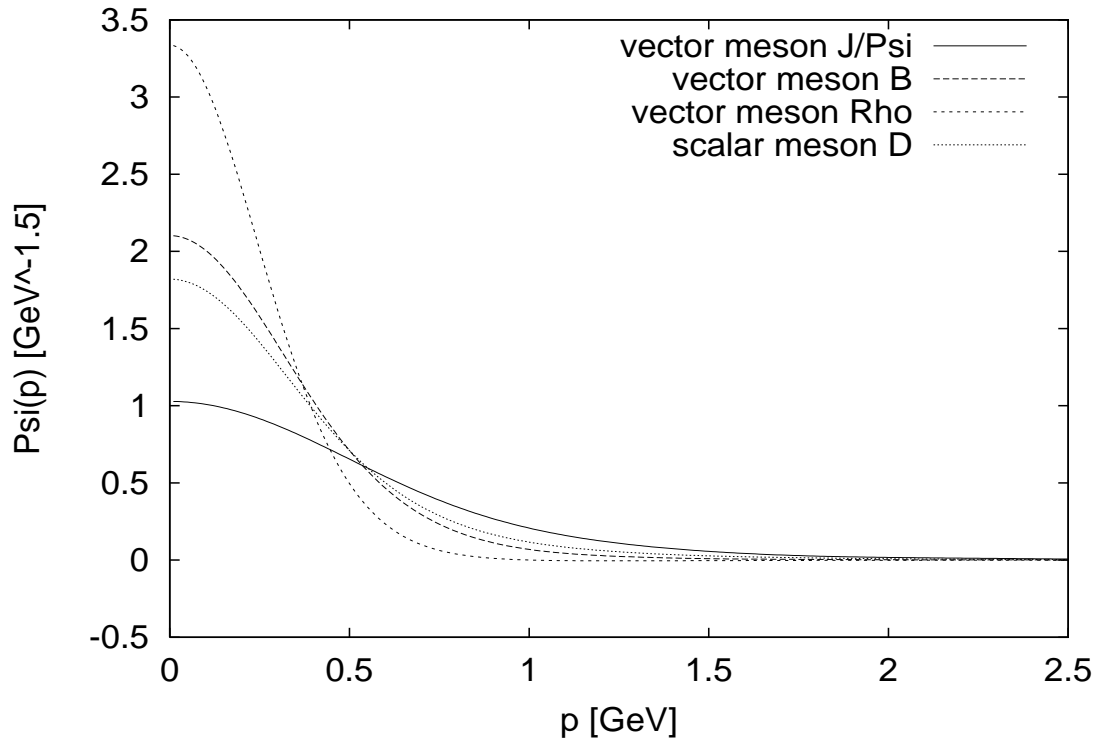


Abbildung 3.6: Eigenfunktionen der Mesonen J/Ψ , B^* , ρ und D im Impulsraum.

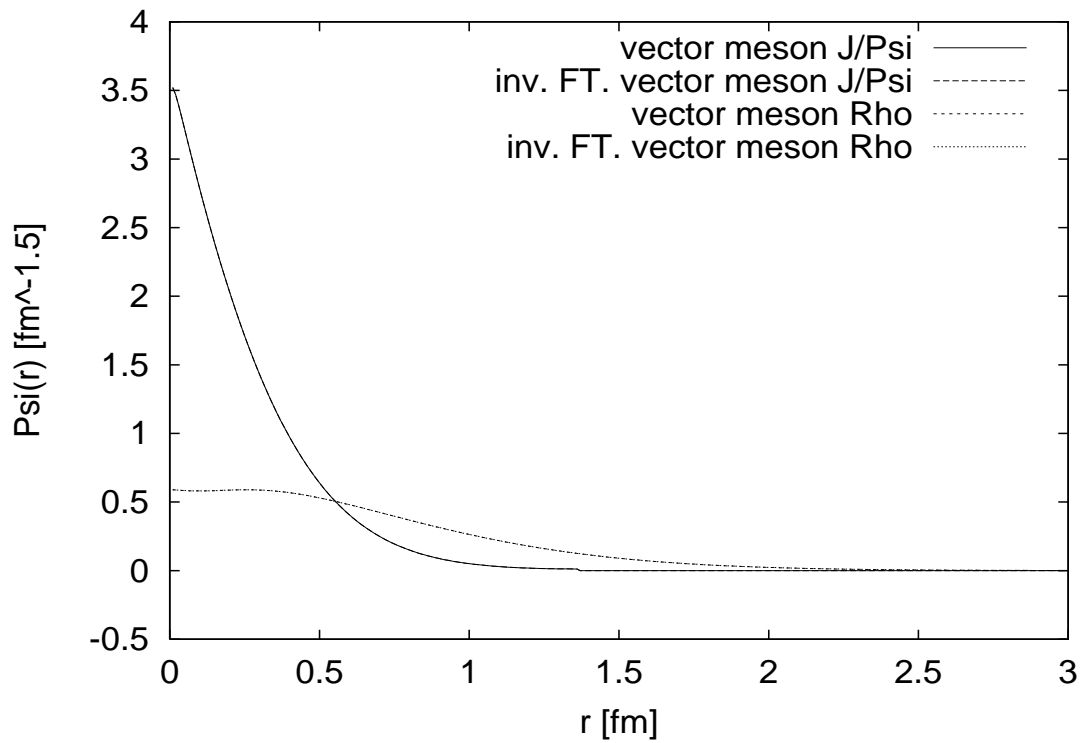


Abbildung 3.7: Vergleich der ursprünglichen Eigenfunktionen der Vektormesonen J/Ψ und ρ im Ortsraum mit der inversen Fouriertransformation über den Impulsraum. Die gezeichneten Kurven überlappen sich exakt.

3.4 Meson-Meson-Streuung mit Konstituentenquark austausch

In dieser Arbeit wird der Versuch unternommen, die Streuung zwischen zwei Mesonen durch die Wechselwirkung der Quarks der einzelnen Mesonen zu beschreiben (siehe Abb. 3.8).

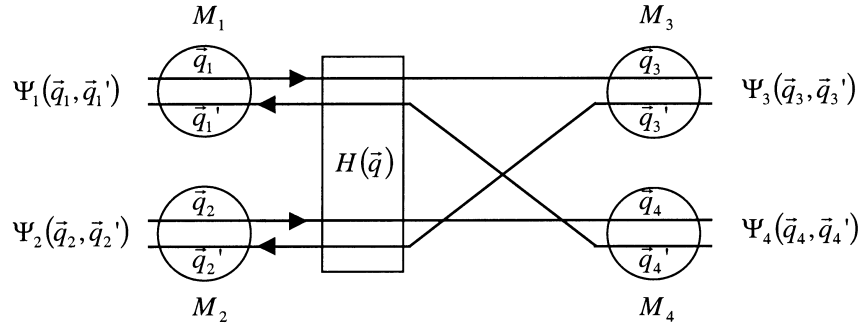


Abbildung 3.8: Allgemeines Streudiagramm für die Meson-Meson-Streuung mit Konstituentenquark austausch. Die Quark-Antiquark-Wechselwirkung wird durch den Hamiltonoperator im Impulsraum $H(\vec{q})$ beschrieben.

Es wechselwirken dabei jeweils nur die Quarks, die verschiedenen einlaufenden Mesonen angehören, was insgesamt vier verschiedene Austauschwechselwirkungen beinhaltet. Zwei der vier Diagramme beschreiben die Wechselwirkung von Quarks, die sich nach der Streuung im selben auslaufenden Meson befinden. Diese Diagramme werden auch Capture 1- und Capture 2-Diagramm genannt [35, 32]. Die Wechselwirkung von Quarks, die sich nach der Meson-Meson-Streuung nicht im selben Endmeson befinden, wird durch die Transfer 1- und Transfer 2-Diagramme beschrieben (siehe Abb. 3.9).

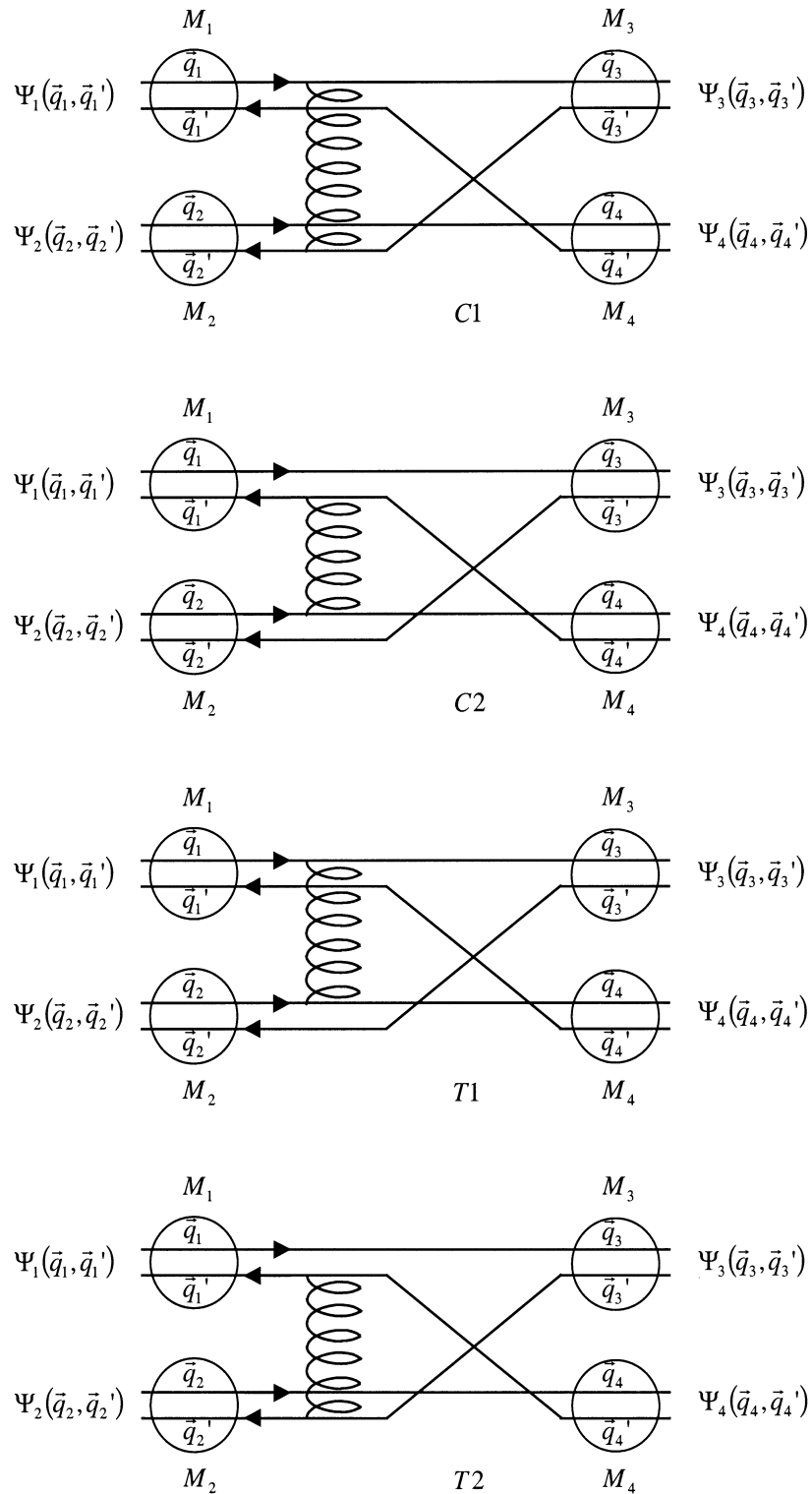


Abbildung 3.9: Die vier Born'schen Streuprozesse für den Konstituentenquark-austausch.

Die Wechselwirkung zwischen zwei „isolierten“ Quarks wird durch das Diagramm (Abb. 3.10) beschrieben. In Abb. 3.10 sind \vec{q}_1, \vec{q}_2 die Impulse der beiden Quarks

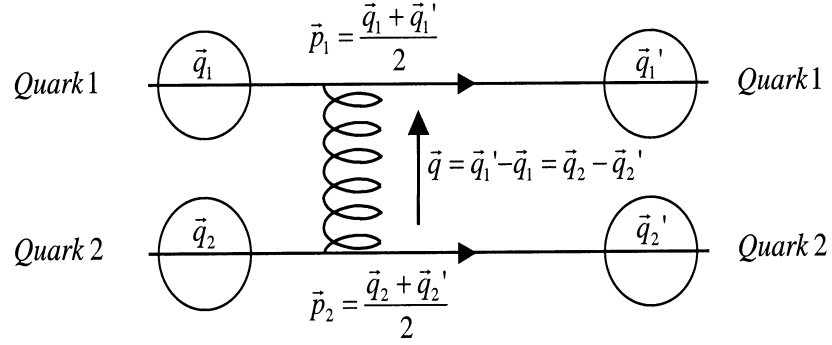


Abbildung 3.10: Die Quark-Quark-Wechselwirkung und die auftretenden Impulse.

vor der Wechselwirkung und \vec{q}_1', \vec{q}_2' sind die Impulse der Quarks nach der Wechselwirkung. Der Austauschimpuls, der bei der Quark-Quark-Wechselwirkung auftritt, ist gegeben durch $\vec{q} = \vec{q}_1' - \vec{q}_1 = \vec{q}_2 - \vec{q}_2'$. Die mittleren Impulse der ein- und auslaufenden Quarks werden mit \vec{p}_1 und \vec{p}_2 bezeichnet.

In Born'scher Näherung ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung zweier Mesonen dann gegeben durch die Summe der Beiträge der vier Born-Streudiagramme in Abb. 3.9 :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{4\pi^2 \mu^2}{\hbar^4} \right) \left| \sum_{i=1}^{i=4} \langle \Psi_C^* \Psi_D^* | T | \Psi_A \Psi_B \rangle_i \right|^2, \quad (3.13)$$

wobei Ψ_C und Ψ_D die Wellenfunktionen der Mesonen nach der Streuung sind; Ψ_A und Ψ_B sind die Wellenfunktionen der einlaufenden Mesonen. Die Impulse der Mesonen werden hier mit $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ und \vec{D} bezeichnet. Wegen der Impulserhaltung in der Meson-Meson-Streuung gilt:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} + \vec{D}. \quad (3.14)$$

Im Meson-Meson-Schwerpunktsystem haben dann die einlaufenden Mesonen A und B betragsmäßig den gleichen Impuls, jedoch unterschiedliches Vorzeichen. Das gleiche gilt für den Impuls der auslaufenden Mesonen. Im Schwerpunktsystem gilt weiterhin für das Impulsquadrat A^2 bei gegebener invarianter Energie \sqrt{s} :

$$A^2 = \frac{(s - (M_A + M_B)^2)(s - (M_A - M_B)^2)}{4s} \quad (3.15)$$

und für den auslaufenden Impuls:

$$C^2 = \frac{(s - (M_C + M_D)^2)(s - (M_C - M_D)^2)}{4s} \quad (3.16)$$

aufgrund der Energieerhaltung in der Reaktion, wobei M_A, M_B, M_C, M_D die Mesonenmassen bezeichnen. Da der Endimpuls damit betragsmäßig festgelegt ist, verbleibt nur ein Raumwinkel $d\Omega$ für die auslaufenden Mesonen, über den in (3.13) integriert werden muß, um den gesamten Wirkungsquerschnitt zu erhalten. Zur Berechnung der Matrix-Elemente werden noch die geboosteten Quark-Wellenfunktionen im Impulsraum explizit benötigt. Dazu betrachten wir ein Meson mit Gesamtimpuls \vec{A} und zwei gebundenen Quarks mit den individuellen Massen m_1 und m_2 mit Ortskoordinaten \vec{r}_1 und \vec{r}_2 . Im Ortsraum sind die Quarks dann beschrieben durch die 2-Teilchen-Wellenfunktion in Schwerpunkt- und Relativkoordinaten,

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}, \quad \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2, \quad (3.17)$$

$$\Phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \exp(-i\vec{A} \cdot (\frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2})) \psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2), \quad (3.18)$$

wobei $\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ die Ortsraumdarstellung der Mesonwellenfunktion bezeichnet, die durch Integration der Schrödingergleichung berechnet wurde (siehe Kap. 3.2). Die Fouriertransformation dieser Wellenfunktion liefert dann:

$$\Phi(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = (2\pi)^3 \delta(\vec{A} - \vec{p}_1 - \vec{p}_2) \psi(\vec{p}_1 - \vec{p}_2) \quad (3.19)$$

mit der Fouriertransformierten $\psi(\vec{q})$ (siehe Kap. 3.3).

Da die Meson-Meson-Streuung im Impulsraum berechnet werden soll, ist es sinnvoll, den Hamiltonoperator ebenfalls in den Impulsraum zu transformieren. Dies entspricht dann dem T-Operator in dem Ausdruck (3.13) für den differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$H(\vec{q}) = \frac{4\pi\alpha_s}{\vec{q}^2} - \frac{4\pi\alpha_s}{3m_i m_j} \vec{S}_1 \vec{S}_2 \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-\vec{q}^2/\sigma^2} + \frac{6\pi b}{\vec{q}^4}. \quad (3.20)$$

Der erste Term entspricht dem Farb-Coulomb-Term im Impulsraum, der zweite Term ist die Spin-Spin-Hyperfeinaufspaltung und der dritte Term ist der lineare Confinement-Term.

Zur besseren Konvergenz (und Einsparung von Rechenzeit) wird der Coulomb-Anteil und der Confinement-Term geringfügig abgeschirmt, d.h.

$$q^2 \rightarrow q^2 + \varepsilon^2, \quad (3.21)$$

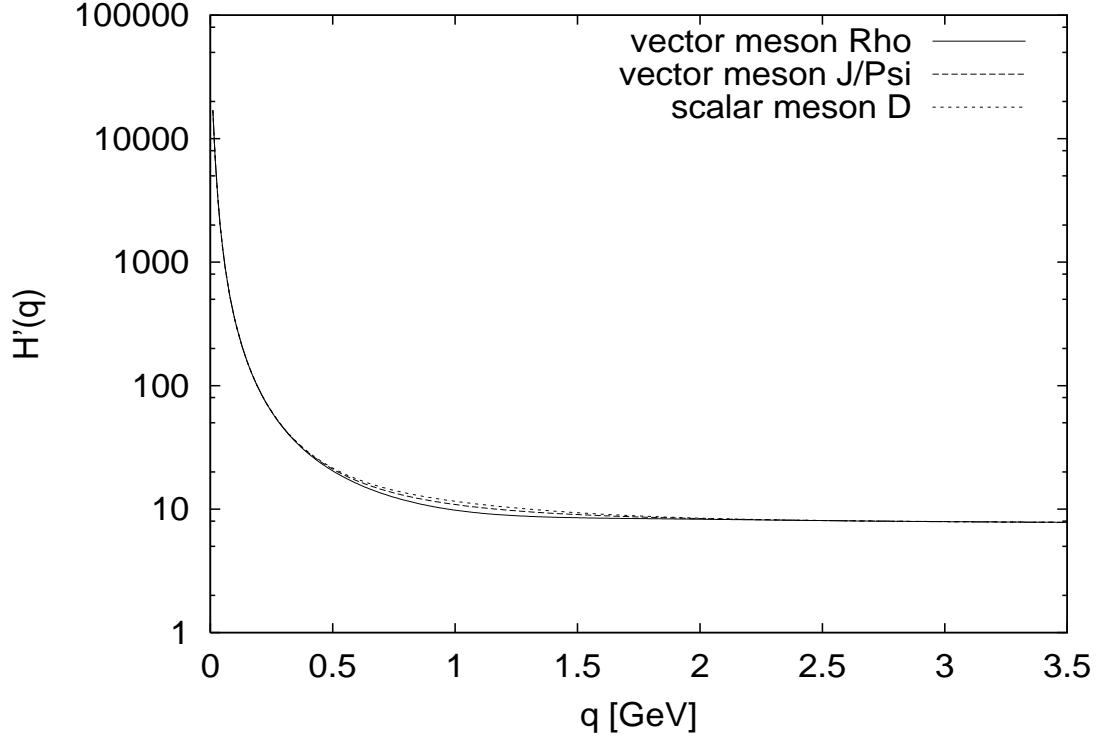


Abbildung 3.11: Der Hamiltonoperator $H'(\vec{q})$ der Quark-Antiquark-Wechselwirkung im Impulsraum für die Mesonen ρ , J/Ψ und D .

was für $\varepsilon \approx 0.01 \text{ GeV}$ das Verhalten der Wechselwirkung nur bei großen Abständen ($> 10 \text{ fm}$) modifiziert.

Das Quark-Antiquark-Potential (3.20) ist in Abb. 3.11 für verschiedene Mesonen dargestellt, wobei mit $(q^2 + \varepsilon^2)$ multipliziert wurde:

$$H'(\vec{q}) = (q^2 + \varepsilon^2) \left(\frac{4\pi\alpha_s}{q^2 + \varepsilon^2} - \frac{4\pi\alpha_s}{3m_i m_j} \vec{S}_1 \vec{S}_2 \frac{1}{\pi^{3/2}} e^{-q^2/\sigma^2} + \frac{6\pi b}{(q^2 + \varepsilon^2)^2} \right). \quad (3.22)$$

Die expliziten Übergangsmatrixelemente zwischen den einzelnen Quarks bei der Meson-Meson-Streuung wurden bereits von Barnes [35] berechnet. Zweckmäßigerweise werden dazu eingeführt:

$$\vec{p}_1 = \frac{\vec{q}_1 + \vec{q}_1'}{2}; \quad \vec{p}_2 = \frac{\vec{q}_2 + \vec{q}_2'}{2} \quad (3.23)$$

für die Impulse der beiden einlaufenden Mesonen. Als Integrationsvariable für die Übergangsmatrixelemente wird $\vec{p} \equiv \vec{p}_1$ gewählt, da $\vec{p}_2 = \pm \vec{p}_1$ ist plus eine diagrammabhängige Verschiebung, sowie der Impulsübertrag \vec{q} . Außerdem wird in den Übergangsmatrixelementen noch eine relative Masse benötigt, die den Impulsanteil der einzelnen Quarks am Gesamtimpuls des Mesons spezifiziert; sie

ist gegeben durch den Quotienten der Differenz und der Summe der Quarkmasse und der Antiquarkmasse des Mesons:

$$\lambda = \frac{m - \bar{m}}{m + \bar{m}}. \quad (3.24)$$

Damit wird

$$\frac{1}{2}(1 + \lambda) = \frac{m}{m + \bar{m}}, \quad \frac{1}{2}(1 - \lambda) = \frac{\bar{m}}{m + \bar{m}}. \quad (3.25)$$

Nun können die vier Überlappintegrale berechnet werden; sie ergeben sich zu [35]:

$$\begin{aligned} T_{fi}^{C1} &= \int \int d^3q d^3p \Phi_C^*(2\vec{p} + \vec{q} - (1 + \lambda)\vec{C}) \Phi_D^*(2\vec{p} - \vec{q} - 2\vec{A} - (1 - \lambda)\vec{C}) \\ &\quad H(\vec{q}) \Phi_A(2\vec{p} - \vec{q} - (1 + \lambda)\vec{A}) \Phi_B(2\vec{p} - \vec{q} - (1 - \lambda)\vec{A} - 2\vec{C}), \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\begin{aligned} T_{fi}^{C2} &= \int \int d^3q d^3p \Phi_C^*(-2\vec{p} + \vec{q} - (1 + \lambda)\vec{C}) \Phi_D^*(-2\vec{p} - \vec{q} - (1 - \lambda)\vec{C}) \\ &\quad H(\vec{q}) \Phi_A(-2\vec{p} + \vec{q} + (1 - \lambda)\vec{A}) \Phi_B(-2\vec{p} + \vec{q} + (1 + \lambda)\vec{A} - 2\vec{C}), \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} T_{fi}^{T1} &= \int \int d^3q d^3p \Phi_C^*(2\vec{p} + \vec{q} - (1 + \lambda)\vec{C}) \Phi_D^*(2\vec{p} - \vec{q} - 2\vec{A} - (1 - \lambda)\vec{C}) \\ &\quad H(\vec{q}) \Phi_A(2\vec{p} - \vec{q} - (1 + \lambda)\vec{A}) \Phi_B(2\vec{p} + \vec{q} - (1 - \lambda)\vec{A} - 2\vec{C}), \end{aligned} \quad (3.28)$$

$$\begin{aligned} T_{fi}^{T2} &= \int \int d^3q d^3p \Phi_C^*(-2\vec{p} + \vec{q} + 2\vec{A} - (1 + \lambda)\vec{C}) \Phi_D^*(-2\vec{p} - \vec{q} - (1 - \lambda)\vec{C}) \\ &\quad H(\vec{q}) \Phi_A(-2\vec{p} + \vec{q} + (1 - \lambda)\vec{A}) \Phi_B(-2\vec{p} - \vec{q} + (1 + \lambda)\vec{A} - 2\vec{C}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

Dabei sind (wie oben) \vec{A} und \vec{B} die Impulse der Mesonen vor der Streuung und \vec{C} und \vec{D} die Mesonenimpulse nach der Streuung.

Die einzelnen Übergangsamplituden beinhalten eine 6-dimensionale Impulsraumintegration, die numerisch ausgewertet werden muß, da die Wellenfunktionen ebenfalls nur numerisch im Impulsraum vorliegen. Die explizite Integration wird auf einem endlichen Impulsvolumen $[-2 \text{ GeV}, 2 \text{ GeV}]^3 \times [-2 \text{ GeV}, 2 \text{ GeV}]^3$ per Monte-Carlo durchgeführt, wobei im Mittel 10^8 zufällige Stützpunkte berechnet wurden (siehe Anhang B). Diese Integration liefert für die Norm der Wellenfunktionen eine Genauigkeit von 1 – 2%, so daß die Übergangsamplituden mit einer

Genauigkeit von $\pm 10\%$ bestimmt werden können. Diese Genauigkeit ist ausreichend, da die Unsicherheit in den expliziten Parametern in der Wechselwirkung (3.1) höher ist.

Kapitel 4

Dissoziationsquerschnitte für das Charmonium

Mit dem Konstituentenquark-Modell werden in diesem Kapitel die totalen Dissoziationsquerschnitte des J/Ψ -Mesons mit dem Vektormeson ρ und dem pseudoskalaren Meson π berechnet.

4.1 Kinematische Betrachtungen

Die Schwerpunktsenergie für eine Zwei-Körper-Streuung ist durch die Massen und die Impulse der miteinander wechselwirkenden Teilchen gegeben. Teilchen mit Masse m_i und Impuls \vec{p}_i haben die relativistische Energie:

$$E_i = \sqrt{m_i^2 + \vec{p}_i^2}. \quad (4.1)$$

Die Gesamtenergie der beiden Teilchen im Schwerpunktsystem wird als E_{cm} oder auch als \sqrt{s} bezeichnet:

$$E_{cm} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2} = \sqrt{s}. \quad (4.2)$$

Ist die Energie \sqrt{s} größer als die Summe der Massen zweier möglicher Endprodukte der Streuung:

$$\sqrt{s_0} = m_3 + m_4, \quad (4.3)$$

oder anders ausgedrückt, ist die Energie \sqrt{s} oberhalb der Schwelle für die Reaktionsprodukte mit den Massen m_3 und m_4 ,

$$\sqrt{s} - \sqrt{s_0} > 0, \quad (4.4)$$

so ist eine Streuung mit den Endprodukten der Massen m_3 und m_4 möglich. In der Arbeit werden Streureaktionen zwischen den Mesonen J/Ψ und ρ sowie

Reaktionsprodukte	$\sqrt{s_0}$ [GeV] für D^\pm bzw. $D^{*\pm}$
$(D\bar{D})$	3.7386
$(D\bar{D}^*)$	3.8793
$(D^*\bar{D}^*)$	4.0200

Tabelle 4.1: Reaktionsprodukte bei der Dissoziation des Charmoniums

zwischen J/Ψ und π in dem Energieintervall $3.5 \text{ GeV} \leq \sqrt{s} \leq 5 \text{ GeV}$ untersucht. Zunächst werden aus der vorgegebenen Schwerpunktsenergie \sqrt{s} die Impulse der einlaufenden Mesonen berechnet. Da im Schwerpunktsystem die Impulse der einlaufenden Teilchen entgegengesetzt sind:

$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2, \quad (4.5)$$

ergibt sich nach Umformung des Ausdrucks für die Schwerpunktsenergie gerade Gleichung (3.15). Für die Impulse der Teilchen im Ausgangssystem gilt dann (3.16).

Um den interessierenden dynamischen Bereich von Relativenergien abzuschätzen, soll zunächst die Verteilung in der Energie \sqrt{s} von Stößen zwischen J/Ψ - Mesonen mit ρ - und π -Mesonen in einem „Feuerball“ der Temperatur $150 - 200 \text{ MeV}$ betrachtet werden. Ein solches Feuerball-Modell wird von vielen Physikern als leitende Idee zur Charakterisierung von Schwerionenstößen am CERN angesehen. Unter Berücksichtigung von (4.2) kann dann die differentielle Verteilung in der Stoßenergie $dN/d\sqrt{s}$ berechnet werden als Integral über die Bose-Verteilungsfunktionen der stoßenden Mesonen:

$$\frac{dN}{d\sqrt{s}} \sim \frac{1}{(2\pi)^6} \int d^3p_1 \int d^3p_2 \frac{1}{e^{\varepsilon_1/T} - 1} \frac{1}{e^{\varepsilon_2/T} - 1}. \quad (4.6)$$

Die numerischen Ergebnisse - im Rahmen der Monte-Carlo Integration - sind in Abb. 4.1 bis 4.4 in linearer und in logarithmischer Auftragung für die Streuung von J/Ψ - mit ρ - und π -Mesonen gezeigt, wobei die Temperatur des Feuerballs von $150 - 200 \text{ MeV}$ verändert wurde.

Die erlaubten Ausgangskanäle bei den Streuungen zwischen J/Ψ und ρ bzw. zwischen J/Ψ und π bei kleinen Energien oberhalb der Schwelle sind die $(D\bar{D})$, $(D\bar{D}^*)$, $(\bar{D}D^*)$ und $(D^*\bar{D}^*)$ Paare (siehe Tabelle 4.1).

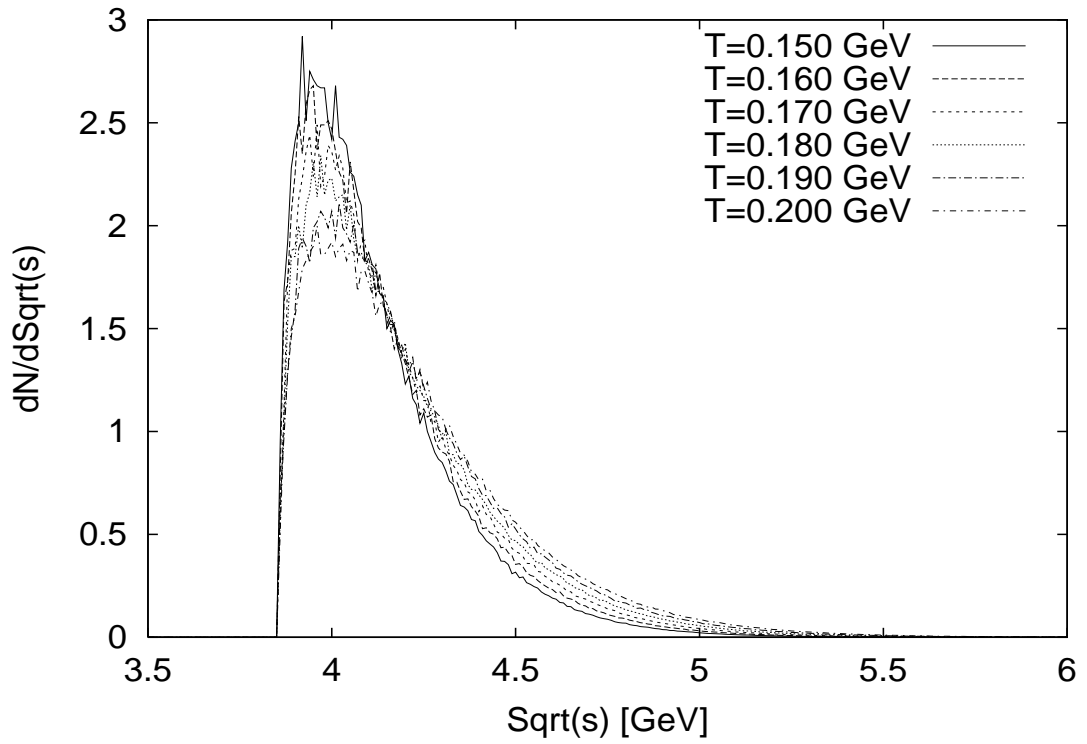


Abbildung 4.1: Differentielle Verteilung der Streuenergie \sqrt{s} für die Streuung von J/Ψ und ρ in einem Feuerball für Temperaturen zwischen 0.150 GeV und 0.200 GeV .

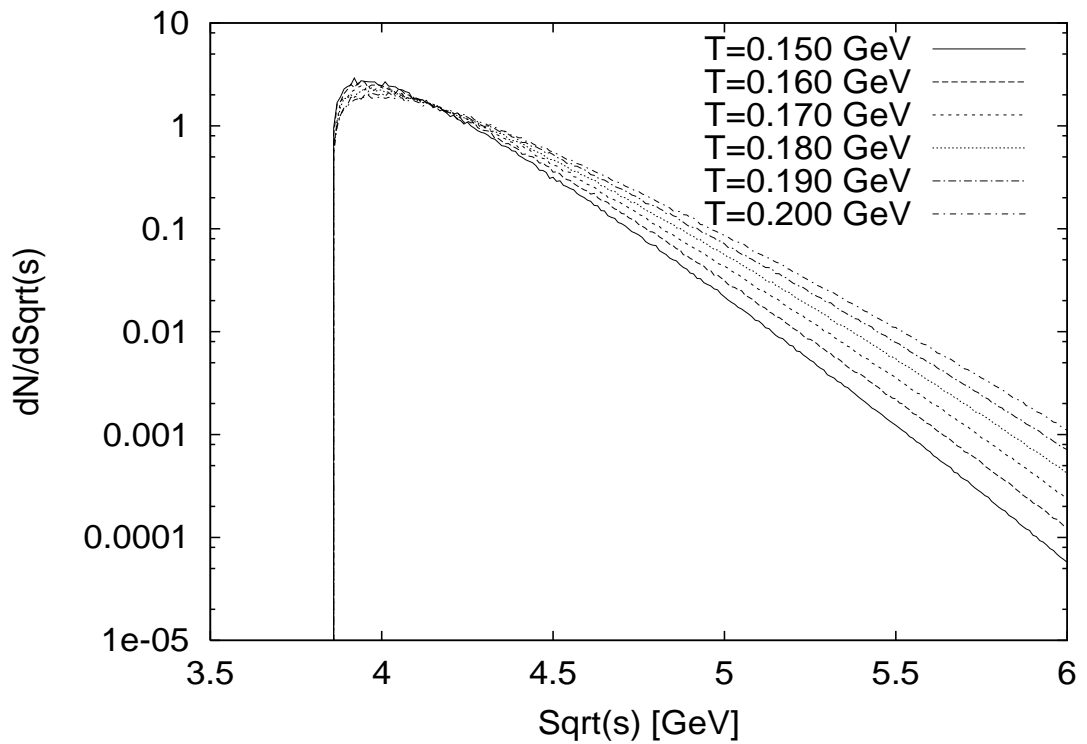


Abbildung 4.2: Wie Abb. 4.1, jedoch in logarithmischer Darstellung.

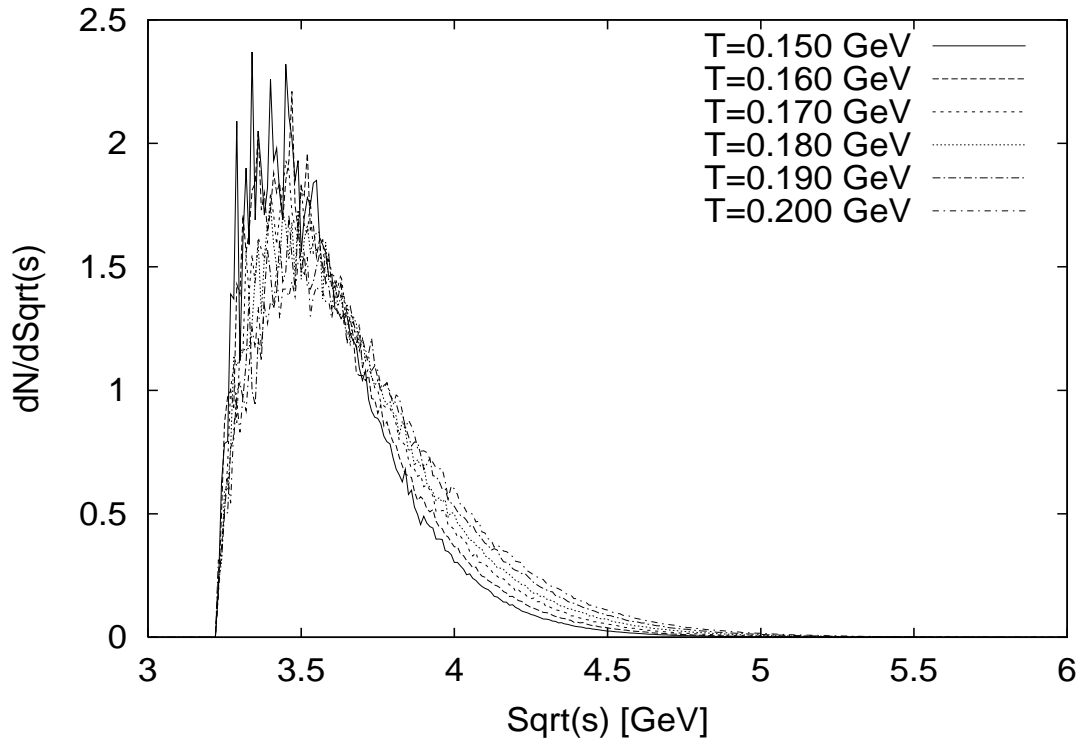


Abbildung 4.3: Differentielle Verteilung der Streuenergie \sqrt{s} für die Streuung von J/Ψ und π in einem Feuerball für Temperaturen zwischen 0.150 GeV und 0.200 GeV .

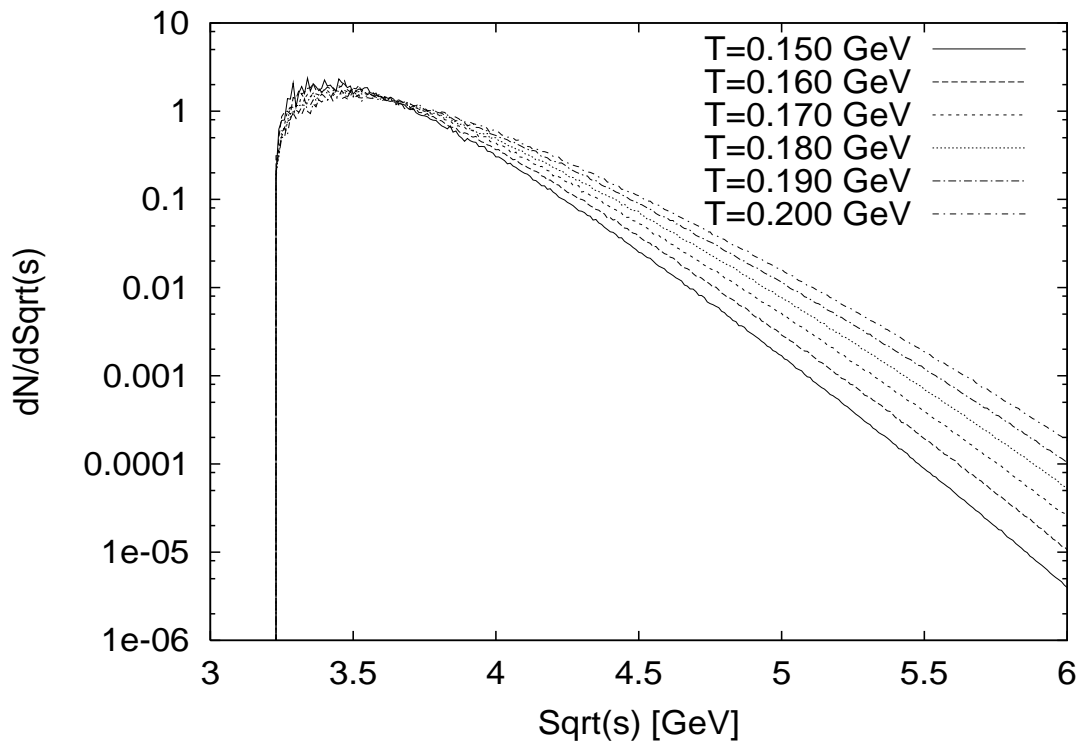


Abbildung 4.4: Wie Abb. 4.3, jedoch in logarithmischer Darstellung.

In den Abbildungen 4.1, 4.2, 4.3 und 4.4 wird die Energieverteilung der Meson-Meson-Stöße im thermischen Gleichgewicht von zwei Mesonen mit Massen m_1 und m_2 gezeigt. Die Verteilung (4.6) beschreibt, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, zwei Mesonen zu finden, die bei gegebener Temperatur T bei einem Stoß eine bestimmte Schwerpunktsenergie \sqrt{s} besitzen. Aus Abb. 4.1 geht hervor, daß bei der Streuung von $J/\Psi + \rho$ Wahrscheinlichkeiten verschieden von Null erst für Schwerpunktsenergien auftreten, die oberhalb der Schwellenenergie liegen, die zur Erzeugung von zwei pseudoskalaren D -Mesonen in Ruhe benötigt wird (3.7386 GeV). Die Schwelle für die Erzeugung von D, D^* -Paaren ist knapp oberhalb von $\sqrt{s} = m_\rho + m_{J/\Psi}$, während die Schwelle für zwei Vektormesonen D^* bei 4.02 GeV liegt.

Die Temperatur ist für die explizite Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung verantwortlich. Bei der niedrigsten gewählten Temperatur von 0.15 GeV sind die Maxima der Wahrscheinlichkeitsverteilung am höchsten, die Verteilungsfunktion fällt aber bei dieser Temperatur auch am steilsten bei höheren Energien ab. Dies bedeutet, daß höherenergetische Zustände noch nicht besetzt bzw. angeregt sind. Für höhere Temperaturen hat die Wahrscheinlichkeitsverteilung zwar immer noch ihr Maximum im Bereich von etwa 4 GeV , das Maximum ist aber leicht zu höheren Schwerpunktsenergien verschoben und es ist auch etwas niedriger. Dafür fällt die Verteilungsfunktion nicht mehr so steil mit der Energie ab, und auch Zustände mit höheren Schwerpunktsenergien erhalten nun eine höhere Besetzungswahrscheinlichkeit. Dies ist besonders in der logarithmischen Darstellung in Abb. 4.2 und ebenso in der logarithmischen Darstellung in Abb. 4.4 für die Reaktion $J/\Psi + \pi$ gut zu sehen.

Bei der Verteilungsfunktion des Stoßes zwischen einem J/Ψ -Meson und einem π -Meson tritt das Maximum der Verteilungsfunktion bei niedrigeren Energien auf. Die Schwellenenergien aller drei bei der Streuung in Frage kommenden D -Meson-Paare sind höher als die Energie, bei der die Verteilungsfunktion ihr Maximum annimmt. Der Grund dafür ist, daß sich die Schwerpunktsenergie im Vergleich zur $J/\Psi + \rho$ -Streuung durch das leichtere π -Meson verringert und deshalb auch Stöße mit geringerer Energie zur Verteilungsfunktion beitragen. Für die Reaktion $J/\Psi + \rho$ liegt das Maximum der Verteilungsfunktion bei etwa 4 GeV ; für die Reaktion $J/\Psi + \pi$ dagegen liegt das Maximum ungefähr bei 3.4 GeV . Diese Differenz entspricht gerade der Massendifferenz zwischen dem ρ - und dem π -Meson:

$$m_\rho - m_\pi = 0.77 \text{ GeV} - 0.14 \text{ GeV} = 0.63 \text{ GeV}. \quad (4.7)$$

Diese Energiedifferenz zwischen den beiden Mesonen, die ja den gleichen Quarkinhalt besitzen, ist durch die Spin-Spin-Hyperfeinwechselwirkung gegeben, denn das ρ ist ein Vektormeson mit parallelen Spins und das π ist ein pseudoskalares Meson mit antiparallelen Spins.

4.2 Totale Wirkungsquerschnitte

Die totalen Wirkungsquerschnitte für J/Ψ -Reaktionen mit ρ - und π -Mesonen werden berechnet, indem über die vier Born'schen Streudiagramme (3.26) bis (3.29) summiert und schließlich das Betragsquadrat über den Raumwinkel integriert wird:

$$\sigma = \frac{4\pi^2\mu^2}{\hbar^4} \int d\Omega |(T_{fi}^{C1} + T_{fi}^{C2} + T_{fi}^{T1} + T_{fi}^{T2})|^2. \quad (4.8)$$

Abb. 4.5 zeigt den berechneten totalen Wirkungsquerschnitt der Streureaktion $J/\Psi + \rho$ und Abb. 4.6 zeigt den entsprechenden totalen Wirkungsquerschnitt der Dissoziation des J/Ψ - durch das π -Meson. In beiden Streureaktionen ist zu sehen, daß der Wirkungsquerschnitt für die Endprodukte $D\bar{D}$, die die niedrigste Schwellenenergie besitzen, am größten ist. Den geringsten Wirkungsquerschnitt haben die Endprodukte $D^*\bar{D}^*$, die die höchste Schwellenenergie haben. Dieses Phänomen kann wie folgt begründet werden: Bei geringen Relativimpulsen, d.h. bei einer niedrigen Schwerpunktsenergie zwischen zwei Stoßpartnern, ist der Überlapp der Wellenfunktionen der beiden streuenden Mesonen im Impulsraum viel größer als bei hohen Relativimpulsen. Ist der Überlapp der Wellenfunktionen groß, so ist eine Wechselwirkung zwischen den beiden streuenden Teilchen sehr wahrscheinlich und es kann in den in dieser Arbeit betrachteten Reaktionen ein Quark austausch stattfinden, bei dem sich zwei neue Endmesonen bilden. Der Wirkungsquerschnitt für die Erzeugung eines $D^*\bar{D}^*$ -Paares ist gering, weil hier größere Schwerpunktsenergien und damit weit höhere Relativimpulse erforderlich sind.

Die gleiche Erklärung kann auch für die Beschreibung des exponentiellen Abfalls der Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes von der Schwerpunktsenergie für ein bestimmtes Reaktionsprodukt gegeben werden. Der maximale Wirkungsquerschnitt ist immer bei der niedrigsten Schwerpunktsenergie zu finden. Dort ist dann der Relativimpuls am geringsten und der Überlapp der Wellenfunktionen maximal; es werden also bei den Quark austauschreaktionen die geringst-möglichen Schwerpunktsenergien bevorzugt.

Multipliziert man die Abhängigkeit des totalen Meson-Meson-Wirkungsquerschnittes von der Schwerpunktsenergie mit der Verteilungsfunktion der Mesonenenergien im thermischen Gleichgewicht, dann erhält man eine Verteilung für die Produktionsraten der Endprodukte der Meson-Meson-Streuung im Rahmen des Feuerballmodells. Diese Größen sollen hier jedoch nicht weiter betrachtet werden, da transporttheoretische Simulationen wie in Ref. [25] unter Verwendung der hier berechneten Wirkungsquerschnitte wesentlich aufschlußreicher sind und direkt mit experimentellen Resultaten verglichen werden können. Solche Rechnungen überschreiten den Rahmen dieser Arbeit deutlich.

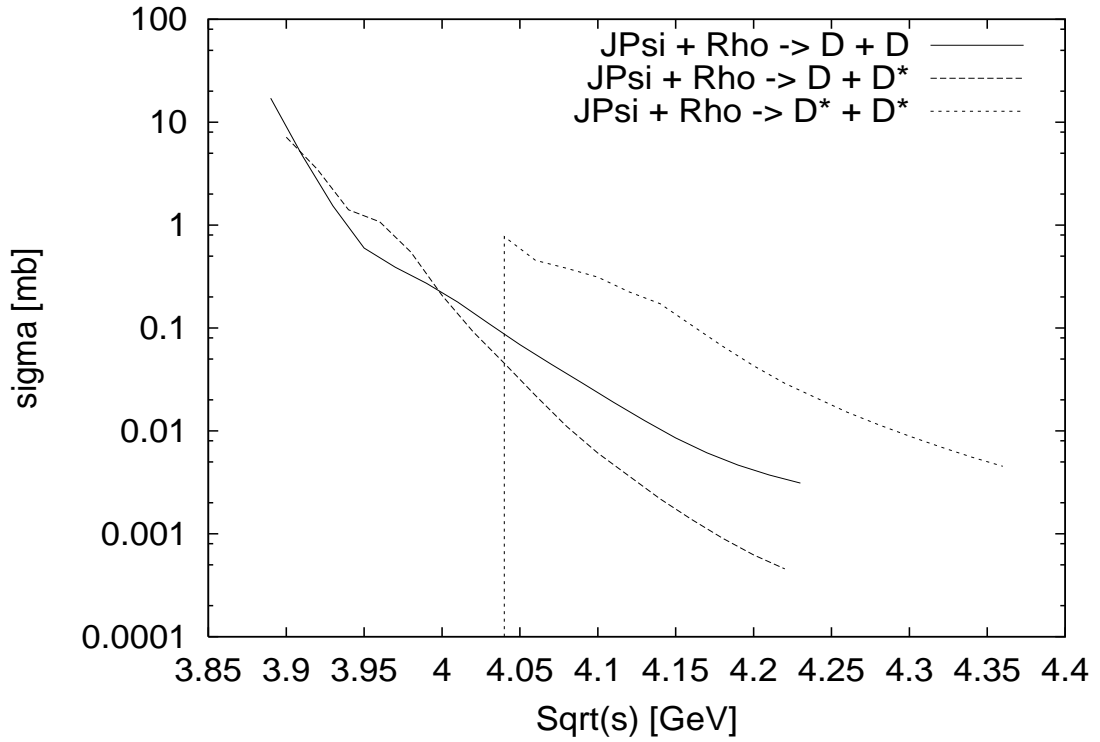


Abbildung 4.5: Totaler Wirkungsquerschnitt σ für die Reaktion $J/\Psi + \rho$ in Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie. Es werden drei Ausgangskanäle gezeigt: a) die Streuung von $J/\Psi + \rho$ in zwei skalare D -Mesonen, b) in ein skalares D -Meson und in ein Vektor- D^* -Meson und c) die Streuung von $J/\Psi + \rho$ in zwei D^* -Vektormesonen.

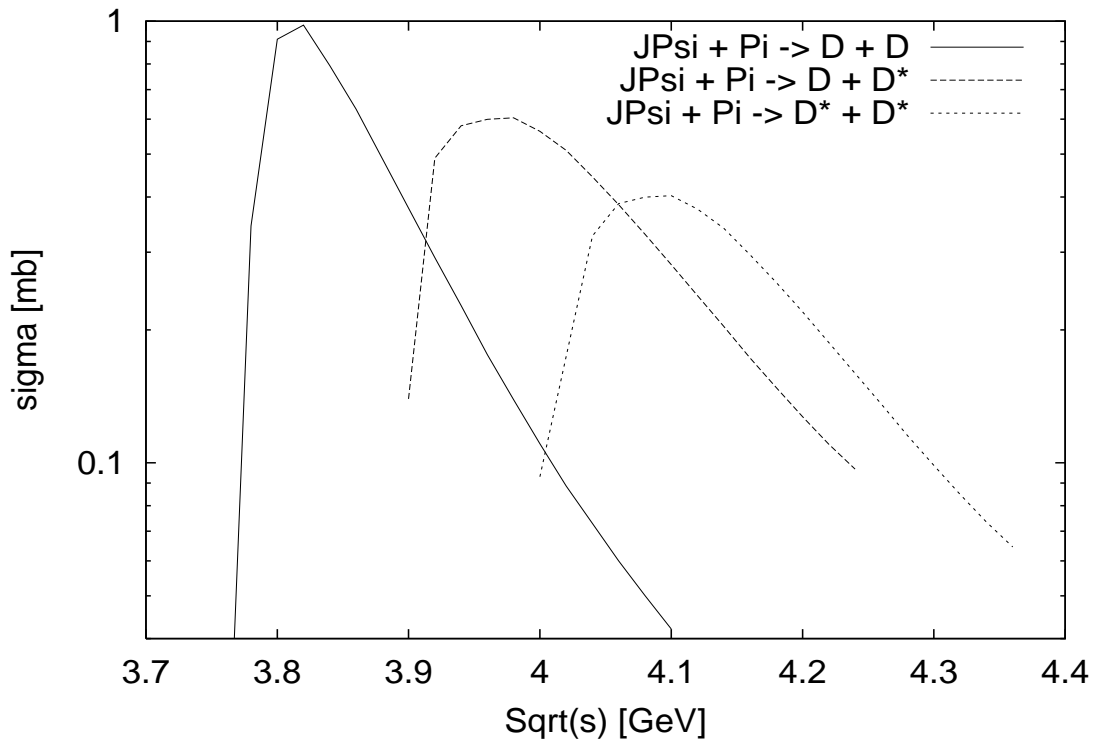


Abbildung 4.6: Totaler Wirkungsquerschnitt σ für die Reaktion $J/\Psi + \pi$ in die Ausgangskanäle mit zwei D -Mesonen, in einen gemischten Kanal mit einem D - und einem D^* -Meson und in einen Kanal mit zwei D^* -Mesonen.

4.3 Vergleich der berechneten Wirkungsquerschnitte mit den Rechnungen von Wong und Barnes

Der in dieser Arbeit verwendete nichtrelativistische Hamiltonoperator für die Quark-Antiquark-Wechselwirkung ist bis auf einen Faktor in der Spin-Spin-Wechselwirkung einer Veröffentlichung von Wong [32] entnommen. Weiter wurden in [32] Wirkungsquerschnitte für die π und ρ induzierte Dissoziation von J/Ψ und dem angeregten Zustand des Charmoniums Ψ' bei kleinen Schwerpunktsenergien, unter Verwendung von Gaußfunktionen für die Wellenfunktionen der Mesonen, weitgehend analytisch berechnet. Deshalb sollen die in der vorliegenden Arbeit berechneten Wirkungsquerschnitte mit denen aus [32] verglichen werden.

Ausgangspunkt in [32] ist fast der gleiche nichtrelativistische Hamiltonoperator für die Quark-Antiquark-Wechselwirkung wie in der vorliegenden Arbeit. Die Modell-Parameter im Hamiltonoperator, die Wong für seine Berechnungen verwendete, unterscheiden sich etwas im Vergleich zu den in dieser Arbeit verwendeten Parametern. Auch sind die Konstituentenquarkmassen etwas höher gewählt als in der vorliegenden Arbeit. Die Meson-Meson-Streuung wurde in [32] auch mit dem Konstituentenquark austausch-Modell und den sich daraus ergebenden vier Born'schen Streuprozessen aus [35] berechnet. Für den totalen Wirkungsquerschnitt der Streuung von J/Ψ mit π berechnete Wong die Endzustände ($D\bar{D}^*$) sowie ($D^*\bar{D}$). Für den Dissoziationsprozess von $J/\Psi + \pi \rightarrow D\bar{D}^*$ erhielt Wong einen maximalen totalen Wirkungsquerschnitt nahe der Schwelle für ($D\bar{D}^*$) von etwa 0.6 mb . Der berechnete totale Wirkungsquerschnitt in der vorliegenden Arbeit beträgt für die Reaktion $J/\Psi + \pi \rightarrow D\bar{D}^*$ im Maximum auch 0.6 mb . Für den Wirkungsquerschnitt von $J/\Psi + \pi \rightarrow D^*\bar{D}$ erhielt Wong den Maximalwert von 0.2 mb ; in dieser Arbeit wurde der maximale Wert des totalen Wirkungsquerschnittes für diese Reaktion zu 0.4 mb berechnet, was sicherlich auf die unterschiedlichen Wellenfunktionen zurückzuführen ist.

Bei der Berechnung des totalen Wirkungsquerschnittes für die Dissoziation des J/Ψ -Mesons mit einem ρ -Meson fand Wong für den Maximalwert des totalen Wirkungsquerschnittes der Reaktion $J/\Psi + \rho \rightarrow D\bar{D}$ einen Wert von etwa 26 mb in unmittelbarer Nähe der Schwelle; in der vorliegenden Arbeit wurde ein Wert von 17 mb bei leicht höherer Energie berechnet. Der maximale totale Wirkungsquerschnitt der Reaktion $J/\Psi + \rho \rightarrow D\bar{D}^*$ liegt bei Wong im Bereich von 5 mb und in dieser Arbeit bei 7 mb . Für die Dissoziation des J/Ψ -Mesons durch das ρ -Meson in zwei Vektormesonen D^* fand Wong ein σ_{max} von etwa 0.2 mb , während in dieser Arbeit ein Wert von 0.7 mb ermittelt wurde.

Die Unterschiede in den berechneten totalen Wirkungsquerschnitten sind damit zu begründen, daß in den Rechnungen von Wong, im Vergleich zu der vorliegenden Arbeit, unterschiedliche Sätze von Parametern für das Quark-Antiquark-Potential und unterschiedliche Werte für die Konstituentenquarkmassen verwen-

det wurden. Ferner wurde in dem in dieser Arbeit verwendeten Hamiltonoperator ein anderer Vorfaktor für die Spin-Spin-Hyperfeinwechselwirkung gewählt, um die Spin-Spin-Hyperfeinaufspaltung zwischen pseudoskalaren D -Mesonen und Vektor D^* -Mesonen korrekt zu beschreiben. Darüber hinaus ist die explizite numerische Berechnung der Wellenfunktionen in dieser Arbeit sicherlich genauer als die Approximation mit Gaußfunktionen bei Wong; allerdings ist im Rahmen der Monte-Carlo-Berechnung der Übergangsamplituden ein nicht unerheblicher statistischer Fehler (bei vernünftigen Rechenzeiten) in Kauf zu nehmen, so daß nicht entschieden werden kann, welche Ergebnisse als 'besser' zu betrachten sind. Hervorzuheben ist jedoch, daß beide Modelle (trotz differierender Parameter) auf unterschiedlichen Rechenwegen zu vergleichbaren Resultaten für die J/Ψ Dissoziationsquerschnitte kommen.

4.4 Interpretation der Ergebnisse

Das vorgestellte Modell zeigt für die Dissoziation von J/Ψ an π -Mesonen nur Querschnitte unterhalb von 1 mb (Abb. 4.6); zudem hat die differentielle Verteilung in der Schwerpunktsenergie ihr Maximum unterhalb der Schwelle für die Erzeugung von D -Mesonen Paaren (Abb. 4.3). Es kann daher davon ausgegangen werden, daß in den Schwerionenstößen am CERN [4, 37] die Dissoziation von J/Ψ -Mesonen mit Pionen nicht von sonderlicher Bedeutung ist. Andererseits sind die Querschnitte von J/Ψ mit ρ -Mesonen an der Schwelle sogar oberhalb von 10 mb , so daß die Dissoziation von J/Ψ mit ρ bei kleinen Relativenergien sehr wahrscheinlich ist. In anderen Worten: Wenn sich ein J/Ψ - und ρ -Meson mit nahezu gleichen Impulsen \vec{p}_1 und \vec{p}_2 , d.h. $\vec{p}_1 - \vec{p}_2 \approx 0$, bewegen, ist die Wahrscheinlichkeit für einen Austausch der Quarks sehr hoch, d.h. das J/Ψ -Meson wird dissoziiert. Aufgrund dieser hohen Reaktionsquerschnitte kann gegenwärtig nicht mit hinreichender Sicherheit geschlossen werden, daß die relative Unterdrückung des J/Ψ -Mesons in zentralen Stößen von $Pb + Pb$ bei $160A \cdot GeV$ am CERN als ein Signal für die Bildung eines Quark-Gluon-Plasmas betrachtet werden kann.

Kapitel 5

Zusammenfassung

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde die Meson-Meson-Streuung mit Hilfe eines nichtrelativistischen Quark-Austauschmodells untersucht. Insbesondere wurde die Dissoziation des J/Ψ -Mesons mit leichteren Mesonen berechnet, da diese Querschnitte von zentraler Bedeutung für die Interpretation der Experimente am CERN in $Pb + Pb$ Reaktionen sind. Ein kleiner Wirkungsquerschnitt des J/Ψ -Mesons mit anderen Mesonen ist bei einer Schwerionenkollision ein Hinweis darauf, daß sich während des Stoßes in der frühen Phase ein Quark-Gluon-Plasma ausgebildet hat.

Grundlegend für die vorgenommenen Berechnungen sind die speziellen Eigenschaften von Quarks und Gluonen, wie z.B. die Quantenzahl Farbe in der QCD und das Phänomen der impulsabhängigen Kopplungskonstante $\alpha_s(Q^2)$. Zunächst erfolgte eine Betrachtung verschiedener Quark-Potential-Modelle sowie der Lagrangefunktion der QED und deren Erweiterung auf die QCD. Anschließend wurde das Verhalten von Quarks und Gluonen bei hohen Temperaturen und Dichten beschrieben und die herausragende Bedeutung der J/Ψ -Dissoziation im Quark-Gluon-Plasma dargestellt.

Darüber hinaus wurde das nichtrelativistische Quark-Potential-Modell mit einer Erweiterung für die Spin-Spin-Wechselwirkung vorgestellt. Dieses Modell geht auf die Arbeiten von Barnes und Wong [35, 32, 36] zurück. Mit diesem nichtrelativistischen Quark-Potential-Modell wurden zunächst die Eigenfunktionen einer Reihe von Mesonen im Ortsraum berechnet. Die verwendeten Mesonen haben alle eine genügend hohe Masse, um nichtrelativistisch beschrieben werden zu können. Um die Meson-Meson-Streuung im Impulsraum berechnen zu können, wurden alle Eigenfunktionen und das Quark-Antiquark-Potential in den Impulsraum transformiert.

Der Meson-Meson-Streumechanismus wird mit dem Konstituentenquark-Austauschmodell beschrieben. Die dabei auftretenden vier Born'schen Streuprozesse wurden mit Hilfe der Monte-Carlo-Integration berechnet, wobei in die Übergangsmatrixelemente die Wellenfunktionen der ein- und auslaufenden Mesonen sowie

der Quark-Antiquark-Hamiltonoperator im Impulsraum eingehen.

Die totalen Dissoziationsquerschnitte für das Charmonium wurden mit den leichteren Mesonen ρ und π berechnet. Es stellte sich heraus, daß die Wirkungsquerschnitte zwischen J/Ψ und π sehr klein sind (unter 1 mb) und somit näherungsweise zu vernachlässigen sind. Die Dissoziationsquerschnitte von J/Ψ mit ρ -Mesonen besitzen dagegen an der Schwelle einen totalen Wirkungsquerschnitt von über 10 mb . Deshalb ist eine Dissoziation des J/Ψ -Mesons mit einem ρ -Meson bei kleinen Relativimpulsen sehr wahrscheinlich.

Zur Illustration der Bedeutung der berechneten Querschnitte wurde die differentielle Verteilung in der Streuenergie \sqrt{s} für die Dissoziation von J/Ψ mit ρ und π in einem Feuerball für Temperaturen zwischen 0.150 GeV und 0.200 GeV berechnet. Das Feuerball-Modell dient hierbei zur angenäherten Beschreibung der Endphase einer Schwerionenkollision und deren charakteristischen Energien und Temperaturen, die am CERN in zentralen Stößen von $Pb + Pb$ bei $160A \cdot \text{GeV}$ erreicht werden können [8]. Aufgrund der hohen Reaktionsquerschnitte des J/Ψ -Mesons speziell mit ρ -Mesonen kann gegenwärtig nicht mit hinreichender Sicherheit geschlossen werden, daß die relative Unterdrückung des J/Ψ -Mesons, die in zentralen Stößen von $Pb + Pb$ bei $160A \cdot \text{GeV}$ am CERN von der NA50 Kollaboration gemessen wurde [4, 37], als ein Signal für die Bildung eines Quark-Gluon-Plasmas betrachtet werden kann.

Seit Sommer 2000 werden am Beschleuniger RHIC in Brookhaven $Au + Au$ -Schwerionenstöße mit Schwerpunktsenergien von 130 GeV/Nukleon durchgeführt. Bei der Reaktion dieser schweren Ionen entsteht eine große Wolke aus einigen 10^3 Mesonen [38]. Die Mesonen innerhalb dieser Wolke und insbesondere die bei diesen hohen Energien erzeugten D - und noch schwereren B -Mesonen können gut mit dem nichtrelativistischen Quark-Potential Modell beschrieben werden. Mit Hilfe des in der Arbeit verwendeten Quark-Austauschmodells wäre es weiterhin möglich, nahezu für alle bei diesen Experimenten auftretenden Meson-Meson-Streuungen die Produktionsraten und Streuprodukte bei kleinen Relativenergien zu berechnen und mit den experimentellen Daten (in Form von relativistischen Transportrechnungen) zu vergleichen.

Anhang A

Die Gell-Mann-Matrizen der SU(3)-Symmetriegruppe

Die Symmetriegruppe der Quantenchromodynamik ist die SU(3)-Gruppe. Ihre unitären Transformationen wirken auf die Farbzustände der Quarks (2.15). Eine unitäre Transformation im dreidimensionalen Farbraum hat die Gestalt

$$U = \exp\left(i \sum_j \frac{\alpha_j \lambda_j}{2}\right);$$

α_j sind reelle Koeffizienten. Wegen der Unitarität von U müssen die λ_j , die Basismatrizen der SU(3)-Symmetriegruppe oder auch Gell-Mann-Matrizen, hermitesch sein. Es gibt 8 linear unabhängige Gell-Mann-Matrizen, die alle spurlos sind:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_2 &= \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_4 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_5 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_6 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ \lambda_7 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, & \lambda_8 &= \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Sie erfüllen die folgenden Vertauschungsrelationen:

$$[\lambda_j, \lambda_k] = 2if_{jkl}\lambda_l$$

mit den total antisymmetrischen Strukturkonstanten f_{jkl} , die folgende Werte annehmen können:

$$\begin{aligned} f_{123} &= 1, \\ f_{147} = f_{246} = f_{257} = f_{345} = f_{516} = f_{637} &= \frac{1}{2}, \\ f_{458} = f_{678} &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Anhang B

Vergleich der Monte-Carlo-Integration mit analytischen Resultaten von Streuamplituden

Für die Streuung zweier gleicher Mesonen in dem Konstituenten-Austauschmodell wurden in [35] analytische Formeln für die T-Übergangsmatrixelemente mit Gauß-Wellenfunktionen gegeben, die jeweils nach den drei Wechselwirkungsanteilen im Quark-Quark-Wechselwirkungshamiltonoperator aufgespalten sind. Für die Spin-Spin-Wechselwirkung sind die analytischen Übergangsmatrixelemente nach [35]:

$$\begin{aligned} T_{fi, Spin}^{(C1)} &= (-1) \cdot (1) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) \left[-\frac{2^6 \pi \alpha_s}{3^{5/2} m \bar{m}} \exp\left\{-\frac{\Pi^2}{12\beta^2}\right\}\right], \\ T_{fi, Spin}^{(C2)} &= T_{fi, Spin}^{(C1)}, \\ T_{fi, Spin}^{(T1)} &= (-1) \cdot (1) \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \left[-\frac{2^3 \pi \alpha_s}{3m^2} \exp\left\{-\frac{(1-\lambda)^2}{8\beta^2} (\vec{A} + \vec{C})^2\right\}\right], \\ T_{fi, Spin}^{(T2)} &= (-1) \cdot (1) \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) \left[-\frac{2^3 \pi \alpha_s}{3\bar{m}^2} \exp\left\{-\frac{(1+\lambda)^2}{8\beta^2} (\vec{A} - \vec{C})^2\right\}\right], \end{aligned}$$

wobei β die Breite der Wellenfunktion im Impulsraum beschreibt.

Für den Farb-Coulomb-Term sind folgende analytische Ausdrücke gegeben:

$$\begin{aligned}
T_{fi, Farb}^{(C1)} &= (-1) \cdot (1) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{2^3 \pi \alpha_s}{3^{1/2} \beta^2} F_1^1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\Pi^2}{24\beta^2}\right) \exp\left\{-\frac{\Pi^2}{8\beta^2}\right\}\right], \\
T_{fi, Farb}^{(C2)} &= T_{fi, Farb}^{(C1)}, \\
T_{fi, Farb}^{(T1)} &= (-1) \cdot (1) \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{2^2 \pi \alpha_s}{\beta^2} F_1^1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{(1+\lambda)^2}{8\beta^2} (\vec{A} - \vec{C})^2\right) \exp\left\{-\frac{\Pi^2}{8\beta^2}\right\}\right], \\
T_{fi, Farb}^{(T2)} &= (-1) \cdot (1) \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left[\frac{2^2 \pi \alpha_s}{\beta^2} F_1^1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{(1-\lambda)^2}{8\beta^2} (\vec{A} + \vec{C})^2\right) \exp\left\{-\frac{\Pi^2}{8\beta^2}\right\}\right].
\end{aligned}$$

Die Übergangsmatrixelemente für den linearen Confinement-Term haben die Form:

$$\begin{aligned}
T_{fi, Conf}^{(C1)} &= (-1) \cdot (1) \cdot \left(-\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left[-\frac{3^{3/2} \pi b}{\beta^4} F_1^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{\Pi^2}{24\beta^2}\right) \exp\left\{-\frac{\Pi^2}{8\beta^2}\right\}\right], \\
T_{fi, Conf}^{(C2)} &= T_{fi, Conf}^{(C1)}, \\
T_{fi, Conf}^{(T1)} &= (-1) \cdot (1) \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left[-\frac{6\pi b}{\beta^4} F_1^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{(1+\lambda)^2}{8\beta^2} (\vec{A} - \vec{C})^2\right) \exp\left\{-\frac{\Pi^2}{8\beta^2}\right\}\right], \\
T_{fi, Conf}^{(T2)} &= (-1) \cdot (1) \cdot \left(\frac{4}{9}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \left[-\frac{6\pi b}{\beta^4} F_1^1\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{(1-\lambda)^2}{8\beta^2} (\vec{A} + \vec{C})^2\right) \exp\left\{-\frac{\Pi^2}{8\beta^2}\right\}\right].
\end{aligned}$$

In den obigen Ausdrücken für die Übergangsmatrixelemente ist

$$\Pi^2 = (1 - \lambda)^2 (\vec{A} + \vec{C})^2 + (1 + \lambda)^2 (\vec{A} - \vec{C})^2 \quad (\text{B.1})$$

als Abkürzung für den quadratischen Überlapp-Impuls in den Gauß-Funktionen eingeführt worden. \vec{A} und \vec{C} sind die Impulse der Mesonen A und C und λ ist in (3.24) gegeben.

Die Funktion $F_1^1(a, c, x)$ ist die konfluente hypergeometrische Funktion; sie ergibt sich aus der Lösung der Kummer'schen Differentialgleichung. Mit Hilfe der Reihenentwicklung dieser Funktion wurden die Funktionswerte berechnet:

$$F_1^1(a, c, x) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r}{(c)_r r!} x^r, \quad (\text{B.2})$$

wobei $(a)_r$ und $(c)_r$ wie folgt definiert sind:

$$(a)_r = a(a+1)(a+2)\dots(a+r-1); \quad (a)_0 = 1, \quad (\text{B.3})$$

$$(c)_r = c(c+1)(c+2)\dots(c+r-1); \quad (c)_0 = 1. \quad (\text{B.4})$$

Um die Genauigkeit der Monte-Carlo-Integration zu prüfen, wurden die Ergebnisse der Übergangsmatrixelemente mit denen der Monte-Carlo-Integration verglichen.

In Abb. B.1 und B.2 werden für verschiedene Anzahl von Monte-Carlo-Stützpunkten

die numerisch berechneten Übergangsamplituden mit den analytischen Resultaten zur Farb-, Coulomb- und Spin-Spin-Wechselwirkung verglichen und als Funktion des Streuwinkels ϑ dargestellt. Es zeigt sich, daß 10^7 Stützpunkte in beiden Fällen nicht ausreichen sind, eine zufriedenstellende Näherung jedoch 10^9 Stützpunkte erfordert. Als Kompromiß wurden für alle Systeme und Energien 10^8 Stützpunkte verwendet, was eine Genauigkeit für den über ϑ integrierten Wirkungsquerschnitt von 10% und besser bedeutet. Andererseits hätte die Gesamtrechnenzeit einen „vernünftigen“ Rechneinsatz weitestgehend gesprengt.

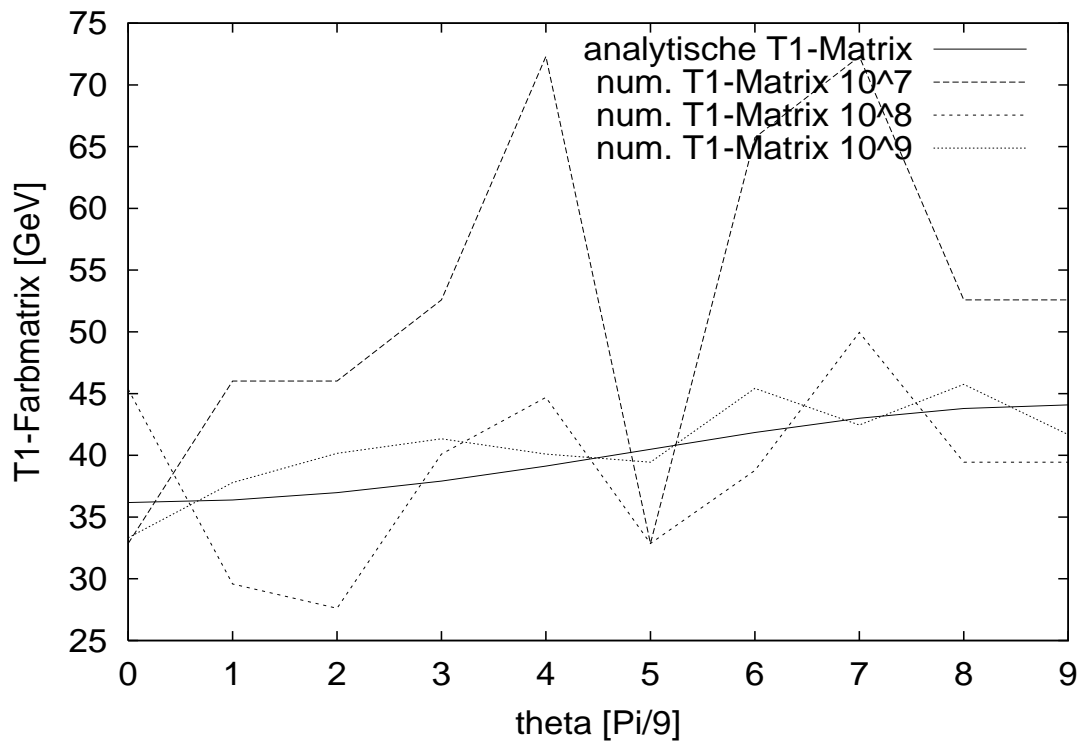


Abbildung B.1: Das $T1$ -Farb-Übergangsmatrixelement als Funktion des Streuwinkels ϑ : Vergleich zwischen analytischen (durchgezogene Linie) und numerischen Rechnungen. Die Monte-Carlo-Integrationen wurden jeweils mit 10^7 , 10^8 und 10^9 Integrationsschritten durchgeführt. Die Vorfaktoren sind sowohl in der analytischen als auch in der numerischen Rechnung nicht berücksichtigt worden.

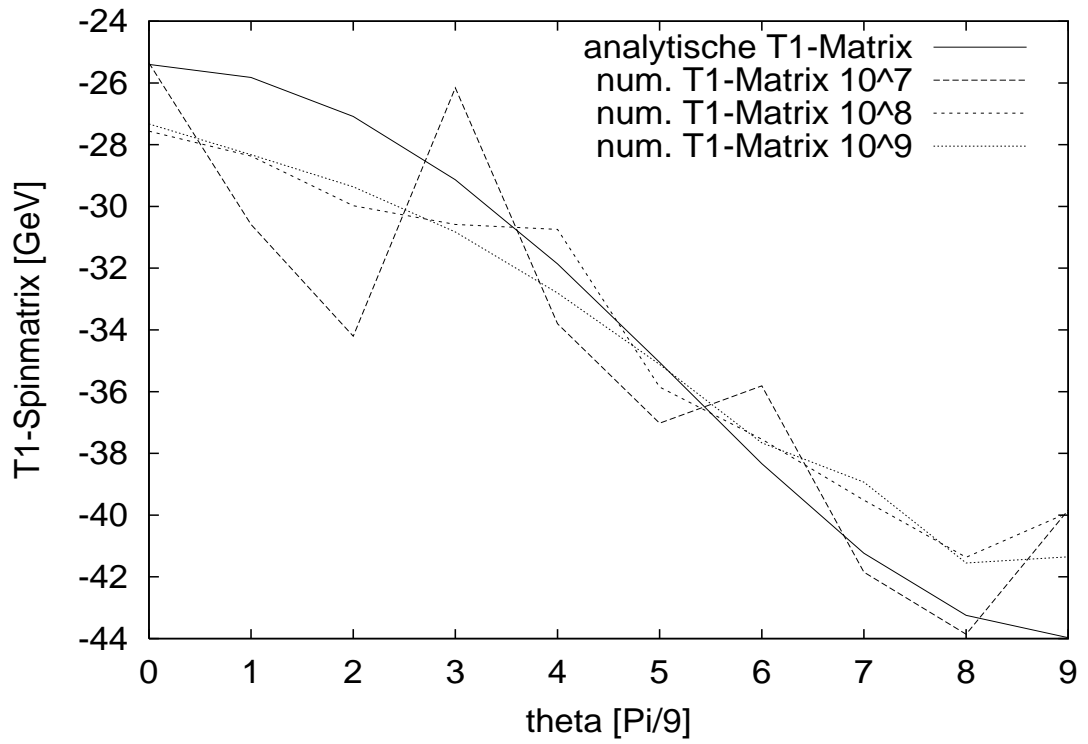


Abbildung B.2: Das T_1 -Spin-Übergangsmatrixelement als Funktion des Streuwinkels ϑ . Die Rechnungen wurden mit den gleichen Bedingungen wie in Abb. B.1 durchgeführt.

Literaturverzeichnis

- [1] *Qark Matter '96*,
Nucl. Phys. A 610 (1996) 1.
- [2] *Qark Matter '97*,
Nucl. Phys. A 638 (1998) 1.
- [3] *Qark Matter '98*,
Nucl. Phys. A 661 (1999) 1.
- [4] M. C. Abreu et al., NA50 collaboration,
Evidence for Deconfinement of Quarks and Gluons from the J/Ψ Suppression Pattern Measured in PB+PB Collisions at the CERN-SPS,
Phys. Lett. B 477 (2000) 28.
- [5] Particle Data Group,
Particle Physics Booklet July 1998,
Springer, 1998.
- [6] Review of Particle Physics,
Eur. Phys. J. C 15 (2000) 1.
- [7] David Griffiths,
Introduction to Elementary Particles,
Wiley & Sons, New York, 1987.
- [8] U. Heinz,
Primordial Hadrosynthesis in the Little Bang,
Nucl. Phys. A 661 (1999) 140c.
- [9] T. Matsui, H. Satz,
 J/Ψ Suppression by Quark - Gluon Plasma Formation,
Phys. Lett. B 178 (1986) 416.
- [10] H. Satz,
Color Deconfinement in Nuclear Collisions,
Rep. Progr. Phys. 63 (2000) 1511.

- [11] U. Vogl, W. Weise,
The Nambu and Jona Lasinio Model: Its Implications for Hadrons and Nuclei,
Prog. Part. Nucl. Phys. 27 (1991) 195.
- [12] T. Matsui,
J/Ψ Suppression by Plasma Formation,
Z. Phys. C - Particles and Fields 38, 245-249 (1988).
- [13] S. Gao, B. Liu und W. Q. Chao,
Color Screening and Dissociation of Charmonium at Finite Temperature and Finite Density,
Physics Letters B 378 (1996) 23-28.
- [14] J. Alam, B. Sinha und S.Raha,
Electromagnetic Probes of Quark Gluon Plasma,
Phys. Rept. 273: 243-362, 1996.
- [15] H. Satz,
The Onset of Deconfinement in Nuclear Collisions,
Nucl. Phys. A 661 (1999) 104c.
- [16] Dong Yu-Bing,
On Binding and Dissolution of Heavy Quark Resonances in a Finite Temperature Environment,
Nuclear Physics A 622 (1997) 497-510.
- [17] F. Karsch, M. T. Mehr und H. Satz,
Color Screening and Deconfinement for Bound States of Heavy Quarks,
Z. Phys. C 37 (1988) 617.
- [18] W. Cassing, E. L. Bratkovskaya,
Hadronic and Electromagnetic Probes of Hot and Dense Nuclear Matter,
Phys. Rep. 308 (1999) 65.
- [19] R. Vogt,
J/Ψ Production and Suppression,
Phys. Rep. 310 (1999) 197.
- [20] C. Gerschel, J. Hüfner,
Charmonium Suppression in Heavy Ion Collisions,
Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 49 (1999) 255.
- [21] X.N. Wang, B. Jacak, eds.,
Quarkonium Production in High-Energy Nuclear Collisions,
World Scientific 1998.

- [22] J. Geiss, W. Cassing, C. Greiner,
Strangeness Production in the HSD Transport Approach from SIS to SPS Energies,
Nucl. Phys. A 644 (1998) 107.
- [23] W. Cassing, E. L. Bratkovskaya,
Production and Absorption of C Anti-C Pairs in Nuclear Collisions at SPS Energies,
Nucl. Phys. A 623 (1997) 570.
- [24] J. Geiss, C. Greiner, E. L. Bratkovskaya, W. Cassing, U. Mosel,
Charmonium Suppression with C Anti-C Dissociation by Strings,
Phys. Lett. B 447 (1999) 31.
- [25] W. Cassing, E. L. Bratkovskaya, S. Juchem,
Excitation Functions of Hadronic Observables from SIS to RHIC Energies,
Nucl. Phys. A 674 (2000) 249.
- [26] A. Capella, E. G. Ferreira, A. B. Kaidalov,
Nonsaturation of the J/Ψ Suppression at Large Transverse Energy in the Comovers Approach,
Phys. Rev. Lett. 85 (2000) 2080.
- [27] K. L. Haglin, C. Gale,
Hadronic Interactions of the J/Ψ ,
nucl-th/0010017.
- [28] Z. Lin, C. M. Ko,
A Model for J/Ψ Absorption in Hadronic Matter,
Phys. Rev. C 62 (2000) 034903.
- [29] Z. Lin, C. M. Ko,
Effective Hadronic Lagrangian for Charm Mesons,
nucl-th/0008050.
- [30] A. Sibirtsev, K. Tsushima, K. Saito, A. W. Thomas,
Novel Features of J/Ψ Dissociation in Matter,
Phys. Lett. B 484 (2000) 23.
- [31] B. Müller,
Quark Matter '99, Theoretical Summary: What Next?,
Nucl. Phys. A 661 (1999) 272c.
- [32] Cheuk-Yin Wong, E. S. Swanson und T. Barnes,
Cross Sections for π - and ρ -induced Dissociation of J/Ψ and Ψ' ,
hep-ph/9912431.

- [33] T. Barnes, E. S. Swanson und C. Y. Wong,
Charmonium + Light Hadron Cross Sections,
nucl-th/0006012 v2.
- [34] K. Martins, D. Blaschke und E. Quack,
Quark Exchange Model for Charmonium Dissociation in Hot Hadronic Matter,
Phys. Rev. C51, 2723 (1995).
- [35] T. Barnes, N. Black, D. J. Dean und E. S. Swanson,
BB Intermeson Potentials in the Quark Model,
nucl-th/9902068.
- [36] T. Barnes und E. S. Swanson,
Diagrammatic Approach to Meson-Meson Scattering in the Nonrelativistic Quark Potential Model,
Phys. Rev. D46, 131 (1992).
- [37] M. C. Abreu et al., NA50 collaboration,
Observation of a Threshold Effect in the Anomalous J/Ψ Suppression,
Phys. Lett. B 450 (1999) 456.
- [38] B. B. Back et al.,
Charged Particle Multiplicity near Midrapidity in Central Au+Au Collisions at $S^{}(1/2)=56\text{-A/GEV}$ and 130-A/GEV* ,
hep-ex/0007036.

Danksagung

An erster Stelle danke ich Herrn Prof. Dr. Dr. W. Cassing für die interessante Aufgabenstellung, die intensive Betreuung sowie für sein Engagement und Interesse beim Erstellen der Arbeit.

Ebenso gilt mein Dank Herrn Prof. Dr. U. Mosel für die Aufnahme in sein Institut.

Weiterhin möchte ich mich bei den Mitarbeitern des 5. Stocks, Sascha Juchem, Christoph Keil und Frank Hofmann, für das gute Arbeitsklima und ihre Hilfsbereitschaft bedanken. Sie beantworteten jederzeit meine Fragen zur Physik und zum Umgang mit den Computern.

Auch allen anderen Mitgliedern des Instituts für Theoretische Physik I danke ich für die angenehme Arbeitsatmosphäre.

Mein Dank gilt außerdem Frau Jung, Frau Pausch und Frau Gawinski für die freundliche Unterstützung.