

Chaos und Fraktale

Einsichten, Begriffe und Beispiele

Ein Überblick

WILLI KAFITZ^{*)}

Abstract:

Chaos theory has not only created a new field for mathematics and information theory, it has also initiated profound changes within and outside of the disciplines. On the one hand, there are clearly defined, deterministic processes that can often be described using simple formulas. On the other hand, the courses of these processes take on a behavior for which the term "coincidence" is almost obvious, even though the mathematical description is still deterministic. As a modern society, we have already advanced far into digitalization and are taking more or less big steps in this direction. Many fractals would not have been discovered without the new technical possibilities. The technology was and is a pioneer of mathematical research in this area. Despite their computing power and performance, digital computers have a shortcoming compared to analytical methods of pure mathematics. You will inevitably have to round decimal numbers of appropriate length depending on the type of computer and operating system. In nonlinear systems, through iteration and feedback, a small deviation from the initial value can develop into a completely unpredictable development. Development becomes chaotic. Another variant can lead to an attractor, i.e. in which no exact target point of development can be identified, but in which the system moves towards a multi-dimensional phase space - a fractal. Chaos and fractals are two sides of the same coin. This article will discuss key terms about chaos and fractals from the perspective of mathematics and computer science. Epistemological aspects are pointed out.

Keywords:

Chaos, nonlinearity, fractals, attractor, dimension, iteration, feedback, dissipative systems, synergetics.

Zusammenfassung:

Die Chaostheorie hat nicht nur der Mathematik und der Informationstheorie ein neues Gebiet beschert, sie hat auch tiefgreifende Veränderungen innerhalb und außerhalb der Fachwissenschaften initiiert. Da existieren einerseits klar definierte, deterministische Prozesse, die sich oft mit einfachen Formeln beschreiben lassen. Andererseits nehmen die Verläufe dieser Prozesse ein Verhalten an, für das sich der Begriff „Zufälle“ geradezu aufdrängt, obwohl die mathematische Beschreibung nach wie vor deterministisch ist. Wir als moderne

Gesellschaft sind schon weit in die Digitalisierung vorgedrungen und gehen mit mehr oder weniger großen Schritten weiter in diese Richtung. Viel Fraktale wären nicht ohne die neuen technischen Möglichkeiten entdeckt worden. Die Technik war und ist Wegbereiter der mathematischen Forschung in diesem Gebiet. Trotz ihrer Rechenstärke und Leistungsfähigkeit haben digital arbeitende Computer gegenüber analytischen Methoden der reinen Mathematik ein Manko. Sie müssen zwangsläufig Dezimalzahlen entsprechender Länge je nach Rechner- und Betriebssystem runden. In nichtlinearen Systemen kann durch Iteration und Rückkopplung eine kleine Abweichung vom Ausgangswert eine vollkommen unvorhersehbare Entwicklung nehmen. Die Entwicklung wird chaotisch. Eine weitere Variante kann zu einem Attraktor führen, d.h. bei dem kein genauer Zielpunkt der Entwicklung identifizierbar ist, sondern in dem System sich auf einen mehrdimensionalen Phasenraum hinbewegt – ein Fraktal. Chaos und Fraktale sind dabei zwei Seiten einer Medaille. Es sollen im vorliegenden Beitrag Schlüsselbegriffe zu Chaos und Fraktale aus Sicht der Mathematik und Informatik diskutiert werden. Es wird dabei auf erkenntnistheoretische Aspekte hingewiesen.

Schlüsselwörter:

Chaos, Nichtlinearität, Fraktale, Attraktor, Dimension, Iteration, Rückkopplung, dissipative Systeme, Synergetik.

Dieser Beitrag kann auch von der Publikationsplattform „JLUpub“ der Universitätsbibliothek der Justus-Liebig-Universität Gießen unter folgendem Link heruntergeladen werden: <https://doi.org/10.22029/jlupub-19177>

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

Zitate

Chaos often breeds life, when order breeds habit.¹

Henry Brooks Adams (1838 – 1918)

A fractal is a way of seeing infinity.²

Benoit Mandelbrot (1924 – 2010)

Schließlich besteht ja jedes Ding nur durch seine Grenzen und damit durch einen gewissermaßen feindseligen Akt gegen seine Umgebung.³

Robert Musil (1880 – 1942)

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.⁴

David Hilbert (1862 – 1943)

In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.⁵

Georg Cantor (1845 – 1918)

... wenn wir uns eine Intelligenz vorstellen, die zu einem gegebenen Zeitpunkt alle Beziehungen zwischen den Teilen des Universums verarbeiten kann, so könnte sie Orte, Bewegungen und allgemeine Beziehungen zwischen all diesen Teilen für alle Zeitpunkte in Vergangenheit und Zukunft vorhersagen.

*Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827)*⁶

Inhalt

Zum fachlichen Begriffsverständnis	79
Zum historischen Begriffsverständnis und Stellenwert von Chaos	81
Abgrenzung und Fokus	85
Fraktale – Abgrenzung und Beispiele	88
Weierstraßsche Monsterkurve	90
Cantor-Funktion oder Teufelstreppe	91
Cantor-Menge	92

¹ In: The Education of Henry Adams, Chapter XVI (The Press, 1868), <https://www.gutenberg.org/files/2044/2044-h/2044-h.htm>

² James Gleick verwendete das Zitat von Mandelbrot in seinem berühmten Buch „Chaos“ als *In the mind's eye, a fractal is a way of seeing infinity*.

³ Robert Musil, Der Mann ohne Eigenschaften, 1. Buch, Kap. 7

⁴ David Hilbert; Über das Unendliche. In: Mathematische Annalen 95, 1926, S. 170

⁵ In der Mathematik ist die Kunst, eine Frage zu stellen, höher zu bewerten als die Kunst, sie zu lösen. Georg Cantor, Abschließende These seiner in Latein verfassten Dissertation.

⁶ P.S.de Laplace; Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeiten; Leipzig, Duncker und Humblot, 1776

Peano-, Gosper- und Hilbert-Kurve	97
Dreiecksfraktal	100
Cesàro-Kurven und verallgemeinerte Koch-Kurve	101
Sierpinski-Dreieck	104
Zur Gruppentheorie der Fraktale – eine Skizze	108
Weiterer kurzer Ausblick in die 3D-Welt	120
Iteration, Selbstähnlichkeit, Rückkopplung und Hausdorff-Dimension	123
Abhängigkeit vom Maßstab und weitere Dimensionsbegriffe	127
Zusammenhang Chaos und Fraktale	131
Logistische Gleichung	131
Ordnung und Chaos – der Lyapunov Exponent	137
Kausale Zusammenhänge	140
Zeltabbildung	145
Seltene Attraktoren, Tori und Solitonen	148
Lorenz-Attraktor	148
Hénon-Attraktor	149
Rössler-Attraktor	149
Thomas-Attraktor	150
Solitonen	152
Mandelbrot-Menge	154
Julia-Mengen	165
Höherdimensionale Verallgemeinerungen	170
Weitere Beispiele aus Physik, Chemie, Medizin und Sozialwissenschaften	172
Dynamik und Thermodynamik	180
Fazit und Ausblick	190
Abbildungsverzeichnis	197
Literaturverzeichnis	204
Danksagung	206
Personenverzeichnis	208
Linksammlung zu Fraktalen	214

Zum fachlichen Begriffsverständnis

Zunächst sollte man sich klarmachen, was lineare und nichtlineare Dynamiken ausmachen. Beispiel für eine typische lineare Beziehung ist die Fruchtbarkeit einer Population (etwa einzelliger) Organismen, hier r genannt. In der Grafik kann B_n z.B. als n -te Generation gesehen werden, die multipliziert mit r wiederum ein neues B_{n+1} ergibt. Wie der Name schon sagt, ist das Kennzeichen

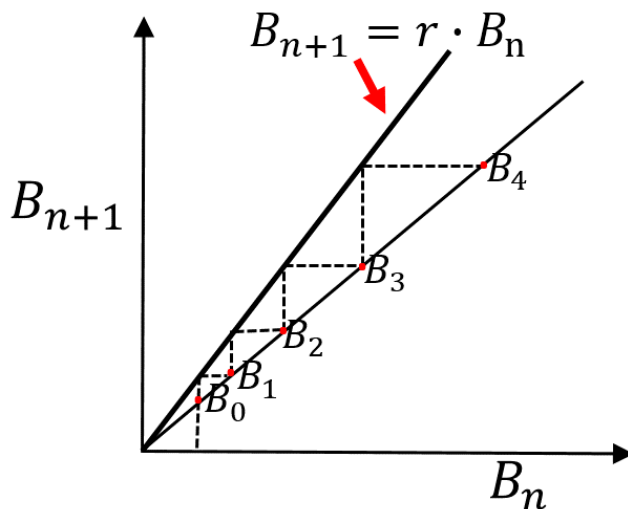


Abb. 1: Lineare Entwicklung der ersten vier Iterationen von $B_{n+1} = r \cdot B_n$

der linearen Entwicklung eine Gerade in der grafischen Darstellung. Ist $r > 1$, (z.B. Fruchtbarkeit größer Todesrate, etc.), so ist $B_{n+1} > B_n$. Im Fall $r < 1$ stirbt die Population aus, d.h. B_{n+1} geht gegen Null. Kontinuierliches Abfallen und erst recht unbegrenztes Wachstum ist eher die Ausnahme. Normal ist nicht nur die positive Vermehrungsrate, sondern auch eine Begrenzung der Ressourcen, etwa in Jäger-Beute-Modellen. Dies führt zu

nichtlinearen Dynamiken. Sie waren auch vor fast 200 Jahren der Anlass zu entsprechenden Modellen.

„Chaos und Fraktale“ stehen für nichtlineare Dynamiken und so heißt auch lapidar der Titel des vorliegenden Beitrags. Beide Begriffe markieren Unterschiede, aber es gibt auch viele Gemeinsamkeiten. An dieser Stelle soll genauer von Chaostheorie und von fraktaler Geometrie gesprochen werden und nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden strukturiert werden. Später werden, wo nicht sprachliche Genauigkeit erforderlich ist, auch die Kurzbegriffe verwendet.

Gemeinsamkeiten:

1. Komplexe Muster und Strukturen:

Sowohl die Chaostheorie als auch die fraktale Geometrie beschäftigen sich mit komplexen Mustern und Strukturen, die in natürlichen und künstlichen Systemen auftreten. Diese Muster sind oft nicht durch traditionelle geometrische oder lineare Ansätze erklärbar.

2. Nichtlineare Dynamik:

Beide Disziplinen betonen die Bedeutung der Nichtlinearität. In der Chaostheorie führen nichtlineare Dynamiken häufig zu chaotischem Verhalten,

während in der fraktalen Geometrie nichtlineare Gleichungen oft Basis zur Erzeugung von Fraktalen sind.

3. Selbstähnlichkeit:

Fraktale, die in der fraktalen Geometrie untersucht werden, zeigen eine Eigenschaft der Selbstähnlichkeit oder zumindest Selbstaffinität, d.h., sie sehen auf verschiedenen Skalen gleich oder ähnlich aus. Ähnliche Konzepte der wiederholenden Muster finden sich auch in chaotischen Systemen, wo bestimmte Trajektorien oder Attraktoren wiederkehrende Muster aufweisen können. Sie stellen sich häufig als Fraktale heraus.

4. Interdisziplinäre Anwendung:

Beide Felder finden Anwendung in einer Vielzahl von Wissenschaften wie Physik, Biologie, Medizin, Wirtschaftswissenschaften und sogar in der Kunst, um komplexe Phänomene zu verstehen und zu modellieren.

Unterschiede zwischen Chaostheorie und fraktaler Geometrie

1. Jeweiliger Fokus und Ziel:

Die Chaostheorie konzentriert sich auf das Verhalten dynamischer Systeme, die hochsensibel auf Anfangsbedingungen reagieren, was zu scheinbar zufälligem und unvorhersehbarem Verhalten führt. Die fraktale Geometrie hingegen beschäftigt sich mit der mathematischen Modellierung und Analyse von Mustern und Strukturen, die oft Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz aufweisen.

2. Mathematische Methoden:

In der Chaostheorie werden häufig Differentialgleichungen und dynamische Systeme analysiert, um das Verhalten über die Zeit zu verstehen. Fraktale Geometrie verwendet oft iterative Algorithmen und komplexe Zahlen zur Erzeugung von Fraktalen.

3. Ergebnisse und Vorhersagbarkeit:

Chaostheorie zeigt auf, dass in bestimmten Systemen langfristige Vorhersagen unmöglich sein können, auch wenn die zugrundeliegenden Regeln bekannt sind. Fraktale Geometrie hingegen bietet ein Werkzeug zur Beschreibung von Strukturen, die zwar komplex, aber durch ihre selbstähnlichen Eigenschaften mathematisch beschreibbar sind.

Insgesamt ergänzen sich Chaostheorie und fraktale Geometrie, indem sie unterschiedliche Aspekte der Komplexität in natürlichen und künstlichen Systemen erforschen und erklären. Sie bieten ein tieferes Verständnis für die Art und Weise, wie Muster und Strukturen auf verschiedenen Ebenen der Realität entstehen und interagieren. Es gibt selten Chaos allein. Es wechseln sich Phasen von chaotischem Verhalten und Inseln der Ordnung ab oder umgekehrt. Chaos ist nur ein Systemzustand von mehreren. Es ist sozusagen der irreguläre Output einer deterministischen Quelle.

Zum historischen Begriffsverständnis und Stellenwert von Chaos

Während in der christlichen Genesis das Nichts am Anfang der Schöpfung stand, war es in der griechischen Mythologie das Chaos. Chaos war Voraussetzung für den Schöpfungsakt, in Hesiods Theogonie sogar Voraussetzung für die Existenz der Götter. Dies gilt in ähnlicher Form auch für die Schöpfungsmythen anderer Kulturen. So schreibt in China Laotse im Tao-te-King (~600 v.Chr.) *„Im Anfang war das Chaos, Leere, Dunkelheit, unergründliche Tiefe des Ur-Ozeans. Aus dem Chaos entstand das Ur-Ei, das Weltenei.“*⁷ Etwas subtiler ist der Begriff des „*clinamen*“ bei Lukrez bzw. den frühen Atomisten. Man kann es als geringfügige Abweichung oder Störung verstehen, die erhebliche Auswirkungen haben kann. So ist der Übergang von laminarem Fluss zu „chaotischer“ Turbulenz Folge von mikroskopischen atomaren Vorgängen hin zu einem hochgradig makroskopisch organisierten dynamischen Zustand. Der französische Philosoph Michel Serres bezieht sich auf Lukrez und das *clinamen*, wenn er schreibt, ohne es gäbe es nur *„die Gesetze des Schicksals, das heißt die Ketten der Ordnung.“*⁸

Aber im westlichen Kulturraum verlor in der Spätantike Chaos seinen ursprünglichen Rang und nahm seine heutige Bedeutung von Unvorhersehbarkeit, Unberechenbarkeit und eigentlich auch Zufälligkeit an. Dabei ist es eine paradoxe Tatsache, dass ausgerechnet deterministische, nichtlineare Systeme oft schnell Kennzeichen von Unvorhersehbarkeit aufweisen, die gerne als „Zufall“ bezeichnet werden. Philosophen werden dabei sofort hellhörig. Die alte Debatte um Determinismus und freien Willen ist keineswegs ausdiskutiert. In einer deterministischen Welt bestimmt scheinbar die Vergangenheit vollkommen die Zukunft. Deterministisches Chaos hat darin etwas Unheimliches oder sogar Gefährliches, etwas Umstürzlerisches, etwa genauso, wie man revolutionäre Wirrköpfe als politische Chaoten bezeichnet. Eine wesentliche Basis ist das Newtonsche deterministische Wissenschaftsverständnis. Sein Gravitationsgesetz reicht immer noch aus, um Raumsonden über lange Jahre und Entfernungen zu fremden Himmelskörpern zu schicken. Es hat eine einheitliche Ordnung auf der Erde und am Himmel geschaffen. Ausgerechnet die Gravitation hat aber dazu geführt, dass dieses Weltverständnis trotzdem erschüttert wurde. Während die Bewegungen von zwei Himmelskörpern sehr gut berechnet werden können, hat der geniale französische Mathematiker Jules Henri Poincaré darauf hinweisen müssen, dass sich schon die Bewegungen von drei (Himmels)körpern einer genauen

⁷ Zitiert nach <https://texteundtoene.ch/wp-content/uploads/2018/08/Schöpfungsmythen-anderer-Kulturen.pdf>

⁸ Zitiert nach H.J. Schlichting, https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/274_der_flutterhafte_falter_der_chaosphysik.pdf

Berechnung entziehen. König Oskar II von Schweden hatte für die Lösung des n-Körper-Problems einen Preis ausgesetzt. Poincaré bewies, dass sogar eine sehr vereinfachte („restringierte“) Aufgabenstellung zu divergenten Reihen führt und damit keine analytische Lösung möglich ist.⁹ Zentraler mathematischer Beweis in seiner Ausarbeitung ist der poincarésche Wiederkehrsatz¹⁰. Er gehört zur Ergodentheorie, die damals auf Stochastik und Maßtheorie beschränkt war und hat das Gebiet der dynamischen Systeme begründet. Er besagt, dass es bei autonomen hamiltonschen Systemen, deren Phasenraum ein endliches Volumen hat, in jeder offenen Menge U im Phasenraum Zustände gibt, deren Trajektorien beliebig oft wieder nach U zurückkehren. Wir finden das Problem später z.B. bei seltsamen Attraktoren; es weist viele Kennzeichen von chaotischem Verhalten auf. Damit wurde der Determinismus von Newton und der Reduktionismus, der Laplace zugeschrieben wird, erstmals erschüttert. Mit den Entdeckungen von Planck, Bohr, Heisenberg und vielen anderen Pionieren der Quantenmechanik ging der Glaube an ein deterministisches und reduktionistisches Weltbild weiter verloren.

Poincaré entdeckte jedoch etwas Grundsätzliches, nämlich die Unterscheidung zwischen integrablen und nichtintegrablen Systemen. Bei integrablen Systemen lässt sich die Wechselwirkung zwischen Körpern bzw. Teilchen eliminieren und nur die Impulse spielen eine Rolle.¹¹ Vor ihm ging man stillschweigend davon aus, dass alle dynamischen Systeme integrabel sind. Dies ist schon beim System Sonne – Erde – Jupiter nicht mehr der Fall und dies gilt für die allermeisten dynamischen Systeme. Die Tatsache, dass Poincaré sogar den

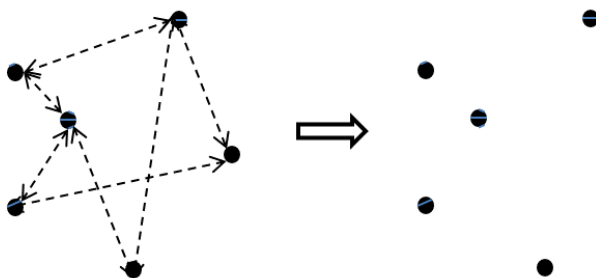


Abb. 2: Links wechselwirkende Punkte; rechts Wechselwirkung ließ sich formal eliminieren, System ist integrabel

Grund für die Nichtintegrierbarkeit nannte, macht seine Erkenntnis zu einem wichtigen Theorem und ihn zu einem der Väter der Chaostheorie. Es existieren nämlich Resonanzen zwischen den Freiheitsgraden und damit eine starke Kopplung, die eine Störungsrechnung erforderlich macht. Es finden

⁹ Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste, 3. Bd., Paris 1892-1899

Man beachte: Es ist ein mathematisches Problem, da die Massen als punktförmig angenommen werden müssen, was physikalisch eine unendliche Dichte bedeutet.

¹⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Wiederkehrsatz>

¹¹ Genauer: Die Hamilton-Funktion H hängt nur von den Wirkungen J ab ($H(J)$) und diese sind bewegungsinvariant, also $\frac{dJ}{dt} = 0$.

sich also in diesem Fall immer Punkte im Phasenraum, die zu verschwindenden Nennern und damit zu Divergenzen / Unendlichkeiten führen.

Die Thermodynamik markierte durchaus ein neues Physikverständnis. Zum ersten Mal tauchten Wahrscheinlichkeiten auf. Im 19. Jahrhundert betrachtete man nur den Endzustand der thermodynamischen Entwicklung. Die Zeit wurde auf einen Parameter reduziert. Es ging um das „Sein“, nicht um das „Werden“. Mathematischer Ausdruck ist die Hamilton-Funktion $\mathcal{H}$, also die Gesamtenergie als Funktion der Orte und Impulse der Teilchen und bei dynamischer Betrachtung der Zeit. Die Gleichungen, die durch Ableitung von $\mathcal{H}$ die zeitliche Änderung der Koordinaten und Impulse angeben, nennt man kanonisch. Sie sind reversibel und beschreiben damit integrable Systeme.

Man nennt es das Problem der „kleinen Nenner“, das auch an anderen Stellen in der Physik auftaucht und manchmal durch Renormierung (z.B. in Quantenfeldtheorien) behoben werden kann. Max Born schrieb: *„Es wäre in der Tat bemerkenswert, wenn die Natur sich gegen weitere Erkenntnisfortschritte hinter den analytischen Schwierigkeiten des Mehrkörperproblems verschanzt hätte.“*¹²

Der US-amerikanische Chaosforscher Joseph Ford bringt es auf den Punkt: *Die Relativitätstheorie beendete die Newtonsche Illusion von Zeit und Raum als absoluten Kategorien; die Quantentheorie setzte dem Newtonschen Traum von einem exakt kontrollierbaren Messprozess ein Ende; und nun erledigt die Chaostheorie Laplaces Utopie deterministischer Voraussagbarkeit.“*¹³

Man muss allerdings zur Ehrenrettung von Laplace sagen, dass er keineswegs der engstirnige Forscher war, als der er manchmal auch von Verfechtern der Chaostheorie hingestellt wird. Dagegen spricht, dass er zu Recht als Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt. Ihm war sehr wohl klar, dass trotz fehlender vollständiger Kenntnisse über ein System man belastbare Ergebnisse bekommen kann. Ihm ist auch bewusst, dass man Wahrscheinlichkeiten, im Sinne Aristoteles, nicht streng mathematisch behandeln kann. Auch wenn die „Ära Laplace“ ein mechanistisch orientiertes Weltbild geprägt hat, tun renommierte Autoren ihm unrecht, wenn sie ihn als Gegenpol zur Chaostheorie sehen. Folgendes Zitat von Laplace soll diese Meinung zurechtrücken: *Es gibt also Dinge, die unbestimmt sind, und wir*

¹² Zitiert nach Prigogine, Ilya, Stengers, Isabell; Das Paradox der Zeit – Zeit, Chaos und Quanten. Piper, München 1993, S. 163

¹³ Siehe Joseph Ford: What is Chaos that we should be mindful for it? Manuskript, Georgia Institute of Technology, Atlanta (Ga.), o.J., S. 12, zitiert nach: James Gleick: Chaos - die Ordnung des Universums. Vorstoß in Grenzbereiche der modernen Physik. München 1990, S. 15

*versuchen, die Unmöglichkeit, sie zu bestimmen, dadurch zu kompensieren, dass wir die verschiedenen Grade der Wahrscheinlichkeit bestimmen*¹⁴

Ein wichtiger deutscher Pionier der Chaosforschung, Siegfried Großmann, beginnt einen Vortrag mit dem Titel „Deterministisches Chaos“ bei der 299. Sitzung der Rheinisch-Westfälischen Akademie der Wissenschaften am 6. Oktober 1982 in Düsseldorf mit dem Ausruf „*Chaos ist in.*“¹⁵

Dies ist Fluch und Segen zugleich!

Um „Chaos“ wurde bzw. wird oft regelrecht ein Kult getrieben. Das gilt vor allem für zweifelhafte populär- oder pseudowissenschaftliche Schriften. Erkenntnisse der Chaostheorie werden immer wieder in anderen sozialwissenschaftlichen Disziplinen oder im Alltag undifferenziert oder sogar missverständlich angewendet. Der Biophysiker, Chaosforscher und Philosoph Bernd-Olaf Küppers, der mittlerweile einen Lehrstuhl am Philosophischen Institut der Universität Jena hat, vertritt die Ansicht, *„dass es grundsätzlich unbeweisbar ist, ob soziale Vorgänge tatsächlich nichtlinear und chaotisch sind. Eine vermutete Nichtlinearität lasse sich nicht endgültig beweisen, womit der wissenschaftliche Grundsatz der Verifizierbarkeit verletzt werde.“*¹⁶ Auch manche seriöse Autoren und Wissenschaftler erlagen zunächst dem Hype. Es erinnerte sinngemäß an den Gedanken in Kants „Kritik der reinen Vernunft“, dass die Wissenschaft ihre Befugnisse durch metaphysische Spekulationen überschreitet, wenn die Philosophie sie nicht durch fundierte methodische Kritik korrigiert.

Richtig ist, dass die Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme in der experimentellen Physik und praktischen Mathematik bzw. Informatik mittlerweile zu einem fruchtbaren großen Forschungsgebiet mit Anwendungen darüber hinaus geführt hat. Dabei hat es durchaus eine bemerkenswerte Entwicklung mitgemacht. Komplexität wurde anfangs sogar falsch eingeschätzt bis man erkannte, dass es nicht nur eine Überlagerung von vielen, aber einfachen Prozessen ist. Turbulenz sah man als eine Art Mischung vieler Schwingungen, für die das bewährte Additions- oder Überlagerungsprinzip von linearen Naturgesetzen gilt. Siegfried Großmann beginnt einen Artikel mit den Worten:

Das Überlagerungsprinzip der linearen Naturgesetze weicht bei nichtlinearen Phänomenen dem Prinzip vielskaliger Selbstähnlichkeit, regelmäßig oder

¹⁴ Zitiert nach Wehr, Marco; Der Schmetterlingsdefekt, Turbulenzen in der Chaostheorie, 2002, S. 201 mit Verweis auf Crutchfield (SdW 02/87, 78-90)

¹⁵ Großmann, Siegfried; Deterministisches Chaos, Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Vorträge N 321, Westdeutscher Verlag 1983, S. 7-29

¹⁶ Zitiert nach Stefan Frerichs, Grundlagen der Chaostheorie, https://www.stefre.de/Grundlagen_der_Chaostheorie.pdf

*chaotisch (statistisch). Die angemessene Beschreibung ist die fraktale Geometrie.*¹⁷

Mit den Gesetzen der linearen Naturbeschreibung, für die mehr als 200 Jahre Newton als Vorbild galt, hat die Chaostheorie jedenfalls gründlich aufgeräumt. Ähnliche Ursachen haben eben nicht unbedingt ähnliche Wirkungen. Doch die Chaostheorie ist nicht gesetzlos und irrational. Damit hätte sie kein Erklärungspotential. In den 1980-er Jahren gab es den Versuch, Chaos mit der algorithmischen Komplexitätstheorie von Kolmogorov, Chaitin und Solomonov zu erklären. Das ist eher das andere Extrem, denn man ignoriert die Determiniertheit und erklärt die Nicht-Vorhersehbarkeit. Die dadurch entstandene algorithmische Informationstheorie ist aber zum wichtigen Eckpfeiler geworden. In der relativ jungen Geschichte der Chaostheorie sind jedenfalls eine Reihe alter Dogmen infrage gestellt worden. Aber das gilt auch für andere große Themen des 20. Jahrhunderts, wie sie Joseph Ford in seinem Zitat benannt hat. Sowohl die Relativitätstheorie als auch die Quantenmechanik haben Weltbilder erschüttert oder gar zerstört. In der Mathematik sind solche Revolutionen seltener. Die Entdeckung der irrationalen Zahlen durch die Griechen in der Antike und die Infinitesimalrechnung von Newton und Leibniz gehören z.B. dazu. Mandelbrot zitiert Paul du Bois-Reymond in Bezug zur Weierstraß-Funktion („Monsterkurve“): *Ich komme von dem Gedanken nicht los, dass sie uns an die Grenzen unseres Intellekts führen werden.*¹⁸ Die Chaostheorie wurde aber durchaus zu einer „disruptiven Kraft“ in der Mathematik. Sie hat zumindest dazu beigetragen unser Verständnis von bestimmten Systemen und ihrem Verhalten in Frage zu stellen. Der Einsatz von Computern tat dabei sein Übriges. Man muss also einerseits „die Kirche im Dorf lassen“, aber andererseits anerkennen, dass die Chaostheorie neue Fragestellungen suggeriert hat, deren Antworten uns dem Verständnis der komplexen Welt ein Stück näherbringen.

Abgrenzung und Fokus

Im Band 66 der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Zeitschrift wurde bereits ein Artikel vom Autor zum Thema „Chaos und Fraktale“ veröffentlicht. Der Beitrag liegt nur als Printausgabe vor.¹⁹ Eine Veröffentlichung im Internet war in der wissenschaftlichen Gesellschaft damals noch nicht üblich. Er führt relativ einfach und elementar zu den zentralen Begriffen, Definitionen und mathematischen Beziehungen des Themengebiets. Hauptfokus sind allerdings

¹⁷ Siegfried Großmann, Selbstähnlichkeit: Das Strukturgesetz im und vor dem Chaos, in: Physikalische Blätter 45 (1989), S. 172-80

¹⁸ Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, S. 426

¹⁹ Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 66, Gießen 2016, W. Kafitz, Die Natur denkt fraktal, S. 7-37

die Anwendungen der fraktalen Geometrie auf die Skalengesetze in der Natur. Dies drückt sich im Titel des Beitrags aus: „Die Natur denkt fraktal.“ Wichtige Erkenntnisse bei landlebenden Säugetieren haben dazu der Gießener Forscher Manfred Sernetz und sein Team in der Veterinärmedizin beigesteuert.²⁰ Dies war der eigentliche Impuls für den genannten Artikel. Die US-Biologen und Physiker Geoffrey B. West, James S. Brown und Brian J. Enquist haben dann mit „vernünftigen“, logischen Grundannahmen ein einheitliches Skalengesetz in der gesamten belebten Natur postuliert.²¹ Egal ob Bronchien, Blutkreislauf, Nierenfunktion, Tracheen der Insekten oder Xylem und Phloem bei Gefäßpflanzen scheint bei allen Lebewesen unabhängig von der Größe und bei allen physiologisch relevanten Strukturen der Lebensprozesse ein universelles Skalengesetz zu gelten. Die sogenannte fraktale Dimension d beträgt aufgrund der sinnvollen Postulate der drei amerikanischen Forscher offenbar immer ca. $d=2,25$. D.h. scheinbar linear aufgebaute Strukturen, wie fast beliebig klein verästelte Blutgefäße oder der Wassertransport von den Wurzeln zu den Blättern in Bäumen, bilden insgesamt eine Struktur, die zwischen der euklidischen Dimension einer Fläche und einem räumlichen Objekt liegt.

Bei dem vorliegenden Beitrag soll vor allem die Sicht der Mathematik und Informatik, aber nicht noch einmal die der Biologie berücksichtigt werden. Die Skalengesetze in der Biologie, deren scheinbar widersprüchliche „Allometrie“²² nur durch fraktale Überlegungen aufgelöst werden kann, sollen hier nicht wieder adressiert werden, so wichtig sie auch sind. Auch das damals behandelte Lindenmayer-System wird hier ausgeklammert. Gleiches gilt für künstlerische Werke (z.B. Maurits Cornelis Escher oder Jackson Pollock). M.C. Escher hatte für sein mathematisch inspiriertes Werk mit dem US-amerikanischen Gruppentheoretiker H.S.M. Coxeter korrespondiert. Beispiele aus der belebten oder unbelebten Natur können zwar hilfreich sein, der Schwerpunkt soll aber in der Mathematik, Informatik und begrenzt auch in der Physik liegen. Andererseits sollen auch philosophische oder erkenntnistheoretische Aspekte nicht zu kurz kommen. Dazu sollte das letzte Kapitel schon einen einführenden Beitrag leisten. Insbesondere die enge Beziehung zwischen Chaos und Fraktalen und ihre Auswirkung auf das, was wir Erkenntnis nennen, ist dabei wichtig.

Mit dem Begriff „Chaostheorie“ wird, wie gesagt, manchmal „Schindluder“ getrieben. Man muss sich deshalb in einem seriösen Beitrag strikt auf

²⁰ Sernetz, Manfred; Fraktale biologische Strukturen: Chaos und Ordnung im Organismus, Berichte der Justus-Liebig-Gesellschaft, Gießen 2001

²¹ Geoffrey B. West, James H. Brown, Brian J. Enquist, A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology, SCIENCE, VOL. 276, 4th APRIL 1997, Seite 122-126

²² Siehe z.B. <https://www.spektrum.de/lexikon/biologie/allometrie/2273>

wissenschaftliche Prinzipien beschränken. Der in der Universität de Lausanne (Schweiz) arbeitende Wissenschaftsphilosoph Michael Esfeld hat es in einem Beitrag auf den Punkt gebracht:²³ Vor allem gilt:

„Es gibt keine alternativen Fakten.“

Die einzige wissenschaftliche Erkenntnistheorie ist der Realismus. Andere Sichtweisen führen zu heillosen Inkonsistenzen und Widersprüchen. Entweder man akzeptiert Realismus ganz oder gar nicht. Deterministisches Chaos hat nichts Geheimnisvolles oder Mystisches.

Insbesondere für das Thema „Chaos und Fraktale“ ist es wichtig, dass ein (physikalisches) Gesetz nicht unbedingt universell sein muss. Meist haben wir nur unvollständiges Wissen über den Zustand eines komplexen Systems. Aber auch dann muss die Theorie überprüfbare Aussagen machen können.

Man muss deshalb nach „Ordnung im Chaos“ suchen.

Warum sind bei der Chaostheorie universelle Gesetze nicht unbedingt das Maß aller Dinge? Es ist schön, universelle Gesetze zu haben, aber man muss sie hier leider auf ein Gebiet anwenden, in dem zwar die „Universalität“ in bestimmten Grenzen durchaus vorkommt (Stichwort Feigenbaum-Konstante). Aber sonst ist sie nicht immer gegeben, wird ggfs. auch nicht benötigt und bringt damit keinen zusätzlichen Nutzen. Esfeld nennt sie sogar „nutzlos“, wenn man sie nicht auf ein Teilsystem anwenden kann. Trotzdem wird sich zeigen, dass sich im chaotischen Verhalten Universalität finden lässt. Mathematisch lassen sich dabei viele Aspekte fassen; physikalisch sind uns Grenzen gesetzt, weil wir z.B. die Anfangsbedingungen der (kosmischen) Vergangenheit nicht gut genug kennen. Aber auch beim deterministischen Chaos oder bei der vollständigen Isolierung eines Quantensystems sind uns nicht nur praktische Grenzen gesetzt. Die Natur bzw. die Berechenbarkeit (Turing, Chaitin) selbst setzt heute gewisse Grenzen. Diese sollten nicht immer auch prinzipielle Grenzen der Erkenntnis sein. Insbesondere die Physik tut gut daran, diese Grenzen ständig zu hinterfragen und möglichst zu verschieben.

Realismus ist insbesondere nicht Empirismus. Es geht bei der Chaostheorie nicht um die Trennung zwischen Beobachtbarem und nicht Beobachtbarem. Diese Grenze wird heute laufend überschritten bzw. verschoben. Noch willkürlicher wäre der radikale Konstruktivismus, der postuliert, dass sich die Menschen erst ihre eigene Realität durch eigene Erfahrungen, Beobachtungen und entsprechende individuelle Interpretationen selbst konstruieren. Auch diese Haltung ist (nicht nur) bei deterministischem Chaos fehl am Platze.

²³ Spektrum der Wissenschaft Spezial 2-2018, S. 71-76

Fraktale – Abgrenzung und Beispiele

Die folg. Tabelle (Abb. 4) zeigt Unterschiede zwischen euklidischer und fraktaler Geometrie auf. Es gibt aber auch wichtige Gemeinsamkeiten. So beschränkt sich auch die fraktale Geometrie auf Teilmengen metrischer Räume, auch wenn der Abstandsbegriff nicht unbedingt euklidisch definiert sein muss. In der fraktalen Geometrie werden deshalb durchaus altbekannte Eigenschaften studiert. Dazu gehören Cauchy-Folgen, Grenzwerte, Fixpunkte, offene und

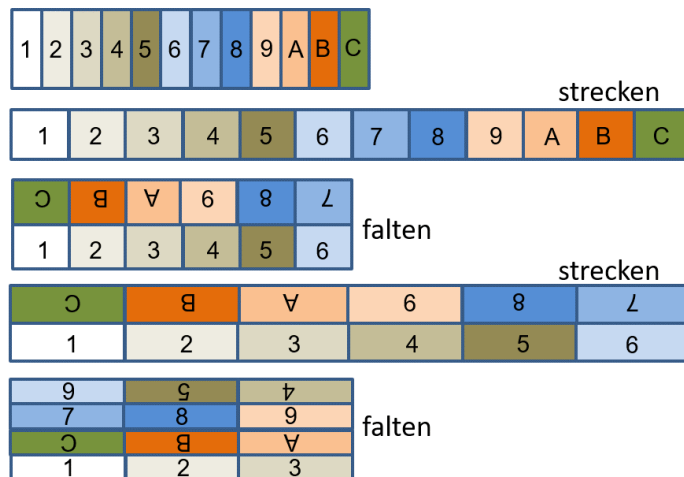


Abb. 3: Strecken und falten bei 12 virtuellen „Teigstücken“ als „chaotischer“ Vorgang. (Prinzip Bäcker-Transformation, invertierbar)

abgeschlossene Mengen, Kompaktheit oder auch (perfekte) Mengen und (vollständige) metrische Räume u.v.m. Insbesondere die topologischen Eigenschaften sind bezüglich der Äquivalenz metrischer Räume invariant, d.h. sie sind auch invariant gegenüber Homöomorphismen. Im vorliegenden Beitrag werden diese wesentlichen Begriffe nicht in voller Tiefe und mathematischer Strenge vorausgesetzt und oft nur für

das prinzipielle Verständnis heuristisch definiert bzw. begründet. Mit dem bereits eingeführten Begriff des deterministischen Chaos wurde ein Weg aufgezeigt, wie wahre Aussagen über ein sich chaotisch verhaltendes System gemacht werden können, also wo „Ordnung im Chaos“ herrscht.

Es sind oft zumindest Aussagen möglich, wohin sich ein System durch fortgesetzte Rückkopplung („Orbit“) entwickelt. Man nennt einen solchen Phasenraum „Attraktor“, im einfachsten Fall ist es ein Fixpunkt oder Periodizität. In der fraktalen Geometrie kann man, im Sinne des letzten Abschnitts, auf etablierte Begriffe zurückgreifen. Darüber hinaus finden sich Gesetzmäßigkeiten und sogar universelle Konstanten in der Theorie. Es gibt also durchaus Ordnung im Chaos und bedingt Universalität, also übertragbare Regeln.

Dabei muss immer klar sein, dass es im deterministischen Chaos keine Zufälle gibt, es gibt lediglich in vielen Fällen durch die Nichtlinearität zwangsläufig Effekte, durch die sich bei beliebig nahe bei einander liegenden Ausgangswerten nach genügend vielen Iterationen die Zielwerte nicht vorhersehbar auseinander entwickeln können.

Der Meteorologe Edward Lorenz hat in einem berühmten Vortrag Ende 1972 die Frage gestellt und bejaht, ob ein Schmetterlingsflügelschlag in Brasilien einen Tornado in Texas auslösen kann.²⁴ Im doppelten Sinn wird ein solches Phänomen als Schmetterlingseffekt bezeichnet. So muss z.B. jeder Computer, ob Taschenrechner oder Großrechner, nach mehr oder weniger vielen Stellen runden. Schon allein deshalb sind etwa einer mittel- oder gar langfristigen Wettervorhersage Grenzen gesetzt. Die Fehler der Gittermodelle werden ständig verstärkt.

Dies ist nur ein, wenn auch prominentes Beispiel. Es ist aber kein Gegenargument. Nach mehr als einem halben Jahrhundert wird zunehmend deutlich, dass die Chaosforschung gemäß den bisherigen Ausführungen „echte“ Wissenschaft ist. Und zwar in dem Sinne, dass es ein theoretisches Fundament gibt, so dass über (z.B. digitale) Methoden experimentell geforscht werden kann und dass dann Vorhersagen gemacht werden können, mit denen Theorien verifiziert oder falsifiziert werden können. Chaos widersetzt sich keineswegs einem tieferen Verständnis. Es findet sich tatsächlich Ordnung im Chaos oder besser formuliert, man kann erstaunliche, oft auch ästhetisch wunderschöne Strukturen in nichtlinearen dynamischen („chaotischen“) Systemen finden. Der vorliegende Beitrag versucht dies zu vermitteln, kann aber nur einige grundsätzliche und trotzdem unvollständige Themen aus diesem mächtigen

Grundlegende Unterschiede zwischen der euklidischen Geometrie und der fraktalen Geometrie	
Euklidisch	Fraktal
Traditionell (über 2.000 Jahre alt)	Modern (ca. 70 Jahre alt)
Ganzzahlige Dimension	Fraktale (gebrochene) Dimension
Beschäftigt sich mit vom Menschen erzeugten Gegenständen	Geeignet für natürlich vorkommende Formen
Wird unter Verwendung von Formeln beschrieben	Wird unter Verwendung rekursiver Algorithmen (Iteration) beschrieben

Abb. 4: Euklidische versus fraktale Geometrie

Gebiet ansprechen.

Im Folgenden sollen einige Grundbegriffe aus der Chaostheorie erläutert werden. Eng verbunden mit dem Begriff „Chaos“ ist die fraktale Geometrie, mit der begonnen wird. Mittlerweile gibt es neben fragwürdigen Webseiten, Druckerzeugnissen und sogar Spielfilmen eine Fülle von seriösen

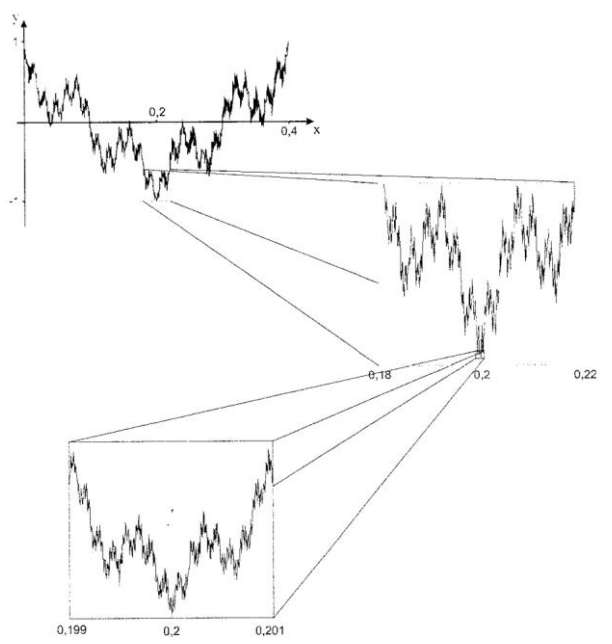
²⁴ Edward N. Lorenz, Predictability: Does the Flap of a butterfly's wings in Brazil set off a Tornado in Texas?
American Association for the Advancement of Science, 139th Meeting, New York, December 29, 1972

populärwissenschaftlichen Publikationen und anspruchsvolle Fachliteratur. Computer ermöglichen mit teilweise gigantischem Rechenaufwand faszinierende Bilder und Zoom-Videos von Fraktalen.

Weierstraßsche Monsterkurve

Vorweg sollen einige Beispiele insbesondere zeigen, dass der euklidische Dimensionsbegriff erweitert werden muss. Begonnen wird mit zwei Beispielen, die sich nur „widerspenstig“ unter die Fraktale subsummieren lassen, insbesondere wie sie der Erfinder der Wortschöpfung gemeint hat: Der „Weierstraßschen Monsterkurve“ und der Cantor-Funktion, die allgemein unter dem Namen „Teufelstreppe“ bekannt ist.

Nach vielfältigen Vorüberlegungen, auch von anderen Forschern, prägte Benoit Mandelbrot im Jahr 1975 den zentralen Begriff „fraktal“ bzw. „Fraktal“ (von lateinisch *fractus*, gebrochen) als Adjektiv und als Substantiv. Er bezieht sich auf die Tatsache, dass viele Strukturen dem klassischen, euklidischen Dimensionsbegriff $d_{\text{(uklid)}}$ nicht gerecht werden. Danach hat ein Punkt die euklidische Dimension $d_E=0$, eine Linie die Dimension $d_E=1$, Fläche $d_E=2$ und eine räumliche Struktur $d_E=3$. In der Mathematik kamen entsprechende ungewöhnliche mathematische Objekte Ende des 18. Jahrhunderts auf und erhielten zunächst die Bezeichnung „Monsterkurven“. Allerdings war der Begriff auf alle „pathologischen“ Strukturen gemünzt, also nicht nur auf Punktmengen, wie z.B. Cantor-Staub oder raumfüllende, spiegelsymmetrische oder punktsymmetrische Kurven (z.B. Hilbert-Kurve, Peano-Kurve). So hat Karl Weierstraß zur Verblüffung der Fachwelt 1872 eine reellwertige Funktion veröffentlicht, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist.



veröffentlicht, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist. Sie lässt sich in einer Formel ausdrücken. Zuerst wurden diese „Monster-Kurven“ nicht zu den Fraktalen gezählt. Es gibt aber einige Argumente, wieso man diese Abgrenzung hinterfragen kann. Der Autor des entsprechenden Wikipedia - Artikels bezeichnet jedenfalls den Funktionsgraphen als eine

Abb. 5: Weierstraßsche Monsterkurve

der ersten fraktalen Kurven.²⁵ Man beachte auch das Zitat von Paul du Bois-Reymond.

$$f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n t)$$

Bereits um 1830 hatte Bernhard Bolzano ebenfalls eine entsprechende, allerdings abschnittsweise definierte Funktion, gefunden.²⁶ Sie ist nirgends differenzierbar außer für eine Menge mit dem Maß 0. Das vollständige Manuskript galt als verschollen und wurde erst nach dem 1. Weltkrieg von dem tschechischen Mathematiker Martin Jasek in der Nationalbibliothek Wien entdeckt.²⁷

Cantor-Funktion oder Teufelstreppe

Eine Konstruktion, die auf der Cantor-Menge basiert, ist die sogenannte Teufelstreppe oder Cantor-Funktion. Sie entsteht, wie viele Fraktale, durch

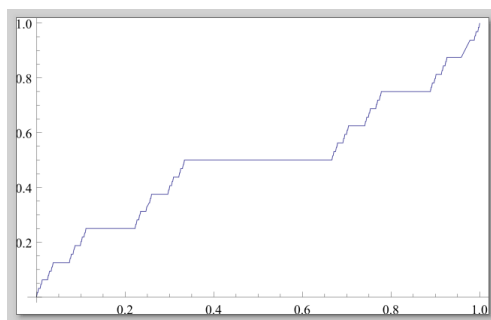


Abb. 6: Bildungsprinzip der „Teufelstreppe“ nach 10 Iterationen

Iteration, also rekursiv, im Gegensatz zur Weierstraßschen Kurve. Die Hausdorff-Dimension sollte analog zur Cantor-Menge $\frac{\log 2}{\log 3}$ sein. Die englische Wikipedia-Seite schreibt dazu: *We may define the Cantor function alternatively as the D-dimensional volume of sections of the Cantor set.* Sie ist in unendlich vielen Teilintervallen differenzierbar (abzüglich der „Knicke“). Man kann sie mit drei Kreisen vom Durchmesser $1/3$ überdecken (siehe Lebesgue-Überdeckungsdimension). Man

darf sie wohl trotz einiger Gegenargumente zu den Fraktalen zählen. Betrachtet man den Grenzfall, so ist der Graph so lang wie Höhe plus Breite zusammen; genauer: die schrägen Stücke addieren sich zur Höhe der Figur und die waagrechten Stücke zur Breite. Trotz der beliebig kleinen Treppenstufen hat die fraktale Figur also eine endliche Länge.

In der Mathematik, wie auch in der belebten wie unbelebten Natur oder vielen Anwendungsbereichen, wird gerne die Selbstähnlichkeit als Kriterium genannt.

²⁵ <https://de.wikipedia.org/wiki/Weierstraß-Funktion>

²⁶ <https://de.wikipedia.org/wiki/Bolzanofunktion>

²⁷ Siehe Binimelis Bassa, Maria Isabel; *Fraktale Geometrie*, Für die deutsche Ausgabe: Librero, Kerkdriel (Niederlande), 2017, S. 98, M. Jasek, „Über den wissenschaftlichen Nachlass Bernhard Bolzanos,“ *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 31 (1922), 109–110.

Doch auch einfache geometrische Strukturen, wie ein Parallelogramm, Quadrat, Würfel oder sogar Strecken sind selbstähnlich. Die DIN A_x Formate sind selbstähnlich mit dem Verkleinerungsfaktor $\sqrt{2}$. Die Norm adressiert x=0 (1 m²), x=1, 2, 3, 4, 5 bis x=6 (Postkartenformat).

Auch der Goldene Schnitt erzeugt selbstähnliche Proportionen, denn die ganze Strecke verhält sich zum größeren Teil wie der größere Teil zur kleineren Teilstrecke. In diesen Strukturen ist die Dimension euklidisch; es liegt keine gebrochene Dimension vor. In der Literatur wird genau diese Dimension, die in der Regel keine ganze Zahl sein muss, aber meist größer als die euklidische Dimension ist, als das entscheidende Kriterien genannt, was ein Objekt zu einem Fraktal werden lässt. Allerdings zeigt das Bildungsprinzip der Teufelstreppe, dass die rekursive Abbildung zum nächsten Iterationsschritt nicht ähnlich, sondern nur affin ist. Die ganze Figur ist also nicht selbstähnlich, sondern nur selbst-affin.

Cantor-Menge²⁸

Die Cantor-Menge²⁹ entsteht, wenn man von einer Strecke (der Einfachheit

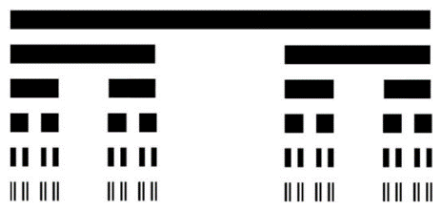


Abb. 7: Die ersten fünf Iterationen der Cantor-Menge

halber am Anfang der Länge 1, hier rechts halboffen definiert) jeweils das mittlere Drittel entfernt und diesen Vorgang beliebig oft wiederholt. Es bleiben unendlich viele Punkte übrig (die noch dazu nicht abzählbar sind, also nicht mit natürlichen Zahlen durchnummeriert werden können.)

Es soll nun berechnet werden, wieviel von der ursprünglichen Strecke entfernt wurde. Dieser Wert habe die Länge L.

$$\begin{aligned}
 L &= \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{9} + 4 \frac{1}{27} + \dots \\
 &= \frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{3} \right)^2 + 4 \left(\frac{1}{3} \right)^3 + \dots \\
 &= \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{2}{3} \right)^1 + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \left(\frac{2}{3} \right)^3 + \dots \right)
 \end{aligned}$$

²⁸ Erste Passage ist Auszug aus Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Kafitz, Die Natur denkt fraktal, Band 66, Gießen 2016, S. 17

²⁹ Cantor-Staub kann man als Synonym für nichtabzählbare Punktmengen verwenden. Nach dem Moore-Kline Theorem ist jeder Cantor-Raum homöomorph zu der Mitteldrittel Cantor Menge

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}}$$

$$= 1$$

Die ersten 3 Zeilen sind einfache Umformungen. Nur die 4. Zeile verwendet die Formel einer konvergenten unendlichen geometrischen Reihe.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = \frac{a_0}{1-x} \text{ für } |x| < 1 \text{ wenn } \frac{a_0 x^{n+1}}{a_0 x^n} = \text{konstant}$$

Hier ist: $a_0 = 1, \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{2}{3}$

Man erkennt, dass die entfernte Länge L so lang ist wie die ursprüngliche Strecke, also 1. Man hat also „alles“ entfernt und trotzdem bleiben (nicht abzählbar) unendlich viele Punkte übrig. Die Cantor-Menge müsste demnach die euklidische Dimension 0 haben.

Man kann zeigen³⁰, dass die Cantor-Menge die Hausdorff-Dimension D_H hat

$$D_H = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3(2) \approx 0,6309 \dots$$

Nach Hausdorff liegt also die Dimension des auch Cantor-Staub genannten Gebildes/Punktmenge sogar etwas näher an der euklidischen Dimension einer Linie. Auf jeden Fall ist sie eine gebrochene Zahl. Die Cantor-Menge ist geradezu ein klassisches Fraktal.

Es fällt auf, dass die Verteilung der Punkte mit der Zahl 3, genauer mit Potenzen

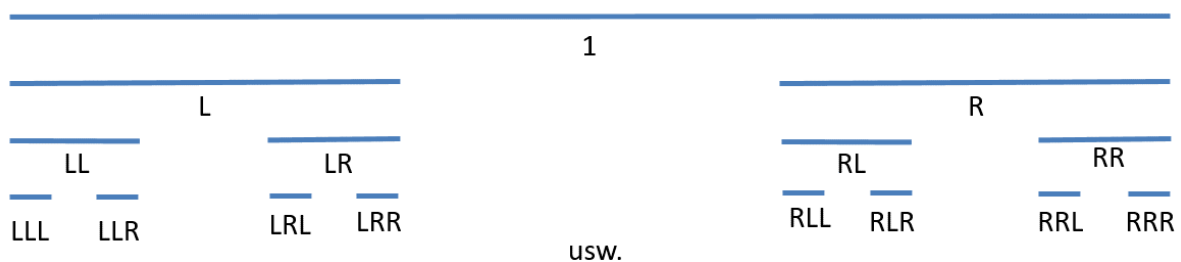


Abb. 8: Bildungsprinzip eines ungeeigneten Bezeichnungssystems für die Cantor-Menge

von $1/3$, korreliert. Es ist also eine triadische Sicht auf die Cantor-Menge möglich, bei der nur die Zahlen 0 und 2 vorkommen. Ist jeder Punkt der Menge Endpunkt, der durch immer kürzer werdenden Striche oder Intervalle? Diese Vermutung ist falsch! Man könnte die Punkte dann durchnummerieren, d.h. die

³⁰ Zum Beweis siehe z.B. https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/ex/serie6_lsg.pdf, S.4

Menge wäre „nur“ abzählbar unendlich. Wie kann man das plausibel zeigen? Man braucht ein Bezeichnungssystem für die Intervalle und untersucht die Grenzwertbildung.

Folgende Abb. 8 zeigt das Bildungsprinzip, L steht für links, R für rechts.

Es wird deutlich, dass je länger die Adresse wird, umso kleiner wird das Intervall im Iterationsprozess. Die Adresse ist aber immer noch endlich. Für einen Punkt müsste man eine unendlich lange Adresse haben. Irgendwann hat man aber nach einem L unendlich viele R oder umgekehrt: Z.B....LRRRRRRR... . Das muss man aber schreiben als $\dots L\bar{R}$ (gesprochen Links-Rechts-Periode). Man könnte nun, um zu einer binären Darstellung zu kommen, $L=0$ und $R=1$ setzen. Man betrachte nun den Punkt $1/3$. Er wird durch $L\bar{R}$ dargestellt, was der Binärzahl $0,0\bar{1}$ entspricht, die aber gleich $0,1$ ist. Aber zurück übersetzt hat $1/3=0,1$ die Adresse $R\bar{L}$ und das ist die Adresse des Punktes $2/3$.

Das ist ein Widerspruch. Unendliche Zwei-Buchstaben-Adressen können also nicht mit binären Zahlen gleichgesetzt werden. Nicht binäre Zahlen, sondern eine triadische (3-adische) Darstellung aus Nullen und Zweien charakterisiert die Cantor-Menge und sie lässt sich elegant mit Hilfe der 3-adischen Entwicklung reeller Zahlen darstellen. (Man kann aber auch leicht eine bijektive Zuordnung der Punkte über „0-1-Folgen“ finden). Damit ist eine bijektive Abbildung zwischen den Punkten der Cantor-Menge und dem Intervall $[0,1]$ möglich. Dies ist aber gleichmächtig zu $\mathbb{R}$. Die Cantor-Menge C ist somit nicht abzählbar, da C die Mächtigkeit von $\mathbb{R}$ hat ($|\mathbb{R}|=|C|$).³¹

Ist die Cantor-Menge selbstähnlich? Dies ist sehr leicht über eine Grafik zu verdeutlichen (s.u.):

Nimmt man z.B. ab der ersten Iteration zwei um einen Faktor $1/3$ verkleinerte Kopien und vereinigt diese, so erhält man wieder die ganze Cantor-Menge. Dies

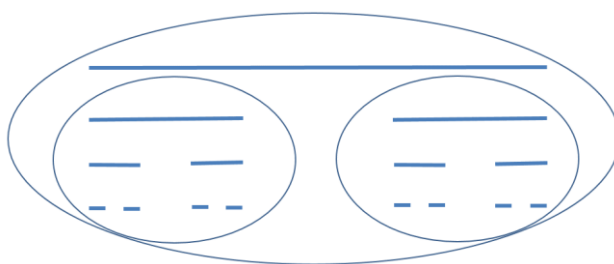


Abb. 9: Cantor-Menge als Vereinigung exakter, verkleinerter Kopien.

kann man leicht auf die N -te Iteration übertragen. Man erhält 2^N Kopien, die um den Faktor $\frac{1}{3^N}$ verkleinert sind und vereinigt diese Mengen. Ursprünglich wurde die Entdeckung von Georg Cantor als mathematisches Kuriosum ohne konkreten Wert und Anwendungsbezug

eingestuft. Die Cantor-Menge tauchte aber mit der Zeit an vielen, oft unerwarteten Stellen, auf. Im vorliegenden Beitrag ist z.B. erwähnt, dass ein Schnitt durch den Hénon-Attraktor isomorph zu der Cantor-Menge ist. Weiterhin

³¹ Vergleiche Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S. 92f

ist die Cantor-Menge eine Lebesgue Nullmenge (s.u.). Sie ist ein Diskontinuum, also total unzusammenhängend und nirgends dicht. Bekanntlich gilt: Jede nichtleere offene Menge U enthält ein Intervall positiver Länge.³² Die Cantor-Menge C ist aber abgeschlossen. Deshalb gilt diese Aussage nicht für C . Sie besteht nur aus Randpunkten, denn das Innere ist leer. In einem früheren Beitrag des Autors wurde auch verdeutlicht, dass die Cantor-Menge homöomorph zu den ganzen p -adischen Zahlen ist.³³

Konsequenzen aus der triadischen Darstellung der Cantor-Menge:³⁴

Man vergegenwärtige sich noch einmal das Bildungsprinzip der Cantor-Menge und denke in triadischen, also 3-adischen oder Ternärzahlen. Man starte wieder mit dem halboffenen Intervall $[0,1[$ und streiche bei der ersten Iteration das halboffene Intervall $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Es gilt aber $\frac{1}{3} = (0,1)_3$ und $\frac{2}{3} = (0,2)_3$

Daraus folgt, dass alle Zahlen des gestrichenen Intervalls mit 0,1 beginnen. In den nächsten Iterationen muss man die weiteren Stellen hinter dem Komma betrachten. O.B.d.A. siehe das offene Intervall $[0, \frac{1}{3}[$. Alle Zahlen in diesem Intervall beginnen mit einer 0 hinter dem Komma. Den Dezimalbrüchen $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ und $\frac{1}{3}$ entsprechen die Ternärzahlen $(0,01)_3, (0,02)_3$ und $(0,1)_3$. Für die verbleibenden Intervalle $[0, \frac{1}{9}[$ und $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}[$ gilt, dass sie in Ternärdarstellung an erster und zweiter Stelle nur die Ziffern 0 und 2, aber keine 1 haben.

Nach n Iterationen bzw. Streichungen ergibt sich:

- (a) Jede Zahl in den gestrichenen Abschnitten enthält irgendwo eine 1 in ihrer Ternärdarstellung.
- (b) Die nach n Iterationen verbliebenen Zahlen enthalten in den ersten n Stellen nur die Ziffern 0 und 2, aber keine 1.

Das gilt auch nach Grenzwertbildung für $n \rightarrow \infty$: Die gestrichenen Zahlen enthalten Einsen; die verbliebenen Zahlen, nennen wir sie Cantor-Zahlen, enthalten nur die Ziffern 0 und 2. Sie sind den Punkten des Cantor-Staubs bijektiv zugeordnet.

Aus diesen Überlegungen heraus lässt sich eine Vorstellung entwickeln, wie dicht (bzw. dünn) der Cantor-Staub verteilt ist. Es lässt sich nämlich zeigen, dass ein zufällig auf den Cantor-Staub abgeschossener Pfeil mit der Wahrscheinlichkeit 0 einen Punkt der Menge trifft. Oder anders formuliert,

³² d.h., es gibt $a < b$ mit $]a, b[\subseteq U$

³³ Kafitz, W., ZAHLEN-Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung des Zahlbegriffes, <http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-8380>

³⁴ Vergleiche Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 68 und 69

dass die Wahrscheinlichkeit 0 ist, dass eine willkürlich aus dem Intervall $[0,1[$ „erwischte“ Zahl M in Ternärdarstellung keine 1 enthält.

M habe m Stellen nach dem Komma, auf die die drei Ziffern 0,1,2 verteilt werden können. Das ergibt 3^m mögliche Fälle. Man sieht leicht

	0,00	0,10	0,20
Z.B. $m=2$:	0,01	0,11	0,21
	0,02	0,12	0,22

Die Anzahl der auftretenden Fälle ohne die Ziffer 1 beträgt 2^m , nämlich bei

$m=2$:	0,00	0,20
	0,02	0,22

Die relative Häufigkeit für das Treffen einer Cantor-Zahl ist somit $\left(\frac{2}{3}\right)^m$ und nach Grenzwertbildung

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^m = 0$$

Die Dimension der 3-adischen Cantor-Menge (C_3) ist, wie gesehen,

$$D_{H(C_3)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \ln_3(2) \approx 0,6309 \dots$$

Wir wollen jetzt zur 5-adischen Menge übergehen.³⁵ Nennen wir sie C_5 . Dabei wird das halboffene Einheitsintervall in fünf Teile zerlegt und jeweils die beiden mittleren, halboffenen Teile gestrichen. Übrig bleiben nun drei halboffene Strecken, mit denen iterativ analog zur Cantor-Menge C_3 vorgegangen wird.

Da wegen $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$ ist und diese Ungleichung auch bei fortgesetzter Iteration und damit Streichungen offenbar gültig bleibt, scheint also der C_5 -Cantor-Staub „dünner“ verteilt zu sein als der C_3 -Cantor-Staub. Wie ist nun die Hausdorff-Dimension von C_5 ?

$$D_{H(C_5)} = \frac{\ln 3}{\ln 5} = 0,6826 \dots$$

Man sieht, der „Staub“ wird zwar „dünner“, aber die Dimension wächst. Bei allen C_n , n ungerade, wird sich die Situation entsprechend entwickeln.

Wie sieht es bei geradem n aus? Bei $n=2$ ist der Fall trivial, denn nimmt man nur jeweils das rechte, halboffene Intervall weg, so bleibt im Grenzfall nur die 0 als einziger Punkt übrig.

³⁵ Vergleiche teilweise wörtlich Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 73 und 74

Für $n=4$ streicht man exemplarisch das rechte, halboffene Intervall, sowie die Mitte des Restes. Es bleibt $[0, \frac{1}{4}[\cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ übrig. Man geht nun zu den 4-adischen Zahlen über mit $\frac{1}{4} = (0,1)_4, \frac{1}{2} = (0,2)_4, \frac{3}{4} = (0,3)_4$

Die 2. Iteration kann man sich am Intervall $[(0,0);(0,1)_4[$ verdeutlichen. Es werden die Intervalle $[0,01;0,02[$ und $[0,03;0,1[$ gestrichen. Es sind Zahlen, die in der 4-adischen Darstellung eine 1 oder 3 hinter dem Komma haben.

Führt man iterativ nach dieser Methode fort, so sieht man, dass immer Zahlen übrigbleiben, die nach der n -ten Iteration nur die Ziffern 0 und 2 enthalten und das gilt auch für die Grenzwertbildung. Der Streckungsfaktor k ist gleich n . Die Zahl der Teilmengen von C_n ist jeweils $\frac{n}{2}$.

Die Selbstähnlichkeitsdimension $d = \frac{\ln \frac{n}{2}}{\ln n}$ für $n=2$ ist 0.

Für $n=4$ folgt: $d = \frac{\ln 2}{2 \ln 2} = \frac{1}{2}$

Für $n=2^n$ folgt: $d = \frac{\ln 2^{n-1}}{\ln 2^n} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. Grenzwertbildung $n \rightarrow \infty \Rightarrow d = 1$

Für ungerades n folgt die gleiche Argumentation. C_∞ hat also Liniencharakter.

Peano-, Gosper- und Hilbert-Kurve

Im nächsten Beispiel sollen zwei Kurven diskutiert werden, die zu einer flächendeckenden Punktmenge konvergieren. Sie sind wie die Cantor-Menge

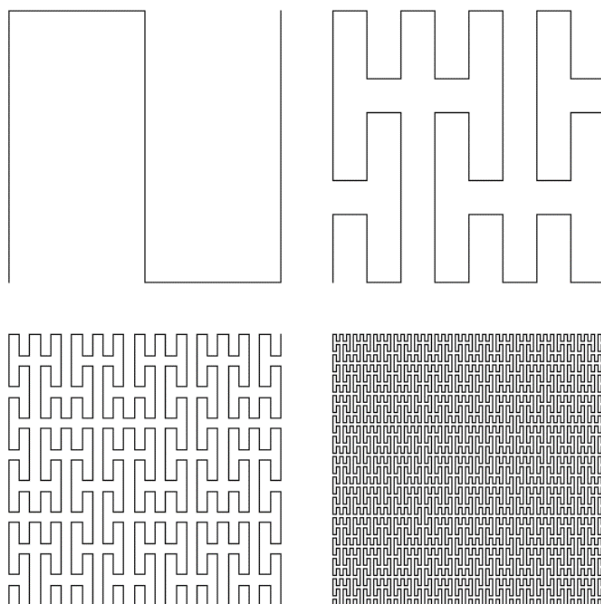


Abb. 10: Peano-Kurve. Abgebildet sind die vier ersten Iterationsschritte.

iterativ definiert. Die erste wurde von Giuseppe Peano 1890 entdeckt und publiziert. Mathematisch ist die Kurve eine stetige, surjektive Abbildung des Einheitsintervalls in das Einheitsquadrat, also eine raumfüllende Kurve.³⁶ Man erinnere sich: Cantor hatte damit 1878 bewiesen, dass die Kardinalität (Anzahl der Elemente, Mächtigkeit) von $[0,1]$ gleich der Kardinalität von $[0,1]^2$, oder Räume höherer Dimension, ist. Wichtig ist hier die Surjektivität der Abbildung f . Es gibt zu jedem

³⁶ Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano

Punkt des Einheitsquadrates einen Punkt des Einheitsintervalls, der auf $z=f(x)$ abgebildet wird. Die Abbildung ist also kein Homöomorphismus, ist nicht stetig und kann damit ad hoc keine raumfüllende Kurve liefern. Über Zwischenschritte durch Betrachtungen zur Differenzierbarkeit kann man aber beweisen, dass die Peano-Kurve stetig ist.³⁷ Obwohl die Dimension nach unendlich vielen Iterationen die ganzzahlige Dimension 2 ergibt, muss die Peano-Kurve zu den Fraktalen gezählt werden. Sie ist punktsymmetrisch und ebenso wie die Cantor-Menge eine Menge von Punkten, aber gegenüber der euklidischen Dimension einer nulldimensionalen Punktmenge ist die Hausdorff-Dimension $D_H = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$ sogar die einer Fläche.³⁸

Inspiziert von Peanos Publikation hat im gleichen Jahr David Hilbert, einer der

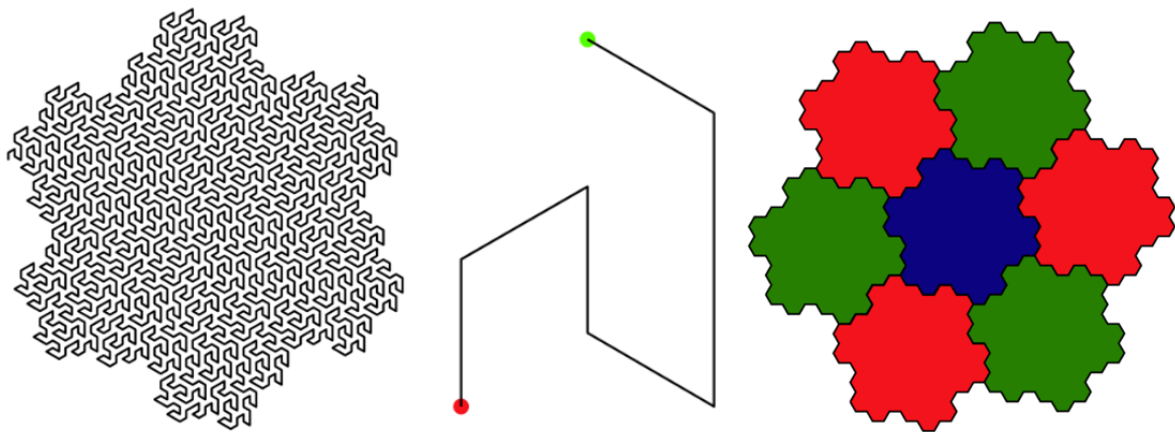


Abb. 11: a) Gosper-Kurve in der 4. Iterationsstufe,
b) Bildungsprinzip: Gerade Linie zwischen rotem und grünen Punkt wird durch Kurve der Stufe 1 ersetzt (Winkel 60° oder 120°)
c) Selbstähnliche Gosper-Inseln, Parkettierung der Ebene
d) Fraktale Dimension $D = \frac{2 \cdot \ln 3}{\ln 7} = 1,12915 \dots$

führenden Mathematiker jener Zeit, ebenfalls eine Konstruktionsvorschrift in einer nur zweiseitigen Publikation veröffentlicht. Im Gegensatz zu Peano handelt es sich aber um eine spiegelsymmetrische raum-füllende Kurve. Eigentlich präsentierte Hilbert das Ergebnis „*erstmals am 18. September 1890 während der vierten Abteilungssitzung für Mathematik und Astronomie auf der*

³⁷ 1879 bewies der deutsche Mathematiker Eugen Netto, dass die bijektive Abbildung des Einheitsintervalls auf das Einheitsquadrat von Georg Cantor nicht stetig sein konnte.

³⁸ Siehe auch https://de.wikiversity.org/wiki/Topologie/Stetige_Abbildungen/Peano-Kurve/Beispiel

63. Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte in Bremen.³⁹

Erst die Bitte von Felix Klein, der damals die mathematischen Annalen herausgab, führte zur Veröffentlichung für eine breite Leserschaft.

Auch die Hilbert-Kurve ist stetig, unterscheidet sich aber in den mathematischen Eigenschaften von der Peano-Kurve. Beides sind sogenannte FASS-Kurven („space-filling, self-avoiding, simple and self-similar). Ein weiteres bekanntes FASS-Beispiel ist die Gosper-Kurve.^{40,41,42} Peano- und Hilbert-Kurven sind auf höhere Dimensionen verallgemeinerbar. Hilbert hat aber insbesondere das Grundsätzliche an diesen raumfüllenden Kurven betont. Entsprechend trägt Hilberts Publikation den Titel „Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück.“⁴³

Fachliteratur zu diesem Kapitel siehe auch⁴⁴.

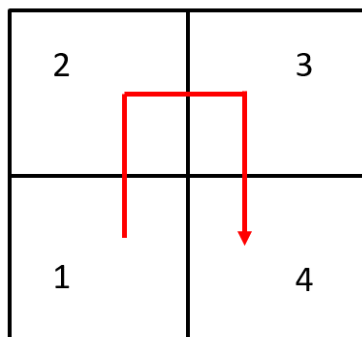


Abb. 12: Generator der Hilbert-Kurve.

Hilbert hat rein geometrisch argumentiert und ist über den Generator der Kurve vorgegangen.

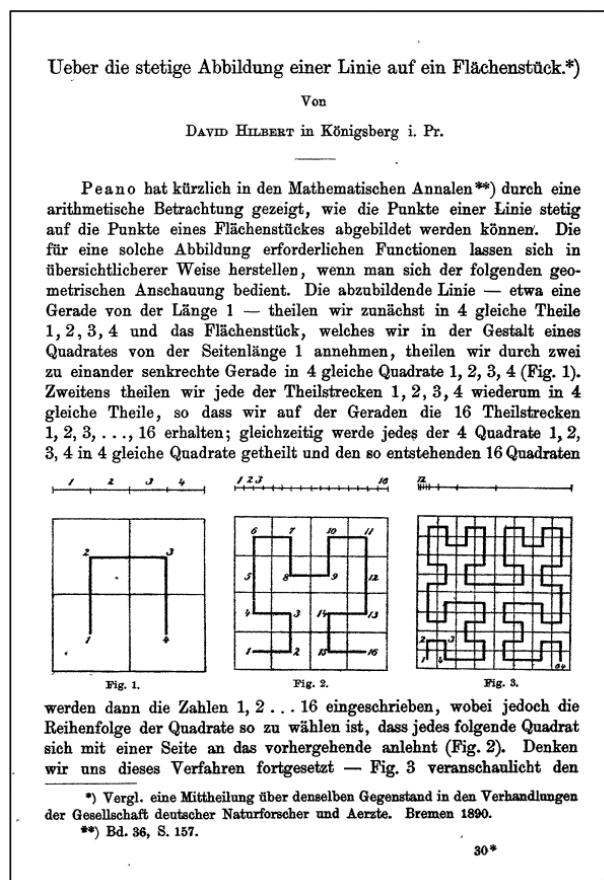


Abb. 13: Hilberts Originalpublikation aus dem Jahr 1890 (Seite 1 von 2).

³⁹ <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/sagan2.pdf>

⁴⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Gosper-Kurve>

⁴¹ Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, Basel, Boston, Birkhäuser 1987, Tafeln 83, 83, S. 82-83

⁴² <https://mathcurve.com/fractals/gosper/gosper.shtml>

⁴³ <https://terpconnect.umd.edu/~jmr/HonorsSem/Hilbert-orig.pdf>

⁴⁴ Für dieses Kapitel siehe auch ein Vorlesungsskript zu raumfüllenden Kurven <https://web.archive.org/web/20050317185150/http://www5.in.tum.de/lehre/vorlesungen/algowiss/ss04/vorlesung/rfk.pdf>

Ausgangspunkt ist ein Punkt im Intervall $I=[0,1]$ und das Quadrat $Q=[0,1]^2$. Zu jedem Punkt aus I gehört eine Intervallschachtelung, jedes Intervall entsteht dabei durch Viertelung des Vorhergehenden. Jedes Intervall kann man einer 2D-Intervallschachtelung zuordnen. Man muss dabei Nachbarschaftsrelationen und Teilmengenrelationen geschickt berücksichtigen, also z.B. Teilintervalle über Kanten jeweils benachbarter Teilquadrate zuordnen. So konvergiert im Grenzfall die Hilbert-Kurve zu einer Punktmenge, die im Einheitsquadrat dicht ist und über diese Konstruktion ist die „Kurve“ auch stetig.

Hilbert schreibt übrigens auf Seite 2 lapidar: *Die oben gefundenen abbildenden Functionen sind zugleich einfache Beispiele für überall stetige und nirgends differenzierbare Functionen.*

Ein Beweis dieser Aussage wurde aber offenbar erst 100 Jahre später, also 1991, von Hans Sagan veröffentlicht.⁴⁵

Auch dies ist nicht nur ein mathematisches Kuriosum. In der belebten Natur gibt es zahlreiche Beispiele, in denen lineare Systeme raumfüllende Strukturen bilden. Eingangs wurden bereits Blutgefäße, Bronchien, Nierenfunktion, Tracheen der Insekten oder Xylem und Ploem bei Stengelpflanzen und Bäumen erwähnt. Die Herausbildung entsprechender Strukturen ist geradezu eine Voraussetzung für das hochentwickelte Leben.

Dreiecksfraktal

Das Fraktal beginnt mit einem gleichseitigen Dreieck als Initiator. An jeder Ecke wird wieder ein verkleinertes gleichseitiges Dreieck Spitze an Spitze angehängt. Dieser Vorgang wird ad infinitum iteriert. Der Verkleinerungsfaktor oder Teilungsfaktor f zwischen der Seite des größeren Dreiecks und der Seite des kleineren Dreiecks soll dem Goldenen Schnitt Φ entsprechen.⁴⁶ Das Initiator-Dreieck habe die Seitenlänge 1. Die folgenden Dreiecke haben dann die Seitenlänge $f, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6 \dots$ usw.

Gemäß der Definition des Goldenen Schnitts ist dann

$$\frac{1}{f} = \frac{1+f}{1} = \Phi$$

und somit

$$f = 1 - \Phi = \frac{1}{\Phi} \\ \approx 0,618033987 \dots$$

⁴⁵ Original: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/sagan2.pdf>

⁴⁶ Roger Herz-Fischler: *A mathematical History of the Golden Ratio*. Dover Publications, Minneola (New York) 1998, S. 158, zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt#Dreiecksfraktal

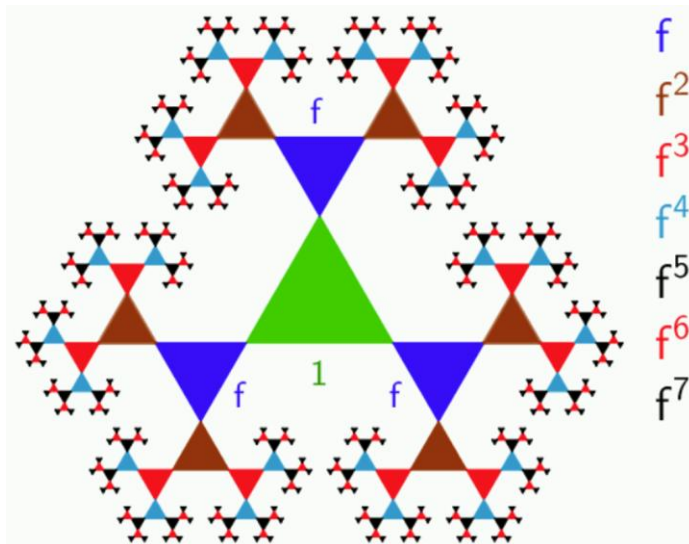


Abb. 14: Das Dreiecksfraktal nach sieben Iterationen

Interessant ist noch der Abstand, bei dem sich die entgegenkommenden Äste im Grenzfall berühren. Beutelspacher und Petri⁴⁷ ermittelten ihn über die kubische Gleichung

$$f^3 + 2f^2 - 1 = 0.$$

Deren einzige positive Lösung ist $f = \frac{1}{\phi}$.

Dieser Verkleinerungsfaktor ist also auch der Wert des optimalen Abstands, bei dem sich im Grenzfall die „Äste“ des Fraktals berühren und

nicht überlappen.⁴⁸

Cesàro-Kurven und verallgemeinerte Koch-Kurve

In keiner populärwissenschaftlichen Arbeit über Fraktale darf die Koch-Kurve oder Kochsche Schneeflocke fehlen. Sie wurde 1904 von dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch vorgestellt, sofort zu den „Monsterkurven“ gezählt, aber durchaus schnell mathematisch untersucht. Sie ist überall stetig und nirgends differenzierbar. Die Fläche, die sie umschließt ist endlich, aber die Länge der Kurve divergiert. Der Initiator ist ein gleichseitiges Dreieck. In den weiteren Stufen kommen ebenfalls nur die Winkel 60° und 240° (zur Basislinie) vor. Die Hausdorff-Dimension ($\theta = 60^\circ$ oder $\pi/3$) beträgt $D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,262 \dots$.

Weniger bekannt sind die bereits 1905 beschriebenen Verallgemeinerungen dieses Bildungsprinzips, die als Cesàro-Kurven bezeichnet werden (nach dem italienischen Mathematiker Ernesto Cesàro). Bei diesen Kurven kann der Winkel

⁴⁷ Albrecht Beutelspacher, Bernhard Petri: Der Goldene Schnitt. Spektrum, Heidelberg/Berlin/Oxford 1996, S. 74f

⁴⁸ Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt#Dreiecksfraktal

θ variieren. Eine gute Beschreibung findet man in⁴⁹. Entsprechend schwieriger ist die Bestimmung der fraktalen Dimension in Abhängigkeit von θ :

$$D_{\text{Cesàro}}(\theta) = \frac{\log 4}{\log(2(1 + \cos \theta))}$$

Für den Fall $\theta = \frac{5\pi}{18}$ wird $D \approx 1,165$. Für die Grenzfälle $\theta = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich $D=1$ (eindimensional) bzw. $D=2$ (zweidimensional). Mit wachsendem θ variiert die Dimension also zwischen Linie und Fläche.

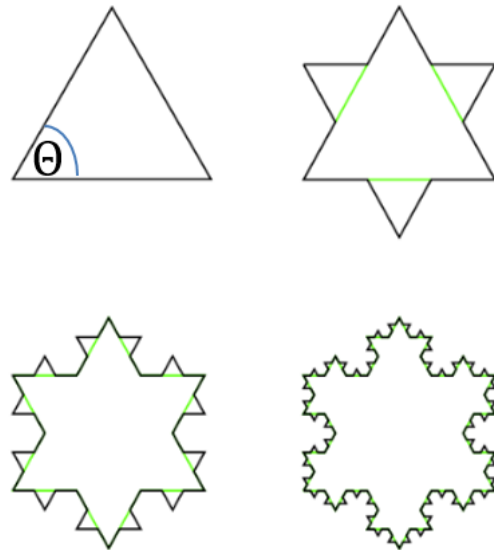


Abb. 15: Die ersten 4 Iterationen der Koch-Schneeflocke, $\theta=60^\circ$.

Viele planare (2D-)Fraktale lassen sich auf 3D verallgemeinern. Diese sind mit deutlich höherem Aufwand, aber trotzdem oft mit elementarer Mathematik berechenbar. Problem kann die auch mehrfache Flächendurchdringung sein, die die räumliche Vorstellungskraft stören kann. Vollkommen unanschaulich sind schnell noch höhere Dimensionen. Hier hilft nur die reine Mathematik.

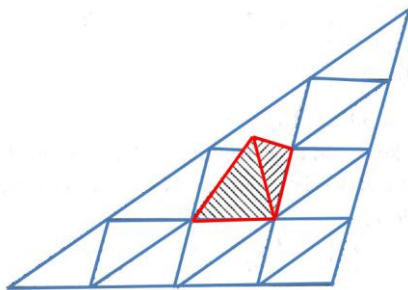


Abb. 16: Bildungsprinzip für eine dreidimensionale Kochfläche

Interessant sind die Koch-Flächen.⁵⁰ Es soll zunächst der Übergang von der planaren Form als Initiator in die dritte Dimension als Generator an einem gleichseitigen Dreieck demonstriert werden, das wiederum durch 16 gleichseitige Dreiecke gepflastert wird. Ein mittleres Dreieck D wird entfernt und stattdessen ein dreiseitiger Tetraeder als Generator eingesetzt. Die Fläche erhöht sich mit der Anzahl N an Dreiecken zu

$$N = 15 + 3 = 18$$

Die Dimension d erhöht sich auf $d = \frac{\ln 18}{\ln 4} = 2,0849 \dots$

⁴⁹ <https://quadsoft.org/fraktale/#x1-240003.3>

⁵⁰ Vergleiche teilweise wörtlich Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 99-102

Ein besonders schönes Beispiel ist die Koch-Schneeflocke als 3D-Fraktal. Allgemein gilt der Satz, dass sich zu jeder gegebenen rationalen Zahl d mit $2 \leq d \leq 3$ eine räumliche Koch-Fläche finden lässt, die eine entsprechende Dimension hat. Man beachte aber dabei die Selbstdurchdringungen, die als Fläche mitgezählt werden.

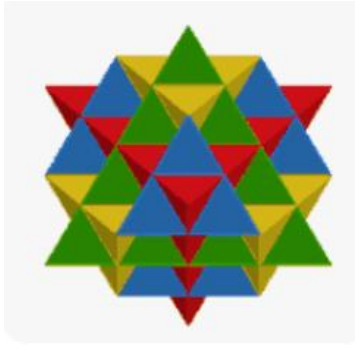


Abb. 17: räumlicher Koch-Stern.

Startfigur für den dreidimensionalen Koch-Stern oder Koch-Schneeflocke ist ein reguläres Tetraeder, o.B.d.A. mit der Kantenlänge $s=1$. Ziel ist, abhängig von der Iterationsstufe, die Bestimmung der Oberflächen O_i , die Anzahl der kongruenten Teilflächen N_i und die von den Oberflächen eingeschlossenen Volumina V_i .

Stufe 0:

Die Dreieckshöhe h ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$, die Fläche $F = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}$. $O_0 = 4 \cdot F = \sqrt{3}$. $N_0=4$.

Stufe 1: $O_1 = O_0 - \frac{1}{4}O_0 + \frac{3}{4}O_0 = \frac{3}{2}O_0$, $N_1 = 6 \cdot N_0 = 24$, $V_1 = V_0 + N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V_0 = V_0 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V_0 = \frac{3}{2}V_0$

Stufe 2: $O_2 = O_1 - \frac{1}{4}O_1 + \frac{3}{4}O_1 = \frac{3}{2}O_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \sqrt{3}$, $N_2 = 6 \cdot N_1 = 6^2 \cdot N_0 = 6^2 \cdot 4$
 $V_2 = V_1 \cdot N_1 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2 \cdot V_0 = V_0 + 4 \cdot V_0 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2\right)$

Durch Induktion folgt für die Iterationsstufe n :

$$O_n = \frac{3}{2} \cdot O_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \sqrt{3}, N_n = 6^n \cdot 4, V_n = V_0 + \frac{2}{3}V_0 \left(-1 + \sum_{i=0}^n \left(6 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^i\right)\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(V_0 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right) \right) = 3 \cdot V_0 = \frac{1}{4}\sqrt{2}$$

Das ist genau das Volumen des umschriebenen Würfels mit der Seitenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}$, denn $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2\sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Die Oberfläche geht dagegen gegen Unendlich.

Weitere Methoden um Fraktale zu generieren sind z.B. Iterierte Funktionen Systeme (IFS)⁵¹ oder das Lindenmayer-System.⁵²

⁵¹ Siehe z.B. https://en.wikipedia.org/wiki/Iterated_function_system

⁵² Siehe z.B. <https://de.wikipedia.org/wiki/Lindenmayer-System>, Przemysław Prusinkiewicz, Aristid Lindenmayer: The Algorithmic Beauty of Plants. Springer Verlag,

Sierpinski-Dreieck (englisch Gasket oder Triangle)

Als weiteres von vielen möglichen Beispielen für Fraktale soll das Sierpinski-Dreieck dienen. Es ist nach dem bedeutenden polnischen Mathematiker Waclaw Sierpinski benannt. Es existiert neben dem Dreieck ein analoges viereckiges Fraktal, als Sierpinski-Teppich bekannt. Auch entsprechende Strukturen im Dreidimensionalen gibt es (Sierpinski Tetraeder).

Der Fokus in diesem Abschnitt soll weniger auf den mathematischen Eigenschaften liegen, sondern in der Tatsache, dass die Struktur des Sierpinski-Dreiecks sich in einer Reihe von anderen Konstruktionsprinzipien widerspiegelt, an die man im ersten Moment nicht denken würde. Die erste Grafik soll zunächst das klassische Bildungsprinzip verdeutlichen.



Abb. 18: Die ersten Iterationen beim Sierpinski Dreieck

Das erste gleichseitige Dreieck wird Initiator genannt, die zweite Figur entsteht, in dem die Mittelpunkte der Seiten wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden und diese Fläche entfernt wird. Dieses Bildungsprinzip heißt Generator und wird auf alle kleineren (schwarzen) Dreiecke angewendet. Ad infinitum entstehen nicht-abzählbar unendlich viele Punkte, die von dem Initiator-Dreieck überdeckt werden.

Die Rechnung, wieviel Fläche im Laufe der Iterationen entfällt, lässt sich analog zur Cantor-Menge erschließen. Das Initiator-Dreieck I_0 habe die Seitenlänge 1.

Es hat dann die Fläche $I_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} 1^2$. Jeder Iterationsschritt reduziert die Fläche um

$\frac{1}{4}$, der k-te Iterationsschritt führt zu einem Flächeninhalt $I_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\sqrt{3}}{4}$ mit 3^k

Teildreiecken der Seitenlänge $\frac{1}{2^k}$. Grenzwertbildung führt zu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

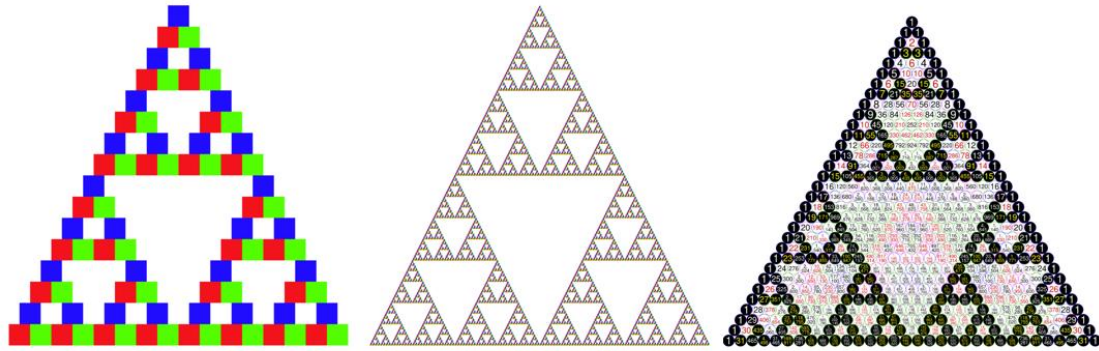


Abb. 19: Rechts Farbkodierung der geraden und ungeraden Einträge im Pascalschen Dreieck mit bis zu Level 32.

Wie durch die Rechnung bei der Cantor-Menge erwartet, bleibt keine Fläche größer Null nach unendlich vielen Iterationsschritten und es entsteht eine überabzählbar unendlich große Punktmenge.

Wieder im Vorgriff auf den nächsten Abschnitt beträgt die Hausdorff-Dimension

$$D = \frac{\ln(\text{Anzahl selbstähnlicher Kopien})}{\ln(\text{Verkleinerungsfaktor})}$$

für unendlich viele Iterationsschritte:

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5850 \dots$$

Sie liegt, wie erwartet, unterhalb der euklidischen Dimension einer Fläche. Nach Diskussion der Basiskonstruktion sollen nun Fälle betrachtet werden, in denen die Struktur des Sierpinski-Dreiecks klar erkennbar ist. Die Abb. 19 rechts bezieht sich auf das bekannte Pascalsche Dreieck, in dem die Binomialkoeffizienten von binomischen Formeln $(a + b)^k$ für beliebiges natürliches k enthalten

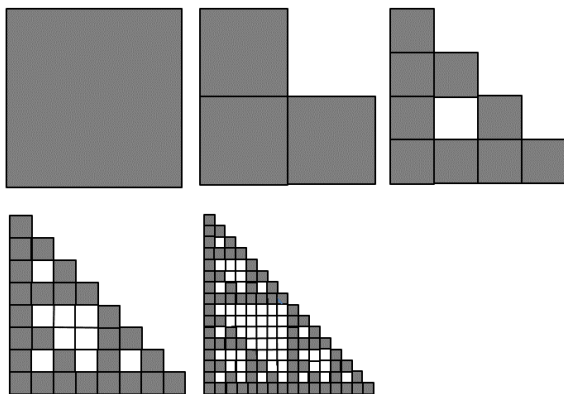


Abb. 20: Iterative Verarbeitung eines Quadrats

sind (analog $(a - b)^k$). Die Binomialkoeffizienten haben grundlegende Bedeutung in der Kombinatorik. Der Name geht zwar auf Blaise Pascal zurück, die Form ist aber in einer Reihe von mathematischen Kulturen entdeckt worden. In China spricht man vom Yang-Hui-Dreieck (nach Yang Hui), in Italien vom Tartaglia-Dreieck (nach Nicolo Tartaglia) und im Iran vom Chayyām-Dreieck (nach Omar Chayyām).

Eine weitere verblüffende Anwendung ist das sogenannte Chaos-Spiel.

Folgende Regeln gelten für das Chaos-Spiel:

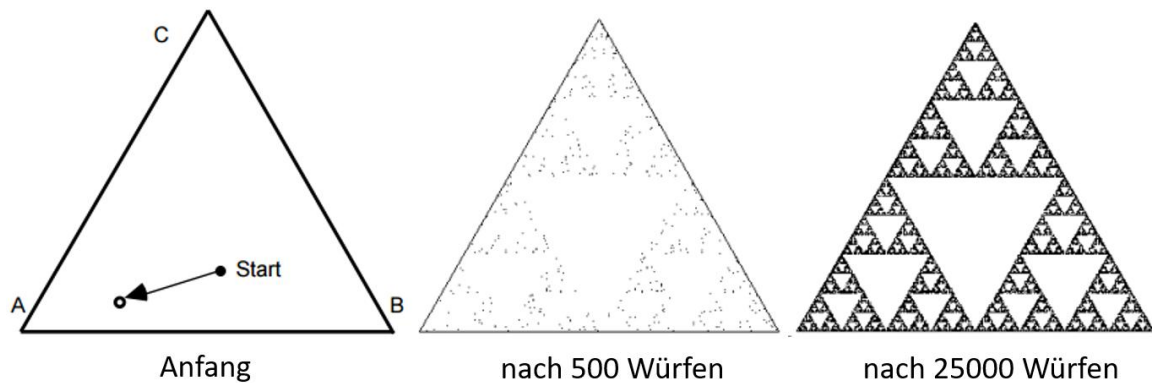


Abb. 21: Entwicklung beim „Chaos-Spiel“

- 1) Markiere einen beliebigen Startpunkt im gleichseitigen Dreieck ABC
- 2) Würfle und gehe von diesem Punkt aus um die Hälfte der Strecke in Richtung
 - A, wenn der Würfel 1 oder 2 zeigt
 - B, bei 3 oder 4 Augen
 - C, bei 5 oder 6 Augen
- 3) Wiederhole mit dem so erhaltenen neuen Punkt Schritt 2)

Selbst in der Natur tauchte die Form des Sierpinski-Dreiecks auf. Ein komplexes Biomolekül bildet diese fraktale Struktur aus. Ein Forschungsteam der Universität Marburg entdeckte es durch Aufnahmen mit einem Elektronenmikroskop und veröffentlichte die Entdeckung in einem nature-Artikel.^{53, 54} Anstatt eines Dreiecks, kann auch eine analoge, quadratische Form durch den DNA-Code des Enzyms Amylase erzeugt werden.⁵⁵

⁵³ <https://www.derstandard.de/story/3000000215497/mysterioeses-biomolekuel-bildet-spontan-fraktale>

⁵⁴ <https://www.nature.com/articles/s41586-024-07287-2>

⁵⁵ David Peak, Michael Frame, Komplexität – das gezähmte Chaos, S. 38-39

Durch Iteration⁵⁶ lassen sich im Prinzip beliebige geometrische Objekte selbstähnlich verkleinern. Man erkennt nach einigen Schritten die charakteristische Form des Sierpinski-Dreiecks, hier als rechtwinkliges Dreieck.

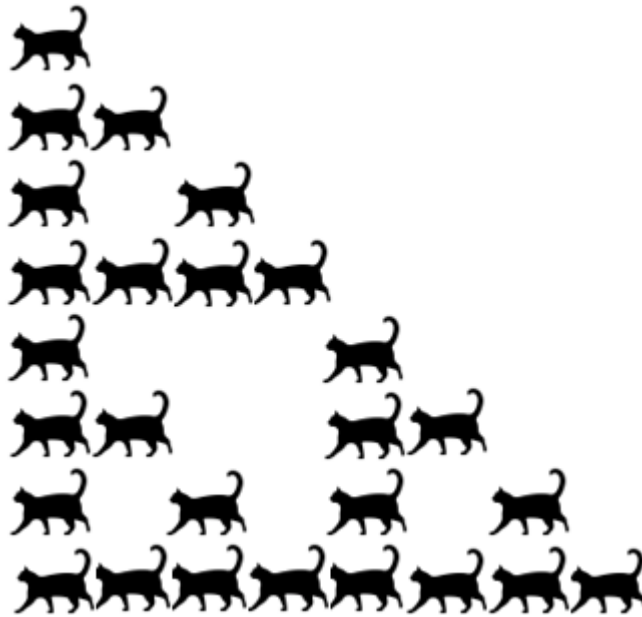


Abb. 22: Durch Grenzwertbildung konvergiert jede Form zu einer Punktmenge

Durch die Grenzwertbildung wird die ursprüngliche Ausgangsform unerheblich. Sie konvergiert nach Grenzwertbildung zu einer Punktmenge. Die Abb. 20 demonstriert dies zunächst an einem Quadrat als Initiator und Abb. 22 dann an einer beliebigen Form.

Ein Beispiel aus der digitalen Welt hat Peitgen, Jürgens und Saupe als das „Kürzeste mögliche Programm für ein schiefes Sierpinski-Dreieck“ bezeichnet.⁵⁷

Die zentrale Anweisung steckt in dem BASIC-Befehl

```
IF (x AND y) = 0 THEN PSET (x+30, y+30)
```

Dabei geht es um die bitweise logische AND-Operation.

Dadurch ist z.B. 101 AND 010 Null, aber 101 AND 110 ist Eins. Es ist dadurch möglich zu prüfen, ob in der binären Addition von x und y Überträge auftreten. Die Grafik zeigt bzgl. dieser Addition die farblich markierten „Testergebnisse“ digitaler Adressen.

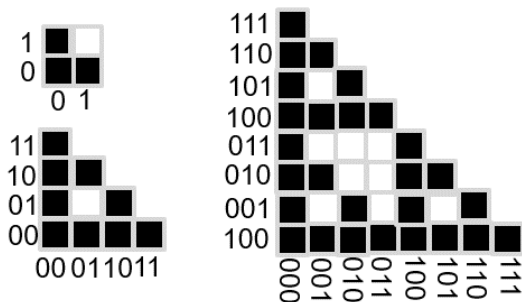


Abb. 23: Test von digitalen Adressen auf bitweise binäre Addition

⁵⁶ Eine Form der Iteration ist die fortgesetzte Potenzierung, ${}^na = a^{a^{\dots a}}$. Sie wird Tetration genannt. Tetration komplexer Zahlen erzeugen ebenfalls filigrane Fraktale (siehe <https://en.wikipedia.org/wiki/Tetration>). Fortgesetzte Tetration heißt Pentation

⁵⁷ Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Bausteine der Ordnung Fraktale, Springer Verlag / Klett Cotta, 1992, S. 158
Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S. 597

Zur Gruppentheorie der Fraktale – eine Skizze

Das folgende Kapitel folgt in sehr groben Zügen dem Lehrbuch von Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens und Dietmar Saupe; Bausteine der Ordnung Fraktale, Kapitel 5, S. 275 - ca. 340. Einzelne Abbildungen wurden als Idee übernommen

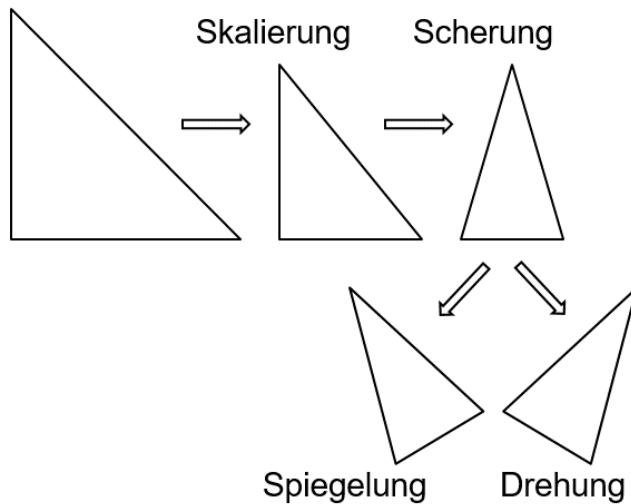


Abb. 24: Elementare Transformationen der Ebene

und selbst erstellt. Ziel ist es dabei lediglich, dem Leser einen groben Überblick zu verschaffen, mit welchen Mitteln man die riesige Vielfalt an fraktalen Strukturen systematisieren und ihre grob skizzierte, möglichst anschauliche Mathematik erahnen kann. Und auch darin wird im Wesentlichen nur eine kleine Untermenge betrachtet, nämlich „Stilmittel“, die symmetrische, planare Formen begünstigen („symmetrische Attraktoren“). Das iterative Verfahren (genannt Integriertes Funktionen System = IFS) führt in Abb. 18-23 unabhängig vom Anfangsbild zur gleichen Struktur. Das Sierpinski-Dreieck stellt sich also als universeller symmetrischer Attraktor heraus. Dabei ist das Verfahren aus elementaren Transformationen zusammengesetzt. Diese können (selbst)ähnlich oder nur (selbst)affin wirken.

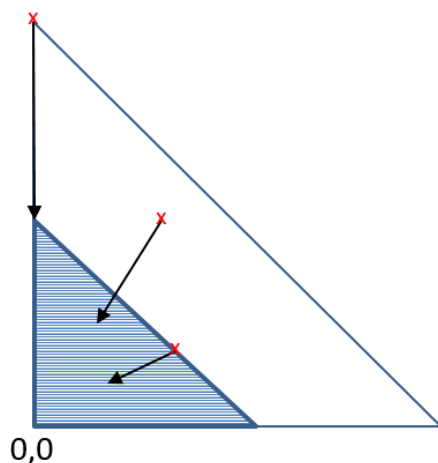


Abb. 25: Kontraktion um einen Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$.

Das Sierpinski-Dreieck kann durch drei affin-lineare Transformationen der Ebene mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$ beschrieben werden - allerdings nicht ganz. Es gibt immerhin zwei Varianten als gleichseitiges und rechtwinkliges Dreieck.

Erzeugen diese Transformationen immer ein Sierpinski-Dreieck? Um diese Frage zu beantworten, ist etwas Gruppentheorie erforderlich.

Abb. 24 verdeutlicht zunächst die elementaren Transformationen. Es fehlt, neben dem Ähnlichkeitsfaktor pro Transformation, noch die maßstabsgerechte Translation (Verschiebung) in den entsprechenden Raumrichtungen.

Eine Kontraktion mit Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$ bedeutet, dass jeder Punkt des ursprünglichen Initiators um die Hälfte in Richtung Nullpunkt verschoben wird.

Ein Sierpinski-Dreieck wird durch drei Transformationen erzeugt. Sie entsprechen Skalierung, sowie Skalierung und Verschieben in x-Richtung bzw. in y-Richtung.

Betrachten wir nun die Skalierung, die in den überwiegenden Fällen bei Fraktalen den Charakter von Kontraktionen haben.

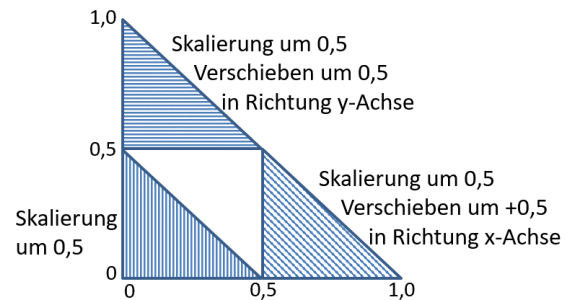


Abb. 26: Anwenden der drei Transformationen, Skalierung (um $\frac{1}{2}$), Translation in Richtung der Achsen.

Es hat sich bewährt, wie schon Abb. 20 und Abb. 23 deutlich gemacht haben, dass prinzipielle Symmetrioperationen an Quadraten verdeutlicht werden.

Bei entsprechender Wahl der Transformationen können Quadrate die gewünschte

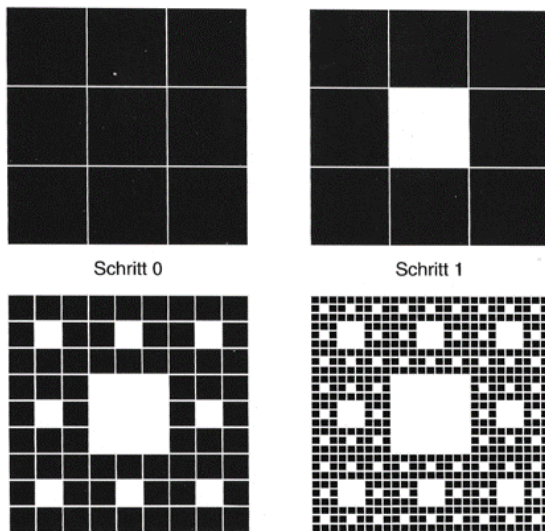


Abb. 27: Iterative Verarbeitung eines Quadrates zum Sierpinski-Teppich

Zielfigur erzeugen. Abb. 27 zeigt den bisher noch nicht angesprochenen Sierpinski-Teppich.

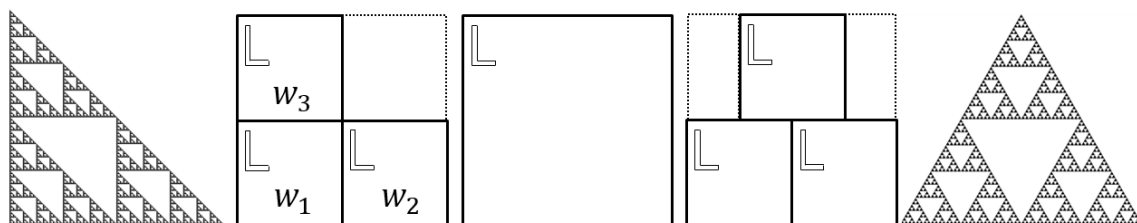


Abb. 28: Die beiden Sierpinski-Dreiecke können durch ein IFS mit drei Ähnlichkeitstransformationen mit Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$ erzeugt werden. Sie stellen den prinzipiellen Bauplan einer ganzen Familie dar. Symmetrioperationen an den drei Quadraten werden w_1 , w_2 und w_3 genannt.

Abb. 28 zeigt das Bauprinzip der beiden Varianten eines Sierpinski-Dreiecks aus Sicht von Symmetrioperationen eines Quadrats. Es wird gemäß Abb. 26

aus drei Transformationen erzeugt, die ein Anfangsquadrat verkleinern und entsprechend positionieren. Man sieht am eingebetteten „L“ in den Teilquadraten, dass diese nicht gedreht oder gespiegelt wurden.

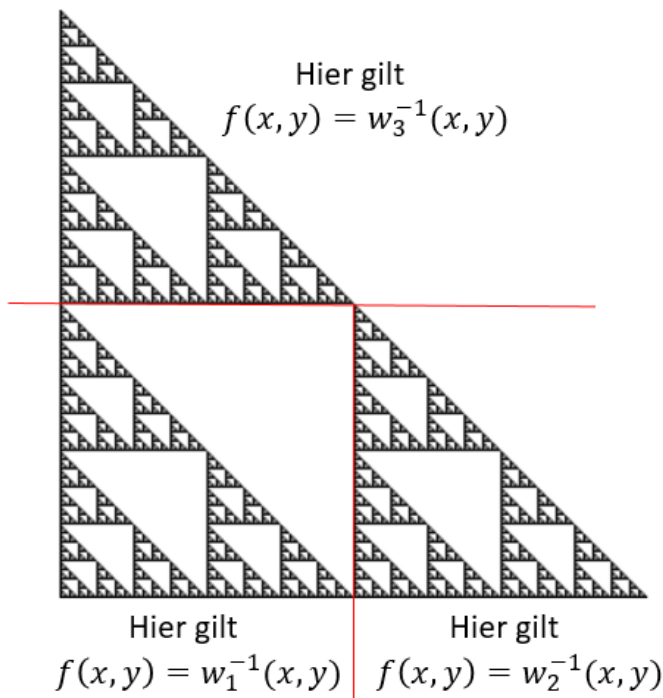


Abb. 29: Das dynamische System $\{\mathbb{R}^2; f\}$

Gegenüber diesem einfachen IFS ohne Drehungen und Spiegelungen in Abb. 28 stehen prinzipiell noch mehr Varianten zur Verfügung. Richtschnur ist dabei der Bauplan, ausgehend von einem Quadrat und seinen symmetrischen Eigenschaften. Doch zunächst soll die Wirkungsweise von w_1, w_2, w_3 beispielhaft mathematisch exakt beschrieben werden. Auch wenn der Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$ ist, so bleibt nach beliebig vielen Iterationen die Fläche des Dreiecks gleich. Die Transformationen w_1, w_2, w_3 müssen deshalb expansiven Charakter haben. Der nächste

Abschnitt zeigt das zugrundeliegende dynamische System.

Man betrachte das dynamische System $\{\mathbb{R}^2; f\}$, wobei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch folgende Abbildung definiert ist:⁵⁸

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, 2y - 1), & \text{wenn } y \geq 0,5 \\ (2x - 1, 2y), & \text{wenn } x \geq 0,5 \text{ und } y < 0,5 \\ (2x, 2y), & \text{anderenfalls} \end{cases}$$

Es erinnert an die Zeltabbildung im x,y-Koordinatensystem (siehe S. 72f).

Man kann folgendes IFS daraus ableiten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2; \quad w_1(x, y) = (0,5x, 0,5y + 0,5), \\ \quad \quad w_2(x, y) = (0,5x + 0,5, 0,5y), \\ \quad \quad w_3(x, y) = (0,5x, 0,5y) \end{array} \right\}$$

⁵⁸ Vergleiche Barnsley, Michael F.; Fraktale - Theorie und Praxis der Deterministischen Geometrie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford, 1995, S. 282-283

Der Attraktor ist ein Sierpinski-Dreieck $\mathcal{S}_\Delta$ mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$.

Die Beziehung zwischen dem dynamischen System $\{\mathbb{R}^2; f\}$ und dem IFS $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$ besteht darin, dass $\{\mathcal{S}_\Delta; f\}$ eine zu dem IFS gehörende Shift-Abbildung ist.

Diese Abbildung wirkt gemäß Grafik in Abb. 29 und f bildet auch $\mathcal{S}_\Delta$ auf sich selbst ab. Man kann zeigen: Der Orbit divergiert für alle x , die nicht zu $\mathcal{S}_\Delta$ gehören.

Man kann nachweisen, dass für die Einschränkung von f auf $\mathcal{S}_\Delta$ gilt:

$$f(x, y) = \begin{cases} w_1^{-1}(x, y), & \text{falls } (x, y) \in w_1(\mathcal{S}_\Delta) \\ w_2^{-1}(x, y), & \text{falls } (x, y) \in w_2(\mathcal{S}_\Delta) \setminus \{(0, 5, 0, 5)\} \\ w_3^{-1}(x, y), & \text{falls } (x, y) \in w_3(\mathcal{S}_\Delta) \setminus \{(0, 0, 5), (0, 5, 0)\} \end{cases}$$

Das dynamische System $\{\mathbb{R}^2; f\}$ erhält man also, in dem man die Definition einer Shift-Abbildung auf einem Sierpinski-Dreieck auf ganz $\mathbb{R}^2$ erweitert.

Ein Quadrat hat acht Symmetrieoperationen – vier Drehungen um jeweils 90 Grad und vier Spiegelungen. Diese werden wieder durch ein „L“ symbolisiert und die Ecken bleiben fest nummeriert, d.h. die Zahlen wandern bei den Symmetrieoperationen mit.

d_0 bedeutet Drehung um 0 Grad oder 360 Grad

d_1 bedeutet Drehung um 90 Grad (immer gegen Uhrzeigersinn)

d_2 bedeutet Drehung um 180 Grad oder zwei Drehungen um 90 Grad $d_2 = d_1^2$

d_3 bedeutet Drehung um 270 Grad oder drei Drehungen um 90 Grad $d_3 = d_1^3$

d_4 entspricht einer vertikalen Spiegelung

d_5 entspricht einer horizontalen Spiegelung

d_6 entspricht diagonalen Spiegelung nach rechts ($d_6 = d_1 \circ d_4$)

d_7 entspricht diagonalen Spiegelung nach links ($d_7 = d_1^3 \circ d_4$)

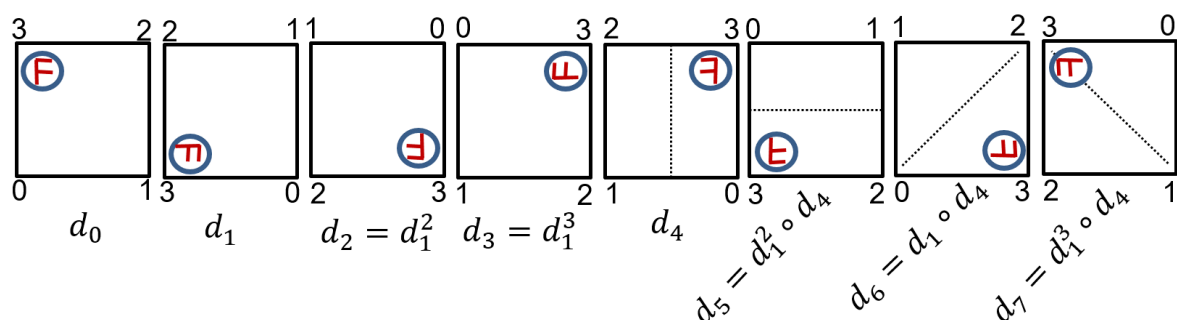


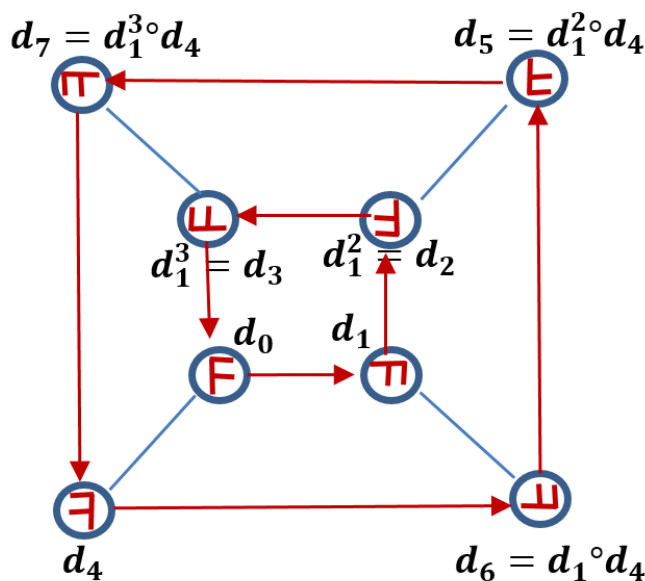
Abb. 30: Drehungen und Spiegelungen eines Quadrats

$$\begin{aligned} \textcircled{E} &= \textcircled{J} \circ \textcircled{F} & \textcircled{I} &= \textcircled{\pi} \circ \textcircled{F} & \textcircled{\pi} &= \textcircled{U} \circ \textcircled{F} \\ d_5 &= d_1^2 \circ d_4 & d_6 &= d_1 \circ d_4 & d_7 &= d_1^3 \circ d_4 \end{aligned}$$

Die acht Symmetrieeoperationen bilden die Elemente einer algebraischen Gruppe, die sogenannte Diedergruppe D_4 . Die

Verknüpfung zwischen den Elementen soll durch das Zeichen $\circ$ symbolisiert werden. d_0 ist das neutrale Element bzgl. $\circ$, da für ein beliebiges Element d_x aus D_4 gilt: $d_x \circ d_0 = d_0 \circ d_x = d_x$. Man sieht, die Gruppe ist nicht kommutativ, denn z.B. $d_3 \circ d_5 = d_7$ aber $d_5 \circ d_3 = d_6$.

Beziehungen zwischen den Elementen einer Gruppe werden gerne graphisch



in Form von Cayley-Graphen dargestellt.⁵⁹ Als Beispiel einer endlichen Gruppe ist die Dieder-Gruppe D_4 abgebildet.

Insbesondere in der hyperbolischen Geometrie spielen Kleinsche Gruppen eine zentrale Rolle. Interessant für Fraktale ist die hyperbolische Ebene mit konstanter Krümmung von -1 . Hier gelten die euklidischen Axiome außer dem Parallelenaxiom. Eine Kleinsche Gruppe ist definitionsgemäß eine diskrete Untergruppe der Isometrie-Gruppe des 3-

Abb. 31: Cayley-Graph der Dieder-Gruppe

dimensionalen hyperbolischen Raumes $\mathbb{H}^3$, d.h. hier gilt die Riemannsche Metrik.

Die unendlichen Gruppen werden so fraktal visualisiert, dass der unendliche Graph in einen begrenzten Bereich hineinragt. Durch Variation der Farbwahl für diese fraktalen Darstellungen der Cayley-Graphen können bestimmte Merkmale wie die Positivität visuell erkannt werden. Der Cayley-Graph hat einen sogenannten „Rand“ im Unendlichen. Die Wirkung der Gruppe auf dem Rand im Unendlichen ist ein chaotisches, dynamisches System. Es kodiert viele Eigenschaften der Gruppe.^{60,61}

⁵⁹ Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Cayleygraph>

⁶⁰ John Meier, Clifford A. Reiter, Fractal representations of Cayley Graphs
Published in Computers & graphics 1996, Computer Science, Mathematics

⁶¹ <https://dgulotta.github.io/kleinian.pdf>

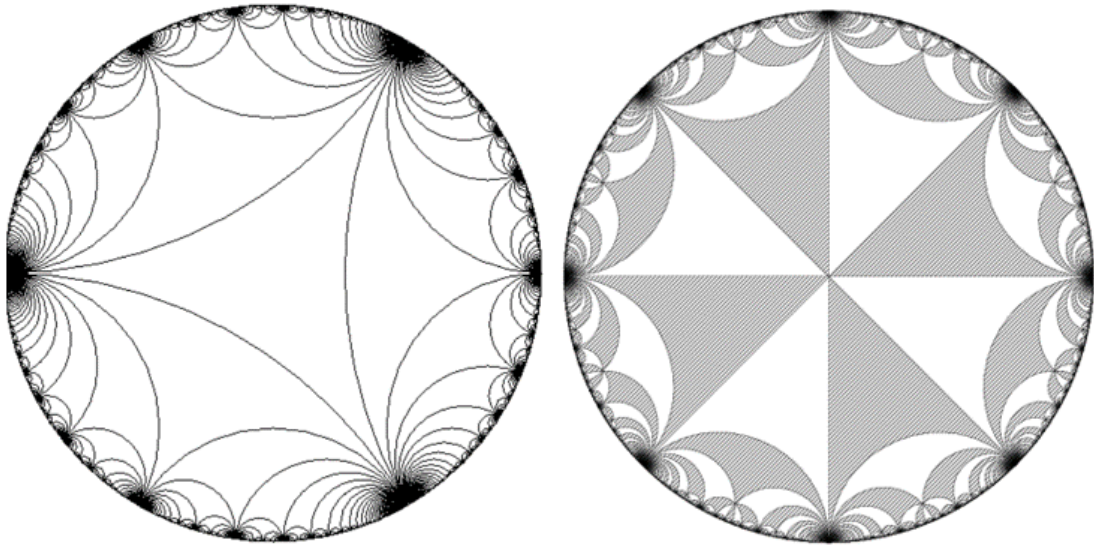


Abb. 32: Die Abb. zeigt zwei denkbar einfache Beispiele eines Cayley-Graphen einer unendlichen Kleinschen Gruppe mit einem Rand im Unendlichen. Links ist es die Parkettierung mit gleichseitigen Dreiecken, rechts die Kachelung der hyperbolischen Scheibe durch Keile.

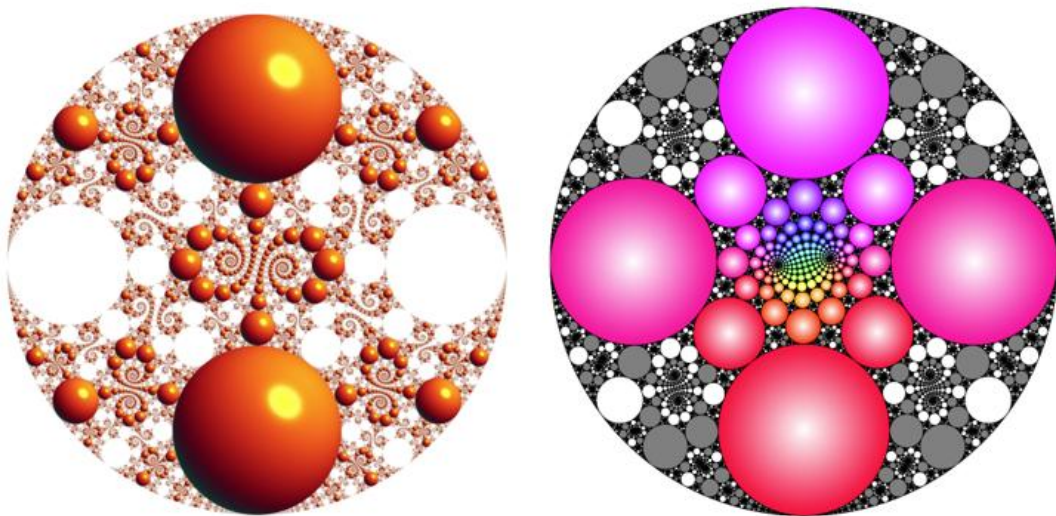


Abb. 33: Grenzmengen / fraktaler, unendlicher Rand von Kleinsche Gruppen erzeugt von Möbius-Abbildungen

Schön ist die Querbeziehung zur Cantor-Menge bei der Gruppe $PSL(2, \mathbb{Z})$, der Gruppe der ganzzahligen 2×2 -Matrizen mit der Determinante 1.⁶² Die Wirkung von $PSL(2, \mathbb{Z})$ behält die sog. Farey-Pakettierung durch ideale Dreiecke (Innenwinkel 0, 60, 60 Grad) auf der hyperbolischen Ebene bei.

⁶² Vorsicht, die Bezeichnungen wechseln in der Literatur, siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Modular_group

Gleichbedeutend zur Farey-Kachelung ist ein trivalenter Baum, dessen Endpunkte im Rand der hyperbolischen Ebene gleich der Cantor-Menge ist.⁶³

Für freie Gruppen, die erlauben, jede Gruppe durch erzeugende Elemente und deren Relationen darzustellen, ist der Rand im Unendlichen eine Cantor-Menge. Für die „meisten“ (sogenannten wort-hyperbolischen) Gruppen ist der Rand im Unendlichen aber ein Menger-Schwamm (3-D, siehe nächstes Kapitel).

Im DMV-Blog findet sich die Arbeit eines hinduistischen Mönchs über den Beweis der Cannon-Thurston-Vermutung für Flächen.

Limes-Mengen von Kleinschen Gruppen sind gut geeignet, um Fraktale mit vielen Symmetrien zu erzeugen.⁶⁴ Man geht über die Isometrien einer diskreten Gruppe des hyperbolischen Raumes. Der „Rand des Unendlichen“ ist die Limes-Menge derjenigen Punkte, die sich durch Punkte im Orbit gemäß der Gruppenregeln beliebig gut annähern lassen.⁶⁵

Die Abb. 33 zeigt die Grenzmengen von Kleinschen Gruppe in willkürlicher Farbgebung, wie es heute ein Computer möglich macht. Sie werden von zwei Möbius-Abbildungen erzeugt, die denen ähneln, die Felix Klein vor über hundert Jahren untersucht hat. Er schrieb dazu in „*Lectures on Mathematics*“⁶⁶, 1894. *Die Frage ist, welche Konfiguration die Gesamtheit aller Kreise bilden wird und insbesondere, wie die Lage der Grenzpunkte aussehen wird. Es ist kein Problem, diese Fragen durch rein logisches Denken zu beantworten, aber die Vorstellungskraft scheint völlig zu versagen, wenn wir versuchen, uns das Ergebnis bildlich vorzustellen.*

Die drei Ähnlichkeitstransformationen beim Sierpinski-Dreieck nutzen nur d_0 und der Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$ ist gesetzt.

⁶³ Inhaltlich siehe <https://mathoverflow.net/questions/212716/hausdorff-dimensions-of-limit-set-of-subgroups-of-sl2-z>

⁶⁴ "Cannon-Thurston maps for surface groups". <https://www.mathematik.de/dmv-blog/3785-hochsymmetrische-fraktale-und-peano-kurven>

⁶⁵ Cannon-Thurston maps for surface groups *Annals of Mathematics* , 179 (1), 1-80
DOI: 10.4007/annals.2014.179.1.1

Siehe auch die Gallery <https://people.math.harvard.edu/~ctm/gallery/index.html>

⁶⁶ Originalzitat: *The question is, what will be the configuration formed by the totality of all the circles and in particular what will be the position of the limiting points. There is no difficulty in answering these questions by purely logical reasoning, but the imagination seems to fail utterly when we try to form a mental image of the result.*

Felix Klein, *Lectures on Mathematics*, American Math. Soc., 2000

Zitiert nach David Mumford, Caroline Series, and David Wright, *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2002 Auszug online unter <http://klein.math.okstate.edu/IndrasPearls/posters/>

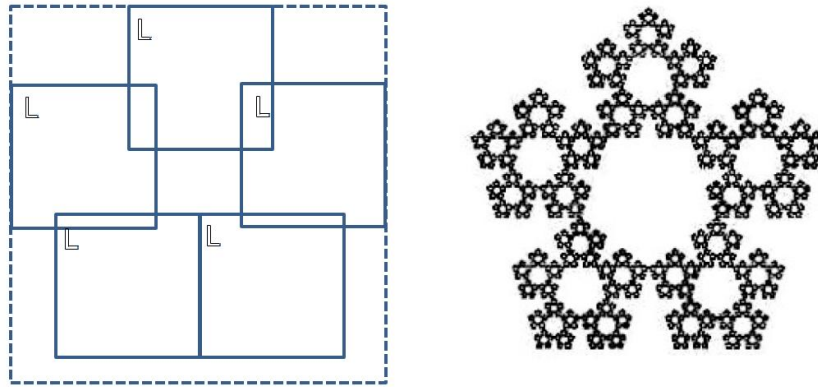


Abb. 34: Das Sierpinski-Pentagon kann man als IFS mit fünf Ähnlichkeitstransformationen konstruieren. Hier wird die echte fünfzählige Symmetrie durch Überlagerung von fünf d_0 erzeugt.

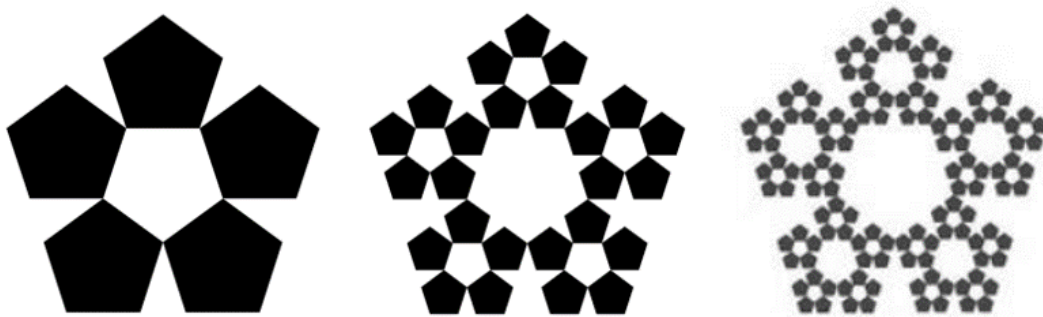


Abb. 35: Das Sierpinski-Pentagon wird jedoch in der Regel gemäß dieser Abbildung über regelmäßige Fünfecke konstruiert.

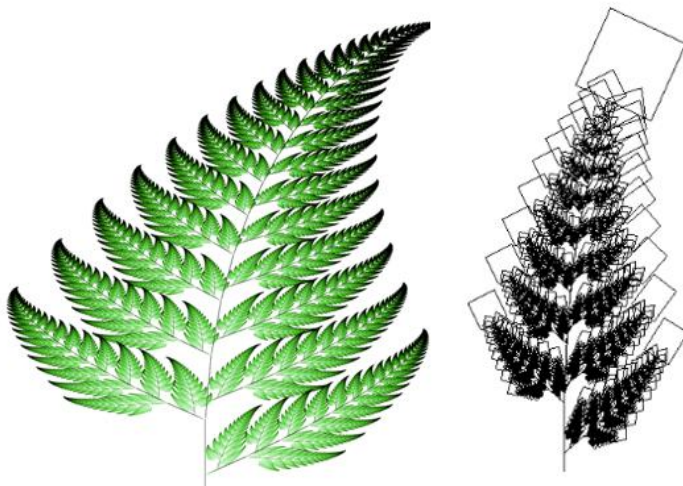


Abb. 36: Man erkennt hier die IFS-Baupläne natürlicher Formen am Beispiel des Barnsley-Farns.

Michael Barnsley entwickelte einen Collage-Satz, bestehend aus vier affinen Abbildungen, die das Urbild als verkleinerte Kopien in Form einer Collage abbilden. Sie bilden den sogenannten Hutchinson-Operator des IFS⁶⁷. Am Beispiel eines Farnblattes (*Asplenium adiantum-nigrum*) wird gezeigt, wie der entstehende Attraktor nach 10 Iterationen aussieht.

⁶⁷ https://en.wikipedia.org/wiki/Hutchinson_operator, https://en.wikipedia.org/wiki/Barnsley_fern, siehe auch <https://quadsoft.org/fraktale/>, Abbildung 21

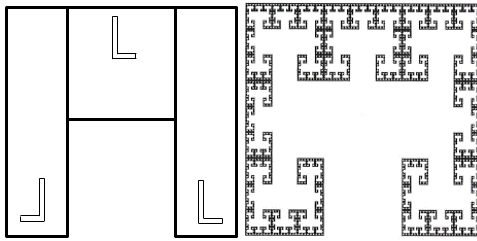


Abb. 37A: Der Cantor-Irrgarten (auch Cantor-Labyrinth) hat nur eine selbstähnliche Transformation (Mitte). Die Transformationen rechts und links sind selbstaffin. Der Attraktor steht in enger Beziehung zur Cantor-Menge.

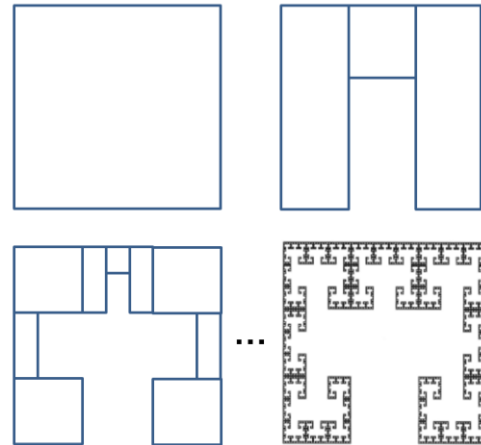


Abb. 37B: Auflösung der ersten Iterationen beim Cantor-Irrgarten

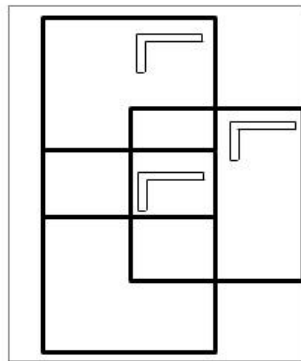


Abb. 37C: Die Drachenkurve kann die Ebene lückenlos parkettieren. Das IFS zeigt hier 3 Komponenten.

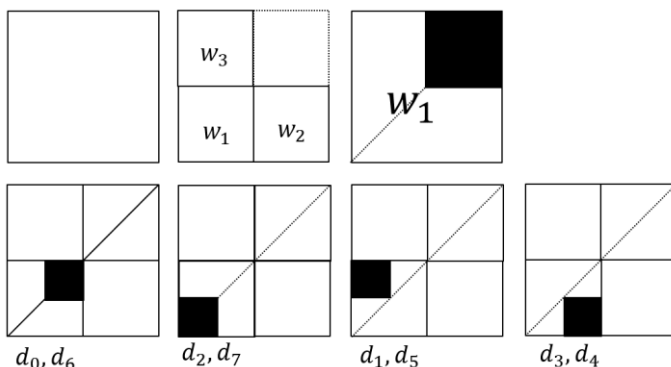


Abb. 38: Ausgehend von den drei Ähnlichkeits-Transformationen w_1, w_2 und w_3 betrachte man z.B. eine Transformation mit w_1

Nach diesem Einschub sollen Symmetrieüberlegungen fortgesetzt werden.

Dies sind Beispiele, die sich auch überlagernd fortsetzen lassen.

Von größerem Interesse sind die symmetrischen Attraktoren. Zunächst sind die verschiedenen möglichen bzw. zulässigen

Transformationen anhand der Gruppeneigenschaften zu ermitteln. Abb. 38 zeigt ein symmetrisches Bild (Winkelhalbierende geht durch das große schwarze Quadrat). Die beiden linken Transformationen d_0, d_6 und d_2, d_7 erhalten die Symmetrie; rechts wird durch d_1, d_5 und d_3, d_4 die Symmetrie verletzt.

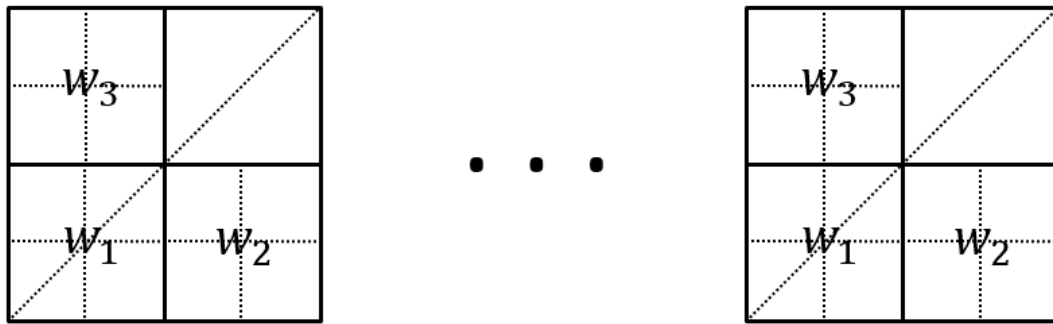


Abb. 39: Das Prinzip von Abb. 38 wird jetzt auf w_2 und w_3 ausgedehnt.

Es stellt sich gemäß Abb. 40 heraus: Es gibt acht verschiedene universelle symmetrische Attraktoren. Die Symbole charakterisieren die jeweiligen prinzipiellen Transformationen.

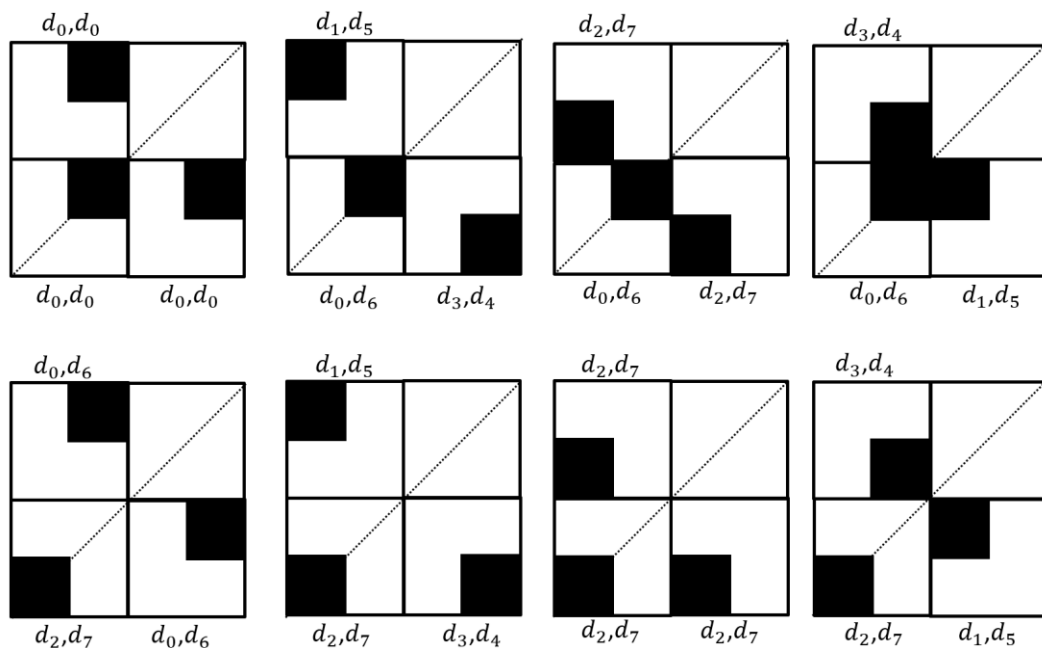


Abb. 40: 64 Transformationen für symmetrische Attraktoren. Jede aus Quadraten zusammengesetzte Figur erzeugt wiederum acht symmetrische Bilder.

Will man nur symmetrische, planare Attraktoren betrachten, so ergeben sich nur die Varianten gemäß Abb. 38. Alle schwarzen Quadrate sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden verteilt.

Insgesamt gibt es $2 \times 2 \times 2 = 8$ Möglichkeiten für jede Anordnung der L-förmigen Kästchen in den Symbolen. Jede kann wiederum durch 8 verschiedene Sätze kodiert werden. Das ergibt $8 \times 8 = 64$ deterministische iterierte Funktionensysteme (IFS).

Eines der 8 prinzipiellen Typen mit Bauplan gemäß Abb. 28 ist das Sierpinski-Dreieck. Mit Hilfe von gruppentheoretischen Überlegungen erkennt man, dass insgesamt 224 verschiedene Varianten („Verwandte“) allein des Sierpinski-Dreiecks mit Bauplan gemäß Abb. 28 existieren. Sie bilden sozusagen eine Familie.⁶⁸

Diese Überlegungen anhand einer Familie zeigen die ungeheure Vielfalt alleine der symmetrischen Attraktoren für planare Fraktale. Selbst für symmetrische Formen konnte nur ein kleiner Teil der Welt der Fraktale adressiert werden.

Der nächste Abschnitt behandelt ein wichtiges mathematisches Instrument.

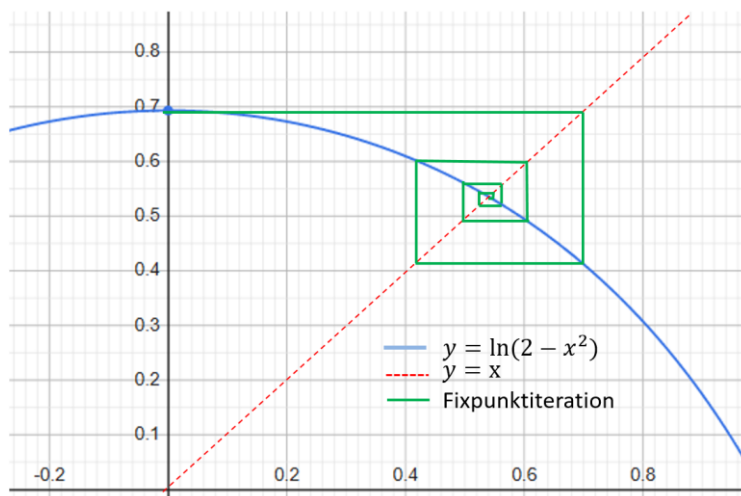


Abb. 41: Illustration des Banachschen Fixpunktsatzes an dem Beispiel der positiven Lösung der Gleichung $2 - x^2 = e^x$. Logarithmieren führt zur Fixpunktgleichung $x = \ln(2 - x^2)$

Das mathematische „Herz“ von Integrierten Systemen (IFS) ist der Banachsche Fixpunktsatz. Er ist prädestiniert, bei den dynamischen Prozessen präzise Aussagen zu machen, die auf dem Rückkopplungsprinzip basieren. Das ist in sehr vielen Beispielen der Fall. Bekanntlich ist dabei die größte Herausforderung die Vorhersage des Langzeitverhaltens.

Wenn dabei die Wahl des Startpunkts nicht sofort eine große Rolle spielt und in chaotisches Verhalten mündet, so kann man das Banachsche Fixpunktprinzip anwenden. Das ist nur für eine Klasse von Rückkopplungssystemen gegeben. Es müssen bestimmte Voraussetzungen gelten. Es geht um Grenzwertprozesse, d.h. der Grenzwert muss in der Menge liegen. Die Annäherung muss man messen können, d.h. es existiert eine Metrik. Es muss sich also um einen vollständig abgeschlossenen, metrischen Raum handeln.

Die Abbildung f muss im Rückkopplungssystem als Kontraktion wirken, denn es geht um eine Grenzwertbetrachtung. Sei a_0 das Anfangsglied, so definiert

⁶⁸ Zur wissenschaftlichen Begründung siehe https://www.asc.ohio-state.edu/golubitsky.4/reprintweb-0.5/output/papers/symmetric_attractors.pdf

$a_{n+1} = f(a_n)$, $n=0,1,2,\dots$ eine Folge $a_0, a_1, a_2, \dots$ Sei x, y zwei beliebige Elemente, so ist $|f(x) - f(y)| < |x - y|$, da f kontrahierend wirkt.

Unter diesen Voraussetzungen und entsprechenden Rückkopplungssystemen liefert der Banachsche Fixpunktsatz erstaunlich weitreichende und allgemeine Ergebnisse:

Attraktor: $a_{n+1} = f(a_n)$ wird für jedes a_0 ein vorhersagbares Langzeitverhalten haben. Es gibt ein Grenzobjekt a_∞ des Rückkopplungssystems, das für alle a_0 dasselbe ist; also den Attraktor des Rückkopplungssystems.

Invarianz: Das Rückkopplungssystem lässt a_∞ invariant, d.h. $f(a_\infty) = a_\infty$ also a_∞ ist ein Fixpunkt.

Abschätzung: Es lässt sich voraussagen, wie schnell das Rückkopplungssystem in die Nähe von a_∞ gelangt, bei a_0 als Startpunkt. Ein Durchgang genügt um das prinzipielle Systemverhalten einschätzen zu können. Daraus lässt sich abschätzen, wie viele Durchgänge erforderlich sind, um bei vorgegebener Genauigkeit in die Nähe von a_∞ zu kommen.⁶⁹

Versuch einer Zusammenfassung: Fraktale sind komplexe geometrische Formen, die sich durch Selbstähnlichkeit und unendliche Detailgenauigkeit auszeichnen. Die Gruppentheorie der Fraktale ist ein interdisziplinäres Forschungsfeld, das Konzepte der Gruppentheorie und der Fraktalgeometrie kombiniert, um die Symmetrien und Strukturen von fraktalen Objekten zu untersuchen.

Wichtige Konzepte

Selbstähnlichkeit: Fraktale zeigen bekanntlich oft Selbstähnlichkeit, was bedeutet, dass sie auf verschiedenen Skalen ähnliche Strukturen aufweisen. Diese Eigenschaft kann mathematisch durch Gruppen von Transformationen beschrieben werden, die auf das Fraktal angewendet werden.

Transformationen: In der Gruppentheorie werden Transformationen, die auf fraktale Strukturen angewendet werden, als Elemente einer Gruppe betrachtet. Diese Transformationen können z.B. Drehungen, Skalierungen oder Spiegelungen sein. Die Menge dieser Transformationen bildet eine Gruppe, die die Symmetrien des Fraktals beschreibt.

Iterierte Funktionensysteme (IFS): Ein häufiges Modell zur Erzeugung von Fraktalen ist das iterierte Funktionensystem, bei dem eine Menge von

⁶⁹ Vergleiche Peitgen, Jürgens, Saupe, Bausteine der Ordnung Fraktale, S. 317 bis 319

Funktionen wiederholt auf einen Punkt oder eine Menge angewendet wird. Die Symmetrien dieser Funktionen können durch Gruppen beschrieben werden.

Fraktale und Gruppen: Bestimmte Fraktale, wie die Mandelbrot-Menge oder die Julia-Mengen, können durch die Anwendung von Gruppen von komplexen Transformationen erzeugt werden. Die Struktur dieser Gruppen kann tiefere Einsichten in die Eigenschaften der Fraktale geben.

Topologische Gruppen: In einigen Fällen können die Symmetrien von Fraktalen durch topologische Gruppen beschrieben werden, die sowohl algebraische als auch topologische Eigenschaften kombinieren. Dies ist besonders relevant, wenn man die kontinuierlichen Transformationen betrachtet, die auf fraktale Strukturen angewendet werden.

Anwendungen

Die Gruppentheorie der Fraktale hat Anwendungen in verschiedenen Bereichen, darunter:

Physik: In der statistischen Mechanik und der Quantenfeldtheorie, wo Symmetrien eine zentrale Rolle spielen.

Biologie: Bei der Modellierung von Wachstumsprozessen in biologischen Systemen, die fraktale Eigenschaften aufweisen.

Computergrafik: Bei der Erzeugung von fraktalen Mustern und Texturen, z.B. in der Computerkunst und Animation.

Die Gruppentheorie der Fraktale ist ein riesiges faszinierendes Forschungsfeld, das die Verbindung zwischen algebraischen Strukturen und geometrischen Objekten untersucht. Es konnte im Rahmen dieser Arbeit nur skizzenhaft angerissen werden. Durch das Verständnis der Symmetrien und Transformationen, die Fraktale charakterisieren, können Mathematiker tiefere Einsichten in die Natur und die Eigenschaften dieser komplexen Strukturen gewinnen.

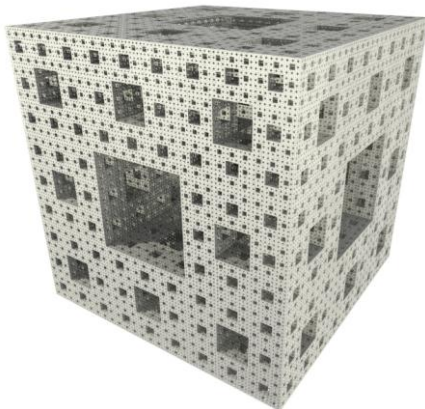


Abb. 42: Menger Schwamm

Weiterer kurzer Ausblick in die 3D-Welt

Die fraktale 3D-Kunst hat eine Fülle von dreidimensionalen Fraktalen bekannt gemacht. Es gibt unter diesem Suchwort eine Reihe von meist privaten Webseiten, die in der Regel nach ästhetischen Gesichtspunkten handeln. In diesem Kapitel sollen nur vier Fraktale angesprochen werden, deren mathematische Eigenschaften gut studiert wurden und neue Aspekte aufzeigen. Zwei sind exakt selbstähnlich.

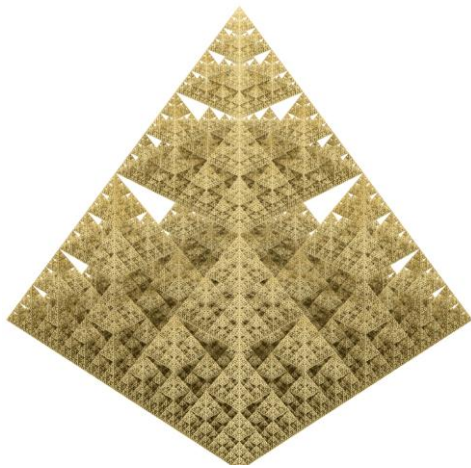


Abb. 43: Sierpinski-Tetraeder

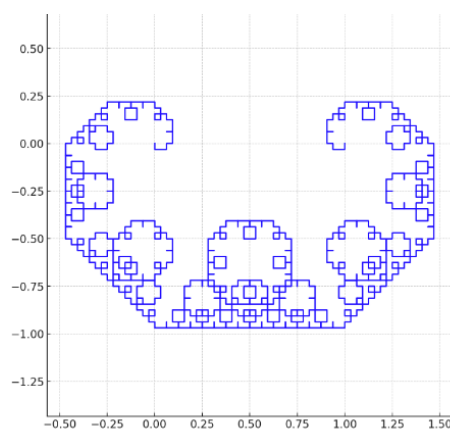


Abb. 44: Man beachte die Konstruktion von Mandelbrot eines 3D-Gebildes als Beispiel für ein selbstquadiertes Fraktal (self-reproducing fractal). Im einfachsten Fall (in 2D) kann man die Drachenkurve als Repräsentant sehen (hier mit 10 Iterationen).

Abb. 42 zeigt den Menger-Schwamm, (benannt nach Karl Menger). Es ist eine dreidimensionale Verallgemeinerung des in diesem Beitrag nicht besprochenen Sierpinski-Teppich.⁷⁰ ⁷¹ Der erste Iterationsschritt geht von einem Würfel aus, der in 27 Einzelwürfel geteilt wird und von dem 7 Würfel aus der Mitte entfernt werden. Die Menger-Kurve hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass man jede 1-dimensionale Kurve in diesem Fraktal finden kann. Es ist eine universelle Kurve, d.h., jeder eindimensionale kompakte metrische Raum lässt sich in die Menger-Kurve einbetten. Wie jetzt von François Dahmani, Vincent Guirardel und Piotr Przytycki bewiesen wurde, kommt er auch in der Gruppentheorie als typischer 'Rand' von Gruppen vor.⁷² Der Beweis baut auf der Arbeit von M. Kapovich und B. Kleiner auf, die gezeigt hatten, dass es für 1-dimensionale Ränder hyperbolischer Gruppen nur 3 Möglichkeiten gibt: den Kreis, den Sierpinski-Teppich oder eben den Menger-Schwamm. In der neuen Arbeit werden jetzt die ersten beiden Möglichkeiten "mit überwältigender Wahrscheinlichkeit" ausgeschlossen.^{73,74}

Das nächste Fraktal (Abb. 43) geht auf Sierpinski selbst zurück. Interessant ist bei

⁷⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Menger-Schwamm>

⁷¹ Siehe auch die kuriose Dissertation zum Papierfalten von Fraktalen z.B. der Drachenkurve <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:46-diss000105747> (Autor Raimund Albers, Betreuer Heinz-Otto Peitgen)

⁷² François Dahmani, Vincent Guirardel, Piotr Przytycki: 'No-splitting property and boundaries of random groups', <https://arxiv.org/abs/0904.3854>

⁷³ <https://scienceblogs.de/mathlog/2009/04/28/zufallige-gruppen-und-das-mengerfraktal/>

⁷⁴ Michail Kapovich, Bruce Kleiner: 'Hyperbolic groups with low-dimensional boundary', Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 33 (2000), no.5, 647-669, <https://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/EPR/KK2000.pdf>

diesem dem ersten Anschein nach ebenfalls räumlichen Objekt, dass die fraktale Dimension D exakt 2 ist.

Die Liste an Fraktalen lässt sich fast beliebig fortsetzen. Interessant sind die schon von Mandelbrot⁷⁵ erwähnten und von Fatou allgemein untersuchten selbstabbildenden (selbst-quadrierenden) Fraktale, insbesondere in der noch weiter unten zu diskutierenden Form (in der Notation von Mandelbrot):

$$x \rightarrow f(x) = \lambda x(1 - x)$$

$$x \rightarrow f^*(x) = x^2 - \mu,$$

$$\text{hier mit } \mu = \frac{\lambda^2}{4 - \frac{\lambda}{2}}$$

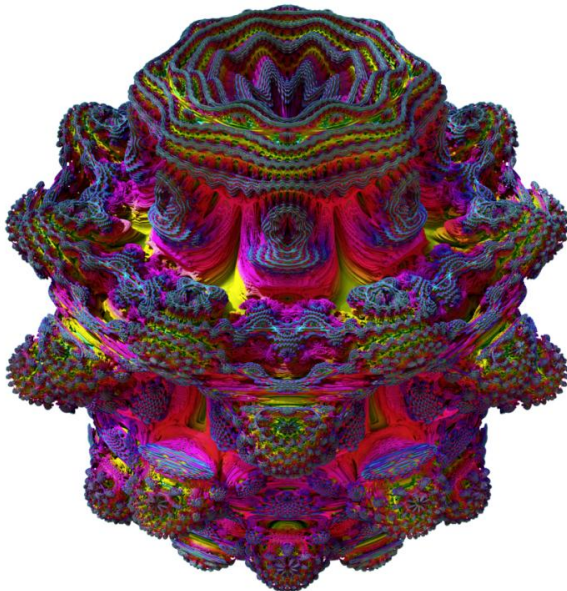


Abb.: 45: Mandelbulb, $v \rightarrow v^9 + c$

In der (nicht abgebildeten) Figur aus Anmerkung 77 durchläuft der Parameter λ die Werte 1 bis 4 und sorgt für die 3. Dimension. Die x und y -Koordinaten repräsentieren die komplexen Zahlen $x + i \cdot y$. Alle Punkte, die für

$$z \rightarrow f(z) = \lambda z(1 - z)$$

gegen Unendlich gehen, sind sozusagen transparent dargestellt. Mandelbrot beschreibt das entstehende fraktale Gebilde als „Klotz“, von dem die divergierenden Punkte „weggeschnitzt“ wurden.

Jeder horizontale Schnitt liefert das maximal beschränkte Gebiet, das zum Parameter λ gehört. Für $\lambda = 2$ entsteht ein Kreis – sozusagen als „Gürtel“ für die Falten. Für jeden λ –Wert versteckt sich, wie ein Gerüst, ein fraktaler Baum, der je nach Wert mehr den Charakter von Ästen oder den Charakter von filigranen Zweigen hat. Nur längs $x=1/2$ bzw. $y=0$ sind die Strukturen der Zweige etwas deutlicher zu sehen. Die Grafik lässt die Vielfalt an Strukturen nur erahnen.

⁷⁵ Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, S. 194f.

Pierre Fatou, Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles. Comptes rendus (Paris), 143, 546-548

Eine geradezu beängstigende Figur (Abb. 45) entsteht, wenn man die Mandelbrot-Menge einer sphärischen Koordinatentransformation unterzieht.⁷⁶ Auch deren Eigenschaften sind gut untersucht.

Iteration, Selbstähnlichkeit, Rückkopplung und Hausdorff-Dimension

Selbstähnlichkeit, dies zeigen die Beispiele, ist ein weiteres mögliches Kennzeichen bei Fraktalen. Das kann man allgemeiner formulieren: Wie die Determiniertheit bei den klassischen Naturgesetzen durch das „Chaos“ konterkariert wird, so bildet sich zum linearen Überlagerungsprinzip ebenso eine Alternative bei nichtlinearen Prozessen heraus. Das Überlagerungsprinzip (oder Additionsprinzip) war Jahrhunderte so selbstverständlich, dass man sich kaum Gedanken dazu machen musste.

Überlagerungsprinzip

Ist $x_1(t)$ eine Lösung des zugrunde liegenden Naturgesetzes und $x_2(t)$ ebenfalls eine Lösung.

Dann ist auch die Summe

$$x_1(t) + x_2(t) =: x_s(t)$$

ein dritter möglicher Geschehensablauf.

Meilensteine der Physik, wie die Maxwell'schen Gleichungen, das Coulombsche Gesetz oder Interferenzphänomene, sind linear, Musik besteht aus der linearen Überlagerung akustischer Schwingungen und sogar die Schrödinger Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung und beschreibt

Superpositionen.

Erst nichtlineare Phänomene verlangten nach einem neuen Ordnungsprinzip. In vielen Fällen ist eine Skaleninvarianz auffällig. Mathematisch spielen affine Abbildungen eine Rolle.⁷⁷ Es gilt also das Ordnungsprinzip der Selbstähnlichkeit, auch wenn sie nicht immer vollkommen exakt gilt. Der vorliegende Beitrag zeigt viele Vertreter von mathematischen Fraktalen, die perfekt selbstähnlich sind; in der Natur gilt das Prinzip nur annähernd und über endlich viele Hierarchien. Selbstähnlichkeit wird bekanntlich in der Mathematik oft durch rekursive Funktionen, z.B. fortgesetzte Iterationen, erreicht. Wie bereits diskutiert, entsteht dadurch ein „Rückkopplungseffekt“, der enorme Bedeutung in den Anwendungen hat (z.B. Wetter, Dissipation, Allometrie, Turbulenz). Man muss aber zwischen positiver und negativer Rückkopplung unterscheiden, also zwischen Hemmung und Verstärkung. Negative Rückkopplung findet z.B. in einem Thermostaten statt.

⁷⁶ <https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbulb>

⁷⁷ Vergleiche S. Großmann; Überarbeitete Fassung eines Vortrages, gehalten auf der 115. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (GDNA), Freiburg, 17.-20. September 1988. Sämtliche Vorträge dieser GDNA-Versammlung erschienen in dem Band „Ordnung und Chaos in der unbelebten und belebten Natur“. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart 1989.

Viele prominente mathematische Fraktale haben eine vollkommen skaleninvariante Selbstähnlichkeit. Man kann Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz deshalb als ansonsten fehlenden natürlichen Maßstab interpretieren. In der Natur oder in Anwendungen muss oder darf die Ähnlichkeit nicht exakt sein. So ist ein Romanesco zu seinen Rößchen selbstähnlich, da diese in einer gewissen Bandbreite von Verkleinerung dem ganzen Romanesco gleichen. Im Gegensatz zu russischen Matroschka-Puppen sind die Rößchen natürlich zusammengewachsen. Dies kann man mengentheoretisch mit der sogenannten „Open Set Condition (OSC)“⁷⁸ ausdrücken. Ähnliches gilt für immer kleinere Strukturen bei Bronchien oder dem Blutkreislauf, die zu dem ganzen Organ selbstähnlich sind. Eines von vielen Anwendungsbeispielen sind sich gleichende Details in unterschiedlicher Auflösung bei Börsenkursen, u.v.m.

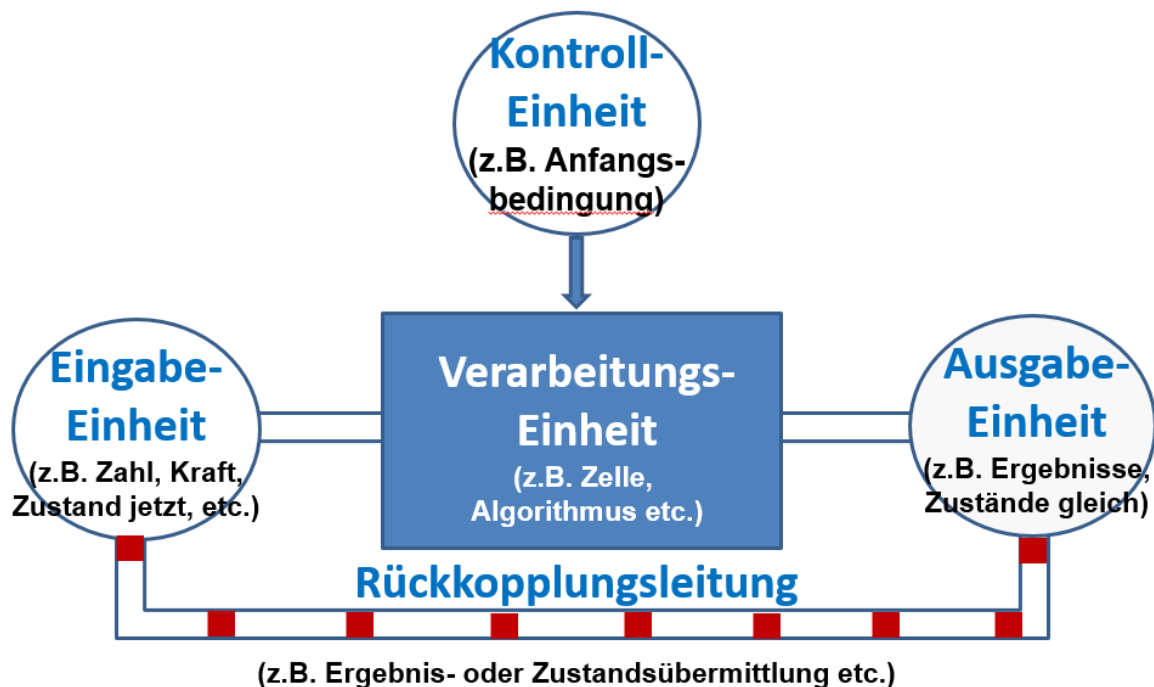


Abb. 46: Ein rekursiver Prozess lässt sich als „Rückkopplungsmaschine“ verstehen, in dem Ausgabewerte zu neuen Eingabewerten werden.

Bei einem mathematischen Fraktal mit unendlich vielen Iterationen ist die Dimension meist gebrochen; daher der Name Fraktal. Ist die Dimension ganzzahlig, wie z.B. bei einer Kurve, die alle Punkte einer Fläche berührt, also raumfüllend ist, so liegt eher ein extremes Beispiel eines Fraktals vor (Hilbert- oder Peano-Kurve, Mandelbrot-Menge).

⁷⁸ Open Set Condition: Es gibt eine offene Menge U mit $f_k(U) \in U$ für alle k , so dass gilt $f_j(U) \cap f_k(U) = \emptyset$ für $j \neq k$

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, die Dimension zu definieren. Einsichtig, wenn auch formal unvollständig, ist die Definition von Mandelbrot, wie sie von Wikipedia zitiert wird:⁷⁹

Ein Fraktal ist eine Menge, bei der die Hausdorff-Dimension $\dim_H$ größer ist als die Überdeckungsdimension, benannt nach Henri Léon Lebesgue.

In Mandelbrots zentralem Werk, „Die fraktale Geometrie der Natur“, findet sich eine etwas anders formulierte Definition:⁸⁰

Ein Fraktal ist nach Definition eine Menge, deren Hausdorff-Besicovitch-Dimension echt die topologische Dimension übersteigt.

Im allgemeinen Sprachgebrauch wird der Begriff der *Hausdorff-Besicovitch-Dimension* synonym mit der Hausdorff-Dimension gesetzt und „Besicovitch“ weggelassen. In diesem Text wird für die Dimension von Fraktalen die Bezeichnung „Hausdorff-Dimension“ verwendet. Der Bezug zu Lebesgue soll trotzdem kurz diskutiert werden, sowie eine weitere Definition. Das mag irritieren, aber der Dimensionsbegriff hat in der Mathematik eine wechselvolle Geschichte – besonders in den Jahren 1890 bis 1910. Hausdorffs Arbeit fällt in diese Zeit. Einerseits benötigte die damals noch junge Disziplin Topologie Homöomorphismen, bei denen die topologische Dimension eines Objekts erhalten bleibt. Andererseits gab es die Ergebnisse von Cantor, dass die Kardinalität des n -dimensionalen Einheitswürfel gleich der Kardinalität des m -dimensionalen Einheitswürfel ist, $m \neq n$. Es konnte erst durch Brouwer 1911 gezeigt werden, dass die Abbildung nicht homöomorph ist bzw. sein kann. Es gibt also keine stetigen Bijektionen zwischen verschieden-dimensionalen Räumen, wie $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R}^m$, $m \neq n$.⁸¹

Die beiden Definitionen von Mandelbrot beziehen sich auf eine bestimmte endliche oder unendliche Anzahl selbstähnlicher Kopien mit gleichem Verkleinerungsfaktor. Die Ähnlichkeitsdimension D ist dann (s.u.)

$$D = \frac{\log(\text{Anzahl selbstähnlicher Kopien})}{\log(\text{Verkleinerungsfaktor})}$$

In diesem Fall ist die Ähnlichkeitsdimension gleich der Hausdorff-Dimension. Obwohl eine Vielzahl an Fällen durch diese Definition abgedeckt werden kann, handelt es sich trotzdem um einen Spezialfall. Das genannte Beispiel zu den Börsenkursen ist ein statistisches Fraktal („Zufallsfraktal“), genügt nur näherungsweise den Kriterien und fällt deshalb nur bedingt in diese Kategorie.

⁷⁹ Zitiert nach <https://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal>

⁸⁰ Siehe Mandelbrot, Die fraktale Geometrie der Natur, S. 27.

⁸¹ Brouwer, Luitzen, Beweis der Invarianz der Dimensionszahl. Mathematische Annalen 70, 1911, S.161–165.

Eine analoge Aussage gilt für das Zickzack-Muster, das man bei der Brownschen Bewegung unter dem Mikroskop beobachten kann.

Bisher wurde der Begriff Dimension weitgehend unspezifisch benutzt und erst durch die Definition von Mandelbrot differenziert betrachtet.

Physikalische Beispiele zur Skalentransformation gibt es beliebig viele. Diese Form von Symmetrie gegenüber Transformationen macht oft das Wesen von physikalischen Gesetzen aus und fußt ebenfalls auf Ähnlichkeitsargumenten. Dass (klassische) physikalische Gesetze invariant bei Symmetrioperationen sind, hat Emmy Noether zu den Erhaltungssätzen geführt (Noether-Theorem). Man betrachte auch als Beispiel den sogenannten harmonischen, also linearen Oszillator. Im einfachsten Fall ist es ein Pendel mit geringer Auslenkung. Seine potentielle Energie ist eine homogene quadratische Funktion. Die Bewegungsgleichung zeigt, dass die Schwingungsperiode unabhängig von der Schwingungsamplitude ist. Alle Zeitgrößen, inklusive der Schwingungsperiode, bleiben invariant für Skalentransformationen. Oder anders ausgedrückt, die Frequenz eines linearen Oszillators in einem quadratischen Potential ist unabhängig von seiner Amplitude und damit von der Energie. Über die Newtonsche Dynamik lässt sich die Schwingungsperiode T herleiten:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

L ist die Länge des Pendels und g die Erdbeschleunigung ($9,81 \frac{m}{s^2}$).

Eine ganze Reihe von weiteren möglichen Parametern, insbesondere die Masse/Gewicht am Pendel, spielt keine Rolle.

Erst ein Doppelpendel, also ein einfaches Pendel, an dem ein weiteres Pendel hängt, kann man nicht mehr linear beschreiben. Es ist deshalb ein beliebtes Beispiel, um chaotisches nichtlineares Verhalten zu demonstrieren.

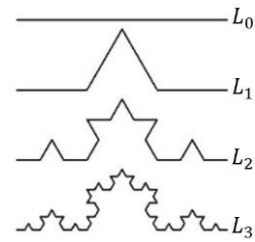
Iterierte Funktionen Systeme (IFS), inkl. sogenannte stochastische dynamische Systeme, die Fraktale generieren, sind heute als Basis für Algorithmen zur Datenkompression von Bedeutung und werden z.B. in der digitalen Fotografie und ihrer Datenübertragung im Internet eingesetzt.⁸² In der Regel werden Bilder zuerst zeilenweise abgetastet und so in übertragbare Information umgewandelt. Würde man wirklich pixelweise abtasten und übertragen, so entsteht oft eine riesige Datenmenge. Man betrachte als einfaches Beispiel für eine effektive Datenkompression mit minimalem Übertragungsaufwand die Koch-Kurve mit

⁸² Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Bausteine der Ordnung Fraktale, Springer Verlag / Klett Cotta, 1992, S. 473 (Anhang A)

ihrer filigranen Struktur nach n Iterationen. Die Ausgangsstrecke L_0 habe die Länge l_0 . Der Generator L_1 vergrößert l_0 um $\frac{4}{3}$, also

$$L_1 = l_0 \left(\frac{4}{3}\right)^1, L_2 = l_0 \left(\frac{4}{3}\right)^2, \dots, L_n = l_0 \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$

Überträgt man nun diese einfache Formel und wenige Parameter für die Rahmenbedingungen, so lässt sich das ursprüngliche Bild wieder rekonstruieren. Das ist das Prinzip von Datenübertragung auf Basis IFS.



Abhängigkeit vom Maßstab und weitere Dimensionsbegriffe

Benoit Mandelbrot nannte in seinem berühmten Buch⁸³ „Die fraktale Geometrie der Natur“ maßstabsabhängige Messmethoden einen Richardson-Effekt⁸⁴.

Richardson erkennt im unten zitierten Artikel neidlos an, dass die von Benoit Mandelbrot, Siegfried Großmann, Stefan Thomae oder Mitchell Feigenbaum initiierte fraktale Geometrie „... is a new branch of mathematics that proves useful in representing natural phenomena whose dimensions (fractal dimensions) are non-integer values.“ Die Längenmessung mit unterschiedlichen Maßstäben führte z.B. dazu, dass in älteren Lexika einzelner Länder jeweils

Spanien	987 km	Portugal	1214 km
Niederlande	380 km	Belgien	449 km

Abb. 47: Unterschiedliche Auffassungen bei der Länge der gemeinsamen Grenze.

unterschiedliche Längen der Grenze zum Nachbarland genannt werden.

Folgerichtig postulierte Mandelbrot für die beliebig aufgelöste Länge der Küstenlinie von Großbritannien den Wert unendlich. Dies verblüfft nur beim ersten

Hinschauen. In der Tat hängt die Länge einer nicht geraden Linie extrem stark von der Messmethode ab. Man kann dies verdeutlichen, in dem man den Küstenverlauf mit mehr oder weniger großen Kreisen oder Polygonzügen überdeckt, wobei die Kreise sich nur in einem Punkt berühren.

Die Anzahl N an benötigten Kreisen ist dabei ein Maß für die Länge L bezogen auf den Durchmesser d der Kreise. Je kleiner man den Durchmesser wählt, umso feinere Strukturen kann man „messen“.

⁸³ Benoit B. Mandelbrot, Die fraktale Geometrie der Natur, Birkhäuser-Verlag 1987, S. 45, siehe auch Eingangs zit.

⁸⁴ Richardson, L.F. (1961). The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels. General Systems Yearbook 6, 139-187, zitiert nach Benoit B. Mandelbrot, Anm. 6.

Wählt man z.B. bei der Küstenlinie von Großbritannien einen Durchmesser $d_1=200$ km bzw. $d_2=100$ km, so erhält man:

$$d_1 = 200 \text{ km}, L_1 = 2600 \text{ km}, N_1 = \frac{L_1}{d_1} = \frac{2600}{200} = 13$$

$$d_2 = 100 \text{ km}, L_2 = 3000 \text{ km}, N_2 = \frac{L_2}{d_2} = \frac{3000}{100} = 30$$

Beim Durchmesser d_1 benötigt man 13 Kreise oder Polygonabschnitte; beim feineren Durchmesser d_2 , also einem kleineren Maßstab auf einer Karte, dagegen schon 30.

Rechnet man dies auf eine gebrochene Hausdorff-Dimension D um, so erhält man in diesem Beispiel

$$1 - D = \frac{\log(2600) - \log(3000)}{\log(200) - \log(100)} \approx -0,21$$

Also auch in diesem groben Beispiel ist $D \approx 1,21 \dots$ und damit eine gebrochene, also fraktale Dimension. Dies ist eine abstrakte, theoretische Betrachtung. Schon allein die zu beobachtende Veränderung der Küstenlinien durch Wind, Wetter und Klimaveränderungen erfordert eine pragmatische Messmethode.⁸⁵

Allgemein lässt sich die Hausdorff-Dimension (in ihrer für die meisten Zwecke vereinfachten Definition) analog zum obigen Beispiel definieren. Sei N die Anzahl an Kreisen mit Radius R , mit denen sich eine nicht gerade Linie überdecken lässt. Die Mindestanzahl der Kreise ist eine Funktion $N(R)$. Je kleiner man den Radius wählen muss, umso größer wird N . Aus der Potenz von R , mit der $N(R)$ für $R \rightarrow 0$ wächst, ergibt sich die Hausdorff-Dimension D :

$$N(R) \sim \frac{1}{R^D}$$
$$D = - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log N(R)}{\log R}$$

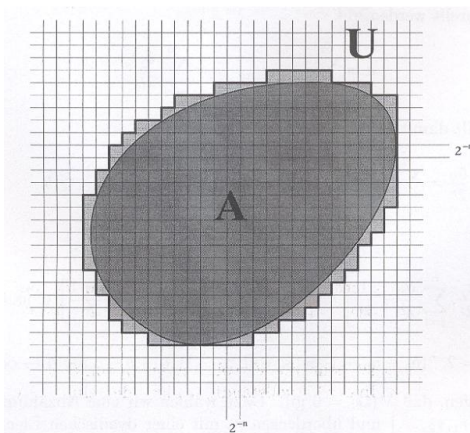


Abb. 48: Lebesgue-Maß
(anschaulich)

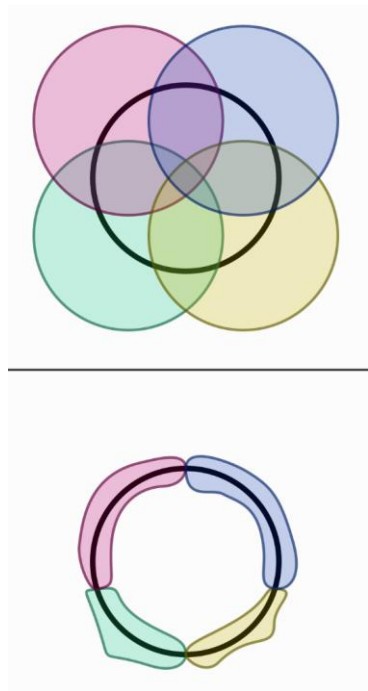
Mandelbrot nimmt in seiner Definition für Fraktale ebenfalls Bezug auf Lebesgue. Als Vorstufe zur Lebesgue-Überdeckungsdimension soll hier zunächst das Lebesgue-Maß betrachtet werden. Die Grafik verdeutlicht auf einfache Weise das Prinzip. Die zu vermessende Punktmenge A wird mit einem Gitter überdeckt, dessen Raster aus Quadraten mit der Seitenlänge 2^{-n} bestehen. Verkleinert man die Quadrate durch immer

⁸⁵ <https://bioone.org/journals/journal-of-coastal-research/volume-39/issue-1/JCOASTRES-D-22-00034.1/The-Coastline-Paradox-A-New-Perspective/10.2112/JCOASTRES-D-22-00034.1.short>

größeres n , so nähert sich die überdeckende Fläche der Fläche von A .

Die Lebesgue-Überdeckungsdimension ist folg. definiert:

Ein topologischer Raum X hat die Dimension n , wenn n die kleinste natürliche Zahl ist, dass es in jeder endlichen offenen Überdeckung eine feinere offene



Überdeckung gibt, sodass jeder Punkt aus X in höchstens $n+1$ der Überdeckungsmengen liegt. Ansonsten ist die Lebesgue-Überdeckungsdimension unendlich. Anschaulich heißt das, dass die ganzzahlige Dimension n von X schon erreicht ist, wenn durch den Versuch der „Verfeinerung“ man maximal eine weitere Überdeckungsmenge für X benötigt. Es ist übrigens nützlich, wenn man die Dimension der leeren Menge auf -1 setzt.

Die Fragestellung lässt sich mühelos auf Räume oder sogar höherdimensionale Objekte übertragen.

Die Abb. 49 zeigt als Beispiel die Überdeckung eines Kreises (oben) und maximale Verfeinerung (unten). Ein Punkt gehört dann maximal zu zwei Überdeckungsmengen, woraus sich die Dimension ergibt.

Abb. 49: Lebesgue-Überdeckungsdimension

In der Fraktalen Geometrie findet man häufig den Begriff der Boxdimension. Es ist der plakative Ausdruck für die Minkowski–Bouligand Dimension, oder kurz Minkowski Dimension. Im Englischen findet man den Ausdruck box-counting dimension. Sie eignet sich besonders für unregelmäßige fraktale Formen. Wie bei der Lebesgue-Überdeckungsdimension wird eine fraktale Kurve gemessen, in dem man sie von unten und von oben mit leicht berechenbaren Flächen approximiert und den Grenzwert bildet. Der folgende Abschnitt wird fast wörtlich aus einem Vorlesungsskript der Uni Ulm übernommen.⁸⁶

Mathematisch formuliert (für euklidische Räume, übertragbar auf allgemeine metrische Räume):

F sei eine nicht-leere, beschränkte Untermenge des $\mathbb{R}^n$. Die untere und obere Boxdimension sind definiert als

⁸⁶ Wörtlich zitiert bei https://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ws06_07/seminar_fraktale/ausarbeitung_bendig.pdf

$$\underline{\dim}_B(F) = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Wenn beide übereinstimmen und der Grenzwert existiert, ist

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta}$$

Man kann zeigen: Die Boxdimension von F , $N_\delta(F)$, kann dabei eine der folgenden Anzahlen sein:

- Die kleinste Anzahl von geschlossenen Kugeln mit Radius δ , die F überdecken
- Die kleinste Anzahl von Würfeln mit Seitenlänge δ , die F überdecken
- Die Anzahl von Würfeln eines δ -Gitters, die sich mit F überschneiden
- Die kleinste Anzahl von Mengen mit einem Diameter⁸⁷ von höchstens δ , die F überdecken
- Die größte Anzahl von disjunkten Kugeln mit Radius δ und Mittelpunkt in F



Abb. 50: Vorgehen bei der Boxdimension am Beispiel der Küstenlinie

All diese Definitionen sind äquivalent und machen damit die Boxdimension sehr flexibel anwendbar. Sie ist durch die einheitlich gleichen „Boxen“ leichter berechenbar, stimmt aber in vielen Fällen mit der Hausdorff-Dimension überein. Die Beschränkung auf nicht-leere, beschränkte Mengen verhindert Probleme mit dem Logarithmus („log 0“ oder „log ∞ “). Ein Würfel bzw. eine Kugel ist jeweils in der entsprechenden Dimension definiert, z.B. ein Quadrat oder ein Kreis im

⁸⁷ Entspricht analog dem Durchmesser

$\mathbb{R}^2$ oder ein Intervall im $\mathbb{R}^1$. Anschaulich kann die Boxdimension als die logarithmische Geschwindigkeit betrachtet werden, mit der $N_\delta(F)$ sich vergrößert, wenn δ gegen 0 strebt.

Zusammenhang Chaos und Fraktale

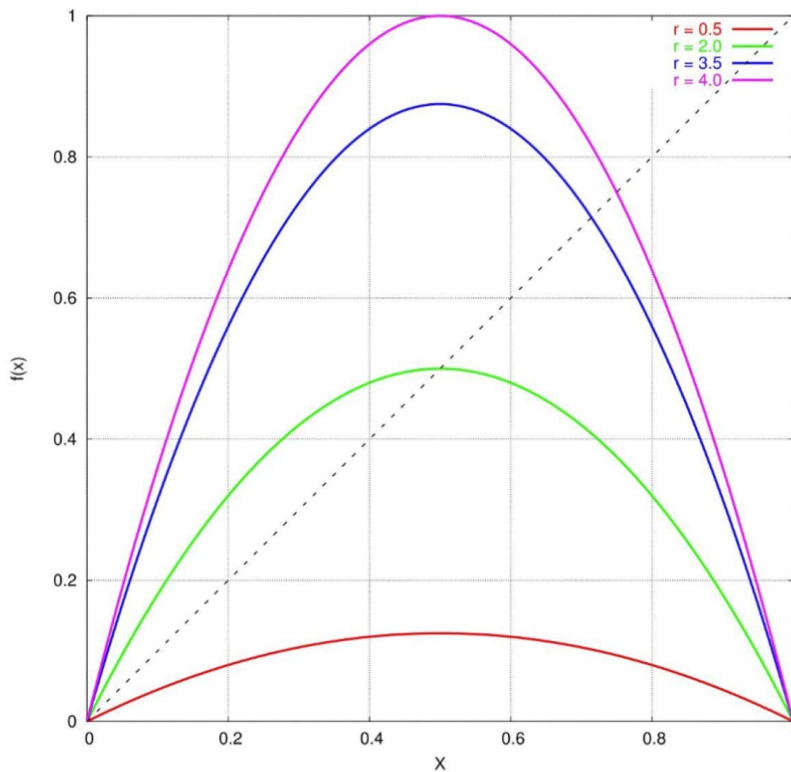


Abb. 51: Logistische Gleichung $f_r(x) = rx(1 - x)$ bei vier verschiedenen r-Werten

Logistische Gleichung:

Mandelbrot war nicht der Erste, der sich mit nichtlinearen Phänomenen beschäftigt hat. Bereits 1845 entwickelte der belgische Mathematiker Pierre-François Verhulst eine Gleichung, die ein ideales Studienobjekt für Ordnungsmerkmale im Chaos bietet, die logistische Gleichung oder logistische Abbildung.⁸⁸

Gleichzeitig ist sie Grundlage der Beschreibung von dynamischen Systemen

in einer Reihe von Anwendungsgebieten geworden. Dazu gehören so unterschiedliche Bereiche, wie das gefährliche Kammerflimmern, bei dem das Herz von Menschen oder Säugetieren in einen unbeherrschbaren turbulenten Zustand geraten kann. Die Gleichung ist auch anwendbar auf Jäger-Beute-Systeme oder generell auf die Entwicklung von Tierpopulationen. Einzelne Parameter in der Gleichung werden deshalb in der Biologie z.B. als „Begrenzungsfaktor“ oder „Vermehrungsfaktor“ bezeichnet. Die logistische Gleichung ist eine Abbildung f , die eindimensional und quadratisch ist.⁸⁹ Durch Iteration entsteht der nächste diskrete Wert x_{n+1} , $n = 0, 1, 2, 3, \dots$:

⁸⁸ In diesem Beitrag werden logistische Gleichung, logistische Abbildung und logistische Parabel synonym verwendet.

⁸⁹ Formeln und Argumentation siehe z.B.

<https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/logistische-gleichung/6896>. Grafik:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Feigenbaum-Konstante>

$$x_{n+1} = f(x_n) = r \cdot x_n(1 - x_n)$$

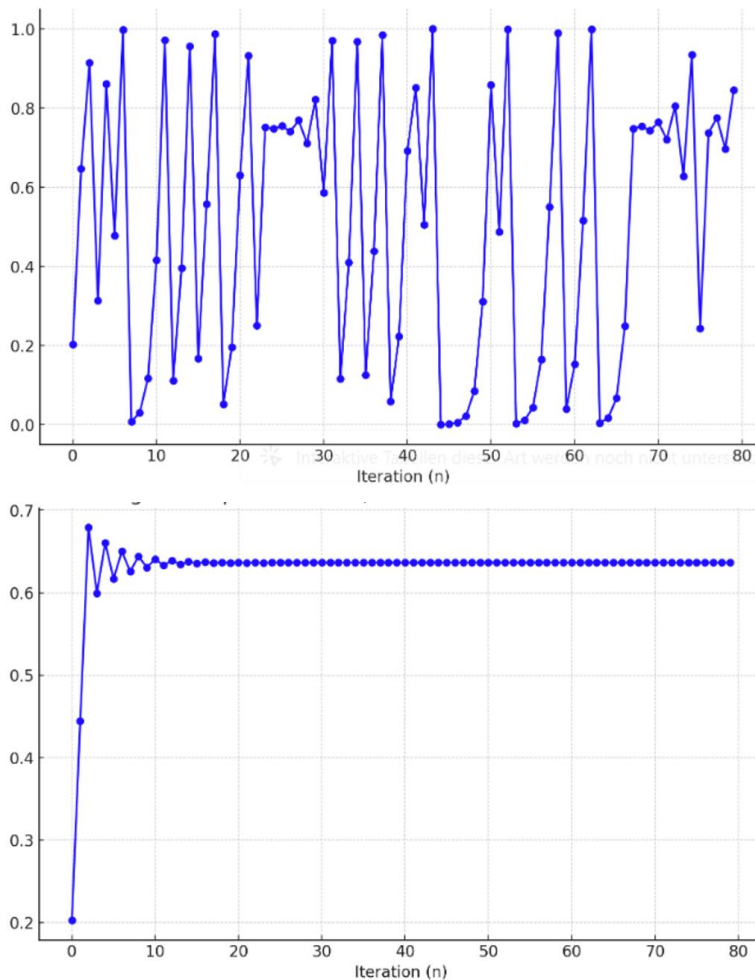


Abb. 52: Oben Logistische Gleichung mit Startwert $x_0=0,1882550$ und $r=4$: Es ist keine Ordnung zu erkennen. Unten $r=2,75$. Alle Anfangswerte konvergieren zum gleichen Endwert.

Die x -Werte liegen im Intervall $[0,1]$. Der Verlauf der Funktionswerte wird von r bestimmt. Die Abb. 51 zeigt den Kurvenverlauf am Beispiel von vier r -Werten:

$r=0,5$ (rot), $r=2,0$ (grün), $r=3,5$ (blau) und $r=4,0$ (magenta).

Die Fixpunkte liegen auf der Winkelhalbierenden bei $x=0$ und $x=1-\frac{1}{r}$ (außer $r=0,5$, rot).

Betrachtet man die Entwicklung des Systems, so erkennt man die entstehende relativ komplexe Dynamik. Ab $r \approx 3,45$ setzt eine zunehmende Komplexität ein. Das Diagramm wird ein Fraktal, das Verhalten wird chaotisch und hängt sensitiv vom Parameter r

ab. Bei der folgenden Abb. 53 wurde $r = 2,4$ bis $r = 4$ variiert ($0 \leq x_n \leq 1$). Es ergibt sich eine berühmte Werteverteilung, benannt nach einem Pionier der Chaostheorie, Mitchell Feigenbaum.

Ein wichtiger Begriff in der Chaostheorie ist die Bifurkation und die damit verbundene Periodenverdoppelung. Der erste Bifurkationspunkt liegt im Feigenbaum Diagramm bei: $r=3,0$, die zweiten beiden Bifurkationspunkte bei $r = 1 + \sqrt{6} = 3,4494 \dots$

Iterationen erfolgen mit einem Startwert $0 \leq x_0 \leq 1$. Jedes $f(x_n)$ wird in die logistische Formel eingesetzt und ergibt ein neues x_{n+1} .

Die eigentliche Variable ist aber r . Es ergeben sich in Abhängigkeit von r folgende Fälle:⁹⁰

- Nach einigen Iterationen erhält man 0 für $0 \leq r \leq 1$
- Liegt r zwischen 1 und 3 stellt sich ein Grenzwert ein, ein sogenannter Attraktor.
- Bei $3 \leq r \leq 1 + \sqrt{6}$ ist eine Bifurkation zu beobachten. Die Folge wechselt zwischen zwei Attraktoren mit Ausnahme der Startwerte 0, 1, $r - \frac{1}{r}$.
- Bei $1 + \sqrt{6} \leq r \leq \approx 3,54$ beobachtet man, noch deutlich separiert, vier Attraktoren.
- Dann stellen sich in rascher Folge Periodenverdoppelungen ein. Bei genügend feiner Auflösung kann man 8, 16, 32, usw. Attraktoren identifizieren.
- Bei ca. $r \approx 3,54$ beginnt chaotisches Verhalten.

Als Fixpunkt von f bezeichnet man Punkte, in der $f(x)=x$ ist. Bei eindimensionalen Abbildungen sind die Fixpunkte die Schnittpunkte von f mit der Winkelhalbierenden.

Das Quadrat von f hat die Fixpunkte:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{r}\right) \left(\frac{2}{3}\right)} \right)$$

Das ursprüngliche System bewegt sich also immer zwischen den beiden Zuständen x_1 und x_2 . Für weitere kritische Werte von r findet jeweils eine Periodenverdopplung statt. Orbits der Periode 2 lassen sich gerade noch analytisch berechnen, aber weitergehende Rechnungen sind kaum genau möglich.

Analysiert man das Verhältnis der Abstände bzw. Längen zwischen zwei Bifurkationspunkten, so strebt dieses gegen eine universelle, mathematische Konstante, ebenfalls benannt nach Mitchell Feigenbaum. Sei r_k der k -te Wert von r . Dann wird der Grenzwert δ konstant.⁹¹

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = 4,6692016090 \dots$$

⁹⁰ Vergleiche <http://walter.bislins.ch/blog/index.asp?page=Analytische+Lösung+für+die+erste+Bifurkationsstelle+im+Feigenbaumdiagramm>

⁹¹ Mitchell F. Feigenbaum, Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations, Journal of Statistical Physics, Vol 19. No.1, 1978, S. 25-52

Auch das Verhältnis der Breiten bildet als Grenzwert eine universelle Konstante $\alpha = 2,5029078 \dots$

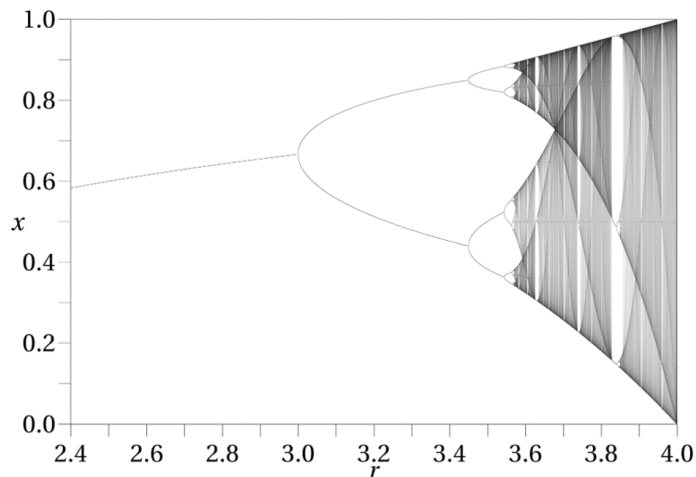


Abb. 53: Feigenbaum-Konstante. Zumindest 3 der Bifurkationspunkte sind gut erkennbar. Die weiteren verlieren sich nur scheinbar im Chaos.

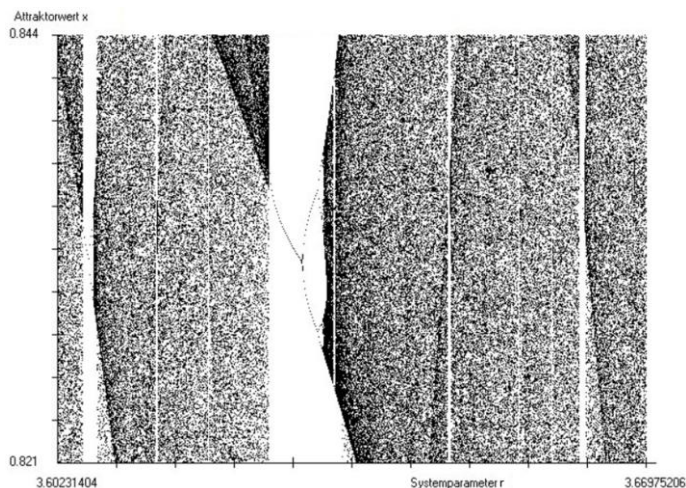


Abb. 54: Inseln der Stabilität im Chaos

Abstände konvergiert gegen $\delta = 4,6692016090 \dots$ ⁹²

Man vermutet, dass die Feigenbaum-Konstante transzendent ist, aber der Beweis steht noch aus.

Diese universale Gesetzmäßigkeit ist nicht auf die logistische Parabel beschränkt. Wenn man diese z.B. durch die Sinus-Abbildung ersetzt:

$x_{n+1} = \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \sin(\pi \cdot x_n)$, so erhält man wieder nach fortgesetzter Periodenverdoppelung Chaos und das Verhältnis der

Intervall	Verhältnis
L_1/L_2	4,4495...
L_2/L_3	4,7515...
L_3/L_4	4,6562...
L_4/L_5	4,6683...
L_5/L_6	4,6686...

Abb. 55: Das Verhältnis der Intervalle strebt zu δ

⁹² Weitere Beispiele: <https://de.wikipedia.org/wiki/Sattel-Knoten-Bifurkation>

Dies ist unter dem Begriff Universalität bekannt. Scheinbar unzusammenhängende Phänomene haben gemeinsame oder zumindest verwandte Gesetzmäßigkeiten. Beispiele aus der Physik sind Phasenübergänge beim Magnetismus oder bei Übergängen in einen anderen Aggregatzustand. Hier ist es sogar das Feigenbaumszenario mit denselben Naturkonstanten. Die Ergebnisse sind nicht auf die Mathematik beschränkt. So

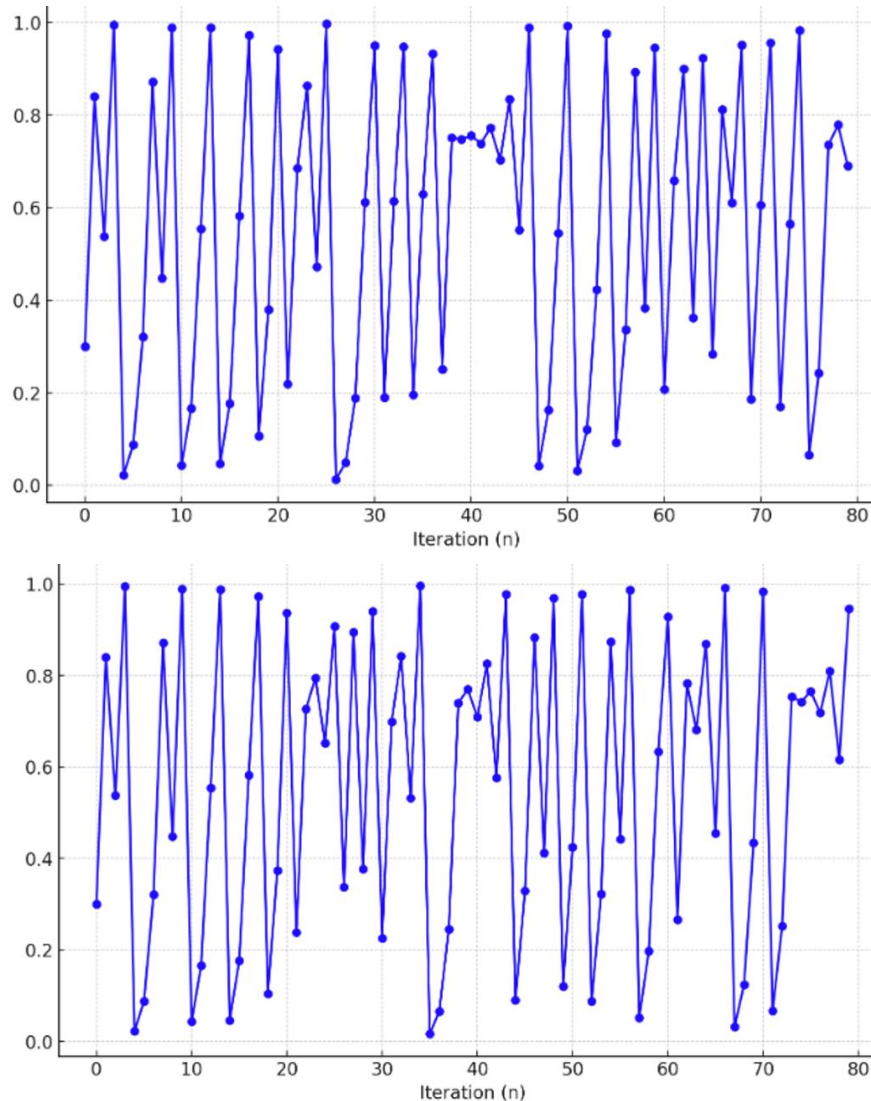


Abb. 56: Zwei Orbits für $r=4$, die sich beim Startwert $x_0=0,300000000$ bzw. $x_0=0,300000001$ um ein Milliardstel unterscheiden.

konnte ein Forschungsteam um den Experimentalphysiker Albert Libchaber die Verdopplung der Periodizität in flüssigem Helium beobachten.⁹³ Mittlerweile liegt auch ein streng mathematischer Beweis vor, dass es sich nicht um zufällige

⁹³ A. Libchaber, C. Laroche, S. Fauve. Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement. Journal de Physique Lettres, 1982, 43 (7), pp.211-216. [ff10.1051/jphyslet:01982004307021100ff.](https://hal.science/jpa-00232033/document) [ffjpa00232033f.](https://hal.science/jpa-00232033/document) Online: <https://hal.science/jpa-00232033/document>

Übereinstimmungen bei einzelnen Beispielen handelt.⁹⁴ Diese Universalität macht die ansonsten schwer einheitlich zu definierende Chaostheorie, zumindest in diesem Aspekt, zu einer „echten“ Theorie mit wissenschaftlicher Vorhersagekraft.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass es für Bifurkationen von Fixpunkten verschiedene Normalformen gibt. Sie sollen zuerst am Beispiel der Änderung eines eindimensionalen Parameters $\mu \in \mathbb{R}$ in einfachen einparametrischen Differentialgleichungen verdeutlicht werden. Nach einem Satz treten generisch vier Bifurkationstypen gemäß folgenden Normalformen auf:

- | | |
|-------------------------------|--|
| a) Tangentialbifurkation | $M = \mathbb{R}^1: \quad \dot{x} = \mu - x^2$ |
| b) Transkritische Bifurkation | $M = \mathbb{R}^1: \quad \dot{x} = \mu x - x^2$ |
| c) Heugabel-Bifurkation | $M = \mathbb{R}^1: \quad \dot{x} = \mu x - x^3$ |
| d) Hopf-Bifurkation | $M = \mathbb{R}^2: \quad \begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y - x(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + \mu y - y(x^2 + y^2) \end{aligned}$ |

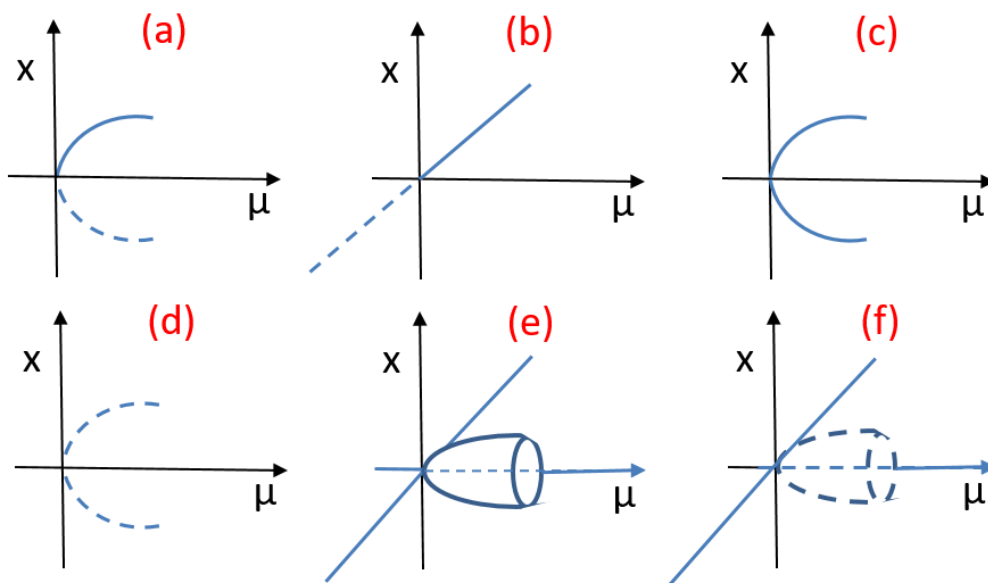


Abb. 57: Typische Bifurkationen von Fixpunkten einparametrischer Differentialgleichungen: (a) Tangentialbifurkation, (b) transkritische Bifurkation, (c) superkritische Heugabelbifurkation, (d) subkritische Heugabelbifurkation. (e) superkritische Hopf-Bifurkation, (f) subkritische Hopf-bifurkation (Ausgezogene Linien entsprechen stabilen Lösungen)

⁹⁴ Feigenbaum-Coullet-Tresser universality and Milnor's Hairiness Conjecture
Mikhail Lyubich, <https://arxiv.org/abs/math/9903201>

Analog zu Differentialgleichungen existiert Bifurkation von Fixpunkten einparametrischer iterierter Abbildungen, wie sie bei der logistischen Abbildung bereits angesprochen wurden. Sie haben das bekannte Bildungsprinzip

$$M = \mathbb{R}^1: \quad x_{k+1} = f(x_k, \mu)$$

Tangentenbifurkation: $f(x, \mu) = \mu + x - x^2$

transkritische Bifurkation $f(x, \mu) = \mu x + x - x^2$

Heugabel-Bifurkation $f(x, \mu) = \mu x + x - x^3$

Beispiel: Die hinlänglich bekannte logistische Parabel-Abbildung im Wertebereich $M=[0,1]$: $x_{k+1} = r x_k (1 - x_k), k = 0, 1, 2, \dots$

besitzt bei $r=1$ eine transkritische Bifurkation und anschließend bei $r=r_1, r_2, \dots$ eine Folge von superkritischen Periodenverdoppelungen, die sich bei r_∞ häufen. An den Stellen, an denen sich periodische Fenster öffnen, finden dagegen Tangentenbifurkationen statt.⁹⁵

Ordnung und Chaos – der Lyapunov Exponent

Gesucht ist ein Maß, wie schnell ein nichtlineares dynamisches System im Laufe der Iterationen in ein chaotisches Verhalten migrieren kann. Oder anders formuliert, wie sensitiv ein System für leichte Veränderungen der Anfangsbedingungen ist.

Die Abb. 58 verdeutlicht die Fragestellung, der Einfachheit halber im Eindimensionalen. Gegeben seien zwei Punkte x_0 und $x_0 + \varepsilon$, also im Abstand ε . Es wird die Iterationsfunktion f N-mal auf beide Punkte, (also f^N) angewendet und ermittelt, wie groß der Abstand $|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|$ nach N Iterationen geworden ist. Es ergibt sich (was explizit zu zeigen ist):

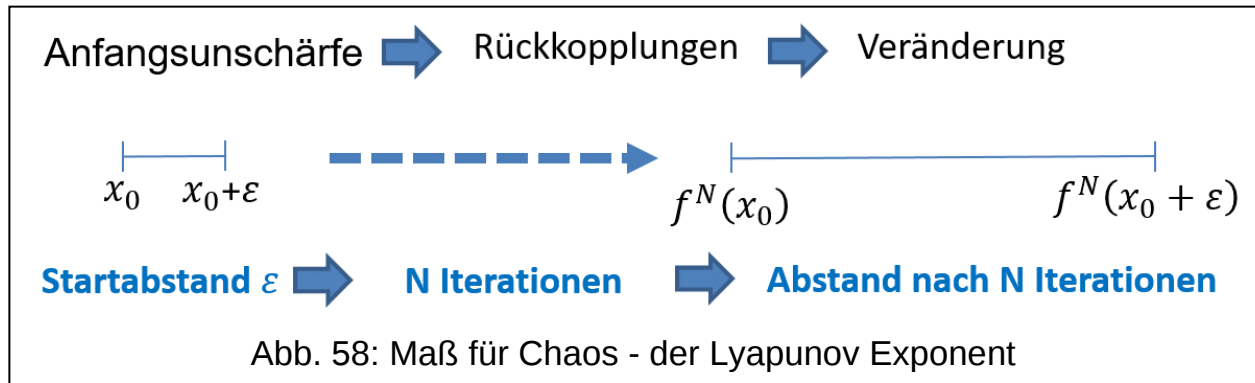
$$|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)| = \varepsilon e^{N\lambda(x_0)}$$

Die Auflösung nach $\lambda(x_0)$ und nach Grenzwertbildung für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $N \rightarrow \infty$ findet man die Beziehung

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)|$$

⁹⁵ Vergleiche Gottfried Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, S. 158-170

Dies ist insofern heuristisch plausibel, als fortgesetzte N-malige Anwendung von $f \circ f \circ f \circ \dots \circ f := f^N$ zu einem exponentiellen Wachstum des Fehlers ε führt. Das erklärt die e-Funktion in der Formel. Die Steigung der e-Funktion wird über die Ableitung ermittelt, deshalb führt die Grenzwertbildung bei $\lambda(x_0)$ zu einer Funktion f' . Die Summe geteilt durch N kann man als das durchschnittliche Wachstum infinitesimal kleiner Fehler in der Umgebung von x_0 verstehen. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass der Exponent λ nicht von x_0 abhängt. Das macht den Lyapunov Exponenten zu einem universellen Maß, wie sich eine



anfängliche Ordnung zu einem chaotischen Verhalten entwickeln kann.⁹⁶ Es ist klar, dass dies nur bei positivem λ erfolgen kann. Es ergeben sich folgende drei Fälle:

$\lambda > 0$, Sensitivität von den Anfangsbedingungen, also chaotisches Verhalten

$\lambda = 0$, neutrales Verhalten

$\lambda < 0$, das System konvergiert gegen einen Attraktor (s.u.)

Diese Systemzustände müssen nicht getrennt vorliegen. Die Entdeckung verdanken wir dem australischen Physiker und Biologen Robert May Anfang der 1970er Jahre. Er war ähnlich wie lange vor ihm Verhulst an der Entwicklung von Populationen interessiert und untersuchte Systemübergänge, hin zum chaotischem Verhalten. Wie Verhulst verwendete er die logistische Gleichung, allerdings hatte er leistungsfähige Computer zur Verfügung. May entdeckte, dass nach Bifurkationen sich je nach Geburtenrate das System auf einen Attraktor zubewegt oder zwischen zwei Attraktoren pendelt. Aber auch mitten in der chaotischen Phase können „Inseln der Ordnung“ entstehen. Diese „Inseln“ entstehen durch einen Prozess der Selbstorganisation und verschwinden wieder in anderen Parameterbereichen. Man nennt das Phänomen Intermittenz. Es kann als Ordnung im Chaos oder umgekehrt als chaotische Intermittenzen in vorwiegend geordneten Zuständen auftreten. Briggs und Peat zeigen Beispiele auf in einem Kapitel mit dem bezeichnenden Titel „Intermittenz: das

⁹⁶ Vergleiche Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S. 45f

Sandwich im Chaos“.⁹⁷ Sie stellen an dieser Stelle die Grundsatzfrage: „Sind die einfachsten Ordnungen und das Chaos eines Systems beides Züge ein und desselben unteilbaren Prozesses? Die Erscheinung der Intermittenz legt es sehr nahe, dass dies der Fall ist.“⁹⁸ Auch Mandelbrot beschäftigte sich mit dem Phänomen der Intermittenz in Zusammenhang mit Störungen der Datenübertragung über Telefonleitungen, wie sie in den 1960er Jahren praktiziert wurde und Reduktion von Störungen erhebliche wirtschaftliche Bedeutung hatte.⁹⁹ Er stellte fest, dass die höchst unregelmäßige Verteilung der Intermittenzen an die Cantor-Menge erinnert. Tatsächlich stimmte die Fehlerverteilung bei der Datenübertragung mit der Cantor-Menge in ihren wesentlichen Elementen überein. Insbesondere tritt zu keinem Zeitabschnitt der Datenübertragung eine regelmäßige Fehlerverteilung auf. In jedem fehlerhaften Abschnitt gibt es auch immer wieder Zeiträume mit fehlerfreier Übertragung.

Das Verhältnis zwischen fehlerfreien und fehlerhaften Abschnitten ist sogar in verschiedenen Zeitmaßstäben selbstähnlich. Das kann sogar unabhängig von

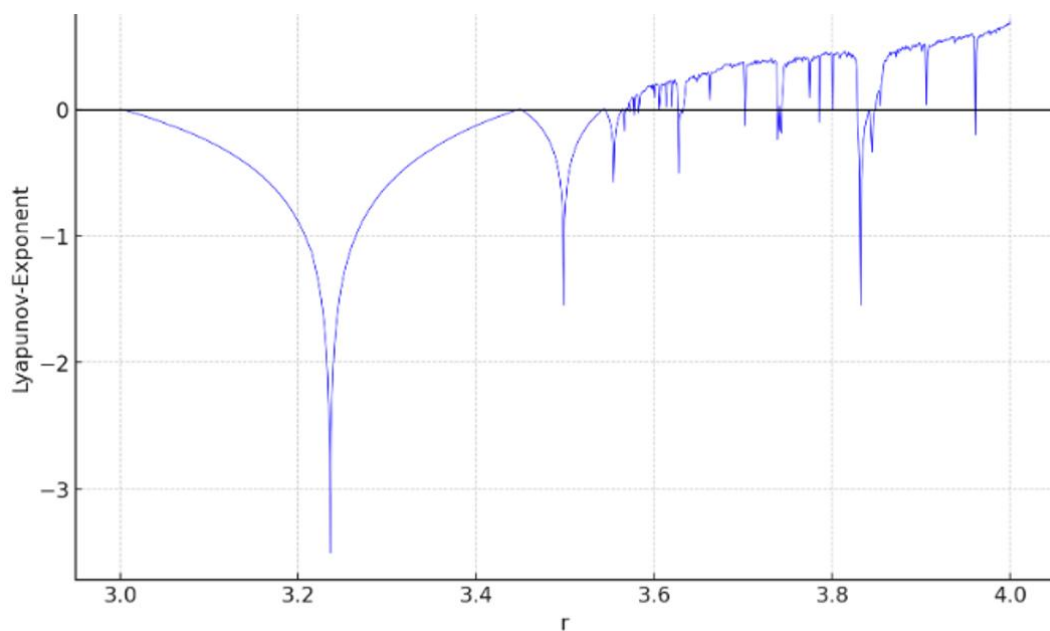


Abb. 59: Entwicklung des Lyapunov-Exponenten in der logistischen Abbildung von $3 \leq r \leq 4$.

⁹⁷ Briggs, John, Peat, F. David; Die Entdeckung des Chaos, Hanser, München Wien 1990, S. 86, Beispiele: Niederfrequenzrauschen, die schwankende Länge eines Erdentages etc. Es wird auch nach wie vor vermutet, dass große Rechnernetze durch Intermittenz von plötzlichem Chaos bedroht sind.

⁹⁸ Ebenda S. 87

⁹⁹ Siehe auch den Hinweis in seiner Autobiographie: Mandelbrot, Benoit B., Schönes Chaos, Piper München Zürich 2013, S. 357

Messungen im Stunden- oder Sekundenmaßstab sein.¹⁰⁰ Mandelbrot weist im Abschnitt „Äußere Schranken und extrapolierter Cantor-Staub“ darauf hin, dass Cantor bei der Entdeckung der Cantor-Menge noch kaum sein ursprüngliches Feld, das Studium trigonometrischer Reihen, verlassen hatte. Diese hängen mit periodischen Funktionen zusammen und deshalb kann die einzig mögliche Extrapolation in unendlichen Wiederholungen bestehen. Die innere und äußere Schranke wird ε bzw. Ω genannt und bezeichnet auch das kleinste bzw. größte „Merkmal“ (Zitat Mandelbrot) einer Menge. Cantor hat sich auf $\Omega = 1$ beschränkt. Die Selbstähnlichkeit wird aber durch Wiederholungen zerstört. Man muss deshalb den Initiator zur Interpolation verwenden um zu einem anderen Ω zu kommen (z.B. das für Fourier-Reihen passende 2π). So kann man die Verteilung des Cantor-Staubes trotzdem für die Beschreibung der Fehlerverteilung bei der Datenübertragung nutzen.¹⁰¹

Kausale Zusammenhänge

Fixpunkte x^* , also Punkte in denen $x^* = f(x^*)$ ist, sind von entscheidender Bedeutung für das dynamische Verhalten der Abbildung. Sie selbst sind zwar invariant. Die Steigung in diesen Punkten bestimmt aber die Dynamik. Ein Attraktor zieht benachbarte Orbits an.

Bei der logistischen Abbildung ist dabei die Ableitung am Fixpunkt $|f'(x^*)| < 1$. Es gibt aber auch abstoßende Elemente. Dort ist die Ableitung $|f'(x^*)| > 1$. Dafür wird der Begriff „Repeller“ verwendet. Punkte mit $|f'(x^*)| = 1$ beeinflussen Punkte in ihrer Umgebung nicht, sind also „indifferent“, Punkte mit $|f'(x^*)| = 0$ sind „superstabil“. Diese Argumentation lässt sich auf größere Perioden der Länge p , also p -periodische Punkte, verallgemeinern.

Die möglichen Fälle sollen anhand der vier Grafiken Abb. 60 A-D am Beispiel der logistischen Abbildung demonstriert werden.¹⁰²

$$x_{n+1} = f(x_n) = r \cdot x_n(1 - x_n)$$

¹⁰⁰ Originalquelle: Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, Basel, Boston, Birkhäuser 1987, S. 86-91. Vergleiche auch den Aufsatz von Stefan Frerichs, Grundlagen der Chaostheorie, https://www.stefre.de/Grundlagen_der_Chaostheorie.pdf

¹⁰¹ Ebenda Mandelbrot, S.89

¹⁰² Beispiele der Abb. 60A-D aus der Facharbeit von Andreas Schmid, https://www.fraktalwelt.de/systeme/as_weg_ins_chaos.pdf (neu erstellt mit ChatGPT 4o) mit Dank für die Idee und die freundliche, (nicht genutzte) Abdruckgenehmigung.

Die Fixpunkte liegen dort auf der Winkelhalbierenden. Es werden vier Segmente oder Intervalle, in denen sich r bewegt, beispielhaft untersucht. Die Anhaltspunkte für die Wahl der Intervalle für r liefert das Feigenbaum-

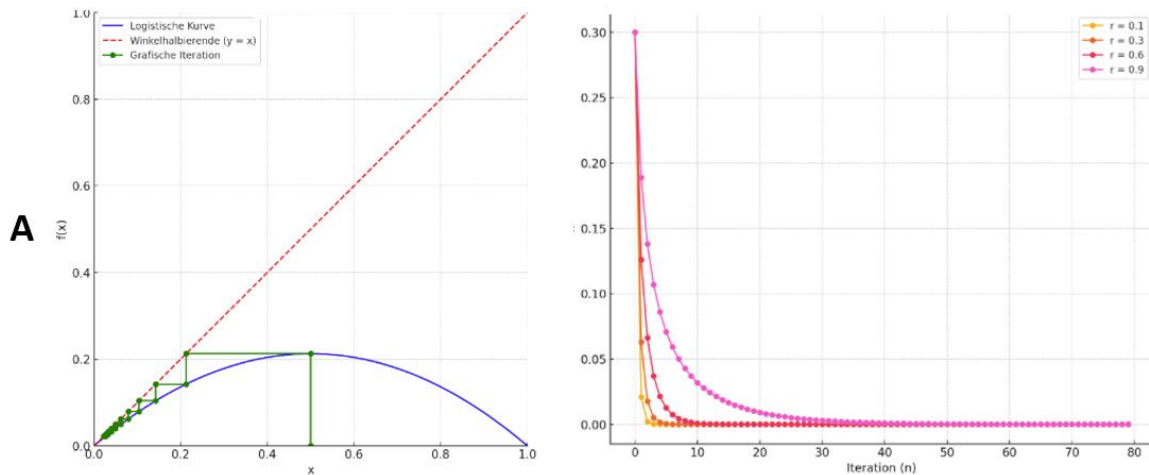


Abb. 60A: $0 < r \leq 1$. Einziger Fixpunkt $x_0=0$, $f'(x_0)=r$. Konsequenz: Die Population stirbt mit den Jahren aus. (Diagramm $r=0,85$, $x_0=0,5$)

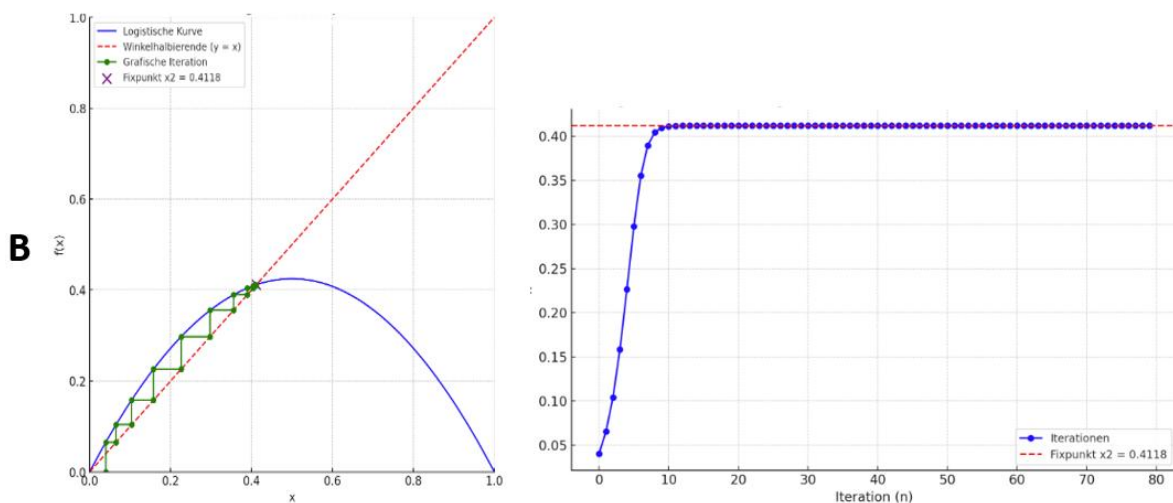


Abb. 60B: $1 < r \leq 3$. $x_1^* = 0$, $f'(0) = r$. Weiterer Fixpunkt $x_2^* = rx - rx^2 = 1 - \frac{1}{r}$
 $|f'(x_2^*)| = |r - 2rx_2^*| = |2 - r| \leq 1$. Population konvergiert mit $n \rightarrow \infty$.
 (Diagramm $r=1,7$, $x_0=0,04$, Fixpunkt $x_2^*=0,4118...$)

Diagramm. Das langfristige dynamische Verhalten wird auf der rechten Seite durch die Populationsentwicklung, wie sie bereits Verhulst analysiert hatte, grafisch angezeigt

Untersucht man solche einfachen Beispiele mit Hilfe der Mathematik und mit Hilfe der Informatik, so kann man bei fortgesetzten Iterationen $f^n(x)$ drei prinzipielle Lösungsmuster erkennen:

- 1) Die Funktionswerte $f^n(x)$ bewegen sich periodisch.
- 2) Die Funktionswerte $f^n(x)$ bewegen sich auf einen Fixpunkt.
- 3) Die Funktionswerte $f^n(x)$ bewegen sich „zufällig“ (chaotisch).

Als Untersuchungsfunktion f soll wieder die logistische Gleichung dienen, wobei hier sofort $r=4$ gesetzt wird, also

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4 \cdot x_n(1 - x_n) = 4x_n - 4x_n^2$$

Im allgemeinen Fall, über die logistische Abbildung hinaus, sind die Fälle 1), 2) und 3) dabei nicht leicht zu unterscheiden. Oft ist eine erhebliche Anzahl an Iterationen erforderlich.

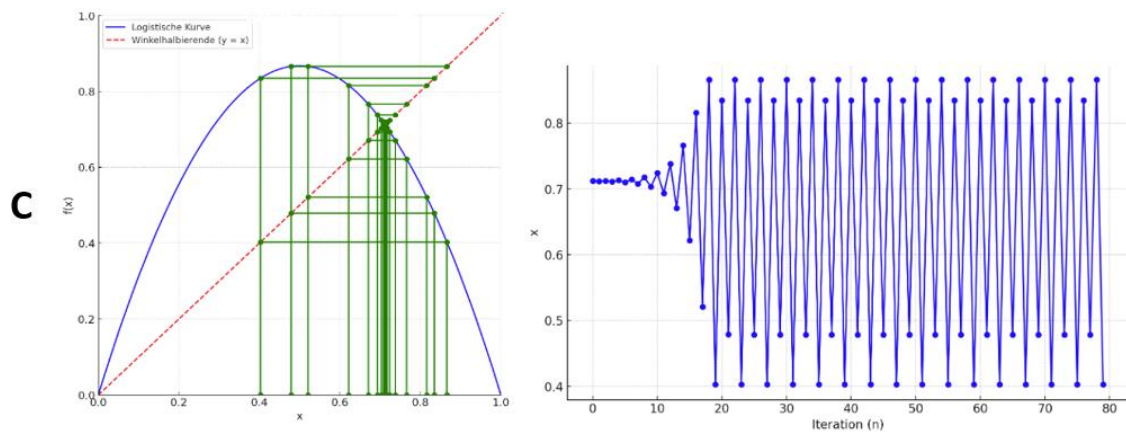


Abb. 60C: $3 < r \leq 3,57$. Es entstehen periodische Zyklen der Periode 2^p (Diagramm mit $r=3,47$, $x_0=0,71208$)

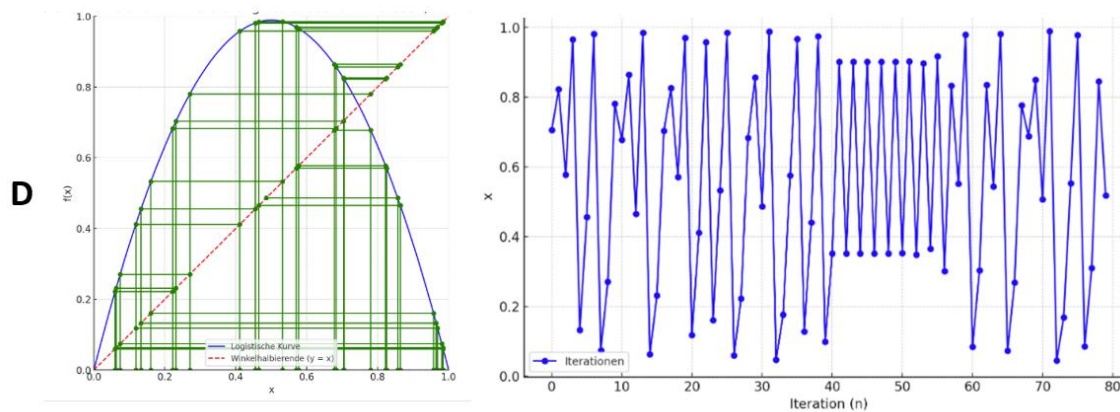


Abb. 60D: $3,57 < r \leq 4$. Das Diagramm rechts beginnt chaotisch, wird dann bei n -Werten (hier rund um $n=40$) periodisch und geht dann wieder in chaotisches Verhalten über. (Diagramm mit $r=3,9552$. $x_0=0,705$)

Außerdem sollte man sich klar machen, dass $4x_n(1 - x_n) = 4x_n - 4x_n^2$ natürlich aus Sicht der Mathematik gleich ist, aus Sicht der Informatik jedoch nicht unbedingt. Heutige Computer schneiden nicht einfach am Ende der Genauigkeit Stellen ab, sondern runden.

Die Zahl π , auf 4 Dezimalstellen genau, ist also nicht 3,1415, sondern wegen der 9 an der 5. Nachkommastelle 3,1416. Dieser kleine Unterschied macht sich in additiven linearen Beziehungen viel weniger stark bemerkbar als in der quadratischen nichtlinearen Form.

Ein Beispiel für eine noch vergleichsweise mäßig lange Periode der Länge 436 ist der Anfangswert $\sin 2$ in der logistischen Gleichung. Im Prinzip sind in anderen Beispielen/Anfangswerten beliebig lange, aber endliche Perioden nachweisbar.

Eine sehr kurze Periode der Länge 3 hat z.B. $x_n = \sin^2(\frac{\pi}{7})$ als Anfangswert in der logistischen Gleichung:

$$\sin^2(\frac{\pi}{7}) \rightarrow \sin^2(\frac{2\pi}{7}) \rightarrow \sin^2(\frac{4\pi}{7}) \rightarrow \sin^2(\frac{\pi}{7})$$

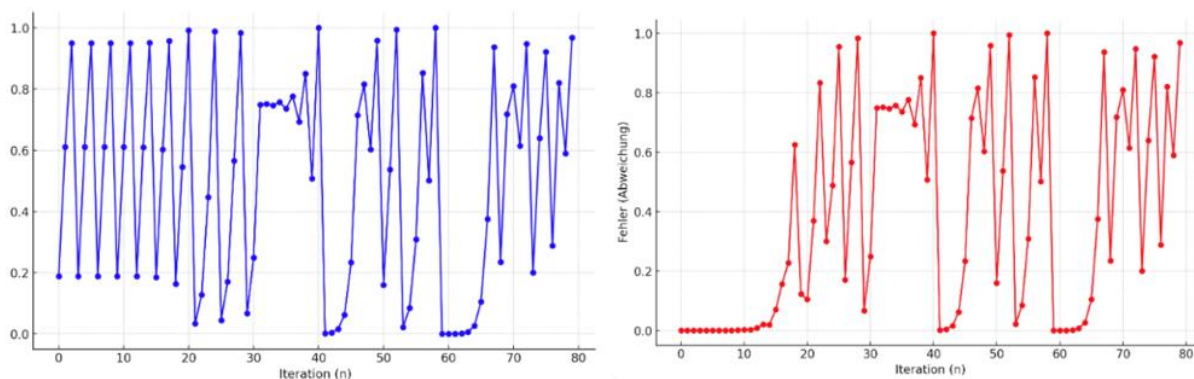


Abb. 61: Auswirkungen des Rundungsfehlers auf Periodik und Sensitivität.

Dies ist die mathematische Sicht. Benutzt man jedoch die Dezimalform, so wird $\sin^2 \frac{\pi}{7} = 0,1882550 \dots$ als Startwert benutzt. Je nach Rechner kann man bei einfacher Gleitkommagenauigkeit von einem Fehler von ca. 0,000000005 ausgehen. Die Grafik verdeutlicht die Sensitivität dieses Fehlers. Links sieht man, wie die Periode 3 etwa in der Mitte instabil wird. Rechts ist die Fehlerentwicklung durch die iterativ verstärkten Rundungen dargestellt.¹⁰³

Welche kausalen Rückschlüsse und Erkenntnisse kann man unter Berücksichtigung von (reiner) Mathematik, Informatik und physikalischer Prozesse aus diesen Beispielen ziehen? Einfache Repräsentanten in der reinen

¹⁰³ Grafik und Argumentation siehe Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Bausteine der Ordnung Fraktale, Springer / Klett Cotta, 1992, S. 56-57

Mathematik sind vor allem Problemstellungen, die sich mit kausalen, algorithmischen Methoden lösen lassen. Doch schon für gekoppelte Gleichungssysteme kann man i.a. keine rein analytischen Lösungen finden. Man kann sie heute in der Regel leicht numerisch lösen (integrieren), kommt damit aber wieder in den Einflussbereich der digitalen Probleme. Allerdings spielen hier kaum Rückkopplungseffekte eine Rolle. Gemäß nachfolgender Abb. 62 liegt hier in der Regel eher schwache Kausalität vor, insbesondere natürlich bei bijektiven Abbildungen.

In Systemen, die sich linear verhalten oder bei klassischen stetigen und sogar differenzierbaren Funktionen findet man starke Kausalität. Auch wenn man den Computer mit unvermeidlichen Rundungsfehlern einsetzt, kann man in vielen Fällen noch gut mit starker Kausalität umgehen. Es gibt vergleichbar wenige Anwendungsfälle, in denen diese Rundungsfehler bei im Prinzip starker Kausalität zumindest formale Probleme machen können. Ein altes Beispiel ist der „fehlende Pfennig“ bei den ersten Datenbankimplementierungen. Das darf in Bankbelegen nicht vorkommen. Als Laplace seinen allwissenden Dämon erschuf, hatte er in überspitzter Form die schwache Kausalität verwendet. Später hat insbesondere James Clark Maxwell 1873 weitergesehen. Er dachte über

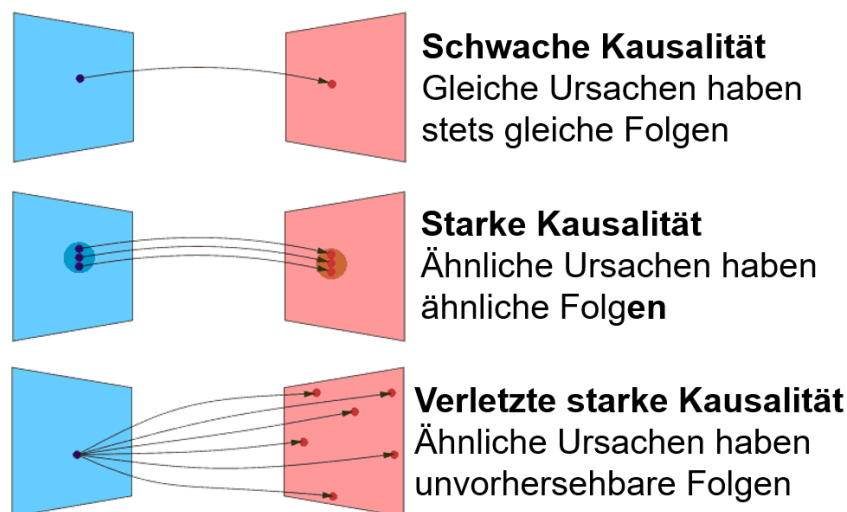


Abb. 62: Deterministisches Chaos und Kausalität

Determinismus und Willensfreiheit nach und schrieb:

*It is manifest that the existence of unstable conditions renders impossible the prediction of future events, if our knowledge of the present state is only approximate, and not accurate.*¹⁰⁴ (Es ist offensichtlich, dass die Existenz

¹⁰⁴ Maxwell J.C., Science and Free Will in: Campbell, Lewis, Garnett, William, The Life of James Clark Maxwell, New York, Johnson Reprint Corporation, 1969, pp. 434-444, Chapter XIV, Maxwells Einzelbeitrag online: https://www.informationphilosopher.com/solutions/scientists/maxwell/science_and_free_will.html

instabiler Bedingungen die Vorhersage künftiger Ereignisse unmöglich macht, wenn unser Wissen über den gegenwärtigen Zustand nur ein angenähertes und kein genaues ist.)

Doch weder Maxwell noch 30 Jahre später Henri Poincaré drangen mit der Meinung durch, die heute als Unterschied zwischen schwacher und starker Kausalität bekannt ist.¹⁰⁵

Am Beispiel der logistischen Gleichung mit quadratisch wachsendem Fehler bei Iterationen kann man als dritte Variante die verletzte starke Kausalität des Chaos verdeutlichen.

Vorher sei auf Abb. 3 (Strecken-Falten-Kleben) hingewiesen. Mathematisch wird sie durch die Sägezahn-Funktion als quadratische Iteration beschrieben.

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{wenn } x < 0,5 \\ 2x - 1 & \text{wenn } x \geq 0,5 \end{cases}$$

Verblüffend ist die zunächst unerwartet große Komplexität, die sich hinter den einfachen Formeln verbirgt. In der physikalischen Welt haben dissipative Systeme ähnliche Erscheinungsfolgen. Sie gehören ebenfalls in das Reich des deterministischen Chaos und werden noch weiter unten thematisiert.

Zeltabbildung:

Die logistische Abbildung ist auch aus historischen Gründen ein gutes Beispiel um chaotisches Verhalten zu demonstrieren. Noch einfacher ist die sogenannte Zeltabbildung T_s ¹⁰⁶ aufgebaut und sie verblüfft, wie sich mit einer derart (scheinbar) simplen Abbildungsvorschrift chaotisches Verhalten erzeugen lässt. Sie bildet das Intervall $[0,1]$ in das Intervall $[0,1]$ ab und ist folgendermaßen definiert:

$x_{n+1} = s \cdot x_n$, wenn $x_n \leq 0,5$ und

$x_{n+1} = s \cdot (1 - x_n)$, wenn $0,5 < x_n \leq 1$ oder formal für $s=2$

$$T_2: [0,1] \rightarrow [0,1], x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{wenn } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{wenn } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Um den Schmetterlingseffekt zu demonstrieren, muss man die Zeltabbildung n-fach hintereinander auf den Anfangswert x_0 anwenden und das Ergebnis als neue Abbildung F_{x_0} betrachten. Die rechte, blaue Kurve zeigt dann die

¹⁰⁵ Poincaré, H.; Wissenschaft und Methode, Leipzig Berlin, Teubner, 1914, Hinweis siehe Peitgen, ebenda, S. 5

¹⁰⁶ Für den Fall $s=2$, also T_2 , siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Zeltabbildung>

Entwicklung der Unterschiede mit steigender Iterationenzahl bei den Anfangswerten $x_0 = 0,506$ und $x_0 = 0,506127$.

Die Zeltabbildung hat aber auch Periodik. Man betrachte $s=2$ und $x_0 = \frac{2}{5}$ und wende die Abbildungsvorschrift an:

$$x_1 = s \cdot x_0 = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$x_2 = s \cdot (1 - x_1) = 2 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5} = x_0$$

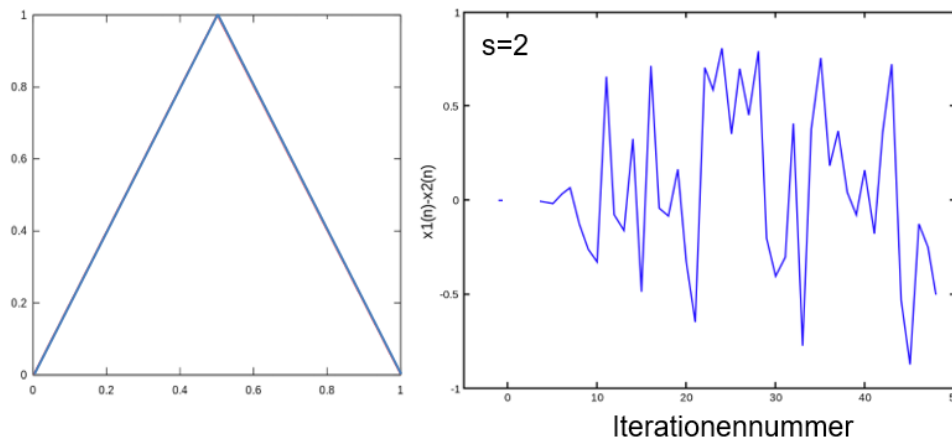


Abb. 63: Links Zeltabbildung und rechts ihr „Schmetterlingseffekt“

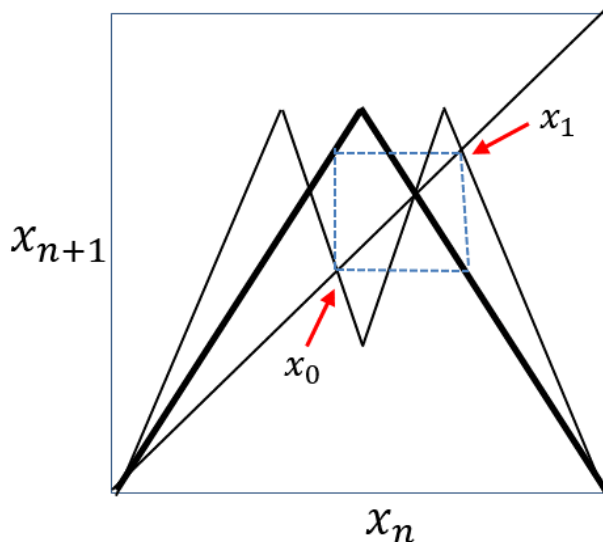


Abb. 64: Grafische Illustration einer 2-er Periodik bei der Zeltabbildung

Die Grafik zeigt einen 2-er Zyklus beispielhaft für $s > 1$. Die Doppelspitze ist die 2. Iteration (nicht maßstabsgerecht gezeichnet).

Man sieht aber auch, dass dieser Zyklus nicht stabil sein kann. Schon eine winzige Modifikation von x_0 verschiebt bei Folgeriterationen das x_0 und x_1 verbindende Rechteck und es entsteht wieder chaotisches Verhalten.

Insgesamt ist es offensichtlich, wie schnell sich der

„Schmetterlings-effekt“ bei dieser einfachen Abbildung zeigt.¹⁰⁷

Zusammenfassend kann man sagen: Für $s < 1$ gibt es nur den stabilen Fixpunkt 0 und damit keine Periodizität.

Bei jeder weiteren Iteration für $s > 1$ wird die Winkelhalbierende einmal mehr geschnitten und es entstehen M-ähnliche Faltungen. Die Steigung ist vom Betrag größer als 1.

An diesen Stellen ist eine Vielzahl von periodischem Verhalten möglich, sogar Perioden beliebiger Länge. Diese Fixpunkte sind aber alle instabil; bei immer

mehr „Zacken“ werden Voraussagen bei minimaler Änderung des Ausgangswertes immer schwieriger.¹⁰⁸

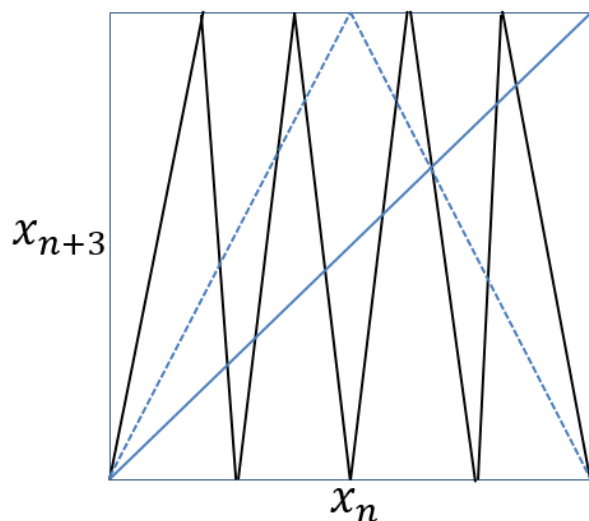


Abb. 65: Dritte Iterierte bei $s=2$

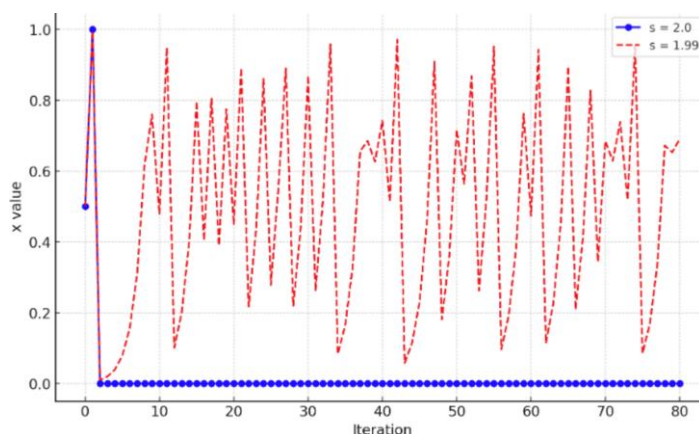


Abb. 66: Rasche Ausbreitung von Unterschieden Nähe $s=2$.

Die Zeltabbildung war deshalb auch eines der ersten Untersuchungsobjekte, bei denen es gelang, die chaotische Phase in der Nähe ihrer instabilen Fixpunkte zu synchronisieren.¹⁰⁹ Man kann dabei leichte Veränderungen am Parameter s als gezielte Störung der Steuergröße verstehen. Damit

wird erreicht, dass wieder ein Orbit erreicht wird, der das System an einem schnellen Abdriften in chaotisches Verhalten

hindert. Entsprechende Techniken und Verfahren sind von erheblicher Bedeutung in der physikalischen Kybernetik.

Streng genommen versucht man durch Steuerung ein nichtlineares System jeweils für kurze Zeit in eine

¹⁰⁷ Ausführlich widmet sich D. Peak und M. Frame in „Komplexität – das gezähmte Chaos“, S. 135-143, der Zeltabbildung. Vergleichbar einfache Abbildungen sind die Dreiecksfunktion und die Rechteckfunktion $\text{rect}(t)$. Sie repräsentieren (neben Sinus) Schwingungsformen und haben beide ihre Bedeutung in der Signalverarbeitung.

¹⁰⁸ Ebenda S. 142-143

¹⁰⁹ Siehe z.B. ebenda S. 225

näherungsweise lineare Dynamik zu versetzen, in der im begrenzten Rahmen wieder Voraussagen möglich sind. Dabei nutzt man aus, dass kleine Kurvenstücke in erster Näherung linear sind.

Seltsame Attraktoren, Tori und Solitonen

Allgemeine Eigenschaften:

Ein seltsamer Attraktor ist eine Struktur im Phasenraum, die für ein nichtlineares dynamisches System einen Einzugsbereich darstellt, auf das es sich bei geeigneten Anfangsbedingungen hin entwickelt. Dabei können beliebig kleine Änderungen des Anfangszustandes zwar zu vollkommen unterschiedlichen Verläufen führen. Das Verhalten des Systems ist also chaotisch. Die prinzipielle Struktur bleibt aber erhalten und bildet ein Fraktal, hat also eine gebrochene Dimension. Jede Bahn, die im Einzugsbereich des Attraktors startet, nähert sich beliebig stark an jeden Punkt des Attraktors an. Die einzelnen Verläufe sind also nicht separierbar. Die gewählten Beispiele sind eher einfach (z.B. nichtlinear quadratisch).

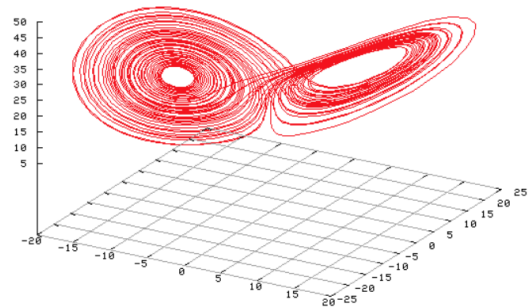


Abb. 67: Lorenz-Attraktor

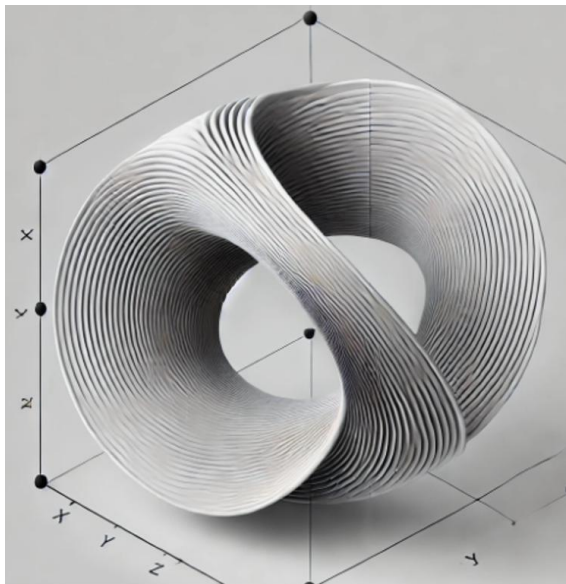


Abb. 68: Schematische Darstellung der Dynamik. Es handelt sich um eine Kombination von Streck-, Spalt- und Verschmelzungsprozessen.

Komplizierter wird es schnell bei Bahnkurven, die z.B. von einem hyperbolischen Fixpunkt ausgehen und von diesem wieder zurückführen (sogenannter homokliner Orbit, Beispiel Smalesches Hufeisen).

Es folgen einige Beispiele:

Lorenz-Attraktor

Eines der ersten Beispiele fand der Meteorologe Edward N. Lorenz (1917–2008) bereits im Jahr 1963. Es ging ihm um Modellierung hydrodynamischer Systeme in der Erdatmosphäre zur langfristigen Wettervorhersage. Die Parameter zur Kopplung von Konvektion und Wärmeleitung waren noch sehr speziell. Die Form des Attraktors ähnelt einem Schmetterling

und gab sowohl dem Fraktal als auch dem vermuteten Effekt („Schmetterlingseffekt“) seinen Namen.

Lorenz konstruierte drei Differential-gleichungen in den drei Raum-koordinaten X, Y und Z.¹¹⁰ Unter bestimmten Anfangsbedingungen der Parameter σ, ρ, β kommt man auf die fraktale Dimension von 2,401.¹¹¹ Im Prinzip beschreibt man damit auch das Bénard-Problem (s.u.).¹¹²

Hénon-Attraktor

Eines der einfachsten Beispiele eines Attraktors im 2-dimensionalen Raum ist der Hénon-Attraktor. Er ist charakterisiert durch die beiden Gleichungen

$$x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2$$

$$y_{k+1} = bx_k$$

Auch hier wird bei besserer Auflösung der letzte Punkt der allgemeinen Eigenschaften deutlich. Die einzelnen Linien lassen sich nicht separieren. Ein Querschnitt durch den Attraktor kann als bijektive Abbildung der Cantor-Menge verstanden werden.

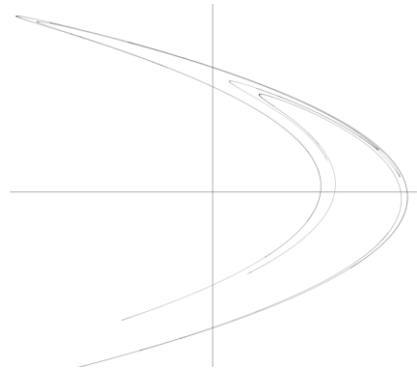


Abb. 69: Hénon-Attraktor

Rössler-Attraktor

Ein ästhetisch sehr schönes Beispiel ist der im Jahr 1976 von Otto Rössler entdeckte Rössler-Attraktor.¹¹³ Er wird durch das Gleichungssystem der folgenden drei Differentialgleichungen bestimmt:

$$\dot{x} = -(y + z)$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = b + xz - cz$$

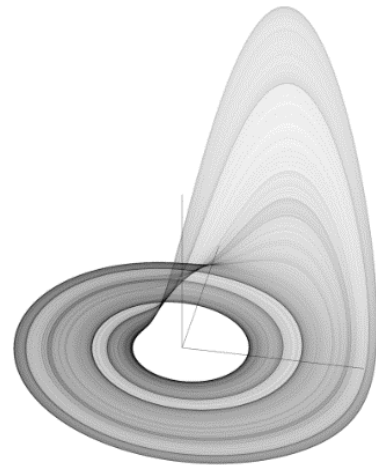


Abb. 70: Rössler-Attraktor

¹¹⁰ Siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system

¹¹¹ <https://doi.org/10.1080/02681119508806207>

¹¹² Zur mathematischen Diskussion siehe Jetschke, S. 130-138

¹¹³ O. E. Rössler: An Equation for Continuous Chaos. Physics Letters Vol. 57A no 5, pp 397-398, 1976.

O. E. Rössler: An Equation for Hyperchaos. Physics Letters Vol. 71A no 2,3, pp 155-157, 1979.

Die einzige Nichtlinearität in dem System ist durch den Term in der dritten Koordinate gegeben, die anderen Koordinaten weisen nur lineare Terme auf. Der Fluss auf dem Attraktor bewegt sich spiralförmig um einen instabilen

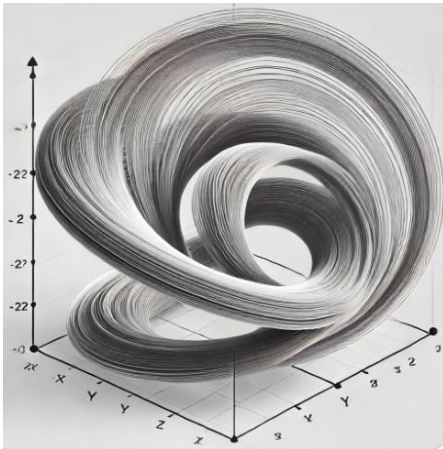


Abb. 71: Dynamik des Rössler-Attraktors

Fixpunkt. Der äußere Teil des Attraktors wird jedoch aufgrund der dort stärker wirkenden Nichtlinearität wieder in den inneren Teil injiziert und von dort aus sozusagen in die z-Richtung katapultiert. Durch die dabei entstandene Drehung hat der Attraktor Ähnlichkeiten mit einem Möbiusband.¹¹⁴ Der Rössler-Attraktor weist eine bemerkenswert hohe Dynamik aus. Die nebenstehende Abbildung vermittelt einen qualitativen Eindruck von der Dynamik. Die drei Schnitte zeigen, dass der Attraktor keineswegs so flach ist, wie es den Anschein hat. Zwei Startwerte, die anfangs sehr nahe zusammenliegen,

entfernen sich extrem stark voneinander. Betrachtet man zwei Trajektorien, die sich am Anfang nur minimal unterscheiden, so beträgt schon im dritten "Zyklus um den Fixpunkt" ihre Differenz mehr als das Zwanzigfache.

Thomas-Attraktor

Dieser Attraktor spielt bei der Bewegung von Teilchen eine Rolle, die sich in einem dreidimensionalen Kräftegitter bewegen und deren Flugbahn als durch Reibung gedämpft betrachtet werden kann. Er hat eine vergleichsweise einfache Form, denn die x-, y- und z-Variablen sind zyklisch symmetrisch. Diese einfache Form eignet sich besonders als Modellcharakter. Entdeckt wurde der Attraktor von René Thomas.¹¹⁵

Der Thomas-Attraktor wird durch drei Differentialgleichungen¹¹⁶ beschrieben, wobei b eine Konstante ist, die der Dissipativität des Systems entspricht und als Bifurkationsparameter fungiert. Für $b > 1$ ist der Ursprung der einzige stabile Fixpunkt.

$$\frac{dx}{dt} = \sin(y) - bx$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin(z) - by$$

$$\frac{dz}{dt} = \sin(yx) - bz$$

¹¹⁴ Zitiert nach <https://www.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Rössler-Attraktor> oder kaum ausführlicher unter <https://de.wikipedia.org/wiki/Rössler-Attraktor>

¹¹⁵ René Thomas; Deterministic Chaos seen in terms of Feedback Circuits, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 09, No. 10, pp. 1889-1905 (1999). <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127499001383>

¹¹⁶ Um die Bewegung zu verdeutlichen explizit nach der Zeit notiert

Bei $b=1$ erfährt das System eine sogenannte Pitchfork-Bifurkation (siehe Heugabel, auch Stimmgabel) und teilt sich in zwei attraktive Fixpunkte.

Wenn der Parameter weiter verringert wird, erfährt er bei

$b \approx 0,32899$ eine sogenannte Hopf-Bifurkation, wodurch ein stabiler Grenzzyklus entsteht. Der Grenzzyklus erfährt dann eine Periodenverdopplungskaskade und

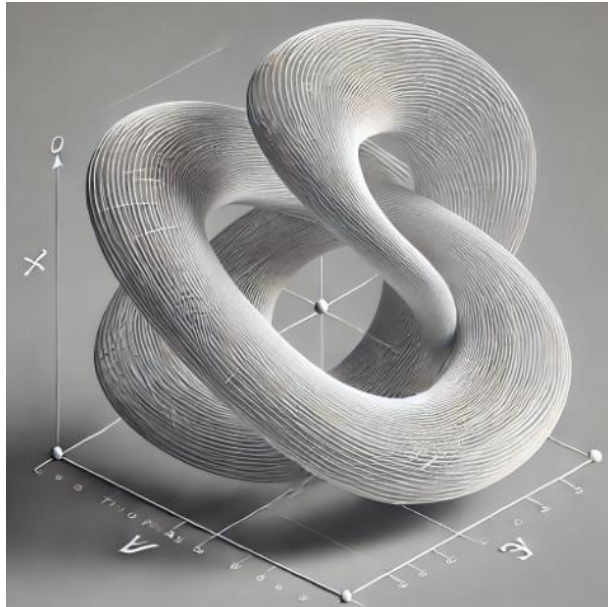


Abb. 72: Thomas-Attraktor und eine monochromatische Darstellung seiner Dynamik.

wird bei $b \approx 0,208186$ chaotisch. Darüber hinaus dehnt sich der Attraktor unkontrolliert aus und bei bestimmten Werten können bis zu sechs separate Attraktoren koexistieren. Die fraktale Dimension des Attraktors nimmt in Richtung 3 zu. Im Grenzfall $b=0$ fehlt dem System die Dissipation und die Trajektorie wandert ergodisch durch den gesamten Raum, (mit einer Ausnahme). Die Dynamik wurde als deterministische fraktionale Brownsche Bewegung beschrieben und weist eine anomale Diffusion auf.¹¹⁷

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass auch Kurven, die der Oberfläche eines Torus folgen, im allgemeinen Fall keiner Regelmäßigkeit folgen, also nur in Ausnahmefällen periodische Grenzzyklen ergeben. Man kann den Torus jedoch noch nicht zu den seltsamen Attraktoren zählen.

Nach den Beispielen zu seltsamen Attraktoren soll hier abschließend der Begriff allgemein charakterisiert werden.

Ein Attraktor ist in erster Linie ein Konzept aus der Mathematik der Chaostheorie, das sich auf Zustände oder Mengen von Zuständen bezieht, zu denen ein dynamisches System im „Laufe der Zeit“ tendiert. Attraktoren sind zwar besonders wichtig in der Untersuchung von nichtlinearen Systemen, die chaotisches Verhalten zeigen. Aber der Begriff ist universell anwendbar. Im Prinzip ist jeder Konvergenzpunkt ein Attraktor. In der Chaostheorie wird ein Attraktor als eine Menge von Punkten im Phasenraum eines dynamischen Systems definiert, zu der das System über die Zeit konvergiert. Es gibt verschiedene Arten von Attraktoren:

¹¹⁷ Eng zitiert nach

https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas%27_cyclically_symmetric_attractor

- Punktattraktoren: Ein einzelner Punkt im Phasenraum, zu dem das System konvergiert.
- Zyklische Attraktoren: Eine geschlossene Kurve, auf der das System oszilliert oder periodisch verläuft.
- Der Torus als Attraktor für Kurven auf seiner Oberfläche als Ausnahme.
- Seltsame Attraktoren (Strange Attractors): Komplexe, fraktale Strukturen, die in chaotischen Systemen auftreten und nicht-periodisches Verhalten zeigen.

Anwendungen: Attraktoren finden in vielen Bereichen Anwendung, insbesondere in der Physik, Biologie, Wirtschaft und Ingenieurwissenschaften:

- Physik: In der Thermodynamik und Fluidodynamik werden Attraktoren verwendet, um das Verhalten von Systemen zu modellieren, die chaotische Strömungen aufweisen.
- Biologie: In der Populationsdynamik können Attraktoren helfen, das langfristige Verhalten von Populationen zu verstehen, z.B. das Gleichgewicht zwischen Räubern und Beute.
- Wirtschaft: In der Wirtschaftstheorie können Attraktoren verwendet werden, um das Verhalten von Märkten zu analysieren, insbesondere in Bezug auf Gleichgewichtszustände und zyklische Trends.

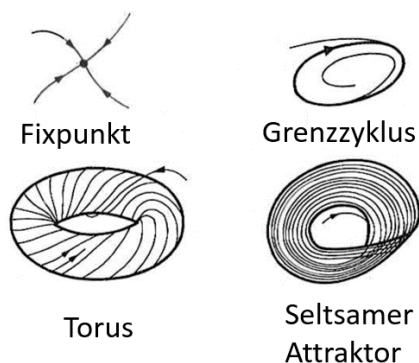


Abb. 73: Vier Arten von Attraktoren

- Ingenieurwissenschaften: In der Regelungstechnik werden Attraktoren genutzt, um stabile Zustände in dynamischen Systemen zu erreichen, z.B. in der Robotik oder bei der Regelung von Maschinen.

- Kunst und Musik: Auch in der generativen Kunst und Musik können seltsame Attraktoren verwendet werden, um komplexe, unvorhersehbare Muster zu erzeugen. Die musikalische Kunstform wird „Fraktale Musik“ genannt.¹¹⁸

Insgesamt sind Attraktoren ein zentrales Konzept in der Chaostheorie, das hilft, das Verhalten komplexer dynamischer Systeme zu verstehen und vorherzusagen.

Solitonen

An dieser Stelle soll ein nichtlineares Wellenphänomen erwähnt werden.

¹¹⁸ Siehe z.B. <https://www.mpg.de/9369189/fraktal-musik-jeff-porcaro>

Es wirkt manchmal wie ein Kuriosum der Natur, kann aber erhebliches Potential in Anwendungen entfalten. Zur Definition:¹¹⁹

Ein Soliton ist ein Wellenpaket, welches sich zugleich durch ein dispersives und ein nichtlineares Medium bewegt und sich trotzdem ohne Änderung seiner Form ausbreitet. Selbst wenn zwei Solitonen zusammenstoßen laufen sie nachher unversehrt weiter.

Das Phänomen wurde schon 1834 von dem schottischen Forscher John Scott Russell entdeckt. Es wollte Kanalboote optimieren, die damals mit Pferden gezogen, also „getreidelt“ wurden und durchaus für das damalige Transportwesen einen bedeutenden Wirtschaftsfaktor darstellten. Als in einem engen Kanal ein Testboot abrupt gestoppt wurde, löste sich ein Wellenberg vom Boot und bewegte sich ohne erkennbare Abschwächung durch den Kanal. Russell konnte ihn reitend kilometerweit verfolgen, bis er ihn, nach wie vor stabil und von scheinbar gleicher Höhe, aus den Augen verlor.

Normalerweise besteht eine Welle aus einer Kombination unterschiedlicher Wellen mit verschiedenen Frequenzen. Deshalb findet in der Regel immer eine Dämpfung statt, genannt Dispersion. Man kann salopp formulieren, dass die Dispersion der Reibungsverlust bei Wellenübertragungen ist. Sie zu unterdrücken, würde bei vielen Anwendungen regelrecht revolutionäre Fortschritte ermöglichen. Denn offenbar findet bei einem Soliton, egal in welchem Medium es entsteht und sich fortbewegt, keine oder kaum Dispersion statt.

Eine Anwendung, die eine zukunftsweisende Bedeutung hat, ist die Spintronik. Jede Form von Elektronik nutzt elektrische Ladungen, also Elektronen, zur Übermittlung. Doch diese Elementarteilchen nutzen eine fundamentale Eigenschaft von Quanten, zumindest kommerziell, bisher nicht. Gemeint ist der Spin, eine Art Drehmoment, das nur in zwei Zuständen vorkommt und für das magnetische Drehmoment eines Elektrons verantwortlich ist. Es verhält sich im

Prinzip wie ein kleiner Stabmagnet. Zwei Möglichkeiten eröffnen sich dadurch für zukünftige

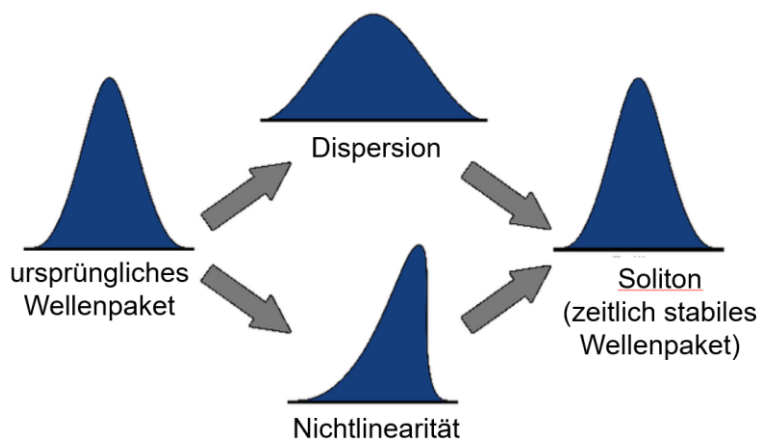


Abb. 74: Entstehung eines Solitons

¹¹⁹ Wörtlich aus <https://de.wikipedia.org/wiki/Soliton>

Übertragungstechnologien. Man könnte eine Spinwelle induzieren. Ist diese stabil, so könnten, ohne dass lineare elektrische Verbindungen existieren, elektronische Bauteile Informationen austauschen. Eine Schicht aus magnetischem Material würde als Trägermedium genügen. Gegenüber der Halbleitertechnologie sind dann Geschwindigkeiten möglich, die nahe an die Lichtgeschwindigkeit in dem Medium heranreichen. Bleibt noch die Dispersion, die bei längerer Übertragungsstrecke zu Verlusten führt. An dieser Stelle kommen Solitonen mit ins Spiel. Sie würden eine weitgehend verlustfreie Übertragung ermöglichen.¹²⁰

Mandelbrot-Menge

Ein Übersichtsbeitrag zum Thema Chaos und Fraktale wäre unvollständig, wenn man nicht die berühmte Mandelbrot-Menge M und Julia-Mengen J betrachten würde. Es sei im Internet auf die faszinierend ästhetischen Computergrafiken hingewiesen, in denen mit Zoom-Effekten diese Fraktale in Form von Videos präsentiert werden.¹²¹ Man sollte dabei nicht vergessen: Der Computer hat den Mathematikern dieses „nähere Hinsehen“ erlaubt. Julia und Fatou war dies noch nicht möglich. Auch Galilei benötigte das Teleskop, um die Jupitermonde zu entdecken.

Kurz zur Geschichte dieser Menge:

Der erste grobe Plot dieser Menge, noch mit einem Nadeldrucker erstellt, stammt nicht von Mandelbrot. Er wurde erstmals 1978 in einem Paper mit dem Titel „*The Dynamics of 2-Generator Subgroups of $PSL(2, C)$* “ von Robert Brooks

and J. Peter Matelski veröffentlicht.¹²² Liest man ihre Arbeit, so scheint sie sich mit scheinbar unabhängigen Fragen der Gruppentheorie und der hyperbolischen Geometrie zu befassen.

Mandelbrot, der bei den IBM-Forschungslaboren am Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights (Westchester County, New York) arbeitete, erahnte das Potential dieser

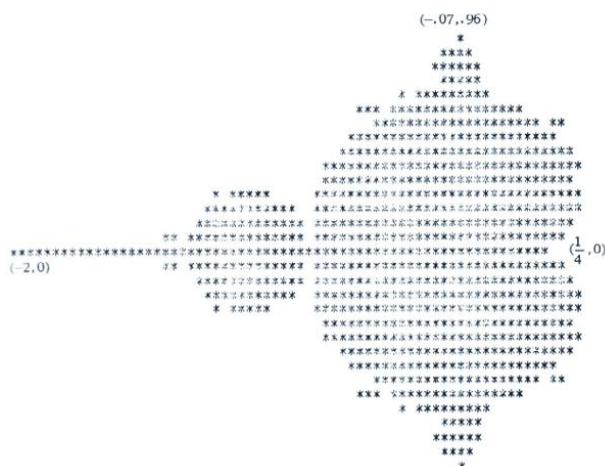


Abb. 75: Erstes 1978 veröffentlichtes Bild der Mandelbrot-Menge.

¹²⁰ <https://www.weltderphysik.de/gebiet/materie/spintronik/solitonen/>

¹²¹ Z.B. <https://www.youtube.com/watch?v=fFyC68CIEio> und vor allem die Linksammlung in https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge#Bezug_zur_Chaostheorie sowie im Anhang dieser Arbeit

¹²² https://abel.math.harvard.edu/archive/118r_spring_05/docs/brooksmatelski.pdf

Menge. Er hatte sich intensiv mit Julia-Mengen beschäftigt und dabei die damals enorme Rechenleistung der IBM-Labore ausnützen können. Im Jahr 1980 gelang ihm eine deutlich bessere Auflösung der Menge, auch wenn diese gegenüber heute fast lächerlich erscheint. Aber er propagierte das Fraktal und man gab der Menge schließlich seinen Namen. Erst später wurde deutlich, wie sehr diese Struktur regelrecht als ein mathematisches Kaleidoskop verstanden werden kann, das viele Elemente der Chaos-Theorie in sich vereinigt. Mit der Wortschöpfung „Fraktal“ und mit der Menge $\mathbb{M}$, auch oft liebevoll „Apfelmännchen“ genannt, wurde Benoit Mandelbrot zum Medienstar.

Mandelbrot war allerdings als Mathematiker und Mensch bei seinen Fachkollegen nicht besonders beliebt. Er wandte sich nach allgemeiner Meinung zu vielen Themen zu und schöpfte deren Potential zu schlecht oder sogar zu plakativ aus, bevor er zu einem neuen Thema sprang. Sein wichtigstes Verdienst ist es, dass der Computer in der mathematischen Forschung, zumindest zuerst als Medium zur Veranschaulichung, enorm an Bedeutung gewann. Plötzlich war man in der Lage, auf experimentellem Weg mathematische Probleme zu visualisieren. Mathematiker erkannten Zusammenhänge, für die vorher das Vorstellungsvermögen nicht ausreichte. Diese Untersuchungen, die immer leistungsfähigere Computer, aber auch entdeckungsfreudige Forscher möglich machten, eröffneten eine neue Welt.

Doch auch die Mathematik, die in der unwahrscheinlich komplexen Struktur steckt, erwies sich als sehr anspruchsvoll. Im Oktober 2023 trafen sich die 20 führenden Forscher zur Mandelbrotmenge zu einem Workshop in einer alten Kaserne mitten im Wald im Nordwesten von Dänemark. Stimmung, Personen und Hintergründe wurden in einem Beitrag des Quantamagazins von Jordana Cepelewicz am 26. Januar 2024 veröffentlicht.¹²³

Die Menge $\mathbb{M}$ kann man als eine Art Hauptkatalog dynamischer Systeme verstehen. Es geht um die Möglichkeiten, wie sich ein Punkt nach einer einfachen Iterationsregel durch den Raum bewegen könnte. Diese möglichen Varianten waren und sind seit über 40 Jahren Gegenstand der Forschung und die 20, in Dänemark anwesenden Protagonisten haben wesentliche Beiträge geliefert. Führend im Überblick über diese Varianten ist Mikhail Lyubich, der aus der Sowjetunion emigrierte und heute an der State University of New York at Stony Brook (SUNY) eine Professur hat. Mit $\mathbb{M}$ sind nicht nur viele Aspekte von dynamischen Systemen verständlich geworden, sondern auch Zusammenhänge in Zahlentheorie, Topologie, algebraischer Geometrie, Gruppentheorie und sogar der Physik. Man hat in ganz anderen Zusammenhängen, z.B. bei der Suche nach numerischen Lösungen für kubische Gleichungen, Querbeziehungen zur Mandelbrot-Menge entdeckt.

¹²³ <https://www.quantamagazine.org/the-quest-to-decode-the-mandelbrot-set-maths-famed-fractal-20240126>

Noch nicht gelöst ist die sogenannte MLC-Vermutung ("Mandelbrot locally connected"). Wikipedia formuliert sie sehr anschaulich: *Egal, wie weit man in die Menge hineinzoomt, sie sieht immer wie ein zusammenhängendes Stück aus.* Lyubich und sein enger Mitarbeiter und Kollege Dzmitry Dudko konnten auf dem Workshop Fortschritte beim Versuch, die MLC-Vermutung zu beweisen, präsentieren. MLC ist Teil ihrer später veröffentlichten Orsay-Notes.¹²⁴ Douady und Hubbard schreckten sogar nicht von der sogenannten Renormierungstheorie zurück. Diese Technik verwenden Physiker um Unendlichkeiten bei der Untersuchung von Quantenfeldtheorien zu zähmen und verschiedene Skalen bei der Untersuchung von Phasenübergängen zu verbinden. Sie ist bei Mathematikern lange Zeit verpönt gewesen, da „willkürlich“ Divergenzen behandelt werden, die Unendlichkeiten erzeugen würden. Mitchell Feigenbaum als Physiker wandte in den 1970-er Jahren erstmals Renormierung in dynamischen Systemen an.

Yoccoz bewies MLC für alle Punkte außer denjenigen, die „unendlich renormierbare“ Parameter sind. Das sind die Punkte, die immer wieder beim Zoomen in immer kleineren Mandelbrot-Kopien auftauchen. Scheinbar kann das bis in unendliche Tiefe gehen und damit als Figur (nicht als Punkt) in eine Periodik münden – aber warum? Man vermutet, dass Punkte im Spiel sind, die oszillieren, aber nicht periodisch sind. Stichwort ist „Hyperbolizitätsdichte“, als die zentrale Frage in der Dynamik. Mittlerweile wurde Renormierung zu einer Schlüsseltechnik bei der Untersuchung von M und MLC. Dabei befasst sich die Hyperbolizitätsdichte mit dem Inneren der Mandelbrot-Menge, da wo immer neue „Baby-Mandelbrot-Mengen“ auftauchen können. MLC hingegen, wenn die Vermutung wahr ist, würde es ermöglichen, jedem Punkt auf der Grenze der Menge eine Adresse zuzuweisen. „Lokal zusammenhängend“ ist ein wichtiges topologisches Konzept, das Auswirkungen auf die Struktur und die Eigenschaften der Mandelbrot-Menge hat. Die Bestätigung der MLC-Vermutung würde bedeuten, dass sie gewissermaßen "glatt" ist, wenn man sie auf beliebig kleinen Skalen betrachtet. Es ist eine Verallgemeinerung der Stetigkeit.

Soviel zur Tragweite, die die Mandelbrot-Menge für die Mathematik der dynamischen Systeme hat.

Hier soll zunächst das Bildungsprinzip der Menge M erläutert werden. Dann wird der Zusammenhang mit der Fibonacci-Folge und dem Feigenbaum-Szenario erläutert und auf die Querbeziehungen zwischen Mandelbrot- und Julia-Mengen wird eingegangen.

¹²⁴ Siehe auch die sog. Orsay-Notes:

<https://mathoverflow.net/questions/118180/roadmap-to-complex-dynamics-particularly-the-works-of-hubbard-douady-and-yoccoz> (Jean-Christophe Yoccoz)

Zwei gängige Definitionen für die Mandelbrot-Menge können im Prinzip gewählt werden:

- Definition über Rekursion und
- Definition über komplexe quadratische Polynome.

Beides ist leicht einsichtig; aufgrund der bisherigen Überlegungen bei reellen Fraktalen soll hier die Rekursion/Iteration gewählt werden.

Wikipedia definiert wörtlich:

Die Mandelbrot-Menge $\mathbb{M}$ ist die Menge aller komplexen Zahlen c , für welche die rekursiv definierte Folge komplexer Zahlen $z_0, z_1, z_2, \dots$ mit dem

Anfangsglied $z_0 = 0$ und dem

Bildungsgesetz $z_{n+1} = z_n^2 + c$

beschränkt bleibt.

Der Anfangspunkt muss zwingend $z_0 = 0$ sein, denn $z_0 = 0$ ist superstabiler Fixpunkt von $f_c(z)$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz folgt, dass dann, wenn es einen stabilen Zyklus gibt, der Orbit ab $z_0 = 0$ von dem Fixpunkt angezogen wird.¹²⁵ Die Konsequenz lautet, dass es zu jedem c höchstens einen stabilen Zyklus geben kann.

Die eigentliche Variable ist also c und sie ist Bestandteil der Mandelbrot-Menge, wenn die Beträge der mit c berechneten z_n bei $n \rightarrow \infty$ nicht ebenfalls über alle Schranken wachsen, also „gegen unendlich gehen“¹²⁶. Die Grafik in Abb. 81 verdeutlicht die Situation.

Das Verdienst von Benoit Mandelbrot ist unbestritten. Doch es beschäftigten sich schon vor ihm Mathematiker mit Abbildungen, die letztendlich Querbeziehungen zwischen der Mandelbrotmenge und einer verallgemeinerten logistischen Parabel aufzeigen. Grundlage ist ein Gleichungssystem, das trotzdem den Namen Mandelbrot-Abbildung trägt:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \quad (1a)$$

$$y_{n+1} = 2 \cdot x_n \cdot y_n + b \quad (1b)$$

Damit kann man die Untersuchung von der eleganten, aber ungewohnten komplexen Ebene in eine kartesische Ebene verlagern. Es geht jetzt darum, welche Punkte (a, b) wie reagieren. Bleiben sie im Endlichen oder „verschwinden“ sie im Unendlichen? Es stellt sich aber die Frage, nach wieviel Iterationen diese Frage mit Sicherheit beantwortet werden kann. Dazu gibt es einen Satz, der besagt, dass dann, wenn der Abstand zwischen $(x_0 = 0, y_0 = 0)$

¹²⁵ Der Satz wird oft „Prinzip der kontrahierenden Abbildung“ genannt.

¹²⁶ Hinweis: Der Betrag einer komplexen Zahl ist eine reelle Zahl.

und (x_n, y_n) größer als 2 wird, die entsprechende Folge ins Unendliche entweicht.¹²⁷

Man sieht mit etwas Verständnis von komplexen Zahlen (mit $i^2 = -1$), dass

$$x_{n+1} + y_{n+1} \cdot i =: z_{n+1}, \quad a + b \cdot i =: c, \quad z, c \in \mathbb{C},$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \text{ identisch ist zu}$$

$$x_{n+1} + y_{n+1} \cdot i = (x_n^2 + y_n^2 + 2 \cdot x_n \cdot y_n \cdot i) + (a + b \cdot i)$$

An dieser Stelle ist ein erster Hinweis auf die angesprochenen Querbeziehungen zwischen der Mandelbrot-Abbildung und dem Feigenbaum-Szenario sinnvoll. Es kann wieder beim Verhalten der Folge zwischen den üblichen vier Fällen unterschieden werden:

1. Konvergenz gegen Fixpunkt
2. Konvergenz gegen periodischen Grenzyklus (2 oder mehr Werte)
3. keine Periodizität, chaotisches Verhalten
4. Divergenz

Konkrete Zahlenbeispiele siehe dazu die Tabelle¹²⁸ in Abhängigkeit mit dem Parameter c und Glied z_1 . Es werden Folgenglieder $z_2, z_3, z_4, \dots$ berechnet und das prinzipielle Verhalten gemäß der vier Fälle analysiert. Dabei wird ebenfalls das Verhalten ausgewählter reeller c -Werte und auch einiger komplexer c -Werte betrachtet.

Z.B. für reelles c

$c = -2$, Konvergenz gegen Fixpunkt 2

$c = -1,75$, Konvergenz gegen Dreiergrenzyklus

$c = 1, \overline{777}$, 12-er Grenzyklus

Oder für komplexes c

$c = \pm i$, Konvergenz gegen alternierenden Grenzyklus $-1, \pm i, \mp i, \dots$ oder

$c = -\frac{1}{8} \pm \frac{3}{4}i$, Konvergenz gegen Dreiergrenzyklus

Im Gegensatz dazu: $c = -1,5 \Rightarrow$ chaotisches Verhalten

Reduziert man die Gleichungen (1a) und (1b) auf $b = 0$ und $y_0 = 0$ so erhält man eine eindimensionale Abbildung, die nur über Sprünge auf der x -Achse ihre Dynamik entfaltet und mit a eine Steuergröße enthält.

¹²⁷ Bodil Branner. „The Mandelbrot Set“, S. 75-105 in Chaos and Fractals, the Mathematics Behind the Computer Graphics. R. Devaney und L. Keen, Providence, RI, American Mathematical Society, zitiert nach Peak, Frame „Komplexität – das gezähmte Chaos“, Kap. 7, Anm. 105

¹²⁸ https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge#Bezug_zur_Chaostheorie

$$x_{n+1} = x_n^2 + a$$

Dies verdeutlicht im Eindimensionalen die Relation zwischen der Mandelbrot-Abbildung und der logistischen Abbildung ohne Einschränkung von r auf den Bereich zwischen 0 und 4.

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

Man sieht durch graphische Iteration schnell, dass z.B. für $r > 4$ die logistische Parabel gegen minus Unendlich geht. Damit kann man natürlich die Analogie zu Populationsentwicklungen nicht mehr aufrechterhalten. Es gibt keine negative Population.

Ein weiterer Bezug zwischen der Mandelbrotmenge und der logistischen Gleichung, die sich im Feigenbaum-Szenario zeigt, wird über Abb. 77 angesprochen, in dem man beide Strukturen auf der x-Achse vergleicht.

$\mathbb{M}$ ist definiert durch $z^2 + c$, die logistische Gleichung durch $rx(1 - x)$. Sie stehen durch eine quadratische Transformation in Relation zueinander.

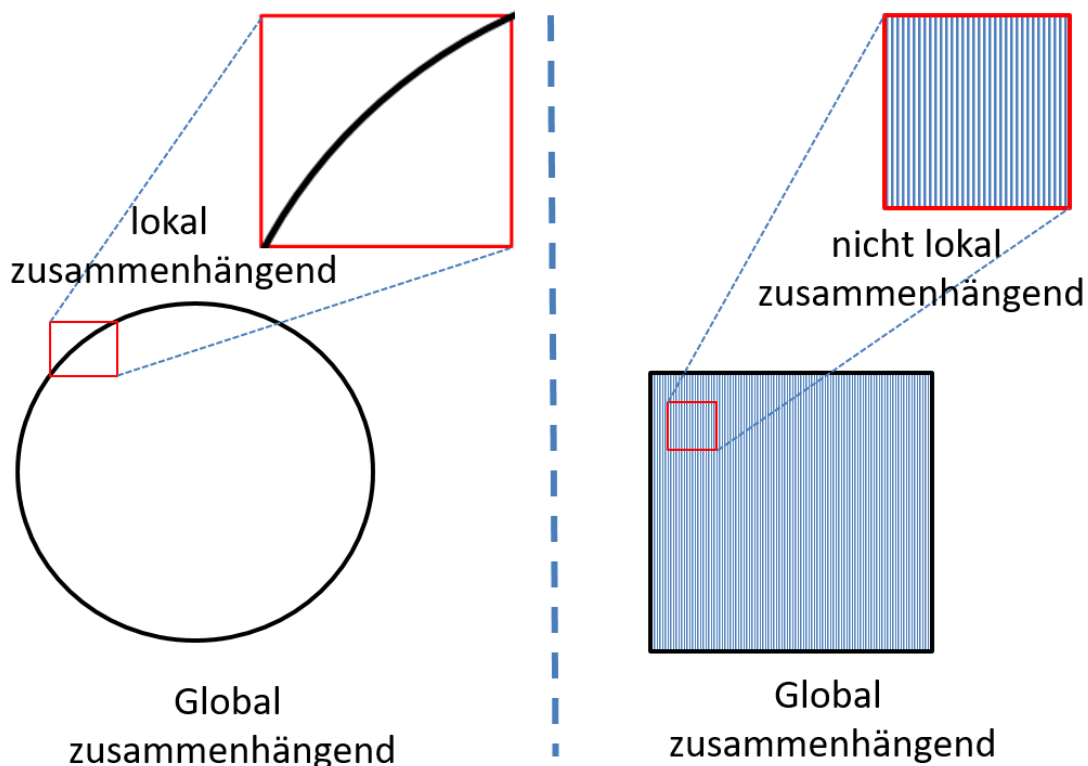


Abb. 76: Die Kernfrage von MLC: Mandelbrot locally connected ?

D.h. die logistische Abbildung kann auch als eine nichtlineare Transformation der komplexen Ebene interpretiert werden. Sie erzeugt eine fraktale Menge, die sogenannte logistische Mandelbrot-Menge. Sie wird „Mandelbrot Lambda“ bezeichnet, da in diesem Zusammenhang meist r durch λ ersetzt wird, also $\lambda x(1 - x)$.

Im folgenden Abschnitt sollen einige wesentliche oder interessante mathematische Eigenschaften der Mandelbrotmenge $\mathbb{M}$ angesprochen werden:

$\mathbb{M}$ kann man als die Menge der reellen Steuereinstellungen a, b bzw. einer komplexen Zahl c betrachten, für die der Orbit ab $(0,0)$ nicht nach unendlich geht. Es ist somit die Menge aller „sicheren“ Sprünge. $\mathbb{M}$ selbst ist Teil des „Steuerraums“ (Gefangenenmenge). Der Startpunkt muss zwingend

$$x_0 = 0, y_0 = 0 \text{ bzw. } z_0 = 0$$

sein.

Da alle Startpunkte auf dem „Rand“ zur Menge gehören, ist $\mathbb{M}$ abgeschlossen und ihre Komplementmenge ist offen. Der Rand ist unendlich lang, aber die

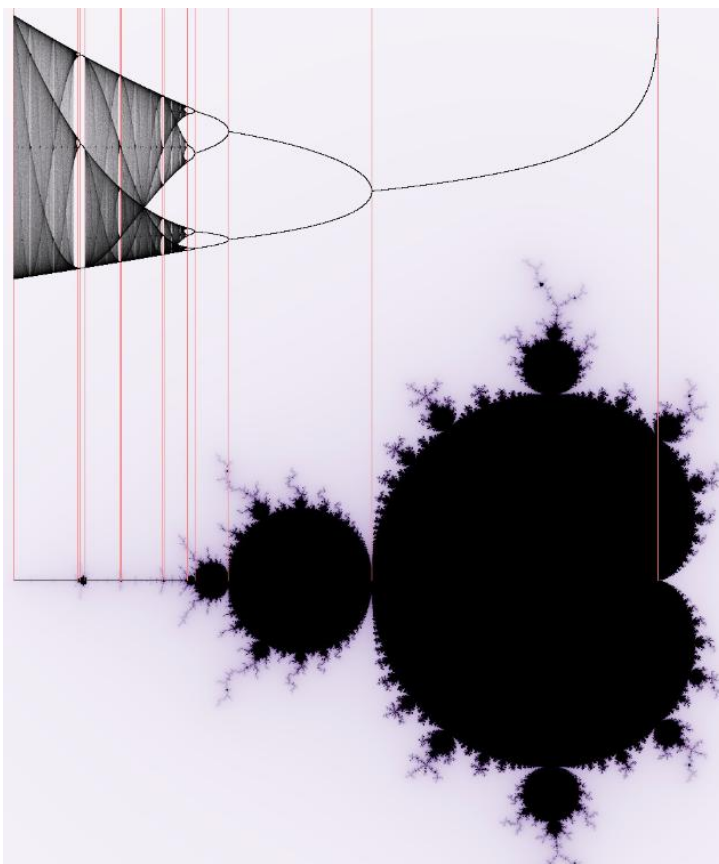


Abb. 77: Tiefliegende Grundlagen der Chaos-Theorie zwischen Feigenbaum-Diagramm und der Mandelbrot-Menge $\mathbb{M}$.

Fläche ist begrenzt (ungefähr 1,507... Flächeneinheiten). Für die Beträge der Punkte P , die zu $\mathbb{M}$ gehören, kann man eine Abschätzung gemäß dem angesprochenen Satz von Bodil Branner geben.

$P_c(z) = z^2 + c$ und $P_c^n(z)$ bezeichne die n -te Iteration. Ein Punkt c gehört genau dann zur Mandelbrot-Menge $\mathbb{M}$, falls

$$|P_c^n(0)| \leq 2 \text{ für alle } n \geq 0$$

D.h. alle Punkte der Mandelbrot-Menge liegen in einem Kreis mit dem Radius 2 um den Ursprung.¹²⁹

$\mathbb{M}$ ist spiegelsymmetrisch zur reellen Achse. Das liegt

unmittelbar an der Betragsfunktion. $\mathbb{M}$ ist zusammenhängend, was gar nicht mathematisch so offensichtlich ist. Es wurde 1984 von Adrien Douady und John Hamal Hubbard bewiesen.¹³⁰

¹²⁹ Weitgehend wörtlich zitiert aus <https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge>

¹³⁰ Exploring the Mandelbrot set. The Orsay Notes. Adrien Douady John H. Hubbard Siehe in <https://pi.math.cornell.edu/~hubbard/OrsayEnglish.pdf>

Es wird vermutet, dass die Mandelbrot-Menge auch in ihren feinsten Verästelungen lokal zusammenhängend ist. Für die gesamte nichtlineare Dynamik wäre dies ein sehr wichtiges, noch unbewiesenes Ergebnis (MLC-Vermutung (Abb. 76) ebenfalls von Douady und Hubbard, siehe auch die nach ihm benannte Julia-Menge, das „Douady-Kaninchen“). Die MLC-Vermutung würde über die Topologie von $\mathbb{M}$ weitreichende Folgerungen erlauben (Hyperbolizitätsvermutung, also, dass $\mathbb{M}$ hyperbolisch ist). Manche Punkte führen zu begrenzten Orbits, sind aber nicht periodisch. Falls MLC stimmt, sind solche Punkte selten und ihre Häufigkeit wird als „Dichte der Hyperbolizität“ bezeichnet. Diese Eigenschaft ist bei allen dynamischen Systemen so interessant, dass sie als wichtigste Frage in der nichtlinearen Dynamik gilt.

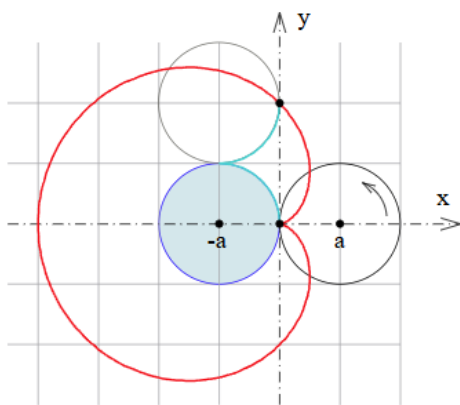


Abb. 78: Wie eine Kardioide entsteht

$\mathbb{M}$ ist übrigens nicht perfekt selbstähnlich. Am Rand sind je zwei Teilstrukturen nicht vollkommen deckungsgleich.

Die gesamte Mandelbrot-Menge $\mathbb{M}$, bildet sich also, wie die Funktion $f(z) = z^2 + c$ für komplexe Werte c und z sich in einem Kreis mit Radius 2 verhält. Der »Körper« des Apfelmännchens ist eine zentrale sogenannte Kardioide.¹³¹ Abb. 78 zeigt, wie eine Kardioide entsteht. Eine Kreisscheibe mit Radius r rollt auf einem weiteren Kreis mit gleichem Radius a ab. So beschreibt jeder Punkt P auf dem Rand des Rollkreises eine

Kardioide. Im kartesischen Koordinaten-system legen wir den Mittelpunkt des ersten Kreises auf 0.

Eleganter sind komplexe Zahlen z zur Beschreibung des Punktes P :

$$z = x + iy = 2r (\cos \varphi + i \sin \varphi) - r (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

oder in der Eulerschen Darstellung $z = 2re^{i\varphi} - re^{2i\varphi}$

Damit sind prinzipielle analytische Mittel vorhanden, um Eigenschaften von $\mathbb{M}$ zu untersuchen.¹³²

An dieser zentralen, herzförmigen Kardioide (daher der Name) wachsen Knospen, die Ausgangspunkt von weiteren kleineren Knospen sind. In den Eigenschaften finden sich eine Reihe verblüffender Ergebnisse. So enthält $\mathbb{M}$ eindeutig Beziehungen zur Kreiszahl π ¹³³ und es versteckt sich die Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8,... in der Struktur. Das nächste Folgenglied errechnet sich

¹³¹ Vergleiche für diesen Abschnitt <https://www.spektrum.de/kolumne/in-der-mandelbrot-menge-steckt-die-fibonacci-folge/2094057>

¹³² Vergleiche Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 184-185

¹³³ <https://www.doc.ic.ac.uk/~jb/teaching/jmc/pi-in-mandelbrot.pdf>

bekanntlich einfach aus der Summe der beiden letzten Glieder. Das ist besonders überraschend, weil diese rekursive Folge sich mit denkbar einfachsten arithmetischen Mitteln bilden lässt, während die Mandelbrot-Menge $\mathbb{M}$ aus feinsten Strukturen besteht.

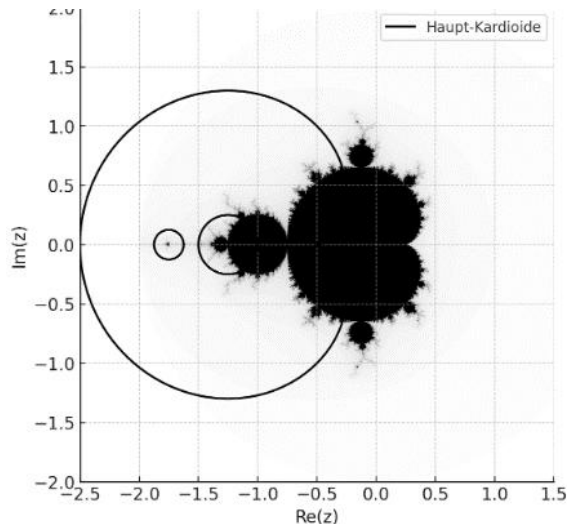


Abb. 79: Prinzip der Knospenbildung

Fixpunkte z_{fix} die Beziehung

$$z_{fix} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c}$$

Die Fixpunkte sind zentrales Charakteristikum der Kardioide. Punkte c in der Kardioide führen alle zu Folgen, die zu entsprechenden Fixpunkten konvergieren oder diese „umrunden“. So liefert $c = -\frac{1}{4}$ eine Folge mit

dem Fixpunkt $z = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = 0,207...$

Analog ist $-\frac{1}{2}$ Fixpunkt für die Folge, die $c = -\frac{3}{4}$ generiert.

Das Beispiel $c = -1$ zeigt einen Zyklus der Periodizität 2, hier $-1, 0, -1, 0 \dots$

Diesen kann man charakterisieren, dass gilt $f(f(z)) = z$.

Innerhalb der ersten Knospe, also dem Kopf des Apfelmännchens, ist jedes c mit Zyklen der Periodizität 2, also der 2. Fibonacci-Zahl, verknüpft.

Der Zusammenhang zur Fibonacci-Folge erschließt sich, wenn man die Eigenschaften der Punkte innerhalb der verschiedenen Knospen untersucht. Man betrachte zunächst den Nullpunkt $c = 0$. Er liegt innerhalb der Kardioide.

$c = 0$ ist ein Fixpunkt, d.h. $f(0)$ ist auch 0. Auch andere Werte von c führen zu Fixpunkten. Da dort $f(z) = z$ ist, kann man $z^2 + c = z$ nach z auflösen und erhält für die

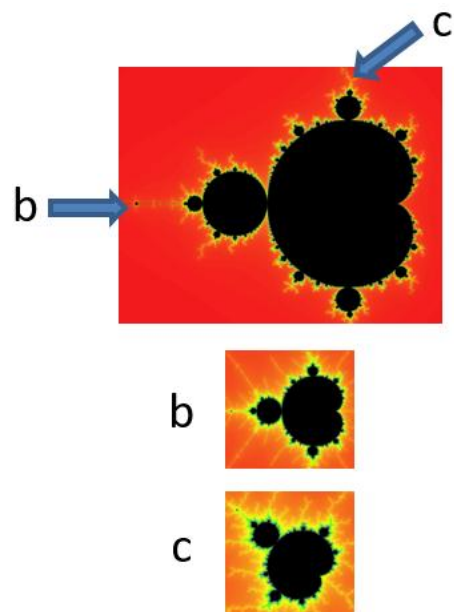


Abb. 80:
Ausschnittsvergrößerungen

Leider muss nun eine komplexere Argumentation folgen, um weitere Fibonacci-Zahlen zu identifizieren. Es ist aber tatsächlich beweisbar, dass in den Mustern der Knospen, die sich immer weiter verästeln, über ihre Periodizität sich die Zahlen der Fibonacci-Folge zeigen.

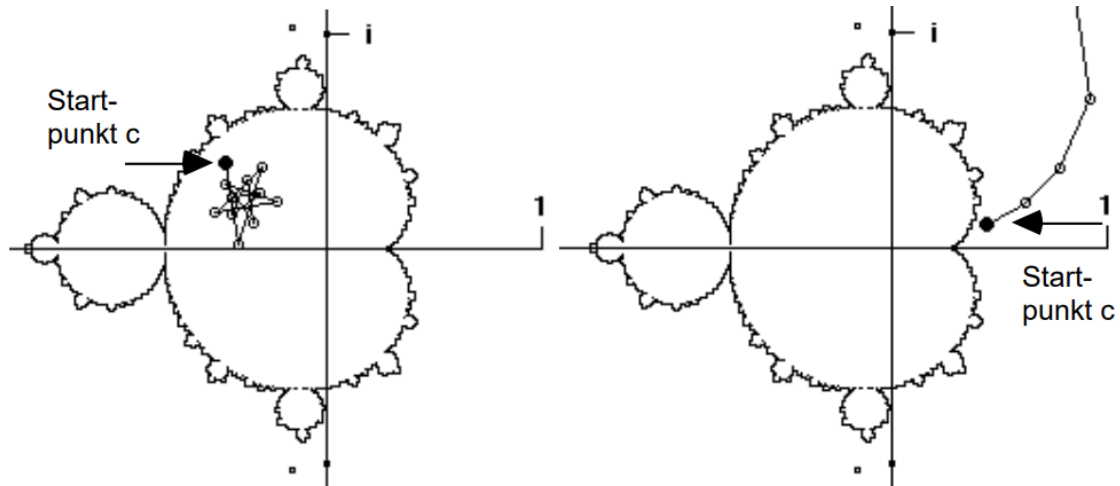


Abb. 81: Linke Seite – Punkte bleiben im Endlichen „gefangen“

Rechte Seite – Punkte „entweichen“ ins Unendliche.

Ein weiteres Muster zeigt sich, wenn man markante Realwerte des Feigenbaum-Diagramms mit markanten Realwerten der Menge $\mathbb{M}$ vergleicht. Eine maßstabsgerechte Gegenüberstellung beider Strukturen zeigt die tiefen mathematischen Gemeinsamkeiten (siehe Abb. 77).

Die Periodenverdoppelung im Feigenbaum-Diagramm beginnt genau bei dem reellen Wert, bei dem der „Apfel“ in den „Kopf“ übergeht.

Für gewisse komplexe c -Werte stellen sich Grenzzyklen ein, die auf einer geschlossenen Kurve liegen, deren Punkte jedoch nicht periodisch, sondern chaotisch abgedeckt werden. Dies ist in der Chaostheorie das Kennzeichen der sogenannten seltsamen Attraktoren. Die Mandelbrot-Menge $\mathbb{M}$ ist daher ein elementares Objekt für die Chaostheorie, an der sich fundamentale Phänomene studieren lassen.¹³⁴

Auch wenn $\mathbb{M}$ eine abgeschlossene Menge ist und damit für jeden Punkt klar ist, ob er zur Menge gehört oder nicht, wird die Menge gerne coloriert dargestellt. Ein Fraktal, das eng mit $\mathbb{M}$ zusammenhängt, „lebt“ allerdings von der Colorierung, da diese einen strengen mathematischen Bezug hat. Gemeint ist das Buddhabrot-Fraktal, dessen spezielle Rendering-Methode von Melinda

¹³⁴ Teilweise wörtlich zitiert nach <https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge>

Green entdeckt wurde.¹³⁵ Seine Form ähnelt dem meditierenden Gautama Buddha, mit Stirnpunkt (tikka) und seinem traditionellen Haarknoten.¹³⁶

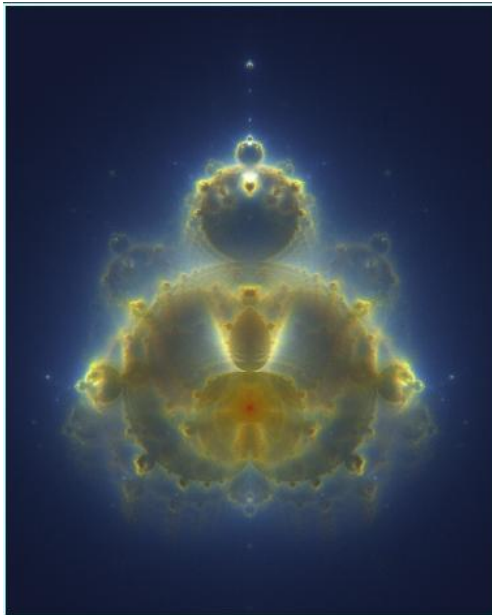


Abb. 82: Buddhabrot

Nach dem Rendern zeigt das Fraktal eine Dichteverteilung, deren Colorierung Regionen hervorhebt, in denen die Iterationswerte (z-Werte) auf ihrem Weg in die Unendlichkeit sozusagen die höchste Aufenthaltswahrscheinlichkeit besitzen. Melinda Green hat dabei die gleiche Methode verwendet, die die NASA für ihre Falschfarbenaufnahmen von Himmelsobjekten, z.B. für das Hubble Teleskop, nutzt und weist darauf explizit hin: „*For my color Buddhabrot images the three different threshold values are analogous to the different frequencies of light which NASA combined into their beautiful false-color images.*“

Die zweite berühmte Klasse von Fraktalen, die durch Variation von komplexen Zahlen entstehen und die dementsprechend in der komplexen Ebene visualisiert werden müssen, sind die Julia-Mengen (manchmal abgekürzt J). Sie sind (in quadratischer Form) sehr eng mit der Mandelbrot-Menge mathematisch verbunden. Die Mandelbrot-Menge M kann über Julia-Mengen definiert werden. M ist die Menge der Parameter c , für die die Julia-Menge von J_c zusammenhängend ist. Sie wurden bereits Anfang des 20. Jahrhunderts von den französischen Mathematikern Gaston Maurice Julia und Pierre Fatou untersucht. Ihr nach ihnen benannter Satz sagt aus, welche Julia-Mengen zusammenhängend sind und welche aus „Cantor-Staub“ bestehen. Dabei muss man sich klarmachen, dass damals eine Visualisierung jenseits aller technischen Möglichkeiten lag. Peitgen, Jürgens und Saupe verweisen darauf, dass erst 1925 die erste Julia-Menge als grobes Bild skizziert wurde.¹³⁷ Interessanterweise hat Mandelbrot „seine Menge“ gefunden, weil er über die Klassifizierung von Julia-Mengen nachgedacht hatte. M wird gerne als das „Lexikon der Julia-Mengen auf einer Seite“ bezeichnet.

¹³⁵ <https://superliminal.com/fractals/bbrot/> persönliche Webseite

¹³⁶ <https://de.wikipedia.org/wiki/Buddhabrot>

¹³⁷ Hubert Cremer, „Über die Iteration rationaler Funktionen“ (Jahrbuch der Deutschen Mathematischen Vereinigung 33, 1925, 185-210)

Julia-Mengen

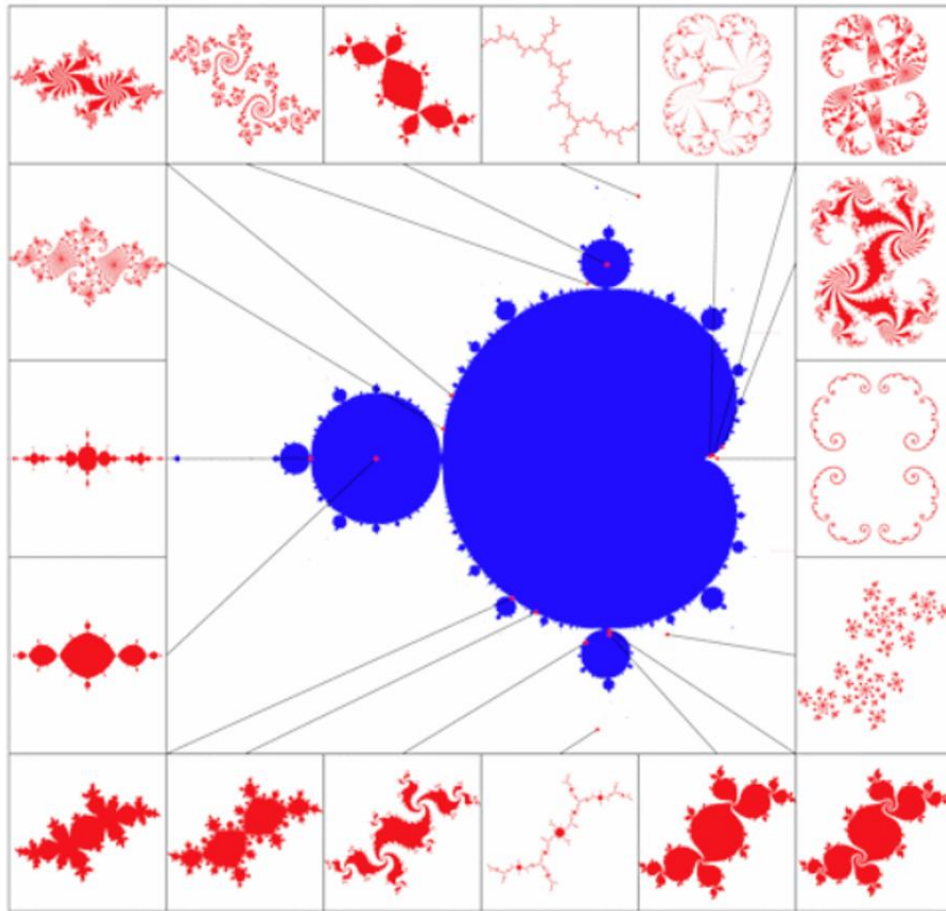


Abb. 83: Punkte in der Mandelbrot-Menge mit der zugehörigen Julia-Menge
(mit freundlicher Genehmigung von Jürgen Meier, siehe auch eine Fülle von Beispielen: <http://www.3d-meier.de/tut20/Seite1.html>)

Die Julia-Mengen wurden nach dem Bildungsprinzip $z_{n+1} = z_n^2 + c$ mit Werten von c gemäß Abb. 84 generiert.

Die Julia-Menge $J(c)$ zu einer bestimmten komplexen Zahl c ist definiert als der Rand der Menge aller Anfangswerte z_0 , für die die obige Zahlenfolge beschränkt bleibt. Die ausgefüllte Julia-Menge für (a, b) ist die Menge aller (x, y) im Dynamikraum, deren Orbits für eine bestimmte Steuereinstellung (a, b) unter der Mandelbrot-Abbildung gegeben ist. D.h. alle Punkte der Mandelbrot-Menge gehören zum Steuerraum, also die Menge der Steuereinstellungen, für die der Orbit ab $z_0 = 0$ im Dynamikraum nicht nach Unendlich geht. Bei Julia-Mengen dagegen wird c fest gewählt. Es ist relativ leicht einsehbar, dass jede Julia-Menge punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Man betrachte dazu einen Punkt $z \in J_c$

Nach der ersten Iteration folgt $f_c(z) = z^2 + c = f_c(-z) = (-z)^2 + c$.

Also $|f_c(z)| = |f_c(-z)|$.

Dann ist auch $|f_c^n(z)| = |f_c^n(-z)| < A$, $A \in \mathbb{R}$, also beschränkt für beliebiges n .

Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(-z)| \rightarrow \infty$

Aus $z \in \mathbb{J}_c$ folgt damit $-z \in \mathbb{J}_c$

Obere Reihe	Linke Spalte	Rechte Spalte	Untere Reihe
$c = -0,712 + 0,241i$	$c = -0,74543 + 0,1130i$	$c = 0,320 + 0,043i$	$c = -0,481762 - 0,531657i$
$c = -0,194 + 0,6657i$	$c = -1,250$	$c = 0,300$	$c = -0,39054 - 0,58679i$
$c = -0,120 + 0,740i$	$c = -1,000$	$c = 0,15 - 0,8i$	$c = -0,200 - 0,700i$
$c = 1,000i$			$c = -0,15652 - 1,03225i$
$c = 0,27334 + 0,00742i$			$c = -0,11031 - 0,67037i$
$c = 0,28600 + 0,01150i$			$c = -0,11000 - 0,65570i$

Abb. 84: c-Werte mit denen die Julia-Mengen in Abb. 83 generiert wurden.

Als Generierungsprogramm eignet sich (in anderer Farbgebung):

<https://www.mathematik.ch/anwendungenmath/fractal/julia/julia.html>

Als einfachen Fall kann man wieder $z_{n+1} = z_n^2 + c$ betrachten. Es ist sozusagen die komplexe Verallgemeinerung der logistischen Abbildung. Für $c = 0$ besitzt die iterierte Abbildung zwei Attraktoren, nämlich 0 und ∞ . In diesem Fall ist die Julia-Menge nicht fraktal, sondern ein Kreis mit Radius $|z|=1$. Folgen mit Anfangswerten im Kreis konvergieren gegen Null; mit Anfangswerten außerhalb divergieren.

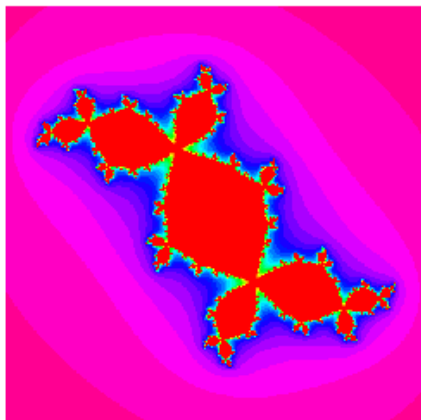


Abb. 85: Douady-Kaninchen
Julia-Menge mit $f(z) = z^2 - 0,123 \dots + 0,745 \dots i$

Viele Computergrafiken von Julia-Mengen findet man in dem spektakulären Buch von Peitgen und Richter „The Beauty of Fractals“. Die experimentelle Mathematik hat dabei eine Reihe von Zusammenhängen aufgedeckt. Die Beweise haben auch die sogenannte reine Mathematik befruchtet. Als Beispiel sei ein Beweis von Xavier Buff und Arnaud Chéritat aus dem Jahr 2005 erwähnt. Danach gibt es quadratische Polynome, für die die nicht ausgefüllte Julia-Menge, (also der Rand der Gefangenenmenge), einen Flächeninhalt größer Null hat. Der Beweis

umfasst immerhin 74 Seiten.¹³⁸ Die Abb. 85 zeigt eine Julia-Menge, die nach dem französischen Mathematiker Adrien Douady (1935 – 2006) benannt ist (siehe auch MLC-Vermutung).^{139,140}

Wir gehen von zwei gleichseitigen Dreiecken $\triangle A_1 A_2 A_3$ und $\triangle A_1 A_4 A_5$ mit der Seite a aus, die an der Ecke A_1 aneinanderstoßen (Fig. 2). Sie bilden zusammen den geschlossenen polygonalen Zug $p_1 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, der die Ebene in 3 Bereiche teilt:

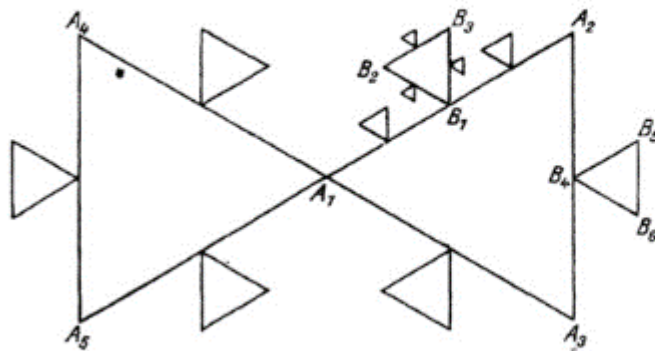


Fig. 2.

1. Das Innere von $\triangle A_1 A_2 A_3$: $\mathcal{B}_1$.
2. Das Innere von $\triangle A_1 A_4 A_5$: $\mathcal{B}_1'$.
3. Den Bereich $\mathcal{B}_1''$, der den unendlich fernen Punkt enthält und vom ganzen polygonalen Zug p_1 begrenzt wird.

Abb. 86: Erster Versuch der Veranschaulichung einer Julia-Menge durch Hubert Cremer, Berlin 1925

Die Abb. 86 zeigt die erste Skizze einer Julia-Menge.¹⁴¹

Es kann bewiesen werden, dass die Mandelbrot-Menge $\mathbb{M}$ genau die Menge der Werte c ist, für die die zugehörige Julia-Menge $\mathbb{J}(c)$ zusammenhängend ist.¹⁴² Genauer: eine Julia-Menge ist entweder zusammenhängend oder vollständig disjunkt. Dies wird als die "Connectedness-Lemma" bezeichnet.

Das ist eine weitere Möglichkeit $\mathbb{M}$ zu definieren und ist oft auch Grundlage zu Beweisen über das Verhalten der Mandelbrot-Menge. Siehe z.B. die

¹³⁸ <https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v176-n2-p01-p.pdf>

¹³⁹ https://en.wikipedia.org/wiki/Douady_rabbit

¹⁴⁰ https://de.wikipedia.org/wiki/Adrien_Douady

¹⁴¹ Cremer, Hubert. "Über die Iteration rationaler Funktionen.." *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 33 (1925): 185-209. <http://eudml.org/doc/145695>.

¹⁴² Lei Tan: Similarity between the Mandelbrot set and the Julia sets. In: *Communications in Mathematical Physics*. 1990, Band 134, Nr. 3, S. 587–617. Fußnote und Definition im Text zitiert nach <https://anthrowiki.at/Mandelbrot-Menge>

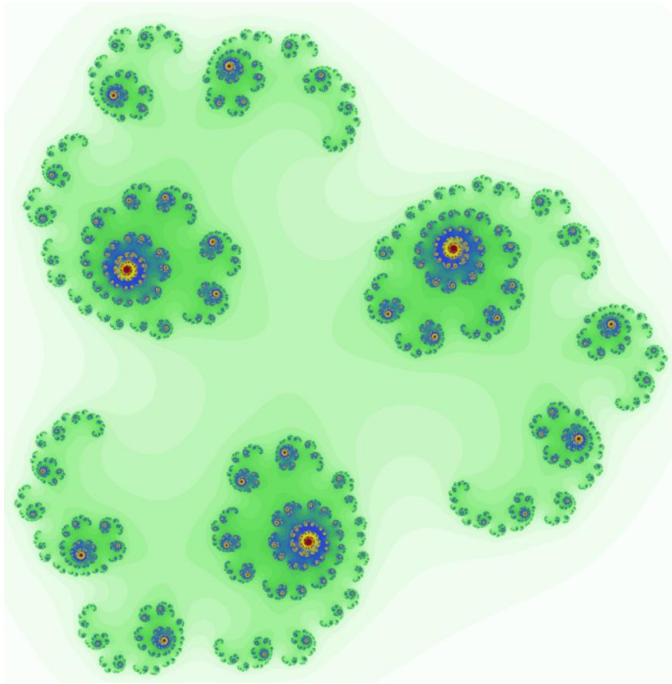


Abb. 87: Julia-Menge gemäß $z_{n+1} = z_n^3 + c$

Veröffentlichung von Shishikura, dass die Mandelbrot-Menge ebenso wie die korrespondierende Julia-Menge die Hausdorff-Dimension 2 hat.¹⁴³

Die Strukturen von $\mathbb{M}$ in der Umgebung eines Wertes c sind ein genaues Abbild der assoziierten Julia-Menge. Man kann es so formulieren, dass die Mandelbrot-Menge von unendlich vielen Julia-Mengen ihre vielfältigen Formen enthält.

Besonders am Rand fällt auf, dass sich in den fraktalen Strukturen kleine, leicht veränderte Kopien der gesamten Menge $\mathbb{M}$ finden. Man nennt sie Satelliten und sie weisen wieder Kennzeichen der originalen Formen auf.

Julia-Mengen sind nicht auf das quadratische Polynom $z_{n+1} = z_n^2 + c$ beschränkt.¹⁴⁴ Die Funktion $f(z) = z^2 + c$ ist nur auf besondere Weise mit der Mandelbrotmenge verbunden.

Allgemeine Definition einer Julia-Menge: Die ausgefüllte Julia-Menge des Polynoms f ist definiert als

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \nrightarrow \infty\}$$

für ausreichend großes k . k ist die k -fache Komposition von f . Die Julia-Menge von f ist der Rand der ausgefüllten Julia-Menge $K(f)$, bezeichnet als $\mathbb{J}(f)$, also formal geschrieben $\mathbb{J}(f) = \partial K(f)$. Die Komplementmenge der Julia-Menge $K(f)$ wird Fatou-Menge $F(f)$ genannt. Wenn keine Verwechslungen drohen, schreibt man $\mathbb{J} = \mathbb{J}(f)$ und $K = K(f)$.

Einige Eigenschaften von Julia-Mengen: Sei $\mathbb{J}(f)$ die Julia-Menge vom Polynom f , dann gilt

¹⁴³ Mitsuhiro Shishikura: The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. März 1998, Band 147, Nr. 2, S. 225–267. Online siehe https://www.jstor.org/stable/121009?origin=crossref&seq=1#page_scan_tab_contents

¹⁴⁴ Vergleiche https://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ws06_07/seminar_fraktale/ausarbeitung_voelkel.pdf

- $\mathbb{J}(f) = \partial\{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \nrightarrow \infty\}$, (Rand der ausgefüllten Menge)
- $\mathbb{J}(f)$ ist eine nicht-abzählbare, nicht-leere, kompakte Menge, die keine isolierten Punkte enthält.
- $\mathbb{J}(f)$ ist vorwärts und rückwärts invariant gegenüber f , also $f(\mathbb{J}(f)) = \mathbb{J}(f)$
- Für alle $p \in \mathbb{N}, p \geq 1$ gilt: $\mathbb{J}(f) = \mathbb{J}(f^p)$. Somit haben f und f^p identische ausgefüllte Julia-Mengen und damit auch identische Julia-Mengen.
- Ist f ein Polynom, dann ist $\mathbb{J}(f)$ der Abschluss der abstoßenden periodischen Punkte von f . Dieser Satz ist entscheidend für die Darstellung von Julia-Mengen per Computer.
- Wenn w ein anziehender Fixpunkt ist, dann ist $A(w)$ definiert als der Anziehungsbereich von w für $k \rightarrow \infty$

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \rightarrow w\}$$

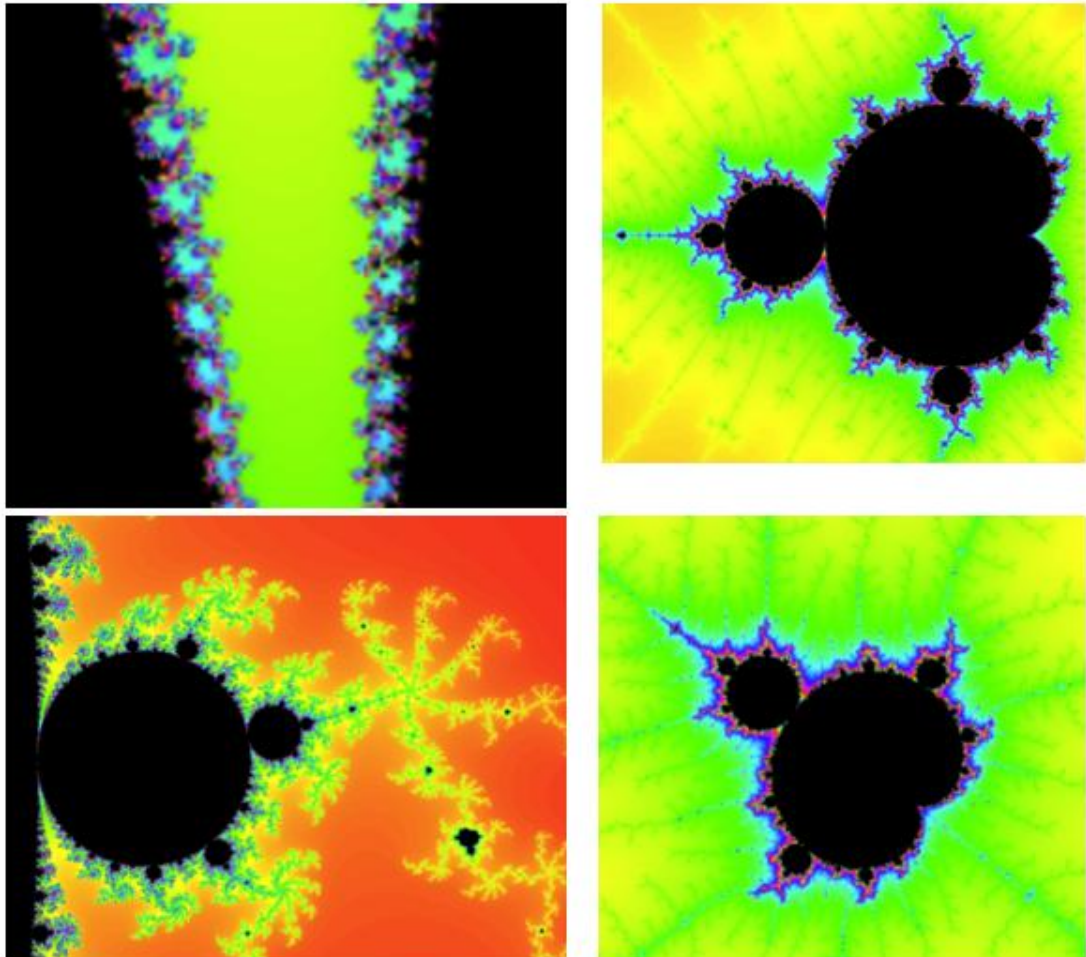


Abb. 88: Extremer Zoom in die Mandelbrot-Menge. Links 100.000-fache Vergrößerung; rechts Teile der Ausschnitte b und c aus Abb. 80 10^{15} - fach vergrößert.

Sei w ein attraktiver Fixpunkt von f . Dann gilt: $\partial A(w) = \mathbb{J}(f)$. Das gilt auch, wenn $w = \infty$.

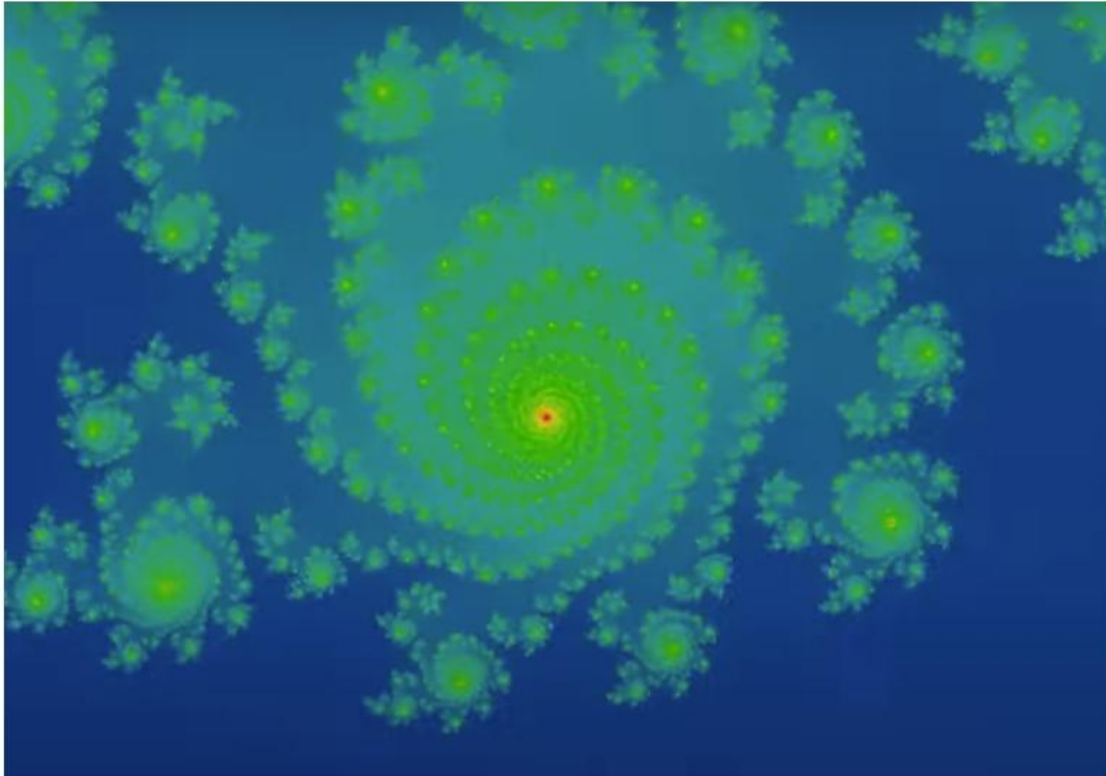


Abb. 89: Extremer Zoom (ca. 10^{13} -fach) in eine Julia-Menge beim Punkt $0.0958598997051 + 1.1501990019993i$ mit $c = 0.355 + 0.355i$

Höherdimensionale Verallgemeinerungen

Schon ein Schritt in Abbildungen mit kubischen Komponenten führt dazu, dass die Mathematik das bisherige Niveau dieses Beitrags, mit eher wenig erforderlichen Vorkenntnissen, übersteigt und die Anschaulichkeit oder gar eine Visualisierung immer schwieriger wird.

Eine erste Verallgemeinerung der Überlegungen von Mandelbrot, Julia und Fatou bezeichnet man als „kubische Iteration“. Die entsprechende Mathematik fällt unter diskrete Dynamiken der komplexen Ebene.¹⁴⁵

Bis auf Koordinatenwechsel durch Multiplikation mit -1 existiert eine Normalform, die eine Äquivalenzklasse eines kubischen Polynoms bezüglich komplexer, affiner Koordinatenwechsel festlegt. Der Parameterraum kubischer Polynome ist also $\mathbb{C}^2$. Schon dies schränkt die Anschaulichkeit stark ein, da in vier Dimensionen gedacht werden muss.

¹⁴⁵ Siehe dazu teilweise wörtlich https://de.wikipedia.org/wiki/Kubische_Iteration

Ein kubisches Polynom der Äquivalenzklasse $p \in \mathbb{C}[X]$ mit der Ableitung $p'(z)$ hat zwei Nullstellen, sogenannte kritische Punkte.

Es gibt drei Fälle:

Die Orbits beider kritischen Punkte gehen gegen Unendlich. Dann ist die Julia-Menge total unzusammenhängend.

Der Orbit eines kritischen Punktes geht gegen Unendlich, während der Orbit des anderen kritischen Punktes beschränkt bleibt. Dann ist die Julia-Menge unzusammenhängend, aber im Allgemeinen nicht total unzusammenhängend.

Beide kritische Punkte haben beschränkte Orbits. Dann ist die Julia-Menge zusammenhängend.

Die zum dritten Fall (zusammenhängende Julia-Menge) gehörenden Polynome

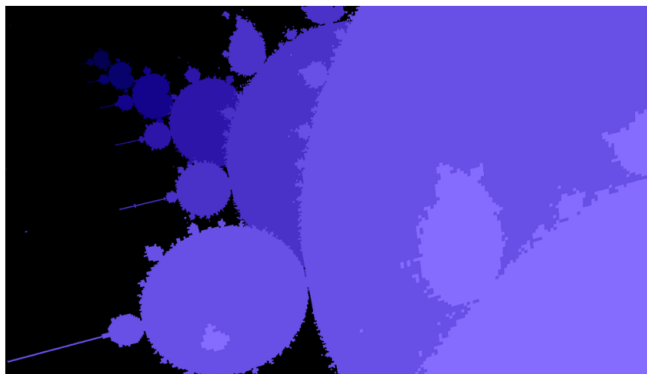


Abb. 90: Zweidimensionaler Schnitt durch die dreidimensionale Projektion des 4D-Fraktals

beschreiben den Zusammenhangsort (engl. „connectedness locus“, nach Branner-Hubbard) oder die kubische Mandelbrot-Menge S . Ihr Parameterraum ist komplex zweidimensional, was reell vier Dimensionen entspricht. Eine Visualisierung gelingt nur, wenn man von dem vierdimensionalen Gebilde einen Parameter „festhält“ (invariant hält) und so einen

dreidimensionalen Schnitt / Projektion erhält.

Insbesondere ist S kompakt und zusammenhängend, und ihr Komplement ist ebenfalls zusammenhängend.

Die Menge S hat eine fraktale Oberfläche und weist starke Parallelen mit der Mandelbrotmenge auf. Wenn man an den dreidimensionalen Objekten, die entstehen, wiederum zweidimensionale Schnitte ausführt, findet man in diesen Schnittebenen an manchen Stellen die charakteristische Form des Apfelmännchens wieder (siehe Abb. 90).

Ein Spezialfall ist das Cactus Fractal.¹⁴⁶

$$z_{n+1} = z_n^3 + (z_0 - 1)z_n - z_0$$

¹⁴⁶ <https://paulbourke.net/fractals/cactus/> Hochauflösende Detailgraphic siehe <https://www.flickr.com/photos/pagedooley/19262854724/in/photostream/>

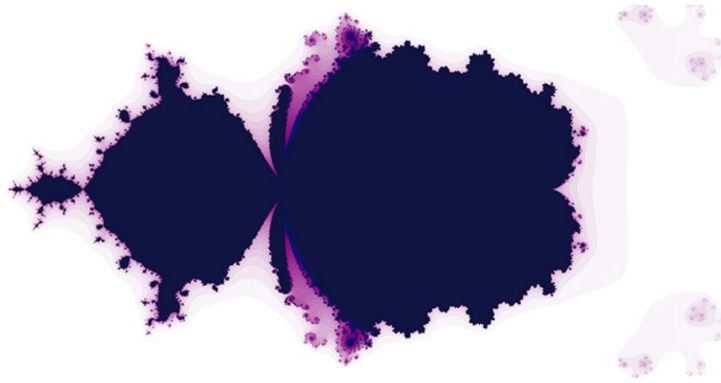


Abb. 91: Cactus-Fraktal mit kubischem Glied

Weitere Beispiele aus Physik, Chemie, Medizin und Sozialwissenschaften

Schon früh beschäftigten sich Naturwissenschaftler mit Phänomenen, in denen wir nach dem heutigen Wissensstand chaotisches Verhalten erkennen. Berühmt ist eine Zeichnung des Universalgenies Leonardo da Vinci, in der er im Bild Turbulenzen bei Wasser beschrieb, das in ein Becken gegossen wird. Die Zeichnung ist in den Jahren 1509 bis 1511 entstanden.¹⁴⁷ Heuristische Beobachtungen gab es also schon ab der Renaissance, aber Laborexperimente kamen erst deutlich später. Bekannt wurde das Experiment von Osborne Reynolds, das er erstmals 1883 an der Universität Manchester durchführte. Es demonstriert, wann ein laminares Verhalten von strömenden Flüssigkeiten durch ein Glasrohr in ein chaotisches Verhalten übergeht. Reynolds erreichte aussagekräftige Beobachtungen durch gefärbtes Wasser.¹⁴⁸

Noch viel später und das ist Gegenstand des vorliegenden Textes, konnten vereinzelt mathematische Muster identifiziert werden. Grundsätzlich lassen sich die Gleichungen, wie Strömungen chaotisch werden, nicht umfassend lösen. Wie aber der vorliegende Beitrag zeigt, gibt es doch „Phasen der Ordnung“ in Strömungsmustern, die sich mathematisch erschließen lassen. Es sind die bereits angesprochenen Begriffe, wie Attraktoren, Fixpunkte, periodische Orbits, Bifurkationen usw. Speziell Strömungen werden durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben. Zugrunde liegt streng genommen eine

¹⁴⁷ <https://www.weltderphysik.de/gebiet/materie/turbulenz/turbulenz-und-chaos/>

¹⁴⁸ Siehe z.B. https://gunt.de/images/datasheet/565/HM-150.18-Osborne-Reynolds-experiment-gunt-565-pdf_1_en-GB.pdf



Abb.92: Turbulenzen nach Leonardo da Vinci

deterministische Beschreibung der Newtonschen Bewegungsgleichungen, was aber keine Rückschlüsse auf leichte Lösbarkeit erlaubt. Sie können bei der Hydrodynamik, bei der Luftfahrttechnik, bis hin zum Verhalten von Sternen in Galaxien angewendet werden. Numerische Lösungen in Form von differenzierten Tabellenwerken erleichtern die Arbeit der Ingenieure.

Die Abb. 93 zeigt selbstähnliche Maße in atmosphärischen Wirbeln ausgelöst durch Kelvin-Helmholtz Instabilitäten. Sie entstehen durch das Anwachsen kleiner Störungen in der Scherschicht zweier Fluide mit unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten. Experimentelle Messungen geben Hinweise darauf, „dass die

*Dissipationsrate der kinetischen Energie in vollständig ausgeprägter Turbulenz ein Multifraktal ist.*¹⁴⁹ Dies hat auch bereits Mandelbrot vermutet. Er verbindet die phänomenologischen Ergebnisse von Kolmogorov, und die



Abb. 93: Kelvin-Helmholtz-Wirbel, Australien

¹⁴⁹ Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, S. 663
Benzi R. Paladin G., Parisi G., Vulpiani A.; On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems, J. Phys. A 17 (1078) 3521

Differentialgleichungen für nichtviskose Flüssigkeiten von Euler bzw. für viskose Flüssigkeiten von Navier und Stokes. Er behauptet, dass die Singularitäten der Bewegung einer Flüssigkeit fraktale Mengen sind.¹⁵⁰ Sie spielen in der Natur bei fraktalen Mustern bei Blitzen eine Rolle oder beim dendritischen Wachstum. Peitgen et. al. führen diese Phänomene auf die Selbstähnlichkeit elektrostatischer Ladungen auf fraktalen Rändern zurück. Dies würde auch fraktale Muster betreffen, wie z.B. Julia-Mengen oder Koch-Bäume. In Verbindung mit Wetterphänomenen sind turbulente Strömungen praktisch immer ein Zeichen, wenn Luftmassen unterschiedlicher Temperatur aufeinanderprallen. Im Luftverkehr ist das nicht in allen Fällen an der Wolkenbildung erkennbar (Stichwort Clear Air Turbulence,¹⁵¹ umgangssprachlich Luftloch).

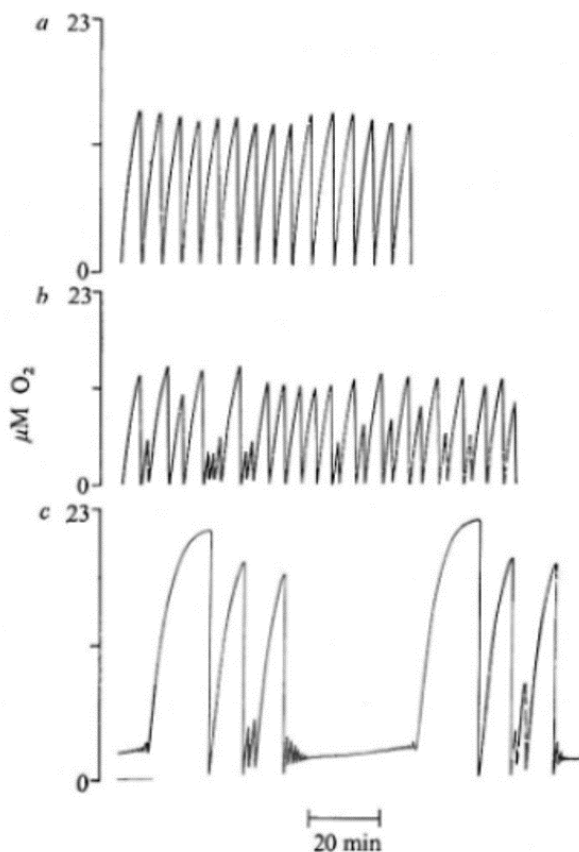


Abb. 94: Zeitliche Änderung in einem offenen chemischen Reaktionssystem

Turbulentes Verhalten ist zweifellos ein prominentes Beispiel für chaotisches Verhalten in der Physik. Aber es ist nur eines unter vielen.

Der deutsche Nestor der statistischen Physik und einer der Väter der Chaostheorie skizzierte in dem bereits zitierten Vortrag¹⁵² vollkommen unterschiedliche Phänomene, in denen „*Chaos als irreguläres quasi-stochastisches zeitliches Verhalten in nichtlinearen dynamischen Systemen*“ auftreten kann. Ein graphisch gut dokumentiertes Beispiel, das mehr aus der chemischen Reaktionskinetik stammt, sei hier zitiert.¹⁵³ Man sieht gut den Übergang in ein deterministisches Chaos mit einem stark verzögerten Wechsel zwischen Ordnung und

¹⁵⁰ Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, S. 118f

¹⁵¹ https://de.wikipedia.org/wiki/Clear_Air_Turbulence

¹⁵² Großmann, Siegfried; Deterministisches Chaos, Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Vorträge N 321, Westdeutscher Verlag 1983, S. 7-29, hier S. 7f

¹⁵³ Ebenda S. 9, Es handelt sich um die zeitliche Änderung der Sauerstoffkonzentration bei der Meerrettich-Peroxidase-katalysierten Oxidation durch Sauerstoff (Von oben

Chaos. Aber auch vollkommen alltägliche Vorgänge kann man anführen: Natürlich das Wetter, Spiele wie Billard oder Flipper, das Doppelpendel, tödliche Embolien wie ein Schlaganfall, plötzlicher Herztod, das Dreikörperproblem mit Konsequenzen für die Stabilität unseres Sonnensystems oder anderer Sternensysteme, periodische chemische Reaktionen, Börsenkurse oder Konjunkturentwicklung. Einige Erkenntnisse haben praktische Konsequenzen. So wurde bereits 1991 in München das Zentrum für nichtlineare Dynamik in der Kardiologie gegründet. Interessant und verblüffend ist die Zusammensetzung der Arbeitsgruppe aus Kardiologen aber auch Astrophysikern. Sie haben das Ziel, für das komplexe System Herz zuverlässigere Indikatoren zu erhalten, wann nichtlineare dynamische Vorgänge eine Gefährdung bedeuten.

Immerhin sterben pro Jahr 100.000 Patienten und zwar nicht nur Herzranke, sondern vermeintlich gesunde Menschen an diesem Phänomen. Zukünftig wird man wohl auch darauf achten müssen, dass man bei der Entwicklung von schnellen Computerchips auf Basis „ballistischer Elektronen“ unliebsame Konsequenzen durch deterministisches Chaos vermeidet.¹⁵⁴



Abb. 95: Cartwheel-Galaxie

Ein weiteres, faszinierendes Anschauungsbeispiel für turbulentes und chaotisches Verhalten findet sich in der Astronomie bei der Dynamik von Galaxien. Insbesondere das James-Webb-Weltraumteleskop (JWST), das nach mehr als 20 Jahren Bauzeit am 24. Januar 2022 seine Umlaufbahn am Lagrange-Punkt L2 in 1,5 Millionen Kilometer Entfernung zur Erde erreichte, hat tiefe Einblicke in die Galaxienentwicklung geliefert. Als Beispiel soll hier die Cartwheel-Galaxie dienen, die vom JWST mit seinen Möglichkeiten im Infrarot-Bereich im

August 2022 erneut untersucht wurde.¹⁵⁵ Die hochsensiblen IR-Kameras zeigen nun im Vergleich zu „Hubble“ deutlich bessere, detaillierte Einblicke in das Chaos bei dieser Galaxie, die ihren Namen von ihrer Wagenrad-Form erhalten

nach unten abnehmende Peroxidase-Konzentration). Nach L.F. Olsen, H. Degn, Nature 267, 177 (1977)

¹⁵⁴ Siehe z.B. den PTB-Bericht

<https://oar.ptb.de/resources/show/10.7795/110.20211111>

¹⁵⁵ Bild und Textinformationen

<https://www.nationalgeographic.de/wissenschaft/2022/12/james-webb-weltraumteleskop-2022-jahresueckblick-in-bildern-weltall>

hat. Ihr heller Kern enthält gigantische Mengen von heißem Staub und ist die „Kinderstube“ von riesigen Haufen junger Sterne. Selbst ihr äußerer Ring mit einem Durchmesser von ca. 145.000 Lichtjahren, ist geprägt von einem chaotischen Durcheinander von Sternentstehung und Supernovae. Ihren dynamischen Charakter verdankt sie scheinbar daher, weil sie als zunächst normale Spiralgalaxie mit einer kleineren Galaxie kollidiert ist. Dies ist kein seltener Vorgang im Alterungsprozess von Galaxien, weshalb alte Galaxien chaotischer sind als junge. Man spricht von „Demenz“ der Galaxien.¹⁵⁶

Eine besondere Klasse von fraktalen Objekten sind sogenannte zelluläre Automaten. Sie bestehen aus einem Gitter, dessen Zellen sich von Generation zu Generation entwickeln. Das

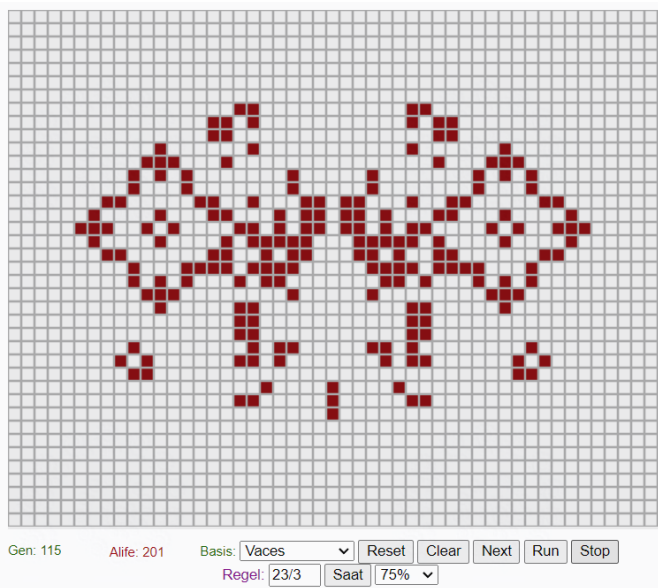


Abb. 96: Zellulärer Automat – Game of Life

berühmteste Beispiel ist das „Game of Life“, das nach dem implementierten Regelwerk des Mathematikers John Conway (1937 - 2020) arbeitet. Dabei sind „lebende“ Zellen dunkel und „tote“ grau gefärbt. Man beginnt mit einer ersten Generation. In der nächsten Generation überleben Zellen, wenn sie zwei oder drei Nachbarn haben; ansonsten sterben sie. Tote Zellen werden wieder „lebendig“, wenn sie drei lebende Nachbarn haben, usw.

Zelluläre Automaten darf man aber keinesfalls auf die Musterbildung reduzieren. Sie dienen besonders der Modellierung räumlich diskreter dynamischer Systeme, insbesondere im Nichtgleichgewichtszustand. Man kann ihren prinzipiellen Ablauf durch wenige, zwingend nötige Rahmenbedingungen festlegen:

- Einen Zellarraum R
- Eine endliche Nachbarschaft N
- Eine Zustandsmenge Q
- Eine lokale Überföhrungsfunktion $\delta: QN \rightarrow Q$

¹⁵⁶ <https://www.mdr.de/wissen/astronomie-raumfahrt/news-alte-galaxien-sind-chaotischer-100.html>

Genau diese Eigenschaften findet man bei oszillierenden chemischen Reaktionen. Diese Reaktionen werden gerne in der Schulchemie ignoriert. Dort geht man vereinfacht von Reaktanden, wie A und B aus, die möglichst vollständig und zeitlich linear zu Reaktionsprodukten, etwa C und D, reagieren.



Das ist eher die Ausnahme als die Regel bei chemischen Prozessen. Vor Bekanntwerden von oszillierenden chemischen Reaktionen hielt man diese für unmöglich. Physikalisch bemühte man dazu den 2. Hauptsatz der Thermodynamik, der scheinbar einen periodischen Ablauf und damit einen Wechsel von „Ordnung“ und „Unordnung“ ausschließt. Doch das gilt nicht für offene Systeme, bei denen der „Energieverlust“ durch Entropie ständig durch Energiezufuhr (oder Materie) kompensiert wird.

Im zweiten Hauptsatz wird die Entropie S als Zustandsgröße definiert, die irreversible Vorgängen ein quantitatives Maß zuordnet. Es sind chemische Reaktionen, Wärmeleitung und Diffusion. Die Entropieproduktion erreicht im Gleichgewicht, wie in einem geschlossenen System ihr Maximum. Diffusion und Wärmeleitung kommen zum Erliegen (werden als Beitrag zur Entropieproduktionsdichte 0). Für chemische Reaktionen im Ungleichgewicht gilt das nicht. Deren Beitrag zur Entropie kann in einem offenen System durch Energiezufuhr E (und/oder Masse) kompensiert werden. S hat

die Dimension $\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{K} \cdot \text{s}^2}$,¹⁵⁷ E hat die Dimension $\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^2}$. Man kann S gemäß des Dimensionsvergleichs also formal als Energie pro Kelvin auffassen. Für Diffusion und Wärmeleitung reichen übrigens lineare Beschreibungen vollkommen aus. Also muss die nichtlineare Komponente ausschließlich aus der chemischen Reaktion stammen.

Natürlich findet auch nach Verbrauch der Reaktanden die oszillierende chemische Reaktion ein Ende. Über die genannten Rahmenbedingungen sind jedoch Rückkopplungseffekte möglich, die über einen begrenzten Zeitraum Oszillation begünstigen und verblüffende makroskopisch-räumliche Strukturen durch Selbstorganisation ermöglichen.

Bekannt und beliebt als Demonstrationsobjekt, sowohl für oszillierende chemische Reaktionen als auch für dynamische Systeme im Nichtgleichgewicht, ist die Belousov-Zhabotinsky-Reaktion.



Abb. 97: Belousov Zhabotinsky Reaktion als „chemische Uhr“

¹⁵⁷ m=Meter, kg=Kilogramm, s=Sekunde, K=Kelvin (genauer thermodynamische Temperatur θ in Kelvin)

Wikipedia charakterisiert den chemischen Ablauf folgendermaßen:

An der Reaktion sind Lösungen von vier Stoffen, Kaliumbromat, Malonsäure, Kaliumbromid und konzentrierter Schwefelsäure, sowie Ferroin oder ein anderer Redoxindikator beteiligt. Bei der Reaktion wechselt der Zustand des Indikators ständig zwischen der reduzierten und der oxidierten Form, was einen typischen Farbwechsel verursacht. Bei Ferroin als Indikator wechselt die Farbe zwischen Blau (Ferriin, mit Fe^{3+}) und Rot (Ferroin, mit Fe^{2+}), bei Cer zwischen Gelb (Ce^{4+}) und Farblos (Ce^{3+}), bei Mangan zwischen Rot (Mn^{3+}) und Farblos (Mn^{2+}). Die Reaktion verläuft nicht beliebig lange, da sowohl Malonsäure als auch Bromat verbraucht werden.¹⁵⁸

Eine ausgezeichnete, ausführliche Arbeit zu der Reaktion wurde 2001 von Jan Krieger beim Wettbewerb „Jugend forscht“ eingereicht. Seine Arbeit wurde beim Landeswettbewerb Bayern als beste interdisziplinäre Arbeit ausgezeichnet und gewann einen Sonderpreis, der vom Hasso-Plattner-Institut für Softwaresystemtechnik gestiftet wurde. Weiterhin wurde die Arbeit als „hervorragend auf dem Gebiet der Chaosforschung“ eingestuft.¹⁵⁹ Sie gelangte bis in den Bundeswettbewerb.

Prigogine und René Lefever haben dazu ein quantitatives Modell aus vier prinzipiellen Reaktionsgleichungen entwickelt, das passend den Namen Brüsselator erhielt.¹⁶⁰ Die Differentialgleichungen können numerisch gelöst werden und über Phasenraumplots grafisch interpretiert

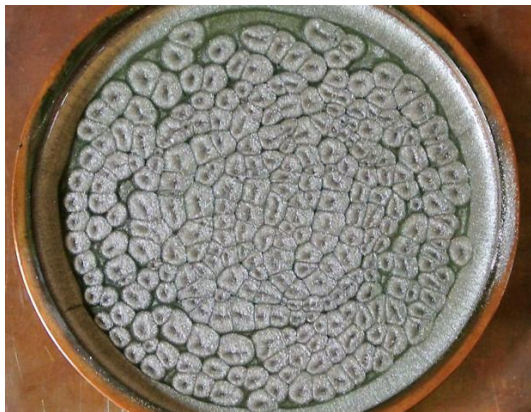


Abb. 99: Bénard-Konvektion (hier in Kupferschale erhitztes Silikonöl mit Silberbronze)



Abb. 98: ruhige Kerzenflamme

werden. Man kann selbsterregte Schwingungen

nachweisen. Bei Überschreiten kritischer Parameterwerte und stetiger Diffusion zeigen sich zwei Typen dissipativer Strukturen: räumlich periodisch stationäre Konzentrationsprofile und wellenartige zeitlich-periodische Änderungen. Diffusion und Nichtlinearität der Reaktion wirkt strukturbildend.

¹⁵⁸ <https://de.wikipedia.org/wiki/Belousov-Zhabotinsky-Reaktion>

¹⁵⁹ Siehe seine Webseite <https://jkrieger.de/bzr/inhalt.html>. Ein download der Arbeit ist dort möglich.

¹⁶⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Brüsselator> u. Jetschke, ebenda S. 193 f

Soviel zur Chemie und Physik dieses Reaktionstyps. Er widerspricht als offenes System natürlich nicht dem 2. Hauptsatz.

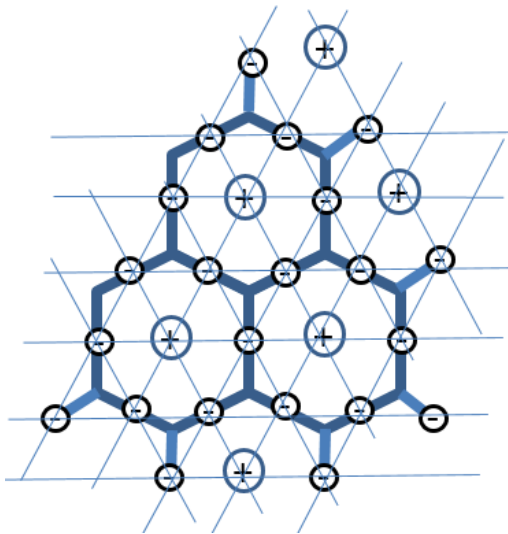


Abb. 100: Hexagonale Walzen, Mitte aufsteigende heiße, am Rand abgekühlte Flüssigkeit

Zu offenen, dissipativen Systemen kann man eine Fülle von Beispielen anführen.¹⁶¹

Ein Auto, das mit einer konstanten Geschwindigkeit fährt, verliert Energie durch Reibung und Abwärme und benötigt kontinuierliche Treibstoffzufuhr, also Materie, die zur Energieerzeugung taugt. Eine Kanne Tee wird mit Hilfe eines Stövchens warmgehalten. Diese Beispiele zeigen allerdings noch keine Selbstorganisation. Da erscheint die Kerzenflamme unter der Kanne eher als ein perfektes System. Sie wird durch Materie (Wachs) und Energie (Verbrennungsenergie) gespeist und gibt Wärme und Materie (z.B. Rauch) ab.

Dünen und Sandrippel können sich sogar gegen die Windrichtung bewegen, doch ihre charakteristische Form bleibt erhalten. Erhitzt man in einem flachen, offenen Gefäß eine Flüssigkeit, so entstehen bienenwabenähnliche fluide Strukturen – bekannt als Rayleigh-Bénard-Konvektion. Diese Phänomene nennt Ilya Prigogine „dissipative Strukturen“. Sie liegen erst dann vor, wenn die Kerzenflamme ruhig brennt und sich der Tee in der Kanne durch die Wärmezufuhr bewegt, wenn also durch einen vertikalen Temperaturgradienten aus einem instabilen stationären Zustand sich spontan Selbstorganisation entwickeln kann. Voraussetzung ist, dass oberhalb eines Schwellenwertes durch die asymmetrischen Randbedingungen Wärme über makroskopische Bewegung transportiert wird. Indem Konvektionseffekte auftreten, entstehen sichtbare Strukturen, die durch die Wärmeleitfähigkeit nicht mehr erklärt werden können. Es bilden sich Zellen aus, in denen heiße Flüssigkeit hochsteigt, an der Oberfläche abkühlt und an den Zellengrenzen in Wechselwirkung mit den Nachbarzellen wieder absinkt. Die sehr kleinen molekularen Teilchen der Flüssigkeit bilden also selbstorganisierte, nur durch die Gesetze der Physik bestimmte, makroskopische Strukturen.

Wo spielt nun die Nichtlinearität eine Rolle? Es ist bemerkenswert, dass einmal gebildete dissipative Strukturen erstaunlich robust sind. Störungen können

¹⁶¹ Siehe H.J. Schlichting, https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/dissipation_struktur.pdf

dann, wenn sie nicht zu massiv sind, wieder ausgeglichen werden. Dies wäre in linearen Systemen schwierig bis unmöglich.

Erst nichtlineare Energieströme und damit Entropiekompensierung können ein Nichtgleichgewichtssystem stabil halten. Der transportierte Wärmestrom und somit Entropiestrom ist nämlich proportional zur strömenden Flüssigkeit (Materie, Masse). Die Konvektion ist anders als die Wärmeleitung mechanische Energie, die quadratisch mit der Konvektionsgeschwindigkeit wächst. Die damit verbundene Abnahme der Entropie muss mindestens kompensiert werden. Die neu erzeugte Entropie nimmt also ebenfalls mindestens quadratisch und damit nichtlinear zu. Sie muss abgeführt werden damit ein stabiler Nichtgleichgewichtszustand erhalten bleibt. Es liegt ein für nichtlineare, dynamische Systeme typischer Rückkopplungseffekt vor.

Dynamik und Thermodynamik

Die moderne Physik kann man in drei fundamentale Theorien unterteilen: der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART), der Quantentheorie im weitesten Sinne (Quantenfeldtheorien) und der Thermodynamik. Keine der drei Theorien kann von einer der anderen abgeleitet werden. Bei Quantentheorie und ART hat man dies akzeptiert und arbeitet an einer übergreifenden Lösung. Für die Thermodynamik wurden zahlreiche Versuche unternommen, sie aus der mikroskopischen Physik abzuleiten, beginnend mit Boltzmann selbst. Die Thermodynamik kann nicht vollständig aus der Mikrophysik abgeleitet werden. Es ist die alte Frage nach Syntax und Semantik. Man braucht die Thermodynamik zur Interpretation, also ihre Semantik.

In diesem Kapitel geht es um thermodynamisches Ungleichgewicht in Abgrenzung zum Gleichgewicht. Die Definition bezieht sich auf die Boltzmannsche Wahrscheinlichkeitsbetrachtung der Thermodynamik: Ein System ist abhängig von den Bedingungen nämlich dann genau im thermischen Gleichgewicht, wenn es sich im statistisch wahrscheinlichsten makroskopischen stationären Zustand befindet. Sonst spricht man von Ungleichgewicht, etwa für die Zeitdauer, die zwei unterschiedliche Gase in geschlossenen Gefäßen zur vollständigen Durchmischung benötigen, wenn ein Hahn dazwischen geöffnet wird. In diesem Fall ist die Entropie maximal. Auch eine qualitative Veränderung des Systems im thermodynamischen Gleichgewicht ist möglich. Es ist ein Phasenübergang.

Interessant sollen hier vor allem thermodynamisch offene Systeme sein, bei denen ein stetiger Energie- und/oder Materiefluss besteht. Dabei können komplexe, geordnete Strukturen entstehen, für die Ilya Prigogine den Begriff „Dissipative Strukturen“ populär gemacht hat.

Mit der Belousov Zhabotinsky Reaktion und der Bénard-Konvektion wurden bereits typische Beispiele besprochen, die Ilya Prigogine veranlasst hat, diesen Ausdruck programmatisch zu verwenden; die Wortschöpfung geht wahrscheinlich auf Landauer zurück.

Ilya Prigogine und seine Koautorin Isabell Stengers haben die spontane Bildung solcher Strukturen physikalisch begründet und philosophisch in einem wichtigen Buch für die breite Öffentlichkeit diskutiert.¹⁶² Wissenschaftliche Grundlagen wurden von Prigogine, Nicolis und Glansdorf in der 1960-er Jahren gelegt.¹⁶³ Sie können im Rahmen der von ihnen entwickelten irreversiblen Thermodynamik beschrieben werden. Sie formulierten das Prigogine-Glansdorf-Theorem, wonach die zeitliche Evolution eines makroskopischen Systems mit zeitunabhängigen Randbedingungen zu einem stationären Zustand führt. Zur strengen mathematischen Ausarbeitung siehe etwa P. Glansdorf, G. Nicolis, I. Prigogine; *The Thermodynamic Stability Theory of Non-Equilibrium States*.¹⁶⁴

Allerdings zerschlug sich die Hoffnung, dass sich eine allgemeine mathematische Beschreibung ergeben könnte – ähnlich wie für Gleichgewichtsstrukturen z.B. bei fester Temperatur und festem Volumen oder fester Temperatur und festem Druck. Das sind Fälle maximaler Entropie, aber ohne Entropie-Änderung ($\Delta S = 0$). Dies zeigte Landauer im Jahr 1975.¹⁶⁵ Der Grund ist bedeutsam für diesen Beitrag. Er zeigt, dass ein nichtlineares System noch lange nicht durch die Gleichungen verstanden werden kann, die es momentan und in isolierten Teilen beschreiben.

Die Kenntnis von lokal stabilen Zuständen ist nicht ausreichend. Übergreifende, auch zufällige Verbindungen, wie sie etwa durch typisch nichtlineare Effekte wie Verzweigungen/Bifurkationen entstehen, sind entscheidend und verhindern eindeutige Kriterien. Nichtlinearität verhindert zwar absolute Vorhersagekraft, schafft aber Struktur und Stabilität. Aber Struktur ist nicht nur eine Eigenschaft eines Systems als Ganzes. Die Verbindung ist wesentlich enger. Eine veränderte Struktur macht daraus ein vollkommen neues System. Nur eine Struktur ist nur und ausschließlich durch die Summe seiner Teile definiert, z.B. eine Gruppe mit der Addition als Verknüpfung. Nur die Struktur lässt das Ganze erkennen; sonst ist es nur ein Konglomerat an Einzelkomponenten. Carl

¹⁶² Prigogine I.: Stengers. I., *Dialog mit der Natur*. München 1981

¹⁶³ Glansdorf P, Prigogine I. *Thermodynamic Theory of Structure, Stability, and Fluctuations*. Wiley Interscience; New York, NY, USA: 1971.

Nicolis, Prigogine: *Self-Organization in Nonequilibrium Systems*. Wiley-Interscience, New York, 1977

¹⁶⁴ <https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.71.1.197>

¹⁶⁵ Landauer, R. (1975). Inadequacy of entropy and entropy derivatives in characterizing the steady state. *Physical Reviews A* 12, 636.

Friedrich von Weizsäcker schrieb: „Die beliebte Frage, ob Mathematik eine Natur- oder Geisteswissenschaft sei, geht von einer unvollständigen Einteilung aus. Sie ist eine Strukturwissenschaft.“¹⁶⁶

In diesem Abschnitt soll Dynamik und Thermodynamik gegenübergestellt werden. Ziel ist dabei zu verstehen, wie überhaupt komplexe Strukturen in der unbelebten wie belebten Natur entstehen können bzw. entstanden sind und wie sie sich selbstorganisieren können.

Nach einem Vorschlag von Peter Schuster (Wien) sollte ein System, das zur Selbstorganisation fähig ist, sich an folgende Kriterien halten können:

1. Es muss einen Selbstverstärkungsmechanismus geben.
2. Das System muss zur Variabilität insofern fähig sein, als verschiedene Muster entstehen und abgewandelt werden können; und
3. Es muss ein Energie- und/oder Materiefluss vorliegen, der verhindert, dass

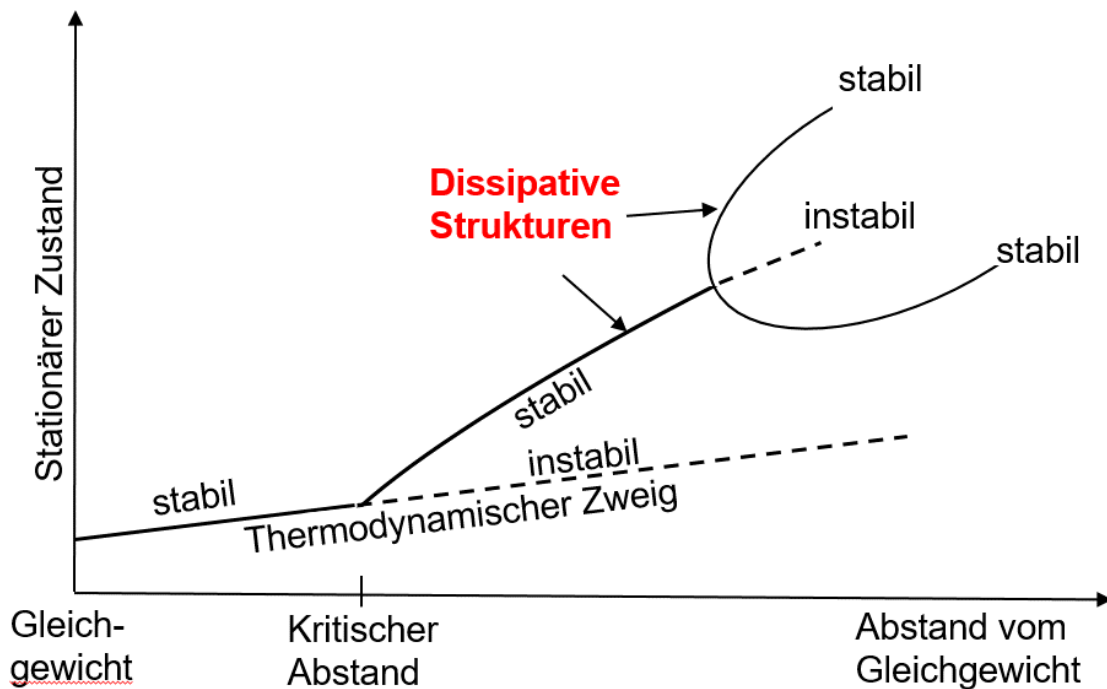


Abb. 101: Dissipative Strukturen jenseits des instabilen thermodynamischen Zweigs.

das System einem thermodynamischen Gleichgewicht zustrebt.¹⁶⁷

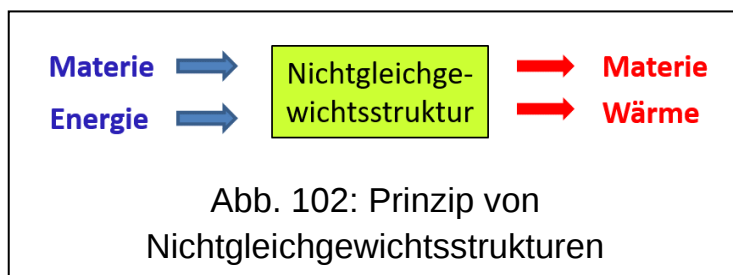
Punkt 3 impliziert, dass es sich um ein offenes System handeln muss.

¹⁶⁶ C. F. v. Weizsäcker: Die Einheit der Natur. 1971, S. 22

¹⁶⁷ Schuster, P.; z.B. in „Ordnung und Chaos“. Küppers, B. (Hrsg.). München 1987. S. 49ff, zitiert nach Hartmut Kahlert, Inaugurationsrede am 22. November 1991, <https://diglib.tugraz.at/download.php?id=4e9d7e05e9156&location=browse>

Diese Kriterien sind klar, genügend allgemein und sind somit nicht auf chemische Beispiele, wie die Belousov Zhabotinsky Reaktion, beschränkt. Auch wenn man die chemischen Teilprozesse nicht verharmlosen darf, so ist es doch ein vergleichsweise einfaches Beispiel von Selbstorganisation. Die Natur hat bewiesen, dass bis hin zur Entwicklung von Leben extrem deutlich mehr möglich ist.

Unter dem Begriff „dissipative Strukturen“ werden also Phänomene verstanden, in denen sich fern vom thermodynamischen Gleichgewicht geordnete, stationäre, selbstorganisierende, dynamische Strukturen in nichtlinearen, offenen Systemen ausbilden. Genau genommen sind alle lebenden Organismen in der gesamten Biologie dissipative Systeme. Damit eine solche Nichtgleichgewichtsstruktur stabil bleibt, muss ein im zeitlichen Mittel beständiger Strom an Materie und/oder Energie zur Verfügung stehen, der den Abfluss von Materie und/oder Wärme kompensiert. Es handelt sich unbedingt um offene Systeme, genügend weit entfernt vom Gleichgewicht. Es ist deshalb



sinnvoll, sich grundsätzliche Gedanken über das Wesen von Dynamik und Thermodynamik zu machen, die diese Strukturen ermöglichen.

Im Jahr 1811 gewann Baron Jean-Joseph Fourier einen Preis der Akademie mit einer theoretischen Arbeit über die Wärmeausbreitung in Festkörpern. Man muss sich vergegenwärtigen, dass Windkraft, Wasserkraft und physische Kraft von Tieren und Menschen die einzigen Kraftquellen waren, die man sich im 18. Jahrhundert vorstellen konnte. Der frühe Ökonom Adam Smith sah in der Kohle den einzigen Nutzen, Heizwärme zu liefern. Doch fast gleichzeitig tüftelte James Watt bereits an seiner Dampfmaschine. Fouriers Arbeit postulierte ein einfaches Resultat: Der Wärmefluss ist dem Temperaturgradienten proportional. Es ist ein universelles Gesetz, das keineswegs auf Festkörper beschränkt ist. Nur der Proportionalitätsfaktor ist stoffspezifisch. Das Gesetz gilt für beliebig komplexe Körper, unabhängig von ihrer Zusammensetzung und Größe. Es ist der Beginn einer quantitativen, mathematisch-physikalischen Theorie, die nicht von Newton begründet worden ist.

Diese Entkoppelung hielt über mehrere wichtige und bedeutsame Zwischenschritte an. Sadi Carnot formulierte seinen Kreisprozess etwa um das Jahr 1824. Es ging ihm um die Idealisierung von mechanischen Maschinen und implizierte irreversible Vorgänge. Diese wollte er unterdrücken, in dem keine Temperaturänderung durch direkten Kontakt von Körpern entsteht und somit

„verloren geht“. Seine Überlegungen bereiteten dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik den Boden. Mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie haben Robert Mayer (1842) und Hermann von Helmholtz (1847) den Ersten Hauptsatz der Thermodynamik formuliert.

Im Jahr 1865 strukturierte Rudolf Clausius ältere Überlegungen neu und vergegenwärtigte sich, dass das am besten abgeschlossene System das Universum ist. Er gab den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik die einprägsame Form:

- Die Energie der Welt ist konstant.
- Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu.

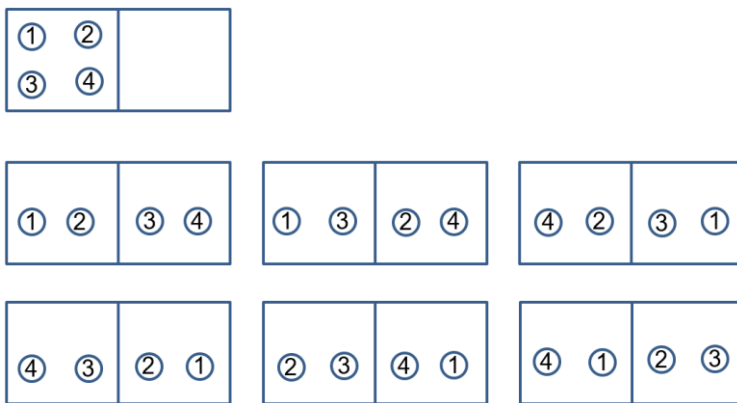


Abb. 103: Entropiezunahme erklärt sich statistisch nach Boltzmann aus der Zunahme von möglichen Mikrozuständen. Für vier Teilchen gibt es nur eine Möglichkeit sie in einem Gefäß unterzubringen; bei zwei Gefäßen sind es schon sechs Möglichkeiten. Diese Argumentation gilt nur für abgeschlossene (adiabatische) Systeme:

2. Hauptsatz der Thermodynamik.

geschaffen. Griechisch $\epsilon\nu\tau\rho\omicron\pi\acute{\iota}\alpha$ (entropía) steht für „Änderung der Entwicklung“. Üblicherweise wird der Buchstabe S dafür verwendet.

Prigogine interessierte sich für offene Systeme fernab des Gleichgewichts. Es geht also um Änderung von S , ausgedrückt als ΔS genauer dS . Dabei ist es bedeutsam, zwischen irreversiblen Prozessen ($d_i S$) und Prozessen zu

Dabei wird also einerseits „die Welt“ als abgeschlossenes System betrachtet, gleichzeitig definiert aber auch die Entropiezunahme eine Richtung, einen Zeitpfeil, der Vergangenheit und Zukunft durch Irreversibilität identifizieren lässt. Sie werden getrennt durch einen kurzen, physikalisch, philosophisch und religiös schwer fassbaren Moment, den man Gegenwart nennt.¹⁶⁸

Es wird mit der Entropie ein zentraler Begriff

¹⁶⁸ Siehe z.B. Muller, Richard A., Jetzt – Die Physik der Zeit, S. Fischer, Frankfurt a. Main, 2018, S. 131.

unterscheiden, in denen Entropie durch Austausch (exchange, $d_e S$) von Energie ausgeglichen werden.

H.J. Schlichting hat eine entsprechende einfache, aber repräsentative Rechnung anhand der Kerzenflamme durchgeführt.¹⁶⁹ Damit kann man das Grundprinzip einer dissipativen Struktur quantitativ illustrieren:

Man kann annehmen, dass der Stoffwechsel sich über das gesamte Volumen der Flamme erstreckt, also die irreversible Entropieproduktion proportional zum Volumen der Flamme ist; r sei die Flammengröße, ϕ eine dimensionsbehaftete Proportionalitätskonstante.

$$\Delta S_i = \phi \cdot r^3$$

Die Entropie durch Austausch ΔS_e muss der Energiemenge entsprechen, die durch Verbrennen von Kerzenwachs für eine stabile Flamme benötigt wird. Sie ist proportional zur Oberfläche der Flamme, da nur dort Entropie zu- bzw. abfließen kann. λ ist wieder eine entsprechende Proportionalitätskonstante.

$$\Delta S_e = \lambda \cdot r^2$$

Die ausgeglichene Entropiebilanz beträgt somit

$$\Delta S = \Delta S_i + \Delta S_e$$

Eine ruhig brennende Flamme entspricht dem stationären Zustand:

$$\Delta S = \phi \cdot r^3 - \lambda \cdot r^2 = 0$$

Man sieht, dass die Größe der Flamme r für die Steuerung der Entropiebilanz verantwortlich ist. Kleines r bedeutet $\Delta S < 0$ und die Flamme hat noch nicht ihre optimale Größe erreicht. Bei großem r ist $\Delta S > 0$. Hier „staut“ sich Entropie und schränkt damit die optimalen Bedingungen ein. Trotz dieser groben Rechnung und ohne Kenntnis der genauen physikalischen und chemischen Prozesse lassen sich erstaunliche Schlüsse ziehen. Dies ist auch bei viel komplizierteren Strukturen möglich. Sogar die Wabengröße bei der Bénardkonvektion lässt sich so erschließen und erlaubt sogar Analogien zu Zellen in der Biologie und die Evolution vom Einzeller zum Vielzeller.

Die Entropie wird zu einem Indikator des Systems und entscheidend ist dabei die Entropiebilanz. Bei der Abgabe von insbesondere Wärme wird unweigerlich die Entropie ansteigen. Dies geht auf Kosten der zugeführten Energie. Die

¹⁶⁹ https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/dissipation_struktur.pdf

Energie wird dissipiert; sie steht zur Verrichtung von Arbeit nicht mehr zur Verfügung. Sie wird aber in einem offenen System ständig durch den Zufluss von Energie und/oder Materie ergänzt. Bei dissipativen Systemen kann dabei eine „supramolekulare Organisation“ entstehen. Sie ist notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung für einen wachsenden Organisationsgrad mit komplexeren Strukturen. Sie ist nur fernab vom Gleichgewicht möglich. Erst jenseits der Schwelle von chemischer Instabilität, die im Bereich von 10^{-8} liegt, können makroskopische Effekte im Bereich von Zentimetern auftreten.

Selbstorganisation ist also nur mit einer stabilen Energiequelle und fernab des thermodynamischen Gleichgewichts möglich. Bei selbstorganisiertem Leben ist es im Wesentlichen die Sonne als Energielieferant. Lebensformen in Nischenbereichen, die z.B. den Vulkanismus als Energiequelle nutzen, haben nur eine minimale Bedeutung.

Die Theorie der Selbstorganisation steht in der Tradition der allgemeinsten bisher bekannten Theorie der Physik über Objekte in der Zeit - der Quantentheorie. Carl Friedrich von Weizsäcker hat die Quantentheorie als „eine Theorie über mögliches menschliches Wissen in der Zeit“ bezeichnet (Zeit und Wissen, 1992, S. 981).

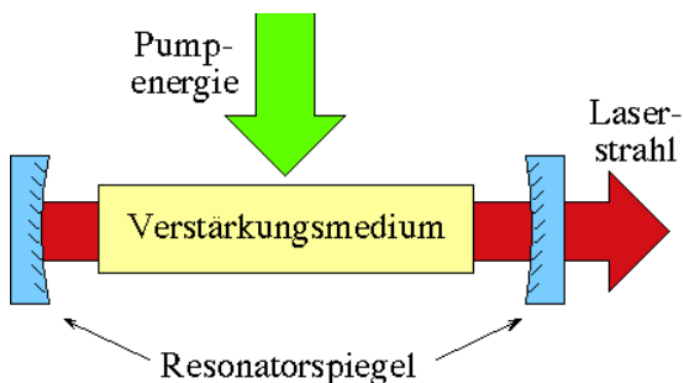


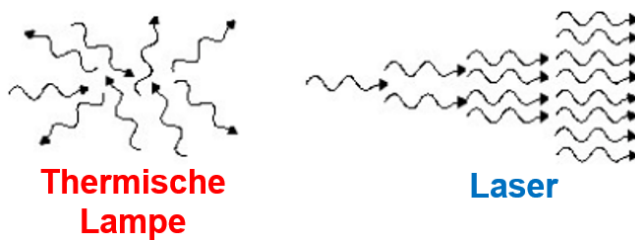
Abb. 104: Prinzipieller Aufbau eines Lasers

In den letzten Kapiteln wurden Beispiele angesprochen, die auch häufig für die wissenschaftliche Disziplin der Synergetik herangezogen werden. Dazu kommen noch z.B. die bei der Logistischen Gleichung erwähnten Jäger-Beute-Beziehungen oder Attraktoren und Solitonen. Synergetik ist die Theorie der Selbstorganisation.

Synergetik steht für die „Lehre vom Zusammenwirken“. Es geht um die Kooperation von räumlichen, zeitlichen und funktionalen Strukturen. Synergetik umfasst nicht nur deterministische nichtlineare Aspekte, sondern auch stochastische. Auf diese wird nur kurz am Ende des Beitrags eingegangen. Im weitesten Sinne ist es eine Theorie über die Entwicklung von Objekten in der Zeit. Die Physik von Objekten in der Zeit war höchstens Anlass, aber Synergetik geht weit darüber hinaus. Auch das menschliche Wissen oder Handeln kann Objekt sein. Hier setzt auch der gängigste Vorwurf an, nämlich der angeblich zu großen Verallgemeinerung.

Synergetik gilt als Lehre von Beziehungen jeglicher Art, die in komplexen dynamischen Systemen wechselwirken.¹⁷⁰ In diesem Sinne beschränkt sich die Synergetik nicht auf Naturwissenschaften, sondern sucht nach einheitlichen mathematischen Beschreibungen, die möglichst interdisziplinär gelten. Entstehen dabei einheitliche synergetische Strukturen, gleich welcher Art, so spricht man von Selbstorganisation. Das Fachgebiet ist ursprünglich aus der statistischen Physik der Nichtgleichgewichtssysteme hervorgegangen. Pionier dieser Forschung war Hermann Haken. Er konnte interessante Zusammenhänge identifizieren, allerdings hat sich seine etwas seltsame Terminologie (z.B. „Versklavungsprinzip“) nur teilweise durchgesetzt. Sein Verdienst ist es, dass sich das Wissen um komplexe Systeme, z.B. in den Sozialwissenschaften, der Wirtschaft oder der Psychologie, im Einklang mit der Natur und nicht unabhängig von ihr oder gar gegen die Natur entwickeln sollte.

Der Physiker Haken begann den Laser als Prototypen für Selbstorganisation zu untersuchen. Das Akronym *laser* steht für Englisch *light amplification (by) stimulated emission (of) radiation*, (Licht-Verstärkung durch stimulierte



Emission von Strahlung) und bezeichnet sowohl das physikalische Prinzip als auch das Gerät. Die Idee kam über den *maser*, wobei das „m“ für *microwave* steht.

Abb. 105: Unterschied Lampe - Laser

Die Betonung von Hakens Lasertheorie liegt auf der

Selbstorganisation, also der Entwicklung eines komplexen Systems ohne äußeren Zwang. Vor dieser Theorie war man der Auffassung, dass z.B. wie bei einer Gasentladungslampe bei steigender Stromstärke das Gemisch an Wellen immer stärker wird. Auch beim Laser bestimmen Differentialgleichungen die zeitliche Entwicklung des Systems. Der Laser ist jedoch ein komplexes System, bei dem Licht und Trägermedium nichtlineare Abhängigkeiten aufweisen. Die Gleichungen können mit klassischen Methoden nicht gelöst werden. Dieser Übergang findet fernab vom thermodynamischen Gleichgewicht statt. Dies ist ein Unterschied zu einem Magneten. Wenn ein bei niedrigen Temperaturen ferromagnetisches Metall erhitzt wird, so ist es ab einer bestimmten Temperaturschwelle nicht mehr magnetisch. Darunter ist das Metall im thermischen Gleichgewicht stabil magnetisch. Das Gerät wird aber erst durch den Phasenübergang von unterschiedlichen Wellenlängen zu einer ausgezeichneten Wellenlänge zu einem „Laser“. Ab dieser „Laserschwelle“

¹⁷⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Synergetik>

vereinfacht sich die mathematische Behandlung und es werden nur noch drei Variablen benötigt. Sie stehen für unterschiedliche Prozessgeschwindigkeiten, in denen sich diese Variablen verändern. Synergetik bedeutet in diesem Zusammenhang, dass eine Frequenz das „Rennen“ gewinnt und den Schwingungstakt aller anderen Frequenzen vorgibt. Sie wird zum Ordnungsparameter, was spontan die Differentialgleichungen vereinfacht. Physikalisch ist der Ordnungsparameter eine „Grundmode“ und es liegt eine Symmetriebrechung bzgl. Medium und Strahlung vor. Solche Schwingungsmoden kennen wir als Eigenschwingungen in der Musik oder Raumakustik, bei Brückenkonstruktionen u.v.m. Als Mode bezeichnet man die Beschreibung bestimmter zeitlich stationärer Eigenschaften, wie Eigenschwingung oder Partialschwingung, einer Welle. Der Begriff „Welle“ steht dabei als Summe verschiedener Moden. Synergetisch betrachtet, folgen also die Atome und damit die durch spontane Emission entstandenen Photonen im Laser dem taktgebenden Ordnungsparameter. Das makroskopische Lichtfeld kann dann weitere Atome dazu zwingen, Photonen gleicher Richtung, Phase und Frequenz zu emittieren. Man nennt dies induzierte Emission. Ein Laser gibt dann die so insgesamt stimulierten Energiepakete in Form von gepulstem Licht ab. Die stimulierte Emission braucht etwas Zeit; dafür sorgen die Spiegel, zwischen denen die Lichtpakete bis zum Erreichen der Pulsenergie oszillieren. Aber auch der beste Spiegel ermöglicht Streuverluste. Gewollte und ungewollte abgegebene Energie werden durch die angelegte Spannung kompensiert. Dieser ständige Austausch macht den Laser zu einem energetisch offenen System mit einem durch Selbstorganisation der Wellenpakete induzierten Phasenübergang als makroskopischen Ordnungszustand. Haken selbst hat das Prinzip der Selbstorganisation schnell auf andere Bereiche übertragen und fand rasch Nachahmer in und außerhalb der Naturwissenschaften.

Gottfried Jetsche hat sich in einem Anhang an sein ansonsten sehr mathematisch orientiertes Buch bereits 1989 an eine Tabelle gewagt, die eine Reihe von Systemen und ihre Ordnungsparameter aufzählt.

Sie illustriert weitsichtig zumindest die Bandbreite an Disziplinen und Themengebieten, denen sich die Synergetik widmet. Diese Gebiete wurden mittlerweile deutlich erweitert und umfassen weite Aspekte der Sozialwissenschaften wie Soziologie, Psychologie und Wirtschaft (siehe auch Fazit und Ausblick).

Gesamtsystem	Untersysteme	Ordnung	Ordnungs-Parameter	Äußere Parameter
Ferromagnet	Elementar-magnete	Magneti-sierung	Mittleres Feld	Temperatur
Supraleiter	Elektronen	Supraleitung	Paarwellen-	Temperatur

	Photonen		Funktion	
Röhren-Generator	Elektronen	Oszillation	Gitterspannung	Kapazitäten Induktivitäten
Laser	Atome und Photonen	Kohärenz	Feldstärke des Lichts	Pumprate Verluste
Flüssigkeit	Moleküle	z.B. Benard- Zellen	Temperatur Dichtegrad- ienten	Wärmezufuhr
chemisch reagierende Stoffe	Moleküle verschiedener Sorten	Räumliche und zeitliche Strukturen	Konzentration	Rohstoff-, Energie- Zufuhr
Biologische Zelle	Moleküle	Konzentrations- verteilung	Konzentrationen	Nährstoff- zufuhr, Licht, Temperatur
Gehirn	Neuronen	Funktion	Elektrische Anregung	Äußere Reize
Population	Lebewesen	Natürliche Koexistenz	Räumliche Dichte	Rohstoff- vorräte
Gesellschaft	Individuen	Kommuni- kation	Sprache	Andere Sprachen
Gesellschaft	Individuen	Gesellschaft- liche Klassen, Funktion	Ökonomische Verhältnisse	Natürliche Gegeben- heiten

Abb. 106: Beispiele für die Realisierung abstrakter Begriffe der Synergetik bei Selbstorganisation in verschiedenen Gebieten.

Zur Erläuterung von Abb. 106: Organisation ist die makroskopische Steuerbarkeit eines Systems. Die Reaktion ist in der Regel deutlich schneller als durch steuernde Einflüsse von mikroskopischen Kräften. Bei der Selbstorganisation kommt die Steuerung hauptsächlich von innen und resultiert aus der inneren Dynamik zwischen „Kraft“ und Untersystem. Trotzdem sind Selbstorganisation und Fremdorganisation keine Antagonismen. Das Gesamtsystem besteht aus vielen gleichartigen Untersystemen. Diese wechselwirken untereinander unter zufälligen oder systematischen Einflüssen. Das makroskopische Verhalten wird von wenigen Ordnungsparametern bestimmt. Sie beeinflussen die Untersysteme und sind gleichzeitig von ihnen erzeugt worden. Die Ordnungsparameter sind auf der Zeitachse wesentlich stabiler als die Untersysteme, die unter dem dominierenden Einfluss der Ordnungsparameter stehen. Die wenigen mathematischen Regeln für die Ordnungsparameter zeigen Nichtgleichgewichts-Phasenübergänge oder Übergänge von Unordnung zu Ordnung und verstärkter Kooperation. Die Tabelle zeigt unterschiedliche Systeme, Ordnung und Ordnungsparameter aus

verschiedenen Disziplinen der Natur- und Sozialwissenschaften. Dies sind nur im engeren physikalischen Sinn durch Naturgesetze festgelegte Strukturen. Ein Beispiel ist Sprache, die eine extrem wichtige ordnende Funktion hat, aber sich im Laufe der Zeit deutlich geändert hat und sich weiter ändert (z.B. durch Anglizismen, Jugendsprache, Begriffe aus der Pandemie etc.).¹⁷¹

Fazit und Ausblick

Wir sind es gewöhnt, in Kategorien von Ursache und Wirkung zu denken. Seit der Renaissance mit der Aufklärung und dem wissenschaftlichen Weltbild beurteilen wir so die Welt, in der wir leben. Das mechanistische Weltbild, zumindest ausgelöst von Laplace (siehe Zitate am Anfang dieses Beitrags), hat das Denken über den Menschen, Tiere und der Umwelt geprägt. J.O. de La Mettrie nannte es „*l’homme machine*“ und diese Vorstellung von Mensch und Tier als Maschinen hat sogar die Medizin lange Zeit geprägt. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts setzte ein Umdenken ein. Wichtige Namen in der Mathematik dieser Forschung sind Poincare, Cantor oder Hilbert, aber auch Lyapunov, Julia, Fatou, Hausdorff oder Sierpinski – um nur einige zu nennen. In den 1970-er Jahren muss man Mitchell Feigenbaum und Siegfried Großmann nennen. Der Begriff „Chaostheorie“ wurde vor allem mit Mandelbrot populär und hat durchaus unvermittelt, durch Beispiele aus den unterschiedlichsten Lebensbereichen, ein Element aufgezeigt, das wesentliche Teile der Welt unbeherrschbar und nicht vorhersagbar macht. Determinismus kann eben trotzdem zu „indeterminierten“ Verhalten führen, weil die Anfangsbedingungen oft prinzipiell nicht genau zu bestimmen sind. Bereits die Quantentheorie hat die traditionellen Vorstellungen von Kausalität erschüttert. Diese Theorie war aber noch relativ weit weg vom Alltag und seinen Dimensionen – im Mikrokosmos. Sie betraf eine Größenordnung, die uns in unserer Alltagsphilosophie noch wenig irritieren musste. Ähnliches gilt für die Kosmologie, sozusagen dem Megakosmos, die spätestens in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhundert zu einer exakten Wissenschaft wurde. Nun erschüttert die Chaostheorie unsere Vorstellungen von unmittelbar einsichtigen Prozessen unserer Umwelt, dem Mesokosmos – vom chaotisch tropfenden Wasserhahn bis zu Wetterphänomenen. Sie kann schnell scheinbar einfache Vorgänge in eine fast unheimliche Komplexität verwandeln. Kausalität wird plötzlich regelrecht probabilistisch und fordert, dass gängige Beziehungen von Ursache und Wirkung hinterfragt werden müssen. Erst bei näherem Hinsehen und nach über 70 Jahren Forschung erkennt man langsam das Wechselspiel von Ordnung und Chaos und seine tieferen Gesetze. Wir erkennen, dass ein mechanistisches

¹⁷¹ Vergleiche Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, S. 299

Weltbild, in dem die genaue Kenntnis der Vergangenheit die Zukunft vollkommen bestimmt hat, nun endgültig ausgedient hat.

Dies ist keine Katastrophe. A.N. Whitehead schrieb in „Science and the modern world“: *A clash of doctrines is not a disaster—it is an opportunity.*¹⁷²

Wir erkennen aber im Ausblick auch, dass es nicht die linearen Gesetze alleine und vor allem nicht Systeme im Gleichgewicht sind, die Selbstorganisation ermöglichen. Ein Pionier auf diesem Gebiet ist Ilya Prigogine mit seiner sogenannten belgischen Schule. Sein Interesse galt der Zeit und offenen thermodynamischen Systemen. Beides gehört zusammen, denn wenn man von Selbstorganisation in dynamischen Systemen spricht, muss man der Zeit eine konstruktive Rolle zubilligen. Auch der „Zeitpfeil“ ist seit der These von Arthur Eddington eng mit der Thermodynamik verflochten, wonach die Zunahme von Entropie die Richtung der Zeit bestimmt. Dissipative Prozesse und Strukturen können trotzdem einen höheren Ordnungsgrad erreichen, der von Prigogine thermodynamisch erklärt werden konnte. „*Ordnung entwickle sich **aufgrund** der Entropie, nicht **trotz** derselben.*“¹⁷³ Die Evolution bekommt dadurch eine thermodynamische Grundlage und der von der Entropie bestimmte Zeitpfeil führt nicht zwangsläufig schnell zum Wärmetod. Wie lassen sich quasi-stationäre oder meta-stabile Zustände fern des Gleichgewichts erklären? Dazu muss man die zeitliche Entropieänderung in zwei Komponenten zerlegen. Das führt zur wichtigen Unterscheidung zwischen „Entropiefluss“, das ist der Austausch des offenen Systems mit seiner Umgebung ($d_e S$) und die „Entropieerzeugung“, die innerhalb des Systems aus irreversiblen Prozessen resultiert ($d_i S$).¹⁷⁴ Insgesamt kann man drei Bereiche der Thermodynamik unterscheiden:

- 1) Im Gleichgewicht ist die Entropieerzeugung = 0.
- 2) In Gleichgewichtsnähe gelten näherungsweise lineare und damit vorhersagbare Entwicklungen.

¹⁷² Alfred North Whitehead, Science and the modern world, S. 230, online <https://ia800809.us.archive.org/20/items/b29978531/b29978531.pdf>

¹⁷³ Ilya Prigogine im Gespräch mit Renée Weber, New York, 1984. In: Alles Leben ist Eins, Crotona Verlag, Amerang, englisches Original 1986, deutsche Ausgabe 2019, S. 249

¹⁷⁴ Prigogine, Ilya, Stengers, Isabell; Das Paradox der Zeit – Zeit, Chaos und Quanten. Piper, München 1993, S. 77-78

3) Fern vom Gleichgewicht kommen nichtlineare Effekte zum Tragen.

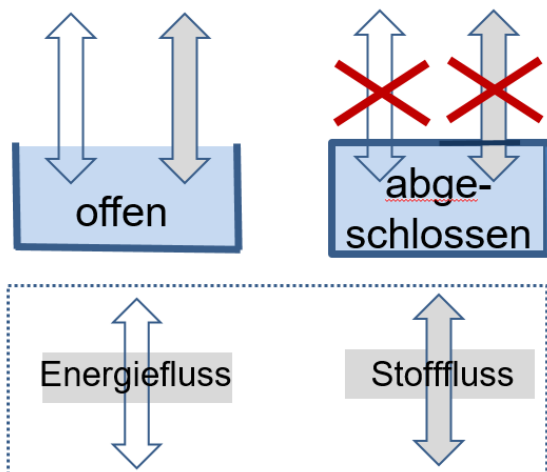


Abb. 107: Dissipative Systeme verlangen offene Systeme

Erst dadurch kommt man aus thermodynamischer Sicht zu neuen Definitionen von Ordnung und Unordnung. Es spielen Verzweigungspunkte, also Bifurkationen eine Rolle, an denen das System mehrere mögliche Entwicklungswege hat. Hier gibt es abnorm große Schwankungen, wie sie auch bei makroskopischen Mittelwerten auftreten. Dynamik kann dort Ordnung überwinden. In einem turbulenten Strudel sind zwei Wassermoleküle makroskopisch

(mindestens in Zentimetern messbar) korreliert. In einem Kristall schwingen die Teilchen dagegen inkohärent. Korrelierung zwischen verschiedenen Regionen oder Ereignissen lässt das System sich als Ganzes verhalten und ist der erste Schritt, der zu Selbstorganisation führen kann. Außerdem bricht bei einer korrelierten und somit kollektiven Bewegung die räumliche Symmetrie, die eine laminar fließende oder gar stehende Flüssigkeit ausmacht. Ein Kristall bleibt immer statisch, wenn er nicht äußeren Kräften ausgesetzt wird.

Über diese Sichtweise lassen sich Strukturen, die aus Nichtgleichgewichtsprozessen heraus entstehen, aus dem Wechselspiel aus Entropiefluss und Entropieerzeugung verstehen. Beispiele können ebenso aus der unbelebten Natur (z.B. Bénard-Konvektion) wie der Biologie kommen (z.B. dissipierte Sonnenenergie versus Entropieaufwand für die Erzeugung von komplexen Biomolekülen).

Diese neuartigen Strukturen passen nicht in das Weltbild, das ausgehend von Newton die Naturwissenschaften oder besser den wissenschaftlichen Zugang zur Natur geprägt hat. Mit diesem Weltbild kam es erst zur Polarisierung zwischen Naturwissenschaften und Geisteswissenschaften. Prigogine zeigte, dass weitab vom thermodynamischen Gleichgewicht in offenen Systemen sich komplexere Strukturen spontan ausbilden können. Korrelation bedeutet mehr als Wechselwirkung. Neue Strukturen der Materie im Nichtgleichgewicht unterscheiden sich grundsätzlich von Gleichgewichtsstrukturen. Molekulare Wechselwirkungen liegen in der Größenordnung von einem Ångström (10^{-8} cm); Korrelationen liegen in der Größenordnung von mindestens mehreren Zentimetern. Es spricht viel dafür, dass es bei Hurrikanen Kilometer sein können und bei Galaxien Lichtjahre. Unordnung und Chaos bekommen ordnenden

Charakter und dissipative Strukturen lassen in der Dynamik nichtlinearer Systeme und fern vom Gleichgewicht Selbstorganisation zu. Die bereits besprochenen technischen Begriffe Sensibilität von den Anfangsbedingungen, Instabilität oder Bifurkation gewinnen an Bedeutung. Prigogine nennt es andererseits prosaisch „*Die Wiederverzauberung der Natur*“ und begründet es damit, „*Weil sie uns die Vielfalt zurückbringt und daher auch das Unerwartete.*“¹⁷⁵ Auf jeden Fall benötigt man andere kausale Begründungen als bei Zuständen im Gleichgewicht oder in Gleichgewichtsnähe.

Selbstorganisation ist plötzlich mehr als deduktive Wissenschaft in linearem Kontext; sie wird zum Narrativ, die auch die Physiker beschäftigt. An Verzweigungspunkten geht es nicht um unzureichendes Wissen, sondern um ein intrinsisches Verhalten des Systems. Schwellenwerte, an denen Bifurkationen stattfinden, lassen sich nicht mehr deterministisch erklären. Es gibt mehrere mögliche Vergangenheiten.

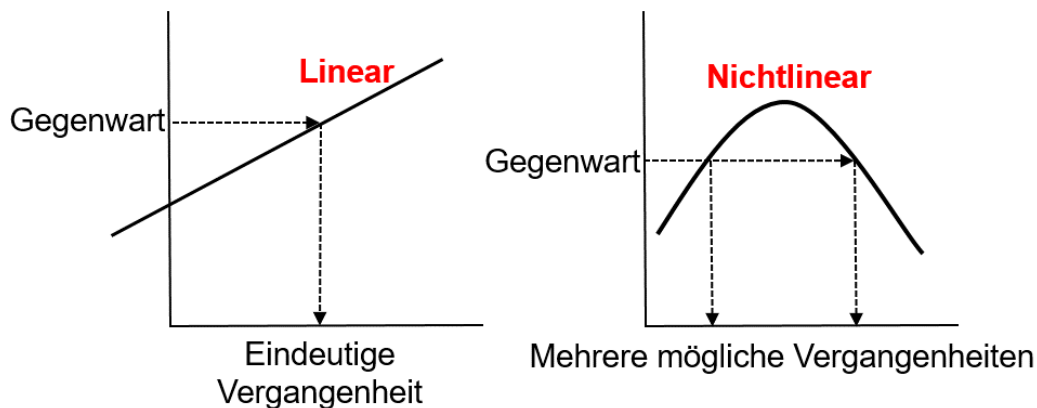


Abb. 108: Zur Vorhersage der Vergangenheit

Dank Selbstorganisation lösen sich frühere Diskrepanzen zwischen Biologie und mathematischer Physik auf. Proteine, Nukleinsäuren bis hin zu der Doppel-Helix der DNA sind molekularbiologisch gut verstanden. Anders sah es bei dem Zusammenspiel von unzähligen Biomolekülen bei hunderten oder gar tausenden chemischen Prozessen in lebenden Zellen aus. Noch vor gut einem Jahrhundert hat man dazu auf metaphysische Erklärungen zurückgegriffen. Eine Theorie der Selbstorganisation hat diese Erklärungsversuche, zumindest unter Wissenschaftlern und in aufgeklärten Kreisen, obsolet gemacht. Jetschke nennt folgende Sachverhalte, die damit erklärt werden können:

1. *Die Aufrechterhaltung des Lebens, darunter Regulationsprozesse auf zellulärer und subzellulärer Ebene Zellteilung, Zelldifferenzierung, Gestaltbildung*

¹⁷⁵ Ilya Prigogine im Gespräch mit Renée Weber, ebenda, S. 263

2. *Die Entstehung und Entwicklung des Lebens, also den Übergang vom Nicht-Leben zum Leben und die weiteren Phasen der Evolution*
3. *Das Verhalten und die Wechselwirkung von Populationen mit großen Individuenzahlen.*¹⁷⁶

Wesentliche Voraussetzung in einem System sind dabei Rückkopplungseffekte aller am System beteiligten Komponenten. Punkt 3 ist nicht unbedingt selbstverständlich. Man kann nun leicht postulieren, dass dies nicht nur für die Naturwissenschaft gilt. Jede hinreichend große soziale Einheit besitzt komplexe nichtlineare Wechselwirkungsprozesse, die Selbstorganisationsprozesse ermöglichen können. Hier ist jedoch Vorsicht geboten. Selbstorganisation als sinnstiftendes Narrativ muss sich immer am Wahrheitsgehalt der Fakten orientieren.

Eine Theorie, die versucht, insbesondere Musterbildungen in den unterschiedlichsten Disziplinen der Natur- und Sozialwissenschaften zu ordnen, ist die bereits angesprochene Synergetik. Sie ist ursprünglich aus der statistischen Physik der Nichtgleichgewichtssysteme hervorgegangen. Wie bereits erwähnt, hat einer der Begründer, Hermann Haken, zunächst den Laser als Beispiel für kollektives Verhalten betrachtet. Damit konnte Selbstorganisation fern vom thermodynamischen Gleichgewicht mit seinen wesentlichen Prinzipien studiert und der Zusammenhang mit der Theorie der Phasenübergänge entwickelt werden.¹⁷⁷ Der Analogieschluss von einem physikalischen System in andere Wissenschaftsbereiche wird aber auch heftig als unzulässigen logischen Schluss „*post hoc, ergo propter hoc*“ („danach, also deswegen“) kritisiert. Immerhin haben Erkenntnisse über nichtlineare Nichtgleichgewichtssysteme und somit „chaotische“ Prozesse es geschafft, eine emergent wachsende Theorie der Selbstorganisation zu befruchten, an deren Anfang wir erst stehen. Eine Systemtheorie, wie die Synergetik, möchte umfassend sein. Für sie liegen soziale Fragestellungen nicht außerhalb der Naturgesetze, sondern sie folgen ihnen. Die Folgerungen, so sie in dieser Allgemeinheit zutreffen, können positiv wie negativ erhellend sein und allgemeingültige Strukturen bzw. Mechanismen offenlegen. So scheinen ökonomische oder biologisch-evolutionäre Wechselbeziehungen Ähnlichkeiten mit Gesetzmäßigkeiten in Physik oder Chemie zu haben. Ein wichtiges frühes Beispiel aus der Soziologie ist die Etablierung einer öffentlichen Meinung. Hermann Haken bezeichnet sie als „Ordnungszustand“, der die Individuen sehr stark beeinflusst („versklavt“) und dadurch erst recht dominiert.¹⁷⁸ Analoge

¹⁷⁶ Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, ebenda, S. 277

¹⁷⁷ Teilweise Passagen zitiert aus <https://de.wikipedia.org/wiki/Synergetik>

¹⁷⁸ Haken, Hermann; Erfolgsgeheimnisse der Natur, Synergetik – die Lehre vom Zusammenwirken, S. 157f. Dieser Gedanke ist für viele Soziologen schockierend.

Mechanismen zum Laser sind für ihn unverkennbar. Die öffentliche Meinung ist zweifellos ein offenes, nichtlineares System fernab vom Gleichgewicht, das im Internetzeitalter sogar viel stärker als in der Vergangenheit manipulierbar geworden ist. Hier setzt auch die in den letzten Jahren entstandene Nachrichtenforschung ein, die den Begriff „Konstruktives Chaos“ verwendet. Bei Auswahl und Gestaltung von Nachrichten kann aufgezeigt werden, dass der Nachrichtenfluss von den Quellen bis zu den Mediennutzern nichtlinear ist. Das System organisiert sich nach eigenen Regeln selbst. Nachrichtenforschung konnte mit Hilfe der Chaostheorie weiterentwickelt werden. Nachricht ist Kommunikation und diese ist sehr empfindlich gegenüber kleinen Veränderungen im Nachrichtenfluss. Man identifiziert eng nebeneinander Ordnung, Chaos, Stabilität, kritische bzw. labile Phasen, Intermittenzen, Bifurkationen u.v.m. Aus Sicht der Chaostheorie wirken Nachrichtenfaktoren als seltsame Attraktoren.¹⁷⁹

Viel fundamentaler sind die Konsequenzen für die Evolution des Lebens. Manfred Eigen bewies die Existenz von kinetischen, nichtlinearen Effekten beim selbstorganisierten Ursprung genetischer Information und zeigte die molekulare Selbstorganisation als Basis der Evolutionstheorie.¹⁸⁰

Streng genommen muss man die Theorie der Selbstorganisation als Oberbegriff sehen, unter dem eine Reihe von Disziplinen Beiträge geliefert haben. Das ist die Chaostheorie selbst (H. Poincaré, E. Lorenz, B. Mandelbrot), die Synergetik (H. Haken), die Ungleichgewichtsthermodynamik (I. Prigogine), die molekulare Selbstorganisation und Evolutionstheorie (M. Eigen), aber auch die biologische und kybernetische Systemtheorie (H. v. Förster), die Ökologie (P. R. Ehrlich et.al.) sowie Autopoiese (Selbsterzeugung) und Selbstreferentialität (H. R. Maturana; F. Varela).^{181,182}

Haken findet wissenschaftliche Argumente in Form von Studien von dem amerikanischen Sozialpsychologen Solomon E. Asch, zitiert in Elisabeth Noelle-Neumann, Die Schweigespirale, Piper, München, 1980.

¹⁷⁹ Siehe z.B.

https://www.stefre.de/assets/Journalismus_als_konstruktives_Chaos_2016.pdf

¹⁸⁰ Manfred Eigen: Molekulare Selbstorganisation und Evolution (Self organization of matter and the evolution of biological macro molecules.), Naturwissenschaften Bd. 58(10), S. 465 - 523, 1971

Manfred Eigen und Peter Schuster: The Hypercycle - A Principle of Natural Self-Organization, Springer-Verlag, Berlin, 1979

¹⁸¹ Vergleiche [https://refubium.fu-](https://refubium.fu-berlin.de/bitstream/handle/fub188/7579/05_kap4.pdf?sequence=6&isAllowed=y)

[berlin.de/bitstream/handle/fub188/7579/05_kap4.pdf?sequence=6&isAllowed=y](https://refubium.fu-berlin.de/bitstream/handle/fub188/7579/05_kap4.pdf?sequence=6&isAllowed=y)

¹⁸² Zellen, als autopoietische Systeme, dienen als Beispiel für alle lebenden Systeme. In autopoietischen Systemen produzieren die Systemelemente sich selbst und die Organisation der Relationen zwischen den Elementen in rekursiver Weise, d.

Zum Abschluss folgt noch eine Bemerkung zum Ausblick.

Alle bisherigen Ausführungen bezogen sich auf deterministische, nichtlineare Phänomene. Auch wenn gerade in chaotischen Phasen der Vorhersagegrad häufig gegen Null geht, so bleiben die betrachteten mathematischen Beispiele doch von rein deterministischer Natur. Die mathematische Beschreibung erfolgt in den meisten Fällen durch gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen (stetige Zeit), wobei in diesem Beitrag meist iterierte Abbildungen zur Sprache kamen (diskrete Zeit).

Insbesondere bei physischen Systemen, die Selbstorganisation zeigen, haben wir es jedoch damit zu tun, dass die makroskopische Dynamik von kleinen mikroskopischen Fluktuationen in einem Vielteilchensystem überlagert wird. Entsprechende umfassende Bewegungsgleichungen kann man nur in Ausnahmefällen aufstellen. Diese Fluktuationen in dynamischen Systemen sind nicht deterministischer, sondern stochastischer Natur. Sie können dazu führen, dass ein System einen instabilen stationären Zustand spontan verlässt oder dass im Falle von Mehrfachstabilität die weitere Entwicklung des Systems entscheidend dadurch geprägt wird, welchen Weg es nimmt. Mathematisch sind dazu Bifurkationen / Periodenverdoppelung, ohne die möglichen Ursachen zu thematisieren, angesprochen worden. In der Biophysik kann man spontan induzierte Mutationen nennen – etwa durch kosmische Strahlung. Bei stochastisch induzierten Veränderungen lassen sich Gesetzmäßigkeiten in der Regel nur über Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen ermitteln. Doch deterministische und stochastische Effekte schließen sich nicht gegeneinander aus, sondern überlagern sich. Ein Beispiel liegt bei der Brownschen Bewegung vor. Hier wird zu der deterministischen Differentialgleichung ein „fluktuierender“ Term als sozusagen stochastische Kraft $\eta(t)$ addiert:

$$\dot{X}(t) = f[X(t)] + \eta(t)$$

Ein relativ grobes Modell kann man bei der Untersuchung von sogenanntem weißem Rauschen anwenden.

Bei der Zeltabbildung wurde bereits angesprochen, dass es gelang, die chaotische Phase in der Nähe ihrer instabilen Fixpunkte zu synchronisieren. Dabei nutzt man aus, dass kleine Kurvenstücke in erster Näherung linear sind. Ähnliche Ziele verfolgt man bei zeitdiskreten Systemen in Form iterierter Abbildungen, allerdings mit Hilfe von stochastischen Überlagerungen. Beide Techniken sind von erheblicher wirtschaftlicher Bedeutung in der Kybernetik.

h. sie beziehen sich dabei nur auf sich selbst (Selbstreferenz). Quelle: Wörterbuch der Psychotherapie.

Generell kann man sagen, dass der erste Hype zur Chaostheorie wissenschaftlich längst überwunden ist und differenzierteren Betrachtungen gewichen ist. Rein deterministische, nichtlineare Prozesse werden meist in der physikalischen (oder sozialen) Realität durch stochastische Einflüsse verwässert. Aber nichtlineare Wechselwirkungen, insbesondere unter Nichtgleichgewichtsbedingungen, bis hin zur Selbstorganisation, sind längst als Naturgesetze erkannt worden – mit Elementen von Ordnung und Chaos gleichermaßen. Nichtlinearität scheint über die mathematisch beschreibbare Naturwissenschaft hinaus, bestimmend in unserer Welt zu sein.

Ist es vermessen zu fragen, ob wir nicht als gleichermaßen hochentwickelte Spezies und als hochentwickelte Gesellschaft ihnen unsere Existenz zu verdanken haben?

Ich glaube, wir leben in einer Welt, die uns nicht überlassen wurde. Sie zeigt sich uns nicht als offenes Buch, das wir lesen und in dem wir dieses oder jenes Kapitel aufschlagen können. Wir besitzen Hinweise und Fragmente. Aber um zu wissen, wie man damit zu einem allgemeinen Bild kommen könnte, würde man ein andersgeartetes Wissen benötigen oder wenigstens ein vollständigeres Wissen als jenes, auf das wir zurückgreifen können.

*Ilya Prigogine*¹⁸³

Abbildungsverzeichnis

- Abb. 1: Lineare Entwicklung der ersten vier Iterationen von $B_{n+1} = r \cdot B_n$. Eigene Grafik nach Peak, David; Frame, Michael; Komplexität – das gezähmte Chaos, S. 126
- Abb. 2: Links wechselwirkende Punkte; rechts Wechselwirkung ließ sich formal eliminieren, System ist integrierbar, eigene Grafik
- Abb. 3: Falten und strecken bei 12 virtuellen „Teigstücken“. Eigene Grafik, Inspiration Peitgen et. al. Chaos, S. 74
- Abb. 4: Euklidische versus fraktale Geometrie, Inspiration Maria Isabel Binimelis Bassa; Fraktale Geometrie, Für die deutsche Ausgabe: Librero, Kerkdriel (Niederlande), 2017, S. 48
- Abb. 5: Weierstraßsche Monsterkurve für $b=1/2$, $a=9$, Vergrößerung bei $x \approx 0,2$, Quelle: https://www.mathematik.uni-marburg.de/~bschwarz/Sem_09W_files/09%20Lydia%20Gro%C3%9Fhennig%20-%20Weierstrassches%20Monster%20-%20Ausarbeitung.pdf
- Abb. 6: Bildungsprinzip der „Teufelstreppe“, Bildquelle:

¹⁸³ Ilya Prigogine im Gespräch mit Renée Weber, New York, 1984. In: Alles Leben ist Eins, deutsche Ausgabe 2019, S. 266

- Cantor-Funktion.svg, Ljfa-ag - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7456420>
- Abb. 7: <https://funfacts.mathi.uni-heidelberg.de/index.php/Cantor-Menge>
- Abb. 8: Bildungsprinzip eines ungeeigneten Bezeichnungssystems für die Cantor-Menge, eigene Grafik
- Abb. 9: Cantor-Menge als Vereinigung exakter, verkleinerter Kopien, eigene Grafik, inspiriert von Peitgen et. al. Chaos, S. 96
- Abb. 10: Peano-Kurve. Abgebildet sind die vier ersten Iterationsschritte
<https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Kurve>
- Abb. 11: Gosper-Kurve, Bildungsprinzip, Parkettierung, Dimension
<https://de.wikipedia.org/wiki/Gosper-Kurve>
- Abb. 12: Generator der Hilbert-Kurve, eigene Grafik
- Abb. 13: Quelle <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/hilbert.pdf>. Hilberts Originalpublikation aus dem Jahr 1890 (Seite 1 von 2).
- Abb. 14: Bildquelle
https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt#Dreiecksfraktal
- Abb. 15: Vier Iterationen der Koch'schen Schneeflocke, Bildquelle um Winkel θ ergänzt: <https://de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve>
- Abb. 16: Bildungsprinzip für eine dreidimensionale Kochfläche. Eigene Grafik nach Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 99, Bildquelle aus Camp D.R., A Fractal Excursion, Mathematics Teacher, April 1991, 265-275
- Abb. 17: Räumlicher Koch-Stern, <https://de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve>
- Abb. 18: Die ersten 5 Iterationen des Sierpinski-Dreiecks. Bildelemente entnommen aus
<https://e.math.cornell.edu/people/belk/projects/ShuyiWeng.pdf>
- Abb. 19: Sierpinski-Dreieck und geraden und ungeraden Einträge im Pascalschen Dreieck bis zu Level 32. Modifizierte Bildquelle aus Elementen von https://de.wikipedia.org/wiki/Sierpinski-Dreieck#/media/Datei:Sierpinski_Pascal_triangle.svg
- Abb. 20: Iterative Verarbeitung eines Quadrats. Eigene Grafik, nach Peak, David; Frame, Michael; Komplexität – das gezähmte Chaos, S. 32
- Abb. 21: Entwicklung beim Chaos-Spiel. Für die Grafiken siehe das Applet auf der Seite <http://www.jgiesen.de/ChaosSpiel/Spiel100.html>
- Abb. 22: Durch Grenzwertbildung konvergiert jede Form zu einer Punktmenge. Eigene Grafik, nach Peak, David; Frame, Michael; Komplexität – das gezähmte Chaos, S. 34
- Abb. 23: Test von digitalen Adressen auf bitweise binäre Addition, eigene Grafik, nach Peitgen, Jürgens, Saupe, Bausteine der Ordnung Fraktale, S. 158, bzw. Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos Bausteine der Ordnung, S. 597
- Abb. 24: Elementare Transaktionen der Ebene, eigene Grafik nach Peitgen, Jürgens, Saupe, Bausteine der Ordnung Fraktale, S. 281
- Abb. 25: Kontraktion um einen Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$. Eigene Grafik nach Peak, Frame, Komplexität, S. 54

- Abb. 26: Anwenden der drei Transformationen, Skalierung (um $\frac{1}{2}$), Translation in Richtung der Achsen. Eigene Grafik nach Peak, Frame, Komplexität, S. 55
- Abb. 27: Iterative Verarbeitung eines Quadrates zum Sierpinski-Teppich. Eigene Grafik nach Peitgen, Jürgens, Saupe, Bausteine der Ordnung Fraktale, S. 102
- Abb. 28: Die beiden Sierpinski-Dreiecke können durch ein IFS mit drei Ähnlichkeitstransformationen mit Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$ erzeugt werden. Sie stellen den prinzipiellen Bauplan einer ganzen Familie dar. Symmetrie-operationen an den drei Quadraten werden w_1, w_2 und w_3 genannt. Eigene Grafik, angeregt von Peitgen, Jürgens, Saupe, Bausteine der Ordnung Fraktale, S. 286-287
- Abb. 29: Das dynamische System $\{\mathbb{R}^2; f\}$. Eigene Grafik nach Barnsley, Michael F.; Fraktale - Theorie und Praxis der Deterministischen Geometrie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford, 1995, S. 283
- Abb. 30: Drehungen und Spiegelungen eines Quadrats, eigene Grafik
- Abb. 31: Cayley-Graph der Diedergruppe D_4 , eigene Grafik nach https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dih_4_Cayley_Graph;_generators_a,_b.svg
- Abb. 32: Die Abb. zeigt zwei denkbar einfache Beispiele eines Cayley-Graphen einer unendlichen Kleinschen Gruppe mit einem Rand im Unendlichen. Links ist es die Parkettierung mit gleichseitigen Dreiecken, rechts die Kachelung der hyperbolischen Scheibe durch Keile. <https://abel.math.harvard.edu/~ctm/gallery/index.html>
- Abb. 33: Grenzmengen / fraktaler, unendlicher Rand von Kleinsche Gruppen erzeugt von Möbius-Abbildungen <http://klein.math.okstate.edu/IndrasPearls/posters/>
- Abb. 34: Das Sierpinski-Pentagon kann man als IFS mit fünf Ähnlichkeitstransformationen konstruieren. Hier wird die echte fünfzählige Symmetrie durch Überlagerung von fünf d_0 erzeugt.
- Abb. 35: Das Sierpinski-Pentagon wird jedoch in der Regel gemäß dieser Abbildung über regelmäßige Fünfecke konstruiert. Grafik aus <https://pythonturtle.academy/sierpinski-pentagon-with-python-turtle>
- Abb. 36: Man erkennt hier die IFS-Baupläne natürlicher Formen am Beispiel des Barnsley-Farns. Grafiken aus: <https://quadsoft.org/fraktale/> und https://en.wikipedia.org/wiki/Barnsley_fern

- Abb. 37A: Der Cantor-Irrgarten (auch Cantor-Labyrinth) hat nur eine selbstähnliche Transformation (Mitte). Die Transformationen rechts und links sind selbstaffin. Der Attraktor steht in enger Beziehung zur Cantor-Menge.
- Abb. 37B: Auflösung der ersten Iterationen beim Cantor-Irrgarten, eigene Grafik nach
https://www.researchgate.net/publication/314947133_Fraktale_Geometrie_-_Eine_Einführung
- Abb. 37C: Die Drachenkurve kann die Ebene lückenlos parkettieren. Das IFS zeigt hier 3 Komponenten. Eigene Grafik bzw. aus https://en.wikipedia.org/wiki/Dragon_curve
- Abb. 38: Ausgehend von den drei Ähnlichkeits-transformationen w_1, w_2 und w_3 betrachte man z.B. eine Transformation mit w_1 , eigene Grafik
- Abb. 39: Das Prinzip von Abb. 38 wird jetzt auf w_2 und w_3 ausgedehnt, eigene Grafik.
- Abb. 40: Es gibt acht universelle symmetrische Attraktoren. Die Symbole charakterisieren die jeweiligen prinzipiellen Transformationen. eigene Grafik.
- Abb. 41: Illustration des Banachschen Fixpunktsatzes an dem Beispiel der positiven Lösung der Gleichung $2 - x^2 = e^x$. Logarithmieren führt zur Fixpunktgleichung $x = \ln(2 - x^2)$, eigene Grafik
- Abb. 42: Menger-Schwamm, Bildquelle
<https://www.mathematik.de/Forschung/511-menger-schwamm>
- Abb. 43: Sierpinski-Tetraeder,
https://en.m.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle
- Abb. 44: Drachenkurve, 2D-Gebilde als Beispiel für ein „self-reproducing“ Fraktal. Grafik erstellt mit ChatGPT 4o, siehe auch Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, S. 199.
- Abb. 45: Mandelbulb, $v \rightarrow v^9 + c$, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mandelbulb_1,024GP_Overview_20211110_002_ALT.png
- Abb. 46: Rückkopplungsmaschine, eigene Grafik.
- Abb. 47: Unterschiedliche Auffassungen bei der Länge der gemeinsamen Grenze, eigene Grafik.
- Abb. 48: Lebesgue-Maß (anschaulich)
https://www.math.tugraz.at/~ganster/lv_masstheorie_ss_11/05_lebesgue_mass.pdf,
- Abb. 49: Lebesgue-Überdeckungsdimension
https://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_covering_dimension
- Abb. 50: Vorgehen bei der Boxdimension am Beispiel der Küstenlinie Großbritanniens, Bildquelle
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Great_Britain_Box.svg
- Abb. 51: Logistische Gleichung $f_r(x) = rx(1 - x)$ bei vier verschiedenen r -Werten. Bildquelle: <https://www.yumpu.com/de/document/>

- read/27051983/logistische-abbildung
- Abb. 52: Oben Logistische Gleichung mit Startwert $x_0=0,1882550$ und $r=4$: Keine Ordnung zu erkennen. Unten $r=2,75$. Alle Anfangswerte konvergieren zum gleichen Endwert. Siehe auch Wehr, Marco; Der Schmetterlingsdefekt, Turbulenzen in der Chaostheorie, S. 69, Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o (o für Vollversion)
- Abb. 53: <https://de.wikipedia.org/wiki/Feigenbaum-Konstante>
- Abb. 54: Inseln der Stabilität im Chaos. Bildquelle https://www.fraktalwelt.de/myhome/figtree_2.htm
- Abb. 55: Das Verhältnis der Intervalle strebt gegen δ . Eigene Grafik, Zahlenwerte aus www.spektrum.de
- Abb. 56: Zwei Orbits für $r=4$, die sich beim Startwert um ein Zehnmillionstel unterscheiden. Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o, Idee https://www.fraktalwelt.de/systeme/as_weg_ins_chaos.pdf
- Abb. 57: Typische Bifurkationen von Fixpunkten einparametrischer Differentialgleichungen; eigene Grafik, Idee aus Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, S. 159
- Abb. 58: Maß für Chaos - der Lyapunov Exponent, eigene Grafik
- Abb. 59: Entwicklung des Lyapunov-Exponenten in der logistischen Abbildung von $3 \leq r \leq 4$. Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o, Idee https://web.fs.uni-lj.si/lasin/wp-content/include-me/chaotic/Lyap_logistic/ly_logistic.html
- Abb. 60: A,B,C,D: Beide Seiten erstellt mit ChatGPT Version 4o, links prinzipielle Rechnung, Facharbeit Andreas Schmid, https://www.fraktalwelt.de/systeme/as_weg_ins_chaos.pdf mit Dank für die freundliche Abdruckgenehmigung
- Abb. 61: Auswirkungen des Rundungsfehlers auf Periodik und Sensitivität, Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o, Idee Peitgen et. al. Chaos, S. 57,
- Abb. 62: Deterministisches Chaos und Kausalität, eigene Grafik,
- Abb. 63: Zeltabbildung und ihr „Schmetterlingseffekt“, Bildquelle <https://de.wikipedia.org/wiki/Zeltabbildung>
- Abb. 64: Grafische Illustration einer 2-er Periodik bei der Zeltabbildung, eigene Grafik
- Abb. 65: Dritte Iterierte bei $s=2$, eigene Grafik nach Peak, Frame, S. 142
- Abb. 66: Rasche Ausbreitung von Unterschieden Nähe $s=2$. Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o, Idee Peak, Frame, S. 145
- Abb. 67: <https://www.mathematik.de/dmv-blog/3122-lorenz-entwickelte-in-den-60er?highlight=WyJmcmFrdGFsZSIsImZyYWt0YWxlJyJd>
- Abb. 68: Schematische Darstellung der Dynamik. Es handelt sich um eine Kombination von Streck-, Spalt- und Verschmelzungsprozessen. Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o
- Abb. 69: https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Henon_attractor.png
- Abb. 70: wikiwand.com/de/Rössler-Attraktor

- Abb. 71: Dynamik des Rössler-Attraktors, Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o
- Abb. 72: Thomas-Attraktor, Idee <http://www.3d-meier.de/tut19/Seite41.html>, Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o
- Abb. 73: Vier Arten von Attraktoren; Grafikelemente aus Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, S. 148
- Abb. 74: Entstehung eines Solitons, Bildquelle: <https://www.weltderphysik.de/gebiet/materie/spintronik/solitonen/>
- Abb. 75: Erstes 1978 veröffentlichtes Bild der Mandelbrot-Menge. https://abel.math.harvard.edu/archive/118r_spring_05/docs/brooksmatelski.pdf
- Abb. 76: Die Kernfrage von MLC (Mandelbrot locally connected). Eigene Grafik
- Abb. 77: Tiefliegende Grundlagen der Chaos-Theorie zwischen Feigenbaum-Diagramm und der Mandelbrot-Menge M. Bildquelle <https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge>
- Abb. 78: Wie eine Kardioide entsteht. <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/51/Kardioide.svg>
- Abb. 79: Prinzip der Knospenbildung. Idee Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 190, Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o
- Abb. 80: Ausschnittsvergrößerungen. Selbst erstellt über das Tool <https://math.hws.edu/eck/js/mandelbrot/MB.html>
- Abb. 81: Linke Seite – Punkte bleiben im Endlichen „gefangen“
Rechte Seite – Punkte „entweichen“ ins Unendliche.
Bildquelle: <http://www.jgiesen.de/Divers/ChaosVortrag/Chaos.pdf>
- Abb. 82: Buddhabrot, <https://superliminal.com/fractals/bbrot/>
- Abb. 83: Punkte in der Mandelbrot-Menge mit der zugehörigen Julia-Menge
Bildquelle und Datenquelle für c:
<http://www.3d-meier.de/tut20/Julia2/Seite1.html>
Abdruck mit freundlicher Genehmigung von Herrn Jürgen Meier.
- Abb. 84: Tabelle der c-Werte mit denen die Julia-Mengen in Abb. 83 generiert wurden.
- Abb. 85: Douady Kaninchen, Bildquelle <https://mathworld.wolfram.com/DouadysRabbitFractal.html>
- Abb. 86: Erster Versuch der Veranschaulichung einer Julia-Menge durch Hubert Cremer, Berlin 1925, <http://eudml.org/doc/145695>
- Abb. 87: Julia-Menge gemäß $z_{n+1} = z_n^3 + c$
<https://paulbourke.net/fractals/julia3/>
- Abb. 88: Zoom in die Mandelbrot-Menge.
Links 100.000-fache Vergrößerung; rechts Teile der Ausschnitte b und c aus Abb. 80 10^{15} - fach vergrößert. Erstellt mit dem Tool aus <https://math.hws.edu/eck/js/mandelbrot/MB.html>
- Abb. 89: Extremer Zoom (ca. 10^{13} -fach) in eine Julia-Menge beim Punkt $0.0958598997051 + 1.1501990019993i$ mit $c = 0.355 + 0.355i$ erstellt mittels eines Python-Programms. Sourcecode zur Veränderung des Zentrums und von c siehe

- <https://pythonturtle.academy/zooming-1013-times-into-julia-set-animation/>
- Abb. 90: Zweidimensionaler Schnitt durch die dreidimensionale Projektion des 4D-Fraktals. Bildquelle
https://de.wikipedia.org/wiki/Kubische_Iteration
- Abb. 91: Cactus-Fraktal mit kubischem Glied.
<https://paulbourke.net/fractals/cactus>
- Abb. 92: Turbulenz nach Leonardo da Vinci
<https://www.weltderphysik.de/gebiet/materie/turbulenz/turbulenz-und-chaos/>.
- Abb. 93: Kelvin-Helmholtz-Wirbel in der Atmosphäre hinter dem Monte Duval, Australien.
Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Turbulente_Strömung
- Abb. 94: Zeitliche Änderung in einem offenen chemischen Reaktionssystem, zitiert nach Großmann, Siegfried; Deterministisches Chaos, Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Vorträge N 321, Westdeutscher Verlag 1983, S. 9
- Abb. 95: Cartwheel-Galaxie,
<https://www.nationalgeographic.de/wissenschaft/2022/12/james-webb-weltraumteleskop-2022-jahresrueckblick-in-bildern-weltall>
- Abb. 96: Zellulärer Automat – Game of Life, Screenshot aus
<https://www.fraktalwelt.de/myhome/gol-g.htm>
- Abb. 97: Belousov Zhabotinsky Reaktion. Bildquelle:
<https://www.weltderphysik.de/thema/chaos-und-ordnung/ordnung-in-natur/>
- Abb. 98: <https://www.weltderphysik.de/thema/hinter-den-dingen/farben-einer-kerzenflamme/>
- Abb. 99: Bénard-Konvektion (hier in Kupferschale erhitztes Silikonöl mit Silberbronze), <https://www.experimente.physik.uni-freiburg.de/Thermodynamik/waermeleitungundkonvektion/konvektion/benardkonvektionszellen>
- Abb. 100: Hexagonale Walzen, Mitte aufsteigende heiße, am Rand abgekühlte Flüssigkeit, eigene Grafik
- Abb. 101: Dissipative Strukturen jenseits des instabilen thermodynamischen Zweigs. Eigene Grafik nach Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, S. 21
- Abb. 102: Prinzip von Nichtgleichgewichtsstrukturen, nach H.J. Schlichting, https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/dissipation_struktur.pdf
- Abb. 103: Entropiezunahme erklärt sich statistisch nach Boltzmann aus der Zunahme von möglichen Mikrozuständen. Für vier Teilchen gibt es nur eine Möglichkeit sie in einem Gefäß unterzubringen; bei zwei

Gefäßen sind es schon sechs Möglichkeiten. Diese Argumentation gilt nur für abgeschlossene (adiabatische) Systeme:

2. Hauptsatz der Thermodynamik. Eigene Grafik

Abb. 104: Prinzipieller Aufbau eines Lasers, Bildquelle <https://astro.uni-bonn.de/~deboer/pdm/laser/laser.html>

Abb. 105: Unterschied Lampe – Laser, unter Verwendung von <https://www.ilt.fraunhofer.de/de/studium/laser-tutorial/laserprinzip.html>

Abb. 106: Beispiele für die Realisierung abstrakter Begriffe der Synergetik in verschiedenen Gebieten. Eigene Abschrift aus Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, ebenda, S. 298

Abb. 107: Dissipative Systeme verlangen offene Systeme, 1. Hauptsatz der Thermodynamik, eigene Grafik nach Haken, Erfolgsgeheimnisse der Natur, S. 28.

Abb. 108: Zur Vorhersage der Vergangenheit, eigene Grafik nach einer Idee von Peak, David; Frame, Michael; Komplexität – das gezähmte Chaos, Birkhäuser, Basel Boston Berlin, 1995, S. 80

Literaturverzeichnis

Bader, Michael; Raumfüllende Kurven, Begleitendes Skriptum zum entsprechenden Kapitel der Vorlesung „Algorithmen des Wissenschaftlichen Rechnens“, TU München, SS 2004, <https://web.archive.org/web/20050317185150/http://www5.in.tum.de/lehre/vorlesungen/algowiss/ss04/vorlesung/rfk.pdf>

Barnsley, Michael F.; Fraktale Theorie und Praxis der Deterministischen Geometrie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford, 1995

Bauberger, Stefan; Was ist die Welt? – Zur philosophischen Interpretation der Physik, Kohlhammer Stuttgart, 2005, 2. Auflage

Behr, Reinhart; Fraktale – Formeln aus Mathematik und Natur, Ernst Klett, Stuttgart 1993

Beutelspacher, Albrecht; Petri, Bernhard; Der Goldene Schnitt. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford, 1996

Binimelis Bassa, Maria Isabel; Fraktale Geometrie, Für die deutsche Ausgabe: Librero, Kerkdriel (Niederlande), 2017

Briggs, John, Peat, F. David; Die Entdeckung des Chaos, Hanser, München Wien, 1990

Covency, Peter; Highfield, Roger; Anti-Chaos, Rowohlt, Reinbek bei Hamburg, April 1992

Esfeld, Michael; Wissenschaft, Erkenntnis und ihre Grenzen; Spektrum Spezial. Physik Mathematik, 2.18, S. 70-76

Feigenbaum, Mitchell, Journal Statistische Physik, 19, 25 (1978)

Gerok, Wolfgang u. a. (Hrsg.); Ordnung und Chaos in der unbelebten und belebten Natur. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 115. Versammlung, 17. bis 20. Sept. 1988, Freiburg i. Br., Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart (1989).

Gleick, James; Chaos, vollständige TB-Ausgabe, Droemersch Verlagsanstalt Th. Knaur Nachf., München, Juli 1990

Großmann, Siegfried; Deterministisches Chaos, Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Vorträge N 321, Westdeutscher Verlag 1983, S. 7-29

Großmann, Siegfried; Selbstähnlichkeit: Das Strukturgesetz im und vor dem Chaos, in: Physikalische Blätter 45 (1989), S. 172-80

Großmann, S.; Thomae, S.; Zeitschrift für Naturforschung, 32a, 1353, (1977)

Haken, Hermann; Erfolgsgeheimnisse der Natur, Ullstein Sachbuch, Frankfurt/M. Berlin Wien 1984

Halling, Horst; Möller, Rolf; Mathematik fürs Auge, Spektrum akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1995

Jetschke, Gottfried; Mathematik der Selbstorganisation, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (Verlag Harri Deutsch), Berlin, 1989

Lindley, David; Die Unbestimmbarkeit der Welt, DVA, München, 2008

Mandelbrot, Benoit B.; Die fraktale Geometrie der Natur, Basel, Boston, Birkhäuser 1987

Mandelbrot Benoit B.; Fractal Aspects of the Iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$
Mathematics Department Harvard University Cambridge. Massachu., 02138,
IBM T. J. Watson Research Center Yorktown Heights, New York 10598
http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/p.bentley/teaching/L6_reading/mandelbrot.pdf

Mandelbrot, Benoit B.; Schönes Chaos, Piper München Zürich 2013

Muller, Richard A.; Jetzt – Die Physik der Zeit, S. Fischer, Frankfurt a. Main, 2018

Peak, David; Frame, Michael; Komplexität – das gezähmte Chaos, Birkhäuser, Basel Boston Berlin, 1995

Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Bausteine der Ordnung Fraktale, Springer Verlag / Klett Cotta, 1992

Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994

Peitgen, Heinz-Otto; Richter, Peter H.; The Beauty of Fractals, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1986

Prigogine, Ilya; Stengers, Isabell; Das Paradox der Zeit – Zeit, Chaos und Quanten. Piper, München 1993

Prigogine, Ilya; Stengers, Isabell; Dialog mit der Natur. Neuauflage 1990, Piper, München 1981

Schroeder, Manfred; Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit; Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford, 1994

Sernetz, Manfred; Fraktale biologische Strukturen: Chaos und Ordnung im Organismus, Berichte der Justus-Liebig-Gesellschaft, Gießen, 2001

Sernetz, Manfred; Pharmakokinetik und Wachstumskinetik, Vorlesung am FB Biomedizintechnik FH Gießen und am FB Veterinärmedizin der JLU Gießen, Vorlesungsskript aus dem Jahr 2000, www.staff.uni-giessen.de/~gi38/publica/pharma/pharma.pdf

Weber, Renée; Alles Leben ist Eins, Crotona Verlag, engl. Ausgabe 1986, Dialogues with Scientists and Sages, Dt. Ausgabe 1. Auflage, 2019, insbesondere Kap. X, Die Wiederverzauberung der Natur, Ilya Prigogine

Wehr, Marco; Der Schmetterlingsdefekt, Turbulenzen in der Chaostheorie, Klett-Cotta, 2002

Weizsäcker, Carl Friedrich von; Die Einheit der Natur: Studien. Hanser Verlag, 1971

West, Geoffrey B.; Brown James H.; Enquist, Brian J.; A General Modell for the Structure, Funktion and Allometry of Plant Vascular Systems, Nature 400, 664-667 (12 August 1999)

Zeitler, Herbert; Neidhardt, Wolfgang; Fraktale und Chaos, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1993

Danksagung

Mein Dank geht an **Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl** vom Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. Vor allem schulde ich ihm Dank für

seine Geduld für meine mehrmaligen Nachbesserungen des Manuskripts. Er hat einen unerschütterlichen Glauben daran, dass es nötig ist an der Popularisierung der Mathematik zu arbeiten. Seine wertvollen Impulse und seine Qualitätskontrolle als Mentor haben bereits einige meiner Beiträge unterstützt und möglich gemacht.

Zum 12. Mal bei Veröffentlichungen in der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Zeitschrift steht mir **Herr Dr. Michael Serafin** zur Seite. Er war mir immer mehr als formaler Schriftleiter. Er ist Sparringspartner, engagiert sich inhaltlich für die Themen und sorgt für die formale Qualitätssicherung durch äußerst gründliche Durchsicht des Manuskripts. Da wo der Autor durch zahlreiche Überarbeitungen „betriebsblind“ geworden ist, findet er noch Fehler in der Orthographie, im Ausdruck oder bei der Formatierung und den Grafiken. Ihm gilt mein freundschaftlicher Dank.

Liebe ist der Wunsch etwas zu geben, nicht etwas zu erhalten.

Bertolt Brecht

FÜR FARI

Personenverzeichnis

Name, Vorname	Lebensdaten	Bemerkung	Seite
Adams, Henry Brooks	1838 - 1918	US-am. Historiker	4
Ångström, Anders Jonas	1814 – 1874	Schwedischer Astronom und Physiker	118
Aristoteles	384-322 vChr	Griech. Universalgelehrter	9
Asch, Solomon Elliot	1907 – 1996	US-amerikanischer Sozialpsychologe	121
Belousov, Boris Pawlowitsch	1892 – 1970	Russ.-sowjet. Chemiker/Biophysiker	103,104,107,109,129
Banach, Stefan	1892 – 1945	Polnischer Mathematiker	44,45,83,126
Bénard, Henri Claude	1874 – 1939	Französischer Physiker	75,104,105,107,111,118,129
Barnsley, Michael Fielding	*1946	Britischer Mathematiker	36,41,125
Besicovitch, Abram S.	1891 – 1970	Russischer Mathematiker	51
Beutelspacher, Albrecht	*1950	Deutscher Mathematiker	27,130
Bohr, Niels	1885 – 1962	Dän. Physiker, Nobelpreis 1932	8
Bolzano, Bernhard	1781 – 1848	Böhm. Priester u. Mathematiker	17
Bouligand, Georges Louis	1889 – 1979	Franz. Mathematiker	55
Branner, Bodil	*1943	Dänischer Mathematiker	84,86,97
Briggs, John	*1946	US-am. Autor	64,65,130
Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (Bertus)	1881 – 1966	Niederländischer Mathematiker	51
Brown, James H.	*1942	US-am. Biologe	12,132
Brown, Robert	1773 – 1858	Schottischer Arzt und Botaniker	52,77,122
Buddha, Gautama (Siddhartha Gautama)	563 – 483 v.Chr.	Indischer Weisheitslehrer und Religionsstifter	89,90,128
Buff, Xavier	*1971	Franz. Mathematiker	92
Cannon, James W.	*1943	US-amerikanischer Mathematiker	40
Carnot, Nicolas Léon. Sadi	1796 – 1832	Französischer Physiker u. Ingenieur	109
Cantor, Georg	1845 - 1918	Deutscher Mathematiker	3,16-24,30,31,39,40,42,51,65,66,

			75,90,116,124,126
Cauchy, Augustin-Louis	1789 – 1857	Franz. Mathematiker	14
Cayley, Arthur	1821 – 1895	Englischer Mathematiker	38,39,125
Cepelewicz, Jordana	*?	US-amerikanische Autorin	81
Cesàro, Ernesto	1859 – 1906	Ital. Mathematiker	4,27,28
Chaitin, Gregory	*1947	US-am. Mathematiker u. Philosoph	11,13
Chayyām, Omar	1048 – 1131	Pers. Mathematiker und Dichter	31
Chéritat, Arnaud	*1975	Franz. Mathematiker	92
Clausius, Rudolf	1822 – 1888	Deutscher Physiker	110
Conway, John Horton	1937 - 2020	Brit. Mathematiker	102
Coulomb, Charles Aug. de	1736 – 1806	Franz. Physiker	49
Coxeter, Harold Scott MacDonald	1907 – 2003	Britisch-kanadischer Mathematiker	12
Cremer, Hubert	1897 – 1983	Deutscher Mathematiker	90,93,128
Dahmani, François	?	Franz. Mathematiker	47
Da Vinci, Leonardo	1452 - 1519	It. Künstler u. Universalgelehrter	98,99,129
Du Bois-Reymond, Paul	1831 – 1889	Deutscher Mathematiker	11,17
Dudko, Dzmitry	?	Polnischer Mathematiker	82
Douady, Adrien	1935 – 2006	Franz. Mathematiker	82,86,87,92,93,128
Eddington, Sir Arthur Stanl.	1882 – 1944	Englischer Physiker	117
Ehrlich, Paul R.	*1932	US-amerikanischer Biologe	121
Eigen, Manfred	1927 – 2019	Deutscher Physikochemiker	121
Enquist, Brian J.	?	US-am. Biologe	12,132
Escher, Maurits Cornelis	1898 - 1972	Niederländischer Künstler	12
Esfeld, Michael	*1966	Deutscher Wissenschaftsphilosoph	13,131
Euklid	3. Jh. v.Chr.	Griechischer Mathematiker	12,14-16,18,19,24,31,38,55,123
Euler, Leonhard	1707 – 1783	Schweizer Math./Phys./Astronom etc.	87,100
Fatou, Pierre	1878 – 1929	Franz. Mathematiker	48,80,90,64,96,116
Farey, John Sr.	1766 – 1826	Englischer Geologe	39,40

Feigenbaum, Mitchell	1944 – 2019	US-am. Physiker	13,53,57-62,67,82,84-86,89,116 127,128,131
Fibonacci, Leonardo	~1170-~1240	Ital. Mathematiker des Mittelalters	82,87-89
Förster, Heinz von	1911 – 2002	Österr. Physiker, Kybernetiker, Philosoph	121
Ford, Joseph	1927 – 1995	US-am. Physiker	9,11
Fourier, Joseph	1768 – 1830	Franz. Mathematiker	66,109
Frerich, Stefan	*1964	Deutscher Autor	10,66
Glansdorf, Paul Gustave	1904 – 1999	Belgischer Physiker	107,
Gleick, James	*1954	US-am. Autor	3,9,131
Gosper, Bill	*1943	US-amerikanischer Mathematiker	4,23-25,124,Links
Green, Melinda	?	https://superliminal.com/fractals/bbrot/	90
Großmann, Siegfried	*1930	Deutscher Physiker	10,11,49,53,100,116,129,131
Guirardel, Vincent	?	Franz. Mathematiker	47
Haken, Hermann	*1927	Deutscher Physiker	113,114,120,121,130,131
Hausdorff, Felix	1868 – 1942	Deutscher Mathematiker	4,17,19,22,24,27,31,40,49,51,54,56 94,116
Heisenberg, Werner	1901 – 1976	Deutscher Physiker, Nobelpreis 1932	8
Helmholtz, Hermann von	1821 – 1894	Deutscher Physiker	99,110,129
Hénon, Michel	1931 – 2016	Franz. Mathematiker	4,20,75
Herz-Fischler, Roger	*1940	US-amerikanischer Mathematiker	26
Hilbert, David	1862 - 1943	Deutscher Mathematiker	3,4,16,23-26,50,116,124
Hubbard, John Hamal	*1945	US-am. Mathematiker	82,86,87,97
Hutchinson, John Irwin	1867 - 1935	US-am. Mathematiker	41
Jasek, Martin	?	Czech. Mathematikhistoriker?	17
Yoccoz, Jean-Christophe	1957 – 2016	Franz. Mathematiker	82
Julia, Gaston Maurice	1893 – 1978	Franz. Mathematiker	4,46,80-82,87,90-97,100,116,128 129
Jürgens, Hartmut	1955 – 2017	Deutscher Mathematiker	20,33,34,45,52,64,69,90,99,124,125

			132
Kant, Immanuel	1724 – 1804	Deutscher Philosoph	12
Kapovich, Michail	*1963	Russisch/US-am. Mathematiker	47
Kelvin, Lord (William Thomson)	1824 – 1907	Britischer Physiker	99,103,129
Klein, Felix	1849 – 1925	Deutscher Mathematiker	25,38-40
Kleiner, Bruce Alan	?	US-am. Mathematiker	48
Koch, Helge von	1870 – 1924	Schwedischer Mathematiker	4,27-29,52,100,124
Köhl, Ralf	*1967	Deutscher Mathematiker	132
Kolmogorov, Andrei Nikolaj.	1903 – 1987	Sowj. Mathematiker	11,99
Küppers, Bernd-Olaf	*1944	Deutscher Physiker u. Philosoph	10,108
La Mettrie, Julien Offray de	1709 – 1751	Franz. Arzt u. Schriftsteller	116
Landauer, Rolf William	1927 – 1999	Deutsch-US-amerikanisch. Physiker	107
Laplace, Pierre Simon de	1749 – 1827	Franz. Math./Physiker/Astronom	9,70,116
Lebesgue, Henri Léon	1875 – 1941	Franz. Mathematiker	17,21,51,54,55,126
Lei Tan bzw. Tan Lei	1963 – 2016	Chin. Mathematikerin	91
Leibniz, Gottfried-Wilhelm	1646 – 1716	Deutscher Philosoph u. Mathematiker	11
Lefever, René	*1943	Belgischer Physikochemiker	104
Libchaber, Albert L.	*1934	Franz. Physiker	61
Lindenmayer, Aristid	1925 – 1989	Ungar. theoretischer Biologe	12,29
Lorenz, Edward	1917 – 2008	US-am. Mathem. u. Meteorologe	15,74,75,121,127
Lukrez, (Titus Lucretius Carus)	99/94 - 55/53 v.Chr.	Römischer Dichter und Philosoph	7
Lyapunov, Aleksandr M.	1857 – 1918	Russ. angewandter Mathematiker	4,63-65,116,127
Lyubich, Mikhail	*1959	Russ./Ukrain. US-amer. Mathem.	62,81,82
Mandelbrot, Benoit	1924 - 2010	Franz. – US-am. Mathematiker	3,4,11,16,25,46-54,57,65,66,80-91, 95-97,99,100,116,121,126,128,131
Maturana, Humberto	1928 – 2021	Chilenischer Biologe u. Philosoph	121

Maxwell, James Clerk	1831 – 1879	Schottischer Physiker	49,70,71
May, Robert	1936 – 2020	Australischer Physiker u. Biologe	64
Mayer, Julius Robert	1814 – 1878	Deutscher Arzt und Physiker	29,110
Menger, Karl	1902 – 1985	Österreichischer Mathematiker	40,46,47,126,Links
Minkowski, Hermann	1864 – 1909	Russ.-Dt. Mathematiker u. Physiker	55
Möbius, August Ferdinand	1790 – 1868	Deutscher Mathematiker u. Astronom	39,40,76,125
Moore, Eliakim Hastings	1862 – 1932	US-amerik. Mathematiker	18
Mumford, David Bryant	*1937	Englischer Mathematiker	40
Musil, Robert	1880 – 1942	Österreichischer Schriftsteller	3
Navier, Claude Louis M. H.	1585 – 1836	Franz. Mathematiker	98,100
Netto, Eugen	1848 – 1919	Deutscher Mathematiker	24
Newton, Isaak	1642 – 1727	Engl. Physiker/Mathem./Astronom	7-9,11,52,99,109,118
Nicolis, Grégoire	1939 – 2018	Griechisch-belgischer Physiker	107
Noether, Emmy	1882 – 1935	Deutscher Mathematikerin	52
Noelle-Neumann, Elisabeth	1916 – 2010	Dt. Kommunikationswissenschaftlerin	121
Oskar II von Schweden	1829 – 1907	Schwedischer König	8
Pascal, Blaise	1623 – 1662	Franz. Mathematiker u. Physiker	31,124
Peano, Guiseppe	1858 – 1932	Italienischer Mathematiker	4,16,23-25,40,50,124
Peat, F. David	1938 – 2017	Brit. Physiker und Autor	64,65,130
Peitgen, Heinz-Otto	*1945	Deutscher Mathematiker	20,33,35,45,47,52,64,69,71,90,92,99 100,123-125,127
Petri, Bernhard	?	Deutscher Mathematiker	27,130
Planck, Max	1858 – 1947	Deutscher Physiker, Nobelpreis 1918	8
Poincaré, Jules Henri	1854 - 1912	Franz. Math./Physiker/Astronom	7,8,71,121
Pollock, Jackson	1912 - 1956	US-am. Maler	12
Prigogine, Ilya	1917 – 2003	Russ.-belg. Physikochem Nobel 1977	9,104-107,110117-119,121,123,132
Prusinkiewicz, Przemyslaw	*1952	Polnischer Informatiker	29
Przytycki, Piotr	*1981	Polnischer Mathematiker	47

Rayleigh, Lord John William	1842 – 1919	Englischer Physiker (geb. J.W. Strutt)	105
Reynolds, Osborne	1842 – 1912	Brit. Physiker	98
Richardson, Lewis Fry	1881 – 1953	US-am. Math./Physiker/Meteorologe	53
Richter, Peter H.	1925 – 1993	Deutscher Physiker	92,132
Rössler, Otto	*1940	Deutscher Biochemiker	4,75,76,127,128
Russell, John Scott	1808 – 1882	Brit. Ingenieur	79
Sagan, Hans	1928 – 2000	Öster. Mathematiker	25,26
Saupe, Dietmar	*1954	Deutscher Informatiker	20,33,34,45,52,64,69,90,99,124,125 132
Smith, Adam	1723 – 1790	Schottischer Nationalökonom	109
Schlichting, Hans-Joachim	*1946	Deutscher Physiker/Physikdidaktiker	7,105,111,129
Schrödinger, Erwin	1887 – 1961	Öster. Physiker, Nobelpreis 1933	49
Schuster, Peter	*1941	Österreichischer Chemiker	108,121
Series, Caroline	*1951	Englische Mathematikerin	40
Sernetz, Manfred	?	Deutscher Veterinärmediziner	12,132
Serres, Michel	1930 – 2019	Französischer Philosoph	7
Sierpinski, Waclaw	1882 - 1969	Polnischer Mathematiker	4,30-35,37,40,41,44,47,116,124-126
Shishikura, Mitsuhiro	*1960	Japanischer Mathematiker	94
Smale, Stephen	*1930	US-am. Mathematiker	74
Solomonoff, Ray	1926 – 2009	US-am. Mathematiker	11
Stengers, Isabelle	*1949	Belg. Philos/Wissenschaftshistorikerin	9,107,117,132
Stokes, Sir George Gabriel	1819 – 1903	Irischer Mathematiker u. Physiker	98,100
Tao-te-King von Laotse	*571 v. Chr.	Chin. Philosoph, Werk ~ 600 v.Chr.	7
Tartaglia, Nicolo	1499 – 1557	Ital. Mathematiker	31
Thurston, William „Bill“	1946 – 2012	US-amerikanischer Mathematiker	40
Turing, Alan	1912 – 1954	Brit. Logiker/Mathem./Informatiker	18
Varela, Francisco J.	1946 – 2001	Chilenischer Biologe/Philosoph	121
Verhulst, Pierre François	1804 – 1849	Belgischer Mathematiker	57,64,67

Webb, James Edwin	1906 – 1992	US-am. Regierungsbeamter NASA	101,129
Weber, Renée	*1986	US-amerikanische Philosophin	117,119,123,132
Weierstraß, Karl	1815 – 1897	Deutscher Mathematiker	3,11,16,17,123
Carl Friedrich Freiherr von Weizsäcker	1912 – 2007	Deutscher Physiker und Philosoph	108,112,132
West, Geoffrey	*1940	Britischer Physiker	12,132
Whitehead, Alfred North	1861 – 1947	Britischer Philosoph u. Mathematiker	117
Wright, David	*1949	US-am. Mathematiker u. Komponist	40
Yang Hui	~1238 - 1298	Chin. Mathematiker	31
Zhabotinsky, Anatoli Markowitch	1938 – 2008	Sowjetischer Physiker	103,104,107,109,129

Kleine Linksammlung (Stand 03.06.2024)

<https://www.mathematik.de/dmv-blog/145-ausflug-in-die-vierte-dimension?highlight=WyJmcmFrdGFsZSIsImZyYWt0YWxlJyJd>

<https://www.dimensions-math.org/>

<https://www.youtube.com/watch?v=fFyC68CIEio>

https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge#Bezug_zur_Chaostheorie

<https://people.math.harvard.edu/~ctm/gallery/index.html>

<http://www.3d-meier.de/tut20/Seite1.html>

<https://www.mathematik.ch/anwendungenmath/fractal/julia/julia.html>

<https://commons.wikimedia.org/wiki/Fractal?uselang=de>

<https://xaos-project.github.io/>

<https://www.youtube.com/watch?v=7Pf6jZWguCc>

https://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Fraktale_Geometrie

<https://www.youtube.com/watch?v=LhOSM6uCWxk>
<https://www.fraktale-kunstwerke.de/blog-1/videos/>
<https://fractal.foundation.org/resources/fractal-software/>
<https://fraktalwelt.de/fracgal/index.html>
<https://www.sekinoworld.com/fractal/>
https://www.wackerart.de/fractal_gallery_overview.html
<https://sprott.physics.wisc.edu/FRACTALS.HTM>
https://store.steampowered.com/app/1081600/Fractal_Gallery_VR/?l=german&curator_clanid=32247615
https://www.ocf.berkeley.edu/~www/fractals/fractal_gallery.html
<https://www.jmndesign.be/midjourney-art-creations/fractal/>
https://www.f-lohmueller.de/fractal/gfr_00.htm
<https://www.magicgallery.de/fractals.htm>
<https://scratch.mit.edu/studios/33129>
<https://www.deviantart.com/fractal-resources/gallery>
<https://mathcurve.com/fractals/gosper/gosper.shtml>
https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Menger_sponges?uselang=de
siehe auch z.B. shadertoy.com mit parallelem veränderbarem Open GL-Script
<http://klein.math.okstate.edu/IndrasPearls/>
<http://klein.math.okstate.edu/IndrasPearls/resources.html> (Viele Links!)