Ex oriente lux?

Einfluss der Mathematik im Vorderen Orient auf die Griechen

WILLI KAFITZ*)

Abstract:
Greek mathematics undoubtedly developed into a spectacular scientific flowering, setting such high standards with Euclid's "Elements" that the principles of its axioms, definitions, theorems, and proofs remain valid for modern mathematics even today. They have even shaped the understanding of science as a whole, at least for the exact sciences. An important achievement and advantage was the Greek script, especially the Greek alphabet, which can be described as a second media revolution. It allowed its use in all areas of life without the need for specialists (scribes) and formed the foundation for all sciences.

But mathematics also has a history before this. Greek mathematicians had contacts with Mesopotamia and Egypt well before Euclid. It is documented that knowledge from the Orient found its way to Greece. The question now arises: were the Greeks merely imitators? Should we speak of an epigone culture that the Greek mathematicians fostered? A phrase has formed around this, which will be posed as the guiding question in this article.

Ex Oriente Lux?

Did the light come from the Orient?

This question will be explored in this article.

Key words:

Egypt, hieroglyphs, Egyptian number system, system of measurement, arithmetic, calculation with unit fractions, accounting in Egypt, approaches to algebra, Papyrus Rhind, Sumer, Babylonia, Akkadia, sexagesimal system, Babylonian numbers, measures, Babylonian algebra, abstract geometry in astronomy

Zusammenfassung:
Die griechische Mathematik entwickelte sich zweifellos zu einer spektakulären, wissenschaftlichen Blüte, die mit den „Elementen“ von Euklid so große Maßstäbe setzte, dass die Prinzipien aus Axiomen, Definitionen, Sätzen und Beweisen auch heute noch für die moderne Mathematik gelten. Sie haben sogar das Wissenschaftsverständnis, zumindest für die exakten Wissenschaften, insgesamt geprägt. Eine wichtige Errungenschaft und ein Vorteil ist die griechische Schrift, insbesondere das griechische Alphabet, das man als zweite Medienrevolution

bezeichnen kann. Es erlaubte den Einsatz in allen Lebensbereichen ohne Spezialisten (Schreiber) und war Fundament für alle Wissenschaften.

Doch die griechische Mathematik hatte auch eine Vorgeschichte. Die griechischen Mathematiker hatten durchaus schon deutlich vor Euklid Kontakte nach Mesopotamien und Ägypten. Es ist belegt, dass Erkenntnisse aus dem Orient den Weg nach Griechenland fanden. Es stellt sich jetzt die Frage, waren die Griechen nur Nachahmer, muss man von einem Epigonentum sprechen, von dem die griechischen Mathematiker profitierten? Dazu hat sich eine Floskel gebildet, die in diesem Beitrag als Leitfrage gestellt werden soll.

Ex Oriente Lux?

Kam das Licht aus dem Orient?

Dieser Frage soll im vorliegenden Beitrag nachgegangen werden.

Schlüsselworte:

Ägypten, Hieroglyphen, ägyptisches Zahlsystem, Maßsystem, Rechentechnik, Rechnen mit Stammbrüchen, Buchführung in Ägypten, Ansätze für Algebra, Papyrus Rhind, Sumer, Babylonien, Akkadien, Sexagesimalsystem, babylonische Zahlen, Maße, babylonische Algebra, abstrakte Geometrie in der Astronomie

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

Zitate

Im Allgemeinen werden wir jedoch die Ansätze der Zahlen nach dem Sexagesimalsystem machen, weil die Anwendung der Brüche [im griechischen System] unpraktisch ist.[1]

Klaudios Ptolemaios

Die orientalische Mathematik mag eine interessante Kuriosität sein, aber die griechische Mathematik ist das Wahre. Die Griechen entwickelten als erste eine Sprache, die heutige Mathematiker verstehen können. […] An Archimedes wird man sich noch erinnern, wenn Aischylos vergessen ist, denn Sprachen vergehen, aber mathematische Ideen niemals.

Godfrey Hardy[2]

Denn darüber können wir uns trösten, dass Griechen alles, was sie von fremden Völkern empfingen, zu größerer Schönheit und Vollendung erhoben haben.

Platon[3]

Es ist eben Mathematik auch eine Wissenschaft, die von Menschen betrieben wird, und jede Zeit, sowie jedes Volk hat nur E i n e n Geist.

Hermann Hankel[4]

[1] Manitius K. (Hrsgr.): Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie, Bd. 1, S.25, Teubner, 1925, zitiert nach Dietmar Herrmann, Mathematik im Vorderen Orient, S. 12

[2] A Mathematician´s Apology, (1941), zitiert nach D. Herrmann, Mathematik im Vorderen Orient, S. 17

[3] Platon, der Athener in Epinomis 987E, zitiert nach Dietmar Herrmann, Mathematik im Vorderen Orient, S. 2

[4] Hermann Hankel, Tübingen 1869, zitiert nach O. Neugebauer, Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1926, S. 9

Inhalt

Einleitung und Fokus	5
Mathematik im alten Ägypten	12
Mathematische Papyrus Funde	13
Papyrus Rhind	16
Grundrechenarten	19
Zahlensysteme und Maßsysteme	22
Multiplikation	25
Division	26
Potenzieren und Wurzelziehen	27
Bruchrechnen	28
2:n-Tabelle	29
Buchführung	33
Verteilung	34
Tauschverkehr	35
Löhne und Preise	36
Algebra	37
Geometrie	37
Ebene Figuren	39
Berechnung räumlicher Körper	40
Ex oriente lux – aus Ägypten?	41
„Zwei Stromland“ – Babylonien, Mesopotamien	42
Mathematische Texte	45
Zahlen und Maße	47
Zusammenfassung der zeitlichen Einordnung	48
Zeitmaße	49
Ziegelmaße	50
Zur Rechentechnik	51
Addition und Subtraktion	51
Multiplikation	52
Dividieren	53
Bruchrechnen	55
Potenzieren und Radizieren	55
Arithmetische Erkenntnisse	56
Geometrische Reihe, Plimpton 322	57
Aufgaben aus dem Alltag	59
Babylonische Algebra	59
Babylonische Geometrie	62
Fazit	67
Literaturhinweise	74
Abbildungen	76
Danksagung	79

Einleitung und Fokus

Jeder Absolvent eines Gymnasiums hat sich mit Geometrie beschäftigen müssen. Repräsentiert wurde sie häufig in Euklids „Elemente“, einer für seine Zeit weitgehend vollständigen Sammlung von mathematischen Erkenntnissen – teils von Euklid (um 300 v. Chr.) selbst hergeleitet, teils von anderen (griechischen oder nichtgriechischen) Denkern beigesteuert. Bemerkenswert und unbestritten Euklids vorrangiger Verdienst ist der strukturierte Aufbau mit Axiomen, Definitionen, Sätzen und Beweisen. Dieses Prinzip macht auch heute die moderne Mathematik aus. Die „Elemente“ waren obligatorischer Bildungsinhalt für alle „Bildungsbürger“, zumindest seit der Renaissance.
„ … *an englischen Schulen hat man noch in der 2. Hälfte des 20. Jh. nach einer englischen Bearbeitung der Elemente Geometrie gelernt, daher heißt die Schulgeometrie in England einfach Euclid*.[5]
Die „Elemente“ repräsentieren also das mathematische Wissen von Euklids Lebenszeit. Aber wo kamen die mathematischen Erkenntnisse her? Von Pythagoras vermuten wir, dass er den nach ihm benannten Satz in Mesopotamien kennengelernt hat. Eindeutiger sind mögliche ägyptische Einflüsse, weil wichtige Mathematiker in Alexandria gelebt und gewirkt haben. Am bedeutendsten ist eben Euklid von Alexandria, der Verfasser der Elemente und „Vater der Geometrie“. Im Gegensatz zu Euklid hat sich Diophantos von Alexandria als Algebraiker und Zahlentheoretiker einen Namen gemacht. Heron von Alexandria war ein wichtiger Mathematiker und Ingenieur. Pappos von Alexandria ist ein Mathematiker der Spätantike und durch den Satz von Pappos bekannt, der von Blaise Pascal auf Kegelschnitte verallgemeinert wurde (Satz von Pappos-Pascal). Eine bedeutende alexandrinische Mathematikerin, Astronomin und Philosophin, Hypatia von Alexandria, sollte man nennen. Auch wenn ihre Werke verschollen sind und ihre Lebensleistung nur über Verweise anderer Autoren erschlossen werden konnte.[6]
Der Einfluss von Mesopotamien bzw. Babyloniern und von Ägyptern auf die griechische Mathematik, zumindest vor Euklid, kann angenommen werden. Aber muss man von „Epigonentum“ sprechen?[7] Die Leistung von Euklid ist unbestritten. Aber waren Mathematiker vor ihm „Nachahmer“? Eine höflichere Formulierung, aber vielleicht mit drastischeren Konsequenzen, liegt in der

[5] W.-D. Geyer: Vorlesung über antike Mathematik SS 2001, S. 1 https://www.math.uni-bielefeld.de/~sek/ez/material/geyer.pdf
[6] Es gab in Alexandria eine Frau, […] die in Literatur und Wissenschaft so erfolgreich war, dass sie alle Philosophen ihrer Zeit übertraf“. Sokrates Scholastikos (zitiert nach https://nationalgeographic.de/geschichte-und-kultur/2021/11/wer-war-hypatia-von-alexandria/)
[7] altgriechisch ἐπίγονος epígonos „Nachgeborener“

Aussage „*Ex oriente lux*“. Das Motto besagt, dass der Ursprung der abendländischen Kultur (und Mathematik) im Osten lag.

Der vorliegende Beitrag geht dieser Frage nach. Die Antwort liegt in Aussagen von Zeitgenossen und einer Bestandsaufnahme der mesopotamischen und ägyptischen Mathematik und dem Vergleich mit den griechischen Erkenntnissen vor der alexandrinischen Epoche.
Aber gibt es nicht nur eine Antwort durch Vergleich der Mathematik in den verschiedenen Kulturen? Und zwar vor Euklid, denn mindestens mit ihm hat sich substanziell die griechische Mathematik in ihrer Qualität abgesetzt.
Man kann heute feststellen, dass es viele Autoren gab, die griechische Literatur, gleich welcher Art, mit vorderasiatischer Literatur auf Parallelitäten untersuchten. Auch den Griechen selbst war bewusst, dass es gleiche Erkenntnisse in den Kulturen gab. Platon lässt aber mit Stolz den Athener sagen:[8]

Denn darüber können wir uns trösten, dass Griechen alles, was sie von fremden Völkern empfingen, zu größerer Schönheit und Vollendung erhoben haben.

Der britische Sinologe Litchfield West fand in der griechischen Kolonisationsphase, bekannt als Magna Graecia, vor allem fundamentale religiöse Parallelitäten, insbesondere in der Idee der Wiedergeburt bzw. des Fortlebens der Seele. Griechen identifizierten diese Idee mit dem sagenhaften Sänger Orpheus, aber diese religiöse Vorstellung kommt eindeutig über asiatische Einflüsse.
Auch in der Literatur findet man Gemeinsamkeiten. Besonders frappierende Parallelen sind:

- Freundschaft zwischen Achill und Patroklos verglichen mit Gilgamesch und Enkidu.
- Wie kann man einen Gott überlisten? 14 Gesang der Ilias im Vergleich zum Epos *Enuma elisch*.
- Der Kampf um Troja weist Ähnlichkeiten mit dem Assyrer König Sanherib auf.[9]

Auch die auffallende Ähnlichkeit der griechischen Tierfabeln im Vergleich mit orientalischen Vorbildern ist offensichtlich kein Zufall.

Weitere Parallelitäten findet man bei anderen Autoren. Dabei ist immer die Einordnung über die Zeit entscheidend. Heute erscheint uns ein Vergleich von

[8] Platon, Epinomis 987E, zitiert nach Dietmar Herrmann, Mathematik im Vorderen Orient, S. 2
[9] Rollinger, R.; Altorientalische Einflüsse auf homerische Epen. In Handbuch Homer, S. 213-217, zitiert nach Herrmann, ebenda S. 2

Achill mit Gilgamesch unangemessen. In den verschiedenen griechischen Epochen war das ganz anders.
Auch semantische Vergleiche im Bereich der Philosophie sind angestellt worden. Die Naturphilosophie lässt sich eindeutig nicht vergleichen, denn die Griechen waren zumindest in der alexandrinischen Epoche bemüht, Naturphänomene ohne göttlichen Einfluss zu erklären.
Aber zweifellos waren die Griechen fasziniert, insbesondere von der ägyptischen Kultur, der monumentalen Architektur und der Künste. Sie sahen die ägyptische Kultur als Erfinder der Schrift. Tatsächlich muss man die Erfindung der Schrift und auch der Zeitrechnung im Vorderen Orient verorten. Die Entzifferung der ägyptischen Hieroglyphen durch Jean-François Champollion, angeblich am 17. September 1822 durch den dreisprachigen Stein von Rosette, hat erst die ägyptische Geschichtsschreibung ermöglicht. Ähnliches gilt für die Keilschrift. Sie war zuerst eine Art Bilderschrift, entwickelte sich zur konsonantischen Silbenschrift. Es gab eine Reihe von Vorarbeiten zur Entschlüsselung. Erst als die Inschrift auf dem Felsen von Behistun, wie der Stein von Rosette, sich als eine *Trilingue* herausstellte, konnte ein entscheidender Durchbruch verzeichnet werden. Dieser Erfolg geht auf den englischen Offizier Henry Creswicke Rawlinson zurück. Er kopierte zwischen 1835–1837 Texte, entzifferte sie und hat zwischen 1846/47 und 1851 seine Ergebnisse veröffentlicht. Beide Entzifferungen haben die Geschichtsschreibung im 2. Jahrtausend maßgeblich ergänzt. „Schrift“ im Niltal fiel nicht „vom Himmel“, sondern entwickelte sich langsam. Man klassifiziert die Entwicklungsschritte in Schrift 1.0 (ca. 3200 v. Chr.), Schrift 2.0 (ca. 2760 v. Chr.) und rasch folgend Schrift 3.0 (ca. 2720 v. Chr.). Stufen waren gekennzeichnet von zuerst der reinen Wortebene als Phonogramm, später der Satzebene als Verbalsatz mit Einkonsonantenzeichen und schließlich der semantischen Textebene mit komplexer Grammatiknotation.[10] Sie standen immer in Verbindung zum Königshaus, eine dynamische Entwicklung in der Fläche über das ganze Niltal hinweg, kann man nicht feststellen. „Entzifferung“ fand vor allem bei Schrift 3.0 statt.
Die Griechen glaubten auch an überlieferte Erzählungen, dass Homer, Solon oder Thales und Pythagoras Besucher Ägyptens waren und dort mit offenen Augen Ideen gesammelt haben. Von Herodot, gestorben um 430/420 v. Chr., wissen wir es genau. Er hat Ägypten besucht und kam bis Babylon.
Enorme Kontakte kamen auf jeden Fall über den Handel. Es existierte mit Duldung des Königs Amasis (570 – 526) eine einzige griechische Handelsniederlassung in Ägypten und zwar in Naukratis. Eine dort gefundene

[10] Siehe Morenz, Ludwig D.; Vom langen Weg zur Schrift; Über Abstraktion und Sedimentierung im Niltal des Vierten Jahrtausends; EB-Verlag Berlin, 2025, S. 13

Stele zeigt auch, dass der Handel so bedeutend war, dass er kontrolliert und mit 10% des Warenwertes besteuert werden musste.

Der kulturell wichtigste Import nach Griechenland fand über Phönizien statt. Das Stammland umfasste die Küstenregion des heutigen Syriens, Libanon und Teile von Israel. Als Handels- und Seefahrervolk trieben die phönizischen Stadtstaaten Handel im ganzen Bereich des südlichen Mittelmeeres. Als erste „Nation“ entwickelten sie ein Alphabet aus Konsonanten. Ägyptische Hieroglyphen kann man zwar als Bilderschrift verstehen, sie ist jedoch im Gegensatz zum Chinesischen, eine im Wesentlichen ein-konsonantische (später bis zu drei Konsonanten) Lautschrift; „Bilder“ werden als Laute interpretiert. So ist 𓈖 (gekräuseltes Wasser) wie ein „n“ auszusprechen. 𓎛 (Brunnenschacht) spricht sich wie das ch in „Da***ch***“ und gilt als Ein-konsonantenlaut – wir brauchen in unserem Alphabet zwei Konsonanten. Schwierig ist die Unterscheidung nach Phonogrammen, Ideogrammen oder Determinativen. Die ersten beiden beziehen sich rein auf die Sprache mit ihren kleinsten Bausteinen. Etwa wenn kleinste Sprach- bzw. Schriftelemente je nach Kontext Zahlzeichen bedeuten können. Ein Determinativ ist ein stummer Zusatz zum Deuten des Schriftzeichens bzgl. der Begriffsklasse. Das Wort „Sommer“ (ägyptisch schemu) wird folgendermaßen geschrieben: Ein von oben stilisierter Bottich oder Teich heißt ägyptisch *sche*; Hieroglyphe 𓋴. Die gekringelten Linien 𓈙 bedeuten Wasser (ägyptisch *mu*), beides bilden zusammen die Laute für *schemu*. Das wäre aber noch nicht eindeutig. Es wird das Zeichen für Sonne ⊙ als Determinativ für die Zeitangabe (hier Jahreszeit) hinzugefügt. Beispiele für Begriffsklassen sind etwa Götternamen, Städte, Flüsse etc. Der Begriff kommt von lateinisch *determinativum*, von *determinare* „abgrenzen“, „bestimmen“. Er ist typisch für antike Schriftsystemen, wie ägyptische Hieroglyphen oder der Keilschrift und daraus abgeleitete Schriften.
Die Keilschrift kann man trotz dieser Feinheiten als Silbenschrift betrachten, die man schwerer als die Hieroglyphen in ein „Alphabet“ pressen kann. Auf jeden Fall bleibt es konsonantisch.

Die Griechen erkannten die prinzipiellen Vorteile eines Alphabets. Ihre Leistung besteht darin, dass sie auf Basis des Konsonanten-Alphabets Vokale integrierten. Dazu waren einige Anpassungen nötig. So wurde ein kurzer „o“-Laut das „kleine“ o-mikron „o" genannt; im Unterschied zum großen o-mega „ω". Ähnliches gilt für „e“-Laute und „u“-Laute mit e-psilon (ε) bzw. u-psilon (υ), Ny. Neu benötigte die griechische Sprache die Konsonanten phi (ϕ), psi (ψ) und chi (χ).
Die griechische Schrift mit ihrem einfachen, aber leistungsfähigen und flexiblen Alphabet war in der Lage alle Arten von Literatur, von Verwaltungsdokumenten bis zur privaten Korrespondenz abzubilden. Sie konnte relativ einfach erlernt

werden und benötigte keine Spezialisten, Schreiber genannt. Dieses Berufsbild verschwand zumindest in den gebildeten Schichten. Das Alphabet wurde auch für Zahlen benutzt, die aus dem Kontext erkannt werden konnten. Damit konnten auch mathematische Sachverhalte dargestellt werden. Viele europäische Schriften, allen voran die Lateinische, sind vom Griechischen abgeleitet.
Die griechische Schrift auf Basis des erneuerten, ergänzten Alphabets wurde zur zweiten Medienrevolution.
Diese Tatsache bestätigt Platon mit seiner Bemerkung, die er seiner Figur des namenlosen Atheners in den Mund gelegt hat: Die Schrift, die von dem fremden Volk der Phönizier empfangen wurde, wurde zu größerer Schönheit und Vollendung erhoben.

Bezüglich der Mathematik argumentiert Aristoteles sehr drastisch und schrieb die Erfindung der Mathematik den Ägyptern zu:

Erst als bereits alle derartigen Künste entwickelt waren, entdeckte man die Wissenschaften, die sich nicht allein auf die Lust und die Lebensnotwendigkeiten bezogen und das erstmals in den Gebieten, wo man sich Muße leisten konnte. Daher entstanden auch die mathematischen Wissenschaften in Ägypten, denn dort gestattete man dem Priesterstand, Muße zu pflegen.[11]

Doch es ist Vorsicht geboten. Man darf historische Mathematiktexte keinesfalls unter dem Blickwinkel moderner Mathematik betrachten. Die moderne Mathematik ist nüchtern und vollkommen auf das mathematisch wesentliche entkernt. Philosophische Rahmenbedingungen oder metaphysische Aspekte spielen mit Recht heute keine Rolle. Für die griechische Mathematik war dies eine Jahrhunderte lange Entwicklung, die erst mit der Axiomatik von Euklid den Höhepunkt erreichte. Das war in der vorderasiatischen Mathematik nicht der Fall. Auch in der Terminologie sind Analogien meist unzulässig. So kann man den Begriff „Algebra“ und die damit verbundene Formelsprache und Symbolik nicht einfach analogisieren. Das beginnt bei der einfachen Übersetzung. Darf man für ein Dreieck den im Deutschen veralteten Begriff „triangel“ (drei Winkel) benutzen, den es im Englischen noch gibt? Die Babylonier hatten keinen Winkelbegriff. Die Ägypter hatten anderseits keinen Begriff für Dreieck und benutzten Umschreibungen, wie „spitz zulaufend“ oder das „Gespitzte“. Die Fläche war ein „Acker“; bzw. ein viereckiges oder rundes Feld. Auf Inhaltsformeln kam man empirisch und überprüfte bzw. verbesserte diese, wenn möglich.

[11] Aristoteles, Metaphysik 891B, zitiert nach Herrmann, ebenda S. 10

Es gab in Ägypten keine Symbolik für elementare mathematische Sachverhalte; z.B. kein Gleichheitszeichen und damit keine Gleichungen in modernem Sinne und erst recht keine „Theorie linearer oder nichtlinearer Gleichungen“. Der Papyrus Rhind zeigt Nebenrechnungen, die auf Keilschrifttafeln nicht zu finden sind, weil das Schreibmaterial Ton unhandlicher war als Papyrus. In Mesopotamien wurde offenbar Sand als flüchtigen „Notizzettel“ benutzt.

Diodorus Siculus von Sizilien (um 60 v. Chr.), war ein Historiker und Geschichtsschreiber im späten Hellenismus. Er lebte einige Zeit in Ägypten und analysierte das Selbstverständnis der Ägypter in seinem monumentalen Werk, *Diodori Siculi Bibliotheca historica*. Nach ihm sprachen sie sich die Erfindung der Buchstabenschrift zu. Das war zur Zeit von Diodorus schon eine leicht widerlegbare Anmaßung. Dagegen war seine Analyse zu den mathematischen Kenntnissen zutreffend. Er gab auch den noch heute vertretenen, zweckorientierten Grund in den jährlichen Nilüberschwemmungen an. Es musste regelmäßig vermessen und dokumentiert werden:

Mit Geometrie und Arithmetik beschäftigen sie sich eifrig. Denn indem der Fluss jährlich das Land vielfach verändert, veranlasst er viele und mannigfache Streitigkeiten über die Grenzen zwischen den Nachbarn; diese können nun nicht leicht ausgeglichen werden, wenn nicht ein Geometer den wahren Sachverhalt durch direkte Messung ermittelt. Die Arithmetik dient ihnen in Haushaltsangelegenheiten und bei den Lehrsätzen der Geometrie.[12]

Klaudios Ptolemaios, obwohl in Ägypten lebend, verwendet in seiner Forschung das babylonische Bruchrechnen auf Basis 60, das Sexagesimalsystem:

Im Allgemeinen werden wir jedoch die Ansätze der Zahlen nach dem Sexagesimalsystem machen, weil die Anwendung der Brüche [nach dem griechischen System] unpraktisch ist.[13]

Ziemlich einig waren sich die antiken Autoren, dass Griechenland nicht unbedingt die Wiege der Astronomie war. Heron sieht den Ursprung der Tageseinteilung in [2x] 12 Stunden in Babylonien; Herodot schreibt:

Als erste unter den Menschen haben die Ägypter das Jahr erfunden und es in 12 Monate aufgeteilt. Sie erzählen, die Sterne hätten sie auf diese Einteilung gebracht.[14]

Heute weiß man, dass die ägyptische Astronomie deutlich anders positioniert war und deshalb scheinbar weniger weit entwickelt war, als insbesondere die

[12] Diodorus Siculus, Bibliotheca Historica (I,69) und (I,81), zitiert nach Herrmann, ebenda S. 10
[13] Manitius, K., Das Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie, Bd. 1, S. 24, Teubner 1912, zitiert nach Herrmann, ebenda S. 10
[14] zitiert nach Herrmann, ebenda S. 12

babylonisch/mesopotamische. Dabei orientierte sich die Forschung an den heutigen mathematisch-wissenschaftlichen Aspekten und wurde deshalb lange Zeit dem eigentlichen historischen Verständnis nicht gerecht. Ägyptische Astronomie war untrennbar mit der ägyptischen Mythologie verknüpft und kann weitgehend als religiöse Astronomie verstanden werden. Es ging darum, die Himmelserscheinungen mit den Göttern in Relation zu setzen und Rückschlüsse auf die Menschen zu erkennen. Sie kannten ursprünglich keine Tag- und Nachtgleiche und aus dem ägyptischen Schrifttum sind wichtige astronomische Ereignisse, wie Sonnenfinsternisse, nicht bekannt.

Dagegen stand in Mesopotamien die Deutung von Omen im Mittelpunkt, weshalb alle astronomischen Vorfälle akribisch dokumentiert wurden. Diese andere Zweckbindung spiegelt uns heute einen höheren Entwicklungsstand der Astronomie in Mesopotamien vor. Die Entwicklung der Mathematik ist untrennbar auch, aber nicht nur, mit der Astronomie verbunden. Wir werden in diesem Beitrag das hohe mathematische Wissen der Babylonier erkennen. Es ging über reine Praxisorientierung bis hin zu abstrakten Vorstellungen (z.B. Algebra).

Stellen wir nochmals die Frage: *Ex orbitante lux?*

Waren die Griechen Nachahmer? Tatsächlich waren wichtige mathematische Erkenntnisse durchaus sehr viel früher bekannt.

Eine entscheidende Antwort findet sich in der Geschichte der Philosophie von Ernst Sandvoss: *Den Griechen gelang, was Indern und Chinesen versagt blieb, die Entwicklung vom Mythos zum Logos, die Verbindung von kosmo- und anthropozentrischem Denken und die Entdeckung des Allgemeinen als unabdingbare Voraussetzung der Wissenschaft.*[15]

Und an anderer Stelle:

Was die griechische Philosophie insgesamt und die hellenistische insbesondere betrifft, lässt sich die Folgerichtigkeit ihrer inneren Entwicklung nur staunend begreifen. Nach Art eines mathematischen Kalküls trieb ein Begriff, eine Formel, eine Position die andere mit unglaublicher Konsequenz und Präzision hervor. Am Ende kam ein Produkt dabei heraus, das zwar weder ein System bildet noch ein Wunder voraussetzt, wohl aber an Einheit in der Vielfalt, Ausgewogenheit und Schönheit in der Weltgeschichte, wie die griechische Kunst, ohnegleichen blieb.[16]

Ähnlich argumentiert Andreas Graeser in seiner „Philosophie der Antike“. Die Griechen hatten zweifellos eine Fülle von Anregungen aus Vorderasien – das

[15] Zitiert nach Dietmar Herrmann, Mathematik im Vorderen Orient, S. 10
[16] Ernst R. Sandvoss; Geschichte der Philosophie, Band 1, S. 384

gilt für viele Fachrichtungen aber auch für die Mathematik. Sie schafften aber den „*wirkungsvollen Schritt auf dem Weg der Selbstbefreiung des menschlichen Geistes aus den Fängen der mythischen Weltsicht.*“[17]

Diese Einschätzungen sollen anhand einer mathematischen Bestandsaufnahme überprüft werden. „Roter“ Leitfaden waren zwei 1959 erschienene, unscheinbare, aber äußerst informative Büchlein von Kurt Vogel über „Vorgriechische Mathematik“. Vielfach wurden ganze Passagen übernommen, aber Ziel war immer eine aussagekräftige und komprimierte Zusammenfassung.

Mathematik im Alten Ägypten[18]

Mit der Entstehung und Verwaltung des Zentralstaates entstand um ca. 3000 v. Chr. die Hieroglyphen-Schrift und zwangsläufig Zahlzeichen sowie zumindest das Verwaltungsrechnen. Um 2650 v. Chr. begann der Pyramidenbau mit gesteigerten mathematischen Anforderungen. Aus dem Alten Reich sind nur wenige, bruchstückhafte Berechnungen überliefert. Was man in Tempeln gefunden hat, lässt kaum Rückschlüsse auf Rechenarten zu. Gründe liegen vor allem in dem unhandlichen steinernen Untergrund, auf dem mathematische Feinheiten praktisch nicht dokumentiert werden konnten. Das änderte sich erst mit der Erfindung und Verbreitung der Papyri ab Mitte des Mittleren Reiches, das meist von etwa 2137 bis 1781 v. Chr. datiert wird. Es ist eine zentrale Epoche und folgt der politisch instabilen Ersten Zwischenzeit. Es ist typisch, dass diese stabile Zeit wesentliche praktische wie theoretische Erkenntnisse hervorbrachte.

Die Ägypter verwendeten das Dezimalsystem, kannten aber keine Null und kein Positionssystem. In Abb. 1, die später noch weiter besprochen wird, wird die Hieroglyphe  verwendet. Sie steht manchmal in Rechnungen für „Rest 0“. Es ist somit keine Zahl und man kann damit auch nicht rechnen.

0	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
							

Abb. 1: Rest 0 und ägyptische Zahlzeichen für Zehnerpotenzen

[17] Zitiert nach D. Herrmann, ebenda, S. 15

[18] Die Passage über ägyptische Mathematik orientiert sich stark an Vogel, Kurt; Vorgriechische Mathematik, Teil 1, Vorgeschichte und Ägypten, H. Schroedel, Hannover, F. Schöning, Paderborn, 1958

Eine Inschrift am Horus-Tempel in Edfu (2. Jhdt. v. Chr.) weist auf die Berechnung von Ländereien des Tempels hin. Viereckige Flächen wurden nach Näherungsformeln für Vierecke berechnet. Bei dreieckigen Parzellen setzte man für die (nicht vorhandene) vierte Seite die Hieroglyphe  („nichts“). Auch dies ist keine Rechengröße.

Die Babylonier verwendeten das Sexagesimalsystem (Basis 60), obwohl man annehmen kann, dass Kontakte zwischen beiden Kulturen existierten. Ptolemaios von Alexandria, immerhin in Ägypten gelegen, entschied sich für seine astronomischen Berechnungen im „*Almagest*“ bewusst für das 60er System und begründete diese Entscheidung (siehe Zitate).

Ägypten ist ein „Geschenk des Nils“ und der Fluss hatte auch maßgeblichen Einfluss, sowohl auf die mythische Religion als auch auf die praktische Anwendung von Mathematik. Der Name *Aigyptos* kommt aus dem Griechischen (Αιγυπτοζ). Er bezeichnete ursprünglich die ehemalige Hauptstadt Memphis (*Tempel der Macht Ptahs*) am Unterlauf des Nils, kurz vor dem Nildelta gelegen. Der Name wurde von Herodot auf ganz Ägypten übertragen, genauer auf alles nördlich von Elephantine, einer Insel im Nil unterhalb des 1. Katarakts nahe dem heutigen Assuan. Assuan hieß zu griechisch-römischer Zeit Syene (griechisch Συήνη). Es ist bekannt als südlichster Punkt bei der Bestimmung des Erdumfangs durch Eratosthenes um ca. 240 v. Chr. durch geometrische Messungen zur Sommersonnenwende. Auch Homer verwendete *Aigyptos* für das Land, aber auch synonym für den Nil.

Herodot wird gerne mit dem Aphorismus verkürzt zitiert, dass Ägypten ein Geschenk des Nils sei. Genauer hat er geschrieben: „*Ägypten, soweit es die Griechen zu Schiff befahren, ist für die Ägypter neugewonnenes Land und ein Geschenk des Nils*.“[19]

Mathematische Papyrus Funde

Es wurde bereits mit dem Zitat von Diodorus Siculus aus der *Bibliotheca Historica* auf die Bedeutung der jährlichen Nilüberschwemmungen hingewiesen. Durch Monsunregen im äthiopischen Hochland kam es regelmäßig zwischen Juli und Oktober zu Hochwasser. Für die Landwirtschaft war der nährstoffreiche, schwarze Schlamm ein Segen und machte den sonst trockenen und kargen Wüstenboden erst fruchtbar. Allerdings mussten große Teile des Kulturlandes im Herbst neu vermessen werden. Dies setzte eine ausgefeilte, aber praxisorientierte Geometrie voraus. Die altägyptischen Feldmesser wurden *Harpedonapten* oder „Seilspanner“ genannt. Diese Bezeichnung zeigt schon, dass man prinzipiell

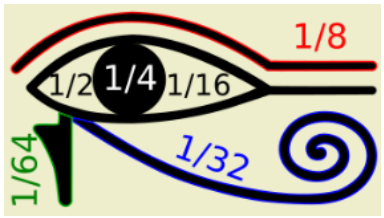


Abb. 2: Verdeutlichung der *heqat*-Bruchteile über das Horus-Auge

[19] Hist. II, 5, 1 zitiert nach Herrmann, ebenda, S. 29

von geradlinig begrenzten Flächen ausging. Weiterhin waren die Flächenstücke selten rechtwinklig. Die entsprechende Vermessungstechnik, die insbesondere im Papyrus Rhind dokumentiert ist, geht also von Segmenten, bestehend aus unregelmäßigen Vierecken, aus. Dies ist mathematisch gut handhabbar, mögliche Unregelmäßigkeiten mitteln sich so aus, dass keine großen Ungerechtigkeiten entstehen. Der Papyrus, wurde bei einer Raubgrabung in Theben gefunden und ist von dem Anwalt Henry Rhind 1858 in Luxor gekauft worden. Das Dokument ist eine der wichtigsten Quellen zur altägyptischen Mathematik. Daneben wurde ein Papyrus in der Totenstadt *Drah Abu´l Negga* bei Theben gefunden. Er wird nach seinem Aufbewahrungsort Papyrus Moskau genannt. Die Schriftrolle ist zwar fast 5 ½ Meter lang aber nur 8 cm breit. Der Papyrus Rhind ist umfangreicher. Die gefundene Schrift ist eine Kopie eines ca. 200 Jahre alten Urtextes. Der Kopist ist der Schreiber *Ahmose* oder *Ahmes,* der als Erstellungsdatum das Regierungsjahr 33 des Hyksos-Königs *Apophis* (1590 bis um 1549 v. Chr.) angibt.[20] Eine Verwendung mehrerer Kopien zu Lehrzwecken erscheint plausibel. Der Papyrus Rhind behandelt mathematische Fachrichtungen, die wir heute als Arithmetik, Algebra, Geometrie, Trigonometrie und Bruchrechnung bezeichnen würden.[21] Bemerkenswert sind noch zwei Holztafeln, die interessant sind, weil sie Bruchteile des Getreidemaßes „*heqat*“ (Scheffel mit 4,75 Liter, ) behandeln. Diese Bruchteile des Hohlmaßes werden gerne mit den Teilen des Horus-Auges verdeutlicht. Es sind historisch entstandene, künstliche Zuordnungen der Teile des stilisierten Auges zu Stammbrüchen, ohne Bezug zum Flächenmaß oder anderer Bezüge. Die Nenner sind dabei immer Zweierpotenzen. Die Bruchteile weisen auf eine Sage hin, nach dem Horus im Kampf mit Seth sein linkes Auge zerbrach, das von Thot wieder zu 63/64-tel geheilt wurde.[22] Zu nennen ist noch der Papyrus von Kahun, der jetzt in London aufbewahrt wird und der Berliner Papyrus. Beide stammen aus der 12. Dynastie und enthalten arithmetische und geometrische Aufgaben. Ansonsten ist die Quellenlage für mathematische Texte eher dürftig. Folgende Funde oder Käufe aus Raubgrabungen sind noch interessant:[23]

Die Papyri aus Kahun/Lahun von W. M. Flinders Petrie (1853-1942). Er war Autodidakt, erhielt aber 1892 den ersten Lehrstuhl für Ägyptologie in Oxford. Sein berühmtester Student war Howard Carter, der Entdecker des Grabs von Tutanchamun.

Papyrus Anastasi I stammt aus der 19. Dynastie und enthält vier umfangreiche bautechnische und logistische Probleme. Die Aufgaben sind allerdings unvollständig gestellt; es fehlen Angaben.

Auf die Buchführung im Papyrus Boulaq (XVIII, 31) wird noch eingegangen.

---

[20] Herrmann, ebenda, S. 101-102
[21] https://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind. Diese Aussage ist stark übertrieben.
[22] https://de.wikipedia.org/wiki/Horusauge
[23] Ausführliche Erörterung der genannten Papyri siehe Herrmann, ebenda, S. 101-176

Der Papyrus Berlin (6619) wurde erst 1990 publiziert. Er enthält ein geometrisches Problem, das auf ein quadratisches Gleichungssystem führt. Es taucht ein Term der Form $\sqrt{x^2 + y^2}$ auf. Viele Ägyptologen sehen aber darin noch keinen Hinweis auf den Satz des Pythagoras. Dazu ist der *Papyrus Berolinensis 6619* aus der 12. Bis 13. Dynastie zu alt. Es könnte sich aber um ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten (6; 8; 10;) handeln, für das $6^2 + 8^2 = 10^2$ gilt.

Neben Papyrus Berlin 6619 wurden weitere Papyri in Lahun (Kalun) von Ludwig Borchardt, dem Ausgräber der Nofretete-Büste, gefunden.

Weitere Papyri mit mathematischen Texten sind der Papyrus BM 10520 in demotischer Sprache und die Papyri Akhmim, die bereits in griechischer Sprache geschrieben wurden (zwischen 500 und 800 v. Chr.). Der Papyrus Genf (259) ist zu nennen sowie den Papyrus Kairo, den umfangreichsten demotischen mathematischen Text aus der Ptolomäer-Zeit. Auf amerikanischem Boden werden die Papyri Michigan (620 bzw. 4966) und Cornell aufbewahrt.

Das sind die wichtigsten ägyptischen mathematischen Texte. Weitere Quellen sind Inschriften und Briefe zwischen Schreibern.

Der Papyrus Rhind ist in hieratischer Schrift verfasst worden. Hieratisch hängt eng mit den Hieroglyphen zusammen. Es ist aber eher eine kursive Schreibschrift, die nur von rechts nach links geschrieben werden kann, da sonst die Tinte verwischt. Sie wurde mit wenigen Veränderungen vom 3. Jahrtausend vor Chr. bis Mitte des 1. Jahrtausend nach Chr. verwendet. Bis zum Ende der Römerzeit wurde diese Schrift gelehrt. Man kann das Hieratische als die Schrift des Alten Ägypten schlechthin betrachten. Die Hieroglyphe für „Schrift“ 𓏛 zeigt die Schreibutensilien eines Schreibers, Palette, Tusche und Pinsel aus Binse. Im hieratischen reduziert sich das Zeichen auf die Binse (rechts).



Abb. 3: Schreibutensilien

Es leiten sich weitere Begriffe, wie Schreiber, schreiben oder Bücher aus der Hieroglyphe für „Schrift“ ab:



Schreiber schreiben Bücher

Die hieratische Schrift (von altgriechisch ἱερατικός hieratikós ‚geweiht', ‚heilig', auch: ‚priesterlich') ist eine mit den Hieroglyphen eng zusammenhängende Kursivschrift, die ab dem 3. Jahrtausend v. Chr. in Ägypten bis in die Mitte des 1. Jt. n. Chr. verwendet wurde und die als eigentliche Schrift des Alten Ägypten gelten darf. Dies zeigt sich sowohl an der Hieroglyphe für Schrift, die aus dem Schreibgerät für die Handschrift besteht, als auch daran, dass das Hieratische bis in die Römerzeit als erste Schriftart



Abb. 4: Linkes Ende der Vorderseite des größten Fragments des Papyrus Rhind (heute im British Museum, pBM 10057)

gelehrt wurde. Geschrieben wurde mit einem Pflanzenstängel (Binse) und Rußtusche auf verschiedenen Materialien: Papyrus, Ostraka aus Kalkstein oder Ton, Leinen, Leder, stuckierte Holztafeln, Stelen, Grab- oder Tempelwände u. a. m. Es finden sich auch in Stein geritzte hieratische Texte. Die hieratische Schrift konnte im Gegensatz zu den Hieroglyphen immer nur von rechts nach links geschrieben werden. Sie blieb in ihrer Grundstruktur unverändert, es entwickelten sich aber im Laufe der Zeit unterschiedliche Zeichenformen und Schreibgewohnheiten, die mitunter abhängig von Textgattung, Funktion, Kontext oder persönlicher Vorliebe waren.

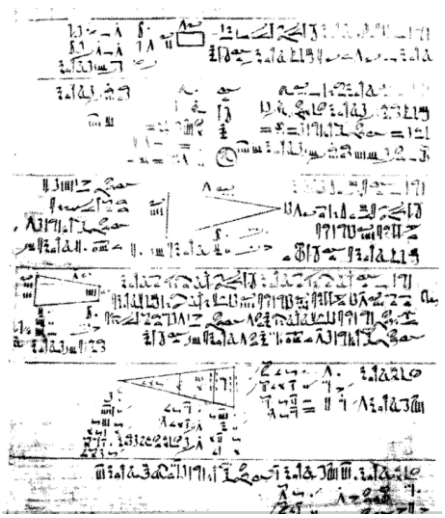


Abb. 5: Wiedergabe des in der oberen Abbildung rechts sichtbaren Textabschnitts

Papyrus Rhind

Der Papyrus Rhind[24] liegt leider nicht vollständig vor. Er muss ursprünglich eine gut 5 m lange und 32 cm breite, beidseitig beschriebene Schriftrolle

[24] Die folgende Passage sowie die Grafiken folgen sehr eng dem Wikipedia-Text zum Papyrus Rhind.



Abb. 6: Verwendung verschiedenfarbiger Tinte in dem (von rechts nach links) in hieratischer Schrift verfassten Manuskript – hier beim 41. Problem

gewesen sein. Im Britischen Museum werden zwei Stücke von 295,5 cm und 199,5 cm Länge aufbewahrt. Sie wurden bereits1865 inventarisiert (Nr. 10057 bzw. 10058); es klafft eine Lücke zwischen beiden von schätzungsweise 18 cm.

Der Papyrus enthält einerseits Tabellen und andererseits je nach Lesart 84, 87 oder 91 Aufgaben mit beispielhaften Lösungen. Allein der hieratische Text konnte erst Ende des 19. Jahrhunderts n. Chr. entziffert und übersetzt werden. Die mathematischen Inhalte zu erschließen, dauerte noch bis ins 20. Jahrhunderts hinein.

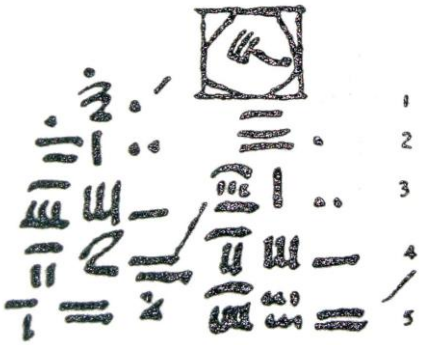


Abb. 7: mit „Achteck“ und einige Zeilen Rechnung zum 48. Problem

Bemerkenswert ist insbesondere die 48. Aufgabe. Hier beschreibt Ahmes, wie näherungsweise die Fläche eines Kreises berechnet werden kann, in dem man ihn einem Quadrat einbeschreibt. Das Lösungsverfahren verstehen wir heute als Annäherung an die Kreiszahl π.

Ahmes gibt das Verhältnis eines Kreises zu einem umschriebenen Quadrat mit $\frac{64}{81}$ an. Der genaue Wert beträgt $\frac{\pi}{4} = 0{,}785 \ldots = \frac{63{,}61}{81}$. Der Fehler beträgt also nur ca. 0,6%.

Es gibt zwei wichtige Vermutungen, wie man auf diese Genauigkeit kommen könnte.[25] Beide erreichen aber nicht das Verhältnis $\frac{64}{81}$. Die erste stammt von dem Münchner Mathematik-Historiker Kurt Vogel; die zweite von dem Aachener Mathematiker Hermann Engels[26]. Vogel promovierte über den Papyrus Rhind. Er war aber auch ein Pionier zur babylonischen Mathematik.[27] Außerdem hat er

[25] Herrmann nennt insgesamt fünf Interpretationen. Neben Vogel und Engels haben Gillings, Robins u. Shute, sowie Gerdes darüber publiziert. Ebenda, S. 92-97

[26] https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0315086077901045

[27] Siehe Vogel, Kurt: Vorgriechische Mathematik II: Die Mathematik der Babylonier. Schroedel, Hannover und Schöningh, Paderborn 1959.

sich mit Mathematik-Literatur der Renaissance auseinandergesetzt. Er publizierte eine Übersetzung von *Al-Chwarizmis Algorismus,* dem frühesten islamischen Rechenbuch mit Dezimalziffern.

Vogel interpretierte die grobe Zeichnung als Achteck und suchte nach einem entsprechenden Lösungsweg. Der entsteht, wenn ein Kreis in ein Quadrat eingepasst wird. Dieses wird in 3 × 3 quadratische Felder eingeteilt und jedes Feld entsprechend in 9 kleine Quadrate. Über das entstehende Gitter von insgesamt 9 × 9 = 81 quadratischen Zellen kommt Vogel zur Zahl 81 im Nenner.

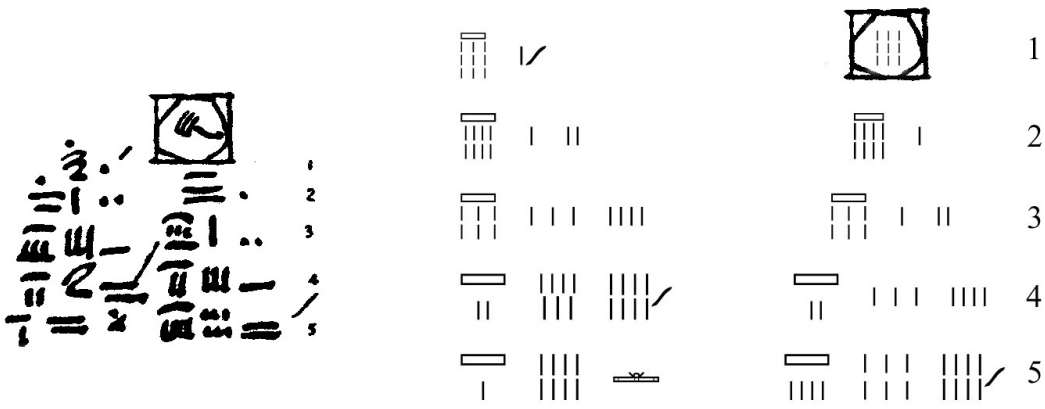


Abb. 8: Transkription dieser Zeilen unter der Skizze zum 48. Problem

Wenn man vier Dreiecke an den Ecken abschneidet, bleibt ein Achteck übrig (blaue Linie). Es hat die Fläche von 63 Zellen und ist fast so groß wie der Kreis.

Engels war sicherlich bewusst, wie schwer ein Kreis mit einem Binsenpinsel und Rußtusche auf Papyrus gezeichnet werden kann. Er konzentrierte sich auf die Frage nach einem Quadrat mit gleicher Fläche wie der Kreis. Es ist die uralte Frage nach der Quadratur des Kreises. Dabei war bekannt, dass den ägyptischen Baumeistern maßstabsgerechte Planzeichnungen über Gitterpunkte geläufig waren. Dazu wird ein großes gegebenes Quadrat mit 8x8 Planquadraten bedeckt. Ein Kreis wird in dieses orthogonale Gitter so eingezeichnet, dass er die acht Gitterpunkte schneidet, die die Seiten des Quadrats jeweils in vier Teile schneiden. Dabei wird ein zweites Quadrat (grau gezeichnet) definiert, dessen Fläche etwa so groß wie die Kreisfläche erscheint. Es „passt“ aber auch bei Engels nicht ganz. Die Seitenlänge des grauen Quadrats kann über den Durchmesser des Kreises bestimmt werden.

$$2\sqrt{4^2 + 2^2} = 2\sqrt{20} = \sqrt{80} = 8{,}944\ldots$$

Statt $\frac{64}{81}$ wäre nach der Erklärung von Engels $\frac{64}{80}$ im Papyrus zu erwarten.

Die Abbildungen 4 – 8 zeigen, wie mühsam die hieratische Schrift zu entziffern und über Transkriptionen formal lesbar gemacht werden muss. Erst dann kann

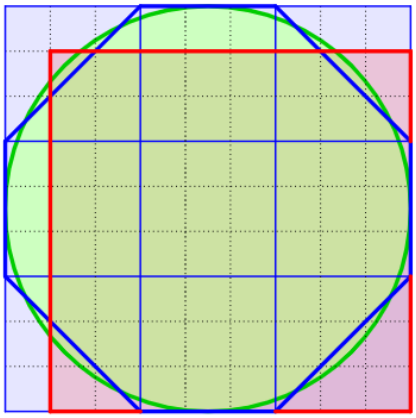


Abb. 9: Näherungsverfahren des Ahmes im Papyrus Rhind (Vermutung nach Vogel)

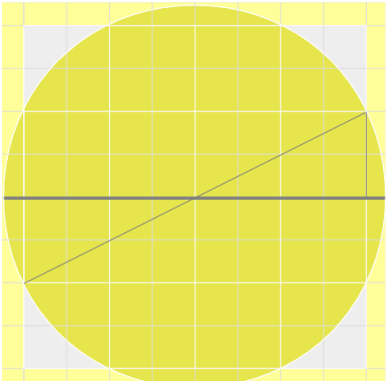


Abb. 10: Näherungsverfahren des Ahmes im Papyrus Rhind (Vermutung nach Engels)

man sich über die mathematischen Inhalte Gedanken machen, die ebenfalls noch Interpretationsspielräume offenlassen, wie die Deutungsversuche zweier geachteter Forscher zeigen.

Grundrechenarten

Ägyptische Mathematiker haben sich umständlich im Sinne der „*Regula falsi*“ an den Lösungsweg herangetastet. Es erinnert ein wenig an das Newton-Verfahren.[28] Ein erster Näherungsschritt dient durch Iteration zu weiteren Näherungen, bis eine hinreichende Genauigkeit erzielt wurde.

Hier ein Beispiel[29] aus dem Papyrus Rhind: Es ist die Aufgabe RMP #24; eine lineare Gleichung.

Ein Haufen und sein Siebentel ergibt 19.

In moderner Schreibweise ist $x + \frac{1}{7}x = 19$

1	8
2	16
$\overline{2}$	4
$\overline{4}$	2

[28] Die Regula falsi war bis zur Renaissance das Verfahren zum Lösen von linearen Gleichungen der Form $ax - b = 0$. Erst dann standen algebraische Methoden zur Verfügung. Das Newtonverfahren, auch Newton-Raphson-Verfahren, ist in der Mathematik ein häufig verwendeter Approximationsalgorithmus zur numerischen Lösung von nichtlinearen Gleichungen und Gleichungssystemen. Quelle: Wikipedia

[29] Fast wörtlich aus Herrmann, ebenda, S. 101-102

$\overline{8}$	1
$2\overline{4}\overline{8}$	19

Die historische Lösung (nach der *Regula falsi*) mit dem Startwert 7 lautet:

Nimm 7, so ergibt sich $7(1\frac{1}{7}) = 8$. Gesucht ist also ein Vielfaches von 8, das 19 ergibt. (Brüche, genauer Stammbrüche, werden mit Überstrich geschrieben).

Die Division 19 ÷ 8 liefert $(2\,\frac{1}{4}\frac{1}{8})$. Mit diesem Wert muss 7 vervielfacht werden.

1	$2\overline{4}\overline{8}$
2	$4\overline{2}\overline{4}$
4	$9\overline{2}$
7	$16\overline{2}\overline{8}$

Der Haufen ist somit $(16\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{8})$. Hier wird die *Regula falsi* mit 7 als Probewert verwendet. Diese sogenannten Hau- oder Aha-Rechnungen sind wahrscheinlich erstmals in Ägypten entstanden. Hau kommt von ägyptisch „h“ und steht sozusagen für das „x“ in einer linearen Gleichung. Das wird in Aufgaben gerne „Haufen“ genannt. Man kann diesen Typ Rechnungen durchaus als „Exportschlager“ der Ägypter in die frühe griechische Mathematik verstehen.

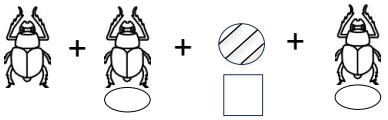
Erst viel später, etwa im Jahr 825, wurden durch einen arabischen Mathematiker, Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi, systematisch Lösungsverfahren durch Ergänzen und Ausgleichen beschrieben. Im Buchtitel al-Kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-ʾl-muqāba steckt das Wort „Algebra“, was auch im lateinischen Titel *Ludus algebrae almucgrabalaeque* zum Ausdruck kommt.[30] Aus dem Autorennamen „al-Chwarizmi“ wurde der Begriff „Algorithmus“. al-Chwarizmi kannte mit Sicherheit griechische Autoren und stützte sich auf den indischen Gelehrten Bramagupta. Im damaligen „Haus der Weisheit“ in Bagdad wurde somit zwischen indischer und abendländischer Mathematik eine Brücke geschlagen.

Es wurde bereits auf die Bedeutung von Sinnzeichen/Determinativen in der Schrift hingewiesen. Für mathematische Texte sind indirekte Bezeichnungen über Determinative noch einmal schwieriger zu interpretieren.[31] So wird „subtrahieren“ als „herausgehen“ bezeichnet; „addieren“ als „hineingehen“. Der

[30] Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Hisab_al-dschabr_wa-l-muqabala
[31] Die Beispiele stammen aus Vogel, Kurt; Vorgriechische Mathematik, Teil 1, Vorgeschichte und Ägypten, S. 25

Lautwert ist „*per*“ oder „par“[32], wie beim Wort „Haus“, dargestellt als Grundriss  oder mit dem Hinweis auf Eingang oder Ausgang . Je nach Zusammenhang reicht das Sinnzeichen  oder man schreibt es ausführlich phonetisch, aber auch ergänzt um das Sinnzeichen für „gehen “.

Das Ergebnis einer Rechenaufgabe wird mit dem Zeitwort „werden“, ägyptisch „*cheper*“, bezeichnet. Der Skarabäus (Mistkäfer, Glückskäfer)  hat denselben Lautwert „chpr“. Man kann deshalb schreiben

 (= ch + p + chpr + r), oder kürzer  (= ch + pr)

Man erinnere sich: Die Hieroglyphe  (Brunnenschacht) spricht sich wie das ch in „Da***ch***“ und gilt als Ein-Konsonantenlaut. Das „per“ (per oder par, siehe Anmerkung) steht für „Haus“. Dieses Beispiel zeigt die unterschiedlichen schriftlichen Darstellungsweisen eines Ausdrucks oder gar nur eines Wortes. Sie wirken sich im abstrakten Kontext der Mathematik besonders aus.

Weiteres Beispiel: Pyramide (ägyptisch „mer“), geschrieben 

Der „*mr“* steht scheinbar als 2-Konsonantenlaut auch für Meißel(?) (Hieroglyphe offen), es folgt m + r sowie die Pyramide als Bild mit Sockel als Deutzeichen.

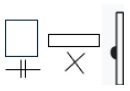
Auch hier sind unterschiedliche Schreibweisen bekannt.



(m + mr + r) oder (m + r) oder nur die Pyramide

Die Ägypter hatten keinen speziellen Begriff für „Dreieck“ oder gar eine Dreieckslehre. Sie benutzten den Begriff „*seped*“, was manchmal als „spitz zulaufend“ übersetzt wird. 

Der Hieroglyphen-Ausdruck setzt sich aus s + p + d und dem Determinativ Δ zusammen und besteht somit aus „Buchstaben“.

Auch der abstrakte Begriff „teilen“ (*pesesch*) hat keinen Eigennamen und setzt sich aus den „Buchstaben“ (p + s + sch) zusammen. Die gekreuzten Stäbe sind ebenso als Deutzeichen zu verstehen, wie die zusammengerollte Schriftrolle am Schluss. Die Stäbe 

[32] par-aa bedeutet „Großes Haus“. Daraus leitet sich der Begriff „Pharao“ ab, der sich bis heute erhalten hat.

verdeutlichen, dass ein fortgesetztes Halbieren oder Teilen einen Rest ergibt, so dass kein wirklicher Abbruch vorliegt. Die Schriftrolle hebt ebenso den Vorgang als „Division“ auf eine abstrakte Ebene.

Zahlsysteme und Maßsysteme

Eine abstrakte Mathematik darf man aber nicht erwarten. Die Lust der Griechen an wissenschaftlichen Erkenntnissen ohne unmittelbaren Anwendungsbezug war den Ägyptern und ebenso den Babyloniern weitgehend fremd. Ergebnisse bezogen sich immer auf Zahl- und Maßsysteme. Um es zu betonen: Auch der

Wert	Hieroglyphe		Hieratisch	Name	Umschrift	Aussprache
1	𓏺		𓆑	𓄿	*wꜥ– (w / it)*	wa
2	𓏺𓏺		𓅱	𓇋	*sn– (wy / ty)*	senu
3	𓏺𓏺𓏺		𓅱	𓅓	*ḫmt– (w / t)*	chemet
4	𓏺𓏺 𓏺𓏺		𓅱	𓂧	*fd– (w / t)*	fedu
5	𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺		𓅱	𓂋	*di– (w / t)*	diu
6	𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺		𓅱	𓊪	*sḫs– (w / t)*	seresu
7	𓏺𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺		𓅱	𓊃	*sfḫ– (w / t)*	sefech
8	𓏺𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺𓏺		𓅱	𓎛	*ḫmn– (w / t)*	chemenu
9	𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺 𓏺𓏺𓏺		𓅱	𓆼	*psḏ– (w / t)*	pesedj

Abb. 11: Die ersten 9 Zahlen. Eine Null gab es nicht. Die Aussprache ist teils ungewiss, da es keine Vokale gab.

Zahlbegriff hatte einen konkreten Realitätsbezug. Das zeigen die verwendeten Hieroglyphen bzw. davon abgeleitet die hieratischen Schriftzeichen.

Hier die weiter oben, im Zusammenhang mit der Hieroglyphe „Rest 0“, angesprochene Liste mit den Zehnerpotenzen.

0	1	10	100	1.000	10.000	100.000	1.000.000
𓆑	𓏺	𓎆	𓍢	𓆼	𓂭	𓆐	𓁨

Abb. 12: „Rest 0“ und ägyptische Zahlzeichen für Zehnerpotenzen

1 | Merkstrich, stilisierter Zählfinger

10		Bügel oder Rindsgespann
100		Strick/Messstrick?, Seilschlinge
1000		Lotosblume
10 000		großer Finger entspricht „große Eins“
100 000		Kaulquappe (ursprünglich „unzählig“)
1 000 000		Heh (Gott der Unendlichkeit)

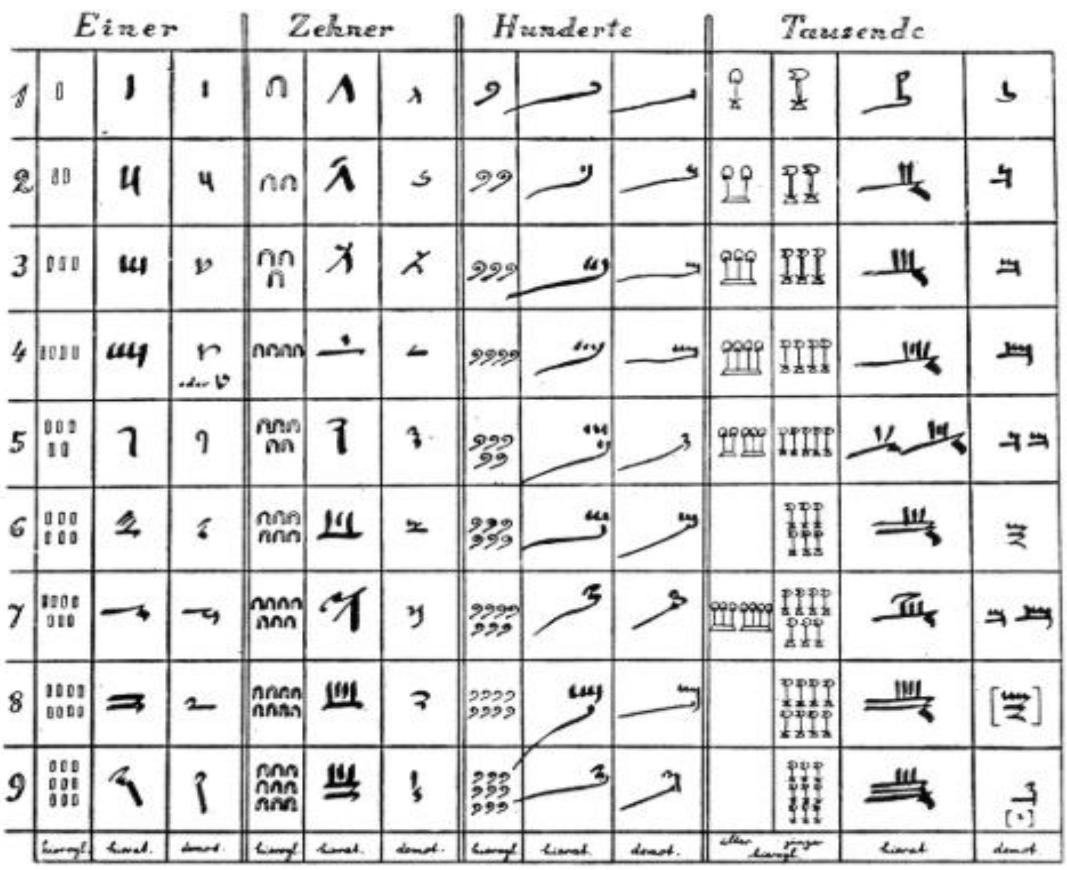


Abb. 13: Zum Vergleich eine Tabelle mit Hieroglyphen, hieratischer und demotischer Schrift

Die meisten schriftlichen Überlieferungen sind nicht in Hieroglyphen geschrieben. In Hieroglyphen wurden Texte von herausragender Bedeutung verfasst – also in Tempeln, Gräbern oder Denkmälern, wie z.B. Obelisken. Sie waren für Gebrauchstexte aber viel zu umständlich und aufwändig. Hieroglyphen konnten sowohl von rechts nach links als auch von links nach rechts geschrieben sein. Aus ästhetischen, symmetrischen Gründen, z.B. an Türöffnungen, konnte sogar beides vorkommen.

In der Verwaltung wurde vorwiegend hieratisch geschrieben. Das Schreibmedium war in der Regel Papyrus, seltener Ostraka (Tonscherben). Hieratisch wurde von rechts nach links geschrieben. Mathematische Texte

liegen vorwiegend in hieratisch vor. Später ab etwa dem Jahr 650 v. Chr. kam noch die demotische Schreibweise dazu, die bis ca. 450 n. Chr. Verwendung fand. Zu nennen ist noch die koptische Sprache und Schrift. Sie entstand ab dem 2. Jahrhundert n. Chr. und benutzte das griechische Alphabet plus einiger Sonderzeichen. Sie wurde im 12. Jahrhundert durch das Arabische abgelöst. Als Erstsprache ist Koptisch ausgestorben, aber koptische Christen verwenden Sprache und Schrift für liturgische Zwecke.
Der berühmte Stein von Rosette, der entscheidend zur Entzifferung der Hieroglyphen durch Jean-François Champollion 1822 führte, besteht aus einem identischen Text in Hieroglyphen, Altgriechisch und Demotisch. Demotisch entwickelte sich, abgeleitet vom Hieratischen, von einer Kanzleischrift zur Gebrauchsschrift. Sie wird auch von rechts nach links geschrieben.

Ganze (positive) Zahlen wurden nach dem Dezimalsystem additiv geschrieben:

Beispiel für die Zahl 27.529

zwei Zehntausenderzeichen: 

sieben Tausenderzeichen: 

fünf Hunderterzeichen: 

zwei Zehnerzeichen:

und neun Einerzeichen: 

 = 27.529

Beim *heqat*-Hohlmaß wurde bereits auf die Bedeutung des Horus-Auges hingewiesen.

Die Aufgabe RMP #64 nimmt diesen Gedanken auf:

Wenn dir gesagt wird, teile 10 heqat Gerste auf 10 Männer auf, sodass die Differenz der Anteile je $\frac{1}{8}$ *ist. Wie viel erhält jeder?*

Lösungsweg im Papyrus Rhind:

Nimm den Mittelwert 1 *heqat*. Nimm 1 von 10, es bleibt 9. Die Differenz durch 2 geteilt ergibt $\overline{16}$. Vervielfache mit 9, dies macht $\overline{2}\,\overline{16}$. Addiere dies zum Mittelwert. Subtrahiere davon je $\overline{8}$ für jeden Mann. Das ergibt die Folge:

(1 $\overline{2}\,\overline{16}$; 1 $\overline{4}\,\overline{8}\,\overline{16}$; 1 $\overline{4}\,\overline{16}$; 1 $\overline{8}\,\overline{16}$; 1 $\overline{16}$; $\overline{2}\,\overline{4}\,\overline{8}\,\overline{16}$;

$\overline{2}\,\overline{4}\,\overline{16}$; $\overline{2}\,\overline{8}\,\overline{16}$; 1 $\overline{4}\,\overline{8}\,\overline{16}$; $\overline{2}\,\overline{16}$;)

Bei der Lösung treten nur Brüche des Horus-Auges auf; also Stammbrüche mit Zweierpotenzen im Nenner, nach denen ein *heqat*-Hohlmaß kalibriert ist. Damit ist ein ägyptischer „Scheffel“ sofort für die praktische Umsetzung der Aufgabe geeignet.

Wo ein Scheffel eine zu kleine Einheit darstellte, wurde der Doppelscheffel und Vierfachscheffel verwendet. 20 einfache *heqat* war ein Sack.

Als Längenmaß war die „königliche“ Elle (ca. 52,3 cm) die Basis. Sie betrug 7 Handbreiten = 28 Finger, wobei die Handbreite 4 Finger ist. 1 Rute („*Chet*“) = 100 Ellen.

Für die Vermessung des Landes nach den regelmäßig wiederkehrenden Nilüberschwemmungen war das wichtigste Flächenmaß die Quadratrute („*Setat*“, ). Ihre Teile $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$ hatten besondere Namen und Zeichen (z.B. $\frac{1}{8}$ = ). Der *Setat* oder *Setjat* soll noch heute in Gebrauch sein.

Waagen mit entsprechenden Gewichtssätzen waren sehr früh in Gebrauch. Eine Waage aus vordynastischer Zeit (ca. 3500 v. Chr.) ist sogar erhalten geblieben. Die Gewichtseinheit, die auch in mathematischen Texten verwendet wurde, war 1 *Deben* (ca. 91 g) = 10 *Qite.*

Die Einteilung des Tages in 12 Tag-Stunden und 12 Nacht-Stunden – von je nach Jahreszeit wechselnder Länge – verdanken wir den alten Ägyptern. Das Jahr bestand aus 12 Monaten zu 30 Tagen plus 5 Zusatztagen. Das bürgerliche Jahr differierte schnell vom astronomischen Jahr, aber der Jahresanfang war fest definiert. Er war Mitte Juli, wenn Sirius („Sothisstern“) kurz vor Sonnenaufgang wieder sichtbar ist.

Multiplikation

Im folgenden Abschnitt wird anhand einer einfachen Multiplikation Schreibweise und Interpretation verdeutlicht. Es zeigt deutlich, dass die Multiplikation aus fortgesetzter Addition entstanden ist.

\1	25
2	50
4	100
\8	200
16	400
\32	800
	1025

41 x 25 = 1025

Genauer muss man sagen, dass die ägyptische Multiplikation auf dem „*Prinzip der summierten Verdoppelung*“[33] beruht. In der ersten Spalte beginnt man mit der Eins und verdoppelt in Zweierpotenzen, bis der erste Faktor unterschritten ist. In der zweiten Spalte wird der zweite Faktor jeweils verdoppelt. In der ersten Spalte muss man die Zweierpotenzen finden und markieren, deren Summe den ersten Faktor ergeben (1+8+32=41). Die zugehörigen Vielfachen des zweiten Faktors ergeben summiert das gesuchte Produkt (25+200+800=1025).

[33] Formulierung von Herrmann und Beispiel 41x25, ebenda, S. 76f

Das Fachwort „Hinzulegen“ wird bei beiden Rechenarten verwendet. Das Beispiel stammt aus dem Papyrus Rhind und ist die 44. Aufgabe (RMP #44).[34]

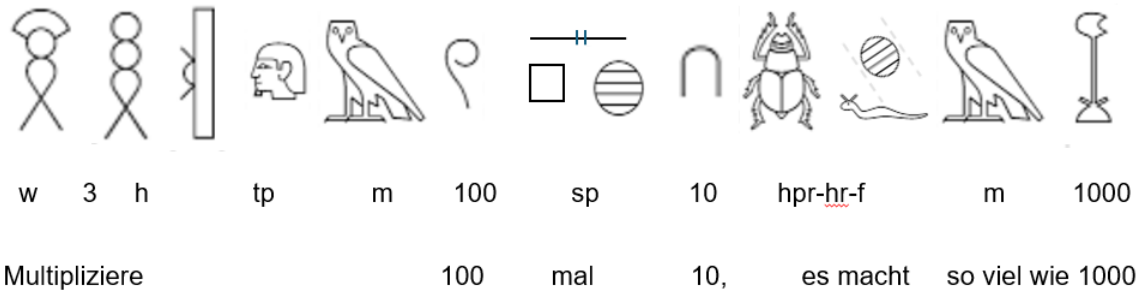


Abb. 14: Hieroglyphen-Schreibweise, Lesart und Interpretation einer Multiplikation.

tp m 100 bedeutet „lege hin“, also einzelne Fälle/Portionen und beginne mit 100. „tp“ steht im Ägyptischen für Kopf, Anfang, daher die Kopf-Hieroglyphe (U+13076).

Division

Vollkommen analog verläuft die Division als Umkehrung der Multiplikation. Hier ist ein ganzzahliges Beispiel 195 : 15 gewählt. Aus der Reihe der Teilprodukte

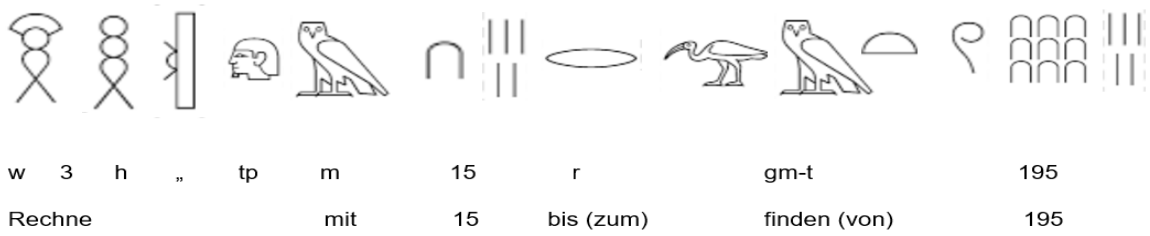


Abb. 15: Beispiel einer aufgehenden Division ohne Bruchrechnung

muss der Dividend zusammengesetzt werden. Die verschiedenen Multiplikatoren werden mit einem Merkstrich versehen. Die Summe ergibt dann den gesuchten Quotienten. Sollte die Rechnung nicht „aufgehen“, muss die Bruchrechnung zum Einsatz kommen.

Nebenstehend[35] rechts das Beispiel einer Division mit Rest am Beispiel 19 : 8 und links ohne Rest am Beispiel 63 : 7 = 9.

In sexagesimaler Schreibweise gilt somit:

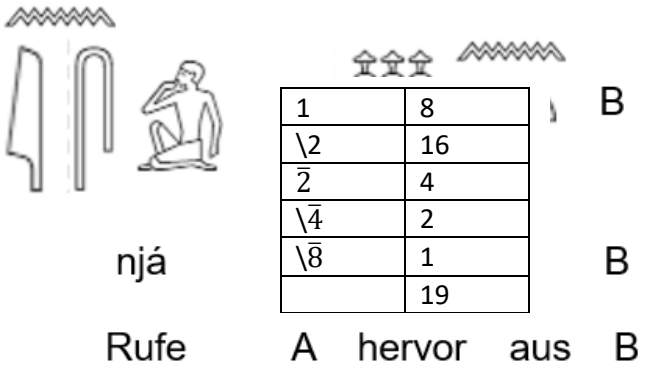
$$19 : 8 = 2\ \overline{4}\ \overline{8}$$

[34] Dieses und die folgenden Hieroglyphen-Beispiele zur Division stammen aus K. Vogel, Vorgriechische Mathematik, S. 31-33, RMP steht für Rhind mathematical papyrus, gefolgt von Aufgabennummer, z.B. #44.

[35] Beide Tabellenbeispiele von Herrmann, ebenda, S. 80-81

Wie in jeder komplexen Sprache und Schrift gibt es mehrere Ausdrucksformen für den gleichen Vorgang. Ein zweites Fachwort für die Division A : B heißt „hervorrufen oder herausrufen“. Im Beispiel 195:15 müsste 195 aus 15 herausgerufen werden. Dies geschieht durch das auf dem Divisor 15 aufgebaute Multiplikationsschema. Das Fachwort „njá“ mit dem Deutzeichen des rufenden Mannes hat also auch die erweiterte Bedeutung „rechnen“. Daraus spricht eine gewisse Hochachtung vor dem Dividieren.[36]

\1	7
2	14
4	28
\8	56
	63



1	8
\2	16
$\overline{2}$	4
$\backslash\overline{4}$	2
$\backslash\overline{8}$	1
	19

Abb. 16: Andere Ausdrucksform für die Division



Abb. 17: Ausdruck für „der Rechner“

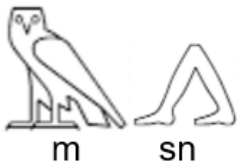


Abb. 18: „Im Vorübergehen“

Es ist auch in der Schrift für die Ägypter die „hohe Kunst“ des Rechnens.

Potenzieren und Wurzelziehen:

Aus den überlieferten Papyrus-Texten lässt sich erkennen, dass zumindest zweite und dritte Potenzen beherrscht wurden, auch wenn keine eigenen Fachwörter dafür existierten. So ist Quadratfläche und Würfelinhalt bekannt. Im Moskauer Papyrus taucht sogar ein Fachwort für „Quadrieren“ auf. Es heißt da: „Mache diese 2 im Vorübergehen, es macht 4.“ Der Moskauer Papyrus (MMP) enthält eine für die damalige Zeit durchaus anspruchsvolle Berechnung des Volumens eines quadratischen Pyramidenstumpfes (MMP #14).[37]

$$V = (a^2 + ab + b^2) \cdot \frac{h}{3}$$

[36] Auch wir sprechen bei komplizierten Sachverhalten vom „ausdividieren müssen“.
[37] Siehe Vogel, Vorgriechische Mathematik, Bd, 1, S. 71. Vogel spekuliert, dass es sich bei der Abbildung um einen Kornspeicher gehandelt haben könnte. . Herrmann nennt auch die 10. Aufgabe (MMP #10) als einzigartig. Es könnte sich um die Lösung für das Volumen eines Halbzylinders handeln. (ebenda, S. 124)

Bruchrechnen:

In Abb. 2 wurde an das Horus-Auge erinnert. Das Hohlmaß *heqat* wurde nach Stammbrüchen kalibriert, die Quadratzahlen im Nenner tragen ($\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots$). Der Sage nach verlor Horus, der Himmelsfalke und Schöpfergott, im Kampf mit Seth, dem Gott der Wüsten und Stürme mit zweifelhaftem Ruf, sein linkes Auge,  das *udjat*-Auge.[38] Der Gott der Weisheit, *Thot*, heilte das Auge zu 63/64-tel.

Doch damit erschöpfte sich das mathematische Wissen der alten Ägypter um Brüche und Bruchrechnen bei weitem nicht. Da Divisionen eben nicht immer aufgehen, erweiterten sie den Zahlbegriff hin zu Brüchen auf für sie typische Weise. Sie unterscheidet sich grundlegend von den übrigen alten Kulturen in der Antike, die auch keine Dezimalbrüche kannten.

Die einfachste Einteilung findet sich in Abb. 2. Die Bestandteile ½ , ¼ , usw. mit ihren Hieroglyphen-Bezeichnungen können zum Horus-Auge zusammengesetzt werden und lassen sich deshalb leicht merken. Es sind aber besondere Stammbrüche, nämlich mit Quadratzahlen im Nenner. Sie hatten besondere Bedeutung im Alltag, da sie das für die tägliche Ernährung wichtige Hohlmaß für Getreide, den Scheffel (*heqat*) kalibrierten. Der oft benötigte Bruchteil $\frac{1}{320} = 1\,ro$. Deshalb war es oft nötig „schöne“ Brüche in Horus-Augen Brüche umzuwandeln:

$$\frac{1}{10} = \frac{1}{10} \cdot \frac{64}{64} = \frac{60+4}{640} = \frac{6}{64} + \frac{4}{640} = \frac{2+4}{64} + \frac{2}{320} = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + 2\ ro.$$

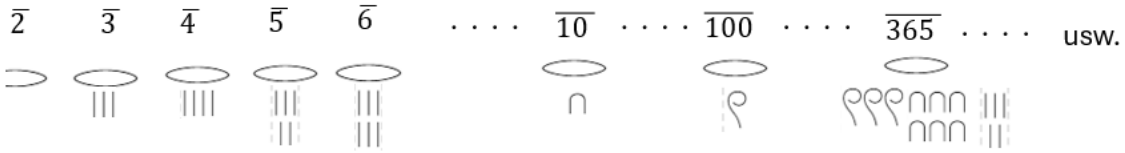


Abb. 19: Sehr übersichtliche Schreibweise der Stammbrüche

Weitere Stammbrüche werden mit dem Zahlenwert im Nenner mit dem Bildzeichen des „Mundes“  (Mund = Teil) geschrieben, um sie von der positiven ganzen Zahl zu unterscheiden.

Und jetzt kommt die besondere Idee des ägyptischen Bruchrechnens. Die Stammbrüche plus der Bruch ⅔ bilden die Elemente, um alle Aufgaben zu lösen, für die wir die allgemeine Form $\frac{m}{n}$ benötigen. Dabei blieben Brüche mit einem Zähler größer 1 außen vor. Die „Ganzen“, also der ganzzahlige Anteil

[38] *Udjat* steht für heil, intakt, unversehrt, manchmal auch Mondauge genannt.

dieser Zahlen, wurde herausgezogen. Geschrieben wurde ⅔ = $\frac{1}{1\frac{1}{2}}$ in Hieroglyphen

Die Ägypter beschränkten sich also auf die Stammbrüche plus ⅔ und konnten damit im Prinzip alle Anforderungen erfüllen. Hilfreich ergänzt wurde dieses Vorgehen durch einige Hilfsgrößen. So kannte man den Komplementbruch, der den Stammbruch zur vollen Einheit ergänzt. Allerdings kannte man weder Bruchstrich noch Zähler. Man sprach von drei Teilen, wenn man $\frac{3}{4}$ meinte, die $\frac{1}{4}$ zu 1 ergänzen. Die „zwei Teile“ sind also immer 2 Drittel. Vogel weist auf Parallelen zu anderen antiken Völkern hin. So ist $\frac{2}{3}$ im Babylonischen „die beiden Münder“, im Hebräischen „die beiden Hände“ und bei Homer „die zwei Teile“.

Einem allgemeinen Bruch $\frac{m}{n}$ konnte man nur dadurch entgehen, wenn man ihn in eine Reihe von Stammbrüchen zerlegte: $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \cdots$

Die 2:n Tabelle

Der Rhind-Papyrus zeigt am Anfang eine 2:n-Tabelle als Hilfsmittel zur Zerlegung für alle ungeraden Nenner von n= 3 bis 101. Sie wurde von O. Neugebauer im Anhang ab S. 45 ausführlich analysiert. Vogel hat sie in ihrem Grundgerüst ab S. 39 (Bd. 1) abgedruckt. Diese Tabelle ist zweifellos ein „Juwel“ unter den mathematischen Funden in Ägypten. Gleich nach der Erstveröffentlichung des Papyrus Rhind im Jahr 1877 hat man nach einem einheitlichen Verfahren für die 2:n-Tabelle gesucht. Verschiedene Kriterien kann man anlegen bzw. fordern:

- Geringe Gliederzahl der Stammbruchsumme
- Möglichst großer Hauptbruch, also kleiner Nenner
- Bei Summe von mehr als zwei Gliedern ein möglichst großer Restbruch, also kleiner Nenner

Tafel I.

Die 2/*n*-Tabelle.[1]

n	2/*n*	Zerlegung von 2	
		Hauptglied	Ergänzungsterm
3	$\overline{2}+\overline{6}$ [2]	$\overline{2}$	$1+\overline{\overline{2}}$
5	$\overline{3}+\overline{15}$	$\overline{3}$	$1+\overline{\overline{3}}$
7	$\overline{4}+\overline{28}$	$\overline{4}$	$1+\overline{2}+\overline{4}$
9	$\overline{6}+\overline{18}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
11	$\overline{6}+\overline{66}$	$\overline{6}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{6}$
13	$\overline{8}+\overline{52}+\overline{104}$	$\overline{4}+\overline{8}$	$1+\overline{2}+\overline{8}$
15	$\overline{10}+\overline{30}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
17	$\overline{12}+\overline{51}+\overline{68}$	$\overline{3}+\overline{4}$	$1+\overline{3}+\overline{12}$
19	$\overline{12}+\overline{76}+\overline{114}$	$\overline{4}+\overline{6}$	$1+\overline{2}+\overline{12}$
21	$\overline{14}+\overline{42}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
23	$\overline{12}+\overline{276}$	$\overline{12}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{4}$
25	$\overline{15}+\overline{75}$	$\overline{3}$	$1+\overline{\overline{3}}$
27	$\overline{18}+\overline{54}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
29	$\overline{24}+\overline{58}+\overline{174}+\overline{232}$	$\overline{2}+\overline{6}+\overline{8}$	$1+\overline{6}+\overline{24}$
31	$\overline{20}+\overline{124}+\overline{155}$	$\overline{4}+\overline{5}$	$1+\overline{2}+\overline{20}$
33	$\overline{22}+\overline{66}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
35	$\overline{30}+\overline{42}$	$\overline{3}+\overline{6}$	$1+\overline{6}$
37	$\overline{24}+\overline{111}+\overline{296}$	$\overline{3}+\overline{8}$	$1+\overline{2}+\overline{24}$
39	$\overline{26}+\overline{78}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
41	$\overline{24}+\overline{246}+\overline{328}$	$\overline{6}+\overline{8}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{24}$
43	$\overline{42}+\overline{86}+\overline{129}+\overline{301}$	$\overline{2}+\overline{3}+\overline{7}$	$1+\overline{42}$
45	$\overline{30}+\overline{90}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
47	$\overline{30}+\overline{141}+\overline{470}$	$\overline{3}+\overline{10}$	$1+\overline{2}+\overline{15}$
49	$\overline{28}+\overline{196}$	$\overline{4}$	$1+\overline{2}+\overline{4}$
51	$\overline{34}+\overline{102}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
53	$\overline{30}+\overline{318}+\overline{795}$	$\overline{6}+\overline{15}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{10}$
55	$\overline{30}+\overline{330}$	$\overline{6}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{6}$
57	$\overline{38}+\overline{114}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
59	$\overline{36}+\overline{236}+\overline{531}$	$\overline{4}+\overline{9}$	$1+\overline{2}+\overline{12}+\overline{18}$
61	$\overline{40}+\overline{244}+\overline{488}+\overline{610}$	$\overline{4}+\overline{8}+\overline{10}$	$1+\overline{2}+\overline{40}$
63	$\overline{42}+\overline{126}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
65	$\overline{39}+\overline{195}$	$\overline{3}$	$1+\overline{\overline{3}}$
67	$\overline{40}+\overline{335}+\overline{736}$	$\overline{5}+\overline{8}$	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{20}$
69	$\overline{46}+\overline{138}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
71	$\overline{40}+\overline{568}+\overline{710}$	$\overline{8}+\overline{10}$	$1+\overline{2}+\overline{4}+\overline{40}$
73	$\overline{60}+\overline{219}+\overline{292}+\overline{365}$	$\overline{3}+\overline{4}+\overline{5}$	$1+\overline{6}+\overline{20}$
75	$\overline{50}+\overline{150}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
77	$\overline{44}+\overline{308}$	$\overline{4}$	$1+\overline{2}+\overline{4}$
79	$\overline{60}+\overline{237}+\overline{316}+\overline{790}$	$\overline{3}+\overline{4}+\overline{10}$	$1+\overline{4}+\overline{15}$
81	$\overline{54}+\overline{162}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
83	$\overline{60}+\overline{332}+\overline{415}+\overline{498}$	$\overline{4}+\overline{5}+\overline{6}$	$1+\overline{\overline{3}}+\overline{20}$
85	$\overline{51}+\overline{255}$	$\overline{3}$	$1+\overline{\overline{3}}$
87	$\overline{58}+\overline{174}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
89	$\overline{60}+\overline{356}+\overline{534}+\overline{890}$	$\overline{4}+\overline{6}+\overline{10}$	$1+\overline{3}+\overline{10}+\overline{20}$
91	$\overline{70}+\overline{130}$	$\overline{\overline{3}}+\overline{30}$	$1+\overline{5}+\overline{10}$
93	$\overline{62}+\overline{186}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
95	$\overline{60}+\overline{380}+\overline{570}$	$\overline{4}+\overline{6}$	$1+\overline{2}+\overline{12}$
97	$\overline{56}+\overline{679}+\overline{776}$	$\overline{7}+\overline{8}$	$1+\overline{2}+\overline{8}+\overline{14}+\overline{28}$
99	$\overline{66}+\overline{198}$	$\overline{2}$	$1+\overline{2}$
101	$\overline{101}+\overline{202}+\overline{303}+\overline{606}$	$\overline{2}+\overline{3}+\overline{6}$	1

1) Nach Peet [1], S. 37. Dieselben Werte, allerdings nur bis $n = 21$ nochmals in den Kahun-Papyri, Griffith [4], Pl. VIII, Zeile 1 bis 11.

2) Die Zerlegung $\overline{\overline{3}} = \overline{2} + \overline{6}$ habe ich nur der Vollständigkeit halber eingesetzt. Im Papyrus Rhind befindet sich an dieser Stelle nur $\overline{\overline{3}}$ angegeben (vgl. Peet [1], Pl. A; ebenso Kahun-Papyri, Griffith [4], Pl. VIII, Zeile 1).

Abb. 20: 2:n-Tabelle im Papyrus Rhind zur Stammbruchzerlegung (nach Neugebauer)

Als nicht zu komplexes Beispiel diene die Zerlegung von $\frac{2}{15}$. Es sind verschiedene Fälle für die Wahl des Hauptbruchs möglich. Die Zerlegung ist also nicht eindeutig. Man findet eine gewisse Präferenz für Nenner, die Teiler von 60 sind.

1) $\frac{2}{15} = \frac{1}{8} + \frac{1}{120}$

2) $\frac{2}{15} = \frac{1}{9} + \frac{1}{45}$

3) $\frac{2}{15} = \frac{1}{10} + \frac{1}{30}$

4) $\frac{2}{15} = \frac{1}{11} + \frac{7}{165}$

5) $\frac{2}{15} = \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

6) $\frac{2}{15} = \frac{1}{13} + \frac{11}{195}$

7) $\frac{2}{15} = \frac{1}{14} + \frac{13}{210}$

Die Fälle 4), 6) und 7) sind ungeeignet wegen einer zu großen Gliederzahl.
Der größte Hauptbruch steht in Fall 1; der größte Restbruch in Fall 5. Gewählt wurde aber in der Tabelle Fall 3. Scheinbar kam es bei dieser Wahl auf das

Divisionsschema an, mit dem man das „Herausrufen“ von 2 aus 15 begann. Wenn man den Hauptbruch gewählt hat, kann man alle Zerlegungen nach der Hilfszahlenmethode durchführen. Es scheint aber eine gewisse Willkür zu bleiben.[39]

Hier die vollständige 2/n-Tabelle (*n mod 2=1*) aus dem Papyrus Rhind:[40]

2/3=1/2+1/6	2/5=1/3+1/15	2/7=1/4+1/28
2/9=1/6+1/18	2/11=1/6+1/66	2/13=1/8+1/52+1/104
2/15=1/10+1/30	2/17=1/12+1/51+1/68	2/19=1/12+1/76+1/114
2/21=1/14+1/42	2/23=1/12+1/276	2/25=1/15+1/75
2/27=1/18+1/54	2/29=1/24+1/58+1/174+1/232	2/31=1/20+1/24+1/155
2/33=1/22+1/66	2/35=1/30+1/42	2/37=1/24+1/111+1/296
2/39=1/26+1/78	2/41=1/24+1/246+1/328	2/43=1/42+1/86+1/129+1/301
2/45=1/30+1/90	2/47=1/30+1/141+1/470	2/49=1/28+1/196
2/51=1/34+1/102	2/53=1/30+1/318+1/795	2/55=1/30+1/330
2/57=1/38+1/114	2/59=1/36+1/236+1/531	2/61=1/40+1/244+1/488+1/610
2/63=1/42+1/126	2/65=1/39+1/195	2/67=1/40+1/335+1/536
2/69=1/46+1/138	2/71=1/40+1/568+1/710	2/73=1/60+1/219+1/292+1/365
2/75=1/50+1/150	2/77=1/44+1/308	2/79=1/60+1/237+1/316+1/790
2/81=1/54+1/162	2/83=1/60+1/332+1/415+1/498	2/85=1/51+1/255
2/87=1/58+1/174	2/89=1/60+1/356+1/534+1/890	2/91=1/70+1/130
2/93=1/62+1/186	2/95=1/60+1/380+1/570	2/97=1/56+1/679+1/776
2/99=1/66+1/198	2/101=1/101+1/202+1/303+1/606	

Abb. 21: Vollständige 2/n-Tabelle

Systematische Betrachtung:

Für alle Stammbrüche gilt $\frac{1}{n} = \left(\frac{1}{n}\right) \cdot \frac{k-1}{k} + \left(\frac{1}{n}\right)\frac{1}{k}$.

Hier taucht die Beziehung zwischen Stammbruch und Komplementbruch auf, wobei jedes k geeignet ist, das den Komplementbruch zu einem Stammbruch macht. Das ist bei $k = n + 1$ immer der Fall. Es gilt allgemein:

[39] Vogel, Bd. 1, ebenda, S. 42
[40] Aus Herrmann, ebenda, S.83-84

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$

Da n ungerade ist, kann man verdoppeln und erhält

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)} + \frac{1}{n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

Schaut man sich die Tabelle an, so sieht man, dass für $n = 5, 7, 11\ und\ 23$ so verfahren wurde, aber nicht für die anderen.

Nimmt man aus $\frac{2}{n}$ den Stammbruch $\frac{1}{k}$ heraus, wobei k<n also $\frac{1}{k} > \frac{1}{n}$ ist. Dabei sollte dieser „Hauptbruch“ mehr als die Hälfte von $\frac{2}{n}$ ausmachen. Das scheint die Motivation der ägyptischen Rechner gewesen sein. Als „Restbruch“ bleibt dann $\frac{2k-n}{n \cdot k}$.

Die favorisierte Zerlegung war also

$$\frac{2}{n} = \frac{1}{k} + \frac{2k-n}{nk}$$

Dies wird auch von der 2:n-Tabelle bestätigt.

Ergänzt wird das Wissen um die ägyptische Bruchrechnung durch eine heute in London aufbewahrte Lederrolle aus der Hyksoszeit (13. bis 17. Dynastie, 1648–1550 v. Chr.), auf der sich ein Schüler in Stammbruchzerlegungen übt.[41]

Buchführung:

Die Buchführung im Alten Ägypten hat praktisch nichts mit dem zu tun, was wir heute in der Unternehmensführung unter diesem Begriff verstehen. Datiert man den Beginn des Alten Reichs von 3150 v. Chr. bis zur Spätzeit 664–332 v. Chr., so blickt man auf fast 3000 Jahre und damit auf ein fast beispiellos langlebiges Staatswesen. Durch den Nil und sein meist enges Niltal wurde die kulturelle und staatliche Identität zwar begrenzt. Aber nur durch eine in hohem Maße zentralisierte Verwaltung und Administration konnte die wirtschaftliche und militärische Macht gesichert werden. Diese Anforderung führte zu einer staatlich kontrollierten, hierarchisch organisierten Buchhaltung. Dabei gab es, bis auf die relativ kurze Spätzeit, keine Geldwirtschaft.

[41] The Journal of Egyptian Archaeology, Vol. XIII, 1927

Verwaltet wurden die Einnahmen und Ausgaben von standardisierten, durch Äquivalenzwerte gegeneinander umrechenbaren Naturalien, die aber trotzdem eine komplexe Dokumentation und Berechnung erforderten. Es gab kein kapitalistisch organisiertes Firmenwesen, sondern der Staat an sich bezog seine Existenz und Macht durch die ausgeklügelte Buchführung. Sowohl die schwer zu erlernende Schrift als auch die benötigte Mathematik erforderte eine gut ausgebildete Beamtenschaft. Schreiber waren also angesehene Beamte oder Priester. Priester mussten schreiben und rechnen können, aber die wenigsten Beamten waren auch Priester. Sie waren die Basis für das staatliche Handeln. Sie organisierten durch Dokumentation und darauf basierende Prozesse eine sogenannte „Redistributionswirtschaft“. Landwirtschaftliche Erzeugnisse (z.B. Gerste) oder Waren (z.B. Leinen) wurden gesammelt, dokumentiert und dann in Form von Rationen oder „Löhnen“ je nach Stand (Schreiber, Arbeiter, Priester) an das Volk verteilt. Diese hierarchisch organisierte Redistributionswirtschaft bildete das Fundament und den wirtschaftlichen wie sozialen Zusammenhalt des altägyptischen Staates, vor allem im Mittleren Reich. Vorläufer im Alten Reich war eine wesentlich unflexiblere zentralisierte Inventarverfolgung („Makro-Level-Aktivität“). Erst im Neuen Reich wurden die Aufzeichnungen und damit die Verwaltungseinheiten etwas dezentraler. Auch private Aufzeichnungen wurden gefunden. Sie entstanden in Verbindung mit aufwendigen Handelsgeschäften, in die keine staatlichen Institutionen involviert waren. Oder sehr reiche Personen beschäftigten Schreiber zur Verwaltung ihrer Liegenschaften.



Abb. 22: *Seschat*, Schutzgöttin der Buchführung

In der Spätzeit führte die Einführung der Münzwirtschaft zu einer Neuordnung des Wirtschaftssystems.

Trotz dieser Differenzierungen war das durchgängige Merkmal der altägyptischen Verwaltung die zentralisierte, administrative Kontrolle der Werteflüsse durch den Staat, repräsentiert durch den Pharao.

Das religiöse Patronat hatten die Gottheiten *Seschat* und *Thot*. *Thot* war der Gott des Wissens, Schreibens und Rechnens. *Seschat*[42] war dazu speziell die Schutzgöttin für die anspruchsvolle Kunst der Buchführung, aber auch des Schreibens, der Archive und des Ahnenkults.

Äquivalenzwerte waren vor allem Getreide (Gerste, Emmer) mit der Hohlmaßeinheit *heqat*.

[42] https://de.wikipedia.org/wiki/Seschat

Gewichtseinheit war der *Deben*, der oft für Kupfer oder Silber Verwendung fand (ca. 27,3 g). Der Gold-Deben war halb so schwer; der Blei-Deben doppelt. Er war aber auch Basis für die Umrechnung von Werten (z.B. einer Ziege oder eines Tisches).[43]

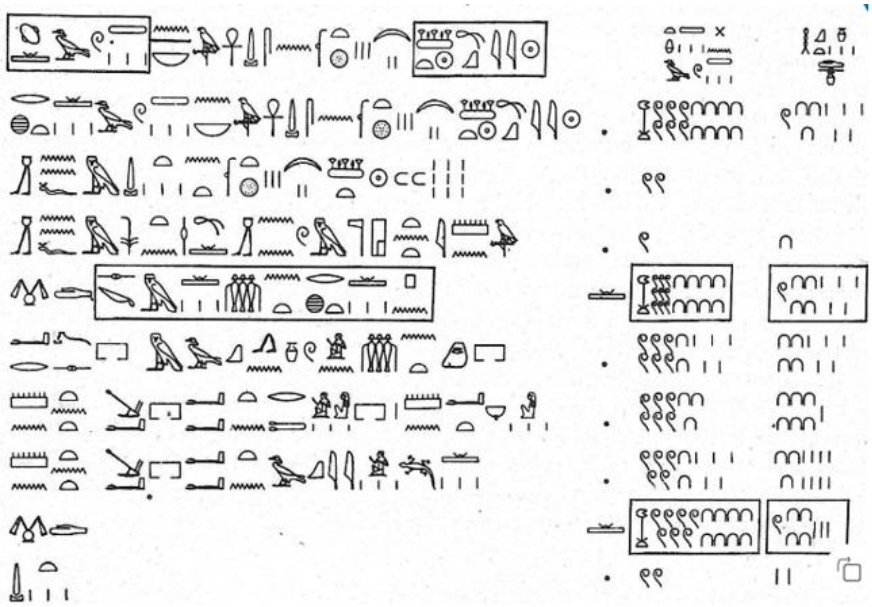


Abb. 23: Beispiel für eine Buchführung aus dem Papyrus Boulaq (XVIII, 31; aus A. H. Gardiner, Egyptien Grammar, Oxford 1927, S. 201, zitiert und abgebildet von Vogel, Bd. 1. S. 45-46)

Die Abbildung 23 und begleitender Text[44] zeigt ein Beispiel über Einnahmen und Ausgaben des Hofes an einem einzigen Tag, dem „letzten Tag“ des 2. Monats der Überschwemmungszeit im 3. Regierungsjahr eines Königs der 13. Dynastie. Bemerkenswert sind die formalen, strukturierten Merkmale mit Summenbildung und Rest als Übertrag für den nächsten Tag. Die umrahmten Textteile waren mit roter Tinte geschrieben.[45] Die Quelle ist der Papyrus Boulaq.

Verteilung:

Die Buchführung ist aufgrund der formalen Anforderungen durchaus anspruchsvoll. Rechnerisch erfordert sie aber im Wesentlichen nur Additionen und Subtraktionen. Wenn es um die Verteilung an Individuen geht (inklusive des Viehs), werden die Rechnungen komplizierter und erfordern ein solides Hintergrundwissen um Maße und Gewichte in Verbindung mit den wichtigsten Äquivalenzwerten, *heqat* und *Deben*. Die Grundstoffe, die oft benötigt wurden, waren Brot inkl. Getreide und Mehl, Fett bzw. Öl und Bier. In diesen Fällen war der *heqat* entscheidend und der für die Verteilung zuständige Beamte musste

[43] https://de.wikipedia.org/wiki/Alte_Maße_und_Gewichte_(Altes_Ägypten)
[44] Aus Vogel, Bd. 1, ebenda S. 45-46
[45] Interessanterweise enthält die Rechnung einen Additionsfehler.

den Scheffel und seine Kalibrierung in *Ro, Hin* und Horus-Augenteile gut kennen. Neben den Hau-Rechnungen waren diese Umrechnungen bei der Verteilungsverwaltung ein wichtiges „Lernfach“. Man nannte sie *Pefsu*-Probleme (gelesen *pesu*) und sie nahmen im Papyrus Rhind einen großen Raum ein (s.u.).

Ein Beispiel bildet die Aufgabe 81 im Papyrus Rhind[46]: Es heißt da

$\frac{2}{3}$ Scheffel ist $6\frac{2}{3}$ *Hin* (oder) ($\frac{1}{2}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{32}$) Scheffel + $3\frac{1}{3}$ *Ro*

$\frac{1}{3}$ Scheffel ist $3\frac{1}{3}$ *Hin* (oder) ($\frac{1}{4}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{64}$) Scheffel + $1\frac{2}{3}$ *Ro*

$\frac{1}{5}$ Scheffel ist 2 *Hin* (oder) ($\frac{1}{8}\ \frac{1}{16}$) Scheffel + 4 *Ro*

$\frac{1}{10}$ Scheffel ist 1 *Hin* (oder) ($\frac{1}{16}\ \frac{1}{32}$) Scheffel + 2 *Ro*

In Aufgabe 35 (Papyrus Rhind) wird eine Anleitung zur Verifizierung der Rechnung aufgezeigt. 1 Scheffel wird durch $3\frac{1}{3}$ geteilt.

Das ergibt $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$ Scheffel = 96 *Ro*. Die Richtigkeit kann man durch drei Proben feststellen.

1) 1 Scheffel: ($\frac{1}{5}+\frac{1}{10}$) Scheffel = $3\frac{1}{3}$
2) 320 *Ro* : 96 *Ro* = $3\frac{1}{3}$
3) Jetzt können die 96 *Ro* noch in Horusaugen-Teile dargestellt werden: 1 Scheffel: [($\frac{1}{4}\ \frac{1}{32}\ \frac{1}{64}$) Scheffel + 1 *Ro*] = $3\frac{1}{3}$

Tauschverkehr:

20% der Aufgaben im Papyrus Rhind und im Moskauer Papyrus beschäftigen sich mit sogenannten „*Pesu*“ Rechnungen. Das Wort kommt von „backen“, man kann es als „Backungszahl“ übersetzen. Das „*Pesu*“ gibt die Anzahl der Brote aus einem Scheffel Mehl wieder; sagt also etwas über den Mehlgehalt des Brotes aus. Ein Beispiel aus dem Rhind-Papyrus soll die Problematik erläutern.[47]

In RMP #69 werden aus $3\frac{1}{2}$ Scheffeln Mehl 80 Brote gebacken. Gesucht ist die Stärke (80 : $3\frac{1}{2} = 22\frac{2}{5}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{21}$) sowie der Mehlgehalt eines Brotes ($3\frac{1}{2}$ Scheffel : 80 oder 1120 *Ro* : 80 = 14 *Ro* = $\frac{1}{32}$ Scheffel + 4 *Ro*). Die Probe lautet: ($\frac{1}{32}$ Scheffel + 4 *Ro*)·80 = $3\frac{1}{2}$ Scheffel.

[46] Nach Vogel, Bd. 1, ebenda S. 47
[47] Nach Vogel, Bd. 1, ebenda S. 49

Analoge Umrechnung ist für das hochwertigere Emmer-Dattel-Bier zu machen, von dem ein Krug so viel wie $2\frac{1}{6}$ gewöhnliches Gerstenbier wert sind. Aber auch das kann kompliziert werden. Die Ägypter setzten Bier aus Brot mit Wasser an (ähnlich dem heute noch getrunkenen ostslawischen *Kwas*). Die Güte des verwendeten Brotes bestimmt auch die Qualität des Biers. Für einen Krug Gerstenbier der Stärke 2 war ein $\frac{1}{2}$ Scheffel Korn die Grundlage. Es gibt aber auch Doppelbier, Emmerbier und Bier, das durch Zusatz von zuckerhaltigen Früchten einen höheren Alkoholgehalt erreichte, z.B. Emmer-Dattel-Bier.
Im Moskauer Papyrus sind besonders verwickelte Aufgabenstellungen enthalten, die aufgrund der Vielzahl der Biersorten nicht vollständig interpretiert werden konnten. Im RMP #71 wurde auch eine Mischungsaufgabe gestellt. In einem Krug Bier der Stärke 2 wird ein $\frac{1}{4}$ durch Wasser ersetzt. Der Rechengang lautet: Mache den Krug zu Korn, entspricht $\frac{1}{2}$ Scheffel Korn. Subtrahiere davon ein Viertel, es bleiben $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ Scheffel. Dividiere 1 durch $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$, ergibt $2\frac{2}{5}=2{,}4$. Dies ist die Menge des verdünnten Biers, das $\frac{1}{5}=0{,}2$ weniger stark ist.

Löhne und Preise

Erst in der Ptolomäer-Zeit (ca. 305–30 v. Chr.) wurde Geld eingeführt. Vorher wurde eine reine Naturalienwirtschaft praktiziert. Löhne wurden in Form von Naturalien ausbezahlt, wobei vor allem Grundnahrungsmittel (Brot, Bier, Öl) die Umrechnungsbasis bildete. Für Sklaven musste der Herr sorgen.

Bei den privaten Tauschgeschäften galten im Prinzip die gleichen Umrechnungsfaktoren, wie sie in den Pesu- Rechnungen dargestellt wurden.

Bei staatlichen Bauprojekten, wie dem Pyramidenbau, wurden die zahlreichen Arbeiter gut ernährt.[48] Diese mittlerweile wissenschaftlich gut belegte Erkenntnis steht im Gegensatz zu früheren Meinungen.[49] Die Rekrutierung war wohl freiwillig und die Motivation war auch die eiweißhaltige Ernährung. Nach Schätzungen vom Forschungsleiter der Ancient Egypt Research Associates (AERA), Richard Redding, benötigten die Arbeiter für ihre schwere Arbeit 45-50 g Eiweiß pro Tag, das etwa zur Hälfte aus Fisch und Schaffleisch und zur anderen Hälfte aus Hülsenfrüchten bestand. Dies ist deutlich mehr als außerhalb der Pyramidenbaustelle dem einfachen Landvolk zur Verfügung stand. Ausgrabungen und Auswertungen von Schlachttierknochen rund um Giseh zeigten, dass rund 4000 kg Fleisch pro Tag verzehrt wurden.

[48] https://www.forumtraiani.de/verpflegung-pyramiden-arbeiter-vorbildlich/
[49] Kurt Vogel schreibt zur Ernährung der Arbeiter noch von Brot, Zwiebeln, Rettichen und Knoblauch (S. 50, Bd. 1, ebenda)

Algebra

Algebra in unserem Verständnis bzw. dem, was in der Renaissance entstanden ist, gab es nicht.[50] Immerhin können wir im Papyrus Rhind (RMP), im Moskauer Papyrus (MP) und im Bonner Papyrus (BP) Aufgaben finden, die über den praktischen Bezug hinausgingen und einen gewissen theoretischen Anspruch hatten. Sie führten auf die Lösung einer Unbekannten, einer Quantität oder „Haufen“. Dafür kommen zwei Bezeichnungen in Frage:

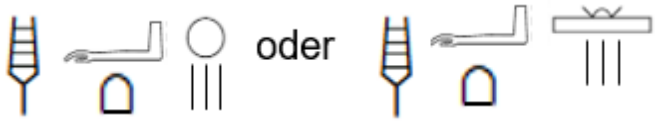


Abb. 24: Altägyptische Hieroglyphen für eine Unbekannte („Haufen“)

In beiden Fällen sieht man den Haufen als Deutzeichen. Über den drei Pluralstrichen steht im ersten Fall als konkretes Zeichen, wahrscheinlich ein Getreidekorn (MP). Im zweiten, jüngeren Fall ist die Buchrolle ein Deutzeichen für das Abstrakte (RMP und BP) ohne Hinweis auf einen konkreten Gegenstand. Nach Vogel ist dies ein Indiz dafür, dass man beginnt, den Übergang vom konkreten Haufen zum abstrakten „x“ zu vollziehen.

Die einfachsten Aufgaben stehen im MP. Sie laufen auf lineare Gleichungen hinaus. So steht im RMP #30: Wenn ein Schreiber zu dir sagt:
10 ist geworden $\frac{2}{3}+\frac{1}{10}$ von was? Modern geschrieben $\frac{2}{3}x+\frac{1}{10}x=10$.
Durch Ausklammern und Dividieren erhält man einfach $10:\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{10}\right)=13\frac{1}{23}$
Interessant ist die Fläche F eines Kreises vom Durchmesser d. Sie wird im antiken Ägypten als $F=\left(\frac{8}{9}\cdot d\right)^2$ berechnet. Das läuft auf $\frac{256}{81}\approx 3{,}1605$ hinaus. Das ist gegen unserem $F=\left(\frac{d}{2}\right)^2\cdot\pi$ eine erstaunlich genaue Näherung. Wir haben nur Vermutungen, wie man zu dieser Näherung gekommen ist. Es könnte sich um die in Abb. 9 geäußerte Vermutung nach Vogel zum Näherungsverfahren des Ahmes im Papyrus Rhind, Aufgabe 48, handeln.

Geometrie

Vielleicht der fundamentalste Unterschied zur griechischen Geometrie, teilweise ab der ionischen Epoche und auf jeden Fall ab dem alexandrinischen Zeitalter (also bis kurz vor und nach Euklid) ist die Tatsache, dass die Geometrie der Ägypter keine abstrakte, axiomatische und beweisende Geometrie, sondern auf praktische Lösungen ausgerichtete Mathematik war. Die Anforderungen kamen von Profanbauten, wie Getreidespeicher und von Monumentalbauten, wie Tempel oder Königsgräber, von der Landvermessung nach den jährlichen

[50] Siehe auch Seite 20 (Kapitel Grundrechenarten)

Nilüberschwemmungen oder von dem anspruchsvollen Schiffbau zum Transport von tonnenschweren Obelisken auf dem Nil.



Abb. 25: Landvermessung in Ägypten – Seilspanner, (Harpedonapten)

Die Landvermessung war eine hoheitliche Aufgabe, die von einer priesterlichen Berufsgruppe überwacht oder durchgeführt wurde. Es waren die *Harpedonapten* (griechisch: Seilspanner). Sie hatten nicht nur planare Aufgaben, sondern ihre Tätigkeit bezog sich auch z.B. auf Tempel und Pyramiden. Ihre Schutzgöttin war auch *Seschat*. Zur Längenmessung wurden Seile benutzt, aber auch nach der Königselle (52,36 cm) genormte Messstangen aus dem etwa gleich dicken Mittelteil eines Schilfrohres. Diese dehnten sich nicht bei Belastung bzw. schrumpften nicht, wenn sie trockneten.

Man sollte bedenken, dass eine exakte Winkelmessung, auf der die moderne großräumige Vermessung beruht, für die Ägypter technisch nicht möglich war. Präzision war also nur über eine möglichst gute Längenmessung möglich. Einen rechten Winkel konnte man über einfache pythagoräische Zahlentripel bestimmen. Dabei kannte man den Satz des Pythagoras in seiner allgemeinen Form scheinbar nicht.

Obwohl relativ früh entstanden, ist die Pyramide bei Giseh zweifellos ein monumentales Meisterwerk ägyptischer Vermessungskunst. Die Pyramide wurde 1921 unter der Leitung des deutschen Archäologen, Ägyptologen und Architekten Ludwig Borchardt von englischen Vermessungsingenieuren vermessen. Seitenlängen wurden mit einem geschlossenen Polygonzug mit geeichten Invarddrähten ermittelt. Sie sind tagsüber weitgehend unabhängig von Temperaturschwankungen. Winkel wurden mit einem Mikroskop Theodoliten gemessen.[51] Die Datenauswertung zeigte, dass der historische Grundriss nach Länge, Richtung und Höhe sehr genau abgesteckt wurde. Die rechten Winkel an der Westseite zeigen nur eine Abweichung im Sekundenbereich. Der Unterschied an der Ostseite resultiert aus unterschiedlichen Längen an Süd- (230,454 m) und Nordseite (230,253 m). Wie

[51] https://www.vermessungsgeschichte.de/fileadmin/user_upload/pdf/Heft26_Pyramide.pdf

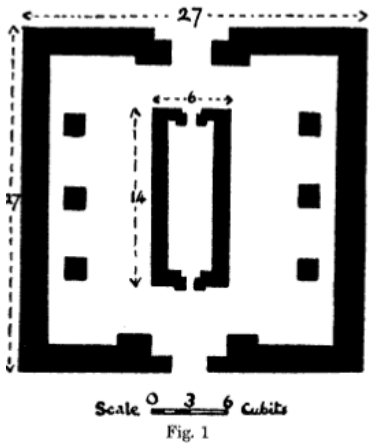


Abb. 26: Bauplan zum Grab von Ramses IX

bei den doch sehr groben Messmethoden zu erwarten, war die Längenmessung verantwortlich für den größten Fehler.

Auch maßstabsgerechte Zeichnungen sind erhalten geblieben.[52] Die Abb. 26 zeigt einen Aufriss des Grabes von Ramses IX auf einer 70 cm großen Kalkplatte. Aufriss und Vorderansicht sind dabei realistisch gezeichnet. Der Ägypter kennt keine Perspektive, wie sie sich erst in der Renaissance entwickelt hat bzw. hat andere Vorstellung an räumliche Darstellungen. Der Aufriss ist also schon als Orthogonalprojektion zu verstehen.

Ebene Figuren

Die Ägypter bevorzugten das Viereck und möglichst das Rechteck. Die Flächenformel „Länge x Breite“ war früh bekannt. Die Wörter Länge und Breite sind bereits seit der 4. Dynastie (2613 – 2494 v. Chr.) mit der Hauptstadt Memphis nachweisbar.

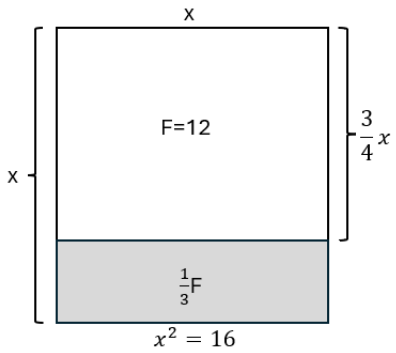


Abb. 27: Zu Moskauer Papyrus, Aufgabe Nr. 6

Eine Rechteckaufgabe,[53] die die Denkweise widerspiegelt, enthält der Moskauer Papyrus, Aufgabe 6 (MP 6). Gegeben ist der Flächeninhalt F=12 und $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ der Länge für die Breite. Moderner Ansatz ist einfach $x \cdot \frac{3}{4}x = 12$. Also $x^2 = 12 \cdot \frac{4}{3}$; $x^2 = 16$;

$x = \sqrt{16}$; $x \cdot \frac{3}{4} = 3$. Der altägyptische Ansatz ist etwas umständlicher, folgt aber trotzdem dem modernen Ansatz:

„Dividiere 1 durch $\overline{2}\ \overline{4}$; es gibt $1\frac{1}{3}$. Multipliziere 12 mit $1\frac{1}{3}$; es gibt 16. Berechne seinen Winkel (Γ), es gibt 4 für die Länge. Sein $\overline{2}\ \overline{4}$ als 3 für die Breite.“ Über die verwendeten Fachwörter ist klar, dass der anliegende Winkel rechtwinklig ist.

Auch ein anderer Lösungsweg ist denkbar. Ergänzt man das Rechteck zu einem Quadrat, dann ist das Quadrat $\frac{4}{3}$ mal so groß wie das alte Rechteck. Durch die Division $1 : \frac{3}{4}$ wäre ausgerechnet worden, wie oft die Breite in die Länge geht.

[52] Glanville, Working plan for a shrine, https://www.jstor.org/stable/3854213
[53] Abbildung und Text weitgehend wörtlich aus K. Vogel, Bd. 1, S. 64

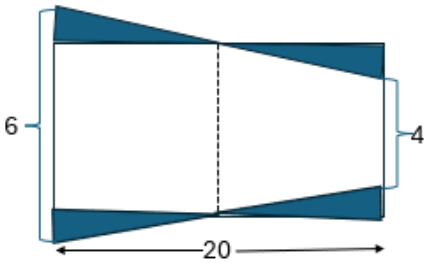
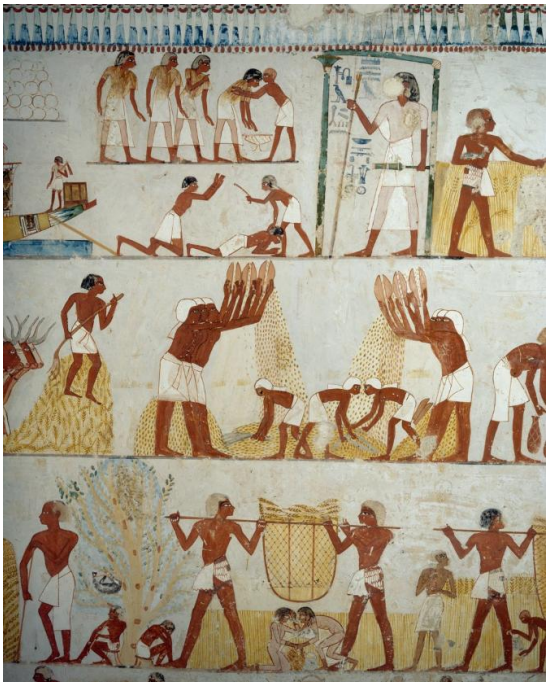


Abb. 28: gleichschenkliges Trapez

In weiteren Aufgaben des Moskauer Papyrus (MP) und des Papyrus Rhind (RMP) geht es um rechtwinklige und gleichschenklige Dreiecke.
In RMP #52 geht es um ein gleichschenkliges Trapez.[54] Die längere Parallele wird „Mündung“, die kürzere Parallele wird „Abschnitt“ genannt. Die Länge des Trapezes heißt „Grenze“. Es zeigt, dass diese Figur in der Landvermessung eine Rolle spielte. Als Lösungsweg für die Flächenermittlung kann man $\frac{6+4}{2} = 5$ rechnen und $5 \cdot 20 = 100$. Die Einheit waren in der Regel Ruten (*Chet* = 100 Königsellen). Man sieht, dass die Ägypter die Formel $\frac{a+b}{2} \cdot h$ kannten und auch die Mittelparallele. Vogel vermutet, dass auch die Kongruenz der vier Dreiecke erkannt wurde.

Eine Näherungsformel für allgemeine Vierecke mit den beliebigen Seiten a, b, c, d findet sich am Edfu-Tempel aus dem ersten und zweiten Jahrhundert v. Chr. Es ist eine Schenkungsurkunde, in die ca. 150 Grundstücksvermessungen eingetragen wurden. Offenbar war bewusst, dass es tatsächlich nur eine grobe Näherung sein kann, die nur für ein Rechteck genau ist: $\frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$. Sogar die Fläche von Dreiecken als Grenzfälle eines allgemeinen Vierecks wurden so berechnet.


Abb. 29: Getreidewirtschaft

Berechnung räumlicher Körper

Auch Volumenberechnung war eine mathematische Anforderung im täglichen Leben. Bei Profanbauten ging es oft um Getreidespeicher oder um die Kontrolle von entsprechenden Lieferungen. Die Getreidewirtschaft war die wichtigste Ernährungsgrundlage im Alten Ägypten. Die Abb. 29 zeigt Ernte, Dreschen und Worfeln von Getreide. Getreidesilos mussten sorgfältig gebaut und vor Feuchtigkeit und Mäusen geschützt werden. Das Volumen musste berechenbar sein, denn der Inhalt musste gerecht an die

[54] K. Vogel, Bd. 1, S. 65

Bewohner eines Dorfes bis zur nächsten Ernte kontinuierlich verteilt werden. Es sind quaderförmige und zylinderförmige Silos bekannt. In RMP #44 ist eine entsprechende Aufgabe überliefert. Das Volumen ist dabei nur ein Zwischenwert in Kubikellen. Dieser muss in „Sack“ umgerechnet werden, wobei 1 Sack = 2/3 Kubikellen entspricht. 1 Sack sind wiederum 20 einfache Scheffel (*heqat*), 20 Sack sind 400 einfache Scheffel oder ein Vierhunderter-Scheffel.

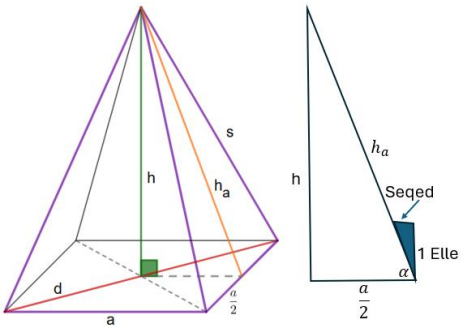


Abb. 30: *Seqed* als Maß für die Neigung der Seitenflächen

Die gewaltigsten Bauwerke im Alten Reich waren die Pyramiden. In der Cheopspyramide wurden 2 ½ Millionen Kubikmeter Stein verbaut. Doch in den bisher gefundenen Texten wurde keine Formel zur Volumenbestimmung gefunden. Erst noch vor Euklid bei Demokrit (5. Jht. v. Chr.) und Eudoxos von Knidos (gest. 345/338 v. Chr.) konnten Pyramiden berechnet werden. Die Ägypter interessierte besonders die Neigung der vier Seitenflächen. Heute würden wir die Neigung als $\cot\alpha = \frac{a}{2h}$ ausdrücken. Der Ägypter fragt stattdessen, wie weit die Seitenhöhe „zurückspringt“. Das Maß für den Böschungswinkel α nennt er „*Seqed*“. Er weiß also um die Proportionalität, also dass der *Seqed* in eine Elle so oft hinein geht wie $\frac{a}{2}$ in h. Das Ergebnis in Ellen wird noch in Handbreiten umgerechnet (1 Elle sind 7 Handbreiten). Der *Seqed* ist $7\cdot\cot\alpha$.

Es ist aber verfrüht, bei der ägyptischen Mathematik von „Trigonometrie“ zu sprechen, denn der Begriff des Winkels war noch unbekannt. Den findet man erst bei den Griechen (Thales von Milet, gestorben zwischen 548 und 544 v. Chr.). Stellt man in Richtung der Grundlinie einen Stab von der Länge 1 Elle senkrecht auf. Der Pyramiden-*Seqed* ist bei geeignetem Sonnenstand gerade der Schatten, weil es sich um ähnliche Dreiecke handelt.

Ex oriente lux – aus Ägypten?

Die Frage bleibt für ägyptische Mathematik teilweise offen. Die auf den letzten Kapiteln gewählten Aufgaben aus den wichtigen mathematischen Papyri zeigen, dass vor allem Probleme des täglichen Lebens von der ägyptischen Mathematik gelöst wurden. Am Beispiel Bruchrechnen wurde dabei ein spezieller Weg gewählt, der nichts mit dem griechischen Umgehen mit Brüchen zu tun hat. Außerdem kannten die Ägypter keine irrationalen Zahlen. Logische Systematik war ebenfalls nicht zu erkennen.

Trotzdem ist ägyptische Mathematik nicht zu 100% reiner Pragmatismus und Heuristik. So ist das Prinzip der Probe nach der Rechnung stark ausgeprägt.

Am Beispiel des Trapezes sieht man, dass man auf früheren Erkenntnissen aufgebaut hat. Aber viel stärker wirkt das Spielerische bei Reihen oder Rätselaufgaben ohne praktischen Bezug schon ein wenig nach wissenschaftlichem Erkenntnisdrang. Auch kleine Anfänge der Algebra kann man erkennen. Der ägyptische Rechner hat Fachwörter definiert und sie haben sich offenbar landesweit durchgesetzt. Der Papyrus Rhind ist uns schließlich in einer Abschrift erhalten geblieben und gleichlautende Fachwörter finden sich auch in anderen Texten. Der Übergang vom konkreten Sachbezug zum Rechnen mit einer Unbekannten ist wahrscheinlich das größte Indiz, weil es einen kognitiven Sprung vom Konkreten zum Abstrakten bedeutet.
Interessant sind die einleitenden Worte im Papyrus Rhind durch den Schreiber Ahmes.[55] Er verspricht dem wissbegierigen Schüler Aufklärung über ein Fachgebiet, das damals und vielleicht noch für viele heutige Schüler, von „dunklen Geheimnissen“ umwittert war.

„Zwei Stromland“ – Babylonien, Mesopotamien

Historischer Überblick:
Kulturen haben sich in Eurasien zuerst im sogenannten „Fruchtbaren Halbmond“ entwickelt. Entscheidend war die Verfügbarkeit von ausreichend Wasser. Der „Fruchtbare Halbmond“ oder die „Fruchtbare Sichel“ erstreckte sich vom heutigen Iran über das Zweistromland zwischen Euphrat und Tigris bis zum Mittelmeer und von den kurdischen Bergen bis Ägypten. Klimatisch muss man ursprünglich auch den Oxus (Amudar’ya), der am Oberlauf die Grenze zwischen Afghanistan und Usbekistan bildet und sogar den Indus dazu zählen. Das Klima war damals deutlich moderater als heute.
Durch die Kreiselbewegung der Erdachse veränderte sich in der ganzen Region das Klima. Wegen der Präzession wandert der Himmelsnordpol innerhalb von 25700 Jahren einmal um den Pol der Ekliptik. Vor 150.000 bis 115.000 Jahren und von 50.000 bis 45.000 Jahren war die heutige Sahara grün, d.h. die tropische Klimazone verschob sich 600 km nach Norden. Wichtiger für die Kulturgeschichte der Region ist die Warmphase nach der letzten Eiszeit, die vor etwa 14.000 bis 12.000 Jahren einsetzte und etwa knapp 10.000 Jahre anhielt. Die dann einsetzende Kaltphase hatte für Ägypten stärkere Konsequenzen. Das Siedlungsgebiet reduzierte sich auf das schmale Niltal, verlangte aber dann auch eine straffe Organisation.
In Mesopotamien entstand bereits im 24. Jahrhundert v. Chr. ein riesiger Staat, der erstmals in der Menschheitsgeschichte über eine Reihe von Generationen von einer Dynastie beherrscht wurde. In Ägypten setzte diese Entwicklung, wenn auch sehr schnell, ca. 3.500 v. Chr. ein. Ab 3.100 v. Chr. war schon Ober-

[55] Dankenswerter Hinweis von Kurt Vogel, Bd. 1, S. 74

und Unterägypten in einem mächtigen Staatswesen vereint. Die Pyramiden von Gizeh entstanden zwischen 2585 bis 2511 v. Chr. Auch in Mesopotamien erforderte die Verwaltung asynchrone Kommunikation und eine nichtflüchtige Dokumentation, also eine Schrift. Beide Kulturen entwickelten getrennt Schriften auf unterschiedlichen Medien, die Keilschrift auf Tontafeln und die Hieroglyphen auf Papyrus. Aber die wichtigen technologischen Durchbrüche entstanden weitgehend synchron in der ganzen Region: Der Pflug, die Töpferscheibe, Wagen mit Rädern, aber erst sehr viel später Geldwährung.
Geprägt wurde die Kultur im Zweistromland durch die Sumerer, die von Osten einwanderten. Bereits in der 2. Hälfte des 4. Jahrtausends v. Chr. ist eine bemerkenswerte Kultur nachweisbar. Sie bezieht sich auf solide Häuser, Tempel, Anlegen von Kanälen, Keramikherstellung mit der Töpferscheibe, farbige Mosaike mit geometrischen Parkettierungen und Mustern usw.
Politisch lief die Entwicklung zwischen Ägypten und Mesopotamien nicht synchron. Bis auf turbulente Zeiten blieb das vereinigte Reich von Ober- und Unterägypten weitgehend stabil. Babylonien zerfiel dagegen in eigenständige Stadtstaaten, deren Herrscher immerhin einen gemeinsamen König akzeptierten. Dies änderte sich erst mit der 1. Dynastie von Ur, ca. 2600 v. Chr. Ab hier beginnt die weitgehend bzw. zunehmend gesicherte historische Quellenlage.

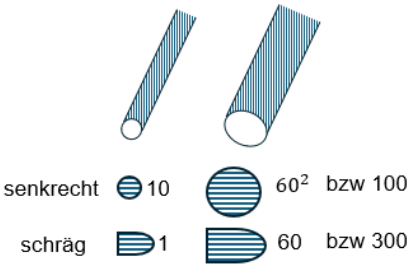


Abb. 31: Griffel zum Zahlenschreiben

Im Gegensatz zu dem empfindlichen Schreibmaterial Papyrus wurden Hunderte von Tontafeln allein in einer Grabungsschicht ca. 3100 v. Chr. gefunden. Die erste Schrift ist eine Bilderschrift und entstand etwas früher als in Ägypten.


Abb. 32: Schreibgriffel

Sie benutzte eine sehr ähnliche Symbolik. Im Sumerischen bedeutet „Wasser“ ≈, „Brot“  *oder „umschließen“* □*, von der Philosophie vergleichbar zu den Hieroglyphen. Neben den Einkonsonantenlauten wurden im Archaischen ebenfalls Bildzeichen beibehalten. Auch hier sind Determinative / Deutlaute nötig, um Mehrdeutigkeiten zu vermeiden. Geschrieben wurde von rechts nach* links. Man achtete auf eine strenge, übersichtliche Einteilung der Schreibtafel.

Zum Schreiben wurden verschiedene Griffel benutzt.
Für Zahlen nahm man Griffel mit unterschiedlichen Profilen; ein Schreibgriffel für normale Schrift war spitz zulaufend. Anfangs (etwa vor 2500 v. Chr.) blieben die Bildzeichen in ihrer natürlichen Ausrichtung (Wasserlinien waagrecht, Getreidehalm senkrecht, etc.). Da die Schreibtafeln unhandlich groß wurden und offenbar auf eine Unterlage gelegt werden mussten, drehte man die Tafel

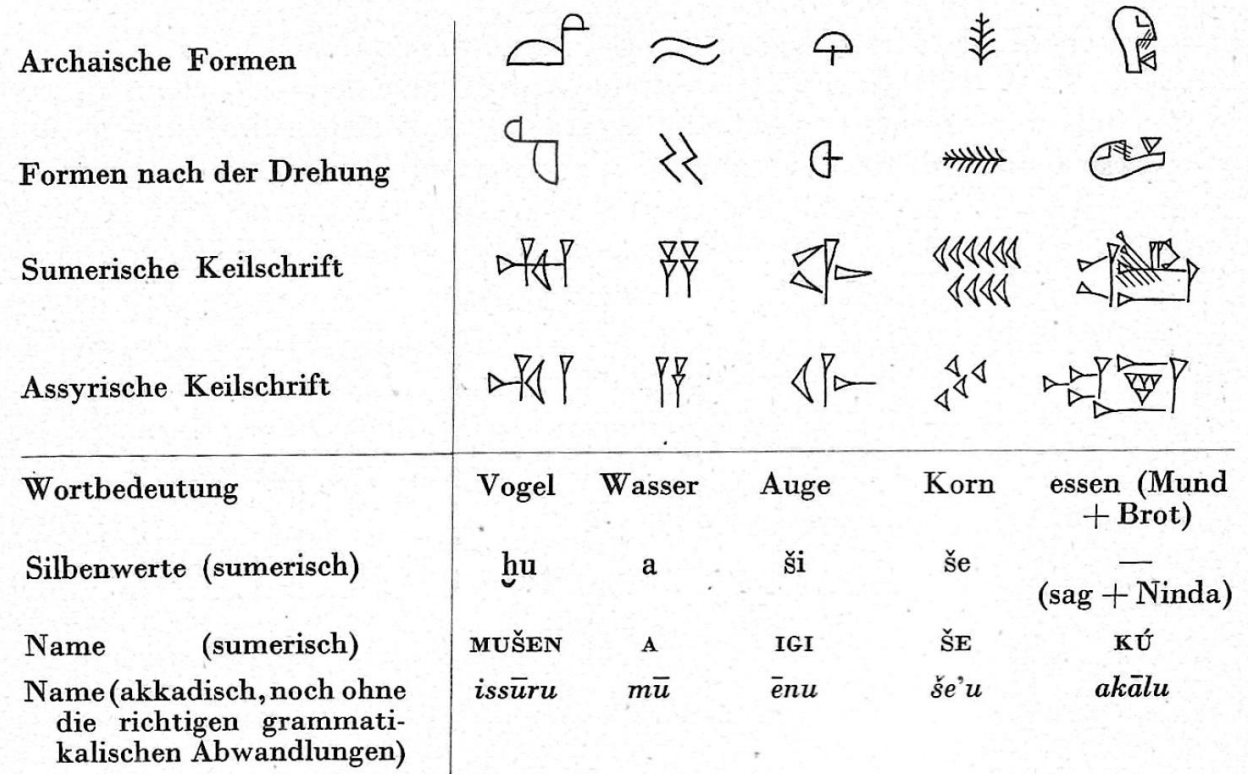


Abb. 33: Entwicklung der Schriftformen über die Archaische Bilderschrift zu Sumerischer und Assyrischer Keilschrift

bei Bedarf um 90 Grad. Das hatte Auswirkungen auf die Schriftentwicklung.

Zur Einordnung: Nach der sumerischen Sprache entwickelte sich das Akkadische, das aus den beiden Dialekten Babylonisch und Assyrisch besteht. Akkadisch ist aber nach wie vor stark vom Sumerischen beeinflusst. Es wurde von ca. 2700 v. Chr. bis zum 1. Jh. n. Chr. gesprochen. Überhaupt kann man Sumerisch mit dem Latein vergleichen. Es war die Sprache der Gelehrten und ist deshalb so lange verwendet worden, als es längst aus den lebenden Sprachen verschwunden war.

Man kann sich streiten, ob die ägyptische oder die sumerische oder assyrische Keilschrift schwerer zu erlernen ist. Schüler nannte man „Sohn des Tafelhauses“ und nach Absolvierung einer Art „Unterstufe“ nannte man ihn „Kleinschreiber“. Nach Abschluss der kompletten Ausbildung bekam er den Ehrentitel „Tafelschreiber“. Er hatte damit in der sozialen Hierarchie einen höheren Stand erreicht. Auch der König *Schulgi* nannte sich mit Stolz

„Großschreiber der Göttin der Schreibkunst und der Weisheit“. Für die Archäologie und die Entzifferung der Schrift(en) war von größter Wichtigkeit, dass ab der Zeit von *Hammurabi*[56] Lexika mit sumerischen und akkadischen Schriftzeichen gepflegt wurden.

Mathematische Texte[57]

Die größten Sammlungen von babylonischen mathematischen Texten befinden sich im Britischen Museum (London) und im Louvre (Paris). Aber auch in Berlin, Straßburg, New Haven, Bagdad, Genf oder Chicago. Obwohl die wissenschaftliche Ägyptologie früher einsetzte als die Archäologie in Mesopotamien und ihre Auswertung, übersteigt das vorliegende Material an Tontafeln deutlich die ägyptische Quellenlage. Die vorliegenden mathematischen Keilschrifttexte sind fast alle altbabylonisch (1900 bis 1600 v. Chr.), einer mittelbabylonisch und drei stammen aus dem 312 v. Chr. begründeten Seleukidenreich.
Vogel nennt zwei Gruppen von Texten: Tabellentexte und Aufgabentexte, wobei er die Tabellentexte auf das etwa Dreifache der Aufgabentexte schätzt.[58]

Tabellentexte: Sie sind teilweise aus der 3. Dynastie von Ur (Ur-III-Zeit). Ihr Alter ist in absoluten Jahreszahlen schwer datierbar. Als grober Anhaltspunkt kann man 2000 v. Chr. annehmen, siehe dazu[59]. Sie enthalten viele (zeitlose) Rechenhilfen im Bereich Multiplikation, Division, Potenzen und Wurzeln und sogar für Exponenten, also Beginn der logarithmischen Darstellung. Die Schrift verrät manchmal die Entwicklung. So heißt „Multiplizieren“ im Sumerischen (*tah*, 𒁹 d.i. Verdoppeln). Weiterhin geht es um Umrechnung von Maßen und Gewichten, Gewicht in Volumen und umgekehrt. Ergänzungen scheinen nur im Bereich der astronomischen Daten erforderlich gewesen zu sein.

Aufgabentexte: Davon sind weit über 100 veröffentlicht. Sie offenbaren erstaunliche theoretische Kenntnisse (Reihen, pythagoräische Zahlentripel, etc.). Eine weit entwickelte Algebra findet man bei eben- und raumgeometrischen Aufgaben. Doch eine Weiterentwicklung gegenüber dem Wissensstand aus altbabylonischer Zeit ist nur im astronomischen Bereich erkennbar.

---

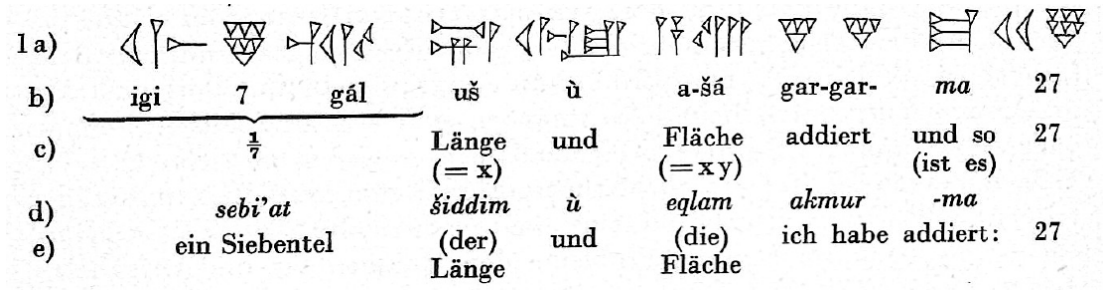
[56] 1792 bis zu seinem Tode 1750 v. Chr. der 6. König der ersten Dynastie von Babylonien und trug den Titel König von Sumer und Akkad.
[57] Das Kapitel über die Mathematik der Sumerer, Akkader, Babylonier folgt, analog zu Bd. 1, wieder eng Vogel, Kurt; Vorgriechische Mathematik, Teil 2, Die Mathematik der Babylonier
[58] Vogel, Kurt; Bd. 2, ebenda, S. 13
[59] https://de.wikipedia.org/wiki/Ur-III-Zeit

Es ist eine Frage, die noch nicht ganz entschieden ist, ob die Sumerer oder die Akkader die eigentlich kreativen Mathematiker waren. Vogel illustriert dies an einem plakativen Beispiel. Es handelt sich um ein Gleichungssystem, das in moderner Schreibweise lautet:

$$I.\ \frac{x}{7} + xy = 27$$

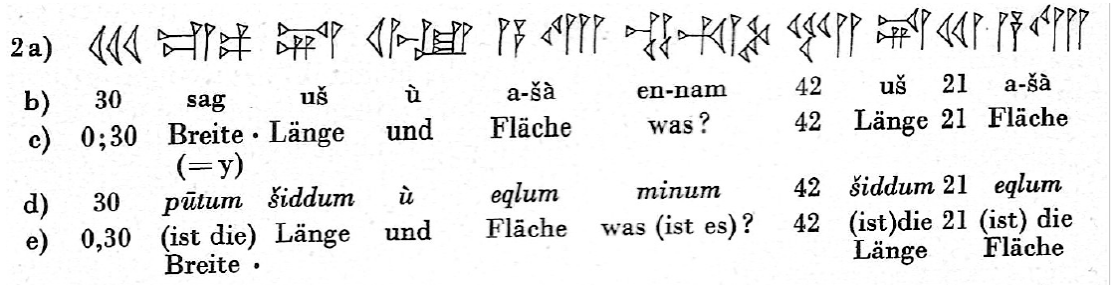
$$II.\ y = \frac{30}{60}^{60}$$

Der folgende Text soll die Problematik illustrieren und lautet:[61]



1a)									
b)	igi	7	gál	uš	ù	a-šá	gar-gar-	*ma*	27
c)	$\frac{1}{7}$			Länge (= x)	und	Fläche (= xy)	addiert	und so (ist es)	27
d)	*sebi'at*			*šiddim*	*ù*	*eqlam*	*akmur*	*-ma*	
e)	ein Siebentel			(der) Länge	und	(die) Fläche	ich habe addiert:		27

Abb. 34: Gleichung I.



2a)										
b)	30	sag	uš	ù	a-šà	en-nam	42	uš	21	a-šà
c)	0;30	Breite (= y) ·	Länge	und	Fläche	was?	42	Länge	21	Fläche
d)	30	*pūtum*	*šiddum*	*ù*	*eqlum*	*minum*	42	*šiddum*	21	*eqlum*
e)	0,30	(ist die) Breite ·	Länge	und	Fläche	was (ist es)?	42	(ist)die Länge	21	(ist) die Fläche

Abb. 35: Gleichung II.

Die Wörter in Zeilen 1a und 2a sind sumerisch. Ausnahme ist die Silbe „ma“. Die Bedeutung ist „und dann“ oder „folglich“. Der Text wurde aber akkadisch gelesen. Indiz sind die sumerischen Zeichen für „Länge“ und „Breite“, die für die Akkadier Symbole waren, die aber akkadisch ausgesprochen wurden. Sie sind vergleichbar mit dem „Mal-Zeichen ·“ Im Englischen wird „times“ gesagt.

Vermutlich ist die 3. Dynastie von Ur (Ur-III-Zeit) als letzte sumerische Zeit eine letzte kreative Phase der Sumerer gewesen. König *Schulgi* selbst, sowie sumerische Fürstensöhne waren als hochrangige Schreiber tätig, was vielleicht als Schriftsteller zu bezeichnen ist. Sumerische Gedichte tauchten Anfang des 20. Jahrhunderts auf; der König erklärt höchstselbst die „Feinheiten der Rechentafeln“ sowie „der Division verschleierte Fragen“.

[60] Im Text steht nur 30. Die Babylonier kannten kein Komma in ihrem Sexagesimalen Positionssystem. Wir schreiben 0;30 nach einem Vorschlag von Neugebauer.
[61] Grafik ist Kopie aus Vogel, Bd. 2, S. 14. Text ist leicht gekürzt übernommen.

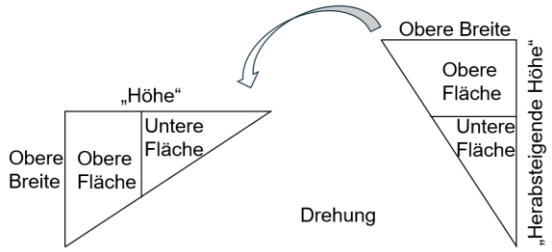


Abb. 36: Änderung der Schriftrichtung um ca. 2500 v. Chr.

In manchen mathematischen Texten zur Geometrie tauchen die Begriffe „oben“ für Größen zur Breite oder Fläche auf. Sie wanderten nach dem Umstellen der Schriftrichtung um ca. 2500 v. Chr. nach links und waren früher oben.

Die meisten Hinweise stammen nach diesen Kriterien aus altbabylonischer Zeit. Man muss daraus schließen, dass die Akkadier das sumerische mathematische Wissen anwenden, aber dieses Wissen nicht maßgeblich erweitert konnten.

Zahlen und Maße

Die folgende Abb. 38 zeigen die Zahlen von 1 bis 59 in sumerischer Keilschrift. Während wir 10 Ziffern inklusive der Null verwenden, sieht man, dass die Sumerer nur zwei Zeichen verwendeten und eine Null als eigene Ziffer nicht kannten. Sie interpretierten sie als „Nichtvorhandensein einer Zahl“.
Die „10“ hat durchaus eine besondere Bedeutung als 2. Zeichen nach den Einern. Entscheidend ist jedoch die „60“. Die Sumerer wählten kein Dezimalsystem, sondern ein Sexagesimalsystem. Statt unserer Zehnerpotenzen sind die 60er Potenzen die Größenordnungen.

60^4	60^3	60^2	60^1	60^0
12.960.000	216000	3600	60	1

Abb. 37: 60er-Potenzen als Größenordnungen im Sexagesimalsystem

Dieses System hat sich bis heute bei der Uhrzeit gehalten. 60 Sekunden sind eine Minute, 60 Minuten sind eine Stunde. Zum Beispiel sind 4 Stunden 17 Minuten und 10 Sekunden in Sekunden umgerechnet: 4x3600 + 17x60 + 10. Ebenso ist die Winkelberechnung (außerhalb von einigen wissenschaftlichen Problemen) auf Basis 60. Dies haben zweifellos die beiden griechischen Astronomen und Mathematiker Hipparchos und Ptolemaios über die griechische Kultur nach Europa gebracht. Interessant ist der Vorstoß während der französischen Revolution, beide Bereiche dezimal umzustellen. Es wurden sogar Uhren mit 10 Stunden-Einteilung hergestellt. Doch die Bevölkerung wehrte sich gegen die Umstellung.

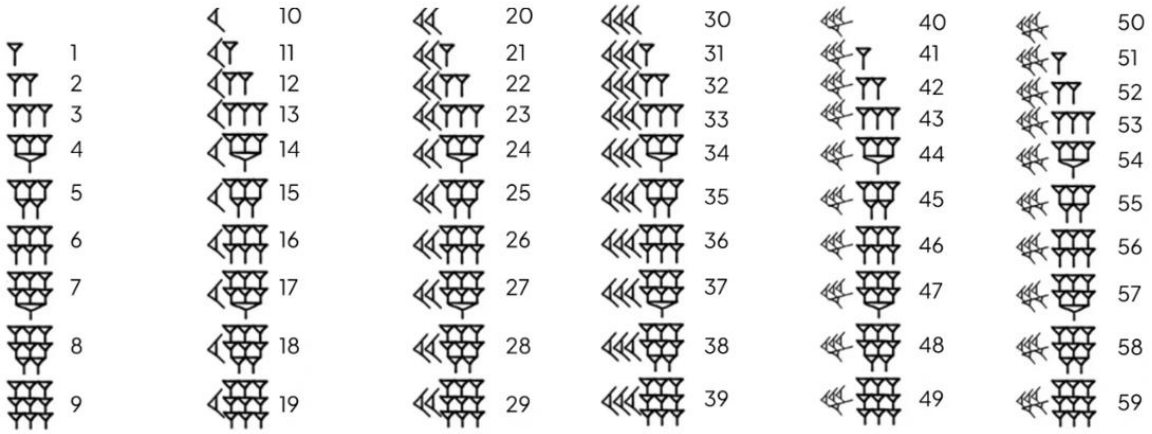


Abb. 38: Sumerische Keilschrift für Zahlen von 1 bis 59

Zusammenfassung der zeitlichen Einordnung

Während die Sumerer die Kultur inkl. der mathematischen Kultur fast 2000 Jahre prägten, war die akkadische Epoche relativ kurz und zumindest mathematisch nicht besonders prägend. Die akkadische Herrschaft wurde durch die babylonische abgelöst, die bis ca. 1600 v. Chr. andauerte. Das Gründungsjahr von Babylon ist nicht bekannt. Erst unter Hammurabi hatte es seine Blütezeit. Es wurde von Assyrien abgelöst, das auch zeitweilig Ägypten unter Asarhaddon (681-669 v. Chr.) eroberte. Die einzelnen Kulturen wurden oft als „Mesopotamien“ zusammengefasst. Durch überlappende Zeitspannen ist die genaue Datierung schwierig. Auf die Sumerer von unbekannter Herkunft, folgten zahlreiche semitische Völker, zu denen die Akkader im 24. Jh. v. Chr. und die Babylonier ab dem 18. Jh. v. Chr. gehörten. Zuletzt sprach man von Mesopotamien, das von 1800 - 627 v. Chr. seine größte Ausdehnung hatte. Mesopotamisches Wissen kam vor allem erst durch

Name		Bedeutung	Meile (danna)	Länge (UŠ)	Seil (TIR)	Grenze (GAR)	Rohr (gi)	Elle (kùš)	Finger (šu-si)	Gra (še)
sumerisch	akkadisch									
danna	*bēru*	Meile	1	30[1]						
UŠ(=gìs?)	—	Länge		1	6	60	120	720		
TIR	*ašlu*	Seil (als Meßgerät)			1	10	20	120		
GAR (NINDA)	—	Grenze				1	2	12	360	
gi	*qanū*	Rohr (als Meßgerät)					1	6	180	
kùš	*ammatu*	Elle						1	30	180
šu-si	*ubānu*	Finger (Zoll)							1	6
še	*še'u*	Gran (Gerstenkorn)								1

Die Länge der Elle war ca. 50 cm, also 1 Gar ≈ 6 m und 1 Zoll ≈ $\frac{5}{3}$ cm.

Flächenmaße[2])

Name:		Bedeutung	šar'u	šar	buru'u	bùr	eše	iku	ubu	SAR	gín	še
sumerisch	akkadisch											
šar'u		10 Sar	1	10	60	600						
šar		Kreis		1	6	60	180					
bur'u		10 bur			1	10	30	180				
bùr	*būru*					1	3	18	36	1800		
eše	*eblu*						1	6	12	600		
iku (oder gán)	*ikū*	Acker, Feld						1	2	100		
ubu	*ubū*								1	50		
SAR	*musarū*	Beet								1	60	
gín	*šiqlu*	$\frac{1}{60}$									1	180
še	*še'u*	$\frac{1}{180}$										1

Abb. 39: Sumerische und akkadische Maßsysteme für Längen und Flächen

die Reisetätigkeit von Phöniziern, Ägyptern und Griechen bis auf den europäischen Kontinent. Sicherlich wurde damals nicht sehr nach dem Ursprung der Erkenntnisse differenziert.
Als Platzhalter für ein ausgeprägtes Maßsystem für Längen und Flächen diene eine Tafel von Vogel (Abb. 39).
Weitere Informationen siehe Wikipedia.[62]

Eine Besonderheit sind die babylonischen Raummaße. Es sind Schichtmaße, also aus virtuellen Quadern zusammengesetzt. Auch bei den Ägyptern finden sich Schichtmaße, analog zu Streifenmaßen bei der Landvermessung. Das Flächenmaß heißt *SAR* und das wichtigste Raummaß entsprechend Raum-*SAR*=1 Gar (siehe Abb. 39). 1 Elle = $\frac{1}{12}$ Gar. Kleinere Volumina können bezeichnet werden mit der Einheit *gìn*= $\frac{1}{60}$ Raum-*SAR* und $\check{s}c = \frac{1}{180}$ *gìn.*

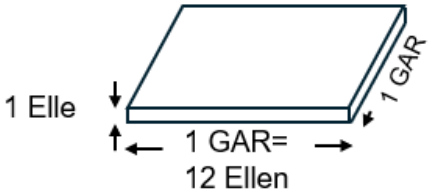


Abb. 40: Babylonisches Schichtmaß

Name		gur	Pl	bán	sìla	gín	še
sumerisch	akkadisch						
gur	*kurru*	1	5	30	300		
bariga (PI)	*maššiktu*		1	6 [3])	60		
bán	*sūtu*			1	10		
sìla	*qā*				1	60	
gín	*šiqlu*					1	180
še	*še'u*						1

Abb. 41: Babylonische Hohlmaße für Getreide und Flüssigkeiten

Zeitmaße

In der Literatur hielt sich eine Zeitlang der Begriff „Babylonische Stunden“. Wikipedia widmet ihm einen eigenen Beitrag, weist aber darauf hin, dass diese Zeitskala vermutlich in dieser Form in Babylonien nicht in Gebrauch war, denn sie war älter als das babylonische Reich. Es sind äquinoktiale Stunden und sie wurden ab Sonnenaufgang von 1 bis 24 gezählt.[63]
Die Babylonier rechneten bis zum Ende des neubabylonischen Reichs (539 v. Chr.) mit der äqualen Zeiteinheit „*Danna*“ („Doppelstunde“=$\frac{1}{12}$ Tag). Sie wird im

[62] https://de.wikipedia.org/wiki/Alte_Maße_und_Gewichte_(Antike)
[63] https://de.wikipedia.org/wiki/Babylonische_Stunden

Gilgamesch-Epos erwähnt. In hellenistischer Zeit wurde die Doppelstunde geteilt. Babylonien kannte jedenfalls keine 24-Stundeneinteilung des Tages, was auf ägyptischen Einfluss zurückgeführt werden könnte. Äquinoktiale Stunden, also die Einteilung des Tags in 24 Stunden, unabhängig von hellen oder dunklen Stunden, geht auf die Griechen zurück. *Hipparchos von Nicäa*[64] (190 – 120 v. Chr.) ging selbstverständlich in seinem Kommentar zu *Aratos von Soloi* und *Eudoxos von Knidos* damit um. Er nennt Sterne, deren Aufgänge in bestimmten Jahreszeiten jeweils durch etwa eine äquinoktiale Stunde voneinander getrennt sind.[65] Hipparchos war der bedeutendste Astronom der Antike. Er entdeckte u.a. die langsame Präzession der Erdachse und damit die Verschiebung der Äquinoktien.
Neugebauer hat im antiken Griechenland die erste richtige Definition der Stunde erkannt und auch diesbezüglich die babylonische Astronomie erforscht.[66]
Der babylonische Kalender kannte 12 bis 13 Monate, so dass alle drei Jahre ein Schaltmonat nötig wurde. Das steht im Gegensatz zum ägyptischen Jahr mit 365 Tagen.

Ziegelmaße[67]

Aus Lehm gebrannte Ziegel waren das wichtigste Baumaterial. Allein für die mächtigen Wälle und Stadtmauern als Schutz von Babylon, insbesondere auf Anordnung von Nebukadnezar, müssen Millionen und Abermillionen von Ziegeln verbaut worden sein. Ihre Normung war deshalb sehr wichtig. Als Einheit wurde ebenfalls, wie für Flächen das SAR = 720 Ziegel genutzt. $\frac{1}{60}$ = 12 Ziegel hieß wieder *gìn*. Für die Erstellung eines exakten Mauerwerks machte das durchaus Sinn. Es ermöglichte Faktoren (2, 3, 5, 6, 10, 12, 30, 40, 60, 180), mit denen Übergänge geschaffen werden konnten. Man konnte bei Teilungsrechnungen auf kleinere Einheiten ausweichen und kam so ohne Bruchsymbole aus.

---

[64] https://de.wikipedia.org/wiki/Hipparchos_von_Nicäa. Er ging wissenschaftlich so genau vor, dass ihm Plinius der Ältere (ca. 23–79 n. Chr.) Gottlosigkeit vorwarf, weil seine Erkenntnisse mit dem religiösen Weltbild kollidierten.
[65] https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%84quinoktiale_Stunde
[66] Neugebauer, Otto; Early Babylonian Astronomy, in: A History Of Ancient Mathematical Astronomy, Neugebauer (1975) S. 541, https://archive.org/details/ahistoryofancientmathematicalastronomypt1oneugebauer1975_932_G/page/540/mode/2up
[67] Bibel, Gen 11,3-4, (Turm zu Babel:
"*Wohlauf, lasst uns Ziegel streichen und brennen! – und nahmen Ziegel als Stein und Erdharz als Mörtel und sprachen: Wohlauf, lasst uns eine Stadt und einen Turm bauen, dessen Spitze bis an den Himmel reiche, dass wir uns einen Namen machen; denn wir werden sonst zerstreut über die ganze Erde.*"

Relevant sind auch die Gewichtsmaße, die fast ausschließlich mit der Zahl 60 zusammenhingen. Auch hier ist ein *gìn* = $\frac{1}{60}$ der Gewichtseinheit „*Mine*“ und $\check{s}c = \frac{1}{180}$ *gìn*. Es erinnert an das römische Gewichtsmaß 1 As = 12 Unzen. Es wurde auch auf Flächen (der vierte Teil eines Ackers ist ein Viertel-As) oder sogar auf Zeiten (in Unzen) angewendet. Das kann zu Inkonsistenzen führen, da z.B. ein Raum-gìn ≈ 300 cm^3 ist, aber ein gìn bei Flüssigkeiten nur ca. $16\frac{2}{3}$ cm^3 ist.

Ein Vergleich mit dem antiken Griechenland findet auf den ersten Blick viele Parallelen, auch wenn durch die Zersplitterung in Stadtstaaten viele lokale Besonderheiten entstanden sind. Trotzdem wurden die römischen Maße von den Griechen maßgeblich beeinflusst. Durch die weitgehend erfolgte Normalisierung der Metrologie durch eine größere politische Einheit im römischen Reich gab es dann nur wenig lokale Unterschiede. Allerdings fehlte damals das Bedürfnis zu Genauigkeit, wie wir es im metrischen System vorfinden.
Zusammenfassend kann man sagen: Die Römer lernten (wie so oft) von den Griechen, die wiederum vom ägyptischen Duodezimalsystem, das die 12 als Rechenbasis hatte. Einfluss hatte das sumerische Sexagesimalsystem, das noch ein Additionssystem war. Es konnte bis 3300 v. Chr. nachgewiesen werden. Das sexagesimale Zahlensystem war noch weit weg von einer Positionsschreibung. Die Stufen (60, 60^2, 60^3, usw.) wurden mit eigenen Individualzeichen bezeichnet. Die Rechenbasis 60 mit ihren 10 Teilern erlaubte nicht nur in „Ganzen“ zu rechnen, sondern auch bequem in Brüchen.

1 Talent = 60 Minen = 60^2 Schekel (gìn) = 60^3 kleine Schekel

Es wurde vom babylonischen Sexagesimalsystem ab ca. 2000 v. Chr. abgelöst, das ein sexagesimales Positionssystem, aber noch ohne der Null, war. Über die Entstehungsgeschichte wissen wir sehr wenig. Anlass könnte das Gewichtssystem gewesen sein.

Wie bereits erwähnt, findet man es heute noch bei der modernen Winkel- und Zeitmessung.

Die Verbreitung des griechischen Systems erfolgte durch die griechische Kolonisierung zunächst im Süden Italiens und später im ganzen Mittelmeerraum und am Schwarzen Meer („*Magna Graecia*“). Aber auch der phönizische und karthagische Handel sorgte für Verbreitung.

Zur Rechentechnik

Addition und Subtraktion:

Wir schreiben wieder nach dem Vorschlag von Neugebauer:

Volle Sechziger Semikolon Rest zwischen 1 und 59

Beispiel: 2;41 und 0;32 gleich 3;13 analog Subtraktion
3;42 minus 1;59 gleich 1;43
Dezimale Probe: 3;42 ≙ 222 minus 1;59 ≙ 119 gleich 1;43 ≙ 103
3;42 ≙ 
1;59 ≙ 
1;43 ≙ 
Addieren heißt wörtlich „vermehren“ oder „wachsen“. Die Summe ist die „Gesamtheit“, die Differenz „ein Weniger sein“.

Multiplikation

Mit dem Fachwort „mal“ (a-rá) wurde ein Begriff etabliert, der schon aus dem Sumerischen entlehnt wurde. Die Grundbedeutung ist der „Gang“. Das findet man auch heute im Dänischen, wo 2-mal, 3-mal als „to Gange, tre Gange“ bezeichnet wird.[68] Mit „mal ≙ a-rá“ wird das Substantiv „$ar\tilde{u}$“ gebildet, das Produkt, aber auch Faktor heißen kann.
Ein babylonischer Rechner hätte eigentlich das sexagesimale „Einmaleins“ von 2·2 bis 59·59 auswendig lernen müssen. Man half sich deshalb mit umfangreichen Multiplikationstabellen. Für eine Reihe von Zahlen n („Kopfzahlen“ nach Neugebauer) wurden die Produkte 1·n, 2·n, 3·n usw. bis 19·n, dann 20·n, 30·n, 40·n und 50·n aufgelistet.

Multiplikand		Multiplikator	Produkt
n	*a-rá* (mal)	1	n
n	*a-rá*	2	2n
n	*a-rá*	3	3n
n	*a-rá*	19	19n
n	*a-rá*	20	20n
n	*a-rá*	30	30n
n	*a-rá*	40	40n
n	*a-rá*	50	50n

Abb. 42: Allgemeine Struktur einer Multiplikationstabelle

Es sind 162 Tafeln bekannt, die alle die gleiche Struktur haben:[69] Außerdem gibt es „kombinierte Tafeln“, von denen 74 gefunden wurden. Bemerkenswert

[68] K. Vogel, Bd. 2, ebenda, S. 26
[69] Siehe auch Otto Neugebauer, Über die Rolle der Tabellentexte in der babylonischen Mathematik, KØBENHAVN LEVIN -& MUNKSGAAR D, 1934, https://gymarkiv.sdu.dk/MFM/kdvs/mfm%2010-19/mfm-12-13.pdf

ist ein aus altbabylonischer Zeit stammender Zylinder.[70] Sein Mantel enthält die Multiplikationstabellen für 37 Kopfzahlen und ermöglichte einem auf Rechnungen spezialisierten Schreiber ein effektives Arbeiten.

Aus zwei Gründen wählten die Babylonier 41, auf den ersten Blick ungewöhnliche, Zahlen (in der Sexagesimaldarstellung). Als ganze Zahlen kommen sie oft in der täglichen Rechenpraxis vor: Beispiel 16,40 = 16·60 + 40 = 960 + 40 = 1000.
Der zweite Grund ist das Zusammenwirken von Werten aus Reziprokentabellen.

1,15	3,20	8	20
1,20	3,45	8,30	22,30
1,30	4	9	24
1,40	4,30	10	25
2	5	12	30
2,13,20	6	12,30	36
2,15	6,40	15	40
2,24	7	16	44,26,40
2,30	7,12	16,40	45
3	7,30	18	48
			50

Abb. 43: Multiplikationstabelle mit Berücksichtigung der Reziprokwerte

Beispiel einer Multiplikation:
28·1,15 = 28·1,0 + 20·0,15 + 8·0,15 = 28,00 + 5,00 + 2,00 = 35.
Also 28·(60+15) = 28·60 + 20·15 + 8·15 = 2100; 2100 : 60 = 35
Das erste Glied der Rechnung ist unnötig, da 28·1,0 = 28. Für die nachfolgenden Glieder wird man wohl die Tabelle mit der Kopfzahl 15 oder 20 wählen.

Dividieren

Die Babylonier dividierten eine Zahl a durch n, in dem sie a mit dem Kehrwert von n multiplizierten.

$$a : n = a \cdot \frac{1}{n}$$

Nützlich ist deshalb eine Tabelle mit den am meisten benützten Kehrwerten:

Das Reziproke von	2	ist	30. Das Reziproke von	27	ist 2,13,20
	3		20	30	2
	4		15	32	1,52,30
	5		12	36	1,40
	6		10	40	1,30
	8		7,30	45	1,20

[70] Durchmesser 10,6 cm, Zylinderhöhe 22,5 cm (Informationsquelle Vogel, Bd.2, S. 27, Fußnote 5)

9	6,40	48	1,15
10	6	50	1,12
12	5	54	1,6,40
15	4	1	1
16	3,45	1,4	56,15
18	3,20	1,12	50
20	3	1,15	48
24	2,30	1,20	45
25	2,24	1,21	44,26,40

Abb. 44: Reziprokentabelle

Für alle Paare gilt immer $n \cdot \frac{1}{n} = 1.$ (bzw. 60^n)[71]

Die Tabelle ist vielseitig verwendbar. Vogel nennt das Beispiel:

Aus der Zeile 9 6,40 kann man ablesen

$\frac{1}{9} = 0;6{,}40$ oder $\frac{60}{9} = \frac{1}{0;9} = 6;40$ oder $\frac{1}{9{,}0}\left(= \frac{1}{540}\right) = 0;0{,}6{,}40$. Es ist ein „Spiel“ mit dem Sexagesimalsystem. In altbabylonischer Zeit bis in die Seleukidenzeit[72] wurden ausgeklügelte Tabellen ergänzend zu den Standardtabellen erstellt. Eine enthält die Reziproken von $125 \cdot 2^n$ (n von 0 bis 29)! Eine Tafel ist erhalten, in der bis n=17 die Kehrwerte vorgerechnet werden. Der Divisor wurde dabei in zwei Summanden zerlegt und hat dann:

$$\frac{1}{a+b} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{1}{a} \cdot b + 1}$$

sexagesimal entwickelt. Beispiel $\frac{1}{2{,}5}$

a=5 b=2,0 $\frac{1}{a} = 0;12$ $\frac{1}{a} \cdot b = 24$ $\frac{1}{a} \cdot b + 1 = 25$ $\frac{1}{\frac{1}{a} \cdot b + 1} = 0;2;24$

Den Babyloniern war bewusst, dass sich nicht bei allen Zahlen ihre reziproken Werte in einer endlichen Sexagesimalentwicklung angeben lassen. Man unterscheidet „reguläre“ Zahlen der Form $2^a \cdot 3^b \cdot 5^c$, die alle Teiler von 60 abbilden und die auch alle in der Normaltabelle enthalten sind.

Für irreguläre Zahlen als Divisor hat man schon in altbabylonischer Zeit mit Näherungslösungen gerechnet. Bekannt ist eine Reziprokentabelle, in der $\frac{1}{59}$ als 1,1,1 und $\frac{1}{71}$ als 50,42,15 angegeben ist.

[71] Quelle Tabelle und Text Vogel, Bd. 2, ebenda, S. 29

[72] Von Alexander dem Großen begründet, der im Jahr 312 v. Chr. Babylon einnahm.

Bruchrechnen

Es ist leicht einzusehen, dass dieses babylonische Divisionsverfahren keine eigenen Regeln für das Bruchrechnen benötigte. Ein Stammbruch $\frac{1}{x}$ ist das Reziproke von x; für das Produkt zweier Stammbrüche $\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}$ ist ebenfalls keine neue Regel erforderlich. Auch für den allgemeinen Fall $\frac{m}{n}$ steht alles zur Verfügung. Man bestimme $\frac{1}{n}$ in der Reziprokentabelle und suche dazu in der Multiplikationstabelle mit der Kopfzahl $\frac{1}{n}$ das m-fache von $\frac{1}{n}$. Dies ist der Grund für die scheinbar ungewöhnliche Auswahl der Kopfzahlen.[73]

Mit den offenbar schon früh ausgearbeiteten Tabellen hatten die Babylonier (und frühere Kulturen) ein ausgefeiltes Instrumentarium für alle Anforderungen an Multiplikation und Division von ganzen Zahlen und Brüchen.

Potenzieren und Radizieren

Schon Fachwörter, die aus dem Sumerischen stammen, zeigen die alten mathematischen Ursprünge. Insbesondere Quadrat und Quadratwurzel sowie Kubikzahl und Kubikwurzel kommen in korrespondierenden Ausdrücken vor. Im Laufe der Zeit hat man sich mit Quadratzahltabellen das Rechnen erleichtert, die wiederum umgekehrt Quadratwurzeln zeigen. Es wurden Tafeln oder Tafelfragmente mit 16 Quadratzahltabellen der Form nxn=n^2 gefunden, von n=1 bis 20, sowie 30, 40, 50 oder auch 31 bis 60. Umgekehrt fanden sich 16 Quadratwurzeltabellen der Form „von n^2 ist n die Quadratwurzel“; analog 6 Tabellen für Kubikwurzeln. Vogel weist ferner auf eine besondere Quadratwurzeltabelle hin. Sie beginnt mit:

1	1
1,2,1	1,1
1,2,3,2,1	1,1,1

Rechts stehen als Wurzeln 1, 61 und 3661, links zu dazugehörenden Quadrate 1,3721 und 13 402 921.
Auch Tabellen für Potenzen und Exponenten waren im Gebrauch; z.B. für a^n mit (sexagesimal) a=9, a=16, a=1,40 und a=3,45 im Bereich n=2 bis n=10.
Auch eine Potenztabelle mit gebrochenen Exponenten wurde gefunden.
Exponenten („Logarithmen“) zu einer nicht genannten Basis 2 wurde ebenfalls gefunden. Möglicherweise fanden sie bei Zinsrechnungen Verwendung. Weiter fanden sich eine teilweise erhaltene Tafel in Bezug auf n^2+n^3 bzw. $n^2(n-1)$.[74]

[73] Die Argumentation folgt eng Vogel, Bd. 2, ebenda, S. 31
[74] Gekürzt nach Vogel, Bd. 2, ebenda, S. 33

Angenäherte Berechnung der Quadratwurzel

Reine Quadratzahlen wurden „vollständige“ Zahlen genannt. Für wichtige Zahlen waren unterschiedliche Genauigkeiten bekannt. So findet sich in Aufgaben der Wert $\sqrt{2} = 1;25$. Genauer ist $\sqrt{2} = 1;24,51,10$. Das steht in einer sog. Koeffizientenliste, die wohl professionell genutzt wurde.

Interessant ist die Tatsache, dass die Babylonier die Formel

$$\sqrt{a^2 \pm r} = a \pm \frac{r}{2a}$$

benutzten. Diese Formel oder besser das geometrische Iterationsverfahren, das damit verbunden ist, ist auch aus der griechischen Mathematik bekannt. Allerdings kennt man es in Griechenland unter dem Namen von *Heron von Alexandria* (gest. nach 62 n. Chr.).[75] Heron entwickelte ein geometrisches Verfahren, das bei einem Startwert a>0 einer Rechteckseite mit gegebener Fläche gegen die Quadratwurzelseite konvergiert. Es ist ein anderer, typisch griechischer Gedankengang, der geometrisch beweisbare Ergebnisse liefert.

Arithmetische Erkenntnisse

Schon die Betrachtung der Grundrechenarten und ihrer Rechentechnik hat einige theoretische mathematische Erkenntnisse offenbart. Dies gilt für pythagoräische Zahlentripel und für Reihen mit Zahlen in sexagesimaler Darstellung. Eine Aufgabe ist uns überliefert, die die arithmetische Reihe behandelt, auch wenn es sich um eine eher praxisferne Aufgabenstellung handelt:

10 Brüder sollen 1;40 Minen (=100 Schekel) unter sich verteilen, wobei der Anteil des achten (a_8) 6 Schekel beträgt. Zuerst wird der mittlere Anteil (m) als 100:10 bestimmt. Dann rechnet der Text (2 m – 2 a_8):5 = 1;36. Dies ist die gemeinsame Differenz. Es wird also nicht mit Formeln aus der modernen Mathematik gerechnet.

Eher kann eine Zeichnung (Abb. 45) Klarheit bringen.

[75] https://de.wikipedia.org/wiki/Heron-Verfahren

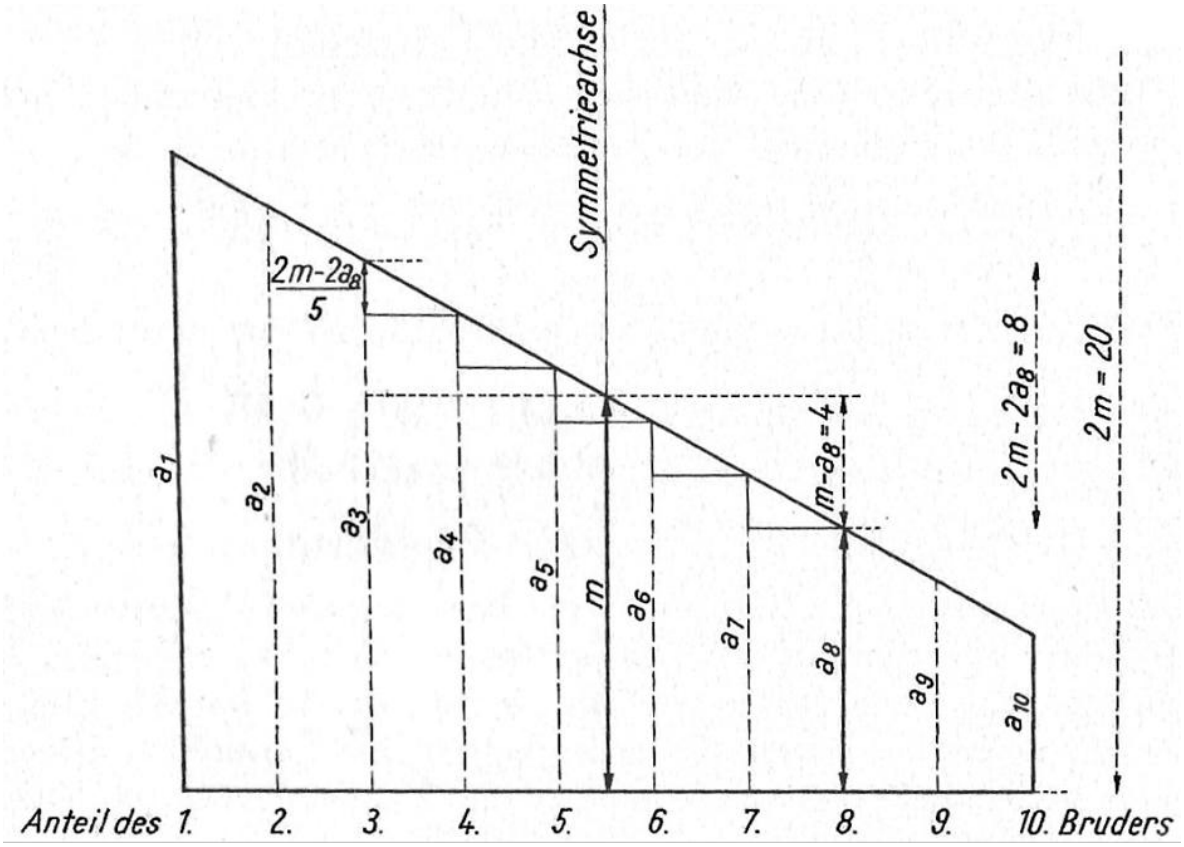


Abb. 45: Arithmetische Reihe anhand einer Verteilungsaufgabe

Geometrische Reihe, Plimpton 322

Im Louvre wird eine Tafel mit einer Aufgabe aus der Seleukidenzeit aufbewahrt. Man solle von 1 bis 10 mit 2 aufsteigen. Gemeint ist die Reihe

$$1 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^8 + 2^9 = \sum_{n=1}^{10} 2^{n-1} = 2^{10} - 1 = 1023$$

Man hatte damals aber offenbar noch keine Formel. Man addierte die ersten 9 Glieder und setzte vorläufig für das erste Glied 2 statt 1. Man hat also die Teilsummen 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512 und zieht am Schluss 1 wieder ab.

Im gleichen Louvre-Text geht es um die Aufgabe

$$\sum_{n=1}^{10} n^2$$

Auch hier wird ein „Rezept“ angegeben, das zwar funktioniert. Eine allgemeine Formel wird aber nicht angegeben oder gar hergeleitet.

Pythagoräische Zahlentripel



Abb. 46: Tafel mit pythagoräischen Zahlentripeln

Die abgebildete Tafel wurde Mitte des 18. Jahrhunderts v. Chr. in Larsa im heutigen Irak erstellt. Sie wurde 1920 von George Arthur Plimpton (1855−1936) gefunden und trägt auch seien Namen. Sie wurde von dem mehrfach genannten Mathematikhistoriker Otto Neugebauer (1899−1990) und dem Archäologen Abraham Sachs 1945 dechiffriert und interpretiert. Es gab mehrere Deutungsversuche. Mittlerweile gilt die von Neugebauer als die wahrscheinlichste.



Abb. 47: 12. Zeile der Plimpton 322 Tafel

Die abgebildete 12. Zeile lautet in Sexagesimal-Darstellung:

29 21 54 2 15 2759 48 49

Die Interpretation zeigt, wenn man üblicherweise die Hypothenuse im rechtwinkligen Dreieck mit c und die Gegenkathete zu α mit a bezeichnet:[76]

$$c = 48 \cdot 60^1 + 49 = 2929$$

$$a = 27 \cdot 60^1 + 59 = 1679$$

$$b = 1 + \frac{29}{60} + \frac{21}{60^2} + \frac{54}{60^3} + \frac{0}{60^4} + \frac{2}{60^5} + \frac{15}{60^6} \approx 1{,}489417$$

2929 und 1679 bilden zusammen mit 2400 ein pythagoräisches Zahlentripel. Es gilt außerdem

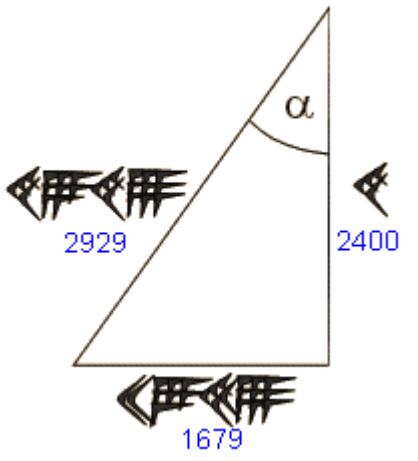


Abb. 48: Das zugehörige rechtwinklige Dreieck

$$sec^2(\alpha) = \frac{c^2}{2400^2} = \frac{8579041}{5760000} \approx 1{,}489417$$

Für die anderen Zeilen der Plimpton 322 Tafel findet man analoge Beziehungen. Allerdings enthält die Tabelle Fehler, die zuvor bereinigt werden müssen.

Die Tafel ist aber somit deutlich aussagekräftiger als eine Liste von pythagoräischen Tripeln. Die quadratische Sekansfunktion ist hier eine zweistellige Funktion

$$(a, c) \mapsto sec^2(a, c))$$

Es gilt

[76] Die Argumentation folgt https://www.henked.de/begriffe/funktion.htm#keilschrifttafel

$\sec(\alpha) = \frac{1}{\cos(\alpha)}$ also $sec^2(a,c) = \frac{c^2}{c^2-a^2}$.

Mit $b^2 = c^2 - a^2$ ergibt sich $sec^2(a,c) = 1 + \frac{a^2}{c^2}$.[77]

Daniel F. Mansfield und N.J. Wildberger (University of Sydney) haben den Text ebenfalls ausgewertet.[78] Die Zahlenreihen im sexagesimalen Zahlensystem bilden nach ihrer Auffassung eine trigonometrische Tabelle für Winkel, Katheten, Hypothenusen und Kreise. Bekanntlich hatten die Babylonier keinen Winkelbegriff und kompensierten diesen Mangel durch arithmetische Trigonometrie. Sie war übrigens durch das sexagesimale System genauer als die griechische Methode. Die Forschung ist allerdings in dieser Frage sehr umstritten (siehe auch Fazit): *This interpretation is a trifle fanciful* (ein wenig phantastisch).[79]

Aufgaben aus dem Alltag

Vogel nennt Beispiele und strukturiert nach verschiedenen Bereichen bzw. Aufgabentypen. So fanden sich Tontafeln mit kaufmännischen Rechnungen, Verteilungs- und Mischungsrechnungen oder Problemstellungen aus dem Handwerk. Beim Transport verschiedener Güter zu Lande und zu Wasser lernt man auch Arbeitsnormen kennen. So beträgt das tägliche Pensum eines Ziegelträgers 540 Ziegel über 30 Seillängen (ca. 1,8 km). Dieses Baumaterial hatte besondere Bedeutung in Mesopotamien. Auch Tafeln mit bautechnischen Aufgaben fanden sich.
Insgesamt kann man zwischen reinen Übungsaufgaben, Aufgaben mit Lösungsangabe und den interessantesten Aufgaben mit Angabe des kompletten Lösungswegs nach dem damaligen Wissensstand unterscheiden.

Babylonische Algebra

Die in Babylonien gefundenen mathematischen Texte sind sowohl vom Umfang als auch von der Qualität höher einzustufen als die in Ägypten gefundenen Papyri. Während in Ägypten lediglich zarte Ansätze hin zu einer Abstrahierung zu erkennen sind, sind die Aufgaben, die der Babylonier durch Gleichungen lösen kann, deutlich komplexer. Seine teils speziellen Methoden unterscheiden sich von moderner Mathematik. Er kann aber beide Seiten einer Gleichung ergänzen oder Glieder auf die andere Seite bringen. Brüche können durch Multiplikation und Faktoren beseitigt werden. Gleichungen können addiert oder subtrahiert werden, Hilfsunbekannte werden benutzt. Und es stehen diverse Formeln, wie z.B. die binomischen Formeln, zur Verfügung. Die Bezeichnungen

[77] Siehe dazu auch den Hinweis auf babylonische Trigonometrie im Fazit
[78] https://doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001
[79] Joseph G. G.; zitiert nach Herrmann, ebenda, S. 255

sind oft der Geometrie entlehnt, so dass klar ist, dass bei dem arithmetischen Multiplizieren oder Quadrieren in geometrischen Kategorien wie Rechteck und Quadrat gedacht wurde.[80]
Lineare Gleichungen sind selten; wenn überhaupt ist nur die Lösung angegeben. Sie sind offenbar zu trivial.
Zwei und mehr Unbekannte sind anspruchsvoller. In einer altbabylonischen Aufgabe führt der Text auf das Gleichungssystem

(1) $\frac{x}{7}+\frac{y}{11}=1$

(2) $\frac{6}{7}x=\frac{10}{11}y$

Es wird folgendes „Rezept“ vorgeschlagen:

$$\frac{x}{7}=\frac{11}{7+11}+\frac{1}{72} \text{ und } \frac{y}{11}=\frac{7}{7+11}-\frac{1}{72}\ .$$

Daraus ergibt sich korrekt x und y.
Es stellt sich aber die Frage, was hinter dem Rezept steckt.
Allgemein gilt

(1) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ oder x´+y´=1

(2) $\frac{(a-1)}{a}\cdot x=\frac{(b-1)}{b}\cdot y$ oder $x'(a-1)=y'(b-1)$

Aus (2) folgt, wenn man einen Faktor f einführt:

$$x'=f(b-1) \text{ und } y'=(b-1)$$

Aus (1) folgt $f=\frac{1}{a+b-2}$ und somit

$$\frac{x}{a}=\frac{b-1}{a+b-2} \text{ und } \frac{y}{b}=\frac{a-1}{a+b-2}$$

Es muss noch ein Korrekturterm $\frac{b-a}{(a+b)\cdot(a+b-2)}$ addiert werden.
Für $a=7$ und $b=11$ ergibt sich tatsächlich $\frac{1}{72}=0;0{,}50$.
Um die Leistung einordnen zu können, sollte man wissen, dass die Technik, den Faktor f einzuführen, erst bei Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, in seinem berühmten Buch *Liber abaci* thematisiert wurde. Das Buch erschien im Jahr 1202.

<u>Gleichungen zweiten Grades</u>
Eine Unbekannte

Heute geht man in der modernen Mathematik, zunächst mit einer Unbekannten, von der Normalform aus

$$x^2+px+q=0$$

In der Antike und praktisch bis zur Renaissance hat man Fälle unterschieden, da man den allgemeinen Ausdruck nicht immer auf Null bringen konnte.
Die Araber, die Algebra unter dem Namen $\text{Alchw}\tilde{a}rizm\tilde{\imath}s$ intensiv betrieben, wendeten folgende drei Formen/Fälle an

[80] Argumentation eng zu Vogel, Bd. 2, ebenda, S. 45

$$(1) \qquad x^2 + px = q \qquad x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2}$$

$$(2) \qquad x^2 - px = q \qquad x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2}$$

$$(3) \qquad x^2 + q = px \qquad x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Die arabischen Fälle (1) und (2) waren auch den Babyloniern bekannt. Dies muss offenbar schon sehr früh erfolgt sein, wie aus einem sehr alten Text, der heute im British Museum aufbewahrt wird (BM 13901), hervorgeht.
Die 3. Form (3) kann durch das identische Gleichungssystem ersetzt werden:

$$I \qquad x + y = p$$
$$II \qquad xy = q$$

Im Text der Keilschrifttafel tritt die Unbekannte als Quadratseite und ihr Quadrat als Fläche des Quadrats auf.
Beispiel: $x^2 - x = 14{,}30$. x konnte also schon damals nach der arabischen Formel (aber sexagesimal) berechnet werden:

$$x = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 14{,}30} + 0{,}5$$[81]

Zwei und mehr Unbekannte

Diese Problemstellungen sind laut Vogel[82] in viel größerer Zahl vorhanden.
Auf konkrete Aufgaben soll hier nicht eingegangen werden. Bemerkenswert ist die Tatsache an sich. Das Gleiche gilt für kubische Gleichungen und Gleichungen höheren Grades. Hier liegt ein umfangreicher Text mit 30 Aufgaben vor. Die Tafeln sind im Britischen Museum und ein Teil in Berlin aufbewahrt. Weiterhin wurden riesige Aufgabensammlungen mit ca. 1300 (!) Aufgaben ohne Lösungen gefunden. Es sind vor allem Probleme, die auf quadratische Gleichungen in wachsendem Schwierigkeitsgrad hinauslaufen.

Insgesamt zeigt das in großer Zahl gefundene Material an mathematischen Texten das enorme Wissen. Dies geht auch weit in der Geschichte des Zweistromlandes zurück. Es spricht viel dafür, dass das Wort „Algebra“ über das arabische „*al-´gabr*“ aus dem Sumerischen stammt. Es bedeutete „Gegenüber stellen“, also das Wesen einer Gleichung.

---

[81] Mathematischer Teil zur babylonischen Algebra (gekürzt) gemäß Vogel, Bd. 2, ebenda, S. 45 - 49
[82] Vogel, Bd. 2, ebenda, S. 49

Babylonische Geometrie

Selbstverständlich ist die Anwendung praxisorientierter geometrischer Methoden in der Landvermessung oder der Architektur. Die Methoden wurden aber rein arithmetisch behandelt und numerisch dokumentiert.[83] Sie sollen hier aber in der uns vertrauten geometrischen Darstellung behandelt werden.

1) Allgemeines Viereck

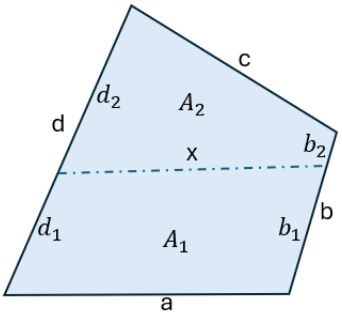


Abb. 49: Halbierung allgemeines Viereck

Sowohl Ägypter als auch Babylonier kannten und arbeiteten mit der Näherungsformel für die Fläche von allgemeinen Vierecken, die nur für Rechtecke oder Trapeze korrekt ist:

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}$$

x als Transversale teilt das Viereck und $A_1 = A_2$

$$(x+c)(b_2+d_2) = (a+x)(b_1+d_1)$$
$$(a+x)(b_1+d_1) + (x+c)(b_2+d_2) = (a+c)(b_1+b_2+d_1+d_2)$$

Umformen der 2. Gleichung:

$$(x-c)(b_1+d_1) = (a-x)(b_2+d_2)$$

Produkt der beiden Gleichungen:

$$(x+c)(b_2+d_2)(x-c)(b_1+d_1) = (a+x)(b_1+d_1)(a-x)(b_2+d_2)$$

Vereinfachen zeigt:

$$x^2 - c^2 = a^2 - x^2 \Longrightarrow x = \sqrt{\frac{a^2+c^2}{2}}$$

Die Wurzel ist das quadratische Mittel.
Da der Vorgang „Halbierung einer Fläche“ sicher häufig vorkam, ist es wahrscheinlich, dass die Formel in Ägypten und in Babylonien bekannt war.[84]

2) Trapez

Wegen der Flächenhalbierung durch x folgt:

$$A_1 = A_2 \implies \frac{x+c}{2} h_2 = \frac{x+a}{2} h_1 \implies \frac{h_1}{h_2} = \frac{x+c}{x+a}$$

[83] Der folgende Abschnitt folgt weitgehend wörtlich

[84] Nach einer Idee von K. Vogel, Bd. II, ebenda, S. 70, Rechnung nach Herrmann, ebenda, S. 245

Ähnlichkeit ergibt: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{a-x}{x-c}$.

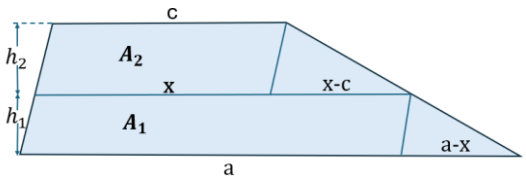


Abb. 50: Trapez mit Flächenhalbierender

Nach Gleichsetzen folgt:

$$x^2 - c^2 = a^2 - x^2 \implies x = \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{2}}$$

Im Gegensatz zu Fall 1) ist dieses Ergebnis exakt, da dieser Rechnung eine korrekte Flächenformel zugrunde lag.

3)

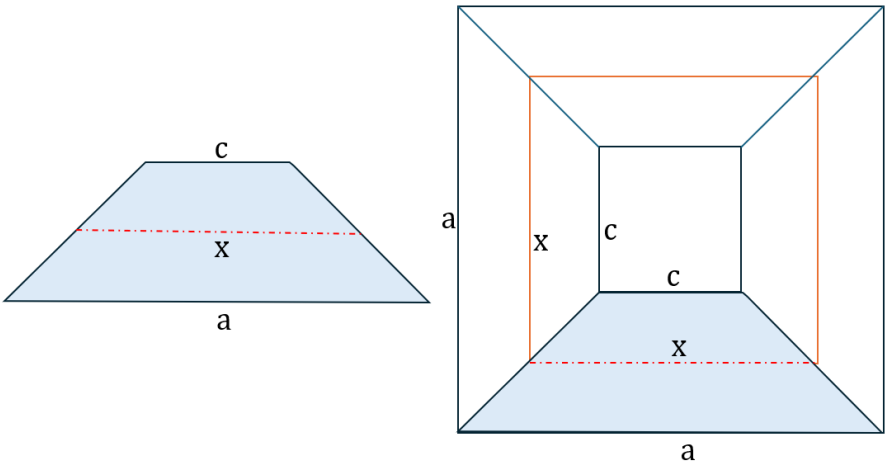


Abb. 51: Zerlegung zweier konzentrischer Quadrate in Trapeze

Geometrische Interpretation

Die Grafik in Abbildung 51 zeigt einen bemerkenswerten Zusammenhang, den die Babylonier bei einem symmetrischen Trapez erkannten. P. Rudman[85] formuliert es folgendermaßen:

Über den Parallelseiten a, c des Trapezes werden jeweils konzentrische Quadrate errichtet. Dem „Quadratring" können genau drei weitere kongruente Trapeze einbeschrieben werden. Die Flächen der Quadrate betragen a^2 bzw. c^2, ihre Differenz ist die vierfache Trapezfläche 4A.

Es gilt

$$A = \frac{1}{4}(a^2 - c^2)$$

Für die untere Hälfte des Trapezes gilt analog:

$$A_1 = \frac{1}{4}(a^2 - x^2)$$

Wegen Halbierung folgt:

[85] Rudman, P. S.; The Babylonian Theorem, Prometheus Books, S. 82. Amherst (2010), sinngemäß zitiert nach Herrmann, ebenda, S. 247

$$A = 2A_1 \implies \frac{1}{4}(a^2 - c^2) = \frac{1}{2}(a^2 - x^2)$$

Vereinfachen zeigt:

$$a^2 + c^2 = 2x^2$$

Obwohl der Beweis mit symmetrischen Trapezen geführt wurde, lässt sich das Ergebnis auf andere Trapeze verallgemeinern.

4) Verallgemeinerung zur altbabylonischen Diagonalformel

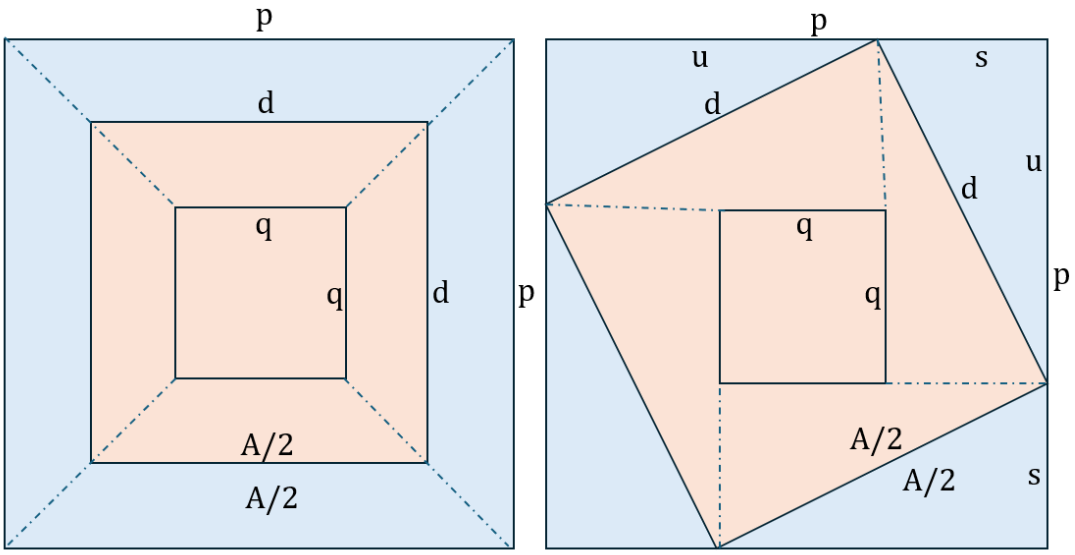


Abb. 52: Diagramm zur Altbabylonischen Diagonalformel

Gemäß Abb. 52 (links), geht es um folgende Flächenzerlegung:
Wie in Abb. 51 enthält sie zwei konzentrische Quadrate, denen vier kongruente gleichschenklige Trapeze mit den Parallelseiten p, q einbeschrieben sind. Die Flächenhalbierenden d der vier Trapeze bilden ein drittes, zwischen den beiden anderen Quadraten liegendes konzentrisches Quadrat. Für den Flächeninhalt A eines der Trapeze und dem Quadrat der Flächenhalbierenden gilt:

$$A = \frac{1}{4}(p^2 - q^2); \quad d^2 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

Das große Quadrat wird nun zerlegt in das innere Quadrat und in vier kongruente Rechtecke (zweifarbig in Abb. 51 rechts), die einen Ring um das innere Quadrat bilden. Jedes dieser Rechtecke mit den Seiten u, s, (u+s=p) ist flächengleich zu einem Trapez. Da die Diagonale eines Rechtecks ebenfalls Flächenhalbierende ist, sind die Diagonalen kongruent zu den Flächenhalbierenden der Trapeze. Damit gilt nach Abb. 52 rechts:

$$d^2 = \frac{1}{2}(p^2 + q^2) = \frac{1}{2}[(u + s)^2 + (u - s)^2] = u^2 + s^2$$

Diese Beziehung ist vollkommen äquivalent zum Satz des Pythagoras. Das Diagramm in Abb. 52 ist auch Grundlage für einen der vielen Beweise.

Friberg nennt die Beziehung „*Old Babylonian diagonal rule*.[86]

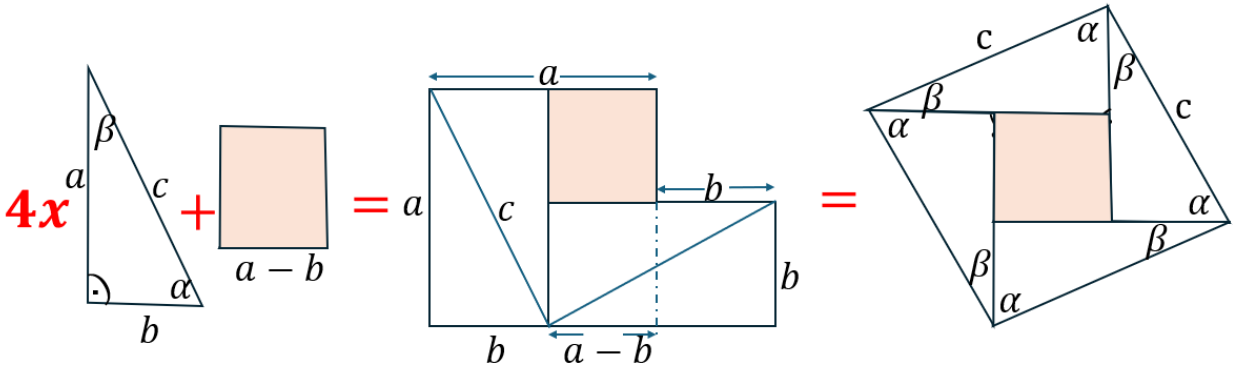


Abb. 53: Zum Vergleich die Schritte zu einem bekannten Beweis des Satzes von Pythagoras

Trotz der Hilfen durch geometrische Diagramme ist das Kennzeichen der babylonischen Geometrie jedoch die numerische Beschreibung. Dies mag am Schreibmaterial, den Tontafeln, liegen, auf dem geometrische Zeichnungen nur plump gelingen.

Dies gilt auch in vielen Fällen für die Astronomie. Die linke Abbildung zeigt eine wesentlich abstraktere Anwendung von Geometrie. Es geht um die Positionsbestimmung des Jupiters. Der Professor für Wissenschaftsgeschichte, Mathieu Ossendrijver von der Humboldt-Universität zu Berlin, konnte dies anhand von vier, 2050 bis 2350 Jahre alten Tontafeln beweisen. Auf einer der Tafeln ist ein Trapez berechnet; auf einer weiteren kann man die Distanz ermitteln, die der Jupiter in 60 Tagen zurücklegt. Andererseits kann man auch wiederum auf die Zeitdauer für diese Positionsveränderung schließen. Hier sieht man eine Leistung in der Astronomie-Geschichte, die erst 1400 Jahre später in Europa erreicht wurde. Sie macht auch einen entscheidenden Unterschied zu Griechen und Ägyptern aus, die nur konkrete Geometrie entwickelten. Die Babylonier haben sie dagegen auch als abstraktes Hilfsmittel genutzt, um damit Raum und Zeit in der

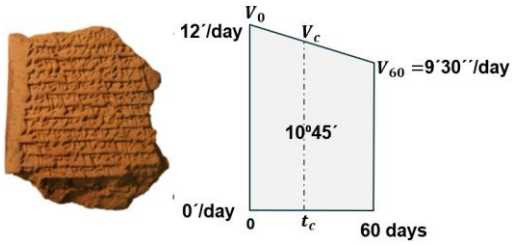


Abb. 54: Abstrakte geometrische Methoden in der Astronomie

[86] Frioberg, J.; Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics, S. 99. World Scientific Publishing, New York (2007), zitiert nach Herrmann, ebenda, S. 249.

Himmelsbeobachtung zu beschreiben.[87],[88]
Trotz dieser Leistung war das geometrische Wissen unvollständig strukturiert. Die Babylonier wussten viel über ebene Figuren oder räumliche Körper, wie Kegelstumpf, Pyramidenstumpf, Obelisk oder Prismatoid.[89]
Allerdings fehlten grundsätzliche Begriffe wie „ähnlich“ oder „Parallelen“, obwohl man damit mathematisch umging. Vollständig fehlte der Begriff des „Winkels“, außer bei rechten Winkeln. Diese wurden in Aufgaben oft stillschweigend vorausgesetzt. Bei der Neigung der Trapezseiten wird umschrieben, ohne den Begriff Winkel zu definieren.

Man sollte aber die Anforderungen an Schreiber bzw. Priester nicht geringschätzen. Lehmann berichtet: Als Prüfungsaufgabe für Priesterkandidaten war folgende Aufgabe zu lösen:[90]

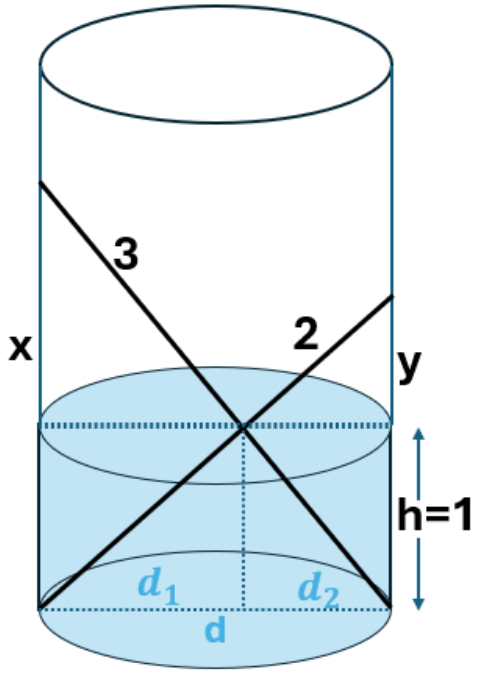


Abb. 55: Illustration zur Prüfungsfrage für Priester

In einem zylindrischen Lotusbrunnen stehen zwei Schilfrohre der Länge 3 bzw. 2, die sich genau auf der Höhe des Wasserspiegels (Höhe h=1) überkreuzen. Gesucht ist der Durchmesser d des Brunnens.
Nach Pythagoras gilt:

$$x^2 + d^2 = 9;\ \ y^2 + d^2 = 4$$
$$\Rightarrow\ \ x^2 - y^2 = 5$$

Aus der Ähnlichkeit folgt:

$$\frac{x}{d} = \frac{x-1}{d_1} \Rightarrow\ \ d_1 = d\left(1 - \frac{1}{x}\right)$$
$$\frac{y}{d} = \frac{y-1}{d_2} \Rightarrow\ \ d_2 = d\left(1 - \frac{1}{y}\right)$$

Addition liefert:

$$d = d_1 + d_2 = d\left[\left(1 - \tfrac{1}{x}\right) + \left(1 - \tfrac{1}{y}\right)\right] \ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \Rightarrow\ \ xy = x + y$$

[87] https://www.spektrum.de/news/babylonische-astronomen-beherrschten-abstrakte-geometrie/1397035
[88] https://www.topoi.org/news/geometrie-in-der-babylonischen-sternkunde/
[89] Neugebauer, O.; Geometrie der ägyptischen mathematischen Texte, im Sammelband; Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Bd. I, S. 439-441, Springer (1931)
[90] Lehmann, J.; So rechnen die Ägypter und Babylonier, S. 60, Urania (1994), zitiert nach Herrmann, ebenda, S. 176-178

Einsetzen von y ergibt eine quadratische Gleichung:

$$x^2 - \left(\frac{x}{x-1}\right)^2 = 5 \implies x^4 - 2x^3 - 5x^2 + 10x - 5 = 0$$

Herrmann hat dazu mit Recht mehrere kritische Bemerkungen:

Diese Gleichung kann wohl nur numerisch gelöst werden.

$$x \approx 2{,}73572 \ldots \implies y = 1{,}57613 \ldots$$

Der gesuchte Brunnendurchmesser ergibt sich zu

$$d = \sqrt{9 - x^2} \approx 1{,}2310.$$

Das war jetzt eine Lösung mit den mathematischen Mitteln von heute.

Man muss Herrmann zustimmen, dass es schwer vorstellbar ist, wie dieses Problem mit den Mitteln der altägyptischen Mathematik gelöst werden kann.
Das nichtlineare System stellt geometrisch zwei Paare von gleichseitigen Hyperbeln dar, die genau einen positiven Schnittpunkt haben.

Fazit

Wir kommen nun zu der Titelfrage zurück:

Ex oriente lux ?

Dabei gehen wir davon aus, dass die Mathematik der Griechen weitgehend bekannt ist. Wir stellen diese dem komprimierten mathematischen Wissen der Ägypter und der Sumerer (Babylonier etc.) gegenüber, wie es in diesem Beitrag zusammengetragen wurde.
Die vier Zitate eingangs spiegeln dabei grundsätzliche Positionen großer Mathematiker und Philosophen wieder:

> Der Praktiker Ptolemäus, der sich als Grieche bewusst für das sexagesimale System entscheidet.
>
> Die fast überhebliche Einschätzung des großen englischen Zahlentheoretikers Godfrey Hardy und vorurteilsfreien Förderers des genialen indischen Wunderkindes Srinivasa Ramanujan.
>
> Die gleichermaßen selbstkritische wie selbstbewusste Einschätzung von Platon.
>
> Von Hermann Hankel erschien 1874 posthum, veröffentlicht von seinem Vater, *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*.[91]

[91] https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb11187597?page=7 oder https://archive.org/details/zurgeschichtede00hankgoog/page/n91/mode/2up
Zitat S. 83: *Die Nachrichten, welche uns griechische Schriftsteller über Form und Inhalt der ägyptischen Geometrie […], sind sämmtlich nur von untergeordnetem*

Durch sachliche Faktenanalyse der jeweiligen Erkenntnisse plädiert er indirekt für eine wertungsfreie Herangehensweise.

Bevor auf die Mathematik eingegangen werden soll, muss man bei der Schrift beginnen. Hier haben die Griechen einen Durchbruch erzielt, der die Kulturgeschichte des Abendlandes entscheidend prägte. Das griechische Alphabet kann man als die zweite Medienrevolution nach Erfindung der Schrift im Allgemeinen bezeichnen. Es erlaubte den Einsatz in allen Lebensbereichen und war somit Fundament für alle Wissenschaften. Der Vorläufer war zwar mit der phönizischen Schrift eine Entwicklung im Vorderen Orient (Syrien, Libanon, Palestina), aber die Griechen führten erstmals Vokale ein und nahmen eine Differenzierung der 24 Buchstaben in Groß- (Majuskeln) und Kleinbuchstaben (Minuskeln) vor. Eine Ergänzung durch Determinative (Deutzeichen), um Mehrdeutigkeiten zu reduzieren, war nicht mehr nötig.

Das Griechenland-Bild in Westeuropa wurde maßgeblich durch die Renaissance geprägt. Regiomontanus und andere sammelten griechische mathematische Handschriften in Griechisch oder in arabischer Übersetzung. Er gründete sogar einen Verlag und brachte ins Lateinische übersetzte Werke von griechischen Mathematikern über das neue Medium Buchdruck mit beweglichen Lettern heraus. Das Motto der Renaissance war „*Ad fontes*“ (zu den Quellen). Bis vor knapp 100 Jahren war die griechische Mathematik ab der „goldenen“ Periode vor 2500 Jahren das Maß aller Dinge, was antike Mathematik betraf. Dann wurden mathematische Texte aus Ägypten und dem Zweistromland gefunden, die nochmals bis zu 2500 Jahre älter waren. Es stellte sich heraus, dass viele Kenntnisse vor den Griechen bekannt waren. Zumindest die Frage „Ex oriente lux?“ musste man relativieren oder gar zugunsten der vorgriechischen Mathematik beantworten. Hier soll mit Otto Neugebauer einer der besten Kenner der älteren Mathematik-Geschichte zu Wort kommen:[92]

Seitdem wir nicht nur jene zweieinhalb tausend Jahre Geschichte kennen, die seit dem klassischen Zeitalter verfloss, sondern seitdem wir auch jene anderen zweieinhalb tausend Jahre mehr oder weniger überblicken können, die dem griechischen Altertum voraufgingen, ist es nicht mehr möglich, in den Griechen die allerersten Schöpfer und Begründer zu sehen.[…] *Sowohl im Bereich der elementaren Geometrie, wie im Bereich der elementaren Proportionenlehre, wie schliesslich im Bereich der Gleichungslehre liegt in der babylonischen Mathematik das gesamte inhaltliche Material geschlossen vor, auf dem die griechische Mathematik aufbaut. Der Anschluss ist in allen Punkten lückenlos herzustellen.*

Werthe, weil sie flüchtig und unkritisch […], ohne dass die Berichterstatter ein tieferes Verständniss für die Sache zeigen.

[92] O. Neugebauer: Studien zur Geschichte der antiken Algebra in (Quellen u n d Studien zur Gesch. der Math. Abt. B. Bd. 3 [1936] S. 245-259)
O. Neugebauer: Vorlesungen über die Geschichte der antiken math. Wissenschaften. Berlin 1934. S. 168

Das griechische Zahlensystem, genannt milesisches System oder auch alphabetisches System, hat eindeutig ägyptische Wurzeln. Aus den Hieroglyphen ist mit dem Hieratischen eine Schreibschrift mit entsprechenden Zahlzeichen entstanden. Sie kann in Griechenland bis zurück ins 3. Jahrtausend v. Chr. nachgewiesen werden. In hieratisch ist bekanntlich auch der Papyrus Rhind verfasst worden.
Hieratisch wurde durch demotisch mit vereinfachten Ziffern abgelöst. Im 4. Jahrhundert v. Chr. ersetzten die Griechen die ersten drei mit jeweils neun Ziffern bestehenden hieratisch-demotischen Zahlenreihen durch ihr eigenes Alphabet. Damit konnten Einer, Zehner und Hunderter fast vollständig durch das griechische Alphabet beschrieben werden. Ab diesem Zeitpunkt kann man von einem alphabetischen System sprechen. Da dieses nur aus 24 Buchstaben besteht, mussten drei weitere Buchstaben als Zahlzeichen definiert werden. Es sind für 6 = F, (wie F mit zusätzlichem kleinen Strich Ϝ, Digamma), 90 = Ϙ/ϟ, (Qoppa oder Koppa – entspricht dem lateinischen Q) und 900 = Ϡ, (Tsampi oder Sampi). Die 6 als Digamma wird in heutigen Druckwerken meist als sigma-tau (στ) verwendet (in Form einer Ligatur). Dies sind griechische Feinheiten, die aber am prinzipiellen hieratisch-demotischen Ursprung nichts ändern können. Im Gegenteil: Man kann es sogar als Rückschritt werten. Den Anstoß zur Umbenennung der Nomenklatur des ägyptischen Dezimalsystems (ohne Positionswert) durch griechische Buchstaben war vermutlich die schwer lesbare hieratische und später demotische Schreibschrift.
Die Griechen haben nicht das sexagesimale Positionssystem in ein System auf Basis 10 oder wenigstens 12 verändert, sondern durch Zahlbuchstaben nur optisch mehr Übersichtlichkeit erzeugt, aber mathematisch sich zurück entwickelt. Szabo sagt dazu:

Die babylonische Mathematik besaß in der Tat auch solche Ansätze, die durch die späteren Griechen nicht ausgenutzt wurden; ja, es wurde sogar durch die Tatsache, dass die Griechen die Entwicklung der Mathematik in eine bestimmte Richtung lenkten, eine ziemlich lange Zeit hindurch — eigentlich bis zur Zeit der europäischen Renaissance — verhindert, dass die entwicklungsfähigen Ansätze der älteren babylonischen Algebra zur Entfaltung kämen.[93]

Nun zu einzelnen Aspekten und ihrem Einfluss auf die griechische Mathematik.

Im Papyrus Rhind und im Moskauer Papyrus tauchen in großer Zahl die sogenannten Hau-Aufgaben auf. Diese linearen Gleichungen bei den Ägyptern wurden auch als quadratische Gleichungen bei den Babyloniern behandelt. Sie wurden mit quadratischer Ergänzung gelöst, d.h. mit geometrischer

[93] Á. Szabó; Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden?
https://real.mtak.hu/171933/1/115_cut_ACTAANTIQUA_04.pdf, S. 4

Anschauung, aber ohne das Prinzip zu beweisen. Das wurde beides von den Griechen übernommen, aber um einen Beweis ergänzt.

Generell kann man sagen, dass die griechischen Vordenker die ägyptische Kultur bewunderten und sich nicht scheuten, ägyptisches Wissen zu adaptieren. Als einer der ersten besuchte der griechische Historiker Herodot um ca. 448 v. Chr. Ägypten und versuchte in seinem zweiten Buch seiner Historien möglichst umfassend die Kultur zu beschreiben. Von ihm stammt der bekannte Aphorismus, Ägypten sei das „Geschenk des Nils".
Relativ sicher ist die Tatsache, dass Platon (um 428 – 348 v. Chr.), wohl direkt nach dem Tod von Sokrates (399 v. Chr.) u.a. nach Ägypten reiste. Er kam mindestens bis Heliopolis, Herodot sogar bis zur Nilinsel Elephantine nahe dem heutigen Assuan. Sowohl er, als auch Herodot, äußerten sich voller Lobes auch über die ägyptische Mathematik. Auch die Mathematiker und Astronomen Pythagoras (gest. nach 510 v. Chr.) und Eudoxos von Knidos (ca. 408 – 345/338) scheinen Ägypten länger besucht zu haben. Diese Reisen einflussreicher Männer scheinen der Beginn eines intensiven Kulturaustausches mit Einfluss auf die Mathematik gewesen zu sein.
Viel früher hat Thales von Milet (624/23 – 548/544 v. Chr.) verfügbares Wissen zu den geometrischen Techniken zur Landvermessung adaptiert und theoretisch weiterentwickelt. Er interessierte sich für die Regeln hinter dem empirisch erworbenen, geometrischen Wissen der ägyptischen Feldmesser (*Harpedonapten*). Dazu gehörten Näherungswerte oder auch exakte Formeln für die Flächenberechnung, aber auch Berechnungen der Volumina für Quader, Zylinder und Pyramidenstumpf. Es fehlten wichtige Bezeichnungen für geometrische Figuren (wie Dreiecke). Diese wurden von den Griechen ergänzt und genau definiert. Auf rein arithmetischem Weg wurden erstaunliche Kenntnisse entdeckt. Die Griechen „dachten" jedoch geometrisch. Zahlenwerte, egal ob konkret oder abstrakt, waren Strecken oder Flächen. Der Zahlbegriff war noch sehr diffus und beschränkte sich im Prinzip auf positive, ganze Zahlen ohne die Eins und die Null war nicht bekannt.[94] Die altbabylonische Diagonalformel ist wahrscheinlich keine Herleitung im Sinne eines Beweises, aber es muss als erstaunliche abstrakte Denkleistung ohne die Möglichkeit einer geometrischen Veranschaulichung gewertet werden.
Die spezielle ägyptische Bruchrechnung über die Zerlegung in Stammbrüche haben frühe griechische Rechentechniken wohl beeinflusst, aber es wurde ein

[94] Erst Petrus Ramus (Pierre de la Ramée, 1515 – 1572), ein französischer Philosoph der Renaissance, ließ den griechischen Zahlbegriff hinter sich und definierte eine Zahl sauber: *Numerus est secundum quem unumquodque numeratur* (Eine Zahl ist, womit wir zählen und rechnen). Zitiert nach Kafitz, W., Zahlen - Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung des Zahlbegriffes, http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-8380, S. 17

eigener Weg beschritten. Brüche waren bis zur Entdeckung der irrationalen Zahlen (z.B. $\sqrt{2}$, goldener Schnitt, etc.) für die Griechen kommensurable Verhältnisse, also etwa das Verhältnis von zwei messbaren Strecken.[95]
Das babylonische sexagesimale Zahlensystem erwies sich besonders für astronomische Berechnungen als nützlich. Was fehlte, war der für die griechischen Interessen sehr wichtige Winkelbegriff, der ebenfalls schnell von den Griechen ergänzt werden musste. Das System hat sich nicht zuletzt durch den enormen Einfluss der Griechen auf die europäische Kultur bis in die heutige Zeit erhalten. Astronomische Berechnungen, insbesondere bzgl. Winkelmessungen in Grad, Minuten und Sekunden, machen wir heute noch und haben dies in internationalen Normen festgeschrieben. Das gleiche gilt für die Zeitmessung und ihre Einteilung.
Algebraisches Wissen war schon früh über die Sumerer in Mesopotamien verfügbar und übertraf das damalige griechische mathematische Wissen bei weitem. So wurde die Lösung von quadratischen und kubischen Gleichungen in die griechische Mathematik integriert. Babylonische langfristig zurück reichende Aufzeichnungen über die Bewegung von Planeten sowie über Sonnen- und Mondfinsternissen ergänzten bedeutend die griechischen Erkenntnisse. Sie wurden durch eigene Berechnungen erweitert. Hier nochmals der Hinweis auf die Tafel Plimpton 322. So hat man bisher die Trigonometrie als griechische Entdeckung eingestuft. Auch hier spielt Plimpton 322 wieder eine Rolle, obwohl die Tafel schon im Jahr 1900 gefunden wurde. Daniel F. Mansfield und N.J. Wildberger (University of Sydney) haben den Text unter diesen Gesichtspunkten ausgewertet.[96] Die Zahlenreihen im sexagesimalen Zahlensystem bilden nach ihrer Meinung eine trigonometrische Tabelle für Winkel, Katheten, Hypothenusen und Kreise und bestätigen damit frühere Forschungen. Durch das sexagesimale System war sie genauer als die griechische Methode. Trotzdem ist diese Interpretation umstritten. D. E. Joyce unterstützt diese Meinung.[97] Eleanor Robson verwirft die Hypothese mit Verweis auf den fehlenden Winkelbegriff.[98]

Bevor wir an die Beantwortung der Titelfrage „Ex oriente lux?“ kommen, nochmals die Einschätzung von Morris Kline, immerhin ein Professor Emeritus of Mathematics an der New York University.[99] Er hat sich zum Ziel gesetzt,

---

[95] Genauer: a und b heißen kommensurabel, wenn es eine Größe d gibt und natürliche Zahlen m, n ∈ N, mit a = md und b = nd.
[96] https://doi.org/10.1016/j.hm.2017.08.001
[97] Plimpton 322, Clark University (1995), http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/plimpnote.html
[98] Robson, E.;Neither Sherlock Holmes nor Babylon: areassessment of Plimpton 322, Historia Mathematica, 28(3), 167-206, (2001)
[99] https://de.wikipedia.org/wiki/Morris_Kline

insbesondere den „Studenten der Geisteswissenschaften eine detaillierte Auseinandersetzung mit der Mathematik im kulturellen und historischen Kontext“ zu bieten:

Beurteilt man sie aber mit anderen Maßstäben, dann sind ägyptische und babylonische Beiträge zur Mathematik praktisch unbedeutend. […] Verglichen mit den Leistungen ihrer unmittelbaren Nachfolger, den Griechen, verhält sich die Mathematik der Ägypter und Babylonier, wie Kritzeleien von Kindern, die eben das Schreiben lernen, zu großer Literatur. […] Ägyptische und babylonische Mathematik wird am besten als empirisch beschrieben und verdient kaum den Namen Mathematik angesichts dessen, was wir seit den Griechen als die Hauptmerkmale dieser Wissenschaft betrachten. (Morris Kline, Mathematics for the Nonmathematican (1967) (S. 14).

Was soll man von diesen gegensätzlichen Einschätzungen halten? Immerhin besitzt Kline die ironische Selbstkritik in einem bekannten Zitat von ihm, das seine Ansicht möglicherweise relativiert:

Logic is the art of going wrong with confidence.[100]

Die richtige oder besser angemessenere Antwort könnte Platon gegeben haben.

Denn darüber können wir uns trösten, dass Griechen alles, was sie von fremden Völkern empfingen, zu größerer Schönheit und Vollendung erhoben haben.[101]

Im Vergleich zur griechischen, spätestens in der alexandrinischen Epoche wissenschaftlich betriebenen, Mathematik, sind die ägyptische und erst recht die babylonische Kultur wesentlich älter und ihre mathematischen Errungenschaften waren absolut notwendig für Größe und Dauer dieser Reiche und ihrer Kultur. Die griechischen Reisenden haben deshalb mit Staunen und Ehrfurcht die Leistungen beider Kulturen registriert und aufgegriffen. Das ist die eine Seite der Medaille.

Aber Platon hat recht, dass griechische Denker das „*von fremden Völkern*“ gelernte Wissen durch Logik veredelt und erweitert haben. Das mathematische Wissen, insbesondere in Ägypten, beruhte vielfach auf Empirik, vielleicht sogar Heuristik. Es fehlten Beweise und ein deduktives Vorgehen um ein umfangreiches und belastbares Theoriengebäude auf den fremden Erkenntnissen aufzubauen und zu erweitern. Konsequente logische Methoden machten die griechische Mathematik erst zu einer Wissenschaft. Logik und Mathematik als exakter Wissenschaft entwickelten sich notwendigerweise

[100] Logik ist die Kunst, mit Selbstvertrauen falsch zu liegen.
[101] Platon, der Athener in Epinomis 987E, zitiert nach Dietmar Herrmann, Mathematik im Vorderen Orient, S. 2

parallel.[102] Die Maßstäbe dazu, die bis heute gelten, hat Euklid in seinen „Elementen“ gesetzt. Sie waren vorwiegend abstrakt geometrischer Natur.[103] Wir müssen uns vor dem Vorurteil hüten, die vorgriechische Mathematik unter anschaulichen geometrischen Gesichtspunkten zu verstehen. Und man darf sie nicht in eine vertraute Formelsprache pressen.

Das darf aber in der Archäologie nicht der Wertemaßstab sein. Bis weit in die 70er Jahre des 20. Jahrhunderts wurden die archäologisch geborgenen, mathematischen Texte durch die Mathematikhistoriker ohne Bedenken in moderner Formelsprache interpretiert. Der rumänisch-israelische Wissenschaftsautor Sabatai Unguru[104] nannte diese Haltung „*ahistorisch*“. Er fand zu dieser Auffassung durch Studien auf drei Kontinenten, die ihn schließlich zur Mathematikhistorie gebracht haben. Er warnt insbesondere vor dem unsachgemäßen Gebrauch des Wortes „Algebra“ und den modernen Formelsprachen. In den kommenden Jahrzehnten setzte sich diese Haltung durch.

Historische Mathematiktexte unter dem Blickwinkel moderner Mathematik zu betrachten, ist die sicherste Methode, das Wesen der antiken Mathematik misszuverstehen, bei der philosophische Voreinstellungen und metaphysische Verflechtungen eine sehr viel grundlegendere und bedeutsamere Rolle gespielt haben als in der modernen Mathematik. Die Annahme, man könne automatisch und unterschiedslos auf jeden mathematischen Inhalt die moderne algebraische Symbolik anwenden, ist der sicherste Weg, die innewohnenden Unterschiede misszuverstehen, die in der Mathematik vergangener Jahrhunderte inbegriffen sind.[105]

Der dänische Mathematikhistoriker Jens Høyrup hat sich in die Denkmethoden der Keilschriftmathematik intensiv hineinversetzt und dadurch neue, teilweise revolutionäre Ansätze gefunden, wie quadratische Probleme damals durch spezielle Ansätze gelöst wurden.

---

[102] Aristoteles hat bereits im 4. Jahrhundert in den Analytica posteriora die Methoden der sog. beweisenden (apodiktischen) Wissenschaften beschrieben.

[103] Vgl. Platon, Staat VH 526 u n d 527. *Wenn die Mathematiker über Zahlen sprechen, so verstehen sie unter Zahlen etwas, was nur gedacht werden kann; ähnlich verhält es sich auch in der Geometrie; wenn man nämlich etwas in dieser Wissenschaft veranschaulichen will, so handelt es sich auch hier gar nicht um konkrete Dinge, sondern man will die Aufmerksamkeit auf etwas lenken, was anders als auf gedanklichem Wege gar nicht zugänglich ist.* (zitiert nach Szabo, ebenda, S. 8).

[104] https://de.wikipedia.org/wiki/Sabetai_Unguru. Sabetai Unguru: *On the need to rewrite the history of Greek mathematics*. In: *Archive for History of Exact Sciences*. Band 15, Nr.1, 1975, S. 67–114, doi:10.1007/bf00327233, JSTOR:41133441

[105] Unguru, S.; On the Need to Rewrite the History of Greek Mathematics, Archive for History of Exact Sciences, 67-114, Vol. 15, No. 1 (1975), zitiert nach Herrmann, Mathematik im Vorderen Orient, ebenda, S. 20.

Bemerkenswert ist auch die respektvolle Grundhaltung von Herrmann Hankel, die er zu einem Zeitpunkt (1869) geäußert hat, die den europäischen Kolonialismus auf die Spitze trieb. Bis die Siegermächte des „Großen Krieges“ 1918, als man die Weltkriege noch nicht nummerieren musste, die koloniale Welt neu aufteilten.

Es ist eben Mathematik auch eine Wissenschaft, die von Menschen betrieben wird, und jede Zeit, sowie jedes Volk hat nur E i n e n Geist.

Die als Frage formulierte These „*Ex oriente lux*“ muss man also, streng genommen, bejahen. Das „erste Licht“ kam tatsächlich aus dem Osten und es war schon sehr hell. Es brachte in diesen Jahrtausende alten ersten Hochkulturen durchaus Licht in die Anfänge der Mathematik.

Es wäre aber ungerecht, die Griechen als Nachahmer zu verunglimpfen. Es war kein Epigonentum. Die Griechen haben vorhandenes Wissen in den meisten Fällen sinnvoll übernommen. Dieses Wissen aus Ägypten und Mesopotamien liegt uns nach heutiger Quellenlage nicht in Form von Lehrbüchern vor, sondern weitgehend in Form von Aufgabensammlungen und in Tabellenwerken zur Erleichterung des praktischen, meist anwendungsorientierten Rechnens. Diese waren in babylonischen mathematischen Texten deutlich ausgeprägter als in ägyptischen.[106] Aber es finden sich in den Aufgaben auch spielerische Probleme und Denkaufgaben ohne direkten Anwendungsbezug (z.B. arithmetische und geometrische Reihen). Man denke an die einleitenden Worte im Papyrus Rhind durch den Schreiber *Ahmes* (siehe S. 65). Er verspricht „*dem wissbegierigen Schüler*“ nicht nur die Fertigkeit, anwendungsorientierte Aufgaben zu lösen, sondern „*Erkenntnis über all die dunklen Dinge und Geheimnisse der Natur*. [107]

In Griechenland wurde daraus die Mathematik, wie wir sie kennen. Nach anfänglichen Schritten wurde sie spätestens seit Euklid zu einer streng nach deduktiver Logik konzipierten, allgemeinen theoretischen Wissenschaft, deren Grundsätze bis heute Bestand haben.

Literaturhinweise

Gericke, Helmuth; Mathematik in Antike, Orient und Abendland, marix Verlag, Wiesbaden 2005

[106] Grund war vor allem, dass das babylonische „Einmaleins“ im Sexagesimalsystem von 2x2 bis 59x59 reicht und ein großes Kurzzeitgedächtnis verlangen würde.
[107] Dankenswerter Hinweis von Kurt Vogel, Bd. 1, S. 74

Gronau, Detlef; Vorlesung zur frühen Geschichte der Mathematik, Institut für Mathematik der Karl-Franzens-Universität Graz, 2009, https://imsc.uni-graz.at/gronau/Gm.pdf

Hankel, Hermann; Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter, B. G. Teubner, Leipzig 1874, https://archive.org/details/zurgeschichtede00hankgoog/page/n5/mode/2up

Herrmann, Dietmar; Die antike Mathematik; Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2014

Herrmann, Dietmar; Mathematik im Vorderen Orient, Springer Spektrum, Berlin 2019

Ifrah, Georges; Universalgeschichte der Zahlen, Campus, Frankfurt / New York, dt. Ausgabe 1991

Morenz, Ludwig D.; Vom langen Weg zur Schrift; Über Abstraktion und Sedimentierung im Niltal des Vierten Jahrtausends; EB-Verlag Berlin, 2025

Neugebauer, Otto; Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1926, digitalisiert https://www.ancientegyptfoundation.org/downloads/mathematics/Neugebauer_die_grundlagen.pdf

Neugebauer, Otto; Early Babylonian Astronomy, in: A History Of Ancient Mathematical Astronomy, Neugebauer (1975), https://archive.org/details/ahistoryofancientmathematicalastronomypt1oneugebauer1975_932_G/page/540/mode/2up

Sandvoss, Ernst R.; Geschichte der Philosophie, Band 1: Indien, China, Griechenland, Rom, dtv Wissenschaft, Originalausgabe April 1989

Á. Szabó; Wie ist die Mathematik zu einer deduktiven Wissenschaft geworden? https://real.mtak.hu/171933/1/115_cut_ACTAANTIQUA_04.pdf

Vogel, Kurt; Vorgriechische Mathematik, Teil 1, Vorgeschichte und Ägypten, H. Schroedel, Hannover, F. Schöning, Paderborn, 1958

Vogel, Kurt; Vorgriechische Mathematik, Teil 2, Die Mathematik der Babylonier, H. Schroedel, Hannover, F. Schöning, Paderborn, 1959

B. L. van der Waerden, Erwachende Wissenschaft. Ägyptische, babylonische und griechische Mathematik. Wissenschaft und Kultur, Bd. 8, Basel/Stuttgart 1956 (lag dem Autor nicht vor)

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Einzelnachweise:

https://de.wikipedia.org/wiki/Babylonische_Mathematik#Algebra

https://de.wikipedia.org/wiki/Unicodeblock_Keilschrift

https://de.wikipedia.org/wiki/Unicodeblock_Keilschrift-Zahlzeichen_und_-Interpunktion

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/10/UCB_Egyptian_Hieroglyphs.png

https://unicode.org/charts/PDF/U12400.pdf

https://symbl.cc/en/unicode-table/

Abbildungen

Abb. 1: Ägyptische Zahlzeichen für Zehnerpotenzen, Bildquelle Wikipedia
Abb. 2: heqat-Hohlmaß, Bildquelle https://de.wikipedia.org/wiki/Heqat
Abb. 3: Schreibutensilien, Bildquelle https://en.wikipedia.org/wiki/Scribe_equipment_(hieroglyph)#/media/File:Scribe_stuff.jpg
Abb. 4: Linkes Ende der Vorderseite des größten Fragments des Papyrus Rhind (heute im British Museum, pBM 10057), https://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind#/media/Datei:Rhind_Mathematical_Papyrus.jpg
Abb. 5: Wiedergabe des in der oberen Abbildung rechts sichtbaren Textabschnitts, https://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind#/media/Datei:Egyptian_A'h-mos%C3%A8_or_Rhind_Papyrus_(1065x1330).png
Abb. 6: Verwendung verschiedenfarbiger Tinte in dem (von rechts nach links) in hieratischer Schrift verfassten Manuskript – hier beim 41. Problem, https://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind#/media/Datei:Rhind41.jpg
Abb. 7: mit Achteck und einige Zeilen Rechnung zum 48. Problem, https://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind#/media/Datei:Probl%C3%A8me-R48-Papyrus-Rhind-texte.jpg
Abb. 8: Transkription dieser Zeilen unter der Skizze zum 48. Problem, https://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind#/media/Datei:R48-transcription.jpg
Abb. 9: Näherungsverfahren des Ahmes im Papyrus Rhind, Vermutung nach Vogel https://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind#/media/Datei:01_Ann%C3%A4herung_an_Kreisfl%C3%A4che-4.svg
Abb. 10: Bildquelle siehe Abb. 9, Vermutung nach Engels

Abb. 11: Die ersten 9 Zahlen, https://de.wikipedia.org/wiki/%C3%84gyptische_Zahlschrift
Abb. 12: wie Abb. 1
Abb. 13: Zum Vergleich eine Tabelle mit Hieroglyphen, hieratischer und demotischer Schrift, https://depic.ai/share/media_context_a-history-of-mathematical-notations-vol-i-egyptian-numerals-hieroglyphic-hieratic-20ad36
Abb. 14: Hieroglyphen-Schreibweise, Lesart und Interpretation einer Multiplikation (nach K. Vogel, Vorgriechische Mathematik, S. 32), Hieroglyphen aus https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/10/UCB_Egyptian_Hieroglyphs.png
Abb. 15: Beispiel einer aufgehenden Division ohne Bruchrechnung anwenden zu müssen. (nach Vogel, ebenda S. 32)
Abb. 16: Andere Ausdrucksform für die Division. (nach Vogel, ebenda S. 32)
Abb. 17: Ausdruck für „der Rechner“ (nach Vogel, ebenda S. 33)
Abb. 18: „Im Vorübergehen“
Abb. 19: Sehr übersichtliche Schreibweise der Stammbrüche, eigene Grafik
Abb. 20 2:n-Tabelle im Papyrus Rhind zur Stammbruchzerlegung, Auszug aus O. Neugebauer, Die Grundlagen der ägyptischen Bruchrechnung, Berlin, Verlag von Julius Springer, 1926, ab S. 45, digitalisiert https://www.ancientegyptfoundation.org/downloads/mathematics/Neugebauer_die_grundlagen.pdf
Abb. 21: Vollständige 2/n-Tabelle
Abb. 22: Seschat, Schutzgöttin der Buchführung, Bildquelle https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/0/0b/Seshat_edit2.svg
Abb. 23: Beispiel für eine Buchführung aus dem Papyrus Boulaq. Bildquelle K. Vogel, Bd. 1, S. 46
Abb. 24: Entwicklung „Haufen“ zu Unbekannte
Abb. 25: Landvermessung in Ägypten – Seilspanner, https://www.aegypten-geschichte-kultur.de/harpedonapten-landvermessung-im-alten-aegypten
Abb. 26: Bauzeichnung für das Grab Ramses IX, Glanville, Working plan for a shrine, https://www.jstor.org/stable/3854213
Abb. 27: Abbildung aus K. Vogel, Bd. 1, S. 64, eigene Grafik
Abb. 28: gleichschenkliges Trapez, aus K. Vogel, Bd. 1, S. 65, eigene Grafik
Abb. 29: Getreidewirtschaft, https://www.meisterdrucke.com/kunstdrucke/Egyptian-18th-

Dynasty/1115343/Ernte,-Dreschen-und-Worfeln-von-Getreide-%28Detail%29.html
Abb. 30: Seqed als Maß für die Neigung der Seitenflächen, https://de.serlo.org/mathe/1629/pyramide, sowie eigene Grafik
Abb. 31: Griffel zum Zahlenschreiben, nach K. Vogel, Bd. 2, eigene Grafik
Abb. 32: Schreibgriffel für normale Schrift, eigene Grafik
Abb. 33: Entwicklung der Schriftformen über die Archaische Bilderschrift zu Sumerischer und Assyrischer Keilschrift, Bildquelle: aus Kurt Vogel, Vorgriechische Mathematik, Bd. 2, S. 10.
Abb. 34: Gleichung I., aus Vogel, Bd. 2, ebenda S. 14
Abb. 35: Gleichung II., aus Vogel, Bd. 2, ebenda S. 14
Abb. 36: Änderung der Schriftrichtung um ca. 2500 v. Chr.. Eigene Grafik nach Vogel, Bd. 2, ebenda S. 15.
Abb. 37: 60er-Potenzen als Größenordnungen im Sexagesimalsystem, eigene Tabelle
Abb. 38: Sumerische Keilschrift für Zahlen von 1 bis 59, Bildquelle: https://www.superprof.de/blog/babylon-mathematik-zahlen-sumerer/
Abb. 39: Sumerische und akkadische Maßsysteme für Längen und Flächen, nach Vogel, Bd. 2, ebenda, S. 20
Abb. 40: Babylonisches Schichtmaß, eigene Grafik, nach Vogel, Bd. 2, ebenda S. 21
Abb. 41: Babylonische Hohlmaße für Getreide und Flüssigkeiten, nach Vogel, Bd. 2, ebenda S. 27
Abb. 42: Allgemeine Struktur einer Multiplikationstabelle
Abb. 43: Multiplikationstabelle mit Berücksichtigung der Reziprokwerte, sexagesimale Werte nach Vogel, Bd. 2, ebenda S. 21
Abb. 44: Reziprokentabelle
Abb. 45: Arithmetische Reihe anhand einer Verteilungsaufgabe, Kopie aus nach Vogel, Bd. 2, ebenda S. 36
Abb. 46: Tafel mit pythagoräischen Zahlentripeln, Bildquelle https://de.wikipedia.org/wiki/Plimpton_322
Abb. 47: 12. Zeile der Plimpton 322-Tafel, https://www.henked.de/begriffe/funktion.htm#keilschrifttafel
Abb. 48: Das zugehörige rechtwinklige Dreieck, Bildquelle wie Abb. 45
Abb. 49: Halbierung allgemeines Viereck, eigene Grafik nach Vogel, Bd. 2
Abb. 50: Trapez mit Flächenhalbierender, eigene Grafik
Abb. 51: Zerlegung zweier konzentrischer Quadrate in Trapeze, eigene Grafik
Abb. 52: Diagramm zur Altbabylonischen Diagonalformel, eigene Grafik

Abb. 53: Zum Vergleich die Schritte zu einem bekannten Beweis des Satzes von Pythagoras, eigene Grafik
Abb. 54: Geometrische Methoden in der Astronomie, eigene Grafik nach https://www.spektrum.de/news/babylonische-astronomen-beherrschten-abstrakte-geometrie/1397035
Abb. 55: Illustration zur Prüfungsfrage für Priester, eigene Grafik, nach

Danksagung

Mein aufrichtiger Dank geht an **Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl** vom Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. Er hatte in diesem Jahr offenbar wenig Zeit, sich mit den Texten eines Hobby-Wissenschaftlers zu befassen. Aber er hat sein Wort gehalten und den Artikel begutachtet.

Herr Dr. Michael Serafin bleibt für mich der wichtigste Kontakt zur „Oberhessischen naturwissenschaftlichen Gesellschaft“. Mit bewundernswerter Akribie hat er das Manuskript gelesen und seine Qualitätssicherung sorgt immer dafür, dass möglichst jede Unregelmäßigkeit entdeckt wird. Mit seinem Engagement sorgt er über die Zeitschrift hinaus für einen wichtigen Beitrag zur Sichtbarkeit der wissenschaftlichen Gesellschaft. Herrn Dr. Serafin danke ich dafür als Autor und als Mitglied.

FÜR FARI

Was du liebst, lass frei. Kommt es zurück, will es bei dir bleiben.“ – Konfuzius