Changepointtests für die Fehlerverteilung in ARMA-Zeitreihen

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades
„Doktor der Naturwissenschaften“

am Fachbereich Mathematik und Informatik, Physik, Geographie
der Justus-Liebig-Universität Gießen

vorgelegt von
Stefan Horni

Oktober 2013

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Einleitung

Gegenstand dieser Arbeit ist die Betrachtung von Changepointtests für die Fehlerverteilung in ARMA-Zeitreihen. Dabei soll insbesondere der Nutzen des Ansatzes von Owen (1988, 1990) zur Berücksichtigung von Zusatzinformationen bei der Schätzung einer Verteilungsfunktion untersucht werden. Mit dieser Methode soll hier die im Standard-ARMA-Modell vorausgesetzte Zentriertheit der Fehlerverteilung explizit bei der Konstruktion der Testgrößen ausgenutzt werden.
Für die Konstruktion der Tests gehen wir von zwei unterschiedlichen Ansätzen aus, die auch im Falle von Changepointtests für unabhängige Beobachtungen Verwendung finden, und die wir zunächst an diesem einfacheren Fall erläutern.
Bei einer Folge $e_1, \ldots, e_n$ von unabhängigen Zufallsvariablen sagt man es gibt einen *Verteilungschangepoint* oder kurz *Changepoint* $\lambda \in (0,1)$, wenn die identisch verteilten Zufallsvariablen $e_1, \ldots, e_{[n\lambda]}$ eine andere Verteilung besitzen als die Zufallsvariablen $e_{[\lambda s]+1}, \ldots, e_n$, wobei natürlich $[n\lambda] \geq 1$ gelten soll (bei festem $\lambda \in (0,1)$ ist die letzte Bedingung für alle großen $n \in \mathbb{N}$ erfüllt). Es sollen Tests konstruiert werden für das Testproblem

$$H_0\colon e_1, \ldots, e_n \text{ haben dieselbe Verteilung}$$

gegen

$$H_1\colon \text{es gibt einen Changepoint in } e_1, \ldots, e_n.$$

Wir setzen diese Zufallsvariablen im folgenden als stetig verteilt voraus.
Um für ein $s \in [0,1]$ die Verteilungsfunktion des s-ten ersten Anteils $e_1, \ldots, e_{[ns]}$ der Zufallsvariablen $e_1, \ldots, e_n$ zu schätzen, definiert man analog zur empirischen Verteilungsfunktion der gesamten Zufallsvariablen $e_1, \ldots, e_n$ die sequentielle em-

pirische Verteilungsfunktion

$$F_n^{seq}(s,x) = \frac{1}{[ns]} \sum_{i=1}^{[ns]} 1_{\{e_i \le x\}}$$

(wobei natürlich $s > 1/n$ sein muß), und um die Verteilungsfunktion des restlichen Anteils $e_{[ns]+1}, \ldots, e_n$ der Zufallsvariablen zu schätzen,

$$G_n^{seq}(s,x) = \frac{1}{n-[ns]} \sum_{i=[ns]+1}^{n} 1_{\{e_i \le x\}}.$$

Der naheliegendere von beiden Ansätzen zur Konstruktion der Tests ist es nun, die beiden Größen F_n^{seq} und G_n^{seq} direkt zu vergleichen. Wenn es einen Changepoint gibt, sollte die Differenz $F_n^{seq}(s,x) - G_n^{seq}(s,x)$ für ein $s \in (0,1)$ und ein $x \in \mathbb{R}$ deutlich von Null verschieden sein, während dies unter der Hypothese nicht in dem Maße der Fall sein sollte. Die geeignet normierte Teststatistik

$$\sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\mathbb{R}} \sqrt{n} \frac{[ns]}{n} \frac{n-[ns]}{n} \left| F_n^{seq}(s,x) - G_n^{seq}(s,x) \right|$$

sollte deshalb eine Entscheidung im oben beschriebenen Testproblem ermöglichen. Um ihre Asymptotik zu untersuchen bietet es sich an, die Verteilungskonvergenztheorie für stochastische Prozesse zu verwenden und den Prozess

$$T_n(s,x) = \frac{[ns]}{n} \frac{n-[ns]}{n} \Big(F_n^{seq}(s,x) - G_n^{seq}(s,x) \Big)$$

zu betrachten. Für diesen ist unter H_0 der funktionale Grenzwertsatz

$$\sqrt{n}\, T_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W^{klass} \quad \text{in } D([0,1] \times \overline{\mathbb{R}}) \tag{1.1}$$

in einem Skorohodraum $D([0,1] \times \overline{\mathbb{R}})$ und mit einem Kieferprozess W^{klass} als Grenzprozess bekannt, vergleiche Bickel und Wichura (1971). Aus (1.1) erhält man mit dem Stetigkeitssatz die Verteilungskonvergenzaussage

$$\sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} |\sqrt{n}\, T_n(s,x)| \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} \sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} |W^{klass}(s,x)|$$

für die oben vorgeschlagene Teststatistik. Die Quantile der Grenzverteilung hängen bei stetig verteilten Beobachtungen nicht von deren unbekannter Verteilungsfunktion ab und können damit als kritische Werte bei der Konstruktion von asymptotischen Tests dienen. Der Weg über den funktionalen Grenzwertsatz (1.1) hat den Vorteil, dass man anschließend bei der Anwendung des Stetigkeitssatzes nicht auf das Supremum als Funktional festgelegt ist, sondern durch Verwendung anderer stetiger Funktionale auf einfache Weise auch sofort Verteilungskonvergenzsätze für andere Teststatistiken, zum Beispiel vom Cramér-von-Mises-Typ, erhalten kann. Wir beschränken uns hier jedoch auf solche vom Kolmogorov-Smirnov-Typ, da wir hier den Effekt der Berücksichtigung der Zentriertheit untersuchen und nicht auf unterschiedlichen Funktionalen basierende Teststatistiken vergleichen möchten.

Der zweite Ansatz zur Konstruktion der Tests geht von U-Typ-Statistiken aus, mit denen es bis zu einem gewissen Grad möglich ist, die Tests über die Wahl eines Kernes an die interessierenden Alternativen anzupassen. An die Stelle der Differenz $F_n^{seq}(s,x) - G_n^{seq}(s,x)$ tritt hier die Größe $\int K(x,y) F_n^{seq}(s,dx) G_n^{seq}(s,dy)$ mit einem antisymmetrischen Kern K. Unter H_0 sollte $F_n^{seq}(s,\cdot)$ ungefähr gleich $G_n^{seq}(s,\cdot)$ sein, und damit wegen der Antisymmetrie von K

$$\begin{aligned} \int K(x,y) F_n^{seq}(s,dx) G_n^{seq}(s,dy) &= -\int K(y,x) F_n^{seq}(s,dx) G_n^{seq}(s,dy) \\ &\approx -\int K(x,y) F_n^{seq}(s,dx) G_n^{seq}(s,dy) \end{aligned}$$

gelten, diese Größe also etwa Null sein. Der Kern ist nun so zu wählen, dass dieses Integral unter den interessierenden Alternativen für ein s als Changepoint möglichst deutlich von Null verschieden ist. Es handelt sich hierbei um eine verallgemeinerte Form von U-Statistik, wie sie zum Beispiel im Kapitel 2.2 in Lee (1990) beschrieben ist, mit Kernen vom Grad $(1,1)$.

Diese Überlegungen führen auf den stochastischen Prozess

$$r_n(s) = \frac{[ns]}{n} \frac{n-[ns]}{n} \int K(x,y) F_n^{seq}(s,dx) G_n^{seq}(s,dy).$$

Für diesen Prozess wurde unter H_0 von Csörgő und Horváth (1988) der funktionale Grenzwertsatz

$$\sqrt{n} r_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} V^{klass} \quad \text{in } D([0,1]) \tag{1.2}$$

gezeigt, worin V^{klass} ein Vielfaches einer Brownschen Brücke ist und $D([0,1])$ der klassische Skorohodraum auf dem Einheitsintervall; siehe auch Ferger (1991, 1994a, 1994c). Dieser Grenzwertsatz kann ähnlich wie (1.1) zur Konstruktion von asymptotischen Changepointtests dienen.

Für eine gute Beschreibung zur Wahl geeigneter Kerne siehe zum Beispiel Ferger (1994c), Abschnitt 4, oder Ferger (1995), Abschnitt 3. Dort sind zahlreiche mögliche Wahlen von Kernen angegeben, wie $K(x,y) = 1_{\{x>y\}} - 1_{\{x<y\}}$, der zu einer

Changepointvariante des Wilcoxon-Zweistichprobentests führt.
Zusätzliche Gewichtsfunktionen, welche die Tests in den Randbereichen des Zeitintervalls empfindlicher machen können, wie zum Beispiel in den Arbeiten von Szyszkowicz (1994, 1998) für den Prozess T_n und Csörgő und Horváth (1988) oder Ferger (1995) für den Prozess r_n betrachtet, nehmen wir in dieser Arbeit nicht auf, da wir uns wie schon gesagt auf den Einfluß der Berücksichtigung der Zentriertheit konzentrieren möchten.
Diese Ansätze können nun auch zur Konstruktion von Changepointtests für die Fehlerverteilung in ARMA-Zeitreihen dienen. Man nennt eine Folge von Zufallsvariablen $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine ARMA(p,q)-Zeitreihe, $p, q \in \mathbb{N}$, falls sie stationär ist und es reelle Zahlen $\rho_1, \ldots, \rho_p$ und $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_q$ mit $\rho_p \neq 0$ und $\vartheta_q \neq 0$ gibt, sodass

$$X_i = \sum_{r=1}^{p} \rho_r X_{i-r} + \sum_{s=1}^{q} \vartheta_s e_{i-s} + e_i$$

für alle $i \in \mathbb{Z}$ gilt, wobei $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen ist. Diese als Fehlervariablen, Fehler oder weißes Rauschen bezeichneten Zufallsvariablen e_i setzt man im hier betrachteten Standard-ARMA-Modell als zentriert voraus. Es ist notwendig bestimmte Bedingungen an die Parameter $\rho_1, \ldots, \rho_p$ und $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_q$ zu stellen, um überhaupt die Identifizierbarkeit der Fehlervariablen sicherzustellen, vergleiche hierfür zum Beispiel Satz 8.10 in Kreiß und Neuhaus (2006). Es müssen insbesondere die Parameter eines kausalen und invertiblen ARMA-Modells sein. Wir gehen in Kapitel 3 genauer darauf ein.
Im Rahmen dieser ARMA-Modelle nimmt man die Fehlervariablen als nicht beobachtbar an. Um Tests auf Changepoints in ihrer Verteilung zu konstruieren ist ein natürlicher Ansatz, geeignete Schätzer für diese Fehler e_i zu finden und diese anstelle der unabhängigen Fehlervariablen in die oben betrachteten Größen einzusetzen.
Als Schätzer für die Fehler verwendet man die Residuen

$$\hat{e}_{ni} = X_i - \sum_{r=1}^{p} \widehat{\rho}_{nr} X_{i-r} - \sum_{s=1}^{q} \widehat{\vartheta}_{ns} \hat{e}_{ni-s}, \quad i \in \mathbb{N},$$

wobei $\hat{e}_{n1-q}, \ldots, \hat{e}_{n0}$ irgendwelche Startwerte und $\widehat{\rho}_{nr}$, $r = 1, \ldots, p$ sowie $\widehat{\vartheta}_{ns}$, $s = 1, \ldots, q$, geeignete Parameterschätzer sind.
Wenn nun die mit den sequentiellen empirischen Verteilungsfunktionen der Residuen

$$\widehat{F}_n^{seq}(s,x) = \frac{1}{[ns]} \sum_{i=1}^{[ns]} 1_{\{\hat{e}_{ni} \leq x\}}$$

und

$$\widehat{G}_n^{seq}(s,x) = \frac{1}{n-[ns]} \sum_{i=[ns]+1}^{n} 1_{\{\hat{e}_{ni} \le x\}}$$

definierten neuen Prozesse

$$\widehat{T}_n(s,x) = \frac{[ns]}{n}\frac{n-[ns]}{n}\Big(\widehat{F}_n^{seq}(s,x) - \widehat{G}_n^{seq}(s,x)\Big)$$

und

$$\hat{r}_n(s) = \frac{[ns]}{n}\frac{n-[ns]}{n}\int K(x,y)\widehat{F}_n^{seq}(s,dx)\widehat{G}_n^{seq}(s,dy)$$

dasselbe asymptotische Verhalten zeigen wie T_n und r_n, können sie entsprechend zur Konstruktion von asymptotischen Changepointtests verwendet werden. Für den Prozess $\widehat{T}_n$ wurde dies von Bai (1994) gezeigt. Für den Prozess $\hat{r}_n$ scheint dies noch nicht untersucht worden zu sein und soll hier getan werden.

Gleichzeitig soll untersucht werden, ob es im Vergleich zu diesen beiden auf klassische Weise konstruierten Prozessen einen Vorteil bringt, wenn man die oben erwähnte, im Standard-ARMA-Modell vorausgesetzte Zentriertheit der Fehler bei der Konstruktion der Tests explizit berücksichtigt. Zu diesem Zweck ersetzt man in den Definitionen der oben angegebenen Prozesse die sequentiellen empirischen Verteilungsfunktionen durch Varianten, welche die Zentriertheit der unbekannten Verteilungsfunktion dadurch zu berücksichtigen versuchen, dass sie selbst zentriert sind. Wir verwenden hier, wie angekündigt, die auf Owen (1988, 1990) zurückgehende Idee der nichtparametrischen Maximum-Likelihoodschätzung unter Nebenbedingungen; vergleiche auch Owen (2001), Qin und Lawless (1994) und Zhang (1997). Dieser hier in sequentieller Form verwandte Ansatz ersetzt im Falle unabhängiger und identisch verteilter Beobachtungen die sequentielle empirische Verteilungsfunktion F_n^{seq} durch

$$F_n^{seq,z}(s,x) = \sum_{i=1}^{[ns]} p_{ni}(s) 1_{\{e_i \le x\}},$$

wobei die nun von den Beobachtungen $e_1 \dots, e_n$ abhängigen Gewichte $p_{ni}(s)$ so gewählt werden, dass sie unter der Nebenbedingung der Zentriertheit von $F_n^{seq,z}$ die nichtparametrische Likelihoodfunktion $\prod_{i=1}^{[ns]} p_{ni}(s)$ maximieren. Das damit erhaltene Maximierungsproblem lässt sich mit der Lagrangemultiplikatormethode lösen, und man erhält Gewichte der Form

$$p_{ni}(s) = \frac{1}{[ns]}\frac{1}{1+t_{n[ns]}e_i}$$

mit einem Lagrangemultiplikator $t_{n[ns]}$, welcher von $e_1, \ldots, e_{[ns]}$ abhängt und in impliziter Form als Nullstelle einer Funktion gegeben ist. Analog lässt sich $G_n^{seq,z}$ definieren.
Für die hiermit definierten Größen T_n^z und r_n^z werden in Kapitel 2 stochastische Entwicklungen hergeleitet.
Ähnlich wie oben ausgeführt lassen sich auch in $F_n^{seq,z}$ und $G_n^{seq,z}$ die Fehlervariablen $e_1, \ldots, e_n$ durch die Residuen $\hat{e}_{n1}, \ldots, \hat{e}_{nn}$ von ARMA-Zeitreihen ersetzen, wodurch man zentrierte sequentielle empirische Verteilungsfunktionen $\widehat{F}_n^{seq,z}$ und $\widehat{G}_n^{seq,z}$ mit neuen Lagrangemultiplikatoren, welche von den Residuen abhängen, erhält, sowie neue Prozesse $\widehat{T}_n^z$ und $\hat{r}_n^z$, deren stochastische Entwicklungen wir in Kapitel 3 herleiten, ebenso wie die Entwicklung von $\hat{r}_n$. Für den Prozess $\widehat{T}_n^z$ wurde dies für AR(1)-Zeitreihen schon in Horni (2009) getan, worauf wir hier aufbauen. Dort wurden stärkere Integrierbarkeitsvoraussetzungen an die Fehlervariablen gemacht als in der hier vorliegenden Arbeit, sodass die Beweise entsprechend verändert werden mußten. Für die Behandlung von $\hat{r}_n$ und $\hat{r}_n^z$ werden Taylorentwicklungen des Kernes K benutzt, was entsprechende Glattheitsannahmen über K nötig macht.
Im Kapitel 4 folgen dann im ersten Teil die (1.1) und (1.2) entsprechenden Verteilungskonvergenzsätze für die Prozesse mit den Residuen und der Berücksichtigung der Zentriertheit. Im zweiten Teil werden Verteilungskonvergenzsätze für diese Prozesse unter benachbarten Alternativen hergeleitet. Für den Prozess T_n wurde dies schon von Szyszkowicz (1994, 1998) unter Verwendung der Le Cam-Theorie betrachtet, was sich mit den Resultaten von Bai (1994) auch auf $\widehat{T}_n$ überträgt. Auch der U-Typ-Prozess r_n wurde von Ferger (1991) unter solchen Alternativenfolgen untersucht, allerdings wählt Ferger einen direkten Ansatz und verwendet einen auf zwei Parameter verallgemeinerten Prozess. Wir arbeiten hier in allen Fällen mit der Methode von Le Cam.
In Kapitel 5 konstruieren wir konsistente Schätzer für die Skalenfaktoren der Grenzprozesse von $\sqrt{n}\hat{r}_n$ und $\sqrt{n}\hat{r}_n^z$, um analog zu den Ideen aus Ferger (1991) kritische Werte für Changepointtests mit diesen Prozessen erhalten zu können.
In den Kapiteln 6 und 7 betrachten wir die zu den oben eingeführten stochastischen Prozessen gehörenden Bootstrapprozesse. Bei dem Prozess $\widehat{T}_n^z$ ist dies nötig, um kritische Werte für den Test mit der Statistik $\sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\widehat{T}_n^z(s,x)|$ erhalten zu können, denn in diesem Fall hängt die Grenzverteilung auf komplizierte Weise von der unbekannten Verteilungsfunktion der Fehler ab. Bei den U-Typ-Statistiken eröffnet dies eine alternative Möglichkeit, kritische Werte für die Tests

zu erhalten. Hierfür werden in Kapitel 6 die zugehörigen stochastischen Entwicklungen hergeleitet und in Kapitel 7 die entsprechenden funktionalen Grenzwertsätze bewiesen. Es zeigt sich, dass der Bootstrap in den betrachteten Fällen konsistent ist.

In Kapitel 8 werden einige ergänzende Resultate zusammengestellt, die bei der Konstruktion der Tests aus den zuvor bewiesenen funktionalen Grenzwertsätzen nützlich sind, sowie einige hilfreiche Resultate für die Betrachtung der asymptotischen Güte unter benachbarten Alternativen. Außerdem schließt sich in diesem Kapitel die Darstellung einiger Simulationsergebnisse mit den in der Arbeit betrachteten Tests an.

Abschließend möchte ich an dieser Stelle Herrn Professor Dr. Erich Häusler für die Anregung der vorliegenden Arbeit und die Betreuung während ihrer Anfertigung sehr herzlich danken.

Kapitel 2

Stochastische Entwicklungen bei unabhängig und identisch verteilten Zufallsvariablen

2.1 Stochastische Entwicklung der Lagrange-multiplikatoren

Seien in diesem Kapitel $(e_i)_{i\in\mathbb{N}}$ Zufallsvariablen mit den Eigenschaften

$$(e_i)_{i\in\mathbb{N}} \text{ sind unabhängig und identisch verteilt,} \tag{2.1}$$

$$E(e_1) = 0, \tag{2.2}$$

$$E(e_1^2 \log\log(3 + |e_1|)) < \infty \tag{2.3}$$

und

$$\sigma^2 := E(e_1^2) > 0. \tag{2.4}$$

Der Summand 3 in (2.3) dient lediglich dazu, den logarithmischen Faktor in dieser Integrierbarkeitsvoraussetzung nichtnegativ zu machen. Jede andere Zahl größer oder gleich der eulerschen Zahl würde den gleichen Zweck erfüllen, äquivalent könnte die Voraussetzung auch mit dem Positivteil des Logarithmus formuliert werden.

2.5 Proposition. Es gilt

$$\max_{1\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |e_i| = O_p(1), \tag{2.6}$$

$$\text{(2.7)} \qquad \max_{3\le k\le n}\left|\frac{1}{\sqrt{k\log\log k}}\sum_{i=1}^{k} e_i\right| = O_p(1)$$

und

$$\text{(2.8)} \qquad \max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} e_i\right| = O_p(\sqrt{n}\,),$$

sowie für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\text{(2.9)} \qquad \max_{[n^\alpha]\le k\le n}\left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^2 - \sigma^2\right| = o_p(1).$$

Beweis: Zu (2.6) und (2.9): Beides sind leichte Folgerungen aus dem starken Gesetz der großen Zahlen: Aus

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|e_i| \xrightarrow[k]{} E(|e_1|) \quad \text{fast sicher}$$

folgt wegen $E(|e_1|) < \infty$ und $|e_i| < \infty$ fast sicher für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|e_i| < \infty \qquad \text{fast sicher,}$$

und

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^2 \xrightarrow[k]{} \sigma^2 \qquad \text{fast sicher}$$

ist äquivalent zu

$$\sup_{k\ge n}\left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^2 - \sigma^2\right| = o_p(1).$$

Wegen $[n^\alpha] \xrightarrow[n]{} \infty$ für $\alpha \in (0,1)$ folgt daraus die Behauptung.
Zu (2.7): Aus dem Gesetz mit dem iterierten Logarithmus,

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{1}{\sqrt{k\log\log k}}\sum_{i=1}^{k} e_i\right| = \sqrt{2}\sigma \qquad \text{fast sicher,}$$

folgt ähnlich wie bei (2.6)

$$\sup_{\substack{k\in\mathbb{N}\\ k\ge 3}}\left|\frac{1}{\sqrt{k\log\log k}}\sum_{i=1}^{k} e_i\right| < \infty \qquad \text{fast sicher.}$$

Zu (2.8): Nach der Kolmogorovschen Maximalungleichung ist für alle $K > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$P\Big(\max_{1\le k\le n}\left|\sum_{i=1}^{k} e_i\right| \ge K\sqrt{n}\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{K^2 n}\sum_{i=1}^{n} E(e_i^2)\\
&= \frac{\sigma^2}{K^2} \xrightarrow[K]{} 0.
\end{aligned}
$$

2.10 Bemerkung. Bei (2.9) kann der Indexbereich im Maximum zwar nicht $k = 1, \ldots, n$ lauten, aber man könnte natürlich $k = a_n, \ldots, n$ mit jeder beliebigen Folge von natürlichen Zahlen $a_n \leq n$ mit $a_n \xrightarrow[n]{} \infty$ wählen. Auch bei vielen der folgenden Propositionen wäre es ohne weiteres möglich, am oberen beziehungsweise unteren Ende des Indexbereichs allgemeinere Arten von Abschnitten wegzulassen. Allerdings möchten wir in späteren Beweisen explizit verwenden, dass die Kürzungen an den Grenzen des Indexbereichs eines Maximums von der Form $[n^\alpha]$ sind, zum Beispiel bei Proposition 2.56.
Da wir tatsächlich nur Indexbereiche dieses Typs benötigen werden, bringt es für uns keinen zusätzlichen Vorteil, Maxima allgemeinerer Art zu betrachten, und wir beschränken uns von vornherein auf einheitliche Abschnitte an den Indexbereichen.

2.11 Folgerung. Für alle $\alpha \in (0, 1)$ gelten

$$
\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\, \frac{|\sum_{i=1}^{k} e_i|}{\sum_{i=1}^{k} e_i^2} = O_p(1) \tag{2.12}
$$

und

$$
\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} k\, \frac{|\sum_{i=1}^{k} e_i|}{\sum_{i=1}^{k} e_i^2} = O_p(\sqrt{n}\,). \tag{2.13}
$$

Beweis: Zu (2.12): Sei $\alpha \in (0, 1)$. Für alle $K > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3^{1/\alpha}$ ist

$$
\begin{aligned}
&P\Bigg(\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\, \frac{|\sum_{i=1}^{k} e_i|}{\sum_{i=1}^{k} e_i^2} \geq K\Bigg)\\
&= P\Bigg(\Bigg\{\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\, \frac{|\sum_{i=1}^{k} e_i|}{\sum_{i=1}^{k} e_i^2} \geq K\Bigg\} \cap \bigcap_{k=[n^\alpha]}^{n} \Bigg\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^2 \geq \frac{\sigma^2}{2}\Bigg\}\Bigg)\\
&\quad + P\Bigg(\Bigg\{\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\, \frac{|\sum_{i=1}^{k} e_i|}{\sum_{i=1}^{k} e_i^2} \geq K\Bigg\} \cap \mathcal{C}\Bigg(\bigcap_{k=[n^\alpha]}^{n} \Bigg\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^2 \geq \frac{\sigma^2}{2}\Bigg\}\Bigg)\Bigg)\\
&\leq P\Bigg(\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \frac{1}{\sqrt{k\log\log k}}\Bigg|\sum_{i=1}^{k} e_i\Bigg| \geq \frac{K\sigma^2}{2}\Bigg)\\
&\quad + P\Bigg(\bigcup_{k=[n^\alpha]}^{n} \Bigg\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^2 < \frac{\sigma^2}{2}\Bigg\}\Bigg)\\
&=: P_1(n, K) + P_2(n).
\end{aligned}
$$

Wegen (2.9) gilt

$$
\begin{aligned}
P_2(n) &= P\Big(\bigcup_{k=[n^\alpha]}^{n} \Big\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^2 - \sigma^2 < -\frac{\sigma^2}{2}\Big\}\Big) \\
&\le P\Big(\bigcup_{k=[n^\alpha]}^{n} \Big\{\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^2 - \sigma^2\Big| \ge \frac{\sigma^2}{2}\Big\}\Big) \qquad (2.14)\\
&= P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^2 - \sigma^2\Big| \ge \frac{\sigma^2}{2}\Big) \underset{n}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}
$$

Hieraus und aus (2.7) folgt

$$\limsup_{n\to\infty}\,(P_1(n,K)+P_2(n)) \underset{K}{\longrightarrow} 0.$$

Zu (2.13): Indem wir vorgehen wie oben erhalten wir für alle $\alpha \in (0,1)$, $K > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 3^{1/\alpha}$

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n} k\,\frac{|\sum_{i=1}^{k} e_i|}{\sum_{i=1}^{k} e_i^2} \ge K\sqrt{n}\Big) \\
&\le\; P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k} e_i\Big| \ge \frac{K\sigma^2\sqrt{n}}{2}\Big) \\
&\qquad + P\Big(\bigcup_{k=[n^\alpha]}^{n}\Big\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^2 < \frac{\sigma^2}{2}\Big\}\Big) \\
&=:\; P_1'(n,K) + P_2(n),
\end{aligned}
$$

und nach (2.8) und (2.14) ist

$$\limsup_{n\to\infty}\,(P_1'(n,K)+P_2(n)) \underset{K}{\longrightarrow} 0.$$

2.15 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\sqrt{\frac{\log\log k}{k}}\,\max_{1\le i\le k}|e_i| = o_p(1). \qquad (2.16)$$

Beweis: Für jede Zufallsvariable X gilt

$$E(|X|) \ge E\big([|X|]\big) = E\Big(\sum_{i=1}^{[|X|]} 1_{\{|X|\ge i\}}\Big) = E\Big(\sum_{i=1}^{\infty} 1_{\{|X|\ge i\}}\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} P(|X|\ge i),$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen den Satz von der monotonen Konvergenz benutzt haben. Für alle $\varepsilon > 0$ erhalten wir hieraus, angewandt auf $X = \frac{2}{\varepsilon}e_1^2\log\log(3+|e_1|)$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P\Big(e_1^2\log\log(3+|e_1|) \ge \frac{\varepsilon}{2}\,i\Big) \;\le\; \frac{2}{\varepsilon}\,E(e_1^2\log\log(3+|e_1|)) \;<\; \infty \qquad (2.17)$$

wegen (2.3).
Wegen $\log\log i = o(\sqrt{i}\,)$ und $1/\log\log i = o(1)$ gibt es für alle $\varepsilon > 0$ ein $i_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, $i_1(\varepsilon) \geq 3$, so dass

$$\log\log i \;\leq\; \sqrt{i} \quad \text{für alle } i \geq i_1(\varepsilon),$$

$$\left|\frac{2\log\varepsilon}{\log i}\right| \;\leq\; \frac{1}{2} \quad \text{für alle } i \geq i_1(\varepsilon),$$

und

$$\left|\frac{\log {}^1\!/\!_8}{\log\log i}\right| \;\leq\; \frac{1}{2} \quad \text{für alle } i \geq i_1(\varepsilon)$$

erfüllt sind. Daher gilt für alle $i \geq i_1(\varepsilon)$ auf dem Ereignis $\{e_1^2 > \frac{\varepsilon i}{\log\log i}\}$

$$\begin{aligned} \log\log(3+|e_1|) \;&\geq\; \log\log(|e_1|) \;>\; \log\log\left(\sqrt{\frac{\varepsilon i}{\log\log i}}\right) \\ &\geq\; \log\log\left(\sqrt{\varepsilon i^{1/2}}\right) \;=\; \log\left(\frac{1}{4}\log i + \frac{1}{2}\log\varepsilon\right) \\ &=\; \log\left(\frac{1}{4}\log i\Big(1+\frac{2\log\varepsilon}{\log i}\Big)\right) \;\geq\; \log\left(\frac{1}{8}\log i\right) \\ &=\; \log\log i + \log\frac{1}{8} \;\geq\; \frac{1}{2}\log\log i, \end{aligned}$$

und damit auf dem genannten Ereignis insbesondere

$$e_1^2\log\log(3+|e_1|) \;>\; \frac{\varepsilon i}{\log\log i}\,\frac{1}{2}\log\log i \;=\; \frac{\varepsilon}{2}i.$$

Hieraus erhalten wir mit dem Majorantenkriterium

$$\sum_{i=3}^{\infty} P\Big(e_1^2 > \frac{\varepsilon i}{\log\log i}\Big) \;\leq\; i_1(\varepsilon) + \sum_{i=i_1(\varepsilon)}^{\infty} P\Big(e_1^2\log\log(3+e_1^2) \geq \frac{\varepsilon}{2}i\Big) \;<\; \infty,$$

wobei das letzte Ungleichheitszeichen nach (2.17) gilt. Wegen der identischen Verteiltheit der e_i, $i \in \mathbb{N}$, folgt hieraus für alle $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i=3}^{\infty} P\Big(e_i^2 > \frac{\varepsilon i}{\log\log i}\Big) < \infty.$$

Daher gilt nach dem ersten Lemma von Borel-Cantelli

$$P\Big(\text{es gilt } e_i^2 > \frac{\varepsilon i}{\log\log i} \text{ für unendlich viele } i \in \mathbb{N}\Big) = 0.$$

Damit haben wir für alle $\varepsilon > 0$

$$P\Big(\text{es gibt ein } i_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}, i_0(\varepsilon) \geq 27, \text{ mit } e_i^2 \leq \frac{\varepsilon i}{\log\log i} \text{ für alle } i \geq i_0(\varepsilon)\Big) \;=\; 1.$$

Also gilt wegen der Endlichkeit von $i_0(\varepsilon)$

$$\begin{aligned}\frac{\log\log n}{n}\max_{1\le i\le n} e_i^2 \quad &\le \quad \frac{\log\log n}{n}\max_{1\le i<i_0(\varepsilon)} e_i^2 + \frac{\log\log n}{n}\max_{i_0(\varepsilon)\le i\le n} e_i^2 \\ &\le \quad \frac{\log\log n}{n}\max_{1\le i<i_0(\varepsilon)} e_i^2 + \max_{i_0(\varepsilon)\le i\le n}\frac{\log\log i}{i} e_i^2 \\ &\le \quad \frac{\log\log n}{n}\max_{1\le i<i_0(\varepsilon)} e_i^2 + \varepsilon \quad \underset{n}{\longrightarrow} \quad \varepsilon \quad \text{fast sicher.}\end{aligned}$$

Beim zweiten Ungleichheitszeichen beachten wir, dass $(\log\log i)/i$ jedenfalls für $i \ge 27$ monoton fallend in i ist, denn dafür ist

$$\frac{d}{di}\frac{\log\log i}{i} \quad = \quad \frac{\frac{1}{\log i}\frac{1}{i}\cdot i - \log\log i \cdot 1}{i^2} \quad = \quad \frac{1}{i^2}\Big(\frac{1}{\log i} - \log\log i\Big) \overset{!}{\le} 0$$

hinreichend, und für $i \ge 27$ ist

$$\frac{1}{\log i} - \log\log i \le \frac{1}{\log 27} - \log\log 27 \le \frac{1}{\log_3 27} - \log_3\log_3 27 \le \frac{1}{3} - 1 < 0.$$

Durch Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ folgt

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\log\log n}{n}\max_{1\le i\le n} e_i^2 = 0 \quad \text{fast sicher,}$$

und wegen der Stetigkeit der Quadratwurzel erhalten wir hieraus

$$\sqrt{\frac{\log\log n}{n}}\max_{1\le i\le n}|e_i| \quad \underset{n}{\longrightarrow} \quad 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\sup_{k\ge n}\sqrt{\frac{\log\log k}{k}}\max_{1\le i\le k}|e_i| = o_p(1).$$

Daraus folgt die Behauptung (2.16) mit der Ersetzung $n \mapsto [n^\alpha]$.

2.18 Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \ldots, n$ sei t_{nk} auf dem Ereignis

$$\Big\{\min_{1\le i\le k} e_i < 0 < \max_{1\le i\le k} e_i\Big\}$$

definiert als die eindeutig bestimmte Nullstelle von

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{k}\frac{e_i}{1 + xe_i}$$

in dem Intervall

$$\left(\left(\frac{1}{k}-1\right)\frac{1}{\max_{1\leq i\leq k} e_i}, \left(\frac{1}{k}-1\right)\frac{1}{\min_{1\leq i\leq k} e_i}\right).$$

Dabei verwenden wir die üblichen Konventionen $\max\emptyset := -\infty$ und $\min\emptyset := \infty$, so dass im Falle $k = 0$ das Ereignis, auf dem t_{nk} festgelegt wird, leer ist. Dies passiert unabhängig hiervon natürlich auch für $k = 1$, da die einzelne Zufallsvariable e_1 nicht gleichzeitig echt größer und echt kleiner als Null sein kann. Auch wenn t_{nk} gar nicht explizit von n abhängt, führen wir das n wegen der Einheitlichkeit der Notation mit, da später entsprechende Größen tatsächlich von n abhängen.
Für $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_{n,\alpha} := \bigcap_{k=[n^\alpha]}^{n} \Big\{ \min_{1\leq i\leq k} e_i < 0 < \max_{1\leq i\leq k} e_i \Big\}.$$

Dies ist ein Ereignis, auf dem alle $t_{n[n^\alpha]}, \dots, t_{nn}$ definiert sind und auf dem wir ihre asymptotischen Eigenschaften untersuchen können. Die übrigen $t_{n1}, \dots, t_{n[n^\alpha]-1}$ müssen wir dann anders behandeln.

2.19 Bemerkung. Wir müssen noch sicherstellen, dass t_{nk} wohldefiniert ist. Sei hierfür $k \geq 2$ fest gewählt.
Nun können wir für einen Moment vergessen, dass es sich bei $e_1, \dots, e_k$ um Zufallsvariablen handelt, wir ersetzen sie vorerst durch reelle Zahlen $z_1, \dots, z_k$, und betrachten eine analog für diese $z_1, \dots, z_k$ anstatt für $e_1, \dots, e_k$ definierte Nullstelle. Sei hierfür

$$M_0 := \Big\{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k : \min_{1\leq i\leq k} z_i < 0 < \max_{1\leq i\leq k} z_i\Big\},$$

$$u : M_0 \to (-\infty, 0), \qquad u\Big((z_1, \dots, z_k)\Big) := \left(\frac{1}{k}-1\right)\frac{1}{\max\limits_{1\leq i\leq k} z_i},$$

$$o : M_0 \to (0, \infty), \qquad o\Big((z_1, \dots, z_k)\Big) := \left(\frac{1}{k}-1\right)\frac{1}{\min\limits_{1\leq i\leq k} z_i}.$$

Dann ist für alle $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_k) \in M_0$ die Funktion

$$f_{\mathbf{z}} : D_{\mathbf{z}} \to \mathbb{R}, \quad f_{\mathbf{z}}(x) := \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i}{1 + xz_i}$$

mit Definitionsbereich

$$D_{\mathbf{z}} := \mathbb{R} \setminus \Big\{ -\frac{1}{z_i} : i = 1, \dots, k; z_i \neq 0\Big\}$$

wohldefiniert und stetig.
Weiter sei $t : M_0 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die jedem $\mathbf{z} \in M_0$ die Nullstelle von $f_{\mathbf{z}}$ im Intervall $(u(\mathbf{z}), o(\mathbf{z}))$ zuordnet, so dass also t jedem $\mathbf{z} \in M_0$ eine t_{nk} im Falle der Realisierung $(e_1, \ldots, e_k) = \mathbf{z}$ dieser Zufallsvariablen entsprechende Nullstelle zuordnet. Für die Wohldefiniertheit der Funktion t müssen wir uns die Existenz und Eindeutigkeit dieser Nullstelle überlegen.
Wir wählen ein $\mathbf{z}_0 = (z_{01}, \ldots, z_{0k}) \in M_0$ und setzen $z_{min} := \min_{1 \le i \le k} z_{0i} < 0$ sowie $z_{max} := \max_{1 \le i \le k} z_{0i} > 0$.
Zunächst überzeugen wir uns nun davon, dass $(u(\mathbf{z}_0), o(\mathbf{z}_0)) \subset D_{\mathbf{z}_0}$ erfüllt ist. Der Definitionsbereich $D_{\mathbf{z}_0}$ besteht aus endlich vielen Zusammenhangskomponenten, die aneinanderstoßende offene Intervalle sind. Genau zwei davon sind unendlich, alle anderen endlich. Nun ist $(-\frac{1}{z_{max}}, -\frac{1}{z_{min}})$ eine endliche Zusammenhangskomponente von $D_{\mathbf{z}_0}$, da für alle $i = 1, \ldots, k$, für welche $z_{0i} > 0$ gilt, $-\frac{1}{z_{0i}} \le -\frac{1}{z_{max}} < 0$ ist, und für alle $i = 1, \ldots, k$, für welche $z_{0i} < 0$ gilt, $-\frac{1}{z_{0i}} \ge -\frac{1}{z_{min}} > 0$ ist.
Wegen $k \ge 2$ ist $1 > 1 - \frac{1}{k} > 0$, und es folgt

$$\big(u(\mathbf{z}_0), o(\mathbf{z}_0)\big) = \left(\left(\frac{1}{k} - 1\right)\frac{1}{z_{max}}, \left(\frac{1}{k} - 1\right)\frac{1}{z_{min}}\right) \subset \Big(-\frac{1}{z_{max}}, -\frac{1}{z_{min}}\Big) \subset D_{\mathbf{z}_0}.$$

Als nächstes müssen wir sicherstellen, dass $f_{\mathbf{z}_0}$ genau eine Nullstelle in dem Intervall $(u(\mathbf{z}_0), o(\mathbf{z}_0))$ besitzt. Für alle $x \in D_{\mathbf{z}_0}$ gilt

$$f'_{\mathbf{z}_0}(x) = -\sum_{i=1}^{k} \frac{{z_{0i}}^2}{(1 + x z_{0i})^2} < 0,$$

da $z_{0i} = z_{min} \neq 0$ für ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist. Also ist $f_{\mathbf{z}_0}$ auf allen Zusammenhangskomponenten von $D_{\mathbf{z}_0}$ streng monoton fallend. Damit hat $f_{\mathbf{z}_0}$ höchstens eine Nullstelle in dem Intervall $(u(\mathbf{z}_0), o(\mathbf{z}_0))$.
Es ist zwar für unsere Betrachtungen nicht notwendig, aber weil es nur wenig Aufwand verursacht, diskutieren wir noch das Verhalten von $f_{\mathbf{z}_0}$ auf dem gesamten Definitionsbereich $D_{\mathbf{z}_0}$. Sei (a, b) eine endliche Zusammenhangskomponente von $D_{\mathbf{z}_0}$. Dann ist $a = -\frac{1}{z_{0i_0}}$ und $b = -\frac{1}{z_{0j_0}}$ für $i_0, j_0 \in \{1, \ldots, k\}$ mit $i_0 \neq j_0$, und es gilt

$$\lim_{x \downarrow a} f_{\mathbf{z}_0}(x) = \infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow b} f_{\mathbf{z}_0}(x) = -\infty.$$

Denn im Falle $z_{0i_0} < 0$ gilt

$$x \downarrow a = -\frac{1}{z_{0i_0}} > 0 \;\Leftrightarrow\; 1 + x z_{0i_0} \uparrow 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{1 + x z_{0i_0}} \downarrow -\infty \;\Leftrightarrow\; \frac{z_{0i_0}}{1 + x z_{0i_0}} \uparrow \infty,$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow a} f_{\mathbf{z}_0}(x) &= \lim_{x\downarrow a}\left(\sum_{\substack{i=1\\ z_{0i}=z_{0i_0}}}^{k}\frac{z_{0i}}{1+xz_{0i}}+\sum_{\substack{i=1\\ z_{0i}\neq z_{0i_0}}}^{k}\frac{z_{0i}}{1+xz_{0i}}\right)\\ &= \lim_{x\downarrow a}\sum_{\substack{i=1\\ z_{0i}=z_{0i_0}}}^{k}\frac{z_{0i}}{1+xz_{0i}}+\sum_{\substack{i=1\\ z_{0i}\neq z_{0i_0}}}^{k}\frac{z_{0i}}{1-\frac{z_{0i}}{z_{0i_0}}} \quad=\quad \infty,\end{aligned}$$

und im Falle $z_{0i_0}>0$ erhalten wir auf ähnliche Weise aus $x\downarrow a$ wieder $\frac{z_{0i_0}}{1+xz_{0i_0}}\uparrow\infty$, und hiermit genau wie oben $\lim_{x\downarrow a} f_{\mathbf{z}_0}(x)=\infty$. Durch Betrachtung des anderen Intervallendes erhält man analog $\lim_{x\uparrow b} f_{\mathbf{z}_0}(x)=-\infty$. Die Funktion $f_{\mathbf{z}_0}$ besitzt also in jeder endlichen Zusammenhangskomponente von $D_{\mathbf{z}_0}$ genau eine Nullstelle. Bei den beiden unbeschränkten Zusammenhangskomponenten von $D_{\mathbf{z}_0}$ ist der Grenzwert von $f_{\mathbf{z}_0}$ jeweils an dem beschränkten Ende derselbe wie am entsprechenden Ende einer beschränkten Zusammenhangskomponente, und an den unbeschränkten Enden gilt einfach

$$\lim_{x\downarrow-\infty} f_{\mathbf{z}_0}(x)=0 \quad \text{beziehungsweise} \quad \lim_{x\uparrow\infty} f_{\mathbf{z}_0}(x)=0,$$

so dass $f_{\mathbf{z}_0}$ in diesen beiden Zusammenhangskomponenten keine Nullstelle besitzt. Nun besitzt $f_{\mathbf{z}_0}$ nach dem Zwischenwertsatz tatsächlich eine Nullstelle in dem Intervall $(u(\mathbf{z}_0),o(\mathbf{z}_0))$, falls

$$f_{\mathbf{z}_0}\big(u(\mathbf{z}_0)\big)>0 \quad \text{und} \quad f_{\mathbf{z}_0}\big(o(\mathbf{z}_0)\big)<0 \tag{2.20}$$

ist.
Wegen $u(\mathbf{z}_0)=(\frac{1}{k}-1)\frac{1}{z_{max}}<0$ ist $\frac{1}{1+u(\mathbf{z}_0)z_{max}}=k$, und für alle $i=1,\dots,k$ mit $0<z_{0i}\le z_{max}$ gilt $1+u(\mathbf{z}_0)z_{0i}\ge 1+u(\mathbf{z}_0)z_{max}=\frac{1}{k}>0$, also

$$\sum_{\substack{i=1\\ z_{0i}>0}}^{k}\frac{z_{0i}}{1+u(\mathbf{z}_0)z_{0i}} \quad\ge\quad \frac{z_{max}}{1+u(\mathbf{z}_0)z_{max}} \quad=\quad kz_{max},$$

weil die beim ersten Schritt weggelassenen Summanden alle positiv sind. Für alle $i=1,\dots,k$ mit $z_{0i}<0$ gilt $0<u(\mathbf{z}_0)z_{0i}<1+u(\mathbf{z}_0)z_{0i}$, also ist für diese i $\frac{z_{0i}}{1+u(\mathbf{z}_0)z_{0i}}>\frac{z_{0i}}{u(\mathbf{z}_0)z_{0i}}=\frac{1}{u(\mathbf{z}_0)}$. Es folgt

$$\sum_{\substack{i=1\\ z_{0i}<0}}^{k}\frac{z_{0i}}{1+u(\mathbf{z}_0)z_{0i}} \quad>\quad \sum_{\substack{i=1\\ z_{0i}<0}}^{k}\frac{1}{u(\mathbf{z}_0)} \quad\ge\quad \frac{k-1}{u(\mathbf{z}_0)},$$

wobei wir beim ersten Schritt benutzt haben, dass $z_{0i} < 0$ für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist, und beim zweiten Schritt, dass $z_{0i} > 0$ ebenfalls für mindestens ein $i \in \{1, \ldots, k\}$ ist. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{z}_0}\Big(u(\mathbf{z}_0)\Big) &= \sum_{\substack{i=1 \\ z_{0i}<0}}^{k} \frac{z_{0i}}{1+u(\mathbf{z}_0)z_{0i}} + \sum_{\substack{i=1 \\ z_{0i}>0}}^{k} \frac{z_{0i}}{1+u(\mathbf{z}_0)z_{0i}} \\ &> \frac{k-1}{u(\mathbf{z}_0)} + kz_{max} \quad = \quad \frac{k-1}{(\frac{1}{k}-1)\frac{1}{z_{max}}} + kz_{max} \\ &= -kz_{max} + kz_{max} \quad = \quad 0. \end{aligned}$$

Dies ist die erste Ungleichung in (2.20). Auf ähnliche Weise überzeugt man sich von der Gültigkeit der zweiten Ungleichung.
Damit ist die Existenz und Eindeutigkeit der Nullstelle bewiesen, und die Funktion t ist wohldefiniert.
Wir müssen nun noch sicherstellen, dass es sich bei t_{nk} tatsächlich um eine Zufallsvariable handelt. Hierfür ist es hinreichend, dass die Funktion $t : M_0 \to \mathbb{R}$ $M_0 \cap \mathcal{B}_k^*, \mathcal{B}^*$-messbar ist, wobei $\mathcal{B}_k^*$ für $k \in \mathbb{N}$ die Borelsigmaalgebra über $\mathbb{R}^k$ bezeichne, und $\mathcal{B}^* := \mathcal{B}_1^*$ sei. Wir beachten an dieser Stelle, dass wegen

$$M_0 \quad = \quad \bigcup_{i=1}^{k} \Big\{(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k : z_i < 0\Big\} \;\cap\; \bigcup_{i=1}^{k} \Big\{(z_1, \ldots, z_k) \in \mathbb{R}^k : z_i > 0\Big\}$$

M_0 offen in $\mathbb{R}_k$ ist und damit $M_0 \cap \mathcal{B}_k^*$ wegen $M_0 \in \mathcal{B}_k^*$ eine wohldefinierte Spur-σ-Algebra ist. Es sei nun

$$g : M_0 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad g(\mathbf{z}, x) := \begin{cases} f_{\mathbf{z}}(u(\mathbf{z})), & x < u(\mathbf{z}) \\ f_{\mathbf{z}}(x), & u(\mathbf{z}) \le x \le o(\mathbf{z}) \\ f_{\mathbf{z}}(o(\mathbf{z})), & o(\mathbf{z}) < x \end{cases}$$

Für alle $\mathbf{z} \in M_0$ ist $g(\mathbf{z}, \cdot\,)$ die außerhalb von $[u(\mathbf{z}), o(\mathbf{z})]$ konstant fortgesetzte Funktion $f_{\mathbf{z}}$. Da $f_{\mathbf{z}}|_{[u(\mathbf{z}),o(\mathbf{z})]}$ stetig ist und genau eine Nullstelle, $t(\mathbf{z})$, im Inneren des Definitionsbereichs besitzt, ist auch $g(\mathbf{z}, \cdot\,) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und hat $t(\mathbf{z})$ als einzige Nullstelle. Wir zeigen zunächst:

(2.21) Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $g(\,\cdot\,, x) : M_0 \to \mathbb{R}$ $\quad M_0 \cap \mathcal{B}_k^*, \mathcal{B}^*$-messbar.

Für (2.21) ist es hinreichend, für alle $x \in \mathbb{R}$ die $M_0 \cap \mathcal{B}_k^*$-Messbarkeit der Urbilder der Intervalle $(-\infty, y]$ unter $g(\,\cdot\,, x)$ für alle $y \in \mathbb{R}$ zu überprüfen, da diese

Intervalle ein Erzeugendensystem von $\mathcal{B}^*$ darstellen.
Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g(\,\cdot\,, x)^{-1}\Big((-\infty, y]\Big) &= \Big\{\mathbf{z} \in M_0 : f_{\mathbf{z}}(u(\mathbf{z})) \leq y, x < u(\mathbf{z})\Big\} \\ &\quad + \Big\{\mathbf{z} \in M_0 : f_{\mathbf{z}}(x) \leq y, u(\mathbf{z}) \leq x \leq o(\mathbf{z})\Big\} \\ &\quad + \Big\{\mathbf{z} \in M_0 : f_{\mathbf{z}}(o(\mathbf{z})) \leq y, o(\mathbf{z}) < x\Big\}. \end{aligned}$$

Es ist hinreichend, dass jede einzelne dieser drei Mengen messbar ist. Wir beginnen mit der zweiten. Da Maximum und Minimum als Funktion reeller Zahlen stetig sind, sind $u, o : M_0 \to \mathbb{R}$ $M_0 \cap \mathcal{B}_k^*, \mathcal{B}^*$-messbar, und es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$N_x := \Big\{\mathbf{z} \in M_0 : u(\mathbf{z}) \leq x \leq o(\mathbf{z})\Big\} \in M_0 \cap \mathcal{B}_k^*.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \Big\{\mathbf{z} \in M_0 : f_{\mathbf{z}}(x) \leq y, u(\mathbf{z}) \leq x \leq o(\mathbf{z})\Big\} &= \Big\{\mathbf{z} \in N_x : f_{\mathbf{z}}(x) \leq y\Big\} \\ \in \ N_x \cap \mathcal{B}_k^* &= M_0 \cap (N_x \cap \mathcal{B}_k^*) \ \subset \ M_0 \cap \mathcal{B}_k^*, \end{aligned}$$

weil für alle $x \in \mathbb{R}$ die Funktion

$$N_x \ni \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_k) \mapsto f_{\mathbf{z}}(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i}{1 + x z_i} \in \mathbb{R}$$

stetig ist, da die nur für $x \neq 0$ auftretenden Polstellen der einzelnen Summanden, also gerade die $\mathbf{z} \in \mathbb{R}^k$, für die eine Komponente gleich $-\frac{1}{x}$ ist, nicht in N_x liegen, denn für alle $\mathbf{z} \in N_x$ ist $x \in [u(\mathbf{z}), o(\mathbf{z})]$, und $f_{\mathbf{z}}|_{[u(\mathbf{z}), o(\mathbf{z})]}$ besitzt keine Polstelle. Damit ist die Messbarkeit der zweiten Menge klar.
Kommen wir nun zur ersten Menge. Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned} &\Big\{\mathbf{z} \in M_0 : f_{\mathbf{z}}(u(\mathbf{z})) \leq y, x < u(\mathbf{z})\Big\} \\ &\quad = \Big\{\mathbf{z} \in M_0 : f_{\mathbf{z}}(u(\mathbf{z})) \leq y\Big\} \cap \Big\{\mathbf{z} \in M_0 : x < u(\mathbf{z})\Big\}. \end{aligned}$$

Die zweite Menge hiervon liegt wieder wegen der Messbarkeit von u in $M_0 \cap \mathcal{B}_k^*$, und die erste weil die Funktion

$$M_0 \ni \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_k) \mapsto f_{\mathbf{z}}(u(\mathbf{z})) = \sum_{i=1}^{k} \frac{z_i}{1 + u(\mathbf{z}) z_i} \in \mathbb{R}$$

stetig ist, und dies ist der Fall, weil u stetig ist, und für alle $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_k) \in M_0$ für alle $i = 1, \ldots, k$ der Nenner wegen $1 + u(\mathbf{z}) z_i \geq \frac{1}{k} > 0$ ungleich Null ist.

Also liegt auch die erste der drei obigen Mengen in $M_0 \cap \mathcal{B}_k^*$. Die Messbarkeit des dritten Menge ist ähnlich nachzuweisen. Also ist (2.21) erfüllt.
Nun gilt für alle $y \in \mathbb{R}$ wegen der Stetigkeit von $g(\mathbf{z}, \cdot\,)$ für alle $\mathbf{z} \in M_0$

$$\begin{aligned}
&\Big\{\mathbf{z} \in M_0 : t(\mathbf{z}) > y\Big\} \\
&\quad = \Big\{\mathbf{z} \in M_0 : g(\mathbf{z}, x) \neq 0 \text{ für alle } x \in (-\infty, y]\Big\} \\
&\quad = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big\{\mathbf{z} \in M_0 : g(\mathbf{z}, x) \neq 0 \text{ für alle } x \in [y-n, y]\Big\} \\
&\quad = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\Big\{\mathbf{z} \in M_0 : \min_{x \in [y-n,y]} g(\mathbf{z}, x) > 0\Big\} \cup \Big\{\mathbf{z} \in M_0 : \max_{x \in [y-n,y]} g(\mathbf{z}, x) < 0\Big\}\Big) \\
&\quad = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Big(\Big\{\mathbf{z} \in M_0 : \inf_{x \in [y-n,y] \cap \mathbb{Q}} g(\mathbf{z}, x) > 0\Big\} \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cup \Big\{\mathbf{z} \in M_0 : \sup_{x \in [y-n,y] \cap \mathbb{Q}} g(\mathbf{z}, x) < 0\Big\}\Big).
\end{aligned}$$

Wegen (2.21) ist dies in $M_0 \cap \mathcal{B}_k^*$ enthalten. Hieraus folgt die $M_0 \cap \mathcal{B}_k^*, \mathcal{B}^*$-Messbarkeit von $t : M_0 \to \mathbb{R}$.
Weil das Bild des auf das Ereignis $\{\min_{1 \le i \le k} e_i < 0 < \max_{1 \le i \le k} e_i\}$ eingeschränkten Zufallsvektors $(e_1, \dots, e_k)$ in M_0 liegt, erhalten wir hieraus mit der Kettenregel für Messbarkeit, dass $t_{nk} = t(e_1, \dots, e_k)$ auf diesem Ereignis eine Zufallsvariable ist.
Später können wir auch für $e_1, \dots, e_k$ andere Zufallsvariablen einsetzen und wissen damit für analog festgelegte Nullstellen, dass es sich um wohldefinierte Zufallsvariablen handelt.

2.22 Proposition. Für $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$A_{n,\alpha} = \Big\{\min_{1 \le i \le [n^\alpha]} e_i < 0 < \max_{1 \le i \le [n^\alpha]} e_i\Big\},$$

und es gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$P(A_{n,\alpha}) \xrightarrow[n]{} 1. \tag{2.23}$$

Beweis: Die Gleichheit der Mengen ist klar. Kommen wir daher gleich zu (2.23).
Für alle $\alpha \in (0,1)$ ist

$$\begin{aligned}
&P\Big(\mathcal{C}\Big\{\min_{1 \le i \le [n^\alpha]} e_i < 0 < \max_{1 \le i \le [n^\alpha]} e_i\Big\}\Big) \\
&\quad = P\Big(\Big\{\min_{1 \le i \le [n^\alpha]} e_i \ge 0\Big\} \cup \Big\{\max_{1 \le i \le [n^\alpha]} e_i \le 0\Big\}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \quad P\Big(\bigcap_{i=1}^{[n^\alpha]}\{e_i \ge 0\}\Big) + P\Big(\bigcap_{i=1}^{[n^\alpha]}\{e_i \le 0\}\Big)\\
&= \quad P(e_1 \ge 0)^{[n^\alpha]} + P(e_1 \le 0)^{[n^\alpha]} \quad \underset{n}{\longrightarrow} \quad 0,
\end{aligned}
$$

da $n^\alpha \underset{n}{\longrightarrow} \infty$ und für jede Zufallsvariable X mit $E(X) = 0$ und $E(X^2) > 0$ die Wahrscheinlichkeiten $P(X \ge 0)$ und $P(X \le 0)$ echt kleiner als 1 sind.

2.24 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 3^{1/\alpha}$ gilt auf $A_{n,\alpha}$

$$
(2.25)\quad \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\,|t_{nk}|\Big(1 - V_{n,\alpha} \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sqrt{\frac{\log\log k}{k}} \max_{1\le i\le k}|e_i|\Big) \le V_{n,\alpha}
$$

mit

$$
V_{n,\alpha} := \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\,\frac{|\sum_{i=1}^k e_i|}{\sum_{i=1}^k e_i^2},
$$

sowie

$$
(2.26)\qquad \max_{[n^\alpha]\le k\le n} k|t_{nk}| \le \Big(1 + \max_{[n^\alpha]\le k\le n}|t_{nk}| \max_{1\le i\le k}|e_i|\Big) \max_{[n^\alpha]\le k\le n} k\,\frac{|\sum_{i=1}^k e_i|}{\sum_{i=1}^k e_i^2}.
$$

Beweis: Für alle $\alpha \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ und $k = [n^\alpha], \dots, n$ ist auf $A_{n,\alpha}$ nach Definition von t_{nk}

$$
\begin{aligned}
0 \quad &= \quad \sum_{i=1}^k \frac{e_i}{1 + t_{nk}e_i} \quad = \quad \sum_{i=1}^k \frac{(1 + t_{nk}e_i - t_{nk}e_i)e_i}{1 + t_{nk}e_i}\\
&= \quad \sum_{i=1}^k e_i - t_{nk}\sum_{i=1}^k \frac{e_i^2}{1 + t_{nk}e_i}.
\end{aligned}
$$

Da t_{nk} in dem in Definition 2.18 angegebenen Intervall liegt, ist $1 + t_{nk}e_i > 0$ für alle $i = 1, \dots, k$ und es folgt

$$
|t_{nk}| \sum_{i=1}^k \frac{e_i^2}{1 + t_{nk}e_i} = \Big|\sum_{i=1}^k e_i\Big|.
$$

Wegen

$$
0 < 1 + t_{nk}e_i \le 1 + |t_{nk}e_i| \le 1 + \max_{[n^\alpha]\le l\le n}|t_{nl}| \max_{1\le i\le l}|e_i|
$$

für alle $i = 1, \dots, k$ folgt daraus

$$
\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=1}^k e_i\Big| \quad &\ge \quad |t_{nk}| \sum_{i=1}^k \frac{e_i^2}{1 + \max_{[n^\alpha]\le k\le n}|t_{nk}| \max_{1\le i\le k}|e_i|}\\
&= \quad \frac{|t_{nk}|}{1 + \max_{[n^\alpha]\le k\le n}|t_{nk}| \max_{1\le i\le k}|e_i|}\sum_{i=1}^k e_i^2.
\end{aligned}
$$

Da auf $A_{n,\alpha}$ mindestens eines (tatsächlich sogar mindestens zwei) der $e_1, \ldots, e_{[n^\alpha]}$ ungleich Null ist, folgt für alle $k = [n^\alpha], \ldots, n$

$$|t_{nk}| \leq \Big(1 + \max_{[n^\alpha] \leq l \leq n} |t_{nl}| \max_{1 \leq i \leq l} |e_i|\Big) \frac{|\sum_{i=1}^k e_i|}{\sum_{i=1}^k e_i^2}.$$

Indem wir mit k multiplizieren und das Maximum über $k = [n^\alpha], \ldots, n$ bilden, erhalten wir (2.26).
Weiter erhalten wir für $k \geq 3$ durch Multiplizieren mit $\sqrt{k/\log\log k}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\,|t_{nk}| &\leq \Big(1 + \max_{[n^\alpha] \leq l \leq n} |t_{nl}| \max_{1 \leq i \leq l} |e_i|\Big) \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\, \frac{|\sum_{i=1}^k e_i|}{\sum_{i=1}^k e_i^2} \\
&\leq \left(1 + \max_{[n^\alpha] \leq l \leq n} \sqrt{\frac{l}{\log\log l}}\,|t_{nl}| \max_{1 \leq i \leq l} \sqrt{\frac{\log\log l}{l}} |e_i|\right) \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\, \frac{|\sum_{i=1}^k e_i|}{\sum_{i=1}^k e_i^2}.
\end{aligned}$$

Bilden wir nun wieder das Maximum über $k = [n^\alpha], \ldots, n$, so erhalten wir für $n \geq 3^{1/\alpha}$

$$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\,|t_{nk}| \leq \Big(1 + \max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\,|t_{nk}| \max_{1 \leq i \leq k} \sqrt{\frac{\log\log k}{k}} |e_i|\Big) V_{n,\alpha}.$$

Hieraus folgt (2.25) durch Ausmultiplizieren der Klammer und Abziehen des dabei entstehen zweiten Summanden.

2.27 Proposition. Für alle $\alpha \in (0, 1)$ gelten unter $A_{n,\alpha}$

(2.28) $$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\,|t_{nk}| = O_p(1)$$

(2.29) $$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} |t_{nk}| \max_{1 \leq i \leq k} |e_i| = o_p(1)$$

(2.30) $$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} k|t_{nk}| = O_p(\sqrt{n}\,)$$

(2.31) $$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \max_{1 \leq i \leq k} \left|\frac{1}{1 + t_{nk} e_i} - 1\right| = o_p(1).$$

Beweis: Zu (2.28): Für den Term $V_{n,\alpha}$ aus Proposition 2.24 gilt

$$V_{n,\alpha} = \max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\, \frac{|\sum_{i=1}^k e_i|}{\sum_{i=1}^k e_i^2} = O_p(1)$$

nach (2.12). Hiermit und mit (2.16) folgt aus (2.25)

$$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\,|t_{nk}| \Big(1 - O_p(1)\, o_p(1)\Big) \leq O_p(1),$$

also

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\,|t_{nk}| = O_p(1).$$

Zu (2.29): Folgt wegen

$$\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\le k\le n} |t_{nk}| \max_{1\le i\le k} |e_i| \\
\le\ & \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\,|t_{nk}| \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sqrt{\frac{\log\log k}{k}} \max_{1\le i\le k} |e_i| \\
=\ & O_p(1)\, o_p(1) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (2.28) und (2.16).

Zu (2.30): Mit (2.26) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\max_{[n^\alpha]\le k\le n} k|t_{nk}| \ &\le\ \Big(1 + \max_{[n^\alpha]\le k\le n} |t_{nk}| \max_{1\le i\le k} |e_i|\Big) \max_{[n^\alpha]\le k\le n} k\,\frac{|\sum_{i=1}^k e_i|}{\sum_{i=1}^k e_i^2} \\
&=\ (1 + o_p(1))\, O_p(\sqrt{n}\,) \quad = \quad O_p(\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

nach (2.29) und (2.13).

Zu (2.31): Sei $\varepsilon > 0$. Es gilt auf $A_{n,\alpha}$

$$\begin{aligned}
&P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \max_{1\le i\le k} \Big|\frac{1}{1+t_{nk}e_i} - 1\Big| > \varepsilon\Big) \\
&= \ P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \max_{1\le i\le k} \frac{|t_{nk}e_i|}{1+t_{nk}e_i} > \varepsilon\Big) \\
&= \ P\bigg(\Big\{\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \max_{1\le i\le k} \frac{|t_{nk}e_i|}{1+t_{nk}e_i} > \varepsilon\Big\} \cap \Big\{\max_{[n^\alpha]\le k\le n} |t_{nk}| \max_{1\le i\le k} |e_i| < 1\Big\}\bigg) \\
&\quad + P\bigg(\Big\{\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \max_{1\le i\le k} \frac{|t_{nk}e_i|}{1+t_{nk}e_i} > \varepsilon\Big\} \cap \Big\{\max_{[n^\alpha]\le k\le n} |t_{nk}| \max_{1\le i\le k} |e_i| \ge 1\Big\}\bigg) \\
&=: \ P_1(n) + P_2(n).
\end{aligned}$$

Wir haben

$$P_2(n) \le P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n} |t_{nk}| \max_{1\le i\le k} |e_i| \ge 1\Big) \underset{n}{\longrightarrow} 0$$

nach (2.29).

Auf dem Ereignis aus $P_1(n)$ gibt es ein $k_0 \in \{[n^\alpha], \ldots, n\}$ und ein $i_0 \in \{1, \ldots, k_0\}$ mit

$$\frac{|t_{nk_0}e_{i_0}|}{1+t_{nk_0}e_{i_0}} > \varepsilon,$$

und wegen

$$1 + t_{nk_0}e_{i_0} \ge 1 - \max_{[n^\alpha]\le k\le n} |t_{nk}| \max_{1\le i\le k} |e_i| > 0$$

gilt auf diesem Ereignis

$$\varepsilon < \frac{|t_{nk_0}||e_{i_0}|}{1+t_{nk_0}e_{i_0}} \leq \frac{\max\limits_{[n^\alpha]\leq k\leq n} |t_{nk}| \max\limits_{1\leq i\leq k} |e_i|}{1-\max\limits_{[n^\alpha]\leq k\leq n} |t_{nk}| \max\limits_{1\leq i\leq k} |e_i|}.$$

Durch Umstellen hiervon erhalten wir

$$\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} |t_{nk}| \max_{1\leq i\leq k} |e_i| > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

auf dem Ereignis aus $P_1(n)$. Also gilt

$$P_1(n) \leq P\Big(\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} |t_{nk}| \max_{1\leq i\leq k} |e_i| > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\Big) \xrightarrow[n]{} 0$$

nach (2.29). Damit folgt (2.31).

2.32 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt unter $A_{n,\alpha}$

$$\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \Big| k\, t_{nk} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^k e_i\Big| = o_p(\sqrt{n}\,). \tag{2.33}$$

Beweis: Sei $\alpha \in (0,1)$. Wir gehen von der Definition von t_{nk} als Nullstelle aus und verwenden die Entwicklung $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$. Damit erhalten wir für $k \in \{[n^\alpha], \ldots, n\}$ auf $A_{n,\alpha}$

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^k \frac{e_i}{1+t_{nk}e_i} \\ &= \sum_{i=1}^k \Big(1 - t_{nk}e_i + \frac{t_{nk}^2 e_i^2}{1+t_{nk}e_i}\Big)e_i \\ &= \sum_{i=1}^k e_i - t_{nk}\sum_{i=1}^k e_i^2 + t_{nk}^2 \sum_{i=1}^k \frac{e_i^3}{1+t_{nk}e_i}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$k\, t_{nk} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^k e_i \;=\; -\frac{1}{\sigma^2}\, t_{nk}\sum_{i=1}^k (e_i^2-\sigma^2) + \frac{1}{\sigma^2}\, t_{nk}^2 \sum_{i=1}^k \frac{e_i^3}{1+t_{nk}e_i}.$$

Nun ist

$$\begin{aligned} &\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \Big|\frac{1}{\sigma^2}\, t_{nk}\sum_{i=1}^k (e_i^2-\sigma^2)\Big| \\ &\leq \frac{1}{\sigma^2} \max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} k|t_{nk}| \max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \frac{1}{k}\Big|\sum_{i=1}^k (e_i^2-\sigma^2)\Big| \\ &= O_p(\sqrt{n}\,)\, o_p(1) \;=\; o_p(\sqrt{n}\,) \end{aligned}$$

nach (2.30) und (2.9).
Weiter ist

$$\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\left|\frac{1}{\sigma^2}\,t_{nk}^{\,2}\sum_{i=1}^{k}\frac{e_i^3}{1+t_{nk}e_i}\right|\\
&\le\ \frac{1}{\sigma^2}\max_{[n^\alpha]\le k\le n}k|t_{nk}|\max_{[n^\alpha]\le k\le n}|t_{nk}|\max_{1\le i\le k}|e_i|\\
&\quad\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\max_{1\le i\le k}\frac{1}{1+t_{nk}e_i}\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}e_i^2\\
&=\ O_p(\sqrt{n}\,)\,o_p(1)\,O_p(1)\,O_p(1)\quad=\quad o_p(\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

nach (2.30), (2.29), (2.31) und (2.9).
Daraus folgt (2.33).

2.34 Definition. Für $n\in\mathbb{N}$ und $k=0\ldots,n$ sei u_{nk} auf dem Ereignis

$$\Big\{\min_{k+1\le i\le n}e_i<0<\max_{k+1\le i\le n}e_i\Big\}$$

definiert als Nullstelle von

$$x\mapsto\sum_{i=k+1}^{n}\frac{e_i}{1+xe_i}$$

in dem Intervall

$$\left(\left(\frac{1}{n-k}-1\right)\frac{1}{\max_{k+1\le i\le n}e_i},\left(\frac{1}{n-k}-1\right)\frac{1}{\min_{k+1\le i\le n}e_i}\right).$$

Für die Wohldefiniertheit siehe Bemerkung 2.19.
Für $\alpha\in(0,1)$ und $n\in\mathbb{N}$ sei

$$B_{n,\alpha}:=\bigcap_{k=0}^{n-[n^\alpha]}\Big\{\min_{k+1\le i\le n}e_i<0<\max_{k+1\le i\le n}e_i\Big\}.$$

2.35 Proposition. Für alle $\alpha\in(0,1)$ ist

$$P(B_{n,\alpha})\xrightarrow[n]{}1,\tag{2.36}$$

und unter $B_{n,\alpha}$ gelten

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}|u_{nk}|\max_{k+1\le i\le n}|e_i|=o_p(1)\tag{2.37}$$

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}(n-k)|u_{nk}|=O_p(\sqrt{n}\,)\tag{2.38}$$

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\max_{k+1\le i\le n}\left|\frac{1}{1+u_{nk}e_i}-1\right|=o_p(1)\tag{2.39}$$

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\left|(n-k)u_{nk}-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=k+1}^{n}e_i\right|=o_p(\sqrt{n}\,).\tag{2.40}$$

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen der Unabhängigkeit und identischen Verteiltheit von $e_1, \dots, e_n$

$$(e_1, \dots, e_n) \sim (e_n, \dots, e_1),$$

und deshalb sind diese Behauptungen äquivalent zu (2.23), (2.29), (2.30), (2.31) und (2.33), denn die dort betrachteten Zufallsgrößen besitzen jeweils dieselben Verteilungen, beziehungsweise, bei den Ereignissen in (2.23), dieselben Wahrscheinlichkeiten.

2.2 Stochastische Entwicklung von T_n^z

Es gelte im folgenden

(2.41) die Verteilungsfunktion F von e_1 ist stetig.

Weiter sei

$$U : \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \quad U(x) := E(e_1 1_{\{e_1 \leq x\}}).$$

Hierbei ist $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ die Menge der erweiterten reellen Zahlen.

2.42 Proposition. Unter der Voraussetzung (2.41) ist die Funktion U gleichmäßig stetig, und für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt

$$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e_i 1_{\{e_i \leq x\}} - U(x) \right| = o_p(1). \tag{2.43}$$

Beweis: Dieser Beweis stammt aus Horni (2009). Der Vollständigkeit halber, und weil wir uns später auf ihn beziehen, führen wir ihn hier mit auf.
Für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$U_n^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad U_n^+(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} e_i^+ 1_{\{e_i \leq x\}}$$

und

$$U^+ : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad U^+(x) := E(e_1^+ 1_{\{e_1 \leq x\}}),$$

wobei $e_i^+ = 0 \vee e_i$ den Positivteil von e_i für $i \in \mathbb{N}$ bezeichnet.
Analog seien U_n^- für $n \in \mathbb{N}$ und U^- mit den Negativteilen $e_i^- = 0 \vee (-e_i)$, $i \in \mathbb{N}$, anstelle der Positivteile definiert.
Nun ist U^+ stetig, denn für $x, h \in \mathbb{R}$ ist

$$|U^+(x+h) - U^+(x)| \leq E(e_1^+ 1_{\{e_1 \in (x-|h|, x+|h|]\}}) \underset{|h| \downarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

nach dem Satz von Lebesgue, wenn wir e_1^+ als integrierbare Majorante benutzen und beachten, dass $1_{\{e_1\in(x-|h|,x+|h|]\}}$ für $|h|\downarrow 0$ wegen der stetigen Verteiltheit von e_1 fast sicher gegen 0 konvergiert. Weiter ist U^+ monoton wachsend, und wegen des Satzes von Lebesgue gilt $\lim_{x\to\infty} U^+(x) = E(e_1^+) < \infty$ und $\lim_{x\to-\infty} U^+(x) = 0$. Wenn wir also U^+ durch $U^+(-\infty) := 0$, $U^+(\infty) := E(e_1^+)$ stetig auf $\overline{\mathbb{R}}$ fortsetzen, gibt es wegen der gleichmäßigen Stetigkeit auf dieser bezüglich einer geeigneten Metrik kompakten Menge für jedes $\varepsilon > 0$ ein $m \in \mathbb{N}$ und $x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}$ mit

$$-\infty =: x_1 < x_2 < \ldots < x_m < x_{m+1} := \infty$$

mit

$$U^+(x_{j+1}) - U^+(x_j) < \varepsilon \text{ für alle } j = 1, \ldots, m.$$

Dann gibt es für jedes $x \in \overline{\mathbb{R}}$ ein $j \in \{1 \ldots, m\}$ mit $x_j \le x \le x_{j+1}$, und da für alle $n \in \mathbb{N}$ die Funktion U_n^+ ebenfalls monoton wachsend ist, folgt

$$\begin{aligned} U_n^+(x) - U^+(x) &\le U_n^+(x_{j+1}) - U^+(x_j) \\ &< U_n^+(x_{j+1}) - U^+(x_{j+1}) + \varepsilon \end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} U^+(x) - U_n^+(x) &\le U^+(x_{j+1}) - U_n^+(x_j) \\ &< U^+(x_j) - U_n^+(x_j) + \varepsilon, \end{aligned}$$

wobei wir $U_n^+(\infty) := \lim_{x\to\infty} U_n^+(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e_i^+$ und $U_n^+(-\infty) := 0$ gesetzt haben.
Hieraus erhalten wir

$$\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} |U_n^+(x) - U^+(x)| \le \max_{1\le j\le m+1} |U_n^+(x_j) - U^+(x_j)| + \varepsilon.$$

Nach dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt $U_n^+(x) \xrightarrow[n]{} U^+(x)$ fast sicher für alle $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Deshalb ist

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} |U_n^+(x) - U^+(x)| \\ &\le \max_{1\le j\le m+1} \limsup_{n\to\infty} |U_n^+(x_j) - U^+(x_j)| + \varepsilon \\ &= \varepsilon \quad \text{fast sicher.} \end{aligned}$$

Grenzübergang $\varepsilon \downarrow 0$ liefert

$$\sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} |U_n^+(x) - U^+(x)| \underset{n}{\longrightarrow} 0 \quad \text{fast sicher.}$$

Dies ist äquivalent zu

$$\sup_{k \geq n} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} |U_k^+(x) - U^+(x)| = o_p(1). \tag{2.44}$$

Die gleiche Rechnung gilt für U^- und U_n^-, $n \in \mathbb{N}$. Da für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned}\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e_i 1_{\{e_i \leq x\}} - U(x) \right| \quad \leq & \quad \max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} |U_k^+(x) - U^+(x)| \\ & + \max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} |U_k^-(x) - U^-(x)|\end{aligned}$$

gilt, folgt daraus die Behauptung (2.43).
Für die gleichmäßige Stetigkeit von U beachte man, dass wegen $U|_{\mathbb{R}} = U^+ - U^-$ und der Stetigkeit von U^+ und der entsprechend nachweisbaren Stetigkeit von U^- die Funktion $U|_{\mathbb{R}}$ stetig ist, und dass aufgrund des Satzes von Lebesgue $U(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} U(x) = 0$ sowie $U(\infty) = \lim_{x \to \infty} U(x) = E(e_1) = 0$ gelten.

2.45 Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\begin{aligned} F_n^{seq} &: [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1], \\ F_n^{seq}(s,x) &:= \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{1}{[ns]} 1_{\{e_i \leq x\}}, \end{aligned}$$

wobei $F_n^{seq}(s,x) := 0$ sei, wenn $s < 1/n$.
Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} S_n &: [0,1] \to \mathbb{R}, \\ S_n(s) &:= \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{1}{[ns]} e_i, \end{aligned}$$

mit $S_n(s) := 0$ für $s < 1/n$.
Sei weiter für $n \in \mathbb{N}$

$$F_n^{seq,z} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$$

definiert für $s \in [0,1]$ und $x \in \overline{\mathbb{R}}$ auf $\{\min_{1 \leq i \leq [ns]} e_i < 0 < \max_{1 \leq i \leq [ns]} e_i\}$ als

$$F_n^{seq,z}(s,x) := \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{1}{[ns]} \frac{1}{1 + t_{n[ns]} e_i} 1_{\{e_i \leq x\}},$$

und als $F_n^{seq,z}(s,x) := F_n^{seq}(s,x)$ auf dem Gegenereignis, also

$$F_n^{seq,z}(s,x) := \begin{cases} \frac{1}{[ns]} \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{1}{1+t_{n[ns]}e_i} 1_{\{e_i \le x\}} & , \quad \min_{1\le i\le [ns]} e_i < 0 < \max_{1\le i\le [ns]} e_i \\ 0 & , \quad s < 1/n \\ \frac{1}{[ns]} \sum_{i=1}^{[ns]} 1_{\{e_i\le x\}} & , \quad \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Festlegung $F_n^{seq,z} := F_n^{seq}$ auf dem genannten Gegenereignis entspricht der Wahl $t_{nk} := 0$ auf dem Ereignis wo t_{nk}, $n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \ldots, n$, bisher nicht definiert war.
Zur Abkürzung schreiben wir für $n \in \mathbb{N}$, $s \in [1/n, 1]$ und $i = 1, \ldots, [ns]$

$$p_{n,i}(s) := \frac{1}{[ns]} \frac{1}{1+t_{n[ns]}e_i}$$

auf dem Ereignis $\{\min_{1\le i\le [ns]} e_i < 0 < \max_{1\le i\le [ns]} e_i\}$, und

$$p_{n,i}(s) := \frac{1}{[ns]}$$

auf dem Gegenereignis, so dass wir immer die Darstellung

$$F_n^{seq,z}(s,x) = \sum_{i=1}^{[ns]} p_{n,i}(s) 1_{\{e_i\le x\}} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, s \in [1/n, 1]$$

haben.

2.46 Proposition. Es gilt unter (2.41)

$$(2.47) \quad \sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} [ns] \left| F_n^{seq,z}(s,x) - \Big(F_n^{seq}(s,x) - \frac{1}{\sigma^2} S_n(s) U(x)\Big) \right| = o_p(\sqrt{n}\,).$$

Beweis: Es gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned} &\sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} [ns] \left| F_n^{seq,z}(s,x) - \Big(F_n^{seq}(s,x) - \frac{1}{\sigma^2} S_n(s)U(x)\Big)\right| \\ &\le \ \infty \cdot 1_{\complement A_{n,\alpha}} \\ &\quad + 1_{A_{n,\alpha}} \sup_{s\in[n^{\alpha-1},1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \left| \sum_{i=1}^{[ns]} \Big(\frac{1}{1+t_{n[ns]}e_i} - 1\Big) 1_{\{e_i\le x\}} + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{[ns]} e_i\, U(x)\right| \\ &\quad + \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} [ns] \left|\ F_n^{seq,z}(s,x) - F_n^{seq}(s,x) + \frac{1}{\sigma^2} S_n(s)U(x)\right| \\ &=: \ I_n + \mathit{II}_n + \mathit{III}_n. \end{aligned}$$

Nun ist

$$I_n = o_p(1)$$

nach (2.23). Dann ist unter $A_{n,\alpha}$ wegen $\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}$

$$\begin{aligned}
I\!I_n &= \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| \sum_{i=1}^{k} \Big(\frac{1}{1+t_{nk}e_i} - 1\Big) 1_{\{e_i\le x\}} + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k} e_i\, U(x)\Big| \\
&= \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| -\sum_{i=1}^{k} t_{nk}e_i 1_{\{e_i\le x\}} + \sum_{i=1}^{k} \frac{{t_{nk}}^2 e_i^2}{1+t_{nk}e_i} 1_{\{e_i\le x\}} \\
&\qquad + \Big(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k} e_i - k\, t_{nk}\Big) U(x) + k\, t_{nk} U(x)\Big| \\
&\le \max_{[n^\alpha]\le k\le n} k|t_{nk}| \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i 1_{\{e_i\le x\}} - U(x)\Big| \\
&\quad + \max_{[n^\alpha]\le k\le n} k|t_{nk}| \max_{[n^\alpha]\le k\le n} |t_{nk}| \max_{1\le i\le k} |e_i| \\
&\qquad \cdot \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \max_{1\le i\le k} \frac{1}{1+t_{nk}e_i} \max_{1\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |e_i| \\
&\quad + \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \Big| k\, t_{nk} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{k} e_i\Big| E(|e_1|) \\
&= O_p(\sqrt{n}\,)\, o_p(1) + O_p(\sqrt{n}\,)\, o_p(1)\, O_p(1)\, O_p(1) + o_p(\sqrt{n}\,) \quad = \quad o_p(\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

nach (2.30), (2.43), (2.30), (2.29), (2.31), (2.6) und (2.33).
Weiter ist auf dem gesamten Grundraum

$$\begin{aligned}
I\!I\!I_n &\le \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]} \Big([ns] + \frac{1}{\sigma^2}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_i\Big| E(|e_1|)\Big) \\
&= [n^\alpha] + \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2} \max_{1\le k\le [n^\alpha]} \Big|\sum_{i=1}^{k} e_i\Big| \\
&= O(n^\alpha) + O_p(n^{\alpha/2}) \quad = \quad O_p(n^\alpha)
\end{aligned}$$

nach (2.8) mit der Ersetzung $n \mapsto [n^\alpha]$. Wir wählen $\alpha = 1/3$ und erhalten die Behauptung.

2.48 Definition. Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&G_n^{seq} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1], \\
&G_n^{seq}(s,x) := \sum_{i=[ns]+1}^{n} \frac{1}{n-[ns]} 1_{\{e_i\le x\}},
\end{aligned}$$

$$S_n^{rück} : [0,1] \to \mathbb{R},$$
$$S_n^{rück}(s) := \sum_{i=[ns]+1}^{n} \frac{1}{n-[ns]} e_i,$$

$G_n^{seq}(1,x) := 0$ und $S_n^{rück}(1) := 0$, sowie

$$G_n^{seq,z} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1]$$

für $s \in [0,1]$ und $x \in \overline{\mathbb{R}}$ auf dem Ereignis $\{\min_{[ns]+1 \le i \le n} e_i < 0 < \max_{[ns]+1 \le i \le n} e_i\}$ definiert als

$$G_n^{seq,z}(s,x) := \sum_{i=[ns]+1}^{n} \frac{1}{n-[ns]} \frac{1}{1+u_{n[ns]}e_i} 1_{\{e_i \le x\}}$$

und als $G_n^{seq,z}(s,x) := G_n^{seq}(s,x)$ auf dem Gegenereignis.
Zur Abkürzung schreiben wir auch hier für $n \in \mathbb{N}$, $s \in [0,1)$ und $i = [ns]+1, \ldots, n$

$$q_{n,i}(s) := \frac{1}{n-[ns]} \frac{1}{1+u_{n[ns]}e_i}$$

auf dem Ereignis wo $u_{n[ns]}$ definiert ist, und

$$q_{n,i}(s) := \frac{1}{n-[ns]}$$

auf dem Gegenereignis, so dass immer

$$G_n^{seq,z}(s,x) = \sum_{i=1}^{[ns]} q_{n,i}(s) 1_{\{e_i \le x\}} \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, s \in [0,1)$$

gilt.

2.49 Proposition. Es gilt unter (2.41)

$$(2.50) \sup_{s \in [0,1]} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} (n-[ns]) \left| G_n^{seq,z}(s,x) - \left(G_n^{seq}(s,x) - \frac{1}{\sigma^2} S_n^{rück}(s) U(x) \right) \right| = o_p(\sqrt{n}\,).$$

Beweis: Folgt aus Propositon 2.46. Die in (2.47) betrachtete Zufallsvariable besitzt nämlich die gleiche Verteilung wie die in (2.50) betrachtete:
Sei zur Abkürzung für $k \in \{0, \ldots, n\}$

$$H'_{n,k} := \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} (n-k) \Big| G_n^{seq,z}(\tfrac{k}{n}, x) - \Big(G_n^{seq}(\tfrac{k}{n}, x) - \tfrac{1}{\sigma^2} S_n^{rück}(\tfrac{k}{n}) U(x) \Big) \Big|$$

und

$$H_{n,k} := \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} k \Big| F_n^{seq,z}(\tfrac{k}{n}, x) - \Big(F_n^{seq}(\tfrac{k}{n}, x) - \tfrac{1}{\sigma^2} S_n(\tfrac{k}{n}) U(x) \Big) \Big|.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}(n-[ns])\left|G_n^{seq,z}(s,x)-\Big(G_n^{seq}(s,x)-\frac{1}{\sigma^2}S_n^{r\ddot{u}ck}(s)U(x)\Big)\right| \\
(2.51)\qquad &= \max_{0\le k\le n} H'_{k,n} \quad\sim\quad \max_{0\le k\le n} H_{k,n} \\
&= \sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}[ns]\left|F_n^{seq,z}(s,x)-\Big(F_n^{seq}(s,x)-\frac{1}{\sigma^2}S_n(s)U(x)\Big)\right|,
\end{aligned}$$

wobei wir an der Stelle mit der Verteilungsgleichheit ausgenutzt haben, dass

$$(H_{0,n},\ldots,H_{n,n}) \;\sim\; (H'_{n,n},\ldots,H'_{0,n})$$

gilt, wobei diese Aussage wiederum aus

$$(e_1,\ldots,e_n) \;\sim\; (e_n,\ldots,e_1)$$

folgt. Setzte man auf der rechten Seite in (2.51) statt e_i für $i=1,\ldots,n$ nun e_{n-i+1} ein, würde sogar Gleichheit gelten.

2.52 Definition. Sei für $n\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&T_n : [0,1]\times\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}, \\
&T_n(s,x) := \frac{[ns](n-[ns])}{n^2}\Big(F_n^{seq}(s,x)-G_n^{seq}(s,x)\Big),
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
&T_n^z : [0,1]\times\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}, \\
&T_n^z(s,x) := \frac{[ns](n-[ns])}{n^2}\Big(F_n^{seq,z}(s,x)-G_n^{seq,z}(s,x)\Big).
\end{aligned}$$

2.53 Proposition. Es gilt unter (2.41)

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Bigg|T_n^z(s,x)- \\
(2.54)\qquad &\Big(T_n(s,x)-\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{n-[ns]}{n}1_{\{i\le[ns]\}}-\frac{[ns]}{n}1_{\{i>[ns]\}}\Big)e_i\,U(x)\Big)\Bigg| \\
&\qquad\qquad = o_p(1/\sqrt{n}\,).
\end{aligned}$$

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Bigg|T_n^z(s,x)- \\
&\quad\Big(T_n(s,x)-\frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(1_{\{i\le[ns]\}}\frac{n-[ns]}{n}-1_{\{i>[ns]\}}\frac{[ns]}{n}\Big)e_i\,U(x)\Big)\Bigg|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sup_{s\in[1/n,1)} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \frac{[ns](n-[ns])}{n^2}\Big|F_n^{seq,z}(s,x) - \Big(F_n^{seq}(s,x) - \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{[ns]}\sum_{i=1}^{[ns]} e_i\, U(x)\Big)\Big| \\
&\quad + \sup_{s\in[1/n,1)} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \frac{[ns](n-[ns])}{n^2}\Big|G_n^{seq,z}(s,x) - \\
&\qquad\qquad \Big(G_n^{seq}(s,x) - \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{n-[ns]}\sum_{i=[ns]+1}^{n} e_i\, U(x)\Big)\Big| \\
&\leq \frac{1}{n}\sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} [ns]\,\Big|F_n^{seq,z}(s,x) - \Big(F_n^{seq}(s,x) - \frac{1}{\sigma^2}S_n(s)U(x)\Big)\Big| \\
&\quad + \frac{1}{n}\sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} (n-[ns])\,\Big|G_n^{seq,z}(s,x) - \Big(G_n^{seq}(s,x) - \frac{1}{\sigma^2}S_n^{rück}(s)U(x)\Big)\Big| \\
&= O(1/n)\, o_p(\sqrt{n}\,) + O(1/n)\, o_p(\sqrt{n}\,) \quad = \quad o_p(1/\sqrt{n}\,)
\end{aligned}
$$

nach (2.47) und (2.50).

2.3 Stochastische Entwicklung von r_n^z

Sei in diesem Kapitel $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion mit den Eigenschaften

$$
\text{(2.55)} \qquad
\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad E(|K(e_1,e_2)|) < \infty, \\
&\text{(b)}\quad E(e_1^2 K(e_1,e_2)^2) < \infty \\
&\text{und} \\
&\text{(c)}\quad E(e_2^2 K(e_1,e_2)^2) < \infty.
\end{aligned}
$$

Es gelten natürlich weiterhin (2.1)–(2.4).

2.56 Proposition. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion mit $E(L(e_1,e_2)^2) < \infty$. Dann ist für alle $\alpha \in (0,1)$

$$
\text{(2.57)} \qquad \max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \Big|\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j) - E(L(e_1,e_2))\Big| = o_p(1).
$$

Beweis: Sei $\alpha \in (0,1)$. Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \Big|\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j) - E(L(e_1,e_2))\Big| \\
&\leq \max_{[n^\alpha]\leq k\leq [n/2]} \Big|\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j) - E(L(e_1,e_2))\Big| \\
&\quad + \max_{[n/2]+1\leq k\leq n-[n^\alpha]} \Big|\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j) - E(L(e_1,e_2))\Big| \\
&=: I_n + I\!I_n.
\end{aligned}
$$

Nun, mit $k \mapsto n-k$ und $(e_1, \ldots, e_n) \sim (e_n, \ldots, e_1)$,

$$\begin{aligned}
I\!I_n &\leq \max_{[n^\alpha] \leq k \leq [n/2]} \left| \frac{1}{n-k} \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} \sum_{j=1}^{n-k} L(e_i, e_j) - E(L(e_1, e_2)) \right| \\
&\sim \max_{[n^\alpha] \leq k \leq [n/2]} \left| \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=k+1}^{n} L(e_i, e_j) - E(L(e_1, e_2)) \right|.
\end{aligned}$$

Dies entspricht I_n, wenn man das dortige L durch L' mit $L'(x,y) := L(y,x)$ für $x, y \in \mathbb{R}$ ersetzt. Daher reicht es, I_n zu betrachten.
Sei für $a, b, n \in \mathbb{N}$, $a < b \leq n/2$ und $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
H_n(a,b,\varepsilon) &:= P\left(\max_{a \leq k \leq b} \left| \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j) - E(L(e_1, e_2)) \right| \geq \varepsilon \right) \\
&\leq P\left(\max_{a \leq k \leq b} \left| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_1, e_2)) \Big) \right| \geq \frac{an\varepsilon}{2} \right) \\
&\leq P\left(\max_{a \leq k \leq b} \left| \sum_{i=k+1}^{b} \sum_{j=1}^{k} \Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_1, e_2)) \Big) \right| \geq \frac{an\varepsilon}{4} \right) \\
&\quad + P\left(\max_{a \leq k \leq b} \left| \sum_{i=b+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_1, e_2)) \Big) \right| \geq \frac{an\varepsilon}{4} \right) \\
&=: p_1(n,a,b,\varepsilon) + p_2(n,a,b,\varepsilon).
\end{aligned}$$

Sei für $k = 1, \ldots, b$

$$S_k := \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=b+1}^{n} \Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_i, e_j) | e_i) \Big),$$

und

$$\mathcal{F}_k := \sigma(e_i : i \in \{1, \ldots, k\} \cup \{b+1, \ldots, n\}).$$

Dann ist $(S_k, \mathcal{F}_k)_{k=1,\ldots,b}$ ein Martingal, denn $(S_k)_{k=1,\ldots,b}$ ist an $(\mathcal{F}_k)_{k=1,\ldots,b}$ adaptiert, und für $k = 1, \ldots, b-1$ ist

$$\begin{aligned}
E(S_{k+1} | \mathcal{F}_k) &= \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=b+1}^{n} E\Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_i, e_j) | e_i) \Big| e_1, \ldots, e_k; e_{b+1}, \ldots, e_n \Big) \\
&= \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=b+1}^{n} E\Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_i, e_j) | e_i) \Big| e_i, e_j \Big) \\
&\quad + \sum_{i=b+1}^{n} E\Big(L(e_i, e_{k+1}) - E(L(e_i, e_{k+1}) | e_i) \Big| e_i, \Big) \\
&= S_k + 0.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$
\begin{aligned}
&p_2(n,a,b,\varepsilon)\\
&\le\ P\Big(\max_{1\le k\le b}\Big|\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=b+1}^{n}\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_i,e_j)|e_i)\Big)\Big|\ge\frac{an\varepsilon}{8}\Big)\\
&\qquad+P\Big(\max_{1\le k\le b}\Big|\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=b+1}^{n}\Big(E(L(e_i,e_1)|e_i)-E(L(e_1,e_2))\Big)\Big|\ge\frac{an\varepsilon}{8}\Big)\\
&=\ P\Big(\max_{1\le k\le b}|S_k|\ge\frac{an\varepsilon}{8}\Big)\\
&\qquad+P\Big(b\Big|\sum_{i=b+1}^{n}\Big(E(L(e_i,e_1)|e_i)-E(L(e_1,e_2))\Big)\Big|\ge\frac{an\varepsilon}{8}\Big)\\
&\le\ \frac{64}{a^2n^2\varepsilon^2}\,E(S_b^2)\\
&\qquad+\frac{64b^2}{a^2n^2\varepsilon^2}\sum_{i=b+1}^{n}E\Big(\Big(E(L(e_i,e_1)|e_i)-E(L(e_1,e_2))\Big)^2\Big)\\
&\le\ \frac{64}{a^2n^2\varepsilon^2}\sum_{\substack{j,j'=1\\ \{i,j\}\cap\{i',j'\}\neq\emptyset}}^{b}\ \sum_{i,i'=b+1}^{n}E\Big(\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_i,e_j)|e_i)\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\Big(L(e_{i'},e_{j'})-E(L(e_{i'},e_{j'})|e_{i'})\Big)\Big)\\
&\qquad+\frac{64b^2}{a^2n^2\varepsilon^2}\,n\,\mathrm{Var}\Big(E(L(e_1,e_2)|e_1)\Big)\\
&\le\ \frac{64}{a^2n^2\varepsilon^2}(b^2n+n^2b)E\Big(\mathrm{Var}(L(e_1,e_2)|e_1)\Big)\\
&\qquad+\frac{64b^2}{a^2n\varepsilon^2}\mathrm{Var}\Big(E(L(e_1,e_2)|e_1)\Big)\\
&\le\ \frac{128b}{a^2\varepsilon^2}E(L(e_1,e_2)^2),
\end{aligned}
$$

wobei wir beim zweiten Ungleichheitszeichen die Kolmogorovsche Maximalungleichung für Martingale sowie die Markovungleichung und die Bienamaysche Gleichung, in der nächsten Zeile, um gewisse Summanden wegzulassen, die Unabhängigkeit und Zentriertheit der Faktoren in diesen Erwartungswerten benutzt haben, beim folgenden Ungleichheitszeichen die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, und zum Schluß neben der Voraussetzung $b\le n/2$ ausgenutzt haben, dass die Varianz kleiner oder gleich dem Erwartungswert des Quadrats ist, und beim zweiten Summanden zusätzlich die Jensensche Ungleichung verwandt haben.
Wegen

$$\Big\{(i,j)\in\mathbb{N}^2: 1\le j\le k<i\le b\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
= \quad & \Big\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 : 1\le j<i\le b\Big\} \\
& \setminus \Big(\Big\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 : 1\le j<i\le k\Big\} + \Big\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 : k<j<i\le b\Big\}\Big)
\end{aligned}
$$

für $k=1,\ldots,b$ gilt

$$
\max_{1\le k\le b}\Bigg|\sum_{i=k+1}^{b}\sum_{j=1}^{k}\ldots\Bigg| \le 2\max_{1\le k\le b}\Bigg|\sum_{1\le j<i\le k}\ldots\Bigg| + \max_{1\le k\le b}\Bigg|\sum_{k<j<i\le b}\ldots\Bigg|
$$

wobei die Punkte „...“ für einen von i und j abhängigen Ausdruck stehen. Es folgt

$$
\begin{aligned}
p_1(n,a,b,\varepsilon) \quad \le \quad & P\Bigg(\max_{1\le k\le b}\Bigg|\sum_{1\le j<i\le k}\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_1,e_2))\Big)\Bigg| \ge \frac{an\varepsilon}{12}\Bigg) \\
& + P\Bigg(\max_{1\le k\le b}\Bigg|\sum_{k<j<i\le b}\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_1,e_2))\Big)\Bigg| \ge \frac{an\varepsilon}{12}\Bigg) \\
=: \quad & p_3(n,a,b,\varepsilon)+p_4(n,a,b,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Sei nun für $k=1,\ldots,b$

$$
S'_k := \sum_{1\le j<i\le k}\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_i,e_j)|e_j)\Big)
$$

und

$$
\mathcal{F}'_k := \sigma(e_i : i\in\{1,\ldots,k\}).
$$

Dann handelt es sich bei $(S'_k,\mathcal{F}'_k)_{k=1,\ldots,b}$ um ein Martingal, denn nach Konstruktion ist $(S'_k)_{k=1,\ldots,b}$ an $(\mathcal{F}'_k)_{k=1,\ldots,b}$ adaptiert, und für $k=1,\ldots,b-1$ ist

$$
\begin{aligned}
E(S'_{k+1}|\mathcal{F}'_k) \quad = \quad & \sum_{1\le j<i\le k+1} E\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_i,e_j)|e_j)\Big|e_1,\ldots,e_k\Big) \\
= \quad & \sum_{1\le j<i\le k} E\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_i,e_j)|e_j)\Big|e_i,e_j\Big) \\
& + \sum_{j=1}^{k} E\Big(L(e_{k+1},e_j)-E(L(e_{k+1},e_j)|e_j)\Big|e_j\Big) \\
= \quad & S'_k + 0.
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$
\begin{aligned}
& p_3(n,a,b,\varepsilon) \\
& \le \quad P\Bigg(\max_{1\le k\le b}\Bigg|\sum_{1\le j<i\le k}\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_i,e_j)|e_j)\Big)\Bigg| \ge \frac{an\varepsilon}{24}\Bigg) \\
& \qquad + P\Bigg(\max_{1\le k\le b}\Bigg|\sum_{1\le j<i\le k}\Big(E(L(e_i,e_j)|e_j)-E(L(e_1,e_2))\Big)\Bigg| \ge \frac{an\varepsilon}{24}\Bigg)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= P\Big(\max_{1\le k\le b}\big|S'_k\big| \ge \frac{an\varepsilon}{24}\Big) \\
&\quad + P\Big(\max_{1\le k\le b}\Big|\sum_{j=1}^{k-1}(k-j)\Big(E(L(e_b,e_j)|e_j) - E(L(e_1,e_2))\Big)\Big| \ge \frac{an\varepsilon}{24}\Big) \\
&=: p_5(n,a,b,\varepsilon) + p_6(n,a,b,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Wegen der Martingaleigenschaft von $(S'_k, \mathcal{F}'_k)_{1,\dots,b}$ ist

$$
\begin{aligned}
p_5(n,a,b,\varepsilon) &\le \frac{576}{a^2n^2\varepsilon^2}\,E(S_b'^2) \\
&= \frac{576}{a^2n^2\varepsilon^2}\sum_{1\le j<i\le b}\ \sum_{\substack{1\le j'<i'\le b\\ \{i,j\}\cap\{i',j'\}\neq\emptyset}} E\Big(\Big(L(e_i,e_j) - E(L(e_i,e_j)|e_j)\Big)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\Big(L(e_{i'},e_{j'}) - E(L(e_{i'},e_{j'})|e_{j'})\Big)\Big) \\
&\le \frac{2304b^3}{a^2n^2\varepsilon^2}\,E\Big(\mathrm{Var}(L(e_1,e_2)|e_2)\Big) \\
&\le \frac{576b}{a^2\varepsilon^2}\,E(L(e_1,e_2)^2),
\end{aligned}
$$

nach der Kolmogorovschen Maximalungleichung für Martingale, weil wegen Unabhängigkeit und Zentriertheit von Faktoren wieder bestimmte Summanden wegfallen, nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und wegen $b \le n/2$.
Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
p_6(n,a,b,\varepsilon) &\le P\Big(\max_{1\le k\le b}\Big|\sum_{j=1}^{k-1}k\Big(E(L(e_b,e_j)|e_j) - E(L(e_1,e_2))\Big)\Big| \ge \frac{an\varepsilon}{48}\Big) \\
&\quad + P\Big(\max_{1\le k\le b}\Big|\sum_{j=1}^{k-1}j\Big(E(L(e_b,e_j)|e_j) - E(L(e_1,e_2))\Big)\Big| \ge \frac{an\varepsilon}{48}\Big) \\
&\le \frac{2304b^2}{a^2n^2\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{b-1}\mathrm{Var}\Big(E(L(e_b,e_j)|e_j)\Big) \\
&\quad + \frac{2304}{a^2n^2\varepsilon^2}\sum_{j=1}^{b-1}j^2\mathrm{Var}\Big(E(L(e_b,e_j)|e_j)\Big) \\
&\le \frac{4608b^3}{a^2n^2\varepsilon^2}\,\mathrm{Var}\Big(E(L(e_1,e_2)|e_2)\Big) \\
&\le \frac{4608b^3}{a^2n^2\varepsilon^2}\,E(L(e_1,e_2)^2) \\
&\le \frac{1152b}{a^2\varepsilon^2}\,E(L(e_1,e_2)^2),
\end{aligned}
$$

wobei wir beim zweiten Ungleichheitszeichen die Kolmogorovsche Maximalungleichung und beim vorletzten Ungleichheitszeichen die Jensensche Ungleichung

benutzt haben. Alles andere sind einfache Abschätzungen.
Sei nun für $k = 1, \ldots, b-1$

$$S''_k := \sum_{k<j<i\leq b} \Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_i, e_j)|e_i)\Big)$$

und

$$\mathcal{F}''_k := \sigma(e_i : i \in \{k+1, \ldots, b\}).$$

Dann ist $(S''_k, \mathcal{F}''_k)_{k=1,\ldots,b-1}$ ein inverses Martingal, denn $(S''_k)_{k=1,\ldots,b-1}$ ist an die absteigende Filtration $(\mathcal{F}''_k)_{k=1,\ldots,b-1}$ adaptiert, und für $k = 2, \ldots, b-1$ gilt

$$\begin{aligned}
E(S''_{k-1}|\mathcal{F}_k) &= \sum_{k-1<j<i\leq b} E\Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_i, e_j)|e_i)\Big|e_{k+1}, \ldots, e_b\Big) \\
&= \sum_{k<j<i\leq b} E\Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_i, e_j)|e_i)\Big|e_j, e_i\Big) \\
&\quad + \sum_{i=k+1}^{b} E\Big(L(e_i, e_k) - E(L(e_i, e_k)|e_i)\Big|e_i\Big) \\
&= S''_k + 0.
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
&p_4(n, a, b, \varepsilon) \\
&\quad \leq P\bigg(\max_{1\leq k\leq b-2}\bigg|\sum_{k<j<i\leq b} \Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_i, e_j)|e_i)\Big)\bigg| \geq \frac{an\varepsilon}{24}\bigg) \\
&\qquad + P\bigg(\max_{1\leq k\leq b-2}\bigg|\sum_{k<j<i\leq b} \Big(E(L(e_i, e_1)|e_i) - E(L(e_1, e_2))\Big)\bigg| \geq \frac{an\varepsilon}{24}\bigg) \\
&\quad = P\bigg(\max_{1\leq k\leq b-2}\Big|S''_k\Big| \geq \frac{an\varepsilon}{24}\bigg) \\
&\qquad + P\bigg(\max_{1\leq k\leq b-2}\bigg|\sum_{i=k+2}^{b} (i-k-1)\Big(E(L(e_i, e_1)|e_i) - E(L(e_1, e_2))\Big)\bigg| \geq \frac{an\varepsilon}{24}\bigg) \\
&\quad =: p_7(n, a, b, \varepsilon) + p_8(n, a, b, \varepsilon).
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
p_7(n, a, b, \varepsilon) &\leq \frac{576}{a^2n^2\varepsilon^2} E({S''_1}^2) \\
&= \frac{576}{a^2n^2\varepsilon^2} \sum_{1<j<i\leq b} \sum_{\substack{1<j'<i'\leq b \\ \{i,j\}\cap\{i',j'\}\neq\emptyset}} E\bigg(\Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_i, e_j)|e_i)\Big)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(L(e_{i'}, e_{j'}) - E(L(e_{i'}, e_{j'})|e_{i'})\Big)\bigg) \\
&\leq \frac{2304b^3}{a^2n^2\varepsilon^2} E\Big(\mathrm{Var}(L(e_1, e_2)|e_1)\Big) \\
&\leq \frac{576b}{a^2\varepsilon^2} E(L(e_1, e_2)^2),
\end{aligned}$$

wobei wir beim ersten Ungleichheitszeichen die Kolmogorovsche Maximalungleichung für Martingale benutzt haben und beachten, dass auch ein inverses Martingal bei Zeitumkehr ein Martingal ist, anschließend haben wir wieder Summanden, welche wegen der Unabhängigkeit und Zentriertheit der Faktoren in den Erwartungswerten den Wert Null haben, weggelassen, dann die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und die Jensensche Ungleichung verwandt, und zum Schluß die Voraussetzung $b \leq n/2$, alles wie bei der Abschätzung von p_5.
Für den Term p_8 haben wir

$$\begin{aligned}
&p_8(n,a,b,\varepsilon) \\
&\leq\ P\Bigg(\max_{1\leq k\leq b-2} k\,\Bigg|\sum_{i=k+2}^{b}\Big(E(L(e_i,e_1)|e_i)-E(L(e_1,e_2))\Big)\Bigg| \geq \frac{an\varepsilon}{48}\Bigg) \\
&\quad + P\Bigg(\max_{1\leq k\leq b-2}\Bigg|\sum_{i=k+2}^{b}(i-1)\Big(E(L(e_i,e_1)|e_i)-E(L(e_1,e_2))\Big)\Bigg| \geq \frac{an\varepsilon}{48}\Bigg) \\
&\leq\ \frac{2304b^2}{a^2n^2\varepsilon^2}\sum_{i=3}^{b}\mathrm{Var}\Big(E(L(e_i,e_1)|e_i)\Big) \\
&\quad + \frac{2304}{a^2n^2\varepsilon^2}\sum_{i=3}^{b}(i-1)^2\mathrm{Var}\Big(E(L(e_i,e_1)|e_i)\Big) \\
&\leq\ \frac{4608b^3}{a^2n^2\varepsilon^2}\,E(L(e_1,e_2)^2) \\
&\leq\ \frac{1152b}{a^2\varepsilon^2}\,E(L(e_1,e_2)^2),
\end{aligned}$$

wieder mit ähnlichen Argumenten.
Insgesamt erhalten wir daraus nun

$$H_n(a,b,\varepsilon) \leq \frac{3584b}{a^2\varepsilon^2}\,E(L(e_1,e_2)^2).$$

Sei für $i \in \mathbb{N}$ $\alpha_i := (\frac{2}{3})^{i-1}$. Wegen $\alpha_i \underset{i}{\longrightarrow} 0$ gibt es ein kleinstes $i_0 \in \mathbb{N}$ mit $\alpha_{i_0} < \alpha$, beachte, dass $i_0 \geq 2$. Es folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
P(I_n \geq \varepsilon) &\leq \sum_{i=1}^{i_0-1} H_n([n^{\alpha_{i+1}}/2],[n^{\alpha_i}/2],\varepsilon) \\
&\leq \sum_{i=1}^{i_0-1}\frac{3584\,E(L(e_1,e_2)^2)}{\varepsilon^2}\,\frac{[n^{\alpha_i}/2]}{[n^{\alpha_{i+1}}/2]^2} \\
&= \sum_{i=1}^{i_0-1} O(n^{\alpha_i})\,O(n^{-2\alpha_{i+1}}) \\
&= \sum_{i=1}^{i_0-1} O(n^{\alpha_i-\frac{4}{3}\alpha_i}) \ =\ O(n^{-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{i_0-2}}) \ \underset{n}{\longrightarrow}\ 0.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt $I_n = o_p(1)$ und damit (2.57).

2.58 Folgerung. Es gelten unter (2.55) (b) und (c) für alle $\alpha \in (0,1)$:

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \left|\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} e_i K(e_i,e_j) - E(e_1K(e_1,e_2))\right| = o_p(1) \tag{2.59}$$

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \left|\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} e_j K(e_i,e_j) - E(e_2K(e_1,e_2))\right| = o_p(1) \tag{2.60}$$

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left|e_i K(e_i,e_j)\right| = O_p(1) \tag{2.61}$$

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left|e_j K(e_i,e_j)\right| = O_p(1). \tag{2.62}$$

Beweis: Dies folgt sofort aus (2.57), indem man dort entsprechend einfach nur $L(x,y) = xK(x,y)$ und $L(x,y) = yK(x,y)$ für (2.59) und (2.60) beziehungsweise $L(x,y) = |xK(x,y)|$ und $L(x,y) = |yK(x,y)|$ für (2.61) und (2.62) einsetzt. Beachte, dass aufgrund von (2.55) (b) und (c) die Voraussetzungen von Proposition 2.56 erfüllt sind.

2.63 Proposition. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion mit $E(|L(e_1,e_2)|) < \infty$. Dann gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{[n^\alpha]} |L(e_i,e_j)| = O_p(n^{1+\alpha}). \tag{2.64}$$

Beweis: Einfach nach der Markovungleichung ist für alle $C > 0$

$$\begin{aligned} &P\Bigg(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{[n^\alpha]} |L(e_i,e_j)| \ge Cn^{1+\alpha}\Bigg) \\ \le\ & \frac{1}{Cn^{1+\alpha}}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{[n^\alpha]} E\Big(|L(e_i,e_j)|\Big) \\ \le\ & \frac{1}{C}E\Big(|L(e_1,e_2)|\Big) \ \underset{C}{\longrightarrow}\ 0, \end{aligned}$$

woraus die Behauptung folgt.

2.65 Definition. Sei mit der am Anfang des Abschnitts gewählten Funktion K

$$\begin{aligned}
&r_n : [0,1] \to \mathbb{R},\\
&r_n(s) := \frac{[ns](n-[ns])}{n^2} \iint K(x,y)\, F_n^{seq}(s,dy)\, G_n^{seq}(s,dx)\\
&\quad = \frac{1}{n^2} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} K(e_i,e_j),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&r_n^z : [0,1] \to \mathbb{R},\\
&r_n^z(s) := \frac{[ns](n-[ns])}{n^2} \iint K(x,y)\, F_n^{seq,z}(s,dy)\, G_n^{seq,z}(s,dx)\\
&\quad = \frac{1}{n^2} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} [ns]p_{n,j}(s)\,(n-[ns])q_{n,i}(s)\, K(e_i,e_j).
\end{aligned}$$

2.66 Proposition. Unter der Voraussetzung (2.55) gilt

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[0,1]} \Bigg| r_n^z(s) - \Bigg(r_n(s) - \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{n} \Bigg(1_{\{l\le[ns]\}}(n-[ns]) \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}&\\
+ 1_{\{l>[ns]\}}[ns] \frac{E(K(e_1,e_2)e_1)}{\sigma^2} \Bigg) e_l \Bigg) \Bigg|&\\
= o_p(1/\sqrt{n}\,).&
\end{aligned} \tag{2.67}$$

Beweis: Sei zur Abkürzung für $n \in \mathbb{N}$ und $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
H(n,s) := r_n^z(s) - \Bigg(r_n(s) - \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{n} \Bigg(1_{\{l\le[ns]\}}(n-[ns]) \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}&\\
+ 1_{\{l>[ns]\}}[ns] \frac{E(K(e_1,e_2)e_1)}{\sigma^2} \Bigg) e_l \Bigg).&
\end{aligned}$$

Dann lässt sich die in (2.67) betrachtete Zufallsvariable abschätzen als

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[0,1]} |H(n,s)| \;&\le\; \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]} |H(n,s)| + \sup_{s\in[1-n^{\alpha-1},1]} |H(n,s)|\\
&\quad + 1_{\mathcal{C}A_{n,\alpha}\cup\mathcal{C}B_{n,\alpha}} \cdot \infty + 1_{A_{n,\alpha}\cap B_{n,\alpha}} \sup_{s\in[n^{\alpha-1},1-n^{\alpha-1}]} |H(n,s)|\\
&=: \; I_n + I\!I_n + I\!I\!I_n + I\!V_n.
\end{aligned}$$

Es ist für alle $\alpha \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$

$$P(I\!I\!I_n \ge \varepsilon/\sqrt{n}\,) \le P(\mathcal{C}A_{n,\alpha}) + P(\mathcal{C}B_{n,\alpha}) \xrightarrow[n]{} 0$$

nach (2.23) und (2.36), also gilt $\mathit{III}_n = o_p(1/\sqrt{n}\,)$.
Wir haben für alle $\alpha \in (0,1)$ unter $A_{n,\alpha} \cap B_{n,\alpha}$ für $s \in [n^{\alpha-1}, 1-n^{\alpha-1}]$

$$\begin{aligned}
H(n,s) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}\frac{1}{1+u_{n[ns]}e_i}\frac{1}{1+t_{n[ns]}e_j}K(e_i,e_j) \\
&\quad - \frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}K(e_i,e_j) \\
&\quad + \frac{n-[ns]}{n^2}\sum_{j=1}^{[ns]}\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}e_j \\
&\quad + \frac{[ns]}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\frac{E(K(e_1,e_2)e_1)}{\sigma^2}e_i \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}\Bigg(\bigg(1-u_{n[ns]}e_i+\frac{{u_{n[ns]}}^2e_i^2}{1+u_{n[ns]}e_i}\bigg)\cdot \\
&\qquad\qquad \bigg(1-t_{n[ns]}e_j+\frac{{t_{n[ns]}}^2e_j^2}{1+t_{n[ns]}e_j}\bigg)-1\Bigg)K(e_i,e_j) \\
&\quad + \frac{n-[ns]}{n^2}\sum_{j=1}^{[ns]}\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}\,e_j \\
&\quad + \frac{[ns]}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\frac{E(K(e_1,e_2)e_1)}{\sigma^2}\,e_i \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}\Big(E(K(e_1,e_2)e_1)-K(e_i,e_j)e_i\Big)u_{n[ns]} \\
&\quad + \frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}\Big(E(K(e_1,e_2)e_2)-K(e_i,e_j)e_j\Big)t_{n[ns]} \\
&\quad + \frac{n-[ns]}{n^2}\,E(K(e_1,e_2)e_2)\bigg(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{[ns]}e_j-[ns]t_{n[ns]}\bigg) \\
&\quad + \frac{[ns]}{n^2}\,E(K(e_1,e_2)e_1)\bigg(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}e_i-(n-[ns])u_{n[ns]}\bigg) \\
&\quad + \frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}t_{n[ns]}e_j\,u_{n[ns]}e_i\,K(e_i,e_j) \\
&\quad + \frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}\frac{{t_{n[ns]}}^2e_j^2}{1+t_{n[ns]}e_j}\,K(e_i,e_j)
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}\frac{u_{n[ns]}{}^2 e_i^2}{1+u_{n[ns]}e_i}\,K(e_i,e_j)$$
$$-\frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}u_{n[ns]}e_i\,\frac{t_{n[ns]}{}^2 e_j^2}{1+t_{n[ns]}e_j}\,K(e_i,e_j)$$
$$-\frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}t_{n[ns]}e_j\,\frac{u_{n[ns]}{}^2 e_i^2}{1+u_{n[ns]}e_i}\,K(e_i,e_j)$$
$$+\frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}\frac{t_{n[ns]}{}^2 e_j^2}{1+t_{n[ns]}e_j}\,\frac{u_{n[ns]}{}^2 e_i^2}{1+u_{n[ns]}e_i}K(e_i,e_j).$$

Es folgt für alle $\alpha\in(0,1)$ unter $A_{n,\alpha}\cap B_{n,\alpha}$, wenn wir

$$[n(1-n^{\alpha-1})]=n-\lceil n^\alpha\rceil\le n-[n^\alpha]$$

beachten und daran denken dass wir auf dem Ereignis $\widehat{B}_{n,\alpha}$ auch u_{nk} für das eventuell zusätzliche $k=n-[n^\alpha]$ erklärt haben,

$$\begin{aligned}
I\!V_n \;\le\; & \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big(K(e_i,e_j)e_i-E(K(e_1,e_2)e_1)\Big)\Big| \\
& \cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\Big|(n-k)u_{nk}\Big|\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{k}{n^2} \\
& +\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big(K(e_i,e_j)e_j-E(K(e_1,e_2)e_2)\Big)\Big| \\
& \cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\Big|k\,t_{nk}\Big|\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{n-k}{n^2} \\
& +\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{n-k}{n^2}\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\Big|\frac{1}{\sigma^2}\sum_{j=1}^{k}e_j-k\,t_{nk}\Big|\cdot\Big|E(K(e_1,e_2)e_2)\Big| \\
& +\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{k}{n^2}\cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\Big|\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=k+1}^{n}e_i-(n-k)u_{nk}\Big| \\
& \qquad\qquad\cdot\Big|E(K(e_1,e_2)e_1)\Big| \\
& +\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{n-k}{n^2}\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\Big|k\,t_{nk}\Big| \\
& \cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\big|u_{nk}\big|\max_{k+1\le i\le n}|e_i| \\
& \cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|K(e_i,e_j)e_j\Big| \\
& +\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{n-k}{n^2}\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n}|t_{nk}|\max_{1\le i\le k}|e_i|\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\Big|k\,t_{nk}\Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \max_{[n^\alpha]\le k\le n}\max_{1\le i\le k}\frac{1}{1+t_{nk}e_i}\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left|K(e_i,e_j)e_j\right|\\
&+\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{k}{n^2}\cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\left|(n-k)u_{nk}\right|\cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\max_{k+1\le i\le n}\frac{1}{1+u_{nk}e_i}\\
&\cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\left|u_{nk}\right|\max_{k+1\le i\le n}\left|e_i\right|\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left|K(e_i,e_j)e_i\right|\\
&+\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\left|u_{nk}\right|\max_{k+1\le i\le n}\left|e_i\right|\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\left|t_{nk}\right|\max_{1\le i\le k}\left|e_i\right|\\
&\cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\left|k\,t_{nk}\right|\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\max_{1\le i\le k}\frac{1}{1+t_{nk}e_i}\\
&\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left|K(e_i,e_j)e_i\right|\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{n-k}{n^2}\\
&+\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\left|t_{nk}\right|\max_{1\le i\le k}\left|e_i\right|\cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\left|u_{nk}\right|\max_{k+1\le i\le n}\left|e_i\right|\\
&\cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\left|(n-k)u_{nk}\right|\cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\max_{k+1\le i\le n}\frac{1}{1+u_{nk}e_i}\\
&\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left|K(e_i,e_j)e_j\right|\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{k}{n^2}\\
&+\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{k}{n^2}\cdot\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\left|t_{nk}\right|\max_{1\le i\le k}\left|e_i\right|\Big)^2\\
&\cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\left|(n-k)u_{nk}\right|\cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\left|u_{nk}\right|\max_{k+1\le i\le n}\left|e_i\right|\\
&\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\max_{1\le i\le k}\frac{1}{1+t_{nk}e_i}\cdot\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\max_{k+1\le i\le n}\frac{1}{1+u_{nk}e_i}\\
&\cdot\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\left|K(e_i,e_j)e_i\right|\\
=\;& o_p(1/\sqrt{n}\,)
\end{aligned}
$$

nach (2.29), (2.30), (2.31), (2.33), (2.37), (2.38), (2.39), (2.40), (2.59), (2.60), (2.61) und (2.62). Es folgt $I\!V_n = o_p(1/\sqrt{n}\,)$ auf dem gesamten Grundraum, für alle $\alpha \in (0,1)$.

Weiter ist

$$
\begin{aligned}
I_n \;\le\;& \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\left|r_n^z(s)\right| + \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\left|r_n(s)\right|\\
&+\frac{|E(K(e_1,e_2)e_2)|}{\sigma^2}\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\frac{n-[ns]}{n^2}\Big|\sum_{j=1}^{[ns]}e_j\Big|\\
&+\frac{|E(K(e_1,e_2)e_1)|}{\sigma^2}\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\frac{[ns]}{n^2}\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}e_i\Big|
\end{aligned}
$$

$$=: \quad V_n + \mathit{VI}_n + \mathit{VII}_n + \mathit{VIII}_n.$$

Wir haben

$$V_n \leq 1_{\complement B_{n,\alpha}} \cdot \infty + 1_{B_{n,\alpha}} \cdot \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]} |r_n^z(s)|.$$

Nun gilt $1_{\complement B_{n,\alpha}} \cdot \infty \leq \mathit{III}_n = o_p(1/\sqrt{n}\,)$, und unter $B_{n,\alpha}$ ist

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]} |r_n^z(s)| &= \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]} \frac{1}{n^2}\Big| \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} [ns] p_{n,j}(s) \frac{1}{1+u_{n[ns]}e_i} K(e_i,e_j)\Big| \\
&\leq \frac{n^\alpha}{n^2}\Big(\max_{0\leq k\leq [n^\alpha]} \max_{k+1\leq i\leq n} \frac{1}{1+u_{nk}e_i}\Big) \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{[n^\alpha]} |K(e_i,e_j)| \\
&= O(n^{\alpha-2})\, O_p(1)\, O_p(n^{1+\alpha}) \quad = \quad O_p(n^{2\alpha-1})
\end{aligned}$$

nach (2.39) und wegen (2.64). Es folgt $V_n = o_p(1/\sqrt{n}\,)$, falls $\alpha < 1/4$.
Weiter ist

$$\mathit{VI}_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{[n^\alpha]} |K(e_i,e_j)| = O_p(n^{\alpha-1}) = o_p(1/\sqrt{n}\,)$$

falls $\alpha < 1/2$, nach (2.64).
Dann ist

$$\begin{aligned}
\mathit{VII}_n &\leq \frac{|E(K(e_1,e_2)e_2)|}{\sigma^2} \frac{1}{n} \max_{1\leq k\leq [n^\alpha]} \Big| \sum_{j=1}^{k} e_j \Big| \\
&= O(1/n)\; O_p(n^{\alpha/2}) \quad = \quad O_p(n^{\alpha/2-1}) \quad = \quad o_p(1/\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

nach (2.8) mit der Ersetzung $n \mapsto [n^\alpha]$.
Und schließlich

$$\begin{aligned}
\mathit{VIII}_n &\leq \frac{|E(K(e_1,e_2)e_1)|}{\sigma^2} \frac{[n^\alpha]}{n^2} \max_{1\leq k\leq n} \Big| \sum_{i=k}^{n} e_i \Big| \\
&\sim \frac{|E(K(e_1,e_2)e_1)|}{\sigma^2} \frac{[n^\alpha]}{n^2} \max_{1\leq k\leq n} \Big| \sum_{i=1}^{k} e_i \Big| \\
&= O(n^{\alpha-2})\; O_p(\sqrt{n}\,) \quad = \quad o_p(1/\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

nach (2.8).
Es folgt $I_n = o_p(1/\sqrt{n}\,)$ für $\alpha = 1/5$. Der Term II_n geht analog. Damit sind alle Summanden von der behaupteten Ordnung.

Kapitel 3

Stochastische Entwicklungen der Teststatistiken bei ARMA-Residuen

3.1 ARMA-Residuen

Seien $p, q \in \mathbb{N}$, $e_{1-q}, \ldots, e_0, e_1, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $E(e_1) = 0$, sogenannte Fehlervariablen, und seien $X_{1-p}, \ldots, X_0$ weitere Zufallsvariablen.
Weiter seien $\rho_1, \ldots, \rho_p$ und $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_q$ reelle Zahlen, so daß gilt:

(3.1) Die beiden Gleichungen

$$z^p - \rho_1 z^{p-1} - \ldots - \rho_{p-1} z - \rho_p = 0$$

und

$$z^q + \vartheta_1 z^{q-1} + \ldots + \vartheta_{q-1} z + \vartheta_q = 0$$

besitzen nur Lösungen $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$.

Dann seien für $i \in \mathbb{N}$

$$X_i := \sum_{r=1}^{p} \rho_r X_{i-r} + \sum_{s=1}^{q} \vartheta_s e_{i-s} + e_i \tag{3.2}$$

die beobachteten Werte der ARMA(p, q)-Zeitreihe.
Seien $\hat{\rho}_{n1}, \ldots, \hat{\rho}_{np}$ und $\hat{\vartheta}_{n1}, \ldots, \hat{\vartheta}_{nq}$ (von $X_{1-p}, \ldots, X_n$ abhängige) Parameterschätzer mit

$$|\hat{\rho}_{nr} - \rho_r| = O_p(1/\sqrt{n}) \quad \text{für } r = 1, \ldots, p \tag{3.3}$$

und

$$|\hat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s| = O_p(1/\sqrt{n}) \quad \text{für } s = 1, \ldots, q. \tag{3.4}$$

Die Existenz solcher Parameterschätzer ist nicht selbstverständlich. Siehe hierzu Kreiß und Neuhaus (2006), Kapitel 11. Es ist sogar so, dass die Parameter und Fehlervariablen einer ARMA(p,q)-Zeitreihe nicht einmal bei unendlich vielen beobachteten Werten $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ durch diese eindeutig bestimmt sein müssen, so dass ein Versuch sie zu schätzen in bestimmten Fällen von vornherein zum Scheitern verurteilt sein kann. In dem genannten Buch wird in Beispiel 11.21 vorgerechnet, dass im Falle einer stationären ARMA(1,1)-Zeitreihe unter etwas stärkeren Bedingungen an die Parameter als oben gefordert, sogenannte Quasi-Maximum-Likelihoodschätzer die Bedingungen (3.3) und (3.4) der $\sqrt{n}$-Konsistenz erfüllen. Die zusätzliche Forderung besteht darin, dass die beiden oben angegebenen Gleichungen keine gemeinsamen Nullstellen besitzen. Für sich allein genommen, führen die beiden oben genannten Bedingungen für die Parameter dazu, dass eine stationäre ARMA(p,q)-Zeitreihe kausal beziehungsweise invertibel ist, und mit dieser zusätzlichen Forderung wird die Identifizierbarkeit der Zeitreihe sichergestellt (vgl. Satz 8.10 in dem oben angegebenen Buch). Die erwähnte Stationarität bedeutet in unserer Situation einfach eine spezielle Wahl von $X_{1-p},\dots,X_0$. Wir sehen also, dass es sich bei den von uns geforderten Voraussetzungen um im Rahmen von ARMA-Zeitreihen übliche Modellforderungen handelt. Sie sind für uns nötig, da wir auf geeignete Schätzer für die unbekannten Parameter in unseren Rechnungen nicht verzichten können.
Sei für $i \in \mathbb{N}$

$$\hat{e}_{ni} := X_i - \sum_{r=1}^{p} \hat{\rho}_{nr} X_{i-r} - \sum_{s=1}^{q} \hat{\vartheta}_{ns} \hat{e}_{ni-s}, \tag{3.5}$$

wobei die Residuenstartwerte $\hat{e}_{n1-q},\dots,\hat{e}_{n0}$ Zufallsvariablen mit

$$\hat{e}_{ns} = O_p(1) \quad \text{für } s = 1-q,\dots,0$$

sind.
Wir setzen $\vartheta_0 := 1$ und

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 & \dots & \dots & \rho_p \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{\Theta} := \begin{pmatrix} -\vartheta_1 & -\vartheta_2 & \dots & \dots & -\vartheta_q \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{\rho} := \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\vartheta} := \begin{pmatrix} \vartheta_0 \\ \vdots \\ \vartheta_q \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_q := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^q, \quad \mathbf{u}_p := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^p.$$

Für $i \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\mathbf{e}_i := \begin{pmatrix} e_i \\ \vdots \\ e_{i-q+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_i := \begin{pmatrix} X_i \\ \vdots \\ X_{i-p+1} \end{pmatrix}$$

und für $i \in \mathbb{N}$

$$\mathbf{e}'_i := \begin{pmatrix} e_i \\ \vdots \\ e_{i-q} \end{pmatrix}.$$

Entsprechend seien mit den geschätzten Größen

$$\widehat{\mathbf{\Theta}}_n := \begin{pmatrix} -\widehat{\vartheta}_{n1} & -\widehat{\vartheta}_{n2} & \dots & \dots & -\widehat{\vartheta}_{nq} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n := \begin{pmatrix} \widehat{\rho}_{n1} \\ \vdots \\ \widehat{\rho}_{np} \end{pmatrix}$$

und für $i \in \mathbb{N}_0$ sei

$$\widehat{\mathbf{e}}_{ni} := \begin{pmatrix} \hat{e}_{ni} \\ \vdots \\ \hat{e}_{ni-q+1} \end{pmatrix}.$$

In dieser Notation schreibt sich (3.2) als

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{P}\mathbf{X}_{i-1} + \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_i \rangle \mathbf{u}_p,$$

und mit Induktion folgt daraus für alle $i \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{X}_i = \mathbf{P}^i \mathbf{X}_0 + \sum_{j=0}^{i-1} \mathbf{P}^j \mathbf{u}_p \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{i-j} \rangle. \tag{3.6}$$

Weiterhin ist für alle $k \in \mathbb{N}$ nach (3.2) und (3.5)

$$\begin{aligned} \hat{e}_{nk} - e_k &= \sum_{r=1}^{p} (\rho_r - \widehat{\rho}_{nr}) X_{k-r} + \sum_{s=1}^{q} \vartheta_s e_{k-s} - \sum_{s=1}^{q} \widehat{\vartheta}_{ns} \hat{e}_{nk-s} \\ &= \sum_{r=1}^{p} (\rho_r - \widehat{\rho}_{nr}) X_{k-r} + \sum_{s=1}^{q} (\vartheta_s - \widehat{\vartheta}_{ns}) e_{k-s} + \sum_{s=1}^{q} (-\widehat{\vartheta}_{ns})(\hat{e}_{nk-s} - e_{k-s}). \end{aligned}$$

Mit obigen Bezeichnungen folgt daraus für $k \in \mathbb{N}$

$$\widehat{\mathbf{e}}_{nk} - \mathbf{e}_k = \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{X}_{k-1} \rangle \mathbf{u}_q + (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_{k-1} + \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n(\widehat{\mathbf{e}}_{nk-1} - \mathbf{e}_{k-1}),$$

und mit Induktion erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\widehat{\mathbf{e}}_{nk} - \mathbf{e}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i \mathbf{u}_q \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{X}_{k-1-i} \rangle + \sum_{i=0}^{k-1} \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_{k-1-i} + \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^k (\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0).$$

Durch Einsetzen von (3.6) und Skalarmultiplikation mit $\mathbf{u}_q$ erhalten wir für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
\hat{e}_{nk} - e_k &= \sum_{i=0}^{k-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \sum_{j=0}^{k-1-i-1} \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^j \mathbf{u}_p \rangle \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{k-1-i-j} \rangle \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{k-1-i} \mathbf{X}_0 \rangle \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta}) \mathbf{e}_{k-1-i}, \mathbf{u}_q \rangle \\
&\quad + \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^k (\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q \rangle \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \sum_{j=i}^{k-2} \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{j-i} \mathbf{u}_p \rangle \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{k-1-j} \rangle \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{k-1-i} \mathbf{X}_0 \rangle \\
&\quad + \sum_{i=0}^{k-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \langle (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta}) \mathbf{e}_{k-1-i}, \mathbf{u}_q \rangle \\
&\quad + \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^k (\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q \rangle.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Wegen

$$\det(\boldsymbol{\Theta} - \lambda \mathbf{I}_q) = (-1)^q \Big(\lambda^q + \vartheta_1 \lambda^{q-1} + \ldots + \vartheta_{q-1} \lambda + \vartheta_q \Big)$$

sowie

$$\det(\mathbf{P} - \lambda \mathbf{I}_p) = (-1)^p \Big(\lambda^p - \rho_1 \lambda^{p-1} - \ldots - \rho_{p-1} \lambda - \rho_p \Big),$$

und wegen der Voraussetzung (3.1) an $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_q$ und $\rho_1, \ldots, \rho_p$, dass ebendiese Polynome nur Nullstellen vom Betrag echt kleiner als Eins besitzen, sind die Spektralradien von $\mathbf{P}$ und $\boldsymbol{\Theta}$ echt kleiner als Eins.

Daher gibt es eine Matrixnorm $\|\cdot\|_{\mathbf{P}}$ für $p \times p$-Matrizen mit $\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{P}} < 1$ und eine Matrixnorm $\|\cdot\|_{\boldsymbol{\Theta}}$ für $q \times q$-Matrizen mit $\|\boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}} < 1$ (siehe z. B. Schott (1997), Theorem 4.20).

Nach dem Normenäquivalenzsatz gibt es Konstanten $C_{\mathbf{P}}, C_{\mathbf{\Theta}}, C'_{\mathbf{\Theta}} < \infty$, so daß für alle $p \times p$-Matrizen $\mathbf{A}$ gilt

$$\|\mathbf{A}\|_F \leq C_{\mathbf{P}} \|\mathbf{A}\|_{\mathbf{P}}$$

und für alle $q \times q$-Matrizen $\mathbf{B}$

$$\|\mathbf{B}\|_F \leq C_{\mathbf{\Theta}} \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{\Theta}}, \quad \|\mathbf{B}\|_{\mathbf{\Theta}} \leq C'_{\mathbf{\Theta}} \|\mathbf{B}\|_F,$$

wobei $\|\cdot\|_F$ die entsprechende Frobeniusnorm für die jeweilige Matrixgröße bezeichnet. Weiter ist bei Vektornormen im folgenden immer die euklidische Norm gemeint. Dann ist

$$\|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \leq \sum_{r=1}^{p} |\widehat{\rho}_{nr} - \rho_r| = O_p(1/\sqrt{n}\,) \tag{3.8}$$

nach der elementaren Ungleichung $(\sum_{i=1}^n x_i^2)^{1/2} \leq \sum_{i=1}^n |x_i|$ und (3.3), sowie

$$\begin{aligned} \Big| \|\widehat{\mathbf{\Theta}}_n\|_{\mathbf{\Theta}} - \|\mathbf{\Theta}\|_{\mathbf{\Theta}} \Big| \quad &\leq \quad \|\widehat{\mathbf{\Theta}}_n - \mathbf{\Theta}\|_{\mathbf{\Theta}} \quad \leq \quad C'_{\mathbf{\Theta}} \|\widehat{\mathbf{\Theta}}_n - \mathbf{\Theta}\|_F \\ &= \quad C'_{\mathbf{\Theta}} \Big(\sum_{s=1}^{q} (\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s)^2 \Big)^{1/2} \\ &\leq \quad C'_{\mathbf{\Theta}} \sum_{s=1}^{q} |\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s| \quad = \quad O_p(1/\sqrt{n}\,) \end{aligned} \tag{3.9}$$

nach (3.4).

3.2 Entwicklung der Lagrangemultiplikatoren bei Residuen

Es gelten die Voraussetzungen (2.1)–(2.4) an die Fehlervariablen wie im vorigen Kapitel, allerdings seien nun $(e_{i-q})_{i \in \mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt (also es gibt im Vergleich zum letzten Kapitel nun q „zusätzliche“ Zufallsvariablen $e_{1-q}, \ldots, e_0$).
Für die Zufallsvariablen $X_{1-p}, \ldots, X_0$ gelte

$$E(|X_i|) < \infty$$

für $i = 1 - p, \ldots, 0$.
Weiter seien für $n \in \mathbb{N}$ $\hat{e}_{n1-q}, \ldots, \hat{e}_{n0}$ Zufallsvariablen mit

$$\hat{e}_{ns} = O_p(1)$$

für $s = 1-q, \ldots, 0$.
Sei $\overline{\vartheta} := (\|\boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}} + 1)/2$ und $E_n := \{\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}} \leq \overline{\vartheta}\,\}$ für $n \in \mathbb{N}$.
Schließlich sei $\overline{\rho} := \|\mathbf{P}\|_{\mathbf{P}}$.
Aus Gründen der technischen Bequemlichkeit verwenden wir gelegentlich auch eine Folge $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ von unabhängigen und identisch verteilten Fehlervariablen mit vergrößertem Indexbereich.
Die folgende Proposition zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse der Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n \to \infty$ gegen 1 konvergiert, sodass wir bei den Beweisen für stochastische Konvergenz und Verteilungskonvergenz ohne Einschränkung $E_n = \emptyset$ annehmen können. Dies bedeutet konkret, wir können immer

$$\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}} \leq \overline{\vartheta}.$$

verwenden.

3.10 Proposition. Es gilt

$$P(E_n) \underset{n}{\longrightarrow} 1.$$

Beweis: Wir haben

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}E_n) &= P(\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}} > \overline{\vartheta}\,) \\ &= P\Big(\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}} > \frac{\|\boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}} + 1}{2}\Big) \\ &= P\Big(\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}} - \|\boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}} > \frac{1 - \|\boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}}}{2}\Big) \\ &\leq P\Big(\Big|\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}} - \|\boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}}\Big| > \frac{1 - \|\boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}}}{2}\Big) \underset{n}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

nach (3.9), da $\frac{1-\|\boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}}}{2} > 0$.

3.11 Proposition. Es gilt

$$\max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{k} (\hat{e}_{ni} - e_i)\Big| = O_p(1). \tag{3.12}$$

Beweis: Nach (3.7) ist

$$\begin{aligned} &\max_{1\leq l\leq n} \Big|\sum_{k=1}^{l} (\hat{e}_{nk} - e_k)\Big| \\ &\leq \max_{1\leq l\leq n} \Big|\sum_{k=1}^{l} \sum_{i=0}^{k-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q\rangle \sum_{j=i}^{k-2} \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{j-i}\mathbf{u}_p\rangle \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{k-1-j}\rangle\Big| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \max_{1\le l\le n}\left|\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=0}^{k-1}\langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q\rangle \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{k-1-i}\mathbf{X}_0\rangle\right| \\
&+ \max_{1\le l\le n}\left|\sum_{k=1}^{l}\sum_{i=0}^{k-1}\langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q\rangle \langle (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_{k-1-i}, \mathbf{u}_q\rangle\right| \\
&+ \max_{1\le l\le n}\left|\sum_{k=1}^{l}\langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^k (\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q\rangle\right| \\
=:\ & I_n + I\!I_n + I\!I\!I_n + I\!V_n.
\end{aligned}
$$

Wir haben

$$
\begin{aligned}
I_n &= \max_{1\le l\le n}\left|\sum_{i=0}^{l-1}\langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q\rangle \sum_{j=i}^{l-2}\langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{j-i}\mathbf{u}_p\rangle \sum_{k=j+2}^{l}\langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{k-1-j}\rangle\right| \\
&\le \max_{1\le l\le n}\sum_{i=0}^{l-1}\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i\|_F \sum_{j=i}^{l-2}\|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|\|\mathbf{P}^{j-i}\|_F \left|\sum_{k=1}^{l-j-1}\langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_k\rangle\right| \\
&\le \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \sum_{i=0}^{n-1} C_{\boldsymbol{\Theta}}\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i\|_{\boldsymbol{\Theta}} \sum_{j=i}^{n-2} C_{\mathbf{P}}\|\mathbf{P}^{j-i}\|_{\mathbf{P}} \max_{0\le j'\le n}\max_{1\le l\le n}\left|\sum_{k=1}^{l-j'-1}\langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_k\rangle\right| \\
&\le C_{\boldsymbol{\Theta}}C_{\mathbf{P}}\|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \sum_{i=0}^{n-1}\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}}^i \sum_{j=i}^{n-2}\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{P}}^{j-i} \max_{1\le l\le n-1}\left|\sum_{k=1}^{l}\langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_k\rangle\right| \\
&\le C_{\boldsymbol{\Theta}}C_{\mathbf{P}}\|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \sum_{i=0}^{n-1}\overline{\vartheta}^{\,i} \sum_{j=0}^{n-2}\overline{\rho}^{\,j} \max_{1\le l\le n}\sum_{s=0}^{q}\left|\vartheta_s \sum_{k=1}^{l} e_{k-s}\right| \\
&\le C_{\boldsymbol{\Theta}}C_{\mathbf{P}}\|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \frac{1}{1-\overline{\vartheta}}\frac{1}{1-\overline{\rho}} \sum_{s=0}^{q}|\vartheta_s| \max_{1\le l\le n}\left|\sum_{k=1}^{l} e_{k-s}\right| \\
&= O_p(1/\sqrt{n}\,)\ \sum_{s=0}^{q} O_p(\sqrt{n}\,) \quad = \quad O_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.8) und (2.8), wobei bei letzterem die identische Verteiltheit der $(e_{i-q})_{i\in\mathbb{N}}$ ausgenutzt wurde.
Weiter ist

$$
\begin{aligned}
I\!I_n &= \max_{1\le l\le n}\left|\sum_{i=0}^{l-1}\langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q\rangle \sum_{k=i+1}^{l}\langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{k-1-i}\mathbf{X}_0\rangle\right| \\
&\le \sum_{i=0}^{n-1} C_{\boldsymbol{\Theta}}\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}}^i \sum_{k=i+1}^{n}\|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| C_{\mathbf{P}}\|\mathbf{P}\|_{\mathbf{P}}^{k-1-i}\|\mathbf{X}_0\| \\
&\le C_{\boldsymbol{\Theta}}C_{\mathbf{P}}\frac{1}{1-\overline{\vartheta}}\frac{1}{1-\overline{\rho}}\|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|\|\mathbf{X}_0\| \\
&= O_p(1/\sqrt{n}\,)\,O_p(1) \quad = \quad O_p(1/\sqrt{n}\,)
\end{aligned}
$$

nach (3.8).

Ebenso ist

$$\begin{aligned}
\mathit{III}_n &= \max_{1\le l\le n}\Big|\sum_{i=0}^{l-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^i\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle\sum_{k=i+1}^{l}\langle(\widehat{\mathbf{\Theta}}_n-\mathbf{\Theta})\mathbf{e}_{k-1-i},\mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&\le \max_{1\le l\le n}\sum_{i=0}^{l-1}C_{\mathbf{\Theta}}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_n\|_{\mathbf{\Theta}}^i\max_{0\le i'\le n-1}\max_{1\le l\le n}\Big|\sum_{k=1}^{l-i'}\langle(\widehat{\mathbf{\Theta}}_n-\mathbf{\Theta})\mathbf{e}_{k-1},\mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&\le C_{\mathbf{\Theta}}\sum_{i=0}^{n-1}\overline{\vartheta}^i\max_{1\le l\le n}\Big|\sum_{k=1}^{l}\langle(\widehat{\mathbf{\Theta}}_n-\mathbf{\Theta})\mathbf{e}_{k-1},\mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&\le C_{\mathbf{\Theta}}\frac{1}{1-\overline{\vartheta}}\sum_{s=1}^{q}|\widehat{\vartheta}_{ns}-\vartheta_s|\max_{1\le l\le n}\Big|\sum_{k=1}^{l}e_{k-s}\Big| \\
&= \sum_{s=1}^{q}O_p(1/\sqrt{n}\,)\ O_p(\sqrt{n}\,) \quad = \quad O_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.4) und (2.8).

Schließlich gilt

$$\begin{aligned}
\mathit{IV}_n &\le \sum_{k=1}^{n}C_{\mathbf{\Theta}}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_n\|_{\mathbf{\Theta}}^k\|\widehat{\mathbf{e}}_{n0}-\mathbf{e}_0\| \\
&\le C_{\mathbf{\Theta}}\frac{1}{1-\overline{\vartheta}}\Big(\|\widehat{\mathbf{e}}_{n0}\|+\|\mathbf{e}_0\|\Big) \\
&= O_p(1)
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung an $\hat{e}_{n1-q},\ldots,\hat{e}_{n0}$.

Aus diesen Abschätzungen folgt die Behauptung (3.12).

3.13 Proposition. Es gilt

$$\max_{1\le i\le n}\Big|\hat{e}_{ni}-e_i-\langle\mathbf{\Theta}^i(\widehat{\mathbf{e}}_{n0}-\mathbf{e}_0),\mathbf{u}_q\rangle\Big| = o_p(1). \tag{3.14}$$

Beweis: Auch hier setzen wir (3.7) ein, und erhalten

$$\begin{aligned}
&\max_{1\le k\le n}\Big|\hat{e}_{nk}-e_k-\langle\mathbf{\Theta}^k(\widehat{\mathbf{e}}_{n0}-\mathbf{e}_0),\mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&\quad= \max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=0}^{k-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^i\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle\sum_{j=i}^{k-2}\langle\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n,\mathbf{P}^{j-i}\mathbf{u}_p\rangle\langle\boldsymbol{\vartheta},\mathbf{e}'_{k-1-j}\rangle\Big| \\
&\qquad+\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=0}^{k-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^i\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle\langle\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n,\mathbf{P}^{k-1-i}\mathbf{X}_0\rangle\Big| \\
&\qquad+\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=0}^{k-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^i\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle\langle(\widehat{\mathbf{\Theta}}_n-\mathbf{\Theta})\mathbf{e}_{k-1-i},\mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&\qquad+\max_{1\le k\le n}\Big|\langle(\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^k-\mathbf{\Theta}^k)(\widehat{\mathbf{e}}_{n0}-\mathbf{e}_0),\mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&\quad=: I_n+\mathit{II}_n+\mathit{III}_n+\mathit{IV}_n.
\end{aligned}$$

Den ersten Term schätzen wir ab als

$$\begin{aligned}
I_n &\leq \max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=0}^{k-1} C_{\boldsymbol{\Theta}} \|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}}^i \sum_{j=i}^{k-2} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|\, C_{\mathbf{P}} \|\mathbf{P}\|_{\mathbf{P}}^{j-i} \max_{1\leq l\leq n-1} \left|\langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}_l' \rangle\right| \\
&\leq \frac{C_{\boldsymbol{\Theta}}}{1-\overline{\vartheta}} \frac{C_{\mathbf{P}}}{1-\overline{\rho}} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \sum_{s=0}^{q} |\vartheta_s| \max_{1-q\leq l\leq n-1} |e_l| \\
&= O_p(1/\sqrt{n}\,)\; o_p(\sqrt{n}/\sqrt{\log\log n}\,) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.8) und (2.16).
Weiter ist

$$\begin{aligned}
I\!I_n &\leq \max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=0}^{k-1} C_{\boldsymbol{\Theta}} \|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}}^i \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|\, C_{\mathbf{P}} \|\mathbf{P}\|_{\mathbf{P}}^{k-1-i} \|\mathbf{X}_0\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} C_{\boldsymbol{\Theta}} C_{\mathbf{P}} \overline{\vartheta}^{\,i} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \|\mathbf{X}_0\| \\
&\leq C_{\boldsymbol{\Theta}} C_{\mathbf{P}} \frac{1}{1-\overline{\vartheta}} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \|\mathbf{X}_0\| \quad = \quad O_p(1/\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

nach (3.8).
Dann haben wir

$$\begin{aligned}
I\!I\!I_n &\leq \sum_{i=0}^{n-1} C_{\boldsymbol{\Theta}} \|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}}^i \max_{0\leq k\leq n-1} \left|\langle (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta}) \mathbf{e}_k, \mathbf{u}_q \rangle\right| \\
&\leq \frac{C_{\boldsymbol{\Theta}}}{1-\overline{\vartheta}} \sum_{s=1}^{q} |\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s| \max_{1-q\leq k\leq n-1} |e_k| \\
&= O_p(1/\sqrt{n}\,)\; o_p(\sqrt{n}/\sqrt{\log\log n}\,) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.4) und (2.16).
Für die Abschätzung des letzten Ausdrucks beachten wir, dass für alle $i \in \mathbb{N}_0$ auf dem Ereignis E_n

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i - \boldsymbol{\Theta}^i\|_{\boldsymbol{\Theta}} &= \|\sum_{j=0}^{i-1} (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^{i-j} \boldsymbol{\Theta}^j - \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^{i-j-1} \boldsymbol{\Theta}^{j+1})\|_{\boldsymbol{\Theta}} \\
&\leq \sum_{j=0}^{i-1} \|(\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^{i-j-1} (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta}) \boldsymbol{\Theta}^j)\|_{\boldsymbol{\Theta}} \\
&\leq \sum_{j=0}^{i-1} \|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n\|_{\boldsymbol{\Theta}}^{i-j-1} \|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}} \|\boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}}^j \\
&\leq \sum_{j=0}^{i-1} \overline{\vartheta}^{\,i-1} \|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}} \\
&= i\overline{\vartheta}^{\,i-1} \|\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta}\|_{\boldsymbol{\Theta}}
\end{aligned}$$

ist. Wegen $\overline{\vartheta} \in (0,1)$ gilt $i\overline{\vartheta}^{\,i-1} \underset{i}{\longrightarrow} 0$, also gibt es ein $K < \infty$ mit $i\overline{\vartheta}^{\,i-1} < K$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^i - \mathbf{\Theta}^i\|_{\mathbf{\Theta}} &\leq K\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_n - \mathbf{\Theta}\|_{\mathbf{\Theta}} \\
&\leq KC'_{\mathbf{\Theta}}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_n - \mathbf{\Theta}\|_F \\
&= KC'_{\mathbf{\Theta}}\Big(\sum_{s=1}^{q}(\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s)^2\Big)^{1/2} \\
&\leq KC'_{\mathbf{\Theta}}\sum_{s=1}^{q}|\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s| \quad = \quad O_p(1/\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

nach (3.4). Deshalb ist

$$\begin{aligned}
I\!V_n &\leq \max_{1\leq k\leq n}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^k - \mathbf{\Theta}^k\|_F\|\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0\| \\
&\leq C_{\mathbf{\Theta}}\max_{1\leq k\leq n}\|\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^k - \mathbf{\Theta}^k\|_{\mathbf{\Theta}}\Big(\|\widehat{\mathbf{e}}_{n0}\| + \|\mathbf{e}_0\|\Big) \quad = \quad O_p(1/\sqrt{n}\,).
\end{aligned}$$

Damit ist der Beweis von (3.14) komplett.

3.15 Folgerung. Es gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\max_{[n^\alpha]\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni} - e_i| = o_p(1) \tag{3.16}$$

und

$$\max_{1\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni} - e_i| = O_p(1). \tag{3.17}$$

Beweis: Sei $\alpha \in (0,1)$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni} - e_i| \\
&\leq \max_{[n^\alpha]\leq i\leq n}\Big|\hat{e}_{ni} - e_i - \langle\mathbf{\Theta}^i(\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q\rangle\Big| + \max_{[n^\alpha]\leq i\leq n}\Big|\langle\mathbf{\Theta}^i(\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\Big|\hat{e}_{ni} - e_i - \langle\mathbf{\Theta}^i(\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q\rangle\Big| + C_{\mathbf{\Theta}}\|\mathbf{\Theta}\|_{\mathbf{\Theta}}^{[n^\alpha]}\|\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0\| \\
&= o_p(1) + o(1)O_p(1) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.14) und weil $\|\mathbf{\Theta}\|_{\mathbf{\Theta}} < 1$. Also gilt (3.16).
Weiter

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni} - e_i| \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\Big|\hat{e}_{ni} - e_i - \langle\mathbf{\Theta}^i(\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q\rangle\Big| + \max_{1\leq i\leq n}\Big|\langle\mathbf{\Theta}^i(\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\Big|\hat{e}_{ni} - e_i - \langle\mathbf{\Theta}^i(\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q\rangle\Big| + C_{\mathbf{\Theta}}\|\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0\| \\
&= o_p(1) + O_p(1) \quad = \quad O_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.14). Also gilt auch (3.17).

3.18 Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \dots, n$ sei $\hat{t}_{nk}$ auf dem Ereignis

$$\Big\{ \min_{1 \le i \le k} \hat{e}_{ni} < 0 < \max_{1 \le i \le k} \hat{e}_{ni} \Big\}$$

definiert als Nullstelle von

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \frac{\hat{e}_{ni}}{1 + x\hat{e}_{ni}}$$

in dem Intervall

$$\bigg(\Big(\frac{1}{k} - 1\Big) \frac{1}{\max_{1 \le i \le k} \hat{e}_{ni}}, \Big(\frac{1}{k} - 1\Big) \frac{1}{\min_{1 \le i \le k} \hat{e}_{ni}} \bigg).$$

Für $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\widehat{A}_{n,\alpha} := \bigcap_{[n^\alpha] \le k \le n} \Big\{ \min_{1 \le i \le k} \hat{e}_{ni} < 0 < \max_{1 \le i \le k} \hat{e}_{ni} \Big\}.$$

Vergleiche hierzu auch Definition 2.18. Die Wohldefiniertheit von $\hat{t}_{nk}$ folgt wie bei t_{nk}.

3.19 Proposition. Für $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\widehat{A}_{n,\alpha} = \Big\{ \min_{1 \le i \le [n^\alpha]} \hat{e}_{ni} < 0 < \max_{1 \le i \le [n^\alpha]} \hat{e}_{ni} \Big\},$$

und es gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$P(\widehat{A}_{n,\alpha}) \xrightarrow[n]{} 1. \tag{3.20}$$

Beweis: Die Gleichheit der Ereignisse ist klar. Kommen wir daher sofort zu der Konvergenzaussage.
Sei $\varepsilon > 0$ mit $P(e_1 \ge -\varepsilon) < 1$ und $P(e_1 \le \varepsilon) < 1$. Ein solches ε existiert, da $E(e_1) = 0$ und $E(e_1^2) > 0$ ist (wäre die erste Bedingung für kein $\varepsilon > 0$ erfüllbar, so wäre wegen $\{e_1 \ge -\varepsilon\} \downarrow_{\varepsilon \downarrow 0} \{e_1 \ge 0\}$ und der σ-Stetigkeit von P von oben $P(e_1 \ge 0) = 1$, und zusammen mit $E(e_1) = 0$ folgte $e_1 = 0$ fast sicher, im Widerspruch zu $E(e_1^2) > 0$. Die Erfüllbarkeit der zweiten Bedingung lässt sich auf die gleiche Art zeigen). Dann gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned} P(\complement \widehat{A}_{n,\alpha}) &= P\bigg(\bigcap_{i=1}^{[n^\alpha]} \{\hat{e}_{ni} \ge 0\} \cup \bigcap_{i=1}^{[n^\alpha]} \{\hat{e}_{ni} \le 0\} \bigg) \\ &= P\bigg(\bigcap_{i=1}^{[n^\alpha]} \{e_i \ge e_i - \hat{e}_{ni}\} \cup \bigcap_{i=1}^{[n^\alpha]} \{e_i \le e_i - \hat{e}_{ni}\} \bigg) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le P\Big(\bigcap_{i=[n^{\alpha/2}]}^{[n^\alpha]} \{e_i \ge e_i - \hat{e}_{ni}\} \cup \bigcap_{i=[n^{\alpha/2}]}^{[n^\alpha]} \{e_i \le e_i - \hat{e}_{ni}\}\Big) \\
&= P\Big(\Big(\bigcap_{i=[n^{\alpha/2}]}^{[n^\alpha]} \{e_i \ge e_i - \hat{e}_{ni}\} \cup \bigcap_{i=[n^{\alpha/2}]}^{[n^\alpha]} \{e_i \le e_i - \hat{e}_{ni}\}\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cap \bigcap_{i=[n^{\alpha/2}]}^{[n^\alpha]} \{|e_i - \hat{e}_{ni}| < \varepsilon\}\Big) \\
&\quad + P\Big(\Big(\bigcap_{i=[n^{\alpha/2}]}^{[n^\alpha]} \{e_i \ge e_i - \hat{e}_{ni}\} \cup \bigcap_{i=[n^{\alpha/2}]}^{[n^\alpha]} \{e_i \le e_i - \hat{e}_{ni}\}\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cap \bigcup_{i=[n^{\alpha/2}]}^{[n^\alpha]} \{|e_i - \hat{e}_{ni}| \ge \varepsilon\}\Big) \\
&\le P\Big(\bigcap_{i=[n^{\alpha/2}]}^{[n^\alpha]} \{e_i \ge -\varepsilon\} \cup \bigcap_{i=[n^{\alpha/2}]}^{[n^\alpha]} \{e_i \le \varepsilon\}\Big) \\
&\quad + P\Big(\max_{[n^{\alpha/2}] \le i \le [n^\alpha]} |e_i - \hat{e}_{ni}| \ge \varepsilon\Big) \\
&\le P(e_1 \ge -\varepsilon)^{[n^\alpha]-[n^{\alpha/2}]} + P(e_1 \le \varepsilon)^{[n^\alpha]-[n^{\alpha/2}]} \\
&\quad + P\Big(\max_{[n^{\alpha/2}] \le i \le n} |e_i - \hat{e}_{ni}| \ge \varepsilon\Big) \;\underset{n}{\longrightarrow}\; 0
\end{aligned}
$$

nach Wahl von ε und wegen (3.16).

3.21 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge 3^{1/\alpha}$ gilt auf $\widehat{A}_{n,\alpha}$

$$
(3.22) \quad \max_{[n^\alpha] \le k \le n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}} |\hat{t}_{nk}| \Big(1 - \widehat{V}_{n,\alpha} \max_{[n^\alpha] \le k \le n} \sqrt{\frac{\log\log k}{k}} \max_{1 \le i \le k} |\hat{e}_{ni}|\Big) \le \widehat{V}_{n,\alpha}
$$

mit

$$
\widehat{V}_{n,\alpha} := \max_{[n^\alpha] \le k \le n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}} \frac{|\sum_{i=1}^k \hat{e}_{ni}|}{\sum_{i=1}^k \hat{e}_{ni}^2},
$$

sowie

$$
(3.23) \quad \max_{[n^\alpha] \le k \le n} k|\hat{t}_{nk}| \le \Big(1 + \max_{[n^\alpha] \le k \le n} |\hat{t}_{nk}| \max_{1 \le i \le k} |\hat{e}_{ni}|\Big) \max_{[n^\alpha] \le k \le n} k \frac{|\sum_{i=1}^k \hat{e}_{ni}|}{\sum_{i=1}^k \hat{e}_{ni}^2}.
$$

Beweis: Geht genauso wie der Beweis von Proposition 2.24, man muß nur die entsprechenden Größen durch Größen mit „$\hat{\ }$" ersetzen. Dies geht, da die konkrete Verteilung der Zufallsvariablen gar keine Rolle spielt, und Definition 3.18 völlig analog zu Definition 2.18 ist.

3.24 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ ist

(3.25)
$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |\hat{e}_{ni} - e_i| = o_p(1)$$

(3.26)
$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |\hat{e}_{ni}^2 - e_i^2| = o_p(1)$$

(3.27)
$$\max_{3\le k\le n} \left|\frac{1}{\sqrt{k\log\log k}}\sum_{i=1}^{k}(\hat{e}_{ni} - e_i)\right| = O_p(1)$$

(3.28)
$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sqrt{\frac{\log\log k}{k}} \max_{1\le i\le k} |\hat{e}_{ni} - e_i| = o_p(1).$$

Beweis: Zu (3.25): Es gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |\hat{e}_{ni} - e_i| \\
\le\;& \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |\hat{e}_{ni} - e_i| + \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=[n^{\alpha/2}]+1}^{k} |\hat{e}_{ni} - e_i| \\
\le\;& \frac{[n^{\alpha/2}]}{[n^\alpha]} \max_{1\le i\le n} |\hat{e}_{ni} - e_i| + \max_{[n^{\alpha/2}]\le i\le n} |\hat{e}_{ni} - e_i| \\
=\;& O(n^{-\alpha/2})\, O_p(1) + o_p(1) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.17) und (3.16).
Zu (3.26): Wir rechnen für $\alpha \in (0,1)$ ähnlich wie eben

$$\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |\hat{e}_{ni}^2 - e_i^2| \\
=\;& \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |\hat{e}_{ni} - e_i||\hat{e}_{ni} + e_i| \\
\le\;& \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |\hat{e}_{ni} - e_i|\Big(|\hat{e}_{ni} - e_i| + 2|e_i|\Big) \\
\le\;& \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |\hat{e}_{ni} - e_i|\Big(|\hat{e}_{ni} - e_i| + 2|e_i|\Big) \\
&\quad + \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=[n^{\alpha/2}]+1}^{k} |\hat{e}_{ni} - e_i|\Big(|\hat{e}_{ni} - e_i| + 2|e_i|\Big) \\
=:\;& I_n + I\!I_n,
\end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
I_n &= \frac{1}{[n^\alpha]} \sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |\hat{e}_{ni} - e_i| \Big(|\hat{e}_{ni} - e_i| + 2|e_i| \Big) \\
&\leq \frac{[n^{\alpha/2}]}{[n^\alpha]} \max_{1 \leq i \leq [n^{\alpha/2}]} |\hat{e}_{ni} - e_i| \Big(\max_{1 \leq i \leq [n^{\alpha/2}]} |\hat{e}_{ni} - e_i| + 2 \frac{1}{[n^{\alpha/2}]} \sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i| \Big) \\
&= O(n^{-\alpha/2})\, O_p(1)\, (O_p(1) + O_p(1)) \;=\; O_p(n^{-\alpha/2}) \;=\; o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.17) und (2.6), sowie

$$
\begin{aligned}
I\!I_n &\leq \max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \frac{1}{k} \sum_{i=[n^{\alpha/2}]+1}^{k} \max_{[n^{\alpha/2}] \leq j \leq n} |\hat{e}_{nj} - e_j| \Big(|\hat{e}_{ni} - e_i| + 2|e_i| \Big) \\
&\leq \max_{[n^{\alpha/2}] \leq j \leq n} |\hat{e}_{nj} - e_j| \Big(\max_{1 \leq i \leq n} |\hat{e}_{ni} - e_i| + 2 \max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} |e_i| \Big) \\
&= o_p(1)\, (O_p(1) + O_p(1)) \;=\; o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.16), (3.17) und (2.6).

Zu (3.27): Folgt sofort aus (3.12), ist einfach nur schwächer.

Zu (3.28): Hier ist einfach für alle $\alpha \in (0,1)$

$$
\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \sqrt{\frac{\log\log k}{k}} \max_{1 \leq i \leq k} |\hat{e}_{ni} - e_i| \\
&\leq \sqrt{\frac{\log\log n}{[n^\alpha]}} \max_{1 \leq i \leq n} |\hat{e}_{ni} - e_i| \\
&= o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.17) und weil $\log\log n = o(n^\alpha)$.

3.29 Folgerung. Für alle $\alpha \in (0,1)$ gelten

$$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} |\hat{e}_{ni}| = O_p(1) \tag{3.30}$$

$$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \hat{e}_{ni}^2 - \sigma^2 \right| = o_p(1) \tag{3.31}$$

$$\max_{3 \leq k \leq n} \left| \frac{1}{\sqrt{k \log\log k}} \sum_{i=1}^{k} \hat{e}_{ni} \right| = O_p(1) \tag{3.32}$$

$$\max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{i=1}^{k} \hat{e}_{ni} \right| = O_p(\sqrt{n}\,) \tag{3.33}$$

$$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n} \sqrt{\frac{\log\log k}{k}} \max_{1 \leq i \leq k} |\hat{e}_{ni}| = o_p(1). \tag{3.34}$$

Beweis: Dies folgt alles mit der Dreiecksungleichung aus (2.6)–(2.9) und (2.16), mit (3.25)–(3.27), (3.12) und (3.28).

3.35 Folgerung. Für alle $\alpha \in (0,1)$ ist

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\,\frac{|\sum_{i=1}^k \hat{e}_{ni}|}{\sum_{i=1}^k \hat{e}_{ni}^2} = O_p(1) \tag{3.36}$$

und

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n} k\,\frac{|\sum_{i=1}^k \hat{e}_{ni}|}{\sum_{i=1}^k \hat{e}_{ni}^2} = O_p(\sqrt{n}\,). \tag{3.37}$$

Beweis: Geht genauso wie der Beweis von Folgerung 2.11, nur verwenden wir hier (3.31) statt (2.9), (3.32) statt (2.7) und (3.33) statt (2.8).

3.38 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ gelten unter $\widehat{A}_{n,\alpha}$

$$\sup_{[n^\alpha]\le k\le n} \sqrt{\frac{k}{\log\log k}}\,|\hat{t}_{nk}| = O_p(1) \tag{3.39}$$

$$\sup_{[n^\alpha]\le k\le n} |\hat{t}_{nk}| \max_{1\le i\le k} |\hat{e}_{ni}| = o_p(1) \tag{3.40}$$

$$\sup_{[n^\alpha]\le k\le n} k|\hat{t}_{nk}| = O_p(\sqrt{n}\,) \tag{3.41}$$

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\max_{1\le i\le k}\left|\frac{1}{1+\hat{t}_{nk}\hat{e}_{ni}} - 1\right| = o_p(1). \tag{3.42}$$

Beweis: Geht analog zum Beweis von Proposition 2.27. Wir verwenden die entsprechenden Aussagen über die Residuengrößen, also bei (3.39) nehmen wir (3.36) statt (2.12), (3.34) statt (2.16) und (3.22) statt (2.25), bei (3.40) benutzen wir (3.39) und (3.34) statt (2.28) und (2.16), bei (3.41) werden (3.23), (3.37) und (3.40) anstelle von (2.26), (2.13) und (2.29) verwandt, und bei (3.42) wird (2.29) durch (3.40) ersetzt.

3.43 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ ist unter $\widehat{A}_{n,\alpha}$

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\left|k\,\hat{t}_{nk} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^k e_i\right| = o_p(\sqrt{n}\,). \tag{3.44}$$

Beweis: Indem man vorgeht wie im Beweis von Proposition 2.32 erhält man

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\left|k\,\hat{t}_{nk} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^k \hat{e}_{ni}\right| = o_p(\sqrt{n}\,).$$

wobei man hier (2.9), (2.29), (2.30) und (2.31) durch (3.31), (3.40), (3.41) und (3.42) ersetzt. Dies entspricht, abgesehen von den Residuen in der Summe, der Behauptung (3.44), welche hieraus mit der Dreiecksungleichung und (3.12) folgt.

3.45 Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \ldots, n$ sei $\hat{u}_{nk}$ auf dem Ereignis

$$\Big\{ \min_{k+1 \leq i \leq n} \hat{e}_{ni} < 0 < \max_{k+1 \leq i \leq n} \hat{e}_{ni} \Big\}$$

definiert als die eindeutig bestimmte Nullstelle von

$$x \mapsto \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\hat{e}_{ni}}{1 + x\hat{e}_{ni}}$$

in dem Intervall

$$\bigg(\Big(\frac{1}{n-k} - 1 \Big) \frac{1}{\max_{k+1 \leq i \leq n} \hat{e}_{ni}}, \Big(\frac{1}{n-k} - 1 \Big) \frac{1}{\min_{k+1 \leq i \leq n} \hat{e}_{ni}} \bigg).$$

Für $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\widehat{B}_{n,\alpha} := \bigcap_{k=0}^{n-[n^\alpha]} \Big\{ \min_{k+1 \leq i \leq n} \hat{e}_{ni} < 0 < \max_{k+1 \leq i \leq n} \hat{e}_{ni} \Big\}.$$

3.46 Bemerkung. Anders als im letzten Kapitel können wir hier nicht mit der identischen Verteiltheit argumentieren, sondern müssen die Aussagen über die „rückwärtssequentiellen“ Größen gesondert herleiten. Allerdings ist dies der weniger kritische Anteil, denn bei der vorwärtssequentiellen Betrachtung gingen bei den kurzen Zeitbereichen (mit $k = [n^\alpha]$) gerade ausschließlich die Residuen mit den niedrigsten Indizes ein, die keine so guten Schätzwerte für die jeweiligen Fehlervariablen sein müssen.

3.47 Proposition. Für $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\widehat{B}_{n,\alpha} = \Big\{ \min_{n-[n^\alpha]+1 \leq i \leq n} \hat{e}_{ni} < 0 < \max_{n-[n^\alpha]+1 \leq i \leq n} \hat{e}_{ni} \Big\},$$

und es gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$P(\widehat{B}_{n,\alpha}) \xrightarrow[n]{} 1. \tag{3.48}$$

Beweis: Geht ähnlich wie der Beweis von Proposition 3.19, insbesondere ist die Gleichheit der Ereignisse klar. Sei $\varepsilon > 0$ wie in dem dortigen Beweis, also mit $P(e_1 \geq -\varepsilon) < 1$ und $P(e_1 \leq \varepsilon) < 1$. Dann gilt für alle $\alpha \in (0,1)$ und alle großen n

$$P(\mathcal{C}\widehat{B}_{n,\alpha}) \;=\; P\bigg(\bigcap_{i=n-[n^\alpha]+1}^{n} \{e_i \geq e_i - \hat{e}_{ni}\} \cup \bigcap_{i=n-[n^\alpha]+1}^{n} \{e_i \leq e_i - \hat{e}_{ni}\} \bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&\le\; P\Big(\bigcap_{i=n-[n^\alpha]+1}^{n}\{e_i\ge -\varepsilon\}\Big)+P\Big(\bigcap_{i=n-[n^\alpha]+1}^{n}\{e_i\le \varepsilon\}\Big)\\
&\quad +P\Big(\max_{n-[n^\alpha]+1\le i\le n}|e_i-\hat e_{ni}|\ge\varepsilon\Big)\\
&\le\; P(e_1\ge-\varepsilon)^{[n^\alpha]}+P(e_1\le\varepsilon)^{[n^\alpha]}\\
&\quad +P\Big(\max_{[n^\alpha]\le i\le n}|e_i-\hat e_{ni}|\ge\varepsilon\Big)\;\underset{n}{\longrightarrow}\;0
\end{aligned}
$$

nach Wahl von ε und wegen (3.16).

3.49 Proposition. Für alle $\alpha\in(0,1)$ gelten

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}|\hat e_{ni}-e_i|=o_p(1) \tag{3.50}$$

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}|\hat e_{ni}^2-e_i^2|=o_p(1) \tag{3.51}$$

$$\max_{0\le k\le n}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}(\hat e_{ni}-e_i)\Big|=O_p(1). \tag{3.52}$$

$$\max_{0\le k\le n-9}\Big|\frac{1}{\sqrt{(n-k)\log\log(n-k)}}\sum_{i=k+1}^{n}(\hat e_{ni}-e_i)\Big|=O_p(1) \tag{3.53}$$

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\sqrt{\frac{\log\log(n-k)}{n-k}}\max_{k+1\le i\le n}|\hat e_{ni}-e_i|=o_p(1). \tag{3.54}$$

Beweis: Zu (3.50): Für alle $\alpha\in(0,1)$ ist

$$
\begin{aligned}
&\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}|\hat e_{ni}-e_i|\\
&\le \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{n-k}\sum_{i=(k+1)\vee([n^{\alpha/2}]+1)}^{n}|\hat e_{ni}-e_i|\\
&\quad+\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{[n^{\alpha/2}]}|\hat e_{ni}-e_i|\\
&\le \max_{[n^{\alpha/2}]\le i\le n}|\hat e_{ni}-e_i|+\frac{[n^{\alpha/2}]}{[n^\alpha]}\max_{1\le i\le n}|\hat e_{ni}-e_i|\\
&= o_p(1)+O(n^{-\alpha/2})\,O_p(1)\;=\;o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.16) und (3.17).
Zu (3.51): Ähnlich wie im Beweis von (3.26) sehen wir

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}|\hat e_{ni}^2-e_i^2|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} |\hat e_{ni}-e_i|\Big(|\hat e_{ni}-e_i|+2|e_i|\Big)\\
&\le \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{n-k} \sum_{i=(k+1)\vee([n^{\alpha/2}]+1)}^{n} |\hat e_{ni}-e_i|\Big(|\hat e_{ni}-e_i|+2|e_i|\Big)\\
&\quad + \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{[n^{\alpha/2}]} |\hat e_{ni}-e_i|\Big(|\hat e_{ni}-e_i|+2|e_i|\Big)\\
&=: I_n + I\!I_n.
\end{aligned}
$$

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
I_n &\le \max_{[n^{\alpha/2}]\le i\le n} |\hat e_{ni}-e_i|\Big(\max_{1\le i\le n}|\hat e_{ni}-e_i| + 2\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|e_{n-i+1}|\Big)\\
&= o_p(1)\,(O_p(1)+O_p(1)) \;=\; o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.16), (3.17) und (2.6) in Verbindung mit $(e_1,\dots,e_n)\sim(e_n,\dots,e_1)$, und

$$
\begin{aligned}
I\!I_n &\le \frac{[n^{\alpha/2}]}{[n^\alpha]}\max_{1\le i\le n}|\hat e_{ni}-e_i|\Big(\max_{1\le i\le n}|\hat e_{ni}-e_i| + 2\frac{1}{[n^{\alpha/2}]}\sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]}|e_i|\Big)\\
&= O(n^{-\alpha/2})\,O_p(1)\,(O_p(1)+O_p(1)) \;=\; O_p(n^{-\alpha/2}) \;=\; o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.17) und (2.6).

Zu (3.52): Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\max_{0\le k\le n}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}(\hat e_{ni}-e_i)\Big|\\
&\le \max_{0\le k\le n}\left(\Big|\sum_{i=1}^{n}(\hat e_{ni}-e_i)\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{k}(\hat e_{ni}-e_i)\Big|\right)\\
&\le 2\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(\hat e_{ni}-e_i)\Big| \;=\; O_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.12).

Zu (3.53): Folgt sofort aus (3.52), ist einfach nur schwächer.

Zu (3.54): Hier ist wieder für alle $\alpha\in(0,1)$

$$
\begin{aligned}
&\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\sqrt{\frac{\log\log(n-k)}{n-k}}\max_{k+1\le i\le n}|\hat e_{ni}-e_i|\\
&\le \sqrt{\frac{\log\log n}{[n^\alpha]}}\max_{1\le i\le n}|\hat e_{ni}-e_i|\\
&= o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.17) und weil $\log\log n = o(n^\alpha)$.

3.55 Folgerung. Für alle $\alpha \in (0,1)$ gelten

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} |\hat{e}_{ni}| = O_p(1) \tag{3.56}$$

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{n-k}\left|\sum_{i=k+1}^{n} \hat{e}_{ni}^2 - \sigma^2\right| = o_p(1) \tag{3.57}$$

$$\max_{0\le k\le n-9} \left|\frac{1}{\sqrt{(n-k)\log\log(n-k)}}\sum_{i=k+1}^{n} \hat{e}_{ni}\right| = O_p(1) \tag{3.58}$$

$$\max_{0\le k\le n-1} \left|\sum_{i=k+1}^{n} \hat{e}_{ni}\right| = O_p(\sqrt{n}\,) \tag{3.59}$$

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \sqrt{\frac{\log\log(n-k)}{n-k}}\max_{k+1\le i\le n} |\hat{e}_{ni}| = o_p(1). \tag{3.60}$$

Beweis: Die Aussagen (3.56)–(3.60) folgen mit der Dreiecksungleichung aus (3.50)–(3.54) in Verbindung mit (2.6)–(2.9), (2.16) und der Tatsache, dass die Zufallsvariablen $e_1, \ldots, e_n$ unabhängig und identisch verteilt sind.
Wir führen dies am Beispiel von (3.56) im Detail aus:

$$\begin{aligned}
&\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} |\hat{e}_{ni}| \\
\le\ & \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} |\hat{e}_{ni} - e_i| + \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} |e_i| \\
=\ & \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} |\hat{e}_{ni} - e_i| + \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |e_{n-i+1}| \\
=\ & o_p(1) + O_p(1) \quad = \quad O_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.50) und (2.6) in Verbindung mit (2.1).

3.61 Folgerung. Für alle $\alpha \in (0,1)$ ist

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \sqrt{\frac{n-k}{\log\log(n-k)}}\,\frac{|\sum_{i=k+1}^{n} \hat{e}_{ni}|}{\sum_{i=k+1}^{n} \hat{e}_{ni}^2} = O_p(1) \tag{3.62}$$

und

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} (n-k)\,\frac{|\sum_{i=k+1}^{n} \hat{e}_{ni}|}{\sum_{i=k+1}^{n} \hat{e}_{ni}^2} = O_p(1/\sqrt{n}\,). \tag{3.63}$$

Beweis: Geht fast genauso wie bei Folgerung 3.35. Statt (3.31)–(3.33) sind hier (3.57)–(3.59) zu verwenden, und die leicht veränderten Vorfaktoren ($n-k$ statt k), Summengrenzen und Indexbereiche der Maxima sind zu beachten. Im Prinzip läuft der Beweis aber ganz genauso.

3.64 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ und alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3^{1/\alpha}$ gelten auf dem Ereignis $\widehat{B}_{n,\alpha}$

$$
\begin{aligned}
&\max_{0\leq k\leq n-[n^\alpha]} \sqrt{\frac{n-k}{\log\log(n-k)}}\,|\hat{u}_{nk}|\cdot \\
&\cdot\Big(1-\widehat{U}_{n,\alpha}\max_{0\leq k\leq n-[n^\alpha]}\sqrt{\frac{\log\log(n-k)}{n-k}}\max_{k+1\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni}|\Big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leq\ \widehat{U}_{n,\alpha}
\end{aligned}
\tag{3.65}
$$

mit

$$\widehat{U}_{n,\alpha} := \max_{0\leq k\leq n-[n^\alpha]}\sqrt{\frac{n-k}{\log\log(n-k)}}\,\frac{|\sum_{i=k+1}^n \hat{e}_{ni}|}{\sum_{i=k+1}^n \hat{e}_{ni}^2},$$

und

$$
\begin{aligned}
&\max_{0\leq k\leq n-[n^\alpha]}(n-k)|\hat{u}_{nk}| \ \leq \\
&\Big(1+\max_{0\leq k\leq n-[n^\alpha]}|\hat{u}_{nk}|\max_{k+1\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni}|\Big)\max_{0\leq k\leq n-[n^\alpha]}(n-k)\,\frac{|\sum_{i=k+1}^n \hat{e}_{ni}|}{\sum_{i=k+1}^n \hat{e}_{ni}^2}.
\end{aligned}
\tag{3.66}
$$

Beweis: Geht analog zum Beweis von Proposition 3.21, mit den gleichen Änderungen wie beim Beweis von Folgerung 3.61.

3.67 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ gelten unter $\widehat{B}_{n,\alpha}$

$$\max_{0\leq k\leq n-[n^\alpha]}\sqrt{\frac{n-k}{\log\log(n-k)}}\,|\hat{u}_{nk}| = O_p(1) \tag{3.68}$$

$$\max_{0\leq k\leq n-[n^\alpha]}|\hat{u}_{nk}|\max_{k+1\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni}| = o_p(1) \tag{3.69}$$

$$\max_{0\leq k\leq n-[n^\alpha]}(n-k)|\hat{u}_{nk}| = O_p(\sqrt{n}\,) \tag{3.70}$$

$$\max_{0\leq k\leq n-[n^\alpha]}\max_{k+1\leq i\leq n}\left|\frac{1}{1+\hat{u}_{nk}\hat{e}_{ni}}-1\right| = o_p(1). \tag{3.71}$$

Beweis: Geht fast genauso wie der Beweis von Proposition 3.38, letztlich also wie der Beweis von Proposition 2.27.

3.72 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt unter $\widehat{B}_{n,\alpha}$

$$\max_{0\leq k\leq n-[n^\alpha]}\left|(n-k)\hat{u}_{nk}-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=k+1}^n e_i\right| = o_p(\sqrt{n}\,). \tag{3.73}$$

Beweis: Ist im wesentlichen wieder eine Entwicklung mit den oben bereitgestellten Hilfsmitteln. Siehe hierzu den Beweis von (3.44).

3.3 Entwicklung von $\widehat{T}_n^z$

3.74 Proposition. Unter der Voraussetzung (2.41) gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\hat{e}_{ni}1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}-U(x)\Big|=o_p(1), \tag{3.75}$$

wobei U wieder die auf Seite 28 definierte Funktion ist.

Beweis: Sei $\alpha \in (0,1)$. Dann ist nach der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\hat{e}_{ni}1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}-U(x)\Big|\\
&=\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\Big(\hat{e}_{ni}1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}-e_i1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}+e_i1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}-U(x)\Big)\Big|\\
&\le\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|\hat{e}_{ni}-e_i|+\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}e_i1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}-U(x)\Big|.
\end{aligned}$$

Der erste Summand ist nach (3.25) von der Ordnung $o_p(1)$, so dass wir uns nur noch um den zweiten kümmern müssen.
Seien dazu für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&U_n^+:\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R},\quad U_n^+(x):=\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}e_i^+1_{\{e_i\le x\}},\\
&U_n^-:\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R},\quad U_n^-(x):=\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n}e_i^-1_{\{e_i\le x\}},\\
&U^+:\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R},\quad U^+(x):=E(e_1^+1_{\{e_1\le x\}})\\
\text{und}\quad &U^-:\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R},\quad U^-(x):=E(e_1^-1_{\{e_1\le x\}}),
\end{aligned}$$

wie im Beweis von Proposition 2.42, wo auch die gleichmäßige Stetigkeit von U^+ und U^- gezeigt wurde. Sei nun $\varepsilon > 0$. Wegen der erwähnten gleichmäßigen Stetigkeit von U^+ existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|U^+(x+\delta)-U^+(x)\Big|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Auf dem Ereignis $\{\max_{[n^{\alpha/2}]\le i\le n}|\hat{e}_{ni}-e_i|\le\delta\}$ folgt wegen der Monotonie von U^+ und $1_{\{e_i\le\cdot\}}$ für $i\in\mathbb{N}$ für alle $k=1,\dots,n$ und $x\in\overline{\mathbb{R}}$

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}e_i^+1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}-U^+(x)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{1}{k}\sum_{i=[n^{\alpha/2}]+1}^{k} e_i^+ 1_{\{e_i\le x-\hat e_{ni}+e_i\}} - U^+(x) + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} e_i^+ 1_{\{\hat e_{ni}\le x\}}\\
&\le \frac{1}{k}\sum_{i=[n^{\alpha/2}]+1}^{k} e_i^+ 1_{\{e_i\le x+|\hat e_{ni}-e_i|\}} - U^+(x) + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} e_i^+\\
&\le \frac{1}{k}\sum_{i=[n^{\alpha/2}]+1}^{k} e_i^+ 1_{\{e_i\le x+\delta\}} - U^+(x) + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i|\\
&\le \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^+ 1_{\{e_i\le x+\delta\}} - U^+(x+\delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i|\\
&= U_k^+(x+\delta) - U^+(x+\delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i|,
\end{aligned}
$$

und umgekehrt

$$
\begin{aligned}
&U^+(x) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^+ 1_{\{\hat e_{ni}\le x\}}\\
&\quad\le U^+(x) - \frac{1}{k}\sum_{i=[n^{\alpha/2}]+1}^{k} e_i^+ 1_{\{e_i\le x-|\hat e_{ni}-e_i|\}}\\
&\quad\le U^+(x-\delta) + \frac{\varepsilon}{2} - U_k^+(x-\delta) + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i|.
\end{aligned}
$$

Zusammen und nach Übergang zum Maximum über $k \in \{[n^\alpha], \ldots, n\}$ und Supremum über $x \in \overline{\mathbb{R}}$ folgt

$$
\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^+ 1_{\{\hat e_{ni}\le x\}} - U^+(x) \right|\\
&\quad\le \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \left(\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \left| U_k^+(x) - U^+(x) \right| + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i| \right) + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}
$$

natürlich nur auf obigem Ereignis. Daher haben wir

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P\left(\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_i^+ 1_{\{\hat e_{ni}\le x\}} - U^+(x) \right| \ge \varepsilon \right)\\
&\le \limsup_{n\to\infty} P\left(\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \left(\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \left| U_k^+(x) - U^+(x) \right| + \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i| \right) + \frac{\varepsilon}{2} \ge \varepsilon \right)\\
&\quad + \limsup_{n\to\infty} P\left(\max_{[n^{\alpha/2}]\le i\le n} |\hat e_{ni} - e_i| > \delta \right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\le \limsup_{n\to\infty} P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| U_k^+(x) - U^+(x) \Big| \ge \frac{\varepsilon}{4} \Big) \\
&\quad + \limsup_{n\to\infty} P\Big(\frac{[n^{\alpha/2}]}{[n^\alpha]} \frac{1}{[n^{\alpha/2}]} \sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i| \ge \frac{\varepsilon}{4} \Big) \\
&\quad + \limsup_{n\to\infty} P\Big(\max_{[n^{\alpha/2}]\le i\le n} |\hat{e}_{ni} - e_i| > \delta \Big) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

nach der Aussage (2.44) aus dem Beweis von Proposition 2.42, (2.6) und (3.16). Dies bedeutet gerade:

$$
\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e_i^+ 1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}} - U^+(x) \Big| = o_p(1).
$$

Indem man in obigen Überlegungen überall in den Indizes „+“ durch „−“ ersetzt, kann man auch

$$
\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e_i^- 1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}} - U^-(x) \Big| = o_p(1)
$$

erhalten. Es folgt

$$
\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e_i 1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}} - U(x) \Big| \\
&\quad \le \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e_i^+ 1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}} - U^+(x) \Big| \\
&\qquad + \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e_i^- 1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}} - U^-(x) \Big| \\
&\quad = o_p(1).
\end{aligned}
$$

Genau dies fehlte noch zur Behauptung (3.75).

3.76 Definition. Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&\widehat{F}_n^{seq} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1], \\
&\widehat{F}_n^{seq}(s,x) := \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{1}{[ns]} 1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}
\end{aligned}
$$

mit $\widehat{F}_n^{seq}(s,x) := 0$ für $s < 1/n$ und $x \in \overline{\mathbb{R}}$, und dazu passend

$$
\begin{aligned}
&\widehat{G}_n^{seq} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1], \\
&\widehat{G}_n^{seq}(s,x) := \sum_{i=[ns]+1}^{n} \frac{1}{n-[ns]} 1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}},
\end{aligned}
$$

wobei hier $\widehat{G}_n^{seq}(1, x) := 0$ sei für $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Dies entspricht den Definitionen von F_n^{seq} und G_n^{seq} aus Kapitel 2, nur das die Fehlervariablen e_i durch die jeweiligen Residuen $\hat{e}_{ni}$ ersetzt sind.
Genauso sei auch für $n \in \mathbb{N}$ und $s \in [1/n, 1]$ und $i = 1, \ldots, [ns]$

$$\widehat{p}_{n,i}(s) := \frac{1}{[ns]} \frac{1}{1 + \hat{t}_{n[ns]} \hat{e}_{ni}}$$

auf dem Ereignis $\{\min_{1 \leq i \leq [ns]} \hat{e}_{ni} < 0 < \max_{1 \leq i \leq [ns]} \hat{e}_{ni}\}$ und

$$\widehat{p}_{n,i}(s) := \frac{1}{[ns]}$$

auf dem Gegenereignis, und für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \widehat{F}_n^{seq,z} &: [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1], \\ \widehat{F}_n^{seq,z}(s, x) &:= \sum_{i=1}^{[ns]} \widehat{p}_{n,i}(s)\, 1_{\{\hat{e}_{ni} \leq x\}}, \end{aligned}$$

wobei wieder $\widehat{F}_n^{seq,z}(s, x) := 0$ sei für $s < 1/n$.
Schließlich sei für $n \in \mathbb{N}$, $s \in [0, 1)$ und für $i = [ns] + 1, \ldots, n$

$$\widehat{q}_{n,i}(s) := \frac{1}{n - [ns]} \frac{1}{1 + \hat{u}_{n[ns]} \hat{e}_{ni}}$$

auf dem Ereignis $\{\min_{[ns]+1 \leq i \leq n} \hat{e}_{ni} < 0 < \max_{[ns]+1 \leq i \leq n} \hat{e}_{ni}\}$ und

$$\widehat{q}_{n,i}(s) := \frac{1}{n - [ns]}$$

auf dem Gegenereignis, und für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \widehat{G}_n^{seq,z} &: [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to [0,1], \\ \widehat{G}_n^{seq,z}(s, x) &:= \sum_{i=[ns]+1}^{n} \widehat{q}_{n,i}(s)\, 1_{\{\hat{e}_{ni} \leq x\}} \end{aligned}$$

mit $G_n^{seq,z}(1, x) := 0$.

Bei der stochastischen Entwicklung der zentrierten sequentiellen empirischen Verteilungsfunktion der Residuen bauen wir auf folgendem Resultat von Bai (1994) auf, in dem die Stationarität der ARMA(p, q)-Zeitreihe $(X_{i-p})_{i \in \mathbb{N}}$ vorausgesetzt und $\hat{e}_{n1-q}, \ldots, \hat{e}_{n0} = 0$ gewählt wird. Für die Ergebnisse, für die wir diese Arbeit von Bai verwenden, müssen wir dies damit ebenfalls voraussetzen. Weiterhin wird dort eine Voraussetzung über eine Dichte der Verteilungsfunktion F von e_1 gemacht, welche wir dann ebenfalls übernehmen müssen und welche (2.41) ersetzt.

3.77 Satz. Unter den Voraussetzungen (2.1), (2.2), (3.1) (3.3), (3.4),

(3.78) die Funktion F besitzt eine gleichmäßig stetige, positive Dichte,

sowie

$$\begin{array}{l}(X_{i-p})_{i\in\mathbb{N}} \text{ ist eine stationäre Zeitreihe}\\ \text{und es gilt } \hat{e}_{n1-q},\dots,\hat{e}_{n0}=0,\end{array} \tag{3.79}$$

gilt mit den obigen Bezeichnungen

$$\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}[ns]\left|\widehat{F}_n^{seq}(s,x)-F_n^{seq}(s,x)\right| = o_p(\sqrt{n}\,). \tag{3.80}$$

Beweis: Siehe Bai (1994), Theorem 1 (dort wird nur das Supremum über $x\in\mathbb{R}$ betrachtet, für $x=\pm\infty$ hat die Zufallsvariable im Supremum den Wert Null).

3.81 Proposition. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.77 und (2.3) gilt

$$\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}[ns]\left|\widehat{F}_n^{seq,z}(s,x)-\Big(F_n^{seq}(s,x)-\frac{1}{\sigma^2}S_n(s)U(x)\Big)\right| = o_p(\sqrt{n}\,). \tag{3.82}$$

Beweis: Indem man den Beweis von Proposition 2.46 überträgt, unter Verwendung der in diesem Kapitel bereitgestellten Resultate, erhält man

$$\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}[ns]\left|\widehat{F}_n^{seq,z}(s,x)-\Big(\widehat{F}_n^{seq}(s,x)-\frac{1}{\sigma^2}S_n(s)U(x)\Big)\right| = o_p(\sqrt{n}\,).$$

Mit (3.80) und der Dreiecksungleichung folgt daraus die Behauptung.

3.83 Proposition. Für alle $\alpha\in(0,1)$ gilt unter (2.41)

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\left|\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\hat{e}_{ni}1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}-U(x)\right| = o_p(1). \tag{3.84}$$

Beweis: Der Beweis geht im wesentlichen ähnlich wie der Beweis von Proposition 3.74. Seien $\alpha\in(0,1)$ und $\varepsilon>0$. Zunächst ist es wegen (3.50) statt (3.25) ausreichend,

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\left|\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}e_i1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}-U(x)\right| = o_p(1)$$

zu zeigen. Seien U^+ und δ wie in dem Beweis von Proposition 3.74. Dann ist wieder auf dem Ereignis $\{\max_{[n^{\alpha/2}]\le i\le n}|\hat{e}_{ni}-e_i|\le\delta\}$ für alle $k=1,\dots,n$ und

$x \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} e_i^+ 1_{\{\hat{e}_{ni} \le x\}} - U^+(x) \\
\le\;& \frac{1}{n-k} \sum_{i=(k+1)\vee([n^{\alpha/2}]+1)}^{n} e_i^+ 1_{\{e_i \le x - \hat{e}_{ni} + e_i\}} - U^+(x) + \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} e_i^+ 1_{\{\hat{e}_{ni} \le x\}} \\
\le\;& \frac{1}{n-k} \sum_{i=(k+1)\vee([n^{\alpha/2}]+1)}^{n} e_i^+ 1_{\{e_i \le x+\delta\}} - U^+(x) + \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i| \\
\le\;& \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} e_i^+ 1_{\{e_i \le x+\delta\}} - U^+(x+\delta) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i|,
\end{aligned}$$

wie im genannten Beweis, ebenso

$$\begin{aligned}
&U^+(x) - \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} e_i^+ 1_{\{\hat{e}_{ni} \le x\}} \\
\le\;& U^+(x) - \frac{1}{n-k} \sum_{i=(k+1)\vee([n^{\alpha/2}]+1)}^{n} e_i^+ 1_{\{e_i \le x - |\hat{e}_{ni} - e_i|\}} \\
\le\;& U^+(x-\delta) + \frac{\varepsilon}{2} - \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} e_i^+ 1_{\{e_i \le x-\delta\}} + \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i|,
\end{aligned}$$

was auf dem obigen Ereignis zu

$$\begin{aligned}
&\max_{0 \le k \le n-[n^\alpha]} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} e_i^+ 1_{\{\hat{e}_{ni} \le x\}} - U^+(x) \right| \\
\le\;& \max_{0 \le k \le n-[n^\alpha]} \left(\sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} e_i^+ 1_{\{e_i \le x\}} - U^+(x) \right| + \frac{1}{n-k} \sum_{i=1}^{[n^{\alpha/2}]} |e_i| \right) + \frac{\varepsilon}{2},
\end{aligned}$$

führt. Der Rest des Beweises geht dann genauso wie bei Proposition 3.74, wenn wir noch

$$\begin{aligned}
&\max_{0 \le k \le n-[n^\alpha]} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} e_i^+ 1_{\{e_i \le x\}} - U^+(x) \right| \\
=\;& \max_{[n^\alpha] \le k \le n} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{1}{k} \sum_{i=n-k+1}^{n} e_i^+ 1_{\{e_i \le x\}} - U^+(x) \right| \\
=\;& \max_{[n^\alpha] \le k \le n} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e_{n-i+1}^+ 1_{\{e_{n-i+1} \le x\}} - U^+(x) \right| \\
\sim\;& \max_{[n^\alpha] \le k \le n} \sup_{x \in \overline{\mathbb{R}}} \left| U_k^+(x) - U^+(x) \right| \;=\; o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (2.44) beachten.

3.85 Proposition. Es gilt unter den Voraussetzungen von 3.77 und (2.3)

$$(3.86)\quad \sup_{\substack{s\in[0,1]\\ x\in\overline{\mathbb{R}}}}(n-[ns])\Big|\widehat{G}_n^{seq,z}(s,x)-\Big(G_n^{seq}(s,x)-\frac{1}{\sigma^2}S_n^{r\ddot{u}ck}(s)U(x)\Big)\Big| = o_p(\sqrt{n}\,).$$

Beweis: Unterscheidet sich nur in Kleinigkeiten vom Beweis von Proposition 3.81, von dem wir allerdings auch schon gesagt haben, er gehe ähnlich wie bei Proposition 2.46. Da dieser der etwas längere Beweis ist, führen wir ihn deshalb aus, um zu überzeugen, dass es tatsächlich bis auf kleine Unterschiede genauso geht.

Für alle $\alpha \in (0,1)$ ist

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}(n-[ns])\Big|\widehat{G}_n^{seq,z}(s,x)-\Big(G_n^{seq}(s,x)-\frac{1}{\sigma^2}S_n^{r\ddot{u}ck}(s)U(x)\Big)\Big|\\
&\quad\le\ \infty\cdot 1_{\complement\widehat{B}_{n,\alpha}}\\
&\qquad + 1_{\widehat{B}_{n,\alpha}}\sup_{s\in[0,1-n^{\alpha-1}]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\hat{u}_{n[ns]}e_i}-1\Big)1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n} e_i\,U(x)\Big|\\
&\qquad + \sup_{s\in[1-n^{\alpha-1},1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}(n-[ns])\Big|\widehat{G}_n^{seq,z}(s,x)-\widehat{G}_n^{seq}(s,x)+\frac{1}{\sigma^2}S_n(s)U(x)\Big|\\
&\qquad + \sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}(n-[ns])\Big|\widehat{G}_n^{seq}(s,x)-G_n^{seq}(s,x)\Big|\\
&\quad =:\ I_n + II_n + III_n + IV_n.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$I_n = o_p(1)$$

nach (3.48).

Als nächstes ist unter $\widehat{B}_{n,\alpha}$, wenn wir wieder zuerst den Indexbereich des Maximums mit $[-y]=-\lceil y\rceil$ umformen, ihn anschließend vergrößern, wobei wir beachten dass wir auf dem Ereignis $\widehat{B}_{n,\alpha}$ alle $\hat{u}_{nk}$, auch für das eventuell zusätzliche $k=n-[n^\alpha]$ legitim definiert haben, und anschließend wieder die übliche Entwicklung $\frac{1}{1+x}=1-x+\frac{x^2}{1+x}$ einsetzen,

$$\begin{aligned}
II_n &= \max_{0\le k\le n-\lceil n^\alpha\rceil}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\hat{u}_{nk}\hat{e}_{ni}}-1\Big)1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=k+1}^{n}e_i\,U(x)\Big|\\
&\le \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\hat{u}_{nk}\hat{e}_{ni}}-1\Big)1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=k+1}^{n}e_i\,U(x)\Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| - \sum_{i=k+1}^{n} \hat u_{nk}\hat e_{ni} 1_{\{\hat e_{ni}\le x\}} + \sum_{i=k+1}^{n} \frac{\hat u_{nk}^2 \hat e_{ni}^2}{1+\hat u_{nk}\hat e_{ni}} 1_{\{\hat e_{ni}\le x\}} \\
&\qquad + \Big(\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=k+1}^{n} e_i - (n-k)\hat u_{nk}\Big) U(x) + (n-k)\hat u_{nk} U(x)\Big| \\
&\le \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} (n-k)|\hat u_{nk}| \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} \hat e_{ni} 1_{\{\hat e_{ni}\le x\}} - U(x)\Big| \\
&\quad + \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} (n-k)|\hat u_{nk}| \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} |\hat u_{nk}| \max_{k+1\le i\le n} |\hat e_{ni}| \\
&\qquad \cdot \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \max_{k+1\le i\le n} \frac{1}{1+\hat u_{nk}\hat e_{ni}} \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n} |\hat e_{ni}| \\
&\quad + \max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \Big| (n-k)\hat u_{nk} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=k+1}^{n} e_i \Big| E(|e_1|) \\
&= O_p(\sqrt{n}\,)\, o_p(1) + O_p(\sqrt{n}\,)\, o_p(1)\, O_p(1)\, O_p(1) + o_p(\sqrt{n}\,) \quad = \quad o_p(\sqrt{n}\,)
\end{aligned}
$$

nach (3.70), (3.84), (3.70), (3.69), (3.71), (3.56) und (3.73).
Weiter ist, wieder auf dem gesamten Grundraum,

$$
\begin{aligned}
I\!I\!I_n &\le \sup_{s\in[1-n^{\alpha-1},1]} \Big((n-[ns]) + \frac{1}{\sigma^2}\Big| \sum_{i=[ns]+1}^{n} e_i \Big| E(|e_1|) \Big) \\
&\le \lceil n^\alpha\rceil + \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2} \max_{n-\lceil n^\alpha\rceil\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} e_i \Big| \\
&\sim \lceil n^\alpha\rceil + \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2} \max_{1\le k\le \lceil n^\alpha\rceil} \Big| \sum_{i=1}^{k} e_i \Big| \\
&= O(n^\alpha) + O_p(n^{\alpha/2}) \quad = \quad O_p(n^\alpha)
\end{aligned}
$$

nach (2.8) mit der Ersetzung $n \mapsto \lceil n^\alpha\rceil$. Schließlich ist

$$
\begin{aligned}
I\!V_n &= \sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| \sum_{i=[ns]+1}^{n} 1_{\{\hat e_{ni}\le x\}} - \sum_{i=[ns]+1}^{n} 1_{\{e_i\le x\}} \Big| \\
&\le \sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| \sum_{i=1}^{[ns]} 1_{\{\hat e_{ni}\le x\}} - \sum_{i=1}^{[ns]} 1_{\{e_i\le x\}} \Big| \\
&\quad + \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \Big| \sum_{i=1}^{n} 1_{\{\hat e_{ni}\le x\}} - \sum_{i=1}^{n} 1_{\{e_i\le x\}} \Big| \\
&\le 2 \sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} [ns] \Big| \widehat F_n^{seq}(s,x) - F_n^{seq}(s,x) \Big| \quad = \quad o_p(\sqrt{n}\,)
\end{aligned}
$$

nach (3.80). Damit folgt (3.86), wenn wir $\alpha = 1/3$ wählen.

3.87 Definition. Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$
\widehat T_n : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R},
$$

$$\widehat{T}_n(s,x) := \frac{[ns](n-[ns])}{n^2}\Big(\widehat{F}_n^{seq}(s,x) - \widehat{G}_n^{seq}(s,x)\Big),$$

und

$$\widehat{T}_n^z : [0,1]\times\overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R},$$
$$\widehat{T}_n^z(s,x) := \frac{[ns](n-[ns])}{n^2}\Big(\widehat{F}_n^{seq,z}(s,x) - \widehat{G}_n^{seq,z}(s,x)\Big).$$

3.88 Satz. Es gilt unter den Voraussetzungen von Satz 3.77

$$\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\widehat{T}_n(s,x) - T_n(s,x)\Big| = o_p(1/\sqrt{n}\,). \tag{3.89}$$

Beweis: Folgt aus Satz 3.77 wie in Bai (1994) beschrieben. Man beachte, dass dort in der dortigen Notation in T_n und in $\widehat{T}_n$ ein zusätzlicher Faktor $\sqrt{n}$ inklusive ist.

3.90 Proposition. Es gilt unter den Voraussetzungen von 3.77 und (2.3)

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\bigg|\widehat{T}_n^z(s,x) - &\\ \bigg(T_n(s,x) - \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big(\frac{n-[ns]}{n}1_{\{i\le[ns]\}} - \frac{[ns]}{n}1_{\{i>[ns]\}}\Big)e_i\,U(x)\bigg)\bigg|&\\ = o_p(1/\sqrt{n}\,).&\end{aligned} \tag{3.91}$$

Beweis: Folgt mit der Dreiecksungleichung aus (3.82) und (3.86), ähnlich wie beim Beweis von (2.54).

3.4 Entwicklung von $\hat{r}_n$ und $\hat{r}_n^z$

Sei in diesem Kapitel $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die es ein $v \in \mathbb{N}$ gibt mit $v \geq 2$, so dass K v-mal stetig differenzierbar ist und für alle $i,j \in \{1,2\}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(3.92)

(a) $E(K(e_1,e_2)^2) < \infty$ (e) $E(e_i^2K(e_1,e_2)^2) < \infty$

(b) $E(D_jK(e_1,e_2)^2) < \infty$ (f) $E(e_i^2D_jK(e_1,e_2)^2) < \infty$

(c) $E(|D_1^uD_2^wK(e_1,e_2)|) < \infty$ (g) $E(|e_iD_1^uD_2^wK(e_1,e_2)|) < \infty$
für alle $u,w \in \mathbb{N}_0$ mit $2 \le u+w \le v-1$

(d) es gibt ein $K_0 > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $E(|e_1|^m) < \infty$,
sodass für alle $u,w \in \mathbb{N}_0$ mit $u+w = v$ gilt:
$|D_1^uD_2^wK(x,y)| \le K_0(1+|x|^{m-1}+|y|^{m-1})$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$.

Hierbei bezeichnet D_i die partielle Ableitung nach der i-ten Komponente. Die Voraussetzung (d) kann man auch als „$|D_1^u D_2^w K(x,y)| = O(\|(x,y)\|^{m-1})$ für alle $u, w \in \mathbb{N}_0$ mit $u + w = v$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $E(|e_1|^m) < \infty$“ schreiben.
Für eine Menge $\mathbb{M} = \mathbb{N}$ oder $\mathbb{M} = \mathbb{N}_0$ und eine Folge von Zufallsvariablen $(X_{ni})_{i\in\mathbb{M},n\in\mathbb{N}}$ betrachten wir folgende Beschränktheitsbedingung:

(3.93) Es gilt $X_{ni} \geq 0$ für alle $i \in \mathbb{M}$ und $n \in \mathbb{N}$, und es gibt reelle Zahlen $C > 0$, $\alpha > 0$ und $\beta \geq 0$ mit

$$P(X_{ni} \geq K) \leq C\frac{i^\beta + 1}{K^\alpha} \qquad \begin{array}{l}\text{für alle } K > 0,\\ \text{für alle } i \in \mathbb{M} \text{ und } n \in \mathbb{N}.\end{array}$$

Diese Bedingung läuft darauf hinaus, dass eine L_p-Norm von X_{ni} unabhängig von n nur so schnell wie eine Potenz von i wächst. Schranken von genau dieser Art für die Wahrscheinlichkeiten werden von den verwendeten stochastischen Ungleichungen geliefert, und führen jeweils zum gewünschten Ergebnis.
Im Beweis der nächsten Proposition verwenden wir folgenden, auch unter dem Namen „C_r-Ungleichung“ oder „Loève-Ungleichung“ bekannten Satz:

3.94 Satz. Für alle $r \geq 0$ gibt es eine Zahl $C_r \in \mathbb{R}$, $C_r > 0$, sodass

$$(x+y)^r \leq C_r(x^r + y^r) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \text{ mit } x, y \geq 0.$$

Im Fall $r \in [0,1]$ ist $C_r = 1$ die optimale (kleinste) Konstante, für $r \geq 1$ ist $C_r = 2^{r-1}$ optimal (insbesondere $C_2 = 2$).

Beweis: Siehe zum Beispiel Davidson (1994), 9.28. Die Behauptung gilt auch für $r < 0$, allerdings muß man dann für die Wohldefiniertheit von x^r und y^r natürlich $x, y > 0$ voraussetzen. In diesem Fall ist wieder $C_r = 2^{r-1}$ die optimale Wahl.

3.95 Proposition. Sei $\mathbb{M} \in \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0\}$, seien $(X_{ni})_{i\in\mathbb{M},n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_{ni})_{i\in\mathbb{M},n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Zufallsvariablen, welche (3.93) erfüllen, sei $(Z_{ni})_{i\in\mathbb{M},n\in\mathbb{N}}$ eine weitere Folge von Zufallsvariablen, für die $0 \leq Z_{ni} \leq X_{ni}$ für alle $i \in \mathbb{M}, n \in \mathbb{N}$ gilt, und sei $a \in (0,1)$. Dann gelten

$$(X_{ni} + Y_{ni})_{i\in\mathbb{M},n\in\mathbb{N}} \text{ erfüllt (3.93),} \tag{3.96}$$

$$(Z_{ni})_{i\in\mathbb{M},n\in\mathbb{N}} \text{ erfüllt (3.93),} \tag{3.97}$$

$$\Big(\sum_{j=i}^{\infty} a^{j-i} X_{nj+1}\Big)_{i\in\mathbb{N}_0,n\in\mathbb{N}} \text{ erfüllt (3.93),} \tag{3.98}$$

$$\sum_{i\in\mathbb{M}} a^i X_{ni} = O_p(1). \tag{3.99}$$

Beweis: Seien $\mathbb{M}$, $(X_{ni})_{i\in\mathbb{M},n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_{ni})_{i\in\mathbb{M},n\in\mathbb{N}}$ wie oben angegeben. Es gibt also reelle Zahlen $C, C', \alpha, \alpha' > 0$ und $\beta, \beta' \geq 0$ mit

$$P\Big(X_{ni} \geq K\Big) \leq C\frac{i^\beta + 1}{K^\alpha} \text{ für alle } K > 0,\ i \in \mathbb{M} \text{ und } n \in \mathbb{N}$$

und

$$P\Big(Y_{ni} \geq K\Big) \leq C'\frac{i^{\beta'} + 1}{K^{\alpha'}} \text{ für alle } K > 0,\ i \in \mathbb{M} \text{ und } n \in \mathbb{N}.$$

Dann gilt für alle $K \geq 1$ und $i \in \mathbb{M}$, $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&P\Big(X_{ni} + Y_{ni} \geq K\Big) \\
&\leq\ P\Big(X_{ni} \geq K/2\Big) + P\Big(Y_{ni} \geq K/2\Big) \\
&\leq\ 2^\alpha C\frac{i^\beta + 1}{K^\alpha} + 2^{\alpha'} C\frac{i^{\beta'} + 1}{K^{\alpha'}} \\
&\leq\ 2^{\alpha\vee\alpha'}(C + C')\frac{i^{\beta\vee\beta'} + 2}{K^{\alpha\wedge\alpha'}} \\
&\leq\ 2^{(\alpha\vee\alpha')+1}(C + C' + 1)\frac{i^{\beta\vee\beta'} + 1}{K^{\alpha\wedge\alpha'}}.
\end{aligned}$$

Hier steht $a \vee b$ für das Maximum und $a \wedge b$ für das Minimum von $a, b \in \mathbb{R}$. Wir beachten, dass der letzte Ausdruck auch im Falle $K \in (0,1)$ die erste Wahrscheinlichkeit trivialerweise nach oben abschätzt. Damit folgt (3.96).
Aussage (3.97) ist unmittelbar klar.
Sei $a \in (0,1)$. Mit Beachtung von $\sum_{i=0}^\infty a^{i/2} = \frac{1}{1-a^{1/2}}$ und nach der C_r-Ungleichung 3.94, welche wir mit $r = \beta$ einsetzen, ist für alle $K > 0$, $i \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
&P\Big(\sum_{j=i}^\infty a^{j-i} X_{nj+1} \geq K\Big) \\
&=\ P\Big(\sum_{j=0}^\infty a^j X_{nj+i+1} \geq K\Big) \\
&\leq\ \sum_{j=0}^\infty P\Big(a^{j/2} X_{nj+i+1} \geq (1 - a^{1/2})K\Big) \\
&\leq\ \sum_{j=0}^\infty C\frac{a^{\alpha j/2}}{(1 - a^{1/2})^\alpha}\frac{(j + i + 1)^\beta + 1}{K^\alpha} \\
&\leq\ \sum_{j=0}^\infty C\frac{a^{\alpha j/2}}{(1 - a^{1/2})^\alpha}\frac{C_\beta((j + 1)^\beta + i^\beta) + 1}{K^\alpha} \\
&\leq\ \Big(\sum_{j=0}^\infty a^{\alpha j/2}(j + 1)^\beta + \sum_{j=0}^\infty a^{\alpha j/2}\Big)\frac{CC_\beta}{(1 - a^{1/2})^\alpha}\ \frac{i^\beta + 1}{K^\alpha},
\end{aligned}$$

wobei $C_\beta \geq 1$ die aus der C_r-Ungleichung stammende reelle Konstante ist. Beide Reihen konvergieren, die zweite da es sich um eine geometrische Reihe handelt und die erste zum Beispiel nach dem Quotientenkriterium. Weil diese obere Schranke von der Form wie in (3.93) ist, folgt (3.98).
Eine ähnliche Rechnung zeigt

$$\begin{aligned} & P\Big(\sum_{i \in \mathbb{M}} a^i X_{ni} \geq K \Big) \\ \leq \quad & \Big(\sum_{i=0}^{\infty} a^{\alpha i/2} i^\beta + \sum_{i=0}^{\infty} a^{\alpha i/2} \Big) \frac{C}{(1-a^{1/2})^\alpha} \frac{1}{K^\alpha}, \end{aligned}$$

woraus genau wie oben (3.99) folgt.

3.100 Proposition. Seien $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelfunktionen, so dass $E(L(e_1, e_2)^2) < \infty$, $E(f(e_1)) = 0$ und $E(f(e_1)^2) < \infty$ sind. Sei $\{\mathbb{S}, \mathbb{L}\} = \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0\}$. Dann erfüllt

$$\Big(n^{-3/2} \max_{1 \leq k \leq n-1} \Big| \sum_{i=(k \vee l)+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j) f(e_{i-l-s}) \Big| \Big)_{l \in \mathbb{L}, n \in \mathbb{N}}$$

für alle $s \in \mathbb{S}$ die Beschränktheitsbedingung (3.93), wobei wir $(e_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ als unabhängig und identisch verteilt annehmen, also einfach noch zusätzliche Fehlervariablen mit negativen Indizes zugefügt wurden.

Beweis: Für alle $l \in \mathbb{N}_0$ und $k = 1, \ldots, n-1$ gilt

$$\sum_{i=(k \vee l)+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \ldots = \sum_{1 \leq j \leq k < i \leq n} \ldots - \sum_{1 \leq j \leq k < i \leq (l \wedge n)} \ldots$$

und weiter für $k = 1, \ldots, n-1$, genau wie im Beweis von Proposition 2.56,

$$\sum_{1 \leq j \leq k < i \leq n} \ldots = \sum_{1 \leq j < i \leq n} \ldots - \sum_{1 \leq j < i \leq k} \ldots - \sum_{k < j < i \leq n} \ldots,$$

wobei die Punkte „...“ jeweils für einen beliebigen von i und j abhängenden Ausdruck stehen.
Also ist für alle $l \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq n-1} \Big| \sum_{i=(k \vee l)+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \ldots \Big| \\ \leq \quad & 2 \max_{1 \leq k \leq n} \Big| \sum_{1 \leq j < i \leq k} \ldots \Big| + \max_{1 \leq k \leq n-1} \Big| \sum_{k < j < i \leq n} \ldots \Big| \\ & + \max_{1 \leq k \leq l \wedge n} \Big| \sum_{1 \leq j \leq k < i \leq (l \wedge n)} \ldots \Big|. \end{aligned}$$

Es folgt für alle $l \in \mathbb{L}$ und $s \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned}
& n^{-3/2} \max_{1 \le k \le n-1} \Big| \sum_{i=(k\vee l)+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j) f(e_{i-l-s}) \Big| \\
\le \quad & 2n^{-3/2} \max_{1 \le k \le n} \Big| \sum_{1 \le j < i \le k} L(e_i, e_j) f(e_{i-l-s}) \Big| \\
& + n^{-3/2} \max_{1 \le k \le n-1} \Big| \sum_{k < j < i \le n} L(e_i, e_j) f(e_{i-l-s}) \Big| \\
& + n^{-3/2} \max_{1 \le k \le l \wedge n} \Big| \sum_{1 \le j \le k < i \le (l \wedge n)} L(e_i, e_j) f(e_{i-l-s}) \Big| \\
=: \quad & 2I^s_{l,n} + I\!I^s_{l,n} + I\!I\!I^s_{l,n},
\end{aligned}$$

und wegen (3.96) und (3.97) ist es ausreichend für alle $s \in \mathbb{S}$ zu zeigen, dass $(I^s_{l,n})_{l \in \mathbb{L}, n \in \mathbb{N}}$, $(I\!I^s_{l,n})_{l \in \mathbb{L}, n \in \mathbb{N}}$ und $(I\!I\!I^s_{l,n})_{l \in \mathbb{L}, n \in \mathbb{N}}$ die Bedingung (3.93) erfüllen.
Sei für $k, l \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
A_l &:= \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \{1, \dots, l\} + 2ml := \bigcup_{m \in \mathbb{N}_0} \{1 + 2ml, \dots, (2m+1)l\}, \\
B_l &:= \mathbb{N} \setminus A_l, \\
\mathcal{F}^l_k &:= \sigma\Big(e_i : i \in (\{1, \dots, k\} \cap A_l) \cup \{1-l, \dots, k-l\}\Big), \\
\mathcal{G}^l_k &:= \sigma\Big(e_i : i \in (\{1, \dots, k\} \cap B_l) \cup \{1-l, \dots, k-l\}\Big), \\
S^l_k &:= \sum_{\substack{1 \le j < i \le k \\ i \in A_l, j < i-l}} L(e_i, e_j) f(e_{i-l}), \\
T^l_k &:= \sum_{\substack{1 \le j < i \le k \\ i \in B_l, j < i-l}} L(e_i, e_j) f(e_{i-l})
\end{aligned}$$

und

$$R^l_k := \sum_{\substack{1 \le j < i \le k \\ j \ge i-l}} L(e_i, e_j) f(e_{i-l}).$$

Dann sind für alle $l \in \mathbb{N}$ $(S^l_k, \mathcal{F}^l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $(T^l_k, \mathcal{G}^l_k)_{k \in \mathbb{N}}$ adaptiert und darüber hinaus Martingale, wie nachstehende beispielhaft für die erste Folge ausgeführte Rechnung zeigt: für alle $k \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned}
E(S^l_{k+1} | \mathcal{F}^l_k) \quad = \quad & \sum_{\substack{1 \le j < i \le k \\ i \in A_l, j < i-l}} E\Big(L(e_i, e_j) f(e_{i-l}) \Big| \mathcal{F}^l_k\Big) \\
& + \sum_{\substack{1 \le j < i = k+1 \\ i \in A_l, j < i-l}} E\Big(L(e_i, e_j) f(e_{i-l}) \Big| \mathcal{F}^l_k\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{\substack{1\le j<i\le k\\ i\in A_l, j<i-l}} L(e_i,e_j)f(e_{i-l}) \\
&\quad + \sum_{\substack{1\le j\le k\\ k+1\in A_l, j<k+1-l}} E\Big(L(e_{k+1},e_j)\Big|\mathcal{F}_k^l\Big)E\Big(f(e_{k+1-l})\Big) \\
&= S_k^l + 0,
\end{aligned}
$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen bei der zweiten Summe ausgenutzt haben, dass wegen $k+1-l \notin A_l$ und $k+1-l > j$ der Faktor $f(e_{k+1-l})$ unabhängig von $L(e_{k+1},e_j)$ ist. Wir erhalten, dass $(S_k^l, \mathcal{F}_k^l)_{k\in\mathbb{N}}$ ein Martingal ist. Es gilt für alle $l \in \mathbb{L}$ und $s \in \mathbb{S}$ (beachte $l+s>0$)

$$
I_{l,n}^s \le n^{-3/2} \max_{1\le k\le n} |S_k^{l+s}| + n^{-3/2} \max_{1\le k\le n} |T_k^{l+s}| + n^{-3/2} \max_{1\le k\le n} |R_k^{l+s}|,
$$

und wenn diese drei Summanden die Bedingung (3.93) erfüllen, dann erfüllt wegen (3.96) und (3.97) auch der Ausdruck $I_{l,n}^s$ die Bedingung (3.93).
Nach der Kolmogorovschen Ungleichung für Martingale ist für alle $K>0$, $l\in\mathbb{L}$ und $s\in\mathbb{S}$

$$
\begin{aligned}
&P\Big(n^{-3/2}\max_{1\le k\le n}|S_k^{l+s}| \ge K\Big) \\
&\le \frac{1}{K^2n^3}E\Big((S_n^{l+s})^2\Big) \\
&= \frac{1}{K^2n^3} \sum_{\substack{1\le j<i\le n\\ j<i-l-s\\ i\in A_{l+s}}} \sum_{\substack{1\le j'<i'\le n\\ j'<i'-l-s\\ i'\in A_{l+s}}} E\Big(L(e_i,e_j)L(e_{i'},e_{j'})f(e_{i-l-s})f(e_{i'-l-s})\Big) \\
&= \frac{1}{K^2n^3} \sum_{\substack{i=1\\ i\in A_{l+s}}}^{n} E(f(e_{i-l-s})^2) \sum_{j,j'=1}^{i-l-s-1} E\Big(L(e_i,e_j)L(e_i,e_{j'})\Big) \\
&\le \frac{1}{K^2n^3} \sum_{\substack{i=1\\ i\in A_{l+s}}}^{n} E(f(e_1)^2) \sum_{j,j'=1}^{i-l-s-1} E(L(e_1,e_2)^2) \\
&\le \frac{1}{K^2}E(f(e_1)^2)E(L(e_1,e_2)^2),
\end{aligned}
$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen beachten, dass im Falle $i>i'$ gilt $j,j' < i-l-s$ und $i' \ne i-l-s$, da $i,i' \in A_{l+s}$, das heißt dann ist e_{i-l-s} unabhängig vom übrigen Integranden und damit aufgrund des Satzes von Fubini und der Zentriertheit von $f(e_{i-l-s})$ der gesamte Summand Null, ebenso im Falle $i'>i$, wo dann $e_{i'-l-s}$ unabhängig ist. Beim nächsten Schritt wurde die Cauchy-Schwarz-Ungleichung zur Abschätzung des zweiten Erwartungswerts verwandt.

Eine fast gleiche Rechnung, bei der lediglich A_{l+s} durch B_{l+s} ersetzt ist, zeigt dass auch

$$\Big(n^{-3/2} \max_{1\le k\le n} |T_k^{l+s}|\Big)_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$$

für alle $s \in \mathbb{S}$ die Bedingung (3.93) erfüllt.

Außerdem ist nach der Markovungleichung für alle $s \in \mathbb{S}$ und $K > 0$

$$\begin{aligned}
&P\Big(n^{-3/2} \max_{1\le k\le n} |R_k^{l+s}| \ge K\Big)\\
&\le \; P\Big(n^{-3/2} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=i-l-s}^{i-1} |L(e_i,e_j) f(e_{i-l-s})| \ge K\Big)\\
&\le \; \frac{1}{Kn^{3/2}} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=i-l-s}^{i-1} E\Big(|L(e_i,e_j) f(e_{i-l-s})|\Big)\\
&\le \; \frac{1}{Kn^{3/2}} \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=i-l-s}^{i-1} E(L(e_i,e_j)^2)^{1/2} E(f(e_{i-l-s})^2)^{1/2}\\
&\le \; \frac{1}{Kn^{1/2}} (l+s) E(L(e_1,e_2)^2)^{1/2} E(f(e_1)^2)^{1/2}\\
&\le \; E(L(e_1,e_2)^2)^{1/2} E(f(e_1)^2)^{1/2} (s \vee 1)\, \frac{l+1}{K},
\end{aligned}$$

wobei wir beim drittletzten Ungleichheitszeichen wieder die Ungleichung von Cauchy-Schwarz benutzt haben. Es folgt, dass

$$\Big(n^{-3/2} \max_{1\le k\le n} |R_k^{l+s}|\Big)_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$$

und damit auch $\Big(I_{l,n}^s\Big)_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$ für alle $s \in \mathbb{S}$ die Bedingung (3.93) erfüllt.

Sei nun für $k, l \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}_k^l := \sigma\Big(e_i : i \in \{k+1, \ldots, n\}\Big)$$

und

$$U_k^l := \sum_{\substack{k<j<i\le n\\ i-l>j}} \Big(L(e_i,e_j) - E(L(e_i,e_j)|e_i)\Big) f(e_{i-l}).$$

Dann ist für alle $l \in \mathbb{N}$ $(U_k^l)_{k\in\mathbb{N}}$ an $(\mathcal{H}_k^l)_{k\in\mathbb{N}}$ adaptiert, und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$

$$\begin{aligned}
E(U_{k-1}^l|\mathcal{H}_k^l) \;&=\; \sum_{\substack{k<j<i\le n\\ i-l>j}} E\Big(\Big(L(e_i,e_j) - E(L(e_i,e_j)|e_i)\Big) f(e_{i-l}) \Big| \mathcal{H}_k^l\Big)\\
&\quad + \sum_{\substack{k<i\le n\\ i-l>k}} E\Big(L(e_i,e_k) - E(L(e_i,e_k)|e_i) \Big| e_i\Big) f(e_{i-l})\\
&=\; U_k^l + 0,
\end{aligned}$$

das heißt es handelt sich bei $(U_k^l, \mathcal{H}_k^l)_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ um ein inverses Martingal. Nun ist für alle $l \in \mathbb{L}$ und $s \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned}
I\!I^s_{l,n} \quad \leq \quad & n^{-3/2} \max_{1\leq k\leq n} \Big| \sum_{\substack{k<j<i\leq n\\ i-l-s\leq j}} L(e_i,e_j) f(e_{i-l-s}) \Big| \\
& + n^{-3/2} \max_{1\leq k\leq n} \Big| \sum_{\substack{k<j<i\leq n\\ i-l-s>j}} \Big(L(e_i,e_j) - E(L(e_i,e_j)|e_i)\Big) f(e_{i-l-s}) \Big| \\
& + n^{-3/2} \max_{1\leq k\leq n} \Big| \sum_{\substack{k<j<i\leq n\\ i-l-s>j}} E(L(e_i,e_j)|e_i) f(e_{i-l-s}) \Big| \\
=: \quad & I\!V^s_{l,n} + V^s_{l,n} + V\!I^s_{l,n}.
\end{aligned}$$

Nach der Markovungleichung ist für alle $K > 0$, $l \in \mathbb{L}$ und $s \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned}
& P(I\!V^s_{l,n} \geq K) \\
\leq \quad & P\Big(n^{-3/2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j+1}^{(j+l+s)\wedge n} |L(e_i,e_j) f(e_{i-l-s})| \geq K\Big) \\
\leq \quad & \frac{1}{Kn^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j+1}^{j+l+s} E\Big(|L(e_i,e_j) f(e_{i-l-s})|\Big) \\
\leq \quad & \frac{1}{Kn^{3/2}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=j+1}^{j+l+s} E(L(e_i,e_j)^2)^{1/2} E(f(e_{i-l-s})^2)^{1/2} \\
\leq \quad & \frac{1}{Kn^{1/2}} (l+s) E(L(e_1,e_2)^2)^{1/2} E(f(e_1)^2)^{1/2} \\
\leq \quad & E(L(e_1,e_2)^2)^{1/2} E(f(e_1)^2)^{1/2} (s \vee 1)\, \frac{l+1}{K},
\end{aligned}$$

wieder unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
Weiter ist nach der Kolmogorovschen Maximalungleichung für Martingale für alle $K > 0$, $l \in \mathbb{L}$ und $s \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned}
P(V^s_{l,n} \geq K) \quad = \quad & P\Big(n^{-3/2} \max_{1\leq k\leq n-1} |U_k^{l+s}| \geq K\Big) \\
\leq \quad & \frac{1}{K^2 n^3} E\Big((U_1^{l+s})^2\Big) \\
= \quad & \frac{1}{K^2 n^3} \sum_{\substack{1<j<i\leq n\\ i-l-s>j}} \sum_{\substack{1<j'<i'\leq n\\ i'-l-s>j'}} E\Big(\Big(L(e_i,e_j) - E(L(e_i,e_j)|e_i)\Big) f(e_{i-l-s}) \cdot \\
& \cdot \Big(L(e_{i'},e_{j'}) - E(L(e_{i'},e_{j'})|e_{i'})\Big) f(e_{i'-l-s})\Big) \\
= \quad & \frac{1}{K^2 n^3} \sum_{\substack{1<j<i\leq n\\ i-l-s>j}} \sum_{\substack{1<j'<i'\leq n\\ i'-l-s>j'\\ i=i'}} E\Big(\Big(L(e_i,e_j) - E(L(e_i,e_j)|e_i)\Big) f(e_{i-l-s}) \cdot \\
& \cdot \Big(L(e_{i'},e_{j'}) - E(L(e_{i'},e_{j'})|e_{i'})\Big) f(e_{i'-l-s})\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{K^2n^3}\sum_{\substack{1<j<i\le n\\ i-l-s>j}}\sum_{\substack{1<j'<i'\le n\\ i'-l-s>j'\\ i=i'-l-s\\ j'=i-l-s}} E\Big(\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_i,e_j)|e_i)\Big)f(e_{i-l-s})\cdot\\
&\qquad\qquad\qquad\cdot\Big(L(e_{i'},e_{j'})-E(L(e_{i'},e_{j'})|e_{i'})\Big)f(e_{i'-l-s})\Big)\\
&+\frac{1}{K^2n^3}\sum_{\substack{1<j<i\le n\\ i-l-s>j}}\sum_{\substack{1<j'<i'\le n\\ i'-l-s>j'\\ i'=i-l-s\\ j=i'-l-s}} E\Big(\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_i,e_j)|e_i)\Big)f(e_{i-l-s})\cdot\\
&\qquad\qquad\qquad\cdot\Big(L(e_{i'},e_{j'})-E(L(e_{i'},e_{j'})|e_{i'})\Big)f(e_{i'-l-s})\Big)\\
=\;&\frac{1}{K^2n^3}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j,j'=2}^{i-l-s-1}E\Big(\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_i,e_j)|e_i)\Big)\cdot\\
&\qquad\cdot\Big(L(e_i,e_{j'})-E(L(e_i,e_{j'})|e_i)\Big)\Big)\,E\Big(f(e_{i-l-s})^2\Big)\\
&+2\,\frac{1}{K^2n^3}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j'=2}^{i-2l-2s-1}E\Big(\Big(L(e_i,e_{i-2l-2s})-E(L(e_i,e_{i-2l-2s})|e_i)\Big)f(e_{i-l-s})\cdot\\
&\qquad\cdot\Big(L(e_{i-l-s},e_{j'})-E(L(e_{i-l-s},e_{j'})|e_{i-l-s})\Big)f(e_{i-2l-2s})\Big)\\
\le\;&\frac{1}{K^2n^3}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j,j'=2}^{i-l-s-1}E\Big(\Big(L(e_1,e_2)-E(L(e_1,e_2)|e_1)\Big)^2\Big)E\Big(f(e_1)^2\Big)\\
&+2\,\frac{1}{K^2n^3}\sum_{i=2}^{n}\sum_{j'=2}^{i-l-s-1}E\Big(\Big(L(e_1,e_2)-E(L(e_1,e_2)|e_1)\Big)^2f(e_3)^2\Big)\\
\le\;&\frac{1}{K^2}\Big(1+\frac{2}{n}\Big)E\Big(\mathrm{Var}(L(e_1,e_2)|e_1)\Big)E(f(e_1)^2)\\
\le\;&3\,E(L(e_1,e_2)^2)E(f(e_1)^2)\,\frac{1}{K^2},
\end{aligned}
$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen alle Summanden weggelassen haben, in deren Integrand e_{i-l-s} oder $e_{i'-l-s}$ unabhängig von den anderen Zufallsvariablen im Integranden ist, so dass nach dem Satz von Fubini und wegen der Zentriertheit von $f(e_{i-l-s})$ und $f(e_{i'-l-s})$ der ganze Summand Null ist, und beim nächsten Schritt dann die beiden letzten Summen zusammengefasst haben. Danach folgte beide Male die Cauchy-Schwarz-Ungleichung und im letzten Schritt die Jensensche Ungleichung. Damit haben wir erhalten, dass $(V^s_{l,n})_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$ für alle $s\in\$$ die Bedingung (3.93) erfüllt.
Kommen wir nun zu $VI^s_{l,n}$. Es gilt für alle $s\in\$$ und $l\in\mathbb{L}$

$$
\begin{aligned}
VI^s_{l,n} &= n^{-3/2}\max_{1\le k\le n-1}\Big|\sum_{i=l+s+2+k}^{n}(i-k-l-s-1)E(L(e_i,e_1)|e_i)f(e_{i-l-s})\Big|\\
&\le n^{-3/2}\max_{1\le k\le n-1}k\Big|\sum_{\substack{i=l+s+2+k\\ i\in A_{l+s}}}^{n}E(L(e_i,e_1)|e_i)f(e_{i-l-s})\Big|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + n^{-3/2} \max_{1\le k\le n-1} k \Big| \sum_{\substack{i=l+s+2+k \\ i\in B_{l+s}}}^{n} E(L(e_i,e_1)|e_i) f(e_{i-l-s}) \Big| \\
&\quad + n^{-3/2} \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{\substack{i=l+s+2+k \\ i\in A_{l+s}}}^{n} (i-l-s-1) E(L(e_i,e_1)|e_i) f(e_{i-l-s}) \Big| \\
&\quad + n^{-3/2} \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{\substack{i=l+s+2+k \\ i\in B_{l+s}}}^{n} (i-l-s-1) E(L(e_i,e_1)|e_i) f(e_{i-l-s}) \Big| \\
&=: \mathit{VII}^{s,A}_{l,n} + \mathit{VII}^{s,B}_{l,n} + \mathit{VIII}^{s,A}_{l,n} + \mathit{VIII}^{s,B}_{l,n}.
\end{aligned}
$$

Nach der Kolmogorovschen Maximalungleichung für unabhängige Summanden ist für alle $K > 0$

$$
\begin{aligned}
&P(\mathit{VII}^{s,A}_{l,n} \ge K) \\
&\le P\bigg(\max_{1\le k\le n} \Big| \sum_{\substack{i=l+s+2+k \\ i\in A_{l+s}}}^{n} E(L(e_i,e_1)|e_i) f(e_{i-l-s}) \Big| \ge K n^{1/2} \bigg) \\
&\le \frac{1}{K^2 n} \sum_{\substack{i=l+s+3 \\ i\in A_{l+s}}}^{n} E\Big(E(L(e_i,e_1)|e_i)^2 f(e_{i-l-s})^2 \Big) \\
&\le \frac{1}{K^2} E(L(e_1,e_2)^2) E(f(e_1)^2),
\end{aligned}
$$

beim letzten Schritt mit der Jensenschen Ungleichung. Indem man in der Rechnung einfach A_{l+s} durch B_{l+s} ersetzt, erhält man analog, dass $(\mathit{VII}^{s,B}_{l,n})_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$ die Beschränktheitsbedingung (3.93) erfüllt.
Mit fast der gleichen Rechnung sehen wir

$$
\begin{aligned}
&P(\mathit{VIII}^{s,A}_{l,n} \ge K) \\
&\le \frac{1}{K^2 n^3} \sum_{\substack{i=l+s+3 \\ i\in A_{l+s}}}^{n} E\Big((i-l-s-1)^2 E(L(e_i,e_1)|e_i)^2 f(e_{i-l-s})^2 \Big) \\
&\le \frac{1}{K^2 n} \sum_{\substack{i=l+s+3 \\ i\in A_{l+s}}}^{n} E(E(L(e_i,e_1)|e_i)^2) E(f(e_{i-l-s})^2) \\
&\le \frac{1}{K^2} E(L(e_1,e_2)^2) E(f(e_1)^2),
\end{aligned}
$$

und wieder analog für $(\mathit{VIII}^{s,B}_{l,n})_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$.
Es folgt, dass $(\mathit{VI}^{s}_{l,n})_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $(\mathit{II}^{s}_{l,n})_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$ für alle $s \in \mathbb{S}$ die Bedingung (3.93) erfüllen.

Schließlich ist für alle $K > 0$, $s \in \mathbb{S}$ und $l \in \mathbb{L}$

$$\begin{aligned}
&P(\mathit{III}_{l,n}^{s} \geq K) \\
\leq\ & P\Big(\sum_{i=2}^{l\wedge n}\sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j) f(e_{i-l-s})| \geq K\Big) \\
\leq\ & \frac{1}{K}\sum_{i=2}^{l\wedge n}\sum_{j=1}^{i-1} E\Big(|L(e_i, e_j) f(e_{i-l-s})|\Big) \\
\leq\ & \frac{1}{K}\sum_{i=2}^{l\wedge n}\sum_{j=1}^{i-1} E(L(e_i, e_j)^2)^{1/2} E(f(e_{i-l-s})^2)^{1/2} \\
\leq\ & E(L(e_1, e_2)^2)^{1/2} E(f(e_1)^2)^{1/2}\, \frac{l^3+1}{K}
\end{aligned}$$

nach der Markov- und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
Dies bedeutet, auch $(\mathit{III}_{l,n}^{s})_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$ erfüllt für alle $s \in \mathbb{S}$ die Beschränktheitsbedingung (3.93), und schließt damit den Beweis ab.

3.101 Folgerung. Es seien $a, b \in (0, 1)$, wieder $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen, sowie $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelfunktionen mit $E(L(e_1, e_2)^2) < \infty$, $E(f(e_1)^2) < \infty$ und $E(f(e_1)) = 0$.
Dann gilt für alle $s \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l=0}^{n-1} a^l \max_{1\leq k\leq n-1}\Big|\sum_{i=(k\vee l)+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j) f(e_{i-l-s})\Big| = O_p(n^{3/2}) \tag{3.102}$$

und für alle $s \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}\sum_{l=0}^{n-1} a^l \sum_{m=l}^{n-2} b^{m-l} \max_{1\leq k\leq n-1}\Big|\sum_{i=(k+1)\vee(m+2)}^{n}\sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j) f(e_{i-m-1-s})\Big| \\ = O_p(n^{3/2}).\end{aligned} \tag{3.103}$$

Beweis: Aussage (3.102) folgt mit (3.99) aus Proposition 3.100, und (3.103) folgt mit (3.98) und (3.99) aus Proposition 3.100.

3.104 Proposition. Seien $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelfunktionen, so dass $E(L(e_1, e_2)^2) < \infty$, $E(f(e_1)) = 0$ und $E(f(e_1)^2) < \infty$ sind, und sei $\{\mathbb{S}, \mathbb{L}\} = \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0\}$. Dann erfüllt

$$\left(n^{-3/2} \max_{l+1\leq k\leq n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=l+1}^{k} L(e_i, e_j) f(e_{j-l-s})\Big|\right)_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$$

für alle $s \in \mathbb{S}$ die Beschränktheitsbedingung (3.93), wobei wir wieder $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ als unabhängig und identisch verteilt annehmen.

Beweis: Für alle $l \in \mathbb{L}$ und $k \in \mathbb{N}$ mit $l < k < n$ gilt

$$\sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=l+1}^{k} \ldots = \sum_{l+1 \leq j < i \leq n} \ldots - \sum_{k < j < i \leq n} \ldots - \sum_{l+1 \leq j < i \leq k} \ldots ,$$

also für alle $l \in \mathbb{L}$ und $s \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned}
& n^{-3/2} \max_{l+1 \leq k \leq n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=l+1}^{k} L(e_i, e_j) f(e_{j-l-s}) \Big| \\
\leq \;& 2n^{-3/2} \max_{l+1 \leq k \leq n} \Big| \sum_{l+1 \leq j < i \leq k} L(e_i, e_j) f(e_{j-l-s}) \Big| \\
& + n^{-3/2} \max_{l+1 \leq k \leq n} \Big| \sum_{k < j < i \leq n} L(e_i, e_j) f(e_{j-l-s}) \Big| \\
=: \;& 2I^s_{l,n} + I\!I^s_{l,n}.
\end{aligned}$$

Sei für $l \in \mathbb{L}$, $s \in \mathbb{S}$ und $k \in \mathbb{N}$, $k > l$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}^s_k &:= \sigma(e_i : i \in \{1-s, \ldots, k\}), \\
S^{l,s}_k &:= \sum_{l+1 \leq j < i \leq k} \Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_i, e_j)|e_j) \Big) f(e_{j-l-s}).
\end{aligned}$$

Dann ist für alle $l \in \mathbb{L}$ und $s \in \mathbb{S}$ die Folge der Zufallsvariablen $(S^{l,s}_k)_{k-l \in \mathbb{N}}$ an die Filtration $(\mathcal{F}^s_k)_{k-l \in \mathbb{N}}$ adaptiert, und für $k \in \mathbb{N}$ mit $k > l$ gilt

$$\begin{aligned}
E(S^{l,s}_{k+1}|\mathcal{F}^s_k) &= \sum_{l+1 \leq j < i \leq k} E\Big((L(e_i, e_j) - E(L(e_i, e_j)|e_j) f(e_{j-l-s}) \Big| e_i, e_j, e_{j-l-s} \Big) \\
& \quad + \sum_{j=l+1}^{k} E\Big(L(e_{k+1}, e_j) - E(L(e_{k+1}, e_j)|e_j) \Big| e_j \Big) f(e_{j-l-s}) \\
&= S^{l,s}_k + 0,
\end{aligned}$$

also ist $(S^{l,s}_k, \mathcal{F}^s_k)_{k-l \in \mathbb{N}}$ für alle $l \in \mathbb{L}$ und $s \in \mathbb{S}$ ein Martingal.
Nun gilt

$$\begin{aligned}
I^s_{l,n} &\leq n^{-3/2} \max_{l+1 \leq k \leq n} \Big| \sum_{l+1 \leq j < i \leq k} \Big(L(e_i, e_j) - E(L(e_i, e_j)|e_j) \Big) f(e_{j-l-s}) \Big| \\
& \quad\; n^{-3/2} \max_{l+1 \leq k \leq n} \Big| \sum_{l+1 \leq j < i \leq k} E(L(e_i, e_j)|e_j) f(e_{j-l-s}) \Big| \\
&=: I\!I\!I^s_{l,n} + I\!V^s_{l,n},
\end{aligned}$$

und nach der Kolmogorovschen Maximalungleichung für Martingale ist für alle $s \in \mathbb{S}$, $l \in \mathbb{L}$ und $K > 0$

$$P(I\!I\!I^s_{l,n} \geq K) = P\Big(\max_{l+1 \leq k \leq n} |S^{l,s}_k| \geq K n^{3/2} \Big)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{1}{K^2 n^3} E\Big((S_n^{l,s})^2\Big) \\
&= \frac{1}{K^2 n^3} \sum_{\substack{l+1\leq j<i\leq n \\ l+1\leq j'<i'\leq n}} E\Big(\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_i,e_j)|e_j)\Big)f(e_{j-l-s})\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\Big(L(e_{i'},e_{j'})-E(L(e_{i'},e_{j'})|e_{j'})\Big)f(e_{j'-l-s})\Big) \\
&= \frac{1}{K^2 n^3} \sum_{l+1\leq j<i,i'\leq n} E\Big(\Big(L(e_i,e_j)-E(L(e_i,e_j)|e_j)\Big)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\Big(L(e_{i'},e_j)-E(L(e_{i'},e_j)|e_j)\Big)\Big)\, E\Big(f(e_{j-l-s})^2\Big) \\
&\leq \frac{1}{K^2 n^3} \sum_{l+1\leq j<i,i'\leq n} E\Big(\Big(L(e_1,e_2)-E(L(e_1,e_2)|e_2)\Big)^2\Big)\, E\Big(f(e_1)^2\Big) \\
&\leq \frac{1}{K^2 n^3} (n-l)^3 E\Big(\mathrm{Var}(L(e_1,e_2)|e_2)\Big) E(f(e_1)^2) \\
&\leq \frac{1}{K^2} E(L(e_1,e_2)^2) E(f(e_1)^2),
\end{aligned}
$$

nach dem Satz von Fubini und aufgrund der Zentriertheit von $f(e_1)$, dann mit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und schließlich unter Verwendung der Jensenschen Ungleichung.
Also genügt $(\mathit{III}_{l,n}^s)_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$ für alle $s \in \mathbb{S}$ der Bedingung (3.93).
Seien für $l \in \mathbb{N}$ die Mengen A_l, B_l wie im Beweis von Proposition 3.100 auf Seite 81 gewählt. Dann ist

$$
\begin{aligned}
\mathit{IV}_{l,n}^s &= n^{-3/2} \max_{l+1\leq k\leq n} \Big| \sum_{j=l+1}^{k-1} (k-j) E(L(e_n,e_j)|e_j) f(e_{j-l-s}) \Big| \\
&\leq n^{-3/2} \max_{l+1\leq k\leq n} k \Big| \sum_{\substack{j=l+1 \\ j\in A_{l+s}}}^{k-1} E(L(e_n,e_j)|e_j) f(e_{j-l-s}) \Big| \\
&\quad + n^{-3/2} \max_{l+1\leq k\leq n} k \Big| \sum_{\substack{j=l+1 \\ j\in B_{l+s}}}^{k-1} E(L(e_n,e_j)|e_j) f(e_{j-l-s}) \Big| \\
&\quad + n^{-3/2} \max_{l+1\leq k\leq n} \Big| \sum_{\substack{j=l+1 \\ j\in A_{l+s}}}^{k-1} j\, E(L(e_n,e_j)|e_j) f(e_{j-l-s}) \Big| \\
&\quad + n^{-3/2} \max_{l+1\leq k\leq n} \Big| \sum_{\substack{j=l+1 \\ j\in B_{l+s}}}^{k-1} j\, E(L(e_n,e_j)|e_j) f(e_{j-l-s}) \Big| \\
&=: V_{l,n}^{s,A} + V_{l,n}^{s,B} + \mathit{VI}_{l,n}^{s,A} + \mathit{VI}_{l,n}^{s,B},
\end{aligned}
$$

und nach der Kolmogorovschen Maximalungleichung für unabhängige Summanden ist für $K > 0$

$$\begin{aligned}
&P(V_{l,n}^{s,A} \geq K) \\
&\leq P\Big(\max_{l+1 \leq k \leq n} \Big| \sum_{\substack{j=l+1 \\ j \in A_{l+s}}}^{k-1} E(L(e_n, e_j)|e_j) f(e_{j-l-s}) \Big| \geq K n^{1/2}\Big) \\
&\leq \frac{1}{K^2 n} \sum_{\substack{j=l+1 \\ j \in A_{l+s}}}^{n-1} E\Big(E(L(e_n, e_j)|e_j)^2 f(e_{j-l-s})^2\Big) \\
&\leq \frac{1}{K^2 n} \sum_{\substack{j=l+1 \\ j \in A_{l+s}}}^{n-1} E(L(e_n, e_1)^2) E(f(e_1)^2) \\
&\leq \frac{1}{K^2} E(L(e_1, e_2)^2) E(f(e_1)^2),
\end{aligned}$$

wobei beim vorletzten Ungleichheitszeichen die Jensensche Ungleichung benutzt wurde.
Wir haben also, dass $(V_{l,n}^{s,A})_{l \in \mathbb{L}, n \in \mathbb{N}}$ und analog auch $(V_{l,n}^{s,B})_{l \in \mathbb{L}, n \in \mathbb{N}}$ die Bedingung (3.93) erfüllt.
Ähnlich ist

$$\begin{aligned}
&P(VI_{l,n}^{s,A} \geq K) \\
&\leq \frac{1}{K^2 n^3} \sum_{\substack{j=l+1 \\ j \in A_{l+s}}}^{n-1} E\Big(j^2 E(L(e_n, e_j)|e_j)^2 f(e_{j-l-s})^2\Big) \\
&\leq \frac{1}{K^2 n} \sum_{\substack{j=l+1 \\ j \in A_{l+s}}}^{n-1} E(L(e_1, e_2)^2) E(f(e_1)^2) \\
&\leq \frac{1}{K^2} E(L(e_1, e_2)^2) E(f(e_1)^2),
\end{aligned}$$

und genauso folgt auch, dass $(VI_{l,n}^{s,A})_{l \in \mathbb{L}, n \in \mathbb{N}}$ die Bedingung (3.93) erfüllt. Zusammengenommen ergibt dies, dass $(IV_{l,n}^{s})_{l \in \mathbb{L}, n \in \mathbb{N}}$ und damit auch $(I_{l,n}^{s})_{l \in \mathbb{L}, n \in \mathbb{N}}$ die genannte Beschränktheitsbedingung erfüllen. Kommen wir daher zu $II_{l,n}^{s}$.
Sei für $k \in \mathbb{N}$ und $l \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{G}_k^l := \sigma(e_i : i \in \{k - l + 1, \ldots, n\})$$

und

$$T_k^l := \sum_{k < j < i \leq n} L(e_i, e_j) f(e_{j-l})$$

Dann ist für alle $l \in \mathbb{L}$ $(T_k^l)_{k\in\mathbb{N}}$ an $(\mathcal{G}_k^l)_{k\in\mathbb{N}}$ adaptiert, und es gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $k > 1$

$$\begin{aligned} E(T_{k-1}^l|\mathcal{G}_k^l) &= \sum_{k<j<i\leq n} E\Big(L(e_i,e_j)f(e_{j-l})\Big|e_{k-l+1},\ldots,e_n\Big) \\ &\quad + \sum_{i=k+1}^{n} E\Big(L(e_i,e_k)f(e_{k-l})\Big|e_i,e_k\Big) \\ &= T_k^l + 0, \end{aligned}$$

also ist $(T_k^l,\mathcal{G}_k^l)_{k\in\mathbb{N}}$ für alle $l \in \mathbb{N}$ ein inverses Martingal.
Es folgt mit der Kolmogorovschen Maximalungleichung in ihrer Form für Martingale für alle $l \in \mathbb{L}$ und $s \in \mathbb{S}$

$$\begin{aligned} P(I\!I_{l,n}^s \geq K) &= P\Big(\max_{l+1\leq k\leq n}|T_k^{l+s}| \geq Kn^{3/2}\Big) \\ &\leq \frac{1}{K^2n^3}E\Big((T_{l+1}^{l+s})^2\Big) \\ &= \frac{1}{K^2n^3}\sum_{\substack{l+1<j<i\leq n\\ l+1<j'<i'\leq n}} E\Big(L(e_i,e_j)f(e_{j-l-s})L(e_{i'},e_{j'})f(e_{j'-l-s})\Big) \\ &= \frac{1}{K^2n^3}\sum_{l+1<j<i,i'\leq n} E\Big(L(e_i,e_j)L(e_{i'},e_j)\Big)\,E\Big(f(e_{j-l-s})^2\Big) \\ &\leq \frac{1}{K^2n^3}\sum_{l+1<j<i,i'\leq n} E(L(e_1,e_2)^2)E(f(e_1)^2) \\ &\leq \frac{1}{K^2}E(L(e_1,e_2)^2)E(f(e_1)^2), \end{aligned}$$

beim vorletzten Schritt wieder mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung.
Also erfüllt auch $(I\!I_{l,n}^s)_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$ für alle $s \in \mathbb{S}$ die Bedingung (3.93), womit der Beweis komplett ist.

3.105 Folgerung. Seien $a, b \in (0,1)$ reelle Zahlen, $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen und $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sowie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Borelfunktionen mit mit $E(L(e_1,e_2)^2) < \infty$, $E(f(e_1)^2) < \infty$ und $E(f(e_1)) = 0$.
Dann gilt für alle $s \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l=0}^{n-2} a^l \max_{l+1\leq k\leq n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=l+1}^{k} L(e_i,e_j)f(e_{j-l-s})\Big| = O_p(n^{3/2}) \tag{3.106}$$

und für alle $s \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{n-2} a^l \sum_{m=l}^{n-3} b^{m-l} \max_{m+2\leq k\leq n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=m+2}^{k} L(e_i,e_j)f(e_{j-m-1-s})\Big| \\ &\qquad = O_p(n^{3/2}). \end{aligned} \tag{3.107}$$

Beweis: Geht analog zum Beweis von Folgerung 3.101, unter Verwendung von Proposition 3.104 anstelle von Proposition 3.100.

3.108 Proposition. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion mit $E(|L(e_1, e_2)|) < \infty$. Seien $a, b \in (0, 1)$. Dann gelten:

$$\max_{1\le k\le n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a^i |L(e_i, e_j)| = O_p(n) \tag{3.109}$$

$$\max_{1\le k\le n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a^j |L(e_i, e_j)| = O_p(n) \tag{3.110}$$

$$\max_{1\le k\le n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{i-1} a^l b^{i-l} |L(e_i, e_j)| = O_p(n) \tag{3.111}$$

$$\max_{1\le k\le n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{j-1} a^l b^{j-l} |L(e_i, e_j)| = O_p(n). \tag{3.112}$$

Beweis: Zu (3.109) und (3.110): Es gilt für $K > 0$

$$\begin{aligned}
&P\Big(\max_{1\le k\le n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a^i |L(e_i, e_j)| \ge Kn\Big) \\
\le\;& P\Big(\max_{1\le k\le n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} a^j |L(e_i, e_j)| \ge Kn\Big) \\
\le\;& P\Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a^j |L(e_i, e_j)| \ge Kn\Big) \\
\le\;& \frac{1}{Kn} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} a^j E(|L(e_i, e_j)|) \\
\le\;& \frac{1}{K} \frac{1}{1-a} E(|L(e_1, e_2)|) \;\underset{K}{\longrightarrow}\; 0,
\end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Schritt die Markov-Ungleichung verwandt haben.
Zu (3.111) und (3.112): Wir beachten, dass für alle $a, b \in (0, 1)$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{l=0}^{m-1} a^l b^{m-l} &= \sum_{l=0}^{[m/2]} a^l b^{m-l} + \sum_{l=[m/2]+1}^{m-1} a^l b^{m-l} \\
&\le \sum_{l=0}^{[m/2]} b^{m-l} + \sum_{l=[m/2]+1}^{m-1} a^l \\
&\le b^{m/2} \frac{1}{1-b} + a^{m/2} \frac{1}{1-a} \\
&\le \sqrt{a \vee b}^{\,m} \Big(\frac{1}{1-b} + \frac{1}{1-a}\Big).
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Damit folgen (3.111) und (3.112) aus (3.109) beziehungsweise (3.110).

3.114 Proposition. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion mit $E(L(e_1, e_2)^2) < \infty$. Dann gelten

$$\max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j)(\hat{e}_{ni} - e_i) \Big| = O_p(n) \tag{3.115}$$

und

$$\max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j)(\hat{e}_{nj} - e_j) \Big| = O_p(n). \tag{3.116}$$

Beweis: Zu (3.115): Wir setzen (3.7) ein und erhalten mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
&\max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j)(\hat{e}_{ni} - e_i) \Big| \\
\le\ & \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j) \sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l, \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q\rangle \cdot \\
&\qquad \cdot \sum_{m=l}^{i-2} \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{m-l}\mathbf{u}_p\rangle \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{i-1-m}\rangle \Big| \\
&+ \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j) \sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l, \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q\rangle \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{i-1-l}\mathbf{X}_0\rangle \Big| \\
&+ \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j) \sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l, \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q\rangle \langle (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta})\mathbf{e}_{i-1-l}, \mathbf{u}_q\rangle \Big| \\
&+ \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j) \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i (\hat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q\rangle \Big| \\
=:\ & I_n + I\!I_n + I\!I\!I_n + I\!V_n.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
I_n \ &=\ \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{l=0}^{n-1} \sum_{m=l}^{n-2} \sum_{i=(k+1)\vee(m+2)}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j) \cdot \\
&\qquad \cdot \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l, \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q\rangle \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{m-l}\mathbf{u}_p\rangle \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{i-1-m}\rangle \Big| \\
&\le\ \sum_{l=0}^{n-1} \big| \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q\rangle \big| \sum_{m=l}^{n-2} \big| \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{m-l}\mathbf{u}_p\rangle \big| \cdot \\
&\qquad \cdot \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=(k+1)\vee(m+2)}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i, e_j) \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{i-1-m}\rangle \Big| \\
&\le\ C_{\boldsymbol{\Theta}} C_{\mathbf{P}} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \sum_{s=0}^{q} |\vartheta_s| \sum_{l=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l} \sum_{m=l}^{n-2} \overline{\rho}^{\,m-l} \cdot
\end{aligned}$$

$$\cdot \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=(k+1)\vee(m+2)}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j) e_{i-m-s-1} \Big|$$

$$= \quad O_p(1/\sqrt{n}\,) \sum_{s=0}^{q} O_p(n^{3/2}) \quad = \quad O_p(n)$$

nach (3.8) und (3.103).
Weiter haben wir

$$\begin{aligned} \mathit{II}_n \quad &\le \quad C_{\boldsymbol{\Theta}} C_{\mathbf{P}} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \|\mathbf{X}_0\| \max_{1\le k\le n} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\vartheta}^{\,l} \overline{\rho}^{\,i-1-l} |L(e_i,e_j)| \\ &= \quad O_p(1/\sqrt{n}\,)\, O_p(n) \quad = \quad O_p(\sqrt{n}\,) \end{aligned}$$

nach (3.8) und (3.111).
Dann ist

$$\begin{aligned} \mathit{III}_n \quad &\le \quad \sum_{s=1}^{q} |\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s| \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j) \sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^{\,l} \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle e_{i-l-s} \Big| \\ &\le \quad \sum_{s=1}^{q} |\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s| \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{l=0}^{n-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^{\,l} \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \sum_{i=(k\vee l)+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j) e_{i-l-s} \Big| \\ &\le \quad \sum_{s=1}^{q} |\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s| C_{\boldsymbol{\Theta}} \sum_{l=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l} \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=(k\vee l)+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j) e_{i-l-s} \Big| \\ &= \quad \sum_{s=1}^{q} O_p(1/\sqrt{n}\,)\, O_p(n^{3/2}) \quad = \quad O_p(n) \end{aligned}$$

nach (3.9) und (3.102), und schließlich

$$\begin{aligned} \mathit{IV}_n \quad &\le \quad C_{\boldsymbol{\Theta}} \|\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0\| \max_{1\le k\le n-1} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \overline{\vartheta}^{\,i} |L(e_i,e_j)| \\ &= \quad O_p(1)\, O_p(n) \quad = \quad O_p(n) \end{aligned}$$

nach (3.109). Also gilt (3.115).
Zu (3.116): Nach (3.7) und der Dreiecksungleichung ist

$$\begin{aligned} &\max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j)(\hat{e}_{nj} - e_j) \Big| \\ &\le \quad \max_{1\le k\le n-1} \Big| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j) \sum_{l=0}^{j-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^{\,l}, \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot \sum_{m=l}^{j-2} \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{m-l} \mathbf{u}_p \rangle \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{j-1-m} \rangle \Big| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \max_{1\le k\le n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j)\sum_{l=0}^{j-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^l\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle\langle\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n,\mathbf{P}^{j-1-l}\mathbf{X}_0\rangle\Big| \\
&+ \max_{1\le k\le n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j)\sum_{l=0}^{j-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^l\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle\langle(\widehat{\mathbf{\Theta}}_n-\mathbf{\Theta})\mathbf{e}_{j-1-l},\mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&+ \max_{1\le k\le n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} L(e_i,e_j)\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^j(\widehat{\mathbf{e}}_{n0}-\mathbf{e}_0),\mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
=:\;& I_n + I\!I_n + I\!I\!I_n + I\!V_n .
\end{aligned}
$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
I_n \;&=\; \max_{1\le k\le n-1}\Big|\sum_{l=0}^{k-1}\sum_{m=l}^{k-2}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^l\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle\langle\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n,\mathbf{P}^{m-l}\mathbf{u}_p\rangle\,\cdot \\
&\qquad\cdot\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=m+2}^{k} L(e_i,e_j)\langle\boldsymbol{\vartheta},\mathbf{e}'_{j-1-n}\rangle\Big| \\
&\le\; C_{\mathbf{\Theta}}C_{\mathbf{P}}\|\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|\sum_{s=0}^{q}|\vartheta_s|\sum_{l=0}^{n-2}\overline{\vartheta}^{\,l}\sum_{m=l}^{n-3}\overline{\rho}^{\,m-l}\,\cdot \\
&\qquad\cdot\max_{m+2\le k\le n}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=m+2}^{k} L(e_i,e_j)e_{j-m-s-1}\Big| \\
&=\; O_p(1/\sqrt{n}\,)\sum_{s=0}^{q}O_p(n^{3/2}) \;=\; O_p(n)
\end{aligned}
$$

nach (3.8) und (3.107), dann ist

$$
\begin{aligned}
I\!I_n \;&\le\; C_{\mathbf{\Theta}}C_{\mathbf{P}}\|\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|\|\mathbf{X}_0\|\max_{1\le k\le n}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{j-1}\overline{\vartheta}^{\,l}\overline{\rho}^{\,j-1-l}|L(e_i,e_j)| \\
&=\; O_p(1/\sqrt{n}\,)\,O_p(n) \;=\; O_p(\sqrt{n}\,)
\end{aligned}
$$

nach (3.8) und (3.112),

$$
\begin{aligned}
I\!I\!I_n \;&=\; \max_{1\le k\le n-1}\Big|\sum_{l=0}^{k-2}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^l\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=l+1}^{k} L(e_i,e_j)\langle(\widehat{\mathbf{\Theta}}_n-\mathbf{\Theta})\mathbf{e}_{j-1-l},\mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&\le\; C_{\mathbf{\Theta}}\sum_{s=1}^{q}|\widehat{\vartheta}_{ns}-\vartheta_s|\sum_{l=0}^{n-2}\overline{\vartheta}^{\,l}\max_{l+1\le k\le n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=l+1}^{k} L(e_i,e_j)e_{j-l-s}\Big| \\
&=\; \sum_{s=1}^{q}O_p(1/\sqrt{n}\,)\,O_p(n^{3/2}) \;=\; O_p(n)
\end{aligned}
$$

nach (3.9) und (3.106), und schließlich

$$
\begin{aligned}
I\!V_n \;&\le\; C_{\mathbf{\Theta}}\|\widehat{\mathbf{e}}_{n0}-\mathbf{e}_0\|\max_{1\le k\le n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\overline{\vartheta}^{\,j}|L(e_i,e_j)| \\
&=\; O_p(1)\,O_p(n) \;=\; O_p(n)
\end{aligned}
$$

nach (3.110). Daraus folgt (3.116).

3.117 Proposition. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion mit $E(|L(e_1, e_2)|) < \infty$. Dann gelten

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)|(\hat{e}_{ni} - e_i)^2 = O_p(n) \tag{3.118}$$

und

$$\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)|(\hat{e}_{nj} - e_j)^2 = O_p(n). \tag{3.119}$$

Beweis: Zu (3.118): Mit (3.7) und zweimaliger Anwendung der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)|(\hat{e}_{ni} - e_i)^2 \\
&\quad \le \; 4 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| \cdot \\
&\qquad \cdot \Bigg(\Big(\sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \sum_{m=l}^{i-2} \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{m-l} \mathbf{u}_p \rangle \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{i-1-m} \rangle \Big)^2 \\
&\qquad\quad + \Big(\sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{i-1-l} \mathbf{X}_0 \rangle \Big)^2 \\
&\qquad\quad + \Big(\sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \langle (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta}) \mathbf{e}_{i-1-l}, \mathbf{u}_q \rangle \Big)^2 \\
&\qquad\quad + \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i (\hat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q \rangle^2 \Bigg) \\
&\quad = \; 4 \Bigg(\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| \Big(\sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \sum_{m=l}^{i-2} \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{m-l} \mathbf{u}_p \rangle \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{i-1-m} \rangle \Big)^2 \\
&\qquad + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| \Big(\sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{i-1-l} \mathbf{X}_0 \rangle \Big)^2 \\
&\qquad + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| \Big(\sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \langle (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta}) \mathbf{e}_{i-1-l}, \mathbf{u}_q \rangle \Big)^2 \\
&\qquad + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^i (\hat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q \rangle^2 \Bigg) \\
&\quad =: \; 4 \, (I_n + I\!I_n + I\!I\!I_n + I\!V_n).
\end{aligned}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
I_n &\leq C_{\mathbf{\Theta}}^2 C_{\mathbf{P}}^2 \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|^2 \sum_{s,s'=0}^{q} |\vartheta_s \vartheta_{s'}| \sum_{l,l'=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=l \\ m'=l'}}^{n-2} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \overline{\rho}^{\,m+m'-l-l'} \cdot \\
&\quad \cdot \sum_{i=(m\vee m')+2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j) e_{i-m-s-1} e_{i-m'-s'-1}| \\
&= O_p(1/\sqrt{n}\,)^2 \, O_p(n^2) \;=\; O_p(n),
\end{aligned}$$

da für alle $s, s' = 0, \ldots, q$ und $K > 0$

$$\begin{aligned}
&P\Bigg(\sum_{l,l'=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=l \\ m'=l'}}^{n-2} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \overline{\rho}^{\,m+m'-l-l'} \sum_{i=(m\vee m')+2}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i-m-s-1, i-m'-s'-1\}}}^{i-1} |L(e_i, e_j) e_{i-m-s-1} e_{i-m'-s'-1}| \geq K n^2 \Bigg) \\
&\leq \frac{1}{K n^2} \sum_{l,l'=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=l \\ m'=l'}}^{n-2} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \overline{\rho}^{\,m+m'-l-l'} \sum_{i=(m\vee m')+2}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \notin \{i-m-s-1, i-m'-s'-1\}}}^{i-1} E\left(|L(e_i, e_j) e_{i-m-s-1} e_{i-m'-s'-1}|\right) \\
&\leq \frac{1}{K} \frac{1}{(1-\overline{\vartheta}\,)^2} \frac{1}{(1-\overline{\rho})^2} E(|L(e_1, e_2)|) E(e_1^2) \;\xrightarrow[K]{}\; 0
\end{aligned}$$

nach der Markovungleichung, wegen der Unabhängigkeit der $e_1, \ldots, e_n$, und nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, sowie

$$\begin{aligned}
&P\Bigg(\sum_{l,l'=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=l \\ m'=l'}}^{n-2} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \overline{\rho}^{\,m+m'-l-l'} \cdot \\
&\qquad \cdot \sum_{i=(m\vee m')+2}^{n} |L(e_i, e_{i-m-s-1}) e_{i-m-s-1} e_{i-m'-s'-1}| \geq K n^2 \Bigg) \\
&\leq P\Bigg(\sum_{l,l'=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=l \\ m'=l'}}^{n-2} \overline{\vartheta}^{\,(l+l')/2} \overline{\rho}^{\,(m+m'-l-l')/2} \cdot \\
&\qquad \cdot \sum_{i=(m\vee m')+2}^{n} |L(e_i, e_{i-m-s-1}) e_{i-m-s-1} e_{i-m'-s'-1}|^{1/2} \geq K^{1/2} n \Bigg) \\
&\leq \frac{1}{K^{1/2} n} \sum_{l,l'=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=l \\ m'=l'}}^{n-2} \overline{\vartheta}^{\,(l+l')/2} \overline{\rho}^{\,(m+m'-l-l')/2} \cdot \\
&\qquad \cdot \sum_{i=(m\vee m')+2}^{n} E(|L(e_i, e_{i-m-s-1}) e_{i-m-s-1} e_{i-m'-s'-1}|^{1/2}) \\
&\leq \frac{1}{K^{1/2}} \frac{1}{(1-\overline{\vartheta}^{\,1/2})^2} \frac{1}{(1-\overline{\rho}^{\,1/2})^2} E(|L(e_1, e_2)|)^{1/2} E(e_1^2)^{1/2} \;\xrightarrow[K]{}\; 0
\end{aligned}$$

nach der C_r-Ungleichung (und $C_{1/2} = 1$), der Markov- und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung ist.
Dann gilt

$$\begin{aligned} I\!I_n &\leq C_{\mathbf{\Theta}}^2 C_{\mathbf{P}}^2 \|\mathbf{X}_0\|^2 \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|^2 \sum_{l,l'=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \sum_{i=(l\vee l')+1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| \\ &= O_p(1/\sqrt{n}\,)^2 \, O_p(n^2) \quad = \quad O_p(n), \end{aligned}$$

da für alle $K > 0$

$$\begin{aligned} &P\Big(\sum_{l,l'=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \sum_{i=(l\vee l')+1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| \geq Kn^2 \Big) \\ &\leq \frac{1}{Kn^2} \frac{1}{(1-\overline{\vartheta})^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} E(|L(e_i, e_j)|) \\ &\leq \frac{1}{K} \frac{1}{(1-\overline{\vartheta})^2} E(|L(e_1, e_2)|) \quad \underset{K}{\longrightarrow} \quad 0 \end{aligned}$$

ist. Weiter gilt

$$\begin{aligned} I\!I\!I_n &\leq C_{\mathbf{\Theta}}^2 \sum_{s,s'=1}^{q} |\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s| |\widehat{\vartheta}_{ns'} - \vartheta_{s'}| \sum_{l,l'=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \\ &\quad \cdot \sum_{i=(l\vee l')+1}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j) e_{i-l-s} e_{i-l'-s'}| \\ &= \sum_{s,s'=1}^{q} O_p(1/\sqrt{n}\,) \, O_p(1/\sqrt{n}\,) \, O_p(n^2) \quad = \quad O_p(n), \end{aligned}$$

da für alle $s, s' = 1 \ldots, q$ und $K > 0$

$$\begin{aligned} &P\Big(\sum_{l,l'=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \sum_{i=(l\vee l')+1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\notin\{i-l-s, i-l'-s'\}}}^{i-1} |L(e_i, e_j) e_{i-l-s} e_{i-l'-s'}| \geq Kn^2 \Big) \\ &\leq \frac{1}{Kn^2} \sum_{l,l'=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \sum_{i=(l\vee l')+1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\notin\{i-l-s, i-l'-s'\}}}^{i-1} E(|L(e_i, e_j) e_{i-l-s} e_{i-l'-s'}|) \\ &\leq \frac{1}{K} \frac{1}{(1-\overline{\vartheta})^2} E(|L(e_1, e_2)|) E(e_1^2) \quad \underset{K}{\longrightarrow} \quad 0 \end{aligned}$$

und

$$P\Big(\sum_{l,l'=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \sum_{i=(l\vee l')+1}^{n} |L(e_i, e_{i-l-s}) e_{i-l-s} e_{i-l'-s'}| \geq Kn^2 \Big)$$

$$\begin{aligned}
&\leq P\Big(\sum_{l,l'=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{(l+l')/2} \sum_{i=(l\vee l')+1}^{n} |L(e_i, e_{i-l-s})e_{i-l-s}e_{i-l'-s'}|^{1/2} \geq K^{1/2} n\Big) \\
&\leq \frac{1}{K^{1/2} n} \sum_{l,l'=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{(l+l')/2} \sum_{i=(l\vee l')+1}^{n} E(|L(e_i, e_{i-l-s})e_{i-l-s}e_{i-l'-s'}|^{1/2}) \\
&\leq \frac{1}{K^{1/2}} \frac{1}{(1-\overline{\vartheta}^{1/2})^2} E(|L(e_1, e_2)|)^{1/2} E(e_1^2)^{1/2} \quad \xrightarrow[K]{} \quad 0
\end{aligned}$$

gelten. Schließlich ist

$$\begin{aligned}
I\!V_n &\leq C_{\boldsymbol{\Theta}}^2 \|\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0\|^2 \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \overline{\vartheta}^{2i} |L(e_i, e_j)| \\
&= O_p(1)\, O_p(n) \quad = \quad O_p(n),
\end{aligned}$$

weil für alle $K > 0$

$$\begin{aligned}
& P\Big(\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} \overline{\vartheta}^{2i} |L(e_i, e_j)| \geq Kn\Big) \\
&\leq \frac{1}{Kn} \sum_{i=2}^{n} \overline{\vartheta}^{2i} \sum_{j=1}^{i-1} E(|L(e_i, e_j)|) \\
&\leq \frac{1}{K} \frac{1}{1-\overline{\vartheta}^2} E(|L(e_1, e_2)|) \quad \xrightarrow[K]{} \quad 0
\end{aligned}$$

ist.

Zu (3.119): Ähnlich wie eben ist

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| (\hat{e}_{nj} - e_j)^2 \\
&\leq 4\Big(\sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| \Big(\sum_{l=0}^{j-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \sum_{m=l}^{j-2} \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{m-l} \mathbf{u}_p \rangle \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{j-1-m} \rangle \Big)^2 \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| \Big(\sum_{l=0}^{j-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{j-1-l} \mathbf{X}_0 \rangle \Big)^2 \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| \Big(\sum_{l=0}^{j-1} \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \langle (\widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n - \boldsymbol{\Theta}) \mathbf{e}_{j-1-l}, \mathbf{u}_q \rangle \Big)^2 \\
&\quad + \sum_{i=2}^{n} \sum_{j=1}^{i-1} |L(e_i, e_j)| \langle \widehat{\boldsymbol{\Theta}}_n^j (\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q \rangle^2 \Big) \\
&=: 4\,(I_n + I\!I_n + I\!I\!I_n + I\!V_n).
\end{aligned}$$

Nun ist

$$I_n \leq C_{\boldsymbol{\Theta}}^2 C_{\mathbf{P}}^2 \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|^2 \sum_{s,s'=0}^{q} |\vartheta_s \vartheta_{s'}| \sum_{l,l'=0}^{n-2} \sum_{\substack{m=l \\ m'=l'}}^{n-3} \overline{\vartheta}^{l+l'} \overline{\rho}^{m+m'-l-l'}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot \sum_{j=(m\vee m')+2}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} |L(e_i,e_j)e_{j-m-s-1}e_{j-m'-s'-1}| \\
&= \; O_p(1/\sqrt{n}\,)^2\, O_p(n^2) \;=\; O_p(n),
\end{aligned}
$$

da für alle $s, s' = 0, \ldots, q$ und $K > 0$

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\sum_{l,l'=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=l\\ m'=l'}}^{n-2} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \overline{\rho}^{\,m+m'-l-l'} \sum_{j=(m\vee m')+2}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} |L(e_i,e_j)e_{j-m-s-1}e_{j-m'-s'-1}| \geq Kn^2\Big) \\
&\leq \; \frac{1}{Kn^2} \sum_{l,l'=0}^{n-1} \sum_{\substack{m=l\\ m'=l'}}^{n-2} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \overline{\rho}^{\,m+m'-l-l'} \sum_{j=(m\vee m')+2}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} E(|L(e_i,e_j)e_{j-m-s-1}e_{j-m'-s'-1}|) \\
&\leq \; \frac{1}{K} \frac{1}{(1-\overline{\vartheta}\,)^2} \frac{1}{(1-\overline{\rho})^2} E(|L(e_1,e_2)|)E(e_1^2) \;\underset{K}{\longrightarrow}\; 0
\end{aligned}
$$

ist. Weiter gilt

$$
\begin{aligned}
I\!I_n \;&\leq\; C_{\mathbf{\Theta}}^2 C_{\mathbf{P}}^2 \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|^2 \|\mathbf{X}_0\|^2 \sum_{l,l'=0}^{n-2} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} |L(e_i,e_j)| \\
&=\; O_p(1/\sqrt{n}\,)^2\, O_p(n^2) \;=\; O_p(n),
\end{aligned}
$$

weil für alle $K > 0$

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} |L(e_i,e_j)| \geq Kn^2\Big) \\
&\leq\; \frac{1}{Kn^2} \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} E(|L(e_i,e_j)|) \\
&\leq\; \frac{1}{K} E(|L(e_1,e_2)|) \;\underset{K}{\longrightarrow}\; 0
\end{aligned}
$$

ist. Dann ist

$$
\begin{aligned}
I\!I\!I_n \;&\leq\; C_{\mathbf{\Theta}}^2 \sum_{s,s'=1}^{q} |\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s||\widehat{\vartheta}_{ns'} - \vartheta_{s'}| \sum_{l,l'=0}^{n-2} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \cdot \\
&\qquad \cdot \sum_{j=(l\vee l')+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} |L(e_i,e_j)e_{j-l-s}e_{j-l'-s'}| \\
&=\; \sum_{s,s'=1}^{q} O_p(1/\sqrt{n}\,)\, O_p(1/\sqrt{n}\,) O_p(n^2) \;=\; O_p(n),
\end{aligned}
$$

da für $K > 0$

$$
P\Big(\sum_{l,l'=0}^{n-2} \overline{\vartheta}^{\,l+l'} \sum_{j=(l\vee l')+1}^{n-1} \sum_{i=j+1}^{n} |L(e_i,e_j)e_{j-l-s}e_{j-l'-s'}| \geq Kn^2\Big)
$$

$$\leq \frac{1}{Kn^2}\sum_{l,l'=0}^{n-2}\overline{\vartheta}^{\,l+l'}\sum_{j=(l\vee l')+1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}E(|L(e_i,e_j)e_{j-l-s}e_{j-l'-s'}|)$$

$$\leq \frac{1}{K}\frac{1}{(1-\overline{\vartheta}\,)^2}E(|L(e_1,e_2)|)E(e_1^2) \;\underset{K}{\longrightarrow}\; 0$$

gilt. Schließlich ist

$$I\!V_n \;\leq\; C_{\mathbf{\Theta}}^2\|\widehat{\mathbf{e}}_{n0}-\mathbf{e}_0\|^2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n}\overline{\vartheta}^{\,2j}|L(e_i,e_j)| \;=\; O_p(n),$$

denn für $K > 0$ ist

$$P\Big(\sum_{j=1}^{n-1}\overline{\vartheta}^{\,2j}\sum_{i=j+1}^{n}|L(e_i,e_j)| \geq Kn\Big)$$

$$\leq \frac{1}{Kn}\sum_{j=1}^{n-1}\overline{\vartheta}^{\,2j}\sum_{i=j+1}^{n}E(|L(e_i,e_j)|)$$

$$\leq \frac{1}{K}\frac{1}{1-\overline{\vartheta}^{\,2}}E(|L(e_1,e_2)|) \;\underset{K}{\longrightarrow}\; 0.$$

3.120 Folgerung. Sei $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine Borelfunktion mit $E(|L(e_1,e_2)|)<\infty$. Dann gilt für alle $u,w\in\mathbb{N}_0$ mit $u+w\geq 2$

$$\max_{1\leq k\leq n}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|L(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^w = O_p(n). \tag{3.121}$$

Beweis: Es gilt

$$\max_{1\leq k\leq n}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|L(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^w$$

$$\leq \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}|L(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^w$$

$$\leq \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}|L(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^{(u+w)} + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}|L(e_i,e_j)||\hat{e}_{nj}-e_j|^{(u+w)}$$

$$\leq \Big(\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}|L(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^2 + \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1}|L(e_i,e_j)||\hat{e}_{nj}-e_j|^2\Big)\Big(\max_{1\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni}-e_i|\Big)^{u+w-2}$$

$$= (O_p(n)+O_p(n))\,O_p(1) \;=\; O_p(n)$$

nach (3.118), (3.119) und (3.17).

3.122 Folgerung. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion, für die es ein $L_0 > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|L(x,y)| < L_0\,(1+|x|^{m-1}+|y|^{m-1})$ für alle $x,y \in \mathbb{R}$ und $E(|e_1|^m) < \infty$ gilt, und weiter seien für alle $i,j = 1,\ldots,n$ mit $i \neq j$ für alle $n \in \mathbb{N}$ $\varepsilon_{ni}^j \in [e_i \wedge \hat{e}_{ni}, e_i \vee \hat{e}_{ni}]$ irgendwelche Größen. Dann ist für alle $u,w \in \mathbb{N}_0$ mit $u+w \geq 2$

$$\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |L(\varepsilon_{ni}^j, \varepsilon_{nj}^i)||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^w \leq O_p(n) \tag{3.123}$$

$$\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |e_i L(\varepsilon_{ni}^j, \varepsilon_{nj}^i)||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^w \leq O_p(n) \tag{3.124}$$

$$\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |e_j L(\varepsilon_{ni}^j, \varepsilon_{nj}^i)||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^w \leq O_p(n). \tag{3.125}$$

Wir behaupten hier nicht, dass die in (3.123)–(3.125) betrachteten Größen Zufallsvariablen sind, und können dies im Allgemeinen auch nicht erwarten, da wir es von den Argumenten ε_{ni}^j auch nicht gefordert hatten. Für uns reicht es aus, dass man diese Größen durch Zufallsvariablen der Ordnung $O_p(n)$ nach oben abschätzen kann. Dies hat den Zweck, später die Diskussion zu vermeiden, ob die Zwischenstellen aus der Lagrangeschen Form des Restgliedes einer Taylorentwicklung als Zufallsvariablen gewählt werden können, die wir so ohne Bedenken für ε_{ni}^j einsetzen können.

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i,j = 1,\ldots,n$ mit $i \neq j$ ist

$$|\varepsilon_{ni}^j| \leq |e_i| \vee |\hat{e}_{ni}| \leq |e_i| \vee (|\hat{e}_{ni}-e_i|+|e_i|) = |e_i| + |\hat{e}_{ni}-e_i|,$$

also ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und für alle $i,j = 1,\ldots,n$, $i \neq j$, mit Zuhilfenahme der C_r-Ungleichung mit $r = m-1$

$$\begin{aligned}|L(\varepsilon_{ni}^j, \varepsilon_{nj}^i)| &\leq L_0(1+|\varepsilon_{ni}^j|^{m-1}+|\varepsilon_{nj}^i|^{m-1})\\ &\leq L_0 C_{m-1}(1+|e_i|^{m-1}+|e_j|^{m-1}\\ &\qquad\qquad +|\hat{e}_{ni}-e_i|^{m-1}+|\hat{e}_{nj}-e_j|^{m-1}),\end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Schritt beachten, dass ohne Einschränkung $C_{m-1} \geq 1$ gewählt werden kann (und für $m \geq 1$ im allgemeinen auch muß), und weiter

$$\begin{aligned}&(1+|e_i|+|e_j|)(1+|e_i|^{m-1}+|e_j|^{m-1})\\ \leq\;& 3(1\vee|e_i|\vee|e_j|)\,3(1\vee|e_i|^{m-1}\vee|e_j|^{m-1})\\ =\;& 9(1\vee|e_i|^m\vee|e_j|^m)\\ \leq\;& 9(1+|e_i|^m+|e_j|^m).\end{aligned}$$

Es folgt für alle $u, w \in \mathbb{N}_0$ mit $u + w \geq 2$

$$
\begin{aligned}
&\max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (1+|e_i|+|e_j|)|L(\varepsilon_{ni}^j, \varepsilon_{nj}^i)||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^w \\
\leq\ & \max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (1+|e_i|+|e_j|)L_0 C_{m-1} \cdot \\
&\qquad \cdot (1+|e_i|^{m-1}+|e_j|^{m-1}+|\hat{e}_{ni}-e_i|^{m-1}+|\hat{e}_{nj}-e_j|^{m-1}) \cdot \\
&\qquad \cdot |\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^w \\
\leq\ & L_0 C_{m-1} \max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} 9(1+|e_i|^m+|e_j|^m)|\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^w \\
& + L_0 C_{m-1} \max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (1+|e_i|+|e_j|)|\hat{e}_{ni}-e_i|^{u+m-1}|\hat{e}_{nj}-e_j|^w \\
& + L_0 C_{m-1} \max_{1\leq k\leq n} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} (1+|e_i|+|e_j|)|\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{w+m-1} \\
=\ & O_p(n)
\end{aligned}
$$

nach (3.121), da $E(1 + |e_1|^m + |e_2|^m) < \infty$ und $E(1 + |e_1| + |e_2|) < \infty$. Der abgeschätzte Term ist größer als die in (3.123)–(3.125) betrachteten Ausdrücke.

3.126 Proposition. Unter den Voraussetzungen (3.92) (b)–(d) an die Funktion K gilt

$$
\max_{1\leq k\leq n-1} \left| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \Big(K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) - K(e_i, e_j) \Big) \right| = O_p(n). \tag{3.127}
$$

Beweis: Nach der Taylorformel gilt für $i, j = 1, \ldots, n$

$$
\begin{aligned}
K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) - K(e_i, e_j) &= K'(e_i, e_j)(\hat{e}_{ni}-e_i, \hat{e}_{nj}-e_j) \\
&\quad + \sum_{w=2}^{v-1} \frac{1}{w!} K^{(w)}(e_i, e_j)(\hat{e}_{ni}-e_i, \hat{e}_{nj}-e_j)^w \\
&\quad + \frac{1}{v!} K^{(v)}(\varepsilon_{ni}^j, \varepsilon_{nj}^i)(\hat{e}_{ni}-e_i, \hat{e}_{nj}-e_j)^v,
\end{aligned}
$$

wobei wir mit $K^{(u)}$ die u-te Ableitung von K bezeichnen, $K^{(u)}(e_i, e_j)$ also eine u-fach lineare Abbildung ist, und ε_{ni}^j für alle $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ zwischen $\hat{e}_{ni}$ und e_i liegt. Dann ist

$$
\max_{1\leq k\leq n-1} \left| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \Big(K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) - K(e_i, e_j) \Big) \right|
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \max_{1\leq k\leq n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}K'(e_i,e_j)(\hat{e}_{ni}-e_i,\hat{e}_{nj}-e_j)\Big| \\
&\quad+\sum_{w=2}^{v-1}\max_{1\leq k\leq n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}K^{(w)}(e_i,e_j)(\hat{e}_{ni}-e_i,\hat{e}_{nj}-e_j)^w\Big| \\
&\quad+\max_{1\leq k\leq n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}K^{(v)}(\varepsilon_{ni}^{j},\varepsilon_{nj}^{i})(\hat{e}_{ni}-e_i,\hat{e}_{nj}-e_j)^v\Big| \\
&\leq \max_{1\leq k\leq n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}D_1K(e_i,e_j)(\hat{e}_{ni}-e_i)\Big| \\
&\quad+\max_{1\leq k\leq n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}D_2K(e_i,e_j)(\hat{e}_{nj}-e_j)\Big| \\
&\quad+\sum_{w=2}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}\max_{1\leq k\leq n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|D_1^uD_2^{w-u}K(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{w-u} \\
&\quad+\sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}\max_{1\leq k\leq n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|D_1^uD_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{j},\varepsilon_{nj}^{i})||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{v-u} \\
&=: I_n+\mathit{II}_n+\sum_{w=2}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}\mathit{III}_n^{w,u}+\sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}\mathit{IV}_n^{u},
\end{aligned}
$$

wobei wir beim zweiten Ungleichheitszeichen unter anderem den Satz von Schwarz benutzt haben. Diese Ausdrücke müssen nun von der Ordnung $O_p(n)$ sein, beziehungsweise sich durch Zufallsvariablen der Ordnung $O_p(n)$ nach oben abschätzen lassen.
Für I_n und II_n gilt dies nach (3.115) und (3.116) wegen Voraussetzung (3.92) (b). Für $\mathit{III}_n^{w,u}$, $w=2,\ldots,v-1$ und $u=0,\ldots,w$, ist es nach (3.121) wegen Voraussetzung (3.92) (c) erfüllt. Und für IV_n^{u}, $u=0,\ldots,v$, die selbst keine Zufallsvariablen sein müssen, haben wir (3.123) mit (3.92) (d).
Also gilt (3.127).

3.128 Proposition. Sei $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine Borelfunktion mit $E(L(e_1,e_2)^2)<\infty$. Dann ist für alle $\alpha\in(0,1)$

$$
\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|L(e_i,e_j)(\hat{e}_{ni}-e_i)|=o_p(1) \tag{3.129}
$$

und

$$
\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|L(e_i,e_j)(\hat{e}_{nj}-e_j)|=o_p(1). \tag{3.130}
$$

Beweis: Zu (3.129): Durch Einsetzen von (3.7) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|L(e_i,e_j)(\hat{e}_{ni}-e_i)| \\
&\le \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|L(e_i,e_j)\sum_{l=0}^{i-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^{\,l},\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle \\
&\qquad\qquad \sum_{m=l}^{i-2}\langle\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n,\mathbf{P}^{m-l}\mathbf{u}_p\rangle\langle\boldsymbol{\vartheta},\mathbf{e}'_{i-1-m}\rangle\Big| \\
&\quad + \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|L(e_i,e_j)\sum_{l=0}^{i-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^{\,l},\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle \\
&\qquad\qquad \langle\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n,\mathbf{P}^{i-1-l}\mathbf{X}_0\rangle\Big| \\
&\quad + \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|L(e_i,e_j)\sum_{l=0}^{i-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^{\,l},\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle \\
&\qquad\qquad \langle(\widehat{\mathbf{\Theta}}_n-\mathbf{\Theta})\mathbf{e}_{i-1-l},\mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&\quad + \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|L(e_i,e_j)\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^{\,i}(\widehat{\mathbf{e}}_{n0}-\mathbf{e}_0),\mathbf{u}_q\rangle\Big| \\
&=: I_n + I\!I_n + I\!I\!I_n + I\!V_n.
\end{aligned}
$$

Es ist

$$
\begin{aligned}
I\!V_n &\le \frac{4}{n^{\alpha+1}}\|\widehat{\mathbf{e}}_{n0}-\mathbf{e}_0\|C_{\mathbf{\Theta}}\max_{1\le k\le n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\overline{\vartheta}^{\,i}|L(e_i,e_j)| \\
&= O(n^{-1-\alpha})\,O_p(n) \;=\; o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.109), und

$$
\begin{aligned}
I\!I_n &\le \frac{4}{n^{\alpha+1}}C_{\mathbf{\Theta}}C_{\mathbf{P}}\|\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|\|\mathbf{X}_0\|\max_{1\le k\le n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{i-1}\overline{\vartheta}^{\,l}\overline{\rho}^{\,i-l}|L(e_i,e_j)|\overline{\rho}^{\,-1} \\
&= O(n^{-1-\alpha})\,O_p(1/\sqrt{n}\,)\,O_p(n) \;=\; o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.111). Weiter ist

$$
\begin{aligned}
I\!I\!I_n &\le C_{\mathbf{\Theta}}\sum_{s=1}^{q}|\widehat{\vartheta}_{ns}-\vartheta_s|\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{i-1}\overline{\vartheta}^{\,l}|L(e_i,e_j)e_{i-l-s}| \\
&=: C_{\mathbf{\Theta}}\sum_{s=1}^{q}|\widehat{\vartheta}_{ns}-\vartheta_s|\cdot V_n^s,
\end{aligned}
$$

und für $s = 1, \ldots, q$ gilt

$$\begin{aligned}
V_n^s \;&\leq\; \max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \left| \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\vartheta}^{\,l} |L(e_i, e_j)| \Big(|e_{i-l-s}| - E(|e_1|) \Big) \right| \\
&\quad + \max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\vartheta}^{\,l} |L(e_i, e_j)| E(|e_1|) \\
&\leq\; \frac{4}{n^{\alpha+1}} \sum_{l=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l} \max_{1\leq k\leq n-1} \left| \sum_{i=(l\vee k)+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |L(e_i, e_j)| \Big(|e_{i-l-s}| - E(|e_1|) \Big) \right| \\
&\quad + \frac{E(|e_1|)}{1-\overline{\vartheta}} \max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |L(e_i, e_j)| \\
&=\; O(n^{-1-\alpha})\, O_p(n^{3/2}) + O_p(1) \;=\; o_p(\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

nach (3.102) und (2.57). Es folgt $V_n = o_p(1)$.
Ähnlich ist

$$\begin{aligned}
I_n \;&\leq\; C_{\boldsymbol{\Theta}} C_{\mathbf{P}} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \sum_{s=0}^{q} |\vartheta_s| \cdot \\
&\quad \cdot \max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |L(e_i, e_j)| \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\vartheta}^{\,l} \sum_{m=l}^{k} \overline{\rho}^{\,m-l} |e_{i-1-m-s}| \\
&=:\; C_{\boldsymbol{\Theta}} C_{\mathbf{P}} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \sum_{s=0}^{q} |\vartheta_s| \cdot VI_n^s
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
VI_n^s \;&\leq\; \frac{4}{n^{1+\alpha}} \sum_{l=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l} \sum_{m=l}^{n-2} \overline{\rho}^{\,m-l} \cdot \\
&\qquad \cdot \max_{1\leq k\leq n-1} \left| \sum_{\substack{i=(k+1)\\ \vee(m+2)}}^{n} \sum_{j=1}^{k} |L(e_i, e_j)| \Big(|e_{i-1-m-s}| - E(|e_1|) \Big) \right| \\
&\quad + \frac{E(|e_1|)}{(1-\overline{\vartheta}\,)(1-\overline{\rho}\,)} \max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |L(e_i, e_j)| \\
&=\; O(n^{-1-\alpha})\, O_p(n^{3/2}) + O_p(1) \;=\; o_p(\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

für $s = 0, \ldots, q$ nach (3.103) und (2.57). Es folgt $I_n = o_p(1)$. Daher gilt (3.129).
Zu (3.130): Ähnlich wie oben ist

$$\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |L(e_i, e_j)(\hat{e}_{nj} - e_j)|$$

$$
\begin{aligned}
\le \quad & \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|L(e_i,e_j)\sum_{l=0}^{j-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^l,\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle\cdot\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\sum_{m=l}^{j-2}\langle\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n,\mathbf{P}^{m-l}\mathbf{u}_p\rangle\langle\boldsymbol{\vartheta},\mathbf{e}'_{j-1-m}\rangle\Big|\\
&+\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|L(e_i,e_j)\sum_{l=0}^{j-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^l,\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle\cdot\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\langle\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n,\mathbf{P}^{j-1-l}\mathbf{X}_0\rangle\Big|\\
&+\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|L(e_i,e_j)\sum_{l=0}^{j-1}\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^l,\mathbf{u}_q,\mathbf{u}_q\rangle\cdot\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot\langle(\widehat{\mathbf{\Theta}}_n-\mathbf{\Theta})\mathbf{e}_{j-1-l},\mathbf{u}_q\rangle\Big|\\
&+\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|L(e_i,e_j)\langle\widehat{\mathbf{\Theta}}_n^j(\widehat{\mathbf{e}}_{n0}-\mathbf{e}_0),\mathbf{u}_q\rangle\Big|\\
=: \quad & I_n+I\!I_n+I\!I\!I_n+I\!V_n.
\end{aligned}
$$

Wir haben

$$
\begin{aligned}
I\!V_n &\le \frac{4}{n^{\alpha+1}}C_{\mathbf{\Theta}}\|\widehat{\mathbf{e}}_{n0}-\mathbf{e}_0\|\max_{1\le k\le n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\overline{\vartheta}^j|L(e_i,e_j)|\\
&= O_p(n^{-1-\alpha})\,O_p(n) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.110), und

$$
\begin{aligned}
I\!I_n &\le \frac{4}{n^{\alpha+1}}C_{\mathbf{\Theta}}C_{\mathbf{P}}\|\boldsymbol{\rho}-\widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\|\|\mathbf{X}_0\|\max_{1\le k\le n-1}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{j-1}\overline{\vartheta}^l\overline{\rho}^{j-l}|L(e_i,e_j)|\overline{\rho}^{-1}\\
&= O(n^{-1-\alpha})\,O_p(1/\sqrt{n}\,)\,O_p(n) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.112). Dann ist

$$
\begin{aligned}
I\!I\!I_n &\le C_{\mathbf{\Theta}}\sum_{s=1}^{q}|\widehat{\vartheta}_{ns}-\vartheta_s|\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\sum_{l=0}^{j-1}\overline{\vartheta}^l|L(e_i,e_j)e_{j-l-s}|\\
&=: C_{\mathbf{\Theta}}\sum_{s=1}^{q}|\widehat{\vartheta}_{ns}-\vartheta_s|\cdot V_n^s,
\end{aligned}
$$

mit

$$
\begin{aligned}
V_n^s &\le \frac{4}{n^{\alpha+1}}\sum_{l=0}^{n-2}\overline{\vartheta}^l\max_{l+1\le k\le n-1}\Big|\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=l+1}^{k}|L(e_i,e_j)|\Big(|e_{j-l-s}|-E(|e_1|)\Big)\Big|\\
&\quad+\frac{E(|e_1|)}{1-\overline{\vartheta}}\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]}\frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|L(e_i,e_j)|\\
&= O(n^{-1-\alpha})\,O_p(n^{3/2})+O_p(1) \quad = \quad o_p(\sqrt{n}\,)
\end{aligned}
$$

für alle $s = 1, \dots, q$ nach (3.106) und (2.57). Dies bedeutet $\mathit{III} = o_p(1)$.
Weiter ist

$$\begin{aligned} I_n &\leq C_{\mathbf{\Theta}} C_{\mathbf{P}} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \sum_{s=0}^{q} |\vartheta_s| \cdot \\ &\quad \cdot \max_{[n^\alpha] \leq k \leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |L(e_i, e_j)| \sum_{l=0}^{j-1} \overline{\vartheta}^{\,l} \sum_{m=l}^{j-2} \overline{\rho}^{\,m-l} |e_{j-1-m-s}| \\ &=: C_{\mathbf{\Theta}} C_{\mathbf{P}} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \sum_{s=0}^{q} |\vartheta_s| \cdot \mathit{VI}_n^s, \end{aligned}$$

und für alle $s = 0 \dots, q$

$$\begin{aligned} \mathit{VI}_n^s &\leq \frac{4}{n^{\alpha+1}} \sum_{l=0}^{n-2} \sum_{m=l}^{n-3} \overline{\vartheta}^{\,l} \overline{\rho}^{\,m-l} \max_{m+2 \leq k \leq n-1} \Bigg| \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=m+2}^{k} |L(e_i, e_j)| \cdot \\ &\qquad\qquad \cdot \Big(|e_{j-1-m-s}| - E(|e_1|) \Big) \Bigg| \\ &\quad + \frac{E(|e_1|)}{(1-\overline{\vartheta})(1-\overline{\rho})} \max_{[n^\alpha] \leq k \leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |L(e_i, e_j)| \\ &= O(n^{-1-\alpha})\, O_p(n^{3/2}) + O_p(1) \quad = \quad o_p(\sqrt{n}\,) \end{aligned}$$

nach (3.107) und (2.57), also $I_n = o_p(1)$.
Daraus folgt (3.130).

3.131 Proposition. Unter den Voraussetzungen (3.92) (a)–(d), (f) und (g) an die Funktion K gelten für alle $\alpha \in (0, 1)$

$$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |\hat{e}_{ni} K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) - e_i K(e_i, e_j)| = o_p(1) \tag{3.132}$$

und

$$\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |\hat{e}_{nj} K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) - e_j K(e_i, e_j)| = o_p(1). \tag{3.133}$$

Beweis: Zu (3.132): Sei $\alpha \in (0, 1)$ und $n \in \mathbb{N}$. Durch Einteleskopieren und Anwenden der Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} &\max_{[n^\alpha] \leq k \leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} |\hat{e}_{ni} K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) - e_i K(e_i, e_j)| \\ &\leq \max_{[n^\alpha] \leq k \leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \Big| (\hat{e}_{ni} - e_i) K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) \Big| \\ &\quad + \max_{[n^\alpha] \leq k \leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} \Big| e_i \Big(K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) - K(e_i, e_j) \Big) \Big| \\ &=: I_n + \mathit{II}_n. \end{aligned}$$

Nach der Taylorformel ist, wobei wir wieder mit ε_{ni}^j für $i,j=1,\ldots,n$ und $i\neq j$, die Zwischenstellen von $\hat e_{ni}$ und e_i bezeichnen,

$$\begin{aligned}
I_n &= \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|(\hat e_{ni}-e_i)\Big(K(e_i,e_j)\\
&\qquad\qquad + \sum_{w=1}^{v-1}\frac{1}{w!}K^{(w)}(e_i,e_j)(\hat e_{ni}-e_i,\hat e_{nj}-e_j)^w\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{v!}K^{(v)}(\varepsilon_{ni}^j,\varepsilon_{nj}^i)(\hat e_{ni}-e_i,\hat e_{nj}-e_j)^v \quad\Big)\Big|\\
&\le \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|K(e_i,e_j)(\hat e_{ni}-e_i)\Big|\\
&\quad + \frac{4}{n^{1+\alpha}}\sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}\max_{1\le k\le n}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|D_1^uD_2^{w-u}K(e_i,e_j)|\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot|\hat e_{ni}-e_i|^{u+1}|\hat e_{nj}-e_j|^{w-u}\\
&\quad + \frac{4}{n^{1+\alpha}}\sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}\max_{1\le k\le n}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|D_1^uD_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^j,\varepsilon_{nj}^i)|\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot|\hat e_{ni}-e_i|^{u+1}|\hat e_{nj}-e_j|^{v-u}\\
&\le o_p(1)+O(n^{-1-\alpha})O_p(n)+O(n^{-1-\alpha})O_p(n) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.129) mit (3.92) (a), nach (3.121) mit (3.92) (b) und (c), sowie (3.123) mit (3.92) (d).

Ähnlich ist

$$\begin{aligned}
I\!I_n &= \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|\,e_i\,K'(e_i,e_j)(\hat e_{ni}-e_i,\hat e_{nj}-e_j)\\
&\qquad\qquad + \sum_{w=2}^{v-1}e_i\frac{1}{w!}K^{(w)}(e_i,e_j)(\hat e_{ni}-e_i,\hat e_{nj}-e_j)^w\\
&\qquad\qquad + e_i\frac{1}{v!}K^{(v)}(\varepsilon_{ni}^j,\varepsilon_{nj}^i)(\hat e_{ni}-e_i,\hat e_{nj}-e_j)^v \quad\Big|\\
&\le \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|e_iD_1K(e_i,e_j)(\hat e_{ni}-e_i)\Big|\\
&\quad + \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\Big|e_iD_2K(e_i,e_j)(\hat e_{nj}-e_j)\Big|\\
&\quad + \frac{4}{n^{1+\alpha}}\sum_{w=2}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}\max_{1\le k\le n}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|e_iD_1^uD_2^{w-u}K(e_i,e_j)|\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot|\hat e_{ni}-e_i|^{u}|\hat e_{nj}-e_j|^{w-u}\\
&\quad + \frac{4}{n^{1+\alpha}}\sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}\max_{1\le k\le n}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|e_iD_1^uD_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^j,\varepsilon_{nj}^i)|\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot|\hat e_{ni}-e_i|^{u}|\hat e_{nj}-e_j|^{v-u}
\end{aligned}$$

$$\leq \quad o_p(1) + o_p(1) + O(n^{-1-\alpha})O_p(n) + O(n^{-1-\alpha})O_p(n) \quad = \quad o_p(1)$$

nach (3.129) und (3.130) jeweils mit (3.92) (f), nach (3.121) mit (3.92) (g), und nach (3.124) mit (3.92) (d). Daraus folgt die Behauptung.
Zu (3.133): Geht analog, nur unter Verwendung von (3.130) statt (3.129) und umgekehrt, und (3.125) statt (3.124).

3.134 Folgerung. Unter den Voraussetzungen (3.92) (a)–(g) an die Funktion K gelten für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \left| \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - E(e_1K(e_1,e_2)) \right| = o_p(1) \tag{3.135}$$

$$\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \left| \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \hat{e}_{nj}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - E(e_2K(e_1,e_2)) \right| = o_p(1) \tag{3.136}$$

$$\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} |\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})| = O_p(1) \tag{3.137}$$

$$\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} |\hat{e}_{nj}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})| = O_p(1). \tag{3.138}$$

Beweis: Zu (3.135): Für alle $\alpha \in (0,1)$ ist wegen der Dreicksungleichung

$$\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \left| \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - E(e_1K(e_1,e_2)) \right| \\
\leq\; &\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left| \hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - e_iK(e_i,e_j) \right| \\
&+ \max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \left| \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} e_iK(e_i,e_j) - E(e_1K(e_1,e_2)) \right| \\
=\; & o_p(1) + o_p(1) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.132) mit (3.92) (a)–(d), (f) und (g), und nach (2.59) mit (3.92) (e).
Zu (3.136): Geht mit einer entsprechenden Rechnung, nur verwenden wir am Ende (3.133) statt (3.132), und (2.60) anstelle von (2.59).
Zu (3.137): Wieder mit der Dreiecksungleichung ist für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} |\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})| \\
\leq\; &\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} |\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - e_iK(e_i,e_j)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k}\sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k}|e_i K(e_i,e_j)| \\
= \;& o_p(1)+O_p(1) \;=\; O_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.132) mit (3.92) (a)–(d), (f) und (g), und nach (2.61) mit (3.92) (e).
Zu (3.138): Geht ähnlich, nur mit (3.133) und (2.62) statt (3.132) und (2.61).

3.139 Definition. Zu der am Anfang des Kapitels gewählten Borelfunktion K sei

$$
\begin{aligned}
&\hat r_n : [0,1]\to\mathbb{R},\\
&\hat r_n(s) := \frac{[ns](n-[ns])}{n^2}\iint K(x,y)\,\widehat F_n^{seq}(s,dy)\,\widehat G_n^{seq}(s,dx)\\
&\qquad = \frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]} K(\hat e_{ni},\hat e_{nj}),
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\begin{aligned}
&\hat r_n^z : [0,1]\to\mathbb{R},\\
&\hat r_n^z(s) := \frac{[ns](n-[ns])}{n^2}\iint K(x,y)\,\widehat F_n^{seq,z}(s,dy)\,\widehat G_n^{seq,z}(s,dx)\\
&\qquad = \frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]} [ns]\widehat p_{n,j}(s)\,(n-[ns])\widehat q_{n,i}(s)\,K(\hat e_{ni},\hat e_{nj}).
\end{aligned}
$$

3.140 Bemerkung. In dieser Notation besagt Proposition 3.126 gerade, dass unter den dort genannten Voraussetzungen (3.92) (b)–(d) an K

$$
\sup_{s\in[0,1]} |\hat r_n(s) - r_n(s)| = O_p(1/n)
$$

gilt. (Weil für den Beweis hiervon aus der Folgerung 3.122 nur die Aussage (3.123) verwendet wird, bräuchte man hierfür (3.92) (d) nur mit einer größeren Majorante für L mit Exponenten m.)

3.141 Proposition. Unter den Voraussetzungen (3.92) (a)–(g) an die Funktion K gilt

$$
\begin{aligned}
\sup_{s\in[0,1]}\Bigg|\hat r_n^z(s) - \Bigg(r_n(s) - \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\Bigg(&1_{\{l\le[ns]\}}(n-[ns])\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}\\
&+1_{\{l>[ns]\}}[ns]\frac{E(K(e_1,e_2)e_1)}{\sigma^2}\Bigg)e_l\Bigg)\Bigg| \\
&= o_p(1/\sqrt{n}\,).
\end{aligned}
\tag{3.142}
$$

Beweis: Sei für $n \in \mathbb{N}$ und $s \in [0,1]$

$$H(n,s) := \hat{r}_n^z(s) - \Bigg(r_n(s) - \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{n} \Big(1_{\{l \le [ns]\}} (n - [ns]) \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2} \\ + 1_{\{l > [ns]\}} [ns] \frac{E(K(e_1,e_2)e_1)}{\sigma^2} \Big) e_l \Bigg),$$

ähnlich wie im Beweis von Proposition 2.66. Dann ist die Behauptung (3.142) gerade

$$\sup_{s \in [0,1]} |H(n,s)| = o_p(1/\sqrt{n}\,).$$

Es gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \sup_{s \in [0,1]} |H(n,s)| \quad &\le \quad \sup_{s \in [0, n^{\alpha-1}]} |H(n,s)| + \sup_{s \in [1-n^{\alpha-1}, 1]} |H(n,s)| \\ &\quad + 1_{\mathcal{C}\widehat{A}_{n,\alpha} \cup \mathcal{C}\widehat{B}_{n,\alpha}} \cdot \infty + 1_{\widehat{A}_{n,\alpha} \cap \widehat{B}_{n,\alpha}} \cdot \sup_{s \in [n^{\alpha-1}, 1-n^{\alpha-1}]} |H(n,s)| \\ &=: \quad I_n + I\!I_n + I\!I\!I_n + I\!V_n. \end{aligned}$$

Für alle $\alpha \in (0,1)$ und $\varepsilon > 0$ ist

$$P(I\!I\!I_n \ge \varepsilon/\sqrt{n}\,) \le P(\mathcal{C}\widehat{A}_{n,\alpha}) + P(\mathcal{C}\widehat{B}_{n,\alpha}) \xrightarrow[n]{} 0$$

nach (3.20) und (3.48), also gilt $I\!I\!I_n = o_p(1/\sqrt{n}\,)$. Bei dem Term $I\!V_n$ beachten wir

$$\begin{aligned} I\!V_n \quad \le \quad & 1_{\widehat{A}_{n,\alpha} \cap \widehat{B}_{n,\alpha}} \cdot \sup_{s \in [0,1]} \Bigg| \hat{r}_n^z(s) - \hat{r}_n(s) + \frac{n-[ns]}{n^2} \sum_{j=1}^{[ns]} \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2} e_j \\ & \qquad - \frac{[ns]}{n^2} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \frac{E(K(e_1,e_2)e_1)}{\sigma^2} e_i \Bigg| \\ & + \sup_{s \in [0,1]} \Big| \hat{r}_n(s) - r_n(s) \Big|, \end{aligned}$$

und den ersten Summanden hiervon kann man ähnlich abschätzen wie den Ausdruck $I\!V_n$ im Beweis von Proposition 2.66, indem man statt (2.29), (2.30), (2.31), (2.33), (2.37), (2.38), (2.39), (2.40), (2.59), (2.60), (2.61) und (2.62) nun (3.40), (3.41), (3.42), (3.44), (3.69), (3.70), (3.71), (3.73), (3.135), (3.136), (3.137) und (3.138) verwendet. Diese längere Rechnung wiederholen wir hier nicht. Man erhält damit und mit (3.127) für den zweiten Summanden, $I\!V_n = o_p(1/\sqrt{n}\,)$.
Weiter ist

$$I_n \quad \le \quad \sup_{s \in [0, n^{\alpha-1}]} |\hat{r}_n^z(s)| + \sup_{s \in [0, n^{\alpha-1}]} |r_n(s)|$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{|E(K(e_1,e_2)e_2)|}{\sigma^2}\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\frac{n-[ns]}{n^2}\Big|\sum_{j=1}^{[ns]}e_j\Big|\\
&+\frac{|E(K(e_1,e_2)e_1)|}{\sigma^2}\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\frac{[ns]}{n^2}\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}e_i\Big|\\
=:\ & V_n+\mathit{VI}_n+\mathit{VII}_n+\mathit{VIII}_n.
\end{aligned}
$$

Die Summanden VI_n, VII_n und VIII_n wurden schon unter gleichem Namen im Beweis von Proposition 2.66 betrachtet, so dass nur V_n zu behandeln bleibt für welchen

$$
V_n \le 1_{\mathcal{C}\widehat{B}_{n,\alpha}}\cdot\infty + 1_{\widehat{B}_{n,\alpha}}\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}|\hat{r}_n^z(s)|
$$

gilt. Nun ist $1_{\mathcal{C}\widehat{B}_{n,\alpha}}\cdot\infty \le \mathit{III}_n = o_p(1/\sqrt{n})$, und unter $\widehat{B}_{n,\alpha}$ ist unter Verwendung der Taylorformel

$$
\begin{aligned}
&\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}|\hat{r}_n^z(s)|\\
=\ &\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\frac{[ns](n-[ns])}{n^2}\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}\widehat{p}_{n,j}(s)\widehat{q}_{n,i}(s)K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})\Big|\\
=\ &\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\frac{[ns]}{n^2}\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}\widehat{p}_{n,j}(s)\frac{1}{1+\hat{u}_{n[ns]}\hat{e}_{ni}}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})\Big|\\
\le\ &\frac{n^\alpha}{n^2}\max_{0\le k\le[n^\alpha]}\max_{k+1\le i\le n}\frac{1}{1+\hat{u}_{nk}\hat{e}_{ni}}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{[n^\alpha]}|K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})|\\
\le\ &\frac{n^\alpha}{n^2}\max_{0\le k\le[n^\alpha]}\max_{k+1\le i\le n}\frac{1}{1+\hat{u}_{nk}\hat{e}_{ni}}\cdot\\
&\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{[n^\alpha]}\Big|\sum_{u=0}^{v-1}\sum_{w=0}^{u}\binom{u}{w}D_1^{u-w}D_2^{w}K(e_i,e_j)(\hat{e}_{ni}-e_i)^{u-w}(\hat{e}_{nj}-e_j)^w\\
&\qquad+\sum_{w=0}^{v}\binom{v}{w}D_1^{v-w}D_2^{w}K(\varepsilon_{ni}^j,\varepsilon_{nj}^i)(\hat{e}_{ni}-e_i)^{v-w}(\hat{e}_{nj}-e_j)^w\Big|\\
\le\ &\frac{n^\alpha}{n^2}\max_{0\le k\le[n^\alpha]}\max_{k+1\le i\le n}\frac{1}{1+\hat{u}_{nk}\hat{e}_{ni}}\cdot\\
&\cdot\Big(\sum_{u=0}^{v-1}\sum_{w=0}^{u}\binom{u}{w}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{[n^\alpha]}|D_1^{u-w}D_2^{w}K(e_i,e_j)|\Big(\max_{1\le i\le n}|\hat{e}_{ni}-e_i|\Big)^u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + 2^v \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{[n^\alpha]} K_0\, C_{m-1} \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(1 + |e_i|^{m-1} + |\hat{e}_{ni} - e_i|^{m-1} + e_j^{m-1} + |\hat{e}_{nj} - e_j|^{m-1}\Big) \cdot \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cdot \Big(\max\nolimits_{1\le i\le n} |\hat{e}_{ni} - e_i|\Big)^v\Bigg) \\
\le\;& \frac{n^\alpha}{n^2} \max_{0\le k\le [n^\alpha]} \max_{k+1\le i\le n} \frac{1}{1 + \hat{u}_{nk}\hat{e}_{ni}} \cdot \\
&\cdot \Bigg(\sum_{u=0}^{v-1}\sum_{w=0}^{u} \binom{u}{w} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{[n^\alpha]} |D_1^{u-w} D_2^w K(e_i, e_j)| \Big(\max_{1\le i\le n} |\hat{e}_{ni} - e_i|\Big)^u \\
&\quad + 2^v \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{[n^\alpha]} K_0 C_{m-1}\Big(1 + |e_i|^{m-1} + e_j^{m-1}\Big)\Big(\max_{1\le i\le n} |\hat{e}_{ni} - e_i|\Big)^v \\
&\quad + 2^{v+1} n [n^\alpha] K_0 C_{m-1}\Big(\max_{1\le i\le n} |\hat{e}_{ni} - e_i|\Big)^{v+2m-2}\Bigg) \\
=\;& O(n^{\alpha-2})\, O_p(1)\Bigg(\sum_{u=0}^{v-1}\sum_{w=0}^{u} O_p(n^{1+\alpha})\, O_p(1)^u + O_p(n^{1+\alpha})\, O_p(1)^v \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + O(n^{1+\alpha})\, O_p(1)^{v+2m-2}\Bigg) \\
=\;& O_p(n^{2\alpha-1}),
\end{aligned}
$$

nach (3.71), (2.64) und (3.17), wobei wieder ε_{ni}^j für $i, j = 1, \ldots, n$ mit $i \neq j$ die Zwischenstellen aus der Taylorformel sind und wir beim vorletzten Ungleichheitszeichen nach dem Anwenden der Dreiecksungleichung die Ableitungen an diesen Zwischenstellen genauso wie im Beweis von Folgerung (3.122) abgeschätzt haben, C_{m-1} wie dort die Konstante aus der C_r-Ungleichung bezeichnet, und K_0 aus (3.92) (d) stammt. Es folgt $V_n = o_p(1/\sqrt{n}\,)$ und damit auch $I_n = o_p(1/\sqrt{n}\,)$ für alle $\alpha \in (0, 1/4)$.
Analog ist $I\!I_n = o_p(1/\sqrt{n}\,)$ für alle $\alpha \in (0, 1/4)$. Daraus folgt (3.142).

Kapitel 4

Funktionale Grenzwertsätze für $\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^z$ und $\sqrt{n}\,\hat{r}_n^z$

Wir betrachten in diesem Kapitel im Zusammenhang mit U-Typ-Prozessen wie $\hat{r}_n$ und $\hat{r}_n^z$ Verteilungskonvergenz in dem Skorohodraum $D([0,1])$, bestehend aus der Menge aller reellwertigen, rechtsseitig stetigen Funktionen auf $[0,1]$ welche an jeder Stelle linksseitige Grenzwerte in $\mathbb{R}$ besitzen, ausgestattet mit der Skorohodmetrik s_∞, die für $f,g \in D([0,1])$ definiert ist als

$$s_\infty(f,g) := \inf_{\lambda \in H_1} \left(\sup_{s \in [0,1]} \Big| f(s) - g(\lambda(s)) \Big| + \sup_{s \in [0,1]} \Big| s - \lambda_1(s) \Big| \right),$$

wobei H_1 die Menge aller Homöomorphismen $\lambda : [0,1] \to [0,1]$ mit $\lambda(0) = 0$ und $\lambda(1) = 1$ ist. Dieser Skorohodraum wird zum Beispiel in Billingsley (1968), Kapitel 3, beschrieben.

Im Zusammenhang mit den stochastischen Prozessen wie $\widehat{T}_n$ und $\widehat{T}_n^z$, welche zweidimensionale Argumente in $[0,1] \times \overline{\mathbb{R}}$ besitzen, betrachten wir Verteilungskonvergenz in dem Skorohodraum $D([0,1] \times \overline{\mathbb{R}}\,)$. Die Verallgemeinerung des oben erwähnten Konzepts auf q-dimensionale Skorohodräume $D([0,1]^q)$ von Funktionen mit $[0,1]^q$ als Definitionsbereich mit der dazugehörigen Verallgemeinerung der Begriffe der rechtsseitigen Stetigkeit und der linksseitigen Grenzwerte findet sich in Neuhaus (1971). Durch die Identifizierung $\overline{\mathbb{R}} \leftrightarrow [0,1]$ mittels einer stetigen, streng monoton wachsenden Funktion T, welche $-\infty$ auf 0 und ∞ auf 1 abbildet, erhalten wir den Skorohodraum $D([0,1] \times \overline{\mathbb{R}}\,)$. Auf $\overline{\mathbb{R}}$ verwenden wir die Metrik $m(x,y) := |T(x) - T(y)|$, und die zu $D([0,1] \times \overline{\mathbb{R}})$ gehörige Skorohodmetrik ergibt sich dann für $f, g \in D([0,1] \times \overline{\mathbb{R}})$ als

$$s_\infty(f,g) := \inf_{\substack{\lambda_1 \in H_1 \\ \lambda_2 \in H_2}} \Bigg(\sup_{\substack{s\in[0,1] \\ x\in\overline{\mathbb{R}}}} \Big| f(s,x) - g(\lambda_1(s), \lambda_2(x)) \Big| + \sup_{\substack{s\in[0,1] \\ x\in\overline{\mathbb{R}}}} \Big(\Big| s - \lambda_1(s) \Big| \vee m(x, \lambda_2(x)) \Big) \Bigg),$$

wobei H_1 wie oben ist, und H_2 die Menge aller Homöomorphismen $\lambda : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ mit $\lambda(-\infty) = -\infty$ und $\lambda(\infty) = \infty$ ist. Wir unterscheiden hier in der Notation nicht zwischen beiden Skorodhodmetriken, da jeweils aus dem Kontext klar ist, ob Funktionen mit $[0,1]$ oder mit $[0,1] \times \overline{\mathbb{R}}$ als Definitionsbereich betrachtet werden. Bei den hier betrachteten stochastischen Prozessen überlegt man sich jeweils leicht, dass sie in den angegeben Skorohodräumen liegen.
Statt mit der Verteilungskonvergenz in den Skorohodräumen könnte man auch mit dem Verteilungskonvergenzkonzept von Hoffmann und Joergensen in den Räumen von beschränkten Funktionen ausgestattet mit der Supremumsmetrik arbeiten, wie es in van der Vaart und Wellner (1996), Kapitel 1, beschrieben ist, ohne dass dafür größere Änderungen an den Beweisen nötig wären.
Wir setzen ab diesem Kapitel zusätzlich an K voraus, dass

$$\text{(4.1)} \qquad \begin{aligned} &\text{(a)} \quad K(x,y) = -K(y,x) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R} \\ &\text{(b)} \qquad E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)^2\Big) > 0 \end{aligned}$$

erfüllt sind, dass K also insbesondere antisymmetrisch ist. Es gelten natürlich weiterhin (2.1)–(2.4) und unsere Annahmen über das ARMA-Modell.

4.1 Verteilungskonvergenz unter der Hypothese

4.2 Satz. Unter den Voraussetzungen von Satz 3.77 gilt

$$\text{(4.3)} \qquad \sqrt{n}\, T_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W^{klass} \quad \text{in } D([0,1] \times \overline{\mathbb{R}})$$

und

$$\text{(4.4)} \qquad \sqrt{n}\, \widehat{T}_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W^{klass} \quad \text{in } D([0,1] \times \overline{\mathbb{R}})$$

wobei $W^{klass} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ ein zweidimensionaler zentrierter Gaußprozeß mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

$$([0,1] \times \overline{\mathbb{R}})^2 \ni ((s,x),(t,y)) \mapsto (s \wedge t - st)\Big(F(x \wedge y) - F(x)F(y)\Big) \in \mathbb{R}$$

ist.

Beweis: Siehe Bai (1994), Abschnitt 2.

4.5 Definition. Sei für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 0, \ldots, n$

$$\begin{aligned}
&X_{ni} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \\
&X_{ni}(s,x) := \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1_{\{i \le [ns]\}}\frac{n-[ns]}{n} - 1_{\{i>[ns]\}}\frac{[ns]}{n}\Big)\Big(1_{\{e_i \le x\}} - F(x) - \frac{U(x)}{\sigma^2}e_i\Big),
\end{aligned}$$

wobei F wie immer die Verteilungsfunktion der Fehlervariablen bezeichnet.
Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
K_n &: [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \\
K_n(s,x) &:= \sum_{i=1}^{n} X_{ni}(s,x) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\Big(1_{\{i \le [ns]\}}\frac{n-[ns]}{n} - 1_{\{i>[ns]\}}\frac{[ns]}{n}\Big)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\Big(1_{\{e_i \le x\}} - F(x) - \frac{U(x)}{\sigma^2}e_i\Big).
\end{aligned}$$

4.6 Proposition. Seien $k \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_k \in [0,1]$ und $x_1, \ldots, x_k \in \overline{\mathbb{R}}$, und sei

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_n &:= \Big(K_n(s_1,x_1), \ldots, K_n(s_k,x_k)\Big), \\
\mathbf{X}_{ni} &:= \Big(X_{ni}(s_1,x_1), \ldots, X_{ni}(s_k,x_k)\Big)
\end{aligned}$$

für alle $i = 1, \ldots, n$, sowie

$$\mathbf{\Gamma} = \bigg(\Big(s_i \wedge s_j - s_i s_j\Big)\Big(F(x_i \wedge x_j) - F(x_i)F(x_j) - \frac{U(x_i)U(x_j)}{\sigma^2}\Big)\bigg)_{i,j=1,\ldots,k}.$$

Dann gilt unter (2.41)

$$\mathbf{K}_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N(0, \mathbf{\Gamma}). \tag{4.7}$$

Beweis: Wegen der Zentriertheit, der Unabhängigkeit und der identischen Verteiltheit der Fehler e_i, $i \in \mathbb{N}$, stellt $(\mathbf{X}_{ni})_{i=1,\ldots,n;n\in\mathbb{N}}$ ein zeilenweise unabhängiges Dreiecksschema von zentrierten k-dimensionalen Zufallsvektoren dar, deren Komponenten wegen der quadratischen Integrierbarkeit der Fehler ebenfalls quadratisch integrierbar sind.
Es gilt $\mathbf{K}_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_{ni}$, daher können wir für den Beweis von (4.7) den zentralen Grenzwertsatz in seiner Form für Vektoren benutzen. Zu zeigen sind das Erfülltsein der Lindebergbedingung

$$\sum_{i=1}^{n} E(\|\mathbf{X}_{ni}\|^2 1_{\{\|\mathbf{X}_{ni}\|^2 \ge \varepsilon\}}) \xrightarrow[n]{} 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \tag{4.8}$$

und der Normierungsbedingung

$$\text{(4.9)} \qquad \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Cov}(\mathbf{X}_{ni}) \xrightarrow[n]{} \mathbf{\Gamma}.$$

Zu (4.8): Es ist für $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{X}_{ni}\|^2 \\
&= \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{n}\Big(1_{\{i\le[ns_j]\}}\frac{n-[ns_j]}{n} - 1_{\{i>[ns_j]\}}\frac{[ns_j]}{n}\Big)^2\Big(1_{\{e_i\le x_j\}} - F(x_j) - \frac{U(x_j)}{\sigma^2}e_i\Big)^2 \\
&\le k\frac{1}{n}\Big(1 + \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2}|e_i|\Big)^2 \quad =: \quad M(n,i),
\end{aligned}$$

also gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} E(\|\mathbf{X}_{ni}\|^2 1_{\{\|\mathbf{X}_{ni}\|^2\ge\varepsilon\}}) \\
&\quad \le \sum_{i=1}^{n} E(M(n,i)1_{\{M(n,i)\ge\varepsilon\}}) \\
&\quad = nE(M(n,1)1_{\{M(n,1)\ge\varepsilon\}}) \\
&\quad = kE\bigg(\Big(1 + \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2}|e_1|\Big)^2 1_{\{M(n,1)\ge\varepsilon\}}\bigg) \quad \xrightarrow[n]{} \quad 0
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Lebesgue, da e_1 quadratisch integrierbar ist und deshalb $M(n,1)$ fast sicher gegen Null konvergiert, und damit auch die Indikatorfunktion im Erwartungswert fast sicher gegen Null konvergiert.
Zu (4.9): Wir rechnen dies elementweise nach. Seien $l, l' \in \{1,\dots,k\}$, $s := s_l$, $t := s_{l'}$, $x := x_l$ und $y := x_{l'}$, um in den Rechnungen Indizes einzusparen.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\eta &:= \operatorname{Cov}\Big(1_{\{e_1\le x\}} - F(x) - \frac{U(x)}{\sigma^2}e_1, 1_{\{e_1\le y\}} - F(y) - \frac{U(y)}{\sigma^2}e_1\Big) \\
&= E\bigg(\Big(1_{\{e_1\le x\}} - F(x) - \frac{U(x)}{\sigma^2}e_1\Big)\Big(1_{\{e_1\le y\}} - F(y) - \frac{U(y)}{\sigma^2}e_1\Big)\bigg) \\
&= E\Big(1_{\{e_1\le x\wedge y\}} - F(y)1_{\{e_1\le x\}} - \frac{U(y)}{\sigma^2}e_1 1_{\{e_1\le x\}} \\
&\qquad - F(x)1_{\{e_1\le y\}} + F(x)F(y) + F(x)\frac{U(y)}{\sigma^2}e_1 \\
&\qquad - \frac{U(x)}{\sigma^2}e_1 1_{\{e_1\le y\}} + F(y)\frac{U(x)}{\sigma^2}e_1 + \frac{U(x)U(y)}{\sigma^4}e_1^2\Big) \\
&= F(x\wedge y) - F(y)F(x) - \frac{U(y)}{\sigma^2}U(x)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad - F(x)F(y) + F(x)F(y) + 0 \\
&\quad - \frac{U(x)}{\sigma^2}U(y) + 0 + \frac{U(x)U(y)}{\sigma^2} \\
= &\quad F(x \wedge y) - F(x)F(y) - \frac{U(x)U(y)}{\sigma^2},
\end{aligned}
$$

also für den l, l'-ten Eintrag einer Matrix der in (4.9) betrachteten Folge, wobei wir zur Abkürzung $m := s \wedge t$ und $M := s \vee t$ setzen,

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(\mathbf{X}_{ni})\right)_{l,l'} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}\Big(X_{ni}(s,x), X_{ni}(t,y)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\Big(1_{\{i \le [ns]\}}\frac{n-[ns]}{n} - 1_{\{i>[ns]\}}\frac{[ns]}{n}\Big)\Big(1_{\{i \le [nt]\}}\frac{n-[nt]}{n} - 1_{\{i>[nt]\}}\frac{[nt]}{n}\Big)\eta \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\Big(1_{\{i \le [n(s\wedge t)]\}}\frac{n-[ns]}{n}\frac{n-[nt]}{n} + 1_{\{i>[n(s\vee t)]\}}\frac{[ns]}{n}\frac{[nt]}{n} \\
&\qquad\qquad - 1_{\{[n(s\wedge t)]<i\le[n(s\vee t)]\}}\frac{n-[n(s\vee t)]}{n}\frac{[n(s\wedge t)]}{n}\Big)\eta \\
&\xrightarrow[n]{} \Big((s\wedge t)(1-s)(1-t) + (1-s\vee t)st \\
&\qquad - (s\vee t - s\wedge t)(s\wedge t)(1-s\vee t)\Big)\eta \\
&= \Big(m(1-m)(1-M) + (1-M)mM - (M-m)m(1-M)\Big)\eta \\
&= \Big(m - m^2 - mM + m^2M + mM - mM^2 - mM + M^2m + m^2 - m^2M\Big)\eta \\
&= (m - mM)\eta \;=\; (s\wedge t - st)\eta \;=\; \mathbf{\Gamma}_{l,l'}.
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt (4.9).

Sei im folgenden für jede Funktion f aus dem Skorohodraum $D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}})$ und für $\delta > 0$

$$
\mathrm{w}_\delta(f) := \sup_{\substack{x,y\in\overline{\mathbb{R}}\\ m(x,y)<\delta}} \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ |s-t|<\delta}} \Big|f(s,x) - f(t,y)\Big|
$$

der Stetigkeitsmodul von f, wobei $m : \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ wieder die beliebige, aber fest gewählte Metrik auf $\overline{\mathbb{R}}$ ist, bezüglich welcher $\overline{\mathbb{R}}$ kompakt ist.

4.10 Proposition. Die Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unter der Voraussetzung (2.41) C-straff, das heißt es gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$
\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\Big(\mathrm{w}_\delta(K_n) \ge \varepsilon\Big) = 0. \tag{4.11}
$$

Beweis: Im folgenden schreiben wir in den Stetigkeitsmodulen aus Gründen der Einfachheit die Argumente s und x der Funktion $K(s,x)$ mit in das Argument hinein und rechnen dann damit weiter, was selbstverständlich dadurch begründet ist, dass man sie als Projektion auf die erste beziehungsweise zweite Komponente eines Vektors versteht.
Wenn wir zur Abkürzung für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, n$

$$H_{ni}(x) := 1_{\{e_i \leq x\}} - F(x) - \frac{U(x)}{\sigma^2} e_i$$

setzen, gilt für alle $\delta > 0$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{w}_\delta(K_n(s,x)) \\
&\leq \ \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{n-[ns]}{n} H_{ni}(x)\Big) + \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \frac{[ns]}{n} H_{ni}(x)\Big) \\
&=: \ w_1(n,\delta) + w_2(n,\delta).
\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}
w_2(n,\delta) &\sim \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \frac{[ns]}{n} H_{n\, n-i+1}(x)\Big) \\
&= \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-[ns]} \frac{[ns]}{n} H_{ni}(x)\Big) \\
&= \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n-[n(1-s)]} \frac{[n(1-s)]}{n} H_{ni}(x)\Big) \\
&= \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{\lceil ns\rceil} \frac{n-\lceil ns\rceil}{n} H_{ni}(x)\Big) \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{\substack{s,t\in[0,1] \\ s<t \\ t-s<\delta}} \sup_{\substack{x,y\in\overline{\mathbb{R}} \\ m(x,y)<\delta}} \Big| \sum_{i=1}^{\lceil nt\rceil} \frac{n-\lceil nt\rceil}{n} H_{ni}(y) - \sum_{i=1}^{\lceil ns\rceil} \frac{n-\lceil ns\rceil}{n} H_{ni}(x) \Big| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\leq k\leq l\leq n} \sup_{\substack{s\in(\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}] \\ t\in(\frac{l-1}{n},\frac{l}{n}] \\ s<t \\ t-s<\delta}} \sup_{\substack{x,y\in\overline{\mathbb{R}} \\ m(x,y)<\delta}} \Big| \sum_{i=1}^{\lceil nt\rceil} \frac{n-\lceil nt\rceil}{n} H_{ni}(y) \\
&\qquad\qquad - \sum_{i=1}^{\lceil ns\rceil} \frac{n-\lceil ns\rceil}{n} H_{ni}(x) \Big| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{\substack{k,l\in\mathbb{N}_0 \\ 0\leq k\leq l\leq n \\ k\leq l<k+1+n\delta}} \sup_{\substack{x,y\in\overline{\mathbb{R}} \\ m(x,y)<\delta}} \Big| \sum_{i=1}^{l} \frac{n-l}{n} H_{ni}(y) - \sum_{i=1}^{k} \frac{n-k}{n} H_{ni}(x) \Big|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \max_{0\le k\le l\le n} \sup_{\substack{s\in[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n})\\ t\in[\frac{l}{n},\frac{l+1}{n})\\ s<t\\ t-s<\delta}} \sup_{\substack{x,y\in\overline{\mathbb{R}}\\ m(x,y)<\delta}} \Big| \sum_{i=1}^{[nt]} \frac{n-[nt]}{n} H_{ni}(y) \\
&\qquad\qquad - \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{n-[ns]}{n} H_{ni}(x) \Big| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ s<t\\ t-s<\delta}} \sup_{\substack{x,y\in\overline{\mathbb{R}}\\ m(x,y)<\delta}} \Big| \sum_{i=1}^{[nt]} \frac{n-[nt]}{n} H_{ni}(y) - \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{n-[ns]}{n} H_{ni}(x) \Big| \\
&= \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{n-[ns]}{n} H_{ni}(x) \Big) \quad = \quad w_1(n,\delta)
\end{aligned}
$$

ist es ausreichend, $w_1(n,\delta)$ zu betrachten. Es gilt

$$
\begin{aligned}
w_1(n,\delta) \quad &\le \quad \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{n-[ns]}{n} \big(1_{\{e_i\le x\}} - F(x) \big) \Big) \\
&\qquad + \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{n-[ns]}{n} \frac{U(x)}{\sigma^2} e_i \Big) \\
&=: \quad w_3(n,\delta) + w_4(n,\delta),
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
w_3(n,\delta) \quad &\le \quad \sup_{s\in[0,1]} \frac{n-[ns]}{n} \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[ns]} \big(1_{\{e_i\le x\}} - F(x) \big) \Big) \\
&\qquad + \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{n-[ns]}{n} \Big) \sup_{s\in[0,1]} \Big| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[ns]} \big(1_{\{e_i\le x\}} - F(x) \big) \Big| \\
&\le \quad \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[ns]} \big(1_{\{e_i\le x\}} - F(x) \big) \Big) \\
&\qquad + \Big(\delta + \frac{1}{n} \Big) \sup_{\substack{s\in[0,1]\\ x\in\overline{\mathbb{R}}}} \frac{1}{\sqrt{n}} \Big| \sum_{i=1}^{[ns]} \big(1_{\{e_i\le x\}} - F(x) \big) \Big|.
\end{aligned}
$$

Hier haben wir beim ersten Ungleichheitszeichen ausgenutzt, dass für alle Funktionen $f,g \in D(\overline{\mathbb{R}} \times [0,1])$

$$
\mathrm{w}_\delta(fg) \le \sup_{x\in[0,1]\times\overline{\mathbb{R}}} |f(x)| \; \mathrm{w}_\delta(g) + \mathrm{w}_\delta(f) \sup_{x\in[0,1]\times\overline{\mathbb{R}}} |g(x)| \tag{4.12}
$$

gilt, was man durch Teleskopieren erhält, und beim zweiten Ungleichheitszeichen

$$
\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{n-[ns]}{n} \Big) \quad = \quad \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{n-ns+ns-[ns]}{n} \Big)
$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{n-ns}{n}\Big) + \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{ns-[ns]}{n}\Big)\\
&= \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\|s-t|<\delta}} \Big|\frac{n-ns}{n} - \frac{n-nt}{n}\Big| + \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\|s-t|<\delta}} \Big|\frac{ns-[ns]}{n} - \frac{nt-[nt]}{n}\Big|\\
&\leq \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\|s-t|<\delta}} \Big|s-t\Big| + \frac{1}{n}\sup_{x,y\in\mathbb{R}} \Big|(x-[x])-(y-[y])\Big| \;=\; \delta + \frac{1}{n}.
\end{aligned}
$$

Nun ist der klassische sequentielle empirische Prozess $\frac{[ns]}{\sqrt{n}}(F_n^{seq} - F)$ verteilungskonvergent mit stetigem Grenzprozess (siehe hierzu Bickel und Wichura (1971), Theorem 6, Wichura (1969), Theorem 2, und Neuhaus (1971), Proposition 3.50), daher gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P(w_3(n,\delta) \geq \varepsilon)\\
&\leq \lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\Bigg(\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{e_i\leq x\}} - F(x)\Big)\Big) \geq \frac{\varepsilon}{2}\Bigg)\\
&\quad + \lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\Bigg(\Big(\delta + \frac{1}{n}\Big)\sup_{\substack{s\in[0,1]\\x\in\overline{\mathbb{R}}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{e_i\leq x\}} - F(x)\Big)\Big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Bigg)\\
&\leq \lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\Bigg(\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{e_i\leq x\}} - F(x)\Big)\Big) \geq \frac{\varepsilon}{2}\Bigg)\\
&\quad + \lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\Bigg(\quad 2\delta\sup_{\substack{s\in[0,1]\\x\in\overline{\mathbb{R}}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{e_i\leq x\}} - F(x)\Big)\Big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Bigg)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

wobei wir beim ersten Summanden beachten, dass Verteilungskonvergenz eines Prozesses bei stetigem Grenzprozess automatisch auch C-Straffheit bedeutet, und beim zweiten Summanden, dass das Supremum in der Wahrscheinlichkeit aufgrund des Stetigkeitssatzes und der Stetigkeit des Supremums des Betrages als Abbildung von $(D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}), s_\infty)$ nach $\mathbb{R}$ verteilungskonvergent ist, und damit folgt nach dem Portmanteau-Theorem, wenn R den Grenzprozess bezeichnet,

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P\Bigg(2\delta\sup_{\substack{s\in[0,1]\\x\in\overline{\mathbb{R}}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{e_i\leq x\}} - F(x)\Big)\Big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Bigg)\\
&\leq \; P\Bigg(2\delta\sup_{\substack{s\in[0,1]\\x\in\overline{\mathbb{R}}}}|R(s,x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Bigg) \;\xrightarrow[\delta\downarrow 0]{}\; 0
\end{aligned}
$$

wegen der σ-Stetigkeit von P.
Kommen wir zu $w_4(n,\delta)$. Wir erhalten mit einer ähnlichen Abschätzung wie sie oben bei $w_3(n,\delta)$ durchgeführt wurde für alle $\delta > 0$ und $n > 1/\delta$

$$\begin{aligned}
w_4(n,\delta) &\leq \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\frac{U(x)}{\sigma^2}e_i\Big) + \Big(\delta+\frac{1}{n}\Big)\sup_{\substack{s\in[0,1]\\ x\in\overline{\mathbb{R}}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]}\frac{U(x)}{\sigma^2}e_i\Big| \\
&\leq \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\frac{U(x)}{\sigma^2}\Big|\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}e_i\Big) + \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{U(x)}{\sigma^2}\Big)\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k}e_i\Big| \\
&\quad + \Big(\delta+\frac{1}{n}\Big)\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\frac{U(x)}{\sigma^2}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k}e_i\Big| \\
&\leq \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2}\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}e_i\Big) + \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{w}_\delta\big(U(x)\big)\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k}e_i\Big| \\
&\quad + 2\delta\,\frac{E(|e_1|)}{\sigma^2}\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k}e_i\Big|.
\end{aligned}$$

Beim zweiten Schritt wurde wieder (4.12) benutzt. Es folgt für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\Big(w_4(n,\delta)\geq\varepsilon\Big) \\
&\leq \lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\bigg(\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}e_i\Big)\geq\frac{\sigma^2\varepsilon}{2E(|e_1|)}\bigg) \\
&\quad + \lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\bigg(\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k}e_i\Big|\geq\frac{1}{2}\,\frac{\sigma^2\varepsilon\sqrt{n}}{2E(|e_1|)\delta+\mathrm{w}_\delta(U(x))}\bigg) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

beim ersten Summanden, weil der darin vorkommende Partialsummenprozess C-straff ist, vergleiche hierfür zum Beispiel Gänßler und Stute (1977), Lemma 10.1.9, beim zweiten Summanden wegen (2.8) und weil wegen der in Proposition 2.42 gezeigten gleichmäßigen Stetigkeit von U $\mathrm{w}_\delta(U(x)) \xrightarrow[\delta\downarrow 0]{} 0$ gilt.
Damit folgt (4.11).

4.13 Proposition. Es gilt unter (2.41)

$$K_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W^{zentr} \quad \text{in } D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}), \tag{4.14}$$

wobei $W^{zentr} : [0,1]\times\overline{\mathbb{R}}\to\mathbb{R}$ ein zweidimensionaler zentrierter Gaußprozeß mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

$$([0,1]\times\overline{\mathbb{R}})^2 \ni ((s,x),(t,y)) \mapsto (s\wedge t-st)\Big(F(x\wedge y)-F(x)F(y)-\frac{U(x)U(y)}{\sigma^2}\Big)\in\mathbb{R}$$

ist.

Beweis: Folgt aus der Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen von K_n gegen diejenigen von W^{zentr} (Proposition 4.6) und der C-Straffheit der Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Proposition 4.10). Vergleiche hierzu Neuhaus (1971), Abschnitt 3, Seite 1291.

4.15 Satz. Es gilt unter den Voraussetzungen (3.78) und (3.79)

$$\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^z \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W^{zentr} \quad \text{in } D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}), \tag{4.16}$$

wobei W^{zentr} der in Proposition 4.13 angegebene Gaußprozeß ist.

Beweis: Folgt mit dem Cramér-Slutzky-Argument aus (3.91) und (4.14).

4.17 Bemerkung. Aus (4.4) folgt mit dem Stetigkeitssatz für die vom klassischen Prozess $\sqrt{n}\,\widehat{T}_n$ abgeleitete Teststatistik vom Kolmogorov-Smirnov-Typ die Verteilungskonvergenzaussage

$$\sqrt{n}\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}|\widehat{T}_n(s,x)| \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} \sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}|W^{klass}(s,x)|. \tag{4.18}$$

Da die Verteilung von stochastischen Prozessen in $D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}})$ durch ihre endlichdimensionalen Randverteilungen festgelegt ist, gilt $W^{klass}\sim B_*(\,\cdot\,,F(\,\cdot\,))$, wobei $B_*:[0,1]^2\to\mathbb{R}$ ein zentrierter Gaußprozess mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

$$[0,1]^4 \ni ((s,u),(t,v)) \mapsto \Big(s\wedge t - st\Big)\Big(u\wedge v - uv\Big) \in \mathbb{R}$$

ist. Wegen der Stetigkeit von F gilt

$$\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}|W^{klass}(s,x)| \sim \sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}|B_*(s,F(x))| = \sup_{s\in[0,1]}\sup_{u\in[0,1]}|B_*(s,u)|,$$

und damit ist klar, dass die Grenzverteilung in (4.18) nicht von der in der Praxis unbekannten Verteilungsfunktion F abhängt, also verteilungsfrei ist. Diese Tatsache erlaubt es, aus (4.18) unmittelbar asymptotische Changepointtests zu konstruieren, indem man die Quantile der bekannten festen Grenzverteilung als kritische Werte benutzt, wie in Bai (1994) beschrieben.
Für die entsprechende von dem Prozess $\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^z$ abgeleitete Teststatistik erhält man mit dem Stetigkeitssatz die (4.18) entsprechende Aussage

$$\sqrt{n}\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}|\widehat{T}_n^z(s,x)| \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} \sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}|W^{zentr}(s,x)|. \tag{4.19}$$

Leider verschwindet bei der Grenzverteilung W^{zentr} die Abhängigkeit von der Funktion F durch Supremumsbildung nicht, denn hier erscheint in der Kovarianzfunktion zusätzlich noch die ebenfalls von F abhängige Funktion U. Um dennoch mittels (4.19) asymptotische Tests konstruieren zu können, werden wir mit einem Bootstrapverfahren erzeugte datenabhängige kritische Werte verwenden. Zu diesem Zweck werden wir einen entsprechenden funktionalen Grenzwertsatz für einen Bootstrapprozess beweisen.

Kommen wir nun zur Verteilungskonvergenz von $\hat{r}_n^z$ unter der Hypothese. Auch hier betrachten wir zunächst den klassischen U-Typ-Prozess $\hat{r}_n$, der die Zentriertheit der Fehlervariablen nicht explizit berücksichtigt.

4.20 Satz. Unter den Voraussetzungen $E(K(e_1, e_3)K(e_2, e_3)) < \infty$ und (4.1) gilt

$$\sqrt{n}\, r_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} V^{klass} \quad \text{in } D([0,1]), \tag{4.21}$$

und wenn zusätzlich noch (3.92) (b)–(d) erfüllt sind, gilt

$$\sqrt{n}\, \hat{r}_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} V^{klass} \quad \text{in } D([0,1]), \tag{4.22}$$

wobei $V^{klass} : [0,1] \to \mathbb{R}$ ein zentrierter Gaußprozeß mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

$$[0,1]^2 \ni (s,t) \mapsto \Big(s \wedge t - st\Big) E\Big(K(e_1, e_3)K(e_2, e_3)\Big) \in \mathbb{R}$$

ist.

Beweis: Für (4.21) siehe Csörgő und Horváth (1988), Theorem 4.1, und verwende das Cramér-Slutzky-Argument. Die zweite Aussage (4.22) folgt mit Bemerkung 3.140 und dem Cramér-Slutzky-Argument aus (4.21).

4.23 Proposition. Für alle $s \in [0,1]$ gilt unter (3.92) (a) und (4.1)

$$\begin{aligned}\bigg| r_n(s) - \frac{1}{n^2}\Big((n - [ns]) \sum_{j=1}^{[ns]} E(K(e_0, e_j)|e_j) \\ + [ns] \sum_{i=[ns]+1}^{n} E(K(e_i, e_0)|e_i)\Big)\bigg| = o_p(1/\sqrt{n}\,).\end{aligned} \tag{4.24}$$

Beweis: Sei in diesem Beweis $s \in [0,1]$ fest gewählt. Dann gilt für die Hájek-Projektion $\tilde{r}_n(s)$ von $r_n(s)$ auf $e_1, \ldots, e_n$

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_n(s) &:= \sum_{l=1}^{n} E(r_n(s)|e_l) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} \sum_{l=1}^{n} E(K(e_i, e_j)|e_l) \\
&= \frac{1}{n^2} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} \Big(E(K(e_i, e_j)|e_i) + E(K(e_i, e_j)|e_j) \Big) \\
&= \frac{1}{n^2} \Big((n - [ns]) \sum_{j=1}^{[ns]} E(K(e_0, e_j)|e_j) + [ns] \sum_{i=[ns]+1}^{n} E(K(e_i, e_0)|e_i) \Big),
\end{aligned}$$

da für $l \notin \{i, j\}$

$$E(K(e_i, e_j)|e_l) = E(K(e_i, e_j)) = 0$$

wegen der Antisymmetrie von K.
Diese Hájek-Projektion $\tilde{r}_n(s)$ ist der führende Term der Hoeffding-Zerlegung von $r_n(s)$ und als solcher unkorreliert mit dem Rest $r_n(s) - \tilde{r}_n(s)$, und es folgt

$$E\Big(r_n(s)^2\Big) = E\Big(\tilde{r}_n(s)^2\Big) + E\Big((r_n(s) - \tilde{r}_n(s))^2\Big),$$

das heißt es gilt

$$E\Big((\sqrt{n}\, r_n(s) - \sqrt{n}\, \tilde{r}_n(s))^2\Big) = n\, E\Big(r_n(s)^2\Big) - n\, E\Big(\tilde{r}_n(s)^2\Big).$$

Aus der Annahme

$$\lim_{n\to\infty} n\, E(r_n(s)^2) = \lim_{n\to\infty} n\, E(\tilde{r}_n(s)^2) \tag{4.25}$$

folgte daher also

$$\sqrt{n}\, r_n(s) - \sqrt{n}\, \tilde{r}_n(s) \ \xrightarrow[n]{L_2}\ 0,$$

was wiederum

$$\Big|\sqrt{n}\, r_n(s) - \sqrt{n}\, \tilde{r}_n(s)\Big| = o_p(1)$$

und damit die Behauptung (4.24) implizierte.
Nun ist

$$n\, E(r_n(s)^2) \quad = \quad \frac{1}{n^3}\, E\bigg(\Big(\sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} K(e_i, e_j) \Big)^2 \bigg)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{n^3} \sum_{\substack{1\le j,j'\le [ns]<i,i'\le n\\ \{i,j\}\cap\{i',j'\}\neq\emptyset}} E\Big(K(e_i,e_j)K(e_{i'},e_{j'})\Big)\\
&= \frac{1}{n^3} \sum_{\substack{1\le j\le [ns]<i,i'\le n\\ i\neq i'}} E\Big(K(e_i,e_j)K(e_{i'},e_j)\Big)\\
&\quad + \frac{1}{n^3} \sum_{\substack{1\le j,j'\le [ns]<i\le n\\ j\neq j'}} E\Big(K(e_i,e_j)K(e_i,e_{j'})\Big)\\
&\quad + \frac{1}{n^3} \sum_{1\le j\le [ns]<i\le n} E\Big(K(e_i,e_j)^2\Big)\\
&= n^{-3}\,[ns](n-[ns])(n-[ns]-1)E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big)\\
&\quad + n^{-3}\,[ns]([ns]-1)(n-[ns])E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big)\\
&\quad + n^{-3}\,[ns](n-[ns])E\Big(K(e_1,e_2)^2\Big)\\
&\xrightarrow[n]{} \Big(s(1-s)^2+s^2(1-s)\Big)E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big),
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
n\,E(\tilde{r}_n(s)^2) &= \frac{1}{n^3}\,E\Bigg(\Bigg([ns]\sum_{i=[ns]+1}^{n} E(K(e_i,e_0)|e_i)\\
&\qquad\qquad + (n-[ns])\sum_{j=1}^{[ns]} E(K(e_0,e_j)|e_j)\Bigg)^2\Bigg)\\
&= n^{-3}\Big([ns]^2(n-[ns])E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_1)^2\Big)\\
&\qquad + (n-[ns])^2[ns]E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)^2\Big)\Big)\\
&\xrightarrow[n]{} s^2(1-s)E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_1)^2\Big)\\
&\quad + (1-s)^2 sE\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)^2\Big)\\
&= \Big(s(1-s)^2+s^2(1-s)\Big)E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big),
\end{aligned}
$$

das heißt, die Grenzwerte in (4.25) sind tatsächlich gleich.

4.26 Definition. Seien für $n\in\mathbb{N}$ und $i=1,\dots,n$ $J_n,\ J'_n,\ Y_{ni}:[0,1]\to\mathbb{R}$,

$$
\begin{aligned}
J_n(s) &:= \frac{1}{n^{3/2}}\Bigg(\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]} K(e_i,e_j) - \sum_{l=1}^{n} e_l\Big(1_{\{l\le [ns]\}}(n-[ns])\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}\\
&\qquad + 1_{\{l>[ns]\}}[ns]\frac{E(K(e_1,e_2)e_1)}{\sigma^2}\Big)\Bigg),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{ni}(s) \quad &:= \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1_{\{i\le[ns]\}}\frac{n-[ns]}{n} - 1_{\{i>[ns]\}}\frac{[ns]}{n}\Big)\cdot \\
&\qquad \cdot\Big(E\Big(K(e_0,e_i)\Big|e_i\Big) - \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}e_i\Big)
\end{aligned}
$$

und

$$
J_n'(s) \quad := \quad \sum_{i=1}^n Y_{ni}(s).
$$

4.27 Proposition. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $s_1,\dots,s_k \in [0,1]$, und seien

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}_n \quad &:= \quad \Big(J_n(s_1),\dots,J_n(s_k)\Big),\\
\mathbf{Y}_{ni} \quad &:= \quad \Big(Y_{ni}(s_1),\dots,Y_{ni}(s_k)\Big) \quad \text{für } i=1,\dots,n,\\
\mathbf{J}_n' \quad &:= \quad \Big(J_n'(s_1),\dots,J_n'(s_k)\Big)
\end{aligned}
$$

sowie

$$
\mathbf{\Gamma} := \left(\Big(s_i\wedge s_j - s_is_j\Big)\Big(E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big) - \frac{1}{\sigma^2}E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big)^2\Big)\right)_{i,j=1,\dots,k}.
$$

Dann gilt unter (3.92) (a) und (4.1)

$$
\|\mathbf{J}_n - \mathbf{J}_n'\| = o_p(1) \tag{4.28}
$$

und

$$
\mathbf{J}_n' \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N(0,\mathbf{\Gamma}). \tag{4.29}
$$

Beweis: Aus (4.24) folgt (4.28), wenn wir beachten, dass das Maximum von endlich vielen stochastischen Nullfolgen eine stochastische Nullfolge ist, und weil wegen der Antisymmetrie von K

$$
E(K(e_1,e_2)|e_1) = -E(K(e_2,e_1)|e_1)
$$

und

$$
E(K(e_1,e_2)e_1) = -E(K(e_2,e_1)e_1)
$$

ist, wobei letzteres dazu führt, dass alle Terme, die σ^2 enthalten, aus der Differenz $J_n(s) - J_n'(s)$ für alle $s\in[0,1]$ herausfallen.
Kommen wir zu (4.29). Wegen $\mathbf{J}_n' = \sum_{i=1}^n \mathbf{Y}_{ni}$ und weil $(\mathbf{Y}_{ni})_{i=1,\dots,n;n\in\mathbb{N}}$ ein zeilenweise unabhängiges Dreiecksschema von zentrierten k-dimensionalen Zufallsvektoren mit quadratisch integrierbaren Komponenten ist, können wir wieder den

mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz benutzen um (4.29) zu beweisen. Wegen

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{Y}_{ni}\|^2 &\leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\Big(E\Big(K(e_0,e_i)\Big|e_i\Big) - \frac{1}{\sigma^2}E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big)e_i\Big)^2 \\
&\leq \frac{1}{n}k\Big(2E\Big(K(e_0,e_i)\Big|e_i\Big)^2 + 2\frac{1}{\sigma^4}E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big)^2 e_i^2\Big) \\
&=: M(n,i)
\end{aligned}$$

für $i = 1, \ldots, n$, gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} E\Big(\|\mathbf{Y}_{ni}\|^2 1_{\{\|\mathbf{Y}_{ni}\|^2\geq\varepsilon\}}\Big) \\
&\quad\leq \sum_{i=1}^{n} E\Big(M(n,i)1_{\{M(n,i)\geq\varepsilon\}}\Big) \\
&\quad= n\,E\Big(M(n,1)1_{\{M(n,1)\geq\varepsilon\}}\Big) \qquad (4.30)\\
&\quad= k\,E\Big(\Big(2\,E(K(e_2,e_1)|e_1)^2 + \frac{2}{\sigma^4}\,E(K(e_1,e_2)e_2)^2 e_1^2\Big)1_{\{M(n,1)\geq\varepsilon\}}\Big) \\
&\quad\underset{n}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Lebesgue, da $K(e_1, e_2)$ und e_1 quadratisch integrierbar sind, und deshalb $M(n, 1)$ und somit auch $1_{\{M(n,1)\geq\varepsilon\}}$ fast sicher gegen Null konvergiert. Diese Rechnung (4.30) zeigt gerade, dass die Lindebergbedingung erfüllt ist. Kommen wir zur Normierungsbedingung

$$\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_{ni}) \underset{n}{\longrightarrow} \mathbf{\Gamma}. \tag{4.31}$$

Seien zur Abkürzung $l, l' \in \{1, \ldots, k\}$, $s := s_l$ und $t := s_{l'}$, und

$$\begin{aligned}
\eta &:= \mathrm{Var}\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2) - \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}e_2\Big) \\
&= E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)^2\Big) - 2E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)e_2\Big)\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2} \\
&\quad + \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)^2}{\sigma^4}E(e_2^2) \\
&= E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big) - \frac{1}{\sigma^2}E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big)^2.
\end{aligned}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(\mathbf{Y}_{ni})\Big)_{l,l'} &= \sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}\Big(Y_{ni}(s), Y_{ni}(t)\Big) \\
&\underset{n}{\longrightarrow} (s\wedge t - st)\eta
\end{aligned}$$

mit genau der gleichen Rechnung wie im Beweis von (4.9). Daraus folgt die Normierungsbedingung (4.31).
Es folgt die Gültigkeit von (4.29).

Im folgenden sei

$$\mathrm{w}_\delta : D([0,1]) \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{w}_\delta(f) = \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ |s-t|\le\delta}} |f(s) - f(t)|$$

der Stetigkeitsmodul zu $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Da hier wie schon bei den beiden Skorohodmetriken aus dem Zusammenhang klar ist, ob Funktionen mit Argumenten aus $[0,1]$ oder aus $[0,1] \times \overline{\mathbb{R}}$ betrachtet werden, machen wir auch hier keinen Unterschied in der Notation.

4.32 Proposition. Die Folge $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist unter (3.92) (a) und (4.1) C-straff, das heißt es gilt

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} P\Big(\mathrm{w}_\delta(J_n) \ge \varepsilon\Big) = 0 \tag{4.33}$$

für alle $\varepsilon > 0$.

Beweis: Im folgenden setzen wir in J_n in dem Stetigkeitsmodul auch s ein, und verstehen dies als die identische Abbildung des Einheitsintervalls auf sich selbst, ähnlich wie bei Proposition 4.10.
Es gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{w}_\delta\Big(J_n(s)\Big)\\
&\le \quad \mathrm{w}_\delta\Big(\sqrt{n} r_n(s)\Big)\\
&\qquad + \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \Big(1_{\{i\le[ns]\}} \frac{n-[ns]}{n} - 1_{\{i>[ns]\}} \frac{[ns]}{n}\Big) e_i \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}\Big)\\
&=: \quad w_1(n,\delta) + w_2(n,\delta).
\end{aligned}$$

Nun ist der klassische U-Typ-Prozeß, der im Stetigkeitsmodul $w_1(n,\delta)$ steht, nach (4.21) verteilungskonvergent mit stetigem Grenzprozess, also ist er C-straff und es gilt

$$\lim_{\delta\downarrow 0} \limsup_{n\to\infty} P\Big(w_1(n,\delta) \ge \varepsilon\Big) = 0$$

für alle $\varepsilon > 0$. Weiter ist

$$w_2(n,\delta) \quad \le \quad \frac{|E(K(e_1,e_2)e_2)|}{\sigma^2} \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[ns]} \frac{n-[ns]}{n} e_i\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{|E(K(e_1,e_2)e_2)|}{\sigma^2}\,\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\frac{[ns]}{n}e_i\Big)\\
=:\ &\frac{|E(K(e_1,e_2)e_2)|}{\sigma^2}\,w_3(n,\delta)+\frac{|E(K(e_1,e_2)e_2)|}{\sigma^2}\,w_4(n,\delta),
\end{aligned}
$$

und wie schon im Beweis von (4.11) ist es ausreichend, $w_3(n,\delta)$ zu betrachten. Ähnlich wie im genannten Beweis erhält man

$$
w_3(n,\delta)\ \le\ \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}e_i\Big)+\Big(\delta+\frac{1}{n}\Big)\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}e_i\Big|.
$$

Diese beiden Ausdrücke wurden, bis auf einen konstanten Faktor, schon im Beweis von (4.11) bei der Betrachtung von $w_4(n,\delta)$ behandelt, sodass wir

$$
\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}P\Big(w_2(n,\delta)\ge\varepsilon\Big)=0
$$

für alle $\varepsilon>0$ erhalten. Nun folgt (4.33).

4.34 Proposition. Es gilt unter (3.92) (a) und (4.1)

(4.35) $$J_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} V^{zentr} \quad \text{in } D([0,1]),$$

wobei $V^{zentr}:[0,1]\to\mathbb{R}$ ein zentrierter Gaußprozeß mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

$$
[0,1]^2\ni(s,t)\mapsto\Big(s\wedge t-st\Big)\Big(E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big)-\frac{1}{\sigma^2}E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big)^2\Big)\in\mathbb{R}
$$

ist.

Beweis: Aus (4.28) und (4.29) folgt mit dem Cramér-Slutzky-Argument die Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen von J_n gegen die entsprechenden Randverteilungen von V^{zentr}, und zusammen mit der C-Straffheit (4.33) folgt daraus (4.35).

4.36 Satz. Es gilt unter den Voraussetzungen (3.92) und (4.1)

(4.37) $$\sqrt{n}\,\hat{r}_n^z \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} V^{zentr} \quad \text{in } D([0,1]),$$

wobei V^{zentr} der oben genannte Gaußprozeß ist.

Beweis: Folgt mit dem Cramér-Slutzky-Argument aus (4.35) und (3.142).

4.38 Bemerkung. Die Grenzprozesse V^{klass} aus (4.22) und V^{zentr} aus (4.37) sind Brownsche Brücken mit den Skalenfaktoren

$$v^{klass} := E(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3))^{1/2} = E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)^2\Big)^{1/2}$$

beziehungsweise

$$\begin{aligned} v^{zentr} &:= \Big(E(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)) - E(K(e_1,e_2)e_2)^2/\sigma^2\Big)^{1/2} \\ &= \Big(E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)^2\Big) - E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)e_2\Big)^2/\sigma^2\Big)^{1/2}, \end{aligned}$$

welche in der Praxis meist unbekannt sind. Manchmal ist kann ein solcher Skalenfaktor bekannt sein, zum Beispiel weil für den Kern $K(x,y) = 1_{\{x>y\}} - 1_{\{x<y\}}$ bei stetigen Verteilungen $v^{klass} = 1/\sqrt{3}$ gilt (siehe Ferger (1994b), Seite 146), im allgemeinen wird ist dies jedoch nicht der Fall sein, besonders bei v^{zentr}.
Für die von dem klassischen Prozess $\sqrt{n}\,\hat{r}_n$ abgeleitete Statistik von Kolmogorov-Smirnov-Typ erhält man mit dem Stetigkeitssatz aus (4.22) die Verteilungskonvergenzaussage

$$(4.39)\quad \sqrt{n}\sup_{s\in[0,1]}|\hat{r}_n(s)| \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} \sup_{s\in[0,1]}|V^{klass}(s)| \sim v^{klass}\sup_{s\in[0,1]}|B^\circ(s)|,$$

wobei wir mit B° eine Brownsche Brücke bezeichnen. Natürlich hängt damit auch hier wieder der Grenzprozess im allgemeinen über den Skalenfaktor v^{klass} von der in der Praxis unbekannten Verteilung der Fehler e_i ab, so dass wir aus (4.39) nicht unmittelbar asymptotische Changepointtests konstruieren können. Gleiches gilt für die von dem zentrierten Prozess $\sqrt{n}\,\hat{r}_n^z$ abgeleitete Statistik von Kolmogorov-Smirnov-Typ, für die man aus (4.37)

$$(4.40)\quad \sqrt{n}\sup_{s\in[0,1]}|\hat{r}_n^z(s)| \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} \sup_{s\in[0,1]}|V^{zentr}(s)| \sim v^{zentr}\sup_{s\in[0,1]}|B^\circ(s)|.$$

erhält.
Analog zu den Ideen aus Abschnitt 2.2 von Ferger (1991), wo ein ähnlicher Test vom U-Typ für den Fall unabhängiger und identisch verteilter Beobachtungen ohne Zentriertheit konstruiert wird, kann man aufgrund der Tatsache, dass nur die Vorfaktoren der Grenzverteilungen in (4.39) und (4.40) von der in der Praxis unbekannten Verteilung der Fehler abhängen und die Verteilungsfunktion des Supremums einer Brownschen Brücke, die Kolmogorovverteilung, bekannt ist, mithilfe von geeigneten Schätzern für diese Vorfaktoren und einem Cramér-Slutzky-Argument kritische Werte für asymptotische Changepointtests mit den

Teststatistiken $\sqrt{n}\sup_{s\in[0,1]}|\hat{r}_n(s)|$ und $\sqrt{n}\sup_{s\in[0,1]}|\hat{r}_n^z(s)|$ erhalten.
Wir werden aber auch für diese U-Typ-Prozesse zusätzlich entsprechende Bootstrapprozesse betrachten, da wir für den Beweis der Konsistenz des Bootstraps große Teile einerseits aus den Beweisen für die Konsistenz der Schätzer für die Vorfaktoren der Grenzprozesse V^{zentr} und V^{klass} und andererseits aus den Beweisen für die Konsistenz des Bootstraps für den Prozess $\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^z$ verwenden können.

4.2 Verteilungskonvergenz unter benachbarten Alternativen

Um die Testgüte beurteilen zu können, möchten wir nun Verteilungskonvergenzaussagen wie im vorigen Abschnitt auch unter speziellen benachbarten Alternativen herleiten. Für zwei Folgen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen, welche auf einer gemeinsamen Folge $(\mathcal{X}_n,\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von messbaren Räumen definiert sind, versteht man unter „benachbart" bekanntlich folgendes:
Die Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt benachbart zu $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Ereignissen mit $A_n\in\mathcal{A}_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, für die $P_n(A_n)\xrightarrow[n]{}0$ gilt, auch $Q_n(A_n)\xrightarrow[n]{}0$ gilt.
Da wir nun mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsmaßen arbeiten müssen, verwenden wir bei Landausymbolen die übliche Kurzschreibweise um anzugeben, welche Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen gemeint ist, zum Beispiel $o_p(1;Q_n)$ für „$o_p(1)$ unter der Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$". Falls wir diese Angabe weglassen, ist wie schon in den vorigen Kapiteln auch unser Wahrscheinlichkeitsmaß P gemeint. Ebenso bezeichne E_{P_n} einen unter P_n ausgerechneten Erwartungswert.
Es folgen zwei in diesem Zusammenhang nützliche Propositionen:

4.41 Proposition. Für zwei Folgen $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathcal{X}_n,\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sind äquivalent:

1. $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist benachbart zu $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$

2. Für alle Folgen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen $X_n:\mathcal{X}_n\to\mathbb{R}$, für die $X_n=o_p(1;P_n)$ gilt, gilt auch $X_n=o_p(1;Q_n)$

3. Gilt $dQ_{n_k}/dP_{n_k}\xrightarrow[k]{\mathcal{L}}Y$ unter P_{n_k} für eine Teilfolge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ der natürlichen Zahlen und eine Zufallsvariable Y, so ist $E(Y)=1$ (hier ist $dQ_n/dP_n :=$

$d\widetilde{Q}_n/dP_n$ der Likelihoodquotient von P_n und Q_n, und $\widetilde{Q}_n$ der bezüglich P_n absolutstetige Anteil von Q_n).

Beweis: Siehe zum Beispiel van der Vaart (1998), Lemma 6.4.

4.42 Proposition. Seien $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf den messbaren Räumen $(\mathcal{X}_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und sei $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ benachbart zu $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Dann gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta(\varepsilon) > 0$, so dass gilt:
Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen mit $A_n \in \mathcal{A}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist $P_n(A_n) < \delta(\varepsilon)$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$, so gilt $Q_n(A_n) < \varepsilon$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

Beweis: Dies stammt aus Jureckova (1969). Für eine Ausarbeitung in genau der angegebenen Form, siehe Hörmann (2007), Lemma 4.6.

Bisher hatten wir an Grundvoraussetzungen über die Abhängigkeit der Zufallsvariablen

- $(e_{i-q})_{i\in\mathbb{N}}$ sind unabhängige Zufallsvariablen
- $X_{1-p}, \ldots, X_0$ sind irgendwelche Zufallsvariablen
- $\hat{e}_{n1-q}, \ldots, \hat{e}_{n0}$ sind irgendwelche Zufallsvariablen,

sowie verschiedene Annahmen über ihre Verteilungen, wie zum Beispiel quadratische Integrierbarkeit.
Im folgenden setzen wir zusätzlich voraus, dass

- $X_{1-p}, \ldots, X_0$ unabhängig von $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ sind
- die Residuenstartwerte $\hat{e}_{n1-q}, \ldots, \hat{e}_{n0}$ deterministische Funktionen der Zufallsvariablen $X_{1-p}, \ldots, X_0$ und $e_{1-q}, \ldots, e_n$ sind (was insbesondere der Fall ist, wenn sie Funktionen der in der Praxis beobachtbaren Zufallsvariablen $X_{1-p}, \ldots, X_n$ sind).

Wir halten nun noch einmal die weiteren Grundvoraussetzungen fest:

- $X_{1-p}, \ldots, X_0$ sind fest gewählte Zufallsvariablen mit $E(X_i^2) < \infty$ für $i = 1-p, \ldots, 0$,

- für eine nach der Verteilungsfunktion F verteilte Zufallsvariable e_1 gilt $E(e_1) = 0$, $E(e_1^2) > 0$ und $E(e_1^2 \log\log(3 + |e_1|)) < \infty$.

Unter der Hypothese gilt

$$H_0: \quad e_{1-q}, \ldots, e_n \text{ haben Verteilungsfunktion } F.$$

Unter der Folge $H_{1,n}$ von Alternativen werden $e_{1-q}, \ldots, e_n$ ersetzt durch Zufallsvariablen $e_{1-q}^{H_{1,n}}, \ldots, e_n^{H_{1,n}}$, für die es ein $\lambda \in (0,1)$ gibt mit

$$\begin{aligned} H_{1,n}: \quad & e_{1-q}^{H_{1,n}}, \ldots, e_{[\lambda n]}^{H_{1,n}} \text{ haben Verteilungsfunktion } F, \\ & e_{[\lambda n]+1}^{H_{1,n}}, \ldots, e_n^{H_{1,n}} \text{ haben Verteilungsfunktion } G_n,\ G_n \neq F, \end{aligned}$$

welche, wie $e_{1-q}, \ldots, e_n$ auch, untereinander und von $X_{1-p}, \ldots, X_0$ unabhängig sind. Die Folge $(e_{i-q})_{i \in \mathbb{N}}$ von identisch verteilten Zufallsvariablen wird also durch ein Dreiecksschema $(e_i^{H_{1,n}})_{i=1-q,\ldots,n; n \in \mathbb{N}}$ ersetzt.
Indem man für alle $n \in \mathbb{N}$ diese Ersetzung $(e_{1-q}, \ldots, e_n) \mapsto (e_{1-q}^{H_{1,n}}, \ldots, e_n^{H_{1,n}})$ vornimmt, erhält man zu allen Größen wie $\hat{e}_{n1-q}, \ldots, \hat{e}_{n0}, \widehat{\rho}_{n1}, \ldots, \widehat{\rho}_{np}, \widehat{\vartheta}_{n1}, \ldots, \widehat{\vartheta}_{nq}$, $\hat{e}_{n1}, \ldots, \hat{e}_{nn}, \widehat{T}_n^z, K_n, \hat{r}_n^z, J_n, J_n'$ ihre Entsprechungen unter der Alternativenfolge $(H_{1,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Wir bezeichnen diese neuen Zufallsvariablen jeweils mit demselben Symbol mit einem zusätzlichen oberen Index „$H_{1,n}$“, also zum Beispiel $\hat{e}_{n0}^{H_{1,n}}$, $\widehat{\rho}_{n1}^{H_{1,n}}, \widehat{\vartheta}_{nq}^{H_{1,n}}, \widehat{T}_n^{z\,H_{1,n}}$ und $\hat{r}_n^{z\,H_{1,n}}$.
Zur Abkürzung setzen wir für alle $n \in \mathbb{N}$ $P_n := P_{X_{1-p},\ldots,X_0,e_{1-q},\ldots,e_n}$ und $Q_n := P_{X_{1-p},\ldots,X_0,e_{1-q}^{H_{1,n}},\ldots,e_n^{H_{1,n}}}$. Es handelt sich hierbei jeweils um Bildmaße auf demselben messbaren Raum $(\mathbb{R}^{n+p+q}, \mathcal{B}_{n+p+q}^*)$, und aus Gründen der Übersichtlichkeit bezeichnen wir die Projektionen auf die Komponenten von $\mathbb{R}^{n+p+q}$ nicht mit $\pi_1, \ldots, \pi_{n+p+q}$, sondern mit $\pi_{X_{1-p}}, \ldots, \pi_{X_0}, \pi_{e_{1-q}}, \ldots, \pi_{e_n}$, also jeweils mit dem Namen der ihnen entsprechenden Zufallsvariable. Halten wir uns an dieser Stelle noch einmal vor Augen, dass $X_{1-p}, \ldots, X_0, e_{1-q}, \ldots, e_n$ sämtliche Zufallsvariablen sind, die unter H_0 in unser Modell eingehen, alles andere sind deterministische Funktionen dieser Zufallsvariablen. Damit ist klar, dass wir in der Definition der Parameterschätzer, der Residuen und Teststatistiken die Zufallsvariablen $X_{1-p}, \ldots, X_0, e_{1-q}, \ldots, e_n$ ähnlich wie oben durch die Projektionen $\pi_{X_{1-p}}, \ldots, \pi_{X_0}, \pi_{e_{1-q}}, \ldots, \pi_{e_n}$ ersetzen können, und damit Zufallsvariablen auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}^{n+p+q}, \mathcal{B}_{n+p+q}^*)$ erhalten, die wir zur Unterscheidung mit einem zusätzlichen oberen Index „π“ kennzeichnen, also zum Beispiel $\hat{e}_{n0}^{\pi}$, $\widehat{\rho}_{n1}^{\pi}$ und $\widehat{T}_n^{z\pi}$.

Es gilt also nun zum Beispiel

$$|\widehat{\rho}_{nr}^{\pi} - \rho_r| = O_p(1/\sqrt{n}; P_n) \quad \text{für } r = 1, \dots, p,$$

da unter P_n die Zufallsvariable $\widehat{\rho}_{nr}^{\pi}$ für $r = 1, \dots, p$ dieselbe Verteilung besitzt wie $\widehat{\rho}_{nr}$ unter P, da $(\pi_{X_{1-p}}, \dots, \pi_{X_0}, \pi_{e_{1-q}}, \dots, \pi_{e_n})$ unter P_n dieselbe Verteilung besitzt wie $(X_{1-p}, \dots, X_0, e_{1-q}, \dots, e_n)$ unter P.
Nun benötigen wir noch eine Bedingung, die sicherstellt dass $(H_{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ tatsächlich eine Folge von zu H_0 benachbarten Alternativen ist. Daher setzen wir noch zusätzlich voraus, dass die Verteilungsfunktion F eine Dichte f und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Verteilungsfunktion G_n eine Dichte g_n besitzt, so dass eine Borelfunktion $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ existiert mit

$$\int \Big(\sqrt{n}\big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\big) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \underset{n}{\longrightarrow} 0. \tag{4.43}$$

4.44 Proposition. Unter (4.43) gelten

$$E(h(e_1)^2) = E_{P_1}(h(\pi_{e_1})^2) < \infty, \quad E(h(e_1)) = E_{P_1}(h(\pi_{e_1})) = 0 \tag{4.45}$$

sowie

$$\begin{aligned} \sum_{i=[\lambda n]+1}^{n} \log \frac{g_n(\pi_{e_i})}{f(\pi_{e_i})} \; - \; \Big(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[\lambda n]+1}^{n} h(\pi_{e_i}) - \frac{1-\lambda}{2} E_{P_1}(h(\pi_{e_1})^2)\Big) & \\ = \; o_p(1; P_n) & \end{aligned} \tag{4.46}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[\lambda n]+1}^{n} h(\pi_{e_i}) \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N\Big(0, (1-\lambda)E_{P_1}(h(\pi_{e_1})^2)\Big) \quad \text{unter } P_n. \tag{4.47}$$

Beweis: Siehe van der Vaart und Wellner (1996), Lemma 3.10.11, Lemma 3.10.16 und Example 3.10.18.

Wir überzeugen uns nun, dass unter dieser Bedingung (4.43) die hier betrachtete Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Startwerten tatsächlich benachbart zu der Folge $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

4.48 Proposition. Die Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist benachbart zu $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und für den log-Likelihood-Quotienten L_n gilt unter P_n

$$\begin{aligned} L_n &:= \log \frac{dQ_n}{dP_n} \\ &= \sum_{i=[\lambda n]+1}^{n} \log \frac{g_n(\pi_{e_i})}{f(\pi_{e_i})} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[\lambda n]+1}^{n} h(\pi_{e_i}) - \frac{1-\lambda}{2} E_{P_1}(h(\pi_{e_1})^2) + o_p(1; P_n). \end{aligned} \tag{4.49}$$

Beweis: Seien $A_{1-p}, \dots, A_0, B_{1-q}, \dots, B_n \in \mathcal{B}^*$ Elemente der Borelsigmaalgebra über $\mathbb{R}$. Für $i = [\lambda n]+1, \dots, n$ ist, wenn wir mit λ_1 das Lebesguemaß auf den reellen Zahlen bezeichnen,

$$\begin{aligned} Q_n(\pi_{e_i} \in B_i) &= \int_{B_i} dQ_n \circ \pi_{e_i}^{-1} = \int_{B_i} g_n \, d\lambda_1 = \int_{B_i} \frac{g_n}{f} f \, d\lambda_1 \\ &= \int_{B_i} \frac{g_n}{f} \, dP_n \circ \pi_{e_i}^{-1} = \int_{\{\pi_{e_i} \in B_i\}} \frac{g_n(\pi_{e_i})}{f(\pi_{e_i})} \, dP_n = \int 1_{\{\pi_{e_i} \in B_i\}} \frac{g_n(\pi_{e_i})}{f(\pi_{e_i})} \, dP_n, \end{aligned}$$

also gilt

$$\begin{aligned} & Q_n\Big(\bigcap_{j=1-p}^{0} \{\pi_{X_j} \in A_j\} \cap \bigcap_{i=1-q}^{n} \{\pi_{e_i} \in B_i\} \Big) \\ &= Q_n\Big(\bigcap_{j=1-p}^{0} \{\pi_{X_j} \in A_j\} \cap \bigcap_{i=1-q}^{0} \{\pi_{e_i} \in B_i\} \Big) \cdot \prod_{i=1}^{n} Q_n\Big(\pi_{e_i} \in B_i\Big) \\ &= P_n\Big(\bigcap_{j=1-p}^{0} \{\pi_{X_j} \in A_j\} \cap \bigcap_{i=1-q}^{0} \{\pi_{e_i} \in B_i\} \Big) \cdot \\ &\qquad \cdot \prod_{i=1}^{[\lambda n]} P_n\Big(\pi_{e_i} \in B_i\Big) \cdot \prod_{i=[\lambda n]+1}^{n} Q_n\Big(\pi_{e_i} \in B_i\Big) \\ &= \int 1_{\bigcap_{j=1-p}^{0} \{\pi_{X_j} \in A_j\} \cap \bigcap_{i=1-p}^{0} \{\pi_{e_i} \in B_i\}} \, dP_n \cdot \\ &\qquad \cdot \prod_{i=1}^{[\lambda n]} \int 1_{\{\pi_{e_i} \in B_i\}} \, dP_n \cdot \prod_{i=[\lambda n]+1}^{n} \int 1_{\{\pi_{e_i} \in B_i\}} \frac{g_n(\pi_{e_i})}{f(\pi_{e_i})} \, dP_n \\ &= \int 1_{\bigcap_{j=1-p}^{0} \{\pi_{X_j} \in A_j\} \cap \bigcap_{i=1-p}^{n} \{\pi_{e_i} \in B_i\}} \prod_{i=[\lambda n]+1}^{n} \frac{g_n(\pi_{e_i})}{f(\pi_{e_i})} \, dP_n \\ &= \int_{\bigcap_{j=1-p}^{0} \{\pi_{X_j} \in A_j\} \cap \bigcap_{i=1-p}^{n} \{\pi_{e_i} \in B_i\}} \prod_{i=[\lambda n]+1}^{n} \frac{g_n(\pi_{e_i})}{f(\pi_{e_i})} \, dP_n. \end{aligned}$$

Da ein Integral über eine nichtnegative Funktion ein Maß in seinem Integrationsbereich ist und $\{\times_{i=1}^{n+p+q} B_i : B_i \in \mathcal{B}^* \text{ für } i = 1, \dots, n+p+q\}$ ein durchschnittstabiler Erzeuger der $n+p+q$-dimensionalen Borelsigmaalgebra $\mathcal{B}^*_{n+p+q}$ ist, folgt mit dem Maßeindeutigkeitssatz, dass $\prod_{i=[\lambda n]+1}^{n} g_n(\pi_{e_i})/f(\pi_{e_i})$ eine Dichte von Q_n bezüglich P_n ist. Hieraus folgt die erste Gleichheit in (4.49).

Die zweite Gleichheit in (4.49) erhalten wir aus (4.46).

Mit dem Cramér-Slutzky-Argument, (4.47) und dem Stetigkeitssatz folgt aus (4.49)

$$\frac{dQ_n}{dP_n} \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} \exp\Big(N\Big(-\frac{1-\lambda}{2} E_{P_1}(h(\pi_{e_1})^2), (1-\lambda) E_{P_1}(h(\pi_{e_1})^2) \Big) \Big) \quad \text{unter } P_n.$$

Für den Erwartungswert einer log-Normalverteilung gilt

$$E\Big(\exp\big(N(\mu,\sigma^2)\big)\Big) = \exp(\mu + \sigma^2/2),$$

also

$$E\bigg(\exp\Big(N\Big(-\frac{1-\lambda}{2}E_{P_1}(h(\pi_{e_1})^2), (1-\lambda)E_{P_1}(h(\pi_{e_1})^2)\Big)\Big)\bigg) = \exp(0) = 1.$$

Damit folgt aus Proposition 4.41, 3. $\Rightarrow$ 1., dass $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ benachbart zu $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Nachdem wir nun festgestellt haben, dass die hier betrachteten Folgen von Alternativen tatsächlich zu der Hypothese H_0 benachbart sind, möchten wir das „Le Camsche dritte Lemma“ benutzen, um sehr einfach Grenzwertsätze unter diesen Folgen von Alternativen zu erhalten:

4.50 Proposition. Seien $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf messbaren Räumen $(\mathcal{X}_n, \mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und $\mathbf{Y}_n : \mathcal{X}_n \to \mathbb{R}^d$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ein festes $d \in \mathbb{N}$ Zufallsvektoren, für die gilt

$$\Big(\mathbf{Y}_n, \log\frac{dQ_n}{P_n}\Big) \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N_{d+1}\left(\begin{pmatrix}\boldsymbol{\mu} \\ -\frac{1}{2}\overline{\sigma}^2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\boldsymbol{\Delta} & \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\xi}^t & \overline{\sigma}^2\end{pmatrix}\right) \quad \text{unter } P_n,$$

wobei $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$, $\boldsymbol{\Delta} \in \mathbb{R}^{d\times d}$ und $\overline{\sigma}^2 \in [0,\infty)$ sind.
Dann gilt

$$\mathbf{Y}_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N_d\big(\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Delta}\big) \quad \text{unter } Q_n.$$

Beweis: Siehe zum Beispiel van der Vaart (1998), Example 6.7.

4.51 Proposition. Seien $k \in \mathbb{N}$, $s_1, \ldots, s_k \in [0,1]$ und $x_1, \ldots, x_k \in \overline{\mathbb{R}}$. Seien für $n \in \mathbb{N}$

$$\boldsymbol{\Gamma} := \left(\Big(s_i \wedge s_j - s_i s_j\Big)\Big(F(x_i \wedge x_j) - F(x_i)F(x_j) - \frac{U(x_i)U(x_j)}{\sigma^2}\Big)\right)_{i,j=1,\ldots,k},$$

$$\boldsymbol{\xi} := \left(\Big(\lambda s_i - \lambda \wedge s_i\Big)\Big(E(h(e_1)1_{\{e_1 \le x_i\}}) - \frac{E(h(e_1)e_1)}{\sigma^2}U(x_i)\Big)\right)_{i=1,\ldots,k}$$

und

$$\mathbf{K}_n^\pi := \Big(K_n^\pi(s_1,x_1), \ldots, K_n^\pi(s_k,x_k)\Big),$$

wobei K_n^π das K_n aus Definition 4.5 mit den durch die Projektionen $\pi_{e_1}, \ldots, \pi_{e_n}$ ersetzten Fehlervariablen ist. Dann gilt unter (2.41)

$$\mathbf{K}_n^\pi \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\Gamma}) \quad \text{unter } Q_n. \tag{4.52}$$

Beweis: Wir verwenden Proposition 4.50. Daher ist es hinreichend,

$$\text{(4.53)} \quad \mathbf{K}_n'^{\pi} := (\mathbf{K}_n^{\pi}, L_n) \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N_{k+1}\left(\left(\begin{array}{c} \mathbf{0} \\ -\frac{1}{2}\overline{\sigma}^2 \end{array}\right), \left(\begin{array}{cc} \mathbf{\Gamma} & \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\xi}^t & \overline{\sigma}^2 \end{array}\right)\right) \quad \text{unter } P_n,$$

$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^k$, für ein $\overline{\sigma}^2 \in [0, \infty)$ zu zeigen.
Zu (4.53): Aufgrund von (4.49) ist

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n'^{\pi} &= \sum_{i=1}^n \Big(X_{ni}^{\pi}(s_1, x_1), \ldots, X_{ni}^{\pi}(s_k, x_k), \frac{1}{\sqrt{n}} 1_{\{[\lambda n] < i\}} h(\pi_{e_i}) \Big) \\ &\quad + \Big(0, \ldots, 0, -\frac{1}{2}(1-\lambda) E_{P_1}(h(\pi_{e_1})^2)\Big) + o_p(1; P_n), \end{aligned}$$

und der erste Ausdruck auf der rechten Seite ist unter P_n eine Summe zentrierter, unabhängiger Zufallsvektoren mit quadratisch integrierbaren Komponenten, beachte dazu (4.45). Wir verwenden den mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz um die Verteilungskonvergenz nachzuweisen, ähnlich wie im Beweis von Proposition 4.6.
Für die Lindebergbedingung beachten wir, dass für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} &\Big\| \Big(X_{ni}^{\pi}(s_1, x_1), \ldots, X_{ni}^{\pi}(s_k, x_k), \frac{1}{\sqrt{n}} 1_{\{[\lambda n] < i\}} h(\pi_{e_i}) \Big) \Big\|^2 \\ &\leq \frac{1}{n}\Big(k\Big(1 + \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2}|\pi_{e_i}|\Big)^2 + h(\pi_{e_i})^2 \Big) \quad =: \quad M(n, i) \end{aligned}$$

ist, und mit dieser bezüglich P_n integrierbaren oberen Schranke folgt die Lindebergbedingung genau wie im Beweis von Proposition 4.6.
Die Normierungsbedingung rechnen wir wieder elementweise nach. Aufgrund von (4.7) und der Tatsache, das die dort betrachteten Einträge der Matrizen unter P dieselbe Verteilungen besitzen wie die entsprechenden Einträge der hier betrachteten Matrizen unter P_n, brauchen wir nur noch die letzte Zeile und Spalte der Kovarianzmatrix aus der Grenzverteilung in (4.53) zu betrachten, also $\boldsymbol{\xi}$ und $\overline{\sigma}^2$.
Für $j = 1, \ldots, k$ ist unter P_n

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^n \mathrm{Cov}_{P_n}\Big(X_{ni}^{\pi}(s_j, x_j), \frac{1}{\sqrt{n}} 1_{\{[\lambda n] < i\}} h(\pi_{e_i}) \Big) \\ &= \Big(1_{\{\lambda < s_j\}} \frac{[ns_j] - [n\lambda]}{n} \frac{n - [ns_j]}{n} - \frac{n - [n(\lambda \vee s_j)]}{n} \frac{[ns_j]}{n} \Big) \cdot \\ &\qquad \cdot \Big(E_{P_n}(h(\pi_{e_1}) 1_{\{\pi_{e_1} \leq x_j\}}) - F(x_j) E_{P_n}(h(\pi_{e_1})) - \frac{E_{P_n}(h(\pi_{e_1})\pi_{e_1})}{\sigma^2} U(x_j) \Big) \\ &\xrightarrow[n]{} \Big(1_{\{\lambda < s_j\}}(s_j - \lambda)(1 - s_j) - (1 - \lambda \vee s_j)s_j \Big) \cdot \\ &\qquad \cdot \Big(E(h(e_1) 1_{\{e_1 \leq x_j\}}) - \frac{E(h(e_1)e_1)}{\sigma^2} U(x_j) \Big) \end{aligned}$$

weil π_{e_1} unter P_n dieselbe Verteilung besitzt wie e_1 unter P und wegen $E(h(e_1)) = 0$ nach (4.45). Wenn wir $M_j := \lambda \vee s_j$ und $m_j := \lambda \wedge s_j$ setzen, haben wir

$$\begin{aligned}
&1_{\{\lambda < s_j\}}(s_j - \lambda)(1 - s_j) - (1 - \lambda \vee s_j)s_j \\
&\quad = \quad (M_j - \lambda)(1 - s_j) - (1 - M_j)s_j \quad = \quad M_j - \lambda - M_j s_j + \lambda s_j - s_j + M_j s_j \\
&\quad = \quad M_j - (\lambda + s_j) + \lambda s_j \quad = \quad -m_j + \lambda s_j \quad = \quad \lambda s_j - \lambda \wedge s_j.
\end{aligned}$$

Damit erhält man die behaupteten Elemente aus $\boldsymbol{\xi}$.
Für $\overline{\sigma}^2$ beachten wir

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}_{P_n}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}} 1_{\{[\lambda n] < i\}} h(\pi_{e_i}), \frac{1}{\sqrt{n}} 1_{\{[\lambda n] < i\}} h(\pi_{e_i})\Big) \\
&\quad = \quad \frac{n - [\lambda n]}{n} E(h(e_1)^2) \underset{n}{\longrightarrow} (1 - \lambda) E(h(e_1)^2),
\end{aligned}$$

was mit dem oben in der Zerlegung von $\mathbf{K}'^{\pi}_n$ im Erwartungswertvektor erhaltenen $\overline{\sigma}^2$ übereinstimmt.
Mit dem zentralen Grenzwertsatz und dem Cramér-Slutzky-Argument folgt also (4.53).

4.54 Proposition. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $s_1, \dots, s_k \in [0, 1]$ und sei für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^{\pi}_n &:= \Big(J^{\pi}_n(s_1), \dots, J^{\pi}_n(s_k)\Big), \\
\mathbf{J}'^{\pi}_n &:= \Big(J'^{\pi}_n(s_1), \dots, J'^{\pi}_n(s_k)\Big)
\end{aligned}$$

sowie

$$\mathbf{\Gamma} := \bigg((s_i \wedge s_j - s_i s_j)\Big(E\Big(K(e_1, e_3)K(e_2, e_3)\Big) - \frac{E(K(e_1, e_2)e_2))^2}{\sigma^2}\Big)\bigg)_{i,j=1,\dots,k},$$

und

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\xi} := \bigg(&(\lambda s_i - \lambda \wedge s_i)\cdot \\
&\cdot\Big(E\Big(K(e_1, e_2)h(e_2)\Big) - \frac{E(K(e_1, e_2)e_2)E(h(e_1)e_1)}{\sigma^2}\Big)\bigg)_{i=1,\dots,k}.
\end{aligned}$$

Dann gilt unter (3.92) (a) und (4.1)

$$\|\mathbf{J}^{\pi}_n - \mathbf{J}'^{\pi}_n\| = o_p(1; Q_n) \tag{4.55}$$

und

$$\mathbf{J}'^{\pi}_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{\Gamma}) \quad \text{unter } Q_n. \tag{4.56}$$

Beweis: Die Behauptung (4.55) folgt wegen der Benachbartheit von der Folge $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Proposition 4.41, 1. $\Rightarrow$ 2., aus (4.28).
Und (4.56) folgt genau wie im Beweis der vorigen Proposition mit dem Le Camschen dritten Lemma 4.50 aus einem modifizierten Beweis von (4.29):
Die Erfülltheit der Lindebergbedingung für einen um die Entwicklung des log-Likelihoodquotienten L_n ergänzten Zufallsvektor $\mathbf{J}_n'^{\pi}$ ist ähnlich einfach wie im Beweis von (4.53) überprüfbar, indem nun in der obere Schranke $M(n,i)$ aus dem Beweis von (4.29) (in welcher e_i durch π_{e_i} und der bedingte Erwartungswert $E(K(e_0,e_i)|e_i)$ durch $E_{P_2}(K(\pi_{e_1},\pi_{e_2})|\pi_{e_2}=\cdot\,)\circ\pi_{e_i}$ ersetzt wurde) ein zusätzlicher Summand $n^{-1}h(\pi_{e_i})^2$ eingefügt wird.
Für die Normierungsbedingung begnügen wir uns an dieser Stelle mit den im Le Camschen dritten Lemma für die Erwartungswertverschiebung verantwortlichen Elementen von $\boldsymbol{\xi}$, da die übrigen Einträge des Grenzwerts der Kovarianzmatrizen schon in (4.29) beziehungsweise (4.53) bestimmt wurden.
Für $j=1,\dots,k$ gilt für $n\geq 2$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}_{P_n}\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1_{\{i\leq[ns_j]\}}\frac{n-[ns_j]}{n}-1_{\{i>[ns_j]\}}\frac{[ns_j]}{n}\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\Big(E_{P_n}(K(\pi_{e_1},\pi_{e_2})|\pi_{e_2}=\cdot\,)\circ\pi_{e_i}-\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}\pi_{e_i}\Big),\\
&\qquad\quad\frac{1}{\sqrt{n}}1_{\{i>[n\lambda]\}}h(\pi_{e_i})\Big)\\
=\;&\Big(1_{\{\lambda<s_j\}}\frac{[ns_j]-[n\lambda]}{n}\frac{n-[ns_j]}{n}-\frac{n-[n(\lambda\vee s_j]}{n}\frac{[ns_j]}{n}\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\Big(E(K(e_1,e_2)h(e_2))-\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}E(h(e_1)e_1)\Big)\\
\underset{n}{\longrightarrow}\;&\Big(1_{\{\lambda<s_j\}}(s_j-\lambda)(1-s_j)-(1-\lambda\vee s_j)s_j\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\Big(E(K(e_1,e_2)h(e_2))-\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}E(h(e_1)e_1)\Big)\\
=\;&(\lambda s_j-\lambda\wedge s_j)\Big(E(K(e_1,e_2)h(e_2))-\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}E(h(e_1)e_1)\Big),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit mit exakt der gleichen Rechnung wie im vorigen Beweis folgt.

4.57 Proposition. Es gilt unter (2.41)

$$\limsup_{n\to\infty} Q_n\Big(\mathrm{w}_\delta(K_n^\pi)\geq\varepsilon\Big)\underset{\delta\downarrow 0}{\longrightarrow}0\quad\text{für alle }\varepsilon>0 \tag{4.58}$$

und unter (3.92) (a) und (4.1)

$$(4.59) \qquad \limsup_{n\to\infty} Q_n\Big(\mathrm{w}_\delta(J_n^\pi) \geq \varepsilon\Big) \underset{\delta\downarrow 0}{\longrightarrow} 0 \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Beweis: Zu (4.58): Da die linke Seite in (4.58) monoton wachsend in δ ist, genügt es für alle $\varepsilon, \tilde{\varepsilon} > 0$ ein $\delta > 0$ zu finden, so dass

$$(4.60) \qquad \limsup_{n\to\infty} Q_n\Big(\mathrm{w}_\delta(K_n^\pi) \geq \varepsilon\Big) \leq \tilde{\varepsilon}$$

ist. Sei $\delta(\tilde{\varepsilon})$ zu $\tilde{\varepsilon}$ wie in Proposition 4.42. Wegen (4.11) gibt es nun ein $\delta > 0$ mit

$$P_n\Big(\mathrm{w}_\delta(K_n^\pi) \geq \varepsilon\Big) = P\Big(\mathrm{w}_\delta(K_n) \geq \varepsilon\Big) \leq \delta(\tilde{\varepsilon}) \quad \text{für alle großen } n \in \mathbb{N}.$$

Daher folgt mit Proposition 4.42

$$Q_n\Big(\mathrm{w}_\delta(K_n) \geq \varepsilon\Big) \leq \tilde{\varepsilon} \quad \text{für alle großen } n \in \mathbb{N}.$$

Hieraus folgt (4.60).
Zu (4.59): Geht analog unter Verwendung von (4.33) anstelle von (4.11).

4.61 Proposition. Es gilt unter (2.41)

$$(4.62) \qquad K_n^\pi \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W_1^{zentr} \quad \text{in } D([0,1] \times \overline{\mathbb{R}}\,) \text{ unter } Q_n$$

und unter (3.92) (a) und (4.1)

$$(4.63) \qquad J_n^\pi \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} V_1^{zentr} \quad \text{in } D([0,1]) \text{ unter } Q_n,$$

wobei W_1^{zentr} ein zweidimensionaler Gaußprozeß mit stetigen Pfaden, Kovarianzfunktion

$$([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}\,)^2 \ni ((s,x),(t,y)) \mapsto \Big(s\wedge t - st\Big)\Big(F(x\wedge y) - F(x)F(y) - \frac{U(x)U(y)}{\sigma^2}\Big) \in \mathbb{R}$$

und Erwartungswertfunktion

$$[0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \ni (s,x) \mapsto \Big(\lambda s - \lambda \wedge s\Big)\Big(E(h(e_1)1_{\{e_1 \leq x\}}) - \frac{E(h(e_1)e_1)U(x)}{\sigma^2}\Big) \in \mathbb{R},$$

ist, und V_1^{zentr} ein Gaußprozeß mit stetigen Pfaden, Kovarianzfunktion

$$[0,1]^2 \ni (s,t) \mapsto \Big(s \wedge t - st\Big)\Big(E(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)) - \frac{1}{\sigma^2}E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big)^2\Big) \in \mathbb{R}$$

und Erwartungswertfunktion

$$[0,1] \ni s \mapsto \Big(\lambda s - \lambda \wedge s\Big)\Big(E(K(e_1,e_2)h(e_2)) - \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)E(h(e_1)e_1)}{\sigma^2}\Big) \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Aus der Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen (4.52) und der C-Straffheit (4.58) folgt (4.62).
Aus (4.56) folgt mit (4.55) und dem Cramér-Slutzky-Argument die Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen von $(J_n^\pi)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die endsprechenden Randverteilungen von V_1^{zentr} unter $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zusammen mit der C-Straffheit (4.59) folgt daraus (4.63).

4.64 Proposition. Es gelten unter den Voraussetzungen (3.78) und (3.79)

$$\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^{z\,H_{1,n}} \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W_1^{zentr} \quad \text{in } D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}), \tag{4.65}$$

und unter (3.92) und (4.1)

$$\sqrt{n}\,\hat{r}_n^{z\,H_{1,n}} \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} V_1^{zentr} \quad \text{in } D([0,1]). \tag{4.66}$$

Beweis: Zu (4.65): Wegen

$$\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^{z\,H_{1,n}} \text{ unter } P \quad \sim \quad \sqrt{n}\,\widehat{T}_n^{z\,\pi} \text{ unter } Q_n$$

ist es hinreichend

$$\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^{z\,\pi} \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W_1^{zentr} \quad \text{in } D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}) \text{ unter } Q_n \tag{4.67}$$

zu beweisen. Nach (3.91) gilt

$$\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\left|\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^{z\,\pi}(s,x) - K_n^\pi(s,x)\right| = o_p(1;P_n),$$

weil für alle $n\in\mathbb{N}$ die dort betrachteten Zufallsvariablen unter P diesselben Verteilungen besitzen wie die eben betrachteten unter P_n, und wegen der Benachbartheit von $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ folgt daraus

$$\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\left|\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^{z\,\pi}(s,x) - K_n^\pi(s,x)\right| = o_p(1;Q_n).$$

Damit folgt (4.67) mit dem Cramér-Slutzky-Argument aus (4.62).
Zu (4.66): Geht genauso, nur unter Verwendung von (3.142) statt (3.91) und (4.63) anstelle von (4.62).

4.68 Proposition. Es gelten unter den Voraussetzungen (3.78) und (3.79)

$$\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^{H_{1,n}} \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W_1^{klass} \quad \text{in } D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}), \tag{4.69}$$

und unter (3.92) und (4.1)

$$(4.70) \qquad \sqrt{n}\,\hat{r}_n^{H_{1,n}} \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} V_1^{klass} \quad \text{in } D([0,1]),$$

wobei W_1^{klass} ein Gaußprozess mit stetigen Pfaden, Kovarianzfunktion

$$([0,1]\times\overline{\mathbb{R}})^2 \ni ((s,x),(t,y)) \mapsto \Big(s\wedge t - st\Big)\Big(F(x\wedge y) - F(x)F(y)\Big) \in \mathbb{R}$$

und Erwartungswertfunktion

$$[0,1]\times\overline{\mathbb{R}} \ni (s,x) \mapsto \Big(\lambda s - \lambda\wedge s\Big)E\Big(h(e_1)1_{\{e_1\leq x\}}\Big) \in \mathbb{R},$$

ist, und V_1^{klass} ein Gaußprozeß mit stetigen Pfaden, Kovarianzfunktion

$$[0,1]^2 \ni (s,t) \mapsto \Big(s\wedge t - st\Big)E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big) \in \mathbb{R}$$

und Erwartungswertfunktion

$$[0,1] \ni s \mapsto \Big(\lambda s - \lambda\wedge s\Big)E\Big(K(e_1,e_2)h(e_2)\Big) \in \mathbb{R}$$

ist.

Beweis: Für (4.69) vergleiche Szyszkowicz (1994), Korollar 5.2, in Verbindung mit dem Resultat (3.89) aus der Arbeit von Bai (1994) unter benachbarten Alternativen.
Die Aussage (4.70) lässt sich ähnlich beweisen wie die für den Prozess $\sqrt{n}\,\hat{r}_n^{z\,H_{1,n}}$. Tatsächlich sind die Prozesse in (4.70) sogar leichter zu behandeln, da ihre entsprechenden Prozesse unter der Hypothese,$\sqrt{n}\,\hat{r}_n$, jeweils die gleichen stochastischen Entwicklungen besitzen wie $\sqrt{n}\,\hat{r}_n^z$, nur mit je einen Term weniger, und zwar fehlen immer die Summanden die σ^2 enthalten. Wir führen dies hier nicht weiter aus.

Kapitel 5

Konsistente Schätzer für die Skalenfaktoren der Grenzprozesse V^{klass} und V^{zentr}

Sei in diesem Kapitel $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die es ein $v \in \mathbb{N}$ gibt mit $v \geq 2$, so dass K v-mal stetig differenzierbar ist und die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(5.1)
- (a) $E(K(e_1, e_2)^2) < \infty$
- (b) $E(D_1^u D_2^w K(e_1, e_2)^2) < \infty$ für alle $u, w \in \mathbb{N}_0$ mit $1 \leq u + w \leq v - 1$
- (c) es gibt ein $K_0 > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $E(e_1^{2m}) < \infty$, sodass für alle $u, w \in \mathbb{N}_0$ mit $u + w = v$ gilt: $|D_1^u D_2^w K(x, y)| \leq K_0(1 + |x|^m + |y|^m)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Die Bedingung (5.1) (a) entspricht (3.92) (a) und im Fall $u + w = 1$ hat (5.1) (b) ihre Entsprechung in (3.92) (b), aber (5.1) (b) für $u + w > 1$ sowie (5.1) (c) folgen im allgemeinen nicht aus (3.92) sondern sind stärker als die entsprechenden Bedingungen (3.92) (c) und (d).
Wir verwenden wieder die Residuen $\hat{e}_{ni}$, $i = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N}$, als Schätzwerte für die Fehlervariablen e_i, $i \in \mathbb{N}$, so wie sie in (3.5) definiert wurden.

5.2 Proposition. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion mit $E(|L(e_1, e_2)|) < \infty$. Dann gilt

(5.3) $$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| L(e_i, e_j)(\hat{e}_{ni} - e_i) \right| = O_p(n^{3/2}).$$

Beweis: Sei L wie oben. Wir zeigen zunächst: Falls $\{\mathbb{S}, \mathbb{L}\} = \{\mathbb{N}, \mathbb{N}_0\}$ ist, so gilt für alle $s \in \mathbb{S}$:

$$\left(\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big|L(e_i,e_j)e_{i-l-s}\Big|\right)_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}} \text{ erfüllt (3.93),} \tag{5.4}$$

wobei wir wieder aus technischer Bequemlichkeit $(e_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ als unbhängig und identisch verteilt annehmen mit dem erweiterten Indexbereich $\mathbb{Z}$.
Zu (5.4): Weil für alle $s \in \mathbb{S}$ und $l \in \mathbb{L}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big|L(e_i,e_j)e_{i-l-s}\Big| \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j, j\neq i-l-s}}^{n}\Big|L(e_i,e_j)e_{i-l-s}\Big| + \frac{1}{n^2}\sum_{i=l+s+1}^{n}\Big|L(e_i,e_{i-l-s})e_{i-l-s}\Big| \\
&=: I_n^{l,s} + I\!I_n^{l,s}
\end{aligned}$$

ist, ist es nach (3.96) für (5.4) hinreichend, daß $(I_n^{l,s})_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$ und $(I\!I_n^{l,s})_{l\in\mathbb{L},n\in\mathbb{N}}$ für alle $s \in \mathbb{S}$ die Bedingung (3.93) erfüllen.
Für alle $s \in \mathbb{S}$, $l \in \mathbb{L}$, $n \in \mathbb{N}$ und $K > 0$ ist nach der Markovungleichung

$$\begin{aligned}
P\Big(I_n^{l,s} \geq K\Big) &= P\left(\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j, j\neq i-l-s}}^{n}\Big|L(e_i,e_j)e_{i-l-s}\Big| \geq Kn^2\right) \\
&\leq \frac{1}{Kn^2}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j, j\neq i-l-s}}^{n} E\Big(\Big|L(e_i,e_j)e_{i-l-s}\Big|\Big) \\
&\leq \frac{1}{K}E\Big(|L(e_1,e_2)|\Big)E\Big(|e_1|\Big),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
P\Big(I\!I_n^{l,s} \geq K\Big) &\leq P\left(\sum_{i=l+s+1}^{n}\Big|L(e_i,e_{i-l-s})e_{i-l-s}\Big|^{1/2} \geq \sqrt{K}n\right) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{K}n}\sum_{i=1}^{n} E\Big(|L(e_i,e_{i-l-s})e_{i-l-s}|^{1/2}\Big) \\
&\leq \frac{1}{\sqrt{K}n}\sum_{i=1}^{n} E\Big(|L(e_i,e_{i-l-s})|\Big)^{1/2}E\Big(|e_{i-l-s}|\Big)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{K}}E\Big(|L(e_1,e_2)|\Big)^{1/2}E\Big(|e_1|\Big)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Also gilt (5.4).
Aus (5.4) folgt mit (3.99) für alle $a \in (0,1)$ und $s \in \mathbb{N}$

$$\sum_{l=0}^{n-1} a^l \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \Big| L(e_i, e_j) e_{i-l-s} \Big| = O_p(1), \tag{5.5}$$

beziehungsweise mit (3.98) und (3.99) für alle $a, b \in (0,1)$ und $s \in \mathbb{N}_0$

$$\sum_{l=0}^{n-1} a^l \sum_{m=l}^{n-2} b^{m-l} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \Big| L(e_i, e_j) e_{i-m-s-1} \Big| = O_p(1). \tag{5.6}$$

Nach (3.7) ist

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \Big| L(e_i, e_j)(\hat{e}_{ni} - e_i) \Big| \\
\leq\ & \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \Big| L(e_i, e_j) \sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\mathbf{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \sum_{m=l}^{i-2} \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{m-l} \mathbf{u}_p \rangle \langle \boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{e}'_{i-1-m} \rangle \Big| \\
& + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \Big| L(e_i, e_j) \sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\mathbf{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \langle \boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n, \mathbf{P}^{i-1-l} \mathbf{X}_0 \rangle \Big| \\
& + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \Big| L(e_i, e_j) \sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\mathbf{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle \langle (\widehat{\mathbf{\Theta}}_n - \mathbf{\Theta}) \mathbf{e}_{i-1-l}, \mathbf{u}_q \rangle \Big| \\
& + \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \Big| L(e_i, e_j) \langle \widehat{\mathbf{\Theta}}_n^i (\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0), \mathbf{u}_q \rangle \Big| \\
=:\ & I\!I\!I_n + I\!V_n + V_n + V\!I_n.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
I\!I\!I_n &\leq C_{\mathbf{\Theta}} C_{\mathbf{P}} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \sum_{s=0}^{q} |\vartheta_s| \sum_{l=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l} \sum_{m=l}^{n-2} \overline{\rho}^{\,m-l} \frac{1}{n^2} \sum_{i=m+2}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \Big| L(e_i, e_j) e_{i-m-s-1} \Big| \\
&= O_p(1/\sqrt{n}\,)\, O_p(1) \quad = \quad O_p(1/\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

nach (5.6), und

$$V_n \leq \sum_{s=1}^{q} |\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \Big| L(e_i, e_j) \sum_{l=0}^{i-1} \langle \widehat{\mathbf{\Theta}}_n^l \mathbf{u}_q, \mathbf{u}_q \rangle e_{i-l-s} \Big|$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; C_{\boldsymbol{\Theta}} \sum_{s=1}^{q} |\widehat{\vartheta}_{ns} - \vartheta_s| \sum_{l=0}^{n-1} \overline{\vartheta}^{\,l} \frac{1}{n^2} \sum_{i=l+1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \Big| L(e_i, e_j) e_{i-l-s} \Big| \\
&= \; O_p(1/\sqrt{n}\,)\, O_p(1) \;=\; O_p(1/\sqrt{n}\,)
\end{aligned}
$$

nach (5.5).
Weiter ist für alle $a \in (0,1)$

$$
\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a^i |L(e_i, e_j)| = O_p(n), \tag{5.7}
$$

da für alle $K > 0$

$$
\begin{aligned}
P\Big(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a^i |L(e_i, e_j)| \geq Kn \Big) \;&\leq\; \frac{1}{Kn} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a^i E\Big(|L(e_i, e_j)| \Big) \\
\leq \; \frac{1}{K} \frac{1}{1-a} E\Big(|L(e_1, e_2)| \Big) \; &\underset{K}{\longrightarrow} \; 0\,.
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir

$$
\begin{aligned}
I\!V_n \;&\leq\; C_{\mathbf{P}} C_{\boldsymbol{\Theta}} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |L(e_i, e_j)| \sum_{l=0}^{i-1} \overline{\vartheta}^{\,l} \overline{\rho}^{\,i-1-l} \|X_0\| \\
&\leq\; C_{\mathbf{P}} C_{\boldsymbol{\Theta}} \|\boldsymbol{\rho} - \widehat{\boldsymbol{\rho}}_n\| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |L(e_i, e_j)| (\overline{\rho} \vee \overline{\vartheta}\,)^{i/2} \frac{1}{\overline{\rho}} \Big(\frac{1}{1-\overline{\rho}} + \frac{1}{1-\overline{\rho}} \Big) \|X_0\| \\
&=\; O_p(1/\sqrt{n}\,)\, O_p(1/n) \;=\; O_p(n^{-3/2}),
\end{aligned}
$$

wobei wir beim zweiten Ungleichheitszeichen die Abschätzung (3.113) verwandt haben und zum Schluß (5.7). Schließlich ist

$$
V\!I_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |L(e_i, e_j)| C_{\boldsymbol{\Theta}} \overline{\vartheta}^{\,i} \|\widehat{\mathbf{e}}_{n0} - \mathbf{e}_0\| = O_p(1/n),
$$

wieder nach (5.7).

5.8 Folgerung. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion mit $E(|L(e_1, e_2)|) < \infty$. Dann gilt für alle $u, w \in \mathbb{N}_0$ mit $u + w \geq 1$

$$
\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |L(e_i, e_j)| |\hat{e}_{ni} - e_i|^u |\hat{e}_{nj} - e_j|^w = O_p(n^{3/2}). \tag{5.9}
$$

Beweis: Wegen der Symmetrie der Voraussetzung in den Argumenten von L können wir ohne Einschränkung $w \geq 1$ annehmen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |L(e_i, e_j)||\hat{e}_{ni} - e_i|^u |\hat{e}_{nj} - e_j|^w \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |L(e_i, e_j)||\hat{e}_{nj} - e_j| \Big(\max_{1\leq i\leq n} |\hat{e}_{ni} - e_i|\Big)^{u+w-1} \\
=\ & O_p(n^{3/2})\, O_p(1) \quad = \quad O_p(n^{3/2})
\end{aligned}$$

nach (5.3) und (3.17).

5.10 Folgerung. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die es ein $L_0 > 0$ und ein $m \in \mathbb{N}$ mit $E(e_1^{2m}) < \infty$ gibt, so dass $|L(x,y)| \leq L_0(1 + |x|^m + |y|^m)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, und seien für alle $n \in \mathbb{N}$, $i, j = 1, \ldots, n$ und $k = 1, 2$ $\varepsilon_{ni}^{kj} \in [e_i \wedge \hat{e}_{ni}, e_i \vee \hat{e}_{ni}]$. Dann ist für alle $u, w \in \mathbb{N}_0$ mit $u + w \geq 1$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |L(\varepsilon_{ni}^{1j}, \varepsilon_{nj}^{2i})||\hat{e}_{ni} - e_i|^u |\hat{e}_{nj} - e_j|^w \leq O_p(n^{3/2}), \tag{5.11}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |e_i L(\varepsilon_{ni}^{1j}, \varepsilon_{nj}^{2i})||\hat{e}_{ni} - e_i|^u |\hat{e}_{nj} - e_j|^w \leq O_p(n^{3/2}) \tag{5.12}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} L(\varepsilon_{ni}^{1j}, \varepsilon_{nj}^{2i})^2 |\hat{e}_{ni} - e_i|^u |\hat{e}_{nj} - e_j|^w \leq O_p(n^{3/2}). \tag{5.13}$$

Beweis: Wie im Beweis von Folgerung 3.122 ist für alle $n \in \mathbb{N}$, $i, j = 1, \ldots, n$ und $k = 1, 2$

$$|\varepsilon_{ni}^{kj}| \leq |e_i| + |\hat{e}_{ni} - e_i|$$

und wir erhalten hieraus für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i, j = 1 \ldots, n$ mit zweimaliger Anwendung der C_r-Ungleichung mit $r = m$

$$\begin{aligned}
|L(\varepsilon_{ni}^{1j}, \varepsilon_{nj}^{2i})| \ &\leq\ L_0\Big(1 + |\varepsilon_{ni}^{1j}|^m + |\varepsilon_{nj}^{2i}|^m\Big) \\
&\leq\ L_0 C_m\Big(1 + |e_i|^m + |e_j|^m + |\hat{e}_{ni} - e_i|^m + |\hat{e}_{nj} - e_j|^m\Big) \\
&\leq\ C_m(1 + L_0)\Big(1 + |e_i|^m + |e_j|^m + |\hat{e}_{ni} - e_i|^m + |\hat{e}_{nj} - e_j|^m\Big).
\end{aligned}$$

Da diese obere Schranke wegen $C_m \geq 1$ für $m \geq 1$ ebenfalls stets größer als 1 und als $|e_i|$ ist, folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $u, w \in \mathbb{N}_0$ mit $u + w \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \Big(1 \vee |e_i| \vee |L(\varepsilon_{ni}^{1j}, \varepsilon_{nj}^{2i})|\Big)|L(\varepsilon_{ni}^{1j}, \varepsilon_{nj}^{2i})||\hat{e}_{ni} - e_i|^u|\hat{e}_{nj} - e_j|^w \\
\leq\ & \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \Big(C_m(1+L_0)\Big(1 + |e_i|^m + |e_j|^m + |\hat{e}_{ni} - e_i|^m + |\hat{e}_{nj} - e_j|^m\Big)\Big)^2 \cdot \\
& \hspace{20em} \cdot|\hat{e}_{ni} - e_i|^u|\hat{e}_{nj} - e_j|^w \\
\leq\ & 8\,C_m^2(1+L_0)^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \Big(1 + e_i^{2m} + e_j^{2m}\Big)|\hat{e}_{ni} - e_i|^u|\hat{e}_{nj} - e_j|^w \\
& + 4\,C_m^2(1+L_0)^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |\hat{e}_{ni} - e_i|^{u+2m}|\hat{e}_{nj} - e_j|^w \\
& + 4\,C_m^2(1+L_0)^2 \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} |\hat{e}_{ni} - e_i|^{u}|\hat{e}_{nj} - e_j|^{w+2m} \\
=\ & O_p(n^{3/2})
\end{aligned}$$

nach (5.9) und, beim zweiten Ungleichheitszeichen, mit mehrmaliger Anwendung der C_r-Ungleichung mit $C_2 = 2$. Der eben abgeschätzte Term ist größer als alle in Folgerung 5.10 betrachteten Ausdrücke. Daraus folgen (5.11)–(5.13).

5.14 Proposition. Unter den Voraussetzungen (5.1) an K gilt

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \Big|\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) - e_iK(e_i, e_j)\Big| = O_p(n^{3/2}) \tag{5.15}$$

und

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \Big|K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) - K(e_i, e_j)\Big|^2 = O_p(n^{3/2}). \tag{5.16}$$

Beweis: Zu (5.15): Es ist mit der Dreiecksungleichung und der Taylorformel, wobei $\varepsilon_{ni}^{kj} \in [e_i \wedge \hat{e}_{ni}, e_i \vee \hat{e}_{ni}]$ für $n \in \mathbb{N}$, $i, j = 1, \ldots, n$ und $k = 1, 2$ die Zwischenstellen aus der Taylorentwicklung bezeichnen,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} \Big|\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) - e_iK(e_i, e_j)\Big|$$

$$
\begin{aligned}
= \; & \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big|\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - e_iK(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) + e_iK(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - e_iK(e_i,e_j)\Big| \\
\leq \; & \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})||\hat{e}_{ni}-e_i| \\
& + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big|e_i\Big(K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - K(e_i,e_j)\Big)\Big| \\
\leq \; & \sum_{w=0}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|D_1^uD_2^{w-u}K(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^{u+1}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{w-u} \\
& + \sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|D_1^uD_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})||\hat{e}_{ni}-e_i|^{u+1}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{v-u} \\
& + \sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|e_iD_1^uD_2^{w-u}K(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^{u}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{w-u} \\
& + \sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|e_iD_1^uD_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})||\hat{e}_{ni}-e_i|^{u}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{v-u} \\
\leq \; & O_p(n^{3/2})
\end{aligned}
$$

nach (5.9), (5.11) und (5.12). Beim dritten Summanden beachten wir, dass aufgrund der quadratischen Integrierbarkeit der Fehlervariablen und aufgrund von (5.1) (b) durch die Cauchy-Schwarz-Ungleichung die in (5.9) geforderte Integrierbarkeit sichergestellt wird. Es gilt also (5.15).

Zu (5.16): Nochmal nach der Taylorformel und der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel, wobei wir beachten, dass in dem Quadrat $(v+1)(v+2)/2$ Summanden stehen, ist

$$
\begin{aligned}
& \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big|K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - K(e_i,e_j)\Big|^2 \\
& \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Bigg(\sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}|D_1^uD_2^{w-u}K(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^{u}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{w-u} \\
& \qquad + \sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}|D_1^uD_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})||\hat{e}_{ni}-e_i|^{u}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{v-u}\Bigg)^2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \frac{(v+1)(v+2)}{2}\sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|D_1^u D_2^{w-u}K(e_i,e_j)|^2\cdot \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot|\hat{e}_{ni}-e_i|^{2u}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{2w-2u} \\
& +\frac{(v+1)(v+2)}{2}\sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|D_1^u D_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})|^2\cdot \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\cdot|\hat{e}_{ni}-e_i|^{2u}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{2v-2u} \\
\leq\ & O_p(n^{3/2})
\end{aligned}
$$

nach (5.9) und (5.13). Also gilt (5.16).

5.17 Proposition. Für alle Borelfunktionen $L_1, L_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit den Eigenschaften $E(|L_1(e_1,e_2)|) < \infty$ und $E(L_2(e_1,e_2)^2) < \infty$ gelten

$$
\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big(L_1(e_i,e_j)-E(L_1(e_1,e_2))\Big)\right| = o_p(n^2) \tag{5.18}
$$

und

$$
\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}\Big(L_2(e_i,e_j)L_2(e_j,e_k)-E\Big(L_2(e_1,e_2)L_2(e_2,e_3)\Big)\Big)\right| = o_p(n^3). \tag{5.19}
$$

Beweis: Die Aussage (5.18) folgt aus dem starken Gesetz der großen Zahlen für U-Statistiken. Dieses besagt, dass für einen symmetrischen Kern $\psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ vom Grad k und für unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $E(|\psi(Z_1,\ldots,Z_k)|) < \infty$

$$
\binom{k}{n}^{-1}\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n}\psi(Z_{i_1},\ldots,Z_{i_k}) \underset{n}{\longrightarrow} E(\psi(Z_1,\ldots,Z_k)) \text{ fast sicher}
$$

gilt (vergleiche zum Beispiel Theorem 3.2 in Kapitel 3.4.2 in Lee (1990)). Der Ausdruck aus (5.18) läßt sich mit einem entsprechenden Vorfaktor umschreiben in die symmetrisierte Form

$$
\begin{aligned}
& \frac{2}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big(L_1(e_i,e_j)-E(L_1(e_1,e_2))\Big) \\
=\ & \frac{2}{n(n-1)}\sum_{1\leq i<j\leq n}\Big(L_1(e_i,e_j)+L_1(e_i,e_j)\Big)-2E(L_1(e_1,e_2)) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}
$$

wobei die Konvergenzaussage aus dem starken Gesetz der großen Zahlen für U-Statistiken mit dem symmetrisierten Kern $\psi(x,y) = L(x,y) + L(y,x)$ vom Grad

2 gilt, und hieraus (5.18) folgt, weil der zusätzliche Vorfaktor von der Ordnung $O(n^2)$ ist.
Der Ausdruck aus (5.19) schreibt sich als

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}\Big(L_2(e_i,e_j)L_2(e_j,e_k)-E\Big(L_2(e_1,e_2)L_2(e_2,e_3)\Big)\Big)\\
&= \sum_{\substack{i,j,k=1\\ |\{i,j,k\}|=3}}^{n}\Big(L_2(e_i,e_j)L_2(e_j,e_k)-E\Big(L_2(e_1,e_2)L_2(e_2,e_3)\Big)\Big)\\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big(L_2(e_i,e_j)L_2(e_j,e_i)-E\Big(L_2(e_1,e_2)L_2(e_2,e_1)\Big)\Big)\\
&\quad+n(n-1)\Big(E\Big(L_2(e_1,e_2)L_2(e_2,e_1)\Big)-E\Big(L_2(e_1,e_2)L_2(e_2,e_3)\Big)\Big).
\end{aligned}$$

Der letzte Summand ist von der Ordung $O(n^2)$, der mittlere Summand ist nach (5.18) von der Ordnung $o_p(n^2)$, und der erste Summand ist ähnlich wie oben bis auf den Vorfaktor eine U-Statistik in unsymmetrisierter Form, hier vom Grad 3, und daher nach dem starken Gesetz der großen Zahlen für U-Statistiken von der Ordnung $o_p(n^3)$. Man beachte hierbei, dass aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung die Abschätzungen $E(|L_2(e_1,e_2)L_2(e_2,e_3)|)\leq E(L_2(e_1,e_2)^2)<\infty$ und $E(|L_2(e_1,e_2)L_2(e_2,e_1)|)\leq E(L_2(e_1,e_2)^2)<\infty$ gelten, womit alle benötigten Integrierbarkeitsvoraussetzungen erfüllt sind.

5.20 Folgerung. Unter den Voraussetzungen (5.1) an die Funktion K gilt

$$\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\widehat{p}_{n,i}(1)\widehat{p}_{n,j}(1)\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-E(e_1K(e_1,e_2))\right|=o_p(1), \tag{5.21}$$

wobei $\widehat{p}_{n,i}(1)$, $i=1,\dots,n$, die Wahrscheinlichkeitsgewichte aus der zentrierten empirischen Verteilungsfunktion $\widehat{F}_n^z$ sind.

Beweis: Zunächst folgt aus (3.42)

$$\begin{aligned}
&\max_{1\leq i,j\leq n}\left|\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nj}}-1\right|\\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\left|\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\right|\max_{1\leq j\leq n}\left|\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nj}}-1\right|+\max_{1\leq i\leq n}\left|\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}-1\right| \qquad (5.22)\\
&= O_p(1)\,o_p(1)+o_p(1) \;=\; o_p(1).
\end{aligned}$$

Dann gilt für alle $\alpha \in (0,1)$ auf $\widehat{A}_{n,\alpha}$

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\widehat{p}_{n,i}(1)\widehat{p}_{n,j}(1)\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - E(e_1K(e_1,e_2))\Big| \\
= \;& \Big|\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nj}}\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - E(e_1K(e_1,e_2))\Big| \\
= \;& \Big|\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nj}}\Big(\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - e_iK(e_i,e_j)\Big) \\
&\quad + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Big(\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nj}} - 1\Big)e_iK(e_i,e_j) \\
&\quad + \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Big(e_iK(e_i,e_j) - E(e_1K(e_1,e_2))\Big) - \frac{1}{n}E(e_1K(e_1,e_2))\Big| \\
\leq \;& \Big|\max_{1\leq i\leq n}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\Big|^2\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Big|\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj}) - e_iK(e_i,e_j)\Big| \\
&\quad + \max_{1\leq i,j\leq n}\Big|\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nj}} - 1\Big|\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}|e_iK(e_i,e_j)| \\
&\quad + \frac{1}{n^2}\Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Big(e_iK(e_i,e_j) - E(e_1K(e_1,e_2))\Big)\Big| + \frac{1}{n}\Big|E(e_1K(e_1,e_2))\Big| \\
= \;& O_p(1)\,o_p(1) + o_p(1)\,O_p(1) + o_p(1) + O(1/n) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.42), (5.15), (5.22) und zweimal (5.18), wobei die Voraussetzungen hiervon nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aufgrund von (5.1) (a) und der quadratischen Integrierbarkeit der Fehlervariablen erfüllt sind. Wegen $P(\mathcal{C}\widehat{A}_{n,\alpha}) \underset{n}{\longrightarrow} 0$ folgt die Behauptung.

5.23 Proposition. Unter den Voraussetzungen (5.1) gilt

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big|K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})K(\hat{e}_{nj},\hat{e}_{nk}) - K(e_i,e_j)K(e_j,e_k)\Big| = O_p(n^{5/2}). \tag{5.24}$$

Beweis: Es ist

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big|K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})K(\hat{e}_{nj},\hat{e}_{nk}) - K(e_i,e_j)K(e_j,e_k)\Big|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big|K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-K(e_i,e_j)\Big|\Big|K(\hat{e}_{nj},\hat{e}_{nk})\Big| \\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big|K(e_i,e_j)\Big|\Big|K(\hat{e}_{nj},\hat{e}_{nk})-K(e_j,e_k)\Big| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big|K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-K(e_i,e_j)\Big|\Big|K(\hat{e}_{nj},\hat{e}_{nk})-K(e_j,e_k)\Big| \\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big|K(e_j,e_k)\Big|\Big|K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-K(e_i,e_j)\Big| \\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big|K(e_i,e_j)\Big|\Big|K(\hat{e}_{nj},\hat{e}_{nk})-K(e_j,e_k)\Big| \\
&\le n\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\Big|K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-K(e_i,e_j)\Big|^2 \\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big|K(e_j,e_k)\Big|\Big|K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-K(e_i,e_j)\Big| \\
&\quad+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big|K(e_i,e_j)\Big|\Big|K(\hat{e}_{nj},\hat{e}_{nk})-K(e_j,e_k)\Big| \\
&=: I_n + I\!I_n + I\!I\!I_n
\end{aligned}
$$

nach der Dreiecksungleichung und der binomischen Ungleichung $|xy| \le \frac{1}{2}(x^2+y^2)$. Nach (5.16) gilt $I_n = O_p(n^{5/2})$, und weil die Voraussetzungen an K in (5.1) symmetrisch in den Argumenten von K sind reicht es aus, noch $I\!I_n$ zu betrachten. Zunächst gilt

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} K(e_i,e_j)^2 = O_p(n^2), \tag{5.25}$$

da für alle $C > 0$

$$
\begin{aligned}
P\Big(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} K(e_i,e_j)^2 \ge Cn^2\Big) &\le \frac{1}{Cn^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} E\Big(K(e_i,e_j)^2\Big) \\
&\le \frac{1}{C}E\Big(K(e_1,e_2)^2\Big) \underset{C}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}
$$

ist nach der Markovungleichung.

Mit Taylorentwicklung, Dreiecksungleichung, der binomischen Ungleichung, und beim letzten Ungleichheitszeichen gesondertem Behandeln der Summanden mit $u = w$ beziehungsweise $u = v$ in der ersten beziehnugsweise dritten Summe, erhalten wir

$$
\begin{aligned}
I\!I_n &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}\Big|K(e_j,e_k)\Big|\cdot \\
&\qquad \cdot\Bigg|\sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}D_1^u D_2^{w-u}K(e_i,e_j)(\hat{e}_{ni}-e_i)^u(\hat{e}_{nj}-e_j)^{w-u} \\
&\qquad\quad + \sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}D_1^u D_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})(\hat{e}_{ni}-e_i)^u(\hat{e}_{nj}-e_j)^{v-u}\Bigg| \\
&\leq \sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}|K(e_j,e_k)||D_1^u D_2^{w-u}K(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^u\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot|\hat{e}_{nj}-e_j|^{w-u} \\
&\quad + \sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}|K(e_j,e_k)||D_1^u D_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})||\hat{e}_{ni}-e_i|^u\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot|\hat{e}_{nj}-e_j|^{v-u} \\
&\leq \sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}|K(e_j,e_k)|^2|\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{w-u} \\
&\quad + \sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}|D_1^u D_2^{w-u}K(e_i,e_j)|^2|\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{w-u} \\
&\quad + \sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}|K(e_j,e_k)|^2|\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{v-u} \\
&\quad + \sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}|D_1^u D_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})|^2|\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{v-u} \\
&\leq \sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w-1}\binom{w}{u}n\Big(\max_{1\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni}-e_i|\Big)^{w-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}|K(e_j,e_k)|^2|\hat{e}_{nj}-e_j| \\
&\quad + \sum_{w=1}^{v-1}\sum_{i=1}^{n}|\hat{e}_{ni}-e_i|^w\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\ k\neq j}}^{n}|K(e_j,e_k)|^2 \\
&\quad + \sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}n|D_1^u D_2^{w-u}K(e_i,e_j)|^2|\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{w-u}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{u=0}^{v-1}\binom{v}{u} n\Big(\max_{1\le i\le n}|\hat e_{ni}-e_i|\Big)^{v-1}\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|K(e_j,e_k)|^2|\hat e_{nj}-e_j|\\
&+\sum_{i=1}^{n}|\hat e_{ni}-e_i|^v\sum_{j=1}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|K(e_j,e_k)|^2\\
&+\sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} n|D_1^uD_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})|^2|\hat e_{ni}-e_i|^u|\hat e_{nj}-e_j|^{v-u}\\
=\;& O(n)\,O_p(1)\,O_p(n^{3/2})+O_p(n^{1/2})\,O_p(n^2)+O(n)\,O_p(n^{3/2})\\
&+O(n)\,O_p(1)\,O_p(n^{3/2})+O_p(n^{1/2})\,O_p(n^2)+O(n)\,O_p(n^{3/2})\\
=\;& O_p(n^{5/2})
\end{aligned}
$$

nach (3.17) und (5.9), nach (5.9) (mit $L\equiv 1$) und (5.25), nach (5.9), nochmal nach (3.17) und (5.9), sowie nochmal nach (5.9) (mit $L\equiv 1$) und (5.25), und schließlich nach (5.13).

5.26 Folgerung. Unter den Voraussetzungen (5.1) an die Funktion K gilt

$$
\Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\widehat p_{n,i}(1)\widehat p_{n,j}(1)\widehat p_{n,k}(1)K(\hat e_{ni},\hat e_{nj})K(\hat e_{nj},\hat e_{nk}) - E\Big(K(e_1,e_2)K(e_2,e_3)\Big)\Big| = o_p(1). \tag{5.27}
$$

Beweis: Es gilt für ein $\alpha\in(0,1)$ unter $\widehat A_{n,\alpha}$

$$
\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\widehat p_{n,i}(1)\widehat p_{n,j}(1)\widehat p_{n,k}(1)K(\hat e_{ni},\hat e_{nj})K(\hat e_{nj},\hat e_{nk})-E\Big(K(e_1,e_2)K(e_2,e_3)\Big)\Big|\\
=\;&\Big|\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\frac{1}{1+t_{nn}\hat e_{ni}}\frac{1}{1+t_{nn}\hat e_{nj}}\frac{1}{1+t_{nn}\hat e_{nk}}K(\hat e_{ni},\hat e_{nj})K(\hat e_{nj},\hat e_{nk})\\
&\qquad - E\Big(K(e_1,e_2)K(e_2,e_3)\Big)\Big|\\
\le\;&\Big|\max_{1\le i\le n}\frac{1}{1+t_{nn}\hat e_{ni}}\Big|^3\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}\Big|K(\hat e_{ni},\hat e_{nj})K(\hat e_{nj},\hat e_{nk})\\
&\qquad - K(e_i,e_j)K(e_j,e_k)\Big|\\
&+\max_{1\le i,j,k\le n}\Big|\frac{1}{1+t_{nn}\hat e_{ni}}\frac{1}{1+t_{nn}\hat e_{nj}}\frac{1}{1+t_{nn}\hat e_{nk}}-1\Big|\cdot\\
&\qquad\cdot\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}|K(e_i,e_j)K(e_j,e_k)|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& + \frac{1}{n^3}\Big|\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n \Big(K(e_i,e_j)K(e_j,e_k) - E\Big(K(e_1,e_2)K(e_2,e_3)\Big)\Big)\Big| \\
& + \frac{2n-1}{n^2}\Big|E\Big(K(e_1,e_2)K(e_2,e_3)\Big)\Big| \\
= \;& O_p(1)\,o_p(1) + o_p(1)\,O_p(1) + o_p(1) + O(1/n) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.42), (5.24), (5.19) und wegen

$$\max_{1\leq i,j,k\leq n}\Big|\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nj}}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nk}} - 1\Big| = o_p(1),$$

was ebenso leicht wie (5.22) durch Einteleskopieren aus (3.42) folgt.

5.28 Definition. Wir setzen, wie in Bemerkung 4.38,

$$
\begin{aligned}
v^{klass} &:= \Big(E(K(e_1,e_2)K(e_1,e_3))\Big)^{1/2}, \\
v^{zentr} &:= \Big(E(K(e_1,e_2)K(e_1,e_3)) - E(K(e_1,e_2)e_2)^2/\sigma^2\Big)^{1/2},
\end{aligned}
$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\hat{v}_n^{klass} := \Bigg(-\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})K(\hat{e}_{nj},\hat{e}_{nk})\Bigg)^{1/2}$$

sowie

$$
\begin{aligned}
\hat{v}_n^{zentr} := \Bigg(& -\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^n \widehat{p}_{n,i}(1)\widehat{p}_{n,j}(1)\widehat{p}_{n,k}(1)K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})K(\hat{e}_{nj},\hat{e}_{nk}) \\
& - \Big(\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n \widehat{p}_{n,i}(1)\widehat{p}_{n,j}(1)\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})\Big)^2 \Big/ \sum_{i=1}^n \widehat{p}_{n,i}(1)\hat{e}_{ni}^2\Bigg)^{1/2}.
\end{aligned}
$$

5.29 Folgerung. Unter den Voraussetzungen (4.1) (a) und (5.1) an K gelten

$$\hat{v}_n^{klass} - v^{klass} = o_p(1) \tag{5.30}$$

und

$$\hat{v}_n^{zentr} - v^{zentr} = o_p(1). \tag{5.31}$$

Beweis: Die Aussage (5.31) folgt wegen der Stetigkeit der Quadratwurzel aus (5.27), (5.21) und weil für alle $\alpha \in (0,1)$ unter $\widehat{A}_{n,\alpha}$

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=1}^{n} \widehat{p}_{n,i}(1)\hat{e}_{ni}^2 - \sigma^2\Big| &= \Big|\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\hat{e}_{ni}^2 - \sigma^2\Big| \\
&= \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}} - 1\Big)\hat{e}_{ni}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_{ni}^2 - \sigma^2\Big| \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\Big|\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}} - 1\Big|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_{ni}^2 + \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_{ni}^2 - \sigma^2\Big| \\
&= o_p(1)\,O_p(1) + o_p(1) \;=\; o_p(1)
\end{aligned}$$

gilt nach (3.42), (3.31) und (3.31).
Die Aussage (5.30) folgt wie beim Beweis von (5.27) aus (5.24) und (5.19), sogar einfacher weil hier nicht die Gewichte $\widehat{p}_{n,i}(1)$ entwickelt werden müssen.

5.32 Bemerkung. Statt der Gewichte $\widehat{p}_{n,i}(1)$ aus der zentrierten empirischen Verteilungsfunktion $\widehat{F}_n^z$ könnte man im Schätzer $\hat{v}_n^{zentr}$ für den Vorfaktor der Brownschen Brücke im Grenzprozess V^{zentr} genausogut die Gewichte $\frac{1}{n}$ aus der klasischen empirischen Verteilungsfunktion verwenden. Eine Verbesserung der asymptotischen Tests ist dadurch nicht zu erwarten weil der später erhaltene kritische Wert durch eine bestenfalls genauere Schätzung von dem Skalenfaktor vielleicht genauer geschätzt aber deshalb nicht unbedingt größer wird. Allerdings ist es konsequent auch an dieser Stelle die Gewichte $\widehat{p}_{n,i}(1)$ zu benutzen.

Kapitel 6

Stochastische Entwicklungen der Bootstrapprozesse $T_n^{*\,z}$ und $r_n^{*\,z}$

Es gelten in diesem Kapitel alle Modellannahmen aus den früheren Kapiteln, und es gelte zusätzlich

$$E\Big(e_1^2 \log(2+|e_1|)^2\Big) < \infty, \tag{6.1}$$

was damit die schwächere Voraussetzung (2.3) ersetzt.
Sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\widehat{\mathbf{e}}_n := (\hat{e}_{n1}, \dots, \hat{e}_{nn}).$$

Wir erinnern an dieser Stelle, dass $\hat{t}_{nn}$ als Borelfunktion von $\hat{e}_{n1}, \dots, \hat{e}_{nn}$ bezüglich $\sigma(\widehat{\mathbf{e}}_n)$ meßbar ist.
Weiter sei $(e_{ni}^*)_{i=0,\dots,n;n\in\mathbb{N}}$ ein Dreieckschema von Bootstrapvariablen mit

(6.2) für alle $n \in \mathbb{N}$ sind $e_{n0}^*, \dots, e_{nn}^*$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$ unabhängig und identisch verteilt mit Verteilungsfunktion $\widehat{F}_n^z := \widehat{F}_n^{seq,z}(1,\cdot\,)$.

6.1 Stochastische Entwicklung der Lagrangemultiplikatoren bei Bootstrapvariablen

6.3 Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ und $k = 0, \dots, n$ sei t_{nk}^* auf dem Ereignis

$$\Big\{ \min_{1\le i\le k} e_{ni}^* < 0 < \max_{1\le i\le k} e_{ni}^* \Big\}$$

definiert als die Nullstelle von

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{k} \frac{e_{ni}^*}{1+xe_{ni}^*}$$

in dem Intervall

$$\Big(\Big(\frac{1}{k}-1\Big)\frac{1}{\max_{1\le i\le k} e^*_{ni}},\Big(\frac{1}{k}-1\Big)\frac{1}{\min_{1\le i\le k} e^*_{ni}}\Big).$$

Für $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A^*_{n,\alpha} := \bigcap_{k=[n^\alpha]}^{n} \Big\{ \min_{1\le i\le k} e^*_{ni} < 0 < \max_{1\le i\le k} e^*_{ni}\Big\}.$$

6.4 Proposition. Für $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0,1)$ ist

$$A^*_{n,\alpha} = \Big\{ \min_{1\le i\le [n^\alpha]} e^*_{ni} < 0 < \max_{1\le i\le [n^\alpha]} e^*_{ni}\Big\},$$

und für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt

$$P(\mathcal{C}A^*_{n,\alpha}|\widehat{\mathbf{e}}_n) = o_p(1). \tag{6.5}$$

Beweis: Die Gleichheit der Mengen ist klar.
Für (6.5) ist zunächst für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&P\Big(\mathcal{C}\Big\{ \min_{1\le i\le [n^\alpha]} e^*_{ni} < 0 < \max_{1\le i\le [n^\alpha]} e^*_{ni}\Big\}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&= P\Big(\Big\{ \min_{1\le i\le [n^\alpha]} e^*_{ni} \ge 0\Big\} \cup \Big\{ \max_{1\le i\le [n^\alpha]} e^*_{ni} \le 0\Big\}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\le P\Big(\bigcap_{i=1}^{[n^\alpha]}\{e^*_{ni}\ge 0\}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) + P\Big(\bigcap_{i=1}^{[n^\alpha]}\{e^*_{ni}\le 0\}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&= P(e^*_{n1}\ge 0|\widehat{\mathbf{e}}_n)^{[n^\alpha]} + P(e^*_{n1}\le 0|\widehat{\mathbf{e}}_n)^{[n^\alpha]}\\
&=: I_n + \mathit{II}_n.
\end{aligned}$$

Wie im Beweis von Proposition 3.19 gibt es wegen $E(e_1^2) > 0$ und $E(e_1) = 0$ ein $\eta > 0$ mit $P(e_1 \ge -\eta) < 1$ und $P(e_1 \le \eta) < 1$. Für alle $\varepsilon > 0$ und $\alpha \in (0,1)$ gilt für alle großen $n \in \mathbb{N}$, $n \ge (\log(\varepsilon \wedge 1/2)/\log((2 + P(e_1 \ge -\eta))/3) + 1)^{1/\alpha}$, die Abschätzung $\varepsilon^{1/[n^\alpha]} \ge (2 + P(e_1 \ge -\eta))/3$, also

$$\begin{aligned}
P(I_n \ge \varepsilon) &= P\Big(E(1_{\{e^*_{n1}\ge 0\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ge \varepsilon^{1/[n^\alpha]}\Big)\\
&\le P\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+t_{nn}\hat{e}_{ni}}1_{\{\hat{e}_{ni}\ge 0\}} \ge \frac{2+P(e_1\ge-\eta)}{3}\Big)\\
&\le P\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{1+t_{nn}\hat{e}_{ni}}-1\Big)1_{\{\hat{e}_{ni}\ge 0\}} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{[\sqrt{n}]}1_{\{\hat{e}_{ni}\ge 0\}} \ge \frac{1-P(e_1\ge-\eta)}{3}\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + P\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=[\sqrt{n}]+1}^{n} 1_{\{\hat{e}_{ni}\geq 0\}} \geq \frac{2+P(e_1\geq -\eta)}{3} - \frac{1-P(e_1\geq -\eta)}{3}\Big)\\
\leq\ & P\Big(\max_{1\leq i\leq n}\Big|\frac{1}{1+t_{nn}\hat{e}_{ni}}-1\Big| + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1-P(e_1\geq -\eta)}{3}\Big)\\
&\quad + P\Big(\Big\{\frac{1}{n}\sum_{i=[\sqrt{n}]+1}^{n} 1_{\{e_i\geq e_i-\hat{e}_{ni}\}} \geq \frac{1+2P(e_1\geq -\eta)}{3}\Big\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \cap \Big\{\max_{[\sqrt{n}]\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni}-e_i| < \eta\Big\}\Big)\\
&\quad + P\Big(\max_{[\sqrt{n}]\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni}-e_i| \geq \eta\Big)\\
\leq\ & P\Big(\max_{1\leq i\leq n}\Big|\frac{1}{1+t_{nn}\hat{e}_{ni}}-1\Big| + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1-P(e_1\geq -\eta)}{3}\Big)\\
&\quad + P\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{\{e_i\geq -\eta\}} \geq \frac{1+2P(e_1\geq -\eta)}{3}\Big) + P\Big(\max_{[\sqrt{n}]\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni}-e_i| \geq \eta\Big)\\
\underset{n}{\longrightarrow}\ & 0,
\end{aligned}
$$

wobei die Konvergenz am Ende für die erste Wahrscheinlichkeit nach (3.42) gilt, für die letzte Wahrscheinlichkeit nach (3.16), und für die mittlere Wahrscheinlichkeit, weil der Ausdruck auf der linken Seite fast sicher gegen $P(e_1 \geq -\eta)$ konvergiert, was echt kleiner als der Ausdruck auf der rechten Seite ist.
Auf die gleiche Art, unter Ausnutzung von $P(e_1 \leq \eta) < 1$, zeigt man $I\!I_n = o_p(1)$.

6.6 Proposition. Es gilt

$$
\Big|E(e_{n1}^{*2}|\hat{\mathbf{e}}_n) - \sigma^2\Big| = o_p(1). \tag{6.7}
$$

Beweis: Für ein $\alpha \in (0,1)$ ist unter $\widehat{A}_{n,\alpha}$ nach Definition von e_{n1}^*

$$
\begin{aligned}
&\Big|E(e_{n1}^{*2}|\hat{\mathbf{e}}_n) - \sigma^2\Big|\\
&\quad = \Big|\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\hat{e}_{ni}^2 - \sigma^2\Big|\\
&\quad = \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}-1\Big)\hat{e}_{ni}^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_{ni}^2 - \sigma^2\Big|\\
&\quad \leq \max_{1\leq i\leq n}\Big|\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}-1\Big|\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_{ni}^2 + \Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_{ni}^2 - \sigma^2\Big|\\
&\quad = o_p(1)\,O_p(1) + o_p(1) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (3.42), (3.31) und (3.31). Da nach (3.20) $P(\mathcal{C}\widehat{A}_{n,\alpha}) \underset{n}{\longrightarrow} 0$ gilt, folgt hieraus (6.7).

6.8 Proposition. Es gelten

$$\max_{1\le k\le n} \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} |e^*_{ni}| = O_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \text{ } P\text{-stoch.} \tag{6.9}$$

$$\max_{1\le k\le n} \left|\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{k} e^*_{ni}\right| = O_{p^*}(\sqrt{\log n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \text{ } P\text{-stoch.} \tag{6.10}$$

$$\max_{1\le k\le n} \left|\sum_{i=1}^{k} e^*_{ni}\right| = O_{p^*}(\sqrt{n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \text{ } P\text{-stoch.} \tag{6.11}$$

Beweis: Wir beginnen mit Aussage (6.11), da diese am einfachsten ist, und wir hier besonders ausführlich vorgehen möchten.
Wir können mit Faktorisierungen von bedingten Erwartungswerten und bedingten Wahrscheinlichkeiten rechnen, da wir nur bedingte Erwartungen von Funktionen von Zufallsvektoren betrachten.
Sei $\beta \in (0,1)$. Dann ist für alle $K > 0$ unter $\widehat{A}_{n,\beta}$

$$\begin{aligned} &P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k} e^*_{ni}\Big| \ge K\sqrt{n}\,\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\ = \;& P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k} e^*_{ni}\Big| \ge K\sqrt{n}\,\Big|\,(\hat{e}_{n1},\ldots,\hat{e}_{nn}) = \cdot\;\Big)\circ(\hat{e}_{n1},\ldots,\hat{e}_{nn}), \end{aligned}$$

und unter $\widehat{A}_{n,\beta}$ sind nun die Bootstrapvariablen nicht nur unabhängig, sondern auch zentriert, weshalb wir auf diesem Ereignis mit der Kolmogorovschen Maximalungleichung für unabhängige Summanden

$$\begin{aligned} &P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k} e^*_{ni}\Big| \ge K\sqrt{n}\,\Big|\,(\hat{e}_{n1},\ldots,\hat{e}_{nn}) = \cdot\;\Big)\circ(\hat{e}_{n1},\ldots,\hat{e}_{nn}) \\ \le\;& \Big(\frac{1}{K^2 n}\sum_{i=1}^{n} E\Big(e^{*2}_{ni}\Big|\,(\hat{e}_{n1},\ldots,\hat{e}_{nn}) = \cdot\;\Big)\Big)\circ(\hat{e}_{n1},\ldots,\hat{e}_{nn}) \\ \le\;& \Big(\frac{1}{K^2} E\Big(e^{*2}_{n1}\Big|\,(\hat{e}_{n1},\ldots,\hat{e}_{nn}) = \cdot\;\Big)\Big)\circ(\hat{e}_{n1},\ldots,\hat{e}_{nn}) \\ =\;& \frac{1}{K^2}E(e^{*2}_{n1}|\widehat{\mathbf{e}}_n) \end{aligned}$$

erhalten. Also gilt für alle $\varepsilon > 0$ und $K > 0$

$$\begin{aligned} &P\Big(P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k} e^*_{ni}\Big| \ge K\sqrt{n}\,\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \ge \varepsilon\Big) \\ \le\;& P\big(\mathcal{C}\widehat{A}_{n,\beta}\big) + P\Big(\widehat{A}_{n,\beta} \cap \Big\{P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k} e^*_{ni}\Big| \ge K\sqrt{n}\,\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \ge \varepsilon\Big\}\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le \; P\Big(\mathcal{C}\widehat{A}_{n,\beta}\Big) + P\bigg(\widehat{A}_{n,\beta} \cap \Big\{\frac{1}{K^2}E(e^{*\,2}_{n1}|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ge \varepsilon\Big\}\bigg) \\
&\le \; P\Big(\mathcal{C}\widehat{A}_{n,\beta}\Big) + P\bigg(\widehat{A}_{n,\beta} \cap \Big\{\frac{1}{K^2}\Big|E(e^{*\,2}_{n1}|\widehat{\mathbf{e}}_n) - \sigma^2\Big| \ge \frac{\varepsilon}{2}\Big\}\bigg) + P\Big(\frac{\sigma^2}{K^2} \ge \frac{\varepsilon}{2}\Big) \\
&\underset{n}{\longrightarrow} \; 1_{\{\sigma^2/K^2 \ge \varepsilon/2\}} \underset{K}{\longrightarrow} \; 0
\end{aligned}
$$

nach (3.20) und (6.7). Die Darstellung mit der Faktorisierung werden wir im folgenden nicht mehr bemühen, und ebensowenig den letzten Schritt mit dem Gegenereignis $\mathcal{C}\widehat{A}_{n,\beta}$ explizit vorführen. Dies sollte hier nur zur Verdeutlichung dienen, dass man mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten bei festgehaltenen Werten aus der Bedingung rechnen kann, und die Zentriertheit der Bootstrapvariablen dabei ohne Einschränkung angenommen werden kann.

Zu (6.10): Für alle $K, \varepsilon > 0$ und $n \ge 2$ ist nach der Hájek-Rényi-Ungleichung

$$
\begin{aligned}
&P\bigg(P\bigg(\max_{1\le k\le n}\Big|\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{k} e^*_{ni}\Big| \ge K\sqrt{\log n}\,\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\bigg) \ge \varepsilon\bigg) \\
&\le \; P\bigg(\frac{1}{K^2\log n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}E(e^{*\,2}_{ni}|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ge \varepsilon\bigg) \\
&\le \; P\Big(\frac{1+\log n}{\log n}\frac{1}{K^2}E(e^{*\,2}_{n1}|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ge \varepsilon\Big) \\
&\le \; P\Big(\frac{1+\log n}{\log n}\frac{1}{K^2}\Big|E(e^{*\,2}_{n1}|\widehat{\mathbf{e}}_n) - \sigma^2\Big| \ge \frac{\varepsilon}{2}\Big) \\
&\qquad + P\Big(\frac{1+\log n}{\log n}\frac{\sigma^2}{K^2} \ge \frac{\varepsilon}{2}\Big) \\
&\underset{n}{\longrightarrow} \; 1_{\{\sigma^2/K^2 \ge \varepsilon/2\}} \underset{K}{\longrightarrow} \; 0,
\end{aligned}
$$

nach (6.7), und weil

$$
\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i} = \sum_{i=2}^{n}\int_{i-1}^{i}\frac{1}{i}\,dx \le \sum_{i=2}^{n}\int_{i-1}^{i}\frac{1}{x}\,dx \le \int_{1}^{n}\frac{1}{x}\,dx = \log n.
$$

Zu (6.9): Es gilt

$$
\begin{aligned}
&\max_{1\le k\le n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|e^*_{ni}| \\
&\quad\le \; \max_{1\le k\le n}\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|e^*_{ni}| - E\Big(|e^*_{n1}|\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big| + E\Big(|e^*_{n1}|\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big).
\end{aligned}
$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
E\Big(|e^*_{n1}|\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \;&\le\; 1 + E\Big(e^{*\,2}_{n1}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&=\; O_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}
\end{aligned}
$$

nach (6.7).
Weiter ist für alle $K, \varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ nach der Hájek-Rényi-Ungleichung

$$\begin{aligned}
&P\Big(P\Big(\max_{1\le k\le n}\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|e^*_{ni}| - E\Big(|e^*_{n1}|\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big| \ge K\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \ge \varepsilon\Big)\\
&\le\ P\Big(\frac{1}{K^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i^2}\mathrm{Var}\Big(|e^*_{ni}|\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \ge \varepsilon\Big)\\
&\le\ P\Big(\frac{2}{K^2}E(e^{*2}_{n1}|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ge \varepsilon\Big)\\
&\le\ P\Big(\Big|E(e^{*2}_{n1}|\widehat{\mathbf{e}}_n) - \sigma^2\Big| \ge \frac{\varepsilon K^2}{4}\Big) + P\Big(\sigma^2 \ge \frac{\varepsilon K^2}{4}\Big)\\
&\underset{n}{\longrightarrow}\ 1_{\{4\sigma^2\ge\varepsilon K^2\}}\ \underset{K}{\longrightarrow}\ 0
\end{aligned}$$

nach (6.7), und wegen $\sum_{i=1}^n 1/i^2 \le \pi^2/6 \le 2$.

6.12 Proposition. Für alle $\alpha, \varepsilon > 0$ gilt

$$E\Big(e^{*2}_{n1}\log(2+|e^*_{n1}|)^2 1_{\{|e^*_{n1}|\ge\varepsilon n^\alpha\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) = o_p(1). \tag{6.13}$$

Beweis: Für alle $\alpha, \varepsilon, \varepsilon' > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
&P\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2\log(2+|e_i|)^2 1_{\{|e_i|\ge\varepsilon n^\alpha\}} \ge \varepsilon'\Big)\\
&\le\ \frac{1}{\varepsilon' n}\sum_{i=1}^{n} E\Big(e_i^2\log(2+|e_i|)^2 1_{\{|e_i|\ge\varepsilon n_0^\alpha\}}\Big)\\
&=\ \frac{1}{\varepsilon'}E\Big(e_1^2\log(2+|e_1|)^2 1_{\{|e_1|\ge\varepsilon n^\alpha\}}\Big)\ \underset{n}{\longrightarrow}\ 0
\end{aligned}$$

nach der Markovungleichung und dem Satz von Lebesgue, mit der integrierbaren Majorante $e_1^2\log(2+|e_1|)^2$ und weil die Indikatorfunktion wegen der Endlichkeit von e_1 fast sicher gegen Null konvergiert. Also gilt für alle $\alpha, \varepsilon > 0$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} e_i^2\log(2+|e_i|)^2 1_{\{|e_i|\ge\varepsilon n^\alpha\}} = o_p(1). \tag{6.14}$$

Die Funktion $h : [0,\infty) \ni x \mapsto \log(2+x) \in \mathbb{R}$ ist konkav. Daher haben wir für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\log\Big(2+|x+y|\Big)\ &\le\ \log\Big(2+|x|+|y|\Big)\\
&\le\ \log\Big(2+2(|x|\vee|y|)\Big)\\
&\le\ \log\Big(2+2(|x|\vee|y|)\Big) + \log\Big(2+2|0|\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\Big(\frac{1}{2}\log\Big(2+2(|x|\vee|y|)\Big)+\Big(1-\frac{1}{2}\Big)\log\Big(2+2|0|\Big)\Big)\\
&\le 2\log\Big(2+\frac{2(|x|\vee|y|)+2|0|}{2}\Big)\\
&= 2\log\Big(2+(|x|\vee|y|)\Big),
\end{aligned}
$$

wobei die ersten beiden Ungleichheitszeichen aufgrund der Monotonie und das letzte aufgrund der Konkavität von h gelten, das andere Ungleich wegen $\log 2 > 0$. Hieraus erhalten wir für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$
|x+y|\log(2+|x+y|) \le 2(|x|\vee|y|)\cdot 2\log\Big(2+(|x|\vee|y|)\Big),
$$

und durch Quadrieren

$$
\begin{aligned}
&(x+y)^2\log\Big(2+|x+y|)\Big)^2\\
&\quad\le 16(|x|\vee|y|)^2\log\Big(2+(|x|\vee|y|)\Big)^2\\
&\quad\le 16\Big(x^2\log(2+|x|)^2+y^2\log(2+|y|)^2\Big).
\end{aligned}
$$

Also haben wir für alle $\alpha, \varepsilon > 0$ und $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{e}_{ni}^2\log(2+|\hat{e}_{ni}|)^2 1_{\{|\hat{e}_{ni}|\ge\varepsilon n^\alpha\}}\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big((\hat{e}_{ni}-e_i)+e_i\Big)^2\log\Big(2+|(\hat{e}_{ni}-e_i)+e_i|)\Big)^2 1_{\{|\hat{e}_{ni}|\ge\varepsilon n^\alpha\}}\\
&\le 16\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n(\hat{e}_{ni}-e_i)^2\log\Big(2+|\hat{e}_{ni}-e_i|\Big)^2 1_{\{|\hat{e}_{ni}|\ge\varepsilon n^\alpha\}}\\
&\quad + 16\,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e_i^2\log\Big(2+|e_i|\Big)^2 1_{\{|\hat{e}_{ni}|\ge\varepsilon n^\alpha\}}\\
&=: 16\,I_n + 16\,I\!I_n.
\end{aligned}
$$

Nun ist

(6.15)
$$
\max_{1\le i\le n}\log\Big(2+|\hat{e}_{ni}-e_i|\Big) = O_p(1),
$$

da für alle $K > 0$

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P\Big(\max_{1\le i\le n}\log\Big(2+|\hat{e}_{ni}-e_i|\Big)\ge K\Big)\\
&= \limsup_{n\to\infty} P\Big(\log\Big(2+\max_{1\le i\le n}|\hat{e}_{ni}-e_i|\Big)\ge K\Big)\\
&= \limsup_{n\to\infty} P\Big(\max_{1\le i\le n}|\hat{e}_{ni}-e_i|\ge \exp(K)-2\Big) \;\xrightarrow[K]{}\; 0
\end{aligned}
$$

nach (3.17), also

$$\begin{aligned}
I_n &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\hat{e}_{ni}-e_i)^2\log\Big(2+|\hat{e}_{ni}-e_i|\Big)^2 \\
&\leq \Big(\max_{1\leq i\leq n}\log\Big(2+|\hat{e}_{ni}-e_i|\Big)\Big)^2\max_{1\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni}-e_i|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\hat{e}_{ni}-e_i| \\
&= O_p(1)^2\,O_p(1)\,o_p(1) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (6.15), (3.17) und (3.25).
Weiter ist

$$\begin{aligned}
I\!I_n &\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e_i^2\log\Big(2+|e_i|\Big)^2 1_{\{|\hat{e}_{ni}-e_i|+|e_i|\geq\varepsilon n^\alpha\}} \\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e_i^2\log\Big(2+|e_i|\Big)^2 1_{\{|\hat{e}_{ni}-e_i|\geq\varepsilon n^\alpha/2\}} \\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e_i^2\log\Big(2+|e_i|\Big)^2 1_{\{|e_i|\geq\varepsilon n^\alpha/2\}} \\
&\leq \infty\cdot 1_{\{\max_{1\leq i\leq n}|\hat{e}_{ni}-e_i|\geq\varepsilon n^\alpha/2\}} \\
&\quad+\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}e_i^2\log\Big(2+|e_i|\Big)^2 1_{\{|e_i|\geq\varepsilon n^\alpha/2\}} \\
&= o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.17) und (6.14).
Es folgt für alle $\alpha,\varepsilon>0$

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_{ni}^2\log(2+|\hat{e}_{ni}|)^2 1_{\{|\hat{e}_{ni}|\geq\varepsilon n^\alpha\}} = o_p(1). \tag{6.16}$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
&E\Big(e_{n1}^{*2}\log\Big(2+|e_{n1}^*|\Big)^2 1_{\{|e_{n1}^*|\geq\varepsilon n^\alpha\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\hat{e}_{ni}^2\log\Big(2+|\hat{e}_{ni}|\Big)^2 1_{\{|\hat{e}_{ni}|\geq\varepsilon n^\alpha\}} \\
&\leq \max_{1\leq i\leq n}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\hat{e}_{ni}^2\log\Big(2+|\hat{e}_{ni}|\Big)^2 1_{\{|\hat{e}_{ni}|\geq\varepsilon n^\alpha\}} \\
&= O_p(1)\,o_p(1) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.42) und (6.16).

6.17 Proposition. Für alle $\alpha\in(0,1)$ gilt

$$\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n}\frac{1}{\sqrt{k}}\max_{1\leq i\leq k}|e_{ni}^*| = o_{p^*}(1/\sqrt{\log n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.18}$$

Beweis: Sei $\alpha \in (0,1)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{\sqrt{k}} \max_{1\le i\le k} |e^*_{ni}| \\
=\ &\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{\sqrt{k}} \Big(\max_{1\le i\le [n^\alpha]} |e^*_{ni}| \vee \max_{[n^\alpha]+1\le i\le k} |e^*_{ni}| \Big) \\
=\ &\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{\sqrt{k}} \max_{1\le i\le [n^\alpha]} |e^*_{ni}| \vee \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{\sqrt{k}} \max_{[n^\alpha]+1\le i\le k} |e^*_{ni}| \\
=:\ &M_{1,n} \vee M_{2,n}.
\end{aligned}$$

Nun ist für alle $n \ge 2^{1/(1-\alpha)}$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$

$$\begin{aligned}
M_{1,n} &\sim \frac{1}{\sqrt{[n^\alpha]}} \max_{[n^\alpha]+1\le i\le 2[n^\alpha]} |e^*_{ni}| \\
&= \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2[n^\alpha]}} \max_{[n^\alpha]+1\le i\le 2[n^\alpha]} |e^*_{ni}| \\
&\le \sqrt{2} \max_{[n^\alpha]\le k\le n} \frac{1}{\sqrt{k}} \max_{[n^\alpha]+1\le i\le k} |e^*_{ni}| \quad = \quad \sqrt{2} M_{2,n},
\end{aligned}$$

also reicht es $M_{2,n}$ zu betrachten.
Es ist

$$\begin{aligned}
M_{2,n} &= \max_{[n^\alpha]+1\le k\le n} \frac{1}{\sqrt{k}} \max_{[n^\alpha]+1\le i\le k} |e^*_{ni}| \\
&\le \max_{[n^\alpha]+1\le k\le n} \max_{[n^\alpha]+1\le i\le k} \frac{1}{\sqrt{i}} |e^*_{ni}| \\
&= \max_{[n^\alpha]+1\le i\le n} \frac{1}{\sqrt{i}} |e^*_{ni}| \\
&\le \max_{[n^\alpha]+1\le i\le n} \frac{1}{\sqrt{i}} \max_{[n^\alpha]+1\le j\le i} |e^*_{nj}| \\
&= \max_{[n^\alpha]\le i\le n} \frac{1}{\sqrt{i}} \max_{[n^\alpha]+1\le j\le i} |e^*_{nj}| \quad = \quad M_{2,n}
\end{aligned}$$

und damit folgte (6.18) aus

$$\max_{[n^\alpha]+1\le i\le n} \frac{1}{\sqrt{i}} |e^*_{ni}| = o_{p^*}(1/\sqrt{\log n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.19}$$

Nun ist für alle $\alpha, \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&P\Big(\max_{[n^\alpha]+1\le i\le n} \frac{1}{\sqrt{i}} |e^*_{ni}| \ge \frac{\varepsilon}{\sqrt{\log n}} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
=\ &1 - P\Big(\bigcap_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \Big\{ \frac{1}{\sqrt{i}} |e^*_{ni}| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{\log n}} \Big\} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - \prod_{i=[n^\alpha]+1}^{n} P\Big(|e_{ni}^*| < \frac{\varepsilon\sqrt{i}}{\sqrt{\log n}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&= 1 - \prod_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \Big(1 - E\Big(1_{\{|e_{ni}^*|\geq\varepsilon\sqrt{i/\log n}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big)\\
&\leq 1 - \prod_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \Bigg(1 - \frac{\log n}{\varepsilon^2 i\Big(\log\big(2+\varepsilon\sqrt{i/\log n}\big)\Big)^2}\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot E\Big(e_{n1}^{*\,2}\log(2+|e_{n1}^*|)^2 1_{\{|e_{n1}^*|\geq\varepsilon\sqrt{i/\log n}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Bigg)\\
&\leq 1 - \prod_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \Bigg(1 - \frac{\log n}{\varepsilon^2 i\Big(\log\big(2+\varepsilon\sqrt{i/\log n}\big)\Big)^2} Z_n\Bigg)\\
&\leq 1 - \prod_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \Bigg(1 - \frac{\log n}{\varepsilon^2 i\Big(\log\big(\varepsilon\sqrt{i/\log n}\big)\Big)^2} Z_n\Bigg) \quad =: \quad I_n,
\end{aligned}
$$

wobei die letzte Abschätzung nur für alle so großen n gilt, dass $\varepsilon\sqrt{[n^\alpha]/\log n} > 1$ erfüllt ist, und wir zu Abkürzung

$$
\begin{aligned}
Z_n \;&:=\; E\Big(e_{n1}^{*\,2}\log(2+|e_{n1}^*|)^2 1_{\{|e_{n1}^*|\geq\varepsilon\sqrt{n^\alpha/\log n}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq\; E\Big(e_{n1}^{*\,2}\log(2+|e_{n1}^*|)^2 1_{\{|e_{n1}^*|\geq\varepsilon n^{\alpha/4}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \;=\; o_p(1)
\end{aligned}
\tag{6.20}
$$

gesetzt haben, und auch hier das Ungleichheitszeichen wieder nur für alle großen n gilt, und die behauptete stochastische Ordnung aus (6.13) folgt.
Aufgrund von (6.20) müssen wir im folgenden nur noch unter $\{Z_n < 1\}$ arbeiten. Der Ausdruck I_n ist wegen der Stetigkeit der Exponentialfunktion eine stochastische Nullfolge, falls

$$
\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \log\Bigg(1 - \frac{\log n}{\varepsilon^2 i\Big(\log\big(\varepsilon\sqrt{i/\log n}\big)\Big)^2} Z_n\Bigg) = o_p(1)
\tag{6.21}
$$

gilt. Für alle so großen n, für die $\varepsilon\sqrt{[n^\alpha]/\log n} > \exp(1)$ gilt, ist der Bruch kleiner als 1 und wegen $Z_n < 1$ somit der Logarithmus wohldefiniert. Setzen wir die Reihenentwicklung des Logarithmus an der Stelle 1 ein, so erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \log\Bigg(1 - \frac{\log n}{\varepsilon^2 i\Big(\log\big(\varepsilon\sqrt{i/\log n}\big)\Big)^2} Z_n\Bigg)\\
&\quad= \;-\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n}\sum_{j=1}^{\infty} \frac{Z_n^j(\log n)^j}{j\varepsilon^{2j} i^j\Big(\log\big(\varepsilon\sqrt{i/\log n}\big)\Big)^{2j}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \frac{\log n}{\varepsilon^2 i\Big(\log\big(\varepsilon\sqrt{i/\log n}\,\big)\Big)^2} Z_n \\
&\quad - \sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \sum_{j=2}^{\infty} \frac{Z_n^j (\log n)^j}{j\varepsilon^{2j} i^j \Big(\log\big(\varepsilon\sqrt{i/\log n}\,\big)\Big)^{2j}} \\
&=: \mathit{II}_n + \mathit{III}_n.
\end{aligned}
$$

Nun ist für alle $j \geq 2$ und alle so großen n, dass $\varepsilon\sqrt{[n^\alpha]/\log n} > \exp(1)$,

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \frac{1}{i^j\Big(\log\big(\varepsilon\sqrt{i/\log n}\,\big)\Big)^{2j}} &\leq \sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \frac{1}{i^j} \\
= \sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \int_{i-1}^{i} \frac{1}{i^j}\, dx &\leq \sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \int_{i-1}^{i} \frac{1}{x^j}\, dx \\
= \int_{[n^\alpha]}^{n} x^{-j}\, dx &= \frac{1}{-j+1} x^{-j+1}\Big|_{x=[n^\alpha]}^{x=n} \\
\leq \frac{1}{j-1} n^{\alpha(1-j)} &\leq n^{-\alpha j/2},
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
|\mathit{III}_n| &= \sum_{j=2}^{\infty} \frac{Z_n^j(\log n)^j}{j\varepsilon^{2j}} \sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \frac{1}{i^j\Big(\log\big(\varepsilon\sqrt{i/\log n}\,\big)\Big)^{2j}} \\
&\leq \sum_{j=2}^{\infty} \frac{Z_n^j(\log n)^j}{j\varepsilon^{2j} n^{\alpha j/2}} \leq -\log\left(1 - \frac{Z_n \log n}{\varepsilon^2 n^{\alpha/2}}\right) \\
&= o_p(1),
\end{aligned}
$$

wobei wir die Summationsreihenfolge verändern durften, da die Summanden nichtnegativ sind, und wir zum Schluß (6.20) und die Stetigkeit des Logarithmus bei 1 benutzt haben.
Weiter ist für alle so großen n, dass $(1/3)\log n^\alpha > \log\log n - 2\log\varepsilon$,

$$
\begin{aligned}
|\mathit{II}_n| &= \frac{Z_n}{\varepsilon^2} \sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \frac{\log n}{i(\log\varepsilon + \frac{1}{2}\log i - \frac{1}{2}\log\log n)^2} \\
&\leq \frac{Z_n}{\varepsilon^2} \sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \frac{\log n}{i(\frac{1}{3}\log i)^2} \\
&= \frac{9Z_n \log n}{\varepsilon^2} \sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \int_{i-1}^{i} \frac{1}{i(\log i)^2}\, dx \\
&\leq \frac{9Z_n \log n}{\varepsilon^2} \sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \int_{i-1}^{i} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{9Z_n \log n}{\varepsilon^2} \int_{[n^\alpha]}^{n} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx \\
&= \frac{9Z_n \log n}{\varepsilon^2} \frac{-1}{\log x}\Big|_{x=[n^\alpha]}^{x=n} \\
&\leq \frac{9Z_n \log n}{\varepsilon^2} \frac{1}{\log[n^\alpha]} \\
&\leq \frac{18Z_n \log n}{\varepsilon^2} \frac{1}{\log n^\alpha} \quad = \quad \frac{18Z_n}{\varepsilon^2 \alpha} \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (6.20). Also gilt (6.21) und damit (6.19), was (6.18) impliziert.

Für den Beweis der nächsten Proposition benötigen wir folgende leichte Verallgemeinerung der Hájek-Rényi-Ungleichung:

6.22 Satz. Sei $n \in \mathbb{N}$ und seien $Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $E(Y_i) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$, sowie $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ mit $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n > 0$. Dann gilt für alle $1 \leq m \leq n$ und $\varepsilon > 0$

$$
(6.23) \quad P\Big(\max_{m\leq k\leq n} a_k \Big|\sum_{i=1}^{k} Y_i\Big| \geq \varepsilon\Big) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\Big(a_m^2 \sum_{i=1}^{m} E(Y_i^2) + \sum_{i=m+1}^{n} a_i^2 E(Y_i^2)\Big).
$$

Beweis: Leichte Modifizierung des Beweises der Standardform.

6.24 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt

$$
(6.25) \qquad \max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_{ni}^{*2} - \sigma^2\Big| = o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}
$$

Beweis: Für alle $\varepsilon > 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
& P\Big(\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_{ni}^{*2} - \sigma^2\Big| \geq \varepsilon \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\leq P\Big(\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_{ni}^{*2} - E(e_{n1}^{*2}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad + P\Big(\Big|E(e_{n1}^{*2}|\widehat{\mathbf{e}}_n) - \sigma^2\Big| \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&=: I_n + I\!I_n.
\end{aligned}
$$

Nun ist nach der Markovungleichung

$$
\begin{aligned}
I\!I_n &\leq \frac{2}{\varepsilon} E\Big(\Big|E(e_{n1}^{*2}|\widehat{\mathbf{e}}_n) - \sigma^2\Big| \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= \frac{2}{\varepsilon}\Big|E(e_{n1}^{*2}|\widehat{\mathbf{e}}_n) - \sigma^2\Big| \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (6.7). Weiter ist

$$\begin{aligned}
I_n &\leq P\biggl(\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n}\Bigl|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_{ni}^{*\,2}1_{\{|e_{ni}^*|\leq n^{\alpha/5}\}} - E(e_{n1}^{*\,2}1_{\{|e_{n1}^*|\leq n^{\alpha/5}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Bigr| \geq \frac{\varepsilon}{4}\Bigl|\widehat{\mathbf{e}}_n\biggr) \\
&\quad + P\biggl(\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n}\Bigl|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_{ni}^{*\,2}1_{\{|e_{ni}^*|> n^{\alpha/5}\}} - E(e_{n1}^{*\,2}1_{\{|e_{n1}^*|> n^{\alpha/5}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Bigr| \geq \frac{\varepsilon}{4}\Bigl|\widehat{\mathbf{e}}_n\biggr) \\
&=: \mathit{III}_n + \mathit{IV}_n.
\end{aligned}$$

Für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist

$$\sum_{i=m+1}^{n}\frac{1}{i^2} = \sum_{i=m+1}^{n}\int_{i-1}^{i}\frac{1}{i^2}\,dx \leq \sum_{i=m+1}^{n}\int_{i-1}^{i}\frac{1}{x^2}\,dx \leq \int_{m}^{\infty}\frac{1}{x^2}\,dx = \frac{-1}{x}\Bigr|_{x=m}^{x=\infty} = \frac{1}{m},$$

also mit der verallgemeinerten Hájek-Rényi-Ungleichung (6.23)

$$\begin{aligned}
\mathit{III}_n &\leq \frac{16}{\varepsilon^2}\biggl(\frac{1}{[n^\alpha]^2}\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}\mathrm{Var}\Bigl(e_{ni}^{*\,2}1_{\{|e_{ni}^*|\leq n^{\alpha/5}\}}\Bigl|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigr) \\
&\qquad + \sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n}\frac{1}{i^2}\mathrm{Var}\Bigl(e_{ni}^{*\,2}1_{\{|e_{ni}^*|\leq n^{\alpha/5}\}}\Bigl|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigr)\biggr) \\
&\leq \frac{16}{\varepsilon^2}\frac{2}{[n^\alpha]}E\Bigl(e_{n1}^{*\,4}1_{\{|e_{n1}^*|\leq n^{\alpha/5}\}}\Bigl|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigr) \quad \leq \quad \frac{32}{\varepsilon^2}\frac{n^{4\alpha/5}}{[n^\alpha]} \quad = \quad o(1).
\end{aligned}$$

Weiter haben wir

$$\begin{aligned}
\mathit{IV}_n &\leq P\biggl(\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_{ni}^{*\,2}1_{\{|e_{ni}^*|> n^{\alpha/5}\}} \geq \frac{\varepsilon}{8}\Bigl|\widehat{\mathbf{e}}_n\biggr) \\
&\quad + P\Bigl(E(e_{n1}^{*\,2}1_{\{|e_{n1}^*|> n^{\alpha/5}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n) \geq \frac{\varepsilon}{8}\Bigl|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigr) \\
&=: V_n + \mathit{VI}_n,
\end{aligned}$$

und es gilt

$$\begin{aligned}
\mathit{VI}_n &\leq \frac{8}{\varepsilon}E(e_{n1}^{*\,2}1_{\{|e_{n1}^*|> n^{\alpha/5}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n) \\
&\leq \frac{8}{\varepsilon(\log 2)^2}E\Bigl(e_{n1}^{*\,2}(\log(2+|e_{n1}^*|))^2 1_{\{|e_{n1}^*|> n^{\alpha/5}\}}\Bigl|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigr) \\
&= o_p(1)
\end{aligned}$$

nach der Markovungleichung und (6.13), sowie schließlich

$$V_n \leq P\biggl(\max_{0\leq j\leq[(1-\alpha)\log_2 n]+1}\ \max_{2^j[n^\alpha]\leq k\leq 2^{j+1}[n^\alpha]}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} e_{ni}^{*\,2}1_{\{|e_{ni}^*|> n^{\alpha/5}\}} \geq \frac{\varepsilon}{8}\Bigl|\widehat{\mathbf{e}}_n\biggr)$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \sum_{j=0}^{[(1-\alpha)\log_2 n]+1} P\Big(\frac{1}{2^j[n^\alpha]}\sum_{i=1}^{2^{j+1}[n^\alpha]} e_{ni}^{*\,2} 1_{\{|e_{ni}^*|>n^{\alpha/5}\}} \geq \frac{\varepsilon}{8}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\leq \sum_{j=0}^{[(1-\alpha)\log_2 n]+1} \frac{2^{j+1}[n^\alpha]}{2^j[n^\alpha]}\frac{8}{\varepsilon} E\Big(e_{n1}^{*\,2} 1_{\{|e_{n1}^*|>n^{\alpha/5}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\leq ((1-\alpha)\log_2 n + 2)\frac{16}{\varepsilon} E\Big(e_{n1}^{*\,2}\frac{(\log(2+|e_{n1}^*|))^2}{(\log(2+n^{\alpha/5}))^2} 1_{\{|e_{n1}^*|>n^{\alpha/5}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\leq \frac{16}{\varepsilon}\frac{((1-\alpha)\log_2 n + 2)}{(\alpha/5\log n)^2} E\Big(e_{n1}^{*\,2}(\log(2+|e_{n1}^*|))^2 1_{\{|e_{n1}^*|>n^{\alpha/5}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= o(1)\, o_p(1) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}
$$

wobei wir wieder die Markovungleichung benutzt haben, und zum Schluß (6.13).

6.26 Folgerung. Für alle $\alpha \in (0,1)$ gelten

$$
\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \sqrt{k}\,\frac{|\sum_{i=1}^k e_{ni}^*|}{\sum_{i=1}^k e_{ni}^{*\,2}} = O_{p^*}(\sqrt{\log n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.27}
$$

und

$$
\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} k\,\frac{|\sum_{i=1}^k e_{ni}^*|}{\sum_{i=1}^k e_{ni}^{*\,2}} = O_{p^*}(\sqrt{n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.28}
$$

Beweis: Die Beweise hiervon gehen fast genauso wie die von Folgerung 2.11, deshalb führen wir nur den Beweis von (6.27) aus.
Für alle $\alpha \in (0,1)$, $K > 0$ und $n \in \mathbb{N}$ ist

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \sqrt{k}\,\frac{|\sum_{i=1}^k e_{ni}^*|}{\sum_{i=1}^k e_{ni}^{*\,2}} \geq K\sqrt{\log n}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= P\Big(\Big\{\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \sqrt{k}\,\frac{|\sum_{i=1}^k e_{ni}^*|}{\sum_{i=1}^k e_{ni}^{*\,2}} \geq K\sqrt{\log n}\Big\} \cap \bigcap_{k=[n^\alpha]}^{n}\Big\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e_{ni}^{*\,2} \geq \frac{\sigma^2}{2}\Big\}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad + P\Big(\Big\{\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \sqrt{k}\,\frac{|\sum_{i=1}^k e_{ni}^*|}{\sum_{i=1}^k e_{ni}^{*\,2}} \geq K\sqrt{\log n}\Big\} \cap \bigcup_{k=[n^\alpha]}^{n}\Big\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e_{ni}^{*\,2} < \frac{\sigma^2}{2}\Big\}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\leq P\Big(\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n} \frac{1}{\sqrt{k}}\Big|\sum_{i=1}^k e_{ni}^*\Big| \geq \frac{K\sigma^2\sqrt{\log n}}{2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad + P\Big(\bigcup_{k=[n^\alpha]}^{n}\Big\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e_{ni}^{*\,2} < \frac{\sigma^2}{2}\Big\}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big).
\end{aligned}
$$

Es gilt

$$
P\Big(\bigcup_{k=[n^\alpha]}^{n}\Big\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e_{ni}^{*\,2} < \frac{\sigma^2}{2}\Big\}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)
$$

$$
\begin{aligned}
&= P\Big(\bigcup_{k=[n^\alpha]}^{n}\Big\{\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}e_{ni}^{*\,2}-\sigma^2<-\frac{\sigma^2}{2}\Big\}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\le P\Big(\bigcup_{k=[n^\alpha]}^{n}\Big\{\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}e_{ni}^{*\,2}-\sigma^2\Big|>\frac{\sigma^2}{2}\Big\}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&= P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}e_{ni}^{*\,2}-\sigma^2\Big|>\frac{\sigma^2}{2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big).
\end{aligned}
$$

Daher folgt für alle $\varepsilon>0$

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}P\Big(P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\sqrt{k}\,\frac{|\sum_{i=1}^{k}e_{ni}^*|}{\sum_{i=1}^{k}e_{ni}^{*\,2}}\ge K\sqrt{\log n}\,\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\ge\varepsilon\Big)\\
\le\ &\limsup_{n\to\infty}P\Big(P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\frac{1}{\sqrt{k}}\Big|\sum_{i=1}^{k}e_{ni}^*\Big|\ge\frac{K\sigma^2\sqrt{\log n}}{2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\ge\frac{\varepsilon}{2}\Big)\\
&+\limsup_{n\to\infty}P\Big(P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\Big|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}e_{ni}^{*\,2}-\sigma^2\Big|>\frac{\sigma^2}{2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\ge\frac{\varepsilon}{2}\Big)\\
\xrightarrow[K]{}\ &0
\end{aligned}
$$

nach (6.10) und (6.25).
Der Beweis von (6.28) geht analog, unter Verwendung von (6.11) statt (6.10).

6.29 Proposition. Für alle $\alpha\in(0,1)$ und $n\in\mathbb{N}$ gilt auf $A_{n,\alpha}^*$

$$
\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\sqrt{k}\,|t_{nk}^*|\Big(1-V_{n,\alpha}^*\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\frac{1}{\sqrt{k}}\max_{1\le i\le k}|e_{ni}^*|\Big)\le V_{n,\alpha}^* \tag{6.30}
$$

mit

$$
V_{n,\alpha}^*:=\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\sqrt{k}\,\frac{|\sum_{i=1}^{k}e_{ni}^*|}{\sum_{i=1}^{k}e_{ni}^{*\,2}},
$$

sowie

$$
\max_{[n^\alpha]\le k\le n}k|t_{nk}^*|\le\Big(1+\max_{[n^\alpha]\le k\le n}|t_{nk}^*|\max_{1\le i\le k}|e_{ni}^*|\Big)\max_{[n^\alpha]\le k\le n}k\,\frac{|\sum_{i=1}^{k}e_{ni}^*|}{\sum_{i=1}^{k}e_{ni}^{*\,2}}. \tag{6.31}
$$

Beweis: Geht analog zum Beweis von Proposition 2.24. Tatsächlich folgt es wieder allein daraus, dass t_{nk}^* als Funktion von $e_{n1}^*,\dots,e_{nn}^*$ analog zu t_{nk} als Funktion von $e_1,\dots,e_n$ definiert wurde, und die Verteilung von $e_1,\dots,e_n$ beziehungsweise von $e_{n1}^*,\dots,e_{nn}^*$ an keiner Stelle in dem Beweis benutzt wird.

6.32 Proposition. Für alle $\alpha\in(0,1)$ gelten unter $A_{n,\alpha}^*$

$$
\max_{[n^\alpha]\le k\le n}\sqrt{k}\,|t_{nk}^*|=O_{p^*}(\sqrt{\log n}\,)\text{ unter }P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.33}
$$

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n} |t^*_{nk}| \max_{1\le i\le k} |e^*_{ni}| = o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.34}$$

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n} k|t^*_{nk}| = O_{p^*}(\sqrt{n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.35}$$

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \max_{1\le i\le k} \left| \frac{1}{1+t^*_{nk}e^*_{ni}} - 1 \right| = o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.36}$$

Beweis: Die Beweise von (6.33)–(6.35) gehen analog zu den Beweisen von (2.28)–(2.30) unter Verwendung von (6.18), (6.27), (6.28), (6.30) und (6.31).
Für (6.36) ist ähnlich wie beim Beweis von (2.31) für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \max_{1\le i\le k} \left| \frac{1}{1+t^*_{nk}e^*_{ni}} - 1 \right| > \varepsilon \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\le\ P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n} |t_{nk}| \max_{1\le i\le k} |e_i| \ge 1 \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\qquad + P\Big(\max_{[n^\alpha]\le k\le n} |t^*_{nk}| \max_{1\le i\le k} |e^*_{ni}| > \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&=\ o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (6.34).

6.37 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt unter $A^*_{n,\alpha}$

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \left| k\, t^*_{nk} - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^k e^*_{ni} \right| = o_{p^*}(\sqrt{n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.38}$$

Beweis: Geht genau wie der Beweis von (2.33), nur unter Verwendung von (6.25), (6.34), (6.35) und (6.36), anstatt (2.9), (2.29), (2.30) und (2.31).

6.39 Definition. Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $k = 0, \dots, n$ sei u^*_{nk} auf dem Ereignis

$$\Big\{ \min_{k+1\le i\le n} e^*_{ni} < 0 < \max_{k+1\le i\le n} e^*_{ni} \Big\}$$

definiert als die Nullstelle von

$$x \mapsto \sum_{i=k+1}^n \frac{e^*_{ni}}{1+xe^*_{ni}}$$

in dem Intervall

$$\bigg(\Big(\frac{1}{n-k} - 1\Big) \frac{1}{\max_{k+1\le i\le n} e^*_{ni}}, \Big(\frac{1}{n-k} - 1\Big) \frac{1}{\min_{k+1\le i\le n} e^*_{ni}} \bigg).$$

Für alle $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$B^*_{n,\alpha} := \bigcap_{k=0}^{n-[n^\alpha]} \Big\{ \min_{k+1\le i\le n} e^*_{ni} < 0 < \max_{k+1\le i\le n} e^*_{ni} \Big\}.$$

6.40 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ ist

$$P(\mathcal{C}B^*_{n,\alpha}|\widehat{\mathbf{e}}_n) = o_p(1), \tag{6.41}$$

und unter $B^*_{n,\alpha}$ gelten

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} |u^*_{nk}| \max_{k+1\le i\le n} |e^*_{ni}| = o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.42}$$

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} (n-k)|u^*_{nk}| = O_{p^*}(\sqrt{n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.43}$$

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \max_{k+1\le i\le n} \left|\frac{1}{1+u^*_{nk}e^*_{ni}} - 1\right| = o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.44}$$

$$\max_{0\le k\le n-[n^\alpha]} \left|(n-k)u^*_{nk} - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=k+1}^n e^*_{ni}\right| = o_{p^*}(\sqrt{n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.45}$$

Beweis: Folgt aus (6.5) und (6.34)–(6.36), so wie im Beweis von Proposition 2.35 beschrieben.

6.2 Stochastische Entwicklung von $T_n^{*\,z}$

6.46 Proposition. Für alle $\alpha \in (0,1)$ gilt unter (2.41)

$$\max_{[n^\alpha]\le k\le n} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e^*_{ni}1_{\{e^*_{ni}\le x\}} - U(x)\right| = o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.47}$$

Beweis: Zunächst halten wir fest, es gilt

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|E(e^*_{n1}1_{\{e^*_{n1}\le x\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n) - U(x)\right| \\
&= \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\sum_{i=1}^n \frac{1}{n}\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}}\hat{e}_{ni}1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}} - U(x)\right| \\
&\le \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\Big(\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}} - 1\Big)\hat{e}_{ni}1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}}\right| \\
&\qquad + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{e}_{ni}1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}} - U(x)\right| \qquad (6.48)\\
&\le \max_{1\le i\le n}\left|\frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}} - 1\right| \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n|\hat{e}_{ni}| \\
&\qquad + \sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \hat{e}_{ni}1_{\{\hat{e}_{ni}\le x\}} - U(x)\right| \\
&= o_p(1)\,O_p(1) + o_p(1) \;=\; o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.42), (3.30) und (3.75).
Sei nun $\alpha \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$. Dann ist

$$\begin{aligned}
& P\bigg(\max_{[n^\alpha] \le k \le n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \bigg| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e_{ni}^* 1_{\{e_{ni}^* \le x\}} - U(x) \bigg| \ge \varepsilon \bigg| \widehat{\mathbf{e}}_n \bigg) \\
\le \quad & P\bigg(\max_{[n^\alpha] \le k \le n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \bigg| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e_{ni}^* 1_{\{e_{ni}^* \le x\}} - E(e_{n1}^* 1_{\{e_{n1}^* \le x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \bigg| \ge \frac{\varepsilon}{2} \bigg| \widehat{\mathbf{e}}_n \bigg) \\
& + P\bigg(\sup_{x \in \mathbb{R}} \Big| E(e_{n1}^* 1_{\{e_{n1}^* \le x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - U(x) \Big| \ge \frac{\varepsilon}{2} \bigg| \widehat{\mathbf{e}}_n \bigg) \\
=: \quad & I_n + I\!I_n.
\end{aligned}$$

Unter Verwendung der Markovungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
I\!I_n &\le \frac{2}{\varepsilon} E\bigg(\sup_{x \in \mathbb{R}} \Big| E(e_{n1}^* 1_{\{e_{n1}^* \le x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - U(x) \Big| \bigg| \widehat{\mathbf{e}}_n \bigg) \\
&= \frac{2}{\varepsilon} \sup_{x \in \mathbb{R}} \Big| E(e_{n1}^* 1_{\{e_{n1}^* \le x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - U(x) \Big| \\
&= o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (6.48).
Da U gleichmäßig stetig ist, gibt es ähnlich wie im Beweis von Proposition 2.42 ein $m \in \mathbb{N}$ und reelle Zahlen $x_2, \dots, x_{2m-2}$ mit

$$-\infty =: x_1 < x_2 < \dots < x_m = 0 < x_{m+1} < \dots < x_{2m-2} < x_{2m-1} := \infty$$

und

$$|U(x_j) - U(x_{j+1})| < \frac{\varepsilon}{12} \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, 2m-2\}.$$

Auf dem Ereignis

$$H_n := \bigg\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} \Big| E(e_{n1}^* 1_{\{e_{n1}^* \le x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - U(x) \Big| < \frac{\varepsilon}{12} \bigg\}$$

ist nun für alle $j \in \{1, \dots, 2m-2\}$

$$\begin{aligned}
& \Big| E(e_{n1}^* 1_{\{e_{n1}^* \le x_{j+1}\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - E(e_{n1}^* 1_{\{e_{n1}^* \le x_j\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \Big| \\
& \quad \le \Big| E(e_{n1}^* 1_{\{e_{n1}^* \le x_{j+1}\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - U(x_{j+1}) \Big| \\
& \quad \quad + \Big| U(x_{j+1}) - U(x_j) \Big| \\
& \quad \quad + \Big| E(e_{n1}^* 1_{\{e_{n1}^* \le x_j\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - U(x_j) \Big| \\
& \quad \le \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12} + \frac{\varepsilon}{12} \quad = \quad \frac{\varepsilon}{4}.
\end{aligned}$$

Da $x \mapsto e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x\}}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ auf $(-\infty, 0]$ monoton fallend ist, und für jedes $x \in (-\infty, 0)$ ein $j \in \{1, \ldots, m-1\}$ existiert mit $x_j \le x < x_{j+1}$, erhalten wir auf H_n für dieses j und für alle $k = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x\}} - E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \\ &\quad \le \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x_j\}} - E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x_{j+1}\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \\ &\quad \le \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x_j\}} - E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x_j\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

und umgekehrt

$$\begin{aligned} &E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x\}} \\ &\quad \le E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x_j\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x_{j+1}\}} \\ &\quad \le E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x_{j+1}\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x_{j+1}\}} + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Also gilt auf H_n für alle $k = 1, \ldots, n$

$$\begin{aligned} &\sup_{x \in (-\infty, 0)} \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x\}} - E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \right| \\ &\quad \le \max_{1 \le j \le m} \left| \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x_j\}} - E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x_j\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \right| + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Da $x \mapsto e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x\}}$ für alle $i = 1, \ldots, n$ auf $[0, \infty)$ monoton wachsend ist, erhalten wir genauso für gegebenes $x \in [0, \infty)$ und dasjenige $j \in \{m, \ldots, 2m-2\}$ mit $x_j \le x < x_{j+1}$ für alle $k = 1, \ldots, n$ auf H_n

$$\begin{aligned} &\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x\}} - E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \\ &\quad \le \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x_{j+1}\}} - E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x_j\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \\ &\quad \le \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x_{j+1}\}} - E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x_{j+1}\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) + \frac{\varepsilon}{4} \end{aligned}$$

und wieder umgekehrt

$$E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x\}}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad E(e^*_{n1}1_{\{e^*_{n1}\leq x_{j+1}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e^*_{ni}1_{\{e^*_{ni}\leq x_j\}} \\
&\leq \quad E(e^*_{n1}1_{\{e^*_{n1}\leq x_j\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e^*_{ni}1_{\{e^*_{ni}\leq x_j\}} + \frac{\varepsilon}{4},
\end{aligned}$$

das heißt es gilt für alle $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in[0,\infty)}\left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e^*_{ni}1_{\{e^*_{ni}\leq x\}} - E(e^*_{n1}1_{\{e^*_{n1}\leq x\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\right| \\
&\quad \leq \max_{m\leq j\leq 2m-1}\left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e^*_{ni}1_{\{e^*_{ni}\leq x_j\}} - E(e^*_{n1}1_{\{e^*_{n1}\leq x_j\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\right| + \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

auf H_n. Zusammen bedeutet dies für alle $k = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
&\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e^*_{ni}1_{\{e^*_{ni}\leq x\}} - E(e^*_{n1}1_{\{e^*_{n1}\leq x\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\right| \\
&\quad \leq \max_{1\leq j\leq 2m-1}\left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e^*_{ni}1_{\{e^*_{ni}\leq x_j\}} - E(e^*_{n1}1_{\{e^*_{n1}\leq x_j\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\right| + \frac{\varepsilon}{4}
\end{aligned}$$

unter H_n.
Wir haben also

$$\begin{aligned}
I_n &\leq P\Bigg(\max_{1\leq j\leq 2m-1}\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n}\left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e^*_{ni}1_{\{e^*_{ni}\leq x_j\}} - E(e^*_{n1}1_{\{e^*_{n1}\leq x_j\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\right| \geq \frac{\varepsilon}{4}\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg) \\
&\quad + P\Big(\mathcal{C}H_n\ \Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\leq \sum_{j=1}^{2m-1} P\Bigg(\max_{[n^\alpha]\leq k\leq n}\left|\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k e^*_{ni}1_{\{e^*_{ni}\leq x_j\}} - E(e^*_{n1}1_{\{e^*_{n1}\leq x_j\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\right| \geq \frac{\varepsilon}{4}\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg) \\
&\quad + P\Bigg(\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|E(e^*_{n1}1_{\{e^*_{n1}\leq x\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n) - U(x)\right| \geq \frac{\varepsilon}{12}\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg) \\
&=: \mathit{III}_n + \mathit{IV}_n.
\end{aligned}$$

Nach der Markovungleichung ist

$$\begin{aligned}
\mathit{IV}_n &\leq \frac{12}{\varepsilon}\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|E(e^*_{n1}1_{\{e^*_{n1}\leq x\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n) - U(x)\right| \\
&= o_p(1)
\end{aligned}$$

nach (6.48), und nach der verallgemeinerten Hájek-Rényi-Ungleichung (6.23)

$$\mathit{III}_n \leq \sum_{j=1}^{2m-1}\frac{16}{\varepsilon^2}\Bigg(\frac{1}{[n^\alpha]^2}\sum_{i=1}^{[n^\alpha]}\mathrm{Var}\Big(e^*_{ni}1_{\{e^*_{ni}\leq x_j\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sum_{i=[n^\alpha]+1}^{n} \frac{1}{i^2} \operatorname{Var}\Big(e^*_{ni} 1_{\{e^*_{ni} \le x_j\}} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big) \\
&\le \sum_{j=1}^{2m-1} \frac{16}{\varepsilon^2} \frac{2}{[n^\alpha]} \operatorname{Var}\Big(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \le x_j\}} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\le \frac{64m}{\varepsilon^2} \frac{1}{[n^\alpha]} E(e^{*2}_{n1} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \quad = \quad O_p(n^{-\alpha}) \quad = \quad o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (6.7), die zweite Summe in der Klammer haben wir wieder abgeschätzt wie im Beweis von (6.25). Also gilt (6.47).

6.49 Definition. Seien

$$
F_n^{*\,seq} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R},
$$

$$
F_n^{*\,seq}(s,x) := \frac{1}{[ns]} \sum_{i=1}^{[ns]} 1_{\{e^*_{ni} \le x\}},
$$

wobei $F_n^{*\,seq}(s,x) \in [0,1]$ irgendwie sei, falls $s < 1/n$, und

$$
G_n^{*\,seq} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R},
$$

$$
G_n^{*\,seq}(s,x) := \frac{1}{n - [ns]} \sum_{i=[ns]+1}^{n} 1_{\{e^*_{ni} \le x\}},
$$

mit $G_n^{*\,seq}(s,x) \in [0,1]$ irgendwie, falls $s = 1$.
Sei

$$
S^*_n : [0,1] \to \mathbb{R},
$$

$$
S^*_n(s) := \frac{1}{[ns]} \sum_{i=1}^{[ns]} e^*_{ni},
$$

und $S^*_n(s) := 0$ für $s < 1/n$, sowie

$$
S_n^{*\,rück} : [0,1] \to \mathbb{R},
$$

$$
S_n^{*\,rück}(s) := \frac{1}{n - [ns]} \sum_{i=[ns]+1}^{n} e^*_{ni},
$$

und $S_n^{*\,rück}(s) := 0$ für $s = 1$.
Seien für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, n$

$$
p^*_{ni} : [0,1] \to [0,1]
$$

und

$$
q^*_{ni} : [0,1] \to [0,1]
$$

Elemente aus dem Skorohodraum $D([0,1])$ mit

$$\sum_{i=1}^{[ns]} p_{ni}^*(s) = 1$$

für alle $s \in [1/n, 1]$ beziehungsweise

$$\sum_{i=[ns]+1}^{n} q_{ni}^*(s) = 1$$

für alle $s \in [0,1)$, und für die

$$p_{ni}^*(s) = \frac{1}{[ns]} \frac{1}{1 + t_{n[ns]}^* e_{ni}^*}$$

auf dem Ereignis $\{\min_{1 \le i \le [ns]} e_{ni}^* < 0 < \max_{1 \le i \le [ns]} e_{ni}^*\}$ für alle $i = 1, \ldots, [ns]$, und

$$q_{ni}^*(s) = \frac{1}{n - [ns]} \frac{1}{1 + u_{n[ns]}^* e_{ni}^*}$$

auf dem entsprechenden Ereignis $\{\min_{[ns]+1 \le i \le n} e_{ni}^* < 0 < \max_{[ns]+1 \le i \le n} e_{ni}^*\}$ für alle $i = [ns]+1, \ldots, n$ gelten. Nach der Definition der Lagrangemultiplikatoren t_{ni}^* und u_{ni}^* sind die erstgenannten Bedingungen auf diesen Ereignissen automatisch erfüllt.

Seien

$$\begin{aligned} F_n^{*\,seq,z} &: [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \\ F_n^{*\,seq,z}(s,x) &:= \sum_{i=1}^{[ns]} p_{ni}^*(s) 1_{\{e_{ni}^* \le x\}}, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} G_n^{*\,seq,z} &: [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \\ G_n^{*\,seq,z}(s,x) &:= \sum_{i=[ns]+1}^{n} q_{ni}^*(s) 1_{\{e_{ni}^* \le x\}}, \end{aligned}$$

und schließlich

$$\begin{aligned} &T_n^* : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \\ &T_n^*(s,x) := \frac{[ns](n - [ns])}{n^2} \Big(F_n^{*\,seq}(s,x) - G_n^{*\,seq}(s,x) \Big) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &T_n^{*\,z} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \\ &T_n^{*\,z}(s,x) := \frac{[ns](n - [ns])}{n^2} \Big(F_n^{*\,seq,z}(s,x) - G_n^{*\,seq,z}(s,x) \Big). \end{aligned}$$

6.50 Proposition. Es gilt unter (2.41)

$$\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\mathbb{R}}[ns]\Big|F_n^{*\,seq,z}(s,x)-\Big(F_n^{*\,seq}(s,x)-\frac{1}{\sigma^2}S_n^*(s)U(x)\Big)\Big| = o_{p^*}(\sqrt{n}\,)\text{ unter }P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.51}$$

Beweis: Geht fast genauso wie der Beweis von Proposition 2.46.
Für alle $\alpha\in(0,1)$ ist

$$\begin{aligned}
&\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\mathbb{R}}[ns]\Big|F_n^{*\,seq,z}(s,x)-\Big(F_n^{*\,seq}(s,x)-\frac{1}{\sigma^2}S_n^*(s)U(x)\Big)\Big|\\
&\le\ \infty\cdot 1_{\complement A^*_{n,\alpha}}\\
&\quad+1_{A^*_{n,\alpha}}\sup_{s\in[n^{\alpha-1},1]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(\frac{1}{1+t^*_{n[ns]}e^*_{ni}}-1\Big)1_{\{e^*_{ni}\le x\}}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{[ns]}e^*_{ni}\,U(x)\Big|\\
&\quad+\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\sup_{x\in\mathbb{R}}[ns]\Big|\ F_n^{*\,seq,z}(s,x)-F_n^{*\,seq}(s,x)+\frac{1}{\sigma^2}S_n^*(s)U(x)\Big|\\
&=:\ I_n+I\!I_n+I\!I\!I_n.
\end{aligned}$$

Völlig analog zu den Abschätzungen aus dem Beweis von Proposition 2.46 erhalten wir $I_n=o_{p^*}(1)$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$ P-stochastisch nach (6.5) und $I\!I_n=o_{p^*}(\sqrt{n}\,)$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$ P-stochastisch nach (6.35), (6.47), (6.35), (6.34), (6.36), (6.9) und (6.38). Schießlich ist

$$\begin{aligned}
I\!I\!I_n &\le \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\Big([ns]+\frac{}{\sigma^2}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]}e^*_{ni}\Big|E(|e_1|)\Big)\\
&\le [n^\alpha]+\frac{E(|e_1|)}{\sigma^2}\max_{1\le k\le[n^\alpha]}\Big|\sum_{i=1}^{k}e^*_{ni}\Big|\\
&= O(n^\alpha)+O_{p^*}(n^{\alpha/2})\ =\ O_{p^*}(n^\alpha)\text{ unter }P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.},
\end{aligned}$$

nach (6.11).
Wir wählen $\alpha=1/3$ und erhalten die Behauptung.

6.52 Proposition. Es gilt unter (2.41)

$$\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\mathbb{R}}(n-[ns])\Big|G_n^{*\,seq,z}(s,x)-\Big(G_n^{*\,seq}(s,x)-\frac{1}{\sigma^2}S_n^{*\,r\ddot{u}ck}(s)U(x)\Big)\Big| = o_{p^*}(\sqrt{n}\,)\text{ unter }P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.} \tag{6.53}$$

Beweis: Folgt aus (6.51), da die dort betrachtete Zufallsvariable unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$ die gleiche Verteilung besitzt wie die hier betrachtete. Vergleiche dazu den Beweis von Proposition 2.49.

6.54 Proposition. Unter (2.41) gilt

$$\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\mathbb{R}}\Bigg| n^2\,T_n^{*\,z}(s,x) - \tag{6.55}$$
$$\sum_{i=1}^{n}\Big(1_{\{i\le[ns]\}}(n-[ns]) - 1_{\{i>[ns]\}}[ns]\Big)\Big(1_{\{e^*_{ni}\le x\}} - \frac{1}{\sigma^2}U(x)e^*_{ni}\Big)\Bigg|$$
$$= o_{p^*}(n^{3/2}) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}$$

Beweis: Geht wie der Beweis von Proposition 2.53, nur unter Benutzung von (6.51) und (6.53) anstatt (2.47) und (2.50).

6.3 Stochastische Entwicklung von $r_n^{*\,z}$

Sei in diesem Kapitel $K:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine Funktion, für die es ein $v\in\mathbb{N}$ gibt mit $v\ge 2$, so dass K v-mal stetig differenzierbar ist und für alle $i,j\in\{1,2\}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(6.56)

(a) $E(K(e_1,e_2)^2)<\infty$ (e) $E(e_i^2K(e_1,e_2)^2)<\infty$

(b) $E(D_1^uD_2^wK(e_1,e_2)^2)<\infty$ (f) $E(e_i^2D_1^uD_2^wK(e_1,e_2)^2)<\infty$
für alle $u,w\in\mathbb{N}_0$ mit $1\le u+w\le v-1$

(c) es gibt ein $K_0>0$ und ein $m\in\mathbb{N}$ mit $E(e_1^{2m})<\infty$,
sodass für alle $u,w\in\mathbb{N}_0$ mit $u+w=v$ gilt:
$|D_1^uD_2^wK(x,y)|\le K_0(1+|x|^{m-1}+|y|^{m-1})$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$

(d) $K(x,x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

Die Bedingung (6.56) (a) entspricht (3.92) (a), (6.56) (b) entspricht (5.1) (b) und (6.56) (e) entspricht (3.92) (e). Die Bedingung (6.56) (d) folgt aus der Antisymmetrie (4.1) (a). Die Bedingung (6.56) (f) ist im Fall $v>2$ im allgemeinen stärker als (3.92) (f) und (g), und auch (6.56) (c) ist im allgemeinen stärker als ihre Entsprechungen in (3.92) (d) und (5.1) (c).
Umgekehrt impliziert (6.56) sowohl (3.92) als auch (5.1).

6.57 Folgerung. Sei $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine Funktion, für die es ein $L_0>0$ und ein $m\in\mathbb{N}$ mit $E(e_1^{2m})<\infty$ gibt, so dass $|L(x,y)|\le L_0(1+|x|^{m-1}+|y|^{m-1})$ für alle $x,y\in\mathbb{R}$ gilt, und seien für alle $n\in\mathbb{N}$, $i,j=1,\dots,n$ und $k=1,2$ $\varepsilon_{ni}^{kj}\in[e_i\wedge\hat e_{ni}, e_i\vee\hat e_{ni}]$. Dann ist für alle $u,w\in\mathbb{N}_0$ mit $u+w\ge 1$

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^{n} e_i^2L(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})^2|\hat e_{ni}-e_i|^u|\hat e_{nj}-e_j|^w \le O_p(n^{3/2}). \tag{6.58}$$

Beweis: Der Beweis geht ähnlich wie der von Folgerung 5.10: Wie im Beweis von Folgerung 3.122 ist für alle $n \in \mathbb{N}$, $i, j = 1, \ldots, n$ und $k = 1, 2$

$$|\varepsilon_{ni}^{kj}| \leq |e_i| + |\hat{e}_{ni} - e_i|,$$

also für alle $n \in \mathbb{N}$, $i, j = 1, \ldots, n$ und $k = 1, 2$

$$\begin{aligned}
&L(\varepsilon_{ni}^{1j}, \varepsilon_{nj}^{2i})^2 \\
&\quad \leq \ L_0^2 \Big(1 + |\varepsilon_{ni}^{1j}|^{m-1} + |\varepsilon_{nj}^{2i}|^{m-1}\Big)^2 \\
&\quad \leq \ L_0^2 C_{m-1}^2 \Big(1 + |e_i|^{m-1} + |e_j|^{m-1} + |\hat{e}_{ni} - e_i|^{m-1} + |\hat{e}_{nj} - e_j|^{m-1}\Big)^2 \\
&\quad \leq \ 4 L_0^2 C_{m-1}^2 \Big(\Big(1 + |e_i|^{m-1} + |e_j|^{m-1}\Big)^2 + |\hat{e}_{ni} - e_i|^{2m-2} + |\hat{e}_{nj} - e_j|^{2m-2}\Big)
\end{aligned}$$

mit viermaliger Anwendung der C_r-Ungleichung, zweimal mit $r = m - 1$ und zweimal mit $r = 2$ und $C_2 = 2$, und weil $C_{m-1} \geq 1$ für $m \geq 1$. Ähnlich wie wir im Beweis von Folgerung 3.122 gesehen haben, ist $n \in \mathbb{N}$ und für alle $i, j = 1, \ldots, n$

$$e_i^2 \Big(1 + |e_i|^{m-1} + |e_j|^{m-1}\Big)^2 \leq e_i^2 9 \Big(1 \vee |e_i|^{m-1} \vee |e_j|^{m-1}\Big)^2 \leq 9 \Big(1 + e_i^{2m} + e_j^{2m}\Big),$$

also zusammen für alle $u, w \in \mathbb{N}_0$ mit $u + w \geq 1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} e_i^2 L(\varepsilon_{ni}^{1j}, \varepsilon_{nj}^{2i})^2 |\hat{e}_{ni} - e_i|^u |\hat{e}_{nj} - e_j|^w \\
&\quad \leq \ \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} e_i^2 4 L_0^2 C_{m-1}^2 \Big(\Big(1 + |e_i|^{m-1} + |e_j|^{m-1}\Big)^2 \\
&\qquad\qquad + |\hat{e}_{ni} - e_i|^{2m-2} + |\hat{e}_{nj} - e_j|^{2m-2}\Big) |\hat{e}_{ni} - e_i|^u |\hat{e}_{nj} - e_j|^w \\
&\quad \leq \ 36 L_0^2 C_{m-1}^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \Big(1 + e_i^{2m} + e_j^{2m}\Big) |\hat{e}_{ni} - e_i|^u |\hat{e}_{nj} - e_j|^w \\
&\qquad + 4 L_0^2 C_{m-1}^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} e_i^2 |\hat{e}_{ni} - e_i|^{u+2m-2} |\hat{e}_{nj} - e_j|^w \\
&\qquad + 4 L_0^2 C_{m-1}^2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} e_i^2 |\hat{e}_{ni} - e_i|^u |\hat{e}_{nj} - e_j|^{w+2m-2} \\
&\quad = \ O_p(n^{3/2})
\end{aligned}$$

nach (5.9).

6.59 Proposition. Unter den Voraussetzungen (6.56) an K gilt

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big|\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-e_iK(e_i,e_j)\Big|^2=O_p(n^{3/2}). \tag{6.60}$$

Beweis: Es ist wegen $K(x,x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$ und nach der C_r-Ungleichung mit $C_2=2$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big|\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-e_iK(e_i,e_j)\Big|^2\\
=\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big|\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-e_iK(e_i,e_j)\Big|^2\\
=\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\Big|(\hat{e}_{ni}-e_i)K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})+e_i\Big(K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-K(e_i,e_j)\Big)\Big|^2\\
\leq\ &2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|\hat{e}_{ni}-e_i|^2K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})^2\\
&+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(1+e_i^2)\Big|K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-K(e_i,e_j)\Big|^2\\
=:\ &2I_n+2I\!I_n.
\end{aligned}$$

Nun ist nach der Taylorformel und der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel, wobei wir beachten, dass in dem Quadrat $(v+1)(v+2)/2$ Summanden stehen,

$$\begin{aligned}
I_n\ \leq\ &\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|\hat{e}_{ni}-e_i|^2\Bigg(\sum_{w=0}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}|D_1^uD_2^{w-u}K(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{w-u}\\
&\qquad+\sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}|D_1^uD_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{v-u}\Bigg)^2\\
\leq\ &\frac{(v+1)(v+2)}{2}\sum_{w=0}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|D_1^uD_2^{w-u}K(e_i,e_j)|^2\cdot\\
&\qquad\cdot|\hat{e}_{ni}-e_i|^{2u+2}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{2w-2u}\\
&+\frac{(v+1)(v+2)}{2}\sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|D_1^uD_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})|^2\cdot\\
&\qquad\cdot|\hat{e}_{ni}-e_i|^{2u+2}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{2v-2u}\\
=\ &O_p(n^{3/2})
\end{aligned}$$

nach (5.9) und (5.13). Hierbei bezeichnen $\varepsilon_{ni}^{kj}\in[e_i\wedge\hat{e}_{ni},e_i\vee\hat{e}_{ni}]$ für $n\in\mathbb{N}$, $i,j=1,\ldots,n$ und $k=1,2$ die Zwischenstellen aus der Taylorentwicklung.

Nochmal nach der Taylorformel und der Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel, wieder unter Beachtung, dass es in dem Quadrat höchstens $(v+1)(v+2)/2$ Summanden sind, ist

$$\begin{aligned}
I\!I_n \leq & \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}(1+e_i^2)\Bigg(\sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}|D_1^u D_2^{w-u}K(e_i,e_j)||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{w-u} \\
& \qquad + \sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}|D_1^u D_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})||\hat{e}_{ni}-e_i|^u|\hat{e}_{nj}-e_j|^{v-u}\Bigg)^2 \\
\leq & \frac{(v+1)(v+2)}{2}\sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|D_1^u D_2^{w-u}K(e_i,e_j)|^2\cdot \\
& \qquad \cdot|\hat{e}_{ni}-e_i|^{2u}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{2w-2u} \\
& + \frac{(v+1)(v+2)}{2}\sum_{w=1}^{v-1}\sum_{u=0}^{w}\binom{w}{u}^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|e_i D_1^u D_2^{w-u}K(e_i,e_j)|^2\cdot \\
& \qquad \cdot|\hat{e}_{ni}-e_i|^{2u}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{2w-2u} \\
& + \frac{(v+1)(v+2)}{2}\sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|D_1^u D_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})|^2\cdot \\
& \qquad \cdot|\hat{e}_{ni}-e_i|^{2u}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{2v-2u} \\
& + \frac{(v+1)(v+2)}{2}\sum_{u=0}^{v}\binom{v}{u}^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}|e_i D_1^u D_2^{v-u}K(\varepsilon_{ni}^{1j},\varepsilon_{nj}^{2i})|^2\cdot \\
& \qquad \cdot|\hat{e}_{ni}-e_i|^{2u}|\hat{e}_{nj}-e_j|^{2v-2u} \\
= & O_p(n^{3/2})
\end{aligned}$$

nach (5.9), (5.13) und (6.58). Also gilt (6.60).

6.61 Folgerung. Unter den Voraussetzungen (6.56) an die Funktion K gelten

(6.62) $$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ni}^2K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})^2 = O_p(1)$$

und

(6.63) $$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})^2 = O_p(1).$$

Beweis: Wir haben wegen $K(x,x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\hat{e}_{ni}^2K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})^2 \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-e_iK(e_i,e_j)+e_iK(e_i,e_j)\Big)^2 \\
&\leq \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\Big(\hat{e}_{ni}K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})-e_iK(e_i,e_j)\Big)^2+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}e_i^2K(e_i,e_j)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\le \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\Big(\hat e_{ni}K(\hat e_{ni},\hat e_{nj})-e_iK(e_i,e_j)\Big)^2\\
&\quad+\frac{2}{n^2}\Bigg|\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n\Big(e_i^2K(e_i,e_j)^2-E\Big(e_1^2K(e_1,e_2)^2\Big)\Big)\Bigg|+2E\Big(e_1^2K(e_1,e_2)^2\Big)\\
&= O_p(1/\sqrt{n}\,)+o_p(1)+O(1) \;=\; O_p(1)
\end{aligned}$$

nach (6.60) und (5.18), und nochmal fast genauso

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n K(\hat e_{ni},\hat e_{nj})^2\\
&\quad= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n\Big(K(\hat e_{ni},\hat e_{nj})-K(e_i,e_j)+K(e_i,e_j)\Big)^2\\
&\quad\le \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n\Big(K(\hat e_{ni},\hat e_{nj})-K(e_i,e_j)\Big)^2+\frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n K(e_i,e_j)^2\\
&\quad\le \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n\Big(K(\hat e_{ni},\hat e_{nj})-K(e_i,e_j)\Big)^2\\
&\qquad+\frac{2}{n^2}\Bigg|\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\ j\ne i}}^n\Big(K(e_i,e_j)^2-E\Big(K(e_1,e_2)^2\Big)\Big)\Bigg|+2E\Big(K(e_1,e_2)^2\Big)\\
&\quad= O_p(1/\sqrt{n}\,)+o_p(1)+O(1) \;=\; O_p(1)
\end{aligned}$$

nach (5.16) und (5.18).

6.64 Folgerung. Unter den Voraussetzungen (6.56) an die Funktion K gelten

$$\Big|E\Big(e_{n1}^*K(e_{n1}^*,e_{n2}^*)\Big|\hat{\mathbf{e}}_n\Big)-E\Big(e_1K(e_1,e_2)\Big)\Big| = o_p(1), \tag{6.65}$$

$$E\Big(\,|e_{n1}^*K(e_{n1}^*,e_{n2}^*)|\,\Big|\hat{\mathbf{e}}_n\Big)=O_p(1), \tag{6.66}$$

$$E\Big(\,e_{n1}^{*2}K(e_{n1}^*,e_{n2}^*)^2\,\Big|\hat{\mathbf{e}}_n\Big)=O_p(1) \tag{6.67}$$

und

$$E\Big(K(e_{n1}^*,e_{n2}^*)^2\Big|\hat{\mathbf{e}}_n\Big)=O_p(1). \tag{6.68}$$

Beweis: Zu (6.65): Es ist wegen $K(x,x)=0$ für alle $x\in\mathbb{R}$

$$\Big|E\Big(e_{n1}^*K(e_{n1}^*,e_{n2}^*)\Big|\hat{\mathbf{e}}_n\Big)-E\Big(e_1K(e_1,e_2)\Big)\Big|$$

$$= \quad \left| \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}} \frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nj}} \, \hat{e}_{ni} K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj}) - E\Big(e_1 K(e_1, e_2)\Big) \right|$$
$$= \quad o_p(1)$$

nach (5.21).
Zu (6.67): Hier haben wir

$$\begin{aligned}
& E\Big(e^{*2}_{n1} K(e^*_{n1}, e^*_{n2})^2 \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
& \quad = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}} \frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nj}} \, \hat{e}^2_{ni} K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj})^2 \\
& \quad \leq \Big(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}} \Big)^2 \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \hat{e}^2_{ni} K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj})^2 \\
& \quad = O_p(1)^2 \, O_p(1) \quad = \quad O_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.42) und (6.62).
Zu (6.66): Folgt wegen

$$E\Big(|e^*_{n1} K(e^*_{n1}, e^*_{n2})| \, \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \quad \leq \quad 1 + E\Big(e^{*2}_{n1} K(e^*_{n1}, e^*_{n2})^2 \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \quad = \quad O_p(1)$$

aus (6.67).
Zu (6.68): Es ist wieder

$$\begin{aligned}
& E\Big(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})^2 \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
& \quad = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}} \frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nj}} \, K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj})^2 \\
& \quad \leq \Big(\max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{ni}} \Big)^2 \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} K(\hat{e}_{ni}, \hat{e}_{nj})^2 \\
& \quad = O_p(1)^2 \, O_p(1) \quad = \quad O_p(1)
\end{aligned}$$

nach (3.42) und (6.63).

6.69 Proposition. Sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Borelfunktion welche die Voraussetzung $E(L(e^*_{n1}, e^*_{n2})^2 | \widehat{\mathbf{e}}_n) = O_p(1)$ erfüllt. Dann gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$(6.70) \quad \max_{[n^\alpha] \leq k \leq n-[n^\alpha]} \left| \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e^*_{ni}, e^*_{nj}) - E\Big(L(e^*_{n1}, e^*_{n2}) \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \right|$$
$$= o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \; P\text{-stoch.}$$

Beweis: Der Beweis geht entsprechend dem Beweis von Proposition 2.56. Daher werden wir ihn nicht vollständig vorführen.
Sei $\alpha \in (0,1)$. Zunächst ist klar, daß es wieder ausreicht,

$$I_n := \max_{[n^\alpha] \le k \le [n/2]} \left| \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e^*_{ni}, e^*_{nj}) - E\Big(L(e^*_{n1}, e^*_{n2}) \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \right|$$

zu betrachten. Um wieder den Indexbereich in dem Maximum entsprechend aufteilen zu können, betrachten wir wieder für $a, b, n \in \mathbb{N}$, $a < b \le n/2$ und $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&H_n(a,b,\varepsilon) \\
&:= \; P\bigg(\max_{a \le k \le b} \left| \frac{1}{k} \frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e^*_{ni}, e^*_{nj}) - E\Big(L(e^*_{n1}, e^*_{n2}) \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \right| \ge \varepsilon \bigg| \widehat{\mathbf{e}}_n \bigg) \\
&\le \; P\bigg(\max_{a \le k \le b} \left| \sum_{i=k+1}^{b} \sum_{j=1}^{k} L(e^*_{ni}, e^*_{nj}) - E\Big(L(e^*_{n1}, e^*_{n2}) \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \right| \ge \frac{an\varepsilon}{4} \bigg| \widehat{\mathbf{e}}_n \bigg) \\
&\quad + P\bigg(\max_{a \le k \le b} \left| \sum_{i=b+1}^{n} \sum_{j=1}^{k} L(e^*_{ni}, e^*_{nj}) - E\Big(L(e^*_{n1}, e^*_{n2}) \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \right| \ge \frac{an\varepsilon}{4} \bigg| \widehat{\mathbf{e}}_n \bigg) \\
&=: \; p_1(n,a,b,\varepsilon) + p_2(n,a,b,\varepsilon).
\end{aligned}$$

Wir zeigen hier nur beispielhaft die Abschätzung von $p_2(n,a,b,\varepsilon)$. Sei dazu für $k = 1, \ldots, b$

$$S_k := \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=b+1}^{n} \bigg(L(e^*_{ni}, e^*_{nj}) - E\Big(L(e^*_{ni}, e^*_{nj}) \Big| e^*_{ni}, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \bigg),$$

und

$$\mathcal{F}_k := \sigma\Big(e^*_{n1}, \ldots, e^*_{nk}; e^*_{nb+1}, \ldots, e^*_{nn}; \widehat{\mathbf{e}}_n\Big).$$

Dann ist $(S_k, \mathcal{F}_k)_{k=1,\ldots,b}$ ein Martingal, denn die Adaptiertheit ist klar, und für alle $k = 1, \ldots, b-1$ ist

$$\begin{aligned}
&E(S_{k+1} | \mathcal{F}_k) \\
&= \; \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{i=b+1}^{n} E\bigg(L(e^*_{ni}, e^*_{nj}) - E\Big(L(e^*_{ni}, e^*_{nj}) \Big| e^*_{ni}, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \bigg| e^*_{n1}, \ldots, e^*_{nk}; \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad e^*_{nb+1}, \ldots, e^*_{nn}; \widehat{\mathbf{e}}_n \bigg) \\
&= \; \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=b+1}^{n} E\bigg(L(e^*_{ni}, e^*_{nj}) - E\Big(L(e^*_{ni}, e^*_{nj}) \Big| e^*_{ni}, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \bigg| e^*_{ni}, e^*_{nj}, \widehat{\mathbf{e}}_n \bigg) \\
&\quad + \sum_{i=b+1}^{n} E\bigg(L(e^*_{ni}, e^*_{nk+1}) - E\Big(L(e^*_{ni}, e^*_{nk+1}) \Big| e^*_{ni}, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \bigg| e^*_{ni}, \widehat{\mathbf{e}}_n \bigg) \\
&= \; S_k + 0.
\end{aligned}$$

Es folgt mit der Kolmogorovschen Maximalungleichung für Martingale, wobei wir die Inklusionen $\sigma(\widehat{\mathbf{e}}_n) \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_b$ beachten, sowie mit der Markovungleichung und der Bienaymeschen Gleichung

$$\begin{aligned}
&p_2(n,a,b,\varepsilon)\\
&\leq P\Big(\max_{1\leq k\leq b}\Big|\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=b+1}^{n}\Big(L(e^*_{ni},e^*_{nj}) - E\Big(L(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|e^*_{ni},\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big)\Big| \geq \frac{an\varepsilon}{8}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\quad + P\Big(\max_{1\leq k\leq b}\Big|\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=b+1}^{n}\Big(E\Big(L(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|e^*_{ni},\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\qquad\qquad - E\Big(L(e^*_{n1},e^*_{n2})\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big)\Big| \geq \frac{an\varepsilon}{8}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&= P\Big(\max_{1\leq k\leq b}|S_k| \geq \frac{an\varepsilon}{8}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\quad + P\Big(b\Big|\sum_{i=b+1}^{n}\Big(E\Big(L(e^*_{ni},e^*_{n1})\Big|e^*_{ni},\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) - E\Big(L(e^*_{n1},e^*_{n2})\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big)\Big| \geq \frac{an\varepsilon}{8}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq \frac{64}{a^2n^2\varepsilon^2}\,E\Big(S_b^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\quad + \frac{64b^2}{a^2n^2\varepsilon^2}\sum_{i=b+1}^{n}E\Big(\Big(E\Big(L(e^*_{ni},e^*_{n1})\Big|e^*_{ni},\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) - E\Big(L(e^*_{n1},e^*_{n2})\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq \frac{64}{a^2n^2\varepsilon^2}\,(b^2n+n^2b)\,E\Big(\mathrm{Var}\Big(L(e^*_{n1},e^*_{n2})\Big|e^*_{n1},\hat{e}_{n1},\ldots,\hat{e}_{nn}\Big)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\quad + \frac{64b^2}{a^2n^2\varepsilon^2}\,n\,\mathrm{Var}\Big(E\Big(L(e^*_{n1},e^*_{n2})\Big|e^*_{n1},\hat{e}_{n1},\ldots,\hat{e}_{nn}\Big)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq \frac{128b}{a^2\varepsilon^2}\,E\Big(L(e^*_{n1},e^*_{n2})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big),
\end{aligned}$$

wobei die ganzen Abschätzungen aus dem Beweis von Proposition 2.56 wiederverwendet werden können.
Indem man fortfährt wie im Beweis von Proposition 2.56, erhält man

$$H_n(a,b,\varepsilon) \leq \frac{3584b}{a^2\varepsilon^2}\,E\Big(L(e^*_{n1},e^*_{n2})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big).$$

Auf die gleiche Art wie im Beweis von Proposition 2.56 folgt daraus, nun mit der Voraussetzung $E(L(e^*_{n1},e^*_{n2})^2|\widehat{\mathbf{e}}_n) = O_p(1)$, für alle $\varepsilon \geq 0$

$$P(I_n \geq \varepsilon|\widehat{\mathbf{e}}_n) = o_p(1).$$

Dies bedeutet $I_n = o_{p^*}(1)$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$ P-stochastisch.

6.71 Folgerung. Unter den Voraussetzungen (6.56) an die Funktion K gelten für alle $\alpha \in (0,1)$

$$(6.72)\qquad \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \left| \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} e_{ni}^* K(e_{ni}^*, e_{nj}^*) - E\Big(e_1 K(e_1,e_2)\Big)\right| = o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}$$

$$(6.73)\qquad \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \left| \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} e_{nj}^* K(e_{ni}^*, e_{nj}^*) - E\Big(e_2 K(e_1,e_2)\Big)\right| = o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}$$

$$(6.74)\qquad \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left|e_{ni}^* K(e_{ni}^*, e_{nj}^*)\right| = O_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}$$

$$(6.75)\qquad \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left|e_{nj}^* K(e_{ni}^*, e_{nj}^*)\right| = O_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}$$

Beweis: Zunächst reicht es aus, (6.72) und (6.74) zu beweisen, da die Voraussetzungen an K symmetrisch in den Argumenten von K sind, und (6.73) und (6.75) durch Vertauschen der Argumente von K aus diesen Aussagen folgen.
Zu (6.72): Für alle $\alpha \in (0,1)$ ist

$$\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \left| \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} e_{ni}^* K(e_{ni}^*, e_{nj}^*) - E\Big(e_1 K(e_1,e_2)\Big)\right| \\
\le\ & \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \left| \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} e_{ni}^* K(e_{ni}^*, e_{nj}^*) - E\Big(e_{n1}^* K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\right| \\
&\quad + \left| E\Big(e_{n1}^* K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) - E\Big(e_1 K(e_1,e_2)\Big)\right| \\
=\ & o_{p^*}(1) + o_p(1) \quad = \quad o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}
\end{aligned}$$

nach (6.70) mit (6.67), und (6.65).
Zu (6.74): Hier ist für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&\max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left|e_{ni}^* K(e_{ni}^*, e_{nj}^*)\right| \\
\le\ & \max_{[n^\alpha]\le k\le n-[n^\alpha]} \left| \frac{1}{k}\frac{1}{n-k} \sum_{i=k+1}^{n}\sum_{j=1}^{k} \left|e_{ni}^* K(e_{ni}^*, e_{nj}^*)\right| - E\Big(|e_{n1}^* K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)|\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\right| \\
&\quad + E\Big(|e_{n1}^* K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)|\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
=\ & o_{p^*}(1) + O_p(1) \quad = \quad O_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}
\end{aligned}$$

nach (6.70) mit (6.67), und (6.66).

6.76 Proposition. Unter den Voraussetzungen (6.56) an die Funktion K gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{[n^\alpha]} |K(e^*_{ni}, e^*_{nj})| = O_{p^*}(n^{1+\alpha}) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ P\text{-stoch.} \tag{6.77}$$

Beweis: Einfach nach der Markovungleichung ist für alle $C > 0$ und $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &P\biggl(P\Bigl(\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{[n^\alpha]} |K(e^*_{ni}, e^*_{nj})| \geq Cn^{1+\alpha} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Bigr) \geq \varepsilon\biggr) \\ \leq\ & P\biggl(\frac{1}{Cn^{1+\alpha}} \sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{[n^\alpha]} E\Bigl(|K(e^*_{ni}, e^*_{nj})| \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Bigr) \geq \varepsilon\biggr) \\ \leq\ & P\Bigl(\frac{1}{C} E\Bigl(|K(e^*_{n1}, e^*_{n2})| \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Bigr) \geq \varepsilon\Bigr) \\ \leq\ & P\Bigl(1 + E\Bigl(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})^2 \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Bigr) \geq C\varepsilon\Bigr) \quad \underset{C}{\longrightarrow} \quad 0, \end{aligned}$$

nach (6.68), woraus die Behauptung folgt.

6.78 Definition. Mit der am Anfang des Abschnitts gewählten Funktion K sei

$$\begin{aligned} &r^*_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \\ &r^*_n(s) := \frac{[ns](n-[ns])}{n^2} \iint K(x,y)\, F_n^{*\,seq}(s,dy)\, G_n^{*\,seq}(s,dx) \\ &\qquad = \frac{1}{n^2} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} K(e^*_{ni}, e^*_{nj}), \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} &r^{*\,z}_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \\ &r^{*\,z}_n(s) := \frac{[ns](n-[ns])}{n^2} \iint K(x,y)\, F_n^{*\,seq,z}(s,dy)\, G_n^{*\,seq,z}(s,dx) \\ &\qquad = \frac{1}{n^2} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} [ns] p^*_{n,j}(s)\, (n-[ns]) q^*_{n,i}(s)\, K(e^*_{ni}, e^*_{nj}). \end{aligned}$$

6.79 Proposition. Unter den Voraussetzungen (6.56) an die Funktion K gilt

$$\begin{aligned} \sup_{s\in[0,1]} \Biggl| r^{*\,z}_n(s) - \biggl(r^*_n(s) - \frac{1}{n^2} \sum_{l=1}^{n} \Bigl(& 1_{\{l \leq [ns]\}}(n-[ns]) \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2} \\ &+ 1_{\{l > [ns]\}}[ns] \frac{E(K(e_1,e_2)e_1)}{\sigma^2}\Bigr) e^*_{nl}\biggr)\Biggr| \\ &= o_{p^*}(1/\sqrt{n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ P\text{-stoch.} \end{aligned} \tag{6.80}$$

Beweis: Geht analog zum Beweis von Proposition 2.66.
Zur Abkürzung setzen wir wieder

$$H(n,s) := r_n^{*\,z}(s) - \Bigg(r_n^*(s) - \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n}\Bigg(1_{\{l\le[ns]\}}(n-[ns])\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2} + 1_{\{l>[ns]\}}[ns]\frac{E(K(e_1,e_2)e_1)}{\sigma^2}\Bigg) e_{nl}^*\Bigg).$$

für $n\in\mathbb{N}$ und $s\in(0,1)$, und müssen nun

$$\sup_{s\in[0,1]}|H(n,s)| = o_{p^*}(1/\sqrt{n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\hat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}$$

beweisen. Es gilt für alle $\alpha\in(0,1)$

$$\begin{aligned}\sup_{s\in[0,1]}|H(n,s)| \;\le\;& \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}|H(n,s)| + \sup_{s\in[1-n^{\alpha-1},1]}|H(n,s)| \\ &+ 1_{\mathcal{C}A^*_{n,\alpha}\cup\mathcal{C}B^*_{n,\alpha}}\cdot\infty + 1_{A^*_{n,\alpha}\cap B^*_{n,\alpha}}\sup_{s\in[n^{\alpha-1},1-n^{\alpha-1}]}|H(n,s)| \\ =:\;& I_n + I\!I_n + I\!I\!I_n + I\!V_n.\end{aligned}$$

Für alle $\varepsilon>0$ gilt

$$P\Big(I\!I\!I_n\ge\varepsilon/\sqrt{n}\,\Big|\hat{\mathbf{e}}_n\Big)\le P\Big(\mathcal{C}A^*_{n,\alpha}|\hat{\mathbf{e}}_n\Big)+P\Big(\mathcal{C}B^*_{n,\alpha}|\hat{\mathbf{e}}_n\Big)=o_p(1)$$

nach (6.5) und (6.41).
Die Abschätzung von Term $I\!V_n$ geht genau entsprechend zur Abschätzung des Terms $I\!V_n$ im Beweis von Proposition 2.66, nur unter Verwendung von (6.34), (6.35), (6.36), (6.38), (6.42), (6.43), (6.44), (6.45), (6.72), (6.73), (6.74) und (6.75). anstelle von (2.29), (2.30), (2.31), (2.33), (2.37), (2.38), (2.39), (2.40), (2.59), (2.60), (2.61) und (2.62).
Für I_n haben wir

$$\begin{aligned}I_n \;\le\;& \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}|r_n^{*\,z}(s)| + \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}|r_n^*(s)| \\ &+ \frac{|E(K(e_1,e_2)e_2)|}{\sigma^2}\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\frac{n-[ns]}{n^2}\Big|\sum_{j=1}^{[ns]}e_{nj}^*\Big| \\ &+ \frac{|E(K(e_1,e_2)e_1)|}{\sigma^2}\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}\frac{[ns]}{n^2}\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}e_{ni}^*\Big| \\ =:\;& V_n + V\!I_n + V\!I\!I_n + V\!I\!I\!I_n.\end{aligned}$$

Nun ist wieder, wie im Beweis von Proposition 2.66,

$$V_n\le 1_{\mathcal{C}B^*_{n,\alpha}}\cdot\infty + 1_{B^*_{n,\alpha}}\cdot\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]}|r_n^{*\,z}(s)|,$$

mit $1_{\complement B^*_{n,\alpha}} \cdot \infty \leq I\!I\!I_n = o_{p^*}(1/\sqrt{n}\,)$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$ P-stochastisch, und unter $B^*_{n,\alpha}$ ist wieder

$$\begin{aligned}
\sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]} |r_n^{*\,z}(s)| &= \sup_{s\in[0,n^{\alpha-1}]} \frac{1}{n^2}\Big| \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} [ns] p^*_{n,j}(s) \frac{1}{1+u^*_{n[ns]}e^*_{ni}}\, K(e^*_{ni}, e^*_{nj})\Big| \\
&\leq \frac{n^\alpha}{n^2}\Big(\max_{0\leq k\leq[n^\alpha]} \max_{k+1\leq i\leq n} \frac{1}{1+u^*_{nk}e^*_{ni}}\Big) \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{[n^\alpha]} |K(e^*_{ni}, e^*_{nj})| \\
&= O(n^{\alpha-2})\, O_{p^*}(1)\, O_{p^*}(n^{1+\alpha}) \\
&= O_{p^*}(n^{2\alpha-1}) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}
\end{aligned}$$

nach (6.44) und wegen (6.77). Es folgt $V_n = o_{p^*}(1/\sqrt{n}\,)$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$ P-stochastisch, falls $\alpha < 1/4$.
Dann ist

$$V\!I_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} \sum_{j=1}^{[n^\alpha]} |K(e^*_{ni}, e^*_{nj})| = O_{p^*}(n^{\alpha-1}) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}$$

nach (6.77), also $V\!I_n = o_{p^*}(1/\sqrt{n}\,)$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$ P-stochastisch, falls $\alpha < 1/2$.
Weiter ist

$$\begin{aligned}
V\!I\!I_n &\leq \frac{|E(K(e_1,e_2)e_2)|}{\sigma^2} \frac{1}{n} \max_{1\leq k\leq[n^\alpha]} \Big|\sum_{j=1}^{k} e^*_{nj}\Big| \\
&= O(1/n)\, O_{p^*}(n^{\alpha/2}) \quad = \quad O_{p^*}(n^{\alpha/2-1}) \\
&= o_{p^*}(1/\sqrt{n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}
\end{aligned}$$

nach (6.11) mit der Ersetzung $n \mapsto [n^\alpha]$.
Und schließlich

$$\begin{aligned}
V\!I\!I\!I_n &\leq \frac{|E(K(e_1,e_2)e_1)|}{\sigma^2} \frac{[n^\alpha]}{n^2} \max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=k}^{n} e^*_{ni}\Big| \\
&\sim \frac{|E(K(e_1,e_2)e_1)|}{\sigma^2} \frac{[n^\alpha]}{n^2} \max_{1\leq k\leq n} \Big|\sum_{i=1}^{k} e^*_{ni}\Big| \\
&= O(n^{\alpha-2})\, O_{p^*}(\sqrt{n}\,) \quad = \quad o_{p^*}(1/\sqrt{n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}
\end{aligned}$$

nach (6.11).
Es folgt auch hier $I_n = o_{p^*}(1/\sqrt{n}\,)$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$ P-stochastisch für $\alpha = 1/5$. Der Term $I\!I_n$ geht analog. Damit sind alle Summanden von der behaupteten Ordnung.

Kapitel 7

Funktionale Grenzwertsätze für die Bootstrapprozesse $\sqrt{n}\, T_n^{*\,z}$ und $\sqrt{n}\, r_n^{*\,z}$

Es gelten in diesem Kapitel die Modellannahmen über das ARMA-Modell und die Fehlervariablen wie im vorigen Kapitel. Weiter sei in diesem Kapitel $K : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die die Bedingungen (6.56) und (4.1) erfüllt. Dies umfasst alle je an K gemachten Voraussetzungen.

7.1 Definition. Sei für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 0, \dots, n$

$$
\begin{aligned}
&X_{ni}^* : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \\
&X_{ni}^*(s,x) \;:=\; \frac{1}{\sqrt{n}} \Big(1_{\{i \le [ns]\}} \frac{n-[ns]}{n} - 1_{\{i > [ns]\}} \frac{[ns]}{n} \Big) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(1_{\{e_{ni}^* \le x\}} - \widehat{F}_n^z(x) - \frac{U(x)}{\sigma^2} e_{ni}^* \Big),
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
&K_n^* : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \\
&K_n^*(s,x) \;:=\; \sum_{i=1}^{n} X_{ni}^*(s,x) \\
&\qquad = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \Big(1_{\{i \le [ns]\}} \frac{n-[ns]}{n} - 1_{\{i > [ns]\}} \frac{[ns]}{n} \Big) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(1_{\{e_{ni}^* \le x\}} - \widehat{F}_n^z(x) - \frac{U(x)}{\sigma^2} e_{ni}^* \Big).
\end{aligned}
$$

7.2 Proposition. Seien $k \in \mathbb{N}$, $s_1, \dots, s_k \in [0,1]$ und $x_1, \dots, x_k \in \overline{\mathbb{R}}$, und seien für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_n^* &:= \Big(K^*(s_1, x_1), \dots, K^*(s_k, x_k)\Big), \\ \mathbf{X}_{ni}^* &:= \Big(X_{ni}^*(s_1, x_1), \dots, X_{ni}^*(s_k, x_k)\Big), \end{aligned}$$

sowie

$$\mathbf{\Gamma} = \left(\Big(s_i \wedge s_j - s_i s_j\Big)\Big(F(x_i \wedge x_j) - F(x_i)F(x_j) - \frac{U(x_i)U(x_j)}{\sigma^2}\Big)\right)_{i,j=1,\dots,k}.$$

Dann gilt unter den Voraussetzungen (3.78) und (3.79)

$$\mathbf{K}_n^* \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N(0, \mathbf{\Gamma}) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n). \tag{7.3}$$

Beweis: Wir können den zentralen Grenzwertsatz in Bootstrapform verwenden, denn bezüglich $(P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ stellt $(\mathbf{X}_{ni}^*)_{i=1,\dots,n;n\in\mathbb{N}}$ ein zeilenweise unabhängiges Dreiecksschema von zentrierten, k-dimensionalen Zufallsvektoren mit quadratisch integrierbaren Komponenten dar. Es reicht also zu beweisen, dass die Normierungsbedingung

$$\sum_{i=1}^n \mathrm{Cov}(\mathbf{X}_{ni}^*|\widehat{\mathbf{e}}_n) \xrightarrow[n]{P} \mathbf{\Gamma} \tag{7.4}$$

und die Lindebergbedingung

$$\sum_{i=1}^n E(\|\mathbf{X}_{ni}^*\|^2 1_{\{\|\mathbf{X}_{ni}^*\|^2 \geq \varepsilon\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n) = o_p(1) \quad \text{für alle } \varepsilon > 0 \tag{7.5}$$

erfüllt sind.
Zunächst haben wir

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\widehat{F}_n^z(x) - F(x)\Big| \\ &\quad\leq \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|\widehat{F}_n^{seq,z}(1,x) - F_n^{seq}(1,x) - \frac{1}{\sigma^2}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e_i\, U(x)\Big| \\ &\qquad + \sup_{x\in\mathbb{R}} \Big|F_n^{seq}(1,x) - F(x)\Big| \\ &\qquad + \frac{1}{\sigma^2}\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|U(x)\Big|\Big|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n e_i\Big| \\ &\quad= o_p(1/\sqrt{n}\,) + o_p(1) + o_p(1) \quad = \quad o_p(1), \end{aligned} \tag{7.6}$$

was nach (3.82), dem Satz von Glivenko-Cantelli, sowie der Beschränktheit von U durch $E(|e_1|)$ und dem starken Gesetz der großen Zahlen gilt.

Zu (7.4): Wir rechnen dies wieder elementweise nach. Seien wie beim Beweis von (4.9) $l, l' \in \{1, \ldots, k\}$, $s := s_l$, $t := s_{l'}$, $x := x_l$, $y := x_{l'}$ und

$$\begin{aligned}
\eta_n \quad &:= \quad \operatorname{Cov}\Big(1_{\{e^*_{n1} \leq x\}} - \widehat{F}^z_n(x) - \frac{U(x)}{\sigma^2} e^*_{n1}, 1_{\{e^*_{n1} \leq y\}} - \widehat{F}^z_n(y) - \frac{U(y)}{\sigma^2} e^*_{n1} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= \quad E\bigg(\Big(1_{\{e^*_{n1} \leq x\}} - \widehat{F}^z_n(x) - \frac{U(x)}{\sigma^2} e^*_{n1}\Big)\Big(1_{\{e^*_{n1} \leq y\}} - \widehat{F}^z_n(y) - \frac{U(y)}{\sigma^2} e^*_{n1}\Big) \bigg| \widehat{\mathbf{e}}_n\bigg) \\
&= \quad E\Big(1_{\{e^*_{n1} \leq x \wedge y\}} - 1_{\{e^*_{n1} \leq x\}} \widehat{F}^z_n(y) - \frac{U(y)}{\sigma^2} e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \leq x\}} \\
&\qquad - \widehat{F}^z_n(x) 1_{\{e^*_{n1} \leq y\}} + \widehat{F}^z_n(x) \widehat{F}^z_n(y) + \widehat{F}^z_n(x) \frac{U(y)}{\sigma^2} e^*_{n1} \\
&\qquad - \frac{U(x)}{\sigma^2} e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \leq y\}} + \widehat{F}^z_n(y) \frac{U(x)}{\sigma^2} e^*_{n1} + \frac{U(x)U(y)}{\sigma^4} e^{*\,2}_{n1} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= \quad E(1_{\{e^*_{n1} \leq x \wedge y\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) - E(1_{\{e^*_{n1} \leq x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \widehat{F}^z_n(y) - \frac{U(y)}{\sigma^2} E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \leq x\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \\
&\qquad - \widehat{F}^z_n(x) E(1_{\{e^*_{n1} \leq y\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) + \widehat{F}^z_n(x) \widehat{F}^z_n(y) + 0 \\
&\qquad - \frac{U(x)}{\sigma^2} E(e^*_{n1} 1_{\{e^*_{n1} \leq y\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) + 0 + \frac{U(x)U(y)}{\sigma^4} E(e^{*\,2}_{n1} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \\
&\xrightarrow[n]{P} \quad F(x \wedge y) - F(x)F(y) - \frac{U(y)U(y)}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

wegen $E(1_{\{e^*_{n1} \leq z\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) = \widehat{F}^z_n(z)$ für alle $z \in \overline{\mathbb{R}}$, nach (7.6), (6.48) und (6.7).

Zu (7.5): Für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, n$ haben wir

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{X}^*_{ni}\|^2 \quad &= \quad \sum_{j=1}^k \frac{1}{n} \Big(1_{\{i \leq [ns_j]\}} \frac{n - [ns_j]}{n} - 1_{\{i > [ns_j]\}} \frac{[ns_j]}{n}\Big)^2 \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(1_{\{e^*_{ni} \leq x_j\}} - \widehat{F}^z_n(x_j) - \frac{U(x_j)}{\sigma^2} e^*_{ni}\Big)^2 \\
&\leq \quad \frac{k}{n} \Big(1 + \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2} |e^*_{ni}|\Big)^2 \quad =: \quad M(n, i),
\end{aligned}$$

und damit folgt für alle $\varepsilon > 0$ und alle $n \geq 4k/\varepsilon$

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n E(\|\mathbf{X}^*_{ni}\|^2 1_{\{\|\mathbf{X}^*_{ni}\|^2 \geq \varepsilon\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \\
&\quad \leq \quad \sum_{i=1}^n E(M(n, i) 1_{\{M(n,i) \geq \varepsilon\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \\
&\quad = \quad n\, E(M(n, 1) 1_{\{M(n,1) \geq \varepsilon\}} | \widehat{\mathbf{e}}_n) \\
&\quad = \quad k\, E\bigg(\Big(1 + \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2} e^*_{n1}\Big)^2 1_{\{\frac{k}{n}(1 + \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2} e^*_{n1})^2 \geq \varepsilon\}} \bigg| \widehat{\mathbf{e}}_n\bigg) \\
&\quad \leq \quad 2k\, E\bigg(\Big(1 + \frac{E(|e_1|)^2}{\sigma^4} e^{*\,2}_{n1}\Big) 1_{\{1 + \frac{E(|e_1|)^2}{\sigma^4} e^{*\,2}_{n1} \geq \frac{\varepsilon n}{2k}\}} \bigg| \widehat{\mathbf{e}}_n\bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2k\,E\Big(\Big(1+\frac{E(|e_1|)^2}{\sigma^4}e_{n1}^{*2}\Big)1_{\{e_{n1}^{*2}\geq(\frac{\varepsilon n}{2k}-1)\frac{\sigma^4}{E(|e_1|)^2}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq 2k\,E\Big(\Big(1+\frac{E(|e_1|)^2}{\sigma^4}e_{n1}^{*2}\Big)1_{\{e_{n1}^{*2}\geq\frac{\varepsilon\sigma^4}{4kE(|e_1|)^2}n\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&= 2k\,P\Big(e_{n1}^{*2}\geq\frac{\varepsilon\sigma^4}{4kE(|e_1|)^2}n\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\quad+\frac{2kE(|e_1|)^2}{\sigma^4}\,E\Big(e_{n1}^{*2}1_{\{e_{n1}^{*2}\geq\frac{\varepsilon\sigma^4}{4kE(|e_1|)^2}n\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq \frac{8k^2E(|e_1|)^2}{\varepsilon\sigma^4 n}\,E(e_{n1}^{*2}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\\
&\quad+\frac{2kE(|e_1|)^2}{\sigma^4}\,E\Big(e_{n1}^{*2}1_{\{e_{n1}^{*2}\geq\frac{\varepsilon\sigma^4}{4kE(|e_1|)^2}n\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&= O_{p^*}(1/n)+o_{p^*}(1) \;=\; o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}
\end{aligned}
$$

nach (6.7) und (6.13).

Im Beweis der nächsten Proposition verwenden wir folgende, auf den unten angegebenen Artikel von Brown zurückgehende Folgerung aus der Doobschen Maximalungleichung:

7.7 Satz. Seien $n\in\mathbb{N}$ und $U_1,\dots,U_n$ ein zentriertes Martingal bezüglich irgendeiner Filtration. Dann gilt für alle $C>0$

$$
P\Big(\max_{1\leq k\leq n}|U_k|\geq C\Big)\;\leq\;\frac{2}{C}\,E\Big(|U_n|1_{\{|U_n|\geq\frac{C}{2}\}}\Big). \tag{7.8}
$$

Beweis: Siehe zum Beispiel Brown (1971), Lemma 4.

7.9 Proposition. Für alle $\varepsilon,\varepsilon'>0$ gilt, wenn (3.78) und (3.79) erfüllt sind,

$$
\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}P\Big(P(\mathrm{w}_\delta(K_n^*)\geq\varepsilon|\widehat{\mathbf{e}}_n)\geq\varepsilon'\Big)=0. \tag{7.10}
$$

Beweis: Auch in diesem Beweis verstehen wir die Argumente s und x in einem Stetigkeitsmodul wieder als Projektionen. Zur Abkürzung setzen wir für alle $n\in\mathbb{N}$ und $i=1,\dots,n$

$$
H_{ni}^*(x):=1_{\{e_{ni}^*\leq x\}}-\widehat{F}_n^z(x)-\frac{U(x)}{\sigma^2}e_{ni}^*.
$$

Es gilt dann für alle $\delta>0$ und $n\in\mathbb{N}$, ähnlich wie im Beweis von (4.11)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w}_\delta(K_n^*) &\leq \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\frac{n-[ns]}{n}H_{ni}^*(x)\Big)+\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\frac{[ns]}{n}H_{ni}^*(x)\Big)\\
&=: w_1(n,\delta)+w_2(n,\delta),
\end{aligned}
$$

und es ist auch hier wieder ausreichend, $w_1(n,\delta)$ zu betrachten, da beide Summanden die gleiche Verteilung besitzen. Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\delta > 0$

$$\begin{aligned} w_1(n,\delta) &\leq \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\frac{n-[ns]}{n}\Big(1_{\{e^*_{ni}\leq x\}} - \widehat{F}^z_n(x)\Big)\Big) \\ &\quad + \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\frac{n-[ns]}{n}\frac{U(x)}{\sigma^2}e^*_{ni}\Big) \\ &=: w_3(n,\delta) + w_4(n,\delta), \end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned} w_3(n,\delta) &\leq \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{e^*_{ni}\leq x\}} - \widehat{F}^z_n(x)\Big)\Big) \\ &\quad + \Big(\delta + \frac{1}{n}\Big)\sup_{\substack{s\in[0,1]\\ x\in\mathbb{R}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{e^*_{ni}\leq x\}} - \widehat{F}^z_n(x)\Big)\Big| \\ &=: w_5(n,\delta) + w_6(n,\delta), \end{aligned}$$

wie im Beweis von (4.11).
Seien für alle $n \in \mathbb{N}$ $U_{n1},\ldots,U_{nn}$ unabhängige und über $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen, die auch von $X_{1-p},\ldots,X_0$ und $e_{1-q},\ldots,e_n$ unabhängig sind, also insbesondere auch von $\widehat{\mathbf{e}}_n$ unabhängig sind. Dann gilt für alle $i = 1,\ldots,n$ ${\widehat{F}^z_n}{}^{-1}(U_{ni}) \sim e^*_{ni}$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$, und weiter sind ${\widehat{F}^z_n}{}^{-1}(U_{n1}),\ldots,{\widehat{F}^z_n}{}^{-1}(U_{nn})$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$ unabhängig. Also gilt

$$({\widehat{F}^z_n}{}^{-1}(U_{n1}),\ldots,{\widehat{F}^z_n}{}^{-1}(U_{nn})) \sim (e^*_{n1},\ldots,e^*_{nn}) \quad \text{unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n).$$

Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\delta, \varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} P\Big(w_5(n,\delta) \geq \varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) &= P\Bigg(\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{{\widehat{F}^z_n}{}^{-1}(U_{ni})\leq x\}} - \widehat{F}^z_n(x)\Big)\Big) \geq \varepsilon\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg) \\ &= P\Bigg(\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{U_{ni}\leq \widehat{F}^z_n(x)\}} - \widehat{F}^z_n(x)\Big)\Big) \geq \varepsilon\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg) \\ &= P\Big(\mathrm{w}_\delta\Big(\alpha_n(s,\widehat{F}^z_n(x))\Big) \geq \varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big), \end{aligned}$$

wobei

$$\alpha_n(s,y) := \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{U_{ni}\leq y\}} - y\Big)$$

den uniformen sequentiellen empirischen Prozess bezeichnet. Mit Teleskopieren und Dreiecksungleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}
&P\Big(\mathrm{w}_\delta\Big(\alpha_n(s,\widehat{F}_n^z(x))\Big) \geq \varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&= \quad P\Big(\sup_{\substack{x,y\in\overline{\mathbb{R}}\\ m(x,y)<\delta}}\ \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\ |s-t|<\delta}}\Big|\alpha_n(s,\widehat{F}_n^z(x)) - \alpha_n(s,F(x))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_n(s,F(x)) - \alpha_n(t,F(y))\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha_n(t,F(y)) - \alpha_n(t,\widehat{F}_n^z(y))\Big| \geq \varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq \quad P\Big(2\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\sup_{s\in[0,1]}\Big|\alpha_n(s,\widehat{F}_n^z(x)) - \alpha_n(s,F(x))\Big|\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \mathrm{w}_\delta\Big(\alpha_n(s,F(x))\Big) \geq \varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq \quad P\Big(\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\sup_{s\in[0,1]}\Big|\alpha_n(s,\widehat{F}_n^z(x)) - \alpha_n(s,F(x))\Big| \geq \frac{\varepsilon}{4}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\qquad + P\Big(\mathrm{w}_\delta\Big(\alpha_n(s,F(x))\Big) \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&=: \quad p_1(n,\varepsilon) + p_2(n,\varepsilon,\delta).
\end{aligned}$$

Wegen der Unabhängigkeit von $U_{n1},\ldots,U_{nn}$ von $\widehat{\mathbf{e}}_n$ gilt für alle $\varepsilon,\varepsilon',\delta>0$

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P\Big(p_2(n,\varepsilon,\delta) \geq \varepsilon'\Big)\\
&= \quad \limsup_{n\to\infty} P\bigg(P\Big(\mathrm{w}_\delta\Big(\alpha_n(s,F(x))\Big) \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big) \geq \varepsilon'\bigg)\\
&\leq \quad \frac{1}{\varepsilon'}\limsup_{n\to\infty} P\Big(\mathrm{w}_\delta\Big(\alpha_n(s,F(x))\Big) \geq \frac{\varepsilon}{2}\Big)\\
&= \quad \frac{1}{\varepsilon'}\limsup_{n\to\infty} P\bigg(\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{U_{ni}\leq F(x)\}} - F(x)\Big)\Big) \geq \frac{\varepsilon}{2}\bigg)\\
&= \quad \frac{1}{\varepsilon'}\limsup_{n\to\infty} P\bigg(\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{e_i\leq x\}} - F(x)\Big)\Big) \geq \frac{\varepsilon}{2}\bigg)\\
&\xrightarrow[\delta\downarrow 0]{} \quad 0,
\end{aligned}$$

da der sequentielle empirische Prozess $\frac{[ns]}{\sqrt{n}}(F_n^{seq} - F)$ verteilungskonvergent mit stetigem Grenzprozess und damit C-straff ist, vergleiche hierzu den Beweis von (4.11).

Weiter gilt für alle $\delta'>0$ auf dem Ereignis

$$\bigg\{\sup_{\substack{s\in[0,1]\\ x\in\overline{\mathbb{R}}}}\Big|\alpha_n(s,\widehat{F}_n^z(x)) - \alpha_n(s,F(x))\Big| \geq \frac{\varepsilon}{4}\bigg\} \cap \bigg\{\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\widehat{F}_n^z(x) - F(x)\Big| < \delta'\bigg\}$$

die Abschätzung

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon}{4} &\leq \sup_{s\in[0,1]} \sup_{\substack{u,v\in[0,1]\\|u-v|<\delta'}} \Big|\alpha_n(s,u)-\alpha_n(s,v)\Big| \\
&\leq \sup_{\substack{s,t\in[0,1]\\|s-t|<\delta'}} \sup_{\substack{u,v\in[0,1]\\|u-v|<\delta'}} \Big|\alpha_n(s,u)-\alpha_n(t,v)\Big| \quad =: \quad \mathrm{w}'_{\delta'}(\alpha_n(s,x)).
\end{aligned}$$

Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon, \delta' > 0$

$$\begin{aligned}
p_1(n,\varepsilon) &\leq P\Big(\mathrm{w}'_{\delta'}(\alpha_n(s,x)) \geq \frac{\varepsilon}{4}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) + P\Big(\sup_{x\in\mathbb{R}}\Big|\widehat{F}^z_n(x)-F(x)\Big| \geq \delta'\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= P\Big(\mathrm{w}'_{\delta'}(\alpha_n(s,x)) \geq \frac{\varepsilon}{4}\Big) + 1_{\{\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}|\widehat{F}^z_n(x)-F(x)| \geq \delta'\}}.
\end{aligned}$$

Da der uniforme sequentielle empirische Prozess α_n verteilungskonvergent mit stetigem Grenzprozess und damit auch C-straff ist, gibt es zu jedem $\varepsilon' > 0$ ein $\Delta(\varepsilon') > 0$ mit

$$\limsup_{n\to\infty} P\Big(\mathrm{w}'_{\delta'}(\alpha_n) \geq \frac{\varepsilon}{4}\Big) \;<\; \frac{\varepsilon'}{2} \quad \text{für alle } \delta' \in (0, \Delta(\varepsilon')),$$

und (7.6) ist für alle $\delta' > 0$

$$1_{\{\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}|\widehat{F}^z_n(x)-F(x)| \geq \delta'\}} = 1_{\{\sup_{x\in\mathbb{R}}|\widehat{F}^z_n(x)-F(x)| \geq \delta'\}} = o_p(1).$$

Zusammen folgt für alle $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ für alle $\delta' \in (0, \Delta(\varepsilon'))$

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P\Big(p_1(n,\varepsilon) \geq \varepsilon'\Big) \\
&\quad\leq \limsup_{n\to\infty} P\Big(P\Big(\mathrm{w}'_{\delta'}(\alpha_n(s,x)) \geq \frac{\varepsilon}{4}\Big) \geq \frac{\varepsilon'}{2}\Big) \\
&\qquad + \limsup_{n\to\infty} P\Big(1_{\{\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}|\widehat{F}^z_n(x)-F(x)| \geq \delta'\}} \geq \frac{\varepsilon'}{2}\Big) \\
&\quad= 0.
\end{aligned}$$

Weiter ist mit den gleichen Argumenten wie oben für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon, \delta > 0$

$$\begin{aligned}
&P\Big(w_6(n,\delta) \geq \varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= P\Big(\Big(\delta+\frac{1}{n}\Big)\sup_{\substack{s\in[0,1]\\x\in\overline{\mathbb{R}}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{\widehat{F}^{z\,-1}_n(U_{ni})\leq x\}}-\widehat{F}^z_n(x)\Big)\Big| \geq \varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= P\Big(\Big(\delta+\frac{1}{n}\Big)\sup_{\substack{s\in[0,1]\\x\in\overline{\mathbb{R}}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]}\Big(1_{\{U_{ni}\leq\widehat{F}^z_n(x)\}}-\widehat{F}^z_n(x)\Big)\Big| \geq \varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= P\Big(\Big(\delta+\frac{1}{n}\Big)\sup_{s\in[0,1]}\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\alpha_n(s,\widehat{F}_n^z(x))\Big|\geq\varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq P\Big(\Big(\delta+\frac{1}{n}\Big)\sup_{s\in[0,1]}\sup_{u\in[0,1]}\Big|\alpha_n(s,u)\Big|\geq\varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&= P\Big(\Big(\delta+\frac{1}{n}\Big)\sup_{s\in[0,1]}\sup_{u\in[0,1]}\Big|\alpha_n(s,u)\Big|\geq\varepsilon\Big).
\end{aligned}
$$

Hieraus folgt für alle $\varepsilon,\varepsilon',\delta>0$, wenn wir mit A den Grenzprozess von α_n bezeichnen,

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}P\Big(P\Big(w_6(n,\delta)\geq\varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\geq\varepsilon'\Big)\\
&\quad\leq\frac{1}{\varepsilon'}\limsup_{n\to\infty}P\Big(\Big(\delta+\frac{1}{n}\Big)\sup_{s\in[0,1]}\sup_{u\in[0,1]}\Big|\alpha_n(s,u)\Big|\geq\varepsilon\Big)\\
&\quad\leq\frac{1}{\varepsilon'}\limsup_{n\to\infty}P\Big(2\delta\sup_{s\in[0,1]}\sup_{u\in[0,1]}\Big|\alpha_n(s,u)\Big|\geq\varepsilon\Big)\\
&\quad\leq\frac{1}{\varepsilon'}P\Big(\delta\sup_{s\in[0,1]}\sup_{u\in[0,1]}\Big|A(s,u)\Big|\geq\frac{\varepsilon}{2}\Big)\underset{\delta\downarrow 0}{\longrightarrow}0,
\end{aligned}
$$

wobei wir beim letzten Ungleichheitszeichen das Portmanteau-Theorem und den Stetigkeitssatz verwandt haben.
Kommen wir nun zu $w_4(n,\delta)$. Ähnlich wie oben ist

$$
\begin{aligned}
w_4(n,\delta) &\leq \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\frac{U(x)}{\sigma^2}e^*_{ni}\Big)\\
&\quad+\Big(\delta+\frac{1}{n}\Big)\sup_{\substack{s\in[0,1]\\ x\in\overline{\mathbb{R}}}}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]}\frac{U(x)}{\sigma^2}e^*_{ni}\Big|\\
&\leq \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}\frac{U(x)}{\sigma^2}e^*_{ni}\Big)\\
&\quad+\frac{E(|e_1|)}{\sigma^2}\Big(\delta+\frac{1}{n}\Big)\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k}e^*_{ni}\Big|\\
&=: w_7(n,\delta)+w_8(n,\delta),
\end{aligned}
$$

und nach (6.11) ist für alle $\varepsilon,\varepsilon',\delta>0$

$$
\limsup_{n\to\infty}P\Big(P\Big(w_8(n,\delta)\geq\varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\geq\varepsilon'\Big)\underset{\delta\downarrow 0}{\longrightarrow}0.
$$

Als nächstes ist, unter Verwendung von (4.12),

$$
w_7(n,\delta)\leq\sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}}\Big|\frac{U(x)}{\sigma^2}\Big|\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}e^*_{ni}\Big)+\frac{1}{\sigma^2}\mathrm{w}_\delta\Big(U(x)\Big)\sup_{s\in[0,1]}\Big|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]}e^*_{ni}\Big|
$$

$$\begin{aligned}
&\le \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2}\,\mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^*\Big) + \frac{1}{\sigma^2}\mathrm{w}_\delta\Big(U(x)\Big)\,\frac{1}{\sqrt{n}}\max_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k} e_{ni}^*\Big| \\
&=: \frac{E(|e_1|)}{\sigma^2} w_9(n,\delta) + \frac{1}{\sigma^2} w_{10}(n,\delta).
\end{aligned}$$

Für alle $\varepsilon > 0$ und $\varepsilon' > 0$ gilt

$$\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\Big(P\Big(w_{10}(n,\delta) \ge \varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \ge \varepsilon'\Big) = 0$$

nach (6.11), denn wegen der gleichmäßigen Stetigkeit von U ist $\mathrm{w}_\delta(U(x)) \underset{\delta\downarrow 0}{\longrightarrow} 0$. Wir müssen uns nun noch um $w_9(n,\delta)$ kümmern. Wir verwenden dabei Standardideen für C-Straffheitsbeweise für Partialsummenprozesse, wie sie in ähnlicher Form zum Beispiel in Gänßler und Stute (1977) im Beweis zu Lemma 10.1.9 zu finden sind. Hierfür beachten wir zunächst, dass wegen der Monotonie in δ für alle $\varepsilon, \varepsilon' > 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\Big(P\Big(w_9(n,\delta) \ge \varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \ge \varepsilon'\Big) \\
&\quad = \lim_{\substack{m\to\infty \\ m\in\mathbb{N}}}\limsup_{n\to\infty} P\left(P\Big(\sup_{\substack{s,t\in(0,1] \\ |s-t|<1/m}} \frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[nt]} e_{ni}^*\Big| \ge \varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \ge \varepsilon'\right)
\end{aligned}$$

gilt, und dieser Ausdruck muß für alle $\varepsilon, \varepsilon' > 0$ den Wert 0 haben. Hier konnten wir die Null aus dem Einheitsintervall im Indexbereich des Supremums fortlassen ohne den Wert des Supremums zu ändern, da die in dem Supremum stehende Zufallsgröße für alle $n \in \mathbb{N}$ für alle $s \in (0, 1/n]$ oder $t \in (0, 1/n]$ denselben Wert annimmt wie für $s = 0$ beziehungsweise $t = 0$. Nun gibt es für alle $m \in \mathbb{N}$ und $s, t \in (0,1]$ mit $|s-t| < 1/m$ und $s \le t$ ein eindeutiges $k \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\frac{k-1}{m} < s \le \frac{k}{m}$. Entweder ist dann ebenfalls $\frac{k-1}{m} < t \le \frac{k}{m}$, oder es ist $\frac{k}{m} < t \le \frac{k+1}{m}$. Im ersten Fall ist

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[nt]} e_{ni}^*\Big| &\le \Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[n\frac{k-1}{m}]} e_{ni}^*\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{[n\frac{k-1}{m}]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[nt]} e_{ni}^*\Big| \\
&\le 2\sup_{s\in(\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[n\frac{k-1}{m}]} e_{ni}^*\Big|,
\end{aligned}$$

und im zweiten Fall

$$\Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[nt]} e_{ni}^*\Big| \le \Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[n\frac{k-1}{m}]} e_{ni}^*\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{[n\frac{k}{m}]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[n\frac{k-1}{m}]} e_{ni}^*\Big|$$

$$+\Big|\sum_{i=1}^{[n\frac{k}{m}]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[nt]} e_{ni}^*\Big|$$

$$\leq \; 3 \max_{j=1,\dots,m} \sup_{s\in(\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}]} \Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[n\frac{j-1}{m}]} e_{ni}^*\Big|,$$

sodass also für alle $m \in \mathbb{N}$ stets

$$\sup_{\substack{s,t\in(0,1]\\|s-t|<1/m}} \Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[nt]} e_{ni}^*\Big| \;\leq\; 3 \max_{j=1,\dots,m} \sup_{s\in(\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}]} \Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[n\frac{j-1}{m}]} e_{ni}^*\Big|$$

gilt, da wir uns bei der Supremumsbildung wegen der Beträge auf Kombinationen $s,t \in [0,1]$ mit $s \leq t$ beschränken können. Damit erhalten wir für alle $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq m$

$$\begin{aligned}
&P\Big(\sup_{\substack{s,t\in(0,1]\\|s-t|<1/m}} \frac{1}{\sqrt{n}}\Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[nt]} e_{ni}^*\Big| \geq \varepsilon \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq \; P\Big(\max_{j=1,\dots,m} \sup_{s\in(\frac{j-1}{m},\frac{j}{m}]} \Big|\sum_{i=1}^{[ns]} e_{ni}^* - \sum_{i=1}^{[n\frac{j-1}{m}]} e_{ni}^*\Big| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{3}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq \; \sum_{j=1}^{m} P\Big(\max_{[n\frac{j-1}{m}]<k\leq[n\frac{j}{m}]} \Big|\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{k} e_{ni}^*\Big| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{3}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq \; \sum_{j=1}^{m} \frac{6}{\varepsilon\sqrt{n}} E\Big(\Big|\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]} e_{ni}^*\Big| \, 1_{\{|\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]} e_{ni}^*| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{6}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\leq \; \sum_{j=1}^{m} \frac{6}{\varepsilon\sqrt{n}} E\Big(\Big|\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]} e_{ni}^*\Big|^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)^{1/2} P\Big(\Big|\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]} e_{ni}^*\Big| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{6}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)^{1/2}\\
&= \; \sum_{j=1}^{m} \frac{6}{\varepsilon\sqrt{n}} \Big(\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]} E(e_{ni}^{*2}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Big)^{1/2} P\Big(\Big|\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]} e_{ni}^*\Big| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{6}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)^{1/2}\\
&\leq \; \sum_{j=1}^{m} \frac{6}{\varepsilon\sqrt{n}} \sqrt{\frac{2n}{m} E(e_{n1}^{*2}|\widehat{\mathbf{e}}_n)} P\Big(\Big|\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]} e_{ni}^*\Big| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{6}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)^{1/2}\\
&= \; \frac{6}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{m} E(e_{n1}^{*2}|\widehat{\mathbf{e}}_n)} \sum_{j=1}^{m} P\Big(\Big|\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]} \big(e_{ni}^* - E(e_{n1}^*|\widehat{\mathbf{e}}_n)\big)\Big| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{6}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)^{1/2}\\
&\leq \; \frac{6}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{m} E(e_{n1}^{*2}|\widehat{\mathbf{e}}_n)} \cdot
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\Bigg(\sum_{j=1}^{m} P\Bigg(\Big|\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]}\Big(e^*_{ni}1_{\{|e^*_{ni}|\le\sqrt[5]{n}\}}-E(e^*_{n1}1_{\{|e^*_{n1}|\le\sqrt[5]{n}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Big)\Big|\ge\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{12}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)^{1/2}\\
&\quad+\sum_{j=1}^{m} P\Bigg(\Big|\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]}\Big(e^*_{ni}1_{\{|e^*_{ni}|>\sqrt[5]{n}\}}-E(e^*_{n1}1_{\{|e^*_{n1}|>\sqrt[5]{n}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Big)\Big|\ge\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{12}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)^{1/2}\Bigg)\\
=:&\ \frac{6}{\varepsilon}\sqrt{\frac{2}{m}E(e^{*\,2}_{n1}|\widehat{\mathbf{e}}_n)}\Big(p_3(m,n,\varepsilon)+p_4(m,n,\varepsilon)\Big),
\end{aligned}
$$

ab dem dritten Ungleichheitszeichen der Reihe nach nach (7.8), nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung, nach der Bienamyéschen Gleichung, weil $[n\frac{j}{m}]-[n\frac{j-1}{m}]\le\frac{n}{m}+1\le\frac{2n}{m}$ ist wegen $n\ge m$, wegen $E(e^*_{n1}|\widehat{\mathbf{e}}_n)=0$, und nach der C_r-Ungleichung mit $C_{1/2}=1$. Nun ist

$$
\begin{aligned}
&p_3(m,n,\varepsilon)\\
\le&\ \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{12^4}{\varepsilon^4n^2}E\Bigg(\Bigg(\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]}\Big(e^*_{ni}1_{\{|e^*_{ni}|\le\sqrt[5]{n}\}}-E(e^*_{n1}1_{\{|e^*_{n1}|\le\sqrt[5]{n}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Big)\Bigg)^4\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\right)^{1/2}\\
=&\ \sum_{j=1}^{m}\frac{12^2}{\varepsilon^2n}\Bigg(\sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]}E\Big(\Big(e^*_{ni}1_{\{|e^*_{ni}|\le\sqrt[5]{n}\}}-E(e^*_{n1}1_{\{|e^*_{n1}|\le\sqrt[5]{n}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Big)^4\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\qquad+3\sum_{\substack{i,i'=[n\frac{j-1}{m}]+1\\ i\ne i'}}^{[n\frac{j}{m}]}E\Big(\Big(e^*_{ni}1_{\{|e^*_{ni}|\le\sqrt[5]{n}\}}-E(e^*_{n1}1_{\{|e^*_{n1}|\le\sqrt[5]{n}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Big)^2\cdot\\
&\qquad\qquad\cdot\Big(e^*_{ni'}1_{\{|e^*_{ni'}|\le\sqrt[5]{n}\}}-E(e^*_{n1}1_{\{|e^*_{n1}|\le\sqrt[5]{n}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Big)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Bigg)^{1/2}\\
\le&\ \sum_{j=1}^{m}\frac{12^2}{\varepsilon^2n}\Bigg(\frac{2n}{m}E\Big(\Big(e^*_{n1}1_{\{|e^*_{n1}|\le\sqrt[5]{n}\}}-E(e^*_{n1}1_{\{|e^*_{n1}|\le\sqrt[5]{n}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Big)^4\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\qquad+3\frac{4n^2}{m^2}E\Big(\Big(e^*_{n1}1_{\{|e^*_{n1}|\le\sqrt[5]{n}\}}-E(e^*_{n1}1_{\{|e^*_{n1}|\le\sqrt[5]{n}\}}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Big)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)^2\Bigg)^{1/2}\\
\le&\ m\frac{12^2}{\varepsilon^2n}\left(\frac{2n}{m}16n^{4/5}+\frac{12n^2}{m^2}E\Big(e^{*\,2}_{n1}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)^2\right)^{1/2}\\
\le&\ \frac{12^2\cdot4\sqrt{2m}}{\varepsilon^2n^{1/10}}+\frac{12^2\cdot\sqrt{12}}{\varepsilon^2}E\Big(e^{*\,2}_{n1}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)
\end{aligned}
$$

nach der Markovungleichung, nach dem binomischen Satz und durch Weglassen von Summanden welche den Wert Null haben, durch Abschätzen der Anzahl der Summanden wie oben, und, beim letzten Schritt, nach der C_r-Ungleichung mit $C_{1/2}=1$.

Weiter ist für alle $\varepsilon > 0$, $m \in \mathbb{N}$ und $n \geq m$

$$\begin{aligned}
p_4(m,n,\varepsilon) &\leq \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{12^2}{\varepsilon^2 n} \sum_{i=[n\frac{j-1}{m}]+1}^{[n\frac{j}{m}]} \mathrm{Var}\Big(e^*_{ni} 1_{\{|e^*_{ni}| > \sqrt[5]{n}\}} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \right)^{1/2} \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{12^2}{\varepsilon^2 n} \frac{2n}{m} E\Big(e^{*2}_{n1} 1_{\{|e^*_{n1}| > \sqrt[5]{n}\}} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \right)^{1/2} \\
&= \frac{12\sqrt{2m}}{\varepsilon^2} E\Big(e^{*2}_{n1} 1_{\{|e^*_{n1}| > \sqrt[5]{n}\}} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big)^{1/2}
\end{aligned}$$

nach der Tschebyschevungleichung und mit der Abschätzung der Anzahl der Summanden wie oben.
Zusammen folgt

$$\begin{aligned}
&P\Bigg(\sup_{\substack{s,t\in(0,1] \\ |s-t|<1/m}} \frac{1}{\sqrt{n}} \Big| \sum_{i=1}^{[ns]} e^*_{ni} - \sum_{i=1}^{[nt]} e^*_{ni} \Big| \geq \varepsilon \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Bigg) \\
&\leq \frac{6}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{m} E(e^{*2}_{n1} | \widehat{\mathbf{e}}_n)} \Bigg(\frac{12^2 \cdot 4\sqrt{2m}}{\varepsilon^2 n^{1/10}} + \frac{12^2 \cdot \sqrt{12}}{\varepsilon^2} E\Big(e^{*2}_{n1} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\qquad + \frac{12\sqrt{2m}}{\varepsilon^2} E\Big(e^{*2}_{n1} 1_{\{|e^*_{n1}| > \sqrt[5]{n}\}} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big)^{1/2} \Bigg) \\
&\xrightarrow[n]{P} \frac{12^2 \cdot 6\sqrt{24}\sigma^3}{\varepsilon^3 \sqrt{m}} \xrightarrow[m]{} 0
\end{aligned}$$

nach (6.7) und (6.13). Damit ist der Beweis komplett.

7.11 Folgerung. Unter den Voraussetzungen (6.56) an die Funktion K gilt

$$\Big| E\Big(K(e^*_{n1}, e^*_{n2}) K(e^*_{n2}, e^*_{n3}) \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) - E\Big(K(e_1, e_2) K(e_2, e_3) \Big) \Big| = o_p(1). \tag{7.12}$$

Beweis: Dies folgt aus (5.27), ähnlich wie (6.65) aus (5.21) folgte.

7.13 Proposition. Unter den Bedingungen (6.56) und (4.1) (a) an die Funktion K gilt für alle $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
&\Bigg| r^*_n(s) - \frac{1}{n^2} \Bigg((n - [ns]) \sum_{j=1}^{[ns]} E\Big(K(e^*_{n0}, e^*_{nj}) \Big| e^*_{nj}, \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\qquad + [ns] \sum_{i=[ns]+1}^{n} E\Big(K(e^*_{ni}, e^*_{n0}) \Big| e^*_{ni}, \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \Bigg) \Bigg| \\
&\qquad\qquad = o_{p^*}(1/\sqrt{n}\,) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}
\end{aligned} \tag{7.14}$$

Beweis: Der Beweis geht ganz ähnlich wie der von (4.24). Sei für $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
\tilde{r}_n^*(s) &:= \frac{1}{n^2}\sum_{l=1}^{n} E\Big(\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]} K(e_{ni}^*, e_{nj}^*)\Big| e_{nl}^*, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}\Big(E\Big(K(e_{ni}^*, e_{nj}^*)\Big| e_{ni}^*, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) + E\Big(K(e_{ni}^*, e_{nj}^*)\Big| e_{nj}^*, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big),
\end{aligned}$$

wobei die Gleichheit aufgrund der Antisymmetrie von K gilt, die bedingt, dass alle anderen Summanden Null sind.

Also ist der zweite Ausdruck in (7.14) gleich der auf $\widehat{\mathbf{e}}_n$ bedingten Hájek-Projektion $\tilde{r}_n^*(s)$ von $r_n^*(s)$. Es folgt wie im Beweis von (4.24):

$$E\Big((r_n^*(s) - \tilde{r}_n^*(s))^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) = E\Big(r_n^*(s)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) - E\Big(\tilde{r}_n^*(s)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big).$$

Also gilt für alle $\varepsilon, \varepsilon' > 0$

$$\begin{aligned}
&P\Big(P\Big(|r_n^*(s) - \tilde{r}_n^*(s)| \geq \varepsilon/\sqrt{n}\,\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \geq \varepsilon'\Big) \\
&\leq\ P\Big(\frac{n}{\varepsilon^2}E\Big((r_n^*(s) - \tilde{r}_n^*(s))^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \geq \varepsilon'\Big) \\
&=\ P\Big(n\,E\Big(r_n^*(s)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) - n\,E\Big(\tilde{r}_n^*(s)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \geq \varepsilon^2\varepsilon'\Big).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die Behauptung, falls diese Wahrscheinlichkeiten eine Nullfolge bilden, falls also die Differenz der beiden mit n multiplizierten bedingten Erwartungswerte darin von der Ordnung $o_p(1)$ ist.

Nun ist

$$\begin{aligned}
&n\,E\Big(r_n^*(s)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= n^{-3}E\Big(\Big(\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]} K(e_{ni}^*, e_{nj}^*)\Big)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= n^{-3}\sum_{\substack{1\leq j,j'\leq[ns]\leq i,i'\leq n\\ \{i,j\}\cap\{i',j'\}\neq\emptyset}} E\Big(K(e_{ni}^*, e_{nj}^*)K(e_{ni'}^*, e_{nj'}^*)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= n^{-3}[ns](n-[ns])(n-[ns]-1)E\Big(K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)K(e_{n3}^*, e_{n2}^*)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad + n^{-3}[ns]([ns]-1)(n-[ns])E\Big(K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)K(e_{n1}^*, e_{n3}^*)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad + n^{-3}[ns](n-[ns])E\Big(K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big),
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
n\,E\Big(\tilde{r}_n^*(s)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) &= n^{-3}[ns]^2(n-[ns])E\Big(E\Big(K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)\Big|e_{n1}^*, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad + n^{-3}(n-[ns])^2[ns]E\Big(E\Big(K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)\Big|e_{n2}^*, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big),
\end{aligned}$$

also

$$
\begin{aligned}
&\Big| n\,E\Big(r_n^*(s)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) - n\,E\Big(\tilde{r}_n^*(s)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big| \\
&\quad\leq\ n^{-3}[ns](n-[ns])\Big|E\Big(K(e_{n1}^*,e_{n2}^*)K(e_{n3}^*,e_{n2}^*)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big| \\
&\qquad + n^{-3}[ns](n-[ns])\Big|E\Big(K(e_{n1}^*,e_{n2}^*)K(e_{n1}^*,e_{n3}^*)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big| \\
&\qquad + n^{-3}[ns](n-[ns])E\Big(K(e_{n1}^*,e_{n2}^*)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad\leq\ \frac{3}{n}E\Big(K(e_{n1}^*,e_{n2}^*)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad=\ O_p(1/n)
\end{aligned}
$$

nach (6.68). Damit folgt die Behauptung.

7.15 Proposition. Sei $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ eine Borelfunktion mit der Eigenschaft $E(L(e_1,e_2)^2)<\infty$, und sei $(Z_{ni})_{i=1,\dots,n;n\in\mathbb{N}}$ ein Dreiecksschema von Zufallsvariablen mit $\sum_{i=1}^n Z_{ni}=O_p(n)$. Dann gilt für alle $\alpha,\varepsilon>0$

$$
\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n L(e_i,e_j)^2 1_{\{Z_{ni}\geq\varepsilon n^\alpha\}} = o_p(1). \tag{7.16}
$$

Beweis: Für alle $\alpha,\varepsilon,\varepsilon'>0$ ist

$$
\begin{aligned}
&P\Big(\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n L(e_i,e_j)^2 1_{\{Z_{ni}\geq\varepsilon n^\alpha\}}\geq\varepsilon' n^2\Big) \\
&\leq\ P\Big(\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n L(e_i,e_j)^2 1_{\{L(e_i,e_j)^2>n^{\alpha/2}\}}1_{\{Z_{ni}\geq\varepsilon n^\alpha\}}\geq\frac{\varepsilon'}{2}n^2\Big) \\
&\qquad + P\Big(\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n L(e_i,e_j)^2 1_{\{L(e_i,e_j)^2\leq n^{\alpha/2}\}}1_{\{Z_{ni}\geq\varepsilon n^\alpha\}}\geq\frac{\varepsilon'}{2}n^2\Big) \\
&\leq\ P\Big(\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n L(e_i,e_j)^2 1_{\{L(e_i,e_j)^2>n^{\alpha/2}\}}\geq\frac{\varepsilon'}{2}n^2\Big) \\
&\qquad + P\Big(\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n n^{\alpha/2}1_{\{Z_{ni}\geq\varepsilon n^\alpha\}}\geq\frac{\varepsilon'}{2}n^2\Big) \\
&\leq\ \frac{2}{\varepsilon' n^2}\sum_{i=1}^n\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^n E\Big(L(e_i,e_j)^2 1_{\{L(e_i,e_j)^2>n^{\alpha/2}\}}\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ P\Big(\sum_{i=1}^n \frac{Z_{ni}}{\varepsilon n^\alpha} 1_{\{Z_{ni}\geq \varepsilon n^\alpha\}} \geq \frac{\varepsilon'}{2} n^{1-\alpha/2}\Big) \\
\leq\ & \frac{2}{\varepsilon'} E\Big(L(e_1,e_2)^2 1_{\{L(e_1,e_2)^2 > n^{\alpha/2}\}}\Big) \ + \ P\Big(\sum_{i=1}^n Z_{ni} \geq \frac{\varepsilon\varepsilon'}{2} n^{1+\alpha/2}\Big) \ \underset{n}{\longrightarrow} \ 0,
\end{aligned}
$$

wobei wir im ersten Schritt die Summanden nach den Werten von $L(e_i,e_j)$ aufgeteilt haben, dann die Summanden nach oben abgeschätzt haben, dann die Markovungleichung benutzt und nochmal die Summanden nach oben abgeschätzt haben, und am Ende die Konvergenz gegen Null nach dem Satz von Lebesgue und nach Voraussetzung gilt.

7.17 Folgerung. Unter den Voraussetzungen (6.56) an K gilt für alle $\alpha, \varepsilon > 0$

$$
E\Big(E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|e^*_{n1},\widehat{\mathbf{e}}_n)^2 1_{\{E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|e^*_{n1},\widehat{\mathbf{e}}_n)^2 \geq \varepsilon n^\alpha\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) = o_p(1). \tag{7.18}
$$

Beweis: Nach der Jensenschen Ungleichung und der C_r-Ungleichung mit $C_2 = 2$ ist für alle $\alpha,\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&E\Big(E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|e^*_{n1},\widehat{\mathbf{e}}_n)^2 1_{\{E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|e^*_{n1},\widehat{\mathbf{e}}_n)^2 \geq \varepsilon n^\alpha\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\leq \ E\Big(E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})^2|e^*_{n1},\widehat{\mathbf{e}}_n) 1_{\{E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})^2|e^*_{n1},\widehat{\mathbf{e}}_n) \geq \varepsilon n^\alpha\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= \ \frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n \frac{1}{1+\hat t_{nn}\hat e_{ni}} \frac{1}{1+\hat t_{nn}\hat e_{nj}} K(\hat e_{ni},\hat e_{nj})^2 1_{\{E(K(\hat e_{ni},e^*_{n1})^2|\widehat{\mathbf{e}}_n)\geq \varepsilon n^\alpha\}} \\
&\leq \ \max_{1\leq i,j\leq n} \Big|\frac{1}{1+\hat t_{nn}\hat e_{ni}} \frac{1}{1+\hat t_{nn}\hat e_{nj}} - 1\Big| \frac{1}{n^2}\sum_{\substack{k,l=1\\ k\neq l}}^n K(\hat e_{nk},\hat e_{nl})^2 \\
&\quad + \frac{2}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n \Big|K(\hat e_{ni},\hat e_{nj}) - K(e_i,e_j)\Big|^2 \\
&\quad + \frac{2}{n^2}\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^n K(e_i,e_j)^2 1_{\{E(K(\hat e_{ni},e^*_{n1})^2|\widehat{\mathbf{e}}_n)\geq \varepsilon n^\alpha\}},
\end{aligned}
$$

wovon die ersten beiden Summanden wieder nach (5.22) und (6.63) sowie nach (5.16) von der Ordnung $o_p(1)$ sind, und der letzte nach (7.16) mit $L = K$ und wegen

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n E(K(\hat e_{ni},e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n)^2 \ &\leq \ \sum_{i=1}^n E(K(\hat e_{ni},e^*_{n1})^2|\widehat{\mathbf{e}}_n) \\
= \ \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^n \frac{1}{n}\frac{1}{1+\hat t_{nn}\hat e_{nj}} K(\hat e_{ni},\hat e_{nj})^2 &
\end{aligned}
$$

$$\leq \max_{1\leq k\leq n} \frac{1}{1+\hat{t}_{nn}\hat{e}_{nk}} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n} K(\hat{e}_{ni},\hat{e}_{nj})^2 \quad = \quad O_p(n)$$

nach (3.42) und (6.63).

7.19 Definition. Für $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1,\dots,n$ seien J_n^*, $J_n^{*\prime}$, $Y_{ni}^* : [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} J_n^*(s) \quad &:= \quad \frac{1}{n^{3/2}}\Bigg(\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]} K(e_{ni}^*, e_{nj}^*) \\ &\qquad - \sum_{l=1}^{n} e_{nl}^*\Big(1_{\{l\leq[ns]\}}(n-[ns])\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2} \\ &\qquad\qquad + 1_{\{l>[ns]\}}[ns]\frac{E(K(e_1,e_2)e_1)}{\sigma^2}\Big)\Bigg), \\ Y_{ni}^*(s) \quad &:= \quad \frac{1}{\sqrt{n}}\Big(1_{\{i\leq[ns]\}}\frac{n-[ns]}{n} - 1_{\{i>[ns]\}}\frac{[ns]}{n}\Big)\cdot \\ &\qquad \cdot\Big(E\Big(K(e_{n0}^*, e_{ni}^*)\Big| e_{ni}^*, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) - \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}e_{ni}^*\Big) \end{aligned}$$

und

$$J_n^{*\prime}(s) \quad := \quad \sum_{i=1}^{n} Y_{ni}^*(s).$$

7.20 Proposition. Seien $k \in \mathbb{N}$, $s_1,\dots,s_k \in [0,1]$ und

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_n^* \quad &:= \quad \Big(J_n^*(s_1),\dots,J_n^*(s_k)\Big), \\ \mathbf{Y}_{ni}^* \quad &:= \quad \Big(Y_{ni}^*(s_1),\dots,Y_{ni}^*(s_k)\Big) \quad \text{für } i=1,\dots,n, \\ \mathbf{J}_n^{*\prime} \quad &:= \quad \Big(J_n^{*\prime}(s_1),\dots,J_n^{*\prime}(s_k)\Big) \end{aligned}$$

sowie

$$\mathbf{\Gamma} := \left(\Big(s_i \wedge s_j - s_is_j\Big)\Big(E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big) - \frac{1}{\sigma^2}E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big)^2\Big)\right)_{i,j=1,\dots,k}.$$

Dann gilt unter den Voraussetzungen (6.56) und (4.1)

(7.21) $$\|\mathbf{J}_n^* - \mathbf{J}_n^{*\prime}\| = o_{p^*}(1) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ P\text{-stoch.}$$

und

(7.22) $$\mathbf{J}_n^{*\prime} \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N(0,\mathbf{\Gamma}) \text{ unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n).$$

Beweis: Zunächst folgt (7.21) aus (7.14), wie bei (4.28).
Für (7.22) verwenden wir wieder den mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz in Bootstrapform. Für die Normierungsbedingung ist zu zeigen:

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}^*_{ni}|\widehat{\mathbf{e}}_n) \xrightarrow[n]{P} \mathbf{\Gamma},$$

was wir elementweise nachrechnen.
Es gilt

$$\begin{aligned}
\eta_n \quad &:= \quad \mathrm{Var}\Big(E\Big(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})\Big|e^*_{n2}, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big) - \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2} e^*_{n2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&= \quad E\Big(E\Big(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})\Big|e^*_{n2}, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\qquad - 2\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2} E\Big(E\Big(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})\Big|e^*_{n2}, \widehat{\mathbf{e}}_n\Big)e^*_{n2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\qquad + E(e^{*2}_{n1}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)^2}{\sigma^4} \\
&\xrightarrow[n]{P} \quad E\Big(K(e_1,e_2)K(e_3,e_2)\Big) \\
&\qquad - 2\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2} E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big) \\
&\qquad + \sigma^2 \frac{E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big)^2}{\sigma^4} \\
&= \quad E\Big(K(e_1,e_2)K(e_3,e_2)\Big) - \frac{1}{\sigma^2}E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big)^2 \quad =: \quad \eta
\end{aligned}$$

nach (7.12), (6.65) und der Symmetrie in Argumenten von K in der Voraussetzung (6.56) sowie nach (6.7). Hieraus folgt für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$

$$\begin{aligned}
\Big(\sum_{l=1}^{n} \mathrm{Cov}(\mathbf{Y}^*_{nl}|\widehat{\mathbf{e}}_n)\Big)_{i,j} \quad &= \quad \sum_{l=1}^{n} \mathrm{Cov}(Y^*_{nl}(s_i), Y^*_{nl}(s_j)|\widehat{\mathbf{e}}_n) \\
&\xrightarrow[n]{P} \quad (s \wedge t - st)\eta
\end{aligned}$$

genau wie im Beweis von (4.31). Also gilt die Normierungsbedingung.
Kommen wir nun zur Lindebergbedingung

$$\sum_{i=1}^{n} E\Big(\|\mathbf{Y}^*_{ni}\|^2 1_{\{\|\mathbf{Y}^*_{ni}\|^2 \geq \varepsilon\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) = o_p(1) \quad \text{für alle } \varepsilon > 0.$$

Wir haben für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i = 1, \ldots, n$

$$\|\mathbf{Y}^*_{ni}\|^2 \quad \leq \quad \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{k}\Big(E(K(e^*_{n0}, e^*_{ni})|e^*_{ni}, \widehat{\mathbf{e}}_n) - \frac{1}{\sigma^2}E(K(e_1,e_2)e_2)e^*_{ni}\Big)^2$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{k}{n}\Big(2E(K(e^*_{n0},e^*_{ni})|e^*_{ni},\widehat{\mathbf{e}}_n)^2 + 2\frac{1}{\sigma^4}E(K(e_1,e_2)e_2)^2 e^{*\,2}_{ni}\Big)\\
&=: M(n,i),
\end{aligned}
$$

also

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^n E\Big(\|\mathbf{Y}^*_{ni}\|^2 1_{\{\|\mathbf{Y}^*_{ni}\|^2\ge\varepsilon\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\quad\le \sum_{i=1}^n E\Big(M(n,i)1_{\{M(n,i)\ge\varepsilon\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\quad= n\,E\Big(M(n,1)1_{\{M(n,1)\ge\varepsilon\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\quad= 2k\,E\bigg(\Big(E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|e^*_{n2},\widehat{\mathbf{e}}_n)^2 + \frac{1}{\sigma^4}E(K(e_1,e_2)e_2)^2 e^{*\,2}_{n2}\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot 1_{\left\{E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|e^*_{n2},\widehat{\mathbf{e}}_n)^2+\frac{1}{\sigma^4}E(K(e_1,e_2)e_2)^2e^{*\,2}_{n2}\ge\frac{\varepsilon}{2k}n\right\}}\bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\bigg)\\
&\quad\le 4k\,E\bigg(\Big(E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|e^*_{n2},\widehat{\mathbf{e}}_n)^2 \vee \frac{1}{\sigma^4}E(K(e_1,e_2)e_2)^2 e^{*\,2}_{n2}\Big)\cdot\\
&\qquad\qquad \cdot 1_{\left\{E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|e^*_{n2},\widehat{\mathbf{e}}_n)^2\vee\frac{1}{\sigma^4}E(K(e_1,e_2)e_2)^2e^{*\,2}_{n2}\ge\frac{\varepsilon}{4k}n\right\}}\bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\bigg)\\
&\quad\le 4k\,E\bigg(E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|e^*_{n2},\widehat{\mathbf{e}}_n)^2\cdot 1_{\left\{E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|e^*_{n2},\widehat{\mathbf{e}}_n)^2\ge\frac{\varepsilon}{4k}n\right\}}\\
&\qquad\qquad \vee\frac{1}{\sigma^4}E(K(e_1,e_2)e_2)^2e^{*\,2}_{n2}\cdot 1_{\left\{\frac{1}{\sigma^4}E(K(e_1,e_2)e_2)^2e^{*\,2}_{n2}\ge\frac{\varepsilon}{4k}n\right\}}\bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\bigg)\\
&\quad= o_p(1)
\end{aligned}
$$

nach (7.18) und (6.13). Also ist auch die Lindebergbedingung erfüllt.

7.23 Proposition. Unter den Voraussetzungen (4.1) und (6.56) gilt für alle $\varepsilon,\varepsilon'>0$

(7.24) $$\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty} P\Big(P(\mathrm{w}_\delta(J^*_n)\ge\varepsilon|\widehat{\mathbf{e}}_n)\ge\varepsilon'\Big)=0.$$

Beweis: Für alle $\delta>0$ gilt

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w}_\delta(J^*_n) &\le \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{n^{3/2}}\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big)\\
&\quad+\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}\ \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=1}^{[ns]}\frac{n-[ns]}{n}\,e^*_{nl}\Big)\\
&\quad+\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}\ \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{l=[ns]+1}^{n}\frac{[ns]}{n}\,e^*_{nl}\Big)\\
&=: w_1(n,\delta)+\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}w_2(n,\delta)+\frac{E(K(e_1,e_2)e_2)}{\sigma^2}w_3(n,\delta).
\end{aligned}
$$

Mit einer ähnlichen Begründung wie von $w_1(n,\delta) \sim w_2(n,\delta)$ im Beweis von (4.11) gilt hier $w_3(n,\delta) \sim w_2(n,\delta)$, so dass es ausreicht $w_1(n,\delta)$ und $w_2(n,\delta)$ zu betrachten. Es gilt

$$w_2(n,\delta) \quad \leq \quad \mathrm{w}_\delta\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[ns]} e^*_{ni}\Big) + \Big(\delta + \frac{1}{n}\Big)\frac{1}{\sqrt{n}} \max_{1\leq k\leq n}\Big|\sum_{i=1}^{k} e^*_{ni}\Big|,$$

mit einer ähnlichen Rechnung wie für $w_4(n,\delta)$ aus dem Beweis von (4.11), und diese beiden Summanden wurden, abgesehen von einem konstanten Faktor, schon unter den Namen $w_9(n,\delta)$ und $w_8(n,\delta)$ im Beweis von (7.10) behandelt.
Wir müssen uns nun noch um $w_1(n,\delta)$ kümmern, wofür für alle $\varepsilon, \varepsilon' > 0$

$$\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\Big(P(w_1(n,1/m) \geq \varepsilon | \widehat{\mathbf{e}}_n) \geq \varepsilon'\Big) = 0$$

zu beweisen ist. Da es, ähnlich wie im Beweis von (7.10), für alle $m \in \mathbb{N}$ für alle $s,t \in (0,1]$ mit $|s-t| < 1/m$ ein eindeutiges $k \in \{1,\ldots,m\}$ gibt mit $\frac{k-1}{m} < s \leq \frac{k}{m}$, und dann wieder entweder $\frac{k-1}{m} < t \leq \frac{k}{m}$ gilt, was

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]} K(e^*_{ni},e^*_{nj}) - \sum_{i=[nt]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[nt]} K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]} K(e^*_{ni},e^*_{nj}) - \sum_{i=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[n\frac{k-1}{m}]} K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big| \\
&\quad + \Big|\sum_{i=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[n\frac{k-1}{m}]} K(e^*_{ni},e^*_{nj}) - \sum_{i=[nt]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[nt]} K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big| \\
&\leq 2 \sup_{s\in(\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}]} \Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]} K(e^*_{ni},e^*_{nj}) - \sum_{i=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[n\frac{k-1}{m}]} K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|
\end{aligned}$$

impliziert, oder $\frac{k}{m} < t \leq \frac{k+1}{m}$ gilt, was

$$\begin{aligned}
&\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]} K(e^*_{ni},e^*_{nj}) - \sum_{i=[nt]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[nt]} K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big| \\
&\leq \Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]} K(e^*_{ni},e^*_{nj}) - \sum_{i=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[n\frac{k-1}{m}]} K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big| \\
&\quad + \Big|\sum_{i=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[n\frac{k-1}{m}]} K(e^*_{ni},e^*_{nj}) - \sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[n\frac{k}{m}]} K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|
\end{aligned}$$

$$+\Big|\sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[n\frac{k}{m}]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})-\sum_{i=[nt]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[nt]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|$$

$$\leq\ 3\max_{l=1,\dots,m}\sup_{s\in(\frac{l-1}{m},\frac{l}{m}]}\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})-\sum_{i=[n\frac{l-1}{m}]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[n\frac{l-1}{m}]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|$$

impliziert, erhalten wir auch hier für alle $m\in\mathbb{N}$

$$\sup_{\substack{s,t\in(0,1]\\|s-t|<1/m}}\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})-\sum_{i=[nt]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[nt]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|$$

$$\leq\ 3\max_{k=1,\dots,m}\sup_{s\in(\frac{k-1}{m},\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})-\sum_{i=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[n\frac{k-1}{m}]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|.$$

Es gilt also für alle $m,n\in\mathbb{N}$ und $\varepsilon>0$

$$\begin{aligned}
&P\Big(w_1(n,1/m)\geq\varepsilon\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&=\ P\Bigg(\sup_{\substack{s,t\in(0,1]\\|s-t|<1/m}}\Big|\sum_{i=[ns]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[ns]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})-\sum_{i=[nt]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[nt]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|\geq\varepsilon n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&\leq\ \sum_{k=1}^{m}P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=1}^{l}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\\
&\qquad\qquad-\sum_{i=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{n}\sum_{j=1}^{[n\frac{k-1}{m}]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|\geq\frac{\varepsilon}{3}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&=\ \sum_{k=1}^{m}P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{i=l+1}^{n}\sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\\
&\qquad\qquad-\sum_{i=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l}\sum_{j=1}^{[n\frac{k-1}{m}]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|\geq\frac{\varepsilon}{3}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&\leq\ \sum_{k=1}^{m}P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n}\sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|\geq\frac{\varepsilon}{9}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{m}P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{i=l+1}^{[n\frac{k}{m}]}\sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|\geq\frac{\varepsilon}{9}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&\quad+\sum_{k=1}^{m}P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{i=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l}\sum_{j=1}^{[n\frac{k-1}{m}]}K(e^*_{ni},e^*_{nj})\Big|\geq\frac{\varepsilon}{9}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&=:\ p_1(m,n,\varepsilon)+p_2(m,n,\varepsilon)+p_3(m,n,\varepsilon),
\end{aligned}$$

wobei wir beim ersten Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass man die Null aus dem Indexbereich weglassen kann, da es für jedes Paar (s,t) aus dem Indexbereich des Supremums, das mindestens eine Null enthält, es ein anderes Paar gibt, bei dem Nullen durch $1/2m \wedge 1/2n$ ersetzt sind, und für das die Zufallsvariable in dem Supremum denselben Wert annimmt, beim nächsten Schritt die obige Ungleichung angewandt haben, danach doppelte Summanden aus der Differenz getilgt haben, und schließlich beim letzten Schritt die Dreiecksungleichung verwandt haben. Sei für alle $n \in \mathbb{N}$ und $i,j = 1,\ldots,n$

$$H^*_{n,i,j} := K(e^*_{ni}, e^*_{nj}) - E(K(e^*_{ni}, e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{ni}) - E(K(e^*_{nn}, e^*_{nj})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{nj})$$

und für alle $m,n \in \mathbb{N}$, $k = 1,\ldots,m$ und $l = [n\frac{k-1}{m}]+1,\ldots,[n\frac{k}{m}]$

$$S^{k,m,n}_l := \sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n} \sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l} H^*_{n,i,j}$$

und

$$\mathcal{F}^{k,m,n}_l := \sigma\Big(\widehat{\mathbf{e}}_n; e^*_{n1},\ldots,e^*_{nl}; e^*_{n\,[n\frac{k}{m}]+1},\ldots,e^*_{nn}\Big).$$

Dann ist für alle $m,n \in \mathbb{N}$ und $k = 1,\ldots,m$ $(S^{k,m,n}_l, \mathcal{F}^{k,m,n}_l)_{l=[n\frac{k-1}{m}]+1,\ldots,[n\frac{k}{m}]}$ ein Martingal, denn es ist $(S^{k,m,n}_l)_{l=[n\frac{k-1}{m}]+1,\ldots,[n\frac{k}{m}]}$ an $(\mathcal{F}^{k,m,n}_l)_{l=[n\frac{k-1}{m}]+1,\ldots,[n\frac{k}{m}]}$ adaptiert, und für alle $l = [n\frac{k-1}{m}]+1,\ldots,[n\frac{k}{m}]-1$ gilt

$$\begin{aligned}
&E\Big(S^{k,m,n}_{l+1}\Big|\mathcal{F}^{k,m,n}_l\Big)\\
&\quad= \sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n} \sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l} E\Big(K(e^*_{ni}, e^*_{nj}) - E(K(e^*_{ni}, e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{ni})\\
&\qquad\qquad\qquad - E(K(e^*_{nn}, e^*_{nj})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{nj})\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{ni}, e^*_{nj}\Big)\\
&\qquad + \sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n} E\Big(K(e^*_{ni}, e^*_{nl+1}) - E(K(e^*_{ni}, e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{ni})\\
&\qquad\qquad\qquad - E(K(e^*_{nn}, e^*_{nl+1})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{nl+1})\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{ni}\Big)\\
&\quad= S^{k,m,n}_l + 0.
\end{aligned}$$

Also erhalten wir für alle $m,n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ und alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&p_1(m,n,\varepsilon)\\
&\quad\leq \sum_{k=1}^{m} P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Bigg|\sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n} \sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l} H^*_{n,i,j}\Bigg| \geq \frac{\varepsilon}{27}n^{3/2}\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&\qquad + \sum_{k=1}^{m} P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Bigg|\sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n} \sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l} E(K(e^*_{ni}, e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{ni})\Bigg|\\
&\qquad\qquad \geq \frac{\varepsilon}{27}n^{3/2}\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\sum_{k=1}^{m} P\Big(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\le[n\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n}\ \sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l} E(K(e^*_{nn},e^*_{nj})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{nj})\Big| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ge \frac{\varepsilon}{27}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{m} P\Big(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\le[n\frac{k}{m}]}\Big|S_l^{k,m,n}\Big| \ge \frac{\varepsilon}{27}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&+\sum_{k=1}^{m} P\Big(\Big([n\tfrac{k}{m}]-[n\tfrac{k-1}{m}]\Big)\Big|\sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n} E(K(e^*_{ni},e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{ni})\Big| \ge \frac{\varepsilon}{27}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&+\sum_{k=1}^{m} P\Big(\Big(n-[n\tfrac{k}{m}]\Big)\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\le[n\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l} E(K(e^*_{nn},e^*_{nj})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{nj})\Big| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ge \frac{\varepsilon}{27}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
\le \quad & \sum_{k=1}^{m} P\Big(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\le[n\frac{k}{m}]}\Big|S_l^{k,m,n}\Big| \ge \frac{\varepsilon}{27}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&+\sum_{k=1}^{m} P\Big(\frac{2n}{m}\Big|\sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n} E(K(e^*_{ni},e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{ni})\Big| \ge \frac{\varepsilon}{27}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&+\sum_{k=1}^{m} P\Big(n\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\le[n\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l} E(K(e^*_{nn},e^*_{nj})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{nj})\Big| \ge \frac{\varepsilon}{27}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
=: \quad & p_4(m,n,\varepsilon)+p_5(m,n,\varepsilon)+p_6(m,n,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Nach der Kolmogorovschen Maximalungleichung für Martingale ist

$$
\begin{aligned}
& p_4(m,n,\varepsilon) \\
&\quad\le \sum_{k=1}^{m}\frac{27^2}{\varepsilon^2 n^3}E\Big({S_{[n\frac{k}{m}]}^{k,m,n}}^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad= \sum_{k=1}^{m}\frac{27^2}{\varepsilon^2 n^3}\sum_{i,i'=[n\frac{k}{m}]+1}^{n}\ \sum_{j,j'=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{[n\frac{k}{m}]} E\Big(H^*_{n,i,j}H^*_{n,i',j'}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad= \sum_{k=1}^{m}\frac{27^2}{\varepsilon^2 n^3}\sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n}\ \sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{[n\frac{k}{m}]} E\Big({H^*_{n,i,j}}^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad\le \sum_{k=1}^{m}\frac{27^2}{\varepsilon^2 n^3}\,n\,\frac{2n}{m}\,E\Big({H^*_{n,1,2}}^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad\le \frac{2\cdot 27^2}{\varepsilon^2 n}E\Big(3K(e^*_{n1},e^*_{n2})^2+3E\Big(K(e^*_{n1},e^*_{n2})\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n1}\Big)^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +3E\Big(K(e^*_{n1},e^*_{n2})\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n2}\Big)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad\le \frac{2\cdot 3^5}{\varepsilon^2 n}E\Big(K(e^*_{n1},e^*_{n2})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big),
\end{aligned}
$$

wobei wir beim vorletzten Schritt die Ungleichung vom arithmetischen und quadratischen Mittel benutzt haben und danach die Jensensche Ungleichung. Beim zweiten Gleichheitszeichen waren die weggelassenen Summanden alle Null, denn es gilt für alle $n \geq 4$

$$E(H^*_{n,3,1}H^*_{n,4,2}|\widehat{\mathbf{e}}_n) \quad = \quad E(H^*_{n,3,1}|\widehat{\mathbf{e}}_n)^2 \quad = \quad 0,$$

und, wie man leicht nachrechnet,

$$E(H^*_{n,3,1}H^*_{n,3,2})|\widehat{\mathbf{e}}_n) \quad = \quad 0$$

sowie

$$E(H^*_{n,2,1}H^*_{n,3,1})|\widehat{\mathbf{e}}_n) \quad = \quad 0.$$

Weiter ist nach der Tschebyschevungleichung

$$\begin{aligned} p_5(m,n,\varepsilon) &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{4\cdot 27^2}{\varepsilon^2 m^2 n} \sum_{i=[n\frac{k}{m}]+1}^{n} E\Big(E(K(e^*_{ni},e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{ni})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{4\cdot 27^2}{\varepsilon^2 m^2 n}\; n\; E\Big(E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n1})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\ &= \frac{4\cdot 27^2}{\varepsilon^2 m} E\Big(E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n1})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big). \end{aligned}$$

Eine analoge Rechnung wie bei der Betrachtung von w_9 aus dem Beweis von Proposition 7.9 ergibt

$$\begin{aligned} &p_6(m,n,\varepsilon) \\ &= \sum_{k=1}^{m} P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Bigg|\sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l} E(K(e^*_{nn},e^*_{nj})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{nj})\Bigg| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{27}\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg) \\ &\leq \frac{54}{\varepsilon}\Big(\frac{2}{m}E\Big(E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n2})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big)^{1/2}\cdot\Big(p_7(m,n,\varepsilon)+p_8(m,n,\varepsilon)\Big), \end{aligned}$$

mit, wenn wir zur Abkürzung mit f die Faktorisierung des bedingten Erwartungswerts $E(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n2})$ bezeichnen,

$$\begin{aligned} &p_7(m,n,\varepsilon) \\ &:= \sum_{k=1}^{m} P\Bigg(\Bigg|\sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{[n\frac{k}{m}]}\Big(f(\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{nj})1_{\{|f(\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{nj})|\leq\sqrt[5]{n}\}} \\ &\qquad - E\Big(f(\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n1})1_{\{|f(\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n1})|\leq\sqrt[5]{n}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big)\Bigg| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{108}\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg) \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
&p_8(m,n,\varepsilon)\\
&:= \sum_{k=1}^{m} P\Bigg(\Bigg|\sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{[n\frac{k}{m}]} \Big(f(\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{nj})1_{\{|f(\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{nj})|>\sqrt[5]{n}\}}\\
&\qquad - E\Big(f(\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{n1})1_{\{|f(\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{n1})|>\sqrt[5]{n}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big)\Bigg| \geq \frac{\varepsilon\sqrt{n}}{108}\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg).
\end{aligned}
$$

Wie bei der Abschätzung des dort $p_3(m,n,\varepsilon)$ genannten Ausdrucks im Beweis von Proposition 7.9 erhält man

$$
p_7(m,n,\varepsilon) \leq \frac{108^2\cdot 4\sqrt{2m}}{\varepsilon^2 n^{1/10}} + \frac{12^2\cdot 2\sqrt{6}}{\varepsilon^2} E\Big(E(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{n2})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)
$$

und analog zu dem dortigen $p_4(m,n,\varepsilon)$

$$
p_8(m,n,\varepsilon) \leq \frac{108^2\sqrt{2m}}{\varepsilon^2} E\Big(E(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{n2})^2 1_{\{E(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{n2})^2>\sqrt[5]{n}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big).
$$

Insgesamt haben wir damit für alle $\varepsilon > 0$ und $m \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
&p_1(m,n,\varepsilon)\\
\leq\; & \frac{2\cdot 3^5}{\varepsilon^2 n} E\Big(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) + \frac{4\cdot 27^2}{\varepsilon^2 m} E\Big(E(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{n1})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&+ \frac{54}{\varepsilon}\Big(\frac{2}{m} E\Big(E(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{n2})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Big)^{1/2}\cdot\\
&\quad\cdot\Bigg(\frac{108^2\cdot 4\sqrt{2m}}{\varepsilon^2 n^{1/10}} + \frac{12^2\cdot 2\sqrt{6}}{\varepsilon^2} E\Big(E(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{n2})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\qquad + \frac{108^2\sqrt{2m}}{\varepsilon^2} E\Big(E(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{n2})^2 1_{\{E(K(e^*_{n1}, e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n, e^*_{n2})^2>\sqrt[5]{n}\}}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\Bigg)\\
\xrightarrow[n]{P}\; & \Big(\frac{4\cdot 27^2}{\varepsilon^2 m} + \frac{108\cdot 12^{5/2}}{\varepsilon^3\sqrt{m}}\Big) E\Big(K(e_1,e_2)K(e_3,e_2)\Big) \;\xrightarrow[m]{}\; 0
\end{aligned}
$$

nach (6.68), (7.12) und (7.18).

Kommen wir zu $p_2(m,n,\varepsilon)$. Indem wir wieder Summanden in die Doppelsumme einschieben und die Dreiecksungleichung anwenden, ähnlich wie bei der Abschätzung von p_1 im Beweis von (2.57), erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&p_2(m,n,\varepsilon)\\
\leq\; & \sum_{k=1}^{m} P\Bigg(2 \max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]} \Bigg|\sum_{[n\frac{k-1}{m}]<j<i\leq l} K(e^*_{ni}, e^*_{nj})\Bigg| \geq \frac{\varepsilon}{18} n^{3/2}\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&+ \sum_{k=1}^{m} P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]} \Bigg|\sum_{l<j<i\leq[n\frac{k}{m}]} K(e^*_{ni}, e^*_{nj})\Bigg| \geq \frac{\varepsilon}{18} n^{3/2}\Bigg|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
=:\; & p_9(m,n,\varepsilon) + p_{10}(m,n,\varepsilon).
\end{aligned}
$$

Sei für alle $m, n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \ldots, m$ und $l = [n\frac{k-1}{m}] + 1, \ldots, [n\frac{k}{m}]$

$$\tilde{S}_l^{k,m,n} := \sum_{[n\frac{k-1}{m}]<j<i\leq l} \Big(K(e_{ni}^*, e_{nj}^*) - E(K(e_{nn}^*, e_{nj}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{nj}^*)\Big)$$

und

$$\tilde{\mathcal{F}}_l^{k,m,n} := \sigma\Big(\widehat{\mathbf{e}}_n; e^*_{n[n\frac{k-1}{m}]+1}, \ldots, e^*_{nl}\Big).$$

Dann ist wieder für alle natürlichen Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ und $k = 1, \ldots, m$ die Folge $(\tilde{S}_l^{k,m,n}, \tilde{\mathcal{F}}_l^{k,m,n})_{l=[n\frac{k-1}{m}]+1,\ldots,[n\frac{k}{m}]}$ ein Martingal, denn $\tilde{S}_l^{k,m,n}$ ist für alle $l = [n\frac{k-1}{m}] + 1, \ldots, [n\frac{k}{m}]$ bezüglich $\tilde{\mathcal{F}}_l^{k,m,n}$ messbar, und für alle $l = [n\frac{k-1}{m}] + 1, \ldots, [n\frac{k}{m}] - 1$ gilt

$$\begin{aligned}
&E\Big(\tilde{S}_{l+1}^{k,m,n}\Big|\tilde{\mathcal{F}}_l^{k,m,n}\Big)\\
&= \sum_{[n\frac{k-1}{m}]<j<i\leq l} E\Big(K(e_{ni}^*, e_{nj}^*) - E(K(e_{nn}^*, e_{nj}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{nj}^*)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{ni}^*, e_{nj}^*\Big)\\
&\quad + \sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l} E\Big(K(e_{nl+1}^*, e_{nj}^*) - E(K(e_{nn}^*, e_{nj}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{nj}^*)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{nj}^*\Big)\\
&= \tilde{S}_l^{k,m,n} + 0.
\end{aligned}$$

Also ist für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ und alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&p_9(m, n, \varepsilon)\\
&\leq \sum_{k=1}^{m} P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{[n\frac{k-1}{m}]<j<i\leq l}\Big(K(e_{ni}^*, e_{nj}^*) - E(K(e_{nn}^*, e_{nj}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{nj}^*)\Big)\Big|\\
&\qquad\qquad \geq \frac{\varepsilon}{72}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{[n\frac{k-1}{m}]<j<i\leq l} E(K(e_{nn}^*, e_{nj}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{nj}^*)\Big| \geq \frac{\varepsilon}{72}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&\leq \sum_{k=1}^{m} P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Big|\tilde{S}_l^{k,m,n}\Big| \geq \frac{\varepsilon}{72}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} P\Bigg(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\leq[n\frac{k}{m}]}\Big([n\tfrac{k}{m}] - [n\tfrac{k-1}{m}]\Big)\Big|\sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{l} E(K(e_{nn}^*, e_{nj}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{nj}^*)\Big|\\
&\qquad\qquad \geq \frac{\varepsilon}{72}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Bigg)\\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \frac{72^2}{\varepsilon^2 n^3} E\Big({\tilde{S}_{[n\frac{k}{m}]}^{k,m,n}}{}^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)\\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{72^2}{\varepsilon^2 n^3}\Big(\frac{2n}{m}\Big)^2 \sum_{j=[n\frac{k-1}{m}]+1}^{[n\frac{k}{m}]} E\Big(K(e_{nn}^*, e_{nj}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{nj}^*)^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{72^2}{\varepsilon^2 n^3} \sum_{[n\frac{k-1}{m}]<j<i\le[n\frac{k}{m}]} \sum_{\substack{[n\frac{k-1}{m}]<j'<i'\le[n\frac{k}{m}] \\ \{i,j\}\cap\{i',j'\}\neq\emptyset}} \\
&\qquad E\Big(\Big(K(e^*_{ni},e^*_{nj}) - E(K(e^*_{nn},e^*_{nj})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{nj})\Big)\cdot \\
&\qquad\qquad \cdot\Big(K(e^*_{ni'},e^*_{nj'}) - E(K(e^*_{nn},e^*_{nj'})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{nj'})\Big)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{72^2}{\varepsilon^2 n^3}\Big(\frac{2n}{m}\Big)^2\Big([n\tfrac{k}{m}]-[n\tfrac{k-1}{m}]\Big)E\Big(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n2})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\le \sum_{k=1}^{m} \frac{72^2}{\varepsilon^2 n^3} 4\Big(\frac{2n}{m}\Big)^3 E\Big(\mathrm{Var}\Big(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n2})\Big)\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{72^2}{\varepsilon^2 n^3}\Big(\frac{2n}{m}\Big)^3 E\Big(K(e^*_{n1},e^*_{n2})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n2})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big) \\
&\le \frac{72^2}{\varepsilon^2}\frac{40}{m^2} E\Big(K(e^*_{n1},e^*_{n2})^2\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big).
\end{aligned}
$$

Sei für alle $m,n \in \mathbb{N}$, $k = 1,\ldots,m$ und $l = [n\frac{k-1}{m}]+1,\ldots,[n\frac{k}{m}]$

$$
\tilde{\tilde{S}}^{k,m,n}_l := \sum_{l<j<i\le[n\frac{k}{m}]} \Big(K(e^*_{ni},e^*_{nj}) - E(K(e^*_{ni},e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{ni})\Big)
$$

und

$$
\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}^{k,m,n}_l := \sigma\Big(\widehat{\mathbf{e}}_n; e^*_{nl+1},\ldots,e^*_{n[n\frac{k}{m}]}\Big).
$$

Dann ist $(\tilde{\tilde{S}}^{k,m,n}_l, \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}^{k,m,n}_l)_{l=[n\frac{k-1}{m}]+1,\ldots,[n\frac{k}{m}]}$ für alle $m,n \in \mathbb{N}$ und $k = 1,\ldots,m$ ein inverses Martingal denn für alle $l = [n\frac{k-1}{m}]+1,\ldots,[n\frac{k}{m}]$ ist $\tilde{\tilde{S}}^{k,m,n}_l$ bezüglich $\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}^{k,m,n}_l$ messbar, und für alle $l = [n\frac{k-1}{m}]+2,\ldots,[n\frac{k}{m}]$ gilt

$$
\begin{aligned}
&E\Big(\tilde{\tilde{S}}^{k,m,n}_{l-1}\Big|\tilde{\tilde{\mathcal{F}}}^{k,m,n}_l\Big) \\
&\quad= \sum_{l<j<i\le[n\frac{k}{m}]} E\Big(K(e^*_{ni},e^*_{nj}) - E(K(e^*_{ni},e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{ni})\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{ni},e^*_{nj}\Big) \\
&\qquad + \sum_{i=l+1}^{[n\frac{k}{m}]} E\Big(K(e^*_{ni},e^*_{nl-1}) - E(K(e^*_{ni},e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{n1})\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{ni}\Big) \\
&\quad= \tilde{\tilde{S}}^{k,m,n}_l + 0.
\end{aligned}
$$

Es folgt für alle $m,n \in \mathbb{N}$ mit $n \ge m$ und alle $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&p_{10}(m,n,\varepsilon) \\
&\quad\le \sum_{k=1}^{m} P\Big(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\le[n\frac{k}{m}]}\Big|\sum_{l<j<i\le[n\frac{k}{m}]}\Big(K(e^*_{ni},e^*_{nj}) - E(K(e^*_{ni},e^*_{n1})|\widehat{\mathbf{e}}_n,e^*_{ni})\Big)\Big| \\
&\qquad\qquad \ge \frac{\varepsilon}{36}n^{3/2}\Big|\widehat{\mathbf{e}}_n\Big)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\quad + \sum_{k=1}^{m} P\Big(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\le[n\frac{k}{m}]} \Big| \sum_{l<j<i\le[n\frac{k}{m}]} E(K(e_{ni}^*, e_{n1}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{ni}^*) \Big| \ge \frac{\varepsilon}{36} n^{3/2} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\le \sum_{k=1}^{m} P\Big(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\le[n\frac{k}{m}]} \Big| \tilde{\tilde{S}}_l^{k,m,n} \Big| \ge \frac{\varepsilon}{36} n^{3/2} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} P\Big(\max_{[n\frac{k-1}{m}]<l\le[n\frac{k}{m}]} \Big([n\tfrac{k}{m}] - [n\tfrac{k-1}{m}]\Big) \Big| \sum_{i=l+2}^{[n\frac{k}{m}]} E(K(e_{ni}^*, e_{n1}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{ni}^*)\Big) \Big| \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \ge \frac{\varepsilon}{36} n^{3/2} \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\le \sum_{k=1}^{m} \frac{36^2}{\varepsilon^2 n^3} E\Big((\tilde{\tilde{S}}^{k,m,n}_{[n\frac{k-1}{m}]+1})^2 \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{36^2}{\varepsilon^2 n^3} \Big(\frac{2m}{n}\Big)^2 \sum_{i=[n\frac{k-1}{m}]+2}^{[n\frac{k}{m}]} E\Big(E(K(e_{ni}^*, e_{n1}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{ni}^*)^2 \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \frac{36^2}{\varepsilon^2 n^3} \sum_{[n\frac{k-1}{m}]+1<j<i\le[n\frac{k}{m}]} \sum_{\substack{[n\frac{k-1}{m}]+1<j'<i'\le[n\frac{k}{m}] \\ \{i,j\}\cap\{i',j'\}\ne\emptyset}} \\
&\qquad\qquad E\Big(\Big(K(e_{ni}^*, e_{nj}^*) - E(K(e_{ni}^*, e_{n1}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{ni}^*)\Big) \cdot \\
&\qquad\qquad\qquad \cdot \Big(K(e_{ni'}^*, e_{nj'}^*) - E(K(e_{ni'}^*, e_{n1}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{ni'}^*)\Big) \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{36^2}{\varepsilon^2 n^3} \Big(\frac{2n}{m}\Big)^2 \Big([n\tfrac{k}{m}] - [n\tfrac{k-1}{m}] - 1\Big) E\Big(K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{n1}^*)^2 \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\le \sum_{k=1}^{m} \frac{36^2}{\varepsilon^2 n^3} 4 \Big(\frac{2n}{m}\Big)^3 E\Big(\mathrm{Var}\Big(K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{n1}^*)\Big) \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{m} \frac{36^2}{\varepsilon^2 n^3} \Big(\frac{2n}{m}\Big)^3 E\Big(K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)|\widehat{\mathbf{e}}_n, e_{n1}^*)^2 \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \\
&\le \frac{36^2}{\varepsilon^2} \frac{40}{m^2} E\Big(K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)^2 \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big).
\end{aligned}
$$

Insgesamt folgt für alle $\varepsilon, \varepsilon' > 0$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\Big(p_2(m,n,\varepsilon) \ge \varepsilon' \Big) \\
&\quad \le \lim_{m\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P\Big(\frac{72^2 + 36^2}{\varepsilon^2} \frac{40}{m^2} E\Big(K(e_{n1}^*, e_{n2}^*)^2 \Big| \widehat{\mathbf{e}}_n \Big) \ge \varepsilon' \Big) \\
&\quad = 0
\end{aligned}
$$

nach (6.68). Der Term $p_3(m,n,\varepsilon)$ läßt sich analog behandeln wie $p_1(m,n,\varepsilon)$.

7.25 Proposition. Es gilt unter (3.78) und (3.79)

$$
(7.26) \qquad \sqrt{n}\, T_n^{*\,z} \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W^{zentr} \quad \text{unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \quad \text{in } D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}),
$$

wobei $W^{zentr} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ der zweidimensionale zentrierte Gaußprozeß mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

$$([0,1]\times\overline{\mathbb{R}})^2 \ni ((s,x),(t,y)) \mapsto (s\wedge t - st)\Big(F(x\wedge y) - F(x)F(y) - \frac{U(x)U(y)}{\sigma^2}\Big) \in \mathbb{R}$$

aus Kapitel 4 ist.

Beweis: Dies folgt mit der Bootstrapversion des Cramér-Slutzky-Arguments aus (6.55) und

$$K_n^* \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W^{zentr} \quad \text{unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \quad \text{in } D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}\,),$$

wobei letzteres aus (7.3) und (7.10) folgt.

7.27 Proposition. Es gilt unter den Voraussetzungen (6.56) und (4.1)

$$\sqrt{n}\, r_n^{*\,z} \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} V^{zentr} \quad \text{unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \quad \text{in } D([0,1]), \tag{7.28}$$

wobei $V^{zentr} : [0,1] \to \mathbb{R}$ der zentrierte Gaußprozeß mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

$$[0,1]^2 \ni (s,t) \mapsto \Big(s\wedge t - st\Big)\bigg(E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big) - \frac{1}{\sigma^2}E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big)^2\bigg) \in \mathbb{R}$$

aus Kapitel 4 ist.

Beweis: Mit der Bootstrapversion des Cramér-Slutzky-Arguments folgt aus (7.21) und (7.22) die Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen von J_n^* unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$ gegen die entsprechenden Randverteilungen von V^{zentr}, und zusammen mit (7.24) folgt daraus

$$J_n^* \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} V^{zentr} \quad \text{unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \quad \text{in } D([0,1]),$$

woraus wiederum mit der Bootstrapversion des Cramér-Slutzky-Arguments und (6.80) die Behauptung folgt.

7.29 Proposition. Es gilt unter (3.78) und (3.79)

$$\sqrt{n}\, T_n^* \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W^{klass} \quad \text{unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \quad \text{in } D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}\,), \tag{7.30}$$

und unter (4.1) und (6.56)

$$\sqrt{n}\, r_n^* \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} V^{klass} \quad \text{unter } P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n) \quad \text{in } D([0,1]), \tag{7.31}$$

wobei $W^{klass} : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$ wieder der zweidimensionale zentrierte Gaußprozeß mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

$$([0,1] \times \overline{\mathbb{R}})^2 \ni ((s,x),(t,y)) \mapsto (s \wedge t - st)\Big(F(x \wedge y) - F(x)F(y)\Big) \in \mathbb{R}$$

und $V^{klass} : [0,1] \to \mathbb{R}$ der zentrierte Gaußprozeß mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

$$[0,1]^2 \ni (s,t) \mapsto \Big(s \wedge t - st\Big)E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big) \in \mathbb{R}$$

aus Kapitel 4 sind.

Beweis: Führen wir hier nicht aus. Diese Prozesse sind als Summanden in den stochastischen Entwicklungen von $\sqrt{n}\,T_n^{*\,z}$ und $\sqrt{n}\,r_n^{*\,z}$ enthalten, und so entsprechen die Beweise von Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen und C-Straffheit den in diesem Kapitel vorgerechneten Beweisen, wenn man einige Terme streicht.

Kapitel 8

Konstruktion der Changepointtests und Beispiele

8.1 Konstruktion der asymptotischen Tests

Um aus den nun bewiesenen Verteilungskonvergenzsätzen asymptotische Tests konstruieren zu können, in denen die Suprema $\sup_{s\in[0,1],x\in\mathbb{R}} |\sqrt{n}\, T_n^z(s,x)|$ beziehungsweise $\sup_{s\in[0,1]} |\sqrt{n}\, r_n^z(s)|$ als Teststatistiken dienen, benötigen wir, dass die Verteilungsfunktionen der Suprema der Beträge unserer Grenzverteilungen stetig sind.
In der Literatur findet man zahlreiche Resultate über die Eigenschaften von Verteilungsfunktionen von Suprema von Gaußprozessen, zum Beispiel von Ylvisaker (1964) und Tsirel'son (1975), die sich in ihren Voraussetzungen und Aussagen unterscheiden, aber nicht exakt auf die bei uns auftretenden Prozesse passen. Deshalb müssen wir noch leichte Anpassungen vornehmen.
Wir folgen an dieser Stelle der Idee aus dem Beweis von Theorem 3.1 aus Pitt und Tran (1979). Da wir hier nur den Spezialfall eines univariaten Prozesses betrachten, und überdies nur an der Stetigkeit der Verteilungsfunktion und nicht an Dichten interessiert sind, läßt sich die Argumentation deutlich vereinfachen. Dafür haben wir hier, anders als in Pitt und Tran (1979), die Pfadstetigkeit des Prozesses als natürliche Voraussetzung. Aus diesem Grund geben wir den modifizierten Beweis mit an.

8.1 Satz. Sei $(X(t))_{t\in T}$ ein reellwertiger Gaußprozess mit fast sicher stetigen Pfaden und kompaktem metrischem Zeitbereich T, dessen Varianzfunktion keine

Nullstellen besitzt. Dann ist die Verteilungsfunktion von

$$S := \sup_{t \in T} X(t)$$

Lipschitzbeschränkt, also insbesondere stetig.

Beweis: Zur Abkürzung schreiben wir für die Kovarianzfunktion von X

$$T^2 \ni (s,t) \mapsto \operatorname{cov}(s,t) := \operatorname{Cov}(X(s), X(t)) \in \mathbb{R}.$$

Nach Voraussetzung gilt dann $\operatorname{cov}(t,t) \neq 0$ für alle $t \in T$, und diese Kovarianzfunktion ist stetig. Letzteres folgt leicht aus der fast sicheren Pfadstetigkeit mit der Tatsache, dass die Verteilungskonvergenz von Normalverteilungen äquivalent ist zur Konvergenz ihrer Parameter, was sich unter Verwendung des Stetigkeitssatzes für charakteristische Funktionen beweisen läßt.
Wir können nun ohne Einschränkung annehmen, dass

$$\left| \operatorname{cov}(s,t) \operatorname{cov}(t,t)^{-1} - 1 \right| \leq \frac{1}{2} \quad \text{für alle } s,t \in T \tag{8.2}$$

gilt:
Wegen der Stetigkeit von $(s,t) \mapsto \operatorname{cov}(s,t)$ und wegen $\operatorname{cov}(t,t) \neq 0$ für alle $t \in T$, gibt es zu jedem $u \in T$ eine offene Umgebung U_u mit

$$\sqrt{2/3} \operatorname{cov}(u,u) < \operatorname{cov}(s,t) < \sqrt{3/2} \operatorname{cov}(u,u) \quad \text{für alle } s,t \in U_u,$$

so dass also

$$\sqrt{2/3} < \operatorname{cov}(s,t) \operatorname{cov}(u,u)^{-1} < \sqrt{3/2} \quad \text{für alle } s,t \in U_u$$

und damit

$$\begin{aligned} &\operatorname{cov}(s,t) \operatorname{cov}(t,t)^{-1} \\ &\quad = \Big(\operatorname{cov}(s,t) \operatorname{cov}(u,u)^{-1} \Big) \Big(\operatorname{cov}(t,t) \operatorname{cov}(u,u)^{-1} \Big)^{-1} \\ &\quad \in (2/3, 3/2) \quad \text{für alle } s,t \in U_u \end{aligned}$$

für alle $u \in T$ ist. Wegen der Kompaktheit von T gibt es nun eine endliche Teilmenge $T_0 \subset T$ mit $T \subset \bigcup_{t_0 \in T_0} U_{t_0}$.
Falls nun unter der Zusatzvoraussetzung (8.2) die Behauptung des Satzes gilt, so besitzt für jedes $t_0 \in T_0$ die Zufallsvariable

$$S_{t_0} := \sup_{t \in \overline{U}_{t_0}} X(t)$$

eine Lipschitzbeschränkte Verteilungsfunktion, deren Lipschitzkonstante wir mit L_{t_0} bezeichnen. Es ist hier $\overline{U_{t_0}}$ der Abschluß von U_{t_0}.
Daraus folgt für alle $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} P\Big(S \in (x,y]\Big) &= P\Big(\max_{t_0 \in T_0} S_{t_0} \in (x,y]\Big) \\ &\leq \sum_{t_0 \in T_0} P\Big(S_{t_0} \in (x,y]\Big) \leq \sum_{t_0 \in T_0} L_{t_0} |y-x|, \end{aligned}$$

also die Lipschitzbeschränktheit der Verteilungsfunktion von S.
Es gelte nun also (8.2).
Sei $A := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare dichte Teilmenge der separablen Menge T, und sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$S^n := \max_{1 \leq i \leq n} X(a_i).$$

Sei $Z := X(a_1)$ und $L := 2/\sqrt{2\pi \operatorname{cov}(a_1, a_1)}$.
Sei für alle $a \in A$

$$C(a) := \operatorname{cov}(a, a_1) \operatorname{cov}(a_1, a_1)^{-1},$$

sowie

$$Y(a) := X(a) - C(a)Z$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$

$$Y^n := \Big(Y(a_1), \ldots, Y(a_n)\Big).$$

Sei für $n \in \mathbb{N}$ und $y^n = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$F_{y^n} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad F_{y^n}(x) := \max_{1 \leq i \leq n} \Big(C(a_i)x + y_i\Big),$$

sowie $\Psi_{y^n} := F_{y^n} - \mathrm{id}$ und $J_{y^n} := F_{y^n}^{-1}$.
Für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $y^n \in \mathbb{R}^n$ ist dann

$$\begin{aligned} \Psi_{y^n}(z) - \Psi_{y^n}(x) &= \max_{1 \leq i \leq n} \bigg(\Big(C(a_i) - 1\Big)z + y_i\bigg) - \Psi_{y^n}(x) \\ &= \max_{1 \leq i \leq n} \bigg(\Big(C(a_i) - 1\Big)(z-x) + y_i + \Big(C(a_i) - 1\Big)x\bigg) - \Psi_{y^n}(x) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \Big(C(a_i) - 1\Big)(z-x) + \max_{1 \leq i \leq n} \bigg(\Big(C(a_i) - 1\Big)x + y_i\bigg) - \Psi_{y^n}(x) \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \Big|C(a_i) - 1\Big| |z-x| + \Psi_{y^n}(x) - \Psi_{y^n}(x) \\ &\leq \frac{1}{2} |z-x| \end{aligned}$$

wegen (8.2). Deshalb ist für alle $x, z \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ und $y^n \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Big|\Psi_{y^n}(z) - \Psi_{y^n}(x)\Big| &= \Big(\Psi_{y^n}(z) - \Psi_{y^n}(x)\Big) \vee \Big(\Psi_{y^n}(x) - \Psi_{y^n}(z)\Big) \\ &\leq \frac{1}{2}\,|z - x|. \end{aligned}$$

Nun folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, $y^n \in \mathbb{R}^n$ und $x, z \in \mathbb{R}$ mit $x > z$

$$\begin{aligned} F_{y^n}(x) - F_{y^n}(z) &= x + \Psi_{y^n}(x) - z - \Psi_{y^n}(z) \\ &\geq x - z - \Big|\Psi_{y^n}(x) - \Psi_{y^n}(z)\Big| \\ &\geq \frac{1}{2}\,(x - z) \quad > \quad 0, \end{aligned} \tag{8.3}$$

also ist F_{y^n} streng monoton wachsend, und

$$\begin{aligned} \Big|F_{y^n}(x) - F_{y^n}(z)\Big| &\leq |x - z| + \Big|\Psi_{y^n}(x) - \Psi_{y^n}(z)\Big| \\ &\leq \frac{3}{2}\,|x - y|, \end{aligned}$$

also ist F_{y^n} stetig.
Daher ist für alle $n \in \mathbb{N}$ und $y^n \in \mathbb{R}^n$ die Umkehrfunktion J_{y^n} ebenfalls streng monoton wachsend und erfüllt wegen (8.3) für alle $x, z \in \mathbb{R}$ mit $x > z$

$$J_{y^n}(x) - J_{y^n}(z) \quad \leq \quad 2\Big(F_{y^n}\Big(J_{y^n}(x)\Big) - F_{y^n}\Big(J_{y^n}(z)\Big)\Big) \quad = \quad 2(x - z). \tag{8.4}$$

Nun sind Z und Y^n für alle $n \in \mathbb{N}$ gemeinsam normalverteilt, und es gilt für alle $a \in A$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\Big(Z, Y(a)\Big) &= \mathrm{Cov}\Big(Z, X(a)\Big) - C(a) \cdot \mathrm{Cov}\Big(Z, X(a_1)\Big) \\ &= \mathrm{cov}(a_1, a) - \mathrm{cov}(a, a_1)\,\mathrm{cov}(a_1, a_1)^{-1}\,\mathrm{cov}(a_1, a_1) \quad = \quad 0, \end{aligned}$$

also sind Z und $Y^n = (Y(a_1), \ldots, Y(a_n))$ unabhängig. Außerdem besitzt Z eine durch $\frac{1}{2}L$ beschränkte Gaußdichte φ_Z. Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}$, $y^n \in \mathbb{R}^n$ und $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$

$$\begin{aligned} P\Big(\, S^n \in (x, y] \,\Big|Y^n = y^n\Big) &= P\Big(\, F_{Y^n}(Z) \in (x, y] \,\Big|Y^n = y^n\Big) \\ &= \int 1_{\{F_{y^n}(z) \in (x,y]\}} P_Z(dz) \quad = \quad \int_{(J_{y^n}(x), J_{y^n}(y)]} \varphi_Z(z)dz \\ &\leq \frac{1}{2}L\,\Big(J_{y^n}(y) - J_{y^n}(x)\Big) \quad \leq \quad \frac{1}{2}L\,2(y - x) \quad = \quad L(y - x) \end{aligned}$$

nach (8.4). Also ist für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$

$$\begin{aligned} P\Big(S^n \in (x,y] \Big) &= E\Big(E\Big(1_{\{S^n \in (x,y]\}} \Big| Y^n\Big)\Big) \\ &\leq L(y-x), \end{aligned}$$

das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Verteilungsfunktion von S^n Lipschitzbeschränkt mit der von n unabhängigen Lipschitzkonstante L.
Nun haben wir

$$S^n \uparrow_n \sup_{i \in \mathbb{N}} X(a_i) = S \quad \text{fast sicher,}$$

wegen der fast sicheren Pfadstetigkeit von X. Insbesondere gilt

$$S^n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} S.$$

Seien nun x und y zwei Stetigkeitsstellen der Verteilungsfunktion von S mit $x \leq y$. Dann ist

$$P\Big(S \in (x,y]\Big) = \lim_{n\to\infty} P\Big(S^n \in (x,y]\Big) \leq \lim_{n\to\infty} L(x-y) = L(x-y).$$

Da die Stetigkeitsstellen einer Verteilungsfunktion wie bei jeder monotonen Funktion dicht liegen, findet man zu beliebigen $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x < y$ Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Stetigkeitsstellen mit $x_n \uparrow_n x$ und $y_n \downarrow_n y$. Es folgt

$$P\Big(S \in (x,y]\Big) \leq \lim_{n\to\infty} P\Big(S \in (x_n,y_n]\Big) \leq \lim_{n\to\infty} L(x_n-y_n) = L(x-y).$$

Dies war die Behauptung.

8.5 Folgerung. Sei $(X(t))_{t\in T}$ ein reellwertiger Gaußprozess mit einem kompaktem metrischen Zeitbereich T, der fast sicher stetige Pfade besitzt. Für alle $t \in T$ mit $\mathrm{Var}(X(t)) = 0$ gelte $E(X(t)) = 0$, und es gebe ein $t_0 \in T$ mit $\mathrm{Var}(X(t_0)) \neq 0$. Dann ist die Verteilungsfunktion von $\sup_{t\in T} |X(t)|$ stetig.

Beweis: Sei

$$N := \{t \in T : \mathrm{Var}(X(t)) = 0\}$$

und für alle $\varepsilon > 0$ bezeichne U_ε die offene ε-Umgebung von N.
Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Dann ist für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &P\Big(\sup_{t\in T} |X(t)| = a\Big) \\ &\quad = P\Big(\sup_{t\in U_\varepsilon} |X(t)| \vee \sup_{t\in T\setminus U_\varepsilon} |X(t)| = a\Big) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\le\; P\Big(\sup_{t\in U_\varepsilon}|X(t)|=a\Big)+P\Big(\sup_{t\in T\setminus U_\varepsilon}|X(t)|=a\Big)\\
&=\; P\Big(\sup_{t\in U_\varepsilon}|X(t)|=a\Big)+P\Big(\sup_{t\in T\setminus U_\varepsilon}\big(X(t)\vee -X(t)\big)=a\Big)\\
&\le\; P\Big(\sup_{t\in U_\varepsilon}|X(t)|=a\Big)+P\Big(\sup_{t\in T\setminus U_\varepsilon}X(t)=a\Big)+P\Big(\sup_{t\in T\setminus U_\varepsilon}-X(t)=a\Big)\\
&=\; P\Big(\sup_{t\in U_\varepsilon}|X(t)|=a\Big)\;\underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow}\;0,
\end{aligned}
$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen nach Satz 8.1 gilt, da $X|_{T\setminus U_\varepsilon}$ und $-X|_{T\setminus U_\varepsilon}$ dessen Voraussetzungen erfüllen, und zum Schluß die Konvergenz gilt, da X auf der kompakten Menge T sogar fast sicher gleichmäßig stetige Pfade besitzt und man sich leicht überlegt, dass deshalb $\sup_{t\in U_\varepsilon}|X(t)|$ für $\varepsilon\downarrow 0$ sogar fast sicher gegen Null konvergiert. Es folgt

$$
P\Big(\sup_{t\in T}|X(t)|=a\Big)=0
$$

für alle $a>0$.
Sei nun $t_0\in T$ mit $\mathrm{Var}(X(t_0))\neq 0$. Dann ist

$$
P\Big(\sup_{t\in T}|X(t)|\le 0\Big)\;\le\;P\Big(|X(t_0)|\le 0\Big)\;=\;P\Big(X(t_0)=0\Big)\;=\;0,
$$

da die Verteilung von $X(t_0)$ eine nichtausgeartete Normalverteilung ist.
Aus diesen beiden Betrachtungen folgt die Behauptung.

8.6 Bemerkung. Die Voraussetzungen von Folgerung 8.5 sind in den relevanten Situationen aus den vorangehenden Kapiteln erfüllt:
Zeitbereiche wie $[0,1]$ und $[0,1]\times\overline{\mathbb{R}}$ bereiten keine Probleme, die Pfadstetigkeit haben wir durch den Beweis von C-Straffheit und Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen beim Beweis der Verteilungskonvergenzsätze schon mitbewiesen. Die Forderung, dass die Varianzfunktion nicht identisch Null ist, sollte erfüllt sein, da der Prozess sonst nicht zur Konstruktion von asymptotischen Tests taugt, muß also ohnehin sichergestellt werden. Bleibt die Annahme über die Erwartungswertfunktion:
Die Grenzprozesse unter der Hypothese sind immer zentriert, so dass in diesem Fall diese Bedingung automatisch erfüllt ist.
Da wir für die Betrachtung der Grenzprozesse unter benachbarten Alternativen das Le Camsche dritte Lemma benutzt haben, ist diese Bedingung auch automatisch erfüllt. Denn damit haben wir unter anderem für alle $t\in T$ eine Aussage

der Form

$$(8.7)\qquad \begin{pmatrix} X_n(t) \\ L_n \end{pmatrix} \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\overline{\sigma}^2/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathrm{Var}(X^1(t)) & E(X^1(t)) \\ E(X^1(t)) & \overline{\sigma}^2 \end{pmatrix}\right)$$

bewiesen, wobei X_1 der Grenzprozess unter der Folge von benachbarten Alternativen ist. Ist nun $\mathrm{Var}(X^1(t_0)) = 0$ für ein $t_0 \in T$, so ist der erste Eintrag in dem Grenzverteilungsvektor in (8.7) fast sicher Null und damit unkorreliert mit dem zweiten Eintrag, also ist dann der entsprechende Eintrag $E(X^1(t_0))$ aus der Kovarianzmatrix ebenfalls Null.

8.8 Proposition. Unter der Voraussetzung, dass F eine stetige, streng monoton wachsende Verteilungsfunktion einer zentrierten Zufallsvariable ist, was insbesondere dann gilt, wenn sowohl (2.2) als auch (3.78) erfüllt sind, so besitzt die Varianzfunktion

$$[0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \ni (s,x) \mapsto (s-s^2)\Big(F(x) - F(x)^2 - U(x)^2/\sigma^2\Big) \in \mathbb{R}$$

von W^{zentr} und W_1^{zentr} keine Nullstellen im Inneren $(0,1) \times \mathbb{R}$ ihres Definitionsbereichs. Auf dem Rand hingegen nimmt sie nur den Wert Null an.

Beweis: Seien $s \in [0,1]$ und $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Es gilt

$$s - s^2 = s(1-s) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad s \in \{0,1\}.$$

Wegen der Produktstruktur von $\mathrm{Var}(W^{zentr}(s,x))$ ist daher nur noch

$$F(x) - F(x)^2 - U(x)^2/\sigma^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-\infty, \infty\}$$

zu beweisen. Nun ist die Funktion $U(x) = \int_{-\infty}^{x} uF(du)$ auf dem Intervall $[-\infty, 0]$ streng monoton fallend, weil F streng monoton wachsend ist und der Integrand in $(-\infty, 0)$ negativ ist, und auf dem Intervall $[0, \infty]$ streng monoton wachsend, weil der Integrand in $(0, \infty)$ positv ist. Wir erinnern, dass U stetig ist, dass $U(-\infty) = 0$ ist, und dass wegen der Zentriertheit einer nach F verteilten Zufallsvariable auch $U(\infty) = 0$ gilt.
Deshalb haben wir

$$F(\infty) - F(\infty)^2 - U(\infty)^2/\sigma^2 = 1 - 1^2 - 0^2 = 0$$

und

$$F(-\infty) - F(-\infty)^2 - U(-\infty)^2/\sigma^2 = 0 - 0^2 - 0^2 = 0,$$

es bleibt also nur noch zu zeigen, dass

$$x \mapsto F(x) - F(x)^2 - U(x)^2/\sigma^2$$

keine Nullstelle $x_0 \in \mathbb{R}$ besitzt.
Angenommen, es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit

$$F(x_0) - F(x_0)^2 - U(x_0)^2/\sigma^2 = 0.$$

Dann ist auch

$$\mathrm{Var}(W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, x_0)) = 0,$$

also $W^{zentr}(\frac{1}{2}, x_0) = E(W^{zentr}(\frac{1}{2}, x_0)) = 0$ fast sicher, und damit für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 &= 4\,E\Big(W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, x) \cdot 0\Big) \quad = \quad 4\,E\Big(W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, x) W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, x_0)\Big) \\ &= 4\,\mathrm{Cov}\Big(W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, x), W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, x_0)\Big) \\ &= F(x \wedge x_0)\Big(1 - F(x \vee x_0)\Big) - U(x)U(x_0)/\sigma^2. \end{aligned}$$

Für alle $x < x_0$ folgt daraus

$$F(x)\Big(1 - F(x_0)\Big) = U(x)U(x_0)/\sigma^2,$$

und wegen $F(x_0) \neq 1$ und $U(x_0) \neq 0$ ist somit $F(x)$ für alle $x < x_0$ proportional zu $U(x)$. Nun ist $|F(x)|$ auf $[0, \infty)$ streng monoton wachsend, $|U(x)|$ jedoch streng monoton fallend, das heißt für $x \in [0, x_0)$ kann $F(x)$ nicht proportional zu $U(x)$ sein. Also muß $x_0 \leq 0$ sein.
Für $x > x_0$ ist wie eben

$$F(x_0)\Big(1 - F(x)\Big) = U(x)U(x_0)/\sigma^2$$

mit $F(x_0) \neq 0$, und hier ist $|1 - F(x)|$ auf $(-\infty, 0]$ streng monoton fallend, $|U(x)|$ jedoch streng monoton wachsend, also muß $x_0 \geq 0$ sein, da $1 - F(x)$ für $x \in (x_0, 0]$ nicht proportional zu $U(x)$ sein kann.
Bleibt nur die Möglichkeit $x_0 = 0$.
Sei also $\mathrm{Var}(W^{zentr}(\frac{1}{2}, 0)) = 0$. Wir beginnen mit dem Fall $F(0) < \frac{1}{2}$. Dann ist für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &F(0) - F(0)^2 - F(-\varepsilon) + F(-\varepsilon)^2 \\ &\quad = \Big(F(0) - F(-\varepsilon)\Big)\Big(1 - F(0) - F(-\varepsilon)\Big) \\ &\quad > C_1\Big(F(0) - F(-\varepsilon)\Big) \quad > \quad 0 \end{aligned}$$

mit $1 - F(0) - F(-\varepsilon) > C_1 := 1 - 2F(0) > 0$, sowie

$$\begin{aligned} U(0)^2 - U(-\varepsilon)^2 &= \Big(U(0) + U(-\varepsilon)\Big)\Big(U(0) - U(-\varepsilon)\Big) \\ &\leq 2\,U(0) \int_{-\varepsilon}^{0} uF(du) \;\;\leq\;\; 2|U(0)|\varepsilon\Big(F(0) - F(-\varepsilon)\Big)\,, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; 4\,\mathrm{Var}\Big(W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, -\varepsilon)\Big) &= 4\,\mathrm{Var}\Big(W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, -\varepsilon)\Big) - 4\,\mathrm{Var}\Big(W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, 0)\Big) \\ &= F(-\varepsilon) - F(-\varepsilon)^2 - F(0) + F(0)^2 + \Big(U(0)^2 - U(-\varepsilon)^2\Big)/\sigma^2 \\ &\leq C_1\Big(F(-\varepsilon) - F(0)\Big) + 2|U(0)|\varepsilon\Big(F(0) - F(-\varepsilon)\Big)/\sigma^2 \\ &= \Big(2|U(0)|\varepsilon/\sigma^2 - C_1\Big)\Big(F(0) - F(-\varepsilon)\Big) \;\;<\;\; 0 \end{aligned}$$

für $\varepsilon < C_1\sigma^2/(2|U(0)|)$. Dies zeigt, dass $F(0) < \frac{1}{2}$ nicht möglich ist unter der Annahme $\mathrm{Var}(W^{zentr}(\frac{1}{2}, 0)) = 0$.
Im Falle $F(0) > \frac{1}{2}$ erhalten wir analog für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} & F(0) - F(0)^2 - F(\varepsilon) + F(\varepsilon)^2 \\ &\quad = \Big(F(\varepsilon) - F(0)\Big)\Big(F(\varepsilon) + F(0) - 1\Big) \\ &\quad > C_2\Big(F(\varepsilon) - F(0)\Big) \;\;>\;\; 0 \end{aligned}$$

mit $F(\varepsilon) + F(0) - 1 > C_2 := 2F(0) - 1 > 0$, und

$$\begin{aligned} U(0)^2 - U(\varepsilon)^2 &= \Big(U(0) + U(\varepsilon)\Big)\Big(U(0) - U(\varepsilon)\Big) \\ &\leq 2|U(0)| \int_{0}^{\varepsilon} uF(du) \;\;\leq\;\; 2|U(0)|\varepsilon\Big(F(\varepsilon) - F(0)\Big), \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} 0 \;\leq\; 4\,\mathrm{Var}\Big(W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, \varepsilon)\Big) &= 4\,\mathrm{Var}\Big(W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, \varepsilon)\Big) - 4\,\mathrm{Var}\Big(W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, 0)\Big) \\ &= F(\varepsilon) - F(\varepsilon)^2 - F(0) + F(0)^2 + \Big(U(0)^2 - U(\varepsilon)^2\Big)/\sigma^2 \\ &\leq C_2\Big(F(0) - F(\varepsilon)\Big) + 2|U(0)|\varepsilon\Big(F(\varepsilon) - F(0)\Big)/\sigma^2 \\ &= \Big(2|U(0)|\varepsilon/\sigma^2 - C_2\Big)\Big(F(\varepsilon) - F(0)\Big) \;\;<\;\; 0 \end{aligned}$$

für $\varepsilon < C_2\sigma^2/(2|U(0)|)$. Also ist auch $F(0) > \frac{1}{2}$ nicht möglich.
Im Falle $F(0) = \frac{1}{2}$ ist

$$0 \;=\; 4\,\mathrm{Var}\Big(W^{zentr}(\tfrac{1}{2}, 0)\Big) \;=\; F(0) - F(0)^2 - U(0)^2/\sigma^2 \;=\; 1/4 - U(0)^2/\sigma^2,$$

also, wenn e_1 eine nach F verteilte Zufallsvariable ist, wegen $U(0) < 0$

$$\begin{aligned}\sigma &= -2\,U(0) = -2\,E(e_1 1_{\{e_1 \leq 0\}}) + E(e_1) \\ &= -E(e_1 1_{\{e_1 \leq 0\}}) + E(e_1 1_{\{e_1 > 0\}}) = E(|e_1|).\end{aligned}$$

Nun ist nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$E(|e_1|) = E(1 \cdot |e_1|) \leq E(1^2)^{1/2} E(e_1^2)^{1/2} = E(e_1^2)^{1/2} = \sigma$$

mit Gleichheit genau dann, wenn $|e_1| = c \in \mathbb{R}$ fast sicher. Diese fast sichere Konstanz von $|e_1|$ ist ein Widerspruch zur Stetigkeit der Verteilungsfunktion F. Insgesamt folgt, das es kein $x_0 \in \mathbb{R}$ geben kann mit $\mathrm{Var}(W^{zentr}(\frac{1}{2}, x_0)) = 0$.

8.9 Bemerkung. Die Varianzfunktion von W^{zentr} ist im Inneren ihres Definitionsbereichs überall echt kleiner als die Varianzfunktion des Grenzprozesses W^{klass} der klassischen Statistik $\sqrt{n}\,\widehat{T}_n$,

$$[0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \ni (s,x) \mapsto (s - s^2)\Big(F(x) - F(x)^2\Big) \in \mathbb{R},$$

da bei der Varianzfunktion $\mathrm{Var}(W^{zentr}(s,x))$ der für alle $(s,x) \in (0,1) \times \mathbb{R}$ echt positive Wert $(s - s^2)U(x)^2/\sigma^2$ abgezogen wird.

8.10 Bemerkung. Die Varianzfunktion von V^{zentr} ist wesentlich einfacher. Der Prozess V^{zentr} ist eine Brownsche Brücke mit Skalenfaktor

$$v^{zentr} = \Big(E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)^2\Big) - E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)e_2\Big)^2/\sigma^2\Big)^{1/2}.$$

Seine Varianzfunktion ist am Rand ihres Definitionsbereichs immer Null, und sie ist genau dann an einer Stelle $s \in (0,1)$ von Null verschieden, wenn sie überall in $(0,1)$ von Null verschieden ist, und dies ist genau dann der Fall, wenn der Skalenfaktor ungleich Null ist.

Der Skalenfaktor kann, wie bei dem Kern $K(x,y) = x - y$ unter (2.2), den Wert Null annehmen. Dieser Kern ist als Mittelwertvergleichskern für bekanntlich zentrierte Zufallsvariablen allerdings natürlich uninteressant. Unter der Bedingung

$$\sigma^2 E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)^2\Big) \neq E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)e_2\Big)^2 \tag{8.11}$$

ist der Grenzprozess V^{zentr} also nichtausgeartet, da dann der Skalenfaktor ungleich Null ist.

Anders als beim Prozess W^{zentr}, muß bei V^{zentr} die Varianzfunktion nicht kleiner sein als die des entsprechenden klassischen Prozesses V^{klass}. Sie ist genau dann kleiner, wenn der Subtrahend in dem Skalenfaktor ungleich Null ist, wenn also

$$E\Big(E(K(e_1,e_2)|e_2)e_2\Big) \quad = \quad E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big) \quad \neq \quad 0$$

gilt. Zum Beispiel für symmetrische Verteilungen der Zufallsvariablen und Differenzkerne der Form $K(x,y) = f(x) - f(y)$ mit einer geraden Funktion f gilt

$$\begin{aligned} E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big) &= E\Big(f(e_1)e_2\Big) - E\Big(f(e_2)e_2\Big) \\ &= E\Big(f(e_1)\Big)E(e_2) - E\Big(f(e_2)e_2\Big) \quad = \quad 0, \end{aligned}$$

da $E(e_2) = 0$ ist und weil $x \mapsto xf(x)$ eine ungerade Funktion ist und deshalb $E\Big(f(e_2)e_2\Big) = 0$ ist. Dies betrifft insbesondere den sehr wichtigen Fall des Varianzvergleichskerns $K(x,y) = x^2 - y^2$ und normalverteilter Fehler. In diesem Fall ergibt sich bei der U-Typ-Statistik durch die Berücksichtigung der Zentriertheit keine Verkleinerung der asymptotischen Varianzfunktion gegenüber der klassischen U-Typ-Statistik. Allerdings ist Symmetrie der Verteilungsfunktion eine andere Eigenschaft als die berücksichtigte Zentriertheit, dies bedeutet nicht, dass es keine Verteilung gibt, für die sich bei dem genannten Kern bei Berücksichtigung der Zentriertheit eine Verkleinerung ergibt.

8.12 Proposition. Die Erwartungswertfunktionen von W_1^{zentr},

$$[0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \ni (s,x) \mapsto \Big(\lambda s - \lambda \wedge s\Big)\Big(E(h(e_1)1_{\{e_1 \leq x\}}) - \frac{E(h(e_1)e_1)U(x)}{\sigma^2}\Big) \in \mathbb{R},$$

und V_1^{zentr},

$$[0,1] \ni s \mapsto \Big(\lambda s - \lambda \wedge s\Big)\Big(E(K(e_1,e_2)h(e_2)) - \frac{E(K(e_1,e_2)e_2)E(h(e_1)e_1)}{\sigma^2}\Big) \in \mathbb{R},$$

haben den Wert Null auf den Rändern ihrer Definitionsbereiche.

Beweis: Für $s \in \{0,1\}$ ist $\lambda s - \lambda \wedge s = 0$, denn es gilt $\lambda \cdot 0 - \lambda \wedge 0 = 0 - 0 = 0$ und $\lambda \cdot 1 - \lambda \wedge 1 = \lambda - \lambda = 0$. Für diese s ist also die Erwartungswertfunktion von V_1^{zentr} und der erste Faktor der Erwartungswertfunktion von W_1^{zentr} Null. Weiter besitzt für $x \in \{-\infty, \infty\}$ der zweite Faktor der Erwartungswertfunktion von W_1^{zentr} den Wert Null, denn es gilt

$$E(h(e_1)1_{\{e_1 \leq -\infty\}}) - E(h(e_1)e_1)U(-\infty)/\sigma^2 \quad = \quad 0 - E(h(e_1)e_1)0/\sigma^2 \quad = \quad 0$$

und

$$E(h(e_1)1_{\{e_1 \leq \infty\}}) - E(h(e_1)e_1)U(\infty)/\sigma^2 \quad = \quad E(h(e_1)) - E(h(e_1)e_1)0/\sigma^2 \quad = \quad 0,$$

da $E(h(e_1)) = 0$ ist nach (4.45).

8.13 Proposition. Sei $(X(t))_{t\in T}$ ein nichtausgearteter zentrierter Gaußprozess mit kompaktem metrischem Zeitbereich T und mit stetigen Pfaden. Dann ist die Verteilungsfunktion von $\sup_{t\in T}|X(t)|$ auf $[0,\infty)$ streng monoton wachsend.

Beweis: Sei $C(T)$ die Menge aller stetigen Funktionen $f : T \to \mathbb{R}$ und $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm auf $C(T)$. Dann ist die Verteilung γ von $X := (X(t))_{t\in T}$ in $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$ ein zentriertes Gaußmaß auf dem mit der zugehörigen Borel-σ-Algebra versehenen separablen Banachraum $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$.
Weiter ist der Träger von γ,

$$\mathrm{supp}(\gamma) = \{f \in C(T) : \gamma(U) > 0 \text{ für alle offenen Mengen } U \subset C(T) \text{ mit } f \in U\},$$

ein linearer Teilraum von $(C(T), \|\cdot\|_\infty)$, vergleiche zum Beispiel Theorem 3.6.1 in Bogachev (1998) oder Aufgabe 1.4.9 in Araujo und Giné (1980).
Seien nun $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \le x < y < \infty$. Dann ist

$$u(x,y) \;:=\; \{f \in C(T) : x < \|f\|_\infty < y\} \;=\; \Big(\|\cdot\|_\infty\Big)^{-1}\Big((x,y)\Big)$$

aufgrund der Stetigkeit von $\|\cdot\|_\infty$ eine offene Teilmenge in $C(T)$. Da $(X(t))_{t\in T}$ nichtausgeartet ist, gibt es ein $f \in \mathrm{supp}(\gamma)$ das nicht identisch Null ist. Da $\mathrm{supp}(\gamma)$ ein linearer Teilraum ist, gilt

$$f_0 \;:=\; \frac{x+y}{2}\frac{f}{\|f\|_\infty} \;\in\; \mathrm{supp}(\gamma),$$

und wegen $\|f_0\|_\infty = \frac{x+y}{2} \in (x,y)$ ist dann auch $f_0 \in u(x,y)$. Nach Definition von $\mathrm{supp}(\gamma)$ haben wir damit $\gamma(u(x,y)) > 0$. Es gilt also

$$\begin{aligned} F_{\|X\|_\infty}(y) - F_{\|X\|_\infty}(x) \;&=\; P\Big(x < \|X\|_\infty \le y\Big) \;\ge\; P\Big(x < \|X\|_\infty < y\Big) \\ =\; P(X \in u(x,y)) \;&=\; \gamma(u(x,y)) \;>\; 0. \end{aligned}$$

Hieraus folgt die strenge Monotonie von $F_{\|X\|_\infty}$.
Die Idee für diesen Beweis verdanke ich Herrn Harald Luschgy, Universität Trier.

8.14 Definition. Im folgenden bezeichne $\|\cdot\|_\infty$ die Supremumsnorm von Funktionen auf $[0,1]$ oder $[0,1]\times\overline{\mathbb{R}}$. Weiter sei $k_{n,\alpha}^{T,z,*}$ für $\alpha \in (0,1)$ das $(1-\alpha)$-Quantil der Verteilungsfunktion von $\sqrt{n}\,\|T_n^{*\,z}\|_\infty$ unter $P(\,\cdot\,|\hat{\mathbf{e}}_n)$, also

$$k_{n,\alpha}^{T,z,*} := \inf\Big\{x \in \overline{\mathbb{R}} : P(\sqrt{n}\,\|T_n^{*\,z}\|_\infty \le x|\hat{\mathbf{e}}_n) \ge 1-\alpha\Big\},$$

und

$$k_{n,\alpha}^{T,z,*,H_{1,n}} := \inf\Big\{x \in \overline{\mathbb{R}} : P(\sqrt{n}\,\|T_n^{*\,zH_{1,n}}\|_\infty \le x|\hat{\mathbf{e}}_n) \ge 1-\alpha\Big\}.$$

Dabei ist, wie in Anschnitt 4.2 gesagt, $T_n^{*\,z\,H_{1,n}}$ definiert wie $T_n^{*\,z}$, nur mit den durch $(e_{1-q}^{H_{1,n}},\dots,e_n^{H_{1,n}})$ ersetzten Zufallsvariablen $(e_{1-q},\dots,e_n)$. Analog seien

$$k_{n,\alpha}^{r,z,*} := \inf\Big\{x\in\overline{\mathbb{R}} : P(\sqrt{n}\,\|r_n^{*\,z}\|_\infty \le x|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ge 1-\alpha\Big\}$$

und

$$k_{n,\alpha}^{r,z,*,H_{1,n}} := \inf\Big\{x\in\overline{\mathbb{R}} : P(\sqrt{n}\,\|r_n^{*\,z\,H_{1,n}}\|_\infty \le x|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ge 1-\alpha\Big\}.$$

8.15 Proposition. Unter den Voraussetzungen (2.1), (2.2), (3.1), (3.3), (3.4), (3.78), (3.79) und (6.1) gilt für alle $\alpha\in(0,1)$

$$P\Big(\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^z\|_\infty > k_{n,\alpha}^{T,z,*}\Big) \xrightarrow[n]{} \alpha \tag{8.16}$$

und, falls auch (4.43) erfüllt ist,

$$P\Big(\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^{z\,H_{1,n}}\|_\infty > k_{n,\alpha}^{T,z,*,H_{1,n}}\Big) \xrightarrow[n]{} 1 - F_{\|W_1^{zentr}\|_\infty}(F_{\|W^{zentr}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)), \tag{8.17}$$

wobei $F_{\|W_1^{zentr}\|_\infty}$ die Verteilungsfunktion vom Supremum des Prozesses W_1^{zentr} und $F_{\|W^{zentr}\|_\infty}^{-1}$ die Quantilfunktion der Verteilung des Supremums des Prozesses W^{zentr} ist.

Beweis: Geht mit den entsprechenden Standardmethoden:
Seien G_0 und G_1 die Verteilungsfunktionen von $\|W^{zentr}\|_\infty$ und $\|W_1^{zentr}\|_\infty$, und für alle $n\in\mathbb{N}$ sei $G_{0,n}^*$ die Verteilungsfunktion von $\sqrt{n}\,\|T_n^{*\,z}\|_\infty$ unter $P(\cdot|\widehat{\mathbf{e}}_n)$, sowie $G_{1,n}^*$ die Verteilungsfunktion von $\sqrt{n}\,\|T_n^{*\,z\,H_{1,n}}\|_\infty$ unter $P(\,\cdot\,|\widehat{\mathbf{e}}_n)$. Es ist dann $k_{n,\alpha}^{T,z,*} = {G_{0,n}^*}^{-1}(1-\alpha)$ und $k_{n,\alpha}^{T,z,*,H_{1,n}} = {G_{1,n}^*}^{-1}(1-\alpha)$.
Nach Folgerung 8.5, Proposition 8.8 und Proposition 8.12 sind G_0 und G_1 stetig. Weiter ist G_0 nach Proposition 8.13 auf $(0,\infty)$ streng monoton wachsend.
Es gilt nun für alle $u\in(0,1)$

$$G_0^{-1}(u) - {G_{0,n}^*}^{-1}(u) = o_p(1). \tag{8.18}$$

Zu (8.18): Sei $u\in(0,1)$, $x := G_0^{-1}(u) > 0$, und sei $\varepsilon>0$. Aufgrund der strengen Monotonie von G_0 auf $(0,\infty)$ gilt dann $G_0(x+\varepsilon) > u$, womit wir

$$\begin{aligned}
&P\Big(G_{0,n}^*(x+\varepsilon) < u\Big)\\
&\le\; P\Big(G_{0,n}^*(x+\varepsilon) \le \frac{u}{2} + \frac{G_0(x+\varepsilon)}{2}\Big)\\
&=\; P\Big(G_{0,n}^*(x+\varepsilon) - G_0(x+\varepsilon) \le \frac{u - G_0(x+\varepsilon)}{2}\Big)\\
&\le\; P\Big(\Big|G_{0,n}^*(x+\varepsilon) - G_0(x+\varepsilon)\Big| \ge \frac{G_0(x+\varepsilon)-u}{2}\Big) \;\xrightarrow[n]{}\; 0,
\end{aligned}$$

erhalten, wobei die Konvergenz wegen (7.26) und der Stetigkeit von G_0 gilt.
Nach Definition von x als Quantil ${G_0}^{-1}(u)$ gilt $G_0(x-\varepsilon) < u$, und auf entsprechende Weise folgt

$$\begin{aligned}
&P\Big(G^*_{0,n}(x-\varepsilon)) \geq u\Big)\\
&\leq \; P\Big(G^*_{0,n}(x-\varepsilon) \geq u - \frac{u - G_0(x-\varepsilon)}{2}\Big)\\
&= \; P\Big(G^*_{0,n}(x-\varepsilon) - G_0(x-\varepsilon) \geq \frac{u - G_0(x-\varepsilon)}{2}\Big)\\
&\leq \; P\Big(\Big|G^*_{0,n}(x-\varepsilon) - G_0(x-\varepsilon)\Big| \geq \frac{u - G_0(x-\varepsilon)}{2}\Big) \quad \underset{n}{\longrightarrow} \quad 0
\end{aligned}$$

wieder am Schluß mit (7.26). Zusammen erhalten wir

$$\begin{aligned}
&P\Big(\Big|{G^*_{0,n}}^{-1}(u) - x\Big| > \varepsilon\Big)\\
&\leq \; P\Big({G^*_{0,n}}^{-1}(u) > x+\varepsilon\Big) + P\Big({G^*_{0,n}}^{-1}(u) \leq x-\varepsilon\Big)\\
&\leq \; P\Big(u > G^*_{0,n}(x+\varepsilon)\Big) + P\Big(u \leq G^*_{0,n}(x-\varepsilon)\Big) \quad \underset{n}{\longrightarrow} \quad 0,
\end{aligned}$$

also gilt (8.18).
Aus (8.18) erhalten wir auch für alle $u \in (0,1)$

$$(8.19) \qquad {G_0}^{-1}(u) - {G^*_{1,n}}^{-1}(u) = o_p(1),$$

denn man kann wie in Abschnitt 4.2 mit der Benachbartheit argumentieren, da $G^*_{1,n}$ genau wie $G^*_{0,n}$ definiert ist, nur mit der Ersetzung $(e_{1-q},\dots,e_n) \mapsto (e_{1-q}^{H_{1,n}},\dots,e_n^{H_{1,n}})$. Dies führen wir hier nicht mehr formal aus, weisen jedoch darauf hin, dass in (8.19) die feste Zahl ${G_0}^{-1}(u)$ beim Übergang zu der Folge von Alternativen natürlich nicht verändert wird, nur im zufälligen Subtrahenden werden Zufallsvariablen ersetzt.
Zu (8.17): Sei $u \in (0,1)$. Es gilt dann für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty} P\Big(\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^{zH_{1,n}}\|_\infty \leq {G^*_{1,n}}^{-1}(u)\Big)\\
&\leq \; \limsup_{n\to\infty} P\Big(\Big\{\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^{zH_{1,n}}\|_\infty \leq {G^*_{1,n}}^{-1}(u)\Big\} \cap \Big\{|{G^*_{1,n}}^{-1}(u) - {G_0}^{-1}(u)| \leq \varepsilon\Big\}\Big)\\
&\qquad + \limsup_{n\to\infty} P\Big(\Big\{\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^{zH_{1,n}}\|_\infty \leq {G^*_{1,n}}^{-1}(u)\Big\}\\
&\qquad\qquad \cap \Big\{|{G^*_{1,n}}^{-1}(u) - {G_0}^{-1}(u)| > \varepsilon\Big\}\Big)\\
&\leq \; \limsup_{n\to\infty} P\Big(\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^{zH_{1,n}}\|_\infty \leq {G_0}^{-1}(u) + \varepsilon\Big)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\limsup_{n\to\infty} P\Big(|{G_{1,n}^*}^{-1}(u) - G_0^{-1}(u)| > \varepsilon\Big) \\
= \;& G_1(G_0^{-1}(u)+\varepsilon) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} G_1(G_0^{-1}(u))
\end{aligned}
$$

nach (4.65), (8.19) und weil G_1 stetig ist. Auf ähnliche Weise erhalten wir für alle $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&\liminf_{n\to\infty} P\Big(\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^{zH_{1,n}}\|_\infty \le {G_{1,n}^*}^{-1}(u)\Big) \\
&\quad\ge \liminf_{n\to\infty} P\Big(\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^{zH_{1,n}}\|_\infty \le G_0^{-1}(u) - \varepsilon\Big) \\
&\qquad + \liminf_{n\to\infty} P\Big(|{G_{1,n}^*}^{-1}(u) - G_0^{-1}(u)| > \varepsilon\Big) \\
&\quad= G_1(G_0^{-1}(u)-\varepsilon) \underset{\varepsilon\downarrow 0}{\longrightarrow} G_1(G_0^{-1}(u)),
\end{aligned}
$$

das heißt es gilt

$$
\lim_{n\to\infty} P\Big(\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^{zH_{1,n}}\|_\infty \le {G_{1,n}^*}^{-1}(u)\Big) \;=\; G_1(G_0^{-1}(u))
$$

für alle $u \in (0,1)$. Mit der Wahl $u = 1-\alpha$ erhalten wir (8.17).
Zu (8.16): Mit der gleichen Argumentation wie oben erhalten wir unter Verwendung von (4.16) und (8.18) für alle $u \in (0,1)$

$$
P\Big(\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^{z}\|_\infty > {G_{0,n}^*}^{-1}(u)\Big) \underset{n}{\longrightarrow} 1 - G_0(G_0^{-1}(u)) \;=\; 1-u,
$$

wobei die Gleichheit wegen der Stetigkeit der Verteilungsfunktion G_0 gilt. Hieraus folgt (8.16) wieder mit der Wahl $u = 1-\alpha$.

8.20 Proposition. Unter den Voraussetzungen (2.1), (2.2), (3.1), (3.3), (3.4), (4.1), (6.1), (6.56) und (8.11) gilt

$$
P\Big(\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^{z}\|_\infty > k_{n,\alpha}^{r,z,*}\Big) \underset{n}{\longrightarrow} \alpha \tag{8.21}
$$

und wenn weiter (4.43) erfüllt ist,

$$
P\Big(\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^{zH_{1,n}}\|_\infty > k_{n,\alpha}^{r,z,*,H_{1,n}}\Big) \underset{n}{\longrightarrow} 1 - F_{\|V_1^{zentr}\|_\infty}\big(F_{\|V^{zentr}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)\big), \tag{8.22}
$$

wobei $F_{\|V_1^{zentr}\|_\infty}$ die Verteilungsfunktion vom Supremum des Prozesses V_1^{zentr} und $F_{\|V^{zentr}\|_\infty}^{-1}$ die Quantilfunktion der Verteilung des Supremums des Prozesses V^{zentr} ist.

Beweis: Geht mit den gleichen Argumenten wie der Beweis von Proposition 8.15.

8.23 Definition. Wir setzen für alle $\alpha \in (0,1)$

$$k_\alpha^B \;:=\; F_{\|B^\circ\|_\infty}^{-1}(1-\alpha) = \inf\Big\{x \in \mathbb{R} : P(\|B^\circ\|_\infty \le x) \ge 1-\alpha\Big\},$$

wobei B° eine Brownsche Brücke ist. Für alle $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$ sei

$$\bar{k}_{n,\alpha}^{r,z} := \hat{v}_n^{zentr}\, k_\alpha^B$$

mit $\hat{v}_n^{zentr}$ aus Definition 5.28. Entsprechend seien für alle $\alpha \in (0,1)$ und $n \in \mathbb{N}$, wie in Abschnitt 4.2 angegeben, $\bar{k}_{n,\alpha}^{r,z,H_{1,n}}$ und $\hat{v}_n^{zentr\,H_{1,n}}$ mit $\hat{e}_{n1}^{H_{1,n}}, \ldots, \hat{e}_{nn}^{H_{1,n}}$ anstelle von $\hat{e}_{n1}, \ldots, \hat{e}_{nn}$ in $\hat{v}_n^{zentr}$ definiert.

8.24 Proposition. Unter den Voraussetzungen (2.1), (2.2), (2.3), (3.1), (3.3), (3.4), (3.92), (4.1), (5.1) und (8.11) gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$P\Big(\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^z\|_\infty > \bar{k}_{n,\alpha}^{r,z}\Big) \underset{n}{\longrightarrow} \alpha \tag{8.25}$$

und wenn außerdem noch (4.43) erfüllt ist,

$$P\Big(\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^{z\,H_{1,n}}\|_\infty > \bar{k}_{n,\alpha}^{r,z,H_{1,n}}\Big) \underset{n}{\longrightarrow} 1 - F_{\|V_1^{zentr}\|_\infty}(F_{\|V^{zentr}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)), \tag{8.26}$$

wobei wieder $F_{\|V_1^{zentr}\|_\infty}$ und $F_{\|V^{zentr}\|_\infty}^{-1}$ wie oben sind.

Beweis: Die Verteilungsfunktionen $F_{\|V\|_\infty}$ und $F_{\|V_1\|_\infty}$ sind nach Folgerung 8.5, Bemerkung 8.10 und Proposition 8.12 unter (8.11) stetig.
Zu (8.25): Es bezeichne B° eine Brownsche Brücke. Dann gilt für alle $\alpha \in (0,1)$

$$\begin{aligned}
&P\Big(\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^z\|_\infty > \bar{k}_{n,\alpha}^{r,z}\Big)\\
&\quad= \quad P\Big(\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^z\|_\infty + (v^{zentr} - \hat{v}_n^{zentr})k_\alpha^B > v^{zentr}k_\alpha^B\Big)\\
&\quad= \quad 1 - P\Big(\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^z\|_\infty + (v^{zentr} - \hat{v}_n^{zentr})k_\alpha^B \le v^{zentr}k_\alpha^B\Big)\\
&\quad\underset{n}{\longrightarrow} \quad 1 - P(\|V^{zentr}\|_\infty \le v^{zentr}k_\alpha^B) \quad=\quad 1 - P(\|B^\circ\|_\infty \le k_\alpha^B) \quad=\quad \alpha,
\end{aligned}$$

da nach dem Stetigkeitssatz mit (4.37) und nach dem dem Cramér-Slutzky-Argument mit (5.31)

$$\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^z\|_\infty + (v^{zentr} - \hat{v}_n^{zentr})k_\alpha^B \quad \underset{n}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \quad \|V^{zentr}\|_\infty$$

gilt, und da die Verteilungsfunktion $F_{\|V^{zentr}\|_\infty}$ stetig ist. Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt wegen $\|V^{zentr}\|_\infty \sim v^{zentr}\|B^\circ\|_\infty$ und $v^{zentr} > 0$.
Zu (8.26): Geht mit einer ähnlichen Rechnung wie oben unter Verwendung von (4.66) statt (4.37), unter Berücksichtigung von $|\hat{v}_n^{zentr\,H_{1,n}} - v^{zentr}| = o_p(1)$ anstelle von (4.37), was wie in Abschnitt 4.2 aus (4.37) folgt, und weil $v^{zentr}k_\alpha^B = F_{\|V^{zentr}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)$ ist, wieder wegen $\|V^{zentr}\|_\infty \sim v^{zentr}\|B^\circ\|_\infty$ wie eben.

8.27 Bemerkung. Analog zu den obigen Sätzen läßt sich zeigen: mit

$$\begin{aligned} k_{n,\alpha}^{T,klass,*} &:= \inf\Big\{x \in \overline{\mathbb{R}} : P(\sqrt{n}\,\|T_n^*\|_\infty \le x|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ge 1-\alpha\Big\}, \\ k_{n,\alpha}^{T,klass,*,H_{1,n}} &:= \inf\Big\{x \in \overline{\mathbb{R}} : P(\sqrt{n}\,\|T_n^{*H_{1,n}}\|_\infty \le x|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ge 1-\alpha\Big\}, \\ k_{n,\alpha}^{r,klass,*} &:= \inf\Big\{x \in \overline{\mathbb{R}} : P(\sqrt{n}\,\|r_n^*\|_\infty \le x|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ge 1-\alpha\Big\}, \\ k_{n,\alpha}^{r,klass,*,H_{1,n}} &:= \inf\Big\{x \in \overline{\mathbb{R}} : P(\sqrt{n}\,\|r_n^{*H_{1,n}}\|_\infty \le x|\widehat{\mathbf{e}}_n) \ge 1-\alpha\Big\}, \\ \bar{k}_{n,\alpha}^{r,klass} &:= \hat{v}_n^{klass}\, k_\alpha^B \end{aligned}$$

und

$$\bar{k}_{n,\alpha}^{r,klass,H_{1,n}} := \hat{v}_n^{klass\;H_{1,n}}\, k_\alpha^B$$

gelten für alle $\alpha \in (0,1)$ unter (2.1), (2.2), (3.1), (3.3), (3.4), wenn zusätzlich noch (3.78), (3.79) und (6.1) erfüllt sind,

$$P\Big(\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n\|_\infty > k_{n,\alpha}^{T,klass,*}\Big) \xrightarrow[n]{} \alpha, \tag{8.28}$$

wenn zusätzlich noch (2.3), (4.1) und (5.1) gelten,

$$P\Big(\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n\|_\infty > \bar{k}_{n,\alpha}^{r,klass}\Big) \xrightarrow[n]{} \alpha, \tag{8.29}$$

und falls zusätzlich (4.1), (6.1) und (6.56) erfüllt sind,

$$P\Big(\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n\|_\infty > k_{n,\alpha}^{r,klass,*}\Big) \xrightarrow[n]{} \alpha. \tag{8.30}$$

Wenn überdies jeweils noch (4.43) erfüllt ist, gelten

$$P\Big(\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^{zH_{1,n}}\|_\infty > k_{n,\alpha}^{T,klass,*,H_{1,n}}\Big) \xrightarrow[n]{} 1 - F_{\|W_1^{klass}\|_\infty}(F_{\|W^{klass}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)), \tag{8.31}$$

$$P\Big(\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n{}^{H_{1,n}}\|_\infty > k_{n,\alpha}^{r,klass,*,H_{1,n}}\Big) \xrightarrow[n]{} 1 - F_{\|V_1^{klass}\|_\infty}(F_{\|V^{klass}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)) \tag{8.32}$$

und

$$P\Big(\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n{}^{H_{1,n}}\|_\infty > \bar{k}_{n,\alpha}^{r,klass,H_{1,n}}\Big) \xrightarrow[n]{} 1 - F_{\|V_1^{klass}\|_\infty}(F_{\|V^{klass}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)). \tag{8.33}$$

Dies folgt aus (4.4), (4.22), (5.30), (7.30) und (7.31), (4.69) und (4.70), was wir hier nicht weiter ausführen. Die über die Endlichkeit der zweiten Fehlermomente hinausgehenden Bedingungen (2.3) und (6.1), welche bei der für (8.28)–(8.33) nicht benötigten stochastischen Entwicklung der Lagrangemultiplikatoren benutzt wurden, stehen hier deshalb in der gleichen Form in den Voraussetzungen, weil wir bei der Betrachtung der klassischen Statistiken die ohnehin für die Entwicklung der Lagrangemultiplikatoren bewiesenen Propositionen wiederverwandt haben, um nicht separat leicht schwächere Aussagen unter nur leicht schwächeren Voraussetzungen beweisen zu müssen.

8.34 Bemerkung. Für unser Testproblem beschrieben durch die Hypothese

H_0: $e_1, \ldots, e_n$ haben dieselbe Verteilung

und die Alternative

H_1: es gibt einen Changepoint in $e_1, \ldots, e_n$.

werden durch die Entscheidungsregeln

$$H_0 \text{ verwerfen} \quad :\Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^z\|_\infty > k_{n,\alpha}^{T,z,*}, \tag{8.35}$$

$$H_0 \text{ verwerfen} \quad :\Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^z\|_\infty > \bar{k}_{n,\alpha}^{r,z}, \tag{8.36}$$

$$H_0 \text{ verwerfen} \quad :\Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^z\|_\infty > k_{n,\alpha}^{r,z,*}, \tag{8.37}$$

$$H_0 \text{ verwerfen} \quad :\Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n\|_\infty > k_{n,\alpha}^{T,klass,*}, \tag{8.38}$$

$$H_0 \text{ verwerfen} \quad :\Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\|\hat{r}_n\|_\infty > \bar{k}_{n,\alpha}^{r,klass}, \tag{8.39}$$

und

$$H_0 \text{ verwerfen} \quad :\Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\|\hat{r}_n\|_\infty > k_{n,\alpha}^{r,klass,*} \tag{8.40}$$

gemäß (8.16), (8.21), (8.25) und (8.28)–(8.30) unter den dort gegebenen Voraussetzungen asymptotische Niveau-α-Tests definiert.

8.41 Bemerkung. Die asymptotische Güte der Tests mit den U-Typ-Statistiken in (8.22), (8.26), (8.32) und (8.33) unter benachbarten Alternativen wurde in Ferger (1991) ausführlich diskutiert. Wir zeichnen dies hier kurz nach:
Bei den Grenzprozessen der U-Typ-Statistiken im zentrierten und im klassischen Fall handelt es sich, abgesehen von einem Skalenfaktor und, bei den Grenzprozessen unter benachbarten Alternativen, einer anderen Erwartungswertfunktion, um Brownsche Brücken. Wir bezeichnen sie an dieser Stelle neutral mit V und den Skalenfaktor mit v, da die im folgenden durchgeführten Überlegungen genauso im klassischen Fall wie im Fall mit der expliziten Berücksichtigung der Zentriertheit gelten. Für die asymptotische Güte in (8.22), (8.26), (8.32) und (8.33) ergab sich so ein Ausdruck der Form $1 - F_{\|V_1\|_\infty}(F_{\|V\|_\infty}^{-1}(1-\alpha))$ und es gilt

$$V \sim vB^\circ \qquad \text{und} \qquad V_1 \sim vB^\circ + mc_\lambda$$

mit $v, m \in \mathbb{R}$ und $v > 0$, wobei B° eine Brownsche Brücke bezeichnet und, für den Changepoint $\lambda \in (0,1)$, $c_\lambda : [0,1] \to \mathbb{R}, c_\lambda(s) := \lambda \wedge s - \lambda s$, ist. Es gilt dann für alle $u \in (0,1)$

$$F_{\|V\|_\infty}^{-1}(u) \;=\; vF_{\|B^\circ\|_\infty}^{-1}(u),$$

also für alle $\alpha \in (0,1)$

$$
\begin{aligned}
(8.42) \qquad & 1 - F_{\|V_1\|_\infty}\Big(F_{\|V\|_\infty}{}^{-1}(1-\alpha)\Big) \\
&= 1 - F_{\|vB^\circ + mc_\lambda\|_\infty}\Big(vF_{\|B^\circ\|_\infty}{}^{-1}(1-\alpha)\Big) \\
&= 1 - F_{\|B^\circ + \frac{m}{v}c_\lambda\|_\infty}\Big(F_{\|B^\circ\|_\infty}{}^{-1}(1-\alpha)\Big),
\end{aligned}
$$

vergleiche Abschnitt 2.3.2 in Ferger (1991). Diese Größe, die außer natürlich vom Testniveau α und dem Changepoint λ nur vom Quotienten $q := |m/v|$ abhängt, wurde in Ferger (1991) bestimmt:
Von der Zufallsvariable $\|B^\circ\|_\infty$, deren Verteilung die Kolmogorovverteilung ist, ist die Verteilungsfunktion analytisch bekannt (siehe zum Beispiel Durbin (1971), (3.4.8)), und liegt auch tabelliert vor (siehe zum Beispiel Smirnov (1948)), die Verteilungsfunktion von $\|B^\circ + \frac{m}{v}c_\lambda\|_\infty$ ist in Ferger (1991), Korollar 4.5, in analytischer Form bestimmt worden. Wir geben sie im folgenden in leicht angepasster Form an, wobei wir einige offensichtliche Druckfehler korrigiert haben. Es gilt für $x \in \mathbb{R}$, $q \in (0,\infty)$ und $\lambda \in (0,1)$

$$
\begin{aligned}
(8.43) \qquad & P\Big(\|B^\circ + qc_\lambda\|_\infty \le x\Big) \\
&= \int_u^o p\Big(x, \beta(y), x, b(y)\Big) p\Big(\tilde\lambda\beta(y), \tilde\lambda x, \tilde\lambda b(y), \tilde\lambda x\Big) \varphi_{0,\bar\lambda}(y)\, dy,
\end{aligned}
$$

mit $\bar\lambda := \lambda/(1-\lambda)$, $\tilde\lambda := \bar\lambda^{-1/2}$, $o := \bar\lambda(q(\lambda-1)+x)+x$, $u := \bar\lambda(q(\lambda-1)-x)-x$, $\beta(y) := y-u$, $b(y) := o-y$, wobei $\varphi_{0,\bar\lambda}$ die Dichte einer Normalverteilung mit Erwartungswert Null und Varianz $\bar\lambda$ ist, und wobei

$$
p(\alpha,\beta,a,b) := \begin{cases} 1 - \sum_{k=1}^\infty h_k(\alpha,\beta,a,b), & \text{falls } \alpha,\beta,a,b \ge 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
$$

eine aus Doob (1949) stammende Überschreitungswahrscheinlichkeit einer Brownschen Bewegung ist mit

$$
\begin{aligned}
h_k(\alpha,\beta,a,b) \;:=\; & \exp\Big(-2\Big(k^2ab + (k-1)^2\alpha\beta + k(k-1)(a\beta+\alpha b)\Big)\Big) \\
& + \exp\Big(-2\Big((k-1)^2ab + k^2\alpha\beta + k(k-1)(a\beta+\alpha b)\Big)\Big) \\
& - \exp\Big(-2\Big(k^2(ab+\alpha\beta) + k(k-1)a\beta + k(k+1)\alpha b\Big)\Big) \\
& - \exp\Big(-2\Big(k^2(ab+\alpha\beta) + k(k+1)a\beta + k(k-1)\alpha b\Big)\Big).
\end{aligned}
$$

8.44 Bemerkung. Nach Theorem 6 aus Bickel und Wichura (1971) gilt, wenn die Verteilungsfunktion F stetig ist,

$$
\sqrt{n}\, T_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W^{klass} \quad \text{in } D([0,1]\times\overline{\mathbb{R}}).
$$

Wenn wir für $\alpha \in (0,1)$

$$k_\alpha^{T,klass} := F_{\|W^{klass}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)$$

setzen, so wird für unser in Bemerkung 8.34 beschriebenes Testproblem nach obiger Verteilungskonvergenzaussage zusammen mit dem Stetigkeitssatz durch

$$H_0 \text{ verwerfen } \quad :\Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\|T_n\|_\infty \geq k_\alpha^{T,klass} \tag{8.45}$$

ein asymptotischer Niveau-α-Test definiert. Man beachte dabei, dass nach Bemerkung 4.17 der kritische Wert $k_\alpha^{T,klass}$ nicht von der unbekannten Verteilungsfunktion F abhängt.

Ebenso wird wie in Bai (1994) beschrieben, in dem Fall dass man die ARMA-Zeitreihe $X_{1-p}, \ldots, X_n$ beobachtet hat, nach (4.4) unter den dort genannten Voraussetzungen durch

$$H_0 \text{ verwerfen } \quad :\Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n\|_\infty \geq k_\alpha^{T,klass} \tag{8.46}$$

ein asymptotischer Niveau-α-Test für unser Testproblem definiert.

Allerdings ist bei der Teststatistik $\sqrt{n}\,\|T_n\|_\infty$ nicht nur die Grenzverteilung von F unabhängig, sondern dies gilt bei stetiger Verteilungsfunktion F sogar bei jedem Stichprobenumfang n auch schon für diese Zufallsgröße selbst. Denn wenn wir mit $U_1, \ldots, U_n$ unabhängige in $[0,1]$ gleichverteilte Zufallsvariablen bezeichnen, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sqrt{n}\,\|T_n\|_\infty &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{n-[ns]}{n} \sum_{i=1}^{[ns]} 1_{\{e_i \leq x\}} - \frac{[ns]}{n} \sum_{j=[ns]+1}^{n} 1_{\{e_j \leq x\}} \right| \\
&\sim \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{n-[ns]}{n} \sum_{i=1}^{[ns]} 1_{\{F^{-1}(U_i) \leq x\}} - \frac{[ns]}{n} \sum_{j=[ns]+1}^{n} 1_{\{F^{-1}(U_j) \leq x\}} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{s\in[0,1]} \sup_{x\in\overline{\mathbb{R}}} \left| \frac{n-[ns]}{n} \sum_{i=1}^{[ns]} 1_{\{U_i \leq F(x)\}} - \frac{[ns]}{n} \sum_{j=[ns]+1}^{n} 1_{\{U_j \leq F(x)\}} \right| \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_{s\in[0,1]} \sup_{u\in[0,1]} \left| \frac{n-[ns]}{n} \sum_{i=1}^{[ns]} 1_{\{U_i \leq u\}} - \frac{[ns]}{n} \sum_{j=[ns]+1}^{n} 1_{\{U_j \leq u\}} \right| := D_n,
\end{aligned}$$

wobei wir beim letzten Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass $F(\overline{\mathbb{R}}) = [0,1]$ gilt, wenn F stetig ist. Diese Betrachtung zeigt die Unabhängigkeit der Verteilung von $\sqrt{n}\,\|T_n\|_\infty$ von der unbekannten Verteilungsfunktion F für jedes $n \in \mathbb{N}$.

Daher kann man bei unabhängigen Beobachtungen $e_1, \ldots, e_n$ durch die Verwendung von

$$k_{n,\alpha}^{T,klass} := F_{D_n}^{-1}(1-\alpha)$$

anstelle von $k_{\alpha}^{T,klass}$ in der oben angegebenen Entscheidungsregel (8.45) sogar einen exakten Test für H_0 konstruieren.
Es liegt nahe, in (8.46) ebenfalls $k_{n,\alpha}^{T,klass}$ als kritischen Wert zu benutzen. Da die Residuen nicht unabhängig und identisch verteilt sind, kann man nicht erwarten dass auch die Zufallsgröße $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n\|_\infty$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ unabhängig von F ist, so dass man durch

$$\text{(8.47)} \qquad H_0 \text{ verwerfen} \quad :\Leftrightarrow \quad \sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n\|_\infty \geq k_{n,\alpha}^{T,klass}$$

keinen exakten, sondern wieder nur einen asymptotischen Test erhält (dass es ein asymptotischer Test ist, folgt einfacher als in Beweis von Proposition 8.15, wo die kritischen Werte nicht reelle Zahlen, sondern Zufallsvariablen waren, die nicht wie reelle Zahlen, sondern nur stochastisch konvergierten). Man erreicht so aber ebenfalls eine gewisse Adjustierung der kritischen Werte an den Stichprobenumfang.
Mittels einer Simulation geschätzte Werte der Quantilfunktion von D_n für mehrere verschiedene Stichprobenumfänge n sind in Tabelle 1 (in der Form $k_{n,\alpha}^{T,klass} := F_{D_n}^{-1}(1-\alpha)$ für $\alpha = 1\%, \ldots, 99\%$) zu finden. In Picard (1985) sind ebenfalls mittels einer Simulation geschätzte Werte für Quantile eines Prozesses zu finden, welcher $\|W^{klass}\|_\infty$ annähert. Diese in Bai (1994) als Quantile der Grenzverteilung angesehenen Werte entsprechen ungefähr den in Tabelle 1 aufgeführten Schätzwerten zum Stichprobenumfang $n = 40$ oder $n = 50$. Es zeigt sich dort, dass die Quantile über einen weiten Bereich relativ stark vom Stichprobenumfang n abhängen, beispielsweise ist $k_{50,\,5\%}^{T,klass}$ ungefähr gleich $k_{2500,\,10\%}^{T,klass}$. Daher erscheint es sinnvoll, den dem jeweiligen Stichprobenumfang entsprechenden kritischen Wert zu verwenden. Es ist unklar wie gut die hier erhaltenen Quantile den Quantilen der Grenzverteilung entsprechen, zum Beispiel ist der Unterschied von $n = 1000$ zu $n = 2500$ immer noch etwa so groß wie von $n = 500$ zu $n = 1000$, so dass sich zwar eine gewisse Stabilisierung andeutet, aber nicht so stark, dass man die Verteilung von D_{2500} schon näherungsweise als die Grenzverteilung ansehen könnte.
Bei den Tests mit den U-Typ-Statistiken sind diese Argumente zur Anpassung der kritischen Werte an den Stichprobenumfang im allgemeinen nicht anwendbar, da hier $\|r_n(s)\|_\infty$ nicht verteilungsfrei sein muß. In bestimmten Spezialfällen

$\alpha\backslash n$	10	20	30	40	50	70	100	200	300	500	1000	2500
99%	0,316	0,335	0,347	0,356	0,359	0,369	0,376	0,389	0,394	0,399	0,404	0,411
98%	0,316	0,335	0,365	0,368	0,373	0,382	0,392	0,403	0,409	0,414	0,419	0,426
97%	0,316	0,358	0,365	0,379	0,385	0,393	0,400	0,414	0,419	0,424	0,430	0,435
96%	0,316	0,358	0,371	0,387	0,396	0,403	0,409	0,422	0,427	0,433	0,438	0,443
95%	0,316	0,358	0,377	0,395	0,399	0,410	0,416	0,429	0,434	0,440	0,445	0,450
94%	0,316	0,369	0,389	0,395	0,407	0,413	0,422	0,435	0,440	0,446	0,451	0,456
93%	0,348	0,380	0,396	0,403	0,410	0,418	0,428	0,440	0,446	0,451	0,457	0,461
92%	0,348	0,391	0,402	0,411	0,416	0,425	0,432	0,445	0,450	0,456	0,462	0,467
91%	0,348	0,391	0,402	0,411	0,424	0,429	0,438	0,450	0,456	0,461	0,466	0,471
90%	0,379	0,402	0,402	0,415	0,424	0,430	0,441	0,454	0,460	0,465	0,471	0,476
89%	0,379	0,402	0,414	0,419	0,427	0,437	0,446	0,458	0,464	0,469	0,475	0,479
88%	0,379	0,402	0,420	0,427	0,430	0,442	0,450	0,462	0,468	0,473	0,479	0,483
87%	0,379	0,402	0,426	0,431	0,436	0,444	0,452	0,466	0,472	0,477	0,483	0,487
86%	0,379	0,402	0,426	0,435	0,441	0,449	0,456	0,470	0,475	0,481	0,486	0,491
85%	0,379	0,402	0,426	0,435	0,441	0,454	0,460	0,473	0,479	0,484	0,490	0,494
84%	0,379	0,402	0,426	0,443	0,447	0,454	0,464	0,477	0,482	0,487	0,493	0,498
83%	0,379	0,414	0,438	0,443	0,453	0,459	0,467	0,480	0,485	0,491	0,497	0,501
82%	0,379	0,414	0,438	0,443	0,453	0,461	0,470	0,483	0,489	0,494	0,500	0,504
81%	0,379	0,425	0,438	0,447	0,453	0,464	0,474	0,486	0,492	0,497	0,503	0,508
80%	0,379	0,425	0,438	0,451	0,458	0,468	0,476	0,489	0,495	0,500	0,506	0,511
79%	0,379	0,436	0,438	0,455	0,461	0,471	0,480	0,492	0,498	0,503	0,509	0,514
78%	0,379	0,436	0,444	0,459	0,464	0,476	0,482	0,495	0,501	0,506	0,512	0,517
77%	0,379	0,447	0,450	0,459	0,467	0,478	0,485	0,498	0,504	0,509	0,515	0,520
76%	0,379	0,447	0,456	0,466	0,470	0,478	0,488	0,501	0,507	0,512	0,518	0,523
75%	0,379	0,447	0,456	0,470	0,475	0,482	0,492	0,504	0,510	0,515	0,521	0,526
74%	0,379	0,447	0,456	0,474	0,478	0,485	0,495	0,507	0,513	0,518	0,524	0,529
73%	0,379	0,447	0,456	0,474	0,481	0,488	0,498	0,509	0,516	0,521	0,527	0,532
72%	0,443	0,447	0,463	0,474	0,481	0,492	0,500	0,513	0,519	0,524	0,530	0,534
71%	0,443	0,447	0,469	0,474	0,484	0,495	0,501	0,515	0,521	0,527	0,532	0,537
70%	0,443	0,447	0,475	0,474	0,486	0,495	0,504	0,518	0,524	0,529	0,535	0,540
69%	0,443	0,447	0,475	0,478	0,492	0,499	0,508	0,521	0,527	0,532	0,538	0,542
68%	0,443	0,447	0,475	0,482	0,492	0,502	0,510	0,523	0,529	0,535	0,541	0,545
67%	0,443	0,447	0,475	0,486	0,495	0,504	0,513	0,526	0,532	0,537	0,543	0,548
66%	0,443	0,447	0,475	0,490	0,498	0,505	0,516	0,529	0,535	0,540	0,546	0,551
65%	0,443	0,458	0,487	0,494	0,498	0,511	0,520	0,532	0,538	0,543	0,549	0,554
64%	0,443	0,470	0,487	0,498	0,503	0,512	0,520	0,535	0,540	0,546	0,552	0,556
63%	0,443	0,470	0,487	0,498	0,506	0,514	0,524	0,537	0,543	0,548	0,554	0,559
62%	0,443	0,470	0,487	0,506	0,509	0,519	0,526	0,540	0,546	0,551	0,557	0,562
61%	0,443	0,481	0,487	0,506	0,509	0,522	0,529	0,543	0,548	0,554	0,560	0,564
60%	0,443	0,481	0,493	0,506	0,509	0,526	0,532	0,546	0,551	0,557	0,562	0,567
59%	0,443	0,481	0,493	0,506	0,515	0,526	0,535	0,548	0,554	0,559	0,565	0,570
58%	0,443	0,492	0,499	0,510	0,518	0,529	0,538	0,551	0,557	0,562	0,568	0,573
57%	0,443	0,492	0,505	0,514	0,520	0,531	0,540	0,553	0,559	0,565	0,571	0,575
56%	0,474	0,492	0,511	0,514	0,526	0,536	0,544	0,556	0,562	0,568	0,573	0,578
55%	0,474	0,492	0,511	0,518	0,526	0,538	0,546	0,559	0,565	0,571	0,576	0,581
54%	0,474	0,492	0,511	0,522	0,532	0,540	0,550	0,562	0,568	0,573	0,579	0,584
53%	0,474	0,492	0,511	0,526	0,535	0,543	0,550	0,565	0,570	0,576	0,582	0,586
52%	0,474	0,492	0,511	0,530	0,537	0,546	0,553	0,567	0,573	0,579	0,585	0,589
51%	0,474	0,503	0,517	0,534	0,537	0,546	0,556	0,570	0,576	0,582	0,587	0,592
50%	0,474	0,503	0,523	0,538	0,540	0,550	0,560	0,573	0,579	0,585	0,590	0,595
α/n	10	20	30	40	50	70	100	200	300	500	1000	2500

Tabelle 1: Durch Simulationen erhaltene Schätzwerte für $k_{n,\alpha}^{T,klass}$ (je 1 000 000 Realisierungen, mit Ausnahme von $n = 2\,500$ wo nur 100 000 Wiederholungen berechnet wurden) (Fortsetzung siehe nächste Seite)

$\alpha\backslash n$	10	20	30	40	50	70	100	200	300	500	1000	2500
49%	0,474	0,503	0,529	0,538	0,543	0,552	0,561	0,576	0,582	0,587	0,593	0,598
48%	0,474	0,503	0,529	0,538	0,546	0,557	0,565	0,579	0,585	0,590	0,596	0,601
47%	0,474	0,503	0,536	0,545	0,549	0,560	0,568	0,582	0,588	0,593	0,599	0,604
46%	0,474	0,514	0,542	0,549	0,554	0,563	0,572	0,584	0,591	0,596	0,602	0,607
45%	0,474	0,514	0,548	0,553	0,554	0,565	0,575	0,588	0,594	0,599	0,605	0,610
44%	0,474	0,514	0,548	0,553	0,560	0,569	0,578	0,591	0,597	0,602	0,608	0,613
43%	0,474	0,537	0,548	0,553	0,563	0,574	0,580	0,594	0,600	0,605	0,611	0,616
42%	0,474	0,537	0,548	0,553	0,566	0,574	0,583	0,597	0,603	0,608	0,614	0,619
41%	0,474	0,537	0,548	0,557	0,566	0,577	0,586	0,600	0,606	0,612	0,617	0,622
40%	0,474	0,537	0,548	0,561	0,569	0,581	0,590	0,603	0,609	0,615	0,621	0,625
39%	0,474	0,537	0,548	0,569	0,571	0,584	0,592	0,606	0,612	0,618	0,624	0,629
38%	0,474	0,537	0,548	0,569	0,577	0,587	0,596	0,610	0,616	0,621	0,627	0,632
37%	0,506	0,548	0,554	0,569	0,580	0,591	0,600	0,613	0,619	0,625	0,631	0,635
36%	0,506	0,559	0,560	0,573	0,583	0,596	0,601	0,617	0,622	0,628	0,634	0,639
35%	0,506	0,559	0,560	0,577	0,588	0,598	0,605	0,619	0,626	0,631	0,638	0,642
34%	0,506	0,559	0,566	0,585	0,591	0,598	0,609	0,623	0,629	0,635	0,641	0,646
33%	0,506	0,559	0,572	0,589	0,594	0,603	0,612	0,627	0,633	0,639	0,645	0,649
32%	0,506	0,559	0,584	0,593	0,594	0,608	0,617	0,631	0,636	0,642	0,648	0,653
31%	0,506	0,559	0,584	0,593	0,600	0,611	0,620	0,634	0,640	0,646	0,652	0,657
30%	0,506	0,559	0,584	0,601	0,605	0,615	0,624	0,638	0,644	0,650	0,656	0,661
29%	0,506	0,559	0,584	0,601	0,608	0,620	0,628	0,642	0,648	0,654	0,660	0,664
28%	0,506	0,570	0,590	0,601	0,611	0,622	0,632	0,646	0,652	0,658	0,664	0,668
27%	0,506	0,581	0,596	0,609	0,617	0,627	0,636	0,651	0,656	0,662	0,668	0,673
26%	0,506	0,581	0,609	0,613	0,622	0,632	0,640	0,654	0,660	0,666	0,672	0,677
25%	0,506	0,581	0,609	0,617	0,625	0,635	0,645	0,659	0,665	0,670	0,676	0,681
24%	0,569	0,581	0,609	0,625	0,631	0,642	0,650	0,663	0,669	0,675	0,681	0,685
23%	0,569	0,581	0,615	0,632	0,636	0,645	0,652	0,668	0,674	0,680	0,685	0,690
22%	0,569	0,581	0,621	0,632	0,636	0,649	0,658	0,672	0,678	0,684	0,690	0,695
21%	0,569	0,604	0,621	0,632	0,642	0,656	0,662	0,677	0,683	0,689	0,695	0,700
20%	0,569	0,615	0,627	0,636	0,648	0,657	0,668	0,682	0,689	0,694	0,700	0,705
19%	0,569	0,615	0,639	0,644	0,651	0,666	0,674	0,688	0,693	0,700	0,706	0,710
18%	0,569	0,626	0,639	0,648	0,656	0,669	0,680	0,693	0,699	0,705	0,711	0,715
17%	0,569	0,626	0,639	0,656	0,665	0,674	0,684	0,699	0,705	0,711	0,717	0,721
16%	0,569	0,626	0,645	0,664	0,673	0,683	0,691	0,705	0,711	0,717	0,723	0,728
15%	0,569	0,637	0,657	0,664	0,679	0,686	0,698	0,711	0,717	0,724	0,729	0,734
14%	0,632	0,637	0,657	0,672	0,682	0,693	0,704	0,718	0,724	0,730	0,736	0,741
13%	0,632	0,648	0,669	0,680	0,690	0,700	0,710	0,725	0,731	0,737	0,743	0,748
12%	0,632	0,660	0,669	0,692	0,699	0,710	0,719	0,733	0,739	0,745	0,751	0,756
11%	0,632	0,671	0,682	0,696	0,707	0,717	0,725	0,741	0,747	0,753	0,759	0,764
10%	0,632	0,671	0,694	0,712	0,710	0,724	0,736	0,750	0,756	0,762	0,768	0,773
9%	0,632	0,671	0,700	0,712	0,724	0,734	0,745	0,759	0,766	0,772	0,778	0,783
8%	0,632	0,682	0,718	0,727	0,735	0,744	0,754	0,769	0,776	0,782	0,789	0,794
7%	0,632	0,704	0,730	0,735	0,744	0,756	0,765	0,781	0,788	0,794	0,800	0,805
6%	0,632	0,716	0,730	0,751	0,758	0,768	0,780	0,794	0,801	0,807	0,814	0,818
5%	0,664	0,716	0,742	0,759	0,775	0,785	0,795	0,810	0,816	0,823	0,829	0,834
4%	0,664	0,738	0,767	0,787	0,789	0,803	0,812	0,827	0,835	0,841	0,847	0,853
3%	0,664	0,783	0,791	0,798	0,812	0,825	0,836	0,849	0,858	0,864	0,871	0,876
2%	0,759	0,783	0,822	0,830	0,843	0,854	0,864	0,881	0,889	0,895	0,901	0,907
1%	0,759	0,805	0,852	0,874	0,888	0,902	0,912	0,930	0,938	0,945	0,951	0,955
α/n	10	20	30	40	50	70	100	200	300	500	1000	2500

Tabelle 1 (Fortsetzung): Durch Simulationen erhaltene Schätzwerte für $k_{n,\alpha}^{T,klass}$ (jeweils 1 000 000 Realisierungen, bei $n = 2\,500$ nur 100 000 Wiederholungen)

kann dies natürlich dennoch möglich sein, zum Beispiel beim Kern $K(x,y) = 1_{\{x>y\}} - 1_{\{y>x\}}$, vergleiche Pettitt (1979). Hier ist mit $U_1, \dots, U_n$ wie oben bei stetiger Verteilungsfunktion F für alle $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned} r_n(s) &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} K(e_i, e_j) \sim \frac{1}{n^2} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} K(F^{-1}(U_i), F^{-1}(U_j)) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} 1_{\{F^{-1}(U_i)>F^{-1}(U_j)\}} - 1_{\{F^{-1}(U_j)>F^{-1}(U_i)\}} \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i=[ns]+1}^{n} \sum_{j=1}^{[ns]} 1_{\{U_i>U_j\}} - 1_{\{U_j>U_i\}}, \end{aligned}$$

also hängt die Verteilung des Prozesses r_n bei diesem Kern nicht von F ab.

8.2 Beispiele für benachbarte Alternativen

8.48 Proposition. Sei f eine überall positive, zweimal stetig differenzierbare Wahrscheinlichkeitsdichte, welche

$$\int \Big((f^{1/2})''(x)\Big)^2 x^4 \, dx < \infty$$

und

$$\int \frac{f'(x)^2}{f(x)} x^2 \, dx < \infty$$

erfüllt, und sei für ein $d \in \mathbb{R}$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) := \Big(1 + \frac{d}{\sqrt{n}}\Big)^{-1} f\Big(\Big(1 + \frac{d}{\sqrt{n}}\Big)^{-1} x\Big),$$

(was im Falle $d < 0$ nur für $n > d^2$ eine Wahrscheinlichkeitsdichte darstellt), sowie

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) := -d\Big(\frac{f'(x)}{f(x)} x + 1\Big).$$

Dann ist

$$\int \Big(\sqrt{n}(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}) - \frac{1}{2} h(x) f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

erfüllt.

Beweis: Vergleiche Hörmann (2007), Lemma 4.9.

8.49 Proposition. Seien f und g zwei stetige Wahrscheinlichkeitsdichten mit $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und so, dass g^4/f^3 integrierbar ist und es sei $d > 0$ eine reelle Zahl. Wir setzen $a := d\,(g - f)$, $h := a/f = d(g/f - 1)$, und es sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$g_n := \frac{d}{\sqrt{n}}\,g + \Big(1 - \frac{d}{\sqrt{n}}\Big)f = \frac{1}{\sqrt{n}}\,a + f$$

ein $d/\sqrt{n}$-fach mit g kontaminiertes f (was im allgemeinen nur für $n \geq d^2$ eine Dichte sein muß).
Dann gilt

$$\int \Big(\sqrt{n}(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \quad \underset{n}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Beweis: Wir verwenden die Taylorformel bis zur zweiten Ableitung mit dem Restglied in Integralform, also

$$F(x+h) = F(x) + F'(x)h + \int_0^1 F''(x+ht)(1-t)\,dt\,h^2,$$

für die Quadratwurzelfunktion an der Stelle $g_n(x) \geq (1 - d/\sqrt{n}\,)f(x) > 0$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $n > d^2$ und den Entwicklungspunkt $f(x) > 0$, und erhalten

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sqrt{n}\Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\Big) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sqrt{n}\Big(\Big(f(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\,a(x)\Big)^{1/2} - f(x)^{1/2}\Big) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Big(\sqrt{n}\Big(f(x)^{1/2} + \frac{1}{2f(x)^{1/2}}\frac{1}{\sqrt{n}}\,a(x) \\
&\qquad + \int_0^1 \Big(-\frac{1}{4}\Big)\Big(f(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\,a(x)t\Big)^{-3/2}(1-t)\,dt\,\frac{1}{n}a(x)^2 - f(x)^{1/2}\Big) \\
&\qquad\qquad - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \\
&= \frac{1}{16n}\int_{-\infty}^{\infty} \Big(\int_0^1 a(x)^2\Big(f(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\,a(x)t\Big)^{-3/2}(1-t)\,dt\Big)^2 dx.
\end{aligned}$$

Nun ist für alle $t \in [0,1]$, $x \in \mathbb{R}$ und $n \geq 4d^2$

$$\begin{aligned}
&a(x)^2\Big(f(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\,a(x)t\Big)^{-3/2}(1-t) \\
&= a(x)^2\Big(f(x) + \frac{d}{\sqrt{n}}\Big(g(x) - f(x)\Big)t\Big)^{-3/2}(1-t) \\
&\leq a(x)^2\Big(f(x) - \frac{d}{\sqrt{n}}f(x)t\Big)^{-3/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \; a(x)^2\Big(f(x) - \frac{d}{\sqrt{4d^2}} f(x)\Big)^{-3/2} \\
&\leq \; d^2\Big(2g(x)^2 + 2f(x)^2\Big)\Big(\frac{1}{2}f(x)\Big)^{-3/2} \\
&\leq \; 4\sqrt{2}\, d^2 g(x)^2 f(x)^{-3/2} + 4\sqrt{2}\, d^2 f(x)^{1/2} \quad < \quad \infty.
\end{aligned}
$$

Also gilt nach dem Satz von Lebesgue

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 a(x)^2\Big(f(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\, a(x)t\Big)^{-3/2}(1-t)\, dt \\
&\underset{n}{\longrightarrow} \quad \int_0^1 a(x)^2 f(x)^{-3/2}(1-t)\, dt \quad = \quad \frac{1}{2}a(x)^2 f(x)^{-3/2},
\end{aligned}
$$

und da nach obiger Abschätzung auch für alle $n \geq 4d^2$

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_0^1 a(x)^2\Big(f(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\, a(x)t\Big)^{-3/2}(1-t)\, dt\Big)^2 \\
&\leq \; \Big(4\sqrt{2}\, d^2 g(x)^2 f(x)^{-3/2} + 4\sqrt{2}\, d^2 f(x)^{1/2}\Big)^2 \\
&\leq \; 64\, d^4 g(x)^4 f(x)^{-3} + 64\, d^4 f(x)
\end{aligned}
$$

gilt, und diese Majorante nach Voraussetzung integrierbar ist, nochmal nach dem Satz von Lebesgue

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_0^1 a(x)^2\Big(f(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\, a(x)t\Big)^{-3/2}(1-t)\, dt\Big)^2 dx \\
&\underset{n}{\longrightarrow} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4}\, a(x)^4 f(x)^{-3}\, dx \\
&\qquad\qquad \leq \; 2\int_{-\infty}^{\infty} d^4\Big(g(x)^4 + f(x)^4\Big) f(x)^{-3}\, dx \\
&\qquad\qquad = \; 2d^4\Bigg(\int_{-\infty}^{\infty} g(x)^4 f(x)^{-3}\, dx + 1\Bigg) \quad < \quad \infty.
\end{aligned}
$$

Hiermit erhalten wir

$$
\frac{1}{16n}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\int_0^1 a(x)^2\Big(f(x) + \frac{1}{\sqrt{n}}\, a(x)t\Big)^{-3/2}(1-t)\, dt\Big)^2 dx \quad \underset{n}{\longrightarrow} \quad 0.
$$

8.50 Bemerkung. Wir möchten anhand von Beispielen mit Normalverteilungen und t-Verteilungen überprüfen, wann die Voraussetzungen von Proposition (8.49) erfüllt sind. Die Dichten dieser Verteilungen sind stetig und überall positiv, sodass nur noch das Erfülltsein von $\int g(x)^4/f(x)^3 dx < \infty$ zu überprüfen ist.
Diese Bedingung ist äquivalent zu $E(|g(X)/f(X)|^3) < \infty$ für eine Zufallsvariable

X mit Dichte g, und sie erzwingt, dass $g(x)$ mit wachsendem Betrag von x nicht zu groß im Vergleich zu $f(x)$ sein darf. Dies ist eine ungünstige Voraussetzung, wenn die Absicht der Kontaminierung von f mit g war, einer Verteilung mit Dichte f Ausreißer hinzuzufügen, aber wir überlegen dennoch anhand der genannten Verteilungen, was möglich ist.

1. Sei f die Dichte einer zentrierten Normalverteilung mit Varianz $\sigma^2 > 0$ und g die Dichte einer zentrierten Normalverteilung mit Varianz $\tau^2 > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{g(x)^4}{f(x)^3} &= \Big(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\tau}\exp\Big(-\frac{x^2}{2\tau^2}\Big)\Big)^4 \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)\Big)^{-3} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sigma^3}{\tau^4}\exp\Big(\Big(\frac{3}{2\sigma^2}-\frac{2}{\tau^2}\Big)x^2\Big). \end{aligned}$$

   Dies ist genau dann integrierbar, wenn $\frac{3}{2\sigma^2} - \frac{2}{\tau^2} < 0$ gilt, also wenn $\tau^2 < \frac{4}{3}\sigma^2$ ist.

2. Sei f die Dichte einer t_n-Verteilung und g die Dichte einer t_m-Verteilung. Dann ist g^4/f^3 wieder genau dann über $\mathbb{R}$ integrierbar, wenn

$$x \mapsto \Big(1+\frac{x^2}{m}\Big)^{-4\frac{m+1}{2}}\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{3\frac{n+1}{2}}$$

   über $[\sqrt{n \vee m}, \infty)$ integrierbar ist. Da für alle Elemente x dieses Intervalls

$$\begin{aligned} & 2^{-2(m+1)}n^{-2(n+1)}x^{3n-4m-1} \\ &\leq \Big(2x^2\Big)^{-2(m+1)}\Big(\frac{x^2}{n}\Big)^{\frac{3}{2}2(n+1)} \\ &\leq \Big(1+\frac{x^2}{m}\Big)^{-4\frac{m+1}{2}}\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{3\frac{n+1}{2}} \\ &\leq \Big(\frac{x^2}{m}\Big)^{-2(m+1)}\Big(2x^2\Big)^{\frac{3}{2}(n+1)} \\ &\leq m^{2(m+1)}2^{2(n+1)}x^{3n-4m-1} \end{aligned}$$

   gilt, ist dies genau dann der Fall, wenn $x \mapsto x^{3n-4m-1}$ über dieser Menge integrierbar ist. Und dies ist genau dann erfüllt, wenn $3n - 4m - 1 < -1$ ist, also für $n < \frac{4}{3}m$.

Wir möchten noch eine weitere Folge von benachbarten Alternativen betrachten. Bekanntlich gilt, da für eine t_n-verteilte Zufallsvariable t_n

$$t_n \sim \frac{N}{\sqrt{\chi_n^2/n}}, \qquad \chi_n^2 := \sum_{i=1}^n N_i^2$$

mit unabhängigen, standardnormalverteilten Zufallsvariablen N, $(N_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ist, und da nach dem starken Gesetz der großen Zahlen fast sicher $\sqrt{\chi_n^2/n} \xrightarrow[n]{} 1$ ist,

$$t_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} N$$

nach dem Cramér-Slutzky-Argument. Dies gibt uns die Anregung zu einer weiteren Folge von zur Normalverteilung benachbarten Alternativen.

8.51 Proposition. Sei $g_n(x) := \frac{1}{\sqrt{n\pi}}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\Gamma(\frac{n}{2})}(1+\frac{x^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ die Dichte einer t-Verteilung mit n Freiheitsgraden, und sei $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\frac{x^2}{2})$ die Dichte einer Standardnormalverteilung. Sei $h(x) := -\frac{1}{2}(\frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^4}{2})$.
Dann gilt für alle $d > 0$

$$\int \Big(\sqrt{n}(g_{[d\sqrt{n}]}(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}) - \frac{1}{2d}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \quad \xrightarrow[n]{} \quad 0.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst:

$$\int \Big(n(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \quad \xrightarrow[n]{} \quad 0. \tag{8.52}$$

Zu (8.52): Es ist nach der Stirlingschen Formel, also wegen der Entwicklung $\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}\exp(-x)x^{x-1/2}(1 + 1/(12x) + O(1/x^2))$ für $x \to \infty$,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt[4]{n\pi}}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})^{1/2}}{\Gamma(\frac{n}{2})^{1/2}} \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{n\pi}}\left(\exp\Big(-\frac{n+1}{2}+\frac{n}{2}\Big)\frac{(\frac{n+1}{2})^{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}{(\frac{n}{2})^{\frac{n}{2}}}\Big(\frac{\frac{n}{2}}{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}\Big)^{\frac{1}{2}}\frac{1+\frac{1}{12\frac{n+1}{2}}+O\Big(\frac{1}{(n+1)^2}\Big)}{1+\frac{1}{12\frac{n}{2}}+O(\frac{1}{n^2})}\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{n\pi}}\left(\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big)\right)^{1/2}\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{n/4}\Big(\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\Big)^{1/4}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{1/4}\cdot \\
&\qquad \cdot\left(1+\frac{1}{6n}+\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}\Big)+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{6n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi e}}\exp\left(\frac{n}{4}\log\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\right)\Big(\frac{n+1}{n}\Big)^{1/4}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{1/4}\cdot \\
&\qquad \cdot\left(1+\frac{1}{6n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)^{1/2}\left(1+\frac{1}{6n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)^{-1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi e}}\exp\left(\frac{n}{4}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)\right)\cdot \\
&\qquad \cdot\left(\Big(1+\frac{1}{6n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big(1-\frac{1}{6n}+O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi e}} \exp\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\left(1 + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{8n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\left(1 + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{8n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right)\left(1 + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \left(1 - \frac{1}{8n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right),
\end{aligned}
$$

wobei wir unter anderem Gebrauch gemacht haben von den Reihenentwicklungen $\log(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$, $(1+x)^{-a} = 1 - ax + O(x^2)$ sowie $\exp(x) = 1 + x + O(x^2)$ für $x \to 0$.

Weiter ist für alle $x \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
&\Big(1 + \frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{4}} \\
&\quad = \exp\left(-\frac{n+1}{4}\log\Big(1 + \frac{x^2}{n}\Big)\right) \\
&\quad = \exp\left(-\frac{n+1}{4}\Big(\frac{x^2}{n} - \frac{1}{2}\frac{x^4}{n^2} + O\Big(\frac{1}{n^3}\Big)\Big)\right) \\
&\quad = \exp\left(-\frac{x^2}{4} - \frac{x^2}{4n} + \frac{x^4}{8n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \\
&\quad = \exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big) \exp\left(\frac{1}{n}\Big(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right) \\
&\quad = \exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big) \left(1 + \frac{1}{n}\Big(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\right),
\end{aligned}
$$

wobei wir abermals die Entwicklungen der Logarithmus- und der Exponentialfunktion benutzt haben.

Zusammen erhalten wir

$$
\begin{aligned}
&n\Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\Big) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2} \\
&= n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{n\pi}} \frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})^{\frac{1}{2}}} \Big(1 + \frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{4}} - \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big)\right) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2} \\
&= n\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\Big(1 - \frac{1}{8n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\Big(1 + \frac{1}{n}\Big(-\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{8}\Big) + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big)\Big)\exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big)\right. \\
&\qquad\qquad \left. - \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big)\right) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2} \\
&= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\, n\left(1 - \frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2} + x^2 - \frac{x^4}{2}\Big)\frac{1}{n} + O\Big(\frac{1}{n^2}\Big) - 1\right)\exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}
\end{aligned}
$$

$$= \quad \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\left(-\frac{1}{4}\Big(\frac{1}{2}+x^2-\frac{x^4}{2}\Big)+O\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)\exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big)-\frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2} \;=\; O\Big(\frac{1}{n}\Big),$$

das heißt der Integrand konvergiert punktweise gegen Null. Damit nach dem Satz von Lebesgue auch das ganze Integral gegen Null konvergiert, benötigen wir eine integrierbare Majorante. Es gilt

$$\begin{aligned}
&\Big(n\Big(g_n(x)^{1/2}-f(x)^{1/2}\Big)-\frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 \\
\le\;& 2n^2\Big(g_n(x)^{1/2}-f(x)^{1/2}\Big)^2+\frac{1}{2}h(x)^2f(x) \\
\le\;& 4n^2\left(\Big(\frac{1}{\sqrt[4]{n\pi}}\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})^{\frac12}}{\Gamma(\frac{n}{2})^{\frac12}}-\frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\Big)\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{4}}\right)^2 \\
&+8n^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{4}}-\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n}{4}}\right)^2 \\
&+8n^2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n}{4}}-\exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big)\right)^2 \\
&+\frac{1}{2}h(x)^2f(x) \\
=:\;& m_{1,n}(x)+m_{2,n}(x)+m_{3,n}(x)+m_4(x).
\end{aligned}$$

Der von n unabhängige Summand m_4 ist integrierbar, da f die Dichte einer Normalverteilung ist, deren sämtliche Momente endlich sind, und h ein Polynom ist.

Bei dem Summanden $m_{1,n}$ haben wir für $n \geq 4$ die Abschätzung

$$\begin{aligned}
m_{1,n}(x) \;&=\; 4n^2\left(O\Big(\frac{1}{n}\Big)\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{4}}\right)^2 \;=\; O(1)\left(\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n+1}{4}}\right)^2 \\
&\le\; O(1)\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-\frac{n}{2}} \;\le\; O(1)\Big(1+\frac{x^2}{2}\Big)^{-1}
\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Schritt die Entwicklung vom Beginn des Beweises verwandt haben, und beim letzten Schritt die Bernoullische Ungleichung, die bekanntlich auch für nicht ganzzahlige reelle Exponenten größer als Eins gültig ist. Dieser Summand besitzt also eine Majorante der Form $C/(1+x^2)$, die intergierbar ist. Für den zweiten Summanden beachten wir, dass für alle $x > 0$ gilt:

$$(8.53) \qquad [1,\infty) \ni y \;\mapsto\; \Big(1+\frac{x}{y}\Big)^y \in \mathbb{R} \quad \text{ist streng monoton wachsend.}$$

Hierfür ist es hinreichend, dass

$$[1,\infty) \ni y \;\mapsto\; y\log\Big(1+\frac{x}{y}\Big) \in \mathbb{R}$$

streng monoton wachsend ist. Die Ableitung hiervon,

$$[1,\infty) \ni y \quad \mapsto \quad \log\Big(1+\frac{x}{y}\Big) + y\frac{1}{1+\frac{x}{y}}\Big(-\frac{x}{y^2}\Big) \quad = \quad \log\Big(1+\frac{x}{y}\Big) - \frac{\frac{x}{y}}{1+\frac{x}{y}}$$

muß also für alle $x>0$ positiv sein. Um dies zu sehen, setzen wir $z := x/y$ und betrachten

$$[0,\infty) \ni z \quad \mapsto \quad h(z) := \log\Big(1+z\Big) - \frac{z}{1+z},$$

mit $h(0)=0$ und der Ableitung

$$h'(z) = \frac{1}{1+z} - \frac{1+z-z}{(1+z)^2} = \frac{1}{1+z} - \frac{1}{(1+z)^2} = \frac{z}{(1+z)^2} > 0$$

für alle $z>0$. Hieraus folgt $h(z)>0$ für alle $z>0$ und damit die behauptete Monotonie.

Für alle $n \geq 4$ gilt

$$\begin{aligned} H_n(x) \quad &:= \quad x^4\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-n} \quad = \quad x^4\Bigg(\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{x^{2i}}{n^i}\Bigg)^{-1} \quad \leq \quad x^4\Bigg(1+\binom{n}{3}\frac{x^6}{n^3}\Bigg)^{-1} \\ &= \quad x^4\Bigg(1+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{n\cdot \quad n \quad \cdot \quad n}\frac{x^6}{6}\Bigg)^{-1} \quad \leq \quad x^4\Big(1+\frac{x^6}{48}\Big)^{-1} \\ &\leq \quad 48x^4\Big(1+x^6\Big)^{-1} \quad \leq \quad \frac{96}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Nun ist für alle $n \geq 8$

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}\, m_{2,n}(x) \quad &= \quad 8n^2\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-(n+1)/2}\Bigg(1-\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{1/4}\Bigg)^2 \\ \leq \quad 8n^2\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-n/2}&\Bigg(1-\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)\Bigg)^2 \quad = \quad 8x^4\Big(1+\frac{x^2/2}{n/2}\Big)^{-n/2} \\ \leq \quad 8x^4\Big(1+\frac{x^2/2}{[n/2]}\Big)^{-[n/2]} \quad &= \quad 32\,H_{[n/2]}\Big(x/\sqrt{2}\Big) \quad \leq \quad \frac{3072}{1+x^2/2} \quad \leq \quad \frac{6144}{1+x^2} \end{aligned}$$

wobei wir beim zweiten Ungleichheitszeichen (8.53) benutzt haben. Damit ist $6144/(1+x^2)$ für alle $n \geq 8$ eine intergierbare Majorante für den zweiten Summanden $m_{2,n}(x)$.

Kommen wir nun zum dritten Summanden. Wegen (8.53) und $(1+\frac{x}{n})^n \xrightarrow[n]{} \exp(x)$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ für $n \geq 4$

$$\Bigg(\Big(1+\frac{x^2}{n}\Big)^{-n/4} - \exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big)\Bigg)^2 = \Bigg(\Big(1+\frac{x^2/4}{n/4}\Big)^{-n/4} - \exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big)\Bigg)^2$$

streng monoton fallend in n, das heißt für alle $n \geq 8$ gilt

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi} m_{3,n} &\leq 8n^2 \Bigg(\Big(1 + \frac{x^2/4}{[n/4]} \Big)^{-[n/4]} - \exp\Big(-\frac{x^2}{4} \Big) \Bigg)^2 \\
&\leq 8 \cdot 4^2 \Big(2[n/4] \Big)^2 \Bigg(\Big(1 + \frac{x^2/4}{[n/4]} \Big)^{-[n/4]} - \exp\Big(-\frac{x^2}{4} \Big) \Bigg)^2
\end{aligned}$$

so dass es ausreicht, eine integrierbare Majorante für

$$n^2 \Bigg(\Big(1 + \frac{x^2/4}{n} \Big)^{-n} - \exp\Big(-\frac{x^2}{4} \Big) \Bigg)^2$$

zu finden. Wenn wir noch die Substitution $x \mapsto 2x$ durchführen, reicht es also aus, eine quadratisch integrierbare Majorante von

$$\begin{aligned}
n \left| \frac{1}{(1 + \frac{x^2}{n})^n} - \frac{1}{\exp(x^2)} \right| &= n \frac{\exp(x^2) - (1 + \frac{x^2}{n})^n}{(1 + \frac{x^2}{n})^n \exp(x^2)} \\
&= n \exp(-x^2) \Big(1 + \frac{x^2}{n} \Big)^{-n} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i!} - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{2k}}{n^k} \right) \\
&= n \exp(-x^2) \Big(1 + \frac{x^2}{n} \Big)^{-n} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{x^{2i}}{i!} \\
&\quad + n \exp(-x^2) \Big(1 + \frac{x^2}{n} \Big)^{-n} \sum_{k=0}^{n} \left(1 - \binom{n}{k} \frac{k!}{n^k} \right) \frac{x^{2k}}{k!} \\
&=: m_{5,n}(x) + m_{6,n}(x)
\end{aligned}$$

zu finden. Wir haben für $n \geq 2$

$$\begin{aligned}
m_{5,n}(x) &= \exp(-x^2) \Big(1 + \frac{x^2}{n} \Big)^{-n} \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{n}{i} \frac{x^{2(i-1)}}{(i-1)!} x^2 \\
&\leq \exp(-x^2) \Big(1 + \frac{x^2}{n} \Big)^{-n} \exp(x^2) x^2 \\
&= x^2 \Bigg(\Big(1 + \frac{x^2}{n} \Big)^n \Bigg)^{-1} = x^2 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{2k}}{n^k} \right)^{-1} \\
&\leq x^2 \left(1 + \binom{n}{2} \frac{x^4}{n^2} \right)^{-1} = x^2 \left(1 + \frac{n(n-1)}{2n^2} x^4 \right)^{-1} \\
&\leq x^2 \Big(1 + \frac{1}{4} x^4 \Big)^{-1} \leq 4x^2 \Big(1 + x^4 \Big)^{-1} \leq \frac{8}{1 + x^2},
\end{aligned}$$

wobei wir ab der dritten Zeile ähnlich vorgegangen sind wie bei H_n. Weiter ist

$$\begin{aligned}
m_{6,n}(x) &= \exp(-x^2) \Big(1 + \frac{x^2}{n} \Big)^{-n} \sum_{k=2}^{n} n \left(1 - \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n \cdot \quad n \quad \cdot \ldots \cdot \quad n} \right) \frac{x^{2k}}{k!} \\
&= \exp(-x^2) \Big(1 + \frac{x^2}{n} \Big)^{-n} \sum_{k=2}^{n} \frac{n}{k(k-1)} \left(1 - \prod_{i=1}^{k-1} \Big(1 - \frac{i}{n} \Big) \right) \frac{x^{2(k-2)}}{(k-2)!} x^4.
\end{aligned}$$

Nun ist für alle $2 \leq k \leq n$

$$\begin{aligned} 0 \;&\leq\; \frac{n}{k(k-1)}\Big(1 - \prod_{i=1}^{k-1}\Big(1 - \frac{i}{n}\Big)\Big) \;\leq\; \frac{n}{k(k-1)}\Big(1 - \Big(1 - \frac{k-1}{n}\Big)^{k-1}\Big) \\ &\leq\; \frac{n}{k(k-1)}\Big(1 - \Big(1 - \frac{(k-1)^2}{n}\Big)\Big) \;=\; \frac{k-1}{k} \;\leq\; 1 \end{aligned}$$

nach der Bernoullischen Ungleichung, das heißt für $n \geq 4$ ist

$$\begin{aligned} m_{6,n}(x) \;&\leq\; \exp(-x^2)\Big(1 + \frac{x^2}{n}\Big)^{-n} \sum_{k=2}^{n} \frac{x^{2(k-2)}}{(k-2)!} x^4 \\ &\leq\; x^4\Big(1 + \frac{x^2}{n}\Big)^{-n} \;=\; H_n(x) \;\leq\; \frac{96}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Damit haben wir für alle Summanden die für die Anwendung des Satzes von Lebesgue benötigten Majoranten gefunden.
Aus (8.52) folgt für alle $d > 0$

$$\int \Big([\sqrt{n}/d](g_{[\sqrt{n}/d]}(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \;\underset{n}{\longrightarrow}\; 0, \tag{8.54}$$

und hieraus wiederum mit der C_r-Ungleichung mit $r = 2$ für alle $n \geq d^2$

$$\begin{aligned} &\int \Big(g_{[\sqrt{n}/d]}(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \\ &= \frac{1}{[\sqrt{n}/d]^2} \int \Big([\sqrt{n}/d](g_{[\sqrt{n}/d]}(x)^{1/2} - f(x)^{1/2})\Big)^2 dx \\ &\leq \frac{2}{[\sqrt{n}/d]^2}\Big(\int \Big([\sqrt{n}/d](g_{[\sqrt{n}/d]}(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \qquad (8.55) \\ &\qquad\qquad + \int \Big(\frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx\Big) \\ &\underset{n}{\longrightarrow}\; 0. \end{aligned}$$

Wir erhalten für alle $n \geq d^2$ mit der C_r-Ungleichung mit $r = 2$

$$\begin{aligned} &\int \Big(\sqrt{n}(g_{[\sqrt{n}/d]}(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}) - \frac{d}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \\ &= d^2 \int \Big((\sqrt{n}/d)(g_{[\sqrt{n}/d]}(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \\ &\leq 2d^2 \int \Big([\sqrt{n}/d](g_{[\sqrt{n}/d]}(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}) - \frac{1}{2}h(x)f(x)^{1/2}\Big)^2 dx \\ &\qquad + 2d^2 \int \Big((\sqrt{n}/d - [\sqrt{n}/d])(g_{[\sqrt{n}/d]}(x)^{1/2} - f(x)^{1/2})\Big)^2 dx \\ &\underset{n}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

nach (8.54) und (8.55) wegen $0 \leq \sqrt{n}/d - [\sqrt{n}/d] \leq 1$.

8.56 Proposition. Seien f und g_n für alle $n \in \mathbb{N}$ Wahrscheinlichkeitsdichten mit $\int x^2 f(x)\,dx < \infty$, $\int x f(x)\,dx = 0$,

$$\text{(8.57)} \qquad \text{(a)} \int x^2 g_n(x)\,dx \;=\; O(1) \qquad \text{und} \qquad \text{(b)} \int x g_n(x)\,dx \;=\; 0,$$

welche für eine Borelfunktion h die Bedingung (4.43) erfüllen. Dann gilt

$$\text{(8.58)} \qquad \int x h(x) f(x)\,dx \;=\; 0.$$

Beweis: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach Voraussetzung an f und wegen (8.57) (b)

$$\begin{aligned}
&-\frac{1}{n^{1/2}} \int x h(x) f(x)\,dx \\
&= \int x g_n(x)\,dx - \int x f(x)\,dx - \int \frac{1}{n^{1/2}}\, x h(x) f(x)\,dx \\
&= \int x\Big(g_n(x) - f(x) - \frac{1}{n^{1/2}}\, h(x) f(x)\Big) dx \\
&= \int x\Big(\Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\Big)\Big(g_n(x)^{1/2} + f(x)^{1/2}\Big) - \frac{1}{n^{1/2}}\, h(x) f(x)\Big) dx \\
&= \int x\Bigg(\Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} - \frac{1}{2n^{1/2}}\, h(x) f(x)^{1/2} + \frac{1}{2n^{1/2}}\, h(x) f(x)^{1/2}\Big) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \Big(g_n(x)^{1/2} + f(x)^{1/2}\Big) - \frac{1}{n^{1/2}}\, h(x) f(x)\Bigg) dx \\
&= \int x\Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} - \frac{1}{2n^{1/2}}\, h(x) f(x)^{1/2}\Big)\Big(g_n(x)^{1/2} + f(x)^{1/2}\Big) dx \\
&\quad + \int x\Bigg(\Big(\frac{1}{2n^{1/2}}\, h(x) f(x)^{1/2}\Big)\Big(g_n(x)^{1/2} + f(x)^{1/2}\Big) - \frac{1}{n^{1/2}}\, h(x) f(x)\Bigg) dx \\
&=: A_n + B_n.
\end{aligned}$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ haben wir, unter Verwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung,

$$\begin{aligned}
|A_n| &\le \int \Big| g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} - \frac{1}{2n^{1/2}}\, h(x) f(x)^{1/2}\Big| |x| \Big(g_n(x)^{1/2} + f(x)^{1/2}\Big) dx \\
&\le \Bigg(\int \Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} - \frac{1}{2n^{1/2}}\, h(x) f(x)^{1/2}\Big)^2 dx\Bigg)^{1/2} \cdot \\
&\qquad \cdot \Bigg(\int x^2 \Big(g_n(x)^{1/2} + f(x)^{1/2}\Big)^2 dx\Bigg)^{1/2} \\
&\le \frac{1}{n^{1/2}} \Bigg(\int \Big(\sqrt{n}\Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\Big) - \frac{1}{2} h(x) f(x)^{1/2}\Big)^2 dx\Bigg)^{1/2} \cdot \\
&\qquad \cdot \Bigg(\int \Big(2x^2 g_n(x) + 2x^2 f(x)\Big) dx\Bigg)^{1/2} \\
&= O(1/\sqrt{n}\,)\, o(1)\, O(1) \;=\; o(1/\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

nach (4.43) und (8.57) (a).
Weiter ist für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
|B_n| &= \left| \frac{1}{2n^{1/2}} \int x \Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} \Big) h(x) f(x)^{1/2} \, dx \right| \\
&\leq \frac{1}{2n^{1/2}} \int |x| \Big| g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} \Big| |h(x)| f(x)^{1/2} \, dx \\
&= \frac{1}{2n^{1/2}} \int_{|x| \leq n^{1/4}} |x| \Big| g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} \Big| |h(x)| f(x)^{1/2} \, dx \\
&\quad + \frac{1}{2n^{1/2}} \int_{|x| > n^{1/4}} |x| \Big| g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} \Big| |h(x)| f(x)^{1/2} \, dx \\
&=: B_{1,n} + B_{2,n}.
\end{aligned}$$

Hierbei gilt

$$\begin{aligned}
B_{1,n} &\leq \frac{1}{2n^{1/4}} \int \Big| g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} \Big| |h(x)| f(x)^{1/2} \, dx \\
&\leq \frac{1}{2n^{1/4}} \bigg(\int \Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} \Big)^2 dx \bigg)^{1/2} \bigg(\int h(x)^2 f(x) \, dx \bigg)^{1/2} \\
&= O(1/\sqrt[4]{n}\,)\, O(1/\sqrt{n}\,)\, O(1) \quad = \quad O(n^{-3/4})
\end{aligned}$$

nach (4.45) und wegen

$$\begin{aligned}
&\int \Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} \Big)^2 dx \\
&= \frac{1}{n} \int \Big(\sqrt{n} \Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} \Big) - \frac{1}{2} h(x) f(x)^{1/2} + \frac{1}{2} h(x) f(x)^{1/2} \Big)^2 dx \\
&\leq \frac{2}{n} \int \Big(\sqrt{n} \Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} \Big) - \frac{1}{2} h(x) f(x)^{1/2} \Big)^2 dx + \frac{1}{2n} \int h(x)^2 f(x) \, dx \\
&= O(1/n)\, o(1) + O(1/n) \quad = \quad O(1/n)
\end{aligned}$$

nach (4.43) und (4.45).
Außerdem gilt

$$\begin{aligned}
B_{2,n} &\leq \frac{1}{2n^{1/2}} \bigg(\int_{|x| > n^{1/4}} x^2 \Big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2} \Big)^2 dx \bigg)^{1/2} \cdot \\
&\qquad \cdot \bigg(\int_{|x| > n^{1/4}} h(x)^2 f(x) \, dx \bigg)^{1/2} \\
&\leq \frac{1}{n^{1/2}} \bigg(\int \Big(x^2 g_n(x) + x^2 f(x) \Big) \, dx \bigg)^{1/2} \bigg(\int_{|x| > n^{1/4}} h(x)^2 f(x) \, dx \bigg)^{1/2} \\
&= O(1/\sqrt{n}\,)\, O(1)\, o(1) \quad = \quad o(1/\sqrt{n}\,)
\end{aligned}$$

nach (8.57) (a) und (4.45) in Verbindung mit dem Satz von Lebesgue.
Damit erhalten wir insgesamt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \int xh(x)f(x)\,dx \right| \quad \leq \quad \sqrt{n}\,(|A_n| + B_{1,n} + B_{2,n}) \quad \underset{n}{\longrightarrow} \quad 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung (8.58).

8.59 Bemerkung. Unter den Voraussetzungen von Proposition 8.56 ist also wegen $E(h(e_1)e_1) = 0$ die Erwartungswertfunktion von W_1^{zentr} gleich der von W_1^{klass}, und die von V_1^{zentr} gleich der von V_1^{klass}.
Die zusätzliche Voraussetzung (8.57) von Proposition 8.56 zu (4.43) erscheint im Rahmen unserer Modellannahmen sehr natürlich:
Die Forderung (8.57) (b), dass $E(e_n^{H_{1,n}}) = \int xg_n(x)\,dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte, ist plausibel, da die Zentriertheit der Fehlervariablen (2.2) als wichtige Voraussetzung des ARMA-Modells selbstverständlich auch unter den Alternativen erfüllt sein sollte. Und wenn man sich nicht ganz sicher ist, dass diese Zufallsvariablen zentriert sind, sollte man auch besser keinen Test benutzen, der die Zentriertheit explizit zu berücksichtigen versucht.
Die Forderung (8.57) (a) ist in dem Sinne akzeptabel, dass man unter der Hypothese endliche Varianz der Fehlervariablen voraussetzt, und man dann entsprechend unter der Folge von Alternativen nicht nur fordert, dass die Fehlervarianzen ebenfalls endlich sind, sondern auch, dass die Folge der Fehlervarianzen beschränkt bleiben soll, weil man sich andernfalls im Hinblick auf die Varianzen von der Hypothese entfernt. Man könnte sogar die Vorstellung entwicklen, dass man eine Folge von Alternativen nur dann als benachbart zu einer Hypothese bezeichnen mag, wenn sich auch die Varianzen der Fehlervariablen unter der Folge von Alternativen an die unter der Hypothese als endlich vorausgesetzte Varianz der Fehlervariablen annähern.
Bei benachbarten Alternativen nach Proposition 8.48 ist (8.57) (a) erfüllt, wenn eine Zufallsvariable mit Dichte f ein endliche zweites Moment S besitzt, da dann eine Zufallsvariable mit Dichte g_n als zweites Moment $S(1+d/\sqrt{n})^{-2}$ hat, was mit wachsendem n gegen S konvergiert. Bei benachbarten Alternativen nach Proposition (8.49) ist diese Voraussetzung ebenfalls erfüllt, wenn Zufallsvariablen mit Dichten f und g endliche zweite Momente S und T besitzen, da dann eine Zufallsvariable mit Dichte g_n das zweite Moment $S + d(T - S)/\sqrt{n}$ hat, was ebenfalls in n gegen S konvergiert. Schließlich hat bei benachbarten Alternativen nach Proposition 8.51 für $n \geq 9/d^2$ eine $t_{[d\sqrt{n}]}$-verteilte Zufallsvariable $[d\sqrt{n}\,]/([d\sqrt{n}\,] - 2)$

als Varianz, was für $n \to \infty$ gegen das zweite Moment 1 einer standardnormalverteilten Zufallsvariable konvergiert.
Dass die Forderung (8.57) (a) für (8.58) jedenfalls tatsächlich wesentlich ist und nicht einfach durch $\int x^2 g_n(x)\,dx < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ersetzt werden kann, zeigt die nächste Proposition: Für eine Wahrscheinlichkeitsdichte f mit Eigenschaften, die zum Beispiel bei den Dichten von allen zentrierten Normalverteilungen gegeben sind, ist es möglich eine Folge von Wahrscheinlichkeitsdichten g_n anzugeben, so dass alle Voraussetzungen von Proposition 8.56 mit Ausnahme von (8.57) (a) erfüllt sind, was durch $\int x^2 g_n(x)\,dx < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ersetzt wird, und so dass h die identische Abbildung der reellen Zahlen ist. In diesem Falle ist dann also $E(h(e_1)e_1) = E(e_1^2) = \sigma^2 > 0$, das heißt (8.58) gilt nicht.

8.60 Proposition. Sei f eine Wahrscheinlichkeitsdichte, welche symmetrisch ist, das heißt es gelte $f(x) = f(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, und welche $\int x^4 f(x)\,dx < \infty$ erfüllt, womit also insbesondere $\sigma^2 := \int x^2 f(x)\,dx \in (0,\infty)$ und $\int x f(x)\,dx = 0$ gelten.
Dann gibt es eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Wahrscheinlichkeitsdichten mit den Eigenschaften $\int x^2 g_n(x)\,dx < \infty$ und $\int x g_n(x)\,dx = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, sowie

$$\int \Big(\sqrt{n}\big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\big) - \frac{1}{2} x f(x)^{1/2}\Big)^2\,dx \underset{n}{\longrightarrow} 0.$$

Beweis: Zunächst halten wir fest, dass

$$\text{(8.61)} \quad \int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} f(x)\,dx \;\le\; \int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} \frac{x^2}{n} f(x)\,dx \;=\; \frac{1}{n}\int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} x^2 f(x)\,dx \;=\; o(1/n)$$

gilt nach dem Satz von Lebesgue mit $x^2 f(x)$ als integrierbarer Majorante.
Sei für alle $n \in \mathbb{N}$

$$r_n := \sqrt{n}\int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} (-x) f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} x^2 f(x)\,dx + \frac{1}{4\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n}}^{\infty} x^3 f(x)\,dx.$$

Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\sigma^2 + r_n &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx + r_n \\
&= \sqrt{n}\int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} (-x) f(x)\,dx + \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} x^2 f(x)\,dx + \frac{1}{4\sqrt{n}}\int_{\sqrt{n}}^{\infty} x^3 f(x)\,dx \quad \ge \quad 0,
\end{aligned}$$

weil alle Integranden auf den hier vorkommenden Intgrationsbereichen nichtnegativ sind, sowie

$$\text{(8.62)} \quad \begin{aligned}
|r_n| &\le \sqrt{n}\int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} \frac{x^2}{\sqrt{n}} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} x^2 f(x)\,dx + \int_{\sqrt{n}}^{\infty} x^3 f(x)\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} x^2 f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} x^2 f(x)\,dx + \int_{\sqrt{n}}^{\infty} x^3 f(x)\,dx \quad = \quad o(1)
\end{aligned}$$

nach dem Satz von Lebesgue, wobei wir auf den Integrationsbereichen $x^4 f(x)$ als integrierbaren Majorante verwenden können.
Wir setzen für alle $n \in \mathbb{N}$

$$h_n(x) \quad := \quad 2n^{3/2}(\sigma^2 + r_n)x^{-4} \cdot 1_{\{x \leq -n\}} \ + \ f(x)\Big(1 + \frac{x}{2\sqrt{n}}\Big)^2 \cdot 1_{\{-\sqrt{n} \leq x\}}.$$

Wegen $\sigma^2 + r_n \geq 0$ gilt dann $h_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und es ist

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx &= \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \Big(1 + \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{4n}\Big) f(x)\,dx + 2n^{3/2}(\sigma^2 + r_n) \int_{-\infty}^{-n} x^{-4}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} f(x)\,dx + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} x f(x)\,dx + \frac{1}{4n} \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} x^2 f(x)\,dx \\
&\quad + 2n^{3/2}(\sigma^2 + r_n)\frac{1}{3}n^{-3} \\
&= 1 + o(1/n) + O(1/\sqrt{n}\,)\,o(1) + O(1/n)\,O(1) + O(n^{3/2})\,O(1)\,O(n^{-3}) \\
&= 1 + o(1/\sqrt{n}\,),
\end{aligned}$$

beim ersten Summanden, weil f eine Dichte ist, beim zweiten nach (8.61), dann, weil das dritte Intgral nach den Satz von Lebesgue gegen $\int x f(x)\,dx = 0$ konvergiert, weil das nächste Integral nach dem Satz von Lebesgue gegen σ^2 konvergiert, und nach (8.62). Damit gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx > 0$ für alle $n \geq n_0$, und für diese n gilt folglich ebenfalls

$$a_n := 1\Big/\int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx > 0,$$

und überdies

$$a_n = \frac{1}{1 + o(1/\sqrt{n}\,)} = 1 + o(1/\sqrt{n}\,) \tag{8.63}$$

wegen $\frac{1}{1+x} = 1 - x + O(x^2)$ für $x \to 0$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $a_n > 0$ setzen wir nun

$$g_n := a_n h_n.$$

Es ist hinreichend, für alle großen $n \in \mathbb{N}$ geeignete Dichten anzugeben, die die Behauptung erfüllen, und diese Funktionen g_n tun dies: Zunächst sind es Wahrscheinlichkeitsdichten, denn a_n und h_n sind für alle $n \geq n_0$ nichtnegativ, also gilt auch $g_n \geq 0$ für diese n, und es gilt $\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = 1$ für alle $n \geq n_0$ nach Definition von a_n. Weiter gilt für alle $n \geq n_0$ und wegen $|1 + \frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{x^2}{4n}| \leq 2 + 2x^2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 g_n(x)\,dx \quad = \quad a_n \int_{-\infty}^{\infty} x^2 h_n(x)\,dx$$

$$
\begin{aligned}
&= a_n\Big(\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} x^2 f(x)\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{4n}\Big)dx + 2n^{3/2}(\sigma^2+r_n)\int_{-\infty}^{-n} x^2x^{-4}\,dx\Big)\\
&\le a_n\Big(\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} 2x^2 f(x)\,dx + \int_{-\sqrt{n}}^{\infty} 2x^4 f(x)\,dx + 2n^{3/2}(\sigma^2+r_n)\frac{1}{n}\Big) \quad < \quad \infty,
\end{aligned}
$$

nach (8.63), weil eine Zufallsvariable mit Dichte f nach Voraussetzung endliche vierte und damit auch zweite Momente besitzt, und nach (8.62). Dann ist für alle $n \ge n_0$

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} xg_n(x)\,dx \quad &= \quad a_n\int_{-\infty}^{\infty} xh_n(x)\,dx\\
&= a_n\Big(\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} xf(x)\Big(1+\frac{x}{\sqrt{n}}+\frac{x^2}{4n}\Big)dx + 2n^{3/2}(\sigma^2+r_n)\int_{-\infty}^{-n} xx^{-4}\,dx\Big)\\
&= a_n\Big(\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx - \int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} xf(x)\,dx + \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx\\
&\qquad - \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} x^2 f(x)\,dx + \frac{1}{4n}\int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} x^3 f(x)\,dx\\
&\qquad + \frac{1}{4n}\int_{\sqrt{n}}^{\infty} x^3 f(x)\,dx + 2n^{3/2}(\sigma^2+r_n)\Big(-\frac{1}{2}x^{-2}\Big|_{x=-\infty}^{x=-n}\Big)\Big)\\
&= a_n\Big(0 - \int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} xf(x)\,dx + \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} x^2 f(x)\,dx + 0\\
&\qquad + \frac{1}{4n}\int_{\sqrt{n}}^{\infty} x^3 f(x)\,dx - \frac{1}{\sqrt{n}}\big(\sigma^2+r_n\big)\Big)\\
&= 0,
\end{aligned}
$$

wobei wir zuerst nur die Definition von g_n und die von h_n eingesetzt haben, beim vorletzten Gleichheitszeichen die Voraussetzungen an f, dass es die Dichte einer zentrierten Zufallsvariable mit Varianz σ^2 ist, und die Antisymmetrie von $x^3 f(x)$ benutzt haben, und zum Schluß die Definition von r_n eingesetzt haben. Schließlich gilt für alle $n \ge n_0$

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sqrt{n}\big(g_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\big) - \frac{1}{2}xf(x)^{1/2}\Big)^2 dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sqrt{n}\big(a_n^{1/2}h_n(x)^{1/2} - h_n(x)^{1/2} + h_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\big) - \frac{1}{2}xf(x)^{1/2}\Big)^2 dx\\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sqrt{n}\big(a_n^{1/2}-1\big)h_n(x)^{1/2} + \sqrt{n}\big(h_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\big) - \frac{1}{2}xf(x)^{1/2}\Big)^2 dx\\
&\le 2\int_{-\infty}^{\infty} n\big(a_n^{1/2}-1\big)^2 h_n(x)\,dx\\
&\qquad + 2\int_{-\infty}^{\infty}\Big(\sqrt{n}\big(h_n(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\big) - \frac{1}{2}xf(x)^{1/2}\Big)^2 dx
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2n\Big(a_n^{1/2}-1\Big)^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx \\
&\quad + 2\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \bigg(\sqrt{n}\Big(f(x)^{1/2}\Big(1+\frac{x}{2\sqrt{n}}\Big) - f(x)^{1/2}\Big) - \frac{1}{2}xf(x)^{1/2}\bigg)^2 dx \\
&\quad + 2\int_{-n}^{-\sqrt{n}} \Big(\sqrt{n}\Big(0 - f(x)^{1/2}\Big) - \frac{1}{2}xf(x)^{1/2}\Big)^2 dx \\
&\quad + 2\int_{-\infty}^{-n} \Big(\sqrt{n}\Big(\sqrt{2}n^{3/4}(\sigma^2+r_n)^{1/2}x^{-2} - f(x)^{1/2}\Big) - \frac{1}{2}xf(x)^{1/2}\Big)^2 dx \\
&\le 2n\Big(a_n^{1/2}-1\Big)^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx \\
&\quad + 2\int_{-\sqrt{n}}^{\infty} \bigg(\sqrt{n}\Big(f(x)^{1/2} + \frac{x}{2\sqrt{n}}f(x)^{1/2} - f(x)^{1/2}\Big) - \frac{1}{2}xf(x)^{1/2}\bigg)^2 dx \\
&\quad + 4\int_{-n}^{-\sqrt{n}} nf(x)\,dx + 4\int_{-n}^{-\sqrt{n}} \frac{1}{4}x^2 f(x)\,dx \\
&\quad + 4\int_{-\infty}^{-n} n\Big(\sqrt{2}n^{3/4}(\sigma^2+r_n)^{1/2}x^{-2} - f(x)^{1/2}\Big)^2 dx + 4\int_{-\infty}^{-n} \frac{1}{4}x^2 f(x)\,dx \\
&\le 2n\Big(a_n^{1/2}-1\Big)^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx + 0 \\
&\quad + 4n\int_{-n}^{-\sqrt{n}} f(x)\,dx + \int_{-n}^{-\sqrt{n}} x^2 f(x)\,dx \\
&\quad + 8n\int_{-\infty}^{-n} 2n^{3/2}(\sigma^2+r_n)x^{-4}\,dx + 8n\int_{-\infty}^{-n} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-n} x^2 f(x)\,dx \\
&\le 2n\Big(a_n^{1/2}-1\Big)^2 \int_{-\infty}^{\infty} h_n(x)\,dx + 12n\int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} f(x)\,dx \\
&\quad + 2\int_{-\infty}^{-\sqrt{n}} x^2 f(x)\,dx + 16n^{5/2}(\sigma^2+r_n)\int_{-\infty}^{-n} x^{-4}\,dx \\
&= O(n)\Big(\Big(1+o(1/\sqrt{n}\,)\Big)^{1/2} - 1\Big)^2\Big(1+o(1/\sqrt{n}\,)\Big) + O(n)\,o(1/n) \\
&\quad + o(1) + O(n^{5/2})\Big(O(1)+o(1)\Big)O(n^{-3}) \\
&= o(1),
\end{aligned}
$$

wobei wir beim ersten Ungleichheitszeichen die C_r-Ungleichung mit $C_2 = 2$ benutzt haben, anschließend haben wir im zweiten Integral die Definition von h_n eingesetzt, dann haben wir wieder die C_r-Ungleichung mit $r = 2$ benutzt, beim nächsten Schritt haben wir dies nochmal getan und außerdem beachtet, dass im zweiten Integral der Integrand nur den Wert Null annimmt. Hierauf haben wir bei einigen Integralen die Integrationsbereiche vergrößert und dadurch Summanden zusammenfassen können. Zum Schluß haben wir (8.63) und die obige Abschätzung für das Integral von h_n sowie (8.61) eingesetzt, beachtet dass das dritte Integral aufgrund des Satzes von Lebesgue in n gegen Null konvergiert, und beim letzten Summanden haben wir (8.62) benutzt und $\int_{-\infty}^{-n} x^{-4}\,dx = -\frac{1}{3}n^{-3}$.

8.3 Simulation der Tests unter der Hypothese

In diesem Abschnitt möchten wir mit Simulationen das Verhalten der asymptotischen Tests bei verschiedenen Stichprobenumfängen unter der Hypothese untersuchen. Insbesondere interessiert dabei die Frage, ab welchem Stichprobenumfang die Tests das Niveau einhalten.
Als Kerne für die U-Typ-Statistik verwenden wir die Momentenvergleichskerne für die 2., 3. und 4. Momente, also $K_2(x,y) := x^2 - y^2$, $K_3(x,y) := x^3 - y^3$, $K_4(x,y) := x^4 - y^4$, sowie als Beispiele für beschränkte Kerne $K_{Wx}(x,y) := 1_{\{x>y\}} - 1_{\{x<y\}} = H(x-y)$ mit der Heavisidefunktion H und $K_\Phi(x,y) := 2\Phi(x-y) - 1$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Gaußverteilung ist. Da wir hier nur zentrierte Zufallsvariablen betrachten, ist der Kern K_2 hier also auch als Varianzvergleichskern interpretierbar.
Bei dem Kern K_{Wx} ist klar, dass die Voraussetzungen (3.92), (5.1) und (6.56) nicht erfüllt sein können, da K_{Wx} nicht differenzierbar ist, so dass die Simulationen mit diesem Kern nicht durch die theoretischen Resultate abgedeckt sind. Allerdings ist das Ergebnis in den hier betrachteten Simulationen mit hoher Wahrscheinlichkeit fast dasselbe wie mit einem Kern, bei dem man anstelle der Heavisidefunktion eine beliebig oft differenzierbare Funktion benutzte, welche auf $(-\infty, -\varepsilon]$ den Wert -1 und auf $[\varepsilon, \infty)$ den Wert 1 annimmt, und auf $(-\varepsilon, \varepsilon)$ nur Werte in $[0,1]$ annimmt, und man das $\varepsilon > 0$ hinreichend klein wählt, da dann nur für wenige Indexkombinationen i, j die Differenz $\hat{e}_{ni} - \hat{e}_{nj}$ in das Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$ fallen wird. Dieser Kern erfüllt dann die Voraussetzungen (3.92) und (5.1). Der Test mit dem Kern K_{Wx} ist eng mit dem Zweistichproben-Wilcoxon-Test beziehungsweise Mann-Whitney-U-Test verwandt, der sich mit demselben Kern formulieren lässt und dessen sequentielle Entsprechung er ist. Der Zweistichproben-Wilcoxon-Test ist unter der Zusatzvoraussetzung, dass die Verteilungsfunktion der Beobachtungen in der einen Gruppe die verschobene Verteilungsfunktion der Beobachtungen der anderen Gruppe ist (Lokationsmodell), als Test auf Erwartungswertgleichheit bekannt. Ohne diese Voraussetzung ist es bei stetigen Verteilungen ein Test, ob $P(X < Y) = \frac{1}{2}$ gilt, wobei X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit den Verteilungen der Beobachtungen aus je einer der beiden Gruppen sind. Somit ist der Test auch in unserem Fall von zentrierten Zufallsvariablen, die

also nach Voraussetzung denselben Erwartungswert besitzen, sinnvoll anwendbar, auch wenn hier dann nicht unbedingt eine hohe Testgüte zu erwarten ist. Auch wenn bei diesem Kern der Skalenfaktor $v^{klass} = 1/\sqrt{3}$ bekannt ist (vergleiche Bemerkung 4.38), und bei der klassischen Statistik sogar an den Stichprobenumfang angepasste kritische Werte verwendbar wären, da bei unabhängigen und identisch stetig verteilten Beobachtungen die entsprechende U-Typ-Statistik, ähnlich wie beim Wilcoxon-Test, bei jedem Stichprobenumfang verteilungsfrei ist (vergleiche den letzten Absatz in Bemerkung 8.44), verwenden wir bei dem entsprechenden Test den kritischen Wert mit dem Schätzer für den Skalenfaktor, zur besseren Vergleichbarkeit mit dem Test welcher die Zentriertheit berücksichtigt.
Der Kern K_Φ ist ebenso wie alle seine Ableitungen beschränkt, sodass die Voraussetzungen in (6.56) und damit auch (3.92) und (5.1) stets erfüllt sind. Natürlich ist dieser Kern auch antisymmetrisch, erfüllt also (4.1) (a), so dass nur die Erfülltheit von (4.1) (b) von der vorliegenden Fehlerverteilung abhängt. Wenn die Fehler nicht fast sicher konstant sind, ist auch (4.1) (b) erfüllt: Es gilt

$$\begin{aligned} &\text{(4.1) (b) ist nicht erfüllt} \;\Leftrightarrow\; E\Big(E\Big(K_\Phi(e_1,e_2)\Big|e_2\Big)^2\Big) \;=\; 0 \\ &\Leftrightarrow\; E\Big(K_\Phi(e_1,e_2)\Big|e_2\Big) \;=\; 2\int \Phi(x-e_2)P_{e_1}(dx) - 1 \;\overset{!}{=}\; 0 \quad \text{fast sicher} \\ &\Leftrightarrow\; f(y) \;:=\; \int \Phi(x-y)P_{e_1}(dx) \;=\; \frac{1}{2} \quad \text{für } P_{e_1}\text{-fast alle } y \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8.64}$$

Die so definierte Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar mit Ableitung

$$\begin{aligned} f'(y) &= \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{1}{h}\Big(f(y+h) - f(y)\Big) \;=\; \int \lim_{\substack{h\to 0\\ h\neq 0}} \frac{\Phi(x-y-h) - \Phi(x-y)}{h} P_{e_1}(dx) \\ &= \int -\Phi'(x-y)P_{e_1}(dx) \;=\; -\int \varphi(x-y)P_{e_1}(dx) \;\in\; \mathbb{R}, \end{aligned}$$

wobei wir bei dem zweiten Gleichheitszeichen nach dem Satz von Lebesgue Grenzwertbildung und Integration vertauschen durften, da für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und $h \neq 0$

$$\Big|\frac{\Phi(x-y-h) - \Phi(x-y)}{h}\Big| = \frac{1}{|h|}\Big|\int_{x-y}^{x-y-h} \varphi(u)\,du\Big| \leq \frac{1}{|h|}\sup_{u\in\mathbb{R}}|\varphi(u)||h| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

gilt und die so erhaltene Majorante bezüglich des endlichen Maßes P_{e_1} integrierbar ist. Wenn e_1 nicht fast sicher konstant ist, gibt es zwei reelle Zahlen y_1, y_2 in dem Träger von P_{e_1} mit $y_1 < y_2$. Aus (8.64) folgte dann mit dem Satz von Rolle die Existenz eines $y_0 \in (y_1, y_2)$ mit $0 = f'(y_0) = -\int \varphi(x-y_0)P_{e_1}(dx)$. Da φ nur echt positive Werte annimmt ist dies nicht möglich, und (8.64) kann in diesem

Fall nicht erfüllt sein. Dies zeigt, dass für den Kern K_Φ die Bedingung (4.1) (b) nur bei fast sicher konstanten Fehlervariablen nicht erfüllt sein kann.
Bei den Momentenvergleichskernen hängt es von der Verteilung der Fehlervariablen ab, ob diese Voraussetzungen erfüllt sind. Da bei den Momentenvergleichskernen $K_m(x, y) := x^m - y^m$, $m \in \mathbb{N}$, die Ableitungen sämtlich Polynome niedrigeren Grades als m sind, ist es für (6.56) und damit auch (3.92) und (5.1) hinreichend, jeweils die Integrierbarkeit von e_1^{2m+2} zu überprüfen. Betrachten wir auch hier wieder genauer die Bedingung (4.1) (b). Wenn e_1^m integrierbar ist, gilt

$$\begin{aligned} & \text{Bedingung (4.1) (b) ist nicht erfüllt} \\ \Leftrightarrow \quad & 0 \overset{!}{=} E\Big(K_m(e_1, e_2)\Big|e_2\Big) = E(e_1^m) - e_2^m \quad \text{fast sicher} \\ \Leftrightarrow \quad & e_2^m \text{ ist fast sicher konstant.} \end{aligned}$$

Für ungerade m ist dies genau dann der Fall, wenn e_1 fast sicher konstant ist, für gerade m, wenn $|e_1|$ fast sicher konstant ist. Insbesondere ist (4.1) also für alle Momentenvergleichskerne erfüllt, wenn (6.56) erfüllt ist und die Verteilungsfunktion der Fehler stetig ist.
Bei den nun folgenden Simulationsergebnissen wurden für jeden Stichprobenumfang je 1000 Wiederholungen durchgeführt, jeweils zu den Testniveaus $\alpha = 10\%$, $\alpha = 5\%$ und $\alpha = 1\%$. Es wurden jeweils die Tests mit den Teststatistiken $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n\|_\infty$ und $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^z\|_\infty$, für die erste sowohl mit dem kritischen Wert $k_{n,\alpha}^{T,klass}$ gemäß (8.47) als auch mit dem mittels Bootstrapverfahren gewonnenem kritischen Wert $k_{n,\alpha}^{T,klass,*}$ gemäß (8.38), für die zweite nur mit dem kritischen Wert $k_{n,\alpha}^{T,z,*}$ aus dem Bootstrapverfahren nach (8.35), und die Tests mit den Statistiken $\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n\|_\infty$ und $\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^z\|_\infty$ für die oben genannten Kerne, einmal gemäß (8.39) beziehungsweise (8.36) mit den kritischen Werten die aus den Quantilen der Grenzverteilung und dem geschätzten Skalenfaktor gewonnen wurden, und einmal mit kritischen Werten aus dem Bootstrap nach (8.40) beziehungsweise (8.37) durchgeführt. Der Bootstrap wurde nur bis zum Stichprobenumfang $n = 200$ durchgeführt, da dann der Rechenzeitbedarf schon sehr hoch wird. Bei dem Bootstrap wurde das Bootstrapquantil jeweils mit einer Monte-Carlo-Simulation mit ebenfalls 1000 Wiederholungen geschätzt. In der Tabelle mit den Simulationsergebnissen sind die Zeilen mit den kritischen Werten aus Bootstrapverfahren mit einem B gekennzeichnet, die Zeilen mit den kritischen Werten $\bar{k}_{n,\alpha}^{r,klass}$ und $\bar{k}_{n,\alpha}^{r,z}$ aus den Grenzverteilungen beziehungsweise mit den kritischen Werten $k_{n,\alpha}^{T,klass}$ mit einem G, sowie mit dem jeweiligen Testniveau.

Wir betrachten ein ARMA(1,1)-Modell, als Parameterschätzer werden Yule-Walker-Schätzer verwandt, wie in Beispiel 11.21 in Kreiß und Neuhaus (2006) beschrieben. Die Parameter bezeichen wir kurz als ρ und ϑ ohne den Index 1. Als Residuenstartwert $\hat{e}_{n0}$ wird stets 0 benutzt, und als Zeitreihenstartwert X_0 ebenfalls 0. Dies führt im allgemeinen nicht zu einer stationären Zeitreihe. Auch wenn dies bei den Tests mit den Statistiken $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n\|_\infty$ und $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^z\|_\infty$ in den im Beweis verwendeten Resultaten von Bai (1994) vorausgesetzt war, verwenden wir der besseren Vergleichbarkeit halber hier diesselben Startwerte wie bei den übrigen Tests, bei welchen die Stationarität nicht vorausgesetzt wurde. Der Einfluß dieser Startwerte scheint, zumal bei größeren Stichprobenumfängen, ohnehin sehr gering zu sein, wie Simulationen gezeigt haben.
Wir beginnen mit standardnormalverteilten Fehlern und betrachten in diesem Fall verschiedene Parameterkombinationen. Da bei einer Normalverteilung sämtliche Momente endlich sind, sind für die Momentenvergleichskerne die Voraussetzungen (3.92) und (5.1) erfüllt. In Tabelle 2 finden sich die Ergebnisse zu der Simulation mit den Parametern $\rho = 0,5$ und $\vartheta = 0,3$. Die Tests mit den Statistiken $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n\|_\infty$ und $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^z\|_\infty$ halten bei der Verwendung von kritischen Werten aus den Bootstrapverfahren etwa ab Stichprobenumfang $n = 50$ oder $n = 100$ das Testniveau ein. Bei der Verwendung der kritischen Werte aus Tabelle 1, die für den Test mit der klassischen Statistik $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n\|_\infty$ zur Verfügung stehen, wird das Niveau schon ab $n = 20$ in akzeptabler Weise eingehalten. Bei den Tests mit den U-Typ-Statistiken $\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n\|_\infty$ und $\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^z\|_\infty$ zeigt sich ein etwas uneinheitliches Bild. Es sieht so aus, als ob sich die relativen Verwurfshäufigkeiten bei den klassischen Tests mit der Statistik $\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n\|_\infty$ eher von unten dem Testniveau nähern, und bei dem Test mit Berücksichtigung der Zentriertheit mit der Statistik $\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^z\|_\infty$ eher von oben. So halten letztere Tests bei kleineren Stichprobenumfängen das Niveau häufig noch nicht ein. Bei dem Varianzvergleichskern K_2 wird bei Verwendung von Bootstrapverfahren das Niveau schon ab etwa $n = 30$ recht gut eingehalten, bei der Verwendung von den kritischen Werten die mithilfe der Grenzverteilung bestimmt wurden, zeigt sich bei den zentrierten Tests fast kein Unterschied, bei den klassischen Tests wird das Niveau häufig nicht ausgeschöpft, erst ab etwa $n = 300$. Ein in etwa vergleichbares Verhalten zeigt sich bei den Kernen K_3 und K_4. Bei dem Kern K_{Wx} ist bei der Statistik $\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n^z\|_\infty$ bei der Verwendung der kritischen Werte mit den Quantilen aus der Grenzverteilung die Asymptotik auffällig schlecht. Erst bei Stichprobenumfängen zwischen $n = 500$ und $n = 1000$ wird das Niveau eingehalten. Bei der Verwendung von Bootstrap-

verfahren ist dies schon deutlich früher der Fall, zwischen $n = 100$ und $n = 200$. Die Tests mit der klassischen Statistik $\sqrt{n}\,\|\hat{r}_n\|_\infty$ scheinen dieses Problem nicht zu haben. Vermutlich hängt die schlechte Asymptotik nicht mit der Verletzung der Voraussetzungen (3.92) und (5.1) bei diesem Kern zusammen, denn der Kern K_Φ zeigt dieses Verhalten in noch ausgeprägterer Form, obwohl er sie erfüllt. Bei diesem zeigt sich noch deutlicher der Vorteil der Verwendung des Bootstrapverfahrens, zum Beispiel bei $n = 200$, wo die Bootstraptests mit Berücksichtigung der Zentriertheit alle drei betrachteten Niveaus einhalten, während die Tests mit den auf der Grenzverteilung beruhenden kritischen Werten noch um das vier- bis 25fache zu oft die Hypothese verwerfen.

Die nächste von uns betrachtete Parameterkombination ist $\rho = 0,7$ und $\vartheta = 0,5$ in Tabelle 3. Man findet hier ähnliche Werte, eher etwas höhere Verwurfshäufigkeiten, insgesamt aber vergleichbare Ergebnisse.

Bei den Parametern $\rho = 0,7$ und $\vartheta = 0,9$ in Tabelle 4 werden die Verwurfshäufigkeiten tendenziell noch ein wenig höher, es zeigt sich hier vermutlich, dass die Parameter nahe an den Rand des zulässigen Bereichs kommen.

Bei den Parametern $\rho = 0,1$ und $\vartheta = 0,1$ in Tabelle 5 ist die Asymptotik deutlich schlechter, was vermutlich an der schlechten Qualität der Parameterschätzer liegen dürfte. Bei den hier verwendeten Yule-Walker-Schätzern müssen die Schätzwerte nicht zwingend in dem Bereich eines stabilen ARMA-Modells liegen, und wenn die Schätzwerte außerhalb des Intervalls $[-1, 1]$ liegen, führt dies zu sehr schlechten Näherungen der Residuen an die Fehler. Zum Teil nehmen die Residuen so große Werte an, dass aufgrund von numerischen Problemen die Tests nicht durchgeführt werden konnten, im Maximum bei dem Stichprobenumfang $n = 100$ in fast 4% der Fälle. Vermutlich ist dies ein ähnlicher Effekt wie in Kreiß und Neuhaus (2006), Beispiel 11.21, beschrieben, der bei dieser Parameterkombination wegen der Nähe zum Fall $\rho = -\vartheta$ auftritt, in dem das Modell nicht identifizierbar ist. Bei Stichprobenumfang $n = 1000$ waren die Schätzwerte für die Parameter dann wieder so gut, dass die Durchführung der Tests wieder in allen Fällen möglich war. Zum Vergleich wurden bei ausgewählten Stichprobenumfängen die Parameterschätzer testweise durch die in der Realität unbekannten Parameter ersetzt, was die Verwurfshäufigkeiten wieder auf eine mit anderen Parameterwerten vergleichbare Größe bringt und damit die Vermutung untermauert, dass die Verschlechterung der Asymptotik in diesem Fall auf die schlechtere Qualität der Parameterschätzer zurückzuführen ist.

In Tabelle 6 werden die Ergebnisse der Simulation mit t_7-verteilten Fehlern ge-

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
10	B 10%	0,378	0,346	0,138	0,387	0,105	0,409	0,080	0,363	0,317	0,319	0,303	0,359
	B 5%	0,321	0,248	0,043	0,241	0,026	0,268	0,029	0,227	0,216	0,232	0,181	0,275
	B 1%	0,102	0,119	0,006	0,116	0,002	0,102	0,001	0,094	0,098	0,116	0,070	0,143
	G 10%	0,321	—	0,036	0,410	0,021	0,683	0,026	0,413	0,106	0,815	0,120	0,889
	G 5%	0,169	—	0,010	0,339	0,003	0,659	0,005	0,357	0,069	0,781	0,061	0,879
	G 1%	0,069	—	0,000	0,230	0,000	0,569	0,000	0,260	0,000	0,708	0,000	0,858
20	B 10%	0,191	0,194	0,108	0,165	0,077	0,223	0,054	0,164	0,160	0,183	0,162	0,197
	B 5%	0,103	0,114	0,038	0,102	0,010	0,145	0,015	0,089	0,076	0,106	0,073	0,124
	B 1%	0,024	0,038	0,007	0,032	0,001	0,042	0,002	0,025	0,017	0,034	0,014	0,052
	G 10%	0,110	—	0,055	0,167	0,017	0,364	0,030	0,165	0,082	0,798	0,068	0,921
	G 5%	0,062	—	0,028	0,106	0,002	0,315	0,012	0,112	0,027	0,744	0,022	0,904
	G 1%	0,014	—	0,004	0,036	0,001	0,199	0,001	0,051	0,008	0,624	0,008	0,870
30	B 10%	0,149	0,149	0,090	0,122	0,056	0,137	0,049	0,105	0,117	0,133	0,117	0,133
	B 5%	0,088	0,085	0,037	0,056	0,015	0,073	0,018	0,050	0,049	0,072	0,053	0,076
	B 1%	0,015	0,028	0,009	0,012	0,001	0,023	0,002	0,005	0,013	0,019	0,009	0,021
	G 10%	0,106	—	0,053	0,118	0,026	0,226	0,033	0,103	0,056	0,735	0,062	0,898
	G 5%	0,055	—	0,025	0,062	0,003	0,150	0,015	0,059	0,024	0,668	0,023	0,879
	G 1%	0,010	—	0,009	0,020	0,000	0,077	0,002	0,014	0,001	0,550	0,002	0,838
40	B 10%	0,139	0,163	0,067	0,087	0,059	0,128	0,035	0,073	0,115	0,118	0,119	0,124
	B 5%	0,063	0,092	0,025	0,034	0,009	0,060	0,010	0,028	0,040	0,064	0,049	0,069
	B 1%	0,021	0,019	0,002	0,006	0,000	0,015	0,001	0,002	0,007	0,021	0,006	0,023
	G 10%	0,089	—	0,038	0,084	0,023	0,181	0,026	0,075	0,053	0,632	0,062	0,880
	G 5%	0,056	—	0,014	0,040	0,003	0,118	0,005	0,035	0,028	0,547	0,027	0,843
	G 1%	0,014	—	0,002	0,008	0,000	0,040	0,000	0,007	0,002	0,431	0,001	0,779
50	B 10%	0,126	0,129	0,073	0,091	0,070	0,115	0,040	0,084	0,114	0,118	0,111	0,121
	B 5%	0,060	0,057	0,030	0,039	0,020	0,054	0,016	0,022	0,049	0,066	0,049	0,065
	B 1%	0,012	0,012	0,004	0,002	0,002	0,004	0,000	0,001	0,006	0,012	0,007	0,012
	G 10%	0,102	—	0,052	0,081	0,036	0,149	0,031	0,086	0,070	0,611	0,067	0,844
	G 5%	0,041	—	0,020	0,040	0,013	0,091	0,014	0,034	0,028	0,520	0,027	0,812
	G 1%	0,008	—	0,002	0,003	0,002	0,027	0,000	0,007	0,001	0,384	0,001	0,722
100	B 10%	0,116	0,112	0,093	0,101	0,080	0,087	0,062	0,082	0,125	0,107	0,127	0,119
	B 5%	0,052	0,051	0,037	0,040	0,037	0,036	0,019	0,036	0,064	0,061	0,065	0,067
	B 1%	0,016	0,009	0,004	0,006	0,003	0,006	0,001	0,008	0,008	0,024	0,008	0,017
	G 10%	0,100	—	0,068	0,096	0,056	0,107	0,053	0,092	0,093	0,443	0,096	0,700
	G 5%	0,050	—	0,029	0,039	0,025	0,058	0,021	0,051	0,044	0,353	0,046	0,640
	G 1%	0,016	—	0,003	0,008	0,003	0,012	0,002	0,014	0,006	0,217	0,006	0,513
200	B 10%	0,091	0,093	0,087	0,089	0,079	0,098	0,069	0,094	0,102	0,090	0,100	0,095
	B 5%	0,045	0,044	0,034	0,031	0,034	0,043	0,020	0,038	0,043	0,044	0,043	0,042
	B 1%	0,010	0,009	0,005	0,003	0,002	0,009	0,001	0,005	0,008	0,006	0,009	0,007
	G 10%	0,080	—	0,069	0,083	0,058	0,109	0,054	0,106	0,081	0,242	0,077	0,469
	G 5%	0,043	—	0,026	0,033	0,026	0,060	0,024	0,063	0,031	0,181	0,029	0,398
	G 1%	0,007	—	0,003	0,002	0,002	0,015	0,001	0,010	0,007	0,085	0,007	0,268
300	G 10%	0,091	—	0,090	0,098	0,064	0,096	0,065	0,086	0,082	0,165	0,093	0,365
	G 5%	0,054	—	0,042	0,046	0,031	0,048	0,036	0,053	0,043	0,098	0,042	0,276
	G 1%	0,011	—	0,006	0,006	0,002	0,007	0,002	0,011	0,008	0,035	0,009	0,150
500	G 10%	0,095	—	0,096	0,100	0,072	0,091	0,076	0,095	0,102	0,132	0,100	0,239
	G 5%	0,039	—	0,044	0,048	0,030	0,045	0,035	0,049	0,043	0,076	0,040	0,163
	G 1%	0,009	—	0,010	0,011	0,006	0,004	0,007	0,013	0,006	0,024	0,007	0,083
1000	G 10%	0,088	—	0,091	0,095	0,064	0,084	0,088	0,097	0,086	0,087	0,080	0,134
	G 5%	0,040	—	0,045	0,049	0,031	0,046	0,042	0,048	0,042	0,047	0,041	0,073
	G 1%	0,005	—	0,007	0,006	0,008	0,006	0,009	0,009	0,009	0,010	0,009	0,020

Tabelle 2: Relative Verwurfshäufigkeiten bei N(0,1)-verteilten Fehlern und $\rho = 0,5$ und $\vartheta = 0,3$.

	T/Kern	T	T	K2	K2	K3	K3	K4	K4	Wx	Wx	Phi	Phi
n	krit. W.	klass	zentr	klass	zentr	klass	zentr	klass	zentr	klass	zentr	klass	zentr
10	B 10%	0,361	0,386	0,139	0,365	0,125	0,419	0,089	0,361	0,310	0,347	0,308	0,390
	B 5%	0,315	0,290	0,048	0,251	0,040	0,290	0,028	0,227	0,209	0,252	0,172	0,299
	B 1%	0,085	0,120	0,004	0,111	0,003	0,096	0,004	0,085	0,084	0,112	0,052	0,161
	G 10%	0,315	—	0,041	0,394	0,029	0,626	0,027	0,409	0,095	0,804	0,112	0,861
	G 5%	0,161	—	0,011	0,329	0,008	0,597	0,007	0,345	0,042	0,753	0,043	0,847
	G 1%	0,042	—	0,000	0,241	0,000	0,532	0,000	0,258	0,000	0,678	0,000	0,819
20	B 10%	0,236	0,280	0,104	0,175	0,100	0,262	0,064	0,181	0,217	0,272	0,238	0,276
	B 5%	0,135	0,167	0,037	0,109	0,028	0,179	0,020	0,107	0,136	0,174	0,136	0,184
	B 1%	0,049	0,080	0,006	0,048	0,001	0,068	0,002	0,038	0,025	0,071	0,024	0,095
	G 10%	0,147	—	0,056	0,176	0,041	0,409	0,031	0,183	0,134	0,826	0,127	0,948
	G 5%	0,098	—	0,022	0,123	0,009	0,350	0,014	0,125	0,055	0,780	0,049	0,925
	G 1%	0,024	—	0,001	0,059	0,001	0,232	0,000	0,069	0,004	0,683	0,004	0,900
30	B 10%	0,214	0,211	0,084	0,133	0,079	0,184	0,035	0,110	0,183	0,186	0,190	0,195
	B 5%	0,123	0,137	0,029	0,064	0,023	0,114	0,012	0,055	0,103	0,112	0,107	0,129
	B 1%	0,032	0,060	0,004	0,014	0,001	0,044	0,001	0,017	0,030	0,048	0,030	0,056
	G 10%	0,150	—	0,049	0,129	0,039	0,262	0,020	0,110	0,121	0,740	0,114	0,927
	G 5%	0,101	—	0,017	0,074	0,014	0,192	0,009	0,069	0,057	0,684	0,052	0,899
	G 1%	0,023	—	0,001	0,020	0,000	0,114	0,001	0,023	0,009	0,552	0,006	0,851
40	B 10%	0,193	0,183	0,081	0,102	0,080	0,166	0,054	0,088	0,171	0,184	0,170	0,186
	B 5%	0,108	0,106	0,031	0,049	0,028	0,087	0,017	0,041	0,086	0,112	0,089	0,115
	B 1%	0,027	0,037	0,005	0,017	0,000	0,021	0,000	0,006	0,023	0,032	0,021	0,036
	G 10%	0,135	—	0,053	0,095	0,047	0,220	0,035	0,096	0,105	0,693	0,099	0,899
	G 5%	0,083	—	0,017	0,047	0,016	0,157	0,013	0,055	0,053	0,634	0,053	0,869
	G 1%	0,020	—	0,003	0,019	0,000	0,067	0,000	0,013	0,008	0,522	0,009	0,793
50	B 10%	0,170	0,142	0,083	0,093	0,093	0,111	0,054	0,085	0,156	0,144	0,162	0,150
	B 5%	0,099	0,079	0,030	0,042	0,039	0,055	0,014	0,039	0,098	0,083	0,093	0,087
	B 1%	0,024	0,020	0,007	0,010	0,000	0,023	0,001	0,008	0,029	0,023	0,032	0,025
	G 10%	0,146	—	0,059	0,088	0,063	0,140	0,044	0,085	0,113	0,615	0,112	0,857
	G 5%	0,085	—	0,020	0,044	0,024	0,091	0,014	0,052	0,073	0,556	0,071	0,824
	G 1%	0,021	—	0,006	0,010	0,000	0,039	0,003	0,014	0,011	0,444	0,011	0,736
100	B 10%	0,115	0,106	0,092	0,093	0,068	0,087	0,062	0,082	0,105	0,116	0,116	0,126
	B 5%	0,051	0,058	0,039	0,035	0,030	0,038	0,020	0,038	0,048	0,065	0,052	0,075
	B 1%	0,008	0,016	0,003	0,005	0,003	0,004	0,001	0,008	0,006	0,011	0,007	0,010
	G 10%	0,097	—	0,072	0,086	0,047	0,105	0,044	0,091	0,083	0,425	0,081	0,687
	G 5%	0,046	—	0,032	0,036	0,022	0,057	0,017	0,048	0,035	0,348	0,038	0,620
	G 1%	0,007	—	0,001	0,005	0,002	0,014	0,000	0,014	0,004	0,234	0,002	0,494
200	B 10%	0,126	0,107	0,100	0,097	0,091	0,103	0,068	0,088	0,107	0,101	0,111	0,111
	B 5%	0,069	0,056	0,041	0,046	0,038	0,051	0,022	0,041	0,056	0,071	0,060	0,067
	B 1%	0,019	0,005	0,001	0,004	0,006	0,006	0,000	0,004	0,023	0,016	0,024	0,018
	G 10%	0,113	—	0,076	0,088	0,062	0,115	0,055	0,101	0,094	0,277	0,090	0,503
	G 5%	0,061	—	0,036	0,043	0,028	0,068	0,023	0,055	0,048	0,194	0,046	0,426
	G 1%	0,016	—	0,001	0,004	0,005	0,017	0,000	0,010	0,014	0,097	0,012	0,283
300	G 10%	0,092	—	0,069	0,085	0,086	0,098	0,063	0,092	0,093	0,188	0,094	0,381
	G 5%	0,047	—	0,038	0,047	0,035	0,048	0,032	0,053	0,051	0,126	0,055	0,293
	G 1%	0,011	—	0,009	0,007	0,003	0,009	0,002	0,010	0,004	0,043	0,004	0,176
500	G 10%	0,097	—	0,098	0,101	0,083	0,085	0,078	0,107	0,096	0,099	0,098	0,222
	G 5%	0,053	—	0,047	0,050	0,034	0,038	0,047	0,060	0,034	0,052	0,036	0,151
	G 1%	0,013	—	0,007	0,010	0,002	0,004	0,005	0,007	0,008	0,010	0,006	0,067
1000	G 10%	0,092	—	0,084	0,088	0,081	0,107	0,079	0,098	0,077	0,112	0,077	0,136
	G 5%	0,046	—	0,044	0,048	0,036	0,055	0,040	0,055	0,032	0,054	0,033	0,081
	G 1%	0,007	—	0,009	0,010	0,009	0,010	0,009	0,014	0,006	0,009	0,005	0,015

Tabelle 3: Relative Verwurfshäufigkeiten bei N(0,1)-verteilten Fehlern und $\rho = 0,7$ und $\vartheta = 0,5$.

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
10	B 10%	0,395	0,422	0,150	0,372	0,138	0,411	0,087	0,349	0,329	0,390	0,334	0,419
	B 5%	0,340	0,327	0,045	0,249	0,040	0,286	0,023	0,218	0,241	0,302	0,226	0,341
	B 1%	0,114	0,161	0,006	0,117	0,001	0,104	0,002	0,080	0,106	0,142	0,065	0,186
	G 10%	0,340	—	0,033	0,392	0,029	0,639	0,022	0,391	0,121	0,797	0,133	0,881
	G 5%	0,185	—	0,010	0,323	0,008	0,607	0,006	0,335	0,050	0,758	0,049	0,862
	G 1%	0,050	—	0,000	0,249	0,000	0,543	0,000	0,248	0,000	0,688	0,000	0,834
20	B 10%	0,263	0,291	0,107	0,206	0,120	0,293	0,070	0,214	0,247	0,252	0,265	0,272
	B 5%	0,166	0,194	0,043	0,127	0,032	0,209	0,020	0,115	0,144	0,190	0,141	0,213
	B 1%	0,046	0,079	0,005	0,049	0,002	0,086	0,000	0,046	0,043	0,074	0,038	0,091
	G 10%	0,175	—	0,055	0,199	0,047	0,415	0,033	0,200	0,145	0,829	0,138	0,943
	G 5%	0,113	—	0,020	0,136	0,013	0,371	0,013	0,133	0,066	0,785	0,062	0,928
	G 1%	0,024	—	0,002	0,063	0,000	0,259	0,000	0,065	0,007	0,692	0,005	0,892
30	B 10%	0,206	0,220	0,089	0,129	0,098	0,205	0,060	0,127	0,186	0,207	0,196	0,228
	B 5%	0,115	0,139	0,035	0,080	0,030	0,132	0,016	0,069	0,102	0,131	0,107	0,144
	B 1%	0,029	0,049	0,005	0,026	0,003	0,046	0,001	0,021	0,023	0,046	0,022	0,053
	G 10%	0,144	—	0,058	0,128	0,053	0,292	0,040	0,123	0,111	0,752	0,121	0,908
	G 5%	0,082	—	0,024	0,084	0,013	0,230	0,014	0,071	0,052	0,693	0,062	0,890
	G 1%	0,026	—	0,003	0,030	0,002	0,122	0,000	0,034	0,010	0,590	0,010	0,830
40	B 10%	0,201	0,186	0,120	0,133	0,105	0,201	0,073	0,129	0,179	0,193	0,190	0,198
	B 5%	0,117	0,108	0,047	0,060	0,035	0,120	0,018	0,056	0,113	0,125	0,114	0,129
	B 1%	0,025	0,044	0,004	0,016	0,000	0,032	0,001	0,007	0,027	0,042	0,029	0,046
	G 10%	0,149	—	0,084	0,125	0,070	0,254	0,052	0,134	0,131	0,718	0,137	0,897
	G 5%	0,091	—	0,032	0,066	0,020	0,187	0,015	0,074	0,058	0,653	0,057	0,867
	G 1%	0,017	—	0,002	0,019	0,000	0,093	0,000	0,018	0,011	0,539	0,011	0,808
50	B 10%	0,163	0,159	0,124	0,145	0,081	0,135	0,075	0,116	0,154	0,147	0,154	0,152
	B 5%	0,079	0,081	0,045	0,059	0,026	0,064	0,020	0,053	0,082	0,083	0,083	0,084
	B 1%	0,026	0,027	0,007	0,009	0,001	0,019	0,001	0,003	0,030	0,021	0,029	0,023
	G 10%	0,126	—	0,082	0,130	0,046	0,176	0,053	0,108	0,106	0,627	0,106	0,853
	G 5%	0,063	—	0,037	0,060	0,016	0,109	0,019	0,065	0,053	0,562	0,055	0,804
	G 1%	0,020	—	0,005	0,010	0,000	0,038	0,000	0,010	0,012	0,434	0,011	0,717
100	B 10%	0,152	0,109	0,101	0,116	0,083	0,103	0,064	0,096	0,131	0,126	0,136	0,137
	B 5%	0,089	0,057	0,047	0,047	0,037	0,051	0,014	0,034	0,072	0,061	0,073	0,061
	B 1%	0,018	0,010	0,004	0,004	0,003	0,011	0,002	0,002	0,022	0,013	0,022	0,015
	G 10%	0,138	—	0,080	0,112	0,061	0,118	0,047	0,108	0,109	0,469	0,106	0,721
	G 5%	0,075	—	0,038	0,049	0,028	0,072	0,013	0,052	0,059	0,380	0,054	0,652
	G 1%	0,011	—	0,004	0,005	0,001	0,020	0,002	0,006	0,013	0,247	0,013	0,522
200	B 10%	0,123	0,135	0,131	0,129	0,084	0,104	0,086	0,102	0,118	0,104	0,112	0,108
	B 5%	0,066	0,076	0,052	0,071	0,030	0,042	0,024	0,041	0,051	0,059	0,049	0,065
	B 1%	0,013	0,016	0,010	0,011	0,002	0,005	0,004	0,009	0,016	0,022	0,013	0,019
	G 10%	0,113	—	0,107	0,118	0,064	0,116	0,078	0,115	0,098	0,270	0,094	0,476
	G 5%	0,059	—	0,047	0,066	0,021	0,059	0,024	0,067	0,046	0,188	0,043	0,403
	G 1%	0,013	—	0,007	0,012	0,002	0,009	0,004	0,016	0,011	0,102	0,012	0,268
300	G 10%	0,091	—	0,097	0,113	0,050	0,108	0,064	0,127	0,066	0,200	0,067	0,389
	G 5%	0,041	—	0,051	0,059	0,015	0,063	0,028	0,063	0,031	0,126	0,032	0,307
	G 1%	0,004	—	0,004	0,005	0,001	0,014	0,004	0,016	0,007	0,051	0,006	0,173
500	G 10%	0,111	—	0,116	0,129	0,067	0,115	0,088	0,120	0,074	0,139	0,073	0,253
	G 5%	0,042	—	0,060	0,068	0,034	0,065	0,046	0,071	0,038	0,078	0,038	0,177
	G 1%	0,007	—	0,012	0,012	0,004	0,013	0,006	0,019	0,007	0,022	0,006	0,077
1000	G 10%	0,090	—	0,107	0,110	0,077	0,094	0,079	0,093	0,085	0,091	0,086	0,134
	G 5%	0,043	—	0,052	0,054	0,030	0,037	0,035	0,048	0,037	0,046	0,036	0,076
	G 1%	0,008	—	0,005	0,008	0,007	0,007	0,006	0,009	0,004	0,012	0,003	0,019

Tabelle 4: Relative Verwurfshäufigkeiten bei N(0,1)-verteilten Fehlern und $\rho = 0,7$ und $\vartheta = 0,9$.

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
10	B 10%	0,383	0,372	0,112	0,461	0,052	0,488	0,051	0,460	0,311	0,328	0,301	0,361
	B 5%	0,329	0,274	0,031	0,310	0,009	0,348	0,010	0,309	0,235	0,254	0,215	0,294
	B 1%	0,177	0,194	0,002	0,182	0,000	0,176	0,000	0,170	0,176	0,184	0,157	0,208
	G 10%	0,329	—	0,026	0,506	0,010	0,753	0,013	0,515	0,183	0,781	0,188	0,844
	G 5%	0,207	—	0,003	0,439	0,000	0,721	0,000	0,451	0,140	0,741	0,150	0,829
	G 1%	0,140	—	0,000	0,356	0,000	0,650	0,000	0,385	0,000	0,640	0,000	0,802
30	B 10%	0,447	0,299	0,207	0,327	0,078	0,340	0,093	0,326	0,244	0,240	0,240	0,238
	B 5%	0,386	0,247	0,107	0,263	0,030	0,255	0,038	0,239	0,202	0,200	0,200	0,207
	B 1%	0,182	0,183	0,039	0,200	0,008	0,181	0,008	0,175	0,176	0,180	0,177	0,178
	G 10%	0,426	—	0,169	0,423	0,057	0,468	0,071	0,413	0,213	0,766	0,204	0,887
	G 5%	0,204	—	0,114	0,388	0,029	0,421	0,042	0,348	0,184	0,713	0,181	0,871
	G 1%	0,180	—	0,050	0,338	0,008	0,338	0,006	0,273	0,174	0,627	0,174	0,824
50	B 10%	0,390	0,240	0,196	0,255	0,071	0,261	0,107	0,251	0,185	0,205	0,182	0,203
	B 5%	0,344	0,196	0,110	0,200	0,029	0,192	0,049	0,183	0,153	0,157	0,153	0,160
	B 1%	0,309	0,164	0,053	0,162	0,010	0,128	0,020	0,135	0,128	0,128	0,128	0,128
	G 10%	0,378	—	0,179	0,348	0,055	0,365	0,095	0,317	0,164	0,685	0,165	0,852
	G 5%	0,336	—	0,122	0,325	0,031	0,331	0,056	0,282	0,140	0,631	0,139	0,818
	G 1%	0,304	—	0,066	0,298	0,013	0,267	0,023	0,226	0,126	0,543	0,126	0,750
100	B 10%	0,261	0,168	0,178	0,173	0,083	0,162	0,110	0,148	0,145	0,145	0,150	0,150
	B 5%	0,216	0,126	0,111	0,111	0,034	0,101	0,049	0,097	0,098	0,104	0,093	0,102
	B 1%	0,180	0,098	0,052	0,080	0,009	0,068	0,021	0,076	0,069	0,069	0,067	0,070
	G 10%	0,247	—	0,165	0,226	0,065	0,215	0,101	0,186	0,124	0,491	0,123	0,703
	G 5%	0,214	—	0,121	0,185	0,034	0,176	0,059	0,153	0,087	0,432	0,087	0,641
	G 1%	0,178	—	0,063	0,153	0,012	0,134	0,028	0,121	0,066	0,335	0,065	0,544
200	B 10%	0,141	0,125	0,123	0,110	0,078	0,099	0,090	0,086	0,089	0,095	0,092	0,110
	B 5%	0,104	0,067	0,073	0,060	0,030	0,057	0,043	0,042	0,045	0,051	0,041	0,059
	B 1%	0,070	0,027	0,034	0,027	0,005	0,023	0,021	0,025	0,020	0,025	0,019	0,027
	G 10%	0,135	—	0,107	0,127	0,060	0,128	0,084	0,125	0,075	0,283	0,071	0,488
	G 5%	0,098	—	0,066	0,080	0,027	0,094	0,047	0,071	0,039	0,221	0,035	0,405
	G 1%	0,069	—	0,039	0,051	0,007	0,050	0,028	0,043	0,018	0,127	0,018	0,296
1000	G 10%	0,109	—	0,083	0,083	0,085	0,101	0,076	0,098	0,091	0,105	0,091	0,146
	G 5%	0,062	—	0,039	0,037	0,036	0,040	0,033	0,046	0,054	0,044	0,051	0,076
	G 1%	0,012	—	0,008	0,006	0,007	0,006	0,005	0,008	0,013	0,008	0,013	0,022

Zum Vergleich wurden die Parameterschätzer durch die Parameter ersetzt ($\hat{\rho} = \rho$, $\hat{\vartheta} = \vartheta$):

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
10	B 10%	0,186	0,155	0,064	0,167	0,039	0,208	0,031	0,180	0,128	0,122	0,136	0,171
	B 5%	0,152	0,095	0,018	0,079	0,005	0,083	0,010	0,069	0,077	0,078	0,066	0,110
	B 1%	0,037	0,032	0,001	0,017	0,001	0,011	0,001	0,010	0,033	0,027	0,014	0,030
	G 10%	0,152	—	0,014	0,184	0,004	0,549	0,011	0,213	0,036	0,857	0,038	0,971
	G 5%	0,054	—	0,005	0,124	0,002	0,502	0,003	0,155	0,012	0,799	0,011	0,964
	G 1%	0,012	—	0,000	0,069	0,000	0,406	0,000	0,077	0,000	0,677	0,000	0,946
30	B 10%	0,118	0,123	0,071	0,092	0,055	0,102	0,038	0,079	0,109	0,095	0,125	0,096
	B 5%	0,073	0,062	0,025	0,037	0,008	0,053	0,005	0,022	0,052	0,050	0,057	0,055
	B 1%	0,021	0,011	0,002	0,004	0,000	0,009	0,001	0,003	0,012	0,008	0,017	0,007
	G 10%	0,085	—	0,041	0,080	0,023	0,184	0,020	0,071	0,062	0,687	0,061	0,899
	G 5%	0,054	—	0,015	0,038	0,002	0,124	0,003	0,030	0,032	0,619	0,030	0,878
	G 1%	0,014	—	0,001	0,004	0,000	0,045	0,001	0,005	0,002	0,479	0,002	0,828
50	B 10%	0,118	0,126	0,085	0,090	0,049	0,106	0,044	0,078	0,096	0,107	0,097	0,107
	B 5%	0,060	0,067	0,022	0,043	0,022	0,053	0,012	0,031	0,048	0,055	0,049	0,061
	B 1%	0,016	0,010	0,003	0,005	0,000	0,009	0,001	0,006	0,008	0,011	0,009	0,011
	G 10%	0,101	—	0,046	0,085	0,030	0,138	0,031	0,078	0,065	0,610	0,061	0,832
	G 5%	0,051	—	0,016	0,044	0,012	0,085	0,010	0,042	0,035	0,517	0,030	0,793
	G 1%	0,010	—	0,003	0,007	0,000	0,028	0,001	0,009	0,003	0,375	0,004	0,703

Tabelle 5: Relative Verwurfshäufigkeiten bei N(0,1)-verteilten Fehlern und $\rho = 0,1$ und $\vartheta = 0,1$.

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
10	B 10%	0,373	0,332	0,110	0,354	0,071	0,385	0,056	0,351	0,277	0,287	0,269	0,328
	B 5%	0,305	0,240	0,029	0,238	0,020	0,248	0,013	0,219	0,198	0,220	0,170	0,247
	B 1%	0,105	0,127	0,000	0,107	0,000	0,097	0,000	0,087	0,101	0,121	0,070	0,140
	G 10%	0,305	—	0,025	0,407	0,012	0,644	0,014	0,411	0,105	0,797	0,117	0,870
	G 5%	0,161	—	0,003	0,331	0,001	0,616	0,002	0,369	0,074	0,765	0,064	0,859
	G 1%	0,074	—	0,000	0,248	0,000	0,531	0,000	0,274	0,000	0,664	0,000	0,826
20	B 10%	0,177	0,215	0,096	0,187	0,050	0,222	0,053	0,179	0,161	0,196	0,168	0,206
	B 5%	0,089	0,127	0,036	0,112	0,010	0,138	0,013	0,100	0,073	0,108	0,068	0,129
	B 1%	0,025	0,037	0,005	0,038	0,000	0,039	0,000	0,031	0,021	0,031	0,017	0,047
	G 10%	0,097	—	0,051	0,192	0,015	0,373	0,020	0,193	0,072	0,767	0,060	0,893
	G 5%	0,062	—	0,020	0,138	0,002	0,318	0,006	0,141	0,028	0,710	0,026	0,864
	G 1%	0,014	—	0,001	0,066	0,000	0,201	0,000	0,074	0,006	0,573	0,006	0,813
30	B 10%	0,159	0,150	0,057	0,097	0,043	0,169	0,039	0,108	0,127	0,151	0,129	0,161
	B 5%	0,079	0,081	0,017	0,044	0,008	0,091	0,008	0,041	0,045	0,065	0,047	0,075
	B 1%	0,010	0,020	0,001	0,005	0,000	0,021	0,000	0,011	0,005	0,012	0,008	0,016
	G 10%	0,105	—	0,031	0,083	0,015	0,232	0,026	0,115	0,055	0,657	0,058	0,829
	G 5%	0,044	—	0,008	0,042	0,004	0,181	0,004	0,058	0,016	0,584	0,018	0,797
	G 1%	0,007	—	0,001	0,014	0,000	0,078	0,001	0,021	0,000	0,466	0,000	0,736
40	B 10%	0,147	0,120	0,069	0,098	0,045	0,120	0,035	0,086	0,152	0,121	0,155	0,131
	B 5%	0,087	0,066	0,020	0,040	0,007	0,062	0,007	0,033	0,083	0,063	0,083	0,067
	B 1%	0,018	0,016	0,003	0,009	0,000	0,013	0,001	0,005	0,013	0,018	0,010	0,018
	G 10%	0,107	—	0,048	0,095	0,021	0,152	0,027	0,088	0,093	0,541	0,093	0,757
	G 5%	0,070	—	0,013	0,045	0,004	0,104	0,004	0,052	0,049	0,478	0,035	0,702
	G 1%	0,013	—	0,003	0,012	0,000	0,045	0,001	0,015	0,003	0,357	0,002	0,628
50	B 10%	0,141	0,125	0,067	0,089	0,048	0,122	0,037	0,090	0,127	0,129	0,128	0,132
	B 5%	0,071	0,063	0,023	0,040	0,015	0,062	0,010	0,041	0,071	0,066	0,066	0,072
	B 1%	0,012	0,017	0,003	0,004	0,000	0,008	0,002	0,005	0,008	0,017	0,008	0,015
	G 10%	0,114	—	0,043	0,084	0,023	0,151	0,026	0,093	0,088	0,481	0,091	0,681
	G 5%	0,056	—	0,020	0,042	0,008	0,092	0,008	0,051	0,039	0,409	0,034	0,627
	G 1%	0,007	—	0,003	0,007	0,000	0,037	0,002	0,012	0,003	0,292	0,002	0,519
100	B 10%	0,136	0,135	0,076	0,100	0,052	0,101	0,042	0,070	0,123	0,104	0,127	0,118
	B 5%	0,060	0,073	0,032	0,046	0,020	0,042	0,014	0,028	0,057	0,048	0,060	0,052
	B 1%	0,017	0,021	0,002	0,003	0,001	0,008	0,000	0,003	0,010	0,009	0,011	0,012
	G 10%	0,117	—	0,060	0,097	0,032	0,111	0,035	0,083	0,088	0,281	0,090	0,445
	G 5%	0,051	—	0,029	0,049	0,016	0,063	0,018	0,042	0,038	0,194	0,036	0,363
	G 1%	0,015	—	0,003	0,007	0,002	0,015	0,001	0,013	0,002	0,112	0,005	0,236
200	B 10%	0,099	0,107	0,083	0,083	0,053	0,085	0,039	0,069	0,106	0,093	0,102	0,107
	B 5%	0,050	0,047	0,029	0,030	0,016	0,043	0,008	0,027	0,053	0,047	0,055	0,052
	B 1%	0,010	0,010	0,004	0,004	0,001	0,013	0,000	0,002	0,009	0,015	0,006	0,014
	G 10%	0,092	—	0,061	0,085	0,040	0,097	0,030	0,083	0,090	0,154	0,089	0,258
	G 5%	0,045	—	0,022	0,037	0,014	0,060	0,008	0,052	0,042	0,092	0,043	0,187
	G 1%	0,009	—	0,002	0,006	0,000	0,023	0,000	0,011	0,007	0,034	0,003	0,095
300	G 10%	0,108	—	0,072	0,094	0,048	0,115	0,044	0,107	0,092	0,132	0,091	0,176
	G 5%	0,043	—	0,027	0,042	0,019	0,058	0,017	0,052	0,047	0,072	0,044	0,108
	G 1%	0,009	—	0,001	0,001	0,004	0,011	0,000	0,014	0,005	0,015	0,005	0,043
500	G 10%	0,094	—	0,076	0,089	0,043	0,081	0,037	0,078	0,088	0,116	0,089	0,125
	G 5%	0,046	—	0,034	0,040	0,021	0,036	0,017	0,039	0,040	0,046	0,040	0,060
	G 1%	0,012	—	0,002	0,002	0,001	0,008	0,001	0,008	0,005	0,009	0,004	0,014
1000	G 10%	0,088	—	0,078	0,086	0,062	0,082	0,033	0,078	0,085	0,086	0,087	0,098
	G 5%	0,040	—	0,034	0,043	0,020	0,049	0,014	0,048	0,038	0,036	0,043	0,032
	G 1%	0,004	—	0,006	0,009	0,004	0,012	0,001	0,013	0,006	0,007	0,006	0,006

Tabelle 6: Relative Verwurfshäufigkeiten bei t_7-verteilten Fehlern und $\rho = 0,5$ und $\vartheta = 0,3$.

zeigt. Man beachte, dass bei dem Momentenvergleichskern für die vierten Momente und auch bei dem für die dritten Momenten jedenfalls bei der zentrierten Statistik die Integrierbarkeitsvoraussetzungen nicht erfüllt sind. Es zeigt sich wieder ein ähnliches Bild wie bei standardnormalverteilten Fehlern bei der gleichen Parameterkombination, auch der Test mit dem Kern K_4 scheint sich trotz der verletzten Integrierbarkeitsvoraussetzungen gutartig zu verhalten, indem er eher seltener die Hypothese verwirft als erlaubt. Insbesondere der zentrierte Test mit dem Kern K_Φ zeigt eine bessere Asymptotik, beispielsweise ist die Verwurfshäufigkeit bei $n = 300$ mit $\alpha = 1\%$ nun 0,043 statt 0,150 bei standardnormalverteilten Fehlen in Tabelle 2.
Wir führen dies fort und verwenden nun in Tabelle 7 t_3-verteilte Fehler. Für die Tests mit den Momentenvergleichskernen sind die Voraussetzungen nun bei keinem Kern mehr erfüllt, für die übrigen Tests (außer wieder bei dem Kern K_{Wx}) schon. Hier zeigt sich, dass die Tests mit den Statistiken $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n\|$ und $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^z\|$ eventuell eine leichte Tendenz zu höheren Verwurfshäufigkeiten haben, und sich hier also die Asymptotik leicht verschlechtert. Bei den Tests mit den Kernen K_{Wx} und K_Φ mit Berücksichtigung der Zentriertheit scheint sich im Vergleich zu den standardnormalverteilten Fehlern die Asymptotik etwas zu verbessern.
In Tabelle 8 kommen wir nun zu einer nichtsymmetrischen Fehlerverteilung, einer nichtzentralen t_7-Verteilung mit Nichtzentralitätsparameter 5, die an ihrem Erwartungswert $8/3 \cdot \sqrt{14/\pi}$ zentriert wurde. Auffällig ist hier vor allem die im Vergleich zu den vorigen Verteilungen sehr gute Asymptotik bei den Kernen K_Φ und K_{Wx}, sowie die Tatsache, dass der zentrierte Test mit dem Kern K_4, für den hier Integrierbarkeitsvoraussetzungen verletzt sind, bei großen Stichprobenumfängen das Niveau nicht sicher einzuhalten scheint. Bei Test mit dem Kern K_2, dessen Voraussetzungen erfüllt sind, zeigt sich bei der klassichen Statistik eine schlechte Asymptotik, da er sein Niveau erst sehr spät ausschöpft.

8.4 Simulation der Tests unter Folgen von benachbarten Alternativen

In diesem Abschnitt betrachten wir Simulationen der Tests unter Folgen von benachbarten Alternativen. Wir möchten nicht nur durch Vergrößern des Stichprobenumfangs n die asymptotische Verwurfshäufigkeit unter der Folge von benachbarten Alternativen schätzen, sondern zusätzlich noch indem wir Grenzprozesse

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
10	B 10%	0,381	0,350	0,083	0,367	0,047	0,392	0,039	0,371	0,312	0,317	0,311	0,352
	B 5%	0,316	0,254	0,025	0,237	0,010	0,257	0,013	0,213	0,207	0,233	0,173	0,279
	B 1%	0,105	0,127	0,001	0,096	0,000	0,082	0,001	0,068	0,098	0,121	0,068	0,158
	G 10%	0,317	—	0,022	0,418	0,008	0,621	0,013	0,439	0,103	0,772	0,104	0,839
	G 5%	0,166	—	0,003	0,350	0,001	0,589	0,003	0,390	0,069	0,723	0,059	0,821
	G 1%	0,069	—	0,000	0,280	0,000	0,529	0,000	0,298	0,000	0,605	0,000	0,780
20	B 10%	0,195	0,194	0,064	0,178	0,032	0,237	0,026	0,184	0,161	0,181	0,172	0,199
	B 5%	0,123	0,123	0,023	0,108	0,008	0,148	0,007	0,106	0,092	0,118	0,090	0,131
	B 1%	0,039	0,050	0,005	0,037	0,002	0,039	0,001	0,027	0,025	0,042	0,023	0,064
	G 10%	0,128	—	0,037	0,185	0,012	0,335	0,011	0,196	0,087	0,647	0,077	0,775
	G 5%	0,078	—	0,020	0,138	0,004	0,297	0,007	0,159	0,043	0,580	0,042	0,743
	G 1%	0,026	—	0,003	0,075	0,002	0,211	0,001	0,097	0,012	0,455	0,012	0,660
30	B 10%	0,183	0,167	0,044	0,117	0,022	0,163	0,019	0,122	0,135	0,129	0,137	0,144
	B 5%	0,108	0,101	0,020	0,069	0,001	0,105	0,008	0,070	0,071	0,077	0,072	0,082
	B 1%	0,023	0,024	0,006	0,015	0,000	0,025	0,002	0,015	0,017	0,020	0,018	0,026
	G 10%	0,131	—	0,028	0,110	0,008	0,215	0,013	0,119	0,082	0,494	0,080	0,633
	G 5%	0,078	—	0,017	0,077	0,001	0,167	0,008	0,082	0,036	0,431	0,036	0,583
	G 1%	0,021	—	0,005	0,036	0,000	0,093	0,001	0,042	0,006	0,292	0,005	0,479
40	B 10%	0,160	0,156	0,057	0,112	0,027	0,149	0,028	0,107	0,143	0,133	0,146	0,147
	B 5%	0,086	0,085	0,021	0,056	0,004	0,082	0,005	0,051	0,074	0,075	0,066	0,089
	B 1%	0,020	0,016	0,002	0,009	0,000	0,020	0,000	0,010	0,014	0,013	0,013	0,014
	G 10%	0,114	—	0,039	0,102	0,012	0,180	0,020	0,108	0,082	0,414	0,082	0,555
	G 5%	0,069	—	0,016	0,060	0,001	0,132	0,005	0,068	0,039	0,324	0,038	0,485
	G 1%	0,011	—	0,002	0,017	0,000	0,060	0,000	0,022	0,003	0,206	0,004	0,362
50	B 10%	0,145	0,141	0,056	0,108	0,019	0,118	0,022	0,103	0,119	0,129	0,121	0,136
	B 5%	0,079	0,081	0,019	0,054	0,004	0,069	0,007	0,042	0,059	0,069	0,060	0,074
	B 1%	0,014	0,021	0,002	0,009	0,001	0,008	0,000	0,007	0,010	0,020	0,010	0,022
	G 10%	0,122	—	0,039	0,108	0,010	0,142	0,017	0,102	0,082	0,327	0,084	0,469
	G 5%	0,063	—	0,015	0,060	0,004	0,099	0,007	0,052	0,038	0,254	0,035	0,386
	G 1%	0,010	—	0,002	0,013	0,001	0,039	0,001	0,018	0,004	0,145	0,005	0,281
100	B 10%	0,126	0,133	0,044	0,077	0,030	0,096	0,016	0,073	0,114	0,116	0,120	0,117
	B 5%	0,061	0,065	0,015	0,034	0,007	0,040	0,003	0,030	0,051	0,056	0,052	0,060
	B 1%	0,015	0,013	0,001	0,006	0,000	0,008	0,000	0,004	0,011	0,011	0,011	0,013
	G 10%	0,110	—	0,032	0,076	0,016	0,096	0,015	0,076	0,086	0,162	0,089	0,230
	G 5%	0,053	—	0,014	0,041	0,004	0,052	0,003	0,044	0,039	0,097	0,035	0,157
	G 1%	0,013	—	0,001	0,008	0,000	0,019	0,000	0,011	0,009	0,038	0,009	0,085
200	B 10%	0,128	0,124	0,059	0,087	0,032	0,111	0,026	0,073	0,132	0,106	0,138	0,113
	B 5%	0,075	0,065	0,011	0,031	0,013	0,056	0,006	0,030	0,076	0,053	0,076	0,048
	B 1%	0,017	0,009	0,001	0,008	0,001	0,011	0,000	0,009	0,015	0,008	0,016	0,010
	G 10%	0,111	—	0,049	0,086	0,022	0,110	0,021	0,089	0,112	0,115	0,114	0,143
	G 5%	0,063	—	0,012	0,036	0,009	0,061	0,008	0,051	0,063	0,059	0,064	0,061
	G 1%	0,014	—	0,001	0,011	0,000	0,018	0,000	0,012	0,012	0,009	0,009	0,012
300	G 10%	0,125	—	0,041	0,088	0,015	0,089	0,020	0,080	0,093	0,109	0,084	0,102
	G 5%	0,060	—	0,016	0,040	0,002	0,052	0,005	0,042	0,054	0,054	0,050	0,052
	G 1%	0,019	—	0,002	0,007	0,000	0,012	0,000	0,012	0,012	0,015	0,010	0,010
500	G 10%	0,093	—	0,051	0,083	0,020	0,081	0,020	0,085	0,106	0,097	0,109	0,097
	G 5%	0,045	—	0,018	0,045	0,008	0,053	0,010	0,051	0,049	0,047	0,056	0,046
	G 1%	0,010	—	0,001	0,008	0,000	0,015	0,000	0,015	0,008	0,009	0,010	0,008
1000	G 10%	0,102	—	0,049	0,101	0,018	0,111	0,029	0,107	0,093	0,112	0,098	0,103
	G 5%	0,054	—	0,026	0,050	0,008	0,074	0,008	0,065	0,048	0,058	0,052	0,052
	G 1%	0,014	—	0,002	0,012	0,001	0,025	0,000	0,025	0,014	0,010	0,012	0,012

Tabelle 7: Relative Verwurfshäufigkeiten bei t_3-verteilten Fehlern und $\rho = 0,5$ und $\vartheta = 0,3$.

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
10	B 10%	0,384	0,372	0,100	0,377	0,078	0,397	0,049	0,361	0,313	0,324	0,308	0,365
	B 5%	0,327	0,259	0,031	0,229	0,018	0,247	0,012	0,208	0,201	0,224	0,186	0,273
	B 1%	0,099	0,131	0,002	0,107	0,000	0,090	0,000	0,079	0,095	0,126	0,076	0,142
	G 10%	0,327	—	0,025	0,418	0,013	0,669	0,014	0,432	0,105	0,767	0,112	0,830
	G 5%	0,144	—	0,003	0,348	0,002	0,633	0,001	0,380	0,061	0,726	0,060	0,806
	G 1%	0,061	—	0,000	0,263	0,000	0,562	0,000	0,281	0,000	0,637	0,000	0,757
20	B 10%	0,184	0,205	0,073	0,175	0,039	0,222	0,038	0,181	0,158	0,202	0,177	0,215
	B 5%	0,096	0,121	0,029	0,108	0,009	0,145	0,011	0,098	0,080	0,118	0,087	0,129
	B 1%	0,022	0,051	0,005	0,031	0,001	0,038	0,001	0,026	0,014	0,043	0,016	0,053
	G 10%	0,105	—	0,044	0,201	0,010	0,362	0,019	0,203	0,079	0,680	0,078	0,763
	G 5%	0,061	—	0,021	0,142	0,002	0,307	0,009	0,141	0,025	0,610	0,024	0,722
	G 1%	0,015	—	0,000	0,069	0,000	0,207	0,000	0,082	0,008	0,500	0,008	0,636
30	B 10%	0,165	0,156	0,060	0,105	0,032	0,151	0,029	0,122	0,113	0,137	0,118	0,148
	B 5%	0,078	0,094	0,019	0,058	0,007	0,086	0,005	0,059	0,054	0,078	0,052	0,089
	B 1%	0,012	0,023	0,002	0,012	0,000	0,011	0,000	0,007	0,009	0,019	0,007	0,020
	G 10%	0,106	—	0,033	0,117	0,014	0,234	0,019	0,137	0,061	0,587	0,063	0,654
	G 5%	0,053	—	0,012	0,075	0,006	0,172	0,007	0,080	0,023	0,512	0,020	0,616
	G 1%	0,010	—	0,002	0,026	0,000	0,080	0,001	0,028	0,002	0,379	0,002	0,509
40	B 10%	0,150	0,130	0,042	0,108	0,037	0,121	0,022	0,113	0,128	0,123	0,132	0,142
	B 5%	0,080	0,064	0,020	0,060	0,010	0,068	0,005	0,065	0,065	0,067	0,058	0,074
	B 1%	0,017	0,016	0,002	0,016	0,001	0,017	0,000	0,012	0,016	0,016	0,012	0,018
	G 10%	0,107	—	0,028	0,114	0,023	0,159	0,016	0,117	0,077	0,457	0,075	0,553
	G 5%	0,058	—	0,014	0,070	0,009	0,109	0,005	0,075	0,037	0,380	0,039	0,486
	G 1%	0,009	—	0,003	0,029	0,000	0,049	0,000	0,032	0,006	0,261	0,005	0,360
50	B 10%	0,140	0,117	0,060	0,096	0,051	0,122	0,032	0,101	0,119	0,116	0,122	0,125
	B 5%	0,066	0,062	0,016	0,046	0,016	0,058	0,007	0,056	0,062	0,063	0,063	0,066
	B 1%	0,018	0,011	0,003	0,009	0,000	0,014	0,001	0,005	0,018	0,018	0,016	0,019
	G 10%	0,119	—	0,037	0,104	0,033	0,144	0,024	0,105	0,085	0,380	0,081	0,469
	G 5%	0,053	—	0,015	0,050	0,015	0,084	0,006	0,068	0,038	0,316	0,039	0,393
	G 1%	0,015	—	0,002	0,009	0,000	0,029	0,001	0,013	0,005	0,196	0,005	0,281
100	B 10%	0,112	0,093	0,053	0,093	0,040	0,097	0,024	0,089	0,104	0,087	0,103	0,095
	B 5%	0,054	0,043	0,015	0,041	0,012	0,045	0,004	0,048	0,047	0,056	0,044	0,054
	B 1%	0,009	0,014	0,001	0,009	0,000	0,012	0,000	0,009	0,013	0,013	0,013	0,016
	G 10%	0,095	—	0,038	0,095	0,029	0,107	0,020	0,096	0,074	0,199	0,076	0,244
	G 5%	0,048	—	0,015	0,046	0,012	0,061	0,003	0,063	0,036	0,131	0,034	0,185
	G 1%	0,006	—	0,000	0,008	0,000	0,021	0,001	0,013	0,004	0,061	0,006	0,099
200	B 10%	0,131	0,101	0,053	0,105	0,030	0,097	0,019	0,090	0,122	0,071	0,122	0,083
	B 5%	0,066	0,044	0,019	0,037	0,008	0,040	0,004	0,038	0,062	0,035	0,069	0,038
	B 1%	0,009	0,009	0,000	0,004	0,000	0,006	0,000	0,006	0,006	0,005	0,009	0,006
	G 10%	0,118	—	0,044	0,104	0,022	0,113	0,018	0,112	0,105	0,102	0,105	0,112
	G 5%	0,055	—	0,018	0,047	0,008	0,058	0,004	0,066	0,056	0,052	0,057	0,065
	G 1%	0,007	—	0,001	0,007	0,000	0,013	0,000	0,016	0,006	0,014	0,004	0,021
300	G 10%	0,104	—	0,055	0,098	0,036	0,103	0,027	0,107	0,098	0,104	0,098	0,102
	G 5%	0,045	—	0,026	0,057	0,014	0,061	0,008	0,066	0,048	0,054	0,044	0,057
	G 1%	0,010	—	0,002	0,011	0,001	0,024	0,001	0,031	0,011	0,012	0,011	0,013
500	G 10%	0,108	—	0,060	0,111	0,040	0,121	0,033	0,125	0,103	0,113	0,106	0,112
	G 5%	0,054	—	0,024	0,061	0,016	0,073	0,009	0,082	0,045	0,068	0,049	0,065
	G 1%	0,009	—	0,001	0,013	0,002	0,023	0,001	0,029	0,008	0,008	0,007	0,011
1000	G 10%	0,107	—	0,080	0,103	0,068	0,110	0,044	0,120	0,101	0,099	0,104	0,099
	G 5%	0,058	—	0,038	0,054	0,028	0,070	0,017	0,073	0,056	0,049	0,058	0,051
	G 1%	0,012	—	0,005	0,017	0,001	0,020	0,002	0,027	0,011	0,009	0,013	0,010

Tabelle 8: Relative Verwurfshäufigkeiten bei Fehlern aus einer an ihrem Erwartungswert zentrierten t_7-Verteilung mit Nichtzentralitätsparameter 5 und $\rho = 0,5$ und $\vartheta = 0,3$.

näherungsweise auf eine andere Art simulieren.
Bei den U-Typ-Statistiken können wir anhand der aus Ferger (1991) stammenden Formel (8.43) die asymptotische Güte auch näherungsweise numerisch berechnen, wenn die Größen α, λ und $q = |m/v|$ bekannt sind. In Tabelle 9 findet sich eine Übersicht über die so erhaltenen Werte der asymptotischen Testgüte $1 - F_{\|B^\circ + \frac{m}{v}c_\lambda\|_\infty}(F_{\|B^\circ\|_\infty}{}^{-1}(1-\alpha))$ für ausgewählte Werte von α, λ und m/v. Wir haben dabei die im Integrand auftretenden Reihen nach dem ersten Summanden abgebrochen (die ersten vier Stellen scheinen sich mit mehr Summanden nicht zu ändern) und die Integrale numerisch bestimmt.
Bei den U-Typ-Statistiken ist es außerdem einfach möglich, mit einer Monte-Carlo-Simulation die Verteilungsfunktion von $\|B^\circ + \frac{m}{v}c_\lambda\|_\infty$ näherungsweise zu bestimmen und die asymptotische Güte gemäß (8.42) zu schätzen. Die endlichdimensionalen Randverteilungen einer Brownschen Brücke B° sind leicht zu simulieren. Man erhält B° in bekannter Weise aus einer Standardbrownschen Bewegung, deren endlichdimensionale Randverteilungen sich wiederum als Partialsummen von zentrierten unabhängigen normalverteilten Zufallsvariablen darstellen lassen. Aus den Realisierungen der Randverteilungen von B° erhält man durch Addieren des entsprechenden Erwartungswertvektors Realisierungen von Randverteilungen $B^\circ + \frac{m}{v}c_\lambda$. Um für $n \in \mathbb{N}$ die $n-1$-dimensionalen Randverteilungen von $B^\circ + \frac{m}{v}c_\lambda$ in den Gitterpunkten $(i/n)_{i=1,\ldots,n-1}$ zu simulieren, nimmt man unabhängig und identisch zentriert normalverteilte Zufallsvariablen N_i, $i = 1, \ldots, n$, mit Varianz $1/n$ und beachtet

$$\Big(B(i/n)\Big)_{i=1,\ldots,n} \quad \sim \quad \Big(\sum_{j=1}^{i} N_j\Big)_{i=1,\ldots,n}$$

und

$$\Big(B^\circ(i/n)\Big)_{i=1,\ldots,n-1} \quad \sim \quad \Big(B(i/n) - (i/n)B(1)\Big)_{i=1,\ldots,n-1}.$$

Wegen der Pfadstetigkeit von diesen Prozessen und der Stetigkeit von c_λ gilt

$$\max_{1\le i\le n-1}\Big|B^\circ(i/n) + \frac{m}{v}c_\lambda(i/n)\Big| \quad \underset{n}{\longrightarrow} \quad \sup_{s\in[0,1]}\Big|B^\circ(s) + \frac{m}{v}c_\lambda(s)\Big| \quad \text{fast sicher,}$$

und wegen der nach Folgerung 8.5 gegebenen Stetigkeit der Verteilungsfunktion der Grenzverteilung gilt damit für alle $x \in \mathbb{R}$

$$F_n(x) := F_{\max\limits_{1\le i\le n-1}\left|B^\circ(i/n)+\frac{m}{v}c_\lambda(i/n)\right|}(x) \quad \underset{n}{\longrightarrow} \quad F_{\|B^\circ + \frac{m}{v}c_\lambda\|_\infty}(x). \tag{8.65}$$

	m/v	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Changepoint	α										
0,1	10%	0,101	0,103	0,107	0,112	0,119	0,128	0,139	0,151	0,166	0,183
	5%	0,050	0,052	0,054	0,058	0,062	0,068	0,074	0,082	0,092	0,103
	1%	0,010	0,011	0,011	0,012	0,013	0,015	0,017	0,020	0,023	0,026
0,2	10%	0,103	0,111	0,126	0,147	0,174	0,209	0,250	0,298	0,353	0,413
	5%	0,052	0,057	0,067	0,081	0,099	0,124	0,154	0,191	0,235	0,286
	1%	0,011	0,012	0,015	0,019	0,026	0,035	0,047	0,062	0,083	0,109
0,3	10%	0,105	0,121	0,149	0,187	0,237	0,297	0,366	0,442	0,521	0,601
	5%	0,054	0,064	0,083	0,111	0,148	0,195	0,253	0,320	0,395	0,476
	1%	0,011	0,015	0,021	0,031	0,047	0,068	0,098	0,137	0,186	0,246
0,4	10%	0,107	0,129	0,165	0,216	0,280	0,356	0,439	0,527	0,615	0,698
	5%	0,055	0,070	0,096	0,134	0,185	0,248	0,322	0,406	0,495	0,585
	1%	0,012	0,017	0,026	0,042	0,065	0,099	0,143	0,200	0,270	0,350
0,5	10%	0,108	0,132	0,171	0,226	0,295	0,375	0,463	0,554	0,643	0,726
	5%	0,055	0,072	0,101	0,143	0,198	0,266	0,346	0,435	0,527	0,618
	1%	0,012	0,018	0,029	0,046	0,073	0,110	0,161	0,224	0,300	0,387

	m/v	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
Changepoint	α										
0,1	10%	0,203	0,225	0,250	0,277	0,308	0,341	0,377	0,415	0,455	0,497
	5%	0,116	0,132	0,149	0,169	0,191	0,216	0,244	0,274	0,308	0,344
	1%	0,031	0,036	0,042	0,049	0,058	0,067	0,079	0,092	0,108	0,126
0,2	10%	0,476	0,542	0,608	0,672	0,732	0,787	0,835	0,876	0,909	0,935
	5%	0,343	0,406	0,472	0,540	0,608	0,673	0,735	0,790	0,838	0,879
	1%	0,141	0,181	0,227	0,281	0,341	0,407	0,476	0,547	0,617	0,684
0,3	10%	0,678	0,749	0,811	0,863	0,904	0,936	0,959	0,974	0,985	0,991
	5%	0,558	0,638	0,714	0,781	0,839	0,886	0,922	0,949	0,968	0,981
	1%	0,315	0,393	0,476	0,561	0,643	0,719	0,787	0,845	0,891	0,927
0,4	10%	0,772	0,835	0,885	0,924	0,952	0,971	0,983	0,991	0,995	0,998
	5%	0,671	0,749	0,817	0,872	0,914	0,945	0,967	0,981	0,989	0,994
	1%	0,439	0,531	0,621	0,706	0,781	0,844	0,894	0,931	0,957	0,975
0,5	10%	0,798	0,857	0,904	0,938	0,962	0,978	0,988	0,994	0,997	0,999
	5%	0,704	0,780	0,844	0,894	0,931	0,958	0,975	0,986	0,993	0,996
	1%	0,480	0,574	0,665	0,747	0,817	0,874	0,917	0,948	0,969	0,983

	m/v	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5	15
Changepoint	α										
0,1	10%	0,540	0,584	0,627	0,670	0,712	0,751	0,788	0,822	0,853	0,880
	5%	0,383	0,425	0,468	0,513	0,558	0,604	0,649	0,693	0,734	0,774
	1%	0,147	0,170	0,197	0,226	0,259	0,296	0,335	0,377	0,422	0,468
0,2	10%	0,956	0,970	0,981	0,988	0,993	0,996	0,998	0,999	0,999	1,000
	5%	0,912	0,938	0,958	0,972	0,982	0,989	0,993	0,996	0,998	0,999
	1%	0,746	0,801	0,849	0,888	0,920	0,944	0,962	0,976	0,985	0,991
0,3	10%	0,995	0,998	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	5%	0,989	0,994	0,997	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	1%	0,952	0,971	0,983	0,990	0,995	0,997	0,999	0,999	1,000	1,000
0,4	10%	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	5%	0,997	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	1%	0,986	0,992	0,996	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,5	10%	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	5%	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	1%	0,991	0,995	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Tabelle 9: Mit der Formel (8.43) aus Ferger (1991) erhaltene Werte zur Bestimmung der asymptotischen Testgüte für ausgewählte Quotienten m/v der Skalenfaktoren, des Testniveaus α und des Changepoints λ.

u	$F^{-1}_{\|B^\circ\|}(u)$	u	$F^{-1}_{\|B^\circ\|}(u)$	u	$F^{-1}_{\|B^\circ\|}(u)$	u	$F^{-1}_{\|B^\circ\|}(u)$	u	$F^{-1}_{\|B^\circ\|}(u)$	u	$F^{-1}_{\|B^\circ\|}(u)$
1%	0,438	18%	0,629	35%	0,734	52%	0,838	69%	0,962	86%	1,150
2%	0,467	19%	0,636	36%	0,740	53%	0,844	70%	0,970	87%	1,166
3%	0,487	20%	0,642	37%	0,746	54%	0,851	71%	0,979	88%	1,183
4%	0,503	21%	0,649	38%	0,752	55%	0,857	72%	0,988	89%	1,202
5%	0,517	22%	0,655	39%	0,758	56%	0,864	73%	0,997	90%	1,221
6%	0,529	23%	0,662	40%	0,763	57%	0,871	74%	1,007	91%	1,242
7%	0,540	24%	0,668	41%	0,769	58%	0,878	75%	1,016	92%	1,266
8%	0,550	25%	0,674	42%	0,776	59%	0,885	76%	1,026	93%	1,292
9%	0,560	26%	0,680	43%	0,782	60%	0,892	77%	1,037	94%	1,321
10%	0,569	27%	0,686	44%	0,788	61%	0,899	78%	1,047	95%	1,355
11%	0,577	28%	0,692	45%	0,794	62%	0,907	79%	1,059	96%	1,396
12%	0,585	29%	0,698	46%	0,800	63%	0,914	80%	1,070	97%	1,447
13%	0,593	30%	0,704	47%	0,806	64%	0,922	81%	1,082	98%	1,515
14%	0,601	31%	0,710	48%	0,812	65%	0,929	82%	1,094	99%	1,625
15%	0,608	32%	0,716	49%	0,818	66%	0,937	83%	1,107		
16%	0,615	33%	0,722	50%	0,825	67%	0,945	84%	1,121		
17%	0,622	34%	0,728	51%	0,831	68%	0,953	85%	1,135		

Tabelle 10: Durch Simulation erhaltene Quantile der Kolmogorovverteilung. Anzahl der Gitterpunkte: 50 000. 4 000 000 Realisierungen.

Sind für $k \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariablen $Z_1, \ldots, Z_k$ unabhängig und identisch verteilt mit Verteilungsfunktion F_n, so konvergiert ihre empirische Verteilungsfunktion nach dem Satz von Glivenko-Cantelli fast sicher gleichmäßig gegen F_n. Auf diese Weise können wir die Verteilungsfunktion $F_{\|B^\circ + \frac{m}{v} c_\lambda\|_\infty}$ schätzen.
Wir simulieren an dieser Stelle $k = 4\,000\,000$ Realisierungen der Zufallsvariablen $\max\limits_{1 \leq i \leq n-1} |B^\circ(i/n) + \frac{m}{v} c_\lambda(i/n)|$ mit der Wahl $n = 50\,001$. Um zu sehen, ob es sich um eine akzeptable Näherung handelt, wählen wir zunächst $m = 0$, so dass wir eine Näherung der Kolmogorovverteilung erhalten. In Tabelle 10 ist die mit dieser Simulation erhaltene Quantilfunktion angegeben. Ein Vergleich mit der Tabelle aus Smirnov (1948) zeigt eine recht gute Übereinstimmung.
In Tabelle 11 findet sich eine Übersicht über die so erhaltenen Werte der asymptotischen Testgüte $1 - F_{\|B^\circ + \frac{m}{v} c_\lambda\|_\infty}(F_{\|B^\circ\|_\infty}^{-1}(1-\alpha))$ für ausgewählte Werte von α, λ und m/v wie in Tabelle 9. Es wurden wieder wie angegeben $k = 4\,000\,000$ Realisierungen und 50 000 Gitterpunkte gewählt. Die Übereinstimmung der Werte aus Tabelle 11 mit den Werten aus Tabelle 9 ist ausgezeichnet, nur wenige Werte unterscheiden sich geringfügig, zum Beispiel bei $m/v = 3$, $\lambda = 0,5$ und $\alpha = 1\%$. Wir können also davon ausgehen, dass diese beiden Näherungen für die asymptotische Güte recht genau sind.
Wir berechnen nun die Skalenfaktoren m und v aus der Erwartungswert- und Kovarianzfunktion in bestimmten Beispielen. Um die dabei auftretenden Integrale berechnen zu können, überzeugen wir uns zunächst kurz von der Richtigkeit der

	m/v	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
Changepoint	α										
0,1	10%	0,101	0,103	0,107	0,112	0,119	0,128	0,139	0,152	0,166	0,183
	5%	0,050	0,052	0,054	0,058	0,062	0,068	0,074	0,082	0,092	0,104
	1%	0,010	0,011	0,011	0,012	0,014	0,015	0,017	0,020	0,023	0,026
0,2	10%	0,103	0,111	0,126	0,147	0,174	0,208	0,250	0,298	0,353	0,413
	5%	0,052	0,057	0,067	0,081	0,099	0,124	0,154	0,191	0,235	0,286
	1%	0,011	0,012	0,015	0,020	0,026	0,035	0,047	0,062	0,083	0,109
0,3	10%	0,105	0,122	0,149	0,187	0,237	0,297	0,366	0,442	0,522	0,602
	5%	0,054	0,065	0,083	0,111	0,148	0,195	0,253	0,320	0,395	0,476
	1%	0,011	0,015	0,021	0,031	0,047	0,068	0,098	0,137	0,186	0,246
0,4	10%	0,107	0,129	0,165	0,216	0,280	0,356	0,439	0,527	0,615	0,698
	5%	0,055	0,070	0,096	0,134	0,185	0,248	0,322	0,406	0,495	0,585
	1%	0,011	0,017	0,027	0,042	0,066	0,099	0,143	0,201	0,270	0,351
0,5	10%	0,108	0,132	0,171	0,227	0,295	0,376	0,464	0,555	0,644	0,726
	5%	0,056	0,072	0,101	0,143	0,198	0,266	0,346	0,435	0,527	0,619
	1%	0,012	0,018	0,029	0,047	0,073	0,111	0,161	0,224	0,301	0,387

	m/v	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10
Changepoint	α										
0,1	10%	0,203	0,225	0,250	0,277	0,308	0,341	0,377	0,415	0,455	0,497
	5%	0,117	0,132	0,149	0,169	0,191	0,216	0,243	0,274	0,308	0,344
	1%	0,031	0,036	0,042	0,049	0,058	0,068	0,079	0,093	0,108	0,127
0,2	10%	0,477	0,542	0,608	0,673	0,733	0,787	0,836	0,876	0,909	0,936
	5%	0,343	0,406	0,472	0,540	0,608	0,674	0,735	0,790	0,839	0,879
	1%	0,142	0,181	0,228	0,281	0,342	0,408	0,477	0,548	0,618	0,685
0,3	10%	0,679	0,749	0,811	0,863	0,904	0,936	0,959	0,974	0,985	0,991
	5%	0,558	0,639	0,714	0,782	0,839	0,886	0,922	0,949	0,968	0,981
	1%	0,316	0,394	0,477	0,561	0,644	0,720	0,788	0,845	0,892	0,927
0,4	10%	0,772	0,835	0,886	0,924	0,952	0,971	0,984	0,991	0,995	0,998
	5%	0,671	0,750	0,817	0,872	0,914	0,945	0,967	0,981	0,989	0,994
	1%	0,439	0,532	0,622	0,707	0,782	0,844	0,894	0,931	0,957	0,975
0,5	10%	0,798	0,858	0,904	0,939	0,962	0,978	0,988	0,994	0,997	0,999
	5%	0,704	0,780	0,844	0,894	0,931	0,958	0,975	0,986	0,993	0,996
	1%	0,480	0,575	0,666	0,747	0,818	0,874	0,917	0,948	0,969	0,983

	m/v	10,5	11	11,5	12	12,5	13	13,5	14	14,5	15
Changepoint	α										
0,1	10%	0,540	0,584	0,628	0,671	0,712	0,752	0,789	0,823	0,853	0,881
	5%	0,383	0,425	0,468	0,513	0,559	0,604	0,649	0,693	0,735	0,774
	1%	0,147	0,171	0,197	0,227	0,260	0,296	0,336	0,378	0,423	0,469
0,2	10%	0,956	0,970	0,981	0,988	0,993	0,996	0,998	0,999	0,999	1,000
	5%	0,912	0,938	0,958	0,972	0,982	0,989	0,993	0,996	0,998	0,999
	1%	0,747	0,802	0,849	0,889	0,920	0,945	0,963	0,976	0,985	0,991
0,3	10%	0,995	0,998	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	5%	0,989	0,994	0,997	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	1%	0,953	0,971	0,983	0,990	0,995	0,997	0,999	0,999	1,000	1,000
0,4	10%	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	5%	0,997	0,999	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	1%	0,986	0,992	0,996	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,5	10%	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	5%	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
	1%	0,991	0,995	0,998	0,999	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Tabelle 11: Durch Simulation erhaltene Werte zur Bestimmung der asymptotischen Testgüte für ausgewählte Werte des Quotienten m/v der Skalenfaktoren, des Testniveaus α und des Changepoints λ gemäß (8.42).

folgenden Aussagen.
Es bezeichne hier Φ die Verteilungsfunktion eine standardnormalverteilten Zufallsvariable und φ die dazugehörige Dichte.

8.66 Proposition. Es gelten für alle $a, c \in \mathbb{R}$

$$\varphi(cx)\varphi(x-a) = \varphi\Big(\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}\Big)\varphi\Big(\sqrt{1+c^2}\,x - \frac{a}{\sqrt{1+c^2}}\Big) \tag{8.67}$$

$$\varphi(cx)\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\varphi\Big(\sqrt{1+c^2}\,x\Big) \tag{8.68}$$

$$\int \Phi(cx)\varphi(x-a)\,dx = \Phi\Big(\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}\Big) \tag{8.69}$$

$$\int \Phi(cx)x\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \tag{8.70}$$

$$\int \Phi(cx)^2\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{1+2c^2} \tag{8.71}$$

$$\int \Phi(x)^2\varphi(x)\,dx = \frac{1}{3} \tag{8.72}$$

$$\int \Phi(cx)x^2\varphi(x)\,dx = \frac{1}{2} \tag{8.73}$$

$$\int \Phi(cx)x^4\varphi(x)\,dx = \frac{3}{2}. \tag{8.74}$$

Beweis: Zu (8.67): Für alle $a, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\varphi(cx)\varphi(x-a) &= \frac{1}{2\pi}\exp\Big(-\frac{c^2+1}{2}x^2 + ax - \frac{a^2}{2}\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\exp\Big(-\frac{c^2+1}{2}x^2 + ax - \frac{a^2}{2(c^2+1)} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2(c^2+1)}\Big) \\
&= \frac{1}{2\pi}\exp\Big(-\frac{1}{2}\Big(\sqrt{1+c^2}\,x - \frac{a}{\sqrt{1+c^2}}\Big)^2 - \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{1}{1+c^2}\Big)a^2\Big) \\
&= \varphi\Big(\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}\Big)\varphi\Big(\sqrt{1+c^2}\,x - \frac{a}{\sqrt{1+c^2}}\Big).
\end{aligned}$$

Zu (8.68): Folgt sofort aus (8.67) mit $a = 0$.
Zu (8.69): Für alle $a, c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ gilt nach (8.67)

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(cx)\varphi(x-b)\,dx\,db \\
&\quad = \int_{-\infty}^{a}\varphi\Big(\frac{bc}{\sqrt{1+c^2}}\Big)\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\Big(\sqrt{1+c^2}\,x - \frac{b}{\sqrt{1+c^2}}\Big)\,dx\,db
\end{aligned}$$

$$(8.75) \qquad = \int_{-\infty}^{a} \varphi\Big(\frac{bc}{\sqrt{1+c^2}}\Big)\,db \int_{-\infty}^{\infty} \varphi\Big(\sqrt{1+c^2}\,x\Big)\,dx$$

$$= \frac{\sqrt{1+c^2}}{c}\int_{-\infty}^{\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}} \varphi(u)\,du\,\frac{1}{\sqrt{1+c^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(v)\,dv$$

$$= \frac{1}{c}\Phi\Big(\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}\Big).$$

Es folgt für alle $a, c \in \mathbb{R}$, $c > 0$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(cx)\varphi(x-a)\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(cx)\int_{-\infty}^{a}\frac{d}{db}\varphi(x-b)\,db\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{a}\Phi(cx)\Big(-\frac{d}{dx}\varphi(x-b)\Big)\,db\,dx$$

$$(8.76) \qquad = \int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} -\Phi(cx)\Big(\frac{d}{dx}\varphi(x-b)\Big)\,dx\,db$$

$$= \int_{-\infty}^{a}\Big(-\Phi(cx)\varphi(x-b)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} c\varphi(cx)\varphi(x-b)\,dx\Big)db$$

$$= \int_{-\infty}^{a}\Big(0 + c\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(cx)\varphi(x-b)\,dx\Big)db \;=\; \Phi\Big(\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}\Big),$$

beim ersten Gleichheitszeichen nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung mit $\varphi(y) \underset{y\to\infty}{\longrightarrow} 0$, dann nach der Kettenregel, mit dem Satz von Fubini, mit partieller Integration und wegen der Beschränktheit von Φ in Verbindung mit $\varphi(y) \underset{y\to\pm\infty}{\longrightarrow} 0$ und zum Schluß nach (8.75). Die Anwendung des Satzes von Fubini war gerechtfertigt, da für alle $a, c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$

$$\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}\Big|\Phi(cx)\frac{d}{dx}\varphi(x-b)\Big|\,dx\,db$$

$$= \int_{-\infty}^{a}\Big(\int_{-\infty}^{b}\Phi(cx)\frac{d}{dx}\varphi(x-b)\,dx - \int_{b}^{\infty}\Phi(cx)\frac{d}{dx}\varphi(x-b)\,dx\Big)db$$

$$= \int_{-\infty}^{a}\Big(\Phi(cx)\varphi(x-b)\Big|_{x=-\infty}^{x=b} - \int_{-\infty}^{b} c\varphi(cx)\varphi(x-b)\,dx$$

$$\qquad - \Phi(cx)\varphi(x-b)\Big|_{x=b}^{x=\infty} + \int_{b}^{\infty} c\varphi(cx)\varphi(x-b)\,dx\Big)db$$

$$\leq 2\int_{-\infty}^{a}\Phi(cb)\varphi(b-b)\,db + c\int_{-\infty}^{a}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(cx)\varphi(x-b)\,dx\,db$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{c\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{ac}\Phi(u)\,du + \Phi\Big(\frac{ac}{\sqrt{1+c^2}}\Big) \;\leq\; \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{ac} 1\cdot\Phi(u)\,du + 1$$

$$= \frac{1}{c}u\Phi(u)\Big|_{u=-\infty}^{u=ac} - \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{ac} u\varphi(u)\,du + 1$$

$$= a\Phi(ac) - 0 + \frac{1}{c}\int_{-\infty}^{ac}\varphi'(u)\,du + 1 \;=\; a\Phi(ac) + \frac{1}{c}\varphi(ac) + 1 \;<\; \infty$$

gilt, wobei wir beim ersten Gleichheitszeichen den Integrationsbereich nach dem Vorzeichen des Ausdrucks im Betrag unterteilt haben, anschließend zweimal partielle Integration ausgeführt haben, dann die Stammfunktionsterme zusammengefasst und die Integrale nach oben abgeschätzt haben, hierauf $\varphi(0) = 1/\sqrt{2\pi}$ und (8.75) eingesetzt und eine Substitution durchgeführt haben, einfache Abschätzungen ausgeführt haben, nochmals partiell integriert haben, und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung benutzt haben.
Für alle $a, c \in \mathbb{R}$ mit $c > 0$ folgt aus (8.76)

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(-cx)\varphi(x-a)\,dx \quad &= \quad -\int_{\infty}^{-\infty} \Phi(cy)\varphi(-y-a)\,dy \\
= \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(cy)\varphi(-y-a)\,dy \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(cy)\varphi(y+a)\,dy \quad = \quad \Phi\Big(\frac{-ac}{\sqrt{1+c^2}}\Big).
\end{aligned}$$

Weiter gilt für alle $a \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(0x)\varphi(x-a)\,dx \quad = \quad \Phi(0)\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x-a)\,dx \quad = \quad \Phi\Big(\frac{a0}{\sqrt{1+0^2}}\Big).$$

Damit haben wir (8.69) für alle $a, c \in \mathbb{R}$ überprüft.
Zu (8.70): Für alle $c \in \mathbb{R}$ gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(cx)x\varphi(x)\,dx \quad &= \quad -\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(cx)\varphi'(x)\,dx \\
&= \quad -\Phi(cx)\varphi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} c\varphi(cx)\varphi(x)\,dx \\
&= \quad 0 + \frac{c}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\sqrt{1+c^2}\,x)\,dx \\
&= \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)\,dy \quad = \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{c}{\sqrt{1+c^2}},
\end{aligned}$$

mit partieller Integration und unter Verwendung von (8.68).
Zu (8.71): Es gilt für alle $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dc}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(cx)^2\varphi(x)\,dx \quad &= \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dc}\Phi(cx)^2\varphi(x)\,dx \\
= \quad \int_{-\infty}^{\infty} 2\Phi(cx)\varphi(cx)x\varphi(x)\,dx \quad &= \quad \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(cx)x\varphi\Big(\sqrt{1+c^2}\,x\Big)\,dx \\
= \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+c^2}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi\Big(\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}y\Big)y\varphi(y)\,dy \\
= \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{1+c^2}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\frac{c}{\sqrt{1+c^2}}}{\sqrt{1+\frac{c^2}{1+c^2}}} \quad &= \quad \frac{1}{\pi}\frac{c}{1+c^2}\frac{1}{\sqrt{1+2c^2}},
\end{aligned}$$

wobei wir beim ersten Gleichheitszeichen wegen $|\frac{d}{dc}\Phi(cx)^2\varphi(x)| \leq 2|x|\varphi(x)$ eine integrierbare Majorante für die Ableitungen haben und deshalb Integration und Ableitung vertauschen durften. Beim vierten Gleichheitszeichen wurde mit $y = \sqrt{1+c^2}\,x$ substituiert und danach (8.70) benutzt.
Es folgt für alle $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(cx)^2\varphi(x)\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(0x)^2\varphi(x)\,dx + \int_0^c \frac{1}{\pi}\frac{b}{1+b^2}\frac{1}{\sqrt{1+2b^2}}\,db \\ &= \Phi(0)^2\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_1^{\sqrt{1+2c^2}} \frac{1}{1+a^2}\,da = \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\arctan a\Big|_{a=1}^{a=\sqrt{1+2c^2}} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{\pi}\Big(\arctan\sqrt{1+2c^2} - \frac{\pi}{4}\Big) = \frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{1+2c^2}\end{aligned}$$

mit der Substitution $a = \sqrt{1+2b^2}$.
Zu (8.72): Für diesen Spezialfall von (8.71) überlegt man wohl am einfachsten

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)^2\varphi(x)\,dx = \int_{\Phi(-\infty)}^{\Phi(\infty)} u^2\,du = \frac{1}{3}u^3\Big|_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{3}.$$

Zu (8.73): Wir haben für alle $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(cx)x^2\varphi(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} x\Phi(cx)\varphi'(x)\,dx \\ &= -x\Phi(cx)\varphi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\Big(\Phi(cx) + cx\varphi(cx)\Big)\varphi(x)\,dx \\ &= 0 + \int_{-\infty}^{\infty}\Phi(cx)\varphi(x)\,dx + c\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi(cx)\varphi(x)\,dx = \Phi(0) + 0 = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

beim zweiten Gleichheitszeichen mit partieller Integration und zum Schluß nach (8.69) und wegen der Antisymmetrie des Integranden im zweiten Integral.
Zu (8.74): Ähnlich wie eben ist für alle $c \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(cx)x^4\varphi(x)\,dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} x^3\Phi(cx)\varphi'(x)\,dx \\ &= x^3\Phi(cx)\varphi(x)\Big|_{x=-\infty}^{x=\infty} + \int_{-\infty}^{\infty}\Big(3x^2\Phi(cx) + cx^3\varphi(cx)\Big)\varphi(x)\,dx \\ &= 0 + 3\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(cx)x^2\varphi(x)\,dx + c\int_{-\infty}^{\infty} x^3\varphi(cx)\varphi(x)\,dx \\ &= 3\cdot\frac{1}{2} + c\cdot 0 = \frac{3}{2},\end{aligned}$$

nach (8.73).

8.77 Beispiel. Wir möchten zunächst die Skalenfaktoren

$$v^{klass} = E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big)^{1/2}$$

und

$$v^{zentr} = \Big(E\Big(K(e_1,e_3)K(e_2,e_3)\Big) - E\Big(K(e_1,e_2)e_2\Big)^2/\sigma^2\Big)^{1/2}$$

aus den Grenzverteilungen V^{klass} und V^{zentr} bei standardnormalverteilten Fehlern für die hier betrachteten Kerne bestimmen. Seien also im folgenden e_1, e_2, e_3 unabhängige, standardnormalverteilte Zufallsvariablen.
Die ersten acht Momente einer standardnormalverteilten Zufallsvariable sind bekanntlich

$$\begin{array}{llll} E(e_1) = 0 & E(e_1^2) = 1 & E(e_1^3) = 0 & E(e_1^4) = 3 \\ E(e_1^5) = 0 & E(e_1^6) = 15 & E(e_1^7) = 0 & E(e_1^8) = 105. \end{array} \tag{8.78}$$

Weiter ist nach (8.69), (8.72), (8.71) und (8.70)

$$E(\Phi(ce_1)) = \int \Phi(cx)\varphi(x)\,dx = \Phi\Big(\frac{0c}{\sqrt{1+c^2}}\Big) = \frac{1}{2} \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}, \tag{8.79}$$

$$E(\Phi(e_1)^2) = \int \Phi(x)^2\varphi(x)\,dx = \frac{1}{3}, \tag{8.80}$$

$$E(\Phi(e_1/\sqrt{2}\,)^2) = \int \Phi(x/\sqrt{2}\,)^2\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{2} \tag{8.81}$$

und

$$E(\Phi(ce_1)e_1) = \int \Phi(cx)x\varphi(x)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \quad \text{für alle } c \in \mathbb{R}. \tag{8.82}$$

Hiermit bestimmen wir zunächst die bedingten Erwartungswerte

$$E(K_2(e_1,e_2)|e_2) = E(e_1^2 - e_2^2|e_2) = E(e_1^2) - e_2^2 = 1 - e_2^2, \tag{8.83}$$

$$E(K_3(e_1,e_2)|e_2) = E(e_1^3 - e_2^3|e_2) = E(e_1^3) - e_2^3 = -e_2^3, \tag{8.84}$$

$$E(K_4(e_1,e_2)|e_2) = E(e_1^4 - e_2^4|e_2) = E(e_1^4) - e_2^4 = 3 - e_2^4, \tag{8.85}$$

sowie

$$E(K_{Wx}(e_1,e_2)|e_2) = 1 - 2\,E(1_{\{e_1 \le e_2\}}|e_2) = 1 - 2\Phi(e_2) \tag{8.86}$$

und

$$\begin{aligned} E(K_\Phi(e_1,e_2)|e_2) &= 2\,E(\Phi(e_1-e_2)|e_2) - 1 = 2\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x-e_2)\varphi(x)\,dx - 1 \\ &= 2\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x)\varphi(x+e_2)\,dx - 1 = 2\Phi(-e_2/\sqrt{2}\,) - 1 = 1 - 2\Phi(e_2/\sqrt{2}\,) \end{aligned} \tag{8.87}$$

nach (8.69). Es folgt

$$\begin{aligned} E\Big(K_2(e_1,e_3)K_2(e_2,e_3)\Big) &= E\Big(E(K_2(e_1,e_2)|e_2)^2\Big) = E\Big((1-e_2^2)^2\Big) \\ &= 1 - 2\,E(e_2^2) + E(e_2^4) = 1 - 2\cdot 1 + 3 = 2, \end{aligned} \tag{8.88}$$

$$(8.89)\quad E\Big(K_3(e_1,e_3)K_3(e_2,e_3)\Big) = E\Big((-e_2^3)^2\Big) = E(e_2^6) = 15,$$

$$(8.90)\quad \begin{aligned} &E\Big(K_4(e_1,e_3)K_4(e_2,e_3)\Big) = E\Big((3-e_2^4)^2\Big) = 9 - 6\,E(e_2^4) + E(e_2^8) \\ &\qquad = 9 - 6\cdot 3 + 105 = 96 \end{aligned}$$

nach (8.78),

$$(8.91)\quad \begin{aligned} &E\Big(K_{Wx}(e_1,e_3)K_{Wx}(e_2,e_3)\Big) = E\Big((1-2\Phi(e_2))^2\Big) \\ &\qquad = 1 - 4\,E(\Phi(e_2)) + 4\,E(\Phi(e_2)^2) = 1 - 4\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

nach (8.79) und (8.80), sowie

$$(8.92)\quad \begin{aligned} &E\Big(K_\Phi(e_1,e_3)K_\Phi(e_2,e_3)\Big) = E\Big((1-2\Phi(e_2/\sqrt{2}\,))^2\Big) \\ &\qquad = 1 - 4\,E(\Phi(e_2/\sqrt{2}\,)) + 4\,E(\Phi(e_2/\sqrt{2}\,)^2) \\ &\qquad = 1 - 4\cdot\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi}\arctan\sqrt{2} = \frac{4}{\pi}\arctan\sqrt{2} - 1 \end{aligned}$$

nach (8.79) und (8.81).

Für die Bestimmung von v^{zentr} beachten wir außer $\sigma^2 = E(e_1^2) = 1$ noch

$$(8.93)\quad E\Big(K_2(e_1,e_2)e_2\Big) = E\Big(E(K_2(e_1,e_2)|e_2)e_2\Big) = E\Big((1-e_2^2)e_2\Big) = 0,$$

$$(8.94)\quad E\Big(K_3(e_1,e_2)e_2\Big) = E\Big((-e_2^3)e_2\Big) = -E(e_2^4) = -3,$$

$$(8.95)\quad E\Big(K_4(e_1,e_2)e_2\Big) = E\Big((3-e_2^4)e_2\Big) = 3\,E(e_2) - E(e_2^5) = 0,$$

$$(8.96)\quad \begin{aligned} &E\Big(K_{Wx}(e_1,e_2)e_2\Big) = E\Big((1-2\Phi(e_2))e_2\Big) \\ &\quad = E(e_2) - 2\,E(\Phi(e_2)e_2) = 0 - 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{1+1^2}} = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$

und

$$(8.97)\quad \begin{aligned} &E\Big(K_\Phi(e_1,e_2)e_2\Big) = E\Big((1-2\Phi(e_2/\sqrt{2}\,))e_2\Big) \\ &\quad = E(e_2) - 2\,E(\Phi(e_2/\sqrt{2}\,)e_2) = 0 - 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1/\sqrt{2}}{\sqrt{1+(1/\sqrt{2}\,)^2}} = -\sqrt{\frac{2}{3\pi}}, \end{aligned}$$

nach (8.82). Damit erhalten wir

Kern	v^{klass}	v^{zentr}	v^{klass}	v^{zentr}
K_2	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1,414	1,414
K_3	$\sqrt{15}$	$\sqrt{6}$	3,873	2,449
K_4	$4\sqrt{6}$	$4\sqrt{6}$	9,798	9,798
K_{Wx}	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{\pi}}$	0,5774	0,1226
K_Φ	$\sqrt{\frac{4\arctan\sqrt{2}}{\pi}-1}$	$\sqrt{\frac{4\arctan\sqrt{2}}{\pi}-1-\frac{2}{3\pi}}$	0,4651	0,06435.

Wir möchten nun für verschiedene Folgen von zu der Hypothese standardnormalverteilter Fehler benachbarten Alternativen den Skalenfaktor

$$m := E(K(e_1, e_2)h(e_2))$$

der Erwartungswertfunktion von V_1^{zentr} und V_1^{klass} bestimmen. (Bei den hier betrachteten Folgen von benachbarten Alternativen ist aufgrund von Proposition 8.56 nach Bemerkung 8.59 stets $E(h(e_1)e_1) = 0$ erfüllt, sodass der Skalenfaktor in der Erwartungswertfunktion von V_1^{zentr} gleich dem der Erwartungswertfunktion von V_1^{klass} ist.)
Wir beginnen mit der Skalenalternative aus Proposition 8.48 und überprüfen zunächst ob bei der Wahl $f = \varphi$ die Voraussetzungen für ihre Anwendung erfüllt sind. Es gilt

$$\begin{aligned}(\varphi^{1/2})''(x) &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\frac{d^2}{dx^2}\exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\frac{d}{dx}\Big(-\frac{x}{2}\exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big)\Big)\\ &= \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi}}\Big(\frac{x^2}{4}\exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big)-\frac{1}{2}\exp\Big(-\frac{x^2}{4}\Big)\Big) = \Big(\frac{x^2}{4}-\frac{1}{2}\Big)\varphi^{1/2}(x),\end{aligned}$$

also

$$\int\Big((\varphi^{1/2})''(x)\Big)^2 x^4\,dx = \int\Big(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\Big)^2\varphi(x)\,dx < \infty,$$

sowie

$$\int\frac{(\varphi'(x))^2}{\varphi(x)}x^2\,dx = \int\frac{x^2\varphi(x)^2}{\varphi(x)}x^2\,dx = \int x^4\varphi(x)\,dx < \infty,$$

beidesmal weil bei einer Normalverteilung sämtliche Momente endlich sind. Es sind also die Voraussetzungen von Proposition 8.48 erfüllt. Es gilt dann wegen $f = \varphi$ für eine reelle Zahl d

$$h(x) = -d\Big(\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}x+1\Big) = -d\Big(\frac{-x\varphi(x)}{\varphi(x)}x+1\Big) = -d(1-x^2).$$

Für unsere Kerne erhalten wir also

$$\begin{aligned}E\Big(K_2(e_1,e_2)h(e_2)\Big) &= E\Big(E(K_2(e_1,e_2)|e_2)h(e_2)\Big)\\ &= -E\Big((1-e_2^2)d(1-e_2^2)\Big) = -d\Big(1-2\,E(e_2^2)+E(e_2^4)\Big)\\ &= -d(1-2\cdot 1+3) = -2d,\end{aligned}\tag{8.98}$$

$$\begin{aligned}E\Big(K_3(e_1,e_2)h(e_2)\Big) &= -E\Big((-e_2^3)d(1-e_2^2)\Big)\\ &= -d\Big(-2\,E(e_2^3)+E(e_2^5)\Big) = 0,\end{aligned}\tag{8.99}$$

$$
\begin{aligned}
& E\Big(K_4(e_1,e_2)h(e_2)\Big) \;=\; -E\Big((3-e_2^4)d(1-e_2^2)\Big) \\
(8.100)\quad &=\; -d\Big(3-3\,E(e_2^2)-E(e_2^4)+E(e_2^6)\Big) \;=\; -d(3-3\cdot 1-3+15) \\
&=\; -12d,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& E\Big(K_{Wx}(e_1,e_2)h(e_2)\Big) \;=\; -E\Big((1-2\Phi(e_2))d(1-e_2^2)\Big) \\
(8.101)\quad &=\; -d\Big(1-E(e_2^2)-2\,E(\Phi(e_2))+2\,E(\Phi(e_2)e_2^2)\Big) \\
&=\; -d\Big(1-1-2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\Big) \;=\; 0
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
& E\Big(K_\Phi(e_1,e_2)h(e_2)\Big) \;=\; -E\Big((1-2\Phi(e_2/\sqrt{2}\,))d(1-e_2^2)\Big) \\
(8.102)\quad &=\; -d\Big(1-E(e_2^2)-2\,E(\Phi(e_2/\sqrt{2}\,))+2\,E(\Phi(e_2/\sqrt{2}\,)e_2^2)\Big) \\
&=\; -d\Big(1-1-2\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}\Big) \;=\; 0
\end{aligned}
$$

nach (8.78), (8.79) und (8.73). Damit erhalten wir also im Fall der Skalenalternative

Kern	m	$\lvert m/v^{klass}\rvert$	$\lvert m/v^{zentr}\rvert$	$\lvert m/v^{klass}\rvert$ mit $d=5$	$\lvert m/v^{zentr}\rvert$
K_2	$-2d$	$\sqrt{2}\,d$	$\sqrt{2}\,d$	$7,071$	$7,071$
K_3	0	0	0	0	0
K_4	$-12d$	$\sqrt{3/2}\,d$	$\sqrt{3/2}\,d$	$6,124$	$6,124$
K_{Wx}	0	0	0	0	0
K_Φ	0	0	0	0	0 .

Bei der Folge von benachbarten Alternativen aus Proposition 8.51, bei der sich $t_{[d\sqrt{n}]}$-Verteilungen bei wachsendem Stichprobenumfang n und damit wachsender Zahl $[d\sqrt{n}\,]$ von Freiheitsgraden der Standardnormalverteilung annähern, ergab sich als Ableitung

$$
h(x) = -\frac{1}{2d}\Big(\frac{1}{2}+x^2-\frac{x^4}{2}\Big).
$$

Hier ist dann

$$
\begin{aligned}
& E\Big(K_2(e_1,e_2)h(e_2)\Big) \;=\; -\frac{1}{2d}\,E\Big((1-e_2^2)\Big(\frac{1}{2}+e_2^2-\frac{e_2^4}{2}\Big)\Big) \\
(8.103)\quad &=\; -\frac{1}{2d}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,E(e_2^2)-\frac{3}{2}\,E(e_4^4)+\frac{1}{2}\,E(e_2^6)\Big) \\
&=\; -\frac{1}{2d}\Big(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot 1-\frac{3}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 15\Big) \;=\; -\frac{1}{2d}\cdot 4 \;=\; -\frac{2}{d},
\end{aligned}
$$

$$E\Big(K_3(e_1,e_2)h(e_2)\Big) \;=\; -\frac{1}{2d}\,E\Big((-e_2^3)\Big(\frac{1}{2}+e_2^2-\frac{e_2^4}{2}\Big)\Big)$$

$$(8.104)\qquad =\; \frac{1}{2d}\Big(\frac{1}{2}\,E(e_2^3)+E(e_2^5)-E(e_2^7)\Big) \;=\; 0,$$

$$E\Big(K_4(e_1,e_2)h(e_2)\Big) \;=\; -\frac{1}{2d}\,E\Big((3-e_2^4)\Big(\frac{1}{2}+e_2^2-\frac{e_2^4}{2}\Big)\Big)$$

$$(8.105)\qquad =\; -\frac{1}{2d}\Big(\frac{3}{2}+3\,E(e_2^2)-2\,E(e_2^4)-E(e_2^6)+\frac{1}{2}\,E(e_2^8)\Big)$$

$$=\; -\frac{1}{2d}\Big(\frac{3}{2}+3\cdot 1-2\cdot 3-15+\frac{1}{2}\cdot 105\Big) \;=\; -\frac{18}{d},$$

$$E\Big(K_{Wx}(e_1,e_2)h(e_2)\Big) \;=\; -\frac{1}{2d}E\Big((1-2\Phi(e_2))\Big(\frac{1}{2}+e_2^2-\frac{e_2^4}{2}\Big)\Big)$$

$$(8.106)\qquad =\; -\frac{1}{2d}\Big(\frac{1}{2}+E(e_2^2)-\frac{1}{2}\,E(e_2^4)-E(\Phi(e_2))-2\,E(\Phi(e_2)e_2^2) + E(\Phi(e_2)e_2^4)\Big)$$

$$=\; -\frac{1}{2d}\Big(\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\Big) \;=\; 0$$

und

$$E\Big(K_\Phi(e_1,e_2)h(e_2)\Big) \;=\; -\frac{1}{2d}\,E\Big((1-2\Phi(e_2/\sqrt{2}\,))\Big(\frac{1}{2}+e_2^2-\frac{e_2^4}{2}\Big)\Big)$$

$$(8.107)\qquad =\; -\frac{1}{2d}\Big(\frac{1}{2}+E(e_2^2)-\frac{1}{2}\,E(e_2^4)-E(\Phi(e_2/\sqrt{2}\,))-2\,E(\Phi(e_2/\sqrt{2}\,)e_2^2) + E(\Phi(e_2/\sqrt{2}\,)e_2^4)\Big)$$

$$=\; -\frac{1}{2d}\Big(\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{1}{2}-2\cdot\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\Big) \;=\; 0$$

nach (8.78), (8.79), (8.73) und (8.74).
Damit erhalten wir also im Fall der Alternativenfolge mit den t-Verteilungen

Kern	m	$\lvert m/v^{klass}\rvert$	$\lvert m/v^{zentr}\rvert$	$\lvert m/v^{klass}\rvert$ mit $d=1/3$	$\lvert m/v^{zentr}\rvert$ mit $d=1/3$
K_2	$-2/d$	$\sqrt{2}/d$	$\sqrt{2}/d$	$4,243$	$4,243$
K_3	0	0	0	0	0
K_4	$-18/d$	$3\sqrt{3}/(2\sqrt{2}\,d)$	$3\sqrt{3}/(2\sqrt{2}\,d)$	$5,511$	$5,511$
K_{Wx}	0	0	0	0	0
K_Φ	0	0	0	0	0 .

Wir betrachten auch noch eine benachbarte Folge von Alternativen entsprechend Proposition 8.49, und wählen an dieser Stelle eine nichtsymmetrische Dichte g

um die Verwendbarkeit der Kerne K_{Wx} und K_Φ zu illustrieren, und als Dichte f unter der Hypothese wieder die Dichte φ der Standardnormalverteilung. Bei den folgenden Rechnungen verwenden wir die bekannte Tatsache, dass die nicht-zentrierten Momente einer normalverteilten Zufallsvariable mit Erwartungswert $\mu \in \mathbb{R}$ und Varianz σ^2, deren Dichte wir mit φ_{μ,σ^2} bezeichnen, sind:

$$\begin{aligned}
\int x^2 \varphi_{\mu,\sigma^2}(x)\, dx &= \mu^2 + \sigma^2 \\
\int x^3 \varphi_{\mu,\sigma^2}(x)\, dx &= \mu^3 + 3\mu\sigma^2 \\
\int x^4 \varphi_{\mu,\sigma^2}(x)\, dx &= \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4.
\end{aligned}$$

Als Dichte g wählen wir

$$g(x) = p\varphi_{a,s^2}(x) + q\varphi_{b,s^2}(x),$$

mit $p \in (0,1)$, $a \in \mathbb{R}$, $q := 1-p \in (0,1)$, $b := -\frac{p}{q}a \in \mathbb{R}$, sodass der Erwartungswert einer Zufallsvariable mit Dichte g

$$\int xg(x)\, dx = p\int x\varphi_{a,s^2}(x)\, dx + q\int x\varphi_{b,s^2}(x)\, dx = pa + qb = 0$$

ist, und $s := \sqrt{1 - pa^2 - qb^2} = \sqrt{1 - a^2\frac{p}{1-p}}$, sodass

$$\begin{aligned}
\int x^2 g(x)\, dx &= p\int x^2\varphi_{a,s^2}(x)\, dx + q\int x^2\varphi_{b,s^2}(x)\, dx \\
&= p(a^2+s^2) + q(b^2+s^2) = pa^2 + qb^2 + s^2 = 1
\end{aligned}$$

gilt, eine Zufallsvariable mit Dichte g also Varianz 1 besitzt. (Es muß hierbei $a^2\frac{p}{1-p} < 1$ gelten, damit g eine Dichte ist.) Diese beiden Eigenschaften, die g mit φ gemeinsam hat, übertragen sich wegen der Linearität des Integrals im Integranden auch auf

$$g_n(x) := \frac{d}{\sqrt{n}}g(x) + \Big(1 - \frac{d}{\sqrt{n}}\Big)\varphi(x),$$

wobei $d > 0$ eine reelle Zahl ist, und $n \geq d^2$ natürliche Zahlen sind. Der Kern K_2 sollte gemäß der Interpretation als Varianzvergleichskern diesesmal die Alternativen also nicht erkennen können.

Für die Anwendbarkeit von Proposition 8.49 ist noch die Integrierbarkeit von $g(x)^4/\varphi(x)^3$ zu überprüfen. Mit der C_r-Ungleichung sieht man, dass hierfür die Integrierbarkeit von $\varphi_{a,s^2}(x)^4/\varphi(x)^3$ und $\varphi_{b,s^2}(x)^4/\varphi(x)^3$ hinreichend ist. Eine ähnliche Rechnung wie in Bemerkung 8.50 1. zeigt, dass $\varphi_{y,s^2}(x)^4/\varphi(x)^3$ für alle $y \in \mathbb{R}$ und $s^2 \in (0, 4/3)$ integrierbar ist. Nun ist für diese Alternativenfolge nach Proposition 8.49

$$h(x) = d\Big(\frac{g(x)}{\varphi(x)} - 1\Big),$$

also für den Kern K_2

$$\begin{aligned}
E\Big(K_2(e_1, e_2)h(e_2)\Big) &= E\bigg((1 - e_2^2)d\Big(\frac{g(e_2)}{\varphi(e_2)} - 1\Big)\bigg) \\
&= d\int (1 - x^2)\Big(\frac{g(x)}{\varphi(x)} - 1\Big)\varphi(x)\,dx \;=\; d\int (1 - x^2)(g(x) - \varphi(x))\,dx \qquad (8.108)\\
&= d\Big(\int g(x)\,dx - \int \varphi(x)\,dx - \int x^2 g(x)\,dx + \int x^2\varphi(x)\,dx\Big) \;=\; 0,
\end{aligned}$$

für den Kern K_3

$$\begin{aligned}
E\Big(K_3(e_1, e_2)h(e_2)\Big) &= -d\int x^3(g(x) - \varphi(x))\,dx \\
&= -d\Big(p\int x^3\varphi_{a,s^2}(x)\,dx + q\int x^3\varphi_{b,s^2}(x)\,dx - \int x^3\varphi(x)\,dx\Big) \\
&= -d\Big(p(a^3 + 3as^2) + q(b^3 + 3bs^2) + 0\Big) \qquad (8.109)\\
&= -d\Big(a^3p + 3aps^2 + \Big(-\frac{p}{q}a\Big)^3 q + 3\Big(-\frac{p}{q}a\Big)qs^2\Big) \\
&= -d\Big(1 - \frac{p^2}{q^2}\Big)a^3p \;=\; -da^3p\Big(1 - \frac{p^2}{(1-p)^2}\Big) \;=\; -da^3p\frac{1-2p}{(1-p)^2},
\end{aligned}$$

für K_4

$$\begin{aligned}
E\Big(K_4(e_1, e_2)h(e_2)\Big) &= d\int (3 - x^4)(g(x) - \varphi(x))\,dx \\
&= d\Big(3\int g(x)\,dx - 3\int \varphi(x)\,dx - \int x^4 g(x)\,dx + \int x^4\varphi(x)\,dx\Big) \\
&= d\Big(3 - 3 - p\int x^4\varphi_{a,s^2}(x)\,dx - q\int x^4\varphi_{b,s^2}(x)\,dx + 3\Big) \\
&= d\Big(3 - p(a^4 + 6a^2s^2 + 3s^4) - q(b^4 + 6b^2s^2 + 3s^4)\Big) \\
&= d\Big(3 - a^4\Big(p + \frac{p^4}{q^3}\Big) - 6a^2\Big(p + \frac{p^2}{q}\Big)s^2 - 3(p+q)s^4\Big) \\
&= d\Big(3 - a^4p\Big(1 + \frac{p^3}{(1-p)^3}\Big) - 6a^2p\Big(1 + \frac{p}{1-p}\Big)s^2 - 3s^4\Big) \\
&= d\Big(3 - a^4p\Big(1 + \frac{p^3}{(1-p)^3}\Big) - 6a^2p\frac{1}{1-p}\Big(1 - a^2\frac{p}{1-p}\Big) \\
&\qquad - 3\Big(1 - a^2\frac{p}{1-p}\Big)^2\Big) \qquad (8.110)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= d\Big(3 - a^4p\big(1+\frac{p^3}{(1-p)^3}\big) - 6a^2p\frac{1}{1-p} + 6a^4\frac{p^2}{(1-p)^2} \\
&\qquad\qquad - 3 + 6a^2\frac{p}{1-p} - 3a^4\frac{p^2}{(1-p)^2}\Big) \\
&= d\Big(- a^4p\big(1+\frac{p^3}{(1-p)^3}\big) + 3a^4\frac{p^2}{(1-p)^2}\Big) \\
&= -da^4p\frac{(1-p)^3 + p^3 - 3p(1-p)}{(1-p)^3} \\
&= -da^4p\frac{1-3p+3p^2-p^3+p^3-3p+3p^2}{(1-p)^3} \\
&= -da^4p\frac{1-6p+6p^2}{(1-p)^3},
\end{aligned}
$$

und für die Kerne K_{Wx} und K_Φ beachten wir, dass für alle $c \in \mathbb{R}$

$$
\begin{aligned}
&\int (1-2\Phi(cx))(g(x)-\varphi(x))\,dx \\
&= \int g(x)\,dx - \int \varphi(x)\,dx - 2\int \Phi(cx)g(x)\,dx + 2\int \Phi(cx)\varphi(x)\,dx \\
&= 1 - 1 - 2p\int \Phi(cx)\varphi_{a,s^2}(x)\,dx - 2q\int \Phi(cx)\varphi_{b,s^2}(x)\,dx + 2\cdot\frac{1}{2} \\
&= -\frac{2p}{s}\int \Phi(cx)\varphi\Big(\frac{x-a}{s}\Big)\,dx - \frac{2q}{s}\int \Phi(cx)\varphi\Big(\frac{x-b}{s}\Big)\,dx + 1 \\
&= 1 - 2p\int \Phi(csy)\varphi\Big(y-\frac{a}{s}\Big)\,dy - 2q\int \Phi(csy)\varphi\Big(y-\frac{b}{s}\Big)\,dy \\
&= 1 - 2p\,\Phi\Big(\frac{\frac{a}{s}\cdot cs}{\sqrt{1+c^2s^2}}\Big) - 2q\,\Phi\Big(\frac{\frac{b}{s}\cdot cs}{\sqrt{1+c^2s^2}}\Big) \\
&= 1 - 2p\,\Phi\Bigg(\frac{ac}{\sqrt{1+c^2-\frac{p}{1-p}a^2c^2}}\Bigg) - 2(1-p)\Phi\Bigg(-\frac{p}{1-p}\frac{ac}{\sqrt{1+c^2-\frac{p}{1-p}a^2c^2}}\Bigg)
\end{aligned}
$$

gilt, woraus

$$
\begin{aligned}
E\Big(K_{Wx}(e_1,e_2)h(e_2)\Big) &= d\int (1-2\Phi(x))(g(x)-\varphi(x)))\,dx \\
&= d\Bigg(1 - 2p\,\Phi\Bigg(\frac{a}{\sqrt{2-\frac{p}{1-p}a^2}}\Bigg) - 2(1-p)\Phi\Bigg(-\frac{p}{1-p}\frac{a}{\sqrt{2-\frac{p}{1-p}a^2}}\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{8.111}
$$

und

$$
\begin{aligned}
E\Big(K_\Phi(e_1,e_2)h(e_2)\Big) &= d\int (1-2\Phi(x/\sqrt{2}\,))(g(x)-\varphi(x)))\,dx \\
&= d\Bigg(1 - 2p\,\Phi\Bigg(\frac{a}{\sqrt{3-\frac{p}{1-p}a^2}}\Bigg) \\
&\qquad - 2(1-p)\Phi\Bigg(-\frac{p}{1-p}\frac{a}{\sqrt{3-\frac{p}{1-p}a^2}}\Bigg)\Bigg)
\end{aligned}
\tag{8.112}
$$

folgen.
Wir wählen an dieser Stelle $a = 87/20 = 4,35$ und $p = 1/20 = 0,05$, was zu $q = 19/20 = 0,95$, zu $b = -\frac{p}{q}a = -\frac{1/20}{19/20}\frac{87}{20} = -\frac{87}{380} \approx -0,2289$ und zu $s = (1 - \frac{87^2}{20^2}\frac{1/20}{19/20})^{1/2} = \sqrt{\frac{19 \cdot 20^2 - 87^2}{19 \cdot 20^2}} = \sqrt{\frac{7\,600 - 7\,569}{7\,600}} = \sqrt{\frac{31}{7\,600}} \approx 0,06387$ führt. Insbesondere ist dies eine mögliche Kombination von a und p, da unter der Wurzel keine negative Zahl steht.
Wir erhalten also für die oben genannte Alternativenfolge aus den Gleichungen (8.108)–(8.112) folgende gerundete Werte

Kern	m	$\lvert m/v^{klass}\rvert$	$\lvert m/v^{zentr}\rvert$	$\lvert m/v^{klass}\rvert$ mit $d=5$	$\lvert m/v^{zentr}\rvert$ mit $d=5$
K_2	0	0	0	0	0
K_3	$-4,104d$	$1,060d$	$1,676d$	$5,299$	$8,378$
K_4	$-14,93d$	$1,524d$	$1,524d$	$7,619$	$7,619$
K_{Wx}	$0,1217d$	$0,2108d$	$0,9928d$	$1,054$	$4,964$
K_Φ	$0,07216d$	$0,1551d$	$1,121d$	$0,7757$	$5,607$.

Um die übrigen Grenzprozesse, welche zweidimensionale Argumente besitzen, noch auf eine andere Art zu simulieren, verwenden wir folgende, auf einer bekannten Karhunen-Loéve-Zerlegung basierenden Resultate.

8.113 Proposition. Sei für $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} &B_n : [0,1]^2 \to \mathbb{R}, \\ &B_n(s,t) := \sum_{i,j=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 ij} \sin(\pi i s)\sin(\pi j t) N_{ij}, \end{aligned}$$

wobei N_{ij}, $i,j \in \mathbb{N}$, unabhängige und identisch standardnormalverteilte Zufallsvariablen sind. Dann gilt

$$B_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} B_* \tag{8.114}$$

in dem Skorohodraum $D([0,1]^2)$, wie er in Neuhaus (1971) beschrieben ist, und wobei B_* ein zentrierter Gaußprozess mit stetigen Pfaden und Kovarianzfunktion

$$[0,1]^4 \ni ((s,t),(s',t')) \mapsto (s \wedge s' - ss')(t \wedge t' - tt')$$

ist.

Beweis: Zunächst halten wir fest, dass

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 i^2} \sin(\pi i s) \sin(\pi i t) \quad \underset{n}{\longrightarrow} \quad s \wedge t - st \tag{8.115}$$

für $s, t \in [0,1]$ gilt, wobei die Konvergenz absolut und gleichmäßig ist. Siehe hierfür zum Beispiel Shorack und Wellner (1986), Proposition 5.3.1 (Seite 213 f.). Nun ist B_n für alle $n \in \mathbb{N}$ ein zentrierter Gaußprozess mit stetigen Pfaden, und für seine Kovarianzfunktion gilt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}(B_n(s,t), B_n(s',t')) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{4}{\pi^4 ijkl} \sin(\pi i s) \sin(\pi j t) \sin(\pi k s') \sin(\pi l t') \mathrm{Cov}(N_{ij}, N_{kl}) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{4}{\pi^4 i^2 j^2} \sin(\pi i s) \sin(\pi j t) \sin(\pi i s') \sin(\pi j t') \qquad (8.116) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 i^2} \sin(\pi i s) \sin(\pi i s') \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 j^2} \sin(\pi j t) \sin(\pi j t') \\
&\underset{n}{\longrightarrow} (s \wedge s' - ss')(t \wedge t' - tt')
\end{aligned}$$

nach (8.115). Damit ist die Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen von B_n gegen diejenigen von B_* gezeigt.
Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s, s', t, t' \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
&E\Big(|B_n(s,t) - B_n(s',t')|^8\Big) \\
&= E\bigg(\bigg(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 ij}\Big(\sin(\pi i s)\sin(\pi j t) - \sin(\pi i s')\sin(\pi j t')\Big) N_{ij}\bigg)^8\bigg) \\
&= E\Bigg(N\bigg(0, \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{2}{\pi^2 ij}\Big(\sin(\pi i s)\sin(\pi j t) - \sin(\pi i s')\sin(\pi j t')\Big)\Big)^2\bigg)^8\Bigg) \\
&= \bigg(\sum_{i,j=1}^{n} \Big(\frac{2}{\pi^2 ij}\Big(\sin(\pi i s)\sin(\pi j t) - \sin(\pi i s')\sin(\pi j t')\Big)\Big)^2\bigg)^4 E\Big(N(0,1)^8\Big) \\
&\leq 105\bigg(\sum_{i,j=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{\pi^2 ij}\Big(\sin(\pi i s)\sin(\pi j t) - \sin(\pi i s')\sin(\pi j t')\Big)\Big)^2\bigg)^4,
\end{aligned}$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen ausgenutzt haben, dass eine Summe von unabhängigen zentrierten normalverteilten Zufallsvariablen dieselbe Verteilung besitzt wie eine zentrierte normalverteilte Zufallsvariable deren Varianz gleich der Summe der Varianzen der einzelnen Zufallsvariablen ist, und zum

Schluß $E(N(0,1)^8) = 105$ eingesetzt haben. Es ist, wenn wir zunächst nur die Reihe in der Klammer betrachten,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i,j=1}^{\infty} \Big(\frac{2}{\pi^2 ij}\Big(\sin(\pi is)\sin(\pi jt) - \sin(\pi is')\sin(\pi jt')\Big)\Big)^2 \\
= \;& \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^4 i^2 j^2}\sin(\pi is)^2\sin(\pi jt)^2 \\
& - 2\sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^4 i^2 j^2}\sin(\pi is)\sin(\pi jt)\sin(\pi is')\sin(\pi jt') \\
& + \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^4 i^2 j^2}\sin(\pi is')^2\sin(\pi jt')^2 \\
= \;& \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 ij}\sin(\pi is)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 ij}\sin(\pi jt)^2 \\
& - 2\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 ij}\sin(\pi is)\sin(\pi is') \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 ij}\sin(\pi jt)\sin(\pi jt') \\
& + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 ij}\sin(\pi is')^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 ij}\sin(\pi jt')^2 \\
= \;& (s\wedge s - ss)(t\wedge t - tt) - 2(s\wedge s' - ss')(t\wedge t' - tt') \\
& + (s'\wedge s' - s's')(t'\wedge t' - t't') \\
= \;& s(1-s)t(1-t) - (s\wedge s' - ss')(t\wedge t' - tt') \\
& + s'(1-s')t'(1-t') - (s\wedge s' - ss')(t\wedge t' - tt') \\
=: \;& I + I\!I
\end{aligned}$$

wobei wir wieder (8.115) benutzt haben. Nun gilt

$$\begin{aligned}
|I| \;=\;& \Big|s(1-s)\Big(t(1-t) - (t\wedge t' - tt')\Big) \\
& + \Big(s(1-s) - (s\wedge s' - ss')\Big)(t\wedge t' - tt')\Big| \\
=\;& \Big|s(1-s)\Big(0\vee(t-t') - t(t-t')\Big) \\
& + \Big(0\vee(s-s') - s(s-s')\Big)(t\wedge t' - tt')\Big| \\
\le\;& |t-t'| + |s-s'|,
\end{aligned}$$

und aus Symmetriegründen auch

$$|I\!I| \;\le\; |t-t'| + |s-s'|,$$

also insgesamt

$$\begin{aligned} E\Big(|B_n(s,t) - B_n(s',t')|^8\Big) &\leq 105\Big(2|t-t'| + 2|s-s'|\Big)^4 \\ &= 1680\Big(|t-t'| + |s-s'|\Big)^4. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ C-straff nach der Momentenbedingung für C-Straffheit, wie sie zum Beispiel in Kallenberg (1997), Korollar 14.9, zu finden ist (die dort geforderte Straffheit von dem Prozess B_n in $(0,0)$ ist aufgrund von $B_n(0,0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ trivialerweise erfüllt).
Zusammen mit der Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen folgt die Behauptung.

8.117 Proposition. Die Verteilungsfunktion F von e_1 besitze eine fast überall positive Dichte (gilt insbesondere unter (3.78)), es gelte $E(e_1) = 0$ (also (2.2)) und es gebe zusätzlich ein $\delta > 0$ mit $E(|e_1|^{2+\delta}) < \infty$.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei B_n wie in Proposition 8.113,

$$N_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad N_n(s) := -\int_{-\infty}^{\infty} B_n(s, F(x))\, dx$$

und

$$W_n : [0,1] \times \overline{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}, \qquad W_n(s,x) := B_n(s, F(x)) - N_n(s)U(x)/\sigma^2.$$

Dann gilt

$$W_n \xrightarrow[n]{\mathcal{L}} W^{zentr}$$

in dem Skorohodraum $D([0,1] \times \overline{\mathbb{R}})$.

Beweis: Für alle $l \in (0, 2+\delta]$ gilt wegen $E(|e_1|^l) < \infty$ für alle $x \in (-\infty, 0]$

$$|x|^l F(x) = |x|^l \int_{-\infty}^{x} F(du) \leq \int_{-\infty}^{x} |u|^l F(du) \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0. \tag{8.118}$$

Weil F eine fast überall positive Dichte besitzt gilt $F^{-1}(u) \xrightarrow[u\downarrow 0]{} -\infty$ und $u = F(F^{-1}(u))$ für alle $u \in (0,1)$, also folgt

$$|F^{-1}(u)|^l u = |F^{-1}(u)|^l F(F^{-1}(u)) \xrightarrow[u\downarrow 0]{} 0,$$

und damit für alle $l \in (0, 2+\delta]$

$$u^{1/l}|F^{-1}(u)| \xrightarrow[u\downarrow 0]{} 0. \tag{8.119}$$

Wir zeigen nun zunächst: Für alle $l \in (1, 2+\delta]$ existiert ein $\gamma_0 > 0$ mit

$$(8.120) \qquad \int_0^{1/2} |\sin(\pi k v)| F^{-1}(dv) \;\leq\; \frac{l\pi}{l-1} k\gamma^{1-1/l} + 2\gamma^{-1/l}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in (0, \gamma_0]$.
Zu (8.120): Seien $k \in \mathbb{N}$, $\gamma \in (0, 1/2)$ und $l \in (1, 2+\delta]$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\int_0^{1/2} |\sin(\pi k v)| F^{-1}(dv) &= \int_0^{\gamma} |\sin(\pi k v)| F^{-1}(dv) + \int_{\gamma}^{1/2} |\sin(\pi k v)| F^{-1}(dv) \\ &=: I_k(\gamma) + I\!I_k(\gamma).\end{aligned}$$

Weil F eine fast überall positive Dichte besitzt, existiert ein $\gamma_1 \in (0, 1/2)$ mit $F^{-1}(\gamma_1) < 0$, also mit $F^{-1}(\gamma) \leq F^{-1}(\gamma_1) < 0$ für alle $\gamma \in (0, \gamma_1]$. Aus (8.119) folgt die Existenz eines $\gamma_2 = \gamma_2(l) \in (0, 1/2)$ mit $u^{1/l}|F^{-1}(u)| \leq 1$, also mit $|F^{-1}(u)| \leq u^{-1/l}$, für alle $u \in (0, \gamma_2]$.
Damit ist für alle $\gamma \in (0, \gamma_1 \wedge \gamma_2]$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} I_k(\gamma) &\leq \pi k \int_0^{\gamma} v F^{-1}(dv) \;=\; \pi k \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\gamma} v F^{-1}(dv) \\ &= \pi k \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \left(\gamma F^{-1}(\gamma) - \varepsilon F^{-1}(\varepsilon) - \int_{\varepsilon}^{\gamma} F^{-1}(v)\, dv \right) \\ &\leq \pi k \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varepsilon |F^{-1}(\varepsilon)| + \pi k \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon}^{\gamma} |F^{-1}(v)|\, dv \\ &\leq \pi k \int_0^{\gamma} |F^{-1}(v)|\, dv \;\leq\; \pi k \int_0^{\gamma} v^{-1/l}\, dv \\ &= \pi k \frac{1}{1-1/l} v^{1-1/l} \Big|_{v=0}^{v=\gamma} \;=\; \frac{\pi l}{l-1} k \gamma^{1-1/l} \end{aligned}$$

weil $|\sin(x)| \leq x$ ist für alle $x \in [0, \infty)$, nach dem Satz von der monotonen Konvergenz, mit partieller Integration, durch Abschätzen der Summanden, nach (8.119) und nochmal mit dem Satz von der monotonen Konvergenz.
Aus (8.119) folgt weiter, dass es ein $\gamma_3 \in (0, 1/2)$ gibt mit $F^{-1}(1/2) \leq |F^{-1}(\gamma)|$ für alle $\gamma \in (0, \gamma_3]$. Also gilt für alle $\gamma \in (0, \gamma_2 \wedge \gamma_3]$ und $k \in \mathbb{N}$

$$I\!I_k(\gamma) \;\leq\; \int_{\gamma}^{1/2} 1 F^{-1}(dv) \;\leq\; 2|F^{-1}(\gamma)| \;\leq\; 2\gamma^{-1/l}.$$

Mit der Wahl $\gamma_0 = \gamma_1 \wedge \gamma_2 \wedge \gamma_3$ folgt aus diesen beiden Abschätzungen die Behauptung (8.120).
Mit e_1 und F erfüllen auch $-e_1$ und seine Verteilungsfunktion F_{-e_1} die Voraussetzungen $E(|-e_1|^{2+\delta}) < \infty$ für ein $\delta > 0$ und an die Existenz einer fast überall

positiven Dichte von F_{-e_1}. Damit folgt aus (8.120) für alle $l \in (1, 2+\delta]$ die Existenz eines $\gamma_0 > 0$ mit

$$\begin{aligned}\int_{1/2}^{1} |\sin(\pi k v)| F^{-1}(dv) &= \int_0^{1/2} |\sin(\pi k(1-v))| F_{-e_1}^{-1}(dv) \\ &= \int_0^{1/2} |\sin(\pi k v)| F_{-e_1}^{-1}(dv) \leq \frac{l\pi}{l-1} k\gamma^{1-1/l} + 2\gamma^{-1/l}\end{aligned}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in (0, \gamma_0]$, wobei wir die Antisymmetrie des Sinus benutzt haben. Zusammen mit (8.120) folgt hieraus, dass es für alle $l \in (1, 2+\delta]$ ein $\gamma_0 > 0$ gibt mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi k F(u))|\, du = \int_0^1 |\sin(\pi k v)| F^{-1}(dv) \leq 2\frac{l\pi}{l-1} k\gamma^{1-1/l} + 4\gamma^{-1/l} \tag{8.121}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\gamma \in (0, \gamma_0]$.
Hieraus folgt für alle $k \geq 1/\gamma_0$ mit der Wahl $\gamma = 1/k$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi k F(u))|\, du &\leq 2\frac{l\pi}{l-1} k\Big(\frac{1}{k}\Big)^{1-1/l} + 4\Big(\frac{1}{k}\Big)^{-1/l} \\ &= \Big(2\frac{l\pi}{l-1} + 4\Big) k^{1/l} =: C(l) k^{1/l}.\end{aligned} \tag{8.122}$$

Wir zeigen nun:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Big(F(x \wedge y) - F(x)F(y)\Big)\, dy = -U(x) \tag{8.123}$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \Big(F(x \wedge y) - F(x)F(y)\Big)\, dy\, dx = \sigma^2. \tag{8.124}$$

Zu (8.123): Es gilt nach dem Satz von der monotonen Konvergenz für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty} \Big(F(x \wedge y) - F(x)F(y)\Big)\, dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \Big(F(x \wedge y) - F(x)F(y)\Big)\, dy \\ &= \lim_{n\to\infty} \Bigg(\int_{-n}^{x} \Big(F(x \wedge y) - F(x)F(y)\Big)\, dy + \int_x^n \Big(F(x \wedge y) - F(x)F(y)\Big)\, dy\Bigg) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Bigg(\Big(1 - F(x)\Big) \int_{-n}^{x} F(y)\, dy + F(x) \int_x^n \Big(1 - F(y)\Big)\, dy\Bigg) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Bigg(\int_{-n}^{x} F(y)\, dy + F(x)\Big(n - x - \int_{-n}^{n} F(y)\, dy\Big)\Bigg) \\ &= \lim_{n\to\infty} \Bigg(xF(x) + nF(-n) - \int_{-n}^{x} y\, F(dy) + F(x)(n-x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\qquad - F(x)\Big(nF(n) + nF(-n) - \int_{-n}^{n} y\,F(dy)\Big)\Big) \\
&= \lim_{n\to\infty}\Big(-\int_{-n}^{x} y\,F(dy) + nF(-n)(1-F(x)) + n(1-F(n))F(x) \\
&\qquad + F(x)\int_{-n}^{n} y\,F(dy)\Big) \\
&= -\int_{-\infty}^{x} y\,F(dy) \;=\; -U(x),
\end{aligned}
$$

wobei wir beim fünften Gleichheitszeichen partiell integriert haben und danach den Satz von Lebesgue mit der integrierbaren Majorante $|y|$, (8.118) mit $l = 1$ und $x = -n$,

$$
n(1-F(n)) \;=\; n\int_{n}^{\infty} F(du) \le \int_{n}^{\infty} u\,F(du) \;\underset{n}{\longrightarrow}\; 0
$$

für $n \geq 0$ mit dem Satz von der monotonen Konvergenz sowie

$$
\int_{-n}^{n} y\,F(dy) \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} y\,F(dy) - \int_{(-\infty,-n]\cup[n,\infty)} y\,F(dy) \;\underset{n}{\longrightarrow}\; 0
$$

wegen dem Satz von Lebesgue mit $|y|$ als Majorante und $E(e_1) = 0$, verwendet haben.

Zu (8.124): Nach (8.123) und dem Satz von der monotonen Konvergenz ist

$$
\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(F(x\wedge y) - F(x)F(y)\Big)\,dy\,dx \;=\; \int_{-\infty}^{\infty} -U(x)\,dx \\
&= \lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} -U(x)\,dx \;=\; -\lim_{n\to\infty}\int_{-n}^{n}\int_{-\infty}^{x} y\,F(dy)\,dx \\
&= -\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{n} y\int_{-n\vee y}^{n} dx\,F(dy) \;=\; -\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{n} y\Big(n - (-n\vee y)\Big)\,F(dy) \\
&= -\lim_{n\to\infty}\Big(\int_{-\infty}^{-n} 2ny\,F(dy) + \int_{-n}^{n} y(n-y)\,F(dy)\Big) \\
&= -\lim_{n\to\infty}\Big(n\int_{-\infty}^{-n} y\,F(dy) + n\int_{-\infty}^{n} y\,F(dy) - \int_{-n}^{n} y^2\,F(dy)\Big) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} y^2\,F(dy) \;=\; \sigma^2,
\end{aligned}
$$

wobei wir beim Übergang zur letzten Zeile

$$
|n\int_{-\infty}^{-n} y\,F(dy)| \;\le\; \int_{-\infty}^{-n} y^2\,F(dy) \;\underset{n}{\longrightarrow}\; 0
$$

und

$$
\begin{aligned}
|n\int_{-\infty}^{n} y\,F(dy)| \;&=\; n|\int_{-\infty}^{\infty} y\,F(dy) - \int_{n}^{\infty} y\,F(dy)| \\
&=\; n|\int_{n}^{\infty} y\,F(dy)| \;\le\; \int_{n}^{\infty} y^2\,F(dy) \;\underset{n}{\longrightarrow}\; 0
\end{aligned}
$$

für $n \geq 0$ benutzt haben. Damit sind (8.123) und (8.124) gezeigt.
Es gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $s \in [0,1]$

$$\begin{aligned} N_n(s) &= -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 ij} N_{ij} \sin(\pi is) \int_{-\infty}^{\infty} \sin(\pi jF(u))\, du \\ &=: -\sum_{i,j=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 ij} N_{ij} \sin(\pi is) I\!I\!I_j \end{aligned}$$

mit

$$|I\!I\!I_j| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi jF(u))|\, du \leq 2\frac{l\pi}{l-1} k\gamma_0^{1-1/l} + 4\gamma_0^{-1/l} < \infty,$$

wobei das zweite Ungleichheitszeichen nach (8.121) für ein $l \in (1, 2+\delta]$ für ein $\gamma_0 > 0$ gilt. Damit sind $I\!I\!I_j$ und N_n wohldefiniert, und N_n ist ein zentrierter Gaußprozeß mit stetigen Pfaden. Weiter gilt für alle $n \in \mathbb{N}$, $s \in [0,1]$ und $x \in \overline{\mathbb{R}}$

$$W_n(s,x) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 ij} N_{ij} \sin(\pi is)\Big(\sin(\pi jF(x)) + \frac{U(x)}{\sigma^2} I\!I\!I_j \Big),$$

also ist W_n ebenfalls ein zentrierter Gaußprozess mit stetigen Pfaden.
Es ist für alle $s,t \in [0,1]$ und $x \in \overline{\mathbb{R}}$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\Big(B_n(s,F(x)), N_n(t)\Big) &= -E\Big(B_n(s,F(x)) N_n(t)\Big) \\ &= -\sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{4}{\pi^4 ijkl} \sin(\pi is) \sin(\pi jF(x)) \sin(\pi kt)\, I\!I\!I_l\, E(N_{ij}N_{kl}) \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 i^2} \sin(\pi is) \sin(\pi it) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 j^2} \sin(\pi jF(x)) \sin(\pi jF(u))\, du \\ \text{(8.125)} \underset{n}{\longrightarrow}\ & -\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 i^2} \sin(\pi is) \sin(\pi it) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 j^2} \sin(\pi jF(x)) \sin(\pi jF(u))\, du \\ &= -(s \wedge t - st) \int_{-\infty}^{\infty} \Big(F(x \wedge u) - F(x)F(u)\Big)\, du \\ &= (s \wedge t - st) U(x), \end{aligned}$$

wobei wir in der letzten Zeile (8.123) und in der vorletzten Zeile (8.115) verwandt haben, und in der Zeile davor nach dem Satz von Lebesgue den Grenzwert mit dem Integral vertauschen durften, da

$$f(u) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |\sin(\pi jF(u))|$$

wegen $\frac{2}{\pi^2} < 1$ und $|\sin(x)| \leq 1$, $x \in \mathbb{R}$, eine Majorante der Integranden ist, welche integrierbar ist, denn es gilt für alle $l \in (1, 2+\delta]$ und für ein dazu gemäß

(8.121) gewähltes $\gamma_0 > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du &= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi j F(u))|\,du \\
&= \sum_{\substack{j=1\\ j<1/\gamma_0}}^{\infty} \frac{1}{j^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi j F(u))|\,du + \sum_{\substack{j=1\\ j\geq 1/\gamma_0}}^{\infty} \frac{1}{j^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi j F(u))|\,du \\
&\leq \sum_{\substack{j=1\\ j<1/\gamma_0}}^{\infty} \frac{1}{j^2} \left(2\frac{\pi l}{l-1} j \gamma_0^{1-1/l} + 4\gamma_0^{-1/l} \right) + \sum_{\substack{j=1\\ j\geq 1/\gamma_0}}^{\infty} \frac{1}{j^2} C(l) j^{1/l} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_0} \left(2\frac{\pi l}{l-1} \gamma_0^{-1/l} + 4\gamma_0^{-1/l} \right) + C(l) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2-1/l}} \quad < \quad \infty
\end{aligned}$$

nach (8.121) und (8.122), und weil die Reihe am Schluß wegen $2 - 1/l > 1$ konvergiert.
Weiter ist für alle $s, t \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}\Big(N_n(s), N_n(t)\Big) &= E\Big(N_n(s) N_n(t)\Big) \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \sum_{k,l=1}^{n} \frac{4}{\pi^4 ijkl} \sin(\pi i s) \sin(\pi k t)\, \mathit{III}_j\, \mathit{III}_l\, E(N_{ij} N_{kl}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 i^2} \sin(\pi i s) \sin(\pi i t) \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 j^2} \mathit{III}_j^2 \qquad (8.126) \\
&\xrightarrow[n]{} (s \wedge t - st) \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 j^2} \mathit{III}_j^2 \quad = \quad (s \wedge t - st)\, \sigma^2
\end{aligned}$$

wobei die Konvergenz nach (8.115) gilt und weil die Summanden in dem zweiten Faktor nichtnegativ sind. Die Gleichheit am Ende gilt wegen

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 j^2} \mathit{III}_j^2 &= \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{n} \frac{2}{\pi^2 j^2} \sin(\pi j F(u)) \sin(\pi j F(v))\,du\,dv \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 j^2} \sin(\pi j F(u)) \sin(\pi j F(v))\,du\,dv \qquad (8.127) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Big(F(u) \wedge F(v) - F(u)F(v) \Big)\,du\,dv \quad = \quad \sigma^2,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile (8.115) und (8.124) benutzt wurden, und in der zweiten Zeile nach den Sätzen von Fubini und Lebesgue Grenzwert und Integral vertauscht werden durften, weil

$$f(u,v) := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} |\sin(\pi j F(u))| |\sin(\pi j F(v))|$$

eine integrierbare Majorante der Integranden ist, denn für alle $l \in (2, 2+\delta]$ und für $\gamma_0 > 0$ gemäß (8.121) gewählt gilt

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\,dv \;&=\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 j^2} \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi j F(u))|\,du \int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi j F(v))|\,dv \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{\pi^2 j^2} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi j F(u))|\,du \Big)^2 \\
&\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j<1/\gamma_0}}^{\infty} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi j F(u))|\,du \Big)^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\geq 1/\gamma_0}}^{\infty} \frac{1}{j^2} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} |\sin(\pi j F(u))|\,du \Big)^2 \\
&\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j<1/\gamma_0}}^{\infty} \Big(2\frac{\pi l}{l-1} j \gamma_0^{1-1/l} + 4\gamma_0^{-1/l} \Big)^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ j\geq 1/\gamma_0}}^{\infty} \frac{1}{j^2} C(l)^2 j^{2/l} \\
&\leq \frac{1}{\gamma_0} \Big(4\pi\gamma_0^{-1/l} + 4\gamma_0^{-1/l} \Big)^2 + C(l)^2 \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^{2(1-1/l)}} \;<\; \infty,
\end{aligned}$$

wobei wir beim zweiten Ungleichheitszeichen (8.121) und (8.122) benutzt haben und die Reihe am Schluß wegen $1 - 1/l > 1/2$ konvergiert.
Es folgt für alle $s, t \in [0,1]$ und $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ aus (8.116), (8.125) und (8.126)

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Cov}\Big(W_n(s,x), W_n(t,y)\Big) \\
&\quad= \operatorname{Cov}\Big(B_n(s,F(x)) - N_n(s)U(x)/\sigma^2, B_n(t,F(y)) - N_n(t)U(y)/\sigma^2\Big) \\
&\quad= \operatorname{Cov}\Big(B_n(s,F(x)), B_n(t,F(y))\Big) - \operatorname{Cov}\Big(N_n(s), B_n(t,F(y))\Big)U(x)/\sigma^2 \\
&\qquad - \operatorname{Cov}\Big(B_n(s,F(x)), N_n(t)\Big)U(y)/\sigma^2 + \operatorname{Cov}\Big(N_n(s), N_n(t)\Big)U(y)U(x)/\sigma^4 \\
&\quad\xrightarrow[n]{} (s\wedge t - st)(F(x\wedge y) - F(x)F(y)) - (s\wedge t - st)U(y)U(x)/\sigma^2 \\
&\qquad - (s\wedge t - st)U(x)U(y)/\sigma^2 + (s\wedge t - st)\,\sigma^2\,U(y)U(x)/\sigma^4 \\
&\quad= (s\wedge t - st)\Big(F(x\wedge y) - F(x)F(y) - U(x)U(y)/\sigma^2\Big),
\end{aligned}$$

das heißt, die Kovarianzfunktionen von W_n, $n \in \mathbb{N}$, konvergieren punktweise gegen die Kovarianzfunktion von W^{zentr}. Da diese Prozesse alle zentrierte Gaußprozesse sind, folgt hieraus die Konvergenz der endlichdimensionalen Randverteilungen von W_n gegen diejenigen von W^{zentr}.
Wir zeigen nun zunächst die C-Straffheit der Folge N_n, $n \in \mathbb{N}$, und zwar mit der Momentenbedingung für C-Straffheit wie im Beweis von Proposition 8.113. Es gilt für alle $s, t \in [0,1]$

$$E\Big(|N_n(s) - N_n(t)|^4\Big)$$

$$
\begin{aligned}
&= E\Big(\Big|\sum_{i,j=1}^{n}\frac{2}{\pi^2 ij}N_{ij}\Big(\sin(\pi is)-\sin(\pi it)\Big)I\!I\!I_j\Big|^4\Big)\\
&= E\Big(N\Big(0,\sum_{i,j=1}^{n}\frac{4}{\pi^4 i^2 j^2}\Big(\sin(\pi is)-\sin(\pi it)\Big)^2 I\!I\!I_j{}^2\Big)^4\Big)\\
&= \Big(\sum_{i,j=1}^{n}\frac{4}{\pi^4 i^2 j^2}\Big(\sin(\pi is)-\sin(\pi it)\Big)^2 I\!I\!I_j{}^2\Big)^2 E\Big(N(0,1)^4\Big)\\
&= 3\Big(\sum_{i=1}^{n}\frac{2}{\pi^2 i^2}\Big(\sin(\pi is)-\sin(\pi it)\Big)^2\sum_{j=1}^{n}\frac{2}{\pi^2 j^2}I\!I\!I_j{}^2\Big)^2\\
&\le 3\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2 i^2}\Big(\sin(\pi is)-\sin(\pi it)\Big)^2\sum_{j=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2 j^2}I\!I\!I_j{}^2\Big)^2\\
&= 3\sigma^4\Big(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2 i^2}sin(\pi is)^2-2\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2 i^2}\sin(\pi is)\sin(\pi it)+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{2}{\pi^2 i^2}sin(\pi it)^2\Big)^2\\
&= 3\sigma^4\Big(s-s^2-2(s\wedge t-st)+t-t^2\Big)^2\\
&= 3\sigma^4\Big((s-s\wedge t)-s^2+st+(t-s\wedge t)-t^2+st\Big)^2\\
&= 3\sigma^4\Big(0\vee(s-t)-s(s-t)+0\vee(t-s)-t(t-s)\Big)^2\\
&\le 3\sigma^4\Big(|s-t|+|t-s|\Big)^2 \;=\; 12\sigma^4|s-t|^4,
\end{aligned}
$$

also ist die Folge der N_n C-straff.
Hieraus und aus (8.126) folgt die Verteilungskonvergenz von N_n gegen eine Brownsche Brücke mit Skalenfaktor σ.
Unter Verwendung von (4.12) erhalten wir

$$
\begin{aligned}
\mathrm{w}_\delta\Big(W_n(s,x)\Big) &\le \mathrm{w}_\delta\Big(B_n(s,F(x))\Big)+\mathrm{w}_\delta\Big(N_n(s)U(x)/\sigma^2\Big)\\
&\le \mathrm{w}_\delta\Big(B_n(s,F(x))\Big)+\mathrm{w}_\delta\Big(N_n(s)\Big)E(|e_1|)/\sigma^2+\mathrm{w}_\delta\Big(U(x)\Big)\sup_{s\in[0,1]}|N_n(s)|/\sigma^2,
\end{aligned}
$$

also gilt für alle $\varepsilon>0$, wenn wir mit B° eine Brownsche Brücke bezeichnen,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}P\Big(\mathrm{w}_\delta(W_n)\ge\varepsilon\Big)\\
&\le \lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}P\Big(\mathrm{w}_\delta\Big(B_n(s,F(x))\Big)\ge\frac{\varepsilon}{3}\Big)\\
&\quad+\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}P\Big(\mathrm{w}_\delta\Big(N_n(s)\Big)\ge\frac{\varepsilon\sigma^2}{3E(|e_1|)}\Big)\\
&\quad+\lim_{\delta\downarrow 0}\limsup_{n\to\infty}P\Big(\sup_{s\in[0,1]}|N_n(s)|\ge\frac{\varepsilon\sigma^2}{3\mathrm{w}_\delta(U(x))}\Big)\\
&\le 0+0+\lim_{\delta\downarrow 0}P\Big(\sup_{s\in[0,1]}|B^\circ(s)|\ge\frac{\varepsilon\sigma^2}{3\mathrm{w}_\delta(U(x))}\Big) \;=\; 0.
\end{aligned}
$$

Bei dem letzten Ungleichheitszeichen haben wir die im Beweis von Proposition 8.113 gezeigte C-Straffheit von B_n, die C-Straffheit von N_n, den Stetigkeitssatz und das Portmanteautheorem benutzt. Die letzte Gleichheit folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit von U und der Pfadstetigkeit von B°. Für die C-Straffheit von $B_n(\cdot, F(\cdot))$ beachte auch, dass die von der Metrik m erzeugten offenen Mengen in $\overline{\mathbb{R}}$ unabhängig von der konkreten Wahl der stetigen, streng monoton wachsenden Funktion T sind, so dass wir ohne Einschränkung $T = F$ annehmen können. Nachdem nun auch die C-Straffheit von W_n, $n \in \mathbb{N}$ gezeigt ist, folgt die Behauptung.

8.128 Bemerkung. Seien B_* und B_n, $n \in \mathbb{N}$, wie in Proposition 8.113. Wie in Bemerkung 8.44 auf ähnliche Weise für $\sqrt{n}\,\|T_n\|_\infty$ gezeigt, gilt dann

$$\|W^{klass}\|_\infty \sim \|B_*\|_\infty.$$

Aus (8.114) folgt dann wegen der Stetigkeit von $F_{\|W^{klass}\|_\infty}$

$$F_{\|B_n\|_\infty}(x) \xrightarrow[n]{} F_{\|W^{klass}\|_\infty}(x) \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wegen der Pfadsteigkeit von B_n folgt

$$\max_{i=1\dots,k-1}\max_{j=1\dots,k-1} |B_n(i/k, j/k)| \xrightarrow[k]{} \|B_n\|_\infty \qquad \text{fast sicher,}$$

also

$$F_{\max_{i,j=1\dots,k-1}|B_n(i/k,j/k)|}(x) \xrightarrow[k]{} F_{\|B_n\|_\infty}(x) \xrightarrow[n]{} F_{\|W^{klass}\|_\infty}(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Wegen der strengen Monotonie von $F_{\|W^{klass}\|_\infty}$ ist damit für hinreichend große k und n für $u \in (0,1)$ das Quantil $F^{-1}_{\max_{i,j=1\dots,k-1}|B_n(i/k,j/k)|}(u)$ als Näherung für $F^{-1}_{\|W^{klass}\|_\infty}(u)$ verwendbar. Weiter ist für $x \in \mathbb{R}$, wenn $\bar{m} : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Erwartungswertfunktion von W_1^{klass} bezeichnet,

$$F_{\max_{i,j=1\dots,k-1}|B_n(i/k,j/k)+\bar{m}(i/k,F^{-1}(j/k)|}(x)$$

eine Näherung für $F_{\|W_1^{klass}\|_\infty}(x)$.
Auf ähnliche Weise erhält man aus Proposition 8.117, dass für W_n wie dort für $u \in (0,1)$ $F^{-1}_{\max_{i,j=1\dots,k-1}|W_n(i/k,F^{-1}(j/k))|}(u)$ eine Näherung für $F^{-1}_{\|W^{zentr}\|_\infty}(u)$ ist, und dass für $x \in \mathbb{R}$, wenn $\bar{m} : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Erwartungswertfunktion von W_1^{zentr} bezeichnet, $F_{\max_{i,j=1\dots,k-1}|W_n(i/k,F^{-1}(j/k))+\bar{m}(i/k,F^{-1}(j/k)|}(x)$ eine Näherung für $F_{\|W_1^{zentr}\|_\infty}(x)$ ist.

Auf diese Weise können wir auch hier ähnlich wie bei den U-Typ-Statistiken die entsprechenden asymptotischen Güten $1 - F_{\|W_1^{klass}\|_\infty}\Big(F_{\|W^{klass}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)\Big)$ und $1 - F_{\|W_1^{zentr}\|_\infty}\Big(F_{\|W^{zentr}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)\Big)$ simulieren. Wir wählen hier stets $n = 2\,500$, $k = 2\,501$ und berechnen $10\,000$ Realisierungen von $\max_{i,j=1\dots,k-1}|B_n(i/k, j/k)|$ beziehungsweise $\max_{i,j=1\dots,k-1}|W_n(i/k, F^{-1}(j/k))|$ und den entsprechenden Größen mit addiertem Erwartungswertvektor. Wir können hier bei vergleichbarem Rechenaufwand keine so gute Annäherung erwarten wie im Falle der Grenzverteilungen der U-Typ-Statistiken, da wir erstens nicht die exakten Randverteilungen simulieren, sondern diese schon nur angenähert sind, und weil zweitens wegen der zweidimensionalen Argumente das Gitter für die Randverteilungen nun viel weniger dicht wird. Um uns ein Bild darüber zu machen, ob es überhaupt eine akzeptable Näherung ist, betrachten wir die auf diese Weise erhaltene Näherung an die Quantilfunktion von $\|B_*\|_\infty \sim \|W^{klass}\|_\infty$, die in Tabelle 12 zu finden ist. Ein Vergleich der Näherungen für die Quantile $F^{-1}_{\max_{i,j=1\dots,2500}|B_{2500}(i/2500,j/2500)|}(1-\alpha)$ aus Tabelle 12 mit den kritischen Werten $k^{T,klass}_{n,\,\alpha\%}$ aus Tabelle 1 zeigt, dass sie grob $k^{T,klass}_{1000,\,\alpha\%}$ oder $k^{T,klass}_{2500,\,\alpha\%}$ entsprechen. Diese kritischen Werte stellen als $(1-\alpha)$-Quantile von $\sqrt{n}\,\|T_n\|_\infty$ ebenfalls Näherungen an die Quantile von $\|W^{klass}\|_\infty$ dar. Auch wenn damit die Genauigkeit weiterhin unklar ist, gehen wir davon aus, dass wir auf die oben beschriebene Weise eine für unsere Zwecke ausreichende Näherung an die asymptotischen Güten $1 - F_{\|W_1^{klass}\|_\infty}\Big(F_{\|W^{klass}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)\Big)$ und $1 - F_{\|W_1^{zentr}\|_\infty}\Big(F_{\|W^{zentr}\|_\infty}^{-1}(1-\alpha)\Big)$ erhalten.

Kommen wir nun zu den Simulationsergebnissen unter benachbarten Alternativenfolgen. Es wird hier jeweils $\rho = 0,5$ und $\vartheta = 0,3$ gewählt.
In Tabelle 13 ist die Simulation mit der Skalenalternative gemäß Proposition 8.48 mit standardnormalverteilten Fehlern und $d = 5$ zum Changepoint $\lambda = 1/2$ zu finden. Das heißt, die ersten $[n/2]$ Fehlervariablen sind standardnormalverteilt, und die restlichen $n - [n/2]$ Fehlervariablen sind zentriert normalverteilt mit Standardabweichung $1 + 5/\sqrt{n}$. Die beiden Tests mit den Statistiken $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n\|_\infty$ und $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^z\|_\infty$, welche die sequentiellen empirischen Verteilungsfunktionen vergleichen, haben eine mittlere Testgüte, wobei der Test mit Berücksichtigung der Zentriertheit eine höhere Verwurfshäufigkeit zeigt. Bei den Tests mit den U-Typ-Statistiken scheinen nur die Tests mit den Kernen K_2 und K_4 anzuschlagen, und insbesondere diejenigen mit dem Varianzvergleichskern sind allen anderen Tests deutlich überlegen. Bei den U-Typ-Tests ist jeweils kein Vorteil durch die Berücksichtigung der Zentriertheit zu erkennen, wie erwartet. In den drei letzten

u	$F^{-1}_{\|B_*\|}(u)$	u	$F^{-1}_{\|B_*\|}(u)$	u	$F^{-1}_{\|B_*\|}(u)$	u	$F^{-1}_{\|B_*\|}(u)$	u	$F^{-1}_{\|B_*\|}(u)$	u	$F^{-1}_{\|B_*\|}(u)$
1%	0,405	18%	0,500	35%	0,550	52%	0,597	69%	0,652	86%	0,736
2%	0,421	19%	0,503	36%	0,553	53%	0,600	70%	0,656	87%	0,743
3%	0,431	20%	0,506	37%	0,555	54%	0,602	71%	0,660	88%	0,751
4%	0,439	21%	0,509	38%	0,558	55%	0,606	72%	0,665	89%	0,759
5%	0,445	22%	0,512	39%	0,560	56%	0,609	73%	0,669	90%	0,768
6%	0,452	23%	0,515	40%	0,563	57%	0,612	74%	0,673	91%	0,778
7%	0,457	24%	0,519	41%	0,566	58%	0,615	75%	0,677	92%	0,789
8%	0,462	25%	0,522	42%	0,568	59%	0,619	76%	0,681	93%	0,800
9%	0,467	26%	0,524	43%	0,571	60%	0,622	77%	0,685	94%	0,812
10%	0,472	27%	0,527	44%	0,574	61%	0,625	78%	0,690	95%	0,827
11%	0,476	28%	0,530	45%	0,577	62%	0,628	79%	0,695	96%	0,847
12%	0,480	29%	0,533	46%	0,580	63%	0,631	80%	0,700	97%	0,871
13%	0,483	30%	0,536	47%	0,583	64%	0,634	81%	0,705	98%	0,903
14%	0,486	31%	0,539	48%	0,585	65%	0,638	82%	0,711	99%	0,957
15%	0,490	32%	0,541	49%	0,588	66%	0,641	83%	0,717		
16%	0,493	33%	0,544	50%	0,591	67%	0,645	84%	0,723		
17%	0,497	34%	0,547	51%	0,594	68%	0,648	85%	0,729		

Tabelle 12: Durch Simulation angenäherte Quantile von $\|B_*\|_\infty$. Reihe abgebrochen bei $n = 2\,500$ Summanden. Anzahl der Gitterpunkte: $2\,500^2$. 10 000 Realisierungen.

Zeilen sind die asymptotischen Testgüten angegeben, die mit der Simulation von Randverteilungen der angenäherten Grenzverteilungen gemäß Bemerkung 8.128 und (8.65) erhalten wurden. Sie werden beim Stichprobenumfang $n = 1000$ noch nicht ganz erreicht, insbesondere bei den kleineren Testniveaus. Die Tests mit dem Kern K_4 scheinen eine langsamere Asymptotik zu besitzen als die mit dem Kern K_2. Nur der Test mit der Statistik $\sqrt{n}\,\|\widehat{T}_n^z\|_\infty$ erreicht schon die asymptotische Güte.
In Tabelle 14 zeigt die Simulationsergebnisse derselben Alternativenfolge, nur mit dem Changepoint $\lambda = 0,3$. Das Ergebniss ist ähnlich, nur sind die Verwurfshäufigkeiten, wie zu erwarten, durchweg niedriger.
Tabelle 15 enthält wiederum diese Alternative, nur mit dem Changepoint $\lambda = 0,2$ und noch niedrigeren Verwurfshäufigkeiten.
In Tabelle 16 sind die Ergebnisse der Simulation mit der Alternativenfolge gemäß Proposition 8.51 mit $d = 1/3$ und Changepoint $1/2$ wiedergegeben. Bei den Tests mit den sequentiellen empirischen Verteilungsfunktionen in den beiden ersten Spalten ist beim klassischen Test eine sehr niedrige Testgüte zu erkennen, auch der Test mit der Berücksichtigung der Zentriertheit zeigt beim Stichprobenumfang $n = 200$ noch keine viel höhere Verwurfshäufigkeit, ist jedoch bei der asymptotischen Güte deutlich überlegen. Bei den Tests mit U-Typ-Statistiken können nur diejenigen mit den Kernen K_2 und K_4 die Alternative bemerken, und zwar jeweils besser als die Tests in den beiden ersten Spalten. Hier ist bei größeren

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
20	B 10%	0,264	0,227	0,324	0,408	0,079	0,237	0,125	0,268	0,178	0,172	0,189	0,191
	B 5%	0,152	0,138	0,129	0,209	0,021	0,172	0,033	0,139	0,102	0,098	0,114	0,129
	B 1%	0,058	0,051	0,020	0,056	0,002	0,052	0,001	0,034	0,029	0,040	0,033	0,052
	G 10%	0,166	—	0,198	0,392	0,032	0,347	0,064	0,272	0,103	0,702	0,101	0,831
	G 5%	0,113	—	0,080	0,237	0,007	0,308	0,024	0,165	0,052	0,641	0,054	0,779
	G 1%	0,030	—	0,007	0,077	0,000	0,212	0,001	0,080	0,012	0,505	0,012	0,699
30	B 10%	0,286	0,243	0,416	0,461	0,108	0,174	0,189	0,305	0,179	0,167	0,183	0,175
	B 5%	0,176	0,144	0,234	0,289	0,028	0,117	0,073	0,150	0,094	0,085	0,103	0,099
	B 1%	0,049	0,045	0,047	0,069	0,001	0,045	0,009	0,030	0,017	0,024	0,019	0,028
	G 10%	0,210	—	0,319	0,449	0,056	0,251	0,129	0,300	0,108	0,668	0,110	0,783
	G 5%	0,130	—	0,181	0,308	0,015	0,184	0,059	0,175	0,049	0,591	0,047	0,752
	G 1%	0,036	—	0,030	0,091	0,001	0,110	0,006	0,057	0,008	0,445	0,008	0,644
40	B 10%	0,250	0,294	0,491	0,526	0,104	0,143	0,257	0,325	0,162	0,167	0,181	0,173
	B 5%	0,145	0,174	0,297	0,335	0,024	0,089	0,114	0,180	0,086	0,096	0,096	0,106
	B 1%	0,042	0,052	0,069	0,089	0,000	0,025	0,008	0,032	0,014	0,029	0,014	0,035
	G 10%	0,186	—	0,405	0,512	0,056	0,195	0,209	0,325	0,103	0,593	0,117	0,749
	G 5%	0,119	—	0,262	0,353	0,013	0,130	0,101	0,209	0,043	0,515	0,047	0,684
	G 1%	0,031	—	0,053	0,099	0,000	0,060	0,005	0,050	0,007	0,370	0,005	0,573
50	B 10%	0,207	0,307	0,592	0,597	0,097	0,134	0,306	0,359	0,130	0,153	0,126	0,159
	B 5%	0,125	0,191	0,378	0,411	0,033	0,064	0,137	0,182	0,064	0,090	0,067	0,092
	B 1%	0,042	0,048	0,106	0,111	0,002	0,021	0,011	0,025	0,018	0,023	0,020	0,023
	G 10%	0,174	—	0,516	0,583	0,065	0,156	0,249	0,364	0,083	0,537	0,088	0,688
	G 5%	0,098	—	0,338	0,436	0,029	0,096	0,125	0,236	0,045	0,464	0,047	0,628
	G 1%	0,033	—	0,080	0,136	0,002	0,044	0,013	0,054	0,006	0,331	0,009	0,512
100	B 10%	0,242	0,416	0,726	0,738	0,134	0,090	0,463	0,467	0,118	0,116	0,119	0,132
	B 5%	0,140	0,271	0,570	0,571	0,053	0,042	0,238	0,242	0,059	0,060	0,064	0,062
	B 1%	0,035	0,096	0,242	0,254	0,004	0,006	0,042	0,051	0,020	0,011	0,023	0,012
	G 10%	0,218	—	0,680	0,722	0,095	0,109	0,429	0,517	0,097	0,400	0,094	0,559
	G 5%	0,121	—	0,541	0,589	0,039	0,063	0,240	0,336	0,046	0,297	0,050	0,483
	G 1%	0,025	—	0,242	0,285	0,002	0,016	0,049	0,098	0,008	0,193	0,011	0,360
200	B 10%	0,242	0,464	0,821	0,799	0,126	0,090	0,623	0,581	0,117	0,093	0,118	0,120
	B 5%	0,126	0,300	0,702	0,687	0,056	0,039	0,413	0,386	0,060	0,055	0,068	0,065
	B 1%	0,035	0,113	0,410	0,404	0,003	0,003	0,126	0,109	0,011	0,019	0,013	0,019
	G 10%	0,215	—	0,798	0,793	0,102	0,109	0,595	0,632	0,098	0,238	0,098	0,385
	G 5%	0,108	—	0,684	0,696	0,038	0,048	0,424	0,488	0,049	0,170	0,054	0,303
	G 1%	0,029	—	0,399	0,433	0,002	0,012	0,154	0,204	0,006	0,071	0,007	0,187
300	G 10%	0,218	—	0,850	0,853	0,116	0,096	0,688	0,710	0,100	0,189	0,106	0,326
	G 5%	0,120	—	0,771	0,770	0,057	0,047	0,541	0,583	0,050	0,130	0,050	0,235
	G 1%	0,022	—	0,496	0,512	0,014	0,011	0,240	0,275	0,007	0,041	0,009	0,130
500	G 10%	0,227	—	0,873	0,875	0,091	0,103	0,737	0,743	0,101	0,141	0,105	0,223
	G 5%	0,124	—	0,784	0,785	0,042	0,058	0,598	0,624	0,043	0,080	0,052	0,147
	G 1%	0,031	—	0,544	0,550	0,010	0,010	0,313	0,346	0,006	0,017	0,004	0,073
1000	G 10%	0,239	—	0,908	0,904	0,101	0,092	0,808	0,809	0,092	0,099	0,093	0,132
	G 5%	0,124	—	0,846	0,856	0,053	0,047	0,698	0,699	0,052	0,052	0,050	0,074
	G 1%	0,034	—	0,643	0,652	0,010	0,008	0,417	0,433	0,012	0,010	0,013	0,017
mit approximierten Grenzverteilungen geschätzte asymptotische Güte:													
	10%	0,265	0,604	0,943	0,943	0,100	0,100	0,870	0,870	0,100	0,100	0,100	0,100
	5%	0,156	0,465	0,900	0,900	0,050	0,050	0,797	0,797	0,050	0,050	0,050	0,050
	1%	0,036	0,225	0,758	0,758	0,010	0,010	0,598	0,598	0,010	0,010	0,010	0,010

Tabelle 13: Relative Verwurfshäufigkeiten bei der Alternativenfolge gemäß Proposition 8.48 mit $d = 5$ und Changepoint $\lambda = 0,5$ ($N(0,(1+5/\sqrt{n})^2)$-verteilte Zufallsvariablen nähern sich $N(0,1)$-verteilten).

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
20	B 10%	0,263	0,218	0,163	0,239	0,054	0,184	0,071	0,171	0,201	0,158	0,202	0,176
	B 5%	0,148	0,129	0,084	0,125	0,017	0,111	0,023	0,080	0,100	0,100	0,094	0,116
	B 1%	0,043	0,048	0,007	0,026	0,000	0,037	0,001	0,023	0,018	0,031	0,020	0,040
	G 10%	0,157	—	0,107	0,233	0,025	0,292	0,040	0,176	0,102	0,701	0,080	0,823
	G 5%	0,088	—	0,042	0,142	0,007	0,246	0,014	0,113	0,034	0,632	0,033	0,767
	G 1%	0,023	—	0,005	0,044	0,000	0,164	0,001	0,057	0,007	0,496	0,006	0,676
30	B 10%	0,248	0,228	0,227	0,268	0,070	0,140	0,094	0,164	0,153	0,118	0,165	0,122
	B 5%	0,141	0,119	0,106	0,139	0,020	0,086	0,030	0,074	0,076	0,069	0,087	0,073
	B 1%	0,037	0,032	0,019	0,023	0,001	0,029	0,000	0,013	0,013	0,024	0,015	0,026
	G 10%	0,173	—	0,154	0,256	0,034	0,193	0,060	0,164	0,095	0,660	0,095	0,783
	G 5%	0,099	—	0,066	0,156	0,009	0,148	0,022	0,094	0,048	0,574	0,042	0,726
	G 1%	0,029	—	0,011	0,033	0,000	0,086	0,000	0,024	0,004	0,426	0,004	0,628
40	B 10%	0,201	0,240	0,254	0,272	0,058	0,102	0,088	0,143	0,138	0,107	0,145	0,108
	B 5%	0,112	0,128	0,109	0,140	0,014	0,057	0,023	0,056	0,061	0,056	0,071	0,062
	B 1%	0,025	0,029	0,012	0,019	0,001	0,015	0,003	0,011	0,017	0,010	0,019	0,012
	G 10%	0,148	—	0,171	0,257	0,029	0,135	0,058	0,139	0,079	0,568	0,085	0,707
	G 5%	0,087	—	0,079	0,154	0,010	0,083	0,021	0,062	0,038	0,488	0,037	0,649
	G 1%	0,015	—	0,009	0,019	0,000	0,040	0,002	0,017	0,006	0,360	0,005	0,543
50	B 10%	0,180	0,253	0,310	0,347	0,064	0,094	0,127	0,141	0,108	0,104	0,115	0,104
	B 5%	0,100	0,131	0,154	0,174	0,020	0,048	0,047	0,065	0,053	0,052	0,054	0,055
	B 1%	0,021	0,035	0,027	0,027	0,001	0,013	0,003	0,007	0,010	0,015	0,009	0,013
	G 10%	0,151	—	0,232	0,325	0,040	0,131	0,091	0,148	0,074	0,503	0,069	0,661
	G 5%	0,075	—	0,128	0,175	0,013	0,073	0,040	0,085	0,034	0,420	0,029	0,592
	G 1%	0,014	—	0,017	0,034	0,001	0,029	0,003	0,015	0,005	0,300	0,003	0,466
100	B 10%	0,169	0,285	0,450	0,447	0,070	0,079	0,205	0,203	0,100	0,102	0,114	0,113
	B 5%	0,092	0,175	0,287	0,283	0,029	0,033	0,072	0,084	0,053	0,056	0,051	0,058
	B 1%	0,020	0,044	0,065	0,060	0,004	0,002	0,005	0,010	0,013	0,012	0,013	0,012
	G 10%	0,156	—	0,390	0,432	0,050	0,095	0,164	0,218	0,076	0,364	0,075	0,531
	G 5%	0,082	—	0,258	0,293	0,023	0,043	0,067	0,116	0,043	0,290	0,042	0,449
	G 1%	0,016	—	0,047	0,071	0,001	0,009	0,006	0,015	0,006	0,174	0,003	0,317
200	B 10%	0,199	0,348	0,639	0,625	0,113	0,084	0,347	0,315	0,113	0,095	0,120	0,095
	B 5%	0,106	0,208	0,459	0,452	0,053	0,039	0,156	0,153	0,053	0,052	0,055	0,061
	B 1%	0,031	0,066	0,163	0,155	0,003	0,007	0,027	0,030	0,013	0,012	0,012	0,012
	G 10%	0,178	—	0,590	0,616	0,090	0,091	0,309	0,353	0,096	0,235	0,100	0,361
	G 5%	0,100	—	0,431	0,455	0,038	0,049	0,154	0,196	0,047	0,163	0,047	0,268
	G 1%	0,028	—	0,145	0,155	0,002	0,011	0,023	0,047	0,010	0,062	0,009	0,157
300	G 10%	0,142	—	0,641	0,665	0,075	0,102	0,398	0,442	0,091	0,184	0,098	0,290
	G 5%	0,089	—	0,507	0,525	0,035	0,049	0,216	0,263	0,049	0,112	0,043	0,215
	G 1%	0,019	—	0,192	0,208	0,006	0,011	0,035	0,060	0,010	0,035	0,011	0,115
500	G 10%	0,161	—	0,716	0,718	0,082	0,085	0,480	0,499	0,096	0,125	0,093	0,203
	G 5%	0,083	—	0,582	0,593	0,038	0,044	0,291	0,324	0,049	0,068	0,049	0,127
	G 1%	0,018	—	0,278	0,301	0,004	0,007	0,078	0,090	0,010	0,014	0,010	0,044
1000	G 10%	0,174	—	0,754	0,762	0,075	0,090	0,556	0,567	0,079	0,102	0,081	0,120
	G 5%	0,093	—	0,640	0,646	0,038	0,039	0,404	0,414	0,042	0,046	0,039	0,061
	G 1%	0,016	—	0,341	0,349	0,006	0,005	0,118	0,128	0,009	0,010	0,007	0,012
mit approximierten Grenzverteilungen geschätzte asymptotische Güte:													
	10%	0,193	0,431	0,869	0,869	0,100	0,100	0,765	0,765	0,100	0,100	0,100	0,100
	5%	0,104	0,293	0,791	0,791	0,050	0,050	0,658	0,658	0,050	0,050	0,050	0,050
	1%	0,022	0,111	0,573	0,573	0,010	0,010	0,414	0,414	0,010	0,010	0,010	0,010

Tabelle 14: Relative Verwurfshäufigkeiten bei der Alternativenfolge gemäß Proposition 8.48 mit $d = 5$ und Changepoint $\lambda = 0,3$ ($N(0, (1 + 5/\sqrt{n})^2)$-verteilte Zufallsvariablen nähern sich $N(0,1)$-verteilten).

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
20	B 10%	0,253	0,220	0,146	0,195	0,067	0,178	0,063	0,152	0,195	0,168	0,181	0,180
	B 5%	0,134	0,135	0,073	0,115	0,018	0,107	0,022	0,082	0,093	0,110	0,088	0,121
	B 1%	0,041	0,052	0,005	0,029	0,000	0,039	0,000	0,025	0,023	0,049	0,022	0,054
	G 10%	0,153	—	0,096	0,207	0,026	0,308	0,039	0,157	0,092	0,751	0,084	0,833
	G 5%	0,084	—	0,047	0,139	0,010	0,251	0,012	0,105	0,036	0,681	0,035	0,787
	G 1%	0,023	—	0,003	0,047	0,000	0,170	0,000	0,051	0,015	0,549	0,015	0,708
30	B 10%	0,184	0,202	0,134	0,163	0,061	0,104	0,057	0,100	0,139	0,114	0,141	0,117
	B 5%	0,112	0,104	0,054	0,076	0,015	0,054	0,020	0,042	0,058	0,064	0,064	0,066
	B 1%	0,027	0,026	0,005	0,016	0,000	0,011	0,002	0,006	0,011	0,013	0,010	0,014
	G 10%	0,136	—	0,081	0,154	0,022	0,153	0,042	0,091	0,074	0,631	0,072	0,746
	G 5%	0,075	—	0,040	0,077	0,009	0,113	0,015	0,050	0,035	0,556	0,031	0,706
	G 1%	0,019	—	0,006	0,017	0,000	0,059	0,001	0,013	0,003	0,425	0,003	0,602
40	B 10%	0,162	0,187	0,158	0,171	0,066	0,085	0,072	0,101	0,115	0,107	0,130	0,110
	B 5%	0,088	0,092	0,070	0,085	0,017	0,044	0,022	0,047	0,055	0,056	0,058	0,055
	B 1%	0,023	0,022	0,011	0,012	0,000	0,011	0,000	0,006	0,009	0,008	0,006	0,012
	G 10%	0,112	—	0,106	0,163	0,033	0,130	0,054	0,105	0,076	0,562	0,074	0,689
	G 5%	0,072	—	0,051	0,089	0,011	0,075	0,018	0,054	0,027	0,484	0,028	0,633
	G 1%	0,011	—	0,007	0,015	0,000	0,030	0,001	0,015	0,004	0,371	0,004	0,537
50	B 10%	0,147	0,201	0,152	0,183	0,069	0,084	0,061	0,103	0,126	0,096	0,129	0,106
	B 5%	0,072	0,106	0,070	0,086	0,015	0,046	0,017	0,037	0,051	0,055	0,054	0,054
	B 1%	0,017	0,021	0,006	0,009	0,000	0,010	0,001	0,003	0,011	0,007	0,010	0,008
	G 10%	0,118	—	0,105	0,175	0,030	0,122	0,043	0,105	0,076	0,512	0,078	0,674
	G 5%	0,059	—	0,055	0,087	0,010	0,064	0,013	0,052	0,029	0,426	0,030	0,587
	G 1%	0,011	—	0,003	0,010	0,000	0,029	0,001	0,009	0,001	0,306	0,001	0,463
100	B 10%	0,158	0,215	0,245	0,246	0,054	0,088	0,106	0,121	0,102	0,087	0,097	0,086
	B 5%	0,082	0,132	0,131	0,134	0,024	0,041	0,044	0,053	0,042	0,044	0,042	0,046
	B 1%	0,014	0,031	0,024	0,033	0,002	0,003	0,004	0,005	0,012	0,009	0,009	0,010
	G 10%	0,136	—	0,197	0,230	0,037	0,104	0,088	0,132	0,069	0,354	0,064	0,489
	G 5%	0,069	—	0,111	0,137	0,015	0,058	0,042	0,077	0,035	0,281	0,029	0,417
	G 1%	0,010	—	0,020	0,031	0,000	0,016	0,003	0,014	0,002	0,173	0,002	0,299
200	B 10%	0,147	0,220	0,327	0,334	0,081	0,068	0,122	0,133	0,118	0,073	0,127	0,076
	B 5%	0,086	0,135	0,182	0,176	0,027	0,024	0,061	0,062	0,066	0,040	0,065	0,042
	B 1%	0,020	0,040	0,045	0,046	0,003	0,009	0,010	0,014	0,011	0,011	0,009	0,011
	G 10%	0,136	—	0,281	0,317	0,061	0,078	0,108	0,146	0,102	0,187	0,102	0,309
	G 5%	0,078	—	0,151	0,183	0,018	0,040	0,055	0,087	0,050	0,124	0,044	0,229
	G 1%	0,019	—	0,038	0,045	0,001	0,012	0,011	0,024	0,008	0,055	0,006	0,137
300	G 10%	0,151	—	0,398	0,429	0,071	0,093	0,193	0,223	0,101	0,179	0,096	0,270
	G 5%	0,067	—	0,251	0,276	0,037	0,052	0,109	0,137	0,048	0,104	0,049	0,181
	G 1%	0,012	—	0,064	0,069	0,006	0,013	0,013	0,029	0,008	0,037	0,008	0,101
500	G 10%	0,125	—	0,464	0,471	0,062	0,083	0,230	0,263	0,078	0,123	0,082	0,182
	G 5%	0,058	—	0,307	0,325	0,025	0,034	0,126	0,149	0,036	0,065	0,037	0,118
	G 1%	0,010	—	0,094	0,101	0,002	0,007	0,024	0,030	0,003	0,016	0,003	0,050
1000	G 10%	0,135	—	0,541	0,537	0,084	0,090	0,301	0,323	0,100	0,103	0,100	0,117
	G 5%	0,067	—	0,371	0,369	0,041	0,044	0,181	0,199	0,050	0,053	0,050	0,070
	G 1%	0,020	—	0,122	0,126	0,005	0,007	0,050	0,053	0,010	0,011	0,010	0,018
mit approximierten Grenzverteilungen geschätzte asymptotische Güte:													
	10%	0,137	0,248	0,681	0,681	0,100	0,100	0,559	0,559	0,100	0,100	0,100	0,100
	5%	0,071	0,149	0,550	0,550	0,050	0,050	0,422	0,422	0,050	0,050	0,050	0,050
	1%	0,015	0,044	0,290	0,290	0,010	0,010	0,192	0,192	0,010	0,010	0,010	0,010

Tabelle 15: Relative Verwurfshäufigkeiten bei der Alternativenfolge gemäß Proposition 8.48 mit $d = 5$ und Changepoint $\lambda = 0,2$ ($N(0,(1+5/\sqrt{n})^2)$-verteilte Zufallsvariablen nähern sich $N(0,1)$-verteilten).

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
20	B 10%	0,365	0,315	0,124	0,414	0,030	0,364	0,046	0,363	0,321	0,289	0,353	0,304
	B 5%	0,247	0,209	0,044	0,280	0,005	0,255	0,007	0,239	0,217	0,196	0,232	0,235
	B 1%	0,130	0,096	0,006	0,114	0,000	0,111	0,001	0,103	0,098	0,105	0,106	0,128
	G 10%	0,263	—	0,073	0,364	0,013	0,372	0,022	0,325	0,219	0,486	0,219	0,578
	G 5%	0,198	—	0,030	0,304	0,001	0,347	0,007	0,281	0,138	0,409	0,131	0,513
	G 1%	0,091	—	0,003	0,226	0,000	0,309	0,001	0,229	0,045	0,307	0,055	0,421
30	B 10%	0,357	0,318	0,121	0,423	0,032	0,345	0,042	0,348	0,285	0,233	0,300	0,253
	B 5%	0,237	0,206	0,047	0,281	0,005	0,258	0,012	0,244	0,187	0,162	0,206	0,180
	B 1%	0,104	0,086	0,007	0,115	0,002	0,099	0,002	0,094	0,093	0,081	0,101	0,099
	G 10%	0,284	—	0,087	0,322	0,022	0,283	0,029	0,259	0,203	0,327	0,214	0,376
	G 5%	0,199	—	0,042	0,263	0,004	0,260	0,013	0,221	0,134	0,254	0,149	0,318
	G 1%	0,091	—	0,008	0,171	0,002	0,211	0,002	0,168	0,053	0,165	0,055	0,221
40	B 10%	0,185	0,166	0,141	0,229	0,035	0,127	0,050	0,149	0,162	0,126	0,170	0,150
	B 5%	0,108	0,099	0,056	0,103	0,006	0,074	0,017	0,070	0,087	0,072	0,088	0,082
	B 1%	0,033	0,029	0,011	0,023	0,002	0,023	0,002	0,016	0,034	0,031	0,031	0,031
	G 10%	0,141	—	0,110	0,204	0,018	0,146	0,034	0,144	0,109	0,357	0,106	0,477
	G 5%	0,080	—	0,041	0,107	0,005	0,105	0,015	0,085	0,051	0,270	0,058	0,421
	G 1%	0,024	—	0,012	0,036	0,002	0,050	0,005	0,032	0,013	0,174	0,014	0,327
50	B 10%	0,157	0,158	0,148	0,274	0,030	0,144	0,052	0,173	0,128	0,130	0,133	0,133
	B 5%	0,082	0,090	0,053	0,120	0,006	0,090	0,010	0,084	0,074	0,074	0,072	0,078
	B 1%	0,030	0,026	0,004	0,023	0,000	0,023	0,001	0,017	0,023	0,018	0,019	0,023
	G 10%	0,135	—	0,120	0,234	0,016	0,148	0,037	0,161	0,095	0,274	0,093	0,363
	G 5%	0,069	—	0,046	0,138	0,003	0,116	0,013	0,103	0,049	0,217	0,044	0,313
	G 1%	0,018	—	0,004	0,039	0,000	0,059	0,001	0,036	0,011	0,133	0,011	0,220
100	B 10%	0,126	0,147	0,273	0,348	0,047	0,093	0,129	0,201	0,107	0,095	0,112	0,114
	B 5%	0,070	0,073	0,140	0,186	0,012	0,046	0,033	0,083	0,059	0,056	0,064	0,068
	B 1%	0,012	0,015	0,024	0,031	0,001	0,007	0,000	0,012	0,011	0,014	0,011	0,017
	G 10%	0,116	—	0,242	0,333	0,032	0,094	0,117	0,212	0,086	0,194	0,087	0,272
	G 5%	0,064	—	0,143	0,212	0,011	0,056	0,041	0,121	0,050	0,129	0,054	0,214
	G 1%	0,008	—	0,023	0,052	0,002	0,017	0,002	0,029	0,008	0,064	0,005	0,143
200	B 10%	0,112	0,138	0,443	0,446	0,074	0,085	0,223	0,253	0,103	0,088	0,108	0,093
	B 5%	0,055	0,081	0,251	0,274	0,027	0,045	0,095	0,111	0,048	0,039	0,049	0,040
	B 1%	0,012	0,020	0,060	0,061	0,003	0,007	0,009	0,016	0,007	0,008	0,008	0,004
	G 10%	0,101	—	0,417	0,449	0,056	0,099	0,206	0,290	0,082	0,126	0,083	0,198
	G 5%	0,051	—	0,251	0,313	0,022	0,055	0,109	0,197	0,043	0,071	0,037	0,129
	G 1%	0,008	—	0,061	0,099	0,002	0,019	0,012	0,048	0,007	0,018	0,007	0,055
300	G 10%	0,104	—	0,428	0,464	0,063	0,115	0,272	0,349	0,088	0,139	0,086	0,203
	G 5%	0,047	—	0,286	0,338	0,030	0,059	0,140	0,218	0,042	0,081	0,045	0,135
	G 1%	0,013	—	0,088	0,118	0,002	0,015	0,033	0,074	0,008	0,023	0,006	0,060
500	G 10%	0,100	—	0,509	0,532	0,068	0,101	0,389	0,437	0,094	0,111	0,096	0,157
	G 5%	0,053	—	0,371	0,398	0,025	0,054	0,251	0,309	0,048	0,054	0,047	0,093
	G 1%	0,005	—	0,128	0,150	0,005	0,018	0,056	0,095	0,003	0,014	0,003	0,037
1000	G 10%	0,101	—	0,540	0,546	0,079	0,093	0,550	0,591	0,096	0,098	0,100	0,116
	G 5%	0,053	—	0,426	0,434	0,044	0,052	0,387	0,409	0,054	0,047	0,050	0,056
	G 1%	0,011	—	0,188	0,197	0,006	0,013	0,128	0,151	0,010	0,011	0,009	0,019
mit approximierten Grenzverteilungen geschätzte asymptotische Güte:													
	10%	0,163	0,465	0,598	0,598	0,100	0,100	0,799	0,799	0,100	0,100	0,100	0,100
	5%	0,097	0,302	0,479	0,479	0,050	0,050	0,706	0,706	0,050	0,050	0,050	0,050
	1%	0,023	0,106	0,260	0,260	0,010	0,010	0,482	0,482	0,010	0,010	0,010	0,010

Tabelle 16: Relative Verwurfshäufigkeiten bei der Alternativenfolge gemäß Proposition 8.51 mit $d = 1/3$ und Changepoint $0,5$ ($t_{[\sqrt{n}/3]}$-verteilte Zufallsvariablen nähern sich standardnormalverteilten).

Stichprobenumfängen kein Unterschied bei den Tests mit und ohne Berücksichtigung der Zentriertheit zu entdecken. Anders als bei der Skalenalternative hat hier der Test mit dem Kern K_4 die höhere asymptotische Güte als der Test mit dem Kern K_2. Allerdings zeigt der Test mit dem Kern K_4 ein schlechteres asymptotisches Verhalten, und erreicht bei $n = 1000$ gerade erst die Verwurfshäufigkeit des Tests mit K_2.
In Tabelle 17 sind die relativen Verwurfshäufigkeiten der Simulation mit der Alternativenfolge gemäß Proposition 8.49 mit Changepoint $\lambda = 0,3$, $d = 5$ und $g(x) = p\varphi_{a,s^2}(x) + q\varphi_{b,s^2}(x)$ mit $a = 4,35$ und $p = 0,05$, $q = 0,95$, $b = -0,2289$ und $s = 0,06387$ wiedergegeben. Die Tests mit den Statistiken $\|\sqrt{n}\,\widehat{T}_n\|_\infty$ und $\|\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^z\|_\infty$ scheinen hier eine sehr hohe Güte zu besitzen, besonders letzterer. Dies zeigt sich auch bei der geschätzten asymptotischen Güte mit den simulierten Grenzverteilungen deutlich. Die Tests mit den Varianzvergleichskernen scheinen diese Alternative wie erwartet nicht entdecken zu können, die Tests mit den beiden anderen Momentenvergleichskernen finden sie jedoch. Bei dem Kern für die vierten Momente scheint die Asymptotik sehr langsam zu sein. Bei dem Kern für die dritten Momente zeigt sich zum ersten mal bei einem Test mit einer U-Typ-Statistik ein Vorteil bei Berücksichtigung der Zentriertheit. Gleiches gilt für den Test mit dem Kern K_{Wx} und auch für den mit Kern K_Φ, welche hier ebenfalls erstmals auf eine Alternative reagieren. Der Test mit dem Kern K_Φ ist jedoch sehr schwach, nur bei der Version mit Berücksichtigung der Zentriertheit ist in den Simulationen eine höhere Güte als das Testniveau sichtbar. Der klassische Test mit dem Kern K_{Wx} besitzt eine etwas höhere asymptotischen Güte als derjenige mit dem Kern K_Φ, dies kehrt sich jedoch bei den Versionen mit der Berücksichtigung der Zentriertheit um, wobei die Unterschiede natürlich gering sind.
Insgesamt läßt sich als Ergebnis der Simulationen folgendes festhalten:
Bei den Tests mit den Statistiken $\|\sqrt{n}\,\widehat{T}_n\|_\infty$ und $\|\sqrt{n}\,\widehat{T}_n^z\|_\infty$, welche sequentielle Verteilungsfunktionen vergleichen, ist der Test mit Berücksichtigung der Zentriertheit vorzuziehen, jedenfalls solange der Rechenaufwand für die Anwendung des Bootstrapverfahrens zur Berechnung der kritischen Werte aufgrund eines hohen Stichprobenumfangs der praktischen Durchführung nicht im Wege steht. Entscheidet man sich trotzdem für den Test mit der Statistik $\|\sqrt{n}\,\widehat{T}_n\|_\infty$, so gibt es jedenfalls bei stetigen Fehlerverteilungen keinen Grund, die kritischen Werte mit dem Bootstrapverfahren zu berechnen, denn die Tests mit Verwendung der kritischen Werte aus (8.47) überzeugten in den Simulationen.

n	T/Kern krit. W.	T klass	T zentr	K2 klass	K2 zentr	K3 klass	K3 zentr	K4 klass	K4 zentr	Wx klass	Wx zentr	Phi klass	Phi zentr
30	B 10%	0,614	0,451	0,228	0,325	0,052	0,211	0,125	0,245	0,268	0,231	0,248	0,266
	B 5%	0,460	0,304	0,156	0,228	0,017	0,139	0,054	0,150	0,177	0,160	0,141	0,183
	B 1%	0,207	0,142	0,051	0,072	0,002	0,029	0,009	0,028	0,063	0,072	0,032	0,079
	G 10%	0,524	—	0,200	0,365	0,037	0,312	0,105	0,276	0,189	0,475	0,155	0,698
	G 5%	0,399	—	0,151	0,290	0,012	0,268	0,053	0,215	0,107	0,371	0,079	0,646
	G 1%	0,173	—	0,048	0,160	0,000	0,189	0,005	0,104	0,027	0,231	0,017	0,549
40	B 10%	0,542	0,380	0,195	0,231	0,031	0,144	0,092	0,154	0,214	0,158	0,202	0,200
	B 5%	0,401	0,239	0,126	0,136	0,007	0,089	0,036	0,082	0,134	0,089	0,115	0,124
	B 1%	0,172	0,074	0,040	0,043	0,002	0,014	0,007	0,014	0,046	0,034	0,027	0,035
	G 10%	0,484	—	0,164	0,246	0,019	0,223	0,071	0,167	0,150	0,362	0,130	0,597
	G 5%	0,347	—	0,116	0,169	0,005	0,156	0,036	0,113	0,083	0,265	0,073	0,538
	G 1%	0,137	—	0,039	0,075	0,001	0,083	0,009	0,039	0,022	0,134	0,011	0,432
50	B 10%	0,522	0,465	0,154	0,177	0,035	0,146	0,080	0,130	0,211	0,145	0,186	0,180
	B 5%	0,376	0,303	0,093	0,107	0,009	0,086	0,036	0,064	0,122	0,081	0,108	0,100
	B 1%	0,161	0,075	0,041	0,034	0,001	0,015	0,007	0,013	0,044	0,025	0,023	0,032
	G 10%	0,485	—	0,136	0,173	0,025	0,267	0,071	0,173	0,151	0,338	0,128	0,511
	G 5%	0,332	—	0,084	0,114	0,007	0,209	0,038	0,126	0,098	0,232	0,057	0,437
	G 1%	0,133	—	0,041	0,051	0,001	0,127	0,005	0,055	0,017	0,097	0,011	0,337
70	B 10%	0,528	0,576	0,115	0,128	0,048	0,138	0,062	0,101	0,171	0,151	0,143	0,155
	B 5%	0,361	0,369	0,069	0,074	0,012	0,071	0,024	0,044	0,094	0,081	0,085	0,087
	B 1%	0,144	0,114	0,023	0,024	0,000	0,018	0,001	0,010	0,033	0,017	0,020	0,027
	G 10%	0,492	—	0,099	0,130	0,037	0,139	0,054	0,099	0,133	0,244	0,100	0,396
	G 5%	0,328	—	0,063	0,077	0,009	0,080	0,023	0,056	0,071	0,169	0,053	0,328
	G 1%	0,129	—	0,024	0,028	0,000	0,034	0,004	0,018	0,020	0,067	0,010	0,233
100	B 10%	0,504	0,649	0,113	0,112	0,057	0,142	0,058	0,089	0,166	0,150	0,151	0,140
	B 5%	0,371	0,479	0,061	0,057	0,016	0,077	0,025	0,041	0,101	0,086	0,087	0,081
	B 1%	0,148	0,178	0,012	0,013	0,000	0,011	0,003	0,008	0,028	0,017	0,014	0,016
	G 10%	0,485	—	0,096	0,109	0,039	0,138	0,049	0,089	0,134	0,216	0,119	0,356
	G 5%	0,341	—	0,060	0,057	0,015	0,088	0,024	0,050	0,088	0,137	0,060	0,273
	G 1%	0,135	—	0,015	0,018	0,001	0,020	0,003	0,013	0,018	0,044	0,009	0,156
200	B 10%	0,547	0,778	0,095	0,088	0,083	0,154	0,061	0,105	0,147	0,173	0,123	0,161
	B 5%	0,372	0,630	0,047	0,052	0,028	0,064	0,022	0,051	0,076	0,096	0,053	0,081
	B 1%	0,148	0,311	0,009	0,013	0,001	0,014	0,002	0,007	0,020	0,029	0,015	0,017
	G 10%	0,520	—	0,081	0,088	0,065	0,170	0,055	0,121	0,122	0,214	0,101	0,281
	G 5%	0,356	—	0,043	0,051	0,026	0,091	0,023	0,069	0,062	0,118	0,045	0,185
	G 1%	0,140	—	0,008	0,013	0,001	0,026	0,003	0,016	0,011	0,043	0,007	0,075
300	G 10%	0,517	—	0,076	0,089	0,074	0,177	0,064	0,112	0,118	0,232	0,105	0,260
	G 5%	0,342	—	0,040	0,049	0,024	0,099	0,023	0,066	0,059	0,137	0,054	0,157
	G 1%	0,150	—	0,009	0,014	0,004	0,029	0,002	0,012	0,011	0,035	0,007	0,055
500	G 10%	0,534	—	0,097	0,103	0,124	0,236	0,110	0,151	0,100	0,269	0,091	0,285
	G 5%	0,371	—	0,048	0,061	0,059	0,128	0,047	0,077	0,053	0,164	0,048	0,171
	G 1%	0,149	—	0,010	0,013	0,017	0,030	0,005	0,020	0,012	0,034	0,014	0,045
1000	G 10%	0,588	—	0,087	0,099	0,178	0,339	0,146	0,190	0,111	0,327	0,091	0,346
	G 5%	0,411	—	0,045	0,051	0,090	0,203	0,072	0,100	0,060	0,208	0,052	0,235
	G 1%	0,164	—	0,007	0,005	0,010	0,058	0,009	0,024	0,010	0,075	0,004	0,062
mit approximierten Grenzverteilungen geschätzte asymptotische Güte:													
	10%	0,952	0,947	0,100	0,100	0,648	0,954	0,913	0,913	0,124	0,596	0,113	0,695
	5%	0,425	0,888	0,050	0,050	0,525	0,914	0,851	0,851	0,066	0,470	0,059	0,576
	1%	0,193	0,673	0,010	0,010	0,287	0,772	0,663	0,663	0,015	0,242	0,013	0,332

Tabelle 17: Relative Verwurfshäufigkeiten bei der Alternativenfolge gemäß Proposition 8.49 mit $d = 5$, Changepoint $0,3$ und der im Text beschriebenen unsymmetrischen Dichte g.

Vergleicht man diese beiden Tests mit den Tests welche die U-Typ-Statistiken $\|\sqrt{n}\,\hat{r}_n\|_\infty$ und $\|\sqrt{n}\,\hat{r}_n^z\|_\infty$ verwenden, so zeigt sich einerseits, dass diese Tests den beiden erstgenannten überlegen sein können, wie zum Beispiel im Fall der Skalenalternative und dem Varianzvergleichskern oben gesehen wurde. Andererseits muß ein solcher Test eine Situation unter der Alternative nicht zwangsläufig erkennen können, wie oben in Tabelle 17 für den Varianzvergleichskern sichtbar wurde. Dagegen erkennen die beiden Tests welche auf der Differenz der sequentiellen empirischen Verteilungsfunktionen beruhen bei hinreichend großen Stichprobenumfang jede Alternative, wie man leicht mit dem starken Gesetz der großen Zahlen überlegt. Bei den U-Typ-Statistiken bleibt weiter festzuhalten, dass sich hier durch die Berücksichtigung der Zentriertheit häufig keine Verbesserung der Testgüte zeigen wird, obwohl dies in manchen Situationen durchaus der Fall sein kein. Allerdings kann hier bei der Verwendung der Statistik $\|\sqrt{n}\,\hat{r}_n^z\|_\infty$ die Asymptotik deutlich verschlechtert sein, so dass der darauf basierende Test das Testniveau erst bei großem Stichprobenumfang einhält. Dem kann durch die Verwendung von kritischen Werten, welche mittels Bootstrapverfahren erzeugt wurden, begegnet werden.

Es folgen auf den nächsten Seiten die R-Programme, mit denen relative Verwurfshäufigkeiten, kritische Werte und asymptotische Testgüten wie oben in den Tabellen gezeigt simuliert werden können.

```
###############################################################################################
############# Bestimmung der relativen Verwurfshäufigkeiten mit simulierten Daten #############
###############################################################################################

####################### Produktion der Residuen einer ARMA(1,1)-Reihe ########################

arma <- function( e, x0, rho, theta){
    # Produziert eine ARMA(1,1)-Reihe der Länge n gemäß
    # X(i) = rho*X(i-1) + e(i) + theta*e(i-1)
    # mit Startwert x0 und Fehlervektor e der Länge n.
    n <- length( e)
    x <- numeric( n)
    x[ 1] <- x0
    for( i in 2:( n)){
        x[ i] <- rho * x[ i-1] + theta * e[ i-1] + e[ i]
    }
    x
}

residuen <- function( x, e0dach, rhodach, thetadach){
    # Produziert ARMA(1,1)-Residuen edach aus der Zeitreihe x
    # mit den geschätzten Parametern rhodach und thetadach
    # zum Startwert e0dach.
    n <- length( x)
    edach <- numeric( n)
    edach[ 1] <- e0dach
    for( i in 2:n){
        edach[ i] <- x[ i] - rhodach * x[ i-1] - thetadach * edach[ i-1]
    }
    edach
}

gamma <- function( x, p){
    # Eine Hilfsfunktion zur Konstruktion des Yule-Walker-Schätzers in yulewalker.
    n <- length( x)
    gamma <- numeric( p)
    xquer <- mean( x)
    for(i in ( 1:p)){
        gamma[ i] <- sum( ( { x}[ -{ ( n-i+1):n}] - xquer)*( { x}[ -{ 1:i}] - xquer))/n
    }
    gamma <- c( sum( ( x - xquer)*( x - xquer))/n, gamma)

    gamma

}

yulewalker <- function( x, p){
    # Es werden die Yule-Walker-Schätzer für die Autoregressionskoeffizienten
    # der als AR(p)-Reihe angenommen Zeitreihe x berechnet,
    # von welchen die ersten beiden als Schätzwerte für die entsprechenden
```

```
    # Autoregressionskoeffizienten einer AR(unendlich)-Reihe
    # angenommen werden, aus welchen dann die beiden Koeffizienten
    # rho und theta einer entsprechenden ARMA(1,1)-Reihe berechnet werden.
    # Vgl. Kreiß und Neuhaus (2006), Beispiel 10.21.
    gamma <- gamma( x, p)
    Gamma <- matrix( nrow= p, ncol= p)
    for (i in 1:p){
        for (j in 1:p){
            Gamma[ i, j] <- gamma[ abs( i - j) +1]
        }
    }
    alpha <- -solve( Gamma, gamma[-1])
    thetadach <- - alpha[ 2]/alpha[ 1]
    rhodach <- -( thetadach + alpha[ 1])

    c( rhodach= rhodach, thetadach= thetadach)

}

Res <- function( e, x0, rho, theta, p= trunc( log( length( e)-1, 10)+2)){
    # Kompakte Funktion zur Erzeugung der Residuen mit den obigen Yule-Walker-Schätzern.
    # Als e0dach wird 0 gewählt (wie bei Bai (1994)).
    # Das [ -1] in der letzten Zeile dient dazu, e0dach zu entfernen.
    x <- arma( e, x0, rho, theta)
    schaetzer <- yulewalker( x, p)
    rhodach <- schaetzer[ "rhodach"]
    thetadach <- schaetzer[ "thetadach"]

    residuen( x, e0dach= 0, rhodach, thetadach)[ -1]

}

#################### Lagrangemultiplikatoren für die zentrierten Tests ######################

lt <- function( daten){
    # Eingabe: Datenvektor, zu dem der Lagrangemultiplikator für die Gewichte
    # der zentrierten Verteilungensfunktion berechnet werden soll.
    # Ausgabe: Lagrangemultiplikator t_n.

    mind <- min( daten)
    maxd <- max( daten)
    links  <- ( 1/length( daten) - 1) / maxd
    rechts <- ( 1/length( daten) - 1) / mind

    if( maxd > 0 & mind < 0 ){
        f.links  <- sum( daten/( 1 + daten*links ))
        f.rechts <- sum( daten/( 1 + daten*rechts))
        if( sign( f.links) == sign( f.rechts)){
            fehl <- -1
            t_n <- 0        # Nimm F_n, weil Rechengenauigkeit nicht ausreichte.
        }else{
            fehl <- 0
            t_n <- uniroot( function(x){sum( daten/(1+daten*x))},
                            lower= links, upper= rechts,
```

```
                        f.lower= f.links, f.upper= f.rechts)$root
        }
    }else{
        fehl <- 1
        t_n <- 0            # Verwende F_n, wenn zentriert nicht geht.
    }

    t_n

}


tvek <- function( daten){
    # Liefert den Vektor der Lagrangemultiplikatoren t_nk für k = 1, ..., n-1
    # zu dem Datenvektor daten.
    # Ausgabe: Vektor mit Lagrangemultiplikatoren,

    n <- length( daten)

    tvektor <- numeric( n-1)

    for( i in 1:(length( daten) - 1)){
        tvektor[i] <- lt( daten[1:i])
    }

    tvektor

}

###################### Hilfsfunktionen zur Berechnung der Teststatistiken ######################

kvek <- function( n){
    # Dient zur Erzeugung des Hilfsvektors kvektor.

    kvektor <- numeric( n*( n-1)/2 - 1)
    a <- 1
    for(i in 1:( n-1)){
        kvektor[ a:( a+n-i-1)] <- i:( n-1)
        a <- a+n-i
    }

    kvektor

}

klasskoeffm <- function( n){
    # Erzeugt die Koeffizientenmatrix für den klassischen Test mit T_n^klass.

    kvektor <- kvek( n)
    klasskoeff <- matrix(0, nrow= n-1, ncol= n)
    klasskoeff[lower.tri( klasskoeff, T)] <- (n - kvektor)
    klasskoeff[upper.tri( klasskoeff, F)] <- -rev( n - kvektor)

    klasskoeff
```

```
}

############################### Berechnung der Teststatistiken ################################

TStat <- function( daten, klass= TRUE, zentr= TRUE,
                   klasskoeff= NULL, kvektor= NULL, tvektor= NULL, uvektor= NULL){
    # Übergib die Daten.
    # Man kann die Teststatistiken an- und abbestellen,
    # indem man klass und zentr auf TRUE und FALSE setzt.
    # Die optionale Übergabe der Koeffizientenmatrix und der Vektoren beschleunigt das ganze,
    # wenn die für eine Simulation nicht immer wieder neu berechnet werden sollen.

    n <- length( daten)
    # Eventuell nötiges Erzeugen des Koeffizientenvektors.
    if( is.null( kvektor)){ kvektor <- kvek( n)}

    # Erzeugen der Indikatormatrix indi.
    indi <- outer( daten, daten, FUN= "<=")

    # Berechnen der klassischen Teststatistik n^(3/2)*||T_n^klass||.
    Tklass <- NULL
    if( klass == TRUE){
        # Eventuell nötiges Erzeugen der Koeffizientenmatrix.
        if( is.null( klasskoeff)){ klasskoeff <- klasskoeffm( n)}
        # Berechnen von n^(3/2)*||T_n^klass||.
        Tklass <- max( abs( klasskoeff %*% indi))
    }

    # Berechnen der zentrierten Teststatistik n^(3/2)*||T_n^z||.
    Tzentr <- NULL
    if( zentr == TRUE){
        # Eventuell nötiges Erzeugen des Koeffizientenvektors und der Lagrangemultiplikatoren.
        if( is.null( tvektor) | is.null( uvektor)){
            tvektor <- tvek( daten)
            uvektor <- tvek( rev( daten))
        }

        # Erzeugen der Koeffizientenmatrix koeff für die Teststatistik T_n^z.
        koeff <- matrix(0, nrow= n-1, ncol= n)
        A <-    ( n - kvektor) / (1 + tvektor[     kvektor ]*rep( daten[-n], times= (n-1):1))
        B <- rev( n - kvektor) / (1 + uvektor[rev( kvektor)]*rep( daten[-1], times= 1:(n-1)))
        koeff[lower.tri( koeff, T)] <-  A
        koeff[upper.tri( koeff, F)] <- -B

        # Berechnen von n^(3/2)*||T_n^z||.
        Tzentr <- max( abs( koeff %*% indi))
    }

    # Rückgabe von n^(3/2)*T_n^klass und n^(3/2)*T_n^z, je nach Bestellung.
    c( klass= Tklass, zentr= Tzentr)
}

Kernwerte <- function( daten, kerne){
```

```
    # Berechnen einer Tabelle, die alle Werte K( e_i, e_j) für i, j= 1, ..., n enthält
    # (wobei ( e_1, ..., e_n) = daten ist).
    # Gespeichert werden die in einem Array, wobei die Zeilen den Kernen entsprechen.

    n <- length( daten)

    # Falls kerne nur eine einzelne Funktion ist, mach eine Liste daraus,
    # die diese Funktion enthält, und gib dem einzelnen Kern einen Namen.
    if( is.function( kerne)){
        name <- c( deparse( substitute( kerne)))
        kerne <- c( kerne)
        names( kerne) <- name[1]
    }
    # Falls die Kerne keine Namen haben, gib ihnen welche.
    if( is.null( names( kerne))){ names( kerne) <- paste( "Kern", 1:length( kerne), sep= "")}

    # Berechnen der genannten Tabelle, die alle Werte K( e_i, e_j) für i, j= 1, ..., n enthält.
        Kernwerttabelle <- array( dim= c( length( kerne), n, n),
                                  dimnames= list( kern= names( kerne), NULL, NULL))
        for( kern in names( kerne)){
            Kernwerttabelle[ kern,,] <- outer( daten, daten, FUN= kerne[[ kern]])
        }
    Kernwerttabelle
}

rStat <- function( daten, kerne, klass= TRUE, zentr= TRUE,
                   tvektor= NULL, uvektor= NULL, Kernwerttabelle= NULL){
    # Übergib die Daten und einen Vektor mit den Kernen.
    # Man kann die Teststatistiken an- und abbestellen, indem man
    # klass und zentr auf TRUE und FALSE setzt.
    # Optionale Übergabe der Vektoren mit den Lagrangemultiplikatoren zur Beschleunigung,
    # wenn die dadurch für eine Simulation nicht mehrmals berechnet werden müssen.
    # Gleiches gilt für die Übergabe der "Kernwerttabelle".

    n <- length( daten)
    # Diese Zeilen bereiten eventuell die Liste mit den Kernen auf.
    # Steht zwar genauso in der Funktion Kernwerttablle, muß hier aber auch stehen,
    # falls man den Test, der diese Statistik verwendet, manuell aufruft.
    if( is.function( kerne)){
        name <- c( deparse( substitute( kerne)))
        kerne <- c( kerne)
        names( kerne) <- name[1]
    }
    if( is.null( names( kerne))){ names( kerne) <- paste( "Kern", 1:length( kerne), sep= "")}

    # eventuell nötiges Erzeugen der Vektoren der Lagrangemultiplikatoren.
    if( zentr == TRUE){
        if( is.null( tvektor) | is.null( uvektor)){
            tvektor <- tvek( daten)
            uvektor <- tvek( rev( daten))
        }
    }

    # Berechnen einer Tabelle, die alle Werte K( e_i, e_j) für i, j= 1, ..., n enthält
```

```
    # (wobei ( e_1, ..., e_n) = daten ist).
    # Gespeichert werden die in einem Array, wobei die Zeilen den Kernen entsprechen.
    if( is.null( Kernwerttabelle)){
        Kernwerttabelle <- Kernwerte( daten, kerne)
    }

    # Berechnen einer Tabelle mit einer Spalte für jeden Kern, wo in jeder Zeile die
    # Werte der U-Typ-Statistik n^(3/2)*r_n^klass(k/n) beziehungsweise n^(3/2)*r_n^z(k/n)
    # gespeichert sind, k ist die Zeilennummer.
    if( klass == TRUE){
        UVektorklass <- matrix( nrow= n-1, ncol= ( length( kerne)),
                                dimnames= list( NULL, names( kerne)))
    }
    if( zentr == TRUE){
        UVektorzentr <- matrix( nrow= n-1, ncol= ( length( kerne)),
                                dimnames= list( NULL, names( kerne)))
    }
    for( i in 1:( n-1)){
        Kernwerte_teil <- array( Kernwerttabelle[ ,1:i, (i+1):n],
                                 dim= c( length( kerne), i, n-i))
        if( klass == TRUE){
            UVektorklass[ i, ] <- apply( Kernwerte_teil, 1, sum)
        }
        if( zentr == TRUE){
            Gewichtskorrtabelle <- outer( 1/( 1 + tvektor[ i] * daten[ 1:i]),
                                          1/( 1 + uvektor[ n-i] * daten[ (i+1):n]),
                                          FUN= "*")
            Kernwerte_teil <- array( as.vector( Kernwerte_teil)*
                                                      rep( as.vector( Gewichtskorrtabelle),
                                                           each= length( kerne)),
                                     dim= c( length( kerne), i, n - i))
            UVektorzentr[ i, ] <- apply( Kernwerte_teil, 1, sum)
        }
    }

    # Berechen der Statistiken n^(3/2)*||r_n^klass|| respektive n^(3/2)*||r_n^z||.
    rklass <- NULL
    if( klass == TRUE){
        rklass <- apply( UVektorklass, 2, function( x){ max( abs( x))})
    }
    rzentr <- NULL
    if( zentr == TRUE){
        rzentr <- apply( UVektorzentr, 2, function( x){ max( abs( x))})
    }

    # Ausgabe einer Tabelle mit den Werten von n^(3/2)*||r_n^klass|| und n^(3/2)*||r_n^z||,
    # je nach Bestellung, die Spalten entsprechen den Kernen,
    # die Zeilen "klass" beziehungsweise "zentr".
    rbind( klass= rklass, zentr= rzentr)
}

Stat <- function( daten, kerne= NULL, TStat= TRUE, rStat= !is.null( kerne),
                  klass= TRUE, zentr= TRUE, klasskoeff= NULL, kvektor= NULL,
                  tvektor= NULL, uvektor= NULL, Kernwerttabelle= NULL){
```

```
    # Gibt eine Tabelle mit den ganzen Teststatistiken zurück,
    # ab hier um den Faktor n^(3/2) korrigiert.

    # Zuerst einem eventuell einzelnen Kern einen Namen geben.
    if( !is.null( kerne)){
        if( is.function( kerne)){
            name <- c( deparse( substitute( kerne)))
            kerne <- c( kerne)
            names( kerne) <- name[1]
        }
    }
    n <- length( daten)
    # Statistik die auf sequentiellen empirischen Verteilungsfunktionen beruht
    TStatistik <- NULL
    if( TStat == TRUE){
        TStatistik <- TStat( daten, klass, zentr, klasskoeff, kvektor, tvektor, uvektor)
    }
    # U-Typ-Statistik
    rStatistik <- NULL
    if( rStat == TRUE){
        rStatistik <- rStat( daten, kerne, klass, zentr, tvektor, uvektor, Kernwerttabelle)
    }

    # Rückgabe der um den Faktor n^(3/2) korrigierten Statistiken.
    cbind( T= TStatistik, r= rStatistik) / ( sqrt( n) * n)
}

############################## Berechnung der kritischen Werte ###############################

BBQuantile <- function( niveau= c( .10, .05, .01)){
    # Quantilfunktion zum Maximum vom Betrag einer Brownschen Brücke (Kolmogorovverteilung).
    # Gibt zu den Werten in niveau passende Quantile zurück
    # oder NA wenn die Quantile nicht in der Tabelle sind.
    BB <- function( x){
        PWerte <- c(  .10,  .05,  .01)
        QWerte <- c( 1.22, 1.36, 1.63)
        Quantil <- QWerte[ PWerte == x]
        if( length( Quantil) == 1){ Quantil}else{ NA}
    }
    BBV <- Vectorize( BB)
    BBV( niveau)
}

TklassQuantile <- function( niveau= c( .10, .05, .01), n= Inf){
    # Quantilfunktion von sqrt( n)*||T_n^klass||.
    # n ist der Stichprobenumfang, für n=Inf wird der größte gewählt.
    # Das n darf nur eine einzelne Zahl sein, niveau kann ein Vektor sein.
    Tk <- function( x, n){
        TkMat <- cbind( c( .632, .664, .759),
                        c( .671, .716, .805),
                        c( .694, .742, .852),
                        c( .712, .759, .874),
                        c( .710, .775, .888),
                        c( .724, .785, .902),
```

```
                    c( .736, .795, .912),
                    c( .750, .810, .930),
                    c( .756, .816, .938),
                    c( .762, .823, .945),
                    c( .768, .829, .951))
        TkMatRow <- c( .10, .05, .01)
        TkMatCol <- c( 10, 20, 30, 40, 50, 70, 100, 200, 300, 500, 1000)
        dimnames( TkMat) <- list( TkMatRow, TkMatCol)
        if( n== Inf){ n <- max( TkMatCol)}
        Quantil <- TkMat[ TkMatRow == x, TkMatCol == n]
        if( length( Quantil) == 1){ Quantil}else{ NA}
    }
    TkV <- Vectorize( Tk)
    if( length( n) == 1){ TkV( niveau, n)}else{ NA}
}

kW <- function( daten, kerne= NULL, TStat= TRUE, rStat= !is.null( kerne),
                klass= TRUE, zentr= TRUE, niveau= c( .10, .05, .01),
                adjustiert= TRUE, t_n= NULL, pvektor= NULL, Kernwerttabelle= NULL){
    # Berechnen von kritischen Werten für die Teststatistiken,
    # OHNE die Verwendung von Bootstrapverfahren.
    # Für sqrt(n)*||T_n^klass|| sind dies einfach die Quantile des Maximums des Betrages einer
    # zweidimensionalen Brownschen Brücke, was der Grenzverteilung von sqrt(n)*||T_n^klass||
    # für n gegen unendlich entspricht (werden durch TklassQuantile bereitgestellt und sind
    # nicht wirklich die Quantile der Grenzverteilung, die sind mir nicht bekannt).
    # Mit adjustiert= TRUE kann man für diesen Test mit sqrt(n)||T_n^klasss|| an den
    # Stichprobenumfang angepasste kritsche Werte bestellen (da sqrt(n)*||T_n^klass||
    # im iid-Fall verteilungsfrei ist).
    # Für T_n^z gibt es keine, für die wird immer NA zurückgegeben.
    # Für r_n^klass und r_n^z wird der Vorfaktor von der Brownschen Brücke in der
    # Grenzverteilung geschätzt, und damit kritsche Werte berechnet.

    # Zunächst die Kerne benennen, falls noch nicht geschehen.
    if( is.function( kerne)){
        name <- c( deparse( substitute( kerne)))
        kerne <- c( kerne)
        names( kerne) <- name[1]
    }
    if( is.null( names( kerne))){ names( kerne) <- paste( "Kern", 1:length( kerne), sep= "")}

    # Berechnen der kritischen Werte für T_n^klass und T_n^z.
    kWTklass <- NULL
    kWTzentr <- NULL
    if( TStat == TRUE){
        if( klass == TRUE){
            if( adjustiert == TRUE){
                N <- length( daten)
            }else{
                N <- Inf
            }
            kWTklass <- TklassQuantile( niveau= niveau, n= N)
        }
        if( zentr == TRUE){
            kWTzentr <- rep( NA, times= length( niveau))
```

```
        }
    }
    # Berechnen der kritischen Werte für r_n^klass und r_n^z.
    rkW <- NULL
    if( rStat == TRUE){
        n <- length( daten)
        # Berechnen der Kernwerttabelle, falls nicht vorhanden.
        if( is.null( Kernwerttabelle)){
            Kernwerttabelle <- Kernwerte( daten , kerne)
        }
        # Berechnen des Vorfaktors der Brownschen Brücke der Grenzfunktion
        # von der klassischen Teststatistik.
        VFklass <- NULL
        if( klass == TRUE){
            EKe1e2Ke2e3klass <- apply( Kernwerttabelle, 1,
                                       function( x){ -sum( x %*% x)}) / (n*n*n)
            VFklass <- sqrt( abs( EKe1e2Ke2e3klass))
        }
        # Berechnen des Vorfaktors der Brownschen Brücke der Grenzfunktion
        # von der zentrierten Teststatistik.
        VFzentr <- NULL
        if( zentr == TRUE){
            # Falls noch nötig berechnen des Vektors mit den Gewichten.
            if( is.null( pvektor)){
                if( is.null( t_n)){ t_n <- lt( daten)}
                pvektor <- 1/( n * ( 1 + t_n * daten))
            }
            sigmaquadr  <- sum( pvektor * daten * daten)
            EKe1e2Ke2e3zentr <- apply( Kernwerttabelle, 1,
                                       function( x, y, m){
                                           -sum( ( y*x) %*% (y*x*rep( y, each=m)))
                                       },
                                       y= pvektor, m= n)
            Ee1Ke1e2zentr <- apply( Kernwerttabelle, 1,
                                    function(x, d, y, m){
                                        sum(d %*% (y*x*rep( y, each=m)))
                                    },
                                    d= daten, y= pvektor, m= n)
            VFzentr <- sqrt( abs( EKe1e2Ke2e3zentr - Ee1Ke1e2zentr*Ee1Ke1e2zentr / sigmaquadr))
        }
        VF <- rbind( klass= VFklass, zentr= VFzentr)
        # Berechnen der kritischen Werte.
        rkW <- outer( BBQuantile( niveau), as.vector( VF), "*")
        colnames( rkW) <- paste( rep( colnames( VF), each= nrow( VF)),
                                 rep( rownames( VF), times= ncol( VF)),
                                 sep=".")
    }
    kritW <- cbind( T.klass= kWTklass, T.zentr= kWTzentr, rkW)
    rownames(kritW) <- paste( "asymptot.", prettyNum( niveau*100), "%", sep= "")

    kritW
}

bootvar <- function( daten, bootstrapumfang, zentr= !(is.null( pvektor) & is.null( t_n)),
```

```
                    pvektor= NULL, t_n= NULL){
    # Erzeugen von Bootstrapdaten.
    # Ausgabe in Form einer Matrix mit einer der Vektorlängen von daten entsprechenden Anzahl
    # von Zeilen und mit soviel Spalten wie in bootstrapumfang angegeben (Anzahl der
    # Bootstrapwiederholungen).
    # Die Daten werden einfach resampelt (nach F_n), falls zentr= FALSE,
    # und zentriert resampelt (nach F_n^z), falls zentr= TRUE.
    # Optional kann im Fall zentr= TRUE der Lagrangemultiplikator t_n oder
    # der Vektor pvektor mit den Gewichten für die Elemente von daten übergeben werden,
    # um es nicht neu berechnen zu müssen.

    n <- length( daten)
    if( zentr == FALSE){
        pvektor <- NULL
    }else{
        if( is.null( pvektor)){
            if( is.null( t_n)){
                t_n <- lt( daten)
            }
            pvektor <- 1/( n * (1 + t_n*daten))
        }
    }
    matrix( sample( daten, size= n*bootstrapumfang, replace= TRUE, prob= pvektor), nrow= n)
}

bootkW <- function( daten, kerne= NULL, TStat= TRUE, rStat= !is.null( kerne), klass= TRUE,
                   zentr= !is.null( pvektor), niveau= c( .10, .05, .01), bootstrapumfang= 1000,
                   kvektor= NULL, klasskoeff= NULL, pvektor= NULL, t_n= NULL){
    # Erzeugen von kritischen Werten mittels Bootstrapverfahren.
    # Möglich bei allen betrachteten Tests.
    # Optionale Übergabe schon bekannter Größen wie gehabt.

    # Überprüfen, wie viele Teststatistiken (klass oder zentr getrennt) berechnet werden,
    # weil im Fall nur einer Statistik später die Ausgabe einer Funktion ein Vektor
    # und keine Matrix ist, und deshalb keine Dimensionen hat, die müssen explizit
    # zugewiesen werden um apply anwenden zu können.
    if( rStat == FALSE | ( TStat == FALSE & length( kerne) == 1)){
        nurEine <- TRUE  # nur eine klassische oder zentrierte Statistik wird berechnet
        if( rStat == TRUE){
            StatName <- if( is.null( names( kerne))){ "r"}else{ names( kerne)}
        }else{
            StatName <- "T"
        }
    }else{
        nurEine <- FALSE # mehrere klassische oder mehrere zentrierte Statistiken
    }
    # Erzeugen von kritischen Werten mittels Bootstrapverfahren, klassische Tests.
    bootklasskW <- NULL
    if( klass == TRUE){
        #Eventuell nötiges Erzeugen der Matrix klasskoeff.
        if( TStat == TRUE){
            n <- length( daten)
            if( is.null( kvektor)){ kvektor <- kvek( n)}
            if( is.null( klasskoeff)){ klasskoeff <- klasskoeffm( n)}
```

```
    }
    # Erzeugen von identisch gewichteten Bootstrapdaten.
    Bootstrapdaten <- bootvar( daten, bootstrapumfang, zentr= FALSE)
    # Berechnet eine Tabelle mit den Statistiken der klassischen Tests.
    # Zeilen: die unterschiedlichen Tests, Spalten: die Bootstrapwiederholungen.
    BootstrapStatistiken <- apply( Bootstrapdaten, 2,
                                function(x) Stat( x, kerne= kerne, TStat= TStat,
                                                  rStat= rStat, klass= TRUE,
                                                  zentr= FALSE, klasskoeff= klasskoeff,
                                                  kvektor= kvektor, tvektor= NULL,
                                                  uvektor= NULL,
                                                  Kernwerttabelle= NULL)[1,])
    # Transponieren, wenn nur eine Statistik berechnet wird
    if( nurEine){
        BootstrapStatistiken <- t( BootstrapStatistiken)
        rownames( BootstrapStatistiken) <- StatName
    }
    # Berechnen der Quantile.
    bootklasskW <- apply( BootstrapStatistiken, 1,
                          function( x) quantile( x, probs= niveau, type= 1))
    colnames( bootklasskW) <- paste( colnames( bootklasskW), "klass", sep= ".")
}
# Erzeugen von kritischen Werten mittels Bootstrapverfahren, zentrierte Tests.
bootzentrkW <- NULL
if( zentr == TRUE){
    # Eventuell nötiges Erzeugen des Vektors kvektor.
    if( TStat == TRUE & is.null( kvektor)){ kvektor <- kvek( n)}
    # Erzeugen von zentriert gewichteten Bootstrapdaten.
    if( is.null( pvektor)){
        if( is.null( t_n)){
            t_n <- lt( daten)
        }
        pvektor <- 1/( n* (1 + t_n*daten))
    }
    Bootstrapdaten <- bootvar( daten, bootstrapumfang, zentr= TRUE, pvektor)
    # Berechnet eine Tabelle mit den Statistiken der zentrierten Tests.
    # Zeilen: die unterschiedlichen Tests, Spalten: die Bootstrapwiederholungen.
    BootstrapStatistiken <- apply( Bootstrapdaten, 2,
                                function(x) Stat( x, kerne= kerne,
                                                  TStat= TStat, rStat= rStat,
                                                  klass= FALSE, zentr= TRUE,
                                                  klasskoeff= NULL, kvektor= kvektor,
                                                  tvektor= NULL, uvektor= NULL,
                                                  Kernwerttabelle= NULL)[1,])
    # Transponieren, wenn nur eine Statistik berechnet wird.
    if( nurEine){
        BootstrapStatistiken <- t( BootstrapStatistiken)
        rownames( BootstrapStatistiken) <- StatName
    }
    # Berechnen der Quantile.
    bootzentrkW <- apply( BootstrapStatistiken, 1,
                          function( x) quantile( x, probs= niveau, type= 1))
    colnames( bootzentrkW) <- paste( colnames( bootzentrkW), "zentr", sep= ".")
}
```

```
    kritW <- matrix( rbind( bootklasskW, bootzentrkW), nrow= length( niveau))
    colnames( kritW) <- as.vector(rbind( colnames( bootklasskW), colnames( bootzentrkW)))
    rownames( kritW) <- paste( "Bootstrap", prettyNum( niveau*100), "%", sep= "")

    kritW
}

################### Ausführen der Tests (verwerfen oder nicht verwerfen) ####################

Tests <- function( daten, kerne= NULL, TStat= TRUE, rStat= !is.null( kerne),
                   klass= TRUE, zentr= TRUE, asymptotisch= TRUE, Bootstrap= TRUE,
                   bootstrapumfang= 1000, adjustiert= TRUE, niveau= c( .10, .05, .01),
                   kvektor= NULL, klasskoeff= NULL){
    # Durchführung der gewünschten Tests.
    # Der Vektor daten enthält die Daten (Residuen aus dem ARMA-Modell oder iid).
    # In kerne sind die bei den U-Typ-Statistiken gewünschten Kerne in einem Vektor respektive
    # einer Liste zu übergeben.
    # TStat= TRUE bestellt den auf sequentiellen Verteilungsfunktioenen beruhenden Omnibustest,
    # rStat= TRUE die auf U-Typ-Statistiken beruhenden Tests entsprechend der gewünschten Kerne.
    # Mit klass= TRUE und zentr= TRUE werden die Tests ohne und mit expliziter Berücksichtigung
    # der Zentriertheit angefordert.
    # Mit asymtotisch= TRUE werden, falls möglich, kritische Werte ohne Bootstrap berechnet,
    # mit Bootstrap= TRUE werden kritische Werte mit Bootstrapverfahren erzeugt, was bei
    # großem Stichprobenumfang lange dauern kann.
    # Die Anzahl der Wiederholungen in bootstrapumfang sollte nicht unter 1000 liegen.
    # Beim klassischen Test mit der TStat-Statistik kann bei den ohne Bootstrap erzeugten
    # kritischen Werten durch adjustiert= TRUE die Verwendung von an den Stichprobenumfang
    # angepassten kritischen Werte veranlasst werden.
    # Falls schon berechnet, können zur Zeitersparnis kvektor und klasskoeff übergeben werden.

    # Berechnen der Vektoren mit den Lagrangevektoren.
    tvektor <- NULL
    uvektor <- NULL
    if( zentr == TRUE){
        tvektor <- tvek( daten)
        uvektor <- tvek( rev( daten))
        if( rStat == TRUE){
            t_n <- lt( daten)
            pvektor <- 1/( n * (1 + t_n*daten))
        }
    }

    # Eventuell notwendiges Erzeugen des Vektors kvek und der Matrix klasskoeff.
    n <- length( daten)
    if( TStat == TRUE){
        if( is.null( kvektor)){ kvektor <- kvek( n)}
        if( klass == TRUE & is.null( klasskoeff)){
            klasskoeff <- klasskoeffm( n)
        }
    }

    Kernwerttabelle<- NULL
    # Falls U-Typ-Statistik-Tests gewünscht sind, wird hier
    # die Tabelle mit den Kernwerten berechnet.
```

```
    if( rStat == TRUE){
        # Bereite zunächst die Liste der Kerne auf.
        if( is.function( kerne)){
            name <- c( deparse( substitute( kerne)))
            kerne <- c( kerne)
            names( kerne) <- name[1]
        }
        if( is.null( names( kerne))){
            names( kerne) <- paste( "Kern", 1:length( kerne), sep= "")
        }
        if( any( names( kerne) == "T") & TStat == TRUE){ stop( "Es darf kein Kern T heißen.")}
        # Berechne die Kernwerte.
        Kernwerttabelle <- Kernwerte( daten, kerne)
    }

    # Berechnen der Teststatistiken.
    Teststatistiken <- as.vector( Stat( daten, kerne= kerne, TStat= TStat, rStat= rStat,
                                        klass= klass, zentr= zentr, klasskoeff= klasskoeff,
                                        kvektor= kvektor, tvektor= tvektor, uvektor= uvektor,
                                        Kernwerttabelle= Kernwerttabelle))

    # Berechnen der kritischen Werte.
    asykritW <- NULL
    if( asymptotisch == TRUE){
        asykritW <- kW( daten, kerne= kerne, TStat= TStat, rStat= rStat,
                        klass= klass, zentr= zentr, niveau= niveau, adjustiert= adjustiert,
                        t_n= t_n, pvektor= pvektor, Kernwerttabelle= Kernwerttabelle)
    }
    bootkritW <- NULL
    if( Bootstrap == TRUE){
        bootkritW <- bootkW( daten, kerne= kerne, TStat= TStat, rStat= rStat,
                             klass= klass, zentr= zentr, niveau= niveau,
                             bootstrapumfang= bootstrapumfang, kvektor= kvektor,
                             klasskoeff= klasskoeff, pvektor= pvektor, t_n= t_n)
    }
    kritW <- rbind( bootkritW, asykritW)

    # Durchführen der Tests.
    TestStat <- matrix( rep( Teststatistiken, each= nrow( kritW)), nrow= nrow( kritW))
    dimnames( TestStat) <- dimnames( kritW)
    verwerfen <- TestStat >= kritW
    verwerfen
}

######################## Bestimmung des Anteils der Verwürfe der Tests ########################

relativeverwuerfe <- function( Datenmatrix, bootstrapwiederholungen= 1000){
    # Gibt die relative Anzahl der Verwürfe der Hypothese an.
    # Datenmatrix ist Matrix mit den Beobachtungen der iid-Fehlervariablen oder der Residuen,
    # die Anzahl der Zeilen ist gleich dem Stichprobenumfang,
    # die Anzahl der Spalten ist gleich der Anzahl der Wiederholungen der Tests.

    n <- nrow( Datenmatrix) # n = Stichprobenumfang
```

```
klass <- TRUE           # klassische Tests
zentr <- TRUE           # zentrierte Tests

TStat <- TRUE           # Tests mit der zentrierten sequentiellen Verteilungsfunktion
rStat <- TRUE           # Tests mit den U-Typ-Statistiken, Kerne siehe unten

adjustiert <- TRUE      # asymptotische kritische Werte für sqrt(n)*||T_n^klass||
                        # an Stichprobenumfang adjustieren

asymptotisch <- TRUE    # Tests mit ohne Bootstrap bestimmten kritischen Werten
Bootstrap <- n <= 200   # Bootstraptests, dauern sehr lang bei großem Stichprobenumfang

niveau <- c( .10, .05, .01) #Testniveaus


Varkern <- function( x, y)( x*x - y*y)
M3kern  <- function( x, y)( x*x*x - y*y*y)
M4kern  <- function( x, y)( x*x*x*x - y*y*y*y)
Wxkern  <- function( x, y)( ( x>y)- ( x<y))
Phkern  <- function( x, y)( 2*pnorm( x-y) - 1)
kerne   <- c( M2= Varkern, M3= M3kern, M4= M4kern, Wx= Wxkern, Ph= Phkern)

kvektor <- kvek( n)
klasskoeff <- klasskoeffm( n)

Testergebnisse <- apply( Datenmatrix, 2,
                         function(x) Tests( x, kerne= kerne, TStat= TStat, rStat= rStat,
                                            klass= klass, zentr= zentr,
                                            asymptotisch= asymptotisch,
                                            Bootstrap= Bootstrap,
                                            bootstrapumfang= bootstrapwiederholungen,
                                            adjustiert= adjustiert, niveau= niveau,
                                            kvektor= kvektor, klasskoeff= klasskoeff))
Ergebnis <- rowMeans( Testergebnisse)


Ergebnis <- matrix( Ergebnis, nrow= length( niveau)*( asymptotisch + Bootstrap))
rownames( Ergebnis) <-
    paste(
        rep(
            c(     if( Bootstrap){ "Bootstrap"},
                if( asymptotisch){ "asymptot."}),
            each= length( niveau)),
        prettyNum( niveau*100), "%", sep= "")
colnames( Ergebnis) <-
    paste(
        rep(
            c(  if( TStat){ "T"},
                if( rStat){
                    if( is.function( kerne)){
                        name <- c( deparse( substitute( kerne)))
                        kerne <- c( kerne)
                        names( kerne) <- name[1]
                    }
```

```
                        if( is.null( names( kerne))){
                            names( kerne) <- paste( "Kern", 1:length( kerne), sep= "")
                        }
                        names( kerne)
                    }),
                each= ( klass + zentr)),
            c( if( klass){ "klass"}, if( zentr){ "zentr"}),
            sep=".")

    Ergebnis
}


###################### Simulation zu verschiedenen Stichprobenumfängen ######################

nvek <- c( 10, 20, 30, 40, 50, 100, 200, 300, 500, 1000)
tau <- 1            # kein Changepoint: tau= 1
rho <- .5
theta <- .3
wiederholungen <- 1000
bootstrapwiederholungen <- 1000
Verteilung1 <- function(n){ rnorm( n) }
Verteilung2 <- function(n, m){
    p <- 1/20; q <- 1-p; a <- 4.35; b <- -p/q*a; s <- sqrt( 1 - p*a*a - q*b*b); d <- 5
    mvek <- sample( x= c( 0, a, b), size= n, replace=TRUE ,
                    prob= c( 1 - d/sqrt( m) , p*d/sqrt( m), q*d/sqrt( m)))
    rnorm( n)*( 1 + (s-1)*(!mvek==0) ) + mvek
}

for( n in nvek){
print("-------------------------------------------------------------")
print(paste( "n= " , n, sep=""))
Fehlerfolge <- function(){ c( Verteilung1( n= 1 + trunc( n* tau)),
                              Verteilung2( n= n - trunc( n* tau), m= n))}
Datenmatrix <- matrix( replicate( wiederholungen, Fehlerfolge()), nrow= length( Fehlerfolge()))
Datenmatrix <- apply( Datenmatrix, 2, function(e) Res( e, x0= 0, rho, theta))
Ergebnis <- relativeverwuerfe( Datenmatrix, bootstrapwiederholungen)
print( Ergebnis)
print("-------------------------------------------------------------")
}

###############################################################################################
######## Bestimmung der kritischen Werte für die klassische Statistik sqrt(n)||T_n^d|| ########
###############################################################################################

TnQuant <- function( Wiederholungen, n){
    # Simulation der Quantile der Verteilung der klassischen Statistik sqrt(n)*||T_n||.
    # Dient zur Bestimmung der kritischen Werte k_{n,alpha}^{T,klass}, welche an den
    # Stichprobenumfang angepasst sind.
    # Eingabe: Stichprobenumfang = n,
    #          Anzahl der Realisierungen von sqrt(n)*||T_n|| = Wiederholungen.
    # Ausgabe: empirische Quantile der genannten Verteilung.
    # Es wird die Hilfsfunktion "klasskoeffm" und dadurch auch "kvek" verwandt (siehe oben).
```

```
    klasskoeff <- klasskoeffm( n)
    NF <- 1 / ( sqrt(n)*n)

    Ergebnis <- numeric( Wiederholungen)

    for( i in ( 1:Wiederholungen)){

        daten <- runif( n)
        Ergebnis[ i] <- max( abs( klasskoeff %*% outer( daten, daten, FUN= "<="))) * NF

    }

    quantile( x= Ergebnis, probs= c( ( 1:99)/100))
}


nvek <- c( 10, 20, 30, 40, 50, 70, 100, 200, 300, 500, 1000)

for( n in nvek){
    print( paste( "n=", n))
    Ergebnis <- TnQuant( Wiederholungen=1000000, n= n)
    print( Ergebnis)
}

###############################################################################################
############## Geschätzte asymptotische Güte der Tests mit den U-Typ-Statistiken ##############
###############################################################################################

BBGüte <- function( Wiederholungen, SV= (1:AnzahlStützstellen)/( AnzahlStützstellen + 1),
                    AnzahlStützstellen= NULL, VF= NULL){
    # Simuliert Randverteilungen von Brownschen Brücken und addiert Erwartungswertvektoren.
    # Berechnet die empirische Verteilungsfunktion von der in "Wiederholungen" angegebenen
    # Anzahl von Realisierungen des Maximums des Betrages hiervon.
    # Berechnet auch die empirische Quantilfunktion des Maximums des Betrages der
    # Randverteilungen der Brownschen Brücken (zum Abschätzen der Qualität der Näherung, da die
    # Verteilungsfunktion hiervon bekannt ist).
    # Zur Simulation der asymptotischen Testgüte bei den U-Typ-Statistiken.
    # Als Changepoints werden gewählt: 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5;
    # die Werte entsprechen auch den Changepoints zu 0,9; 0,8; 0,7; 0,6 und 0,5.
    # Eingabe: Anzahl der simulierten Realisierungen = "Wiederholungen".
    #          Anzahl der Stützstellen für die Randverteilungen in "AnzahlStützstellen",
    #          alternativ den Stützvektor "SV", z. B. wenn die Stützstellen nicht gleichmäßig
    #          verteilt sein sollen.
    #          Vektor von Vorfaktorquotienten m/v der Skalenfaktoren m und v, in Vektor "VF"
    # Ausgabe: Empirischen Quantile der Realisierungen der Brownschen Brücke in "BBQuantile".
    #          Schätzwerte für die asymtotische Güte zu den Niveaus 10%, 5% und 1%,
    #          einmal mit den geschätzten Quantilen des Maximums des Betrages der Brownschen
    #          Brücke in "Power",
    #          und einmal mit den festen unten angegebenen Werten für diese Quantile,
    #          in "Power_fest".

    AnzahlSS <- length( SV)
    Gitterweite <- c( SV[ 1], diff( SV))
    SDVektor <- sqrt( Gitterweite)
```

```
Werte <- numeric( Wiederholungen)

# erster Faktor der Erwartungswertfunktion der Grenzverteilung unter der Alternativenfolge
MWF <- function( lambda, s){ lambda*s-min(lambda,s)}
MWV <- Vectorize( MWF)
CP.1 <- MWV( .1, SV)
CP.2 <- MWV( .2, SV)
CP.3 <- MWV( .3, SV)
CP.4 <- MWV( .4, SV)
CP.5 <- MWV( .5, SV)

# Erwartungswertvektoren für alle möglichen Kombinationen der Changepoints und
# Vorfaktorquotienten m/v
MWG.1 <- CP.1 %*% t( VF)
colnames( MWG.1) <- paste( "CP.1.VF", VF, sep= ".")
MWG.2 <- CP.2 %*% t( VF)
colnames( MWG.2) <- paste( "CP.2.VF", VF, sep= ".")
MWG.3 <- CP.3 %*% t( VF)
colnames( MWG.3) <- paste( "CP.3.VF", VF, sep= ".")
MWG.4 <- CP.4 %*% t( VF)
colnames( MWG.4) <- paste( "CP.4.VF", VF, sep= ".")
MWG.5 <- CP.5 %*% t( VF)
colnames( MWG.5) <- paste( "CP.5.VF", VF, sep= ".")
MWG <- cbind( MWG.1, MWG.2, MWG.3, MWG.4, MWG.5)

# Matrix mit den Erwartungswertvektoren:
# in den Zeilen die Stützstellen,
# in den Spalten die Changepoints und Vorfaktorquotienten, nach Name.
WerteM <- matrix( nrow= Wiederholungen, ncol= ncol(MWG))
colnames( WerteM) <- colnames( MWG)

# Simulieren von Realisierungen von Randverteilungen von Brownschen Brücken
# als kumulierte Summen Brownscher Bewegungen.
# Speichern des Maximums hiervon in Vektor "Werte".
# Addieren der Matrix mit den Erwartungswertvektoren,
# Speichern der Maxima der Beträge in der Matrix "WerteM".
for( i in 1:Wiederholungen){
    BB <- rnorm( n= AnzahlSS, sd= SDVektor )
    BB <- cumsum( BB)
    BB <- BB - ( BB[ AnzahlSS] + rnorm( n= 1, sd= sqrt( 1 - SV[ AnzahlSS])) )*SV
    BB1 <- BB + MWG
    WerteM[ i,] <- apply( abs( BB + MWG), 2, FUN= max)
    Werte[ i] <- max( abs( BB))
}

# Berechnen der empirischen Quantilfunktion der Realisierungen der Brownschen Brücke.
BBQuantile <- quantile( x= Werte, probs= c( ( 1:99)/100))

# Erzeugen von benannten Matrizen zur Speicherung der Ergebnisse.
Power <- matrix( nrow= 3, ncol= ncol( WerteM))
colnames( Power) <- colnames( WerteM)
rownames( Power) <- paste( c( 90, 95, 99), round( c( BBQuantile[ 90], BBQuantile[ 95],
                                                     BBQuantile[ 99]), 3              ),
                          sep= "%")
```

```
    Power_f <- matrix( nrow= 3, ncol= ncol( WerteM))
    colnames( Power_f) <- colnames( WerteM)
    rownames( Power_f) <- paste( c( 90, 95, 99), c( 1.22, 1.36, 1.63), sep= "%")

    for( i in 1:ncol(WerteM)){
        EDF <- ecdf( WerteM[ ,i])
        # Berechnen der geschätzten asymptotischen Güte mit den Quantilen
        # aus der Simulation oben.
        Power[1, i] <- 1 - EDF( BBQuantile[ 90])
        Power[2, i] <- 1 - EDF( BBQuantile[ 95])
        Power[3, i] <- 1 - EDF( BBQuantile[ 99])
        # Berechnen der geschätzten asymptotischen Güte mit den bekannten Quantilen.
        Power_f[1, i] <- 1 - EDF( 1.22)
        Power_f[2, i] <- 1 - EDF( 1.36)
        Power_f[3, i] <- 1 - EDF( 1.63)
    }

    list(
        BBQuantile= BBQuantile,
        Power= Power,
        Power_fest= Power_f
    )
}

BBGüte(Wie=4000000, SV= ( 1:50001)/50002, VF= c( 1, 1.5, 2, 2.5, 3))

###############################################################################################
########## Geschätzte asymptotische Güte der Tests mit den Statistiken T_n^z und T_n ##########
###############################################################################################

TGüte <- function( Wiederholungen, N, Gitter, hFunktion_._Gaussdichte, Changepoint,
                       zentr= T){
    # Zur Simulation der asymtotischen Güte bei den Tests mit den Statistiken
    # T_n^z und T_n^klass.
    # Simulation von Näherungen an die Grenzverteilungen W und W_1.
    # Es wird angenommen: unter H0 sind die Fehlervariablen normalverteilt
    # Eingabe:
    #      zentr= T: Grenzprozesse von zentrierter Statistik.
    #      zentr= F: Grenzprozesse von klassischer Statistik.
    #      hFunktion_._Gaussdichte: Produkt von Tangentenfuntion "h" der
    #           Alternativenfolge und Gaußdichte (wird ohnehin multipliziert, und sonst
    #           eventuell numerische Probleme 0/0).
    #      Wiederholungen: Anzahl der Realisierungen die simuliert werden, zur Berechnung
    #                      der empirischen Verteilungs- beziehungsweise Quantilfunktion.
    #      N: Index bei dem die Summen der Karhunen-Loeve-Zerlegung der zweidimensionalen
    #         Brownschen Brücke B_* abgebrochen werden.
    #      Gitter: Vektor mit Stützstellen im Einheitsintervall.
    # Ausgabe:
    #      Quantile: geschätzte Quantilfunktion des Maximums des Betrages des
    #                Grenzprozesses unter der Hypothese.
    #      Power: geschätzte asymptotische Testgüte unter der Alternativenfolge zu den
    #             angegebenen Niveaus.

    # Berechnen des ersten Faktors der Erwartungswertfunktion.
```

```
CPF <- Vectorize( function( lambda, s){ lambda*s-min( lambda, s)})
CPvek <- CPF( Changepoint, Gitter)

# Uh ist der zweite Kaktor der Erwartungswertfunktion.
# Es wird bis zum Quantil qnorm( u) integriert, weil hier mit den auf das Einheitsquadrat
# transformierten stochastischen Prozessen gerechnet wird.
Uh <- Vectorize( function( u){ integrate( function( y){ hFunktion_._Gaussdichte( y)},
                                          lower= -Inf, upper= qnorm( u)
                                        )$value
                             })
Uvekh <- Uh( Gitter)

# Berechnen der Erwartungswertfunktion.
MWF <- outer( CPvek, Uvekh)

# Bereitstellen der Funktion U für die Kovarianzfunktion.
U <- Vectorize( function( x){ integrate( function( y){ y*dnorm( y)},
                                         lower= -Inf, upper= qnorm( x)
                                       )$value
                            })
Uvek <- U( Gitter)

# Hierin werden die Realisierungen von den geschätzten Maxima der Beträge der Grenzprozesse
# unter Hypothese und unter der Alternativenfolge gespeichert.
W0 <- numeric( Wiederholungen)
W1 <- numeric( Wiederholungen)

Sinuswerte <- sin( ( pi * 1:N) %*% t( Gitter))
JKMatrix <- 1/(1:N)
JKMatrix <- ( 2/( pi*pi)) * outer( JKMatrix, JKMatrix)

dist <- diff( Gitter)
distMatrix <- matrix( rep( dist, each= length( Gitter)), nrow= length( Gitter))
dist2 <- diff( qnorm( Gitter))
distMatrix2 <- matrix( rep( dist2, each= length( Gitter)), nrow= length( Gitter))

for( i in 1:Wiederholungen){
    jkAnteil <- JKMatrix * matrix( rnorm( N*N), nrow= N)
    BB <- t( Sinuswerte) %*% jkAnteil %*% Sinuswerte

    Nvek  <- rowSums( BB[ ,-1] * distMatrix2)
    if( zentr == T){
        # Grenzprozess unter der Hypothese bei zentrierter Statistik.
        W <- BB + outer( Nvek, Uvek)
    }else{
        # Grenzprozess unter der Hypothese bei zentrierter Statistik.
        W <- BB
    }
    # Realisierung des Maximums des Betrages der Grenzverteilung unter der Hypothese.
    W0[ i] <- max( abs( W))
    # Realisierung des Maximums des Betrages der Grenzverteilung unter Alternativenfolge.
    W1[ i] <- max( abs( W + MWF))
}
```

```
    Quantile <- quantile( x= W0, probs= c( ( 1:99)/100))

    Power <- numeric( 3)
    names( Power) <- paste( c( 90, 95, 99),
                            round( c( Quantile[ 90], Quantile[ 95], Quantile[ 99]), 3),
                            sep= "%")

    EDF <- ecdf( W1)
    Power[ 1] <- 1 - EDF( Quantile[ 90])
    Power[ 2] <- 1 - EDF( Quantile[ 95])
    Power[ 3] <- 1 - EDF( Quantile[ 99])

    list(
    Quantile= Quantile,
    Power= Power
    )
}

TGüte( Wie= 10000, N= 2500, Gitter= ( 1:2500)/2501, function( x){ 5*( -x*x+1)*dnorm( x)}, .5)

###############################################################################################
######### Analytisch bestimmte asymptotische Güte der Tests mit den U-Typ-Statistiken #########
###############################################################################################

# Es wird hier die Formel aus der Arbeit von Ferger (1991) verwendet, um die
# asymptotische Güte der U-Typ-Statistiken unter benachbarten Alternativen zu bestimmen.

h <- function( k, al, be, a, b){
                  ( exp( -2* ( k    *k    *a*b  + (k-1)*(k-1)*al*be + k*(k-1)*(a*be+al*b) ) )
                   +exp( -2* ( (k-1)*(k-1)*a*b  + k    *k    *al*be + k*(k-1)*(a*be+al*b) ) )
                   -exp( -2* ( k    *(k-1)*a*be + k    *(k+1)*al*b  + k*k    *(a*b+al*be) ) )
                   -exp( -2* ( k    *(k+1)*a*be + k    *(k-1)*al*b  + k*k    *(a*b+al*be) ) )
                  )
                              }

p <- function( m, al, be, a, b) { if( al >= 0 & be >= 0 & a >= 0 & b >= 0){
                                      1 - sum( h( 1:m, al, be, a, b))
                                  }else{
                                      0
                                  }
                                }

P <- Vectorize(p)

g  <- function( quo, lam, c, m){
            lamq <- lam/(1-lam)
            u    <- - lamq*( c + quo*(1-lam))   -   c
            o    <-   lamq*( c - quo*(1-lam))   +   c
            lamti <- lamq^(-1/2)
            integrand <- function( y){ P( m, c, y-u, c, o-y)*
                                       P( m, -lamti*(u-y), lamti*c, lamti*(o-y), lamti*c)*
                                       dnorm( y, sd= sqrt( lamq))
                                     }
            integrate( integrand, lower=u, upper=o)
```

```
            }

guete <- function( quo, lam, alph, m){
# Eingabe: quo:  Quotient der Skalenfaktoren "m/v"
#          lam:  Changepoint
#          alph: Testniveau
#          m:    Anzahl der Summanden nach denen die Reihen im Integral abgebrochen werden
if( alph==.1){cr<-1.224}
if( alph==.05){cr<-1.358}
if( alph==.01){cr<-1.628}
1-g( quo, lam, cr, m)$value
}

Guete <- Vectorize( guete)

Guetetabelle <- function( CP) t( outer( X=(1:30)/2,
                                        Y=c(.1, .05, .01),
FUN=function(x, y)Guete( x, CP, y, 1)) )
lapply( 1:5/10, Guetetabelle)
```

Literaturverzeichnis

1. Araujo, A., und Giné, E. (1980), *The Central Limit Theorem for Real and Banach Valued Random Variables*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto

2. Bai, J. (1994), *Weak convergence of the sequential empirical processes of residuals in ARMA models*, Ann. Statist. **22**, 2051–2061

3. Bickel, P. J., und Wichura, M. J. (1971), *Convergence Criteria for multiparameter stochastic processes and some applications*, Ann. Math. Statist. **42**, 1656–1670

4. Billingsley, P. (1968), *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York

5. Bogachev, V. I. (1998), *Gaussian Measures*, American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs 62

6. Brockwell, P. J., und Davis, R. A. (1991), *Time Series: Theory and Methods*, Second Edition, Springer, New York

7. Brown, B. M. (1971), *Martingale central limit theorems*, Ann. Math. Statist. **42**, 59–66

8. Csörgő, M. und Horváth, L. (1988), *Invariance Principles for Changepoint Problems*, J. Multivariate Anal. **27**, 151–168

9. Davidson, J. (1994), *Stochastic Limit Theory*, Oxford University Press

10. Doob, J. L. (1949), *Heuristic Approach to the Kolmogorov-Smirnov Theorems*, Ann. Math. Statist. **20**, 393–403

11. Durbin, J. (1971), *Distribution Theory for Tests Based on the Sample Distribution Function*, Reg. Conf. Ser. Appl. Math. Vol. 2 SIAM, Philadelphia

12. Ferger, D. (1991), *Nonparametric Changepoint-Detection Based on U-Statistics*, Dissertation, Justus-Liebig-Universität Gießen

13. Ferger, D. (1994a), *An extension of the Csörgő-Horváth functional limit theorem and its application to changepoint problems*, J. Multivariate Anal. **51**, 338–351

14. Ferger, D. (1994b), *Nonparametric change-point tests of the Kolmogorov-Smirnov type*, IMS Lecture Notes **23**, 145–148

15. Ferger, D. (1994c), *On the Power of Nonparametric Changepoint-Tests* Metrika **41**, 277–292

16. Ferger, D. (1995), *Nonparametric tests for nonstandard change-point problems*, Ann. Statist. **23**, 1848–1861

17. Gänßler, P., und Stute, W. (1977), *Wahrscheinlichkeitstheorie*, Springer, Berlin etc.

18. Hörmann, E. (2007), *The Cramér-von Mises Test for Centered Distributions*, Diplomarbeit, Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Universität Gießen

19. Horni, S. (2009), *Die sequentielle empirische Verteilungsfunktion bei zentrierten Populationsverteilungen*, Diplomarbeit, Mathematisches Institut der Justus-Liebig-Universität Gießen

20. Jureckova, J. (1969), *Asymptotic Linearity of a Rank Statistic in Regression Parameter*, Annals of Mathematical Statistics **40**, 1889–1900

21. Kallenberg, O. (1997), *Foundations of Modern Probability*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg

22. Kreiß, J. P., und Neuhaus, G. (2006), *Einführung in die Zeitreihenanalyse*, Springer, Berlin, Heidelberg

23. Lee, A. J. (1990), *U-statistics: theory and practice*, Marcel Dekker Inc., New York

24. Owen, A. B. (1988), *Empirical likelihood ratio confidence intervals for a single functional*, Biometrika **75**, 237–249

25. Owen, A. B. (1990), *Empirical likelihood confidence regions*, Ann. Statist. **18**, 90–120

26. Owen, A. B. (2001), *Empirical Likelihood*, Chapmann & Hall/CRC, Boca Raton etc.

27. Neuhaus, G. (1971), *On weak convergence of stochastic processes with multidimensional time parameter*, Ann. Math. Statist. **42**, 1285–1295

28. Pettitt, A. N. (1979), *A Non-Parametric Approach to the Change-Point Problem*, Appl. Statist. **28**, 126–135

29. Picard, D. (1985), *Testing and Estimating Change-Points in Time Series*, Adv. Appl. Prob. **17**, 841–867

30. Pitt, L. D., und Tran, L. T. (1979), *Local sample path properties of Gaussian fields*, Ann. Probab. **7**, 477–493

31. Qin, J., und Lawless, J. (1994), *Empirical Likelihood and General Estimating Equations*, Ann. Statist. **22**, 300–325

32. R Development Core Team (2010), *R: A language and environment for statistical computing*, R Foundation for Statistical Computing, Wien

33. Schott, J. R. (1997), *Matrix Analysis for Statistics*, Wiley, New York

34. Shorack, G. R., und Wellner, J. A. (1986), *Empirical Processes with Applications to Statistics*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore

35. Smirnov, N. (1948), *Table for Estimating the Goodness of Fit of Empirical Distributions*, Ann. Math. Statist. **19**, 279-281

36. Szyszkowicz, B. (1994), *Weak convergence of weighted empirical type processes under contiguous and changepoint alternatives*, Stoch. Processes Appl. **50**, North-Holland, 281–313

37. Szyszkowicz, B. (1998), *Weighted Sequential Empirical Type Processes with Applications to Change-Point Problems*, in: Handbook of Statistics, Vol. **16**, Balakrishnan, N. und Rao, C. R., Eds., Elsevier Science, 573–630

38. Tsirel'son, J. L. (1975), *The density of the distribution of the maximum of a Gaussian process*, Theory of Probability and its Applications **20**, 847–856

39. van der Vaart, A. W. (1998), *Asymptotic Statistics*, Cambridge University Press, Cambridge, New York, Melbourne

40. van der Vaart, A. W. und Wellner, J. A. (1996), *Weak Convergence and Empirical Processes*, Springer, New York, Berlin, Heidelberg

41. Wichura, M. J. (1969), *Inequalities with applications to the weak convergence of Random Processes with multi-dimensional times parameters*, Ann. Math. Statist. **40**, 681–687

42. Ylvisaker, N. D. (1965), *The Expected Number of Zeros of a Stationary Gaussian Process*, Ann. Math. Statist. **36**, 1043–1046

43. Zhang, B. (1997), *Estimating a distribution function in the presence of auxiliary information*, Metrika **46**, 221–244

Ich erkläre: Ich habe die vorgelegte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt, die ich in der Dissertation angegeben habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der „Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ niedergelegt sind, eingehalten.