

Informationshierarchie und statistische Analyse bei Zensierungsmodellen der Survival Analysis

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
an den Naturwissenschaftlichen Fachbereichen
(Mathematik)
der Justus-Liebig-Universität Gießen

vorgelegt von
Florian Oliver Hauck

Betreuer
Prof. Dr. Winfried Stute

Gießen, den 10. Februar 2014

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Einführung in die Zensierungsmodelle der Survival Analysis	5
I. Hauptkomponenten	13
3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse	15
3.1. Motivation	16
3.2. Hauptkomponentenzerlegung von stochastischen Prozessen im Hilbertraum $L_2(I, \nu)$	16
3.3. Hauptkomponenten von Martingalprozessen mit stetiger Varianzfunktion . . .	21
II. Modelle der Survival Analysis	33
4. Rechtszensierung	35
4.1. Modellbeschreibung	35
4.2. Zählprozesse und deren Martingaldarstellung	43

Inhaltsverzeichnis

4.3.	Hauptkomponenten des Martingals M_n^1	46
4.4.	Likelihood-Funktion	50
4.5.	Die Kullback-Leibler-Information bei Rechtszensierung	55
5.	Linkszensierung	65
5.1.	Modellbeschreibung	65
5.2.	Likelihood-Funktion bei Linkszensierung	67
5.3.	Die Kullback-Leibler-Information bei Linkszensierung	68
6.	Current Status Model	71
6.1.	Modellbeschreibung	71
6.2.	Martingaldarstellungen der Zählprozesse	72
6.3.	Hauptkomponenten des Martingalprozesses C_n^{CS}	77
6.4.	Likelihood-Funktion im Current Status Model	79
6.5.	Die Kullback-Leibler-Information im Current Status Model	81
7.	Intervallzensierung Typ II	85
7.1.	Modellbeschreibung	85
7.2.	Likelihood-Funktion bei Intervallzensierung Typ II	87
7.3.	Die Kullback-Leibler-Information bei Intervallzensierung Typ II	89
8.	Doppelzensierung	93
8.1.	Modellbeschreibung	93
8.2.	Martingaldarstellungen der Zählprozesse	94
8.3.	Likelihood-Funktion bei Doppelzensierung	97
8.4.	Die Kullback-Leibler-Information bei Doppelzensierung	100

Inhaltsverzeichnis

9. Mittelzensierung	105
9.1. Modellbeschreibung	105
9.2. Likelihood-Funktion bei Mittelzensierung	106
9.3. Die Kullback-Leibler-Information bei Mittelzensierung	107
10. Survival/Sacrifice Model	111
10.1. Modellbeschreibung	111
10.2. Martingaldarstellungen der Zählprozesse	113
10.3. Hauptkomponenten des Prozesses D_n^{SS}	117
10.4. Likelihood-Funktion im Survival/Sacrifice Model	120
10.5. Die Kullback-Leibler-Information im Survival/Sacrifice Model	122
11. Generalized Survival/Sacrifice Model	125
11.1. Modellbeschreibung	125
11.2. Martingaldarstellungen der Zählprozesse	127
11.3. Hauptkomponenten des Prozesses D_n^{GSS}	131
11.4. Likelihood-Funktion und Kullback-Leibler-Information im Generalized Survival/Sacrifice Model	133
12. Weitere Zensierungsmodelle	135
III. Kullback-Leibler-Information und Martingaltransformation	137
13. Kullback-Leibler-Information	139
13.1. Tabellierung der Likelihood-Funktionen	139

Inhaltsverzeichnis

13.2. Tabellierung der Kullback-Leibler-Informationen und Funktionen $L_{\bullet}(\theta_0, \theta)$. . .	141
13.3. Informationshierarchie	146
14. Konsistenz und asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers bei	
 Zensierung	171
14.1. Konsistenz des Maximum-Likelihood-Schätzers	174
14.2. Asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers	177
15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice	
 Model	181
15.1. Modellvoraussetzungen für die Martingaltransformation	183
15.2. Transformationsvoraussetzungen	186
15.3. Martingaltransformation und Resultate	189
15.4. Beweise	195

1. Einleitung

Die Survival Analysis (zu Deutsch “Überlebenszeitanalyse”) hat sich im Laufe der letzten Jahrzehnte als ein wichtiger Bestandteil der Statistik etabliert. Die Anfänge der Survival Analysis reichen schon mehrere Jahrhunderte zurück. Als Beispiel sei hier die Verwendung von Sterbetafeln in der Versicherungsbranche erwähnt. Die Wichtigkeit der Survival Analysis zeigt sich durch die immense Anzahl der Veröffentlichungen in diesem Bereich der Statistik. Die am häufigsten zitierte Arbeit ist eine Publikation aus der Survival Analysis: Die Arbeit von *Kaplan-Meier (1958)*. Weiterhin existieren vielfältige Anwendungsmöglichkeiten in den verschiedensten interdisziplinären Disziplinen. Als Beispiel seien die Humanmedizin, die Epidemiologie, die Ökonomie, die Demographie, die Ingenieurwissenschaften sowie die Biologie zu nennen. Einen guten Überblick über die Veröffentlichungen der letzten 50 Jahre des 20. Jahrhunderts in der Zeitschrift *Biometrika* liefert der Artikel von *David Oakes (2001)* mit dem Titel “*Biometrika Centenary: Survival Analysis*”.

Aufgrund der vielfältigen Anzahl unterschiedlicher mathematischer Modelle, die in der Survival Analysis genutzt werden, befindet sich diese in einem stetigen Wachstums- und Weiterentwicklungsprozess. Einen ersten mathematischen Überblick möge dem Leser die Ausgabe 23 des “*Handbook of Statistics*” liefern, welche ausschließlich der Survival Analysis gewid-

1. Einleitung

met ist. Einen sanfteren Einstieg ermöglicht das Buch “Survival Analysis” von *Klein und Moeschberger (2003)*, das sich auf die Anwendungsgebiete Biologie und Medizin konzentriert, sowie *Hoel und Walburg (1973)*.

In der Survival Analysis gilt das Interesse gewöhnlich der Zeit, bis ein bestimmtes Ereignis eintritt. In der Literatur wird dieses Ereignis als Ausfall (im Englischen “failure”) bezeichnet, wir bevorzugen im Folgenden stattdessen den Begriff “Event”. Beispiele für solche Events sind: Tod eines Individuums, Ausfall einer Maschine, Erholung/Genesung nach einer bestimmten Krankheit oder Operation, Austritt aus der Arbeitslosigkeit, Beendigung des Single-Lebens, usw..

Aufgrund externer Einflussfaktoren können Daten der Survival Analysis, die zum Beispiel zur Schätzung einer unbekanntem Verteilungsfunktion oder eines unbekanntem Parameters benötigt werden, nicht vollständig vorhanden sein. In diesem Fall nennen wir sie “zensiert”. Unterschiedliche Zensierungsmechanismen bedingen verschiedene mathematische Zensierungsschemata bzw. Zensierungsmodelle. Sie stehen im Vordergrund dieser Arbeit. Als Beispiele seien die Rechtszensierung, die Intervallzensierung, die Doppelzensierung und das Survival/Sacrifice Model genannt.

Im ersten Abschnitt der vorliegenden Arbeit werden verschiedene Zensierungsmodelle kurz vorgestellt. Anschließend wird im ersten Teil der Arbeit die Hauptkomponentenanalyse von stochastischen Martingalprozessen untersucht. Diese Analyse wird im folgenden zweiten Teil, in dem die verschiedenen Zensierungsmodelle ausführlicher studiert werden, Verwendung finden. Im abschließenden dritten Teil dieser Arbeit werden zuerst die verschiedenen Kullback-Leibler-Informationen verglichen. Danach wird die Konsistenz sowie asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers in den verschiedenen Zensierungsmodellen gezeigt.

1. Einleitung

Abschließend wird im letzten Abschnitt für ein Zensierungsmodell die Möglichkeit erarbeitet, einen Goodness-of-Fit Test durch Verwendung einer Martingaltransformation durchzuführen.

An dieser Stelle möchte ich Herrn Prof. Dr. Stute für seine Unterstützung und seine Anregungen herzlichst danken. Ich hätte mir keinen besseren Betreuer für meine Arbeit bzw. mein Studium der Mathematik wünschen können. Ein besonderer Dank gilt auch meinen Eltern sowie meiner Partnerin, die mich auf meinem persönlichen Weg hin zu dieser Arbeit begleitet haben und zu einem Teil den Menschen aus mir gemacht haben, der ich nun bin. Außerdem möchte ich jenen Menschen danken, die mich zusätzlich bei der Anfertigung dieser Arbeit durch Diskussionen oder Erörterungen unterstützt haben.

1. Einleitung

2. Einführung in die Zensierungsmodelle der Survival Analysis

In diesem Kapitel werden wir einen Überblick über die Zensierungsmodelle geben, die in dieser Arbeit untersucht werden. Es werden acht verschiedene Zensierungsmodelle betrachtet, die uns unterschiedliche Informationen bereitstellen. Da wir verschiedene Modelle vergleichen wollen, werden wir ebenfalls die Situation betrachten, in der keine Zensierung stattfindet. Dies wird als das Modell “Ohne Zensierung” bezeichnet, mit dem wir beginnen wollen.

Ohne Zensierung

In diesem Modell kann jedes Event **direkt** beobachtet werden. Somit stehen alle Daten, an denen wir interessiert sind, zur Verfügung. Einer der bekanntesten Zählprozesse in diesem Zusammenhang ist die empirische Verteilungsfunktion

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t\}}$$

2. Einführung in die Zensierungsmodelle der Survival Analysis

Dabei sind X_1, \dots, X_n die beobachteten Daten und 1_A der Indikator der Menge A .

Rechtszensierung

Die Rechtszensierung ist eines der bekanntesten Modelle der Survival Analysis. Im Rahmen einer Studie sehen wir uns unter Umständen mit der Situation konfrontiert, dass Daten nicht in vollständiger Form beobachtet werden. Dies erfordert einen neuen Zugang, in dem gewohnte mathematische Methoden nicht mehr angewendet werden können und führt zu dem berühmten Produkt-Limes-Schätzer von *Kaplan-Meier (1958)*.

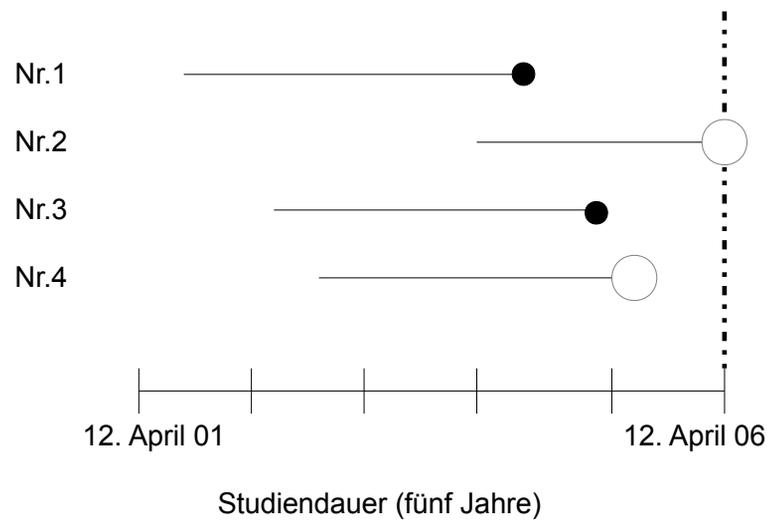
Im Rechtszensierungsmodell wird ein Event nur beobachtet, falls es **vor** einem bestimmten Zeitpunkt, dem Zensierungszeitpunkt, eintritt. Ist dies nicht der Fall, so ist bekannt, dass dieses Event erst nach dem Zensierungszeitpunkt eingetreten wäre. Das folgende Beispiel möge dies verdeutlichen:

- Humanmedizin

Eine Ärztin leitet eine Studie an einer Klinik. Diese dient der Erforschung der Zeitdauer, die von einer komplexen Krebsoperation bis zu einem möglichen "Rückfall", z.B. der Neubildung von Metastasen, vergeht. Hierzu werden ab dem 12. April des Jahres 2001 für einen Zeitraum von fünf Jahren alle Patienten, die während dieser Zeitdauer operiert werden, in ihre Studie aufgenommen. Diese zeitversetzten Eintritte, im Englischen "staggered entries", in die Untersuchung der Ärztin sind typisch für das Modell der Rechtszensierung. Das nachstehende Schaubild zeigt die Verweildauern von vier Patienten in dieser Studie:

2. Einführung in die Zensierungsmodelle der Survival Analysis

Datenstruktur der ersten vier Patienten



Der erste und dritte Patient erleiden zu den mit • gekennzeichneten Zeitpunkten einen Rückfall. Bei den Patienten Nr.2 und Nr.4 ist dies anders:

Der zweite Patient hat bis zum Ende der Studie noch keinen Rückfall erlitten. Für ihn ist also die Zeitdauer bis zu einem Rückfall nicht bekannt, wir sagen sie ist **zensiert**.

Die Rückfall-Zeitdauer des vierten Patienten ist ebenfalls zensiert. Dies ist aber nicht durch die Beendigung der Studie begründet, sondern durch

2. Einführung in die Zensierungsmodelle der Survival Analysis

ein vorzeitiges Ausscheiden aus der Studie. Mögliche Ursachen hierfür könnten der Tod des Patienten oder eine Änderung der Wohnverhältnisse sein.

Linkszensierung

Das nächste Zensierungsschema ist das Modell der Linkszensierung. In der Literatur sind wenige Untersuchungen zu dieser Zensierungskonstellation vorhanden. Dies liegt daran, dass bestimmte Ergebnisse unter Rechtszensierung sich leicht auf die neue Situation übertragen lassen.

Im Linkszensierungsmodell wird ein Event beobachtet, falls es **nach** dem Zensierungszeitpunkt eintritt. Als ein Beispiel kann eine bestimmte motorische Fähigkeit eines Kindes dienen, welche erst im Unterricht des Kindergartens oder der Schule untersucht wird.

Current Status Model

Das Current Status Model, auch Intervallzensierung Typ I genannt, ist das zweite berühmte Modell der Survival Analysis. In diesem Modell wird ein Event **niemals** direkt beobachtet. Es ist nur bekannt, ob es zu einem bestimmten Zeitpunkt eingetreten ist oder nicht. Dies erklärt den Begriff des "Current Status". Der Unterschied zu dem Zensierungsmodell der Rechtszensierung (bzw. der Linkszensierung) ist also der folgende:

Im Rechtszensierungsmodell existiert die Möglichkeit, dass das Event, an dessen Eintritt Interesse besteht, direkt beobachtet werden kann. Hierfür ist ein ständiges Monitoring nötig.

2. Einführung in die Zensierungsmodelle der Survival Analysis

Im Current Status Model ist dies nicht so. In diesem Zensierungsschema ist nur bekannt, ob dieses Event bis zu einem bestimmten Zeitpunkt eingetreten ist oder nicht. Dies kann einerseits durch die Unmöglichkeit eines ständigen Monitorings bedingt sein. Andererseits gibt es Situationen, in denen das Event von Interesse nicht direkt “gemessen” bzw. erfasst werden kann. Wir sind dann auf andere Kenngrößen angewiesen, um Informationen über dieses Event zu erhalten.

Die folgenden Beispiele sollen diese Situationen verdeutlichen:

- Humanmedizin

Ein typisches Beispiel für Current Status Data ist bei der Untersuchung von Probanden, die mit dem HI-Virus infiziert sind, gegeben. Aufgrund der Unkenntnis des genauen Zeitpunkts, an dem die Krankheit auszubrechen vermag bzw. ausgebrochen ist, kann der Arzt jedem Patienten leider nur die Information geben, ob dies passiert ist oder nicht.

- Marketing

Ein Marketing-Unternehmen soll für einen Kunden die Bekanntheit eines bestimmten Produktes herausfinden. Diese entscheidet darüber, ob die bisherige Werbung für dieses Produkt zufriedenstellend ist oder noch mehr Investitionen in die Werbung benötigt werden. Um die Bekanntheit herauszufinden, werden zufällig 1000 Haushalte einer Stadt zu verschiedenen Zeitpunkten einmalig befragt, ob sie dieses Produkt kennen oder nicht. Es handelt sich somit um Current Status Data.

2. Einführung in die Zensierungsmodelle der Survival Analysis

Intervallzensierung Typ II

Das Current Status Model trägt in der Literatur auch die Bezeichnung Intervallzensierung Typ I. Dies ist durch den einen Untersuchungszeitpunkt begründet. Eine Erweiterung dieses Modells ist die Intervallzensierung Typ II. Das Event von Interesse kann auch in diesem Zensierungsschema nicht beobachtet werden. Im Unterschied zum Current Status Model existieren jedoch mehrere Beobachtungszeitpunkte. Dabei sei bekannt, in welchem Teilintervall zwischen den Beobachtungszeitpunkten das Event von Interesse liegt.

Als Beispiele für die Anwendung dieses Zensierungsmodells können die Beispiele des Current Status Model dienen, bei denen nun weitere Beobachtungszeitpunkte Berücksichtigung finden.

Doppelzensierung

Im Modell der Doppelzensierung existieren zwei Beobachtungszeitpunkte. Im Unterschied zum Zensierungsmodell der Intervallzensierung Typ II ist es aber diesmal möglich, das Event von Interesse zu beobachten, falls es zwischen diesen beiden Zeitpunkten stattfindet.

Ein bekanntes Beispiel für dieses Zensierungsschema ist das folgende:

Um die sprachliche Entwicklung von Kleinkindern zu bewerten, ist ein Sprachforscher daran interessiert, wann eine bestimmte sprachliche Fähigkeit zum ersten Mal beherrscht wird. Um diese Sprachkenntnis zu untersuchen, bedarf es der Fachkenntnisse eines geschulten Pädagogen. Deshalb kann die Entwicklung dieser Fähigkeit z.B. nur entdeckt werden, nachdem das Kleinkind in den Kindergarten eingetreten ist. Und diese Zeit ist üblicherweise zwischen dem dritten und sechsten Lebensjahr.

2. Einführung in die Zensierungsmodelle der Survival Analysis

Mittelzensierung

Die Mittelzensierung ist ein Zensierungsschema, das erst seit kurzem in der Literatur diskutiert wird. Im Mittelzensierungsmodell wird das Event von Interesse direkt beobachtet, falls es **nicht** in dem Intervall zwischen den beiden Beobachtungszeitpunkten stattfindet.

Ein Beispiel für dieses Zensierungsmodell ist das folgende:

Wir betrachten wieder eine Studie, die der Erforschung einer bestimmten Krankheit dient. Hierzu wird durch den behandelnden Arzt ein Untersuchungszeitraum von fünf Jahren festgelegt. Nun kann es passieren, dass nicht alle Patienten die kompletten fünf Jahre beobachtet werden können, sondern jeweils nur bestimmte Zeitabschnitte. Zum Beispiel mögen bei einem Patienten die ersten zwei und die letzten zwei Jahre für die Untersuchung zur Verfügung stehen. Dies kann durch einen Umzug oder einen Auslandsaufenthalt begründet sein.

Survival/Sacrifice Model

Das Survival/Sacrifice Model kann einerseits als eine Erweiterung des Current Status Model gesehen werden. Andererseits beinhaltet es ebenfalls das Modell der Rechtszensierung. In diesem Zensierungsschema kann die interessierende Größe nicht direkt beobachtet werden. Es ist entweder durch den Tod (aufgrund der Krankheit) oder das Sacrificing (“Opferung”) des Untersuchungsobjekts bekannt, ob das Ereignis bereits eingetreten ist oder nicht.

Ein Beispiel soll dies verdeutlichen:

2. Einführung in die Zensierungsmodelle der Survival Analysis

Ein Tiermediziner untersucht die Entwicklung von Tumoren an Kleintieren. Im Interesse seiner Studie steht die Dauer bis zum Ausbruchzeitpunkt dieser Krankheit. Aufgrund der Tatsache, dass er dem Untersuchungsobjekt nicht ansehen kann, ob dieses einen Tumor gebildet hat oder nicht, ist dieser Zeitpunkt nicht beobachtbar. Informationen über den Ausbruchzeitpunkt dieser Krankheit können nur durch den Tod des Individuums oder das (zufällige) Sacrificing gewonnen werden.

Generalized Survival/Sacrifice Model

Das Generalized Survival/Sacrifice Model ist eine Erweiterung des Survival/Sacrifice Model. In diesem Zensierungsschema kann die interessierende Größe wieder nicht direkt beobachtet werden. Es ist entweder durch den diesmal **nicht** notwendig durch die Krankheit verursachten Tod oder das Sacrificing des Untersuchungsobjekts bekannt, ob das Ereignis bereits eingetreten ist oder nicht.

Teil I.

Hauptkomponenten

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

In der Hauptkomponentenanalyse eines stochastischen Prozesses $(X_t)_t$ werden Eigenschaften dieses Prozesses untersucht. Dies wird durch die orthogonale Zerlegung des Prozesses in seine Hauptkomponenten ermöglicht. Mit Hilfe dieser Zerlegung kann ein stochastischer Prozess wie folgt dargestellt werden:

$$X = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j \tag{3.1}$$

Die Funktionen f_j bilden hierbei ein Orthonormalsystem von Funktionen in einem bestimmten Funktionenraum, und die zufälligen Hauptkomponenten α_j sind unkorreliert.

Das Ziel der Hauptkomponentenzerlegung ist es somit, eine alternative Darstellung eines stochastischen Prozesses zu bestimmen, um hiermit statistische Untersuchungen zu ermöglichen. Es stellt sich jedoch die begründete Frage, ob diese Zerlegung für jeden stochastischen Prozess existiert.

3.1. Motivation

Im vorherigen Abschnitt ergab sich die Frage nach der Existenz einer Hauptkomponentenzerlegung eines stochastischen Prozesses. Zunächst muss der stochastische Prozess gewisse strukturelle Eigenschaften wie z.B. die quadratische Integrierbarkeit der Pfade besitzen.

Es ist ein Anhaltspunkt vorhanden, der uns erahnen lässt, warum eine solche Zerlegung existieren könnte:

Eine symmetrische $d \times d$ -Kovarianzmatrix Ψ kann mit Hilfe von Ergebnissen aus der Linearen Algebra wie folgt dargestellt werden:

$$\Psi = \sum_{j=1}^d \lambda_j \gamma_j \gamma_j^T$$

Hierbei sind die λ_j die Eigenwerte und die γ_j die orthonormalen Eigenvektoren von Ψ .

3.2. Hauptkomponentenzerlegung von stochastischen Prozessen im Hilbertraum $L_2(I, \nu)$

Wir bezeichnen mit $L_2(I, \nu)$ den Hilbertraum der Funktionen h , für die

$$\int_I h^2(s) d\nu(s) < \infty$$

gilt. Hierbei sei I eine beliebige Menge sowie ν ein finites Maß.

Das Skalarprodukt für zwei Funktionen $h, g \in L_2(I, \nu)$ ist definiert als:

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

$$\langle h, g \rangle_\nu := \int_I h(s)g(s)d\nu(s)$$

Dieser Hilbertraum besitzt eine Basis von Funktionen $\{f_j\} \in L_2(I, \nu)$, so dass für jede Funktion $h \in L_2(I, \nu)$ die folgende Darstellung existiert:

$$h = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j \tag{3.2}$$

Gleichung (3.2) bedeutet, dass

$$\|h - \sum_{j=1}^m \alpha_j f_j\| \rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

mit

$$\|h\| = \sqrt{\langle h, h \rangle_\nu} \quad \text{für } h \in L_2(I, \nu)$$

Die Basis $\{f_j\}$ ist nicht eindeutig. Mit Hilfe eines Orthonormalisierungsverfahrens kann erreicht werden, dass die Basis orthonormal ist. Es gilt somit

$$\int_I f_i^2 d\nu = 1 \quad \text{sowie} \quad \int_I f_i f_j d\nu = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

Entscheidend ist nun die Frage, ob es eine “gute” orthonormale Basis gibt, so dass die Koordinaten α_j bestimmte Eigenschaften besitzen.

Bemerkungen:

- In der Survival Analysis hat die Menge I häufig die folgende Gestalt:

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

$I = [0, T]$ mit $T \in \mathbb{R}$.

- Ein bekanntes Beispiel für einen Hilbertraum erhalten wir, wenn wir das Lebesgue-Maß auf $I = [0, 1]$ verwenden.

Nun betrachten wir über dem Wahrscheinlichkeitsraum (Ω, \mathcal{A}, P) einen stochastischen Prozess $(X_t)_{t \in I}$, den wir als zentriert annehmen können (ansonsten untersuchen wir den Prozess $X_t^0 = X_t - E(X_t)$). Für diesen Prozess setzen wir das Folgende voraus:

- $X_\bullet(\omega) \in L_2(I, \nu) \quad \forall \omega \in \Omega$
- $E(X_t^2) < \infty \quad \forall t \in I$

Dann existiert die Kovarianzfunktion $K_X(s, t) = E(X_s X_t)$ sowie für jedes ω die Darstellung

$$X = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j$$

Da der Prozess $(X_t)_{t \in I}$ zufällig ist, sind es auch die Koordinaten α_j . In der Statistik ist es üblich, die α_j als Hauptkomponenten zu bezeichnen.

Das Ziel dieses Kapitels ist es, eine spezielle Basis $\{f_j\}$ zu bestimmen, so dass die Zufallsvariablen α_j orthogonal, also unkorreliert sind. Dafür wird die folgende Integralgleichung betrachtet:

$$\int_I K_X(s, t) f_j(s) d\nu(s) = \lambda_j f_j(t) \tag{3.3}$$

Mithin muss für die Bestimmung der Funktionen f_j ein Eigenwertproblem gelöst werden. Die Funktionen f_j werden dann als Eigenfunktionen und die λ_j als Eigenwerte bezeichnet.

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

Bemerkungen:

- Im Folgenden werden wir zeigen, dass das Maß ν , das wir für die Zerlegung in Hauptkomponenten verwenden wollen, in Abhängigkeit von der Kovarianzfunktion des stochastischen Prozesses zu wählen ist. Dadurch wird sich schließlich auch Gleichung (3.3) lösen lassen.
- Wir werden uns in dieser Arbeit auf die Bestimmung der Hauptkomponenten von Martingalprozessen mit stetiger Varianzfunktion beschränken.

Als erstes Beispiel für die Zerlegung eines Martingalprozesses wollen wir die orthogonale Zerlegung der Brownschen Bewegung im Hilbertraum $L_2([0, 1], \lambda^{01})$ angeben. Hierbei bezeichnet λ^{01} das Lebesgue-Maß auf $I = [0, 1]$. Wir orientieren uns an *Shorack und Wellner (1986), Kapitel 5*.

Die stetige Kovarianzfunktion $K_B(s, t) = \min(s, t)$ der Brownschen Bewegung ist symmetrisch, nichtnegativ definit und es gilt

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 K_B^2(s, t) ds dt &= \int_0^1 \int_0^1 (\min(s, t))^2 ds dt \\ &= 2 \cdot \int_0^1 \left(\int_0^s t^2 dt \right) ds \\ &= \frac{1}{6} < \infty \end{aligned}$$

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

Somit kann das Theorem von Mercer auf $[0, 1] \times [0, 1]$, siehe *Shorack und Wellner (1986), S. 208*, verwendet werden, und es existiert die folgende Darstellung:

$$K_B(s, t) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(s) f_j(t) \quad 0 \leq s, t \leq 1$$

Wir erhalten hiermit, indem wir beide Seiten der letzten Gleichung mit f_k multiplizieren und anschließend integrieren:

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_k(s) K_B(s, t) ds &= \int_0^1 f_k(s) \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(s) f_j(t) ds \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(t) \int_0^1 f_k(s) f_j(s) ds \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(t) \langle f_j, f_k \rangle_{\lambda^0} \\ &= \lambda_k f_k(t), \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung aus der Orthonormalität der f_j folgt.

Wir suchen demnach für die gewünschte Darstellung der Brownschen Bewegung die Lösungen der folgenden Integralgleichung:

$$\int_0^1 f_k(s) \min(s, t) ds = \lambda_k f_k(t) \quad (3.4)$$

Diese Integralgleichung wird durch die Eigenwerte

$$\lambda_k = \frac{4}{\pi^2(2k-1)^2} \quad k = 1, 2, \dots$$

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

sowie die dazugehörigen Eigenfunktionen

$$f_k(t) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{(2k-1)\pi t}{2}\right)$$

gelöst. Diese Eigenfunktionen bilden ein Orthonormalsystem des Unterraums der Funktionen des $L_2([0, 1], \lambda^{01})$, die in 0 starten, und es gilt

$$B = \sum_{j=1}^{\infty} \langle B, f_j \rangle_{\lambda^{01}} f_j$$

3.3. Hauptkomponenten von Martingalprozessen mit stetiger Varianzfunktion

Das Ziel dieses Abschnitts ist die Bestimmung der Hauptkomponenten von zentrierten Martingalprozessen mit stetiger Varianzfunktion. In den verschiedenen Zensierungsmodellen dieser Arbeit werden wir stochastische Prozesse, die diese Eigenschaften besitzen, untersuchen bzw. deren Hauptkomponenten bestimmen.

Um dies zu erreichen, benötigen wir zuerst das folgende Lemma:

Lemma 3.1.

Für einen zentrierten und quadratisch integrierbaren Martingalprozess $(M_t)_{t \in I}$ gilt mit

$$\psi(t) := E(M_t^2):$$

- Die Funktion ψ ist monoton wachsend
- $K_M(s, t) = \text{Cov}(M_s, M_t) = \min(\psi(s), \psi(t))$

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

Beweis.

Mit den Rechenregeln für bedingte Erwartungswerte gilt für $s \leq t$:

$$\begin{aligned} 1) \quad 0 &\leq E((M_t - M_s)^2) = E(M_t^2 - 2M_tM_s + M_s^2) \\ &= E(M_t^2) - 2E(M_sE(M_t|\mathcal{F}_s)) + E(M_s^2) \\ &= E(M_t^2) - E(M_s^2) = \psi(t) - \psi(s) \end{aligned}$$

$$2) \quad Cov(M_s, M_t) = E(M_sM_t) = E(M_s^2) = \psi(s)$$

Somit ist dieses Lemma bewiesen. □

3.3.1. Bestimmung der Hauptkomponenten

Die Pfade des Martingalprozesses $(M_t)_{t \in I}$ mit $I = [0, T]$ seien für alle $\omega \in \Omega$ Elemente des Hilbertraums $L_2(I, \nu)$, wobei das Maß ν im nächsten Theorem spezifiziert wird. Da wir diese Situation auf (3.4) zurückführen wollen, werden wir im folgenden Theorem 3.2 nicht den Martingalprozess $(M_t)_{t \in [0, T]}$, sondern den Martingalprozess $(\tilde{M}_t = \frac{1}{\sqrt{\psi(T)}}M_t)_{t \in [0, T]}$ untersuchen. Für diesen Prozess gilt mit $s \leq t$:

$$K_{\tilde{M}}(s, t) = Cov(\tilde{M}_s, \tilde{M}_t) = \frac{\psi(s)}{\psi(T)} =: \tilde{\psi}(s) \quad \text{mit } 0 \leq \tilde{\psi}(s) \leq 1 \quad \text{ sowie } \tilde{\psi}(T) = 1$$

Die Funktion $\tilde{\psi}$ definiert somit ein Maß, welches eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist.

Theorem 3.2 versetzt uns außerdem in die Lage, zusätzlich zur Zerlegung des stochastischen Prozesses $(M_t)_{t \in I}$ die orthogonale Zerlegung der Zufallsvariablen M_t bestimmen zu können.

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

Theorem 3.2.

Es sei $(M_t)_{t \in [0, T]}$ (mit $T \in \mathbb{R}$) ein in 0 startender Martingalprozess, dessen Pfade für alle $\omega \in \Omega$ im Hilbertraum $L_2([0, T], \psi)$ liegen mögen. Außerdem sei die Kovarianzfunktion $K_M(s, t) = \psi(\min(s, t))$ stetig mit $\psi(t) = E(M_t^2) < \infty \quad \forall t \in I$ und $\psi(T) > 0$.

Zusätzlich zu diesem Prozess betrachten wir den Martingalprozess

$$\left(\tilde{M}_t = \frac{1}{\sqrt{\psi(T)}} M_t \right)_{t \in [0, T]} \quad \text{mit } K_{\tilde{M}}(s, t) = \frac{\psi(\min(s, t))}{\psi(T)} =: \tilde{\psi}(\min(s, t))$$

Dann gilt in $L_2(I, \tilde{\psi})$:

$$\begin{aligned} \tilde{M} &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \tilde{M}, f_j \circ \tilde{\psi} \rangle_{\tilde{\psi}} f_j \circ \tilde{\psi} \\ &\text{mit } \langle g, h \rangle_{\tilde{\psi}} := \int_0^T g(s)h(s)d\tilde{\psi}(s) \\ &\text{sowie } f_j(s) = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{(2j-1)\pi s}{2}\right) \end{aligned}$$

Für die Zerlegung von $(M_t)_{t \in [0, T]}$ in $L_2(I, \tilde{\psi})$ gilt somit:

$$M = \sum_{j=1}^{\infty} \langle M, f_j \circ \tilde{\psi} \rangle_{\tilde{\psi}} f_j \circ \tilde{\psi}$$

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

Außerdem haben wir

$$\begin{aligned} \tilde{M}_t &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \tilde{M}, f_j \circ \tilde{\psi} \rangle_{\tilde{\psi}} f_j \circ \tilde{\psi}(t) \\ &\text{sowie} \\ M_t &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle M, f_j \circ \tilde{\psi} \rangle_{\tilde{\psi}} f_j \circ \tilde{\psi}(t) \end{aligned}$$

Diese Gleichungen bedeuten, dass

$$E \left[\left(M_t - \sum_{j=1}^m \langle M, f_j \circ \tilde{\psi} \rangle_{\tilde{\psi}} f_j \circ \tilde{\psi}(t) \right)^2 \right] \rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty$$

Beweis.

Es ist $0 \leq K_{\tilde{M}}(s, t) = \tilde{\psi}(s) \leq 1$ für $s \leq t$ mit $\tilde{\psi}(T) = 1$. Bezeichnen wir mit $K_B(s, t) = \min(s, t)$ die Minimums-Kovarianzfunktion der Brownschen Bewegung, so gilt mit Theorem 1 (Mercer) aus *Shorack und Wellner (1986), S. 208*:

$$\begin{aligned} K_{\tilde{M}}(s, t) = K_B(\tilde{\psi}(s), \tilde{\psi}(t)) &= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j \circ \tilde{\psi}(s) f_j \circ \tilde{\psi}(t) & (3.5) \\ &\text{mit } \tilde{\psi}(s), \tilde{\psi}(t) \in [0, 1] \end{aligned}$$

Hierbei sind die Funktionen f_j wie zuvor orthonormal im Hilbertraum $L_2([0, 1], \lambda^{01})$.

Nun wiederholen wir unser Vorgehen des letzten Abschnitts. Wir multiplizieren aber diesmal beidseitig mit der Funktion $f_k \circ \tilde{\psi} =: f_k(\tilde{\psi})$ und integrieren bezüglich des Maßes $\tilde{\psi}$. Danach

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

werden die Stetigkeit von $\tilde{\psi}$ sowie der Transformationssatz ausgenutzt:

$$\begin{aligned}
\int_0^T K_{\tilde{M}}(s, t) f_k(\tilde{\psi}(s)) d\tilde{\psi}(s) &= \int_0^T K_B(\tilde{\psi}(s), \tilde{\psi}(t)) f_k(\tilde{\psi}(s)) d\tilde{\psi}(s) \\
&= \int_0^T \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(\tilde{\psi}(s)) f_j(\tilde{\psi}(t)) f_k(\tilde{\psi}(s)) d\tilde{\psi}(s) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(\tilde{\psi}(t)) \int_0^T f_j(\tilde{\psi}(s)) f_k(\tilde{\psi}(s)) d\tilde{\psi}(s) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j f_j(\tilde{\psi}(t)) \int_0^1 f_j(u) f_k(u) du \\
&= \lambda_k f_k(\tilde{\psi}(t)), \text{ da } f_i \text{ orthonormal}
\end{aligned}$$

Wird auf der linken Seite der Gleichung ebenfalls eine Transformation verwendet, so erhalten wir:

$$\int_0^1 K_B(v, w) f_k(v) dv = \lambda_k f_k(w) \quad \text{mit } w := \tilde{\psi}(t) \text{ sowie } v, w \in [0, 1]$$

Diese Gleichung wird von den bereits bestimmten Eigenwerten und Eigenfunktionen aus dem Abschnitt 3.2 gelöst.

Wir werden den Beweis beenden, indem wir zeigen, dass für festes t gilt:

$$E \left[\left(\tilde{M}_t - \sum_{j=1}^m \langle \tilde{M}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} f_j(\tilde{\psi}(t)) \right)^2 \right] \longrightarrow 0 \quad \text{für } m \longrightarrow \infty \quad (3.6)$$

Zuerst werden wir die Unkorreliertheit, also

$$E \left[\langle \tilde{M}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \langle \tilde{M}, f_i(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \right] = 0 \quad \text{für } i \neq j$$

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

zeigen. Es gilt:

$$E \left[\langle \tilde{M}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \langle \tilde{M}, f_i(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \right] = E \left[\int_0^T \int_0^T \tilde{M}_s f_j(\tilde{\psi}(s)) \tilde{M}_t f_i(\tilde{\psi}(t)) d\tilde{\psi}(s) d\tilde{\psi}(t) \right]$$

Mit dem Satz von Fubini erhalten wir:

$$\begin{aligned} E \left[\langle \tilde{M}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \langle \tilde{M}, f_i(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \right] &= \int_0^T \int_0^T f_j(\tilde{\psi}(s)) K_{\tilde{M}}(s, t) f_i(\tilde{\psi}(t)) d\tilde{\psi}(s) d\tilde{\psi}(t) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T \int_0^T f_j(\tilde{\psi}(s)) f_k(\tilde{\psi}(s)) f_k(\tilde{\psi}(t)) f_i(\tilde{\psi}(t)) d\tilde{\psi}(s) d\tilde{\psi}(t) \\ &\text{da } K_{\tilde{M}}(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k f_k(\tilde{\psi}(s)) f_k(\tilde{\psi}(t)) \end{aligned}$$

Dies führt zu:

$$\begin{aligned} E \left[\langle \cdot, \cdot \rangle_{\tilde{\psi}} \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_0^T \underbrace{\left(\int_0^T f_j(\tilde{\psi}(s)) f_k(\tilde{\psi}(s)) d\tilde{\psi}(s) \right)}_{=1 \text{ für } j=k} f_k(\tilde{\psi}(t)) f_i(\tilde{\psi}(t)) d\tilde{\psi}(t) \\ &= 0 \quad \text{für } i \neq j, \text{ sonst } \lambda_i \end{aligned}$$

Um (3.6) zu zeigen, verwenden wir die Binomische Formel und gelangen zu:

$$\begin{aligned} E[(\tilde{M}_t)^2] - 2 \sum_{j=1}^m f_j(\tilde{\psi}(t)) E \left[\tilde{M}_t \langle \tilde{M}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \right] \\ + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m f_j(\tilde{\psi}(t)) f_i(\tilde{\psi}(t)) E \left[\langle \tilde{M}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \langle \tilde{M}, f_i(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \right] \end{aligned}$$

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

Aufgrund der Unkorreliertheit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 E \left[\left(\tilde{M}_t - \sum_{j=1}^m \langle \tilde{M}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} f_j(\tilde{\psi}(t)) \right)^2 \right] \\
 = \underbrace{E[(\tilde{M}_t)^2]}_{=K_{\tilde{M}}(t,t)} - 2 \sum_{j=1}^m f_j(\tilde{\psi}(t)) E \left[\tilde{M}_t \langle \tilde{M}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \right] \\
 + \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(\tilde{\psi}(t)) f_j(\tilde{\psi}(t))
 \end{aligned}$$

Um die obige Behauptung zu verifizieren, bestimmen wir den zweiten Erwartungswert:

$$\begin{aligned}
 E \left[\tilde{M}_t \langle \tilde{M}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \right] &= E \left[\int_0^T \tilde{M}_t \tilde{M}_v f_j(\tilde{\psi}(v)) d\tilde{\psi}(v) \right] \\
 &= \int_0^T K_B(\tilde{\psi}(t), \tilde{\psi}(v)) f_j(\tilde{\psi}(v)) d\tilde{\psi}(v) \\
 &= \lambda_j f_j(\tilde{\psi}(t))
 \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir mit (3.5) für $s = t$:

$$\begin{aligned}
 E \left[\left(\tilde{M}_t - \sum_{j=1}^m \langle \tilde{M}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} f_j(\tilde{\psi}(t)) \right)^2 \right] &= K_{\tilde{M}}(t, t) - \sum_{j=1}^m \lambda_j f_j(\tilde{\psi}(t)) f_j(\tilde{\psi}(t)) \\
 &\rightarrow 0 \quad \text{für } m \rightarrow \infty,
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Theorem 3.2 zeigt, dass für verschiedene stochastische Prozesse die Bestimmung der Haupt-

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

komponenten in verschiedenen $L_2(I, \nu)$ -Räumen vollzogen wird. Hierdurch wird unter Beachtung der Varianzfunktion des stochastischen Prozesses erreicht, dass die Koordinaten α_i die gewünschte Eigenschaft der Unkorreliertheit erfüllen.

3.3.2. Hauptkomponenten des empirischen Martingalprozesses

Wir werden zuerst die Hauptkomponenten des empirischen Martingalprozesses $(M_n(t))_{t \in I}$ mit $I = [0, T]$ für eine stetige Verteilungsfunktion F mit $F(0) = 0$ bestimmen. Diesen Prozess erhalten wir aus der Doob-Meyer-Zerlegung des empirischen Prozesses.

Es seien die X_1, \dots, X_n unabhängig und identisch verteilte nichtnegative Zufallsvariablen und es bezeichne

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t\}}$$

wieder die empirische Verteilungsfunktion. Das Martingal aus der Doob-Meyer-Zerlegung von F_n hat dann die Form:

$$M_n(t) = \sqrt{n} \left(F_n(t) - \int_0^t \frac{1 - F_{n-}(s)}{1 - F_-(s)} dF(s) \right)$$

Der Martingalprozess M_n besitzt die nachstehende Kovarianzfunktion:

$$K_{M_n}(s, t) = \text{Cov}(M_n(s), M_n(t)) = \min(F(s), F(t))$$

Es gilt somit im Hilbertraum $L_2([0, T], \tilde{\psi})$ (falls $0 < F(T) < 1$) mit Theorem 3.2 unter der Stetigkeit von F :

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

$$M_n = \sum_{j=1}^{\infty} \langle M_n, f_j \circ \tilde{\psi} \rangle_{\tilde{\psi}} f_j \circ \tilde{\psi} \quad (3.7)$$

Ist F die Gleichverteilung auf $[0, 1]$, so folgt für $0 \leq t < 1$:

$$\overline{M}_n(t) = \sqrt{n} \left(F_n(t) - \int_0^t \frac{1 - F_{n-}(s)}{1 - s} ds \right)$$

Dieser Prozess wurde in *Le Anh (2005)* sowie in *Stute und Le Anh (2012)* untersucht.

Der Prozess startet in 0, besitzt die Kovarianzfunktion $K_{\overline{M}}(s, t) = \min(s, t)$ und somit auch wieder die oben genannten Eigenwerte λ_j sowie Eigenfunktionen f_j in $L_2([0, 1], \lambda^{01})$. Daher existiert die Darstellung

$$\begin{aligned} \overline{M}_n &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle \overline{M}_n, f_j \rangle_{\lambda^{01}} f_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{jn} f_j \end{aligned}$$

Wir wollen schließlich die zufälligen und unkorrelierten Hauptkomponenten α_{jn} bestimmen.

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

Hierzu schreiben wir den Prozess $\overline{M}_n(t)$ zuerst wie folgt um:

$$\begin{aligned}\overline{M}_n(t) &= \sqrt{n} \left(F_n(t) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_0^t 1_{\{U_i > s\}} \frac{1}{1-s} ds \right) \\ &= \sqrt{n} \left(F_n(t) - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [-\ln(1-s)]_0^{t \wedge U_i} \right) \\ &= \sqrt{n} \left(F_n(t) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\ln(1-t) 1_{\{U_i > t\}} + \ln(1-U_i) 1_{\{U_i \leq t\}}) \right)\end{aligned}$$

Hiermit werden die Hauptkomponenten α_{jn} bestimmt:

$$\begin{aligned}\alpha_{jn} &= \langle \overline{M}_n, f_j \rangle_{\lambda^{01}} \\ &= \int_0^1 \overline{M}_n(s) f_j(s) ds \\ &= \sqrt{n} \int_0^1 F_n(s) f_j(s) ds + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left[\int_0^{U_i} \ln(1-s) f_j(s) ds + \ln(1-U_i) \int_{U_i}^1 f_j(s) ds \right]\end{aligned}$$

Dies wird mittels mehrerer Umformungen und partieller Integration (siehe *Le Anh (2005)*)

zu

$$\begin{aligned}\alpha_{jn} &= \frac{\sqrt{2}}{b_j \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \cos(b_j U_i) - \frac{\sqrt{2}}{b_j \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_0^{U_i} \frac{\cos(b_j s)}{1-s} ds \\ \text{mit } b_j &= \frac{(2j-1)\pi}{2}\end{aligned}$$

Dies können wir mit Hilfe der Potenzreihenentwicklung des Kosinus umformen und erhalten abschließend für die Hauptkomponenten:

$$\alpha_{jn} = \frac{\sqrt{2}}{b_j \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left[\cos(b_j U_i) - \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m b_j^{2m}}{(2m)!} \frac{1}{2m+k+1} U_i^{2m+k+1} \right]$$

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

Bemerkungen:

- Wenn ein Prozess X_t ein Gaussprozess ist, so sind die unkorrelierten Hauptkomponenten α_j aus der Darstellung $X = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j f_j$ automatisch unabhängig und normalverteilt.
- Aus der Struktur der untersuchten Kovarianzfunktion, auch Kovarianzkern genannt, ergeben sich weitere Eigenschaften der Eigenwerte, welche in *Shorack und Wellner (1986), S. 207*, aufgelistet sind.

3. Hauptkomponenten stochastischer Prozesse

Teil II.

Modelle der Survival Analysis

4. Rechtszensierung

4.1. Modellbeschreibung

Das erste Zensierungsmodell, das wir untersuchen werden, ist das Modell der Rechtszensierung. Dies ist das wohl älteste und bekannteste Modell in der Survival Analysis.

Bemerkungen:

1. Im Modell der Rechtszensierung wird angenommen, dass eine stetige “Überwachung”, ein sogenanntes Monitoring, z.B. des Gesundheitszustandes eines Patienten, möglich ist. Dies ist in der Realität kritisch zu sehen und in anderen Zensierungsmodellen nicht gegeben.
2. Der Begriff der Information ist ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit. Im Rechtszensierungsmodell kann durch die Zensierung ein Informationsverlust entstehen. Im Beispiel des zweiten Kapitels ist z.B. für den zweiten Patienten nicht bekannt, wann dieser oder ob dieser überhaupt einen Rückfall erlitten hätte.

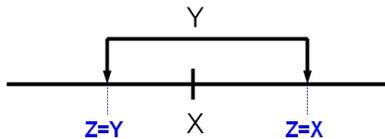
Die Modellierung der Überlebenszeit (im Englischen “survival time”) erfolgt durch eine nicht-negative Zufallsvariable X , während die Zensierungsvariable mit Y bezeichnet wird. Eine

4. Rechtszensierung

wichtige Annahme in diesem Modell ist die stochastische Unabhängigkeit von X und Y . Stets werden die Zufallsvariable $Z = \min(X, Y)$ und der Indikator $\delta = 1_{\{X \leq Y\}}$ beobachtet. Dieser gibt an, ob entweder $X \leq Y$ ($\delta = 1$) oder $X > Y$ ($\delta = 0$) ist.

Wir kennen somit für ein Individuum den Zufallsvektor $O = (Z, \delta)$ mit

$$Z = \begin{cases} X & \text{falls } \delta = 1 \\ Y & \text{falls } \delta = 0 \end{cases}$$



Zur formalen Beschreibung der Situation benutzen wir folgende Bezeichnungen und Definitionen:

- X sei die Überlebensdauer des Individuums und F die dazugehörige Verteilungsfunktion. Es gilt: $P(X \leq t) = F(t)$
- Die Verteilungsfunktion der Zensierungsvariablen Y bezeichnen wir mit G , d.h. $P(Y \leq t) = G(t)$

Weiterhin verwenden wir nachfolgende Begriffe für andere relevante Verteilungsfunktionen bzw. Subverteilungsfunktionen:

- $H(t) := P(Z \leq t)$
- $H^0(t) := P(Z \leq t, \delta = 0)$

4. Rechtszensierung

- $H^1(t) := P(Z \leq t, \delta = 1)$

Die Subverteilungsfunktionen H^1 und H^0 können unter der Annahme der Unabhängigkeit von X und Y durch die Verteilungsfunktionen F und G dargestellt werden:

- $H^0(t) = P(Z \leq t, X > Y) = P(Y \leq t, X > Y) = \int_{[0,t]} (1 - F(y)) dG(y)$
- $H^1(t) = P(Z \leq t, X \leq Y) = P(X \leq t, X \leq Y) = \int_{[0,t]} (1 - G_-(x)) dF(x)$

Hierbei bezeichnet $G_-(x)$ den linksseitigen Grenzwert von G an der Stelle x

Nun werden wir die Schätzer für obige Größen angeben:

-

$$H_n^j(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t, \delta_i = j\}} \quad \text{für } j = 0, 1$$

H_n^j sind die klassischen nichtparametrischen Schätzer der Subverteilungsfunktionen H^j auf Basis einer Folge von Beobachtungen $(Z_i, \delta_i)_{i=1, \dots, n}$

-

$$\hat{F}_n(t) = 1 - \prod_{Z_{i:n} \leq t} \left[1 - \frac{\delta_{[i:n]}}{n - i + 1} \right]$$

\hat{F}_n ist der Produkt-Limes-Schätzer von Kaplan-Meier für F (im Folgenden als Kaplan-Meier-Schätzer bezeichnet) basierend auf $(Z_i, \delta_i)_{i=1, \dots, n}$. Hierbei bezeichnet $Z_{i:n}$ die i -te Ordnungsstatistik der Z_1, \dots, Z_n und $\delta_{[i:n]}$ ist die zu $Z_{i:n}$ gehörende Konkomitante der $\delta_1, \dots, \delta_n$. Dies bedeutet, dass $\delta_{[i:n]} = \delta_j$ falls $Z_{i:n} = Z_j$

-

$$\hat{G}_n(t) = 1 - \prod_{Z_{i:n} \leq t} \left[1 - \frac{1 - \delta_{[i:n]}}{n - i + 1} \right]$$

4. Rechtszensierung

\hat{G}_n ist der Kaplan-Meier-Schätzer der Verteilungsfunktion G von Y basierend auf der Folge $(Z_i, 1 - \delta_i)_{i=1, \dots, n}$

Bemerkungen:

- Wir treffen für diese Arbeit die folgende Annahme:

Es existieren keine Bindungen innerhalb der Zufallsvariablen X_i , innerhalb

der Y_j sowie zwischen den X_i und Y_j für $i, j=1, \dots, n$

- Der Kaplan-Meier-Schätzer besitzt ebenfalls eine Summendarstellung. Diese lässt sich unter Verwendung der obigen Gleichungen bestimmen:

$$\hat{F}_n(t) = \sum_{i=1}^n W_{ni}^F \cdot 1_{\{Z_{i:n} \leq t\}} \quad \text{sowie} \quad \hat{G}_n(t) = \sum_{i=1}^n W_{ni}^G \cdot 1_{\{Z_{i:n} \leq t\}}$$

Unter den Annahmen aus 1., dass keine Bindungen existieren, gilt:

$$W_{ni}^F = \frac{\delta_{[i:n]}}{n - i + 1} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{n - j}{n - j + 1} \right)^{\delta_{[j:n]}} \quad \text{und} \quad W_{ni}^G = \frac{1 - \delta_{[i:n]}}{n - i + 1} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{n - j}{n - j + 1} \right)^{1 - \delta_{[j:n]}}$$

- Die Struktur der Gewichte W_{ni}^F des Kaplan-Meier-Schätzers ist bemerkenswert.

Wird z.B. ein Datum $Z_{i:n}$ zensiert, so bekommt dieses unter \hat{F}_n die empirische Masse 0.

Die nachfolgende Tabelle gibt die empirische Masse von \hat{F}_n für die

Verweildauern von 5 Patienten in einer Studie an:

4. Rechtszensierung

i	1	2	3	4	5
$Z_{i:n}$ in Monaten	3	5	8	9	11
$\delta_{[i:n]}$	1	0	1	1	0
$\hat{F}_n(Z_{i:n}) - \hat{F}_n(Z_{i:n}-)$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{1}{5} + \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$	$\frac{4}{15}$	0

Die empirische Masse $\frac{1}{5}$ des zweiten geordneten Datums wird auf die zeitlich nachfolgenden Daten gleichmäßig (als $\frac{1}{15}$) verteilt. Aufgrund der Zensierung des letzten Datums ist die Gesamtmasse von \hat{F}_n in diesem Szenario $\neq 1$.

4. In *Stute und Wang (1993)* wurde für eine beliebige (F -integrierbare) Funktion ϕ die starke Konsistenz des Integrals $\int \phi d\hat{F}_n$ gezeigt.
5. In *Stute (1995)* wurde verifiziert, dass unter optimalen Regularitätsbedingungen und nach Standardisierung das Kaplan-Meier-Integral $\int \phi d\hat{F}_n$ asymptotisch normalverteilt ist.
6. Im Folgenden werden wir drei weitere Funktionen nennen, die bei Untersuchungen der Survival Analysis verwendet werden. Für eine detaillierte Beschreibung und Untersuchung dieser Funktionen verweisen wir auf *Stute (2006)*:

In der Survival Analysis wird häufig anstatt der Verteilungsfunktion $F(t)$ einer Zufallsvariablen X die **Survival-Funktion** $1 - F(t)$ dieser Zufallsvariablen untersucht. Für diese beiden Funktionen besteht der folgende Zusammenhang:

$$F(t) = P(X \leq t) \quad \text{und} \quad 1 - F(t) = P(X > t)$$

4. Rechtszensierung

Die Survival-Funktion beschreibt z.B. für einen Krebspatienten die Wahrscheinlichkeit, dass dieser nach einer komplexen Operation in den nächsten t Jahren keinen Rückfall erleidet und stellt somit für den Patienten sowie den behandelnden Arzt eine wichtige Größe dar. Weiterhin ist es in der Survival Analysis üblich, anstelle der Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen die **Hazard-Funktion**

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t-)}$$

zu modellieren. Dies ist dadurch begründet, dass die Dichtefunktion und die Verteilungsfunktion einer stetigen Zufallsvariablen durch die Hazard-Funktion aufgrund der folgenden Identität eindeutig festgelegt sind, siehe *Stute (2006)*:

$$\begin{aligned} f(t) &= \lambda(t)(1 - F(t)) \\ &= \lambda(t) \cdot \exp\left(-\int_{-\infty}^t \lambda(x)dx\right) \end{aligned}$$

Die **kumulative Hazard-Funktion** ist für eine Zufallsvariable wie folgt definiert:

$$\Lambda(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{1 - F(x-)} dF(x)$$

7. Für die Kaplan-Meier-Schätzer gilt die folgende Identität (siehe *Shorack und Wellner (1986), S. 295*):

$$1 - H_n = (1 - \hat{G}_n)(1 - \hat{F}_n)$$

8. Das nachfolgende Lemma 4.1 stellt einen interessanten Zusammenhang zwischen den Kaplan-Meier-Schätzern und den empirischen Schätzern für die Subverteilungsfunktionen her:

4. Rechtszensierung

Lemma 4.1.

Es ist

$$\int_{[0,t]} (1 - \hat{F}_n) d\hat{G}_n = \int_{[0,t]} (1 - \hat{F}_{n-}) d\hat{G}_n = H_n^0(t)$$

sowie

$$\int_{[0,t]} (1 - \hat{G}_n) d\hat{F}_n = \int_{[0,t]} (1 - \hat{G}_{n-}) d\hat{F}_n = H_n^1(t).$$

Beweis. Mit den obigen Definitionen erhalten wir:

$$\begin{aligned} \int_{[0,t]} (1 - \hat{F}_n) d\hat{G}_n &= \sum_{i=1}^n W_{ni}^G 1_{[0,t]}(Z_{i:n}) (1 - \hat{F}_n(Z_{i:n})) \\ &= \sum_{i=1}^n 1_{[0,t]}(Z_{i:n}) (1 - \hat{F}_n(Z_{i:n})) \cdot \frac{1 - \delta_{[i:n]}}{n - i + 1} \prod_{j=1}^{i-1} \left(\frac{n - j}{n - j + 1} \right)^{1 - \delta_{[j:n]}} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{1_{[0,t]}(Z_{i:n}) (1 - \delta_{[i:n]}) (1 - \hat{F}_n(Z_{i:n}))}{n - i + 1} \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \frac{1 - \delta_{[j:n]}}{n - j + 1} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,t]}(Z_{i:n}) (1 - \delta_{[i:n]}) (1 - \hat{F}_n(Z_{i:n})) \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{\delta_{[j:n]}}{n - j} \right) \end{aligned}$$

Da für den Kaplan-Meier-Schätzer

$$1 - \hat{F}_n(Z_{i:n}) = \prod_{Z_{j:n} \leq Z_{i:n}} \left(1 - \frac{\delta_{[j:n]}}{n - j + 1} \right) = \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{\delta_{[j:n]}}{n - j + 1} \right)$$

gilt, folgt

4. Rechtszensierung

$$\begin{aligned}
& \int_{[0,t]} (1 - \hat{F}_n) d\hat{G}_n \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,t]}(Z_{i:n}) (1 - \delta_{[i:n]}) \prod_{j=1}^i \left(1 - \frac{\delta_{[j:n]}}{n-j+1}\right) \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{\delta_{[j:n]}}{n-j}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,t]}(Z_{i:n}) (1 - \delta_{[i:n]}) \left(1 - \frac{\delta_{[i:n]}}{n-i+1}\right) \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \frac{\delta_{[j:n]}}{n-j+1}\right) \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 + \frac{\delta_{[j:n]}}{n-j}\right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,t]}(Z_{i:n}) (1 - \delta_{[i:n]}) \left(1 - \frac{\delta_{[i:n]}}{n-i+1}\right) \prod_{j=1}^{i-1} \left(1 - \frac{\delta_{[j:n]}}{n-j+1}\right) \left(1 + \frac{\delta_{[j:n]}}{n-j}\right)
\end{aligned}$$

Durch Verwendung der beiden Identitäten

- $(1 - \frac{\delta_{[j:n]}}{n-j+1})(1 + \frac{\delta_{[j:n]}}{n-j}) = (1 - \frac{\delta_{[j:n]}}{n-j+1} + \frac{\delta_{[j:n]}}{n-j} - \frac{\delta_{[j:n]}}{(n-j+1)(n-j)}) = 1$
- $(1 - \delta_{[i:n]})(1 - \frac{\delta_{[i:n]}}{n-i+1}) = 1 - \delta_{[i:n]}$

erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned}
\int_{[0,t]} (1 - \hat{F}_n) d\hat{G}_n &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{[0,t]}(Z_{i:n}) (1 - \delta_{[i:n]}) \cdot \left(1 - \frac{\delta_{[i:n]}}{n-i+1}\right) \cdot \prod_{j=1}^{i-1} (1) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{[0,t]}(Z_k) (1 - \delta_k) \\
&= H_n^0(t)
\end{aligned}$$

Im bisherigen Beweis des Lemmas wurde verifiziert, dass $\int_{[0,t]} (1 - \hat{F}_n(x)) d\hat{G}_n(x) = H_n^0(t)$.

Ersetzen wir auf der linken Seite der Gleichung \hat{F}_n durch \hat{F}_{n-} , so bedingt dies das Fehlen des letzten Terms $1 - \frac{\delta_{[i:n]}}{n-i+1}$ aus der Produktdarstellung. Aufgrund der Gleichheit von $1 - \delta_{[i:n]}$ und $(1 - \delta_{[i:n]})(1 - \frac{\delta_{[i:n]}}{n-i+1})$ ändert sich das Resultat aber nicht. Folglich gilt ebenfalls

$$\int_{[0,t]} (1 - \hat{F}_{n-}(x)) d\hat{G}_n(x) = H_n^0(t)$$

4. Rechtszensierung

Die Gleichungen $\int_{[0,t]}(1 - \hat{G}_n(x))d\hat{F}_n(x) = H_n^1(t)$ und $\int_{[0,t]}(1 - \hat{G}_{n-}(x))d\hat{F}_n(x) = H_n^1(t)$ werden analog bewiesen. □

4.2. Zählprozesse und deren Martingaldarstellung

Ein wichtiger Bestandteil der mathematischen Statistik sind Aussagen und Folgerungen, die aufgrund von Martingaleigenschaften eines Prozesses gewonnen werden können. Ausgangspunkt für die Martingaldarstellung eines beliebigen Prozesses ist die sogenannte **Doob-Meyer-Zerlegung**. Hierbei wird ein Prozess in einen Martingalprozess und einen vorhersehbaren Prozess, genannt Kompensator, zerlegt. Im Modell der Rechtszensierung werden wir verschiedene Martingalstrukturen präsentieren und deren mögliche Anwendungen erläutern.

Im vorherigen Abschnitt wurden die Zählprozesse

$$\begin{aligned} H_n^1(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t, \delta_i=1\}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t, X_i \leq Y_i\}} \\ H_n^0(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t, \delta_i=0\}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq t, X_i > Y_i\}} \end{aligned}$$

eingeführt. Um die Doob-Meyer-Zerlegung dieser Prozesse zu bestimmen, müssen wir die Information bedenken, die wir zu einem Zeitpunkt t besitzen. Die Filtration ist so zu wählen, dass die Prozesse H_n, H_n^1 und H_n^0 adaptiert sind. Für den Stichprobenumfang $n = 1$ setzen wir deshalb

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_t &:= \sigma(1_{\{Z \leq s\}}, 1_{\{Z \leq s, \delta=0\}}, 1_{\{Z \leq s, \delta=1\}}, 1_{\{Z > s\}} : s \leq t) \\ &= \sigma(1_{\{Z \leq s\}}, 1_{\{Z \leq s, \delta=0\}} : s \leq t) \end{aligned}$$

4. Rechtszensierung

sowie für den Stichprobenumfang n :

$$\mathcal{F}_t := \sigma(1_{\{Z_i \leq s\}}, 1_{\{Z_i \leq s, \delta_i = 0\}} : i = 1, \dots, n \text{ und } s \leq t)$$

Die **Doob-Meyer-Zerlegung** der Prozesse $\sqrt{n} \cdot H_n^1$ und $\sqrt{n} \cdot H_n^0$ bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ besitzt die nachstehende Gestalt (siehe *Stute (2006), S. 30 ff.* oder *Shorack und Wellner (1986), S. 310 ff.*):

$$\sqrt{n} \cdot H_n^j(t) = M_n^j(t) + \sqrt{n} \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}(x)}{1 - H_-(x)} dH^j(x) \quad (4.1)$$

Unter Verwendung der Gleichungen

- $1 - H(t) = P(Z > t) = P(\min(X, Y) > t) = P(X > t, Y > t) = (1 - F(t))(1 - G(t))$
- $H^0(t) = \int_{[0,t]} (1 - F) dG$ sowie $H^1(t) = \int_{[0,t]} (1 - G_-) dF$

folgt für diese Zählprozesse:

$$\begin{aligned} M_n^1(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^1(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} dH^1 \right) \\ &= \sqrt{n} \left(H_n^1(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}}{(1 - F_-)(1 - G_-)} (1 - G_-) dF \right) \\ &= \sqrt{n} \left(H_n^1(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}}{1 - F_-} dF \right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} M_n^0(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^0(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} dH^0 \right) \\ (\text{falls } F \text{ stetig ist}) &= \sqrt{n} \left(H_n^0(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}}{1 - G_-} dG \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

4. Rechtszensierung

Die Martingale $M_n^j(t)$ für $j = 0, 1$ sind in der Realität unbekannt, da sie nicht bekannte Verteilungs- und Subverteilungsfunktionen enthalten. Wenn wir diese Martingale schätzen wollen, so sind die Verteilungsfunktionen bzw. Subverteilungsfunktionen durch ihre nicht-parametrischen Schätzer zu ersetzen.

Wie wir im Folgenden sehen werden, führt dies zu degenerierten Schätzern. Dies folgt mit Hilfe der Gleichung

$$1 - H_n = (1 - \hat{F}_n)(1 - \hat{G}_n)$$

sowie den Aussagen des Lemma 4.1:

$$H_n^1(t) = \int_{[0,t]} (1 - \hat{G}_{n-}) d\hat{F}_n \quad \text{und} \quad H_n^0(t) = \int_{[0,t]} (1 - \hat{F}_{n-}) d\hat{G}_n$$

Denn hiermit erhalten wir für den Schätzer aus (4.2):

$$\begin{aligned} M_n^{*,1}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^1(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}}{1 - \hat{F}_{n-}} d\hat{F}_n \right) \\ &= \sqrt{n} \left(H_n^1(t) - \int_{[0,t]} \frac{(1 - \hat{G}_{n-})(1 - \hat{F}_{n-})}{1 - \hat{F}_{n-}} d\hat{F}_n \right) \\ &= \sqrt{n} \left(H_n^1(t) - \int_{[0,t]} (1 - \hat{G}_{n-}) d\hat{F}_n \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

4. Rechtszensierung

Das Gleiche gilt für (4.3):

$$\begin{aligned}
 M_n^{*,0}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^0(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}}{1 - \hat{G}_{n-}} d\hat{G}_n \right) \\
 &= \sqrt{n} \left(H_n^0(t) - \int_{[0,t]} (1 - \hat{F}_{n-}) d\hat{G}_n \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

4.3. Hauptkomponenten des Martingals M_n^1

Ziel dieses Abschnitts ist die Bestimmung der Hauptkomponenten des Martingals M_n^1 (aus der Doob-Meyer-Zerlegung des Zählprozesses $\sqrt{n} \cdot H_n^1$) und deren Vergleich mit den Hauptkomponenten des Martingals aus der Zerlegung des uniformen empirischen Prozesses. *Durbin, Knott und Taylor (1975)* führten diese Zerlegung für den klassischen empirischen Prozess durch. Das klassische Modell wird im Folgenden wie im zweiten Kapitel die Bezeichnung “Ohne Zensierung” tragen. Eine wichtige Annahme des Abschnitts 4.3 ist die Stetigkeit der beteiligten Verteilungsfunktionen.

Der in 0 startende Martingalprozess

$$M_n^1(t) = \sqrt{n} H_n^1(t) - \sqrt{n} \int_0^t \frac{1 - H_{n-}}{1 - F} dF$$

4. Rechtszensierung

besitzt die Kovarianzfunktion

$$\begin{aligned} K^1(s, t) &= \text{Cov}(M_n^1(s), M_n^1(t)) \\ &= H^1(s \wedge t) \end{aligned}$$

Die Bestimmung der Kovarianzfunktion des Martingals $M_n^1(t)$ wurde sowohl in *Stute (2006)*, S. 35, als auch in *Shorack und Wellner (1986)*, S. 297, vollzogen.

Somit können wir das Theorem 3.2 verwenden. Die Subverteilungsfunktion H^1 wird in diesem Kapitel als stetig angenommen.

4.3.1. Bestimmung der Hauptkomponenten von M_n^1

In diesem Abschnitt werden wir für den Martingalprozess

$$\begin{aligned} M_n^1(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^1(t) - \int_0^t \frac{1 - H_{n-}(s)}{1 - F(s)} dF(s) \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(1_{\{Z_i \leq t, X_i \leq Y_i\}} - \int 1_{\{0 \leq s \leq t \wedge Z_i\}} \frac{1}{1 - F(s)} dF(s) \right) \\ (\text{F ist stetig}) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (1_{\{Z_i \leq t, X_i \leq Y_i\}} + \ln(1 - F(t \wedge Z_i))) \end{aligned} \quad (4.4)$$

die Hauptkomponenten bestimmen.

Durch Verwendung des Theorem 3.2 folgt mit $\psi = H^1$ auf $[0, T]$ (falls $\psi(T) > 0$) die folgende Darstellung:

4. Rechtszensierung

$$\begin{aligned}
 M_n^1(t) &= \sum_{j=1}^{\infty} \langle M_n^1, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} f_j(\tilde{\psi}(t)) \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{jn}^{RC} f_j(\tilde{\psi}(t))
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Hierbei gilt für die Hauptkomponenten:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{jn}^{RC} &= \langle M_n^1, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \\
 &= \int_0^T M_n^1(s) f_j(\tilde{\psi}(s)) d\tilde{\psi}(s) \\
 &= \int_0^1 M_n^1((\tilde{\psi})^{-1}(s)) f_j(s) ds
 \end{aligned}$$

Durch Verwendung der Summendarstellung (4.4) erhalten wir für α_{jn}^{RC} :

$$\begin{aligned}
 \alpha_{jn}^{RC} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left(1_{\{X_i \leq Y_i\}} \int_{\tilde{\psi}(Z_i)}^1 f_j(s) ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_0^{\tilde{\psi}(Z_i)} \ln(1 - F((\tilde{\psi})^{-1}(s))) f_j(s) ds \right. \\
 &\quad \left. + \ln(1 - F(Z_i)) \int_{\tilde{\psi}(Z_i)}^1 f_j(s) ds \right)
 \end{aligned}$$

4. Rechtszensierung

Wir setzen $f_j(s)$ ein und verwenden anschließend partielle Integration:

$$\begin{aligned}
\alpha_{jn}^{RC} &= \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{i=1}^n [1_{\{X_i \leq Y_i\}} + \ln(1 - F(Z_i))] \int_{\tilde{\psi}(Z_i)}^1 \sin(b_j s) ds \\
&\quad + \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{\psi}(Z_i)} \ln(1 - F((\tilde{\psi})^{-1}(s))) \sin(b_j s) ds \\
&= \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^n [1_{\{X_i \leq Y_i\}} + \ln(1 - F(Z_i))] \cdot \cos(b_j \tilde{\psi}(Z_i)) \\
&\quad - \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^n \ln(1 - F(Z_i)) \cdot \cos(b_j \tilde{\psi}(Z_i)) \\
&\quad - \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{\psi}(Z_i)} \frac{\cos(b_j s)}{1 - F((\tilde{\psi})^{-1}(s))} [F((\tilde{\psi})^{-1}(s))] ds
\end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir die Darstellung:

$$\begin{aligned}
\alpha_{jn}^{RC} &= \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq Y_i\}} \cos(b_j \tilde{\psi}(Z_i)) \\
&\quad - \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{\psi}(Z_i)} \frac{\cos(b_j s)}{1 - F((\tilde{\psi})^{-1}(s))} [F((\tilde{\psi})^{-1}(s))] ds
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Die Hauptkomponenten des Prozesses M_n^1 des Rechtszensierungsmodells unterscheiden sich von den Hauptkomponenten von \bar{M}_n des Modells ohne Zensierung aufgrund der Kovarianzfunktion H^1 des Martingalprozesses M_n^1 sowie dem Zensierungsindikator $\delta = 1_{\{X \leq Y\}}$:

$$\begin{aligned}
\text{Ohne Zensierung (uniform):} \quad \alpha_{jn} &= \frac{\sqrt{2}}{b_j \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \cos(b_j X_i) - \frac{\sqrt{2}}{b_j \sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_0^{X_i} \frac{\cos(b_j s)}{1 - s} ds \\
\text{mit } b_j &= \frac{(2j - 1)\pi}{2}
\end{aligned}$$

4. Rechtszensierung

$$\begin{aligned}
 \text{Rechtszensierung: } \alpha_{jn}^{RC} &= \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^n \delta_i \cdot \cos(b_j \tilde{\psi}(Z_i)) \\
 &\quad - \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^n \int_0^{\tilde{\psi}(Z_i)} \frac{\cos(b_j s)}{1 - F((\tilde{\psi})^{-1}(s))} [F((\tilde{\psi})^{-1}(s))]' ds \\
 \text{mit } b_j &= \frac{(2j-1)\pi}{2}
 \end{aligned}$$

Wenn im Modell der Rechtszensierung mit $F(t) = \bar{F}(t) = t$ keine Zensierung stattfindet, so ist $\alpha_{jn}^{RC} = \alpha_{jn}$, denn in diesem Spezialfall gilt:

$$\delta_i = 1 \quad \forall i \quad ; \quad \tilde{\psi}(s) = \frac{\psi(s)}{\psi(1)} = \frac{H^1(s)}{H^1(1)} \quad ; \quad Z_i = X_i \quad \forall i$$

$$\text{sowie } H^1(t) = P(X \leq t, X \leq Y) = \bar{F}(t) = t$$

4.4. Likelihood-Funktion

Die Schätzung eines unbekanntem Parameters θ durch die Maximum-Likelihood-Methode ist das wohl bekannteste Schätzverfahren in der Statistik. Diese Methode wählt für eine bestimmte Menge von möglichen Parametern denjenigen aus, der die Likelihood-Funktion maximiert und somit unter bestimmten Annahmen und unter Verwendung gemessener Daten die größte Wahrscheinlichkeit besitzt.

Ein wichtiger Bestandteil dieser Arbeit ist der Nachweis der Konsistenz des Maximum-Likelihood-Schätzers (MLE) in verschiedenen Zensierungsmodellen mit Hilfe der Kullback-Leibler-Information. In *Stute (1992)* wurde dies für das Modell der Rechtszensierung bereits gezeigt, und wir werden dies im vierzehnten Kapitel auf die verschiedenen Zensierungsmodelle

4. Rechtszensierung

erweitern.

4.4.1. Ohne Zensierung

Im Folgenden betrachten wir eine Zufallsvariable X , die einer parametrischen Familie $\mathcal{F}_\theta = \{F_\theta | \theta \in \Theta\}$ von Verteilungsfunktionen entstammt. Für eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen $(X_i)_{i=1, \dots, n}$, die derselben Verteilung entstammen, führen wir die folgenden Funktionen ein:

$$\text{Likelihood-Funktion} \quad L_n(\theta) = \prod_{i=1}^n p_\theta(X_i)$$

sowie die

$$\text{Log-Likelihood-Funktion} \quad \ln(L_n(\theta)) = \sum_{i=1}^n \ln(p_\theta(X_i)),$$

wobei

$$p_\theta(X_i) = \begin{cases} P_\theta(X = X_i) & , \text{ falls } X \text{ eine diskrete Verteilung } P_\theta \text{ besitzt} \\ f_\theta(X_i) & , \text{ falls } X \text{ eine Dichtefunktion } f_\theta \text{ besitzt} \end{cases}$$

Um die Notationen zu vereinfachen, werden wir uns im Folgenden für die Bestimmung der Likelihood-Funktion auf eine stetige Zufallsvariable beschränken.

Die Kullback-Leibler-Information ist für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P mit $Q \ll P$

4. Rechtszensierung

definiert als

$$\begin{aligned} K(Q, P) &:= E_Q \left(\ln \left(\frac{dQ}{dP}(X) \right) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right] \frac{dQ}{dP} dP \end{aligned}$$

Für den Spezialfall, dass $dQ = f_{\theta_0} d\nu$ sowie $dP = f_{\theta_1} d\nu$ gilt, erhalten wir:

$$K(f_{\theta_0}, f_{\theta_1}) = E_{\theta_0} \left(\ln \left(\frac{f_{\theta_0}}{f_{\theta_1}} \right) \right) = \int \ln \left(\frac{f_{\theta_0}}{f_{\theta_1}} \right) f_{\theta_0} d\nu$$

4.4.2. Rechtszensierung

Durch Betrachtung der Folge $(Z_i = \min(X_i, Y_i), \delta_i = 1_{\{X_i \leq Y_i\}})_{i=1, \dots, n}$ des Rechtszensierungsmodells wird deutlich, dass wir zwischen zwei Situationen unterscheiden müssen:

Unter θ gilt

1. $\delta_i = 1$:

$$P(Z_i \leq t, X_i \leq Y_i) = P(X_i \leq t, X_i \leq Y_i) = \int_{[0, t]} (1 - G_-) dF_\theta$$

2. $\delta_i = 0$:

$$P(Z_i \leq t, X_i > Y_i) = P(Y_i \leq t, X_i > Y_i) = \int_{[0, t]} (1 - F_\theta) dG$$

Um die Likelihood-Funktion im Modell der Rechtszensierung zu bestimmen, betrachten wir zuerst für eine Realisierung der Zufallsvariablen Z in $A = [z - \epsilon, z + \epsilon]$ mit $\epsilon > 0$ die folgenden Wahrscheinlichkeiten:

$$P(Z \in A, \delta = 1) \quad \text{und} \quad P(Z \in A, \delta = 0)$$

4. Rechtszensierung

Für diese Wahrscheinlichkeiten gilt unter θ mit dem Mittelwertsatz:

1. $P(Z \in A, \delta = 0) = \int_A (1 - F_\theta) dG$
 $\sim (1 - F_\theta(z)) G(A)$
2. $P(Z \in A, \delta = 1) = \int_A (1 - G_-) dF_\theta$
 $\sim 2\epsilon \cdot (1 - G_-(z)) f_\theta(z)$

Da die Faktoren 2ϵ , $1 - G_-(z)$ und $G(A)$ nicht von θ abhängen (Zensierung ist nicht-informativ), sind nur die Faktoren $f_\theta(z)$ und $1 - F_\theta(z)$ Bestandteil der Likelihood-Funktion.

Wir erhalten somit für die Folge $(Z_i = \min(X_i, Y_i), \delta_i = 1_{\{X_i \leq Y_i\}})_{i=1, \dots, n}$ die folgende Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned}
 L_n^{RC}(\theta) &= \prod_{i=1}^n [f_\theta(Z_i)]^{\delta_i} \cdot [1 - F_\theta(Z_i)]^{1-\delta_i} \\
 &= \prod_{i=1}^n [f_\theta(Z_i)]^{1_{\{X_i \leq Y_i\}}} \cdot [1 - F_\theta(Z_i)]^{1_{\{X_i > Y_i\}}} \\
 &= \prod_{i=1}^n [f_\theta(X_i)]^{1_{\{X_i \leq Y_i\}}} \cdot [1 - F_\theta(Y_i)]^{1_{\{X_i > Y_i\}}}
 \end{aligned}$$

Dies bedeutet für die Log-Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned}
 \ln(L_n^{RC}(\theta)) &= \ln \left(\prod_{i=1}^n \dots \right) \\
 &= \sum_{i=1}^n [1_{\{X_i \leq Y_i\}} \ln(f_\theta(X_i)) + 1_{\{X_i > Y_i\}} \ln(1 - F_\theta(Y_i))]
 \end{aligned}$$

4. Rechtszensierung

Für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P mit $X \sim Q, Y \sim G$ sowie $Q \ll P$ definieren wir unter Beachtung der Likelihood-Funktion $L_n^{RC}(\theta)$ die Kullback-Leibler-Information im Modell der Rechtszensierung als:

$$K_G^{RC}(Q, P) := E_Q \left[1_{\{X \leq Y\}} \ln \left(\frac{dQ}{dP}(X) \right) + 1_{\{X > Y\}} \ln \left(\frac{1 - Q(Y)}{1 - P(Y)} \right) \right] \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \left[\ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \right] \frac{dQ}{dP} dP + (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \right) dG(y)$$

Bemerkungen:

1. In Abschnitt 4.5 werden wir die Wohldefiniertheit und Nichtnegativität dieser Kullback-Leibler-Information zeigen.
2. Wir verwenden die Bezeichnungen Q und P auf zwei Weisen. Diese können sowohl für eine Verteilungsfunktion als auch ein Maß stehen.
3. Die Definition der Kullback-Leibler-Information ist durch den folgenden Spezialfall motiviert:

Setzen wir $dQ = f_{\theta_0} d\nu$ sowie $dP = f_{\theta_1} d\nu$, erhalten wir:

$$K_G^{RC}(f_{\theta_0}, f_{\theta_1}) \\ = E_{\theta_0} \left[\ln \left(\left(\frac{f_{\theta_0}(X)}{f_{\theta_1}(X)} \right)^{1_{\{X \leq Y\}}} \cdot \left(\frac{1 - F_{\theta_0}(Y)}{1 - F_{\theta_1}(Y)} \right)^{1_{\{X > Y\}}} \right) \right] \\ = E_{\theta_0} \left[1_{\{X \leq Y\}} \ln \left(\frac{f_{\theta_0}(X)}{f_{\theta_1}(X)} \right) + 1_{\{X > Y\}} \ln \left(\frac{1 - F_{\theta_0}(Y)}{1 - F_{\theta_1}(Y)} \right) \right] \\ = E_{\theta_0} \left[\delta \cdot \ln \left(\frac{f_{\theta_0}(X)}{f_{\theta_1}(X)} \right) + (1 - \delta) \cdot \ln \left(\frac{1 - F_{\theta_0}(Y)}{1 - F_{\theta_1}(Y)} \right) \right] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{(-\infty, y]} \ln \left(\frac{f_{\theta_0}}{f_{\theta_1}} \right) f_{\theta_0} d\mu + (1 - F_{\theta_0}(y)) \cdot \ln \left(\frac{1 - F_{\theta_0}(y)}{1 - F_{\theta_1}(y)} \right) \right] dG(y)$$

4.5. Die Kullback-Leibler-Information bei Rechtszensierung

Die Kullback-Leibler-Information (KLI) ist ein Maß (bzw. eine Zahl), um die Unterschiedlichkeit von zwei Wahrscheinlichkeitsmaßen (bzw. Wahrscheinlichkeitsverteilungen) zu bestimmen. Dieser Begriff entstand durch eine Publikation von Kullback und Leibler aus dem Jahre 1951. Die Wahl des Begriffs Information wird im dritten Teil dieser Arbeit deutlich werden, da wir anhand dieser Kullback-Leibler-Information verschiedene Zensierungsmodelle vergleichen und eine Informationshierarchie erstellen werden. In Abschnitt 4.5.1 werden wir einen Überblick über die bisher bestimmten Kullback-Leibler-Informationen geben. Anschließend steht im Rechtszensierungsmodell zuerst die Wohldefiniertheit dieser KLI im Vordergrund. Als Zweites werden Voraussetzungen erarbeitet, die zur Folge haben, dass die nichtnegative KLI nur eine Nullstelle (für den wahren Parameter bzw. die wahre Verteilung) besitzt. Hierbei orientieren wir uns an *Stute (1992)*, in der die Kullback-Leibler-Information im Rechtszensierungsmodell studiert wurde.

4.5.1. Tabellierung der ersten Kullback-Leibler-Informationen

Die KLI für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P mit $Q \ll P$ ist:

Ohne Zensierung:

$$K(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \right] \frac{dQ}{dP} dP$$

4. Rechtszensierung

Rechtszensierung:

$$K_G^{RC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \left[\ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \right] \frac{dQ}{dP} dP + (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \right) dG(y)$$

4.5.2. Wohldefiniertheit und Eindeutigkeitsvoraussetzungen bei Rechtszensierung

Dieser Abschnitt befasst sich zunächst mit der Wohldefiniertheit sowie der Nichtnegativität der Kullback-Leibler-Information. Dazu verwenden wir folgende Definitionen:

$$\begin{aligned} 0 \cdot \ln\left(\frac{0}{0}\right) &:= 0 \\ \text{sowie} \quad \frac{0}{0} &:= 0 \\ \text{und} \quad \frac{c}{0} &:= \infty \text{ für } c > 0 \end{aligned}$$

Durch Verwendung der obigen Definitionen wurde in *Stute (1992)* gezeigt, dass $K_G^{RC}(Q, P)$ wohldefiniert ist mit $0 \leq K_G^{RC}(Q, P) \leq \infty$. Durch die Zensierungsverteilung können mögliche Unterschiede der Verteilungen Q und P unter Umständen nicht angezeigt werden, also wird eine bestimmte Information “wegzensiert”. Als ein Beispiel hierfür wählen wir für die Verteilungen von Q und P Verteilungen, die ausschließlich auf $[b, \infty)$ mit $b > 0$ konzentriert sind. Die Zensierungsverteilung sei auf $[0, a)$ mit $a < b$ konzentriert. Dies hat zur Folge, dass die Kullback-Leibler-Information den Wert Null annimmt, obwohl $Q \neq P$ gelten kann.

4. Rechtszensierung

Deshalb wollen wir Annahmen treffen, so dass im Modell der Rechtszensierung

$$K_G^{RC}(Q, P) = 0 \iff Q = P$$

Hierzu definieren wir die folgende Menge:

$$A_{RC} := \left\{ x : \frac{dQ}{dP}(x) \neq 1, G(x-) < 1 \right\}$$

Die Verwendung der Menge A_{RC} wird in der folgenden Bemerkung kurz erläutert. Für eine detailliertere Untersuchung verweisen wir auf *Stute (1992)*. Hier wurde das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 4.2. *Mit der obigen Bezeichnung folgt:*

$$K_G^{RC}(Q, P) > 0 \iff P(A_{RC}) > 0$$

Bemerkung:

Das Ereignis A_{RC} ist ein Durchschnitt von zwei Ereignissen:

Das Maß Q wird durch das Maß P dominiert und somit existiert eine Dichte $f = \frac{dQ}{dP}$. Durch Verwendung der Ereignisse $\{x : \frac{dQ}{dP} \neq 1\}$ und $\{x : G(x-) < 1\}$ soll sichergestellt werden, dass mögliche Unterschiede von Q und P nicht durch die Zensierungsverteilung G "wegzensiert" werden.

4.5.3. Erweiterung auf allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße

Die Einschränkung auf zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P mit $Q \ll P$ ist eine wichtige Voraussetzung für den vorherigen Abschnitt. Wir wollen dies nun auf allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße erweitern, um das Anwendungsgebiet dieser Aussagen zu vergrößern.

Mit dem Zerlegungssatz von Hahn-Lebesgue existiert eine eindeutige Zerlegung von zwei allgemeinen Wahrscheinlichkeitsmaßen Q und P in

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad \text{mit } Q_1 \ll P \quad \text{und } Q_2 \text{ singulär in Bezug auf } P$$

Diese Zerlegung wollen wir im Folgenden benutzen, um die Kullback-Leibler-Information für allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße zu bestimmen.

Ein weiteres Ziel dieses Abschnitts ist aber auch das Folgende:

Wir werden Voraussetzungen bzw. Annahmen erarbeiten, die es uns ermöglichen, die wahre Verteilung und hiermit auch den wahren Parameter, an dem wir interessiert sind, zu identifizieren. Dies wird dadurch erreicht, dass der Parameter θ_0 zum einzigen Maximizer einer bestimmten Funktion ($L_G^{RC}(\theta_0, \bullet)$) (unter bestimmten Voraussetzungen) gemacht wird.

Die Erweiterung auf allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße wurde im Modell der Rechtszensierung ebenfalls in *Stute (1992)* vollzogen.

Wir haben für $Q \ll P$:

$$K_G^{RC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP + (1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) \right) dG(y)$$

4. Rechtszensierung

Bei der Erweiterung auf allgemeine Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P (mit $Q = Q_1 + Q_2$, $Q_1 \ll P$ sowie $Q_2 \perp P$) wird eine getrennte Untersuchung von Q_1 und Q_2 nötig:

- Ist der singuläre Teil Q_2 unter der Zensierung “relevant”
 $(Q_2(B_{RC}) > 0$ mit $B_{RC} = \{x : G_-(x) < 1\})$,
 so setzen wir $K_G^{RC}(Q, P) = \infty$, da unendliche Information
 vorhanden ist, um zwischen Q und P zu differenzieren.
- Falls der singuläre Teil Q_2 unter der Zensierung **nicht**
 relevant ist ($Q_2(B_{RC}) = 0$), so liefert dieser keinen Beitrag
 zu der Information und wir setzen $K_G^{RC}(Q, P) := K_G^{RC}(Q_1, P)$.

Leider erweist sich die letzte Definition als inkorrekt, wenn wir $G = \delta_\infty$ setzen, siehe *Stute (1992)*.

Deshalb wird die Kullback-Leibler-Information definiert als

$$K_G^{RC}(Q_1, P) := \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln\left(\frac{dQ_1}{dP}\right) \frac{dQ_1}{dP} dP + (1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) \right) dG(y).$$

Wir werden nun die Wohldefiniertheit und Eindeutigkeit für diese Definition zeigen und setzen hierzu das Folgende:

$$\begin{aligned} K_G^{RC}(Q, P) &= \infty && \text{falls } Q_2(B_{RC}) > 0 \\ K_G^{RC}(Q, P) &= K_G^{RC}(Q_1, P) && \text{falls } Q_2(B_{RC}) = 0 \end{aligned}$$

Die Aussagen der folgenden Lemmata werden unter der Voraussetzung, dass $Q_2(B_{RC}) = 0$ (unter Verwendung der Menge $B_{RC} = \{x : G_-(x) < 1\} = (-\infty, b]$) verifiziert:

4. Rechtszensierung

Lemma 4.3. $K_G^{RC}(Q_1, P)$ ist wohldefiniert mit $0 \leq K_G^{RC}(Q_1, P) \leq \infty$.

Beweis. Es sei $Q_1 \ll P$ sowie $Q_2(B_{RC}) = 0$. Wir setzen $h(t) := t \cdot \ln(t)$ mit $h(0) = 0$.

Dann ist h stetig auf $[0, \infty)$. Durch Verwendung der Taylorformel gilt

$$\begin{aligned} \overbrace{h(t)}^{t \cdot \ln(t)} &= \underbrace{h(1)}_{=0} + \underbrace{h'(1)}_{=1}(t-1) + \frac{1}{2}h''(\Delta)(t-1)^2 \\ &= (t-1) + \frac{1}{2\Delta}(t-1)^2 \text{ f\"ur ein } \Delta \text{ zwischen } 1 \text{ und } t \end{aligned}$$

Dies ergibt f\"ur $t = \frac{1-Q(y)}{1-P(y)}$ sowie $t = \frac{dQ_1}{dP}(x)$:

$$\begin{aligned} &K_G^{RC}(Q_1, P) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{(-\infty, y]} \left(\frac{dQ_1}{dP}(x) - 1 + \frac{1}{2\Delta_1(x)} \left(\frac{dQ_1}{dP}(x) - 1 \right)^2 \right) dP(x) \right] dG(y) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1-Q(y)}{1-P(y)} - 1 + \frac{1}{2\Delta_2(y)} \left(\frac{1-Q(y)}{1-P(y)} - 1 \right)^2 (1-P(y)) \right) dG(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^y \frac{1}{2\Delta_1(x)} \left(\frac{dQ_1}{dP}(x) - 1 \right)^2 dP(x) + \frac{1}{2\Delta_2(y)} \left(\frac{1-Q(y)}{1-P(y)} - 1 \right)^2 (1-P(y)) \right] dG(y) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{(-\infty, y]} dQ_1(x) - \int_{(-\infty, y]} dP(x) + (1-Q(y)) - (1-P(y)) \right] dG(y) \end{aligned}$$

Der erste Term ist nichtnegativ, und wir werden im Folgenden solche Terme durch den Begriff

4. Rechtszensierung

“NN” kennzeichnen. Dies führt uns zu

$$\begin{aligned}
 K_G^{RC}(Q_1, P) &= \text{NN} (\geq 0) \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} [Q_1(y) - P(y) - Q(y) + P(y)] dG(y) \\
 &= \text{NN} + 0 \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

da $Q(y) = Q_1(y) \forall y \leq b$ ($y \in B_{RC}$). Ansonsten ist $\int_{B_{RC}}(\dots)dG(y) = 0$. □

Lemma 4.4. *Wir haben mit $C_{RC} = \{x : \frac{dQ_1}{dP}(x) \neq 1\}$:*

$$K_G^{RC}(Q_1, P) > 0 \quad \iff \quad P(C_{RC} \cap B_{RC}) > 0$$

Beweis. “ \Leftarrow ”:

Es sei $P(C_{RC} \cap B_{RC}) > 0$. Dann folgt $K_G^{RC}(Q_1, P) > 0$, da

$$\begin{aligned}
 &K_G^{RC}(Q_1, P) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^y \frac{1}{2\Delta_1(x)} \left(\frac{dQ_1}{dP}(x) - 1 \right)^2 dP(x) + \frac{1}{2\Delta_2(y)} \left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} - 1 \right)^2 (1 - P(y)) \right] dG(y) \\
 &\geq \int_{-\infty}^{\infty} (1 - G_-(x)) \frac{1}{2\Delta_1(x)} \left(\frac{dQ_1}{dP}(x) - 1 \right)^2 dP(x) \\
 &= \int_{C_{RC} \cap B_{RC}} \underbrace{(1 - G_-(x))}_{>0} \underbrace{\frac{1}{2\Delta_1(x)}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{dQ_1}{dP}(x) - 1 \right)^2}_{>0} dP(x) + \underbrace{\int_{C_{RC} \cap B_{RC}} (\dots) dP(x)}_{\geq 0} \\
 &> 0 \quad \text{weil } P(C_{RC} \cap B_{RC}) > 0
 \end{aligned}$$

4. Rechtszensierung

“ \implies ”:

Es wird angenommen, dass $P(C_{RC} \cap B_{RC}) = 0$. Wir schreiben abermals $B_{RC} = (-\infty, b]$, wobei b den kleinsten Punkt, für den G eins gleicht, bezeichnet oder $(-\infty, \infty)$, falls kein solcher Punkt existiert. Damit erhalten wir für $y \leq b$:

$$\begin{aligned} \int_{(-\infty, y]} \ln\left(\frac{dQ_1}{dP}\right) \frac{dQ_1}{dP} dP &= \int_{(-\infty, y] \cap C_{RC}} \ln\left(\frac{dQ_1}{dP}\right) \frac{dQ_1}{dP} dP \\ &\quad + \underbrace{\int_{(-\infty, y] \cap \overline{C_{RC}}} \ln\left(\frac{dQ_1}{dP}\right) \frac{dQ_1}{dP} dP}_{=0} \\ &= 0 \quad \text{wegen } P(C_{RC} \cap B_{RC}) = 0. \end{aligned}$$

Abschließend wollen wir zeigen, dass $1 - Q(y) = 1 - P(y)$ für $y \leq b$, und dies wird den Beweis komplettieren.

Es ist $Q_1(y) = Q(y) \quad \forall y \leq b$, da wir $Q_2(B_{RC}) = Q_2((-\infty, b]) = 0$ vorausgesetzt haben.

Damit wird $Q(y)$ nun bestimmt:

$$\begin{aligned} Q(y) &= \int_{(-\infty, y]} dQ(x) \\ &= \int_{(-\infty, y]} dQ_1(x) \\ &= \int_{(-\infty, y]} \frac{dQ_1}{dP}(x) dP(x) \\ &= \int_{(-\infty, y] \cap \{x: \frac{dQ_1}{dP}(x)=1\}} dP(x) + \cancel{\int_{(-\infty, y] \cap C_{RC}} \frac{dQ_1}{dP}(x) dP(x)} \\ &= \int_{(-\infty, y]} dP(x) \\ &= P(y) \end{aligned}$$

4. Rechtszensierung

$\implies 1 - Q(y) = 1 - P(y) \forall y \leq b$ und die Aussage des Lemma 4.4 ist bewiesen. □

In dieser Arbeit wollen wir die Konsistenz des MLE unter Verwendung der Kullback-Leibler-Information beweisen. Dies bedingt die Einführung und Definition einer neuer Funktion (in θ), die es uns ermöglicht, die Kullback-Leibler-Information als Differenz von zwei Funktionen darzustellen:

$$L_G^{RC}(\theta_0, \theta) := \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{(-\infty, y]} \ln(f(x, \theta)) f(x, \theta_0) d\nu(x) + (1 - F(y, \theta_0)) \ln(1 - F(y, \theta)) \right] dG(y)$$

Hierbei bezeichne $F(t, \theta_0)$ die wahre Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen X , die aus einer parametrischen Familie von stetigen Verteilungsfunktionen entstammen möge. Unter der Annahme, dass $Q_2(B_{RC}) = 0$ ist sowie Q_1 die wahre Verteilung bezeichne, folgt für $dQ_1 = f(\cdot, \theta_0) d\nu$ und $dP = f(\cdot, \theta) d\nu$:

$$\begin{aligned} & K_G^{RC}(Q_1, P) \\ &= \int_{B_{RC}} \left[\int_{(-\infty, y]} \ln \left(\frac{f(x, \theta_0)}{f(x, \theta)} \right) f(x, \theta_0) d\nu(x) + (1 - F(y, \theta_0)) \ln \left(\frac{1 - F(y, \theta_0)}{1 - F(y, \theta)} \right) \right] dG(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{(-\infty, y]} \ln \left(\frac{f(x, \theta_0)}{f(x, \theta)} \right) f(x, \theta_0) d\nu(x) + (1 - F(y, \theta_0)) \ln \left(\frac{1 - F(y, \theta_0)}{1 - F(y, \theta)} \right) \right] dG(y) \\ &= L_G^{RC}(\theta_0, \theta_0) - L_G^{RC}(\theta_0, \theta) \end{aligned}$$

Diese Gleichung wird durch Umformung zu

$$L_G^{RC}(\theta_0, \theta) = L_G^{RC}(\theta_0, \theta_0) - \underbrace{K_G^{RC}(Q_1, P)}_{\geq 0}$$

4. Rechtszensierung

Dies ist die ausschlaggebende Gleichung für den Beweis der Konsistenz des MLE im vierzehnten Kapitel:

Unter der Voraussetzung, dass einerseits $K_G^{RC}(Q_1, P) > 0$ für alle $P \neq Q_1$ und andererseits $L_G^{RC}(\theta_0, \theta_0)$ endlich ist, nimmt die Funktion $L_G^{RC}(\theta_0, \cdot)$ ihr Maximum nur an **einer** Stelle an. Dieser eindeutige Maximizer ist $\theta = \theta_0$.

5. Linkszensierung

5.1. Modellbeschreibung

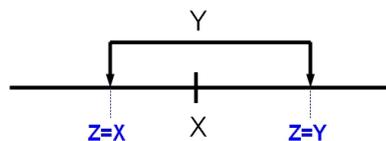
Die Modellierung der Überlebenszeit erfolgt abermals durch eine nichtnegative Zufallsvariable X , und die Zensierungsvariable trägt die Bezeichnung Y . Die Unabhängigkeit beider Variablen wird wieder angenommen. Weiterhin verwenden wir die Zufallsvariable $Z = \max(X, Y)$ sowie den Indikator $\delta = 1_{\{X \leq Y\}}$.

Wir beobachten für ein Individuum den Zufallsvektor

$$O = (Z = \max(X, Y), \delta = 1_{\{X \leq Y\}})$$

mit

$$Z = \begin{cases} Y & \text{falls } \delta = 1 \\ X & \text{falls } \delta = 0 \end{cases}$$



5. Linkszensierung

Bemerkung:

Im Modell der Linkszensierung wird die Zufallsvariable $Z = \max(X, Y)$ verwendet. Da die Zufallsvariable $Z = \max(X, Y)$ der Zufallsvariablen $-\tilde{Z} = -\min(-X, -Y)$ gleicht, können die Eigenschaften der Linkszensierung mit Hilfe der Zufallsvariablen des Modells der Rechtszensierung bestimmt werden. Im vorherigen Kapitel haben wir keinen Gebrauch davon gemacht, dass die Zufallsvariable X nichtnegativ war. Deshalb könnte die Likelihood-Funktion sowie die Kullback-Leibler-Information ebenfalls mit Hilfe des Rechtszensierungsmodells bestimmt werden.

Um die Zusammenhänge der beiden Zensierungsmodelle zu zeigen, führen wir die folgenden Definitionen ein:

- Die Zufallsvariablen des Linkszensierungsmodells bezeichnen wir mit $X \sim F$ sowie $Y \sim G$.
- Die entsprechenden Zufallsvariablen des Rechtszensierungsmodells tragen dann die Bezeichnung $\tilde{X} = -X \sim \tilde{F}$ und $\tilde{Y} = -Y \sim \tilde{G}$.

Dadurch ergeben sich die folgenden Zusammenhänge:

- $\tilde{F}(t) = P(\tilde{X} \leq t) = P(-X \leq t) = P(X \geq -t) = 1 - F_-(-t)$
 $\implies 1 - \tilde{F}(t) = P(\tilde{X} > t) = P(-X > t) = F_-(-t)$
- $\tilde{G}(t) = \int_{(-\infty, t]} d\tilde{G}(s) = P(\tilde{Y} \leq t) = P(-Y \leq t) = 1 - G_-(-t)$

5.2. Likelihood-Funktion bei Linkszensierung

Die Zufallsvariable X möge aus einer parametrischen Familie $\mathcal{F}_\theta = \{F_\theta | \theta \in \Theta\}$ von Verteilungsfunktionen stammen. In diesem Zensierungsmodell beobachten wir den Zufallsvektor $(Z_i = \max(X_i, Y_i), \delta_i = 1_{\{X_i \leq Y_i\}})_{i=1, \dots, n}$. Aufgrund der Indikatorfunktion ergeben sich wieder zwei mögliche Situationen:

1. $\delta = 1$:

$$P(Z \leq t, X \leq Y) = P(Y \leq t, X \leq Y) = \int_{(-\infty, t]} F_\theta(y) dG(y) \quad (5.1)$$

2. $\delta = 0$:

$$P(Z \leq t, X > Y) = P(X \leq t, X > Y) = \int_{(-\infty, t]} G_-(x) dF_\theta(x) \quad (5.2)$$

Hierbei wurde die Unabhängigkeit von X und Y verwendet.

Die Gleichungen (5.1) und (5.2) führen uns in Analogie zu 4.4 zu der nachstehenden Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned} L_n^{LC}(\theta) &= \prod_{i=1}^n [F_\theta(Z_i)]^{\delta_i} \cdot [f_\theta(Z_i)]^{1-\delta_i} \\ &= \prod_{i=1}^n [F_\theta(Y_i)]^{1_{\{X_i \leq Y_i\}}} \cdot [f_\theta(X_i)]^{1_{\{X_i > Y_i\}}} \end{aligned}$$

5. Linkszensierung

Damit definieren wir die Kullback-Leibler-Information im Modell der Linkszensierung (vergleiche 4.4) für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P mit $X \sim Q$ und $Y \sim G$ ($Q \ll P$):

$$\begin{aligned} K_G^{LC}(Q, P) &:= E_Q \left(1_{\{X \leq Y\}} \ln \left(\frac{Q(Y)}{P(Y)} \right) + 1_{\{X > Y\}} \ln \left(\frac{dQ}{dP}(X) \right) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] + \int_{(y, \infty)} \ln \left[\frac{dQ}{dP}(x) \right] \frac{dQ}{dP}(x) dP(x) \right) dG(y) \end{aligned}$$

5.3. Die Kullback-Leibler-Information bei Linkszensierung

Im Modell der Linkszensierung sowie in den darauffolgenden Modellen werden wir unser Vorgehen wiederholen:

Zuerst steht die Wohldefiniertheit der Kullback-Leibler-Information in dem jeweiligen Zensierungsmodell im Vordergrund. Danach werden wir Eindeutigkeitsvoraussetzungen an die Kullback-Leibler-Information bestimmen, die wir für den Beweis der Konsistenz des Maximum-Likelihood-Schätzers im vierzehnten Kapitel benötigen.

Wohldefiniertheit und Eindeutigkeitsvoraussetzungen

Die KLI wurde für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q mit $Q \ll P$ bestimmt als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] + \int_{(y, \infty)} \ln \left[\frac{dQ}{dP}(x) \right] \frac{dQ}{dP}(x) dP(x) \right) dG(y)$$

Lemma 5.1. $K_G^{LC}(Q, P)$ ist wohldefiniert und wir haben $0 \leq K_G^{LC}(Q, P) \leq \infty$.

5. Linkszensierung

Beweis. Dies folgt aus der entsprechenden Aussage im Modell der Rechtszensierung. □

Mit Hilfe der Taylorentwicklung kann gezeigt werden, dass

$$\begin{aligned}
 K_G^{LC}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] + \int_{(y, \infty)} \ln \left[\frac{dQ}{dP}(x) \right] \frac{dQ}{dP}(x) dP(x) \right) dG(y) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\Delta_1(y)} \left(\frac{Q(y)}{P(y)} - 1 \right)^2 P(y) dG(y) + \int_{-\infty}^{\infty} \int_y^{\infty} \frac{1}{2\Delta_2(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 dP(x) dG(y) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\Delta_1(y)} \left(\frac{Q(y)}{P(y)} - 1 \right)^2 P(y) dG(y) + \int_{-\infty}^{\infty} G_-(x) \frac{1}{2\Delta_2(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 dP(x)
 \end{aligned}$$

Es wird deutlich, dass die Zensierungsverteilung G auch in diesem Modell einen großen Einfluss auf die Kullback-Leibler-Information ausüben kann. Deshalb setzen wir

$$A_{LC} = \left\{ x : \frac{dQ}{dP}(x) \neq 1 \right\} \quad \text{sowie} \quad B_{LC} = \{ x : G_-(x) > 0 \}$$

Bemerkung:

Im Linkszensierungsmodell wird die Menge $B_{LC} = \{ x : G_-(x) > 0 \}$ anstelle der Menge $B_{RC} = \{ x : G_-(x) < 1 \}$ des Rechtszensierungsmodells verwendet.

Lemma 5.2. *Wir haben:*

$$K_G^{LC}(Q, P) > 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad P(A_{LC} \cap B_{LC}) > 0$$

Beweis. Auch dieser Beweis folgt direkt aus dem Beweis im Modell der Rechtszensierung.

Wir müssen nur die Menge B_{RC} durch die Menge B_{LC} ersetzen. □

5. Linkszensierung

6. Current Status Model

6.1. Modellbeschreibung

Das Current Status Model wurde aufgrund seiner einfachen Struktur und der vielfältigen Anwendungs- sowie Erweiterungsmöglichkeiten (vergleiche Kapitel 12) in den letzten Jahren am intensivsten studiert.

Bemerkungen:

- Die Zufallsvariable von Interesse trägt in diesem Modell die Bezeichnung D . Dies wird in den kommenden Modellen beibehalten, um den Unterschied zu den vorherigen Modellen zu zeigen und die verschiedenen Zensierungsmodelle vergleichen zu können.
- Wir benennen in diesem Modell die Zensierungsvariable mit Z um zu verdeutlichen, dass diese im Current Status Model immer beobachtbar ist.

In einer Studie ist für jedes Individuum der Zufallsvektor

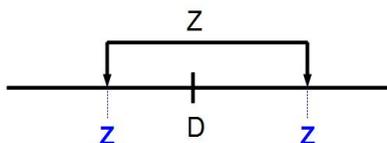
$$O = (Z, \mu = 1_{\{D \leq Z\}})$$

6. Current Status Model

bekannt. Es gibt für den Indikator μ zwei unterschiedliche Möglichkeiten:

$$1_{\{D \leq Z\}} = 1 \iff D \leq Z$$

$$1_{\{D \leq Z\}} = 0 \iff D > Z$$



Weiterhin benutzen wir die folgenden Bezeichnungen:

- Die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen D bezeichnen wir mit A , es gilt also $P(D \leq t) = A(t)$.
- Für die Verteilungsfunktion von Z verwenden wir den Buchstaben H^{CS} , somit ist $Z \sim H^{CS}$ mit $P(Z \leq t) = H^{CS}(t)$.

Die Unabhängigkeit der beiden Variablen wird wieder vorausgesetzt.

6.2. Martingaldarstellungen der Zählprozesse

Um die Doob-Meyer-Zerlegung der Zählprozesse bestimmen zu können, verwenden wir bedingte Erwartungswerte. Diese sind abhängig von der zugrundeliegenden σ -Algebra (der Information). Im Current Status Model ist die σ -Algebra gegeben als:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(1_{\{Z_i \leq s, D_i \leq Z_i\}}, 1_{\{Z_i > s\}} : i = 1, \dots, n; s \leq t)$$

6. Current Status Model

Im vorliegenden Modell werden wir zuerst die diskrete Doob-Meyer-Zerlegung der Zählprozesse

$$\begin{aligned}\sqrt{n} \cdot H_n^{1,CS}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t, D_i \leq Z_i\}} \\ \sqrt{n} \cdot H_n^{0,CS}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t, D_i > Z_i\}}\end{aligned}$$

bestimmen. Um dies zu ermöglichen, werden zunächst endlich viele $t_1 < \dots < t_m < t \equiv t_{m+1}$ betrachtet, und wir beginnen mit dem Stichprobenumfang $n = 1$.

Bemerkungen:

1. Wir werden die Bestimmung der Doob-Meyer-Zerlegung allein für den Prozess $\sqrt{n} \cdot H_n^{0,CS}$ durchführen, da die Zerlegung von $\sqrt{n} \cdot H_n^{1,CS}$ direkt aus der Zerlegung von $\sqrt{n} \cdot H_n^{0,CS}$ und $\sqrt{n} \cdot H_n^{CS}$ ($H_n^{CS} = H_n^{1,CS} + H_n^{0,CS}$) folgt oder analog berechnet werden kann.
2. Die Prozesse $\sqrt{n} \cdot H_n^{CS}$, $\sqrt{n} \cdot H_n^{1,CS}$ und $\sqrt{n} \cdot H_n^{0,CS}$ sind adaptiert bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$.

Lemma 6.1.

Wir haben für $1 \leq k \leq m + 1$:

$$E(1_{\{Z \leq t_k, D > Z\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = 1_{\{Z \leq t_{k-1}, D > Z\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{H^{0,CS}(t_k) - H^{0,CS}(t_{k-1})}{1 - H^{CS}(t_{k-1})}$$

Beweis. Wir zerlegen den Indikator $1_{\{Z \leq t_k, D > Z\}}$ in $1_{\{Z \leq t_{k-1}, D > Z\}} + 1_{\{t_{k-1} < Z \leq t_k, D > Z\}}$. Der erste Term ist meßbar bezüglich $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$. Für den zweiten Term erhalten wir unter Verwendung

6. Current Status Model

der Markov-Eigenschaft:

$$E(1_{\{t_{k-1} < Z \leq t_k, D > Z\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = E(1_{\{t_{k-1} < Z \leq t_k, D > Z\}} | \sigma(1_{\{Z \leq t_{k-1}, D > Z\}}, 1_{\{Z \leq t_{k-1}, D \leq Z\}}, 1_{\{Z > t_{k-1}\}}))$$

Da diese σ -Algebra von den drei Indikatorfunktionen erzeugt wird, kann dieser bedingte Erwartungswert elementar berechnet werden und es folgt:

$$\begin{aligned} E(1_{\{Z \leq t_k, D > Z\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) &= 1_{\{Z \leq t_{k-1}, D > Z\}} + E(1_{\{t_{k-1} < Z \leq t_k, D > Z\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ &= 1_{\{Z \leq t_{k-1}, D > Z\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{\int 1_{\{Z > t_{k-1}\}} 1_{\{t_{k-1} < Z \leq t_k, D > Z\}} dP}{P(t_{k-1} < Z)} \\ &= 1_{\{Z \leq t_{k-1}, D > Z\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{H^{0,CS}(t_k) - H^{0,CS}(t_{k-1})}{1 - H^{CS}(t_{k-1})} \end{aligned}$$

□

Dies ermöglicht die rekursive Darstellung des (diskreten) Martingalprozesses aus der Doob-Meyer-Zerlegung als

$$M_1^{0,CS}(t_k) = M_1^{0,CS}(t_{k-1}) + 1_{\{t_{k-1} < Z \leq t_k, D > Z\}} - 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{H^{0,CS}(t_k) - H^{0,CS}(t_{k-1})}{1 - H^{CS}(t_{k-1})}$$

Durch Induktion erhalten wir schließlich

$$M_1^{0,CS}(t_k) = 1_{\{Z \leq t_k, D > Z\}} - \sum_{j=1}^k 1_{\{Z > t_{j-1}\}} \frac{H^{0,CS}(t_j) - H^{0,CS}(t_{j-1})}{1 - H^{CS}(t_{j-1})}$$

6. Current Status Model

Insgesamt ergibt sich durch Grenzübergang für den Stichprobenumfang $n = 1$:

$$M_1^{0,CS}(t) = 1_{\{Z \leq t, D > Z\}} - \int_{[0,t]} \frac{1_{\{Z \geq s\}}}{1 - H_-^{CS}(s)} dH^{0,CS}(s)$$

Durch die Addition unabhängiger Versionen erhalten wir für das Innovationsmartingal des Zählprozesses $\sqrt{n} \cdot H_n^{0,CS}$ bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$:

$$M_n^{0,CS}(t) = \sqrt{n} \left(H_n^{0,CS}(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_n^{CS}}{1 - H_-^{CS}} dH^{0,CS} \right) \quad (6.1)$$

$$= \sqrt{n} \left(H_n^{0,CS}(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_n^{CS}}{1 - H_-^{CS}} (1 - A) dH^{CS} \right) \quad (6.2)$$

Die zweite Gleichung ist eine Konsequenz aus $(D \sim A)$:

$$\begin{aligned} H^{0,CS}(t) &= P(Z \leq t, D > Z) \\ &= E(1_{\{Z \leq t, D > Z\}}) \\ &= \int_{[0,t]} (1 - A) dH^{CS} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Wollen wir den Martingalprozess in (6.1) schätzen, so sind die Verteilungsfunktionen bzw. Subverteilungsfunktionen durch ihre nichtparametrischen Schätzer H_n^{CS} und $H_n^{0,CS}$ zu ersetzen. Hierbei gleicht der Prozess $M_n^{0,CS}$ aber wieder dem Nullprozess, vergleiche Abschnitt 4.2. Die Gleichung (6.2) ermöglicht hingegen das Testen bestimmter parametrischer Hypothesen bezüglich A . *Koul und Yi (2006)* präsentieren deshalb den folgenden Prozess:

6. Current Status Model

$$\begin{aligned}
 C_n^{CS}(t, \theta) &= \sqrt{n} \left(H_n^{0,CS}(t) - \int_0^t (1 - A_\theta) dH_n^{CS} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t\}} [1_{\{D_i > Z_i\}} - (1 - A_\theta(Z_i))]
 \end{aligned}$$

Dieser Prozess besitzt sogar nach der Schätzung der Verteilungsfunktion von Z (für das wahre θ_0) die Martingaleigenschaft. Dies ist eine direkte Konsequenz aus *Stute (1997)* unter Verwendung der Unabhängigkeitsvoraussetzung an D und Z , da

$$C_n^{CS}(t, \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t\}} [1_{\{D_i > Z_i\}} - E(1_{\{D_i > Z_i\}} | Z_i)]$$

Die Martingaleigenschaft kann ebenfalls durch die Bestimmung der Doob-Meyer-Zerlegung der beiden Prozessteile gezeigt werden. Hierbei zeigt sich, dass beide Prozessteile den selben Kompensator besitzen.

Außerdem konnten *Koul und Yi (2006)* für diesen Prozess eine Stute-Thies-Zhu-Transformation finden und somit Goodness-of-Fit Tests der zusammengesetzten Hypothese ermöglichen. Dies mündete schließlich unter Verwendung von *Durbin (1973)* in (asymptotisch) verteilungsfreien Tests.

6.3. Hauptkomponenten des Martingalprozesses C_n^{CS}

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit den Hauptkomponenten des Martingalprozesses

$$C_n^{CS}(t) = \sqrt{n}(H_n^{0,CS}(t) - \int_0^t (1 - A) dH_n^{CS})$$

Die Darstellung dieses Prozesses als eine Summe von unabhängigen Summanden

$$C_n^{CS}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t\}} [1_{\{D_i > Z_i\}} - (1 - A(Z_i))]$$

werden wir für die Berechnung der Hauptkomponenten verwenden.

Bemerkung:

Wir setzen wieder voraus, dass die verwendeten Verteilungen stetig sind.

Der Prozess C_n^{CS} besitzt die folgende Kovarianzfunktion für $s \leq t$:

$$\begin{aligned} \text{Cov}(C_n^{CS}(s), C_n^{CS}(t)) &= \gamma(s) \\ \text{mit } \gamma(s) &= \int_0^s AdH^{0,CS} \end{aligned}$$

Dies wollen wir nun verifizieren.

Lemma 6.2. *Es gilt für $s \leq t$:*

$$\text{Cov}(C_n^{CS}(s), C_n^{CS}(t)) = \int_0^s AdH^{0,CS}$$

6. Current Status Model

Beweis. Der Prozess C_n^{CS} ist zentriert und hiermit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 Cov(C_n^{CS}(s), C_n^{CS}(t)) &= E(C_n^{CS}(s) \cdot C_n^{CS}(t)) - 0 \\
 &= E[1_{\{Z \leq s\}} [1_{\{D > Z\}} - (1 - A(Z))]]^2 \\
 &= E[1_{\{Z \leq s, D > Z\}}] - 2 \cdot E[1_{\{Z \leq s\}} 1_{\{D > Z\}} (1 - A(Z))] \\
 &\quad + E[1_{\{Z \leq s\}} (1 - A(Z))^2]
 \end{aligned}$$

Diese drei Erwartungswerte werden wir separat bestimmen. Es ist

- $E(1_{\{Z \leq s\}} 1_{\{D > Z\}}) = \int_0^s (1 - A) dH^{CS}$
- $2 \cdot E(1_{\{Z \leq s\}} 1_{\{D > Z\}} (1 - A(Z))) = 2 \cdot \int_0^s (1 - A)^2 dH^{CS}$
- $E(1_{\{Z \leq s\}} (1 - A(Z))^2) = \int_0^s (1 - A)^2 dH^{CS}$

Insgesamt erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned}
 Cov(C_n^{CS}(s), C_n^{CS}(t)) &= \int_0^s (1 - A(z))(1 - 1 + A(z)) dH^{CS}(z) \\
 &= \int_0^s (1 - A(z))A(z) dH^{CS}(z) \\
 &\stackrel{(6.3)}{=} \int_0^s AdH^{0,CS}
 \end{aligned}$$

□

Somit existiert für $C_n^{CS}(t)$ mit Theorem 3.2 für $\psi = \gamma$ auf $[0, T]$ (falls $\psi(T) > 0$) die folgende Darstellung:

$$C_n^{CS}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle C_n^{CS}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} f_j(\tilde{\psi}(t)) \quad \text{mit} \quad \langle C_n^{CS}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} := \int_0^T C_n^{CS}(t) f_j(\tilde{\psi}(t)) d\tilde{\psi}(t)$$

6. Current Status Model

Hierbei gilt für die Hauptkomponenten:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{jn}^{CS} &= \langle C_n^{CS}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \\
 &= \int_0^T C_n^{CS}(s) f_j(\tilde{\psi}(s)) d\tilde{\psi}(s) \\
 &= \int_0^1 C_n^{CS}(\tilde{\psi}^{-1}(s)) f_j(s) ds \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [1_{\{D_i > Z_i\}} - (1 - A(Z_i))] \int_0^1 1_{\{\tilde{\psi}(Z_i) \leq s\}} f_j(s) ds \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n [1_{\{D_i > Z_i\}} - (1 - A(Z_i))] \int_{\tilde{\psi}(Z_i)}^1 f_j(s) ds
 \end{aligned}$$

Wir benutzen abermals $f_j(s) = \sqrt{2} \sin(b_j s)$ mit $b_j = \frac{(2j-1)\pi}{2}$ und erhalten:

$$\begin{aligned}
 \alpha_{jn}^{CS} &= \sqrt{\frac{2}{n}} \sum_{i=1}^n [1_{\{D_i > Z_i\}} - (1 - A(Z_i))] \int_{\tilde{\psi}(Z_i)}^1 \sin(b_j s) ds \\
 &= \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^n [1_{\{D_i > Z_i\}} - (1 - A(Z_i))] \cdot \cos(b_j \tilde{\psi}(Z_i))
 \end{aligned}$$

Diese Gleichung ist eine Konsequenz aus $[-\cos(b_j s)]_{\tilde{\psi}(Z_i)}^1 = 0 + \cos(b_j \tilde{\psi}(Z_i))$.

6.4. Likelihood-Funktion im Current Status Model

Dieser Abschnitt dient der Bestimmung der Likelihood-Funktion sowie der Kullback-Leibler-Information in diesem Zensierungsmodell. Die Zufallsvariable D möge aus einer parametrischen Familie $\mathcal{A}_\theta = \{A_\theta | \theta \in \Theta\}$ von Verteilungsfunktionen stammen. Um die Notation zu verein-

6. Current Status Model

fachen, verwenden wir im Folgenden die Bezeichnung H anstelle von H^{CS} .

Im Current Status Model wird die Folge $(Z_i, \mu_i = 1_{\{D_i \leq Z_i\}})_{i=1, \dots, n}$ beobachtet. Es müssen zwei Szenarien unterschieden werden:

1. $\mu_i = 1$:

$$P(Z_i \leq t, D_i \leq Z_i) = \int_{[0, t]} A_\theta dH$$

2. $\mu_i = 0$:

$$P(Z_i \leq t, D_i > Z_i) = \int_{[0, t]} (1 - A_\theta) dH$$

Damit ergibt sich für die Likelihood-Funktion:

$$L_n^{CS}(\theta) = \prod_{i=1}^n [A_\theta(Z_i)]^{1_{\{D_i \leq Z_i\}}} \cdot [1 - A_\theta(Z_i)]^{1_{\{D_i > Z_i\}}}$$

Hierbei werden wie in den vorherigen Kapiteln die Funktionen, die konstant in θ sind, nicht berücksichtigt.

Diese Likelihood-Funktion führt uns zu der nachstehenden Definition der Kullback-Leibler-Information für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P mit $D \sim Q$ sowie $Q \ll P$:

$$K_H^{CS}(Q, P) := E_Q \left(1_{\{D \leq Z\}} \ln \left[\frac{Q(Z)}{P(Z)} \right] + 1_{\{D > Z\}} \ln \left[\frac{1 - Q(Z)}{1 - P(Z)} \right] \right)$$

Durch Verwendung der Unabhängigkeit von D und Z gelangen wir zu

$$K_H^{CS}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(z) \ln \left[\frac{Q(z)}{P(z)} \right] + (1 - Q(z)) \ln \left[\frac{1 - Q(z)}{1 - P(z)} \right] \right) dH(z)$$

6. Current Status Model

Diese Definition beinhaltet wieder den Spezialfall mit $Q = A_{\theta_0}$ und $P = A_{\theta_1}$:

$$\begin{aligned} K_H^{CS}(A_{\theta_0}, A_{\theta_1}) &= E_{\theta_0} \left[\mu \cdot \ln \left(\frac{A_{\theta_0}(Z)}{A_{\theta_1}(Z)} \right) + (1 - \mu) \cdot \ln \left(\frac{1 - A_{\theta_0}(Z)}{1 - A_{\theta_1}(Z)} \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[A_{\theta_0}(z) \ln \left(\frac{A_{\theta_0}(z)}{A_{\theta_1}(z)} \right) + (1 - A_{\theta_0}(z)) \ln \left(\frac{1 - A_{\theta_0}(z)}{1 - A_{\theta_1}(z)} \right) \right] dH(z) \end{aligned}$$

Bemerkung:

Huang und Wellner (1995) verwenden die oben bestimmte Likelihood-Funktion, um die asymptotische Normalität einer Klasse von linearen Funktionalen des Nichtparametrischen Maximum-Likelihood-Schätzers zu beweisen.

6.5. Die Kullback-Leibler-Information im Current Status Model

Wohldefiniiertheit und Eindeutigkeitsvoraussetzungen

Die Kullback-Leibler-Information des Current Status Model ist gegeben als

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[Q(z) \ln \left(\frac{Q(z)}{P(z)} \right) + (1 - Q(z)) \ln \left(\frac{1 - Q(z)}{1 - P(z)} \right) \right] dH(z)$$

Die Verteilung H bezeichnet die Verteilung der Zensierungsvariablen Z auf der reellen Achse.

Wir wollen im kommenden Lemma zeigen, dass $K_H^{CS} \geq 0$.

Lemma 6.3. $K_H^{CS}(Q, P)$ ist wohldefiniert mit $0 \leq K_H^{CS}(Q, P) \leq \infty$.

Beweis. Dies folgt abermals durch Verwendung der Taylorformel an den Stellen $t = \frac{Q(z)}{P(z)}$ und

6. Current Status Model

$t = \frac{1-Q(z)}{1-P(z)}$ für die Funktion $h(t) = t \cdot \ln(t)$:

$$\begin{aligned}
 & K_H^{CS}(Q, P) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\left(\frac{Q(z)}{P(z)} - 1 \right) P(z) + \left(\frac{1-Q(z)}{1-P(z)} - 1 \right) (1-P(z)) \right] dH(z) \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\Delta_1(z)} \left(\frac{Q(z)}{P(z)} - 1 \right)^2 P(z) + \frac{1}{2\Delta_2(z)} \left(\frac{1-Q(z)}{1-P(z)} - 1 \right)^2 (1-P(z)) \right] dH(z) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\underbrace{Q(z) - P(z) + 1 - Q(z) - 1 + P(z)}_{=0} \right] dH(z) \\
 &+ \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\Delta_1(z)} \left(\frac{Q(z)}{P(z)} - 1 \right)^2 P(z) + \frac{1}{2\Delta_2(z)} \left(\frac{1-Q(z)}{1-P(z)} - 1 \right)^2 (1-P(z)) \right] dH(z) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Aufgrund der Voraussetzung, dass $Q \ll P$, folgt aus $P(u) = 0$ auch $Q(u) = 0$. Ebenso gilt:

$$\begin{aligned}
 1 - P(u) = 0 &\implies 1 - Q(u) = 0 \\
 P(u) - P(t) = 0 &\implies Q(u) - Q(t) = 0
 \end{aligned}$$

Es wurde mit Hilfe der Taylorentwicklung gezeigt, dass

$$K_H^{CS}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\Delta_1(z)} \left(\frac{Q(z)}{P(z)} - 1 \right)^2 P(z) + \frac{1}{2\Delta_2(z)} \left(\frac{1-Q(z)}{1-P(z)} - 1 \right)^2 (1-P(z)) \right] dH(z)$$

6. Current Status Model

Nun definieren wir die folgende Menge:

$$A_{CS} := \{x : Q(x) \neq P(x)\}$$

Hiermit wird das folgende Lemma bewiesen:

Lemma 6.4. *Es gilt:*

$$K_H^{CS}(Q, P) > 0 \quad \text{genau dann wenn} \quad H(A_{CS}) > 0$$

Beweis. Aus $H(A_{CS}) > 0$ folgt aufgrund der folgenden Gleichung $K_H^{CS}(Q, P) > 0$:

(Es ist $\Delta_i < \infty$ f.s.)

$$\begin{aligned}
 & K_H^{CS}(Q, P) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\Delta_1(z)} \left(\frac{Q(z)}{P(z)} - 1 \right)^2 P(z) + \frac{1}{2\Delta_2(z)} \left(\frac{1-Q(z)}{1-P(z)} - 1 \right)^2 (1-P(z)) \right] dH(z) \\
 &= \int_{A_{CS}} \left[\underbrace{\frac{1}{2\Delta_1(z)}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{Q(z)}{P(z)} - 1 \right)^2 P(z)}_{>0} + \underbrace{\frac{1}{2\Delta_2(z)}}_{>0} \underbrace{\left(\frac{1-Q(z)}{1-P(z)} - 1 \right)^2 (1-P(z))}_{>0} \right] dH(z) \\
 &\quad + \underbrace{\int_{A_{CS}^c} \left[\frac{1}{2\Delta_1(z)} \left(\frac{Q(z)}{P(z)} - 1 \right)^2 P(z) + \frac{1}{2\Delta_2(z)} \left(\frac{1-Q(z)}{1-P(z)} - 1 \right)^2 (1-P(z)) \right] dH(z)}_{=0} \\
 &> 0 \quad , \text{ da } H(A_{CS}) > 0 \text{ und wir haben } P \neq 0 \text{ sowie } 1 - P \neq 0 \text{ auf } A_{CS}
 \end{aligned}$$

6. Current Status Model

Um die Gegenrichtung zu beweisen, nehmen wir an, dass $H(A_{CS}) = 0$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
 K_H^{CS}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{Q(z)}{P(z)}\right)Q(z) + \ln\left(\frac{1-Q(z)}{1-P(z)}\right)(1-Q(z)) \right] dH(z) \\
 &= \underbrace{\int_{A_{CS}} \left[\ln\left(\frac{Q(z)}{P(z)}\right)Q(z) + \ln\left(\frac{1-Q(z)}{1-P(z)}\right)(1-Q(z)) \right] dH(z)}_{=0, \text{ denn es ist } H(A_{CS})=0} \\
 &\quad + \underbrace{\int_{\overline{A_{CS}}} \left[\ln\left(\frac{Q(z)}{P(z)}\right)Q(z) + \ln\left(\frac{1-Q(z)}{1-P(z)}\right)(1-Q(z)) \right] dH(z)}_{=0 \text{ weil } Q=P \text{ auf } \overline{A_{CS}}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Durch den Vergleich der Abschnitte 4.5 und 6.5 wird deutlich, worin der Unterschied der Kullback-Leibler-Informationen besteht. Die Zensierungsmodelle, die es ermöglichen, dass die Zufallsvariable von Interesse direkt beobachtet werden kann, beinhalten innerhalb der Kullback-Leibler-Information die Dichtefunktionen anstelle der Verteilungsfunktionen. Dadurch haben diese Modelle einen höheren Informationsgehalt und somit sollte die Kullback-Leibler-Information auch größer sein. Die Untersuchung bzw. der Nachweis dieser Behauptung ist ein wichtiger Bestandteil des dreizehnten Kapitels.

7. Intervallzensierung Typ II

7.1. Modellbeschreibung

Dieses Modell kann als eine Erweiterung des Current Status Model gesehen werden, bei der nun mehrere Beobachtungszeitpunkte vorhanden sind.

Bemerkungen:

- In dieser Arbeit werden wir nur die Situation untersuchen, in der zwei Untersuchungszeitpunkte vorhanden sind.
- Es stellt sich die Frage, ob der zweite Untersuchungszeitpunkt in einem Informationsgewinn oder Informationsverlust im Vergleich zum Current Status Model resultiert. Wir werden im dreizehnten Kapitel verifizieren, dass die Kullback-Leibler-Information in diesem Zensierungsmodell größer als die Kullback-Leibler-Information des Current Status Model ist.

Die Modellierung der Zufallsvariablen von Interesse erfolgt durch eine nichtnegative Zufallsvariable D , während die Beobachtungsvariablen mit T und U ($T \leq U$ f.s.) bezeichnet werden. Eine wichtige Annahme ist die stochastische Unabhängigkeit von D und (T, U) . Weiterhin führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

7. Intervallzensierung Typ II

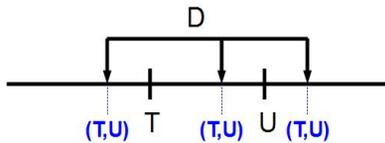
- Die Verteilungsfunktion von D wird mit A bezeichnet.
Dies bedeutet: $P(D \leq t) = A(t)$.
- Die gemeinsame Verteilung des Vektors (T, U) ist durch den Buchstaben H^{IC2} gekennzeichnet. Es gilt also $(T, U) \sim H^{IC2}$.
- Die Marginalverteilungen bezeichnen wir mit F und G .
Es ist hierbei $T \sim F$ sowie $U \sim G$.
- Im Modell der Intervallzensierung Typ II existieren zwei Beobachtungszeitpunkte T und U . Deshalb finden die beiden Indikatorfunktionen $\mu = 1_{\{D \leq T\}}$ und $\gamma = 1_{\{D \leq U\}}$ Verwendung.

Wir beobachten also für jede Untersuchungseinheit in einer Studie den Vektor

$$O = (T, U, \mu = 1_{\{D \leq T\}}, \gamma = 1_{\{D \leq U\}})$$

wobei $T \leq U$ f.s.. Deshalb müssen drei verschiedene Situationen unterschieden werden:

$$\begin{aligned} 1_{\{D \leq T\}} = 1 &\iff D \leq T \quad (\leq U) \\ 1_{\{D \leq T\}} = 0, 1_{\{D \leq U\}} = 1 &\iff T < D \leq U \\ 1_{\{D \leq U\}} = 0 &\iff (T \leq) U < D \end{aligned}$$



7. Intervallzensierung Typ II

Da die Zufallsvariable T immer kleiner gleich der Zufallsvariablen U ist, generieren diese Zufallsvariablen ein Intervall. Liegt die Variable von Interesse D nicht in diesem Intervall, so ist dennoch bekannt, ob diese links oder rechts des Intervalls liegt. Den Spezialfall des Current Status Model erhalten wir, falls nur eine Beobachtungsvariable existiert.

7.2. Likelihood-Funktion bei Intervallzensierung Typ II

Die Likelihood-Funktion in diesem Zensierungsmodell werden wir unter Verwendung der gemeinsamen Verteilung von (T, U) bestimmen. Die Zufallsvariable D möge aus einer parametrischen Familie $\mathcal{A}_\theta = \{A_\theta | \theta \in \Theta\}$ von Verteilungsfunktionen stammen. Durch die beiden Indikatorfunktionen ergeben sich eigentlich vier mögliche Szenarien. Da aber $T_i \leq U_i$ für $i = 1, \dots, n$ f.s., reduzieren sich diese auf die folgenden drei Szenarien:

1. $\mu_i = 1, \gamma_i = 1$:

$$\begin{aligned} P((T_i, U_i) \leq (t, u), D_i \leq T_i, D_i \leq U_i) &= P((T_i, U_i) \leq (t, u), D_i \leq T_i) \\ &= \int_B A_\theta(x) dH^{IC2}(x, y) \\ \text{mit } B &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq t \text{ und } y \leq u \text{ mit } x \leq y\} \end{aligned}$$

2. $\mu_i = 0, \gamma_i = 1$:

$$\begin{aligned} P((T_i, U_i) \leq (t, u), D_i > T_i, D_i \leq U_i) &= P((T_i, U_i) \leq (t, u), T_i < D_i \leq U_i) \\ &= P((T_i, U_i) \leq (t, u), D_i \leq U_i) - P((T_i, U_i) \leq (t, u), D_i \leq T_i) \\ &= \int_B [A_\theta(y) - A_\theta(x)] dH^{IC2}(x, y) \end{aligned}$$

3. $\mu_i = 0, \gamma_i = 0$:

$$\begin{aligned} P((T_i, U_i) \leq (t, u), D_i > T_i, D_i > U_i) &= P((T_i, U_i) \leq (t, u), D_i > U_i) \\ &= \int_B (1 - A_\theta(y)) dH^{IC2}(x, y) \end{aligned}$$

7. Intervallzensierung Typ II

Damit erhalten wir für die Likelihood-Funktion:

$$L_n^{IC2}(\theta) = \prod_{i=1}^n [A_\theta(T_i)^{1_{\{D_i \leq T_i\}}} \cdot (A_\theta(U_i) - A_\theta(T_i))^{1_{\{T_i < D_i \leq U_i\}}} \cdot (1 - A_\theta(U_i))^{1_{\{D_i > U_i\}}}]$$

Wir definieren die Kullback-Leibler-Information unter Beachtung der Likelihood-Funktion für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P mit $Q \ll P$ und $D \sim Q$ wie folgt:

$$\begin{aligned} K_{F,G}^{IC2}(Q, P) &:= E_Q \left(1_{\{D \leq T\}} \ln \left(\frac{Q(T)}{P(T)} \right) + 1_{\{T < D \leq U\}} \ln \left(\frac{Q(U) - Q(T)}{P(U) - P(T)} \right) \right. \\ &\quad \left. + 1_{\{D > U\}} \ln \left(\frac{1 - Q(U)}{1 - P(U)} \right) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln \left[\frac{Q(t)}{P(t)} \right] Q(t) + (1 - Q(u)) \ln \left[\frac{1 - Q(u)}{1 - P(u)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right] (Q(u) - Q(t)) \right) dH^{IC2}(t, u) \end{aligned}$$

Für den Spezialfall, dass $Q = A_{\theta_0}$ und $P = A_{\theta_1}$ ist, ergibt sich

$$\begin{aligned} K_{F,G}^{IC2}(A_{\theta_0}, A_{\theta_1}) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[A_{\theta_0}(t) \ln \left(\frac{A_{\theta_0}(t)}{A_{\theta_1}(t)} \right) + (A_{\theta_0}(u) - A_{\theta_0}(t)) \ln \left(\frac{A_{\theta_0}(u) - A_{\theta_0}(t)}{A_{\theta_1}(u) - A_{\theta_1}(t)} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - A_{\theta_0}(u)) \ln \left(\frac{1 - A_{\theta_0}(u)}{1 - A_{\theta_1}(u)} \right) \right] dH^{IC2}(t, u) \end{aligned}$$

Hierbei wurden die folgenden Gleichungen verwendet ($T \sim F$ und $U \sim G$):

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} A_{\theta_0}(t) dF(t) &= \int_{\mathbb{R}^2} A_{\theta_0}(t) dH^{IC2}(t, u) \\ \text{sowie} \quad \int_{-\infty}^{\infty} (1 - A_{\theta_0}(u)) dG(u) &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 - A_{\theta_0}(u)) dH^{IC2}(t, u) \end{aligned}$$

Bemerkung:

Für die zweidimensionale Verteilungsfunktion H^{IC2} gilt:

$$H^{IC2}(A, B) = P((T, U) \in A \times B) = P(T \in A, U \in B) \leq \begin{cases} P(T \in A) \\ P(U \in B) \end{cases} \quad (7.1)$$

Dies werden wir in dem kommenden Abschnitt verwenden.

7.3. Die Kullback-Leibler-Information bei Intervallzensierung Typ II

Wohldefiniertheit und Eindeutigkeitsvoraussetzungen

Die Kullback-Leibler-Information in diesem Modell gleicht (für $Q \ll P$)

$$\int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln \left[\frac{Q(t)}{P(t)} \right] Q(t) + (1 - Q(u)) \ln \left[\frac{1 - Q(u)}{1 - P(u)} \right] + \ln \left[\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right] (Q(u) - Q(t)) \right) dH^{IC2}(t, u)$$

Lemma 7.1. *Es ist $0 \leq K_{F,G}^{IC2} \leq \infty$ und $K_{F,G}^{IC2}$ ist wohldefiniert.*

Beweis. Der Beweis erfolgt wie in den vorherigen Kapiteln durch mehrfache Verwendung der

7. Intervallzensierung Typ II

Taylorformel für $x \cdot \ln(x)$ an den Stellen $x = \frac{Q(t)}{P(t)}$, $x = \frac{Q(u)-Q(t)}{Q(u)-Q(t)}$ und $x = \frac{1-Q(u)}{1-P(u)}$:

$$\begin{aligned}
& K_{F,G}^{IC2}(Q, P) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2\Delta_1(t)} \left(\frac{Q(t)}{P(t)} - 1 \right)^2 P(t) + \frac{1}{2\Delta_2(t, u)} \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} - 1 \right)^2 (P(u) - P(t)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\Delta_3(u)} \left(\frac{1 - Q(u)}{1 - P(u)} - 1 \right)^2 (1 - P(u)) \right] dH^{IC2}(t, u) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \left[\left(\frac{Q(t)}{P(t)} - 1 \right) P(t) + \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} - 1 \right) (P(u) - P(t)) \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{1 - Q(u)}{1 - P(u)} - 1 \right) (1 - P(u)) \right] dH^{IC2}(t, u) \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2\Delta_1(t)} \left(\frac{Q(t)}{P(t)} - 1 \right)^2 P(t) + \frac{1}{2\Delta_2(t, u)} \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} - 1 \right)^2 (P(u) - P(t)) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{2\Delta_3(u)} \left(\frac{1 - Q(u)}{1 - P(u)} - 1 \right)^2 (1 - P(u)) \right] dH^{IC2}(t, u) \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{[Q(t) - P(t) + Q(u) - Q(t) - P(u) + P(t) + 1 - Q(u) - 1 + P(u)]}_{=0} dH^{IC2}(t, u) \\
&\geq 0
\end{aligned}$$

□

Nun setzen wir:

$$A_{IC2} = \{x : Q(x) \neq P(x)\}$$

Lemma 7.2. *Wir haben für $Q \ll P$:*

$$K_{F,G}^{IC2}(Q, P) > 0 \iff F(A_{IC2}) > 0 \text{ oder } G(A_{IC2}) > 0$$

7. Intervallzensierung Typ II

Beweis. " \Leftarrow ":

Unter der Annahme, dass $F(A_{IC2}) > 0$ oder $G(A_{IC2}) > 0$ ist, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 K_{F,G}^{IC2}(Q, P) &= \int_{A_{IC2}} \underbrace{\frac{1}{2\Delta_1(t)} \left(\frac{Q(t)}{P(t)} - 1 \right)^2}_{>0} P(t) dF(t) \\
 &+ \int_{A_{IC2}} \underbrace{\frac{1}{2\Delta_2(u)} \left(\frac{1-Q(u)}{1-P(u)} - 1 \right)^2}_{>0} (1-P(u)) dG(u) \\
 &+ \underbrace{NN}_{\geq 0} \\
 &> 0 \quad \text{da } P \neq 0; 1 \text{ auf } A_{IC2} \text{ und entweder } F(A_{IC2}) > 0 \text{ oder } G(A_{IC2}) > 0
 \end{aligned}$$

" \Rightarrow ":

Es sei $F(A_{IC2}) = 0$ sowie $G(A_{IC2}) = 0$.

Dann folgt mit (7.1):

$$H^{IC2}(A_{IC2}, \bullet) = 0 = H^{IC2}(\bullet, A_{IC2}) \tag{7.2}$$

Und hiermit erhalten wir:

7. Intervallzensierung Typ II

$$\begin{aligned}
& K_{F,G}^{IC_2}(Q, P) \\
&= \underbrace{\int_{A_{IC_2}} \ln\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right) Q(t) dF(t) + \int_{A_{IC_2}} \ln\left(\frac{1-Q(u)}{1-P(u)}\right) (1-Q(u)) dG(u)}_{=0 \text{ wegen } F(A_{IC_2})=0 \text{ und } G(A_{IC_2})=0} \\
&+ \underbrace{\int_{\overline{A_{IC_2}}} \ln\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right) Q(t) dF(t) + \int_{\overline{A_{IC_2}}} \ln\left(\frac{1-Q(u)}{1-P(u)}\right) (1-Q(u)) dG(u)}_{=0 \text{ da } Q=P \text{ auf } \overline{A_{IC_2}}} \\
&+ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{Q(u)-Q(t)}{P(u)-P(t)}\right) (Q(u)-Q(t)) \right] dH^{IC_2}(t, u) \\
&= \underbrace{\int_{A_{IC_2}} \int_{A_{IC_2}} \dots dH^{IC_2} + \int_{A_{IC_2}} \int_{\overline{A_{IC_2}}} \dots dH^{IC_2} + \int_{\overline{A_{IC_2}}} \int_{A_{IC_2}} \dots dH^{IC_2}}_{=0 \text{ mit (7.2)}} \\
&+ \int_{\overline{A_{IC_2}}} \int_{\overline{A_{IC_2}}} \left[\underbrace{\ln\left(\frac{Q(u)-Q(t)}{P(u)-P(t)}\right)}_{=0 \text{ auf } \overline{A_{IC_2} \times \overline{A_{IC_2}}}} (Q(u)-Q(t)) \right] dH^{IC_2}(t, u) \\
&= 0
\end{aligned}$$

□

8. Doppelzensierung

8.1. Modellbeschreibung

Die Modellierung der Zufallsvariablen D, T und U sowie Indikatorfunktionen $1_{\{D \leq T\}}$ und $1_{\{D \leq U\}}$ stimmt mit der Modellierung der Intervallzensierung Typ II überein. Im Unterschied zum vorherigen Zensierungsmodell kann aber die beobachtbare **eindimensionale** Zufallsvariable $Z = \min(\max(D, T), U)$ im Modell der Doppelzensierung D gleichen. Die Zufallsvariable D wird wieder als unabhängig von T und U angenommen.

Wir kennen von jedem Individuum in einer Untersuchung den Zufallsvektor

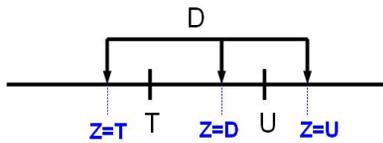
$$O = (Z = \min(\max(D, T), U), 1_{\{D \leq T\}}, 1_{\{D \leq U\}})$$

mit $T \leq U$ f.s.

8. Doppelzensierung

Hieraus ergeben sich wieder drei unterschiedliche Szenarien:

$$Z = \begin{cases} T & \text{falls } 1_{\{D \leq T\}} = 1 \quad (\implies 1_{\{D \leq U\}} = 1) \\ D & \text{falls } 1_{\{D \leq T\}} = 0, 1_{\{D \leq U\}} = 1 \\ U & \text{falls } 1_{\{D \leq U\}} = 0 \quad (\implies 1_{\{D \leq T\}} = 0) \end{cases}$$



Der Wert der Zufallsvariable D ist somit bekannt, falls diese im Intervall $(T, U]$ liegt.

Bemerkungen:

- Durch die Voraussetzung, dass $T \leq U$ f.s., folgt aus $1_{\{D \leq T\}} = 1$ ebenfalls $1_{\{D \leq U\}}$ sowie aus $1_{\{D > U\}} = 1$ auch $1_{\{T > U\}}$.
- Das Zensierungsmodell der Doppelzensierung beinhaltet sowohl das Rechtszensierungsmodell (falls wir $T \sim F := \delta_{-\infty}$ setzen), als auch das Linkszensierungsmodell (für $U \sim G := \delta_{\infty}$).
- In *Turnbull (1974)* wurde ein nichtparametrischer Schätzer für die Verteilungsfunktion von Interesse in diesem Zensierungsmodell bestimmt.

8.2. Martingaldarstellungen der Zählprozesse

In diesem Zensierungsschema untersuchen wir zum ersten Mal Zählprozesse, die von zwei Indikatorfunktionen abhängen. Die Verteilungsfunktion der beobachtbaren Zufallsvariablen

8. Doppelzensierung

$Z = \min(\max(D, T), U)$ wird mit H^{DC} bezeichnet. Die drei folgenden Zählprozesse werden untersucht:

$$\begin{aligned}\sqrt{n}H_n^{11,DC}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t, D_i \leq T_i\}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{T_i \leq t, D_i \leq T_i\}} \\ \sqrt{n}H_n^{00,DC}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t, D_i > U_i\}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{U_i \leq t, D_i > U_i\}} \\ \sqrt{n}H_n^{01,DC}(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t, D_i > T_i, D_i \leq U_i\}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{D_i \leq t, D_i > T_i, D_i \leq U_i\}}\end{aligned}$$

Hierbei verwenden wir die Bezeichnung $H_n^{ab,DC}$, falls der Indikator $1_{\{D \leq T\}} = a$ sowie der zweite Indikator $1_{\{D \leq U\}} = b$ ist. Um die Adaptiertheit dieser Zählprozesse sicherzustellen, wird die nachstehende σ -Algebra eingeführt:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(1_{\{Z_i \leq s, D_i \leq T_i\}}, 1_{\{Z_i \leq s, D_i > U_i\}}, 1_{\{Z_i > s\}} : i = 1, \dots, n; s \leq t)$$

Indem wir wieder unser Vorgehen aus 4.2¹ wiederholen, erhalten wir durch die Doob-Meyer-Zerlegung dieser Zählprozesse bezüglich der obigen σ -Algebra die nachfolgenden Martingalprozesse:

$$M_n^{ij,DC}(t) = \sqrt{n} \left(H_n^{ij,DC}(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_n^{DC}}{1 - H_-^{DC}} dH^{ij,DC} \right) \quad \text{für } i \leq j \text{ mit } i, j \in \{0, 1\}$$

Für die Bestimmung der Doob-Meyer-Zerlegung wurde für $H_1^{11,DC}(t_k) = 1_{\{Z \leq t_k, D \leq T\}}$ die

¹ Wir haben als Erstes für den Stichprobenumfang $n = 1$ die Doob-Meyer-Zerlegung des Zählprozesses bestimmt. Hierzu wurde zuerst eine Diskretisierung der Zeitachse vorgenommen. Anschließend wurde die Bestimmung der bedingten Erwartung durchgeführt und ein Grenzübergang vollzogen.

8. Doppelzensierung

bedingte Erwartung bezüglich $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$ mit $t_1 < \dots < t_m < t \equiv t_{m+1}$ berechnet:

Lemma 8.1.

Es gilt für $1 \leq k \leq m + 1$:

$$E(1_{\{Z \leq t_k, D \leq T\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = 1_{\{Z \leq t_{k-1}, D \leq T\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{H^{11,DC}(t_k) - H^{11,DC}(t_{k-1})}{1 - H^{DC}(t_{k-1})}$$

Beweis. Wir zerlegen den Indikator $1_{\{Z \leq t_k, D \leq T\}}$ in $1_{\{Z \leq t_{k-1}, D \leq T\}} + 1_{\{t_{k-1} < Z \leq t_k, D \leq T\}}$. Der erste Term ist meßbar bezüglich $\mathcal{F}_{t_{k-1}}$. Für den zweiten Term ergibt sich unter Verwendung der Markov-Eigenschaft:

$$\begin{aligned} & E(1_{\{t_{k-1} < Z \leq t_k, D \leq T\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ &= E(1_{\{t_{k-1} < Z \leq t_k, D \leq T\}} | \sigma(1_{\{Z \leq t_{k-1}, D \leq T\}}, 1_{\{Z \leq t_{k-1}, T < D \leq U\}}, 1_{\{Z \leq t_{k-1}, D > U\}}, 1_{\{Z > t_{k-1}\}})) \end{aligned}$$

Da diese σ -Algebra neben \emptyset, Ω aus der Partition dieser vier Mengen besteht, kann dieser bedingte Erwartungswert elementar berechnet werden:

$$\begin{aligned} E(1_{\{Z \leq t_k, D \leq T\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) &= 1_{\{Z \leq t_{k-1}, D \leq T\}} + E(1_{\{t_{k-1} < Z \leq t_k, D \leq T\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ &= 1_{\{Z \leq t_{k-1}, D \leq T\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{\int 1_{\{Z > t_{k-1}\}} 1_{\{t_{k-1} < Z \leq t_k, D \leq T\}} dP}{P(t_{k-1} < Z)} \\ &= 1_{\{Z \leq t_{k-1}, D \leq T\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{H^{11,DC}(t_k) - H^{11,DC}(t_{k-1})}{1 - H^{DC}(t_{k-1})} \end{aligned}$$

8. Doppelzensierung

Die letzte Gleichung ist eine Konsequenz aus

$$\begin{aligned} H^{11,DC}(t) &= P(Z \leq t, D \leq T) \\ &= E(1_{\{Z \leq t, D \leq T\}}) \end{aligned}$$

□

8.3. Likelihood-Funktion bei Doppelzensierung

Die Likelihood-Funktion dieses Zensierungsmodells muss sowohl die Dichtefunktion als auch die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen D enthalten. Dies ist durch die Beobachtbarkeit von D im Intervall $(T, U]$ gegeben. Zusätzlich werden die eindimensionalen Verteilungsfunktionen F und G von T und U aufgrund der eindimensionalen Zufallsvariablen Z Verwendung finden. Die Zufallsvariable D möge aus einer parametrischen Familie $\mathcal{A}_\theta = \{A_\theta | \theta \in \Theta\}$ von Verteilungsfunktionen stammen.

Im Modell der Doppelzensierung ist die Folge

$$(Z_i = \min(\max(D_i, T_i), U_i), \overbrace{1_{\{D_i \leq T_i\}}}_{\mu_i}, \overbrace{1_{\{D_i \leq U_i\}}}_{\gamma_i})_{i=1, \dots, n}$$

bekannt. Wir führen deshalb eine Fallunterscheidung durch und verwenden die Unabhängigkeitsvoraussetzung:

1. $\mu_i = 1, \gamma_i = 1$:

$$P(Z_i \leq t, D_i \leq T_i, D_i \leq U_i) = P(T_i \leq t, D_i \leq T_i) = \int_{[0, t]} A_\theta dF$$

8. Doppelzensierung

2. $\mu_i = 0, \gamma_i = 1$:

$$\begin{aligned} P(Z_i \leq t, D_i > T_i, D_i \leq U_i) &= P(D_i \leq t, T_i < D_i \leq U_i) \\ &= \int_{[0,t]} P(T_i < y \leq U_i) dA_\theta(y) \\ &= \int_{[0,t]} [F_-(y) - G_-(y)] a_\theta(y) dy \end{aligned}$$

3. $\mu_i = 0, \gamma_i = 0$:

$$P(Z_i \leq t, D_i > T_i, D_i > U_i) = P(U_i \leq t, D_i > U_i) = \int_{[0,t]} (1 - A_\theta) dG$$

Hierbei wurde für 2. benutzt, dass (mit $T \leq U$ f.s.)

$$\begin{aligned} P(T < v \leq U) &= P(T < v, v \leq U) \\ &= P(v \leq U) - P(v \leq U, v \leq T) \\ &= P(v \leq U) - P(v \leq T) \\ &= F_-(v) - G_-(v) \end{aligned}$$

Damit bestimmen wir wie in den vorherigen Kapiteln die Likelihood-Funktion:

$$\begin{aligned} L_n^{DC}(\theta) &= \prod_{i=1}^n \left[(A_\theta(T_i))^{\mu_i \gamma_i} \cdot (a_\theta(D_i))^{(1-\mu_i)\gamma_i} (1 - A_\theta(U_i))^{(1-\mu_i)(1-\gamma_i)} \right] \\ &= \prod_{i=1}^n \left[(A_\theta(T_i))^{\mu_i} \cdot (a_\theta(D_i))^{(1-\mu_i)\gamma_i} (1 - A_\theta(U_i))^{(1-\gamma_i)} \right] \end{aligned}$$

Wir definieren die Kullback-Leibler-Information für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P

8. Doppelzensierung

mit $D \sim Q$ und $Q \ll P$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
 K_{F,G}^{DC}(Q, P) &:= E_Q \left(\mu \cdot \ln\left(\frac{Q(T)}{P(T)}\right) + (1 - \mu) \cdot \gamma \cdot \ln\left(\frac{dQ}{dP}(D)\right) + (1 - \gamma) \ln\left(\frac{1 - Q(U)}{1 - P(U)}\right) \right) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] dG(y) \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP \right) [dG(y) - dF(y)]
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird ebenfalls durch den folgenden Spezialfall motiviert:

Setzen wir $dQ = a_{\theta_0} d\nu$ sowie $dP = a_{\theta_1} d\nu$ mit $Q \ll P$, so gilt:

$$\begin{aligned}
 K_{F,G}^{DC}(A_{\theta_0}, A_{\theta_1}) &= E_{\theta_0} \left[\mu \cdot \ln \left(\frac{A_{\theta_0}(T)}{A_{\theta_1}(T)} \right) + (1 - \mu) \cdot \gamma \cdot \ln \left(\frac{a_{\theta_0}(D)}{a_{\theta_0}(D)} \right) \right. \\
 &\quad \left. + (1 - \gamma) \cdot \ln \left(\frac{1 - A_{\theta_0}(U)}{1 - A_{\theta_1}(U)} \right) \right] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} A_{\theta_0} \ln \left(\frac{A_{\theta_0}}{A_{\theta_1}} \right) dF + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - A_{\theta_0}) \ln \left(\frac{1 - A_{\theta_0}}{1 - A_{\theta_1}} \right) dG \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{(-\infty, y]} \ln \left(\frac{a_{\theta_0}(x)}{a_{\theta_1}(x)} \right) a_{\theta_0}(x) dx \right] [dG(y) - dF(y)]
 \end{aligned}$$

Der letzte Summand wurde durch Verwendung der nachstehenden Gleichungen bestimmt:

$$\begin{aligned}
 E_{\theta_0}(1_{\{T < D \leq U\}} \ln\left(\frac{a_{\theta_0}(D)}{a_{\theta_1}(D)}\right)) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(T < x \leq U) \ln\left(\frac{a_{\theta_0}(x)}{a_{\theta_1}(x)}\right) a_{\theta_0}(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} [F_-(x) - G_-(x)] \ln\left(\frac{a_{\theta_0}(x)}{a_{\theta_1}(x)}\right) a_{\theta_0}(x) dx
 \end{aligned}$$

8. Doppelzensierung

Wir zerlegen diesen Ausdruck in zwei Integrale und erhalten

$$\begin{aligned}
 E_{\theta_0}(1_{\{T < D \leq U\}} \ln(\frac{a_{\theta_0}(D)}{a_{\theta_1}(D)})) &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\dots)(1 - G_-(x))a_{\theta_0}(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\dots)(1 - F_-(x))a_{\theta_0}(x)dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\dots)P(U \geq x)a_{\theta_0}(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\dots)P(F \geq x)a_{\theta_0}(x)dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\dots)1_{\{y \geq x\}}dG(y)a_{\theta_0}(x)dx - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln(\dots)1_{\{y \geq x\}}dF(y)a_{\theta_0}(x)dx
 \end{aligned}$$

Nun verwenden wir Fubini und können die Integrale wieder zusammenfassen. Dies führt zu:

$$\begin{aligned}
 E_{\theta_0}(1_{\{T < D \leq U\}} \ln(\frac{a_{\theta_0}(D)}{a_{\theta_1}(D)})) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{y \geq x\}} \ln(\dots) a_{\theta_0}(x) dx [dG(y) - dF(y)] \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln(\dots) a_{\theta_0}(x) dx \right) [dG(y) - dF(y)]
 \end{aligned}$$

8.4. Die Kullback-Leibler-Information bei Doppelzensierung

Da die Zufallsvariable D nur in dem Intervall $(T, U]$ direkt beobachtet werden kann, sollte dieses Modell einerseits eine kleinere Kullback-Leibler-Information als die Modelle der Rechts- bzw. Linkszensierung besitzen. Andererseits sollte es aber eine größere Kullback-Leibler-Information als das Modell der Intervallzensierung Typ II vorweisen, da in diesem Modell D niemals beobachtet werden kann. Dies werden wir ebenfalls im dreizehnten Kapitel verifizieren.

Wohldefiniiertheit und Eindeutigkeitsvoraussetzungen

Die Kullback-Leibler-Information in diesem Modell ist gegeben als

$$K_{F,G}^{DC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] dG(y) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP \right) [dG(y) - dF(y)]$$

Lemma 8.2. *Wir haben $0 \leq K_{F,G}^{DC} \leq \infty$ und $K_{F,G}^{DC}$ ist wohldefiniert.*

Beweis. Durch Verwendung der Taylorformel ergibt sich:

$$K_{F,G}^{DC}(Q, P) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q(y)}{P(y)} - 1 + \frac{1}{2\Delta_1(y)} \left(\frac{Q(y)}{P(y)} - 1 \right)^2 \right] P(y) dF(y) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} - 1 + \frac{1}{2\Delta_2(y)} \left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} - 1 \right)^2 \right] (1 - P(y)) dG(y) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{(-\infty, y]} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 + \frac{1}{2\Delta_3(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 \right) dP(x) \right] [dG(y) - dF(y)] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\Delta_1} \left(\frac{Q(y)}{P(y)} - 1 \right)^2 P(y) dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\Delta_2} \left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} - 1 \right)^2 (1 - P(y)) dG(y) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(-\infty, y]} \frac{1}{2\Delta_3(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 dP(x) [dG(y) - dF(y)] \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{(Q(y) - P(y))} dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{(1 - Q(y) + P(y) - 1)} dG(y) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \cancel{(Q(y) - P(y))} [dG(y) - dF(y)]$$

8. Doppelzensierung

Um die Behauptung zu beweisen, wird gezeigt werden, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \frac{1}{2\Delta_3(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 dP(x) \right) [dG(y) - dF(y)] \geq 0$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \frac{1}{2\Delta_3(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 dP(x) \right) [dG(y) - dF(y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{x \leq y\}} \frac{1}{2\Delta_3(x)} (\cdot)^2 dP(x) dG(y) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} 1_{\{x \leq y\}} \frac{1}{2\Delta_3(x)} (\cdot)^2 dP(x) dF(y) \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Satzes von Fubini gelangen wir zu:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \frac{1}{2\Delta_3(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 dP(x) \right) [dG(y) - dF(y)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (1 - G_-(x)) \frac{1}{2\Delta_3(x)} (\cdot)^2 dP(x) \\ &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - F_-(x)) \frac{1}{2\Delta_3(x)} (\cdot)^2 dP(x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(F_-(x) - G_-(x))}_{\geq 0} \frac{1}{2\Delta_3(x)} (\cdot)^2 dP(x) \end{aligned}$$

Damit ist der Beweis abgeschlossen. □

Wir definieren im Modell der Doppelzensierung nun die folgenden Mengen:

$$A_{DC}^1 = \left\{ x : \frac{dQ}{dP}(x) \neq 1 \right\} \quad \text{und} \quad A_{DC}^2 = \{ x : Q(x) \neq P(x) \}$$

8. Doppelzensierung

sowie $B_{DC} = \{x : F_-(x) - G_-(x) > 0\}$

Hiermit werden wir im folgenden Lemma zeigen, unter welchen Voraussetzungen $K_{F,G}^{DC}(Q, P) > 0$ ist.

Lemma 8.3. *Wir haben für $Q \ll P$:*

$$K_{F,G}^{DC} > 0 \iff F(A_{DC}^2) > 0 \text{ oder } G(A_{DC}^2) > 0 \text{ oder } P(A_{DC}^1 \cap B_{DC}) > 0$$

Beweis. Es sei $F(A_{DC}^2) > 0$ oder $G(A_{DC}^2) > 0$ oder $P(A_{DC}^1 \cap B_{DC}) > 0$.

Damit gilt:

$$\begin{aligned} K_{F,G}^{DC}(Q, P) &= \int_{A_{DC}^2} \underbrace{\frac{1}{2\Delta_1(y)} \left(\frac{Q(y)}{P(y)} - 1\right)^2}_{>0} \underbrace{P(y)}_{>0 \text{ auf } A_{DC}^2} dF(y) \\ &+ \int_{A_{DC}^2} \underbrace{\frac{1}{2\Delta_2(y)} \left(\frac{1-Q(y)}{1-P(y)} - 1\right)^2}_{>0} \underbrace{(1-P(y))}_{>0 \text{ auf } A_{DC}^2} dG(y) \\ &+ \underbrace{\int_{A_{DC}^2} \frac{1}{2\Delta_1(y)} \left(\frac{Q(y)}{P(y)} - 1\right)^2 P(y) dF(y)}_{=0} \\ &+ \underbrace{\int_{A_{DC}^2} \frac{1}{2\Delta_2(y)} \left(\frac{1-Q(y)}{1-P(y)} - 1\right)^2 (1-P(y)) dG(y)}_{=0} \\ &+ \int_{A_{DC}^1} \underbrace{\frac{1}{2\Delta_3(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1\right)^2}_{>0} (F_-(x) - G_-(x)) dP(x) \\ &+ \underbrace{\int_{A_{DC}^1} \frac{1}{2\Delta_3(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1\right)^2 (F_-(x) - G_-(x)) dP(x)}_{=0} \\ &> 0, \quad \text{da entweder } F(A_{DC}^2) > 0 \text{ oder } G(A_{DC}^2) > 0 \text{ oder } P(A_{DC}^1 \cap B_{DC}) > 0 \end{aligned}$$

8. Doppelzensierung

Um die Gegenrichtung zu beweisen, nehmen wir $F(A_{DC}^2) = 0$ sowie $G(A_{DC}^2) = 0$ und

$P(A_{DC}^1 \cap B_{DC}) = 0$ an. Dann ist

$$\begin{aligned}
 K_{F,G}^{DC}(Q, P) &= \underbrace{\int_{A_{DC}^2} \frac{1}{2\Delta_1(y)} \left(\frac{Q(y)}{P(y)} - 1 \right)^2 P(y) dF(y)}_{=0 \text{ wegen } F(A_{DC}^2)=0} \\
 &+ \underbrace{\int_{A_{DC}^2} \frac{1}{2\Delta_2(y)} \left(\frac{1-Q(y)}{1-P(y)} - 1 \right)^2 (1-P(y)) dG(y)}_{=0 \text{ weil } G(A_{DC}^2)=0} \\
 &+ \int_{A_{DC}^1} \frac{1}{2\Delta_3(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 (F_-(x) - G_-(x)) dP(x) \\
 &+ \underbrace{\int_{A_{DC}^2} \frac{1}{2\Delta_1(y)} \left(\frac{Q(y)}{P(y)} - 1 \right)^2 P(y) dF(y)}_{=0 \text{ da } Q(y)=P(y)} \\
 &+ \underbrace{\int_{A_{DC}^2} \frac{1}{2\Delta_2(y)} \left(\frac{1-Q(y)}{1-P(y)} - 1 \right)^2 (1-P(y)) dG(y)}_{=0 \text{ bedingt durch } Q(y)=P(y)} \\
 &+ \underbrace{\int_{A_{DC}^1} \frac{1}{2\Delta_3(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 (F_-(x) - G_-(x)) dP(x)}_{=0, \text{ denn } \frac{dQ}{dP}=1} \\
 &= \underbrace{\int_{A_{DC}^1 \cap B_{DC}} \frac{1}{2\Delta_3(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 (F_-(x) - G_-(x)) dP(x)}_{=0 \text{ aufgrund der Annahme, dass } P(A_{DC}^1 \cap B_{DC})=0} \\
 &+ \int_{A_{DC}^1 \cap \overline{B_{DC}}} \frac{1}{2\Delta_3(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 \underbrace{(F_-(x) - G_-(x))}_{=0 \text{ auf } \overline{B_{DC}}} dP(x) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

9. Mittelzensierung

9.1. Modellbeschreibung

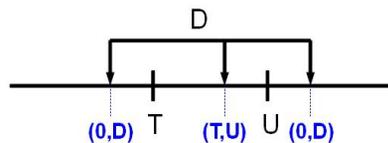
Die Modellierung der Zufallsvariablen D, T und U gleicht der Modellierung im vorherigen Kapitel. In einer Studie ist für jeden Probanden der Vektor

$$O = (Z, 1_{\{D \leq T\}}, 1_{\{D \leq U\}})$$

mit $\mu = 1_{\{D \leq T\}}$ und $\gamma = 1_{\{D \leq U\}}$

(wobei $T \leq U$ f.s.) gegeben. Hierbei ist

$$Z = \begin{cases} (0, D) & \text{falls } D \notin (T, U] \\ (T, U) & \text{sonst} \end{cases}$$



Bemerkung:

Die Modelle der Mittelzensierung und der Intervallzensierung Typ II sind die einzigen Zensierungsmodelle dieser Arbeit, bei denen Z als ein Vektor von Zufallsvariablen beobachtet wird. Dies führt uns zur Verwendung von mehrdimensionalen Verteilungen bei der Bestimmung der Kullback-Leibler-Information. Gleichzeitig stellt sich die Frage, ob die Verwendung von mehrdimensionalen Verteilungen einen Informationsgewinn oder Informationsverlust bedeutet.

9.2. Likelihood-Funktion bei Mittelzensierung

Im Modell der Mittelzensierung beobachten wir zweidimensionale Zufallsvektoren. Es gilt für diese $(Z_i)_{i=1,\dots,n}$ entweder $Z_i = (0, D_i)$ oder $Z_i = (T_i, U_i)$. Die Zufallsvariable D möge aus einer parametrischen Familie $\mathcal{A}_\theta = \{A_\theta | \theta \in \Theta\}$ von Verteilungsfunktionen stammen.

Aufgrund der Indikatorfunktionen und der Modellvoraussetzung ($T_i \leq U_i$ f.s.) ergeben sich wieder drei verschiedene Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} 1. \quad P(Z_i \leq \underline{s}, D_i \leq T_i, D_i \leq U_i) &= P((0, D_i) \leq (s_1, s_2), D_i \leq T_i) = P(D_i \leq s_2, D_i \leq T_i) \\ &= P(D_i \leq s_2, D_i \leq T_i) \\ &= \int_{[0, s_2]} (1 - F_-(y)) a_\theta(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad P(Z_i \leq \underline{s}, D_i > T_i, D_i \leq U_i) &= P((T_i, U_i) \leq (s_1, s_2), D_i > T_i, D_i \leq U_i) \\ &= P((T_i, U_i) \leq (s_1, s_2), D_i \leq U_i) - P((T_i, U_i) \leq (s_1, s_2), D_i \leq T_i) \\ &= \int_B [A_\theta(y) - A_\theta(x)] dH(x, y) \end{aligned}$$

$$\text{mit } B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq s_1 \text{ und } y \leq s_2\}$$

$$3. \quad P(Z_i \leq \underline{s}, D_i > T_i, D_i > U_i) = P(D_i \leq s_2, D_i > U_i) = \int_{[0, s_2]} G_-(y) a_\theta(y) dy$$

9. Mittelzensierung

Damit wird wieder die Likelihood-Funktion bestimmt:

$$L_n^{MC}(\theta) = \prod_{i=1}^n \left[(a_\theta(D_i))^{\mu_i} (a_\theta(D_i))^{(1-\gamma_i)} (A_\theta(U_i) - A_\theta(T_i))^{(1-\mu_i)\gamma_i} \right]$$

Wir definieren hiermit die Kullback-Leibler-Information für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P mit $Q \ll P$ (sowie $D \sim Q$) als:

$$\begin{aligned} K_{F,G}^{MC}(Q, P) &= E_Q \left[\mu \cdot \ln \left(\frac{dQ}{dP}(D) \right) + (1-\mu) \cdot \gamma \cdot \ln \left(\frac{Q(U) - Q(T)}{P(U) - P(T)} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1-\gamma) \cdot \ln \left(\frac{dQ}{dP}(D) \right) \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{(-\infty, t]} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP + \int_{(u, \infty)} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP \right. \\ &\quad \left. + \ln \left[\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right] (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u) \end{aligned}$$

Bemerkung:

Jammalamadaka und Mangalam (2003) haben im Modell der Mittelzensierung den Nicht-parametrischen Maximum-Likelihood-Schätzer der Verteilungsfunktion von D bestimmt.

9.3. Die Kullback-Leibler-Information bei Mittelzensierung

Wohldefiniiertheit und Eindeutigkeitsvoraussetzungen

Im vorherigen Abschnitt haben wir zuerst die Likelihood-Funktion und anschließend die Kullback-Leibler-Information bestimmt. Nun wollen wir das Folgende zeigen:

Lemma 9.1. $K_{F,G}^{MC}$ ist wohldefiniert und es gilt $0 \leq K_{F,G}^{MC} \leq \infty$.

9. Mittelzensierung

Beweis. Durch Verwendung der Taylorformel ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 & K_{F,G}^{MC}(Q, P) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_{(-\infty, t]} \frac{1}{2\Delta_1(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 dP(x) + \int_{(u, \infty)} \frac{1}{2\Delta_2(x)} \left(\frac{dQ}{dP}(x) - 1 \right)^2 dP(x) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2\Delta_3(t, u)} \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} - 1 \right)^2 (P(u) - P(t)) \right] dH(t, u) \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{[Q(t) - P(t) + 1 - Q(u) - 1 + P(u) + Q(u) - Q(t) - P(u) + P(t)]}_{=0} dH(t, u) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

□

Jetzt definieren wir die nachstehenden Mengen:

$$A_{MC} := \left\{ x : \frac{dQ}{dP}(x) \neq 1 \right\} \quad , \quad B_{MC}^1 := \{ x : F_-(x) < 1 \} \quad \text{und} \quad B_{MC}^2 := \{ x : G_-(x) > 0 \}$$

$$\text{sowie } C := \{ (x, y) : Q(x) - Q(y) \neq P(x) - P(y) \}$$

Lemma 9.2. *Für die Kullback-Leibler-Information gilt, falls $Q \ll P$:*

$$K_{F,G}^{MC}(Q, P) > 0 \quad \iff \quad P(A_{MC} \cap B_{MC}^1) > 0 \text{ oder } P(A_{MC} \cap B_{MC}^2) > 0 \text{ oder } H(C) > 0$$

Beweis. Wir werden unser Vorgehen bei den vorherigen Zensierungsmodellen wiederholen und beginnen mit

9. Mittelzensierung

” \Leftarrow ”:

$$\begin{aligned}
& K_{F,G}^{MC}(Q, P) \\
&= \int_{A_{MC}} (1 - F_-) \frac{1}{2\Delta_1} \left(\frac{dQ}{dP} - 1 \right)^2 dP + \int_{A_{MC}} G_- \frac{1}{2\Delta_2} \left(\frac{dQ}{dP} - 1 \right)^2 dP \\
&+ \int_{\mathbb{R}^2} \left[\frac{1}{2\Delta_3(t, u)} \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} - 1 \right)^2 (P(u) - P(t)) \right] dH(t, u) \\
&+ \int_{A_{MC}} (1 - F_-) \frac{1}{2\Delta_1} \underbrace{\left(\frac{dQ}{dP} - 1 \right)^2}_{=0} dP + \int_{A_{MC}} G_- \frac{1}{2\Delta_2} \underbrace{\left(\frac{dQ}{dP} - 1 \right)^2}_{=0} dP \\
&= \int_{A_{MC} \cap B_{MC}^1} \underbrace{(1 - F_-) \frac{1}{2\Delta_1} \left(\frac{dQ}{dP} - 1 \right)^2}_{>0} dP + \int_{A_{MC} \cap \overline{B_{MC}^1}} \underbrace{(1 - F_-) \frac{1}{2\Delta_1} \left(\frac{dQ}{dP} - 1 \right)^2}_{=0, \text{ da } 1 - F_- = 0 \text{ auf } \overline{B_{MC}^1}} dP \\
&+ \int_{A_{MC} \cap B_{MC}^2} \underbrace{G_- \frac{1}{2\Delta_1} \left(\frac{dQ}{dP} - 1 \right)^2}_{>0} dP + \int_{A_{MC} \cap \overline{B_{MC}^2}} \underbrace{G_- \frac{1}{2\Delta_1} \left(\frac{dQ}{dP} - 1 \right)^2}_{=0 \text{ wegen } G_- = 0 \text{ auf } \overline{B_{MC}^2}} dP \\
&+ \int_C \left[\frac{1}{2\Delta_3(t, u)} \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} - 1 \right)^2 (P(u) - P(t)) \right] dH(t, u) \\
&\quad \left[>0, \text{ denn auf } C \text{ haben wir } P(u) \neq P(t) \text{ (} Q \ll P \text{)} \right] \\
&+ \int_{\overline{C}} \left[\frac{1}{2\Delta_3(t, u)} \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} - 1 \right)^2 (P(u) - P(t)) \right] dH(t, u) \\
&\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\geq 0} \\
&> 0
\end{aligned}$$

weil entweder $P(A_{MC} \cap B_{MC}^1) > 0$ oder $P(A_{MC} \cap B_{MC}^2) > 0$ oder $H(C) > 0$.

” \Rightarrow ”: Wir treffen die Annahmen, dass $P(A_{MC} \cap B_{MC}^1) = 0, P(A_{MC} \cap B_{MC}^2) = 0$ und

9. Mittelzensierung

$H(C) = 0$. Damit folgt:

$$\begin{aligned}
 K_{F,G}^{MC}(Q, P) &= \int_{A_{MC}} (1 - F_-) \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP + \int_{A_{MC}} \overbrace{(1 - F_-) \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP}}^{=1} dP \\
 &+ \int_{A_{MC}} G_- \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP + \int_{A_{MC}} \overbrace{G_- \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP}}^{=1} dP \\
 &+ \int_{\bar{C}} \left[\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) \right] dH(t, u) \\
 &+ \int_{\bar{C}} \left[\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) \right] dH(t, u) \quad \text{wegen } H(C) = 0 \\
 &= \underbrace{\int_{A_{MC} \cap B_{MC}^1} (1 - F_-) \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP}_{=0 \text{ weil } P(A_{MC} \cap B_{MC}^1) = 0} + \int_{A_{MC} \cap \bar{B}_{MC}^1} \overbrace{(1 - F_-) \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP}}^{=0} dP \\
 &+ \underbrace{\int_{A_{MC} \cap B_{MC}^2} G_- \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP}_{=0 \text{ bedingt durch } P(A_{MC} \cap B_{MC}^2) = 0} + \int_{A_{MC} \cap \bar{B}_{MC}^2} \overbrace{G_- \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP}}^{=0} dP \\
 &+ \int_{\bar{C}} \left[\underbrace{\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t))}_{=0 \text{ auf } \bar{C}} \right] dH(t, u) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Wir haben für das letzte Integral benutzt, dass $Q(u) - Q(t) = P(u) - P(t)$ auf $\bar{C} = \{(x, y) : Q(x) - Q(y) = P(x) - P(y)\}$. □

10. Survival/Sacrifice Model

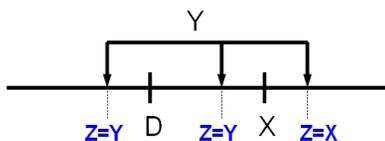
10.1. Modellbeschreibung

Die interessierende Größe, z.B. der Ausbruchzeitpunkt einer Krankheit, wird durch die Zufallsvariable D modelliert. Die beobachtbare Zufallsvariable $Z = \min(X, Y)$ stellt zusammen mit den Indikatorfunktionen $\delta = 1_{\{X \leq Y\}}$ und $\mu = 1_{\{D \leq Y\}}$ die Information bereit. Hierbei bezeichnet Y die Zensierungsvariable und X den Tod durch die Krankheit. Deshalb treffen wir die Annahme, dass in diesem Modell $D \leq X$ f.s.. Hierdurch ergeben sich drei mögliche Konstellationen:

$$\delta = 1, (\mu = 1) \iff D \leq X \leq Y$$

$$\delta = 0, \mu = 1 \iff D \leq Y < X$$

$$(\delta = 0), \mu = 0 \iff Y < D \leq X$$



Bemerkungen:

- Die Verteilungsfunktion von D bezeichnen wir wieder mit A sowie die Verteilungsfunktionen von X und Y mit F bzw. G . Aufgrund der Voraussetzung, dass $D \leq X$ f.s., haben wir $A(x) \geq F(x) \quad \forall x$. Außerdem setzen wir voraus, dass (D, X) unabhängig von Y ist.
- Dieses Modell beinhaltet das Current Status Model für $X \sim F = \delta_\infty$. In dieser Situation ist die untersuchte Krankheit somit nicht tödlich.
- Unter der Annahme, dass bei jedem Individuum die Krankheit zu Beginn der Untersuchung bereits ausgebrochen ist (also $D \sim A = \delta_0$), erhalten wir das Modell der Rechtszensierung. Es gilt aber zu bedenken, dass in dieser Situation die Zufallsvariable X die Variable von Interesse widerspiegelt.
- Da das Modell der Rechtszensierung sowie das Current Status Model im Survival/Sacrifice Model enthalten sind, stellt sich die Frage, welches der erwähnten Modelle eine höhere oder die höchste Kullback-Leibler-Information besitzt. Wir werden diese Frage im dreizehnten Kapitel zu beantworten versuchen.
- Das Survival/Sacrifice Model ist ein wichtiger Bestandteil der Survival Analysis geworden. Dies hat sich in den letzten Jahrzehnten durch die immense Anzahl von Veröffentlichungen, die sich mit der Untersuchung des Ausbruchzeitpunkts einer Krankheit D befassen, gezeigt. Beispiele sind *Turnbull und Mitchell (1978)*, *Kodell und Nelson (1980)*, *Dinse und Lagakos (1982)*, *Kodell, Shaw und Johnson (1982)*, *Portier und Dinse (1987)*, *Van der Laan, Jewell und Peterson (1997)*, *Gomes (2008)* sowie *Ahn, Moon und Kodell (2008)*.

10.2. Martingaldarstellungen der Zählprozesse

Im Survival/Sacrifice Model wird die Zufallsvariable $Z = \min(X, Y) \sim H$ beobachtet. Die Zählprozesse dieses Modells sind

$$H_n^{ij,SS}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_k \leq t, \delta_k = i, \mu_k = j\}} \quad \text{für } i \leq j \quad \text{und } i, j \in \{0, 1\}$$

Die σ -Algebra, bezüglich derer diese Prozesse adaptiert sind, ist die Folgende:

$$\mathcal{F}_t = \sigma(1_{\{Z_i \leq s, X_i \leq Y_i, D_i \leq Y_i\}}, 1_{\{Z_i \leq s, X_i > Y_i, D_i \leq Y_i\}}, 1_{\{Z_i > s\}} : i = 1, \dots, n; s \leq t)$$

Um die Doob-Meyer-Zerlegung der obigen Zählprozesse zu erhalten, verwenden wir wieder die gleiche Vorgehensweise wie im vierten und sechsten Kapitel. Wir beginnen mit dem Zählprozess $H_n^{00,SS}$. Zuerst wird der bedingte Erwartungswert für $n = 1$ berechnet, und wir betrachten endlich viele $t_1 < \dots < t_m < t \equiv t_{m+1}$:

Lemma 10.1.

Wir haben für $1 \leq k \leq m + 1$:

$$\begin{aligned} E(1_{\{Z=X \wedge Y \leq t_k, D > Y, X > Y\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) &= E(1_{\{Y \leq t_k, D > Y\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \quad \text{da } D \leq X \text{ f.s.} \\ &= 1_{\{Y \leq t_{k-1}, D > Y\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{H^{00,SS}(t_k) - H^{00,SS}(t_{k-1})}{1 - H(t_{k-1})} \end{aligned}$$

Beweis. Die Bestimmung dieser bedingten Erwartung wird wie in den Abschnitten 4.2 sowie

10. Survival/Sacrifice Model

6.2 vollzogen. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned}
 E(1_{\{Z \leq t_k, D > Y, X > Y\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) &= E(1_{\{Y \leq t_k, D > Y\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\
 &= 1_{\{Y \leq t_{k-1}, D > Y\}} + E(1_{\{t_{k-1} < Y \leq t_k, D > Y\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\
 &= 1_{\{Y \leq t_{k-1}, D > Y\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{\int 1_{\{Z > t_{k-1}\}} 1_{\{t_{k-1} < Y \leq t_k, D > Y\}} dP}{P(Z > t_{k-1})} \\
 &= 1_{\{Y \leq t_{k-1}, D > Y\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{H^{00,SS}(t_k) - H^{00,SS}(t_{k-1})}{1 - H(t_{k-1})}
 \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung ist eine Konsequenz aus

$$\begin{aligned}
 H^{00,SS}(t) &= P(Z \leq t, \delta = 0, \mu = 0) \\
 &= P(Z \leq t, X > Y, D > Y) \\
 &= P(Y \leq t, D > Y)
 \end{aligned}$$

□

Durch Grenzübergang gelangen wir schließlich (siehe Abschnitt 6.2) zu den beiden folgenden Martingalprozessen bezüglich der σ -Algebra $(\mathcal{F}_t)_t$:

$$\begin{aligned}
 M_n^{00,SS}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^{00,SS}(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} dH^{00,SS} \right) \\
 &= \sqrt{n} \left(H_n^{00,SS}(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} (1 - A) dG \right) \tag{10.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 M_n^{01,SS}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^{01,SS}(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} dH^{01,SS} \right) \\
 &= \sqrt{n} \left(H_n^{01,SS}(t) - \int_{[0,t]} \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} (A - F) dG \right) \tag{10.2}
 \end{aligned}$$

Wir haben die Unabhängigkeit von (D, X) und Y ausgenutzt, um die Gleichungen (10.1) und

10. Survival/Sacrifice Model

(10.2) zu erhalten. Es gilt nämlich:

$$H^{00,SS}(t) = P(Z \leq t, D > Y) = P(Y \leq t, D > Y) = \int_{[0,t]} (1 - A)dG \quad (10.3)$$

sowie

$$\begin{aligned} H^{01,SS}(t) &= P(Y \leq t, D \leq Y < X) \\ &= \int_{[0,t]} P(D \leq y < X)dG(y) \\ &= \int_{[0,t]} [P(D \leq y) - P(X \leq y, D \leq y)]dG(y) \\ &= \int_{[0,t]} [A(y) - F(y)]dG(y) \end{aligned} \quad (10.4)$$

Im Survival/Sacrifice Model gilt $D \leq X$ f.s.. Hierdurch existiert nur ein Zählprozess für $\delta = 1$, der ungleich dem Nullprozess ist, da dadurch $\mu = 1$ impliziert wird. Es gilt somit in diesem Zensierungsmodell:

$$\begin{aligned} H_n^{10,SS}(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t, D_i > Y_i, X_i \leq Y_i\}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t, X_i \leq Y_i < D_i\}} \\ &= 0 \quad \text{da } D_i \leq X_i \quad \text{f.s.} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} H_n^{11,SS}(t) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t, D_i \leq Y_i, X_i \leq Y_i\}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq t, X_i \leq Y_i\}} \\ &= H_n^{1,SS}(t) \end{aligned}$$

10. Survival/Sacrifice Model

Dies hat aber zur Folge, dass Untersuchungen der Zufallsvariable von Interesse D für $\delta = 1$ nicht möglich sind.

Für den Prozess $H_n^{1,SS}$ haben wir die Doob-Meyer-Zerlegung bereits im vierten Kapitel angegeben:

$$\begin{aligned} M_n^{1,SS}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^{1,SS}(t) - \int_0^t \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} dH^{1,SS} \right) \\ &= \sqrt{n} \left(H_n^{1,SS}(t) - \int_0^t \frac{1 - H_{n-}}{1 - F_-} dF \right) \end{aligned}$$

Dieses Martingal kann also nur für das Testen von Hypothesen bezüglich der Verteilungsfunktion F von X verwendet werden. Aussagen über die Verteilung von D sind nicht möglich.

In *Stute (1997)* werden Martingalstrukturen in der Regression untersucht. Durch Verwendung dieser Ideen können wir einen Martingalprozess angeben, der es uns ermöglicht, Hypothesen bezüglich der Verteilungsfunktion A zu testen:

$$\begin{aligned} D_n^{SS}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^{00,SS}(t) - \int_0^t \frac{1 - A}{1 - F} dH_n^{0,SS} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t\}} \left[1_{\{D_i > Y_i\}} 1_{\{X_i > Y_i\}} - \frac{1 - A(Y_i)}{1 - F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq t\}} \left[1_{\{D_i > Y_i\}} - \frac{1 - A(Y_i)}{1 - F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \end{aligned}$$

Bemerkung:

Die Martingaleigenschaft des Prozesses D_n^{SS} folgt aus den Doob-Meyer-Zerlegungen der beiden Prozessteile, da diese Prozesse den selben Kompensator besitzen. Weiterhin ist der

10. Survival/Sacrifice Model

Prozess zentriert, da mit $H^{0,SS}(t) = \int_0^t (1 - F)dG$ folgt:

$$\begin{aligned}
 E[D_n^{SS}(t)] &= E\left[\sqrt{n} \left(H_n^{00,SS}(t) - \int_0^t \frac{1-A}{1-F} dH_n^{0,SS} \right)\right] \\
 &= \sqrt{n} \cdot \left(H^{00,SS}(t) - \int_0^t \frac{1-A}{1-F} dH^{0,SS} \right) \\
 &= \sqrt{n} \cdot \left(H^{00,SS}(t) - \int_0^t \frac{(1-A)}{(1-F)} (1-F)dG \right) \\
 &= \sqrt{n} \cdot \left(H^{00,SS}(t) - \int_0^t (1-A)dG \right) \\
 &\stackrel{(10.3)}{=} 0
 \end{aligned}$$

10.3. Hauptkomponenten des Prozesses D_n^{SS}

Im vorherigen Abschnitt haben wir die Martingaleigenschaft des Prozesses D_n^{SS} gezeigt.

Für diesen Prozess gilt für $s \leq t$:

$$\begin{aligned}
 D_n^{SS}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^{00,SS}(t) - \int_0^t \frac{1-A}{1-F} dH_n^{0,SS} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq t\}} \left[1_{\{D_i > Y_i\}} - \frac{1-A(Y_i)}{1-F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \\
 \text{mit } Cov(D_n^{SS}(s), D_n^{SS}(t)) &= \zeta(s) \quad \text{und } \zeta(s) := \int_{[0,s]} \frac{A-F}{1-F} dH^{00}
 \end{aligned}$$

Die Kovarianzfunktion wollen wir nun bestimmen.

Lemma 10.2. *Es gilt für $s \leq t$:*

$$Cov(D_n^{SS}(s), D_n^{SS}(t)) = \int_{[0,s]} \frac{A-F}{1-F} dH^{00} = \zeta(s)$$

10. Survival/Sacrifice Model

Beweis. Wir haben:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(D_n^{SS}(s), D_n^{SS}(t)) &= E(1_{\{Y \leq s\}} 1_{\{Y \leq t\}} \left[1_{\{D > Y\}} - \frac{1 - A(Y)}{1 - F(Y)} 1_{\{X > Y\}} \right]^2) \\
 &= E(1_{\{Y \leq s\}} \left[1_{\{D > Y\}} - \frac{1 - A(Y)}{1 - F(Y)} 1_{\{X > Y\}} \right]^2) \\
 &= E(1_{\{Y \leq s\}} [1_{\{D > Y\}} - 2 \cdot 1_{\{D > Y, X > Y\}} \frac{1 - A(Y)}{1 - F(Y)} + (\frac{1 - A(Y)}{1 - F(Y)})^2 1_{\{X > Y\}}])
 \end{aligned}$$

Wir berechnen diesen Erwartungswert und erhalten:

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(D_n^{SS}(s), D_n^{SS}(t)) &= \int_{[0,s]} (1 - A(y)) dG(y) - 2 \cdot \int_{[0,s]} \frac{(1 - A(y))^2}{1 - F(y)} dG(y) \\
 &\quad + \int_{[0,s]} \frac{(1 - A(y))^2}{1 - F(y)} dG(y) \\
 &= \int_{[0,s]} (1 - A(y)) dG(y) - \int_{[0,s]} \frac{(1 - A(y))^2}{1 - F(y)} dG(y) \\
 &\stackrel{(10.3)}{=} \int_{[0,s]} \frac{A(y) - F(y)}{1 - F(y)} dH^{00}(y) \\
 &= \zeta(s)
 \end{aligned}$$

□

Somit existiert für $D_n^{SS}(t)$ mit Theorem 3.2, wenn wir alle Verteilungen als stetig vorausset-

10. Survival/Sacrifice Model

zen, für $\psi = \zeta$ auf $[0, T]$ (falls $\psi(T) > 0$) die folgende Darstellung:

$$D_n^{SS}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle D_n^{SS}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} f_j(\tilde{\psi}(t)) \quad \text{mit} \quad \langle D_n^{SS}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} := \int_0^T D_n^{SS}(t) f_j(\tilde{\psi}(t)) d\tilde{\psi}(t)$$

Hierbei gilt für die Hauptkomponenten:

$$\begin{aligned} \alpha_{jn}^{SS} &= \langle D_n^{SS}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \\ &= \int_0^T D_n^{SS}(s) f_j(\tilde{\psi}(s)) d\tilde{\psi}(s) \\ &= \int_0^1 D_n^{SS}(\tilde{\psi}^{-1}(s)) f_j(s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left[1_{\{D_i > Y_i\}} - \frac{1 - A(Y_i)}{1 - F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \int_0^1 1_{\{\tilde{\psi}(Y_i) \leq s\}} f_j(s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left[1_{\{D_i > Y_i\}} - \frac{1 - A(Y_i)}{1 - F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \int_{\tilde{\psi}(Y_i)}^1 f_j(s) ds \end{aligned}$$

Wir benutzen $f_j(s) = \sqrt{2} \sin(b_j s)$ mit $b_j = \frac{(2j-1)\pi}{2}$ und erhalten:

$$\alpha_{jn}^{SS} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^n \left[1_{\{D_i > Y_i\}} - \frac{1 - A(Y_i)}{1 - F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \cos(b_j \tilde{\psi}(Y_i))$$

10.4. Likelihood-Funktion im Survival/Sacrifice Model

Die Zufallsvariable D möge aus einer parametrischen Familie $\mathcal{A}_\theta = \{A_\theta | \theta \in \Theta\}$ von Verteilungsfunktionen stammen. Durch Betrachtung der Folge

$$(Z_i = \min(X_i, Y_i), \delta_i = 1_{\{X_i \leq Y_i\}}, \mu_i = 1_{\{D_i \leq Y_i\}})_{i=1, \dots, n}$$

im Survival/Sacrifice Model müssen wir, bedingt durch $D \leq X$ f.s., drei verschiedene Situationen unterscheiden:

1. $\delta = 1, \mu = 1$:

$$P(Z_i \leq t, X_i \leq Y_i, D_i \leq Y_i) = P(X_i \leq t, X_i \leq Y_i) = \int_0^t (1 - G) dF \quad (\text{ohne } A_\theta!)$$

2. $\delta = 0, \mu = 1$:

$$P(Z_i \leq t, X_i > Y_i, D_i \leq Y_i) = P(Y_i \leq t, D_i \leq Y_i < X_i) = \int_0^t (A_\theta - F) dG$$

3. $\delta = 0, \mu = 0$:

$$P(Z_i \leq t, X_i > Y_i, D_i > Y_i) = P(Y_i \leq t, D_i > Y_i) = \int_0^t (1 - A_\theta) dG$$

Durch Bestimmung der obigen Wahrscheinlichkeiten zeigt sich, dass in der ersten Situation die beiden Funktionen nicht von θ abhängen. Deshalb werden wir diese Terme, wie in den vorherigen Kapiteln, bei der Bestimmung der Likelihood-Funktion nicht berücksichtigen.

Wir erhalten:

$$L_n^{SS}(\theta) = \prod_{i=1}^n \left[(A_\theta(Y_i) - F(Y_i))^{(1-\delta_i)\mu_i} \cdot (1 - A_\theta(Y_i))^{(1-\mu_i)} \right]$$

10. Survival/Sacrifice Model

Wir definieren die Kullback-Leibler-Information für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P mit $D \sim Q$ und $Q \ll P$ wie folgt:

$$\begin{aligned} K_G^{SS}(Q, P) &:= E_Q \left[(1 - \delta) \cdot \mu \cdot \ln \left(\frac{Q(Y) - F(Y)}{P(Y) - F(Y)} \right) + (1 - \mu) \ln \left(\frac{1 - Q(Y)}{1 - P(Y)} \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln \left[\frac{Q(y) - F(y)}{P(y) - F(y)} \right] (Q(y) - F(y)) + (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \right) dG(y) \end{aligned}$$

Diese Definition beinhaltet wieder den Spezialfall für $Q = A_{\theta_0}$ und $P = A_{\theta_1}$:

$$\begin{aligned} K_G^{SS}(A_{\theta_0}, A_{\theta_1}) &= E_{\theta_0} \left[(1 - \delta) \cdot \mu \cdot \ln \left(\frac{A_{\theta_0}(Y) - F(Y)}{A_{\theta_1}(Y) - F(Y)} \right) + (1 - \mu) \ln \left(\frac{1 - A_{\theta_0}(Y)}{1 - A_{\theta_1}(Y)} \right) \right] \\ &= E_{\theta_0} \left[1_{\{X > Y\}} 1_{\{D \leq Y\}} \ln \left(\frac{A_{\theta_0}(Y) - F(Y)}{A_{\theta_1}(Y) - F(Y)} \right) + 1_{\{D > Y\}} \ln \left(\frac{1 - A_{\theta_0}(Y)}{1 - A_{\theta_1}(Y)} \right) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(D \leq y < X) \ln(\dots) dG(y) + \int_{-\infty}^{\infty} P(D > y) \ln(\dots) dG(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[(A_{\theta_0}(y) - F(y)) \ln \left(\frac{A_{\theta_0}(y) - F(y)}{A_{\theta_1}(y) - F(y)} \right) \right. \\ &\quad \left. + (1 - A_{\theta_0}(y)) \ln \left(\frac{1 - A_{\theta_0}(y)}{1 - A_{\theta_1}(y)} \right) \right] dG(y) \end{aligned}$$

Bemerkung:

Im Survival/Sacrifice Model ist eine Bestimmung der Kullback-Leibler-Information nur für Wahrscheinlichkeitsmaße P und Q möglich, für die das Folgende gilt:

$$Q(y) \geq F(y) \quad \forall y \quad \text{sowie} \quad P(y) \geq F(y) \quad \forall y$$

10.5. Die Kullback-Leibler-Information im Survival/Sacrifice Model

Wohldefiniertheit und Eindeutigkeitsvoraussetzungen

Unter der Voraussetzung, dass $Q(y) \geq F(y)$ sowie $P(y) \geq F(y) \quad \forall y$, gleicht die Kullback-Leibler-Information dieses Zensierungsmodells

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln \left[\frac{Q(y) - F(y)}{P(y) - F(y)} \right] (Q(y) - F(y)) + (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \right) dG(y)$$

Lemma 10.3. K_G^{SS} ist wohldefiniert und wir haben $0 \leq K_G^{SS} \leq \infty$.

Beweis. Durch die Taylorformel ergibt sich:

$$\begin{aligned} K_G^{SS}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{Q(y) - F(y)}{P(y) - F(y)} - 1 + \frac{1}{2\Delta_1(y)} \left(\frac{Q(y) - F(y)}{P(y) - F(y)} - 1 \right)^2 \right] (P(y) - F(y)) dG(y) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} - 1 + \frac{1}{2\Delta_2(y)} \left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} - 1 \right)^2 \right] (1 - P(y)) dG(y) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\Delta_1(y)} \left(\frac{Q(y) - F(y)}{P(y) - F(y)} - 1 \right)^2 (P(y) - F(y)) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2\Delta_2(y)} \left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} - 1 \right)^2 (1 - P(y)) \right) dG(y) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung folgt aus

$$Q \ll P \quad \text{und} \quad Q(y) \geq F(y) \quad \text{sowie} \quad P(y) \geq F(y) \quad \forall y$$

□

10. Survival/Sacrifice Model

Es existiert somit die folgende Darstellung der Kullback-Leibler-Information:

$$K_G^{SS}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\Delta_1} \left(\frac{Q-F}{P-F} - 1 \right)^2 (P-F) + \frac{1}{2\Delta_2} \left(\frac{1-Q}{1-P} - 1 \right)^2 (1-P) \right) dG \quad (10.5)$$

Wir definieren die Menge A_{SS} wie folgt:

$$A_{SS} := \{x : Q(x) \neq P(x)\}$$

Lemma 10.4. *Wir haben für $Q \ll P$:*

$$K_G^{SS}(Q, P) > 0 \iff G(A_{SS}) > 0$$

Beweis. Unter der Annahme, dass $G(A_{SS}) > 0$ folgt direkt $K_G^{SS}(Q, P) > 0$. Dies werden wir durch Verwendung von (10.5) verifizieren:

$$\begin{aligned} K_G^{SS}(Q, P) &= \int_{A_{SS}} \left(\frac{1}{2\Delta_1} \left(\frac{Q-F}{P-F} - 1 \right)^2 (P-F) + \underbrace{\frac{1}{2\Delta_2} \left(\frac{1-Q}{1-P} - 1 \right)^2 (1-P)}_{>0} \right) dG \\ &+ \underbrace{\int_{A_{SS}} \left(\frac{1}{2\Delta_1} \left(\frac{Q-F}{P-F} - 1 \right)^2 (P-F) + \frac{1}{2\Delta_2} \left(\frac{1-Q}{1-P} - 1 \right)^2 (1-P) \right) dG}_{\geq 0} \\ &> 0 \quad \text{da } G(A_{SS}) > 0 \text{ und } 1-P > 0 \text{ auf } A_{SS} \end{aligned}$$

10. Survival/Sacrifice Model

Nun sei $G(A_{SS}) = 0$ gegeben. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 K_G^{SS}(Q, P) &= \underbrace{\int_{A_{SS}} \left(\frac{1}{2\Delta_1} \left(\frac{Q-F}{P-F} - 1 \right)^2 (P-F) + \frac{1}{2\Delta_2} \left(\frac{1-Q}{1-P} - 1 \right)^2 (1-P) \right) dG}_{=0 \text{ wegen } G(A_{SS})=0} \\
 &+ \underbrace{\int_{\overline{A_{SS}}} \left(\frac{1}{2\Delta_1} \left(\frac{Q-F}{P-F} - 1 \right)^2 (P-F) + \frac{1}{2\Delta_2} \left(\frac{1-Q}{1-P} - 1 \right)^2 (1-P) \right) dG}_{=0, \text{ denn es ist } Q=P \text{ auf } \overline{A_{SS}}} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

□

11. Generalized Survival/Sacrifice Model

11.1. Modellbeschreibung

Das Generalized Survival/Sacrifice Model kann als eine Erweiterung des Survival/Sacrifice Model angesehen werden. Die interessierende Größe, z.B. der Ausbruchzeitpunkt einer Krankheit, wird ebenfalls durch die Zufallsvariable D modelliert. Die Information wird durch die Zufallsvariable $Z = \min(X, Y)$ zusammen mit den Indikatorfunktionen $\delta = 1_{\{X \leq Y\}}$ und $\mu = 1_{\{D \leq Z\}}$ bereitgestellt. Hierbei bezeichnet Y die Zensierungsvariable und X den Tod des Untersuchungsobjekts. Der Unterschied zum Survival/Sacrifice Model besteht also darin, dass nun der Indikator $1_{\{D \leq Z\}}$ anstelle des Indikators $1_{\{D \leq Y\}}$ verwendet wird. Außerdem beschreibt die Zufallsvariable X nicht mehr nur den Tod, der durch die Krankheit verursacht wird, sondern den "allgemeinen" Tod des Untersuchungsobjekts. Somit ist die Voraussetzung, dass $D \leq X$ f.s. **nicht** mehr erfüllt und wir müssen vier Situationen unterscheiden:

11. Generalized Survival/Sacrifice Model

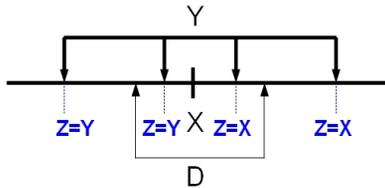
$$\delta = 1, \mu = 1 \iff D \leq X \leq Y$$

$$\delta = 1, \mu = 0 \iff X \leq Y \text{ und } X < D$$

$$\delta = 0, \mu = 1 \iff D \leq Y < X$$

$$\delta = 0, \mu = 0 \iff Y < D \text{ und } Y < X$$

$$(Y < \min(D, X) =: \tilde{D})$$



Bemerkungen:

- Die Verteilungsfunktionen der Zufallsvariablen D , X und Y werden wie im Survival/Sacrifice Model mit A , F und G bezeichnet.
- Das Generalized Survival/Sacrifice Model erscheint realistischer als das Survival/Sacrifice Model. Dies ist dadurch begründet, dass es in den meisten Untersuchungen nicht möglich ist, eine Entscheidung über die Todesursache eines Individuums zu treffen. Diese wird häufig von mehreren, oft unbekanntem, Faktoren beeinflusst.
- Durch die beobachtbare Zufallsvariable $Z = \min(X, Y)$ erhalten wir die Information, ob $X \leq Y$ oder $X > Y$. Somit kennen wir die Realisierung des Indikators $\delta = 1_{\{X \leq Y\}}$.

11. Generalized Survival/Sacrifice Model

Wir können aber ohne die Voraussetzung, dass $D \leq X$ f.s. nicht in jeder Situation erfahren, ob $D \leq Y$ oder $D > Y$. Gilt nämlich $Z = X$, so ist nur bekannt, ob $D \leq X$ oder $D > X$. In der Situation $D > X$ kann aber keine Aussage getroffen werden, ob $D \leq Y$ oder $D > Y$. Somit müssen wir in diesem Zensierungsmodell den Indikator $1_{\{D \leq Z\}}$ verwenden.

- Durch Definition einer neuen Zufallsvariable $\tilde{D} := \min(D, X)$ folgt $\tilde{D} \leq X$ f.s., und wir können Ergebnisse aus der Untersuchung des Survival/Sacrifice Model nutzen.

11.2. Martingaldarstellungen der Zählprozesse

Im vorherigen Abschnitt haben wir eine neue Zufallsvariable \tilde{D} eingeführt. Die Verteilungsfunktion dieser Variablen bezeichnen wir im Folgenden mit \tilde{A} .

Im Unterschied zu den bisherigen Zensierungsmodellen existieren im Generalized Survival/Sacrifice Model vier Zählprozesse:

$$H_n^{ij,GSS}(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{Z_k \leq t, \delta_k = i, \mu_k = j\}} \quad \text{für } i, j \in \{0, 1\}$$

Wir beginnen mit der Bestimmung der Doob-Meyer-Zerlegung der Zählprozesse $H_n^{00,GSS}$ und $H_n^{01,GSS}$ bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$ mit

$$\mathcal{F}_t = \sigma(1_{\{Z_i \leq s, X_i \leq Y_i, D_i \leq Z_i\}}, 1_{\{Z_i \leq s, X_i \leq Y_i, D_i > Z_i\}}, 1_{\{Z_i \leq s, X_i > Y_i, D_i \leq Z_i\}}, 1_{\{Z_i > s\}} : i = 1, \dots, n; s \leq t)$$

Hierzu wiederholen wir unser Vorgehen des letzten Kapitels. Zuerst wird der bedingte Er-

11. Generalized Survival/Sacrifice Model

wartungswert für $n = 1$ bestimmt und wir betrachten wieder endlich viele $t_1 < \dots < t_m < t \equiv t_{m+1}$:

Lemma 11.1.

Wir haben für $1 \leq k \leq m + 1$:

$$E(1_{\{Z=X \wedge Y \leq t_k, X > Y, D > Z\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) = 1_{\{Y \leq t_{k-1}, \tilde{D} > Y\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{H^{00,GSS}(t_k) - H^{00,GSS}(t_{k-1})}{1 - H(t_{k-1})}$$

Beweis. Durch Verwendung der Zufallsvariablen \tilde{D} sowie der Messbarkeit und Beachtung der Struktur der σ -Algebra erhalten wir:

$$\begin{aligned} E(1_{\{Z \leq t_k, X > Y, D > Z\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) &= E(1_{\{Y \leq t_k, X > Y, D > Y\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ &= E(1_{\{Y \leq t_k, \tilde{D} > Y\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ &= 1_{\{Y \leq t_{k-1}, \tilde{D} > Y\}} + E(1_{\{t_{k-1} < Y \leq t_k, \tilde{D} > Y\}} | \mathcal{F}_{t_{k-1}}) \\ &= 1_{\{Y \leq t_{k-1}, \tilde{D} > Y\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{\int 1_{\{Z > t_{k-1}\}} 1_{\{t_{k-1} < Y \leq t_k, \tilde{D} > Y\}} dP}{P(Z > t_{k-1})} \\ &= 1_{\{Y \leq t_{k-1}, \tilde{D} > Y\}} + 1_{\{Z > t_{k-1}\}} \frac{H^{00,GSS}(t_k) - H^{00,GSS}(t_{k-1})}{1 - H(t_{k-1})} \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt aus:

$$\begin{aligned} H^{00,GSS}(t) &= P(Z \leq t, X > Y, D > Z) \\ &= P(Y \leq t, X > Y, D > Y) \\ &= P(Y \leq t, \tilde{D} > Y) \\ &= \int_0^t (1 - \tilde{A}) dG \end{aligned} \tag{11.1}$$

□

11. Generalized Survival/Sacrifice Model

Indem wir wie im zehnten Kapitel vorgehen, ergibt sich schließlich:

$$\begin{aligned}
 M_n^{00,GSS}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^{00,GSS}(t) - \int_0^t \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} dH^{00,GSS} \right) \\
 &\stackrel{(11.1)}{=} \sqrt{n} \left(H_n^{00,GSS}(t) - \int_0^t \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} (1 - \tilde{A}) dG \right) \\
 M_n^{01,GSS}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^{01,GSS}(t) - \int_0^t \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} dH^{01,GSS} \right) \\
 &= \sqrt{n} \left(H_n^{01,GSS}(t) - \int_0^t \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} (\tilde{A} - F) dG \right)
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass

$$\begin{aligned}
 H^{01,GSS}(t) &= P(Y \leq t, D \leq Y < X) \\
 &= \int_0^t [P(X > y) - P(X > y, D > y)] dG(y) \\
 &= \int_0^t [(1 - F(y)) - (1 - \tilde{A}(y))] dG(y) \\
 &= \int_0^t (\tilde{A}(y) - F(y)) dG(y)
 \end{aligned}$$

Leider bleibt die Martingaleigenschaft dieser Martingalprozesse wieder nicht erhalten, wenn wir die nichtparametrischen Schätzer der Verteilungs- und Subverteilungsfunktionen verwenden.

Deshalb stellen wir durch Verwendung der Ideen von *Stute (1997)* einen weiteren Martingal-

11. Generalized Survival/Sacrifice Model

prozess, den wir untersuchen werden, vor:

$$\begin{aligned}
 D_n^{GSS}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^{00}(t) - \int_0^t \frac{1 - \tilde{A}}{1 - F} dH_n^0 \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Z_i \leq t\}} \left[1_{\{D_i > Y_i, X_i > Y_i\}} - \frac{1 - \tilde{A}(Y_i)}{1 - F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq t\}} \left[1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - \frac{1 - \tilde{A}(Y_i)}{1 - F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right]
 \end{aligned}$$

Bemerkungen:

- Die Martingaleigenschaft des Prozesses D_n^{GSS} folgt wieder aus den Doob-Meyer-Zerlegungen der beiden Prozessteile, die den gleichen Kompensator besitzen.
- Wir werden im fünfzehnten Kapitel für diesen Prozess eine Transformation bereitstellen, die es uns ermöglicht, Goodness-of-Fit Tests durchzuführen.
- Die Doob-Meyer-Zerlegungen der Prozesse $H_n^{10,GSS}$ und $H_n^{11,GSS}$ können mit der gleichen Vorgehensweise wie für den Prozess $H_n^{00,GSS}$ bestimmt werden.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 M_n^{10,GSS}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^{10,GSS}(t) - \int_0^t \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} dH^{10,GSS} \right) \\
 M_n^{11,GSS}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^{11,GSS}(t) - \int_0^t \frac{1 - H_{n-}}{1 - H_-} dH^{11,GSS} \right)
 \end{aligned}$$

11.3. Hauptkomponenten des Prozesses D_n^{GSS}

In diesem Zensierungsmodell untersuchen wir den zentrierten Martingalprozess D_n^{GSS} mit

$$\begin{aligned} D_n^{GSS}(t) &= \sqrt{n} \left(H_n^{00}(t) - \int_0^t \frac{1 - \tilde{A}}{1 - F} dH_n^0 \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{Y_i \leq t\}} \left[1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - \frac{1 - \tilde{A}(Y_i)}{1 - F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \\ \text{wobei } Cov(D_n^{GSS}(s), D_n^{GSS}(t)) &= \xi(s \wedge t) \quad \text{mit } \xi(s) = \int_0^s \frac{\tilde{A} - F}{1 - F} dH^{00} \end{aligned}$$

Diese Kovarianzfunktion werden wir im nächsten Lemma verifizieren.

Lemma 11.2. *Es gilt mit $s \leq t$:*

$$Cov(D_n^{GSS}(s), D_n^{GSS}(t)) = \int_0^s \frac{\tilde{A} - F}{1 - F} dH^{00} = \xi(s)$$

Beweis. Wir haben:

$$\begin{aligned} &Cov(D_n^{GSS}(s), D_n^{GSS}(t)) \\ &= E(1_{\{Y \leq s\}} 1_{\{Y \leq t\}} \left[1_{\{\tilde{D} > Y\}} - \frac{1 - \tilde{A}(Y)}{1 - F(Y)} 1_{\{X > Y\}} \right]^2) \\ &= E(1_{\{Y \leq s\}} [1_{\{\tilde{D} > Y\}} - 2 \cdot 1_{\{\tilde{D} > Y, X > Y\}} \frac{1 - \tilde{A}(Y)}{1 - F(Y)} + (\frac{1 - \tilde{A}(Y)}{1 - F(Y)})^2 1_{\{X > Y\}}]) \\ &= \int_{[0, s]} (1 - \tilde{A}(y)) dG(y) - \int_{[0, s]} \frac{(1 - \tilde{A}(y))^2}{1 - F(y)} dG(y) \\ &\stackrel{(11.1)}{=} \int_{[0, s]} \frac{\tilde{A}(y) - F(y)}{1 - F(y)} dH^{00}(y) \\ &= \xi(s) \end{aligned}$$

□

11. Generalized Survival/Sacrifice Model

Somit existiert für $D_n^{GSS}(t)$ mit Theorem 3.2, wenn wir alle Verteilungen als stetig voraussetzen, für $\psi = \xi$ auf $[0, T]$ (falls $\psi(T) > 0$) die folgende Darstellung:

$$D_n^{GSS}(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \langle D_n^{GSS}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} f_j(\tilde{\psi}(t)) \quad \text{mit} \quad \langle D_n^{GSS}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} := \int_0^T D_n^{GSS}(t) f_j(\tilde{\psi}(t)) d\tilde{\psi}(t)$$

Hierbei gilt für die Hauptkomponenten:

$$\begin{aligned} \alpha_{jn}^{GSS} &= \langle D_n^{GSS}, f_j(\tilde{\psi}) \rangle_{\tilde{\psi}} \\ &= \int_0^T D_n^{GSS}(s) f_j(\tilde{\psi}(s)) d\tilde{\psi}(s) \\ &= \int_0^1 D_n^{GSS}(\tilde{\psi}^{-1}(s)) f_j(s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left[1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - \frac{1 - \tilde{A}(Y_i)}{1 - F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \int_0^1 1_{\{\tilde{\psi}(Y_i) \leq s\}} f_j(s) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left[1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - \frac{1 - \tilde{A}(Y_i)}{1 - F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \int_{\tilde{\psi}(Y_i)}^1 f_j(s) ds \end{aligned}$$

Wir benutzen abermals $f_j(s) = \sqrt{2} \sin(b_j s)$ mit $b_j = \frac{(2j-1)\pi}{2}$ und erhalten:

$$\alpha_{jn}^{GSS} = \sqrt{\frac{2}{n}} \cdot \frac{1}{b_j} \sum_{i=1}^n \left[1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - \frac{1 - \tilde{A}(Y_i)}{1 - F(Y_i)} 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \cos(b_j \tilde{\psi}(Y_i))$$

11.4. Likelihood-Funktion und Kullback-Leibler-Information im Generalized Survival/Sacrifice Model

In diesem Abschnitt werden wir zeigen, dass es uns ohne bestimmte Annahmen nicht möglich ist, die Likelihood-Funktion in diesem Zensierungsschema anzugeben.

Die Zufallsvariable D möge aus einer parametrischen Familie $\mathcal{A}_\theta = \{A_\theta | \theta \in \Theta\}$ von Verteilungsfunktionen stammen. In einer Studie mit n Untersuchungsobjekten ist der Vektor $(Z_i = \min(X_i, Y_i), \delta_i = 1_{\{X_i \leq Y_i\}}, \mu_i = 1_{\{D_i \leq Z_i\}})_{i=1, \dots, n}$ gegeben. Im Unterschied zu allen vorherigen Zensierungsmodellen müssen nun vier verschiedene Szenarien beachtet werden:

1.
$$P(Z_i \leq t, X_i > Y_i, D_i > Z_i) = P(Y_i \leq t, X_i > Y_i, D_i > Y_i)$$

$$= P(Y_i \leq t, \tilde{D}_i > Y_i) = \int_0^t [1 - \tilde{A}_\theta] dG$$
2.
$$P(Z_i \leq t, X_i > Y_i, D_i \leq Z_i) = P(Y_i \leq t, X_i > Y_i, D_i \leq Y_i) = \int_0^t [\tilde{A}_\theta - F] dG$$
3.
$$P(Z_i \leq t, X_i \leq Y_i, D_i > X_i) = P(X_i \leq t, X_i \leq Y_i, D_i > X_i)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(X_i \leq t \wedge y, X_i < D_i) dG(y)$$
4.
$$P(Z_i \leq t, X_i \leq Y_i, D_i \leq X_i) = P(X_i \leq t, D_i \leq X_i \leq Y_i)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P(X_i \leq t \wedge y, D_i \leq X_i) dG(y)$$

Die Gleichungen 3. und 4. können nicht wie die beiden ersten Gleichungen umgeformt und durch die Verteilungsfunktionen dargestellt werden. Außerdem enthalten selbst die Gleichungen 1. und 2. die Funktion \tilde{A}_θ anstelle der Funktion A_θ , an der wir interessiert sind. Dies ist durch die unbekannte Abhängigkeitsstruktur von D und X bedingt. Es müssten bedingte Verteilungen Verwendung finden. Somit können wir für dieses Zensierungsmodell die Likelihood-Funktion und folglich die Kullback-Leibler-Information nicht angeben.

11. *Generalized Survival/Sacrifice Model*

12. Weitere Zensierungsmodelle

In der Literatur existieren noch viele weitere Zensierungs- und Truncierungsmodelle. Wir wollen nun einige dieser Modelle nennen und kurz beschreiben:

- Typ-I-Zensierung:

In diesem Modell gibt es nur einen Zensierungszeitpunkt C für alle Variablen X_i .

Deshalb haben wir für die beobachtbaren Zufallsvariablen Z_i für $i = 1, \dots, n$:

$$Z_i = \min(X_i, C)$$

- Für das obige Modell existieren ebenfalls die folgenden Erweiterungen:

Jede der Variablen X_i hat entweder eine "eigene" feste Zensierungsvariable C_i oder es sind mehrere gemeinsame feste Zensierungszeitpunkte vorhanden. Ein weiteres Modell macht die Annahme, dass zu jedem Zensierungszeitpunkt mehrere Untersuchungsobjekte (X_i 's) aus der Studie entfernt werden. In der Literatur werden diese Modelle Progressive Typ-I-Zensierung oder Verallgemeinerte Typ-I-Zensierung genannt.

12. Weitere Zensierungsmodelle

- Typ-II-Zensierung:

Wir betrachten eine Studie mit n Untersuchungseinheiten. Bei Typ-II-Zensierung wird diese Studie fortgesetzt, bis eine bestimmte Anzahl der Untersuchungseinheiten “ausfällt”, siehe *Lim und Park (2007)*.

- Die meisten Untersuchungen zur Survival Analysis beinhalten Modelle, die durch Erweiterung des Current Status Model entstehen. Beispiele hierfür sind:

Intervallzensierung mit kontinuierlichen Markierungen oder Intervallzensierung und konkurrierende Risiken, vergleiche *Groeneboom, Wellner und Maathuis (2008)*.

- Truncierung:

Truncierungsmodelle unterscheiden sich erheblich von den bisher vorgestellten Modellen. In den Truncierungsmodellen kann die Variable, an der wir interessiert sind, nur beobachtet werden, falls diese vor oder nach einer bestimmten “Schranke” eingetreten ist. Wir kennen nicht die exakte Anzahl (sagen wir N) der Variablen von Interesse, sondern arbeiten nur mit $n \leq N$ der Realisierungen, die diese Schranke “gemeistert” haben, siehe *Stute (2006)*, S. 72 ff.. Diese Abhängigkeitsstruktur führt zur Verwendung von bedingten Wahrscheinlichkeiten und Verteilungen bei Untersuchungen in Truncierungsmodellen.

- In der Literatur existieren außerdem viele Kombinationen der bereits erwähnten Modelle. Als Beispiele seien hier Links-Truncierung und Rechtszensierung sowie Truncierung und Intervallzensierung, siehe *Hudgens (2005)*, genannt.

Teil III.

Kullback-Leibler-Information und Martingaltransformation

In diesem Teil der Arbeit wollen wir die Modellierungen und Ergebnisse der verschiedenen Zensierungsmodelle des zweiten Teils dieser Arbeit verwenden. Hiermit wird unter bestimmten Voraussetzungen die Konsistenz sowie die asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers mit Hilfe der Kullback-Leibler-Information verifiziert werden. Als Orientierung für den Beweis der Konsistenz verwenden wir *Stute (1992)*. Im fünfzehnten Kapitel werden wir den Martingalprozess D_n^{GSS} des Generalized Survival/Sacrifice Model weiter untersuchen und eine Transformation bereitstellen, die es uns ermöglicht, asymptotisch verteilungsfreie Tests durchzuführen.

13. Kullback-Leibler-Information

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns mit der Kullback-Leibler-Information für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P mit $Q \ll P$. Zuerst werden wir die verschiedenen Likelihood-Funktionen und anschließend die Kullback-Leibler-Informationen sowie Funktionen $L_{\bullet}(\theta_0, \bullet)$ angeben. Damit wird im vierzehnten Kapitel unter Verwendung der Ergebnisse aus den jeweiligen Abschnitten der Kapitel 4 bis 10 die Konsistenz und asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers in jedem der Zensierungsmodelle gezeigt werden. Außerdem werden wir in diesem Kapitel eine Informationshierarchie erstellen. Diese wird verifizieren, welche Zensierungsmodelle eine größere Kullback-Leibler-Information als andere Modelle besitzen. In den Kapiteln des zweiten Teils dieser Arbeit haben wir bereits an mehreren Stellen auf diese Ordnungsrelationen hingewiesen.

13.1. Tabellierung der Likelihood-Funktionen

In diesem Abschnitt werden wir die Likelihood-Funktion für jedes Zensierungsmodell angeben, da wir diese für den Beweis der Konsistenz des Maximum-Likelihood-Schätzers im vierzehnten Kapitel benötigen. Ein guter Überblick über die Likelihood-Funktionen verschiedener Zensierungsmodelle ist ebenfalls in *Groeneboom und Wellner (1992)* gegeben.

13. Kullback-Leibler-Information

Rechtszensierung:

$$L_n^{RC}(\theta) = \prod_{i=1}^n [(f_\theta(X_i))^{1_{\{X_i \leq Y_i\}}} \cdot (1 - F_\theta(Y_i))^{1_{\{X_i > Y_i\}}}]$$

Linkszensierung:

$$L_n^{LC}(\theta) = \prod_{i=1}^n [(F_\theta(Y_i))^{1_{\{X_i \leq Y_i\}}} \cdot (f_\theta(X_i))^{1_{\{X_i > Y_i\}}}]$$

Current Status Model:

$$L_n^{CS}(\theta) = \prod_{i=1}^n [(A_\theta(Z_i))^{1_{\{D_i \leq Z_i\}}} \cdot (1 - A_\theta(Z_i))^{1_{\{D_i > Z_i\}}}]$$

Intervallzensierung Typ II:

$$L_n^{IC2}(\theta) = \prod_{i=1}^n [(A_\theta(T_i))^{1_{\{D_i \leq T_i\}}} \cdot (A_\theta(U_i) - A_\theta(T_i))^{1_{\{T_i < D_i \leq U_i\}}} \cdot (1 - A_\theta(U_i))^{1_{\{D_i > U_i\}}}]$$

Doppelzensierung:

$$L_n^{DC}(\theta) = \prod_{i=1}^n [(A_\theta(T_i))^{1_{\{D_i \leq T_i\}}} \cdot (a_\theta(D_i))^{1_{\{T_i < D_i \leq U_i\}}} (1 - A_\theta(U_i))^{1_{\{D_i > U_i\}}}]$$

13. Kullback-Leibler-Information

Mittelzensierung:

$$L_n^{MC}(\theta) = \prod_{i=1}^n \left[(a_\theta(D_i))^{1_{\{D_i \leq T_i\}}} \cdot (a_\theta(D_i))^{1_{\{D_i > U_i\}}} \right. \\ \left. \bullet (A_\theta(U_i) - A_\theta(T_i))^{1_{\{T_i < D_i \leq U_i\}}} \right]$$

Survival/Sacrifice Model:

$$L_n^{SS}(\theta) = \prod_{i=1}^n \left[(A_\theta(Y_i) - F(Y_i))^{1_{\{D_i \leq Y_i < X_i\}}} \cdot (1 - A_\theta(Y_i))^{1_{\{D_i > Y_i\}}} \right]$$

Bemerkung:

Für jede Likelihood-Funktion gilt für eine spezielle Funktion ϕ^\bullet :

$$L_n^\bullet(\theta) = \prod_{i=1}^n \phi^\bullet(\underline{X}_i, \theta)$$

Hierbei bezeichnet \underline{X}_i den i-ten Vektor der beobachtbaren Daten.

13.2. Tabellierung der Kullback-Leibler-Informationen und Funktionen $L_\bullet^\bullet(\theta_0, \theta)$

In diesem Abschnitt werden wir die Kullback-Leibler-Informationen sowie die Funktionen $L_\bullet^\bullet(\theta_0, \bullet)$, die wir im vierten Kapitel dieser Arbeit kurz diskutiert haben, angeben. Das

13. Kullback-Leibler-Information

jeweilige Zensierungsmodell wird durch den oberen Index sowie die eindimensionalen Zensierungsverteilungen durch den unteren Index angegeben. Es gilt für zwei Wahrscheinlichkeitsmaße Q und P mit $Q \ll P$:

Ohne Zensierung:

$$K(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \right] \frac{dQ}{dP} dP$$

$$L(\theta_0, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln(f(x, \theta)) f(x, \theta_0) d\nu(x)$$

Hiermit gilt mit $dQ = f(\cdot, \theta_0) d\nu$ sowie $dP = f(\cdot, \theta) d\nu$:

$$L(\theta_0, \theta) = L(\theta_0, \theta_0) - \underbrace{K(Q, P)}_{\geq 0}$$

Rechtszensierung:

$$K_G^{RC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \left[\ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \right] \frac{dQ}{dP} dP + (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \right) dG(y)$$

$$L_G^{RC}(\theta_0, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{(-\infty, y]} \ln(f(x, \theta)) f(x, \theta_0) d\nu(x) + (1 - F(y, \theta_0)) \ln(1 - F(y, \theta)) \right] dG(y)$$

Setzen wir nun $dQ = f(\cdot, \theta_0) d\nu$ und $dP = f(\cdot, \theta) d\nu$, so folgt:

$$\begin{aligned} K_G^{RC}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{(-\infty, y]} \ln\left(\frac{f(x, \theta_0)}{f(x, \theta)}\right) f(x, \theta_0) d\nu(x) + (1 - F(y, \theta_0)) \ln\left(\frac{1 - F(y, \theta_0)}{1 - F(y, \theta)}\right) \right] dG(y) \\ &= L_G^{RC}(\theta_0, \theta_0) - L_G^{RC}(\theta_0, \theta) \end{aligned}$$

13. Kullback-Leibler-Information

Diese Gleichung wird durch Umformung zu

$$L_G^{RC}(\theta_0, \theta) = L_G^{RC}(\theta_0, \theta_0) - \underbrace{K_G^{RC}(Q, P)}_{\geq 0}$$

Linkszensierung:

$$K_G^{LC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] + \int_{(y, \infty)} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP \right) dG(y)$$

$$L_G^{LC}(\theta_0, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[F(y, \theta_0) \ln(F(y, \theta_0)) + \int_{(y, \infty)} \ln(f(x, \theta)) f(x, \theta) d\nu(x) \right] dG(y)$$

Wir haben mit $dQ = f(\cdot, \theta_0) d\nu$ und $dP = f(\cdot, \theta) d\nu$ wieder:

$$L_G^{LC}(\theta_0, \theta) = L_G^{LC}(\theta_0, \theta_0) - \underbrace{K_G^{LC}(Q, P)}_{\geq 0}$$

Current Status Model:

$$K_H^{CS}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] + (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \right) dH(y)$$

$$L_H^{CS}(\theta_0, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(y, \theta_0) \ln(A(y, \theta_0)) + (1 - A(y, \theta_0)) \ln(1 - A(y, \theta_0))] dH(y)$$

13. Kullback-Leibler-Information

Es gilt mit $Q = A_{\theta_0}$ und $P = A_{\theta}$:

$$L_H^{CS}(\theta_0, \theta) = L_H^{CS}(\theta_0, \theta_0) - \underbrace{K_H^{CS}(Q, P)}_{\geq 0}$$

Intervallzensierung Typ II:

$$K_{F,G}^{IC2}(Q, P) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(Q(t) \ln \left[\frac{Q(t)}{P(t)} \right] + (1 - Q(u)) \ln \left[\frac{1 - Q(u)}{1 - P(u)} \right] \right. \\ \left. + \ln \left[\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right] (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u)$$

$$L_{F,G}^{IC2}(\theta_0, \theta) = \int_{\mathbb{R}^2} [A(t, \theta_0) \ln(A(t, \theta)) + (1 - A(u, \theta_0)) \ln(1 - A(u, \theta)) \\ + \ln(A(u, \theta) - A(t, \theta))(A(u, \theta_0) - A(t, \theta_0))] dH(t, u)$$

Wir erhalten mit $Q = A_{\theta_0}$ und $P = A_{\theta}$:

$$L_{F,G}^{IC2}(\theta_0, \theta) = L_{F,G}^{IC2}(\theta_0, \theta_0) - \underbrace{K_{F,G}^{IC2}(Q, P)}_{\geq 0}$$

Doppelzensierung:

$$K_{F,G}^{DC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] dG(y) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP \right) [dG(y) - dF(y)]$$

13. Kullback-Leibler-Information

$$L_{F,G}^{DC}(\theta_0, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} A(y, \theta_0) \ln(A(y, \theta)) dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - A(y, \theta_0)) \ln(1 - A(y, \theta)) dG(y) \\ + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln(a(x, \theta)) a(x, \theta_0) d\nu(x) \right) [dG(y) - dF(y)]$$

Hieraus folgt mit $dQ = a(\cdot, \theta_0) d\nu$ und $dP = a(\cdot, \theta) d\nu$:

$$L_{F,G}^{DC}(\theta_0, \theta) = L_{F,G}^{DC}(\theta_0, \theta_0) - \underbrace{K_{F,G}^{DC}(Q, P)}_{\geq 0}$$

Mittelzensierung:

$$K_{F,G}^{MC}(Q, P) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{(-\infty, t]} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP + \int_{(u, \infty)} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP \right. \\ \left. + \ln \left[\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right] (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u)$$

$$L_{F,G}^{MC}(\theta_0, \theta) = \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_{(-\infty, t]} \ln(a(x, \theta)) a(x, \theta_0) d\nu(x) + \int_{(u, \infty)} \ln(a(x, \theta)) a(x, \theta_0) d\nu(x) \right. \\ \left. + \ln(A(u, \theta) - A(t, \theta)) (A(u, \theta_0) - A(t, \theta_0)) \right] dH(t, u)$$

Somit gilt mit $dQ = a(\cdot, \theta_0) d\nu$ und $dP = a(\cdot, \theta) d\nu$:

$$L_{F,G}^{MC}(\theta_0, \theta) = L_{F,G}^{MC}(\theta_0, \theta_0) - \underbrace{K_{F,G}^{MC}(Q, P)}_{\geq 0}$$

Survival/Sacrifice Model:

$$K_G^{SS}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\ln \left[\frac{Q(y) - F(y)}{P(y) - F(y)} \right] (Q(y) - F(y)) + (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \right) dG(y)$$

$$L_G^{SS}(\theta_0, \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} [(A_{\theta_0} - F(y)) \ln(A_{\theta_0}(y) - F(y)) + (1 - A_{\theta_0}(y)) \ln(1 - A_{\theta_0}(y))] dG(y)$$

Und hiermit gilt mit $Q = A_{\theta_0}$ sowie $P = A_{\theta}$:

$$L_G^{SS}(\theta_0, \theta) = L_G^{SS}(\theta_0, \theta_0) - \underbrace{K_G^{SS}(Q, P)}_{\geq 0}$$

13.3. Informationshierarchie

In Abschnitt 13.3 werden wir zeigen, welche Zensierungsmodelle mehr Information, also eine größere Kullback-Leibler-Information, als andere Modelle besitzen. Hiermit wird eine Informationshierarchie erstellt werden. Diese werden wir am Ende dieses Abschnitts in einer Graphik wiedergeben. Hierzu benötigen wir die zwei folgenden Lemmata.

Lemma 13.1. *Unter der Voraussetzung, dass für drei reelle Zahlen $a, b, c \in (0, 1]$ die Ungleichung $c < \min(a, b)$ erfüllt ist, gilt:*

$$f(a, b, c) := (a - c) \ln \left(\frac{a - c}{b - c} \right) - a \cdot \ln \left(\frac{a}{b} \right) \geq 0$$

Beweis. Es ist $f(a, b, 0) = 0$. Für $c > 0$ werden wir zeigen, dass die Funktion $f_1(c) = f(a, b, c)$

13. Kullback-Leibler-Information

monoton wachsend (in c) ist. Wir haben:

$$\begin{aligned}f_1(0) &= 0 \\f_1(c) &= (a-c)\ln\left(\frac{a-c}{b-c}\right) - a \cdot \ln\left(\frac{a}{b}\right) \\f_1'(c) &= -\ln(a-c) + \ln(b-c) - 1 + \frac{a-c}{b-c} \\&= -1 + \frac{a-c}{b-c} - \ln\left(\frac{a-c}{b-c}\right)\end{aligned}$$

Die Funktion $h(x) = -1 + x - \ln(x)$ ist ≥ 0 auf $(0, \infty)$ (Minimum im Tiefpunkt TP(1/0)).

Damit ist dieses Lemma bewiesen. \square

Lemma 13.2. *Unter den Voraussetzungen, dass für vier reelle Zahlen $a, c \in (0, 1]$ und $b, d \in (0, 1)$ die Ungleichungen $a > b$ und $c > d$ erfüllt sind, erhalten wir:*

$$(a-b)\ln\left(\frac{a-b}{c-d}\right) - a \cdot \ln\left(\frac{a}{c}\right) + b \cdot \ln\left(\frac{b}{d}\right) \geq 0$$

Beweis. Es sei $a > b$ sowie $c > d$ gegeben. Damit gilt:

$$a = k_1 \cdot b \quad \text{mit } k_1 > 1$$

$$c = k_2 \cdot d \quad \text{mit } k_2 > 1$$

13. Kullback-Leibler-Information

Hierdurch erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 & (a-b)\ln\left(\frac{a-b}{c-d}\right) - a\ln\left(\frac{a}{c}\right) + b\ln\left(\frac{b}{d}\right) \\
 = & (k_1b - b)\ln\left(\frac{k_1b - b}{k_2d - d}\right) - k_1b\ln\left(\frac{k_1b}{k_2d}\right) + b\ln\left(\frac{b}{d}\right) \\
 = & (k_1 - 1)b \cdot \ln\left(\frac{k_1 - 1}{k_2 - 1}\right) - k_1b\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \\
 & + \underbrace{k_1b \cdot \ln\left(\frac{b}{d}\right) - b\ln\left(\frac{b}{d}\right) - k_1b\ln\left(\frac{b}{d}\right) + b\ln\left(\frac{b}{d}\right)}_{=0} \\
 = & b \cdot \left((k_1 - 1)\ln\left(\frac{k_1 - 1}{k_2 - 1}\right) - k_1\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Da $b > 0$ ist, müssen wir verifizieren, dass

$$(k_1 - 1)\ln\left(\frac{k_1 - 1}{k_2 - 1}\right) - k_1\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \geq 0$$

Dies folgt aber wie in Lemma 13.1 mit einer Funktion $p(c) = (k_1 - c)\ln\left(\frac{k_1 - c}{k_2 - c}\right) - k_1\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)$.

Für diese Funktion gilt nämlich:

$$p(0) = 0 \quad \text{sowie} \quad p'(c) \geq 0 \quad \text{auf } (0, \infty)$$

Hiermit folgt schließlich: $p(1) - p(0) \geq 0$. □

13.3.1. Ohne Zensierung — Rechtszensierung

Die Kullback-Leibler-Informationen dieser Modelle sind:

$$K(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \frac{dQ}{dP} dP$$

$$K_G^{RC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP + (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \right) dG(y)$$

Lemma 13.3. *Es gilt:*

$$K(Q, P) \geq K_G^{RC}(Q, P)$$

Beweis.

$$\begin{aligned} K(Q, P) - K_G^{RC}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \frac{dQ}{dP} dP(x) dG(y) - K_G^{RC}(Q, P) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(y, \infty)} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \frac{dQ}{dP} dP - (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \right) dG(y) \end{aligned}$$

Sei y fest. Wir verwenden auf $z > y$ ein normiertes Maß P^* mit $dP_y^* := \frac{dP}{1 - P(y)}$ und erhalten

$$\begin{aligned} &\int_{(y, \infty)} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \frac{dQ}{dP} dP - (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \\ &= (1 - P(y)) \cdot \int_{(y, \infty)} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \frac{dQ}{dP} dP_y^* - (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \quad (13.1) \end{aligned}$$

13. Kullback-Leibler-Information

Nun folgt mit Jensen für die konvexe Funktion $f(x) = x \cdot \ln(x)$ sowie $dP_y^* = \frac{dP}{1-P(y)}$:

$$\begin{aligned}
 (13.1) \quad &\geq (1 - P(y)) \cdot \int_{(y, \infty)} \frac{dQ}{dP} dP_y^* \cdot \ln \left(\int_{(y, \infty)} \frac{dQ}{dP} dP_y^* \right) - (1 - Q(y)) \ln \left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right) \\
 &= \cancel{(1 - P(y))} \cdot \int_{(y, \infty)} \frac{dQ}{dP} \frac{dP}{\cancel{1 - P(y)}} \cdot \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] - (1 - Q(y)) \ln \left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right) \\
 &= (1 - Q(y)) \ln \left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right) - (1 - Q(y)) \ln \left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Dies verifiziert, dass $K(Q, P) \geq K_G^{RC}(Q, P)$. □

13.3.2. Ohne Zensierung — Linkszensierung

Die Kullback-Leibler-Information im Linkszensierungsmodell ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] + \int_{(y, \infty)} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP \right) dG(y)$$

Lemma 13.4. *Wir haben:*

$$K(Q, P) \geq K_G^{LC}(Q, P)$$

Beweis.

Es sei y wieder fest. Indem wir abermals die Ungleichung von Jensen anwenden, ergibt sich

13. Kullback-Leibler-Information

mit $dP_y^\# := \frac{dP}{P(y)}$ für $z \leq y$:

$$\begin{aligned} \int_{(-\infty, y]} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP - Q(y) \ln\left(\frac{Q(y)}{P(y)}\right) &= P(y) \cdot \int_{(-\infty, y]} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP_y^\# - Q(y) \ln\left(\frac{Q(y)}{P(y)}\right) \\ &\geq P(y) \cdot \underbrace{\int_{(-\infty, y]} \frac{dQ}{dP} \frac{dP}{P(y)} \cdot \ln\left(\frac{Q(y)}{P(y)}\right)}_{Q(y) \cdot \frac{1}{P(y)}} - Q(y) \ln\left(\frac{Q(y)}{P(y)}\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

13.3.3. Ohne Zensierung — Mittelzensierung

Im Modell der Mittelzensierung existieren zwei Zensierungsvariablen T und U mit $T \leq U$ f.s.. Deshalb verwenden wir die folgende Partition der Zeitachse:

$$(-\infty, t] \quad , \quad (t, u] \quad \text{und} \quad (u, \infty)$$

Hiermit haben wir:

$$K(Q, P) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{(-\infty, t]} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP + \int_{(t, u]} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP + \int_{(u, \infty)} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP \right) dH(t, u)$$

sowie

13. Kullback-Leibler-Information

$$K_{F,G}^{MC}(Q, P) = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{(-\infty, t]} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP + \int_{(u, \infty)} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP \right. \\ \left. + \ln \left[\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right] (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u)$$

H bezeichnet die gemeinsame Verteilung von (T, U) .

Lemma 13.5. *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

$$K(Q, P) \geq K_{F,G}^{MC}(Q, P)$$

Beweis. Wir betrachten die Differenz der beiden Kullback-Leibler-Informationen:

$$K(Q, P) - K_{F,G}^{MC}(Q, P) \\ = \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{(t, u]} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \frac{dQ}{dP} dP - \ln \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u) \\ \geq \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right) (Q(u) - Q(t)) - \ln \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u) \\ = 0$$

Hierbei haben wir für festes z mit $t \leq z \leq u$ wieder Jensen sowie das Maß P^\sim mit

$dP_{u-t}^\sim := \frac{dP}{P(u) - P(t)}$ verwendet:

$$\int_{(t, u]} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \frac{dQ}{dP} dP = (P(u) - P(t)) \cdot \int_{(t, u]} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \frac{dQ}{dP} dP_{u-t}^\sim \\ \stackrel{\text{Jensen}}{\geq} (P(u) - P(t)) \cdot \int_{(t, u]} \frac{dQ}{dP} \frac{dP}{P(u) - P(t)} \ln \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right) \\ = (Q(u) - Q(t)) \cdot \ln \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right)$$

□

13.3.4. Mittelzensierung — Linkszensierung

In diesem Abschnitt wollen wir die beiden nachstehenden Kullback-Leibler-Informationen vergleichen:

$$K_{F,G}^{MC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, t]} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP \right) dF(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(u, \infty)} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP \right) dG(u) \\ + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u)$$

sowie

$$K_G^{LC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(y) \ln\left(\frac{Q(y)}{P(y)}\right) + \int_{(y, \infty)} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP \right) dG(y)$$

Lemma 13.6. *Es gilt:*

$$K_{F,G}^{MC}(Q, P) \geq K_G^{LC}(Q, P)$$

13. Kullback-Leibler-Information

Beweis. Wir haben:

$$\begin{aligned}
 K_{F,G}^{MC}(Q,P) - K_G^{LC}(Q,P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{(-\infty,y]} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP dF(y) - \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \ln\left(\frac{Q(y)}{P(y)}\right) dG(y) \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t,u) \\
 \text{mit Lemma 13.4} \quad &\geq \int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(y) \ln\left(\frac{Q(y)}{P(y)}\right) \right) [dF(y) - dG(y)] \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t,u) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t,u) \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \left(Q(u) \ln\left(\frac{Q(u)}{P(u)}\right) - Q(t) \ln\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right) \right) dH(t,u)
 \end{aligned}$$

Also muss gezeigt werden, dass für feste t und u :

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) - Q(u) \ln\left(\frac{Q(u)}{P(u)}\right) + Q(t) \ln\left(\frac{Q(t)}{P(t)}\right) &\quad (13.2) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Um Lemma 13.2 verwenden zu können, müssen wir zeigen, dass wir $Q(u), P(u) \in (0, 1]$ und $Q(t), P(t) \in (0, 1)$ sowie $Q(u) - Q(t) \neq 0 \neq P(u) - P(t)$ wegen dem Folgenden annehmen können:

- $P(u) = 0$ impliziert $P(t) = 0 = Q(u) = Q(t)$ ($Q \ll P$) und somit gilt: (13.2) = 0 \geq 0.
- $Q(u) = 0$ führt zu $Q(t) = 0$ und wir erhalten (13.2) = 0.
- $P(t) = 0$ bedingt $Q(t) = 0$ und hiermit folgt $Q(u) \ln\left(\frac{Q(u)}{P(u)}\right) - Q(u) \ln\left(\frac{Q(u)}{P(u)}\right) = 0$.
- $Q(t) = 0$ ergibt die Gleichung: $Q(u) \ln\left(\frac{Q(u)}{P(u) - P(t)}\right) - Q(u) \ln\left(\frac{Q(u)}{P(u)}\right) \geq 0$ (Monotonie des

13. Kullback-Leibler-Information

Logarithmus).

- $P(t) = 1$ impliziert $P(u) = 1 = Q(u) = Q(t) \implies (13.2) = 0$.
- $Q(t) = 1$ bedingt $Q(u) = 1$ und somit haben wir:

$$-\ln\left(\frac{1}{P(u)}\right) + \ln\left(\frac{1}{P(t)}\right) \geq 0. \quad (P(u) \geq P(t)).$$
- $P(u) = P(t) \implies Q(u) = Q(t)$ und wir erhalten $(13.2) = 0$.
- $Q(u) = Q(t)$ führt wieder zu $-Q(u)\ln\left(\frac{Q(u)}{P(u)}\right) + Q(u)\ln\left(\frac{Q(u)}{P(t)}\right) \geq 0$

Indem wir die folgenden Definitionen

$$a := Q(u) \quad , \quad b := Q(t) \quad , \quad c := P(u) \quad , \quad d := P(t)$$

verwenden, folgt die Behauptung mit Lemma 13.2.

□

13.3.5. Mittelzensierung — Rechtszensierung

In Abschnitt 13.3.5 muss die Notation für die Kullback-Leibler-Information des Rechtszensierungsmodells verändert werden. Wir verwenden die Bezeichnung $K_F^{RC}(Q, P)$ anstelle von $K_G^{RC}(Q, P)$. Dies ist durch das Modell der Mittelzensierung begründet, da in diesem Zensierungsschema zwei Zensierungsvariablen existieren. Dies zeigt aber auch, warum wir die Bezeichnung K_G^{LC} des Linkszensierungsmodells in dem vorherigen Abschnitt nicht verändern mussten. Hierbei zeigt sich nochmals der Unterschied zwischen dem Modell der Mittelzensierung und dem Modell der Doppelzensierung:

Im Mittelzensierungsmodell ist die Variable T rechtszensierend und U folglich linkszensierend.

13. Kullback-Leibler-Information

Im Modell der Doppelzensierung ist aber T linkszensierend sowie U rechtszensierend.

Wir müssen nun die nachfolgenden Kullback-Leibler-Informationen vergleichen:

$$K_{F,G}^{MC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, t]} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP \right) dF(t) + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(u, \infty)} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP \right) dG(u) \\ + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u)$$

und

$$K_F^{RC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y)} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP + (1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) \right) dF(y)$$

Lemma 13.7. *Wir haben:*

$$K_{F,G}^{MC}(Q, P) \geq K_F^{RC}(Q, P)$$

Beweis. Es gilt für die Differenz:

$$K_{F,G}^{MC}(Q, P) - K_F^{RC}(Q, P) \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(y, \infty)} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP \right) dG(y) - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) dF(y) \\ + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u)$$

13. Kullback-Leibler-Information

Indem wir Lemma 13.3 verwenden, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 K_{F,G}^{MC}(Q, P) - K_F^{RC}(Q, P) & \\
 & \geq \int_{-\infty}^{\infty} \left((1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) \right) [dG(y) - dF(y)] \\
 & \quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u) \\
 & = \int_{\mathbb{R}^2} \left((1 - Q(u)) \ln\left(\frac{1 - Q(u)}{1 - P(u)}\right) - (1 - Q(t)) \ln\left(\frac{1 - Q(t)}{1 - P(t)}\right) \right) dH(t, u) \\
 & \quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u)
 \end{aligned}$$

Es bleibt also abschließend zu zeigen, dass für feste t und u :

$$\begin{aligned}
 \ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) + (1 - Q(u)) \ln\left(\frac{1 - Q(u)}{1 - P(u)}\right) - (1 - Q(t)) \ln\left(\frac{1 - Q(t)}{1 - P(t)}\right) \quad (13.3) \\
 \geq 0
 \end{aligned}$$

Dies folgt aber durch die Verwendung von Lemma 13.2, indem wir die folgenden Größen definieren:

$$a := 1 - Q(t) \quad , \quad b := 1 - Q(u) \quad , \quad c := 1 - P(t) \quad , \quad d := 1 - P(u)$$

Dies führt uns zu:

$$(13.3) = (a - b) \ln\left(\frac{a - b}{c - d}\right) - a \cdot \ln\left(\frac{a}{c}\right) + b \cdot \ln\left(\frac{b}{d}\right)$$

Um das Lemma 13.2 anwenden zu können, bleibt noch zu verifizieren, dass wir (13.3) nur für

13. Kullback-Leibler-Information

$a, c \in (0, 1]$ und $b, d \in (0, 1)$ sowie $a - b \neq 0 \neq c - d$ zeigen müssen:

- $c = d \iff P(t) = P(u) \implies Q(t) = Q(u)$ und dies impliziert (13.3) = $0 \geq 0$.
- $a = b \iff Q(t) = Q(u)$. Hiermit folgt $(1 - Q(u))\ln\left(\frac{1-Q(u)}{1-P(u)}\right) - (1 - Q(u))\ln\left(\frac{1-Q(u)}{1-P(t)}\right) \geq 0$.
- $a = 0 \iff Q(t) = 1 \implies Q(u) = 1$ und somit (13.3) = 0 .
- $b = 0 \iff Q(u) = 1$. Wir haben dann $(1 - Q(t))\ln\left(\frac{1-Q(t)}{P(u)-P(t)}\right) - (1 - Q(t))\ln\left(\frac{1-Q(t)}{1-P(t)}\right) \geq 0$.
- $c = 0 \iff P(t) = 1 \implies P(u) = P(t) = Q(u) = Q(t) = 1$. Deshalb ist (13.3) = 0 .
- $d = 0 \iff P(u) = Q(u) = 1$.
Dies impliziert $(1 - Q(t))\ln\left(\frac{1-Q(t)}{1-P(t)}\right) - (1 - Q(t))\ln\left(\frac{1-Q(t)}{1-P(t)}\right) = 0$.
- $b = 1 \iff Q(u) = 0 = Q(t) \implies \ln\left(\frac{1}{1-P(u)}\right) - \ln\left(\frac{1}{1-P(t)}\right) \geq 0$.
- $d = 1 \iff P(u) = 0 = Q(u) = P(t) = Q(t)$ und (13.3) = 0 .

Wir haben verifiziert, dass (13.3) in den obigen Situationen nichtnegativ ist und somit folgt mit Lemma 13.2 insgesamt:

$$(Q(u) - Q(t))\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) + (1 - Q(u))\ln\left(\frac{1 - Q(u)}{1 - P(u)}\right) - (1 - Q(t))\ln\left(\frac{1 - Q(t)}{1 - P(t)}\right) \geq 0$$

□

13.3.6. Rechtszensierung — Doppelzensierung

Wir werden verifizieren, dass $K_G^{RC}(Q, P) \geq K_{F,G}^{DC}(Q, P)$ mit

$$K_G^{RC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP + (1 - Q(y))\ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) \right) dG(y)$$

13. Kullback-Leibler-Information

und

$$\begin{aligned}
 K_{F,G}^{DC}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] dG(y) \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP \right) [dG(y) - dF(y)]
 \end{aligned}$$

Lemma 13.8. *Es gilt:*

$$K_G^{RC}(Q, P) \geq K_{F,G}^{DC}(Q, P)$$

Beweis. Dies ist eine direkte Konsequenz des Lemma 13.4, da

$$\begin{aligned}
 K_G^{RC}(Q, P) - K_{F,G}^{DC}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{(-\infty, y]} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \frac{dQ}{dP} dP - Q(y) \ln \left(\frac{Q(y)}{P(y)} \right)}_{\geq 0 \quad \text{mit Lemma 13.4}} \right) dF(y) \\
 &\geq 0
 \end{aligned}$$

□

13.3.7. Rechtszensierung — Current Status Model

Wir müssen in diesem Abschnitt die Notation von K_H^{CS} zu K_G^{CS} ändern, um die beiden Kullback-Leibler-Informationen vergleichen zu können. Es ist also:

$$K_G^{CS}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(y) \ln \left(\frac{Q(y)}{P(y)} \right) + (1 - Q(y)) \ln \left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right) \right) dG(y)$$

Lemma 13.9. *Wir haben:*

$$K_G^{RC}(Q, P) \geq K_G^{CS}(Q, P)$$

Beweis. Wir benutzen wieder Lemma 13.4 und erhalten:

$$\begin{aligned} K_G^{RC}(Q, P) - K_G^{CS}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP - Q(y) \ln\left(\frac{Q(y)}{P(y)}\right) \right) dG(y) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

13.3.8. Linkszensierung — Doppelzensierung

In Abschnitt 13.3.8 müssen wir ebenfalls eine Notation verändern. Wir verwenden $K_F^{LC}(Q, P)$ anstelle von $K_G^{LC}(Q, P)$, damit die Modelle verglichen werden können. Hiermit ergibt sich:

$$K_F^{LC}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(y) \ln\left(\frac{Q(y)}{P(y)}\right) + \int_{(y, \infty)} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP \right) dF(y)$$

$$\begin{aligned} K_{F,G}^{DC}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \ln\left[\frac{Q(y)}{P(y)}\right] dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln\left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right] dG(y) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln\left[\frac{dQ}{dP}\right] \frac{dQ}{dP} dP \right) [dG(y) - dF(y)] \end{aligned}$$

Lemma 13.10. *Es gilt:*

$$K_F^{LC}(Q, P) \geq K_{F,G}^{DC}(Q, P)$$

13. Kullback-Leibler-Information

Beweis. Wir haben:

$$\begin{aligned}
 K_F^{LC}(Q, P) - K_{F,G}^{DC}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(y, \infty)} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP \right) dF(y) \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) dG(y) \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln\left[\frac{dQ}{dP}\right] \frac{dQ}{dP} dP \right) [dG(y) - dF(y)]
 \end{aligned}$$

Wir verwenden Fubini und erhalten:

$$\begin{aligned}
 &K_F^{LC}(Q, P) - K_{F,G}^{DC}(Q, P) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} F_-(x) \ln\left(\frac{dQ}{dP}(x)\right) \frac{dQ}{dP}(x) dP(x) \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} (F_-(x) - G_-(x)) \ln\left(\frac{dQ}{dP}(x)\right) \frac{dQ}{dP}(x) dP(x) \\
 &\quad - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) dG(y) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} G_-(x) \ln\left(\frac{dQ}{dP}(x)\right) \frac{dQ}{dP}(x) dP(x) - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) dG(y) \\
 &\text{(Fubini)} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\underbrace{\int_{(y, \infty)} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP - (1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right)}_{\geq 0 \quad \text{mit Lemma 13.3}} \right) dG(y)
 \end{aligned}$$

□

13.3.9. Linkszensierung — Current Status Model

Wir werden mit Hilfe der Notation aus Abschnitt 13.3.7 verifizieren, dass

$$K_G^{LC}(Q, P) \geq K_G^{CS}(Q, P).$$

Lemma 13.11. *Es ist*

$$K_G^{LC}(Q, P) \geq K_G^{CS}(Q, P)$$

Beweis. Dies folgt aber direkt aus Lemma 13.3, denn es gilt:

$$\begin{aligned} K_G^{LC}(Q, P) - K_G^{CS}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(y, \infty)} \ln\left(\frac{dQ}{dP}\right) \frac{dQ}{dP} dP - (1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) \right) dG(y) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

□

13.3.10. Doppelzensierung — Intervallzensierung Typ II

Wir wollen zeigen, dass für diese Modelle $K_{F,G}^{DC}(Q, P) \geq K_{F,G}^{IC2}(Q, P)$ gilt. Also muss das Folgende verglichen werden:

$$\begin{aligned} K_{F,G}^{DC}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] dG(y) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln \left[\frac{dQ}{dP} \right] \frac{dQ}{dP} dP \right) [dG(y) - dF(y)] \end{aligned}$$

mit

13. Kullback-Leibler-Information

$$\begin{aligned}
 K_{F,G}^{IC_2}(Q, P) &= \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] dF(y) + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] dG(y) \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u)
 \end{aligned}$$

Lemma 13.12. *Wir haben:*

$$K_{F,G}^{DC}(Q, P) \geq K_{F,G}^{IC_2}(Q, P)$$

Beweis. Wir betrachten wieder die Differenz:

$$\begin{aligned}
 &K_{F,G}^{DC}(Q, P) - K_{F,G}^{IC_2}(Q, P) \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{(-\infty, y]} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \frac{dQ}{dP} dP \right) [dG(y) - dF(y)] \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u) \\
 &= E \left[1_{\{T < D \leq U\}} \ln \left(\frac{dQ}{dP} (D) \right) \right] \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(E \left[1_{\{t < D \leq u\}} \ln \left(\frac{dQ}{dP} (D) \right) \right] \right) dH(t, u) \\
 &\quad - \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\int_{(t, u]} \ln \left(\frac{dQ}{dP} \right) \frac{dQ}{dP} dP - \ln \left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)} \right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u)
 \end{aligned}$$

Durch die Verwendung von Lemma 13.5 folgt schließlich die Behauptung. □

13.3.11. Intervallzensierung Typ II — Current Status Model

Im Modell der Intervallzensierung Typ II existieren zwei Zensierungsvariablen. Deshalb werden wir zwei verschiedene Notationen für die Kullback-Leibler-Information des Current Status Model verwenden und in beiden Situationen zeigen, dass $K_{F,G}^{IC_2}(Q, P)$ mindestens genauso groß wie $K_F^{CS}(Q, P)$ bzw. $K_G^{CS}(Q, P)$ ist:

Lemma 13.13. *Es gilt mit diesen Notationen:*

$$K_{F,G}^{IC_2}(Q, P) \geq K_G^{CS}(Q, P) \quad \text{sowie} \quad K_{F,G}^{IC_2}(Q, P) \geq K_F^{CS}(Q, P)$$

Beweis.

1) Wir wollen verifizieren, dass $K_{F,G}^{IC_2}(Q, P) \geq K_G^{CS}(Q, P)$.

Dies folgt aber direkt mit Lemma 13.6:

$$\begin{aligned} K_{F,G}^{IC_2}(Q, P) - K_G^{CS}(Q, P) &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right) (Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u) \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} Q(y) \ln\left(\frac{Q(y)}{P(y)}\right) dF(y) - \int_{-\infty}^{\infty} \ln\left(\frac{Q(y)}{P(y)}\right) Q(y) dG(y) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

13. Kullback-Leibler-Information

2) In dieser Situation wollen wir zeigen, dass $K_{F,G}^{IC_2}(Q, P) \geq K_F^{CS}(Q, P)$. Wir haben:

$$\begin{aligned}
 & K_{F,G}^{IC_2}(Q, P) - K_F(Q, P) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right)(Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u) \\
 &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) dG(y) - \int_{-\infty}^{\infty} (1 - Q(y)) \ln\left(\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)}\right) dF(y) \\
 &= \int_{\mathbb{R}^2} \left(\ln\left(\frac{Q(u) - Q(t)}{P(u) - P(t)}\right)(Q(u) - Q(t)) \right) dH(t, u) \\
 &\quad + \int_{\mathbb{R}^2} \left((1 - Q(u)) \ln\left(\frac{1 - Q(u)}{1 - P(u)}\right) - (1 - Q(t)) \ln\left(\frac{1 - Q(t)}{1 - P(t)}\right) \right) dH(t, u) \\
 &\geq 0 \quad \text{mit Lemma 13.7}
 \end{aligned}$$

□

13.3.12. Survival/Sacrifice Model — Current Status Model

Wir beenden die Bestimmung der Informationshierarchie mit dem Vergleich der beiden folgenden Kullback-Leibler-Informationen:

$$K_G^{SS}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left((Q(y) - F(y)) \ln \left[\frac{Q(y) - F(y)}{P(y) - F(y)} \right] + (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \right) dG(y)$$

und

$$K_G^{CS}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] + (1 - Q(y)) \ln \left[\frac{1 - Q(y)}{1 - P(y)} \right] \right) dG(y)$$

13. Kullback-Leibler-Information

Lemma 13.14. *Wir haben*

$$K_G^{SS}(Q, P) \geq K_G^{CS}(Q, P)$$

Beweis. Es gilt:

$$K_G^{SS}(Q, P) - K_G^{CS}(Q, P) = \int_{-\infty}^{\infty} \left((Q(y) - F(y)) \ln \left[\frac{Q(y) - F(y)}{P(y) - F(y)} \right] - Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] \right) dG(y)$$

Also muss verifiziert werden, dass

$$\begin{aligned} (Q(y) - F(y)) \ln \left[\frac{Q(y) - F(y)}{P(y) - F(y)} \right] - Q(y) \ln \left[\frac{Q(y)}{P(y)} \right] & \quad (13.4) \\ & \geq 0 \end{aligned}$$

Um diese Aussage zu beweisen, definieren wir die nachstehenden Größen:

$$a := Q(y) \quad , \quad b := P(y) \quad , \quad c := F(y)$$

Hierbei gilt zu bedenken, dass aufgrund der Voraussetzungen dieses Modells gilt:

$$c \leq \min(a, b)$$

Hiermit ergibt sich:

$$\begin{aligned} (13.4) & = (a - c) \ln \left(\frac{a - c}{b - c} \right) - a \cdot \ln \left(\frac{a}{b} \right) \\ & =: f(a, b, c) \end{aligned}$$

13. Kullback-Leibler-Information

Um das Lemma 13.1 verwenden zu können, werden wir jetzt zeigen, dass $f(a, b, c) \geq 0$ in den folgenden Situationen gilt:

$$a = 0 \quad ; \quad b = 0 \quad ; \quad c = 0$$

sowie für die Situationen, in denen

$$c = a \quad ; \quad c = b \quad ; \quad c = a = b$$

Wir haben:

- $a = Q(y) = 0 \implies c = F(y) = 0$ und somit ist $f(0, b, 0) = 0$.
- $b = P(y) = 0$ impliziert, dass $a = Q(y) = 0$ sowie $c = F(y) = 0$.
Dann ist $f(0, 0, 0) = 0 \geq 0$.
- $c = F(y) = 0$ führt zu $f(a, b, 0) = a \ln\left(\frac{a}{b}\right) - a \ln\left(\frac{a}{b}\right) = 0$.
- $c = a \iff F(y) = Q(y)$ und dies führt zu $f(c, b, c) = -a \ln\left(\frac{a}{b}\right) > 0$, da $b > a$.
- $c = b \iff F(y) = P(y)$. Hiermit gilt: $f(a, b, b) := \text{"}\infty\text{"} - \underbrace{a \ln\left(\frac{a}{b}\right)}_{\text{Konstant}} > 0$.
- $P(y) = Q(y) = F(y)$ bewirkt $f(a, a, a) = 0$.

Somit ist (13.4) aufgrund des Lemma 13.1 nichtnegativ und dies war zu zeigen.

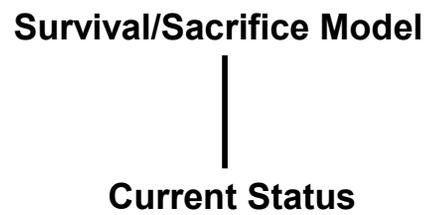
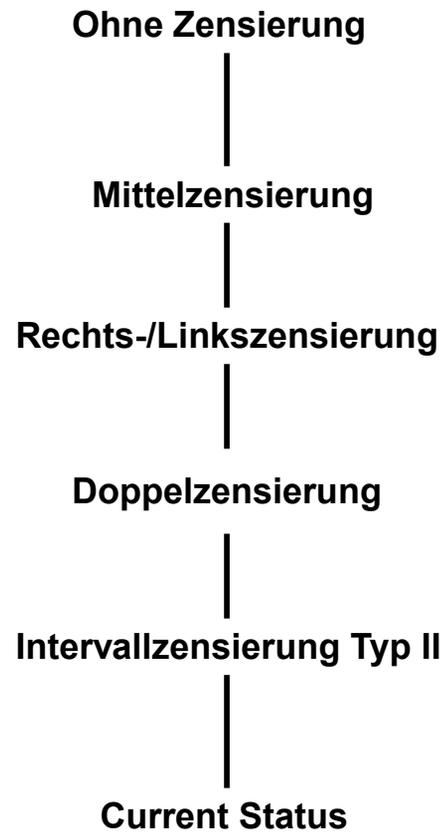
□

13.3.13. Graphische Darstellung der Informationshierarchie

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir die Graphik der Informationshierarchie wiedergeben, welche wir in den vorangehenden Abschnitten bestimmt haben. Das Modell "Ohne Zen-

13. Kullback-Leibler-Information

sierung" besitzt die größte Kullback-Leibler-Information. Wenn zwei Modelle verglichen werden, so besitzt das Modell, welches weiter oben in der Hierarchie steht, die größere Kullback-Leibler-Information. Das Survival/Sacrifice Model können wir in dieser Hierarchie nicht einordnen und geben somit nur das Verhältnis zum Current Status Model, durch den Trennstrich getrennt, an.



13. Kullback-Leibler-Information

14. Konsistenz und asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Zensierung

Das Ziel dieses Abschnitts ist der Beweis der Konsistenz und asymptotischen Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Zensierung. Hierbei erinnern wir daran, dass wir im zweiten Teil dieser Arbeit Bedingungen dafür hergeleitet haben, unter denen die Kullback-Leibler-Information strikt positiv ist. Dies wird nun verwendet werden. Wir orientieren uns hierbei an *Stute (1992)*, der den Fall der Rechtszensierung untersucht hat.

Zuerst werden neue Funktionen und Notationen definiert, die wir nachfolgend zusammen mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 13.2 benutzen wollen:

- $L_n^\bullet(\theta)$ bezeichnet die Likelihood-Funktion (bezogen auf das jeweilige Zensierungsmodell)
- Der normalisierte Logarithmus der Likelihood-Funktion besitzt

14. Konsistenz und asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Zensierung

die folgende Gestalt:

$$l_n^\bullet(\theta) := \frac{1}{n} \ln(L_n^\bullet(\theta))$$

Unter der Annahme der Existenz des Erwartungswerts gilt mit dem Starken Gesetz der Großen Zahlen (SGGZ):

$$\lim_n l_n^\bullet(\theta) = L_\bullet^\bullet(\theta_0, \theta)$$

Weiterhin gilt für die Kullback-Leibler-Information, siehe Abschnitt 13.2:

$$K_\bullet^\bullet(Q, P) = L_\bullet^\bullet(\theta_0, \theta_0) - L_\bullet^\bullet(\theta_0, \theta) \geq 0$$

- $\hat{\theta}_n$ ist die Bezeichnung für den Maximum-Likelihood-Schätzer, der $L_n^\bullet(\theta)$ bzw. $l_n^\bullet(\theta)$ maximiert.
- Wir setzen (mit $\ln(0) := -\infty$):

RECHTSZENSIERUNG:

$$\psi^{RC}(\underline{x}, \theta) := \delta \cdot \ln(f(z, \theta)) + (1 - \delta) \cdot \ln(1 - F(z, \theta))$$

wobei $\underline{x} = (z, \delta)$

LINKSZENSIERUNG:

$$\psi^{LC}(\underline{x}, \theta) := \delta \cdot \ln(F(z, \theta)) + (1 - \delta) \cdot \ln(f(z, \theta))$$

wobei $\underline{x} = (z, \delta)$

14. Konsistenz und asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Zensierung

CURRENT STATUS MODEL:

$$\psi^{CS}(\underline{x}, \theta) := \mu \cdot \ln(A(z, \theta)) + (1 - \mu) \cdot \ln(1 - A(z, \theta))$$

wobei $\underline{x} = (z, \mu)$

INTERVALLZENSIERUNG TYP II:

$$\begin{aligned} \psi^{IC2}(\underline{x}, \theta) := & \mu \cdot \ln(A(y, \theta)) + (1 - \mu) \cdot \gamma \cdot \ln(A(v, \theta) - A(y, \theta)) \\ & + (1 - \gamma) \cdot \ln(1 - A(v, \theta)) \end{aligned}$$

wobei $\underline{x} = (y, v, \mu, \gamma)$

DOPPELZENSIERUNG:

$$\begin{aligned} \psi^{DC}(\underline{x}, \theta) := & \mu \cdot \ln(A(z, \theta)) + (1 - \mu) \cdot \gamma \cdot \ln(a(z, \theta)) \\ & + (1 - \gamma) \cdot \ln(1 - A(z, \theta)) \end{aligned}$$

wobei $\underline{x} = (z, \mu, \gamma)$

MITTELZENSIERUNG:

$$\begin{aligned} \psi^{MC}(\underline{x}, \theta) := & \mu \cdot \ln(a(y, \theta)) + (1 - \mu) \cdot \gamma \cdot \ln(A(v, \theta) - A(y, \theta)) \\ & + (1 - \gamma) \cdot \ln(a(v, \theta)) \end{aligned}$$

wobei $\underline{x} = (y, v, \mu, \gamma)$

SURV./SACRIFICE MODEL:

$$\begin{aligned}\psi^{SS}(\underline{x}, \theta) &:= (1 - \delta) \cdot \mu \cdot \ln(A(z, \theta) - F(z, \theta)) \\ &\quad + (1 - \mu) \cdot \ln(1 - A(z, \theta)) \\ \text{wobei } \underline{x} &= (z, \delta, \mu)\end{aligned}$$

Bemerkung:

Mit diesen Bezeichnungen gilt in allen Zensierungsmodellen:

$$\begin{aligned}\ln(L_n^\bullet(\theta)) - \ln(L_n^\bullet(\theta_0)) &= \ln\left(\prod_{i=1}^n \phi^\bullet(\underline{X}_i, \theta)\right) - \ln\left(\prod_{i=1}^n \phi^\bullet(\underline{X}_i, \theta_0)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n [\ln(\phi^\bullet(\underline{X}_i, \theta)) - \ln(\phi^\bullet(\underline{X}_i, \theta_0))] \\ &= \sum_{i=1}^n (\psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta) - \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta_0))\end{aligned}$$

Hiermit folgt für die Differenz des normalisierten Logarithmus:

$$\begin{aligned}l_n^\bullet(\theta) - l_n^\bullet(\theta_0) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta) - \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta_0)) \\ &\xrightarrow{n} E_{\theta_0} [\psi^\bullet(\underline{X}, \theta) - \psi^\bullet(\underline{X}, \theta_0)] \\ &= L_\bullet^\bullet(\theta_0, \theta) - L_\bullet^\bullet(\theta_0, \theta_0) \quad (-K_\bullet^\bullet(Q, P))\end{aligned}$$

14.1. Konsistenz des Maximum-Likelihood-Schätzers

Die Konsistenz des Maximum-Likelihood-Schätzers wird unter Verwendung der folgenden Annahmen bewiesen werden:

14. Konsistenz und asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Zensierung

- (i) Θ , der Parameterraum von θ , ist kompakt.
- (ii) Die Funktion $\theta \rightarrow \psi^\bullet(x, \theta)$ ist stetig.
- (iii) Für jedes $\theta \neq \theta_0$ seien die Voraussetzungen des jeweiligen Zensierungsmodells gegeben, so dass die Kullback-Leibler-Information strikt positiv für diese θ ist.

Theorem 14.1. *Es seien die Voraussetzungen (i)-(iii) erfüllt.*

Dann gilt, falls $L^\bullet(\theta_0, \theta_0)$ endlich ist,

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}_n \xrightarrow{n} \theta_0) = 1 \quad \text{unter } \theta_0 \quad (14.1)$$

Beweis. Es bezeichne $\{V_\epsilon(\theta_0)\}$ eine abzählbare Familie von offenen Umgebungen um θ_0 . Um (14.1) zu verifizieren, müssen wir zeigen, dass für jedes $\epsilon > 0$ das Folgende gilt:

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}_n \in V_\epsilon(\theta_0) \text{ schließlich}) = 1 \quad (14.2)$$

Im folgenden Lemma werden wir zeigen, dass (14.2) mit $U_\epsilon = \Theta \setminus V_\epsilon(\theta_0)$ aus

$$\mathbb{P}(\limsup_n \sup_{\theta \in U_\epsilon} (l_n^\bullet(\theta) - l_n^\bullet(\theta_0)) < 0) = 1$$

folgt.

Lemma 14.2.

(14.2) und somit (14.1) sind erfüllt, falls

$$\mathbb{P}(\limsup_n \sup_{\theta \in U_\epsilon} (l_n^\bullet(\theta) - l_n^\bullet(\theta_0)) < 0) = 1 \quad (14.3)$$

14. Konsistenz und asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Zensierung

Beweis.

Unter (14.3) gilt für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$ und für \mathbb{P} -fast alle $\omega \in \Omega$, dass eine positive Zahl $n_0(\omega)$ sowie ein positives $C(\omega)$ existieren, so dass $\forall \theta \in U_\epsilon$

$$l_n^\bullet(\theta) - l_n^\bullet(\theta_0) \leq -C(\omega) \quad n \geq n_0 \text{ ist.}$$

Somit ist $\hat{\theta}_n \in V_\epsilon(\theta_0)$ für $n \geq n_0$ und der Beweis ist abgeschlossen. □

Nun wollen wir den Beweis des Theorems unter den Voraussetzungen *i) – iii)* verifizieren:

Wir wählen irgendein $\theta^* \in U_\epsilon$. Aufgrund der Stetigkeit (*ii)*) gilt mit Wahrscheinlichkeit 1 unter θ_0 :

$$\sup_{\theta \in V_\epsilon(\theta^*)} (\psi^\bullet(\underline{X}, \theta) - \psi^\bullet(\underline{X}, \theta_0)) \downarrow_\epsilon \psi^\bullet(\underline{X}, \theta^*) - \psi^\bullet(\underline{X}, \theta_0)$$

Mit dem Satz von der Monotonen Konvergenz folgt, dass für alle $V_\epsilon(\theta^*)$, die klein genug sind:

$$E_{\theta_0} \left[\sup_{\theta \in V_\epsilon(\theta^*)} (\psi^\bullet(\underline{X}, \theta) - \psi^\bullet(\underline{X}, \theta_0)) \right] \downarrow E_{\theta_0} [\psi^\bullet(\underline{X}, \theta^*) - \psi^\bullet(\underline{X}, \theta_0)]$$

Nun gilt aber unter θ_0 für $\theta^* \in U_\epsilon$ (somit ist $\theta^* \neq \theta_0$) mit *iii)*, dass

$$E_{\theta_0} [\psi^\bullet(\underline{X}, \theta^*) - \psi^\bullet(\underline{X}, \theta_0)] = L_\bullet^\bullet(\theta_0, \theta^*) - L_\bullet^\bullet(\theta_0, \theta_0) < 0.$$

Mit dem SGZ gilt somit mit Wahrscheinlichkeit 1:

$$\limsup_n \sup_{\theta \in V_\epsilon(\theta^*)} (l_n^\bullet(\theta) - l_n^\bullet(\theta_0)) < 0$$

14. Konsistenz und asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Zensierung

Wegen der Kompaktheit kann U_ϵ von endlich vielen dieser $V_\epsilon(\theta^*)$ s überdeckt werden. Dies beweist das Theorem. \square

14.2. Asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers

In diesem Abschnitt wollen wir die asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers unter bestimmten Annahmen verifizieren. Hierbei orientieren wir uns an *Stute (2007), Kapitel 5*. Es bezeichne $\Theta \subset \mathbb{R}^r$ den Parameterraum von θ . Wir treffen die weiteren folgenden Annahmen:

1. Die Funktion $\theta \rightarrow \psi^\bullet(\underline{x}, \theta)$ ist dreimal differenzierbar, so dass in einer Umgebung um θ_0 das Nachstehende für $1 \leq j, k, s \leq r$ gilt:

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_s} \psi^\bullet(\underline{x}, \theta) \right| \leq M(\underline{x}) \quad \mu - \text{f.s.}$$

mit

$$E_{\theta_0}[M(\underline{X})] < \infty$$

2. $E_{\theta_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \psi^\bullet(\underline{X}, \theta) \Big|_{\theta=\theta_0} \right] = 0$ für $1 \leq j \leq r$
3. $E_{\theta_0} \left[\left(\frac{\partial}{\partial \theta_j} \psi^\bullet(\underline{X}, \theta) \Big|_{\theta=\theta_0} \right)^2 \right] < \infty$ für $1 \leq j \leq r$

Zusätzlich sei die wie folgt definierte Matrix positiv definit:

$$I(\theta_0) = (\sigma_{jk}(\theta_0))_{1 \leq j, k \leq r}$$

14. Konsistenz und asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Zensierung

$$\begin{aligned} \text{mit } \sigma_{jk}(\theta_0) &= E_{\theta_0} \left[\frac{\partial}{\partial \theta_j} \psi^\bullet(\underline{X}, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_k} \psi^\bullet(\underline{X}, \theta) \Big|_{\theta=\theta_0} \right] \\ &= -E_{\theta_0} \left[\frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \psi^\bullet(\underline{X}, \theta) \Big|_{\theta=\theta_0} \right] \end{aligned}$$

4. Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\theta}_n$ existiert und ist konsistent unter θ_0 .

Theorem 14.3. *Unter den Annahmen 1.-4. gilt:*

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \xrightarrow{n} \mathcal{N}_r(\underline{0}, I^{-1}(\theta_0)) \quad \text{in Verteilung}$$

$I(\theta_0)$ wird die **Fisher-Informationsmatrix** genannt.

Beweis. Mit der Taylorentwicklung gilt für $1 \leq j \leq r$ an einer Zwischenstelle θ_n^* :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta_j} \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta) \Big|_{\theta=\hat{\theta}_n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \theta_j} \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta) \Big|_{\theta=\theta_0} + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^r (\hat{\theta}_{nk} - \theta_{0k}) \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta) \Big|_{\theta=\theta_n^*} \end{aligned}$$

Diese Gleichung stellen wir um und verwenden die Matrixschreibweise:

$$\sqrt{n} \cdot A_n (\hat{\theta}_n - \theta_0) = -\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial}{\partial \theta_1} \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta), \dots, \frac{\partial}{\partial \theta_r} \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta) \right]_{\theta=\theta_0}^t \quad (14.4)$$

wobei $A_n = (a_{jk}^n)$ mit

$$a_{jk}^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta) \Big|_{\theta=\theta_n^*}$$

Aufgrund der Annahmen 2. und 3. ist die rechte Seite der Gleichung (14.4) eine Summe von

14. Konsistenz und asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Zensierung

unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvektoren und asymptotisch $\mathcal{N}_r(\underline{0}, I(\theta_0))$ -verteilt.

Wir werden nun zeigen, dass

$$A_n \xrightarrow{n} -I(\theta_0) \quad \text{in Wahrscheinlichkeit unter } \theta_0 \quad (14.5)$$

Dies beendet schließlich mit Hilfe der Regularität von $I(\theta_0)$ sowie Cramér-Slutsky den Beweis.

Betrachten wir nun (14.5) für $1 \leq j, k \leq r$:

$$a_{jk}^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta) |_{\theta=\theta_0} + \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta) |_{\theta=\theta_n^*} - \frac{\partial^2}{\partial \theta_j \partial \theta_k} \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta) |_{\theta=\theta_0} \right)}_{=: R_n}$$

Durch Verwendung der Annahme 3. sowie des SGGZ konvergiert die erste Summe gegen $-\sigma_{jk}(\theta_0)$. Weiterhin gilt mit dem Mittelwertsatz:

$$\begin{aligned} |R_n| &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^r \left| \frac{\partial^3}{\partial \theta_j \partial \theta_k \partial \theta_s} \psi^\bullet(\underline{X}_i, \theta) |_{\theta=\theta_n^*} \right| |\theta_{ns}^* - \theta_{0s}| \\ &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{s=1}^r M(\underline{X}_i) |\theta_{ns}^* - \theta_{0s}| \end{aligned}$$

Da mit $\hat{\theta}_{ns} \xrightarrow{n} \theta_{0s}$ auch $\theta_{ns}^* \xrightarrow{n} \theta_{0s}$ sowie

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M(\underline{X}_i) \xrightarrow{n} E_{\theta_0}[M(\underline{X})] < \infty$$

gilt, haben wir also

$$|R_n| \xrightarrow{n} 0 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit}$$

und somit (14.5). □

14. *Konsistenz und asymptotische Normalität des Maximum-Likelihood-Schätzers bei Zensierung*

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

In diesem Kapitel wollen wir der Idee von *Khmaladze (1981)* folgen und im Generalized Survival/Sacrifice Model eine Martingaltransformation wie in *Nikabadze und Stute (1997)*, die dies im Rechtszensierungsmodell vollzogen haben, bestimmen. Hiermit können asymptotisch verteilungsfreie Tests einer zusammengesetzten Hypothese bezüglich der Funktion R_θ unter Verwendung des folgenden Prozesses angewendet werden:

$$\begin{aligned} D_{n,t_0}^{GSS}(t, \theta) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{t_0 \leq Z_i \leq t\}} \left[1_{\{D_i > Z_i, X_i > Y_i\}} - (1 - R_\theta(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t\}} \left[1_{\{\bar{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_\theta(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}} \right] \end{aligned}$$

Die Funktion R_θ ist wie folgt definiert:

$$\begin{aligned}
 1 - R_{\theta_0}(t) &:= \frac{1 - \tilde{A}(t)}{1 - F(t)} \\
 &= \frac{P(\tilde{D} > t)}{P(X > t)} \\
 &= \frac{P(\min(D, X) > t)}{P(X > t)} \\
 &= \frac{P(D > t, X > t)}{P(X > t)} \\
 &= P(D > t | X > t) \\
 \implies R_{\theta_0}(t) &= 1 - P(D > t | X > t) \\
 &= P(D \leq t | X > t)
 \end{aligned}$$

R_θ beschreibt somit die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Individuum, das zu einem Zeitpunkt t noch lebt ($X > t$), eine bestimmte Krankheit bereits ausgebrochen ist ($D \leq t$). Somit stellt dies eine für die Praxis, z.B. in der Humanmedizin oder Tiermedizin, interessante und wichtige Größe dar.

In den folgenden Abschnitten 15.1 und 15.2 werden die benötigten Modellvoraussetzungen sowie die beteiligten Funktionen und Parameter angegeben und kommentiert. Darauf folgend werden wir in Abschnitt 15.3 unser Vorgehen erläutern und die Ergebnisse präsentieren, die wir abschließend in Abschnitt 15.4 beweisen werden.

15.1. Modellvoraussetzungen für die Martingaltransformation

Im Generalized Survival/Sacrifice Model beobachten wir die Variablen $O_i = (Z_i, \delta_i, \mu_i)_{i=1, \dots, n}$ mit $Z_i = \min(X_i, Y_i)$ und $\delta_i = 1_{\{X_i \leq Y_i\}}$ sowie $\mu_i = 1_{\{D_i \leq Z_i\}}$.

Um die Martingaltransformation anwenden zu können, treffen wir die folgenden Annahmen:

1. Die Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n seien unabhängig für $i = 1, \dots, n$. Das Gleiche möge für D_1, \dots, D_n sowie Y_1, \dots, Y_n erfüllt sein. Zusätzlich seien die (D_i, X_i) unabhängig von der Zensierungsvariablen Y_i für alle $i = 1, \dots, n$.

Diese Voraussetzung wird zur Berechnung der Subverteilungen benötigt und ist eine Grundvoraussetzung der bisherigen Zensierungsmodelle.

2. Die verwendeten Verteilungen seien stetig und auf \mathbb{R}^+ konzentriert. Weiterhin betrachten wir die Prozesse nur für $t_0 \leq t \leq T$ mit $t_0 \geq 0$ sowie $T < \tau_H$ (wobei $\tau_H = \inf\{x : H(x) = 1\}$ vgl. *Stute (1993)*).

Wir haben also Prozesse im Skorokhod-Raum $D[t_0, T]$.

In der Survival Analysis sind wir typischerweise an Größen (Lebensdauern) interessiert, die nur positive Werte annehmen können.

3. Voraussetzungen für den Schätzer θ_n von θ_0 :

Es bezeichne θ_n einen Schätzer des Parameters θ_0 , der zur parametrischen

Familie $\mathcal{R} = \{1 - R_\theta = \left(\frac{1-\tilde{A}}{1-\tilde{F}}\right)(\theta) | \theta \in \Theta\}$ gehört.

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

a) Für den Schätzer θ_n existiere (unter H_0) die folgende Darstellung:

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l(D_i, X_i, Y_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0) + o_p(1)$$

Mit $o_p(1)$ bezeichnen wir eine Folge ϵ_n , für die $\epsilon_n \xrightarrow{n} 0$ in Wahrscheinlichkeit gilt.

Weiterhin gelte für diesen Schätzer:

$$\theta_n \xrightarrow{n} \theta_0 \quad \text{f.s.}$$

b) Es gelte für die in a) eingeführte Funktion:

$$E(l(D_1, X_1, Y_1, \delta_1, \mu_1, \theta_0)) = 0 \quad \text{unter } H_0$$

Außerdem möge die folgende Matrix unter H_0 existieren:

$$L(\theta_0) := E(l(D_1, X_1, Y_1, \delta_1, \mu_1, \theta_0)l(D_1, X_1, Y_1, \delta_1, \mu_1, \theta_0)^t)$$

Diese Voraussetzungen werden wie in *Durbin (1973)* zur Bestimmung der Verteilungskonvergenz des Prozesses

$$D_{n,t_0}^{GSS}(t, \theta_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t\}} \left[1_{\{\bar{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_n}(Y_i))1_{\{X_i > Y_i\}} \right]$$

gegen einen Gaussprozess benötigt.

4. Die Funktion R_θ sei dreimal stetig differenzierbar in θ im Inneren

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

von Θ , dem kompakten Parameterraum von θ .

Bemerkungen:

- In der Epidemiologie beschreibt die Prävalenz einer Krankheit die Anzahl der erkrankten Individuen einer Population zu einem bestimmten Zeitpunkt oder über einen bestimmten Zeitraum. In diesem Zusammenhang könnten wir die Funktion R_θ als bedingte Prävalenz interpretieren.
- Im Generalized Survival/Sacrifice Model bezeichnen wir die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen D mit A , die Verteilungsfunktionen von X und Y mit F bzw. G sowie die Verteilungsfunktion von $\tilde{D} = \min(D, X)$ mit \tilde{A} .
- Für die Subverteilungsfunktionen bestehen unter Voraussetzung 1) die folgenden Zusammenhänge, siehe Abschnitt 11.2:

$$\begin{aligned}H^{00}(t) &= P(Z \leq t, D > Y, X > Y) = \int_0^t (1 - \tilde{A})dG \\H^{01}(t) &= P(Z \leq t, D \leq Y, X > Y) = \int_0^t (\tilde{A} - F)dG \\H^0(t) &= P(Z \leq t, X > Y) = \int_0^t (1 - F)dG\end{aligned}$$

- Für Vektoren benutzen wir die Betragssummennorm und für Matrizen die entsprechende Spaltensummennorm. Die Spaltensummennorm ist mit der Betragssummennorm verträglich und sie ist sogar die durch diese induzierte Matrixnorm und somit submultiplikativ.

15.2. Transformationsvoraussetzungen

Wir benötigen weitere Voraussetzungen an die Funktionen, die bei der Transformation des Prozesses verwendet werden, um den Hypothesentest durchführen zu können. Deshalb definieren wir in diesem Abschnitt die nachstehenden Funktionen:

$$\text{Die Funktion } \psi_{t_0}(t, \theta) := \int_{t_0}^t R_\theta(x) dH^{00}(x) = \int_{t_0}^t R_\theta(x)(1 - R_\theta(x)) dH^0(x)$$

$$\text{Der Vektor } P_{t_0}(t, \theta) := \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial \theta}(x, \theta) dH^0(x)$$

$$\text{Der Vektor } a(t, \theta) := \left(\frac{dP}{d\psi}(t, \theta) \right)$$

Radon-Nikodym Ableitung von P in Bezug auf ψ

$$\begin{aligned} \text{Die Matrix } A(t, \theta) &:= \int_t^{t_1} a(x, \theta) a(x, \theta)^t d\psi(x, \theta) \\ &= \int_t^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}(x, \theta) \right) \left(\frac{dP}{d\psi}(x, \theta) \right)^t d\psi(x, \theta) \end{aligned}$$

wobei $T < t_1 < \tau_H$

Wenn wir für die Funktionen den Parameter θ nicht verwenden, also z.B. $\psi_{t_0}(t)$, so ist dies die Notation für die Funktionen an der Stelle θ_0 . Diese Funktionen enthalten aber Größen, die nicht aus den Daten gewonnen werden können. Aus diesem Grund definieren wir zusätzlich die folgenden Funktionen:

$$\begin{aligned} \psi_{n,t_0}(t) &:= \int_{t_0}^t R_{\theta_n}(x) dH_n^{00}(x) \\ P_{n,t_0}(t) &:= \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial \theta}(x, \theta_n) dH_n^0(x) \end{aligned}$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

$$a_n(t) := \left(\frac{dP}{d\psi}(t, \theta_n) \right)$$

$$A_n(t) := \int_t^{t_1} a_n(y) a_n^t(y) d\psi_n(y)$$

Wir präsentieren nun die letzten Voraussetzungen:

5. Für $t_0 \leq t \leq T$ und für alle $\theta \in \Theta$ existiere der obige Vektor $\left(\frac{dP}{d\psi}(t, \theta) \right)$ und die Matrix $A(t, \theta)$ sei invertierbar. Weiterhin mögen zwei Konstanten M_1 und M_2 existieren, so dass

$$\left| \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta, t) \right) \right| \leq M_1 < \infty \quad \forall \theta \in \Theta, \forall t \in [t_0, t_1]$$

$$\left| \left(\frac{\partial^2 R}{\partial^2 \theta}(\theta, t) \right) \right| \leq M_2 < \infty \quad \forall \theta \in \Theta, \forall t \in [t_0, t_1]$$

6. Für die Funktion $R_\theta(t)$ gilt $R_\theta(0) = 0$. Deshalb beschränken wir uns für den Beweis bestimmter Theoreme auf Prozesse in $[t_0, T]$ mit $t_0 > 0$, wobei $R_\theta(t) > 0 \forall t \in [t_0, t_1]$ und für alle $\theta \in \Theta$ gelten soll. Ebenso setzen wir $1 - R_\theta(t) > 0$ für alle $t \in [t_0, t_1]$ und $\forall \theta \in \Theta$ voraus.

Außerdem nehmen wir an, dass auch die Matrix $A_n(t, \theta)$ invertierbar sei und es möge für die Inversen gelten:

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} |A^{-1}(t, \theta)| \leq M_3 < \infty \quad \forall \theta \in \Theta$$

sowie

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} |A_n^{-1}(t, \theta)| \leq M_4 < \infty \quad \forall \theta \in \Theta \text{ und } \forall n \geq n_0(\omega)$$

15. *Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model*

Somit untersuchen wir unsere Prozesse für $n \geq n_0(\omega)$.

Abschließend setzen wir noch voraus, dass

$$\left| \left(\frac{\partial^3 R}{\partial \theta^3}(\theta, t) \right) \right| \leq M_5 < \infty \quad \forall \theta \in \Theta, \forall t \in [t_0, t_1]$$

Bemerkungen:

- Wir wollen nochmal auf die letzte Voraussetzung eingehen. Wir haben:

$$\begin{aligned} \psi_{t_0}(t, \theta) &= \int_{t_0}^t R_\theta(x) dH^{00}(x) = \int_{t_0}^t R_\theta(x)(1 - R_\theta(x)) dH^0(x) \\ P_{t_0}(t, \theta) &= \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial \theta}(x, \theta) dH^0(x) \\ a(t, \theta) &= \left(\frac{dP}{d\psi}(t, \theta) \right) \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung 6) und der Stetigkeit von R_θ gilt, dass

$\frac{1}{R_\theta} \leq K_1$ und $\frac{1}{1-R_\theta} \leq K_2$ (für alle $\theta \in \Theta$ und $t \in [t_0, t_1]$). Das Minimum existiert und wird erreicht. Hiermit folgt aber:

$$\begin{aligned} |a(t, \theta)| &= \left| \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta)}{R_\theta(t)(1 - R_\theta(t))} \right| \\ &\leq \frac{1}{R_\theta(t)(1 - R_\theta(t))} \left| \frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta) \right| \\ &\leq K_1 \cdot K_2 \cdot M_1 < \infty \quad \forall \theta \in \Theta, \forall t \in [t_0, t_1] \end{aligned}$$

Dies werden wir für den Beweis der Theoreme 15.4 und 15.5 verwenden.

- Die Funktion $\psi_{t_0}(t, \theta)$ ist die Kovarianzfunktion des Prozesses $D_{n,t_0}^{GSS}(t, \theta)$, den wir im Folgenden, um die Notation zu vereinfachen, mit $D_{n,t_0}(t, \theta)$ bezeichnen werden.

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Die Kovarianzfunktion wird zusammen mit dem Vektor $P_{t_0}(t, \theta)$, der aus der Taylorentwicklung eines Prozessteils stammt, benötigt, um den Prozess $D_{n,t_0}(t, \theta_n)$ zu transformieren und hierbei gewisse Verteilungseigenschaften zu erhalten.

- *Stute, Thies und Zhu (1998)* bestimmten eine Martingaltransformation in der Regression. Wir werden diese Ideen ebenfalls verwenden.
- *Koul und Yi (2006)* bestimmten eine Stute-Thies-Zhu-Martingaltransformation im Current Status Model. Diese Martingaltransformation kann ebenfalls als Spezialfall der Martingaltransformation dieses Kapitels hergeleitet werden.
- Mit $o_p(1)$ bezeichnen wir eine Folge, die stochastisch gegen Null konvergiert und mit $O_p(1)$ bezeichnen wir eine Folge, die stochastisch beschränkt ist.

15.3. Martingaltransformation und Resultate

Wir wollen den Prozess

$$D_{n,t_0}(t, \theta) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t\}} \left[1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_\theta(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}} \right]$$

verwenden, um Goodness-of-Fit Tests bezüglich der Hypothese

$$H_0 : R \in \mathcal{R} \quad \text{mit} \quad \mathcal{R} = \left\{ 1 - R_\theta = \left(\frac{1 - \tilde{A}}{1 - F} \right) (\theta) \mid \theta \in \Theta \right\}$$

durchzuführen. Hierbei bezeichnet R die wahre aber unbekannte Funktion. H_0 wird dann abgelehnt, wenn $\|D_n(\theta_n)\|$ einen kritischen Wert überschreitet. Hierbei bezeichnet $\|\cdot\|$ eine passende Norm auf dem Funktionenraum. Leider wird durch die Schätzung des Parameters θ_0

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

die Struktur des Prozesses so kompliziert, dass in den meisten Situationen die asymptotischen Quantile von $\|D_n(\theta_n)\|$ nicht verfügbar sind.

Das Ziel des Kapitels ist es, eine Transformation T zu finden, die es uns ermöglicht, asymptotisch verteilungsfreie Tests der zusammengesetzten Hypothese bezüglich R_θ durchzuführen. Die Transformation ist so konstruiert, dass $T(\tilde{D}_\infty)$ eine zeittransformierte Brownsche Bewegung ist. Hierbei bezeichnet \tilde{D}_∞ den Prozess, gegen den der zu untersuchende Prozess $D_n(\theta_n)$ in Verteilung konvergiert. Die Hypothese H_0 wird dann zu einem bestimmten Level α verworfen werden, falls $\|T(D_n(\theta_n))\|$ einen kritischen Wert k_1 überschreitet, den wir mit Hilfe der Brownschen Bewegung bestimmen können.

Nun enthält die Transformation T Größen, die nicht bekannt sind und somit geschätzt werden müssen. Dies erfordert eine neue Transformation T^n , die aber die gewünschte Verteilungseigenschaft asymptotisch erhält. Dies ist somit die Transformation, die letztlich auf den zu untersuchenden Prozess $D_n(\theta_n)$ anzuwenden ist.

Wir werden nun die Transformationen definieren. Anschließend werden wir die Resultate vorstellen und die Beweise werden in Abschnitt 15.4 vollzogen werden.

15.3.1. Martingaltransformation

Die ursprüngliche Transformation T (vgl. *Khmaladze (1981)* oder *Nikabadze und Stute (1997)*) besteht aus zwei Operatoren T_1 und T_2 . Der lineare Operator T_1 dient dazu, den zu untersuchenden Prozess (für θ_0) in ein Martingal zu transformieren, während die zweite lineare Transformation T_2 dem Zweck dient, den Prozess mit geschätztem Parameter θ_n so zu verän-

dern, dass er asymptotisch die gleiche Verteilung wie der Prozess mit dem wahren aber unbekanntem Parameter θ_0 besitzt.

In unserer Situation ist der Prozess $D_{n,t_0}(\theta_0)$ bereits ein Martingal, siehe Abschnitt 11.2. In diesem Abschnitt wurde der Martingalprozess $D_{n,0}(\theta_0)$ eingeführt. Die Martingaleigenschaft von $D_{n,t_0}(\theta_0)$ wird ebenfalls mit Hilfe der Doob-Meyer-Zerlegung bewiesen, da beide Prozessteile den gleichen Kompensator besitzen. Aufgrund der Martingaleigenschaft von $D_{n,t_0}(\theta_0)$ werden wir nur den zweiten Operator anwenden und diesen mit T bezeichnen.

Unter den obigen Voraussetzungen definieren wir schließlich die folgenden Transformationen:

$$T(f(t)) := f(t) - \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi} \right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi} \right)(z) df(z) \right] d\psi(y)$$

$$T^n(f(t)) := f(t) - \int_{t_0}^t a_n^t(y) A_n^{-1}(y) \int_y^{t_1} a_n(z) df(z) d\psi_n(y)$$

15.3.2. Resultate

Wir werden im Folgenden zeigen, dass dieser Operator T für den gewünschten Hypothesentest verwendet werden kann. Natürlich ist dieser Operator in der Praxis nicht bekannt. Deshalb haben wir einen neuen Operator T^n definiert, der nur Größen enthält, die aus den Daten gewonnen werden. Anschließend werden wir zeigen, dass $T^n(D_n(\theta_n))$ ebenfalls in Verteilung gegen den selben Gaussprozess konvergiert und somit die gewünschte Eigenschaft bewahrt.

Zuerst müssen wir aber die Verteilungskonvergenz der zu untersuchenden Prozesse zeigen und anschließend werden wir die benötigten Theoreme formulieren.

Verteilungskonvergenz von $D_n(\theta_0)$ und $D_n(\theta_n)$

Lemma 15.1.

Unter H_0 und den Voraussetzungen 1) und 2) gilt:

$$D_n(\theta_0) \xrightarrow{n} D_\infty(\theta_0) = B \circ \psi \text{ in Verteilung in } D[t_0, T]$$

Der Prozess $D_n(\theta_0)$ konvergiert somit gegen eine zeittransformierte Brownsche Bewegung. Auch der Prozess $D_n(\theta_n)$ konvergiert gegen einen Gaussprozess, jedoch nicht gegen eine (zeittransformierte) Brownsche Bewegung. Wir haben:

Lemma 15.2.

Unter H_0 und den Voraussetzungen 1)-5) gilt:

$$D_n(\theta_n) \xrightarrow{n} \tilde{D}_\infty(\theta_0) \equiv D_\infty(\theta_0) + P^t(\theta_0) \cdot V \text{ in Verteilung in } D[t_0, T]$$

wobei V einen normalverteilten Zufallsvektor (unabhängig von t) bezeichnet

$$\begin{aligned} \text{und } \text{Cov}(\tilde{D}_{\infty, t_0}(s, \theta_0), \tilde{D}_{\infty, t_0}(t, \theta_0)) &= \psi_{t_0}(s \wedge t) + P_{t_0}^t(s, \theta_0)L(\theta_0)P_{t_0}(t, \theta_0) \\ &+ E[1_{\{t_0 \leq Y \leq s\}}[1_{\{\tilde{D} > Y\}} - (1 - R_{\theta_0}(Y))1_{\{X > Y\}}]l(D, X, Y, \delta, \mu, \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0)] \\ &+ E[l(D, X, Y, \delta, \mu, \theta_0)^t P_{t_0}(s, \theta_0)1_{\{t_0 \leq Y \leq t\}}[1_{\{\tilde{D} > Y\}} - (1 - R_{\theta_0}(Y))1_{\{X > Y\}}]] \end{aligned}$$

Diese Aussage ist ein Analogon zu *Durbin (1973)*, der den nichtzensierten Fall untersucht hat, und erfordert letztlich die Definition des Operators T .

Theorem 15.3.

Unter H_0 und den Voraussetzungen 1)-5) gilt:

$$T(\tilde{D}_\infty) = B \circ \psi$$

Somit ist der Prozess $T(\tilde{D}_\infty(\theta_0))$ unter H_0 eine zeittransformierte Brownsche Bewegung mit $\psi_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t R_{\theta_0} dH^{00}$.

Theorem 15.4.

Unter H_0 und den Voraussetzungen 1)-6) haben wir:

$$T(D_n(\theta_n)) \xrightarrow{n} T(\tilde{D}_\infty(\theta_0)) \text{ in Verteilung im Raum } D[t_0, T]$$

Da $T(\tilde{D}_\infty(\theta_0))$ eine zeittransformierte Brownsche Bewegung ist, zeigt Theorem 15.4, dass der Prozess $T(D_n(t, \theta_n))$ in Verteilung gegen eine Brownsche Bewegung im Raum $D[t_0, T]$ konvergiert.

Abschließend wollen wir nun zeigen, dass der Prozess $T^n(D_n(\theta_n))$ ebenfalls gegen diesen zentrierten Gaussprozess konvergiert. Dies ist die Aussage des letzten Theorems.

Theorem 15.5.

Unter H_0 und den Voraussetzungen 1)-6) gilt das Folgende:

$$T^n(D_n(\theta_n)) \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} T(\tilde{D}_\infty(\theta_0)) \text{ im Raum } D[t_0, T]$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Der Prozess $T^n(D_n(\theta_n))$ konvergiert somit gegen die gleiche Brownsche Bewegung $T(\tilde{D}_\infty(\theta_0))$ im Raum $D[t_0, T]$. Dies ermöglicht schließlich unter Verwendung des folgenden Korollars den gewünschten Hypothesentest mit Hilfe der Transformation T^n .

Korollar 15.6.

Unter H_0 und den Voraussetzungen 1)-6) gilt mit $\psi_{n,t_0}(T) > 0$ und $\psi_{t_0}(T) > 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [t_0, T]} |T^n(D_{n,t_0}(t, \theta_n))| \geq \sqrt{\psi_{n,t_0}(T) \cdot k_1} \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{s \in [0, 1]} |B_s| \geq k_1 \right)$$

Als eine Konsequenz dieses Korollars wird die Hypothese

$$H_0 : R \in \mathcal{R}$$

auf dem Level $0 < \alpha < 1$ abgelehnt werden, falls

$$K_n \equiv \sup_{t \in [t_0, T]} |T^n(D_{n,t_0}(t, \theta_n))| / \sqrt{\psi_{n,t_0}(T)} \geq k_1$$

Hierbei bezeichnet k_1 das $1 - \alpha$ -Quantil von

$$\sup_{s \in [0, 1]} |B_s|$$

Nun wollen wir diese Aussagen beweisen.

15.4. Beweise

15.4.1. Verteilungskonvergenz von $D_n(\theta_0)$

Für den Prozess $D_n(\theta_0)$ gilt unter H_0 und den Voraussetzungen 1) und 2):

$$D_n(\theta_0) \xrightarrow{n} D_\infty(\theta_0) = B \circ \psi \text{ in Verteilung in } D[t_0, T]$$

Beweis. Wir haben:

$$D_{n,t_0}(t, \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t\}} [1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_0}(Y_i))1_{\{X_i > Y_i\}}]$$

Die Behauptung wird bewiesen werden, indem wir das Folgende in Anlehnung an *Billingsley (1968)* zeigen:

- die Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen
- dass der Prozess $D_n(\theta_0)$ asymptotisch C -traff ist

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen:

Es gilt für $t_0 < t_1 \leq \dots \leq t_m < T$: ($j, k = 1, \dots, m$)

$$\begin{aligned}
 D_{n,t_0}(t_j, \theta_0) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{t_0 \leq Y_i \leq t_j\}} [\mathbf{1}_{\{\bar{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_0}(Y_i)) \mathbf{1}_{\{X_i > Y_i\}}] \\
 E(D_{n,t_0}(t_j, \theta_0)) &= \sqrt{n} \cdot E[\mathbf{1}_{\{\dots\}} \mathbf{1}_{\{\bar{D} > Y\}}] - \sqrt{n} \cdot E[\mathbf{1}_{\{\dots\}} \frac{1 - \tilde{A}(Y)}{1 - F(Y)} \mathbf{1}_{\{X > Y\}}] \\
 &= \sqrt{n} \cdot \left(\int_{t_0}^{t_j} (1 - \tilde{A}(y)) dG(y) - \int_{t_0}^{t_j} (1 - \tilde{A}(y)) dG(y) \right) \\
 &= 0 \\
 \text{Cov}(D_{n,t_0}(t_j, \theta_0), D_{n,t_0}(t_k, \theta_0)) &= E \left(\mathbf{1}_{\{t_0 \leq Y \leq t_j \wedge t_k\}} [\mathbf{1}_{\{\bar{D} > Y\}} - 2 \cdot \mathbf{1}_{\{\bar{D} > Y\}} \frac{1 - \tilde{A}(Y)}{1 - F(Y)} \right. \\
 &\quad \left. + (\frac{1 - \tilde{A}(Y)}{1 - F(Y)})^2 \mathbf{1}_{\{X > Y\}}] \right) \\
 &= \int_{t_0}^{t_j \wedge t_k} (1 - \tilde{A}(y)) dG(y) - \int_{t_0}^{t_j \wedge t_k} \frac{(1 - \tilde{A}(y))^2}{1 - F(y)} dG(y) \\
 &= \int_{t_0}^{t_j \wedge t_k} \frac{\tilde{A}(y) - F(y)}{1 - F(y)} dH^{00}(y) \\
 &= \int_{t_0}^{t_j \wedge t_k} R_{\theta_0} dH^{00} = \psi_{t_0}(t_j \wedge t_k) =: \sigma_{jk} \\
 \Sigma &= (\sigma_{jk})_{j,k=1,\dots,m}
 \end{aligned}$$

Indem wir diese Darstellung, die IID-Struktur (“unabhängig und identisch verteilt”) sowie den Multivariaten Zentralen Grenzwertsatz verwenden, erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} D_{n,t_0}(t_1, \theta_0) \\ \dots \\ D_{n,t_0}(t_m, \theta_0) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} \mathbf{1}_{\{t_0 \leq Y_i \leq t_1\}} [\dots] \\ \dots \\ \mathbf{1}_{\{t_0 \leq Y_i \leq t_m\}} [\dots] \end{pmatrix} \longrightarrow N_m(0, \Sigma)$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Asymptotische C-Straffheit des Prozesses (in t):

Dies wird verifiziert werden, indem wir zeigen, dass eine stetige und monoton wachsende Funktion Φ existiert sowie eine Konstante $Q > 0$, so dass für $t_0 < r < s < t < T$:

$$E[(D_{n,t_0}(t, \theta_0) - D_{n,t_0}(s, \theta_0))^2 (D_{n,t_0}(s, \theta_0) - D_{n,t_0}(r, \theta_0))^2] \leq Q \cdot [\Phi(t) - \Phi(s)][\Phi(s) - \Phi(r)]$$

Hierfür verwenden wir das Lemma 5.1 aus *Stute (1997)* für

$$\alpha_i = 1_{\{s < Y_i \leq t\}} [1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_0}(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}}] \quad \text{und} \quad \beta_i = 1_{\{r < Y_i \leq s\}} [\dots]$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} & E[(D_{n,t_0}(t, \theta_0) - D_{n,t_0}(s, \theta_0))^2 (D_{n,t_0}(s, \theta_0) - D_{n,t_0}(r, \theta_0))^2] \\ &= E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \beta_i\right)^2\right] \\ &\leq \frac{n}{n^2} E[\underbrace{\alpha_1^2 \beta_1^2}_{=0}] + \frac{3n(n-1)}{n^2} E[\alpha_1^2] E[\beta_1^2] \\ &\leq 3 \cdot (\psi_{t_0}(t) - \psi_{t_0}(s)) (\psi_{t_0}(s) - \psi_{t_0}(r)) \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung 2) ist die Funktion ψ stetig in t und diese ist ebenfalls monoton wachsend. Dies beweist die Verteilungskonvergenz von $D_n(\theta_0)$.

□

15.4.2. Verteilungskonvergenz von $D_n(\theta_n)$

Es gilt für einen normalverteilten Vektor V sowie $P_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0) dH^0$ unter H_0 und den Voraussetzungen 1)-5):

$$D_n(\theta_n) \xrightarrow{n} \tilde{D}_\infty(\theta_0) \equiv D_\infty(\theta_0) + P^t \cdot V \text{ in Verteilung in } D[t_0, T]$$

Beweis. Zuerst werden wir verifizieren, dass unter H_0 und den Voraussetzungen 1)-5) das Folgende gilt:

$$D_{n,t_0}(t, \theta_n) = D_{n,t_0}(t, \theta_0) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l(D_i, X_i, Y_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0) + o_p(1) \quad \text{gleichmäßig in } t$$

Wir verwenden die Ideen von *Durbin (1973)* und erhalten mit Taylor:

$$\begin{aligned} D_{n,t_0}(t, \theta_n) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t\}} [1_{\{\bar{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_n}(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}}] \\ &= D_{n,t_0}(t, \theta_0) + \sqrt{n} \int_{t_0}^t (R_{\theta_n} - R_{\theta_0}) dH_n^0 \\ &= D_{n,t_0}(t, \theta_0) + \sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)^t \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t\}} 1_{\{X_i > Y_i\}} \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_{ni}, Y_i) \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet θ_{ni} eine Zwischenstelle von θ_n und θ_0 . Indem wir die letzte Gleichung

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

weiter umformen, ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 D_{n,t_0}(t, \theta_n) &= D_{n,t_0}(t, \theta_0) + \underbrace{\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)^t \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t, X_i > Y_i\}} \left[\frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_{ni}, Y_i) - \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0, Y_i) \right]}_{=: I} \\
 &\quad + \underbrace{\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)^t \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left[1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t, X_i > Y_i\}} \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0, Y_i) - E[1_{\{t_0 \leq Y \leq t, X > Y\}} \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0, Y)] \right]}_{=: II} \\
 &\quad + \sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0) \\
 &= D_{n,t_0}(t, \theta_0) + I + II + \sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0) \\
 &= D_{n,t_0}(t, \theta_0) + I + II + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l(D_i, X_i, Y_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0) + o_p(1)
 \end{aligned}$$

Hierbei wurde für die letzte Gleichung Voraussetzung 3) verwendet sowie

$$E[1_{\{t_0 \leq Y \leq t, X > Y\}} \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0, Y)] = \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0)(1 - F)dG = \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0)dH^0 = P_{t_0}(t, \theta_0)$$

Somit bleibt zu zeigen, dass I und II gleichmäßig stochastisch gegen Null konvergieren.

Es gilt für I , indem wir die Verteilungskonvergenz von $\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)$ sowie die weiteren

Voraussetzungen ausnutzen:

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

$$\begin{aligned}
& \sup_{t \in [t_0, T]} |\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)^t \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t, X_i > Y_i\}} \left[\frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_{ni}, Y_i) - \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0, Y_i) \right]| \\
& \leq \underbrace{|\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)|}_{O_p(1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sup_{t \in [t_0, T]} |1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t, X_i > Y_i\}}|}_{\leq 1} \cdot \underbrace{|\theta_n - \theta_0|}_{o_p(1)} \cdot \underbrace{\left| \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2}(\tilde{\theta}_{ni}, Y_i) \right|}_{\leq M_2} \\
& \leq O_p(1) \cdot 1 \cdot o_p(1) \cdot M_2 = o_p(1)
\end{aligned}$$

Weiterhin haben wir für II:

$$\begin{aligned}
& \sup_{t \in [t_0, T]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t, X_i > Y_i\}} \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0, Y_i) - E[1_{\{t_0 \leq Y \leq t, X > Y\}} \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0, Y)] \right| \\
& = \sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t \frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0, y) [dH_n^0(y) - dH^0(y)] \right| \\
& = o_p(1)
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichung wird durch Verwendung der Ideen des klassischen Glivenko-Cantelli Theorems vollzogen. Die Funktionen H_n^0 und H^0 sind monoton und es gilt $H_n^0 \xrightarrow{n} H^0$ f.s.. Weiterhin ist $[t_0, T]$ kompakt, wir betrachten den Vektor $\frac{\partial R}{\partial \theta}(\theta_0)$ (mit $|\frac{\partial R}{\partial \theta}| \leq M_1$) komponentenweise und zerlegen diesen in den Positiv- sowie Negativteil. Insgesamt haben wir also gezeigt, dass

$$D_{n,t_0}(t, \theta_n) = D_{n,t_0}(t, \theta_0) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l(D_i, X_i, Y_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0) + o_p(1) \quad \text{gleichm\u00e4\u00dfig in } t$$

Nun werden wir zuerst die Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen und danach die asymptotische C-Straffheit zeigen, um das Lemma zu beweisen.

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen

Wir haben für $t_0 < t_1 \leq \dots \leq t_m < T$: ($j, k = 1, \dots, m$)

$$D_{n,t_0}(t_j, \theta_n) = \underbrace{D_{n,t_0}(t_j, \theta_0) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l(D_i, X_i, Y_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0)^t P_{t_0}(t_j, \theta_0)}_{=: \tilde{D}_{n,t_0}(t_j, \theta_0)} + o_p(1)$$

wir werden ab jetzt den Term $o_p(1)$ wegen einem

Cramér-Slutsky Argument vernachlässigen

$$\begin{aligned} E(\tilde{D}_{n,t_0}(t_j, \theta_0)) &= E(D_{n,t_0}(t_j, \theta_0)) + E\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l(D_i, X_i, Y_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0)^t P_{t_0}(t_j, \theta_0)\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\tilde{D}_{n,t_0}(t_j, \theta_0), \tilde{D}_{n,t_0}(t_k, \theta_0)) &= \psi_{t_0}(t_j \wedge t_k) + P_{t_0}^t(t_j, \theta_0) L(\theta_0) P_{t_0}(t_k, \theta_0) \\ &\quad + E[1_{\{t_0 \leq Y_1 \leq t_j\}}[\dots] \cdot l(D_1, X_1, Y_1, \delta_1, \mu_1, \theta_0)^t P_{t_0}(t_k, \theta_0)] \\ &\quad + E[l(D_1, X_1, Y_1, \delta_1, \mu_1, \theta_0)^t P_{t_0}(t_j, \theta_0) 1_{\{t_0 \leq Y_1 \leq t_k\}}[\dots]] \\ &=: \sigma_{jk} \\ \Sigma &= (\sigma_{jk})_{j,k=1,\dots,m} \end{aligned}$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Diese Kovarianz wird unter Verwendung der Voraussetzung 3) wie in *Stute (1997)* berechnet:

$$\begin{aligned}
& Cov(\tilde{D}_{n,t_0}(s, \theta_0), \tilde{D}_{n,t_0}(t, \theta_0)) \\
&= E \left[(1_{\{t_0 \leq Y_1 \leq s\}}[\dots] + l(\dots)^t P_{t_0}(s, \theta_0)) \cdot (1_{\{t_0 \leq Y_1 \leq t\}}[\dots] + l(\dots)^t P_{t_0}(t, \theta_0)) \right] \\
&= E[D_{n,t_0}(s, \theta_0) \cdot D_{n,t_0}(t, \theta_0)] \\
&\quad + E[l(D_1, X_1, Y_1, \delta_1, \mu_1, \theta_0)^t P_{t_0}(s, \theta_0) \cdot l(D_1, X_1, Y_1, \delta_1, \mu_1, \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0)] \\
&\quad + E[1_{\{t_0 \leq Y_1 \leq s\}}[\dots] \cdot l(D_1, X_1, Y_1, \delta_1, \mu_1, \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0)] \\
&\quad + E[l(D_1, X_1, Y_1, \delta_1, \mu_1, \theta_0)^t P_{t_0}(s, \theta_0) \cdot 1_{\{t_0 \leq Y_1 \leq t\}}[\dots]] \\
&= \psi_{t_0}(s \wedge t) + P_{t_0}^t(s, \theta_0) L(\theta_0) P_{t_0}(t, \theta_0) \\
&\quad + E[1_{\{t_0 \leq Y_1 \leq s\}}[\dots] \cdot l(D_1, X_1, Y_1, \delta_1, \mu_1, \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0)] \\
&\quad + E[l(D_1, X_1, Y_1, \delta_1, \mu_1, \theta_0)^t P_{t_0}(s, \theta_0) \cdot 1_{\{t_0 \leq Y_1 \leq t\}}[\dots]]
\end{aligned}$$

Indem wir den Multivariaten Zentralen Grenzwertsatz verwenden, erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} \tilde{D}_{n,t_0}(t_1, \theta_0) \\ \dots \\ \tilde{D}_{n,t_0}(t_m, \theta_0) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t_1\}}[\dots] + l(D_i, X_i, Y_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0)^t P_{t_0}(t_1, \theta_0) \\ \dots \\ 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t_m\}}[\dots] + l(D_i, X_i, Y_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0)^t P_{t_0}(t_m, \theta_0) \end{pmatrix} \longrightarrow N_m(0, \Sigma)$$

Asymptotische C-Straffheit (in t):

Die asymptotische C-Straffheit des Prozesses ist eine direkte Konsequenz der asymptotischen C-Straffheit des Prozesses $D_{n,t_0}(t, \theta_0)$, der in Verteilung konvergiert (Lemma 15.1), und der asymptotischen C-Straffheit von $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n l(D_i, X_i, Y_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0)$, welche unter den Voraussetzungen mit der Stetigkeit von $P_{t_0}(t, \theta_0)$ folgt. \square

15.4.3. Beweis des Theorem 15.3

Nun befassen wir uns mit den transformierten Prozessen und werden unter H_0 sowie den Voraussetzungen 1)-5) das Folgende beweisen:

$$T(\tilde{D}_\infty(\theta_0)) = B \circ \psi \quad \text{in } D[t_0, T]$$

Bemerkungen:

- Wir haben bisher gezeigt, dass $\tilde{D}_\infty(\theta_0)$ ein zentrierter Gaussprozess ist. Da der Operator T linear ist, gilt dies auch für $T(\tilde{D}_\infty(\theta_0))$. Somit muss die Kovarianzfunktion des Prozesses $T(\tilde{D}_\infty(\theta_0))$ bestimmt werden, um das Theorem 15.3 zu beweisen.
- Wir verwenden in diesem Kapitel den Buchstaben t im Exponenten ebenfalls für das Transponierte eines Vektors oder einer Matrix. Ebenso findet der Buchstabe T für die Transformation sowie für einen Zeitpunkt auf der reellen Achse Verwendung. Die Bedeutung des Buchstaben t oder T wird aber aus dem Zusammenhang ersichtlich sein.

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Beweis. Es gilt für $t_0 < t < T$:

$$\begin{aligned}
 T(\tilde{D}_{\infty,t_0}(t, \theta_0)) &= T(D_{\infty,t_0}(t, \theta_0)) + T(P_{t_0}^t(t, \theta_0) \cdot V) \\
 &= D_{\infty,t_0}(t, \theta_0) + P_{t_0}^t(t, \theta_0) \cdot V \\
 &\quad - \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi} \right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi} \right)(z) dD_{\infty}(z, \theta_0) \right] d\psi(y) \\
 &\quad - \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi} \right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi} \right)(z) \underbrace{\left(\frac{dP}{d\psi} \right)^t(z) d\psi(z)}_{dP^t(z)} \right] d\psi(y) \cdot V \\
 &= D_{\infty,t_0}(t, \theta_0) + \cancel{P_{t_0}^t(t, \theta_0) \cdot V} \\
 &\quad - \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi} \right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi} \right)(z) dD_{\infty}(z, \theta_0) \right] d\psi(y) \\
 &\quad - \underbrace{\int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi} \right)^t(y) A^{-1}(y) A(y) d\psi(y)}_{=P_{t_0}^t(t, \theta_0) \cdot V} \cdot V \\
 &= D_{\infty,t_0}(t, \theta_0) - \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi} \right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi} \right)(z) dD_{\infty}(z, \theta_0) \right] d\psi(y) \\
 &=: I(t) - II(t)
 \end{aligned}$$

Indem wir die Bezeichnungen $I(t)$ und $II(t)$ verwenden, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 Cov(T(\tilde{D}_{\infty,t_0}(s, \theta_0)), T(\tilde{D}_{\infty,t_0}(t, \theta_0))) &= E[(I(s) - II(s)) \cdot (I(t) - II(t))] \\
 &= E[I(s)I(t)] + E[II(s)II(t)] \\
 &\quad - E[I(s)II(t)] - E[II(s)I(t)]
 \end{aligned}$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Wir werden nun zeigen, dass mit Fubini das Folgende gilt:

$$E[II(s)II(t)] = E[I(s)II(t)] + E[II(s)I(t)]$$

Da außerdem

$$E[I(s)I(t)] = E(D_{\infty,t_0}(s, \theta_0)D_{\infty,t_0}(t, \theta_0)) = \psi_{t_0}(s \wedge t),$$

beendet dies den Beweis des Theorems.

Um die folgenden drei Erwartungswerte zu berechnen, werden Fubini sowie Rechenregeln für stochastische Integrale benutzt, vergleiche *Stute (2006)*:

1) Wir haben für $s < t$:

$$\begin{aligned} E[I(s)II(t)] &= E[D_{\infty,t_0}(s, \theta_0) \cdot \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) dD_{\infty}(z, \theta_0) \right] d\psi(y)] \\ &= \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) E \left[\int_{t_0}^s dD_{\infty}(x, \theta_0) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) dD_{\infty}(z, \theta_0) \right] \right] d\psi(y) \\ &= \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) E \left[\int \int 1_{\{t_0 \leq x \leq s\}} 1_{\{y \leq z \leq t_1\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) dD_{\infty}(x, \theta_0) dD_{\infty}(z, \theta_0) \right] d\psi(y) \\ &= \int_{t_0}^t 1_{\{y \leq s\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int 1_{\{t_0 \leq x \leq s\}} 1_{\{y \leq x \leq t_1\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(x) d\psi(x) \right] d\psi(y) \\ &= \int_{t_0}^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \int_y^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) d\psi(z) d\psi(y) \end{aligned}$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

2) Dies wird wie in 1) berechnet (für $s < t$):

$$\begin{aligned} E[II(s)I(t)] &= E[D_{\infty, t_0}(t, \theta_0) \cdot \int_{t_0}^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) dD_{\infty}(z, \theta_0) \right] d\psi(y)] \\ &= \int_{t_0}^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \int_y^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) d\psi(z) d\psi(y) \end{aligned}$$

3) Für den dritten Erwartungswert gilt für $s < t$:

$$\begin{aligned} E[II(s)II(t)] &= E\left[\int \int \mathbf{1}_{\{t_0 \leq x \leq s\}} \mathbf{1}_{\{t_0 \leq y \leq t\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) A^{-1}(x) \int_x^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right) dD_{\infty} \int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t dD_{\infty} A^{-1}(y) \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y) d\psi(x) d\psi(y)\right] \\ &= \int \int \mathbf{1}_{\{t_0 \leq x \leq s\}} \mathbf{1}_{\{t_0 \leq y \leq t\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) A^{-1}(x) \int_{x \vee y}^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(z) d\psi(z) A^{-1}(y) \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y) d\psi(x) d\psi(y) \\ &= \int \int \mathbf{1}_{\{t_0 \leq x \leq s\}} \mathbf{1}_{\{t_0 \leq y \leq t\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) A^{-1}(x) A(x \vee y) A^{-1}(y) \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y) d\psi(x) d\psi(y) \end{aligned}$$

Somit müssen wir zwei Situationen unterscheiden:

$$\begin{aligned} E[II(s)II(t)] &= \int \int \mathbf{1}_{\{t_0 \leq x \leq s\}} \mathbf{1}_{\{t_0 \leq y \leq t\}} \mathbf{1}_{\{t_0 \leq x \leq y\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) A^{-1}(x) \underbrace{A(y) A^{-1}(y)}_{= \text{Identität}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y) d\psi(x) d\psi(y) \\ &\quad + \int \int \mathbf{1}_{\{t_0 \leq x \leq s\}} \mathbf{1}_{\{t_0 \leq y \leq s\}} \mathbf{1}_{\{t_0 \leq y < x\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) \underbrace{A^{-1}(x) A(x)}_{= \text{Identität}} A^{-1}(y) \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y) d\psi(x) d\psi(y) \\ &= \int_{t_0}^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) A^{-1}(x) \int_x^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y) d\psi(y) d\psi(x) \\ &\quad + \int_{t_0}^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \int_y^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(x) d\psi(x) d\psi(y) \end{aligned}$$

Dies zeigt also, dass $E[II(s)II(t)] = E[I(s)II(t)] + E[II(s)I(t)]$ und beendet den Beweis. \square

15.4.4. Beweis des Theorem 15.4

Theorem 15.4 behandelt die Verteilungskonvergenz von $T(D_n(\theta_n))$. Wir werden zeigen, dass unter H_0 und den Voraussetzungen 1)-6) das Nachfolgende gilt:

$$T(D_n(\theta_n)) \xrightarrow{n} T(\tilde{D}_\infty(\theta_0)) \text{ in Verteilung im Raum } D[t_0, T]$$

Beweis. Um dies zu beweisen, werden wir zeigen, dass unter den obigen Voraussetzungen das Folgende gilt:

$$T(D_n(\theta_0)) \xrightarrow{n} T(\tilde{D}_\infty(\theta_0)) \text{ in Verteilung im Raum } D[t_0, T]$$

Anschließend werden wir verifizieren, dass außerdem

$$T(D_{n,t_0}(t, \theta_n)) = T(D_{n,t_0}(t, \theta_0)) + o_p(1) \quad \text{gleichmäßig in } t$$

Diese beiden Aussagen beweisen schließlich das Theorem.

Wir haben:

$$\begin{aligned} & T(D_{n,t_0}(t, \theta_0)) \\ &= D_{n,t_0}(t, \theta_0) - \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi} \right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi} \right)(z) dD_n(z, \theta_0) \right] d\psi(y) \\ &= D_{n,t_0}(t, \theta_0) \\ &\quad - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi} \right)^t(y) A^{-1}(y) 1_{\{y \leq Y_i \leq t_1\}} \left(\frac{dP}{d\psi} \right)(Y_i) [1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_0}(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}}] d\psi(y)}_{=: Q(D_i, X_i, Y_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0, t)} \end{aligned}$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Diese Darstellung benötigen wir für den Beweis der Verteilungskonvergenz.

Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen:

Es gilt für $t_0 < t_1 \leq \dots \leq t_m < T$: ($j, k = 1, \dots, m$)

$$\begin{aligned} T(D_{n,t_0}(t_j, \theta_0)) &= D_{n,t_0}(t_j, \theta_0) \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_j} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) dD_n(z, \theta_0) \right] d\psi(y) \\ &= I(t_j) - II(t_j) \end{aligned}$$

$$E[T(D_{n,t_0}(t_j, \theta_0))] = 0$$

$$Cov(T(D_{n,t_0}(t_j, \theta_0)), T(D_{n,t_0}(t_k, \theta_0))) = \psi_{t_0}(t_j \wedge t_k)$$

$$\Sigma := (\psi_{t_0}(t_j \wedge t_k))_{j,k=1,\dots,m}$$

Mit dem Multivariaten Zentralen Grenzwertsatz folgt hiermit wieder:

$$\begin{pmatrix} T(D_{n,t_0}(t_1, \theta_0)) \\ \dots \\ T(D_{n,t_0}(t_m, \theta_0)) \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t_1\}}[\dots] - Q(D_i, Y_i, X_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0, t_1) \\ \dots \\ 1_{\{t_0 \leq Y_i \leq t_m\}}[\dots] - Q(D_i, Y_i, X_i, \delta_i, \mu_i, \theta_0, t_m) \end{pmatrix} \rightarrow N_m(0, \Sigma)$$

Um den Beweis der Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen zu beenden, werden wir jetzt die Kovarianzfunktion bestimmen:

$$\begin{aligned} Cov(T(D_{n,t_0}(s, \theta_0)), T(D_{n,t_0}(t, \theta_0))) &= E[(I(s) - II(s)) \cdot (I(t) - II(t))] \\ &= E[I(s)I(t)] + E[II(s)II(t)] \\ &\quad - E[I(s)II(t)] - E[II(s)I(t)] \end{aligned}$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Es wird wieder gezeigt werden, dass

$$E[II(s)II(t)] = E[I(s)II(t)] + E[II(s)I(t)]$$

Da abermals

$$E[I(s)I(t)] = E(D_{n,t_0}(s, \theta_0)D_{n,t_0}(t, \theta_0)) = \psi_{t_0}(s \wedge t),$$

zeigt dies wieder die Behauptung.

Um die Behauptung zu verifizieren, werden wir die nachfolgende Gleichung verwenden:

$$\begin{aligned} E\left[\int_{t_0}^s dD_n(z, \theta_0) \cdot \int \phi(z) dD_n(z, \theta_0)\right] &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n E[1_{\{t_0 \leq Y_i \leq s\}} \phi(Y_j) [\dots (Y_i)] [\dots (Y_j)]] \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[1_{\{t_0 \leq Y_i \leq s\}} \phi(Y_i) [\dots]^2] \\ &= \int_{t_0}^s \phi(y) [(1 - \tilde{A}(y)) - (1 - \tilde{A}(y))(1 - R_{\theta_0}(y))] dG(y) \\ &= \int_{t_0}^s \phi(y) d\psi(y) \end{aligned} \tag{15.1}$$

Hiermit bestimmen wir die drei Erwartungswerte:

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

1) Wir haben für $s < t$:

$$\begin{aligned}
 E[I(s)II(t)] &= E[D_{n,t_0}(s, \theta_0) \cdot \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) dD_n(z, \theta_0) \right] d\psi(y) \\
 &= \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) E \left[\int_{t_0}^s dD_n(x, \theta_0) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) dD_n(z, \theta_0) \right] \right] d\psi(y) \\
 &= \int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) E \left[\int \int \mathbf{1}_{\{t_0 \leq x \leq s\}} \mathbf{1}_{\{y \leq z \leq t_1\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) dD_n(x, \theta_0) dD_n(z, \theta_0) \right] d\psi(y) \\
 &\stackrel{(15.1)}{=} \int_{t_0}^t \mathbf{1}_{\{y \leq s\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int \mathbf{1}_{\{t_0 \leq x \leq s\}} \mathbf{1}_{\{y \leq x \leq t_1\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(x) d\psi(x) \right] d\psi(y) \\
 &= \int_{t_0}^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \int_y^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) d\psi(z) d\psi(y)
 \end{aligned}$$

2) Für $s < t$ folgt mit 1):

$$\begin{aligned}
 E[II(s)I(t)] &= E[D_{n,t_0}(t, \theta_0) \cdot \int_{t_0}^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) dD_n(z, \theta_0) \right] d\psi(y) \\
 &= \int_{t_0}^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \int_y^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) d\psi(z) d\psi(y)
 \end{aligned}$$

3) Es gilt für $s < t$:

$$\begin{aligned}
 E[II(s)II(t)] &= E \left[\int \int \mathbf{1}_{\{t_0 \leq x \leq s\}} \mathbf{1}_{\{t_0 \leq y \leq t\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) A^{-1}(x) \int_x^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right) dD_n \int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t dD_n A^{-1}(y) \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y) d\psi(x) d\psi(y) \right] \\
 &= \int \int \mathbf{1}_{\{t_0 \leq x \leq s\}} \mathbf{1}_{\{t_0 \leq y \leq t\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) A^{-1}(x) \int_{x \vee y}^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(z) d\psi(z) A^{-1}(y) \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y) d\psi(x) d\psi(y) \\
 &= \int \int \mathbf{1}_{\{t_0 \leq x \leq s\}} \mathbf{1}_{\{t_0 \leq y \leq t\}} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) A^{-1}(x) A(x \vee y) A^{-1}(y) \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y) d\psi(x) d\psi(y)
 \end{aligned}$$

Wir unterscheiden wieder zwei Situationen:

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

$E[II(s)II(t)]$

$$\begin{aligned}
&= \int \int 1_{\{t_0 \leq x \leq s\}} 1_{\{t_0 \leq y \leq t\}} 1_{\{t_0 \leq x \leq y\}} \underbrace{\left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) A^{-1}(x) A(y) A^{-1}(y) \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y)}_{= \text{Identität}} d\psi(x) d\psi(y) \\
&\quad + \int \int 1_{\{t_0 \leq x \leq s\}} 1_{\{t_0 \leq y \leq s\}} 1_{\{t_0 \leq y < x\}} \underbrace{\left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) A^{-1}(x) A(x) A^{-1}(y) \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y)}_{= \text{Identität}} d\psi(x) d\psi(y) \\
&= \int_{t_0}^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(x) A^{-1}(x) \int_x^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(y) d\psi(y) d\psi(x) \\
&\quad + \int_{t_0}^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \int_y^s \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(x) d\psi(x) d\psi(y)
\end{aligned}$$

Asymptotische C-Straffheit (in t):

Wir haben bereits gezeigt, dass $D_{n,t_0}(t, \theta_0)$ asymptotisch C-straft ist. Somit bleibt zu zeigen, dass der zweite Prozessteil ebenfalls asymptotisch C-straft ist. Unter den Voraussetzungen 1)-6) ist

$$\int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(z) A^{-1}(z) d\psi(z)$$

stetig in t . Weiterhin ist

$$\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) dD_n(z, \theta_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{y \leq Y_i \leq t_1\}} a(Y_i) [1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_0}(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}}]$$

ein Prozess, der komponentenweise in Verteilung gegen einen Gaussprozess konvergiert und somit stochastisch beschränkt ist, vergleiche Lemma 3.2 in *Thies (1995)*:

Die Verteilungskonvergenz wird durch Verwendung des Multivariaten Zentralen Grenzwertsatzes gezeigt. Der Nachweis der asymptotischen C-Straffheit wird wie im Beweis des Lemma

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

15.2 mit Hilfe des Lemma 5.1 aus *Stute (1997)* für

$$\alpha_i = 1_{\{s < Y_i \leq t\}} a(Y_i) [1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_0}(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}}] \quad \text{und} \quad \beta_i = 1_{\{r < Y_i \leq s\}} a(Y_i) [\dots]$$

vollzogen. Denn hiermit gilt, indem wir o.B.d.A annehmen, dass θ und somit $a(y)$ eindimensional ist, mit $\phi_{t_0}(t) := \int_{t_0}^t a^2(y) d\psi(y)$:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\int_t^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_0) - \int_s^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_0)\right)^2 \left(\int_s^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_0) - \int_r^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_0)\right)^2\right] \\ = E\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \alpha_i\right)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \beta_i\right)^2\right] \\ \leq \frac{n}{n^2} E[\underbrace{\alpha_1^2 \beta_1^2}_{=0}] + \frac{3n(n-1)}{n^2} E[\alpha_1^2] E[\beta_1^2] \\ \leq 3 \cdot (\phi_{t_0}(t) - \phi_{t_0}(s)) (\phi_{t_0}(s) - \phi_{t_0}(r)) \end{aligned}$$

Durch Verwendung der stochastischen Beschränktheit dieses Prozessteils folgt aber, vergleiche Lemma 3.4 in *Thies (1995)*, die asymptotische C-Straffheit des Prozesses

$$\int_{t_0}^t \left(\frac{dP}{d\psi}\right)^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} \left(\frac{dP}{d\psi}\right)(z) dD_n(z, \theta_0)\right] d\psi(y)$$

und somit auch die asymptotische C-Straffheit von $T(D_{n,t_0}(t, \theta_0))$.

Abschließend müssen wir für den Beweis des Theorems somit noch zeigen, dass

$$T(D_{n,t_0}(t, \theta_n)) = T(D_{n,t_0}(t, \theta_0)) + o_p(1) \quad \text{gleichmäßig in } t$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Es gilt:

$$\begin{aligned}
 T(D_{n,t_0}(t, \theta_n)) - T(D_{n,t_0}(t, \theta_0)) &= D_{n,t_0}(t, \theta_n) - D_{n,t_0}(t, \theta_0) \\
 &\quad - \underbrace{\int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_n) \right] d\psi(y)}_I \\
 &\quad + \underbrace{\int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_0) \right] d\psi(y)}_{II} \\
 &= \cancel{D_{n,t_0}(t, \theta_0)} + \sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0) - \cancel{D_{n,t_0}(t, \theta_0)} \\
 &\quad - I + II + o_p(1)
 \end{aligned}$$

Weiterhin gilt für I :

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) 1_{\{y \leq Y_i \leq t_1\}} a(Y_i) [1_{\{\bar{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_n}(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}}] d\psi(y) \\
 &= II + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) 1_{\{y \leq Y_i \leq t_1\}} a(Y_i) [R_{\theta_n}(Y_i) - R_{\theta_0}(Y_i)] 1_{\{X_i > Y_i\}} d\psi(y)
 \end{aligned}$$

Hiermit folgt:

$$\begin{aligned}
 T(D_{n,t_0}(t, \theta_n)) - T(D_{n,t_0}(t, \theta_0)) &= \sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)^t P_{t_0}(t, \theta_0) + o_p(1) \\
 &\quad - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) 1_{\{y \leq Y_i \leq t_1\}} a(Y_i) [R_{\theta_n}(Y_i) - R_{\theta_0}(Y_i)] 1_{\{X_i > Y_i\}} d\psi(y) \quad (15.2)
 \end{aligned}$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Wir erhalten durch Verwendung der Taylorformel wie im Beweis des Lemma 15.2:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) 1_{\{y \leq Y_i \leq t_1, X_i > Y_i\}} a(Y_i) [R_{\theta_n}(Y_i) - R_{\theta_0}(Y_i)] d\psi(y) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) 1_{\{y \leq Y_i \leq t_1, X_i > Y_i\}} a(Y_i) [(\theta_n - \theta_0)^t \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}(Y_i, \theta_{ni}) - \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y_i, \theta_0) \right)] d\psi(y) \\
&+ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t \left(a^t(y) A^{-1}(y) \sqrt{n} (\theta_n - \theta_0) \right. \\
&\quad \left. \bullet \left[1_{\{y \leq Y_i \leq t_1, X_i > Y_i\}} a^t(Y_i) \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y_i, \theta_0) - E[1_{\{\dots\}} a^t(Y) \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y, \theta_0)] \right] \right) d\psi(y) \\
&+ \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) E[1_{\{y \leq Y \leq t_1, X > Y\}} a(Y) \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y, \theta_0)^t] d\psi(y) \cdot \sqrt{n} (\theta_n - \theta_0)
\end{aligned}$$

Wir berechnen den Erwartungswert im letzten Summanden:

$$\begin{aligned}
E[1_{\{y \leq Y \leq t_1, X > Y\}} a(Y) \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y, \theta_0)^t] &= \int_y^{t_1} a(z) \frac{\partial R}{\partial \theta}(z, \theta_0)^t (1 - F(z)) dG(z) \\
&= \int_y^{t_1} a(z) \frac{\partial R}{\partial \theta}(z, \theta_0)^t dH^0(z) \\
&= \int_y^{t_1} a(z) a^t(z) d\psi(z) \\
&= A(y)
\end{aligned}$$

Somit vereinfacht sich der letzte Summand zu:

$$P_{t_0}^t(t, \theta_0) \sqrt{n} (\theta_n - \theta_0)$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Hiermit erhalten wir für die Differenz aus (15.2):

$$\begin{aligned}
 & - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) 1_{\{\dots\}} a(Y_i) \left[(\theta_n - \theta_0)^t \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}(Y_i, \theta_{ni}) - \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y_i, \theta_0) \right) \right] d\psi(y)}_{III} + o_p(1) \\
 & - \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) \left[1_{\{\dots\}} a(Y_i) \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y_i, \theta_0)^t - E[1_{\{\dots\}} a(Y) \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y, \theta_0)^t] \right] d\psi(y)}_{IV} \cdot \sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)
 \end{aligned}$$

Somit ist für den Beweis des Theorems zu zeigen, dass *III* und *IV* gleichmäßig stochastisch gegen Null konvergieren.

Wir beginnen mit *III*:

$$\begin{aligned}
 & \sup_{t \in [t_0, T]} \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) 1_{\{\dots\}} a(Y_i) \left[(\theta_n - \theta_0)^t \left(\frac{\partial R}{\partial \theta}(Y_i, \theta_{ni}) - \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y_i, \theta_0) \right) \right] d\psi(y) \right| \\
 & \leq \sup_{t \in [t_0, T]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) 1_{\{\dots\}} a(Y_i) \left[\left(\frac{\partial R}{\partial \theta}(Y_i, \theta_{ni}) - \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y_i, \theta_0) \right)^t \right] d\psi(y) \right| \cdot |\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)| \\
 & \leq \sup_{t \in [t_0, T]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) 1_{\{y \leq Y_i \leq t_1, X_i > Y_i\}} a(Y_i) d\psi(y) \right| \\
 & \quad \cdot \left| \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2}(Y_i, \tilde{\theta}_{ni}) \right| \cdot |\theta_n - \theta_0| \cdot |\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)| \\
 & \leq \sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\dots\}} a(Y_i) d\psi(y) \right| \\
 & \quad \cdot \underbrace{\left| \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2}(Y_i, \tilde{\theta}_{ni}) \right| \cdot |\theta_n - \theta_0| \cdot |\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)|}_{\leq M_2} \quad (15.3)
 \end{aligned}$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Indem wir die Voraussetzungen 5) und 6) verwenden, erhalten wir schließlich:

$$\begin{aligned}
 (15.3) &\leq \sup_{x \in [t_0, t_1]} |a(x)| \cdot \sup_{x \in [t_0, T]} |A^{-1}(x)| \cdot \sup_{x \in [t_0, t_1]} |a(x)| \cdot 1 \cdot M_2 \cdot o_p(1) \cdot O_p(1) \\
 &\leq K_1 \cdot K_2 \cdot M_1 \cdot M_3 \cdot K_1 \cdot K_2 \cdot M_1 \cdot M_2 \cdot o_p(1) \cdot O_p(1) \\
 &= o_p(1)
 \end{aligned}$$

Nun zu IV:

$$\begin{aligned}
 &\sup_{t \in [t_0, T]} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) \left[1_{\{\dots\}} a(Y_i) \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y_i, \theta_0)^t - E[1_{\{\dots\}} a(Y) \frac{\partial R}{\partial \theta}(Y, \theta_0)^t] \right] d\psi(y) \right. \\
 &\qquad \qquad \qquad \bullet \sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) | \\
 &\leq \sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} a(z) \frac{\partial R}{\partial \theta}(z, \theta_0)^t dH_n^0(z) - \int_y^{t_1} a(z) \frac{\partial R}{\partial \theta}(z, \theta_0)^t dH^0(z) \right] d\psi(y) \right| \\
 &\qquad \qquad \qquad \bullet |\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)| \\
 &= \sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t a^t(y) A^{-1}(y) \left[\int_y^{t_1} a(z) \frac{\partial R}{\partial \theta}(z, \theta_0)^t [dH_n^0(z) - dH^0(z)] \right] d\psi(y) \right| \\
 &\qquad \qquad \qquad \bullet |\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)| \\
 &= \sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int \int 1_{\{t_0 \leq y \leq t\}} 1_{\{y \leq z \leq t_1\}} a^t(y) A^{-1}(y) a(z) \frac{\partial R}{\partial \theta}(z, \theta_0)^t d\psi(y) [dH_n^0(z) - dH^0(z)] \right| \\
 &\qquad \qquad \qquad \bullet |\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0)|
 \end{aligned}$$

Indem wieder die Idee des klassischen Glivenko-Cantelli Theorems verwendet wird (kompaktes Intervall $[t_0, T]$, H_n^0 und H^0 sind monoton und es gilt $H_n^0 \xrightarrow{n} H^0$ f.s.), vergleiche *Thies (1995)* sowie *Stute, Thies und Zhu (1998)*, folgt schließlich die gleichmäßige stochastische Konvergenz des letzten Terms.

Dies beendet den Beweis des Theorem 15.4. □

15.4.5. Beweis des Theorem 15.5

Wir werden nun zeigen, dass unter H_0 und den Voraussetzungen 1)-6) das Nachstehende gilt:

$$T^n(D_n(\theta_n)) \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} T(\tilde{D}_\infty(\theta_0)) \quad \text{im Raum } D[t_0, T]$$

Bevor mit dem Beweis des Theorem 15.5 begonnen wird, müssen wir bestimmte Lemmata beweisen, die sich mit der Konvergenz von stochastischen Prozessen befassen. Hierbei seien wieder die Annahmen aus den Abschnitten 15.1 und 15.2 erfüllt.

Lemma 15.7. *Es gilt mit $\psi_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t R_{\theta_0}(z) dH^{00}(z)$:*

$$\psi_{n,t_0}(t) \xrightarrow{n} \psi_{t_0}(t) \quad f.s.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} |\psi_{n,t_0}(t) - \psi_{t_0}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t R_{\theta_n}(z) dH_n^{00}(z) - \int_{t_0}^t R_{\theta_0}(z) dH^{00}(z) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t (R_{\theta_n} - R_{\theta_0})(z) dH_n^{00}(z) + \int_{t_0}^t R_{\theta_0}(z) [dH_n^{00}(z) - dH^{00}(z)] \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t (\theta_n - \theta_0)^t \frac{\partial R}{\partial \theta}(z, \theta_{ni}) dH_n^{00}(z) \right| + \left| \int_{t_0}^t R_{\theta_0}(z) [dH_n^{00}(z) - dH^{00}(z)] \right| \\ &\leq \underbrace{|\theta_n - \theta_0|}_{\xrightarrow{n} 0} \cdot \left(\underbrace{M_1 \cdot \left| \int_{t_0}^t dH_n^{00}(z) \right|}_{\leq M_1 \text{ mit Vor. 5)} \right) \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t R_{\theta_0}(z) [dH_n^{00}(z) - dH^{00}(z)] \right| \xrightarrow{n} 0 \quad \text{mit dem SGZ} \end{aligned}$$

□

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Lemma 15.8. Falls $|\phi(z)| \leq K_3$ für alle $z \in [t_0, t_1]$, dann gilt:

$$\int_{t_0}^t \phi(z)[d\psi_n(z) - d\psi(z)] \xrightarrow{n} 0 \quad f.s.$$

Beweis.

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t \phi(z)[d\psi_n(z) - d\psi(z)] \right| &= \left| \int_{t_0}^t \phi(z)R_{\theta_n}(z)dH_n^{00}(z) - \int_{t_0}^t \phi(z)R_{\theta_0}(z)dH^{00}(z) \right| \\ &= \left| \int_{t_0}^t \phi(R_{\theta_n} - R_{\theta_0})dH_n^{00} + \int_{t_0}^t \phi R_{\theta_0}[dH_n^{00} - dH^{00}] \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t \phi(z) \frac{\partial R}{\partial \theta}(z, \theta_{ni})dH_n^{00}(z) \right| \cdot |\theta_n - \theta_0| \\ &\quad + \left| \int_{t_0}^t \phi R_{\theta_0}[dH_n^{00} - dH^{00}] \right| \\ &\leq K_3 \cdot \left(\underbrace{M^1 \cdot \left| \int_{t_0}^t dH_n^{00}(z) \right|}_{\leq M_1} \right) \cdot \underbrace{|\theta_n - \theta_0|}_{\xrightarrow{n} 0} \\ &\quad + \underbrace{\left| \int_{t_0}^t \phi(z)R_{\theta_0}(z)[dH_n^{00}(z) - dH^{00}(z)] \right|}_{\xrightarrow{n} 0 \text{ mit dem SGGZ } (|\phi \cdot R| \leq K_3)} \end{aligned}$$

□

Lemma 15.9. Wir haben

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} |a_n(t) - a(t)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Beweis.

Unter den Voraussetzungen 1)-6) gilt:

$$a(t) = \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_0)}{R_{\theta_0}(t)(1 - R_{\theta_0}(t))}$$

sowie $a_n(t) = \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_n)}{R_{\theta_n}(t)(1 - R_{\theta_n}(t))}$

Nun verwenden wir diese Darstellung und erhalten:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [t_0, t_1]} |a_n(t) - a(t)| \\ &= \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_n)}{R_{\theta_n}(t)(1 - R_{\theta_n}(t))} - \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_0)}{R_{\theta_0}(t)(1 - R_{\theta_0}(t))} \right| \\ &= \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_n) - \frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_0)}{R_{\theta_n}(t)(1 - R_{\theta_n}(t))} + \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_0)}{R_{\theta_n}(t)(1 - R_{\theta_n}(t))} - \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_0)}{R_{\theta_0}(t)(1 - R_{\theta_0}(t))} \right| \\ &= \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_n) - \frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_0)}{R_{\theta_n}(t)(1 - R_{\theta_n}(t))} + \frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_0) \frac{(R_{\theta_0}(t) - R_{\theta_n}(t))(1 - R_{\theta_0}(t)) + (R_{\theta_n}(t) - R_{\theta_0}(t))R_{\theta_n}(t)}{R_{\theta_n}(t)(1 - R_{\theta_n}(t))R_{\theta_0}(t)(1 - R_{\theta_0}(t))} \right| \\ &\leq \underbrace{\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_n) - \frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_0) \right| \cdot \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{1}{R_{\theta_n}(t)(1 - R_{\theta_n}(t))} \right|}_I \\ &\quad + \underbrace{\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_0) \right| \cdot \sup_{t \in [t_0, t_1]} |R_{\theta_n}(t) - R_{\theta_0}(t)| \cdot \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{1}{R_{\theta_n}(t)R_{\theta_0}(t)(1 - R_{\theta_n}(t))} \right|}_II \\ &\quad + \underbrace{\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_0) \right| \cdot \sup_{t \in [t_0, t_1]} |R_{\theta_n}(t) - R_{\theta_0}(t)| \cdot \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{1}{R_{\theta_0}(t)(1 - R_{\theta_n}(t))(1 - R_{\theta_0}(t))} \right|}_III \end{aligned}$$

Betrachten wir nun die letzte Ungleichung:

1) Wir verwenden die Differenzierbarkeit und die Voraussetzungen 5) und 6):

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

$$I \leq \underbrace{\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{\partial^2 R}{\partial^2 \theta}(t, \theta_{ni}) \right|}_{\leq M_2} \cdot \underbrace{|\theta_n - \theta_0|}_{o_p(1)} \cdot \underbrace{\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{1}{R_{\theta_n}(t)(1 - R_{\theta_n}(t))} \right|}_{\leq K_1 \cdot K_2}$$

2) Wir verwenden nochmals die gleichen Annahmen:

$$II \leq \underbrace{\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_0) \right|}_{\leq M_1} \cdot \underbrace{|\theta_n - \theta_0|}_{o_p(1)} \cdot \underbrace{\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{\partial R}{\partial \theta}(t, \theta_{ni}) \right|}_{\leq M_1} \cdot \underbrace{\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \frac{1}{R_{\theta_n}(t)R_{\theta_0}(t)(1 - R_{\theta_n}(t))} \right|}_{\leq K_1 \cdot K_1 \cdot K_2}$$

3) *III* folgt direkt aus *II*.

□

Lemma 15.10. *Es gilt:*

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} |A_n(t) - A(t)| \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0$$

Hiermit folgt aber auch wegen der Existenz und Beschränktheit von A_n^{-1} und A^{-1} unter der Voraussetzung 6) sowie durch Verwendung der Ungleichung

$$|A_n^{-1}(t) - A^{-1}(t)| = |A_n^{-1}(t)(A_n(t) - A(t))A^{-1}(t)| \leq |A_n^{-1}(t)| |A_n(t) - A(t)| |A^{-1}(t)|$$

das Folgende:

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} |A_n^{-1}(t) - A^{-1}(t)| \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Beweis.

Für diesen Beweis verwenden wir das Lemma 15.9:

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in [t_0, t_1]} |A_n(t) - A(t)| &= \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \int_t^{t_1} a_n(y) a_n^t(y) d\psi_n(y) - \int_t^{t_1} a(y) a^t(y) d\psi(y) \right| \\
 &\leq \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \int_t^{t_1} (a_n(y) - a(y)) a_n^t(y) d\psi_n(y) \right| \\
 &\quad + \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \int_t^{t_1} a(y) (a_n^t(y) - a^t(y)) d\psi_n(y) \right| \\
 &\quad + \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \int_t^{t_1} a(y) a^t(y) [d\psi_n(y) - d\psi(y)] \right| \\
 &= I + II + III
 \end{aligned}$$

Wir werden nun I untersuchen, und II folgt analog:

$$\begin{aligned}
 \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \int_t^{t_1} (a_n(y) - a(y)) a_n^t(y) d\psi_n(y) \right| &\leq \sup_{t \in [t_0, t_1]} \int_t^{t_1} |a_n(y) - a(y)| |a_n(y)| d\psi_n(y) \\
 &= \int_{t_0}^{t_1} |a_n(y) - a(y)| |a_n(y)| d\psi_n(y) \\
 &\leq \underbrace{\sup_{s \in [t_0, t_1]} |a_n(s) - a(s)|}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \text{ in W.keit}} \cdot \underbrace{\int_{t_0}^{t_1} |a_n(y)| d\psi_n(y)}_{\leq M_1 \cdot K_1 \cdot K_2}
 \end{aligned}$$

Abschließend müssen wir noch III betrachten:

$$III = \sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \int_t^{t_1} a(y) a^t(y) [d\psi_n(y) - d\psi(y)] \right|$$

Indem wir abermals die Idee des Beweises des Glivenko-Cantelli Theorems verwenden (ψ_n

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

sind ψ monoton, $[t_0, t_1]$ ist kompakt und Lemma 15.7), erhalten wir:

$$\sup_{t \in [t_0, t_1]} \left| \int_t^{t_1} a(y) a^t(y) [d\psi_n(y) - d\psi(y)] \right| \xrightarrow[n]{\mathbb{P}} 0$$

Hierbei betrachten wir die Matrix $a(y)a^t(y)$ komponentenweise und zerlegen die Komponenten in den Positiv- sowie Negativteil.

Diese Lemmata werden wir nun verwenden, um das Folgende zu zeigen:

$$T^n(D_n(\theta_n)) - T(D_n(\theta_n)) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{für } n \rightarrow \infty$$

Hiermit erhalten wir die gewünschte Aussage des Theorem 15.5.

Es gilt:

$$|T(D_{n,t_0}(t, \theta_n)) - T^n(D_{n,t_0}(t, \theta_n))|$$

$$\begin{aligned} &= \left| \underline{D_{n,t_0}(t, \theta_n)} - \overline{D_{n,t_0}(t, \theta_n)} \right. \\ &\quad + \int_{t_0}^t a_n^t(x) A_n^{-1}(x) \int_x^{t_1} a_n(z) dD_n(z, \theta_n) d\psi_n(x) \\ &\quad \left. - \int_{t_0}^t a^t(x) A^{-1}(x) \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_n) d\psi(x) \right| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^t (a_n^t(x) - a^t(x)) A_n^{-1}(x) \int_x^{t_1} a_n(z) dD_n(z, \theta_n) d\psi_n(x) \right| \end{aligned} \quad (15.4)$$

$$+ \left| \int_{t_0}^t a^t(x) (A_n^{-1}(x) - A^{-1}(x)) \int_x^{t_1} a_n(z) dD_n(z, \theta_n) d\psi_n(x) \right| \quad (15.5)$$

$$+ \left| \int_{t_0}^t a^t(x) A^{-1}(x) \int_x^{t_1} (a_n(z) - a(z)) dD_n(z, \theta_n) d\psi_n(x) \right| \quad (15.6)$$

$$+ \left| \int_{t_0}^t a^t(x) A^{-1}(x) \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_n) [d\psi_n(x) - d\psi(x)] \right| \quad (15.7)$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Wir werden verifizieren, dass (15.4) eine Folge ist, die gleichmäßig in Wahrscheinlichkeit gegen 0 konvergiert. Das Gleiche werden wir für (15.5) und (15.6) zeigen. Unter Verwendung des Lemma 3.1 von *Chang (1990)* werden wir außerdem zeigen, dass dies für (15.7) ebenfalls gilt. Insgesamt reicht dies unter Verwendung eines Cramér-Slutsky Arguments für den Beweis des Theorem 15.5.

Zuerst betrachten wir die Gleichung (15.7) und definieren die folgenden Prozesse:

$$\begin{aligned} Z_n(x) &:= \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_n) \\ v(x) &:= \int_{t_0}^x a^t(z) A^{-1}(z) d\psi(z) \\ v_n(x) &:= \int_{t_0}^x a^t(z) A^{-1}(z) d\psi_n(z) \end{aligned}$$

Hiermit ergibt sich:

$$\sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t a^t(x) A^{-1}(x) \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_n) [d\psi_n(x) - d\psi(x)] \right| = \sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t Z_n(z) [dv_n(z) - dv(z)] \right|$$

Durch Imitation des Beweises des Glivenko-Cantelli Theorems kann gezeigt werden, dass

$$v_n(x) \xrightarrow{f.s.} v(x) \quad \text{gleichmäßig auf } [t_0, T]$$

Weiterhin ist $(Z_n)_{n \geq 1}$ ein Prozess, der in Verteilung konvergiert und somit asymptotisch

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

C-straft in $D[t_0, T]$ ist. Dies ist eine Konsequenz aus dem Folgenden:

$$\begin{aligned}
 Z_n(x) &= \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_n) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{x \leq Y_i \leq t_1\}} a(Y_i) [1_{\{\bar{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_n}(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}}] \\
 &= \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_0) + \underbrace{\int_x^{t_1} a(z) (R_{\theta_n}(z) - R_{\theta_0}(z)) dH_n^0(z)}_{A(x)}
 \end{aligned}$$

Nun können wir analog zum Beweis von Lemma 15.2 durch Verwendung der Taylorentwicklung verifizieren, dass

$$Z_n(x) = \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_0) + \underbrace{\int_x^{t_1} a(z) a^t(z) d\psi(z)}_{A(x)} \cdot \sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) + o_p(1) \quad (15.8)$$

Die asymptotische C-Straftigkeit des ersten Summanden wurde im Beweis zu Theorem 15.4 gezeigt. Weiterhin ist $A(x)$ unter den Voraussetzungen stetig und θ_n asymptotisch normal. Dies beweist die asymptotische C-Straftigkeit des Prozesses $(Z_n)_{n \geq 1}$. Indem wie in Lemma 4.3 in *Thies (1995)* vorgegangen wird, folgt unter den Voraussetzungen 1)-6), dass

$$\sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t a^t(x) A^{-1}(x) \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_n) [d\psi_n(x) - d\psi(x)] \right| \xrightarrow{n} 0 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit}$$

Das Lemma 4.3 in *Thies (1995)* verwendet eine Erweiterung des Lemma 3.1 aus *Chang (1990)* sowie eine Erweiterung eines Korollars, welches wir ohne Beweis, auf unsere Situation angepasst, angeben werden:

Korollar 15.11

Es sei $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ ein straffer stochastischer Prozess in $D[t_0, T]$. Dann gilt

$$\sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t \alpha_n(x) [d\nu_n(x) - d\nu(x)] \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Bevor wir die Gleichungen (15.4), (15.5) und (15.6) betrachten, wollen wir das Folgende zeigen:

$$\sup_{x \in [t_0, t_1]} \left| \int_x^{t_1} (a_n(z) - a(z)) dD_n(z, \theta_n) \right| = o_p(1)$$

Im Folgenden nehmen wir o.B.d.A an, dass der Parameter θ und somit die Funktion $a(t, \theta)$ eindimensional ist. Mit Taylor gilt:

$$\begin{aligned} & \left| \int_x^{t_1} (a_n(z) - a(z)) dD_n(z, \theta_n) \right| \\ &= \left| \int_x^{t_1} \left[(\theta_n - \theta_0) \cdot \frac{\partial a}{\partial \theta}(z, \theta_0) + \frac{1}{2} (\theta_n - \theta_0)^2 \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2}(z, \tilde{\theta}_n) \right] dD_n(z, \theta_n) \right| \\ &\leq \underbrace{\left| (\theta_n - \theta_0) \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{x \leq Y_i \leq t_1\}} \frac{\partial a}{\partial \theta}(Y_i, \theta_0) [1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_n}(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}}] \right|}_{1)} \\ &\quad + \underbrace{\left| \frac{1}{2} (\theta_n - \theta_0) \cdot \sqrt{n} (\theta_n - \theta_0) \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{\dots\}} \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2}(Y_i, \tilde{\theta}_n) [1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_n}(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}}] \right|}_{2)} \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{\theta}_n$ eine Zwischenstelle von θ_n und θ_0 . Für die letzte Ungleichung gilt:

1) Der Prozess $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n 1_{\{x \leq Y_i \leq t_1\}} \frac{\partial a}{\partial \theta}(Y_i, \theta_0) [1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_n}(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}}]$ konvergiert komponentenweise in Verteilung gegen ein Gaussprozess und ist somit stochastisch beschränkt.

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Dies folgt aus einer Darstellung, die wie (15.8) hergeleitet wird. Durch Verwendung des Continuous Mapping Theorems folgt:

$$\underbrace{|\theta_n - \theta_0|}_{o_p(1)} \cdot \underbrace{\sup_{x \in [t_0, T]} \left| \int_x^{t_1} \frac{\partial a}{\partial \theta}(z, \theta_0) dD_n(z, \theta_n) \right|}_{O_p(1)} = o_p(1)$$

2) Es gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \underbrace{|\theta_n - \theta_0|}_{o_p(1)} \cdot \underbrace{\sqrt{n}|\theta_n - \theta_0|}_{O_p(1)} \cdot \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sup_{x \in [t_0, T]} 1_{\{x \leq Y_i \leq t_1\}}}_{\leq 1} \\ & \bullet \underbrace{\left| \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2}(Y_i, \tilde{\theta}_n) \right|}_{\leq \text{Konstante}} \underbrace{\left| 1_{\{\tilde{D}_i > Y_i\}} - (1 - R_{\theta_n}(Y_i)) 1_{\{X_i > Y_i\}} \right|}_{\leq 1} = o_p(1) \end{aligned}$$

Hierbei wurde verwendet, dass

$$\left| \frac{\partial^2 a}{\partial \theta^2}(x, \theta) \right| \leq \text{Konstante} \quad \forall x \in [t_0, t_1] \text{ sowie } \forall \theta \in \Theta$$

Dies folgt daraus, dass sich die Funktion $a(x, \theta) = \frac{\frac{\partial R}{\partial \theta}(x, \theta)}{R_\theta(x)(1-R_\theta(x))}$ aus der Funktion R_θ sowie deren Ableitungen zusammensetzt und diese unter den Voraussetzungen beschränkt sind.

Indem wir beide Aussagen zusammenführen, ergibt sich somit

$$\sup_{x \in [t_0, t_1]} \left| \int_x^{t_1} (a_n(z) - a(z)) dD_n(z, \theta_n) \right| = o_p(1)$$

Nun zu den Gleichungen (15.4), (15.5) und (15.6).

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Wir werden verifizieren, dass (15.4) = $o_p(1)$. Für (15.5) und (15.6) wird dies analog gezeigt:

$$\begin{aligned}
 (15.4) & \leq \left| \int_{t_0}^t (a_n^t(x) - a^t(x)) (A_n^{-1}(x) - A^{-1}(x)) \int_x^{t_1} (a_n(z) - a(z)) dD_n(z, \theta_n) d\psi_n(x) \right| \\
 & + \left| \int_{t_0}^t (a_n^t(x) - a^t(x)) (A_n^{-1}(x) - A^{-1}(x)) \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_n) d\psi_n(x) \right| \\
 & + \left| \int_{t_0}^t (a_n^t(x) - a^t(x)) A^{-1}(x) \int_x^{t_1} (a_n(z) - a(z)) dD_n(z, \theta_n) d\psi_n(x) \right| \\
 & + \left| \int_{t_0}^t (a_n^t(x) - a^t(x)) A^{-1}(x) \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_n) d\psi_n(x) \right| \\
 & \leq \underbrace{\sup_{x \in [t_0, t_1]} |a_n(x) - a(x)|}_{o_p(1)} \cdot \underbrace{\sup_{x \in [t_0, t_1]} |A_n^{-1}(x) - A^{-1}(x)|}_{o_p(1)} \cdot \underbrace{\sup_{x \in [t_0, t_1]} \left| \int_x^{t_1} (a_n(z) - a(z)) dD_n(z, \theta_n) \right|}_{o_p(1)} \\
 & \quad \bullet \underbrace{\sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t d\psi_n(x) \right|}_{\leq 1} \\
 & + \underbrace{\sup_{x \in [t_0, t_1]} |a_n(x) - a(x)|}_{o_p(1)} \cdot \underbrace{\sup_{x \in [t_0, t_1]} |A_n^{-1}(x) - A^{-1}(x)|}_{o_p(1)} \cdot \underbrace{\sup_{x \in [t_0, t_1]} \left| \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_n) \right|}_{O_p(1)} \cdot 1 \\
 & + \underbrace{\sup_{x \in [t_0, t_1]} |a_n(x) - a(x)|}_{o_p(1)} \cdot \underbrace{\sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t A^{-1}(x) d\psi_n(x) \right|}_{\leq M_3} \cdot \underbrace{\sup_{x \in [t_0, t_1]} \left| \int_x^{t_1} (a_n(z) - a(z)) dD_n(z, \theta_n) \right|}_{o_p(1)} \\
 & + \underbrace{\sup_{x \in [t_0, t_1]} |a_n(x) - a(x)|}_{o_p(1)} \cdot \underbrace{\sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t A^{-1}(x) d\psi_n(x) \right|}_{\leq M_3} \cdot \underbrace{\sup_{x \in [t_0, t_1]} \left| \int_x^{t_1} a(z) dD_n(z, \theta_n) \right|}_{O_p(1)}
 \end{aligned}$$

Somit folgt:

$$\sup_{t \in [t_0, T]} \left| \int_{t_0}^t (a_n^t(x) - a^t(x)) A_n^{-1}(x) \int_x^{t_1} a_n(z) dD_n(z, \theta_n) d\psi_n(x) \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Indem wir schließlich alle Aussagen zusammenführen, haben wir somit das Folgende gezeigt:

$$T^n(D_n(\theta_n)) \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} B \circ \psi \quad \text{in } D[t_0, T]$$

Dies war zu zeigen. □

Durch Verwendung des Continuous Mapping Theorems gilt:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [t_0, T]} |T^n(D_{n,t_0}(t, \theta_n))| \geq c\right) \xrightarrow{n} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [t_0, T]} |B \circ \psi_{t_0}(t)| \geq c\right)$$

Dies ist leider noch nicht ausreichend, da wir ψ_{t_0} nicht aus den Daten bestimmen können. Wir werden nun zeigen, dass die Funktion ψ_{n,t_0} ebenso verwendet werden kann, um kritische Werte zu erhalten, die wir benötigen, um Aussagen über die Statistik $\sup |T^n(D_n(\theta_n))|$ treffen zu können.

15.4.6. Beweis des Korollar 15.6

Nehmen wir $\psi_{n,t_0}(T) > 0$ und $\psi_{t_0}(T) > 0$ an, so können wir abschließend unter den Voraussetzungen 1)-6) das Nachstehende beweisen:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [t_0, T]} |T^n(D_{n,t_0}(t, \theta_n))| \geq \sqrt{\psi_{n,t_0}(T)} \cdot k_1\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0,1]} |B_s| \geq k_1\right)$$

Somit können wir das $1 - \alpha$ Quantil von $\sup |B_s|$ verwenden.

15. Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model

Beweis. Wir haben:

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [t_0, T]} |T^n(D_{n,t_0}(t, \theta_n))| \geq k_1 \cdot \sqrt{\psi_{t_0}(T)}\right) \xrightarrow{n} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [t_0, T]} |B \circ \psi_{t_0}(t)| \geq k_1 \cdot \sqrt{\psi_{t_0}(T)}\right)$$

Für die rechte Seite der Gleichung gilt aber mit der Monotonie und Stetigkeit von ψ_{t_0} :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [t_0, T]} |B \circ \psi_{t_0}(t)| \geq k_1 \cdot \sqrt{\psi_{t_0}(T)}\right) &= \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [\psi(t_0), \psi(T)]} |B_s| \geq k_1 \cdot \sqrt{\psi_{t_0}(T)}\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0, 1]} \left| \frac{1}{\sqrt{\psi_{t_0}(T)}} B(s \cdot \psi_{t_0}(T)) \right| \geq k_1\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sup_{s \in [0, 1]} |B_s| \geq k_1\right) \\ &\quad \text{da } \frac{1}{\sqrt{\psi_{t_0}(T)}} B(s \cdot \psi_{t_0}(T)) \stackrel{\mathcal{L}}{=} B_s \end{aligned}$$

Die obige Aussage folgt durch Verwendung des Lemma 15.7 ($\psi_{n,t_0}(s) \xrightarrow{n} \psi_{t_0}(s)$ f.s.) und eines Cramér-Slutsky Arguments, denn es gilt:

$$\frac{1}{\sqrt{\psi_{n,t_0}(T)}} \cdot \sup_{t \in [t_0, T]} |T^n(D_{n,t_0}(t, \theta_n))| = \frac{1}{\sqrt{\psi_{t_0}(T)}} \cdot \sup_{t \in [t_0, T]} |T^n(D_{n,t_0}(t, \theta_n))| + o_p(1)$$

□

15. *Martingaltransformation für Goodness-of-Fit Tests im Generalized Survival/Sacrifice Model*

Literaturverzeichnis

- [1] *Ahn, H., Moon, H. und Kodell, R. L.* (2008):
“Estimation of the Lag Time Between Onset of and Death from an Occult Tumor”
Journal of Biopharmaceutical Statistics, Vol. 18, Issue 5, S. 901-914.
- [2] *Balakrishnan, N. und Rao, C. R.* (2004):
“Handbook of Statistics 23: Advances in Survival Analysis”
Elsevier, Amsterdam.
- [3] *Billingsley, P.* (1968):
“Convergence of Probability Measures”
Wiley, New York.
- [4] *Chang, M. N.* (1990):
“Weak Convergence of a Self-Consistent Estimator of the Survival Function with Doubly Censored Data”
Annals of Statistics, Vol. 18, S. 391-404.

Literaturverzeichnis

- [5] *Dinse, G. E. und Lagakos, S. W.* (1982):
“Nonparametric Estimation of Lifetime and Disease Onset Distributions from Incomplete Observations”
Biometrics, Vol. 38, No. 4, S. 921-932.
- [6] *Durbin, J.* (1973):
“Weak convergence of the sample distribution function when parameters are estimated”
Annals of Statistics, Vol. 1, S. 279-290.
- [7] *Durbin, J., Knott, M. und Taylor, C. C.* (1975):
“Components of Cramér-von Mises Statistics. II”
Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 37, No. 2, S. 216-237.
- [8] *Gomes, A. E.* (2008):
“Consistency of the non-parametric maximum pseudo-likelihood estimator of the disease onset distribution function for a survival-sacrifice model”
Journal of Nonparametric Statistics, Vol. 20, No. 1, S. 39-46.
- [9] *Groeneboom, P. und Wellner, J. A.* (1992):
“Information Bounds and Nonparametric Maximum Likelihood Estimation”
DMV Seminar, Band 19, Birkhauser Verlag, Basel.
- [10] *Groeneboom, P., Wellner, J. A. und Maathuis, M. H.* (2008):
“Current Status Data With Competing Risks: Consistency and Rates of Convergence of the MLE”
Annals of Statistics, Vol. 36, S. 1031-1063.

- [11] *Hoel, D. G. und Walburg Jr., H. E.* (1972):
“Statistical Analysis of Survival Experiments”
Journal of the National Cancer Institute, Vol. 49, Issue 2, S. 361-372.
- [12] *Huang, J. und Wellner, J. A.* (1995):
“Asymptotic normality of the NPMLE of linear functionals for interval censored data”
Statistica Neerlandica, Vol. 49, Issue 2, S. 153-163.
- [13] *Hudgens, M. G.* (2005):
“On nonparametric maximum likelihood estimation with interval censoring and left truncation”
Journal of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 67, No. 4, S. 573-587.
- [14] *Jammalamadaka, S. R. und Mangalam, V.* (2003):
“Nonparametric estimation for middle-censored data”
Nonparametric Statistics, Vol. 15, No. 2, S. 253-265.
- [15] *Kaplan, E. L. und Meier, P.* (1958):
“Nonparametric Estimation from Incomplete Observations”
Journal of the American Statistical Association, Vol. 53, No. 282, S. 457-481.
- [16] *Khmaladze, E. V.* (1981):
“Martingale approach in the theory of goodness-of-fit tests”
Theory of Probability and its Applications, Vol. 26, Issue 2, S. 240-257.
- [17] *Klein, J. P. und Moeschberger, M. L.* (2003):
“Survival Analysis: Techniques for Censored and Truncated Data”
Springer-Verlag, New York.

Literaturverzeichnis

- [18] *Kodell, R. L. und Nelson, C. J.* (1980):
“An Illness-Death Model for the Study of the Carcinogenic Process
Using Survival/Sacrifice Data”
Biometrics, Vol. 36, No. 2, S. 267-77.
- [19] *Kodell, R. L., Shaw, G. W. und Johnson, A. M.* (1982):
“Nonparametric Joint Estimators for Disease Resistance and Survival
Functions in Survival/Sacrifice Experiments”
Biometrics, Vol. 38, No. 1, S. 43-58.
- [20] *Koul, H. L. und Yi, T.* (2006):
“Goodness-of-fit testing in interval censoring case 1”
Statistics and Probability Letters, Vol. 76, Issue 7, S. 709–718.
- [21] *Kullback, S. und Leibler, R. A.* (1951):
“On information and sufficiency”
Annals of Mathematical Statistics, Vol. 22, No. 1, S. 79–86.
- [22] *Le Anh, T.* (2005):
“Goodness-of-fit Tests mit Martingalen”
Diplomarbeit im Fach Mathematik an der Justus-Liebig-Universität Gießen.
- [23] *Lim, J. und Park, S.* (2007):
“Censored Kullback-Leibler-Information and Goodness-of-Fit Test with
Type II Censored Data”
Journal of Applied Statistics, Vol. 34, No. 9, S. 1051-1064.

Literaturverzeichnis

- [24] *Nikabadze, A. und Stute, W. (1997):*
“Model Checks under Random Censorship”
Statistics and Probability Letters, Vol. 32, Issue 3, S. 249-259.
- [25] *Oakes, D. (2001):*
“Biometrika Centenary: Survival analysis”
Biometrika, 88 (1), S. 99-142.
- [26] *Portier, C. J. und Dinse, G. E. (1987):*
“Semiparametric Analysis of Tumor Incidence Rates in Survival/Sacrifice Experiments”
Biometrics, Vol. 43, No. 1, S. 107-114.
- [27] *Shorack, G. R. und Wellner, J. A. (1986):*
“Empirical Processes with Applications to Statistics”
Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics, New York.
- [28] *Stute, W. (1992):*
“Strong Consistency of the MLE Under Random Censoring”
Metrika, Vol. 39 (1), S. 257-267.
- [29] *Stute, W. und Wang, J.-L. (1993):*
“The Strong Law under Random Censorship”
Annals of Statistics, Vol. 21, No. 3, S. 1591-1607.
- [30] *Stute, W. (1995):*
“The Central Limit Theorem under Random Censorship”
Annals of Statistics, Vol. 23, No. 2, S. 422-439.

Literaturverzeichnis

- [31] *Stute, W.* (1997):
“Nonparametric model checks for regression”
Annals of Statistics, Vol. 25, No. 2, S. 613-641.
- [32] *Stute, W., Thies, S. und Zhu, L.-X.* (1998):
“Model checks for regression: an innovation process approach”
Annals of Statistics, Vol. 26, No. 5, S. 1916-1934.
- [33] *Stute, W.* (2006):
“Martingalmethoden in der Statistik”
Vorlesungsskript zur Statistik an der Justus-Liebig-Universität Gießen.
- [34] *Stute, W.* (2007):
“Survival Analysis”
Vorlesungsskript zur Statistik an der Justus-Liebig-Universität Gießen.
- [35] *Stute, W. und Le Anh, T.* (2012):
“Principal Component Analysis of Martingale Residuals”
Journal of the Indian Statistical Association 50, S. 263-276.
- [36] *Thies, S.* (1995):
“Modelldiagnosen in der Regression”
Diplomarbeit im Fach Mathematik an der Justus-Liebig-Universität Gießen.
- [37] *Turnbull, B. W.* (1974):
“Nonparametric Estimation of a Survivorship Function with Doubly Censored Data”
Journal of the American Statistical Association, Vol. 69, No. 345, S. 169-173.

Literaturverzeichnis

- [38] *Turnbull, B. W. und Mitchell, T. J. (1978):*
“Exploratory Analysis of Disease Prevalence Data From Survival/Sacrifice Experiments”
Biometrics, Vol. 34, No. 4, S. 555-570.
- [39] *Van der Laan, M. J., Jewell, N. P. und Peterson, D. R. (1997):*
“Efficient estimation of the lifetime and disease onset distribution”
Biometrika, 84 (3), S. 539-554.

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet zu haben.

Frankfurt am Main, den 09.02.2014

Florian Oliver Hauck