

D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung im Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ am **PANDA**-Experiment

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.)
der Justus-Liebig-Universität Gießen
im Fachbereich 07
(Mathematik und Informatik, Physik, Geographie)

Juli 2015

vorgelegt von

Andreas Benjamin Pitka

aus Geislingen an der Steige

II. Physikalisches Institut
Justus-Liebig-Universität Gießen
Heinrich-Buff-Ring 16
35392 Gießen
Deutschland

Dekan:	Prof. Dr. Peter Jens Klar
Prodekan:	Prof. Dr. Ingo Liefner

Betreuer und 1. Gutachter:	Prof. Dr. Kai-Thomas Brinkmann
2. Gutachter:	PD Dr. Jens Sören Lange
3. Prüfer:	Prof. Dr. Horst Lenske
4. Prüfer:	Prof. Dr. Alfred Müller

Kurzdarstellung

Einer der am wenigsten getesteten Aspekte des Standardmodells der Teilchenphysik ist die Verletzung der Teilchen-Antiteilchen-Symmetrie, welche formal die Invarianz bei sukzessiver Anwendung der Ladungskonjugation C und der Raumspiegelung P bricht. Der im heutigen Universum beobachtete Überschuss an Materie gegenüber Antimaterie legt nahe, dass die CP -Invarianz kurz nach dem Urknall bei hohen Energieskalen in einem Umfang verletzt worden ist, den das Standardmodell quantitativ nicht zu erklären vermag. Ein Test der CP -verletzenden Mechanismen des Standardmodells bietet daher hohes Potential die gängige Theorie zu erweitern.

Experimentell gibt es bislang ausschließlich im Bereich der neutralen Mesonen K^0 , B^0 und B_s^0 Evidenz für das Auftreten von CP -Verletzung, im Charm-Quark-Sektor (D^0) konnte diese bislang nicht bestätigt werden. Bei den bekannten Mechanismen der CP -Verletzung handelt es sich neben direkter um sogenannte indirekte CP -Verletzung, die auf physikalisch erlaubten Übergängen zwischen Teilchen und Antiteilchen beruht (z. B. $D^0 \rightarrow \bar{D}^0$) und als solche zeitabhängig ist.

Das zukünftige $\bar{P}$ ANDA-Experiment am FAIR-Komplex in Darmstadt bietet durch seinen Aufbau mit ruhendem Target sowie hoher Orts- und hierdurch bedingter Zerfallszeitauflösung gute Voraussetzungen für eine zeitabhängige Analyse von korrelierten $D^0\bar{D}^0$ -Paaren aus $\psi(3770)$ -Zerfällen.

In der vorliegenden Arbeit wird die Messbarkeit von CP -Verletzung und D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung am $\bar{P}$ ANDA-Experiment in einer zeitabhängigen Dalitz-Diagramm-Analyse des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ untersucht.

Der erste Teil der Arbeit entwickelt hierzu ausgehend von der Methode der maximalen Likelihood einen Fitalgorithmus, der es ermöglicht, Parameter der dynamischen Übergangsamplitude, Mischungs- und CP -verletzende Parameter aus der beobachteten Verteilung der Viererimpulse der Endzustandsteilchen zu bestimmen. Durch eine explizite Faltung von Übergangsamplitude und Auflösungsfunktion der Zerfallszeit wird hierbei auch der nicht vernachlässigbare Messfehler der Zerfallszeit berücksichtigt. Eine rein statistische Analyse erlaubt es, die zur Messung notwendige Ereignismenge abzuschätzen und den Einfluss der Zeitmessung auf diese zu quantifizieren.

Im zweiten Teil wird anhand einer detaillierten Simulationsstudie im $\bar{P}$ ANDA-Simulations-Framework PandaRoot die Rekonstruierbarkeit des betrachteten Zerfallskanals untersucht. Neben der Auflösung relevanter invarianter Massen und einer allgemeinen Charakterisierung der Teilchenidentifikation liegt ein besonderer Schwerpunkt auf der Messung der wenige hundert Mikrometer kurzen Zerfallslänge des D^0 -Mesons innerhalb des Detektors. Hierbei wird auch gezeigt, dass es für die Analyse nicht erforderlich ist, den experimentell schwierig zu bestimmenden

primären Antiproton-Proton-Interaktionspunkt direkt zu messen. Zudem wird die Separierbarkeit des Signalkanals von hadronischen Untergrundreaktionen untersucht.

Der abschließende dritte Teil zeigt durch Anwendung des erstellten Fitalgorithmus auf simulierte Stichproben, inwieweit es gelingt, die resonante Dynamik des Dreikörperzerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ aufzulösen und gibt eine finale Abschätzung der erreichbaren Präzision in der Messung von D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung mit der verwendeten Methode am $\bar{P}$ ANDA-Experiment.

Abstract

Violation of particle-antiparticle symmetry, corresponding to a non-invariance under successive application of charge conjugation C and parity transformation P , is one of the least tested aspects in the Standard Model of particle physics. The observed baryon asymmetry of the universe indicates CP -violation at high energy scales shortly after the Big Bang, which quantitatively cannot be explained by the Standard Model. Therefore a test of CP -violation has great potential to expose phenomenology beyond the current theoretical framework.

So far, experimentally there is only evidence for CP -violation in decays of the neutral mesons K^0 , B^0 und B_s^0 , while in the charm-quark sector (D^0) no occurrence of CP -violation could be established. Despite direct CP -violation, a well known mechanism of violating CP invariance is the so called indirect CP -violation, induced by time dependant particle-antiparticle (e. g. $D^0 \rightarrow \bar{D}^0$) mixing.

With its high vertex- and therefore decay time resolution, the future fixed target experiment $\bar{P}ANDA$ at the FAIR facility in Darmstadt will be well suited to study correlated D^0 - $\bar{D}^0$ -pairs from ψ (3770) decays.

In this thesis a time dependant Dalitz plot analysis of the $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ decay is used to examine the feasibility of CP -violation- and D^0 - $\bar{D}^0$ -mixing measurements at the $\bar{P}ANDA$ experiment.

Based on the maximum likelihood method, the first part of this thesis develops a fit algorithm, suitable for measuring parameters of the dynamic amplitude, CP -violating and mixing parameters from the observed four-momentum distribution. The not negligible decay time resolution is explicitly taken into account by a convolution of the transition amplitude with the decay time resolution function. A statistical analysis allows to estimate the event yield needed with and without effects of decay time resolution.

In the second part, the reconstruction performance for the used decay channel is studied using a detailed simulation within the $\bar{P}ANDA$ simulation framework PandaRoot. Besides the resolution of relevant invariant masses and a general characterisation of particle identification, the focus lies on the reconstruction of the, only several hundred micrometre short, decay length of the D^0 within the detector. It is shown that there is no need of direct reconstruction of the experimentally hard to measure primary antiproton proton interaction vertex. Further the separability of the signal channel from hadronic background reactions is studied.

The concluding third part shows by application of the developed fit algorithm on simulated data samples how well the resonant dynamic of the three body decay $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ can be disentangled and estimates the reachable precision in the measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing with the used method at the $\bar{P}ANDA$ experiment.

Inhaltsverzeichnis

Häufig verwendete Symbole und Bezeichnungen	XI
1 D^0-$\bar{D}^0$-Mischung	1
1.1 Raumspiegelung	3
1.2 Ladungskonjugation	4
1.3 CP -Erhaltung und Verletzung	5
1.4 Zeitumkehr und CPT -Theorem	6
1.5 Mischungsformalismus	8
1.6 Experimentelle Methoden zur Messung der Mischungsparameter . .	13
1.6.1 Doppelt Cabibbo-unterdrückte hadronische Zerfälle	13
1.6.2 Zerfall in CP -Eigenzustände	15
1.6.3 Semileptonische Zerfälle	16
1.6.4 Analyse quantenkorrelierter D-Zerfälle	17
1.6.5 Zeitabhängige Analyse von Dreikörperzerfällen	20
2 Dreikörperzerfälle	23
2.1 Dreikörperphasenraum	23
2.2 Dreikörperkinematik	26
2.3 Isobarenmodell und Dreikörperamplitude	30
2.4 Breit-Wigner-Amplitude	32
2.5 Korrekturen der Amplitudenform	35
2.6 Winkelverteilung	37
2.7 Gounaris-Sakurai-Amplitude	41
2.8 $K\pi$ S-Welle und LASS-Parametrisierung	43
2.9 $\pi\pi$ S-Welle und K -Matrix Formalismus	46
3 Numerische Bestimmung der Modellparameter und Hypothesentests	53
3.1 Die Methode der maximalen Likelihood	53
3.2 Messung der mittleren Lebensdauer des D^0 -Mesons	56
3.3 Funktionsanpassung der dynamischen Übergangsamplitude	63
3.3.1 Zeitunabhängigkeit der Zerfallsamplitude	64
3.3.2 Zeitabhängigkeit der Zerfallsamplitude durch D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung	67
3.3.3 Berücksichtigung der Detektorauflösung	69
3.4 Prüfung von Hypothesen	70
3.4.1 χ^2 -Test	72
3.4.2 Likelihood-Quotienten-Methode	75

4	Test der Funktionsanpassung und statistische Abschätzungen	77
4.1	Anpassung der zeitabhängigen Zerfallsamplitude bei CP -Erhaltung	78
4.2	Anpassung der zeitabhängigen Zerfallsamplitude bei CP -Verletzung	82
4.3	Anpassung der Zerfallsamplitude bei Berücksichtigung der Zerfallszeitauflösung	86
5	Das $\overline{\text{PANDA}}$-Experiment	91
5.1	Antiprotonenstrahl	91
5.2	Target und Luminosität	93
5.2.1	Cluster-Jet-Target	94
5.2.2	Pellet-Target	94
5.2.3	Luminositätsmonitor	95
5.3	Spurfindung	96
5.3.1	Mikro-Vertex-Detektor	96
5.3.2	Straw-Tube-Detektor	98
5.3.3	Gas-Elektronen-Vervielfacher	99
5.3.4	Spurdetektoren in Vorwärtsrichtung	100
5.4	Teilchenidentifikation	101
5.4.1	Flugzeitmessung	102
5.4.2	Cherenkov-Detektoren	102
5.4.3	Elektromagnetisches Kalorimeter	104
5.5	Datenaufnahme	107
5.6	Das $\overline{\text{PANDA}}$ -Simulationsframework	108
5.6.1	Ereignisgeneration	108
5.6.2	Simulation der Teilchenbewegung im Detektor und Digitalisierung	110
5.6.3	Spurfindung und Teilchenidentifikation	111
6	Reaktions- und Untergrundwirkungsquerschnitt	115
6.1	Wirkungsquerschnitt des Reaktionskanals	115
6.2	Wirkungsquerschnitt der relevanten Untergrundreaktionen	118
7	Simulation im PandaRoot-Framework	121
7.1	Teilchenidentifikation (PID)	122
7.2	Rekonstruktion der kurzlebigen Kaonen	127
7.2.1	Nachweiseffizienz	127
7.2.2	Auflösung des Zerfallspunktes	131
7.2.3	Auflösung der invarianten Masse	137
7.3	Rekonstruktion von D^0 und $\bar{D}^0$	138
7.3.1	Auflösung des Zerfallspunktes	139
7.3.2	Zerfallszeitauflösung	142
7.3.3	Rekonstruktion des primären Interaktionspunktes und Auflösung der Zerfallszeitdifferenz	147
7.3.4	Schnitt auf die invariante Masse und Massenauflösung	154

7.3.5	Auflösung der Dalitz-Diagramm-Variablen m_+^2 und m_-^2 . . .	156
7.4	Schnitt in der p_L - p_T -Ebene	162
7.5	Zusammenfassung der verwendeten Schnitte und Effizienz	165
8	Unterdrückung hadronischer Untergrundreaktionen	173
8.1	Inelastische $\bar{p}p$ -Reaktionen	174
8.2	Reaktionskanal $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2 \pi^- K^+ K_S$	177
8.3	Selektion aus ψ (3770)-Zerfällen und Mistag-Wahrscheinlichkeit . . .	183
9	Messung der D^0-$\bar{D}^0$-Mischungsparameter am $\bar{P}ANDA$-Experiment	187
9.1	Fit der zeitunabhängigen Dreikörperamplitude	191
9.2	Extraktion der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparameter	201
9.3	Abschätzung des systematischen Fehlers	206
	Schlussbetrachtung	209
A	Berechnung des Betragsquadrats der Übergangsamplitude	211
B	Berechnung der Zemach-Tensoren	213
C	Faltung der Zerfallsamplitude mit der Zeitauflösung	217
D	Amplituden-Modelle	227
E	Programm der Dalitz-Diagramm-Analyse	237
F	Likelihood der Teilchenidentifikation getrennt nach Subdetektoren	241
G	D^0- und $\bar{D}^0$-Rekonstruktion	245
H	Mistag-Häufigkeit in der Stichprobe ψ (3770) $\rightarrow$ alle	251
I	Dalitz-Diagramm-Analyse	253
	Abkürzungsverzeichnis	XV
	Literaturverzeichnis	XIX
	Abbildungsverzeichnis	XXXIII
	Tabellenverzeichnis	XXXIX
	Danksagung	XLIII

Häufig verwendete Symbole und Bezeichnungen

$\mathcal{A}_f$ Dreikörperamplitude des Zerfalls $D^0 \rightarrow f$.

$\bar{\mathcal{A}}_f$ Dreikörperamplitude des Zerfalls $\bar{D}^0 \rightarrow f$.

A_i Zweikörperamplitude des Zerfalls $D^0 \rightarrow \mathcal{R}_i c \rightarrow (ab)c$.

$D_{1,2}$ Physikalische D-Zustände, d. h. Eigenzustände des Hamiltonoperators.

$D'_{1,2}$ CP -Eigenzustände, identisch zu $D_{1,2}$ bei $q = p = 1/\sqrt{2}$.

δ Phase der starken Wechselwirkung zwischen $D^0 \rightarrow f$ und $\bar{D}^0 \rightarrow f$.

L Likelihood-Funktion $L = \prod_{i=1}^N p(\mathbf{x}^{(i)}|\boldsymbol{\lambda})$.

$\mathcal{L}$ Logarithmus der Likelihood-Funktion $\mathcal{L} = \ln L$.

$\boldsymbol{\lambda}$ Parametervektor.

m_+^2 Abkürzung für $m^2(K_S, \pi^+)$.

m_-^2 Abkürzung für $m^2(K_S, \pi^-)$.

$m_{\pi\pi}^2$ Abkürzung für $m^2(\pi^+, \pi^-)$.

$\mathcal{M}_f$ Zeitabhängige Zerfallsamplitude des Zerfalls $D^0 \rightarrow f$.

$\mathfrak{M}_f$ Faltung aus zeitabhängiger Zerfallsamplitude und Auflösungsfunktion
 $|\mathfrak{M}_f|^2 = \mathcal{R} \otimes |\mathcal{M}_f|^2$.

$\mathbf{P}_i$ Viererimpuls $(E_i, \mathbf{p}_i)$ des Teilchens i .

$p(x)$ Wahrscheinlichkeitsdichte.

$P(x)$ Verteilungsfunktion.

ϕ Phase der schwachen Wechselwirkung zwischen $D^0 \rightarrow f$ und $\bar{D}^0 \rightarrow f$.

$\mathbf{q}$ In Zerfällen der Form $\mathcal{R} \rightarrow ab$: Räumlicher Impuls der Tochterteilchen im Ruhesystem von $\mathcal{R}$.

$\mathcal{R}(\Delta t)$ Auflösungsfunktion der Zerfallszeitdifferenz.

θ_{ik}^{Rij} Für Dreikörperzerfälle $R \rightarrow ijk$: Winkel zwischen Teilchen i und k im Ruhesystem von Teilchen j .

x Mischungsfrequenz der physikalischen D-Zustände,
gegeben durch $x = \frac{m_1 - m_2}{\Gamma}$.

y Normierte Lebensdauerdifferenz der physikalischen D-Zustände,
gegeben durch $y = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2\Gamma}$.

Kapitel 1

D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung

Im Rahmen des Standardmodells der Teilchenphysik (SM) gibt es lediglich vier Teilchen die quantenmechanisch mit ihren Antiteilchen mischen (K^0 , D^0 , B^0 , B_s^0). Beispielsweise würde die Mischung geladener Teilchen (z. B. $\pi^+ - \pi^-$) die Ladungserhaltung verletzen, während die Mischung von Baryonen mit Antibaryonen (z. B. Neutron-Antineutron) die Erhaltung der Baryonenzahl verletzt. Für beide Erhaltungssätze konnte bislang experimentell keine Verletzung nachgewiesen werden. Der kurzreichweitige Anteil der Mischung wird im SM durch sogenannte Boxdiagramme mit doppeltem W-Bosonen Austausch beschrieben (siehe Abb. 1.1). Das D^0 - $\bar{D}^0$ -System ist hierbei von besonderem Interesse, da es sich im SM um das einzige Teilchen-Antiteilchensystem mit d-artigen Quarks (Down, Strange, Bottom) im Zwischenzustand handelt. Prinzipiell sind intermediäre Schleifen mit d-artigen Quarks zwar für alle neutralen Mesonen möglich, die aus Quark-Antiquark-Paaren der Ladung $Q = \pm 2/3 e$ bestehen, jedoch liegt in der dritten Generation die mittlere Lebensdauer des top-Quarks in der gleichen Größenordnung wie die Zeitskala der starken Wechselwirkung und entsprechend existieren gebundene Zustände nicht oder sind extrem kurzlebig.

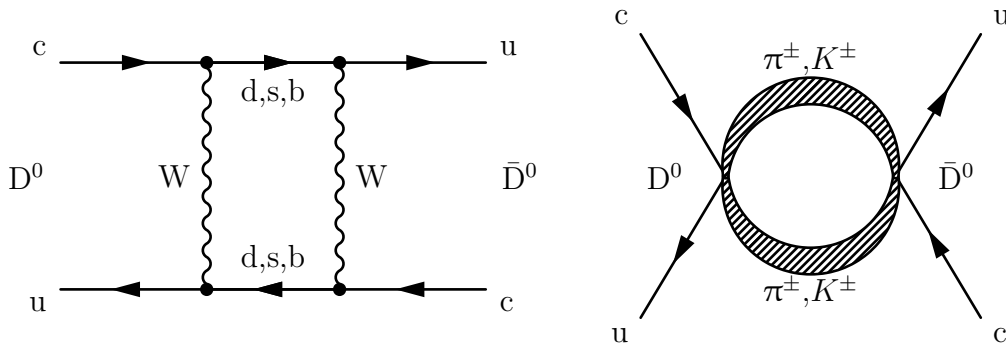


Abbildung 1.1: Kurzreichweitige (*links*) und langreichweitige (*rechts*) Beiträge zur D^0 - $\bar{D}^0$ Mischung im SM.

Die theoretische Vorhersage [1] geht von einer geringen Stärke der kurzreichweitigen Komponente aus, da flavorverändernde neutrale Ströme¹ durch den GIM-Mechanismus² unterdrückt werden und der Beitrag der Bottom-Quarkschleifen

¹Im Englischen: flavor changing neutral currents.

²Nach Glashow, Iliopoulos und Maiani [2].

durch die betreffenden CKM-Matrixelemente³ ($|V_{cb}| = (41,1 \pm 1,3) \cdot 10^{-3}$ und $|V_{ub}| = (4,13 \pm 0,49) \cdot 10^{-3}$ [4]) reduziert wird. Entsprechend dominieren langreichweitigen Meson-Antimeson-Schleifen wie $\pi\pi$ und KK die D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung. Sollten die Boxdiagramme stärker als erwartet zur Mischung beitragen, könnte dies ein Hinweis auf Teilchen sein, die nicht Bestandteil der gängigen Theorie sind. In manchen theoretischen Modellen [5] könnten selbst Teilchen, die mit Massen von 100 – $1000 \text{ TeV}/c^2$ weit jenseits des experimentell zugänglichen Bereichs liegen, einen messbaren Einfluss auf die Mischung im D^0 - $\bar{D}^0$ -System haben. Ein möglicher Kandidat für Teilchen jenseits des SM wären beispielsweise geladene Higgs Teilchen (siehe Abb. 1.2). Der Vergleich zwischen Theorie und Experiment wird dabei ganz wesentlich dadurch erschwert, dass die Stärke der langreichweitigen Meson-Antimeson-Schleifen nicht aus ersten Prinzipien abgeleitet werden kann [1]. Weltweit gibt es bislang von mehreren Experimenten (u. a. BaBar, Belle, CDF, LHCb) Evidenz für das Auftreten von Oszillationen im D^0 - $\bar{D}^0$ -System.

Die Heavy Flavor Averaging Group (HFAG) [6] hat unter Verwendung der korrelierten Fehler eine Mittelung dieser Messergebnisse vorgenommen und kommt zu dem Schluss, dass der Fall keiner Mischung ($x = y = 0$)⁴ im D^0 - $\bar{D}^0$ -System mit einer Signifikanz von mehr als 10σ ausgeschlossen werden kann. Es ist jedoch Gegenstand anhaltender Diskussionen, ob und wenn ja durch welchen Mechanismus CP -Verletzung auftritt. Im Folgenden soll der Formalismus der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung und CP -Verletzung

im SM skizziert, sowie verschiedene Methoden zur Messung der Mischungsparameter im Hinblick auf deren Applikabilität beim zukünftigen $\bar{\text{P}}\text{ANDA}$ -Experiment⁵ gezeigt werden. Im Anschluss wird der derzeitige experimentelle Status kurz zusammengefasst.

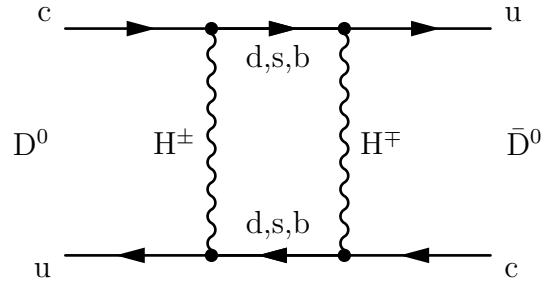


Abbildung 1.2: Hypothetischer Beitrag zur D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung durch geladene Higgs-Teilchen.

³Nach Cabibbo, Kobayashi und Maskawa [3].

⁴Zur Definition von x und y siehe Kapitel 1.5.

⁵Abkürzung nach $\bar{\text{P}}$ (Antiproton) AN nihilation at D Armstadt.

1.1 Raumspiegelung

Bei der Paritätstransformation handelt es sich um eine Punktspiegelung des betrachteten physikalischen Systems am Koordinatenursprung. Sie transformiert ein linkshändiges in ein rechtshändiges Koordinatensystem [7]. Die Ortsvektoren aller i Teilchen im System wechseln unter der Raumspiegelung ihr Vorzeichen

$$\mathbf{r}_i \xrightarrow{P} \mathbf{r}'_i = -\mathbf{r}_i, \quad (1.1)$$

aufgrund der Beziehung $\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ gilt dies auch für die Impulsvektoren. Für die Drehimpulse hingegen gilt

$$P\mathbf{L} = P(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = (-\mathbf{r}) \times (-\mathbf{p}) = \mathbf{L}. \quad (1.2)$$

Es handelt sich um einen sogenannten Axial- oder Pseudovektor. Die Eigenwertgleichung für einen Einteilchenzustand lautet

$$P\psi(\mathbf{r}, t) = \eta\psi(\mathbf{r}, t). \quad (1.3)$$

Durch zweifache Anwendung von P erhält man $P^2 = 1$ und somit als mögliche Eigenwerte $\eta = \pm 1$, die zugehörigen Eigenfunktionen sind gerade ($\eta = 1$) beziehungsweise ungerade ($\eta = -1$) Funktionen. Für einen Zweiteilchenzustand mit relativem Bahndrehimpuls l lässt sich die Eigenwertgleichung verallgemeinern zu [8]

$$P\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t) = \eta_1 \eta_2 (-1)^l \psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, t), \quad (1.4)$$

wobei η_i die intrinsische Parität von Teilchen i ist. Der Faktor $(-1)^l$ lässt sich aus der Symmetrie der Ortswellenfunktion verstehen und folgt formal aus den Transformationseigenschaften der Kugelflächenfunktionen [9, S. 129]. So ist die Wirkung des Paritätsoperators in Kugelkoordinaten

$$r \xrightarrow{P} r' = r, \quad \vartheta \xrightarrow{P} \vartheta' = \pi - \vartheta, \quad \phi \xrightarrow{P} \phi' = \pi + \phi. \quad (1.5)$$

Bei Anwendung auf eine Kugelflächenfunktion erhält man

$$PY_l^m(\vartheta, \phi) = Y_l^m(\pi - \vartheta, \pi + \phi) = (-1)^l Y_l^m(\vartheta, \phi). \quad (1.6)$$

Bis zum Jahr 1956 wurde allgemein eine links-rechts Symmetrie physikalischer Systeme angenommen. Hiermit ist gemeint, dass ein gespiegelter Prozess nach den gleichen Gesetzmäßigkeiten abläuft wie der ungespiegelte. Quantenmechanisch bedeutet dies die Invarianz der physikalischen Gesetze bei Anwendung des Paritätsoperators, d. h. er vertauscht mit dem Hamiltonoperator des betrachteten Systems $[P, \mathcal{H}] = 0$. Aufgrund des Noether Theorems folgt hieraus die Erhaltung des Erwartungswertes der Parität. Während es zu diesem Zeitpunkt bereits zahlreiche Belege für Paritätserhaltung in starker und elektromagnetischer Wechselwirkung gab, stammt der erste

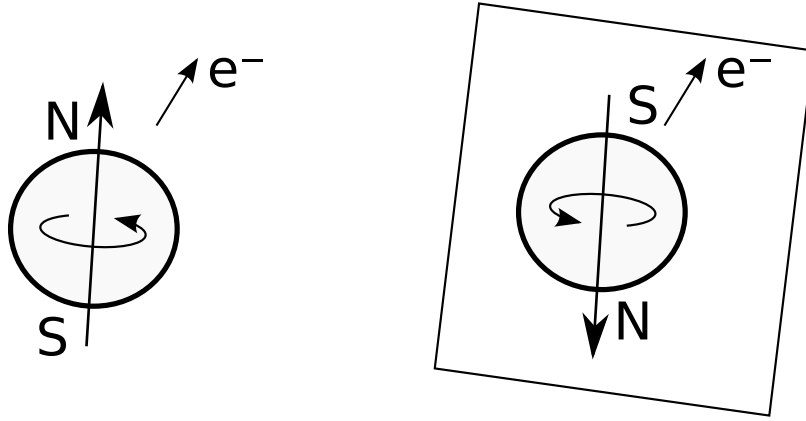


Abbildung 1.3: Beim Zerfall von Cobalt-60 werden Elektronen bevorzugt in (*links*) und beim gespiegelten Prozess entgegen (*rechts*) der Spinrichtung emittiert. Paritätsinvarianz erfordert die gleiche Häufigkeit beider Prozesse. Abbildung frei nach [7, S. 123].

Vorschlag zu deren Test bei schwacher Wechselwirkung von T. D. Lee und C. N. Yang [10]. Ein von ihnen vorgeschlagenes Experiment wurde im gleichen Jahr von C. S. Wu [11] durchgeführt. Hierzu wurden radioaktive Cobalt-60 Kerne ($J^P = 5^+$) polarisiert und deren β^- -Zerfall in einen angeregten Zustand des Nickel-60 Isotops ($J^P = 4^+$) beobachtet



Bei Raumspiegelung (siehe Abb. 1.3) bleibt die Richtung des ^{60}Co -Spins (Axialvektor) gleich, während sich die Richtung der Impulse (echte Vektoren) umkehrt. Bei Invarianz unter der Paritätstransformation stellt auch der gespiegelte Zustand einen möglichen physikalischen Prozess dar, der mit gleicher Häufigkeit auftritt wie der ungespiegelte Prozess. Im Gegensatz hierzu ergab die Messung, dass die Elektronen bevorzugt entgegen der Spinrichtung des ^{60}Co emittiert werden, im klaren Widerspruch zur Paritätserhaltung. Dies lässt sich durch die Natur der schwachen Wechselwirkung verstehen, deren geladener Strom ausschließlich an linkshändige Neutrinos ($\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{s}|} = -1$) und rechtshändige Antineutrinos ($\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{s}}{|\mathbf{p}| \cdot |\mathbf{s}|} = +1$) koppelt. Gleiches gilt auch für Elektronen beziehungsweise Positronen im ultrarelativistischen Grenzfall ($\beta \rightarrow 1$). In diesem Sinne ist die schwache Wechselwirkung nicht nur paritätsverletzend, sondern sogar maximal paritätsverletzend.

1.2 Ladungskonjugation

Die Ladungskonjugation oder auch Teilchen-Antiteilchenkonjugation kehrt die Vorzeichen aller inneren Quantenzahlen (Ladung, Baryonenzahl, Leptonenzahl, Flavor) um, lässt jedoch Spin und Impuls unverändert. Die Ladungskonjugation überführt

einen Zustand mit den inneren Quantenzahlen α in sein Antiteilchen [12, S. 235]

$$C | \alpha \rangle = \eta | \bar{\alpha} \rangle, \quad (1.8)$$

mit der Phase η . Offensichtlich können nur Teilchen mit verschwindenden inneren Quantenzahlen Eigenzustände des C -Operators sein, so gilt beispielsweise $C | \pi^+ \rangle = \eta_\pi | \pi^- \rangle$. Ähnlich wie bei der Parität erhält man aus zweifacher Anwendung des Operators $C^2 = 1$ und somit als mögliche Eigenwerte $\eta = \pm 1$. Die Ladungskonjugation ersetzt positive durch negative Ladungen und umgekehrt, d. h. sie vertauscht effektiv positive und negative Ladungen. Hierdurch kehrt sich die Richtung des elektrischen Feldes um und die Photonen als dessen Feldquanten besitzen ungerade C -Parität. In der elektromagnetischen Wechselwirkung ist die C -Parität eine Erhaltungsgröße. Dies ist beispielsweise daran ersichtlich, dass sowohl π^0 als auch η als Teilchen mit gerader C -Parität in zwei, jedoch nicht in drei Photonen zerfallen. Auch die starke Wechselwirkung ist invariant unter Ladungskonjugation, was experimentell überprüft werden konnte. Beispielsweise in einem Experiment von C. Baltay und anderen [13] in dem die Reaktion

$$\bar{p}p \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0 \quad (1.9)$$

betrachtet wurde. Sowohl vor als auch nach der Reaktion handelt es sich um einen C -Eigenzustand. Bei Ladungskonjugation erhält man

$$p\bar{p} \rightarrow \pi^- \pi^+ \pi^0, \quad (1.10)$$

d. h. es werden lediglich die Impulse der geladenen Pionen sowie die von Antiproton und Proton vertauscht. Entsprechend erwartet man die gleiche Winkelverteilung für π^+ und π^- , was auch in dem Experiment mit hoher Genauigkeit gemessen wurde. In der schwachen Wechselwirkung hingegen ist die C -Parität nicht erhalten. So überführt die Ladungskonjugation ein linkshändiges Neutrino in ein linkshändiges Antineutrino, also einen physikalisch nicht erlaubten Zustand.

1.3 *CP*-Erhaltung und Verletzung

Während die Erhaltung von C - und P -Parität in der schwachen Wechselwirkung in hohem Maße verletzt ist, ist der Eigenwert der kombinierten Operation CP näherungsweise erhalten. So ist der Zerfall des geladenen Pions

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_{\mu,L} \quad (1.11)$$

aufgrund der reinen Linkshändigkeit des ν_μ weder invariant unter Ladungskonjugation noch Raumspiegelung. Bei kombinierter Anwendung von C und P jedoch erhält man

$$\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_{\mu,R}, \quad (1.12)$$

also den tatsächlich auftretenden Zerfall des negativen Pions. Erste experimentelle Befunde für CP -Verletzung gab es durch ein Experiment von J. W. Cronin und V. L. Fitch [14] im Bereich der neutralen K-Mesonen. Diese entstehen in Streuprozessen über die starke Wechselwirkung (z. B. $pp \rightarrow K^0 \Lambda p$), zerfallen jedoch über die schwache Wechselwirkung und somit, im Falle von CP -Erhaltung, auch als CP -Eigenzustände. Mit der Phasenkonvention $CP | K^0 \rangle = + | \bar{K}^0 \rangle$ lassen sich diese als Superposition der Flavoreigenzustände schreiben

$$\begin{aligned} | K_1 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (| K^0 \rangle + | \bar{K}^0 \rangle) \quad \text{mit} \quad CP | K_1 \rangle = + | K_1 \rangle \\ | K_2 \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (| K^0 \rangle - | \bar{K}^0 \rangle) \quad \text{mit} \quad CP | K_2 \rangle = - | K_2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Experimentell ergibt sich, dass der CP -gerade Zustand K_1 dominant in zwei Pionen ($\pi^+ \pi^-$, $\pi^0 \pi^0$) zerfällt und mit einer Lebensdauer von $c\tau = 2,68 \text{ cm}$ [4] bedeutend kurzlebiger ist, als der CP -ungerade Zustand K_2 ($c\tau = 15,34 \text{ m}$ [4]). Üblich ist deshalb die Bezeichnung K_S für den kurzlebigen („short“), beziehungsweise K_L für den langlebigen („long“) Zustand. Aufgrund der stark unterschiedlichen Lebensdauern besteht ein anfänglich gemischter Strahl neutraler Kaonen nach hinreichend langer Zerfallslänge praktisch ausschließlich aus K_L . Das Fitch-Cronin Experiment ergab, dass in einem solcherart präparierten Strahl mit einem Verzweungsverhältnis der Größenordnung 10^{-3} CP -verletzende Zerfälle in zwei Pionen auftreten ($K_L \rightarrow \pi^+ \pi^-$). Die Masseneigenzustände K_S und K_L sind also nicht identisch mit den CP -Eigenzuständen K_1 und K_2 . Anders formuliert: Die Eigenzustände der schwachen Wechselwirkung sind keine CP -Eigenzustände und die CP -Erhaltung ist verletzt. Die CP -Verletzung im System neutraler Kaonen wurde bestätigt bei der Untersuchung der semileptonischen Zerfälle des langlebigen Kaons $K_L \rightarrow \pi^- l^+ \nu_l$ ($l = e, \mu$) durch S. Bennett und andere [15]. Da der CP -Operator den Zustand $\pi^- e^+ \nu_e$ in den Zustand $\pi^+ e^- \bar{\nu}_e$ überführt, müssen die Zerfallsraten $\Gamma_- = \Gamma(K_L \rightarrow \pi^- e^+ \nu_e)$ und $\Gamma_+ = \Gamma(K_L \rightarrow \pi^+ e^- \bar{\nu}_e)$ bei CP -Erhaltung gleich sein. Experimentell festgestellt wurde jedoch eine Ladungsasymmetrie $\delta = (\Gamma_+ - \Gamma_-) / (\Gamma_+ + \Gamma_-)$ der Größenordnung 10^{-3} . Der für alle Systeme aus Antimeson-Meson (K^0 , D^0 , B^0 , B_s^0) gleiche Mischungsformalismus, sowie die verschiedenen Mechanismen für CP -Verletzung werden ausführlich in Kapitel 1.5 beschrieben.

1.4 Zeitumkehr und CPT -Theorem

Bei der Zeitumkehr handelt es sich nach E. Wigner [16] um eine Operation T , die „eine Wellenfunktion φ in die Wellenfunktion $T\varphi$ desjenigen Zustandes überführt, dessen Zeit umgekehrt der von φ läuft, dessen Zukunft also identisch mit der Vergangenheit und dessen Vergangenheit identisch mit der Zukunft von φ ist“⁶.

⁶ In der Veröffentlichung von Wigner ist die Operation der Zeitumkehr mit K bezeichnet.

Formal ist diese definiert als [17, S. 252ff]

$$t \xrightarrow{T} t' = -t, \quad \mathbf{r} \xrightarrow{T} \mathbf{r}' = \mathbf{r}. \quad (1.14)$$

Aufgrund von $\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}}{dt}$ und $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ wechseln Impulse und Drehimpulse ihr Vorzeichen bei Anwendung von T , d. h. Bewegungsrichtung und Drehsinn kehren sich bei umgekehrt laufender Zeit um und die Zeitumkehr lässt sich als Bewegungsumkehr auffassen. Sowohl die newtonschen Bewegungsgleichungen der klassischen Mechanik als auch die Maxwellgleichungen der Elektrodynamik sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung in der Zeit und somit invariant unter Zeitumkehr. Quantenmechanisch lässt sich T durch einen antiunitären Operator darstellen, insbesondere gilt bei Anwendung auf eine Wellenfunktion

$$T\psi(t) = \psi^*(-t). \quad (1.15)$$

Da die Wellenfunktion ψ in der Regel verschieden ist von der komplex konjugierten Wellenfunktion ψ^* , ist die Eigenwertgleichung für T

$$T\psi(t) = \eta_T \psi(t) \quad (1.16)$$

nicht erfüllbar. Auch bei Invarianz unter Zeitumkehr ist mit T keine erhaltene Quantenzahl verknüpft und es gibt keine der Parität oder Ladungskonjugation vergleichbare Zeitparität. In der starken und elektromagnetischen Wechselwirkung lässt sich die T -Invarianz dennoch direkt durch einen Test des Prinzips des detaillierten Gleichgewichts überprüfen. So muss beispielsweise die Reaktionsrate des Prozesses

$$pp \rightarrow \pi^+ d \quad (1.17)$$

bei gleichen Bedingungen für Impuls, Energie und Spin gleich der Reaktionsrate des Prozesses in zeitlich umgekehrter Richtung sein

$$\pi^+ d \rightarrow pp. \quad (1.18)$$

Alle Tests dieser Art ergaben bisher Zeitumkehrinvarianz in starker und elektromagnetischer Wechselwirkung. Ein analoger Test für die schwache Wechselwirkung ist experimentell extrem schwierig. So erhält man beispielsweise bei Zeitumkehr aus dem Λ -Zerfall $\Lambda \rightarrow p \pi^-$ die umgekehrte Reaktion $p \pi^- \rightarrow \Lambda$. Diese wird völlig überdeckt durch viel wahrscheinlichere Prozesse der starken Wechselwirkung zwischen Proton und Pion. Es gibt jedoch starke indirekte Evidenz für T -Verletzung in schwacher Wechselwirkung über das CPT -Theorem. Dieses besagt, dass jede lorentzinvariante Quantenfeldtheorie, in der Mikrokausalität gilt [12, S. 242], invariant ist unter kombinierter Anwendung von C , P und T in beliebiger Reihenfolge. Da die schwache Wechselwirkung in geringem Umfang CP -verletzend ist, muss in gleichem Maße die Zeitumkehrinvarianz verletzt sein, um die Gültigkeit des CPT -Theorems insgesamt zu gewährleisten.

1.5 Mischungsformalismus

Für Zeiten, die groß sind gegenüber der Zeitskala der starken Wechselwirkung, mischen die Flavoreigenzustände $|D^0\rangle = |c\bar{u}\rangle$ und $|\bar{D}^0\rangle = |\bar{c}u\rangle$ miteinander. Die Zeitentwicklung wird durch die freie Schrödingergleichung beschrieben [18]

$$i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} D^0(t) \\ \bar{D}^0(t) \end{pmatrix} = \left(\mathbf{M} - \frac{i}{2} \mathbf{\Gamma} \right) \begin{pmatrix} D^0(t) \\ \bar{D}^0(t) \end{pmatrix} = \mathcal{H}_{\text{eff}} \begin{pmatrix} D^0(t) \\ \bar{D}^0(t) \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{12}^* & M_{22} \end{pmatrix} \quad \mathbf{\Gamma} = \begin{pmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{12}^* & \Gamma_{22} \end{pmatrix},$$

wobei es sich bei $\mathbf{M}$ und $\mathbf{\Gamma}$ um hermitesche Matrizen handelt. Der Übergang $D^0 \leftrightarrow \bar{D}^0$ wird durch die Nebendiagonalelemente von $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ vermittelt, wobei M_{12} den dispersiven („off-shell“) und Γ_{12} den absorptiven („on-shell“) Teil der Übergangsamplitude beschreibt [19]. Die Gültigkeit des CPT -Theorems erfordert $M_{11} = M_{22}$ und $\Gamma_{11} = \Gamma_{22}$. Anschaulich bedeutet dies, dass die Massen und Lebensdauern der Flavoreigenzustände D^0 und $\bar{D}^0$ als Teilchen und Antiteilchen exakt gleich sein müssen. Bei den physikalisch beobachteten Zuständen handelt es sich um die Eigenzustände des effektiven Hamilton Operators $\mathcal{H}_{\text{eff}}$, diese sind eine Superposition der Flavoreigenzustände

$$|D_{1,2}\rangle = p |D^0\rangle \pm q |\bar{D}^0\rangle, \quad |p|^2 + |q|^2 = 1. \quad (1.20)$$

Im Falle von $p = q = 1/\sqrt{2}$ sind dies auch CP -Eigenzustände und es gilt

$$|D'_{1,2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|D^0\rangle \pm |\bar{D}^0\rangle). \quad (1.21)$$

Mit der Phasenkonvention⁷ $CP |D^0\rangle = + |\bar{D}^0\rangle$ erhält man für die CP -Eigenwerte

$$CP |D'_1\rangle = + |D'_1\rangle \quad CP |D'_2\rangle = - |D'_2\rangle. \quad (1.22)$$

Im Falle von CP -Verletzung enthalten die physikalischen Zustände eine kleine Beimischung mit entgegengesetztem CP -Eigenwert [20]

$$|D_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}} ((1+\epsilon) |D^0\rangle + (1-\epsilon) |\bar{D}^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|D'_1\rangle + \epsilon |D'_2\rangle)$$

$$|D_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2(1+|\epsilon|^2)}} ((1+\epsilon) |D^0\rangle - (1-\epsilon) |\bar{D}^0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}} (|D'_2\rangle + \epsilon |D'_1\rangle), \quad (1.23)$$

⁷Man beachte insbesondere die abweichende Konvention $CP |D^0\rangle = - |\bar{D}^0\rangle$ in [6].

dabei ist ϵ ein kleiner, CP -verletzender, komplexer Parameter; der Vorfaktor $\frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}$ dient der Erhaltung der Norm⁸. Die obige Form der physikalischen Zustände (Gleichung 1.20) erhält man hieraus durch die Substitution [22]

$$p = \frac{1 + \epsilon}{\sqrt{2(1 + |\epsilon|^2)}} \quad q = \frac{1 - \epsilon}{\sqrt{2(1 + |\epsilon|^2)}}. \quad (1.24)$$

Die Eigenwerte von $\mathcal{H}_{\text{eff}}$ sind komplex, da es sich bei diesem um keinen hermiteschen Operator handelt. Anschaulich lässt sich dies durch die endliche Lebensdauer der D-Mesonen verstehen, der imaginäre Anteil des Masseneigenwertes führt zur exponentiellen Dämpfung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit. Für die Eigenwerte des effektiven Hamilton Operators gilt

$$\mu_{1,2} = m_{1,2} - \frac{i}{2}\Gamma_{1,2} = \left(M - \frac{i}{2}\Gamma\right) \pm \left(M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}\right). \quad (1.25)$$

Hierbei wurde die mittlere Masse $M = \frac{m_1+m_2}{2}$ und die mittlere Breite $\Gamma = \frac{\Gamma_1+\Gamma_2}{2}$ verwendet. Zwischen $\frac{q}{p}$ und den Diagonalelementen der Matrizen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{\Gamma}$ besteht folgender Zusammenhang

$$\frac{q}{p} = \sqrt{\frac{M_{12}^* - \frac{i}{2}\Gamma_{12}^*}{M_{12} - \frac{i}{2}\Gamma_{12}}}. \quad (1.26)$$

Mit den Eigenwerten ist auch die Zeitenwicklung der physikalischen Zustände bekannt:

$$|D_{1,2}(t)\rangle = e_{1,2}(t) |D_{1,2}\rangle, \quad e_{1,2}(t) = e^{-i\mu_{1,2}t}. \quad (1.27)$$

Befindet sich ein D-Meson zum Zeitpunkt $t = 0$ im reinen Flavoreigenzustand $|D^0\rangle$ oder $|\bar{D}^0\rangle$, so erhält man deren Flavormischung zu einem späteren Zeitpunkt t mit $|D_1(t)\rangle + |D_2(t)\rangle$ bzw. $|D_2(t)\rangle - |D_1(t)\rangle$ zu

$$\begin{aligned} |D^0(t)\rangle &= \frac{1}{2p} [p(e_1(t) + e_2(t)) |D^0\rangle + q(e_1(t) - e_2(t)) |\bar{D}^0\rangle] \\ |\bar{D}^0(t)\rangle &= \frac{1}{2q} [p(e_1(t) - e_2(t)) |D^0\rangle + q(e_1(t) + e_2(t)) |\bar{D}^0\rangle], \end{aligned} \quad (1.28)$$

d. h. auch ein reiner Flavoreigenzustand wird mit der Zeit wieder eine Superposition beider Flavorzustände. Schreibt man die Übergangsamplituden der reinen

⁸Das Vorzeichen $+\epsilon$ für beide Zustände $|D_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}(|D'_1\rangle + \epsilon|D'_2\rangle)$ und

$|D_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+|\epsilon|^2}}(|D'_2\rangle + \epsilon|D'_1\rangle)$ ist kein Schreibfehler, sondern folgt aus der Bedingung, dass die physikalischen Zustände bei CP -Verletzung nicht mehr orthogonal sind. Siehe hierzu auch die Anmerkung in [21, S. 153].

Flavoreigenzustände D^0 bzw. $\bar{D}^0$ in einen beliebigen Zustand f als

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_f &= \langle f | \mathcal{H} | D^0 \rangle & \bar{\mathcal{A}}_f &= \langle f | \mathcal{H} | \bar{D}^0 \rangle \\ \mathcal{A}_{\bar{f}} &= \langle \bar{f} | \mathcal{H} | D^0 \rangle & \bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} &= \langle \bar{f} | \mathcal{H} | \bar{D}^0 \rangle\end{aligned}\quad (1.29)$$

erhält man für die zeitabhängigen Übergangsamplituden

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_f(t) &= \langle f | \mathcal{H} | D^0(t) \rangle = \frac{\mathcal{A}_f}{2} [(1 + \lambda_f) e_1(t) + (1 - \lambda_f) e_2(t)] \\ \lambda_f &= \frac{q}{p} \frac{\bar{\mathcal{A}}_f}{\mathcal{A}_f} = \left| \frac{q}{p} \frac{\bar{\mathcal{A}}_f}{\mathcal{A}_f} \right| e^{i(\delta + \phi)}\end{aligned}\quad (1.30)$$

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{M}}_{\bar{f}}(t) &= \langle \bar{f} | \mathcal{H} | \bar{D}^0(t) \rangle = \frac{\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}}{2} \left[(1 + \lambda_{\bar{f}}^{-1}) e_1(t) + (1 - \lambda_{\bar{f}}^{-1}) e_2(t) \right] \\ \lambda_{\bar{f}} &= \frac{q}{p} \frac{\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}}{\mathcal{A}_{\bar{f}}} = \left| \frac{q}{p} \frac{\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}}{\mathcal{A}_{\bar{f}}} \right| e^{-i(\delta - \phi)}.\end{aligned}\quad (1.31)$$

Hierbei bezeichnet δ die Phase der starken Wechselwirkung zwischen $D^0 \rightarrow f$ und $\bar{D}^0 \rightarrow f$, ϕ ist die Phase der schwachen Wechselwirkung. Die schwache Phase ϕ hat physikalisch ihre Ursache im geladenen Strom der schwachen Wechselwirkung und stammt mathematisch aus der CKM-Matrix. In den Amplituden $\mathcal{A}_f$ und $\bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}}$ erscheint sie in komplex konjugierter Form und ist somit CP -verletzend. Die starke Phase δ hat ihre Ursache in Rückstreuprozessen über die starke Wechselwirkung und ist CP -erhaltend [19]. Die Phasen sind dabei derart zu verstehen, dass im Falle einer Dreikörperamplitude, bei der über Zweikörperesonanzen summiert wird, jeder Term seine eigene starke und schwache Phase erhält (siehe Kapitel 2)

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_f &= \sum_j a_j e^{i\delta_j} e^{i\phi_j} \\ \bar{\mathcal{A}}_{\bar{f}} &= \sum_j \bar{a}_j e^{i\delta_j} e^{-i\phi_j} \\ j &= \rho, K^*(892), f(980), \dots\end{aligned}\quad (1.32)$$

Die in den Gleichungen 1.30 und 1.31 verwendeten Phasen δ und ϕ sind in diesem Fall die effektiven Phasen der gesamten Übergangsamplitude. Verwendet man die Bezeichnungen

$$x = \frac{m_1 - m_2}{\Gamma} \quad y = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{2\Gamma} \quad \Gamma = \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2}, \quad (1.33)$$

erhält man für das Betragsquadrat der Übergangsamplitude nach einer längeren, in Anhang A ausführlich gezeigten Rechnung

$$|\mathcal{M}_f(t)|^2 = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} \left[\left(|\mathcal{A}_f|^2 + \left| \frac{q}{p} \right|^2 |\bar{\mathcal{A}}_f|^2 \right) \cosh(y\Gamma t) + \left(|\mathcal{A}_f|^2 - \left| \frac{q}{p} \right|^2 |\bar{\mathcal{A}}_f|^2 \right) \cos(x\Gamma t) \right. \\ \left. - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right) \sinh(y\Gamma t) + 2 \operatorname{Im} \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right) \sin(x\Gamma t) \right] \quad (1.34)$$

$$|\bar{\mathcal{M}}_{\bar{f}}(t)|^2 = \frac{1}{2}e^{-\Gamma t} \left[\left(|\bar{\mathcal{A}}_f|^2 + \left| \frac{p}{q} \right|^2 |\mathcal{A}_f|^2 \right) \cosh(y\Gamma t) + \left(|\bar{\mathcal{A}}_f|^2 - \left| \frac{p}{q} \right|^2 |\mathcal{A}_f|^2 \right) \cos(x\Gamma t) \right. \\ \left. - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{p}{q} \mathcal{A}_f \bar{\mathcal{A}}_f^* \right) \sinh(y\Gamma t) + 2 \operatorname{Im} \left(\frac{p}{q} \mathcal{A}_f \bar{\mathcal{A}}_f^* \right) \sin(x\Gamma t) \right]. \quad (1.35)$$

Gleichung 1.34 wird in der späteren Analyse verwendet um die Zeitabhängigkeit der D^0 -Zerfallsamplitude zu beschreiben und ist von zentraler Bedeutung für diese Arbeit. Abhängig von den konkreten Werten der Mischungsparameter lassen sich verschiedene Mechanismen von CP -Verletzung unterscheiden [22]:

- Direkte CP -Verletzung.

Gilt für die von der gewählten Phasenkonvention unabhängige Größe

$$\left| \frac{\bar{\mathcal{A}}_f}{\mathcal{A}_f} \right| = \left| \frac{\sum_j a_j e^{i\delta_j} e^{-i\phi_j}}{\sum_k a_k e^{i\delta_k} e^{i\phi_k}} \right| \neq 1, \quad (1.36)$$

spricht man von direkter CP -Verletzung. In diesem Fall sind die schwachen und starken Phasen mindestens zweier Summanden ungleich, es handelt sich also um ein Zusammenspiel mehrerer Zerfallsamplituden, weshalb auch der Begriff CP -Verletzung im Zerfall üblich ist. Die Bedingung der Ungleichheit von schwacher und starker Phase ist besonders leicht ersichtlich für einen Dreikörperzerfall mit zwei intermediären Resonanzen. In diesem Fall gilt für die Zerfallsamplituden [23]

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(D^0 \rightarrow f) &= a_1 e^{i\delta_1} e^{i\phi_1} + a_2 e^{i\delta_2} e^{i\phi_2} \\ \mathcal{A}(\bar{D}^0 \rightarrow \bar{f}) &= a_1 e^{i\delta_1} e^{-i\phi_1} + a_2 e^{i\delta_2} e^{-i\phi_2}. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Für die Zerfallsasymmetrie folgt

$$\frac{\Gamma(D^0 \rightarrow f) - \Gamma(\bar{D}^0 \rightarrow \bar{f})}{\Gamma(D^0 \rightarrow f) + \Gamma(\bar{D}^0 \rightarrow \bar{f})} = - \frac{2a_1 a_2 \sin \Delta\delta \sin \Delta\phi}{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos \Delta\delta \cos \Delta\phi} \quad (1.38)$$

mit $\Delta\delta = \delta_1 - \delta_2$ und $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2$. Auch im allgemeinen Fall mit mehr als zwei Resonanzen müssen sich schwache und starke Phase von mindestens zwei Amplituden unterscheiden. Für geladene Mesonen, die aufgrund der Ladungserhaltung nicht mischen, ist dies die einzig mögliche Form von CP -

Verletzung.

- CP -Verletzung durch Mischung.

Falls $\left|\frac{q}{p}\right|^2 \neq 1$ gilt, sind die Masseneigenzustände nicht mehr orthogonal und es existieren Übergänge zwischen diesen

$$\langle D_1 | D_2 \rangle = |p|^2 - |q|^2 \neq 0. \quad (1.39)$$

Hierdurch sind die Masseneigenzustände eine Superposition der CP -Eigenwerte ± 1 (Gleichung 1.23). Aufgrund der Beziehung

$$\left|\frac{q}{p}\right|^2 = \left|\frac{1-\epsilon}{1+\epsilon}\right|^2 = \frac{\text{Im}(\epsilon)^2 + (1 - \text{Re}(\epsilon))^2}{\text{Im}(\epsilon)^2 + (1 + \text{Re}(\epsilon))^2} \quad (1.40)$$

lässt sich die Bedingung $\left|\frac{q}{p}\right|^2 \neq 1$ zurückführen auf die Bedingung $\text{Re}(\epsilon) \neq 0$.

Der Wert von $\left|\frac{q}{p}\right|$ ist unabhängig von der gewählten Phasenkonvention.

- CP -Verletzung in der Interferenz zwischen Mischung und Zerfall.

Falls weder direkte noch CP -Verletzung in Mischung auftritt ($\left|\frac{\bar{\mathcal{A}}_f}{\mathcal{A}_f}\right| = 1$, $\left|\frac{q}{p}\right| = 1$), kann es dennoch zu CP -Verletzung kommen, falls beim Zerfall in einen Endzustand eine nicht verschwindende Phase zwischen dem direkten Zerfall $D^0 \rightarrow f$ und dem Zerfall nach einer Oszillation $D^0 \rightarrow \bar{D}^0 \rightarrow f$ auftritt. Hierzu muss der Endzustand sowohl für das D^0 als auch das $\bar{D}^0$ zugänglich sein. Dies ist insbesondere für alle CP -Eigenzustände der Fall. Interferenz zwischen Mischung und Zerfall tritt auf, falls die von der Phasenkonvention unabhängige Größe $\lambda_f = \frac{q}{p} \frac{\bar{\mathcal{A}}_f}{\mathcal{A}_f}$ einen nicht verschwindenden Imaginärteil besitzt ($\text{Im} \lambda_f \neq 0$). In den Gleichungen 1.34 und 1.35 kommt die Interferenz zwischen Mischung und Zerfall in den $\sin(x\Gamma t)$ - und $\sinh(y\Gamma t)$ -Termen zum Ausdruck.

1.6 Experimentelle Methoden zur Messung der Mischungsparameter

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt ausführlich auf den zugrundeliegenden Formalismus der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung eingegangen worden ist und Parameter zur Charakterisierung von Mischung und CP -Verletzung definiert worden sind, soll hier auf Analysemethoden eingegangen werden, mit denen diese experimentell gemessen werden können. Die erreichbare Präzision hängt dabei wesentlich von der angewandten Methode ab. Die hier gegebene Darstellung soll einerseits, ohne Anspruch auf Vollständigkeit, den aktuellen experimentellen Kenntnisstand zusammenfassen und andererseits die Vorzüge des angewandten Verfahrens aufzeigen, das die Unsicherheit durch die Phase der starken Wechselwirkung eliminiert. Abschnitt 1.6.5 entspricht der hier angewandten Analysemethode, während Abschnitt 1.6.4 aufgrund der Darstellung des Formalismus quantenkorrelierter D-Paare für diese Arbeit von Bedeutung ist. Alle angegebenen Formeln zur Zeitentwicklung sind Spezialfälle von Gleichung 1.34 und sollen hier lediglich illustrieren, dass je nach Messverfahren nicht immer das Vorzeichen der Mischungsparameter bestimmt werden kann, teilweise x und y nicht unabhängig voneinander extrahiert werden können und für die meisten Verfahren eine Unsicherheit durch die starke Phase δ besteht. Keine dieser Formeln wird im weiteren Verlauf der Arbeit benötigt.

1.6.1 Doppelt Cabibbo-unterdrückte hadronische Zerfälle

Während die Zerfallsrate des Cabibbo-bevorzugten (CF)⁹ Zerfalls $D^0 \rightarrow K^- \pi^+$ einer exponentiellen Abhängigkeit $\propto e^{-\Gamma t}$ folgt, kann der ladungskonjugierte Kanal $D^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ zur Extraktion der Mischungsparameter verwendet werden. Der Zerfall findet hierbei doppelt Cabibbo-unterdrückt (DCS)¹⁰ statt (siehe Abb. 1.4), oder nach einer vorhergehenden Oszillation $D^0 \rightarrow \bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ Cabibbo-bevorzugt. Zudem ist Interferenz zwischen den beiden Moden möglich. In Experimenten (BaBar, Belle,

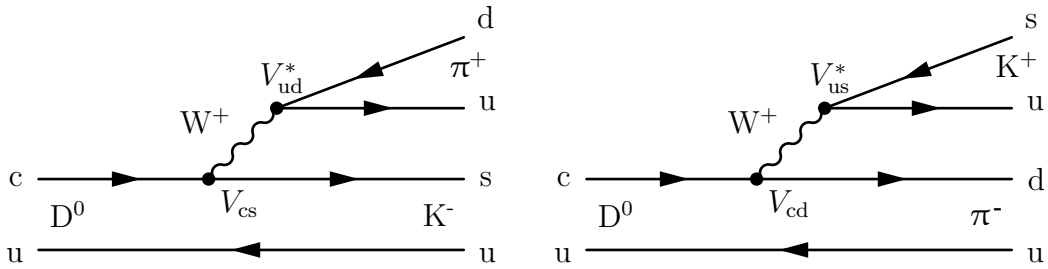


Abbildung 1.4: Cabibbo-bevorzugter ($D^0 \rightarrow K^- \pi^+$, links) und doppelt Cabibbo-unterdrückter ($D^0 \rightarrow K^+ \pi^-$, rechts) Zerfall im SM.

⁹Nach dem englischen „Cabibbo-favored“.

¹⁰Nach dem englischen „Doubly Cabibbo-suppressed“.

CDF, LHCb) in denen der Impuls der D-Mesonen so hoch ist, dass die mittlere Fluglänge aufgrund der relativistischen Zeitdilatation größer ist als die Ortsauflösung des Detektors, kann die Zerfallsrate zeitabhängig betrachtet werden. Als sogenannter Flavortag, d. h. als Information, dass sich die D-Meson Wellenfunktion zu einem bestimmten Zeitpunkt in einem reinen Flavorzustand befindet, diente diesen Experimenten der Zerfall eines angeregten D-Zustandes $D^*(2010)^+ \rightarrow D^0 \pi^+$ beziehungsweise $D^*(2010)^- \rightarrow \bar{D}^0 \pi^-$. Die Ladung des Pions gibt dabei Auskunft über den Flavorzustand des D-Mesons zum Zeitpunkt des D^* -Zerfalls. Die Zerfallsrate weicht von einer rein exponentiellen Form ab; für das Verhältnis von DCS- zu CF-Zerfallsrate gilt im Grenzfall von CP -Erhaltung unter Verwendung einer Taylorentwicklung um $x, y = 0$ bis zu Termen $\mathcal{O}(x^2)$ und $\mathcal{O}(y^2)$ [24, 25] ($f = K^- \pi^+$, $\bar{f} = K^+ \pi^-$)

$$\Gamma(D^0(t) \rightarrow \bar{f}) = \exp(-\Gamma t) \left[R_D + \sqrt{R_D} y' \Gamma t + \frac{x'^2 + y'^2}{4} (\Gamma t)^2 \right], \quad (1.41)$$

dabei ist R_D definiert über $\frac{\mathcal{A}_f}{\mathcal{A}_{\bar{f}}} = -\sqrt{R_D} e^{-i\delta}$ [1]. Massen- und Lebensdauerdifferenz werden nicht direkt gemessen, sondern vielmehr um die starke Phase δ gedrehte Werte

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \delta + y \sin \delta \\ y' &= y \cos \delta - x \sin \delta. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Mit dem Verfahren lassen sich R_D , x'^2 und y' ermitteln, nicht jedoch die starke Phase δ . Diese muss durch eine separate Messung bestimmt, oder als externer Input verwendet werden; beides vergrößert den Fehler auf die Mischungsparametermessung. Der momentan genaueste Messwert der starken Phase beträgt $\cos \delta = 0,81^{+0,23}_{-0,19}$ [4]. Ein Vergleich der Messergebnisse der einzelnen Experimente ist in Tabelle 1.1 zu finden. Die Genauigkeit der Methode wird ganz wesentlich limitiert durch die Größe der zur Verfügung stehenden Datenmenge, da das Verzweigungsverhältnis des Cabibbo-unterdrückten Zerfalls mit $\text{Br}(D^0 \rightarrow K^+ \pi^-) = (1,380 \pm 0,028) \cdot 10^{-4}$ [4] klein ist.

Experiment	R_D (10^{-3})	x'^2 (10^{-3})	y' (10^{-3})
BaBar [26]	$3,03 \pm 0,16 \pm 0,10$	$-0,22 \pm 0,30 \pm 0,21$	$9,7 \pm 4,4 \pm 3,1$
Belle [27]	$3,64 \pm 0,17$	$0,18^{+0,21}_{-0,23}$	$0,6^{+4,0}_{-3,9}$
CDF [28]	$3,04 \pm 0,55$	$-0,12 \pm 0,35$	$8,5 \pm 7,6$
LHCb [29]	$3,52 \pm 0,15$	$-0,09 \pm 0,13$	$7,2 \pm 2,4$

Tabelle 1.1: Messungen der Mischungsparameter im doppelt Cabibbo-unterdrückten Zerfall $D^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ unter Annahme von CP -Erhaltung. Der erste Fehler ist statistischer, der zweite systematischer Natur.

1.6.2 Zerfall in CP -Eigenzustände

Ebenso wie CP -Eigenzustände als Superposition der Flavoreigenzustände betrachtet werden können, können umgekehrt auch die Flavoreigenzustände als Überlagerung der CP -Eigenzustände aufgefasst werden

$$|D^0\rangle = \frac{1}{2p} (|D_1\rangle + |D_2\rangle) \quad |\bar{D}^0\rangle = \frac{1}{2q} (|D_1\rangle - |D_2\rangle). \quad (1.43)$$

Der Zerfall in die CP -Eigenzustände $K^+ K^-$ und $\pi^+ \pi^-$ ($CP = +1$) ist somit für beide Flavorzustände über die Komponente $D_1 \rightarrow f_{CP}$ möglich. Entwickelt man Gleichung 1.34 um $x, y = 0$ bis zur Ordnung $\mathcal{O}(x)$ und $\mathcal{O}(y)$

$$\begin{aligned} \cos x\Gamma t &= 1 + \dots & \cosh y\Gamma t &= 1 + \dots \\ \sin x\Gamma t &= x\Gamma t + \dots & \sinh y\Gamma t &= y\Gamma t + \dots \end{aligned} \quad (1.44)$$

und verwendet $\lambda_{CP} = -\left|\frac{q}{p}\right| e^{i\phi}$ [30] lässt sich die Zerfallsrate bei Vernachlässigung von direkter CP -Verletzung ($|\mathcal{A}_{f_{CP}}|^2 = |\bar{\mathcal{A}}_{f_{CP}}|^2$) schreiben als ($f_{CP} = K^+ K^-$, $\pi^+ \pi^-$) [23]

$$\begin{aligned} \Gamma(D^0(t) \rightarrow f_{CP}) &= e^{-\Gamma t} |\mathcal{A}_{f_{CP}}|^2 \left[1 - \left|\frac{q}{p}\right| (y \cos \phi - x \sin \phi) \Gamma t \right] \\ \Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow f_{CP}) &= e^{-\Gamma t} |\mathcal{A}_{f_{CP}}|^2 \left[1 - \left|\frac{p}{q}\right| (y \cos \phi + x \sin \phi) \Gamma t \right], \end{aligned} \quad (1.45)$$

wobei ϕ die schwache Phase bezeichnet. Falls zudem keine indirekte CP -Verletzung¹¹ auftritt, sind die Zerfallsraten gleich. Man beachte auch, dass zwischen den Zerfällen $D^0 \rightarrow f_{CP}$ und $\bar{D}^0 \rightarrow f_{CP}$ keine starke Phase auftritt. Als Test auf CP -Verletzung kann die zeitabhängige Zerfallsasymmetrie [31]

$$A_{CP}(t) = \frac{\Gamma(D^0(t) \rightarrow f_{CP}) - \Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow f_{CP})}{\Gamma(D^0(t) \rightarrow f_{CP}) + \Gamma(\bar{D}^0(t) \rightarrow f_{CP})} \quad (1.46)$$

verwendet werden. Diese lässt sich in einen Anteil direkter und indirekter CP -Verletzung aufspalten [31] (vgl. mit Gleichung 1.45)

$$A_{CP}(f; t) = A_{\text{dir}}(f) + A_{\text{ind}} \Gamma t. \quad (1.47)$$

Da der Anteil der indirekten CP -Verletzung nahezu unabhängig vom Zerfallskanal ist, ist die Differenz der Zerfallsraten $\Delta A_{CP} = A_{CP}(K^+ K^-) - A_{CP}(\pi^+ \pi^-)$ ein Maß für die direkte CP -Verletzung. Ein Vergleich der experimentell ermittelten, zeitintegrierten Zerfallsasymmetrien ist in Tabelle 1.2 zu finden. Das CDF Ergebnis für ΔA_{CP} von 2012 weicht um 2,7 und das LHCb Ergebnis aus dem selben Jahr um 3,5

¹¹Für die Mischungsparameter bedeutet dies $\left|\frac{q}{p}\right| = \left|\frac{p}{q}\right| = 1$, $\phi = 0$.

Experiment	$A_{CP}(K^+ K^-) (\%)$	$A_{CP}(\pi^+ \pi^-) (\%)$	$\Delta A_{CP} (\%)$
BaBar [32]	$0,00 \pm 0,34 \pm 0,13$	$-0,24 \pm 0,52 \pm 0,22$	—
Belle [33]	$-0,43 \pm 0,30 \pm 0,11$	$0,43 \pm 0,52 \pm 0,12$	—
CDF [34]	$-0,24 \pm 0,22 \pm 0,09$	$0,22 \pm 0,24 \pm 0,11$	—
CDF [35]	—	—	$-0,62 \pm 0,21 \pm 0,10$
CDF [36]	$-0,19 \pm 0,15 \pm 0,04$	$-0,01 \pm 0,18 \pm 0,03$	$-0,12 \pm 0,12$
CLEO [37]	$0,0 \pm 2,2 \pm 0,8$	$1,9 \pm 3,2 \pm 0,8$	—
LHCb [31]	—	—	$-0,82 \pm 0,21 \pm 0,11$
LHCb [38]	—	—	$0,49 \pm 0,30 \pm 0,14$

Tabelle 1.2: Zerfallsasymmetrien der Zerfälle in die CP -Eigenzustände $K^+ K^-$ und $\pi^+ \pi^-$. Der erste Fehler ist statistischer, der zweite systematischer Natur.

Standardabweichungen von Null ab, jedoch sind beide Ergebnisse durch neuere Publikationen der betreffenden Kollaborationen revidiert worden [36, 38]. Bislang sind alle durchgeführten Messungen verträglich mit dem Szenario keiner direkten CP -Verletzung in D^0 -Zerfällen.

1.6.3 Semileptonische Zerfälle

Eine prinzipiell sehr elegante Methode zur Bestimmung der Mischungsparameter liegt in der Verwendung von semileptonischen Zerfällen mit „falschem“ Vorzeichen der Form $D^0 \rightarrow K^{(*)+} l^- \bar{\nu}_l$ ($l = e, \mu$). Im SM sind diese allein durch Mischung $D^0 \rightarrow \bar{D}^0 \rightarrow f_{SL}$ möglich, da diese Zerfälle den Flavor zweier Quarks ändern ($c\bar{u}$) $\rightarrow$ ($u\bar{s}$) $l^- \bar{\nu}_l$ und somit ein schwacher Zerfall erster Ordnung verboten ist. Vernachlässigt man direkte CP -Verletzung ($|\mathcal{A}_{l+x}| = |\bar{\mathcal{A}}_{l-x}| = |\mathcal{A}_{SL}|$) [23] lässt sich die zeitabhängige Zerfallsrate in einer, im Vergleich zu Gleichung 1.41, einfacheren Form schreiben als [1]

$$\begin{aligned} \Gamma(D^0 \rightarrow f_{SL}) &= e^{-\Gamma t} |\mathcal{A}_{SL}|^2 \left| \frac{q}{p} \right|^2 \frac{x^2 + y^2}{4} (\Gamma t)^2 \\ \Gamma(\bar{D}^0 \rightarrow \bar{f}_{SL}) &= e^{-\Gamma t} |\mathcal{A}_{SL}|^2 \left| \frac{p}{q} \right|^2 \frac{x^2 + y^2}{4} (\Gamma t)^2. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Dies folgt aus Gleichung 1.34 mit $\mathcal{A}_f = 0$ und einer Taylorentwicklung der Terme $\cosh y\Gamma t$ und $\cos x\Gamma t$ um $x, y = 0$

$$\begin{aligned} \cos x\Gamma t &= 1 - \frac{1}{2}x^2 (\Gamma t)^2 + \mathcal{O}(x^4) \\ \cosh y\Gamma t &= 1 + \frac{1}{2}y^2 (\Gamma t)^2 + \mathcal{O}(y^4). \end{aligned} \quad (1.49)$$

Die Zerfälle mit „richtigem“ Vorzeichen folgen hingegen einem einfachen exponentiellen Verlauf $\Gamma(D^0 \rightarrow \bar{f}_{SL}) = \Gamma(\bar{D}^0 \rightarrow f_{SL}) = e^{-\Gamma t} |\mathcal{A}_{SL}|^2$. Integriert man das

Verhältnis der Zerfallsraten mit „falschem“ zu „richtigem“ Vorzeichen $\mathcal{R}_M(t) = \Gamma(D^0 \rightarrow f_{SL}) / \Gamma(D^0 \rightarrow \bar{f}_{SL})$ über die Zeit und vernachlässigt CP -Verletzung durch Mischung ($|\frac{q}{p}| = 1$) erhält man [39]

$$\mathcal{R}_M = \frac{x^2 + y^2}{2}. \quad (1.50)$$

Hierbei handelt es sich um eine direkte Messung von x und y , es besteht keine Unsicherheit durch eine starke Phase. Ein großes Problem der Methode liegt in dem extrem kleinen Verzweungsverhältnis der verwendeten Zerfälle $\text{Br}(D^0 \rightarrow K^+ l^- \bar{\nu}_l) < 2,2 \cdot 10^{-5}$ [4]. Alle experimentellen Befunde mit dieser Methode sind bislang vereinbar mit dem Szenario keiner Mischung ($x = y = 0$) im D^0 - $\bar{D}^0$ -System; zum Teil können aufgrund der geringen zur Verfügung stehenden Ereignismenge nur obere Grenzen für $\mathcal{R}_M$ angegeben werden. Tabelle 1.3 fasst den experimentellen Status zusammen, $\mathcal{L}$ bezeichnet dabei die integrierte Luminosität.

Experiment	Zerfallskanal	$\mathcal{L} (\text{fb}^{-1})$	$\mathcal{R}_M (10^{-4})$	Grenzen $\mathcal{R}_M (10^{-4})$
E791 [40]	$D^0 \rightarrow K^+ l^- \bar{\nu}_l$	—	—	< 50
BaBar [39]	$D^0 \rightarrow K^{*+} e^- \bar{\nu}_e$	344	$0,4^{+7,4}_{-5,6}$	$(-13, 12)$
Belle [41]	$D^0 \rightarrow K^{(*)+} l^- \bar{\nu}_l$	492	$1,3 \pm 2,2 \pm 2,0$	$< 6,1$
CLEO [42]	$D^0 \rightarrow K^{*+} e^- \bar{\nu}_e$	9	$16 \pm 29 \pm 29$	< 78

Tabelle 1.3: Messungen der Mischungsrate $\mathcal{R}_M$ in semileptonischen Zerfällen mit „falschem“ Vorzeichen. Der erste Fehler ist statistischer, der zweite systematischer Natur. Die angegebenen Grenzen beziehen sich auf ein Konfidenzniveau von 90 %.

1.6.4 Analyse quantenkorrelierter D-Zerfälle

Während bei nahezu allen bislang erwähnten Experimenten der Zerfall eines angeregten D-Mesons als Flavortag dient ($D^{*+} \rightarrow D^0 \pi^+$), besteht zudem die Möglichkeit der Verwendung quantenkorrelierter Zerfälle. Hierzu wird bei der Energie des angeregten Charmoniumzustandes $\psi(3770)$ gemessen. Dieser befindet sich oberhalb der Open-Charm-Schwelle und zerfällt dominant in D-Meson Paare ($D^0 \bar{D}^0$ und $D^+ D^-$). Da es sich bei $\psi(3770)$ ($J^{PC} = 1^{--}$) um sein eigenes Antiteilchen handelt, ist dies auch ein Eigenzustand der Ladungskonjugation mit dem Eigenwert -1 , infolgedessen befindet sich ein $D^0 \bar{D}^0$ -Paar nach dem starken Zerfall $\psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0$ in einem kohärenten Zustand mit $C = -1$. Die Wellenfunktion ist aufgrund des relativen Bahndrehimpulses von $L = 1$ antisymmetrisch und lässt sich schreiben als [43]

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|D^0(p_1, t_1) \bar{D}^0(p_2, t_2)\rangle - |\bar{D}^0(p_1, t_1) D^0(p_2, t_2)\rangle \right], \quad (1.51)$$

dabei bezeichnen p_i und t_i Impuls und Zerfallszeit des i ten Teilchens. Analog hierzu lässt sich der kohärente Zustand anstelle der Flavoreigenzustände auch aus den CP -Eigenzuständen konstruieren. Schreibt man Impulse und Zerfallszeit nicht mit an, erhält man abhängig von der C -Parität des Zustands [44]

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|D^0 \bar{D}^0\rangle + | \bar{D}^0 D^0\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|D_1 D_1\rangle - |D_2 D_2\rangle] \quad C = P = +1 \\ |\psi\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} [|D^0 \bar{D}^0\rangle - | \bar{D}^0 D^0\rangle] = \frac{1}{\sqrt{2}} [|D_2 D_1\rangle - |D_1 D_2\rangle] \quad C = P = -1. \end{aligned} \quad (1.52)$$

Der kohärente Zustand wird erst durch den Zerfall eines der D-Mesonen zerstört, hierbei führt die Korrelation über die gemeinsame C -Parität zu einer Reihe von Auswahlregeln, insbesondere ist bei der Reaktion $\psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0$ der sukzessive Zerfall beider D-Mesonen in den gleichen CP -Eigenzustand verboten. Der C -gerade Zustand kann bei geringfügig höheren Energien als der $\psi(3770)$ -Ruheenergie über die zusätzliche Produktion neutraler Pionen oder Photonen erreicht werden, etwa $\bar{p}p \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \pi^0$ oder $\bar{p}p \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \gamma$. Die Übergangsamplitude des Zerfalls $\psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (j, k)$, in dem ein D-Meson in den Zustand j und das andere in den Zustand k zerfällt, lässt sich schreiben als [45]

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{jk}(t_1, t_2) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\langle j | \mathcal{H} | D^0(t_1) \rangle \langle k | \mathcal{H} | \bar{D}^0(t_2) \rangle \right. \\ &\quad \left. - \langle k | \mathcal{H} | D^0(t_2) \rangle \langle j | \mathcal{H} | \bar{D}^0(t_1) \rangle \right]. \end{aligned} \quad (1.53)$$

Analog zu den Gleichungen 1.34 und 1.35 erhält man hieraus für das Betragsquadrat der Übergangsamplitude [45]

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_{jk}(\Delta t)|^2 &= \frac{1}{2} e^{-\Gamma|\Delta t|} \left[(|a_+|^2 + |a_-|^2) \cosh(y\Gamma\Delta t) + (|a_+|^2 - |a_-|^2) \cos(x\Gamma\Delta t) \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{Re}(a_+^* a_-) \sinh(y\Gamma\Delta t) + 2 \operatorname{Im}(a_+^* a_-) \sin(x\Gamma\Delta t) \right], \end{aligned} \quad (1.54)$$

$\Delta t = t_2 - t_1$ bezeichnet hierbei die Zerfallszeitdifferenz. a_+ und a_- sind Abkürzungen für

$$a_+ = \bar{\mathcal{A}}_j \mathcal{A}_k - \mathcal{A}_j \bar{\mathcal{A}}_k \quad a_- = -\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_j \bar{\mathcal{A}}_k + \frac{p}{q} \mathcal{A}_j \mathcal{A}_k. \quad (1.55)$$

Im untersuchten Zerfallskanal ($j = K^+ \pi^-$, $k = K_S \pi^+ \pi^-$) ist Gleichung 1.54 identisch zu Gleichung 1.34, falls der DCS-Zerfall $\bar{D}^0 \rightarrow K^- \pi^+$ gegenüber dem CF-Zerfall $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ vernachlässigt wird. Die explizit gemachte Näherung in diesem Fall ist $\mathcal{A}_j = \langle K^+ \pi^- | \mathcal{H} | D^0 \rangle \approx 0$. Aus Gleichung 1.54 erhält man nach Integration über die Zeit die Verzweungsverhältnisse für sogenannte doppelte Tags, bei denen beispielsweise ein D-Meson in einen Flavoreigenzustand (Flavortag) zerfällt, während das zweite D-Meson in einen CP -Eigenzustand (CP -Tag) zerfällt. Die unterschied-

lichen Kombinationen von Zerfallszuständen (j,k) zeigen hierbei unterschiedliche Abhängigkeit von Mischungsparametern, was eine Extraktion derselbigen erlaubt. Am CLEO-c-Experiment wurden folgende Arten von Tags in Betracht gezogen [46]:

- Flavorspezifische hadronische Zerfälle
 - f : $(K^- \pi^+)$
 - $\bar{f}$: $(K^+ \pi^-)$
- CP -Eigenzustände
 - S_+ : $(K^+ K^-), (\pi^+ \pi^-), (K_S \pi^0 \pi^0), (K_L \pi^0), (K_L \eta), (K_S \omega)$
 - S_- : $(K_S \pi^0), (K_S \eta), (K_S \omega), (K_L \pi^0 \pi^0)$
- Semileptonische Zerfälle
 - l^+ : $(K^- e^+ \nu_e), (K^- \mu^+ \nu_\mu)$
 - l^- : $(K^+ e^- \bar{\nu}_e), (K^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu)$.

Prinzipiell können die Doppeltag-Raten zeitabhängig betrachtet werden, jedoch stammen alle bisher durchgeführten und geplanten Messungen an korrelierten D-Paaren von Experimenten mit symmetrischen oder nur leicht asymmetrischen Strahlenergien (CLEO, BES), bei denen die mittlere D-Zerfallslänge aufgrund der kleinen Zerfallsimpulse zu kurz für die zeitabhängige Betrachtung ist. Die spezifische Abhängigkeit der zeitintegrierten Doppeltag-Raten von den D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparametern findet sich in [47]. Messungen von Mischungsparametern im D^0 - $\bar{D}^0$ -System über Quantenkorrelation gibt es bislang lediglich von CLEO-c [46], an BESIII sind diese in Planung [48]. Tabelle 1.4 fasst das CLEO-c Ergebnis zusammen. Die Messungen an quantenkorrelierten D-Paaren sind bislang vor allem von Bedeutung, weil sie die Messung der starken Phase δ erlauben.

Parameter	Wert
x^2 (%)	$0,06 \pm 0,23 \pm 0,11$
y (%)	$4,2 \pm 2,0 \pm 1,0$
r^2 (%)	$0,533 \pm 0,107 \pm 0,045$
$\cos \delta$	$0,81^{0,22 \pm 0,07}_{-0,18 - 0,05}$
$\sin \delta$	$-0,01 \pm 0,41 \pm 0,04$

Tabelle 1.4: Messung der Mischungsparameter bei CLEO-c [46] mittels zeitintegrierten Doppeltag-Raten von quantenkorrelierten D-Zerfällen. Der erste Fehler ist statistischer, der zweite systematischer Natur.

1.6.5 Zeitabhängige Analyse von Dreikörperzerfällen

Die bislang genaueste Messung der Mischungsparameter im $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -System stammt aus der zeitabhängigen Analyse von Dreikörperzerfällen, zudem handelt es sich um die einzige Methode, mit der das Vorzeichen der Mischungsfrequenz x bestimmt werden konnte (vgl. mit den Gleichungen 1.41, 1.45, 1.48). Während bei einem Zweikörperzerfall im Impulsschwerpunktssystem (CMS)¹² die Kinematik fixiert und damit die Zerfallsamplitude konstant ist, hängt diese bei einem Dreikörperzerfall von der relativen Orientierung der Zerfallsteilchenimpulse ab¹³. Wird ein Flavortag verwendet, ist die Amplitude zudem abhängig von der Zeit t , die zwischen Tag und Zerfall des D -Mesons vergangen ist, da der Flavorinhalt der Wellenfunktion aufgrund der Teilchen-Antiteilchen-Oszillation zeitabhängig ist. Es besteht folgender Zusammenhang¹⁴:

- Zerfallsamplitude $\mathcal{M} = \mathcal{M}(m_{12}^2, m_{13}^2, t)$,
- Zerfallsrate $\Gamma(D^0 \rightarrow f) \propto \iint |\mathcal{M}(m_{12}^2, m_{13}^2, t)|^2 dm_{12}^2 dm_{13}^2$,
- Verzweungsverhältnis $\text{Br}(D^0 \rightarrow f) \propto \int \Gamma(t) dt$.

Die Zerfallsamplitude beinhaltet also mehr Information als Zerfallsrate und Verzweungsverhältnis. Besonders elegant ist hierbei die Betrachtung von Dreikörperzerfällen in CP -Eigenzustände. In diesem Fall folgt aus der Abwesenheit von direkter CP -Verletzung nicht nur $|\mathcal{A}_f| = |\bar{\mathcal{A}}_f|$, sondern wegen $f = \bar{f}$ auch $|\mathcal{A}_f| = |\bar{\mathcal{A}}_f|$. Da beim Zerfall in CP -Eigenzustände die Amplituden $\mathcal{A}_f$ und $\bar{\mathcal{A}}_f$ durch die Operation der CP -Konjugation miteinander verknüpft sind, besteht zwischen diesen, abgesehen von einer Korrektur durch die schwache Phase ϕ , eine feste Phasendifferenz [25] von $\Delta\alpha = 0$ ($CP = +1$) bzw. $\Delta\alpha = \pi$ ($CP = -1$). Trennt man die Dreikörperamplitude explizit nach Zerfällen in Flavoreigenzustände ($D^0 \rightarrow K^{*-} \pi^+$, $D^0 \rightarrow K^{*+} \pi^+$) und Zerfällen in CP -Eigenzustände (z. B. $D^0 \rightarrow K_S \rho(770)$) gilt für den CP -Anteil der Amplitude [49]

$$\lambda_{CP} = \frac{q}{p} \frac{\bar{\mathcal{A}}_{CP}}{\mathcal{A}_{CP}} = \pm \left| \frac{q}{p} \right| e^{\pm i\phi}. \quad (1.56)$$

Anders als im allgemeinen Fall (siehe Gleichung 1.30) besteht keine Abhängigkeit von der starken Phase δ .

In Dreikörperzerfällen kann zwischen Zerfällen in reine CP -Eigenzustände und Zustände mit gemischten CP -Eigenwerten unterschieden werden. Beim Zerfall in einen reinen CP -Eigenzustand mit $CP = +1$ (z. B. $K_S \pi^0 \pi^0$) reduziert sich die D -Wellenfunktion auf die D_1 -Komponente mit dem Eigenwert $CP = +1$. Der Eigenwert $CP = -1$ ist für den Zustand $K_S \pi^0 \pi^0$ nicht möglich, da sich die zwei neutralen Pionen als identische Bosonen in einem symmetrischen Zustand befinden müssen. Da das D^0 -Meson selbst kein CP -Eigenzustand ist, können auch Zerfälle in CP -Ei-

¹²Nach dem englischen **C**enter of **M**omentum **S**ystem.

¹³Der zur Analyse von Dreikörperzerfällen nötige Formalismus ist ausführlich in Kapitel 2 dargestellt.

¹⁴Zur Definition der invarianten Masse zweier Teilchen m_{ij}^2 siehe Abschnitt 2.2 und Gleichung 2.13.

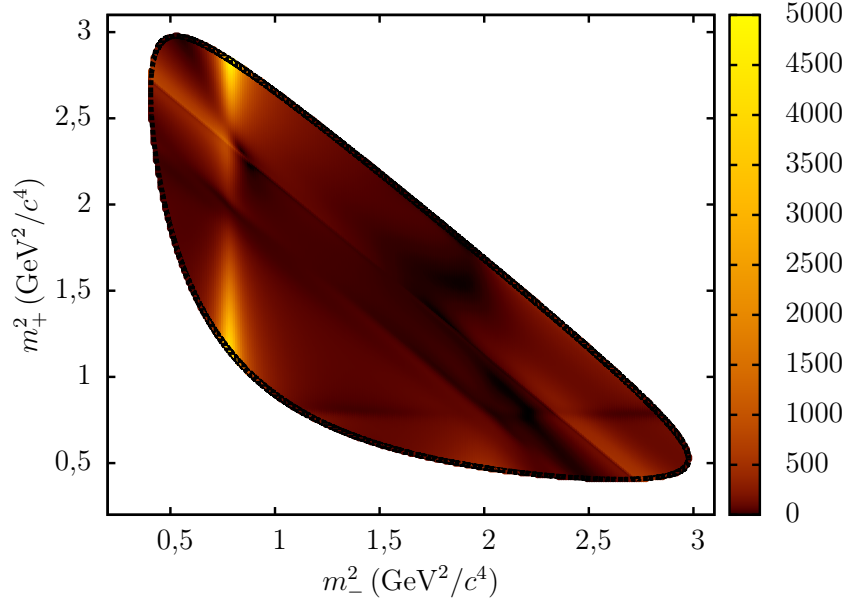


Abbildung 1.5: Betragsquadrat der gesamten Übergangsamplitude für den Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ im Modell von [50].

genzustände auftreten, bei denen abhängig von den relativen Bahndrehimpulsen die Eigenwerte $CP = +1$ oder $CP = -1$ möglich sind (z. B. $K_S K^+ K^-$ und $K_S \pi^+ \pi^-$). Diese Zustände sind besonders geeignet zur Messung der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparameter, da in der Zerfallsamplitude gleichzeitig Cabibbo-bevorzugte, Cabibbo-unterdrückte sowie CP -Eigenzustände auftreten und interferieren können. Beispielsweise wurden von der Belle-Kollaboration [50] folgende Resonanzen zur Beschreibung der $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ Zerfallsamplitude verwendet:

- Cabibbo-bevorzugte Amplituden der Form $D^0 \rightarrow K^{*-} \pi^+$
mit $K^{*-} = (K^*(892)^-, K_0^*(1430)^-, K_2^*(1430)^-, K^*(1410)^-, K^*(1680)^-)$,
- Doppelt Cabibbo-unterdrückte Amplituden der Form $D^0 \rightarrow K^{*+} \pi^-$
mit $K^{*+} = (K^*(892)^+, K_0^*(1430)^+, K_2^*(1430)^+, K^*(1410)^+, K^*(1680)^+)$,
- CP -gerade Amplituden der Form $D^0 \rightarrow S K_S$
mit $S = (f_0(980), f_0(1370), f_2(1270), \sigma_1, \sigma_2)$,
- CP -ungerade Amplituden der Form $D^0 \rightarrow V K_S$
mit $V = (\rho(770), \omega(782), \rho(1450))$.

Eine Berechnung des Betragsquadrates der Gesamtamplitude in diesem Modell ist in Abbildung 1.5 dargestellt. Besondere Sensibilität auf die Mischungsfrequenz besteht durch Gleichung 1.34 in Phasenraumregionen, in denen flavorspezifische Amplituden dominieren oder interferieren. Die CP -verletzende schwache Phase ϕ in Gleichung 1.34 kann nur aus den Interferenztermen ($\propto \frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^*$) bestimmt

werden. Aufgrund der obigen Diskussion sind hierbei vor allem CP -Eigenzustände relevant. Eine Berechnung von $\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^*$ im Modell von [50] zeigt Abbildung 1.6. Mit dem beschriebenen Verfahren bei BaBar, Belle und CLEO gemessene Werte der Mischungsparameter sind in Tabelle 1.5 zusammengefasst.

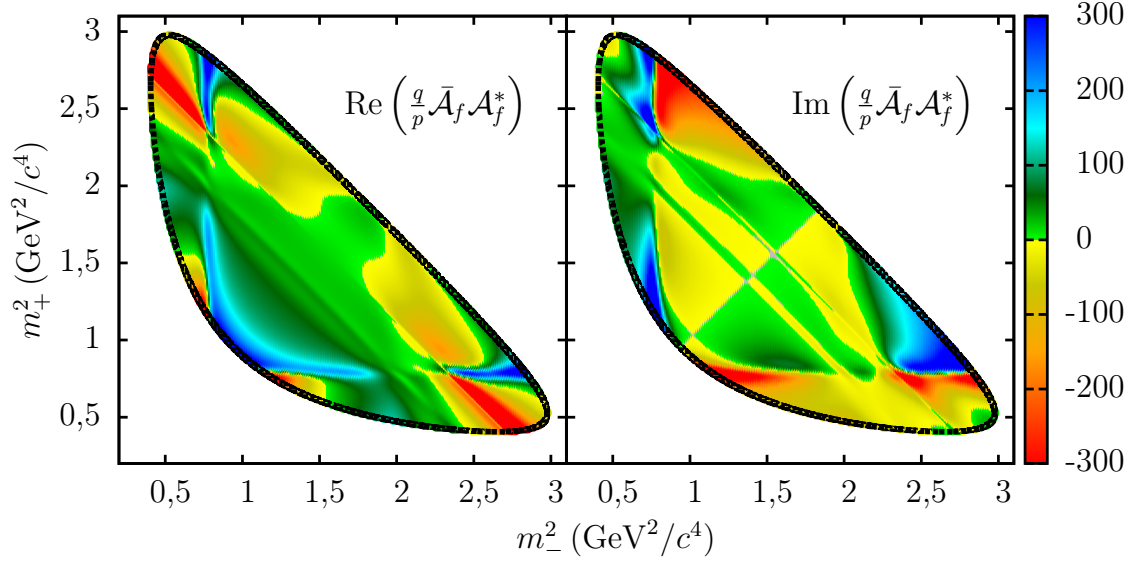


Abbildung 1.6: Phasenraumabhängigkeit des zur Bestimmung der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung wichtigen Terms $\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^*$ (Realteil *links*, Imaginärteil *rechts*) im Modell von [50].

	BaBar [51]	Belle [50]	CLEO II.V [49]	Belle [52]
Fit CP -erhaltend				
$x (10^{-3})$	$1,6 \pm 2,3 \pm 1,2 \pm 0,8$	$8,0 \pm 2,9^{+0,9+1,0}_{-0,7-1,4}$	$18^{+34}_{-32} \pm 4 \pm 4$	$5,6 \pm 1,9^{+0,3+0,6}_{-0,9-0,9}$
$y (10^{-3})$	$5,7 \pm 2,0 \pm 1,3 \pm 0,7$	$3,3 \pm 2,4^{+0,8+0,6}_{-1,2-0,8}$	$-14^{+25}_{-24} \pm 8 \pm 4$	$3,0 \pm 1,5^{+0,4+0,3}_{-0,5-0,6}$
Fit CP -verletzend				
$x (10^{-3})$	—	$8,1 \pm 3,0^{+1,0+0,9}_{-0,7-1,6}$	$23^{+35}_{-34} \pm 4 \pm 4$	$5,6 \pm 1,9^{+0,4+0,6}_{-0,8-0,8}$
$y (10^{-3})$	—	$3,7 \pm 2,5^{+0,7+0,7}_{-1,3-0,8}$	$-15^{+25}_{-24} \pm 8 \pm 4$	$3,0 \pm 1,5^{+0,4+0,3}_{-0,5-0,7}$
$\left \frac{q}{p} \right $	—	$0,86^{+0,30+0,06}_{-0,29-0,03} \pm 0,08$	—	$0,90^{+0,16+0,05+0,06}_{-0,15-0,04-0,05}$
$\arg\left(\frac{q}{p}\right) (^\circ)$	—	$-14^{+16+5+2}_{-18-3-4}$	$5,7 \pm 2,8 \pm 0,4 \pm 1,2$	$-6 \pm 11 \pm 3^{+3}_{-4}$
$\epsilon (\%)$	—	—	$1,1 \pm 0,7 \pm 0,4 \pm 0,2$	—

Tabelle 1.5: Mischungsparameter bestimmt aus der zeitabhängigen Analyse des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$. Der erste Fehler ist statistisch, der zweite systematisch und der dritte quantifiziert die systematische Unsicherheit des angenommenen Amplitudenmodells.

Kapitel 2

Dreikörperzerfälle

Im vorhergehenden Abschnitt 1.6.5 wurde gezeigt, dass eine elegante Methode zur Messung der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparameter in der zeitabhängigen Analyse des Übergangsmatrixelementes $\mathcal{M}_f(t)$ besteht. In diesem treten die zeitunabhängigen Dreikörperamplituden $\mathcal{A}_f$ und $\bar{\mathcal{A}}_f$ der Zerfälle $D^0 \rightarrow f$ und $\bar{D}^0 \rightarrow f$ der reinen Flavorzustände auf. In diesem Kapitel wird nun näher auf die Beschreibung der Amplitude von Dreikörperzerfällen eingegangen. Hierzu wird zunächst bei Abwesenheit von intermediärer Dynamik durch Resonanzen die allgemeine Struktur des Dreikörperphasenraumes beschrieben. Insbesondere wird gezeigt, dass es eine abstrakte, lorentzinvariante Darstellung gibt, in der die Wahrscheinlichkeitsdichte ohne innere Dynamik konstant ist. Die folgenden Unterkapitel widmen sich der Beschreibung von resonanter Dynamik im Isobarenmodell. Neben der Darstellung der verwendeten Amplitudenformen (Breit-Wigner, Gounaris-Sakurai, LASS) wird gezeigt, zu welcher spezifischen Winkelverteilung der Spin intermediärer Resonanzen führt. Am Ende des Kapitels wird kurz der K -Matrix Formalismus skizziert, der in der Beschreibung der $\pi\pi$ S-Welle Verwendung findet. Im gesamten Kapitel wird zur Vereinfachung der Notation die Konvention $\hbar = c = 1$ verwendet.

2.1 Dreikörperphasenraum

Betrachtet man allgemein die Reaktion

$$a + b \rightarrow 1 + 2 + \cdots + n, \quad (2.1)$$

so bezeichnet man den $3n$ -dimensionalen Raum, der durch die Komponenten der uneingeschränkten räumlichen Impulse $\mathbf{p}_i$ aufgespannt wird als Impulsraum [53, S. 43]. Die Menge der physikalisch realisierbaren Impulse wird dabei eingeschränkt durch die Erhaltung von Energie und Impuls

$$\begin{aligned} E_a + E_b &= \sum_{i=1}^n E_i, & \mathbf{p}_a + \mathbf{p}_b &= \sum_{i=1}^n \mathbf{p}_i \\ \text{mit } E_j^2 &= \mathbf{p}_j^2 + m_j^2, & j &= a, b, 1, 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Die durch Gleichung 2.2 gegebene $(3n - 4)$ -dimensionale Fläche im Impulsraum bezeichnet man als Phasenraum. Um die Wahrscheinlichkeit berechnen zu können, ein Teilchen mit einem Impuls im Volumenelement $d^3\mathbf{p}$ um $\mathbf{p}$ zu beobachten, ist es wichtig, die Zustandsdichte im Phasenraum zu kennen. Betrachtet man hierzu zunächst ein Teilchen mit der Compton-Wellenlänge $\lambda_c = \frac{h}{p}$, das sich in einem Würfel der Kantenlänge L frei bewegen kann, fordert jedoch, dass die Wellenfunktion am Rand verschwindet, so führt diese Bedingung zu stehenden Wellen und periodischen Randbedingungen für die Impulskomponenten ($i = x, y, z$) [54, S. 14]

$$p_i = \frac{hn_i}{L}, \quad n_i = 1, 2, \dots \quad (2.3)$$

Bei gegebener Maximalenergie ist die Menge der möglichen Impulse in einem endlichen Volumen abzählbar und damit die Zustandsdichte bekannt. Die allgemeine Lösung für ein Volumen beliebiger Größe erhält man hieraus aus dem Grenzwert $L \rightarrow \infty$. Mit $\hbar = 1$ ergibt sich für das infinitesimale Phasenraumelement

$$d\Phi' = \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3}. \quad (2.4)$$

Der Faktor $(2\pi)^{-3}$ folgt aus der Konvention $\hbar = 1$, für $h = 1$ sind Phasenraum- und Impulsraumelemente gleich. Gleichung 2.4 ist nicht lorentzinvariant, da aufgrund der relativistischen Längenkontraktion der umschließende Würfel in Bewegungsrichtung des Teilchens kürzer erscheint. Hierdurch ergibt sich der Korrekturfaktor $\frac{m}{E}$, im nichtrelativistischen Fall gilt dabei $\frac{m}{E} \approx 1$. Verwendet man zudem die Identität [54, S. 15]

$$\frac{m}{E} d^3\mathbf{p} = 2m \cdot d^4\mathbf{P} \delta(\mathbf{P}^2 - m^2) \quad (2.5)$$

erhält man für das lorentzinvariante n -Teilchen Phasenraumelement [54, S. 16]

$$d\Phi(s; \mathbf{P}_1, \dots, \mathbf{P}_n) = \frac{1}{(2\pi)^{3n-4}} \prod_{i=1}^n \frac{d^3\mathbf{p}_i}{2E_i} \delta^4(\mathbf{P} - \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_j). \quad (2.6)$$

Dabei bezeichnet $\mathbf{P}_j$ den Viererimpuls des j ten Teilchens, die Abhängigkeit von den m_i wird in der Notation unterdrückt, bzw. in der Definition des Phasenraumelementes absorbiert. Die δ -Funktion erzwingt die Erhaltung des gesamten Viererimpulses $\mathbf{P}$. Zum Wirkungsquerschnitt besteht folgender Zusammenhang [53, S. 48]

$$\sigma_n = \frac{1}{2\sqrt{\lambda(s, m_a, m_b)}} \int d\Phi |\mathcal{M}(\mathbf{P}_i)|^2, \quad (2.7)$$

dabei bezeichnet $\mathcal{M}$ das Übergangsmatrixelement. λ ist die sogenannte kinematische, oder auch Dreiecksfunktion

$$\lambda(s, m_a^2, m_b^2) = \left(s - (m_a^2 + m_b^2) \right)^2 \left(s - (m_a^2 - m_b^2)^2 \right). \quad (2.8)$$

Für den Zerfall in drei Teilchen kann gezeigt werden [53, S. 77ff], dass ein Phasenraumelement geschrieben werden kann als

$$d\Phi(s; \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) = \frac{\pi^2}{(2\pi)^5} dE_1 dE_2. \quad (2.9)$$

Aus Gleichung 2.15 entnimmt man $dE_i = -\frac{dm_{jk}^2}{2\sqrt{s}}$ woraus folgt¹

$$d\Phi(s; \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3) = \frac{\pi^2}{4(2\pi)^5 s} dm_{23}^2 dm_{13}^2. \quad (2.10)$$

Äquivalente Aussagen gelten auch für jede andere mögliche Kombination der invarianten Massen. Da keine explizite Abhängigkeit von den m_{ij} besteht, bedeutet dies

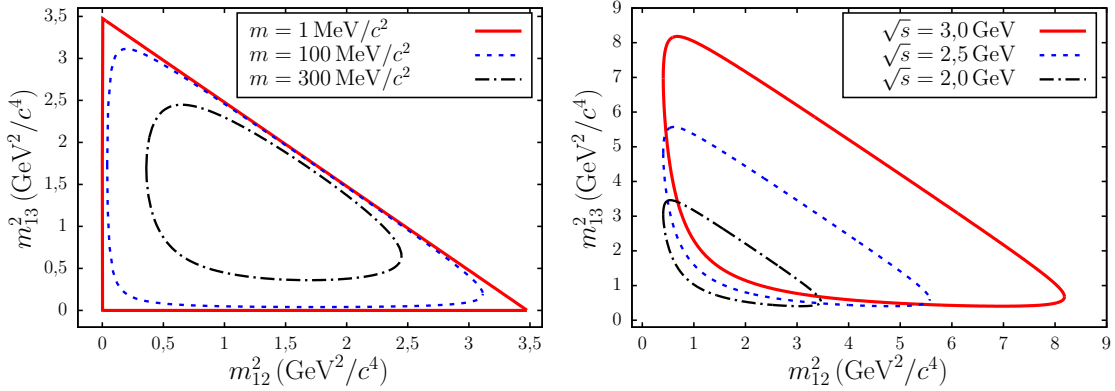


Abbildung 2.1: Abhängigkeit des Phasenraumes von den Massen der Tochterteilchen (*links*, $m = m_1 = m_2 = m_3$) und Abhängigkeit von der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s}$ (*rechts*, $m_1 = m(K_S)$, $m_2 = m(\pi^+)$, $m_3 = m(\pi^-)$).

im Falle eines konstanten Übergangsmatrixelementes eine homogene Zustandsdichte im gesamten Dreikörperphasenraum ($\frac{d\Phi}{dm_{23}^2 dm_{13}^2} = \text{konst.}$). Abbildung 2.1 zeigt die Grenzen des zugänglichen Phasenraumes für den Zerfall $D^0 \rightarrow 123$ bei verschiedenen Massen der Tochterteilchen. Ein Maß für die Gesamtzahl der möglichen Zustände ist das Integral $\int d\Phi$. Dieses kann nur für den Grenzfall verschwindender Massen der Tochterteilchen analytisch berechnet werden. In diesem Fall entspricht das Integral einer einfachen Dreiecksfläche und es gilt

$$\int d\Phi = \frac{1}{2} (m_{12})_{\max} (m_{13})_{\max} = \frac{s}{2}. \quad (2.11)$$

Die Grenzen des Phasenraumes für verschiedene Schwerpunktsenergien $\sqrt{s}$ sind in Abbildung 2.1 gezeigt, die Fläche ($\int d\Phi$) der abgebildeten Konturen und damit auch

¹Zur Definition der invarianten Masse zweier Teilchen siehe Gleichung 2.13.

die Anzahl der möglichen Zustände nimmt quadratisch mit der Schwerpunktsenergie zu.

2.2 Dreikörperkinematik

Im vorhergehenden Abschnitt 2.1 wurde bereits gezeigt, dass man im allgemeinen Fall $3n - 4 = 5$ unabhängige Größen benötigt, um den kinematischen Zustand dreier Teilchen bei einem Zerfall der Form

$$A \rightarrow 1 + 2 + 3 \quad (2.12)$$

vollständig zu beschreiben. Die Zahl der unabhängigen Größen kann um drei verringert werden, falls der Anfangszustand keinen Spin und damit auch keine Vorzugsrichtung besitzt. So addieren sich die Impulse der drei Tochterteilchen im Ruhesystem von A zum Gesamtimpuls $\mathbf{0}$, d. h. deren Impulsvektoren bilden ein geschlossenes Dreieck und liegen somit in einer Ebene. Existiert keine Vorzugsrichtung kann das Bezugssystem immer derart gewählt werden, dass beispielsweise die z -Komponente aller drei Tochterteilchenimpulse verschwindet². Für den beschriebenen Fall kann

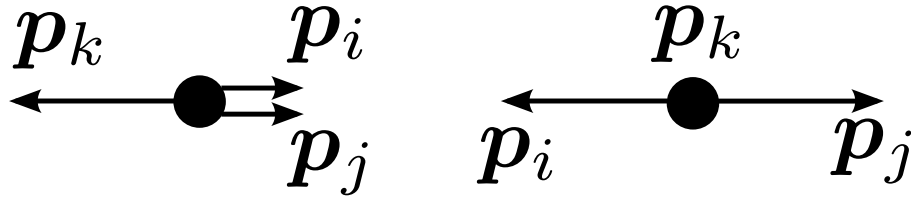


Abbildung 2.2: Impulsanordnung im Schwerpunktsystem am Minimum (*links*) und Maximum (*rechts*) der invarianten Masse m_{ij}^2 .

also der kinematische Zustand der Tochterteilchen durch die Angabe von $5 - 3 = 2$ unabhängigen Größen vollständig beschrieben werden. Als besonders zweckdienlich erweist sich hierbei die Verwendung von invarianten Massen jeweils zweier Teilchen

$$m_{ij}^2 = (\mathbf{P}_i + \mathbf{P}_j)^2 = (E_i + E_j)^2 - (\mathbf{p}_i + \mathbf{p}_j)^2, \quad i < j. \quad (2.13)$$

Invariant bezieht sich hierbei auf Lorentzinvarianz, es spielt also keine Rolle in welchem Inertialsystem diese berechnet werden. Zudem ist die Zustandsdichte im Phasenraum bei konstantem Übergangsmatrixelement in dieser Darstellung homogen (siehe Abschnitt 2.1). Welche zwei der drei zur Verfügung stehenden invarianten Massen (m_{12}^2 , m_{13}^2 , m_{23}^2) zur Beschreibung des Phasenraumes verwendet werden ist lediglich eine Frage der Konvention. Aufgrund der Viererimpulserhaltung $s = (\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3)^2$ sind diese nicht unabhängig voneinander, sondern verknüpft über die Relation

$$m_{12}^2 + m_{13}^2 + m_{23}^2 = s + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2. \quad (2.14)$$

²Diese Argumentation ist einem Vortrag von Brian Lindquist entnommen [55].

Im Schwerpunktsystem gilt für die Energien der Tochterteilchen [53, S. 77]

$$E_i = \frac{s + m_i^2 - m_{jk}^2}{2\sqrt{s}}, \quad (2.15)$$

dies zeigt insbesondere, dass die Energien linear von den invarianten Massen m_{jk}^2 abhängig sind (vgl. Gleichung 2.18). Das absolute Maximum von m_{ij}^2 folgt aus der Bedingung, dass das Teilchen k im Schwerpunktsystem in Ruhe erzeugt wird. In diesem Fall sind die Impulse der Teilchen i und j entgegengerichtet gleich groß und für die Energie von Teilchen k gilt $E_k = m_k$ (siehe Abb. 2.2 rechts). Mit der Energieerhaltung im Schwerpunktsystem erhält man

$$(m_{ij}^2)_{\max} = (\sqrt{s} - m_k)^2. \quad (2.16)$$

Das absolute Minimum von m_{ij}^2 wird angenommen, falls Teilchen i und j keinen Relativimpuls besitzen (siehe Abb. 2.2 links). Da m_{ij}^2 eine invariante Größe ist, kann diese in dem Bezugssystem berechnet werden, in dem sowohl Teilchen i als auch j in Ruhe sind, es folgt

$$(m_{ij}^2)_{\min} = (m_i + m_j)^2. \quad (2.17)$$

Um die erlaubten Werte von m_{ij}^2 unabhängig von den zwei beschriebenen kinematischen Extremsituationen zu bestimmen, ist es hilfreich, das Helizitätssystem von Teilchen i und j zu betrachten, in diesem gilt $\mathbf{p}_i^* = -\mathbf{p}_j^*$ (siehe Abb. 2.3). Die

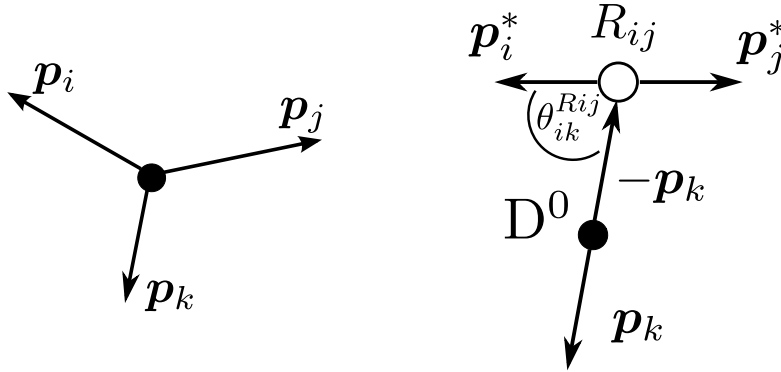


Abbildung 2.3: Impulse im Schwerpunktsystem (*links*) und im Helizitätssystem (*rechts*) von Teilchen i und j . Das gesamte Bezugssystem R_{ij} bewegt sich mit dem Impuls $-\mathbf{p}_k$.

Energien der Teilchen i , j und k können in diesem Bezugssystem bestimmt werden zu [56, S. 9]

$$E_i^* = \frac{m_{ij}^2 - m_j^2 + m_i^2}{2m_{ij}}, \quad E_j^* = \frac{m_{ij}^2 - m_i^2 + m_j^2}{2m_{ij}}, \quad E_k^* = \frac{s - m_{ij}^2 - m_k^2}{2m_{ij}}. \quad (2.18)$$

Für die kinematisch erlaubte Region von m_{ij}^2 folgt

$$\begin{aligned} (m_{ij}^2)_{\max} &= (E_i^* + E_j^*)^2 - \left(\sqrt{E_i^{*2} - m_i^2} - \sqrt{E_j^{*2} - m_j^2} \right)^2 \\ (m_{ij}^2)_{\min} &= (E_i^* + E_j^*)^2 - \left(\sqrt{E_i^{*2} - m_i^2} + \sqrt{E_j^{*2} - m_j^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Es handelt sich dabei um den kleinsten und größten möglichen Wert der invarianten Masse m_{ij}^2 bei gegebenen Impuls $\mathbf{p}_k$ des drittem Tochterteilchens im CMS; auf diese Art definiert Gleichung 2.19 die Grenzen des Phasenraumes. Äquivalent zur Angabe des Impulses $\mathbf{p}_k$ ist ein konstanter Wert von einer der verbleibenden invarianten Massen m_{ik} oder m_{jk} . Die Energien E_i^* und damit auch die Impulsbeträge $|\mathbf{p}_i^*| = \sqrt{E_i^{*2} - m_i^2}$ beziehen sich auf eines der drei Helizitätssysteme (i,j) , (i,k) oder (j,k) . Aufgrund der Lorentzinvarianz dieser Größe kann $(m_{ij}^2)_{\min/\max}$ in jedem dieser Bezugssysteme berechnet werden. Abbildung 2.4 gibt eine Übersicht über die Randpunkte des Phasenraumes. Anders als m_{ij}^2 sind die Winkel zwischen

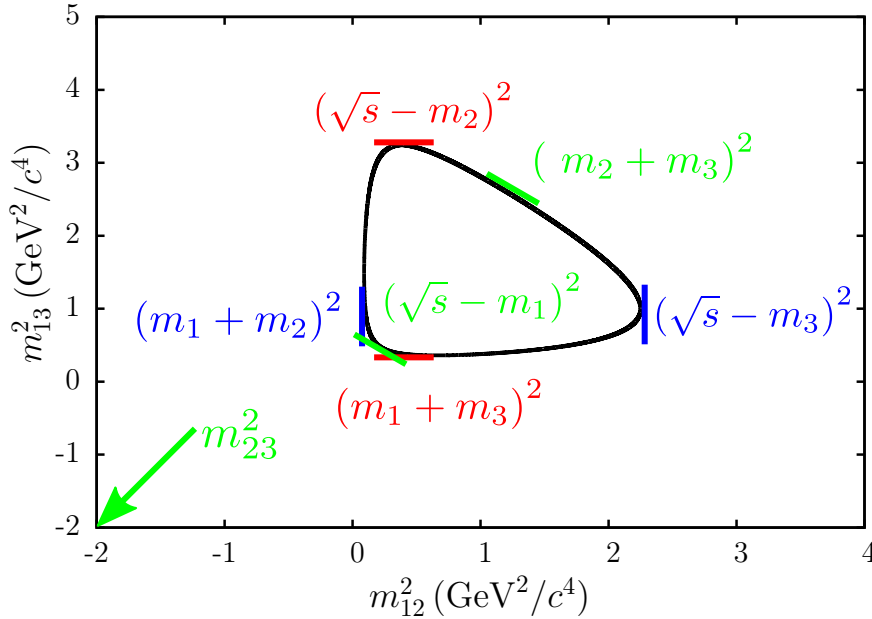


Abbildung 2.4: Randpunkte des Dreikörperphasenraumes bei $\sqrt{s} = 2 \text{ GeV}$ mit den Werten $m_1 = 0,1 \text{ GeV}/c^2$, $m_2 = 0,2 \text{ GeV}/c^2$ und $m_3 = 0,5 \text{ GeV}/c^2$.

den drei Zerfallsteilchen nicht lorentzinvariant und somit abhängig vom gewählten Bezugssystem. Prinzipiell können die Winkel zwischen den Impulsen der Tochterteilchen in jedem per Konvention gewählten Inertialsystem betrachtet werden, für die spätere Analyse der Übergangsamplitude ist es sinnvoll, auch hier die bereits verwendeten Helizitätssysteme zu benutzen, in denen der Schwerpunkt jeweils zweier Teilchen in Ruhe ist ($\mathbf{p}_i^* = -\mathbf{p}_j^*$). Es wird folgende Notation für die sogenannten

Helizitätswinkel verwendet [57]:

- θ_{ik}^{Rij} : Der Winkel zwischen Teilchen i und k im Ruhesystem von Teilchen i und j (siehe Abb. 2.3).

Aufgrund der Relation $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$ sind die zwei Helizitätswinkel in einem Helizitätssystem verknüpft über

$$\cos \theta_{ik}^{Rij} = -\cos \theta_{jk}^{Rij}. \quad (2.20)$$

Bei einem gegebenen Wert von $\mathbf{p}_k$ oder äquivalent einem konstanten Wert von m_{ij}^2 gilt ([56, S. 11], vgl. Gleichung 2.19)

$$m_{ik}^2 = \frac{(m_{ik}^2)_{\min} + (m_{ik}^2)_{\max}}{2} + \cos \theta_{ik}^{Rij} \frac{(m_{ik}^2)_{\min} - (m_{ik}^2)_{\max}}{2}. \quad (2.21)$$

Hieraus folgt

$$\cos \theta_{ik}^{Rij} = \frac{2m_{ik}^2 - (m_{ik}^2)_{\min} - (m_{ik}^2)_{\max}}{(m_{ik}^2)_{\min} - (m_{ik}^2)_{\max}}. \quad (2.22)$$

Abbildung 2.5 zeigt den Verlauf der Helizitätswinkel über den Dreikörperphasenraum.

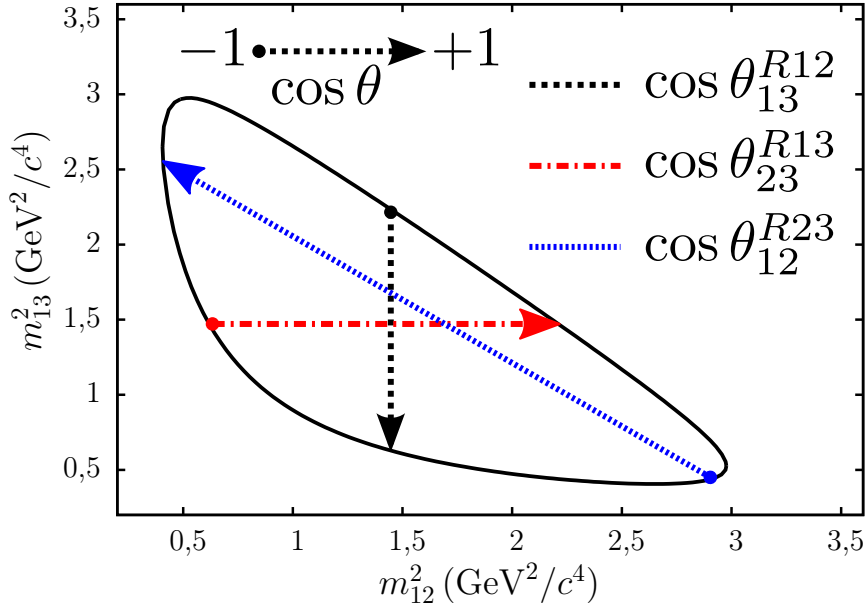


Abbildung 2.5: Verlauf der Helizitätswinkel im Dalitz-Diagramm. Die Extremwerte von $\cos \theta_{ik}^{Rij}$ werden an den Grenzen des zugänglichen Phasenraumes angenommen.

2.3 Isobarenmodell und Dreikörperamplitude

In der vorliegenden Arbeit wird zur Beschreibung der Dreikörperamplitude $\mathcal{A}(D^0 \rightarrow 123)$ das sogenannte Isobarenmodell verwendet. In diesem rein empirischen Ansatz wird angenommen, dass sich ein Dreikörperzerfall, wie hier $D^0 \rightarrow 123$, durch eine sukzessive Abfolge von Zweikörperprozessen der Form

$$\begin{aligned} D^0 &\rightarrow \mathcal{R}_{12} 3 \rightarrow 123 \\ D^0 &\rightarrow 1 \mathcal{R}_{23} \rightarrow 123 \\ D^0 &\rightarrow \mathcal{R}_{13} 2 \rightarrow 123 \end{aligned} \quad (2.23)$$

beschreiben lässt. Beispiele hierfür im untersuchten Zerfall sind

$$\begin{aligned} D^0 &\rightarrow K_0^*(1430)^+ \pi^- \rightarrow (K_S \pi^+) \pi^- \\ D^0 &\rightarrow K_S \rho(770) \rightarrow K_S (\pi^+ \pi^-) \\ D^0 &\rightarrow K^*(892)^- \pi^+ \rightarrow (K_S \pi^-) \pi^+ . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Die Namensgebung Isobarenmodell entstammt den 50er Jahren des vergangenen Jahrhunderts, in denen bei Proton-Proton- und Pion-Proton-Streuung als intermediäre Resonanzen vor allem die verschiedenen Isospinzustände der Deltaresonanz (Δ^{++} , Δ^+ , Δ^0 , Δ^-) von Bedeutung waren (siehe beispielsweise [58] und [59]). Diese sind als Zustände mit gleichem Gesamtsospin $I = 3/2$ in der kernphysikalischen Nomenklatur als Isobare zu bezeichnen. Abbildung 2.6 veranschaulicht Prozesse, die im Isobarenmodell beschreibbar sind und solche die Rückstreuung beinhalten und über das Modell hinaus gehen. Die gesamte Zerfallswahrscheinlichkeit ist proportional

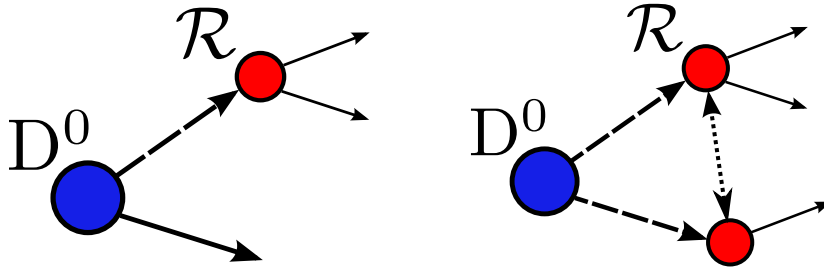


Abbildung 2.6: Produktionsprozesse ohne (*links*) und mit (*rechts*) Rückstreuung im Ausgangskanal. Abbildung frei nach [8, S. 5].

zum Betragsquadrat der Dreikörperamplitude und ergibt sich aus der kohärenten Summe der Zweikörperamplituden $A_i(D^0 \rightarrow \mathcal{R}_i j)$

$$\begin{aligned} |\mathcal{A}(D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-)|^2 &= \left| \sum_i A_i \right|^2 \\ i &= K_0^*(1430)^+, \rho(770), K^*(892)^-, \dots \end{aligned} \quad (2.25)$$

Die Kohärenz der intermediären Partialwellen und deren damit mögliche Interferenz ist ein quantenmechanischer Effekt, der letztlich der Unkenntnis des Zwischenzustandes zuzuschreiben ist. In der klassischen Betrachtung sind die Prozesse in Gleichung 2.24 klar unterscheidbar und es werden lediglich die Einzelwahrscheinlichkeiten addiert ($\sum_i |A_i|^2$). Seine Berechtigung erhält das Isobarenmodell vor allem durch die extrem gute Beschreibung einer Vielzahl von unterschiedlichsten Dreikörperzerfällen. Bekannte Beispiele von Zefällen die sich nur ungenügend in diesem Modell beschreiben lassen sind $\omega \rightarrow \pi^+ \pi^- \pi^0$ und $\eta \rightarrow 3\pi$ [8, S. 4]. Im Folgenden wird die Anwendbarkeit des Isobarenmodells im untersuchten Zerfall angenommen. Es ist daher hinreichend lediglich Zweikörperamplituden zu betrachten, da die volle Dreikörperamplitude aus diesen konstruiert werden kann.

2.4 Breit-Wigner-Amplitude

Die Existenz von Resonanzen in Reaktionen der Form

$$a + b \rightarrow \mathcal{R} \rightarrow a + b \quad (2.26)$$

ist gekennzeichnet durch Polstellen der Streumatrix in der komplexen Energieebene und bedingt hierdurch eine Phasenverschiebung zwischen einlaufender und auslaufender Welle. Für den partiellen Wirkungsquerschnitt $\sigma_l(p)$ bei relativem Bahndrehimpuls l gilt nahe der Resonanz [60, S. 241ff]

$$\sigma_l(p) = \frac{4\pi(2l+1)}{p^2} \sin^2 \delta_l(p). \quad (2.27)$$

Anschaulich lässt sich die Phasenverschiebung als durch die endliche Lebensdauer der Resonanz bedingte, zeitliche Verschiebung zwischen ein- und auslaufender Welle interpretieren. Zusätzlich zur abrupten Phasenbewegung der Resonanz können Un-

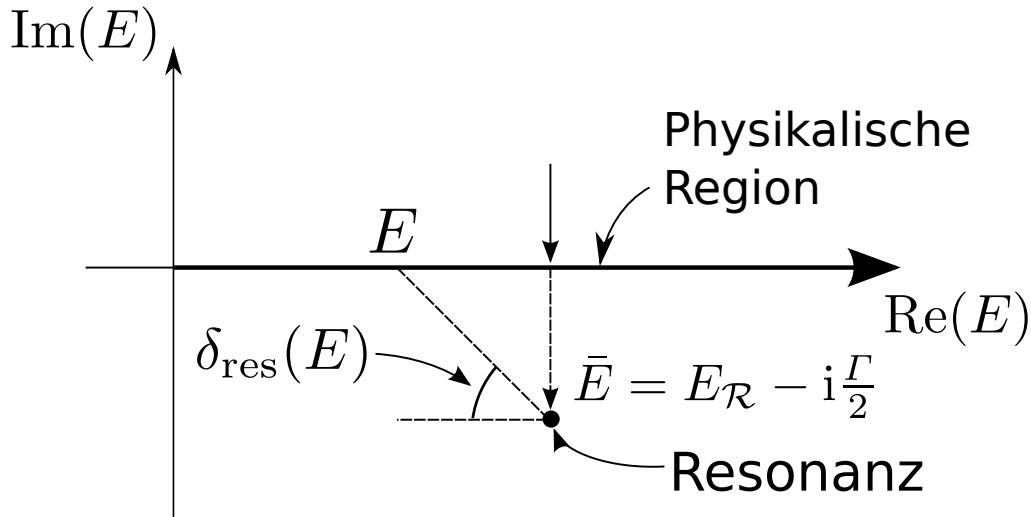


Abbildung 2.7: Lage einer Resonanz in der komplexen Energieebene. Abbildung frei nach [60, S. 243].

tergrundprozesse als langsam variierende Funktion zur gesamten Phasenverschiebung beitragen

$$\delta(E) = \delta_{\text{bg}}(E) + \delta_{\text{res}}(E). \quad (2.28)$$

Mit elementarer Geometrie erhält man aus Abbildung 2.7 für den resonanten Teil der Phase

$$\sin \delta_{\text{res}}(E) = \frac{\Gamma/2}{\sqrt{(E - E_{\mathcal{R}})^2 + (\Gamma/2)^2}}. \quad (2.29)$$

Bei verschwindender Phase des Untergrundes $\delta_{\text{bg}} = 0$ erhält man zusammen mit Gleichung 2.27 für den partiellen Wirkungsquerschnitt die nichtrelativistische Breit-

Wigner-Verteilung

$$\sigma_l(E) \propto \sin^2 \delta_l(E) = \frac{(\Gamma/2)^2}{(E - E_{\mathcal{R}})^2 + (\Gamma/2)^2}. \quad (2.30)$$

Im Allgemeinen hängt die Erscheinung der Resonanz im partiellen Wirkungsquerschnitt ganz wesentlich vom Verlauf der Untergrundphase ab, unabhängig von dieser ist jedoch der Phasensprung um etwa π in der Nähe von $E = E_{\mathcal{R}}$. Abbildung 2.8 veranschaulicht dies für verschiedene konstante Werte von δ_{bg} . Gleichung 2.30 ist nicht

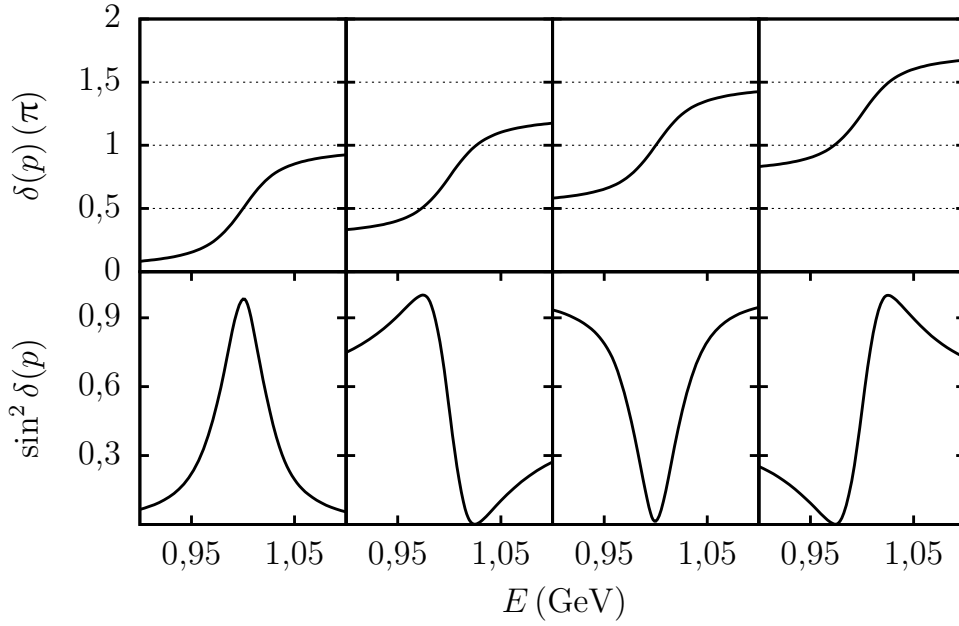


Abbildung 2.8: Partieller Wirkungsquerschnitt in der Nähe einer Resonanz ($E_{\mathcal{R}} = 1 \text{ GeV}$, $\Gamma = 50 \text{ MeV}$) bei konstanter Untergrundphase (von links nach rechts $\delta_{\text{bg}} = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}$). Abbildung frei nach [60, S. 242].

kovariant. Hierdurch ergeben sich Korrekturen, die vor allem von Bedeutung sind, falls die Breite der Resonanz in einer ähnlichen Größenordnung liegt wie deren Masse. Bezeichnet man die invariante Masse der Teilchen a und b mit $m_{ab}^2 = (\mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b)^2$, gilt im relativistischen Fall für die Übergangsamplitude (siehe beispielsweise [4])

$$A = \frac{m_{\mathcal{R}} \Gamma}{m_{\mathcal{R}}^2 - m_{ab}^2 - i m_{\mathcal{R}} \Gamma}. \quad (2.31)$$

Für den Wirkungsquerschnitt folgt hiermit

$$\sigma \propto \frac{(m_{\mathcal{R}} \Gamma)^2}{(m_{\mathcal{R}}^2 - m_{ab}^2)^2 + (m_{\mathcal{R}} \Gamma)^2}. \quad (2.32)$$

Abbildung 2.9 veranschaulicht die Unterschiede zwischen nichtrelativistischer (Gleichung 2.30) und relativistischer (Gleichung 2.32) Breit-Wigner-Amplitude im Wirkungsquerschnitt. Weitere Korrekturen der Amplitudenform ergeben sich aus dem zur Verfügung stehenden Phasenraum und dem Spin der Resonanz. Diese werden im folgenden Abschnitt 2.5 behandelt.

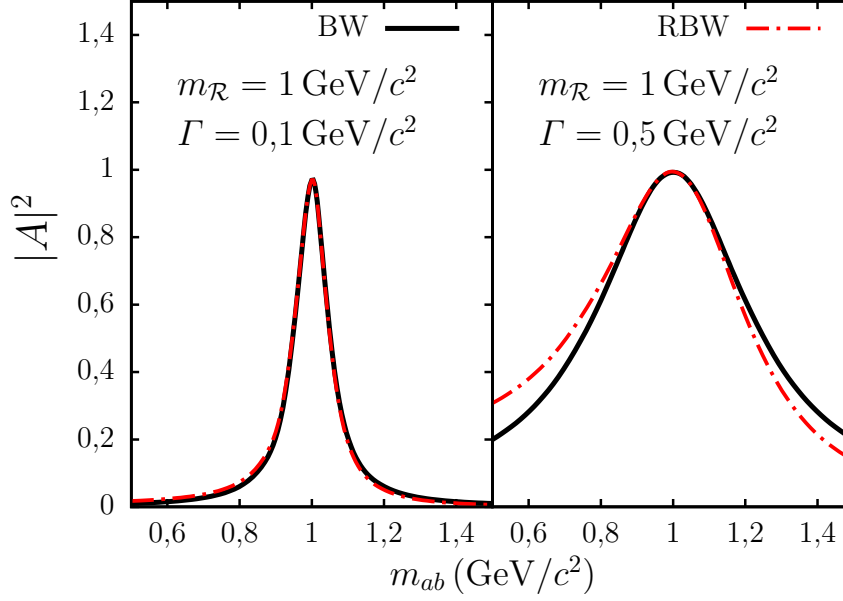


Abbildung 2.9: Betragsquadrat der nichtrelativistischen (BW) und relativistischen (RBW) Breit-Wigner Amplitude für zwei Resonanzen gleicher Masse $m_{\mathcal{R}}$ und unterschiedlicher Breite Γ .

2.5 Korrekturen der Amplitudenform

Die beschriebene Breit-Wigner-Amplitudenform wird durch verschiedene Effekte korrigiert, die dazu führen, dass die Breiten der Resonanzen selbst energieabhängig sind. Zunächst wird dabei der Phasenraumfaktor näher erläutert, im Anschluss auf die Auswirkung der Drehimpulsbarriere im Zerfall eingegangen.

Der zur Verfügung stehende Phasenraum variiert über den Energiebereich, bei

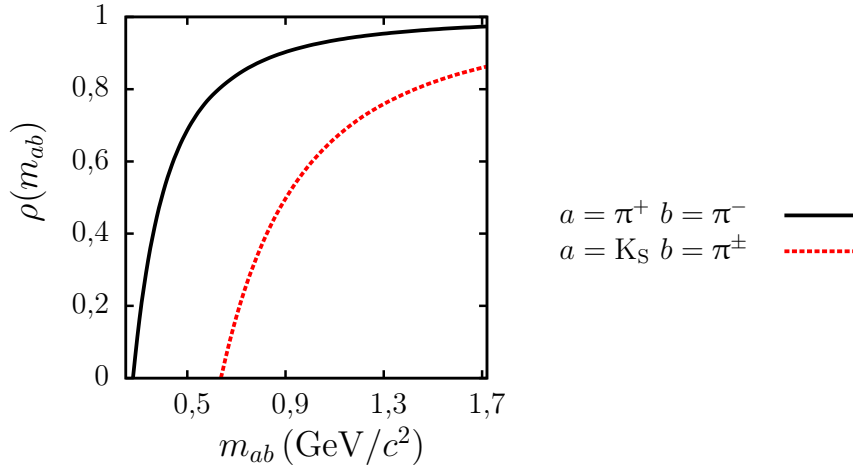


Abbildung 2.10: Phasenraumfaktoren ρ für Zerfälle der Form $\mathcal{R} \rightarrow ab$ in Abhängigkeit der invarianten Masse m_{ab} .

dem eine Resonanz erzeugt werden kann. Wird diese im Zerfall $\mathcal{R} \rightarrow ab$ beobachtet, liegt die minimale Energie, bei der dieser stattfinden kann, offensichtlich bei $E_{\min} = m_a + m_b$. In der Nähe dieser Schwelle ist die Zahl der möglichen Zerfallszustände klein und der Zerfall unterdrückt. Hierdurch erscheint die Resonanz langlebiger und die Zerfallsbreite schmaler als die intrinsische Breite. Hingegen erwartet man, dass bei hohen Energien die Phasenraumlimitierung keine Rolle spielt. Formal lässt sich dies durch sogenannte Phasenraumfaktoren [61] beschreiben

$$\rho(m_{ab}) = \sqrt{\left(1 - \left(\frac{m_a + m_b}{m_{ab}}\right)^2\right) \left(1 - \left(\frac{m_a - m_b}{m_{ab}}\right)^2\right)}. \quad (2.33)$$

Mathematisch besitzen diese die gewünschten Eigenschaften

$$\lim_{m_{ab} \searrow m_a + m_b} \rho(m_{ab}) = 0, \quad \lim_{m_{ab} \rightarrow \infty} \rho(m_{ab}) = 1. \quad (2.34)$$

Die Phasenraumfaktoren für Zerfälle der Form $\mathcal{R} \rightarrow K_S \pi^\pm$ und $\mathcal{R} \rightarrow \pi^+ \pi^-$ im Energiebereich des $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ Dalitz-Diagramms sind in Abbildung 2.10 gezeigt. Es besteht folgender Zusammenhang zum Impuls q der Tochterteilchen im Ruhesystem

der Resonanz

$$q(m_{ab}) = \frac{\rho(m_{ab})m_{ab}}{2}. \quad (2.35)$$

Die Phasenraumkorrektur bezieht sich hierbei nicht auf die Stärke der Amplitude, sondern lediglich auf die relative Änderung der Breite. Die hierfür verwendete Form ist ρ/ρ_0 , wobei $\rho_0 = \rho(m_{\mathcal{R}})$ den Wert des Phasenraumfaktors an der Resonanzmasse bezeichnet. Es lässt sich zeigen, dass für die energieabhängige Breite gilt [62]

$$\Gamma(m_{ab}) = \Gamma_0 \left(\frac{q(m_{ab})}{q_0} \right)^{2L+1} \left(\frac{m_{\mathcal{R}}}{m_{ab}} \right), \quad (2.36)$$

dabei bezeichnet L den relativen Bahndrehimpuls zwischen a und b , $\Gamma_0 = \Gamma(m_{\mathcal{R}})$ ist die Breite an der Resonanz. Der Term $m_{\mathcal{R}}/m_{ab}$ bezieht sich auf den hier relevanten Fall des Zerfalls in zwei pseudoskalare Mesonen, im Allgemeinen ist er vom Spin der Tochterteilchen abhängig und folgt formal aus niedrigster Ordnung Störungstheorie. Die zweite Form von Korrektur ergibt sich aus der Drehimpulsbarriere im Zerfall $\mathcal{R} \rightarrow ab$. Besitzen die Teilchen a und b keinen eigenen Spin, muss aufgrund der Drehimpulserhaltung ein eventuell vorhandener Spin von $\mathcal{R}$ in einen Relativdrehimpuls zwischen den Tochterteilchen umgesetzt werden. Klassisch ist dieser gegeben durch $L_{\max} = rq$, wobei r den Relativabstand bezeichnet. Betrachtet man den Zerfall in umgekehrter Zeitrichtung als Produktion $ab \rightarrow \mathcal{R}$ ist auch anschaulich klar, dass die Reaktion abhängig vom Spin von $\mathcal{R}$ unterdrückt ist. So erfordert die Produktion von Resonanzen mit höherem Spin einen größeren Relativabstand zwischen a und b und die Reaktion ist, abhängig von der Reichweite der zugrundeliegenden Wechselwirkung, unterdrückt. Formal lässt sich die Drehimpulskorrektur aus der radialen Schrödingergleichung gewinnen.

L	$B'_L(q)$	$B_L(q, q_0)$
0	1	1
1	$\sqrt{\frac{2z}{1+z}}$	$\sqrt{\frac{1+z_0}{1+z}}$
2	$\sqrt{\frac{13z^2}{(z-3)^2+9z}}$	$\sqrt{\frac{(z_0-3)^2+9z_0}{(z-3)^2+9z}}$
mit $z = (rq)^2$ und $z_0 = (rq_0)^2$		

Tabelle 2.1: Drehimpulsbarriere-Funktionen nach Blatt und Weisskopf (*links*) [63] sowie Hippel und Quigg (*rechts*) [64].

Üblich sind zwei unterschiedliche Konventionen für die sogenannten Blatt-Weisskopf-Barriere-Faktoren. Einerseits die der Namensgeber J. F. Blatt und V. F. Weisskopf [63, S. 358ff.], andererseits die jüngere von C. Quigg und F. von Hippel [64]. In dieser werden die Barrierefaktoren auf den Wert an der Resonanz normiert, hierdurch

besteht folgender Zusammenhang

$$B_L(q, q_0) = \frac{B'_L(q)}{B'_L(q_0)}. \quad (2.37)$$

In Tabelle 2.1 sind die Drehimpulskorrekturfaktoren in beiden Konventionen für die relevanten Quantenzahlen zusammengefasst, im Folgenden findet die Konvention von Quigg und Hippel Verwendung. Übliche Werte für den Parameter r liegen bei $0\text{--}10\text{ GeV}^{-1}$ im Falle des D^0 und $0\text{--}3\text{ GeV}^{-1}$ für intermediäre Resonanzen [65]. Insgesamt folgt für die energieabhängige Breite

$$\Gamma(m_{ab}) = \Gamma_0 \left(\frac{q}{q_0} \right)^{2L+1} \left(\frac{m_{\mathcal{R}}}{m_{ab}} \right) B_L^2(q, q_0). \quad (2.38)$$

Der Verlauf der Blatt-Weisskopf-Barriere-Faktoren sowie deren Auswirkung auf die Amplitudenform ist in Abbildung 2.11 gezeigt.

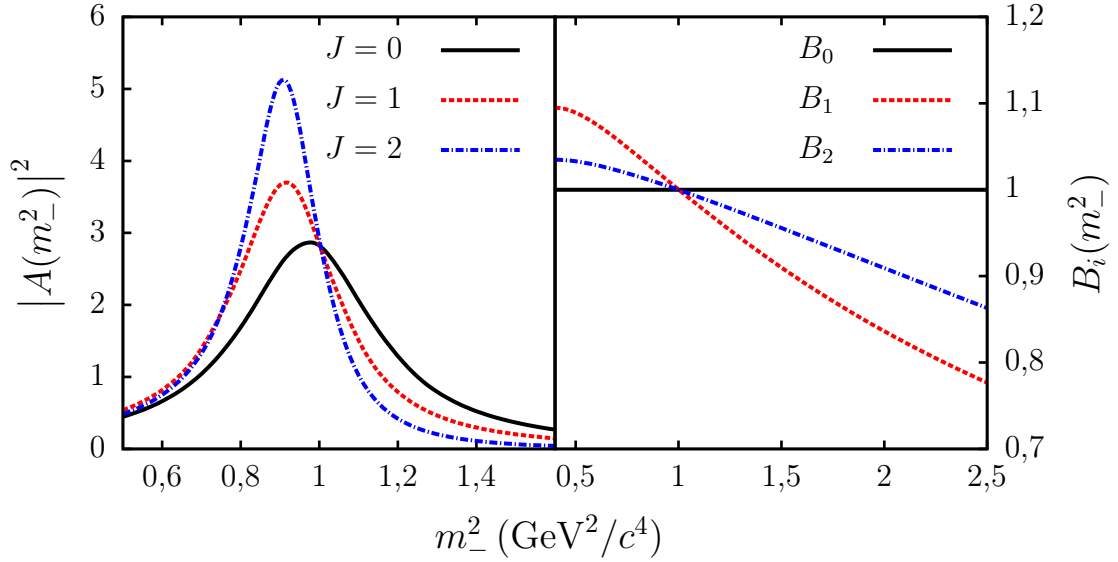


Abbildung 2.11: Verlauf der Blatt-Weisskopf-Barriere-Faktoren (*rechts*) und deren Auswirkung auf die Amplitudenform (*links*).

2.6 Winkelverteilung

Neben der im vorhergehenden Kapitel gezeigten Modifikation der Amplitudenform durch die Drehimpulsbarriere führt der Spin einer Resonanz in geeigneten Koordinaten zu einer anisotropen Winkelverteilung. Im Folgenden wird deren Berechnung in einer abgewandelten Form des kovarianten Tensorformalismus nach [65] und [66] skizziert. Die Grundzüge des Formalismus sind ausführlich in [67] dargestellt. Die Berechnung ist insofern kovariant dass keine Notwendigkeit des Bezugs auf ein

speziell ausgezeichnetes Bezugssystem besteht, entsprechend kann das Resultat in Form von lorentzinvarianten Größen ausgedrückt werden. Betrachtet man hierzu einen Zerfall der Form

$$D^0 \rightarrow \mathcal{R} c \rightarrow (ab) c, \quad (2.39)$$

so lässt sich die Übergangsamplitude für die gesamte Zerfallskette schreiben als [66]

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = \sum_{\lambda} \langle ab | \mathcal{R}_{\lambda} \rangle T_{\mathcal{R}} \langle c \mathcal{R}_{\lambda} | D^0 \rangle, \quad (2.40)$$

wobei über die möglichen Polarisationen λ der Resonanz $\mathcal{R}$ summiert wird. Bei $T_{\mathcal{R}}$ handelt es sich um den Breit-Wigner-Propagator der Resonanz

$$T_{\mathcal{R}} = \frac{1}{m_{\mathcal{R}}^2 - m_{ab}^2 - i m_{\mathcal{R}} \Gamma(m_{ab})}. \quad (2.41)$$

Die Form der Zerfallsamplitude aus Gleichung 2.40 ist in Abbildung 2.12 veranschaulicht. Für die Matrixelemente der Zweikörperzerfälle in Gleichung 2.40 lässt sich im

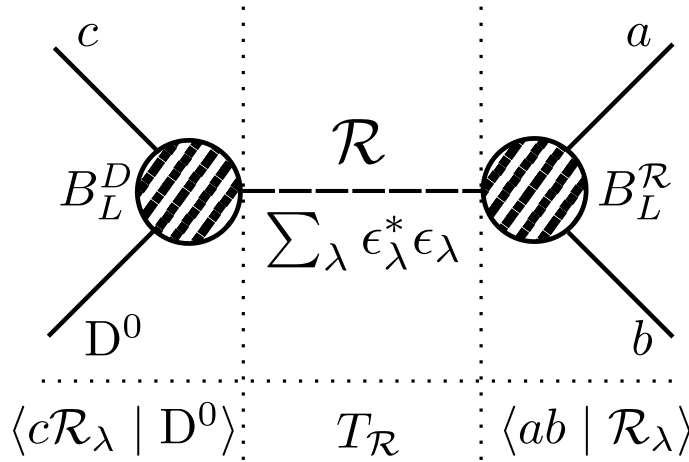


Abbildung 2.12: Darstellung des Matrixelementes des Zerfalls $D^0 \rightarrow abc$ mit einer intermediären Resonanz $\mathcal{R} \rightarrow ab$. Aus der Summation über die möglichen Polarisationen folgt die Zerfallswinkelverteilung. Abbildung frei nach [65].

Fälle einer Vektorresonanz ($L = 1$) folgender Ansatz machen

$$\begin{aligned} \langle c \mathcal{R}_{\lambda} | D^0 \rangle &= \left(f_+ (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\mu} + f_- (\mathbf{P}_D - \mathbf{P}_c)_{\mu} \right) g_D \epsilon_{\lambda}^{\mu}, \\ \langle ab | \mathcal{R}_{\lambda} \rangle &= g_{\mathcal{R}} \epsilon_{\lambda}^{*\nu} (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_{\nu}, \end{aligned} \quad (2.42)$$

dabei ist ϵ der Polarisationsvektor am jeweiligen Vertex, $f_{\pm} = f_{\pm}(m_{ab}^2)$ sind Formfaktoren und g_D sowie $g_{\mathcal{R}}$ effektive Kopplungskonstanten der starken Wechselwirkung. Nimmt man an, dass für die ausgetauschte Resonanz lediglich transversale Polarisation möglich ist, folgt $\epsilon_{\lambda}^{\mu} (\mathbf{P}_{\mathcal{R}})_{\mu} = 0$ und der f_- -Term trägt aufgrund von $\mathbf{P}_{\mathcal{R}} = \mathbf{P}_D - \mathbf{P}_c$

nicht zur Wechselwirkung bei. Der verbliebene Formfaktor wird im relevanten Energiebereich als konstant angenähert ($f_+ \approx f(m_{ab}^2 = m_{\mathcal{R}}^2)$). Die starken Kopplungen g_D und $g_{\mathcal{R}}$ werden üblicherweise entweder als konstant angenommen oder wie hier durch Blatt-Weisskopf-Faktoren in den Zerfällen $D^0 \rightarrow \mathcal{R}c$ (B_L^D) und $\mathcal{R} \rightarrow ab$ ($B_L^{\mathcal{R}}$) effektiv parametrisiert. Aus Gleichung 2.40 erhält man hiermit

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\mathcal{R}} &= \sum_{\lambda} \langle ab | \mathcal{R}_{\lambda} \rangle T_{\mathcal{R}} \langle c \mathcal{R}_{\lambda} | D^0 \rangle \\ &= Z_L B_L^D B_L^{\mathcal{R}} T_{\mathcal{R}}, \end{aligned} \quad (2.43)$$

dabei bezeichnet L den relativen Bahndrehimpuls zwischen $\mathcal{R}$ und dem Teilchen c . Die Funktion Z_L beschreibt die Zerfallswinkelverteilung, im Falle einer Vektorresonanz gilt

$$\begin{aligned} Z_1 &= (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\mu} \left(\sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{*\mu} \epsilon_{\lambda}^{\nu} \right) (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_{\nu} \\ &= (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\mu} \left(-g^{\mu\nu} + \frac{\mathbf{P}_{\mathcal{R}}^{\mu} \mathbf{P}_{\mathcal{R}}^{\nu}}{m_{ab}^2} \right) (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_{\nu} \\ &= m_{bc}^2 - m_{ac}^2 + \frac{(m_D^2 - m_c^2)(m_a^2 - m_b^2)}{m_{ab}^2}. \end{aligned} \quad (2.44)$$

Verwendet man die Abkürzungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\mu\nu} &= (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\mu} (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\nu} \\ (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_{\alpha\beta} &= (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_{\alpha} (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_{\beta} \end{aligned} \quad (2.45)$$

ergibt sich aus einem ähnlichen Ansatz für die Winkelverteilung beim Zerfall von Tensorresonanzen ($L = 2$)

$$\begin{aligned} Z_2 &= (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\mu\nu} \left(\sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{*\mu\nu} \epsilon_{\lambda}^{\alpha\beta} \right) (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_{\alpha\beta} \\ &= \left(m_{bc}^2 - m_{ac}^2 + \frac{(m_D^2 - m_c^2)(m_a^2 - m_b^2)}{m_{ab}^2} \right)^2 \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(m_{ab}^2 - 2m_D^2 - 2m_c^2 + \frac{(m_D^2 - m_c^2)^2}{m_{ab}^2} \right) \\ &\quad \times \left(m_{ab}^2 - 2m_a^2 - 2m_b^2 + \frac{(m_a^2 - m_b^2)^2}{m_{ab}^2} \right). \end{aligned} \quad (2.46)$$

Die detaillierte Berechnung von Z_1 und Z_2 ist in Anhang B gezeigt. Im Falle einer skalaren Resonanz ($L = 0$) treten keine Polarisierungen auf und die Winkelverteilung

ist isotrop, es folgt

$$Z_0 = 1. \quad (2.47)$$

Die hier gezeigten Winkelverteilungen sind bis auf einen konstanten Faktor identisch zum Ergebnis im Zemach-Formalismus (siehe Tab. 2.2 und Abb. 2.13), in dem die Berechnung zu Legendre-Polynomen als Funktion des Kosinus der betreffenden Helizitätswinkel führt. Die Bedingung der Transversalität der intermediären Resonanz

L	Z_L
0	1
1	$\cos^2 \theta$
2	$(\cos^2 \theta - \frac{1}{3})^2$
mit $\theta = \theta_{13}^{R12}$	

Tabelle 2.2

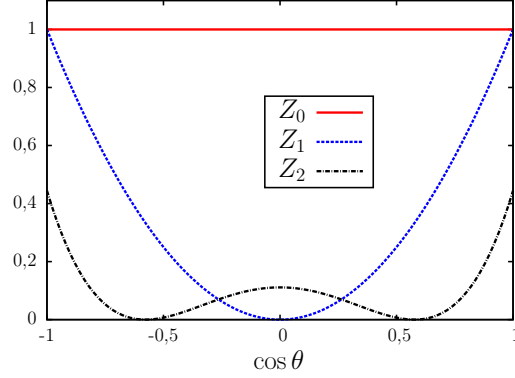


Abbildung 2.13

Tabelle 2.2 und Abbildung 2.13: Winkelverteilung für den Zerfall $D^0 \rightarrow \mathcal{R}c \rightarrow (ab)c$ mit $J^{PC}(a, b, c) = 0^{-+}$ im Zemach-Formalismus [67]. L bezeichnet den Bahndrehimpuls zwischen $\mathcal{R}$ und c . Bis auf einen konstanten Faktor entsprechen die Funktionen Z_L den Legendre-Polynomen $P_{2L}(\cos \theta)$.

kann gelockert werden, indem folgende Ersetzung in der Berechnung der Spinsumme vorgenommen wird

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{*\mu} \epsilon_{\lambda}^{\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{\mathbf{P}_{\mathcal{R}}^{\mu} \mathbf{P}_{\mathcal{R}}^{\nu}}{m_{ab}^2} \longrightarrow -g^{\mu\nu} + \frac{\mathbf{P}_{\mathcal{R}}^{\mu} \mathbf{P}_{\mathcal{R}}^{\nu}}{m_{\mathcal{R}}^2}. \quad (2.48)$$

Hierdurch sind longitudinale Polarisationen der Resonanz möglich, falls diese sich nicht auf ihrer Massenschale befindet ($\mathbf{P}_{\mathcal{R}} \cdot \mathbf{P}_{\mathcal{R}} \neq m_{\mathcal{R}}^2$). Dieses Verhalten ist empirisch bei W-Bosonen beobachtet worden und sollte auch beim hier untersuchten Zerfall auftreten [65]. Die Ersetzung 2.48 führt zur Substitution $1/m_{ab}^2 \rightarrow 1/m_{\mathcal{R}}^2$ in Z_1 und Z_2 . Abbildung 2.14 zeigt exemplarisch die Winkelverteilung für skalare, Vektor- und Tensorresonanzen im beschriebenen Modell.

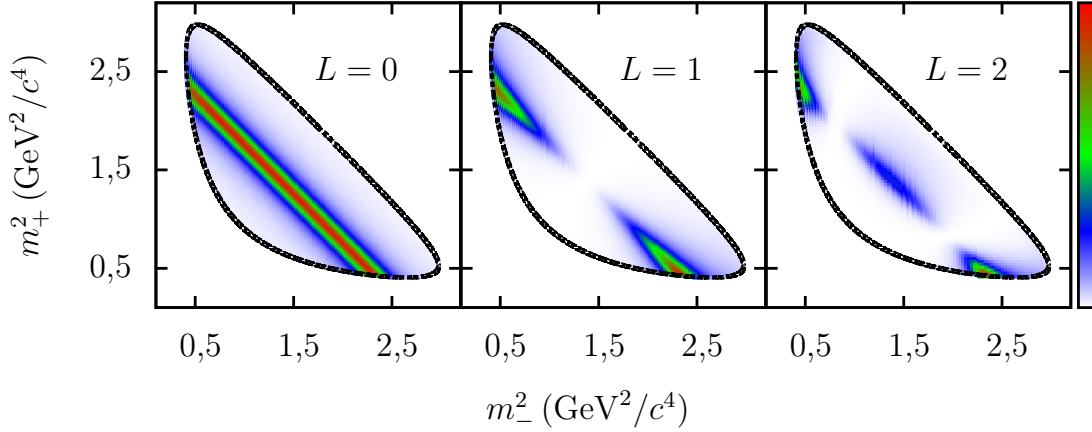


Abbildung 2.14: Winkelverteilung für skalare, Vektor- und Tensorresonanzen im Dalitz-Diagramm. Das gezeigte Beispiel bezieht sich auf eine Resonanz in $\mathcal{R} \rightarrow \pi^+ \pi^-$ mit den Parametern $m_{\mathcal{R}} = 1 \text{ GeV}/c^2$ und $\Gamma_{\mathcal{R}} = 100 \text{ MeV}/c^2$. $m_{\pm}^2$ ist eine Abkürzung für $m^2(K_S, \pi^{\pm})$.

2.7 Gounaris-Sakurai-Amplitude

Zur Parametrisierung der $\rho(770) \rightarrow \pi^+ \pi^-$ Übergangsamplitude wird im Folgenden ein von Gounaris und Sakurai [68] stammender Ansatz verwendet, der leicht von der üblichen Breit-Wigner-Form abweicht. Die Methode von Gounaris und Sakurai verwendet eine Analyse der Streuphase δ , um hieraus die Form der ρ -Amplitude abzuleiten. Betrachtet man hierzu den Streuprozess

$$e^+ e^- \rightarrow \pi^+ \pi^-, \quad (2.49)$$

so erfolgt die Streuung im Energiebereich $\sqrt{s} < 1 \text{ GeV}$ rein elastisch. In diesem Fall führt die Erhaltung der Wahrscheinlichkeit, die formal in der Unitarität der Streumatrix zum Ausdruck kommt, zu folgender Relation zwischen Imaginär- und Realteil der Übergangsamplitude [8]

$$\text{Im } T(s) = \frac{q}{\sqrt{s}} |T(s)|^2. \quad (2.50)$$

Für die Übergangsamplitude und den inversen Operator folgt [69]

$$\begin{aligned} T &= \frac{\sqrt{s}}{q} e^{i\delta} \sin \delta \\ T^{-1} &= -i \frac{q}{\sqrt{s}} + \frac{q}{\sqrt{s}} \cot \delta. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Um das Verhalten der Phase selbst zu beschreiben, kann eine Näherung effektiver Reichweite verwendet werden. Dabei wird angenommen, dass das Verhalten der Phase

bestimmt wird durch Singularitäten der Streuamplitude innerhalb eines effektiven Bereichs in der komplexen Impulsebene. Formal entspricht dies einer Entwicklung der Streuamplitude bei kleinen Energien. Nach Chew und Mandelstam [70] erhält man folgende Approximation der Phase

$$\frac{q^3}{\sqrt{s}} \cot \delta = q^2 h(s) + a + \frac{1}{2} r q^2, \quad (2.52)$$

dabei entspricht r der effektiven Reichweite und a der Streulänge. Der Faktor

$$h(s) = \frac{2}{\pi} \ln \left(\frac{\sqrt{s} + 2q}{2m_\pi} \right) \quad (2.53)$$

dient zur Unterdrückung der durch die sogenannte Adler-Null hervorgerufenen kinematischen Singularität. Da das ρ der einzige Pol der Streumatrix ist, der unterhalb von $\sqrt{s} < 1 \text{ GeV}/c^2$ das Verhalten der Streuphase beeinflusst, lässt sich umgekehrt die Masse des ρ über den Wert der Phase an der Resonanz definieren

$$\cot \delta|_{s=m_\rho^2} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{d\delta}{ds}|_{s=m_\rho^2} = \frac{1}{m_\rho \Gamma_\rho}. \quad (2.54)$$

Die Übergangsamplitude folgt hiermit zu

$$A(s) = \frac{f(0)}{f(s)} \quad \text{mit} \quad f(s) = q^2 T^{-1}. \quad (2.55)$$

Insgesamt erhält man

$$\begin{aligned} A(s) &= \frac{m_\rho^2 + d m_\rho \Gamma}{m_\rho^2 - s - i m_\rho \Gamma_\rho(s) + D(s)} \\ \text{mit } D(s) &= \Gamma \left(\frac{m_\rho^2}{q_\rho^3} \right) \left(q^2 \left(h(s) - h(m_\rho^2) \right) + q_\rho^2 h' \left(m_\rho^2 - s \right) \right) \\ \text{und } h' &= \frac{dh(s)}{ds}|_{s=m_\rho^2} = h(m_\rho^2) (1/(8q_\rho) - 1/(2m_\rho^2)) + 1/(2\pi m_\rho^2). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Die Korrekturfaktoren d und h' sind konstant und berechnen sich zu

$$\begin{aligned} d &= \frac{3m_\pi^2}{\pi q_\rho^2} \ln \left(\frac{m_\rho + 2q_\rho}{2m_\pi} \right) + \frac{m_\rho}{2\pi q_\rho} - \frac{m_\pi^2 m_\rho}{\pi q_\rho^3} \approx 0,479 \\ h' &\approx 0,327. \end{aligned} \quad (2.57)$$

Abbildung 2.15 zeigt einen Vergleich zwischen Breit-Wigner- und der Gounaris-Sakurai-Amplitude.

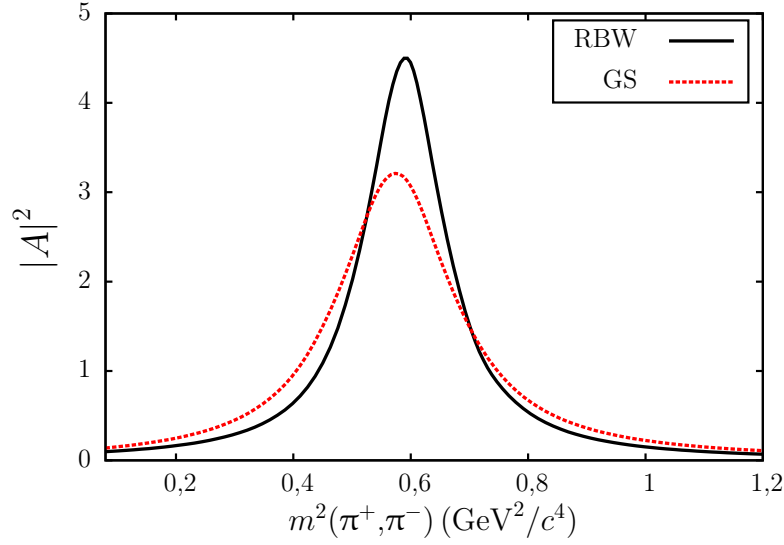


Abbildung 2.15: Betragsquadrat von Gounaris-Sakurai- (GS) und relativistischer Breit-Wigner-Amplitude mit Korrekturfaktoren (RBW). Zur besseren Vergleichbarkeit sind die zwei Funktionen im gezeigten Intervall auf eins normiert.

2.8 $K\pi$ S-Welle und LASS-Parametrisierung

Die gezeigte Breit-Wigner-Parametrisierung ist nur für isolierte, schmale Resonanzen fernab von Schwellen neuer Reaktionskanäle eine adäquate Beschreibung der resonanten Zweikörperamplituden. Während dies hier für die Vektor- und Tensorresonanzen mit hinreichender Genauigkeit erfüllt ist, müssen zur Beschreibung der $\pi\pi$ und $K_S \pi^\pm$ S-Welle ($L = 0$) kompliziertere Modelle herangezogen werden.

Die $K\pi$ S-Welle wird im Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ dominiert durch die Resonanz $K_0^*(1430)^\pm$; die nächste angeregte skalare Kaonresonanz $K^*(1950)^\pm$ befindet sich außerhalb des zugänglichen Energiebereiches. In der Nähe des $K_0^*(1430)^\pm$ befinden sich die Schwellen der Reaktionen $K_S \pi \rightarrow K\eta$ und $K_S \pi \rightarrow K\eta'$. Durch Kopplung des $K_0^*(1430)^\pm$ an diese nicht beobachteten Kanäle (siehe Abb. 2.16) kann ein Teil der Zerfallswahrscheinlichkeit verloren gehen, aufgrund der Wahrscheinlichkeitserhaltung verringert sich hierdurch die Intensität im beobachteten Kanal. In der $SU(3)$ -Vorhersage [71] ist die Kopplung an den $K\eta$ -Kanal schwach ($g_{K\eta}^2 < \frac{1}{10} g_{K\pi}^2$) und wird hier vernachlässigt. Die Schwelle für den $K\eta'$ -Kanal liegt bei $\sqrt{s} \approx 1,46$ GeV, unterhalb derselben ist nur der Zerfall $K_0^*(1430)^\pm \rightarrow K_S \pi^\pm$ möglich. Die Breite des $K_0^*(1430)^\pm$ ist dabei so groß, dass die Variation der elastischen Phase über den Energiebereich der Resonanz nicht vernachlässigt werden kann (siehe auch Abb. 2.8). Im Folgenden wird eine Parametrisierung verwendet, die auf der Analyse von $K^\pm p \rightarrow K^\pm \pi^+ n$ und $K^\pm p \rightarrow K^\pm \pi^- \Delta^{++}$ Streudaten am Large Aperture Superconducting Solenoid (LASS) Spektrometer des Stanford Linear Accelerator Center

$^3m = (1425 \pm 50) \text{ MeV}/c^2$, $\Gamma = (270 \pm 80) \text{ MeV}/c^2$, $I(J^P) = \frac{1}{2}(0^+)$ [4].

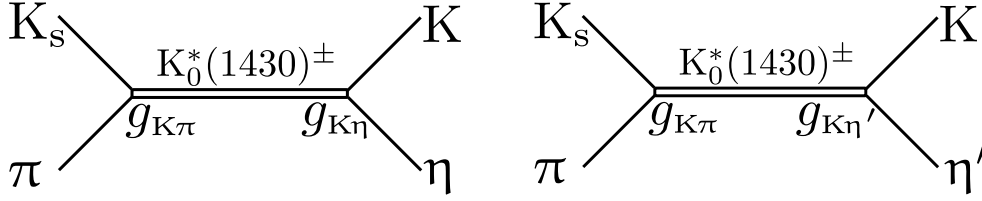


Abbildung 2.16: Veranschaulichung der Reaktionen $K_S \pi \rightarrow K_0^*(1430)^\pm \rightarrow K\eta^{(\prime)}$.
 g_{ij} bezeichnet die Kopplungsstärke des $K_0^*(1430)^\pm$ an den betreffenden Zerfallskanal.

(SLAC) basiert [72]. In dieser Parametrisierung setzt sich die Phase der Streuamplitude aus einer langsam variierenden effektiven Reichweiten-Parametrisierung und einer schnellen Phasenbewegung in Form einer Breit-Wigner-Amplitude zusammen. Für die Streuamplitude der Reaktion $K\pi \rightarrow K\pi$ gilt nach [71] bei verschwindendem relativen Bahndrehimpuls ($L = 0$) für die Isospin-Komponente $I = 1/2$

$$T = T_B + T_R e^{i\Phi}$$

$$T_R = \sin \delta_R e^{i\delta_R} = \frac{m_R \Gamma_{K\pi}}{(m_R^2 - m_{K\pi}^2) - i m_R (\Gamma_{K\pi} + \Gamma_{K\eta'})} \quad (2.58)$$

mit $\Gamma_i = q_i \Gamma_i^0$, $i = K\pi, K\eta'$.

Hierbei ist Γ_i die partielle Zerfallsbreite in den i ten Kanal. Für den Untergrundterm gilt mit einer effektiven Reichweiten-Parametrisierung

$$T_B = \sin \delta_B e^{i\delta_B} \quad \text{mit} \quad q_{K\pi} \cot \delta_B = \frac{1}{a} + \frac{1}{2} r q_{K\pi}^2. \quad (2.59)$$

Wie in Gleichung 2.52 entspricht a der Streulänge und r näherungsweise der effektiven Reichweite der Wechselwirkung. Die Unitarität der Streumatrix kann in Gleichung 2.58 erzwungen werden durch die Verwendung von $\Phi = 2\delta_B$. In Abbildung 2.17 ist die Streuamplitude mit den gemessenen Parametern (siehe Tab. 2.3) veranschaulicht. Der Verlauf von T_R entspricht dabei einer reinen Breit-Wigner-Amplitude. Die Kopplung an den $K\eta'$ -Kanal ist im LASS-Modell nur indirekt über die Breite der Breit-Wigner-Amplitude berücksichtigt, während die geschlossene Kreisform des Argand-Diagramms zeigt, dass die gesamte Intensität im $K\pi$ -Kanal verbleibt und die Streuung rein elastisch verläuft. Die Kreisform des Argand-Diagramms entspricht dabei der Unitaritätsbedingung $\text{Im}(T) = |T|^2$.

Für die Beschreibung der $K\pi$ S-Welle in Produktion, wie hier $D^0 \rightarrow K_0^*(1430)^\pm \pi^\mp$, müssen einige Änderungen an der Parametrisierung vorgenommen werden. Insbesondere kann die relative Stärke und Phase von elastischem (T_B) und resonantem (T_R) Anteil zu anderen Resonanzen in der D^0 -Zerfallsamplitude verschieden sein. Nach [51] erhält man

$$T = B \sin(\delta_B + \phi_B) e^{i(\delta_B + \phi_B)} + R \sin(\delta_R) e^{i(\delta_R + \phi_R)} e^{2i(\delta_B + \phi_B)}, \quad (2.60)$$

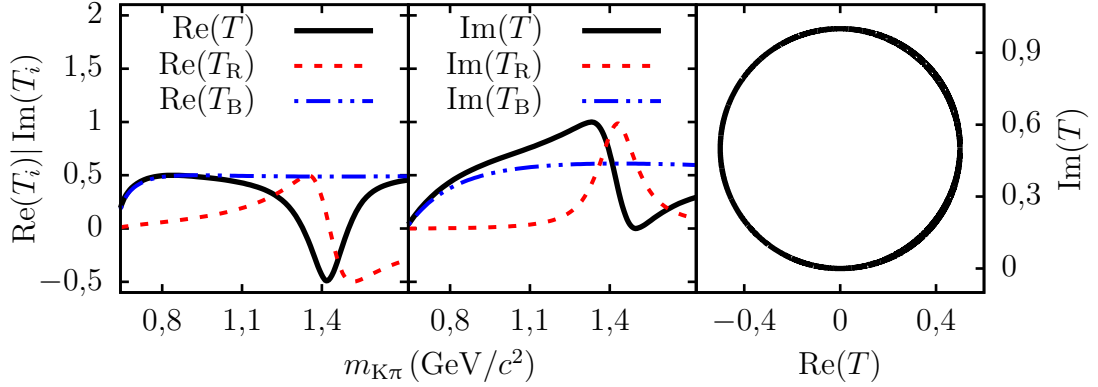


Abbildung 2.17: Realteil (*links*), Imaginärteil (*Mitte*) und Argand-Diagramm (*rechts*) der LASS-Streuamplitude.

B , R , ϕ_B und ϕ_R sind dabei reelle Konstanten. Die resonante Phasenbewegung wird abweichend zur ursprünglichen LASS-Parametrisierung mit einer elastischen K -Matrix⁴ beschrieben:

$$\tan \delta_R = \frac{m_R \Gamma_R(m_{K\pi})}{m_R^2 - m_{K\pi}^2}. \quad (2.61)$$

Der Verlauf der elastischen Phase folgt auch hier aus Gleichung 2.59. Die LASS-Amplitude mit den gemessenen Parametern (Tabelle 2.3) ist in Abbildung 2.18 dargestellt.

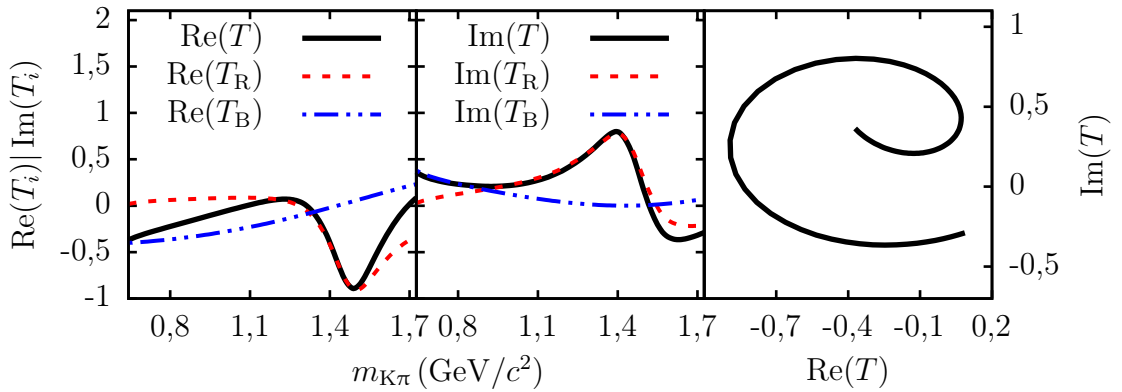


Abbildung 2.18: Realteil (*links*), Imaginärteil (*Mitte*) und Argand-Diagramm (*rechts*) der LASS-Amplitude in Produktion.

Durch die nicht berücksichtigte Kopplung an den $K\eta'$ -Kanal ergeben sich im LASS-Modell oberhalb dessen Schwelle kleine, systematische Abweichungen vom tatsächlichen Verlauf. Prinzipiell wäre daher die Verwendung des K -Matrix Formalismus zur Beschreibung der $K\pi$ S-Welle wünschenswert. Die große Zahl der K -Matrix Parameter kann jedoch bei geringer Statistik die Stabilität der Funktionsanpassung

⁴Der K -Matrix Formalismus wird im folgenden Abschnitt 2.9 dargestellt.

Parameter	Streuung [73]	Produktion [74]
m (MeV/ c^2)	$1429 \pm 4 \pm 5$	1463 ± 2
Γ (MeV/ c^2)	$287 \pm 10 \pm 21$	233 ± 5
$\Gamma_{K\pi}/\Gamma_{\text{ges}}$	$0,93 \pm 0,04 \pm 0,09$	—
B	1	$0,80 \pm 0,09$
ϕ_B (rad)	0	$2,33 \pm 0,13$
R	1	1 (fixiert)
ϕ_R (rad)	0	$-5,31 \pm 0,04$
a (GeV/ c)	$4,03 \pm 1,72 \pm 0,06$	$1,07 \pm 0,11$
r (GeV/ c)	$1,29 \pm 0,63 \pm 0,67$	$-1,8 \pm 0,3$

Tabelle 2.3: $K\pi$ s-Welle in der LASS-Parametrisierung gemessen in Streuung ($K^\pm p \rightarrow K^\pm \pi^+ n$, $K^\pm p \rightarrow K^\pm \pi^- \Delta^{++}$) und Produktion ($D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$). Der erste Fehler ist statistischer, der zweite systematischer Natur.

und damit die systematische Unsicherheit wesentlich erhöhen. Als Beispiel einer Analyse, bei dem der K -Matrix Formalismus zur Beschreibung der $K\pi$ S-Welle Verwendung gefunden hat, sei hier auf eine Veröffentlichung von Link und anderen [75] zu $D^+ \rightarrow K^- \pi^+ \pi^+$ Zerfällen am E831 Experiment des Fermilab verwiesen.

2.9 $\pi\pi$ S-Welle und K -Matrix Formalismus

Die größte systematische Unsicherheit in der Analyse der $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ Zerfallsamplitude liegt neben der Parametrisierung der $K\pi$ S-Welle im Modell, das zur Beschreibung der $\pi\pi$ S-Welle verwendet wird. In dieser tritt eine Vielzahl von überlappenden Resonanzen in Erscheinung, die an unterschiedliche Zerfallskanäle koppeln. Da eine solche Topologie nur ungenügend durch eine einfache Summe von Breit-Wigner-Amplituden beschrieben wird, findet hier der K -Matrix Formalismus Verwendung. Im Folgenden werden kurz die Grundzüge des K -Matrix Formalismus skizziert, sowie die explizite Form nach [76] beschrieben, die zur Parametrisierung der $\pi\pi$ S-Welle genutzt wird.

Im Allgemeinen ist die Wahrscheinlichkeit den Eingangszustand i im Endzustand f zu finden gegeben durch das Betragsquadrat der Matrixelemente des Streuoperators [61]

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle. \quad (2.62)$$

Aufgrund der Beziehung

$$I = \langle f | f \rangle = \langle i | S^\dagger S | i \rangle = I \quad (2.63)$$

ist der Streuoperator unitär und erhält die Gesamtwahrscheinlichkeit. Mathematisch

bedeutet dies

$$S^\dagger S = S S^\dagger = I, \quad (2.64)$$

dabei bezeichnet I den Identitätsoperator. Der Fall keiner Streuung, bei dem der Eingangszustand i keinerlei Wechselwirkung erfährt, kann von S separiert werden

$$S = I + 2i T. \quad (2.65)$$

Hierbei trägt der Identitätsoperator nur zu den Diagonalelementen von S bei, in denen Eingangs- und Endzustand identisch sind. Der Faktor $2i$ in Gleichung 2.65 ist reine Konvention. Für den Übergangsoperator T entspricht die Unitarität von S der Bedingung (vgl. mit Gleichung 2.50)

$$\text{Im}(T) = T^* T = T T^*. \quad (2.66)$$

Der K -Operator wird nun definiert über

$$K^{-1} = T^{-1} + i I. \quad (2.67)$$

Bei Invarianz von S unter Zeitumkehr ist es möglich, die K -Matrix reell und symmetrisch zu wählen. In diesem Fall entspricht Gleichung 2.67 einer expliziten Aufspaltung von T^{-1} nach Imaginär- und Realteil

$$\text{Re}(T^{-1}) = K^{-1} \quad \text{Im}(T^{-1}) = -I. \quad (2.68)$$

Formal ist K ein hermitescher Operator und kommutiert mit T

$$K = K^\dagger \quad [K, T] = 0. \quad (2.69)$$

Die T -Matrix kann aus K berechnet werden über

$$T = K (I - i K)^{-1} = (I - i K)^{-1} K. \quad (2.70)$$

Die bisher gezeigte Form der Operatoren T und K ist nicht lorentzinvariant. Deren invariante Form $\hat{T}$ und $\hat{K}$ erhält man über

$$T = \rho^{1/2} \hat{T} \rho^{1/2} \quad K = \rho^{1/2} \hat{K} \rho^{1/2}, \quad (2.71)$$

dabei bezeichnet ρ die diagonale Phasenraummatrix mit den Komponenten

$$\rho_{ij} = \delta_{ij} \rho_j. \quad (2.72)$$

Hierbei sind die ρ_j die Phasenraumfaktoren (vgl. mit Gleichung 2.33) für den i ten Reaktionskanal. Hieraus folgt insbesondere die lorentzinvariante Form von Gleichung 2.70 zu

$$\hat{T} = \hat{K} \left(I - i \rho \hat{K} \right)^{-1} = \left(I - i \hat{K} \rho \right)^{-1} \hat{K}. \quad (2.73)$$

Eine besonders einfache Form nimmt die K -Matrix für die $\pi\pi$ S-Wellen unterhalb von $\sqrt{s} = 1 \text{ GeV}$ an. In diesem Fall verläuft die Streuung rein elastisch, die Streumatrix ist skalar und lässt sich schreiben als

$$S = e^{2i\delta}. \quad (2.74)$$

Mit Gleichung 2.65 folgt für die Übergangsmatrix T die bereits genutzte Form

$$T = e^{i\delta} \sin \delta. \quad (2.75)$$

Unter Verwendung von Gleichung 2.67 erhält man letztlich für die K -Matrix (vgl. mit Gleichung 2.61)

$$K = \tan \delta. \quad (2.76)$$

Dies zeigt insbesondere, dass der Wert der Phase $\delta = \frac{\pi}{2}$ zu einer Polstelle in K führt. Oberhalb von $\sqrt{s} = 1 \text{ GeV}$ öffnet sich mit zunehmender Energie eine Reihe von inelastischen Reaktionskanälen. Insgesamt werden folgende Reaktionen in Betracht gezogen

$$\pi^+ \pi^- \rightarrow i, \quad i = \pi^+ \pi^-, K\bar{K}, \eta\eta, \eta\eta', 4\pi. \quad (2.77)$$

Der 4-Pion Kanal ist dabei als $\rho\rho$ oder $\sigma\sigma$ Übergang zu verstehen. Jedes Matrixelement K_{ij} lässt sich in diesem Fall als Propagator auffassen, der den Eingangszustand i in den Streuzustand j überführt (siehe Abb. 2.19). Da es sich beim

$i \backslash j$	1	2	3
1	$\pi \xrightarrow{K_{11}} \pi$	$\pi \xrightarrow{K_{12}} \bar{K}$	
2	$\bar{K} \xrightarrow{K_{21}} \pi$	$\bar{K} \xrightarrow{K_{22}} \bar{K}$	$\dots$
3	$\dots$	$\dots$	$\dots$

Abbildung 2.19: Veranschaulichung der K -Matrixelemente K_{ij} .

Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ um keinen Streuvorgang, sondern um die Produktion eines Zustandes handelt, der durch Kopplung an überlappende Resonanzen in den untersuchten Kanal zerfällt, muss der Formalismus variiert werden. Dabei findet hier der P -Vektor-Formalismus nach Aitchison [77] seine Verwendung. In diesem wird die Produktion des Anfangszustandes j (Gleichung 2.77) beschrieben durch die j te Komponente des P -Vektors, die anschließende Propagation in den Endzustand i erfolgt über den Operator $(I - iK\rho)_{ij}^{-1}$. Die Amplitude, den Endzustand i zu beobachten, folgt hieraus als Summe des elastischen Kanals $i \rightarrow i$ und allen anfänglich als

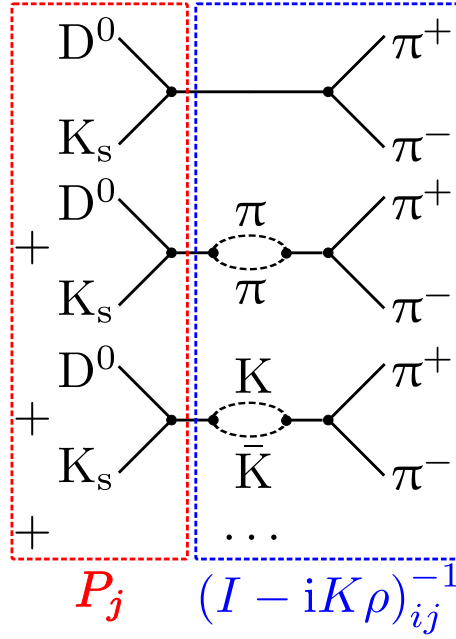


Abbildung 2.20: Veranschaulichung der Amplitude $F_{\pi\pi}$ nach dem P -Vektor-Formalismus von Aitchison [77].

j produzierten Zuständen, die über Kopplung an Resonanzen im Kanal i beobachtet werden. Dieser Sachverhalt ist anschaulich in Abbildung 2.20 dargestellt. Durch den P -Vektor-Formalismus ergibt sich folgende Änderung von Gleichung 2.73

$$\hat{F}_i = \left(I - i \hat{K} \rho \right)_{ij}^{-1} \hat{P}_j. \quad (2.78)$$

Die Komponenten des Vektors $\hat{F}$ sind hierbei die Amplituden zur Beobachtung des i ten Kanals. Hier von Bedeutung ist lediglich die Komponente $\hat{F}_{\pi\pi} = \hat{F}_1$. Bis auf den jeweiligen Untergrundterm sind die P -Vektorkomponenten proportional zum betreffenden K -Matrixelement und die F -Vektorkomponenten zum entsprechenden T -Matrixelement. Zwischen Amplitudenvektor F , dem P -Vektor sowie deren lorentzinvarianter Form $\hat{F}$ und $\hat{P}$ besteht folgender Zusammenhang

$$F = \rho^{1/2} \hat{F} \quad \quad P = \rho^{1/2} \hat{P}. \quad (2.79)$$

Zur Beschreibung der K -Matrix und des P -Vektors wird hier eine von Anisovich und Sarantsev [76] stammende Form verwendet. In dieser sind die Elemente der Phasenraummatrix in Gleichung 2.72 gegeben durch

$$\rho_i = \sqrt{\frac{s - (m_{1i} + m_{2i})^2}{s}}, \quad i = 1, \dots, 4. \quad (2.80)$$

Dies entspricht der Form von Gleichung 2.33 bei gleicher Masse der Tochterteilchen.

Für den Kanal $\eta\eta'$ soll diese Form falsche Singularitäten in der physikalischen Region vermeiden. Unterhalb der jeweiligen Schwellen werden diese komplex fortgesetzt um die Analytizität der S -Matrix zu gewährleisten, d. h.

$$\rho_i = i \sqrt{\frac{(m_{1i} + m_{2i})^2 - s}{s}} \quad \text{für } s < (m_{1i} + m_{2i})^2. \quad (2.81)$$

Der Phasenraumfaktor des 4-Pion Kanals ist

$$\rho_5(s) = \begin{cases} \rho'_5 & \text{für } s < 1 \text{ GeV}^2, \\ \rho_5 & \text{für } s > 1 \text{ GeV}^2, \end{cases} \quad (2.82)$$

mit

$$\begin{aligned} \rho'_5 &= \rho_0 \int \frac{ds_1}{\pi} \int \frac{ds_2}{\pi} m_p^2 \Gamma(s_1) \Gamma(s_2) \sqrt{(s + s_1 - s_2)^2 - 4s s_1} \\ &\quad \times s^{-1} \left((m_p^2 - s_1)^2 + m_p^2 \Gamma^2(s_1) \right)^{-1} \\ &\quad \times \left((m_p^2 - s_2)^2 + m_p^2 \Gamma^2(s_2) \right)^{-1} \\ \rho_5 &= \left(\frac{s - 16m_\pi^2}{s} \right)^5. \end{aligned} \quad (2.83)$$

Dabei entsprechen s_1 und s_2 den invarianten Massen jeweils zweier Pionen, $\Gamma(s_i)$ ist die energieabhängige Breite $\Gamma(s_i) = \gamma \rho_1^3(s_i)$. Der Faktor ρ_0 gewährleistet die Stetigkeit bei $s = 1 \text{ GeV}^2$. Die K -Matrixelemente werden parametrisiert als

$$K_{ij}(s) = \left(\sum_{\alpha} \frac{g_i^{\alpha} g_j^{\alpha}}{m_{\alpha}^2 - s} + f_{ij}^{\text{scat}} \frac{1 - s_0^{\text{scat}}}{s - s_0^{\text{scat}}} \right) f_A(s), \quad (2.84)$$

dabei sind die reellen Parameter g_i^{α} die Kopplungskonstanten des K -Matrix-Pols α an den Kanal i . Der Term mit den Parametern f_{ij}^{scat} (komplex) und s_0^{scat} (reell) beschreibt den langsam variierenden, nicht-resonanten Untergrund des K -Matrixelementes. Der Faktor

$$f_A(s) = \frac{1 - s_{A0}}{s - s_{A0}} \left(s - s_A \frac{m_\pi^2}{2} \right) \quad (2.85)$$

dient zur Unterdrückung der sogenannten Adler-Null [78], einer falschen kinematischen Singularität bei $s = 0$, die sich in der physikalischen Region nahe der $\pi\pi$ -Schwelle befindet [74]. Die Parameter der Gleichung 2.84 sind von Anisovich und Sarantsev [76] durch eine kombinierte Analyse von GAMS, BNL, CERN, Crystal Barrel und E852 Daten im invarianten Massenbereich von 280–1900 GeV/c^2 bestimmt worden. Im späteren Fitprozess werden diese mit den Werten der Tabelle 2.4 als fixierte Parameter verwendet.

m_α	$g_{\pi\pi}^\alpha$	$g_{K\bar{K}}^\alpha$	$g_{\eta\eta}^\alpha$	$g_{\eta\eta'}^\alpha$	$g_{4\pi}^\alpha$
0,65100	0,22889	-0,55377	-0,39899	-0,34639	0
1,20360	0,94128	0,55095	0,39065	0,31503	0
1,55817	0,36856	0,23888	0,18340	0,18681	0,55639
1,21000	0,33650	0,40907	0,19906	-0,00984	0,85679
1,82206	0,18171	-0,17558	-0,00355	0,22358	-0,79658
s_0^{scat}	f_{11}^{scat}	f_{12}^{scat}	f_{13}^{scat}	f_{14}^{scat}	f_{15}^{scat}
-3,92637	0,23399	0,15044	-0,20545	0,32825	0,35412
$s_{A0} = -0,15$			$s_A = 1$		

Tabelle 2.4: Kopplungskonstanten und Polmassen der K -Matrix Parametrisierung nach [76] in GeV/c^2 . Die Parameter f_{ij}^{scat} mit $i \neq 1$, die nicht zur beobachteten Amplitude beitragen, sind auf 0 gesetzt.

Für den Produktionsvektor wird folgende Form verwendet

$$P_j(s) = \sum_{\alpha} \frac{\beta_{\alpha} g_j^{\alpha}}{m_{\alpha}^2 - s} + f_{1j}^{\text{prod}} \frac{1 - s_0^{\text{prod}}}{s - s_0^{\text{prod}}}. \quad (2.86)$$

Die P -Vektorkomponenten haben dabei die gleichen Polstellen wie die K -Matrixelemente, da anderenfalls F -Vektorkomponenten an den Polen der K -Matrix verschwinden, beziehungsweise an den Polstellen des P -Vektors divergieren würden [74]. Anders als die aus Streudaten bestimmbaren Parameter der K -Matrixelemente (siehe Gleichungen 2.84 und 2.85) sind die Parameter der Produktionsvektorkomponenten (Gleichung 2.86) vom konkreten Produktionsprozess abhängig und müssen aus der Funktionsanpassung bestimmt werden. In der Ereignisgeneration der späteren Monte-Carlo-Simulation werden die Produktionsparameter aus [52] verwendet, die in Tabelle 2.5 zusammen gefasst sind.

In Abbildung 2.21 ist die verwendete Amplitudenform für die $\pi\pi$ S-Welle veranschaulicht.

Parameter	Betrag	Phase	Realteil	Imaginärteil
β_1	$4,23 \pm 0,02$	$164,0^\circ \pm 0,2^\circ$	-4,07	1,17
β_2	$10,90 \pm 0,02$	$15,6^\circ \pm 0,2^\circ$	10,50	2,93
β_3	$37,4 \pm 0,3$	$3,3^\circ \pm 0,4^\circ$	37,34	2,15
β_4	$14,7 \pm 0,1$	$-8,9^\circ \pm 0,3^\circ$	14,52	-2,27
β_5	0 (fixiert)	0° (fixiert)	0	0
f_{11}^{prod}	$12,76 \pm 0,005$	$-161,1^\circ \pm 0,3^\circ$	-12,07	-4,13
f_{12}^{prod}	$14,2 \pm 0,2$	$-176,2^\circ \pm 0,6^\circ$	-14,17	-0,94
f_{13}^{prod}	$10,0 \pm 0,5$	$-124,7^\circ \pm 2,1^\circ$	-5,69	-8,22
f_{14}^{prod}	0 (fixiert)	0° (fixiert)	0	0
f_{15}^{prod}	0 (fixiert)	0° (fixiert)	0	0
$s_0^{\text{prod}} = -3,92637$ (fixiert)				

Tabelle 2.5: Parameter des Produktionsvektors der $\pi\pi$ S-Welle bestimmt mit Daten des Belle-Experimentes von [52]. β_5 , f_{14}^{prod} und f_{15}^{prod} wurden in [52] auf 0 fixiert, da in der Funktionsanpassung keine statistische Sensibilität auf diese Parameter bestand. Die angegebenen Fehler sind rein statistisch, die ohne Fehler angegebenen Real- und Imaginärteile sind die in der Monte-Carlo-Simulation verwendeten Werte.

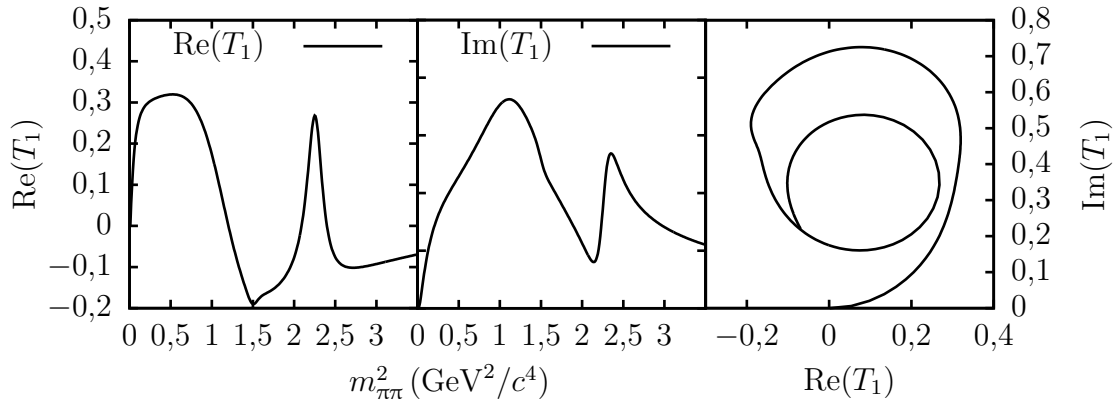


Abbildung 2.21: Das Matrixelement T_{11} in der verwendeten Form der K -Matrix-Parametrisierung nach [76].

Kapitel 3

Numerische Bestimmung der Modellparameter und Hypothesentests

Nachdem in den vorhergehenden Kapiteln dargestellt worden ist, nach welchem physikalischen Modell Zeitabhängigkeit und Dreikörperamplitude des hier untersuchten $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ Zerfalls beschrieben werden können, soll hier näher darauf eingegangen werden, wie die freien Parameter des Modells bestimmt werden können. Hierzu wird zunächst die Methode der maximalen Likelihood eingeführt. Im Anschluss wird das Verfahren anhand der D^0 -Lebensdauerermessung illustriert und gezeigt, wie sich Untergrund und die endliche Zeitauflösung des Detektors berücksichtigen lassen. Die Bestimmung der D^0 -Lebensdauer ist dabei ein wichtiger Konsistenztest, der Aufschluss über das Verhalten des Detektors gibt und es auch im späteren Experiment erlaubt, die Zerfallszeitauflösung abzuschätzen.

Im nächsten Schritt wird auf Besonderheiten der Methode der maximalen Likelihood bei Anwendung auf die Dalitz-Diagramm-Analyse eingegangen. Neben dem Vorgehen zur richtigen Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte wird dabei gezeigt, wie sich auch hier die Zeitauflösung in der Zerfallsamplitude berücksichtigen lässt. Das Verfahren ist analog zu dem der Lebensdauerbestimmung.

Zum Abschluss werden verschiedene statistische Tests vorgestellt, mit denen die Güte der Parameterbestimmung beurteilt werden kann, und verschiedene Hypothesen zur D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung und Zerfallsamplitude miteinander verglichen werden können.

3.1 Die Methode der maximalen Likelihood

Unter Einbeziehung der Zerfallszeitdifferenz Δt entspricht die Beobachtung jedes $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ Zerfalls der Messung eines Punktes $\mathbf{x} = (m_+^2, m_-^2, \Delta t)$ im dreidimensionalen Beobachtungs- oder auch Phasenraum. Die Verteilung der Observablen folgt der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda})$; dabei sind die Parameter $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ die Unbekannten, deren Werte aus der Funktionsanpassung bestimmt werden sollen. Im hier betrachteten Fall sind dies die komplexen Amplituden der Resonanzen, K -Matrix Produktionsstärken und insbesondere auch die Parameter der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung. Wurden insgesamt N $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ Zerfälle beobachtet, entspricht dies

der Messung von N Punkten $\mathbf{x}^{(i)}$ im Phasenraum. Verwendet man die Abkürzung $d\Omega = dm_+^2 dm_-^2 d\Delta t$, ist die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit, ein Ereignis in einem infinitesimalen Volumenelement um den tatsächlich beobachteten Phasenraumpunkt $\mathbf{x}^{(i)}$ zu finden, gegeben durch [79, S. 193]

$$dW^{(i)} = p(\mathbf{x}^{(i)}|\boldsymbol{\lambda})d\Omega. \quad (3.1)$$

Sind zudem die N gemessenen Ereignisse statistisch unabhängig voneinander [4] folgt die a-posteriori-Wahrscheinlichkeit, alle N Ereignisse an den vorgefundenen Phasenraumpunkten zu beobachten zu

$$dW = \prod_{i=1}^N p(\mathbf{x}^{(i)}|\boldsymbol{\lambda})d\Omega. \quad (3.2)$$

Die Likelihood-Funktion ist nun definiert über

$$L = \prod_{i=1}^N p(\mathbf{x}^{(i)}|\boldsymbol{\lambda}). \quad (3.3)$$

Diese ist keine Wahrscheinlichkeitsdichte, sondern eine Stichprobenfunktion und damit selbst eine Zufallsgröße [79, S. 194]. Ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda})$ normiert

$$\int_{\Omega} p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda})d\Omega = 1, \quad (3.4)$$

so folgt für die Likelihood-Funktion [80, S. 31]

$$\int_{\Omega} L(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda})d\Omega = 1. \quad (3.5)$$

Insbesondere gilt dies unabhängig vom konkreten Wert der Parameter $\boldsymbol{\lambda}$. Die Maximum-Likelihood-Schätzung $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ entspricht nun dem Punkt im m -dimensionalen Parameterraum, an dem die Likelihood-Funktion ihr globales Maximum annimmt

$$L_{\max} = L(\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\lambda}}). \quad (3.6)$$

Ein notwendiges Kriterium hierfür ist das Verschwinden des Gradienten am Maximum

$$\left. \frac{\partial L(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \right|_{\boldsymbol{\lambda}=\hat{\boldsymbol{\lambda}}} = 0 \text{ für } j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.7)$$

Dies sind die sogenannten Likelihood-Gleichungen. In der Regel ist es nicht möglich, das Maximum von L analytisch als Funktion der Ereignisse $\mathbf{x}^{(i)}$ zu bestimmen, entsprechend müssen numerische Algorithmen verwendet werden. Zudem erfordert die Methode die a-priori-Kenntnis der funktionalen Form der Wahrscheinlichkeitsdichte $p(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda})$. Wichtig sind deshalb Verfahren zum Vergleich der angepassten mit der

beobachteten Verteilung. Die in dieser Arbeit angewandten Verfahren sind in den Abschnitten 3.4.1 und 3.4.2 dargestellt. Abhängig von der beobachteten Ereignismenge ist Gleichung 3.3 ein Produkt aus einigen tausend Faktoren. Da die Ableitung eines solchen Ausdrucks schwierig zu handhaben ist, und um numerische Fehler beim Ausführen eines Produktes vieler kleiner Faktoren zu vermeiden, ist es üblich anstelle von Gleichung 3.3 die logarithmische Likelihood-Funktion zu verwenden

$$\ln L = \mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \ln p(\mathbf{x}^{(i)}|\boldsymbol{\lambda}). \quad (3.8)$$

Da das globale Maximum von L und $\mathcal{L}$ identisch ist, stimmen auch die Maximum-Likelihood-Schätzungen $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ der Parameter überein. Die Likelihood-Gleichungen werden zu

$$\left. \frac{\partial \ln L(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \right|_{\boldsymbol{\lambda}=\hat{\boldsymbol{\lambda}}} = \frac{1}{L} \left. \frac{\partial L(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda})}{\partial \lambda_j} \right|_{\boldsymbol{\lambda}=\hat{\boldsymbol{\lambda}}} = 0 \text{ für } j = 1, 2, \dots, m. \quad (3.9)$$

Allgemein lässt sich über eine Taylorentwicklung von $\mathcal{L}$ um $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ zeigen, dass die $m \times m$ Kovarianzmatrix $\mathbf{C}$ gegeben ist durch das Inverse der Hesse-Matrix [79, S. 212]

$$\mathbf{C} = \mathbf{H}^{-1}, \quad (3.10)$$

dabei können die Elemente der $m \times m$ Hesse-Matrix berechnet werden über

$$H_{ij} = E \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right), \quad (3.11)$$

wobei E den Erwartungswert bezeichnet. Die Fehler der Parameter folgen aus den Diagonalelementen der Kovarianzmatrix

$$\sigma(\lambda_j) = \sqrt{C_{jj}}. \quad (3.12)$$

3.2 Messung der mittleren Lebensdauer des D^0 -Mesons

Nachdem im vorhergehenden Abschnitt allgemein gezeigt wurde, dass die Maximierung der logarithmischen Likelihood-Funktion $\mathcal{L}$ äquivalent zum Bestimmen der Likelihood-Schätzung $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ der Parameter ist, soll hier der Formalismus in seiner Anwendung auf die Lebensdauerermessung des D^0 -Mesons gezeigt werden. Das Beispiel dient dabei nicht nur der Illustration des Verfahrens; die Messung der Lebensdauer ist ein wichtiger Konsistenztest, der auch im späteren realen Experiment Aufschluss über die Zerfallszeitauflösung des Detektors gibt und es erlaubt, die Fehlerschätzung der Spurfinding¹ im Detektor zu überprüfen. Auch ist dies eines der wenigen Beispiele für eine Anwendung des Formalismus der maximalen Likelihood, das in seiner einfachsten Form analytisch lösbar ist. Die hier eingeführten Konzepte der expliziten Berücksichtigung von Untergrundreaktionen in der Wahrscheinlichkeitsdichte und die Einbeziehung der Zeitauflösung durch eine Faltung mit der Auflösungsfunktion tauchen in analoger Form im nächsten Abschnitt über die Behandlung der zeitabhängigen D^0 -Zerfallsamplitude wieder auf. Die folgenden Ausführungen lassen sich daher auch als vorbereitende Demonstration der Verfahren des nächsten Abschnitts auf ein einfacheres Beispiel verstehen.

Der hier betrachtete Zerfall kurzlebiger Mesonen ist ein genuin probabilistischer Prozess. Es ist unmöglich, die Lebensdauer eines individuellen Teilchens vorherzusagen; bestimmbar ist lediglich die mittlere Lebensdauer τ . Da die beobachtete Zerfallszeit relativistisch vom relativen Bewegungszustand von Beobachter und Meson abhängig ist, bezieht man per Konvention die Lebensdauer auf das Ruhesystem des jeweiligen Teilchens. Insbesondere erscheint ein Meson im Laborsystem aufgrund der relativistischen Zeitdilatation um den Faktor $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$ langlebiger als in dessen Ruhesystem. Dabei besteht folgender Zusammenhang zwischen der Zeit im Ruhesystem des Mesons t und der Zeit im Laborsystem t'

$$t' = \gamma t. \quad (3.13)$$

Experimentell wird die Zerfallszeit bestimmt aus dem gemessenen Impuls und dem rekonstruierten Zerfallspunkt $\mathbf{L}$

$$|\mathbf{L}| = |\boldsymbol{\beta}| \gamma t = \frac{|\mathbf{p}|}{m} t. \quad (3.14)$$

Anstatt direkt über diese Gleichung die Zerfallszeit t zu bestimmen, ist es sinnvoller die Projektion des Ortsvektors auf die Impulsrichtung zu verwenden [50]

$$t = \mathbf{L} \cdot \left(\frac{\mathbf{p}}{p} \right) \frac{m}{p}. \quad (3.15)$$

¹Die Hypothesenbildung über die wahrscheinlichste Teilchentrajektorie anhand der im Detektor gemessenen diskreten Spurpunkte. Im Englischen „tracking“.

Experimentell wurde die mittlere Lebensdauer gemessen zu [4]

$$\tau = (410,1 \pm 1,5) \text{ fs.} \quad (3.16)$$

Die Wahrscheinlichkeitsdichte für den Zerfall eines D^0 -Mesons als Funktion der Eigenzeit ist gegeben durch [79, S. 84]

$$p(t|\tau) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (3.17)$$

Der Vorfaktor $1/\tau$ ist dabei notwendig zum Erhalt der Norm

$$\int_0^\infty p(t|\tau) dt = 1. \quad (3.18)$$

Zur Berechnung der Zerfallswahrscheinlichkeit im Zeitintervall $[t_a, t_b]$ kann die Wahrscheinlichkeitsdichte integriert werden

$$\begin{aligned} W(t_a \leq t < t_b) &= \int_{t_a}^{t_b} p(t|\tau) dt = P(t_b|\tau) - P(t_a|\tau) \\ &= \exp\left(-\frac{t_a}{\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t_b}{\tau}\right), \end{aligned} \quad (3.19)$$

hierbei entspricht $P(t_a|\tau)$ der Verteilungsfunktion. Sind insgesamt N D^0 -Zerfälle gemessen worden, folgt für die logarithmische Likelihood-Funktion

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^N \ln(p(t_i|\tau)) = - \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{\tau} - N \ln \tau. \quad (3.20)$$

In diesem einfachen Fall mit nur einem zu bestimmenden Parameter ist die einzige Likelihood-Gleichung analytisch lösbar; man erhält

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \tau} \right|_{\tau=\hat{\tau}} &= 0 = \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{\hat{\tau}^2} - \frac{N}{\hat{\tau}} \\ \hat{\tau} &= \sum_{i=1}^N \frac{t_i}{N}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Erwartungsgemäß entspricht die Maximum-Likelihood-Schätzung der mittleren Lebensdauer dem Mittelwert der Zerfallszeiten. Der Fehler der Schätzung $\hat{\tau}$ kann nach den Gleichungen 3.11 und 3.12 aus der zweiten Ableitung der logarithmischen Likelihood-Funktion bestimmt werden [81]

$$\sigma_\tau = \left(- \left. \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \tau^2} \right|_{\tau=\hat{\tau}} \right)^{-1/2} = \frac{\hat{\tau}}{\sqrt{N}}. \quad (3.22)$$

Gleichung 3.22 hängt nicht von den individuellen t_i ab und ist in der Regel kleiner als die Standardabweichung. Abbildung 3.1 zeigt exemplarisch eine nach der Wahrscheinlichkeitsdichte (Gleichung 3.17) erstellte Monte-Carlo-Stichprobe von 2.000 Ereignissen und die zugehörige Likelihood-Funktion. Der Anschaulichkeit halber sind die Daten in einem Histogramm mit 20 Bins dargestellt; dabei ist zu betonen, dass die Maximum-Likelihood-Schätzung keine Unterteilung in Bins erfordert. Die erwartete Zahl der Ereignisse in einem Histogramm mit Binbreite Δt ist dabei gegeben durch

$$\begin{aligned} N(t|\tau) &= N_0 \int_t^{t+\Delta t} p(t'|\tau) dt' \\ &= N_0 \left(\exp(-\frac{t}{\tau}) - \exp(-\frac{t+\Delta t}{\tau}) \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Es ist auch möglich, obere und untere Fehler ($\sigma_{\pm}$) aus den Punkten um das Maximum

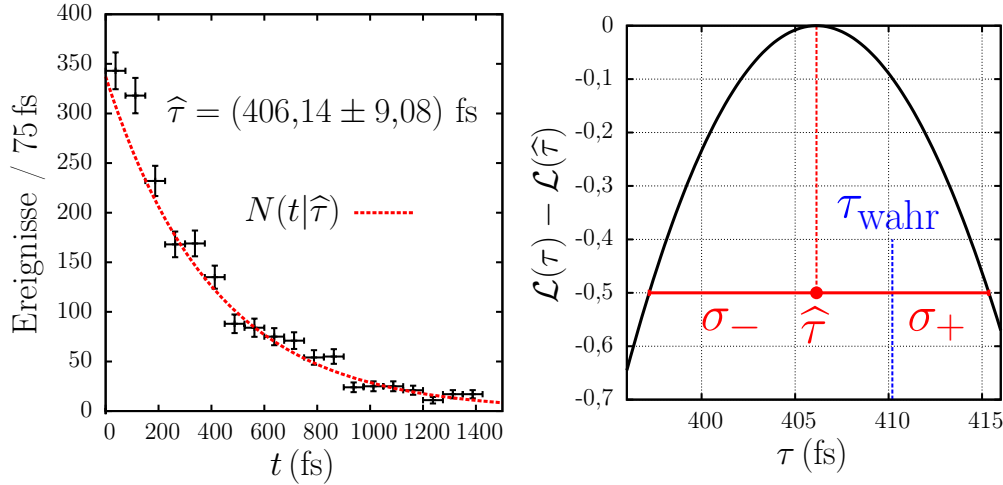


Abbildung 3.1: Exponentiell verteilte Monte-Carlo-Stichprobe von 2.000 Ereignissen und die angepasste Verteilung mit dem Wert der Maximum-Likelihood-Schätzung $N(t|\hat{\tau})$ (*links*). *Rechts* ist die zugehörige Likelihood-Funktion dargestellt. Der in der Ereignisgeneration verwendete Wert von 410,1 fs ist mit τ_{wahr} bezeichnet.

zu bestimmen, an denen sich $\mathcal{L}$ um den Wert $1/2$ verringert hat

$$\mathcal{L}(\hat{\tau} + \sigma_+) = \mathcal{L}(\hat{\tau} - \sigma_-) = \mathcal{L}(\hat{\tau}) - \frac{1}{2}. \quad (3.24)$$

Auch mit dieser Definition hängen die normierten Fehler $\sigma_{\pm}/\hat{\tau}$ lediglich von der Ereignismenge, jedoch nicht von den individuellen t_i ab. Wie stark asymmetrisch die obere und die untere Fehlergrenze sind, hängt von der betrachteten Likelihood-Funktion ab; im Allgemeinen geht die Differenz zwischen beiden mit zunehmender

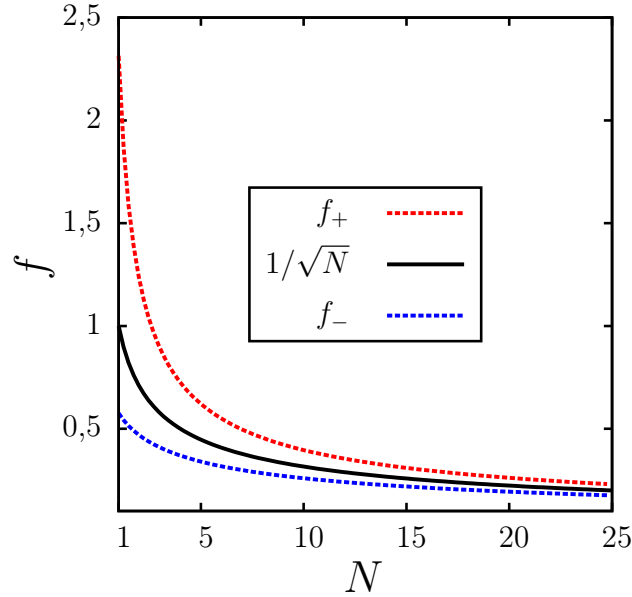


Abbildung 3.2: Abhängigkeit der normierten oberen und unteren Fehlergrenze $f_{\pm} = \sigma_{\pm}/\hat{\tau}$ von der Anzahl N der Ereignisse. $f = 1/\sqrt{N}$ entspricht der Erwartung aus der zweiten Ableitung der logarithmischen Likelihood-Funktion.

Datenmenge gegen Null. Abbildung 3.2 zeigt die Abhängigkeit der Fehlergrenzen von der Anzahl der verwendeten Ereignisse. Zwar ist das idealisierte Problem der Lebensdauerermessung analytisch lösbar, jedoch wird man in einem realistischen Fall eine numerische Maximierung der Likelihood durchführen müssen. Die experimentellen Effekte, die hierbei eine Rolle spielen, werden im Folgenden besprochen.

In einem realen Experiment findet man auch zu Zeiten, an denen bereits sämtliche D^0 -Mesonen zerfallen sind, noch Ereignisse. Dieser Untergrund setzt sich zusammen aus falsch rekonstruierten Ereignissen, Kombinatorik und Untergrundprozessen. Zur Illustration ist der Untergrund hier durch die Wahrscheinlichkeitsdichte einer Gleichverteilung beschrieben

$$p_U(t) = \frac{1}{T_{\max} - T_{\min}} \stackrel{T_{\min}=0}{=} \frac{1}{T_{\max}}. \quad (3.25)$$

Offensichtlich ist die Wahrscheinlichkeitsdichte des Signals (Gleichung 3.17) aufgrund dessen exponentiellen Abfalls bei großen Zerfallszeiten verschwindend klein und die beobachteten Ereignisse sind vollständig durch Gleichung 3.25 bestimmt. Eine einfache Möglichkeit der Berücksichtigung des Untergrundes besteht nun in der Beschränkung auf ein Zeitintervall $[t_a, t_b]$, in dem die beobachtete Verteilung einem exponentiellen Verlauf folgt. Hierzu muss die Normierung der Wahrscheinlichkeits-

dichte angepasst werden, Gleichung 3.17 ändert sich hierdurch zu

$$p'(t|\tau) = \frac{p(t|\tau)}{\int_{t_a}^{t_b} p(t|\tau) dt} = \frac{p(t|\tau)}{\exp(-t_a/\tau) - \exp(-t_b/\tau)}. \quad (3.26)$$

Dieses Verfahren liefert keinerlei Information über den Anteil der Untergründereignisse und führt insbesondere zu falschen Ergebnissen, falls die Untergrundverteilung im betrachteten Zeitintervall keiner Gleichverteilung entspricht. Eleganter ist es daher, eine Wahrscheinlichkeitsdichte zu konstruieren, die den Untergrund explizit enthält und dessen Anteil im Rahmen der Funktionsanpassung zu bestimmen. Man macht hierzu folgenden Ansatz [82]

$$p_{\text{ges}}(t|\tau, N_S, N_U) = \frac{N_S p(t|\tau) + N_U p_U(t)}{N_S + N_U}, \quad (3.27)$$

dabei bezeichnen N_S und N_U die unbekannte Anzahl der Signal- und Untergründereignisse. Aufgrund von

$$\int_0^\infty p(t|\tau) dt = \int_0^\infty p_U(t) dt = 1 \quad (3.28)$$

erhält diese Form die Normierung

$$\begin{aligned} \int_0^\infty p_{\text{ges}}(t|\tau, N_S, N_U) dt &= \frac{N_S \int_0^\infty p(t|\tau) dt + N_U \int_0^\infty p_U(t) dt}{N_S + N_U} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Eine der zwei Unbekannten, N_S oder N_U , kann durch die bekannte Gesamtzahl der Ereignisse $N = N_S + N_U$ eliminiert werden

$$p_{\text{ges}}(t|\tau, N_S) = \frac{N_S p(t|\tau) + (N - N_S) p_U(t)}{N}. \quad (3.30)$$

Üblicher ist es, anstelle der Anzahl der Signalereignisse, den Signalanteil $S = N_S/N$ als Fitparameter zu verwenden. Insgesamt erhält man für die logarithmische Likelihood-Funktion

$$\mathcal{L}(t|\tau, S) = \sum_{i=1}^N \ln \left(S p(t_i|\tau) + (1 - S) p_U(t_i) \right). \quad (3.31)$$

Abbildung 3.3 zeigt eine anhand der Wahrscheinlichkeitsdichte 3.30 erstellte Monte-Carlo-Stichprobe und die logarithmische Likelihood-Funktion in Abhängigkeit von τ und S . Anhand der Kontur der logarithmischen Likelihood-Funktion erkennt man in der Abbildung eine deutliche positive Korrelation zwischen der Lebensdauer und dem Signalanteil, das heißt zu groß bestimmte Lebensdauern gehen bevorzugt mit einem zu hoch geschätzten Signalanteil einher. Ein weiteres, sehr verbreitetes Verfahren

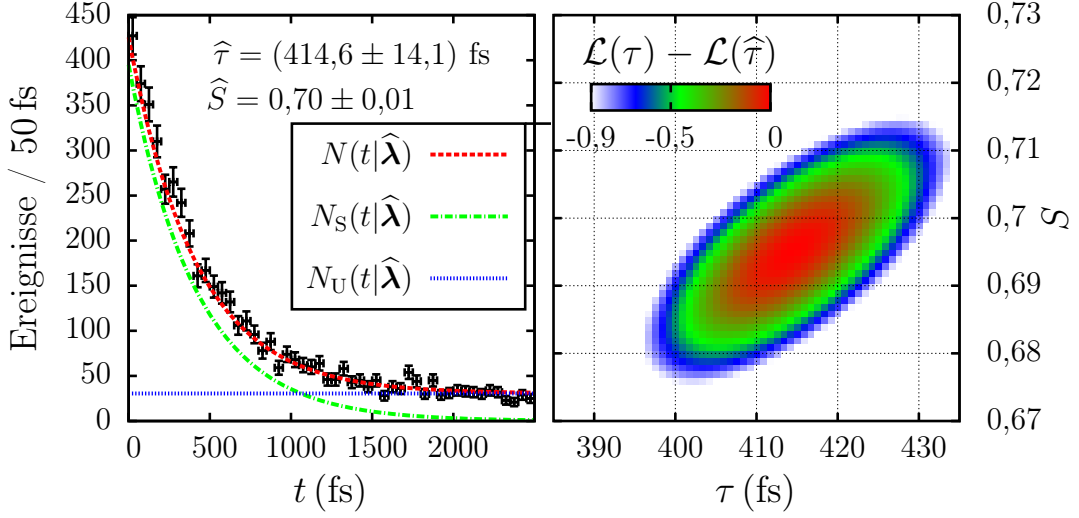


Abbildung 3.3: Exponentiell verteilte Monte-Carlo-Stichprobe von 5.000 Ereignissen mit gleichverteiltem Untergrund. Die angepasste Verteilungsfunktion $N(t) = N_S(t) + N_U(t)$ ist die Summe aus exponentiellem Signal (N_S) und gleichverteiltem Untergrund (N_U). Für die Darstellung wurden die Parameter $\tau = 410,1$ fs und $S = 0,7$ verwendet.

zur Untergrundbehandlung besteht in dessen Subtraktion. Da dies zwingend eine Einteilung der Daten in Bins erfordert, wird hier nicht näher darauf eingegangen.

Der zweite experimentelle Effekt, der bei der Lebensdauermessung berücksichtigt werden muss, ist die endliche Zeitaufösung des Detektors. Hierzu ist es hilfreich, diese zunächst grob abzuschätzen. Da die Analyse der Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0$ bei der Energie $\sqrt{s} = m_\psi c^2$ durchgeführt werden soll, liegt der Antiprotonenimpuls bei

$$|\mathbf{p}_{\bar{p}}| = \sqrt{\left(\frac{m_\psi^2 c^2 - 2m_p^2 c^2}{2m_p c}\right)^2 - m_p^2 c^2} = 6,6 \text{ GeV}/c. \quad (3.32)$$

Die $\psi(3770)$ -Masse ist nur geringfügig größer als die Summe der D-Meson-Massen. Deren Impuls entspricht daher in etwa der Hälfte des $\psi(3770)$ - und somit des Antiprotonenimpulses

$$p_D \approx \frac{p_{\bar{p}}}{2} = 3,3 \text{ GeV}/c. \quad (3.33)$$

Hiermit folgt der Faktor $\beta\gamma$ zu

$$\beta\gamma = \frac{p_D}{m_D c} = 1,8. \quad (3.34)$$

Der Fehler der Zerfallszeit wird dominiert durch den Fehler der Zerfallsortsmessung; dieser soll im späteren Experiment in der Größenordnung von $\sigma_l \approx 100 \mu\text{m}$ liegen. Mit der Relation $l = \beta\gamma c t$ erhält man hieraus unter Vernachlässigung des Impulsfehlers

folgende Abschätzung der Zeitauflösung

$$\sigma_t \approx 189 \text{ fs.} \quad (3.35)$$

Die Zeitauflösung liegt damit in der gleichen Größenordnung wie die zu messende Lebensdauer ($\sigma_t \approx \tau/2$) und kann in der Betrachtung nicht vernachlässigt werden. Nimmt man an, dass die gemessenen um die wahren Zerfallszeiten normalverteilt sind, erhält man die beobachtete Wahrscheinlichkeitsdichte aus einer Faltung von Exponential- und Normalverteilung. Deren Wahrscheinlichkeitsdichten sind gegeben durch

$$\begin{aligned} e(t|\tau) &= \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad t > 0, \\ g(t|\sigma) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < t < \infty. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Hiermit folgt das Faltungsintegral zu [79, S. 136ff]

$$\begin{aligned} f(t|\tau, \sigma) &= \int_{-\infty}^t e(T)g(t-T)dT \\ &= \frac{\sqrt{\sigma}}{2\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{t}{\sigma} - \frac{\sigma}{\tau}\right)\right)\right], \end{aligned} \quad (3.37)$$

dabei bezeichnet $\operatorname{erf}(x)$ die Fehlerfunktion [83, S. 297]

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2)dt. \quad (3.38)$$

Das Ergebnis der Faltung Gleichung 3.37 ist nicht auf Eins normiert, wie sich durch Integration zeigen lässt

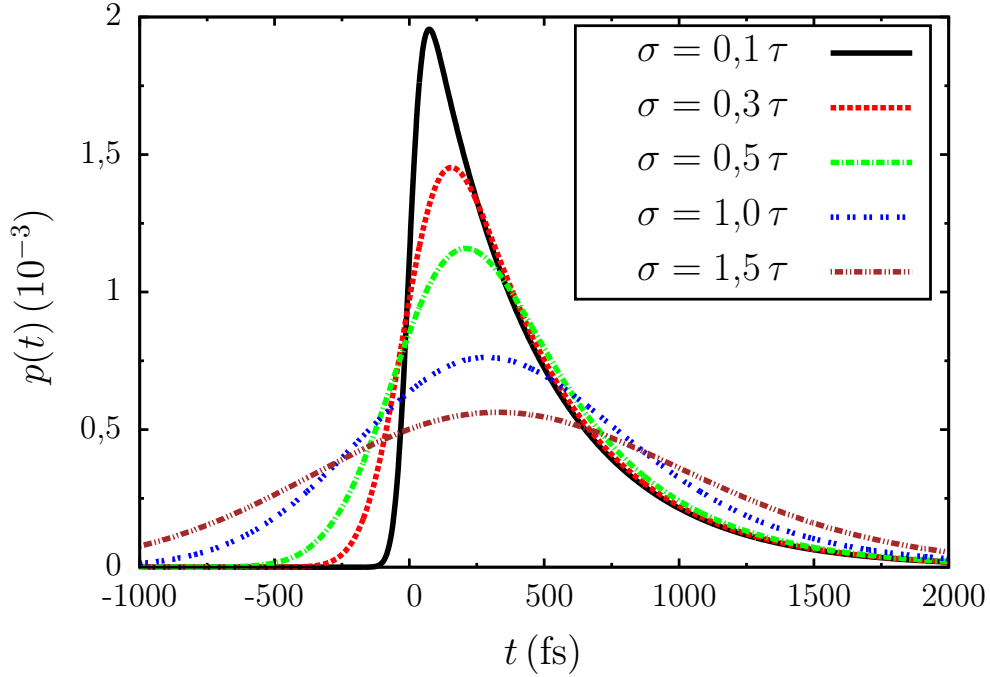
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t|\tau, \sigma)dt = \sqrt{\sigma}. \quad (3.39)$$

Anschaulich sieht man dies auch daran, dass man aus Gleichung 3.37 durch den Grenzübergang $\lim_{\sigma \rightarrow 0} f(t|\tau, \sigma)$ keine reine Exponentialverteilung erhält.

Verwendet man zur Vereinfachung die ungerade Parität der Fehlerfunktion sowie deren Komplement $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$, erhält man für die normierte Wahrscheinlichkeitsdichte [84]

$$\begin{aligned} p(t|\tau, \sigma) &= \frac{f(t|\tau, \sigma)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(t|\tau, \sigma)dt} \\ &= \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}\right)\right). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Abbildung 3.4 zeigt diese Wahrscheinlichkeitsdichte für verschiedene Werte von σ .



Abbildungung 3.4: Wahrscheinlichkeitsdichte der Faltung aus Exponential- und Normalverteilung für unterschiedliche Breiten σ . Für die Darstellung wurde der Wert $\tau = 410,1$ fs verwendet.

3.3 Funktionsanpassung der dynamischen Übergangsamplitude

Nachdem in Abschnitt 1.5 gezeigt wurde, dass die allgemeine, zeitabhängige Zerfallsamplitude geschrieben werden kann als Gleichung 1.34 und in Kapitel 2 näher dargestellt worden ist, wie die zeitunabhängigen Dreikörperamplituden $\mathcal{A}_f$ und $\bar{\mathcal{A}}_f$ der Zerfälle $D^0 \rightarrow f$ und $\bar{D}^0 \rightarrow f$ aus den Zweikörperamplituden der relevanten Resonanzen konstruiert werden können, wird in diesem Abschnitt darauf eingegangen, wie mit der Methode der maximalen Likelihood die freien Parameter der Zerfallsamplitude $\mathcal{M}_f$ aus einer beobachteten Verteilung bestimmt werden können. Hierzu wird mit zunehmender Komplexität zunächst der zeitunabhängige Fall behandelt, im nächsten Schritt die Zeitabhängigkeit betrachtet und zum Abschluss, ähnlich zum vorhergehenden Abschnitt 3.2, gezeigt, wie die Zeitaufösung berücksichtigt werden kann. Bei der hier verwendeten Methode ist es dabei wichtig, auf die richtige Normierung der Wahrscheinlichkeitsdichte zu achten.

3.3.1 Zeitunabhängigkeit der Zerfallsamplitude

Verwendet man anstelle der Zerfallsrate Γ die mittlere Lebensdauer τ , lässt sich die volle, zeitabhängige Zerfallsamplitude aus Gleichung 1.34 schreiben als

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_f^2(m_+^2, m_-^2, \Delta t) &= \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau}\right) \mathfrak{A}_f(m_+^2, m_-^2, \Delta t) \\ \text{mit } \mathfrak{A}_f(m_+^2, m_-^2, \Delta t) &= \\ \frac{1}{2} \left[\left(\mathcal{A}_f^2 + \left| \frac{q}{p} \right|^2 \bar{\mathcal{A}}_f^2 \right) \cosh\left(y \frac{\Delta t}{\tau}\right) + \left(\mathcal{A}_f^2 - \left| \frac{q}{p} \right|^2 \bar{\mathcal{A}}_f^2 \right) \cos\left(x \frac{\Delta t}{\tau}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right) \sinh\left(y \frac{\Delta t}{\tau}\right) + 2 \operatorname{Im} \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right) \sin\left(x \frac{\Delta t}{\tau}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Dabei steht $\mathcal{A}_f^2$ abkürzend für das Betragsquadrat $|\mathcal{A}_f|^2$. Tritt keine Mischung im D^0 - $\bar{D}^0$ -System auf², gilt für die Zerfallsamplitude

$$\mathcal{M}_f^2(m_+^2, m_-^2, \Delta t) = e^{-\frac{|\Delta t|}{\tau}} \mathcal{A}_f^2(m_+^2, m_-^2), \quad (3.42)$$

d. h. bis auf die exponentielle Dämpfung ist diese identisch mit der zeitunabhängigen Dreikörperamplitude $\mathcal{A}_f^2$. Die Wahrscheinlichkeit W für das Auftreten eines Ereignisses in einem infinitesimalen Phasenraumelement um den Punkt (m_+^2, m_-^2) ist nun gegeben durch das Betragsquadrat der Dreikörperamplitude

$$\begin{aligned} W \propto \mathcal{A}_f^2(m_+^2, m_-^2 | \boldsymbol{\lambda}) &= \left| \sum_i a_i A_i(m_+^2, m_-^2) \right|^2 \\ i &= \rho(770), K^*(892)^-, K^*(892)^+, \dots \end{aligned} \quad (3.43)$$

Im einfachsten Fall sind die Zweikörperamplituden

$$A_i = Z_L B_L^D B_L^R T_{\mathcal{R}} \quad (3.44)$$

ein Produkt aus dem Breit-Wigner-Propagator $T_{\mathcal{R}}$, Blatt-Weisskopf-Barriere-Faktoren B_L und einer die Winkelverteilung beschreibenden Funktion Z_L . Fitparameter sind in diesem Fall lediglich die komplexen Produktionsstärken a_i . Wird zur Beschreibung der $K\pi$ oder $\pi\pi$ S-Welle ein komplexeres Modell wie LASS oder der K -Matrix-Formalismus gewählt, müssen zusätzlich deren freie Parameter bestimmt werden. Der zu bestimmende Parametervektor ergibt sich je nach Anzahl der verwendeten Resonanzen und deren Amplitudenmodell zu

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda} &= (a_i, \overbrace{B, \phi_B, \phi_R, a, r}^{\text{LASS}}, \overbrace{\beta_j, f_{1j}^{\text{prod}}, s_0^{\text{prod}}}^{K\text{-Matrix}}) \\ j &= 1, \dots, 5. \end{aligned} \quad (3.45)$$

²Für die Mischungsparameter bedeutet dies $x = y = 0$.

Die Wahrscheinlichkeit W in Gleichung 3.43 ist nicht auf Eins normiert, man macht daher folgenden Ansatz für die Wahrscheinlichkeitsdichte [56, S. 22]

$$p(m_+^2, m_-^2 | \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\mathcal{A}_f^2(m_+^2, m_-^2 | \boldsymbol{\lambda})}{\int_{\Omega} \mathcal{A}_f^2(m_+^2, m_-^2 | \boldsymbol{\lambda}) dm_+^2 dm_-^2}, \quad (3.46)$$

wobei sich das Integral über den gesamten Dreikörperphasenraum erstreckt. Während eine Vielzahl von Verfahren zur numerischen Integration existiert (siehe z. B. [53, Kap. X]), wird hier die sogenannte Monte-Carlo-Methode verwendet. Diese besitzt den Vorzug, dass sie als Programm besonders einfach umzusetzen ist und nicht mehr Rechenzeit benötigt als komplexere Verfahren. Man berechnet hierzu die Dreikörperamplitude $\mathcal{A}_f^2$ an M zufällig im Phasenraum verteilten Punkten. Diese werden im Folgenden als Monte-Carlo-Punkte bezeichnet. Das Integral ist dann näherungsweise gegeben durch [53, S. 149]

$$\int_{\Omega} \mathcal{A}_f^2(m_+^2, m_-^2 | \boldsymbol{\lambda}) dm_+^2 dm_-^2 \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathcal{A}_f^2(m_+^{2(j)}, m_-^{2(j)} | \boldsymbol{\lambda}). \quad (3.47)$$

Der Fehler dieser numerischen Integration skaliert unabhängig von der Dimension des Phasenraumes mit $1/\sqrt{M}$. Wurden insgesamt N D^0 -Zerfälle beobachtet und werden M Punkte zur Monte-Carlo-Integration verwendet, folgt für die logarithmische Likelihood-Funktion

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\mathcal{A}_f^2(m_+^{2(i)}, m_-^{2(i)} | \boldsymbol{\lambda})}{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathcal{A}_f^2(m_+^{2(j)}, m_-^{2(j)} | \boldsymbol{\lambda})} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \ln \left(\mathcal{A}_f^2(m_+^{2(i)}, m_-^{2(i)} | \boldsymbol{\lambda}) \right) - N \ln \left(\sum_{j=1}^M \mathcal{A}_f^2(m_+^{2(j)}, m_-^{2(j)} | \boldsymbol{\lambda}) \right) + N \ln M. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Der Term $N \ln M$ resultiert dabei aus dem Faktor $1/M$ in Gleichung 3.47 und hat als konstanter Summand keinen Einfluss auf die Lage des Maximums der logarithmischen Likelihood-Funktion. Von Bedeutung ist er jedoch, falls die maximale Likelihood von Funktionsanpassungen verschieden großer Stichproben verglichen werden soll. Analog zu Gleichung 3.31 kann Untergrund, insofern dessen Wahrscheinlichkeitsdichte $p_U(m_+^2, m_-^2)$ bekannt ist, berücksichtigt werden über

$$p_{\text{ges}}(m_+^2, m_-^2 | \boldsymbol{\lambda}) = S \frac{\mathcal{A}_f^2(m_+^2, m_-^2 | \boldsymbol{\lambda})}{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathcal{A}_f^2(m_+^{2(j)}, m_-^{2(j)} | \boldsymbol{\lambda})} + (1 - S) p_U(m_+^2, m_-^2). \quad (3.49)$$

Zur Illustration des Verfahrens sei hier ein sehr einfaches Spielzeugmodell mit nur zwei (hypothetischen) Resonanzen ($K^{*\pm}$, $J^P = 0^+$) und den Parametern

$$m(K^{*+}) = m(K^{*-}) = 1,2 \text{ GeV}/c^2 \quad a_{K^{*+}} = 0 - 1,5i \quad (3.50)$$

$$\Gamma(K^{*+}) = \Gamma(K^{*-}) = 0,1 \text{ GeV}/c^2 \quad a_{K^{*-}} = 0 + 2i. \quad (3.51)$$

angeführt. Messbar ist in einer Dalitz-Diagramm-Analyse immer nur die relative Stärke der Resonanzen und der relative Phasenwinkel. Um die Zahl der freien Fitparameter zu verringern ist es daher üblich, eine der komplexen Amplituden a_i auf Eins zu fixieren. Unabhängig davon, welche der Amplituden man auf Eins normiert, sollte man im hier angeführten Beispiel bei einer gelungenen Maximierung der Likelihood am Ende das Ergebnis

$$\frac{|a_{K^{*+}}|}{|a_{K^{*-}}|} \approx \frac{3}{4} \quad \text{und} \quad |\arg(a_{K^{*-}} \cdot a_{K^{*+}})| \approx \pi \quad (3.52)$$

erhalten. Das Resultat einer Funktionsanpassung mit der Methode der maximalen Likelihood für eine Stichprobe des Spielzeugmodells von 10.000 Ereignissen ist in Abbildung 3.5 gezeigt, für die Parameter erhält man

$$\begin{aligned} \text{Re}(a_{K^{*+}}) &= -0,7334 \pm 0,0086 \\ \text{Im}(a_{K^{*+}}) &= -0,0156 \pm 0,0118. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Dabei ist zu betonen, dass die Einteilung in Bins lediglich der Veranschaulichung dient, die logarithmische Likelihood-Funktion wird ereignisweise berechnet. Die gezeigte Anpassungskurve entspricht den mit der Amplitude $\mathcal{A}_f^2(m_+^{2(j)}, m_-^{2(j)}|\hat{\lambda})$ gewichteten Punkten der Monte-Carlo-Integration. Für die erwartete Anzahl der Ereignisse m_k im k ten Bin des Dalitz-Diagramms erhält man

$$m_k = \frac{N}{\sum_{j=1}^M \mathcal{A}_f^2(m_+^{2(j)}, m_-^{2(j)}|\hat{\lambda})} \sum_{l=1}^L \mathcal{A}_f^2(m_+^{2(l)}, m_-^{2(l)}|\hat{\lambda}), \quad (3.54)$$

dabei wird über alle L Monte-Carlo-Punkte, die in den k ten Bin fallen, summiert. Der Vorfaktor der Summe erzwingt die Normierung der angepassten Funktion auf die Zahl N der gemessenen Ereignisse, d. h. bei Summation über alle K Bins des Phasenraumes gilt

$$\sum_{k=1}^K m_k = N. \quad (3.55)$$

Die erwarteten Verteilungen der invarianten Massen m_+^2 und m_-^2 folgen dann hieraus durch Projektion des zweidimensionalen Dalitz-Diagramms auf die m_+^2 - beziehungsweise m_-^2 -Achse.

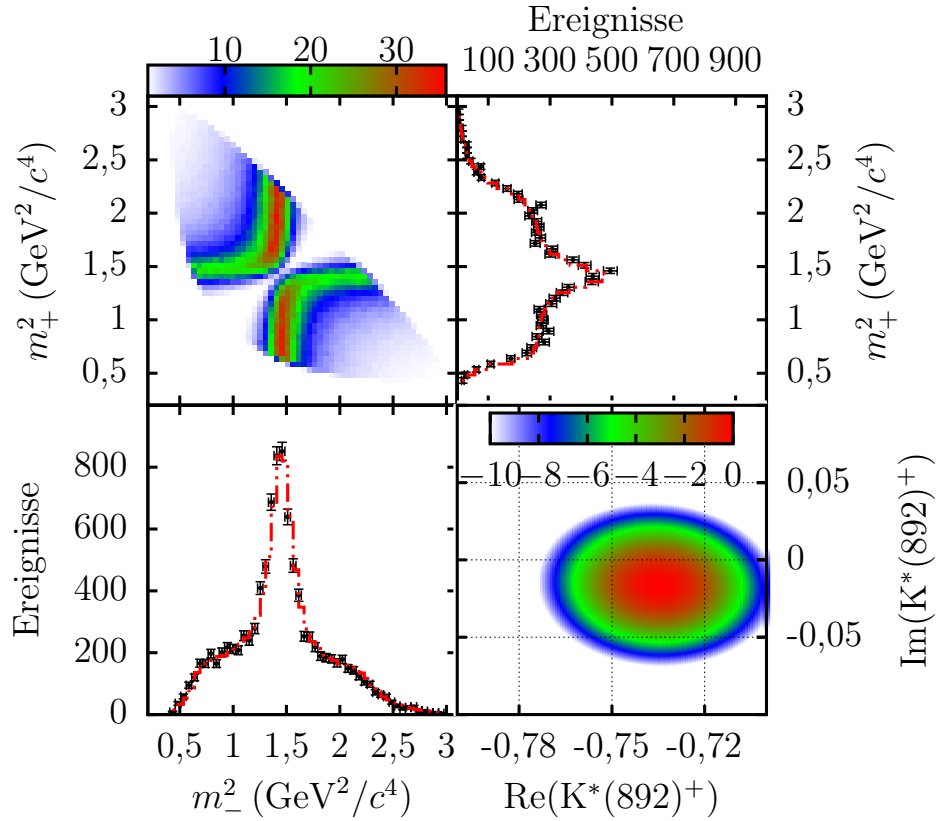


Abbildung 3.5: Dalitz-Diagramm des Spielzeugmodells (*oben links*) zusammen mit den Projektionen auf die Achsen. In rot ist das Ergebnis der Funktionsanpassung gezeigt. *Unten rechts* ist die logarithmische Likelihood-Funktion dargestellt ($\mathcal{L}(\boldsymbol{\lambda}) - \mathcal{L}(\hat{\boldsymbol{\lambda}})$).

3.3.2 Zeitabhängigkeit der Zerfallsamplitude durch D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung

Im Falle von D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung ($x \neq 0$ und/oder $y \neq 0$) ist die Zerfallsamplitude zeitabhängig und man betrachtet anstelle von $\mathcal{A}_f$ die volle Zerfallsamplitude $\mathcal{M}_f(\Delta t)$. Analog zu Gleichung 3.46 macht man für die Wahrscheinlichkeitsdichte den Ansatz

$$p(m_+^2, m_-^2, \Delta t | \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\mathcal{M}_f^2(m_+^2, m_-^2, \Delta t | \boldsymbol{\lambda})}{\int_{\Omega} \mathcal{M}_f^2(m_+^2, m_-^2, \Delta t | \boldsymbol{\lambda}) dm_+^2 dm_-^2 d\Delta t}. \quad (3.56)$$

In diesem Fall ist der Phasenraum unter Berücksichtigung der Zeitabhängigkeit dreidimensional. Die Integration über die Zerfallszeitdifferenz kann dabei analytisch ausgeführt werden.

Man benötigt hierzu folgende Integrale

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau}\right) \cosh\left(y \frac{\Delta t}{\tau}\right) d\Delta t &= \frac{2\tau}{1-y^2}, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau}\right) \cos\left(x \frac{\Delta t}{\tau}\right) d\Delta t &= \frac{2\tau}{1+x^2}, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau}\right) \sinh\left(y \frac{\Delta t}{\tau}\right) d\Delta t &= 0, \\
 \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau}\right) \sin\left(x \frac{\Delta t}{\tau}\right) d\Delta t &= 0.
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

Insgesamt erhält man für die Integration über die Zerfallszeitdifferenz

$$\begin{aligned}
 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f^2(m_+^2, m_-^2, \Delta t | \boldsymbol{\lambda}) d\Delta t &= 2\tau \mathcal{I}(m_+^2, m_-^2 | \boldsymbol{\lambda}) \\
 \text{mit } \mathcal{I}(m_+^2, m_-^2) &= \frac{2\mathcal{A}_f^2 + \left(\mathcal{A}_f^2 + \left|\frac{q}{p}\right|^2 \bar{\mathcal{A}}_f^2\right) x^2 - \left(\mathcal{A}_f^2 - \left|\frac{q}{p}\right|^2 \bar{\mathcal{A}}_f^2\right) y^2}{2(1-y^2)(1+x^2)}.
 \end{aligned} \tag{3.58}$$

Der Faktor 2τ garantiert dabei die Normierung des exponentiellen Anteils

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau}\right) d\Delta t = 1. \tag{3.59}$$

Man beachte auch, dass sich der Term $\mathcal{I}(m_+^2, m_-^2 | \boldsymbol{\lambda})$ im Falle verschwindender $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung ($x = y = 0$) auf die zeitunabhängige Dreikörperamplitude $\mathcal{A}_f^2$ reduziert. Die verbleibende Integration über die invarianten Massen kann wieder numerisch mit der Monte-Carlo-Methode ausgeführt werden (vgl. Gleichung 3.47)

$$\begin{aligned}
 \iiint \mathcal{M}_f^2(m_+^2, m_-^2, \Delta t | \boldsymbol{\lambda}) d\Delta t dm_+^2 dm_-^2 &= 2\tau \iint \mathcal{I}(m_+^2, m_-^2 | \boldsymbol{\lambda}) dm_+^2 dm_-^2 \\
 &\approx \frac{2\tau}{M} \sum_{j=1}^M \mathcal{I}(m_+^{2(j)}, m_-^{2(j)} | \boldsymbol{\lambda}).
 \end{aligned} \tag{3.60}$$

Im Vergleich zum zeitunabhängigen Fall (vgl. Gleichung 3.47 und 3.58) benötigt die numerische Berechnung dieses Integrals etwa die doppelte Rechenzeit, da sowohl $\mathcal{A}_f^2$ als auch $\bar{\mathcal{A}}_f^2$ an den M Monte-Carlo-Punkten berechnet werden müssen. Zusammen mit der Abkürzung $\mathfrak{A}_f$ aus Gleichung 3.41 erhält man für die Wahrscheinlichkeitsdichte

$$p(m_+^2, m_-^2, \Delta t | \boldsymbol{\lambda}) = \frac{\exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau}\right)}{2\tau} \frac{\mathfrak{A}_f(m_+^2, m_-^2, \Delta t | \boldsymbol{\lambda})}{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathcal{I}(m_+^{2(j)}, m_-^{2(j)} | \boldsymbol{\lambda})}. \tag{3.61}$$

Die logarithmische Likelihood-Funktion folgt hieraus zu

$$\mathcal{L}(m_+^2, m_-^2, \Delta t | \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \ln p(m_+^2, m_-^2, \Delta t | \boldsymbol{\lambda}). \quad (3.62)$$

Untergrund lässt sich analog zu den Gleichungen 3.31 und 3.49 berücksichtigen.

3.3.3 Berücksichtigung der Detektorauflösung

Experimentell wird die beobachtete Häufigkeitsverteilung im dreidimensionalen Phasenraum $(m_+^2, m_-^2, \Delta t)$ verzerrt durch die endliche Impuls- und Ortsauflösung des Detektors. Der durch die Impulsauflösung bestimmte Fehler in der Messung der invarianten Massen m_+^2 und m_-^2 ist klein gegenüber dem zu messenden Wert und wird hier vollständig vernachlässigt. Die Ungenauigkeit in der Messung der D^0 -Zerfallszeit wird dominiert durch die Ortsauflösung und wurde in Gleichung 3.35 grob abgeschätzt zu $\sigma_t \approx 189$ fs. Nimmt man zusätzlich an, dass die Messung von D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfallszeiten statistisch unabhängig ist, erhält man durch quadratische Fehleraddition folgende Abschätzung für den Fehler der Zerfallszeitdifferenz

$$\sigma_{\Delta t} = \sqrt{2}\sigma_t \approx 267 \text{ fs}, \quad (3.63)$$

dies entspricht in etwa 2/3 der D^0 -Lebensdauer. Dabei sind die Abweichungen der Zerfallszeitdifferenz vom wahren Wert normalverteilt, wenn dies auch auf die Messung der einzelnen Zerfallszeiten zutrifft. Die erwartete Häufigkeitsverteilung unter Berücksichtigung der Zeitauflösung des Detektors kann unter diesen Annahmen aus einer Faltung der Zerfallsamplitude mit einer Normalverteilung in der Zerfallszeitdifferenz berechnet werden. Man erhält näherungsweise den Ausdruck

$$\mathfrak{M}_f^2(\Delta t) = (g \otimes \mathcal{M}_f^2)(\Delta t) \approx \frac{1}{2} (\mathbf{m}_f^+ + \mathbf{m}_f^-), \quad (3.64)$$

mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathbf{m}_f^\pm &= \mathbf{m}_f(\pm \Delta t) \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(\mp \frac{\Delta t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{\sigma}{\tau} \mp \frac{\Delta t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \left[\left(\mathcal{A}_f^2 + \left| \frac{q}{p} \right|^2 \bar{\mathcal{A}}_f^2 \right) \cosh\left(y\left(\pm \frac{\Delta t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \right. \\ &\quad + \left(\mathcal{A}_f^2 - \left| \frac{q}{p} \right|^2 \bar{\mathcal{A}}_f^2 \right) \cos\left(x\left(\pm \frac{\Delta t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \mp 2 \operatorname{Re}\left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^*\right) \sinh\left(y\left(\pm \frac{\Delta t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \\ &\quad \left. \pm 2 \operatorname{Im}\left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^*\right) \sin\left(x\left(\pm \frac{\Delta t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.65)$$

In der durchgeführten Funktionsanpassung wird hingegen ausschließlich das exakte Ergebnis der Faltung verwendet. Dieses enthält Korrekturen von Gleichung 3.64 für kleine Zerfallszeitdifferenzen sowie der Ordnung $\mathcal{O}(x^2)$ beziehungsweise

$\mathcal{O}(y^2)$ und ist zusammen mit der detaillierten Berechnung in Anhang C zu finden. $\mathfrak{M}_f^2(\Delta t)$ entspricht der nicht normierten Wahrscheinlichkeit für die Beobachtung eines Ereignisses in einem infinitesimalen Volumen um einen Phasenraumpunkt bei Berücksichtigung der Zeitauflösung des Detektors. Um hieraus eine normierte Wahrscheinlichkeitsdichte zu erhalten, macht man den Ansatz

$$p(\Delta t) = \frac{\mathfrak{M}_f^2(\Delta t)}{\int_{\Omega} \mathfrak{M}_f^2(\Delta t) dm_+^2 dm_-^2 d\Delta t}. \quad (3.66)$$

Die hierbei auftretende Integration über den gesamten Variabilitätsbereich der Zerfallszeitdifferenz lässt sich durch eine Schlussfolgerung des Satzes von Fubini [85, S. E69] auf die Integration über die nicht gefaltete Zerfallsamplitude $\mathcal{M}_f^2(\Delta t)$ zurückführen

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \mathfrak{M}_f^2(\Delta t) d\Delta t &= \int_{-\infty}^{\infty} (g \otimes \mathcal{M}_f^2)(\Delta t) d\Delta t \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\Delta t) d\Delta t \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f^2(\Delta t) d\Delta t \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{M}_f^2(\Delta t) d\Delta t. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Dieses Integral wurde bereits in Gleichung 3.58 berechnet. Anschaulich bedeutet dies, dass die Faltung den Wert des Integrals über die Zerfallsamplitude nicht ändert. Die Integration über die invarianten Massen kann auch hier nach der Monte-Carlo-Methode durchgeführt werden. Wurden Insgesamt N D^0 -Zerfälle beobachtet und M Punkte zur Monte-Carlo-Integration verwendet, erhält man für die logarithmische Likelihood Funktion

$$\mathcal{L}(m_+^2, m_-^2, \Delta t | \boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{\frac{1}{2\tau} \mathfrak{M}_f^2(m_+^{2(i)}, m_-^{2(i)}, \Delta t | \boldsymbol{\lambda})}{\frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \mathcal{I}(m_+^{2(j)}, m_-^{2(j)} | \boldsymbol{\lambda})} \right). \quad (3.68)$$

Abbildung 3.6 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichte aus Gleichung 3.66 im Modell von [52] für verschiedene Werte der Zeitauflösung und der Mischungsparameter. Die gezeigte Abhängigkeit bezieht sich auf die Gesamtamplitude; hierzu wurde über die Abhängigkeit von den invarianten Massen m_+^2 und m_-^2 integriert.

3.4 Prüfung von Hypothesen

Während die Methode der maximalen Likelihood ein geeignetes Verfahren zur numerischen Bestimmung der unbekannten Parameter eines Modells darstellt, erlaubt der vorgefundene Wert des Maximums der Likelihood keine Beurteilung des Grades der Übereinstimmung zwischen angepasster Funktion und beobachteter Verteilung. Dies steht im Kontrast zur Methode der kleinsten Quadrate, bei der der mini-

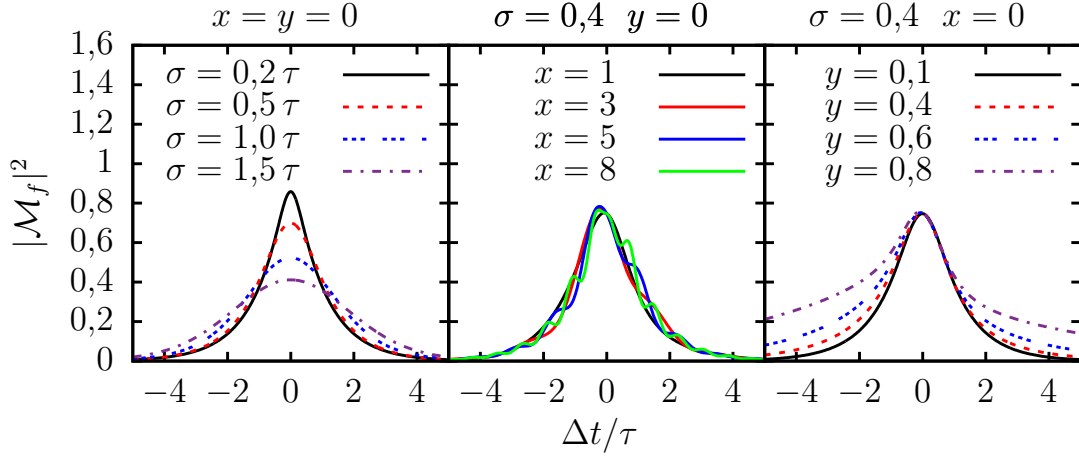


Abbildung 3.6: Die Zerfallsamplitude für verschiedene Werte der Zeitauflösung nach Integration über $m_{\pm}^2$. Die gewählten Werte der Mischungsparameter sind zur Veranschaulichung gegenüber einer realistischen Annahme um etwa einen Faktor 100 (*rechts*) bzw. 1.000 (*Mitte*) vergrößert.

male Wert von χ^2 einen Vergleich von Beobachtung und Modell ermöglicht. Die grundsätzliche Frage der Wahrscheinlichkeit einer angenommenen Hypothese (etwa $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung ohne CP -Verletzung) ist statistisch prinzipiell nicht beantwortbar. Mit geeigneten Verfahren kann lediglich, unter Annahme der Richtigkeit einer Hypothese, die Wahrscheinlichkeit bestimmt werden, eine Verteilung zu beobachten, die von der vorgefundenen abweicht. So lassen sich etwa Aussagen der Form „die Beobachtung steht im Widerspruch zur Annahme keiner $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung“ treffen, nicht jedoch der Art „die Beobachtung belegt das Auftreten von $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung“. Mit Hinblick auf diese Arbeit sind hierbei zwei Themenkomplexe von Interesse. Einerseits stellt sich die Frage nach der Unterscheidbarkeit von verschiedenen Hypothesen zur $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung, namentlich (siehe auch Kapitel 1.5):

- Keine Mischung ($x = y = 0$, $\left|\frac{q}{p}\right| = 1$, $\phi = 0$),
- Mischung ohne CP -Verletzung ($x \neq 0$ oder $y \neq 0$, $\left|\frac{q}{p}\right| = 1$, $\phi = 0$),
- Direkte CP -Verletzung ($\left|\frac{\bar{\mathcal{A}}_f}{\mathcal{A}_f}\right| \neq 1$),
- CP -Verletzung durch Mischung ($\left|\frac{q}{p}\right|^2 \neq 1$),
- CP -Verletzung in der Interferenz von Mischung und Zerfall ($\phi \neq 0$).

Andererseits die Fragestellung, wie sich quantitativ die Übereinstimmung von verschiedenen Hypothesen und der experimentell beobachteten Verteilung im Dreikörperphasenraum feststellen lässt. Von Bedeutung ist dabei, welche Resonanzen in der Beschreibung der Zerfallsamplitude berücksichtigt werden, deren Amplitudenform,

sowie insbesondere die Form der $\pi\pi$ und $K\pi$ S-Wellen Parametrisierung. Im Folgenden wird näher auf Verfahren eingegangen, die im Rahmen dieser Arbeit Verwendung gefunden haben.

3.4.1 χ^2 -Test

Der im Bereich der Hochenergiephysik bei Weitem am häufigsten verwendete statistische Anpassungstest ist der sogenannte χ^2 -Test. Dieser wird im Folgenden anhand einer univariaten Verteilung erläutert, ist jedoch leicht auf multivariate Verteilungen verallgemeinerbar. Die zu überprüfende Hypothese könnte beispielsweise darin bestehen, zu untersuchen, ob die beobachtete Häufigkeitsverteilung der D^0 -Zerfallszeiten einer einfachen Exponentialverteilung mit mittlerer Lebensdauer $\tau = 410,1$ fs entspricht. Die einfache Nullhypothese ist in diesem Fall

$$H_0(\tau = 410,1 \text{ fs}). \quad (3.69)$$

Man vergleicht diese mit den Alternativhypothesen

$$H_1(\tau \neq 410,1 \text{ fs}). \quad (3.70)$$

Für die Anwendung des χ^2 -Tests ist es notwendig den gesamten Bereich der Zerfallszeit in K Intervalle ξ_k , sogenannte Bins, aufzuteilen, die nicht zwingend von gleicher Breite sein müssen. Hierdurch verteilen sich die N gemessenen Ereignisse auf die Intervalle, so dass sich N_k Ereignisse im k ten Bin befinden, dabei gilt

$$\sum_{k=1}^K N_k = N. \quad (3.71)$$

Die Einteilung der Daten in Bins ist mit einem Verlust an Information verbunden, falls die Binbreite nicht klein gegenüber der experimentellen Auflösung ist [80, S. 96]. Nimmt man an, dass die beobachtete Häufigkeitsverteilung durch die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(t)$ beschrieben werden kann, ist die Wahrscheinlichkeit eine Zerfallszeit im Intervall ξ_k zu beobachten gegeben durch [79, S. 246]

$$p_k = \int_{\xi_k} p(t) dt; \quad \sum_{k=1}^K p_k = 1. \quad (3.72)$$

Hieraus folgt die theoretisch erwartete Zahl der Ereignisse im k ten Bin zu

$$Np_k, \quad (3.73)$$

während tatsächlich N_k beobachtet wurden. Die Teststatistik des χ^2 -Testes ist nun definiert als [86]

$$T = \chi^2 = \sum_{k=1}^K \frac{(N_k - Np_k)^2}{\sigma_k^2}, \quad (3.74)$$

dabei bezeichnet σ_k^2 die mittlere quadratische Abweichung im jeweiligen Bin. Falls die Wahrscheinlichkeitsdichte $p(t)$ tatsächlich die beobachteten Daten beschreibt, sind die Abweichungen $N_k - Np_k$ von der Größenordnung σ_k . Damit ist jeder Summand in Gleichung 3.74 von der Größenordnung $\mathcal{O}(1)$ und man erwartet für die gesamte Summe $\chi^2 \approx K$ [87, S. 150]. Im allgemeinen Fall folgt die Verteilung der N Ereignisse auf die K Bins einer Multinomialverteilung und man erhält für die mittlere quadratische Abweichung [88, S. 255]

$$\sigma_k^2 = Np_k(1 - p_k). \quad (3.75)$$

Falls die Anzahl der Bins nicht zu gering ist, sind die Wahrscheinlichkeiten p_k klein und die Multinomialverteilung lässt sich durch eine Poissonverteilung annähern. In diesem Fall gilt

$$\sigma_k^2 = Np_k. \quad (3.76)$$

Es lässt sich allgemein zeigen [86], dass sich die Teststatistik T bei Richtigkeit der Hypothese für große Ereigniszahlen einer χ^2 -Verteilung mit $f = K - 1$ Freiheitsgraden annähert. Als notwendiges Kriterium hierfür wird häufig die Bedingung angegeben, dass die Zahl der Ereignisse in jedem Bin nicht weniger als 5–10 beträgt [88, S. 255] [89, S. 307]. Die Reduktion um 1 folgt dabei aus der einschränkenden Bedingung in Gleichung 3.71. Abbildung 3.7 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichte und die Verteilungsfunktion von χ^2 für verschiedene Freiheitsgrade. Für viele Frei-

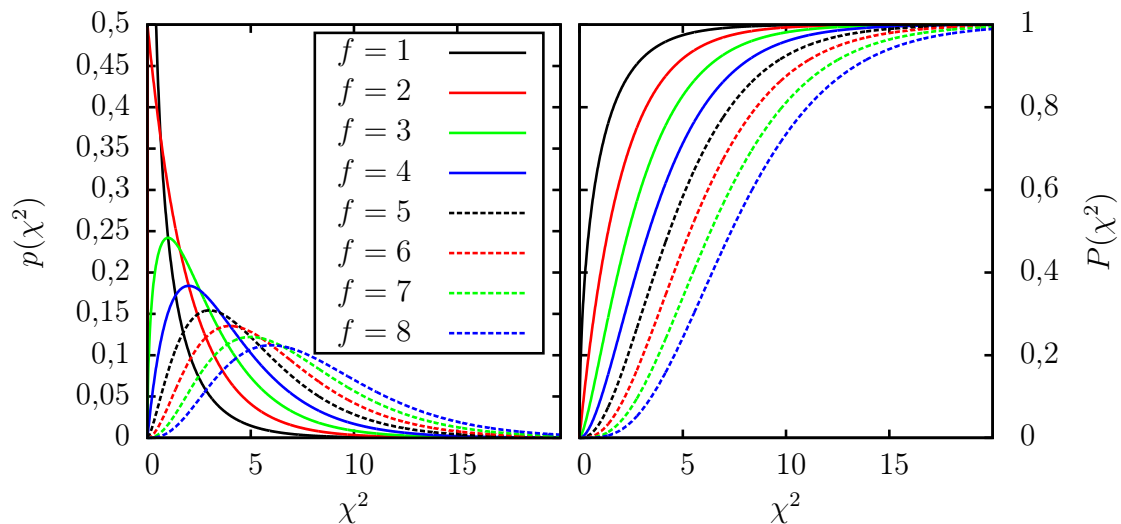


Abbildung 3.7: Wahrscheinlichkeitsdichte (*links*) und Verteilungsfunktion (*rechts*) von χ^2 für die Freiheitsgrade $f = 1, \dots, 8$.

heitsgrade nähert sich $\sqrt{2\chi^2}$ einer Normalverteilung mit Mittelwert $\sqrt{2f-1}$ und Standardabweichung 1. Da die Wahrscheinlichkeitsdichte von χ^2 bekannt ist, kann auch die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, dass χ^2 den vorgefundenen Wert übersteigt (siehe Abb. 3.7)

$$\mathcal{P} = \int_{\chi^2}^{\infty} p(\chi'^2; f) d\chi'^2. \quad (3.77)$$

Man lehnt nun die angenommene Hypothese ab, falls der $\mathcal{P}$ -Wert eine im Voraus festgelegte Testwahrscheinlichkeit α unterschreitet.

$$\mathcal{P} \begin{cases} < \alpha & H_0 \text{ wird abgelehnt} \\ \geq \alpha & H_0 \text{ wird angenommen} \end{cases} \quad (3.78)$$

Übliche Werte für α sind 5%, 1% und 0,1%. Hierdurch ist auch direkt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers erster Art gegeben, d. h. eine an sich richtige Hypothese wird als falsch abgelehnt. Ein höheres Konfidenzniveau (ein kleinerer Wert von α) verringert die Häufigkeit des Auftretens von Fehlern erster Art, erhöht jedoch die Wahrscheinlichkeit von Fehlern zweiter Art, d. h. eine falsche Hypothese wird als richtig akzeptiert. Dieser Sachverhalt ist in Abbildung 3.8 veranschaulicht. Falls die mittlere D^0 -Lebensdauer und andere Parameter der zu überprüfenden Hypothese mit der Methode der kleinsten Quadrate oder einer

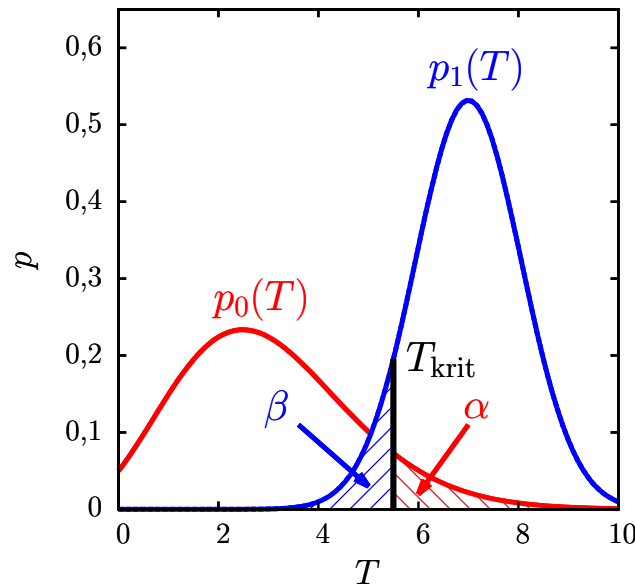


Abbildung 3.8: Wahrscheinlichkeitsdichte einer Teststatistik unter der Hypothese H_0 und einer Alternativhypothese H_1 ; α entspricht der Wahrscheinlichkeit von Fehlern erster Art, β der Wahrscheinlichkeit für Fehler zweiter Art.

gebinnten Maximierung der Likelihood bestimmt werden, verringert sich die Zahl der Freiheitsgrade der χ^2 -Verteilung um die Zahl der freien Parameter m

$$f = K - 1 - m. \quad (3.79)$$

Komplizierter ist die Situation, falls wie hier bei der Maximierung der Likelihood keine Einteilung der Daten in Bins erfolgt. In diesem Fall lässt sich lediglich folgende Aussage über die χ^2 -Verteilung treffen [90]³

$$\chi^2(f = K - 1 - m) \leq \chi^2 \leq \chi^2(f = K - 1). \quad (3.80)$$

Dies stellt lediglich eine starke Einschränkung dar, falls die Anzahl der zu bestimmenden Parameter m nicht klein ist gegenüber der Anzahl der Bins K .

3.4.2 Likelihood-Quotienten-Methode

Ein besonders geeignetes Verfahren zum Vergleich zweier Hypothesen ist die Likelihood-Quotienten-Methode. Deren Anwendbarkeit ist dabei auf Probleme beschränkt, bei denen eine der Hypothesen als Spezialfall aus der anderen hervorgeht. So können etwa folgende Hypothesen zur Dreikörperamplitude miteinander verglichen werden

- H_0 : beitragende Resonanz ist $K^*(892)^-$,
- H_1 : beitragende Resonanzen sind $\rho(770)$ und $K^*(892)^-$,

da die Hypothese H_0 identisch zu H_1 bei verschwindender $\rho(770)$ -Amplitude ist. Hingegen nicht möglich ist ein Vergleich von

- H_0 : $\rho(770)$ besitzt Breit-Wigner-Amplitudenform,
- H_1 : $\rho(770)$ besitzt Gounaris-Sakurai-Amplitudenform,

da es keinen Satz von Parametern gibt, für den die zwei Amplitudenformen identisch sind. Insbesondere ermöglicht die Likelihood-Quotienten-Methode einen Vergleich von verschiedenen Hypothesen zur D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung. Die Teststatistik der Likelihood-Quotienten-Methode ist definiert als [89, S. 270]

$$T = \frac{\max L(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda}_0)}{\max L(\mathbf{x}|\boldsymbol{\lambda})} = \frac{L(\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0)}{L(\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\lambda}})}. \quad (3.81)$$

Hierbei bezeichnet $\boldsymbol{\lambda}_0$ den gegenüber $\boldsymbol{\lambda}$ reduzierten Parametersatz, entsprechend ist $T \leq 1$. Äquivalent zu 3.81 ist die Form

$$\ln T = \ln L(\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0) - \ln L(\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\lambda}}) = \mathcal{L}(\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\lambda}}_0) - \mathcal{L}(\mathbf{x}|\hat{\boldsymbol{\lambda}}). \quad (3.82)$$

³Siehe hierzu auch [91] und [89, S. 303f].

Um zu entscheiden, ob die Verwendung des vollen gegenüber dem reduzierten Parametersatz eine signifikant bessere Beschreibung der Daten $\mathbf{x}$ liefert, ist es notwendig, die Verteilung der Teststatistik T zu kennen. Im Grenzwert großer Stichproben kann hierzu der Satz von Wilks [92] verwendet werden. Dieser besagt, dass für große Stichproben ($N \rightarrow \infty$) die Größe $-2 \ln T$ einer χ^2 -Verteilung folgt. Legt die Nullhypothese H_0 mit dem Parametersatz $\boldsymbol{\lambda}_0$ r von insgesamt m Parametern fest, besitzt die χ^2 -Verteilung

$$f = m - r \quad (3.83)$$

Freiheitsgrade. Ob die zur Verfügung stehende Datenmenge hinreichend ist, um der Bedingung $N \rightarrow \infty$ zu genügen, kann durch eine Monte-Carlo-Simulation überprüft werden. Nötigenfalls kann aus dieser auch die von einer χ^2 -Verteilung abweichende Form von $-2 \ln T$ bestimmt werden. Analog zum Vorgehen beim χ^2 -Test lässt sich bei bekannter Verteilung von T die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass T den vorgefundenen Wert übersteigt

$$\mathcal{P} = \int_T^\infty p(T') dT' \approx \int_{-2 \ln T}^\infty p(\chi'^2; f) d\chi'^2. \quad (3.84)$$

Die Nullhypothese wird nun abgelehnt, falls der $\mathcal{P}$ -Wert eine im Voraus festgelegte Testwahrscheinlichkeit α unterschreitet.

Kapitel 4

Test der Funktionsanpassung und statistische Abschätzungen

Ausgehend von den Wahrscheinlichkeitsdichten des Kapitels 3 wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Programm zur Funktionsanpassung in C++ geschrieben, das es mit der Methode der maximalen Likelihood ermöglicht, anhand der beobachteten Verteilung der Viererimpulse die Parameter des Amplitudenmodells, der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung und CP -Verletzung zu bestimmen. Details zum Aufbau des Programms finden sich in Anhang E. Im Folgenden sind einige der Konsistenztests dargestellt, die zur Validierung der korrekten Funktionsfähigkeit des Programms durchgeführt worden sind. Neben der Qualitätssicherung erlauben diese Tests einige nicht triviale, rein statistische Abschätzungen. Hierzu gehört etwa die Bestimmung des statistischen Fehlers der Mischungsparameter und der Einfluss der Zerfallszeitauflösung auf diesen.

Da diese und andere durchgeführte Abschätzungen von der angenommenen Dreikörperamplitude abhängen können, werden drei unterschiedliche Amplitudenmodelle in Betracht gezogen. Diese sind den folgenden Veröffentlichungen entnommen und werden hier abkürzend bezeichnet mit:

- Sigma-Modell
Belle Collaboration, L. M. Zhang *et al.*, „Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing Parameters in $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ Decays”, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 131803,
- BaBar-Modell
BABAR Collaboration, P. del Amo Sanchez *et al.*, „Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing parameters using $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ and $D^0 \rightarrow K_S^0 K^+ K^-$ decays”, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 081803,
- Belle-Modell
Belle Collaboration, T. Peng, Z. P. Zhang, *et al.*, „Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing and search for indirect CP violation using $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ decays”, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 091103.

Im Sigma-Modell werden $\pi\pi$ und $K\pi$ S-Welle durch relativistische Breit-Wigner-Amplituden parametrisiert, in BaBar- und Belle-Modell durch K-Matrix und LASS-Amplitude (vgl. Abschnitte 2.8 und 2.9). BaBar und Belle-Modell wiederum unterscheiden sich durch die Anzahl der verwendeten K^* -Resonanzen sowie des $\rho(1450)$.

Um Stichproben erstellen zu können, die gemäß der jeweiligen Übergangsamplitude verteilt sind, wurden die drei Modelle in den Monte-Carlo-Ereignisgenerator EvtGen¹ [93] implementiert; die Zeitabhängigkeit wird dabei durch Gleichung 1.34 beschrieben. Eine detaillierte Auflistung der Modellparameter sowie ein Vergleich von Monte-Carlo-Stichproben der EvtGen-Modelle getrennt nach Flavor- und CP -Eigenzuständen findet sich in Anhang D.

Um die Anpassung der Mischungsparameter ohne die Unsicherheit in der Bestimmung der Dreikörperamplitudenparameter zu testen, sind in den folgenden Funktionsanpassungen alle Parameter bis auf die Mischungsparameter auf ihren jeweils in der Simulation gesetzten Wert fixiert. Die Generation der Stichproben und der zur Normierung notwendigen phasenraumverteilten Monte-Carlo-Punkte erfolgt dabei mit den bereits erwähnten implementierten Modellen des Ereignisgenerators EvtGen. Insbesondere wird in diesem Schritt keine Detektorsimulation durchgeführt; die in der Funktionsanpassung verwendeten Viererimpulse der Teilchen entsprechen dabei exakt den generierten Viererimpulsen des Ereignisgenerators. Alle in diesem Abschnitt angegebenen Abschätzungen über die zur Messung benötigte Ereignismenge bilden daher eine untere Schranke bei optimaler Kenntnis der Amplitudenstruktur, Fehlen von Untergrund, vernachlässigbaren Messfehlern und optimaler Akzeptanz. Aus der rein statistischen Natur der Abschätzung folgt jedoch auch ein hohes Maß an Allgemeingültigkeit; das dargestellte Ergebnis hängt lediglich von der verwendeten Ereignismenge und der angenommenen Amplitudenstruktur ab, jedoch nicht vom aktuellen Status des Software-Frameworks.

Eine Analyse von Datensätzen einer detektorbasierten Simulation im PandaRoot-Framework wird in Kapitel 9 durchgeführt.

4.1 Anpassung der zeitabhängigen Zerfallsamplitude bei CP -Erhaltung

Im ersten Test werden ausschließlich die Oszillationsfrequenz x und die normierte Lebensdauerdifferenz y aus der Funktionsanpassung bestimmt. Die Generation der Monte-Carlo-Stichproben erfolgt mit folgenden Werten der Mischungsparameter

$$\begin{aligned} x &= 0,49^{+0,14}_{-0,15} \% & \left| \frac{q}{p} \right| &= 1 \\ y &= 0,62 \pm 0,08 \% & \arg\left(\frac{q}{p}\right) &= \phi = 0; \end{aligned} \quad (4.1)$$

diese sind [6] entnommen und entsprechen einer Mittelung des Ergebnisses verschiedener Experimente. Die CP -Erhaltung ist hierbei durch den Wert des komplexen Parameters $\frac{q}{p}$ berücksichtigt. Die angegebenen Fehler aus [6] sollen verdeutlichen, mit welcher Genauigkeit die Werte der Mischungsparameter experimentell bekannt sind.

¹Details zum verwendeten Ereignisgenerator finden sich in Abschnitt 5.6.1.

Insgesamt wurden pro Amplitudenmodell jeweils zweihundert Monte-Carlo-Stichproben mit Ereigniszahlen zwischen 5.000 und $1 \cdot 10^6$ Ereignissen generiert und anschließend die Parameter x und y unter Verwendung des gleichen Amplitudenmodells mit der Methode der maximalen Likelihood bestimmt. Aus den Parameterwerten, an denen die logarithmische Likelihood um den Werte 1/2 kleiner ist als am Maximum der Likelihood, können mit dem MINOS-Paket von Minuit2 [94] auch die oberen und unteren Fehler abgeschätzt werden (vgl. Gleichung 3.24) [95]. Im Falle von akkurat geschätzten Fehlern folgen $((x - x_{\text{wahr}})/\sigma_x)$ und $((y - y_{\text{wahr}})/\sigma_y)$ einer Normalverteilung mit Mittelwert Null und Standardabweichung Eins, die betreffenden Verteilungen werden auch als Pull-Verteilungen bezeichnet [89, S. 326].

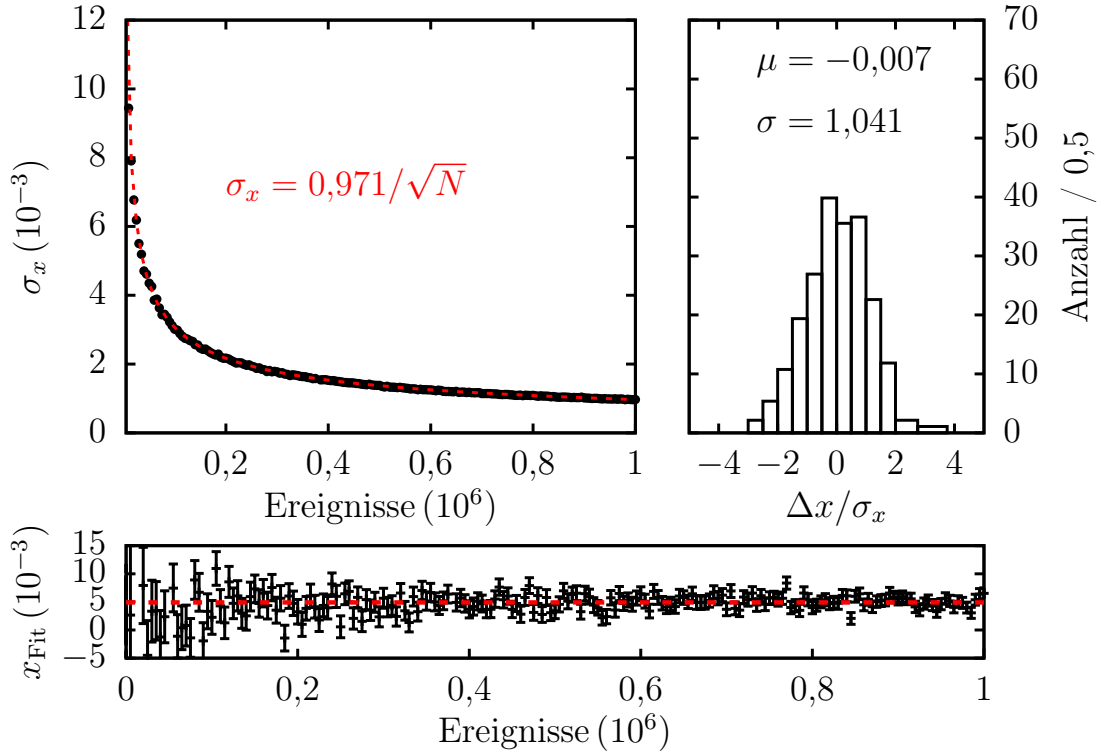


Abbildung 4.1: Test der x -Bestimmung im Belle-Modelle. In der unteren Darstellung ist in rot der in der Simulation verwendete Wert eingezeichnet.

Die angepassten Werte von x und y sowie deren Fehler in Abhängigkeit der verwendeten Stichprobengröße und deren zugehörige Pull-Verteilung sind in den Abbildungen 4.1 und 4.2 dargestellt, während die Mittelwerte aller Funktionsanpassungen sowie Mittelwerte und Standardabweichungen der Pull-Verteilungen in den Tabellen 4.1 und 4.2 zu finden sind.

Zur Konsistenzprüfung ist in diesen Tabellen auch das Ergebnis einer Reihe von Funktionsanpassungen für den Fall verschwindender D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung ($x = y = 0$) angegeben. Als rein statistischen Fehler erwartet man für die Abhängigkeit von σ_x und σ_y

$$\sigma_i = \frac{k_i}{\sqrt{N}} \quad i = x, y. \quad (4.2)$$

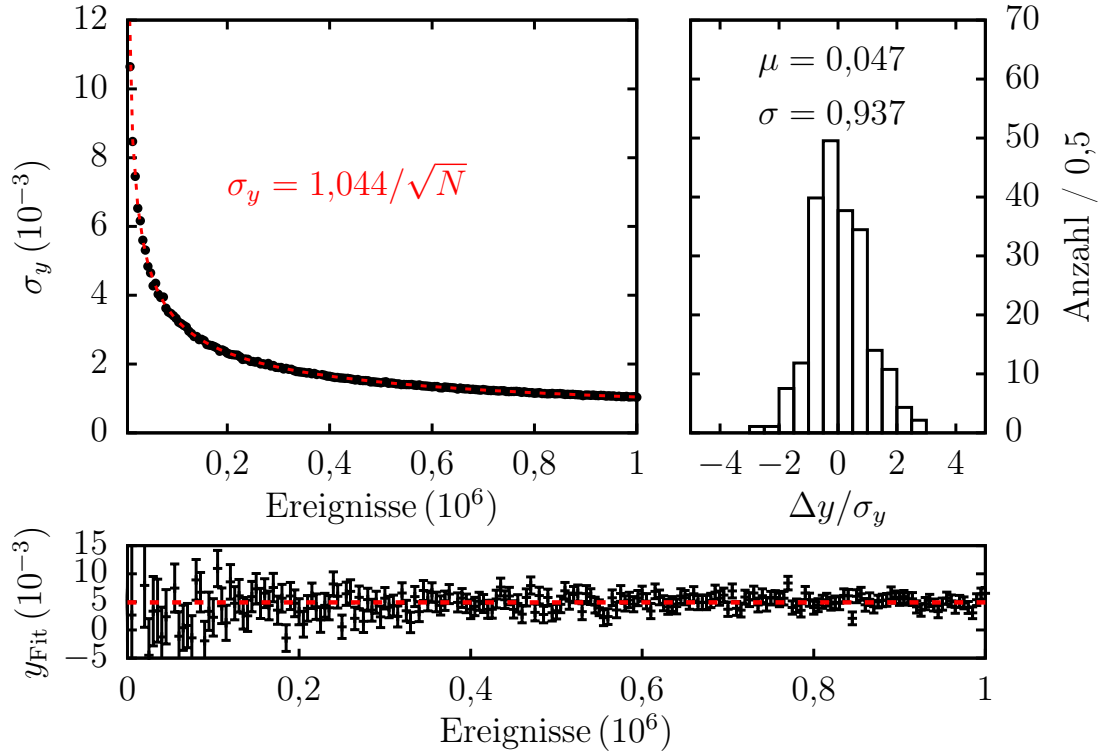


Abbildung 4.2: Test der y -Bestimmung im Belle-Modell. In der unteren Darstellung ist in rot der in der Simulation verwendete Wert eingezeichnet.

	Sigma-Modell	BaBar-Modell	Belle-Modell
Ereignisgeneration mit $x = 0,49\%$ und $y = 0,62\%$			
$\mu_x (10^{-4})$	$45,44 \pm 1,37$	$50,59 \pm 1,36$	$49,73 \pm 1,36$
$\mu_y (10^{-4})$	$62,99 \pm 1,47$	$62,64 \pm 1,60$	$62,35 \pm 1,47$
Ereignisgeneration mit $x = 0\%$ und $y = 0\%$			
$\mu_x (10^{-4})$	$-0,92 \pm 1,37$	$-0,10 \pm 1,33$	$-0,01 \pm 1,37$
$\mu_y (10^{-4})$	$0,93 \pm 1,47$	$0,55 \pm 1,57$	$1,08 \pm 1,48$

Tabelle 4.1: Gewichtete Mittelwerte der angepassten x und y beim Test der Funktionsanpassung mit einem CP -erhaltenden Modell.

Durch eine Anpassung dieser funktionalen Form an die ermittelten Verteilungen erhält man die in Tabelle 4.3 zusammengefassten Werte für die Konstante k_i . Umgekehrt lässt sich hieraus auch eine Abschätzung der zur Messung benötigten Ereignismenge erhalten. Fordert man etwa $\sigma_x/x = 0,5$ und $\sigma_y/y = 0,5$ folgen hieraus, nahezu unabhängig vom betrachteten Modell:

- $N \approx 1,6 \cdot 10^5$ Ereignisse zur Messung von x ,
- $N \approx 1,3 \cdot 10^5$ Ereignisse zur Messung von y .

	Sigma-Modell	BaBar-Modell	Belle-Modell
Ereignisgeneration mit $x = 0,49\%$ und $y = 0,62\%$			
$\mu(\Delta x/\sigma_x)$	-0,22	0,15	-0,01
$\sigma(\Delta x/\sigma_x)$	0,99	0,97	1,04
$\mu(\Delta y/\sigma_y)$	0,05	0,01	0,05
$\sigma(\Delta y/\sigma_y)$	1,01	0,87	0,94
Ereignisgeneration mit $x = 0\%$ und $y = 0\%$			
$\mu(\Delta x/\sigma_x)$	-0,04	-0,03	0,01
$\sigma(\Delta x/\sigma_x)$	0,96	0,97	1,04
$\mu(\Delta y/\sigma_y)$	0,09	0,01	0,09
$\sigma(\Delta y/\sigma_y)$	0,98	1,06	0,98

Tabelle 4.2: Mittelwerte und Standardabweichungen der Pull-Verteilungen der betrachteten Modelle.

	Sigma-Modell	BaBar-Modell	Belle-Modell
Ereignisgeneration mit $x = 0,49\%$ und $y = 0,62\%$			
$k_x (10^{-2})$	$97,27 \pm 0,15$	$94,47 \pm 0,11$	$97,06 \pm 0,14$
$k_y (10^{-2})$	$103,21 \pm 0,19$	$104,41 \pm 0,10$	$109,60 \pm 0,20$
Ereignisgeneration mit $x = 0\%$ und $y = 0\%$			
$k_x (10^{-2})$	$96,23 \pm 0,18$	$94,42 \pm 0,11$	$96,01 \pm 0,10$
$k_y (10^{-2})$	$104,68 \pm 0,17$	$109,29 \pm 0,20$	$105,14 \pm 0,16$

Tabelle 4.3: Angepasste Parameter in der Beschreibung des statistischen Fehlers von x und y .

Mit der ermittelten Parametrisierung der statistischen Fehler kann auch näherungsweise die Wahrscheinlichkeit berechnet werden, einen Fehler zweiter Art zu begehen; d. h. nach einer Messung die Hypothese keiner D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung anzunehmen, obwohl tatsächlich Mischung auftritt. Da die Messung der Parameter von x und y nahezu unabhängig voneinander ist, kann deren gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte durch eine zweidimensionale Normalverteilung beschrieben werden

$$p(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y} \exp\left(-\frac{(x - x_{\text{wahr}})^2}{\sigma_x^2}\right) \exp\left(-\frac{(y - y_{\text{wahr}})^2}{\sigma_y^2}\right). \quad (4.3)$$

Die Wahrscheinlichkeit bei Abwesenheit von D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung ($x_{\text{wahr}} = y_{\text{wahr}} = 0$) dennoch einen Wert der Mischungsparameter zu messen, der größer ist als $|x| = 0,49\%$ und $|y| = 0,62\%$, folgt hieraus zu

$$W = 1 - \int_{-0,49\%}^{0,49\%} \int_{-0,62\%}^{0,62\%} p(x,y) dx dy. \quad (4.4)$$

Aus Symmetriegründen entspricht dies näherungsweise auch der Wahrscheinlichkeit für den umgekehrten Fall, d. h. im Falle von $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung mit den Parametern $x = 0,49\%$ und $y = 0,62\%$, die Hypothese keiner $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung für wahr zu halten. Abbildung 4.3 zeigt die auf diese Art berechnete Wahrscheinlichkeit für Fehler zweiter Art in Abhängigkeit der Ereignismenge.

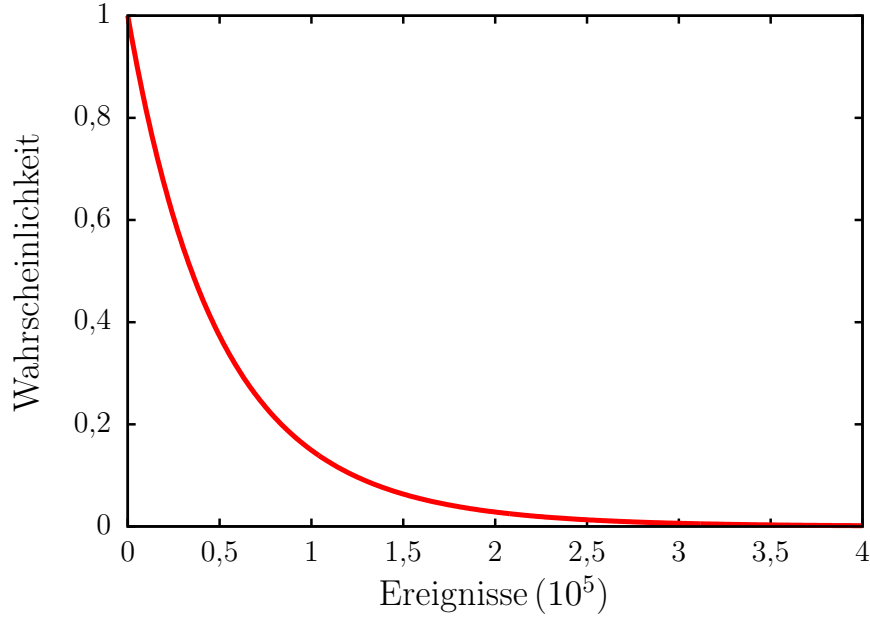


Abbildung 4.3: Wahrscheinlichkeit für Fehler zweiter Art bei Funktionsanpassung mit einem CP -erhaltenden Modell für $x = 0,49\%$ und $y = 0,62\%$.

4.2 Anpassung der zeitabhängigen Zerfallsamplitude bei CP -Verletzung

In diesem Abschnitt wird die Extraktion der CP -verletzenden Parameter durch eine Funktionsanpassung der Zerfallsamplitude getestet. Dabei wird das wichtige Resultat erzielt, dass es auch bei stark vereinfachten, besonders optimistischen Annahmen mit der zu erwartenden Ereignismenge nicht möglich ist, ein Modell mit indirekter CP -Verletzung von einem Modell mit CP -Erhaltung statistisch signifikant zu unterscheiden. Hiervon unberührt bleibt ein möglicher Test auf direkte CP -Verletzung. Bei der Generation der Monte-Carlo-Stichproben werden hier folgende Werte der Mischungsparameter angenommen [6]

$$\begin{aligned}
 x &= 0,41^{+0,14}_{-0,15} \% & \left| \frac{q}{p} \right| &= 0,93^{+0,09}_{-0,08} \\
 y &= 0,63^{+0,07}_{-0,08} \% & \arg\left(\frac{q}{p}\right) = \phi &= (-8,7^\circ)^{+8,7^\circ}_{-9,1^\circ}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

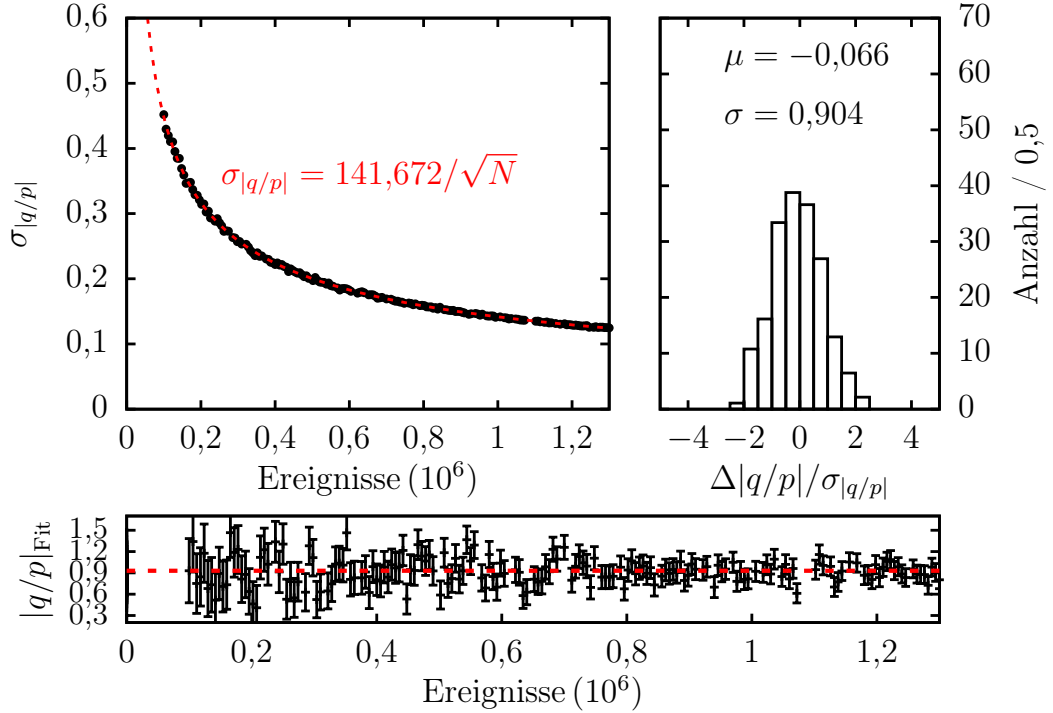


Abbildung 4.4: Test der $|q/p|$ -Bestimmung im Belle-Modelle. In der unteren Darstellung ist in rot der in der Simulation verwendete Wert eingezeichnet.

Die Werte stammen aus einer globalen Anpassung der Heavy Flavor Averaging Group an die Ergebnisse verschiedener Experimente bei erlaubter CP -Verletzung. Auch hier sollen die angegebenen Fehler aus [6] verdeutlichen, mit welcher Genauigkeit die Werte der Mischungsparameter experimentell bekannt sind. Dabei ist es durchaus möglich, dass die CP -verletzenden Parameter $\left|\frac{q}{p}\right|$ und ϕ deutlich kleinere Werte besitzen. So sind diese in [6] aus Messungen verschiedener Gruppen in einem Fit ohne direkte CP -Verletzung ermittelt worden zu $\left|\frac{q}{p}\right| = 1,007^{+0,015}_{-0,014}$ und $\phi = (-0,30^\circ)^{+0,58^\circ}_{-0,60^\circ}$. Analog zum Vorgehen im vorhergehenden Abschnitt werden Monte-Carlo-Stichproben mit den Sigma-, BaBar- und Belle-Amplitudenmodellen generiert und anschließend unter Verwendung des gleichen Amplitudenmodells angepasst. Dabei werden lediglich die CP -verletzenden Parameter $\left|\frac{q}{p}\right|$ und ϕ aus der Funktionsanpassung bestimmt; sämtliche Parameter der Dreikörperamplitude und auch die Mischungsparameter x und y sind auf ihren in der Simulation gesetzten Wert fixiert. Insgesamt sind pro Modell jeweils zweihundert Monte-Carlo-Stichproben von 10^5 bis $1,3 \cdot 10^6$ Ereignissen generiert und angepasst worden; kleinere Ereignismengen wurden ausgeschlossen, um die Konvergenz der Anpassung zu gewährleisten. In den Abbildungen 4.4 und 4.5 sind exemplarisch für das Belle-Modell die angepassten Parameter und die zugehörigen Pull-Verteilungen gezeigt.

Eine Zusammenfassung der gewichteten Mittelwerte der angepassten Modellparameter sowie des Mittelwertes und der Standardabweichung der Pull-Verteilungen

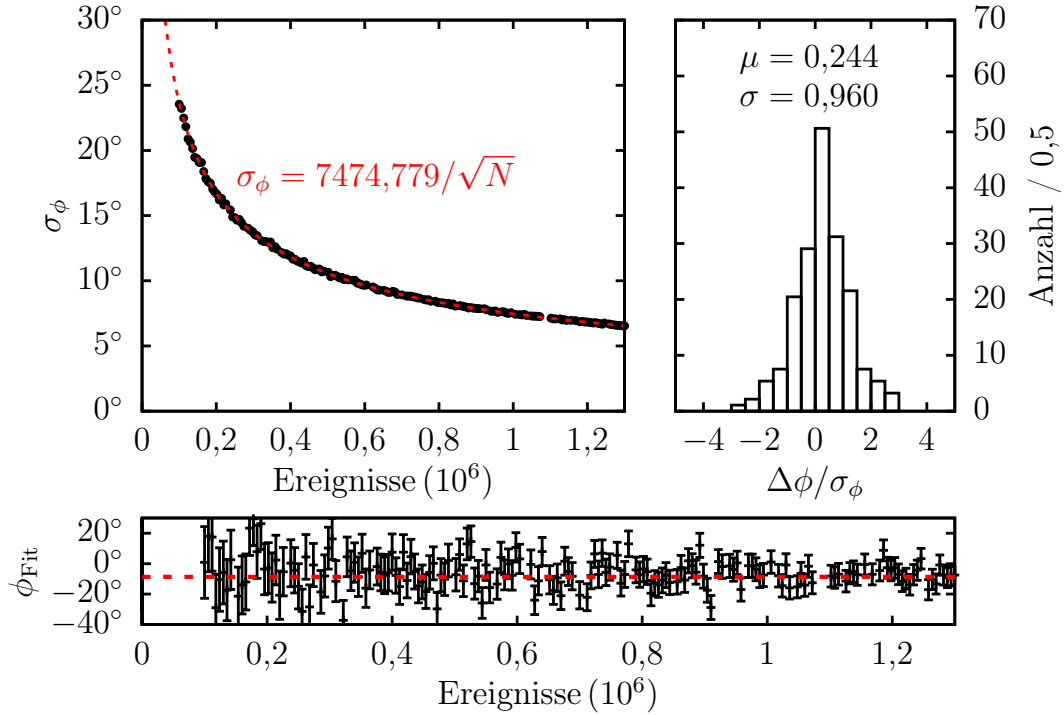


Abbildung 4.5: Test der ϕ -Bestimmung im Belle-Modelle. In der unteren Darstellung ist in rot der in der Simulation verwendete Wert eingezeichnet.

	Sigma-Modell	BaBar-Modell	Belle-Modell
EG ¹ mit $x = 0,41 \%$, $y = 0,63 \%$, $ q/p = 0,93$ und $\phi = -8,7^\circ$			
$\mu_{ q/p } (10^{-2})$	$91,34 \pm 1,60$	$96,06 \pm 1,90$	$91,86 \pm 1,85$
μ_ϕ	$-8,52^\circ \pm 0,94^\circ$	$-6,19^\circ \pm 1,20^\circ$	$-6,54^\circ \pm 0,98^\circ$
EG ¹ mit $x = 0,41 \%$, $y = 0,63 \%$, $ q/p = 1$ und $\phi = 0$			
$\mu_{ q/p } (10^{-2})$	$98,33 \pm 1,80$	$101,97 \pm 1,80$	$102,53 \pm 1,70$
μ_ϕ	$-0,23^\circ \pm 1,03^\circ$	$-0,68^\circ \pm 1,09^\circ$	$2,34^\circ \pm 0,91^\circ$

¹ Ereignisgeneration

Tabelle 4.4: Gewichtete Mittelwerte der angepassten $|q/p|$ und ϕ beim Test der Funktionsanpassung mit einem CP -verletzenden Modell.

geben die Tabellen 4.4 und 4.5. Wie in der Anpassung an das CP -erhaltende Modell im vorhergehenden Abschnitt lässt sich auch hier die Abhängigkeit des statistischen Fehlers von der Ereignismenge abschätzen. Für die Parameter in Gleichung 4.2 erhält man hier das in Tabelle 4.6 gezeigte Ergebnis. Mit dieser Parametrisierung der statistischen Fehler lässt sich die Ereignismenge abschätzen, die nötig ist, um eine bestimmte Fehlerschranke zu unterschreiten.

	Sigma-Modell	BaBar-Modell	Belle-Modell
EG ¹ mit $x = 0,41\%$, $y = 0,63\%$, $ q/p = 0,93$ und $\phi = -8,7^\circ$			
$\mu(\Delta q/p /\sigma_{ q/p })$	-0,11	0,21	-0,07
$\sigma(\Delta q/p /\sigma_{ q/p })$	0,98	0,99	0,90
$\mu(\Delta\phi/\sigma_\phi)$	0,02	0,24	0,24
$\sigma(\Delta\phi/\sigma_\phi)$	0,92	1,01	0,96
EG ¹ mit $x = 0,41\%$, $y = 0,63\%$, $ q/p = 1$ und $\phi = 0^\circ$			
$\mu(\Delta q/p /\sigma_{ q/p })$	-0,11	0,15	0,12
$\sigma(\Delta q/p /\sigma_{ q/p })$	1,03	0,92	0,97
$\mu(\Delta\phi/\sigma_\phi)$	-0,05	-0,09	0,24
$\sigma(\Delta\phi/\sigma_\phi)$	1,03	0,92	0,95

¹ Ereignisgeneration

Tabelle 4.5: Mittelwerte und Standardabweichungen der Pull-Verteilungen beim Test der Funktionsanpassung mit einem CP -verletzenden Modell.

	Sigma-Modell	BaBar-Modell	Belle-Modell
EG ¹ mit $x = 0,41\%$, $y = 0,63\%$, $ q/p = 0,93$ und $\phi = -8,7^\circ$			
$k_{ q/p }$	$136,27 \pm 0,11$	$131,95 \pm 0,30$	$141,67 \pm 0,10$
k_ϕ	$7767,4^\circ \pm 5,7^\circ$	$8082,5^\circ \pm 12,6^\circ$	$7474,8^\circ \pm 4,4^\circ$
EG ¹ mit $x = 0,41\%$, $y = 0,63\%$, $ q/p = 1$ und $\phi = 0$			
$k_{ q/p }$	$136,33 \pm 0,09$	$131,03 \pm 0,12$	$141,34 \pm 0,21$
k_ϕ	$7768,4^\circ \pm 15,5^\circ$	$8087,5^\circ \pm 7,8^\circ$	$7486,3^\circ \pm 9,5^\circ$

¹ Ereignisgeneration

Tabelle 4.6: Angepasste Parameter in der Beschreibung des statistischen Fehlers von $|q/p|$ und ϕ .

Fordert man beispielsweise Fehler, die in der Größenordnung der angenommenen Abweichung von den CP -erhaltenden Werten der Parameter liegen, erhält man die Abschätzung:

Bei $|q/p| = 0,93$ und $\phi = 8,7^\circ$,

- a) $N \approx 4,2 \cdot 10^6$ für $\sigma_{|q/p|} = 0,07$,
- b) $N \approx 7,4 \cdot 10^5$ für $\sigma_\phi = 8,7^\circ$.

Die nötige Ereignismenge erhöht sich dabei wesentlich, falls die Abweichung von den CP -erhaltenden Werten der Parameter klein ist, etwa für das bereits erwähnte Ergebnis in [6] in einem Modell ohne direkte CP -Verletzung:

Bei $|q/p| = 1,007$ und $\phi = -0,3^\circ$,

- a) $N \approx 4,1 \cdot 10^8$ für $\sigma_{|q/p|} = 0,007$,

b) $N \approx 6,2 \cdot 10^8$ für $\sigma_\phi = 0,3^\circ$.

Auch bei einer optimistischen Schätzung des $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770)$ -Wirkungsquerschnittes (vgl. Abschnitt 6.1) ist dies in beiden Fällen eine größere Datenmenge, als die bei $\bar{P}ANDA$ zu erwartende. Zieht man zudem das Ausmaß der vereinfachenden Näherungen in Betracht, muss der Schluss gezogen werden, dass es bei $\bar{P}ANDA$ nicht möglich sein wird, mit der in dieser Arbeit angewandten Methode indirekte CP -Verletzung statistisch signifikant zu messen.

Da es abhängig vom $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Produktionsquerschnitt nicht möglich sein wird, ein CP -verletzendes Modell signifikant von einem CP -erhaltenden Modell zu unterscheiden, soll zum Abschluss dieses Abschnitts geprüft werden, ob im Falle des Auftretens von CP -Verletzung die fälschliche Annahme von CP -Erhaltung zu einer systematischen Fehlbestimmung der Mischungsparameter x und y führt.

Hierzu wurden zwei Reihen von jeweils 250 Monte-Carlo-Stichproben mit jeweils $5 \cdot 10^5$ Ereignissen generiert; die erste mit den Parametern aus Gleichung 4.5, die zweite als Konsistenz-Test mit CP -erhaltenden Parametern $|q/p| = 1$ und $\phi = 0$. In beiden Fällen erfolgte die Anpassung mit einem CP -erhaltenden Modell, d. h. in der Funktionsanpassung wurden die Parameter $|q/p|$ und ϕ auf 1 beziehungsweise 0 fixiert. Für die gewichteten Mittelwerte ergibt sich dabei folgendes Ergebnis:

- Ereignisgeneration mit $x = 4,1 \cdot 10^{-3}$, $y = 6,2 \cdot 10^{-3}$, $|q/p| = 1$, $\phi = 0$
Fitergebnis: $\mu_x = (3,94 \pm 0,15) \cdot 10^{-3}$ und $\mu_y = (6,14 \pm 0,16) \cdot 10^{-3}$
- Ereignisgeneration mit $x = 4,1 \cdot 10^{-3}$, $y = 0,62 \cdot 10^{-3}$, $|q/p| = 0,93$, $\phi = 8,7^\circ$
Fitergebnis: $\mu_x = (4,70 \pm 0,13) \cdot 10^{-3}$ und $\mu_y = (5,30 \pm 0,14) \cdot 10^{-3}$.

Dies zeigt, dass nicht erkannte CP -Verletzung zu einer systematischen Fehlerschätzung der Mischungsparameter führen kann, die Größe der Verzerrung ist dabei abhängig von dem Wert der CP -verletzenden Parameter.

4.3 Anpassung der zeitabhängigen Zerfallsamplitude bei Berücksichtigung der Zerfallszeitauflösung

Wie bereits durch eine einfache Abschätzung gezeigt wurde (vgl. Abschnitt 3.3.3), liegt der bei $\bar{P}ANDA$ zu erwartende Fehler der Zerfallszeitdifferenz zwischen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfällen mindestens in der Größenordnung von $2/3$ der D -Lebensdauer und kann nicht vernachlässigt werden. Es ist daher bedeutsam zu zeigen, dass eine Messung der Mischungsparameter auch bei der zu erwartenden Zerfallszeitauflösung durchgeführt werden kann. Neben einem Test des erstellten Programms zur Funktionsanpassung kann im Folgenden auch eine nicht redundante Überprüfung der berechneten Faltung von Auflösungsfunktion und Zerfallsamplitude (vgl. Anhang C) durchgeführt werden. Hierzu werden Monte-Carlo-Stichproben mit den bereits erwähnten Modellen des EvtGen-Ereignisgenerators erstellt und vor dem Abspeichern der Daten die

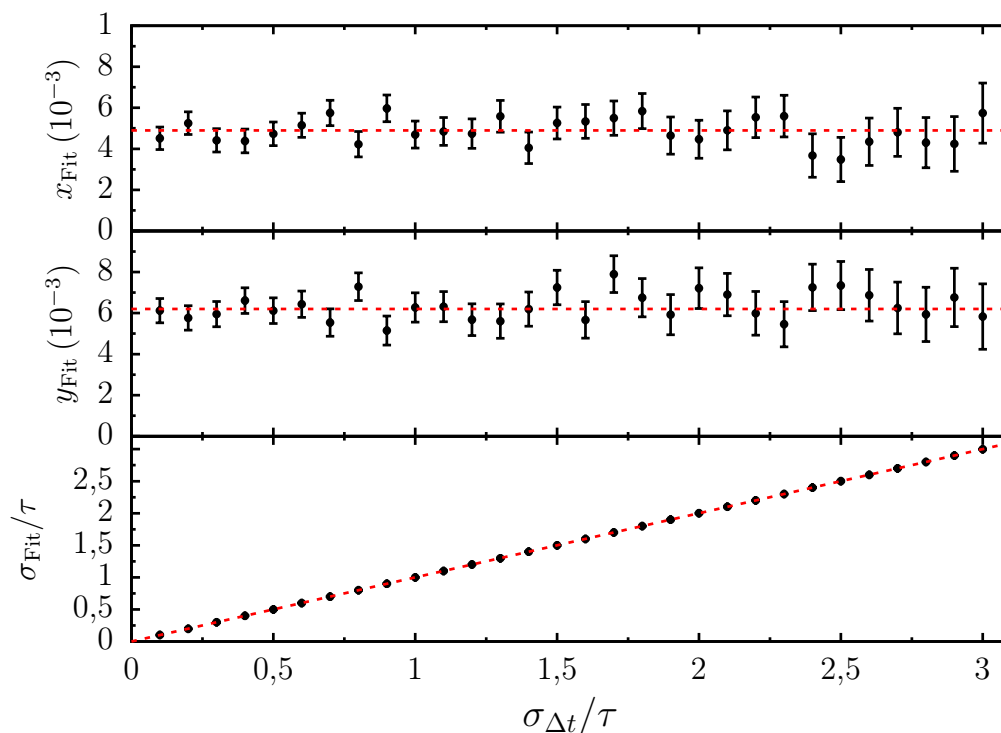


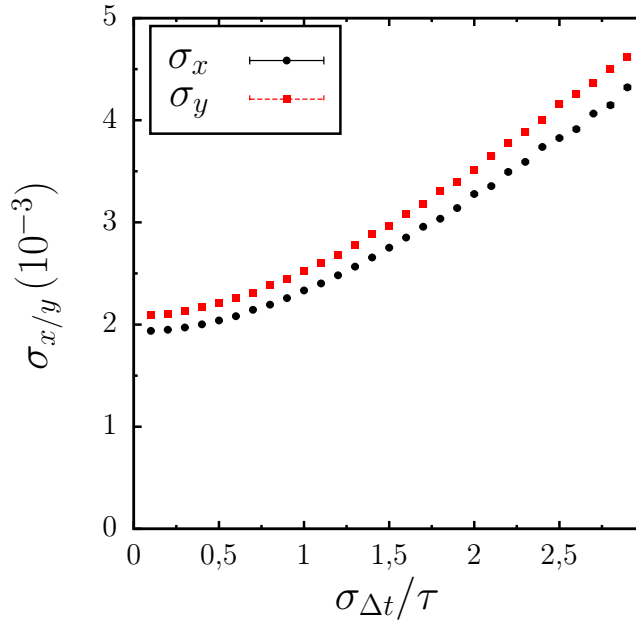
Abbildung 4.6: Test des Fits zur Bestimmung der Mischungsparameter in Abhängigkeit der Auflösung der Zerfallszeitdifferenz. In rot sind die in der Simulation verwendeten Werte eingezeichnet; jeder der dargestellten Punkte entspricht der Mittelung von jeweils 25 Stichproben mit $2,5 \cdot 10^5$ Ereignissen.

Zerfallszeitdifferenz zwischen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfall gaußförmig variiert; d. h. anstelle des wahren Wertes von Δt wird anhand einer Normalverteilung mit vorgegebener Breite $\sigma_{\Delta t}$ ein Zufallswert in dessen Umgebung generiert. Die Funktionsanpassung erfolgt durch die Maximierung der logarithmischen Likelihoodfunktion, die auf der Faltung von Zerfallsamplitude und Auflösungsfunktion beruht. Wichtig ist hierbei die Feststellung, dass die berechnete Faltung lediglich im Fit, nicht jedoch in Ereignisgeneration Verwendung findet.

Neben den Mischungsparametern x und y wird dabei in der Anpassung auch der Wert der Zerfallszeitauflösung $\sigma_{\Delta t}$ bestimmt; alle Parameter der Dreikörperamplitude sind wie in den vorhergehenden Abschnitten auf ihren in der Simulation gesetzten Wert fixiert. Da sich die rein statistischen Fehler der Mischungsparameter bei Anpassung mit dem exakten Amplitudenmodell für die drei untersuchten Amplitudenmodelle (vgl. Abschnitt 4.1) kaum unterscheiden, findet im Folgenden lediglich das Belle-Modell Verwendung.

Um die Abhängigkeit der extrahierten Mischungsparameter von der Zerfallszeitauflösung zu bestimmen, werden mit den Mischungsparametern in Gleichung 4.1 und Zeitaufösungen zwischen $\sigma_{\Delta t} = (0,1-3) \tau$ jeweils Stichproben der Größe $2,5 \cdot 10^5$

Ereignisse generiert und anschließend eine Funktionsanpassung durchgeführt. Zur Reduktion der statistischen Fluktuation werden dabei pro Wert der Zerfallszeitauflösung 25 Stichproben verwendet und der gewichtete Mittelwert der angepassten Werte gebildet. In Abbildung 4.6 sind die in den Funktionsanpassungen bestimmten Mischungsparameter (x_{Fit} , y_{Fit}) in Abhängigkeit der Zerfallszeitauflösung dargestellt. Die durchgeführte Fitreihe zeigt deutlich, dass prinzipiell auch noch bei Werten der



Abbildungung 4.7: Statistische Fehler der Mischungsparameter x und y in Abhängigkeit der Auflösung der Zerfallszeitdifferenz. Jeder der dargestellten Werte entspricht der Mittelung von jeweils 25 Stichproben mit $2,5 \cdot 10^5$ Ereignissen.

Zerfallszeitauflösung, die größer sind als die mittlere D-Lebensdauer, eine Extraktion der Mischungsparameter x und y möglich ist. Anschaulich folgt dies aus der Langsamkeit der $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung. So ist die Zeit für einen vollständigen Oszillationszyklus ($2\pi\tau/x$) etwa einen Faktor 10^3 größer als die mittlere Lebensdauer; entsprechend ist auch die Zerfallszeitauflösung, die in der gleichen Größenordnung wie die mittlere Lebensdauer liegt, klein gegenüber der relevanten Skala der $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung. Zur näheren Analyse des Zusammenhangs des Fehlers der Mischungsparameter und der Zerfallszeit sind in Abbildung 4.7 die rein statistischen Fehler von x und y in Abhängigkeit der Zerfallszeitauflösung dargestellt. Die gezeigten Fehler (σ_x , σ_y) stammen aus einer Schätzung mit dem MINOS-Paket; über die 25 Stichproben pro $\sigma_{\Delta t}$ -Wert ist jeweils der Mittelwert gebildet worden. Hierbei zeigen die statistischen Fehler der Mischungsparameter x und y einen ähnlichen Verlauf, wobei σ_y durchweg etwas größere Werte annimmt als σ_x . Gegenüber dem Fall einer idealen Bestimmung der Zerfallszeitdifferenz verdoppelt sich der statistische Fehler von x und y bei etwa $\sigma_{\Delta t} = 2,5 \tau$. Neben dem statistischen Fehler ergibt sich auch ein

systematischer Fehler, falls kontrafaktische Annahmen bezüglich der Auflösungsfunktion der Zerfallszeitdifferenzen gemacht werden, also beispielsweise um den wahren Wert normalverteilte Zerfallszeitdifferenzen angenommen werden, obwohl diese einer komplexeren Verteilung folgen. Insgesamt lässt sich der Schluss ziehen, dass prinzipiell mit der bei $\overline{\text{PANDA}}$ zu erwartenden Auflösung der Zerfallszeitdifferenz eine Bestimmung der Mischungsparameter möglich ist, vorausgesetzt eine hinreichend große Ereignismenge steht zur Verfügung. Eine realistischere Abschätzung als die hier gemachte wird im Rahmen der Simulation im PandaRoot-Framework in Kapitel 9 vorgenommen.

Kapitel 5

Das $\bar{\text{PANDA}}$ -Experiment

Ziel dieser Arbeit ist es, die Perspektiven der Messbarkeit von D^0 - $\bar{D}^0$ -Oszillationen am zukünftigen $\bar{\text{PANDA}}$ -Experiment aufzuzeigen. Im Folgenden wird der aktuelle Entwurf des Detektors sowie die Umsetzung des Experiments in der Simulationssoftware vorgestellt. Die Darstellung erhebt keinen Anspruch auf Vollständigkeit, sondern konzentriert sich auf die Aspekte im Aufbau des Detektors, die zur Analyse des untersuchten Zerfalls unerlässlich sind. Für technische Details sei hier auf die Berichte zur technischen Auslegung der jeweiligen Detektorkomponenten verwiesen¹.

Zur Übersicht der räumlichen Lage der einzelnen Subdetektoren ist in Abbildung 5.1 eine Darstellung des gesamten Detektors gegeben. Dieser wird in zwei Bereiche unterteilt, die sich durch die Orientierung des Magnetfeldes unterscheiden. Im Targetspektrometer ist dieses parallel zur Strahlrichtung, im Dipolmagneten des Vorwärtsspektrometers senkrecht zur Richtung des Antiprotonenstrahls. Der zylinderförmige Teil um die Interaktionszone wird auch als Fass- oder Barrelteil bezeichnet.

5.1 Antiprotonenstrahl

Bei $\bar{\text{PANDA}}$ handelt es sich um ein geplantes Experiment am Hochenergiespeicherring (HESR²) des im Bau befindlichen FAIR³-Komplexes. Die FAIR-Anlage wird sich in unmittelbarer Nachbarschaft des Helmholtzzentrums für Schwerionenforschung (GSI) befinden und auf einen Teil der bereits vorhandenen GSI-Infrastruktur zurückgreifen. Zur Erzeugung des Antiprotonenstrahles werden zunächst Protonen im Proton-Linearbeschleuniger (p-LINAC⁴) auf eine kinetische Energie von 70 MeV beschleunigt; nach der Einspeisung in das SIS-100⁵ Schwerionensynchrotron erfolgt die weitere Beschleunigung auf 29 GeV kinetische Energie. Die eigentliche Produktion von Antiprotonen geschieht durch Reaktion mit einem 11 cm dicken Nickel- oder Kupfer-Target; dabei liegt die Produktionsrate bei etwa $2 \cdot 10^{-5}$ Antiprotonen pro auftreffendem Proton [103]. Die Trennung von anderen Reaktionsprodukten erfolgt

¹Siehe [96], [97], [98], [99], [100] und [101].

²High Energy Storage Ring.

³Facility for Antiproton and Ion Research.

⁴LINear ACcelerator.

⁵Der Wert 100 bezeichnet die magnetische Steifigkeit $B\rho = 100 \text{ Tm}$.

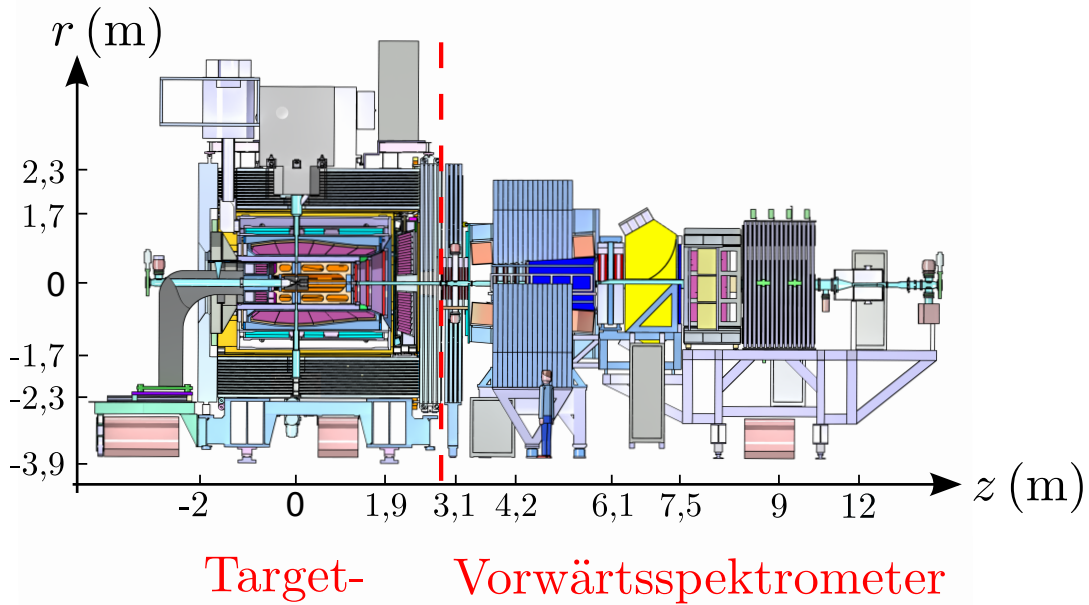


Abbildung 5.1: Übersicht des $\bar{\text{PANDA}}$ -Detektors [102].

im Antiprotonenseparator durch magnetische Felder, während eine erste Vorbereitung des Antiprotonenstrahls durch stochastische Kühlung im Sammelring (CR⁶) vorgenommen wird. Hierdurch verringert sich die relative Impulsschwankung der Antiprotonen von 3 auf 0,1 % und die Emittanz des Strahls von 240 μm auf 5 μm [104]. Die folgende Einspeisung in den HESR geschieht bei einem festen Impuls von 3,8 GeV/c [105], das anschließende Abbremsen oder Beschleunigen der Antiprotonen erlaubt Impulse im Bereich von 1,5–15 GeV/c. Im HESR wird Elektronenkühlung im Impulsbereich bis 9 GeV/c [106] und stochastische Kühlung oberhalb von 3,8 GeV/c [107] möglich sein. Die erreichbare relative Impulsschwankung hängt dabei vom Strahlimpuls und der angestrebten Luminosität ab. Ein Einengen des Antiprotonenstrahls erhöht die Luminosität, verringert jedoch durch verstärkte Streuung im Strahl die relative Impulsschwankung und umgekehrt. Bei der für den Nachweis des untersuchten Kanals notwendigen Messung im Betrieb mit hoher Luminosität (HL⁷) wird eine relative Impulsschwankung von etwa 10^{-4} erwartet [108]. Eine Übersicht über den FAIR-Komplex und die geplante Strahlführung gibt Abbildung 5.2.

⁶Collector Ring.

⁷High Luminosity.

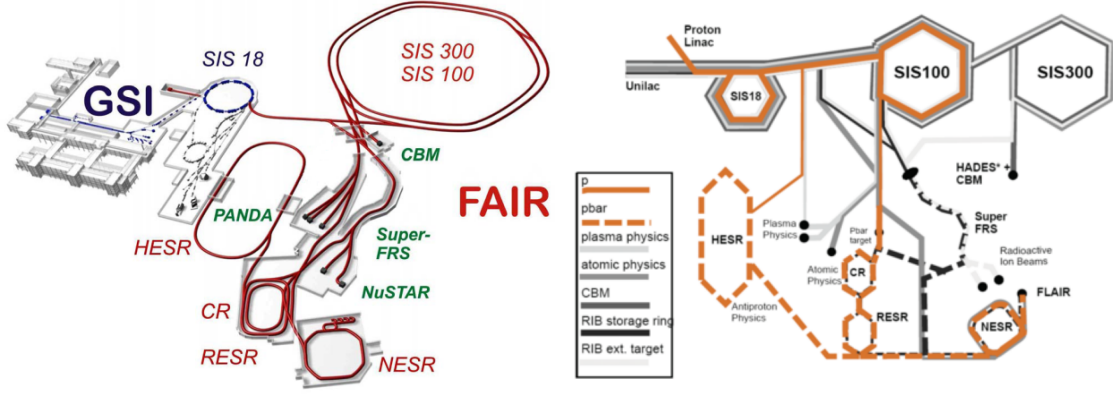


Abbildung 5.2: Übersicht über den im Bau befindlichen FAIR-Komplex (*links*) [99] und Schema der Strahlführung (*rechts*) [109].

5.2 Target und Luminosität

Aufgrund des geringen Produktionsquerschnittes des ψ (3770)-Charmoniums in Anti-proton-Proton-Reaktionen (siehe Abschnitt 6.1), ist es von entscheidender Bedeutung eine hohe Luminosität zu erreichen, um eine für die Analyse hinreichende Anzahl an D^0 -Mesonen zu messen. Die Luminosität ist definiert als [110, S. 49]

$$L = \Phi_{\bar{p}} N_p = \frac{N_{\bar{p}} N_p f}{A}, \quad (5.1)$$

hierbei ist $\Phi_{\bar{p}}$ der Antiprotonenfluss, f die Zirkulationsfrequenz im Beschleuniger, A die Überlappfläche von Antiprotonenstrahl und Target und N_p die Anzahl der Targetprotonen in dieser Region. Die Luminosität kennzeichnet also nicht nur den Antiprotonenstrahl, sondern auch das Target. Die erwartete Ereignisrate einer Reaktion mit Wirkungsquerschnitt σ kann berechnet werden über

$$\dot{N} = L \cdot \sigma. \quad (5.2)$$

Die erwartete absolute Anzahl an Ereignissen folgt durch Integration über die Zeit zu

$$N = \int L dt \cdot \sigma. \quad (5.3)$$

In der Regel wird von Experimenten die integrierte Luminosität $\int L dt$ als Maß für die analysierte Datenmenge angegeben, falls der Wirkungsquerschnitt der untersuchten Reaktion unbekannt ist. Für die angestrebte Peakluminosität im HL-Betrieb von $L_{\max} = 2 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ folgt mit den Auslegungsparametern $N_{\bar{p}} = 10^{11}$ und $f = 443 \text{ kHz}$ [101, S. 19] eine notwendige Flächendichte des Targets von

$$\frac{N_p}{A} = 4,5 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{cm}^2}. \quad (5.4)$$

Die aktuelle Planung des $\bar{\text{PANDA}}$ -Experimentes ist dahingehend [101, S. 93], in der Anfangsphase ein Cluster-Jet- und nach Abschluss der technischen Entwicklung unter Umständen später ein Pellet-Target zu verwenden. Die beiden Optionen unterscheiden sich dabei deutlich in der erreichbaren Targetdichte und der zu erwartenden Kenntnis des primären Interaktionspunktes. Die absolute Bestimmung der Luminosität erfolgt im Luminositätsmonitor.

5.2.1 Cluster-Jet-Target

Für das Cluster-Jet-Target wird eine zunächst konvergente und anschließend divergente Lavalldüse Verwendung finden. Vorgekühltes Wasserstoffgas kühlt bei Austritt aus der Düse aufgrund des Joule-Thomson-Effekts stark ab; es bildet sich ein Strom von kondensierten, überschallschnellen Nanopartikeln heraus, die auch als Cluster bezeichnet werden. Hierbei verringert die im Vergleich zu den Molekülen des Restgases in Target- und Strahlröhre große Masse der Cluster die Aufweitung des Cluster-Jets durch Streuung. Die Größe der Cluster kann über den Durchmesser der Düsenöffnung, sowie Temperatur und Druck des Wasserstoffgases variiert werden. Insgesamt lässt sich eine sehr homogene Targetdichte erreichen, wodurch die Luminosität während eines Interaktionszyklus zeitlich stabil bleibt. Die Unsicherheit in der Kenntnis des primären Interaktionspunktes ergibt sich senkrecht zur Antiprotonenstrahlrichtung aus dessen Durchmesser und liegt im Bereich von $100\text{ }\mu\text{m}$ [101, S. 20]. In Strahlrichtung ist diese durch die Breite des Cluster-Jets von etwa 10 mm gegeben. Technisch ist es sehr fordernd hohe Targetdichten zu erreichen, da die Distanz zwischen Düsenaustritt und Interaktionszone mit etwa 2 m bedeutend größer ist als bei anderen Experimenten mit Cluster-Jet-Target (E835, COSY-11). Die mit Prototypen erreichte Targetdichte liegt bei $4 \cdot 10^{14}\text{ cm}^{-2}$, ein Wert von $1 \cdot 10^{15}\text{ cm}^{-2}$ wird für den Aufbau des $\bar{\text{PANDA}}$ -Experiments erwartet [111]. Mit der Abschätzung von $8 \cdot 10^{14}\text{ cm}^{-2}$ in [99, S. 9] folgt im hier relevanten Energiebereich eine zeitlich gemittelte Luminosität von $\bar{L} = 0,38 \cdot 10^{32}\text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$. Die Cluster-Jet-Erzeugung mit dem Münster-Prototypen ist in Abbildung 5.3 gezeigt.

5.2.2 Pellet-Target

Die aktuelle Entwicklung des $\bar{\text{PANDA}}$ -Pellet-Targets basiert auf dem Target-Design des WASA-Detektors⁸ am COSY⁹. Zur Erzeugung eines möglichst homogenen Stroms von gefrorenen „Wasserstoffkügelchen“ oder auch Pellets dient bei dieser Form des Targets eine Tripelpunktkammer. In diese wird durch eine dünne Düse, deren Durchmesser in etwa dem Durchmesser der zu erzeugenden Pellets entspricht, tiefkalter, flüssiger Wasserstoff geleitet. Die Tripelpunktkammer enthält Wasserstoffgas unter Bedingungen nahe des Tripelpunktes. Ein piezoelektrisches Element erlaubt es Schwingungen entlang des Wasserstoffstrahles zu erzeugen; erreicht die Amplitude der Schwingungen die Größenordnung der axialen Ausdehnung des Strahls,

⁸Wide Angle Shower Apparatus.

⁹COoler SYnchrotron am Forschungszentrum Jülich.

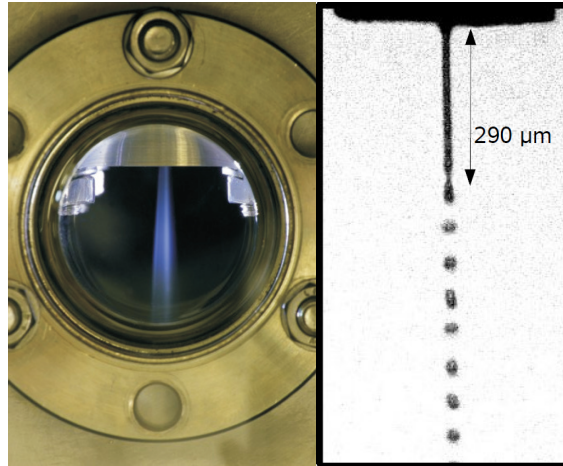


Abbildung 5.3: Cluster-Jet-Erzeugung mit dem Münster-Prototypen (*links*) [101, S. 28]; der Strahl ist mit Leuchtdioden illuminiert. *Rechts* ist die Pelleterzeugung mit dem $\bar{\text{PANDA}}$ -Prototypen gezeigt, am oberen Rand der Abbildung ist die Spitze der oszillierenden Düse zu erkennen [101, S. 55].

desintegriert dieser in einen regelmäßigen Strom von Wasserstofftröpfchen. Durch Verdunstung von Wasserstoff an der Oberfläche der Tröpfchen kühlt die Temperatur um wenige Kelvin unter den Schmelzpunkt ab, wodurch sich die namensgebenden gefrorenen Pellets bilden. Der erreichbare Durchmesser der Pellets beträgt $25\text{--}30\text{ }\mu\text{m}$ bei einer Frequenz von $40\text{--}110\text{ kHz}$ [101, S. 49]. Abhängig von der Pelletdichte im Interaktionsbereich mit dem Antiprotonenstrahl sind zwei Betriebsmodi geplant; entweder eine hohe Pelletdichte und hieraus resultierend hohe Luminosität (HL), oder eine geringere Dichte verbunden mit der Möglichkeit zur Verfolgung individueller Pellets durch ein optisches System (PTr¹⁰). Das PTr soll den Ort der Pellets bis auf $50\text{ }\mu\text{m}$ genau messen, womit bei Berücksichtigung der Pelletausdehnung, der primäre Interaktionspunkt mit einer Genauigkeit von weniger als $100\text{ }\mu\text{m}$ bestimmt werden kann. Die erreichbare Targetdichte im PTr-Betrieb liegt bei $2 \cdot 10^{15}\text{ cm}^{-2}$ [101, S. 51], woraus eine mittlere Luminosität von $\bar{L} = 0,85 \cdot 10^{32}\text{ cm}^{-2}\text{s}^{-1}$ folgt [99, S. 9]. Im HL-Betrieb ohne individuelle Verfolgung der Pellets ist ein etwa zweimal so hoher Wert möglich. Als nachteilig erweisen sich Geschwindigkeitsschwankungen im Pelletstrahl, die zu Dichteschwankungen und somit zu einer zeitlichen Struktur der Luminosität führen. Die Pelleterzeugung mit dem $\bar{\text{PANDA}}$ -Prototypen ist in Abbildung 5.3 gezeigt.

5.2.3 Luminositätsmonitor

Zur Messung der integrierten Luminosität werden bei $\bar{\text{PANDA}}$ etwa 11 m hinter der Interaktionszone (zur Position siehe Abb. 5.7) vier Lagen von Pixeldetektoren mit

¹⁰Pellet Tracking.

relativen Abständen von 10–20 cm Verwendung finden. Physikalisch wird hierbei das optische Theorem genutzt, das den elastischen Streuquerschnitt in Vorwärtsrichtung mit dem totalen Wirkungsquerschnitt in Verbindung setzt. Da der Wirkungsquerschnitt unter kleinen Winkeln dominiert wird durch Coulomb-Streuung, ist dieser exakt berechenbar. Die hierfür in Frage kommenden Streuwinkel sind mit wenigen Millirad klein, entsprechend muss sich der Detektor möglichst nahe an der Strahlachse und weit hinter der Interaktionszone befinden. Die volle Abdeckung des Azimutwinkels erlaubt es, mögliche systematische Fehler durch eine falsche Ausrichtung des Antiprotonenstrahls oder Feldinhomogenitäten des Dipolmagneten zu korrigieren. Es wird erwartet, dass die integrierte Luminosität mit diesem System bis auf 3 % genau gemessen werden kann.

5.3 Spurfindung

Zur zeitabhängigen Analyse von D-Zerfällen ist es notwendig, die nur wenige hundert Mikrometer lange Flugstrecke im Detektor zu messen, um hieraus die jeweilige Zerfallszeit ermitteln zu können. Während sich der Entstehungsort von D^0 - bzw. $\bar{D}^0$ -Meson in der Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0$ durch das Schnittvolumen von Antiprotonenstrahl und Target einschränken lässt, muss auf deren Zerfallspunkt indirekt aus den Spuren ihrer längerlebigen, geladenen Zerfallsteilchen geschlossen werden. Im untersuchten Kanal sind dies $(\pi^+ \pi^-)$ für den $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ und $(K^+ \pi^-)$ für den $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ Zerfall. Anders als etwa bei früheren Blasenkammerexperimenten werden die Spuren der geladenen Teilchen nicht direkt gemessen, sondern aus einer χ^2 -Anpassung der Trajektorie an die diskreten Spurpunkte der jeweiligen Detektoren bestimmt. Aus der Krümmung der im Magnetfeld helixförmigen Trajektorien kann auch auf den Impuls der Teilchen geschlossen werden. Zudem folgt aus der Güte der χ^2 -Anpassung eine Schätzung der korrelierten Fehler der Impulskomponenten, d. h. der betreffenden Kovarianzmatrix. Die Energie geladener Teilchen wird bei $\bar{\text{PANDA}}$ nicht direkt gemessen, vielmehr existiert eine Reihe von Detektorsystemen zur Teilchenidentifikation (PID¹¹), mit denen auf die Teilchenart ($e^\pm$, $\mu^\pm$, $\pi^\pm$, $K^\pm$, $p^{(-)}$) geschlossen werden kann; implizit entspricht dies einer Messung der Masse des jeweiligen Teilchens. Zusammen mit der Impulsmessung folgt hiermit aus der Relation $E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4$ die Energie des jeweiligen Teilchens. Im Folgenden werden kurz die bei $\bar{\text{PANDA}}$ vorgesehenen Detektoren zur Spurfindung vorgestellt.

5.3.1 Mikro-Vertex-Detektor

Der innerste aktive Teil des $\bar{\text{PANDA}}$ -Detektors in direkter Umgebung zur Interaktionszone ist der Mikro-Vertex-Detektor (MVD). Dieser ist von entscheidender Wichtigkeit bei der erreichbaren Ortsauflösung, da die Güte einer Spuranpassung wesentlich durch die ersten Spurpunkte im Detektor bestimmt wird. Die kurzlebigen

¹¹Particle IDentification.

D-Mesonen zerfallen bereits in der Strahlröhre, deren Zerfallsprodukte müssen daher die etwa 200 μm dicke Ummantelung der Strahlröhre durchqueren, bevor diese auf aktive Detektorlagen treffen. Durch die mögliche Absorption ist ein winkelabhängiger, absoluter Minimalimpuls gegeben, bei dem Teilchen registriert werden können. Tabelle 5.1 gibt eine Übersicht über diesen Minimalimpuls für verschiedene Teilchenarten. Das für den MVD zur Verfügung stehende Volumen entspricht einem

Teilchen	$ \mathbf{p}_{\min} $ (MeV/c)	
	$\alpha = 90^\circ$	$\alpha = 45^\circ$
$e^\pm$	≈ 1	≈ 1
$\mu^\pm$	19	21
$\pi^\pm$	23	25
$K^\pm$	56	62
$\begin{smallmatrix} (-) \\ p \end{smallmatrix}$	89	98

Tabelle 5.1: Minimalimpulse zum Durchqueren der Strahlröhre (Beryllium) für verschiedene Teilchenarten bei unterschiedlichen Einfallswinkeln α [99, S. 25].

40 cm langen Zylinder mit einem Radius von 15 cm und erzwingt damit ein äußerst kompaktes Design. Um dennoch eine Mindestanzahl von vier Spurpunkten im MVD sicherzustellen, sieht die aktuelle Planung vier zylinderförmige Detektorlagen in Richtung senkrecht zum Antiprotonenstrahl und sechs scheibenförmige Lagen in Strahlrichtung vor. Zudem sind zwei zusätzliche Scheiben in größerem Abstand geplant, um sensitiv auf Zerfälle von Λ -Hyperonen und kurzlebigen Kaonen zwischen MVD und den GEM-Detektoren in Vorwärtsrichtung zu sein. Für die inneren zwei Zylinder kommen Pixeldetektoren zum Einsatz. Diese besitzen zwar mit ihren $100 \times 100 \mu\text{m}^2$ großen Pixeln hohe Granularität, damit einher geht jedoch eine hohe Zahl von auszulesenden Kanälen. Um die hieraus resultierende Materialbelegung durch Datenkabel zu verringern, werden für die großflächigen äußeren Zylinder doppelseitige Siliziumstreifendetektoren verwendet. In Vorwärtsrichtung kommen hybride Detektorlagen mit einem inneren Pixel- und einem äußeren Streifenteil zur Anwendung. Insgesamt müssen annähernd 11 Millionen Pixel und etwa 200.000 Streifenkanäle ausgelesen werden [112, S. 70]; Daten- und Versorgungskabel stellen einen großen Teil der Materialbelegung des MVD.

Neben der Forderung geringer Materialbelegung führt die räumliche Nähe zur Interaktionszone zu hohen Anforderungen an den MVD. Aufgrund der maximalen Interaktionsrate von mehr als 10^7 Antiproton-Proton-Reaktionen pro Sekunde ergibt sich ein hoher, anisotroper Teilchenfluss durch den Detektor; außer der nötigen Strahlenhärte erfordert dies eine Zeitauflösung in der Größenordnung von 10 ns [99, S. 26]. Aus dem in Vorwärtsrichtung gerichteten Teilchenfluss folgt auch ein asymmetrischer Aufbau des MVD, bei dem Versorgungsleitungen für Auslese, Kühlung und elektrische Versorgung ausschließlich entgegen der Richtung des Antiprotonenstrahls

geführt werden, um Streuung und Paarbildung von Photonen im Material der Versorgungskomponenten zu vermeiden. Zusätzlich hierzu wird die Zylindersymmetrie und nahezu vollständige Abdeckung des Raumwinkels durch die Target-Röhre gebrochen.

Neben der zur Verfügung stehenden Ereignismenge und deren Kontamination mit Untergrund stellt die Zerfallszeitauflösung das limitierende Element der Genauigkeit der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparameter-Messung dar. Die hohe Ortsauflösung des MVD ist somit eine der essentiellen Voraussetzungen für die hier gezeigte Analyse. Das aktuelle Design des MVD ist in Abbildung 5.4 gezeigt.

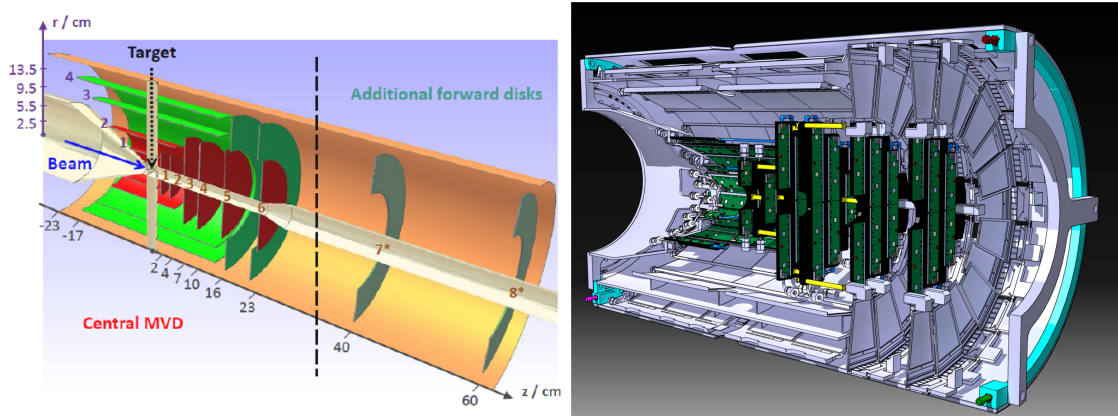


Abbildung 5.4: Schema (*links*) [112] und CAD-Konstruktionsskizze (*rechts*) [102] des MVD.

5.3.2 Straw-Tube-Detektor

Der Straw-Tube-Detektor (STT)¹² deckt einen Polarwinkelbereich von 10° – 140° ¹³ ab und umgibt den MVD zylinderförmig, ist jedoch mehr als dreimal so lang wie dieser (siehe Abb. 5.5 und 5.6). Insgesamt besteht der STT aus 4.636 jeweils 1,5 m langen Straw-Tubes („Driftröhrchen“) mit einem Durchmesser von jeweils 1 cm [100, S. 14]. Zur Minimierung von Streuung besteht die Ummantelung der Röhrchen aus einer $27\text{ }\mu\text{m}$ dünnen Mylarfolie; mechanische Stabilität wird durch einen Überdruck von 1 bar der enthaltenen Gas Mischung aus Argon mit Beimengung von CO_2 als Löschgas erreicht. Die Anordnung der Straw-Tubes in einer hexagonalen Struktur ist nicht exakt zylindersymmetrisch, jedoch ist die hierdurch bedingte Abhängigkeit der Akzeptanz vom Azimutwinkel sehr klein und gegenüber dem starken Symmetriebruch durch die Target-Röhre zu vernachlässigen. Zum Nachweis der beim Durchgang geladener Teilchen frei werdenden Ladung ist in jedem Röhrchen entlang der Achse ein mit Gold beschichteter Wolframdraht von $20\text{ }\mu\text{m}$ Durchmesser gespannt, wobei die Drähte als Anode und die Ummantelung als Kathode fungieren. Bei einer anliegenden Spannung von einigen kV wird eine Verstärkung des Primärsignals um

¹²Straw Tube Tracker.

¹³Der Polarwinkel 0° ist über die Richtung des Antiprotonenstrahls definiert.

einen Faktor 10^4 – 10^5 erreicht; die Analog-Digital-Wandlung und weitere Signalverarbeitung erfolgt in der Vorschaltel Elektronik an den Enden der Straw-Tubes. Da jede einzelne Driftröhre nur eine eindimensionale Ortsinformation liefert, sind einzelne Lagen von Straw-Tubes gegenüber der Strahlachse um wenige Grad gekippt, so dass durch die Kombination der einzelnen Kanäle eine vollständige Spurrekonstruktion möglich ist (siehe Abb. 5.5 *Mitte*). Beim vollständigen Durchqueren des STT hin-

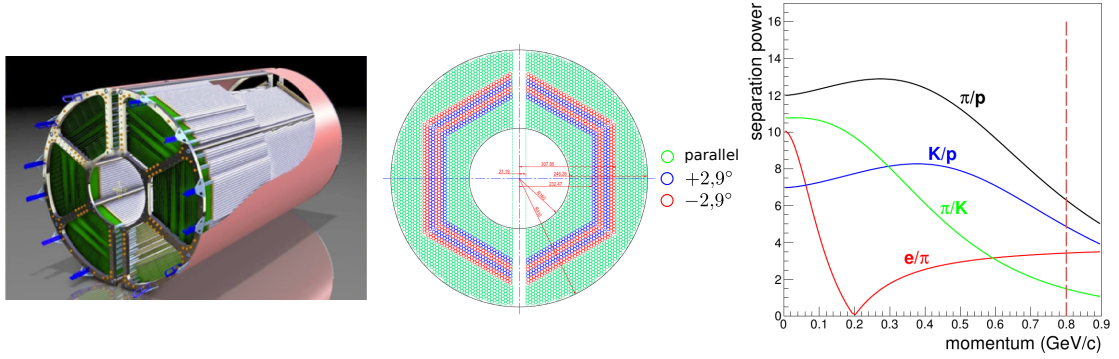


Abbildung 5.5: Vorderansicht des STT (*links*), Schema der gedrehten Driftröhren (*Mitte*) und Trennleistung der PID (*rechts*) [100].

terlassen geladene Teilchen im Schnitt mehr als 20 Spurpunkte [100, S. 81]; dies erlaubt nicht nur eine Impulsbestimmung sondern auch die Messung des spezifischen Energieverlustes dE/dx mit einer Genauigkeit von $\leq 8\%$ [100, S. 28]. Bis zu einem Impuls von 800 MeV/c ermöglicht dies eine effiziente Bestimmung der Teilchenart (siehe Abb. 5.5 *rechts*). Aufgrund des Energieverlustes innerhalb des Detektors benötigen Teilchen einen Mindestimpuls in Transversalrichtung von 100 MeV/c um genug Spurpunkte zur vollständigen Impulsrekonstruktion zu hinterlassen. Bedingt durch die Bauform des STT ist die Ortsauflösung senkrecht zur Strahlrichtung mit etwa 150 μm bedeutend besser als in Strahlrichtung ($\approx 3\text{ mm}$).

5.3.3 Gas-Elektronen-Vervielfacher

Um geladene Teilchen in Vorwärtsrichtung nachweisen zu können, werden drei Lagen von Gas-Elektronen-Vervielfacher-Detektoren (GEM¹⁴) Verwendung finden. Wegen des großen Abstands zur Interaktionszone handelt es sich hierbei um großflächige Detektoren, die eine gute Zeitauflösung besitzen müssen, um den hohen Teilchenfluss in Vorwärtsrichtung bewältigen zu können. GEM-Detektoren unterscheiden sich von gewöhnlichen Driftkammern durch etwa 50 μm dünne metallbeschichtete Isolatorfolien zwischen Driftkathode und Ausleseanode. In diese sind im Abstand von üblicherweise $\approx 100\text{ }\mu\text{m}$ viele kleine Löcher mit etwa 70 μm Durchmesser geätzt. Das starke elektrische Feld in den Löchern vervielfacht durch Stoßionisation die beim Durchgang geladener Teilchen freiwerdenden Elektronen. Da die Signalgebung nur die schnelle Komponente der Elektronen und nicht den Ionenfluss verwendet,

¹⁴Gas Electron Multiplier.

handelt es sich um einen intrinsisch schnellen Detektor. Die mit diesem Detektortyp erreichbare Ortsauflösung der Spurpunkte liegt im Bereich von $\approx 50 \mu\text{m}$ [113], abgedeckt wird der Polarwinkelbereich $< 22^\circ$. Der Aufbau des Target-Spektrometers mit der geplanten Lage der GEM-Detektoren ist in Abbildung 5.6 gezeigt.

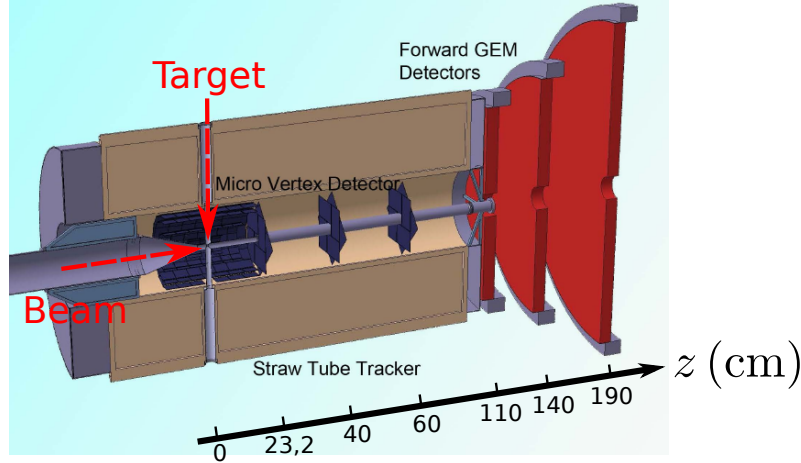


Abbildung 5.6: Schema des Target-Spektrometers mit MVD, STT und GEM-Detektoren [100, S. 14].

5.3.4 Spurdetektoren in Vorwärtsrichtung

Zur Detektion geladener Teilchen mit kleinem Winkel zum Antiprotonenstrahl sind bei $\bar{\text{PANDA}}$ in Vorwärtsrichtung drei planare STT-Lagen vorgesehen (FTS¹⁵). Die Größe der Lage nimmt dabei mit zunehmenden Abstand zur Interaktionszone zu, so beträgt die Abmessungen der ersten Lage $0,7 \times 1,3 \text{ m}^2$, die der letzten $1,5 \times 6 \text{ m}^2$ [114]. Jede STT-Lage ist aus zwei Reihen von rechteckigen STT-Modulen zusammengesetzt, wobei wiederum jedes Modul aus zwei Reihen von Straws besteht; die verwendete Technik entspricht den Straws des zentralen Straw-Tube-Detektors. Zur Messung von zweidimensionalen Spurpunkten ist die zweite Reihe des ersten Moduls um $+5^\circ$ und die erste Reihe des zweiten Moduls um -5° gegenüber der Vertikalen gekippt. Die erreichbare Spurpunktauflösung mit dieser Anordnung liegt bei $100 \mu\text{m}$, für die relative Impulsauflösung wird $\Delta p/p = 1 \%$ erwartet. Die Spurdetektoren in Vorwärtsrichtung decken den Raumwinkelbereich der Öffnung des Dipolmagneten ab, was einem Winkelbereich von $\pm 10^\circ$ in horizontaler und $\pm 5^\circ$ in vertikaler Richtung entspricht. Abbildung 5.7 zeigt den Aufbau des Vorwärtsspektrometers und die Anordnung der STT-Lagen.

¹⁵Forward Tracking System.

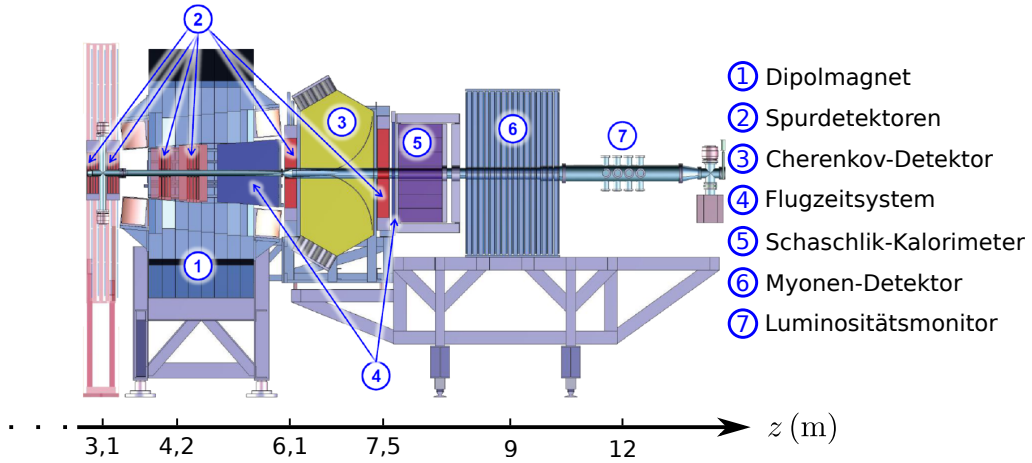


Abbildung 5.7: Seitenansicht des Vorwärtsspektrometers [112, S. 55].

5.4 Teilchenidentifikation

Neben der bereits erwähnten Energiemessung ist eine effektive Bestimmung der Teilchenart von großer Bedeutung bei der Reduktion von hadronischen Untergrundkanälen. Bei $\overline{\text{PANDA}}$ werden verschiedene Detektorsysteme zur Teilchenidentifikation (PID) zum Einsatz kommen, die sich in ihrer Raumwinkelabdeckung, der Trennleistung¹⁶ bezüglich der Teilchenarten und dem sensitiven Impulsbereich unterscheiden; auf die Ladung der jeweiligen Teilchen ($\pm$) kann anhand der Ablenkung im Magnetfeld geschlossen werden. Während die Identität von Elektronen bzw. Positronen nahezu ausschließlich über die Form ihres elektromagnetischen Schauers im Elektromagnetischen Kalorimeter (EMC) bestimmt werden kann und sich Myonen aufgrund ihrer großen Reichweite in Materie gut von anderen Teilchen unterscheiden lassen, wird zur Unterscheidung der Hadronen (π , K, p) vor allem der Cherenkov-Effekt und die Messung von deren Flugzeit im Detektor verwendet. Zudem kann für alle Teilchenarten bei geringen Impulsen die Energieverlustinformation der Spurdetektoren zur Teilchenidentifikation genutzt werden.

Im untersuchten Kanal ist vor allem die Unterscheidung von Pionen und Kaonen von Bedeutung, um Untergrundreaktionen der Form $\bar{p}p \rightarrow 3\pi^+ 3\pi^- n\pi^0$ ($n = 0, 1, \dots$) gegenüber dem Signal effektiv zu diskriminieren. Darüber hinaus ist es besonders wichtig, den Zerfall des verwendeten Flavortags ($\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$) von ähnlichen Zerfallskanälen ($\bar{D}^0 \rightarrow K^+ K^-$, $\bar{D}^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$) unterscheiden zu können. Im Folgenden wird kurz auf die bei $\overline{\text{PANDA}}$ zur Teilchenidentifikation geplanten Detektoren eingegangen; der Ablauf der PID unterscheidet sich dabei für Teilchen die im Target- bzw. Vorwärtsspektrometer nachgewiesen werden.

¹⁶Im Englischen „separation power“.

5.4.1 Flugzeitmessung

Bei nicht zu hohen Geschwindigkeiten kann über eine Messung der Flugzeit (ToF¹⁷) im Detektor auf die Masse eines Teilchens geschlossen werden. Da aufgrund der zu erwartenden Materialbelegung kein Startzeitdetektor Verwendung finden soll [115], kann nur die relative Zeitdifferenz zwischen der Ankunftszeit von Teilchen im zeitgebenden Detektor genutzt werden. Sowohl im Target- ($\vartheta > 22^\circ$) als auch im Vorwärtsspektrometer ($\vartheta < 22^\circ$) sollen hierzu schnelle Plastiksintillatoren mit einer Zeitauflösung von $\sigma_t < 100$ ps genutzt werden; die Auslese des Szintillationslichtes erfolgt über Photoelektronenvervielfacher (PM¹⁸). Die geplante Position der Flugzeitdetektoren ist in Abbildung 5.7 gezeigt. Neben der Teilchenidentifikation sind die Flugzeitdetektoren notwendig zum sogenannten „Event building“, d. h. der Zuordnung verschiedener Teilchenspuren zum gleichen physikalischen Prozess.

5.4.2 Cherenkov-Detektoren

Ähnlich dem Machschen Kegel bei Überschallflügen senden geladene Teilchen in Materie Cherenkov-Licht unter einem festen Winkel θ_C aus, sobald ihre Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit im jeweiligen Medium überschreitet. Der Winkel θ_C ist dabei gegeben durch

$$\cos \theta_C = \frac{1}{n(\lambda)\beta}, \quad (5.5)$$

entsprechend kann über eine Messung des Cherenkov-Winkels die Geschwindigkeit eines Teilchens und zusammen mit der Impulsmessung der Spurdetektoren dessen Masse und somit Identität ermittelt werden. Hierzu sind bei $\bar{\text{PANDA}}$ insgesamt drei Cherenkov-Detektoren vorgesehen, zwei vom Typ DIRC¹⁹ im Target- und ein RICH-Detektor²⁰ im Vorwärtsspektrometer.

Barrel-DIRC

Der zylinderförmige Barrel-DIRC liegt zwischen STT und EMC und ist aus $1,7 \times 3,3 \times 250$ cm³ großen Barren aufgebaut [116, 117]. Als Detektormaterial wird synthetisches Quarzglas ($n = 1,47$) verwendet, das durch Totalreflexion an der Oberfläche zugleich als Lichtleiter fungiert. Aufgrund der Planparallelität gegenüberliegender Seiten der Quarzglasbarren bleibt die Information über den Cherenkov-Winkel während der Reflektion erhalten. An der Vorderseite des Barrels in Strahlrichtung wird das Cherenkov-Licht an Spiegeln reflektiert; die Auslese erfolgt lediglich an der Rückseite des Barrels entgegen der Strahlrichtung über PM, wobei die Ankunftszeit der Photonen die Zuordnung zu einzelnen Teilchenspuren ermöglicht.

¹⁷**T**ime of **F**light.

¹⁸**P**hoto **M**ultiplier.

¹⁹**D**etection of **I**nternally **R**eflected Cherenkov light.

²⁰**R**ing **I**maging **C**herenkov.

Disc-DIRC

Ein ähnliches Prinzip wird für den Disc-DIRC verwendet. Dieser schließt als regelmäßige Zwölfeckfläche das Barrel in Strahlrichtung ab und befindet sich zwischen dem letzten GEM-Detektor und dem Vorwärts-EMC. Auch hier wird als Detektormaterial synthetisches Quarzglas verwendet, wobei die aktive Detektorfläche aus vier Teilsegmenten zusammengesetzt ist. Zur Auslese wird das Cherenkov-Licht am Rand der aktiven Detektorfläche optisch in Lichtleiter eingekoppelt und über Multi-Pixel-PM ausgelesen. Eine Platte aus Lithiumfluorid dient dabei zur Dispersionskorrektur, die asphärische Form des Lichtleiters fokussiert das Cherenkov-Licht auf die Ausleseebene des PM. Aufgrund der im Vergleich zum Barrel-DIRC komplexeren Geometrie wird die Ankunftszeit der Photonen zwingend zur Rekonstruktion des Cherenkov-Winkels benötigt [118, 119]. Barrel- und Disc-DIRC sind in Abbildung 5.8 gezeigt.

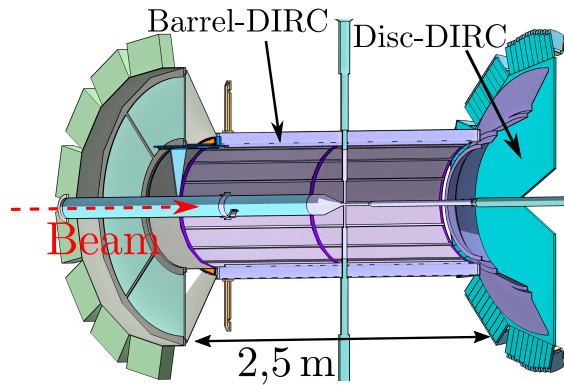


Abbildung 5.8: Barrel- und Disc-DIRC [102].

RICH-Detektor

Um bei den erwarteten hohen Impulsen in Vorwärtsrichtung PID zu ermöglichen, ist im Abstand von 7 m zur Interaktionszone (siehe Abb. 5.7) ein weiterer Cherenkov-Detektor vorgesehen, wobei dessen Design ähnlich zu dem RICH-Detektor des HERMES-Experimentes am DESY²¹ ist [120]. Als Radiatoren dienen hierbei Silica-Aerogel ($n(633\text{ nm}) = 1,0304$) und Perfluorbutan ($n(633\text{ nm}) = 1,00137$). Im Vergleich zu Materialien mit höherem Brechungsindex führt die Verwendung von C_4F_{10} für alle Teilchenarten gleichermaßen zu einer höheren Grenzggeschwindigkeit des Cherenkov-Effekts. Die relative Verschiebung des Mindestimpulses fällt jedoch für Teilchen mit großer Masse stärker aus. Hierdurch lässt sich eine effiziente Separation von Pionen und Kaonen auch bei hohen Impulsen gewährleisten, die Verwendung von Silica-Aerogel vergrößert den Impulsbereich, in dem π/K -Separation durchgeführt werden kann hin zu kleineren Impulsen. Auch der RICH-Detektor soll mit PM an dessen Ober- und Unterseite ausgelesen werden.

²¹Deutsches Elektronen-Synchrotron.

5.4.3 Elektromagnetisches Kalorimeter

Das bei $\bar{\text{PANDA}}$ vorgesehene Elektromagnetische Kalorimeter gliedert sich in vier Bereiche. Das Barrel-EMC umschließt zylinderförmig den STT, in (FEC²²) und entgegen (BEC²³) der Strahlrichtung befinden sich ebene EMC-Lagen, die das Barrel-EMC abschließen; zudem ist im Vorwärtsspektrometer ein Schaschlik-Kalorimeter (FSC²⁴) geplant. Die Raumwinkelabdeckung ist dabei derart gewählt, dass hochenergetische Teilchen unter kleinen Polarwinkeln nicht im FEC-EMC gestoppt werden und deren Impuls im Vorwärtsspektrometer gemessen werden kann. Die gemeinsame Abdeckung der Kalorimeter soll nahezu 99 % des Raumwinkels betragen [96].

Das EMC ist für Teile des angestrebten physikalischen Programms von $\bar{\text{PANDA}}$, wie etwa die Suche nach Gluebällen und die Untersuchung von exotischen Charmonia, von ausschlaggebender Bedeutung. Im untersuchten Kanal wird das EMC vor allem zur Reduktion von Untergrundreaktionen mit neutralen Pionen benötigt. Vorteilhaft ist auch die in dieser Arbeit nicht näher untersuchte Möglichkeit, das K_S über seinen Zerfall in zwei neutrale Pionen nachzuweisen.

Barrel-EMC

Das Barrel-EMC setzt sich aus 11.360 Szintillationskristallen zusammen (siehe Abb. 5.9), für das FEC-EMC und das BEC-EMC sollen 3.600 beziehungsweise 592 Kristalle Verwendung finden. Insgesamt kommen Kristalle in 11 verschiedenen geometrischen Abmessungen zum Einsatz. Im Barrel-EMC besitzen diese eine Frontfläche von $2,1 \times 2,1 \text{ cm}^2$ bei einer Länge von 20 cm. Das Szintillatormaterial Bleiwolframat (PbWO_4) besitzt eine hohe Dichte und ermöglicht durch seine kurze Strahlungslänge X_0 ²⁵ ein kompaktes Design, wobei die Länge der Kristalle in etwa 22 X_0 entspricht. Für den Einsatz bei $\bar{\text{PANDA}}$ ist auch die kurze Abklingzeit von 10 ns und die hohe Strahlenhärte des Materials von Bedeutung, zudem erleichtert die geringe Transversalausdehnung elektromagnetischer Schauer in Bleiwolframat die Unterscheidung von $e^\pm$ bzw. γ von hadronisch wechselwirkenden Teilchen. Die Auslese des Szintillationslichtes erfolgt im Barrel-EMC an der Rückseite der Kristalle durch großflächige Lawinen-Photodioden (LAAPD²⁶), in Vorwärtsrichtung werden aufgrund der hohen Raten von bis zu $5 \cdot 10^5 \text{ s}^{-1}$ pro Kristall und des starken magnetischen Feldes Vakuum-Phototrioden (VPT) verwendet. Die erwartete Energieauflösung für Elektronen bzw. Positronen und Photonen liegt bei $1,54 \text{ \%}/\sqrt{E \text{ (GeV)}} + 0,3 \text{ \%}$. Für Impulse größer als $1 \text{ GeV}/c$ liegt die erwartete Effizienz, mit der Elektronen bzw. Positronen als solche erkannt werden, bei über 98 %, während die Rate, mit der

²²**F**orward **E**nd**C**ap.

²³**B**ackward **E**nd**C**ap.

²⁴**F**orward **S**pectrometer **C**alorimeter.

²⁵Die Strahlungslänge X_0 charakterisiert die mittlere freie Weglänge für hochenergetische Elektronen und Photonen in Materie. Diese entspricht: a) Der mittleren Distanz, in der die Energie eines Elektrons durch Bremsstrahlung auf $1/e$ abgefallen ist. b) $7/9$ der mittleren freien Weglänge bezüglich Paarbildung für Photonen [4].

²⁶**L**arge **A**rea **A**valanche **P**hoto**D**iode.

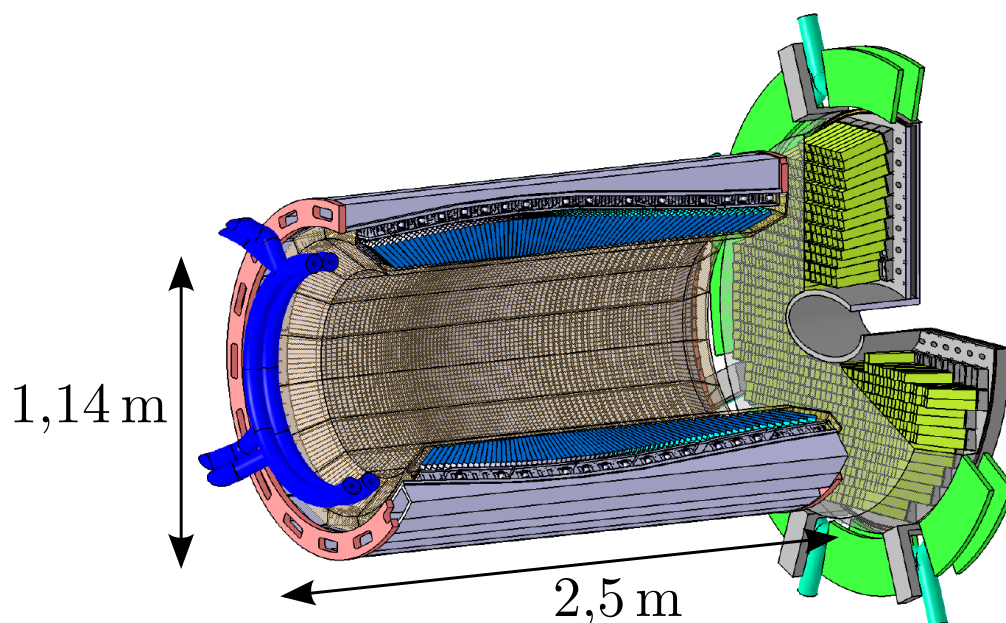


Abbildung 5.9: Barrel- und FEC-EMC [96].

hadronisch wechselwirkende Teilchen irrtümlich als $e^\pm$ identifizieren werden, weniger als 1 % beträgt.

Schaschlik-Kalorimeter

Das Schaschlik-Kalorimeter des Vorwärtsspektrometers (FSC) befindet sich direkt hinter den RICH-Detektoren, was einem Abstand von etwa 8 m zur Interaktionszone entspricht (zur Lage des FSC siehe Abb. 5.7). Der große Abstand ermöglicht es, auch bei hohen π^0 -Impulsen die Cluster der Zerfallsphotonen im Kalorimeter zu trennen. Verwendet wird die sogenannte Schaschlik-Technik, bei der sich das Kalorimeter aus alternierenden Lagen passiven Bleis ($275\ \mu\text{m}$) zum Aufschauern und aktiven Szintillatormaterials (1,5 mm) aus Polystyren mit 1,5 % Zusatz von p-Terphenyl und 0,04 % POPOP als Wellenlängenschieber [97] zusammensetzt. Zur räumlichen Unterscheidung von elektromagnetischen Schauern ist der Detektor in quaderförmige, optisch gegeneinander isolierte Module unterteilt, wodurch die Frontseite des Detektors in 54×26 quadratische Zellen unterteilt wird (siehe Abb. 5.10). Zur Auslese des Szintillationslichtes ist jedes Modul mit 144 Lichtleitfasern durchsetzt; die Umwandlung in ein elektrisches Signal erfolgt an der strahlabgewandten Seite des Detektors durch PM-Röhren. Die angestrebte Energieauflösung mit dem FSC liegt bei $(2-3)\%/\sqrt{E(\text{GeV})} + 1\%$, der abgedeckte Winkelbereich beträgt $\pm 5^\circ$ in vertikaler und $\pm 10^\circ$ in horizontaler Richtung.

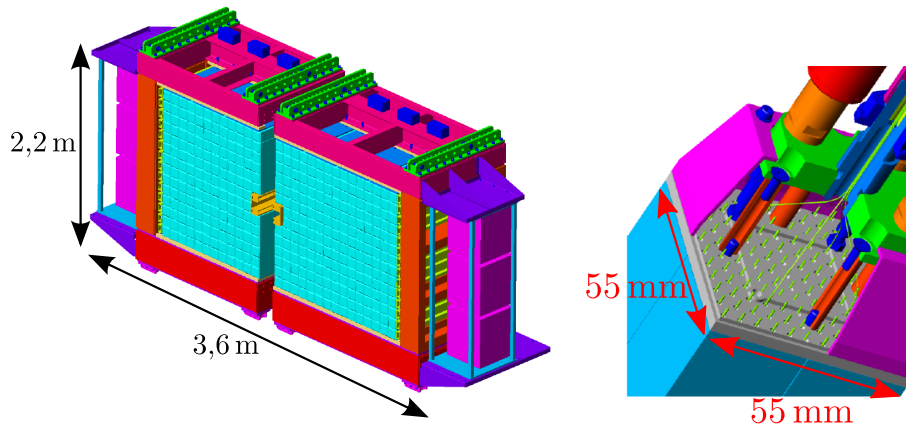


Abbildung 5.10: Vorderansicht des FSC (*links*) und Rückseite eines Moduls (*rechts*), wobei die Lichtleitfasern in grün angedeutet sind [97, S. 15ff].

Myonen-Detektoren

Im Bereich der moderaten Energien besitzen geladene Pionen trotz ihrer langen Lebensdauer von $c\tau = 7,8 \text{ m}$ [4] nach Energieverlusten im Detektormaterial eine endliche Wahrscheinlichkeit innerhalb des Detektors in Myonen zu zerfallen ($\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$). Um dennoch effektiv geladene Pionen von Myonen und insbesondere sekundäre Myonen aus Pionzerfällen von Myonen aus primären Proton-Antiproton-Reaktionen unterscheiden zu können, sind bei $\overline{\text{PANDA}}$ drei Detektorsysteme zur Myonenidentifikation vorgesehen. Hierzu ist im Barrel das Rückführjoch des Magneten im Abstand von jeweils 3 cm mit ebenfalls 3 cm breiten Lücken für Mini-Driftröhren (MDT²⁷) versehen (siehe Abb. 5.11). Durch das Messen mehrerer Spurpunkte in den Driftröh-

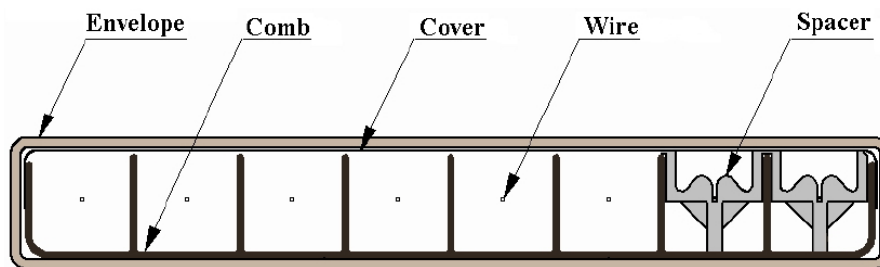


Abbildung 5.11: Schematischer Querschnitt einer Mini-Driftröhre [98, S. 73].

ren ist es möglich, die Impulsrichtung der Myonen zu messen und zu überprüfen, ob diese vereinbar mit der Herkunft von der primären Interaktionszone ist. Bei einem Bremsvermögen der Myonen in Eisen von etwa $1,5 \text{ GeV/m}$ wird ein Teil der Myonen innerhalb des Magneten komplett gestoppt. Die Messung der Reichweite im Magneten erlaubt dabei auch eine grobe Bestimmung der Energie, zudem besteht

²⁷Mini Drift Tube.

die Möglichkeit geladene Pionen über ihren Zerfall innerhalb des Myonen-Detektors als solche zu identifizieren. Myonen-Detektoren vom gleichen Bautyp befinden sich hinter dem Schaschlik-Kalorimeter (siehe Abb. 5.7), sowie zur Vermeidung von Lücken in der Akzeptanz zwischen Solenoiden- und Dipolmagneten. In diesen beiden Detektoren werden aufgrund der in Vorwärtsrichtung höheren Energien der Myonen 6 cm dicke Absorberschichten verwendet.

Beim Nachweis von D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung sind die Myonen-Detektoren von besonderer Bedeutung, falls zum Flavortagging der semileptonische Zerfall $D^0 \rightarrow K^- \mu^+ \nu_\mu$ verwendet werden soll.

Eine abschließende Übersicht der Impulsbereiche, bei denen die einzelnen Detektoren zur Teilchenidentifikation beitragen, gibt Tabelle 5.2.

Detektor	Separation von	Impulsbereich (GeV/c)
Target-Spektrometer		
MVD [99]	K/alle	$< 0,5$
	p/alle	< 1
STT [100]	e/ π , π /K, K/p, π /p	$< 0,8$
EMC [96]	e/alle	> 1
DIRC [116, 117]	π /K	$0,46 < p < 3,5$
TOF ¹	π /K	$< 0,43$ ($\vartheta = 90^\circ$)
	π /K	$< 0,76$ ($\vartheta = 22^\circ$)
Vorwärtsspektrometer		
TOF [121]	π /K	$< 2,8$
	K/p	$< 4,7$
Disc DIRC [118]	π /K	$0,46 < p < 4$
RICH [122]	K/p, π /p, K/p	$2 < p < 15$

¹ Unter Annahme von $\sigma_t = 100$ ps für zwei exemplarische Polarwinkel.

Tabelle 5.2: Impulsbereiche für die Unterscheidbarkeit von (e, π , K, p) getrennt nach Detektoren des Target- und Vorwärtsspektrometers.

5.5 Datenaufnahme

Bei $\bar{\text{PANDA}}$ soll ein neuartiges, softwarebasiertes Triggerkonzept mit quasikontinuierlicher Datenaufnahme zur Anwendung kommen. In diesem Ansatz operiert jeder Subdetektor autonom als selbsttriggernde Einheit, in der Signale welche die jeweiligen Schwellenwerte überschreiten, weitergeleitet werden. Eine erste Vorverarbeitung findet bereits auf Ausleseebene statt; dies umfasst etwa Spurpunkterkennung, Clustering sowie Rausch- und Nullunterdrückung. Entscheidend ist in diesem Schritt auch die präzise Zeitgebung durch eine gemeinsame Taktfrequenz von 155,2 MHz, um später die Einzelinformationen der Subdetektoren kombinieren zu können. Hierbei

soll das SODA²⁸-System eine Zeitauflösung von weniger als 20 ps ermöglichen. Die Anwendung der eigentlichen Triggerbedingungen erfolgt später in einem FPGA²⁹-basierten Rechenzentrum. Diese Methode ermöglicht eine große Freiheit in der Form und Komplexität der Triggerbedingungen, erfordert jedoch bei einer mittleren Ereignisrate von bis zu $2 \cdot 10^7 \text{ s}^{-1}$ [123] eine geschätzte Bandbreite von bis zu 200 GB/s. Nach Anwendung der Ereignisauswahl sollen etwa 100–200 MB/s [108] dauerhaft gespeichert werden. Das geplante Monitoring eines Teils der aufgenommenen Daten wird die Online-Kalibration des Softwaretriggers erlauben.

5.6 Das $\overline{\text{PANDA}}$ -Simulationsframework

Der im vorhergehenden Teil des Kapitels dargestellte geplante Aufbau des $\overline{\text{PANDA}}$ -Detektors ist innerhalb des $\overline{\text{PANDA}}$ -Simulations-Frameworks PandaRoot [124] in Form von Geometrien des Software-Paketes ROOT [125] realisiert. Dabei unterscheidet sich deren Detailreichtum je nach Subdetektor. Beispielsweise entstammt die ROOT-Geometrie des MVD einer Konversion des CAD-Konstruktionsmodells und umfasst über 70.000 einzelne Volumenelemente [126]. Neben den eigentlichen Sensoren werden auch Halterungsstrukturen, Kabel und das Kühlsystem berücksichtigt. Andere Subdetektoren bestehen zum jetzigen Zeitpunkt³⁰ lediglich aus den aktiven Detektorkomponenten oder zeichnen sich durch eine vereinfachte Geometrie aus. Eine Aufstellung der verwendeten Geometrie-Versionen findet sich in Tabelle 5.3. Ein üblicher Ablauf der Simulation umfasst folgende Schritte:

- Ereignisgeneration,
- Transport der generierten Teilchen durch den Detektor,
- Digitalisierung der „analogen“ Detektorinformationen,
- Spurfindung und Teilchenidentifikation.

Im Folgenden werden die einzelnen Schritte kurz erläutert.

5.6.1 Ereignisgeneration

Von den im PandaRoot-Framework zur Verfügung stehenden Ereignisgeneratoren wird in der vorliegenden Arbeit primär der Generator EvtGen [127] verwendet. Dieser wurde ursprünglich von der BaBar-Kollaboration entwickelt und erlaubt es durch ein Rückweisungsverfahren („accept/reject“) der Zerfallsamplitude entsprechende Zufallsverteilungen zu generieren. Neben den Viererimpulsen der Endzustandsteilchen³¹

²⁸Synchronization Of Data Acquisition.

²⁹Field Programmable Gate Array.

³⁰Stand: Oktober 2014.

³¹Im untersuchten Kanal $K^+ 2 \pi^+ 3 \pi^-$.

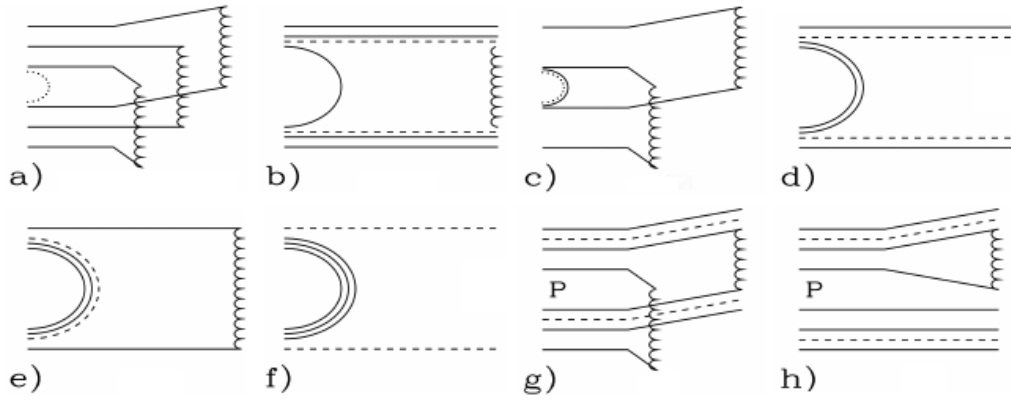


Abbildung 5.12: Im Untergrundgenerator von PandaRoot berücksichtigte Topologien von $\bar{p}p$ -Reaktionen nach dem DPM [129, 108].

werden in diesem Schritt auch die Lebensdauern kurzlebiger Teilchen³² gesetzt. Eine Besonderheit des EvtGen-Paketes besteht darin, dass nicht die gesamte Zerfallskette dem Rückweisungsverfahren unterworfen wird, sondern vielmehr die Teilzerfälle gesondert betrachtet und auf Amplitudenniveau kombiniert werden. Dies ermöglicht insbesondere bei langen Zerfallsketten eine effiziente Ereignisgeneration; Spineffekte werden durch die Verwendung der Spindichtematrizen berücksichtigt. Ausgabe des Ereignisgenerators ist in jedem Ereignis die Zuweisung eines zufälligen Viererimpulses für jedes Endzustandsteilchen und einer zufälligen Lebensdauer für alle kurzlebigen Teilchen der Zerfallskette, wobei die Zufallswerte gemäß dem gewählten physikalischen Modell verteilt sind. Die Ausgabe des Ereignisgenerators dient als Satz von Startwerten für die folgende detektorbasierte Simulation, kann aber auch direkt ausgewertet werden, wie beispielsweise in Kapitel 4 beim Test des Programms zur Funktionsanpassung der Zerfallsamplitude.

Bei der Analyse des hadronischen Untergrundes (Abschnitt 8.1) ist neben EvtGen auch der Untergrundgenerator *PndDpmDirect* von PandaRoot verwendet worden, der auf dem Zwei-Partonen-Modell (DPM³³) basiert. Das Zwei-Partonen-Modell [128] beschreibt hierbei die Erzeugung von instabilen Quark-Gluon-Strings in Hadron-Hadron-Wechselwirkungen. Durch Annahme des Aufbaus der Baryonen aus drei Partonen und eine topologische Erweiterung der Quantenchromodynamik (QCD) für den Grenzfall großer N , wobei N die Anzahl der Farben (N_C) oder der Flavor (N_f) bezeichnet, ist es möglich, Antiproton-Proton-Reaktionen auf wenige einfache Reaktionstopologien zurückzuführen; Reaktionen, die durch komplexe Topologien repräsentiert werden, sind in diesem Modell mit Faktoren der Ordnung $1/N$ unterdrückt. In *PndDpmDirect* sind die in Abbildung 5.12 gezeigten Topologien mit

³²Im untersuchten Kanal D^0 , $\bar{D}^0$, K_S .

³³Dual Parton Model.

folgender Energieabhängigkeit der Wirkungsquerschnitte [108] berücksichtigt:

$$\begin{aligned}
 \sigma_a &= 51,6/\sqrt{s} - 58,8/s + 16,4/s^{3/2} \\
 \sigma_b &= 77,4/\sqrt{s} - 88,2/s + 24,6/s^{3/2} \\
 \sigma_c &= 93/s - 106/s^{3/2} + 30/s^2 \\
 \sigma_g &= 18,6/s^{0,08} - 33,5/\sqrt{s} + 30,8/s \\
 \sigma_d &= \sigma_e = \sigma_f = \sigma_h = 0,
 \end{aligned} \tag{5.6}$$

mit s in GeV^2 und σ in mb. Die Hadronisierung der Quark-Gluon-Strings wird nach einem semiklassischen Modell von Andersson, Gustafson und Peterson [130] beschrieben; die Implementierung in *PndDpmDirect* basiert auf dem BAMJET-Programm von S. Ritter [131]. *PndDpmDirect* generiert bei einer gewählten Schwerpunktsenergie hadronische Antiproton-Proton-Reaktionen (z. B. $\bar{p}p \rightarrow 2\pi^+ 2\pi^-$, $\bar{p}p \rightarrow K^+ K^-$) gemäß ihrer Wirkungsquerschnitte und weist den Endzustandsteilchen zufällige Viererimpulse zu. Die Zufallswerte der Impulse folgen dem zugrundeliegenden physikalischen Modell, entsprechen also insbesondere keiner Gleichverteilung im Phasenraum. Die Ausgabe von *PndDpmDirect* - Anzahl und Art der generierten Teilchen mit zugewiesenem Viererimpuls - können ebenfalls als Startwerte der detektorbasierten Simulation verwendet werden.

5.6.2 Simulation der Teilchenbewegung im Detektor und Digitalisierung

Zur Simulation der Teilchenbewegung durch den Detektor besteht in PandaRoot eine Schnittstelle zu den Programmbibliotheken GEANT3 [132] und GEANT4 [133]. Diese berücksichtigen für geladene Teilchen und Photonen eine Vielzahl von physikalischen Effekten der elektromagnetischen Wechselwirkung, unter anderem sind dies:

für geladene Teilchen:

- Ablenkung im Magnetfeld,
- Ionisation,
- Bremsstrahlung,
- Mehrfachstreuung.

für Photonen:

- Photoelektrischer Effekt,
- Rayleigh-Streuung,
- Compton-Streuung,
- Paarbildung.

Zur Simulation hadronischer Reaktionen von stark wechselwirkenden Teilchen sind in GEANT energieabhängige Wirkungsquerschnitte definiert, wodurch auch die Möglichkeit der Produktion sekundärer Teilchen besteht. Kurzlebige Teilchen können in der Simulation gemäß der definierten Verzweungsverhältnisse und Lebensdauern zerfallen (z. B. $\pi^+ \rightarrow \mu^+ \nu_\mu$). GEANT wird im Monte-Carlo-Framework einer Reihe

von Hochenergieexperimenten (u. a. BaBar, Belle, ATLAS) verwendet; in systematischen Tests (siehe z. B. [134, 135]) zeigt sich gute Übereinstimmung zwischen Experiment und dem physikalischen Modell von GEANT.

Anhand des von GEANT berechneten Verlaufs eines Ereignisses wird dessen Digitalisierung vorgenommen, d.h. die Information der GEANT-Simulation wird in diskrete Rückgabewerte der Subdetektoren übersetzt. Beispiele hierfür sind etwa die Spurpunkte von MVD und STT, die deponierte Energie innerhalb der Kristalle des EMC und die Cherenkov-Winkel im Barrel-DIRC. Der Grad an Realismus der hierzu verwendeten Algorithmen ist abhängig vom jeweiligen Subdetektor. Beispielsweise wird im Falle der Pixel-Detektoren des MVD bei Überschneidung einer Trajektorie mit dem aktiven Detektorvolumen der Energieverlust innerhalb eines Pixels in die freiwerdende Ladung umgerechnet, liegt diese oberhalb der gesetzten Schwelle wird ein Spurpunkt erstellt. Eine Liste der verwendeten Digitalisierungsalgorithmen findet sich in Tabelle 5.3.

5.6.3 Spurfindung und Teilchenidentifikation

Anhand der diskreten Spurpunkte der Digitalisierung wird die Spurfindung vorgenommen, d. h. es wird eine Hypothese bezüglich der Anzahl geladener Teilchen und den Parametern ihrer als Helizes repräsentierten Trajektorien gebildet. Hierzu wird zunächst separat für MVD und STT auf Subdetektorebene eine Mustererkennung³⁴ vorgenommen, die Spurpunkte zu sogenannten Spursegmenten³⁵ zusammen fasst. Im Falle des STT kann der Fit durch eine getrennte Betrachtung der axialen und gegen die Achse gekippten Straw-Tubes auf lineare Regressionen zurückgeführt werden [100], für den MVD wird ein erweiterter Riemann-Fit verwendet [99, 136]. Die globale Spurfindung fasst die Spurinformaton von MVD, STT und GEM zusammen. In PandaRoot wird hierzu die auf der Methode des Kalman-Filters [137] basierende Programmbibliothek GENFIT [138] genutzt, zur Berechnung der Kovarianzmatrix der Spurparameter an verschiedenen Raumpunkten des Detektors dient das Paket GEANE [139]. Fehler, die im Rahmen der Spurfindung auftreten und in der Simulation von Kapitel 7 eine Rolle spielen, sind einerseits Fehlkombinationen von MVD- und STT-Spursegmenten, die zum Auffinden von nichtphysikalischen Spuren³⁶ führen können. Zum anderen besteht insbesondere bei langsamen Teilchen mit hoher Spurpunktdichte die Möglichkeit einer physikalischen Trajektorie irrtümlich mehrere Spuren zuzuweisen. Ein Beispiel für ein simuliertes Ereignis des untersuchten Kanals zeigt Abbildung 5.13. Zur Rekonstruktion von Spuren im Vorwärtsspektrometer wird in der verwendeten PandaRoot-Version (Oktober 14) eine idealisierte Spurrekonstruktion verwendet. In dieser werden allen Teilchen mit mindestens einem Spurpunkt innerhalb eines der Spurdetektoren in Vorwärtsrichtung und insgesamt mehr als drei Spurpunkten die Helixparameter der tatsächlich durchlaufenen Trajektorie zugewiesen. Zur Berücksichtigung der Detektorauflösung werden hierbei für

³⁴Im Englischen „pattern recognition“.

³⁵Im Englischen „tracklet“.

³⁶Im Englischen „ghost tracks“ oder auch „fake tracks“.

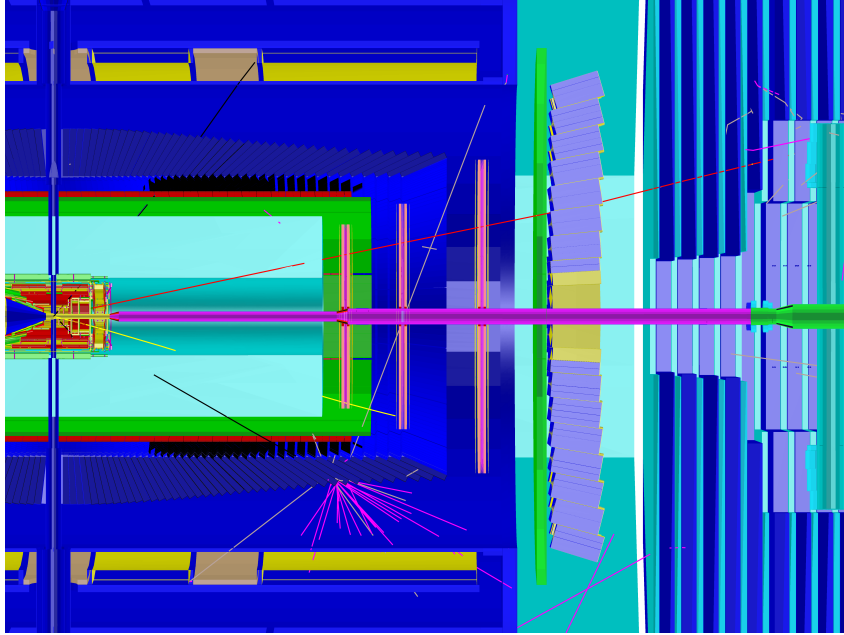


Abbildung 5.13: Beispiel eines Ereignisses im PandaRoot-Framework. Die gezeigten Spuren gehören zu folgenden Teilchen: π^+ (gelb), π^- (schwarz), K^+ (rot) und γ (magenta).

die Impulskomponenten und die Spurpunkte Zufallswerte verwendet, die um die wahren Werte mit einer relativen Breite von 5 % (Impulse) beziehungsweise einer absoluten Breite von $50 \mu\text{m}$ (Spurpunkte) normalverteilt sind. Effekte der idealisierten Spurrekonstruktion werden in den Abschnitten 7.2.1 und 7.5 abgeschätzt.

Von den bei $\bar{\text{PANDA}}$ vorgesehenen Systemen zur Teilchenidentifikation lassen sich in der verwendeten PandaRoot-Version Informationen von MVD, STT, EMC, FSC, Barrel-DIRC, Disk-DIRC und den Myonen-Detektoren des Barrels nutzen. Nicht zur Verfügung stehen zur Zeit PID-Algorithmen für die Flugzeitdetektoren, den RICH-Detektor und die Myonendetektoren im Vorwärtsspektrometer. Details zur Teilchenidentifikation und ein systematischer Test der implementierten Algorithmen innerhalb des PandaRoot-Frameworks sind in Abschnitt 7.1 zu finden.

Detektorkomponente	Geometrie-Version/Konfigurationsdatei	Digitalisierung	Spurfindung/PID-Algorithmus
Strahlröhre	201309	–	–
Detektoren zur Spurfindung			
MVD	2.1 FullVersion	PndMvdDigiTask	} PndSttMvdGemTracking
STT	straws_skewed_blocks_35cm_pipe.geo	PndSttHitProducerRealFast	
GEM	gem_3Stations.root	PndGemDigitize	
FTS	fts.geo	PndFtsHitProducerRealFast	
Detektoren zur Teilchenidentifikation			
Barrel-DIRC	dirc_l0_p0_updated.root	PndDrcHitProducerReal	PndPidDrcAssociatorTask
EMC/FSC {	emc_module12.dat	PndEmcHitsToWaveform	PndPidEmcBayesAssociatorTask
	emc_module3_2012_new.root	PndEmcWaveformToDigi	
	emc_module4_StraightGeo24.4.root		
	emc_module5_fsc.root		
Disc-DIRC	implementiert in PndDsk	–	PndPidDiscAssociatorTask
Myonen-Detektoren	implementiert in PndMdt	PndMdtHitProducerIdeal	PndPidMdtHCAssociatorTask
RICH	rich_v2_shift.geo	–	–
ToF (Barrel)	barrel – SciTil_07022013.root	PndSciTHitProducerIdeal	–
ToF (Vorwärts)	ftofwall.root	PndFtofHitProducerIdeal	–

Tabelle 5.3: Verwendete Konfiguration der PandaRoot-Simulation mit Revision 26866 (Oktober 2014).

Kapitel 6

Reaktions- und Untergrundwirkungsquerschnitt

Bevor im nächsten Kapitel auf die Details der durchgeführten Simulationsstudie im PandaRoot-Framework eingegangen wird, soll hier zunächst eine Abschätzung der zu erwartenden Ereignismenge im untersuchten Reaktionskanal sowie der relevanten hadronischen Untergrundkanäle gegeben werden. Die hierzu benötigten Wirkungsquerschnitte der Untergrundkanäle sind in Blasenkammerexperimenten an CERN¹, BNL² sowie SLAC³ in den 60er, 70er und 80er Jahren des vergangenen Jahrhunderts mit hoher Präzision gemessen worden. Hingegen gibt es bislang keine Messungen zur $D^0\bar{D}^0$ -Produktion in Antiproton-Proton-Reaktionen. Es lässt sich daher eine genaue Vorhersage über die absolute Anzahl der zu erwartenden Untergrundereignisse treffen, während die Menge der erwarteten Signalereignisse und damit das Signal-zu-Untergrund-Verhältnis einer großen Unsicherheit unterliegt. Im folgenden Abschnitt sind die theoretischen Vorhersagen zum $D^0\bar{D}^0$ -Produktionsquerschnitt dargestellt, im Anschluss folgt eine Zusammenfassung der Wirkungsquerschnitte für die wichtigsten Untergrundreaktionen und eine Abschätzung der zur Messung des untersuchten Kanals notwendigen Untergrundunterdrückung.

6.1 Wirkungsquerschnitt des Reaktionskanals

Zur Produktion von D-Meson-Paaren sind bei $\bar{P}ANDA$ verschiedene Produktionsmechanismen denkbar. Neben der hier in Betracht gezogenen resonanten Produktion $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D^0\bar{D}^0$ lässt sich die verwendete Analysemethode auch auf D-Paare aus direkter Produktion $\bar{p}p \rightarrow D^0\bar{D}^0$ knapp oberhalb der Open-Charm-Schwelle oder an der bei $\bar{P}ANDA$ maximal zugänglichen Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = 5,47 \text{ GeV}$ durchführen. Lediglich bei einer CP -getagten Analyse (vgl. Abschnitt 1.6.4) ist es zwingend notwendig nahe der Open-Charm-Schwelle zu messen, damit der Anfangszustand eine wohldefinierte CP -Quantenzahl besitzt. Theoretische Berechnungen des $D^0\bar{D}^0$ -Produktionsquerschnitts in direkter Produktion sind bislang stark abhängig vom verwendeten Modell. Vorhersagen liegen in der Größenordnung von 1–100 nb;

¹Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire.

²Brookhaven National Laboratory.

³Stanford Linear Accelerator Center.

Autoren	Modell	Prozess	$\sqrt{s}$ (GeV)	σ (nb)
[140]	BW ¹	$\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$	3,77	0,5
[141]	DHA ²	$\bar{p}p \rightarrow D^0\bar{D}^0$	3,77	$\approx 4,8$
[142]	CSM ³	$\bar{p}p \rightarrow D^+D^-$	3,77	≈ 7
[143]	QGS(LCSR) ⁴	$\bar{p}p \rightarrow D^0\bar{D}^0$	5,47	20^{+55}_{-15}
[144]	QGS ⁵	$\bar{p}p \rightarrow D^0\bar{D}^0$	3,77	≈ 30
[145]	NLO pQCD ⁶	$\bar{p}p \rightarrow c\bar{c} + X$	5,47	89
[146]	DWBA ⁷	$\bar{p}p \rightarrow D\bar{D}$	3,77	10–100
[147]	DWBA ⁷	$\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$	3,77	20–80
		$\bar{p}p \rightarrow D\bar{D}$	3,77	30–250 ⁸
[148]	BWm ⁹	$\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$	3,77	$(9,8 \pm 5,7)^{10}$ $(425,6 \pm 42,9)$

¹ Breit-Wigner-Ansatz mit skaliertem Verzweigungsverhältnis $\psi(3770) \rightarrow \bar{p}p$.

² Double handbag approach.

³ Constituent scattering model.

⁴ Quark-gluon string model mit starken Kopplungen aus light-cone sum rules.

⁵ Quark-gluon string model.

⁶ Next-to-leading-order perturbative QCD.

⁷ Distorted wave Born approximation.

⁸ Inklusive Wirkungsquerschnitt $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D\bar{D}$.

⁹ Breit-Wigner Ansatz mit am BESIII Experiment gemessenem Verzweigungsverhältnis $\psi(3770) \rightarrow \bar{p}p$.

¹⁰ $< 17,2$ nb bei 90% C. L..

Tabelle 6.1: Theoretische Berechnungen des Wirkungsquerschnitts der Charmproduktion in Antiproton-Proton-Reaktionen. Die mit „ $\approx$ “ gekennzeichneten Werte sind Graphen der jeweiligen Veröffentlichung entnommen.

eine Übersicht gibt Tabelle 6.1. Eine einfache Abschätzung des resonanten Wirkungsquerschnitts $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770)$ kann unter Annahme eines Breit-Wigner-förmigen Verlaufs des Wirkungsquerschnitts gegeben werden. So folgt dieser in der Nähe der $\psi(3770)$ -Resonanz näherungsweise der Form [148]

$$\sigma(\bar{p}p \rightarrow \psi(3770))(s) = \frac{4\pi\hbar^2 c^2 (2J+1)}{s - 4m_p^2 c^4} \frac{Br(\psi(3770) \rightarrow \bar{p}p)}{1 + (2(\sqrt{s} - m_\psi c^2)/\Gamma_\psi)^2}; \quad (6.1)$$

die einzige mit großer Unsicherheit behaftete Größe in dieser Gleichung ist das Verzweigungsverhältnis $Br(\psi(3770) \rightarrow \bar{p}p)$.

Dieses wurde vor kurzem von der BESIII-Kollaboration [148] gemessen zu:

$$\begin{aligned} \text{Lösung A : } Br(\psi(3770) \rightarrow \bar{p}p) &= (7,1 \pm 4,2) \cdot 10^{-6} \\ \text{Lösung B : } Br(\psi(3770) \rightarrow \bar{p}p) &= (3,1 \pm 0,3) \cdot 10^{-4}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die zwei Lösungen ergeben sich aus einer Doppeldeutigkeit in der Bestimmung der relativen Phase zwischen dem Drei-Gluon-Zerfall des Charmoniums $e^+e^- \rightarrow \psi \rightarrow ggg \rightarrow \text{Hadronen}$ und dem nicht-resonanten Prozess $e^+e^- \rightarrow \gamma^* \rightarrow \text{Hadronen}$; beide Lösungen sind in [148] als gleichberechtigt angegeben. Durch Auswertung von Gleichung 6.1 am Maximum der Resonanz ($\sqrt{s} = m_\psi c^2$) erhält man hieraus folgende Werte für den $\psi(3770)$ -Produktionsquerschnitt

$$\begin{aligned} \text{Lösung A : } \sigma_\psi &= (9,8 \pm 5,7) \text{ nb} \\ \text{Lösung B : } \sigma_\psi &= (425,6 \pm 42,9) \text{ nb} \\ \text{mit } \sigma_\psi &= \sigma(\bar{p}p \rightarrow \psi(3770)). \end{aligned} \quad (6.3)$$

Bei bekanntem Wirkungsquerschnitt σ_ψ lässt sich die Anzahl der pro Zeit produzierten $\psi(3770)$ berechnen

$$\dot{N}_\psi = \bar{L} \cdot \sigma_\psi. \quad (6.4)$$

Für die folgende Abschätzung wird die mittlere Luminosität des Pellet-Targets $\bar{L} = 0,85 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ verwendet (vgl. Abschnitt 5.2.2). Ohne individuelles Pellet-Tracking ist die erreichbare mittlere Luminosität um etwa einen Faktor zwei größer, für das Cluster-Jet-Target etwa einen Faktor zwei kleiner (vgl. Abschnitt 5.2.1). Bei der Berechnung der Reaktionsrate im untersuchten Kanal

$$\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (K_S \pi^+ \pi^-) (K^+ \pi^-) \quad (6.5)$$

müssen zudem die Verzweigungsverhältnisse der jeweiligen Zerfälle und die Wahrscheinlichkeit zur Rekonstruktion der gesamten Ereignistopologie ε berücksichtigt werden

$$\begin{aligned} \dot{N} &= \varepsilon Br \bar{L} \cdot \sigma_\psi \quad \text{mit} \quad Br = \prod_i Br(i) \\ i &= \psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0, \quad D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-, \quad \bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-, \quad K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-. \end{aligned} \quad (6.6)$$

Für die in dieser Arbeit verwendete Analysemethode ist es dabei nicht zwingend notwendig als Flavortag den Zerfall $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ zu verwenden. Tabelle 6.2 gibt unter Annahme einer Nachweiswahrscheinlichkeit von $\varepsilon = 15\%$ eine Übersicht der zu erwartenden Ereignismengen bei $\bar{P}ANDA$ nach 150 Tagen Datennahme. Die Anzahl der in diesem Zeitraum produzierten $\psi(3770)$ ist mit 10^6 – 10^8 hoch, aufgrund der Selektion von einzelnen Zerfallskanälen ist jedoch die Anzahl der für die Analyse nutzbaren Ereignisse etwa vier Größenordnungen kleiner.

$\bar{D}^0$ -Tag	Br (%)	$N(\sigma_\psi = 1 \text{ nb})$	$N(\sigma_\psi = 15 \text{ nb})$	$N(\sigma_\psi = 100 \text{ nb})$
$K^+ \pi^-$	$3,88 \pm 0,05$	125	1.877	12.511
$K^+ e^- \bar{\nu}_e$	$3,55 \pm 0,05$	114	1.717	11.447
$K^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu$	$3,31 \pm 0,13$	107	1.601	10.673
$K^{*}(892)^+ e^- \bar{\nu}_e$	$2,16 \pm 0,16$	70	1.045	6.965
$K^{*}(892)^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu$	$1,91 \pm 0,24$	62	924	6.159
$K^+ \pi^- \pi^0$	$13,9 \pm 0,5$	448	6.723	44.821
$K^+ 2 \pi^- \pi^+$	$8,08^{+0,21}_{-0,19}$	261	3.908	26.054
Summe	36,79	1.187	17.795	118.630
$Br(\psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0) = (52 \pm 5) \%$		$Br(D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-) = (2,82 \pm 0,19) \%$		
$Br(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-) = (69,20 \pm 0,05) \%$				

Tabelle 6.2: Abschätzung der Ereignismenge im Signalkanal für verschiedene Flavortags in 150 Tagen Datennahme mit $\bar{L} = 0,85 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ bei einer Effizienz von $\varepsilon = 15 \%$. Die angegebenen Verzweigungsverhältnisse entstammen [4]. Werden auch ladungskonjugierte Zerfälle wie $\psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (K^- \pi^+)(K_S \pi^+ \pi^-)$ in die Analyse mit einbezogen, ist die nutzbare Datenmenge einen Faktor 2 größer.

6.2 Wirkungsquerschnitt der relevanten Untergrundreaktionen

Der gesamte inelastische Wirkungsquerschnitt in Antiproton-Proton-Reaktionen liegt im betrachteten Energiebereich bei über 40 mb^4 , entsprechend sind inelastische Reaktionen 10^5 bis 10^7 mal häufiger als Reaktionen mit Produktion von $D^0 \bar{D}^0$ -Paaren. Primäre Quelle von Untergrund sind im Allgemeinen Reaktionen mit sechs geladenen Spuren im Endzustand (6 Prong), im Besonderen sind hier folgende Reaktionskanäle relevant:

- a) $\bar{p}p \rightarrow 3 \pi^+ \pi^0 3 \pi^-$,
- b) $\bar{p}p \rightarrow 3 \pi^+ 3 \pi^-$,
- c) $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2 \pi^- K^+ K_S$.

Eine Übersicht von gemessenen Wirkungsquerschnitten dieser Kanäle in Abhängigkeit des Antiprotonenimpulses gibt Abbildung 6.1. Um irrtümlich als Signalereignis akzeptiert zu werden, erfordern die Reaktionen a) und b) die Fehlidentifikation eines geladenen Pions als geladenes Kaon.

Im Vergleich zu diesen Reaktionen ist Kanal c) zwar ein bis zwei Größenordnungen weniger wahrscheinlich, besitzt jedoch den gleichen Endzustand wie das zu beobachtende Signal und ist daher besonders schwierig von diesem zu separieren.

⁴ $\sigma_{\text{inel}} = (44,65 \pm 0,64) \text{ mb}$ bei $\sqrt{s} = 3,946 \text{ GeV}$ [149].

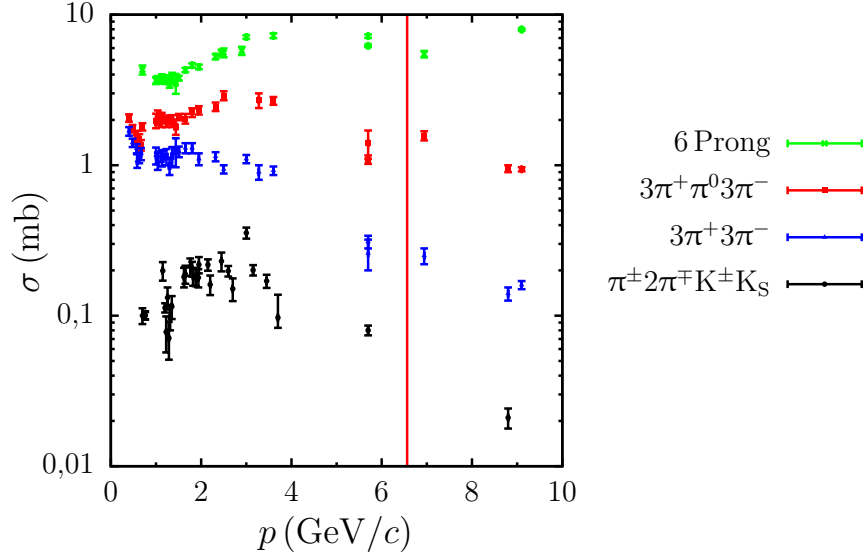


Abbildung 6.1: Wirkungsquerschnitte [150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175] der wichtigsten Untergrundreaktionen in Abhängigkeit des Antiprotonenimpulses, die rote Linie markiert den Impuls bei $\sqrt{s} = m_\psi c^2$.

Approximiert man in Abbildung 6.1 den Wirkungsquerschnitt bei $\sqrt{s} = m_\psi c^2$ durch die Messung die diesem Punkt am nächsten liegt, so erhält man die in Tabelle 6.3 gezeigte Abschätzung der erwarteten Menge an Untergrundereignissen. Die angege-

Kanal	σ (μb)	Anzahl	$\sigma_{\text{Signal}}/\sigma_{\text{Untergrund}}$
6 Prong [149]	7.450 ± 19	$8,2(1) \cdot 10^{13}$	$1 \cdot (10^{-7}-10^{-5})$
$3\pi^+\pi^03\pi^-$ [166]	1.570 ± 110	$1,7(2) \cdot 10^{12}$	$6 \cdot (10^{-7}-10^{-5})$
$3\pi^+3\pi^-$ [166]	250 ± 30	$2,8(4) \cdot 10^{11}$	$4 \cdot (10^{-6}-10^{-4})$
$\pi^\pm 2\pi^\mp K^\pm K_S$ [153] ¹	80 ± 5	$3,1(3) \cdot 10^{10}$	$4 \cdot (10^{-5}-10^{-3})$

¹ $Br(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-) = (69,20 \pm 0,05) \%$ [4]

Tabelle 6.3: Untergrundreaktionen mit sechs geladenen Spuren (6 Prong) in 150 Tagen Datennahme. Die angegebenen Werte beziehen sich auf eine mittlere Luminosität von $\bar{L} = 0,85 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ bei einer Effizienz von $\varepsilon = 15 \%$.

benen Untergrundreaktionen sind um einen Faktor 10^3 – 10^7 häufiger als Reaktionen des untersuchten Kanals. Es müssen daher Kriterien für kinematische Schnitte gefunden werden, die Untergrundereignisse um diesen Faktor stärker unterdrücken als Signalereignisse, wobei sich ein zusätzlicher Faktor der Größenordnung 10^4 durch die

Verzweigungsverhältnisse des untersuchten Zerfallskanals ergibt. Im folgenden Kapitel 7 werden anhand einer Simulation im PandaRoot-Framework Schnittkriterien definiert, durch deren Anwendung eine Abschätzung des erreichbaren Signal-zu-Untergrund-Verhältnisses in Kapitel 8 erfolgt.

Kapitel 7

Simulation im PandaRoot-Framework

Im folgenden, zentralen Kapitel dieser Arbeit wird das Ergebnis einer Simulationsstudie im PandaRoot-Framework gezeigt¹. Neben der Evaluation sinnvoller Schnittkriterien für die in Kapitel 8 durchgeführte Untergrundstudie wird eine allgemeine Charakterisierung der Auflösung physikalischer Größen gegeben, die zur Untersuchung des Signalkanals von Bedeutung sind. Dies umfasst etwa die invarianten Massen m_{K_S} , m_{D^0} , $m_{\bar{D}^0}$ und die Variablen $m_{\pm}^2$ der Dalitz-Diagramm-Analyse. Ein besonderer Schwerpunkt liegt auf der zur Extraktion von D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparametern essentiellen Orts- und mit dieser eng verbundenen Zerfallszeitmessung von D^0 - und $\bar{D}^0$ -Meson. Primär dient hierzu eine Stichprobe von $3,4 \cdot 10^7$ simulierten Ereignissen des Signalkanals

$$\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (K_S \pi^+ \pi^-)(K^+ \pi^-)$$

mit phasenraumverteiltem $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ - und erzwungenem $K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-$ -Zerfall. Hierbei handelt es sich um die gleiche Stichprobe, die im Dalitz-Diagramm-Fit von Kapitel 9 zum Normieren der Dreikörperamplitude $\mathcal{A}_f$ dient. Lediglich in der Analyse der Teilchenidentifikation (Abschnitt 7.1) und in der Betrachtung der Einzelnachweiswahrscheinlichkeit geladener Pionen (Abschnitt 7.5) wird ein Teil der simulierten, inelastischen $\bar{p}p$ -Reaktion bei der Energie $\sqrt{s} = m_{\psi}c^2$ aus der Untergrundstudie (Kapitel 8) verwendet.

Die genutzte Ereignismenge ist bedeutend größer als die im späteren Experiment zur Verfügung stehende (vgl. Abschnitt 6.1), da an dieser Stelle lediglich das Auflösungsverhalten des Detektors untersucht wird. Die genaue Anzahl der verwendeten Ereignisse ist entsprechend willkürlich, vorausgesetzt sie ist hinreichend groß. Um diesen Sachverhalt deutlich zu machen, sind alle Histogramme im jeweils gezeigten Intervall auf Eins normiert. Auf Einschränkungen bezüglich der verwendeten Ereignisse, wie der Ausschluss von im Vorwärtsspektrometer rekonstruierten Spuren oder die Verwendung der wahren Monte-Carlo-Impulse des Ereignisgenerators zur Darstellung der Effizienz wird am Beginn des jeweiligen Abschnitts hingewiesen.

¹Verwendete Version: Oktober 14. Das Detektorsetup ist in Tabelle 5.3 zusammengefasst.

7.1 Teilchenidentifikation (PID)

Von den für $\bar{\text{PANDA}}$ vorgesehenen Methoden zur Teilchenidentifikation (vgl. Abschnitt 5.4) lässt sich in der verwendeten Version des PandaRoot-Frameworks (Oktober 14) folgende Information nutzen:

- Energieverlustinformation der Spurdetektoren (MVD, STT),
- Cluster-Energie und -Form in den Kalorimetern (EMC, FSC),
- Cherenkov-Winkel (Barrel-DIRC, Disk-DIRC),
- Spurinformation der Myonen-Detektoren im Barrel.

Hingegen nicht implementiert ist bislang ein PID-Algorithmus zur Nutzung der Flugzeiten, des RICH-Detektors und der Myonen-Detektoren im Vorwärtsteil des Detektors. Dies führt gegenüber dem vollen PID-System zu einer verringerten Leistungsfähigkeit, die sich insbesondere am unteren und oberen Rand des Impulsspektrums auswirkt (siehe hierzu auch Tab. 5.2).

Der PID-Algorithmus des jeweiligen Subdetektors berechnet die Wahrscheinlichkeit, dass eine gemessene Teilchenspur von einer der fünf langlebigen Teilchenarten ($e^\pm$, $\mu^\pm$, $\pi^\pm$, $K^\pm$, p) stammt. Hierbei wird die dem jeweiligen Subdetektor zur Verfügung stehende Information genutzt; dies betrifft etwa den integrierten Energieverlust im MVD und die laterale Schaulausdehnung im EMC.

Die Kombination der Einzelwahrscheinlichkeiten geschieht durch das Bilden einer gemeinsamen Likelihood [108, S. 54]

$$L(k) = \prod_i p_i(k) \quad i = \text{MVD, STT}, \dots, \quad (7.1)$$

dabei bezeichnet $p_i(k)$ die vom Algorithmus des Subdetektors i berechnete Wahrscheinlichkeit, dass die vorgefundene Spur von einem Teilchen des Typs k stammt. Die Einzelwahrscheinlichkeiten jedes Subdetektors in Gleichung 7.1 sind auf eins normiert

$$\sum_k p_i(k) = 1 \quad k = e, \mu, \pi, K, p. \quad (7.2)$$

Um zunächst eine Übersicht der Impulsabhängigkeit der von den Algorithmen der einzelnen Subdetektoren zugewiesenen Wahrscheinlichkeiten zu gewinnen, wird hier ein Teil der simulierten Stichprobe von 10^8 inelastischen $\bar{p}p$ -Reaktionen verwendet, die später zur Analyse des hadronischen Untergrundes dient. Hierzu wird für jedes rekonstruierte Teilchen die wahre Teilchenart, der Monte-Carlo-Impuls und die zugewiesenen Likelihoods $L(k)$ gespeichert. Abbildung 7.1 zeigt für die verschiedenen Teilchenarten die mittleren Likelihoods in Abhängigkeit des Monte-Carlo-Impulses bei Verwendung aller zur Verfügung stehender PID-Systeme. Der auffällige Anstieg von $L(\mu)$ für Pionen entsteht durch das Zusammenspiel aller Subdetektoren und

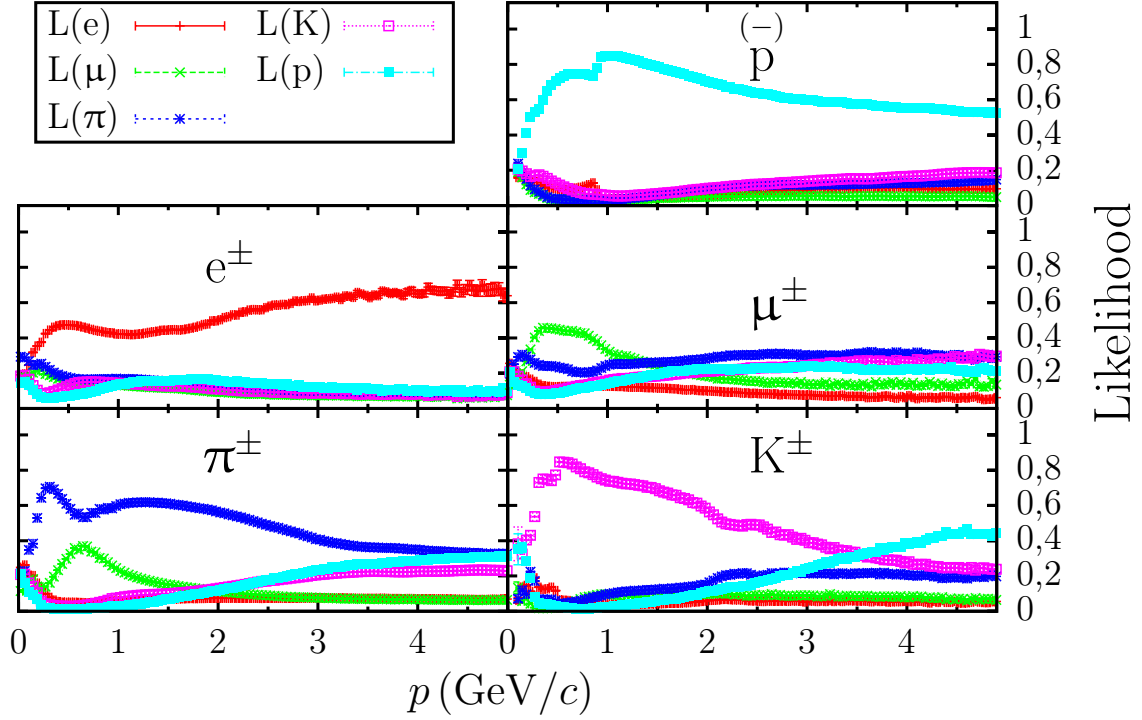


Abbildung 7.1: Kombinierte Likelihoods der Teilchenidentifikation bei Verwendung aller Subdetektoren. Mittig ist jeweils der wahre Teilchentyp angegeben, farbig die zugewiesene Likelihood für den jeweiligen Teilchentyp.

kann bei zu eng gesetzten Schnitten auf die Likelihood zu einer Verfälschung der rekonstruierten Impulsverteilung führen. Zu Abbildung 7.1 analoge Darstellungen getrennt nach den einzelnen Subdetektoren finden sich in Anhang F. Dabei ergibt sich, dass der PID-Algorithmus der Myonen-Detektoren in seiner jetzigen Form bei kleinen Impulsen allen Teilchen mit MDT-Spurpunkten eine hohe Likelihood $L(\mu)$ zuweist. Im Folgenden wird der PID-Algorithmus der Myonen-Detektoren daher nicht verwendet. Man beachte auch, dass in Abbildung 7.1 die Mittelwerte der Likelihoods dargestellt sind. Insbesondere wird auch im Falle der Myonen über Ereignisse gemittelt, in denen keine Spurpunkte in den Myonen-Detektoren hinterlassen wurden.

Aufgrund der Impulsabhängigkeit der Teilchenidentifikation ist es im untersuchten Kanal zunächst sinnvoll, die Häufigkeitsverteilung der zu beobachtenden Impulse zu bestimmen. Diese ist für alle im Signalkanal primär auftretenden Teilchenarten ($\pi^\pm$, $K^\pm$) in Abbildung 7.2 gezeigt. Für Pionen beider Ladungszustände liegt das Maximum der Verteilung unterhalb von $1 \text{ GeV}/c$, während die aus dem Zweikörperzerfall $\bar{D}^0 \rightarrow K^+\pi^-$ stammenden K^+ im Mittel höhere Impulse besitzen. Hierdurch bedingt, nimmt der Anteil der Kaonen an positiv geladenen Teilchen mit steigendem Impuls zu; oberhalb von etwa $3 \text{ GeV}/c$ sind nahezu alle positiv geladenen Teilchen im

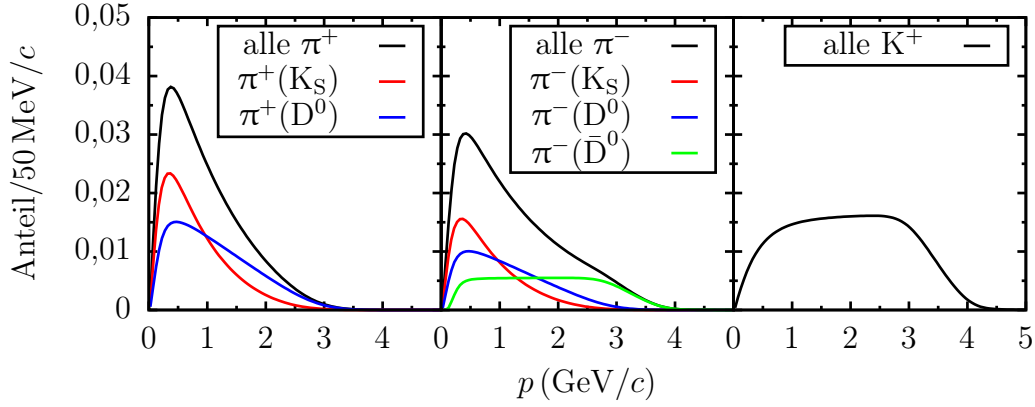


Abbildung 7.2: Monte-Carlo-Impulsverteilung von $\pi^\pm$ und K^+ im Zerfall $\bar{p}p \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (K_S \pi^+ \pi^-) (K^+ \pi^-)$. In Klammern ist das jeweilige Mutterteilchen angegeben.

untersuchten Kanal Kaonen. Dies führt, wie noch gezeigt werden wird, zu einer geringeren Signalreinheit der rekonstruierten positiven Pionen in diesem Bereich.

Zur Bestimmung der Art eines rekonstruierten Teilchens lassen sich absolute Schnitte auf die berechnete Likelihood setzen; die in PandaRoot vordefinierten Werte sind in Tabelle 7.1 zusammengefasst. Zudem besteht die Möglichkeit, die Teilchenart anhand der relativ höchsten Likelihood vorzunehmen (*Best*).

Bezeichnung	<i>VeryLoose</i>	<i>Loose</i>	<i>Tight</i>	<i>VeryTight</i>
$L_{\min}$	0	0,2	0,5	0,9

Tabelle 7.1: Vordefinierte Schnitte auf die Likelihood der Teilchenidentifikation in PandaRoot.

Für Werte $L_{\min} < 0,5$ ist es dabei auch möglich, dass ein Teilchen gleichzeitig die PID-Kriterien mehrerer Teilchenarten erfüllt. Zur Beurteilung der Güte der verwendeten Schnittkriterien lässt sich die Signalreinheit der rekonstruierten Teilchenarten vergleichen. Bei Anwendung eines Schnittkriteriums wird diese, hier beispielsweise für π^+ , definiert als

$$\text{Reinheit}(\pi^+) = \frac{\text{Korrekt rekonstruierte } \pi^+}{\text{Gesamtzahl der rekonstruierten } \pi^+}. \quad (7.3)$$

Offensichtlich ist diese Größe in der Monte-Carlo-Simulation jedoch nicht im späteren Experiment zugänglich. Die Signalreinheit von geladenen Pionen und Kaonen im untersuchten Kanal ist zusammen mit den rekonstruierten Impulsverteilungen in Abbildung 7.3 gezeigt. Der Abfall der Reinheit der rekonstruierten π^+ in Abbildung 7.3 ergibt sich aus dem bereits erwähnten Verlauf der π^- - und K^+ -Impulsverteilungen. Es wird auch deutlich, dass ein zu enger Schnitt auf die Likelihood der Teilchenidentifikation die rekonstruierte Verteilung der Pionenimpulse verfälscht. Dieser

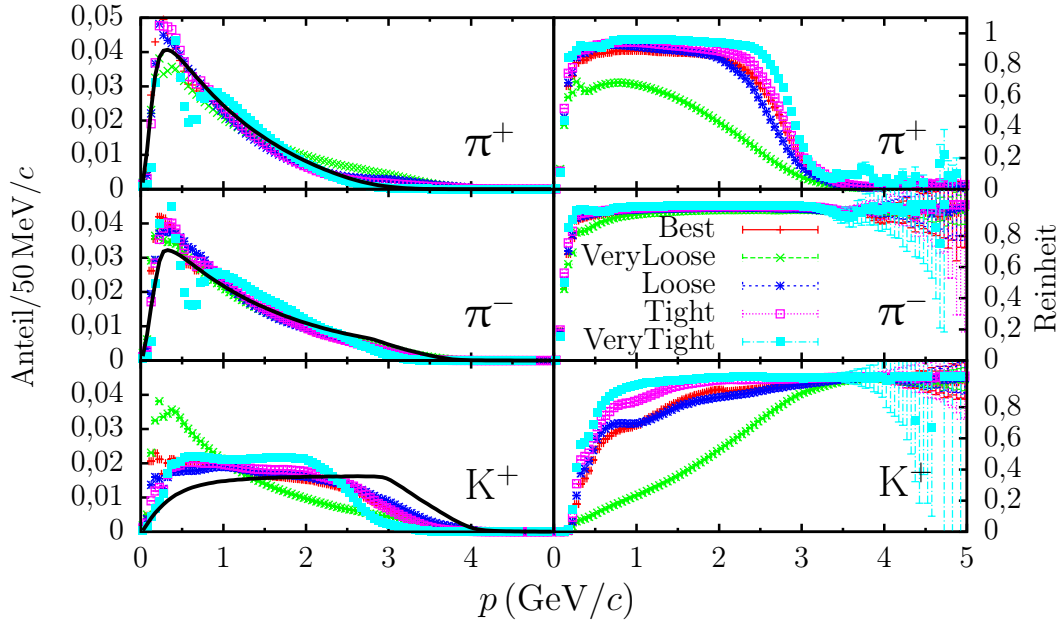


Abbildung 7.3: Rekonstruierte Impulsverteilung und Reinheit von $\pi^\pm$ und K^+ für verschiedene Likelihood-Schnitte. Die Impulsverteilungen sind zur besseren Vergleichbarkeit auf Eins normiert; die durchgehenden, schwarze Linien zeigen die betreffenden Verteilungen der Ereignisgenerierung.

Effekt ist durch den Verlauf von $L(\pi)$ (vgl. Abbildung 7.1) bedingt. Neben der Verwechslung von Teilchenarten, etwa einer irrtümlichen Identifikation eines Kaons als Pion, ist es auch möglich den Ladungszustand ($\pm$) eines detektierten Teilchens falsch zu bestimmen. Da die zur Teilchenidentifikation genutzten physikalischen Effekte (Geschwindigkeitsabhängigkeit des Cherenkov-Winkels, Schauerausdehnung im EMC etc.) nicht vom Vorzeichen der Ladung abhängen, geschieht die Zuweisung des Ladungszustandes ausschließlich aufgrund der beobachteten Ablenkung eines Teilchens im Magnetfeld innerhalb des Detektors. Anders als die jedem detektierten Teilchen individuell zugewiesenen PID-Likelihoods hängt der Anteil der Teilchen, die mit falschem Ladungszustand rekonstruiert werden, von der Zusammensetzung der analysierten Stichprobe ab; im vorliegenden Fall etwa, bei dem nur Signalereignisse betrachtet werden, sind keine primären K^- vorhanden, die irrtümlich als K^+ identifiziert werden könnten. Die Kontamination der rekonstruierten Pionen mit den jeweils ladungskonjugierten Teilchen zeigt Abbildung 7.4. Die unterschiedliche Form der Verteilungen für positive und negative Pionen lässt sich dabei auf den höheren Maximalimpuls für negative Pionen zurück führen (vgl. Abb. 7.2). Eine Übersicht der impulsintegrierten Werte von Effizienz, Reinheit und Kontamination gibt Tabelle 7.2. Dabei bezeichnet die Effizienz das Verhältnis von richtig identifizierten zu ursprünglich generierten Teilchen in der Simulation.

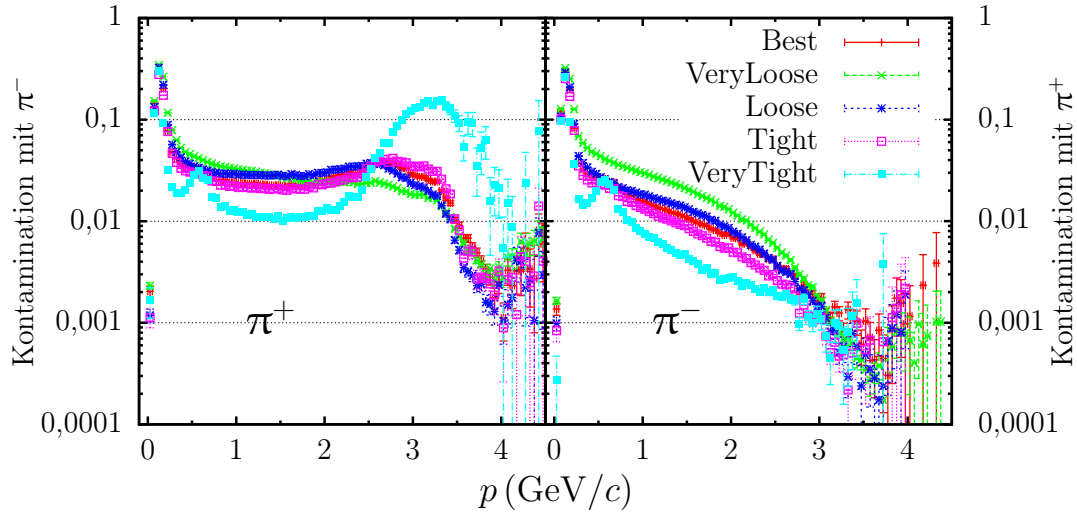


Abbildung 7.4: Kontamination der rekonstruierten $\pi^\pm$ mit $\pi^\mp$ für verschiedene PID-Likelihood-Schnitte.

Teilchen	Likelihood-Schnitt:	<i>VeryLoose</i>	<i>Loose</i>	<i>Tight</i>	<i>VeryTight</i>	<i>Best</i>
π^+	Effizienz (%)	73,7	51,7	39,1	23,6	43,8
	Reinheit (%)	54,9	81,7	87,0	92,2	79,8
	Kontamination (%)	5,3	4,9	4,0	2,2	4,8
π^-	Effizienz (%)	78,0	54,9	42,6	27,8	46,5
	Reinheit (%)	88,0	93,5	95,0	97,2	91,9
	Kontamination (%)	5,1	3,3	2,6	1,4	3,5
K^+	Effizienz (%)	79,0	65,9	57,4	49,0	61,0
	Reinheit (%)	29,4	74,1	84,3	90,4	70,6

Tabelle 7.2: Effizienz, Reinheit und Kontamination für verschiedene Schnitte auf die PID-Likelihood. Der statistische Fehler ist kleiner als die angegebene Genauigkeit.

Die für positive und negative Pionen unterschiedliche Nachweiswahrscheinlichkeit erklärt sich aus der geringen Effizienz, mit der kurzlebige Kaonen (K_S) nachgewiesen werden; hierauf wird im folgenden Abschnitt 7.2.1 eingegangen.

Insgesamt zeigt die Analyse der Teilchenidentifikation, dass auch ohne die noch nicht implementierten PID-Systeme eine Identifikation von Pionen und Kaonen möglich ist. Sehr starke Einschränkungen ergeben sich jedoch in Vorwärtsrichtung, in der zur PID ausschließlich der Disc-DIRC zur Verfügung steht. So ist es mit diesem Detektor nicht möglich, Kaonen unterhalb von etwa 460 MeV/c Impuls zu identifizieren, während für Pionen mit Impulsen > 1 GeV/c eine hohe Verwechslungsgefahr mit Elektronen und Myonen besteht (vgl. Abb. F.6). Hierdurch bedingt ist die Effizienz für Pionen bei Anwendung von Schnitten auf die Likelihood der PID deutlich stärker

reduziert als für Kaonen (vgl. Tab. 7.2). Deutliche Einschränkungen zeigen sich auch bei kleinen Impulsen durch das Fehlen der Flugzeitdetektoren (vgl. Abb. 7.3). Hingegen ist die verringerte Fähigkeit zur Myonenidentifikation für die durchgeführte Analyse von untergeordneter Bedeutung, da keine Myonen im Signalkanal auftreten.

Aufgrund der stark reduzierten Effizienz bei realistischer Teilchenidentifikation wird diese lediglich in der Analyse des Untergrundes (Kapitel 8) verwendet, in allen anderen Kapiteln wird die Identität der rekonstruierten Teilchen anhand von Monte-Carlo-Informationen überprüft.

7.2 Rekonstruktion der kurzlebigen Kaonen

Im untersuchten Kanal erlaubt die Messung des Zerfallspunktes des kurzlebigen Kaons aus dem Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ durch seine große räumliche Separation vom D^0 -Zerfallspunkt ($\mathcal{O}(\text{cm})$) eine starke Reduktion des hadronischen Untergrundes. Das Kaon wird dabei über seinen Zerfall $K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-$ nachgewiesen. Bei einer Wahrscheinlichkeit von etwa 70 % für den Nachweis eines einzelnen geladenen Teilchens erwartet man für den kombinierten Nachweis beider Zerfallspionen eine Wahrscheinlichkeit von $0,7^2 = 49\%$. Während der Anteil der nachgewiesenen $\bar{D}^0$ -Mesonen ($\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$) aufgrund der hohen Transversalimpulse sogar größer ist (vgl. Abschnitt 7.3.2), lassen sich nur 37,9 % der generierten K_S detektieren. Hier soll gezeigt werden, dass es sich bei der geringen Effizienz um ein Artefakt der Spurfinding handelt und es nicht plausibel erscheint, diese auf die geometrische Auslegung des Detektors zurückzuführen. Im Anschluss werden die Auflösung des K_S -Zerfallspunktes sowie der invarianten Masse bestimmt und Schnittkriterien zur Reduktion von hadronischem Untergrund definiert.

7.2.1 Nachweiseffizienz

Zur Untersuchung der Effizienz werden im Folgenden nur Pionen betrachtet, die tatsächlich aus einem K_S -Zerfall stammen, zudem wird der wahre Teilchentyp und der tatsächliche K_S -Zerfallspunkt verwendet. Eine Analyse der generierten Monte-Carlo-Daten ergibt zunächst, dass bei der gegebenen Ereignistopologie 92,5 % aller kurzlebigen Kaonen innerhalb des MVD zerfallen.

Tabelle 7.3 gibt eine Übersicht getrennt nach Teilvolumina des MVD. Die mittlere Anzahl der MVD-Spurpunkte für nachgewiesene Pionen des K_S -Zerfalls beträgt für beide Ladungszustände gleichermaßen 2,7. Um die geringe Anzahl der nachgewiesenen K_S -Zerfälle näher zu untersuchen, lässt sich die Abhängigkeit der Nachweiseffizienz von einer Reihe von kinematischen Variablen bestimmen. Die stärkste Abhängigkeit zeigt sich hierbei vom Abstand R des K_S -Zerfallspunktes zum primären Interaktionspunkt; diese ist zusammen mit einer zweidimensionalen Darstellung der Effizienz in der (z, r) -Ebene in Abbildung 7.5 gezeigt. Dabei bezeichnet z den Abstand in und r den Abstand senkrecht zur Strahlrichtung. Für Zerfälle, die weit entfernt vom Primärvertex liegen, ist deutlich der Einfluss der idealisierten Spurfinding

Beschränkende Detektorlagen	$r_{\max}$ (cm)	$z_{\max}$ (cm)	Anteil (%)
Barrel-Lage 1 / Disk-Lage 1	2,5	2,2	32,5
Barrel-Lage 1 / Disk-Lage 2	2,5	4,2	47,2
Barrel-Lage 2 / Disk-Lage 3	5	7,2	65,2
Barrel-Lage 2 / Disk-Lage 4	5	10,2	73,5
Barrel-Lage 3 / Disk-Lage 5	9,2	15	85,3
Barrel-Lage 3 / Disk-Lage 6	9,2	22	91,4
Gesamter MVD	12,5	22	92,5

Tabelle 7.3: Anteil der K_S -Zerfälle innerhalb zylinderförmiger Teilvolumina des MVD mit $r < r_{\max}$ und $z < z_{\max}$. Zur Position der Barrel- und Disk-Lagen siehe auch Abb. 7.5. Der statistische Fehler ist kleiner als die angegebene Genauigkeit.

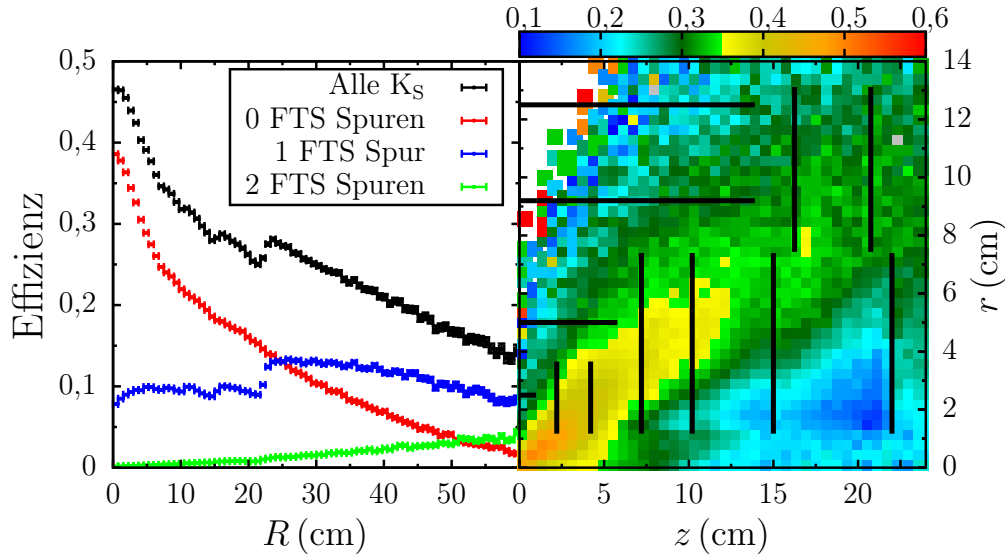


Abbildung 7.5: Nachweiseffizienz des K_S -Zerfalls in Abhängigkeit vom Betrag des K_S -Vertex (*links*) und in der (z, r) -Ebene (*rechts*) getrennt nach der Anzahl der K_S -Zerfallspionen, die im Vorwärtsspektrometer rekonstruiert werden. Als schwarze durchgezogene Linien sind die Barrel- und Disk-Lagen des MVD angedeutet.

in Vorwärtsrichtung zu erkennen. In dieser werden alle Spuren geladener Teilchen rekonstruiert, die mindestens einen Spurpunkt in einem der Spurdetektoren in Vorwärtsrichtung hinterlassen und insgesamt mehr als drei Spurpunkte besitzen. Die rekonstruierten Impulse und die Position der Spurpunkte der jeweiligen Teilchen werden dabei komponentenweise mit vorgegebener Breite um die wahren Werte normalverteilt. In der durchgeführten Simulation sind für die Impulskomponenten relative Breiten von 5 % des Monte-Carlo-Wertes angenommen worden, während für die Komponenten der Spurpunkte absolute Breiten von $50 \mu\text{m}$ Verwendung gefunden

haben. Durch die Rekonstruktion aller Teilchen mit mehr als einem Spurpunkt in einem der Spurdetektoren in Vorwärtsrichtung (FTS) nimmt die Nachweiseffizienz für sehr große z -Abstände und kleine Polarwinkel zu. In Abbildung 7.5 ist die Effizienz getrennt nach der Anzahl der Zerfallspionen dargestellt, die durch die FTS-Spurfindung detektiert werden. Der starke Abfall der Effizienz mit R wird dabei dominiert von Ereignissen, in denen beide Zerfallspionen ohne die idealisierte FTS-Spurfindung rekonstruiert werden. Man beachte auch, dass die Effizienz $\varepsilon(R)$ bis $R = 6$ cm sehr schnell abnimmt, jedoch keine Sprünge aufweist, was bereits darauf hindeutet, dass das beobachtete Verhalten von $\varepsilon(R)$ nicht von der Anzahl der im Mittel getroffenen Detektorlagen dominiert wird. Eine Übersicht des Anteils der rekonstruierten K_S -Zerfälle getrennt nach der Anzahl der Pionen, die durch die FTS-Spurfindung nachgewiesen werden, gibt Tabelle 7.4.

Zerfallspionen mit FTS-Spurpunkten	Anteil (%)
0	74
1	24,8
2	1,2

Tabelle 7.4: Anteil der rekonstruierten Ereignisse, in denen keine, ein oder beide K_S -Zerfallspionen über die idealisierte Spurfindung in Vorwärtsrichtung nachgewiesen werden. Der statistische Fehler ist kleiner als die angegebene Genauigkeit.

Physikalisch bedingt die Kinematik der K_S -Zerfälle eine Reihe von Korrelationen, die als mögliche Ursache der starken R -Abhängigkeit der Effizienz in Frage kommen. So besteht beispielsweise eine starke Korrelation zwischen dem Impuls eines Teilchens und der mittleren Distanz, die es vor seinem Zerfall zurücklegt. Abbildung 7.6 zeigt,

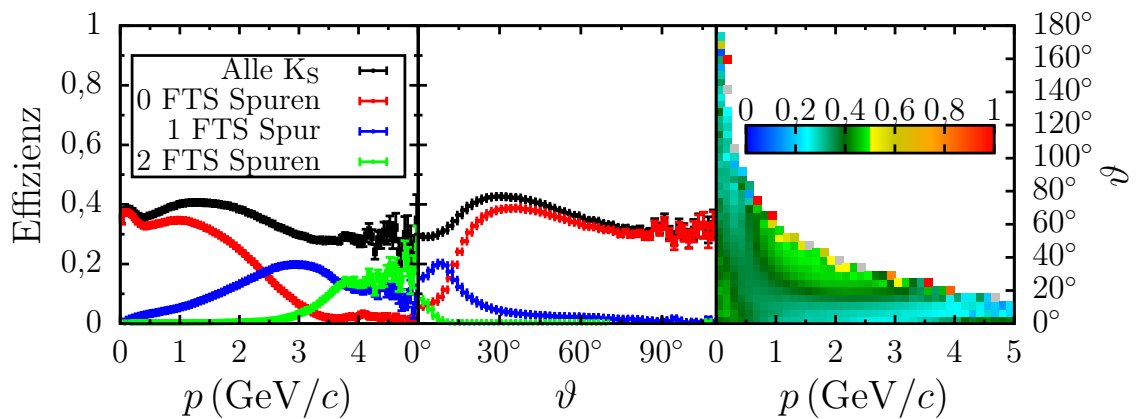


Abbildung 7.6: Abhängigkeit der K_S -Nachweiseffizienz von Impuls (*links*) und Polarwinkel (*Mitte*) des K_S sowie die kombinierte zweidimensionale Darstellung (*rechts*).

dass weder eine starke Abhängigkeit vom Impuls der Kaonen noch von deren Winkel zur Strahlachse besteht.

Die Kinematik der Zerfallspionen lässt sich am einfachsten in einem zweidimensionalen Diagramm veranschaulichen. Hier wird eine Darstellung gewählt, in der die Impulse und Polarwinkel der Pionen gegeneinander aufgetragen werden (siehe Abb. 7.7). Auch diese Darstellung zeigt, dass die Effizienz über den zugänglichen Phasenraum nur schwach variiert. Eine stark verringerte Nachweiswahrscheinlichkeit besteht lediglich in Bereichen, in denen eines der Zerfallspionen einen geringen Impuls

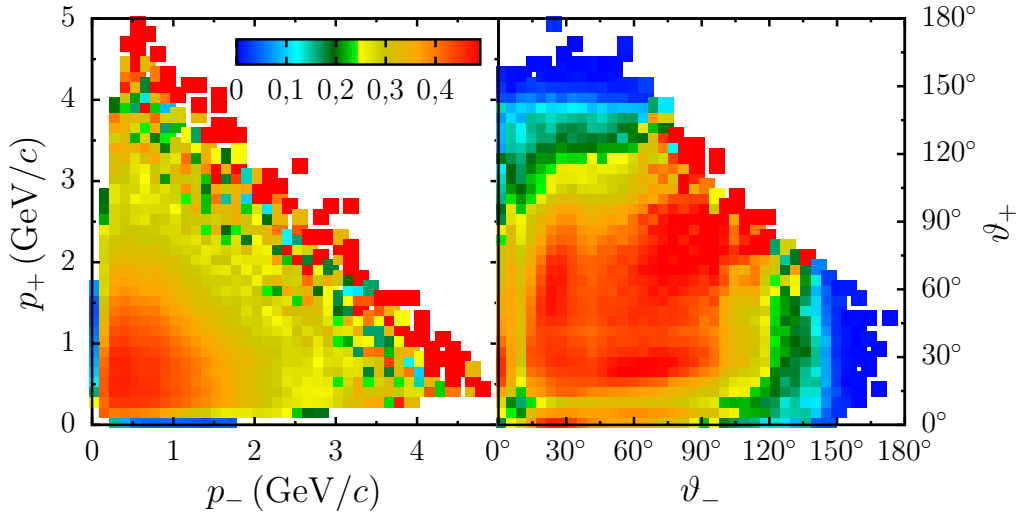


Abbildung 7.7: Zweidimensionale Abhängigkeit der K_S -Nachweiseffizienz von den Impulsen und Polarwinkeln der Zerfallspionen; der Index $\pm$ bezeichnet den Ladungszustand des Pions.

besitzt oder unter einem großen Polarwinkel in rückwärtige Richtung emittiert wird.

Als letzter Test wird die Abhängigkeit der Anzahl der MVD-, STT- und GEM-Spurpunkte in Abhängigkeit von Impuls und Polarwinkel der Zerfallspionen sowie des K_S -Zerfallsortes betrachtet (siehe Abb. 7.8). Die R -Abhängigkeit zeigt, dass die mittlere Anzahl der MVD-Spurpunkte mit zunehmendem Abstand vom primären Interaktionspunkt zwar abnimmt, da zunehmend Kaonen hinter den ersten Disk-Lagen des MVD zerfallen, der Effekt jedoch ausgeglichen wird durch die zunehmende Anzahl an GEM-Spurpunkten. Insbesondere ist die Anzahl der STT-Spurpunkte in Abhängigkeit von R nahezu konstant. Da sich der Abfall der Nachweiseffizienz der ohne FTS-Spurfindung rekonstruierten K_S um etwa einen Faktor 1,6 zwischen $R = 0-6$ cm (siehe Abb. 7.5) weder auf eine Richtungs- noch Impulsabhängigkeit zurückführen lässt und auch die Anzahl der zur Pion-Rekonstruktion verwendeten MVD-, STT- und GEM-Spurpunkte auf der relevanten Längenskala nur sehr schwach variiert, erscheint es nicht plausibel anzunehmen, dass dieser starke Abfall der Nachweiseffizienz mit R das zu erwartende Verhalten des zukünftigen $\bar{P}ANDA$ -Detektors abbildet. Wesentliche Ursache für das beobachtete Verhalten ist der aktuell verwen-

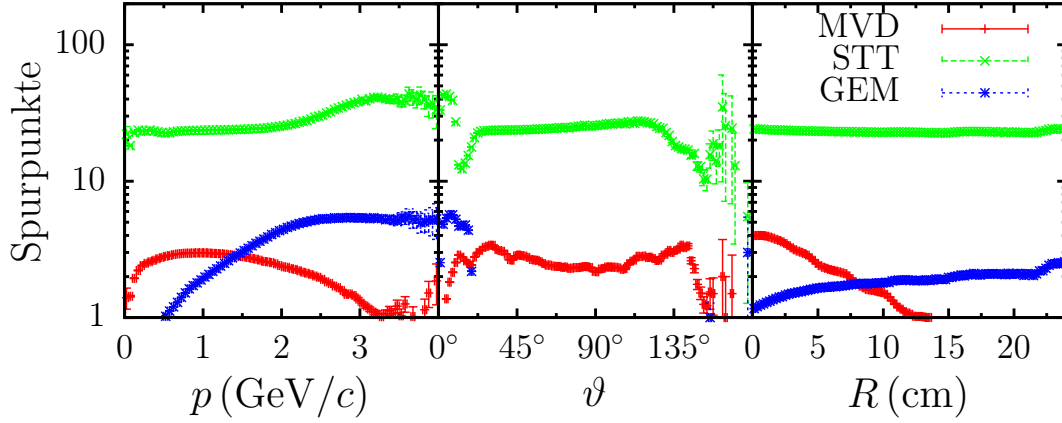


Abbildung 7.8: Mittlere Anzahl der MVD-, STT- und GEM-Spurpunkte der K_S -Zerfallspionen in Abhängigkeit von Impuls (*links*) und Polarwinkel (*Mitte*) der Pionen sowie des Abstands des K_S -Zerfallsortes vom primären Interaktionspunkt (*rechts*). STT fasst die Spurpunkte des Straw-Tube-Detektors und der Spurdetektoren in Vorwärtsrichtung zusammen.

deten Algorithmus der Spurfinding, der auf geladene Spuren nahe des nominalen Interaktionspunktes optimiert ist. In der Simulation zur Reduktion von hadronischen Untergrundkanälen verringert die geringe Wahrscheinlichkeit des Nachweises von Kaonen mit weit vom Primärvertex entfernt liegendem Zerfallsort gegenüber den Untergrundkanälen $\bar{p}p \rightarrow 3\pi^+3\pi^-$ und $\bar{p}p \rightarrow 3\pi^+\pi^03\pi^-$ den diskriminierenden Effekt des Schnitts auf den K_S -Vertex. Gegenüber dem Kanal $\bar{p}p \rightarrow \pi^+2\pi^-K^+K_S$ ist der verursachte Fehler bei der Bestimmung des zu erwartenden Signal-zu-Untergrund-Verhältnisses geringer, da kurzlebige Kaonen in Signal und Untergrund gleichermaßen von der K_S -Rekonstruktion beeinflusst werden.

7.2.2 Auflösung des Zerfallspunktes

Da die Güte der idealisierten FTS-Spurfindung lediglich von den gesetzten Breiten der Normalverteilung zum Variieren der Impuls- und Spurpunkt Komponenten abhängig ist und entsprechend keine Information über die zu erwartende Leistungsfähigkeit des Detektors enthält, werden im Folgenden nur K_S -Zerfälle betrachtet, in denen beide Zerfallspionen im Barrel nachgewiesen wurden. Anders als im vorangegangenen Abschnitt finden hier die rekonstruierten Impulse der Pionen Verwendung; d. h. an die MVD- und STT-Spurpunkte eines geladenen Pions werden Helixtrajektorien angepasst², aus deren Parametern die räumlichen Impulse bestimmt werden. Um anhand der rekonstruierten Spuren der K_S -Zerfallspionen auf den wahrscheinlichsten K_S -Zerfallsort zu schließen, wird ein Vertex-Fitter des PandaRoot-Frameworks verwendet (*PndVtxPRG*). Abbildung 7.9 zeigt die χ^2 -Verteilung aller bestimmten

²Diese Aufgabe übernimmt die PandaRoot-Klasse *PndSttMvdGemTracking*.

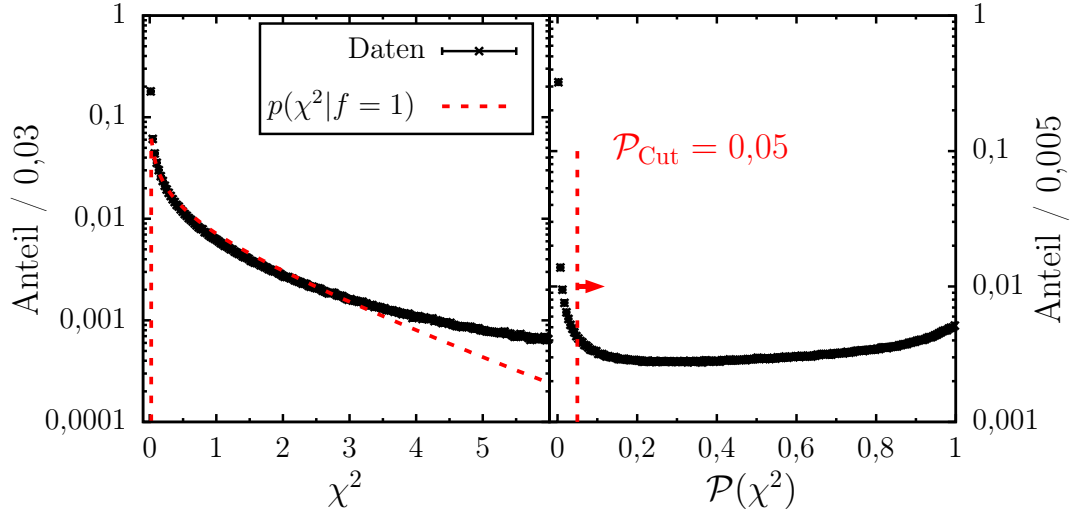


Abbildung 7.9: χ^2 - (*links*) und $\mathcal{P}$ -Wert-Verteilung (*rechts*) aller bestimmten K_S -Vertizes. Ebenfalls gezeigt sind die erwartete χ^2 -Verteilung für einen Freiheitsgrad und der verwendete Schnitt auf den $\mathcal{P}$ -Wert.

K_S -Zerfallsorte und die Verteilung der hieraus berechneten $\mathcal{P}$ -Werte. Es lässt sich allgemein zeigen [176], dass die Vertexrekonstruktion aus n Teilchenspuren $2n - 3$ Freiheitsgrade besitzt. Die Verteilung der quadratischen Abweichungen besitzt daher lediglich einen Freiheitsgrad. Bis auf Abweichungen für sehr kleine und große χ^2 , die sich aus Mehrfachstreuung ergeben, folgt die beobachtete χ^2 -Verteilung dem erwarteten Verlauf. Zum Ausschluss von Anpassungen geringer Güte wird im Folgenden ein Schnitt von $\mathcal{P}_{\text{Cut}} = 0,05$ verwendet, wodurch sich die Anzahl der nutzbaren Ereignisse um 38,9% verringert. Im nächsten Schritt kann die Zerfallsortauflösung aus

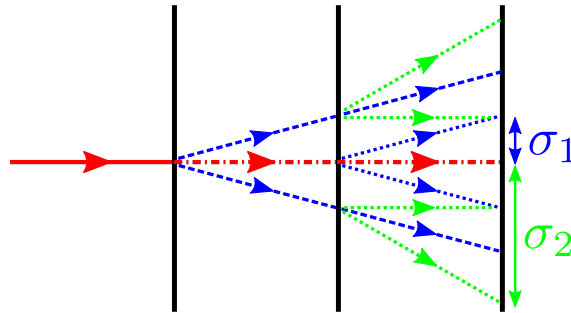


Abbildung 7.10: Vereinfachtes Schema der Streuung an mehreren Detektorlagen. Gezeigt ist der ungestreute Strahl (rot), sowie einfache (blau) und doppelte (grün) Streuung unter einem festen Streuwinkel.

den sogenannten Residuenverteilungen bestimmt werden. Als Residuum wird die Abweichung zwischen dem angepassten und dem Monte-Carlo-Vertex des ursprünglich generierten K_S im jeweiligen Ereignis bezeichnet. Abbildung 7.11 zeigt

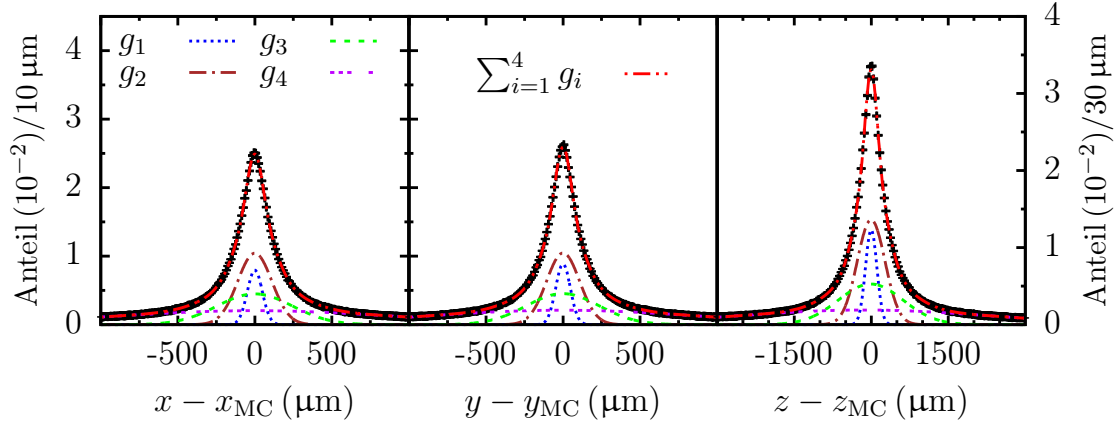


Abbildung 7.11: Residuenverteilungen der K_S -Zerfallsortkomponenten zusammen mit der Anpassung (Parameter siehe Tab. 7.5) durch eine Summe von Normalverteilungen.

die Residuenverteilungen der Komponenten des K_S -Zerfallsvertex für alle Ereignisse mit $\mathcal{P} > \mathcal{P}_{\text{Cut}}$. Entgegen der einfachsten Annahme von normalverteilten Messfehlern lassen sich die Residuenverteilungen in Abbildung 7.11 nur ungenügend durch eine einfache Gauß-Verteilung beschreiben. Anschaulich lässt sich dies aus dem Aufbau des Detektors verstehen; so wird ein Teilchen beim Durchqueren des MVD an jeder Detektorlage gestreut. Beispielsweise hat ein geladenes Teilchen mit drei MVD-Spurpunkten zum Zeitpunkt des Zusammentreffens mit der dritten MVD-Lage bereits zwei Streuvorgänge durchlaufen. Da sich Einfachstreuung in guter Näherung durch eine Normalverteilung beschreiben lässt, kann die Mehrfachstreuung durch die Verwendung einer Summe von Gauß-Funktionen angenähert werden; im allgemeinen Fall sind hierzu bei n Detektorlagen $(n - 1)$ Summanden nötig (siehe hierzu [52, 177] und Abb. 7.10). Abbildung 7.11 zeigt, dass die Residuenverteilungen näherungsweise durch eine Summe von vier Gauß-Funktionen der Form

$$f(x) = \sum_{i=1}^4 g_i(x) \quad \text{mit} \quad g_i(x) = \frac{N_i}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left(-\frac{(x - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right) \quad (7.4)$$

beschrieben werden können. Aufgrund der räumlichen Optimierung des MVD auf mindestens vier Spurpunkte unabhängig von der Richtung des nachgewiesenen Teilchens sollte die Anzahl der verwendeten Funktionen mindestens drei betragen; das Hinzufügen einer vierten verringert den χ^2/ndf -Wert der Anpassung³ um etwa einen Faktor 6. Die x - und y -Residuenverteilungen beschreibt die verwendete Parametrisierung ausgezeichnet, während sich in z -Richtung etwas höhere Werte von χ^2/ndf ergeben. Das Ergebnis der Anpassung ist in Tabelle 7.5 zusammengefasst. Man beachte auch, dass es nicht möglich ist, die zu erwartende Auflösung über die Standardabweichung abzuschätzen. Diese wird völlig von großen Abweichungen dominiert

³Marquardt-Levenberg Algorithmus in Gnuplot [178].

Parameter	x	y	z
N_1	$1,0 \pm 0,1$	$1,1 \pm 0,1$	$3,4 \pm 0,1$
$\mu_1 (\mu\text{m})$	$0,1 \pm 0,4$	$-0,1 \pm 0,4$	$-1,2 \pm 1,0$
$\sigma_1 (\mu\text{m})$	$48,9 \pm 0,8$	$47,6 \pm 0,8$	$111,4 \pm 1,9$
N_2	$2,9 \pm 0,1$	$2,8 \pm 0,1$	$9,2 \pm 0,1$
$\mu_2 (\mu\text{m})$	$-0,1 \pm 0,4$	$0,3 \pm 0,4$	$-2,5 \pm 1,2$
$\sigma_2 (\mu\text{m})$	$111,0 \pm 1,7$	$107,4 \pm 1,8$	$269,9 \pm 3,8$
N_3	$2,7 \pm 0,1$	$2,7 \pm 0,1$	$8,3 \pm 0,1$
$\mu_3 (\mu\text{m})$	$-0,4 \pm 0,9$	$-1,5 \pm 0,9$	$-10,4 \pm 2,6$
$\sigma_3 (\mu\text{m})$	$244,4 \pm 4,3$	$237,2 \pm 4,2$	$628,1 \pm 8,8$
N_4	$4,6 \pm 0,1$	$4,6 \pm 0,1$	$11,6 \pm 0,1$
$\mu_4 (\mu\text{m})$	$-3,2 \pm 2,5$	$-4,6 \pm 2,4$	$-142,1 \pm 9,3$
$\sigma_4 (\mu\text{m})$	$903,9 \pm 18,5$	$871,5 \pm 16,1$	$2446,1 \pm 37,5$
$\bar{\sigma} (\mu\text{m})$	$594,5 \pm 11,0$	$574,3 \pm 9,4$	$1503,2 \pm 20,6$
χ^2/ndf	1,33	1,56	2,53

Tabelle 7.5: Ergebnis einer χ^2 -Anpassung der Residuenverteilungen mit einer Summe aus vier Normalverteilungen (siehe Abb. 7.11). Der angegebene Fehler ist rein statistisch, die Zahl der Freiheitsgrade (ndf) beträgt in allen drei Fällen 188.

und hängt für eingeschränkte Intervalle („truncated standard deviation“) stark vom betrachteten Intervall ab. Häufig wird zur Abschätzung der zu erwartenden Zerfallsortauflösung ein heuristisches Verfahren verwendet, bei dem an die Residuenverteilungen in einem schmalen Intervall um Null eine einfache Normalverteilung angepasst wird (siehe z. B. [179, 99]). Dies entspricht näherungsweise den Breiten σ_1 in Tabelle 7.5; zum Vergleich seien diese hier noch einmal explizit hervorgehoben

$$\sigma_x = 48,9 \pm 0,8 \quad \sigma_y = 47,6 \pm 0,8 \quad \sigma_z = 111,4 \pm 1,9. \quad (7.5)$$

Die etwas bessere Zerfallsortauflösung in y -Richtung lässt sich auf den Bruch der Zylindersymmetrie durch die Target-Röhre zurückführen (siehe [179, S. 57]). Während die angepassten Gauß-Funktionen der x - und y -Residuen im Rahmen des Fehlers symmetrisch um den Nullpunkt sind, zeigen die Schwerpunkte μ_i bei Anpassung der z -Residuen eine signifikante Abweichung hin zu negativen Werten; d. h. die z -Komponenten der angepassten Vertizes werden systematisch zu klein geschätzt. Dies bestätigt sich auch durch die Berechnung des Mittelwertes der z -Residuen, im in Abbildung 7.11 gezeigten Intervall $[-2000 \mu\text{m}, 2000 \mu\text{m}]$ beträgt dieser $\mu_z = -10,9 \mu\text{m}$. Da die Verschiebung für Einfach- (μ_1) hin zur Vierfachfachstreuung (μ_4) zunimmt, liegt die Vermutung nahe, dass die Verschiebung auf Effekte der Streuung zurückzuführen ist. Der Aufbau des Detektors mit ruhendem Target bedingt dabei

eine systematische Abweichung hin zu negativen Residuen; in x - und y - Richtung sind Korrekturen hin zu größeren und kleineren Werten möglich, die im Mittel verschwinden. Deutlich größere Werte für die Zerfallsortauflösung erhält man, wenn man die Varianzen σ_i^2 mit den Flächen unter der jeweiligen Funktion mittelt und $\bar{\sigma}$ als Maß für die Auflösung nimmt

$$\bar{\sigma}(N_i, \sigma_i) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^4 N_i \sigma_i^2}{\sum_{j=1}^4 N_j}}. \quad (7.6)$$

Der Fehler dieser Abschätzung lässt sich mit der Kovarianzmatrix der Funktionsanpassung berechnen

$$\Delta \bar{\sigma} = \sqrt{\sum_{i,j} \text{Cov}(\lambda_i, \lambda_j) \frac{\partial \bar{\sigma}(\lambda)}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \bar{\sigma}(\lambda)}{\partial \lambda_j}} \quad (7.7)$$

mit $\lambda = (N_1, N_2, N_3, N_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)$.

Die berechneten Mittelwerte sind in Tabelle 7.5 zu finden. Neben der Zerfallsortbestimmung erlaubt der durchgeführte Vertex-Fit auch eine Schätzung der Kovarianzmatrix, dies macht insbesondere auch eine Schätzung des Fehlers der rekonstruierten Vertexkomponenten zugänglich. Zum Test der Adäquatheit der geschätzten Fehler sind in Abbildung 7.12 die Pull-Verteilungen der Zerfallsortkomponenten zusammen mit einer χ^2 -Anpassung durch eine einfache Normalverteilung gezeigt. Die

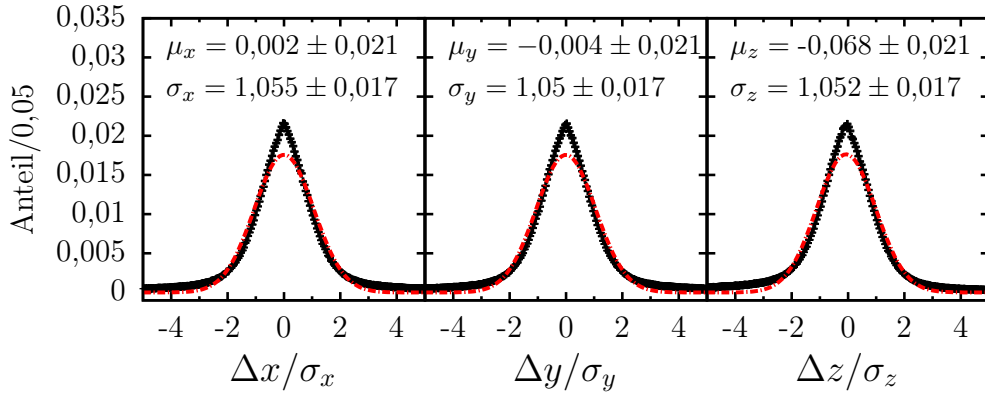


Abbildung 7.12: Pull-Verteilungen des K_S -Vertex-Fits mit angepassten Normalverteilungen. Die angegebenen Schwerpunkte μ_i und Breiten σ_i entstammen dem Fit mit einer einfachen Normalverteilung.

Anpassung stimmt schlecht mit der ermittelten Verteilung überein ($\chi^2/\text{ndf} \approx 860$), eine statistisch angemessene Beschreibung erfordert auch hier die funktionale Form von Gleichung 7.4. Dies deutet darauf hin, dass Ereignisse mit starker Mehrfachstreuung zu einer Fehlbeurteilung des Fehlers führen. Im gezeigten Bereich (siehe

Abb. 7.12) erhält man die in Tabelle 7.6 zusammengefassten Werte für Mittelwerte $\mu_i = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j$ und Standardabweichungen $\sigma_i = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^N (x_j - \mu_i)^2}$.

	x	y	z
Mittelwert	0,003	-0,008	-0,13
Standardabweichung	1,369	1,374	1,363

Tabelle 7.6: Mittelwerte und Standardabweichungen der Pull-Verteilungen des K_S -Vertex im Intervall $\Delta x_i/\sigma_{x_i} = [-5, 5]$.

Zusammen mit den Ergebnis der angepassten Gauß-Funktionen lässt sich der Schluss ziehen, dass die Pullverteilungen keine starke systematische Abweichung von Null zeigen. Trotz der Abweichung von einer einfachen Normalverteilung liegen die geschätzten Fehler in der richtigen Größenordnung. Hierbei ist zu beachten, dass der verwendete Vertex-Fitter zum jetzigen Zeitpunkt⁴ keinerlei Materialeffekte berücksichtigt und daher systematische Abweichungen in der Fehlerschätzung zu erwarten sind. Aufgrund der mittleren Flugstrecke des K_S von einigen Zentimetern eignet sich

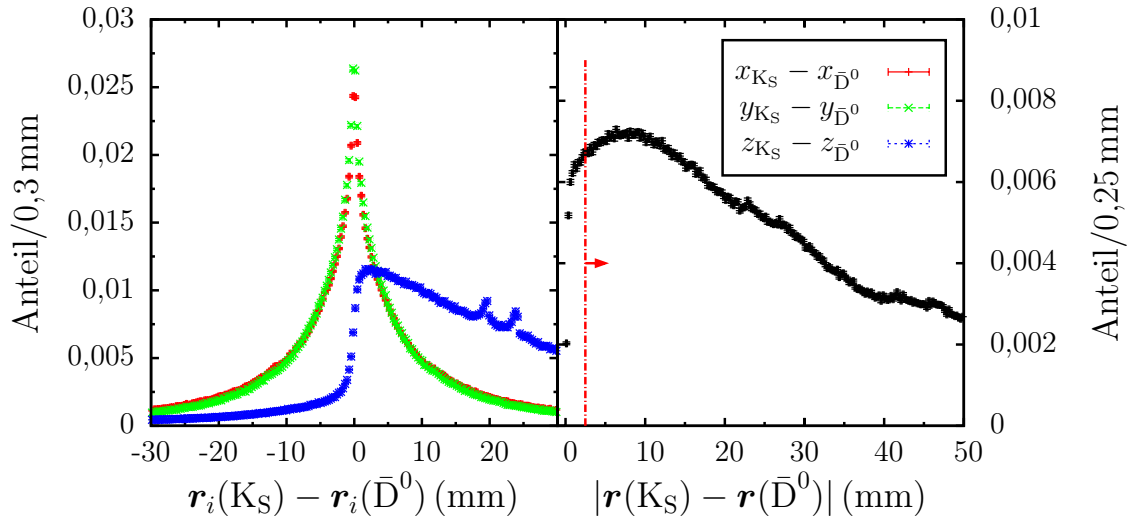


Abbildung 7.13: Komponenten (*links*) und Betrag (*rechts*) des rekonstruierten Abstands zwischen K_S - und $\bar{D}^0$ -Zerfall. Der verwendete Schnitt ist als rote Linie eingezeichnet.

ein Schnitt auf diese Distanz gut zur Selektion des untersuchten Reaktionskanals gegenüber hadronischen Untergrundreaktionen. Neben dem Zerfallspunkt des K_S muss hierzu auch der räumliche Entstehungspunkt des K_S bekannt sein; tatsächlich ist dieser identisch mit dem Vertex des D^0 -Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$. Experimentell effektiver ist es jedoch anstelle dieses Punktes den Zerfallspunkt des $\bar{D}^0$ -Zerfalls

⁴Stand: Oktober 2014.

zu verwenden, da dieser mit höherer Genauigkeit rekonstruiert werden kann (siehe hierzu Abschnitt 7.3.1). Hierbei fällt die mittlere Flugstrecke des $\bar{D}^0$ in der Größenordnung von einigen hundert Mikrometern gegenüber der des K_S kaum ins Gewicht; es handelt sich also näherungsweise um den Abstand zwischen K_S -Zerfall und dem primären $\bar{p}p$ -Interaktionspunkt. Abbildung 7.13 zeigt die Komponenten und den Betrag des rekonstruierten Abstands $K_S\text{--}\bar{D}^0$ und verdeutlicht, dass es sich dominant um eine Distanz in axialer Richtung handelt. In der Analyse wird ein Schnitt von

$$|\mathbf{r}(K_S) - \mathbf{r}(\bar{D}^0)| > 2,5 \text{ mm} \quad (7.8)$$

verwendet. Dabei verwirft das eigentliche Kriterium in Gleichung 7.8 nur wenige Prozent aller Signalereignisse mit rekonstruiertem $K_S\text{--}\bar{D}^0$ -Abstand; eine starke Reduktion verursachen jedoch die Schnitte auf die $\mathcal{P}$ -Werte der Rekonstruktion, die nötig sind, um eine hinreichende Güte des K_S - und $\bar{D}^0$ -Vertex-Fits zu gewährleisten (vgl. Abb. 7.9). Insgesamt reduziert der Schnitt die Anzahl der nutzbaren gegenüber allen rekonstruierten Signalereignissen um 40,5 %.

7.2.3 Auflösung der invarianten Masse

Während die in der Monte-Carlo-Simulation generierten Zerfallsorte des K_S gemäß einer Exponentialverteilung zufällige Werte annehmen, handelt es sich bei der physikalischen K_S -Masse um eine manifest invariante Größe. Anstelle der Residuenverteilung kann zur Bestimmung der Massenauflösung daher direkt die Verteilung der rekonstruierten K_S -Massen

$$\begin{aligned} m_{K_S} &= \sqrt{(\mathbf{P}_{\pi^+} + \mathbf{P}_{\pi^-})^2} / c \\ &= \sqrt{2(m_\pi^2 + E_{\pi^+}E_{\pi^-}/c^4 - p_{\pi^+}p_{\pi^-}\cos\vartheta/c^2)} \end{aligned} \quad (7.9)$$

betrachtet werden. Im Gegensatz zu den Abweichungen zwischen generierten und rekonstruierten Zerfallsorten, die primär durch die Richtungsänderung bei Streuung verursacht werden, geht in die Auflösung der invarianten Masse sowohl die Richtung der Impulse als auch deren Betrag mit ein. Hierdurch ergibt sich eine weniger gute Übereinstimmung der Parametrisierung in Gleichung 7.4 mit der rekonstruierten Verteilung. In Abbildung 7.14 ist gezeigt, dass zumindest der ungefähre Verlauf der rekonstruierten Massen durch eine Summe dreier Gauß-Funktionen beschrieben werden kann ($\chi^2/\text{ndf} = 11,15$ bei 191 Freiheitsgraden).

Eine Verwendung von vier Funktionen verbessert die Güte der Anpassung zwar geringfügig ($\chi^2/\text{ndf} = 6,81$ bei 188 Freiheitsgraden), führt jedoch zu zwei Gauß-Funktionen mit sehr ähnlicher Breite. Die Parameter des Fits sind in Tabelle 7.7 zusammengefasst. Nimmt man die Breite der innersten Normalverteilung als Maß für die zu erwartende Massenauflösung, erhält man die Abschätzung

$$\sigma_m = (6,2 \pm 0,1) \text{ MeV}/c^2. \quad (7.10)$$

Parameter	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$N_i (10^{-5})$	$27,93 \pm 0,42$	$27,16 \pm 0,39$	$55,59 \pm 0,24$
$\mu_i - m_{K_S} (\text{MeV}/c^2)$	$-0,45 \pm 0,04$	$-2,25 \pm 0,12$	$-11,77 \pm 0,41$
$\sigma_i (\text{MeV}/c^2)$	$6,21 \pm 0,06$	$17,12 \pm 0,24$	$75,54 \pm 0,90$

Tabelle 7.7: Ergebnis einer χ^2 -Anpassung der invarianten K_S -Massenverteilung mit einer Summe aus drei Normalverteilungen (siehe Abb. 7.14). Die angegebenen Fehler sind rein statistisch.

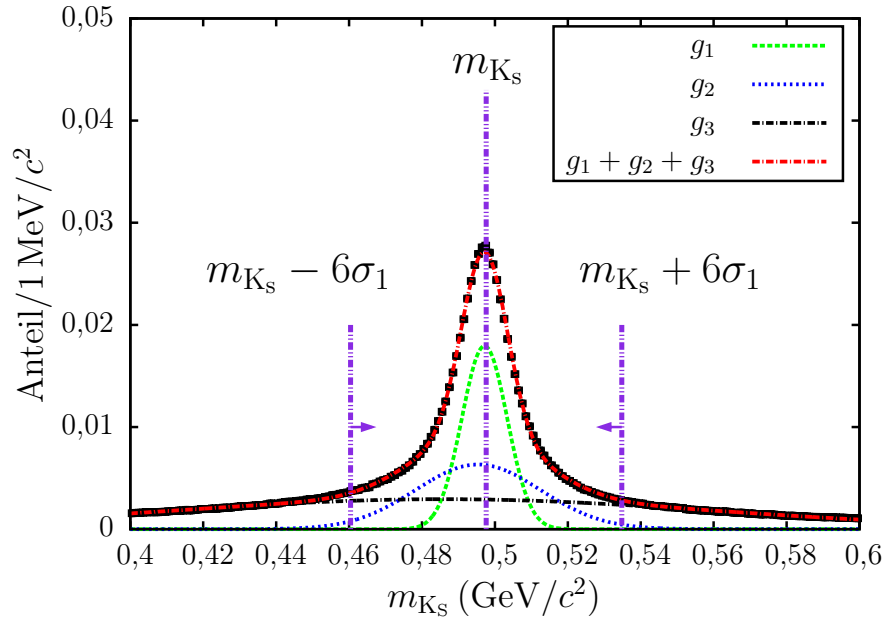


Abbildung 7.14: Verteilung der rekonstruierten K_S -Massen mit der angepassten Summe aus drei Normalverteilungen (Parameter siehe Tab. 7.7). $m_{K_S} \pm 6\sigma_1$ markiert die Grenzen des später verwendeten Massenschnitts.

Zur Reduktion von Untergrund wird später ein absoluter Schnitt auf die rekonstruierte K_S -Masse von $m_{K_S} \pm 6\sigma_m$ verwendet, wodurch 37,4 % aller rekonstruierten K_S aus der weiteren Analyse ausgeschlossen werden.

7.3 Rekonstruktion von D^0 - und $\bar{D}^0$ -Mesonen

Zur Extraktion der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparameter ist es essentiell, die Zerfallszeitdifferenz zwischen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfällen zu messen, da diese den Flavorinhalt des physikalischen D^0 -Mesons zum Zeitpunkt des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ bestimmt. Von besonderer Wichtigkeit ist es daher auch, die experimentelle Auflösung der Zerfallszeitdifferenz näher zu untersuchen. Analog zum Vorgehen im vorhergehenden

Abschnitt 7.2 werden hierzu zunächst in Abschnitt 7.3.1 die Ortsauflösung des D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfallspunktes evaluiert. Der folgende Abschnitt 7.3.2 geht auf die Zerfallszeitauflösung der D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfälle ein und zeigt als Benchmark-Test, mit welcher Genauigkeit die mittlere D-Lebensdauer aus einem Fit bestimmt werden kann. Im zentralen Abschnitt 7.3.3 wird die Ortsauflösung des primären Antiproton-Proton-Interaktionspunktes abgeschätzt und gezeigt, dass es auch ohne explizite Kenntnis dieses Punktes möglich ist die Zerfallszeitdifferenz zu messen. Dabei wird auch die finale Parametrisierung der Auflösungsfunktion bestimmt werden, die später im Fit zur Messung der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparameter Verwendung findet. Der abschließende Abschnitt 7.3.4 widmet sich der Auflösung der invarianten D-Masse zum Zweck der Untergrundreduktion. Im gesamten Abschnitt 7.3 werden wieder die rekonstruierten Impulse, jedoch der wahre Teilchentyp verwendet und für jedes Teilchen die Identität des zugehörigen Mutterteilchens überprüft. Auf diese Art sind beispielsweise die negativen Pionen der Zerfälle $K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-$ und $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ eindeutig unterscheidbar. Das anhand der Simulation zu untersuchende Auflösungsverhalten des Detektors wird daher nicht überdeckt durch Effekte der Teilchenidentifikation oder kombinatorischen Untergrund. Wie im Falle der kurzlebigen Kaonen werden, sofern nicht anders angegeben, nur Teilchen betrachtet, die im Barrel-Teil des Detektors rekonstruiert wurden. Auch hier übertrifft die Anzahl der verwendeten Ereignisse bei Weitem die im späteren Experiment zur Verfügung stehende, da an dieser Stelle lediglich die systematischen Effekte von Zeit- und Ortsauflösung studiert werden.

7.3.1 Auflösung des Zerfallspunktes

Die Rekonstruktion des $\bar{D}^0$ -Zerfallspunktes erfolgt im untersuchten Kanal über die Impulse der Tochterteilchen im Zerfall $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$. Die freiwerdende Ruheenergie von $m_{\bar{D}^0} c^2 = 1864,84 \pm 0,07 \text{ MeV}$ [4] führt hierbei zu hohen kinetischen Energien der Tochterteilchen, wodurch deren relative Richtungsänderung bei Streuung gering ausfällt. Aufgrund des Öffnungswinkel zwischen K^+ und π^- von 180° im $\bar{D}^0$ -Ruhesystem sind im Laborsystem sehr kleine Öffnungswinkel kinematisch unterdrückt, für die eine Zerfallsortbestimmung zu großen Fehlern führt. Im Gegensatz hierzu handelt es sich bei dem Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ um einen Dreikörperzerfall, was im Mittel sowohl zu kleineren kinetischen Energien pro Tochterteilchen als auch zu kleineren Öffnungswinkeln zwischen jeweils zwei Tochterteilchen im CMS führt. Die D^0 -Vertexrekonstruktion geschieht hier ausschließlich über die Impulse der zwei geladenen Pionen des D^0 -Zerfalls. Prinzipiell erlaubt das Einbeziehen des Impulses des neutralen K_S eine Vertexrekonstruktion höherer Güte, jedoch ist zum jetzigen Zeitpunkt⁵ mit keinem der verfügbaren Vertex-Fitter des PandaRoot-Frameworks (*PndKinVtxFitter*, *PndVtxPRG*) eine Inklusion der Impulse neutraler Teilchen möglich. Die erwähnten Unterschiede in der Ereignistopologie beeinflussen maßgeblich die erreichbare Vertexauflösung im jeweiligen Zerfall. Dominant ist hierbei der Einfluss des Relativimpulses zwischen den Tochterteilchen, die zur Vertexrekonstruktion

⁵Stand: Oktober 2014.

genutzt werden, sowie der Öffnungswinkel zwischen deren Trajektorien. Abbildung 7.15 zeigt die rekonstruierten und ursprünglich generierten Verteilungen der jeweiligen Öffnungswinkel in D^0 -, $\bar{D}^0$ - und K_S -Zerfällen im Laborsystem. Vergleichbar

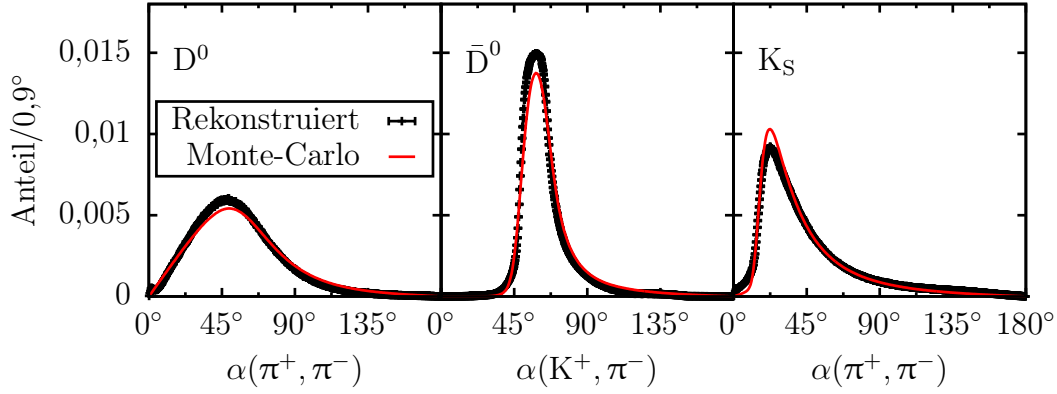


Abbildung 7.15: Verteilungen der rekonstruierten Öffnungswinkel der D^0 -, $\bar{D}^0$ - und K_S -Tochtereilchen im Laborsystem (einschließlich Teilchen mit FTS-Spurpunkten). In rot ist jeweils die ursprünglich generierte Monte-Carlo-Verteilung gezeigt.

zum Verfahren in Abschnitt 7.2.2 erfolgt die Rekonstruktion der wahrscheinlichsten D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfallspunkte mit Hilfe eines Vertex-Fitters (*PndVtxPRG*) des PandaRoot-Frameworks; zum Ausschluss von Anpassungen geringer Güte wird in beiden Fällen (D^0 , $\bar{D}^0$) ein Schnitt auf den $\mathcal{P}$ -Wert von 0,05 verwendet. Wegen der optisch großen Ähnlichkeit der χ^2 -, Residuen- und Pullverteilungen zu den betreffenden Verteilungen der K_S -Zerfallsortbestimmung sind diese hier nicht erneut abgebildet, jedoch aufgrund ihrer hohen Bedeutung für die Zerfallszeitauflösung in Anhang G zusammengefasst. Exemplarisch sind die Residuenverteilungen der Komponenten des $\bar{D}^0$ -Vertex in Abbildung 7.16 gezeigt. Eine adäquate Beschreibung der Residuenverteilungen lässt sich durch die Anpassung einer Summe von vier

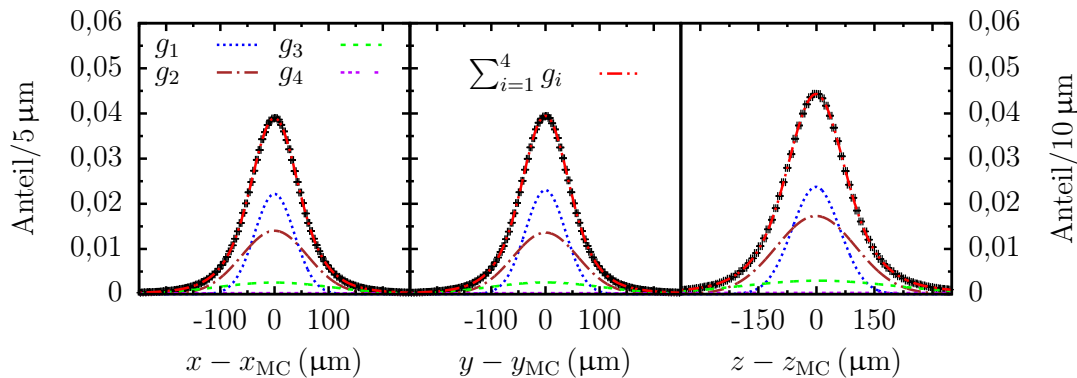


Abbildung 7.16: Residuenverteilungen der $\bar{D}^0$ -Zerfallsortkomponenten zusammen mit der Anpassung durch eine Summe von Normalverteilungen.

Normalverteilungen erzielen. Die Breiten der angepassten Funktionen sind in Tabelle 7.8 zusammengefasst, das vollständige Fitergebnis ist in Anhang G zu finden.

	Parameter	x	y	z
D^0	σ_1 (μm)	$47,2 \pm 2,1$	$51,1 \pm 1,3$	$73,1 \pm 3,5$
	σ_2 (μm)	$76,7 \pm 4,1$	$83,1 \pm 5,0$	$131,5 \pm 4,4$
	σ_3 (μm)	$135,0 \pm 7,4$	$139,9 \pm 11,8$	$252,4 \pm 6,9$
	σ_4 (μm)	$308,6 \pm 18,5$	$314,0 \pm 26,4$	$596,1 \pm 15,8$
	$\bar{\sigma}$ (μm)	$148,6 \pm 3,0$	$142,4 \pm 3,9$	$322,6 \pm 3,5$
	χ^2/ndf	1,01	0,78	1,06
$\bar{D}^0$	σ_1 (μm)	$36,7 \pm 0,2$	$37,0 \pm 0,2$	$61,9 \pm 0,5$
	σ_2 (μm)	$60,7 \pm 0,7$	$59,8 \pm 0,8$	$102,7 \pm 1,1$
	σ_3 (μm)	$104,9 \pm 1,7$	$103,1 \pm 1,7$	$198,6 \pm 2,2$
	σ_4 (μm)	$308,2 \pm 6,0$	$300,7 \pm 5,4$	$590,4 \pm 8,7$
	$\bar{\sigma}$ (μm)	$82,6 \pm 0,5$	$80,7 \pm 0,5$	$162,9 \pm 0,7$
	χ^2/ndf	1,18	1,18	1,72

Tabelle 7.8: Angepasste Breiten aus einem χ^2 -Fit der D^0 - und $\bar{D}^0$ -Vertex-Residuenverteilungen mit einer Summe von vier Normalverteilungen. Der angegebene Fehler ist rein statistisch, die Zahl der Freiheitsgrade (ndf) beträgt in allen Anpassungen 188. $\bar{\sigma}$ bezeichnet den gewichteten Mittelwert der Einzelbreiten.

Neben dem Einfluss des mittleren Öffnungswinkels zwischen den zur Vertexrekonstruktion genutzten Tochterteilchen ergeben sich Unterschiede zwischen der Zerfallsortauflösung des K_S - sowie der D^0 - und $\bar{D}^0$ -Vertizes durch die mittlere Anzahl der MVD-Spurpunkte (siehe Tab. 7.9). Aufgrund ihrer kurzen Lebensdauer zerfallen alle D-Mesonen innerhalb der Strahlröhre, während das K_S bedeutend weitere Distanzen zurücklegen kann, bevor es zerfällt.

$\pi^+(K_S)$	$\pi^-(K_S)$	$\pi^+(D^0)$	$\pi^-(D^0)$	$K^+(\bar{D}^0)$	$K^-(\bar{D}^0)$
2,74(2)	2,71(2)	4,17(1)	4,21(1)	4,39(1)	4,34(1)

Tabelle 7.9: Mittlere Anzahl der MVD-Spurpunkte; in Klammern ist jeweils das zugehörige Mutterteilchen angegeben. Der angegebene Fehler ist rein statistisch.

In Abschnitt 8.2 wird im Hinblick auf den dominanten Untergrundkanal $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ gezeigt, dass ein Schnitt auf die Vertexinformation von D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfall zur Untergrundreduktion nur bedingt sinnvoll ist.

7.3.2 Zerfallszeitauflösung

Aufs Engste verbunden mit der Rekonstruktion der Zerfallspunkte ist die Messung der Zerfallszeiten. Anstelle einer direkten Berechnung über $t = m_D |\mathbf{L}|/|\mathbf{p}|$ wird hier folgende Form verwendet

$$t(\mathbf{p}, \mathbf{L}) = \frac{m_D}{p} \left(\frac{\mathbf{p}}{p} \right) \cdot \mathbf{L}. \quad (7.11)$$

Der durch die Projektion auf die Impulsrichtung auftretende negative Anteil der t -Verteilung erlaubt dabei eine Beurteilung des Fehlers der Zeitmessung. Die räumlichen Impulse in Gleichung 7.11 müssen aus den Impulsen der Zerfallsteilchen bestimmt werden

$$\mathbf{p}_{D^0} = \mathbf{p}_{K_S} + \mathbf{p}_{\pi^+} + \mathbf{p}_{\pi^-} \quad \mathbf{p}_{\bar{D}^0} = \mathbf{p}_{K^+} + \mathbf{p}_{\pi^-}, \quad (7.12)$$

für m_D wird die experimentell mit hoher Genauigkeit gemessene D^0 - bzw. $\bar{D}^0$ -Masse von $(1864,84 \pm 0,07)$ MeV/ c^2 [4] verwendet. Der primäre Interaktionspunkt⁶ wird hier als bekannt voraus gesetzt; auf Komplikationen der Analyse, die durch dessen Rekonstruktion entstehen, wird im folgenden Abschnitt eingegangen. Nachdem sich bei der Analyse der K_S -Rekonstruktion eine sehr starke Abhängigkeit der Effizienz vom Zerfallsort ergab, ist es zunächst sinnvoll, die Nachweiseffizienz für D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfälle zu untersuchen. In Abbildung 7.17 ist gezeigt, dass diese in Abhängigkeit von den ursprünglich generierten Zerfallszeiten nahezu konstant ist. Die gegenüber der $\bar{D}^0$ -Rekonstruktion etwa einen Faktor drei geringere Wahrscheinlichkeit zum Nachweis

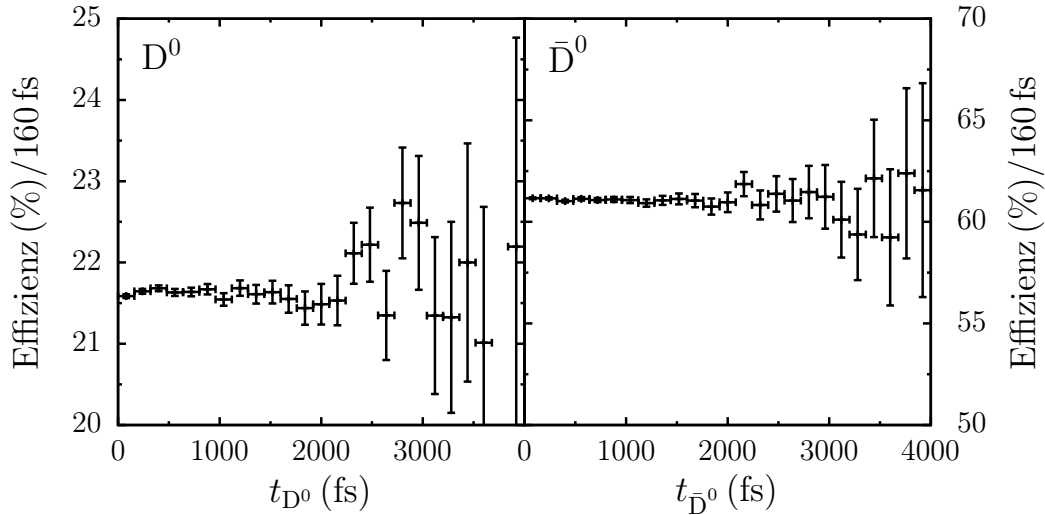


Abbildung 7.17: D^0 - (*links*) und $\bar{D}^0$ -Nachweiseffizienz (*rechts*) in Abhängigkeit der Monte-Carlo-Zerfallszeit.

⁶In der durchgeführten Simulation entstehen alle $D^0\bar{D}^0$ -Paare am Koordinatenursprung, dies ist die Mitte des Kreuzungspunktes von Strahl- und Targetröhre.

von D^0 -Mesonen ergibt sich hierbei aus der höheren Anzahl zu rekonstruierender Tochtereilchen und der in Abschnitt 7.2.1 bereits ausführlich behandelten geringen Effizienz, mit der kurzlebige Kaonen detektiert werden. Zur eigentlichen Bestimmung der Zerfallszeitauflösung lassen sich auch hier die jeweiligen Residuenverteilungen nutzen. Diese sind zusammen mit einer Parametrisierung durch eine Summe von Gauß-Funktionen in Abbildung 7.18 gezeigt; die Parameter des Fits sind in Tabelle 7.10 zusammengefasst.

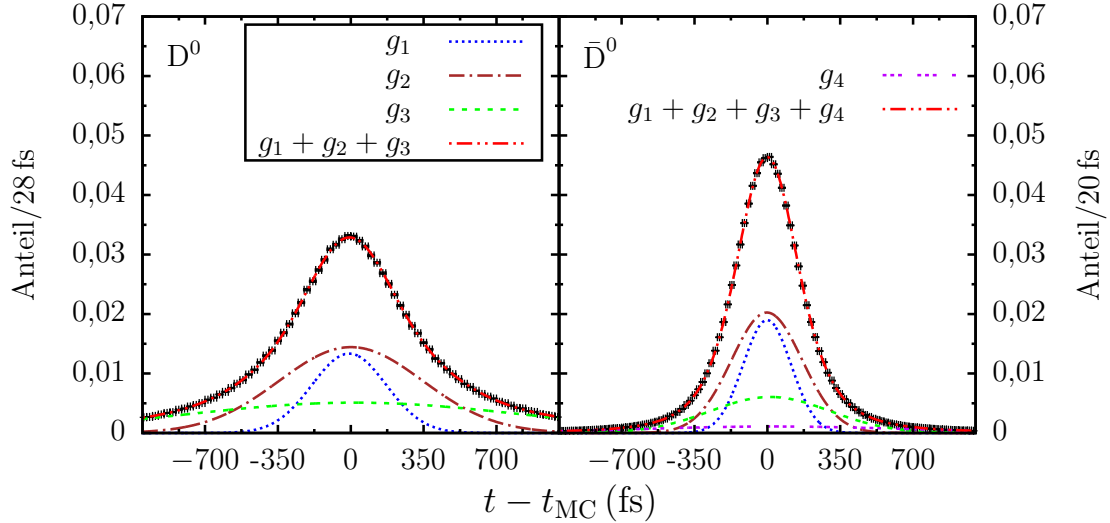


Abbildung 7.18: Residuenverteilungen der D^0 - und $\bar{D}^0$ -Lebensdauern aller im Barrel rekonstruierten D-Mesonen mit der Anpassung durch eine Summe von Normalverteilungen.

Dabei erfordert eine adäquate Beschreibung der $\bar{D}^0$ -Residuen eine Summe von vier Normalverteilungen, während im Falle der D^0 -Residuen bereits eine Summe von drei Normalverteilungen zu einem geringen χ^2/ndf -Wert führt. Mittelt man die Varianzen σ_i^2 mit den Flächen unter der jeweiligen Funktion und nimmt $\bar{\sigma}$ als Maß für die Auflösung, erhält man die Abschätzung

$$\sigma_t(D^0) = (547,4 \pm 4,1) \text{ fs} \quad \sigma_t(\bar{D}^0) = (264,1 \pm 4,5) \text{ fs}. \quad (7.13)$$

Für das $\bar{D}^0$ ist dies in etwa 40 % und für das D^0 um etwa einen Faktor 2,9 größer als die in Abschnitt 3.2 gemachte einfache Abschätzung von $\sigma_t = 189 \text{ fs}$. Der Unterschied der Zerfallszeitauflösung von D^0 und $\bar{D}^0$ erklärt sich zum einen aus der schlechteren Vertexpauflösung für D^0 -Zerfälle, zum anderen aus der höheren Anzahl der Zerfallsteilchen, aus denen der D^0 -Impuls rekonstruiert werden muss. Neben der Rekonstruktion der Zerfallszeiten ist es auch möglich, ereignisweise den Fehler der Zerfallszeitmessung abzuschätzen. Hierzu wird die kombinierte Kovarianzmatrix der Impulse und Ortsvektorkomponenten benötigt, da aus den Impulsen der Tochtereilchen einerseits die D-Impulse rekonstruiert werden (Gleichung 7.12), diese andererseits aber auch zum Auffinden des Zerfallspunktes verwendet werden; entsprechend sind die Orts-

Parameter	D ⁰	$\bar{D}^0$
N_1	$6,0 \pm 0,3$	$5,5 \pm 0,6$
μ_1 (fs)	$-7,9 \pm 1,2$	$-1,1 \pm 0,5$
σ_1 (fs)	$178,3 \pm 3,2$	$115,0 \pm 2,2$
N_2	$12,5 \pm 0,2$	$8,6 \pm 0,4$
μ_2 (fs)	$1,2 \pm 1,3$	$-2,2 \pm 0,7$
σ_2 (fs)	$345,4 \pm 6,8$	$169,6 \pm 5,4$
N_3	$10,4 \pm 0,3$	$4,4 \pm 0,3$
μ_3 (fs)	$17,4 \pm 2,4$	$14,0 \pm 1,6$
σ_3 (fs)	$817,4 \pm 13,6$	$288,6 \pm 12,9$
N_4		$1,8 \pm 0,2$
μ_4 (fs)		$29,3 \pm 2,9$
σ_4 (fs)		$642,0 \pm 38,9$
$\bar{\sigma}$ (fs)	$547,4 \pm 4,1$	$264,1 \pm 4,5$
χ^2/ndf	0,86	0,99

Tabelle 7.10: Ergebnis einer χ^2 -Anpassung der D⁰- und $\bar{D}^0$ -Residuenverteilung mit einer Summe von Normalverteilungen (siehe Abbildung 7.18). Der angegebene Fehler ist rein statistisch, die Zahl der Freiheitsgrade (ndf) beträgt 91 für die Anpassung der D⁰- und 88 im Falle der $\bar{D}^0$ -Residuenverteilungen.

und Impulsmessung miteinander korreliert. Im PandaRoot-Framework besteht zum jetzigen Zeitpunkt lediglich die Möglichkeit, separat die Fehler der Impulse und des Zerfallsortes schätzen zu lassen. Dabei stammt die Kovarianzmatrix der Impulse aus der Anpassung der Tochterteilchen-Trajektorien an die gemessenen Spurpunkte; die des Zerfallsortes wird aus der Unsicherheit des Vertex-Fits geschätzt. Vernachlässigt man die Korrelation zwischen Impuls und Zerfallsort, können die Varianzen der Zerfallszeiten berechnet werden zu

$$\begin{aligned} \sigma_t^2(\mathbf{p}, \mathbf{L}) = & \sum_{i,j} \text{Cov}(L_i, L_j) \frac{\partial t(\mathbf{p}, \mathbf{L})}{\partial L_i} \frac{\partial t(\mathbf{p}, \mathbf{L})}{\partial L_j} \\ & + \sum_{k,l} \text{Cov}(p_k, p_l) \frac{\partial t(\mathbf{p}, \mathbf{L})}{\partial p_k} \frac{\partial t(\mathbf{p}, \mathbf{L})}{\partial p_l}. \end{aligned} \quad (7.14)$$

Einen Test der Adäquatheit dieser Fehlerschätzung erlauben die zugehörigen Pull-Verteilungen, in denen für jedes rekonstruierte D⁰- und $\bar{D}^0$ -Meson das Residuum der Zeitmessung Δt auf die Schätzung des Fehlers σ_t normiert wird. Hierbei ergeben sich für D⁰ und $\bar{D}^0$ gleichermaßen Breiten der Pullverteilungen von $\approx 0,6$ (siehe Anhang G). Dies zeigt, dass die Fehler σ_t im Mittel stark überschätzt werden. Auf eine Verwendung der ereignisweise geschätzten Fehler wird daher verzichtet.

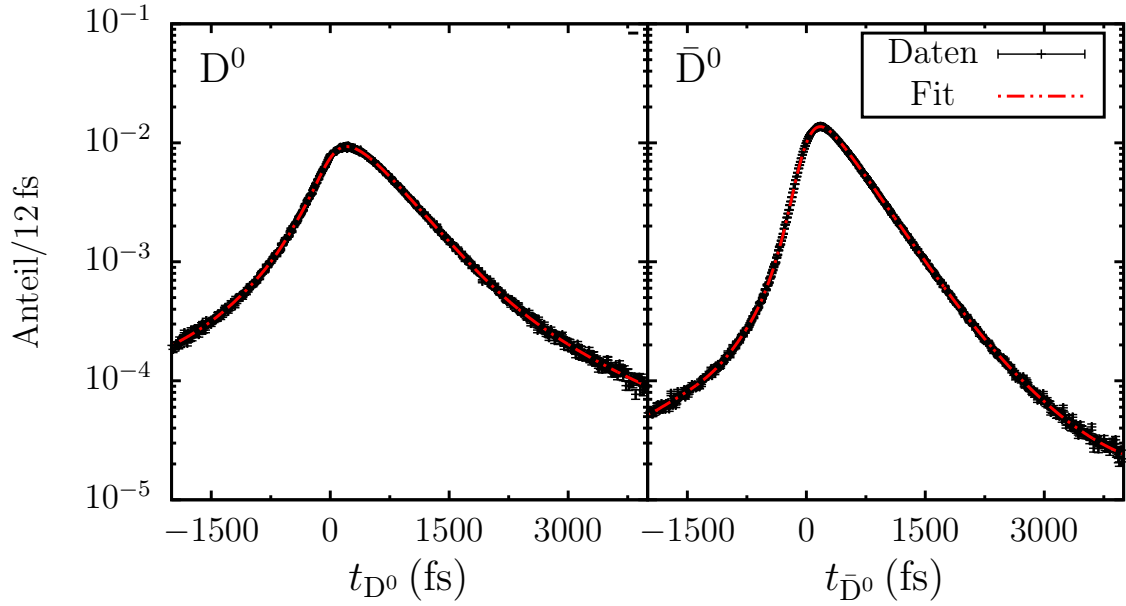


Abbildung 7.19: Verteilung der rekonstruierten D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfallszeiten zusammen mit einem Fit ($\mu_i = 0$) durch eine Faltung aus einer Exponentialverteilung und der Auflösungsfunktion in halblogarithmischer Darstellung bei Verwendung aller rekonstruierten D-Mesonen.

Die rekonstruierten Verteilungen der D^0 - und $\bar{D}^0$ -Lebensdauern sind in Abbildung 7.19 gezeigt. Um diese zu beschreiben, kann die Faltung der als Summe von vier Normalverteilungen parametrisierten Auflösungsfunktion mit der exponentiellen Lebensdauerverteilung verwendet werden. Die explizite Form der zur Anpassung verwendeten Funktion ist

$$p(t|\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^4 N_i f_i(t|\tau, \mu_i, \sigma_i) + b \quad (7.15)$$

$$\boldsymbol{\lambda} = (\tau, N_i, \mu_i, \sigma_i, b),$$

dabei bezeichnet $f_i(t|\tau, \mu, \sigma)$ eine Faltung aus Normal- und Exponentialverteilung (siehe Gleichung 3.40); als Untergrund ist ein konstanter Term b zugelassen, der einer Gleichverteilung entspricht. In Betracht gezogen wurden dabei zwei Varianten der Funktionsanpassung, in denen die Mittelwerte μ_i entweder aus dem Fit bestimmt werden oder auf den Wert $\mu_i = 0$ fixiert sind. Die angepassten Funktionen zeigt Abbildung 7.19, die Parameter der Funktionsanpassungen sind in Tabelle 7.11 zusammengefasst. Die aus dem Fit ($\mu_i = 0$) abgeschätzten mittleren Lebensdauern von

$$\tau(D^0) = (409,92 \pm 0,77) \text{ fs} \quad \tau(\bar{D}^0) = (411,81 \pm 0,26) \text{ fs}, \quad (7.16)$$

stimmen für das D^0 im Rahmen des statistischen Fehlers mit dem Monte-Carlo-Wert

Parameter	$D^0 (\mu_i = 0)$	$\bar{D}^0 (\mu_i = 0)$	D^0	$\bar{D}^0$
τ (fs)	$409,92 \pm 0,77$	$411,81 \pm 0,26$	$406,24 \pm 19,89$	$413,10 \pm 3,56$
N_1	$1,74 \pm 0,33$	$5,27 \pm 0,33$	$0,80 \pm 0,17$	$5,35 \pm 0,28$
μ_1 (fs)	0 (fixiert)	0 (fixiert)	$-24,85 \pm 4,30$	$-1,61 \pm 0,71$
σ_1 (fs)	$136,24 \pm 10,45$	$127,31 \pm 2,43$	$89,82 \pm 10,42$	$126,79 \pm 2,06$
N_2	$4,67 \pm 0,23$	$4,54 \pm 0,26$	$4,65 \pm 0,27$	$4,46 \pm 0,22$
μ_2 (fs)	0 (fixiert)	0 (fixiert)	$-2,22 \pm 3,48$	$-5,10 \pm 1,61$
σ_2 (fs)	$294,38 \pm 15,67$	$225,85 \pm 7,24$	$248,47 \pm 8,95$	$225,50 \pm 6,29$
N_3	$3,63 \pm 0,22$	$1,54 \pm 0,10$	$4,17 \pm 0,20$	$1,58 \pm 0,11$
μ_3 (fs)	0 (fixiert)	0 (fixiert)	$7,24 \pm 30,02$	$14,51 \pm 17,09$
σ_3 (fs)	$615,15 \pm 27,04$	$470,72 \pm 13,51$	$542,86 \pm 15,69$	$480,39 \pm 13,12$
N_4	$1,81 \pm 0,06$	$0,57 \pm 0,01$	$2,07 \pm 0,15$	$0,55 \pm 0,03$
μ_4 (fs)	0 (fixiert)	0 (fixiert)	$40,30 \pm 46,83$	$-21,20 \pm 26,03$
σ_4 (fs)	$1571,68 \pm 107,80$	$1298,65 \pm 35,72$	$1338,67 \pm 57,68$	$1326,01 \pm 40,69$
b (10^{-6})	$48,35 \pm 1,06$	$16,50 \pm 1,05$	$65,63 \pm 5,01$	$16,32 \pm 1,00$
ndf	490	490	486	486
χ^2/ndf	1,32	1,39	1,04	1,11

Tabelle 7.11: Ergebnis eines χ^2 -Fits der D^0 - und $\bar{D}^0$ - Lebensdauerverteilungen mit einer Faltung aus einer Exponentialverteilung und der Auflösungsfunktion. In der ersten Fit-Variante sind die Schwerpunkte der Gaußverteilungen auf Null fixiert; die angegebenen Fehler sind rein statistisch.

von $\tau = 410,1$ fs überein, im Falle des $\bar{D}^0$ zeigt sich eine schwache systematische Überschätzung, die sich aus Abweichungen der verwendeten Auflösungsfunktion und dem Auflösungsverhalten des Detektors ergibt. Im späteren Experiment ist die Genauigkeit einer Lebensdauerermessung maßgeblich von der zur Verfügung stehenden Ereignismenge und der genauen Form des hadronischen Untergrundes abhängig, zudem ist die mittlere D^0 -Lebensdauer bereits mit hoher Präzision gemessen worden. Der durchgeführte Fit soll lediglich zeigen, dass es mit der erreichbaren Zerfallsortauflösung möglich ist, die mittlere Lebensdauer zu bestimmen und die gewählte Form der Auflösungsfunktion das Verhalten des Detektors mit hinreichender Genauigkeit parametrisiert.

7.3.3 Rekonstruktion des primären Interaktionspunktes und Auflösung der Zerfallszeitdifferenz

Die Rekonstruktion der D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfallslängen im Detektor erfordert neben der Rekonstruktion des Zerfallspunktes auch eine Approximation des primären Interaktionspunktes, d. h. des Punktes, an dem die D-Mesonen entstanden sind. Eine Übersicht der Ereignistopologie mit einer Veranschaulichung der Begriffe primärer und sekundärer Vertex gibt Abbildung 7.20. Da es sich bei D^0 - und $\bar{D}^0$ -Meson um

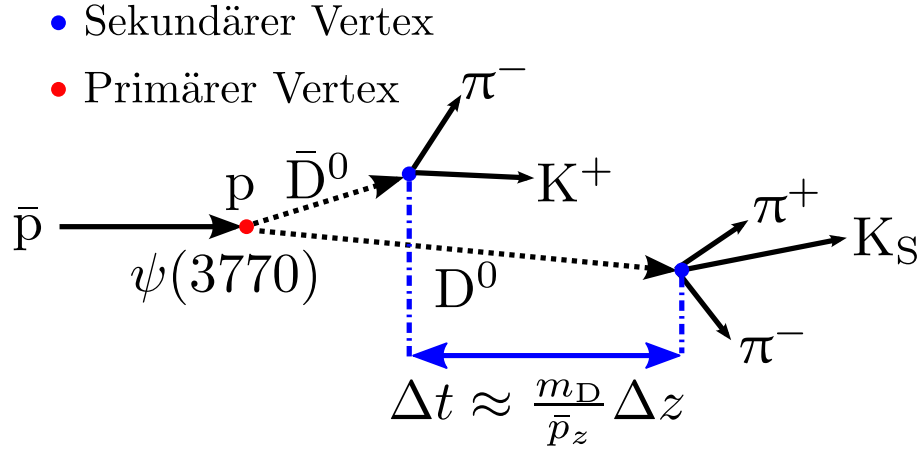


Abbildung 7.20: Topologie des Kanals $\bar{p}p \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (K_S \pi^+ \pi^-) (K^+ \pi^-)$.

elektrisch neutrale Teilchen mit geradliniger Flugbahn innerhalb des Magnetfeldes des Detektors handelt, kann deren gemeinsamer Entstehungspunkt im Zerfall $\psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0$ über den Punkt der kürzesten Annäherung der beiden Trajektorien bestimmt werden. Hierzu wird formal nach dem Verbindungsvektor gesucht, der orthogonal zu beiden Flugbahnen ist; als wahrscheinlichster primärer Vertex wird der Mittelpunkt der kürzesten Verbindungsstrecke verwendet. Es handelt sich hierbei um keinen Fit, benötigt werden hierzu lediglich die Richtungen der rekonstruierten D-Impulse sowie deren rekonstruierte Vertizes. Die Residuenverteilungen der solcherart bestimmten primären Vertizes sind in Abbildung 7.21 gezeigt. Als grobe Abschätzung der Ortsauflösung lässt sich die Standardabweichung verwenden, im abgebildeten Bereich erhält man

$$\sigma_x = 117,5 \mu\text{m} \quad \sigma_y = 113,2 \mu\text{m} \quad \sigma_z = 1045,3 \mu\text{m}. \quad (7.17)$$

Insbesondere die rekonstruierte z -Koordinate ist mit erheblicher Unsicherheit behaftet; anschaulich lässt sich dies aus dem kleinen Öffnungswinkel zwischen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Meson von im Mittel etwa acht Grad verstehen. Im späteren Experiment wird abhängig von der realisierten Target-Option (Pellet oder Cluster-Jet) eine weitere räumliche Eingrenzung des primären Vertex durch die Pellet-Größe oder die Abmessungen der Überlappregion von Strahl und Target möglich sein. Zur Rekonstruktion der Zerfallszeitdifferenz Δt werden hier zwei unterschiedliche Herangehensweisen

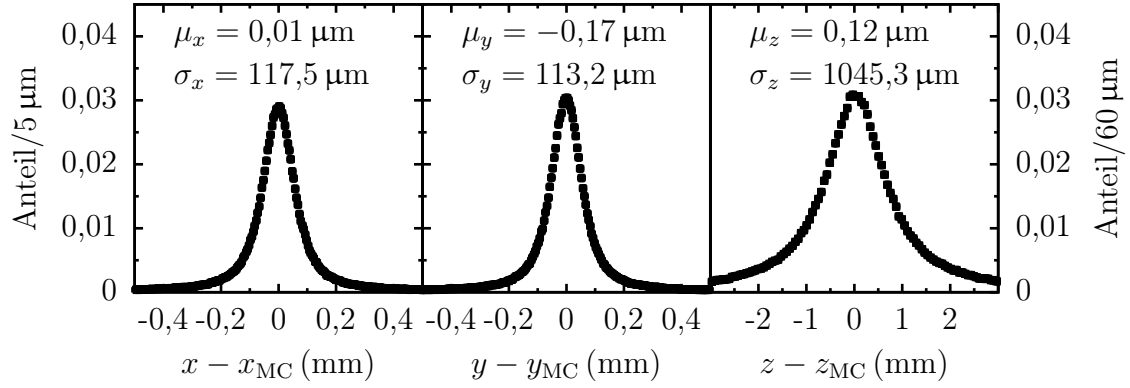


Abbildung 7.21: Residuenverteilungen des primären $\bar{p}p$ -Interaktionspunktes. In den Abbildungen sind jeweils der Mittelwert und die Standardabweichung im abgebildeten Bereich angegeben.

getestet: Einerseits eine Berechnung unter Verwendung des rekonstruierten primären Vertex mit der zu Gleichung 7.11 analogen Form

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_{D^0} - t_{\bar{D}^0} \\ &= \frac{m_D}{p_{D^0}} \left(\frac{\mathbf{p}_{D^0}}{p_{D^0}} \right) \cdot (\mathbf{L}_{D^0} - \mathbf{L}_0) - \frac{m_D}{p_{\bar{D}^0}} \left(\frac{\mathbf{p}_{\bar{D}^0}}{p_{\bar{D}^0}} \right) \cdot (\mathbf{L}_{\bar{D}^0} - \mathbf{L}_0), \end{aligned} \quad (7.18)$$

wobei $\mathbf{L}_0$ den Ortsvektor des primären Interaktionspunktes bezeichnet. In Tabellen und Abbildungen wird dieses Verfahren mit „Poca“⁷ abgekürzt. Andererseits lässt sich eine Methode anwenden, die bereits bei der Analyse von korrelierten B^0 - $\bar{B}^0$ -Paaren aus $\Upsilon(4S)$ -Zerfällen Verwendung gefunden hat [180]. Dabei wird ausgenutzt, dass der maximal mögliche Transversalimpuls der D-Mesonen klein ist gegenüber deren mittleren Longitudinalimpulsen. So erhält man den maximal möglichen Transversalimpuls aus der im Schwerpunktsystem freiwerdenden Energie beim Zerfall des $\psi(3770)$ zu

$$p_{T,\max} = \sqrt{\frac{m_\psi^2 c^2}{4} - m_D^2 c^2} = 285,4 \text{ MeV}/c, \quad (7.19)$$

während der mittlere Longitudinalimpuls

$$\bar{p}_z = \frac{p_{\bar{p}}}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{m_\psi^2}{2m_p} - m_p \right)^2 c^2 - m_p^2 c^2} = 3,29 \text{ GeV}/c \quad (7.20)$$

beträgt. Vernachlässigt man daher die Transversalimpulse und nähert die D^0 - und $\bar{D}^0$ -Impulse durch den mittleren Impuls $\bar{p}_z$, vereinfacht sich Gleichung 7.18 zu einer

⁷Punkt der kürzesten Annäherung, nach dem englischen „Point of closest approach“.

Form, die nur vom Relativabstand der D-Zerfälle abhängt

$$\Delta t \approx \frac{m_D}{\bar{p}_z} (z_{D^0} - z_{\bar{D}^0}) = \frac{m_D}{\bar{p}_z} \Delta z. \quad (7.21)$$

Da die angestrebte relative Impulsauflösung des Antiprotonenstrahles im Betrieb mit hoher Luminosität bei $\Delta p/p = 10^{-4}$ liegen soll, wird bei der Berechnung nach Gleichung 7.21 anstelle des rekonstruierten D^0 - oder $\bar{D}^0$ -Impulses der berechnete Wert von $\bar{p}_z = 3,29 \text{ GeV}/c$ verwendet. Hierdurch ist die Genauigkeit in der Bestimmung der Zerfallszeitdifferenz allein durch die Güte der Rekonstruktion der z -Komponente der D^0 - und $\bar{D}^0$ -Vertizes gegeben. Die Residuenverteilungen der Zerfallszeitdifferenz bei Verwendung der beschriebenen Verfahren sind in Abbildung 7.22 dargestellt. Zum Vergleich ist dort auch die Residuenverteilung der Zerfallszeitdifferenzen gezeigt, die sich ergibt, wenn in Gleichung 7.18 die rekonstruierten Impulse und Vertizes der D-Mesonen verwendet werden, jedoch der in der Simulation gesetzte primäre Monte-Carlo-Vertex von $\mathbf{L}_0 = (0,0,0)$ genutzt wird (Residuen MC).

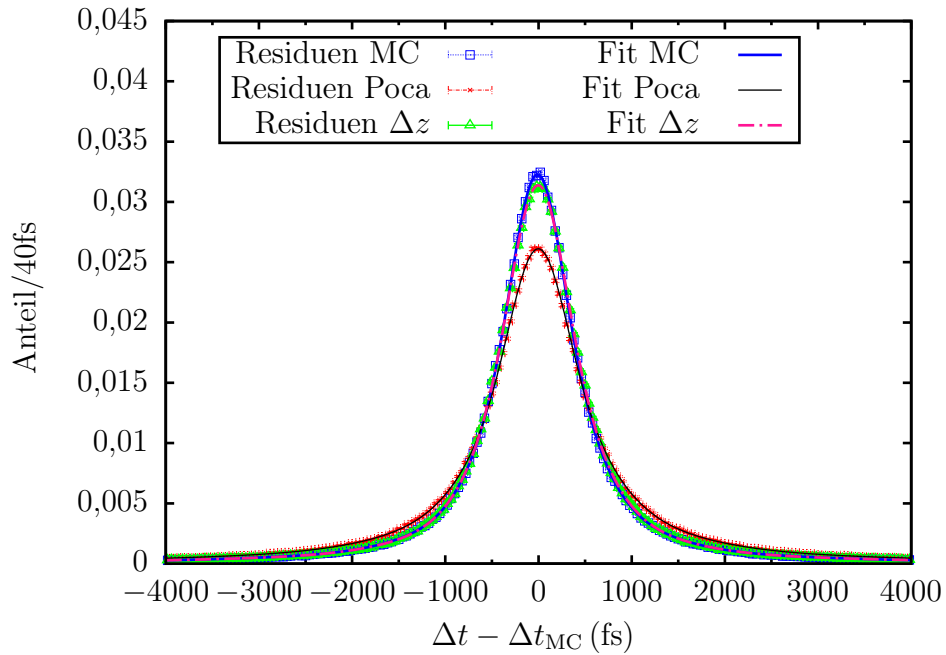


Abbildung 7.22: Residuenverteilungen der rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen bei Verwendung des wahren $\bar{p}p$ -Interaktionspunktes (MC), dessen Abschätzung aus dem Punkt der kürzesten Annäherung (Poca) und bei Rekonstruktion allein über den z -Abstand von D^0 und $\bar{D}^0$ (Δz).

Die Residuenverteilungen lassen sich adäquat durch eine Summe von Normalverteilungen beschreiben. Mittelt man die Varianzen σ_i^2 mit den Flächen N_i unter der jeweiligen Funktion, erhält man als Abschätzung für die Auflösung der Zerfallszeitdifferenz

Parameter	MC	Poca	Δz
N_1	$7,5 \pm 0,6$	$7,7 \pm 0,5$	$8,7 \pm 0,6$
μ_1 (fs)	$-10,2 \pm 1,8$	$-3,3 \pm 2,0$	$-3,8 \pm 1,8$
σ_1 (fs)	$245,8 \pm 5,1$	$288,3 \pm 5,6$	$269,3 \pm 5,4$
N_2	$16,1 \pm 0,4$	$14,1 \pm 0,4$	$16,6 \pm 0,4$
μ_2 (fs)	$-11,4 \pm 1,9$	$-0,6 \pm 2,7$	$-3,1 \pm 2,0$
σ_2 (fs)	$450,3 \pm 9,8$	$549,9 \pm 16,1$	$483,3 \pm 11,3$
N_3	$10,5 \pm 0,4$	$11,1 \pm 0,4$	$9,6 \pm 0,4$
μ_3 (fs)	$4,3 \pm 3,7$	$13,8 \pm 5,0$	$11,7 \pm 4,4$
σ_3 (fs)	$892,3 \pm 19,0$	$1085,8 \pm 42,5$	$962,5 \pm 26,4$
N_4	$6,5 \pm 0,1$	$8,5 \pm 0,3$	$6,0 \pm 0,2$
μ_4 (fs)	$35,0 \pm 9,8$	$7,9 \pm 13,3$	$39,0 \pm 12,5$
σ_4 (fs)	$2447,3 \pm 46,6$	$2871,0 \pm 140,8$	$2634,8 \pm 79,9$
χ^2/ndf	1,12	1,12	1,18

Tabelle 7.12: Ergebnis einer χ^2 -Anpassung der Residuenverteilungen der Zerfallszeitdifferenzen mit einer Summe aus vier Normalverteilungen. Der angegebene Fehler ist rein statistisch, die Zahl der Freiheitsgrade (ndf) beträgt in allen drei Fällen 188. „MC“ bezeichnet die Verwendung des wahren $\bar{p}p$ -Interaktionspunktes, „Poca“ dessen Approximation durch den kürzesten Abstand der D-Trajektorien und „ Δz “ entspricht der Rekonstruktion der Zerfallszeitdifferenz aus dem z -Abstand von D^0 und $\bar{D}^0$.

- a) Verwendung des wahren primären Monte-Carlo-Vertex:
 $\sigma_{\Delta t} = (1120,1 \pm 9,8)$ fs,
- b) Approximation des primären Vertex über den Punkt der kürzesten Annäherung:
 $\sigma_{\Delta t} = (1459,1 \pm 39,2)$ fs,
- c) Berechnung über den z -Abstand des D^0 - und $\bar{D}^0$ -Vertex:
 $\sigma_{\Delta t} = (1159,9 \pm 11,9)$ fs.

Der Vergleich von a) und c) zeigt, dass die bei der Ableitung von Gleichung 7.21 gemachten Näherungen gerechtfertigt sind und es auch ohne explizite Kenntnis des primären Interaktionspunktes möglich ist, die Zerfallszeitdifferenz zu bestimmen. Im Folgenden wird zur Rekonstruktion der Zerfallszeitdifferenz ausschließlich Methode c) verwendet.

Die aus der Simulation bestimmte Auflösung der Zerfallszeitdifferenz von $\sigma_{\Delta t} = (1159,9 \pm 11,9)$ fs ist um mehr als einen Faktor vier schlechter als die in Abschnitt 3.3.3 gemachte Abschätzung von $\sigma_{\Delta t} = 267$ fs. Die Ursache hierfür sind Ereignisse mit starker Mehrfachstreuung, die zu großen Fehlern der rekonstruierten z -Koordinaten und somit der Zerfallszeitdifferenz führen können und mathematisch

durch die Funktion g_4 in der Auflösungsfunktion beschrieben werden. Um diese von der weiteren Analyse auszuschließen, werden im Folgenden zwei Maßnahmen getroffen. Zum Einen wird ein Schnitt auf die rekonstruierte Zerfallszeitdifferenz von $\Delta t = [-3000 \text{ fs}, 3000 \text{ fs}]$ verwendet. Da ein Großteil aller Ereignisse in dieses Intervall fällt

$$\int_{-3000 \text{ fs}}^{3000 \text{ fs}} \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau}\right) d\Delta t = 99,93 \% \quad (7.22)$$

werden primär fehlrekonstruierte Ereignisse ausgeschlossen; die verfügbare Ereignismenge verringert sich durch den Schnitt um 12,2 %. Zum Anderen lässt sich die Fehlerschätzung des Vertex-Fits nutzen, um gezielt Ereignisse mit kleinen Messfehlern zu selektieren. Aufgrund der statistischen Unabhängigkeit der D^0 - von der $\bar{D}^0$ -Zerfallsortrekonstruktion lässt sich der Fehler der Zerfallszeitdifferenz ereignisweise berechnen zu

$$\sigma_{\Delta t} = \frac{m_D}{\bar{p}_z} \sqrt{\sigma_z^2(D^0) + \sigma_z^2(\bar{D}^0)}. \quad (7.23)$$

Von den Fehlern des Vertex-Fits σ_z ist bereits anhand der Pull-Verteilungen gezeigt worden, dass diese in geringem Umfang systematisch überschätzt werden (vgl. Anhang G). Um zu überprüfen wie angemessen die Fehlerschätzung in Gleichung 7.23 ist, lässt sich neben der Pullverteilung auch die Korrelation der Residuen $\delta = \Delta t - \Delta t_{\text{MC}}$ mit den geschätzten Fehlern überprüfen. Hierzu zeigt Abbildung 7.23 die Mittelwerte μ_δ und Standardabweichungen σ_δ der Residuen in Bins der nach Gleichung 7.23 geschätzten Fehler. Hierbei zeigt sich, dass die Mittelwerte der Residuen im Rahmen der statistischen Fehler mit Null verträglich sind. Für nicht

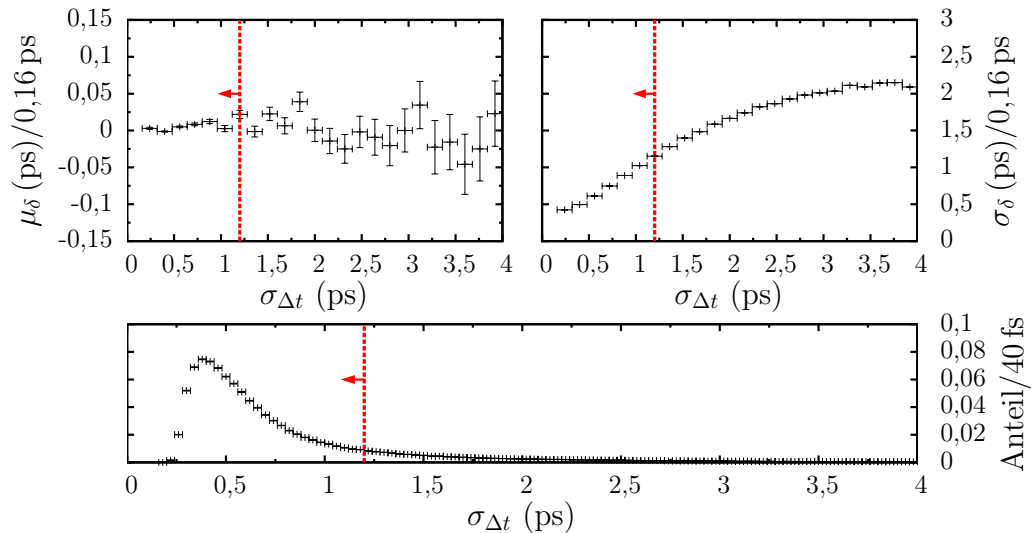


Abbildung 7.23: Verteilung der ereignisweise geschätzten Fehler $\sigma_{\Delta t}$ (unten) sowie Mittelwerte μ_δ (oben links) und Standardabweichung σ_δ (oben rechts) der Residuen in Bins von $\sigma_{\Delta t}$. In rot ist der verwendete Schnitt eingezeichnet.

zu große Werte des geschätzten Fehlers besteht ein nahezu linearer Zusammenhang zwischen den Standardabweichungen der Residuen und den geschätzten Fehlern, d. h. die Schätzung der Fehler ist bis auf einen konstanten Faktor angemessen. Im Folgenden wird ein Schnitt von $\sigma_t < 1200$ fs verwendet.

Parameter	
μ_1 (fs)	$-0,68 \pm 2,12$
μ_2 (fs)	$-5,21 \pm 2,40$
μ_3 (fs)	$30,01 \pm 3,81$
μ_4 (fs)	$0,48 \pm 7,87$
σ_1 (fs)	$560,90 \pm 6,16$
σ_2 (fs)	$325,36 \pm 5,35$
σ_3 (fs)	$1120,09 \pm 5,37$
σ_4 (fs)	$199,04 \pm 5,67$
f_1	$0,43 \pm 0,01$
f_2	$0,63 \pm 0,01$
f_3	$0,76 \pm 0,02$

Tabelle 7.13: Aus einem Likelihood-Fit bestimmte Parameter der Auflösungsfunktion $\mathcal{R}$ der Zerfallszeitdifferenz.

Durch diesen und den Schnitt von $\Delta t = [-3000 \text{ fs}, 3000 \text{ fs}]$ verringert sich die Anzahl der nutzbaren Ereignisse um insgesamt 25,8 %; die Qualität der Zeitauflösung verbessert sich jedoch wesentlich. Aufgrund der verwendeten Maximalwerte kann die Zeitauflösung des verbliebenen Datensatzes direkt über die Standardabweichung abgeschätzt werden zu

$$\sigma_{\Delta t} = 612,7 \text{ fs.} \quad (7.24)$$

Zur Parametrisierung der Zeitauflösung wird folgende Form der Auflösungsfunktion verwendet

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\delta|\boldsymbol{\lambda}) &= f_1 g_1(\delta|\mu_1, \sigma_1) + (1 - f_1) \left[f_2 g_2(\delta|\mu_2, \sigma_2) \right. \\ &\quad \left. + (1 - f_2) \left[f_3 g_3(\delta|\mu_3, \sigma_3) + (1 - f_3) g_4(\delta|\mu_4, \sigma_4) \right] \right] \\ \boldsymbol{\lambda} &= (\mu_i, \sigma_i, f_i). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Aufgrund der Wichtigkeit für die spätere Analyse und zum Erhalt der Normierung erfolgt deren Maximierung mit einem ereignisbasierten Likelihood-Fit, dessen Ergebnis in Tabelle 7.13 zusammengefasst ist. Zur Beurteilung der Güte des Fits ist in Abbildung 7.24 die Residuenverteilung zusammen mit der Auflösungsfunktion dargestellt. Als weiterer Konsistenz-Test wird in der Abbildung die Faltung aus

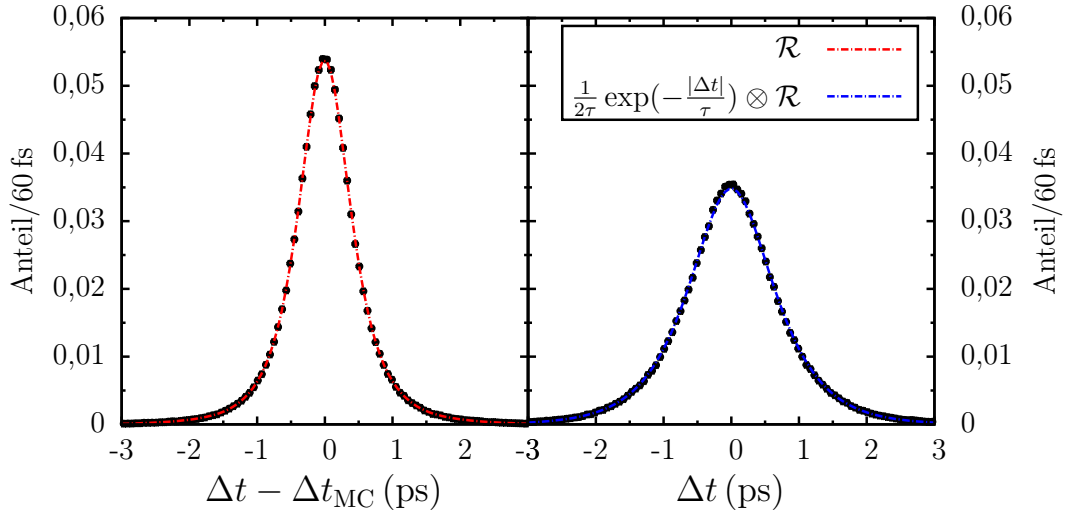


Abbildung 7.24: Residuenverteilung zusammen mit der Auflösungsfunktion (*links*) und die Verteilung der rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen zusammen mit der Faltung aus Lebensdauer- und Auflösungsfunktion (*rechts*).

Auflösungsfunktion und Lebensdauer- und Verteilung

$$p(\Delta t) = \frac{1}{2\tau} \exp\left(-\frac{|\Delta t|}{\tau}\right) \otimes \mathcal{R}(\Delta t) \quad (7.26)$$

mit der Verteilung der rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen verglichen. Dabei ergibt sich eine kleine systematische Abweichung in der Nähe von $\Delta t = 0$, die darauf zurückgeführt werden kann, dass anders als angenommen die Form der Auflösungsfunktion $\mathcal{R}$ nicht vollständig unabhängig von der Zerfallszeitdifferenz ist. Die Auflösungsfunktion in der Form von Gleichung 7.25 mit den Parametern von Tabelle 7.13 wird später auch im Fit zur Extraktion der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparameter verwendet. Im späteren Experiment muss diese entweder aus Monte-Carlo-Simulationen, wie der hier durchgeführten, oder anhand der Messdaten bestimmt werden.

Zum Abschluss dieses Abschnitts soll noch geprüft werden, in welchem Umfang die Auflösung der Zerfallszeitdifferenz über den Dreikörperphasenraum des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ variiert. Abbildung 7.25 stellt hierzu die berechneten Standardabweichungen $\sigma_{\Delta t}$ in einem Dalitz-Diagramm mit einer Unterteilung in 35×35 Bins dar. Hierbei zeigt sich eine systematische Verschlechterung der Auflösung der Zerfallszeitdifferenz mit abnehmender invarianter Masse $m_{\pi\pi}^2$. Anschaulich lässt sich dies derart interpretieren, dass kleine Werte von $m_{\pi\pi}^2$ einer kinematischen Situation entsprechen, in der π^+ und π^- einen geringen Relativimpuls besitzen. In diesem Fall erhöht sich die Unsicherheit der Vertexbestimmung des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ und somit der Fehler der Zerfallszeitdifferenz. Dieser Effekt wird später bei der Bestimmung der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparameter nicht explizit in der verwendeten Likelihoodfunktion implementiert, sondern lediglich in Abschnitt 9.3 bei der Bestimmung

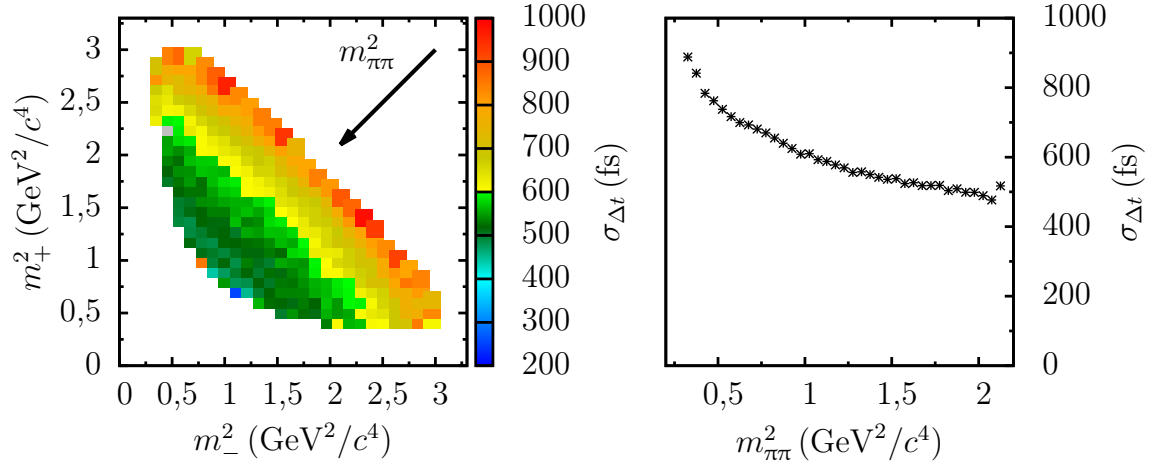


Abbildung 7.25: Standardabweichung der Zerfallszeitdifferenz bei einer Unterteilung des Dalitz-Diagramms ($D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$) in 35×35 Bins (*links*) und Abhängigkeit von $m_{\pi\pi}^2$ (*rechts*).

des systematischen Fehlers berücksichtigt.

7.3.4 Schnitt auf die invariante Masse und Massenauflösung

Zur Rekonstruktion der invarianten Massen von D^0 - und $\bar{D}^0$ -Meson ist es in der Analyse notwendig anhand der Zerfallsteilchen auf deren Viererimpulse zu schließen. Die Rekonstruktion der invarianten $\bar{D}^0$ -Masse erfolgt dabei direkt aus den Viererimpulsen der Tochterteilchen im Zerfall $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$

$$m_{\bar{D}^0} = \sqrt{(\mathbf{P}_{K^+} + \mathbf{P}_{\pi^-(\bar{D}^0)})^2}/c, \quad (7.27)$$

in runden Klammern ist hierbei für Teilchen die mehrfach im Endzustand auftreten das wahre Mutterteilchen mit angegeben. Im Falle des D^0 , das über den Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ nachgewiesen wird, ist es zunächst notwendig den Viererimpuls des K_S zu ermitteln

$$\mathbf{P}_{K_S} = \mathbf{P}_{\pi^+(K_S)} + \mathbf{P}_{\pi^-(K_S)}. \quad (7.28)$$

Die invariante D^0 -Masse ergibt sich hiermit zu

$$m_{D^0} = \sqrt{(\mathbf{P}_{K_S} + \mathbf{P}_{\pi^+(D^0)} + \mathbf{P}_{\pi^-(D^0)})^2}/c. \quad (7.29)$$

Da im untersuchten Kanal insgesamt ein K^+ , $2\pi^+$ und $3\pi^-$ auftreten, gibt es insgesamt 12 Alternativen, die detektierten Teilchen der angenommenen Ereignistopologie zuzuordnen. Um die durch den Detektor bedingte Auflösung der invarianten Masse nicht durch diesen kombinatorischen Untergrund zu überdecken, wird hier anhand von Monte-Carlo-Information die Identität des jeweiligen Mutterteilchens überprüft. Eine Analyse des kombinatorischen Untergrundes erfolgt in Abschnitt 7.5.

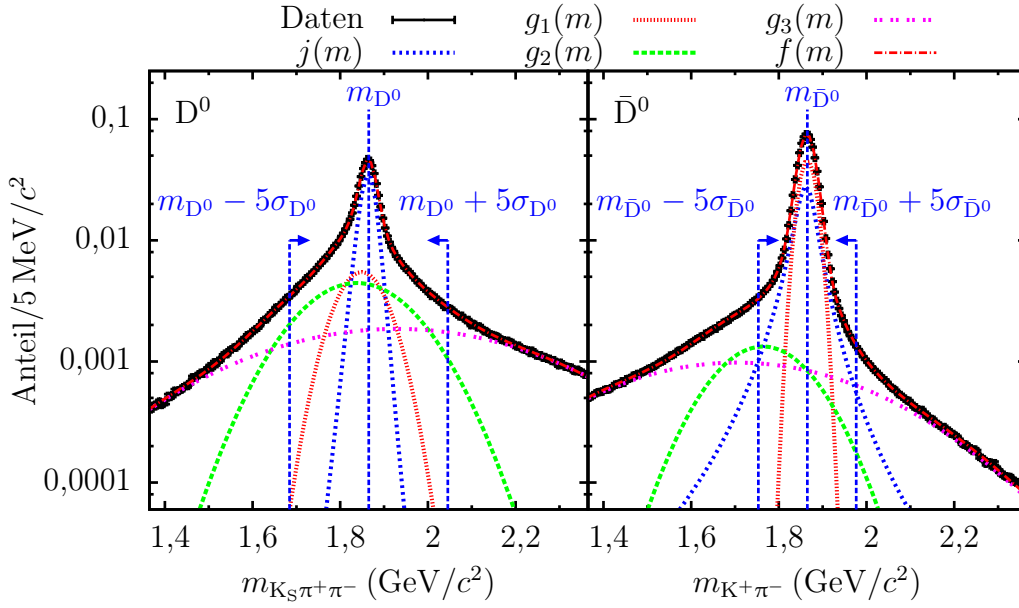


Abbildung 7.26: Verteilung der rekonstruierten D^0 - (*links*) und $\bar{D}^0$ -Massen (*rechts*) zusammen mit der Funktion des Fits in halblogarithmischer Darstellung. In blau ist der verwendete Schnitt gezeigt.

Die Verteilungen der rekonstruierten invarianten Massen von D^0 - und $\bar{D}^0$ -Meson sind in Abbildung 7.26 gezeigt. In der Nähe der D-Masse lässt sich die Verteilung näherungsweise durch folgende Funktion beschreiben [34]

$$f(m|\boldsymbol{\lambda}) = N_J j(m|\mu_J, \sigma_J, \delta_J, \gamma_J) + \sum_{i=1}^3 N_i g_i(m|\mu_i, \sigma_i). \quad (7.30)$$

Hierbei bezeichnet j die sogenannte Johnson-Funktion [181]

$$j(x|\mu, \sigma, \delta, \gamma) = \frac{\exp(-\frac{1}{2} [\gamma + \delta \sinh^{-1}(\frac{x-\mu}{\sigma})]^2)}{\sqrt{1 + (\frac{x-\mu}{\sigma})^2}}, \quad (7.31)$$

wobei die Parameter δ und γ deren Asymmetrie charakterisieren. Die Parametrisierung in Gleichung 7.30 lässt sich ähnlich interpretieren wie die zur Parametrisierung der K_S -Masse verwendete Funktion in Abschnitt 7.2.3. Mehrfachstreuung entspricht hierbei breiteren Normalverteilungen, die aufgrund des Energieverlustes in der Streuung zu kleineren invarianten Massen verschoben sind. Das Ergebnis eines Fits mit der funktionalen Form von Gleichung 7.30 ist in Tabelle 7.14 zusammengefasst. Verwendet man die Breite der Johnson-Funktion als Maß für die Massenauflösung, erhält man die Abschätzung

$$\sigma_m(D^0) = 36,1 \pm 1,7 \text{ MeV}/c^2 \quad \sigma_m(\bar{D}^0) = 22,3 \pm 1,2 \text{ MeV}/c^2. \quad (7.32)$$

Parameter	D ⁰	$\bar{D}^0$
$N_J (10^{-3})$	$35,23 \pm 0,34$	$28,46 \pm 1,00$
$\mu_J (\text{MeV}/c^2)$	$1867,74 \pm 0,45$	$1863,42 \pm 0,45$
$\sigma_J (\text{MeV}/c^2)$	$36,04 \pm 1,66$	$22,28 \pm 1,16$
δ_J	$2,01 \pm 0,11$	$0,86 \pm 0,07$
γ_J	$0,26 \pm 0,03$	$0,13 \pm 0,01$
$N_1 (10^{-3})$	$0,75 \pm 0,02$	$2,19 \pm 0,06$
$\mu_1 (\text{MeV}/c^2)$	$1848,63 \pm 0,71$	$1865,22 \pm 0,18$
$\sigma_1 (\text{MeV}/c^2)$	$54,58 \pm 1,38$	$18,95 \pm 0,11$
$N_2 (10^{-3})$	$1,36 \pm 0,02$	$-0,35 \pm 0,05$
$\mu_2 (\text{MeV}/c^2)$	$1837,83 \pm 0,58$	$1763,89 \pm 11,31$
$\sigma_2 (\text{MeV}/c^2)$	$122,31 \pm 1,68$	$105,65 \pm 3,62$
$N_3 (10^{-3})$	$1,50 \pm 0,02$	$0,71 \pm 0,02$
$\mu_3 (\text{MeV}/c^2)$	$1929,06 \pm 2,43$	$1704,33 \pm 4,57$
$\sigma_3 (\text{MeV}/c^2)$	$322,86 \pm 3,68$	$291,16 \pm 3,39$
χ^2/ndf	1,43	4,52

Tabelle 7.14: Ergebnis einer χ^2 -Anpassung der D⁰- und $\bar{D}^0$ -Massenverteilung mit einer Summe aus drei Normalverteilungen und einer Johnson-Funktion. Der angegebene Fehler ist rein statistisch, die Zahl der Freiheitsgrade (ndf) beträgt in beiden Fällen 186.

Diese Werte übersteigen deutlich die Massenauflösungen in anderen Experimenten. Am BaBar-Experiment wurde beispielsweise im auch hier analysierten Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ eine Auflösung der D⁰-Masse von $\sigma_m(D^0) = 6,7 \text{ MeV}/c^2$ erreicht [74]. Bedenkt man jedoch, dass zur Abschätzung der in Gleichung 7.32 angegebenen Werte keinerlei kinematischer Fit Verwendung gefunden hat und die zur Spurfundung verwendeten Algorithmen der Simulation noch keinen finalen Status erreicht haben, liegen diese durchaus in der zu erwartenden Größenordnung. Im Weiteren wird ein Massenschnitt von $m_D \pm 5\sigma_m$ verwendet, hierdurch gehen 26,0 % der D⁰- und 17,1 % aller $\bar{D}^0$ -Kandidaten für die weitere Analyse verloren.

7.3.5 Auflösung der Dalitz-Diagramm-Variablen m_+^2 und m_-^2

Neben der Auflösung der invarianten Massen des D⁰- und $\bar{D}^0$ -Mesons zur Untergrundreduktion ist für die Analyse der Dreikörperamplitude des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ die Auflösbarkeit der Dalitz-Diagramm-Variablen, d. h. der invarianten Massen

$$\begin{aligned} m_+^2 &= (\mathbf{P}_{K_S} + \mathbf{P}_{\pi^+})^2 / c^2 \\ m_-^2 &= (\mathbf{P}_{K_S} + \mathbf{P}_{\pi^-})^2 / c^2 \end{aligned} \quad (7.33)$$

von Bedeutung. Um die Variation der Auflösungen $\sigma_{\pm} = \sigma(m_{\pm})$ über den Dreikörperphasenraum qualitativ zu beschreiben, sind in einem Dalitz-Diagramm von 25×25 Bins die Standardabweichungen $\sigma_{\pm}$ und zur Untersuchung von systematischen Effekten die Mittelwerte $\mu_{\pm} = \mu(m_{\pm})$ der Residuen in jedem Bin berechnet worden. Verwendet werden hierzu in jedem Ereignis die Abweichungen zwischen der rekonstruierten invarianten Masse m_{rek} und der invarianten Masse m_{MC} , die sich aus den wahren Viererimpulsen des ursprünglichen generierten Ereignisses ergibt. Zum Ausschluss von Ereignissen mit starker Streuung erfolgt die Berechnung nur mit Residuen $|m_{\text{rek}} - m_{\text{MC}}| < 1 \text{ GeV}/c^2$, die Darstellung erfolgt in Abhängigkeit der generierten invarianten Massen m_{MC} . Die betreffenden Dalitz-Diagramme sind in Abbildung 7.27 zusammengefasst. Hierbei zeigt sich, dass die Standardabweichungen

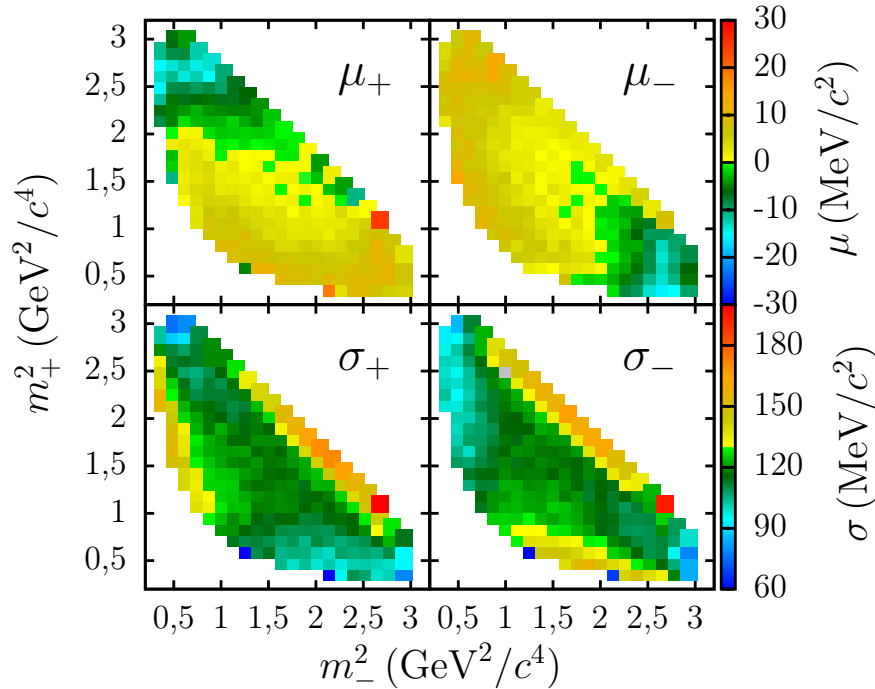


Abbildung 7.27: Variation der Mittelwerte und der Standardabweichungen von $m_{\pm}$ innerhalb des Dalitz-Diagramms.

σ_+ in Phasenraumregionen, die kleinen Werten von m_+ entsprechen, minimal sind, während σ_- ein Maximum annimmt. Besonders deutlich ist dies auch in den eindimensionalen Projektionen in Abbildung 7.28. Dieses Verhalten kann auf die Fehler der Impulsmessung der zur Rekonstruktion verwendeten Teilchen zurückgeführt werden. So nimmt bei Zunahme von m_+ auch der mittlere Impuls von K_S und π^+ sowie der Absolutwert des Impulsfehlers zu, was sich in einem höheren Fehler von m_+ äußert. Anschaulich entartet die Trajektorie eines geladenen Teilchens im magnetischen Feld von einer Helix bei sehr hohen Impulsen zu einer Geraden, wodurch sich die Impulsmessung erschwert. Durch eine ähnliche Argumentation lässt sich

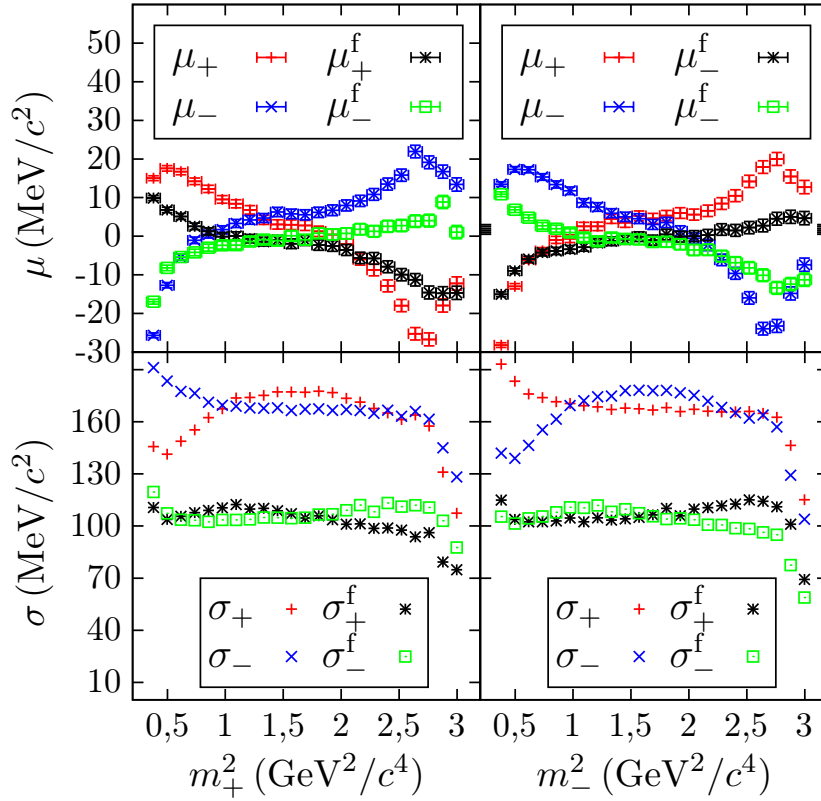


Abbildung 7.28: Mittelwerte und Standardabweichungen von $m_{\pm}$ vor ($\mu_{\pm}$, $\sigma_{\pm}$) und nach ($\mu_{\pm}^f$, $\sigma_{\pm}^f$) dem kinematischen Fit in Abhängigkeit von $m_{\pm}^2$.

auch der Verlauf der Mittelwerte μ_{+} in Abhängigkeit von m_{+} erklären. So sind bei hohen Energien der zur Rekonstruktion verwendeten Teilchen auch die Absolutwerte der Energieverluste durch Streuung hoch, was zu negativen Werten der Mittelwerte der Residuen führt. Die negative Korrelation von $\sigma_{+}(m_{+}^2)$ mit $\sigma_{-}(m_{+}^2)$ und $\mu_{+}(m_{+}^2)$ mit $\mu_{-}(m_{+}^2)$ folgt formal aus der Energieerhaltung im D^0 -Zerfall

$$M_{D^0}^2 + m_{K_S}^2 + m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^-}^2 = m_{+}^2 + m_{-}^2 + m_{\pi\pi}^2. \quad (7.34)$$

Zur Reduktion der hohen Fehler $\sigma_{\pm}$ ist in der Analyse ein kinematischer Fit⁸ mit der D-Masse als Zwangsbedingung verwendet worden. Der Anzahl der Zwangsbedingungen entsprechend besitzt der Fit einen Freiheitsgrad (siehe hierzu [176]); Abbildung 7.29 zeigt die χ^2 -Verteilung aller Ereignisse sowie die Verteilung der hieraus berechneten $\mathcal{P}$ -Werte. Die Mittelwerte und Standardabweichungen der invarianten Massen, die sich bei einem Schnitt auf den $\mathcal{P}$ -Wert des kinematischen Fits von $\mathcal{P} > 0,1$ ergeben, sind in Abbildung 7.28 gezeigt und mit $\mu_{\pm}^f$ beziehungsweise $\sigma_{\pm}^f$ bezeichnet.

⁸ *PndKinFitter* des PandaRoot-Frameworks.

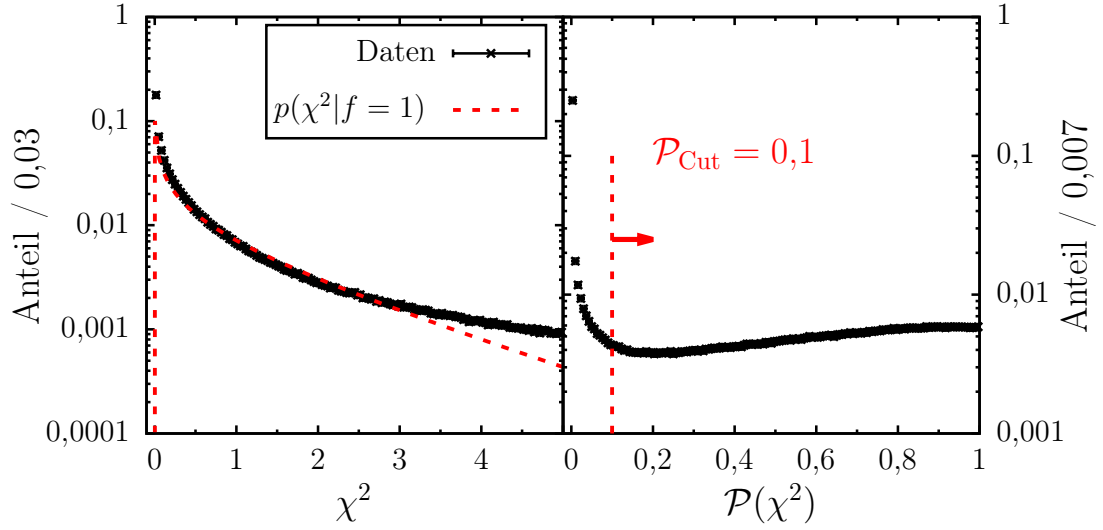


Abbildung 7.29: χ^2 - und $\mathcal{P}$ -Wert-Verteilung des kinematischen Fits mit m_D als Zwangsbedingung in halblogarithmischer Darstellung.

Durch den Schnitt auf den $\mathcal{P}$ -Wert gehen 49,3 % aller rekonstruierten D^0 -Mesonen für die weitere Analyse verloren, die Qualität des verbliebenen Datensatzes erhöht sich jedoch beträchtlich. Insbesondere wird die Variation der Mittelwerte und Standardabweichungen über den Phasenraum deutlich reduziert. Während die Analyse der $\mu_{\pm}$ und $\sigma_{\pm}$ ein geeignetes Mittel ist, den qualitativen Verlauf der Auflösung über den Phasenraum zu bestimmen, ist diese für eine quantitative Betrachtung ungeeignet, da die absolute Höhe der $\sigma_{\pm}$ stark davon abhängig ist, in welchem Bereich der Residuen $|m_{\text{rek}} - m_{\text{MC}}| < m_{\text{Grenz}}$ die Mittelwerte und Standardabweichungen berechnet werden. So unterschieden sich beispielsweise die Werte von σ_{+} , die sich bei einer Grenze von $m_{\text{Grenz}} = 1 \text{ GeV}/c^2$ bzw. $m_{\text{Grenz}} = 0,1 \text{ GeV}/c^2$ ergeben, um etwa einen Faktor 3,6.

Da der Verlauf von $\sigma_{\pm}$ nach dem kinematischen Fit im gesamten Phasenraum recht homogen ist, kann die Auflösung unabhängig von der Lage eines Ereignisses im zweidimensionalen Phasenraum betrachtet werden. Abbildung 7.30 zeigt hierzu für alle Ereignisse die Residuenverteilungen von m_{+} und m_{-} nach dem kinematischen Fit. Um diese näherungsweise zu beschreiben lässt sich die Johnson-Funktion $j(m_{\pm})$ (siehe Gleichung 7.31) verwenden

$$f(m|\boldsymbol{\lambda}) = Nj(m_{\pm}|\mu, \sigma, \delta, \gamma). \quad (7.35)$$

Der Fit mit dieser funktionalen Form ist in Abbildung 7.30 gezeigt, dessen Parameter sind in Tabelle 7.15 zusammengefasst.

Aufgrund einer systematischen Abweichung im Zentrum und bei hohen Werten der Verteilung entspricht den Funktionsanpassungen ein formal hoher Wert von $\chi^2/\text{ndf} \approx 15$. Der Wert von χ^2/ndf hängt hierbei stark vom Intervall $|m_{\text{rek}} - m_{\text{MC}}| <$

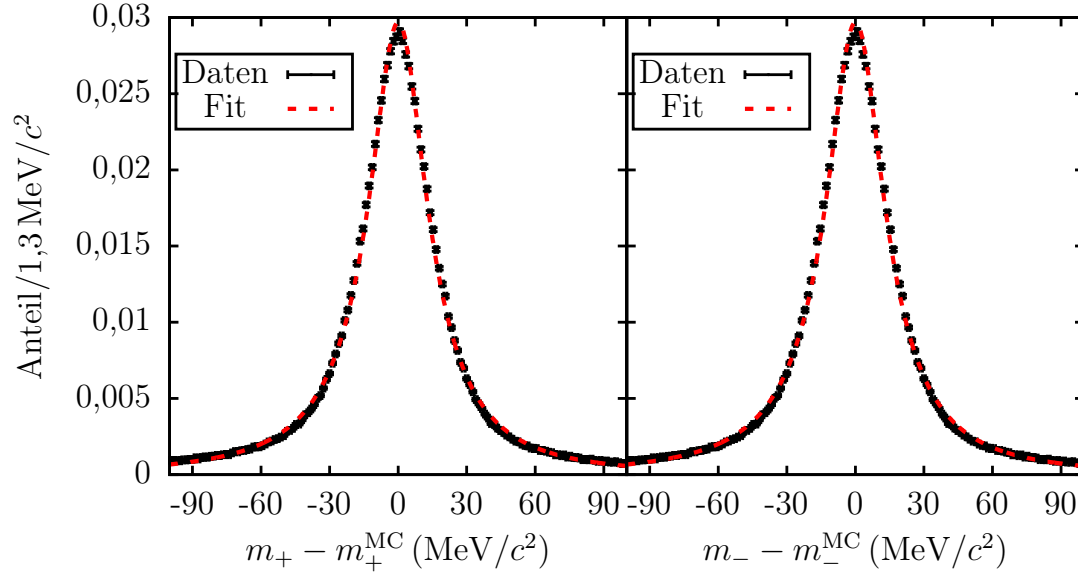


Abbildung 7.30: Fit der Residuenverteilung von m_+ und m_- mit einer Johnson-Funktion.

Parameter	m_+	m_-
$N (10^{-3})$	$29,71 \pm 0,25$	$29,70 \pm 0,23$
$\mu (\text{MeV}/c^2)$	$0,35 \pm 0,17$	$0,24 \pm 0,16$
$\sigma (\text{MeV}/c^2)$	$13,48 \pm 0,24$	$13,51 \pm 0,22$
δ	$0,71 \pm 0,01$	$0,72 \pm 0,01$
γ	$0,05 \pm 0,01$	$0,04 \pm 0,01$
χ^2/ndf	18,11	15,64

Tabelle 7.15: Ergebnis einer χ^2 -Anpassung der m_+ - und m_- -Residuenverteilung mit einer Johnson-Funktion. Der angegebene Fehler ist rein statistisch, die Zahl der Freiheitsgrade (ndf) beträgt in beiden Fällen 145.

m_{Grenz} ab, in dem der Fit ausgeführt wird. Das Ergebnis der Fitparameter hingegen ist ausgesprochen stabil gegen Änderungen des betrachteten Intervalls. Verwendet man die Breite der Johnson-Funktion als Maß für die Auflösung der invarianten Massen, erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned}\sigma_+ &= (13,48 \pm 0,24 \pm 3,59) \text{ MeV}/c^2 \\ \sigma_- &= (13,51 \pm 0,22 \pm 3,60) \text{ MeV}/c^2,\end{aligned}\tag{7.36}$$

hierbei ist der erste Fehler der statistische Fehler des Fits. Als systematischer Fehler ist die Abweichung von $\sigma_{\pm}$ zu einem Fit in einem sehr breiten Intervall von

$|m_{\text{rek}} - m_{\text{MC}}| < 1 \text{ GeV}/c^2$ angegeben. Im Rahmen der Fehler sind σ_+ und σ_- gleich, was darauf zurückgeführt werden kann, dass sich m_+ und m_- lediglich durch die Ladung des zur Rekonstruktion verwendeten Pions unterscheiden (siehe Gleichung 7.33), die Güte der Impulsrekonstruktion jedoch unabhängig vom Vorzeichen der Ladung ist.

Im Verhältnis zu den relevanten invarianten Massen sind die Auflösungen $\sigma_{\pm}$ klein, dem Beispiel von vielen anderen Dalitz-Diagramm-Analysen folgend wird daher auf eine explizite Berücksichtigung der Massenauflösung verzichtet (siehe z. B. [51]). Inwieweit diese Annahme gerechtfertigt ist, überprüft Abschnitt 9.1.

Methoden zur expliziten Berücksichtigung der Auflösung der invarianten Massen sind aufwendig. So führt eine analytische Faltung der Auflösungsfunktion von $m_{\pm}^2$ mit der Übergangsamplitude aufgrund der verwendeten K -Matrix Parametrisierung zu sehr komplexen Ausdrücken, während eine numerische Integration abhängig von der gewünschten Genauigkeit die Rechenzeit pro Iteration des Fits wesentlich erhöht. Darüber hinaus muss in beiden Fällen eine adäquate analytische Form der Auflösungsfunktion bekannt sein, die nach Möglichkeit Korrelationen zwischen σ_+ und σ_- berücksichtigt. Im Falle eines χ^2 -Fits besteht zudem prinzipiell die Möglichkeit eines Monte-Carlo basierten Ansatzes, in dem in jeder Iteration des Fits anhand des aktuellen Werts der Parameter der Zerfallsamplitude Ereignisse generiert werden, deren Vergleich mit den gemessenen Ereignissen jedoch nach dem Durchlaufen einer detektorbasierten Simulation des Experiments oder einer effektiven Parametrisierung der Impulsauflösung erfolgt. Auch dieses Vorgehen erfordert einen sehr hohen Aufwand an Rechenzeit pro Iteration des Fits.

7.4 Schnitt in der p_L - p_T -Ebene

Experimentell ist es besonders schwierig den untersuchten Zerfallskanal

$$\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (K_S \pi^+ \pi^-) (K^+ \pi^-) \quad (7.37)$$

von der direkten Produktion des gleichen Endzustandes

$$\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2 \pi^- K^+ K_S \quad (7.38)$$

zu unterscheiden. Die Ereignistopologien dieser Reaktionen sind in Abbildung 7.31 veranschaulicht. Aufgrund der exakt gleichen Endzustandsteilchen kann eine Diskriminierung des Untergrundes gegenüber dem Signalkanal allein anhand der unterschiedlichen Kinematik vorgenommen werden. Wie Abschnitt 8.2 zeigt, ist ein

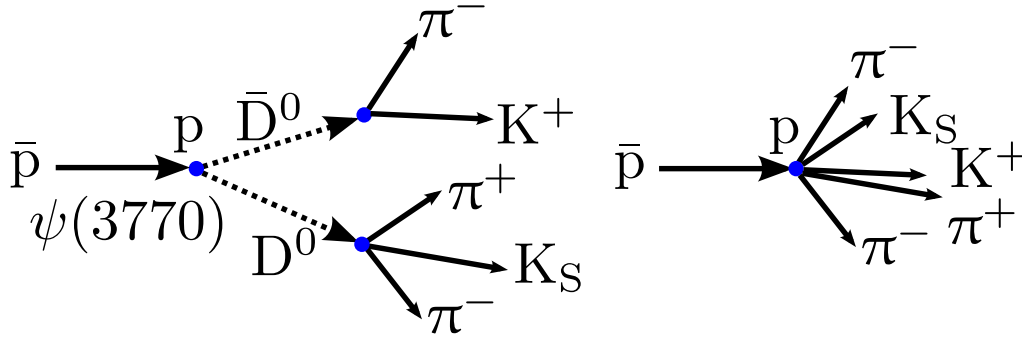


Abbildung 7.31: Topologie des Signalkanals (*links*) und der nichtresonanten Produktion des gleichen Endzustandes (*rechts*).

Schnitt auf den Abstand zwischen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Vertex nicht sinnvoll, während die Effizienz eines Schnitts auf den Abstand zwischen D-Zerfällen und Primärvertex maßgeblich von der Art des verwendeten Targets abhängig ist. Hingegen schränkt die Energie- und Impulserhaltung (Viererimpulserhaltung) in Produktion und Zerfall der D-Mesonen in Reaktion 7.37 die möglichen Impulse der Endzustandsteilchen gegenüber der Reaktion 7.38 ein. Ein Teil dieser kinematischen Information ist in den rekonstruierten invarianten Massen m_{D^0} und $m_{\bar{D}^0}$ enthalten und lässt sich durch einfache Schnitte berücksichtigen (siehe Abschnitt 7.3.4).

Hier sollen nun die physikalisch erlaubten Impulsbereiche der Teilchen im Signalkanal (Reaktion 7.37) bestimmt werden, um hieraus einen effektiven Schnitt gegenüber dem Untergrund (Reaktion 7.38) zu konstruieren. Aufgrund der Zylindersymmetrie bezüglich der Richtung des Antiprotonenstrahls ist es ausreichend, Impulse in einer Ebene aus Transversalimpuls (p_T) und Longitudinalimpuls (p_L) zu betrachten. Besonders einfach ist es, die erlaubten Impulse zunächst im Ruhesystem des zerfallenden Teilchens zu berechnen und hieraus die Impulse im Laborsystem durch eine Lorentztransformation zu bestimmen. Im Ruhesystem des $\psi(3770)$ ist bereits der Impuls der D-Mesonen in Gleichung 7.19 berechnet worden zu $p_D = 285,4 \text{ MeV}/c$. Parametrisiert man nun Transversal- und Longitudinalimpuls in Abhängigkeit des Polarwinkels im

CMS und wechselt durch eine Lorentztransformation ins Laborsystem erhält man

$$\begin{aligned} p'_T(D) &= p_D \sin(\vartheta) \\ p'_L(D) &= \gamma_\psi (p_D \cos(\vartheta) + \beta_\psi E_D/c). \end{aligned} \quad (7.39)$$

Nichtrelativistisch gilt für den Longitudinalimpuls $p'_L(D) = p_D \cos(\vartheta) + p_{\bar{p}}/2$ und Gleichung 7.39 entspricht einer Kreisgleichung. Abbildung 7.32 zeigt die physikalisch erlaubten D-Impulse in der p_L - p_T -Ebene. Analog zu diesem Vorgehen kann auch der

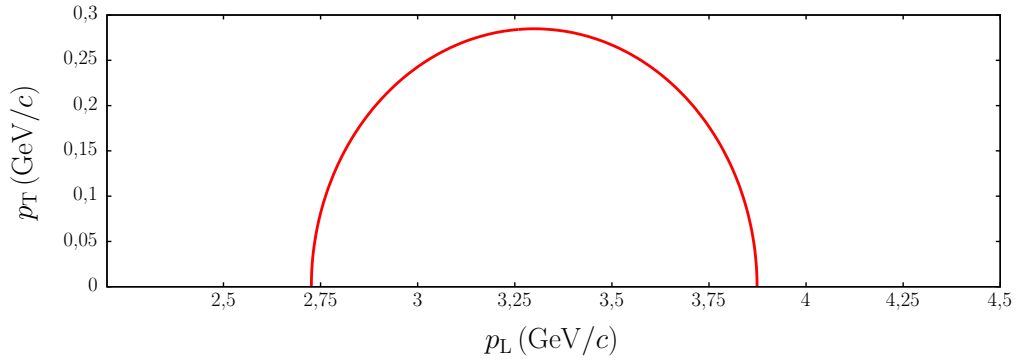


Abbildung 7.32: Hyperbel der möglichen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Impulse in der p_L - p_T -Ebene.

Impuls des K^+ im Ruhesystem des $\bar{D}^0$ berechnet werden zu

$$p_K = \sqrt{\left(\frac{m_D^2 c^2 + m_K^2 c^2 - m_\pi^2 c^2}{2m_D c} \right)^2 - m_K^2 c^2} = 865,3 \text{ MeV}/c. \quad (7.40)$$

Auch hier ergibt sich der Laborimpuls des K^+ aus einer Lorentztransformation. Da diese entlang des Geschwindigkeitsvektors des $\bar{D}^0$ erfolgt, der in der Regel nicht parallel zur Strahlachse ist, wirkt diese sowohl auf Transversal- als auch auf die Longitudinalkomponente des Impulses. Hierbei wird der Betrag des Laborimpulses p'_K maximal, falls $\mathbf{p}_K$ parallel zum Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{\beta}_{\bar{D}^0}$ ist und minimal für antiparallele Orientierung. Parametrisiert man mit Gleichung 7.39 die Geschwindigkeit des $\bar{D}^0$ -Mesons in Abhängigkeit des Polarwinkels erhält man

$$\begin{aligned} (\mathbf{p}'_K)_{\max/\min} &= \pm \mathbf{p}_K + \boldsymbol{\beta}_D \cdot \left(\pm \boldsymbol{\beta}_D \cdot \mathbf{p}_K \frac{\gamma_D - 1}{|\boldsymbol{\beta}_D|^2} + \gamma_D E_K/c \right) \\ \text{mit } \boldsymbol{\beta}_{\bar{D}^0} &= \left(\begin{array}{c} \frac{p_D}{m_D c} \sin(\vartheta) \\ \frac{\gamma_\psi}{m_D c} (p_D \cos(\vartheta) + \beta_\psi E_D/c) \end{array} \right) \\ \text{und } \mathbf{p}_K &= \left(\begin{array}{c} p_K \sin(\vartheta) \\ p_K \cos(\vartheta) \end{array} \right). \end{aligned} \quad (7.41)$$

Physikalisch erlaubt sind hierbei alle Impulse, die innerhalb der durch $(p_T, p_L)_{\max/\min}$ umschlossenen Fläche liegen. Mit dem beschriebenen Verfahren ist es möglich, für alle Teilchen des untersuchten Kanals erlaubte Impulsregionen zu bestimmen. Die berech-

neten Grenzen sind zusammen mit den rekonstruierten Ereignissen des Signalkanals in Abbildung 7.33 gezeigt. Im Falle von D^0 - und $\bar{D}^0$ -Meson entsprechen die erlaubten Impulse, wie gezeigt, einer schmalen Hyperbel, die jedoch aufgrund der experimentellen Auflösung aufgeweitet wird. Daher ist für diese Teilchen anstatt berechneter Grenzen anhand der rekonstruierten Verteilung eine Schnittregion bestimmt worden. Dargestellt sind in Abbildung 7.33 die rekonstruierten Impulse, wobei für jedes

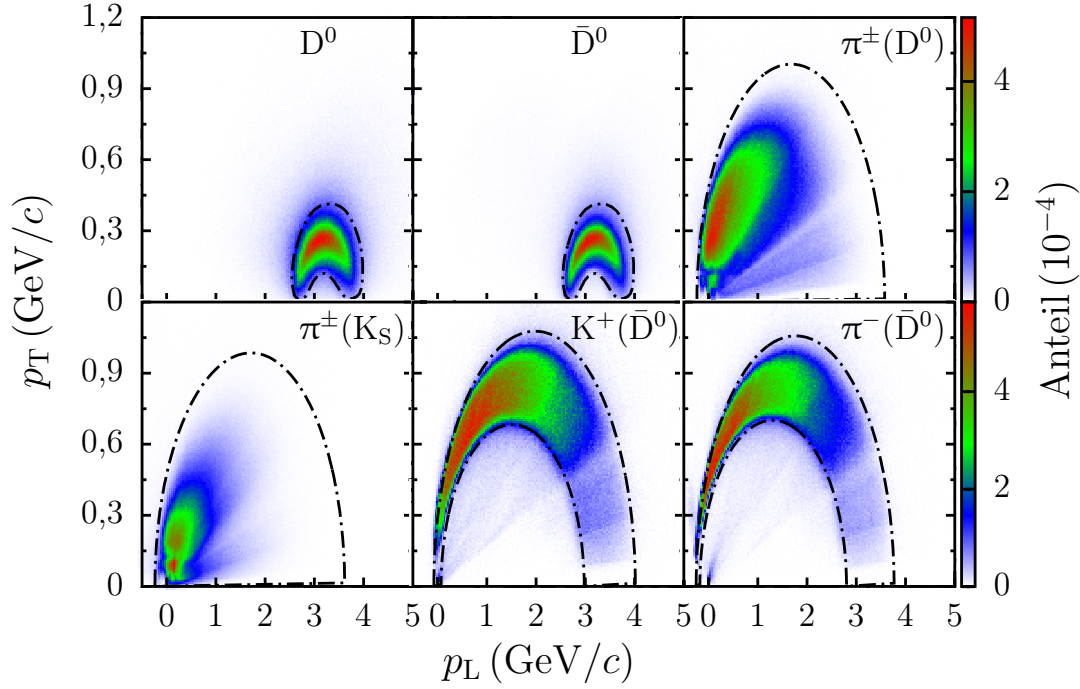


Abbildung 7.33: Rekonstruierte Impulse des Signalkanals in der p_L - p_T -Ebene zusammen mit den verwendeten Schnitten in einer Darstellung mit 150×150 Bins.

Teilchen die wahre Identität des Mutterteilchens überprüft wird. Die Abbildung enthält daher keine Effekte der Teilchenidentifikation oder des kombinatorischen Untergrundes. Die Notation der Form $A(B)$ bezeichnet hierbei ein Teilchen vom Typ A aus einem Zerfall von B , beispielsweise ist $K^+(\bar{D}^0)$ das positiv geladene Kaon aus dem Zerfall $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$. In der Darstellung in der p_L - p_T -Ebene entsprechen Geraden einem festen Winkel zur Strahlrichtung. Deutlich erkennbar ist in der Impulsverteilung der $\pi^\pm(D^0)$ ein als Streifen sichtbarer Bereich verringerter Effizienz im Übergangsbereich von STT und GEM im Winkelbereich von etwa 20° . Die doppelte Struktur im Falle der $\pi^\pm(K_S)$ zeigt deutlich den Einfluss der Spurfinding im Vorwärtsspektrometer unter kleinen Winkeln. In Abbildung 7.34 sind die rekonstruierten Impulse der Endzustandsteilchen des Kanals $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2 \pi^- K^+ K_S$ zusammen mit den verwendeten Schnitten dargestellt. In diesem Fall ist lediglich ein Abgleich der Identität von Pionen aus dem Zerfalls des K_S erfolgt. Das heißt, die Darstellung von

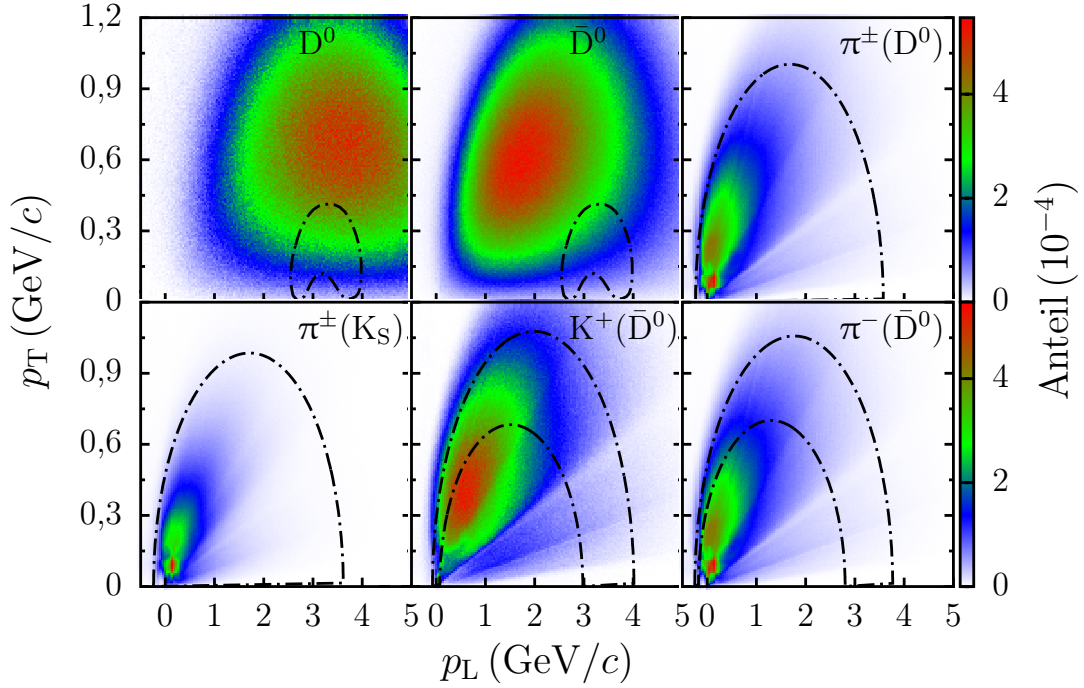


Abbildung 7.34: Rekonstruierte Impulse des Untergrundkanals $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ in der p_L - p_T -Ebene zusammen mit den verwendeten Schnitten in einer Darstellung mit 150×150 Bins.

$\pi^\pm(K_S)$ zeigt lediglich Impulse von Kaonen aus dem $K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-$ Zerfall, während $\pi^\pm(D^0)$ allen Pionen entspricht, die nicht aus einem K_S -Zerfall stammen. Die mit D^0 und $\bar{D}^0$ bezeichneten Abbildungen zeigen alle Kombinationsmöglichkeiten eines Ereignisses, aus den Impulsen von $(K_S \pi^+ \pi^-)$ einen D^0 -Kandidaten, beziehungsweise aus $(K^+ \pi^-)$ einen $\bar{D}^0$ -Kandidaten zu konstruieren. Besonders wirksam ist der Schnitt auf die Zerfallsteilchen des $\bar{D}^0$, da die Kinematik eines Zweikörperzerfalls die möglichen Impulse stark einschränkt. Insgesamt verringert die angewandten Schnitte die Anzahl der nutzbaren Ereignisse im Signalkanal um 51,7%, während in der Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ von den vollständig rekonstruierten Ereignissen 98,7% als Untergrund identifiziert werden können.

7.5 Zusammenfassung der verwendeten Schnitte und Effizienz

Bevor Kapitel 8 eine Abschätzung des zu erwartenden Signal-zu-Untergrund-Verhältnisses gibt, erfolgt hier zunächst eine Zusammenfassung aller verwendeten Schnittkriterien und deren Auswirkung auf die Ereignisse des untersuchten Kanals. Neben der Reduktion an nutzbaren Ereignissen durch die Schnitte wird hier auch auf den kombi-

natorischen Untergrund eingegangen, d. h. die Möglichkeit den detektierten Teilchen eine falsche Ereignistopologie zuzuweisen. Beispielsweise besteht im untersuchten Kanal, in dem die Teilchen $K^+ 2\pi^+ 3\pi^-$ nachgewiesen werden, drei Möglichkeiten jeweils ein Pion und das Kaon einem $\bar{D}^0$ -Zerfall $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ zuzuordnen. Jede dieser Kombinationen wird im Folgenden als „Kandidat“ bezeichnet. Tabelle 7.16 gibt eine Übersicht folgender Größen:

- Effizienz: Anteil der Ereignisse in denen alle Endzustandsteilchen nachgewiesen und richtig erkannt wurden ($N_{\text{wahr}}/N_{\text{MC}}$).
- Reinheit: Anteil der Ereignisse in denen alle Endzustandsteilchen nachgewiesen und richtig erkannt wurden, normiert auf die Anzahl der Ereignisse mit mindestens einem $\psi(3770)$ -Kandidaten ($N_{\text{wahr}}/N_{\text{rek}}$).
- Reduktion: Verringerung der Ereignisanzahl mit mindestens einem wahren $\psi(3770)$ -Kandidaten durch das jeweilige Schnittkriterium ($N'_{\text{wahr}}/N_{\text{wahr}}$).
- ψ -Multiplizität: Mittlere Anzahl der $\psi(3770)$ -Kandidaten pro Ereignis (n_{ψ}/N_{rek}).

Hierbei bezeichnet N die Summe einer Ereignis- und n die Summe einer Kandidatenanzahl. Die ψ -Multiplizität quantifiziert den kombinatorischen Untergrund; werden in jedem Ereignis alle $\psi(3770)$ -Kandidaten bis auf den der tatsächlichen Ereignistopologie verworfen, beträgt diese exakt eins. Üblicherweise bemisst die Reinheit den Anteil an Untergrundereignissen in der analysierten Stichprobe. Da hier nur Signalereignisse betrachtet werden, ist eine Abweichung von 100 % nur durch Fehlidentifikation in der PID möglich, sowie Ereignisse in denen eines der Endzustandsteilchen nicht detektiert wurde, jedoch den Spurpunkten eines weiteren Teilchens im Rahmen der Spurfundung mehr als eine Spur zugewiesen worden ist. Die in Tabelle 7.16 verwendeten Bezeichnungen für die Schnitte stehen abkürzend für:

- Schnitt K_S -Masse: $|m(\pi^+, \pi^-) - m(K_S)| < 37,26 \text{ MeV}/c^2$ (siehe S. 137).
- Schnitt K_S -Vertex: $|\mathbf{r}(K_S) - \mathbf{r}(\bar{D}^0)| > 2500 \mu\text{m}$ (siehe S. 137).
- Schnitt $D^0\text{--}\bar{D}^0$ -Masse: $|m(K_S, \pi^+, \pi^-) - m_D| < 180,25 \text{ MeV}/c^2$ und $|m(K^+, \pi^-) - m_D| < 111,4 \text{ MeV}/c^2$ (siehe S. 156).
- Schnitt $p_L\text{--}p_T$: Einschränkung auf die physikalisch erlaubten Regionen in der $p_L\text{--}p_T$ -Ebene. Separater Schnitt für die Teilchen $D^0, \bar{D}^0, K_S, \pi^\pm(D^0), \pi^\pm(K_S), K^+$ und $\pi^-(\bar{D}^0)$ (siehe S. 164)).
- Fit D^0 -Masse: Kinematischer Fit mit der D^0 -Masse als Zwangsbedingung und Schnitt auf den $\mathcal{P}$ -Wert $\mathcal{P} > 0,1$ (siehe S. 156).
- Schnitt Δt : $|\Delta t| < 3000 \text{ fs}$ und $\sigma_t < 1200 \text{ fs}$ (siehe S. 151).

Schnitt	PID-Likelihood:	<i>Ideal</i>	<i>VeryLoose</i>	<i>Loose</i>	<i>Tight</i>	<i>VeryTight</i>
Kein Schnitt	Effizienz (%)	16,2	10,0	2,2	0,49	0,045
	Reinheit (%)	75,3(1)	58,8(1)	53,2(1)	53,9(3)	62(1)
	ψ -Multiplizität	18,5	36,0	19,2	17,0	14,2
K_S -Masse	Effizienz (%)	9,7	6,5	1,6	0,36	0,033
	Reinheit (%)	64,0(1)	52,9(1)	52,5(1)	53,2(3)	61(1)
	Reduktion (%)	59,5(1)	65,6(1)	73,5(2)	72,8(4)	73(1)
	ψ -Multiplizität	4,0	6,0	4,3	3,7	3,1
K_S -Vertex	Effizienz (%)	7,7	5,1	1,2	0,25	0,022
	Reinheit (%)	48,2(1)	39,1(1)	39,3(1)	38,8(2)	44(1)
	Reduktion (%)	47,2(1)	50,6(1)	55,2(2)	52,0(3)	50(1)
	ψ -Multiplizität	4,1	8,2	4,3	3,7	2,9
D^0 - $\bar{D}^0$ -Masse	Effizienz (%)	9,8	6,7	1,7	0,38	0,036
	Reinheit (%)	88,1(1)	78,4(1)	82,4(2)	82,8(5)	87(2)
	Reduktion (%)	60,3(1)	67,4(1)	76,4(2)	78,0(5)	80(2)
	ψ -Multiplizität	4,8	4,3	4,5	4,3	4,2
p_L - p_T -Schnitt	Effizienz (%)	7,8	5,5	1,4	0,32	0,030
	Reinheit (%)	92,5(1)	83,9(1)	87,5(3)	88,2(6)	91(2)
	Reduktion (%)	48,3(1)	54,7(1)	63,3(2)	64,7(4)	66(1)
	ψ -Multiplizität	4,5	4,1	4,3	4,2	4,1
Fit D^0 -Masse	Effizienz (%)	8,0	5,0	1,2	0,26	0,023
	Reinheit (%)	65,1(1)	47,4(1)	54,0(2)	55,7(4)	64(1)
	Reduktion (%)	49,3(1)	50,5(1)	55,0(2)	52,9(3)	52(1)
	ψ -Multiplizität	8,7	8,6	8,1	6,8	5,6
Δt -Schnitt	Effizienz (%)	6,7	4,4	1,1	0,23	0,021
	Reinheit (%)	43,0(1)	36,3(1)	38,5(1)	37,9(3)	41(1)
	Reduktion (%)	41,4(1)	44,3(1)	48,8(2)	47,5(3)	47(1)
	ψ -Multiplizität	4,0	7,3	4,1	3,8	3,5
Alle Schnitte	Effizienz (%)	2,2	1,7	0,5	0,11	0,010
	Reinheit (%)	98,1(3)	95,6(3)	96,5(5)	97(1)	98(4)
	Reduktion (%)	13,8(1)	17,3	22,4(1)	21,7(2)	22,6(7)
	ψ -Multiplizität	1,07	1,01	1,04	1,02(1)	1,01(4)

Tabelle 7.16: Effizienz, Reinheit, Reduktion und ψ -Multiplizität getrennt nach den verwendeten kinematischen Schnitten und Schnitten auf die Likelihood der Teilchenidentifikation. Der angegebene Fehler ist rein statistisch.

Die letzten zwei Maßnahmen dienen zur Verbesserung der Auflösung der invarianten Massen $m_{\pm}^2$ sowie der Zerfallszeitdifferenz Δt und sind hier der Vollständigkeit halber mit angegeben; für jeden durchgeführten Vertex-Fit (D^0 , $\bar{D}^0$, K_S) wird $\mathcal{P} > 0,05$

gefordert. Die verwendeten Schnitte auf die Likelihood der Teilchenidentifikation sind identisch zu den in Tabelle 7.1 definierten bei Verwendung aller verfügbaren Detektoren der Teilchenidentifikation bis auf die Myonen-Detektoren.

Bei Anwendung aller Schnittkriterien gelingt es, den kombinatorischen Untergrund stark zu reduzieren; die Reinheit der selektierten Ereignismenge liegt bei über 95 %. Unabhängig vom verwendeten Schnittkriterium auf die PID-Likelihood verringern die Schnitte die nutzbare Ereignismenge um 80–90 %, dabei zeigt die hohe Reduktion durch jedes einzelne der Kriterien, dass die Schnittmenge zwischen den jeweils verworfenen Ereignissen groß ist. Besonders auffällig ist die niedrige Effizienz; in

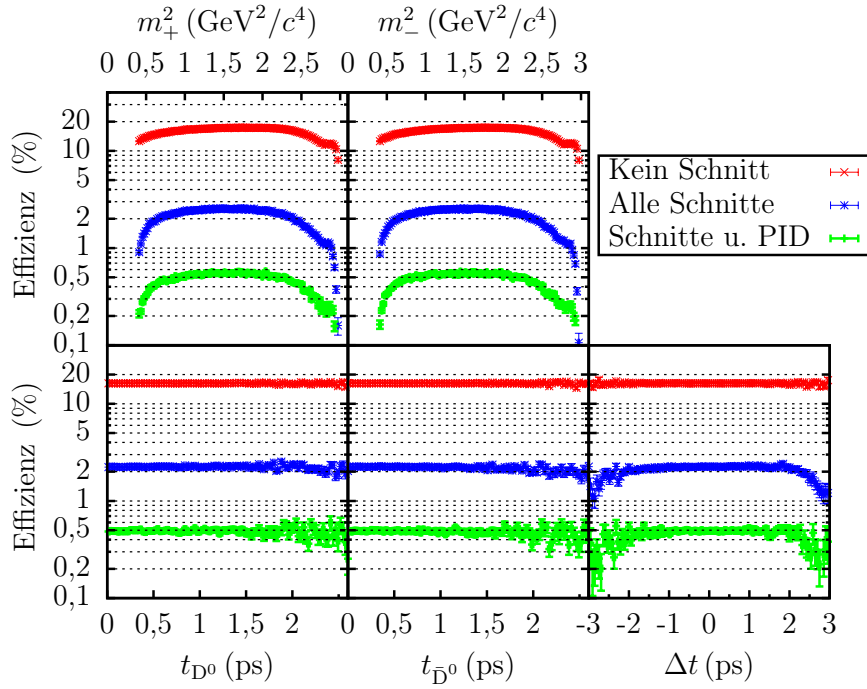


Abbildung 7.35: Abhängigkeit der Effizienz von den Dalitz-Diagramm-Variablen bei Anwendung verschiedener Schnittkriterien und Teilchenidentifikation mit dem Kriterium *Loose* in halblogarithmischer Darstellung.

lediglich 16,2 % aller Ereignisse werden alle sechs Teilchen des Zerfalls im Detektor nachgewiesen. Hierauf wird am Ende dieses Abschnitts näher eingegangen. Neben der integrierten Effizienz ist für die durchgeführte Dalitz-Diagramm-Analyse besonders wichtig, dass auch bei Anwendung aller Schnittkriterien im gesamten Phasenraum Ereignisse nachgewiesen werden können. Abbildung 7.35 zeigt hierzu den Verlauf der Effizienz in Abhängigkeit der Variablen der Dalitz-Diagramm-Analyse. Während die gesamte Effizienz durch die Anwendung der Schnitte deutlich reduziert wird, ändert sich die Form der Effizienzkurven weniger stark. Lediglich in der Nähe der minimal und maximal möglichen Werte von $m_\pm^2$ ist die Effizienz überdurchschnittlich stark verringert, wobei die relative Änderung bei Anwendung der kinematischen Schnitte nur schwach von der Teilchenidentifikation abhängig ist. Auch nach Anwendung

aller Schnitte ist die Effizienz nahezu unabhängig von den Zerfallszeiten des D^0 - und $\bar{D}^0$ -Mesons. Dies ist für den zeitabhängigen Fit zur Extraktion der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung von entscheidender Bedeutung, da in diesem Fall auf eine Effizienzkorrektur der Zeitabhängigkeit verzichtet werden kann. In Abbildung 7.36 ist der Verlauf der Effizienz im Dalitz-Diagramm gezeigt. In dieser Darstellung wird deutlich, dass

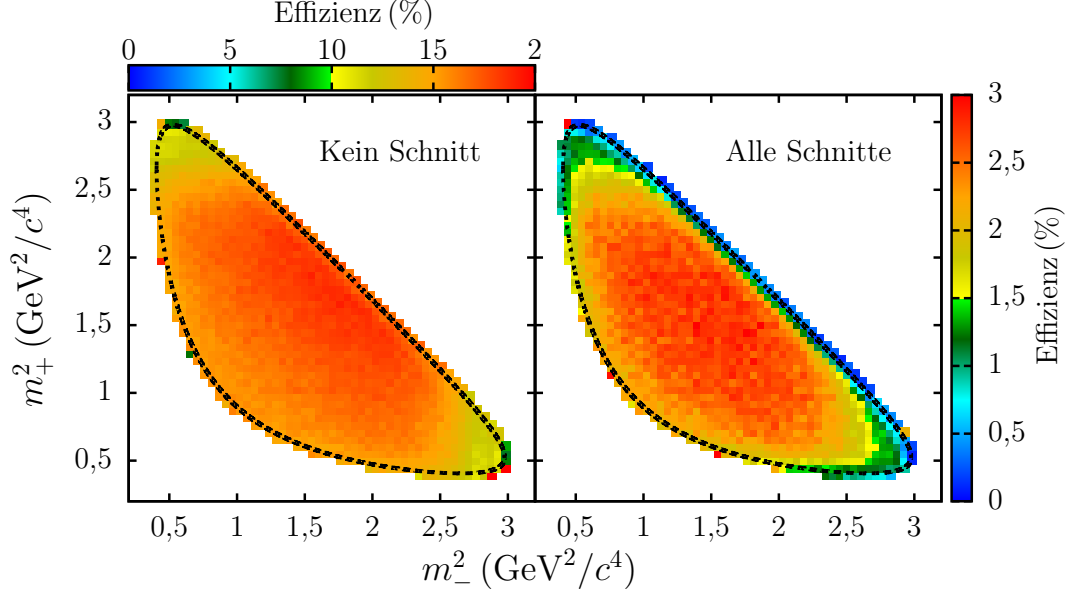


Abbildung 7.36: Effizienzverlauf innerhalb des Dalitz-Diagramms bei Anwendung keiner (*links*) und aller (*rechts*) Schnittkriterien. In beiden gezeigten Fällen ist ideale Teilchenidentifikation verwendet worden.

die verwendeten Schnittkriterien am Rand der kinematisch zugänglichen Region eine stärkere Reduktion der Ereignismenge bewirken, als im Zentrum des Dalitz-Diagramms. Dieser Effekt ist in den eindimensionalen Darstellungen für kleine und große $m_{\pm}^2$ sichtbar. Die Berücksichtigung der (m_+^2, m_-^2) -Abhängigkeit der Effizienz in der Dalitz-Diagramm-Analyse erfolgt mit einer Monte-Carlo-Methode, die in Kapitel 9 näher beschrieben ist. Die geringe Rekonstruktionseffizienz der gesamten Ereignistopologie lässt sich auf die Effizienz zurück führen, mit der einzelne geladene Teilchen rekonstruiert werden. Abbildung 7.37 zeigt die Wahrscheinlichkeit zum Nachweis einzelner geladener Pionen in Abhängigkeit des Impulses und des Winkels zur Strahlachse sowie die mittlere Anzahl der hinterlassenen Spurpunkte. Die gezeigten Werte entstammen der Analyse einer simulierten Stichprobe inelastischer $\bar{p}p$ -Reaktionen, die in Abschnitt 8.1 zum Abschätzen des hadronischen Untergrundes verwendet wird. Im Übergangsbereich von Barrel- und Vorwärtsspektrometer zeigt sich im Polarwinkelbereich von weniger als 40° ein leichter Abfall der Effizienz, da die bis zu drei GEM-Spurpunkte die geringer werdende Anzahl an STT-Spurpunkten nur teilweise ausgleichen. In Abhängigkeit des Impulses variiert die Effizienz nur schwach, fällt jedoch zu kleinen Impulsen hin stark ab. Unabhängig vom Impuls und dessen Richtung liegt die Wahrscheinlichkeit ein Pion nachzuweisen bei un-

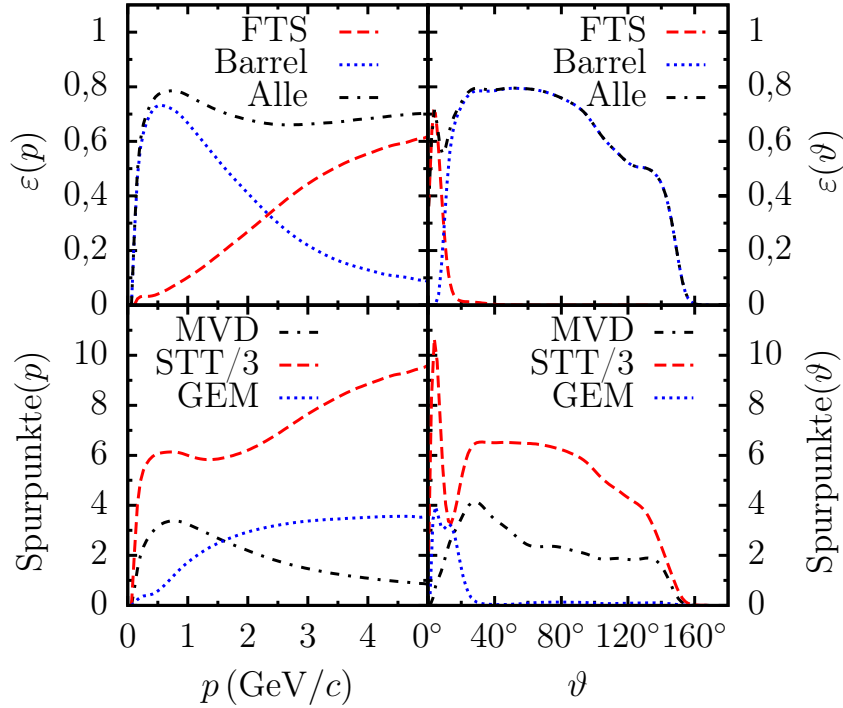


Abbildung 7.37: Nachweiseffizienz einzelner Pionen in inelastischen $\bar{p}p$ -Reaktionen bei $\sqrt{s} = m_{\psi}c^2$ und deren mittlere Spurpunktanzahl in Abhängigkeit von Impuls und Polarwinkel. „STT“ fasst die Spurpunkte des Straw-Tube-Detektors und der Spurdetektoren in Vorwärtsrichtung zusammen. Zur besseren Vergleichbarkeit sind diese mit dem Faktor $1/3$ skaliert.

ter 82 %. Aufgrund der im Mittel kleinen Impulse von weniger als $1 \text{ GeV}/c$ liegt die integrierte Effizienz bei 70,3 %, in 3,4 % aller Fälle wird einem Pion mehr als eine Spur zugewiesen. Im untersuchten Kanal $\bar{p}p \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (K_S \pi^+ \pi^-)(K^+ \pi^-)$ sind die mittleren Transversalimpulse höher als im allgemeinen Fall inelastischer $\bar{p}p$ -Reaktionen, was zu einer höheren integrierten Effizienz führt. Beispielsweise liegt die integrierte Effizienz zum Nachweis von K^+ im Signalkanal bei 79,0 % (vgl. Tab. 7.2). Eine naive Abschätzung für den Nachweis aller sechs Endzustandsteilchen des Signalkanals liefert die Abschätzung $\varepsilon \approx 0,7^6 = 12 \%$. Die Abweichung zum tatsächlich beobachteten Wert von $\varepsilon = 16,2 \%$ ergibt sich einerseits aus den im Mittel höheren Transversalimpulsen im Signalkanal und andererseits aus der zu geringen K_S -Rekonstruktionseffizienz (vgl. Abschnitt 7.2.1). Aufgrund der Notwendigkeit im untersuchten Kanal sechs geladene Teilchen nachzuweisen, ist die in der Simulation approximierte Effizienz zur Rekonstruktion der gesamten Ereignistopologie stark von der Wahrscheinlichkeit abhängig, mit der einzelne Teilchen nachgewiesen werden. Sollte beispielsweise eine Einzelnachweiswahrscheinlichkeit von 80,0 % möglich sein, so erhöht sich die Gesamteffizienz um etwa einen Faktor 2,2. Diese starke Abhän-

gigkeit ist auch der tiefere Grund für den hohen Verlust von Signalereignissen bei Anwendung von Schnitten auf die Likelihood der Teilchenidentifikation. Da zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht alle bei $\overline{\text{PANDA}}$ vorgesehenen Systeme zur PID (vgl. Abschnitt 7.1) in der Simulationssoftware implementiert sind, ist die Teilchenidentifikation erschwert, die Einzelnachweiswahrscheinlichkeit leicht und die Effizienz zur Rekonstruktion der gesamten Ereignistopologie stark reduziert (vgl. Tab. 7.2).

Kapitel 8

Unterdrückung hadronischer Untergrundreaktionen

Wie in Kapitel 6 gezeigt wurde, ist der totale Wirkungsquerschnitt von $\bar{p}p$ -Reaktionen bei der betrachteten Schwerpunktsenergie um einen Faktor 10^5 – 10^7 größer als der erwartete Wirkungsquerschnitt der Produktion von $D^0\bar{D}^0$ -Paaren. Technisch ist es nicht möglich, allgemeine $\bar{p}p$ -Reaktionen in einem Umfang zu simulieren, der die Menge an Signalereignissen um diesen Faktor übertrifft. Beispielsweise entspricht der verwendete Datensatz von 10^8 Ereignissen inelastischer $\bar{p}p$ -Reaktionen etwa zwei Wochen Rechenzeit am Prometheus-Cluster der GSI, darüber hinaus ist der Aufwand an Rechenzeit zur Analyse solch großer Datenmengen beträchtlich. Neben der allgemeinen Betrachtung ist es daher sinnvoll, detailliert auf den dominanten Untergrundkanal einzugehen.

Hierzu werden folgende simulierte Stichproben untersucht:

- a) $1 \cdot 10^8$ Ereignisse inelastischer $\bar{p}p$ -Reaktionen.
- b) $1,5 \cdot 10^7$ Ereignisse der Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2 \pi^- K^+ K_S$ mit $K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-$.
- c) $5,8 \cdot 10^7$ Ereignisse der Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow \text{alle}$.

Stichprobe a) erlaubt eine vorurteilsfreie Untersuchung aller beitragenden Reaktionskanäle. Die Endzustandsteilchen der Reaktion b) sind identisch zu denen des untersuchten Reaktionskanals; es handelt sich daher um einen dominanten Untergrundkanal bezüglich dessen das Signal-zu-Untergrund-Verhältnis nur schwach von der Teilchenidentifikation abhängt.

Reaktion c) wiederum erlaubt es zu testen, ob es gelingt, aus allen möglichen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfällen die Kombination $\psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (K_S \pi^+ \pi^-)(K^+ \pi^-)$ zu isolieren und resonanten Untergrund der Form $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D^+ D^-$ zu verwerfen. Darüber hinaus lässt sich die Fehlerrate in der Identifikation des Flavortags quantifizieren. Aufgrund der unterschiedlichen Wirkungsquerschnitte entsprechen die obigen Ereigniszahlen etwa a) 22 s, b) 90 min und c) mindestens 67 Tagen Datennahme bei einer mittleren Luminosität von $1 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$. Das erwartete Signal-zu-Untergrund-

Verhältnis kann berechnet werden über

$$\frac{S}{U} = \frac{\varepsilon_S \cdot Br \cdot \sigma_S}{\varepsilon_U \cdot \sigma_U} \quad (8.1)$$

mit $\varepsilon_i = \mathcal{E}_i \mathcal{R}_i$.

Hierbei lässt sich die Effizienz ε bei Anwendung der Schnittkriterien explizit separieren in die Nachweiswahrscheinlichkeit $\mathcal{E}$ bei Anwendung keines Schnittkriteriums und die Reduktion $\mathcal{R}$ der detektierten Ereignismenge durch Teilchenidentifikation und kinematische Schnitte. Im Signalkanal entspricht $\mathcal{E}$ dem Anteil der Ereignisse, in dem alle Endzustandsteilchen detektiert wurden, für die Untergrundkanäle dem Anteil der Ereignisse mit mindestens drei Spuren negativ und drei Spuren positiv geladener Teilchen.

Im Gegensatz zur erwarteten, absoluten Ereignismenge ist Gleichung 8.1 unabhängig von der im Experiment erreichten Luminosität, während das Verhältnis der Nachweiswahrscheinlichkeiten des Signal- und jeweiligen Untergrundkanals $\mathcal{E}_S/\mathcal{E}_U$ für Reaktionen vom Typ b) nahe bei Eins liegt. Die Approximation von S/U in der Simulation reduziert sich daher auf eine Abschätzung von ε_U bzw. $\mathcal{E}_U$ und $\mathcal{R}_U$ bei den gewählten Schnittkriterien; die Effizienzen im Signalkanal getrennt nach den jeweiligen Schnittkriterien finden sich in Tabelle 7.16. Die verbleibende Unsicherheit von σ_S/σ_U von zwei Größenordnungen ($\sigma_S = 1\text{--}100\text{ nb}$) in der theoretischen Vorhersage wird in Form eines Intervalls angegeben.

8.1 Inelastische $\bar{p}p$ -Reaktionen

Bei inelastischen $\bar{p}p$ -Reaktionen, die zum Untergrund beitragen, handelt es sich bei der betrachteten Schwerpunktsenergie von $\sqrt{s} = m_\psi c^2$ dominant um die Produktion sechs geladener Pionen mit und ohne assoziierte Produktion neutraler Pionen

$$\bar{p}p \rightarrow 3\pi^+ 3\pi^- n\pi^0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8.2)$$

In geringerem Umfang sind auch Prozesse ohne Annihilation und Prozesse mit paarweiser Produktion von geladenen Kaonen von Bedeutung. Die Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ die zum gleichen Endzustand wie der untersuchte Kanal führt, wird separat im nächsten Abschnitt 8.2 behandelt. Die relevanten Wirkungsquerschnitte sind in Abschnitt 6.2 zusammengefasst. Als besonders nachteilig für den Grad an Realismus der hier gemachten Abschätzung erweist sich das Fehlen der in der Simulation noch nicht implementierten Systeme zur Teilchenidentifikation. Im Barrelteil des Detektors geschieht die PID aufgrund der fehlenden Flugzeitdetektoren für Impulse $< 500\text{ MeV}/c$ ausschließlich über die Energieverlustinformation in MVD und STT, für Impulse $> 800\text{ MeV}/c$ ausschließlich mit dem Barrel-DIRC. Für den Polarwinkelbereich $\vartheta < 22^\circ$ steht zur Teilchenidentifikation lediglich der Disc-DIRC zur Verfügung, der eine Unterscheidung der Kaonen von Pionen im Impulsbereich von $0,46\text{--}4\text{ GeV}/c$ ermöglicht (vgl. Tabelle 5.2). Abbildung 8.1 zeigt die Impulsverteilung

von geladenen Pionen in Ereignissen mit sechs geladenen Spuren und verdeutlicht, dass ein Großteil der Pionen Impulse von weniger als $1 \text{ GeV}/c$ besitzt. Von den insgesamt $1 \cdot 10^8$ simulierten Ereignissen werden in $3,3 \cdot 10^6$ Ereignissen mindestens drei positiv und drei negativ geladene Teilchen rekonstruiert. Verwendet man den

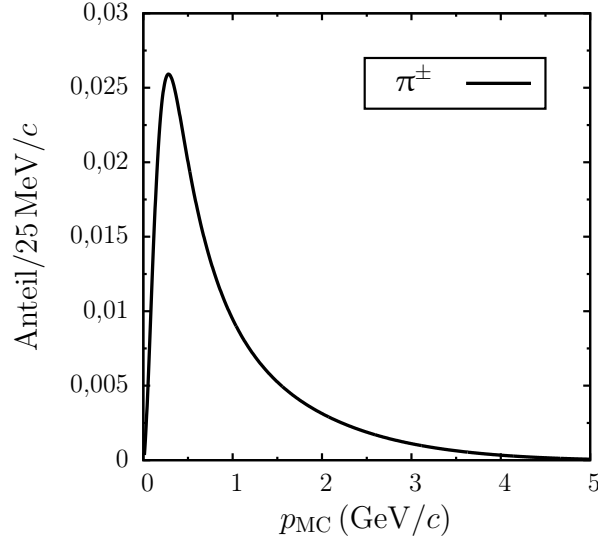


Abbildung 8.1: Impulsverteilung von geladenen Pionen in $\bar{p}p$ -Reaktionen mit sechs geladenen Spuren.

Faktor $\sigma_{6\text{Prong}}/\sigma_{\text{inel}} \approx 0,17$ um zu berücksichtigen, dass nur ein Teil der inelastischen Reaktionen zu sechs geladenen Spuren führt, so ist die Effizienz vergleichbar mit der des Signalkanals. Bei Anwendung der stärksten Schnittkriterien auf die PID-Likelihood (*Tight* oder *VeryTight*) und aller kinematischen Schnitte entspricht keines der rekonstruierten Ereignisse allen Schnittkriterien. Wird der PID-Schnitt abgeschwächt zu *Loose* überstehen zwei Ereignisse alle Schnitte ($\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2 \pi^- K^+ K_S$, $\bar{p}p \rightarrow 2 \pi^+ 2 \pi^- K^+ K^-$). Bei weiterer Abschwächung des PID-Schnitts (*VeryLoose*), in dem als Information über den Teilchentyp lediglich das Vorzeichen der rekonstruierten Ladung verwendet wird, verbleiben nach allen Schnitten 30 Ereignisse. Dabei ist zu beachten, dass dieses Vorgehen den kombinatorischen Untergrund erhöht; so gibt es 32 Möglichkeiten die Ereignistopologie drei positiv und drei negativ geladenen Teilchen zuzuordnen, jedoch nur 12 im Falle der Endzustandsteilchen $2 \pi^+ 3 \pi^- K^+$ des Signalkanals. Die Reaktionskanäle der 30 Ereignisse nach allen Schnitten sind in Tabelle 8.1 zusammengefasst.

Bemerkenswert ist hierbei, dass es in vier Ereignissen durch Paarbildung von π^0 -Zerfallsphotonen, Produktion sekundärer Teilchen durch starke Wechselwirkung und die Fehlzuzuweisung von mehreren Spuren an ein einzelnes geladenes Teilchen möglich ist, alle kinematischen Schnitte in Reaktionen mit nur vier primären geladenen Teilchen zu erfüllen. Bei Anwendung der kinematischen Schnitte und des Kriteriums *VeryLoose* beträgt die Effizienz $\varepsilon_U = (3,0 \pm 0,5) \cdot 10^{-7}$ und $\varepsilon_U = (2 \pm 1,4) \cdot 10^{-8}$ für das Kriterium *Loose*. Für das erreichbare Signal-zu-Untergrund-Verhältnis erhält man aus

Reaktionskanal	Anzahl	Reaktionskanal	Anzahl
6 geladene Spuren		4 geladene Spuren	
$\bar{p}p \rightarrow 3\pi^+ 3\pi^-$	9	$\bar{p}p \rightarrow p \bar{p} \pi^+ \pi^-$	1
$\bar{p}p \rightarrow 3\pi^+ 3\pi^- \pi^0$	9	$\bar{p}p \rightarrow 2\pi^+ 2\pi^- 2\pi^0$	1
$\bar{p}p \rightarrow 3\pi^+ 3\pi^- 2\pi^0$	2	$\bar{p}p \rightarrow 2\pi^+ 2\pi^- 3\pi^0$	1
$\bar{p}p \rightarrow 3\pi^+ 3\pi^- 3\pi^0$	1	$\bar{p}p \rightarrow 2\pi^+ 2\pi^- 4\pi^0$	1
$\bar{p}p \rightarrow 2\pi^+ 2\pi^- K^+ K^-$	1		
$\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$	2		
$\bar{p}p \rightarrow \pi^- 2\pi^+ K^- K_S$	2		

Tabelle 8.1: Reaktionskanäle der 30 Ereignisse, die mit dem PID-Kriterium *VeryLoose* von allen kinematische Schnitten akzeptiert werden. Das K_S zerfällt in allen Fällen über $K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-$. Die vier Ereignisse des Typs $\bar{p}p \rightarrow \pi^\pm 2\pi^\mp K^\pm K_S$ sind in Fettdruck hervorgehoben.

Gleichung 8.1 die in Tabelle 8.2 zusammengefasste Abschätzung. Da bei Anwendung des PID-Kriteriums *Tight* keines der generierten Ereignisse alle Schnittkriterien erfüllt, lässt sich in diesem Fall lediglich eine untere Schranke angeben.

	<i>VeryLoose</i>	<i>Loose</i>	<i>Tight</i>
S/U	$(5,2 \pm 0,9) \cdot (10^{-5} - 10^{-7})$	$(2,2 \pm 1,6) \cdot (10^{-2} - 10^{-4})$	$> 9,5 \cdot 10^{-5}$

Tabelle 8.2: Signal-zu-Untergrund-Verhältnis bei Anwendung verschiedenener Schnitte auf die PID-Likelihood.

Insgesamt muss der Schluss gezogen werden, dass es aufgrund der in der Simulation nicht implementierten Systeme zur Teilchenidentifikation nicht möglich ist, eine realistische Abschätzung des Signal-zu-Untergrund-Verhältnisses durchzuführen. Wesentliche Ursache hierfür ist die geringe Effizienz zur Rekonstruktion der gesamten Ereignistopologie bei Anwendung von Schnitten auf die Likelihood der Teilchenidentifikation (vgl. Abschnitte 7.1 und 7.5). Bei vollständigem Verzicht auf Teilchenidentifikation wird die notwendige Reduktion hadronischer Untergrundkanäle um mehrere Größenordnungen verfehlt. Es konnte jedoch bestätigt werden, dass es sich bei der Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ um einen der dominanten Untergrundkanäle handelt. Bezüglich dieses Reaktionskanals ist eine Untergrundbetrachtung auch ohne Teilchenidentifikation möglich und erlaubt im folgenden Abschnitt 8.2 eine realistischere Abschätzung des Signal-zu-Untergrund-Verhältnisses.

8.2 Reaktionskanal $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$

Bei der Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ handelt es sich um die direkte Produktion der Endzustandsteilchen des Signalkanals. Um die Unsicherheit durch die in der Simulation nur ungenügend abgebildete Teilchenidentifikation zu vermeiden, wird in der Analyse jeweils die tatsächliche Monte-Carlo-Identität aller rekonstruierten Teilchen verwendet. Hierüber hinaus werden keinerlei externe Informationen verwendet.

Reaktionen der Untergrundreaktion sind mit $\sigma = (80 \pm 5) \mu\text{b}$ [153] bei der betrachteten Schwerpunktsenergie 10^3 – 10^5 mal häufiger als Reaktionen des Signalkanals (vgl. Kap. 6). Aufgrund der ähnlichen Nachweiswahrscheinlichkeiten müssen daher die gewählten kinematischen Schnittkriterien den Untergrund um mindestens denselben Faktor stärker unterdrücken als das Signal, um eine Messung zu ermöglichen, wobei sich ein zusätzlicher Faktor der Größenordnung 10^4 durch die Verzweungsverhältnisse im Reaktionskanal ergibt. Als zugrundeliegendes physikalisches Modell der Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ wird im Ereignisgenerator EvtGen eine Gleichverteilung im Phasenraum des 5-Teilchen-Endzustandes verwendet. Experimentell ist bekannt (siehe z. B. [154]), dass als intermediäre Resonanzen angeregte Kaonzustände wie das $K^*(892)$ eine Rolle spielen und zu Abweichungen in Winkel- und Impulsverteilungen führen. Da die genaue Amplitudenstruktur bislang jedoch unbekannt ist, handelt es sich bei der Gleichverteilung im Phasenraum um die annahmenärmste Beschreibung der Reaktion. Im Folgenden findet eine Stichprobe von $1,5 \cdot 10^7$ Ereignissen Verwendung. Von besonderer Bedeutung ist hier der Schnitt auf die physikalisch erlaubten Regionen in der p_L - p_T -Ebene, der in Abschnitt 7.4 ausführlich beschrieben worden ist. Im betreffenden Abschnitt sind auch die p_L - p_T -Verteilungen des Signals und des hier betrachteten Untergrundkanals gegenübergestellt. Die Rekonstruktionseffizienz ist mit 19,2% um drei Prozent größer als im Signalkanal, was auf die unterschiedlichen Impuls und Winkelverteilungen der Endzustandsteilchen in den

Schnitt	Kein Schnitt	K_S -Masse	K_S -Vertex	D^0 - $\bar{D}^0$ -Masse
Effizienz (%)	19,2	12,1	12,3	0,89
Reinheit (%)	93,5	84,0	78,9	90,9(3)
Reduktion (%)	–	62,8	64,0	4,7
ψ -Multiplizität	18,6	4,1	4,2	4,9
Schnitt	p_L - p_T -Schnitt	Fit D^0 -Masse	Δt -Schnitt	Alle Schnitte
Effizienz (%)	0,25	5,6	12,9	$1,0 \cdot 10^{-2}$
Reinheit (%)	96,6(7)	85,9(1)	88,5	98(4)
Reduktion (%)	1,3	29,3	67,0	$5,3(1) \cdot 10^{-2}$
ψ -Multiplizität	4,4	10,4	4,0	1,07(4)

Tabelle 8.3: Effizienz, Reinheit, Reduktion und ψ -Multiplizität getrennt nach den verwendeten kinematischen Schnitten für den Untergrundkanal $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$. Der angegebene Fehler ist rein statistisch.

zwei Reaktionen zurückgeführt werden kann. Neben den vollständig rekonstruierten Ereignissen besteht ein Anteil von 1,3 % aller Ereignisse, in denen mindestens eines der sechs Endzustandsteilchen nicht nachgewiesen wird, jedoch einem der anderen Teilchen fälschlich mehr als eine Spur zugewiesen wird.

Die verwendeten kinematischen Schnittkriterien (vgl. Abschnitt 7.5) verwerfen alle bis auf 1.497 Ereignisse. Besonders effizient in der Diskriminierung der Untergrundereignisse sind hierbei der Schnitt in der p_L - p_T -Ebene sowie der Schnitt auf die invarianten Massen von D^0 - und $\bar{D}^0$ -Meson. Eine Übersicht der Auswirkung der einzelnen Schnittkriterien auf die Effizienz sowie die $\psi(3770)$ -Multiplizität ist in Tabelle 8.3 zu finden. Der kinematische Fit mit der D^0 -Masse als Zwangsbedingung sowie der Schnitt auf die Zerfallszeitdifferenz dienen zur Verbesserung der Auflösung der invarianten Massen $m_{\pm}^2$ sowie Δt und sind hier der Vollständigkeit halber mit aufgeführt. Die Verteilung der 1.497 Ereignisse im Dalitz-Diagramm und den invarianten Massen $m_{\pm}^2$ zeigt Abbildung 8.2. Der Vergleich mit der Erwartung einer Gleichverteilung im Dalitz-Diagramm macht hierbei deutlich, dass die Verteilung der Untergrundereignisse bis auf Akzeptanzkorrekturen recht homogen ist. Diese Feststellung ist nicht

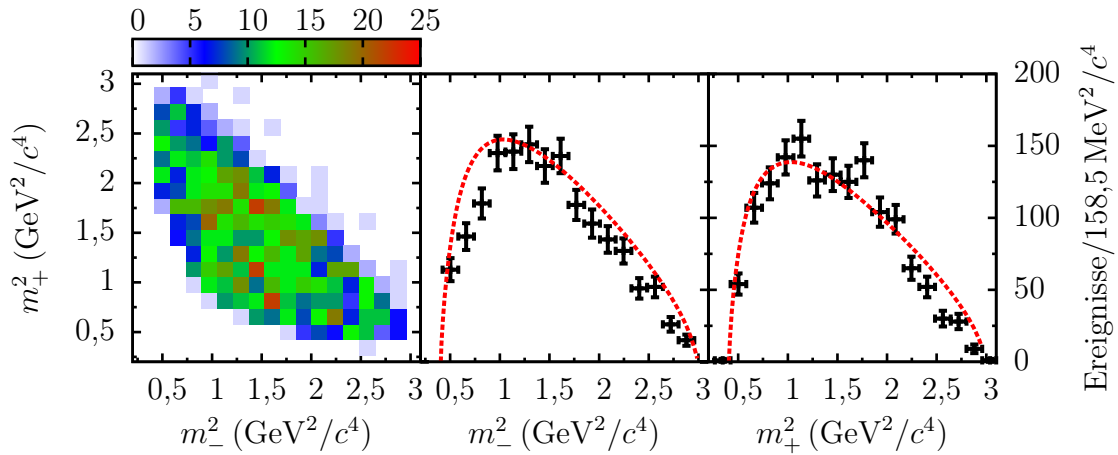


Abbildung 8.2: Verteilung der Ereignisse des Kanals $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ im Dalitz-Diagramm nach allen kinematischen Schnitten. In rot ist die Erwartung bei einer Gleichverteilung im Dalitz-Diagramm gezeigt.

selbstverständlich. Da in der Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ als Zwischenzustand keine D-Mesonen auftreten, liegt die generierte Verteilung der (m_+^2, m_-^2) weder innerhalb der kinematisch erlaubten Grenzen des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ noch ist sie innerhalb dieser Region homogen. Die rekonstruierte Verteilung von (m_+^2, m_-^2) ohne Anwendung von kinematischen Schnitten zeigt Abbildung 8.3. Hierbei sind für jedes Ereignis alle kombinatorisch möglichen D^0 -Kandidaten gezeigt.

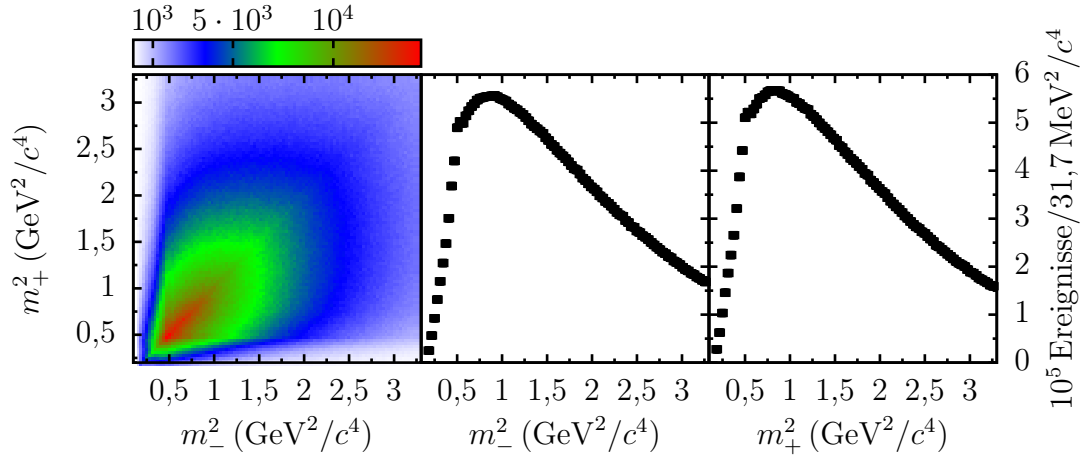


Abbildung 8.3: Verteilung der Ereignisse des Kanals $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ im Dalitz-Diagramm ohne kinematische Schnitte bei Berücksichtigung aller kombinatorisch möglichen D^0 -Kandidaten.

Neben der Verteilung der Untergrundereignisse im Dalitz-Diagramm ist es für die zeitabhängige Betrachtung von Bedeutung, die rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen der Untergrundereignisse zu untersuchen. Da im Zwischenzustand keine D -Mesonen auftreten, streuen die rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen Δt um Null und die Verteilung der rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen ist identisch zur Residuenverteilung. Aufgrund der geringen Anzahl von 1.497 Ereignissen nach allen Schnitten lässt sich die Δt -Verteilung bereits mit einer Summe von zwei Gaußfunktionen ausgezeichnet beschreiben. Die rekonstruierten Ereignisse sind zusammen mit dem Fit in Abbildung 8.4 gezeigt. Die aus dem Fit bestimmten Breiten σ_1 und σ_2 liegen

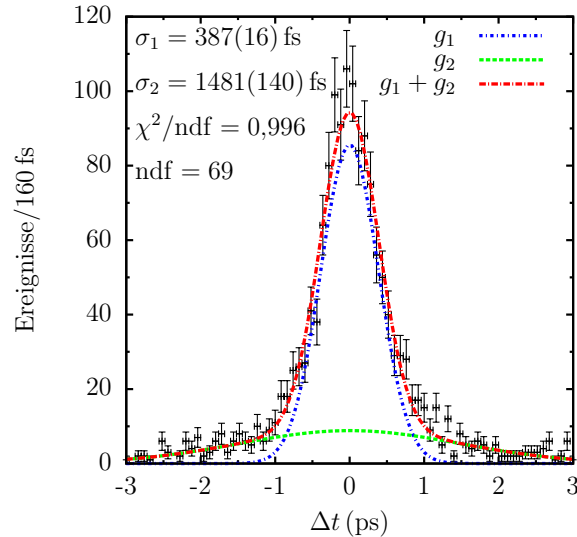


Abbildung 8.4: Verteilung der rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen des Kanals $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ nach allen kinematischen Schnitten.

in der gleichen Größenordnung wie die Breiten im Fit der Δt -Residuenverteilung des Signalkanals (vgl. Tab. 7.13). Insgesamt erhält man als Abschätzung für das Signal-zu-Untergrund-Verhältnis

$$\frac{S}{U} = \frac{\varepsilon_S \cdot Br \cdot \sigma_S}{\varepsilon_U \cdot 0,5 \cdot \sigma_U} = 3,2 \cdot 10^{-4} - 3,2 \cdot 10^{-6} \quad (8.3)$$

mit $Br = Br(\psi \rightarrow D^0 \bar{D}^0) \cdot Br(D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-) \cdot Br(\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-)$,

wobei der Faktor 0,5 berücksichtigt, dass der Wirkungsquerschnitt σ_U auch den ladungskonjugierten Kanal beinhaltet. Das angegebene Ergebnis ist unabhängig von der Teilchenidentifikation sowie der im späteren Experiment erreichten Luminosität und nur schwach abhängig von den in der Simulation approximierten Nachweiswahrscheinlichkeiten von Signal- und Untergrundkanal. Um die durch das angenommene Modell der Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ bedingte Unsicherheit in der Abschätzung von S/U zu quantifizieren, kann mit dem hier bestimmten Wert der Effizienz ε_U die erwartete Menge der $\bar{p}p \rightarrow \pi^\pm 2\pi^\mp K^\pm K_S$ Ereignisse für die im vorhergehenden Abschnitt analysierte Stichprobe von $1 \cdot 10^8$ inelastischen $\bar{p}p$ -Reaktionen berechnet werden. Für diese ist in der Simulation als zugrundeliegendes physikalisches Modell das Zweipartonenmodell (vgl. Abschnitt 5.6.1) verwendet worden, das sich wesentlich von der hier angenommenen Gleichverteilung im Phasenraum unterscheidet. Man erhält den Erwartungswert

$$N = 1 \cdot 10^8 \cdot Br(K_S \rightarrow \pi^+ \pi^-) \cdot \left(\frac{\sigma(\bar{p}p \rightarrow \pi^\pm 2\pi^\mp K^\pm K_S)}{\sigma_{\text{inel}}} \right) \cdot \varepsilon_U \quad (8.4)$$

$$= 13 \pm 4 \text{ (stat.)},$$

wobei in der Analyse tatsächlich 4 Ereignisse des betreffenden Typs aufgefunden wurden (vgl. Tab. 8.1). Dies deutet darauf hin, dass die Größenordnung des approximierten Wertes von S/U nicht dominant vom angenommenen Reaktionsmodell abhängig ist.

Neben den tatsächlich angewandten kinematischen Schnitten ist eine Reihe von weiteren Schnittkriterien untersucht worden. Dies umfasst unter Anderem die Verwendung von Jackson-Winkeln, des Winkels zwischen den D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfallsebenen, das Ausnutzen der Koplanarität der Tochterteilchenimpulse des D^0 -Zerfalls und insbesondere die Verwendung des rekonstruierten Abstandes zwischen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfall. Schnitte in den betreffenden Observablen verbessern das Signal-zu-Untergrund-Verhältnis, führen jedoch zu einem starken Verlust an Signalereignissen. Exemplarisch für die untersuchten Schnitte zeigt Abbildung 8.5 die Verteilung der rekonstruierten D^0 - $\bar{D}^0$ -Abstände des Signalkanals zusammen mit den rekonstruierten Abständen zwischen kombinatorisch möglichen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Kandidaten des Kanals $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$. Hierbei bezeichnet R den Abstand, während z die Komponente des Verbindungsvektors in und r die Komponente senkrecht zur Strahlrichtung bezeichnet. Die betreffenden Verteilungen überlappen stark; jeder potenzielle Schnitt ist mit einem hohen Verlust an Signalereignissen verbunden. Anschaulich ist der

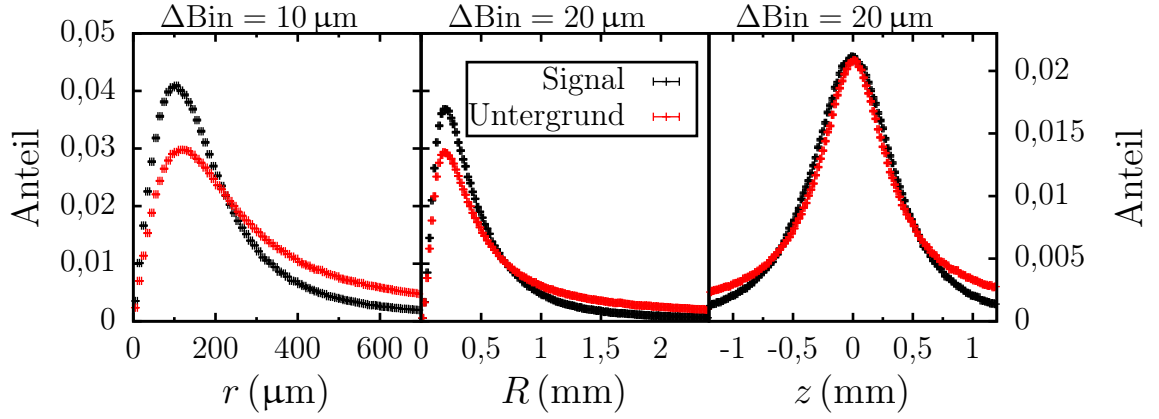


Abbildung 8.5: Rekonstruierter Abstand $D^0\text{--}\bar{D}^0$ im Signalkanal und im Untergrundkanal $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$. Zur besseren Vergleichbarkeit sind die Verteilungen im gezeigten Intervall auf Eins normiert.

transversale Abstand zwischen den D-Mesonen des Signalkanals bedingt durch den geringen Transversalimpuls klein, während der mittlere Abstand in Strahlrichtung in einer ähnlichen Größenordnung liegt wie die Ortsauflösung. Selektiver ist ein Schnitt auf den Abstand zwischen Primärvertex und dem fehlergewichteten Mittelwert der Vertices von D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfall (siehe Abb. 8.6); jedoch ist ein solches Verfahren im Falle des Cluster-Jet-Targets nicht durchführbar, während für das Pellet-Target noch nicht abschließend geklärt ist, welche Ortsauflösung der Pellets unter realistischen Bedingungen erreicht werden kann. Für Abbildung 8.6 ist der in der Simulation bekannte wahre Antiproton-Proton-Interaktionspunkt verwendet worden; die endliche Ortsauflösung des Pellet-Trackings führt unter realen Bedingungen zu einer stärkeren Überlappung der gezeigten Verteilungen. Um die Verwendbar-

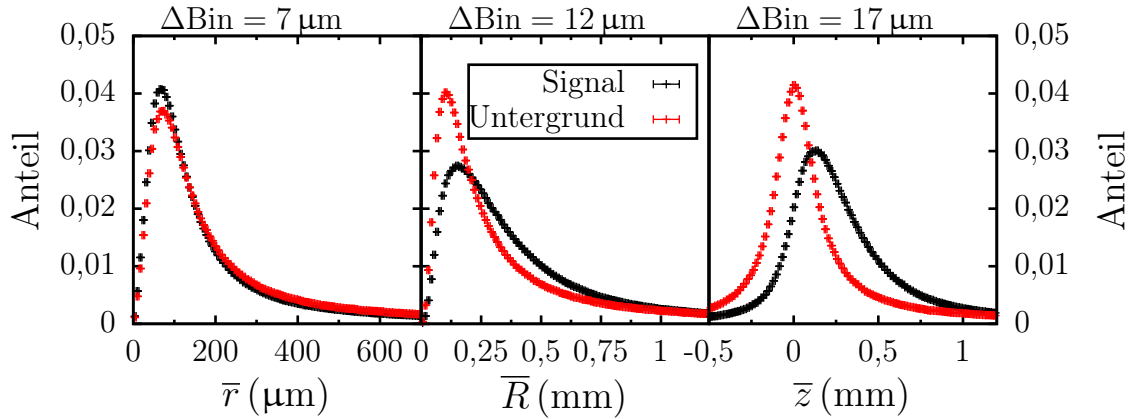


Abbildung 8.6: Abstand zwischen dem gewichteten Mittelwert der D-Meson-Zerfallspunkte und dem nominalen Interaktionspunkt. Zur besseren Vergleichbarkeit der Verteilungen sind diese im gezeigten Intervall auf Eins normiert.

keit der Koplanarität der Tochterteilchenimpulse des D^0 -Zerfalls zu testen, ist in Abbildung 8.7 der rekonstruierte Winkel α zwischen (π^+, π^-) -Ebene und K_S -Impuls im Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ des Signalkanals bzw. dem jeweiligen D^0 -Kandidaten des Untergrundkanals dargestellt. Im Falle des Signals liegen die Impulse von π^+ ,

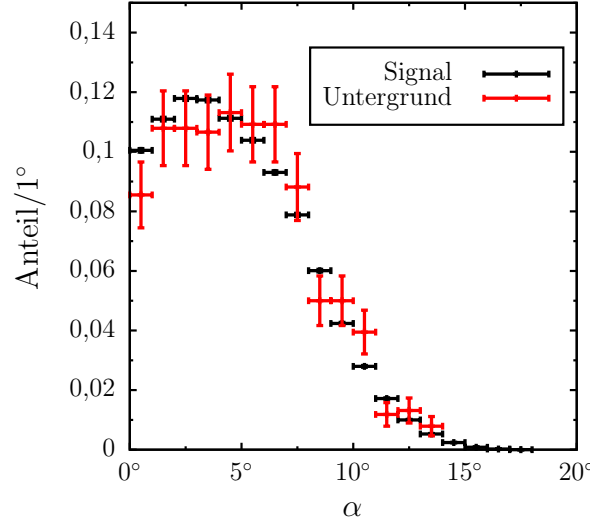


Abbildung 8.7: Rekonstruierter Winkel zwischen der (π^+, π^-) -Ebene und dem K_S -Impuls im Ruhesystem des D^0 im Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ nach Anwendung aller Schnittkriterien. Zur besseren Vergleichbarkeit sind die Verteilungen auf Eins normiert.

π^- und K_S im D^0 -Ruhesystem in einer Ebene, wobei in der Berechnung von α die Lorentztransformation in das D^0 -Ruhesystem mit der Hälfte des berechneten Antiprotonenimpulses erfolgt, nicht der Summe der Impulse von π^+ , π^- und K_S . Nach Anwendung aller Schnittkriterien ist die Verteilung von α für Signal und Untergrund sehr ähnlich und ein Schnitt auf diese Größe nicht sinnvoll.

Eine geringfügige Verbesserung des Signal-zu-Untergrund-Verhältnisses lässt sich auch durch engere Grenzen des D^0 - und $\bar{D}^0$ -Massenschnitts erreichen. Verschärft man die Massenschnitte auf 40 % des verwendeten Wertes, so erhöht sich S/U um einen Faktor 1,4, während sich die Effizienz im Signalkanal um den Faktor 0,9 verringert. Am approximierten Größenverhältnis von S/U ändert sich hierdurch jedoch nichts. Mit den angewandten Methoden ist es nicht gelungen, den Reaktionskanal $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2 \pi^- K^+ K_S$ in einem Umfang zu unterdrücken, der die Messung des untersuchten Reaktion $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (K_S \pi^+ \pi^-)(K^+ \pi^-)$ erlauben würde. Ein Ausweg könnte in der Verwendung eines globalen kinematischen Fits der gesamten Ereignistopologie mit dem Eingangsimpuls des Antiprotons, den invarianten Massen (m_{D^0} , $m_{\bar{D}^0}$, m_{K_S}) sowie den Zerfallspunkten von D^0 , $\bar{D}^0$ und K_S als Zwangsbedingungen liegen. Die zu erreichende Verbesserung des Signal-zu-Untergrund-Verhältnisses liegt bei einem Faktor von 10^4 – 10^6 . Sollte es prinzipiell nicht gelingen, den untersuchten Reaktionskanal vom Untergrund zu separieren, kann

die gleiche Analyseverfahren auch mit semileptonischen Flavortags wie $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu$ durchgeführt werden.

8.3 Selektion aus $\psi(3770)$ -Zerfällen und Mistag-Wahrscheinlichkeit

Neben der Reduktion von hadronischen Untergrundkanälen ist es wichtig zu zeigen, dass es mit den verwendeten Schnittkriterien gelingt, aus allen möglichen Kombinationen von $(D^0, \bar{D}^0)$ -Zerfällen den untersuchten Kanal zu selektieren. Hierzu wird bei der Schwerpunktsenergie $\sqrt{s} = 3,77 \text{ GeV}$ eine Stichprobe von $5,8 \cdot 10^7$ Ereignissen der Form

$$\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow \text{alle} \quad (8.5)$$

verwendet. Das $\psi(3770)$ zerfällt hierbei zufällig in einen der möglichen Zerfallskanäle. Dominant ist dies die Produktion von Paaren geladener $Br(\psi(3770) \rightarrow D^+ D^-) = (41 \pm 4) \%$ und ungeladener $Br(\psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0) = (52 \pm 5) \%$ D-Mesonen [4]. Diese wiederum zerfallen zufällig in einen der im EvtGen-Ereignisgenerator implementierten Zerfallskanäle, wobei im Falle der D^0 bzw. $\bar{D}^0$ 136 und für die D^+ bzw. D^- 105 der wichtigsten Modi berücksichtigt werden. Anders als im vorhergehenden Abschnitt wird hier mit der realistischen Teilchenidentifikation und einem Schnitt auf die PID-Likelihood gearbeitet, wodurch sich auch die Wahrscheinlichkeit quantifizieren lässt, den Flavortag falsch zu identifizieren. Die mit den angewandten Schnittkriterien erreichte Effizienz und Reinheit des Signals für verschiedene PID-Kriterien sind in Tabelle 8.4 zusammengefasst; wobei die Reinheit das Verhältnis der richtig identifizierten $\psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (K_S \pi^+ \pi^-)(K^+ \pi^-)$ zu den Ereignissen bezeichnet, die von allen Schnittkriterien akzeptiert werden. Die Wahr-

PID-Likelihood	<i>Ideal</i>	<i>VeryLoose</i>	<i>Loose</i>	<i>Tight</i>
Effizienz	$1,02(4) \cdot 10^{-5}$	$8,3(4) \cdot 10^{-6}$	$2,2(2) \cdot 10^{-6}$	$3,9(8) \cdot 10^{-7}$
Reinheit (%)	94(4)	48(2)	84(7)	100(21)
ψ -Multiplizität	1,07(7)	1,01(5)	1,03(14)	1,0(3)

Tabelle 8.4: Effizienz, Reinheit und ψ -Multiplizität für die Stichprobe $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow \text{alle}$ bei Anwendung aller kinematischen Schnitte.

scheinlichkeit zur Verwechslung eines $D^+ D^-$ mit einem Signalereignis ist gering. Auch wenn als PID-Information lediglich das Vorzeichen der rekonstruierten Ladung verwendet wird (*VeryLoose*), liegt das Signal-zu-Untergrund-Verhältnis bezüglich der $D^+ D^-$ -Zerfälle bei $S/U = 12,9 \pm 2,2$. Bei den beitragenden Ereignissen handelt es sich ausnahmslos um Kombinationen der $D^\pm$ -Zerfallskanäle $K^\mp \pi^\pm \pi^\pm$, $K_S \pi^\pm \pi^0$, $K^\mp \pi^\pm e^\pm \bar{\nu}_e$ und $K^\mp \pi^\pm \mu^\pm \bar{\nu}_\mu$, also Zerfallskombinationen die zu sechs geladenen Spuren führen. Für alle stärkeren PID-Schnitte wird keiner der $D^+ D^-$ -Zerfälle als

Signalereignis akzeptiert und es lässt sich mit $S/U > 130$ lediglich eine obere Grenze für das Signal-zu-Untergrund-Verhältnis bezüglich $D^+ D^-$ -Zerfällen angeben.

Zur Fehlidentifikation einer Kombination von $(D^0, \bar{D}^0)$ -Zerfällen als Signalereignis bestehen folgende Möglichkeiten:

- D^0 -Mistag: Das $\bar{D}^0$ zerfällt über den Kanal $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ und wird richtig identifiziert. Das D^0 zerfällt nicht über $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$, wird aber fälschlich als dieser Zerfall akzeptiert.
- $\bar{D}^0$ -Mistag: Das D^0 zerfällt über den Kanal $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ und wird richtig identifiziert. Das $\bar{D}^0$ zerfällt nicht über $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$, wird aber fälschlich als dieser Zerfall akzeptiert.
- Doppelter Mistag: Weder zerfällt das D^0 über $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$, noch das $\bar{D}^0$ über $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$. Dennoch wird das Gesamtereignis als Signalereignis akzeptiert.

Eine Aufstellung aller aufgetretenen Kombinationen von Zerfallskanälen, die von allen kinematischen Schnitten akzeptiert werden, gibt Anhang H, während sich eine Übersicht der Mistag-Raten getrennt nach dem jeweils verwendeten PID-Schnitt in Tabelle 8.5 findet. Insbesondere ist die Wahrscheinlichkeit für einen $\bar{D}^0$ -Mistag gering.

PID-Likelihood	<i>Ideal</i>	<i>VeryLoose</i>	<i>Loose</i>	<i>Tight</i>
D^0 -Mistag (%)	6(1)	19(1)	12(3)	< 4,3
$\bar{D}^0$ -Mistag (%)	0,6(3)	57(2)	7(2)	< 4,3
Doppelter-Mistag (%)	0	10(1)	3(1)	< 4,3

Tabelle 8.5: Mistag-Wahrscheinlichkeiten bei Anwendung aller kinematischen Schnitte für verschiedene PID-Kriterien.

Auch mit dem schwachen PID-Schnitt *Loose* gelingt es für 94 % aller Ereignisse den Zerfall $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$ richtig zu identifizieren, wobei es sich bei auftretenden $\bar{D}^0$ -Mistags um die Zerfälle in $\rho^+ \pi^-$, $K^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu$ und insbesondere $K^+ K^-$ handelt. Wahrscheinlicher ist das Auftreten einer D^0 -Fehlidentifikation, so liegt auch bei Anwendung des Kriteriums *Ideal* der Anteil der D^0 -Mistags bei 6,3 %. Am häufigsten (62,5 % aller D^0 -Mistags) handelt es sich hierbei um den Zerfall in vier Pionen ($D^0 \rightarrow 2 \pi^+ 2 \pi^-$ und $D^0 \rightarrow \rho^0 \rho^0$), bei dem der Abstand zwischen K_S - und $\bar{D}^0$ -Kandidaten stark fehlerrekonstruiert wird. Durch eine Vergrößerung des Schnitts auf den K_S - $\bar{D}^0$ -Abstand lässt sich der Beitrag solcher Ereignisse reduzieren. Besonders schwierig vom Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ zu unterscheiden sind Endzustände, die ein K_S enthalten. Hierbei handelt es sich einerseits um den Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^- e^+ \nu_e$, der eine Fehlidentifikation des e^+ als π^+ erfordert. Andererseits sind es die Zerfallskanäle

(Verzweigungsverhältnisse nach [4]):

- | | |
|--|---|
| a) $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^- \pi^0$ | $\text{Br} = (5,2 \pm 0,6) \%$, |
| b) $D^0 \rightarrow K_S \eta \rightarrow K_S(\pi^+ \pi^- \pi^0)$ | $\text{Br} = (1,02 \pm 0,09) \cdot 10^{-3}$, |
| c) $D^0 \rightarrow K_S \eta' \rightarrow K_S(\rho^0 \gamma)$ mit $\rho^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ | $\text{Br} = (2,7 \pm 0,2) \cdot 10^{-3}$, |

in denen sich der Endzustand vom Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ durch ein zusätzliches π^0 oder γ unterscheidet. Reaktionen vom Typ a)-c) machen bei Verwendung idealer Teilchenidentifikation 28 % aller D^0 -Mistags aus, wobei die Reaktionen b) und c) aufgrund von η und ρ^0 im Zwischenzustand im Dalitz-Diagramm des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ stark lokalisiert erscheinen. Abbildung 8.8 zeigt die ursprüngliche generierte

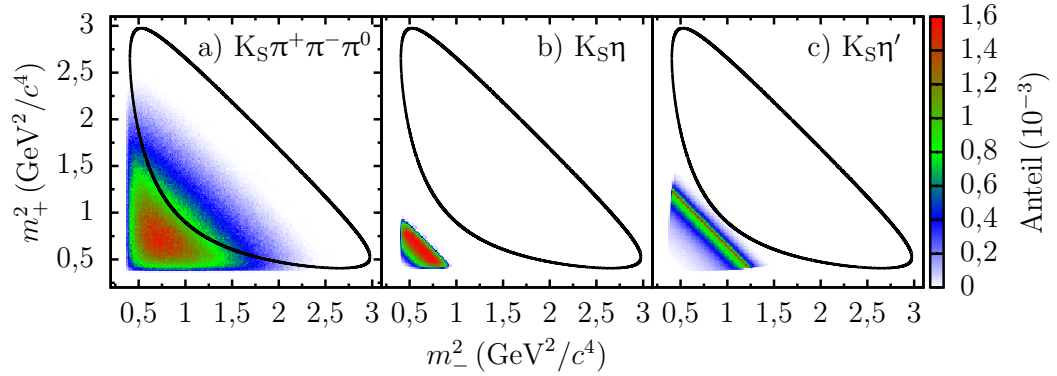


Abbildung 8.8: Generierte Verteilung der Zerfälle a), b) und c) im Dalitz-Diagramm. In schwarz sind die Phasenraumgrenzen des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ gezeigt.

Verteilung der Zerfälle a)-c) des Ereignisgenerators und macht deutlich, dass lediglich die (m_+^2, m_-^2) -Verteilung von a) teilweise mit dem Phasenraum des $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ Zerfalls überlappt, während die Reaktionen b) stark fehlerrekonstruierte Impulse von D^0 -Tochtereilchen benötigt, um als Signalereignis akzeptiert zu werden. Obwohl der Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \eta' \rightarrow K_S(\rho^0 \gamma)$ gegenüber $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^- \pi^0$ um etwa einen Faktor 20 weniger wahrscheinlich ist, werden bei Verwendung des PID-Kriteriums *Ideal* vier $D^0 \rightarrow K_S \eta' \rightarrow K_S(\rho^0 \gamma)$ und fünf $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^- \pi^0$ Zerfälle von allen kinematischen Schnitten akzeptiert. Ein prinzipiell mögliches Veto bezüglich Reaktion c) ist der Nachweis des hochenergetischen η' -Zerfallsphotons, im Falle der Reaktionen a) und b) die Rekonstruktion des π^0 über den Zerfall $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$.

Das erreichte Signal-zu-Untergrund-Verhältnis bezüglich allen $\psi(3770)$ -Zerfällen in Abhängigkeit des Schnitts auf die Likelihood der Teilchenidentifikation fasst Tabelle 8.6 zusammen. Insgesamt lässt sich feststellen, dass es gelingt, den untersuchten Signalkanal von allgemeinen $\psi(3770)$ -Zerfällen zu separieren. Darüber hinaus konnten die dominant zum Untergrund beitragenden Zerfallsmodi isoliert

PID-Likelihood	<i>Ideal</i>	<i>VeryLoose</i>	<i>Loose</i>	<i>Tight</i>
S/U	14,5(6)	0,93(4)	5,2(5)	> 23

Tabelle 8.6: Signal-zu-Untergrund-Verhältnis bezüglich allgemeiner ψ (3770)-Zerfälle.

und Möglichkeiten zu deren weiterer Reduktion angegeben werden. Die Mistag-Wahrscheinlichkeit ist maßgeblich von der Teilchenidentifikation und als solche von den momentan¹ im Simulationsframework implementierten PID-Systemen abhängig. Der vergleichsweise geringe Wert von < 4,3 % folgt hierbei aus den im Mittel hohen Impulsen der $\bar{D}^0$ -Zerfallsteilchen (vgl. Abbildung 7.2), die den Einfluss der fehlenden Flugzeitdetektoren verringern.

¹Stand: Oktober 2014.

Kapitel 9

Messung der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparameter am $\overline{\text{PANDA}}$ -Experiment

Nachdem in Kapitel 7 neben einer allgemeinen Charakterisierung von Teilchenidentifikation sowie Orts- und Massenauflösung im Detail dargestellt worden ist, wie das Auflösungsverhalten der D^0 - $\bar{D}^0$ -Zerfallszeitdifferenz parametrisiert werden kann und Kapitel 8 eine Abschätzung des erreichbaren Signal-zu-Untergrund-Verhältnisses gibt, wird in diesem abschließenden Kapitel die Messbarkeit von D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparametern am $\overline{\text{PANDA}}$ -Experiment mit den in Abschnitt 3.3 erarbeiteten Methoden untersucht. Als vereinfachende Näherung wird ein Abgleich des wahren Teilchentyps vorgenommen¹ und kombinatorischer Untergrund ausgeschlossen. Hiervon abgesehen wird keine Monte-Carlo-Information verwendet; insbesondere ergibt sich das Auflösungsverhalten der invarianten Massen $m_{\pm}^2$ und der Zerfallszeitdifferenz Δt aus den rekonstruierten Impulsen der GEANT-basierten Detektorsimulation.

Zur Beschreibung der zeitunabhängigen Dreikörperamplituden $\mathcal{A}_f$ und $\bar{\mathcal{A}}_f$ in der Ereignisgeneration dient das bislang detaillierteste, experimentell bestimmte Amplitudenmodell des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ aus der Veröffentlichung (siehe Tab. 9.1 und Anhang D)

Belle Collaboration, T. Peng, Z. P. Zhang, *et al.*, „Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing and search for indirect CP violation using $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ decays”, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 091103,

während die Zeitabhängigkeit der Zerfallsamplitude $\mathcal{M}_f$ durch Gleichung 1.34 berücksichtigt wird. Gleichung 1.34 stellt für den verwendeten Flavortag $K^+ \pi^-$ eine Näherung der exakten Abhängigkeit von Gleichung 1.54 dar; die relative Abweichung liegt hierbei im Prozentbereich ($\text{Br}(\bar{D}^0 \rightarrow K^- \pi^+)/\text{Br}(\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-)$). Die zur Normierung der Likelihoodfunktion notwendige Integration über die Zerfallszeitdifferenz wird analytisch ausgeführt, die Integration über $m_{\pm}^2$ numerisch mit der Monte-Carlo-Methode (vgl. Abschnitt 3.3).

Als hypothetische Messdaten des Experiments dienen drei Stichproben von jeweils

¹ Dieses Vorgehen ist identisch zum PID-Kriterium *Ideal* der vorhergehenden Kapitel.

$1,47 \cdot 10^5$ rekonstruierten Ereignissen einer Simulation mit folgenden Werten der $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischungsparameter:

- Stichprobe ohne $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung: $x = 0$, $y = 0$, $\left|\frac{q}{p}\right| = 1$, $\phi = 0$,
- Stichprobe mit CP -Erhaltung: $x = 0,0049$, $y = 0,0062$, $\left|\frac{q}{p}\right| = 1$, $\phi = 0$,
- Stichprobe mit CP -Verletzung: $x = 0,0041$, $y = 0,0063$, $\left|\frac{q}{p}\right| = 0,93$, $\phi = -8,7^\circ$.

Auf die Stichproben wird im Folgenden abkürzend verwiesen mit Stichprobe *NoMix*, *Mix* und *CPVio*. Wird auch der ladungskonjugierte Zerfall in die Analyse einbezogen, entsprechen $1,47 \cdot 10^5$ Ereignisse in etwa der erwarteten Ereignismenge nach 150 Tagen $\bar{\text{PANDA}}$ -Datennahme im Falle eines hohen Wirkungsquerschnitts² bei Verwendung aller nutzbaren Flavortags (vgl. Tab. 6.2) und liegt in der Größenordnung der statistisch abgeschätzten Minimalmenge an Ereignissen, bei der die genutzte Analysemethode angewandt werden kann (vgl. Kap. 4.1). Neben den hypothetischen

Resonanz	J^{PC}	Masse (MeV/ c^2)	Breite (MeV/ c^2)	Amplitudenform
$K^*(892)^\pm$	1^-	893,68	47,49	RBW ¹
$K_0^*(1430)^\pm$	0^+	1461,7	268,3	LASS ²
$K_2^*(1430)^\pm$	2^+	1425,6	98,5	RBW
$K^*(1410)^\pm$	1^-	1414	232	RBW
$K^*(1680)^\pm$	1^-	1717	322	RBW
$f_2(1270)$	2^{++}	1275,1	185,1	RBW
$\rho(770)$	1^{--}	775,49	149,1	GS ³
$\omega(782)$	1^{--}	782,65	8,49	RBW
$\rho(1450)$	1^{--}	1465	400	RBW
$\pi\pi$ S-Welle	0^{++}			K -Matrix

¹ Relativistische Breit-Wigner-Amplitude

² LASS-Amplitude der $K\pi$ S-Welle

³ Gounaris-Sakurai-Amplitude

Tabelle 9.1: Resonanzen des zur Ereignisgeneration verwendeten Amplitudenmodells mit Massen und Breiten aus [4, 52].

Messdaten dient eine Datenmenge von $3,4 \cdot 10^7$ Ereignissen zur Integration der zeit-unabhängigen Dreikörperamplituden $\mathcal{A}_f$ und $\bar{\mathcal{A}}_f$. In der betreffenden Stichprobe ist die Übergangsamplitude konstant ($\mathcal{A}_f(m_+^2, m_-^2) = \bar{\mathcal{A}}_f(m_+^2, m_-^2) = \text{konst.}$), wodurch die Ereignisse im Dalitz-Diagramm gleichverteilt sind. Zur Berücksichtigung der Akzeptanz werden hierbei als Punkte der numerischen Monte-Carlo-Integration die ursprünglich generierten Werte $(m_+^2, m_-^2)_{\text{MC}}$ aller $1 \cdot 10^6$ Ereignisse verwendet, die nach dem durchlaufen der GEANT-Simulation vollständig rekonstruiert worden sind und die gewählten Schnittkriterien erfüllen. Die Ereignismenge $(m_+^2, m_-^2)_{\text{MC}}$

² $\mathcal{L} = 1,6 \cdot 10^{32} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$, $\varepsilon = 5\%$ und $\sigma_\psi = 100 \text{ nb}$.

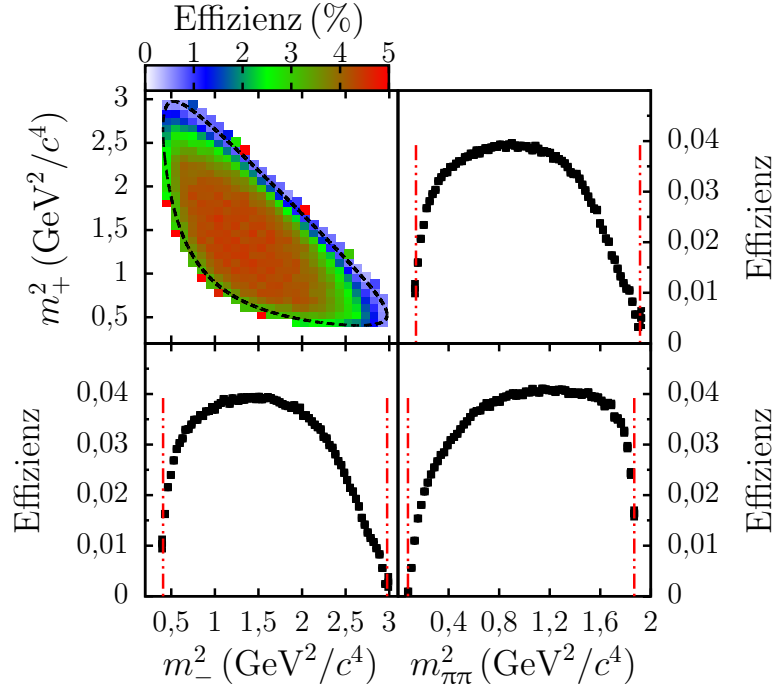


Abbildung 9.1: Effektiv berücksichtigte Effizienz im Dalitz-Diagramm-Fit. In rot sind die Grenzen des zugänglichen Phasenraums gezeigt.

entspricht daher effektiv einer Gleichverteilung im Dalitz-Diagramm bei Berücksichtigung der Effizienz (siehe Abb. 9.1). Zur Reduktion von Rechenzeit sind in der Ereignisselektion der hypothetischen Messdaten und der gleichverteilten Stichprobe lediglich der kinematische Fit mit der D^0 -Masse als Zwangsbedingung und der Δt -Schnitt verwendet worden. Hierbei wird im Falle des D^0 - und $\bar{D}^0$ -Vertex-Fits ein Schnitt auf den $\mathcal{P}$ -Wert von $\mathcal{P} > 0,05$ und im kinematischen Fit der Wert $\mathcal{P} > 0,1$ verwendet. Bis auf die absolute Höhe wird die Form des Effizienzverlaufs bei Verwendung aller Schnittkriterien gut reproduziert (vgl. Abb. 7.36). Insbesondere ergibt sich auch hier ein starker Abfall der Effizienz für niedrige Werte von $m_{\pi\pi}^2$, der anschaulich darauf zurückgeführt werden kann, dass in diesem Bereich die zur Vertexrekonstruktion genutzten D^0 -Zerfallspionen einen geringen Relativimpuls besitzen und die vollständige Ereignisrekonstruktion öfters misslingt.

Um die Auswirkung der über das Dalitz-Diagramm variierenden Effizienz auf die Verteilung der invarianten Massen der hypothetischen Messdaten deutlich zu machen, vergleicht Abbildung 9.2 die ursprünglich generierte (*Monte-Carlo*) mit der rekonstruierten Verteilung. Um zudem Effekte der Massenauflösung von solchen der Effizienz zu unterscheiden, ist außer den rekonstruierten Ereignissen (*Effizienz und Auflösung*) die Verteilung der wahren Monte-Carlo-Massen aller nachgewiesenen Ereignisse gezeigt (*Effizienz*). Die erste Verteilung berücksichtigt Effizienz und Auflösung, die zweite lediglich die Effizienz. Visuell wahrnehmbare Unterschiede zeigen sich hierbei im Bereich der dominanten Resonanz $K^*(892)^-$ ($m_-^2 = 0,80 \text{ GeV}^2/c^4$)

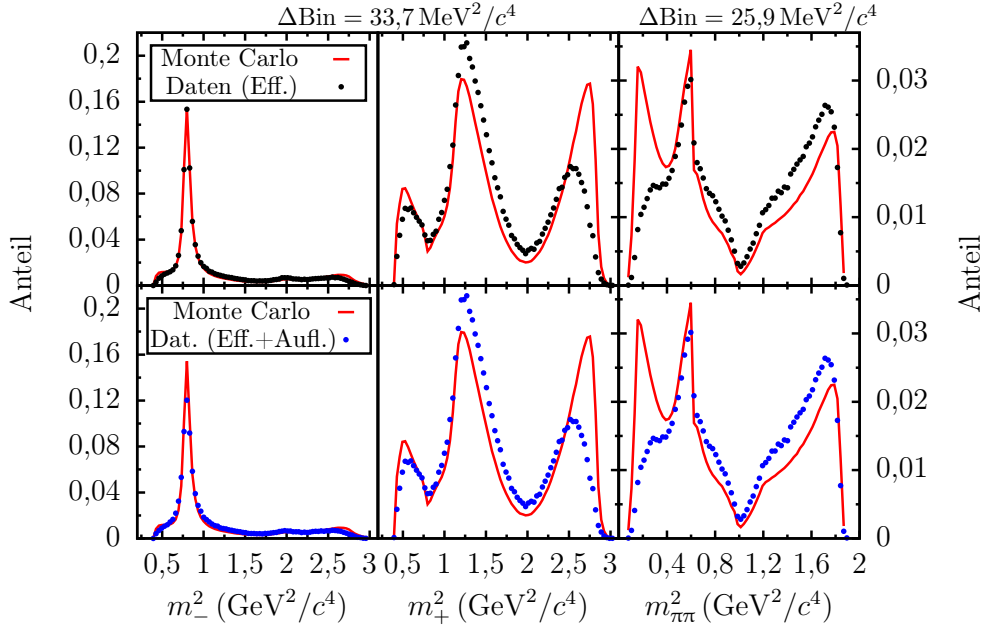


Abbildung 9.2: Auf Eins normierte Verteilung der invarianten Massen (m_+^2 , m_-^2 , $m_{\pi\pi}^2$) nach dem Belle-Modell [52]. Gezeigt sind die generierte Verteilung (*Monte-Carlo*) und die rekonstruierte Verteilung getrennt nach Verwendung der wahren Monte-Carlo-Massen (*Effizienz*) sowie deren realistischer Rekonstruktion (*Effizienz und Auflösung*) für die Stichprobe *Mix*.

durch die Verarbeitung des Breit-Wigner-Peaks. Bei den gegenüber der generierten Verteilung sichtbar reduzierten Peaks am unteren Rand von $m_{\pi\pi}^2$ und dem oberen Rand von m_+^2 handelt es sich um die kinematische Reflektion der Winkelverteilung derselben Resonanz, wobei dieser Effekt aus der geringen Effizienz bei kleinen $m_{\pi\pi}^2$ folgt. Einen direkten Vergleich der Verteilungen der realistisch rekonstruierten Ereignisse (*Effizienz und Auflösung*) und der Verteilung aller rekonstruierten Ereignisse bei Verwendung der wahren Massen $m_{\pm}^2$ (*Effizienz*) im Dalitz-Diagramm zeigt Abbildung 9.3. Auch in dieser Darstellung wird deutlich, dass sich Unterschiede in den Verteilungen primär auf die effektive Verbreiterung der Resonanz $K^*(892)^-$ zurückführen lassen. Im folgenden Abschnitt 9.1 wird zunächst ein Fit der zeitunabhängigen Dreikörperamplitude durchgeführt und der Einfluss der Massenauflösung und Effizienz auf die Auflösbarkeit der Amplitudenstruktur untersucht, während sich Abschnitt 9.2 der eigentlichen Messung der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparameter widmet.

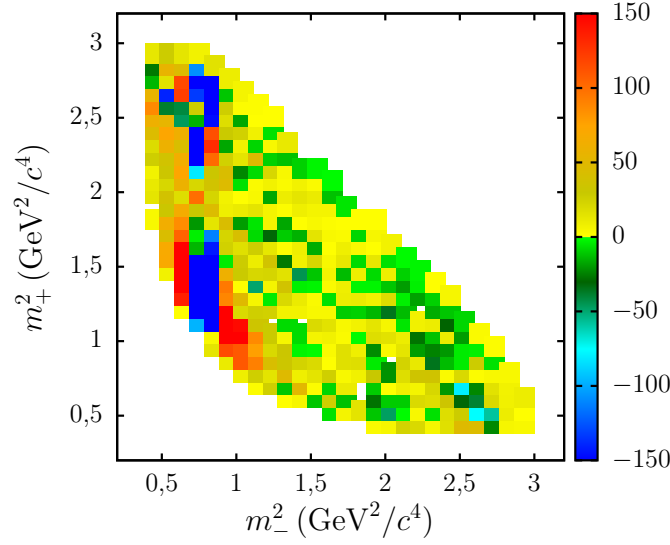


Abbildung 9.3: Differenz der Ereignisverteilung im Dalitz-Diagramm (30×30 Bins) bei realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen $m_{\pm}^2$ und Verwendung der Monte-Carlo-Werte. Gezeigt ist in jedem Bin die Differenz $N(\text{Eff.} + \text{Aufl.}) - N(\text{Eff.})$ (Stichprobe *Mix*).

9.1 Fit der zeitunabhängigen Dreikörperamplitude

Wie in Abschnitt 3.3.2 gezeigt wurde, ist die zeitabhängige Zerfallsamplitude $|\mathcal{M}_f|^2$ nach Integration über die Zerfallszeitdifferenz bis auf Korrekturen der Ordnung $\mathcal{O}(x^2)$ und $\mathcal{O}(y^2)$ identisch zur zeitunabhängigen Dreikörperamplitude $|\mathcal{A}_f|^2$ (vgl. Gleichung 3.58)

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathcal{M}_f(m_+^2, m_-^2, \Delta t)|^2 d\Delta t = |\mathcal{A}_f(m_+^2, m_-^2)|^2 + \mathcal{O}(x^2) + \mathcal{O}(y^2). \quad (9.1)$$

Zudem gilt im Falle der Abwesenheit von direkter CP -Verletzung

$$\mathcal{A}_f(m_+^2, m_-^2) = \bar{\mathcal{A}}_f(m_-^2, m_+^2). \quad (9.2)$$

Anschaulich sind in diesem Fall die Dalitz-Diagramme der Zerfälle $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ und $\bar{D}^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ bis auf eine Spiegelung an der Diagonalen gleich. Der volle Fit der zeitabhängigen Zerfallsamplitude $|\mathcal{M}_f(m_+^2, m_-^2, \Delta t)|^2$ lässt sich daher in guter Näherung separieren in einen zeitunabhängigen Fit der Dreikörperamplitude $|\mathcal{A}_f(m_+^2, m_-^2)|^2$ und einen rein zeitabhängigen Fit von $|\mathcal{M}_f|^2$ bei fixierten Amplitudenparametern.

Um zunächst zu zeigen, dass es beim gegebenen Verlauf der Effizienz im Dalitz-Diagramm möglich ist, die Amplitudenstruktur der Dreikörperamplitude zu bestimmen, ist ein Fit durchgeführt worden, in dem anstelle der rekonstruierten die

ursprünglich generierten Monte-Carlo-Massen $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{MC}}$ verwendet werden. Bei Fit mit dem zur Ereignisgeneration verwendeten Belle-Modell lässt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Daten und Fit erzielen, was deutlich zeigt, dass der starke Abfall der Effizienz am Rand des Dalitz-Diagramms die Auflösbarkeit der Amplitudenstruktur nicht wesentlich einschränkt. Die in diesem Fit bestimmten Parameter und Abbildungen zum Fitergebnis finden sich in Anhang I.

Eine Analyse des Datensatzes, der sich bei Verwendung der realistisch rekonstruierten invarianten Massen $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{rek}}$ ergibt, ist weniger eindeutig. Bei Fit mit dem Belle-Modell ist die Likelihood-Schätzung insbesondere bezüglich der geschätzten K -Matrix- und LASS-Parameter nicht sehr stabil und es existiert eine Reihe von lokalen Minima mit ähnlichen Werten der logarithmischen Likelihood, jedoch deutlich verschiedenen Werten der geschätzten Parameter. Um diese Mehrdeutigkeit zu vermeiden, ist der betreffende Fit wiederholt mit zufälligen Startwerten der Parameter durchgeführt worden. Das beste erzielte Fitergebnis ist in Tabelle 9.2 zusammengefasst; das Dalitz-Diagramm im Vergleich mit dem Fit zeigt Abbildung 9.4, die Verteilungen der invarianten Massen zusammen mit Projektionen des Fits sind in Abbildung 9.5 dargestellt.

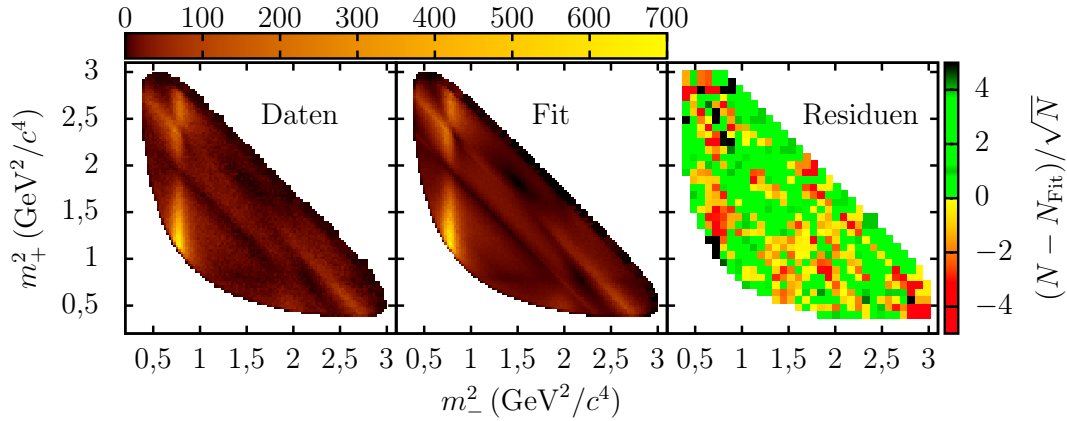


Abbildung 9.4: Verteilung der hypothetischen Messdaten im Dalitz-Diagramm, Verteilung des Fits und Residuen bei realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen. Die Binbreite der Darstellung beträgt $25,7 \text{ MeV}^2/c^4$ für die Dalitz-Diagramme und $95 \text{ MeV}^2/c^4$ für die Residuen (Stichprobe *Mix*).

Die gezeigte Darstellung des Fits ergibt sich dabei aus einer Gewichtung der Monte-Carlo-Punkte der numerischen Integration mit der ereignisweise berechneten Dreikörperamplitude $|\mathcal{A}_f(m_+^{2(j)}, m_-^{2(j)})|^2$, wobei ein zusätzlicher Faktor $N / \sum_j |\mathcal{A}_f(m_+^{2(j)}, m_-^{2(j)})|^2$ die Normierung der Monte-Carlo-Punkte auf die Ereignisanzahl der Daten erzwingt (vgl. Gleichung 3.54). Um die Abweichungen zwischen hypothetischen Messdaten und Fitergebnis deutlich zu machen, sind in beiden Fällen auch die Residuen $(N - N_{\text{Fit}})/\sqrt{N}$ gezeigt. Zur formalen Beurteilung der Fitgüte lässt sich hiermit auch ein χ^2 -Test durchführen. Die hierzu notwendige Einteilung

Resonanz	Re(a_i)	Im(a_i)	FA ¹ (%)	Resonanz	Re(a_i)	Im(a_i)	FA ¹ (%)
Cabibbo-bevorzugt				Doppelt Cabibbo-unterdrückt			
K [*] (892) ⁻	-1,41(3)	1,68(2)	64(1)	K [*] (892) ⁺	0,122(8)	-0,069(7)	0,26(3)
K ₀ [*] (1430) ⁻	1,57(5)	0,25(5)	37(2)	K ₀ [*] (1430) ⁺	-0,13(3)	0,23(3)	1,0(3)
K ₂ [*] (1430) ⁻	0,87(4)	-0,79(4)	1,7(1)	K ₂ [*] (1430) ⁺	-0,09(3)	-0,12(3)	0,028(12)
K [*] (1410) ⁻	0,27(5)	0,58(6)	0,54(9)	K [*] (1410) ⁺	-0,34(5)	0,09(6)	0,16(5)
K [*] (1680) ⁻	-0,61(22)	-5,36(28)	8,2(9)	K [*] (1680) ⁺	2,90(23)	0,67(22)	2,5(4)
$(\mathcal{R} K_S)$ in $CP = +1$				$(\mathcal{R} K_S)$ in $CP = -1$			
f ₂ (1270)	1,24(5)	-0,67(4)	3,38(19)	ρ(770)	1 (fixiert)	0 (fixiert)	20,2(4)
				ω(782)	-0,006(2)	0,019(2)	0,15(2)
				ρ(1450)	-0,72(10)	1,25(11)	1,5(3)
ππ S-Welle				32(2)			
β ₁	-9,23(14)	4,72(13)		f ₁₁ ^{prod}	-7,4(3)	-2,9(3)	
β ₂	-0,12(25)	-2,36(32)		f ₁₂ ^{prod}	-0,35(77)	1,74(75)	
β ₃	82,6 ± 2,1	-36,0 ± 2,0		f ₁₃ ^{prod}	-6,5 ± 1,6	21,8 ± 1,5	
β ₄	10,8(8)	-3,1(8)		f ₁₄ ^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	
β ₅	0 (fixiert)	0 (fixiert)		f ₁₅ ^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	
s ₀ ^{prod}	-3,92637 (fixiert)						
Kπ S-Welle (K ₀ [*] (1430) [±])							
M (MeV/c ²)	951 ± 5			Γ (MeV/c ²)	140,9 ± 15,9		
R	1 (fixiert)			φ _R (rad)	-3,71 ± 0,12		
B	4,76 ± 0,16			φ _B (rad)	1,10 ± 0,02		
a (c/GeV)	0,295 ± 0,004			r (c/GeV)	-13,29 ± 0,19		
K [*] (892) [±]							
M (MeV/c ²)	897,6 ± 0,3						
Γ (MeV/c ²)	65,6 ± 0,5						
ℒ am Maximum		119.172					
Ergebnis des χ ² -Tests							
χ ²	1678,83		χ ² /ndf	3,2–3,5			
ndf	477–526		ℙ (%)	≈ 0			

¹ Fitanteil.

Tabelle 9.2: Ergebnis der Dalitz-Diagramm-Analyse bei realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen (Stichprobe *Mix*).

des Dalitz-Diagramms in Bins der Kantenlänge $8,3 \text{ MeV}^2/c^4$ ist derart gewählt, dass kein Bin im zweidimensionalen Dalitz-Diagramm weniger als 5 Ereignisse enthält. Für χ^2 ergibt sich der Wert $\chi^2 = 1678,83$ bei insgesamt 527 Bins innerhalb des Dalitz-Diagramms. Da es sich um einen Likelihood-Fit ohne Einteilung der Daten in Bins handelt, lässt sich von der χ^2 -Verteilung lediglich die Aussage treffen, dass diese bei 49 aus dem Fit bestimmten Parametern $477 = 527 - 1 - 49$ bis $526 = 527 - 1$ Freiheitsgrade besitzt (vgl. Abschnitt 3.4.1). Man erhält hieraus die Abschätzung $\chi^2/\text{ndf} = 3,2\text{--}3,5$. Der hieraus berechnete $\mathcal{P}$ -Wert liegt in beiden Fällen numerisch nahe bei Null und zeigt eine über rein statistische Fluktuation hinausgehende Abweichung zwischen hypothetischen Messdaten und Fit. Zum Vergleich sind in Tabelle

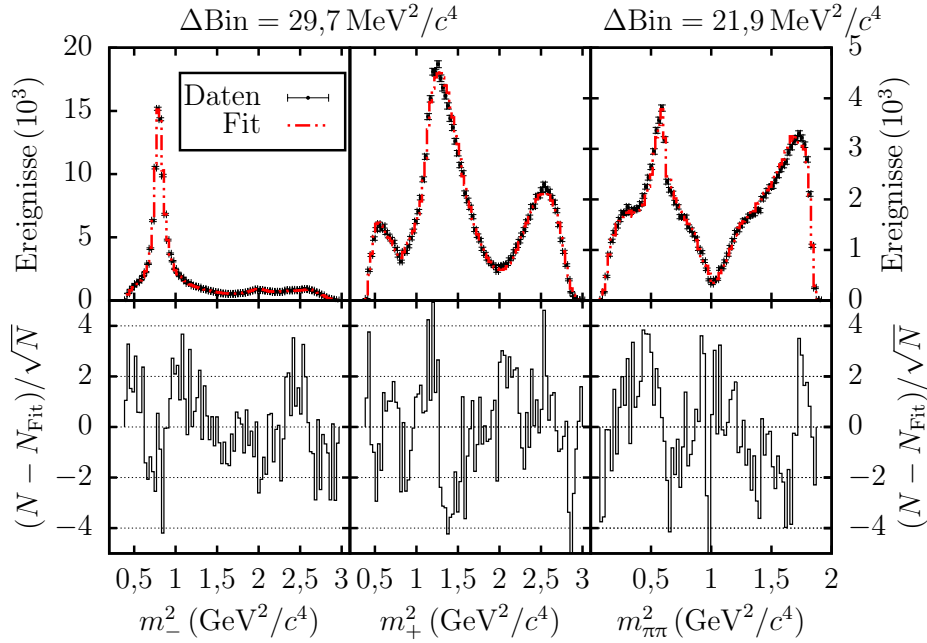


Abbildung 9.5: Verteilung von $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{rek}}$, Projektion des Fits und Residuen bei realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen (Stichprobe *Mix*).

9.3 die hier erzielten Werte denen des Fits bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz gegenüber gestellt. Die Anzahl der Bins innerhalb des Dalitz-Diagramms ist in beiden Fällen nicht gleich, da bei Verwendung der wahren Monte-Carlo-Massen eine größere Binbreite notwendig ist, um die Bedingung von mindestens 5 Ereignissen pro Bin zu erfüllen.

	Fit (<i>Effizienz</i>)	Fit (<i>Effizienz und Auflösung</i>)
χ^2	403,56	1678,83
ndf	298–347	477–526
χ^2/ndf	1,16–1,35	3,2–3,5
$\mathcal{P}$ (%)	0,004–2,0	≈ 0

Tabelle 9.3: Fitgüte bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz (*Effizienz*) und realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen (*Effizienz und Auflösung*) für die Stichprobe *Mix*.

Die Ursache für die systematischen Fehler des Fits wird besonders deutlich in den zweidimensionalen Residuen (siehe Abb. 9.4), in denen sich starke Abweichungen insbesondere im Bereich der dominanten $K^*(892)^-$ -Resonanz ergeben. Dessen aus dem Fit geschätzte Breite von $\Gamma = 65,6 \pm 0,5 \text{ MeV}/c^2$ übersteigt aufgrund der effektiven Verbreiterung durch die endliche Massenauflösung wesentlich den in der

Ereignisgeneration verwendeten Wert von $\Gamma_{\text{MC}} = 47,49 \text{ MeV}/c^2$. Dies führt zu Abweichungen von der verwendeten Breit-Wigner-Form und infolgedessen zu einem systematischen Fehler im durchgeführten Fit. Neben der $K^*(892)^-$ -Resonanz betrifft diese Argumentation auch andere schmale Resonanzen des Amplitudenmodells, wie das ω -Meson und den $f_0(980)$ -Pol der K -Matrix Parametrisierung. Die beobachtete Breite der $K^*(892)^-$ -Resonanz lässt sich vergleichen mit der erwarteten effektiven Verbreiterung, die sich mit der in Abschnitt 7.3.5 abgeschätzten Auflösung der invarianten Masse m_-^2 von $\sigma_- = 13,51 \text{ MeV}/c^2$ ergibt. Nimmt man hierzu vereinfachend

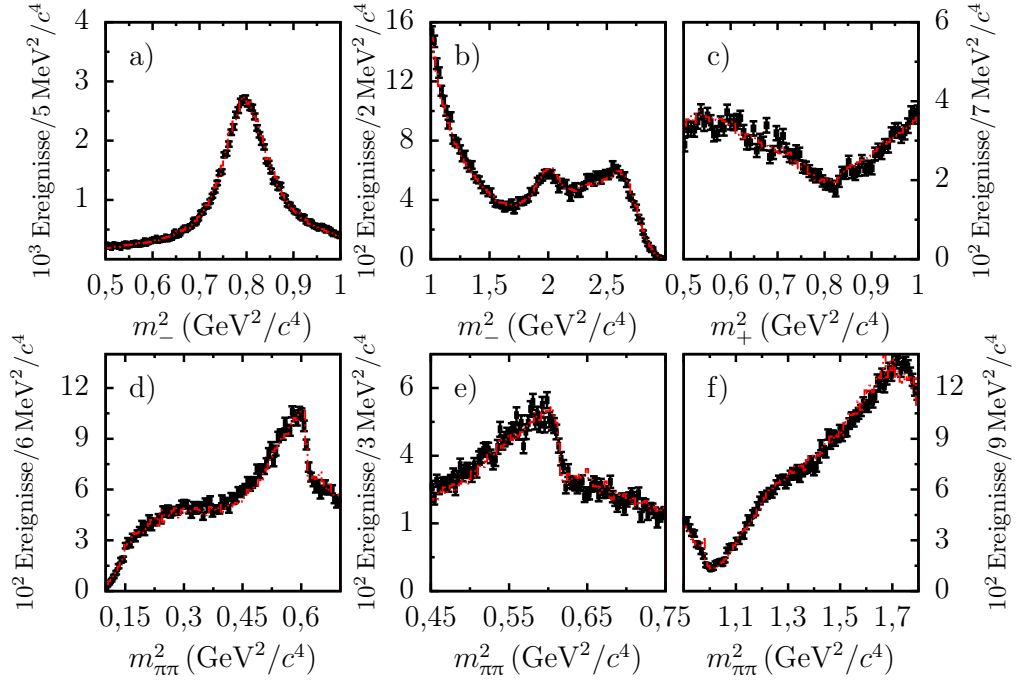


Abbildung 9.6: Nahansicht der Verteilungen von $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{rek}}$ in physikalisch relevanten Regionen (siehe Text) der Stichprobe *Mix* zusammen mit der Projektion des Fits.

eine gaußförmige Auflösungsfunktion an, entspricht die beobachtete Amplitudenform einer Faltung aus Normalverteilung und Breit-Wigner-Amplitude, einer sogenannten Voigt-Funktion. Deren Halbwertsbreite α_V (FWHM) lässt sich näherungsweise berechnen über [182]

$$\begin{aligned} \alpha_V &= \frac{1}{2} \left(1,0692 \cdot \alpha_{\text{BW}} + \sqrt{0,86639 \cdot \alpha_{\text{BW}}^2 + 4\alpha_G^2} \right) \\ &= 105,2 \text{ MeV}/c^2, \end{aligned} \quad (9.3)$$

wobei α_{BW} und α_G die Halbwertsbreiten von Breit-Wigner- und Normalverteilung bezeichnen. Der berechnete Wert unterschreitet signifikant den beobachteten Wert von $\alpha = 2\Gamma = 131,2 \text{ MeV}/c^2$. Dieser Vergleich bestätigt das in Abschnitt 7.3.5 erzielte Ergebnis, dass die Auflösungsfunktion von m_-^2 keiner Normalverteilung

folgt, sondern vielmehr weitreichende Ausläufer besitzt. Um die Übereinstimmung zwischen hypothetischen Messdaten und Fit näher zu testen, zeigt Abbildung 9.6 eine vergrößerte Darstellung physikalisch relevanter Abschnitte der invarianten Massen:

- a) Breit-Wigner-Peak der dominanten Resonanz $K^*(892)^-$.
- b) Oberer Wertebereich von m_-^2 mit $K_0^*(1430)^-$, $K_2^*(1430)^-$, $K^*(1410)^-$ und $K^*(1680)^-$.
- c) Destruktive Interferenz des $K^*(892)^+$.
- d) Region mit geringer Rekonstruktionseffizienz.
- e) Interferenz von $\omega(782)$ und $\rho(770)$.
- f) Oberer Wertebereich von $m_{\pi\pi}^2$ mit starkem Einfluss der $\pi\pi$ S-Welle.

Bereich c) ist für den zeitabhängigen Fit des nächsten Abschnitts von besonderer Bedeutung, da die zeitliche Abnahme des $K^*(892)^-$ und Zunahme des $K^*(892)^+$ -Anteils die höchste Sensibilität auf die Bestimmung der Mischungsparameter x und y schafft. Sichtbare Abweichungen zwischen Fit und Daten zeigen sich in f) am oberen Rand des zugänglichen Massenbereichs in der kinematischen Reflektion der $K^*(892)^-$ -Winkelverteilung und in d) und e) am unteren Rand des ρ -Peaks; Ursache hierfür ist die Fehlbeschreibung in der effektiven $K^*(892)^-$ -Amplitudenform. Die Auswirkung durch die effektive Verbreiterung der $\omega(782)$ -Resonanz hingegen ist geringer e). Um die Übereinstimmung in der Winkelverteilung von Fit und Daten zu testen, vergleicht Abbildung 9.7 die mittleren Werte der Kugelflächenfunktionen Y_L^0

$$\begin{aligned} Y_1^0 &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos \vartheta & Y_2^0 &= \sqrt{\frac{5}{16\pi}} (3 \cos^2 \vartheta - 1) \\ Y_3^0 &= \sqrt{\frac{7}{16\pi}} (5 \cos^3 \vartheta - 3 \cos \vartheta) & Y_4^0 &= \sqrt{\frac{9}{256\pi}} (35 \cos^4 \vartheta - 30 \cos^2 \vartheta + 3). \end{aligned} \quad (9.4)$$

Hierzu werden ereignisweise die hypothetischen Messdaten mit Y_L^0 und für die Darstellung des Fits die Monte-Carlo-Punkte der numerischen Integration mit dem Produkt $Y_L^0 \cdot |\mathcal{A}_f|^2$ gewichtet. Je nach Abhängigkeit von $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)$ beziehen sich die Helizitätswinkel in Gleichung 9.4 auf

$$\cos \vartheta(m_-^2) = \cos \vartheta_{\pi^+ \pi^-}^{R(K_S \pi^-)} \quad \cos \vartheta(m_+^2) = \cos \vartheta_{\pi^+ \pi^-}^{R(K_S \pi^+)} \quad \cos \vartheta(m_{\pi\pi}^2) = \cos \vartheta_{K_S \pi^-}^{R(\pi^+ \pi^-)}. \quad (9.5)$$

Bei global guter Übereinstimmung von Daten und Fit in Abbildung 9.7 lassen sich bestehende Abweichungen auf die Fehlbeschreibung der $K^*(892)^-$ -Resonanz zurückführen.

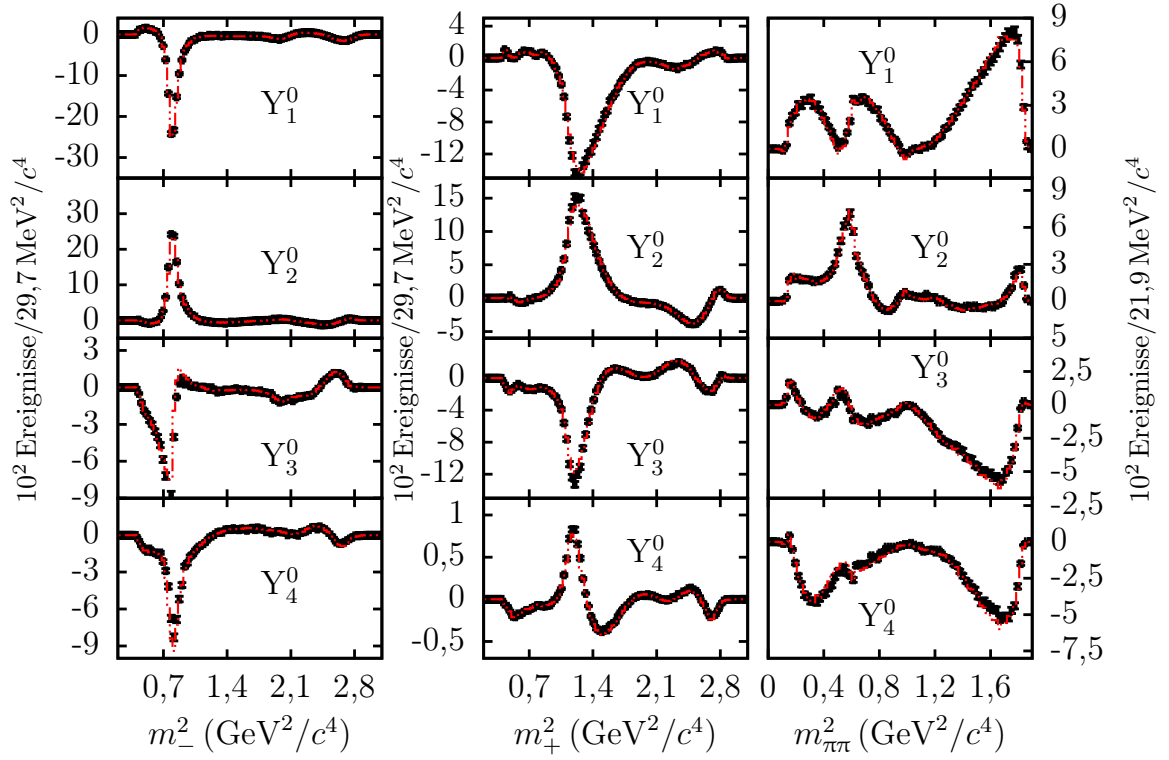


Abbildung 9.7: Mittlere Werte der Kugelflächenfunktionen Y_L^0 in Abhängigkeit der realistisch rekonstruierten invarianten Massen $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{rek}}$ und Projektion des Fits für die Stichprobe *Mix*.

Am deutlichsten zeigt sich die Limitierung des erzielten Fitergebnisses in den berechneten Fitanteilen [183]

$$\text{FA}_i = \frac{\iint_{\Omega} |a_i A_i(m_+^2, m_-^2)|^2 dm_+^2 dm_-^2}{\iint_{\Omega} |\mathcal{A}_f(m_+^2, m_-^2)|^2 dm_+^2 dm_-^2} \quad \text{mit} \quad \mathcal{A}_f = \sum_i a_i A_i. \quad (9.6)$$

Üblicherweise wird in Dreikörperzerfällen der Ausdruck $\text{FA}_i / \sum_i \text{FA}_i$ mit dem jeweiligen Verzweungsverhältnis identifiziert. Hierbei ist die Summe der Fitanteile aufgrund von Interferenz der Amplituden nicht immer Eins.

Resonanz	Fit (<i>Eff.</i>)	Fitanteil (%)	
		Fit (<i>Eff.</i> + <i>Aufl.</i>)	Modell
$K^*(892)^-$	56,6(7)	64(1)	60,45
$K_0^*(1430)^-$	6,5(5)	37(2)	7,02
$K_2^*(1430)^-$	2,01(9)	1,7(1)	2,21
$K^*(1410)^-$	0,32(6)	0,54(9)	0,26
$K^*(1680)^-$	0,70(17)	8,2(9)	0,16
$K^*(892)^+$	0,50(4)	0,26(3)	0,46
$K_0^*(1430)^+$	0,12(5)	1,0(3)	0,05
$K_2^*(1430)^+$	0,002(3)	0,028(12)	0,01
$K^*(1410)^+$	0,11(4)	0,16(5)	0,07
$K^*(1680)^+$	0,20(11)	2,5(4)	0,13
$f_2(1270)$	3,54(17)	3,38(19)	1,41
$\rho(770)$	23,1(4)	20,2(4)	20,0
$\omega(782)$	0,52(4)	0,15(2)	0,57
$\rho(1450)$	0,064(36)	1,5(3)	0,120
$\pi\pi$ S-Welle	12,2(6)	32(2)	12,88
Summe	106,5	172,3	105,7

Tabelle 9.4: Fitanteile des Dalitz-Diagramm-Fits (Stichprobe *Mix*). „Modell“ bezeichnet die Werte der Ereignisgeneration; der angegebene Fehler ist rein statistisch.

Um deren Umfang zu quantifizieren, lassen sich sogenannte Interferenz-Fitanteile nutzen

$$\text{FA}_{ij} = \frac{\iint_{\Omega} 2 \operatorname{Re} [a_i A_i(m_+^2, m_-^2) a_j^* A_j^*(m_+^2, m_-^2)] dm_+^2 dm_-^2}{\iint_{\Omega} |\mathcal{A}_f(m_+^2, m_-^2)|^2 dm_+^2 dm_-^2}. \quad (9.7)$$

Hierbei entsprechen die Diagonalelemente der Interferenz-Fitanteile dem doppelten Wert des betreffenden Fitanteils

$$\text{FA}_{ii} = 2\text{FA}_i. \quad (9.8)$$

Die berechneten Fitanteile sind in Tabelle 9.4 zusammengefasst. Eine vollständige Liste aller Interferenz-Fitanteile findet sich in Anhang I, eine Übersicht der Interferenz-Fitanteile der wichtigsten Resonanzen gibt Tabelle 9.5. Hierbei zeigt sich, dass bei dem Fit der realistisch rekonstruierten Daten (*Effizienz und Auflösung*) der Anteil von $K_0^*(1430)^-$ und $\pi\pi$ S-Welle stark überschätzt wird. Möglich ist dies durch deren sehr starke destruktive Interferenz ($-50,28\%$), die im Amplitudenmodell der Ereignisgeneration weit weniger ausgeprägt ist. Anschaulich ist die Amplitudenform von LASS- und K -Matrix-Parametrisierung sehr flexibel. Der Fit ist bestrebt durch Variation der LASS- und K -Matrix-Parameter die Fehler in der Beschreibung der $K^*(892)^-$ -Amplitudenform auszugleichen. Der zu hoch geschätzte Anteil von $K\pi$

	$K^*(892)^-$	$K_0^*(1430)^-$	$K_2^*(1430)^-$	$f_2(1270)$	$\rho(770)$	$\pi\pi$ S-Welle
	Fit (<i>Effizienz</i>)					
$K^*(892)^-$	113,1	-0,29	-0,33	-1,51	-8,36	9,18
$K_0^*(1430)^-$		12,99	0,59	1,20	0,11	-2,97
$K_2^*(1430)^-$			4,03	1,72	2,00	-1,01
$f_2(1270)$				7,09	-0,01	-0,79
$\rho(770)$					46,24	0,02
$\pi\pi$ S-Welle						24,41
	Fit (<i>Effizienz und Auflösung</i>)					
$K^*(892)^-$	128	5,88	-0,27	-2,22	-9,48	-5,43
$K_0^*(1430)^-$		73,29	0,64	2,04	4,24	-50,28
$K_2^*(1430)^-$			3,44	1,56	1,75	-1,09
$f_2(1270)$				6,76	-0,005	-0,80
$\rho(770)$					40,44	-0,17
$\pi\pi$ S-Welle						63,97

Tabelle 9.5: Interferenz-Fitanteile der wichtigsten Resonanzen des Amplitudenmodells in Prozent (Stichprobe *Mix*).

und $\pi\pi$ S-Welle wird auch in Abbildung 9.8 deutlich, in der die einzelnen Beiträge aller Resonanzen in Abhängigkeit der invarianten Massen dargestellt sind. Zusammenfassend lässt sich feststellen, dass der Verlauf der Rekonstruktionseffizienz im Dalitz-Diagramm die Auflösbarkeit der Amplitudenstruktur nicht wesentlich einschränkt, jedoch die momentan in der Simulation prognostizierte Auflösung der invarianten Massen $m_{\pm}^2$ ohne weitere Korrektur zu systematischen Fehlern führt. Sollte im späteren Experiment keine bessere Auflösung erreicht werden, ist es zwingend erforderlich diese im Fit zu berücksichtigen. Entsprechende Verfahren sind aufwendig, einige kurze Anmerkungen hierzu finden sich am Ende von Abschnitt 7.3.5.

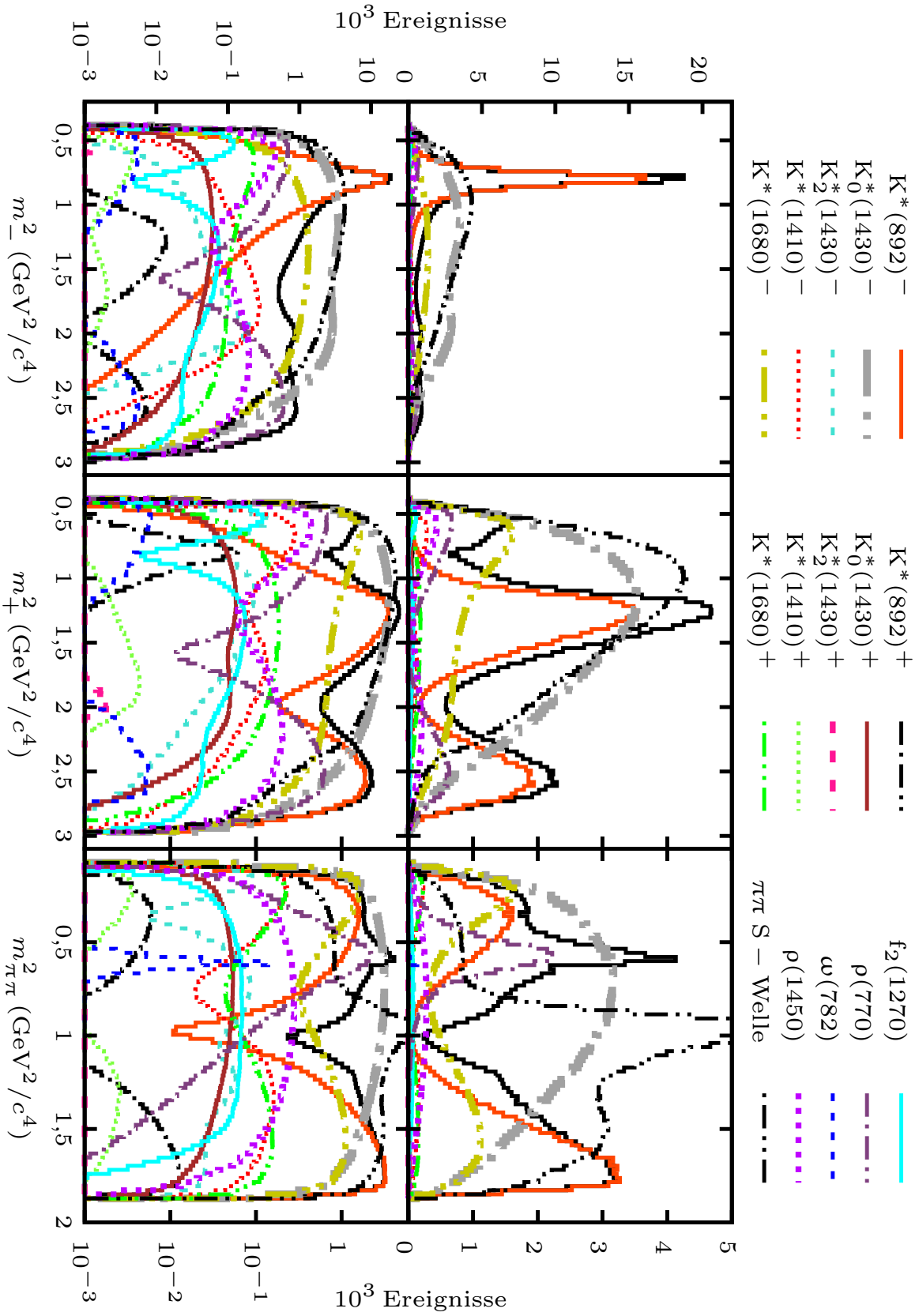


Abbildung 9.8: Amplituden $|A_i|^2$ getrennt nach einzelnen Resonanzen bei Fit der Stichprobe *Mix* und Verwendung der realistisch rekonstruierten invarianten Massen (Eff.+Aufl.). Als schwarze durchgezogene Linie ist die Gesamtamplitude $|A_f|^2$ gezeigt. Die Binbreite beträgt $29,7 \text{ MeV}^2/c^4$ für m_-^2 und $21,9 \text{ MeV}^2/c^4$ für $m_{\pi\pi}^2$.

9.2 Extraktion der $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischungsparameter

Aus der zeitabhängigen Analyse der $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ Zerfallsamplitude lassen sich die Mischungsparameter x und y sowie die CP -verletzenden Parameter $\left|\frac{q}{p}\right|$ und ϕ bestimmen. Zunächst wird auf den CP -erhaltenden Fall ($\left|\frac{q}{p}\right| = 1, \phi = 0$) eingegangen, im Anschluss auf den allgemeinen Fall, der auch CP -Verletzung erlaubt. Die Funktionsanpassung unterteilt sich in drei Schritte:

1. Fit der zeitunabhängigen Dreikörperamplitude $|\mathcal{A}_f(m_-^2, m_+^2)|^2$.
2. Fit von $|\mathcal{M}_f(m_-^2, m_+^2, \Delta t)|^2$ bei variablen Parametern x und y sowie fixierten Parametern der Dreikörperamplitude.
3. Simultaner Fit der Amplituden und Mischungsparameter.

Hierbei entspricht Schritt 1 dem im letzten Abschnitt durchgeführten Fit. Die verwendete Form der Zerfallsamplitude ist eine Faltung aus der als Summe von vier Normalverteilungen parametrisierten Auflösungsfunktion $\mathcal{R}$ und der zeitabhängigen Zerfallsamplitude $|\mathcal{M}_f|^2$

$$(\mathcal{R} \otimes |\mathcal{M}_f|^2)(m_-^2, m_+^2, \Delta t) = \sum_{i=1}^4 a_i |\mathfrak{M}_f(m_-^2, m_+^2, \Delta t | \sigma_i, \mu_i)|^2. \quad (9.9)$$

Jeder der Terme $|\mathfrak{M}_f|^2$ entspricht einer Faltung aus einer einfachen Normalverteilung mit $|\mathcal{M}_f|^2$ (siehe Anhang C und Abschnitt 3.3.3), wobei das exakte Ergebnis der Faltung verwendet wird. Die Parameter der Auflösungsfunktion μ_i , σ_i und a_i sind durch einen separaten Fit in Abschnitt 7.3.3 bestimmt worden; hier werden diese als fixierte Parameter mit den in Tabelle 9.6 zusammengefassten Werten verwendet.

a_1	0,05	μ_1 (fs)	0,48	σ_1 (fs)	199,04
a_2	0,36	μ_2 (fs)	-5,21	σ_2 (fs)	325,36
a_3	0,43	μ_3 (fs)	-0,68	σ_3 (fs)	560,90
a_4	0,16	μ_4 (fs)	30,01	σ_4 (fs)	1120,09

Tabelle 9.6: Parameter der Auflösungsfunktion der Zerfallszeitdifferenz im zeitabhängigen Dalitz-Diagramm-Fit.

Die explizit verwendete Form der logarithmischen Likelihoodfunktion ist

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \sum_{i=1}^N \ln \left(\frac{1}{2\tau} \sum_{k=1}^4 a_k |\mathfrak{M}_f(m_-^{2(i)}, m_+^{2(i)}, \Delta t^{(i)} | \sigma_k, \mu_k)|^2 \right) \\ & - N \ln \left(\sum_{j=1}^M \mathcal{I}(m_-^{2(j)}, m_+^{2(j)}) \right) + N \ln M, \end{aligned} \quad (9.10)$$

wobei $2\tau\mathcal{I}$ dem Integral von $|\mathcal{M}_f|^2$ über die Zerfallszeitdifferenz entspricht (vgl. Gleichung 3.58). Die erste Summe läuft über die $N = 1,47 \cdot 10^5$ Ereignisse der hypothetischen Messdaten, die zweite Summe über die $M = 10^6$ phasenraumverteilten Punkte der Monte-Carlo-Integration. Hierbei werden zur Reduktion des Simulationsaufwands für alle Funktionsanpassungen die gleichen $M = 10^6$ Monte-Carlo-Punkte verwendet, was eine schwache Korrelation zwischen den verschiedenen Fitergebnissen bedingt.

Stichprobe	Keine Mischung ¹	Mischung ²	CP -Verletzung ³
Parameter von $\mathcal{A}_f$ und $\bar{\mathcal{A}}_f$ aus Fit			
$x (10^{-3})$	$-4,0 \pm 3,7$	$5,3 \pm 3,7$	$-1,6 \pm 3,7$
$y (10^{-3})$	$3,6 \pm 3,8$	$4,2 \pm 3,8$	$10,2 \pm 3,8$
$\mathcal{P}$ -Wert (%)	34,7	21,5	2,3
Wahre Parameter von $\mathcal{A}_f$ und $\bar{\mathcal{A}}_f$			
$x (10^{-3})$	$-3,8 \pm 3,7$	$5,2 \pm 3,7$	$-1,4 \pm 3,7$
$y (10^{-3})$	$3,6 \pm 3,8$	$4,1 \pm 3,7$	$9,8 \pm 3,7$
¹ $x = 0, y = 0, \left \frac{q}{p}\right = 1, \phi = 0$			
² $x = 0,0049, y = 0,0062, \left \frac{q}{p}\right = 1, \phi = 0$			
³ $x = 0,0041, y = 0,0063, \left \frac{q}{p}\right = 0,93, \phi = -8,7^\circ$			

Tabelle 9.7: Ergebnis des zeitabhängigen Dalitz-Diagramm-Fits für die Mischungsparameter x und y bei im Fit erzwungener CP -Erhaltung ($\left|\frac{q}{p}\right| = 1, \phi = 0$).

Bei Fit der Stichprobe *Mix* und realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen erhält man für die Mischungsparameter x und y das Ergebnis:

$$x = (-0,35 \pm 3,9) \cdot 10^{-3} \quad y = (-0,84 \pm 4,0) \cdot 10^{-3}. \quad (9.11)$$

Diese werden gegenüber den in der Simulation gesetzten Werten ($x = 0,0049, y = 0,0062$) deutlich unterschätzt. Um formal die Hypothese mit $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung (H_1) mit der Hypothese keiner Mischung (H_0) zu vergleichen, lässt sich die Likelihood-Quotienten-Methode (vgl. Abschnitt 3.4.2) verwenden. Diese liefert eine Aussage darüber, ob die Verbesserung der logarithmischen Likelihood im Fit mit den zusätzlichen freien Parametern (x und y) statistisch signifikant ist. Man erhält für den $\mathcal{P}$ -Wert des Tests $\mathcal{P} = 97,3\%$, d. h. die Wahrscheinlichkeit durch statistische Fluktuation eine Verbesserung von $\mathcal{L}$ zu beobachten, die genauso groß oder größer ist als der beobachtete Wert, beträgt $97,3\%$. Anschaulich deutet dies darauf hin, dass die im vorhergehenden Abschnitt gezeigte Fehlbeurteilung der Zerfallsamplitude bei realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen derart gravierend ist, dass eine Extraktion der Mischungsparameter nur mit starker Verzerrung möglich ist. Da es mit nur drei zur Verfügung stehenden Stichproben nicht möglich ist deren

Ausmaß zu quantifizieren, werden im Folgenden für alle rekonstruierten Ereignisse die wahren Werte der invarianten Massen $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{MC}}$ verwendet. Die Zerfallszeitdifferenzen hingegen werden realistisch mit dem in Abschnitt 7.3.3 beschriebenen Verfahren aus dem Abstand in Strahlrichtung zwischen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Vertex rekonstruiert, wobei für den Vertex-Fit die realistisch rekonstruierten Impulse der D^0 - und $\bar{D}^0$ -Tochtereilchen verwendet werden. Das Ergebnis eines Fits der drei Stichproben simulierter PandaRoot-Daten bei erzwungener CP -Erhaltung ($|q/p| = 1, \phi = 0$) ist in Tabelle 9.7 zusammengefasst, die Parameter des Fits der Dreikörperamplitude der Stichproben *NoMix* und *CPVio* findet sich in Anhang I. Exemplarisch ist die Verteilung der rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen der Stichprobe *Mix* zusammen mit der Projektion des Fits in Abbildung 9.9 gezeigt. Das Maß an visueller Übereinstimmung zwischen hypothetischen Messdaten und Fit ergibt sich dabei dominant aus den im Fit nicht bestimmten Parametern der Auflösungsfunktion (Tabelle 9.6). Einen Vergleich zwischen den in den jeweiligen Stichproben gesetzten Werten der

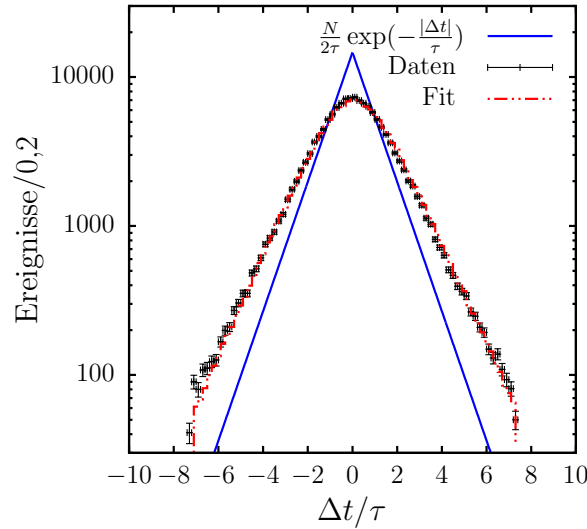
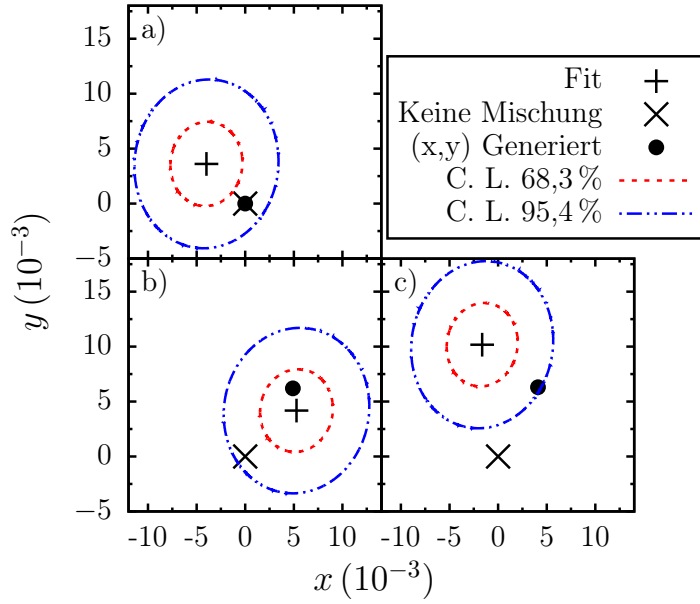


Abbildung 9.9: Verteilung der rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen zusammen mit der Projektion des Fits (Stichprobe *Mix*). In blau ist die Erwartung einer rein exponentiellen Lebensdauer-Verteilung ohne Berücksichtigung der Detektorauflösung gezeigt.

Mischungsparameter und den Fitergebnissen gibt Abbildung 9.10, die dargestellten Kovarianzellipsen sind mit dem MINOS-Paket berechnet worden. Hierbei zeigt sich, dass die geschätzten Fehler von x und y in der gleichen Größenordnung liegen wie die gesetzten Parameterwerte und etwa einen Faktor $3/2$ größer sind als die in Abschnitt 4.1 approximierten, rein statistischen Fehler. Diese zusätzliche Unsicherheit ergibt sich aus der Notwendigkeit, die Zerfallszeitdifferenz Δt zu messen (vgl. Abb. 4.7). Hingegen ist bei den gemachten Annahmen³ der Einfluss des Fits der Dreikörperam-

³Dies betrifft im Besonderen die Verwendung der wahren invarianten Massen $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{MC}}$.



Abbildungung 9.10: Fitergebnis der Mischungsparameter x und y für die Stichproben a) *NoMix*, b) *Mix* und c) *CPVio*. Die gezeigten Konfidenzintervalle (C. L.) entstammen einer Schätzung mit dem MINOS-Paket.

plitude gering. So erhält man nahezu die gleichen Werte für x und y , wenn im Fit die Dreikörperamplituden $\mathcal{A}_f$ und $\bar{\mathcal{A}}_f$ mit den wahren Werten der Amplitudenparameter berechnet werden (siehe Tab. 9.7). Für alle drei verwendeten Stichproben liegen die jeweils in der Ereignisgeneration gesetzten Werte der Mischungsparameter innerhalb des 2σ -Konfidenzintervalls, wobei sich die starke Abweichung im Falle der Stichprobe *CPVio* teilweise auf systematische Fehler zurückführen lässt, die im nächsten Abschnitt 9.3 untersucht werden.

Um nun formal darüber zu entscheiden, ob die Hypothese von $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung für die jeweilige Stichprobe angenommen oder verworfen wird, lässt sich die Likelihood-Quotienten-Methode verwenden; die betreffenden $\mathcal{P}$ -Werte finden sich in Tabelle 9.7. Fordert man ein Konfidenzniveau von 95 %, folgt hieraus die Bedingung $\mathcal{P} < 5\%$. Mit diesem Kriterium wird die Hypothese des Auftretens von $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung lediglich für die Stichprobe *CPVio* angenommen und für die Stichprobe *NoMix* richtiger- und die Stichprobe *Mix* fälschlicherweise verworfen. Um die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten von Fehlern erster Art - es findet keine Mischung statt, aber die Hypothese von $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung wird angenommen - und insbesondere Fehlern zweiter Art - es findet Mischung statt, aber die Hypothese keiner $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung wird angenommen - näher zu untersuchen, ist ein Verfahren gewählt worden, dass auch im folgenden Abschnitt 9.3 Verwendung findet. Hierzu sind Stichproben des Ereignisgenerators erstellt und die Zerfallszeitdifferenzen Δt anhand der Auflösungsfunktion $\mathcal{R}$ um die wahren Werte verteilt worden. Der Fit erfolgt mit der Likelihoodfunktion Glei-

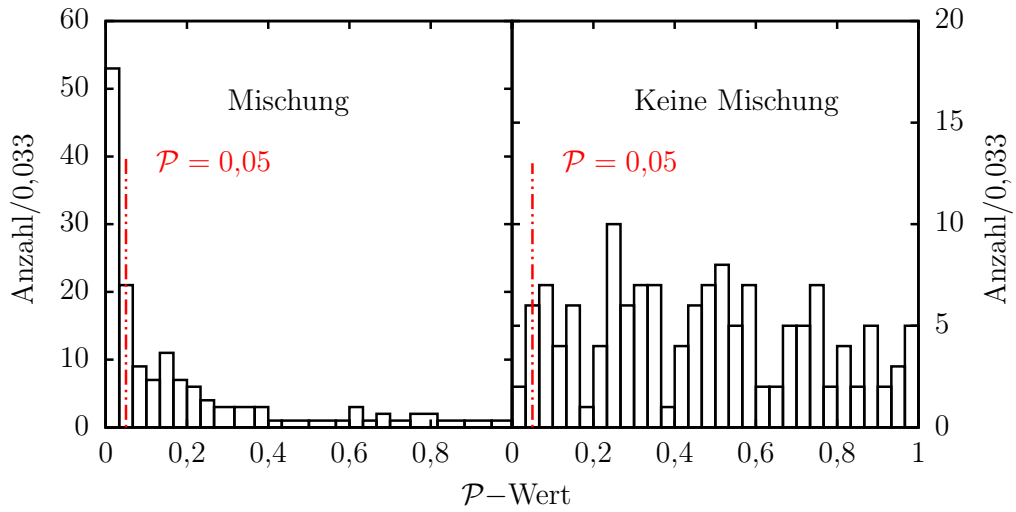


Abbildung 9.11: $\mathcal{P}$ -Wert des Likelihood-Quotienten-Tests bei Stichproben mit (*links*, $x = 0,0049$, $y = 0,0062$) und ohne (*rechts*, $x = y = 0$) $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung bei Analyse von Stichproben des Ereignisgenerators und anhand der Auflösungsfunktion $\mathcal{R}$ variiertes Zerfallszeitdifferenz.

chung 9.10 bei Verwendung der wahren Amplitudenparameter. Abbildung 9.11 zeigt die solcherart erstellten Verteilungen des $\mathcal{P}$ -Wertes für Stichproben mit und ohne $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung. Fehler erster Art treten in Übereinstimmung mit dem geforderten Signifikanzniveau mit einer Häufigkeit von $(2,1 \pm 1,2) \%$ auf, Fehler zweiter Art in $(53,1 \pm 6,1) \%$ aller Fälle. Anschaulich streuen die im Fit bestimmten Mischungsparameter um den wahren Wert von x und y . In Stichproben mit $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung ist der Likelihood-Quotienten-Test aufgrund der hohen statistischen Fehler für Datensätze signifikant, in denen die Likelihood-Schätzung den Wert von x und y überschätzt, bei unterschätzten Parametern ist die Verwechslungsgefahr mit der Hypothese keiner $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung hoch. Der letztgenannte Fall verursacht das häufige Auftreten von Fehlern zweiter Art.

Zum Abschluss soll hier noch gezeigt werden, dass es bei der verwendeten Ereignismenge nicht gelingt CP -Verletzung nachzuweisen. Ohne das Auftreten von $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung ($x = y = 0$) ist keine indirekte CP -Verletzung möglich, d. h. CP -Verletzung durch Mischung oder durch Interferenz von Mischung und Zerfall (vgl. Abschnitt 1.5). Es ist daher lediglich im Falle der Stichprobe $CPVio$ sinnvoll, einen Fit mit erlaubter CP -Verletzung durchzuführen, da für die beiden anderen Stichproben bereits die Hypothese von $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung verworfen wird. Aufgrund der vergleichsweise geringen Ereignismenge ist ein simultaner Fit aller Mischungsparameter $(x, y, |q/p|, \phi)$ statistisch unterbestimmt und führt zu stark unphysikalischen Werten der Mischungsparameter. Fixiert man im Fit die Parameter x und y auf die Werte des CP -erhaltenden Fits ($x = -1,6 \cdot 10^{-3}$, $y = 10,2 \cdot 10^{-3}$) erhält man das

Ergebnis

$$\left|\frac{q}{p}\right| = 1,09 \pm 0,38 \qquad \phi = -0,1^\circ \pm 1,1^\circ. \quad (9.12)$$

Der mit dem MINOS-Paket geschätzte Fehler von $|\frac{q}{p}|$ übertrifft die in der betreffenden Stichprobe gesetzte Abweichung vom CP -erhaltenden Fall ($1 - |\frac{q}{p}|_{MC} = 0,07$) um mehr als einen Faktor 5. Eine detaillierte, rein statistische Abschätzung der zur Messung von CP -Verletzung notwendigen Ereignismenge mit der verwendeten Methode findet sich in Abschnitt 4.2.

9.3 Abschätzung des systematischen Fehlers

Neben den in Kapitel 4 ausführlich dargestellten Tests der Fitprozedur ist eine Reihe von Tests durchgeführt worden, um den Einfluss verschiedener systematischer Fehlerquellen zu quantifizieren. Hierzu sind pro Test mindestens 120 Stichproben von jeweils $1,5 \cdot 10^5$ Ereignissen mit dem Generator EvtGen erstellt und die Zerfallszeitdifferenz in jedem Ereignis mit der Auflösungsfunktion $\mathcal{R}$ (Tabelle 9.6) zufällig variiert worden. Der Fit erfolgt mit der Likelihoodfunktion aus Gleichung 9.10, sofern nicht anders angegeben, mit den wahren Amplitudenparametern. Die entscheidende Einsparung an Berechnungszeit, die es unmöglich macht, alle Tests mit einer vollständigen PandaRoot-Simulation durchzuführen, ist das Auslassen der eigentlichen GEANT-basierten Detektorsimulation.

Tabelle 9.8 gibt eine Übersicht der gewichteten Mittelwerte von x und y sowie der Abweichung $\Delta x = x_{Fit} - x_{MC}$ und $\Delta y = y_{Fit} - y_{MC}$ vom jeweils gesetzten Wert in der Stichprobe für folgende Tests:

- I) Wiederholter Fit von Stichproben ohne D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung ($x = y = 0$).
- II) Wiederholter Fit von Stichproben mit D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung ($x = 0,0049$, $y = 0,0062$).

In folgenden Tests sind Stichproben mit D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung ($x = 0,0049$, $y = 0,0062$) verwendet worden. Die Ereignisgeneration erfolgt immer mit dem gleichen Modell, die Likelihoodfunktion des Fits wird systematisch variiert.

- III $_{\pm}$) Änderung aller Breiten σ_i (Tabelle 9.6) in der Fitfunktion um ± 100 fs.
- IV $_{\pm}$) Änderung der $K^*(892)^+$ -Amplitude in der Fitfunktion um ± 50 % ($0,5 \cdot a_{K^*(892)^+}$ bzw. $1,5 \cdot a_{K^*(892)^+}$).
- V $_{\pm}$) Änderung der $K_0^*(1430)^-$ -Amplitude in der Fitfunktion um ± 50 % ($0,5 \cdot a_{K_0^*(1430)^-}$ bzw. $1,5 \cdot a_{K_0^*(1430)^-}$).

Im letzten durchgeführten Test VI) ist der Einfluss der über das Dalitz-Diagramm variierenden Zerfallszeitauflösung (vgl. Abschnitt 7.3.3 und Abb. 7.25) untersucht worden. Hierzu wird in der Ereignisgeneration die Zerfallszeitdifferenz mit einer einfachen Gaußfunktion variiert, deren Breite wiederum ist eine lineare Funktion von $m_{\pi\pi}^2$

$$\sigma_{\Delta t}(m_{\pi\pi}^2) = 800 \text{ fs} - 300 \text{ fs} \frac{m_{\pi\pi}^2 - (m_{\pi\pi}^2)_{\min}}{(m_{\pi\pi}^2)_{\max} - (m_{\pi\pi}^2)_{\min}}. \quad (9.13)$$

In der Fitfunktion wird als Auflösungsfunktion in diesem Fall eine einfache Normalverteilung verwendet und deren Breite aus dem Fit bestimmt. Insgesamt erweist

Test	$x_{\text{Fit}} (10^{-3})$	$y_{\text{Fit}} (10^{-3})$	$\Delta x (10^{-3})$	$\Delta y (10^{-3})$
EG ¹ mit $x = y = 0$				
I	$0,2 \pm 0,5$	$0,5 \pm 0,5$	0,2	0,5
EG ¹ mit $x = 0,0049$ und $y = 0,0062$				
II	$4,6 \pm 0,5$	$6,9 \pm 0,5$	-0,3	0,7
III ₋	$4,4 \pm 0,4$	$9,9 \pm 0,5$	-0,5	3,7
III ₊	$4,5 \pm 0,7$	$4,4 \pm 0,6$	-0,5	-1,8
IV ₋	$4,6 \pm 0,5$	$5,2 \pm 0,5$	-0,3	-1,0
IV ₊	$5,1 \pm 0,5$	$8,9 \pm 0,6$	0,2	2,8
V ₋	$5,2 \pm 0,5$	$6,4 \pm 0,5$	0,3	0,2
V ₊	$4,4 \pm 0,5$	$6,4 \pm 0,5$	-0,5	0,2
EG ¹ mit $x = 0,0049$, $y = 0,0062$ und $\sigma_{\Delta t} = \sigma_{\Delta t}(m_{\pi\pi}^2)$				
VI	$5,1 \pm 0,5$	$5,1 \pm 0,4$	0,2	-1,1

¹ Ereignisgeneration

Tabelle 9.8: Mögliche systematische Fehlerquellen im Fit der Mischungsparameter. Die Bezeichnungen I-VI sind im Text erläutert.

sich vor allem die Likelihood-Schätzung des Parameters x als ausgesprochen stabil. Anschaulich lässt sich dies darauf zurück führen, dass die Modulation der Gesamtamplitude durch den Parameter x nicht symmetrisch bezüglich des Nullpunkts der Zerfallszeitdifferenz ist. Die Lebensdauerdifferenz y bedingt eine nahezu symmetrische Änderung der Gesamtamplitude und erhöht wie die endliche Zeitauflösung bei großen Zerfallszeitdifferenzen gegenüber einem rein exponentiellen Abfall die Ereignisrate (vgl. Abb. 3.6). Ein Unterschätzen der Breiten σ_i führt zu einem Überschätzen von y und umgekehrt. Sensibel reagiert die Likelihood-Schätzung von y auch auf eine Fehlschätzung des Anteils der Doppelt-Cabbibo-unterdrückten Resonanz $K^*(892)^+$. Wird deren Fitanteil überschätzt, ergibt sich auch eine starke Überschätzung des Parameters y .

Die im Fit der PandaRoot-Daten nicht berücksichtigte Variation der Zerfallszeitauflösung im Dalitz-Diagramm (Test VI) führt zu einem systematischen Unterschätzen von y in der Größenordnung von einem Drittel des statistischen Fehlers bei der

verwendeten Ereignismenge.

Ein weiterer systematischer Effekt ergibt sich daraus, dass in der Normierung der Likelihoodfunktion die Einschränkung auf das betrachtete Intervall der Zerfallszeitdifferenz von $[-3000 \text{ fs}, 3000 \text{ fs}]$ nicht explizit berücksichtigt wird. Formal wird in Anhang C die Integration über Δt anstelle des Intervalls $[-3000 \text{ fs}, 3000 \text{ fs}]$ über den vollen Variabilitätsbereich $[-\infty, \infty]$ ausgeführt. Hierdurch bedingt zeigt sich in den Tests I) und II) eine kleine Verzerrung von y in der Größenordnung von einem Fünftel des statistischen Fehlers.

Schlussbetrachtung

Im Rahmen dieser Arbeit ist mit einer detaillierten Simulationsstudie die Rekonstruierbarkeit des Reaktionskanals $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow D^0 \bar{D}^0 \rightarrow (K_S \pi^+ \pi^-)(K^+ \pi^-)$ am zukünftigen $\bar{P}$ ANDA-Experiment untersucht worden. Ein besonderer Schwerpunkt lag hierbei auf der Zerfallsortsmessung der kurzlebigen Mesonen (K_S , D^0 , $\bar{D}^0$) des Kanals mittels der Impulse von deren geladenen Tochterteilchen. Im Hinblick auf das K_S ist hervorhebenswert, dass der Mikro-Vertex-Detektor bei der betrachteten Schwerpunktsenergie maßgeblich zur Rekonstruktion des K_S -Vertex beiträgt und dieser mit hoher Güte gemessen werden kann.

Als besonders wichtiges Resultat konnte gezeigt werden, dass eine Messung der Zerfallszeitdifferenz zwischen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfall allein aus deren Abstand in Strahlrichtung ohne explizite Kenntnis des primären Antiproton-Proton-Interaktionspunktes möglich ist.

Die Analyse relevanter Untergrundreaktionen ergab ein zwiespältiges Bild. Während es gelingt, den betrachteten Reaktionskanal aus der Vielzahl an möglichen Kombinationen von $D^0 \bar{D}^0$ -Zerfallskanälen zu isolieren und Beiträge durch $D^+ D^-$ -Zerfälle zu verwerfen, erweist sich die Separation von hadronischen Untergrundreaktionen als extrem fordernd. So ist es mit den angewandten Methoden nicht gelungen, diese in einem Umfang zu reduzieren, der die Messung des Signalkanals erlauben würde. Wichtig ist hierbei die Feststellung, dass bei der betrachteten Schwerpunktsenergie ein Schnitt auf den Relativabstand von D^0 - und $\bar{D}^0$ -Meson nicht und ein Schnitt auf deren Abstand vom primären Interaktionspunkt nur in geringem Umfang zur Verbesserung des Signal-zu-Untergrund-Verhältnisses beitragen kann. Es wird dringend empfohlen näher zu untersuchen, ob es mit Anwendung geeigneter kinematischer Fitmethoden gelingt, D -Mesonen und angeregte D^* -Mesonen vom hadronischen Untergrund zu separieren.

Als zentrales Ergebnis dieser Arbeit konnte gezeigt werden, dass es mit der am $\bar{P}$ ANDA-Experiment erreichbaren Auflösung der Zerfallszeitdifferenz mit einer zeitabhängigen Analyse des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ möglich ist, die Mischung im D^0 - $\bar{D}^0$ -System zu untersuchen. Im späteren Experiment eröffnet dies ohne zusätzliche Zeit der Datennahme prinzipiell die Möglichkeit eine ähnliche zeitabhängige Analyse auch für andere Dreikörperzerfälle wie $D^0 \rightarrow K_S K^+ K^-$ und $D^0 \rightarrow K^+ \pi^- \pi^0$ durchzuführen, anstelle von flavorspezifischen sogenannte CP -Tags (z. B. $K^+ K^-$, $\pi^+ \pi^-$, $K_S \pi^0$) zu verwenden, oder D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung in zeitabhängigen Doppeltagratoren zu studieren. Hierbei wird $\bar{P}$ ANDA das einzige Experiment weltweit sein, an dem sich korrelierte D -Mesonen zeitabhängig untersuchen lassen.

Im betrachteten Kanal konnte gezeigt werden, dass die im späteren Experiment erreichbare Präzision in der Messung der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischungsparameter dominiert wird

durch den statistischen Fehler und somit durch die verfügbare Ereignismenge. Diese wiederum ist abhängig von der erreichbaren Luminosität, Rekonstruktionseffizienz und insbesondere dem bislang unbekannten $D^0\bar{D}^0$ -Produktionsquerschnitt in Antiproton-Proton-Reaktionen. Gegenüber einem idealen Experiment ohne Messfehler führt die in der Simulation abgeschätzte Zeitauflösung zu keiner Einschränkung in der Messbarkeit der Mischungsparameter, jedoch in etwa zu einer Verdopplung der zur Messung notwendigen Ereignismenge. Lediglich unter günstigen Annahmen bezüglich der erreichbaren Datenmenge ist bei alleiniger Anwendung der untersuchten Methode bei $\bar{P}ANDA$ eine mit anderen Experimenten (BaBar, Belle) vergleichbare Genauigkeit in der Messung der Mischungsparameter x und y möglich. Es kann ausgeschlossen werden, dass es mit der angewandten Analysemethode möglich sein wird, indirekte CP -Verletzung statistisch signifikant zu messen.

Anhang A

Berechnung des Betragsquadrats der zeitabhängigen Übergangsamplitude

Im Folgenden wird die Herleitung von Gleichung 1.34 gezeigt, alle hier nicht aufgeführten Bezeichnungen ($\mathcal{A}_f$, $e_1(t)$ etc.) sind in Abschnitt 1.5 zu finden.

Befindet sich ein D-Meson zum Zeitpunkt $t = 0$ im reinen Flavoreigenzustand $|D^0\rangle$, so lässt sich die Übergangsamplitude zu einem späteren Zeitpunkt t in den Zustand $|f\rangle$ schreiben als [49]¹

$$\mathcal{M}_f(t) = \langle f | \mathcal{H} | D^0(t) \rangle = \frac{1}{2} \left[(e_1(t) + e_2(t)) \mathcal{A}_f + \frac{q}{p} (e_1(t) - e_2(t)) \bar{\mathcal{A}}_f \right]. \quad (\text{A.1})$$

Für das Quadrat der Übergangsamplitude erhält man hieraus

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_f(t)|^2 &= \frac{1}{4} \left[|e_1(t) + e_2(t)|^2 |\mathcal{A}_f|^2 + \left| \frac{q}{p} \right|^2 |e_1(t) - e_2(t)|^2 |\bar{\mathcal{A}}_f|^2 \right] \\ &\quad + (e_1(t) + e_2(t)) \mathcal{A}_f \left(\frac{q}{p} \right)^* (e_1(t) - e_2(t))^* \bar{\mathcal{A}}_f^* \\ &\quad + (e_1(t) + e_2(t))^* \mathcal{A}_f^* \frac{q}{p} (e_1(t) - e_2(t)) \bar{\mathcal{A}}_f. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Zur Vereinfachung können folgende Identitäten verwendet werden [49]

$$e_{1,2}^2(t) = \exp(-(1 \pm y)\Gamma t), \quad e_1 e_2^* = \exp(-(1 + i x)\Gamma t). \quad (\text{A.3})$$

Die zeitabhängigen Faktoren in Gleichung A.2 ergeben sich hiermit zu

$$\begin{aligned} |e_1(t) + e_2(t)|^2 &= e_1^2(t) + e_2^2(t) + e_1(t) e_2^*(t) + e_1^*(t) e_2(t) \\ &= e^{-\Gamma t} [e^{-y\Gamma t} + e^{+y\Gamma t} + e^{-ix\Gamma t} + e^{+ix\Gamma t}] \\ &= e^{-\Gamma t} [2 \cosh(y\Gamma t) + 2 \cos(x\Gamma t)] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

¹Vergleiche mit Gleichung 1.28.

$$|e_1(t) - e_2(t)|^2 = e^{-\Gamma t} [2 \cosh(y\Gamma t) - 2 \cos(x\Gamma t)] \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} & (e_1(t) + e_2(t)) (e_1(t) - e_2(t))^* \\ &= e_1^2(t) - e_1(t) e_2^*(t) + e_1^*(t) e_2(t) - e_2^2(t) \\ &= e^{-\Gamma t} [e^{-y\Gamma t} - e^{-ix\Gamma t} + e^{+ix\Gamma t} - e^{+y\Gamma t}] \\ &= e^{-\Gamma t} [-2 \sinh(y\Gamma t) + 2i \sin(x\Gamma t)]. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Daraus ergibt sich für Gleichung A.2

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_f(t)|^2 &= \frac{1}{2} \left[(|\mathcal{A}_f|^2 + \left| \frac{q}{p} \right|^2 |\bar{\mathcal{A}}_f|^2) \cosh(y\Gamma t) + (|\mathcal{A}_f|^2 - \left| \frac{q}{p} \right|^2 |\bar{\mathcal{A}}_f|^2) \cos(x\Gamma t) \right. \\ &\quad + (-2 \sinh(y\Gamma t) + 2i \sin(x\Gamma t)) \left(\frac{q}{p} \right)^* \bar{\mathcal{A}}_f^* \mathcal{A}_f \\ &\quad \left. + (-2 \sinh(y\Gamma t) - 2i \sin(x\Gamma t)) \frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Dies kann weiter vereinfacht werden mit folgenden Relationen

$$\begin{aligned} & \frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* + \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right)^* = 2 \operatorname{Re} \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right) \\ & - i \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* - \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right)^* \right) = +2 \operatorname{Im} \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Insgesamt erhält man (siehe auch [184])

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}_f|^2 &= \frac{1}{2} e^{-\Gamma t} \left[\left(|\mathcal{A}_f|^2 + \left| \frac{q}{p} \right|^2 |\bar{\mathcal{A}}_f|^2 \right) \cosh(y\Gamma t) + \left(|\mathcal{A}_f|^2 - \left| \frac{q}{p} \right|^2 |\bar{\mathcal{A}}_f|^2 \right) \cos(x\Gamma t) \right. \\ &\quad \left. - 2 \operatorname{Re} \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right) \sinh(y\Gamma t) + 2 \operatorname{Im} \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right) \sin(x\Gamma t) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Man beachte insbesondere, dass die Vorzeichen des $\sin(x\Gamma t)$ - und $\sinh(y\Gamma t)$ -Terms von der Wahl der Phasenkonvention bei CP -Konjugation abhängig sind. Hier wurde analog zu [49] mit der Konvention $CP | D^0 \rangle = + | \bar{D}^0 \rangle$ gearbeitet, d. h. D_1 besitzt einen geraden und D_2 einen ungeraden CP -Eigenwert. Bei Verwendung der Konvention $CP | D^0 \rangle = - | \bar{D}^0 \rangle$ [184, 6] wechseln die CP -Eigenwerte von D_1 und D_2 ihr Vorzeichen². Definiert man anstatt dessen den Zustand D_1 als CP -gerade und ändert die Eigenwertnummerierung zu $| D_{1,2} \rangle = p | D^0 \rangle \mp q | \bar{D}^0 \rangle$, vertauscht man effektiv die Indizes $1 \leftrightarrow 2$ in Gleichung A.1 und es ergeben sich umgekehrte Vorzeichen für den $\sin(x\Gamma t)$ - und $\sinh(y\Gamma t)$ -Term in Gleichung A.9. Diese Aussage ist identisch zur Feststellung, dass die Vorzeichen von x und y von der gewählten Konvention abhängig sind, während die beobachtbare Übergangsamplitude $|\mathcal{M}_f(t)|^2$ unabhängig von dieser ist.

²Dies ergibt sich bei Anwendung von CP auf die Zustände $| D_{1,2} \rangle = p | D^0 \rangle \pm q | \bar{D}^0 \rangle$.

Anhang B

Berechnung der Zemach-Tensoren

Zum Ausgangspunkt der Berechnung dient im folgenden Gleichung 2.44, das Matrixelement ist in Abbildung 2.12 veranschaulicht.

$$Z_L = (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\mu \left(\sum_\lambda \epsilon_\lambda^{*\mu} \epsilon_\lambda^\nu \right) (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_\nu \quad (\text{B.1})$$

Hierbei wird über die auftretenden Polarisationen der Resonanz $\mathcal{R}_{ab}$ summiert und zur Vereinfachung der Notation die Konvention $\hbar = c = 1$ verwendet. Im Falle von $L = 0$ ist kein Polarisationsvektor mit den Vertizes assoziiert und die Winkelverteilung ist isotrop, es folgt

$$Z_0 = 1. \quad (\text{B.2})$$

Für Vektorresonanzen ($L = 1$) lässt sich die Spinsumme berechnen zu [54]

$$\sum_\lambda \epsilon_\lambda^{*\mu} \epsilon_\lambda^\nu = -g^{\mu\nu} + \frac{\mathbf{P}_\mathcal{R}^\mu \mathbf{P}_\mathcal{R}^\nu}{m_{ab}^2}, \quad (\text{B.3})$$

wobei $\mathbf{P}_\mathcal{R}$ den Vierervektor der intermediären Resonanz bezeichnet. Für diesen folgt aus der Viererimpulserhaltung

$$\mathbf{P}_\mathcal{R} = \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b = \mathbf{P}_D - \mathbf{P}_c. \quad (\text{B.4})$$

Für Gleichung B.1 erhält man zunächst

$$\begin{aligned} Z_1 &= (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\mu \left(-g^{\mu\nu} + \frac{\mathbf{P}_\mathcal{R}^\mu \mathbf{P}_\mathcal{R}^\nu}{m_{ab}^2} \right) (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_\nu \\ &= -(\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\mu (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)^\mu + \frac{\left((\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\mu \mathbf{P}_\mathcal{R}^\mu \right) \left(\mathbf{P}_\mathcal{R}^\nu (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_\nu \right)}{m_{ab}^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Der zweite Term lässt sich unter Verwendung von Gleichung B.4 und $\mathbf{P}_\mu \mathbf{P}^\mu = m^2$ vereinfachen zu

$$\frac{\left((\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\mu \mathbf{P}_\mathcal{R}^\mu \right) \left(\mathbf{P}_\mathcal{R}^\nu (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_\nu \right)}{m_{ab}^2} = \frac{(m_D^2 - m_c^2)(m_a^2 - m_b^2)}{m_{ab}^2}. \quad (\text{B.6})$$

Zur Umformung des ersten Terms kann die Definition der invarianten Masse zweier Teilchen herangezogen werden

$$2\mathbf{P}_i \cdot \mathbf{P}_j = m_{ij}^2 - m_i^2 - m_j^2. \quad (\text{B.7})$$

Verwendet man zudem die Identität $\mathbf{P}_D = \mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b + \mathbf{P}_c$, folgt für den ersten Term von Gleichung B.5

$$\begin{aligned} -(\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c) \cdot (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b) &= -(\mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b + 2\mathbf{P}_c) \cdot (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b) \\ &= -(m_a^2 - m_b^2 + 2\mathbf{P}_a \cdot \mathbf{P}_c - 2\mathbf{P}_b \cdot \mathbf{P}_c) \\ &= m_{bc}^2 - m_{ac}^2. \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Insgesamt erhält man durch Einsetzen der Terme B.6 und B.8 in Gleichung B.5 für die Winkelverteilung einer Vektorresonanz

$$Z_1 = m_{bc}^2 - m_{ac}^2 + \frac{(m_D^2 - m_c^2)(m_a^2 - m_b^2)}{m_{ab}^2}. \quad (\text{B.9})$$

Das Vorzeichen von Z_1 ist abhängig von der Konvention, nach der die Zerfallsteilchen benannt werden, vertauscht man die Indizes von a und b in B.9 führt dies zur Ersetzung $Z_1 \rightarrow -Z_1$. Im Falle von Tensorresonanzen ($L = 2$) erhält man für die Spinsumme [65]

$$\sum_\lambda \epsilon_\lambda^{*\mu\nu} \epsilon_\lambda^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (T^{\mu\alpha} T^{\nu\beta} + T^{\mu\beta} T^{\nu\alpha}) - \frac{1}{3} (T^{\mu\nu} T^{\alpha\beta}) \quad (\text{B.10})$$

mit

$$T^{\mu\nu} = -g^{\mu\nu} + \frac{\mathbf{P}_\mathcal{R}^\mu \mathbf{P}_\mathcal{R}^\nu}{m_{ab}^2}. \quad (\text{B.11})$$

Verwendet man die Abkürzungen

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\mu\nu} &= (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\mu (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\nu \\ (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_{\alpha\beta} &= (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_\alpha (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_\beta \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

ergibt sich für die Winkelverteilung

$$Z_2 = (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2} (T^{\mu\alpha} T^{\nu\beta} + T^{\mu\beta} T^{\nu\alpha}) - \frac{1}{3} (T^{\mu\nu} T^{\alpha\beta}) \right) (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_{\alpha\beta}. \quad (\text{B.13})$$

Der erste Term folgt analog zur Berechnung von Z_1 , man erhält

$$\begin{aligned} & (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\mu\nu} \frac{1}{2} (T^{\mu\alpha} T^{\nu\beta} + T^{\mu\beta} T^{\nu\alpha}) (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_{\alpha\beta} \\ &= \left(m_{bc}^2 - m_{ac}^2 + \frac{(m_D^2 - m_c^2)(m_a^2 - m_b^2)}{m_{ab}^2} \right)^2. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Der zweite Term in Gleichung B.13 kann zunächst umgeformt werden zu

$$\begin{aligned} & (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\mu\nu} \left(-\frac{1}{3} (T^{\mu\nu} T^{\alpha\beta}) \right) (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{3} \left((\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\mu T^{\mu\nu} (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\nu \right) \left((\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_\alpha T^{\alpha\beta} (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_\beta \right). \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Aus Gleichung B.4 und der Definition der invarianten Masse zweier Teilchen erhält man folgende, zur weiteren Umformung nützliche, Identität

$$\begin{aligned} (\mathbf{P}_D - \mathbf{P}_c)^2 &= (\mathbf{P}_a + \mathbf{P}_b)^2 \\ -2\mathbf{P}_D \cdot \mathbf{P}_c &= m_{ab}^2 - m_D^2 - m_c^2. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Für den ersten Faktor von Gleichung B.15 folgt

$$\begin{aligned} & (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\mu T^{\mu\nu} (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\nu \\ &= (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\mu \left(-g^{\mu\nu} + \frac{\mathbf{P}_R^\mu \mathbf{P}_R^\nu}{m_{ab}^2} \right) (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c)_\nu \\ &= (-m_D^2 - m_c^2 - 2\mathbf{P}_D \cdot \mathbf{P}_c) + \frac{(\mathbf{P}_R \cdot (\mathbf{P}_D + \mathbf{P}_c))^2}{m_{ab}^2} \\ &= m_{ab}^2 - 2m_D^2 - 2m_c^2 + \frac{(m_D^2 - m_c^2)^2}{m_{ab}^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Der zweite Faktor von Gleichung B.15 ergibt sich unter Verwendung der Identität B.7 zu

$$\begin{aligned} & (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_\mu \left(-g^{\mu\nu} + \frac{\mathbf{P}_R^\mu \mathbf{P}_R^\nu}{m_{ab}^2} \right) (\mathbf{P}_a - \mathbf{P}_b)_\nu \\ &= m_{ab}^2 - 2m_a^2 - 2m_b^2 + \frac{(m_a^2 - m_b^2)^2}{m_{ab}^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Durch Einsetzen der Terme B.14, B.17 und B.18 in Gleichung B.13 folgt für die Winkelverteilung einer Tensorresonanz

$$\begin{aligned}
 Z_2 = & \left(m_{bc}^2 - m_{ac}^2 + \frac{(m_D^2 - m_c^2)(m_a^2 - m_b^2)}{m_{ab}^2} \right)^2 \\
 & - \frac{1}{3} \left(m_{ab}^2 - 2m_D^2 - 2m_c^2 + \frac{(m_D^2 - m_c^2)^2}{m_{ab}^2} \right) \\
 & \times \left(m_{ab}^2 - 2m_a^2 - 2m_b^2 + \frac{(m_a^2 - m_b^2)^2}{m_{ab}^2} \right).
 \end{aligned} \tag{B.19}$$

Anhang C

Faltung der Zerfallsamplitude mit der Zeitauflösung

Im Folgenden soll gezeigt werden, wie sich die zeitabhängige Zerfallsamplitude $\mathcal{M}_f(t)$ aus Gleichung 1.34 analytisch mit einer Normalverteilung falten lässt. In Abschnitt 3.3.3 benötigt man diesen Ausdruck, um die Wahrscheinlichkeitsdichte der zu maximierenden Likelihood-Funktion unter Einbeziehung der Zeitauflösung des Detektors zu bestimmen. Der Einfachheit halber wird die Zerfallszeitdifferenz Δt hier mit t bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeitsdichte der Normalverteilung ist

$$g(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{t^2}{2\sigma^2}\right), \quad (\text{C.1})$$

während die zeitabhängigen Terme in Gleichung 1.34 abgekürzt werden mit

$$\begin{aligned} \text{ecosh}(t) &= \exp\left(-\frac{|t|}{\tau}\right) \cosh\left(y\frac{t}{\tau}\right) \\ \text{ecos}(t) &= \exp\left(-\frac{|t|}{\tau}\right) \cos\left(x\frac{t}{\tau}\right) \\ \text{esin}(t) &= \exp\left(-\frac{|t|}{\tau}\right) \sin\left(x\frac{t}{\tau}\right) \\ \text{esinh}(t) &= \exp\left(-\frac{|t|}{\tau}\right) \sinh\left(y\frac{t}{\tau}\right). \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Zur Berechnung der Faltungsintegrale ist es nützlich, diese in die Teilintervalle $[-\infty, 0]$ und $[0, \infty]$ zu zerlegen.

cosh-Term

Für die obere Hälfte der Faltung mit $\text{ecosh}(t)$ erhält man

$$\begin{aligned} \text{fcosh}_+(t) &= \int_0^\infty \text{ecosh}(T)g(t-T)dT \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + (1+y^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \text{cosh}(t), \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

dabei wurde die Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathbf{cosh}(t) = & \frac{1}{2} \left[\operatorname{erf} \left(\frac{(1+y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) - \operatorname{erf} \left(\frac{(1-y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) \right] \sinh \left(y \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2} \right) \right) \\ & + \frac{1}{2} \left[\operatorname{erfc} \left(\frac{(1+y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) + \operatorname{erfc} \left(\frac{(1-y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) \right] \cosh \left(y \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.4})$$

verwendet. Die hierbei auftretende Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(t)$ und deren Komplement $\operatorname{erfc}(t) = 1 - \operatorname{erf}(t)$ sind in Abbildung C.1 dargestellt. Man beachte auch, dass Fehlen

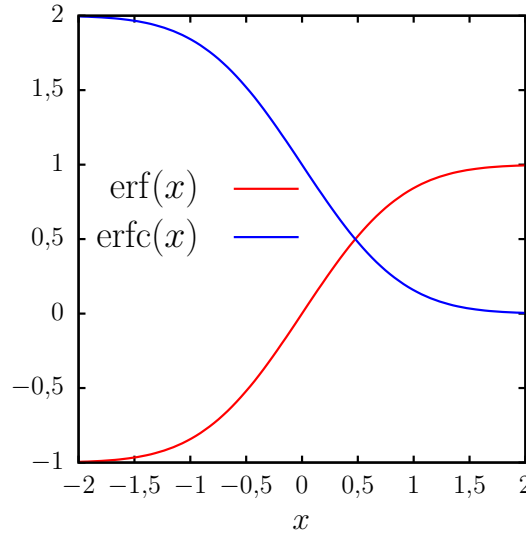


Abbildung C.1: Fehlerfunktion und deren Komplement.

des Betrags im exponentiellen Term der Gleichung C.3. Der Ausdruck $\operatorname{fcosh}_+(t)$ ist dennoch nicht divergent für $\lim_{t \rightarrow -\infty}$ aufgrund des Grenzwertes

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \exp(t) \operatorname{erfc}(t) = 0. \quad (\text{C.5})$$

Das Komplement der Fehlerfunktion geht dabei schneller gegen Null als die Exponentialfunktion gegen Unendlich. Das Verhalten des Ausdrucks C.4 für verschwindende $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischung lässt sich aus einer Taylorentwicklung der Fehlerfunktionen um den Punkt $y = 0$ bestimmen

$$\operatorname{erf} \left(\frac{(1 \pm y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) \approx \operatorname{erf} \left(\frac{\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) \pm \frac{\sqrt{2}\sigma y}{\sqrt{\pi}\tau \exp(\frac{t^2}{2\sigma^2} - \frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2})} + \dots \quad (\text{C.6})$$

Man erhält hieraus die Näherungen

$$\begin{aligned} & \operatorname{erfc}\left(\frac{(1-y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{(1+y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 2 \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) + \mathcal{O}(y^2) \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

$$\begin{aligned} & \operatorname{erf}\left(\frac{(1+y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{(1-y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \\ &= 0 + 2 \frac{\sqrt{2}\sigma y}{\sqrt{\pi\tau} \exp(\frac{t^2}{2\sigma^2} - \frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2})} + \mathcal{O}(y^3). \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

Dabei ist der erste nicht verschwindende Term in Gleichung C.8 stark unterdrückt ($\sim \exp(-t^2)$) und stellt somit eine geringfügige Korrektur für kurze Zerfallszeitdifferenzen dar. Für Gleichung C.4 gilt in erster Ordnung die Näherung

$$\begin{aligned} \cosh(t) &= \frac{\sqrt{2}\sigma y}{\sqrt{\pi\tau} \exp(\frac{t^2}{2\sigma^2} - \frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2})} \sinh\left(y\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \\ &+ \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \cosh\left(y\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) + \mathcal{O}(y^2). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Diese Näherung ist anschaulich auch dadurch gerechtfertigt, dass Effekte der Zeitauflösung nur schwach von der D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung abhängen. Entwickelt man auch die Exponentialfunktion um $y = 0$

$$\exp\left(-\frac{t}{\tau} + (1+y^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) + \mathcal{O}(y^2) \quad (\text{C.10})$$

und vernachlässigt den exponentiell unterdrückten Korrekturterm in Gleichung C.9, erhält man für die obere Hälfte des Integrals die Näherung

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \operatorname{ecosh}(T) g(t-T) dT \\ & \approx \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}\right)\right) \cosh\left(y\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Man beachte die Ähnlichkeit dieses Ausdrucks mit dem Ergebnis der Faltung von Exponential- und Normalverteilung (Gleichung 3.40). Aufgrund der Symmetrie der gefalteten Funktion $\operatorname{fcosh}(t)$ um den Punkt $t = 0$ erhält man die untere Hälfte des

Integrals aus

$$\begin{aligned} \text{fcosh}_-(t) &= \int_{-\infty}^0 \text{ecosh}(T)g(t-T)dT = \text{fcosh}_+(-t) \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(+\frac{t}{\tau} + (1+y^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \mathbf{cosh}(-t). \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Das gesamte Integral folgt aus der Summe der Teilintervalle

$$\begin{aligned} \text{fcosh}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \text{ecosh}(T)g(t-T)dT = \text{fcosh}_+(t) + \text{fcosh}_-(t) \\ &= \frac{1}{2} \left[\exp\left((1+y^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \mathbf{cosh}(t) + e^{+\frac{t}{\tau}} \mathbf{cosh}(-t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Dieser Ausdruck ist exakt, wenn für $\mathbf{cosh}(\pm t)$ Gleichung C.4 verwendet wird.

sinh-Term

Auch die Faltung mit $\text{esinh}(t)$ wird getrennt nach den Teilintervallen $[-\infty, 0]$ und $[0, \infty]$ betrachtet. Die obere Hälfte des Integrals berechnet sich zu

$$\begin{aligned} \text{fsinh}_+(t) &= \int_0^{\infty} \text{esinh}(T)g(t-T)dT \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + (1+y^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \mathbf{sinh}(t), \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathbf{sinh}(t) &= \frac{1}{2} \left[\text{erf}\left(\frac{(1+y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{(1-y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \right] \cosh\left(y\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\text{erfc}\left(\frac{(1+y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{(1-y)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \right] \sinh\left(y\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Dies entspricht dem Ausdruck Gleichung C.4 bei Vertauschung von $\sinh$ und $\cosh$. Mit der Entwicklung C.6 gilt näherungsweise

$$\begin{aligned} \mathbf{sinh}(t) &= \frac{\sqrt{2}\sigma y}{\sqrt{\pi}\tau \exp(\frac{t^2}{2\sigma^2} - \frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2})} \cosh\left(y\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \\ &\quad + \text{erfc}\left(\frac{\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \sinh\left(y\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) + \mathcal{O}(y^2). \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Verwendet man auch hier die Entwicklung der Exponentialfunktion C.10 und vernachlässigt den exponentiell unterdrückten Term folgt die Näherung

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \text{esinh}(T)g(t-T)dT \\ & \approx \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}\right)\right) \sinh\left(y\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

Die untere Hälfte des Integrals erhält man durch die Verwendung der Antisymmetrie der gefalteten Funktion $\text{fsinh}(t)$

$$\begin{aligned} \text{fsinh}_-(t) &= \int_{-\infty}^0 \text{esinh}(T)g(t-T)dT = -\text{fsinh}_+(-t) \\ &= -\frac{1}{2} \exp\left(+\frac{t}{\tau} + (1+y^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \mathfrak{sinh}(-t). \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Hieraus folgt für das gesamte Integral der Ausdruck

$$\begin{aligned} \text{fsinh}(t) &= \int_{-\infty}^\infty \text{esinh}(T)g(t-T)dT = \text{fsinh}_+(t) + \text{fsinh}_-(t) \\ &= \frac{1}{2} \left[\exp\left((1+y^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \mathfrak{sinh}(t) - e^{+\frac{t}{\tau}} \mathfrak{sinh}(-t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.19})$$

Dieser ist exakt, wenn für $\mathfrak{sinh}(\pm t)$ Gleichung C.15 verwendet wird.

cos-Term

Die Berechnung der verbleibenden zwei Faltungen führt zum Auftreten der komplexen Fehlerfunktion $\text{erf}(z)$, diese ist in Abbildung C.2 dargestellt. Die obere Hälfte des Faltungsintegrals mit der Funktion $\text{ecos}(t)$ berechnet man zunächst zu

$$\begin{aligned} \text{fcos}_+(t) &= \int_0^\infty \text{ecos}(T)g(t-T)dT = \frac{1}{4} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + (1-x^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \\ &\times \left\{ i \left[\text{erf}\left(\frac{(1+ix)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) - \text{erf}\left(\frac{(1-ix)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \right] \sin\left(x\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \right. \\ &\left. + \left[\text{erfc}\left(\frac{(1+ix)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) + \text{erfc}\left(\frac{(1-ix)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \right] \cos\left(x\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

Verwendet man die Symmetrie der komplexen $\text{erf}(z)$ Funktion [83, S. 297]

$$\text{erf}(\bar{z}) = \overline{\text{erf}(z)}, \quad (\text{C.21})$$

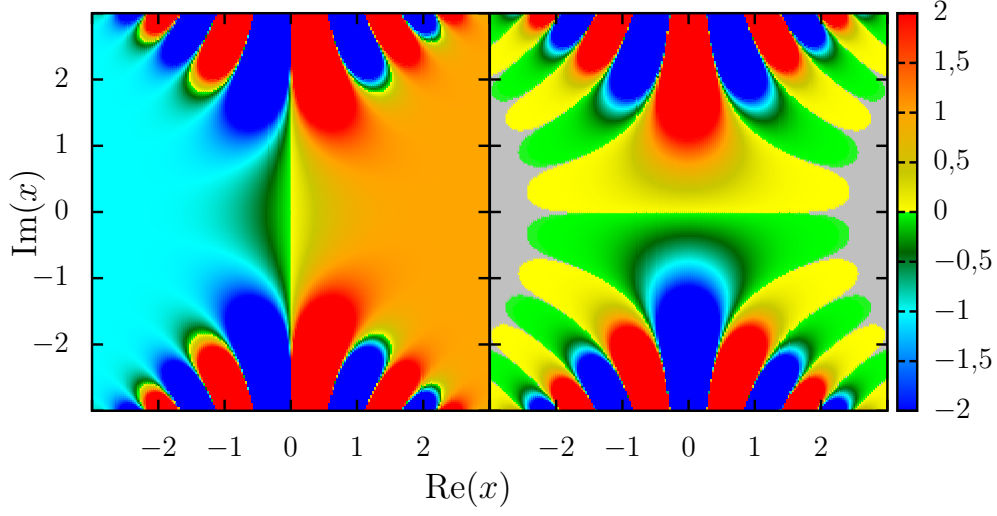


Abbildung C.2: Realteil $\text{Re}(\text{erf}(x))$ (*links*) und Imaginärteil $\text{Im}(\text{erf}(x))$ (*rechts*) der komplexen Fehlerfunktion.

lässt sich Gleichung C.20 umformen zu

$$\begin{aligned} \text{fcos}_+(t) &= \int_0^\infty \text{ecos}(T)g(t-T)dT \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + (1-x^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \text{cos}(t), \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

mit der Abkürzung

$$\begin{aligned} \text{cos}(t) &= -\text{Im}\left(\text{erf}\left(\frac{(1+ix)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right)\right) \sin\left(x\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \\ &\quad + \text{Re}\left(\text{erfc}\left(\frac{(1+ix)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right)\right) \cos\left(x\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

Dies zeigt insbesondere, dass trotz der auftretenden komplexen Fehlerfunktionen alle Funktionswerte reell sind. Die komplexen Fehlerfunktionen können um $x = 0$ entwickelt werden

$$\text{erf}\left(\frac{(1 \pm ix)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \approx \text{erf}\left(\frac{\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \pm \frac{i\sqrt{2}\sigma x}{\sqrt{\pi}\tau \exp(\frac{t^2}{2\sigma^2} - \frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2})} + \dots \quad (\text{C.24})$$

Hiermit erhält man für Gleichung C.23 die Näherung

$$\begin{aligned} \text{cos}(t) &= -\frac{\sqrt{2}\sigma x}{\sqrt{\pi}\tau \exp(\frac{t^2}{2\sigma^2} - \frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2})} \sin\left(x\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \\ &\quad + \text{erfc}\left(\frac{\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \cos\left(x\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) + \mathcal{O}(x^2). \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Hierdurch lässt sich auch die Berechnung von komplexen Fehlerfunktionen vermeiden. Vernachlässigt man den exponentiell unterdrückten Korrekturterm in Gleichung C.25 und verwendet analog zu Gleichung C.10 eine Taylorentwicklung der Exponentialfunktion um $x = 0$, erhält man für die obere Hälfte des Integrals die Näherung

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \text{ecos}(T)g(t-T)dT \\ & \approx \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \text{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}\right)\right) \cos\left(x\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Die untere Hälfte des Integrals erhält man aus der geraden Symmetrie der $\text{fcos}(t)$ Funktion zu

$$\begin{aligned} \text{fcos}_-(t) &= \int_{-\infty}^0 \text{ecos}(T)g(t-T)dT = \text{fcos}_+(-t) \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(+\frac{t}{\tau} + (1-x^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \mathbf{cos}(-t). \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Die gesamte Faltung folgt aus der Summe der Teilintervalle zu

$$\begin{aligned} \text{fcos}(t) &= \int_{-\infty}^\infty \text{ecos}(T)g(t-T)dT = \text{fcos}_+(t) + \text{fcos}_-(t) \\ &= \frac{1}{2} \left[\exp\left((1-x^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \mathbf{cos}(t) + e^{+\frac{t}{\tau}} \mathbf{cos}(-t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Dieser Ausdruck ist exakt bei Verwendung von Gleichung C.23.

sin-Term

Für das letzte Faltungsintegral berechnet man zunächst das obere Teilintervall zu

$$\begin{aligned} \text{fsin}_+(t) &= \int_0^\infty \text{esin}(T)g(t-T)dT \\ &= \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + (1-x^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \mathbf{sin}(t), \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

dabei wurde die Abkürzung

$$\begin{aligned} \mathbf{sin}(t) &= \text{Im} \left(\text{erf} \left(\frac{(1+ix)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) \right) \cos \left(x \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2} \right) \right) \\ &+ \text{Re} \left(\text{erfc} \left(\frac{(1+ix)\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}} \right) \right) \sin \left(x \left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

verwendet. Mit der Entwicklung Gleichung C.24 folgt die Näherung

$$\begin{aligned} \mathbf{sin}(t) = & \frac{\sqrt{2}\sigma x}{\sqrt{\pi}\tau \exp(\frac{t^2}{2\sigma^2} - \frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2})} \cos\left(x\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \\ & + \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(x\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) + \mathcal{O}(x^2). \end{aligned} \quad (\text{C.31})$$

Vernachlässigt man auch hier den exponentiell unterdrückten Term und nähert die Exponentialfunktion gilt approximativ

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \operatorname{esin}(T)g(t-T)dT \\ & \approx \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma}\right)\right) \sin\left(x\left(\frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right). \end{aligned} \quad (\text{C.32})$$

Für das untere Teilintervall erhält man aus der Antisymmetrie der gefalteten Funktion

$$\begin{aligned} \operatorname{fsin}_-(t) &= \int_{-\infty}^0 \operatorname{esin}(T)g(t-T)dT = -\operatorname{fsin}_+(-t) \\ &= -\frac{1}{2} \exp\left(+\frac{t}{\tau} + (1-x^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \mathbf{sin}(-t). \end{aligned} \quad (\text{C.33})$$

Das gesamte Faltungsintegral folgt aus der Summe der Teilintervalle zu

$$\begin{aligned} \operatorname{fsin}(t) &= \int_{-\infty}^\infty \operatorname{esin}(T)g(t-T)dT = \operatorname{fsin}_+(t) + \operatorname{fsin}_-(t) \\ &= \frac{1}{2} \left[\exp\left((1-x^2)\frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \left(e^{-\frac{t}{\tau}} \mathbf{sin}(t) - e^{+\frac{t}{\tau}} \mathbf{sin}(-t) \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{C.34})$$

Dieser Ausdruck ist exakt, wenn für $\mathbf{sin}(\pm t)$ Gleichung C.30 verwendet wird. Abbildung C.3 zeigt das Ergebnis der Faltungen für verschiedene Werte der Zeitauflösung σ normiert auf einen rein exponentiellen Verlauf.

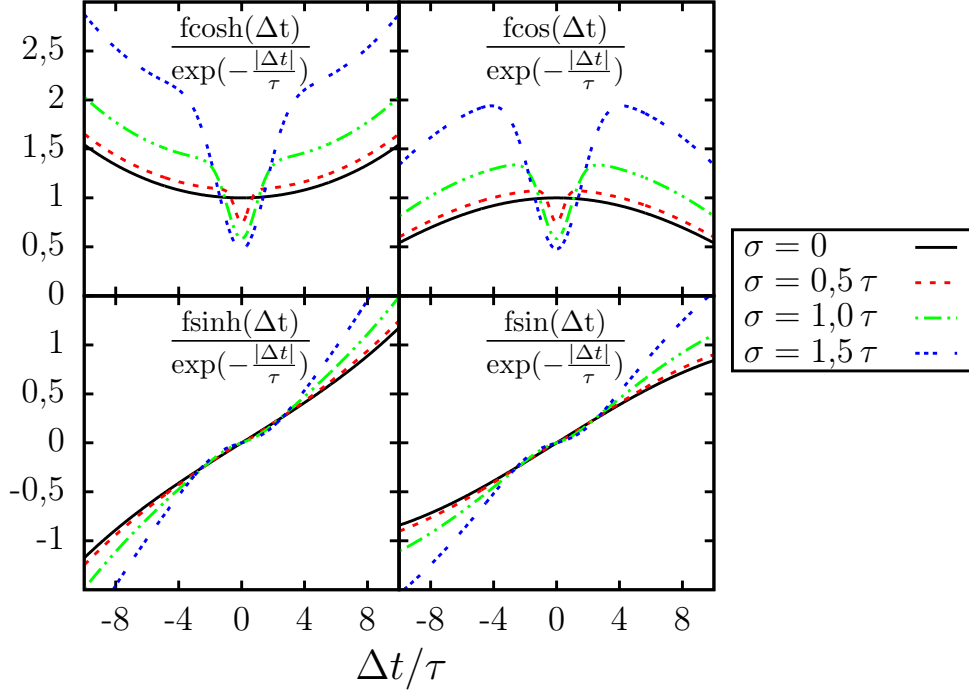


Abbildung C.3: Terme der mit der normalverteilten Zeitaufösung gefalteten Zerfallsamplitude $\mathcal{M}_f(\Delta t)$ normiert auf die exponentielle Lebensdauer-Verteilung. Für die Darstellung wurden die Werte $x = y = 0,1$ und $\left|\frac{q}{p}\right| = 1$ verwendet.

Gesamte Faltung

Insgesamt erhält man für die mit der Normalverteilung gefaltete Zerfallsamplitude

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{M}_f^2(t) &= (g \otimes \mathcal{M}_f^2)(t) \\
 &= \left(|\mathcal{A}_f|^2 + \left| \frac{q}{p} \right|^2 |\bar{\mathcal{A}}_f|^2 \right) \text{fcosh}(t) + \left(|\mathcal{A}_f|^2 - \left| \frac{q}{p} \right|^2 |\bar{\mathcal{A}}_f|^2 \right) \text{fcos}(t) \\
 &\quad - 2 \text{Re} \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right) \text{fsinh}(t) + 2 \text{Im} \left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^* \right) \text{fsin}(t).
 \end{aligned} \tag{C.35}$$

Diese Form enthält keine Näherung, falls für $\text{fcosh}(t)$, $\text{fsinh}(t)$, $\text{fcos}(t)$ und $\text{fsin}(t)$ die Gleichungen C.13, C.19, C.28 und C.34 verwendet werden zusammen mit den Gleichungen C.9, C.15, C.23 und C.30 für die Terme $\text{cosh}(t)$, $\text{sinh}(t)$, $\text{cos}(t)$ und $\text{sin}(t)$. Verwendet man die Näherung C.6, entwickelt die Exponentialfunktionen und vernachlässigt die exponentiell unterdrückten Korrekturterme, erhält man näherungsweise den Ausdruck

$$\mathfrak{M}_f^2(t) \approx \frac{1}{2} (\mathfrak{m}_f^+ + \mathfrak{m}_f^-), \tag{C.36}$$

mit der Abkürzung

$$\mathbf{m}_f^\pm = \mathbf{m}_f(\pm t) \quad (\text{C.37})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \exp\left(\mp \frac{t}{\tau} + \frac{\sigma^2}{2\tau^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\frac{\sigma}{\tau} \mp \frac{t}{\sigma}}{\sqrt{2}}\right) \left[\left(\mathcal{A}_f^2 + \left| \frac{q}{p} \right|^2 \bar{\mathcal{A}}_f^2 \right) \cosh\left(y\left(\pm \frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \right. \\ &+ \left(\mathcal{A}_f^2 - \left| \frac{q}{p} \right|^2 \bar{\mathcal{A}}_f^2 \right) \cos\left(x\left(\pm \frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \mp 2 \operatorname{Re}\left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^*\right) \sinh\left(y\left(\pm \frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \\ &\left. \pm 2 \operatorname{Im}\left(\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^*\right) \sin\left(x\left(\pm \frac{t}{\tau} - \frac{\sigma^2}{\tau^2}\right)\right) \right]. \quad (\text{C.38}) \end{aligned}$$

Für verschwindende Effekte der Zeitauflösung nähert sich das Komplement der Fehlerfunktion der Heaviside-Stufenfunktion $\lim_{\sigma \rightarrow 0} \operatorname{erfc}\left((\frac{\sigma}{\tau} - \frac{t}{\sigma})/\sqrt{2}\right) = 2\Theta(t)$ und Gleichung C.36 geht über in die ungefaltete Zerfallsamplitude 1.34.

Anhang D

Amplituden-Modelle

Zur Beschreibung der $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ Zerfallsamplitude wurden drei Modelle in Betracht gezogen, die sich bezüglich der berücksichtigten Resonanzen und deren Amplitudenform unterscheiden. Abkürzend werden hier folgende Bezeichnungen verwendet:

- Sigma-Modell
Belle Collaboration, L. M. Zhang *et al.*, „Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing Parameters in $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$ Decays”, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 131803
- BaBar-Modell
BABAR Collaboration, P. del Amo Sanchez *et al.*, „Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing parameters using $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ and $D^0 \rightarrow K_S^0 K^+ K^-$ decays”, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 081803
- Belle-Modell
Belle Collaboration, T. Peng, Z. P. Zhang, *et al.*, „Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing and search for indirect CP violation using $D^0 \rightarrow K_S^0 \pi^+ \pi^-$ decays”, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 091103

Sofern nicht anders bezeichnet, wurden die relativistische Breit-Wigner-Amplituden aus Gleichung 2.43 verwendet. In den Tabellen D.2, D.3 und D.4 sind die Parameter der Modelle zusammengefasst; die berechneten Real- und Imaginärteile der komplexen Amplituden sollen den Vergleich der Modelle erleichtern und bezeichnen die in der Simulation gesetzten Werte. Für das BaBar- und Belle-Modelle wurden Massen und Breiten aus [186] verwendet, im Falle des Sigma-Modells sind diese direkt der Veröffentlichung [185] entnommen; eine Übersicht findet sich in Tabelle D.1.

Resonanz	Masse (MeV/ c^2)			Breite (MeV/ c^2)		
	Sigma	BaBar	Belle	Sigma	BaBar	Belle
$K^*(892)^\pm$	891,66	893,70	893,68	50,8	46,74	47,49
$K_0^*(1430)^\pm$	1412	1421,5	1461,7	294	247	268,3
$K_2^*(1430)^\pm$	$\leftarrow$	1425,6	$\rightarrow$	$\leftarrow$	98,5	$\rightarrow$
$K^*(1410)^\pm$	$\leftarrow$	1414	$\rightarrow$	$\leftarrow$	232	$\rightarrow$
$K^*(1680)^\pm$	$\leftarrow$	1717	$\rightarrow$	$\leftarrow$	322	$\rightarrow$
$f_0(980)$	975	—	—	44	—	—
$f_0(1370)$	1434	—	—	173	—	—
$f_2(1270)$	1275,4	1275,1		$\leftarrow$	185,1	$\rightarrow$
σ_1	484	—	—	383	—	—
σ_2	1014	—	—	88	—	—
$\rho(770)$	775,8	775,49		146,4	149,1	
$\omega(782)$	782,6	782,65		8,5	8,49	
$\rho(1450)$	1406	—	1465	455	—	400

Tabelle D.1: Massen und Breiten der verwendeten Modelle [185, 51, 52, 186].

Resonanz	Amplitude	Phase (Grad)	$\text{Re}(a_i)$	$\text{Im}(a_i)$	$\text{FA}^1(\%)$
Cabibbo bevorzugt					
$K^*(892)^-$	$1,629 \pm 0,006$	$134,3 \pm 0,3$	$-1,138$	$1,166$	$62,27$
$K_0^*(1430)^-$	$2,12 \pm 0,02$	$-0,9 \pm 0,8$	$2,12$	$-0,03$	$7,24$
$K_2^*(1430)^-$	$0,87 \pm 0,02$	$-47,3 \pm 1,2$	$0,59$	$-0,64$	$1,33$
$K^*(1410)^-$	$0,65 \pm 0,03$	111 ± 4	$-0,23$	$0,61$	$0,48$
$K^*(1680)^-$	$0,60 \pm 0,25$	147 ± 29	$-0,50$	$0,33$	$0,02$
Doppelt Cabibbo unterdrückt					
$K^*(892)^+$	$0,152 \pm 0,003$	$-37,5 \pm 1,3$	$0,121$	$-0,093$	$0,54$
$K_0^*(1430)^+$	$0,541 \pm 0,019$	$91,8 \pm 2,1$	$-0,017$	$0,541$	$0,47$
$K_2^*(1430)^+$	$0,276 \pm 0,013$	-106 ± 3	$-0,076$	$-0,265$	$0,13$
$K^*(1410)^+$	$0,33 \pm 0,02$	-102 ± 4	$-0,07$	$-0,32$	$0,13$
$K^*(1680)^+$	$0,73 \pm 0,16$	-103 ± 11	$-0,16$	$0,71$	$0,04$
$(\mathcal{R} K_S)$ in $CP = +1$					
$f_0(980)$	$0,380 \pm 0,004$	$-147,1 \pm 1,1$	$-0,319$	$-0,206$	$4,52$
$f_0(1370)$	$1,46 \pm 0,05$	$98,6 \pm 1,8$	$-0,218$	$1,444$	$1,62$
$f_2(1270)$	$1,43 \pm 0,02$	$-13,6 \pm 1,2$	$1,390$	$-0,336$	$1,80$
σ_1	$1,39 \pm 0,02$	$-146,6 \pm 0,9$	$-1,16$	$-0,77$	$9,14$
σ_2	$0,267 \pm 0,013$	-157 ± 3	$-0,246$	$-0,104$	$0,88$
$(\mathcal{R} K_S)$ in $CP = -1$					
$\rho(770)$	1 (fixiert)	0 (fixiert)	1	0	21,1
$\omega(782)$	$0,0380 \pm 0,0007$	$115,1 \pm 1,1$	$-0,0161$	$0,0344$	$0,63$
$\rho(1450)$	$0,72 \pm 0,04$	41 ± 7	$0,543$	$0,472$	$0,24$
NR^2	$2,36 \pm 0,07$	155 ± 2	$-2,14$	$1,00$	$6,15$

¹ Fitanteil.

² Konstante Amplitude des nichtresonanten Anteils.

Tabelle D.2: Parameter des Sigma-Modells [50].

Resonanz	Amplitude	Phase (rad)	Re(a_i)	Im(a_i)	FA ¹ (%)
Cabibbo bevorzugt					
K [*] (892) ⁻	1,735 ± 0,005	2,331 ± 0,004	-1,196	1,257	57
K ₀ [*] (1430) ⁻	2,650 ± 0,015	1,497 ± 0,007	0,195	2,643	6,1
K ₂ [*] (1430) ⁻²	1,303 ± 0,013	2,498 ± 0,012	-1,042	0,782	1,9
K [*] (1410) ⁻	0 (fixiert)	0 (fixiert)	0	0	0
K [*] (1680) ⁻	0,90 ± 0,03	-2,97 ± 0,04	-0,887	-0,154	0,3
Doppelt Cabibbo unterdrückt					
K [*] (892) ⁺	0,164 ± 0,003	-0,768 ± 0,019	0,118	-0,114	0,6
K ₀ [*] (1430) ⁺	0,145 ± 0,014	1,78 ± 0,10	-0,030	0,142	< 0,1
K ₂ [*] (1430) ⁺²	0,115 ± 0,013	2,69 ± 0,11	-0,103	0,050	< 0,1
K [*] (1410) ⁺	0 (fixiert)	0 (fixiert)	0	0	0
K [*] (1680) ⁺	0 (fixiert)	0 (fixiert)	0	0	0
(R K _S) in CP = +1					
f ₂ (1270)	0,410 ± 0,013	2,88 ± 0,03	-0,396	0,106	0,3
(R K _S) in CP = -1					
ρ(770) ³	1 (fixiert)	0 (fixiert)	1	0	21,1
ω(782)	0,0420 ± 0,0006	2,046 ± 0,014	-0,0019	0,0037	0,6
ρ(1450)	0 (fixiert)	0 (fixiert)	0	0	0
ππ S-Welle					15,4
β ₁	5,54 ± 0,06	-0,054 ± 0,007	5,53	-0,30	
β ₂	15,64 ± 0,06	-3,125 ± 0,005	-15,64	-0,26	
β ₃	44,6 ± 1,2	2,731 ± 0,015	-40,89	17,80	
β ₄	9,3 ± 0,2	2,30 ± 0,02	-6,20	6,94	
β ₅	0 (fixiert)	0 (fixiert)	0	0	
f ₁₁ ^{prod}	11,43 ± 0,11	-0,005 ± -0,009	11,43	-0,06	
f ₁₂ ^{prod}	15,5 ± 0,4	-1,13 ± 0,02	6,61	-14,02	
f ₁₃ ^{prod}	7,0 ± 0,7	0,99 ± 0,11	3,84	5,85	
f ₁₄ ^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	0	0	
f ₁₅ ^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	0	0	
Parameter					
s ₀ ^{prod}	-3,92637 (fixiert)				
Kπ S-Welle					
M (MeV/c ²)	1421,5 ± 1,6	a (c/GeV)		0,224 ± 0,003	
Γ (MeV/c ²)	247 ± 3	r (c/GeV)		-15,01 ± 0,13	
R	1 (fixiert)	φ _R (rad)		1,10 ± 0,02	
B	0,62 ± 0,04	φ _B (rad)		-0,100 ± 0,010	
K [*] (892)					
M (MeV/c ²)	Parameter				
Γ (MeV/c ²)	893,70 ± 0,07				
	46,74 ± 0,15				

¹ Fitanteil.

² LASS-Amplitude.

³ Gounaris-Sakurai-Amplitude.

Tabelle D.3: Parameter des BaBar-Modells [51].

Resonanz	Amplitude	Phase (Grad)	$\text{Re}(a_i)$	$\text{Im}(a_i)$	$\text{FA}^1(\%)$
Cabibbo bevorzugt					
$K^*(892)^-$	$1,590 \pm 0,003$	$131,8 \pm 0,2$	$-1,060$	$1,185$	$60,45$
$K_0^*(1430)^-$	$2,059 \pm 0,010$	$-194,6 \pm 1,7$	$-1,993$	$0,519$	$7,02$
$K_2^*(1430)^{-2}$	$1,150 \pm 0,009$	$-41,5 \pm 0,4$	$0,861$	$-0,762$	$2,21$
$K^*(1410)^-$	$0,496 \pm 0,011$	$83,4 \pm 0,9$	$0,057$	$0,493$	$0,26$
$K^*(1680)^-$	$1,556 \pm 0,097$	$-83,2 \pm 1,2$	$0,184$	$-1,545$	$0,16$
Doppelt Cabibbo unterdrückt					
$K^*(892)^+$	$0,139 \pm 0,002$	$-42,1 \pm 0,7$	$0,103$	$-0,093$	$0,46$
$K_0^*(1430)^+$	$0,176 \pm 0,007$	$-102,3 \pm 2,1$	$-0,037$	$-0,172$	$0,05$
$K_2^*(1430)^{+2}$	$0,077 \pm 0,007$	$-32,2 \pm 4,7$	$0,065$	$-0,041$	$0,01$
$K^*(1410)^+$	$0,248 \pm 0,010$	$-145,7 \pm 2,9$	$-0,205$	$-0,140$	$0,07$
$K^*(1680)^+$	$1,407 \pm 0,053$	$86,1 \pm 2,7$	$0,096$	$1,404$	$0,13$
$(\mathcal{R} K_S)$ in $CP = +1$					
$f_2(1270)$	$1,300 \pm 0,013$	$-31,6 \pm 0,5$	$1,107$	$-0,681$	$1,41$
$(\mathcal{R} K_S)$ in $CP = -1$					
$\rho(770)^3$	1 (fixiert)	0 (fixiert)	1	0	20
$\omega(782)$	$0,0370 \pm 0,0004$	$114,9 \pm 0,6$	$-0,0156$	$0,0336$	$0,57$
$\rho(1450)$	$0,532 \pm 0,027$	$80,8 \pm 2,1$	$0,085$	$0,525$	$0,12$
$\pi\pi$ S-Welle					12,88
β_1	$4,23 \pm 0,02$	$164,0 \pm 0,2$	$-4,07$	$1,17$	
β_2	$10,90 \pm 0,02$	$15,6 \pm 0,2$	$10,50$	$2,93$	
β_3	$37,4 \pm 0,3$	$3,3 \pm 0,4$	$37,34$	$2,15$	
β_4	$14,7 \pm 0,1$	$-8,9 \pm 0,3$	$14,52$	$-2,27$	
β_5	0 (fixiert)	0 (fixiert)	0	0	
f_{11}^{prod}	$12,76 \pm 0,005$	$-161,1 \pm 0,3$	$-12,07$	$-4,13$	
f_{12}^{prod}	$14,2 \pm 0,2$	$-176,2 \pm 0,6$	$-14,17$	$-0,94$	
f_{13}^{prod}	$10,0 \pm 0,5$	$-124,7 \pm 2,1$	$-5,69$	$-8,22$	
f_{14}^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	0	0	
f_{15}^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	0	0	
Parameter					
s_0^{prod}	$-3,92637$ (fixiert)				
$K\pi$ S-Welle					
M (MeV/ c^2)	$1461,7 \pm 0,8$	a (c/GeV)		$0,172 \pm 0,006$	
Γ (MeV/ c^2)	$268,3 \pm 1,1$	r (c/GeV)		$-20,6 \pm 0,3$	
R	1 (fixiert)	ϕ_R (rad)		$2,495 \pm 0,009$	
B	$0,4524 \pm 0,005$	ϕ_B (rad)		$0,248 \pm 0,003$	
$K^*(892)$ Parameter					
M (MeV/ c^2)	$893,68 \pm 0,04$				
Γ (MeV/ c^2)	$47,49 \pm 0,06$				

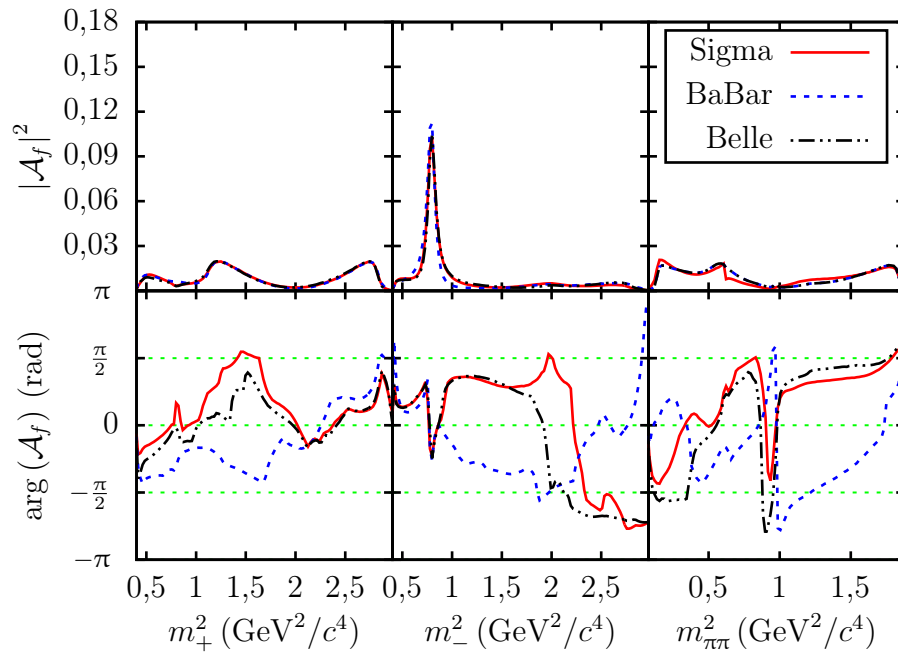
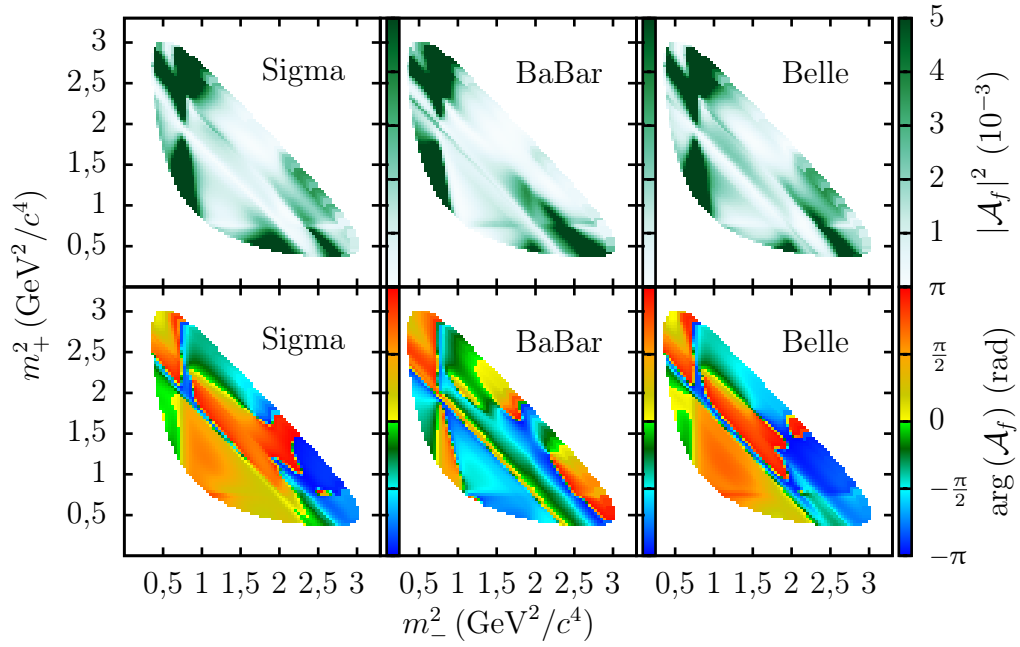
¹ Fitanteil.

² LASS-Amplitude.

³ Gounaris-Sakurai-Amplitude.

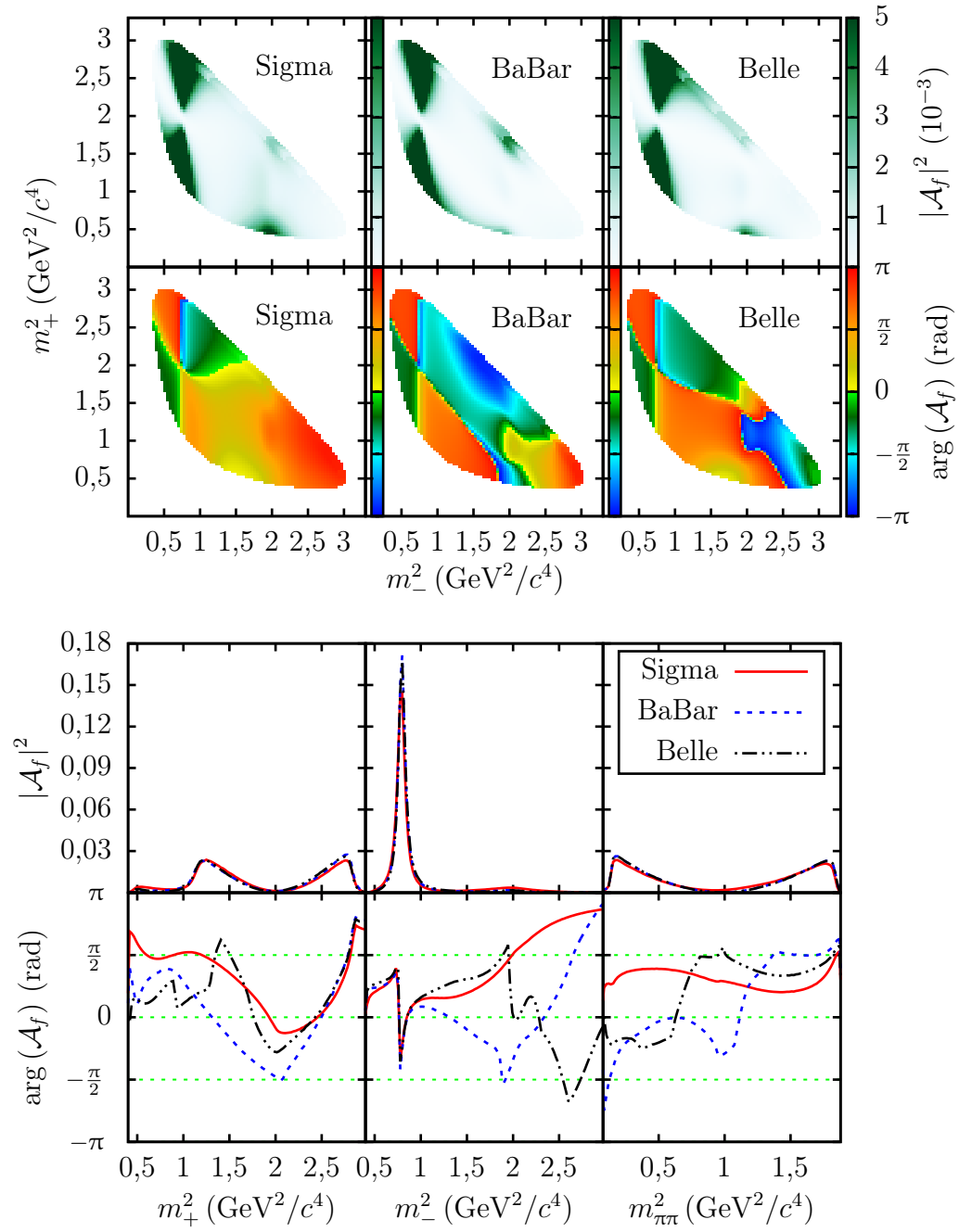
Tabelle D.4: Parameter des Belle-Modells [52].

Vollständiges Modell



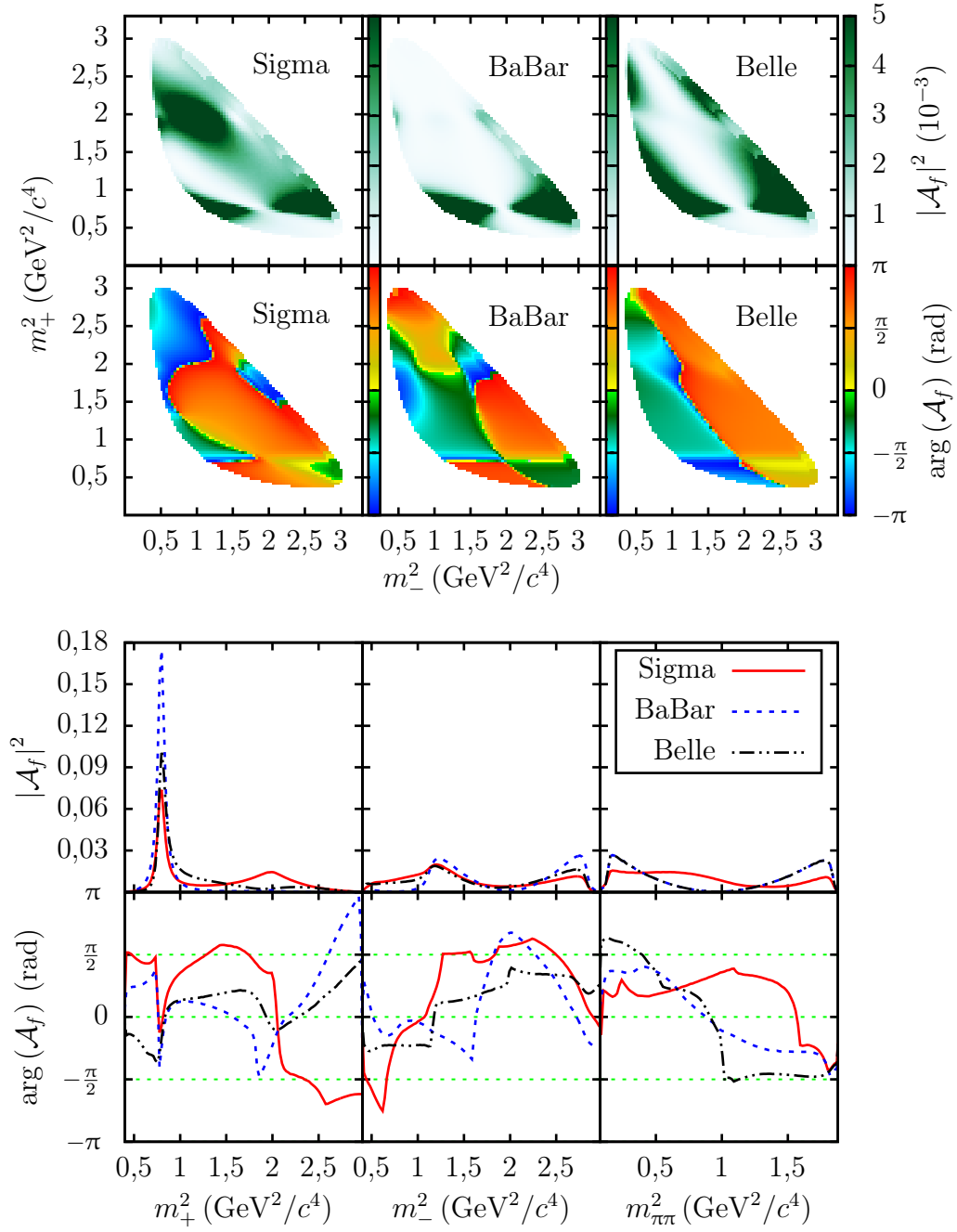
Cabibbo-bevorzugt

- Sigma: $K^*(892)^-$, $K_0^*(1430)^-$ (RBW), $K_2^*(1430)^-$, $K^*(1410)^-$, $K^*(1680)^-$
- BaBar: $K^*(892)^-$, $K_0^*(1430)^-$ (LASS), $K_2^*(1430)^-$, $K^*(1680)^-$
- Belle: $K^*(892)^-$, $K_0^*(1430)^-$ (LASS), $K_2^*(1430)^-$, $K^*(1410)^-$, $K^*(1680)^-$



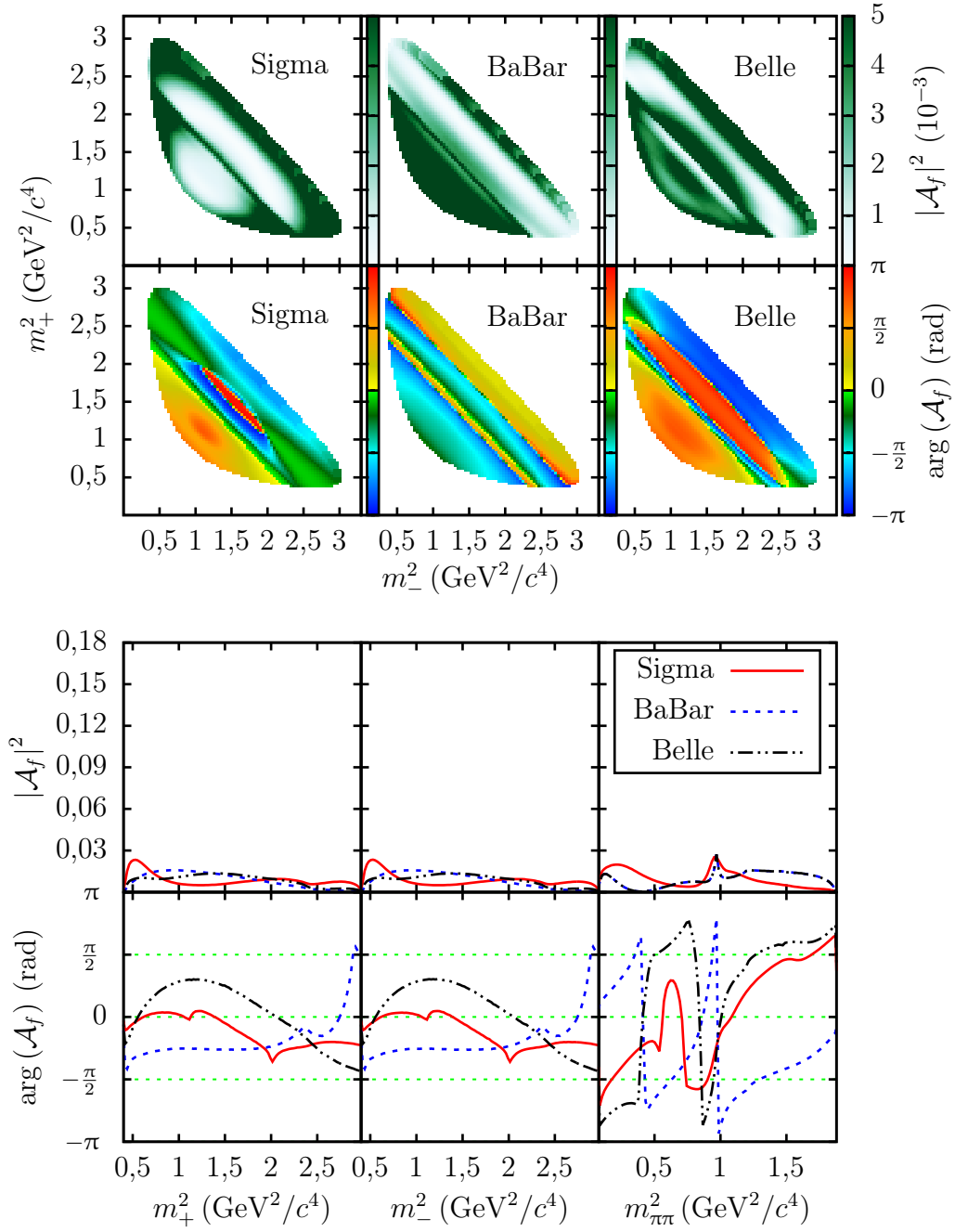
Doppelt Cabibbo-unterdrückt

- Sigma: $K^*(892)^+$, $K_0^*(1430)^+$ (RBW), $K_2^*(1430)^+$, $K^*(1410)^+$, $K^*(1680)^+$
- BaBar: $K^*(892)^+$, $K_0^*(1430)^+$ (LASS), $K_2^*(1430)^+$
- Belle: $K^*(892)^+$, $K_0^*(1430)^+$ (LASS), $K_2^*(1430)^+$, $K^*(1410)^+$, $K^*(1680)^+$



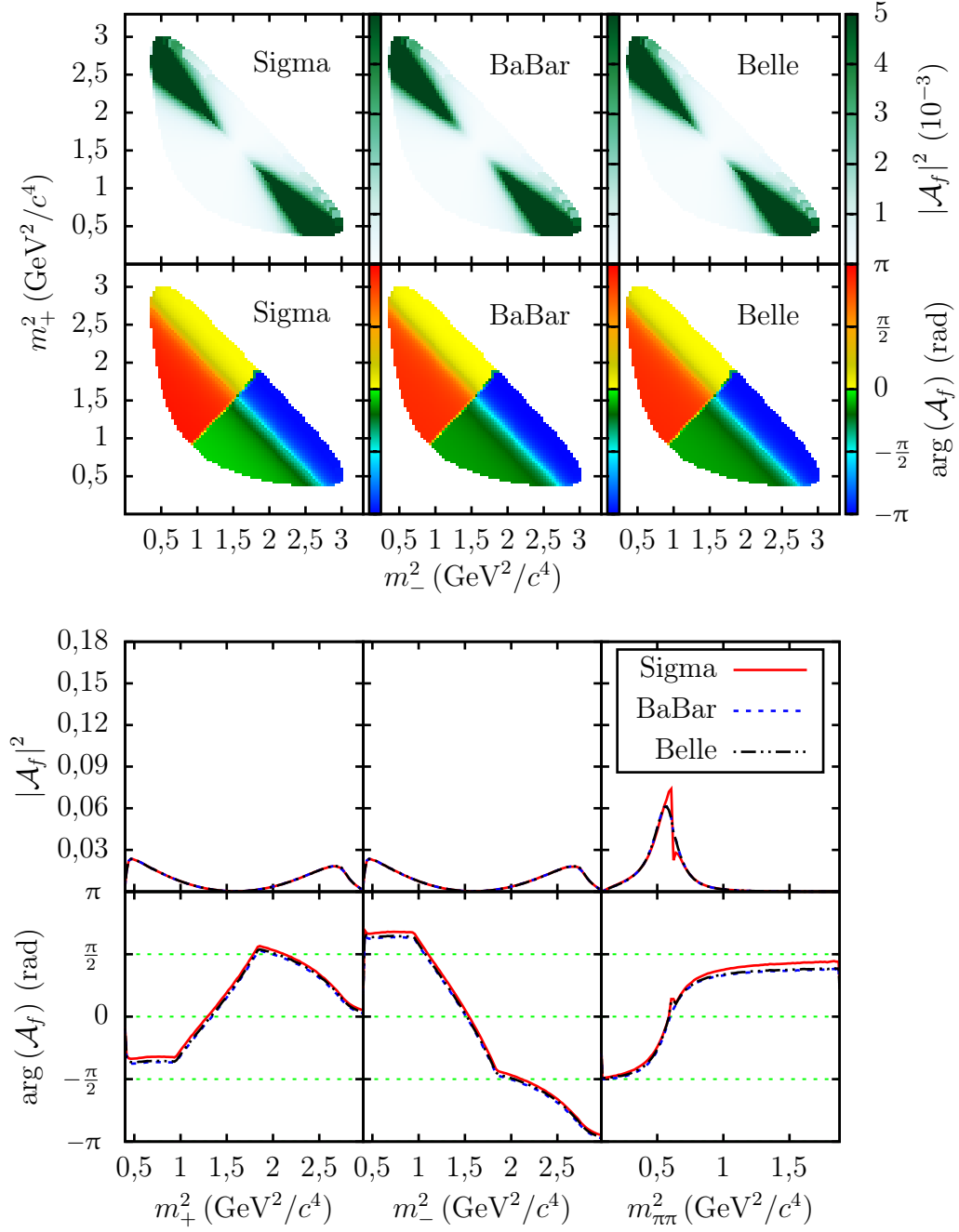
$(\mathcal{R} K_S)$ in $CP = +1$

- Sigma: $f_0(980)$, $f_0(1370)$, $f_2(1270)$, σ_1 , σ_2
- BaBar: $f_2(1270)$, $\pi\pi$ S-Welle als K-Matrix
- Belle: $f_2(1270)$, $\pi\pi$ S-Welle als K-Matrix



($\mathcal{R} K_S$) in $CP = -1$

- Sigma: $\rho(770)$ (RBW), $\rho(1450)$, $\omega(782)$
- BaBar: $\rho(770)$ (GS), $\rho(1450)$, $\omega(782)$
- Belle: $\rho(770)$ (GS), $\rho(1450)$, $\omega(782)$



Anhang E

Programm der Dalitz-Diagramm-Analyse

Im Folgenden wird das erstellte Programm zur Dalitz-Diagramm-Analyse und Extraktion der $D^0\text{-}\bar{D}^0$ -Mischungsparameter schematisch erläutert. Die Darstellung orientiert sich dabei grob am typischen Ablauf eines Fits, zur parallelen Ausführung und Kommunikation der parallel laufenden Prozesse dient das „Message Passing Interface“ in seiner OpenMPI Implementierung [187].

Am Beginn einer Funktionsanpassung steht die Klasse *ReadFiles*. Diese liest zunächst die in Form von ROOT-Dateien übergebenen Daten und gleichverteilten Monte-Carlo-Punkte ein, wobei jeder der parallelen Prozesse nur einen Teil der gesamten Daten speichert.

Die anzupassende Dreikörperamplitude wird Anhand einer einfachen Textdatei festgelegt, für jede Resonanz müssen hierzu folgende Werte definiert werden:

- Name,
- Tochterteilchen (z. B. $\mathcal{R} \rightarrow K_S \pi^+$),
- Spin (Skalar, Vektor, Tensor),
- Masse und Breite,
- Amplitudenform.

Zusätzliche Flags erlauben die Wahl des zeitabhängigen Fits, Erzwingung von CP -Erhaltung sowie die Berücksichtigung des Fehlers der Zerfallszeitmessung in Form einer Faltung (siehe Anhang C). Die zur Auswahl stehenden Amplitudenformen sowie deren Implementierung sind aus der *EvtDalitzReso*-Klasse des EvtGen-Paketes [93] übernommen. Die Konstruktion der Amplitudenstruktur anhand des Konfigurationsfiles geschieht mit der Klasse *ReadFiles*, die Speicherung der, Zweikörperresonanzen repräsentierenden, *EvtDalitzReso*-Objekte erfolgt in der zentralen Klasse *DynAmpli*. Diese enthält auch sämtliche Fitparameter, ein Interface um diese zu setzen und auszulesen sowie Funktionen zur Berechnung der Übergangsamplitude. Zur Reduktion der Rechenschritte pro Iteration werden bei der Berechnung von Breit-Wigner-Resonanzen

$$\mathcal{M}_{\mathcal{R}} = a_i \cdot (Z_L B_L^D B_L^{\mathcal{R}} T_{\mathcal{R}})$$

die Zemach Tensoren, Blatt-Weisskopf-Faktoren und der Propagator für alle Ereignisse nur einmalig berechnet und danach gespeichert. Eine weitere, erheblich Reduktion der Rechenschritte pro Iteration lässt sich bei der Berechnung der $\pi\pi$ S-Welle erreichen. Da in der Berechnung des $\hat{F}$ -Vektors

$$\hat{F}_i = \left(I - i \hat{K} \rho \right)_{ij}^{-1} \hat{P}_j$$

lediglich die Komponente $\hat{F}_1$ benötigt wird, ist es ausreichend die Matrix $\left(I - i \hat{K} \rho \right)$ ein einziges mal zu invertieren und die fünf Komponenten der Spalte $\left(I - i \hat{K} \rho \right)_{1j}^{-1}$ ereignisweise abzuspeichern. Bei der Berechnung der logarithmischen Likelihood

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \sum_{i=1}^N \ln(p) \\ &= \sum_{i=1}^{N_1} \ln(p) + \sum_{i=N_1+1}^{N_2} \ln(p) + \dots \\ &= \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \dots \end{aligned}$$

sind die einzelnen Prozesse unabhängig voneinander. Lediglich einmal pro Funktionsberechnung müssen die Teilsummen $\mathcal{L}_i$ zwischen den Prozessen ausgetauscht und aufaddiert werden, was den Datentransfer auf wenige Gleitkommazahlen pro Iteration beschränkt.

Entscheidungen über Parameteränderungen am Ende einer Iteration werden in der Klasse *Fitter* getroffen. Hierzu existiert ein Interface zu Minuit2 sowie dem evolutionären Vorfit. Zudem beinhaltet die Klasse eine Reihe von Strategien, die zum Auffinden des Maximums der Likelihood angewandt werden können.

Aufgrund des erheblichen Rechenaufwands zur Likelihoodmaximierung, besteht die Möglichkeit das Fitergebnis abzuspeichern. Dessen eingehendere Analyse (χ^2 , Verzweungsverhältnisse, Fehleranalyse etc.) erfolgt mit der Klasse *StatisticalTests*. Der gesamte Ablauf des Fitprozesses ist in Form eines Flussdiagramms in Abbildung E.1 veranschaulicht.

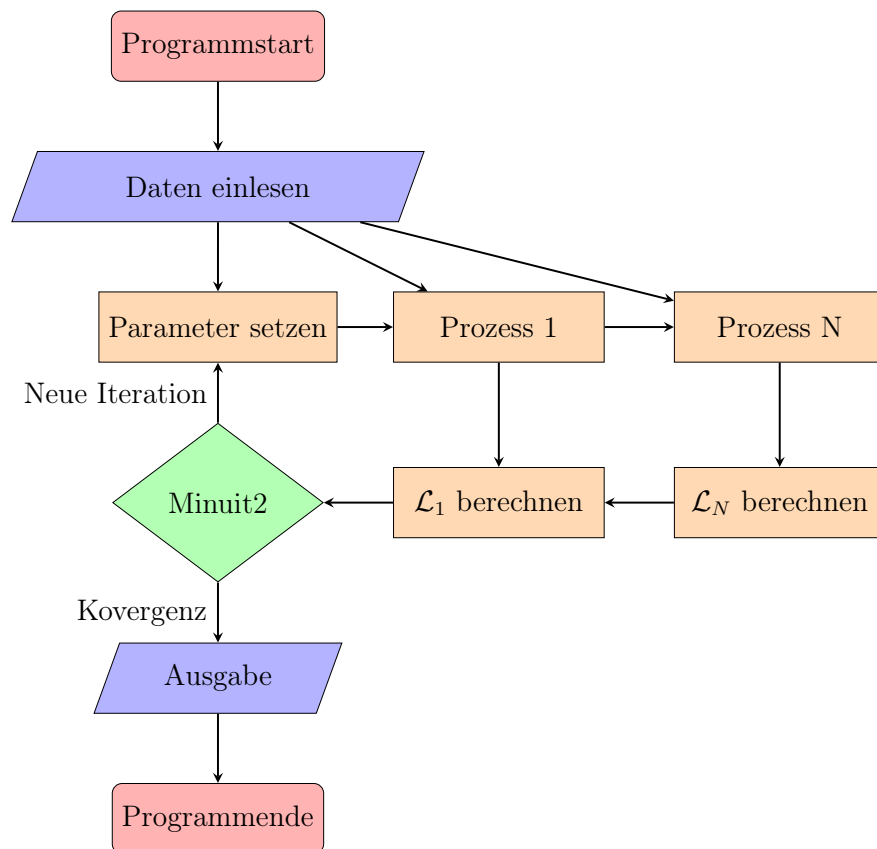


Abbildung E.1: Flussdiagramm des Programms der Dalitz-Diagramm-Analyse.

Anhang F

Likelihood der Teilchenidentifikation getrennt nach Subdetektoren

In den folgenden Abbildungen sind die mittleren Likelihoods der Teilchenidentifikation gegen den Impuls dargestellt. Zum Erstellen der Abbildungen wurde ein Teil der simulierten Stichprobe von 10^8 inelastischen $\bar{p}p$ -Reaktionen bei $\sqrt{s} = 3,77$ GeV verwendet, das in Abschnitt 8.1 zur Untergrundanalyse verwendet wird. Ereignisse, in denen der jeweilige Subdetektor keinen Beitrag zur PID liefert¹, wurden von der Betrachtung ausgeschlossen; die verwendeten Fehler sind rein statistisch.

Mikro-Vertex-Detektor

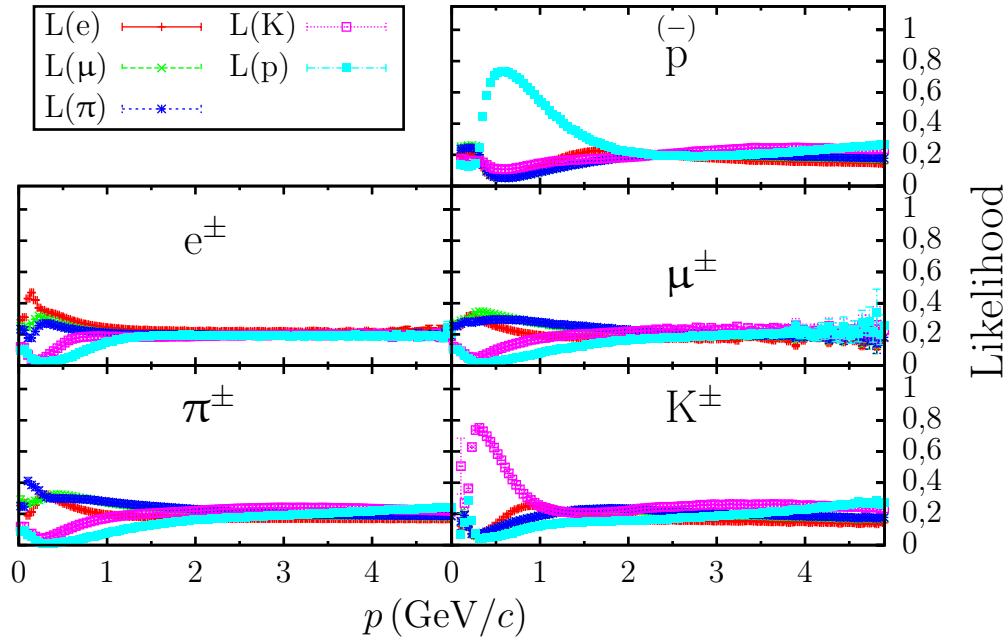


Abbildung F.1: Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit dem Mikro-Vertex-Detektor; die verwendete Klasse ist *PndPidMvdAssociatorTask*.

¹In diesen Fällen gilt $L(e) = L(\mu) = L(\pi) = L(K) = L(p) = 1/5$.

Straw-Tube-Detektor

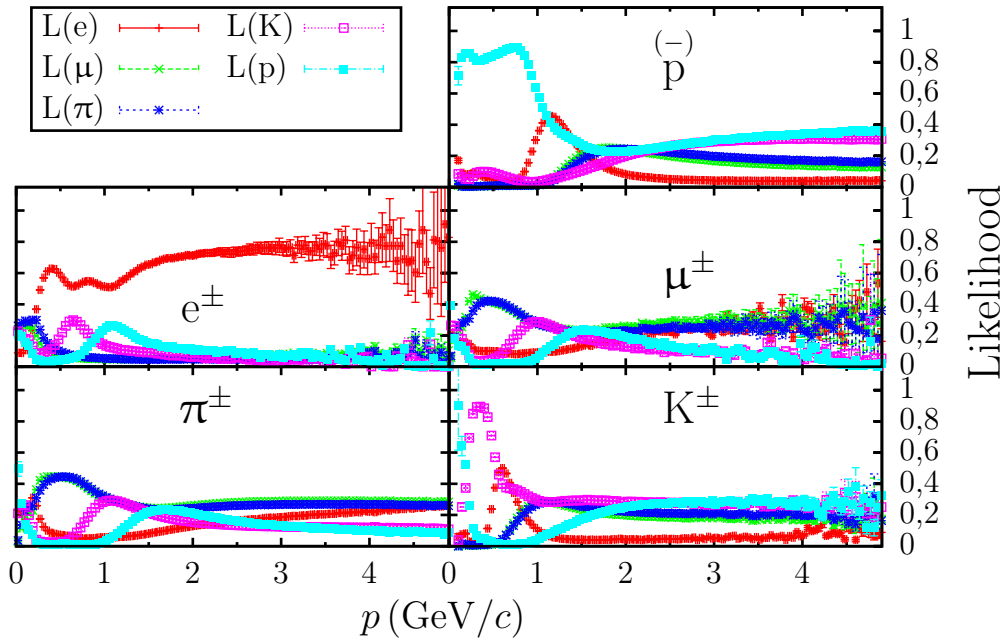


Abbildung F.2: Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit dem Straw-Tube-Detektor; die verwendete Klasse ist *PndPidSttAssociatorTask*.

Barrel-DIRC

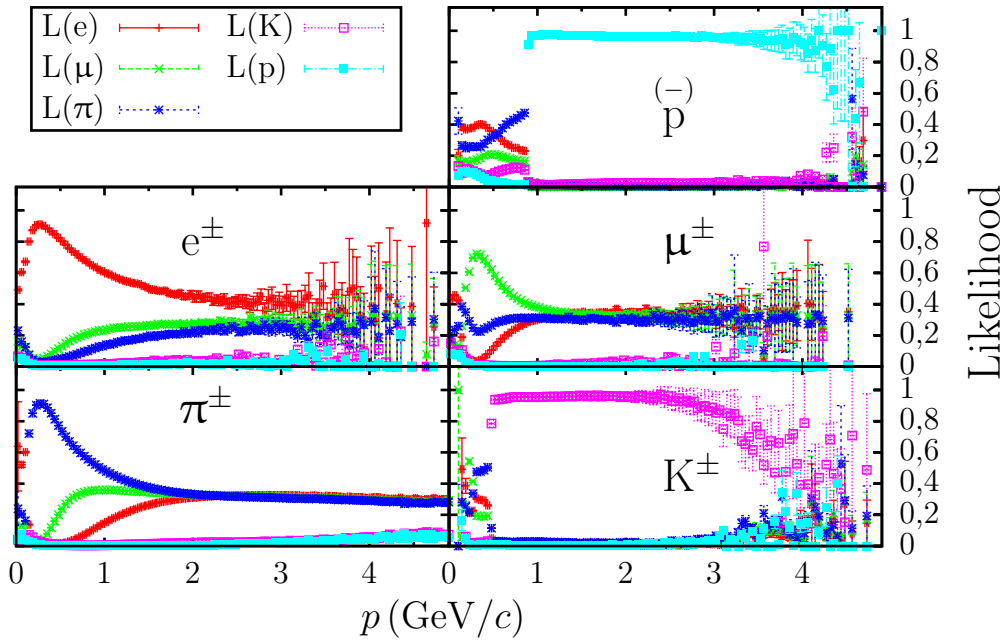


Abbildung F.3: Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit dem Barrel-DIRC; die verwendete Klasse ist *PndPidDrcAssociatorTask*.

Elektromagnetisches Kalorimeter

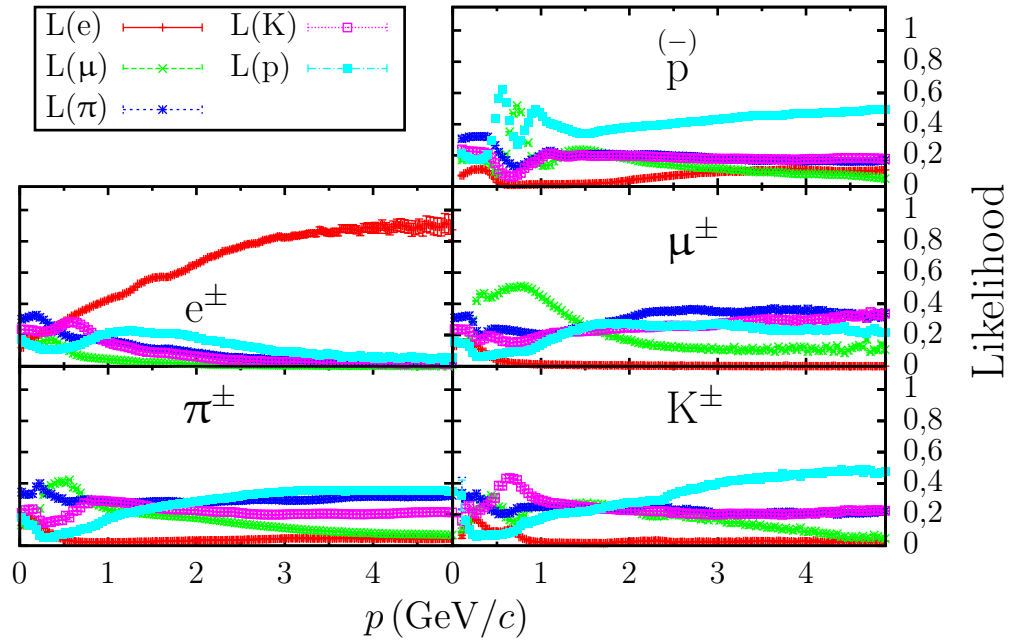


Abbildung F.4: Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit dem EMC; die verwendete Klasse ist *PndPidEmcBayesAssociatorTask*.

Myonen-Detektoren (Barrel)

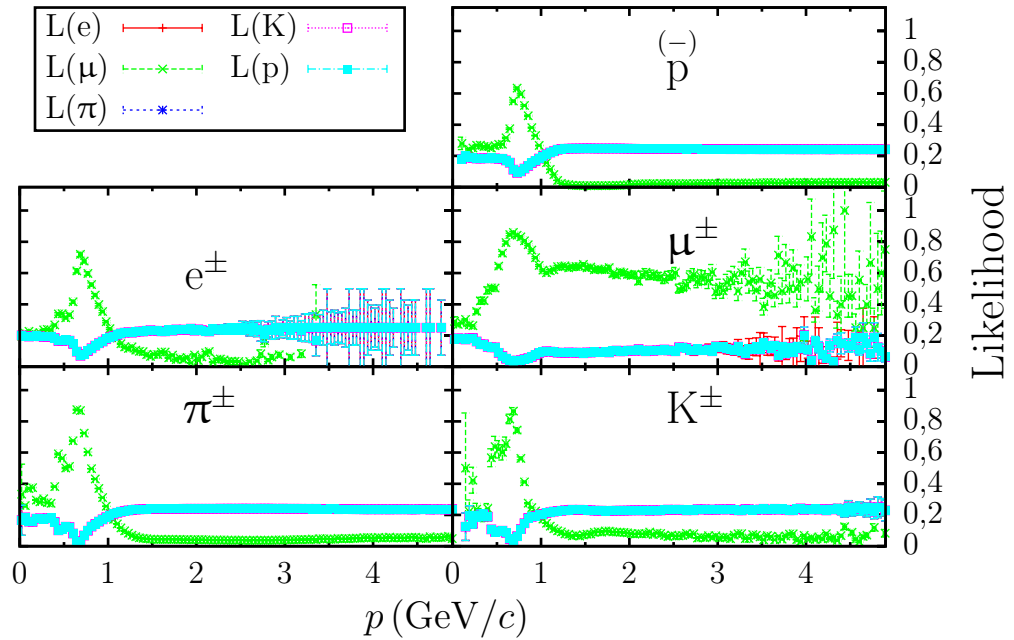


Abbildung F.5: Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit den Myonen-Detektoren im Barrel; die verwendete Klasse ist *PndPidMdtHCAssociatorTask*.

Disc-DIRC

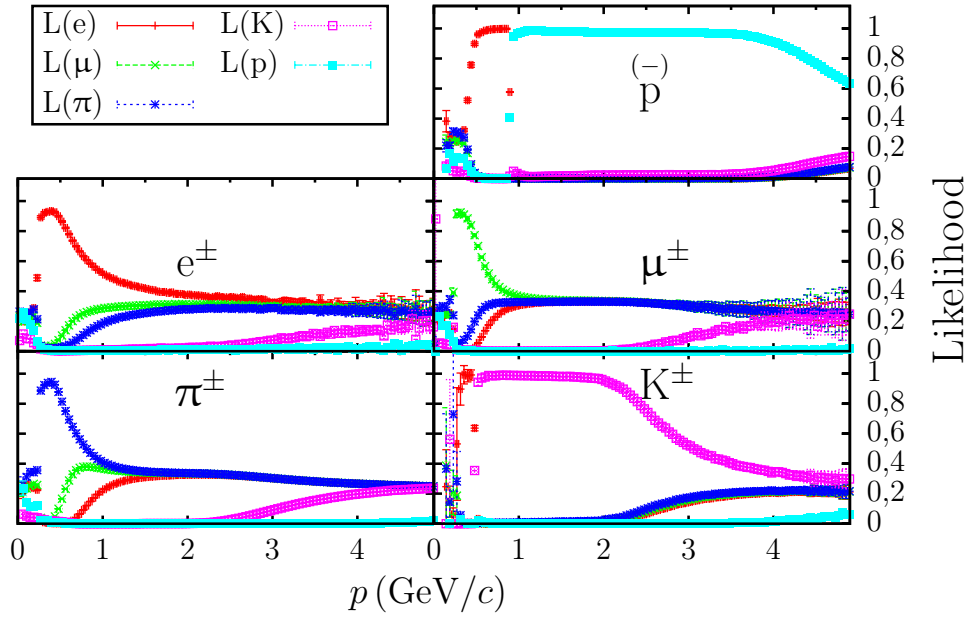


Abbildung F.6: Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit dem Disc-DIRC; die verwendete Klasse ist *PndPidDiscAssociatorTask*.

Anhang G

D⁰- und $\bar{D}^0$ -Rekonstruktion

Zerfallsortauflösung des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$

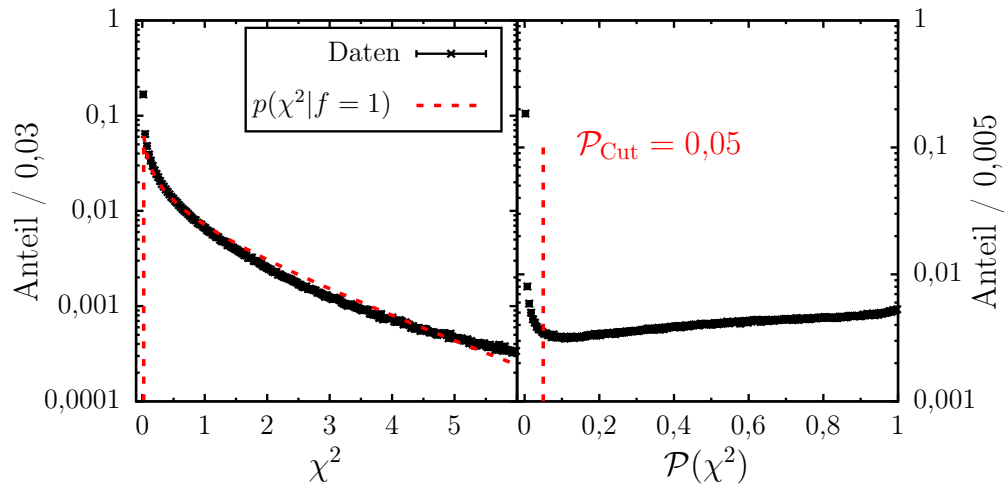


Abbildung G.1: χ^2 - (*links*) und $\mathcal{P}$ -Wert-Verteilung (*rechts*) aller rekonstruierten D^0 -Vertizes. Ebenfalls gezeigt sind die erwartete χ^2 -Verteilung für einen Freiheitsgrad und der verwendete Schnitt auf den $\mathcal{P}$ -Wert.

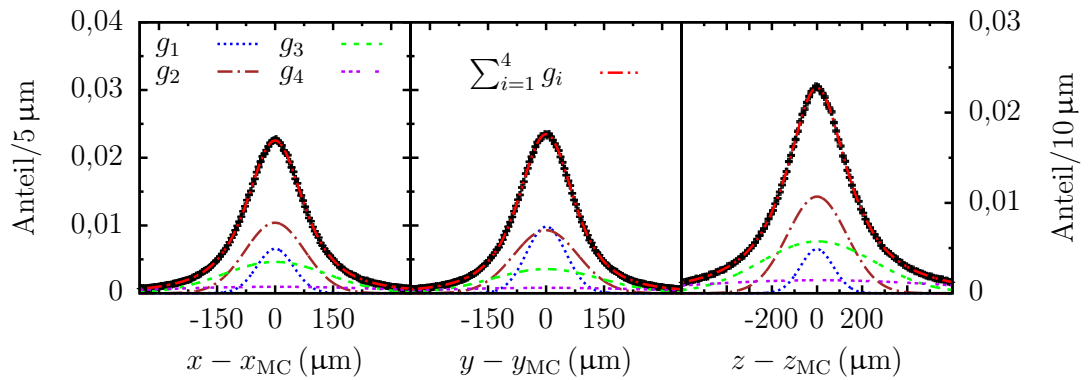


Abbildung G.2: Residuenverteilungen der D^0 -Zerfallsortkomponenten zusammen mit der Anpassung durch eine Summe von Normalverteilungen (Parameter siehe Tab. G.1).

Parameter	x	y	z
N_1	$0,78 \pm 0,18$	$1,26 \pm 0,17$	$0,89 \pm 0,17$
μ_1 (μm)	$0,20 \pm 0,48$	$0,56 \pm 0,29$	$-0,71 \pm 1,06$
σ_1 (μm)	$47,20 \pm 2,13$	$51,12 \pm 1,34$	$73,13 \pm 3,49$
N_2	$2,00 \pm 0,11$	$1,94 \pm 0,14$	$3,53 \pm 0,12$
μ_2 (μm)	$-0,44 \pm 0,40$	$-0,52 \pm 0,41$	$0,18 \pm 0,67$
σ_2 (μm)	$76,75 \pm 4,07$	$83,12 \pm 4,99$	$131,54 \pm 4,36$
N_3	$1,56 \pm 0,13$	$1,25 \pm 0,17$	$3,63 \pm 0,12$
μ_3 (μm)	$0,84 \pm 0,60$	$0,34 \pm 0,71$	$2,92 \pm 0,90$
σ_3 (μm)	$134,96 \pm 7,37$	$139,90 \pm 11,79$	$252,42 \pm 6,90$
N_4	$0,74 \pm 0,07$	$0,63 \pm 0,09$	$2,15 \pm 0,08$
μ_4 (μm)	$-0,03 \pm 1,49$	$0,85 \pm 1,55$	$7,11 \pm 2,11$
σ_4 (μm)	$308,57 \pm 18,45$	$313,93 \pm 26,34$	$596,08 \pm 15,83$
$\bar{\sigma}$ (μm)	$148,6 \pm 3,0$	$142,4 \pm 3,9$	$322,6 \pm 3,5$
χ^2/ndf	1,01	0,78	1,06

Tabelle G.1: Ergebnis einer χ^2 -Anpassung der D^0 -Residuenverteilungen mit einer Summe aus vier Normalverteilungen (siehe Abb. G.2). Der angegebene Fehler ist rein statistisch, die Zahl der Freiheitsgrade (ndf) beträgt in allen drei Fällen 188. $\bar{\sigma}$ bezeichnet den gewichteten Mittelwert der Einzelbreiten.

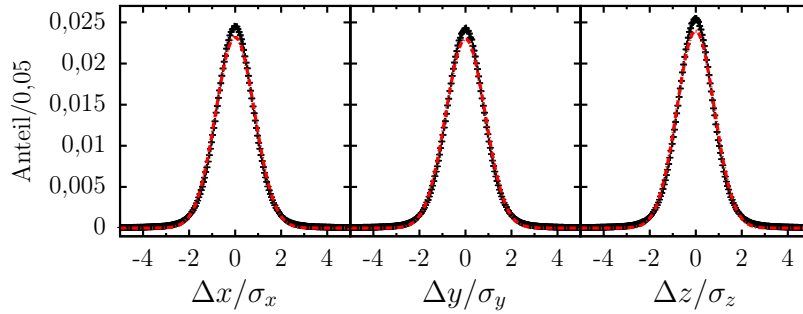


Abbildung G.3: Pull-Verteilungen des D^0 -Vertex-Fits mit angepassten Normalverteilungen; die Anpassung beschreibt die Verteilung nur ungenügend (siehe Tab. G.2).

	x	y	z
N_1 (10^{-3})	$49,13 \pm 0,47$	$49,17 \pm 0,46$	$49,00 \pm 0,50$
μ (10^{-3})	$0,45 \pm 7,96$	$1,04 \pm 7,86$	$-5,67 \pm 8,29$
σ	$0,84 \pm 0,01$	$0,85 \pm 0,01$	$0,82 \pm 0,01$
χ^2/ndf	528,27	505,94	608,80
Mittelwert (10^{-3})	0,45	1,25	-2,26
Standardabweichung	0,94	0,95	0,92

Tabelle G.2: Mittelwerte und Standardabweichungen der Pullverteilungen des D^0 -Vertex-Fits im Intervall $\Delta x/\sigma_x, \Delta y/\sigma_y, \Delta z/\sigma_z = [-5, 5]$ und die Parameter der in Abbildung G.3 gezeigten Anpassung mit 197 Freiheitsgraden (ndf).

Zerfallsortauflösung des Zerfalls $\bar{D}^0 \rightarrow K^+ \pi^-$

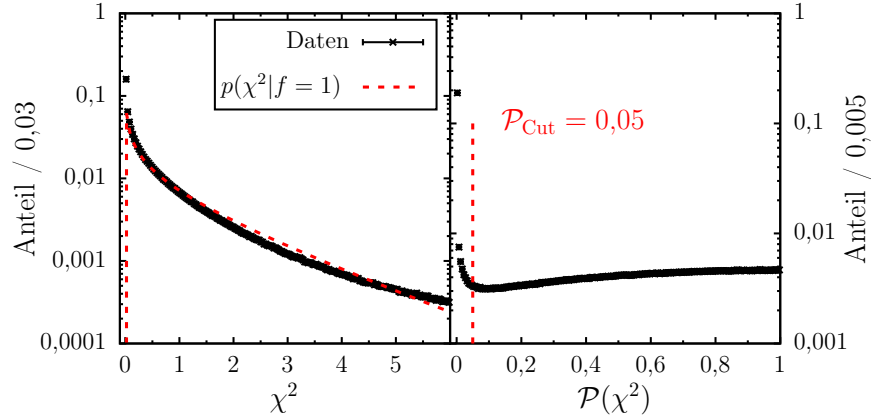


Abbildung G.4: χ^2 - (*links*) und $\mathcal{P}$ -Wert-Verteilung (*rechts*) aller rekonstruierten $\bar{D}^0$ -Vertizes. Ebenfalls gezeigt sind die erwartete χ^2 -Verteilung für einen Freiheitsgrad und der verwendete Schnitt auf den $\mathcal{P}$ -Wert.

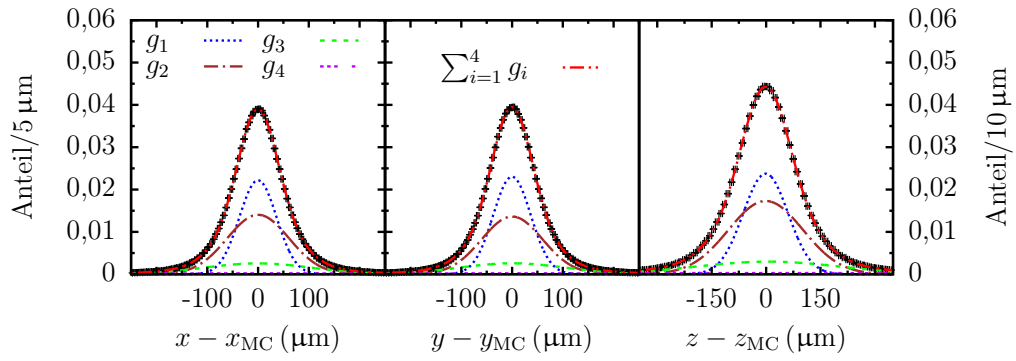


Abbildung G.5: Residuenverteilungen der $\bar{D}^0$ -Zerfallsortkomponenten zusammen mit der Anpassung durch eine Summe von Normalverteilungen (Parameter siehe Tab. G.3).

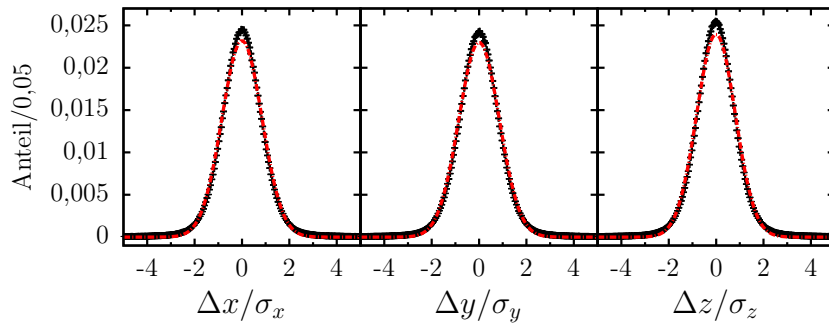


Abbildung G.6: Pull-Verteilungen des $\bar{D}^0$ -Vertex-Fits mit angepassten Normalverteilungen; die Anpassung beschreibt die Verteilung nur ungenügend (siehe Tab. G.4).

Parameter	x	y	z
N_1	$2,04 \pm 0,05$	$2,14 \pm 0,06$	$3,68 \pm 0,11$
$\mu_1 (\mu\text{m})$	$-0,07 \pm 0,07$	$-0,04 \pm 0,07$	$-1,10 \pm 0,15$
$\sigma_1 (\mu\text{m})$	$36,69 \pm 0,22$	$37,01 \pm 0,24$	$61,88 \pm 0,46$
N_2	$2,14 \pm 0,03$	$2,04 \pm 0,04$	$4,45 \pm 0,08$
$\mu_2 (\mu\text{m})$	$0,20 \pm 0,11$	$0,16 \pm 0,12$	$-0,90 \pm 0,21$
$\sigma_2 (\mu\text{m})$	$60,72 \pm 0,75$	$59,80 \pm 0,83$	$102,66 \pm 1,08$
N_3	$0,67 \pm 0,03$	$0,67 \pm 0,04$	$1,48 \pm 0,04$
$\mu_3 (\mu\text{m})$	$-0,53 \pm 0,29$	$0,22 \pm 0,29$	$5,61 \pm 0,55$
$\sigma_3 (\mu\text{m})$	$104,88 \pm 1,71$	$103,09 \pm 1,69$	$198,64 \pm 2,24$
N_4	$0,17 \pm 0,01$	$0,17 \pm 0,01$	$-0,42 \pm 0,01$
$\mu_4 (\mu\text{m})$	$0,34 \pm 1,25$	$1,55 \pm 1,19$	$-16,52 \pm 2,53$
$\sigma_4 (\mu\text{m})$	$308,17 \pm 5,97$	$300,71 \pm 5,40$	$590,36 \pm 8,71$
$\bar{\sigma} (\mu\text{m})$	$82,6 \pm 0,5$	$80,7 \pm 0,5$	$162,9 \pm 0,7$
χ^2/ndf	1,18	1,18	1,72

Tabelle G.3: Ergebnis einer χ^2 -Anpassung der $\bar{D}^0$ -Residuenverteilungen mit einer Summe aus vier Normalverteilungen (siehe Abb. G.5). Der angegebene Fehler ist rein statistisch, die Zahl der Freiheitsgrade (ndf) beträgt in allen drei Fällen 188. $\bar{\sigma}$ bezeichnet den gewichteten Mittelwert der Einzelbreiten.

	x	y	z
$N_1 (10^{-3})$	$49,1 \pm 0,5$	$49,1 \pm 0,5$	$49,0 \pm 0,5$
$\mu (10^{-3})$	$0,3 \pm 8,0$	$-0,8 \pm 8,0$	$-6,3 \pm 8,4$
σ	$0,84 \pm 0,01$	$0,85 \pm 0,01$	$0,81 \pm 0,01$
χ^2/ndf	779,3	743,7	886,2
Mittelwert (10^{-3})	14,9	-17,5	3,6
Standardabweichung	0,93	0,94	0,91

Tabelle G.4: Mittelwerte und Standardabweichungen der Pullverteilungen des $\bar{D}^0$ -Vertex-Fits im Intervall $\Delta x/\sigma_x, \Delta y/\sigma_y, \Delta z/\sigma_z = [-5, 5]$ und die Parameter der in Abbildung G.6 gezeigten Anpassung mit 197 Freiheitsgraden.

D⁰- und $\bar{D}^0$ - Zerfallszeitauflösung

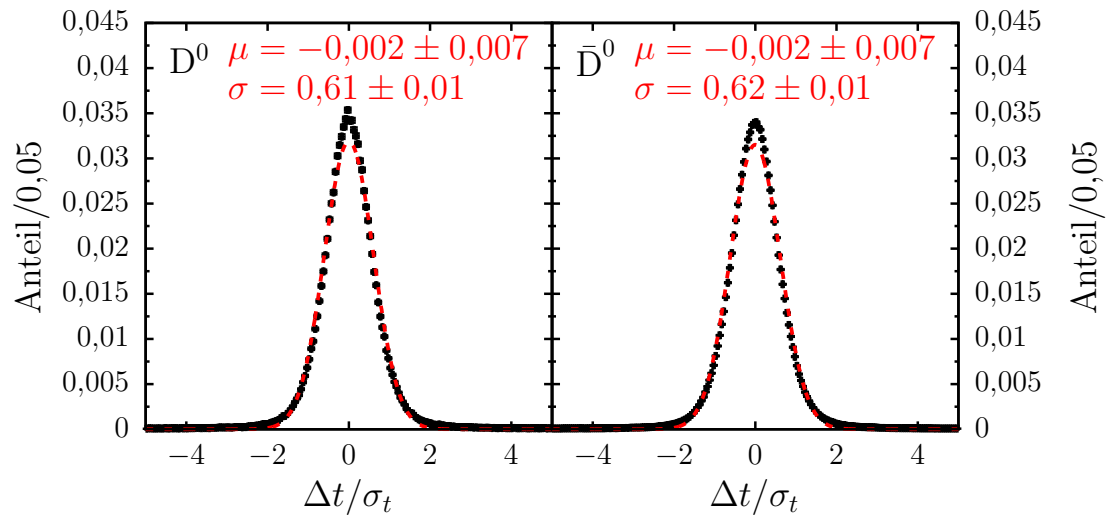


Abbildung G.7: Pull-Verteilungen der Zerfallszeitrekonstruktion von D^0 und $\bar{D}^0$. In rot ist das Ergebnis einer Anpassung mit einer einfachen Normalverteilung gezeigt.

Anhang H

Mistag-Häufigkeit in der Stichprobe $\psi(3770) \rightarrow$ alle

		$\bar{D}^0$ -Zerfall		
		$K_S \pi^+ \pi^-$	$K^+ \pi^-$	$K^+ \pi^- \pi^0$
D ⁰ -Zerfall	$K_S \pi^+ \pi^-$	—	584	4
	$K^+ \pi^-$	5	—	—
	$2 \pi^+ 2 \pi^-$	—	20	—
	$\rho^0 \rho^0$	—	5	—
	$K_S \eta'$	—	4	—
	$K_S \pi^+ \pi^- \pi^0$	—	5	—
	$K_S \eta$	—	2	—

Tabelle H.1: Zerfallskanäle der 636 Ereignisse, die in der Stichprobe $\psi(3770) \rightarrow$ alle als Signalereignis erkannt werden (PID *Ideal*).

		$\bar{D}^0$ -Zerfall					
		$K_S \pi^+ \pi^-$	$K^+ \pi^-$	$K^+ \pi^- \pi^0$	$K^+ \mu^- \bar{\nu}_\mu$	$K^+ K^-$	$\rho^+ \pi^-$
D ⁰ -Zerfall	$K_S \pi^+ \pi^-$	—	130	—	1	2	1
	$K^+ \pi^-$	1	—	—	—	—	—
	$K^- \pi^+$	—	—	1	—	—	—
	$K^+ K^-$	2	—	—	—	—	—
	$2 \pi^+ 2 \pi^-$	—	8	—	—	—	—
	$\rho^0 \rho^0$	—	2	—	—	—	—
	$2 \pi^+ \pi^- K^-$	—	1	—	—	—	—
	$\rho^+ \pi^-$	1	—	—	—	—	—
	$K_S \pi^+ \pi^- \pi^0$	—	—	—	—	1	—
	$K_S \eta$	—	1	—	—	—	—
	$K_S \pi^- e^+ \nu_e$	—	3	—	—	—	—

Tabelle H.2: Zerfallskanäle der 155 Ereignisse, die in der Stichprobe $\psi(3770) \rightarrow$ alle als Signalereignis erkannt werden (PID *Loose*).

Anhang I

Dalitz-Diagramm-Analyse

Fit bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz

Die folgenden Abbildungen beziehen sich auf einen Fit der Stichprobe *Mix* mit dem Modell der Ereignisgeneration. Für alle rekonstruierten Ereignisse werden hierbei anstelle der rekonstruierten die wahren Monte-Carlo-Massen $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{MC}}$ verwendet. Effektiv wird daher lediglich die Effizienz bei idealer Massenauflösung berücksichtigt.

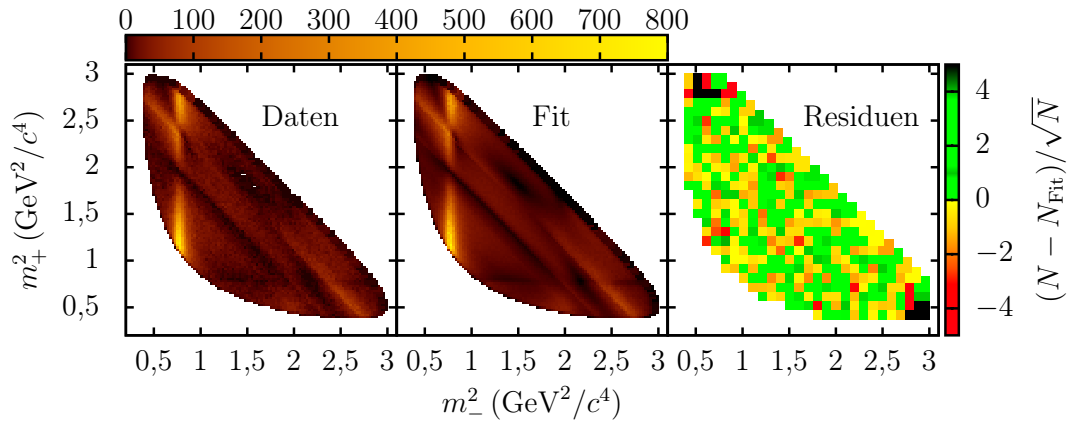


Abbildung I.1: Verteilung der hypothetischen Messdaten im Dalitz-Diagramm, Verteilung des Fits und Residuen bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz. Die Binbreite der Darstellung beträgt 25,7 MeV^2/c^4 für die Dalitz-Diagramme und 95 MeV^2/c^4 für die Residuen (Stichprobe *Mix*).

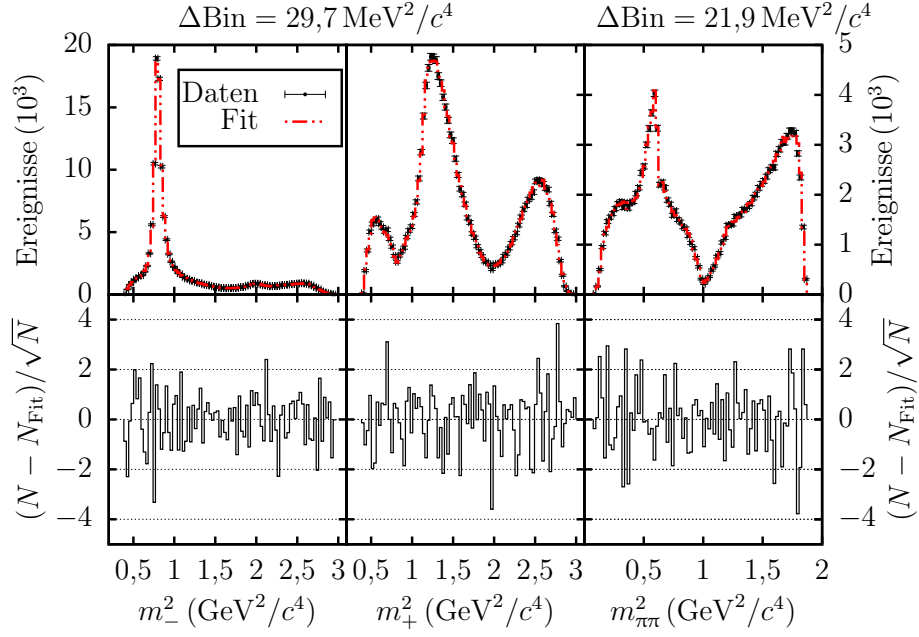


Abbildung I.2: Verteilung von $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{MC}$, Projektion des Fits und Residuen bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz (Stichprobe *Mix*).

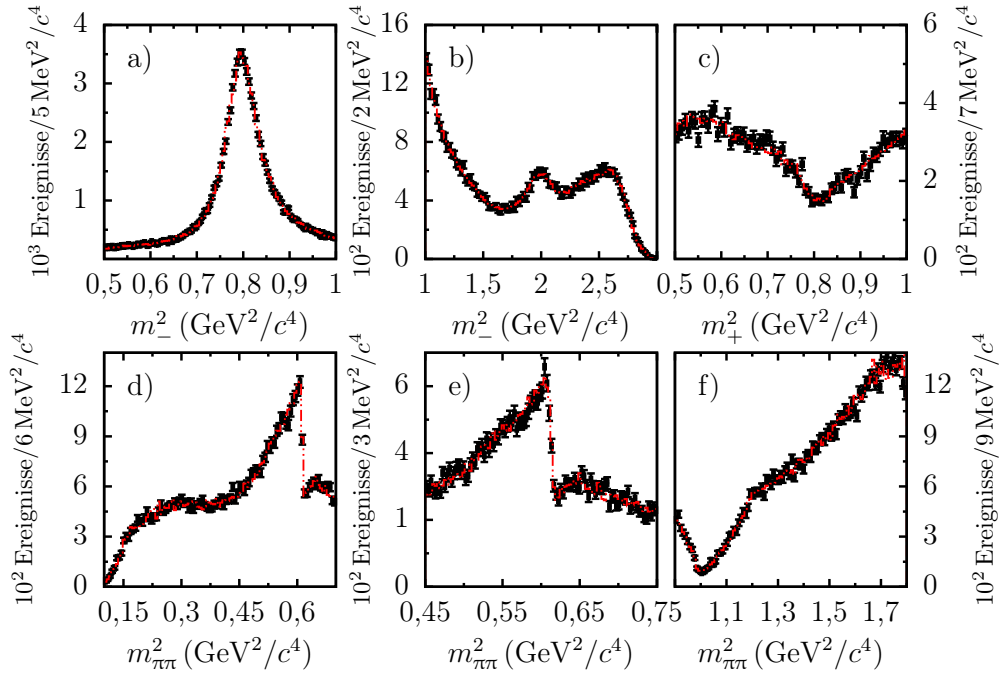


Abbildung I.3: Nahansicht der Verteilungen von $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{MC}$ in physikalisch relevanten Regionen bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz (Stichprobe *Mix*) zusammen mit der Projektion des Fits.

Resonanz	Re(a_i)	Im(a_i)	FA ¹ (%)	Resonanz	Re(a_i)	Im(a_i)	FA ¹ (%)
Cabibbo-bevorzugt				Doppelt Cabibbo-unterdrückt			
K [*] (892) ⁻	-1,07(2)	1,19(2)	56,6(7)	K [*] (892) ⁺	0,119(6)	-0,097(5)	0,50(4)
K ₀ [*] (1430) ⁻	2,65(11)	0,59(17)	6,5(5)	K ₀ [*] (1430) ⁺	-0,261(73)	0,255(73)	0,12(5)
K ₂ [*] (1430) ⁻	0,86(3)	-0,82(3)	2,0(1)	K ₂ [*] (1430) ⁺	0,020(27)	-0,028(27)	0,002(3)
K [*] (1410) ⁻	0,01(5)	0,45(5)	0,32(6)	K [*] (1410) ⁺	-0,111(42)	-0,242(45)	0,11(4)
K [*] (1680) ⁻	0,80(20)	-1,23(20)	0,70(16)	K [*] (1680) ⁺	-0,088(196)	0,783(202)	0,20(11)
$(\mathcal{R} K_S)$ in $CP = +1$				$(\mathcal{R} K_S)$ in $CP = -1$			
f ₂ (1270)	1,16(4)	-0,70(3)	3,54(17)	ρ(770)	1 (fixiert)	0 (fixiert)	23,1(4)
				ω(782)	-0,014(2)	0,032(1)	0,52(3)
				ρ(1450)	0,25(8)	0,13(9)	0,06(4)
ππ S-Welle				12,2(6)			
β ₁	-5,20(12)	1,15(12)		f ₁₁ ^{prod}	-10,86(27)	-2,65(25)	
β ₂	9,73(22)	0,13(25)		f ₁₂ ^{prod}	-15,47(67)	0,68(63)	
β ₃	51,3 ± 1,8	-5,7 ± 1,8		f ₁₃ ^{prod}	-8,3 ± 1,4	-4,3 ± 1,3	
β ₄	13,4(7)	-3,9(7)		f ₁₄ ^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	
β ₅	0 (fixiert)	0 (fixiert)		f ₁₅ ^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	
s ₀ ^{prod}	-3,92637 (fixiert)						
Kπ S-Welle (K ₀ [*] (1430) [±])							
M (MeV/c ²)	1478 ± 8			Γ (MeV/c ²)	258 ± 17		
R	1 (fixiert)			φ _R (rad)	1,14 ± 0,10		
B	1,76 ± 0,12			φ _B (rad)	2,38 ± 0,05		
a (c/GeV)	0,160 ± 0,006			r (c/GeV)	-19,78 ± 0,69		
K [*] (892) [±]							
M (MeV/c ²)	894,1 ± 0,2						
Γ (MeV/c ²)	47,9 ± 0,3						
ℒ am Maximum		139.824					
Ergebnis des χ ² -Tests							
χ ²	403,56		χ ² /ndf	1,16–1,35			
ndf	298–347		ℙ (%)	0,004–2,0			

¹ Fitanteil.

Tabelle I.1: Ergebnis der Dalitz-Diagramm-Analyse der Stichprobe *Mix* bei abschließlicher Berücksichtigung der Effizienz.

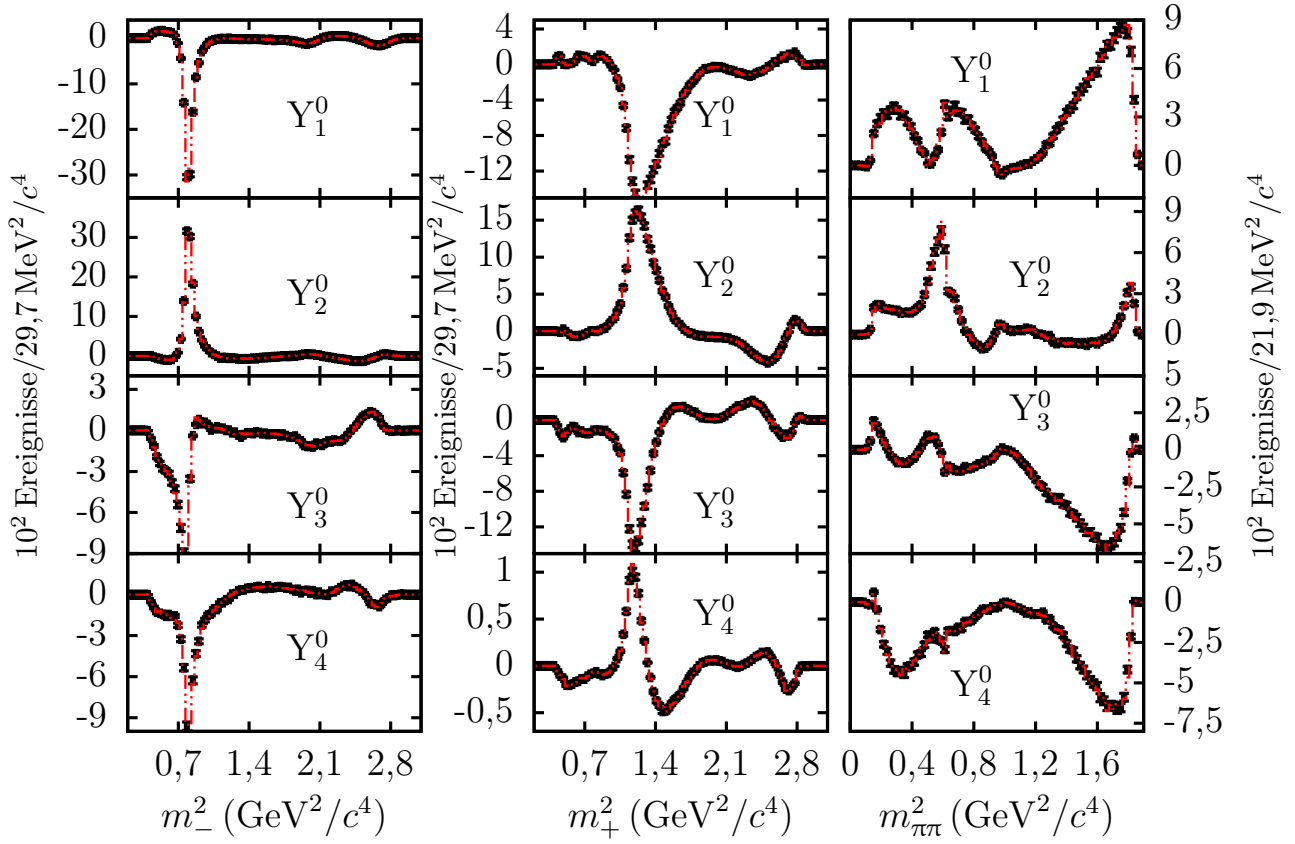


Abbildung I.4: Mittlere Werte der Kugelflächenfunktionen Y_L^0 in Abhängigkeit der invarianten Massen $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{MC}}$ bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz (Stichprobe *Mix*). In rot ist die Projektion des Fits gezeigt.

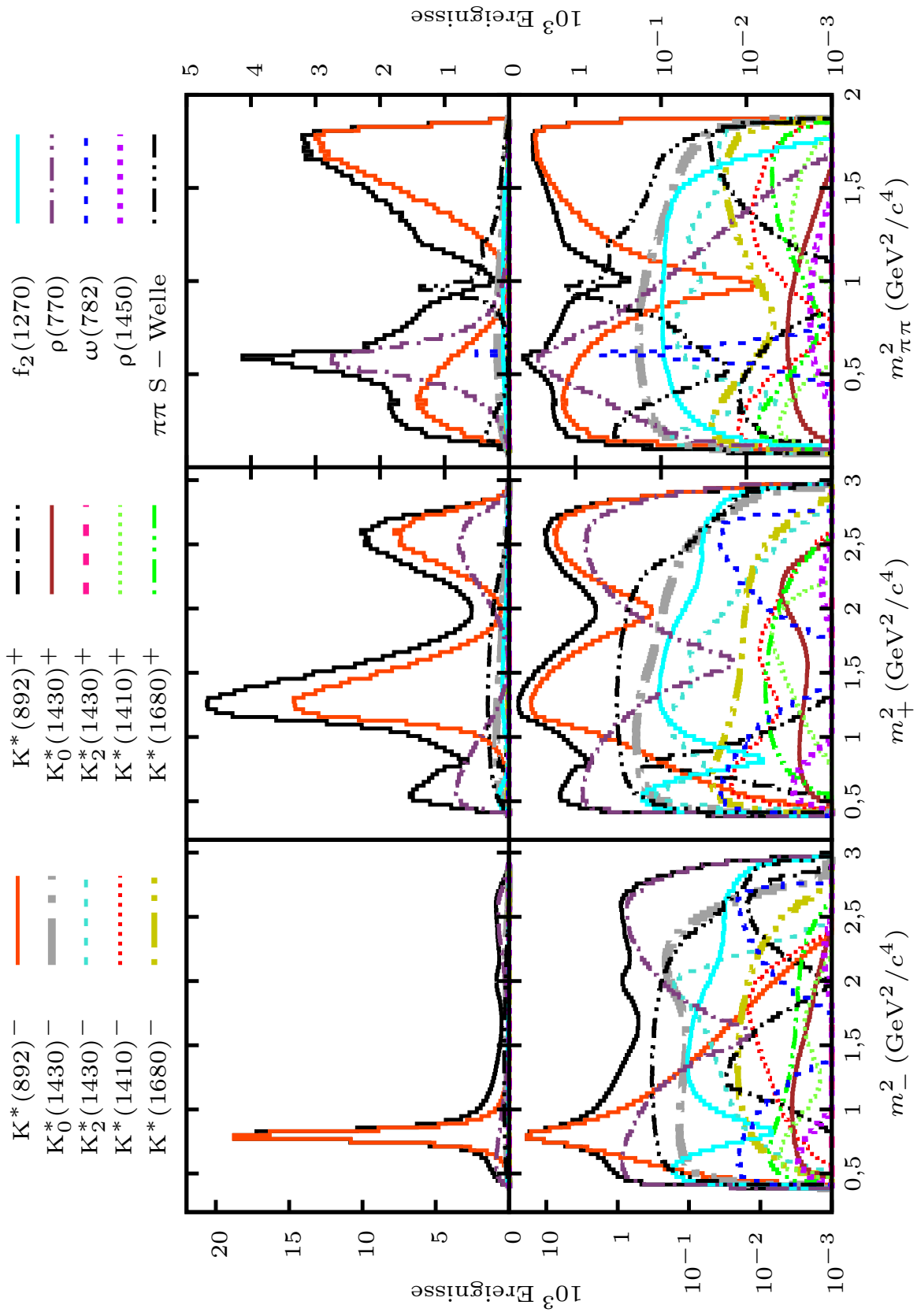


Abbildung I.5: Amplituden $|A_i|^2$ getrennt nach einzelnen Resonanzen bei Fit der Stichprobe *Mix* und bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz. Als schwarze durchgezogene Linie ist die Gesamtamplitude $|A_f|^2$ gezeigt. Die Binbreite beträgt $29,7 \text{ MeV}^2/c^4$ für m_-^2 und $21,9 \text{ MeV}^2/c^4$ für $m_{\pi\pi}^2$.

Tabelle I.2: Interferenz-Fitanteile in Prozent bei Verwendung der wahren Monte-Carlo-Massen (Eff.) und realistischer Rekonstruktion (Eff.+Aufl.) für die Stichprobe *Mix*.

Fit der Stichprobe *NoMix*

Resonanz	$\text{Re}(a_i)$	$\text{Im}(a_i)$	$\text{FA}^1(\%)$	Resonanz	$\text{Re}(a_i)$	$\text{Im}(a_i)$	$\text{FA}^1(\%)$
Cabibbo-bevorzugt				Doppelt Cabibbo-unterdrückt			
$K^*(892)^-$	$-1,05(2)$	$1,18(2)$	$56,2(7)$	$K^*(892)^+$	$0,107(6)$	$-0,077(5)$	$0,38(4)$
$K_0^*(1430)^-$	$1,80(21)$	$-1,59(15)$	$2,7(3)$	$K_0^*(1430)^+$	$0,201(67)$	$0,210(68)$	$0,04(2)$
$K_2^*(1430)^-$	$0,88(3)$	$-0,77(3)$	$2,0(1)$	$K_2^*(1430)^+$	$0,094(27)$	$-0,035(27)$	$0,015(8)$
$K^*(1410)^-$	$0,11(5)$	$0,47(5)$	$0,35(6)$	$K^*(1410)^+$	$-0,225(41)$	$-0,223(43)$	$0,15(5)$
$K^*(1680)^-$	$0,41(19)$	$-1,88(20)$	$1,21(23)$	$K^*(1680)^+$	$-0,094(188)$	$1,393(194)$	$0,63(18)$
$(\mathcal{R} K_S) \text{ in } CP = +1$				$(\mathcal{R} K_S) \text{ in } CP = -1$			
$f_2(1270)$	$1,09(4)$	$-0,66(3)$	$3,18(17)$	$\rho(770)$	1 (fixiert)	0 (fixiert)	$23,23(36)$
				$\omega(782)$	$-0,015(2)$	$0,032(1)$	$0,529(33)$
				$\rho(1450)$	$-0,01(7)$	$0,47(9)$	$0,18(7)$
$\pi\pi$ S-Welle							$11,8(4)$
β_1	$-5,03(12)$	$1,84(11)$		f_{11}^{prod}	$-11,54(24)$	$-4,06(23)$	
β_2	$9,25(20)$	$2,09(24)$		f_{12}^{prod}	$-13,89(64)$	$-0,29(60)$	
β_3	$47,8 \pm 1,7$	$-9,1 \pm 1,7$		f_{13}^{prod}	$-7,4 \pm 1,4$	$-4,4 \pm 1,3$	
β_4	$12,9(7)$	$-1,5(6)$		f_{14}^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	
β_5	0 (fixiert)	0 (fixiert)		f_{15}^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	
s_0^{prod}	$-3,92637 \text{ (fixiert)}$						
$K\pi$ S-Welle ($K_0^*(1430)^\pm$)							
$M \text{ (MeV}/c^2)$	1471 ± 8			$\Gamma \text{ (MeV}/c^2)$	252 ± 16		
R	1 (fixiert)			$\phi_R \text{ (rad)}$	$1,68 \pm 0,12$		
B	$1,19 \pm 0,18$			$\phi_B \text{ (rad)}$	$-0,50 \pm 0,05$		
$a \text{ (c/GeV)}$	$0,140 \pm 0,005$			$r \text{ (c/GeV)}$	$-23,31 \pm 0,74$		
$K^*(892)^\pm$							
$M \text{ (MeV}/c^2)$	$893,6 \pm 0,2$						
$\Gamma \text{ (MeV}/c^2)$	$47,0 \pm 0,3$						
$\mathcal{L} \text{ am Maximum}$							
140.119							
Ergebnis des χ^2 -Tests							
χ^2	$366,98$		χ^2/ndf	$1,06\text{--}1,24$			
ndf	$296\text{--}345$		$\mathcal{P} \text{ (\%)}$	$0,3\text{--}19,9$			

¹ Fitanteil.

Tabelle I.3: Ergebnis der Dalitz-Diagramm-Analyse der Stichprobe *NoMix* bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz.

Fit der Stichprobe $CPVio$

Resonanz	Re(a_i)	Im(a_i)	FA ¹ (%)	Resonanz	Re(a_i)	Im(a_i)	FA ¹ (%)
Cabibbo-bevorzugt				Doppelt Cabibbo-unterdrückt			
K [*] (892) ⁻	-1,08(2)	1,19(2)	56,4(8)	K [*] (892) ⁺	0,112(6)	-0,094(5)	0,46(4)
K ₀ [*] (1430) ⁻	1,69(21)	-1,68(14)	3,1(3)	K ₀ [*] (1430) ⁺	0,192(62)	0,156(63)	0,03(2)
K ₂ [*] (1430) ⁻	0,85(3)	-0,75(3)	1,8(1)	K ₂ [*] (1430) ⁺	0,083(27)	0,016(27)	0,010(7)
K [*] (1410) ⁻	0,04(5)	0,54(5)	0,44(7)	K [*] (1410) ⁺	-0,131(41)	-0,234(45)	0,11(4)
K [*] (1680) ⁻	0,19(19)	-1,87(20)	1,13(23)	K [*] (1680) ⁺	-0,284(192)	1,103(198)	0,42(15)
$(\mathcal{R} K_S)$ in $CP = +1$				$(\mathcal{R} K_S)$ in $CP = -1$			
f ₂ (1270)	1,13(4)	-0,72(3)	3,46(17)	ρ(770)	1 (fixiert)	0 (fixiert)	22,95(35)
				ω(782)	-0,016(1)	0,034(1)	0,576(34)
				ρ(1450)	0,13(8)	0,34(9)	0,11(5)
ππ S-Welle				11,41(38)			
β ₁	-4,84(12)	1,73(11)		f_{11}^{prod}	-11,02(24)	-4,56(23)	
β ₂	8,61(21)	2,49(24)		f_{12}^{prod}	-12,51(65)	-0,01(61)	
β ₃	44,7 ± 1,8	-6,6 ± 1,7		f_{13}^{prod}	-6,5 ± 1,4	-5,3 ± 1,3	
β ₄	12,34(66)	-1,65(62)		f_{14}^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	
β ₅	0 (fixiert)	0 (fixiert)		f_{15}^{prod}	0 (fixiert)	0 (fixiert)	
s ₀ ^{prod}	-3,92637 (fixiert)						
Kπ S-Welle (K ₀ [*] (1430) [±])							
M (MeV/ c^2)	1453 ± 8			Γ (MeV/ c^2)	263 ± 17		
R	1 (fixiert)			φ _R (rad)	1,47 ± 0,12		
B	1,38 ± 0,16			φ _B (rad)	-0,61 ± 0,05		
a (c/GeV)	0,207 ± 0,007			r (c/GeV)	-15,96 ± 0,46		
K [*] (892) [±]							
M (MeV/ c^2)	893,7 ± 0,2						
Γ (MeV/ c^2)	47,7 ± 0,3						
ℒ am Maximum		140.789					
Ergebnis des χ ² -Tests							
χ ²	525,51		χ ² /ndf 1,21–1,37				
ndf	384–433		ℙ (%) ≈ 0–0,15				

¹ Fitanteil.

Tabelle I.4: Ergebnis der Dalitz-Diagramm-Analyse der Stichprobe $CPVio$ bei abschließlicher Berücksichtigung der Effizienz.

Abkürzungsverzeichnis

BaBar Experiment am SLAC: Abkürzung nach $B^0\text{-}\bar{B}^0$ (B/B-bar).

BEC Backward Endcap.

Belle Experiment an der KEK-B-Fabrik.

BES Beijing Spectrometer am Beijing Electron Positron Collider.

BNL Brookhaven National Laboratory.

Br Verzweigungsverhältnis: Abkürzung nach branching ratio.

CAD Computer Aided Design.

CDF Collider Detector at Fermilab.

CERN Europäische Organisation für Kernforschung: Abkürzung nach Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire.

CF Cabibbo-bevorzugt: Abkürzung nach Cabibbo-favored.

CL Konfidenzniveau: Abkürzung nach confidence level.

CLEO Experiment am Cornell Electron Storage Ring.

CMS Impulsschwerpunktssystem: Abkürzung nach Center of Momentum System.

COSY Beschleuniger am Forschungszentrum Jülich: Abkürzung nach Cooler Synchrotron.

COSY-11 Experiment am Cooler Synchrotron des Forschungszentrums Jülich.

CR Collector Ring.

DCS Doppelt Cabibbo-unterdrückt: Abkürzung nach doubly Cabibbo-suppressed.

DESY Deutsches Elektronen-Synchrotron.

DIRC Detection of Internally Reflected Cherenkov light.

DPM Zwei-Partonen-Modell: Abkürzung nach Dual Parton Model.

E791 Experiment am Fermilab.

E835 Experiment am Fermilab.

EMC Elektromagnetisches Kalorimeter.

FAIR Facility for Antiproton and Ion Research.

FEC Forward Endcap.

FPGA Field Programmable Gate Array.

FSC Forward Spectrometer Calorimeter.

FTS System zur Spurfindung in Vorwärtsrichtung: Abkürzung nach Forward Tracking System.

FWHM Halbwertsbreite: Abkürzung nach Full Width at Half Maximum.

GEM Gas-Elektronen-Vervielfacher: Abkürzung nach Gas Electron Multiplier.

GSI GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung mbH.

HERMES Experiment am DESY. Alle Detektoren am HERA-Beschleuniger sind nach griechischen Göttern benannt.

HESR High Energy Storage Ring.

HFAG Heavy Flavor Averaging Group.

HL Hohe Luminosität.

LAAPD Großflächige Lawinen-Photodiode: Abkürzung nach Large Area Avalanche Photodiode.

LASS Large Aperture Superconducting Solenoid.

LHCb Experiment am CERN: Abkürzung nach Large Hadron Collider beauty.

MDT Mini Drift Tube.

MVD Mikro-Vertex-Detektor.

p-LINAC Proton Linear Accelerator.

PANDA Antiproton Annihilation at Darmstadt.

PID Teilchenidentifikation: Abkürzung nach Particle Identification.

PM Photoelektronenvervielfacher: Abkürzung nach Photo Multiplier.

PTr Pellet Tracking Betrieb des Pellet Targets.

QCD Quantenchromodynamik.

RICH Ring Imaging Cherenkov.

SIS Schwerionensynchrotron.

SLAC Stanford Linear Accelerator Center.

SM Standardmodell der Teilchenphysik.

SODA Synchronization of Data Acquisition.

STT Driftröhrchen Detektor: Abkürzung nach Straw Tube Tracker.

ToF Time of Flight.

VPT Vakuum-Phototriode.

WASA Experiment am COSY: Abkürzung nach Wide Angle Shower Apparatus.

Literaturverzeichnis

- [1] G. Burdman und I. Shipsey, „ D^0 - $\bar{D}^0$ mixing and rare charm decays”, *Annual Review of Nuclear Science* **53** (2003) 431–499. 1, 2, 14, 16
- [2] S. L. Glashow, J. Iliopoulos, und L. Maiani, „Weak Interactions with Lepton-Hadron Symmetry”, *Phys. Rev. D* **2** (1970) 1285–1292. 1
- [3] M. Kobayashi und T. Maskawa, „ CP -violation in the renormalizable theory of weak interaction”, *Progress of Theoretical Physics* **49** (1973) 652–657. 2
- [4] **Particle Data Group** Collaboration, K. Olive *et al.*, „Review of Particle Physics”, *Chin. Phys. C* **38** (2014) 090001. 2, 6, 14, 17, 33, 43, 54, 57, 104, 106, 118, 119, 139, 142, 183, 185, 188
- [5] M. Leurer, Y. Nir, und N. Seiberg, „Mass matrix models: the sequel”, *Nucl. Phys. B* **420** (1994) 468–504. 2
- [6] **HFAG** Collaboration, Y. Amhis *et al.*, „Averages of b-hadron, c-hadron, and τ -lepton properties as of summer 2014”, [arXiv:1412.7515](https://arxiv.org/abs/1412.7515). 2, 8, 78, 82, 83, 85, 212
- [7] D. Griffiths, *Introduction to Elementary Particles*. Wiley-VCH, Weinheim, 2. Aufl., 2009. 3, 4
- [8] K. Peters, „A Primer on partial wave analysis”, *International Journal of Modern Physics A* **21** (2006) 5618–5624. 3, 30, 31, 41
- [9] B. Martin und G. Shaw, *Particle Physics*. Manchester Physics Series. Wiley, West Sussex, 3. Aufl., 2009. 3
- [10] T. D. Lee und C. N. Yang, „Question of parity conservation in weak interactions”, *Phys. Rev.* **104** (1956) 254–258. 4
- [11] C. S. Wu, E. Ambler, R. W. Hayward, D. D. Hoppes, und R. P. Hudson, „Experimental test of parity conservation in beta decay”, *Phys. Rev.* **105** (1957) 1413–1415. 4
- [12] A. D. Martin und T. D. Spearman, *Elementary Particle Theory*. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1. Aufl., 1970. 5, 7
- [13] C. Baltay *et al.*, „Test of charge-conjugation invariance in $\bar{p}$ - p annihilations at rest”, *Phys. Rev. Lett.* **15** (1965) 591–593. 5

- [14] J. H. Christenson, J. W. Cronin, V. L. Fitch, und R. Turlay, „Evidence for the 2π decay of the K_2^0 meson”, *Phys. Rev. Lett.* **13** (1964) 138–140. 6
- [15] S. Bennett, D. Nygren, H. Saal, J. Steinberger, und J. Sunderland, „Measurement of the Charge Asymmetry in the Decay $K_L^0 \rightarrow \pi^\pm + e^\mp + \nu$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 993–997. 6
- [16] E. Wigner, „Über die Operation der Zeitumkehr in der Quantenmechanik”, *Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse* (1932) 546–559. 6
- [17] H. Frauenfelder und E. Henley, *Teilchen und Kerne*. R. Oldenbourg Verlag, München, 4. Aufl., 1999. 7
- [18] T. D. Lee, R. Oehme, und C. N. Yang, „Remarks on possible noninvariance under time reversal and charge conjugation”, *Phys. Rev.* **106** (1957) 340–345. 8
- [19] Y. Nir, „ CP violation in and beyond the standard model”, [arXiv:hep-ph/9911321](https://arxiv.org/abs/hep-ph/9911321). Lectures given in the XXVII SLAC Summer Institute on Particle Physics 1999. 8, 10
- [20] T. D. Lee und C. S. Wu, „Weak Interactions (Second section) Chapter 9: Decays of Neutral K Mesons”, *Annual Review of Nuclear Science* **16** (1966) 511–590. 8
- [21] K. Gottfried und V. F. Weisskopf, *Concepts of particle physics: Vol. 1*. Oxford University Press, 1. Aufl., 1984. 9
- [22] Y. Nir, „ CP violation”, 1992.
<http://www.slac.stanford.edu/cgi-wrap/getdoc/slac-pub-5874.pdf>. SLAC-PUB-5874. 9, 11
- [23] Y. Nir, „ CP violation in meson decays”, [arXiv:hep-ph/0510413](https://arxiv.org/abs/hep-ph/0510413). Lectures given at the Third CERN-CLAF School of High Energy Physics. 11, 15, 16
- [24] C. A. Chavez, R. F. Cowan, und W. S. Lockman, „Charm Meson Mixing: An experimental Review”, *International Journal of Modern Physics A* **27** (2012) 1230019. 14
- [25] G. Blaylock, A. Seiden, und Y. Nir, „The role of CP violation in D^0 – $\bar{D}^0$ mixing”, *Phys. Lett. B* **355** (1995) 555–560. 14, 20
- [26] **BABAR** Collaboration, B. Aubert and others, „Evidence for D^0 – $\bar{D}^0$ Mixing”, *Phys. Rev. Lett.* **98** (2007) 211802. 14
- [27] **Belle** Collaboration, L. M. Zhang, Z. P. Zhang, J. Li and others, „Improved Constraints on D^0 – $\bar{D}^0$ Mixing in $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ Decays from the Belle Detector”, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 151801. 14

- [28] **CDF** Collaboration, T. Aaltonen *et al.*, „Evidence for D^0 - $\bar{D}^0$ mixing using the CDF II Detector”, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 121802. 14
- [29] **LHCb** Collaboration, R. Aaij *et al.*, „Observation of D^0 - $\bar{D}^0$ Oscillations”, *Phys. Rev. Lett.* **110** (2013) 101802. 14
- [30] S. Bergmann, Y. Grossman, Z. Ligeti, Y. Nir, und A. Petrov, „Lessons from CLEO and FOCUS measurements of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing parameters”, *Phys. Lett. B* **486** (2000) 418–425. 15
- [31] **LHCb** Collaboration, R. Aaij *et al.*, „Evidence for CP -violation in time-integrated $D^0 \rightarrow h^- h^+$ decay rates”, *Phys. Rev. Lett.* **108** (2012) 111602. 15, 16
- [32] **BABAR** Collaboration, B. Aubert *et al.*, „Search for CP -violation in the decays $D^0 \rightarrow K^- K^+$ and $D^0 \rightarrow \pi^- \pi^+$ ”, *Phys. Rev. Lett.* **100** (2008) 061803. 16
- [33] **Belle** Collaboration, M. Staric *et al.*, „Measurement of CP asymmetry in Cabibbo suppressed D^0 decays”, *Phys. Lett. B* **670** (2008) 190–195. 16
- [34] **CDF** Collaboration, T. Aaltonen *et al.*, „Measurement of CP -violating asymmetries in $D^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ and $D^0 \rightarrow K^+ K^-$ decays at CDF”, *Phys. Rev. Lett. D* **85** (2012) 012009. 16, 155
- [35] **CDF** Collaboration, T. Aaltonen *et al.*, „Measurement of the Difference in CP -Violating Asymmetries in $D^0 \rightarrow K^+ K^-$ and $D^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ Decays at CDF”, *Phys. Rev. Lett.* **109** (2012) 111801. 16
- [36] **CDF** Collaboration, T. Aaltonen *et al.*, „Measurement of indirect CP -violating asymmetries in $D^0 \rightarrow K^+ K^-$ and $D^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ decays at CDF”, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 111103. 16
- [37] **CLEO** Collaboration, S. Csorna *et al.*, „Lifetime differences, direct CP -violation and partial widths in D^0 meson decays to $K^+ K^-$ and $\pi^+ \pi^-$ ”, *Phys. Rev. D* **65** (2002) 092001. 16
- [38] **LHCb** Collaboration, R. Aaij *et al.*, „Search for direct CP violation in $D^0 \rightarrow h^- h^+$ modes using semileptonic B decays”, *Phys. Lett. B* **723** (2013) 33–43. 16
- [39] **BABAR** Collaboration, B. Aubert *et al.*, „Search for D^0 - $\bar{D}^0$ mixing using doubly flavor tagged semileptonic decay modes”, *Phys. Rev. D* **76** (2007) 014018. 17
- [40] **Fermilab E791** Collaboration, E. M. Aitala *et al.*, „Search for D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing in Semileptonic Decay Modes”, *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 2384–2387. 17

- [41] **Belle** Collaboration, U. Bitenc *et al.*, „Improved search for D^0 - $\bar{D}^0$ mixing using semileptonic decays at Belle”, *Phys. Rev. D* **77** (2008) 112003. 17
- [42] **CLEO** Collaboration, C. Cawlfeld *et al.*, „Limits on neutral D mixing in semileptonic decays”, *Phys. Rev. D* **71** (2005) 077101. 17
- [43] I. Bigi und A. Sanda, „On D^0 - $\bar{D}^0$ mixing and CP violation”, *Phys. Lett. B* **171** (1986) 320–324. 17
- [44] M. Goldhaber und J. L. Rosner, „Mixing of neutral charmed mesons and tests for CP violation in their decays”, *Phys. Rev. D* **15** (1977) 1254–1259. 18
- [45] C.-h. Cheng, „Quantum Correlated D Decays at SuperB”, [arXiv:1209.3035](#). 18
- [46] **CLEO** Collaboration, D. M. Asner *et al.*, „Updated measurement of the strong phase in $D^0 \rightarrow K^+\pi^-$ decay using quantum correlations in $e^+e^- \rightarrow D^0\bar{D}^0$ at CLEO”, *Phys. Rev. D* **86** (2012) 112001. 19
- [47] D. M. Asner und W. M. Sun, „Time-independent measurements of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing and relative strong phases using quantum correlations”, *Phys. Rev. D* **73** (2006) 034024. 19
- [48] J. Charles, S. Descotes-Genon, X.-W. Kang, H.-B. Li, und G.-R. Lu, „Extracting CP violation and strong phase in D decays by using quantum correlations in $\psi(3770) \rightarrow D^0\bar{D}^0 \rightarrow (V_1V_2)(V_3V_4)$ and $\psi(3770) \rightarrow D^0\bar{D}^0 \rightarrow (V_1V_2)(K\pi)$ ”, *Phys. Rev. D* **81** (2010) 054032. 19
- [49] **CLEO** Collaboration, D. Asner *et al.*, „Search for D^0 - $\bar{D}^0$ mixing in the Dalitz plot analysis of $D^0 \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ ”, *Phys. Rev. D* **72** (2005) 012001. 20, 22, 211, 212
- [50] **Belle** Collaboration, L. M. Zhang *et al.*, „Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ Mixing Parameters in $D^0 \rightarrow K_S\pi^+\pi^-$ Decays”, *Phys. Rev. Lett.* **99** (2007) 131803. 21, 22, 56, 229
- [51] **BABAR** Collaboration, P. del Amo Sanchez *et al.*, „Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing parameters using $D^0 \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ and $D^0 \rightarrow K_S^0K^+K^-$ decays”, *Phys. Rev. Lett.* **105** (2010) 081803. 22, 44, 161, 228, 230
- [52] **Belle** Collaboration, T. Peng, Z. P. Zhang, *et al.*, „Measurement of D^0 - $\bar{D}^0$ mixing and search for indirect CP violation using $D^0 \rightarrow K_S^0\pi^+\pi^-$ decays”, *Phys. Rev. D* **89** (2014) 091103. 22, 51, 52, 70, 133, 188, 190, 228, 231
- [53] E. Byckling und K. Kajantie, *Particle Kinematics*. Research Report No. 2, Jyväskylä, 1. Aufl., 1971. 23, 24, 25, 27, 65

- [54] H. Pilkuhn, *The Interactions of Hadrons*. North-Holland Pub. Co., Amsterdam, 1. Aufl., 1967. 24, 213
- [55] B. Lindquist, „Dalitz plots”, 2010.
<https://www.slac.stanford.edu/slac/sass/talks/BrianL.pdf>. SASS Vortrag. 26
- [56] B. Pick *et al.*, *PWA++ a program for parallel partial wave analysis of multiple 3-body final states*. HISKP, Universität Bonn, 1999. Version 1.10. 27, 29, 65
- [57] M. Abdel-Bary *et al.*, „Production of Λ and Σ^0 hyperons in proton-proton collisions”, *Eur. Phys. Jour. A* **46** (2010) 27–44. 29
- [58] S. Barshay, „Isobar model for meson production in proton-proton collisions”, *Phys. Rev.* **106** (1957) 572–585. 30
- [59] V. Alles-Borelli, S. Bergia, E. Perez Ferreira, und P. Waloschek, „Experimental results on pion production compared with predictions of the isobar model”, *Il Nuovo Cimento* (1959) 211–224. 30
- [60] J. R. Taylor, *Scattering theory: the quantum theory on nonrelativistic collisions*. Dover Publications, New York, 2. Aufl., 2006. 32, 33
- [61] S. U. Chung, J. Brose, R. Hackmann, E. Klempt, S. Spanier, und C. Strassburger, „Partial wave analysis in K -matrix formalism”, *Annalen der Physik* **507** (1995) 404–430. 35, 46
- [62] J. Jackson, „Remarks on the phenomenological analysis of resonances”, *Il Nuovo Cimento Series 10* **34** (1964) 1644–1666. 36
- [63] J. M. Blatt und V. F. Weisskopf, *Theoretical Nuclear Physics*. John Wiley & Sons, New York, 8. Aufl., 1952. 36
- [64] F. von Hippel und C. Quigg, „Centrifugal-barrier effects in resonance partial decay widths, shapes, and production amplitudes”, *Phys. Rev. D* **5** (1972) 624–638. 36
- [65] **CLEO** Collaboration, S. Kopp *et al.*, „Dalitz analysis of the decay $D^0 \rightarrow K^- \pi^+ \pi^0$ ”, *Phys. Rev. D* **63** (2001) 092001. 37, 38, 40, 214
- [66] D. Asner, „Charm Dalitz plot analysis formalism and results: Expanded RPP-2004 version”, [arXiv:hep-ex/0410014](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0410014). 37, 38
- [67] V. Filippini, A. Fontana, und A. Rotondi, „Covariant spin tensors in meson spectroscopy”, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 2247–2261. 37, 40

- [68] G. J. Gounaris und J. J. Sakurai, „Finite-Width Corrections to the Vector-Meson-Dominance Prediction for $\rho \rightarrow e^+e^-$ “, *Phys. Rev. Lett.* **21** (1968) 244–247. 41
- [69] F. Iddir, A. L. Yaouanc, L. Oliver, O. Pène, und J. C. Raynal, „ W^+W^- production in e^+e^- colliders: Test of a strongly interacting Higgs sector“, *Phys. Rev. D* **41** (1990) 22–32. 41
- [70] G. F. Chew und S. Mandelstam, „Theory of the low-energy pion-pion interaction“, *Phys. Rev.* **119** (1960) 467–477. 42
- [71] P. Estabrooks, „Where and what are the scalar mesons?“, *Phys. Rev. D* **19** (1979) 2678–2685. 43, 44
- [72] P. Estabrooks, R. Carnegie, A. Martin, W. Dunwoodie, T. Lasinski, und D. Leith, „Study of $K\pi$ scattering using the reactions $K^\pm p \rightarrow K^\pm \pi^+ n$ and $K^\pm p \rightarrow K^\pm \pi^- \Delta^{++}$ at 13 GeV“, *Nucl. Phys. B* **133** (1978) 490–524. 44
- [73] D. Aston *et al.*, „A study of $K^-\pi^+$ scattering in the reaction $K^-p \rightarrow K^-\pi^+n$ at 11 GeV/c“, *Nucl. Phys. B* **296** (1988) 493–526. 46
- [74] **BABAR** Collaboration, B. Aubert *et al.*, „Improved measurement of the CKM angle γ in $B^\mp \rightarrow D^{(*)}K^{(\mp)}$ decays with a Dalitz plot analysis of D decays to $K_S^0\pi^+\pi^-$ and $K_S^0K^+K^-$ “, *Phys. Rev. D* **78** (2008) 034023. 46, 50, 51, 156
- [75] **FOCUS** Collaboration, J. M. Link *et al.*, „Dalitz plot analysis of the $D^+ \rightarrow K^-\pi^+\pi^+$ decay in the FOCUS experiment“, *Phys. Lett. B* **653** (2007) 1–11. 46
- [76] V. Anisovich und A. Sarantsev, „ K -matrix analysis of the $(IJ^{PC} = 00^{++})$ -wave in the mass region below 1900 MeV“, *Eur. Phys. Jour. A* **16** (2003) 229–258. 46, 49, 50, 51, 52
- [77] I. Aitchison, „The K -matrix formalism for overlapping resonances“, *Nucl. Phys. A* **189** (1972) 417–423. 48, 49
- [78] S. L. Adler, „Consistency conditions on the strong interactions implied by a partially conserved axial-vector current“, *Phys. Rev.* **137** (1965) B1022–B1033. 50
- [79] S. Brandt, *Datenanalyse*. Bibliographisches Institut, Mannheim, 2. Aufl., 1981. 54, 55, 57, 62, 72
- [80] O. Behnke, K. Kroninger, G. Schott, und T. Schorner-Sadenius, *Data Analysis in High Energy Physics*. Wiley-VCH, Weinheim, 1. Aufl., 2013. 54, 72

- [81] L. Lyons und D. H. Saxon, „Measurement of short-lived particles in high-energy physics”, *Reports on Progress in Physics* **52** (1989) 1015. 57
- [82] H. Kolanoski, „Statistische Methoden der Datenanalyse”, 2008. http://www-zeuthen.desy.de/~kolanosk/smd_ss08/skripte/skript.pdf. Vorlesung Sommersemester 2008, Humboldt Universität zu Berlin. 60
- [83] M. Abramowitz und I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. U.S. Department of Commerce, National Institute of Standards and Technology, Washington, D.C., 10. Aufl., 1972. 62, 221
- [84] G. Yost, „Maximum likelihood approach to lifetime estimation in the presence of large experimental errors”, *Nucl. Inst. Meth.* **224** (1984) 489–507. 62
- [85] I. N. Bronstein und K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*. B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart, 25. Aufl., 1991. 70
- [86] K. Pearson, „On the criterion that a given system of deviations from the probable in the case of a correlated system of variables is such that it can be reasonably supposed to have arisen from random sampling”, *Philosophical Magazine Series 5* **50** (1900) 157–175. 73
- [87] R. J. Barlow, *Statistics: A Guide to the Use of Statistical Methods in the Physical Sciences*. Wiley, West Sussex, 1. Aufl., 1989. 73
- [88] G. Bohm und G. Zech, *Introduction to statistics and data analysis for physicists*. Verlag Deutsches Elektronen-Synchrotron, Hamburg, 1. Aufl., 2010. 73
- [89] F. James, *Statistical Methods in Experimental Physics*. World Scientific, Singapur, 2. Aufl., 2006. 73, 75, 79
- [90] H. Chernoff und E. L. Lehmann, „The Use of Maximum Likelihood Estimates in χ^2 Tests for Goodness of Fit”, *The Annals of Mathematical Statistics* **25** (1954) 579–586. 75
- [91] M. Williams, „How good are your fits? Unbinned multivariate goodness-of-fit tests in high energy physics”, *Journal of Instrumentation* **5** (2010) P09004. 75
- [92] S. S. Wilks, „The Large-Sample Distribution of the Likelihood Ratio for Testing Composite Hypotheses”, *The Annals of Mathematical Statistics* **9** (1938) 60–62. 76
- [93] “EvtGen (Version 1.3.0) Internetseite”. <http://evtgen.warwick.ac.uk/>. (abgerufen am 9.06.2015). 78, 237
- [94] “Minuit2 (Version 5.34.14) Internetseite”. <http://seal.web.cern.ch/seal/snapshot/work-packages/mathlibs/minuit/>. (abgerufen am 9.06.2015). 79

- [95] F. James, „Interpretation of the shape of the likelihood function around its minimum”, *Computer Physics Communications* **20** (1980) 29–35. 79
- [96] **PANDA** Collaboration, W. Erni *et al.*, „Technical Design Report for PANDA Electromagnetic Calorimeter (EMC)”, [arXiv:0810.1216](#).
<http://www-panda.gsi.de/>. 91, 104, 105, 107
- [97] **PANDA** Collaboration, W. Erni *et al.*, „Technical Design Report for PANDA Forward Spectrometer Calorimeter (FSC)”, [arXiv:0810.1216](#).
<http://www-panda.gsi.de/>. 91, 105, 106
- [98] **PANDA** Collaboration, W. Erni *et al.*, „Technical Design Report for the PANDA Solenoid and Dipole Spectrometer Magnets”, [arXiv:0907.0169](#).
<http://www-panda.gsi.de/>. 91, 106
- [99] **PANDA** Collaboration, W. Erni *et al.*, „Technical Design Report for the: PANDA Micro Vertex Detector”, [arXiv:1207.6581](#).
<http://www-panda.gsi.de/>. 91, 93, 94, 95, 97, 107, 111, 134
- [100] **PANDA** Collaboration, W. Erni *et al.*, „Technical Design Report for the: PANDA Straw Tube Tracker”, [arXiv:1205.5441](#). <http://www-panda.gsi.de/>. 91, 98, 99, 100, 107, 111
- [101] **PANDA** Collaboration, W. Erni *et al.*, „Technical Design Report for the: PANDA Internal Targets: The Cluster-Jet Target and Developments for the Pellet Target ”, [arXiv:1404.5988](#). <http://www-panda.gsi.de/>. 91, 93, 94, 95
- [102] Quagli, Tommaso. Private Kommunikation, 2014. 92, 98, 103
- [103] K. Knie *et al.*, „Concept for the Antiproton Production Target at FAIR”, WEPPD030. New Orleans. Proceedings of IPAC 2012. 91
- [104] F. Nolden *et al.*, „The Collector Ring CR of the FAIR Project”, MOPCH077. Edinburgh. Proceedings of EPAC 2006. 92
- [105] R. Toelle *et al.*, „HESR at FAIR: Status of Technical Planning”, TUPAN024. Albuquerque. Proceedings of PAC 2007. 92
- [106] B. Galnander *et al.*, „Status of Electron Cooler Design for HESR”, THPP049. Genoa. Proceedings of EPAC 2008. 92
- [107] H. Stockhorst and others, „Stochastic Cooling for the HESR at the GSI-FAIR Complex”, MOPCH086. Edinburgh. Proceedings of EPAC 2006. 92
- [108] **PANDA** Collaboration, M. Lutz *et al.*, „Physics Performance Report for PANDA: Strong Interaction Studies with Antiprotons”, [arXiv:0903.3905](#).
<http://www-panda.gsi.de/>. 92, 108, 109, 110, 122

- [109] W. F. Henning, „FAIR-recent developments and status”, *Nucl. Phys. A* **805** (2008) . 93
- [110] B. Povh, K. Rith, C. Scholz, F. Z. Werner, und W. Rodejohann, *Teilchen und Kerne: Eine Einführung in die physikalischen Konzepte*. Springer Spektrum, Berlin, 9. Aufl., 2014. 93
- [111] A. Täschner, S. General, J. Otte, T. Rausmann, und A. Khoukaz, „Development of cluster-jet targets: From COSY-11 to FAIR”, *AIP Conf. Proc.* **950** (2007) 85–88. <http://arxiv.org/abs/1404.5988v1>. 94
- [112] T. Würschig, *Design optimization of the $\bar{\text{P}}\text{ANDA}$ Micro-Vertex-Detector for high performance spectroscopy in the charm quark sector*. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2011. 97, 98, 101
- [113] B. Ketzer, „Micropattern gaseous detectors in the compass tracker”, *Nucl. Inst. Meth. A* **494** (2002) 142–147. 100
- [114] P. Gianotti, V. Lucherini, E. Pace, G. Boca, S. Costanza, *et al.*, „The Straw Tube Trackers of the PANDA Experiment”, [arXiv:1307.4537](https://arxiv.org/abs/1307.4537). 100
- [115] L. Schmitt, „The $\bar{\text{P}}\text{ANDA}$ Detector at FAIR”, *Nucl. Inst. Meth. A* **581** (2007) 542–544. 102
- [116] J. Schwiening, „The barrel DIRC detector for the $\bar{\text{P}}\text{ANDA}$ experiment at FAIR”, *Nucl. Inst. Meth. A* **639** (2011) 315–318. 102, 107
- [117] C. Schwarz *et al.*, „The barrel DIRC of the $\bar{\text{P}}\text{ANDA}$ experiment”, *Nucl. Inst. Meth. A* **595** (2008) 112–115. 102, 107
- [118] M. Düren and others, „The PANDA 3D Disc DIRC”, *Journal of Instrumentation* **7** (2012) C01059. 103, 107
- [119] P. Schönmeier *et al.*, „Disc DIRC endcap detector for PANDA@FAIR”, *Nucl. Inst. Meth. A* **595** (2008) 108–111. 103
- [120] N. Akopov *et al.*, „The HERMES dual-radiator ring imaging Cherenkov detector”, *Nucl. Inst. Meth. A* **479** (2002) 511–530. 103
- [121] **PANDA** Collaboration, W. Erni *et al.*, „ Technical Progress Report for: PANDA Strong Interaction Studies with Antiprotons”, <http://www-panda.gsi.de/>. 107
- [122] G. Schepers *et al.*, „RICH for $\bar{\text{P}}\text{ANDA}$ ”, *Nucl. Inst. Meth. A* **598** (2009) 143–146. 107

- [123] K. Korcyl, I. Konorov, W. Kühn, und L. Schmitt, „Modeling event building architecture for the triggerless data acquisition system for PANDA experiment at the HESR facility at FAIR/GSI”, *Journal of Physics: Conference Series* **396** (2012) 012027. 108
- [124] S. Spataro, „Event reconstruction in the pandaroot framework”, *Journal of Physics: Conference Series* **396** (2012) 022048. 108
- [125] R. Brun und F. Rademakers, „ROOT — An object oriented data analysis framework”, *Nucl. Inst. Meth. A* **389** (1997) 81–86. 108
- [126] T. Stockmanns, „STEP-to-ROOT – from CAD to Monte Carlo Simulation”, *Journal of Physics: Conference Series* **396** (2012) 022050. 108
- [127] D. J. Lange, „The EvtGen particle decay simulation package”, *Nucl. Inst. Meth. A* **462** (2001) 152–155. 108
- [128] A. Capella, U. Sukhatme, C.-I. Tan, und J. T. T. Van, „Dual parton model”, *Physics Reports* **236** (1994) 225–329. 109
- [129] V. V. Uzhinsky und A. S. Galoyan, „Cross-sections of various processes in Pbar P Interactions”, *arXiv:hep-ph/0212369*. 109
- [130] B. Andersson, G. Gustafson, und T. Sjöstrand, „A three-dimensional model for quark and gluon jets”, *Zeitschrift für Physik C* **6** (1980) 235–240. 110
- [131] S. Ritter, „Monte Carlo code BAMJET to simulate the fragmentation of quark and diquark jets”, *Computer Physics Communications* **31** (1984) 393–400. 110
- [132] R. Brun, F. Bruyant, M. Maire, A. C. McPherson, und P. Zancarini, *GEANT 3*. Geneva, 1987. <https://cds.cern.ch/record/1119728>. 110
- [133] S. Agostinelli *et al.*, „GEANT4—a simulation toolkit”, *Nucl. Inst. Meth. A* **506** (2003) 250–303. 110
- [134] A. Kiryunin, H. Oberlack, D. Salihagić, P. Schacht, und P. Strizenec, „GEANT4 physics evaluation with testbeam data of the ATLAS hadronic end-cap calorimeter”, *Nucl. Inst. Meth. A* **560** (2006) 278–290. 111
- [135] CMS Collaboration, S. Banerjee, „Validation of Geant4 Physics Models with LHC Collision Data”, CMS CR-2011/038. Taipei. Proceedings of CHEP 2010. 111
- [136] R. Frühwirth, A. Strandlie, und W. Waltenberger, „Helix fitting by an extended Riemann fit”, *Nucl. Inst. Meth. A* **490** (2002) 366–378. 111
- [137] R. Frühwirth, „Application of Kalman filtering to track and vertex fitting”, *Nucl. Inst. Meth. A* **262** (1987) 444–450. 111

-
- [138] C. Höppner, S. Neubert, B. Ketzer, und S. Paul, „A novel generic framework for track fitting in complex detector systems”, *Nucl. Inst. Meth. A* **620** (2010) 518–525. 111
 - [139] V. Innocente, M. Maire, und E. Nagy, „GEANE: average tracking and error propagation package”, Amsterdam. Proceedings of Monte Carlo 1991. 111
 - [140] B. Kerbikov und D. Kharzeev, „ $N\bar{N}$ annihilation at the open charm threshold”, *Phys. Rev. D* **51** (1995) 6103–6106. 116
 - [141] A. T. Goritschnig, B. Pire, und W. Schweiger, „Double handbag description of proton-antiproton annihilation into a heavy meson pair”, *Phys. Rev. D* **87** (2013) 014017. 116
 - [142] P. Kroll, B. Quadder, und W. Schweiger, „Exclusive production of heavy flavours in proton-antiproton annihilation”, *Nucl. Phys. B* **316** (1989) 373–390. 116
 - [143] A. Khodjamirian, C. Klein, T. Mannel, und Y.-M. Wang, „How much charm can $\bar{\text{PANDA}}$ produce?”, *Eur. Phys. Jour. A* **48** (2012) . 116
 - [144] A. Kaidalov und P. Volkovitsky, „Binary reactions in $\bar{p}p$ collisions at intermediate energies”, *Zeitschrift für Physik C* **63** (1994) 517–524. 116
 - [145] P. Artoisenet und E. Braaten, „Parton model calculation of inclusive charm production by a low-energy antiproton beam”, *Phys. Rev. D* **79** (2009) 114005. 116
 - [146] J. Haidenbauer und G. Krein, „Charm Production in Antiproton-Proton Annihilation”, *Few-Body Systems* **50** (2011) 183–186. 116
 - [147] J. Haidenbauer und G. Krein, „The $\psi(3770)$ resonance and its production in $\bar{p}p \rightarrow D\bar{D}$ ”, [arXiv:1504.07909](#). 116
 - [148] **BESIII** Collaboration, M. Ablikim *et al.*, „Study of $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$ in the vicinity of $\psi(3770)$ ”, *Phys. Rev. Lett. B* **735** (2014) 101. 116, 117
 - [149] G. D. Patel *et al.*, „General features of $\bar{p}p$ interactions at 7.3 GeV/c”, *Zeitschrift für Physik C* **12** (1982) 189–202. 118, 119
 - [150] G. Alexander, I. Bar-Nir, S. Dagan, A. Fridman, G. Gidal, J. Grunhaus, A. Levy, und Y. Oren, „General features of $\bar{p}p$ annihilation into six charged pions at 6.94 GeV/c incident momentum”, *Nucl. Phys. B* **23** (1970) 557–573. 119
 - [151] M. Aguilar-Benitez *et al.*, „Study of a $K_S^0 K_S^0$ threshold enhancement observed in the final states $\bar{p}p \rightarrow K_S^0 K_S^0 + \text{pions}$ at 700–760 MeV/c”, *Nucl. Phys. B* **140** (1978) 73–108. 119

- [152] C. Angelini, L. Bertanza, A. Bigi, R. Casali, V. Flaminio, R. Pazzi, und C. Petri, „Experimental study of 6-prong events in $\bar{p}p$ annihilation around 1 GeV/c”, *Il Nuovo Cimento A Series 11* **32** (1976) 243–256. 119
- [153] H. W. Atherton *et al.*, „Antiproton-proton annihilations into π^- and K-mesons at 5.7 GeV/c”, *Nucl. Phys. B* **16** (1970) 416–430. 119, 177
- [154] H. W. Atherton, W. M. R. Blair, L. M. Celnikier, V. Domingo, B. French, *et al.*, „General characteristics of the annihilation reaction $\bar{p}p \rightarrow 3\pi^+3\pi^-(\pi^0)$ at 3.6 GeV/c”, *Nucl. Phys. B* **18** (1970) 221–245. 119, 177
- [155] C. Baltay, J. Lach, J. Sandweiss, H. D. Taft, N. Yeh, D. L. Stonehill, und R. Stump, „Study of $\bar{p}$ -p Annihilations into K and π Mesons at 3.7 BeV/c”, *Phys. Rev.* **142** (1966) 932–943. 119
- [156] K. Böckmann *et al.*, „Elastic scattering, pion production, and annihilation into pions in antiproton-proton interactions at 5.7 GeV/c”, *Il Nuovo Cimento A Series 10* **42** (1966) 954–996. 119
- [157] J. W. Chapman, R. Green, J. Lys, C. T. Murphy, H. M. Ring, und J. C. Vander Velde, „Reaction $\bar{p}p \rightarrow \bar{K}K\pi\pi\pi$ at 1.6–2.2 GeV/c”, *Phys. Rev. D* **4** (1971) 1275–1284. 119
- [158] C. K. Chen, T. Fields, D. S. Rhines, und J. Whitmore, „ $\bar{p}p$ Interactions at 2.32 GeV/c”, *Phys. Rev. D* **17** (1978) 42. 119
- [159] J. Clayton, P. Mason, H. Muirhead, P. Renton, und R. Rigopoulos, „Resonance production in six prong $p\bar{p}$ annihilations at 2.5 GeV/c”, *Nucl. Phys. B* **47** (1972) 81–93. 119
- [160] A. M. Cooper *et al.*, „A study of $K\bar{K}$ correlations in $\bar{p}p$ annihilations at 0.76 GeV/c”, *Nucl. Phys. B* **139** (1978) 45–60. 119
- [161] J. A. Danysz, B. R. French, und V. Simak, „Annihilations of 3.0 and 3.6 GeV/c antiprotons into six or more pions”, *Il Nuovo Cimento A Series 10* **51** (1967) 801–819. 119
- [162] J. Duboc, M. Goldberg, B. Makowski, A. M. Touchard, R. A. Donald, D. N. Edwards, J. Galletly, und N. West, „Analysis of $K\bar{K}$ and $K\bar{K}\pi$ resonances produced in $\bar{p}p$ annihilations at 1.2 GeV/c”, *Nucl. Phys. B* **46** (1972) 429–448. 119
- [163] P. Eastman, Z. M. Ma, B. Oh, D. Parker, G. Smith, und R. Sprafka, „A formation study of NN interactions between 1.51 and 2.90 GeV/c (I). Topological and reaction cross sections”, *Nucl. Phys. B* **51** (1973) 29–56. 119

- [164] T. Ferbel, A. Firestone, J. Sandweiss, H. D. Taft, M. Gaillard, T. W. Morris, W. J. Willis, A. H. Bachman, P. Baumel, und R. M. Lea, „Pion production in antiproton-proton annihilations at 3.3 and 3.7 GeV/c”, *Phys. Rev.* **143** (1966) 1096–1104. 119
- [165] B. R. French, J. B. Kinson, R. Rigopoulos, V. Simak, F. McDonald, G. Petmezas, und L. Riddiford, „Antiproton-proton annihilation into kaons and pions in the momentum region 3 to 4 GeV/c”, *Il Nuovo Cimento A* **52** (1967) 438–457. 119
- [166] A. Fridman, G. Maurer, A. Michalon, J. Oudet, B. Schiby, R. Strub, C. Voltolini, und P. Cürer, „Antiproton-proton annihilation into six charged pions and resonance production in the $\bar{p}p \rightarrow 3\pi^+3\pi^-\pi^0$ channel at 5.7 GeV/c”, *Phys. Rev.* **167** (1968) 1268–1275. 119
- [167] J. B. Gay, J. B. Jeanneret, M. Bogdanski, E. Jeannet, M. Gaillard, *et al.*, „The Reaction $\bar{p}p \rightarrow 3\pi^-3\pi^+$ between 1.09 GeV/c and 1.44 GeV/c and the Effect of $\pi\pi$ Phase Shifts”, *Il Nuovo Cimento A* **31** (1976) 593. 119
- [168] P. Gregory, P. Johnson, P. Mason, H. Muirhead, G. Warren, G. Ekspong, S. Holmgren, S. Nilsson, R. Stenbacka, und C. Walck, „Cross sections of annihilation and inelastic final states for $\bar{p}p$ interactions at 9.1 GeV/c”, *Nucl. Phys. B* **119** (1977) 60–76. 119
- [169] R. Hamatsu *et al.*, „Inclusive production of non-strange mesons in $\bar{p}p$ annihilations”, *Nucl. Phys. B* **123** (1977) 189–202. 119
- [170] T. Handler, R. Plano, E. Brucker, E. Koller, S. Taylor, und P. Stamer, „Strange particle production in $\bar{p}p$ annihilation from 1.22 to 1.35 GeV/c”, *Nucl. Phys. B* **110** (1976) 173–188. 119
- [171] J. C. Hill *et al.*, „Strange particle production in $\bar{p}p$ annihilations at 8.8 GeV/c”, *Nucl. Phys. B* **227** (1983) 387–412. 119
- [172] B. Oh, P. Eastman, Z. M. Ma, D. Parker, G. Smith, und R. Sprafka, „A formation study of NN interactions between 1.09 and 3.45 GeV/c (II). Strange particles”, *Nucl. Phys. B* **51** (1973) 57–76. 119
- [173] F. Sai, S. Sakamoto, und S. Yamamoto, „Measurement of $\bar{p}p$ annihilation cross sections into charged particles in the momentum range 374–680 MeV/c”, *Nucl. Phys. B* **213** (1983) 371–389. 119
- [174] L. S. Schroeder, W. J. Kernan, G. P. Fisher, A. J. Eide, J. von Krogh, L. M. Libby, und R. Sears, „ $\bar{p}$ -p Annihilations to K and π Mesons at 2.7 GeV/c”, *Phys. Rev.* **188** (1969) 2081–2088. 119

- [175] D. R. Ward *et al.*, „Exclusive annihilation processes in 8.8 GeV $\bar{p}p$ interactions and comparisons between $\bar{p}p$ non-annihilations and pp interactions”, *Nucl. Phys. B* **172** (1980) 302–326. 119
- [176] P. Avery, „Fitting Theory I: General Least Squares Fitting Theory”, 1991. <http://www.phys.ufl.edu/~avery/fitting/fitting1.pdf>. CLEO Note CBX 91-72. 132, 158
- [177] H. Tajima *et al.*, „Proper-time resolution function for measurement of time evolution of B mesons at the KEK B-Factory”, *Nucl. Inst. Meth. A* **533** (2004) 370–386. 133
- [178] “Gnuplot (Version 5.0) Internetseite”. <http://www.gnuplot.info/>. (abgerufen am 15.06.2015). 133
- [179] S. Bianco, *Tracking and vertex reconstruction with the PANDA Micro-Vertex-Detector*. Dissertation, Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn, 2014. 134
- [180] **BABAR** Collaboration, B. Aubert *et al.*, „Study of time-dependent CP-violating asymmetries and flavor oscillations in neutral B decays at the $\Upsilon(4S)$ ”, *Phys. Rev. D* **66** (2002) 032003. 148
- [181] N. L. Johnson, „Systems of Frequency Curves Generated by Methods of Translation”, *Biometrika* **36** (1949) 149–176. 155
- [182] J. Olivero und R. Longbothum, „Empirical fits to the voigt line width: A brief review”, *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer* **17** (1977) 233–236. 195
- [183] **LHCb** Collaboration, R. Aaij, „Dalitz plot analysis of $B_s^0 \rightarrow \bar{D}^0 K^- \pi^+$ decays”, *Phys. Rev. D* **90** (2014) 072003. 197
- [184] I. Bigi und A. Paul, „On CP asymmetries in two-, three- and four-body D decays”, *Journal of High Energy Physics* **2012** (2012) 1–35. 212
- [185] **BABAR** Collaboration, B. Aubert *et al.*, „Constraints on r_B and γ in $B^\pm \rightarrow D^{(*)0} K^\pm$ decays by a Dalitz analysis of $D^0 \rightarrow K_S \pi^- \pi^+$ ”, [arXiv:hep-ex/0408088](https://arxiv.org/abs/hep-ex/0408088). 227, 228
- [186] **Particle Data Group** Collaboration, J. Beringer *et al.*, „Review of particle physics”, *Phys. Rev. D* (2012) 010001. 227, 228
- [187] “Open MPI (Version 1.6.5) Internetseite”. <http://www.open-mpi.org>. (abgerufen am 9.06.2015). 237

Abbildungsverzeichnis

1.1	Kurzreichweitige und langreichweitige Beiträge zur D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung im Standardmodell	1
1.2	Hypothetischer Beitrag zur D^0 - $\bar{D}^0$ -Mischung durch geladene Higgs-Teilchen	2
1.3	Paritätsverletzung im Cobalt-60 Zerfall	4
1.4	Feynmangraphen der Zerfälle $D^0 \rightarrow K^\mp \pi^\pm$	13
1.5	Übergangsamplitude des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$	21
1.6	Phasenraumabhängigkeit des Terms $\frac{q}{p} \bar{\mathcal{A}}_f \mathcal{A}_f^*$	22
2.1	Abhängigkeit des Phasenraumes von den Massen der Tochterteilchen und der Schwerpunktsenergie	25
2.2	Impulsanordnung am Minimum und Maximum der invarianten Masse m_{ij}^2	26
2.3	Veranschaulichung des Helizitätssystems	27
2.4	Randpunkte des Dreikörperphasenraumes	28
2.5	Verlauf der Helizitätswinkel im Dalitz-Diagramm	29
2.6	Isobarenmodell und Rückstreuung	30
2.7	Resonanz in der komplexen Energieebene	32
2.8	Partieller Wirkungsquerschnitt einer Resonanz bei konstanter Untergrundphase	33
2.9	Nichtrelativistische und relativistische Breit-Wigner-Amplitude . . .	34
2.10	Phasenraumfaktoren bei Zweikörperzerfällen	35
2.11	Blatt-Weisskopf-Faktoren	37
2.12	Darstellung des Matrixelementes des Zerfalls $D^0 \rightarrow abc$ mit intermediärer Resonanz	38
2.13	Winkelverteilung im Zemach-Formalismus	40
2.14	Winkelverteilung im Dalitz-Diagramm für Resonanzen mit $L = 0,1,2$	41
2.15	Gounaris-Sakurai-Amplitude	43
2.16	Kopplung des $K_0^*(1430)^\pm$ an die Kanäle $K\eta$ und $K\eta'$	44
2.17	LASS-Streuamplitude	45
2.18	LASS-Amplitude in Produktion	45
2.19	K -Matrix-Elemente als Propagator	48
2.20	Veranschaulichung des F -Vektors	49
2.21	$\pi\pi$ S-Welle im K -Matrix Formalismus	52

3.1	Monte-Carlo D^0 -Lebensdauerverteilung und die Likelihoodfunktion der Funktionsanpassung	58
3.2	Abhängigkeit der oberen und unteren Fehlergrenzen von der Ereignismenge für eine rein exponentielle Lebensdauerverteilung	59
3.3	Monte-Carlo D^0 -Lebensdauerverteilung mit gleichverteiltem Untergrund	61
3.4	Wahrscheinlichkeitsdichte der Faltung aus Exponential- und Normalverteilung für unterschiedliche σ_t	63
3.5	Likelihood-Anpassung für ein einfaches Dalitz-Spielzeugmodell . . .	67
3.6	Die gesamte Zerfallsamplitude für verschiedene Werte der Zeitauflösung und Mischungsparameter	71
3.7	Wahrscheinlichkeitsdichte und Verteilungsfunktion von χ^2	73
3.8	Fehler erster und zweiter Art	74
4.1	Test der x -Bestimmung im Belle-Modelle	79
4.2	Test der y -Bestimmung im Belle-Modelle	80
4.3	Wahrscheinlichkeit für Fehler zweiter Art bei Funktionsanpassung mit einem CP -erhaltenden Modell	82
4.4	Test der $ q/p $ -Bestimmung im Belle-Modelle	83
4.5	Test der ϕ -Bestimmung im Belle-Modelle	84
4.6	Test des Fits zur Bestimmung der Mischungsparameter in Abhängigkeit der Auflösung der Zerfallszeitdifferenz	87
4.7	Statistische Fehler der Mischungsparameter x und y in Abhängigkeit der Auflösung der Zerfallszeitdifferenz	88
5.1	Übersicht des gesamten $\overline{\text{PANDA}}$ -Detektors	92
5.2	FAIR-Komplex und schematische Strahlführung	93
5.3	Cluster-Jet- und Pellet-Target	95
5.4	Schema und Konstruktionsskizze des MVD	98
5.5	Vorderansicht STT, Schema der gedrehten Driftröhren und Trennleistung der PID	99
5.6	Anordnung der GEM-Detektoren	100
5.7	Aufbau des Vorwärtsspektrometers	101
5.8	Barrel- und Disc-DIRC	103
5.9	Barrel- und FEC-EMC	105
5.10	Schaschlik-Kalorimeter Frontansicht und Modulrückseite	106
5.11	Querschnitt einer Mini-Driftröhre	106
5.12	Im Untergrundgenerator von PandaRoot berücksichtigte Topologien von $\bar{p}p$ -Reaktionen nach dem DPM	109
5.13	Beispiel eines Ereignisses im PandaRoot-Framework	112
6.1	Wirkungsquerschnitte der wichtigsten Untergrundreaktionen in Abhängigkeit des Antiprotonenimpulses	119

7.1	Kombinierte Likelihoods der Teilchenidentifikation bei Verwendung aller Subdetektoren	123
7.2	Monte-Carlo-Impulsverteilung von $\pi^\pm$ und K^+ im Signalkanal . . .	124
7.3	Rekonstruierte Impulsverteilung und Reinheit von $\pi^\pm$ und K^+ für verschiedene PID-Likelihood-Schnitte	125
7.4	Kontamination der rekonstruierten $\pi^\pm$ mit $\pi^\mp$ für verschiedene PID-Likelihood-Schnitte	126
7.5	Abhängigkeit der K_S -Nachweiseffizienz vom K_S -Zerfallsort	128
7.6	Abhängigkeit der K_S -Nachweiseffizienz vom K_S -Impuls	129
7.7	Zweidimensionale Abhängigkeit der K_S -Nachweiseffizienz von den Impulsen und Polarwinkeln der Zerfallspionen	130
7.8	Mittlere Anzahl der MVD-, STT- und GEM-Spurpunkte von K_S -Zerfallspionen in Abhängigkeit von Impuls und Polarwinkel	131
7.9	χ^2 - und $\mathcal{P}$ -Wert-Verteilung der rekonstruierten K_S -Vertizes	132
7.10	Schema der Streuung an mehreren Detektorlagen	132
7.11	Residuenverteilungen der K_S -Zerfallsortkomponenten	133
7.12	Pull-Verteilungen des K_S -Vertex-Fits	135
7.13	Rekonstruierter Abstand zwischen K_S - und $\bar{D}^0$ -Zerfall	136
7.14	Verteilung der rekonstruierten K_S -Massen	138
7.15	Rekonstruierte Öffnungswinkel der D^0 -, $\bar{D}^0$ - und K_S -Tochtereilchen	140
7.16	Residuenverteilungen der $\bar{D}^0$ -Zerfallsortkomponenten	140
7.17	Nachweiseffizienz in Abhängigkeit der D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfallszeit . . .	142
7.18	Residuenverteilungen der D^0 - und $\bar{D}^0$ -Lebensdauern	143
7.19	Verteilung der rekonstruierten D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfallszeiten	145
7.20	Topologie des Signalkanals	147
7.21	Residuenverteilungen des primären $\bar{p}p$ -Interaktionspunktes	148
7.22	Residuenverteilungen der rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen . .	149
7.23	Korrelation der Residuen der Zerfallszeitdifferenz mit den geschätzten Fehlern	151
7.24	Auflösungsfunktion der Zerfallszeitdifferenz	153
7.25	Variation der Zerfallszeitauflösung im Dalitz-Diagramm des Zerfalls $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$	154
7.26	Rekonstruierte D^0 - und $\bar{D}^0$ -Massen	155
7.27	Variation der Auflösung von $m_\pm$ innerhalb des Dalitz-Diagramms ohne kinematischen Fit	157
7.28	Auflösung der Dalitz-Diagramm-Variablen $m_\pm$	158
7.29	χ^2 - und $\mathcal{P}$ -Wert-Verteilung des kinematischen Fits mit m_D als Zwangsbedingung	159
7.30	Residuenverteilung von m_+ und m_-	160
7.31	Topologie der Untergrundreaktion $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2 \pi^- K^+ K_S$	162
7.32	Hyperbel der möglichen D^0 - und $\bar{D}^0$ -Impulse	163
7.33	Rekonstruierte Impulse des Signalkanals in der p_L - p_T -Ebene	164
7.34	Rekonstruierte Impulse des Untergrundkanals $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2 \pi^- K^+ K_S$ in der p_L - p_T -Ebene	165

7.35	Effizienz nach Anwendung aller Schnittkriterien in eindimensionalen Projektionen	168
7.36	Effizienz innerhalb des Dalitz-Diagramms bei Anwendung aller Schnitte	169
7.37	Nachweiseffizienz einzelner Pionen in inelastischen $\bar{p}p$ -Reaktionen .	170
8.1	Impulsverteilung von Pionen in $\bar{p}p$ -Reaktionen mit sechs geladenen Spuren	175
8.2	Verteilung der Ereignisse des Kanals $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ im Dalitz-Diagramm nach allen kinematischen Schnitten	178
8.3	Verteilung der Ereignisse des Kanals $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ im Dalitz-Diagramm ohne kinematischen Schnitte	179
8.4	Verteilung der rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen des Kanals $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2\pi^- K^+ K_S$ nach allen kinematischen Schnitten	179
8.5	Rekonstruierter Abstand $D^0-\bar{D}^0$	181
8.6	Abstand zwischen dem gewichteten Mittelwert der D-Meson-Zerfallspunkte und dem primären Vertex	181
8.7	Rekonstruierter Winkel zwischen der (π^+, π^-) -Ebene und dem K_S -Impuls im Ruhesystem des D^0 im Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$	182
8.8	Generierte Verteilung der Zerfälle $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^- \pi^0$, $D^0 \rightarrow K_S \eta$ und $D^0 \rightarrow K_S \eta'$ im Dalitz-Diagramm	185
9.1	Effektiv berücksichtigte Effizienz im Dalitz-Diagramm-Fit	189
9.2	Verteilung der generierten und rekonstruierten invarianten Massen $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)$ nach dem Belle-Modell	190
9.3	Differenz der Ereignisverteilung im Dalitz-Diagramm bei realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen $m_{\pm}^2$ und Verwendung der Monte-Carlo-Werte	191
9.4	Verteilung der hypothetischen Messdaten im Dalitz-Diagramm, Verteilung des Fits und Residuen bei realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen (Stichprobe <i>Mix</i>).	192
9.5	Verteilung von $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{rek}}$, Fit und Residuen bei realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen (Stichprobe <i>Mix</i>).	194
9.6	Nahansicht der Verteilungen von $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{rek}}$ in physikalisch relevanten Regionen.	195
9.7	Kugelflächenfunktionen Y_L^0 in Abhängigkeit der realistisch rekonstruierten invarianten Massen $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)$	197
9.8	Einzelamplituden des Dalitz-Diagramm-Fits der Stichprobe <i>Mix</i> bei Verwendung der realistisch rekonstruierten invarianten Massen. . .	200
9.9	Verteilung der rekonstruierten Zerfallszeitdifferenzen zusammen mit der Projektion des Dalitz-Diagramm-Fits (Stichprobe <i>Mix</i>)	203
9.10	Fitergebnis der Mischungsparameter	204
9.11	$\mathcal{P}$ -Wert des Likelihood-Quotienten-Tests bei der Beurteilung der Hypothese des Auftretens von $D^0-\bar{D}^0$ -Mischung	205

C.1	Fehlerfunktion und deren Komplement.	218
C.2	Komplexe Fehlerfunktion $\text{erf}(x)$	222
C.3	Mit der Zeitauflösung gefaltete Terme in der Zerfallsamplitude $\mathcal{M}_f(t)$	225
E.1	Flussdiagramm des Programms der Dalitz-Diagramm-Analyse	239
F.1	Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit dem MVD	241
F.2	Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit dem STT	242
F.3	Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit dem Barrel-DIRC	242
F.4	Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit dem EMC	243
F.5	Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit den Myonen-Detektoren im Barrel	243
F.6	Likelihoods bei Teilchenidentifikation mit dem Disc-DIRC	244
G.1	χ^2 - und $\mathcal{P}$ -Wert-Verteilung der rekonstruierten D^0 -Vertizes	245
G.2	Residuenverteilungen der D^0 -Zerfallsortkomponenten	245
G.3	Pull-Verteilungen des D^0 -Vertex-Fits	246
G.4	χ^2 - und $\mathcal{P}$ -Wert-Verteilung der rekonstruierten $\bar{D}^0$ -Vertizes	247
G.5	Residuenverteilungen der $\bar{D}^0$ -Zerfallsortkomponenten	247
G.6	Pull-Verteilungen des $\bar{D}^0$ -Vertex-Fits	247
G.7	Pull-Verteilungen der Zerfallszeitrekonstruktion	249
I.1	Verteilung der hypothetischen Messdaten im Dalitz-Diagramm, Verteilung des Fits und Residuen bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz	253
I.2	Verteilung von $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{MC}}$, Fit und Residuen bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz	254
I.3	Nahansicht der Verteilungen von $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)_{\text{MC}}$ in physikalisch relevanten Regionen bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz	254
I.4	Kugelflächenfunktionen Y_L^0 in Abhängigkeit der invarianten Massen $(m_+^2, m_-^2, m_{\pi\pi}^2)$ bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz	256
I.5	Einzelamplituden des Dalitz-Diagramm-Fits bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz (Stichprobe <i>Mix</i>)	257

Tabellenverzeichnis

1.1	Messungen der Mischungsparameter im Zerfall $D^0 \rightarrow K^+ \pi^-$	14
1.2	Zerfallsasymmetrien bei Zerfall in die CP -Eigenzustände $K^+ K^-$ und $\pi^+ \pi^-$	16
1.3	Messungen der Mischungsrate $\mathcal{R}_M$ in semileptonischen Zerfällen mit „falschem“ Vorzeichen	17
1.4	Messung der Mischungsparameter in quantenkorrelierten D-Zerfällen bei CLEO-c	19
1.5	Mischungsparameter bestimmt aus dem Zerfall $D^0 \rightarrow K_S \pi^+ \pi^-$	22
2.1	Blatt-Weisskopf-Barriere-Funtionen	36
2.2	Winkelverteilung im Zemach-Formalismus	40
2.3	LASS-Parameter in Streuung und Produktion	46
2.4	K -Matrix Parameter	51
2.5	Parameter des Produktionsvektors	52
4.1	Mittelwerte der angepassten x und y beim Test der Funktionsanpassung mit einem CP -erhaltenden Modell	80
4.2	Mittelwerte und Standardabweichungen der Pull-Verteilungen beim Test der Funktionsanpassung mit einem CP -erhaltenden Modell	81
4.3	Angepasste Parameter in der Beschreibung des statistischen Fehlers von x und y	81
4.4	Gewichtete Mittelwerte der angepassten $ q/p $ und ϕ beim Test der Funktionsanpassung mit einem CP -verletzenden Modell	84
4.5	Mittelwerte und Standardabweichungen der Pull-Verteilungen beim Test der Funktionsanpassung mit einem CP -verletzenden Modell	85
4.6	Angepasste Parameter in der Beschreibung des statistischen Fehlers von $ q/p $ und ϕ	85
5.1	Minimalimpulse zum Durchqueren der Strahlröhre	97
5.2	PID-Impulsbereiche der Subdetektoren in Target- und Vorwärtsspektrometer	107
5.3	Verwendete Konfiguration der PandaRoot-Simulation	113
6.1	Theoretische Berechnungen des Wirkungsquerschnitts der Charmproduktion in Antiproton-Proton-Reaktionen	116
6.2	Abschätzung der Ereignismenge im Signalkanal in 150 Tagen Datennahme	118

6.3	Untergrundreaktionen mit sechs geladenen Spuren in 150 Tagen Datennahme	119
7.1	Vordefinierte Schnitte auf die Likelihood der Teilchenidentifikation in PandaRoot	124
7.2	Effizienz, Reinheit und Kontamination für verschiedene Schnitte auf die PID-Likelihood	126
7.3	Anteil von K_S -Zerfällen getrennt nach verschiedenen Volumina innerhalb des MVD	128
7.4	Anteil der K_S -Zerfallspionen mit Spurpunkten im FTS	129
7.5	K_S -Zerfallsortauflösung	134
7.6	Mittelwerte und Standardabweichungen der Pull-Verteilungen des K_S -Vertex	136
7.7	Auflösung der invarianten K_S -Masse	138
7.8	D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfallsortauflösung	141
7.9	Mittlere Anzahl der MVD-Spurpunkte der D^0 -, $\bar{D}^0$ - und K_S -Tochterteilchen	141
7.10	D^0 - und $\bar{D}^0$ -Zerfallszeitauflösung	144
7.11	Fit der D^0 - und $\bar{D}^0$ - Lebensdauerverteilungen	146
7.12	Fit der Residuenverteilung der Zerfallszeitdifferenz	150
7.13	Parameter der Auflösungsfunktion $\mathcal{R}$ der Zerfallszeitdifferenz	152
7.14	D^0 - und $\bar{D}^0$ -Massenauflösung	156
7.15	Fit der $m_{\pm}$ Residuenverteilungen	160
7.16	Effizienz bei Anwendung verschiedener Schnittkriterien im Signalkanal	167
8.1	Reaktionskanäle der Ereignisse der DPM-Stichprobe nach allen kinematischen Schnitten und dem PID-Kriterium <i>VeryLoose</i>	176
8.2	Signal-zu-Untergrund-Verhältnis bezüglich Reaktionen mit sechs geladenen Teilchen	176
8.3	Effizienz bei Anwendung verschiedener Schnittkriterien für den Untergrundkanal $\bar{p}p \rightarrow \pi^+ 2 \pi^- K^+ K_S$	177
8.4	Effizienz bei Anwendung verschiedener Schnittkriterien für die Stichprobe $\bar{p}p \rightarrow \psi(3770) \rightarrow \text{alle}$	183
8.5	Mistag-Wahrscheinlichkeit bei Anwendung verschiedener PID-Kriterien	184
8.6	Signal-zu-Untergrund-Verhältnis bezüglich allgemeiner $\psi(3770)$ -Zerfälle	186
9.1	Resonanzen des verwendeten Amplitudenmodells	188
9.2	Ergebnis der Dalitz-Diagramm-Analyse bei realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen (Stichprobe <i>Mix</i>)	193
9.3	Fitgüte bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz und realistischer Rekonstruktion der invarianten Massen für die Stichprobe <i>Mix</i>	194
9.4	Fitanteile des Dalitz-Diagramm-Fits	198

9.5	Interferenz-Fitanteile der wichtigsten Resonanzen des Amplitudenmodells	199
9.6	Parameter der Auflösungsfunktion im zeitabhängigen Dalitz-Diagramm-Fit	201
9.7	Ergebnis des zeitabhängigen Dalitz-Diagramm-Fits für die Mischungsparameter x und y bei erzwungener CP -Erhaltung	202
9.8	Mögliche systematische Fehlerquellen im Fit der Mischungsparameter	207
D.1	Massen und Breiten von Resonanzen der verwendeten Modelle	228
D.2	Parameter des Sigma-Modells	229
D.3	Parameter des BaBar-Modells	230
D.4	Parameter des Belle-Modells	231
G.1	D^0 -Zerfallsortauflösung	246
G.2	Mittelwerte und Standardabweichungen der Pullverteilungen des D^0 -Vertex	246
G.3	$\bar{D}^0$ -Zerfallsortauflösung	248
G.4	Mittelwerte und Standardabweichungen der Pullverteilungen des $\bar{D}^0$ -Vertex	248
H.1	Mistags mit Pid <i>Ideal</i>	251
H.2	Mistags mit Pid <i>Loose</i>	251
I.1	Ergebnis der Dalitz-Diagramm-Analyse der Stichprobe <i>Mix</i> bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz	255
I.2	Interferenz-Fitanteile (Stichprobe <i>Mix</i>)	258
I.3	Ergebnis der Dalitz-Diagramm-Analyse der Stichprobe <i>NoMix</i> bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz	259
I.4	Ergebnis der Dalitz-Diagramm-Analyse der Stichprobe <i>CPVio</i> bei ausschließlicher Berücksichtigung der Effizienz	260

Danksagung

Ganz besonders herzlich möchte ich meiner Ex-Freundin Leoni danken, ohne sie wäre das Schreiben dieser Arbeit weder begonnen noch beendet worden.

Meine Eltern und Geschwister haben mich in dieser schwierigen Zeit immer unterstützt und an mich geglaubt.

Meinem Doktorvater Prof. Dr. Kai-Thomas Brinkmann bin ich neben der fachlichen Betreuung der Arbeit, für viel Geduld und Nachsicht, sowie manch interessantes Gespräch über Lemmy Kilmister von Motörhead, Preußen in Köln, obskure Bräuche der alten Germanen und Geschichte im Allgemeinen dankbar.

Von den Kollegen gilt mein besonderer Dank Stefan Friedrich; dessen gründliche Korrekturen stark zur Qualität des Textes beigetragen und über so manche Tücken der deutschen Sprache und Interpunktion hinweg geholfen haben. Loblieder auf die Vorzüge der Maus, allgemeines Schimpfen über Linux und Diskussionen über den Inhalt der Arbeit haben dazu beigetragen, den roten Faden nicht aus den Augen zu verlieren.

Auch Eric danke ich für die vielen Anmerkungen zum Manuskript, Tommaso für das freundliche zur Verfügung stellen einiger im Einleitungsteil zum PANDA-Experiment gezeigter Abbildungen. Der gesamte Arbeitsgruppe bin ich dankbar für die angenehme Arbeitsatmosphäre. Im besonderen gilt mein Dank Till, Benny, Valera, René, Rosi und Martin für Gespräche jenseits der Physik beim notorischen Gang zur Mensa, dem Kebaphaus unseres Vertrauens oder dem Rundgang um die transzendente Säule der Kaffeemaschine. An dieser Stelle auch Dank an alle, die beim häufigen Transport widerspenstiger Server zwischen Institut und Rechenzentrum geholfen haben.

Anita möchte ich dafür danken, dass sie in all den Jahren mit wachsamem Blick und erhobenem Zeigefinger erfolgreich einen Sturz in die Abgründe der Unibürokratie verhindern konnte.

Paul Bühler bin ich sehr dankbar für die Möglichkeit erhebliche Datenmengen am Prometheus-Cluster der GSI zu simulieren.

In der Bonner Zeit schulde ich Christian Hammann und Simone Bianco Dank für die viele geduldige Hilfe bei Problemen mit C++ und Linux.

Erklärung der Urheberschaft

Ich erkläre: Ich habe die vorgelegte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt, die ich in der Dissertation angegeben habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der „Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ niedergelegt sind, eingehalten.

Andreas Benjamin Pitka
Gießen, Juli 2015

