

**Existenz von normierten positiven
Lösungen eines nichtlinearen
Schrödingersystems mit
Variationsmethoden**

**Existence of normalized positive solutions of a nonlinear
Schrödinger system using variational methods**

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“
(Dr. rer. nat.)

vorgelegt von
Tibor Kovács

dem Fachbereich
Mathematik und Informatik, Physik, Geographie
der Justus-Liebig-Universität Gießen

Betreuer
Prof. Dr. Thomas Bartsch

Abgabe der Dissertation

8. März 2019

Termin der Disputation

24. Mai 2019

Abstract

Wir untersuchen die Existenz von normierten Lösungen in $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \times H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ des Systems

$$\begin{cases} -\Delta u_1 - \lambda_1 u_1 = \mu_1 |u_1|^{p_1-2} u_1 + r_1 \beta |u_1|^{r_1-2} u_1 |u_2|^{r_2}, \\ -\Delta u_2 - \lambda_2 u_2 = \mu_2 |u_2|^{p_2-2} u_2 + r_2 \beta |u_1|^{r_1} |u_2|^{r_2-2} u_2, \\ \int_{\mathbb{R}^N} u_1^2 = a_1^2 \text{ und } \int_{\mathbb{R}^N} u_2^2 = a_2^2, \end{cases}$$

wobei $a_1, a_2 > 0$ vorgegeben sind. Die Koeffizienten λ_1, λ_2 sind hier nicht bekannt und tauchen als Lagrange-Multiplikatoren auf.

Das System erhalten wir mit dem Ansatz einer stehenden Welle für ein System nichtlinearer Schrödinger-Gleichungen, welches zur Modellierung von Bose-Einstein-Kondensaten mit mehrfachen Zuständen oder in der nichtlinearen Optik ihre Anwendung findet.

Mit Variationsmethoden suchen wir nach Lösungen für positive Koeffizienten μ_1, μ_2, β und $p_1, p_2, r_1 + r_2 \in (2, 2^*)$, wobei 2^* der kritische Sobolev-Exponent ist. Dabei zeigt sich, dass $2 + \frac{4}{N}$ ein kritischer Exponent für p_1 und p_2 ist. Je nachdem, ob p_1 und p_2 jeweils größer oder kleiner als $2 + \frac{4}{N}$ ist, erhalten wir unterschiedliche Ergebnisse und zum Teil mehrere Lösungen des Systems. Falls mehrere Lösungen für $\beta > 0$ existieren, dann betrachten wir zusätzlich das Verhalten der Gradientennorm und des Energieniveaus für $\beta \rightarrow 0$.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Die Resultate	4
3	Vorbereitungen	9
3.1	Konsequenzen der Wirkung $*$ von \mathbb{R}^+ auf \mathcal{S}	9
3.2	Eine Zerlegung von \mathcal{S} und die Pohozaev-Menge	15
3.3	Hilfssätze	19
4	Lokales Minimum für $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$	20
5	Mountain-Pass für $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$	24
6	Grenzverhalten bei β_1 falls $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ und $r_1 + r_2 \leq 2 + \frac{4}{N}$	29
7	Das 2 dimensionale Linking im Fall $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$	32
8	Mountain-Pass für $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$	34
9	Lokales Minimum für $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$	44
10	Der Fall $p_1 < 2 + \frac{4}{N} < p_2$	46
11	J_β eingeschränkt auf V_β für $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$	52
12	Berücksichtigung der Topologie von V_β für die Existenz lokaler Minima	64
13	Optimierte Kontrolle der Werte von J_β	72
	Literatur	80
	Selbstständigkeitserklärung	82

1 Einleitung

In dieser Arbeit untersuchen wir die Existenz von positiven Lösungen $u_1, u_2 \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R})$ des Systems

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = \lambda_1 u_1 + \mu_1 |u_1|^{p_1-2} u_1 + \beta r_1 |u_1|^{r_1-2} u_1 |u_2|^{r_2} \\ -\Delta u_2 = \lambda_2 u_2 + \mu_2 |u_2|^{p_2-2} u_2 + \beta r_2 |u_1|^{r_1} |u_2|^{r_2-2} u_2 \end{cases} \quad \text{auf } \mathbb{R}^n \quad (1.1)$$

und der zusätzlichen Einschränkung

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^2 = a_1^2 \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |u_2|^2 = a_2^2. \quad (1.2)$$

Hierbei betrachten wir nur den Fall $\mu_1, \mu_2 > 0$, $r_1, r_2 > 1$ und $2 < p_1, p_2, r_1 + r_2 < 2^*$, wobei 2^* der kritische Sobolev-Exponent ist mit $2^* = \infty$ für $N \in \{1, 2\}$ und $2^* = \frac{2N}{N-2}$ für $N \geq 3$ ist. Diese Forderung an die Koeffizienten werden in der gesamten Arbeit ohne weitere Erwähnung vorausgesetzt.

Da wir die Normierung von u_1 und u_2 bezüglich der $L^2(\mathbb{R}^N)$ -Norm voraussetzen, sind die Werte λ_1 und λ_2 nicht frei wählbar, sondern auch ein Teil der Lösung. Somit ist unter einer Lösung stets das Quatrupel $(\lambda_1, \lambda_2, u_1, u_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \times H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ zu verstehen.

Das System (1.1) stammt aus dem System von gekoppelten Schrödingergleichungen

$$\begin{cases} -i\partial_t \Psi_1 = \Delta \Psi_1 + \mu_1 |\Psi_1|^{p_1-1} \Psi_1 + \beta r_1 |\Psi_1|^{r_1-2} \Psi_1 |\Psi_2|^{r_2} \\ -i\partial_t \Psi_2 = \Delta \Psi_2 + \mu_2 |\Psi_2|^{p_2-1} \Psi_2 + \beta r_2 |\Psi_1|^{r_1} |\Psi_2|^{r_2-2} \Psi_2 \end{cases} \quad \text{auf } \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}, \quad (1.3)$$

welches Anwendungen in der Physik bei der Modellierung von Bose-Einstein-Kondensaten mit mehrfachen Zuständen oder in der nichtlinearen Optik hat, siehe [1, 13, 14, 22]. Der Ansatz der stehenden Welle ist durch die Darstellungen

$$\Psi_1(x, t) = e^{-i\lambda_1 t} u_1(x) \quad \text{und} \quad \Psi_2(x, t) = e^{-i\lambda_2 t} u_2(x)$$

gegeben. Das Einsetzen des Ansatzes in das System (1.3) liefert dann das System (1.1). Da es physikalisch wesentlich ist, dass

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_1(x, t)|^2 dx \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_2(x, t)|^2 dx$$

für alle t konstant bleiben, ist es von Interesse, diesen Wert als bekannt vorauszusetzen. Wegen

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_i(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\Psi_i(x, t)|^2 dx \quad \text{für } i = 1, 2$$

erhalten wir somit die Normierungsvoraussetzung (1.2).

Das System (1.1) ist seit einigen Jahren im Fokus der Forschung und dabei unter anderem in [2, 3, 10, 11, 12, 18, 19, 24] und den Referenzen darin untersucht. Jedoch handelt es sich in diesen Arbeiten nicht um normierte Lösungen, welches eine wesentliche Voraussetzung für diese Arbeit ist. Für die skalaren Gleichungen, die wir mit $\beta = 0$ erhalten, werden normierte Lösungen in [9, 16, 20, 21] untersucht, wobei [20, 21] die Gleichung nur auf einer beschränkten Menge betrachtet. Zu normierten Lösungen von (1.1) ist bisher nur relativ wenig bekannt. Nach unserem Wissen

sind [4, 5, 6, 8, 15] bisher die einzigen Arbeiten zu normierten Lösungen von (1.1). Generell spielen die Vorzeichen von μ_1, μ_2, β eine wesentliche Rolle, welches auch physikalisch unterschiedliche Situationen modelliert. Wir wollen uns hier auf positive μ_1, μ_2, β beschränken.

Als Motivation und Basis dieser Arbeit diene dabei [4, 5]. Genauso, wie auch in [5, 15], ist eine Lösung (1.1) mit (1.2) ein kritischen Punkt des Funktionals

$$J_\beta(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 + |\nabla u_2|^2 dx - \frac{\mu_1}{p_1} \int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^{p_1} dx - \frac{\mu_2}{p_2} \int_{\mathbb{R}^N} |u_2|^{p_2} dx - \beta \int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^{r_1} |u_2|^{r_2} dx$$

eingeschränkt auf $u \in \mathcal{S} := S(a_1) \times S(a_2)$ mit $S(a) := \{v \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) : |\nabla v|_2 = a\}$. Dabei tauchen λ_1 und λ_2 als Lagrange-Multiplikatoren auf.

Zur Vereinfachung verwenden wir im Folgenden $\mathcal{H} = H_{rad}^1(\mathbb{R}^N) \times H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, sowie $|\cdot|_p$ für die Norm in $L^p(\mathbb{R}^N)$ und $R(u) := \int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^{r_1} |u_2|^{r_2} dx$.

Damit ergibt sich die Darstellung

$$J_\beta(u) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} |\nabla u_i|_2^2 - \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} \right) - \beta R(u) = J_0(u) - \beta R(u).$$

Sowohl in [4, 5, 6, 15] als auch dieser Arbeit gibt es drei wichtige Elemente zur Untersuchung des Funktionals.

Erstens ist von Interesse, die Werte der $L^p(\mathbb{R}^N)$ -Normen sowie des gemischten Terms zu kontrollieren. Hierbei ist es hilfreich, dass wir J_β nur auf dem Produkt der Sphären \mathcal{S} betrachten, denn in dem Fall liefert die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung, siehe [23, Prop. 1.16], für $v \in S(a_i)$ die Abschätzung

$$|v|_{p_i}^{p_i} \leq c_i |\nabla v|_2^{\alpha_i}, \quad (1.4)$$

wobei $c_i := c_i(a_i, p_i, N) > 0$ und $\alpha_i = \frac{N}{2}(p_i - 2)$. Des Weiteren können wir auch den gemischten Term $R(u)$ kontrollieren. Dazu beachten wir, dass durch die Voraussetzung $2 < r_1 + r_2 < 2^*$ ein $q \geq 1$ existiert, so dass

$$\max \left\{ \frac{2}{r_1}, \frac{2^*}{2^* - r_2} \right\} < q < \min \left\{ \frac{2^*}{r_1}, \frac{2}{(2 - r_2)^+} \right\} \quad (1.5)$$

gilt. Damit können wir die Hölder-Ungleichung und anschließend ebenfalls die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung anwenden und erhalten

$$\int |u_1|^{r_1} |u_2|^{r_2} \leq c_3 |\nabla u_1|_2^{\alpha_3} |\nabla u_2|_2^{\alpha_4} \quad (1.6)$$

mit $c_3 := c_3(a_1, a_2, r_1, r_2, N)$, $\alpha_3 = \frac{N}{2q}(r_1 q - 2)$, $\alpha_4 = \frac{N}{2q'}(r_2 q' - 2)$ und $\alpha_3 + \alpha_4 = \frac{N}{2}(r_1 + r_2 - 2)$. In dieser Arbeit werden wir unter den Konstanten $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, c_1, c_2, c_3$ stets die Konstanten aus diesen Abschätzungen verstehen. Aus (1.4) und (1.6) wird schließlich die untere Schranke

$$J_\beta(u) \geq \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} |\nabla u_i|_2^2 - c_i \frac{\mu_i}{p_i} |\nabla u_i|_2^{\alpha_i} \right) - \beta c_3 |\nabla u_1|_2^{\alpha_3} |\nabla u_2|_2^{\alpha_4} \quad (1.7)$$

impliziert, welche nur noch von der Gradientennorm von u_1 und u_2 abhängt.

Zweitens lässt sich dadurch, dass (1.1) auf ganz \mathbb{R}^N definiert ist, eine spezielle Reskalierung als Wirkung auf \mathcal{S} definieren. Ist $t \in (0, \infty)$ auf $v \in H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, dann definiert

$$t * v(x) := t^{N/2}v(tx)$$

eine freie Wirkung von \mathbb{R}^+ auf $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$. Insbesondere erhält die Wirkung die $L^2(\mathbb{R}^N)$ -Norm, so dass es sogar auf $S(a_i)$ wirkt. Wir erweitern die Notation auf \mathcal{H} bzw. \mathcal{S} , indem $t * u$ komponentenweise für $u \in \mathcal{H}$ bzw. $u \in \mathcal{S}$ zu verstehen ist. Bemerkenswerterweise tauchen die Exponenten α_1, α_2 und $\alpha_3 + \alpha_4$ aus der unteren Schranke (1.7) auch auf, wenn wir J_β entlang der Wirkung betrachten:

$$t \mapsto J_\beta(t * u) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} |\nabla u_i|_2^2 t^2 - \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i} \right) - \beta R(u) t^{\alpha_3 + \alpha_4}.$$

Dies legt nahe, dass die untere Schranke (1.7) keine sehr grobe Abschätzung ist, obwohl die $L^p(\mathbb{R}^N)$ -Normen und der gemischte Term separat abgeschätzt wurden.

Drittens spielt das Verständnis der skalaren Lösungen, die wir für $\beta = 0$ erhalten, eine wichtige Rolle. Für $i = 1, 2$ haben wir jeweils das Problem

$$\begin{cases} -\Delta w + \lambda_i w = \mu_i |w|^{p_i-2} w \\ \int |w|^2 = a_i^2 \end{cases} \quad (1.8)$$

mit den zugehörigen Energiefunktionalen

$$I_i(w) = \frac{1}{2} |\nabla w|_2^2 - \frac{\mu_i}{p_i} |w|_{p_i}^{p_i}.$$

Dieses Problem ist sehr gut verstanden.

1.1 Bemerkung

Die Lösung \bar{u}_i von (1.8) ist eine Reskalierung der eindeutigen positiven Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w + w = |w|^{p_i-2} w \\ \max w = w(0) \end{cases}$$

mit dem Niveau

$$m_i := I_i(\bar{u}_i) = \frac{1}{2} |\nabla \bar{u}_i|_2^2 - \frac{\mu_i}{p_i} |\bar{u}_i|_{p_i}^{p_i} = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_i} \right) |\nabla \bar{u}_i|_2^2.$$

Die Darstellung des Niveaus erhalten wir, indem wir die Pohozaev-Identität mit der oben genannten Wirkung anwenden.

Aus diesen Beobachtungen heraus ist auch zu erkennen, dass $p_i = 2 + \frac{4}{N}$ ein kritischer Fall ist. Zum einen ist die $L^2(\mathbb{R}^N)$ -Norm der Reskalierung unabhängig von λ_i , falls $p_i = 2 + \frac{4}{N}$ gilt. Damit lässt sich bei festen μ_i die Reskalierung nicht so wählen, dass die vorgegebene $L^2(\mathbb{R}^N)$ -Normierung stimmt. Zum anderen ist \bar{u}_i ein globales Minimum von I_i mit $m_i < 0$, falls $p_i < 2 + \frac{4}{N}$, während es für $p_i > 2 + \frac{4}{N}$ ein Mountain-Pass von I_i mit $m_i > 0$ ist. Damit ist $\bar{u} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)$ ein kritischer Punkt von J_0 , welches zeigt, dass wir für die verschiedenen Fälle verschiedene Ansätze benötigen um kritische Punkte von J_β für $\beta > 0$ zu erhalten.

In den Arbeiten [4, 5, 15] und dieser wenden wir Variationsmethoden an, um eine Lösung von (1.1) mit (1.2) zu erhalten. Dadurch lässt sich das Vorgehen in zwei grobe Schritte gliedern.

Im ersten Schritt geht es darum, eine geeignete Palais-Smale-Folge zu erhalten, die potentiell gegen einen kritischen Punkt konvergieren könnte. Im zweiten Schritt zeigen wir, dass diese Palais-Smale-Folge, bzw. eine Teilfolge davon, einen Grenzwert hat, welcher ein kritischer Punkt von J_β ist. Die drei oben genannten Elemente sind dabei für den ersten Schritt wesentlich, um eine geeignete Palais-Smale-Folge zu erhalten. Hierin liegt auch der Schwerpunkt dieser Arbeit.

Um anschließend zu zeigen, dass wir damit einen kritischen Punkt erhalten, greifen wir die Argumente aus den Arbeiten [4, 5] mit geringfügiger Anpassung auf. Hierbei besteht der Kern darin, einen Satz vom Liouville Typ zu verwenden, um zu zeigen, dass die Lagrange-Multiplikatoren λ_1, λ_2 negativ sind, womit wir die starke Konvergenz in \mathcal{H} erhalten.

2 Die Resultate

Wie auch in [5] wurde der Spezialfall $p_1 = p_2 = 4$ und $r_1 = r_2 = 2$ sehr viel untersucht. Die expliziten Exponenten erlauben dabei noch kompaktere Darstellungen von J_β . Jedoch lässt sich der Fall auch auf einen größeren Parameterbereich ausweiten.

2.1 Satz ([4], Theorem 2.4)

Seien $p_1, p_2, r_1 + r_2 > 2 + \frac{4}{N}$ und $2 \leq N \leq 4$.

- (i) Dann existiert $\tilde{\beta}_1 = \tilde{\beta}_1(a_1, a_2, \mu_1, \mu_2) > 0$, so dass (1.1)-(1.2) für $0 \leq \beta \leq \tilde{\beta}_1$ eine Lösung $(\lambda_1, \lambda_2, u_1, u_2)$ mit positivem $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}$ und $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ hat.
- (ii) Dann existiert $\tilde{\beta}_2 = \tilde{\beta}_2(a_1, a_2, \mu_1, \mu_2) > 0$, so dass (1.1)-(1.2) für $\beta \geq \tilde{\beta}_2$ eine Lösung $(\lambda_1, \lambda_2, u_1, u_2)$ mit positivem $(u_1, u_2) \in \mathcal{H}$ und $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ hat.

Der verallgemeinerte Fall ist in [4] mit einen Verweis auf die Beweise von [5, Theorem 1.1] und [5, Theorem 1.2] angedeutet worden. Dabei liefert ein zweidimensionales Linking auf \mathcal{S} die Lösung aus Teil (i), welches auch für $\beta = 0$ vorhanden ist und für positive $\beta < \tilde{\beta}_1$ erweitert werden konnte. Des Weiteren kann für ausreichend große β in (ii) eine Mountain-Pass-Struktur festgestellt werden, die zu einer Lösung führt. Ob es sich dabei um scharfe Grenzen handelt, ist noch offen.

Betrachten wir den Fall $p_1, p_2, r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N}$, so reichen bereits die Abschätzungen (1.4) und (1.6), um zu erkennen, dass J_β koerziv ist, welches zum folgenden Resultat mit einem globalen Minimum führt:

2.2 Satz ([4], Theorem 2.1)

Falls $\beta \geq 0$ und eine der beiden Bedingungen

- (i) $2 \leq N \leq 4$ und $p_1, p_2, r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N}$
- (ii) $N \geq 5$, $p_1, p_2 < 2 + \frac{2}{N-2}$ und $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N}$

gilt, dann existieren $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ und $u \in \mathcal{H}$, so dass u eine Lösung von (1.1) mit (1.2) ist.

Wenn p_1 und p_2 beide kleiner $2 + \frac{4}{N}$ oder beide größer als $2 + \frac{4}{N}$ sind, dann ist das Verhalten von I_1 und I_2 gleich. Dies hat viele Vorteile bei der Betrachtung von J_0 . Zum Beispiel haben $t \mapsto J_0(t * u)$, $t \mapsto I_1(t * u_1)$ und $t \mapsto I_2(t * u_2)$ dasselbe Grenzverhalten und gleich viele kritische Punkte vom selben Typ. Dies ist aber für $p_1 < 2 + \frac{4}{N} < p_2$ nicht mehr der Fall, so dass die Variation von J_0 in den einzelnen Komponenten unterschiedlich wirkt. Da \bar{u}_1 ein globales Minimum von I_1 und \bar{u}_2 eine Mountain-Pass-Lösung von I_2 ist, ist \bar{u} als Mountain-Pass-Lösung von J_0 zu erhalten. Diese Struktur für $\beta > 0$ zu erweitern wurde in folgendem Satz erreicht:

2.3 Satz ([4], Theorem 2.2)

Seien $p_1 < 2 + \frac{4}{N} < p_2, r_1 + r_2$ und $r_2 > 2$ sowie $2 \leq N \leq 4$ gegeben. Falls $m_1 + m_2 < 0$ und $\beta \geq 0$, dann existiert eine positive Lösung $(u_1, u_2) \in H$ für ein $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Wir kommen nun zu unseren eigenen Resultaten, in denen wir andere Bereiche für die Parameter p_1, p_2, r_1, r_2 betrachten. Es gibt Überschneidungen mit [4, 5, 15], allerdings verwenden wir andere Variationen. Insbesondere unterscheiden sich die Schranken für β in den verschiedenen Ansätzen. Zur Vereinfachung der Notation wird bei den Schranken β_j die Abhängigkeit von $a_1, a_2, \mu_1, \mu_2, p_1, p_2, r_1, r_2$ weggelassen.

2.4 Bemerkung

In den Definitionen 4.1 und 5.1 werden die Werte β_1 und β_2 definiert. Für diese gilt, dass sie in den Fällen $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ und $2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$ positiv sind.

2.5 Satz

Seien

- $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ und $2 \leq N \leq 4$ oder
- $p_1, p_2 < 2 + \frac{2}{N-2}$ und $N \geq 5$.

(i) Es existiert $\beta_0 < 0$ und sei β_1 aus Bemerkung 2.4. Für $\beta_0 < \beta < \beta_1$ hat (1.1) mit (1.2) eine positive Lösung $u = (u_1, u_2)$ für ein $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Des Weiteren ist u ein lokales Minimum von J_β mit $J_\beta(u) < \min\{m_1, m_2\}$.

(ii) Gilt zusätzlich $2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$, dann hat (1.1) mit (1.2) für $0 < \beta < \beta_2$ eine positive Lösung $v = (v_1, v_2) \neq (u_1, u_2)$ für ein $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Weiter gelten

$$|\nabla v_1|_2^2 + |\nabla v_2|_2^2 \rightarrow \infty \text{ und } J_\beta(v) \rightarrow \infty \text{ für } \beta \rightarrow 0.$$

Des Weiteren ist v ein Mountain-Pass von J_β mit $J_\beta(v) > 0$.

Im ersten Teil des Satzes 2.5 wird β_1 so gewählt, dass sich das Pohozaev-Funktional

$$Q_\beta(u) := \partial_t J_\beta(t * u) |_{t=1} = \sum_{i=1}^2 \left(|\nabla u_i|_2^2 - \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} \right) - \beta(\alpha_3 + \alpha_4)R(u)$$

auf dem Rand einer beschränkten Menge kontrollieren lässt. Damit können wir zeigen, dass das Infimum von J_β im Inneren der beschränkten Menge kleiner ist als das über dem Rand. Somit erhalten wir eine geeignete lokale Minimalfolge. Gilt zusätzlich noch $r_1 + r_2 > 2 + \frac{4}{N}$, so ist J_β nach unten unbeschränkt, wodurch wir zusätzlich zu dem Minimum von J_β noch eine Mountain-Pass-Struktur erhalten. Außerdem muss eine andere obere Schranke β_2 formuliert werden, damit wir das Niveau der Mountain-Pass-Struktur kontrollieren können, um die starke Konvergenz der Palais-Smale-Folge zu bekommen. Wir beachten, dass diese Struktur erst für $\beta > 0$ vorhanden ist, da bei $\beta = 0$ nur ein globales Minimum vorliegt. Daher haben wir zusätzlich gezeigt, dass das Niveau und die Summe der Gradientennormen der Komponenten des Mountain-Passes für $\beta \rightarrow 0$ nach oben unbeschränkt sind.

Ob die Schranken β_0 und β_2 scharf sind, ist noch ein offenes Problem. Bei β_1 können wir aber zeigen, dass es sich im Fall $r_1 + r_2 \leq 2 + \frac{4}{N}$ um scharfe Grenzen im Sinne des nächsten Lemmas

handelt. Für $r_1 + r_2 > 2 + \frac{4}{N}$ ist es jedoch nicht klar, ob β_1 auch eine scharfe Grenze ist. Hierzu verweisen wir auf Kapitel 12, in dem wir einen alternativen Ansatz für $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ untersuchen. Dieser setzt zwar $\beta > 0$ voraus, jedoch erhalten wir dort eine obere Schranke $\hat{\beta}_1$ für β , bei der sich die Topologie von $Q_\beta^{-1}(0)$ ändert. Dies ist ein Indiz, dass sich bei $\hat{\beta}_1$ die Menge der kritischen Punkte ändern könnte. Es ist aber noch nicht geklärt, ob dies der Fall ist und ob es auch das lokale Minimum betrifft.

2.6 Lemma

Gilt in Satz 2.5(i) zusätzlich $r_1 + r_2 \leq 2 + \frac{4}{N}$, dann ist die obere Schranke β_1 im folgenden Sinne strikt.

- (i) Gilt $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N}$, dann ist $\beta_1 = \infty$ und die Lösung $u^{(\beta)}$ ist ein globaler Minimierer des Funktionals J_β . Insbesondere gelten

$$|\nabla u_1^{(\beta)}|_2 + |\nabla u_2^{(\beta)}|_2 \rightarrow \infty \text{ und } J_\beta(u^{(\beta)}) \rightarrow -\infty \text{ für } \beta \rightarrow \infty.$$

- (ii) Gilt $r_1 + r_2 = 2 + \frac{4}{N}$, dann ist

$$\beta_1 = \inf_{\substack{v \in \hat{\mathcal{S}} \\ R(v) \neq 0}} \frac{1}{2R(v)} < \infty,$$

wobei $\hat{\mathcal{S}} := \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_1|_2^2 + |\nabla u_2|_2^2 = 1\}$ ist, und die Lösung $u^{(\beta)}$ ist ein globaler Minimierer des Funktionals J_β . Insbesondere gelten

$$|\nabla u_1^{(\beta)}|_2 + |\nabla u_2^{(\beta)}|_2 \rightarrow \infty \text{ und } J_\beta(u^{(\beta)}) \rightarrow -\infty \text{ für } \beta \rightarrow \beta_1.$$

Falls $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$ gilt, so sind \bar{u}_i Mountain-Pass-Lösungen von I_i für $i = 1, 2$. Somit können wir \bar{u} durch ein zweidimensionales Linking von J_0 erhalten. Die zusätzliche Einschränkung $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N}$ liefert mehr Struktur, denn für $\beta > 0$ können wir auch ein lokales Minimum und wenigstens eine Mountain-Pass-Lösung nachweisen. Folgende Bedingungen benötigen wir für die Konvergenz der Palais-Smale-Folge aus der Mountain-Pass-Struktur und für das Grenzverhalten der Gradientennorm bei $\beta \rightarrow 0$:

- (E1) $m_1 \leq m_2$ und $r_2 < \frac{4}{N}$
- (E2) $m_2 \leq m_1$ und $r_1 < \frac{4}{N}$
- (E3) $m_1 < m_2$ und $r_2 < \frac{4}{N}$
- (E4) $m_2 < m_1$ und $r_1 < \frac{4}{N}$

Damit kommen wir zum nächsten Resultat:

2.7 Satz

Seien $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$ und $2 \leq N \leq 4$.

- (i) Es gibt ein $\beta_3 > 0$, so dass für $0 \leq \beta < \beta_3$ eine positive Lösung $u = (u_1, u_2)$ von (1.1) mit (1.2) für ein $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ existiert. Insbesondere kommt u von einem zweidimensionalen Linking von J_β und es gilt $J_\beta(u) > \max\{m_1, m_2\}$.

Sei nun β_1 und β_2 aus Bemerkung 2.4 und \bar{u}_1 und \bar{u}_2 aus Bemerkung 1.1 gegeben.

- (ii) Falls (E1) oder (E2) gilt, dann existiert für $0 < \beta < \beta_2$ eine positive Lösung $v = (v_1, v_2)$ von (1.1) mit (1.2) für ein $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Insbesondere gelten für $\beta \rightarrow 0$

$$|\nabla v_1|_2 \rightarrow |\nabla \bar{u}_1|_2 \text{ und } |\nabla v_2|_2 \rightarrow 0$$

falls (E3) und

$$|\nabla v_1|_2 \rightarrow 0 \text{ und } |\nabla v_2|_2 \rightarrow |\nabla \bar{u}_2|_2$$

falls (E4) erfüllt ist. Dabei ist v ein Mountain-Pass von J_β mit $J_\beta(v) \in (0, \min\{m_1, m_2\})$.
 (iii) Gilt zusätzlich $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N}$ und $0 < \beta < \beta_1$, dann existiert eine positive Lösung $w = (w_1, w_2)$ von (1.1) mit (1.2) für ein $\lambda_1, \lambda_2 < 0$.

Weiter gilt

$$|\nabla w_1|_2^2 + |\nabla w_2|_2^2 \rightarrow 0 \text{ für } \beta \rightarrow 0.$$

Insbesondere ist w ein lokales Minimum von J_β mit $J_\beta(w) < 0$.

Analog zu Satz 2.5(i) wird in Satz 2.7(i) der kritische Punkte von J_0 für $0 < \beta < \beta_3$ erweitert. Der wesentliche Unterschied zu Satz 2.1(i) und Satz 2.2 ist, dass wir mit unserer Variation keine weitere Einschränkung an $r_1 + r_2$ fordern. Insbesondere ist sogar der als kritisch betrachtete Fall $r_1 + r_2 = 2 + \frac{4}{N}$ möglich. Die Idee besteht darin, den Rand eines Rechtecks stetig nach $K \subseteq \mathcal{S}$ abbilden zu können, so dass das Maximum von J_β über K beliebig nahe an $\max\{m_1, m_2\}$ liegt. Anschließend wählen wir eine Menge B , so dass jede stetige Abbildung von einem Quadrat nach \mathcal{S} , welches am Rand mit K übereinstimmt, die Menge B schneidet und das Infimum von J_β über B größer als $\max\{m_1, m_2\}$ ist. Dies liefert uns dann das gewünschte Linking.

Für Punkte mit kleiner Gradientennorm nimmt J_0 stets positive Werte an. Dies erlaubt uns eine offene und beschränkte Umgebung $A \subseteq \mathcal{S}$ von $0 \in \mathcal{H}$ bezüglich der Gradientennorm zu wählen mit der Eigenschaft, dass das Infimum von J_β über ∂A positiv ist. Wenn $\beta > 0$ ausreichend klein ist, dann liefert (1.4), dass das Infimum von J_β über ∂A ebenfalls positiv ist. Im Unterfall $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$ ist das Infimum von J_β über A stets negativ für alle $\beta > 0$, wodurch wir eine geeignete Minimalfolge erhalten. Des Weiteren ist J_β nach unten unbeschränkt, so dass wir zusätzlich eine Mountain-Pass-Struktur vorliegen haben.

In der Einleitung haben wir schon angedeutet, dass $p_i = 2 + \frac{4}{N}$ ein kritischer Exponent ist. Vergleichen wir die Fälle $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ und $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$, so liegen unterschiedliche Typen von kritischen Punkten von J_β für kleine $\beta \geq 0$ vor. Das nächste Lemma verdeutlicht dabei, was für $p_1, p_2 \rightarrow 2 + \frac{4}{N}$ mit den kritischen Punkten passieren kann.

2.8 Lemma

Sei \hat{S} aus Lemma 2.6(ii), $p_1 = p_2 = r_1 + r_2 = 2 + \frac{4}{N}$ und $N \geq 1$ sowie

$$\sup \left\{ \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} + \beta R(u) : u \in \hat{S} \right\} < 1,$$

dann hat (1.1) für alle $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ keine Lösung in $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$.

Wir sehen, dass $2 + \frac{4}{N}$ kritisch ist, weil möglicherweise keine quadratintegrierbare Lösung existiert. Schließlich haben wir auch noch ein Resultat für den Fall $p_1 < 2 + \frac{4}{N} < p_2$.

2.9 Satz

Sei $p_1 < 2 + \frac{4}{N} < p_2$ und $2 \leq N \leq 4$.

(i) Es existiert ein $\beta_4 > 0$, so dass es für alle $0 \leq \beta < \beta_4$ eine positive Lösung $u = (u_1, u_2)$ von (1.1) mit (1.2) für ein $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ gibt. Dabei ist u ein Mountain-Pass von J_β mit $J_\beta(u) > 0$ für $m_1 + m_2 > 0$ und $J_\beta(u) \in (m_1, 0)$ für $m_1 + m_2 < 0$.

- (ii) Falls zusätzlich $r_2 < \frac{4}{N}$, dann existiert ein $\beta_5 > 0$, so dass für $0 < \beta < \beta_5$ hat (1.1) mit (1.2) eine positive Lösung $v = (v_1, v_2)$ von für ein $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Insbesondere gelten

$$|\nabla v_1|_2 \rightarrow |\nabla \bar{u}_1|_2 \text{ und } |\nabla v_2|_2 \rightarrow 0 \text{ für } \beta \rightarrow 0.$$

Dabei ist v ein lokales Minimum von J_β mit $J_\beta(v) < m_1$.

Da \bar{u}_1 ein globales Minimum von I_1 und \bar{u}_2 eine Mountain-Pass-Lösung von I_2 ist, besteht die Idee darin, J_β in der Umgebung von $(\bar{u}_1, 0)$ zu untersuchen. Tatsächlich zeigen wir, dass für ausreichend kleine $\beta > 0$ das Infimum von J_β über den Rand einer Umgebung von $(\bar{u}_1, 0)$ größer als m_1 ist. Die Unbeschränktheit nach unten liefert schließlich die Mountain-Pass-Struktur. Hierbei müssen wir beachten, dass für $m_1 + m_2 > 0$ die Schranke β_4 kleiner sein muss, um zu gewährleisten, dass das Niveau der Mountain-Pass-Struktur nicht 0 wird. Schränken wir r_2 noch weiter ein, so erhalten wir, dass jede Umgebung von $(\bar{u}_1, 0)$ auch Punkte enthält, so dass das Funktional J_β kleiner als m_1 wird. Damit können wir dann eine geeignete lokale Minimalfolge erhalten.

Um ein Gefühl dafür zu bekommen, unter welchen Voraussetzungen $m_1 + m_2 < 0$ erfüllt ist, halten wir noch die Berechnung der Werte m_1 und m_2 fest.

2.10 Lemma

Für $i = 1, 2$ und $p_i \neq 2 + \frac{4}{N}$ gilt

$$m_i = \frac{\alpha_i - 2}{2p_i} \left(\frac{a_i}{|w_i|_2} \right)^{\frac{2(p_i - \alpha_i)}{2 - \alpha_i}} \mu_i^{\frac{2}{2 - \alpha_i}} |w_i|_{p_i}^{p_i},$$

wobei $\alpha_i = \frac{N}{2}(p_i - 2)$ und w_i ist Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w + w = |w|^{p_i - 2} w \\ \max w = w(0) \end{cases}.$$

Wir erkennen aus der Formel, dass m_1 im Fall $p_1 < 2 + \frac{4}{N} < p_2$ negativ ist und für $a_1 \rightarrow \infty$ oder $\mu_1 \rightarrow \infty$ gegen $-\infty$ konvergiert, während m_2 positiv ist und für $a_2 \rightarrow \infty$ oder $\mu_2 \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Somit ist $m_1 + m_2$ negativ, wenn a_1, a_2, μ_1 oder μ_2 groß ist.

Kommen wir nun schließlich zum Aufbau dieser Arbeit. In Kapitel 3 bereiten wir einige wichtige Aussagen und Berechnungen vor, die wir in mehreren Kapiteln benötigen werden. Dabei wird in Unterkapitel 3.1 gezeigt, dass die Wirkung $*$ kanonisch einen stetigen Weg in \mathcal{H} bzw. \mathcal{S} definiert. Des Weiteren führen wir Berechnungen durch, unter anderem den Beweis von Lemma 2.10 am Ende des Unterkapitels. Im Unterkapitel 3.2 definieren wir eine Zerlegung von \mathcal{S} und untersuchen die Funktionen $t \mapsto J_\beta(t * u)$, welches für viele Konstruktionen wichtig sein wird. Des Weiteren formulieren wir die Pohozaev-Menge in diesem Kapitel und folgern zum Schluss den Beweis von Lemma 2.8. Schließlich zitieren wir in Unterkapitel 3.3 Hilfssätze aus [4], welche wir für die Konvergenz geeigneter Palais-Smale-Folgen verwenden wollen. In den Kapiteln 4-10 werden wir nacheinander die Beweise von Satz 2.5 (i), Satz 2.5 (ii), Lemma 2.6, Satz 2.7 (i), Satz 2.7 (ii), Satz 2.7 (iii) und Satz 2.9 in dieser Reihenfolge ausführen. Die Kapitel 11, 12 und 13 beinhalten alternative Ansätze, welches wichtige Erkenntnisse zu den Resultaten liefern.

Obwohl noch offen ist, ob die Behauptung in [6, Theorem 1.3] stimmt, vergleiche [7], motiviert es uns, in Kapitel 11 das Funktional J_β eingeschränkt auf V_β im Fall $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$ zu untersuchen. Aus den untersuchten Strukturen konnten wir keine Lösung ableiten, erkennen jedoch,

dass möglicherweise die Einschränkungen in Satz 2.7(ii) zu stark sind. Des Weiteren deuten die Strukturen an, dass es sogar zwei Mountain-Pass-Lösungen geben könnte.

In Kapitel 12 untersuchen wir die Pohozaev-Menge in den Fällen $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ und $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$, da diese für kleine $\beta > 0$ eine interessante Topologie aufweist, welches sich bei $\beta = \hat{\beta}_1$ ändert. Wir folgern, dass die lokalen Minima aus Satz 2.5(i) und Satz 2.7(iii) unter den genannten Einschränkungen für $0 < \beta < \hat{\beta}_1$ existieren. Es ist zwar offen, ob $\hat{\beta}_1$ eine scharfe Schranke für die Existenz der Minima ist, jedoch ist die Änderung der Topologie der Pohozaev-Menge ein gutes Indiz dafür.

Schließlich gehen wir in Kapitel 13 auf eine alternative Schranke $\beta_{(1)}$ für β_1 ein, bei der nicht die Werte von Q_β , sondern die von J_β kontrolliert werden. Dies war unser ursprünglicher Ansatz und wird auch in [15] zur Bestimmung einer geeigneten Schranke verwendet. Daher zeigen wir, dass diese Schranke nicht scharf ist, da wir auch für $\beta = \beta_{(1)}$ noch Lösungen erhalten. Dies führt uns iterativ zu einer Folge von Schranken $\beta_{(n)}$, deren Grenzwert eine Optimierung des Ansatzes ist.

3 Vorbereitungen

Die Wirkung $*$ ist ein wesentliches Element dieser Arbeit und wird bei allen Resultaten benötigt. Wir zeigen in diesem Kapitel, dass $*$ kanonisch stetige Wege auf \mathcal{S} induziert. Das Funktional J_β hat entlang dieser Wege ebenfalls bemerkenswerte Eigenschaften, welches uns zu einer Zerlegung von \mathcal{S} führt, die uns beim Finden von kritischen Punkten des Funktionals J_β hilft. Des Weiteren berücksichtigen wir auch, dass die Pohozaev-Identität auf die Wirkung $*$ angewendet eine Menge liefert, die alle kritischen Punkte enthält und eine besondere Beziehung zu den Funktionen $t \mapsto J_\beta(t*u)$ für alle $u \in \mathcal{S}$ hat. Schließlich zitieren wir im letzten Unterkapitel Hilfssätze aus [4], die wir mehrfach benötigen werden.

3.1 Konsequenzen der Wirkung $*$ von \mathbb{R}^+ auf \mathcal{S}

3.1 Lemma

Sei $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$, dann ist

$$g_v : (0, \infty) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^N), \quad t \mapsto t * v$$

stetig bezüglich der Norm auf $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Beweis: Zuerst beachten wir, dass es wegen den Gleichungen

$$\begin{aligned} |g_v(t) - g_v(s)|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| t^{N/2} v(tx) - s^{N/2} v(sx) \right|^2 dx = t^N \int_{\mathbb{R}^N} \left| v(tx) - \left(\frac{s}{t}\right)^{N/2} v(sx) \right|^2 dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| v(x) - \left(\frac{s}{t}\right)^{N/2} v\left(\frac{s}{t}x\right) \right|^2 dx = \left| g_v(1) - g_v\left(\frac{s}{t}\right) \right|_2^2 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 |\nabla g_v(t) - \nabla g_v(s)|_2^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} \left| t^{N/2+1} \nabla v(tx) - s^{N/2+1} \nabla v(sx) \right|^2 dx \\
 &= t^{N+2} \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla v(tx) - \left(\frac{s}{t}\right)^{N/2+1} \nabla v(sx) \right|^2 dx \\
 &= t^2 \int_{\mathbb{R}^N} \left| \nabla v(x) - \left(\frac{s}{t}\right)^{N/2+1} \nabla v\left(\frac{s}{t}x\right) \right|^2 dx \\
 &= t^2 \left| \nabla g_v(1) - \nabla g_v\left(\frac{s}{t}\right) \right|_2^2
 \end{aligned}$$

reicht, die Stetigkeit von g_v an der Stelle 1 zu zeigen. **Behauptung:** Sei $w \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, dann ist

$$g_w : (0, \infty) \rightarrow C_c^\infty(\mathbb{R}^N), \quad t \mapsto t * w$$

stetig bezüglich der Norm auf $H^1(\mathbb{R}^N)$.

Beweis der Behauptung:

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen zunächst $R > 0$ so, dass $\text{supp}(w) \subseteq B_R(0)$ gilt. Wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von w existiert ein $\delta_{1,1} > 0$, so dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$ mit $|x - y| < \delta_{1,1}$

$$|w(x) - w(y)| < \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2\text{vol}_N(B_R(0))}}.$$

gilt. Außerdem existiert ein $\delta_{1,2} > 0$, so dass für alle $t \in (0, \infty)$ mit $|1 - t| < \delta_{1,2}$

$$|1 - t^{N/2}| < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}|w|_2}$$

gilt. Ist $|1 - t| < 2^{2/N} - 1 =: \delta_{1,3} > 0$, dann folgt $t^{N/2} < 2$.

Nun wählen wir $\delta_1 := \min\left\{\frac{\delta_{1,1}}{R}, \delta_{1,2}, \delta_{1,3}\right\}$. Sei nun $t \in (0, \infty)$, so dass $|1 - t| < \delta_1$ gilt. Für $x \in B_R(0)$ folgt dann $|x - tx| = |1 - t| \cdot |x| < \delta_{1,1}$. Dies liefert

$$\begin{aligned}
 |g_w(1) - g_w(t)|_2 &= \sqrt{\int_{B_R(0)} |w(x) - t^{N/2}w(tx)|^2 dx} \\
 &\leq \sqrt{\int_{B_R(0)} |w(x) - t^{N/2}w(x)|^2 dx} + \sqrt{\int_{B_R(0)} |t^{N/2}w(x) - t^{N/2}w(tx)|^2 dx} \\
 &= |1 - t^{N/2}| \cdot |w|_2 + t^{N/2} \cdot \sqrt{\int_{B_R(0)} \underbrace{|w(x) - w(tx)|^2}_{< \frac{\varepsilon^2}{32\text{vol}_N(B_R(0))}} dx} \\
 &< \frac{\varepsilon}{2\sqrt{2}|w|_2} \cdot |w|_2 + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4\sqrt{2}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}.
 \end{aligned}$$

Analog können wir ebenso ein $\delta_2 > 0$ wählen, so dass für alle $t \in (0, \infty)$ mit $|1 - t| < \delta_2$

$$|\nabla g_w(1) - \nabla g_w(t)|_2 < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

gilt. Mit $\delta := \min\{\delta_1, \delta_2\}$ erhalten wir schließlich, dass für alle $t \in (0, \infty)$ mit $|1 - t| < \delta$

$$|g_w(1) - g_w(t)|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \sqrt{|g_w(1) - g_w(t)|_2^2 + |\nabla g_w(1) - \nabla g_w(t)|_2^2} < \varepsilon$$

folgt. Damit ist die Behauptung bewiesen.

Nun sei $v \in H^1(\mathbb{R}^N)$. Wir wählen $w \in C_c(\mathbb{R}^N)$, so dass

$$|v - w|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon.$$

Nach obiger Behauptung existiert ein $\delta_1 > 0$, so dass für alle $t \in (0, \infty)$ mit $|1 - t| < \delta$

$$|w - t * w|_{H^1(\mathbb{R}^N)} < \varepsilon$$

gilt. Und für $t \in (0, 2)$ erhalten wir weiter

$$\begin{aligned} |t * v - t * w|_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= |t * (v - w)|_{H^1(\mathbb{R}^N)} = \sqrt{|t * (v - w)|_2^2 + |\nabla(t * (v - w))|_2^2} \\ &= \sqrt{|v - w|_2^2 + t^2 |\nabla v - \nabla w|_2^2} < 2|v - w|_{H^1(\mathbb{R}^N)}. \end{aligned}$$

Deswegen definieren wir $\delta := \min\{\delta_1, 1\}$. Dies liefert

$$\begin{aligned} |g_v(1) - g_v(t)|_{H^1(\mathbb{R}^N)} &= |v - t * v|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq |v - w|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + |w - t * w|_{H^1(\mathbb{R}^N)} + |t * w - t * v|_{H^1(\mathbb{R}^N)} \\ &< 4\varepsilon. \end{aligned}$$

Damit ist die Stetigkeit von g_v in 1 gezeigt. □

3.2 Bemerkung

Für alle $u \in \mathcal{S}$ gilt $t * u \in \mathcal{S}$ und somit ist

$$\gamma_u : (0, \infty) \rightarrow \mathcal{S}, \quad t \mapsto t * u$$

nach Lemma 3.1 ein stetiger Weg in \mathcal{S} bezüglich der \mathcal{H} -Norm.

3.3 Definition

Für $v \in S(a_i)$ definieren wir

$$P_i(v) = \partial_t I_i(t * v) |_{t=1} = |\nabla v|_2^2 - \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} |v|_{p_i}^{p_i}.$$

Die Pohozaev-Identität liefert, dass jeder kritische Punkt v von I_i die Gleichung $P_i(v) = 0$ erfüllt. Dies erlaubt eine Formel für das Niveau von \bar{u}_i zu erhalten, die unabhängig von der $L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$ -Norm von \bar{u}_i ist. Des Weiteren ist \bar{u}_i das Minimum von I_i eingeschränkt auf $P_i^{-1}(0)$. Ist $v \in S(a_i)$ mit der Eigenschaft $|\nabla v|_2 = |\nabla \bar{u}_i|_2$, so folgt $P_i(v) \geq 0$, denn andernfalls finden wir ein $t \neq 1$, so dass $P_i(t * v) = 0$ und $I_i(t * v) < I_i(\bar{u}_i)$ gilt. Durch diese Beobachtung sind wir in der Lage das Infimum von P_i und I_i über spezielle Mengen zu berechnen.

3.4 Lemma

Für $i = 1, 2$ und $s > 0$ gilt

$$\inf_{\substack{u \in S(a_i) \\ |\nabla u|_2 = s}} P_i(u) = s^2 - |\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} s^{\alpha_i}.$$

Beweis: Da $|\nabla(t * w)|_2 = t|\nabla w|_2$ für $w \in S(a_i)$, ist

$$\{w \in S(a_i) : |\nabla w|_2 = a\} \rightarrow \{w \in S(a_i) : |\nabla w|_2 = b\}, \quad w \mapsto \frac{b}{a} * w$$

eine Bijektion. Nun beachten wir

$$P_i(t * u) = |\nabla u|_2^2 t^2 - \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} |u|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i} = (t^2 - t^{\alpha_i}) |\nabla u|_2^2 + t^{\alpha_i} P_i(u).$$

Da $\left| \nabla \left(\frac{s}{|\nabla \bar{u}_i|_2} * u \right) \right|_2 = s$ für $u \in S(a_i)$ mit $|\nabla u|_2 = |\nabla \bar{u}_i|_2$ gilt, erhalten wir

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{u \in S(a_i) \\ |\nabla u|_2 = s}} P_i(u) &= \inf_{\substack{u \in S(a_i) \\ |\nabla u|_2 = |\nabla \bar{u}_i|_2}} P_i \left(\frac{s}{|\nabla \bar{u}_i|_2} * u \right) \\ &= \inf_{\substack{u \in S(a_i) \\ |\nabla u|_2 = |\nabla \bar{u}_i|_2}} \left(\left(\frac{s}{|\nabla \bar{u}_i|_2} \right)^2 - \left(\frac{s}{|\nabla \bar{u}_i|_2} \right)^{\alpha_i} \right) |\nabla u|_2^2 + \underbrace{\left(\frac{s}{|\nabla \bar{u}_i|_2} \right)^{\alpha_i} P_i(u)}_{\geq 0 \text{ da } |\nabla u|_2 = |\nabla \bar{u}_i|_2} \\ &= s^2 - |\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} s^{\alpha_i} \end{aligned}$$

□

3.5 Folgerung

Sei $i = 1, 2$, $a \in \mathbb{R}$, $b, s > 0$ und $u^s := \frac{s}{|\nabla \bar{u}_i|_2} * \bar{u}_i$ sowie

$$L(u) := a |\nabla u|_2^2 - b \frac{\mu_i}{p_i} |u|_{p_i}^{p_i}.$$

Dann gelten $|\nabla u^s|_2 = s$ und

$$\inf_{\substack{u \in S(a_i) \\ |\nabla u|_2 = s}} L(u) = a s^2 - \frac{b}{\alpha_i} |\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} s^{\alpha_i} = L(u^s).$$

Insbesondere erhalten wir

$$\inf_{\substack{u \in S(a_i) \\ |\nabla u|_2 = s}} I_i(u) = \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{\alpha_i} |\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} s^{\alpha_i} = I_i(u^s).$$

Beweis: Wir beachten

$$L(u) = \left(a - \frac{b}{\alpha_i} \right) |\nabla u|_2^2 + \frac{b}{\alpha_i} P_i(u)$$

und folgern mit Lemma 3.4

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{u \in S(a_i) \\ |\nabla u|_2 = s}} L(u) &= \inf_{\substack{u \in S(a_i) \\ |\nabla u|_2 = s}} \left(a - \frac{b}{\alpha_i} \right) |\nabla u|_2^2 + \frac{b}{\alpha_i} P_i(u) \\ &= \left(a - \frac{b}{\alpha_i} \right) s^2 + \frac{b}{\alpha_i} \inf_{\substack{u \in S(a_i) \\ |\nabla u|_2 = s}} P_i(u) \\ &= \left(a - \frac{b}{\alpha_i} \right) s^2 + \frac{b}{\alpha_i} (s^2 - |\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} s^{\alpha_i}) \\ &= a s^2 - \frac{b}{\alpha_i} |\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} s^{\alpha_i}. \end{aligned}$$

Dass L das Infimum an der Stelle u^s annimmt folgt durch unmittelbares einsetzen und $P_i(\bar{u}_i) = 0$. □

Schließlich beweisen wir noch Lemma 2.10. Dazu vereinfachen wir die Notation, indem wir den Index i weglassen.

3.6 Lemma

Sei $2 < p < 2^*$ mit $p \neq 2 + \frac{4}{N}$, $\mu > 0$ und $a > 0$, dann existiert eine Lösung \bar{u} von

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = \mu |u|^{p-2} u \\ \int u^2 = a^2. \end{cases}$$

für ein $\lambda > 0$ und mit $I(u) = \frac{1}{2} |\nabla u|_2^2 - \frac{\mu}{p} |u|_p^p$ gilt

$$I(\bar{u}) = \frac{\alpha - 2}{2p} \left(\frac{a}{|w|_2} \right)^{\frac{2(p-\alpha)}{2-\alpha}} \mu^{\frac{2}{2-\alpha}} |w|_p^p$$

mit $\alpha = \frac{N}{2}(p-2)$ und w Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta w + w = |w|^{p-2} w \\ \max w = w(0) \end{cases}$$

ist.

Beweis: Es ist bekannt, dass es eine eindeutige positive Lösung w von

$$\begin{cases} -\Delta w + w = |w|^{p-2} w \\ \max w = w(0) \end{cases}$$

gibt. Damit definieren wir zunächst $v = \mu^{-1/(p-2)} w$ und erhalten

$$\begin{aligned} -\Delta v + v &= \mu^{-1/(p-2)} (-\Delta w + w) = \mu^{-1/(p-2)} |w|^{p-2} w \\ &= \mu^{-1/(p-2)} |\mu^{1/(p-2)} \mu^{-1/(p-2)} w|^{p-2} \mu^{1/(p-2)} \mu^{-1/(p-2)} w \\ &= |\mu^{1/(p-2)} v|^{p-2} v = \mu |v|^{p-2} v. \end{aligned}$$

Anschließend wählen wir $u(x) := \lambda^{1/(p-2)} v(\sqrt{\lambda} x)$. Mit $(\Delta u)(x) = \lambda^{1+1/(p-2)} (\Delta v)(\sqrt{\lambda} x)$ folgt

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + \lambda u(x) &= \lambda^{1+1/(p-2)} (-\Delta v(\sqrt{\lambda} x) + v(\sqrt{\lambda} x)) = \lambda^{1+1/(p-2)} \mu |v(\sqrt{\lambda} x)|^{p-2} v(\sqrt{\lambda} x) \\ &= \mu \lambda^{(p-2)/(p-2)} |v(\sqrt{\lambda} x)|^{p-2} \lambda^{1/(p-2)} v(\sqrt{\lambda} x) = \mu |u(x)|^{p-2} u(x). \end{aligned}$$

Mit $u(x) = \mu^{-1/(p-2)} \lambda^{1/(p-2)} w(\sqrt{\lambda} x)$ erhalten wir

$$|u|_2^2 = \int |u(x)|^2 dx = \mu^{-2/(p-2)} \lambda^{2/(p-2)} \int |w(\sqrt{\lambda} x)|^2 dx = \mu^{-2/(p-2)} \lambda^{(2-\alpha)/(p-2)} |w|_2^2,$$

wobei $\alpha := \frac{N}{2}(p-2)$ gilt. Wegen $p \neq 2 + \frac{4}{N}$ folgt $\alpha \neq 2$ und es existiert genau ein $\lambda_a > 0$, nämlich

$$\lambda_a = \left(\frac{a}{|w|_2} \right)^{\frac{4(p-2)}{4-N(p-2)}} \mu^{\frac{4}{4-N(p-2)}} = \left(\frac{a}{|w|_2} \right)^{\frac{2(p-2)}{2-\alpha}} \mu^{\frac{2}{2-\alpha}},$$

so dass $|u|_2^2 = a^2$ gilt. Damit ist $\bar{u}(x) = \mu^{-1/(p-2)} \lambda_a^{1/(p-2)} w(\sqrt{\lambda_a} x)$ eine Lösung von

$$\begin{cases} -\Delta u = -\lambda_a u + \mu |u|^{p-2} u \\ \int u^2 = a^2 \end{cases}.$$

Mit $(\nabla \bar{u})(u) = \lambda_a^{1/2+1/(p-2)} \mu^{-1/(p-2)} (\nabla w)(\sqrt{\lambda_a} x)$ folgt

$$|\nabla \bar{u}|_2^2 = \lambda_a^{1+2/(p-2)} \mu^{-2/(p-2)} \int |\nabla w(\sqrt{\lambda_a} x)|^2 dx = \lambda_a^{p/(p-2)-N/2} \mu^{-2/(p-2)} |\nabla w|_2^2$$

und mit

$$\frac{2(p-2)}{2-\alpha} \left(\frac{p}{p-2} - \frac{N}{2} \right) = \frac{2p-2\alpha}{2-\alpha} = \frac{2(p-\alpha)}{2-\alpha}$$

und

$$\frac{2}{2-\alpha} \left(\frac{p}{p-2} - \frac{N}{2} \right) - \frac{2}{p-2} = \frac{2}{2-\alpha} \cdot \frac{p-\alpha}{p-2} - \frac{4-2\alpha}{(2-\alpha)(p-2)} = \frac{2}{2-\alpha}$$

folgt

$$|\nabla \bar{u}|_2^2 = \left(\left(\frac{a}{|w|_2} \right)^{\frac{2(p-2)}{2-\alpha}} \mu^{\frac{2}{2-\alpha}} \right)^{p/(p-2)-N/2} \cdot \mu^{-2/(p-2)} |\nabla w|_2^2 = \left(\frac{a}{|w|_2} \right)^{\frac{2(p-\alpha)}{2-\alpha}} \mu^{\frac{2}{2-\alpha}} |\nabla w|_2^2.$$

Außerdem gilt

$$|\bar{u}|_p^p = \mu^{-p/(p-2)} \lambda_a^{p/(p-2)} \int |w(\sqrt{\lambda_a} x)|^p dx = \mu^{-p/(p-2)} \lambda_a^{p/(p-2)-N/2} |w|_p^p$$

und mit

$$\frac{2}{2-\alpha} \left(\frac{p}{p-2} - \frac{N}{2} \right) - \frac{p}{p-2} = \frac{2p-2\alpha-p(2-\alpha)}{(2-\alpha)(p-2)} = \frac{\alpha}{2-\alpha}$$

erhalten wir

$$|\bar{u}|_p^p = \left(\left(\frac{a}{|w|_2} \right)^{\frac{2(p-2)}{2-\alpha}} \mu^{\frac{2}{2-\alpha}} \right)^{p/(p-2)-N/2} \cdot \mu^{-p/(p-2)} |w|_p^p = \left(\frac{a}{|w|_2} \right)^{\frac{2(p-\alpha)}{2-\alpha}} \mu^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} |w|_p^p$$

Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned} I(\bar{u}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{a}{|w|_2} \right)^{\frac{2(p-\alpha)}{2-\alpha}} \mu^{\frac{2}{2-\alpha}} |\nabla w|_2^2 - \frac{\mu}{p} \left(\frac{a}{|w|_2} \right)^{\frac{2(p-\alpha)}{2-\alpha}} \mu^{\frac{\alpha}{2-\alpha}} |w|_p^p \\ &= \left(\frac{a}{|w|_2} \right)^{\frac{2(p-\alpha)}{2-\alpha}} \mu^{\frac{2}{2-\alpha}} \left(\frac{1}{2} |\nabla w|_2^2 - \frac{1}{p} |w|_p^p \right). \end{aligned}$$

Zuletzt nutzen wir die Pohozaev-Identität, um $|\nabla w|_2^2 = \frac{\alpha}{p} |w|_p^p$ zu erhalten. Dies eingesetzt, liefert

$$I(\bar{u}) = \frac{\alpha-2}{2p} \left(\frac{a}{|w|_2} \right)^{\frac{2(p-\alpha)}{2-\alpha}} \mu^{\frac{2}{2-\alpha}} |w|_p^p.$$

□

3.2 Eine Zerlegung von \mathcal{S} und die Pohozaev-Menge

Um das Funktional J_β besser zu verstehen, untersuchen wir die reellwertige Funktion

$$\Psi_u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Psi_u(t) = J_\beta(t * u) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} |\nabla u_i|_2^2 t^2 - \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i} \right) - \beta R(u) t^{\alpha_3 + \alpha_4}.$$

Ebenso spielt auch die reellwertige Funktion

$$\Phi_u : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Phi_u(t) = Q_\beta(t * u) = \sum_{i=1}^2 \left(|\nabla u_i|_2^2 t^2 - \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i} \right) - \beta(\alpha_3 + \alpha_4) R(u) t^{\alpha_3 + \alpha_4}$$

eine bedeutende Rolle, denn Ψ_u und Φ_u unterscheiden sich in den Koeffizienten nur durch positive Faktoren und erfüllen die Gleichung $\Phi_u(t) = t\Psi'_u(t)$. Ebenso gelten für Φ_u dieselben allgemeinen Eigenschaften, wie das Grenzverhalten bei 0 und ∞ oder die Existenz von kritischen Punkten.

Diese Funktionen sind einfach zu verstehen und können abhängig von $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 + \alpha_4$ und $\frac{\beta R(u)}{|\nabla u_1|_2^2 + |\nabla u_2|_2^2}$ leicht klassifiziert und skizziert werden. Im folgenden Lemma zeigen wir allgemein die Eigenschaften von Ψ_u , wobei ausnahmsweise in diesem Lemma die Variablen c_i und α_i nicht als die aus den Abschätzungen (1.4) und (1.6) und β_i nicht als die Schranken in den Resultaten zu verstehen sind.

3.7 Lemma

Seien $c_1, \dots, c_n, d_1, \dots, d_k > 0$ und $0 < \alpha_1, \dots, \alpha_n < 2 < \beta_1, \dots, \beta_k < \infty$. Dann gelten:

(i) Die Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = t^2 - \sum_{i=1}^n c_i t^{\alpha_i}$$

hat genau einen kritischen Punkt, nämlich ein globales Minimum und es gilt $f(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow \infty$.

(ii) Die Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = t^2 - \sum_{j=1}^k d_j t^{\beta_j}$$

hat genau einen kritischen Punkt, nämlich ein globales Maximum und es gilt $f(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$.

(iii) Die Funktion

$$f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(t) = t^2 - \sum_{i=1}^n c_i t^{\alpha_i} - \sum_{j=1}^k d_j t^{\beta_j}$$

hat höchstens zwei kritische Punkte. Entweder ein Minimum und ein Maximum oder einen Sattelpunkt oder f ist streng monoton fallend. Des Weiteren gilt $f(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$.

Beweis: Die Grenzwerte für $t \rightarrow \infty$ folgen unmittelbar aus der Wahl der Exponenten in allen drei Fällen. Ebenso gilt auch jeweils der Grenzwert $f(t) \rightarrow 0$ für $t \rightarrow 0$.

(i) Wir berechnen

$$f'(t) = 2t - \sum_{i=1}^n c_i t^{\alpha_i - 1} = t \underbrace{\left(2 - \sum_{i=1}^n c_i t^{\alpha_i - 2} \right)}_{=: f_2(t)}.$$

Aus $\alpha_i - 2 < 0$ folgern wir einerseits, dass f_2 streng monoton wachsend ist und $f_2(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow 0$, sowie $f_2(t) \rightarrow 2$ für $t \rightarrow \infty$. Daraus folgt, dass f_2 nur eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel, welches ein Minimum für f indiziert. Auf Grund der Grenzwerte von f folgt schließlich die Behauptung.

(ii) Analog zu (i).

(iii) Wir berechnen

$$f'(t) = 2t - \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i t^{\alpha_i - 1} - \sum_{j=1}^k d_j \beta_j t^{\beta_j - 1} = t \underbrace{\left(2 - \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i t^{\alpha_i - 2} - \sum_{j=1}^k d_j \beta_j t^{\beta_j - 2} \right)}_{=: f_2(t)}.$$

Für die Behauptung gilt es zu zeigen, dass f_2 zwei Nullstellen mit Vorzeichenwechsel oder eine Nullstelle ohne Vorzeichenwechsel hat oder negativ ist für alle $t > 0$.

Jedoch ist wegen $\alpha_i - 2 < 0 < \beta_j - 2$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, k$ klar, dass

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f_2(t) = -\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} f_2(t)$$

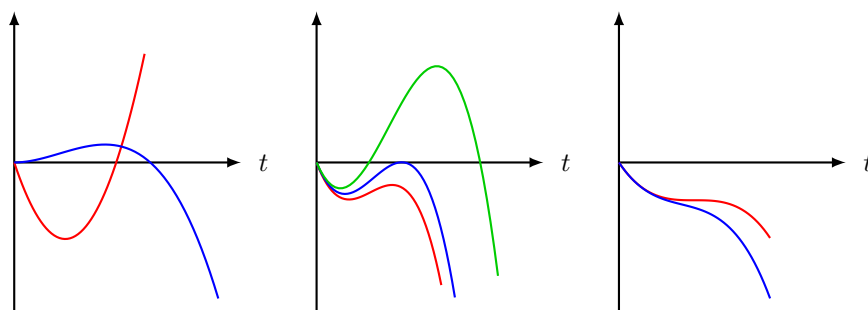
gelten. Somit reicht es auch zu zeigen, dass f_2 genau ein Maximum besitzt.

Wir berechnen

$$\begin{aligned} f_2'(t) &= \sum_{i=1}^n c_i \alpha_i (2 - \alpha_i) t^{\alpha_i - 3} - \sum_{j=1}^k d_j \beta_j (\beta_j - 2) t^{\beta_j - 3} \\ &= t^{-1} \underbrace{\left(\underbrace{\sum_{i=1}^n c_i \alpha_i (2 - \alpha_i) t^{\alpha_i - 2}}_{=: f_4(t)} - \underbrace{\sum_{j=1}^k d_j \beta_j (\beta_j - 2) t^{\beta_j - 2}}_{=: f_5(t)} \right)}_{=: f_3(t)}. \end{aligned}$$

Damit f_2 genau ein Maximum hat, reicht es zu zeigen, dass f_3 monoton fallend ist und genau eine Nullstelle hat. Wegen $\alpha_i - 2 < 0 < \beta_j - 2$ für alle $i = 1, \dots, n$ und $j = 1, \dots, k$ folgt, dass f_4 streng monoton fallend, f_5 streng monoton wachsend und f_3 damit streng monoton fallend ist. Zusätzlich folgt auch das Grenzverhalten $f_3(t) \rightarrow \infty$ für $t \rightarrow 0$ und $f_3(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$. Dies kombiniert ergibt, dass f_3 genau eine Nullstelle hat.

□

Abbildung 1: Skizze verschiedener Ψ_u 

Hier wird schon deutlich, dass das Verhalten von Ψ_u davon abhängt, ob die Exponenten α_1 , α_2 und $\alpha_3 + \alpha_4$ größer oder kleiner als 2 sind und dem Vorzeichen von β . Wir halten eine Konfiguration für α_1 , α_2 und $\alpha_3 + \alpha_4$ fest, wählen $\beta > 0$ und untersuchen das Verhalten der kritischen Punkte von Ψ_u für verschiedene $u \in \mathcal{S}$. Wenn Ψ_u ein Minimum an der Stelle $t_{u,min}$ und ein Maximum an der Stelle $t_{u,max}$ hat, dann gilt stets $t_{u,min} < t_{u,max}$. Ist zusätzlich β ausreichend nahe bei 0, so existiert ein $s > 0$, so dass $t_{u,min} < s < t_{u,max}$ für alle $u \in \mathcal{S}$. Diese Beobachtungen motiviert uns zur folgende Zerlegung von \mathcal{S} :

3.8 Definition

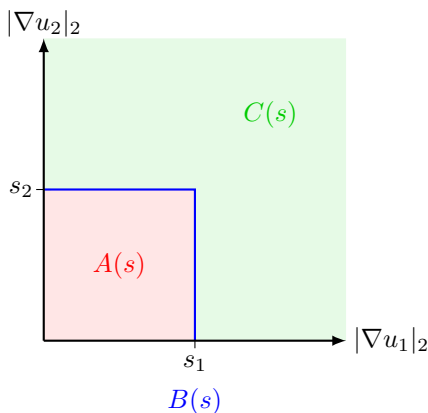
Sei $\mathbb{R}_+^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x, y > 0\}$. Für $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{R}_+^2$ definieren wir

$$A(s) = \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_1|_2 < s_1, |\nabla u_2|_2 < s_2\},$$

$$B(s) := \partial A(s_1, s_2) = \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_1|_2 = s_1, |\nabla u_2|_2 \leq s_2 \vee |\nabla u_1|_2 \leq s_1, |\nabla u_2|_2 = s_2\}$$

und

$$C(s) := \mathcal{S} \setminus \overline{A(s_1, s_2)} = \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_1|_2 > s_1 \vee |\nabla u_2|_2 > s_2\}.$$

Abbildung 2: Die Zerlegung von \mathcal{S} in die Mengen $A(s)$, $B(s)$ und $C(s)$ 

3.9 Bemerkung

Sei $s \in \mathbb{R}_+^2$. Zu jedem $u \in \mathcal{S}$ existiert genau ein $t_u > 0$, so dass $t_u * u \in B(s)$. Des Weiteren gilt $t * u \in A(s)$ für alle $0 < t < t_u$ und $t * u \in C(s)$ für $t > t_u$.

Die Pohozaev-Identität liefert uns, dass jeder kritische Punkt von (1.1) mit (1.2) in der Menge

$$V_\beta = \{u \in \mathcal{S} : Q_\beta(u) = 0\}$$

liegen muss. Wegen

$$\Psi'_u(1) = \Phi_u(1) = Q_\beta(u)$$

sehen wir, dass $u \in V_\beta$ genau dann gilt, wenn Ψ_u einen kritischen Punkt an der Stelle 1 hat. Mit dieser Formulierung erhalten wir eine natürliche Zerlegung von V_β in folgende disjunkte Mengen:

$$\begin{aligned} V_\beta^- &= \{u \in V_\beta : \Psi_u \text{ hat ein Minimum an der Stelle 1}\}, \\ V_\beta^0 &= \{u \in V_\beta : \Psi_u \text{ hat einen Sattelpunkt an der Stelle 1}\} \text{ und} \\ V_\beta^+ &= \{u \in V_\beta : \Psi_u \text{ hat ein Maximum an der Stelle 1}\}. \end{aligned}$$

3.10 Lemma

Falls ein $s \in \mathbb{R}_+^2$ existiert, so dass $\inf Q_\beta(B(s)) > 0$, dann gilt $V_\beta^- \subseteq A(s)$ und $V_\beta^+ \subseteq C(s)$.

Beweis: Sei $u \in V_\beta^-$, dann hat Ψ_u ein Minimum an der Stelle 1. Nach Bemerkung 3.9 sei $t_u > 0$, so dass $t_u * u \in B(s)$. Die Voraussetzung $\inf Q_\beta(B(s)) > 0$ liefert $\Psi'_u(t_u) = \frac{1}{t_u} Q_\beta(t_u * u) > 0$. Dies bedeutet, dass Ψ_u an der Stelle t_u steigt, wodurch $1 < t_u$ folgen muss. Die Bemerkung 3.9 besagt, dass $u = 1 * u \in A(s)$ gilt.

Der Beweis von $V_\beta^+ \subseteq C(s)$ folgt analog. \square

Die Pohozaev-Menge hat viele Eigenschaften, die hier nicht behandelt werden. Hauptsächlich nutzen wir ihre Struktur, um kritische Punkte von J_β zu finden. Da jedoch alle kritischen Punkte in der Pohozaev-Menge enthalten sind, kann man im Umkehrschluss auch die Nichtexistenz von kritischen Punkten erhalten, wenn die Pohozaev-Menge leer ist. Diese Idee führt uns zum Beweis von Lemma 2.8.

Beweis von Lemma 2.8: Eine Lösung von (1.1) ist ein kritischer Punkt des Funktionals

$$\tilde{J}_\beta(u) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} |\nabla u_i|_2^2 - \frac{\lambda_i}{2} |u_i|_2^2 - \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} \right) - \beta R(u)$$

für $u \in H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$. Dies liefert uns

$$\tilde{\Psi}_u(t) := \tilde{J}_\beta(t * u) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^2 |\lambda_i| \cdot |u_i|_2^2 \right) + \left(\sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} |\nabla u_i|_2^2 - \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} - \beta R(u) \right) t^2.$$

Betrachten wir zuerst ein $u \in \hat{S}$, dann folgt, dass der Leitkoeffizient von $\tilde{\Psi}_u$ positiv ist und somit hat $\tilde{\Psi}_u$ für $t > 0$ keinen kritischen Punkt. Durch die Reskalierung $\tilde{\Psi}_{s*u}(t) = \tilde{\Psi}_u(s \cdot t)$ folgt, dass für jedes $u \in \mathcal{S}$ die Funktion $\tilde{\Psi}_u$ keine kritischen Punkte hat. Weiter erhalten wir

$$\partial_t \tilde{J}_\beta(t * u) |_{t=1} = \tilde{\Psi}'_u(1) \neq 0.$$

Da jedoch jeder kritische Punkt von J_β die Pohozaev-Identität $\partial_t \tilde{J}_\beta(t * u) |_{t=1} = 0$ erfüllt, kann J_β keine kritischen Punkte haben und somit hat (1.1) keine Lösung in $H^1(\mathbb{R}^N) \times H^1(\mathbb{R}^N)$. \square

3.3 Hilfssätze

3.11 Lemma ([4], Lemma 3.2)

Sei $(u^n)_n \subseteq \mathcal{S}$ eine Palais-Smale-Folge von J eingeschränkt auf \mathcal{S} . Dann existieren $u \in \mathcal{H}$, $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ und eine Folge $((\lambda_1^n, \lambda_2^n))_n \subseteq \mathbb{R}^2$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge gelten:

- (i) Für $i = 1, 2$ gilt $u_i^n \rightharpoonup u_i$ schwach in $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ und $L^2(\mathbb{R}^N)$, $u_i^n \rightarrow u_i$ in $L^q(\mathbb{R}^N)$ für alle $q \in (2, 2^*)$.
- (ii) $(\lambda_1^n, \lambda_2^n) \rightarrow (\lambda_1, \lambda_2)$ in \mathbb{R}^2 .
- (iii) $J'(u_1^n, u_2^n) - \lambda_1^n(u_1^n, 0) - \lambda_2^n(0, u_2^n) \rightarrow 0$ in \mathcal{H}^* .
- (iv) (u_1, u_2) ist eine Lösung von (1.1) mit (λ_1, λ_2) aus (ii).

Gilt zusätzlich $\lambda_1 < 0$, dann folgt $u_1^n \rightarrow u_1$ in H . Ist $\lambda_2 < 0$, so gilt ebenso $u_2^n \rightarrow u_2$ in $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$.

Im Beweis von [4, Lemma 3.2] wird genutzt, dass für $i = 1, 2$ die Folgen $(\lambda_i^n)_n$ die Gleichung

$$\lambda_i^n = \frac{1}{|u_i^n|_2} (|\nabla u_i^n|_2^2 - \mu_i |u_i^n|_{p_i}^{p_i} - \beta r_i R(u_1^n, u_2^n)) \quad (3.1)$$

mit der Palais-Smale-Folge $\{(u_1^n, u_2^n)\} \subseteq \mathcal{S}$ erfüllen.

3.12 Lemma ([4] Lemma 3.3) (i) Sei $q \in \left(1, \frac{N}{N-2}\right]$ für $N \geq 3$ und $q \in (1, \infty)$ für $N = 1, 2$.

Sei $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ eine glatte Funktion, die $-\Delta u \geq 0$ auf \mathbb{R}^N erfüllt. Dann gilt $u \equiv 0$.

- (ii) Für $1 < q < 1 + \frac{2}{N-2}$ hat die Ungleichung $-\Delta u \geq u^q$ keine positive, klassische Lösung auf \mathbb{R}^N .

3.13 Lemma ([4], Lemma 3.4)

Sei $N \leq 4$ oder $N \geq 5$ und $p_1 < 2 + \frac{2}{N-2}$. Ist $u \in \mathcal{H}$ eine Lösung von (1.1) mit $u_1 \not\geq 0$ und $u_2 \geq 0$, dann gilt $\lambda_1 < 0$. Ist $(u_1, u_2) \in E$ eine Lösung von (1.1) mit $u_2 \not\geq 0$ und $u_1 \geq 0$, dann gilt $\lambda_2 < 0$.

3.14 Lemma ([4], Lemma 5.5)

Sei $2 < p_1, p_2, r_1 + r_2 < 2^*$ gegeben. Hat J_β eine Minimax-Struktur, dann gibt es eine Palais-Smale-Folge $\{u^n\} \subseteq \mathcal{S}$ für J_β zum Minimax-Niveau, so dass $(u_i^n)^- \rightarrow 0$ in $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ für $i = 1, 2$ und $Q_\beta(u^n) \rightarrow 0$ gelten.

Lemma 3.14 ist in [4] nur für $2 < p_1 < 2 + \frac{4}{N} < p_2, r_1 + r_2 < 2^*$ und $r_2 > 2$ formuliert worden, doch der Beweis benötigt diese Einschränkungen an die Parameter nicht. Die Beweisidee besteht im Kern darin, das Funktional J_β zu \tilde{J}_β um einen Parameter zu erweitern, welches durch die Wirkung $*$ auf das zweite Argument im Sinne $\tilde{J}_\beta(s, u) := J_\beta(s * u)$ wirkt. Entsprechend wurde die Klasse von Kurven der Minimax-Struktur im Bildbereich um den Parameter so erweitert, dass \tilde{J}_β ebenfalls eine Minimax-Struktur zum selben Niveau besitzt. Dies erlaubt es, mit den geforderten Eigenschaften spezielle Palais-Smale-Folgen für \tilde{J}_β zu finden, die eine Palais-Smale-Folgen von J_β liefert. Mit analogen Argumenten wurde diese Methode in [4, Lemma 3.6] verwendet, um $Q_\beta(u^n) \rightarrow 0$ für eine durch ein zweidimensionales Linking erhaltene Palais-Smale-Folge zu erhalten.

4 Lokales Minimum für $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$

Um ein lokales Minimum von J_β zu finden, suchen wir zuerst ein $s \in \mathbb{R}_+^2$, so dass

$$\inf_{A(s)} J_\beta < \inf_{B(s)} J_\beta \quad (4.1)$$

gilt. Motiviert ist diese Idee dadurch, dass wir mit der Ungleichung (1.6) sehen, dass der Wert des Funktionals R auf einer beschränkten Menge, wie $A(s)$, beschränkt ist. Somit unterscheidet sich $J_\beta = J_0 + \beta R$ von J_0 auf $A(s)$ nur wenig, falls β nahe bei 0 ist.

Im Fall $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ wissen wir, dass J_0 ein globales Minimum besitzt und mit dieser Idee folgern wir, dass J_β zumindest ein lokales Minimum für kleine $\beta > 0$ besitzt. Zwar brauchen wir dabei $r_1 + r_2$ nicht einzuschränken, aber die Schranken für β hängen dennoch von der Wahl von $r_1 + r_2$ ab.

4.1 Definition

Sei $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ oder $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$. Dann definieren wir

$$\beta_1 := \sup_{s \in \mathbb{R}_+^2} \inf_{\substack{u \in B(s) \\ R(u) \neq 0}} \frac{Q_0(u)}{(\alpha_3 + \alpha_4)R(u)}.$$

Betrachten wir $f(r) := \inf_{B(r,r)} Q_0$ für $r > 0$, dann gilt $f(r) > 0$ nach Lemma 3.4 falls $\alpha_1, \alpha_2 > 2$ und r ausreichend klein oder falls $\alpha_1, \alpha_2 < 2$ und r ausreichend groß ist. In beiden Fällen erhalten wir ein $r > 0$, so dass $\inf_{B(r,r)} Q_0 > 0$ und damit $\beta_1 > 0$ gilt.

4.2 Bemerkung

Sei X eine beliebige Menge und $S, T : X \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen, so dass $T \gneq 0$ und

$$\hat{b} = \inf_{\substack{x \in X \\ T(x) \neq 0}} \frac{S(x)}{T(x)} > 0$$

gelten. In dieser Situation wollen wir für $b < \hat{b}$ folgern können, dass $\inf_{x \in X} S(x) - bT(x) > 0$ gilt. Dazu ist es notwendig $\inf S(X) > 0$ zu fordern, was gezeigt werden muss. Wir wollen diese Umformung in der Situation $S = J_0 - c$ oder $S = Q_0$ und $T = dR$ für irgendwelche Konstanten $c, d \in \mathbb{R}$ und X einer Teilmenge von \mathcal{S} anwenden. In allen Situationen, bei denen wir die Folgerung anwenden werden, ist die Menge X stets so gewählt, dass wir

$$\inf S(X) = 0 \Rightarrow \exists x_0 \in X : S(x_0) = 0$$

erhalten.

Im Fall $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ folgt mit Lemma 3.4

$$\inf_{u \in B(s)} Q_0(u) = 0 \Leftrightarrow s = (|\nabla \bar{u}_1|_2, |\nabla \bar{u}_2|_2) =: \bar{s}.$$

Des Weiteren ist $\bar{u} \in B(\bar{s})$, so dass wir $Q_0(\bar{u}) = \inf Q_0(B(\bar{s}))$ erhalten. Damit ergibt sich schließlich

$$\inf_{\substack{u \in B(s) \\ R(u) \neq 0}} \frac{Q_0(u)}{(\alpha_3 + \alpha_4)R(u)} > 0 \Leftrightarrow \inf_{u \in B(s)} Q_0(u) > 0.$$

Analog lassen sich auch alle zukünftigen Anwendungen mit Folgerung 3.5 und der Wahl der Menge begründen.

Die vorige Bemerkung zeigt, dass wir aus $\beta < \beta_1$ ein $s \in \mathbb{R}_+^2$ erhalten, so dass $\inf Q_\beta(B(s)) > 0$ gilt. Dies ermöglicht auch die Werte von J_β über $A(s)$ und $B(s)$ zu kontrollieren, wie wir im folgenden Lemma sehen.

4.3 Lemma

Sei A eine offene und beschränkte Menge und $B = \partial A$ mit den Eigenschaften

- $\inf Q_\beta(B) > 0$ und
- für alle $u \in B$ und alle $t \in (0, 1)$ gilt $t * u \in A$.

Dann folgt

$$\inf_A J_\beta < \inf_B J_\beta.$$

Beweis: Wir zeigen, dass $C, \varepsilon > 0$ existieren, so dass für alle $u \in B$ gilt

$$J_\beta(u) \geq J_\beta((1 - \varepsilon) * u) + C.$$

Zuerst definieren wir $D := \inf Q_\beta(B) > 0$. Sei $u \in B$ fest und berechne

$$\Psi'_u(1) = \partial_t J_\beta(t * u) |_{t=1} = Q_\beta(u) \geq D.$$

Behauptung:

Es existiert $\varepsilon > 0$, so dass $\Psi'_u |_{[1-\varepsilon, 1]} \geq \frac{1}{2}D$ für alle $u \in B$.

Beweis der Behauptung: Angenommen, die Behauptung wäre falsch. Dann existiert eine Folge $(u^n)_n \subseteq B$ und eine Folge $(t_n)_n \subseteq (0, 1]$ mit $t_n \in [1 - 1/n, 1]$ und $\Psi'_{u^n}(t_n) < \frac{1}{2}D$. Der Mittelwertsatz liefert $\tau_n \in [t_n, 1]$, so dass

$$\Psi''_{u^n}(\tau_n) = \frac{\Psi'_{u^n}(1) - \Psi'_{u^n}(t_n)}{1 - t_n} \geq \frac{\frac{1}{2}D}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2}Dn.$$

Aus $t_n \in [1 - 1/n, 1]$ folgern wir zusätzlich $\tau_n \rightarrow 1$.

Da B beschränkt ist, existiert ein $\rho > 0$, so dass für alle $u \in B$ gilt $|\nabla u_i|_2 \leq \rho$ für $i = 1, 2$. Mit der Hölder- und Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung, siehe (1.4) und (1.6), folgt weiter die Abschätzung

$$\begin{aligned} \Psi''_u(t) &= \sum_{i=1}^2 |\nabla u_i|_2^2 - \alpha_i(\alpha_i - 1) \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i - 2} - \beta(\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_3 + \alpha_4 - 1) R(u) t^{\alpha_3 + \alpha_4 - 2} \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \rho^2 + \alpha_i |\alpha_i - 1| C_i \rho^{\alpha_i} t^{\alpha_i - 2} + \beta(\alpha_3 + \alpha_4)(\alpha_3 + \alpha_4 - 1) \rho^{\alpha_3 + \alpha_4} t^{\alpha_3 + \alpha_4 - 2} =: g(t). \end{aligned}$$

Da g unabhängig von $u \in B$ und stetig ist, folgt

$$\frac{1}{2}Dn \leq \Psi''_{u^n}(\tau_n) \leq g(\tau_n) \rightarrow g(1) < \infty.$$

Dies ist ein Widerspruch und damit gilt die Behauptung.

Nun definieren wir $C := \frac{1}{2}\varepsilon D$, was unabhängig von der Wahl von $u \in B$ ist. Damit gilt

$$\begin{aligned} J_\beta(u) &= \Psi_u(1) = \Psi_u(1 - \varepsilon) + \int_{1-\varepsilon}^1 \underbrace{\Psi'_u(s)}_{\geq \frac{1}{2}D} ds \geq J_\beta((1 - \varepsilon) * u) + \frac{1}{2}\varepsilon D \\ &= J_\beta((1 - \varepsilon) * u) + C. \end{aligned}$$

Zusammen mit der Voraussetzung $(1 - \varepsilon) * u \in A$ für alle $u \in B$ erhalten wir

$$\inf J_\beta(B) \geq \inf J_\beta(A) + C > \inf J_\beta(A).$$

□

4.4 Bemerkung

Sei $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$. Für jeweils $i = 1, 2$ sei $f_i : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f_i(s) = \inf_{\substack{u_i \in S(a_i) \\ |\nabla u_i|_2 = s}} P_i(u_i)$$

und $g_i : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$g_i(s) = \inf_{\substack{u_i \in S(a_i) \\ |\nabla u_i|_2 = s}} I_i(u_i).$$

Lemma 3.4 liefert ein eindeutiges $\bar{s}_i > 0$, so dass $f_i(\bar{s}_i) = -\min f_i(0, \infty)$. Wir definieren weiter $\hat{s}_i(\delta) := (\inf g_i^{-1}(-\infty, -\delta])^2$ für $\delta \geq 0$. Nach Folgerung 3.5 gilt $\hat{s}_i(\delta) > 0$ für $\delta \in (0, |m_i|)$, $\hat{s}_i(0) = 0$, $\hat{s}_i(|m_i|) = |\nabla \bar{u}_i|_2$ und $s_i(\delta) = \infty$ falls $\delta > |m_i|$.

Da wir für $\beta < 0$ nicht Lemma 3.13 anwenden können, müssen wir für die starke Konvergenz einer Palais-Smale-Folge zeigen, dass die Folgen der Lagrange-Multiplikatoren $(\lambda_1^n)_n$ und $(\lambda_2^n)_n$ einen negativen Grenzwert haben. Des Weiteren muss das Niveau der Minimalfolge sich von m_1 und m_2 unterscheiden. In der folgenden Definition formulieren wir eine untere Schranke für β , wodurch wir die gewünschten Eigenschaften erhalten.

4.5 Definition

Sei $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ und $\bar{s}_i, \hat{s}_i(\delta)$ für $i = 1, 2$ aus Bemerkung 4.4. Definiere $\bar{s} := (\bar{s}_1, \bar{s}_2) \in \mathbb{R}_+^2$ und für $i = 1, 2$ weiter

$$\beta_0 := \inf_{\delta \geq 0} \max \left\{ \inf_{\substack{u \in \mathcal{S} \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - \min\{m_1, m_2\} + \delta}{R(u)}, -\frac{p_1 \delta + (p_1 - 2)\hat{s}_1(\delta)}{r_1 \sup R(A(\bar{s}))}, -\frac{p_2 \delta + (p_2 - 2)\hat{s}_2(\delta)}{r_2 \sup R(A(\bar{s}))} \right\}.$$

Wegen $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ gelten $m_1, m_2 < 0$ und $\inf J_0(\mathcal{S}) - \min\{m_1, m_2\} = \max\{m_1, m_2\} < 0$ woraus wir $\beta_0 < 0$ erhalten.

Das nächste Lemma zeigt, dass wir aus einer geeigneten Minimalfolge eine Lösung von (1.1) mit (1.2) erhalten können. Die Argumentation hierbei überwiegend identisch zum Beweis von [4, Theorem 2.1].

4.6 Lemma

Sei $\{v^n\} \subseteq \mathcal{S}$ eine beschränkte Minimalfolge von J_β , so dass

$$m(a_1, a_2) := \lim_{n \rightarrow \infty} J_\beta(v^n) < \min\{0, m_1, m_2\}, \quad (4.2)$$

dann existiert eine beschränkte Palais-Smale-Folge $\{u_n\} \subseteq \mathcal{S}$ von J_β mit $u_n - v_n \rightarrow 0$ und $u_n \rightarrow u$ in \mathcal{H} . Weiter gilt $u_1, u_2 > 0$ und u ist eine Lösung von (1.1).

Beweis: Ohne Einschränkung können wir $v_i^n \geq 0$ für $i = 1, 2$ annehmen. Nach Ekelands Variationsprinzip existiert eine beschränkte Minimalfolge $\{u_n\}$, welches auch eine Palais-Smale-Folge

von J_β auf \mathcal{S} ist mit $u^n - v^n \rightarrow 0$ in \mathcal{H} und insbesondere $u_i^n - v_i^n \rightarrow 0$ in $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ für $i = 1, 2$. Daher existiert ein $u \in \mathcal{H}$, so dass $u^n \rightharpoonup u$ schwach in \mathcal{H} mit $u_i \geq 0$ für $i = 1, 2$.

Mit Lemma 3.11 ist u eine Lösung von (1.1). Um (1.2) zu erfüllen, bleibt noch die starke Konvergenz $u^n \rightarrow u$ in \mathcal{H} zu zeigen.

Fall 1: $u_1 = 0 = u_2$

Dann gelten

$$|u_1^n|_{p_1}^{p_1} \rightarrow 0, |u_2^n|_{p_2}^{p_2} \rightarrow 0 \text{ und } \int |u_1^n|^{r_1} |u_2^n|^{r_2} \rightarrow 0.$$

Dies liefert $m(a_1, a_2) = \lim J_\beta(v^n) = \lim J_\beta(u^n) \geq 0$ im Widerspruch zu (4.2).

Fall 2: $u_1 \neq 0, u_2 = 0$

Nach Lemma 3.11 ist $(u_1, 0)$ eine Lösung von (1.1) und damit ist u_1 eine Lösung von

$$-\Delta u = \lambda_1 u_1 + \mu_1 |u_1|^{p_1-2} u_1.$$

Damit folgt $u_1 > 0$ und Lemma 3.13 liefert $\lambda_1 < 0$. Mit Lemma 3.11 erhalten wir damit $u_1^n \rightarrow u$ in $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ und $|u_1|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_1^n|_2 = a_1$. Insbesondere ist $u_1 = \bar{u}_1$. Dann folgt

$$\liminf J_\beta(u^n) \geq \frac{1}{2} |\nabla u_1|_2^2 - \frac{\mu_1}{p_1} |u_1|_{p_1}^{p_1} = I_1(\bar{u}_1)$$

im Widerspruch zu (4.2).

Fall 3: $u_1 = 0, u_2 \neq 0$

Analog zu Fall 2.

Fall 4: $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$

Dieser Fall muss notwendigerweise eintreten. Das strikte Maximumsprinzip liefert schließlich $u_1, u_2 > 0$. \square

Beweis von Satz 2.5(i): Sei zunächst $0 \leq \beta < \beta_1$. Nach Definition von β_1 und Bemerkung 4.2 existiert ein $s \in \mathbb{R}_+^2$, so dass $\inf Q_\beta(B(s)) > 0$. Des Weiteren erfüllen $A(s)$ und $B(s)$ die Anforderungen an A und B aus Lemma 4.3. Daher können wir eine Minimalfolge in $(u^n)_n$ in $A(s)$ betrachten. Weiter erkennen wir, dass $\Psi'_u(t) \leq 0$ für alle $t \in (0, 1]$ gilt. Somit folgen $\bar{u} \in A(s)$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\beta(u^n) = \inf_{A(s)} J_\beta \leq J_\beta(\bar{u}) \leq J_0(\bar{u}) = m_1 + m_2 < \min\{0, m_1, m_2\}.$$

Wir können also Lemma 4.6 anwenden, um eine geeignete beschränkte Palais-Smale-Folge $\{u^n\} \subseteq \mathcal{S}$ zu erhalten. Wenden wir nun Lemma 3.11 an, dann reicht es zu zeigen, dass der Grenzwert der Folgen $\{\lambda_i^n\} \subseteq \mathbb{R}$ negativ ist, was wir allerdings mit Lemma 3.13 erhalten. Dies liefert die starke Konvergenz von $\{u^n\}$ gegen u in L^2 und damit ist u eine Lösung von (1.1) mit (1.2).

Nun betrachten wir den Fall $\beta_0 < \beta < 0$. Seien \bar{s}_i für $i = 1, 2$ aus Bemerkung 4.4 und $\bar{s}^\varepsilon := (\bar{s}_1 + \varepsilon, \bar{s}_2 + \varepsilon)$. Wegen $\beta < 0$ erhalten wir

$$\inf Q_\beta(A(\bar{s}^\varepsilon)) \geq \inf Q_0(A(\bar{s}^\varepsilon)) > 0$$

für alle $\beta < 0$ und alle $\varepsilon > 0$, so dass Lemma 4.3 uns eine Minimalfolge im Abschluss von $A(\bar{s}^0)$ liefert. Ohne Einschränkung können wir davon ausgehen, dass die Minimalfolge sogar in $A(\bar{s}^0)$ liegt. Wir wählen $\tilde{\beta} \in (\beta_0, \beta)$. Nach Wahl von β_0 existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\inf_{\substack{u \in \mathcal{S} \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - \min\{m_1, m_2\} + \delta}{R(u)} < \tilde{\beta}$$

und damit

$$\inf_{u \in \mathcal{S}} J_{\tilde{\beta}}(u) \leq \inf_{\substack{u \in \mathcal{S} \\ R(u) \neq 0}} J_{\tilde{\beta}}(u) < \min\{m_1, m_2\} - \delta < \min\{0, m_1, m_2\}. \quad (4.3)$$

Da $J_{\beta} \leq J_{\tilde{\beta}}$, können wir also wieder Lemma 4.6 und anschließend Lemma 3.11 anwenden. Für die starke Konvergenz in $L^2(\mathbb{R}^N)$ reicht es zu zeigen, dass wir auch Lemma 3.13 anwenden können. Dazu betrachten wir, dass die Ungleichung (4.3) uns auch

$$I_i(u_i^n) \leq -\delta \quad (4.4)$$

und dies mit Bemerkung 4.4

$$|\nabla u_i^n|_2^2 \geq \hat{s}_i(\delta) \quad (4.5)$$

liefert. Des Weiteren erhalten wir

$$-(p_i \delta + (p_i - 2)\hat{s}_i(\delta)) - r_i \tilde{\beta} \sup R(A(\bar{s})) < 0 \text{ für } i = 1, 2 \quad (4.6)$$

aus der Ungleichung $\beta_0 < \tilde{\beta}$. Wenden wir die Abschätzungen (4.4), (4.5) und (4.6) auf die Darstellung (3.1) an, dann erhalten wir

$$\begin{aligned} a_i \lambda_i^n &= p_i I_i(u_i^n) - (p_i - 2) |\nabla u_i^n|_2^2 - r_i \beta R(u^n) \\ &\leq -p_i \delta - (p_i - 2)\hat{s}_i(\delta) - r_i \beta \sup R(A(\bar{s})) \\ &= -(p_i \delta + (p_i - 2)\hat{s}_i(\delta)) - r_i \tilde{\beta} \sup R(A(\bar{s})) - (\beta - \tilde{\beta}) \sup R(A(\bar{s})) \\ &\leq -(\beta - \tilde{\beta}) r_i \sup R(A(\bar{s})) < 0. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass der Grenzwert von $\{\lambda_i^n\}$ negativ ist und deswegen Lemma 3.13 anwenden können. \square

5 Mountain-Pass für $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$

Sei $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$, dann liefert Satz 2.5(i) ein lokales Minimum des Funktionals J_{β} für $\beta < \beta_1$. Gilt zusätzlich $2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$, so ist an der Funktion $\Psi_{\bar{u}}$ zu erkennen, dass J_{β} für $\beta > 0$ beliebig negative Werte an Stellen mit beliebig großer Gradientennorm annehmen kann. Zusammen erhalten wir daraus eine Mountain-Pass-Struktur, die uns eine beschränkte Palais-Smale-Folge liefert. Allerdings benötigen die Sätze für die Konvergenz, dass das Niveau der Mountain-Pass-Struktur von 0 verschieden ist, was nicht für alle $\beta < \beta_1$ klar ist. Daher werden wir die Schranke β_2 so definieren, dass diese Voraussetzung erfüllt ist. Obwohl nicht klar ist welches der Schranken β_1 und β_2 schärfer ist, ist dennoch leicht zu sehen, dass für $\beta < \beta_2$ auch ein lokales Minimum vorhanden sein muss. Dies induziert dann ebenfalls eine Mountain-Pass-Struktur. Schließlich wird die Beschränktheit und Konvergenz der Palais-Smale-Folge mit denselben Argumenten wie auch beim Beweis von [4, Theorem 2.2] begründet.

5.1 Definition

Sei $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ oder $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$. Dann definieren wir

$$\beta_2 := \sup_{s \in \mathbb{R}_+^2} \inf_{\substack{u \in B(s) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u)}{R(u)}.$$

Analog zu $\beta_1 > 0$ folgt $\beta_2 > 0$ als Konsequenz von Folgerung 3.5.

5.2 Lemma

Sei $0 < \beta < \beta_2$ und $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ oder $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$, dann gibt es ein $s \in \mathbb{R}_+^2$ und $t_1, t_2 > 0$, so dass $t_1 * \bar{u} \in A(s)$ und $t_2 * \bar{u} \in C(s)$ mit

$$\max\{J_\beta(t_1 * \bar{u}), J_\beta(t_2 * \bar{u})\} < 0 < \inf J_\beta(B(s))$$

existieren.

Beweis: Nach Wahl von β_2 und Bemerkung 4.2 gibt es ein $s \in \mathbb{R}_+^2$, so dass $\inf J_\beta(B(s)) > 0$. Für $t_s > 0$ mit $t_s * \bar{u} \in B(s)$ folgt

$$\Psi_{\bar{u}}(t_s) = J_\beta(t_s * \bar{u}) \geq \inf J_\beta(B(s)) > 0.$$

Die Voraussetzung an die Parameter p_1, p_2 und $r_1 + r_2$ liefern $\Psi_{\bar{u}} \nearrow 0$ für $t \searrow 0$ und $\Psi_{\bar{u}}(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$. Hieraus erhalten wir $t_1 < t_s < t_2$ mit

$$\max\{J_\beta(t_1 \bar{u}), J_\beta(t_2 * \bar{u})\} = \max\{\Psi_{\bar{u}}(t_1), \Psi_{\bar{u}}(t_2)\} < 0.$$

Schließlich liefert Bemerkung 3.9, dass $t_1 * \bar{u} \in A(s)$ und $t_2 * \bar{u} \in C(s)$ gelten. \square

5.3 Lemma

Sei $s \in \mathbb{R}_+^2$ gegeben und $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ stetig bezüglich der \mathcal{H} -Norm. Falls $\gamma(0) \in A(s)$ und $\gamma(1) \in C(s)$ gelten, dann existiert ein $\hat{t} \in [0, 1]$, so dass $\gamma(\hat{t}) \in B(s)$ folgt.

Beweis: Wir definieren die stetigen Funktionen $f_i(t) := |\nabla \gamma_i(t)|_2$ für $i = 1, 2$. Dann liefert $\gamma(0) \in A(s)$ die Bedingungen $f_1(0) < s_1$ und $f_2(0) < s_2$, während $\gamma(1) \in C(s)$ besagt, dass $f_1(1) > s_1$ oder $f_2(1) > s_2$ gelten muss. Ohne Einschränkung nehmen wir an, dass $f_1(1) > s_1$ gilt. Dann liefert der Zwischenwertsatz die Existenz von einem $\tilde{t} \in (0, 1)$ mit $f_1(\tilde{t}) = s_1$. Wegen der Stetigkeit von f_1 können wir annehmen, dass \tilde{t} die kleinste s_1 -Stelle von f_1 ist. Wenn bereits $f_2(\tilde{t}) \leq s_2$ gilt, dann ist $\gamma(\tilde{t}) \in B(s)$ erfüllt. Andernfalls wenden wir den Zwischenwertsatz auf f_2 an und erhalten ein $\hat{t} \in (0, \tilde{t})$, so dass $f_2(\hat{t}) = s_2$. Nach Wahl von \hat{t} gilt $f_1(\hat{t}) < s_1$, wodurch $\gamma(\hat{t}) \in B(s)$ erfüllt ist. \square

Wir halten ab jetzt das $s \in \mathbb{R}_+^2$ aus Lemma 5.2 fest und definieren

$$\Gamma := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S} : \gamma \text{ stetig mit } \gamma(0) \in A(s), \gamma(1) \in C(s) \text{ und } J_\beta(\gamma(0)), J_\beta(\gamma(1)) < 0\}.$$

Ist t_1, t_2 aus Lemma 5.2, dann erfüllt

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}, \quad \gamma(t) := ((1-t) \cdot t_1 + t \cdot t_2) * \bar{u}$$

die Bedingung

$$\max\{J_\beta(\gamma(0)), J_\beta(\gamma(1))\} = \max\{J_\beta(t_1 * \bar{u}), J_\beta(t_2 * \bar{u})\} < 0$$

und ist nach Lemma 3.2 stetig. Insbesondere folgt $\gamma \in \Gamma$ und damit ist Γ nicht leer. Des Weiteren zeigt Lemma 5.3, dass jeder stetige Weg von $A(s)$ nach $C(s)$ die Menge $B(s)$ schneiden muss. Dies bedeutet, dass eine Mountain-Pass-Struktur mit dem Niveau

$$\hat{c}(\beta) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J_\beta(\gamma(t))$$

vorliegt.

5.4 Bemerkung

Seien $s, \tilde{s} \in \mathbb{R}_+^2$ gegeben, so dass $\inf J_\beta(B(s)), \inf J_\beta(B(\tilde{s})) > 0$ gilt. Falls $\Psi_u(1) < 0$, dann gilt $\Psi_u(t) < 0$ auf entweder $(0, 1)$ oder $(1, \infty)$. Dies liefert unmittelbar

$$J_\beta^{-1}(-\infty, 0) \cap A(s) = J_\beta^{-1}(-\infty, 0) \cap A(\tilde{s}) \text{ und } J_\beta^{-1}(-\infty, 0) \cap C(s) = J_\beta^{-1}(-\infty, 0) \cap C(\tilde{s}).$$

Insbesondere sind Γ und $\hat{c}(\beta)$ für s und \tilde{s} identisch und es gelten

$$\hat{c}(\beta) \geq \inf J_\beta(B(s)) \text{ und } \hat{c}(\beta) \geq \inf J_\beta(B(\tilde{s})).$$

Um später die Konvergenz einer geeigneten Palais-Smale-Folge zu gewährleisten, fordern wir, dass $\hat{c}(\beta)$ sich von 0, m_1 und m_2 unterscheidet. Dies ist bereits erfüllt, denn aus $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ folgt $m_1, m_2 < 0$ und die Wahl von β und s liefern

$$\hat{c}(\beta) > \inf J_\beta(B(s)) > 0 > m_1, m_2.$$

Das nächste Lemma wurde in [4, Lemma 5.7] unter stärkeren Voraussetzungen an $p_1, p_2, r_1 + r_2$ bewiesen. Wir haben das Kernargument aufgegriffen und es so formuliert, dass es für allgemeinere $p_1, p_2, r_1 + r_2$ gültig ist.

5.5 Lemma

Sei $2 < p_1, p_2, r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N}$ und $\beta \geq 0$, dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $J_\beta - \frac{1-\varepsilon}{2}Q_\beta$ koerziv bezüglich der Gradientennorm ist. Für eine Folge $(u^n)_n \subseteq \mathcal{S}$, so dass $(J_\beta(u^n))_n$ konvergiert und $Q_\beta(u^n) \rightarrow 0$ gilt, folgt insbesondere die Beschränktheit bezüglich der Norm auf \mathcal{H} .

Beweis: Für alle $\varepsilon > 0$ und $u \in \mathcal{S}$ gilt

$$\begin{aligned} J_\beta(u) &= J_\beta(u) - \frac{1-\varepsilon}{2}Q_\beta(u) + \frac{1-\varepsilon}{2}Q_\beta(u) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_i|_2^2 + a_i(\varepsilon) |u_i|_{p_i}^{p_i} \right) + \beta b(\varepsilon) R(u) + \frac{1-\varepsilon}{2}Q_\beta(u) \end{aligned}$$

mit

$$a_i(\varepsilon) = \frac{\mu_i}{2p_i} ((\alpha_i - 2) - \varepsilon \alpha_i) \text{ und } b(\varepsilon) = \frac{((\alpha_3 + \alpha_4) - 2) - \varepsilon(\alpha_3 + \alpha_4)}{2}.$$

Dies liefert die Darstellung

$$J_\beta(u) - \frac{1-\varepsilon}{2}Q_\beta(u) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\varepsilon}{2} |\nabla u_i|_2^2 + a_i(\varepsilon) |u_i|_{p_i}^{p_i} \right) + \beta b(\varepsilon) R(u). \quad (5.1)$$

Falls $\alpha_1 \leq 2$ gilt, dann ist $a_1(\varepsilon) < 0$ für alle $\varepsilon > 0$ negativ, während $\alpha_1 > 2$ uns erlaubt, ein kleines $\tilde{\varepsilon} > 0$ zu wählen, so dass $a_1(\varepsilon) > 0$ für alle $0 < \varepsilon < \tilde{\varepsilon}$ gilt. Analog verhält es sich mit α_2 und $a_2(\varepsilon)$ bzw $\alpha_3 + \alpha_4$ und $b(\varepsilon)$.

Dies bedeutet, dass die Summanden $|u_1|_{p_1}^{p_1}$, $|u_2|_{p_2}^{p_2}$ und $R(u)$ entweder negative Koeffizienten haben oder auf Grund der Hölder- bzw Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung, siehe (1.4) und (1.6), gegenüber dem quadratischen Term zu vernachlässigen sind, wenn die Gradientennorm von u groß ist. Dies bedeutet, dass durch die Wahl eines ausreichend kleinen $\varepsilon > 0$ das Funktional $J_\beta - \frac{1-\varepsilon}{2}Q_\beta$ koerziv bezüglich der Gradientennorm ist.

Sei nun $(u^n)_n \subseteq \mathcal{S}$ eine Folge, so dass $(J_\beta(u^n))_n$ konvergiert und $Q_\beta(u^n) \rightarrow 0$ gilt. Die Konvergenz von $(J_\beta(u^n) - \frac{1-\varepsilon}{2}Q_\beta(u^n))_n$ und die Koerzivitat von $J_\beta - \frac{1-\varepsilon}{2}Q_\beta$ bezüglich der Gradientennorm liefert schließlich die Beschranktheit von $(u^n)_n$ bezüglich der Gradientennorm. Da $(u^n)_n$ in \mathcal{S} enthalten ist, ist dies gleichbedeutend mit der Beschranktheit bezüglich der Norm auf \mathcal{H} . \square

Schließlich folgt aus einer geeigneten Palais-Smale-Folge, dass diese gegen eine Lösung von (1.1) mit (1.2) konvergiert.

5.6 Lemma

Sei $\beta \geq 0$ und $(u^n)_n \subseteq S(a_1) \times S(a_2)$ eine beschränkte Palais-Smale-Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\beta(u^n) \notin \{0, I_1(\bar{u}_1), I_2(\bar{u}_2)\}. \quad (5.2)$$

und $(u_1^n)^- \rightarrow 0$, $(u_2^n)^- \rightarrow 0$ in $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$, sowie $Q_\beta(u^n) \rightarrow 0$. Dann existiert eine Lösung $u \in \mathcal{H}$ von (1.1) mit (1.2).

Beweis: Nach Lemma 3.11 (i) und (iv) existiert ein $u \in \mathcal{H}$, so dass $u^n \rightharpoonup u$ in \mathcal{H} , $u_1 \geq 0$, $u_2 \geq 0$, $u_1^n \rightarrow u_1$, $u_2^n \rightarrow u_2$ in $L^q(\mathbb{R}^N)$ für $2 < q < 2^*$ folgt und u eine Lösung von (1.1) ist. Es bleibt zu zeigen, dass u auch (1.2) erfüllt. Dazu benötigen wir die starke Konvergenz in \mathcal{H} .

Wir beachten

$$J_\beta(u) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} - 1 \right) |u_i|_{p_i}^{p_i} + \beta \left(\frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} - 1 \right) \int |u_1|^{r_1} |u_2|^{r_2} + \frac{1}{2} Q_\beta(u).$$

Damit untersuchen wir die vier möglichen Fälle.

Fall 1: $u_1 = u_2 = 0$

Wegen der starken Konvergenz in $L^q(\mathbb{R}^N)$ gelten

$$|u_1^n|_{p_1}^{p_1} \rightarrow 0, \quad |u_2^n|_{p_2}^{p_2} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \int |u_1^n|^{r_1} |u_2^n|^{r_2} \rightarrow 0.$$

Mit $Q_\beta(u^n) \rightarrow 0$ folgt $J_\beta(u^n) \rightarrow 0$ im Widerspruch zu (5.2).

Fall 2: $u_1 \neq 0$, $u_2 = 0$.

Wegen der starken Konvergenz in $L^q(\mathbb{R}^N)$ gelten

$$|u_1^n|_{p_1}^{p_1} \rightarrow |u_1|_{p_1}^{p_1}, \quad |u_2^n|_{p_2}^{p_2} \rightarrow 0 \quad \text{und} \quad \int |u_1^n|^{r_1} |u_2^n|^{r_2} \rightarrow 0.$$

Mit $Q_\beta(u^n) \rightarrow 0$ folgt

$$J_\beta(u^n) \rightarrow \left(\frac{\alpha_1}{2} - 1 \right) |u_1|_{p_1}^{p_1}.$$

Da $(u_1, 0)$ eine Lösung von (1.1) ist, ist u_1 eine Lösung von

$$-\Delta u_1 = \lambda_1 u_1 + \mu_1 |u_1|^{p_1-2} u_1$$

mit $|u_1|_2 \leq a_1$. Also folgt $u_1 > 0$ und Lemma 3.13 liefert $\lambda_1 < 0$.

Dann liefert Lemma 3.11 die starke Konvergenz $u_1^n \rightarrow u_1$ in H . Es resultiert auch die starke Konvergenz in $L^2(\mathbb{R}^N)$ und somit $|u_1|_2 = a_1$.

Wir erhalten $J_\beta(u^n) \rightarrow m_1$ und mit (5.2) einen Widerspruch.

Fall 3: $u_1 = 0$, $u_2 \neq 0$

Analog zu Fall 2.

Fall 4: $u_1 \neq 0, u_2 \neq 0$

Da die vorigen Fälle zu Widersprüchen führten, kann nur dieser Fall eintreten. Zunächst gilt $|u_1|_2 = \hat{a}_1 \leq a_1$ und $|u_2|_2 = \hat{a}_2 \leq a_2$. Das strenge Maximumsprinzip liefert $u_1 > 0$ und $u_2 > 0$. Wir können anschließend Lemma 3.13 anwenden und erhalten $\lambda_1, \lambda_2 < 0$. Mit Lemma 3.11 ergibt sich die starke Konvergenz $u_1^n \rightarrow u_1$ und $u_2^n \rightarrow u_2$ in H , insbesondere in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Daraus erhalten wir

$$|u_1|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_1^n|_2 = a_1 \text{ und } |u_2|_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_2^n|_2 = a_2.$$

□

Beweis von Satz 2.5 (ii): Da Γ nicht leer ist, erhalten wir eine Palais-Smale-Folge zum Niveau $\hat{c}(\beta) > 0 > m_1, m_2$, welche nach Lemma 3.14 und 5.5 beschränkt ist. Schließlich liefert Lemma 5.6 eine Lösung $u^\beta \in \mathcal{S}$ von (1.1) mit (1.2). Es bleibt nur noch das Verhalten für $\beta \rightarrow 0$ zu zeigen. Für $s \in \mathbb{R}_+^2$ definieren wir

$$\delta(s) := \inf_{v \in B(s)} J_0(v) = \min \left\{ \inf_{|\nabla v_1|_2 = s_1} I_1(v_1) + \inf_{|\nabla v_2|_2 \leq s_2} I_2(v_2), \inf_{|\nabla v_1|_2 \leq s_1} I_1(v_1) + \inf_{|\nabla v_2|_2 = s_2} I_2(v_2) \right\}$$

Für $s_i \geq \left(\frac{4}{\alpha_i}\right)^{\frac{1}{2-\alpha_i}} |\nabla \bar{u}_i|_2$ gilt $\frac{1}{2}s_i^2 - \frac{1}{\alpha_i} |\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} s_i^{\alpha_i} \geq \frac{1}{4}s_i^2$. Zusammen mit Folgerung 3.5 ergibt sich

$$\begin{aligned} \delta(s) &= \min \left\{ \frac{1}{2}s_1 - \frac{1}{\alpha_1} |\nabla \bar{u}_1|_2^{\alpha_1} s_1^{\alpha_1} + m_2, m_1 + \frac{1}{2}s_2 - \frac{1}{\alpha_2} |\nabla \bar{u}_2|_2^{\alpha_2} s_2^{\alpha_2} \right\} \\ &\geq \frac{1}{4} \min\{s_1, s_2\}^2 + \min\{m_1, m_2\}. \end{aligned}$$

Sei nun

$$\beta < \min \left\{ \left(\left(\frac{4}{\alpha_i} \right)^{\frac{1}{2-\alpha_i}} |\nabla \bar{u}_i|_2 \right)^{-2\alpha_i+2} : i = 1, 2 \right\}$$

und $s(\beta) = (\beta^{-1/(2\alpha_3)}, \beta^{-1/(2\alpha_4)})$. Mit $\alpha := \max\{\alpha_3, \alpha_4\}$ folgt somit

$$\delta(s(\beta)) \geq \beta^{-1/\alpha} + \min\{m_1, m_2\}. \quad (5.3)$$

Weiter beachten wir, dass die obere Schranke (1.6)

$$\sup_{u \in B(s(\beta))} R(u) \leq \sup_{u \in B(s(\beta))} c_3 |\nabla u_1|_2^{\alpha_3} |\nabla u_2|_2^{\alpha_4} = c_3 \beta^{-1} \quad (5.4)$$

liefert. Zusätzlich existiert ein $\tilde{\beta} > 0$, so dass $\delta(s(\beta)) > c_3$ für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}$ gilt. Zusammen mit (5.3) und (5.4) folgt die Abschätzung

$$\hat{c}(\beta) \geq \inf_{u \in B(s(\beta))} J_\beta = \delta(s(\beta)) - \beta \sup_{u \in B(s(\beta))} R(u) \geq \beta^{-1/\alpha} + \min\{m_1, m_2\} - c_3.$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$|\nabla u_1^\beta|_2^2 + |\nabla u_2^\beta|_2^2 \geq 2J_\beta(u^\beta) = 2\hat{c}(\beta) \rightarrow \infty$$

für $\beta \rightarrow 0$, was zu zeigen war. □

6 Grenzverhalten bei β_1 falls $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ und $r_1 + r_2 \leq 2 + \frac{4}{N}$

Die Schranke β_1 haben wir so gewählt, dass wir das Infimum von Q_β auf dem Rand eines Rechteckes bezüglich der Gradientennorm kontrollieren können. Es stellt sich dabei die Frage, was mit den Lösungen für $\beta \rightarrow \beta_1$ passiert. Falls $p_1, p_2, r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N}$ gilt, so ist bekannt, dass das Funktional koerziv ist und somit für alle $\beta > 0$ ein globales Minimum existiert, siehe [4, Theorem 2.1]. Dies spiegelt sich glücklicherweise auch in diesem Ansatz wieder, denn die Koerzivität von J_β und damit auch die von Q_β liefern $\beta_1 = \infty$.

Die Situation ändert sich im Fall $r_1 + r_2 = 2 + \frac{4}{N}$. Hier gilt $\beta_1 < \infty$, was wir leicht durch eine alternative Darstellung von β_1 sehen werden. Diese wird auch essenziell sein, um das Grenzverhalten des Minimierers bei β_1 zu untersuchen.

Beweis von Lemma 2.6: (i) Zuerst zeigen wir $\beta_1 = \infty$. Für ausreichend große $\sigma > 0$ erhalten wir mit Lemma 3.4

$$\begin{aligned} \inf Q_0(B(\sigma, \sigma)) &= \min \left\{ \inf P_2(S(a_2)) + \sigma^2 - |\nabla \bar{u}_1|_2^{2-\alpha_1} \sigma^{\alpha_1}, \sigma^2 - |\nabla \bar{u}_2|_2^{2-\alpha_2} \sigma^{\alpha_2} + \inf P_1(S(a_1)) \right\} \\ &\geq \frac{1}{2} \sigma^2. \end{aligned}$$

Mit der Abschätzung (1.6) erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \inf_{\substack{u \in B(\sigma, \sigma) \\ R(u) \neq 0}} \frac{Q_0(u)}{(\alpha_3 + \alpha_4)R(u)} &\geq \frac{\inf Q_0(B(\sigma, \sigma))}{(\alpha_3 + \alpha_4) \sup R(B(\sigma, \sigma))} \geq \frac{\frac{1}{2} \sigma^2}{(\alpha_3 + \alpha_4) c_3 \sigma^{\alpha_3 + \alpha_4}} \\ &= \frac{1}{2(\alpha_3 + \alpha_4) c_3} \sigma^{2 - (\alpha_3 + \alpha_4)} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

für $\sigma \rightarrow \infty$ und somit auch $\beta_1 = \infty$.

Sei nun $s \in \mathbb{R}_+^2$ aus Lemma 4.3 und $u \in C(s)$. Dann liefert Bemerkung 3.9 ein $t_u < 1$, so dass $t_u * u \in B(s)$. Nach Wahl von s gilt

$$\Psi'_u(t_u) = \Psi'_{t_u * u}(1) = Q_\beta(t_u * u) > 0. \quad (6.1)$$

Die Funktion Ψ_u hat nur ein globales Minimum und damit liefert (6.1) die Abschätzung $\Psi'_u(t) > 0$ für alle $t \in [t_u, 1]$. Damit folgern wir

$$J_\beta(u) = \Psi_u(1) = \Psi_u(t_u) + \int_{t_u}^1 \Psi'_u(t) dt > \Psi_u(t_u) = \Psi_{t_u * u}(1) = J_\beta(t_u * u).$$

Schließlich impliziert dies $\inf J_\beta(C(s)) \geq \inf J_\beta(B(s)) > \inf J_\beta(A(s))$ und damit

$$\inf J_\beta(\mathcal{S}) = \inf J_\beta(A(s)).$$

Das bedeutet, dass der Minimierer von J_β in $A(s)$ auch ein globalerer Minimierer von J_β ist. Es bleibt jetzt noch das Grenzverhalten zu zeigen. Dazu notieren wir den globalen Minimierer von J_β für $\beta > 0$ mit $\bar{u}^\beta \in \mathcal{S}$ und nehmen an, dass die Gradientennorm von \bar{u}^β beschränkt ist. Benutzen wir die Gleichung $Q_\beta(\bar{u}^\beta) = 0$, so erhalten wir die Darstellung

$$J_\beta(\bar{u}^\beta) = \sum_{i=1}^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_3 + \alpha_4} \right) |\nabla \bar{u}_i^\beta|_2^2 - \left(1 - \frac{\alpha_i}{\alpha_3 + \alpha_4} \right) \frac{\mu_i}{p_i} |\bar{u}_i^\beta|_{p_i}^{p_i} \right).$$

Diese Darstellung liefert zusammen mit der Abschätzung (1.4) die Beschränktheit von $J_\beta(\bar{u}^\beta)$ im Widerspruch zu

$$J_\beta(\bar{u}^\beta) \leq J_\beta(\bar{u}) \rightarrow -\infty \text{ für } \beta \rightarrow \infty.$$

Folglich muss $|\nabla \bar{u}_1^\beta|_2 + |\nabla \bar{u}_2^\beta|_2$ bezüglich β unbeschränkt sein.

(ii) Wir definieren

$$\hat{\beta}_1 = \inf_{\substack{v \in \hat{\mathcal{S}} \\ R(v) \neq 0}} \frac{1}{2R(v)}.$$

Behauptung 1:

Es gilt $\beta_1 = \hat{\beta}_1$.

Beweis von Behauptung 1: Im diesem Fall gilt $\alpha_3 + \alpha_4 = 2$, wodurch sich die Funktionen Ψ_u zu

$$\Psi_u(t) = \left(\sum_{i=1}^2 |\nabla u_i|_2^2 - 2\beta R(u) \right) t^2 - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i}$$

vereinfachen. Diese Funktion hat genau ein globales Minimum und eine positive Nullstelle oder sie ist streng monoton fallend. Wegen der Beziehung $\Psi_{s*u}(s^{-1}t) = \Psi_u(t)$ für alle $s \in (0, \infty)$, können wir $u \in \mathcal{S}$ ohne Einschränkung bezüglich der Gradientennorm normieren. Daher betrachten wir im Folgenden $v \in \hat{\mathcal{S}}$. Dann folgt

$$\Psi_v(t) = (1 - 2\beta R(v)) t^2 - \sum_{i=1}^2 \frac{\mu_i}{p_i} |v_i|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i}.$$

Sei nun $\beta < \hat{\beta}_1$, dann liefert Bemerkung 4.2 eine Konstante $C > 0$, so dass $1 - 2\beta R(v) > C$ für alle $v \in \hat{\mathcal{S}}$ gilt. Insbesondere ist der Koeffizient des quadratischen Terms von Ψ_u positiv. Dadurch folgt, dass Ψ_v stets ein globales Minimum und eine positive Nullstelle hat. Die Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung (1.4) und die Abschätzung (1.6) geben uns dabei die von v unabhängige untere Schranke

$$\Psi_v(t) \geq Ct^2 - \sum_{i=1}^2 c_i \frac{\mu_i}{p_i} t^{\alpha_i}.$$

Dies bedeutet, dass ein $s > 0$ existiert, so dass

$$Q_\beta(t * v) = \Psi_v(t) \geq Cs^2 - \sum_{i=1}^2 c_i \frac{\mu_i}{p_i} s^{\alpha_i} > 0 \text{ für alle } v \in \hat{\mathcal{S}} \text{ und alle } t \geq s$$

gilt. Die Wirkung $*$ induziert eine Bijektion von $\hat{\mathcal{S}}$ nach $B(s, s)$ und das Infimum von Q_β über $B(s, s)$ ist gemäß der Abschätzung positiv. Also erhalten wir $\beta \leq \beta_1$.

Gilt andererseits $\beta > \hat{\beta}_1$, dann existiert ein $v \in \hat{\mathcal{S}}$, so dass $1 - 2\beta R(v) < 0$ gilt. Dann ist jedoch Ψ_u streng monoton fallend und negativ für alle $t > 0$. Für jedes $s \in \mathbb{R}_+^2$ existiert ein $t_v \in (0, \infty)$, so dass $t_v * v \in B(s)$ liegt. Damit erhalten wir jedoch

$$\inf_{u \in B(s)} Q_\beta(u) \leq Q_\beta(t_v * v) = \Psi_u(t_v) < 0$$

und insbesondere $\beta \geq \beta_1$. Zusammen folgt $\beta_1 = \hat{\beta}_1$, was zu zeigen war.

Behauptung 2:

Sei $(v^n)_n$ eine Folge in $\hat{\mathcal{S}}$, so dass $(2R(v^n))^{-1} \rightarrow \hat{\beta}_1$, dann existiert ein $C > 0$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass $|v_i^n|_{p_i} \geq C$ für alle $n \geq N$.

Beweis von Behauptung 2: Angenommen, die Behauptung ist falsch, dann hat $(|v_i^n|_{p_i})_n$ für $i = 1$ oder $i = 2$ den Häufungspunkt 0. Ohne Einschränkung konvergiere $(|v_1|_{p_1})_n$ gegen 0. Da $\hat{\mathcal{S}}$ eine bezüglich der \mathcal{H} -Norm beschränkte Menge ist, existiert ein schwacher Grenzwert $v \in \mathcal{H}$. Wegen der kompakten Einbettung von $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ gilt $v_1^n \rightarrow v_1$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ für

alle $2 < p < 2^*$. Da jedoch $(|v_1|_{p_1})_n$ gegen 0 konvergiert, folgt somit $v_1 = 0$. Insbesondere gilt $|v_1^n|_p \rightarrow 0$ für alle $2 < p < 2^*$. Die Abschätzung (1.6) liefert damit $R(v^n) \rightarrow 0$, was im Widerspruch zu $R(v^n) \rightarrow (2\hat{\beta}_1)^{-1} > 0$ steht.

Behauptung 3:

Sei $\beta_n \uparrow \hat{\beta}_1$ und $(v^n)_n$ eine Folge in $\hat{\mathcal{S}}$, so dass $R(v^n) \rightarrow (2\hat{\beta}_1)^{-1}$. Weiter definieren wir $\Psi_n(t) := J_{\beta_n}(t * v^n)$. Dann gilt $\min_{t>0} \Psi_n(t) \rightarrow -\infty$.

Beweis von Behauptung 3: Nach Behauptung 2 gibt es ein $C > 0$, so dass wir ohne Einschränkung $|v_1^n|_{p_1} \geq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen können. Nun definieren wir

$$\hat{\Psi}_n(t) = \left(\frac{1}{2} - \beta^n R(v^n) \right) t^2 - \frac{\mu_1}{p_1} C t^{\alpha_1}.$$

Durch die Wahl von C gilt $\Psi_n \leq \hat{\Psi}_n$ und wir brauchen nur zu zeigen, dass das Minimum von $\hat{\Psi}_n$ gegen $-\infty$ geht. Dies lässt sich jedoch einfach ausrechnen, denn die Minimumsstelle von $\hat{\Psi}_n$ ist durch

$$t_n := \left(\frac{1 - 2\beta^n R(v^n)}{\frac{\mu_1}{p_1} C} \right)^{\frac{1}{\alpha_1 - 2}}$$

gegeben. Unter Berücksichtigung von $\alpha_1 - 2 < 0$ und $1 - 2\beta^n R(v^n) \rightarrow 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \min_{t>0} \Psi_n(t) &\leq \hat{\Psi}_n(t_n) = t_n^2 \left(\frac{1}{2} (1 - 2\beta^n R(v^n)) - \frac{\mu_1}{p_1} C t_n^{\alpha_1 - 2} \right) \\ &= -\frac{1}{2} t_n^2 (1 - 2\beta^n R(v^n)) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\frac{\mu_1}{p_1} C} \right)^{\frac{2}{\alpha_1 - 2}} (1 - 2\beta^n R(v^n))^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - 2}} \\ &\rightarrow -\infty \end{aligned}$$

Mit Behauptung 3 folgt für jede Folge $(\beta_n)_n$ mit $\beta_n \uparrow \hat{\beta}_1$, dass

$$\inf_{u \in \mathcal{S}} J_{\beta_n} \leq \min_{t>0} \Psi_n \rightarrow -\infty$$

und damit

$$J_\beta(\bar{u}^\beta) = \inf_{u \in \mathcal{S}} J_\beta \rightarrow -\infty$$

für $\beta \rightarrow \beta_1$ gilt. Jedoch ist $\beta_1 < \infty$ und mit (1.4) und (1.6) ist J_{β_1} beschränkt auf beschränkten Mengen. Somit muss $|\nabla \bar{u}^\beta|_2^2 + |\nabla \bar{u}^\beta|_2^2$ für $\beta \rightarrow \beta_1$ unbeschränkt sein. \square

7 Das 2 dimensionale Linking im Fall $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$

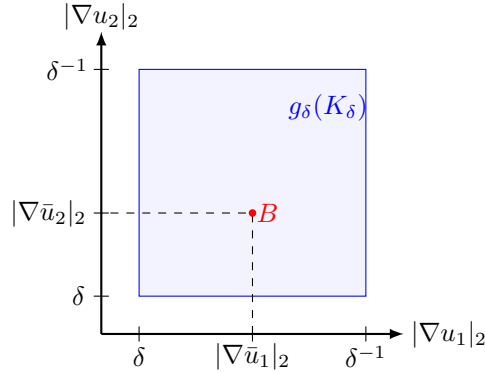
Die einzelnen Komponenten von \bar{u} sind Mountain-Pass-Lösungen der Funktionale I_1 bzw I_2 und damit kritische Punkte mit dem Morse Index 1. Somit ist \bar{u} ein kritischer Punkt von J_0 mit dem Morse Index 2, welcher als Lösung eines zweidimensionalen Linkings verstanden werden kann. Für $\delta \in (0, 1)$ definieren wir dazu $K_\delta = [\delta, \delta^{-1}] \times [\delta, \delta^{-1}]$ und

$$g_\delta : K_\delta \rightarrow \mathbb{R}, \quad g_\delta(s, t) = (s * \bar{u}_1, t * \bar{u}_2)$$

sowie die Menge

$$B := \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_i|_2 = |\nabla \bar{u}_i|_2, \quad i = 1, 2\}.$$

Abbildung 3: Das Bild von K_δ unter g_δ und die Menge B



Falls δ ausreichend klein ist, so ist einerseits das Supremum von g_δ entlang des Randes von K_δ nahe an $\max\{m_1, m_2\}$. Andererseits ist das Infimum von J_0 über B gleich $m_1 + m_2$. Da für $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$ die Niveaus m_1 und m_2 positiv sind, lässt sich eine obere Schranke für β formulieren, so dass J_β auf B nach unten durch einen Wert größer als $\max\{m_1, m_2\}$ beschränkt ist. Das Bild jeder stetigen Funktion, die mit g_δ auf dem Rand von K_δ übereinstimmt, schneidet stets die Menge B , wodurch wir mit einem Minimax-Argument eine geeignete Palais-Smale-Folge erhalten. Um die Beschränktheit und damit die Konvergenz der geeigneten Palais-Smale-Folge zu zeigen, werden wir so wie bei Satz 2.5(ii) vorgehen.

7.1 Lemma

Sei $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$ und $\beta > 0$ gegeben. Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $\tilde{\delta} > 0$, so dass

$$\max_{\partial K_\delta} J_\beta \circ g_\delta < \max\{m_1, m_2\} + \varepsilon$$

für alle $0 < \delta < \tilde{\delta}$ gilt.

Beweis: Durch die Gleichung $P_i(\bar{u}_i) = 0$ erhalten wir die Darstellung

$$I_i(t * \bar{u}_i) = \left(\frac{1}{2} t^2 - \frac{1}{\alpha_i} t^{\alpha_i} \right) |\nabla \bar{u}_i|_2^2. \quad (7.1)$$

Dies liefert für alle $\delta \in (0, 1)$ die Gleichung

$$\max_{t \in [\delta, \delta^{-1}]} I_i(t * \bar{u}_i) = I_i(1 * \bar{u}_i) = m_i. \quad (7.2)$$

Des Weiteren wird ersichtlich, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\tilde{\delta} \in (0, 1)$ existiert, so dass

$$I_i(\delta^{\pm 1} * \bar{u}_i) < \varepsilon \quad (7.3)$$

für alle $0 < \delta < \tilde{\delta}$ gilt.

Für $0 < \delta < \tilde{\delta}$ folgen mit (7.2) und (7.3) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} \max_{t \in [\delta, \delta^{-1}]} J_\beta(\delta^{\pm 1} * \bar{u}_1, t * \bar{u}_2) &< \max_{t \in [\delta, \delta^{-1}]} J_0(\delta^{\pm 1} * \bar{u}_1, t * \bar{u}_2) \\ &= I_1(\delta^{\pm 1} * \bar{u}_1) + \max_{t \in [\delta, \delta^{-1}]} I_2(t * \bar{u}_2) \\ &< \varepsilon + m_2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

und

$$\begin{aligned} \max_{t \in [\delta, \delta^{-1}]} J_\beta(t * \bar{u}_1, \delta^{\pm 1} * \bar{u}_2) &< \max_{t \in [\delta, \delta^{-1}]} J_0(t * \bar{u}_1, \delta^{\pm 1} * \bar{u}_2) \\ &= \max_{t \in [\delta, \delta^{-1}]} I_1(t * \bar{u}_1) + I_2(\delta^{\pm 1} * \bar{u}_2) \\ &< m_1 + \varepsilon \end{aligned} \quad (7.5)$$

Aus (7.4) und (7.5) erhalten wir schließlich die Behauptung. \square

7.2 Definition

Wir definieren

$$\beta_3 := \inf_{u \in B} \frac{J_0(u) - \max\{m_1, m_2\}}{R(u)}.$$

Folgerung 3.5 und $m_1, m_2 > 0$ liefern $\beta_3 > 0$.

Nun definieren wir

$$\Gamma_\delta := \{g : K_\delta \rightarrow \mathcal{S} : g \text{ stetig, } g \equiv g_\delta \text{ auf } \partial K_\delta\}.$$

Da $g_\delta(\partial K_\delta)$ die Menge B umspannt, folgt aus Stetigkeitsgründen, dass das Bild von allen $g \in \Gamma$ die Menge B schneidet. Dies liefert uns eine Palais-Smale-Folge $\{u^n\} \subseteq \mathcal{S}$, dessen Niveau gegen

$$\hat{c} := \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in K_\delta} J_\beta(g(t)) \geq \inf_{u \in B} J_\beta(u) > \max\{m_1, m_2\} > 0$$

konvergiert. Schließlich können wir nun den Satz 2.7 (iii) beweisen.

Beweis von Satz 2.7(iii): Nach Wahl von β_3 liefert Lemma 7.1 ein δ , so dass Γ_δ eine Minimax-Struktur induziert. Lemma 3.14 und 5.5 liefern eine beschränkte Palais-Smale-Folge, welche nach Lemma 5.6 gegen eine Lösung von (1.1) mit (1.2) konvergiert. \square

8 Mountain-Pass für $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$

Die wesentliche Idee ist dieselbe, wie auch im Fall $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$. Jedoch müssen wir hier noch zeigen, dass sich das Niveau der Mountain-Pass-Lösung von den Niveaus m_1 und m_2 unterscheiden. Nach Folgerung 11.8 lässt sich schließen, dass das Infimum von J_β über V_β^+ kleiner oder gleich $\min\{m_1, m_2\}$ sein muss. Demnach ist das Niveau der Mountain-Pass-Struktur kleiner oder gleich $\min\{m_1, m_2\}$, da die Wirkung $*$ stetige Kurven für die Mountain-Pass-Struktur induziert. Daher ist das Ziel zu zeigen, dass das Niveau sogar echt unterhalb $\min\{m_1, m_2\}$ liegt, was wir mit etwas stärkeren Voraussetzungen an r_1 und r_2 erhalten.

8.1 Bemerkung

Für $\beta < \beta_1$ und $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$ hat Ψ_u stets eine eindeutige Maximumsstelle t_u . Da die Einbettung von $H_{rad}^1(\mathbb{R}^N)$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ für $p > 2$ stetig ist, hängen die Koeffizienten von Ψ_u stetig von u ab und damit ist t_u stetig in u . Zusammen mit Lemma 3.1 liefert das die Stetigkeit der Projektion

$$\pi : \mathcal{S} \rightarrow V_\beta^+, \quad u \mapsto t_u * u.$$

Ist $s \in \mathbb{R}_+^2$ so gewählt, dass $V_\beta^+ \subseteq C(s)$ gilt, und $u \in C(s)$, dann ist $t_u < 1$ genau dann wenn $Q_\beta(u) = \Psi'_u(1) < 0$ gilt.

8.2 Lemma

Seien $t_1, t_2 > 0$ und $u \in \mathcal{H}$ mit $u_1, u_2 > 0$. Dann gilt

$$\int |u_1(t_1 x)|^{r_1} |u_2(t_2 x)|^{r_2} dx \geq c \min\{t_1^{-N}, t_2^{-N}\}$$

für ein $c = c(u, r_1, r_2) > 0$.

Beweis: Wir definieren $c_i(u_i, r_i) := \min_{x \in B_1(0)} |u_i(x)|^{r_i} > 0$. Für $i = 1, 2$ gilt dann

$$|u_i|^{r_i} \geq c_i(u_i, r_i) \chi_{B_1(0)} \quad \text{und damit} \quad |u_i(t_i x)|^{r_i} \geq c_i(u_i, r_i) \chi_{B_{t_i^{-1}}(0)}(x).$$

Zusammen mit

$$B_{t_1^{-1}}(0) \cap B_{t_2^{-1}}(0) = B_{\min\{t_1^{-1}, t_2^{-1}\}}(0)$$

folgt

$$\begin{aligned} \int |u_1(t_1 x)|^{r_1} |u_2(t_2 x)|^{r_2} dx &\geq \int_{B_{\min\{t_1^{-1}, t_2^{-1}\}}(0)} c_1(u_1, r_1) c_2(u_2, r_2) dx \\ &= c_1(u_1, r_1) c_2(u_2, r_2) \text{vol}_N(B_1(0)) (\min\{t_1^{-1}, t_2^{-1}\})^N \\ &= c \min\{t_1^{-N}, t_2^{-N}\} \end{aligned}$$

mit $c = c(u, r_1, r_2) := c_1(u_1, r_1) c_2(u_2, r_2) \text{vol}_N(B_1(0)) > 0$. □

8.3 Lemma

Sei $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$ und $\varepsilon > 0$ beliebig sowie $s \in \mathbb{R}_+^2$ für ein $0 < \beta < \beta_1$ wie in Lemma 4.3 gegeben.

(i) Falls $r_1 < \frac{4}{N}$, dann existieren $\hat{r}_1, \hat{r}_2 > 0$, so dass für $\hat{u} := (\hat{r}_1 * \bar{u}_1, \hat{r}_1 * \bar{u}_2)$

$$\hat{u} \in V_\beta^+, J_\beta(\hat{u}) < m_2 \text{ und } |\nabla \hat{u}_1|_2 < \varepsilon$$

gelten.

(ii) Falls $r_2 < \frac{4}{N}$, dann existieren $\tilde{r}_1, \tilde{r}_2 > 0$, so dass für $\tilde{u} := (\tilde{r}_1 * \bar{u}_1, \tilde{r}_2 * \bar{u}_2)$

$$\tilde{u} \in V_\beta^+, J_\beta(\tilde{u}) < m_1 \text{ und } |\nabla \tilde{u}_2|_2 < \varepsilon$$

gelten.

Beweis: Zuerst betrachten wir den Fall $r_1 < \frac{4}{N}$ und definieren $\alpha_5 := \frac{N}{2}r_1 < 2$. Für \bar{u} gilt $0 = P_i(\bar{u}_i) = |\nabla \bar{u}_i| - \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} |\bar{u}_i|_{p_i}^{p_i}$ für $i = 1, 2$, woraus wir

$$Q_0(t * \bar{u}_1, \bar{u}_2) = P_1(t * \bar{u}_1) = |\nabla \bar{u}_1|_2^2 t^2 - \alpha_1 \frac{\mu_1}{p_1} |\bar{u}_1|_{p_1}^{p_1} t^{\alpha_1} = |\nabla \bar{u}_1|_2^2 (t^2 - t^{\alpha_1})$$

erhalten. Zusammen mit der unteren Abschätzung für den gemischten Term in Lemma 8.2 folgt für $t \in (0, 1)$

$$0 \leq \frac{Q_0(t * \bar{u}_1, \bar{u}_2)}{\int |t * \bar{u}_1|^{r_1} |\bar{u}_2|^{r_2}} = \frac{|\nabla \bar{u}_1|_2^2 (t^2 - t^{\alpha_1})}{t^{\alpha_5} \int |\bar{u}_1(t x)|^{r_1} |\bar{u}_2(x)|^{r_2} dx} \leq \frac{|\nabla \bar{u}_2|_2}{c(\bar{u}, r_1, r_2)} (t^{2-\alpha_5} - t^{\alpha_1-\alpha_5}).$$

Somit existiert ohne Einschränkung $0 < t_1 < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{|\nabla \bar{u}_1|_2}, 1 \right\}$, so dass

$$\frac{Q_0(t * \bar{u}_1, \bar{u}_2)}{\int |t * \bar{u}_1|^{r_1} |\bar{u}_2|^{r_2}} < \beta$$

und damit

$$Q_\beta(t * \bar{u}_1, \bar{u}_2) < 0$$

für alle $0 < t < t_1$ erfüllt ist.

Wir definieren

$$a := \left(\frac{\alpha_1}{2} - 1 \right) \frac{\mu_1}{p_1} |\bar{u}_1|_{p_1}^{p_1} \text{ und } b := \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) c(\bar{u}, r_1, r_2) \left(\frac{s_2}{|\nabla \bar{u}_2|_2} \right)^{\alpha_3 + \alpha_4}. \quad (8.1)$$

Wegen $a, b > 0$ und $0 < \alpha_5 < \alpha_1$ können wir ein $0 < t_2 < t_1 < 1$ wählen, so dass

$$a t_2^{\alpha_1} - b t_2^{\alpha_5} < 0. \quad (8.2)$$

Aus Lemma 3.4 folgt $s_i < |\nabla \bar{u}_i|_2$ und konsequenterweise $(t_2 * \bar{u}_1, \bar{u}_2) \in C(s)$. Zusammen mit $Q_\beta(t_2 * \bar{u}_1, \bar{u}_2) < 0$ liefert Bemerkung 8.1 ein $\tau < 1$, so dass $\tau * (t_2 * \bar{u}_1, \bar{u}_2) \in V_\beta^+ \subseteq C(s)$. Wir definieren nun

$$\hat{r}_1 := \tau \cdot t_2 \text{ und } \hat{r}_2 = \tau$$

sowie $\hat{u} = (\hat{r}_1 * \bar{u}_1, \hat{r}_2 * \bar{u}_2)$. Wegen $\hat{u} \in C(s)$ erhalten wir durch

$$s_2 < |\nabla \hat{u}_2|_2 = |\nabla \bar{u}_2|_2 \tau \quad (8.3)$$

eine von t_2 unabhängige, untere Schranke für τ . Insbesondere gilt $\hat{u} \in V_\beta$, so dass wir eine einfachere Darstellung für $J_\beta(\hat{u})$ durch die Benutzung von $Q_\beta(\hat{u}) = 0$ ableiten können:

$$\begin{aligned} J_\beta(\hat{u}) &= \sum_{i=1}^2 \frac{1}{2} |\nabla \hat{u}_i|_2^2 - \frac{\mu_i}{p_i} |\hat{u}_i|_{p_i}^{p_i} - \beta R(\hat{u}) \\ &= \sum_{i=1}^2 \underbrace{\left(\frac{\alpha_i}{2} - 1\right)}_{>0} \frac{\mu_i}{p_i} |\hat{u}_i|_{p_i}^{p_i} - \beta \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)}_{>0} R(\hat{u}) \end{aligned} \quad (8.4)$$

Ebenso liefert $P_2(\bar{u}_2) = 0$ die einfachere Darstellung

$$I_2(\bar{u}_2) = \left(\frac{\alpha_2}{2} - 1\right) \frac{\mu_2}{p_2} |\bar{u}_2|_{p_2}^{p_2}. \quad (8.5)$$

Die Darstellung (8.4) und $t_2, \tau < 1$ implizieren zunächst

$$\begin{aligned} J_\beta(\hat{u}) &= \left(\frac{\alpha_1}{2} - 1\right) \frac{\mu_1}{p_1} |\bar{u}_1|_{p_1}^{p_1} \tau^{\alpha_1} t_2^{\alpha_1} + \left(\frac{\alpha_2}{2} - 1\right) \frac{\mu_2}{p_2} |\bar{u}_2|_{p_2}^{p_2} t_2^{\alpha_2} \\ &\quad - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right) \int |\bar{u}_1(\tau t_2 x)|^{r_1} |\bar{u}_2(\tau x)|^{r_2} \tau^{\frac{N}{2}(r_1+r_2)} t_2^{\frac{N}{2}r_1} \\ &< \left(\frac{\alpha_1}{2} - 1\right) \frac{\mu_1}{p_1} |\bar{u}_1|_{p_1}^{p_1} t_2^{\alpha_1} + \left(\frac{\alpha_2}{2} - 1\right) \frac{\mu_2}{p_2} |\bar{u}_2|_{p_2}^{p_2} \\ &\quad - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right) \int |\bar{u}_1(t_2 x)|^{r_1} |\bar{u}_2(x)|^{r_2} \tau^{\alpha_3 + \alpha_4} t_2^{\alpha_5}. \end{aligned}$$

Berücksichtigen wir zusätzlich (8.1), (8.2), (8.3), (8.5) und Lemma 8.2, so folgt

$$J_\beta(\hat{u}) \leq I_2(\bar{u}) + at_2^{\alpha_4} - bt_2^{\alpha_5} < m_2.$$

Mit $\tau < 1$ und $t_2 < t_1$ gilt schließlich noch

$$|\nabla \hat{u}_1|_2 = |\nabla((\tau \cdot t_2) * \bar{u}_1)|_2 = \tau t_2 |\nabla \bar{u}_1|_2 < t_1 |\nabla \bar{u}_1|_2 < \varepsilon.$$

Die Wahl von \tilde{u} erfolgt analog. □

8.4 Definition

Für $z > 0$ definieren wir die Mengen

$$\begin{aligned} A_1(z) &= \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_1|_2 = z, |\nabla u_2|_2 \leq |\nabla \bar{u}_2|_2\} \text{ und} \\ A_2(z) &= \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_1|_2 \leq |\nabla \bar{u}_1|_2, |\nabla u_2|_2 = z\} \end{aligned}$$

sowie die Werte

$$m_A(i, z) = \inf_{\substack{u \in A_i(z) \\ R(u) \neq 0}} \frac{Q_0(u)}{(\alpha_3 + \alpha_4)R(u)}$$

für $i = 1, 2$.

Unser erster Ansatz für den Beweis von Lemma 2.7(ii) war der aus Kapitel 11 mit einer anderen Zerlegung von \mathcal{S} . Die Definition 8.4 ist ein Teil dieser Zerlegung und vereinfacht das Grenzverhalten der Gradientennormen für $\beta \rightarrow 0$ zu beweisen. Die vollständige Zerlegung von \mathcal{S} wird ab Seite 54 und der dortigen Abbild 5 dargestellt.

8.5 Lemma

Sei $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$. Dann existiert ein $\tilde{\beta}_1 > 0$, so dass für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_1$ gilt

$$\beta < \min \left\{ m_A \left(1, |\nabla \bar{u}_1|_2 \left(1 - \beta^{1/2} \right)^{1/(\alpha_1-2)} \right), m_A \left(2, |\nabla \bar{u}_2|_2 \left(1 - \beta^{1/2} \right)^{1/(\alpha_2-2)} \right) \right\}.$$

Beweis: Zur Vereinfachung der Terme definieren wir

$$C := \frac{1}{c_3(\alpha_3 + \alpha_4) |\nabla \bar{u}_1|^{\alpha_3} |\nabla \bar{u}_2|^{\alpha_4}}.$$

Anschließend wählen wir

$$\tilde{\beta}_1 := \min \left\{ \left(C |\nabla \bar{u}_1|_2 \frac{1}{2} \right)^2, \left(C |\nabla \bar{u}_2|_2 \frac{1}{2} \right)^2, \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{(\alpha_1-2)/2} \right)^2, \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{(\alpha_2-2)/2} \right)^2 \right\}.$$

Ist $0 < \beta < \tilde{\beta}_1$, dann folgen

$$\beta < C |\nabla \bar{u}_i|_2^2 \frac{1}{2} \beta^{1/2} \tag{8.6}$$

und

$$\frac{1}{2} < \left(1 - \beta^{1/2} \right)^{2/(\alpha_i-2)} \tag{8.7}$$

für $i = 1, 2$. Die Ungleichungen (8.6) und (8.7) ergeben zusammen

$$\begin{aligned} \beta &< C |\nabla \bar{u}_i|_2^2 \frac{1}{2} \beta^{1/2} \\ &< C |\nabla \bar{u}_i|_2^2 \left(1 - \beta^{1/2} \right)^{2/(\alpha_i-2)} \beta^{1/2} \\ &= C \left(|\nabla \bar{u}_i|_2 \left(1 - \beta^{1/2} \right)^{1/(\alpha_i-2)} \right)^2 \left(1 - |\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} \left(|\nabla \bar{u}_i|_2 \left(1 - \beta^{1/2} \right)^{1/(\alpha_i-2)} \right)^{\alpha_i-2} \right) \\ &= C z_\beta^2 \left(1 - |\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} z_\beta^{\alpha_i-2} \right) \end{aligned} \tag{8.8}$$

mit

$$z_\beta = |\nabla \bar{u}_i|_2 \left(1 - \beta^{1/2} \right)^{1/(\alpha_i-2)}$$

für $i = 1, 2$. Lemma 3.4 und (1.6) folgt

$$m_A(i, z) \geq C z^2 \left(1 - |\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} z^{\alpha_i-2} \right) \tag{8.9}$$

für $z < |\nabla \bar{u}_i|_2$ und $i = 1, 2$. Die Ungleichungen (8.8) und (8.9) liefern schließlich

$$\beta < \min \{ m_A(1, z_\beta), m_A(2, z_\beta) \},$$

was zu zeigen war. □

8.6 Lemma

Sei $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$. Dann existiert ein $0 < \tilde{\beta}_2 < \tilde{\beta}_1$, so dass für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_2$ gilt:

- (i) Sei $m_1 < m_2$ und für $u \in V_\beta^+$ gelte $|\nabla u_1|_2 \geq |\nabla \bar{u}_1|_2(1 + \beta^{1/2})^{1/2}$ oder $|\nabla u_2|_2 \geq \beta^{1/2}$. Dann folgt $J_\beta(u) \geq m_1$.
- (ii) Sei $m_1 > m_2$ und für $u \in V_\beta^+$ gelte $|\nabla u_2|_2 \geq |\nabla \bar{u}_2|_2(1 + \beta^{1/2})^{1/2}$ oder $|\nabla u_1|_2 \geq \beta^{1/2}$. Dann folgt $J_\beta(u) \geq m_2$.

Beweis: Es reicht die Behauptung nur für den Fall $m_1 < m_2$ zu zeigen, da der andere Fall analog ist.

Für $u \in V_\beta^+$ ist wegen der Pohozaev-Identität die Gleichung $Q_\beta(u) = 0$ erfüllt, welches für J_β folgende Darstellungen liefert:

$$J_\beta(u) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_i} \right) |\nabla u_i|_2^2 - \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \frac{\mu_2}{p_2} |u_2|_{p_2}^{p_2} - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1} \right) R(u) \quad (8.10)$$

$$J_\beta(u) = \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2} \right) |\nabla u_i|_2^2 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \right) \frac{\mu_1}{p_1} |u_1|_{p_1}^{p_1} - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2} \right) R(u) \quad (8.11)$$

Da die Vorzeichen der Koeffizienten $1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ und $1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ für die Abschätzungen wesentlich sind, führt dies zu einer Fallunterscheidung. Zunächst betrachten wir den Fall $\alpha_1 \leq \alpha_2$.

Des Weiteren betrachten wir das Funktional J_β mit unterschiedlichen Abschätzungen der einzelnen Summanden auf verschiedenen Bereichen von V_β^+ , die wir einzeln untersuchen.

Behauptung 1:

Es existiert ein $\tilde{\beta}_{2,1} > 0$, so dass für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,1}$ und alle $u \in V_\beta^+$ mit $|\nabla u_1|_2 \geq |\nabla \bar{u}_1|_2(1 + \beta^{1/2})^{1/2}$ gilt $J_\beta(u) \geq m_1$.

Beweis von Behauptung 1: Sei zuerst $|\nabla u_1|_2 \leq |\nabla u_2|_2$ gegeben. Mit der Voraussetzung folgt $|\nabla \bar{u}_1|_2 \leq |\nabla u_1|_2 \leq |\nabla u_2|_2$. Wir wählen

$$\tilde{\beta}_{2,1,1} := \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) |\nabla \bar{u}_1|_2^{2-(\alpha_3+\alpha_4)}}{\left(1 - \frac{\alpha_3+\alpha_4}{\alpha_1} \right) c_3}.$$

Für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,1,1}$ folgt

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) |\nabla u_2|_2^{2-(\alpha_3+\alpha_4)} - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1} \right) c_3 > 0. \quad (8.12)$$

Die Darstellung (8.10) liefert zusammen mit (8.12) und (1.6) die Abschätzung

$$\begin{aligned} J_\beta(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) |\nabla u_1|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) |\nabla u_2|_2^2 - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1} \right) c_3 |\nabla u_2|_2^{\alpha_3+\alpha_4} \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) |\nabla u_1|_2^2 + |\nabla u_2|_2^{\alpha_3+\alpha_4} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) |\nabla u_2|_2^{2-(\alpha_3+\alpha_4)} - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1} \right) c_3 \right) \\ &> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) |\nabla \bar{u}_1|_2^2 \\ &= m_1. \end{aligned}$$

Nun sei $|\nabla u_1|_2 > |\nabla u_2|_2$. In diesem Fall wählen wir

$$\tilde{\beta}_{2,1,2} := \tilde{\beta}_{2,1,1}^2.$$

Für $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,1,2}$ erhalten wir

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla \bar{u}_1|_2^{2-(\alpha_3+\alpha_4)} - \beta^{1/2} \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right) c_3 > 0$$

und damit

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla \bar{u}_1|_2^{2-(\alpha_3+\alpha_4)} (1 + \beta^{1/2}) - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right) c_3 \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla \bar{u}_1|_2^{2-(\alpha_3+\alpha_4)} + \beta^{1/2} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla \bar{u}_1|_2^{2-(\alpha_3+\alpha_4)} - \beta^{1/2} \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right) c_3\right) \\ &> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla \bar{u}_1|_2^{2-(\alpha_3+\alpha_4)}. \end{aligned}$$

Dies wenden wir bei der Darstellung (8.10) mit der Schranke (1.6) an und erhalten dabei

$$\begin{aligned} J_\beta(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla u_1|_2^2 - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right) c_3 |\nabla u_1|_2^{\alpha_3+\alpha_4} \\ &\geq |\nabla u_1|_2^{\alpha_3+\alpha_4} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla u_1|_2^{2-(\alpha_3+\alpha_4)} - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right) c_3\right) \\ &\geq |\nabla \bar{u}_1|_2^{\alpha_3+\alpha_4} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla \bar{u}_1|_2^{2-(\alpha_3+\alpha_4)} (1 + \beta^{1/2}) - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right) c_3\right) \\ &> \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla \bar{u}_1|_2^2 \\ &= m_1. \end{aligned}$$

Zusammen ergibt sich die Behauptung 1 mit $\tilde{\beta}_{2,1} = \min\{\tilde{\beta}_{2,1,1}, \tilde{\beta}_{2,1,2}\}$.

In den folgenden Behauptungen 2, 4, 5 und 6 wird $\beta < \tilde{\beta}_1$ aus Lemma 8.5 vorausgesetzt, so dass stets $|\nabla u_i|_2 \geq |\nabla \bar{u}_i|_2 (1 - \beta^{1/2})^{\frac{2}{\alpha_i-2}}$ für $i = 1, 2$ gilt.

Behauptung 2:

Es existiert ein $\tilde{\beta}_{2,2} > 0$, so dass für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,2}$ und alle $u \in V_\beta^+$ mit $|\nabla u_1|_2 \leq |\nabla \bar{u}_1|_2 (1 + \beta^{1/2})^{1/2}$ und $\beta^{1/2} \leq |\nabla u_2|_2 \leq |\nabla \bar{u}_2|_2 (1 - \beta^{1/2})^{1/(\alpha_2-2)}$ gilt $J_\beta(u) \geq m_1$.

Beweis von Behauptung 2: Da nach Voraussetzung $|\nabla u_1|_2$ und $|\nabla u_2|_2$ beschränkt sind, folgt mit (1.6), dass ein $C > 0$ existiert, so dass $\left(1 - \frac{\alpha_3+\alpha_4}{\alpha_1}\right) R(u) \leq C$ für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_1$ gilt. Wegen

$$\frac{\ln\left(1 - (1 - \beta^{1/2})^{\frac{2}{\alpha_1-2}}\right)}{\ln(\beta)} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ für } \beta \rightarrow 0$$

existiert ein $\tilde{\beta}_{2,2,2} > 0$, so dass für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,2,1}$ gilt $(1 - \beta^{1/2})^{\frac{2}{\alpha_1-2}} \geq 1 - \beta$. Diese

Abschätzungen liefern mit der Darstellung (8.10)

$$\begin{aligned}
 J_\beta(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla u_1|_2^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla u_2|_2^2 - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right) R(u) \\
 &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla \bar{u}_1|_2^2 \left(1 - \beta^{1/2}\right)^{\frac{2}{\alpha_1-2}} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) \beta^{1/2} - \beta C \\
 &\geq m_1 - \beta m_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) \beta^{1/2} - \beta C \\
 &= m_1 + \beta^{1/2} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) - \beta^{1/2} (m_1 + C) \right).
 \end{aligned}$$

Aus dieser unteren Schranke ist ersichtlich, dass ein $0 < \tilde{\beta}_{2,2} < \tilde{\beta}_{2,2,1}$ existiert, so dass der zweite Summand positiv ist und somit die Behauptung $J_\beta(u) \geq m_1$ folgt. Damit ist Behauptung 2 gezeigt.

Behauptung 3:

Es existiert ein $\tilde{\beta}_{2,3} > 0$, so dass für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,3}$ und alle $u \in V_\beta^+$ mit $|\nabla u_1|_2 \leq |\nabla \bar{u}_1|_2 (1 + \beta^{1/2})^{1/2}$ und $|\nabla u_2|_2 \geq |\nabla \bar{u}_2|_2 (1 - \beta^{1/2})^{1/(\alpha_2-2)}$ gilt $J_\beta(u) \geq m_1$.

Beweis von Behauptung 3: Sei $a = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\right) > 0$ und $b = \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) > 0$, so gilt $\left(\frac{a}{b} \alpha_1\right)^{\frac{1}{\alpha_1-2}} > 1$. Deswegen ergibt sich ein $\tilde{\beta}_{2,3,1} > 0$, so dass $(1 + \beta^{1/2})^{1/2} < \left(\frac{a}{b} \alpha_1\right)^{\frac{1}{\alpha_1-2}}$ für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,3,1}$ gilt. In dieser Situation impliziert die Folgerung 3.5

$$\left(\inf_{\substack{u_1 \in S(\alpha_1) \\ |\nabla u_1|_2 \leq |\nabla \bar{u}_1|_2 (1 + \beta^{1/2})^{1/2}}} a |\nabla u_1|_2^2 - b \frac{\mu_1}{p_1} |u_1|_{p_1}^{p_1} \right) > 0. \quad (8.13)$$

Da die L^{p_1} -Norm von u_1 beschränkt ist, können wir ein $\tilde{z} > 0$ wählen, so dass

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\right) |\nabla u_2|_2^2 - \tilde{\beta}_1 \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2}\right) R(u) > m_1 \quad (8.14)$$

für alle u mit $|\nabla u_2|_2 \geq \tilde{z}$ gilt.

Anschließend betrachten wir die $u \in V_\beta^+$, für die $|\nabla u_2|_2 \leq \tilde{z}$ gilt. Mit der oberen Schranke (1.6) lässt sich ein $\tilde{\beta}_{2,3,2} < \tilde{\beta}_{2,3,1}$ so wählen, dass für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,3,2}$ und alle $u \in V_\beta^+$ mit $|\nabla u_1|_2 \leq |\nabla \bar{u}_1|_2 (1 + \beta^{1/2})^{1/2}$ und $|\nabla \bar{u}_2|_2 (1 - \beta^{1/2})^{\frac{1}{\alpha_2-2}} \leq \tilde{z}$

$$m_2 \left(1 - \beta^{1/2}\right)^{\frac{1}{\alpha_2-2}} \geq m_1 + \frac{1}{2} (m_2 - m_1) \text{ und } \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2}\right) R(u) \leq \frac{1}{2} (m_2 - m_1) \quad (8.15)$$

gelten. Falls nun $|\nabla u_2|_2 \geq \tilde{z}$, dann liefert die Darstellung (8.11) zusammen mit (8.13) und (8.14)

$$\begin{aligned}
 J_\beta(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\right) |\nabla u_2|_2^2 - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2}\right) R(u) + a |\nabla u_1|_2^2 - b \frac{\mu_1}{p_1} |u_1|_{p_1}^{p_1} > m_1 + 0 \\
 &= m_1.
 \end{aligned}$$

Andernfalls gilt $|\nabla u_2|_2 < \tilde{z}$ und die Darstellung (8.11) liefert mit (8.13) und (8.15) damit

$$\begin{aligned} J_\beta(u) &\geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\right) |\nabla u_2|_2 - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2}\right) R(u) + a |\nabla u_1|_2^2 - b \frac{\mu_1}{p_1} |u_1|_{p_1}^{p_1} \\ &> m_1 + \frac{1}{2}(m_2 - m_1) - \frac{1}{2}(m_2 - m_1) = m_1. \end{aligned}$$

Zusammen folgt die Behauptung 3 mit $\tilde{\beta}_{2,3} = \tilde{\beta}_{2,3,2}$.

Nun wird der Fall $\alpha_1 > \alpha_2$ aufgeteilt in den Behauptung 4, 5 und 6 untersucht. Dabei werden in Behauptung 4 im Wesentlichen dieselben Argumente, wie in Behauptung 1 verwendet. Das Gleiche gilt für Behauptung 5 (im Wesentlichen wie Behauptung 2) und schließlich auch Behauptung 6 (im Wesentlichen wie Behauptung 3). Daher werden im Folgenden nur die wesentlichen Ideen skizziert.

Behauptung 4:

Es existiert ein $\tilde{\beta}_{2,4} > 0$, so dass für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,4}$ und alle $u \in V_\beta^+$ mit $|\nabla u_2|_2 \geq |\nabla \bar{u}_2|_2(1 - \beta^{1/2})^{\frac{1}{\alpha_2-2}}$ gilt $J_\beta(u) \geq m_1$.

Beweis von Behauptung 4: Sei zuerst $\tilde{\beta}_{2,4,1} > 0$, so dass $(1 - \beta^{1/2})^{\frac{1}{\alpha_2-2}} \geq 1 - \beta$ für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,4,1}$ gilt. Nun betrachten wir $|\nabla u_1|_2 \leq |\nabla u_2|_2$. Mit Darstellung (8.11) wählen wir $\bar{z} > 0$ so, dass

$$J_\beta(u) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\right) |\nabla u_2|_2^2 - \tilde{\beta}_{2,4,1} c_3 |\nabla u_2|_2^{\alpha_3 + \alpha_4} \geq m_1$$

für $|\nabla u_2|_2 \geq \bar{z}$. Falls $|\nabla u_2|_2 \leq \bar{z}$ und $\beta < \frac{m_2 - m_1}{m_2 + c_3 \bar{z}^{\alpha_3 + \alpha_4}} =: \tilde{\beta}_{2,4,2}$, dann folgt

$$J_\beta(u) \geq m_2 - \beta m_2 - \beta c_3 \bar{z}^{\alpha_3 + \alpha_4} = m_2 - \beta(m_2 + c_3 \bar{z}^{\alpha_3 + \alpha_4}) \geq m_1.$$

Schließlich untersuchen wir den Fall $|\nabla u_1|_2 > |\nabla u_2|_2$, wodurch $|\nabla u_1|_2$ nach unten beschränkt ist und daher ein $\tilde{\beta}_{2,4,3} > 0$ existiert, so dass

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\right) |\nabla u_1|_2^{2 - (\alpha_3 + \alpha_4)} - \beta c_3 > 0$$

für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,4,3}$ gilt. Ebenso sei $\tilde{\beta}_{2,4,4} := \frac{m_2 - m_1}{m_2}$. Für $0 < \beta < \min\{\tilde{\beta}_{2,4,3}, \tilde{\beta}_{2,4,4}\}$ folgt zuletzt

$$J_\beta(u) \geq m_2 - \beta m_2 + |\nabla u_1|_2^{\alpha_3 + \alpha_4} \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\right) |\nabla u_1|_2^{2 - (\alpha_3 + \alpha_4)} - \beta c_3 \right) \geq m_2 - \tilde{\beta}_{2,4,4} m_2 = m_1.$$

Die Behauptung folgt für $\tilde{\beta}_{2,4} = \min\{\tilde{\beta}_{2,4,1}, \tilde{\beta}_{2,4,2}, \tilde{\beta}_{2,4,3}, \tilde{\beta}_{2,4,4}\}$.

Behauptung 5:

Es existiert ein $\tilde{\beta}_{2,5} > 0$, so dass für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,5}$ und alle $u \in V_\beta^+$ mit $\beta^{1/4} \leq |\nabla u_2|_2 \leq |\nabla \bar{u}_2|_2(1 - \beta^{1/2})^{\frac{1}{\alpha_2-2}}$ und $|\nabla u_1|_2 \leq |\nabla \bar{u}_1|_2(1 + \beta^{1/2})^{1/2}$ gilt $J_\beta(u) \geq m_1$.

Beweis von Behauptung 5: Sei $\tilde{\beta}_{2,5,1}$ so gewählt, dass $|\nabla \bar{u}_1|_2(1 - \beta^{1/2})^{\frac{1}{\alpha_2-2}} \geq |\nabla \bar{u}_1|_2(1 - \beta)$ für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,5,1}$ gilt. Wegen $|\nabla u_2|_2 \leq |\nabla \bar{u}_2|_2$ existiert $\tilde{\beta}_{2,5,2}$, so dass

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla u_2|_2^2 - \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) |u_2|_{p_2}^{p_2} &\geq s^2 \left(\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) - \frac{1}{\alpha_2} \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) |\nabla \bar{u}_2|_2^{2 - \alpha_2} s^{\alpha_2 - 2} \right) \Big|_{s=\beta^{1/4}} \\ &\geq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) \beta^{1/2} \end{aligned}$$

für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,5,2}$ erfüllt ist. Mit $C > 0$ als obere Schranke für $R(u)$ folgt zusammen mit der Darstellung (8.10)

$$J_\beta(u) \geq m_1 - \beta m_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) \beta^{1/2} - \beta C = m_1 + \beta^{1/2} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) - \beta^{1/2} (m_1 + C) \right).$$

Für ein geeignetes $\tilde{\beta}_{2,5,3}$ folgt $J_\beta(u) \geq m_1$ für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,5,3}$. Die Behauptung 5 folgt mit $\tilde{\beta}_{2,5} = \min\{\tilde{\beta}_{2,5,1}, \tilde{\beta}_{2,5,2}, \tilde{\beta}_{2,5,3}\}$.

Behauptung 6:

Es existiert ein $\tilde{\beta}_{2,6} > 0$, so dass für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,6}$ und alle $u \in V_\beta^+$ mit $|\nabla u_1|_2 \geq |\nabla \bar{u}_1|_2 (1 + \beta^{1/2})^{1/2}$ und $|\nabla u_2|_2 \leq |\nabla \bar{u}_2|_2 (1 + \beta^{1/2})^{1/2}$ gilt $J_\beta(u) \geq m_1$.

Beweis von Behauptung 6: Sei $\tilde{\beta}_{2,6,1} > 0$ so gewählt, dass $(1 + \beta^{1/2})^{1/2} \leq \left(\frac{a}{b}\alpha_2\right)^{\frac{1}{\alpha_2-2}}$ für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,6,1}$ gilt, wobei $a = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) > 0$ und $b = \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)$. Damit folgt

$$a|\nabla u_2|_2^2 - b \frac{\mu_2}{p_2} |u_2|_{p_2}^{p_2} > 0$$

falls $|\nabla u_2|_2 \leq |\nabla \bar{u}_2|_2 (1 + \beta^{1/2})^{1/2}$. Nun sei $\hat{z} > 0$ so gewählt, dass

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla u_1|_2^2 - \tilde{\beta}_1 \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right) R(u) > m_1$$

falls $|\nabla u_2|_2 \geq \hat{z}$. Mit Darstellung (8.10) hat dies zur Folge

$$J_\beta(u) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla u_1|_2^2 - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right) R(u) + a|\nabla u_2|_2^2 - b \frac{\mu_2}{p_2} |u_2|_{p_2}^{p_2} \geq m_1.$$

Falls $|\nabla u_2|_2 \leq \hat{z}$, dann existiert ein $\tilde{\beta}_{2,6,2}$, so dass $\beta^{1/2} R(u) \leq m_1$ für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_{2,6,2}$ gilt. Zusammen folgt schließlich

$$\begin{aligned} J_\beta(u) &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla u_1|_2^2 - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right) R(u) + a|\nabla u_2|_2^2 - b \frac{\mu_2}{p_2} |u_2|_{p_2}^{p_2} \\ &\geq m_1 + \beta^{1/2} m_1 - \beta^{1/2} m_1 = m_1. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt die Behauptung 6 mit $\tilde{\beta}_{2,6} = \min\{\tilde{\beta}_{2,6,1}, \tilde{\beta}_{2,6,2}\}$.

Das Lemma folgt schließlich aus den Behauptungen 1 bis 6 mit $\tilde{\beta}_2 = \min\{\tilde{\beta}_{2,j} : j = 1, \dots, 6\}$. \square

Beweis von Satz 2.7 (ii): Analog zu Kapitel 5 wählen wir $s \in \mathbb{R}_+^2$ aus Lemma 5.2 fest und definieren wir

$$\Gamma := \{\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S} : \gamma \text{ stetig mit } \gamma(0) \in A(s), \gamma(1) \in C(s) \text{ und } J_\beta(\gamma(0)), J_\beta(\gamma(1)) < 0\}.$$

Ebenso liefert

$$\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}, \quad \gamma(t) := ((1-t) \cdot t_1 + t \cdot t_2) * \bar{u}$$

mit Bemerkung 3.2 ein Element in Γ mit t_1, t_2 aus Lemma 5.2. Somit ist Γ nicht leer und wir haben eine Mountain-Pass-Struktur, die uns eine Palais-Smale-Folge zum Niveau

$$\hat{c}(\beta) = \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J_\beta(\gamma(t))$$

liefert. Nach Definition von β_2 und der Wahl von $s \in \mathbb{R}_+^2$ gilt $\hat{c}(\beta) > 0$.

Gilt (E1) oder (E2), dann liefert Lemma 8.3 ein $v \in V_\beta^+$ mit $J_\beta(v) < \min\{m_1, m_2\}$. Wegen $\beta < \beta_2$ gilt $J_\beta(v) > 0$ und damit ist 1 das globale Maximum von Ψ_v . Des Weiteren folgt aus dem Grenzwertverhalten von Ψ_v , dass $t_1 < 1 < t_2$ mit

$$\Psi_v(t_1) < 0, \quad \Psi_v(t_2) < 0, \quad t_1 * v \in A(s) \text{ und } t_2 * v \in C(s)$$

existieren. Die Kurve $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S}$ definiert durch $\gamma(t) = ((1-t) \cdot t_1 + t \cdot t_2) * v$ erfüllt

$$\gamma(0) = t_1 * v \in A(s), \quad \gamma(1) = t_2 * v \in C(s), \quad J_\beta(\gamma(0)) = \Psi_v(t_1) < 0 \text{ und } J_\beta(\gamma(1)) = \Psi_v(t_2) < 0$$

und ist nach Lemma 3.2 stetig. Damit ist $\gamma \in \Gamma$ und

$$\hat{c}(\beta) \leq \max_{t \in [0, 1]} J_\beta(\gamma(t)) = \max_{t \in [0, 1]} \Psi_v((1-t) \cdot t_1 + t \cdot t_2) = \Psi_v(1) = J_\beta(v) < \min\{m_1, m_2\}.$$

Schließlich folgt mit Lemma 3.14 und Lemma 5.5 die Beschränktheit der Palais-Smale-Folge, so dass wir Lemma 5.6 anwenden, um eine Lösung $u^\beta \in \mathcal{S}$ von (1.1) mit (1.2) zu erhalten.

Es bleibt nur noch das Verhalten der Lösung für $\beta \rightarrow 0$ zu zeigen. Für $0 < \beta < \tilde{\beta}_2$ liefert Lemma 8.5

$$V_\beta^+ \subseteq C \left(|\nabla \bar{u}_1|_2 \left(1 - \beta^{1/2}\right)^{1/(\alpha_1 - 2)}, |\nabla \bar{u}_2|_2 \left(1 - \beta^{1/2}\right)^{1/(\alpha_2 - 2)} \right).$$

Zusätzlich mit Lemma 8.6 folgt im Fall $m_1 < m_2$

$$|\nabla \bar{u}_1|_2 \left(1 - \beta^{1/2}\right)^{1/(\alpha_1 - 2)} \leq |\nabla u_1^\beta|_2 \leq |\nabla \bar{u}_1|_2 (1 + \beta^{1/2})^{1/2} \text{ und } |\nabla u_2^\beta|_2 \leq \beta^{1/2}$$

und damit die Behauptung

$$|\nabla u_1^\beta|_2 \rightarrow |\nabla \bar{u}_1|_2 \text{ und } |\nabla u_2^\beta|_2 \rightarrow 0 \text{ für } \beta \rightarrow 0.$$

Der Fall $m_2 < m_1$ ist analog. □

9 Lokales Minimum für $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$

Im Gegensatz zum Fall $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ liegt für $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N}$ kein Minimum vor, falls $\beta = 0$ gilt. Für $\beta < \beta_1$ liefert $2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$ ein $s \in \mathbb{R}_+^2$, so dass

$$\inf_{A(s)} J_\beta < \inf_{B(s)} J_\beta \quad (9.1)$$

gilt, jedoch konvergiert die Minimalfolge in $A(s)$ für $\beta = 0$ oder $\beta > 0$ und $r_1 + r_2 \geq 2 + \frac{4}{N}$ schwach gegen $(0, 0)$. Wir werden zeigen, dass für $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N}$ die Minimalfolge gegen eine Lösung von (1.1) mit (1.2) konvergiert. Dazu verwenden wir einerseits (9.1) für $\beta < \beta_1$ als auch, dass J_β für $\beta > 0$ in $A(s)$ negative Werte annimmt.

9.1 Lemma

Sei $\beta > 0$ und $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$ geben. Für alle $s \in \mathbb{R}_+^2$ gilt

$$\inf J_\beta(A(s)) < 0.$$

Beweis: Sei $s \in \mathbb{R}_+^2$ beliebig. Dann gibt es ein t_0 , so dass $t * \bar{u} \in A(s)$ für alle $0 < t < t_0$ gilt. Weiter beachten wir, dass

$$\Psi_{\bar{u}}(t) \nearrow 0 \text{ für } t \rightarrow 0$$

gilt. Damit folgt, dass es ein $t_1 > 0$ gibt, so dass $\Psi_{\bar{u}}(t) < 0$ für alle $0 < t < t_1$. Schließlich erhalten wir

$$\inf J_\beta(A(s)) \leq \min_{t \in (0, \min\{t_0, t_1\})} \Psi_{\bar{u}}(t) < 0.$$

□

9.2 Lemma

Sei $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$, dann existiert ein $\tilde{\beta} > 0$, so dass $V_\beta^- \subseteq A(\beta^{1/2}, \beta^{1/2})$ für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}$.

Beweis: Nach Lemma 3.10 reicht es zu zeigen, dass das Infimum von Q_β auf $B(\beta^{1/2}, \beta^{1/2})$ positiv für ausreichend kleine β ist. Dazu nutzen wir die Ungleichung (1.6), um den gemischten Term R zu kontrollieren, während wir für Q_0 die Formeln aus Lemma 3.4 verwenden. Sei nun

$$\beta < \min \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{2}{\alpha_1 - 2}} |\nabla \bar{u}_1|_2^2, \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{2}{\alpha_1 - 2}} |\nabla \bar{u}_1|_2^2 \right\}, \quad (9.2)$$

dann gilt $|\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} \beta^{\alpha_i/2} \leq \frac{1}{4} \beta$ und wir erhalten

$$\inf_{\substack{v_i \in S(a_i) \\ |\nabla v_i|_2 = \beta^{1/2}}} P_i(v_i) = \beta - |\nabla \bar{u}_i|_2^{2-\alpha_i} \beta^{\alpha_i/2} \geq \frac{3}{4} \beta. \quad (9.3)$$

Insbesondere gilt dann auch $\beta < \min\{|\nabla \bar{u}_1|_2^2, |\nabla \bar{u}_2|_2^2\}$ und damit

$$\inf_{\substack{v_i \in S(a_i) \\ |\nabla v_i|_2 \leq \beta^{1/2}}} P_i(v_i) = 0. \quad (9.4)$$

Aus (9.3) und (9.4) folgen

$$\inf_{\substack{|\nabla v_1|_2 \leq \beta^{1/2} \\ |\nabla v_2|_2 = \beta^{1/2}}} Q_0(v) = \inf_{|\nabla v_1|_2 \leq \beta^{1/2}} P_1(v_1) + \inf_{|\nabla v_2|_2 = \beta^{1/2}} P_2(v_2) \geq \frac{3}{4}\beta \quad (9.5)$$

und

$$\inf_{\substack{|\nabla v_1|_2 = \beta^{1/2} \\ |\nabla v_2|_2 \leq \beta^{1/2}}} Q_0(v) = \inf_{|\nabla v_1|_2 = \beta^{1/2}} P_1(v_1) + \inf_{|\nabla v_2|_2 \leq \beta^{1/2}} P_2(v_2) \geq \frac{3}{4}\beta. \quad (9.6)$$

Nun sei $u \in B(\beta^{1/2}, \beta^{1/2})$. Die Abschätzungen (9.5) und (9.6) liefern

$$Q_0(u) \geq \inf_{v \in B(\beta^{1/2}, \beta^{1/2})} Q_0(v) = \min \left\{ \inf_{\substack{|\nabla v_1|_2 \leq \beta^{1/2} \\ |\nabla v_2|_2 = \beta^{1/2}}} Q_0(v), \inf_{\substack{|\nabla v_1|_2 = \beta^{1/2} \\ |\nabla v_2|_2 \leq \beta^{1/2}}} Q_0(v) \right\} \geq \frac{3}{4}\beta. \quad (9.7)$$

Weiter fordern wir

$$\beta < \left(\frac{1}{4c_3(\alpha_3 + \alpha_4)} \right)^{\frac{2}{\alpha_3 + \alpha_4}} \quad (9.8)$$

und somit gilt $c_3(\alpha_3 + \alpha_4)\beta^{(\alpha_3 + \alpha_4)/2} \leq \frac{1}{4}$ und

$$\beta(\alpha_3 + \alpha_4)R(u) \leq \beta c_3(\alpha_3 + \alpha_4)|\nabla u_1|^{r_1}|\nabla u_2|^{r_2} \leq \beta c_3(\alpha_3 + \alpha_4)\beta^{(\alpha_3 + \alpha_4)/2} \leq \frac{1}{4}\beta. \quad (9.9)$$

Wegen (9.2) und (9.8) wählen wir

$$\tilde{\beta} = \min \left\{ \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{2}{\alpha_1 - 2}} |\nabla \bar{u}_1|_2^2, \left(\frac{1}{4} \right)^{\frac{2}{\alpha_1 - 2}} |\nabla \bar{u}_1|_2^2, \left(\frac{1}{4c_3(\alpha_3 + \alpha_4)} \right)^{\frac{2}{\alpha_3 + \alpha_4}} \right\}$$

und erhalten mit (9.7) und (9.9) die untere Schranke

$$Q_\beta(u) = Q_0(u) - \beta(\alpha_3 + \alpha_4)R(u) \geq \frac{3}{4}\beta - \frac{1}{4}\beta = \frac{1}{2}\beta > 0.$$

Schließlich folgt daraus die Behauptung. \square

Beweis von Satz 2.7(i): Nach Lemma 4.3 finden wir ein $s \in \mathbb{R}_+^2$, so dass wir eine Minimalfolge in $(u^n)_n$ in $A(s)$ betrachten. Mit Lemma 9.1 erhalten wir des Weiteren

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\beta(u^n) = \inf_{A(s)} J_\beta < 0 = \min\{0, m_1, m_2\}.$$

Damit können wir Lemma 4.6, 3.11 und 3.13 anwenden, um eine Lösung $u \in \mathcal{S}$ zu erhalten. Da u ein lokales Minimum von J_β ist, ist $u \in V_\beta^-$. Mit Lemma 9.2 ist

$$|\nabla u_1|_2^2 + |\nabla u_2|_2^2 < 2\beta \rightarrow 0 \text{ für } \beta \rightarrow 0$$

gezeigt. \square

10 Der Fall $p_1 < 2 + \frac{4}{N} < p_2$

In diesem unsymmetrischen Fall $p_1 < 2 + \frac{4}{N} < p_2$ unterscheiden sich die Geometrien von I_1 und I_2 . Während \bar{u}_1 ein globales Minimum von I_1 ist, ist \bar{u}_2 eine Mountain-Pass-Lösung von I_2 . Somit ergibt sich \bar{u} als Mountain-Pass-Lösung von J_0 . Dazu betrachten wir die Mengen

$$A = \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_2|_2 < |\nabla \bar{u}_2|_2\}, \quad B = \partial A \quad \text{und} \quad C = \mathcal{S} \setminus \bar{A}.$$

Die Menge B trennt die Mengen A und C voneinander und nach Folgerung 3.5 ist $m_1 + m_2$ das Infimum von J_0 über B . Der Weg $t \mapsto (\bar{u}_1, t * \bar{u}_2)$ liegt für $t < 1$ in der Menge A , während sie für $t > 1$ in C enthalten ist. Außerdem minimiert dieser Weg das Minimax-Problem über die Menge der stetigen Funktionen von A nach C . Das Maximum von $t \mapsto J_0(\bar{u}_1, t * \bar{u}_2)$ ist bei $t = 1$ und liefert die Mountain-Pass-Lösung \bar{u} .

Ist $\beta > 0$ und $r_1 > 2 + \frac{4}{N}$, sowie $t \geq 1$ gegeben, so erhalten wir aus Lemma 8.2

$$J_\beta(t * \bar{u}_1, \bar{u}_2) \leq m_2 + \frac{1}{2} |\nabla \bar{u}_1|_2^2 - \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i} - \beta c(\bar{u}, r_1, r_2) t^{\frac{N}{2}(r_1-2)} \rightarrow -\infty \quad \text{für } t \rightarrow \infty.$$

Dies zeigt, dass J_β auf B nach unten unbeschränkt ist und dieser Ansatz keine Mountain-Pass-Struktur liefert. Die Schwierigkeit entsteht dadurch, dass B bereits eine unbeschränkte Menge ist. Da sich für β eine Minimalfolge in A schwach gegen $(\bar{u}_1, 0)$ konvergiert, wollen wir dies nutzen und definieren offene Umgebungen von $(\bar{u}_1, 0)$, die uns dann auch für $\beta > 0$ eine Mountain-Pass-Struktur liefern kann.

10.1 Definition

Für $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ definieren wir

$$U(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \{u \in S(a_1) \times S(a_2) : \left| |\nabla u_1|_2^2 - |\nabla \bar{u}_1|_2^2 \right| < \varepsilon_1, |\nabla u_2|_2^2 < \varepsilon_2\}$$

sowie die Mengen

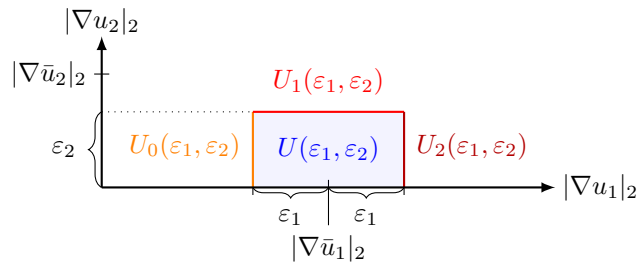
$$U_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \{u \in S(a_1) \times S(a_2) : |\nabla u_1|_2^2 = |\nabla \bar{u}_1|_2^2 - \varepsilon_1, |\nabla u_2|_2^2 < \varepsilon_2\},$$

$$U_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \{u \in S(a_1) \times S(a_2) : \left| |\nabla u_1|_2^2 - |\nabla \bar{u}_1|_2^2 \right| \leq \varepsilon_1, |\nabla u_2|_2^2 = \varepsilon_2\} \quad \text{und}$$

$$U_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) := \{u \in S(a_1) \times S(a_2) : |\nabla u_1|_2^2 = |\nabla \bar{u}_1|_2^2 + \varepsilon_1, |\nabla u_2|_2^2 < \varepsilon_2\},$$

deren Vereinigung den Rand von $U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ ergibt.

Abbildung 4: Die Umgebung $U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ von $(\bar{u}_1, 0)$ und die Randmengen $U_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ für $i = 0, 1, 2$



10.2 Lemma

Sei $m_1 + m_2 > 0$. Für $\varepsilon_1 > \left(\left(\frac{2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{2-\alpha_1}} + 1 \right) |\nabla \bar{u}_1|_2$ und $\varepsilon_2 = |\nabla \bar{u}_2|_2$ gilt dann

$$\inf_{u \in \partial U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_0(u) > 0.$$

Beweis: Nach Lemma 3.5 ist

$$\inf \{ I_1(u_1) : |\nabla u_1|_2 = s \} > 0, \quad (10.1)$$

falls $s > \left(\frac{2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{2-\alpha_1}} |\nabla \bar{u}_1|_2$ gilt. Aus

$$|\nabla \bar{u}_1|_2 - \varepsilon_1 = - \left(\frac{2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{2-\alpha_1}} |\nabla \bar{u}_1|_2 < 0$$

folgt

$$U_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \emptyset. \quad (10.2)$$

Mit Lemma 3.5 folgt

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_0(u) &= \inf_{\substack{u_1 \in S(a_1) \\ \left| |\nabla u_1|_2 - |\nabla \bar{u}_1|_2 \right| < \varepsilon_1}} I_1(u_1) + \inf_{\substack{u_2 \in S(a_2) \\ |\nabla u_2|_2 = |\nabla \bar{u}_2|_2}} I_2(u_2) \\ &\geq \inf_{u_1 \in S(a_1)} I_1(u_1) + m_2 = m_1 + m_2 \\ &> 0. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Des Weiteren gilt für $u \in U_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ die Bedingung

$$|\nabla u_1|_2 = |\nabla \bar{u}_1|_2 + \varepsilon_1 > |\nabla \bar{u}_1|_2 + \left(\left(\frac{2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{2-\alpha_1}} + 1 \right) |\nabla \bar{u}_1|_2 = \left(\frac{2}{\alpha_1} \right)^{\frac{1}{2-\alpha_1}} |\nabla \bar{u}_1|_2. \quad (10.4)$$

Aus Lemma 3.5 und den Abschätzungen (10.4) und (10.1) erhalten wir

$$\inf_{u \in U_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_0(u) = \underbrace{\inf_{u_1 \in S(a_1)} I_1(u_1)}_{>0} + \underbrace{\inf_{u_2 \in S(a_2)} I_2(u_2)}_{=0} > 0. \quad (10.5)$$

Aus (10.2), (10.3) und (10.5) folgt schließlich die Behauptung. \square

10.3 Lemma

Sei $\varepsilon_1 > 0$ und $0 < \varepsilon_2 < \left(\frac{\alpha_2}{2} \right)^{\frac{1}{\alpha_2-2}} |\nabla \bar{u}_2|_2$, dann gilt

$$m_1 < \inf_{\partial U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_0.$$

Beweis: Die Formeln aus Folgerung 3.5 liefern uns

$$\begin{aligned}
 \inf_{u \in U_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_0(u) &= \underbrace{\inf_{u_1 \in S(a_1)} I_1(u_1)}_{> m_1} + \underbrace{\inf_{u_2 \in S(a_2)} I_2(u_2)}_{=0} > m_1, \\
 \inf_{u \in U_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_0(u) &= \underbrace{\inf_{u_1 \in S(a_1)} I_1(u_1)}_{=m_1} + \underbrace{\inf_{u_2 \in S(a_2)} I_2(u_2)}_{>0} > m_1 \text{ und} \\
 \inf_{u \in U_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_0(u) &= \underbrace{\inf_{u_1 \in S(a_1)} I_1(u_1)}_{> m_1} + \underbrace{\inf_{u_2 \in S(a_2)} I_2(u_2)}_{=0} > m_1.
 \end{aligned}$$

Insgesamt folgt die Behauptung. \square

10.4 Definition

Wir definieren

$$\begin{aligned}
 \beta_5 &:= \sup_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0} \inf_{\substack{u \in \partial U(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - m_1}{R(u)} \\
 \tilde{\beta}_5 &:= \sup_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0} \inf_{\substack{u \in \partial U(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u)}{R(u)}
 \end{aligned}$$

und

$$\beta_4 = \begin{cases} \beta_5 & m_1 + m_2 \leq 0 \\ \tilde{\beta}_5 & m_1 + m_2 > 0. \end{cases}$$

Mit Lemma 10.2 und der Abschätzung (1.6) folgt $\tilde{\beta}_5 > 0$ für $m_1 + m_2 > 0$, während $\beta_5 > 0$ mit Lemma 10.3 und (1.6) folgt. Damit gilt ebenso $\beta_4 > 0$.

10.5 Lemma

Sei $\beta < \beta_5$, dann existieren $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ und $\tilde{u} \in U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ sowie $\hat{u} \in S(a_1) \times S(a_2)$ mit $|\nabla \hat{u}_2|_2 > \varepsilon_2$, so dass

$$\max \{J_\beta(\tilde{u}), J_\beta(\hat{u})\} < \inf_{u \in \partial U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_\beta(u).$$

Gilt zusätzlich $\beta > 0$ und $r_2 < \frac{4}{N}$, dann kann \tilde{u} so gewählt werden, dass insbesondere $J_\beta(\tilde{u}) < m_1$ gilt.

Beweis: Die Wahl von β_5 impliziert die Existenz von $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, so dass

$$\beta < \inf_{u \in \partial U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} \frac{J_0(u) - m_1}{R(u)}$$

gilt. Mit Bemerkung 4.2 folgt daraus $J_\beta > m_1$ auf $\partial U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Da $(\bar{u}_1, t * \bar{u}_2) \in U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ für $t \in \left(0, \frac{\varepsilon_2}{|\nabla \bar{u}_2|_2}\right) =: I$ gilt, betrachten wir den Weg

$$g : I \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(t) := J_\beta(\bar{u}_1, t * \bar{u}_2) = m_1 + I_2(t * \bar{u}_2) - \beta R(\bar{u}_1, t * \bar{u}_2).$$

Wenden wir die obere Schranke (1.6) für den gemischten Term an, so folgt die Abschätzung

$$\inf_{u \in U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_\beta(u) \leq \inf_{t \in I} g(t) \leq \inf_{t \in I} m_1 + \frac{1}{2} |\nabla \bar{u}_2|_2^2 t^2 + |\beta| C_3 |\nabla \bar{u}_1|_2^{\alpha_3} |\nabla \bar{u}_2|_2^{\alpha_4} t^{\alpha_4} = m_1.$$

Damit erhalten wir ein $t \in I$, so dass $\tilde{u} := (\bar{u}_1, t * \bar{u}_2) \in U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ und $J_\beta(\tilde{u}) < \inf_{u \in \partial U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_\beta(u)$ gelten.

Nutzen wir wieder die Abschätzung für den gemischten Term und $\alpha_2 > 2 > \alpha_1$, so ergibt sich

$$\begin{aligned} J_\beta(t^{-1/\alpha_3} * \bar{u}_1, t^{1/\alpha_4} * \bar{u}_2) &\leq \frac{1}{2} |\nabla \bar{u}_1|_2^2 \left(t^{-1/\alpha_3}\right)^2 - \frac{\mu_1}{p_1} |\bar{u}_1|_{p_1}^{p_1} \left(t^{-1/\alpha_3}\right)^{\alpha_1} \\ &\quad + \frac{1}{2} |\nabla \bar{u}_2|_2^2 \left(t^{1/\alpha_4}\right)^2 - \frac{\mu_2}{p_2} |\bar{u}_2|_{p_2}^{p_2} \left(t^{1/\alpha_4}\right)^{\alpha_2} \\ &\quad + C_3 |\beta| |\nabla \bar{u}_1|_2^{\alpha_3} \left(t^{-1/\alpha_3}\right)^{\alpha_3} |\nabla \bar{u}_2|_2^{\alpha_4} \left(t^{1/\alpha_4}\right)^{\alpha_4} \\ &\leq \underbrace{\frac{1}{2} |\nabla \bar{u}_1|_2^2 t^{-2/\alpha_3} - \frac{\mu_1}{p_1} |\bar{u}_1|_{p_1}^{p_1} t^{-\alpha_1/\alpha_3}}_{\rightarrow 0 \text{ für } t \rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{1}{2} |\nabla \bar{u}_2|_2^2 t^{2/\alpha_4} - \frac{\mu_2}{p_2} |\bar{u}_2|_{p_2}^{p_2} t^{\alpha_2/\alpha_4}}_{\rightarrow -\infty \text{ für } t \rightarrow \infty} \\ &\quad + C_3 |\beta| |\nabla \bar{u}_1|_2^{\alpha_3} |\nabla \bar{u}_2|_2^{\alpha_4}. \end{aligned}$$

Somit gilt $J_\beta(t^{-1/\alpha_3} * \bar{u}_1, t^{1/\alpha_4} * \bar{u}_2) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$ und wir erhalten für ein ausreichend großes $\hat{t} > \left(\frac{\varepsilon_2}{|\nabla \bar{u}_2|_2}\right)^{\alpha_4}$ den Punkt $(\hat{t}^{-1/\alpha_3} * \bar{u}_1, \hat{t}^{1/\alpha_4} * \bar{u}_2) =: \hat{u} \in S(a_1) \times S(a_2)$ mit

$$|\nabla \hat{u}_2|_2 = |\nabla \bar{u}_2|_2 \hat{t}^{1/\alpha_4} > \varepsilon_2 \text{ und } J_\beta(\hat{u}) < \inf_{u \in \partial U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_\beta(u).$$

Sei nun zusätzlich $\beta > 0$ und $r_2 < \frac{4}{N}$ erfüllt, so liefert Lemma 8.2

$$g(t) \leq m_1 + \frac{1}{2} |\nabla \bar{u}_2|_2^2 t^2 - \beta c(\bar{u}, r_1, r_2) t^{\frac{N}{2} r_2} \nearrow m_1 \text{ für } t \rightarrow 0^+.$$

Dies liefert ein $\tilde{t} \in I$, so dass $\tilde{u} := (\bar{u}_1, \tilde{t} * \bar{u}_2) \in U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ und $J_\beta(\tilde{u}) = g(\tilde{t}) < m_1$ erfüllt ist. \square

Des Weiteren betrachten wir ein festes $\beta < \beta_5$ und wählen $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, sowie \tilde{u}, \hat{u} wie in Lemma 10.5.

Damit definieren wir

$$\Gamma = \{g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{S} : g(0) = \tilde{u}, g(1) = \hat{u}\}.$$

und

$$\hat{c}(\beta) = \inf_{g \in \Gamma} \max_{[0, 1]} J_\beta \circ g.$$

Zunächst haben wir für alle $\beta < \beta_5$ eine Mountain-Pass-Struktur vorliegen, wie uns Lemma 10.5 zeigt. Doch für die Konvergenz einer geeigneten Palais-Smale-Folge benötigen wir, dass sich $\hat{c}(\beta)$ von 0, m_1 und m_2 unterscheidet. Wegen $p_1 < 2 + \frac{4}{N} < p_2$ erhalten wir $m_1 < 0 < m_2$. Und die Wahl von β_5 liefert $\hat{c}(\beta) > m_1$. Da $\hat{c}(\beta)$ für $\beta \geq 0$ streng monoton in β fällt, können wir aus dem nächsten Lemma folgern, dass $\hat{c}(\beta) < m_1 + m_2 < m_2$ für $\beta > 0$ gilt. Nun spielt das Vorzeichen von $m_1 + m_2$ eine Rolle, denn für $m_1 + m_2 \leq 0$ reicht β_5 als obere Schranke für β aus. Für $m_1 + m_2 > 0$ gilt $\hat{c}(0) > 0 > m_1$, so dass wir $\beta < \tilde{\beta}_5$ fordern müssen, damit wir $\hat{c}(\beta) > 0$ erhalten.

10.6 Lemma

Es gilt $\hat{c}(0) = m_1 + m_2$ und \bar{u} ist eine Lösung der Minimax-Struktur von J_0 .

Beweis: Nach Lemma 3.5 existiert ein $\varepsilon_1 > 0$, so dass $I_1(u_1) \geq m_1 + m_2$ für alle $u \in U_0(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \cup U_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ gilt. Ebenso erhalten wir für $\varepsilon_2 = |\nabla \bar{u}_2|_2$, dass

$$\inf_{\substack{u_2 \in S(a_2) \\ |\nabla u_2|_2 \leq \varepsilon_2}} I_2(u_2) = 0 \quad \text{und} \quad \inf_{\substack{u_2 \in S(a_2) \\ |\nabla u_2|_2 = \varepsilon_2}} I_2(u_2) = m_2.$$

Zusammen folgt damit $J_0 \geq m_1 + m_2$ auf $\partial U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Somit erhalten wir

$$\hat{c}(0) \geq \inf_{\partial U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_0 \geq m_1 + m_2.$$

Wir definieren $g(t) := (\bar{u}_1, t * \bar{u}_2)$ und wegen $J_0 \circ g(t) \rightarrow m_1$ für $t \rightarrow 0$ und $J_0 \circ g(t) \rightarrow -\infty$ für $t \rightarrow \infty$ folgt ohne Einschränkung

$$\hat{c}(0) \leq \max_{(0, \infty)} J_0 \circ g = m_1 + m_2.$$

Damit ist eine Umparametrisierung von g in Γ enthalten und das Minimum über ganz Γ . Des Weiteren nimmt $J_0 \circ g$ das Maximum an der Stelle 1 an, so dass $\bar{u} = g(1)$ eine Lösung der Minimax-Struktur von J_0 ist. \square

10.7 Lemma

Es gibt ein $\tilde{\beta} > 0$, so dass für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}$

$$\inf_{\partial U(\beta^a, \beta^a)} J_\beta > m_1$$

gilt, wobei $a = 1$, falls $\alpha_4 > 1$ und $a = \frac{1}{2}$, falls $\alpha_4 \in (0, 1)$.

Beweis: Sei $f(s)$ das Infimum in Lemma 3.5. Dann ist f eine differenzierbare Funktion, dessen Taylorentwicklung im Punkt $s_0 = |\nabla \bar{u}_1|_2$ durch

$$f(|\nabla \bar{u}_1|_2 + s) = f(|\nabla \bar{u}_1|_2) + f'(|\nabla \bar{u}_1|_2)s^2 + o(s^2) = m_1 + \alpha_1 s^2 + o(s^2)$$

gegeben ist. Definieren wir

$$U := U_0(\beta^a, \beta^a) \cup U_2(\beta^a, \beta^a),$$

dann folgt mit der Taylorentwicklung von f die Gleichung

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} I_1(u_1) &= \inf_{\substack{u_1 \in S(a_1) \\ |\nabla u_1|_2 = |\nabla \bar{u}_1|_2 \pm \beta^a}} I_1(u_1) \\ &= \min \left\{ \inf_{\substack{u_1 \in S(a_1) \\ |\nabla u_1|_2 = |\nabla \bar{u}_1|_2 - \beta^a}} I_1(u_1), \inf_{\substack{u_1 \in S(a_1) \\ |\nabla u_1|_2 = |\nabla \bar{u}_1|_2 + \beta^a}} I_1(u_1) \right\} \\ &= \min \{ f(|\nabla \bar{u}_1|_2 - \beta^a), f(|\nabla \bar{u}_1|_2 + \beta^a) \} \\ &= m_1 + \alpha_1 \beta^{2a} + o(\beta^{2a}). \end{aligned} \tag{10.6}$$

Für $u \in \partial U(\beta^{2a}, \beta^{2a})$ und $\beta < |\nabla \bar{u}_1|_2^{1/(2a)}$ folgt

$$|\nabla u_1|_2 \leq |\nabla \bar{u}_1|_2 + \beta^{2a} < 2|\nabla \bar{u}_1|_2$$

und zusammen mit (1.6)

$$\beta R(u) \leq \beta c_3 |\nabla u_1|_2^{\alpha_3} |\nabla u_2|_2^{\alpha_4} \leq c_3 (2|\nabla \bar{u}_1|_2)^{\alpha_3} \beta^{1+\alpha_4 a}. \quad (10.7)$$

Für $\beta < |\nabla \bar{u}_2|_2$ liefert Folgerung 3.5

$$\inf_{u \in U} I_2(u) = \inf_{\substack{u_2 \in \tilde{S}(\alpha_2) \\ |\nabla u_2|_2 \leq \beta^{2a}}} I_2(u_2) = 0. \quad (10.8)$$

Die Anwendung von (10.6), (10.7) und (10.8) liefert

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U} J_\beta(u) &\geq \inf_{u \in U} I_1(u_1) + I_2(u_2) - c_3 (2|\nabla \bar{u}_1|_2)^{\alpha_3} \beta^{1+\alpha_4 a} \\ &= m_1 + \alpha_1 \beta^{2a} + o(\beta^{2a}) - c_3 (2|\nabla \bar{u}_1|_2)^{\alpha_3} \beta^{1+\alpha_4 a}. \end{aligned} \quad (10.9)$$

Nach Wahl von a gilt $2a < 1 + \alpha_4 a$, so dass die rechte Seite von (10.9) für ausreichend kleine β größer als m_1 ist. Das bedeutet, dass ein $\tilde{\beta}_1 > 0$ existiert mit

$$\inf_{u \in U} J_\beta(u) > m_1 \quad (10.10)$$

für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_1$.

Folgerung 3.5 liefert

$$\inf_{u \in U_1(\beta^{2a}, \beta^{2a})} I_1(u_1) = m_1 \quad \text{und} \quad \inf_{u \in U_1(\beta^{2a}, \beta^{2a})} I_2(u_2) = \frac{1}{2} \beta^{2a} - \frac{1}{\alpha_2} |\nabla \bar{u}_2|_2^{2-\alpha_2} \beta^{\alpha_2 a}. \quad (10.11)$$

Mit (10.7) und (10.11) erhalten wir

$$\begin{aligned} \inf_{u \in U_1(\beta^{2a}, \beta^{2a})} J_\beta(u) &\geq \inf_{u \in U_1(\beta^{2a}, \beta^{2a})} I_1(u_1) + I_2(u_2) - c_3 (2|\nabla \bar{u}_1|_2)^{\alpha_3} \beta^{1+\alpha_4 a} \\ &= m_1 + \frac{1}{2} \beta^{2a} - \frac{1}{\alpha_2} |\nabla \bar{u}_2|_2^{2-\alpha_2} \beta^{\alpha_2 a} - c_3 (2|\nabla \bar{u}_1|_2)^{\alpha_3} \beta^{1+\alpha_4 a}. \end{aligned} \quad (10.12)$$

Nach Wahl von a gilt $2a < 1 + \alpha_4 a$ und wegen $\alpha_2 > 2$ erhalten wir ebenso $2a < \alpha_2 a$. Deswegen ist die rechte Seite von (10.12) für ausreichend kleine β größer als m_1 . Das bedeutet, dass ein $\tilde{\beta}_2 > 0$ existiert mit

$$\inf_{u \in U_1(\beta^{2a}, \beta^{2a})} J_\beta(u) > m_1 \quad (10.13)$$

für alle $0 < \beta < \tilde{\beta}_2$.

Mit $\tilde{\beta} = \min\{\tilde{\beta}_1, \tilde{\beta}_2\}$ erhalten wir aus (10.10) und (10.13) die Behauptung. \square

- Beweis von Satz 2.9:** (i) Lemma 10.5 liefert die Existenz von \tilde{u} und \hat{u} , so dass Γ eine Minimax-Struktur induziert. Nach Lemma 3.14 existiert eine Palais-Smale-Folge, die nach Lemma 5.5 beschränkt ist. Um schließlich Lemma 5.6 anwenden zu können, beachten wir, dass β_4 so gewählt wurde, dass sich $\hat{c}(\beta)$ stets von 0, m_1 und m_2 unterscheidet. Daher erhalten wir schließlich eine Lösung von (1.1) mit (1.2).
- (ii) Wegen $r_2 < \frac{N}{4}$ liefert Lemma 10.5 für geeignete $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ eine Minimalfolge $(u^n)_n \subseteq U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\beta(u^n) = \inf_{u \in U(\varepsilon_1, \varepsilon_2)} J_\beta(u) \leq J_\beta(\tilde{u}) < m_1.$$

Wegen $m_1 < 0 < m_2$ können wir Lemma 4.6 anwenden. Mit Lemma 3.13 und Lemma 3.11 erhalten wir schließlich eine Lösung v von (1.1) mit (1.2).
Nach Lemma 10.7 gilt

$$|\nabla \bar{u}_1|_2 - \beta^{2a} < |\nabla v_1|_2 < |\nabla \bar{u}_1|_2 + \beta^{2a} \text{ und } |\nabla v_1|_2 < \beta^{2a}$$

für ausreichend kleine $\beta > 0$. Damit folgt

$$|\nabla v_1|_2 \rightarrow |\nabla \bar{u}_1|_2 \text{ und } |\nabla v_2|_2 \rightarrow 0 \text{ für } \beta \rightarrow 0.$$

□

11 J_β eingeschränkt auf V_β für $p_1, p_2 > 2 + \frac{4}{N}$

Jeder kritische Punkt u von J_β erfüllt wegen der Pohozaev-Identität die Gleichung $Q_\beta(u) = 0$. Wegen der Aussage in [6, Theorem 1.3(ii)] kann $J_\beta|_{V_\beta}$ als natürliche Einschränkung betrachtet werden. Obwohl [7] zeigt, dass das es noch offen ist, ob die Aussage wahr ist, wird jedoch gleichzeitig eine Alternative ausgeführt bei der das Funktional J_β zu \tilde{J}_β modifiziert wird, so dass $\tilde{J}_\beta(t * u)$ konstant entlang $t > 0$ ist. Dann wurde ausgeführt, dass ein kritischer Punkt von \tilde{J}_β zu einem kritischen Punkt von J_β führt. Die Aussagen lassen sich auch wahrscheinlich verallgemeinern. Im Fall $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ und $0 < \beta < \beta_1$ hat Ψ_u stets eine Maximumsstelle t_u , so dass

$$\tilde{J}_\beta(u) = J_\beta(t_u * u)$$

wohldefiniert wäre. Somit entspricht \tilde{J}_β dem Funktional $J_\beta|_{V_\beta^+}$.

Die Menge V_β^- ist nicht zu vernachlässigen, da der globale Minimierer, sofern einer existiert, von J_β auf V_β wegen dem Niveauunterschied in V_β^- liegt. Der Ansatz in [7] ignoriert die Elemente in V_β^- , so dass darin enthaltene Lösungen nicht gefunden werden können.

Obwohl es offen ist, ob ein kritischer Punkt von $J_\beta|_{V_\beta}$ auch ein kritischer Punkt von J_β ist, gilt zumindest die Umkehrung. Insbesondere sind die Strukturen von $J_\beta|_{V_\beta}$ einfacher im folgenden Sinne:

11.1 Lemma

Sei die Voraussetzungen und die Notation, wie in Satz 2.7 gegeben.

- (i) Die Lösung v ist ein globaler Minimierer von $J_\beta|_{V_\beta^+}$.
- (ii) Die Lösung w ist der globaler Minimierer von $J_\beta|_{V_\beta}$.

Beweis: (i) Das Minimum von Ψ_u hat stets einen negativen Wert, weswegen wir $J_\beta(u) < 0$ für alle $u \in V_\beta^-$ erhalten. Des Weiteren gilt $J_\beta(v) = \hat{c}(\beta) > 0$ für das Mountain-Pass v aus Satz 2.7(ii). Daraus folgt $v \in V_\beta^+$. Für jedes $u \in V_\beta^+$ induziert die Wirkung $*$ einen Weg $g_u(t) := t * u$. Wegen $\Psi_u(t) = J_\beta(g_u(t))$ und dem bekannten Grenzverhalten von Ψ_u können wir für g_u einen geeigneten Definitionsbereich wählen und zu \tilde{g}_u umparametrisieren, dass $\tilde{g}_u \in \Gamma$ gilt. Nun definieren wir

$$\tilde{\Gamma} = \{\tilde{g}_u : u \in V_\beta^+\} \subseteq \Gamma.$$

Da $\max_{t \in [0,1]} J_\beta(g_u(t)) = J_\beta(u)$ und $v \in V_\beta^+$ gelten, erhalten wir schließlich

$$\inf_{\tilde{g}_u \in \tilde{\Gamma}} \max_{t \in [0,1]} J_\beta(\tilde{g}_u(t)) = \inf_{u \in V_\beta^+} J_\beta(u) \leq J_\beta(v) = \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\beta(g(t)) \leq \inf_{\tilde{g}_u \in \tilde{\Gamma}} \max_{t \in [0,1]} J_\beta(\tilde{g}_u(t)).$$

Dies liefert $J_\beta(v) = \inf J_\beta(V_\beta^+)$ und v ist ein globaler Minimierer von $J_\beta|_{V_\beta^+}$.

- (ii) Aus Lemma 5.5 erhalten wir die Koerzivität von $J_\beta|_{V_\beta}$. Dadurch ist jede eine globale Minimalfolge $(u^n)_n$ von $J_\beta|_{V_\beta}$ beschränkt. Insbesondere können wir davon ausgehen, dass $(u^n)_n$ in V_β^- enthalten ist, denn falls $u \in V_\beta^+$, dann gilt entweder $J_\beta(u) > 0$ oder wir beobachten an Ψ_u , dass der Wert des Minimums stets kleiner ist als der des Maximums und wir so jede Minimalfolge in V_β durch eine Minimalfolge in V_β^- ersetzen können.

Auf der anderen Seite sei $s \in \mathbb{R}_+^2$ so, dass $\inf Q_\beta(B(s)) > 0$ gilt, und $(u^n)_n$ eine lokale Minimalfolge in $A(s)$. Nach Lemma 9.1 können wir ohne Einschränkung davon ausgehen, dass $J_\beta(u^n) < 0$ gilt. Dies bedeutet allerdings, dass Ψ_u ein lokales Minimum haben muss, da es für $0 < \beta < \beta_1$ stets zwei kritische Punkte besitzt. Des Weiteren gilt $V_\beta^- \subseteq A(s)$ nach Lemma 3.10. Daher können wir die Minimalfolge $(u^n)_n$ in $A(s)$ durch eine Minimalfolge in V_β^- ersetzen.

Wir haben also gezeigt, dass sowohl eine globale Minimalfolge von $J_\beta|_{V_\beta}$ als auch eine lokale Minimalfolge von J_β in $A(s)$ auf eine Minimalfolge in V_β^- zurückgeführt werden kann, so dass das lokale Minimum w auch ein globaler Minimierer von $J_\beta|_{V_\beta}$ ist. \square

Wir vermuten, dass die Lösung aus Satz 2.7 (i) auf eine Mountain-Pass-Lösung von $J_\beta|_{V_\beta}$ zurückzuführen ist. Jedoch ergeben sich bei der Einbettung des zweidimensionalen Linkings nach V_β^+ technische Schwierigkeiten. Diese Beziehung motiviert uns $J_\beta|_{V_\beta}$ zu untersuchen, da Strukturen auf V_β einen Indiz für Strukturen auf ganz \mathcal{S} liefert. So erhalten wir aus unseren Beobachtungen folgendes Resultat, welches wir am Ende diesen Kapitels beweisen werden:

11.2 Satz

Sei $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$.

- (i) Es existiert ein $0 < \beta_6 < \beta_1$, so dass das Funktional $J_\beta|_{V_\beta}$ für alle $\beta < \beta_6$ eine Mountain-Pass-Struktur zu einem Niveau oberhalb von $\max\{m_1, m_2\} > 0$ besitzt.
- (ii) Sei $\beta > 0$ und es gebe ein $i \in \{1, 2\}$, so dass $r_i < \frac{4}{N}$ gilt, dann hat $J_\beta|_{V_\beta}$ eine beschränkte Minimalfolge $\{u^n\} \subseteq V_\beta^+$ mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\beta(u^n) < m_j,$$

wobei $j \in \{1, 2\} \setminus \{i\}$ gilt. Des Weiteren gibt es ein $s \in \mathbb{R}_+^2$ mit $s_k < |\nabla \bar{u}_k|_2$ für $k = 1, 2$, so dass $V_\beta^+ \subseteq C(s)$ und $|\nabla u_i^n|_2 < s_i$.

Wenn wir davon ausgehen, dass die Minimalfolge in Satz 11.2 gegen ein lokales Minimum konvergiert und dies eine Mountain-Pass-Lösung von J_β auf \mathcal{S} entspricht, so gibt es zwei bedeutende Unterschiede im Vergleich zu Satz 2.7 (ii). Erstens sind die Voraussetzungen in Satz 11.2 schwächer und zweitens erhalten wir sogar zwei unterschiedliche lokale Minima, falls $r_1 < \frac{4}{N}$ und $r_2 < \frac{4}{N}$ gelten. Dies deutet an, dass es zwei Mountain-Pass-Lösungen unter schwächeren Voraussetzungen geben könnte. Des Weiteren können wir sogar das Grenzverhalten $\beta \rightarrow 0$ unter weniger starken Voraussetzungen untersuchen. Insbesondere der Fall $m_1 = m_2$ kann betrachtet werden, da wir eine Komponente der Minimalfolge auf V_β^+ beschränken können, was für die Mountain-Pass-Lösung auf \mathcal{S} bisher nicht möglich war.

11.3 Folgerung

Seien $i \neq j \in \{1, 2\}$ und $v \in V_\beta^+$ ein lokales Minimum von $J_\beta|_{V_\beta^+}$ mit $J_\beta(v) < m_j$ und $|\nabla v_i|_2 < |\nabla \bar{u}_i|_2$, dann gelten

$$|\nabla v_i|_2 \rightarrow 0 \text{ und } |\nabla v_j|_2 \rightarrow |\nabla \bar{u}_j|_2 \text{ für } \beta \rightarrow 0.$$

Beweis: Wir nehmen ohne Einschränkung $i = 2$ und $j = 1$ an. Dann beachten wir, dass durch die Voraussetzung $|\nabla v_2|_2 < |\nabla \bar{u}_2|_2$ und $J_\beta(v) < m_1$ im Beweis von Lemma 8.6 bereits aus den Behauptungen 1, 2, 5 und 6 die Abschätzungen

$$|\nabla u_1|_2 \geq |\nabla \bar{u}_1|_2(1 + \beta^{1/2})^{1/2} \text{ und } |\nabla u_2|_2 \geq \beta^{1/2}$$

für ausreichend kleine $\beta > 0$ folgen. Zusammen mit Lemma 8.5 erhalten wir schließlich die Aussage

$$|\nabla v_i|_2 \rightarrow 0 \text{ und } |\nabla v_j|_2 \rightarrow |\nabla \bar{u}_j|_2 \text{ für } \beta \rightarrow 0.$$

□

Kommen wir nun dazu, den Beweis von Satz 11.2 vorzubereiten. Für die Mountain-Pass-Struktur von $J_\beta|_{V_\beta}$ gehen wir wie folgt vor:

Wir konstruieren Elemente \tilde{u} bzw. \hat{u} in V_β^+ , nahe $(\bar{u}_1, 0)$ bzw. $(0, \bar{u}_2)$ bezüglich der Gradientennorm, so dass $J_\beta(\tilde{u})$ bzw. $J_\beta(\hat{u})$ nahe m_1 bzw. m_2 sind. Eine geeignete obere Schranke an β ermöglicht es schließlich zu zeigen, dass das globale Maximum der stetigen Wege von \tilde{u} nach \hat{u} echt größer als $\max\{m_1, m_2\}$ ist. Dies induziert uns die Mountain-Pass-Struktur.

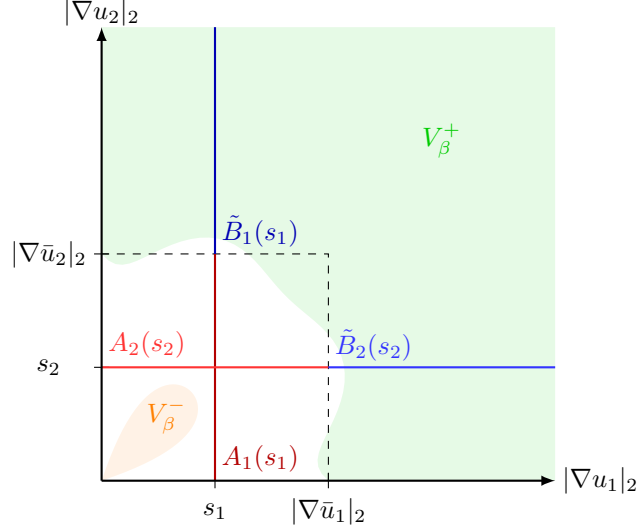
Um die geeignete Schranke für β zu formulieren, führen wir weitere Mengen ein, die \mathcal{S} etwas anders zerlegt. Für $s > 0$ definieren wir zusätzlich zu den in Definition 8.4 eingeführten Mengen $A_1(s)$ und $A_2(s)$ die Mengen

$$\begin{aligned} \tilde{B}_1(s) &= \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_1|_2 = s, |\nabla u_2|_2 \geq |\nabla \bar{u}_2|_2\}, \\ \tilde{B}_2(s) &= \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_1|_2 \geq |\nabla \bar{u}_1|_2, |\nabla u_2|_2 = s\}, \\ B_1(s) &= V_\beta \cap \tilde{B}_1(s) \text{ und} \\ B_2(s) &= V_\beta \cap \tilde{B}_2(s). \end{aligned}$$

Für $i \in \{1, 2\}$ wird \mathcal{S} durch $A_i(s) \cup \tilde{B}_i(s)$ in die zwei Mengen zerlegt. Die eine Menge enthält alle $u \in \mathcal{S}$, so dass $|\nabla u_i|_2$ nach oben durch s beschränkt ist, während in der anderen Menge $|\nabla u_i|_2$ nach unten durch s beschränkt ist. Für ausreichend kleine β können wir dann erreichen, dass einerseits $A_1(s_1) \cup A_2(s_2)$ für $s_1, s_2 > 0$ außerhalb von V_β liegt und somit V_β^- von V_β^+ trennt und andererseits J_β auf $B_1(s_1) \cup B_2(s_2) \subseteq V_\beta^+$ von $\max\{m_1, m_2\}$ weg beschränkt ist. Wählen wir dann $\tilde{u} \in V_\beta^+$, so dass $|\nabla \tilde{u}_1|_2 < s_1$ und $\hat{u} \in V_\beta^+$, so dass $|\nabla \hat{u}_2|_2 < s_2$, dann wird jeder stetige Weg

von \tilde{u} nach \hat{u} die Mengen $B_1(s_1)$ und $B_2(s_2)$ schneiden. Wir müssen dann nur noch die Wahl so treffen, dass wir eine Mountain-Pass-Struktur haben.

Abbildung 5: Die Zerlegung von \mathcal{S} durch $A_i(s_i) \cup \tilde{B}_i(s_i)$ und von V_β^+ durch $B_i(s_i)$ für $i \in \{1, 2\}$



Wenn wir J_β auf $B_i(s)$ oder V_β^+ betrachten wollen, ist es von Vorteil, bei der Darstellung von $J_\beta(u)$ die Gleichung $Q_\beta(u) = 0$ zu berücksichtigen. Wir erhalten folgende Darstellungen:

$$\begin{aligned}
 J_\beta(u) &= \sum_{i=1}^2 \underbrace{\left(\frac{\alpha_i}{2} - 1\right)}_{>0} \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|^{p_i} - \beta \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2}\right)}_{>0} R(u), \\
 J_\beta(u) &= \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right)}_{>0} |\nabla u_1|_2^2 + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right)}_{>0} |\nabla u_2|_2^2 - \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \frac{\mu_2}{p_2} |u_2|^{p_2} \\
 &\quad - \beta \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right)}_{>0} R(u) \tag{11.1} \\
 J_\beta(u) &= \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\right)}_{>0} |\nabla u_1|_2^2 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \frac{\mu_1}{p_1} |u_1|^{p_1} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\right)}_{>0} |\nabla u_2|_2^2 \\
 &\quad - \beta \underbrace{\left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2}\right)}_{>0} R(u).
 \end{aligned}$$

Nun können wir damit eine geeignete obere Schranke für β formulieren.

11.4 Definition

Wir schreiben

$$m_B(1, s) = \inf_{\substack{v \in B_1(s) \\ R(v) \neq 0}} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\right) |\nabla v_1|_2^2 - \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) \frac{\mu_1}{p_1} |v_1|_{p_1}^{p_1} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_2}\right) |\nabla v_2|_2^2 - m_2}{\left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_2}\right) R(v)},$$

$$m_B(2, s) = \inf_{\substack{v \in B_2(s) \\ R(v) \neq 0}} \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla v_1|_2^2 - m_1 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla v_2|_2^2 - \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \frac{\mu_2}{p_2} |v_2|_{p_2}^{p_2}}{\left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right) R(v)}$$

Zusammen mit $m_A(i, s)$ für $i = 1, 2$ aus Definition 8.4 wählen wir

$$\beta^{(i)} := \sup_{s > 0} \min\{m_A(i, s), m_B(i, s)\}$$

für $i = 1, 2$ sowie

$$\beta_6 := \min\{\beta^{(1)}, \beta^{(2)}\}.$$

Bei der Konstruktion ist es allerdings nicht unmittelbar offensichtlich, ob β_6 positiv ist, so dass wir uns dies genauer anschauen.

11.5 Lemma

Es gilt $0 < \beta_6 \leq \beta_1$.

Beweis: Das Lemma 3.4 liefert unmittelbar $m_A(i, s) > 0$ für alle $s < |\nabla \bar{u}_i|_2$.

Nun wollen wir zeigen, dass $m_B(2, s) > 0$ für ausreichend kleine s gilt. Dazu definieren wir zur besseren Übersichtlichkeit

$$a = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right), \quad b = \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \quad \text{und} \quad c = \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{\alpha_1}\right).$$

sowie

$$T_1(v_1) := a |\nabla v_1|_2^2 - m_1 \quad \text{und} \quad T_2(v_2) = a |\nabla v_2|_2^2 - b \frac{\mu_2}{p_2} |v_2|_{p_2}^{p_2}.$$

Damit gilt nun

$$m_B(2, s) = \inf_{\substack{v \in B_2(s) \\ R(v) \neq 0}} \frac{T_1(v_1) + T_2(v_2)}{cR(v)}.$$

Für $|\nabla v_1|_2 \geq |\nabla \bar{u}_1|_2$ gilt

$$T_1(v_1) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla \bar{u}_1|_2^2 - m_1 = 0. \tag{11.2}$$

Wir definieren

$$\hat{s} := \begin{cases} \left(\frac{2a}{b}\right)^{\frac{1}{\alpha_2 - 2}} |\nabla \bar{u}_2|_2 & \text{falls } \alpha_1 > \alpha_2 \\ \infty & \text{falls } \alpha_1 \leq \alpha_2. \end{cases}$$

Behauptung 1:

Für alle $0 < s < \hat{s}$ existiert ein $\tilde{c}_s > 0$, so dass

$$\inf_{\substack{v_2 \in S(a_2) \\ |\nabla v_2|_2 = s}} T_2(v_2) \geq \tilde{c}_s$$

gilt.

Beweis von Behauptung 1: Sei $v_2 \in S(a_2)$ mit $|\nabla v_2|_2 = s$ gegeben. Wir definieren

$$a = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1} \right) \text{ und } b = \left(1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right).$$

Für $\alpha_2 \geq \alpha_1$ folgt $b < 0$ und damit

$$a|\nabla v_2|_2^2 - b \frac{\mu_2}{p_2} |v_2|_{p_2}^{p_2} > as^2. \quad (11.3)$$

Gilt andererseits $\alpha_2 < \alpha_1$, dann gilt $\hat{s} = \left(\frac{2a}{b} \right)^{1/(\alpha_2-2)} |\nabla \bar{u}_2|_2$ und zusammen mit Folgerung 3.5 erhalten wir für $0 < s < \hat{s}$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} a|\nabla v_2|_2^2 - b \frac{\mu_2}{p_2} |v_2|_{p_2}^{p_2} &\geq as^2 - \frac{b}{\alpha_2} |\nabla \bar{u}_2|_2^{2-\alpha_2} s^{\alpha_2} \\ &= s^2 \left(a - \frac{b}{\alpha_2} |\nabla \bar{u}_2|_2^{2-\alpha_2} s^{\alpha_2-2} \right) \\ &> s^2 \left(a - \frac{b}{\alpha_2} |\nabla \bar{u}_2|_2^{2-\alpha_2} \hat{s}^{\alpha_2-2} \right) \\ &= 0. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Wegen (11.3) und (11.4) folgt Behauptung 1 mit

$$\tilde{c}_s = \min \left\{ as^2, as^2 - \frac{b}{\alpha_2} |\nabla \bar{u}_2|_2^{2-\alpha_2} s^{\alpha_2} \right\}.$$

Behauptung 2:

Für alle $0 < s < \hat{s}$ und alle $\delta > 0$ gilt

$$\inf_{\substack{v \in \mathcal{S} \\ |\nabla \bar{u}_1|_2 \leq |\nabla v_1|_2 \leq |\nabla \bar{u}_1|_2 + \delta \\ |\nabla v_2|_2 = s}} \frac{T_1(v_1) + T_2(v_2)}{R(v)} > 0.$$

Beweis von Behauptung 2: Sei $v \in \mathcal{S}$ mit

$$R(v) \neq 0, \quad |\nabla \bar{u}_1|_2 \leq |\nabla v_1|_2 \leq |\nabla \bar{u}_1|_2 + \delta \text{ und } |\nabla v_2|_2 = s.$$

Behauptung 1, die Abschätzung (11.2) und (1.6) liefern

$$\frac{T_1(v_1) + T_2(v_2)}{R(v)} \geq \frac{T_2(v_2)}{R(v)} \geq \frac{\tilde{c}_s}{c_3 |\nabla v_1|_2^{\alpha_3} |\nabla v_2|_2^{\alpha_4}} \geq \frac{\tilde{c}_s}{c_3 (|\nabla \bar{u}_1|_2 + \delta)^{\alpha_3} s^{\alpha_4}},$$

welches Behauptung 2 beweist.

Behauptung 3:

Für alle $0 < s < \hat{s}$ und alle $\delta > 0$ gilt

$$\inf_{\substack{v \in \mathcal{S} \\ |\nabla v_1|_2 \geq |\nabla \bar{u}_1|_2 + \delta \\ |\nabla v_2|_2 = s}} \frac{T_1(v_1) + T_2(v_2)}{R(v)} > 0.$$

Beweis von Behauptung 3: Sei $v \in \mathcal{S}$ mit

$$R(v) \neq 0, \quad |\nabla v_1|_2 \geq |\nabla \bar{u}_1|_2 + \delta \text{ und } |\nabla v_2|_2 = s.$$

Mit $\alpha_3 < 2$ und $\delta > 0$ folgt

$$\begin{aligned} \frac{|\nabla v_1|_2^2 - |\nabla \bar{u}_1|_2^2}{|\nabla v_1|_2^{\alpha_3}} &= |\nabla v_1|_2^{2-\alpha_3} - \frac{|\nabla \bar{u}_1|_2^2}{|\nabla v_1|_2^{\alpha_3}} > (|\nabla \bar{u}_1|_2 + \delta)^{2-\alpha_3} - \frac{|\nabla \bar{u}_1|_2^2}{(|\nabla \bar{u}_1|_2 + \delta)^{\alpha_3}} \\ &> (|\nabla \bar{u}_1|_2 + \delta)^{2-\alpha_3} - |\nabla \bar{u}_1|_2^{2-\alpha_3} > 0 \end{aligned} \quad (11.5)$$

Mit Behauptung 1 und den Abschätzungen (11.5) und (1.6) erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{T_1(v_1) + T_2(v_2)}{R(v)} &\geq \frac{T_1(v_1)}{R(v)} \geq \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right) |\nabla v_1|_2^2 - I_1(\bar{u}_1)}{R(v)} \\ &\geq \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right)}{c_3 s^{\alpha_4}} \left(\frac{|\nabla v_1|_2^2 - |\nabla \bar{u}_1|_2^2}{|\nabla v_1|_2^{\alpha_3}} \right) \\ &\geq \frac{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\alpha_1}\right)}{c_3 s^{\alpha_4}} \left((|\nabla \bar{u}_1|_2 + \delta)^{2-\alpha_3} - |\nabla \bar{u}_1|_2^{2-\alpha_3} \right) \\ &> 0, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung 3 folgt.

Für $0 < s < \hat{s}$ und liefern Behauptung 2 und 3

$$\begin{aligned} m_B(2, s) &= \frac{1}{c} \cdot \inf_{\substack{v \in B_2(s) \\ R(v) \neq 0}} \frac{T_1(v_1) + T_2(v_2)}{R(v)} \\ &\geq \frac{1}{c} \cdot \min \left\{ \inf_{\substack{v \in \mathcal{S} \\ |\nabla \bar{u}_1|_2 \leq |\nabla v_1|_2 \leq |\nabla \bar{u}_1|_2 + \delta \\ |\nabla v_2|_2 = s}} \frac{T_1(v_1) + T_2(v_2)}{R(v)}, \inf_{\substack{v \in \mathcal{S} \\ |\nabla v_1|_2 \geq |\nabla \bar{u}_1|_2 + \delta \\ |\nabla v_2|_2 = s}} \frac{T_1(v_1) + T_2(v_2)}{R(v)} \right\} \\ &> 0. \end{aligned}$$

Also folgt $\min\{m_A(2, s), m_B(2, s)\} > 0$ für alle $0 < s < \min\{|\nabla \bar{u}_1|_2, \hat{s}\}$.

Analog erhalten wir auch, dass $\min\{m_A(1, s), m_B(1, s)\} > 0$ für ausreichend kleine s gilt und somit $\beta_6 > 0$ ist.

Schließlich bleibt zu zeigen, dass $\beta_6 \leq \beta_1$ gilt. Dazu sei $\beta < \beta_6$. Nach Definition von β_6 existiert ein $s \in \mathbb{R}_+^2$, so dass

$$\beta < \min\{m_A(1, s_1), m_B(1, s_1), m_A(2, s_2), m_B(2, s_2)\} \leq \min\{m_A(1, s_1), m_A(2, s_2)\}.$$

Wegen $B(s) \subseteq A_1(s_1) \cup A_2(s_2)$ folgt letztendlich

$$\beta < \inf_{\substack{v \in A_1(s_1) \cup A_2(s_2) \\ R(v) \neq 0}} \frac{Q_0(v)}{(\alpha_3 + \alpha_4)R(v)} \leq \inf_{\substack{v \in B(s) \\ R(v) \neq 0}} \frac{Q_0(v)}{(\alpha_3 + \alpha_4)R(v)} \leq \beta_1.$$

Wir haben gezeigt, dass $\beta < \beta_1$ für alle $\beta < \beta_6$ gilt, woraus wir $\beta_6 \leq \beta_1$ erhalten. \square

Als nächstes konstruieren wir die Punkte $\tilde{u}, \hat{u} \in V_\beta^+$ mit den gewünschten Eigenschaften.

11.6 Bemerkung

Nach der Definition von β_6 gibt es zu jedem $\beta < \beta_6$ ein $s \in \mathbb{R}_+^2$, so dass

$$\beta < \min\{m_A(1, s_1), m_B(1, s_1), m_A(2, s_2), m_B(2, s_2)\}$$

gilt. Aus $m_A(i, s_i) > 0$ und Lemma 3.4 geht hervor, dass insbesondere $s_1 < |\nabla \bar{u}_2|_2$ für $i = 1, 2$ gelten.

Wenden wir Bemerkung 4.2 für $\beta < m_B(i, s_i)$ an und berücksichtigen wir die Darstellungen (11.1), so folgt

$$\delta_1(s_1) := \inf_{v \in B_1(s_1)} J_\beta(v) - m_2 > 0 \text{ und } \delta_2(s_2) := \inf_{v \in B_2(s_2)} J_\beta(v) - m_1 > 0.$$

Des Weiteren liefert $\beta < \min\{m_A(1, s_1), m_A(2, s_2)\}$ mit $B(s) \subseteq A_1(s_1) \cup A_2(s_2)$ und Bemerkung 4.2 die Bedingung

$$\inf_{u \in B(s)} Q_\beta(u) \geq \inf_{u \in A_1(s_1) \cup A_2(s_2)} Q_\beta(u) > 0.$$

Das bedeutet, dass $V_\beta^- \subseteq A(s)$ und $V_\beta^+ \subseteq C(s)$ gelten.

11.7 Lemma

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $s \in \mathbb{R}_+^2$ wie in Bemerkung 11.6. Es existieren $\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2 > 0$, so dass wir für $\tilde{v} := (\tilde{\tau}_1 * \bar{u}_1, \tilde{\tau}_2 * \bar{u}_2) \in C(s)$ und $\hat{v} := (\hat{\tau}_1 * \bar{u}_1, \hat{\tau}_2 * \bar{u}_2) \in C(s)$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned} Q_\beta(\tilde{v}), Q_\beta(\hat{v}) &< 0, \\ \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} - 1 \right) \frac{\mu_i}{p_i} |\tilde{v}_i|^{p_i} + |\beta| \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) R(\tilde{v}) &\leq m_1 + \varepsilon, \\ |\nabla \tilde{v}_1|_2 &> |\nabla \bar{u}_1|_2, \\ |\nabla \tilde{v}_2|_2 &< \varepsilon, \\ \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} - 1 \right) \frac{\mu_i}{p_i} |\hat{v}_i|^{p_i} + |\beta| \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) R(\hat{v}) &\leq m_2 + \varepsilon, \\ |\nabla \hat{v}_2|_2 &> |\nabla \bar{u}_2|_2 \text{ und} \\ |\nabla \hat{v}_1|_2 &< \varepsilon \end{aligned}$$

haben.

Beweis: Wir definieren

$$\tilde{t} = \left(1 + \frac{\varepsilon p_1}{3 \left(\frac{\alpha_1}{2} - 1 \right) \mu_1 |\bar{u}_1|_{p_1}^{p_1}} \right)^{\frac{1}{\alpha_1}}.$$

Dann gilt

$$\left(\frac{\alpha_1}{2} - 1 \right) \frac{\mu_1}{p_1} |\tilde{t} * \bar{u}_1|_{p_1}^{p_1} = \left(\frac{\alpha_1}{2} - 1 \right) \frac{\mu_1}{p_1} |\bar{u}_1|_{p_1}^{p_1} + \frac{\varepsilon}{3} = m_1 + \frac{\varepsilon}{3} \quad (11.6)$$

Wegen $\alpha_1 > 2$ ist $\tilde{t} > 1$. Zusammen mit $P_1(\bar{u}_1) = 0$ folgt

$$P_1(\tilde{t} * \bar{u}_1) < 0. \quad (11.7)$$

Wir wählen

$$0 < \tilde{s} < \min \left\{ \frac{\varepsilon}{|\nabla \bar{u}_2|_2}, \left(\frac{\varepsilon p_2}{3 \left(\frac{\alpha_2}{2} - 1 \right) \mu_2 |\bar{u}_2|_{p_2}^{p_2}} \right)^{\frac{1}{\alpha_2}}, \left(\frac{\varepsilon}{|\beta| \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) |\nabla \bar{u}_1|_2^{\alpha_3} |\nabla \bar{u}_2|_2^{\alpha_4} \tilde{t}^{\alpha_3}} \right)^{\frac{1}{\alpha_4}} \right\}.$$

Aus $\tilde{s} < \frac{\varepsilon}{|\nabla \bar{u}_2|_2}$ folgt

$$|\nabla(\tilde{s} * \bar{u}_2)|_2 = \tilde{s} |\nabla \bar{u}_2|_2 < \varepsilon. \quad (11.8)$$

Aus $\tilde{s} < \left(\frac{\varepsilon p_2}{3 \left(\frac{\alpha_2}{2} - 1 \right) \mu_2 |\bar{u}_2|_{p_2}^{p_2}} \right)^{\frac{1}{\alpha_2}}$ folgt

$$\left(\frac{\alpha_2}{2} - 1 \right) |\tilde{s} * \bar{u}_2|_{p_2}^{p_2} < \frac{\varepsilon}{3} \quad (11.9)$$

Aus $\tilde{s} < \left(\frac{\varepsilon}{|\beta| \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) |\nabla \bar{u}_1|_2^{\alpha_3} |\nabla \bar{u}_2|_2^{\alpha_4} \tilde{t}^{\alpha_3}} \right)^{\frac{1}{\alpha_4}}$ und (1.6) folgt

$$|\beta| \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) \int |\tilde{t} * \bar{u}_1|^{r_1} |\tilde{s} * \bar{u}_2|^{r_2} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (11.10)$$

Mit der Abschätzung (1.6) folgt

$$Q_\beta(\tilde{t} * \bar{u}_1, \tilde{s} * \bar{u}_2) - P_1(\tilde{t} * \bar{u}_1) \leq |\nabla \bar{u}_2|_2^2 \tilde{s}^2 + |\beta| c_3 (\alpha_3 + \alpha_4) |\nabla \bar{u}_1|_2^{\alpha_3} |\nabla \bar{u}_2|_2^{\alpha_4} \tilde{t}^{\alpha_3} \tilde{s}^{\alpha_4}. \quad (11.11)$$

Da die rechte Seite der Ungleichung (11.11) für ausreichend kleines \tilde{s} nahe 0 ist, können wir mit (11.7) ein $0 < \tilde{\tilde{s}} \leq \tilde{s}$ wählen, so dass

$$Q_\beta(\tilde{t} * \bar{u}_1, \tilde{\tilde{s}} * \bar{u}_2) - P_1(\tilde{t} * \bar{u}_1) < -P_1(\tilde{t} * \bar{u}_1) \quad (11.12)$$

gilt. Wir definieren nun

$$\tilde{\tau}_1 := \tilde{t}, \quad \tilde{\tau}_2 := \tilde{\tilde{s}} \text{ und damit } \tilde{v} := (\tilde{\tau}_1 * \bar{u}_1, \tilde{\tau}_2 * \bar{u}_2).$$

Aus (11.12) erhalten wir $Q_\beta(\tilde{v}) < 0$ und zusammen mit (11.6), (11.9) und (11.10) erhalten wir

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} - 1 \right) \frac{\mu_i}{p_i} |\tilde{v}_i|_{p_i}^{p_i} + |\beta| \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) R(\tilde{v}) < m_1 + \varepsilon.$$

Zuletzt folgt mit (11.8) und $\tilde{t} > 1$

$$|\nabla \tilde{v}_1|_2 = |\nabla \bar{u}_1|_2 \tilde{t} > |\nabla \bar{u}_1|_2 \text{ und } |\nabla \tilde{v}_2|_2 = |\nabla(\tilde{\tilde{s}} * \bar{u}_2)|_2 \leq |\nabla \bar{u}_2|_2 \tilde{\tilde{s}} < \varepsilon.$$

Die Wahl von \hat{u} folgt analog. \square

11.8 Folgerung

Seien $\varepsilon > 0$ und $\beta < \beta_1$. Weiter wählen wir $s \in \mathbb{R}_+^2$ wie in Bemerkung 11.6 und \tilde{v}, \hat{v} aus Lemma 11.7. Dann existieren $\tilde{t}, \hat{t} > 0$, so dass $\tilde{u} := \tilde{t} * \tilde{v}$ und $\hat{u} := \hat{t} * \hat{v}$ die Eigenschaften

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\in V_\beta^+, \quad J_\beta(\tilde{u}) \leq m_1 + \varepsilon, \quad |\nabla \tilde{u}_2|_2 < \varepsilon, \\ \hat{u} &\in V_\beta^+, \quad J_\beta(\hat{u}) \leq m_2 + \varepsilon \text{ und } |\nabla \hat{u}_1|_2 < \varepsilon \end{aligned}$$

haben.

Beweis: Für \tilde{v} gelten nach Lemma 11.7 die Eigenschaften

$$Q_\beta(\tilde{v}) < 0, \tag{11.13}$$

$$\sum_{i=1}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} - 1 \right) \frac{\mu_i}{p_i} |\tilde{v}_i|^{p_i} + |\beta| \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) R(\tilde{v}) \leq m_1 + \varepsilon \text{ und} \tag{11.14}$$

$$|\nabla \tilde{v}_2|_2 < \varepsilon. \tag{11.15}$$

Mit (11.13) liefert Bemerkung 8.1 ein $0 < \tilde{t} < 1$, so dass $\tilde{t} * \tilde{v} \in V_\beta^+$. Wir wählen nun $\tilde{u} = \tilde{t}_v * \tilde{v}$. Mit (11.15) und $\tilde{t} < 1$ folgt

$$|\nabla \tilde{u}_2|_2 = \tilde{t}_v |\nabla \tilde{v}_2|_2 < \varepsilon.$$

Schließlich erhalten wir mit (11.14) und (11.1)

$$\begin{aligned} J_\beta(\tilde{u}) &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} - 1 \right) \frac{\mu_i}{p_i} |\tilde{u}_i|^{p_i} - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) R(\tilde{u}) \\ &= \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} - 1 \right) \frac{\mu_i}{p_i} |t_{\tilde{v}} * \tilde{v}_i|^{p_i} - \beta \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) R(t_{\tilde{v}} * \tilde{v}) \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} - 1 \right) \frac{\mu_i}{p_i} |\tilde{v}_i|^{p_i} t_{\tilde{v}}^{\alpha_i} + |\beta| \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) R(\tilde{v}) t_{\tilde{v}}^{\alpha_3 + \alpha_4} \\ &< \sum_{i=1}^2 \left(\frac{\alpha_i}{2} - 1 \right) \frac{\mu_i}{p_i} |\tilde{v}_i|^{p_i} + |\beta| \left(1 - \frac{\alpha_3 + \alpha_4}{2} \right) \int |\tilde{v}_1|^{r_1} |\tilde{v}_2|^{r_2} \\ &\leq m_1 + \varepsilon. \end{aligned}$$

Die Wahl von \hat{t} folgt analog. □

Beweis von Satz 11.2: (i) Sei $s \in \mathbb{R}_+^2$ und $\delta_i(s_i) > 0$ aus Bemerkung 11.6 gegeben.

Wir definieren

$$\varepsilon_1 := \begin{cases} \min\{s_1, s_2, \delta_1(s_1), \delta_2(s_2)\} & \text{falls } m_1 = m_2 \\ \min\{s_1, s_2, \delta_1(s_1), \delta_2(s_2), |m_1 - m_2|\} & \text{falls } m_1 \neq m_2 \end{cases}$$

Die Anwendung der Folgerung 11.8 mit einem $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ liefert $\tilde{u}, \hat{u} \in V_\beta^+$ mit den Eigenschaften

$$J_\beta(\tilde{u}) \leq m_1 + \varepsilon < m_1 + \delta_2(s_2) = \inf_{u \in B_2(s_2)} J_\beta(u)$$

und

$$J_\beta(\hat{u}) \leq m_2 + \varepsilon < m_2 + \delta_1(s_1) = \inf_{u \in B_1(s_1)} J_\beta(u).$$

Nun definieren wir

$$\Gamma = \{g : [0, 1] \rightarrow V_\beta^+ \text{ stetig} : g(0) = \tilde{u} \text{ und } g(1) = \hat{u}\}.$$

Nach Wahl von \tilde{u} und \hat{u} folgt aus Lemma 11.7 und Folgerung 11.8, dass es

$$\tilde{\tau}_1, \tilde{\tau}_2, \tilde{t}, \hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2, \hat{t} > 0$$

gibt, so dass

$$\tilde{u} = \tilde{t} * (\tilde{\tau}_1 * \bar{u}_1, \tilde{\tau}_2 * \bar{u}_2) \text{ und } \hat{u} = \hat{t} * (\hat{\tau}_1 * \bar{u}_1, \hat{\tau}_2 * \bar{u}_2)$$

gilt. Somit definieren wir

$$\bar{g} : [0, 1] \rightarrow V_\beta^+, \quad g(t) = \pi \left((\tilde{t} \cdot ((1-t)\tilde{\tau}_1 + t\hat{\tau}_1)) * \bar{u}_1, (\hat{t} \cdot ((1-t)\tilde{\tau}_2 + t\hat{\tau}_2)) * \bar{u}_2 \right).$$

Nach Lemma 3.2 und Bemerkung 8.1 ist \bar{g} eine Komposition stetiger Funktionen. Insbesondere gelten $\bar{g}(0) = \tilde{u}$ und $\bar{g}(1) = \hat{u}$ und damit $\bar{g} \in \Gamma$. Folglich ist Γ nicht leer.

Nun zeigen wir, dass jede Kurve $g \in \Gamma$ die Menge $B_1(s_1)$ schneidet und analog folgt, dass sie auch die Menge $B_2(s_2)$ schneidet. Dazu definieren wir die stetige Funktion

$$h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) := |\nabla g_1(t)|_2.$$

Die Eigenschaften aus Folgerung 11.8 sowie $\tilde{u}, \hat{u} \in V_\beta^+ \subseteq C(s)$ liefern

$$h(0) = |\nabla \tilde{u}_1|_2 > s_1 \text{ und } h(1) = |\nabla \hat{u}_2|_2 < \varepsilon < s_1.$$

Der Zwischenwertsatz liefert ein $t_1 \in (0, 1)$, so dass $h(t_1) = s_1$. Dies liefert

$$g(t_1) \in \{u \in S(a_1) \times S(a_2) : |\nabla u_2|_2 = s_1\} \cap V_\beta.$$

Durch die Wahl von s ist jedoch $A_1(s_1) \cap V = \emptyset$. Wir erhalten damit

$$\{u \in S(a_1) \times S(a_2) : |\nabla u_2|_2 = s_1\} \cap V_\beta = B_1(s_1).$$

Somit gilt $g(t_1) \in B_1(s_1)$.

Wir definieren nun

$$B := \begin{cases} B_1(s_1) & m_2 > m_1 \\ B_2(s_2) & m_2 \leq m_1. \end{cases}$$

Dann trennt B die Punkte \tilde{u} und \hat{u} voneinander, so dass jeder stetige Weg die Menge B schneiden muss. Ist $m_2 > m_1$, dann gilt

$$\begin{aligned} \max\{J_\beta(\tilde{u}), J_\beta(\hat{u})\} &< \max\{m_1 + \varepsilon, m_2 + \varepsilon\} < \max\{m_2, m_2 + \delta_2(s_2)\} = m_2 + \delta_2(s_2) \\ &= \inf_{u \in B_1(s_1)} J_\beta(u) = \inf_{u \in B} J_\beta(u). \end{aligned}$$

Für $m_1 = m_2$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \max\{J_\beta(\tilde{u}), J_\beta(\hat{u})\} &< \max\{m_1 + \varepsilon, m_2 + \varepsilon\} = m_1 + \varepsilon < m_1 + \delta_1(s_1) \\ &= \inf_{u \in B_2(s_2)} J_\beta(u) = \inf_{u \in B} J_\beta(u). \end{aligned}$$

Schließlich folgt mit $m_2 < m_1$

$$\begin{aligned} \max\{J_\beta(\tilde{u}), J_\beta(\hat{u})\} &< \max\{m_1 + \varepsilon, m_2 + \varepsilon\} < \max\{m_1 + \delta_1(s_1), m_1\} = m_1 + \delta_1(s_1) \\ &= \inf_{u \in B_2(s_2)} J_\beta(u) = \inf_{u \in B} J_\beta(u). \end{aligned}$$

In allen Fällen haben wir

$$\max\{J_\beta(\tilde{u}), J_\beta(\hat{u})\} < \max\{m_1, m_2\} + \varepsilon < \inf_{u \in B} J_\beta(u), \quad (11.16)$$

welches uns eine Mountain-Pass-Struktur zum Niveau

$$\hat{c}(\beta) := \inf_{g \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J_\beta \circ g(t)$$

liefert. Insbesondere liefert (11.16)

$$\hat{c}(\beta) \geq \inf_{u \in B} J_\beta(u) > \max\{m_1, m_2\}.$$

(ii) Ohne Einschränkung sei $r_1 < \frac{4}{N}$ und wir definieren

$$D_1(s_1) := \{u \in V_\beta^+ : |\nabla u_1|_2 < s_1\}.$$

Dann gilt $\partial D_1(s_1) = B_1(s_1)$. Sei nun $0 < \beta < \beta_6$ und $s \in \mathbb{R}_+^2$ so gewählt, dass

$$\beta < \min\{m_A(1, s_1), m_A(2, s_2), m_B(1, s_1), m_B(2, s_2)\}$$

gilt. Dann folgt aus $\beta < m_B(1, s_1)$ und Bemerkung 4.2

$$\inf_{u \in B_1(s_1)} J_\beta(u) > m_2. \quad (11.17)$$

Mit $\varepsilon = s_1$ liefert Lemma 8.3 ein $\hat{u} \in D_1(s_1)$, so dass $J_\beta(\hat{u}) < m_2$. Zusammen mit (11.17) erhalten wir

$$\inf_{u \in D_1(s_1)} J_\beta(u) \leq J_\beta(\hat{u}) < m_2 < \inf_{u \in \partial D_1(s_1)} J_\beta(u).$$

Dies zeigt, dass $D_1(s_1)$ eine geeignete Menge für eine Minimalfolge ist. Für jede Folge $(u^n)_n \subseteq D_1(s_1)$ gilt $|\nabla u_1^n|_2 < s_1$.

Da $J_\beta|_{V_\beta^+}$ nach Lemma 5.5 koerziv bezüglich der Gradientennorm ist, folgt unmittelbar die Beschränktheit jeder Minimalfolge in V_β^+ . □

12 Berücksichtigung der Topologie von V_β für die Existenz lokaler Minima

In Kapitel 4 haben wir gezeigt, dass wir durch die Wahl von β_1 für alle $0 < \beta < \beta_1$ eine beschränkte Menge $A(s)$ wählen können, so dass das Infimum von Q_β über deren Rand positiv ist. Somit ließ sich in Lemma 4.3 zeigen, dass das Infimum von J_β über den Rand von $A(s)$ strikt größer als über $A(s)$ ist. Jede Minimalfolge in $A(s)$ ist beschränkt und konvergiert wegen dem Niveauunterschied nicht gegen den Rand $B(s)$. Die Wahl der speziellen Form von $A(s)$ ist aber nicht sehr zweckmäßig, denn erstens benötigt der Beweis von Lemma 4.3 nicht die spezielle Form von $A(s)$ und zweitens ist aus dem Beweis von Lemma 11.1(ii) zu entnehmen, dass wir ohne Einschränkung davon ausgehen können, dass die Minimalfolge in V_β^- liegt. Somit liefern Subniveaumengen von Q_β eine natürliche Umgebung von V_β^- . Jedoch sind die Subniveaumengen von Q_β unbeschränkt, so dass wir dazu übergehen, eine geeignete Teilmenge davon zu nehmen, welche sowohl beschränkt ist als auch V_β^- enthält. Für $d > 0$ betrachten wir dazu die beiden Mengen

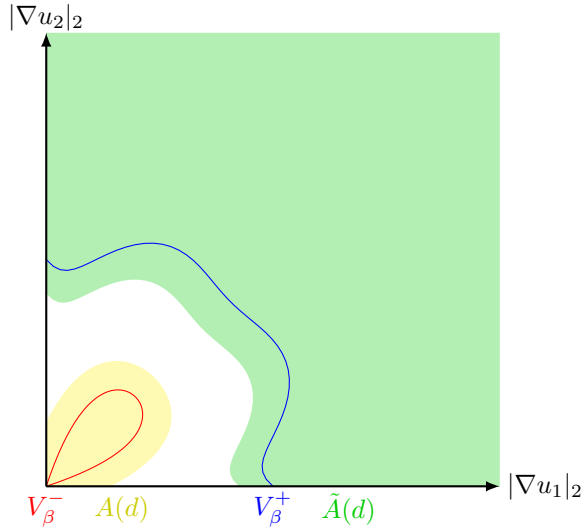
$$\begin{aligned} A(d) &:= \{u \in \mathcal{S} : \Phi_u(t) < d \text{ für alle } t \in (0, 1]\} \\ &= \{u \in \mathcal{S} : t * u \in Q_\beta^{-1}((-\infty, d)) \text{ für alle } t \in (0, 1]\} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \tilde{A}(d) &:= \{u \in \mathcal{S} : \Phi_u(t) < d \text{ für alle } t \geq 1\} \\ &= \{u \in \mathcal{S} : t * u \in Q_\beta^{-1}((-\infty, d)) \text{ für alle } t \geq 1\}, \end{aligned}$$

deren Vereinigung $Q_\beta^{-1}((-\infty, d))$ und deren Ränder zusammen die Niveaumenge $Q_\beta^{-1}(d)$ bilden. Weiter beobachten wir, dass $A(d)$ eine Umgebung von V_β^- und $\tilde{A}(d)$ eine Umgebung von V_β^+ bildet.

Abbildung 6: Die Umgebung $A(d)$ von V_β^- und $\tilde{A}(d)$ von V_β^+ für geeignetes d



Unser Ziel ist es, ein geeignetes d zu finden, so dass $A(d)$ beschränkt ist, was für ausreichend große $\beta > 0$ nicht der Fall ist. Wir werden zeigen, dass

$$\hat{\beta}_1 := \inf\{\beta > 0 : V_\beta^0 \neq \emptyset\}.$$

eine geeignete scharfe Grenze ist, in dem Sinne, dass sich für $0 < \beta < \hat{\beta}_1$ ein d finden lässt, so dass $A(d)$ beschränkt ist, während für $\beta \geq \hat{\beta}_1$ die Menge $A(d)$ für alle $d > 0$ unbeschränkt ist.

12.1 Bemerkung • Sei $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ oder $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$, dann kann Ψ_u für jedes $u \in \mathcal{S}$ mit $R(u) \neq 0$ streng monoton fallend sein, falls $\beta > 0$ ausreichend groß ist. Wir können $v \in S$ so wählen, dass $|\nabla v_i|_2 = |\nabla u_i|_2$ und $|v_i|_{p_i} \leq |u_i|_{p_i}$ für $i = 1, 2$ und $R(v) \leq R(u)$ gelten und Ψ'_v zwei Nullstellen $t^- < t^+$ besitzt. Da die Koeffizienten von Ψ_u stetig von u abhängen, lässt sich v sogar so wählen, dass $|t^+ - t^-|$ beliebig klein ist. Mit der Stetigkeit von $t \mapsto t * v$, $t^\pm * v \in V_\beta^\pm$ und $\text{dist}(V_\beta^-, V_\beta^+) \leq |t^+ * v - t^- * v|$ folgt schließlich $\text{dist}(V_\beta^-, V_\beta^+) = 0$.

- Es kann ein v so gewählt werden, dass Ψ'_v genau eine Nullstelle und damit Ψ_u einen Sattelpunkt hat. Dies liefert, dass die Menge $\{\beta > 0 : V_\beta^0 \neq \emptyset\}$ ein Intervall ist und für $0 < \beta < \hat{\beta}_1$ jedes Φ_u für $u \in \mathcal{S}$ mit $R(u) \neq 0$ stets ein Minimum und ein Maximum haben muss.

Die Bemerkung zeigt auch, dass wir für $\beta > \hat{\beta}_1$ die Elemente aus V_β^0 stets durch eine Folge aus V_β^- und V_β^+ approximieren können. Daher kann V_β^0 als Rand von V_β^- und V_β^+ betrachtet werden, welches die beiden Mengen verklebt. Auf der anderen Seite gilt für $0 < \beta < \hat{\beta}_1$ jedoch $\text{dist}(V_\beta^-, V_\beta^+) > 0$, so dass sich die Komponenten V_β^- und V_β^+ trennen lassen. Dies zeigt, dass die Topologie von V_β sich für $0 < \beta < \hat{\beta}_1$ und $\beta > \hat{\beta}_1$ unterscheidet.

Da das lokale Minimum in Satz 2.5(i) und Satz 2.7(iii) als Grenzwert einer Minimalfolge in V_β^- erhalten wird, ist $\hat{\beta}_1$ eine naheliegende Schranke für β . Dies beruht auf unserer nicht bewiesenen Vermutung, dass eine Minimalfolge in V_β^- schwach gegen ein Element in V_β^0 konvergiert, wenn $\beta > \hat{\beta}_1$ gilt. Die Elemente der Menge V_β^0 werden mit entarteten kritischen Punkten der Funktionen Ψ_u assoziiert, so dass es fraglich ist, ob wir damit einen kritischen Punkt von J_β erhalten. Wir kommen also damit zu folgendem Resultat:

12.2 Satz

Es gelte

- $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ und $2 \leq N \leq 4$ oder
- $p_1, p_2 < 2 + \frac{2}{N-2} < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ und $N \geq 5$ oder
- $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$ und $2 \leq N \leq 4$.

Dann hat J_β für $0 < \beta < \hat{\beta}_1$ ein lokales Minimum u mit $J_\beta(u) < \min\{0, m_1, m_2\}$, welches für ein $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ eine Lösung von (1.1) mit (1.2) ist.

Dieses Resultat kann als Optimierung von Satz 2.5(i) und Satz 2.7(iii) gesehen werden, da $\hat{\beta}_1 \geq \beta_1$ gilt. Wir beweisen diesen Satz am Ende dieses Kapitels. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, dass es für $0 < \beta < \hat{\beta}_1$ ein geeignetes $d > 0$ gibt, so dass $A(d)$ eine geeignete Umgebung von V_β^- ist, um dann mit Hilfe der Lemmata in Kapitel 4 das Resultat zu erhalten.

12.3 Lemma

Sei $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ oder $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$. Weiter sei $\beta > 0$ und $v \in \hat{S}$ gegeben, so dass wir ein $d \in \Phi_v((0, \infty)) \cap [0, \infty)$ wählen können. Dann existiert $C > 0$ unabhängig von v , so dass

$$\min \Phi_v^{-1}(d) \leq C,$$

gilt.

Beweis: Zuerst definieren mit $t_v := \min \Phi_v^{-1}(d)$ die erste Stelle, wo Φ_v den Wert d annimmt. Zu zeigen ist, dass t_v unabhängig von v durch ein $C > 0$ beschränkt ist.

Für den Fall $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ wählen wir ein $\xi > 0$ so, dass

$$g(t) := t^2 - \sum_{i=1}^2 \alpha_i c_i t^{\alpha_i} - \beta \xi c_3 (\alpha_3 + \alpha_4) t^{\alpha_3 + \alpha_4}$$

für $t > 0$ zwei d -Stellen hat und nennen die erste d -Stelle $t_0 > 0$.

Angenommen, $R(v)$ ist nach oben durch ξ begrenzt, so berücksichtigen wir die Abschätzungen (1.4) und (1.6) und folgern $\Phi_v(t) \geq g(t)$. Da Φ_v nicht mehr als zwei kritische Punkte hat, folgt zusammen mit dem Grenzwertverhalten, dass t_v durch t_0 beschränkt ist.

Andernfalls gilt $R(v) > \xi$ und wir erhalten

$$\Phi_v(t) \leq t^2 - \beta \xi (\alpha_3 + \alpha_4) t^{\alpha_3 + \alpha_4} = t^2 (1 - \beta \xi (\alpha_3 + \alpha_4) t^{\alpha_3 + \alpha_4 - 2}).$$

Wegen $\alpha_3 + \alpha_4 > 2$ folgt $\Phi_v(t) < 0$ für alle $t > t_1 := (\beta \xi (\alpha_3 + \alpha_4))^{-1/(\alpha_3 + \alpha_4 - 2)}$. Somit ist t_v durch t_1 beschränkt.

Insgesamt folgt, dass t_v unabhängig von v durch $\max\{t_0, t_1\}$ beschränkt ist. Für den Fall $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$ wählen wir ein $\xi > 0$ so, dass

$$h(t) := t^2 - \sum_{i=1}^2 \alpha_i c_i \xi t^{\alpha_i} - \beta c_3 (\alpha_3 + \alpha_4) t^{\alpha_3 + \alpha_4}$$

für $t > 0$ zwei d -Stellen hat. Falls $|u_i|_{p_i} \leq \xi$ für $i = 1, 2$, erhalten wir $\Phi_v(t) \geq h(t)$. Andernfalls gibt es ein $j = 1, 2$, so dass $|u_j|_{p_j} > \xi$ gilt und wir

$$\Phi_v(t) \leq t^2 - \alpha_j \frac{\mu_j}{p_j} \xi t^{\alpha_j}$$

erhalten. Analog zum vorigen Fall erhalten, eine von v unabhängige Schranke für t_v . \square

12.4 Folgerung

Sei $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ oder $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$. Für alle $\beta > 0$ ist V_β^- beschränkt.

Beweis: Für ein $u \in V_\beta^-$ definieren wir $t_u := \sqrt{|\nabla u_1|_2^2 + |\nabla u_2|_2^2}$ und zeigen, dass t_u unabhängig von u beschränkt ist. Aus den Eigenschaften der Funktion Φ_u folgt, dass 1 die erste Nullstelle von Φ_u ist. Nun setzen wir $v := t_u^{-1} * u \in \hat{S}$. Durch die Reskalierungseigenschaft $\Phi_u(t) = \Phi_v(t_u^{-1}t)$ folgt, dass t_u die erste Nullstelle von Φ_v ist. Nach Lemma 12.3 ist jedoch t_u unabhängig von v und somit unabhängig von u beschränkt, was zu zeigen war. \square

12.5 Lemma

Sei $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ oder $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$. Für $c > 0$ definieren wir

$\bar{\beta}_1(c) := \sup\{\beta > 0 : \text{Für alle } u \in \hat{S}, \text{ so dass } \Phi_u \text{ zwei Nullstellen } t_u^- < t_u^+ \text{ hat, gilt } t_u^+ - t_u^- \geq c\}$

sowie

$$\bar{\beta}_1 := \sup_{c>0} \bar{\beta}_1(c).$$

Dann gilt $\bar{\beta}_1 = \tilde{\beta}_1$.

Beweis: Zuerst sei $\beta > \hat{\beta}_1$ gegeben. Nach Bemerkung 12.1 gilt $V_\beta^0 \neq \emptyset$ und damit auch $\beta > \bar{\beta}_1$. Dies zeigt das Verhältnis $\bar{\beta}_1 \leq \hat{\beta}_1$.

Als Nächstes betrachten wir $\beta > \bar{\beta}_1$ und zeigen, dass dann auch $\beta > \hat{\beta}_1$ gilt, um die Behauptung zu erhalten.

Für jedes $\beta > 0$ können wir ein u wählen, so dass $|u_i|_{p_i}^{p_i}$ für $i = 1, 2$ und $R(u)$ ausreichend klein im Verhältnis zu $|\nabla u_1|_2^2 + |\nabla u_2|_2^2$ ist und somit Φ_u zwei Nullstellen hat. Deswegen ist $\beta > \bar{\beta}_1$ dazu äquivalent, dass eine Folge $(u^n)_n$ in \hat{S} existiert, so dass Φ_{u^n} zwei Nullstellen $t_n^- < t_n^+$ mit der Eigenschaft $t_n^+ - t_n^- \rightarrow 0$ hat.

Sei v^n die Schwarz-Symmetrisierung von u^n ist. Unter Berücksichtigung der Eigenschaften der Symmetrisierung, vergleiche [17, Seiten 72-75], gilt $v^n \in \hat{S}$ und $\Phi_{v^n} \leq \Phi_{u^n}$. Somit liegen die Nullstellen von Φ_{v^n} zwischen den Nullstellen von Φ_{u^n} . Falls Φ_{v^n} für ein n nur eine oder keine Nullstelle hat, dann liefert Bemerkung 12.1, dass $V_\beta^0 \neq \emptyset$ und damit $\beta > \hat{\beta}_1$ gelten. Dies würde den Beweis abschließen. Deswegen nehmen wir an, dass Φ_{v^n} zwei Nullstellen für alle $n \in \mathbb{N}$ hat. Aus diesem Grund können wir ohne Einschränkung annehmen, dass im Folgenden alle Folgen $(u^n)_n$ eine Folge Schwarz-symmetrischer Funktionen sind.

Nun wählen wir ein $\xi > 0$, so dass die Funktion

$$f(t) := t^2 - \sum_{i=1}^2 c_i \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} t^{\alpha_i} - \beta \xi (\alpha_3 + \alpha_4) t^{\alpha_3 + \alpha_4}$$

zwei Nullstellen $t_f^- < t_f^+$ und die Funktion

$$g(t) := t^2 - \sum_{i=1}^2 c_i \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} \xi t^{\alpha_i} - \beta (\alpha_3 + \alpha_4) t^{\alpha_3 + \alpha_4}$$

zwei Nullstellen $t_g^- < t_g^+$ besitzen.

Behauptung 1:

Sei $(u^n)_n$ eine Folge in $\hat{\mathcal{S}}$, so dass für die Nullstellen $t_n^- < t_n^+$ von Φ_{u^n} gilt $t_n^+ - t_n^- \rightarrow 0$, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

- (i) $R(u^n) \geq \xi$ für alle $n \geq N$ gilt und
- (ii) es ein $i = 1, 2$ mit $|u_i^n|_{p_i} \geq \xi$ für alle $n \geq N$ gibt.

Beweis von Behauptung 1:

- (i) Wir betrachten zuerst ein $u \in \hat{\mathcal{S}}$, so dass $0 < R(u) < \xi$ gilt. Dann folgt $\Phi_u \geq f$ unmittelbar aus den Abschätzungen (1.4) und (1.6). Wegen dem Grenzwertverhalten von Φ_u erhalten wir, dass Φ_u zwei Nullstellen $t_u^- < t_u^+$ hat und diese die Ungleichung $t_u^- \leq t_f^- < t_f^+ \leq t_u^+$ erfüllen. Folglich erhalten wegen der Abschätzung $t_u^+ - t_u^- \geq t_f^+ - t_f^-$, dass $t_u^+ - t_u^-$ unabhängig von u von 0 weg beschränkt ist. Da der Abstand der Nullstellen von Φ_{u^n} gegen 0 konvergiert, muss $R(u) \geq \xi$ für große n folgen.
- (ii) Im Wesentlichen wird dies analog zu (i) bewiesen. Falls für ein $u \in \hat{\mathcal{S}}$ gilt $0 < |u_i|_{p_i} < \xi$ für $i = 1, 2$ gelten, dann liefert uns $\Phi_{u^n} \geq g$ die Abschätzung $t_u^+ - t_u^- \geq t_g^+ - t_g^-$ und schließlich die Behauptung.

Behauptung 2:

Sei $(u^n)_n$ eine Folge in $\hat{\mathcal{S}}$, so dass für die Nullstellen $t_n^- < t_n^+$ von Φ_{u^n} gilt $t_n^+ - t_n^- \rightarrow 0$, dann folgt $t_n^- \not\rightarrow 0$.

Beweis von Behauptung 2: Angenommen, es gäbe eine Folge $(u^n)_n$, so dass $t_n^+ - t_n^- \rightarrow 0$ und $t_n^- \rightarrow 0$.

Im Fall $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ betrachten wir

$$\begin{aligned}
 0 = \Phi_{u^n}(t_n^-) &< (t_n^-)^2 - \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} |u_i^n|_{p_i}^{p_i} (t_n^-)^{\alpha_i} \Rightarrow \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} |u_i^n|_{p_i}^{p_i} (t_n^-)^{\alpha_i} \leq (t_n^-)^2 \\
 &\Rightarrow \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} |u_i^n|_{p_i}^{p_i} \leq (t_n^-)^{2 - \max\{\alpha_1, \alpha_2\}}.
 \end{aligned} \tag{12.1}$$

Wegen $t_n^- \rightarrow 0$ und $\alpha_1, \alpha_2 < 2$ erhalten $|u_i^n|_{p_i} \rightarrow 0$ aus (12.1). Damit folgt $u_i \rightarrow 0$ in $L^{p_i}(\mathbb{R}^N)$ für $i = 1, 2$. Des Weiteren berücksichtigen wir, dass die Menge $\hat{\mathcal{S}}$ als Teilmenge von \mathcal{H} beschränkt ist, so dass u_i für $i = 1, 2$ in allen Räumen $L^p(\mathbb{R}^N)$ für $2 < p < 2^*$ konvergiert. Dies bedeutet $u_i \rightarrow 0$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ für alle $2 < p < 2^*$ und schließlich $R(u^n) \rightarrow 0$ im Widerspruch zur Behauptung 1.

Im Fall $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$ beobachten wir

$$\begin{aligned}
 0 = \Phi_{u^n}(t_n^-) &< (t_n^-)^2 - \beta(\alpha_3 + \alpha_4) R(u^n) (t_n^-)^{\alpha_3 + \alpha_4} \Rightarrow \beta(\alpha_3 + \alpha_4) R(u^n) (t_n^-)^{\alpha_3 + \alpha_4} \leq (t_n^-)^2 \\
 &\Rightarrow \beta(\alpha_3 + \alpha_4) R(u^n) \leq (t_n^-)^{2 - (\alpha_3 + \alpha_4)}.
 \end{aligned}$$

Dies liefert zunächst $R(u^n) \rightarrow 0$. Durch die Annahme, dass u^n Schwarz-symmetrisch ist, können wir daraus folgern, dass u^n punktweise fast überall gegen 0 konvergieren muss. Da $(u_i^n)_n$ in $L^p(\mathbb{R}^N)$ für alle $2 < p < 2^*$ konvergiert, muss der Grenzwert jeweils 0 sein. Insbesondere gilt dann auch $|u_i^n|_{p_i} \rightarrow 0$ im Widerspruch zur Behauptung 1.

Für die nächste Behauptung erweitern wir die Notation von Φ_u zu $\Phi_{u,\beta}$, um die Abhängigkeit von β deutlich zu machen.

Behauptung 3:

Es existiert ein $\beta' > \beta$, so dass für alle $\beta'' \in (\beta, \beta']$ ein $u \in \hat{\mathcal{S}}$ existiert, so dass $\Phi_{u,\beta''}$ keine Nullstellen hat.

Beweis von Behauptung 3: Sei $(u^n)_n$ eine Folge in $\hat{\mathcal{S}}$, so dass für die Nullstellen $t_n^- < t_n^+$ von $\Phi_{u^n,\beta}$ gilt $t_n^+ - t_n^- \rightarrow 0$.

Nach Lemma 12.4 ist V_β^- beschränkt, so dass wir wegen $t_n^- * u^n \in V_\beta^-$ und der Gleichung

$$t_n^- = t_n^- \sqrt{\sum_{i=1}^2 |\nabla u_i|_2^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^2 |\nabla(t_n^- * u^n)_i|_2^2}$$

die Beschränktheit von $(t_n^-)_n$ erhalten. Daher gehen wir zu einer konvergenten Teilfolge über. Unter Berücksichtigung von Behauptung 2 konvergiert $(t_n^-)_n$ gegen ein $t^- > 0$. Aus der Konvergenz folgt, dass wir ein $N_1 \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft $t_n^- \geq \frac{1}{2}t^-$ für alle $n \geq N_1$ wählen können. Nun wählen wir $\beta' > \beta$ im Fall $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ so, dass

$$\beta' - \beta < (\alpha_3 + \alpha_4)\xi \left(\frac{t^-}{2}\right)^{\alpha_3 + \alpha_4} \quad (12.2)$$

gilt. Anschließend betrachten wir $\beta'' \in (\beta, \beta']$ und wählen $N_2 \in \mathbb{N}$, so dass

$$(t_n^+)^2 - (t_n^-)^2 < (\beta'' - \beta)^2 \quad (12.3)$$

für alle $n \geq N_2$ gilt. Nach Behauptung 1 gibt es ebenso ein $N_3 \in \mathbb{N}$, so dass

$$R(u^n) \geq \xi \quad (12.4)$$

für alle $n \geq N_3$ gilt. Schließlich definieren wir $u := u^{\max\{N_1, N_2, N_3\}}$ und $t_{u,\beta}^- < t_{u,\beta}^+$ als die Nullstellen von $\Phi_{u,\beta}$. Weiter erkennen wir, dass die Nullstellen von $\Phi_{u,\beta''}$ in $(t_{u,\beta}^-, t_{u,\beta}^+)$ liegen müssen. Deswegen reicht es zu zeigen, dass $\Phi_{u,\beta''}(t) < 0$ für alle $t \in (t_{u,\beta}^-, t_{u,\beta}^+)$ gilt. Nach Wahl von u sowie (12.2), (12.3) und (12.4) erhalten wir

$$\begin{aligned} \Phi_{u,\beta''}(t) &= \Phi_{u,\beta''}(t) - \Phi_{u,\beta''}(t_{u,\beta}^-) + \Phi_{u,\beta''}(t_{u,\beta}^-) \\ &= t^2 - (t_{u,\beta}^-)^2 - \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|^{p_i} (t^{\alpha_i} - (t_{u,\beta}^-)^{\alpha_i}) - \beta(\alpha_3 + \alpha_4)R(u)(t^{\alpha_3 + \alpha_4} - (t_{u,\beta}^-)^{\alpha_3 + \alpha_4}) \\ &\quad + \Phi_{u,\beta}(t_{u,\beta}^-) - (\beta'' - \beta)(\alpha_3 + \alpha_4)R(u)(t_{u,\beta}^-)^{\alpha_3 + \alpha_4} \\ &\leq (t_{u,\beta}^+)^2 - (t_{u,\beta}^-)^2 - (\beta'' - \beta)(\alpha_3 + \alpha_4)R(u)(t_{u,\beta}^-)^{\alpha_3 + \alpha_4} \\ &\leq (\beta'' - \beta)^2 - (\beta'' - \beta)(\alpha_3 + \alpha_4)\xi \left(\frac{t^-}{2}\right)^{\alpha_3 + \alpha_4} \\ &= (\beta'' - \beta) \left((\beta'' - \beta) - (\alpha_3 + \alpha_4)\xi \left(\frac{t^-}{2}\right)^{\alpha_3 + \alpha_4} \right) < 0. \end{aligned}$$

Damit ist Behauptung 3 bewiesen.

Nach Bemerkung 12.1 liefert Behauptung 3 ein β' , so dass $V_{\beta''} \neq \emptyset$ gilt und somit $\beta'' \geq \hat{\beta}_1$. Insbesondere folgt $\beta \geq \hat{\beta}_1$, welches den Beweis für $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ abschließt. \square

12.6 Lemma

Sei $\beta > 0$ und $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ oder $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$. Für

$$d(\beta) := \inf_{\substack{u \in \mathcal{S} \\ R(u) \neq 0}} \max_{t > 0} \Phi_u(t) \geq 0$$

gilt $d(\beta) > 0$ genau dann wenn $\beta < \hat{\beta}_1$.

Beweis: Für $\beta > \hat{\beta}_1$ nutzen wir Bemerkung 12.1, um ein $u \in \mathcal{S}$ zu erhalten, so dass Ψ_u nur einen Sattelpunkt hat. In dem Fall gilt $\Phi_u \leq 0$ und wir erhalten $d(\beta) = 0$. Falls $\beta = \hat{\beta}_1 = \bar{\beta}_1$ gilt, dann existiert nach Wahl von $\bar{\beta}_1$ eine Folge $(u^n)_n \subseteq \hat{\mathcal{S}}$, so der Abstand der Nullstellen $t_n^- < t_n^+$ von Φ_{u^n} für $n \rightarrow \infty$ gegen 0 konvergiert. Weiter definieren wir $t_n \in (t_n^-, t_n^+)$, so dass $\Phi_{u^n}(t_n) = \max_{t > 0} \Phi_{u^n}(t)$ gilt. Nach Folgerung 12.4 ist $V_{\bar{\beta}}$ beschränkt und damit auch t_n^- , so dass wir zu einer konvergenten Teilfolge übergehen können. Sei nun t^* der Grenzwert von $(t_n^-)_n$, so ist dieser auch der Grenzwert von $(t_n)_n$ und $(t_n^+)_n$. Der Mittelwertsatz der Differentialrechnung liefert

$$\Phi_{u^n}(t_n) = \Phi_{u^n}(t_n) - \Phi_{u^n}(t_n^-) = \Phi'_{u^n}(\tau_n)(t_n - t_n^-)$$

für ein $\tau_n \in (t_n^-, t_n)$. Dies liefert $\tau_n \rightarrow t^*$. Wenn wir zeigen, dass $\Phi_{u^n}(\tau_n)$ gleichmäßig in n beschränkt ist, dann folgt $\Phi_{u^n}(t_n) \rightarrow 0$ und damit $d(\beta) = 0$. Dies erhalten wir mit den Abschätzungen (1.4) und (1.6), sowie der Beschränktheit von τ_n und

$$|\Phi_{u^n}(\tau_n)| \leq \tau_n^2 + \sum_{i=1}^2 \alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} c_i \tau_n^{\alpha_i} + \beta(\alpha_3 + \alpha_4) c_3 \tau_n^{\alpha_3 + \alpha_4}.$$

Es bleibt also noch zu zeigen, dass für $\beta < \hat{\beta}_1$ folgt $d(\beta) > 0$. Sei also $\beta < \hat{\beta}_1 = \bar{\beta}_1$ und wir nehmen an, dass eine Folgen $(u^n)_n \subseteq \mathcal{S}$ und $(t_n)_n \subseteq (0, \infty)$ existieren mit $\Phi_{u^n}(t_n) = \max_{t > 0} \Phi_{u^n}(t)$, so dass $\Phi_{u^n}(t_n) \rightarrow 0$ gilt. Wir definieren anschließend $\tau_n := \sqrt{\sum_{i=1}^2 |\nabla u_i^n|^2}$ und damit $v^n := \tau_n^{-1} * u^n$ und $s_n := \tau_n t_n$. Dann gelten $v^n \in \hat{\mathcal{S}}$, $R(v^n) \neq 0$ und

$$\Phi_{v^n}(s_n) = \Phi_{\tau_n^{-1} * u^n}(\tau_n t_n) = \Phi_{u^n}(t_n) \rightarrow 0.$$

Dies liefert uns mit (1.4) und (1.6) die Beschränktheit der p_i -Norm von v_i^n und die Beschränktheit von $R(v^n)$. Somit existieren Zahlen $B_1, B_2, C \geq 0$, so dass nach Übergang zu einer Teilfolge

$$\alpha_i \frac{\mu_i}{p_i} |v_i^n|_{p_i} \rightarrow B_i \text{ und } \beta(\alpha_3 + \alpha_4) R(v^n) \rightarrow C$$

gelten. Des Weiteren seien $s_n^- < s_n^+$ die Nullstellen von Φ_{v^n} . Da $s_n^- * v^n$ in der nach Lemma 12.4 beschränkten Menge V_β^- liegt, folgt aus der Abschätzung

$$s_n^- = s_n^- \cdot \sum_{i=1}^2 |\nabla v_i^n|^2 = \sum_{i=1}^2 |\nabla s_n^- * v_i^n|^2$$

die Beschränktheit der Folge $(s_n^-)_n$. Somit konvergiert eine Teilfolge gegen $s^- \in [0, \infty)$. Erneut wählen wir eine Teilfolge, so dass auch $(s_n)_n$ gegen s^* und $(s_n^+)_n$ gegen s^+ mit $s, s^+ \in [0, \infty]$ konvergieren.

Nun betrachten wir verschiedene Fälle und führen jedes zu einem Widerspruch.

Fall 1: $s^- < s^*$.

Sei $s \in (0, s^*)$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass alle $n \geq N$ gelten $s_n^- < s < s_n$ und damit

$$0 = \Phi_{v^n}(s_n^-) \leq \Phi_{v^n}(s) \leq \Phi_{v^n}(s_n) \rightarrow 0.$$

Andererseits gilt $\Phi_{v^n}(s) \rightarrow s^2 - \sum_{i=1}^2 B_i s^{\alpha_i} - C s^{\alpha_3 + \alpha_4}$. Zusammen folgt

$$s^2 - \sum_{i=1}^2 B_i s^{\alpha_i} - C s^{\alpha_3 + \alpha_4} = 0 \text{ für alle } s \in (s^-, s^*).$$

Dies ist aber nicht möglich und somit ein Widerspruch.

Fall 2: $s^- = s^* < s^+$

In diesem Fall erhalten wir analog wie in Fall 1 einen Widerspruch, indem wir $s \in (s^*, s^-)$ betrachten.

Fall 3: $s^- = s^* = s^+$

Nach Wahl von $\bar{\beta}_1$ ist dies unmittelbar ein Widerspruch zu Lemma 12.5.

Insgesamt führten alle Fälle zum Widerspruch, so dass die Annahme widerlegt und die Behauptung gezeigt ist. \square

Wählen wir ein $0 < d < d(\beta)$, dann nimm jedes Φ_u den Wert d zweimal an. Dies liefert uns eine angenehme Darstellung für den Rand von $A(d)$:

$$B(d) := \partial A(d) = \{u \in \mathcal{S} : 1 \text{ ist die erste } d\text{-Stelle von } \Phi_u\}$$

Mit Hilfe von $B(d)$ werden wir nun zeigen, dass $A(d)$ eine beschränkte Menge ist.

12.7 Lemma

Sei $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ oder $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$ gegeben, sowie $\beta > 0$, $d > 0$ und $d(\beta)$ aus Lemma 12.6. Dann ist $A(d)$ beschränkt, falls $d < d(\beta)$ und unbeschränkt, falls $d > d(\beta)$.

Beweis: Sei zuerst $d < d(\beta)$ und $u \in A(d)$. Dann gelten $\Phi_u(t) \leq d$ für alle $t \leq 1$ und $t_u \geq 1$ für die erste d -Stelle von Φ_u . Nach Lemma 12.3 ist $B(d)$ beschränkt, also existiert ein $C > 0$, so dass $\sqrt{\sum_{i=1}^2 |\nabla v_i|^2} \leq C$ für alle $v \in B(d)$ folgt. Dies liefert zusammen mit $t_u * u \in B(d)$ schließlich

$$\sqrt{\sum_{i=1}^2 |\nabla u_i|^2} = t_u^{-1} \sqrt{\sum_{i=1}^2 |\nabla(t_u * u)_i|^2} \leq C$$

und damit die Beschränktheit von $A(d)$.

Sei nun $d > d(\beta)$, dann existiert ein $u \in \mathcal{S}$, so dass $\Phi_u(t) < d$ für alle $t > 0$. Damit gilt jedoch $t * u \in A(d)$ für alle $t > 0$, da $\Phi_{t*u}(s) = \Phi_u(ts) < d$ für alle $s \in (0, 1]$ gilt. Dies liefert

$$\sum_{i=1}^2 |\nabla(t * u)_i|^2 = t^2 \cdot \sum_{i=1}^2 |\nabla u_i|^2 \rightarrow \infty \text{ für } t \rightarrow \infty.$$

schließlich die Unbeschränktheit von $A(d)$. \square

Nun folgt schließlich der Beweis des Resultats.

Beweis von Satz 12.2: Falls $0 < \beta < \hat{\beta}_1$, dann ist $d(\beta) > 0$ nach Lemma 12.6. Lemma 12.7 liefert die Beschränktheit von $A(d)$ für $0 < d < d(\beta)$. Aus den Eigenschaften der Funktionen Φ_u folgt, dass die Mengen $A(d)$ und $B(d) \subseteq Q_\beta^{-1}(d)$, die Anforderungen an A und B aus Lemma 4.3 erfüllen, so dass dessen Anwendung uns eine geeignete Minimalfolge in $(u^n)_n$ in $A(d)$ liefert.

Für $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ und $2 \leq N \leq 4$ oder $p_1, p_2 < 2 + \frac{2}{N-2} < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ und $N \geq 5$ beachten wir, dass \bar{u} ein globaler Minimierer von J_β ist und damit ist 1 die erste Nullstelle von $Q_0(t * \bar{u})$. Deswegen folgt

$$\Phi_{\bar{u}}(t) = Q_0(t * \bar{u}) - \beta R(t * \bar{u}) < Q_0(t * \bar{u}) \leq 0 < d \text{ für alle } t \leq 1.$$

Daher ist $\bar{u} \in A(d)$ und

$$\lim_{n \rightarrow \infty} J_\beta(u^n) = \inf_{A(d)} J_\beta \leq J_\beta(\bar{u}) \leq J_0(\bar{u}) = m_1 + m_2 < \min\{0, m_1, m_2\}.$$

Falls $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$, dann gilt $m_1, m_2 > 0$ und wir müssen nur begründen, dass das Infimum von J_β über $A(d)$ negativ ist. Dies folgt jedoch daraus, dass für V_β^- in $A(d)$ enthalten ist und alle Minimumstellen von Ψ_u einen negativen Wert haben.

Wir können in allen Fällen Lemma 4.6 anwenden, um eine geeignete beschränkte Palais-Smale-Folge $\{u^n\} \subseteq \mathcal{S}$ zu erhalten. Wenden wir nun Lemma 3.11 an, dann reicht es zu zeigen, dass der Grenzwert der Folgen $\{\lambda_i^n\} \subseteq \mathbb{R}$ negativ ist, was wir allerdings mit Lemma 3.13 erhalten. Schließlich konvergiert $\{u^n\}$ stark in L^2 gegen u und u ist eine Lösung von (1.1) mit (1.2). \square

13 Optimierte Kontrolle der Werte von J_β

Die Idee hinter der Wahl der Schranke β_1 war die Ableitungen der Funktionen Ψ_u zu kontrollieren, so dass für ein $s \in \mathbb{R}_+^2$ das Infimum von J_β über $B(s)$ größer ist als über $A(s)$ aus Definition 3.8. Statt über die Ableitungen zu arbeiten, kann man die Schranke für β so wählen, dass direkt die Werte von J_β kontrolliert werden.

Dies war auch der Ansatz in [15], bei der gezeigt wurde, dass für ausreichend kleine β ein $r > 0$ gibt, so dass

$$\inf_{u \in K_r} J_\beta(u) < 0 < \inf_{u \in \partial K_r} J_\beta(u),$$

wobei $K_r = \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_1|_2^2 + |\nabla u_2|_2^2 < r^2\}$ und $\partial K_r = \{u \in \mathcal{S} : |\nabla u_1|_2^2 + |\nabla u_2|_2^2 = r^2\}$ gilt. Analog gibt es auch $s \in \mathbb{R}_+^2$, so dass

$$\inf_{u \in A(s)} J_\beta(u) < 0 < \inf_{u \in B(s)} J_\beta(u)$$

für ausreichend kleine β gilt. Wie auch bei β_1 wäre eine geeignete obere Schranke

$$\tilde{\beta}_1 = \sup_{s \in \mathbb{R}_+^2} \inf_{\substack{u \in B(s) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u)}{R(u)}.$$

Es ist offen, ob die Mengen der Form K_r oder der Form $A(s)$ besser geeignet sind und welche obere Schranke größer ist. Der Einfachheit halber untersuchen wir nur den Fall $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ und Mengen der Form $A(s)$. Alle folgenden Aussagen lassen sich auch so modifizieren, dass sie sich auch für Mengen der Form K_r oder die Fälle $r_1 + r_2 < 2 + \frac{4}{N} < p_1, p_2$ und $p_1 < 2 + \frac{4}{N} < p_2$

anwenden lassen.

Zuerst stellen wir fest, dass das lokale Minimum im Fall $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N}$ bereits für $\beta = 0$ den Wert $J_0(\bar{u}) = m_1 + m_2 < 0$ annimmt. Daher ist es zu stark zu fordern, dass für $\beta > 0$ die Funktionswerte größer als 0 auf einer Menge $B(s)$ sein soll. Stattdessen reicht es auch aus zu fordern, dass J_β auf einer Menge $B(s)$ größer als $J_0(\bar{u})$ sein soll, denn der Wert des Minimums wird für $\beta > 0$ kleiner als $J_0(\bar{u})$ sein.

Um zu gewährleisten, dass das Infimum über $A(s)$ kleiner als über den Rand ist, reicht es aus, das s so zu wählen, dass $\bar{u} \in A(s)$ liegt. Dann folgt

$$\inf J_\beta(A(s)) \leq J_\beta(\bar{u}) < J_0(\bar{u}) < \inf J_\beta(B(s)).$$

Deswegen definieren wir zunächst

$$\beta_{(1)} := \sup_{\substack{s \in \mathbb{R}_+^2 \\ s_i > |\nabla \bar{u}_i|_2}} \inf_{\substack{u \in B(s) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - (m_1 + m_2)}{R(u)}.$$

Aus Folgerung 3.5 kann man entnehmen, dass $s_i > |\nabla \bar{u}_i|_2$ für $i = 1, 2$ keine Einschränkung ist und ebenso dies ohne Einschränkung bei $\tilde{\beta}_1$ gefordert werden könnte.

13.1 Bemerkung

Sei X eine Menge und $S, T : X \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $T \geq 0$ und $T \not\equiv 0$ auf X sowie $\sup T(X) < \infty$ und $\inf S(X) > -\infty$ gelten. Weiter seien $c < \tilde{c}$, dann gilt

$$\inf_{\substack{x \in X \\ T(x) \neq 0}} \frac{S(x) - c}{T(x)} = \inf_{\substack{x \in X \\ T(x) \neq 0}} \frac{S(x) - \tilde{c}}{T(x)} + \frac{\tilde{c} - c}{\sup T(X)}$$

13.2 Folgerung

Es gilt $\tilde{\beta}_1 < \beta_{(1)}$.

Beweis: Wegen $\frac{J_0(t*\bar{u})}{R(t*\bar{u})} \rightarrow 0$ für $t \rightarrow \infty$ können wir davon ausgehen, dass sowohl bei dem Supremum von $\tilde{\beta}_1$ als auch bei $\beta_{(1)}$ nur $s \in \mathbb{R}_+^2$ in einer beschränkten Menge betrachtet werden muss. Des Weiteren liefert Bemerkung 13.1 uns

$$\inf_{\substack{u \in B(s) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - (m_1 + m_2)}{R(u)} = \inf_{\substack{u \in B(s) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u)}{R(u)} + \frac{|m_1 + m_2|}{\sup R(B(s))}.$$

Da s beschränkt ist, ist $\frac{|m_1 + m_2|}{\sup R(B(s))}$ von 0 weg beschränkt und wir erhalten $\tilde{\beta}_1 < \beta_{(1)}$. □

Für $\beta < \beta_{(1)}$ folgt die Existenz von einem $s \in \mathbb{R}_+^2$, so dass

$$\inf J_\beta(B(s)) > m_1 + m_2$$

und $\bar{u} \in A(s)$, so dass

$$\inf J_\beta(A(s)) \leq J_\beta(\bar{u}) < J_0(\bar{u}) = m_1 + m_2$$

gilt. Damit sind wir in der Situation, dass eine Minimalfolge in $A(s)$ analog zu Kapitel 4 zu einer Lösung führt.

Jedoch ist leicht zu sehen, dass $\beta_{(1)}$ auch keine ideale Schranke bildet, denn das Niveau des lokalen Minimums ist für alle $\beta > 0$ echt kleiner als $m_1 + m_2$.

Wenn wir daher mit β nahe bei $\beta_{(1)}$ sind, liefert der Ansatz nur eine Menge $B(s)$, so dass J_β größer als $m_1 + m_2$ über $B(s)$ ist. Daher ist es zu erwarten, dass es auch für $\beta = \beta_{(1)}$ noch ein lokales Minimum gibt und vermutlich auch für $\beta > \beta_{(1)}$, wenn β ausreichend nahe an $\beta_{(1)}$ ist.

Dass wir für $\beta = \beta_{(1)}$ auch noch ein lokales Minimum erhalten ist eine Konsequenz aus dem folgenden Lemma 13.4. Wir können sogar diese Idee fortführen, so wir mit der Lösung bei $\beta = \beta_{(1)}$ eine bessere Schranke $\beta_{(2)} > \beta_{(1)}$ definieren und wir für $\beta < \beta_{(2)}$ geeignete Minimalfolgen erhalten. Dies führt iterativ zu einer streng monoton wachsenden Folge von Schranken $(\beta_{(k)})_k$, so dass wir für alle $\beta < \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{(k)}$ geeignete Minimalfolgen finden.

13.3 Satz

Es gelte

- $p_1, p_2 < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ und $2 \leq N \leq 4$ oder
- $p_1, p_2 < 2 + \frac{2}{N-2} < 2 + \frac{4}{N} < r_1 + r_2$ und $N \geq 5$.

Dann existiert ein $\beta_{(\infty)} > 0$, so dass für alle $0 < \beta < \beta_{(\infty)}$ das Funktional J_β ein lokales Minimum u mit $J_\beta(u) < m_1 + m_2$ hat. Insbesondere ist u für ein $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ eine Lösung von (1.1) mit (1.2).

Hierbei ist $\beta_{(\infty)}$ der Grenzwert der oben beschriebenen Folge von Schranken, welches wir formal im Beweis des Satzes definieren werden.

Durch diese Folge von Schranken wird die Wahl der Schranke optimiert und jedes Folgenglied ist eine explizit gegebene Schranke. Dennoch hat dieser Ansatz auch seine Schwierigkeiten, denn für die Schranken benötigt man nicht nur Informationen über \bar{u} , sondern auch über die Lösungen an den jeweiligen Schranken.

Des Weiteren erhalten wir dadurch $\beta_{(\infty)}$ als Grenzwert, welches im Vergleich zu β_1 nicht leicht zu bestimmen ist .

Schließlich ist auch noch offen, ob $\beta_{(\infty)}$ endlich ist und in welchem Verhältnis es zu $\hat{\beta}_1$ aus Kapitel 12 oder β_1 aus Kapitel 4 steht.

Um dieses Resultat zu beweisen, benötigen wir neben den Lemmata aus Kapitel 3 und 4 noch folgendes Lemma.

13.4 Lemma

Es existiert ein $s^* \in \mathbb{R}^2$ mit $s_i^* > |\nabla \bar{u}_i|_2$ und

$$\beta_{(1)} = \inf_{\substack{u \in B(s^*) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - J_0(\bar{u})}{R(u)}$$

und damit

$$\inf_{u \in B(s^*)} J_{\beta_{(1)}} \geq J_0(\bar{u}).$$

Beweis: Aus der Definiton von $\beta_{(1)}$ erhalten wir zuerst eine Folge

$$(s^n)_n \subseteq (|\nabla \bar{u}_1|_2, \infty) \times (|\nabla \bar{u}_2|_2, \infty),$$

so dass

$$\beta^n := \inf_{B(s^n)} \frac{J_0 - J_0(\bar{u})}{R} \nearrow \beta_{(1)}$$

gilt.

Behauptung 1:

Wir können bei $(s^n)_n$ zu einer Teilfolge übergehen, so dass $(s_1^n)_n$ oder $(s_2^n)_n$ beschränkt ist.

Beweis der Behauptung 1: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $t_n > 1$, mit

$$\min \left\{ \frac{s_1^n}{|\nabla \bar{u}_1|_2}, \frac{s_2^n}{|\nabla \bar{u}_2|_2} \right\} \leq t_n \leq \max \left\{ \frac{s_1^n}{|\nabla \bar{u}_1|_2}, \frac{s_2^n}{|\nabla \bar{u}_2|_2} \right\},$$

so dass $t_n * \bar{u} \in B(s^n)$ gilt. Wir beachten, dass

$$\begin{aligned} f(t) &:= \frac{J_0(t * \bar{u}) - J_0(\bar{u})}{\int |t * \bar{u}_1|^{r_1} |t * \bar{u}_2|^{r_2}} \\ &= \frac{1}{\int |\bar{u}_1|^{r_1} |\bar{u}_2|^{r_2}} \left(\sum_{i=1}^2 |\nabla \bar{u}_i|_2^2 t^{2-(\alpha_3+\alpha_4)} - \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|^{p_i} t^{\alpha_i-(\alpha_3+\alpha_4)} - J_0(\bar{u}) t^{-(\alpha_3+\alpha_4)} \right) \end{aligned}$$

wegen $\alpha_i < 2 < \alpha_3 + \alpha_4$ für große t streng monoton fallend ist. Falls $s_1^n \rightarrow \infty$ und $s_2^n \rightarrow \infty$ gelten, dann folgt $t_n \rightarrow \infty$ und wir erhalten $\beta^n \leq f(t_n) \rightarrow 0$. Dies steht aber im Widerspruch zu $\beta^n \nearrow \beta_{(1)}$ mit $\beta_{(1)} > 0$. Damit erhalten wir die Behauptung.

Behauptung 2:

Falls $(s_1^n)_n$ beschränkt ist, dann existiert entweder eine beschränkte Teilfolge von $(s_2^n)_n$ oder es existiert ein $\hat{s}_2 > |\nabla \bar{u}_2|_2$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\beta^n = \inf_{B(s_1^n, \hat{s}_2)} \frac{J_0 - J_0(\bar{u})}{R} \quad \forall n \geq N.$$

Und falls $(s_2^n)_n$ beschränkt, dann existiert entweder eine beschränkte Teilfolge von $(s_1^n)_n$ oder es existiert ein $\hat{s}_1 > |\nabla \bar{u}_1|_2$ und $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$\beta^n = \inf_{B(\hat{s}_1, s_2^n)} \frac{J_0 - J_0(\bar{u})}{R} \quad \forall n \geq N.$$

Beweis der Behauptung 2: Zunächst sei $(s_2^n)_n$ beschränkt durch $\bar{s}_2 > |\nabla \bar{u}_2|_2$. Da α_3 von q abhängt, welcher bisher nur (1.5) erfüllen musste, können wir stets davon ausgehen, dass $\alpha_3 \neq 2$ durch geeignete Wahl von q gilt.

Fall 1: $\alpha_3 > 2$.

Dann nutzen wir das Lemma 8.2 mit $t > 1$ und erhalten

$$\begin{aligned} g(t) &:= \frac{J_0(t * \bar{u}_1, \bar{u}_2) - J_0(\bar{u})}{R(t * \bar{u}_1, \bar{u}_2)} = \frac{\frac{1}{2} |\nabla \bar{u}_1|_2^2 t^2 - \frac{\mu_1}{p_1} |\bar{u}_1|_{p_1}^{p_1} t^{\alpha_1} + I_2(\bar{u}_2) - (I_1(\bar{u}_1) + I_2(\bar{u}_2))}{\int |t * \bar{u}_1|^{r_1} |\bar{u}_2|^{r_2}} \\ &\leq \frac{|\nabla \bar{u}_1|_2^2}{2c} t^{2-\alpha_3} - \frac{I_1(\bar{u}_1)}{c} t^{-\alpha_3}. \end{aligned}$$

Also existiert ein $t_1 > 1$, so dass $g(t) < \frac{\beta_{(1)}}{2}$ für alle $t > t_1$. Mit $\left(\frac{s_1^n}{|\nabla \bar{u}_1|_2} * \bar{u}_1, \bar{u}_2\right) \in B(s^n)$ folgt

$$\beta^n \leq g\left(\frac{s_1^n}{|\nabla \bar{u}_1|_2}\right).$$

Angenommen $(s_1^n)_n$ hat keine beschränkte Teilfolge, dann folgt $s_1^n \rightarrow \infty$ und es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $s_1^n > t_0$ für alle $n > N$. Wir erhalten dann $\beta^n < \frac{\beta_{(1)}}{2}$ für alle $n > N$ im Widerspruch zu $\beta^n \nearrow \beta_{(1)}$. Also muss in diesem Fall $(s_1^n)_n$ eine beschränkte Teilfolge besitzen.

Fall 2: $\alpha_3 < 2$.

Wir betrachten ein $u \in \mathcal{S}$ mit $|\nabla u_2|_2 < \tilde{s}_2$ und wenden die Ungleichungen (1.4),(1.6) und $I_2(u_2) - J_0(\bar{u}) \geq -I_1(\bar{u}_1)$ an und erhalten

$$\begin{aligned} F(u) &:= \frac{J_0(u) - J_0(\bar{u})}{R(u)} \geq \frac{\left(\frac{1}{2}|\nabla u_1|_2^2 - c_1 \frac{\mu_1}{p_1} |\nabla u_1|_2^{\alpha_3}\right) + I_2(u_2) - J_0(\bar{u})}{c_3 |\nabla u_1|_2^{\alpha_3} |\nabla u_2|_2^{\alpha_4}} \\ &\geq \frac{1}{c_3 (\tilde{s}_2)^{\alpha_4}} \left(\frac{1}{2}|\nabla u_1|_2^{2-\alpha_3} - c_1 \frac{\mu_1}{p_1} |\nabla u_1|_2^{\alpha_1-\alpha_3} - I_1(\bar{u}_1) |\nabla u_1|_2^{-\alpha_3}\right). \end{aligned}$$

Wir erhalten wegen $2 > \alpha_1, \alpha_3$ ein $\hat{s}_1 > |\nabla \bar{u}_1|_2$, so dass $F(u) > \beta_{(1)}$ für alle $u \in \mathcal{S}$ mit $|\nabla u_1|_2 \geq \hat{s}_1$ und $|\nabla u_2|_2 \leq \tilde{s}_2$ gilt.

Entweder hat $(s_1^n)_n$ eine beschränkte Teilfolge oder es gilt $s_1^n \rightarrow \infty$ und es existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $s_1^n > \hat{s}_1$ für alle $n > N$. Für diese $n > N$ folgen nun

$$\inf_{\substack{u \in B(s^n) \\ |\nabla u_1|_2 \geq \hat{s}_1}} F(u) > \beta_{(1)} \quad \text{und} \quad \inf_{\substack{u \in \mathcal{S} \\ |\nabla u_1|_2 = \hat{s}_1 \\ |\nabla u_2|_2 \leq \tilde{s}_2}} F(u) > \beta_{(1)}.$$

Wegen $\beta^n < \beta_{(1)}$ erhalten wir zudem

$$\beta^n = \inf_{u \in B(s^n)} F(u) = \inf_{\substack{u \in \mathcal{S} \\ |\nabla u_1|_2 < \hat{s}_1 \\ |\nabla u_2|_2 = \tilde{s}_2}} F(u) = \inf_{u \in B(\hat{s}_1, \tilde{s}_2)} F(u).$$

Insgesamt liefern Fall 1 und 2 die Behauptung 2.

Auf Grund Behauptung 1 und 2 können wir ohne Einschränkung annehmen, dass die Folge $(s^n)_n$ beschränkt ist und gehen zu einer konvergenten Teilfolge über. Es existiert also ein $s^* = (s_1^*, s_2^*) \in \mathbb{R}$ mit $s_i^n \rightarrow s_i^*$ für $i = 1, 2$.

Seien f und t_n wie im Beweis von Behauptung 1. Falls $s_i^n \rightarrow |\nabla \bar{u}_i|_2$ für $i = 1$ oder $i = 2$, dann erhalten wir $t_n \rightarrow 1$ und $\beta^n \leq f(t_n) \rightarrow f(1) = 0$ im Widerspruch zu $\beta^n \nearrow \beta_{(1)} > 0$. Damit erhalten wir $s_i^* > |\nabla \bar{u}_i|_2$ für $i = 1, 2$.

Behauptung 3:

Die Funktion

$$b : (|\nabla \bar{u}_1|_2, \infty) \times (|\nabla \bar{u}_2|_2, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad b(s) := \inf_{B(s)} \frac{J_0 - J_0(\bar{u})}{R}$$

ist stetig.

Beweis von Behauptung 3: Sei F wie im Beweis von Behauptung 2. Zuerst beachten wir, dass

$$\begin{aligned} h_u &: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \\ h_u(t) &:= F(t * u) = \frac{\sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} |\nabla u_i|_2^2 t^2 - \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i} \right) - J_0(\bar{u})}{R(u) t^{\alpha_3 + \alpha_4}} \\ &= \frac{1}{R(u)} \left(\sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} |\nabla u_i|_2^2 t^{2 - (\alpha_3 + \alpha_4)} - \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i - (\alpha_3 + \alpha_4)} \right) - J_0(\bar{u}) t^{-(\alpha_3 + \alpha_4)} \right) \end{aligned}$$

für jedes $u \in \mathcal{S}$ differenzierbar ist.

Sei $s^* \in (|\nabla \bar{u}_1|_2, \infty) \times (|\nabla \bar{u}_2|_2, \infty)$, $(s^n)_n \subseteq (|\nabla \bar{u}_1|_2, \infty) \times (|\nabla \bar{u}_2|_2, \infty)$ mit $s^n \rightarrow s^*$ und $\varepsilon > 0$. Zu der Folge $(s^n)_n$ wählen wir $\tilde{s}_i, \hat{s}_i \in (|\nabla \bar{u}_i|_2, \infty)$, so dass $\tilde{s}_i \leq s_i^n \leq \hat{s}_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, 2$ gilt. Dann sei

$$D := \{u \in \mathcal{S} : (|\nabla u_1|_2 \in [\tilde{s}_1, \hat{s}_1] \wedge |\nabla u_2|_2 \leq \hat{s}_2) \vee (|\nabla u_1|_2 \leq \hat{s}_1 \wedge |\nabla u_2|_2 \in [\tilde{s}_2, \hat{s}_2])\}$$

und $K = \inf_D J_0 - J_0(\bar{u}) > 0$.

Sei $u \in D$ und $c > 1$. Falls $R(u) < \frac{K}{c\beta_{(1)}}$, dann ist $F(u) > c\beta_{(1)} > c \cdot b(s)$ für alle s . Daher bleibt das Infimum gleich, wenn wir $R(u)$ durch $\frac{K}{c\beta_{(1)}}$ nach unten beschränken und somit erhalten wir die Darstellung

$$\inf_{u \in B(s^n)} F(u) = \inf_{\substack{u \in B(s^n) \\ R(u) \geq \frac{K}{c\beta_{(1)}}}} F(u) \quad \text{und} \quad \inf_{u \in B(s^*)} F(u) = \inf_{\substack{u \in B(s^*) \\ R(u) \geq \frac{K}{c\beta_{(1)}}}} F(u). \quad (13.1)$$

Weiter berechnen wir

$$\begin{aligned} R(u) h'_u(t) &= \sum_{i=1}^2 \left((2 - (\alpha_3 + \alpha_4)) \frac{1}{2} |\nabla u_i|_2^2 t^{1 - (\alpha_3 + \alpha_4)} - (\alpha_i - (\alpha_3 + \alpha_4)) \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i - (\alpha_3 + \alpha_4) - 1} \right) \\ &\quad + (\alpha_3 + \alpha_4) J_0(\bar{u}) t^{-(\alpha_3 + \alpha_4) - 1} \end{aligned}$$

und folgern mit der Gagliardo-Nirenberg-Ungleichung (1.4)

$$\begin{aligned} R(u) |h'_u(t)| &\leq \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} ((\alpha_3 + \alpha_4) - 2) |\nabla u_i|_2^2 t^{1 - (\alpha_3 + \alpha_4)} + ((\alpha_3 + \alpha_4) - \alpha_i) \frac{\mu_i}{p_i} |u_i|_{p_i}^{p_i} t^{\alpha_i - (\alpha_3 + \alpha_4) - 1} \right) \\ &\quad + (\alpha_3 + \alpha_4) |J_0(\bar{u})| t^{-(\alpha_3 + \alpha_4) - 1} \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} ((\alpha_3 + \alpha_4) - 2) |\nabla u_i|_2^2 t^{1 - (\alpha_3 + \alpha_4)} + c_i ((\alpha_3 + \alpha_4) - \alpha_i) \frac{\mu_i}{p_i} |\nabla u_i|_2^{\alpha_i} t^{\alpha_i - (\alpha_3 + \alpha_4) - 1} \right) \\ &\quad + (\alpha_3 + \alpha_4) |J_0(\bar{u})| t^{-(\alpha_3 + \alpha_4) - 1} \\ &\leq \sum_{i=1}^2 \left(\frac{1}{2} ((\alpha_3 + \alpha_4) - 2) \hat{s}_i^2 t^{1 - (\alpha_3 + \alpha_4)} + c_i ((\alpha_3 + \alpha_4) - \alpha_i) \frac{\mu_i}{p_i} \hat{s}_i^{\alpha_i} t^{\alpha_i - (\alpha_3 + \alpha_4) - 1} \right) \\ &\quad + (\alpha_3 + \alpha_4) |J_0(\bar{u})| t^{-(\alpha_3 + \alpha_4) - 1}. \end{aligned}$$

Da alle Exponenten von t negativ sind, können wir für $t \geq \frac{1}{2}$ und $u \in D$ weiter folgern

$$\begin{aligned} R(u)|h'_u(t)| &\leq \sum_{i=1}^2 \left(((\alpha_3 + \alpha_4) - 2) \frac{1}{2} \hat{s}_i^2 2^{(\alpha_3 + \alpha_4) - 1} + c_i ((\alpha_3 + \alpha_4) - \alpha_i) \frac{\mu_i}{p_i} \hat{s}_i^{\alpha_i} 2^{1 + (\alpha_3 + \alpha_4) - \alpha_i} \right) \\ &\quad + (\alpha_3 + \alpha_4) |J_0(\bar{u})| 2^{1 + (\alpha_3 + \alpha_4)} \\ &=: \tilde{L}. \end{aligned}$$

Fordern wir auch noch $R(u) \geq \frac{K}{\hat{c}\beta_{(1)}}$ mit $\hat{c} := 2 \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha_3 + \alpha_4} > 1$, dann erhalten wir schließlich eine in u gleichmäßige Beschränkung für die Ableitung von h_u durch

$$\sup\{|h'_u(\tau)| : \tau \in [1/2, 3/2]\} \leq \frac{\hat{c}\beta_{(1)}\tilde{L}}{K} =: L. \quad (13.2)$$

Nun definieren wir $\delta := \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon}{L}\}$. Sei $t > 0$ mit $|t - 1| < \delta$, dann liefert der Mittelwertsatz ein $\tau \in (1 - \delta, 1 + \delta) \subseteq [1/2, 3/2]$, so dass wir mit Hilfe von (13.2)

$$|F(t * u) - F(u)| = |h_u(t) - h_u(1)| = |h'_u(\tau)||t - 1| \leq L\delta \leq \varepsilon \quad (13.3)$$

folgern. Anschließend sei $N \in \mathbb{N}$, so gewählt, dass $\left|\frac{s_i^*}{s_i^n} - 1\right| < \delta$ für $n \geq N$ und $i = 1, 2$. Für jedes $u \in B(s^n)$ existiert nun genau ein

$$\min\left\{\frac{s_1^*}{s_1^n}, \frac{s_2^*}{s_2^n}\right\} \leq t_u \leq \max\left\{\frac{s_1^*}{s_1^n}, \frac{s_2^*}{s_2^n}\right\},$$

so dass $t_u * u \in B(s^*)$ gilt. Für $n \geq N$ gilt insbesondere $|t_u - 1| < \delta \leq \frac{1}{2}$ und

$$R(t_u * u) \geq \frac{K}{2\beta_{(1)}} \Leftrightarrow R(u)t_u^{\alpha_3 + \alpha_4} \geq \frac{K}{2\beta_{(1)}} \Leftrightarrow R(u) \geq \frac{K}{2\beta_{(1)}t_u^{\alpha_3 + \alpha_4}} \geq \frac{K}{\hat{c}\beta_{(1)}}.$$

Damit erhalten wir eine Bijektion zwischen $B(s^n)$ und $B(s^*)$. Zusammen mit (13.1) und (13.3) erhalten wir

$$\begin{aligned} b(s^*) &= \inf_{\substack{u \in B(s^*) \\ R(u) \geq \frac{K}{2\beta_{(1)}}}} F(u) = \inf_{\substack{u \in B(s^n) \\ R(t_u * u) \geq \frac{K}{2\beta_{(1)}}}} F(t_u * u) = \inf_{\substack{u \in B(s^n) \\ R(u) \geq \frac{K}{\hat{c}\beta_{(1)}}}} F(t_u * u) \\ &\begin{cases} \leq \inf_{\substack{u \in B(s^n) \\ R(u) \geq \frac{K}{\hat{c}\beta_{(1)}}}} F(u) + \varepsilon = b(s^n) + \varepsilon \\ \geq \inf_{\substack{u \in B(s^n) \\ R(u) \geq \frac{K}{\hat{c}\beta_{(1)}}}} F(u) - \varepsilon = b(s^n) - \varepsilon. \end{cases} \end{aligned}$$

Zusammen folgt daraus $|b(s^*) - b(s^n)| \leq \varepsilon$.

Damit ist die Behauptung 3 bewiesen, woraus wir nun

$$\beta_{(1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \beta^n = \lim_{n \rightarrow \infty} b(s^n) = b(s^*) = \inf_{B(s^*)} \frac{J_0 - J_0(\bar{u})}{R}$$

erhalten. Mit Bemerkung 4.2 erhalten wir schließlich

$$\inf_{u \in B(s^*)} J_{\beta_{(1)}}(u) \geq J_0(\bar{u}).$$

□

Kommen wir nun abschließend zum Beweis des Satzes 13.3:

Beweis von Satz 13.3: Zunächst erhalten wir für jedes $0 < \beta < \beta_{(1)}$ ein $s \in \mathbb{R}_+^2$ mit $s_i > |\nabla \bar{u}_i|_2$ für $i = 1, 2$, so dass

$$\inf_{A(s)} J_\beta \leq J_\beta(\bar{u}) < J_0(\bar{u}) \leq \inf_{B(s)} J_\beta$$

gilt. Damit erhalten wir eine beschränkte Minimalfolge $(v^n)_n$, mit $J_\beta(v^n) < J_0(\bar{u})$. Ebenso erhalten wir auch für $\beta = \beta_{(1)}$ mit Lemma 13.4 eine beschränkte Minimalfolge $(v^n)_n$, mit $J_\beta(v^n) < J_0(\bar{u})$. Lemma 4.6 liefert für $0 < \beta \leq \beta_{(1)}$ eine Lösung $u \in \mathcal{H}$ von (1.1) mit (1.2).

Nun schreiben wir \bar{u}^β für das lokale Minimum von J_β . Dann ist

$$\beta_{(2)} := \sup_{\substack{s \in \mathbb{R}_+^2 \\ s_i > |\nabla \bar{u}_i^{\beta_{(1)}}|_2}} \inf_{\substack{u \in B(s) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - J_{\beta_{(1)}}(\bar{u}^{\beta_{(1)}})}{R(u)}$$

wohldefiniert mit $0 < \beta_{(2)} < \infty$. Mit $s^* \in \mathbb{R}_+^2$ aus Lemma 13.4 gilt $\bar{u}, \bar{u}^{\beta_{(1)}} \in A(s^*)$. Zusammen mit $J_0(\bar{u}) > J_{\beta_{(1)}}(\bar{u}) \geq J_{\beta_{(1)}}(\bar{u}^{\beta_{(1)}})$ und der Beschränktheit von J_0 und R über $B(s^*)$ erhalten wir

$$\beta_{(1)} = \inf_{\substack{u \in B(s^*) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - J_0(\bar{u})}{R(u)} < \inf_{\substack{u \in B(s^*) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - J_{\beta_{(1)}}(\bar{u}^{\beta_{(1)}})}{R(u)} \leq \beta_{(2)}.$$

Anschließend erhalten wir für alle $\beta_{(1)} < \beta < \beta_{(2)}$ nach Wahl von $\beta_{(2)}$, ein $s \in \mathbb{R}^2$ mit $s_i > |\nabla \bar{u}_i^{\beta_{(1)}}|_2$, so dass

$$\beta < \inf_{\substack{u \in B(s) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - J_{\beta_{(1)}}(\bar{u}^{\beta_{(1)}})}{R(u)}$$

und damit

$$\inf_{A(s)} J_\beta \leq J_\beta(\bar{u}^{\beta_{(1)}}) < J_{\beta_{(1)}}(\bar{u}^{\beta_{(1)}}) \leq \inf_{B(s)} J_\beta$$

gelten. Das Lemma 13.4 lässt sich analog für $\beta_{(2)}$ statt $\beta_{(1)}$ beweisen, so dass wir ein $s^{**} \in \mathbb{R}^2$ mit $s_i^{**} > |\nabla \bar{u}_i^{\beta_{(1)}}|_2$ erhalten mit der Eigenschaft

$$\inf_{u \in B(s^{**})} J_{\beta_{(2)}} \geq J_{\beta_{(1)}}(\bar{u}^{\beta_{(1)}}).$$

Damit erhalten wir auch für $\beta = \beta_{(2)}$ eine beschränkte Minimalfolge und mit Lemma 4.6 erhalten wir eine Lösung von (1.1) mit (1.2).

Wir können diese Argumente iterativ wiederholen, so dass wir damit die streng monotone Folge $(\beta_k)_k$ mit

$$\begin{aligned} \beta_{(1)} &= \sup_{\substack{s \in \mathbb{R}_+^2 \\ s_i > |\nabla \bar{u}_i|_2}} \inf_{\substack{u \in B(s) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - J_0(\bar{u})}{R(u)} \\ \beta_{(k+1)} &= \sup_{\substack{s \in \mathbb{R}_+^2 \\ s_i > |\nabla \bar{u}_i^{\beta_k}|_2}} \inf_{\substack{u \in B(s) \\ R(u) \neq 0}} \frac{J_0(u) - J_{\beta_k}(\bar{u}^{\beta_k})}{R(u)} \text{ für } k \geq 1 \end{aligned}$$

erhalten, so dass für alle $k \in \mathbb{N}$, gilt, dass für $0 \leq \beta \leq \beta_k$ eine beschränkte Minimalfolge existiert. Mit Lemma 4.6 erhalten anschließend wir eine Lösung von (1.1) mit (1.2). Definieren wir nun $\beta_{(\infty)} = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta_{(k)}$, dann erhalten wir damit für alle $0 \leq \beta < \beta_{(\infty)}$ ein lokales Minimum des Funktionals J_β und damit eine Lösung von (1.1) mit (1.2). \square

Literatur

- [1] N. Akhmediev, A. Ankiewicz: *Partially Coherent Solitons on a Finite Background*. Phys. Rev. Lett. **82** (13 1999), 2661–2664.
- [2] T. Bartsch: *Bifurcation in a multicomponent system of nonlinear Schrödinger equations*. Journal of Fixed Point Theory and Applications **13.1** (2013), 37–50.
- [3] T. Bartsch, N. Dancer, Z.-Q. Wang: *A Liouville theorem, a-priori bounds, and bifurcating branches of positive solutions for a nonlinear elliptic system*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations **37.3** (2010), 345–361.
- [4] T. Bartsch, L. Jeanjean: *Normalized solutions for nonlinear Schrödinger systems*. Proceedings Royal Society of Edinburgh Sect. A **148** (2018), 225–242.
- [5] T. Bartsch, L. Jeanjean, N. Soave: *Normalized solutions for a system of coupled cubic Schrödinger equations on \mathbb{R}^3* . Journal de Mathématique Pures et Appliquées **106** (2016), 583–614.
- [6] T. Bartsch, N. Soave: *A natural constraint approach to normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations and systems*. Journal of Functional Analysis **272.12** (2017), 4998–5037.
- [7] T. Bartsch, N. Soave: *Correction to: "A natural constraint approach to normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations and systems"*[*J. Funct. Anal.* 272 (12) (2017) 4998 - 5037]. Journal of Functional Analysis **275.2** (2018), 516–521.
- [8] T. Bartsch, N. Soave: *Multiple normalized solutions for a competing system of Schrödinger equations*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations **58** (2019), Art. 22, 24pp.
- [9] T. Bartsch, S. de Valeriola: *Normalized solutions of nonlinear Schrödinger equations*. Archiv der Mathematik **100.1** (2013), 75–83.
- [10] T. Bartsch, Z.-Q. Wang, J. Wei: *Bound states for a coupled Schrödinger system*. Journal of Fixed Point Theory and Applications **2.2** (2007), 353–367.
- [11] Z. Chen, W. Zou: *An optimal constant for the existence of least energy solutions of a coupled Schrödinger system*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations **48.3** (2013), 695–711.
- [12] E. Dancer, J. Wei, T. Weth: *A priori bounds versus multiple existence of positive solutions for a nonlinear Schrödinger system*. Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis **27.3** (2010), 953–969.
- [13] B. D. Esry, C. H. Greene, J. P. Burke Jr., J. L. Bohn: *Hartree-Fock Theory for Double Condensates*. Phys. Rev. Lett. **78** (19 1997), 3594–3597.
- [14] D. J. Frantzeskakis: *Dark solitons in atomic Bose-Einstein condensates: from theory to experiments*. Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical **43.21** (2010), 213001.
- [15] T. Gou, L. Jeanjean: *Multiple positive normalized solutions for nonlinear Schrödinger systems*. Nonlinearity **31.5** (2018), 2319–2345.
- [16] L. Jeanjean: *Existence of solutions with prescribed norm for semilinear elliptic equations*. Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications **28.10** (1997), 1633–1659.
- [17] E. H. Lieb, M. Loss: *Analysis*. Graduate Studies in Mathematics Volume 14. American Mathematical Society.
- [18] T.-C. Lin, J. Wei: *Ground State of N Coupled Nonlinear Schrödinger Equations in $\mathbb{R}^n, n \leq 3$* . Communications in Mathematical Physics **255.3** (2005), 629–653.

- [19] T.-C. Lin, J. Wei: *Spikes in two coupled nonlinear Schrödinger equations*. Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis **22.4** (2005), 403–439.
- [20] B. Noris, H. Tavares, G. Verzini: *Existence and orbital stability of the ground states with prescribed mass for the L^2 -critical and supercritical NLS on bounded domains*. Analysis & PDE **7.8** (2014), 1807–1838.
- [21] D. Pierotti, G. Verzini: *Normalized bound states for the nonlinear Schrödinger equation in bounded domains*. Calculus of Variations and Partial Differential Equations **56.5** (2017), 133.
- [22] E. Timmermans: *Phase Separation of Bose-Einstein Condensates*. Phys. Rev. Lett. **81** (26 1998), 5718–5721.
- [23] M. Willem: *Minimax Theorems*. Progress in nonlinear differential equations and their applications Volume 24. Birkhäuser.
- [24] Zhaoli Liu, Z.-Q. Wang: *Ground States and Bound States of a Nonlinear Schrödinger System*. Advanced Nonlinear Studies **10.1** (), 175–193.

Selbstständigkeitserklärung

Ich erkläre: Ich habe die vorgelegte Dissertation selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt, die ich in der Dissertation angegeben habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Ich stimme einer evtl. Überprüfung meiner Dissertation durch eine Antiplagiat-Software zu. Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der „Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ niedergelegt sind, eingehalten.

Gießen, 08.03.2019

Ort, Datum

Unterschrift