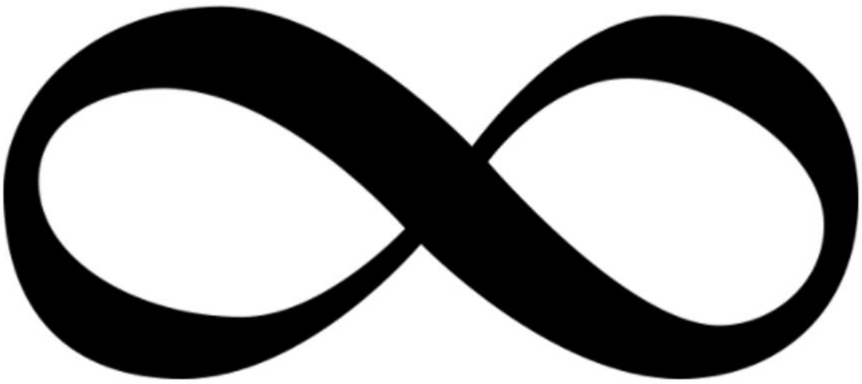
UNENDLICH

Versuch das Unbegreifliche zu begreifen

Eine mathematisch-historische Reise

WILLI KAFITZ*)



Abstract:

The term "infinite" describes a fact that can exist alone as an idea. This applies to mathematics as well as theology or philosophy, where God is equated with the infinite. There are no infinite quantities in nature however. The history of mathematics knows both “infinitely large” and “infinitely small” (infinitesimal). The Greek mathematicians already knew the potential and the actual infinite, but limited themselves to potentially infinite problems. Actual infinity of a set with infinitely many elements was avoided. Only a genius like Archimedes recognized the epistemological problems and knew how to deal with them. He developed techniques which Newton and Leibniz took up again in the integral calculus,1800 years later. In the Middle Ages, many written documents and knowledge from the heyday of Greek culture was lost. With Leibniz and Newton, “infinite” gradually became an integral part of mathematics, especially in integral and differential calculus. Without it, the epochal insights of the likes of Isaac Newton would not have come about. Well-known mathematicians further developed the handling of infinity. Cantor finally ventured into actual infinite quantities and came to the conclusion that that even in the „infinite“ there are different gradations. Not least on the basis of his results, the systematics, axiomatics and logic of set theory emerged, which is the foundation of mathematics today.

Keywords:

Potentially and actually infinite, Euclid, Archimedes, Newton, Leibniz, Cantor

Zusammenfassung:

Der Begriff „unendlich“ beschreibt einen Tatbestand, der alleine als Idee existieren kann. Dies gilt für die Mathematik, aber auch für die Theologie oder Philosophie, wo Gott mit dem Unendlichen gleichgesetzt wird. In der Natur gibt es keine unendlichen Mengen. Die Mathematikgeschichte kennt sowohl „unendlich groß“ als auch „unendlich klein“ (infinitesimal). Schon die griechischen Mathematiker kannten das potentiell und das aktual Unendliche. Aber man beschränkte sich auf potentiell unendliche Probleme. Aktuale Unendlichkeit einer Menge mit unendlich vielen Elementen wurde vermieden. Nur ein Genie wie Archimedes hat die erkenntnistheoretischen Probleme erkannt und wusste damit umzugehen. Er entwickelte Techniken, die erst in der Integralrechnung 1800 Jahre später von Newton und Leibniz wieder aufgegriffen wurden. Im Mittelalter gingen sehr viele schriftliche Dokumente und Erkenntnisse aus der Blütezeit der griechischen Kultur verloren. Mit Leibniz und Newton wurde nach und nach „unendlich“ ein fester Bestandteil der Mathematik, vor allem zunächst bei der Integral- und Differentialrechnung. Ohne diese wären die epochalen Erkenntnisse eines Isaak Newton nicht entstanden. Namhafte Mathematiker entwickelten den Umgang mit Unendlichkeiten weiter. Cantor wagte sich schließlich auch an aktual unendliche Mengen und erkannte, dass es auch bei „Unendlich“ verschiedene Abstufungen gibt. Nicht zuletzt auf Basis seiner Ergebnisse entstand Systematik, Axiomatik und Logik der Mengenlehre, die heute das Fundament der Mathematik darstellt.

Schlüsselwörter:

Potentiell und aktual unendlich, Euklid, Archimedes, Newton, Leibniz, Cantor

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

Zitate

"Die Theorie des Unendlichen hat ihre Schwierigkeiten; mag man die Existenz eines Unendlichen annehmen oder nicht, sofort drohen unannehmbare Konsequenzen." Aristoteles[1]

"Unsterblichkeit ist etwas Biologisches oder vielleicht auch Religiöses. Unendlichkeit spielt mit der Welt der Ideen und ist völlig unabhängig davon, ob wir sterblich oder unsterblich sind." Albrecht Beutelspacher[2]

"Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig." David Hilbert[3]

„Mit der Einführung der veränderlichen Größen und der Ausdehnung ihrer Veränderlichkeit bis ins unendlich Kleine und unendlich Große hat die sonst so sittenstrenge Mathematik den Sündenfall begangen.“ Friedrich Engels[4]

"Es dürfte sich schwerlich jemand finden, der unsinnig genug wäre zu behaupten, er besitze die positive Idee einer aktual unendlichen Zahl." John Locke[5]

„*Gewiß sind die meisten paradoxen Behauptungen, denen wir auf dem Gebiet der Mathematik begegnen, … Sätze, die den Begriff des Unendlichen entweder unmittelbar enthalten oder doch bei ihrer versuchten Beweisführung in irgendeiner Weise sich auf ihn stützen.*“ Bernhard Bolzano [6]

„Die Natur hat dem Menschen zwei Unendlichkeiten vorgelegt, das unermesslich Große und das Nichts, sie hat sie vorgelegt, nicht, um sie zu begreifen, sondern um sie zu bewundern.“ Blaise Pascal[7]

„Zwei Dinge sind unendlich: Das Universum und die menschliche Dummheit. Aber beim Universum bin ich mir nicht ganz sicher." Albert Einstein[8]

Es kommen unendlich viele Mathematiker in eine Kneipe.
Der Erste bestellt ein Bier, der Zweite ein halbes Bier, der Dritte ein viertel Bier, usw.
Ihr nervt, sagt der Wirt und stellt die gewünschten zwei Bier auf den Tresen. Unbekannt

---

[1] Aristoteles Werke, Physik, 203b
[2] Pasta all'infinito. Meine italienische Reise in die Mathematik, 1999
[3] Über das Unendliche, 4. Juni 1925 in Münster/W. zum Gedenken an Karl Weierstraß. In: Mathematische Annalen, 95. Band, Verlag von Julius Springer, Berlin 1926, S. 163
[4] Anti-Dühring, zitiert nach Charles Seife, Zwilling der Unendlichkeit-Eine Biografie der Zahl Null, Goldmann, München, 2002, S. 119
[5] Zitiert nach Harro Heuser; Unendlichkeiten, Teubner, Wiesbaden 2008, S.11
[6] Paradoxien des Unendlichen", posthum 1851 erschienen, Einleitung
[7] Pensées, Aphorismus 72, „Über die beiden Unendlichkeiten“, Gedanken über die Religion und einige andere Gegenstände, die nach seinem Tode unter seinen Aufzeichnungen gefunden wurde (freie Übersetzung).
[8] Wird Einstein oft zugeschrieben, aber es gibt dazu keinen Beleg.

Inhalt

Einleitung und Fokus

Das Thema „unendlich“ wird in einer Reihe von sehr guten Publikationen behandelt, von denen einige im Literaturverzeichnis aufgeführt sind oder als Originalquellen im Text genannt werden. Hier soll der Schwerpunkt auf der Mathematikgeschichte mit Bezug zum Unendlichen liegen. Doch es liegt in der Natur der Sache, dass manches Mal die Philosophie oder gar die Theologie Querbeziehungen zwischen Mathematik und Geisteswissenschaften schafft – auch wenn diese eher im Hintergrund bleiben sollen. Der vorliegende Beitrag kann auf keinen Fall wissenschaftliches Neuland für sich beanspruchen und er darf noch nicht einmal eine umfassende Übersicht für sich reklamieren. Es können nur Schlaglichter auf das Thema sein, die in Breite und Tiefe nur eine sehr beschränkte und verkürzte Übersicht liefern können. Es wurde zwar versucht, eine möglichst umfangreiche Liste der wichtigsten Wissenschaftler – Mathematiker, Logiker, Physiker und Philosophen – die sich mit dem Thema intensiv beschäftigten, anzusprechen. Aber oft sind es nur wenige Zeilen, die für eine Charakterisierung der Protagonisten ausreichen müssen. Es bleibt der Wunsch, dass doch auch in dieser oberflächlichen Form Denkanstöße gegeben werden können und interessierte Leser sich näher mit dem „Unendlichen“ beschäftigen.

Der Begriff „unendlich“ beschreibt in den exakten Wissenschaften einen Gegenstand, der alleine als Idee in der Mathematik existieren kann. In den Naturwissenschaften zeigt ein Ergebnis „unendlich“ an, dass hier die

zugrundeliegende Theorie versagt und eine umfassendere Theorie zur Beschreibung an dieser Stelle gefunden werden muss. Als reine Idee ist Unendlichkeit in der Mathematik ein wichtiges Mittel geworden, um mathematische Erkenntnisse zu gewinnen, die sich über endliche Mengen nicht gewinnen lassen. Dabei muss sowohl „unendlich groß“ als auch „unendlich klein“ (infinitesimal) berücksichtigt werden.
Gerade wegen der „esoterischen“ Bezüge ist eine klare Begriffsbildung nötig, um den Begriff „unendlich“ im mathematischen Sinne eindeutig zu verorten. Dieser Beitrag trägt zwar den Untertitel „Eine mathematisch-historische Reise“. Deshalb werden im Laufe der (Mathematik)Geschichte immer wieder philosophische oder gar theologische Aspekte auftauchen. In der Mathematik zählen jedoch nur exakte Definitionen und Folgerungen daraus.

Man denke sich dazu eine Menge M an *wohlunterschiedenen Objekten der Anschauung oder des Denkens* (Cantor). Sie werden die Elemente der Menge genannt. Diese Menge soll wenigstens ein Element enthalten, also nicht leer sein. Enthält die Menge nur die Zahl Null, so ist sie nicht leer, denn sie enthält ein Element, nämlich die Null. In einem Stellenwertsystem war die Null (z.B. als Positionsangabe im Dezimalsystem) eine extrem wichtige Entdeckung der Inder. Aber sie eignet sich nur zum Aufzählen, nicht zum Abzählen; sie ist keine natürliche Zahl.[9] Der Unterschied zwischen Ordinalzahlen und Kardinalzahlen wird später noch genauer diskutiert werden. Gibt es nun eine natürliche Zahl n, so dass man die Elemente von M umkehrbar eindeutig (eineindeutig, bijektiv) den Zahlen 1, 2, …, n−1, n zuordnen kann, sie also mit den ersten n natürlichen Zahlen abzählen kann, so soll die Menge M „endlich“ genannt werden. Im anderen Fall soll sie „unendlich“ heißen. Man sieht, dass die leere Menge nicht unter diese Definition der Endlichkeit fällt, denn es existiert kein $n \in \mathbb{N}$, das man ihren (nicht existenten) Elementen zuordnen kann. Später wird deutlich, dass es deshalb sinnvoll ist, per Definition der leeren Menge die Ordinalzahl Null zuzuordnen (s. John von Neumann, S. 81). Die Existenz einer unendlichen Menge ist gewährleistet, denn mindestens die Menge der natürlichen Zahlen ist unendlich, denn zu jeder vorgegebenen Schranke n kann mit n+1 ein weiteres Element gefunden werden, das sich den Zahlen 1, 2, …, n−1, n nicht bijektiv zuordnen lässt. Unendliche Mengen sind also als „Objekte des Denkens“ real. Als „Objekte der Anschauung“, also in der Physik oder Kosmologie, wird noch kurz am Ende des Beitrags darauf einzugehen sein.

[9] Waclaw Sierpiński, der große polnische Mathematiker (…) meinte auf einer Reise plötzlich, ein Gepäckstück verloren zu haben. „Nein, Liebling“, sagte seine Frau, „alle sechs Koffer sind hier.“ – „Das kann nicht sein“, entgegnete er, „ich habe sie mehrfach gezählt: null, eins, zwei, drei, vier, fünf.“
John Conway, Richard Guy, The Book of Numbers zitiert nach Charles Seife, Zwilling der Unendlichkeit, Goldmann, München, Feb. 2002, S. 69

Erstmals in der griechischen Mathematik wurde die Bedeutung von unendlich thematisiert. Aber man beschränkte sich auf potentiell unendliche Probleme. Aktuale Unendlichkeit einer Menge mit unendlich vielen Elementen war noch nicht beherrschbar und nur ein Genie wie Archimedes hat die erkenntnistheoretischen Probleme erkannt und wusste damit umzugehen. Er entwickelte Techniken, die erst in der Integralrechnung 1800 Jahre später von Newton und Leibniz wieder aufgegriffen bzw. wiederentdeckt wurden. Vor allem die äußerst plakativen Paradoxa des Zenon von Elea zeigten die Widersprüche beim Umgang mit dem Unendlichen, insbesondere der unbegrenzten Teilbarkeit, überdeutlich auf. Sie führten zum *horror infiniti* und hemmten die griechische Mathematik, Bewegungsphänomene systematisch mathematisch zu behandeln. Das scheint die lückenhafte Quellenlage trotzdem zu belegen. Bis zum Mittelalter gingen nämlich sehr viele schriftliche Dokumente und Erkenntnisse aus der Blütezeit der griechischen Kultur verloren. Man darf sich durch die scheinbare Fülle an Quellenmaterial nicht täuschen lassen: Nur vergleichbar Weniges hat direkt oder über den Umweg durch Übersetzungen, z.B. ins Arabische oder Lateinische, überlebt.
Als Denker, der sich am Ende des Mittelalters mit der mathematischen Seite von unendlich beschäftigte, ist vor allem Nikolaus von Kues zu nennen.
Mit Leibniz und Newton wurde nach und nach „unendlich“ ein fester Bestandteil der Mathematik, vor allem zunächst bei der Integral- und Differentialrechnung. Ohne diese Methoden wären die epochalen Erkenntnisse eines Isaac Newton nicht entstanden. Er hatte dabei den physikalischen Standpunkt inne, während Leibniz aus mathematischer Sicht wertvolle Beiträge lieferte. Die Notation von Leibniz hat sich weitgehend durchgesetzt. Eine Reihe von namhaften Mathematikern bemühte sich erfolgreich um die Weiterentwicklung der von Newton und Leibniz begründeten jungen mathematischen Disziplin der Infinitesimalrechnung. Darüber hinaus wurden aber auch weitere Aspekte des Unendlichen untersucht und fanden in unterschiedlichsten Bereichen Eingang in die Mathematik. Einer der Höhepunkte lag im Mengenbegriff. In der Systematisierung und, soweit möglich, Axiomatisierung der modernen Mathematik spielt insbesondere die unendliche Menge eine entscheidende Rolle. Ein Höhepunkt sind die Forschungen von Georg Cantor, die dazu die Basis lieferten.
Auch in physikalischen Theorien treten Unendlichkeiten auf. Sie deuten darauf hin, dass eine Theorie sich auf bestimmte Geltungsbereiche konzentriert. In Verbindung mit Fragen zum Urknall und zum Universum als Ganzes sind aber auch weltanschauliche Probleme zu bewerten.

Das Zeichen für Unendlichkeit

Das Zeichen für Unendlichkeit, die „liegende Acht“, führte der englische Mathematiker John Wallis (1606-1703) ein, der wichtige Beiträge zu einigen

Bereichen der Mathematik lieferte.[10] Die Kurve nennt man Lemniskate und wurde erstmals 1694 von Jakob Bernoulli (1654-1705) beschrieben. Kurven vom Typ Lemniskaten entstehen im kartesischen Koordinatensystem gemäß der Gleichung (für geeignetes a):

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

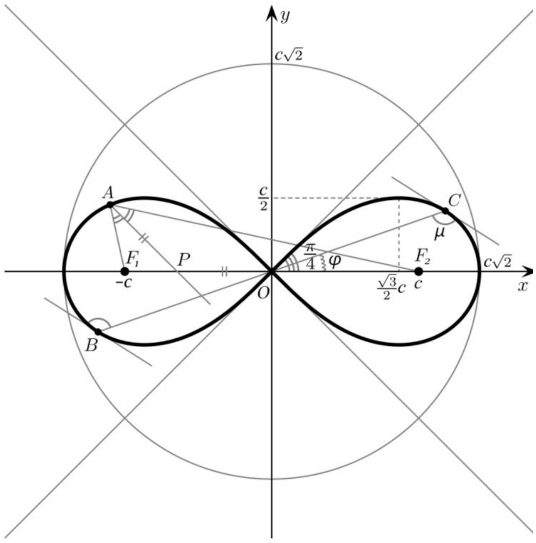


Abb. 1: Das Zeichen für Unendlichkeit als Lemniskate

Abb. 2: Tarot-Karten mit dem Zeichen für Unendlichkeit

Das Unendlichkeitszeichen[11,12] wird für allegorische Darstellungen auch außerhalb der Mathematik verwendet.

Wallis hat eine entscheidende Neuerung bei den Beweisverfahren benutzt. Während noch Newton trotz Kenntnis und Anwendung von infinitesimalen Methoden alle Beweise geometrisch führte, so benutzte nun Wallis sehr konsequent die algebraische Methode. Newton wurde stark beeinflusst von Wallis Hauptwerk *Arithmetica Infinitorum* (1656). Bereits 1655 hat Wallis in „*De sectionibus conicis*“ Kegelschnitte als ebene Kurven behandelt und rein algebraisch argumentiert. Das war im gewissen Sinne eine Abkehr von der griechischen Tradition. Er verwendete den Ausdruck „Indivisible“, der die Fluxionsrechnung von Newton beeinflusste. Das Zeichen für unendlich verwendete Wallis eher für unendlich kleine Werte, so 1/∞. Er konnte dadurch die Methoden von Bonaventura Cavalieri weiter entwickeln, einem Schüler von Galileo Galilei. Das Zeichen ∞ konkurrierte eine Zeitlang mit M, dem römischen Zeichen für 1000, also einer großen Zahl. Spätestens zu Beginn des 18.

[10] Kramp, Klaus (Übersetzung und Redaktion); Das Buch der Unendlichkeit, Librero Kerkdriel (NL), 2012, S.144
[11] Quelle der Abb. 1: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lemniscate_of_Bernoulli_props.svg
[12] Quelle der Abb. 2: en.wikipedia.org

Jahrhunderts wurde das Zeichen auch zum Ausdruck einer formalistischen Umgangsweise mit dem Unendlichen, insbesondere auch im Infinitesimalen. Grenzprozesse, Konvergenz, Stetigkeit verlangten einen korrekten, widerspruchsfreien Umgang mit dem Unendlichen und eine adäquate Terminologie.
Heute hat sich das Symbol in vielen Bereichen etabliert. Das Beispiel kann eine Folge a_i sein, die bei immer weiterwachsendem i gegen einen Grenzwert a konvergiert:

$$\lim_{i \to \infty} a_i = a$$

Im Falle, dass die Folge a_i jede reelle Zahl irgendwann überschreitet und dann darüber bleibt (bzw. jede reelle Zahl unterschreitet und dann darunterbleibt) schreibt man

$$\lim_{i \to \infty} a_i = \infty \text{ bzw. } \lim_{i \to \infty} a_i = -\infty$$

Eine analoge Schreibweise gilt für unendliche Summen oder unbeschränkte Integrale.
Erst Cantor hat auch die Schreibweisen symbolisch abgegrenzt.[13]

Antikes Wissen in der Überlieferung

Wenn man noch vor 150 Jahren die überlieferten antiken Texte insbesondere in der Mathematik sichtete, konnte man den Eindruck haben, dass das antike Wissen zwar punktuell weit fortgeschritten, aber überschaubar war. Antikes Wissen soll dabei Mesopotamien, Ägypten und vor allem Griechisch-sprachige Denker im ganzen Mittelmeerraum und darüber hinaus betreffen, an deren Gedankengut arabische, römische und viel später abendländische Gelehrte anknüpften. Deutlich wurde: Die Anfänge der griechischen Mathematik wurden allerdings vor allem durch Ägypter und Sumerer und später Perser gelegt. Mathematik war dort relativ weit entwickelt, aber rein anwendungsorientiert. Es ging um Lohn-, Mengen- und Flächenberechnung, vor allem durch die jährlichen Nilüberschwemmungen. Eine Beweisführung ist in den gefundenen Quellen nicht zu erkennen. Ägyptische Papyri sind sehr empfindlich und sind oft nicht erhalten geblieben. In Keilschrift mathematischen Inhalts sind 400 Tontafeln überliefert. Wichtige Quelle zur Mathematik der alten Ägypter ist der Papyrus Rhind.[14] Immerhin schien man grundsätzliche Fragen durchaus systematisch anzugehen, denn man fand z.B. eine babylonische Keilschrift mit einer

---

[13] Siehe Spektrum der Wissenschaft Spezial, Das Unendliche, S. 41
[14] https://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind, s.a. https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik_im_Alten_Ägypten

sexagesimalen Abschätzung zu $\sqrt{2}$.[15] Für π nahmen sie allerdings meist nur 3, höchstens $3\frac{1}{8}$ an. Die Ägypter zogen vom Durchmesser d eines Kreises 1/9·d ab, quadrierten und hatten damit etwa die Fläche (d.h. $\pi \approx 3{,}16$ ...). Der Satz des Pythagoras war bekannt, das belegt zweifelsfrei ein 1936 in Susa gefundener Keilschrift-Text.[16] In Ägypten wurde er in Form des einfachsten pythagoreischen Tripels 3-4-5 angewendet, aber eine schriftliche Quelle existiert nicht.[17] Herodot hat sich über die ägyptische Mathematik durchaus anerkennend geäußert und Platon hatte einen mehrmonatigen Aufenthalt in Heliopolis, am südlichen Rand des Nildeltas.[18] Doch es stellt sich langsam heraus, dass nicht nur ungeheuer viel Wissen verloren ging, sondern auch die Methode der systematischen Archivierung und Bewahrung der intellektuellen Leistungen erst Jahrhunderte später wieder etabliert werden konnte. Dazu vollzog sich im hellenistischen Zeitalter bis zur Zeitenwende ein grundlegender Medienwechsel weg von der zweidimensionalen Schriftenrolle hin zum Kodex, dem beschriebenen Pergament in der heutigen Buchform.[19] Man kann ihn als dreidimensional bezeichnen, weil wesentlich leichter zurück- oder vorgeblättert werden konnte. Außerdem ist Pergament wesentlich haltbarer als Papyrus, aus dem die Schriftrollen bestanden. Dieser über mehrere Jahrhunderte andauernde Medienwechsel ist in seiner Tragweite nur mit der Erfindung des Buchdrucks durch Johannes Gutenberg vergleichbar. Oft waren Originale verfallen, bevor sie durch Kopieren inhaltlich erhalten werden konnten. Nur im hellenistischen Mesopotamien verwendete man in einer Symbiose zwischen griechischer und persischer Kultur Tontafeln in Keilschrift. Deshalb ist davon noch etwas mehr erhalten geblieben, aber längst noch nicht alles übersetzt worden. Es fehlen trotzdem manchmal ganze Dekaden und ihre darin gewonnenen Erkenntnisse sind wie ausgelöscht. Russo behauptet, zwischen 301 und 221 v.Chr. gebe es z.B. keinen einzigen historischen Bericht.[20]

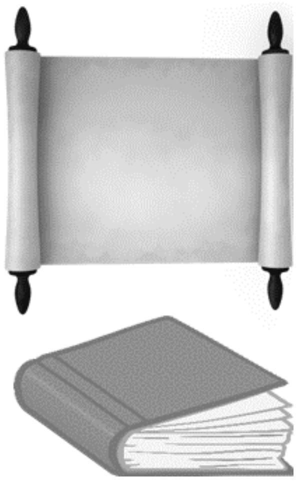


Abb. 3: Von der Schriftenrolle aus Papyrus zum Kodex aus Pergament: Medienwechsel in der Antike

[15] Auf 6 Stellen hinter dem Komma genau, Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 135
[16] Wußing, ebenda, S. 134
[17] Claudi Alsina, Der Satz des Pythagoras, deutsch bei Librero RBA, 2016, S. 19
[18] https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik_im_Alten_Ägypten
[19] Bildquelle: Eigene Grafik unter Verwendung von Powerpoint-Cliparts,
[20] Russo, Lucio, Die vergessene Revolution, Springer, Berlin Heidelberg, 2005, S. 9

Von der sogenannten „hellenistischen Revolution bzw. Zivilisation“ im 2. und 3. Jahrhundert vor Christus sind nur vergleichsweise wenige Originale erhalten. Manchmal wird diese Epoche der Blütezeit auch alexandrinische Wissenschaft genannt und zeigt, dass man das ganze zerfallende Großreich Alexanders des Großen als enormes „geistiges Einzugsgebiet“ berücksichtigen muss. Syrien, Ägypten, Kleinasien, Mesopotamien, Persien, Sizilien, Zypern, Phoenizien, Palästina und Makedonien gehören dazu. Hellenistische Enklaven gehen bis nach Baktrien, dem heutigen Afghanistan, Usbekistan und Tadschikistan und sind Mittler zur indischen und chinesischen Kultur.[21] Zu beachten ist, dass alleine in Süditalien inkl. Sizilien vier Dialekte des Griechischen gesprochen wurden: Dorisch, Nordwestgriechisch, Ionisch und Achaisch. Die betroffenen Regionen waren nicht unbedingt zusammenhängend.

Übersetzungen mathematisch-naturwissenschaftlicher Schriften aus dem Griechischen haben einige Herausforderungen zu bewältigen.[22] So fehlen die Leerzeichen zwischen den Wörtern. Bei komplizierten Texten ist ein gutes Fachwissen durch den Übersetzer erforderlich. Außerdem ist die Verwendung spezifisch für das betrachtete Thema und hat sich auch teilweise im Laufe der Zeit verändert. Das frühe attische oder akrophonische System taucht kaum in mathematischen Schriften auf. Es ist eine Verwaltungskonvention, aber durchaus auch Basis für spätere Texte. Die Eins ist ein senkrechter Strich bis zur Vier; dann wird Π für fünf (πεητε) verwendet, was man, flüchtig geschrieben, leicht mit dem Gamma Γ verwechseln konnte. Zehn war Delta, Δ, 100 Eta, H, 1000 Chi, Χ, 10.000 My, M. 32 würde man als ΔΔΔII schreiben, man konnte aber auch den Exponenten als Multiplikator nehmen. Später mit Alexandria als hellenistischem Mittelpunkt wurden auch griechische Buchstaben als Zahlzeichen benutzt: $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, …Da der Buchstabenvorrat begrenzt ist und kein Dezimalsystem bekannt war, war auch diese Notation unhandlich und hat sicherlich bei der Übersetzung zu Fehlern geführt. Z.B. stand Π dann auch wieder für 80. Ganz kompliziert wurde es beim Übergang zu Brüchen. Ein Fünftel war ein Etwas, von dem man fünfmal so viel benötigt, um ein Ganzes zu erhalten. David Fowler vertritt die Ansicht, dass dann, wenn wirklich Zahlenfolgen gemeint sind, man sich eher Duett, Trio, Quartett, Quintett vorstellen muss. Entscheidend anders bei der griechischen mathematischen Denkweise ist die Philosophie ihrer Notation. Sie dachten nicht algebraisch, sondern geometrisch. Jeder Sachverhalt musste anschaulich, aber abstrakt, „im Kopf“ illustriert werden. Dieser visuelle Denkansatz war durchaus ausgefeilt und keineswegs primitiv, aber unhandlich. Er adressiert gemäß der modernen

---

[21] Russo, Lucio, ebenda, S. 13

[22] Für den ganzen folgenden Abschnitt siehe Brian Clegg, Eine kleine Geschichte der Unendlichkeit, rororo, Reinbek, 12/2015, S. 39-43

Kognitionsforschung eher die rechtshemispherische Hirnhälfte. Auch die Beschriftungen wurden mit Ausdrücken wie „größer als“, „halb so groß“, etc. verbalisiert. So gut das klingt, kann es trotzdem zur Verwirrung bei dem Übersetzer führen, der oft nur ein Kopierer war und der als einfacher, einigermaßen griechisch sprechender Mönch mit wenig mathematischen Vorkenntnissen diese Aufgabe vom Abt übertragen bekommen hat. Wie so oft ist Archimedes eine Ausnahme in der nicht-numerisch geprägten griechischen Mathematik. In seinem Aufsatz „Sandzahl“, der von Plutarch in seiner Biografie „Leben des Marcellus“ erwähnt wurde, geht er mit riesigen Zahlen um.
Ein weiterer Punkt für „Überlieferung durch Kopieren“ sind die Auswahlkriterien insbesondere bei wissenschaftlichen Werken. Sie sind bei späteren Abschriften extrem willkürlich und beschränken sich oft nur auf leicht verständliche Teile oder einführende Anfänge. In der Spätantike und im frühen Mittelalter kann man nicht mehr nur von einer Dekadenz, sondern sogar von einem vorwissenschaftlichen Rückfall sprechen. Christianisierung weiter Teile des heutigen Europas begannen mit Klostergründungen und die Prioritäten lagen nicht unbedingt in diesem Sektor. Wissenschaftliche Kreativität fand praktisch nicht mehr statt. Bestenfalls wurde kopiert und dabei wurden römische Werke aus der Kaiserzeit bevorzugt. Die 37 Werke von Plinius Naturgeschichte sind überliefert, Archimedes wurde dagegen praktisch übersehen. Die Elemente von Euklid sind als ein wichtiges Lehrbuch seit Boethius auch in Latein erhalten geblieben (s.u.), aber von seiner Person fehlen fast alle Hinweise, selbst die auf seine Lebensdaten. Überliefert ist ein Werk zur Musiktheorie sowie geometrische Untersuchungen z.B. in der Astronomie und Hinweise bzw. Titel weiterer Arbeiten. Offenbar hat die enorme Bedeutung der „Elemente“ dazu geführt, dass auch andere Werke von ihm kopiert wurden. Nach der Bibel sollen die Elemente fast 2000 Jahre das am meisten gelesene Buch der Menschheitsgeschichte gewesen sein. Doch außer spärlichen Hinweisen bei anderen Autoren ist nichts über Euklid bekannt.

Dass die besten Werke aus der Blütezeit der hellenistischen Erkenntnisse erhalten blieben, war ein lange bestehender Mythos, der mittlerweile gründlich widerlegt werden kann.[23]

Die Zerstörung von schriftlichem Kulturgut war in vielen Fällen religiös motiviert. Der Sieger versuchte seine Kultur dem Verlierer mit aller Gewalt und Zerstörungswut aufzuzwingen: Griechen an Persern, Römer an Griechen, Araber an Persern, Kreuzritter an Osmanen, Spanier an Mauren – die Liste der Vernichtung von überliefertem Wissen inklusive von Bücherverbrennungen lässt sich beliebig fortsetzen und geht bekanntlich bis in das 20. Jahrhundert.

---

[23] Russo, Lucio, ebenda, S. 9 ff

Kriegerische Auseinandersetzungen mit sogenannten Kollateralschäden sind relevant, betreffen aber schriftliche Quellen nur unsystematisch. Der Brand der Bibliothek von Alexandria lässt sich nicht mehr genau datieren. Dass er bei den Kämpfen zwischen Caesar und Pompeius gelegt wurde, um Caesar einen militärischen Vorteil zu verschaffen, gilt heute als unwahrscheinlich. 400 Jahre später wurde die Stadt von den Arabern erobert. Die kulturellen Auswirkungen waren dabei wesentlich drastischer. Die Bücher, „die nicht mit den Aussagen des Korans übereinstimmten, sollen zum Beheizen der Bäder verwendet worden sein.“[24] Erst später, insbesondere unter dem Kalifen Harun ar-Rashid (763-809 n.Chr.), erkannte die arabische Welt den Wert der antiken Kulturschätze und knüpfte oft mit eigener Forschung daran an. Leider war es für viele Originalquellen oft zu spät. Immerhin sind vergleichsweise viele Werke von griechischen Denkern seit dieser Zeit über arabische Abschriften erhalten. Zahlreiche Beispiele, Querbeziehungen und Analysen finden sich bei Freely, „Platon in Bagdad“. Freely schlägt den Bogen der Überlieferungen aber deutlich weiter: Von Milet in Kleinasien mit mesopotamischem Einfluss, über das klassische Athen, das hellenistische Alexandria, das kaiserliche Rom, das byzantinische Konstantinopel, das nestorianische Gondischapur, das abbasidische Bagdad, das fatimidische Kairo und Damaskus, das muslimische Córdoba, das Toledo der Reconquista, das normannische Palermo bis hin zur lateinisch-sprachigen Gelehrtenwelt in Oxford oder Paris.[25]
Das hört sich nach sehr vielen Schriften an, deren Inhalte über viele Sprachen überlebt haben. Doch erst durch zahlreiche Hinweise in den überlieferten, teils verkürzt übersetzten oder nur teilweise lesbaren Dokumenten auf eine Fülle von verschollenen Werken lässt sich das enorme Ausmaß der Verluste nur erahnen. Nur einzelne Ereignisse lösen Empörung aus, wie die Plünderung von Konstantinopel durch Kreuzritter im Jahr 1204, auf die noch einzugehen sein wird. Das Ganze, nur erahnte Ausmaß der Verluste, kann man mit Fug und Recht als Katastrophe für die menschliche Kulturgeschichte bezeichnen.

To apeiron - Unendlich in der griechischen Antike

Weder in der indischen, chinesischen, japanischen, babylonischen und ägyptischen Mathematik sind mathematische Überlegungen zur Unendlichkeit in Standardwerken bekannt.[26] Unabhängig von praktischen Anwendungen beschäftigten sich dagegen eine ganze Reihe griechischer Denker mit dem

[24] https://www.sueddeutsche.de/kultur/bibliothek-alexandria-aegypten-antike-caesar-papyrus-islam-pharaonen-1.4232218
[25] Freely, John; Platon in Bagdad; dt. Ausgabe Klett-Cotta, Stuttgart, 2012, S. 7
[26] Z.B. Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1+2, Springer Berlin Heidelberg, 2008

Begriff des τὸ ἄπειρον, „das Unendliche“, „das Unbegrenzte“. Doch im Gegensatz zu späteren Epochen hatte der Begriff bei den Griechen etwas Unheimliches, Bedrohendes an sich, eher wie Chaos im nicht-mathematischen Sinne. Er bereitete Unbehagen, denn es gab zwar in manchen Fällen Sinn, bis unendlich zu gehen, in anderen Fällen entstanden krasse Widersprüche. Bei

1-1+1-1+1-1+1-1+ … erzeugt die korrekte unterschiedliche Klammersetzung (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+ … und 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+ … zwei unterschiedliche Ergebnisse.

Aristoteles (384-322 v. Chr.), als absolute Autorität über 2 Jahrtausende, sieht ein, dass man sich mit dem Unendlichen beschäftigen muss:

Da die Wissenschaft von der Natur sich beschäftigt mit Größen und Bewegungen und Zeit, deren nothwendig entweder unbegrenzt oder begrenzt ist … so möchte es wohl obliegen dem, der von der Natur handelt, Betrachtungen anzustellen über das Unbegrenzte, ob es ist oder nicht, und wenn es ist, was es ist.[27]

Aber er legt auch klare Kriterien fest und lässt keinen Zweifel, dass seine feste Überzeugung dazu endgültig ist. Diese Auffassung wird das griechische und darüber hinaus das abendländische Denken bis zur Moderne prägen:

Doch von dem Unbegrenzten, wiefern es ist und wiefern es nicht ist, und was es ist, ist genug gehandelt worden.[28]

Dies hat den Charakter eines „Basta“ und wurde viele Jahrhunderte befolgt (gemeint ist der Unterschied zwischen potentiell und aktual unendlich, s.u.).

Einen bedeutenden frühen Anstoß gab offenbar Zenon von Elea (5. Jahrhundert v. Chr.) mit seinen Paradoxa. Das wichtigste oder bekannteste davon ist „Archilles und die Schildkröte“. Archilles galt als schnellster Läufer aus Homers Werk zum Trojanischen Krieg, der Ilias. Die Schildkröte bekommt bei dem Wettlauf einen Vorsprung. Auch wenn Archilles schneller ist, krabbelt die Schildkröte doch im gleichen Moment ein Stück weiter. Die Abstände verkürzen sich zwar, werden aber durch die beliebig feine Teilbarkeit der Strecke beliebig klein, aber in endlicher Zeit nie Null. Die Schildkröte gewinnt in diesem Paradoxon den Wettlauf. Zenon verteidigt mit seinen Paradoxa die Philosophie von Parmenides, seinem Lehrer. Von den Paradoxien sind neun erhalten, darunter drei der Bewegung. Ursprünglich waren es insgesamt ca. vierzig. Sie beschäftigen sich immer mit Widersprüchlichkeiten bzgl. Vorstellungen der Vielheit oder der Kontinuität in Verbindung mit Dichte, endlichen Größen oder

---

[27] Aristoteles, Physikvorlesung. Übersetzung Hans Wagner, Band 11. Akademieverlag, 5. Auflage 1995; zitiert nach Brian Clegg, ebenda, S. 51
[28] Ebenda, S. 54

der vollständigen Teilbarkeit. Die Paradoxien, wie Achilles und die Schildkröte, das Teilungsparadoxon oder das Pfeil-Paradoxon zeigen Widersprüche bei der Beschreibung von Bewegung. Ein Pfeil bewege sich nicht, weil er in jedem Moment seiner Bewegung an einem bestimmten Ort befindet und dort ruht. Man betrachte die Laufstrecke zwischen den Punkten A und B. Halbiert man die Strecke AB durch den Punkt C, so gibt es zwei Ansätze: Fortgesetzte Halbierung der jeweils zweiten Strecke führt nach beliebig vielen Halbierungen beliebig nahe an den Punkt B, erreicht ihn aber nie in endlichen Schritten. Fortgesetzte Halbierung der jeweils ersten Strecke wirkt wie eine Rückwärtsbewegung und bleibt immer noch beliebig nahe bei A. In jedem Fall ergibt sich ein Paradoxon. Ein Pfeil scheint sich nicht bewegen zu können, denn er ruhe zu jedem Zeitpunkt.
Zenon scheint mit seinen Paradoxa den Grundstein bei der Unterscheidung von Unendlichkeiten gelegt zu haben. Die Halbierungen gehören zu den rationalen Zahlen, wenn man die Strecke AB mit einer rationalen Zahl gleichsetzt.
Heute wissen wir: Doch „dazwischen“ gibt es noch unendlich viele irrationale Zahlen, wie Wurzeln bzw. unendlich viele transzendente Zahlen, wie die Kreiszahl Pi. Doch das ist ein langer Erkenntnisprozess über fast 2.500 Jahre, der im Mittelpunkt dieses Beitrags stehen soll.

Bevor das Thema „unendlich“ stärker in den Vordergrund rücken soll, muss die entscheidende Veränderung der griechischen Mathematik gegenüber Vorläufern in Ägypten, Mesopotamien oder im fernen Osten verdeutlicht werden. Dies liegt vor allem am Abstraktionsvermögen, also von der Unabhängigkeit der mathematischen, idealisierten Zusammenhänge von am Gegenstand orientierten, praktischen Erfordernissen, z.B. im Bauwesen oder bei der Vermessung. Bei früheren Kulturen stand der Sinneseindruck im Vordergrund, Griechen favorisierten dagegen Denkmodelle. Platon entwickelte später seine Ideenlehre. Ideen sind für ihn beständiger als eine vergängliche reale Welt. Immerhin war sich Zenon schon sehr früh der unendlichen Teilbarkeit bewusst. Während der wissenschaftliche Aspekt bei den Pythagoreern noch nicht sehr ausgeprägt war, hat z.B. Thales und in großer Stringenz Euklid entscheidende Schritte in Richtung Unabhängigkeit von den realen Gegebenheiten, hin zu einer abstrakten Anschauung getan. So definiert er z.B. Punkt und Linie vollkommen abstrakt: „*Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Eine Linie ist eine breitenlose Länge*.“[29] Insbesondere die Geometrie wurde zur exakten Wissenschaft mit einer axiomatischen Basis und Beweisen, möglichst frei von Näherungslösungen.

Ohne direkten Bezug zum Thema „unendlich“ müssen stellvertretend für viele Weitere einige Philosophen genannt werden, die herausragende

[29] Euklid, Stoicheia, (Die Elemente), 1. Buch

mathematische Leistungen vollbracht haben. Aus der frühen ionischen Periode sind dies besonders der bereits genannte Thales von Milet (624/23–548/544 v. Chr.). [30] Er hatte in der Geometrie grundlegende Erkenntnisse, die heute noch Basiswissen im Mathematikunterricht darstellen. Dazu gehört der berühmte Satz des Thales, der Kongruenzsatz oder die Berechnung eines Dreiecks über zwei Winkel und eine Strecke. Die Anwendung war Entfernungsmessung von Schiffen zum Land und untereinander.

Demokrit von Abdera (460/459–um 370 v. Chr.) ist heute besonders durch seine Atomtheorie bekannt. Er hat zahlreiche Schriften[31] verfasst, darunter auch mathematische Abhandlungen „Über Geometrie“, „Über Zahlen“, „Über irrationale Strecken“, sowie „Über Ausbreitungen“, Abbildungen der Kugelfläche auf die Ebene. Leider sind sie nur durch Querverweise bei anderen Autoren in Erinnerung.

Weniger bekannt ist Hippokrates von Chios (5. Jahrhundert n. Chr.), nicht zu verwechseln mit Hippokrates von Kos, auf den der Hippokratische-Eid der Ärzte zurückgeht. Hippokrates von Chios galt als der größte Geometer des 5. Jahrhunderts. Er besaß schon zahlreiche tiefliegende Erkenntnisse über die Konstruierbarkeit und er kannte bereits Verallgemeinerungen des pythagoreischen Lehrsatzes auf spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke.

Aus der athenischen Periode muss Platon genannt werden (427-347 v.Chr.). Für ihn hatte Mathematik einen besonderen Stellenwert, weil durch bloßes Denken Erkenntnisse gewonnen werden können. Symptomatisch ist ein durch den römischen Historiker Plutarch übermittelter Protest. Platon hatte vehement protestiert, dass sich z.B. Eudoxos, Archytos und Menaichmos mit mechanischen Methoden um mathematische Fragestellungen bemühten.[32] Viele große Naturforscher, Mathematiker und Philosophen bezeichneten sich als Platoniker, für die die Ideen eine eigenständige Bedeutung unabhängig von der profanen Realität besitzen. Diese mangelnde Anwendungsbezogenheit oder gar Realitätsferne macht man ihm auch zum Vorwurf. Aristoteles andererseits hatte in mancher Beziehung eine Gegenposition zu Platon und hat dadurch indirekt auch wissenschaftlichen Fortschritt verhindert. Mit Platon (428/427-348/347 v. Chr.) kommt die Idee einer aktualen Unendlichkeit auf.

---

[30] Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 2, Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 168
[31] Wußing, ebenda, S. 170
[32] Wußing, ebenda, S. 181

Eines der zentralen Themen in der Mathematik der athenischen Periode sind die „Inkommensurablen", also der irrationalen Zahlen (eigentlich Strecken). So bewies Theodoros von Kyrene (gest. um 390 v.Chr.), dass (in moderner Schreibweise) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \ldots, \sqrt{17}$ irrational sind. Die Beweise wurden geometrisch geführt. Selbst quadratische Wurzelschachtelungen wurden so behandelt. In dieser Zeit wirkte Eudoxos von Knidos (397–345/338 v. Chr.), der als bedeutendster Mathematiker seiner Epoche bezeichnet wird. Er hat das Irrationale integriert, aus den inkommensurablen Fremdkörpern kommensurable, gleichberechtigte Größen gemacht. Dies war in der damaligen Zeit ein kühner, aber folgerichtiger Schritt und hat den Weg zum heutigen Verständnis des Zahlensystems maßgeblich geebnet.[33]

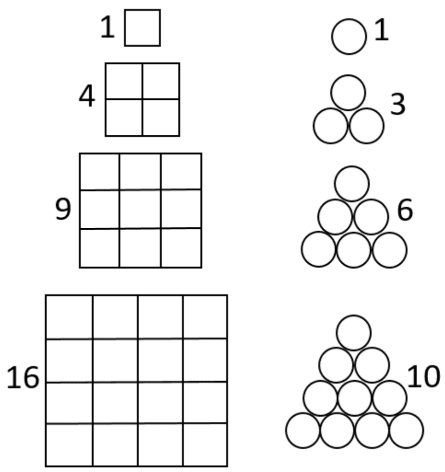


Abb. 4: Heilige Quadrat- und Dreieckszahlen

Auch wenn ihre Verdienste für die reine Mathematik umstritten sind, so leisteten doch die Pythagoreer ihre Beiträge. Ihr Motto wird gern als „Alles ist Zahl" umschrieben. Sie berufen sich alle auf Pythagoras von Samos (um 570-nach 510 v. Chr.). Bald nach seinem Tod zerfiel der Bund in eine Gruppe, die Zahlen, Numerologie und Zahlenmystik in den Vordergrund rückte, sowie eine Gruppierung, die Lebensstil, Religion und Philosophie als Schwerpunkte sah (Akusmatiker). Pythagoras selbst kann man durchaus das Interesse an mathematischen Zusammenhängen unterstellen, wenn auch nicht unbedingt unter einem „wissenschaftlichen Aspekt". Unbestritten ist, dass der pythagoreische Lehrsatz nicht von ihm entdeckt wurde. Es gibt beliebig viele ganzzahlige Zahlentripel a, b, c, die Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck entsprechen und den Satz des

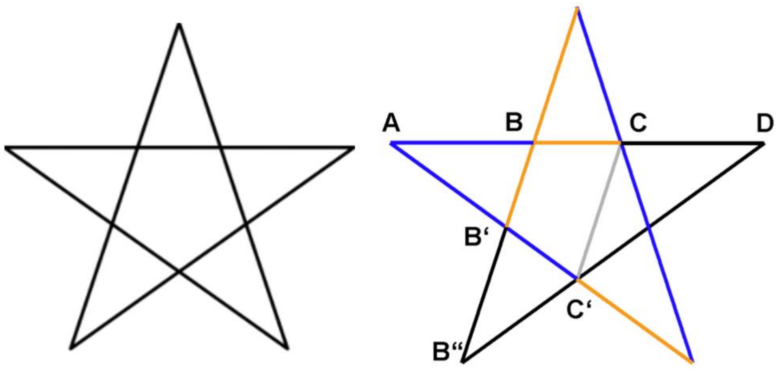


Abb. 5a, b: Pentagramm. Die Strecken $\overline{AC}$ zu $\overline{CD}, \overline{AD}$ zu $\overline{AC}$, sowie analoge Strecken, stehen im Verhältnis des Goldenen Schnitts $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ldots$

[33] Wußing, ebenda, S. 184 f

Pythagoras erfüllen: $a^2 + b^2 = c^2$. Das passte aber durchaus in das Weltbild der Pythagoreer. Zahlen mussten natürliche Zahlen oder ihre Verhältnisse sein, die geometrisch interpretierbar sind.
Drastischer formuliert: nur das sind „wirkliche“ Zahlen für die Pythagoreer. Die Tetraktys, 10 Punkte in Form eines gleichseitigen Dreiecks, waren Symbol des pythagoreischen Eids (siehe Abb. 4). Daneben waren perfekte Zahlen göttlicher Natur. Es sind Zahlen, die die Summe ihrer Teiler sind (inkl. 1, exkl. der Zahl selbst). Die Griechen kannten vier perfekte Zahlen (6, 28, 496, und 8128).[34] Bruchrechnung im heutigen Sinne existierte nicht. An ihre Stelle treten auch bei Euklid Zahlen- bzw. Längenverhältnisse. Die Eins wird übrigens explizit selbst bei Aristoteles nicht als Zahl angesehen. Zahl ist die aus Einheiten repräsentierte Menge. Auch Euklid betrachtet deshalb die Eins nicht als Zahl.

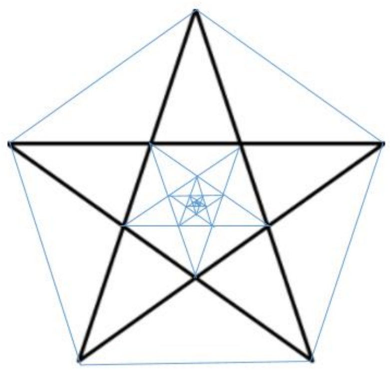


Abb. 5c: Im inneren Pentagramm kann man unendlich viele kleinere Pentagramme zeichnen.

Als Symbol galt Pythagoras das Pentagramm (5-zackiger Stern, Alpenkreuz, Drudenfuß, Elfenkreuz, Fünfwinkelzeichen). Ein Pentagramm kann in einem Zug gezeichnet werden und hat deshalb auch in der Mystik den Charakter der Vollkommenheit.[35] Es ist seit uralten Zeiten ein mystisches Symbol.[36] Es war mehr als ein Schock, es war eine Katastrophe für das Weltbild der Pythagoreer, als man feststellte, dass wichtige Strecken im Pentagramm keine „Zahlen“ in ihrem Sinne sind.
Die Legende behauptet, der Entdecker Hippasos von Metapont wurde dafür ins Meer geworfen. Er ist aber bei einem Schiffbruch ums Leben gekommen, was aber ebenfalls als „Strafe“ aufgefasst wurde. Jedenfalls hatte man eine der ersten

---

[34] Claudi Alsina, ebenda, S. 32, heute kennt man 43. Sie sind alle gerade. Man weiß nicht, ob ungerade existieren und ob es unendlich viele gibt.
[35] Bildquelle 5a, 5b https://de.wikipedia.org/wiki/Pentagramm, 4c ergänzt
[36] **MEPHISTOPHELES:**
Gesteh ich's nur! daß ich hinausspaziere,
Verbietet mir ein kleines Hindernis,
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle-
FAUST:
Das Pentagramma macht dir Pein? …
J. W. von Goethe, Faust, 1. Teil, Studierzimmer

irrationalen Zahlen bzw. inkommensurablen, nicht als Bruch darstellbaren Strecken entdeckt.[37] Wahrscheinlich war jedoch die Erste $\sqrt{2}$.
Jede der fünf Linien schneidet die anderen im Goldenen Schnitt. Dies wird harmonische Teilung genannt, denn das Ganze steht zum größeren Teil im gleichen Verhältnis wie der größere zum kleineren Teil, nämlich etwa 1,618 : 1.

Was die grundsätzliche Bipolarität des Begrenzten, Endlichen (*peras*, Grenze) und des Unbegrenzten, Unendlichen (*a-peiros*) betrifft, so scheint Pythagoras von Anaximander und Zarathustra (Zarata) beeinflusst worden zu sein. Anaximander (um 610-nach 547 v. Chr.), den man als ersten Wissenschaftler im heutigen Sinne verstehen kann, führt als einer der Ersten den Begriff eines Unbegrenzten (*a-peiros*) ein. Unendlichkeit ist gleichermaßen grenzenlos wie unbestimmt. Er hat neben Pythagoras von Samos vor allem Demokrit von Abdera (460 oder 459-um 370 v. Chr.) geprägt. Die Pythagoreer waren dann offenbar Multiplikator und Resonanzboden der weiteren Beschäftigung mit *apeiron.* Stellvertretend steht hier der Name Philolaos von Kroton (um 470-399 v.Chr.). Er nannte *peras*, (Grenze) und *apeiron* (unbegrenzt) als grundsätzlich gegensätzlich, aber dialektisch zusammenwirkend. Die „Grenze" stand für das Gute, das „Unbegrenzte" für das Böse.[38]

Zu weiteren griechischen Denkern siehe Jonas Cohen, „Zur Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant."[39] Er erwähnt u.a. Anaximenes, Diogenes von Appollonia, Heraklit, Empedokles, Anaxagoras, Leucippus, Demokrit, Pythagoras, Xenophanes, Parmenides, Melissos oder Hippokrates von Chios.
Erst seit Aristoteles (384-322 v. Chr.) wird in der Regel streng zwischen dem „aktual Unendlichen" und dem „potentiell Unendlichen" unterschieden.[40] Aristoteles lehnt es ab, dass eine Menge unendlich viele Elemente hat, also aktual unendlich ist. Dagegen ist es problemlos, dass es Mengen gibt, denen man beliebig (heute sagen wir unendlich) oft ein weiteres Element hinzufügen kann. Diese sind „potentiell unendlich". Aristoteles akzeptiert übrigens auch unbegrenzte Teilbarkeit, aber nur begrenzte Ausdehnung. Er steht im Gegensatz zu Demokrit, der begrenzte Teilbarkeit und unbegrenzte

---

[37] Nach Claudi Alsina, ebenda, S. 70, wurde $\sqrt{2}$ zuerst entdeckt, analog Charles Seife, Ein Zwilling der Unendlichkeit, S. 45 f. Wußing lässt es offen, diskutiert Hippasos aber beim Pentagramm und Φ (Band 1, S. 177). Die Quellenlage zu Hippasos ist unklar.
[38] Zur Interpretation der Bipolarität Vater-Mutter, Licht-Dunkelheit und Grenze-Unbegrenztheit siehe Paolo Zellini, Eine kurze Geschichte der Unendlichkeit, C.H.Beck, München 2010, S.17
[39] Jonas Cohn, Zur Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant., Reprint Hanse, Leipzig, Verlag Wilhelm Engelmann, 1896
[40] Die „Zeit" sollte hier ausgeklammert werden. Sie gilt als unendlich ohne Anfang und Ende.

Ausdehnung propagierte. Eine wichtige und heikle Konfrontation mit dem Unendlichen ist das Parallelenaxiom, dem Euklid folgende Form gegeben hat:[41]

Bewirkt der Schnitt einer geraden Linie mit zwei anderen geraden Linien, dass die sich innen auf der gleichen Seite befindlichen Winkel addiert weniger als zwei rechte Winkel ergeben, dann schneiden einander die beiden zuletzt genannten geraden Linien in Richtung dieser Seite, wenn man sie nur genügend weit verlängert.

Heute wird es gerne salopp so formuliert, dass sich in der euklidischen Geometrie zwei parallele Geraden (erst) im Unendlichen treffen. Euklid vermeidet auch hier den Begriff der Unendlichkeit. Trotzdem hat er sicherlich Probleme mit diesem Axiom gehabt, genau wie viele Mathematiker-Generationen nach ihm. Er brauchte das Axiom aber dringend; z.B. um den zentralen Satz zu beweisen, dass die Summe der Innenwinkel in jedem Dreieck zwei rechte Winkel betragen. Erst mit den nichteuklidischen Geometrien hat man den mathematischen Gesamtzusammenhang verstanden.

Euklid hat auch in seinen Büchern 7, 8, 9 Lehrsätze über Zahlen behandelt. Allerdings sah er sie mehr als Hilfssätze für seine Geometrie. In der 11. Definition in Buch 7 hat er den Begriff der Primzahl möglichst exakt charakterisiert. Wie bei den Griechen üblich, musste auch eine anschauliche, aber trotzdem abstrakte Komponente dabei sein. In Abbildung 7 verdeutlicht er die ersten 12 natürlichen Zahlen sowie ihre Teiler durch Punkte in einer Rechteckform und leitete daraus die Definition von Primzahlen ab. Auch Euklid betrachtete 1 und die Zahl selbst nicht als Teiler.

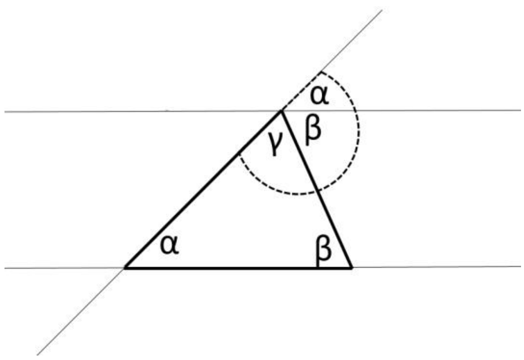


Abb. 6: Euklids Parallelenaxiom und der Beweis, dass die Summe der Innenwinkel zwei rechte Winkel ergibt.

Ein Paradebeispiel für das potentiell Unendliche ist der berühmte Beweis von Euklid (etwa 365-etwa 300 v.Chr.), dass es mehr Primzahlen als jede vorgelegte endliche Menge von ihnen gibt.

Es ist ein Widerspruchsbeweis *(reductio ad absurdum)*. Man geht von einer Annahme aus und leitet daraus einen Widerspruch ab. Also muss die Annahme falsch sein.

Annahme: Es gibt nur eine Menge von endlich vielen Primzahlen, nämlich

$$P_1, P_2, \ldots, P_m.$$

[41] Euklid, Elemente, Buch 1, Postulat 5

Dann ist das Produkt der m Primzahlen plus 1 eine Zahl, die nicht durch eine der Primfaktoren P_1, P_2, …, P_m teilbar ist. Es muss also mindestens noch eine Primzahl P_{m+1} geben. Das widerspricht der Annahme, dass es nur m Primzahlen gibt.

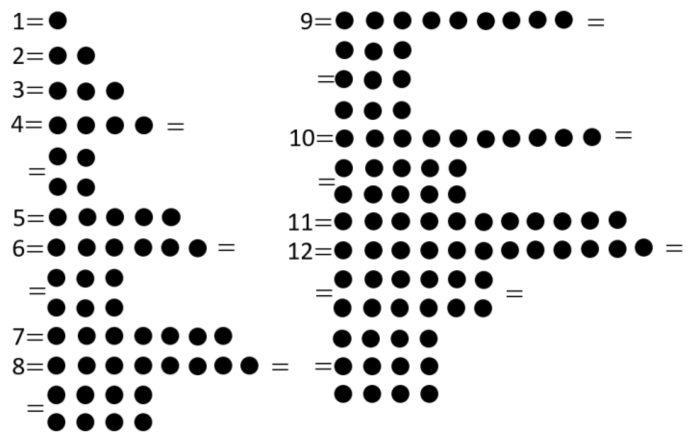


Abb. 7: Die ersten 12 natürlichen Zahlen mit ihren Teilern bzw. als Primzahlen.

Heute haben wir keine Scheu zu sagen, dass der Beweis zeigt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. „Potentiell unendlich“ bedeutet, wir können beliebig oft zeigen, dass es neue Primfaktoren gibt, die nicht in einer vorgegebenen, als endlich angenommenen Menge enthalten waren. Euklid gelingt somit ein Beweis der Unendlichkeit ohne den Begriff zu verwenden.[42]

Euklid spricht übrigens nicht von dem Produkt der m Primzahlen plus 1, sondern von dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen plus 1. Das läuft zwar auf dasselbe hinaus, erlaubt aber eine geometrische Interpretation, indem jede Primzahl als Strecke dargestellt wird.

Auch „Grenzwertbetrachtungen“ bei Reihen sind aus der griechischen Mathematik durchaus bekannt. Euklid und Archimedes kamen offenbar unabhängig voneinander zu dem Ergebnis, dass die unendliche Reihe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots$$

den Summenwert $\frac{4}{3}$ hat. Sie betrachteten nur die potentielle Unendlichkeit der Terme $1 + \frac{1}{4}$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4}$,…und zeigen, dass

- jeder dieser Terme ist kleiner als $\frac{4}{3}$
- jede Zahl unterhalb von $\frac{4}{3}$ wird von einem der folgenden Terme übertroffen.

Diese Methode vermeidet das aktual Unendliche.[43]

[42] Euklid, Elemente IX, 20
[43] John Stillwell, Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, Springer, Heidelberg, 2014, S. 23

Buch $\bar{X}$ der Elemente enthält eine bemerkenswerte Aussage. Sie soll auf Eudoxos von Knidos (408-354 v.Chr.) zurück gehen.[44]

> *Nimmt man bei Vorliegen zweier (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muss einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.*[45]

Modern formuliert: Ist p gegeben und r ein Quotient mit $\frac{1}{2} \leq r < 1$ so gilt:

$$\lim_{n \to \infty} p(1-r)^n = 0$$

Euklid hat mit seiner Formulierung eine Grenzwertbetrachtung verbalisiert.

Im Jahr 1998, am 29. Oktober, wurde im Auktionshaus Christie´s in New York ein sogenanntes Palimpsest versteigert. Es war ein Buch aus Pergament, kaum lesbar und innen wie außen in schlechtem Zustand. Es war vor unserer Zeitrechnung zuerst beschrieben worden, aber Pergament war teuer. Deshalb wurde im Mittelalter die ursprüngliche Beschriftung abgekratzt und mit einem Gebetsbuch aus dem 13. Jahrhundert überschrieben. Solch ein wiederverwendetes Manuskript nennt man Palimpsest und diese sind nicht unbedingt selten. Dieses Exemplar war aber etwas Besonderes.

Bei der Plünderung von Konstantinopel im Jahr 1204 durch Kreuzritter des 4. Kreuzzuges wurden ungeheure Kunst- und Kulturschätze zerstört oder verschleppt. So auch drei Bücher von Archimedes, genannt die Codizes A, B und C.

Archimedes von Syrakus (um 287–212 v. Chr.) war einer der größten Wissenschaftler aller Zeiten. Als er die Frage lösen konnte, wie man den Goldgehalt der königlichen Krone mittels Auftrieb bestimmt, soll er „*Heureka*“

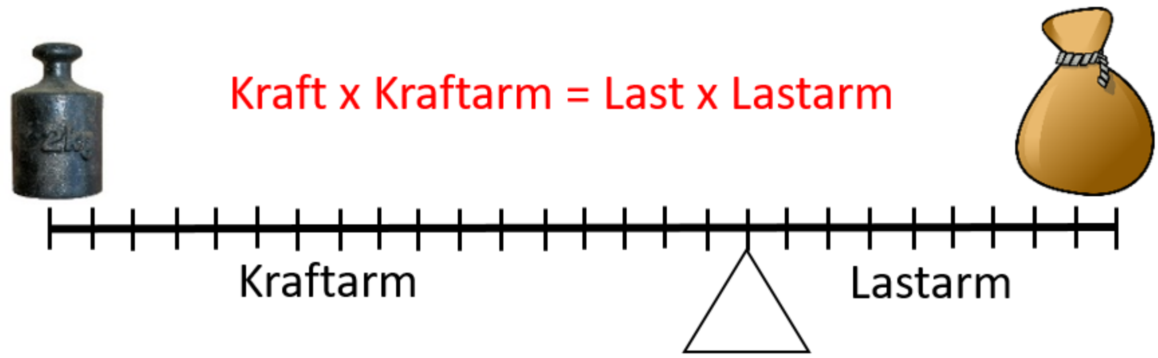


Abb. 8: Das Hebelgesetz von Archimedes

---

[44] David Foster Wallace, Die Entdeckung des Unendlichen, Piper, 3. Auflage 2010, S 103

[45] Zitiert nach Wallace, ebenda, S. 111

(ich habe es!) gerufen haben. Er soll oft in der Öffentlichkeit unbekleidet gewesen sein und kurz vor seiner Ermordung durch einen römischen Soldaten in Syrakus 212 v. Chr. gerufen haben *„Störe meine Kreise nicht“!* Solche eher naiven Anekdoten sind allgemein bekannt. Er gilt als Genie, aber selbst mathematisch interessierte heutige Zeitgenossen können kaum Leistungen von Archimedes nennen. Seine Präzisionsberechnung der Kreiszahl Pi hatte ein Jahrtausend Bestand. Dies war eine ungeheure physische und psychische Leistung ohne Dezimalsystem und ohne die für ein Stellenwertsystem erforderliche Null. Sie beruhte nur auf Vergleichen von ganzen Zahlen, also genauen Abschätzungen von Brüchen. (Genauer: Eigentlich war ein Bruch immer ein Verhältnis von Strecken und wenn man quadrieren musste, hat man ein Quadrat über der Strecke errichtet.) Man kann sich dies heute kaum noch vorstellen, auch wenn man davon absieht, dass Computer mittlerweile 50 Billionen Stellen von π errechnet haben (Stand 2020, 303 Tage Rechenzeit). Archimedes hat es übrigens abgelehnt, sich den Kreis als unendliches Vieleck vorzustellen. Da saß die Scheu vor dem aktual Unendlichen doch noch tief. Auch das Hebelgesetz hat er mathematisch exakt formuliert. Aber am meisten erinnert man sich daran, weil von ihm der Ausspruch überliefert ist: *Gebt mir einen Hebel, der lang genug, und einen Angelpunkt, der stark genug ist, dann kann ich die Welt mit einer Hand bewegen.*

Heute wissen wir: Seine Werke waren schwierig und wurden deshalb sehr selten kopiert. Obwohl er berühmt war, blieben einige Texte nur in einer einzigen Kopie erhalten. Ein Exemplar der *„Quadratur der Parabel“* gelangte noch an den Hof Friedrich II im 12. Jahrhundert und konnte dann bis ins 15. Jahrhundert verfolgt werden. Dann verliert sich seine Spur. Das gleiche gilt für ein weiteres Werk von ihm, das trotz päpstlichem Besitz, im 14. Jahrhundert verloren ging. Immerhin wurde vom historisch bedeutenden Teil, *„Über schwimmende Körper“*, eine lateinische Kopie angefertigt. Erhalten ist *„Über Spiralen“*. Ansonsten zeigen Hinweise bei Plutarch, Athenaios, Vitruv oder Heron die Verluste. [46]

Seine Methodenlehre, die in den sogenannten Kodizes A, B und C niedergeschrieben war, hätte eine Revolution in der mathematisch-physikalischen Welt darstellen können. Leider war auch davon ein wesentlicher Teil 2.000 Jahre lang verschollen. Wie viele andere Werke, hatten die drei Kodizes eine wechselvolle Geschichte. Für das „Gedächtnis der Menschheit“ gab es eine Reihe von Katastrophen. Dazu gehörte in der Antike der Brand der Bibliothek von Alexandria. Eine weitere war die genannte Eroberung und Plünderung von Konstantinopel 1204 durch christliche Kreuzritter. Dort wurden auch die Kodizes verschleppt. Kodex B verschwand als erstes; 1311 wird er

---

[46] Russo, Lucio, ebenda, S. 60-61

zum letzten Mal in Zusammenhang mit der päpstlichen Bibliothek in Viterbo erwähnt. 1564 folgte Kodex A, wo er zum letzten Mal in einer Privatbibliothek archiviert war.
Der Kodex C wurde 1906 von dem Kopenhagener Gelehrten Johan Ludvig Heiberg in Konstantinopel entdeckt und mit den damaligen, sehr begrenzten, Mitteln ausgewertet, verschwand dann aber auch wieder. Im Jahr 1998 wird er von unbekannter Seite zum Verkauf angeboten und wurde von dem Antiquitätenhändler Simon Finch im Auftrag eines unbekannten Käufers bei Christie´s in New York für 2,2 Millionen Dollar erworben. William Noel war Kurator für alte Handschriften am Walters Kunstmuseum in Baltimore und bemühte sich bei Finch darum, den Käufer kennen zu lernen und das Palimpsest für eine Ausstellung zu gewinnen. Es wurde mehr: Mit modernsten technischen Mitteln entriss man dem mechanisch abgeschabten und mit einer mittelalterlichen Litanei überschriebenen Pergament wesentliche Teile des ursprünglichen Archimedes-Textes. Noel und Reviel Netz haben über diesen Prozess ein Buch geschrieben, das einem Wissenschafts-Krimi gleicht.[47] Man fand eine mathematische Sensation.

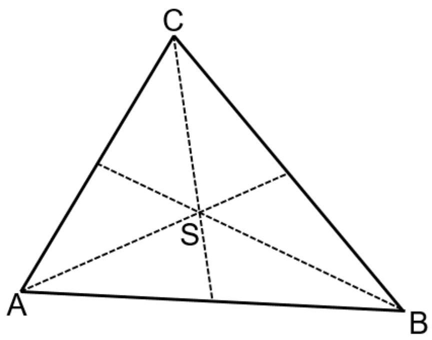


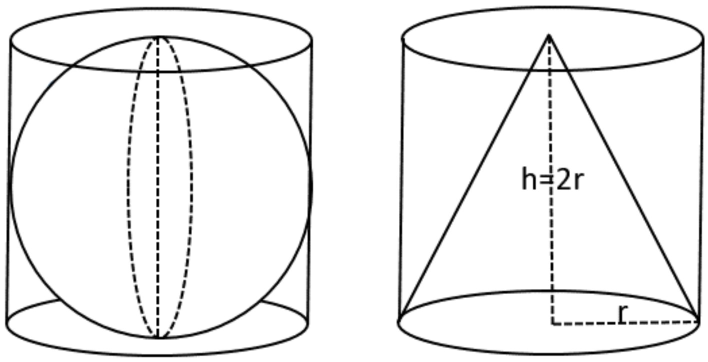
Abb. 9: Schwerpunkt eines Dreiecks

Kodex C ist ein Teil seiner Methodenlehre, ergänzt um charakteristische Beispiele, die Schritte hin zum Gesamtkonzept darstellen. Archimedes hat jedoch nicht nur reine Mathematik beschrieben, sondern seine neue Mathematik unter Verwendung des Unendlichen auf die Physik angewendet. Damit hat er traditionelle Denkverbote in der griechischen Mathematik überwunden.[48]
Einer dieser Zwischenschritte war die Suche nach dem Schwerpunkt in Dreiecken, eigentlich ein Begriff aus der Physik. Archimedes beweist, dass dieser Punkt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden liegt und diese im Verhältnis 2:1 teilt.

Neben dem Schwerpunkt in Dreiecken war die Summation von Schnitten zur Berechnung des Kugelvolumens durchaus ein Zwischenschritt in der Methodenlehre, aber auch für sich genommen ein wichtiges Ergebnis. Auch dabei kommt eine „Wiegetechnik“ zum Einsatz. Eine Kugel (Abb. 10a) denkt man sich unterteilt in senkrechte Schnitte. Die Mittellinie als Achse geht durch

[47] Netz, Reviel; Noel, William; Der Kodex des Archimedes, C.H.Beck, München 2008
[48] https://www.spektrum.de/rezension/der-kodex-des-archimedes/950997

den Mittelpunkt der Kugelschnitte und diese Mittelpunkte sind gleichzeitig ihr jeweiliger Schwerpunkt.



$$V_{Ke} = \frac{2}{3}\pi r^3 \qquad V_{Ku} = \frac{4}{3}\pi r^3 \qquad V_{Zy} = 2\pi r^3$$

Abb. 10a Kugel/Zylinder 10b Kegel/Zylinder

Der mittlere Kugelschnitt ist ein Kreis, der die Schnittpunkte eines Kegels mit der Kugel auf halber Höhe darstellt. Diesem Kegel, der die Höhe des Durchmessers der Kugel hat, wird ein Zylinder umschrieben. Das Volumen des Kegels V_{Ke} und das Volumen des Zylinders V_{Zy} waren damals schon bekannt.

Der Kegel hat ein Drittel des Volumens vom umbeschriebenen Zylinder. Das Volumen der Kugel V_{Ku} ist unbekannt. Ab hier kommt nun die Wägetechnik zum Einsatz. Ein Kreisschnitt, der im Abstand a vom Drehpunkt des Hebels entfernt ist, liefert einen Beitrag von $a \cdot r^2$ zur rechten Seite des Hebelgesetzes.

Durch geschickte Umformungen kommt Archimedes zum Ergebnis, dass das Kegelvolumen V_{Ke} ein Drittel und das Volumen der Kugel V_{Ku}, zwei Drittel des Zylindervolumens V_{Zy} ist. Es gilt somit

$$V_{Ke} : V_{Ku} : V_{Zy} = 1 : 2 : 3$$

Eine gedachte Balkenwaage wäre im Gleichgewicht, wenn auf einer Seite Kegel und Kugel und auf der anderen Seite der Zylinder liegt.

Mit diesen Ergebnissen beginnt eine ganze Reihe von weiteren Erkenntnissen, bei denen meist Dreiecke im Mittelpunkt der Beweiskette stehen. Teilweise hat er bei diesen Dreiecken im Vorfeld schon raffinierte Beziehungen bewiesen, wobei oft Verhältnisse von Strecken in Bezug zu Verhältnissen von Dreiecksflächen gesetzt werden können. Der Schwerpunkt nimmt dabei eine Schlüsselrolle ein. Er erlaubt, dass geometrische Gebilde mit der Physik des Hebelgesetzes verknüpft werden können. Es wird in solchen Fällen ein eindimensionaler Zusammenhang auf einen zweidimensionalen übertragen. Schon dies ist ein ungewöhnlicher Schluss. Doch das Wesen des Integrationsgedankens ist die

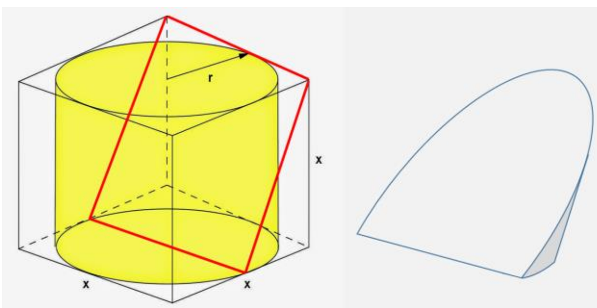


Abb.: 11a und 11b

Tatsache, dass Archimedes Scheiben der Breite Null betrachtet (Exhaustionsmethode). Es ist die Basis für die zukünftige Grenzwertbetrachtung und Rechnungen mit im Prinzip unendlichen Mengen. Er zeigt methodisch, wie sich eine Fläche, die von Linien und gekrümmten Kurven begrenzt ist, beliebig genau berechnen lässt. Erst bis auf ein Sandkorn genau, dann bis zu einer Haarspitze genau usw. Archimedes summiert Scheiben der Breite Null zu einem Volumen! Im Rahmen dieses Beitrages wird sich zeigen, dass es überabzählbar viele dieser Scheiben gibt, entsprechend den Punkten auf einer Geraden. Dass das mit der Stetigkeit des Kontinuums zusammenhängt, ist erst viel später Dedekind aufgefallen.[49] Doch damit hat Archimedes hier unbewusst mit dem aktual Unendlichen gerechnet. Archimedes war genial, aber man kann ihm nicht unterstellen, dass er schon Überabzählbarkeit durchdacht hatte. Er hatte jedoch ein intuitives Gespür für Grenzen und Regeln im Umgang mit Unendlichkeit, vor allem in der Geometrie. Sein im Palimpsest wiederentdecktes Werk „Über die Methode" adressiert zweifellos auch die Anwendung des aktual Unendlichen.
Archimedes hat seine Methode auf die Berechnung der Fläche unter einer gekrümmten Kurve und weiter zur Volumenberechnung am Beispiel eines zunächst genau definierten Parabelsegmentes angewandt und dann vom speziellen zum allgemeinen Fall verallgemeinert. Die Abbildung 11a zeigt einen Würfel, der einem Zylinder umbeschrieben ist. Eine Ebene, die durch die obere Kante des Würfels und durch die Mittelpunkte der unteren Kanten geht, schneidet den Zylinder in Form eines Parabelsegmentes und bildet ein Gebilde in Form eines Fingernagels (Abbildung 11b).

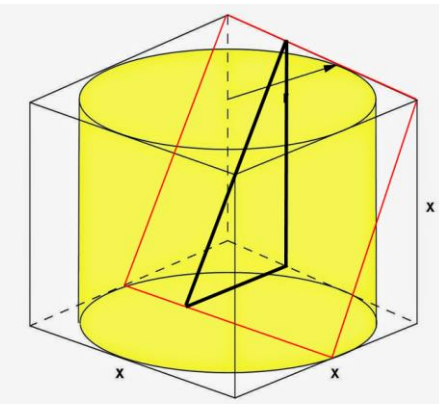


Abb. 11c

Archimedes betrachtet nun rechtwinklige Dreiecke, deren Hypothenuse alle auf der (roten) Schnittebene liegen. Sie bilden Schnitte mit der Würfelhälfte und der Zylinderhälfte einerseits bzw. mit der Parabel, dem Kreis und dem Rechteck [$\frac{x}{2}\cdot x$] andererseits. Doch nun folgt wieder der Schritt zu aktual unendlich vielen Schnitten und ihrer Summation gemäß der in diesem Fall erforderlichen Regeln. Das ist eine intuitive Vorwegnahme der modernen Integralrechnung im allgemeinen Fall.

Archimedes hat sich Methoden bedient, die erst 1800 Jahre später von Isaac Newton unter dem Namen Fluxionsrechnung und von Gottfried Wilhelm Leibniz als Infinitesimalrechnung wiederentdeckt wurden. Er kommt der modernen

[49] Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Vieweg, Braunschweig, 1872, S17f, zitiert nach John Stillwell, Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, ebenda, S. 24

Integralrechnung erstaunlich nahe. Unter dem Namen Analysis ist sie heute eine Säule der modernen Mathematik. Lange Zeit wurde sie misstrauisch beäugt, weil sie das „unendlich Kleine“ anwendet. Doch durch einen Formalismus, den die Griechen zumindest als potentiell unendlich bezeichnet hätten, ist ein korrekter Umgang mit beliebig kleinen Größen entstanden. Dabei muss eine Zerlegung des Untersuchungsobjektes in handhabbare Segmente erfolgen. Am besten weiß man insbesondere durch die euklidische Geometrie über Dreiecke Bescheid. Den Bogen kann man bis in moderne Überlegungen schlagen. Eine solche Methode nennt man Triangulation. Man findet sie in der normalen Vermessungslehre, wie sie bereits von Carl Friedrich Gauß angewendet wurde,[50] aber auch in modernen Quantengravitationstheorien, wie der Causal Dynamical Triangulation, CDT. Auch dabei wird ein Raumvolumen mathematisch handhabbar zerlegt in Dreiecke (2-simplex), Tetraeder (3-simplex) oder im vierdimensionalen Raum in Pentachoron (4-simplex) usw. Manchmal ist die Zerlegung von geradlinig begrenzten Flächen in Dreiecke relativ einfach bzw. ist in endlichen Schritten erfolgt. Ist die Fläche durch Kurven begrenzt, so sind beliebig viele immer kleinere Dreiecke erforderlich und der gesuchte Flächeninhalt muss durch eine Grenzwertbildung erfolgen. Die Fläche wird in unendlich viele Dreiecke zerlegt. Archimedes benutzt noch weitere Methoden; er setzt das Verhältnis von Strecken in Bezug zu Flächen und geht dann, modern gesprochen, zur Grenzwertbildung über. Oder, wie an den Beispielen gesehen, betrachtet er eine Fläche als Beitrag zum „Gewicht“ und wendet in Verbindung mit dem Schwerpunkt das Hebelgesetz an.

Archimedes war sich der Problematik bei der Rechnung mit unendlichen Größen durchaus bewusst. Vielleicht sogar mehr als Newton, der zunächst eine eher naive und unbekümmerte Vorgehensweise in seiner Fluxionsrechnung an den Tag legte, die allerdings aufgrund seiner überragenden physikalischen Intuition trotzdem ungeheure Erfolge brachte (s.u.). Die Diskussion um den mathematisch angemessenen Umgang mit infinitesimalen Größen zog sich mehrere Jahrhunderte durch die Mathematik- und auch durch die Physikgeschichte. Zentraler Begriff ist das „Unendlich Kleine“.[51] Erst im 19.

---

[50] Gauß hat bei der Vermessung des Königreichs Hannover zwischen 1818 und 1826 per Triangulation besonders genau sein „Großes Dreieck“ vermessen. Dieses Dreieck ist eben, weil die Messung durch die Luft erfolgte. Es hat die Seitenlängen 69 km (Hoher Hagen – Brocken), 84 km (Hoher Hagen – Inselsberg) und 106 km (Brocken – Inselsberg) und war einerseits eine wichtige Basis zur Verknüpfung mit weiteren Vermessungsdaten, aber auch Grundlage zur Überprüfung der Winkelsumme im Dreieck (s.u.a. Dieter Lelgermann; Gauß und die Messkunst, primus und wbg, 2011, Darmstadt)

[51] Die Gemahlin Friedrich des Ersten von Preußen, Sophie Charlotte, war eine gute Freundin von Leibniz. Sie setzte scherzhaft in einem Brief an eine Freundin das „Unendlich Kleine“ mit den Erfahrungen mit ihren Lakaien gleich.

Jahrhundert wurden Regeln für den Umgang mit dem potentiell Unendlichen gefunden, die die philosophischen („was ist unendlich klein?“) und mathematischen Probleme („vermeintliche Division durch Null“) beseitigten. Diese Regeln beruhen auf oder sind zumindest in den „imaginären Dialogen“ des Archimedes vorweggenommen. Dabei war er seiner Zeit sehr weit voraus und die griechischen Mathematiker haben seinen riesigen konzeptionellen Schritt letztendlich nicht nachvollzogen.[52] Später waren wesentliche Teile seiner Arbeit in der Methodenlehre verschollen und konnten die weitere Entwicklung nicht beeinflussen.

Erst Bernard Bolzano (1781-1848) begann sich systematisch mit dem Unendlichen in Verbindung mit endlichen und unendlichen Mengen auseinander zu setzen. Das Fachwort „Menge“ führte er in die mathematische Terminologie ein. Er legte nach reiflichen Überlegungen sozusagen die Scheu vor dem Unendlichen, wie sie die Griechen der Nachwelt vererbt hatten, gänzlich ab. Er machte „unendlich“ erstmals handhabbar. Man kann Bolzano als geistigen Vater von Georg Cantor betrachten, der unmittelbar an die Gedanken Bolzanos anknüpfte (s.u.).

Eine fast endgültige, auch heute allseits akzeptierte Grundlage der Analysis stammt von Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) und abschließend von Karl Weierstraß (1815-1897). In der Integralrechnung erinnert Cauchys Definition des Grenzwertprozesses sehr an Archimedes. Das Integrationsintervall wird in immer kleinere Teilintervalle unterteilt. Die Länge des Teilintervalls über der x-Achse multipliziert mit dem Funktionswert am Anfang des Intervalls nähert sich dem Integral als Grenzwert bei immer kleineren Teilintervallen (mehr zu Cauchy und Weierstraß (s.u.).

Unendlich in der Scholastik, Mathematik im Orient

Im Sinne der historischen Chronologie soll kurz auf die in Europa mathematisch wenig ergiebige Zeit bis zur Renaissance eingegangen werden. Einen teilweise krassen Gegensatz bilden in dieser Zeit die Länder des Islam und auch Indien. Unter Scholastik soll die Philosophie und Theologie vorwiegend des Mittelalters (etwa 9.–14. Jahrhundert) gemeint sein. Sie beginnt aber eigentlich mindestens ab ca. 493 n.Chr. mit dem Sieg und der Ermordung Odoakers durch Theoderich den Großen und dem anschließenden Beginn der ostgotischen Herrschaft über Italien. Oft wird auch 476 n.Chr. als Zeitpunkt des Untergangs des

---

„Letzthin … hat mich Leibnitz von dem unendlich Kleinen (seine Theorie der Monaden) unterhalten. Wer kennt diese kleinen Wesen besser als ich?“
Quelle: https://de.wikisource.org/wiki/Die_philosophische_Königin_von_Preußen

[52] Netz, Reviel; Noel, William; ebenda, S. 187

weströmischen Reichs genannt. Das Ende der Scholastik ist der Beginn der Renaissance um 1450. Durch geografische Unterschiede ist dies aber schwierig konkreten Jahreszahlen zuzuordnen. Z.B. war Leonardo di Pisa (1170-nach 1250, genannt Fibonacci) eindeutig noch ein Kind des Mittelalters, unabhängig davon, dass ihm die mathematische Entwicklung einiges verdankt. Wußing datiert in seiner zweibändigen Monografie „6000 Jahre Mathematik“[53] den Beginn der Renaissance etwa zwischen Nikolaus von Kues (1401-1464) und Mathematikern, Naturforschern oder Astronomen, wie Adam Ries(e) (1493-1559), Luca Pacioli (1445-1514 oder 1517, bekannt für *De divina proportione*, Goldener Schnitt, Venedig 1509), Leonardo da Vinci (1452-1519) oder Nikolaus Kopernikus (1473-1543), um nur einige wichtige zu nennen. Die Scholastik hat sich auf die antike Philosophie gestützt und daraus christliche Dogmen entwickelt. Der sehr begrenzte Umgang mit Zahlen und Geometrie war eng verknüpft mit der Christianisierung. Aber in den ersten Jahrhunderten gibt es in der westlichen Welt wenig für die Geschichte der Mathematik und fast nichts mit Bezug zu diesem Beitrag zu berichten. Es war aber eine Blütephase der islamischen Mathematik und in Indien wurde die Null vor 900 n. Chr. als 10. Ziffer mit dem heute üblichen Symbol in einem Dezimalsystem eingeführt. Beda Venerabilis (ca. 672/73-735) berechnete in einer Abhandlung das Osterdatum und hat sich andererseits in dieser Schrift noch mit Fingerrechnung befasst. Zu nennen ist im Westen noch Boethius. Er hat immerhin Euklids „Die Elemente“ und weitere Schriften ins Lateinische übersetzt.

Abb. 12: Das Ziffernrechnen gewinnt die Oberhand über das Abakus-Rechnen

Vereinzelt kam es zum Austausch mit islamischer Kultur. Der wurde oft aus religiösen Gründen gegen „heidnische Wissenschaft“ abgeblockt. Das änderte sich erst mit Gerbert von Aurillac (ca.945-1003), der in Katalonien, im

---

[53] Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 2, Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 298 ff

Grenzbereich zum maurischen Spanien, islamische Mathematik kennengelernt hatte. Im Jahre 1085 wurde Toledo zurückerobert und die hervorragende Bibliothek fiel den Christen in die Hände. Waren bisher vor allem Klöster gleichzeitig ökonomische Zentren und Bildungsschwer-punkte, so setzte im 11./12. Jahrhundert die Gründung von Universitäten ein. Sie dienten zum Machterhalt der Kirche, entwickelten aber im Laufe der Zeit eine gewisse Eigendynamik. Es fehlten aber zunächst ausreichend Impulse für mathematische Bildung und Forschung. Diese kamen generell erst in der Renaissance durch neue gesellschaftliche Forderungen auf die Mathematik zu und brachten deutliche Fortschritte. Zu nennen ist der Übergang von Natural- zu Geldwirtschaft, Umrechnung von Währungs-, Gewichts- und Maßeinheiten, Buchhaltung, Zins- und Zinseszinsrechnung, zweckmäßigere Rechenverfahren, Schifffahrt über das offene Meer, u.v.m.[54] Diese Anforderungen hatte die mittelalterliche Zeit (in dem genannten Zeitrahmen) noch nicht oder längst nicht in diesem Maße. Erst die Renaissance-Forderung „ad fontes“ (zu den Quellen) bedeutete, dass die Orientierung möglichst am Original zu erfolgen habe. Hellenistische Mathematik galt nicht mehr als Ketzerei. [55]

Beim Thema „unendlich“ blieb allerdings zunächst die etablierte Haltung erhalten. Wie schon Aristoteles propagierte, wird zwischen dem potentiell und dem aktual Unendlichen unterschieden und vor allem Letzteres verdammt. Unendlichkeit in der „Zeit“ wird mit dem Begriff „Ewigkeit“ verbunden.
Die Beweisführung in der Scholastik bezog sich vorwiegend auf theologische Fragen, auch wenn der Begriff durchaus darüber hinaus geht. „Für“ und „Wider“ wird analysiert und eine Entscheidung gefällt. Allerdings wird in vielen Fällen eine konservative Lösung bevorzugt, wenn eine Kollision mit etablierten Meinungen droht. Das sind vor allem die Lehren des Aristoteles oder Platon in wissenschaftlichen Fragen oder der Bibel und der Kirchenfürsten in theologischen Fragen. Ontologische, religiöse und philosophische Probleme werden oft auf Basis dieser Grundlagen oder Lehren von über jeden Zweifel erhabenen Autoritäten entschieden. Die antiken Einflüsse sind noch omnipräsent. Aber sie führen meist nicht zu einer Weiterentwicklung, sondern eher zu einer Stagnation oder sogar einer Vernachlässigung des antiken Erbes. Dass ein Werk von Archimedes mit einer mittelalterlichen Litanei überschrieben wird ist symptomatisch. Trotzdem sind eine Reihe großer Namen in Erinnerung geblieben.

---

[54] Wußing, ebenda, S. 307 f
[55] Bildquelle Abb. 12: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Gregor_Reisch,_Margarita_Philosophica,_1508_(1230x1615).png

Augustinus (354-430) folgt z.B. Platon und setzt Gott mit dem aktualen Unendlichen gleich.

Anselm von Canterbury (1033-1109) lehnt sich an Augustinus an und benutzt ebenfalls den Begriff des Unendlichen um Gott zu definieren. Er versucht, den Glauben logisch zu begründen und definiert Gott [als]: "*Etwas, worüber hinaus nichts Mächtigeres gedacht werden kann.“*

Roger Bacon (1214-1292/4?) machte sich Gedanken um (im heutigen Sprachgebrauch) rationale und irrationale Zahlen aus geometrischen Gründen.

Johannes Duns Scotus (1266-1308) dachte über Probleme der Kontinuität im Zusammenhang mit konzentrischen Kreisen nach.

Thomas von Aquin (1225-1274) schrieb zu den Eigenschaften aller Punkte auf einer Geraden: *Es ist offenkundig, dass in einer unendlichen oder einer Kreislinie ein Punkt nur potentiell existiert*. Und weiter: *Ein Punkt ist nicht in der Definition einer Linie enthalten, wie gewöhnlich angenommen.*[56] Verblüffend „modern“ im Sinne Cantors ist seine Definition der Vielheit [Menge], als *„Zusammenfassung von verschiedenen Einheiten“*. Cantor setzte sich intensiv mit Thomas von Aquin auseinander. Allerdings denkt Thomas theologisch und philosophisch, während Cantor Vorbehalte und Gegenargumente ausräumen möchte. Thomas schreibt Gott unendliche Allmacht zu – er könnte Unendliches erschaffen. Aber das ist mit der Natur unvereinbar und außerhalb von Gott gibt es deshalb das aktual Unendliche nicht. Unendlichkeit bei Gott und der Welt wird für viele Jahrhunderte ein Streitthema bleiben. Es erzeugte immer wieder auch Skrupel bei Cantor und seinen Vorgängern und Nachfolgern. Im Vorgriff auf Cantor schreibt er dazu:

Meiner festen Überzeugung nach widerspricht es (…) ebensowenig den großen Principien der christlichen Scholastik, das Transfinitum zu acceptieren und in den Speculationen zu verwerthen, sobald es von irgend Jemandem als wahr demonstriert worden ist.[57]

Wilhelm von Ockham (1285-1347) differenzierte zwischen Kontinuität und Kontiguität. Kontinuität sei kein Nebeneinander von benachbarten unteilbaren Teilen (also Punkten). Seine Überlegungen zum Kontinuum analogisierte er

---

[56] Thomas von Aquin, Summa theologica, Teil 1, Questio 85, Art. 5, zitiert nach Paolo Zellini, Eine kurze Geschichte der Unendlichkeit, S.64 ff. Dort finden sich auch über die hier genannten auch Kurzzusammenfassungen anderer Denker dieser Epoche.

[57] Brief an A. Schmid v. 26.3.1887, zit. Nach Alberto Jorgi, Das Unendliche, S. 80. Zahlreiche weitere Aussagen siehe G. Cantor, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und zur Philosophie des Unendlichen, in Gesamtausgabe seiner Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zemelo, Julius Springer, Berlin 1932, ab S. 370 ff, digital verfügbar unter https://gdz.sub.uni-goettingen.de/

bzgl. der Zeit. Ockhams Rasiermesser ist das Synonym für das Prinzip, dass man von allen Alternativen zuerst die einfachste in Betracht ziehen sollte.

Für Gregor von Rimini (ca. 1300-ca. 1358) waren Punkte, Linien und Flächen lediglich Schöpfungen des Geistes.

Johannes Buridan (ca. 1300-ca. 1358) sagte, aus Punkten, Linien und Flächen ließe sich eine fiktive Geometrie konstruieren, deren Vorteil ihre Klarheit sei. Das Gleichnis von Buridans Esel findet sich übrigens nicht in seinen Schriften.

Mit Nicole Oresme,[58] ab 1377 Bischof von Lisieux, brachte Frankreich einen herausragenden Gelehrten hervor. In seinem mathematischen Schaffen entwickelte er eine für die damalige Zeit erstaunliche Eigenständigkeit von religiösen Bezügen. Es entstand das Werk *Algorismus proportionum*. Offenbar erstmal seit der Antike hat er sich mit unendlichen Reihen beschäftigt, also dem damals spektakulären Versuch, unendlich viele Zahlen zu addieren. Er hatte auf Anweisung von Kaiser Karl V den Auftrag, Aristoteles neu zu übersetzen und war sicherlich deshalb mit der Ansicht von Aristoteles über das Unendliche vertraut. Er konnte beweisen, dass die harmonische Reihe divergiert.
Konkret hat er das Ergebnis der Reihe der reziproken Zweierpotenzen richtig vorhergesagt:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=1$$

Nicht sicher ist, ob Oresme sich mit folgender Reihe intensiv beschäftigte:

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\cdots$$

Er ahnte aber, dass sie beschränkt ist (<2), aber der Wert wurde erst viel später über die Riemannsche Zeta-Funktion bestimmt. Es ist als Basler Problem bekannt, weil sich zuerst die Bernouli-Brüder Jakob und Johann aus Basel erfolglos damit auseinandersetzten. Auch Newton und Leibniz scheiterten, ebenso L'Hôpital. Erst Euler, ebenfalls aus Basel, war erfolgreich.

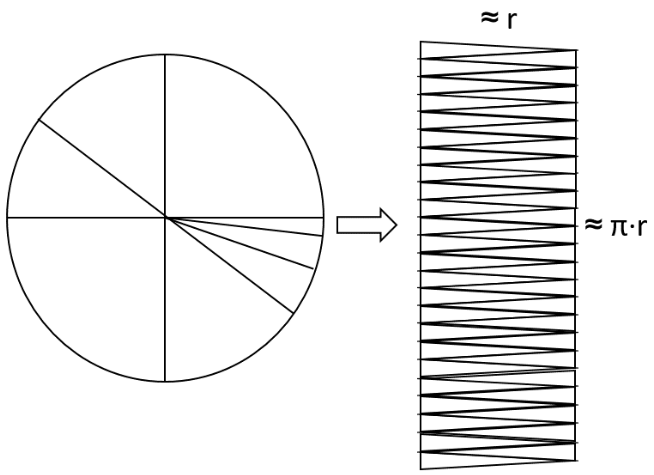


Abb. 13: Kreisflächenberechnung des Nikolaus von Kues.

Der Wert beträgt $\xi(2)=\frac{\pi^2}{6}\approx 1{,}64493$ ...

Über viele Erkenntnisse waren sich Theologen und

58 Wußing ebenda, S. 293, sowie Rudolf Taschner; Die Farben der Quadratzahlen, Hanser, München 2019, S. 67

Philosophen, insbesondere im Hochmittelalter, prinzipiell einig. Laut Zellinis Einschätzung verneinte z.B. die Mehrheit die „… Möglichkeit, dass das Kontinuum aus einer Gesamtheit von Punkten bestehen könne“.[59]

Nikolaus von Kues (1401-1464), latinisiert Nicolaus Cusanus, überträgt am Beginn der Renaissance und früher Neuzeit theologische und philosophische Ansichten auf mathematische Probleme. Er geht durchaus neue Wege vom Spätmittelalter hin zur beginnenden neuen Epoche und kann als erster Humanist bezeichnet werden. Er vertrat Ansichten, für die Galilei verurteilt wurde, wie das heliozentrische Weltbild und dass Sterne ferne Sonnen sind. Aber er war ein erfolgreicher Repräsentant der Kirche, Kardinal und als päpstlicher Legat war er jedoch weniger angreifbar. Cusanus war Vertreter der römisch-katholischen Kirche beim Konzil von Ferrara-Florenz zur Aussöhnung zwischen Rom und Byzanz. [60]

Cusanus hinterfragte festgefahrene Ansichten: Vergrößert man nämlich einen Würfel der Kantenlänge 1 kontinuierlich zu einem der Kantenlänge 2, so muss irgendwann dazwischen das Volumen 2 mit der Kantenlänge $\sqrt[3]{2}$ erreicht werden. In der euklidischen Geometrie wurde $\sqrt[3]{2}$ nicht als reelle Zahl betrachtet,

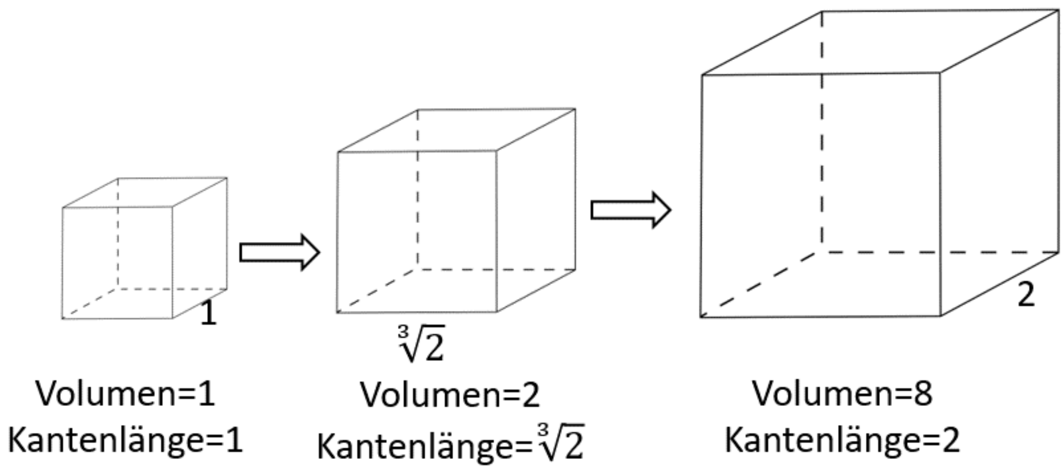


Abb. 14: Cusanus bejahte erstmals die philosophisch umstrittene Frage, ob sich eine irrationale Zahl höherer Ordnung wie $\sqrt[3]{2}$ in der Realität geometrisch darstellen lässt.

da man sie nicht konstruieren konnte. Räumliche Größen mussten immer endlich und darstellbar sein und unterlagen dem Zahlenbegriff, den erst Dedekind überwand (s.u.).

---

[59] Zellini, Paolo, ebenda, S. 65
[60] Inhalt des Abschnitts siehe Brian Clegg, ebenda, S.140; dort findet sich auch die analoge Grafik, die im Wesentlichen kopiert wurde.

So stellt er der reinen Bücherweisheit praktisches oder besser praxisorientiertes Wissen zur Seite. Als Forum sieht er den Marktplatz, wo Geld gezählt, Ware abgewogen, Öl abgefüllt wird, also gemessen wird.[61] Ganz ähnlich zu Galilei Galileo war seine Ablehnung von Aristoteles und seine Bewunderung für Platon. In Analogien zu zahlreichen arithmetischen und geometrischen Fragestellungen will er zeigen, dass wir mit unserem beschränkten, endlichen Verstand Gott nicht nahekommen können. Die aktuale Einheit des Unendlichen können Menschen nicht erfassen. Beschreibt man z.B. in einen Kreis ein Polygon mit immer mehr Ecken ein, so ist es dennoch unmöglich beides zur Deckung zu bringen. Auch eine Quadratur des Kreises gehört zu diesen Problemen, an denen er sich in mehreren Werken versucht hat, obwohl dieses tatsächlich unmöglich ist. Aber erfolgreich war seine Approximation des Kreises durch kleine Segmente/"Kuchenstücke", die man versetzt aufeinanderlegen kann (Abb. 13). Es entsteht in der Näherung ein Rechteck, das ca. π·r hoch und r breit ist; also die Fläche ungefähr π r^2 hat. Doch seine 2. Methode ist besser (Abb. 15).

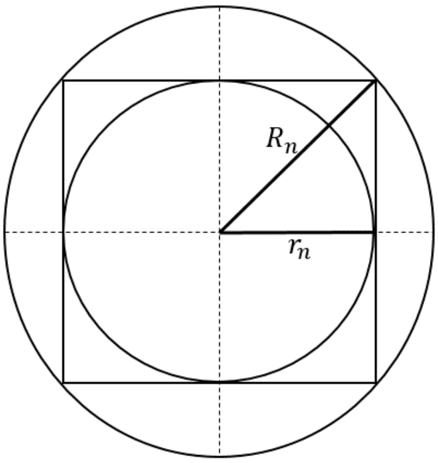


Abb. 15: Verfeinerte Methode

Archimedes ging von einem festen Kreis aus und näherte diesen durch Polygone an. Cusanus machte es umgekehrt. Er ging von einem Polygon der festen Länge 2 mit $n = 2^k$ Ecken aus (wobei 2^k=4, 8, 16, 32, ...) und zwei in- und umbeschriebenen Kreisen. Der innere Kreis hat für jedes n den Umfang $2\pi r_n$; der äußere Kreis $2\pi R_n$. Abb. 15 ist mit n=4 (Quadrat) dargestellt. Beim Quadrat ist $r_4 = \frac{1}{4}$ und $R_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Somit ist allgemein

$$2\pi r_n < 2 < 2\pi R_n \qquad \text{oder} \qquad \frac{1}{R_n} < \pi < \frac{1}{r_n}$$

Mittels elementarer Geometrie (Sehne im regelmäßigen 2n-Eck und Kathetensatz) findet man die Iterationsvorschriften[62]

$$r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2} \quad \text{und} \quad R_{2n} = \sqrt{R_n \cdot r_{2n}}$$

Im Fall 2^{15}=32768 ist $\frac{1}{R_{2n}}$ =3,141592652 und $\frac{1}{r_{2n}} = 3{,}141592656$

[61] Freely, John; Platon in Bagdad; dt. Ausgabe Klett-Cotta, Stuttgart, 2012, S. 231
[62] Siehe https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/cusanus-algorithmus-zur-berechnung-von/1667
oder https://www.herder-oberschule.de/madincea/aufg0009/cusanus.pdf

und die Abweichung von π=3,141592653… beträgt 0,000000001.

Es ist beides eine Anwendung von dem, was später Indivisiblen genannt wird und im 17. Jahrhundert einen regelrechten Hype in der Mathematik ausgelöst hat. Es wurde von Newton praxisorientiert mit epochalem Erfolg angewendet und von Leibniz mathematisch ausgearbeitet.

Auch wenn das Thema „unendlich“ in der arabischen oder indischen Mathematik kaum eine Rolle spielt, hatte das weit entwickelte mathematische Wissen erheblichen Einfluss auf das Abendland. Im Gegensatz zu Europa mit Ausnahme des maurischen Teils der iberischen Halbinsel war die Mathematik im Islam schon deutlich, nämlich mehrere Jahrhunderte, früher ausgeprägt. Mitte des 8. Jahrhunderts begann die Herrschaft der Abbasiden und Bagdad wurde gegründet. Dank der Förderung von Hārūn ar-Raschīd und seines Sohns al-Ma'mun begann eine Blüte der Wissenschaften inklusive der Mathematik. Al-Ma'mun hatte bereits begonnen griechische und indische Werke ins Arabische übersetzen zu lassen. Mit dem im Jahr 825 n.Chr. gegründeten „Haus der Weisheit“ (dār al-ḥikma), einer Art Akademie, wurde seine Zielsetzung institutionalisiert.[63] Das große Reich der Abbasiden spaltete sich aber und das hatte auch Auswirkungen auf die mathematische Entwicklung. Hans Wußing sieht den östlichen Teil als weiter entwickelt an. So ist die Trigonometrie nicht nach Westen vorgedrungen. Auch haben sich die indischen Ziffern in zwei Ausprägungen in ostarabische und westarabische Schreibweisen weiterentwickelt. Der unterschiedliche Wissensstand gilt aber nur für die Mathematik. Die eroberte Bibliothek von Córdoba enthielt beispielsweise 400.000 Werke. Trotzdem hat die westarabische Kultur mehr Einfluss auf das Europa des Mittelalters genommen.
Der erste Schritt war eine ausgedehnte Übersetzungstätigkeit. Sie betraf primär die griechisch-hellenistische Mathematik. Auch indische und persische Werke vor allem im Bereich der Astronomie wurden übersetzt. Chinesische und indische mathematische Werke enthielten oft praxisnahe Beispiele, Aufgaben und Methoden. Auf diesem Fundus an Wissen bildete sich spätestens ab Mitte des 9. Jahrhunderts eine eigenständige mathematische Kultur heraus. Es fällt auf, dass die Systematik und die Beweismethoden der hellenistischen Mathematik darin rasch einen hohen Stellenwert einnahmen.

Eine Reihe von islamischen Universalgelehrten haben in der arabischen Welt mathematische Werke geschaffen, deren Qualität in Europa erst wieder in der Renaissance erreicht wurde. Dabei war die Mathematik nur eines von mehreren ihrer philosophischen Interessengebieten. Angelehnt an Wußing, werden hier stellvertretend einige Namen genannt: al-Kindī, al-Fārābī, Al-Bīrūnī, ibn Sīnā

[63] Wußing ebenda, S. 223 f

(Avicenna), Ibn Rušd (Averrhoës), Ibn Chaldūn al-Hadramī und der jüdische Philosoph Rabbi Moses ben Maimon (Maimonides). Besondere Bedeutung nimmt Al-Chwarizmi mit seiner Algebra ein. Abu Dscha'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (auch al-Choresmi – lateinisiert Algorismi) ist praktisch der Namensgeber des Begriffs „Algorithmus“. Das Europa der Renaissance bezieht sich explizit auf Al-Chwarizmi. Er schrieb die früheste muslimische Arithmetik, die sich auf das indische dezimale Zahlsystem bezieht. Das Original ist verloren gegangen, aber in New York wurde eine vollständige lateinische Fassung entdeckt.[64] Es entwickelten sich aus den indischen Ziffern die ostarabische und die westarabische Schreibweise. Die ostarabische Notation wird heute in der ganzen arabisch schreibenden Welt bis nach Marokko im Westen verwendet und Zahlen werden dort indische Ziffern genannt. Die indisch-westarabischen Ziffern wurden nach Modifikationen im 15. und 16. Jahrhundert unsere heutige westliche Zahlenschreibweise und werden arabische Ziffern genannt. Auch die indische Mathematik stand teilweise unter islamischem Einfluss – im Jahr 1206 entstand das Sultanat von Delhi. Doch auch unabhängig vom islamischen Einfluss entstanden bemerkenswerte Erkenntnisse, die oft mit dem leistungsfähigen Dezimalsystem erreicht wurden. Von dem deutschen Mathematikhistoriker Karl Menninger stammt das Zitat: *Wir sprechen deutsch, wir schreiben römisch und wir rechnen indisch*.[65] Großen Einfluss hatte und hat bis heute die Astrologie und damit verbunden die Astronomie. Das Observatorium in Jaipur (Rajasthan) ist ein Areal mit hochgenauen Instrumenten. Die Sonnenuhr ist bezogen auf moderne Uhren bis auf zwei Sekunden am Tag genau.
Indisch-stämmige Terminologie hat sich über eine Reihe von skurrilen Zwischenformen und Verballhornungen bis heute erhalten (z.B. beim Sinus). Der *„Kranz der Wissenschaften“* von Bhāskara II (1114-1185?) gilt als methodischer Standard über mehrere Jahrhunderte und als Meilenstein in Arithmetik, Geometrie, Algebra und Astronomie.[66]

In der Folge wurden besonders in der ostarabischen Mathematik Spitzenleistungen insbesondere in der Algebra erreicht, aber auch Lösungen zur Geometrie bzw. Trigonometrie und zur Zahlentheorie gefunden. Zu nennen sind Abū Kāmil, al-Karağī, as-Samaw'al, Omar Chayyām, Šaraf-ad-Dīn, Naṣīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, oder Jamshīd al-Kāshī. Wußing weist darauf hin, dass im Gegensatz zu griechisch-hellenistischen Quellen sich noch viele nicht ausgewertete Schriften in arabischen und persischen Depots befinden.

---

[64] Wußing ebenda, S. 232-241
[65] Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen, 1958, zitiert nach Wußing, ebenda, S. 97. (Menninger promovierte übrigens über Bernhard Bolzano und war temporär Gastdozent an der Universität Gießen.)
[66] Wußing ebenda, S. 94

Beispiele sind vier Bücher von Diophant in arabischer Sprache, gefunden in den 1970er Jahren oder eigenständige Werke zur Infinitesimalrechnung, die offenbar in der Tradition des Archimedes stehen. Das zeigt, dass arabische Gelehrte, aufsetzend auf damals verfügbarem antiken Wissen, selbständige Forschung betrieben.

Infinitesimalrechnung bei Newton und Leibniz

In der Scholastik hat Aristoteles die Naturphilosophie dominiert. Pragmatismus und „gesunder Menschenverstand" behinderte oft mathematische Abstrahierung. Erst die Renaissance verhalf dem Platonismus wieder zu mehr Gewicht und „unendlich" oder das Infinitesimale rückte wieder stärker in den Fokus. Johannes Kepler nannte es die göttliche „*Brücke der Kontinuität zwischen dem Gekrümmten und dem Geraden*".[67] Er wendete Infinitesimale relativ unbekümmert bei der Berechnung eines Weinfasses an. Er sah aber die Verwandtschaft von Ellipsen und Parabeln, in dem der eine Brennpunkt einer Ellipse ins Unendliche wandert, entsteht eine Parabel. Auch Galileo Galilei und Pierre de Fermat lösten sich von der starren Struktur der euklidischen Geometrie, brachen aber nie vollständig mit der Tradition. Man beachte auch die Bewunderung für das Unendliche von Blaise Pascal in seinen Pensées, Aphorismus 72, „*Über die beiden Unendlichkeiten*" (siehe Zitat am Anfang dieses Beitrags). Weitere Vorläufer sind laut Wallace: „1629 - P. de Fermats Verfahren zur Bestimmung der Maximal- und Minimalwerte einer Polynomkurve; um 1635 – G. P. de Robervals Entdeckung, dass die Tangente einer Kurve als Funktion der Geschwindigkeit eines sich bewegenden Punktes darzustellen war, dessen Pfad die Kurve bildete; 1635 – B. Cavallieris Verfahren der Unteilbarkeiten zur Berechnung der Flächen unter Kurven; 1664 – I. Barrows geometrisches Tangentenverfahren."[68] Für Newton war die Dynamik das Entscheidende, nicht die Geometrie. Natürlich musste er sich den Gepflogenheiten der damaligen Zeit beugen und hat alle Beweise in der „Principia" geometrisch geführt. Er hat dabei die Hinweise auf seine Fluxionsrechnung bis zur Unkenntlichkeit entfernt.[69] Das dürfte auch der Grund gewesen sein, wieso er seine „Fluxionsrechnung" so spät veröffentlichte. Dynamik bedeutete für Newton, dass er nicht die Kurve im Mittelpunkt sah, sondern den Punkt, der sich auf der Kurve mit entsprechender Geschwindigkeit

[67] Zitiert nach Jim Holt, Als Einstein und Gödel spazieren gingen, Rowohlt, Hamburg, 2020, S. 217, siehe auch weitere Ausführungen ebenda
[68] Wallace, David Foster; Die Entdeckung des Unendlichen, Piper München Zürich, 1. dt. Auflage 2007, S. 164-165
[69] Es gibt die Anekdote, dass selbst Richard Feynman in einer Vorlesung über die „Principia" dabei ins Stolpern geriet.

bewegte. Dies ändert nichts an der Tatsache, dass sowohl Newton als auch Leibniz erkannt hatten, dass Steigungen berechnen und Flächeninhalte unter Kurven zu bestimmen, inverse Methoden darstellen.

In drei Publikationen hat Newton unterschiedliche Wege zur Infinitesimalrechnung veröffentlicht:

- die Momentenmethode
- die Fluxionsmethode und
- die Methode der ersten und letzten Verhältnisse

Meist wird aber, vor allem in der populärwissenschaftlichen Sekundärliteratur, nur von der Fluxionsrechnung gesprochen. Zentraler Punkt ist die „Momentangeschwindigkeit“. Sie muss als Quotient zweier infinitesimaler Größen gesehen werden, nämlich der Entfernung und der Zeit. Dies ist bei Betrachtungen zum freien Fall noch einfach. Newtons großartige Leistung ist die Tatsache, dass er das Prinzip auf elliptische Planetenbahnen mit der Sonne in einem Brennpunkt angewendet hat und daraus die Kepler´schen Gesetze ableiten konnte. Sie beruhten auf wohl-definierten, bestätigten, astronomischen Beobach-tungen, insbesondere von Tycho Brahe. Newton hat damit irdische Physik und Himmelsmechanik in einer Theorie zusammenführen können.

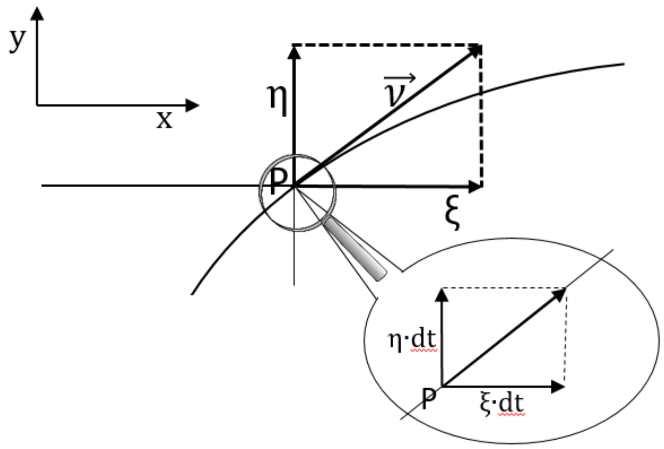


Abb. 16: Bei Newtons Methode der „ersten und letzten Verhältnisse“ stimmt der Begriff der „letzten Verhältnisse“ mit der Definition von Leibniz für den Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten überein.

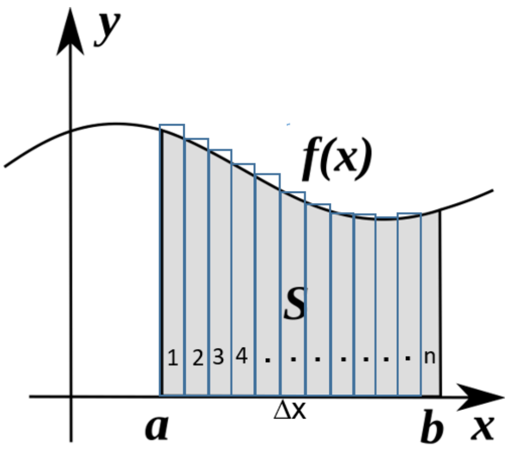
Bei *„Momenten“* geht es um unmittelbare, festgelegte Veränderungen eines Parameters in der Bewegung von Körpern, die sich in einer Funktionskurve widerspiegeln, also Erhöhung (englisch increment) oder Verminderung (englisch decrement). Sie entsprechen dem Differential von Leibniz.

Zeitabhängige Variable x, y, … nennt Newton „Fluente“ und bestimmt daraus „Fluxionen“, $\dot{x}$, $\dot{y}$, die Geschwindigkeiten entsprechen.

Bei der Methode der ersten und letzten Verhältnisse stimmt der Begriff der „letzten Verhältnisse“ mit der Definition von Leibniz für den Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten überein (s. Abb. 16).

Damit hatte Newton Basisbegriffe der Infinitesimalrechnung entwickelt. Sie ermöglichten die mathematischen Beziehungen zwischen Fluxionen und Fluenten zu konstruieren und damit Differentiation umzukehren bzw. eine Differentialgleichung zu integrieren. So ließen sich Maxima und Minima von Kurven oder deren Krümmung errechnen. Das war das mathematische Rüstzeug, um Gravitation und dann weitergehend die Himmelsmechanik mit seiner 1687 veröffentlichten „Prinzipia“ (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)*[70] zu revolutionieren.[71]

Leibniz kommt der modernen Auffassung näher, bleibt aber theoretisch. Sein zentrales Motiv ist seine Monadentheorie. Monade steht wie bei den Vorsokratikern für kleinste Einheiten sowohl im stofflichen als auch nicht-stofflichen Bereich. Schon vor Leibniz sind aber mathematische Überlegungen in die Theorie eingeflossen, die er besonders stark ausgebaut hat. Monade steht bei Leibniz auch für das unendlich Kleine. Für Leibniz ist die Mathematik des unendlich Kleinen eine wesentliche Ergänzung und Erweiterung seiner Philosophie. Für Newton ist die Mathematik unverzichtbar für die Analyse von Kräften und ihren Einfluss auf Bewegung. Er geht pragmatisch vor und hat damit große Erfolge in der Physik. Der Prioritätenstreit zwischen Newton und Leibniz um die Entwicklung der Infinitesimalrechnung wird heute unentschieden gewertet. Aber beide hatten vollkommen unterschiedliche Motivationen.[72]



$$S \approx \sum_{i=0}^{n} f(a + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad \text{für } \Delta x \longrightarrow 0$$

Abb. 17: Integration durch Approximation mit immer schmaler werdenden Recht-ecken (moderne Notation)

Das im Prinzip erste Manuskript von Leibniz stammt aus dem Jahr 1676 oder etwas früher. Er wollte es eigentlich in Paris veröffentlichen, musste aber abreisen und deponierte es bei einem Freund. Dieser verstarb jedoch; das Manuskript wurde zwar an Leibniz nach Hannover geschickt, ist aber unterwegs

[70] Deutsch: https://de.wikisource.org/wiki/Mathematische_Principien_der_Naturlehre
[71] Siehe auch Franz Pichler, Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung bei Newton und Leibniz als mathematische Grundlage für die Himmelsmechanik, http://www.cast.uni-linz.ac.at › Pubs2004
[72] Es erinnert etwas an den kurzfristig ausgetragenen Prioritätenstreit zwischen Einstein und Hilbert um die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

verloren gegangen. Leibniz hatte aber eine komprimierte Kopie, die er aber nicht ausarbeitete. Diese handschriftliche Kopie wurde erst 1973 editiert und damit fast 300 Jahre später veröffentlicht![73] Sie war aber dadurch hilfreich, um den Erkenntnisprozess heute nachvollziehen zu können. Leibniz hatte nämlich inzwischen neue Ergebnisse, darunter besonders die neue Notation. Er hielt es nicht für nötig, seine persönlichen Notizen wieder zu reaktivieren und schrieb die Abhandlung neu. Die Grundzüge der Differentialrechnung entwickelte dann Leibniz in seiner 1684 in den Acta Eruditorum erschienenen Arbeit *„Nova methodus pro maximis et minimis“*. [74] Die Integralrechnung entwickelte er in *„geometria recondita et analysis indivisibilium atque infinitorum“* (1686).[75] In dieser Veröffentlichung verwendete Leibniz erstmals das Integralzeichen als stilisiertes „S“, wie Summe.

Die von Leibniz gewählte Zeichensetzung für das Differential und für das (unbestimmte) Integral erwiesen sich als sehr praktisch. Er verwendete als Bezeichnung für sehr kleine Unterschiede ein "d" (für lat. differentia = Unterschied). Dies ist bis heute erhalten geblieben. Man konnte damit ein „Kalkül“ entwickeln, in dem man aus formalen, regelbasierten Aussagen wieder logische Schlüsse ziehen konnte, ohne diesen Prozess verbalisieren zu müssen. Deshalb hat sich die Schreibweise und die damit verbundene Denkweise in Kontinentaleuropa durchgesetzt und die heutige Infinitesimalrechnung fußt im Wesentlichen auf der Methode bzw. der Terminologie von Leibniz. Dies gilt auch bedingt für die Integration. Das stilisierte „S“ soll daran erinnern, dass die Fläche unter einer Kurve zunächst durch endlich viele Rechtecke angenähert wurde. Durch Grenzwertbildung hin zu unendlich vielen, immer schmaleren Rechtecken wird der Fehler immer kleiner. Auf Leibniz geht die Bezeichnung "integrieren" (lat.: integrare = wiederherstellen) zurück. Er wählte diese Bezeichnung, weil von einer Kurve, von der die Tangentensteigung durch Differenzieren ermittelt wurde, mit der Integration die ursprüngliche Kurve wiedererhalten werden kann.
Dies nennt man heute den „Hauptsatz der Analysis“. Leibniz grenzt sich jedoch z.B. von Galileis *non quanta* stark ab. Für ihn war dx wirklich eine unendlich kleine Größe, nämlich kleiner als alles Messbare. Er hat aber die Fallstricke des Unendlichen gesehen, wollte aber bei den Indivisiblen etwas Berechenbares erhalten, das man in Gleichungen behandeln kann. Seine Notation lässt dies zu und hat sich bewährt. Trotzdem musste man von der verwendeten Sprache wegkommen.

[73] Brian Clegg, ebenda, S. 150
[74] Englisch/Latein: http://17centurymaths.com/contents/Leibniz/nova1.pdf
[75] https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-leibnizs-papers-on-calculus-integral-calculus

Newton hat physikalisch argumentiert. Mit Fluidität und Bewegung musste er nicht von immer kleineren Teilen sprechen. Ein Punkt bewegte sich auf der Kurve; Bewegung und Veränderung der Richtung waren interessant für die Betrachtung der Kräfte, scheinbare Division durch Null kam somit bei ihm nicht vor. Man kann sagen, dass sowohl Newton als auch Leibniz zeitlebens große Bedenken gegen die Methode hatten. Newton erwähnte sie gegen Ende seines Lebens nicht mehr; Leibniz blieb seinem Wahlspruch treu: *natura non fecit salta* (Die Natur macht keine Sprünge). Unendliche Größen seien *fictiones bene fondatae* (gut begründete Fiktionen).[76]
Beide bewiesen bewundernswerte geniale Intuition, aber beiden Methoden fehlt ein solides theoretisches, mathematisches Fundament. Leibniz und seine Anhänger konnten Größen unendlich nahe bei null, (aber eben nicht gleich null), nicht fundiert erklären. Newton und seine Bewunderer behaupteten, unendlich kleine Größen würden nicht verwendet. „Fluxionen“ seien ja nur die Rate der Änderungen von zeitabhängigen Variablen. Hier wurden aber nur winzigste Strecken gegen winzigste zeitliche Momente ausgetauscht. Der mathematische Grundkonflikt bleibt in beiden Fällen und wurde erst durch Cauchy und schließlich durch Weierstraß aufgelöst. Sie erarbeiteten eine Methode, die die Grenzwertbildung klar herausarbeitet und sie von diffusen Begrifflichkeiten befreit hat.

Dies soll die Leistung der beiden Forscher nicht schmälern, sondern lediglich relativieren. Die Infinitesimalrechnung markiert im Prinzip den Beginn der höheren Mathematik und ist über die reine Mathematik hinaus die Basis für zahlreiche Anwendungen in unterschiedlichsten Disziplinen geworden.

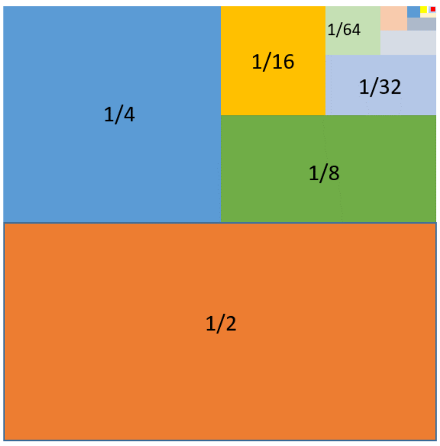


Abb. 18: Quadrat mit Seitenlänge 1

Das unendlich Kleine begegnet uns allerdings z.B. heute noch bei der Frage:

Was ist 0,9999… oder $0,\overline{9}$
(gesprochen 0,9 Periode)?[77]

Man kann den Beweis, dass $0,\overline{9}=1$ ist, geometrisch führen: Im Binärsystem entspricht $0,\overline{9}$ bekanntlich 0,1111… und ist somit die Fläche eines Quadrates ohne den roten Punkt in der rechten oberen Ecke. Da Punkte keine Fläche haben ergibt sich 1. Dies ist das Ergebnis einer geometrischen Reihe der Form:

[76] Zitiert nach Jim Holt, ebenda, S. 221
[77] Siehe dazu Spektrum der Wissenschaft Kompakt, UNENDLICH, 05/20, S. 34

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\cdots = 1$$

Es geht natürlich auch umständlicher über das Dezimalsystem:

$$0,\bar{9} = \frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1000}+\cdots = \frac{9}{10}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

Rechnen mit dem Unendlichen

Die Infinitesimalrechnung brachte Leibniz durchaus Kritik ein. Er setzte dx am Ende der Umformungen gleich Null, obwohl er vorher durch dx dividiert hatte. Trotzdem überzeugte der Grundansatz und eine Reihe von bedeutenden Mathematikern verfolgte seinen Ansatz in der Infinitesimalrechnung weiter.
Doch auch vorher und nachher gab es wichtige Beiträge zur Mathematik, bei denen potentiell unendliche Werte eine Rolle spielten. Es werden hier einige wichtige Mathematiker kurz angesprochen.

Giordano Bruno (1548-1600) sah im aktual Unendlichen einen Widerspruch in sich. Unendlich könne bestenfalls nur potentiell unendlich bzw. unbegrenzt heißen. Von der göttlichen Substanz könne man wegen ihrer Unendlichkeit nur Spuren oder die fernen Wirkungen erkennen.

Auf Evangelista Torricelli (1608-1647) geht ein seltsamer Körper zurück, der Torricellis Trompete genannt wird. Man betrachte die hyperbolische Funktion $y=\frac{1}{x}$, für $x \geqq 1$ und rotiere um die x-Achse. Das Volumen sei V und die Mantelfläche A. [78]

$$V = \pi\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx = \pi$$

$$A = 2\pi\int_1^{\infty}\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}dx > 2\pi\int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \infty$$

Der Körper hat also ein endliches Volumen der Größe π und eine unendlich große Mantelfläche A.

Abb. 19: Torricellis Trompete (oder Gabriels Horn)

[78] Bildquelle und Rechnung siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Gabriels_Horn

Galileo Galilei (1564-1642) wurde schon früh bewusst, dass es eine 1:1-Beziehung zwischen den natürlichen Zahlen und den Quadratzahlen gibt. Schon damals wurde Galilei klar, dass Bezeichnungen wie „größer als“, „kleiner als“ oder „gleich“ bei unendlichen Mengen wenig Sinn machen. Doch weitergehende Gedanken hat er erst nach der Veröffentlichung seines Hauptwerkes *Dialog über die beiden hauptsächlichen Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische (1632)* zu Papier gebracht. Dieses Werk führte zu seiner Verurteilung durch die Inquisition. Er wurde zu lebenslangem Hausarrest verurteilt. Das nun vorgelegte Spätwerk war deshalb unabhängig vom Inhalt brisant, um nicht zu sagen lebensgefährlich. Sowohl die Publikation an sich, die in den italienischen Stadtstaaten abgelehnt wurde, als auch die Form eines Dialogs, wie bei seinem Hauptwerk, boten Zündstoff genug. Das Buch wurde schließlich in Leyden 1638 unter dem Titel *Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend*, gedruckt. Die Gesprächspartner sind Salviati, mit den Ansichten Galileis, Sagredo als eher neutraler Beobachter und Simplicio, nicht dumm, aber rückwärts bis zur Antike gewandt, ein typisches Kind der Scholastik. Die Überlegungen in Dialogform zum „Unendlichen“ sind etwa 20 Seiten lang. Sie ranken sich vor allem um ein Gedankenexperiment. Zwei Räder, ein großes und ein kleines Rad, sind miteinander verbunden, aber laufen durch einen technischen Trick auf **getrennten Schienen**.[79] Im ersten Schritt sollen sie zur Veranschaulichung achteckig sein. Dreht sich das große Rad auf die folgende Achteckseite, so dreht sich das kleine ebenfalls weiter, aber es entsteht eine Lücke bis beide auf der jeweils folgenden Achteckseite liegen. Dann nehmen sie im nächsten Schritt die fast perfekte Kreisform mit 100.000 Seiten ein. Wieder entstehen Lücken, aber 100.000 viel kleinere Lücken. Das kleine Rad rollt über 100.000 Strecken plus 100.000 Lücken. Doch wenn man zur perfekten Kreisbahn übergeht, so rollt das große und das kleine Rad zwar stetig, aber wenn das große Rad z.B. einen Viertelkreis zurücklegt, so tut dies das kleine Rad auch. Allerdings ist der Umfang deutlich unterschiedlich. Wo bleiben nun die Lücken? Es ist eine unendliche Zahl

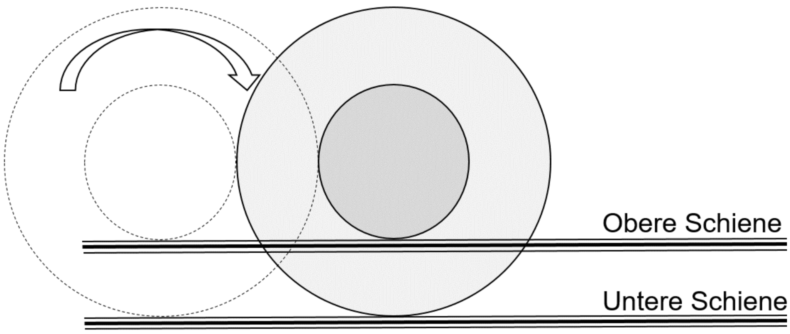


Abb. 20: Galileis Gedankenexperiment zu Infinitesimalen

[79] Selbst erstellte Grafik nach einer Skizze bei Brian Clegg, ebenda, S. 132

infinitesimaler Lücken. Wie zu erwarten, protestiert Simplicio, aber Salviati kann argumentieren, dass man unterschiedlich „großen“, unendlichen Zahlen tatsächlich die gleiche Unendlichkeit zuschreiben kann. Galilei kann hier das Rätsel noch nicht ganz auflösen, aber er hat mit einem Problem, das nicht aus der Zahlentheorie kommt, sondern aus der mechanischen Praxis, den theoretischen Kern beim Übergang zum Unendlichen adressiert.

Zu nennen ist John Wallis (1616-1703), auch durchaus ein Universalgelehrter, der das Zeichen für „Unendlich“ einführte (s.o.). Wallis soll deutlichen Einfluss auf Newton gehabt haben und trug offenbar dazu bei, dass Newton von ihm Impulse zur Entwicklung der Infinitesimal- bzw. Fluxionsrechnung bekam. Seine *Arithmetica Infinitorum* von 1656 soll Newton 1664/65 studiert haben.[80] Bekannt ist seine direkte Integration des Einheitskreises $(1-x^2)^n$ für n=½ durch Interpolation. Sie führte zu einer Formel und möglichen Näherung für π, die als Wallis´sches Produkt bekannt wurde. Er verbessert damit eine deutlich umständlichere Methode von François Viète (latinisiert Franciscus Viëta, 1540-1603):

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2^2}{1\cdot 3}\cdot\frac{4^2}{3\cdot 5}\cdot\frac{6^2}{5\cdot 7}\cdot\frac{8^2}{7\cdot 9}\ldots$$

Leonhard Euler (1707 bis 1783) war ein enorm produktiver Mathematiker, aber er lieferte auch eine Fülle von Beiträgen zu anderen Gebieten. So beschäftigte er sich, der griechischen Tradition folgend, mit Musiktheorie, mit Hydromechanik, Optik, Belastungsuntersuchungen an stabförmigen Bauteilen und der Beschreibung des Kreisels. Er mathematisierte und systematisierte militärische Anforderungen bei der Artillerie.
Viele wichtige Symbole hat er in der mathematischen Terminologie etabliert. Dazu gehören die Kreiszahl π, das Summenzeichen $\sum$, die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}$=i oder, infolge seiner intensiven Beschäftigung mit Funktionen, wählte er $f(x)$ als Symbol für einen Funktionsterm. Hier unendliche Reihen für e^x und π:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\ldots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots$$

Sein 1748 veröffentlichtes Buch "*Introductio in Analysin Infinitorum*" (Einführung in die Analysis des Unendlichen) über Funktionen gilt als sein Grundlagenwerk. Dort ist auch eine Herleitung für die Zahl "e" (als Abkürzung für „Exponentialbasis“) zu finden.

---

[80] https://de.wikipedia.org/wiki/John_Wallis

Um einen Einblick in seine Argumentation in diesem Werk zu gewinnen, sei hier ein Paragraph beispielhaft wörtlich zitiert:

> *"§ 114*
> *Da a0 = 1 ist, und mit wachsendem Exponenten zugleich auch der Wert der Potenz zunimmt, falls a eine Zahl grösser als 1 ist, so folgt daraus, dass, wenn der Exponent unendlich wenig grösser ist als 0, auch die Potenz die Einheit nur um unendlich wenig übersteigen wird. Ist daher ω eine unendlich kleine Zahl [...], jedoch von 0 verschieden, so wird aω = 1 + ψ, wenn ψ ebenfalls eine unendlich kleine Zahl bedeutet; [...]. Es ist somit entweder ψ = ω oder ψ > ω oder ψ < ω und zwar wird dies offenbar von der Grösse von a abhängen. Da nun a noch unbekannt ist, so wollen wir ψ = kω setzen. [...]"*[81,82]

Es werden formal korrekte Voraussetzungen zur Berechnung von e genannt, aber in unserer Zeit kommt uns die Verwendung des Begriffes „unendlich“ höchst ungewohnt vor.

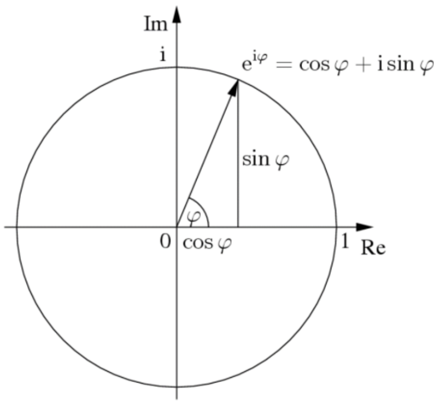


Abb. 21: Geometrische Interpretation der Euler´schen Formel anhand des Einheitskreises.

Johann Bernoulli (1667-1748) kann man als Mathematiker bezeichnen, der regelrecht Werbung oder Reklame für die neue Disziplin der Infinitesimalrechnung machte. Zu seinen Schülern zählte Leonhard Euler oder der Marquis de L'Hôpital.

Jakob Bernoulli (1654-1705, älterer Bruder von Johann) studierte u.a. Werke von John Wallis und wurde ebenfalls zum Verfechter der neuen Infinitesimalrechnung. Aber auch in anderen mathematischen Disziplinen nutzte er den Umgang mit dem Unendlichen.

In Frankreich brachte Guillaume François Antoine, Marquis de L’Hôpital (1661–1704, Schreibweise auch L´Hospital mit s) im Jahr 1696 das erste Lehrbuch der Differentialrechnung heraus. Das Werk trägt den Namen *„Analyse des infiniment petits pour l’intelligence des lignes corbes“*.

Johann Carl Friedrich Gauß (latinisiert Carolus Fridericus Gauss; 1777-1855) arbeitete an vielen Themen, aber veröffentlichte erst dann, wenn die von ihm ausgearbeitete Theorie vollständig war. Bei der Begründung der komplexen Analysis hatte er schon fundamentale Ergebnisse gemäß Auswertung seines

---

81 Zitiert nach http://www.nichtstandard.de/euler.html
82 Quelle der Abb. 21: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler´s_formula.png

Tagebuchs erzielt, aber Augustin-Louis Cauchy war ihm in den Jahren 1821 bzw. 1825 mit der Publikation zuvorgekommen. Trotzdem waren seine Ergebnisse zu komplexen Funktionen hilfreich für die weitere Entwicklung auch der Analysis. Dem „Unendlichen“ stand er skeptisch gegenüber: „*Ich verabscheue es, wenn ein unendliches Objekt wie ein vollständig gegebenes Objekt verwendet wird. In der Mathematik ist diese Operation verboten; das Unendliche ist nur eine Redensart.*“[83]

Die Beiträge von Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) zu wesentlichen Teilen der Mathematik sind kaum zu überschätzen. Er hat, beginnend bei den Ergebnissen von Newton und Leibniz, die Analysis auf komplexe Funktionen ausgedehnt und dabei eine Fülle an Ergebnissen erzielt. Pro Woche soll er eine Veröffentlichung eingereicht haben. Cauchy beseitigte konsequent die intuitive Argumentation mit infinitesimalen Einheiten. In seinen Vorlesungen *Cours d’analyse de l’École Polytechnique* (1821) führte er Grenzwerte zur Definition der Stetigkeit und Differenzierbarkeit ein und vermied dadurch schwammige Begriffe wie das unendlich Kleine. Ein Problem konnte jetzt exakt definiert und bewiesen werden. Die oft intuitiv benützte Infinitesimalrechnung wurde nun zur strengen Analysis. Er führte im *Cours d’Analyse* die Definition der Ableitung als Grenzwert ein. Bei der Grenzwertbetrachtung vermied er durch die verwendete Terminologie diffuse Begriffe, wie das unendlich Kleine. Cauchy zeigte, dass man die Ableitung nicht durch Taylor-Reihen definieren kann, wie es Lagrange und Laplace getan haben. Taylor-Reihen sind Potenzreihen, mit denen man in der Umgebung eines Funktionswertes diesen annähern kann.

Unter den führenden französischen Mathematikern muss man Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) sowie Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) nennen. Hadamard wurde in Nachfolge von Jordan Professor für Analysis an die École polytechnique. Beide haben fundamentale Beiträge zur Analysis, aber auch zu anderen mathematischen Disziplinen geliefert.

Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) war Italiener. Bereits mit 19 Jahren erhielt er einen Lehrstuhl. Ab 1766 wurde er Nachfolger von Euler an der Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften. In Paris entstand dann sein Hauptwerk *Mécanique analytique* mit Begründung der analytischen Mechanik. Mit dem Lagrange-Formalismus vereinfachte er die Newton´sche Mechanik und ihre Mathematik wesentlich.

Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848) erforschte Grenzbereiche der sich entwickelnden Analysis. Leider wurden seine Arbeiten zu einer strengeren Handhabung der Analysis wenig beachtet. Hier schaffte erst Cauchy einen deutlichen Durchbruch. Bolzano konstruierte offenbar als Erster

---

[83] Spektrum der Wissenschaft Spezial, 1/2003, S. 14

eine Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist, d.h. an keinem Punkt eine eindeutige Tangentensteigung besitzt. Auch bei kleinen oder großen Zahlen beschäftigte ihn das Unendliche. Er formulierte einige Jahre vor Cauchy ein erstes Kriterium für Cauchy-Konvergenz. Cauchy hat es dann in seiner Analyse algébrique (1871) als Prinzip formuliert; bewiesen wurde es erst auf Basis eines korrekten Systems der reellen Zahlen durch Dedekind und Cantor (s.u.)

Eine beliebige Zahlenfolge (x_n) ist jedes Mal dann, aber auch nur dann konvergent, wenn es zu jedem ε>0 eine Stelle n_0=n_0(ε) gibt, dass der Unterschied

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$$

ist, sobald n und n´ ≥ n_0 sind.

Cauchy-Konvergenz hat erhebliche Bedeutung in der Mathematik. Der Satz von Bolzano-Weierstraß behandelt diese Thematik und gilt auch bei komplexen Zahlenfolgen: „Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen (mit unendlich vielen Gliedern) enthält (mindestens) eine konvergente Teilfolge d.h. Konvergenzpunkt." Ein prominentes Beispiel bei reellen Zahlen sind die rationalen Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen, die gegen die irrationale Zahl Φ= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, den „Goldenen Schnitt", konvergieren. Posthum erschien 1851 sein Werk *„Paradoxien des Unendlichen"*, in dem er erstmals den Begriff der Menge in die mathematische Terminologie einführte. Das Paradoxon von Galilei mit der bijektiven Abbildung der natürlichen Zahlen auf die Quadratzahlen nahm er wörtlich. Er erkannte, dass eine echte Teilmenge trotzdem die gleiche Größe (besser Mächtigkeit) der Menge haben kann.[84] Zweifellos hat Bolzano den Grundstein für eine Theorie des Unendlichen gelegt. Aber er wagt sich auch an das aktual Unendliche und zeigte, dass zwei kompakte Intervalle reeller Zahlen, z.B. [0,1] und [0,1000] die gleiche Mächtigkeit haben. Während andere Mathematiker nach ihm sich mit Grenzwerten, z.B. von Folgen oder Reihen

f_n	f_{n+1}	f_{n+1}/f_n	Abweichung zu Φ in %
1	1	1,0000	–38
1	2	2,0000	+23
2	3	1,5000	–7,3
3	5	1,6667..	+3,0..
5	8	1,6000	–1,1..
8	13	1,6250..	+0,43..
13	21	1,6154..	–0,16..
21	34	1,6190..	+0,06..
34	55	1,617..	–0,02..
55	89	1,61818..	+0,009..
89	144	1,617977..	–0,0034..

Abb. 22: Beispiel für Cauchy-Konvergenz. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen nähert sich dem Goldenen Schnitt Φ.

[84] Weitere Details zu Leben und Werk von Bolzano siehe Brian Clegg, ebenda S. 189-200

beschäftigten, war Bolzano der Erste, der das Unendliche direkt und unmittelbar adressierte.

Folgen, Reihen und dazu gehörige Konvergenzkriterien blieben trotzdem einige Jahrzehnte ein großes Thema (und auch Gegenstand einer Reihe von Irrtümern). Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) machte sich in diesem Bereich besonders verdient. Er war Freund von Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), der mit den später nach ihm benannten Fourier-Reihen, der Fourier-Analyse und seiner *„Analytischen Theorie der Wärme"* (1822) Wissenschaftsgeschichte schrieb. Man kann ihn mit Recht als einen Begründer der mathematischen Physik bezeichnen.

Ein Schüler von Dirichlet war Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), der bahnbrechende Ergebnisse auf zahlreichen Gebieten erzielt hat. Das immer noch nicht abschließend geklärte Allgemeine Konvergenzproblem löste er durch einen völlig neuen Ansatz. Ein $f(x)$ muss integrierbar sein, wenn man es als Fourier-Reihe darstellen kann. Daraus leitet er allgemeine Bedingungen für die Konvergenz sowohl von Funktionen, als auch von Reihen ab.
Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) war der letzte Schüler von Carl Friedrich Gauß. Er leistete eine Fülle von Beiträgen zur Entwicklung aufstrebender Fachgebiete der Mathematik. Die Analysis war nicht unbedingt sein Spezialgebiet, aber mit seinen Überlegungen zur Stetigkeit leistete er entscheidende Vorarbeit. Er ging der Stetigkeit auf den Grund. Nicht nur die

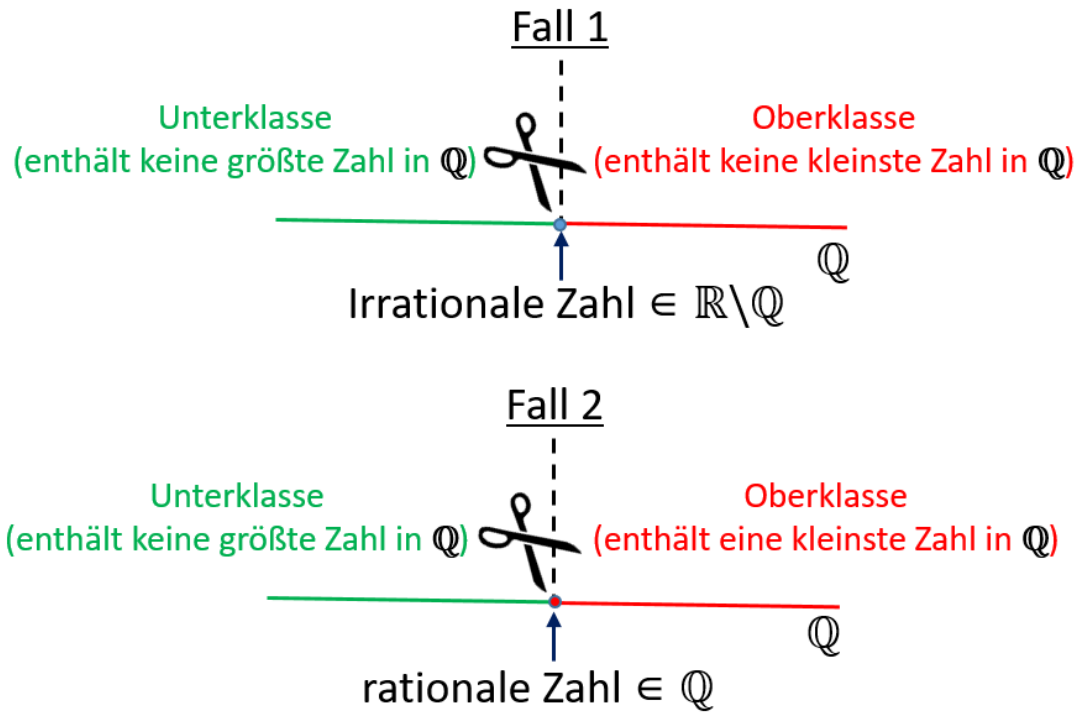


Abb. 23: Dedekind´sche Schnitte in der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ergeben entweder eine irrationale oder eine rationale Zahl.

Lückenlosigkeit des Kontinuums ist die unbedingte Voraussetzung für Stetigkeit. Im vorliegenden Beitrag spielt u.a. auch sein Briefwechsel mit Cantor eine Rolle. Cantor wurde durch diese Korrespondenz dazu inspiriert, die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zu entwickeln. Dedekind verwendete auch unendliche Mengen schon früh ganz selbstverständlich. Mit den Dedekind´schen Schnitten hat er reelle Zahlen über beliebig nah liegende rationale Zahlen definiert (Abb. 23). Die Grunderkenntnis ist dabei, dass die Zahlengerade allein mit den rationalen Zahlen nicht stetig ist und was man tun muss, um dies zu ändern. Man definiert dazu die Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen als die Menge aller (Dedekind´schen) Schnitte in der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Dabei benutzt man geeignete Intervalle (einseitig offen oder geschlossen), genannt Oberklasse bzw. Unterklasse. Dedekind konnte so die Stetigkeit des Kontinuums garantieren, indem er die reellen Zahlen konstruktiv über Schnitte definiert. Damit ist die Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen erreicht.[85]

Es gab lange Bemühungen von Gauß und Bolzano um den Fundamentalsatz der Algebra, die von Dedekind schließlich abgeschlossen wurden. Der Satz besagt, dass jedes Polynom der Form

$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, a_i komplex, mind. eine Nullstelle in $\mathbb{C}$ hat.

Gauß setzte eine für ihn triviale Erkenntnis voraus, die heute Zwischenwertsatz genannt wird und von Bolzano 1817 bewiesen wurde. Er besagt, wenn eine Funktion positive und negative Werte zwischen zwei x-Werten hat, dann muss sie die x-Achse zwischen den beiden Werten (in einer Nullstelle) schneiden. [86] Immerhin identifizierte Bolzano es auch als Problem, dass eine Vollständigkeitsbedingung vorliegen muss: das Kontinuum darf keine Lücken haben. Dedekind erreichte diese Bedingung über die Dedekind´schen Schnitte. Im Grunde besteht ein Schnitt aus zwei Mengen (U, O). Jedes Element von U ist kleiner als jedes Element von O. Zu jeder reellen Zahl r (egal, ob rational oder irrational) gibt es eine Obermenge O und eine Untermenge U aus rationalen Zahlen, die diese Zahl r approximieren. Wenn U ein größtes oder O ein kleinstes Element hat, so ist r rational, nämlich das größte oder kleinste Element in U bzw. O. Im anderen Fall liegt es nicht in einer der beiden Mengen, ist größer U und kleiner O und somit irrational. Man muss nur noch nachweisen, dass sich

---

[85] Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1872, online unter https://publikationsserver.tu-braunschweig.de /servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs_derivate_00005740/Aa_2043.pdf

[86] Bernhard Bolzano; Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Gottlieb Haase, Prag 1817, https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10137646?page=2,3

diese Dedekind´schen Schnitte tatsächlich wie Zahlen verhalten. Das tun sie: Summe und Produkt haben die gewohnten algebraischen Eigenschaften.
Damit wird das Kontinuum frei von Lücken und ist damit stetig.

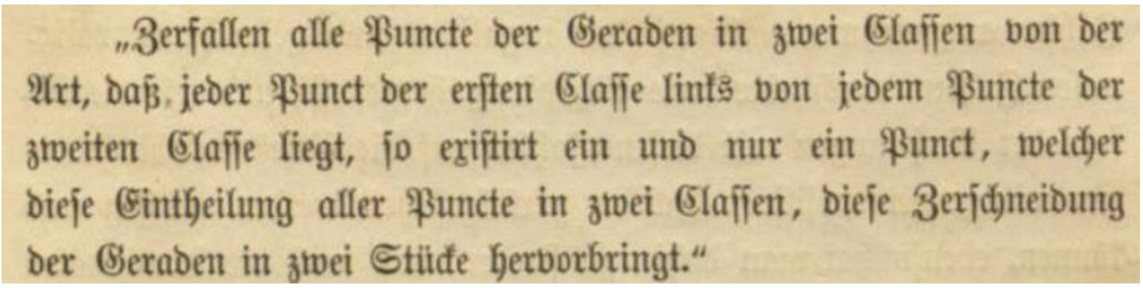

„Zerfallen alle Puncte der Geraden in zwei Classen von der Art, daß jeder Punct der ersten Classe links von jedem Puncte der zweiten Classe liegt, so existirt ein und nur ein Punct, welcher diese Eintheilung aller Puncte in zwei Classen, diese Zerschneidung der Geraden in zwei Stücke hervorbringt.“

Abb. 24: Auszug aus der berühmten Schrift von R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, S. 18, mit der Charakterisierung der Schnitte.

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1897) hat ebenfalls eine Fülle von mathematischen Erkenntnissen geliefert. Viele wichtige Sätze und Begriffe tragen seinen Namen. Für die Analysis ist seine „Epsilontik“ entscheidend. Damit hat er diese mittlerweile umfangreiche Disziplin vollständig von widersprüchlichen Bezügen zur „Unendlichkeit“ befreit. Er eliminierte fluide Variablen. Dahinter steckt ein Kulturwandel in der Mathematik. Es zählen nicht mehr nur Ergebnisse, sondern Beweise. Die Infinitesimalrechnung hatte sich enorm weiterentwickelt (z.B. auf Reihenentwicklungen). Eine konsistente Theorie der reellen Zahlen fehlte. Geometrische Beweise mussten arithmetischen Beweisen weichen. Heute selbstverständliche Regeln ließen sich ohne eine saubere Notation nicht beweisen, z.B. bei unendlichen Dezimalzahlen wie $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3}$.

<u>Exkurs:</u> An dieser Stelle lohnt es sich, über die Analysis hinaus mit einem Beispiel und seiner Verallgemeinerung in die lineare Algebra zu schauen. Dieser Exkurs soll bewusst beweistechnisch ausgearbeitet werden, um exemplarisch Schritt für Schritt grundlegende Begriffe, algebraische Strukturen, Notationen und die Vorgehensweise nachvollziehen zu können. Grundlegende Begriffsdefinitionen, wie Gruppe, Körper, Skalare, Vektoren, Vektorraum etc., kann man leicht im Internet nachlesen. Weitere mehr mengentheoretische Begriffe folgen ab Kapitel „Cantor“.
Die Verallgemeinerung des Beispiels adressiert auch in diesem Bereich der Mathematik das potentiell Unendliche.

Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ bilden im algebraischen Sinne einen kommutativen Körper bzgl. der Verknüpfungen Addition und Multiplikation. Diesen Körper kann man sinnvoll um die Elemente $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ zu $\mathbb{Q}^{+}= \mathbb{Q}\ (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ergänzen. Man spannt dazu einen 4-dimensionalen $\mathbb{Q}$-Vektorraum V mit den Basiselementen

1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ auf.

Diese sind linear unabhängig, da $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3} + d \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 0$ nicht mit rationalen a, b, c, d gelöst werden kann, es sei denn, sie sind 0.

Man betrachte $a = -b \cdot \sqrt{2} - c \cdot \sqrt{3} - d \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

Die Summanden rechts des Gleichheitszeichens sind irrational, denn b, c oder d sind rational und $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ bzw. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ irrational. Also ist das Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl auch irrational. Da a rational ist, müssen b, c, d = 0 und damit auch a = 0 sein. Die Basis ist also linear unabhängig.

Es werden nun die Definitionen eines Vektorraums V mit der Basis
1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ über $\mathbb{Q}^+$ auf ihre Gültigkeit überprüft.

Die Definitionen **(V1), (V2), (V3), (V4)** beziehen sich auf die Addition von Vektoren der Form

$$\vec{u} = a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}.$$

Die Definitionen **(S1), (S2), (S3), (S4)** beziehen sich auf die Skalarmultiplikation

$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha(a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}),\ \alpha \in \mathbb{Q}\ :$$

Es seien $\vec{u} = a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}$, $\vec{v} = b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3}$ und $\vec{w} = c_0 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} + c_3\sqrt{2}\sqrt{3}$ drei Vektoren aus V mit $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Q}$.

(V1) Man sieht, dass $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ gilt, da in einer Summe nach den Rechenregeln der rationalen Zahlen die Klammern beliebig gesetzt werden können. Beweis:

$$\begin{aligned}(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \left(a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} + b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3}\right) + \\ &\quad c_0 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} + c_3\sqrt{2}\sqrt{3} \\ &= a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} + (b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3} + c_0 + \\ &\quad c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} + c_3\sqrt{2}\sqrt{3}) \\ &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})\end{aligned}$$

(V2) Ist $a_i, b_i, c_i = 0$, so ist der dadurch gebildete Nullvektor $\vec{0}$ das neutrale Element der Vektoraddition. Also formal

$$\begin{aligned}\vec{0} \cdot \vec{u} &= (0 + 0\sqrt{2} + 0\sqrt{3} + 0\sqrt{2}\sqrt{3}) + (a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}) \\ &= a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} = \vec{u}\end{aligned}$$

(V3) Mit $(-1)\vec{u} = -a_0 - a_1\sqrt{2} - a_2\sqrt{3} - a_3\sqrt{2}\sqrt{3}$ existiert zu jedem $\vec{u}$ ein inverses Element, so dass $(-1)\vec{u} + \vec{u} = 0$

(V4) V ist kommutativ, da die Addition über $\mathbb{Q}^+$ wie in $\mathbb{Q}$ kommutativ ist,

$$\begin{aligned}\vec{u} + \vec{v} &= a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} + b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3} \\ &= b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3} + a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} \\ &= \vec{v} + \vec{u}\end{aligned}$$

V ist damit eine kommutative (sogenannte abelsche) Gruppe.

Die Definitionen der Skalarmultiplikation sollen nun überprüft werden:
(S1) $\alpha\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = \alpha\cdot\vec{u} + \alpha\cdot\vec{v}$, gilt mit α ε ℚ und bei jeder der 3 irrationalen Zahlen, denn·

$$\begin{aligned}\alpha\,(\vec{u}+\vec{v}) &= \alpha\,(a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} + b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3})\\ &= \alpha\,\Big((a_0+b_0) + (a_1+b_1)\sqrt{2} + (a_2+b_2)\sqrt{3} + (a_3+b_3)\sqrt{2}\sqrt{3}\Big)\\ &= (\alpha a_0 + \alpha b_0) + (\alpha a_1 + \alpha b_1)\sqrt{2} + (\alpha a_2 + \alpha b_2)\sqrt{3} + (\alpha a_3 + \alpha b_3)\sqrt{2}\sqrt{3}\\ &= \alpha\big(a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}\big) + \alpha\big(b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3}\big)\\ &= \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}.\end{aligned}$$

(S2) analog beweist man $(\alpha+\beta)\,\vec{u} = (\alpha\cdot\vec{u})+(\beta\cdot\vec{u})$, gilt mit α, β ε ℚ und bei jeder der 3 irrationalen Zahlen

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\vec{u} &= \alpha a_0 + \alpha a_1\sqrt{2} + \alpha a_2\sqrt{3} + \alpha a_3\sqrt{2}\sqrt{3} +\\ &\quad \beta a_0 + \beta a_1\sqrt{2} + \beta a_2\sqrt{3} + \beta a_3\sqrt{2}\sqrt{3}\\ &= \alpha\big(a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}\big) +\\ &\quad \beta\big(a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}\big)\\ &= \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}\end{aligned}$$

(S3) analog beweist man das Assoziativgesetz $(\alpha\cdot\beta)\cdot\vec{u} = \alpha\cdot(\beta\cdot\vec{u})$.

$$\begin{aligned}(\alpha\cdot\beta)\vec{u} &= \alpha\beta a_0 + \alpha\beta a_1\sqrt{2} + \alpha\beta a_2\sqrt{3} + \alpha\beta a_3\sqrt{2}\sqrt{3}\\ &= \alpha(\beta a_0 + \beta a_1\sqrt{2} + \beta a_2\sqrt{3} + \beta a_3\sqrt{2}\sqrt{3})\\ &= \alpha(\beta(a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}))\\ &= \alpha(\beta\cdot\vec{u})\end{aligned}$$

(S4) Mit 1 ε $\mathbb{Q}^+$ existiert das neutrale Element der Skalarmultiplikation mit

$$1\cdot\vec{u} = 1\big(a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}\big) = \vec{u}$$

Somit ist V mit der Basis 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}^+$.

Es soll nun untersucht werden, was im Vektorraum V^- und im Körper $\mathbb{Q}^-$ die Vertauschung von $\sqrt{2}$ zu $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ zu $-\sqrt{3}$ bewirkt.
Man kann ebenso wie oben überprüfen, dass die Basis 1, $-\sqrt{2}$, $-\sqrt{3}$ und $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$ linear unabhängig ist, ebenfalls die Definitionen (V1), (V2), (V3), (V4) und (S1), (S2), (S3), (S4) erfüllt sind und sich somit mit dieser Basis ein Vektorraum V^- über dem Körper $\mathbb{Q}^-$ aufspannen lässt.

Vertauscht man $\sqrt{2}$ mit $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ mit $-\sqrt{3}$ im Körper bzgl. der Addition, ist dies als Funktion F^+ zu betrachten, die jedem rationalen Element in $\mathbb{Q}^+$ das gleiche Element in $\mathbb{Q}^-$ und $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$ bijektiv zuordnet. Formal:
$F^+: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^-$, $x \mapsto x$ für x ε ℚ, $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$.
Analog gibt es eine bijektive Abbildung bzgl. der Multiplikation
$F^*: \mathbb{Q}^+ \to \mathbb{Q}^-$, $x \mapsto x$ für x ε ℚ, $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$.

Das Vertauschen von $\sqrt{2}$·mit $-\sqrt{2}$·und $\sqrt{3}$·mit $-\sqrt{3}$·induziert somit eine additive und multiplikative Bijektion von $\mathbb{Q}^+$ auf sich selbst, genauer auf $\mathbb{Q}^-$. (Körperautomorphismus).

Man betrachte dazu auch die aus den Definitionen für einen Körper folgende Forderung nach dem inversen Element der Multiplikation. Danach muss es zu jedem a ε $\mathbb{Q}^+$ bzw. aus $\mathbb{Q}^-$ ein a^{-1} geben, so dass $a \cdot a^{-1}=1$.
Für eine rationale Zahl r= $\frac{p}{q}$ ist das Inverse der Kehrwert $\frac{q}{p}$.
Es gilt nun für die irrationalen Elemente von $\mathbb{Q}^+$ bzw· $\mathbb{Q}^-$:
$\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$ =1, aber auch $-\sqrt{2}\cdot(-\frac{\sqrt{2}}{2})$ =1; analog $\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}$ =1 und $-\sqrt{3}\cdot(-\frac{\sqrt{3}}{3})$ =1.

Daraus wird deutlich: $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} = \sqrt{2\cdot 3} = \sqrt{6}$ ist deshalb keine ganz selbstverständliche Folgerung. Wegen Quadrierung könnte das Ergebnis theoretisch auch $\sqrt{-6}$ lauten und deshalb komplex sein.

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{3} := +\sqrt{+6}$ ist lediglich zur Konvention geworden.

Analog lässt sich $\mathbb{Q}$ um weitere algebraische Zahlen erweitern. Dies sind insbesondere Wurzeln aus quadratfreien Zahlen, also natürliche Zahlen, bei denen jeder Primfaktor nur einmal vorkommt.

$$D = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 26, \ldots$$

Es gibt unendlich viele, da auch die Primzahlen dazu gehören und es ist (nach der Lektüre des Kapitels zu Cantor) leicht einzusehen, dass diese Menge abzählbar unendlich groß ist. Es existiert also eine Bijektion von $\mathbb{N}$ in D und man kann das Beweisverfahren der vollständigen Induktion anwenden.
Interessant sind, wie bei dem Beispiel mit $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, die Primteiler, die nach der Größe sortiert werden sollen:

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \ldots$$

Auch hier kann $\mathbb{Q}$ zu einem Körper K_n erweitert werden

$$K_n: =\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{p_3}, \ldots, \sqrt{p_n}),\ n \in \mathbb{N}_0$$

Auch hier gelte die Konvention, dass die Quadratwurzeln immer positiv sein sollen. Es gilt

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \ldots$$

Man kann mittels vollständiger Induktion zeigen:

> K_n als $\mathbb{Q}$-Vektorraum wird von den Quadratwurzeln der quadratfreien Zahlen D_n erzeugt, deren Primteiler < p_n sind.

Beweis: D_n sei wie folgt definiert:

$$D_n : = \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ quadratfrei, } p \text{ ist prim und teilt } d \text{ mit } p \leq p_n\}$$

Die Behauptung gilt nach Beispiel am Anfang des Exkurses für n=0, 1, 2, da $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cdot (\sqrt{1})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q} \cdot \sqrt{1} + \mathbb{Q} \cdot \sqrt{2}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q} \cdot \sqrt{1} + \mathbb{Q} \cdot \sqrt{2} + \mathbb{Q} \cdot \sqrt{3}$

Induktion von n nach n+1: Die Behauptung sei für n richtig. Dann gilt

$$
\begin{aligned}
K_{n+1} &= K_n(\sqrt{p_{n+1}}) \\
&= K_n + K_n \cdot \sqrt{p_{n+1}} \\
&= (\textstyle\sum_{d \in D_n} \mathbb{Q} \cdot \sqrt{d}) + (\textstyle\sum_{d \in D_n} \mathbb{Q} \cdot \sqrt{d}) \cdot \sqrt{p_{n+1}} \\
&= (\textstyle\sum_{d \in D_{n+1}} \mathbb{Q} \cdot \sqrt{d})
\end{aligned}
$$

Da die Menge der Primzahlen beliebig groß ist, kann man auch p_n beliebig groß wählen und $\sqrt{p_n}$ wird beliebig groß. Die Dimension von K_n wächst mit der wachsenden Anzahl der Quadratwurzeln der quadratfreien Zahlen, deren Primteiler < p_n sind.

Das potentiell Unendliche manifestiert sich also auch an vielen Stellen der linearen Algebra, hier am Beispiel K_n als $\mathbb{Q}$-Vektorraum.

Sei $\mathbb{Q}$ wieder ergänzt zu $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Man betrachte den Körper

L= $(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), +, \cdot)$ mit der Addition und Multiplikation und 3 Elemente $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$. (Es sind Tripel, hier der Deutlichkeit halber wie Vektoren geschrieben).

$\vec{u} = a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3}$, $\vec{v} = b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3}$, $\vec{w} = c_0 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3}$

(i) Aus $\vec{u} \leq \vec{v}$

$$a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} \leq b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} \quad |+c_0$$

$$(a_0 + c_0) + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} \leq (b_0 + c_0) + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} \quad |+c_1\sqrt{2}$$

$$(a_0 + c_0) + (a_1 + c_1)\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} \leq (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} \quad |+c_2\sqrt{3}$$

$$(a_0 + c_0) + (a_1 + c_1)\sqrt{2} + (a_2 + c_2)\sqrt{3} \leq (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\sqrt{2} + (b_2 + c_2)\sqrt{3}$$

$$a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + c_0 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} \leq b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + c_0 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3}$$

folgt $\vec{u} + \vec{w} \leq \vec{v} + \vec{w}$

(ii) Ebenso gilt

aus $0 \leq \vec{u}$ und $0 \leq \vec{v}$ folgt $0 \leq \vec{u} \cdot \vec{v}$

denn aus $0 \leq \vec{u}$ ➔ $0 \leq \vec{u}^2 = (a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3})^2$

und aus $0 \leq \vec{v}$ ➔ $0 \leq \vec{v}^2 = (b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3})^2$

$0 \leq \vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2$, da beide Faktoren positiv sind ➔

weil $\sqrt{\vec{u}^2}$, $\sqrt{\vec{v}^2}$ beide Wurzeln positiv oder beide negativ sind ➔

$$0 \leq \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Die Gültigkeit von (i) und (ii) bedeuten, dass der Körper L=$(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), +, \cdot)$ ein geordneter Körper bzgl. der Ordnungsrelation " $\leq$ " ist.

Auch dieses Ergebnis kann man per Induktion nach n erweitern:

$L_n := \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{p_3}, \ldots, \sqrt{p_n}),\ n \in \mathbb{N}_0,$ ist ein Körper (L_n, +, ·), der mit "≤" geordnet ist.

Solche Körper haben erst die bemerkenswerten Eigenschaften, die wir von den reellen Zahlen gewöhnt sind:

- Das Negative eines positiven Elements ist negativ und das Negative eines negativen Elements ist positiv.
- Man darf Ungleichungen addieren.
- Man darf Ungleichungen mit positiven Elementen multiplizieren.
- Quadratzahlen und jede endliche Summe von Quadratzahlen sind nichtnegativ.
- Durch Induktion kann man folgern, dass jede endliche Summe von Einsen positiv ist.

In geordneten Körpern gibt es die „totalpositiven“ Elemente, die von den Summen von Quadraten kommen und es gibt andere Elemente, siehe $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6})$, bei denen eine Konvention über das sinnvolle Vorzeichen entscheiden muss.

Grundvoraussetzung für diese algebraischen Überlegungen ist aber ebenfalls eine Theorie der irrationalen Zahlen, wie sie Dedekind etabliert hat, sowie eine seit Weierstraß sauber definierte Notation.

Mit diesem Exkurs sollte ein Beispiel aus der Linearen Algebra in das Thema dieses Beitrags eingebunden werden.

Zurück zu Weierstraß:
In moderner Schreibweise ist vor allem seine Definition einer stetigen Funktion zur Standardnotation geworden:
f heißt stetig in einem Punkt x_0 (im Definitionsbereich D_f) wenn zu jedem $\varepsilon>0$ ein δ>0 existiert, so dass für alle x (im Definitionsbereich D_f) mit $|x-x_0|< \delta$ gilt, $|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$
Der Begriff „unendlich (klein)“ wird nunmehr nicht mehr genannt. Aber mehr noch: So wie die Arithmetik auf dem reellen Zahlensystem beruht, beruht nun auch die Analysis darauf.

Ein Beispiel ist der Satz von Bolzano-Weierstraß, nach dem jede beschränkte, unendliche Zahlenfolge mindestens einen Häufungspunkt hat. Um einen solchen Punkt x_n enthält also jedes beliebig kleine Intervall unendlich viele Folgenglieder.

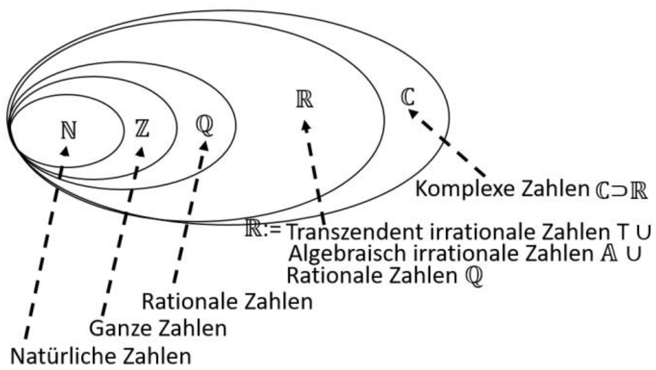


Abb. 25: Übersicht der Zahlenmengen: Komplexe Zahlen und ihre Teilmengen

Doch eine stetige Funktion ist nicht unbedingt differenzierbar. Weierstraß konstruierte ebenfalls ein solches Beispiel, das in keinem Punkt differenzierbar ist:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x)$$

für geeignetes a und b.

Unter dem Begriff „Fraktale“ sind später viele weitere Beispiele entstanden. Oft kann man sie als Limes von unendlichen Iterationen verstehen. Hier sei auf ein Beispiel von Giuseppe Peano (1858-1932) verwiesen („Peano-Kurven“).[87] Peano wies in seiner berühmten und überraschenden Arbeit „*Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*“ nach, dass sich das Einheitsintervall $\mathrm{I}= [0{,}1]$ in stetiger Weise auf das Quadrat $\mathrm{IxI}= [0{,}1]\cdot [0{,}1]$ der euklidischen Ebene abbilden lässt.[88,89]

D.h. es entsteht eine flächenfüllende oder allgemein raumfüllende Kurve. Die weitere Untersuchung hat, salopp formuliert, ergeben, dass Peano-Räume bis auf Homöomorphie die stetigen Bilder der Peano-Kurven sind. Ein Homöomorphismus ist eine bijektive, stetige Abbildung f zwischen zwei topologischen Räumen, deren Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls stetig ist. Peano leistete einen wichtigen formalen Baustein mit seinen Formulierungen zur Axiomatik der Arithmetik (ergänzt durch Dedekind). Hier in allgemeinverständlicher Form seine fünf Axiome:[90]

1) 0 ist eine natürliche Zahl.
2) Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n´ als Nachfolger.
3) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

[87] Quelle der Abb. 26: https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Kurve
[88] Abb. 25, eigene Grafik nach http://christianrohrbach.net/taxigeometrie/teil9_2.html
[89] Band 36 der Mathematischen Annalen des Jahres 1890
[90] Wörtlich aus https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Axiome

4) Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
5) Enthält die Menge X und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n´ so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X.

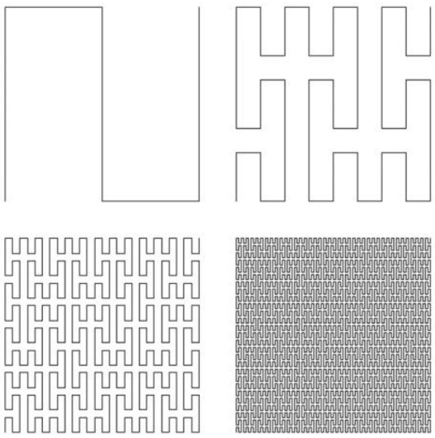


Abb. 26: Die ersten vier Iterationen einer Peano-Kurve.

Die Peano-Axiome fassen also das Prinzip „Zählen“ oder auch die abzählbare Unendlichkeit der natürlichen Zahlen in eine formale Form.

Das letzte Axiom heißt *Induktionsaxiom*, da auf ihm die Beweismethode der vollständigen Induktion beruht. Es ist äquivalent zur Aussage, dass jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen ein kleinstes Element hat. Mit ihm lassen sich Addition und Multiplikation induktiv bzw. rekursiv definieren.

Als Beispiel siehe die rekursive Definition der Fibonacci-Folge, wonach

$$f_{n-1} + f_n = f_{n+1}.$$

Hinweis: Die Arithmetik der natürlichen Zahlen erweiterte Cantor um transfinite Zahlen, also um die Arithmetik der Ordinalzahlen auch im Unendlichen. (s.u.).

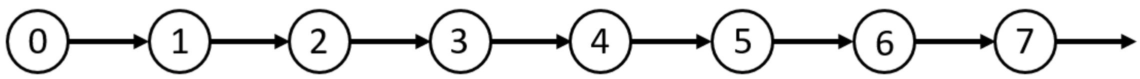


Abb. 27: Die Peano-Axiome formalisieren die rekursive Bildung der natürlichen Zahlen und bilden die Basis für ihre Arithmetik.

David Hilbert publizierte am 4. März 1891 einen Beitrag in den Mathematischen Annalen mit dem Titel *„Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück“*. Es ist die erste Darstellung eines Fraktals. In der grafischen Darstellung werden sie Hilbert-Kurven genannt. Auch diese Kurven sind stetig, aber nirgends differenzierbar. Er verweist in dem Artikel auf einen Satz von Weierstraß, nach dem die Stetigkeit in jedem Punkt impliziert, dass sich die Funktionen in unendliche *„… nach ganzen* *rationalen Functionen fortschreitende Reihen entwickeln lassen, welche im ganzen Intervall absolut und gleichmäßig convergieren.*“[91]

David Hilbert (1862-1943) beeinflusste die Mathematik am Anfang des 20. Jahrhunderts wie kaum ein zweiter Forscher. Auf dem Mathematiker-Kongress zur Jahrhundertwende 1900 formulierte er 23 Probleme, die im 20. Jahrhundert gelöst werden sollten. 15 sind gelöst, drei sind immer noch nicht bewiesen und 5 gelten als unlösbar. Die wohl bekannteste offene Frage ist die nach den Nullstellen der Zeta-Funktion, bekannt als Riemannsche Vermutung. Vom Beweis erhofft man sich Erkenntnisse über die Primzahlen, für die es immer noch kein Bildungsprinzip gibt. Doch an erster Stelle seiner Liste nannte er die Kontinuumshypothese (s.u.). Hilbert löste sich in seiner euklidischen Geometrie vollkommen von der Anschauung. Rein formalistisch sind Punkt, Linie oder Ebene einfach Dinge, die über Beziehungen wie „liegen“, „zwischen“ oder „kongruent“ definiert sind. Ihre Natur ist zweitrangig. Ein plakatives Beispiel für Paradoxa bei unendlichen Mengen ist bekannt als Hilberts Hotel. Diese Überlegungen wurden durch Georg Cantor umfassend ausgearbeitet (s.u.).

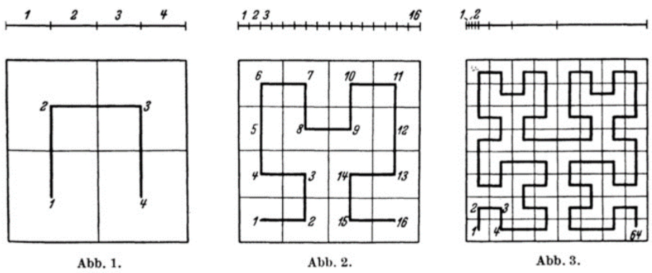


Abb. 28: Erstes Fraktal, die Hilbert-Kurve. Darstellung in seiner Originalveröffentlichung.

Eine besondere Bedeutung hat das Schaffen von Kurt Gödel (1906-1978), wohl einer der größten Logiker des 20. Jahrhunderts. In einer ganzen Reihe von Bereichen lieferte er wesentliche Beiträge, so in der Axiomatik der Mengenlehre.[92] Er bewies in seiner Dissertation die Vollständigkeit des „engeren Kalküls der Prädikatenlogik erster Stufe“.

[91] David Hilbert, Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück, Mathematische Annalen 38 (1891) 459-460, auch Quelle der Abb. 28, siehe auch Hilbert, David, Gesammelte Abhandlungen, Julius Springer, Berlin, 1935, digital verfügbar unter https://gdz.sub.uni-goettingen.de/
Für die 3-dimensionale Version der Hilbert-Kurve gibt es sehr wichtige Anwendungen. Dabei geht es um Übertragungsfehlern, die vom sogenannten Gray-Code abhängig sind. Digitale TV-Übertragung wird dadurch fehlertoleranter (siehe Binimelis Bassa, Maria Isabel; Fraktale Geometrie, Librero, 2017, S. 75-78)

[92] Bei der Ausarbeitung eines Beitrags für eine Würdigungsschrift für seinen Freund Albert Einstein entdeckte er eine 3. Klasse von Lösungen der Feldgleichungen der

„Sie befasst sich mit der Struktur gewisser mathematischer Ausdrücke und dem logischen Schließen, mit dem man von derartigen Ausdrücken zu anderen gelangt. Dabei gelingt es, sowohl die Sprache als auch das Schließen rein syntaktisch, das heißt ohne Bezug zu mathematischen Bedeutungen, zu definieren."[93]
Dies war keine Überraschung und passte in das Programm, das David Hilbert im Jahr 1900 ausgegeben hatte, nämlich die vollständige Axiomatisierung der Mathematik. Gödels sogenannte Unvollständigkeitssätze schlugen jedoch wie eine Bombe in der internationalen Mathematik ein. Er zeigte, dass es selbst in einem widerspruchsfreien Axiomensystem, das so umfangreich ist wie das, welches die Arithmetik konstituiert, es formal unentscheidbare Sätze gibt, also Aussagen, die weder widerlegt noch als wahr bewiesen werden können. Man kann weiterhin daraus ableiten, dass die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems nicht aus sich selbst heraus bewiesen werden kann (s.u. Kontinuumshypothese).

Abraham Robinson (1918-1974) war ein US-amerikanischer Logiker und Modelltheoretiker und kann durchaus mit Gödel in seiner Bedeutung verglichen werden. Um seine Lebensleistung verstehen zu können, sollte man einen Blick auf seine Biografie werfen.[94] Er wurde im heutigen polnischen Walbrych (früher Waldenburg) geboren und floh als Jugendlicher vor den Nationalsozialisten nach Palästina. Er kämpfte parallel zu seinem Studium für die verbotene Haganah-Miliz. Er bekam ein Stipendium für die Pariser Sorbonne-Universität, entkam der deutschen Invasion („Blitzkrieg") nur knapp nach England, wo er sich der Freien Französischen Armee anschloss. Er wurde im 2. Weltkrieg ein gefragter Spezialist für Tragflächenaeronautik, führte aber auch seine theoretischen Forschungen weiter. Nach dem Krieg kam über Gastvorlesungen in Toronto und Israel schließlich das Angebot für Rudolf Carnaps Lehrstuhl für Philosophie und Mathematik (ehemals Mitglied des „Wiener Kreises") an der UCLA (University of California, Los Angeles). Robinson wendete die sogenannte Prädikatenlogik an und formalisierte damit den „verbotenen" Bereich des Unendlichen. Er konnte zeigen, dass reelle Zahlen durch die infinitesimalen Größen bei Leibniz („das unendlich Kleine") über Grenzwerte um die infinitesimalen Zahlen ergänzt werden können. Ebenso kann man die reellen

---

Allgemeinen Relativitätstheorie in rotierenden Universen mit geschlossenen, zeitartigen Kurven. Theoretisch wären damit Reisen in die Vergangenheit möglich (Karl Sigmund, Sie nannten sich DER WIENER KREIS, S. 311 ff).

[93] Wörtlich aus https://de.wikipedia.org/wiki/Prädikatenlogik_erster_Stufe

[94] Jim Holt, Als Gödel und Einstein spazieren gingen, Rowohlt, Hamburg, Juni 2020, S. 226 f

Zahlen um infinite Zahlen („das aktual unendlich Große“) erweitern. Es entsteht ein widerspruchsfreies Konstrukt, das er praktisch im Alleingang zur Nichtstandardanalysis erweiterte, in dem man mit unendlich großen und unendlich kleinen Zahlen rechnen kann. Man kann damit wieder Analysis betreiben. Die Nichtstandardanalysis findet immer mehr Anhänger.

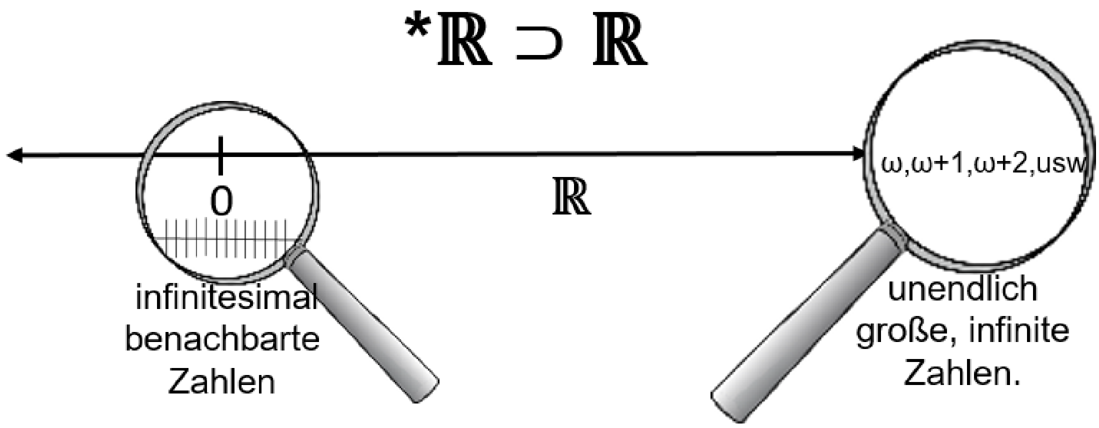


Abb. 29: Nicht-Standard-Analysis: Erweiterung von ℝ um hyperreelle Zahlen *ℝ

Einen Beitrag, um die Mathematik über die Mengenlehre zu begründen, lieferte John von Neumann (1903-1957) mit seiner Von-Neumann-Hierarchie oder kumulativen Hierarchie. Er kann damit einen stufenweisen Aufbau des gesamten Mengenuniversums über Ordinalzahlen und Potenzmengenbildung erreichen (s.u.). Zu einer Fülle von physikalischen und mathematischen Gebieten hat er Beiträge geliefert. Man kann ihn als Begründer der Spieltheorie unter wirtschaftswissenschaftlichen Gesichtspunkten bezeichnen. Weiterhin gilt er als einer der ersten, die die Informatik und Kybernetik begründeten. Dies gilt für Rechnerarchitekturen und Prinzipien der Softwareerstellung gleichermaßen. In Los Alamos war er an der Entwicklung der amerikanischen Atombombe beteiligt. Er hat der Funktionalanalysis mit seinem Buch „*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*“ durch ihre Bedeutung in der Physik zum Durchbruch verholfen.[95] Stefan Banach (1892-1945) hat sie als eigenständige Disziplin in der Mathematik etabliert.

Die Grundzüge der Funktionalanalysis waren maßgeblich von Henri Lebesgue (1875-1941) gestaltet worden. Er hat die Integrierbarkeit von unstetigen Funktionen deutlich erweitert. „*Eine in einem Intervall [a, b] beschränkte Funktion ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen das Maß Null hat*“.[96]

---

[95] Siehe auch Wußing, Band 2, ebenda S. 414
[96] Zitiert nach Wußing, Band 2, ebenda S. 407

Felix Hausdorff (1868-1942) hat von 1906-1909 grundlegende Untersuchungen über geordnete Mengen vorgelegt. Er schrieb 1914 das erste Lehrbuch *„Grundzüge der Mengenlehre“*. Dort heißt es:
„Die Mengenlehre ist das Fundament der gesamten Mathematik; Differential- und Integralrechnung, Analysis und Geometrie arbeiten in Wirklichkeit, wenn auch vielleicht in verschleiernder Ausdrucksweise, beständig mit unendlichen Mengen.“[97] Er verallgemeinerte die Mengenlehre über Punktmengen hinaus hin zu modernen Funktions- und Abbildungsbegriffen und erweiterte sie um eine Mengenalgebra. Hausdorffs Name ist mit einer ganzen Reihe an wichtigen Begriffen verbunden – so mit der gebrochenen Dimension von Fraktalen.

Cantor

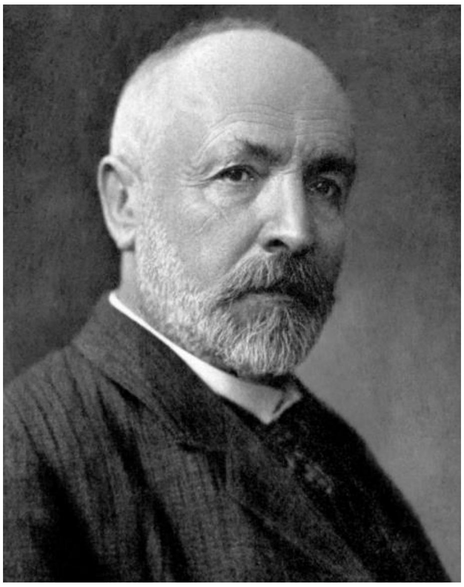


Abb. 30: Georg Cantor

Galilei Galileo hat in seinen *Discorsi e dimostrazioni matematiche* ein Rätsel angesprochen, das als Galileis Paradoxon in die Mathematikgeschichte einging. Es gibt nach damaliger Auffassung offenbar weniger Quadratzahlen als die natürlichen Zahlen, weil diese eine echte Untermenge sind. Er konnte aber jeder natürlichen Zahl eine Quadratzahl umkehrbar eindeutig zuordnen. Für Galilei war das ein Widerspruch. Immerhin kommt er zu dem Schluss, dass Begriffe wie „mehr als“, „weniger als“ oder „gleich“ im Falle unendlich keinen Sinn machen.[98] Selbst der „Fürst der Mathematik“ (Gauß) schrieb: *Das Unendliche ist nur eine Façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist*.[99]

Erst Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)[100] hat sich zuerst mit Zahlen- und Funktionentheorie beschäftigt und ist darüber zur Mengenlehre

[97] Details und Zitat nach Wußing, Band 2, ebenda, S. 395. Kurz vor seiner Deportation beging er mit seiner Frau und Schwägerin am 26. Jan. 1942 Selbstmord.
[98] Alex Bellos, Im Wunderland der Zahlen, S. 406
[99] Briefwechsel zwischen C.F.Gauß und H.C.Schuhmacher, Hsgr. Christian August Friedrich Peters 1860, S 269. Brief datiert vom 12.7.1831
[100] Bildquelle https://de.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor#/media/Datei:Georg_Cantor_(Porträt).jpg

gekommen, die er in den Jahren 1874 bis 1897 begründete. Anfangs (1877) nannte er sie noch Mannigfaltigkeitslehre und bis 1878 wird der Begriff „Mannigfaltigkeiten“ verwendet.[101] Er hat sich intensiv mit unendlichen Mengen und ihren Teilmengen beschäftigt und konnte die Widersprüche, die Galilei und anderen aufgefallen waren, auflösen.[102] Es gab durchaus Vorläuferpublikationen. So war Cantor beeindruckt von Hermann Henkels *„Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen“,* die 1870 erschien.[103] Hervorzuheben ist Henkels Methode der „Kondensation von Singularitäten“.

Eine der ersten Definitionen einer Menge stammt von Cantor:
Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.[104]
Er ersetzt damit diffuse Begriffe wie Gesamtheit oder Inbegriff.

Zuerst einige begriffliche Vorbemerkungen: Dazu soll zunächst auf die Begriffsbestimmung von endlich und unendlich im Kapitel „Einleitung und Fokus“ verwiesen werden. Für beide Arten von Mengen sollen hier kurz die Rechenregeln und Bezeichnungen erläutert werden. Eine Menge M_1 hat beliebige Elemente, z.B. zwei Zahlen π, 100 und ein Quadrat. Man schreibt M_1={π, 100, Quadrat}. M_1 hat die Mächtigkeit 3, also die Anzahl ihrer Elemente. Eine Menge M_2={e, 10!, Kreis} ist verschieden von M_1, weil mindestens ein Element verschieden ist, hat aber die gleiche Mächtigkeit, geschrieben $|M_1|=|M_2|=3$. Es existiert nämlich eine bijektive Abbildung f, die jedem Element von M_1 ein Element aus M_2 zuordnet und umgekehrt. Eine Menge M_3={π, e} hat die Mächtigkeit 2 und $|M_3|<|M_2|=|M_1|$. Eine Abbildung von M_3 in M_1 oder M_2 nennt man injektiv; umgekehrt von M_1 in M_3 surjektiv. Intuitiv einsichtig sind die Begriffe Vereinigungsmenge ∪, Schnittmenge ∩ und Teilmenge ⊂. Dann sollte

---

101 Cantor, Gesammelte Abhandlungen, S. 120, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.

102 Er zahlte gesundheitlich einen hohen Preis für seine Ideen. Sein akademischer Lehrer Leopold Kronecker nannte ihn einen „Scharlatan“ und „Verderber der Jugend“. Mit 39 hatte er einen Nervenzusammenbruch und es folgten viele weitere Krisen und Kliniksaufenthalte. Immerhin schwärmte der hochangesehene David Hilbert: *„Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.*“ (zitiert nach Bellos, S. 417).

103 Siehe https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/logik/Skripte/pohlers.mengenlehre_1994.pdf

104 Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. In: Mathematische Annalen. Band 46, S. 481
Seine gesammelten Abhandlungen hat Ernst Zermelo herausgegeben: Man findet sie digital in der SUB: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/de/index.html
Suchwort: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts

man die leere Menge ø kennen, sie ist die Menge, die keine Elemente enthält. Sie darf man nicht mit der Nullmenge verwechseln, also z.B. einer Menge von Punkten mit dem Maß Null.[105] Dies können unendlich viele Punkte sein. Als ein weiterer Begriff wird die „Potenzmenge“ $\wp$ verwendet werden. Es ist die Menge aller Teilmengen; z.B. ist $\wp(M_1)$ ={ø, {π}, {100}, {□}, {π, 100}, {π, □}, {100, □}, {π, 100, □}}. Man sieht leicht, dass die Mächtigkeit von $|\wp(M_1)|=8=2^3$ ist, denn 3 ist die Anzahl der Elemente von M_1.

Interessanter sind unendliche Mengen. Man betrachte die natürlichen Zahlen ℕ und die geraden positiven Zahlen G. Schon Galilei war verblüfft, dass die Mächtigkeit von |G| nicht die Hälfte von ℕ ist. Beide Mengen sind unendlich und die Hälfte von unendlich ist wieder unendlich. Aber es ist sinnvoll, sich formal auf die Bijektion zu beziehen. Abbildung 36 zeigt, dass sich jeder geraden Zahl umkehrbar eindeutig eine natürliche Zahl zuordnen lässt. Das gilt auch für Quadratzahlen, Primzahlen usw. und, wie sich zeigt, sogar für Brüche und algebraische Zahlen. Man nennt solche Mengen abzählbar im Gegensatz zu überabzählbar oder nicht abzählbar unendlich, wenn keine Bijektion in die natürlichen Zahlen existiert. Bei der Rechnung mit unendlichen Mengen ist Vorsicht geboten. Nimmt man zu ℕ die Null dazu so ist $\mathbb{N}_0$ immer noch unendlich; d.h. $\infty+1=\infty$, analog $\infty-1=\infty$. Nimmt man zu $\mathbb{N}_0$ die negativen ganzen Zahlen dazu, so erhält man ℤ; d.h. $\infty+\infty=\infty$. Bei der Differenz dürfen allerdings die Mengen nicht gleich sein, sonst erhält man die leere Menge ø.

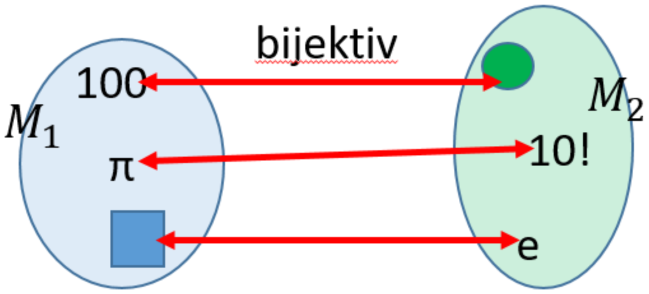


Abb. 31: Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn es eine bijektive (eineindeutige) Abbildung zwischen beiden gibt.

Die genannte Mengendefinition ist für diese genannten Zahlenmengen noch einsichtig, reicht aber im Allgemeinen nicht für beliebige unendlich große Mengen. Es muss eine formale Regel oder Eigenschaft P geben, mit der man feststellen kann, ob ein Objekt m Element von M ist, weil P(m) für m wahr ist. In der Praxis wird aber eine unendliche Menge mit mindestens einer solchen Regel definiert werden müssen. Dies ist nicht unbedingt eine Abbildungsvorschrift. Bei der Menge der geraden Zahlen ist die Abbildung G={n∊ ℕ | n mod 2=0 und n>2}. Bei den Primzahlen kennen wir zwar die Regel, was eine Primzahl ist, aber wir kennen keine Abbildung; d.h. es gibt bisher keinen Algorithmus, um Primzahlen berechnen zu können. Genauso wichtig ist aber die Tatsache, dass

[105] Manchmal wird auch die Menge {0} als Nullmenge bezeichnet.

diese erste Definition von Cantor auch Antinomien oder Paradoxien zulässt und der korrekte Mengenbegriff diese ausschließen muss. Man nennt deshalb die Cantor´sche Form auch „naive Mengenlehre“, ein Begriff, der seinen Leistungen nicht unbedingt Rechnung trägt. Siehe dazu das Kapitel zum Zermelo-Fraenkel Axiomensystem.

Ausgangspunkt vieler nachfolgender Überlegungen zu unendlichen Mengen war für Cantor eine Veröffentlichung aus dem Jahr 1872 „*Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen*“.[106] Diese Publikation verbessert in sechs Etappen und Nachträgen einen Vorläufersatz (von E.H. Heine, 1821-1881) über die Eindeutigkeitskriterien, wann eine Funktion durch trigonometrische Reihen dargestellt werden kann. Cantor zeigt zunächst, dass es endlich viele Ausnahmepunkte geben kann und dehnt den Beweis in vollständiger Allgemeinheit auf eine unendliche Menge an „Singularitäten“ aus, die auf eine bestimmte Weise verteilt sein müssen. Sicher war die Verallgemeinerung des Heine´schen Eindeutigkeitssatzes die ursprüngliche Motivation. Mit der Betrachtung von unendlichen Punktmengen erweiterte sich aber die Zielsetzung und eröffnete Cantor „Unendlich“ als Forschungsgegenstand (siehe Abb. 33).

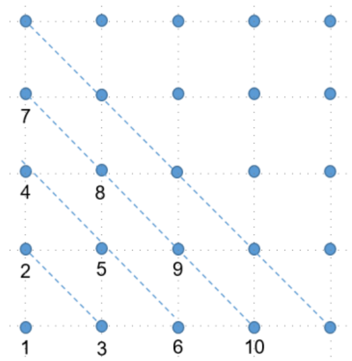


Abb. 32: Abzählbar unendlich: Zählverfahren für unendlich viele Gitterpunkte in der Ebene

An dieser Stelle verliert er vollends die Sympathie seines Doktorvaters Leopold Kronecker, der unendliche Mengen kategorisch ablehnte und zu einem eingefleischten Intuitionisten wurde (s.u.).

Cantor konstituiert hier in der mehrmaligen Verfeinerung des Beweises:
(1) seine Theorie der irrationalen Zahlen, die sich als Grenzwerte von konvergenten rationalen Folgen ergeben.
(2) Eine elementare Definition in der Beweiskette und wesentlich für die Mengenlehre ist der Begriff der „Ableitung einer Punktmenge“ P. Die „abgeleitete Menge P´“ von P ist die Menge aller Häufungspunkte von P.

---

[106] Georg Cantor; Gesamtausgabe seiner Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zermelo, Julius Springer, Berlin 1932, S. 92, digital verfügbar unter https://gdz.sub.uni-goettingen.de/

In dem man die Ableitung beliebig oft (α-mal) iteriert, führt dies zu Punktmengen α-ter Art. (Wenn α über jede endliche Grenze hinauswächst, wird Cantor schließlich zur Begriffsschöpfung der „transfiniten" Ordnungszahlen geführt: ω, ω+1,…, ω^2…, usw., näheres s.u.). Unter „Punktmenge", „Häufungspunkt" oder „Ausnahmepunkt / Singularität" sind zunächst Punkte (genannt Zahlengrößen, heute als reelle Zahlen bezeichnet) auf der reellen Achse gemeint. Weitere Basis ist der Satz von Bolzano-Weierstraß, dass jede beschränkte unendliche Punktmenge mindestens einen Häufungspunkt enthält. Später kann man sich im Prinzip ohne Einschränkung der Allgemeinheit allgemeine unendliche Mengen vorstellen. Die Ableitungshierarchien werden dann allgemeiner zu einer Hierarchie der Potenzmengen (s.u). Zermelo bezeichnet diesen Punkt als „Geburtsstätte der Cantor´schen Mengenlehre". Die Bedeutung wird durch Ernst Zermelo in einem Kommentar erläutert, der hier im Original in Abb. 33 wiedergegeben werden soll.[107]

Im Folgenden sollen die Ergebnisse von Cantor und seiner Nachfolger in gedrängter Form, mit Beispielen und Grafiken illustriert, dargestellt werden.

Wiewohl diese Ausdehnung des Satzes noch nicht seine äußerste Grenze darstellt, so ist die Abhandlung doch wichtig in zweifacher Beziehung:

1. Sie bringt im § 1 in gedrängter Darstellung zum ersten Male die sog. „Cantorsche Theorie der Irrationalzahlen", worin diese als „Grenzwerte" konvergenter Reihen von Rationalzahlen (später von Cantor „Fundamentalreihen" genannt) erklärt werden. Unter einer „Zahlengröße" wird hier immer das verstanden, was heute gewöhnlich als „reelle Zahl" bezeichnet wird.

2. Im § 2 wird aus dem Begriffe des „Grenzpunktes" einer unendlichen Punkt- oder Zahlenmenge (heute gewöhnlich „Häufungspunkt" genannt), der Begriff der „abgeleiteten Punktmenge" entwickelt, der dann α mal iteriert zur Definition von „Punktmengen αter Art" führt. Seine weitere Ausdehnung über jeden endlichen Index α hinaus hat den Forscher dann mit innerer Notwendigkeit zur Begriffsschöpfung „transfiniter" Ordnungszahlen ω, $\omega + 1, \ldots \omega^2, \ldots$ geführt. In diesem Begriffe der „höheren Ableitungen" einer Punktmenge haben wir somit den eigentlichen Keimpunkt und in der Theorie der trigonometrischen Reihen die Geburtsstätte der Cantorschen „Mengenlehre" zu erblicken.

Abb. 33: Kommentar von Ernst Zermelo in den von ihm herausgegebenen Gesammelten Werken von Georg Cantor, der verdeutlicht, wie die Cantor´sche Mengenlehre in einem Erkenntnisprozess entstand.

[107] Georg Cantor; Gesamtausgabe seiner Abhandlungen, ebenda, Anmerkung von Zermelo, S. 101-102, ebenso S. 119 das Zitat in Abb. 33.

Es stellte sich schnell die Frage nach der „Größe“ von unendlichen (Zahl)Mengen. Dies führt zum entscheidenden Unterschied zu endlichen Mengen. Die Mächtigkeit einer endlichen Menge ist einfach die Anzahl ihrer Elemente. Cantor hat erstmals unendlich in verschiedene Größen, genannt Mächtigkeiten, unterteilt. So sind die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, für die die Peano-Axiome gelten, abzählbar unendlich, was unmittelbar einleuchtet. Aber auch unendliche Mengen, für die eine eineindeutige (bijektive) Beziehung zu den natürlichen Zahlen konstruiert werden kann, wie die Quadratzahlen, ungeraden oder geraden Zahlen, Primzahlen, etc. sind abzählbar unendlich. Dazu gehören auch auf den ersten Blick unerwartete Beispiele, wie die Menge der rationalen Zahlen oder der algebraischen Zahlen.[108] Bei irrationalen Zahlen aus $\mathbb{R}$ funktioniert das in der Regel nicht, wie die Bemühungen von Dedekind und Cantors eigene Theorie der irrationalen Zahlen zeigten. Er veröffentlichte 1874 „*Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen*“. Darin zeigte er, dass die algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ abzählbar und dass das Kontinuum der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, also das Intervall [0, 1], nicht abzählbar ist. Er prägte dafür den Begriff der Mächtigkeit (gemessen durch die Kardinalzahl $\overline{\overline{M}}$). $\mathbb{A}$ ist äquivalent zu $\mathbb{N}$, das Intervall in $\mathbb{R}$ ist es nicht. [0, 1] ist aber gleichmächtig zu $\mathbb{R}$, was in der gleichen Publikation bewiesen wird (siehe auch Abb. 41, 51, 55 und 56, die darauf Bezug nehmen). Am Ende dieses Beitrags deutet er dann an, was später als „Kontinuumshypothese“ bekannt wird (Zitat*: „...die genaue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit.“*).

Wenn zwei wohldefinierte Mannigfaltigkeiten M und N sich eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuordnen lassen (was, wenn es auf eine Art möglich ist, immer auch noch auf viele andere Weisen geschehen kann), so möge für das Folgende die Ausdrucksweise gestattet sein, daß diese Mannigfaltigkeiten *gleiche Mächtigkeit* haben, oder auch, daß sie *äquivalent* sind. Unter einem ***Bestandteil*** einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir jede andere Mannigfaltigkeit M', deren Elemente zugleich Elemente von M sind.

Abb. 34: Auszug G. Cantor „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“ (1878)

David Hilbert soll in seinen Vorlesungen die verblüffenden Möglichkeiten mit dem abzählbar Unendlichen mit einem Beispiel illustriert haben, das als Hilberts Hotel bekannt wurde:[109,110]

---

[108] Lösungen eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten

[109] Es wurde so in George Gamows Buch „Eins, zwei, drei …Unendlichkeit“ (1947) genannt.

[110] Eigene Grafik, inspiriert und wörtlich übernommen von John Stillwell, S. 5

Sind die unendlich vielen Zimmer im Hotel belegt, so kann man jeden Gast in das folgende Zimmer umquartieren. So wird das erste Zimmer frei.

Kommen unendlich viele neue Gäste, so quartiert man die alten Gäste z.B. in die Zimmer mit ungeraden Zimmernummern oder lässt zwischen jedem alten Gast ein Zimmer frei. Dadurch werden unendlich viele Zimmer mit den ungeraden Nummern frei. Selbst unendlich viele Busse mit jeweils unendlich vielen Gästen kann man durch abzählbar unendliche Konstellationen bei den Zimmernummern unterbringen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...	

Standardbelegung von Hilberts Hotel

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	...	

Platz für einen weiteren Gast

1		2		3		4		5		6		7		8	...

Platz für nochmals abzählbar unendlich viele Gäste

1		2			3				4					5	...

Platz für abzählbar unendlich viele abzählbare Unendlichkeiten

Abb. 35: Hilberts Hotel

Das 1. Diagonalverfahren, mit dem die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen bewiesen wurde, stellt eine neue Beweistechnik in der Mathematik dar.

Dass natürliche Zahlen, gerade oder ungerade Zahlen, Primzahlen oder weitere Teilmengen der natürlichen Zahlen abzählbar unendlich sind, kann man gut nachvollziehen. Das „geniale“ 1. Diagonalverfahren, mit dem die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen bewiesen wurde, soll mit der Abb. 36 verständlich gemacht werden. Die positiven Brüche werden gemäß der zweidimensionalen Tabelle dargestellt und entlang der Pfeile abgezählt. Dabei werden ungekürzte Brüche übersprungen. So kann man jedem Bruch bijektiv eine natürliche Zahl zuordnen. D.h. die positiven rationalen Zahlen $\mathbb{Q}^+$ sind abzählbar unendlich und die Menge ist gleichmächtig zu $\mathbb{N}$.[111]

Eine andere Möglichkeit der Abzählung ist die Stern-Brocot-Folge bzw. der Stern-Brocot–Baum.[112]

---

[111] Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_erstes_Diagonalargument
[112] Nach Moritz Stern (1807-1894) und Achille Brocot (1817-1878) benannte Stern-Brocot-Folge, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Brocot-Folge

Auch bei den algebraischen Zahlen sollte man bzgl. ihrer Mächtigkeit genauer hinschauen.
Beispiele für algebraische Zahlen: $\sqrt{2}$ als Nullstelle von $x^2 - 2 = 0$ ist eine irrationale, algebraische Zahl vom Grad 2. Ebenso $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{6}$, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Goldener Schnitt).[113]

Wir betrachten nun systematisch die Lösungen eines Polynoms vom Grad 1, Grad 2, Grad 3, usw. Wichtig: Es gibt generell bei den folgenden Überlegungen nur rationale Koeffizienten.
Eine Gleichung 1. Grades hat die Form $a \cdot x - b = 0$
und die Lösung ist immer rational $\frac{b}{a}$.

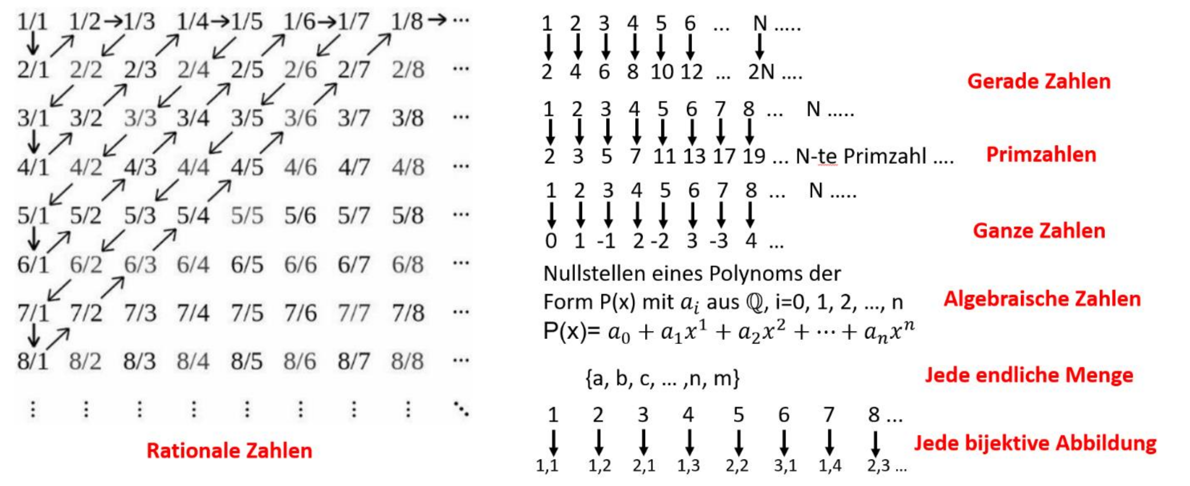


Abb. 36: Beispiele für abzählbare Mengen

Eine quadratische Gleichung hat die Form $ax^2+bx+c=0$. Es gibt zwar unendlich viele quadratische Gleichungen, aber nur abzählbar unendlich viele Kombinationen von den rationalen Koeffizienten a, b, c und damit abzählbar unendlich viele Lösungen von Gleichungen der Form $ax^2+bx+c=0$.
Die Menge soll M_2 heißen und enthält alle beliebigen, rationalen Werte von (a, b, c).

Diese Argumentation kann man auf Gleichungen 3. Grades der Form

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

übertragen, usw.
Allgemein hat ein Polynom die Form: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$
Damit liegen nun für jedes Gleichungssystem eines Grades abzählbar viele abzählbar unendliche Mengen von Lösungen vor. Die Elemente sind jeweils die Kombinationen der Koeffizienten des jeweiligen Grades (a_n, a_{n-1}, …, a_1, a_0). Man

113 Quelle der Abb. 36: Rationale Zahlen: https://blog.hnf.de/blick-ins-unendliche/
Rest eigene Grafik, Beispiele aus https://de.wikipedia.org/wiki/Abzählbare_Menge

muss nun zeigen, dass die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbar unendlichen Mengen wieder abzählbar ist. Dazu muss eine Systematik aufgebaut werden, die abzählbar ist. Dies gelingt mit dem 1. Diagonalverfahren. Die einzelnen Mengen der Lösungen des jeweiligen Polynom-Grades sollen M_1, M_2, M_3, ... heißen. Jedes Element m_{ij} hat nun 2 Nummern, nämlich zu welcher Menge M_i es gehört und an welcher Stelle j es dort steht. So lassen sich alle Elemente so ordnen, dass sie abzählbar sind.[114] Die Vereinigungsmenge dieser abzählbar vielen abzählbar unendlichen Mengen ist also ebenfalls abzählbar unendlich. Das kann man verallgemeinern. Formal und allgemein ausgedrückt: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge $(a_{n,k})$, $n \in \mathbb{N}$ in A_k mit $A_k = \{a_{n,k} : n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt

$$\bigcup_{k\in \mathbb{N}} A_k = \{a_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}.$$

Somit ist die Lösungsmenge aller algebraischen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten jeden Grades abzählbar. Das sind aber genau alle algebraischen Zahlen.[115]

$$\mathbf{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2}$$

1·1 = 1			
2·2 = 4	➔ 1	$< \sqrt{2} <$	2
1,4·1,4 = 1,96			
1,5·1,5 = 2,25	➔ 1,4	$< \sqrt{2} <$	1,5
1,41·1,41 = 1,9881			
1,42·1,42 = 2,0164	➔ 1,41	$< \sqrt{2} <$	1,42
1,414·1,414 = 1,999396			
1,415·1,415 = 2,002225	➔ 1,414	$< \sqrt{2} <$	1,415
		usw.	

$$\sqrt{2} = 1{,}41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ ....$$

Abb. 37: Eine irrationale Zahl ist eine Dezimalzahl mit unendlich vielen Stellen ohne Periode.

Von besonderer Bedeutung ist das Kontinuum und jeder beliebig kleine Abschnitt davon. Was sind nun reelle, irrationale Zahlen in der Praxis? Cantor hat dazu eine pragmatische Definition, flankierend zu den Dedekind´schen Schnitten, geliefert. Eine irrationale Zahl hat eine nicht abbrechende unendliche Dezimal-entwicklung.[116] Hier konnte Cantor mit Hilfe des heute so genannten 2. Diagonalverfahrens[117] oder -arguments nachweisen, dass diese

---

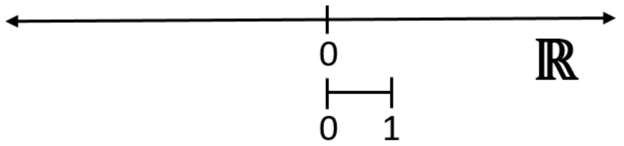
[114] Die Argumentation findet sich in unterhaltsamer Form bei Beutelspacher, Albrecht; Pasta all´infinito, C.H.Beck, München, 3. Auflage 2000, S. 178 f

[115] Die Veröffentlichung „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen" (1874) führte zu einer mehrjährigen Verstimmung zwischen Cantor und Dedekind, weil Dedekind nicht erwähnt wurde.
Siehe https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=cd1_Anhänge_2

[116] Abb. 37: Eigene Grafik, inspiriert von Rudolf Taschner; Das Unendliche, Springer, Berlin Heidelberg 2006, S. 68

[117] Allerdings gab es auch prominente Gegner des Verfahrens, z.B. den Physik-Nobelpreisträger P.W.Bridgeman, Reflections of a Physicist, Philosophic Library, New York, 1955

Menge nicht abzählbar unendlich ist. Auch der Beweis bedient sich Dezimalzahlen mit einer nicht abbrechenden Entwicklung hinter dem Komma. Cantor konnte eine reelle Zahl konstruieren, die in keiner vorgegebenen unendlichen Menge an reellen Zahlen enthalten ist. Er konnte zeigen, dass es zu jeder unendlichen Folge von Dezimalzahlen immer möglich ist, eine weitere Dezimalzahl zu konstruieren, die nicht in der Folge enthalten ist. Das 2. Diagonalverfahren, besser Diagonalargument[118], dient also dazu, nicht-Abzählbarkeit zu beweisen, d.h. es gibt keine bijektive Abbildung der betreffenden Menge in die natürlichen Zahlen.
Das Kontinuum enthält einerseits die rationalen Zahlen und die algebraischen Zahlen, die Lösung eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten sind. Aber andererseits sind überall „dazwischen“ weitere unendlich viele (irrationale) transzendente Zahlen und machen es erst nicht abzählbar.



Reelle Zahlen und bestimmte reelle Teilmengen davon

$\Pi = 3.14159265359\ldots$

$\mathrm{e} = 2{,}7182818284590452\ldots$

$2^{\sqrt{2}} = 2{,}6651441426902251886502972498731\ldots$

$\sin(\sqrt{2}) = 0{,}0246801768077106718487524061868 1\ldots$

$\ln(\sqrt{2}) = 0{,}3465735902799726547086160607290 9\ldots$

Transzendente Zahlen

Abb. 38: Beispiele für nicht-abzählbare Mengen

Auch die transzendenten Zahlen T kann man als unendliche Dezimalzahlen ohne Periode verstehen, auch wenn in der Praxis nur endlich viele Stellen errechnet werden können. Soweit man dieses mathematische Modell auf die physikalische Realität übertragen kann, so würde es auch formal das Problem lösen, das Newton und Leibniz so viel Kopfzerbrechen bereitet hat. Die Tangentensteigung $\frac{dy}{dx}$ müsste an jeder Stelle existieren, denn z.B. die Planetenbahnen sollten (im Modell) an jeder Stelle stetig und beliebig oft differenzierbar sein. Die immer kleineren Dreiecke, deren Hypotenusen die Bahnkurve annähern, würden dann die Ableitung als Dezimalzahl immer genauer berechnen.
Der Begriff „Dezimalzahl“ hat sich eingebürgert und jeder weiß, was damit gemeint ist. Streng genommen muss man von einer Ziffernfolge sprechen, die die entsprechende Zahl gemäß der Konvention eines Stellenwertsystems auf

[118] Abb. 38: Eigene Grafik, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Transzendente_Zahl

Basis 10 repräsentiert. Z.B. ist im Binärsystem lediglich die Darstellung der Zahl auf Basis 2 verschieden.

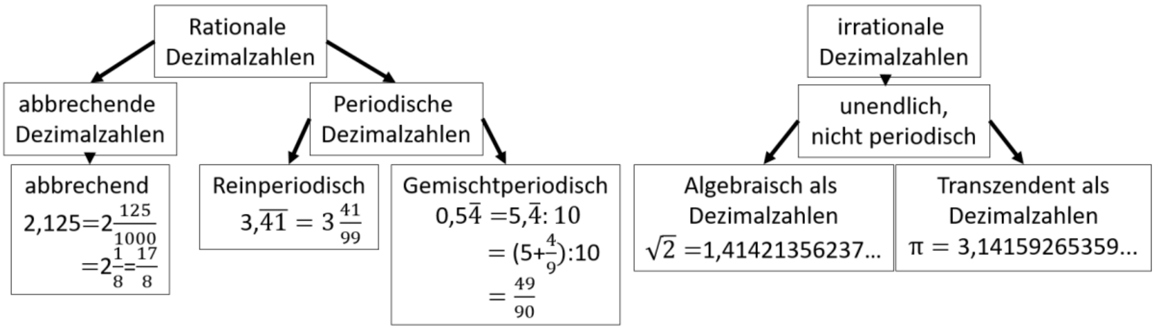


Abb. 39: Systematisierung und Beispiele von Dezimalzahlen

Cantor[119] hat die Mächtigkeit (oder Kardinalität) der natürlichen Zahlen und der jeder abzählbar unendlichen Menge mit $\aleph_0$ bezeichnet (gesprochen Aleph-Null, Aleph ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets). Die nächste Mächtigkeit, die es auf jeden Fall gibt (transzendente Zahlen, Kontinuum), wäre dann $\aleph_1$ usw. [120] Für das Kontinuum schlägt Cantor in diesem Fall $2^{\aleph_0}$ vor. Er verwendet die Bezeichnung c.

Eine endliche Menge M von k Elementen hat 2^k Teilmengen, die Potenzmenge $\wp$. Denn bei einer Menge M, m $\in$ M, mit Teilmengen S, S´, S´´, usw., ist m entweder in einem der S oder nicht. Das ergibt k ja/nein-Fragen, also $2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 = 2^k$ Teilmengen von M. Dieses Ergebnis will Cantor auf die unendliche Menge an Teilmengen von $\mathbb{N}$ übertragen (meist geschrieben $\wp(\mathbb{N})$). Aber das war keine Formalität, schließlich war und ist das Ziel, aus einer unendlichen Menge M eine Menge $\wp(\mathrm{M})$ als Menge aller Teilmengen von M zu konstruieren, die eine größere Mächtigkeit als M besitzt. Im Beweis ist die Tatsache relevant, dass jede Menge M sich selbst als Teilmenge besitzt. Natürlich besteht zwischen beiden dann eine Eins-zu-eins-Beziehung, eine Bijektion. (Aber man beachte: Man nutzt eine problematische „Selbstbezüglichkeit“ von M aus.)
Der Beweis ist ein Widerspruchsbeweis, d.h. man nimmt an, dass die Bijektion von M zu allen Teilmengen besteht.
Bei den algebraischen Zahlen wurde die Abzählbarkeit mit dem Satz des „1. Diagonalelementes“ gezeigt. Gelingt dies bei jedem der Mengen aus $\wp(\mathrm{M})$, so gilt generell für die Vereinigung abzählbar unendlicher Mengen, dass $\wp(\mathrm{M})$ abzählbar ist.

---

[119] Die folgenden Ausführungen lehnen sich an den Beitrag von Jean-Paul Delahaye in Spektrum der Wissenschaft Spezial, Das Unendliche, S. 12-19, an.
[120] Cantor nennt $\aleph_0$ und $\aleph_1$ auch erste und zweite Zahlklasse (also Kardinalzahlen). Durch Potenzmengenbildung entstehen weitere Zahlklassen.

Es zeigt sich jedoch, es lässt sich immer noch eine Menge konstruieren, die man mit dem 1. Diagonalargument nicht systematisieren, also abzählen kann.

Mit diesem Widerspruchsbeweis lässt sich unter Anwendung des Satzes zur Vereinigungsmenge (eigentlich Axiom) zeigen:

Die Potenzmenge $\wp(\mathrm{M})$ und damit speziell $\wp(\mathbb{N})$ von $\mathbb{N}$ ist nicht abzählbar,

die Mächtigkeit beider Potenzmengen ist also mindestens $\aleph_1$.

Ohne ins Detail dieses sehr technischen Beweises zu gehen, liegt das eigentliche Problem in der Selbstbezüglichkeit bei einer Menge aller Mengen. In der Praxis ist dies selten ein Problem. Die Menge aller Tische ist kein Tisch und die Menge aller Bücher ist kein Buch. Aber der Kreter, der sagt, „Alle Kreter lügen“ oder der Barbier mit dem Schild im Schaufenster, „Ich rasiere alle, die sich nicht selbst rasieren“, führen zu Paradoxa.[121] Es sind die Antinomien von Bertrand Russell oder Georg Cantor, die Anhänger und Gegner der Mengenlehre einige Jahrzehnte gespalten haben. Darunter waren Giganten der Mathematik, wie David Hilbert oder Henri Poincaré. Cantor war sich dessen bewusst und hat diese Antinomien in Briefen an Hilbert und Dedekind (27.7.1899) beschrieben.[122] Er glaubte fest an eine Beseitigung durch sauberere Definitionen auf Basis eines Axiomensystems.

Davon abgesehen, ist der Beweis korrekt und die Potenzmengen von Mengen, z.B. auch der natürlichen Zahlen, haben, wie sich zeigte, eine größere Mächtigkeit als die Menge der natürlichen Zahlen selbst. Der Sachverhalt wird als „Satz von Cantor“ bezeichnet.

Die Frage ist, ist es die gleiche Mächtigkeit wie das Kontinuum, ist also $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Bei weiteren Mächtigkeiten müssten dann gelten: $2^{2^{\aleph_0}} = \aleph_2$, $2^{2^{2^{\aleph_0}}} = \aleph_3$, usw.[123]
Es sind Kardinalzahlen für das Maß der Mächtigkeit einer unendlichen Menge.

Die Kontinuumshypothese besagt, dass $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ ist, d.h. zwischen den abzählbar unendlichen Mengen und dem Kontinuum gibt es demnach keine Abstufung. Diese Hypothese lässt sich auf Basis des Axiomensystems der klassischen Mengenlehre nicht beweisen. Ob es Axiome geben könnte bzw.

[121] Die Geschichte stammt von Epimenides, Priester und Seher aus Kreta und wurde 600 Jahre später in einem Brief von Paulus an Titus, Kap.1, Vers 12 erwähnt. Das Barbier-Paradoxon stammt von Bernhard Russell (Wußing, Band 2, ebenda, S. 390 f). Man beachte: Es handelt sich in beiden Fällen sogar um endliche Mengen.
[122] Wußing, Band 2, ebenda, S. 391. Es zeigt, dass Cantor keinen naiven Mengenbegriff hatte. Cantor glaubte durch geeignete Definition von Mengen die Antinomien zu vermeiden (z.B. durch „Wohlordnung“, später mit dem Auswahlaxiom von Zermelo bewiesen, s.u.).
[123] Vorgriff: Die moderne Form der Kontinuumshypothese lautet tatsächlich $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$

gibt, die diese Frage entscheidbar machen, ist immer noch Gegenstand der Forschung (s.u.).

Man kann unter Berücksichtigung der Kontinuumshypothese plakativ sagen:

Potentiell unendlich	entspricht	∞
Aktual unendlich (mindestens)	entspricht	$\aleph_1$

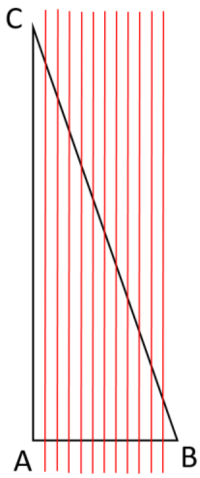


Abb. 41: $\overline{BC}$ hat die gleiche Mächtigkeit $\aleph_1$ wie $\overline{AB}$ denn es gibt eine bijektive Abbildung.

Es fehlen in der Betrachtung noch transzendente Zahlen wie e oder Pi. Irrational transzendente Zahlen sind erst relativ spät entdeckt worden, während algebraische irrationale Zahlen seit Entdeckung des Goldenen Schnitts oder der Quadratwurzel aus 2 wohlbekannt waren. Die erste transzendente Zahl wurde von Joseph Liouville (1809-1882) im Jahr 1844 entdeckt. Es ist eine Dezimalzahl, die nur aus Einsen und Nullen besteht.

Generell ist eine reelle Zahl x eine Liouville´sche Zahl, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ganze Zahlen p und q gibt, mit q>1, so dass

$$0 < \left|x - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n}$$

Allgemein zeigte Liouville: Ist $0 \neq a \neq 1$, a algebraisch, b algebraisch und irrational, dann ist a^b eine transzendente Zahl. Dies ist eine Teillösung von Hilberts siebtem Problem.

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 ?$$

Abb. 40: Kontinuumshypothese
Es gibt keine überabzählbare Menge reeller Zahlen, deren Mächtigkeit kleiner ist als die der reellen Zahlen.

Charles Hermite (1822-1901) bewies 1873 die Transzendenz der Euler´schen Zahl. e ist transzendent, aber nicht liouvillesch:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \cdots$$

π wurde erst 1882 durch Ferdinand von Lindemann (1852-1939) als transzendent nachgewiesen.[124] Er nutzte den berühmten Zusammenhang zwischen e und π aus:

$$e^{i\pi} = -1; \qquad i = \sqrt{-1}$$

[124] John Stillwell, Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, Springer, Heidelberg 2014, S. 11 f

Vorsicht bei Prognosen, was eine transzendente Zahl sein könnte. Srinavasa Ramanujan vermutete es, 1974 bewies es John Brillo (University of Arizona):

$e^{\pi\sqrt{163}}$ = 262 537 412 640 768 744 ist exakt eine ganze Zahl.[125]

Cantor-Staub

Ein schönes Beispiel für eine nicht abzählbare Menge findet sich beim sogenannten Cantor-Staub[126] oder Cantor-Menge C.[127]

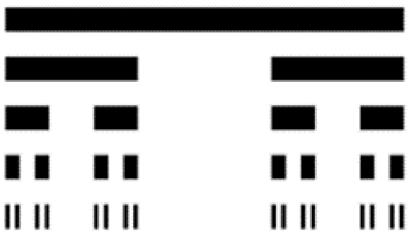


Abb. 42: Die ersten 5 Iterationen von Cantor-Staub

Cantor-Staub entsteht, wenn man von einer Strecke L (der Einfachheit halber der Länge 1 im Intervall [0, 1]) z.B. jeweils das mittlere Drittel entfernt und diesen Vorgang unendlich oft wiederholt.[128] Es bleiben unendlich viele Punkte übrig. Die Cantor-Menge hat viele interessante Eigenschaften.[129]

Es soll hier berechnet werden, wieviel von L=1 durch die unendlich fortgesetzten Iterationen entfernt wurde. Dieser Wert habe die Länge L_0.

$$\begin{aligned} L_0 &= \tfrac{1}{3} + 2(\tfrac{1}{9}) + 4(\tfrac{1}{27}) + \cdots \\ &= \tfrac{1}{3} + 2(\tfrac{1}{3})^2 + 4(\tfrac{1}{3})^3 + \cdots \\ &= \tfrac{1}{3}(1 + \left(\tfrac{2}{3}\right) + (\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{2}{3})^3 + \cdots \\ &= \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3}\frac{1}{(\frac{1}{3})} = 1 \end{aligned}$$

Die ersten Zeilen sind einfache Umformungen. Die 4. Zeile verwendet die Formel für eine konvergente unendliche geometrische Reihe. Dabei ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der zugehörigen Reihe konstant:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = \frac{a_0}{1-x} \ f\text{ür} \ |x| < 1$$

---

125 Toenniessen, Fridtjof; Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Spektrum, Heidelberg, 2010, S. 424

126 Originalveröffentlichung: G. Cantor, Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V, Mathematische Annalen 21 (1883) 545-591, digitalisiert https://de.wikisource.org/wiki/Mathematische_Annalen/Inhalt_1869-1943

127 Grafik Abb. 42 https://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Menge

128 Es sind auch viele andere Varianten möglich.

129 Mehr Informationen dazu siehe Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Bausteine der Ordnung Fraktale, Springer/Klett Cotta, 1992, S. 85-97

$$hier\ a_0 = 1\ und\ \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{2}{3}$$

Man erkennt: $L_0 = L = 1.$ [130]

Man hat also durch die unendlichen Iterationen „alles“ entfernt und es bleiben trotzdem nicht abzählbar unendlich viele Punkte übrig.

Das liegt daran, dass man nur Strecken eine Länge zuordnen kann, einer Menge an Punkten dagegen nicht. Ihr Lebesgue-Maß, also das Maß im euklidischen Raum, das geometrischen Objekten ihren Inhalt (Länge, Flächeninhalt, Volumen, …) zuordnet, ist Null. Die Cantor Menge stellt zwar ein Diskontinuum dar, ist aber abgeschlossen in ℝ, da Beginn und Ende von L, z.B. [0, 1], nie entfernt werden. Topologisch besteht sie nur aus Randpunkten, die alle Häufungspunkte sind. Das Innere ist leer. Somit ist kein Punkt isoliert, aber die Menge ist nirgends dicht. Wären die Randpunkte keine Häufungspunkte, könnte man sie abzählen. Die Nicht-Abzählbarkeit kann man ebenfalls mit dem zweiten Diagonalargument zeigen. C ist somit gleich mächtig wie ℝ.
Die Punkte x϶C haben eine triadische Darstellung (Basis 3) der Fom

$$x = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} + \cdots, \qquad a_1, a_2, a_3, \ldots \text{ aus } \{0, 1, 2\}$$

Die Cantor-Menge C ist die Menge der Punkte in [0, 1], für die es eine triadische Darstellung ohne die Ziffer „1“ gibt.[131]

Cantor-Staub ist ein Fraktal. Fraktale haben meist ein hohes Maß an Selbstähnlichkeit. So ist die um ⅓ verkleinerte Punktmenge eine exakte Kopie von C. Das gilt für jedes Intervall $(⅓)^k$ und die Mächtigkeit ist $\aleph_1$. C hat zwar das Maß Null, aber eine euklidische Dimension gleich Null wird C nicht gerecht. Die Hausdorff-Dimension beträgt

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = ca.\,0{,}6309 \ldots$$

Diese spezielle Menge ist nur ein Beispiel. Cantor hat in einer Reihe von fünf Aufsätzen von 1879 bis 1884 mit dem fortlaufenden Titel *„Ueber unendliche Punktmannichfaltigkeiten*“[132] Sätze sehr allgemeiner Natur bewiesen, die Cantor-Staub theoretisch abdecken. Mit der sogenannten Punktmenge begründete Cantor 1870 die Grundlagen der Theorie der „Fraktale“. Erst später

---

[130] Der Mathematikerscherz am Anfang der Zitate lässt sich mit der konvergenten geometrischen Reihe erklären. Dabei ist $a_0 = 1\ und\ \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{1}{2}\ also\ \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

[131] Näheres siehe Peitgen, Heinz-Otto, Jürgens, Hartmut, Saupe, Dietmar; Fraktale, Bausteine des Chaos, Klett-Cotta/Springer, Berlin Heidelberg/ New York, 1992, S. 85-96

[132] Mit der Orthographischen Konferenz von 1876 gab es eine Rechtschreibreform im deutschen Sprachraum, die sich aber offenbar nicht sofort durchsetzte.

wurde dieser Begriff von Benoît Mandelbrot geprägt. Als Definition schlug er vor: *Ein Fraktal ist eine Menge, deren Hausdorff-Dimension größer ist als ihre Lebesgue'sche Überdeckungsdimension.*[133] Die Cantor´sche Punktmenge entsteht durch unendliche Wiederholung und führt zur Selbstähnlichkeit. Die Cantor-Menge war theoretisch das erste Fraktal; die Hilbert-Kurve praktisch. Allgemeiner nennt man auch gewisse Mengen oder topologische Räume Cantormengen, wenn sie ganz oder teilweise folg. Eigenschaften haben: Wenn sie ein „Diskontinuum" sind, selbstähnlich sind mit Hausdorff-Dimension ungleich Null, überabzählbar sind, also die Mächtigkeit des Kontinuums haben und das Maß Null haben (Lebesgue-Nullmenge).

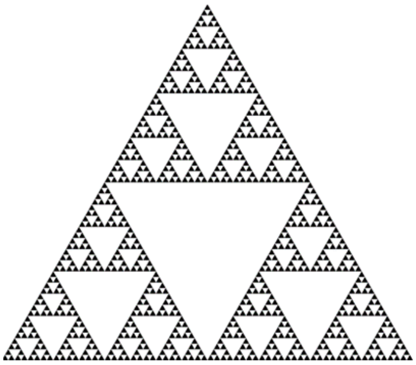


Abb. 43: Sierpiński-Dreieck nach 7 Rekursionen

Weitere Fraktale sind nach Wacław Sierpiński (1882-1969), einem exzellenten polnischen Mathematiker benannt. Er griff die Forschungen von Cantor auf und leistete wichtige Beiträge zu mehreren mathematischen Bereichen, darunter zur Mengenlehre, obwohl er unter schwierigsten politischen Bedingungen arbeiten musste. Er beschäftigte sich intensiv mit der Kontinuumshypothese und bewies, dass das Auswahlaxiom aus der (verallgemeinerten) Kontinuumshypothese folgt (s.u.). Er schlug den Bogen zwischen der Mengenlehre und mehren Sätzen der euklidischen Geometrie. Ein zum Cantor-Staub eng verwandtes Beispiel ist das Sierpiński-Dreieck.[134]

Sei die Seitenlänge des Dreiecks a und die Fläche A, $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$.

Jeder Iterationsschritt verringert die Fläche um ¼ bzw. A_k wird mit $\frac{3}{4}$ multipliziert.

$$A_k = (\frac{3}{4})^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

$$\lim_{k\to\infty} A_k = 0$$

Seine fraktale Dimension ist gerade der Kehrwert der fraktalen Dimension der Cantor-Menge

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1{,}585$$

---

[133] Zitiert nach Binimelis Bassa, ebenda S. 49
[134] Quelle der Grafik und weitere Informationen siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Sierpinski-Dreieck

Weitere Beispiele für verschwindende Fläche oder Volumen als Grenzwert gegen unendlich ist der Sierpiński-Teppich[135] und seine Verallgemeinerung in die 3. Dimension, der Menger-Schwamm.[136]

Die „Außenabmessungen" der genannten Beispiele sind konstant. Deshalb ist der Grenzwert in allen Fällen Null. Es entstehen nicht-abzählbar unendliche Punktmengen. Ein Gegenbeispiel ist die Koch-Kurve.[137] Man sieht leicht, dass die Kurvenlänge jeweils um $\frac{4}{3}$ zunimmt, also nach dem k-ten Iterationsschritt sich um $(\frac{4}{3})^k$ verlängert.

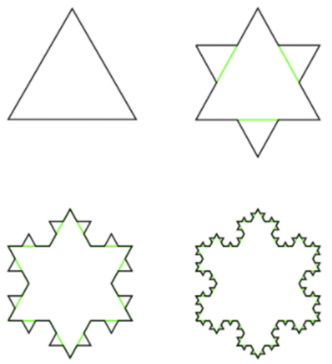


Abb. 44: Vier Iterationsschritte der Koch-Kurve

Die Länge der Koch-Kurve divergiert damit,

$$\lim_{k\to\infty}(\frac{4}{3})^k = \infty$$

Die Fläche unter der Kurve bleibt aber endlich und strebt dem Grenzwert

$\frac{\sqrt{3}}{20} \cdot a^2$ zu, wenn a die Seitenlänge des ursprünglichen Dreiecks ist. Die Koch-Kurve ist stetig, aber nirgends differenzierbar. Als Fraktal hat sie die Hausdorff-Dimension $\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1{,}262$

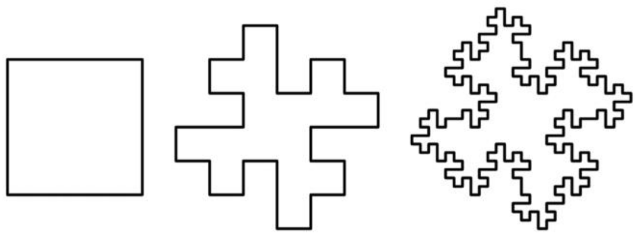


Abb. 45: Die ersten drei Iterationen der Minkowski-Kurve

Von der Systematik ist die weniger bekannte Minkowski-Kurve ähnlich einzustufen (im Englischen Minkowski-sausage).[138] Hermann Minkowski (1864-1909) war ein vielseitiger und begabter Mathematiker, der von Hilbert nach Göttingen geholt wurde. Sein Name ist eng verknüpft mit der gründlichen mathematischen Ausarbeitung von Einsteins Spezieller Relativitätstheorie („Zur Elektrodynamik bewegter Körper"). Der Minkowski-Raum hat dabei bis heute Gültigkeit und Relevanz. Die Kurve geht von einem Quadrat der Seitenlänge 1, also der Fläche 1, aus. Die Länge der Kurve (also der Umfang der durch Iterationen geänderten Figur, die aus dem

[135] https://de.wikipedia.org/wiki/Sierpinski-Teppich
[136] https://de.wikipedia.org/wiki/Menger-Schwamm
[137] Grafik https://commons.wikimedia.org/wiki/File:KochFlake.svg
[138] Quelle der Grafik 38 https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5f/Minkowski_island_1-3.svg

Quadrat entsteht) geht gegen unendlich, während die Fläche konstant 1 bleibt. Die Hausdorff-Dimension ist (ln 8 / ln 4) = 1,5 = 3/2.

Auch in der Geometrie spielt der Unterschied zwischen abzählbar und nicht-abzählbar unendlich eine Rolle. Man kann die Ebene mit regelmäßigen Sechsecken parkettieren (Abb. 46). [139] Diese Sechsecke und damit ihre Eckenzahl kann man beginnend an einer beliebigen Stelle mit einer spiralförmigen Vorgehensweise abzählen. Die Mächtigkeit ist also $\aleph_0$. Bedeckt man dagegen ein Blatt Papier endlicher Abmessung mit $2^{\aleph_0}$ gleich großen Kreisen, so funktioniert das nicht. Die Mittelpunkte können an beliebigen Stellen sein.[140] Die Mächtigkeit ist somit größer als $\aleph_0$. Die Aussage ist zwar verblüffend, aber relativ trivial, da $|2^{\aleph_0}| > |\aleph_0|$ ist.

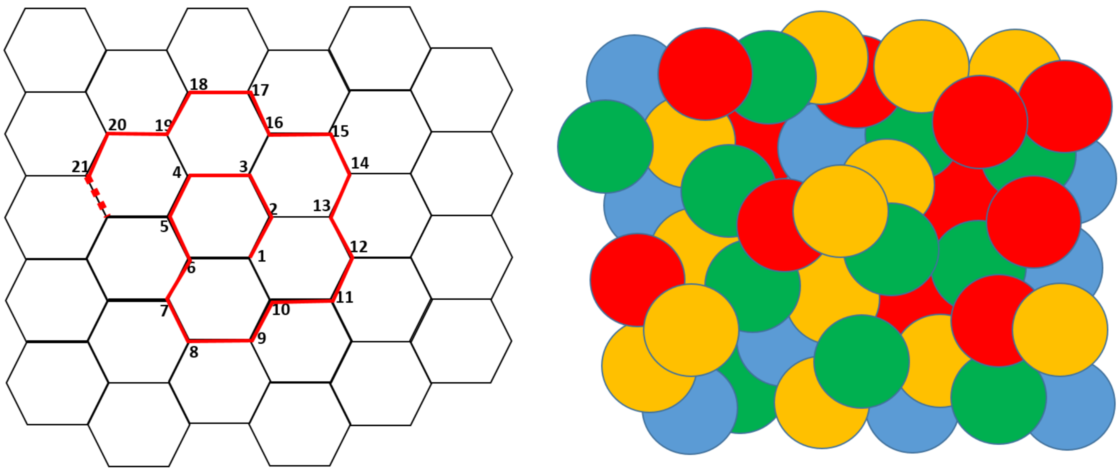


Abb. 46: Zur Parkettierung der Ebene $\mathbb{R}^2$ genügen abzählbar unendlich viele regelmäßige Sechsecke. Bei einer Überdeckung einer endlichen Fläche mit $2^{\aleph_0}$ Kreisen sind deren Mittelpunkte über- oder nicht-abzählbar.

Dass die transzendenten Zahlen eine nicht abzählbare unendliche Menge der Mächtigkeit $\aleph_1$ sein müssen, zeigt auch folgende Argumentation.

Auf dem Zahlenstrahl sind die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, die algebraischen Zahlen $\mathbb{A}$ und die der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich und die Menge $\mathbb{A}$ enthält $\mathbb{Q}$ als Teilmenge und diese wiederum $\mathbb{N}$. Da $\mathbb{R}$ nicht abzählbar ist, muss $\mathbb{R} \backslash \mathbb{A}$ als Menge der transzendenten Zahlen somit ebenfalls nicht abzählbar sein. Cantor hat diese Argumentation 1873 als neuen Beweis

[139] Eigene Grafik nach einer Abbildung ebenda, S. 16
[140] Zitiert nach Spektrum der Wissenschaft Spezial, Das Unendliche, S. 16

des Liouville´schen Satzes bezeichnet, in dem die transzendenten Zahlen ebenfalls als „Schnitte“ charakterisiert werden.[141]

Die Mächtigkeiten $\aleph_0$ und $\aleph_1$ wurden bereits diskutiert und als Kardinalzahlen bezeichnet, die unendlich abzählbare und kleinste nicht abzählbare Mengen charakterisieren. Es wurde bereits deutlich, dass die Theorie nicht nur Zahlenmengen, also Punkte auf der Zahlengeraden, abdeckt. So ist die Menge aller Teilmengen einer abzählbar unendlichen Menge M, die Potenzmenge von M, $\wp(M)$, ebenfalls nicht abzählbar. Durch einen Widerspruchsbeweis mit Hilfe des Diagonalargumentes ließ sich allgemein zeigen, also über die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen hinaus, dass es zu jeder Nummerierung eine Teilmenge gibt, die nicht durch diese erfasst wird. D.h. die Menge aller Teilmengen z.B. der natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$, $\wp(\mathbb{N})$, lässt sich nicht bijektiv auf $\mathbb{N}$ abbilden, sie ist mächtiger als $\mathbb{N}$ und das lässt sich auf beliebige unendliche Mengen und ihre Potenzmengen verallgemeinern. Doch, wie bereits gesagt, geht die Hierarchie weiter:

$\wp(\wp(\mathbb{N}))$ ist mächtiger als $\wp(\mathbb{N})$ und hat die Mächtigkeit $2^{2^{\aleph_0}}$

$\wp(\wp(\wp(\mathbb{N})))$ ist mächtiger als $\wp(\wp(\mathbb{N}))$ und hat die Mächtigkeit $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$
usw.

Auf diesen Ergebnissen fußt die Theorie der transfiniten Zahlen.

Dazu heißt eine Menge M „wohlgeordnet“, wenn jede ihrer Teilmengen ein kleinstes Element bzgl. einer Ordnungsrelation besitzt. In diesem Sinne ist $\mathbb{N}$ durch die kleiner/größer-beziehung wohlgeordnet. Die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}>0$ ist es nicht. Man erreicht die Null nicht.

Cantor erkannte, dass man bei unendlichen Mengen Zahl als Größe und Zahl als Index bzw. Position unterscheiden muss. In endlichen Mengen stimmen sie überein, in unendlichen nicht. *„Eine Menge M heißt Ordinalzahl oder Ordnungszahl genau dann, wenn sie transitiv ist und durch die Elementrelation*

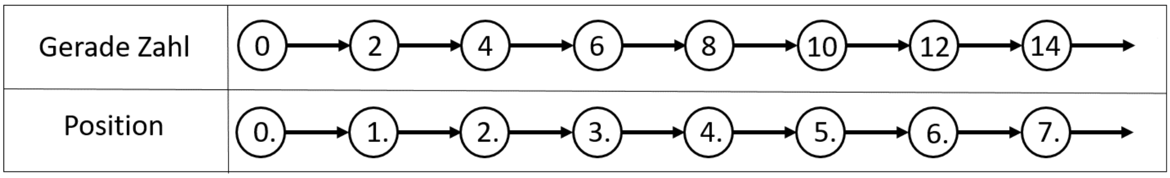


Abb. 47: Endliche Ordinalzahlen, also Positionen gemäß der Abzählbarkeit der Zahlen in $\mathbb{N}$ am Beispiel gerade Zahlen ≥ 0.
Die Menge der geraden Zahlen hat die Kardinalzahl $\aleph_0$.

---

[141] Georg Cantor, Brief an Dedekind, 2. Dez. 1873. In: Briefwechsel Cantor-Dedekind. Hsgr. E. Noether, J. Cavaillès. Actualités Scientifiques et Industrielle 518, Paris 1937, zitiert nach Stillwell, ebenda S. 11

wohlgeordnet wird, d.h. genau dann, wenn jedes Element von M auch Teilmenge von M ist und jede Teilmenge von M ein kleinstes Element hat. Jede Wohlordnung ist dann zu genau einer Ordinalzahl isomorph, und man nennt diese Ordinalzahl den „Ordnungstyp der Wohlordnung“. In den natürlichen Zahlen gibt es eine Wohlordnung bzw. Ordnungsrelation durch die kleiner/größer-Beziehung. Sie fallen im Beispiel Abb. 47 mit der „Position“ in der Zahlenreihe der geraden Zahlen größer/gleich null zusammen: nullte Position entspricht Null, (0.)$\triangleq 0$, erste Position (1.)$\triangleq 2$, zweite Position (2.)$\triangleq 4$, usw. Dies kann bei anderen Mengen anders sein. Die alphabetische Sortierung von Schlagwörtern in einem Lexikon ist z.B. eine Ordnungsrelation. Kardinalzahlen sind Mengen, die als Repräsentanten von Mengen einer bestimmten Größe dienen. Entsprechend ist eine Ordinalzahl eine Menge, die den Ordnungstyp einer wohlgeordneten Menge repräsentiert.[142]
Ordinalzahlen sind Positionsangaben wie z.B. „am ersten Ersten, das einundzwanzigste Jahr, Königin Elisabeth II (die Zweite), das tausendste Wort, …, usw.

Kardinalzahlen sind Antworten auf die Frage „Wie viele?“, also z.B. fünf (Äpfel), neunundzwanzig (Schafe), hundert (Euro), $\aleph_0$ (abzählbar unendlich viele Primzahlen), etc.

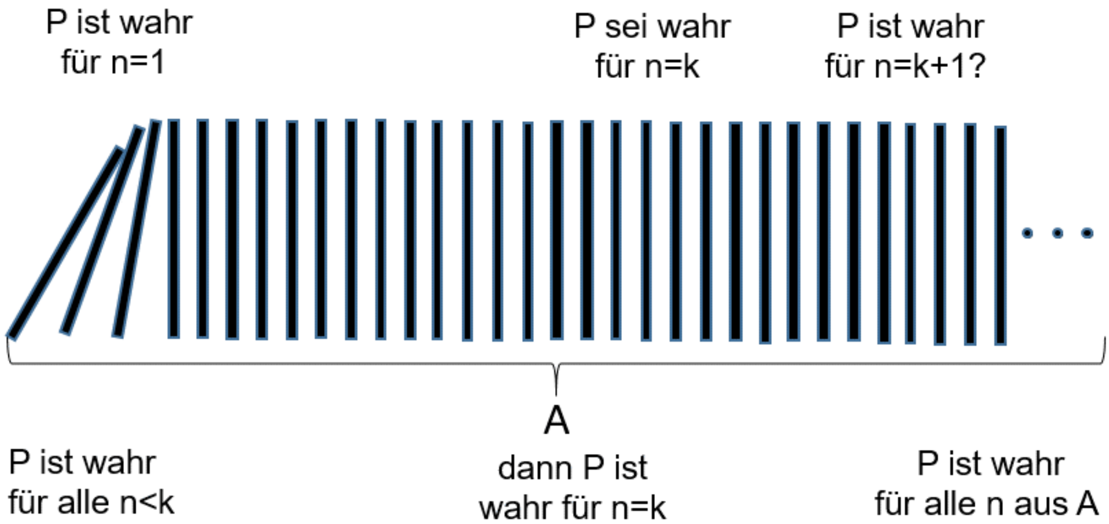


Abb. 48: Das Prinzip der vollständigen Induktion lässt sich auf transfinite Induktion erweitern: Sei (A, <) eine wohlgeordnete Klasse.
Wenn a∈A und für alle b∈A mit b<a gilt die Aussage P(b).
So gilt auch die Aussage P(a) und P gilt für alle Elemente von A.

Eselsbrücke: Ordinalzahlen≙aufzählen, Kardinalzahlen≙abzählen

[142] Siehe auch https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/kardinalzahlen-und-ordinalzahlen/5135

Die Definitionen sind deshalb so formal, weil nicht nur „Zahlenpunktmengen“ im speziellen, sondern im allgemeinen Sinn alle wohlgeordneten Mengen[143] damit adressiert werden können und auch auf unendliche Mengen Bezug genommen werden muss. Entscheidender Vorteil: Man kann das Prinzip der vollständigen Induktion auf „transfinite Induktion“ verallgemeinern.[144] Summe, Produkt und Exponentialfunktion gelten analog für alle Ordinalzahlen.

Doch wie kommt man über die natürlichen Zahlen als Positionsangaben hinaus? Die Antwort Cantors lautet: Man zählt einfach darüber hinaus und erhält transfinite Zahlen beginnend mit ω, $\omega+1$, $\omega+2$, usw. bis zunächst $\omega+\omega$ oder 2ω. Dies kann man im ersten Schritt bis ω^2 weiterzählen. Eine geometrische Veranschaulichung bis ω^n in einem n-dimensionalen Raum ist theoretisch möglich, doch ab ω^ω versagt unser Vorstellungsvermögen. Man kann also eine kleinste transfinite Ordinalzahl ω definieren, danach $\omega+1$, $\omega+2$, usw., dann $\omega2$, $\omega2+1$, … , sogar ω^2, ω^ω, usw. Damit geht die Zählung nach unendlichen Positionen aus $\mathbb{N}$ sozusagen „unendlich weit“ über alle weiteren Positionen hinaus (zur Ordinalzahlarithmetik siehe genauer S. 83).

Zur Erinnerung: Historisch entstand die Idee und spätere Ausarbeitung der Theorie der Ordinalzahlen durch Cantor bei seinen funktionentheoretischen Untersuchungen *„Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“*, Math. Annalen Bd. 5, S. 123-132 (1872). Siehe dazu Abb. 33[145], Kommentar von Ernst Zermelo in den Gesammelten Abhandlungen von Georg Cantor. Ausgearbeitet wurde die Theorie zwischen 1879 und 1884 in der sechsteiligen Veröffentlichung „*Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten*“.

Cantor erweiterte die Arithmetik, die Peano / Dedekind durch ihre Axiome etabliert hatten, um die arithmetischen Operationen Addition und Subtraktion zwischen Ordinalzahlen. Er führte sie mittels transfiniter Rekursion als stetige Fortsetzung der finiten Rechenoperationen ein.

Die Definition von Ordinalzahlen hat eine Entwicklung erfahren:
Cantor (1897): „Allgemeinbegriff“, der sich durch Abstraktion ergibt.

---

[143] Eine wohlgeordnete Menge an Namen ist z.B. ein Telefonbuch.
[144] Albrecht Beutelspacher nennt in seinem vergnüglichen Buch Pasta all´infinito, C.H.Beck, München, 3. Auflage 2000 ein mögliches Anwendungsbeispiel: Man kann Sätze in der rationalen Ebene beweisen, weil es da „nur“ abzählbar unendlich viele geometrische Objekte geben kann. Um die allgemeine Gültigkeit dieser Sätze in der „normalen“ euklidischen Ebene mit reellen Punkten und Überabzählbarkeit zu beweisen, kann man transfinite Induktion anwenden.
[145] Abb. 33 Kommentar von Ernst Zermelo in Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zermelo, Springer, Berlin, 1932, S. 102

Bertrand Russell (1903): Äquivalenzklasse von Wohlordnungen, (denn zu jeder Wohlordnung gibt es eine ihr isomorphe Ordnungszahl).
John von Neumann (1923) definierte Ordinalzahlen als eine Hierarchie und gab Cantors Ideen damit einen endgültigen formalen Rahmen. Er beginnt bei der leeren Menge $\emptyset$, dann der Menge bestehend nur aus der leeren Menge $\{\emptyset\}$, weiter der zwei-Elemente großen Menge bestehend aus leerer Menge und Menge aus der leeren Menge usw. Er definierte dadurch die natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen ab der Null über Mengen und nutzte dabei die Iteration von Potenzmengen.[146]

$0{:}= V_0=\varnothing$

$1{:}= V_1=\{\varnothing\}=\wp(\varnothing)$

$2{:}= V_2=\{\varnothing, \{\varnothing\}\}=\wp(\wp(\varnothing))$

$3{:}= V_3=\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\{\varnothing\}\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}=\wp(\wp(\wp(\varnothing)))$

…

$n{:}= V_n=\{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

Man kann sagen, die natürlichen und die transfiniten Zahlen wurden somit in der abstrakten Mengenlehre aus der leeren Menge (ø) heraus entwickelt.

Beim Übergang von den natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ zu den transfiniten Zahlen beginnt man mit ω:

$0, 1, 2, 3, \dots$ (bis ∞), ω, ω+1, … oder

$\omega{:}= V_\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.

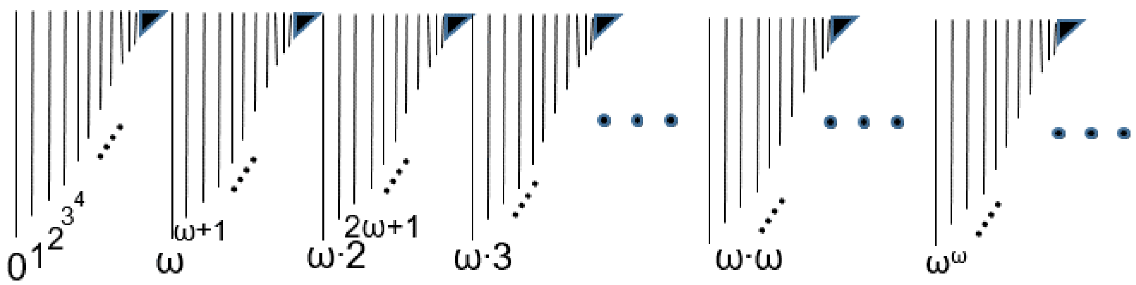


Abb. 49: Ordinalzahlen von 0 bis $\omega^{\omega+\cdots}$ (lineare Darstellung)

Sind a und b zwei Ordinalzahlen, so ist a<b, wenn a Element von b ist. Damit existiert eine Ordnungsrelation, unabhängig ob die Ordinalzahl natürlich oder transfinit ist.
Generell gilt der Grundsatz:

Will man eine Menge zählen, muss man ihre
Elemente so ordnen, dass man sie zählen kann.

[146] Quelle der Grafik Abb. 50 https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Omega-exp-omega-labeled.svg

Hinweis: Die Menge der natürlichen Zahlen besitzt die Kardinalzahl $\aleph_0$. Die Ordinalzahlen sind alle abzählbar und gleichmächtig, denn sie stellen Positionsangaben dar. Damit ist $\aleph_0$ auch die Kardinalzahl aller Zahlen bis ω und zugleich aller Zahlen bis ω^ω. Es wäre ein Fehlschluss zu behaupten, dass ω^ω die Mächtigkeit $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ hat, weil ω^ω „mehr“ Elemente als z.B. ω enthält. ω enthält nämlich genauso viel Elemente als ω^ω. $2^{\aleph_0}$ dagegen ist eine viel mächtigere Menge. Bertrand Russell schreibt:

„In dieser Theorie [Unendliche Mengen] ist es notwendig, Kardinal- und Ordinalzahlen getrennt zu behandeln, denn sie unterscheiden sich sehr viel mehr in ihren Eigenschaften, wenn sie transfinit sind, als wenn sie endlich sind.“[147]

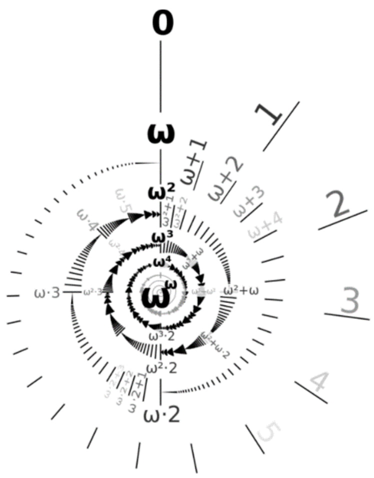


Abb. 50: Ordinalzahlen von 0 bis ω^ω (spiralförmig).

Allerdings zeigt ein Beispiel erneut (1+ω=ω und nicht ω+1), dass man bei Überspringen der Grenze zum Unendlichen in der Reihenfolge vorsichtig sein muss. Dagegen kann man z.B. ω+3 bilden. Dies gilt auch für Produkte, da

$\omega \cdot \omega^\omega = \omega^1 \cdot \omega^\omega = \omega^{1+\omega} = \omega^\omega$

Der Vergleich mit endlicher Arithmetik zeigt sich am besten bei den Gruppeneigenschaften. Die Gegenbeispiele zeigen, die Addition und die Multiplikation ist nicht kommutativ.[148] Die Addition ist assoziativ, denn $(\rho + \sigma) + \tau = \rho + (\sigma + \tau)$.

Allerdings können beim Überspringen der Unendlichkeitsgrenze unerwartete Ergebnisse entstehen.

Für die Multiplikation gilt eines der Distributivgesetze $\rho(\sigma + \tau) = \rho\sigma + \rho\tau$.

Das neutrale Element der Addition ist 0 und der Multiplikation ist 1.

Es fehlen aber inverse Elemente, da negative Ordinalzahlen nicht definiert sind. Damit bilden die Ordinalzahlen keine Gruppe (und erst recht höher strukturierte algebraische Strukturen). Eine Ordinalzahlarithmetik oder transfinite Arithmetik ist nur und ausschließlich dann, wenn man die Besonderheiten des Unendlichen berücksichtigt, mit den Operationen, die sich auf natürliche Zahlen (als Ordinalzahlen) beziehen, vergleichbar. Aber wegen „unendlich“ muss man sich enorm vor „Denkfehlern“ hüten, weil sonst selbstverständliche und elementare Rechenoperationen anders verlaufen. Die Ordnungsrelation ist natürlich das „<“-Zeichen. Addiert man etwa ω+ω, so muss man die Elemente so

[147] Zitiert nach David Foster Wallace; Die Entdeckung des Unendlichen, ebd. S. 247

[148] Der Einfachheit halber wurden die „normalen“ Rechenzeichen verwendet. Man muss aber die besonderen Rechenregeln bei unendlichen Ordinalzahlen beachten.

umgruppieren, dass die Mengen disjunkt sind und sich mit der Ordnungsrelation „<“ eindeutig anordnen lassen.

Z.B. $\omega+\omega=\mathrm{ord}\,(\{0 < 1 < 2 < 3 < \ldots < 0_{(0)} < 1_{(0)} < 2_{(0)} < 3_{(0)} \ \ldots\})$.

Die Menge ist wohlgeordnet und hat mit 0 und $0_{(0)}$ lediglich zwei Elemente mit keinem Vorgänger. Man nennt sie ordnungsisomorph zur Ordinalzahl $\omega+\omega$. Wie bereits betont: Durch die Abzählbarkeit ist die Mächtigkeit immer $\aleph_0$.

Die Besonderheiten der nicht geltenden Kommutativität zeigen sich deutlich in streng formalen Darstellungen. Dabei wird gemäß der Reihenfolge der Multiplikanden beginnend bei $0_{(0)}$ nummeriert und bei endlichen Zahlen mal einer transfiniten Zahl die endliche Ordinalzahlfolge umbenannt.

Ordinalzahl $\omega\cdot 2$: $\{0_{(0)} < 1_{(0)} < 2_{(0)} < \ldots < 0_{(1)} < 1_{(1)} < 2_{(1)} < \ldots\}$, das ist $\omega+\omega$

Ordinalzahl $2\cdot\omega$: $\{0_{(0)} < 1_{(0)} < 0_{(1)} < 1_{(1)} < 2_{(1)} < \ldots\}$, dies können wir umbenennen

zu $\{0_{(1)} < 1_{(1)} < 2_{(1)} < \ldots\}$, das ist ω.[149]

Etwas anders sieht es beim Vergleich von Mächtigkeiten, insbesondere unendlicher Mengen aus, die sich in einer Kardinalzahlarithmetik manifestieren müssen. Darauf wird einzugehen sein, wenn die wichtigsten Axiome der Mengenlehre angesprochen sind.

Cantor selbst war von mehreren seiner eigenen Ergebnisse überrascht. Er konnte z.B. unwiderlegbar zeigen, dass die Punkte einer Strecke die gleiche Mächtigkeit wie z.B. die Punkte einer Fläche haben.[150] Das gilt darüber hinaus für jeden n-dimensionalen Raum. Es berührt den Dimensionsbegriff; die Abbildung ist übrigens nicht stetig.

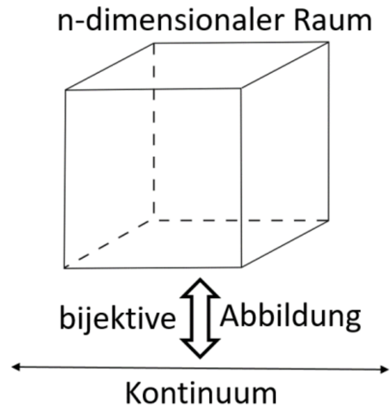


Abb. 51: Die reellen Zahlen haben die gleiche Mächtigkeit wie jede n-dimensionale Punktmenge. Das schließt die komplexen Zahlen ein

In einem Brief an Dedekind vom 29. Juni 1877[151] schrieb er: „*je le vois, mais je ne crois pas*“ („*Ich sehe es wohl, aber ich glaube es nicht.*“)[152]

[149] Der Passus über Ordinalzahlarithmetik orientiert sich stark an de.wikipedia.org/wiki/Transfinite_Arithmetik
[150] Siehe die bereits in Abb. 31 zitierte Abhandlung von G. Cantor „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“, in den Gesammelten Abhandlungen, S 122 f
[151] Zitiert nach Wußing, 6000 Jahre Mathematik, Band 2, S. 386
[152] Die eigene Grafik bezieht sich auf die in Abb. 51 angesprochene Abhandlung, ebenso Abb. 41, 51, 55 und 56.

Zermelo-Fraenkel Mengenlehre und darüber hinaus

In der Infinitesimalrechnung haben Newton und Leibniz das „unendlich Kleine" lange nach Archimedes wiederentdeckt. Newton war in der physikalischen Anwendung epochal erfolgreich; Leibniz hatte die bessere Notation gefunden. Einige Generationen an Mathematikern war nötig, um die neue Wissenschaft der Analysis von unschönen Widersprüchlichkeiten zu befreien. Dies gelang Cauchy und abschließend Weierstraß. Daneben wurden unendliche Folgen, Reihen, Integrale und Produkte selbstverständliche und mathematisch fruchtbare Untersuchungsobjekte. Erst Bolzano wagte sich auch zaghaft an unendliche Mengen. Georg Cantor fand schließlich erstaunliche Ergebnisse in fast allen Aspekten der Unendlichkeit. Doch die Kontinuumshypothese machte ihm schwer zu schaffen, mehrmals glaubte er vergeblich an einen Durchbruch. Und es fehlte insgesamt an einem axiomatischen Ansatz, um die Mengenlehre auf ein solides Fundament zu stellen. Dies leistete der deutsche Mathematiker Ernst Zermelo (1871-1953) im Jahr 1907 und stark ergänzend der deutsch-israelische Mathematiker Abraham Fraenkel (1891-1965) im Jahr 1921. Beiträge kamen auch von dem Norweger Thoralf Skolem (1887-1963). Ihre Axiome sind heute die Basis für eine mengentheoretisch begründete Mathematik.[153] Nach ihren Initialen wird sie ZF genannt. Um es deutlich zu sagen: In ZF sind Mengen nur und ausschließlich die einzigen Objekte. ZF wird in der Prädikatenlogik (1. Stufe) formuliert, die nur logische Zeichen enthält. Ausnahme ist das Elementzeichen $\in$. Dies ist die formale „Grundsprache", die bei Bedarf ergänzt werden kann (je nach Disziplin, z.B. der Gruppentheorie). Dazu kommen die eigentlichen Axiome und Ableitungsregeln. Diese formale Sprache wird in der täglichen Praxis nur in Ausnahmefällen verwendet, aber sie kann im Prinzip wie eine Programmiersprache verwendet werden um einen Beweis zu verifizieren oder zu falsifizieren. Ohne zu sehr in den mathematischen Formalismus einzugehen, kann man die Axiome auch in einer leichter verständlichen Sprache formulieren:[154] Die folgende Liste reduziert sie auf Schlagworte[155]:

Axiom 1: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. (Extensionalitätsaxiom)

Axiom 2: Es gibt eine Menge ohne Elemente, genannt die leere Menge (Leermengenaxiom)

[153] Eine Gruppe vorwiegend französischer Mathematiker arbeitete seit 1934 an einer axiomatischen Formulierung der Mathematik auf Basis der Mengenlehre. Sie gab sich das Pseudonym Nicolas Bourbaki.
[154] Ausführlicher erläutert siehe Stillwell, John; Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, Springer Spektrum, Heidelberg, 2014, S. 29 f
[155] Wörtlich aus https://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre

Axiom 3: Zu beliebigen Mengen X und Y gibt es eine Menge, deren einzige Elemente X und Y sind, ungeordnetes Paar (Paarmengenaxiom)

Axiom 4: Zu jeder Menge X gibt es eine Menge, deren Elemente die Elemente der Elemente von X sind (Vereinigungsaxiom)

Axiom 5: Es gibt eine Menge A, die die leere Menge und mit jedem Element X auch die Menge X∪{X} enthält (Unendlichkeitsaxiom)

Axiom 6: Für jede Menge A gibt es eine Menge ℘, deren Elemente genau die Teilmengen von A sind. (Potenzmengenaxiom)

Axiom 7: Jede nichtleere Menge A enthält ein Element B, so dass A und B disjunkt sind (Fundierungsaxiom)

Axiom 8: Hier handelt es sich um ein Axiomenschema mit je einem Axiom zu jedem Prädikat P: Zu jeder Menge A existiert eine Teilmenge B von A, die genau die Elemente C von A enthält, für die P(C) wahr ist. Aus dem Extensionalitätsaxiom ergibt sich sofort, dass es genau eine solche Menge gibt. Diese wird mit {C∈A\P(C)} notiert. (Aussondierungsaxiom).

Axiom 9: Ist A eine Menge und wird jedes Element von A eindeutig durch eine beliebige Menge ersetzt, so geht A in eine Menge über. (Für jede Funktion f und Menge X bilden die Werte eine Bildmenge) (Ersetzungsaxiom)

Plus ggfs. Axiom 10: Auswahlaxiom → ZF wird zu ZFC

Hier einige Bemerkungen und Beispiele zu den Axiomen ab Axiom 1:

Extensionalitätsaxiom, sagt einfach, dass Mengen nur über ihre Elemente definiert werden und über sonst nichts. Gleiche Mengen haben gleiche Elemente, aber auch umgekehrt, wenn die Elemente übereinstimmen, sind die Mengen gleich.

Leermengenaxiom heißt, es gibt nicht eine leere Menge, sondern die leere Menge.

Das Paarmengenaxiom wird z.B. gebraucht um in der von Neumann Definition die natürlichen Zahlen axiomatisch begründen zu können. So ist 2={Ø, {Ø}}.

Mengen kann man vereinigen und davon Schnittmenge oder kartesisches Produkt ableiten.

Die Menge aller Teilmengen ist die Potenzmenge. Teilmengen sind auch die Menge selbst und die leere Menge. Damit kann man eine unendliche Hierarchie von unendlichen Mengen aufbauen.

Das Unendlichkeitsaxiom sagt, dass sozusagen der Nachfolger + 1 auch in der Menge enthalten ist. Darauf beruht die Induktion.

Das Aussonderungsaxiom, engl. restricted comprehension genannt, verhindert Russell´sche Antinomien.

Das Ersetzungsaxiom fehlte ursprünglich bei Zermelo. Es wurde von Fraenkel (und Skolem) vorgeschlagen. Z.B. ist es damit nur möglich, ω+ω zu bilden.
Das Fundierungsaxiom (auch Regularitätsaxiom) verhindert zyklische Ketten von Elementen, also Ketten der Form $x_1 \in x_2 \in x_3 \in \ldots \in x_n \in x_1$. Es wurde 1925 von John von Neumann vorgeschlagen und 1930 in ZF aufgenommen.

Es fehlt noch das optionale und berüchtigte Auswahlaxiom.[156] In den Worten von David Hilbert: [Es ist] *das bisher in der mathematischen Literatur am meisten angefochtene Axiom*.[157] Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese sind immer noch umstritten bzw. Gegenstand der Forschung (in Verbindung mit Erweiterungen von ZF).
ZF ist durchaus hochgeachtet, hat aber einen Makel: Die Kontinuumshypothese ist in ZF unentscheidbar. Kurt Gödel bewies 1938, dass die Mengenlehre konsistent bleibt, wenn man ihr das Axiom hinzufügt, dass die Kontinuumshypothese wahr ist. 1963 bewies Paul Cohen (1934-2007), dass die Mengenlehre konsistent bleibt, wenn das Axiom hinzugefügt wird, die Kontinuumshypothese sei falsch. Er entwickelte dazu eine sehr erfolgreiche Standardbeweismethode namens „forcing". Für seine Leistungen wurde Cohen mit der Fields-Medaille ausgezeichnet. Um den Begriff „konsistent" zu präzisieren, soll hier Paul Cohen zitiert werden:
Sicher kann ein Modell der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre – also eine Menge mit einer bestimmten Enthaltensein (∈) Relation – nicht innerhalb der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre gezeigt werden. Dieses impliziert die Konsistenz der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre und das verletzt das Unvollständigkeits-theorem[158] [gemeint ist der 2. Unvollständigkeitssatz von Kurt Gödel].
ZF kann aber sinnvoll durch das sogenannte Auswahlaxiom erweitert werden („C" wie choice) und wird dann zu ZFC: Ist A eine Menge von paarweise disjunkten, nichtleeren Mengen, so existiert eine Menge, die aus jedem Element von A genau ein Element enthält. Das Auswahlaxiom postuliert also, dass zu jeder Menge von nichtleeren Mengen eine Auswahlfunktion existiert.

Streng genommen hat erst Gödel 1937 bewiesen, dass Hinzunahme des Auswahlaxioms keinen Widerspruch erzeugt; 1963 hat Paul Cohen gezeigt, dass auch die gegenteilige Aussage nicht zu Widersprüchlichkeit führt.
Allerdings sagt es nur die Existenz voraus und gibt keinen Hinweis, wie man die Abbildung F konstruieren kann und erst recht nicht, wie man alle dazu prädestinierten Abbildungen finden kann. Das Auswahlaxiom erinnert etwas an

[156] Siehe Wikipedia-Definition, https://de.wikipedia.org/wiki/Auswahlaxiom
[157] David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933, Hsgr. William Ewald, Wilfried Sieg, Springer Berlin Heidelberg, 2013, S. 754
[158] Paul Cohen; Wie ich „Forcing" entdeckte, e-enterprise, S. 48. Vortrag auf der „Second Honolulu Conference on Abelian Groups and Modules" vom 25.07.-01.08.2001 (Manoa Campus, University of Hawaii)

das Euklid´sche Parallelenaxiom. Wenn man es weglässt, ergibt sich eine andere, nicht euklidische Geometrie.

Einige Mathematiker lehnen das Axiom ab, vor allem, weil sich daraus die starke Aussage ableiten lässt, dass sich jede Menge „wohlordnen“ lässt.[159] D.h. wenn das Axiom gelten soll, so gilt eine „Kleiner- bzw. Größer-Beziehung“ oder ein analoges Kriterium (mächtiger/weniger mächtig, usw.):

1) Für $a,b \in A$ gilt $a<b$ oder $a>b$ oder $a=b$
2) Für $a<b$ und $b<c$ gilt $a<c$ (Transitivität)
3) Jede nicht-leere Teilmenge von A enthält ein kleinstes Element

Das Auswahlaxiom ist nicht das einzige Axiom, das ZF ergänzen kann, ohne offenbar Widersprüche befürchten zu müssen. Eine Liste von Sätzen, die äquivalent zu Auswahlaxiom und Wohlordnungssatz sind, siehe z.B. [160]

Zwei wichtige äquivalente Sätze seien hier genannt: Das Auswahlaxiom impliziert, dass unendliche Produkte von kompakten Mengen[161] wieder kompakt sind und dass unendlich dimensionale Vektorräume eine Basis besitzen.

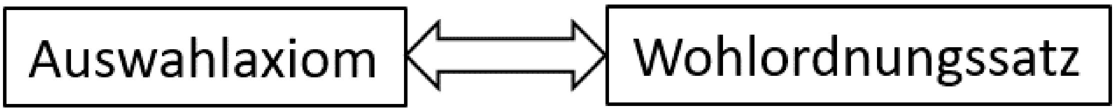


Abb. 52: Auswahlaxiom und Wohlordnungssatz sind äquivalent.
Das gilt für eine ganze Fülle von zentralen Sätzen aus unterschiedlichsten Gebieten der Mathematik.

Für die (fast unfassbar) großen Kardinalzahlen kann man naheliegende und plausible Axiome dazu fügen, die praktisch in einer Hierarchie liegen – eines bedingt das Vorhergehende. Sonst würde man die Mengen nach oben beschränken. Sie stellen offenbar die natürliche Erweiterung von ZF dar. Es sind Teilerfolge damit erzielt worden, die Kontinuumshypothese damit zu beweisen. So kann man Teilmengen von $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{N}$ abbilden, was in ZF nicht möglich war.[162]

Keine Widersprüche heißt nicht, keine „Paradoxien“. Banach und Tarski zeigten 1924 mit dem Auswahlaxiom, dass die Einheitskugel in endlich viele Mengen zerlegt werden kann, die, anders zusammengesetzt, zwei ganze Kugeln wieder massiv ausfüllen. „Inhalt“ im mathematischen Sinne ist lediglich eine Funktion,

---

[159] Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe), Mathematische Annalen / Zeitschriftenband (1904), S. 514 – 516, http://www.digizeitschriften.de/dms/resolveppn/?PID=GDZPPN002260018
[160] https://de.wikipedia.org/wiki/Auswahlaxiom
[161] Eine kompakte Menge muss abgeschlossen und beschränkt sein.
[162] Spektrum der Wissenschaft Spezial, Das Unendliche, S. 20, ebenso Einheitskugel

die Punktmengen eine positive reelle Zahl≥ 0 oder auch unendlich zuordnet. Die fraktalen (allerdings nur euklidisch 2-dimensionalen) Beispiele, wie Cantor-Staub, die Koch-Schneeflocke oder das Sierpinski-Dreieck u.a. lassen die Bandbreite erahnen. Insbesondere Punktmengen im Raum ($\mathbb{R}^3$ oder höher dimensional) können sich durchaus von der physikalischen Realität unterscheiden.

Das Forcing von Cohen kann man auch auf andere mathematische Aussagen aus bemerkenswert unterschiedlichen Gebieten anwenden (Whitehead-Vermutung aus der Gruppentheorie, Kaplansky-Vermutung aus der Analysis, Suslin-Hypothese der Kombinatorik oder die Borel-Vermutung der Maßtheorie).[163] Auch diese Probleme sind nicht entscheidbar im Rahmen der ZFC-Mengenlehre. Beide Ergebnisse von Gödel und Cohen passen eigentlich gut zu den Gödel´schen Unbestimmtheitssätzen (bzw. Unvollständigkeitssätzen). Ob zwischen der Abzählbarkeit der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit des Kontinuums noch etwas „dazwischen passt" oder nicht kann eben unbestimmt sein.[164] Das ist aber auch angesichts der anderen Aussagen unbefriedigend. Das mächtige Forcing wird plötzlich selbst zum Problem.

Ein möglicher Lösungsweg ist die Strategie, die überabzählbar große Potenzmenge einer abzählbaren Menge, die der Mächtigkeit des Kontinuums entspricht, einzugrenzen. Das gelingt mit „konstruierbaren Teilmengen" bei den natürlichen Zahlen, allerdings sind diese ebenfalls abzählbar, weil die Konstruktion unendlicher Mengen nur über eine Formel gelingen kann, von denen es nur abzählbar viele bei $\mathbb{N}$ geben kann. Um die Kernfrage in Verbindung mit der Kontinuumshypothese angehen zu können, benötigt man große Kardinalzahlen und deshalb zusätzliche Axiome ergänzend zu ZFC. ZFC genügt nicht, um ihre Existenz zu beweisen. Bei der Untersuchung stellte sich heraus, dass sich diese so gewonnenen Kardinalzahlen ordnen lassen. Das

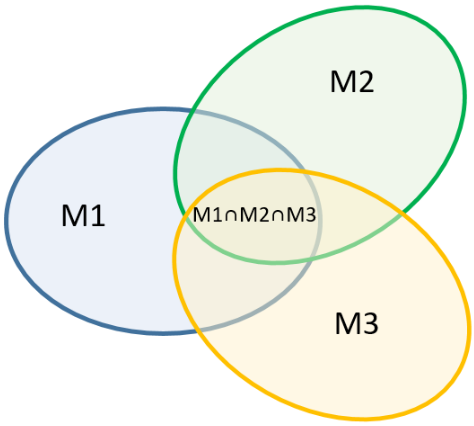


Abb. 53: Zermelo-Fraenkel-Axiome ZF - Eine wichtige axiomatische Grundlage für eine Mengenlehre

[163] Jean-Paul Delahaye, in Spektrum der Wissenschaft, 2/21, S. 13-20

[164] Es gibt auch andere prominente Aussagen in der Mathematik, die unentscheidbar sind: Ob die Existenz einer Basis für Vektorräume notwendig ist ist (in ZF) unentscheidbar, (in ZFC wohl).

ist bei unendlichen Zahlen nicht selbstverständlich und brachte im wahrsten Sinn des Wortes mehr Ordnung in die Problematik. Zwei weitere Schritte machte Hugh Woodin erst 2010, als er eine wichtige Kompatibilität unter Kardinalzahlen bewies. Ein 2. Schritt folgte 2015, wo das mächtige, aber problematische Forcing eingegrenzt wurde.

Ein etwas genauerer Blick auf Kardinalitäten

Die Mächtigkeit einer beliebigen Menge M wird mit |M| abgekürzt. Wie oben dargestellt, wird die Mächtigkeit (oder Kardinalität) der natürlichen Zahlen und der jeder abzählbar unendlichen Menge mit $\aleph_0$ bezeichnet, also $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.
Die nächste Mächtigkeit, die es auf jeden Fall gibt, wäre dann die Mächtigkeit der Potenzmenge der natürlichen Zahlen als Menge aller ihrer Teilmengen

$$|\wp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$$

Es gilt heute beweisbar:

$$|\wp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|$$[165]

Die Mächtigkeit des Kontinuums $|\mathbb{R}|$ wurde von Cantor mit c bezeichnet.

Es gilt $$\aleph_0 < \aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$$

Also nach $\aleph_0$ ist die nächstgrößere Kardinalzahl $\aleph_1$.

Die von Cantor aufgestellte (einfache) Kontinuumshypothese, die er versucht hat zu beweisen, besagt

$$|\wp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Zermelo weist bedauernd in einer Anmerkung zu Cantors gesammelten Abhandlungen darauf hin, dass Cantor die Untersuchung von Kardinalzahlen nur bis $\aleph_1$ fortsetzen konnte.[166] Die moderne Form ist allgemeiner (Abb. 54).

Es ist sinnvoll, sich Beispiele anzusehen, die die Mächtigkeit $2^{\aleph_0}$ haben, also gemäß der Cantor-Kontinuumshypothese die Kardinalität des Kontinuums haben.

Diese Mengen sind z.B.:
$\mathbb{R}$, die Menge aller reellen Zahlen
$\mathbb{C}$, die Menge aller komplexen Zahlen
(0,1), die Menge aller reellen Zahlen zwischen Null und Eins
$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, die Menge aller irrationalen Zahlen

---

[165] Zum Beweis siehe www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=mengenlehre1_9_74
[166] Kommentar von Ernst Zermelo in Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zermelo, Springer, Berlin, 1932, S. 352 f

$\mathbb{R}\backslash\mathbb{A}$, die Menge aller transzendenten reellen Zahlen
$\mathbb{C}\backslash\mathbb{A}$, die Menge aller transzendenten komplexen Zahlen
$\wp(\mathbb{N})$, die Potenzmenge von $\mathbb{N}$
$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Funktionen mit Definitionsbereich $\mathbb{N}$ und Zielbereich $\{0,1\}$
$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, die Menge aller Folgen von natürlichen Zahlen
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, die Menge aller Folgen von reellen Zahlen
$\{f: \mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, die Menge aller stetigen Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$
$^*\mathbb{R}$, die Menge der hyperreellen Zahlen; sie erweitert die reellen Zahlen um infinitesimal benachbarte Zahlen sowie um unendlich große (infinite) Zahlen.
Punktmengen, wie die Cantor-Menge und ihre Verallgemeinerungen.

$$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$$

Abb. 54: Die Kontinuums-hypothese in moderner Form

Es gibt also erwiesenermaßen Mengen unterschiedlicher Mächtigkeit, denen man unterschiedliche „Werte“ zuordnen kann. Im Gegensatz zu Ordinalzahlen, die mit transfiniter Induktion fortgesetzt werden können, geht es bei dem Vergleich von Mächtigkeiten um Mengen. Das Auswahlaxiom ermöglicht es, dass man zu jeder Menge X eine zu ihr gleichmächtige Ordinalzahl finden kann. Wegen deren Wohlordnung gibt es auch eine kleinste solche Ordinalzahl, die man die Kardinalität oder Mächtigkeit der Menge nennt und bekanntlich mit |X| bezeichnet. Die die Mächtigkeit bezeichnenden Ordinalzahlen heißen dann Kardinalzahlen. Man erinnere sich an die „Eselsbrücke“ Aufzählen - Abzählen. Man benötigt also Ordinalzahlen zum wohlgeordneten Auf-zählen und nennt die gefundene Zahl dann Kardinalzahl. Sie hat einen ganz anderen Bezug, denn sie charakterisiert die Mächtigkeit der Menge beliebiger Elemente, die damit abgezählt wurde.

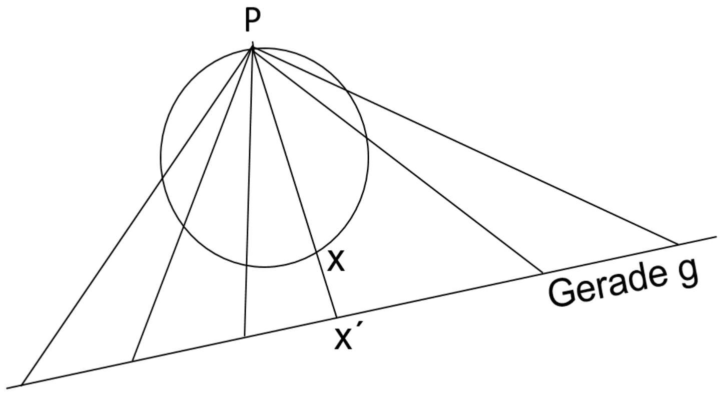


Abb. 55: Bijektive Abbildung - Auf einer Geraden liegen ebenso viele Punkte ($\aleph_1$) wie auf einem Kreis.

Auch auf den Kardinalzahlen kann man eine Arithmetik etablieren, muss dabei aber immer über den Mengenbegriff gehen. Addition und Multiplikation definiert man folgendermaßen:

Um zwei Kardinalzahlen κ und λ zu addieren, finde man zwei disjunkte, zu ihnen gleichmächtige Mengen K und L und definiere $\kappa + \lambda := |K \cup L|$ als Mächtigkeit ihrer disjunkten Vereinigung.

Für die Multiplikation soll $\kappa \cdot \lambda := |K \times L|$, also der Mächtigkeit des kartesischen

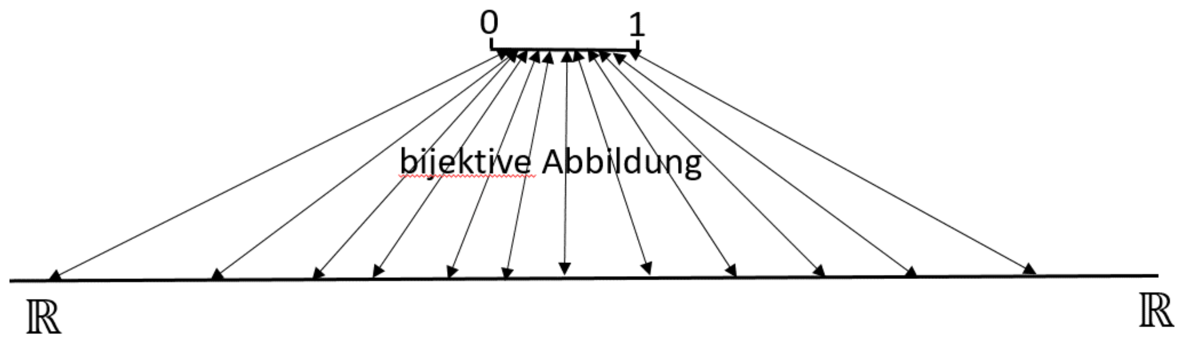


Abb. 56: Auch zwischen zwei Mächtigkeiten der Kardinalität $\aleph_1$ gibt es eine bijektive Abbildung. (Beispiel: Zwischen ℝ und dem Intervall (0,1))

Produktes.

Für die Potenzierung soll $\kappa^\lambda := |K^L|$ gelten, also der Mächtigkeit aller Funktionen von L nach K.

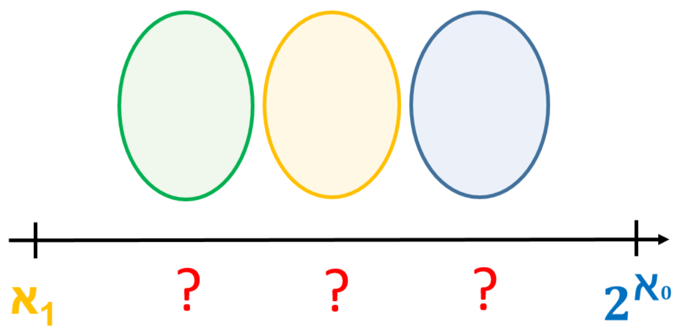


Abb.:57: Kann es Mengen unterschiedlicher Mächtigkeit / Kardinalität zwischen $\aleph_1$ und $2^{\aleph_0}$ geben?

Man kann beweisen, dass die Definitionen unabhängig von der Wahl der Mengen K und L sind. Während Addition und Multiplikation eher unproblematisch sind, ist bei der Potenzierung allein schon die Fragestellung, ob die Kontinuumshypothese gilt, interessant:

$2^{\aleph_0} = \aleph_1$?

Sie lässt sich, wie beschrieben, innerhalb ZFC nicht entscheiden. Es sind also Erweiterungen der Axiome nötig, um eine Kardinalzahlarithmetik auch für die Potenzierung zu etablieren.[167]

[167] Für einen kurzen weitergehenden Abriss siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Kardinalzahlarithmetik

Mit entsprechenden Zusatzannahmen zu ZFC gibt es eine Reihe von interessanten Ergebnissen. Die Forschung zu unendlichen Mengen und ihrer Kardinalität geht weiter.[168,169]

Unendlich in physikalischen Theorien

Abb. 58: Unendliche Spiegelungen einer Kerze zwischen zwei Spiegeln.
Mit freundlicher Genehmigung Natalie Amecke, Dr. Holger Hofmann, www.experimentis.de

Unendliche Werte sind in physikalischen Theorien keine Seltenheit, aber in der Natur sind sie schwer vorstellbar. Meist zeigen sie, dass eine Theorie nicht vollständig ist bzw. dass eine Theorie vereinfachende Annahmen macht. Das ist vollkommen legitim, um sich auf einen bestimmten Bereich konzentrieren zu können. So nimmt man in der Hydrodynamik der Einfachheit halber an, dass eine Flüssigkeit wie Wasser nicht aus einzelnen Molekülen besteht, sondern zusammenhängend ist. Anderenfalls wäre eine praktikable Beschreibung kaum möglich; man würde sich verzetteln. Doch an der Spitze des Tropfens ist eine solche vereinfachende Annahme nicht mehr sinnvoll. Im Rahmen der Theorie entstehen dort unendliche Werte.
Auch eine so scheinbar vollkommene Theorie, wie die Allgemeine Relativitätstheorie, sieht in unendlichen Werten sozusagen ihre eigenen Grenzen. Diese entstehen formal im Inneren von Schwarzen Löchern. Gemäß der Theorie müsste dort die Dichte unendlich groß werden. Dies ist in der Natur nicht vorstellbar.

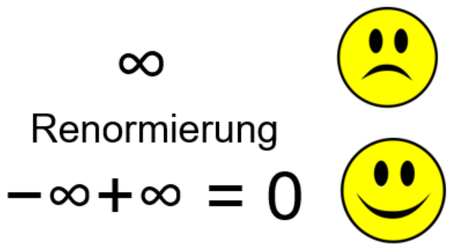


Abb. 59: Renormierung, mathematisch fragwürdig, physikalisch oft erfolgreich

In der äußerst erfolgreichen Theorie der Quantenelektrodynamik (QED) tauchten unendliche Werte auf. Durch einen eigentlich in der Mathematik unzulässigen „Trick" ließen sich diese Unendlichkeiten „wegkürzen". Man nennt den Vorgang Renormierung. Leider funktioniert er nicht bei weitergehenden

[168] Ordnung in den Unendlichkeiten, Jakob Kellner und Martin Goldstern, Spektrum der Wissenschaft 3/21, S. 74-82
[169] https://www.spektrum.de/news/gibt-es-ordnung-unter-den-unendlichkeiten/1667584

Theorien, wie Versuche, zu einer Theorie der Quantengravitation zu kommen.[170]
Schwieriger ist der Sachverhalt in der Kosmologie zu bewerten. Hier haben mathematische Erkenntnisse in Grenzbereichen weitreichende Konsequenzen für die Einschätzung des kompletten Lebenszyklusses unseres Universums. Ein Beispiel ist das Ergebnis von Edwin Hubble, dass sich Galaxien voneinander entfernen und damit offenbar sich das Universum ausdehnt. Stephen Hawking schreibt:

„Hubbles Beobachtungen legen die Vermutung nahe, dass das Universum zu einem bestimmten Zeitpunkt, Urknall genannt, unendlich klein und unendlich dicht gewesen ist. Unter solchen Bedingungen würden alle Naturgesetze ihre Geltung verlieren, und damit wäre auch keine Voraussage über die Zukunft mehr möglich.“[171]

Bisher ist noch keine Lösung in Sicht.

In einem Lehrgedicht des Anaximander heißt es
„*Anfang und Ende der seienden Dinge ist das Apeiron*“.

Ist das Universum „unendlich groß“? Offenbar können wir die Frage noch nicht beantworten. Viel spricht dafür, dass es keine Grenze hat. Das kann aber bedeuten, dass es eine sogenannte 3D-Sphäre ist. Ähnlich wie die Erdoberfläche endlich, aber unbegrenzt ist, weil die Erde topologisch eine 2D-Sphäre ist, kann unter Einbeziehung einer 4. räumlichen Dimension das Universum endlich aber unbegrenzt sein.

Der Arzt Wilhelm Olbers hat 1826 ein Paradoxon veröffentlicht, das auch vorher Kepler und Halley aufgefallen war. Bei einem unendlichen Universum müsste der Nachthimmel gleißend hell sein, weil in jeder Richtung das Auge auf einen Stern trifft. Nach heutigem Wissensstand ist das Universum zumindest durch die Rotverschiebung/Expansion des Raumes und durch die Lichtgeschwindigkeit zeitlich begrenzt. Das limitiert das sogenannte Hubble-Volumen im Radius auf 46 Milliarden Lichtjahre und enthält etwa 100 Milliarden Galaxien. Diese Anzahl ist zu wenig, um den Nachthimmel hell zu machen.[172]

Doch wie ist es mit dem „unendlich Kleinen“ in der Natur?

Die uns bekannte Materie besteht aus Atomen. Schon zum Ende des 19. Jahrhunderts zeichnete sich ab, dass jedes Atom einen schweren Kern besitzt und von leichten Elektronen umgeben ist. Bald konnte man die Masse von

---

[170] Grafik selbst erstellt nach https://www.spektrum.de/lexikon/astronomie/renormierung/404
[171] Stephen Hawking, Eine kurze Geschichte der Zeit, zit. Nach C. Seife, S. 223
[172] Online https://archive.org/details/wilhelmolberssei00olbeuoft/page/n21/mode/2up?view=theater; Über die Durchsichtigkeit des Weltraums, 1826, S. 133

Elektronen bestimmen, die nicht Null ist. Aber bis heute müssen wir die (freien) Elektronen als punktförmige Teilchen (oder als Wellen) betrachten. Man kann weder eine Substruktur erkennen noch eine Ausdehnung. Beschießt man mit Elektronen z.B. Heliumatomkerne $({}_{2}^{4}He)$, so lässt sich eine Substruktur der Atomkerne identifizieren. Jeder Kern besteht aus zwei positiv geladenen Protonen und zwei neutralen Neutronen. Freie Neutronen sind instabil mit einer mittleren Lebensdauer von 887,7 ± 2,3 s[173] und auch in radioaktiven Elementen und damit Substanzen kann die schwache Kernkraft zum Zerfall führen. Ein Protonenzerfall wurde noch nicht nachgewiesen. Bestimmte Theorien fordern ihn zwar und es wird danach gesucht.[174] Es ist also noch offen, ob Protonen eine unendlich lange Lebensdauer haben.
Ein noch energiereicherer Beschuss zeigt bei beiden Teilchentypen ebenfalls eine Substruktur: Die so identifizierten Elementarteilchen erhielten den Namen Quarks bzw. genauer Up-Quark (kurz u) und Down-Quark (d). Das Proton p^+ besteht aus uud, das Neutron n aus udd. Ein d-Quark trägt die Ladung $-\frac{1}{3}$, ein u-Quark $+\frac{2}{3}$. Beide Quarks haben eine deutlich von Null verschiedene Masse, aber es wurde bisher keine Ausdehnung gefunden. Dabei können sie auf fast Lichtgeschwindigkeit beschleunigte Elektronen ablenken.
Der Großteil der Masse eines Protons oder Neutrons steckt in der Bindungsenergie der Quarks. Versucht man ein Quark zu isolieren, so ist der Energieaufwand gemäß Einsteins berühmter Formel zur Äquivalenz von Masse m und Energie E, $E = m \cdot c^2$, größer als der, um neue instabile Elementarteilchen (Mesonen) mit gebundenen Quark-Antiquark-Konstellationen zu erzeugen. Bei hohen Energien, also kleinen typischen Abständen untereinander, verhalten sich Quarks wie freie Teilchen. Bei großen Abständen wird die Bindung immer stärker.
Dieses Verhalten, das im Gegensatz z.B. der elektromagnetischen Kraft oder der schwachen Wechselwirkung steht, nennt man Asymptotische Freiheit. Alle Quarks scheinen ebenfalls punktförmig zu sein. Ähnliches gilt für andere Elementarteilchen aus dem sogenannten Standardmodell der

---

[173] Neuere Messung siehe https://www.weltderphysik.de/gebiet/teilchen/news/2013/neue-messung-der-neutronenlebensdauer/

[174] Trotz intensiver Suche ist bis heute kein Protonenzerfall beobachtet worden. Experimente am Super-Kamiokande Detektor in Japan deuten darauf hin, dass eine „Halbwertzeit“ von > 10^{35} Jahren vorliegt. Die Beobachtung von Neutrinooszillation ist zwar ein Hinweis darauf, dass der Protonenzerfall ein prinzipiell beobachtbarer physikalischer Effekt ist, aber die zugrundeliegenden Theorien sind noch Spekulation. Die Ergebnisse kann man nur bedingt als „Messung“ interpretieren: Hat man eine Menge von 10^{36} Protonen mit einer Zerfallszeit von 10^{36} Jahren, so würde pro Jahr im Schnitt eines dieser Protonen zerfallen.
(Quelle https://www.chemie.de/lexikon/Protonenzerfall.html)
Der Zerfall wird auch für Neutronen vorhergesagt, die im Atomkern gebunden sind.

Teilchenphysik.[175] Insbesondere sind Neutrinos nach der gängigen Interpretation punktförmig, aber die Masse wird nach aktuellen Messungen mit 0,07 bis 0,16 eV/c^2 angegeben.[176] Sie wären damit ca. 100.000 mal leichter als ein Elektron, dürften aber nach dem Standardmodell der Elementarteilchenphysik gar keine Masse haben. Wenn sie massebehaftet sind, sollten sie erst recht Antiteilchen besitzen, wie man es bisher annahm. Doch es verdichten sich Hinweise, dass jedes Neutrino sein eigenes Antiteilchen ist. Dazu zeigten die „fehlenden" Neutrinos von der Sonne, dass sie sich ineinander umwandeln können (Neutrinooszilationen).[177] Das sind eine Fülle von Widersprüchen, die eine scheinbar verschwindende Größe in der Welt der Physik erzeugen.

Es bleibt die offene Frage, ob ein Teilchen mit einer Masse trotzdem keine Ausdehnung haben kann und somit „unendlich klein" ist. Auch die Frage, ob es Teilchen mit beliebig kleiner Masse ungleich Null geben kann, ist noch nicht beantwortet und es wird sogar spekuliert, dass man die Frage nicht beantworten kann; sie also prinzipiell nicht entschieden werden kann. In dieser Allgemeinheit bezeichnet man es als Massenlückenproblem. Die Quantenfeldtheorie scheint voraus zu sagen, dass es eine untere Grenze geben muss. Allerdings fehlen auch dazu die Einflüsse der Gravitation. Aber das Problem ist noch allgemeiner und weist sogar Verbindungen zur reinen Mathematik auf. Es geht um die Anwendung von sogenannten Yang-Mills-Feldern, um Elementarteilchen zu beschreiben. Das Clay-Institut zur Förderung der Mathematik mit Sitz in Peterborough, USA, hat für die Lösung einen Preis von einer Million Dollar ausgelobt. Es ist als eines

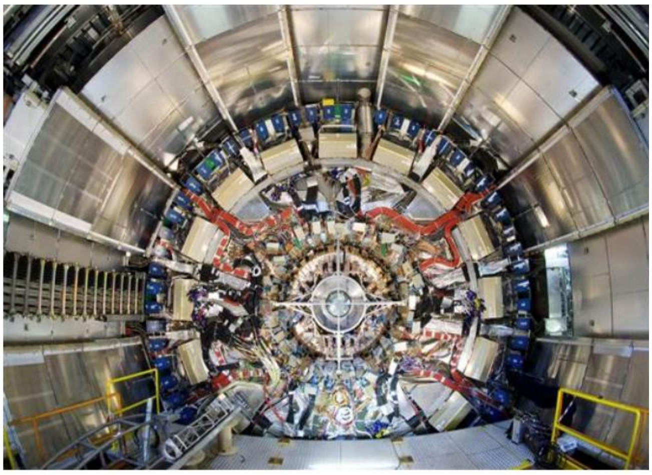


Abb. 60: Kleine Strukturen benötigen große Maschinen: Blick in das Innere des Atlas-Detektors am europäischen Kernforschungszentrum CERN

[175] Bildquelle Abb. 61: https://cds.cern.ch/images/CERN-EX-0705021-03
[176] https://www.mpp.mpg.de/aktuelles/meldungen/detail/der-neutrinomasse-auf-den-fersen, 1 eV/c^2 (Elektronenvolt/Quadrat der Lichtgeschwindigkeit) entspricht einer Masse von 1,8 x 10^{-37} Kilogramm
[177] https://www.weltderphysik.de/gebiet/teilchen/bausteine /neutrinos/neutrinooszillationen/

von sieben Millenium-Problemen eingestuft. Die Website claymath.org weist das Problem immer noch als „unsolved“ aus.[178]

Mathematisch erwiesenermaßen nicht entscheidbar ist das Spektrallückenproblem. Z.B. beim Wasserstoffatom kann man sehr genau das Spektrallinienspektrum beim Übergang des Elektrons vom Grundzustand zu angeregten Zuständen oder auch zwischen angeregten Energieniveaus messen. Die einzelnen Serien sind nach ihren Entdeckern benannt und heißen Balmer, Lyman-, Paschen-, Brackett-, Pfund- und Humphrey-Serie. Dies gilt nicht für alle Materialien. Einen Halbleiter macht gerade die Eigenschaft aus, dass die Spektrallücke sehr klein ist. Die Frage ist, ob es immer eine Differenz ungleich Null zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand geben muss. Drei Mathematiker haben formal exakt bewiesen, dass dieses Spektrallückenproblem unentscheidbar ist.[179,180]

Ebenfalls kleinste Dimensionen treten bei neueren Quantengravitations-theorien auf. Die Gravitation ist bei großen Abständen schwach, die Kopplung wird aber bei kleinsten Abständen im Bereich der Planck-Länge nach bisherigen Theorien ins Unermessliche wachsen. Dies nennt man „Asymptotische Sicherheit“. Auf diesem Prinzip liegt große Hoffnung, um Unendlichkeiten in den neuesten Theorien bändigen zu können.

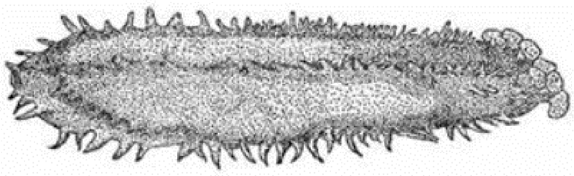


Abb. 61: Unsterbliches Lebewesen: *Stichopus Chloronotus*

Auch in der Biologie findet man Hinweise. Man kennt mehrere scheinbar unsterbliche Lebewesen, d.h. sie sind keinem Alterungsprozess unterworfen und haben somit eine potentiell unendliche Lebenserwartung. Die Abb. 61 zeigt die Seegurke, die aber vielen Gefahren ausgesetzt ist, die einen gewaltsamen Tod wahrscheinlich machen.[181] Andere Beispiele sind Einzeller, einfache Mehrzeller oder wirbellose Seetiere (Echinodermata), wie Seesterne oder Seeigel. Kürzlich wurden Rädertierchen[182] aus Permafrostboden geborgen, die 24.000 Jahre überlebt haben.

---

[178] https://www.claymath.org/millennium-problems/yang-mills-and-mass-gap (Stand 11.07.2021)

[179] Toby S. Cubitt, David Perez-Garcia & Michael M. Wolf; Undecidability of the spectral gap, Nature volume 528, pages207–211 (2015)

[180] https://www.spektrum.de/magazin/unentscheidbare-aussagen-ueber-die-natur/1609516

[181] Bildquelle und weitere Informationen http://unendliches.net/german/ index.htm?ordinalzahlen.htm Suchbegriff Unsterblichkeit

[182] https://www.mdr.de/wissen/eingefroren-jahrtausende-ueberlebt-raedertierchen-100.html

Mathematisch-philosophische Schulen

[183]Cantor, Gödel, Hilbert, Zermelo, Fraenkel, Hausdorff, von Neumann, Dedekind, Frege und viele andere, die genannt oder auch hier nicht genannt werden konnten, haben die Mathematik Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts nicht nur geprägt und erweitert, sondern auch teilweise gespalten. Unbedingt genannt werden muss Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Dabei ist von Auseinandersetzungen nicht nur das Fachgebiet betroffen, sondern es trifft auch oft die jeweiligen Protagonisten als Menschen in ihrem tiefsten Selbstverständnis.

Cantor wurde stark angefeindet, besonders heftig und schonungslos von seinem akademischen Lehrer Leopold Kronecker (1823-1891). Er hat ihn öffentlich „Verführer der Jugend“ und „Scharlatan“ genannt. Auch wenn er depressiv vorbelastet sein mag, so hat Cantor persönlich darunter gelitten und

Es wurde das A.-U. nach *drei* Beziehungen unterschieden: *erstens* sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen, außerweltlichen Sein, *in Deo* realisiert ist, wo ich es *Absolut-unendliches* oder kurzweg *Absolutes* nenne; *zweitens* sofern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten ist; *drittens* sofern es als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken *in abstracto* aufgefaßt werden kann. In den *beiden* letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und *insofern dem Endlichen verwandtes* A.-U. sich darstellt, nenne ich es *Transfinitum* und setze es dem *Absoluten* strengstens entgegen.

Abb. 62: Positionen Georg Cantors zum aktual Unendlichen (A.-U.).

hatte mehrere Nervenzusammenbrüche und nervliche Krisen und starb in einem Sanatorium. Er hat aber auch mit sich selbst bei diesem Thema bis zur Erschöpfung gerungen.[184] Er korrespondierte mit Theologen, setzte sich intensiv mit Aristoteles, Giordano Bruno oder mit Thomas von Aquin auseinander. Er hatte Respekt vor den Einwänden großer Denker gegen das aktual Unendliche über fast zweieinhalb Jahrtausende und kann Aristoteles bedingt verstehen, weil dieser noch nicht über das moderne Wissen verfügte.

Er bemühte sich intensiv, nicht nur die Mathematik darzulegen, sondern auch den Boden philosophisch zu bereiten. Doch immer wieder musste er mit Selbstzweifel und beißender externer Kritik kämpfen. Philosophen warfen ihm

---

[183] Abb. 62, Georg Cantor, Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, Ztschr. F. Philos. U. philos. Kritik, Bd. 91, S.81-125 (1887), Bd. 92, S. 240-265 (1888) in Gesammelte Abhandlungen, ebenda, S. 378

[184] Alberto Jori; Das Unendliche, Books on Demand, Norderstedt 2010, S. 74 f sowie als Originalquelle Georg Cantor; Gesamtausgabe seiner Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zemelo, ebenda, S. 370 ff

vor, er wäre für solche Überlegungen nicht ausgebildet; Mathematiker verspotteten seinen missionarischen Eifer. Alberto Jori beschreibt in der Sprache des Philosophen den Erkenntnisprozess: *Zwischen dem „Infinitum in natura naturans“, nämlich der absoluten Unendlichkeit Gottes einerseits und dem Infinitum in natura naturata“, d.h. dem Transfinitum sowohl „in concreto“ als auch „in abstracto“ andererseits, gibt es einen grundsätzlichen Unterschied.*[185] Dieses Spannungsfeld machte Forschung zur „Unendlichkeit“ für den bekennenden Gläubigen Cantor zu einer Herkules-Aufgabe.

Kurt Gödel war zeitlebens kränklich und sehr introvertiert. Doch dann wurden Anlagen, die offenbar bis zur Kindheit zurückgehen, zur Depression. Seine Frau, die sich um ihn fürsorglich gekümmert hatte, musste nach einem Schlaganfall einen längeren Krankenhausaufenthalt über sich ergehen lassen. Nach ihrer Rückkehr im Rollstuhl ließ sie ihren Mann wegen hochgradiger Unterernährung sofort einweisen. Er verhungerte schließlich aus unbegründeter Angst vergiftet zu werden.

David Hilbert hatte ungeheure Erfolge in vielen Gebieten der Mathematik und schuf in Göttingen in den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts einen mathematischen „Nabel der Welt“ ohne den die neu entstehende Quantenmechanik in diesem kurzen Zeitraum kaum möglich gewesen wäre. Er war wichtigster Unterstützer von Cantor. Aber seinen Lebenstraum, die vollständige Axiomatisierung der Mathematik, musste er aufgeben. Die Trauergemeinde für den größten Mathematiker zu Beginn des 20. Jahrhunderts am 14. Februar 1943 bestand nur aus einem knappen Dutzend Personen im Wohnzimmer seines Hauses. *„David Hilberts Beerdigung muss als verunglückt gelten.“*[186]

Ernst Zermelo hatte massive Gesundheitsprobleme und stand in Opposition zum Nationalsozialismus; er musste seine Universitätslaufbahn beenden, weil er den Hitlergruß zu Beginn einer Vorlesung verweigerte. Aber seine Axiome haben im Wesentlichen Bestand und tragen seinen Namen.

Und da war noch Brouwer, der eine vollkommen konträre Gegenposition mit großer Härte vertrat. Für Außenstehende waren die Unterschiede manchmal nur scheinbar sprachliche Spitzfindigkeiten, aber es ging im Kern um das, was mathematische Realität ist. Ist Pi als unendliche Dezimalzahl schon immer dagewesen oder sind nur die bereits errechneten Stellen Realität? Woher wollen wir wissen, dass die Dezimalentwicklung nicht doch abbricht? Einstein nannte die Auseinandersetzung *„Krieg zwischen Fröschen und Mäusen“* und

---

[185] Jori, Alberto; Das Unendliche, ebenda, S. 76
[186] Georg von Wallwitz, Meine Herren, dies ist keine Badeanstalt, Berenberg, Berlin, 2019, S. 13

weigerte sich, Stellung zu beziehen.[187] Ins Herz der bisher praktizierten Mathematik traf Brouwers Ablehnung des Widerspruchbeweises, wenn es um Unendlichkeiten geht.[188] Bisher galt: Wenn man nachweist, dass eine Annahme zum Widerspruch führt, dann muss sie falsch sein und das Gegenteil gilt. „*tertium non datur*", ein Drittes gibt es nicht. So formulierte es bereits Aristoteles. Ende der 20er Jahre kam es zum „Annalenstreit" aus fachlichen Gründen zwischen Intuitionisten um Brouwer und Formalisten, aber auch aus politischen Gründen zwischen dem deutsch-nationalen Berlin und dem eher liberalen Göttingen um Hilbert und Courant.

Von dieser konzeptionellen Spaltung ist die Arbeit vieler, fast möchte man sagen unzählbarer, Mathematiker wenig betroffen. Sie kümmern sich um mehr oder weniger komplexe Teilgebiete in ihren jeweiligen Fachdisziplinen, die schon längst nicht mehr von einzelnen Personen alle übersehen werden können.
Geht man aber zurück zur philosophischen Basis und will man die Denkrichtungen unterscheiden, so gibt es drei große Kategorien,[189] die hier in aller Kürze (und damit für manchen in zu starker oder unzutreffender Verkürzung), charakterisiert werden sollen.

Formalisten nehmen nach wie vor einen formalen, axiomatischen Zugang ernst.[190] Die Haltung hat zweifellos mit dem Scheitern des Hilbert´schen Programms und den Gödel´schen Ergebnissen einen Dämpfer erhalten. Aber die Zermelo-Fraenkel Axiome, evtl. mit leichten Modifikationen, sind ihre Basis. Gödels Unvollständigkeitssätze zeigen zwar die Grenzen auf, sind aber für die tägliche Forschungsarbeit oft nur sehr weit weg. Im Prinzip kann die gesamte Mathematik als Kette von Folgerungen aus den Axiomen betrachtet werden. Man muss nur akzeptieren, dass die Konsistenz der Axiome nicht aus ihnen selbst heraus bewiesen werden kann. Immerhin bleibt die Mathematik spannend; eine Maschine wird sie nicht ersetzen können. Andererseits ist die

---

[187] Zitiert nach Taschner, Rudolf; Das Unendliche, Springer, 2. Verbesserte Auflage, Berlin Heidelberg, 2006, S. 102

[188] Siehe „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten", in L. E. J. Brouwer, collected works, Philosophy and Foundations of Mathematics, S. 150 ff (2. Teil, 1918B) sowie S. 191 ff (1. Teil, 1918A)

[189] Für die folgenden Abschnitte siehe auch Rudolf Taschner; Das Unendliche, ebenda, S. 97 ff

[190] Manchmal wird noch Predikativismus genannt, der auf Bertrand Russell zurückgeht, siehe https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/#Pre. Manche Grundsatzartikel sehen Realismus, andere Logizismus als vierte Denkschule. Russell hat mit seiner Antinomie zu „Mengen aller Mengen" (eigentlich Klassen) für Verunsicherung gesorgt: Siehe z.B.: Ein Friseur hat im Schaufenster ein Schild hängen „Ich rasiere alle, die sich nicht selbst rasieren." Rasiert er sich selbst oder nicht? Man muss diesen Fall ausschließen, indem er sich nicht mehr formulieren lässt. Russell selbst hat das bereits 1903 mit seiner Typentheorie getan. Das Aussonderungsaxiom ist heute die formale Basis.

genannte Kette an Deduktionen zwar richtig, aber nicht unbedingt wahr oder falsch bzw. entscheidbar (siehe Kontinuumshypothese).

Die Platonisten betrachten endliche und unendliche Denkobjekte als real und verwenden beide mit der gleichen Selbstverständlichkeit. Sie entdecken mathematische Zusammenhänge und erfinden sie nicht. Für Platon waren die Ideen stärker real als die vergängliche Welt der Dinge. Auch Unendlichkeiten sind für sie real, aber werden nie vollständig „realisiert“ werden können.

Die dritte Schule, die Intuitionisten oder Konstruktivisten, gehen maßgeblich auf Brouwer zurück und lehnen die Cantor´schen Erkenntnisse, aber auch ZF(C), in weiten Teilen ab. Es kann konstruktivistisch gesehen nicht entschieden werden, ob eine Dezimalzahl, die Trillionen an Nullen nach dem Komma besitzt, von Null verschieden ist oder nicht. Durch die Einschränkung der mathematischen Möglichkeiten, in denen der Widerspruchbeweis teilweise verboten ist, hat diese Denkrichtung weniger Anhänger. Das „*tertium non datur*“ schafft Unsicherheiten, die die mathematische Forschung und sogar mathematische Anwendungen betreffen und sie auf ein unsicheres Fundament stellen.[191] In letzter Zeit wurde die intuitionistische Auffassung durch den Schweizer Physiker Nicolas Gisin aus rein physikalischen Argumenten neu belebt. Der Schwerpunkt seiner Argumentation liegt für ihn im Nichtdeterminismus bei unendlichen Dezimalzahlen durch die prinzipielle Unkenntnis aller Dezimalstellen und die Möglichkeiten, die sich dadurch bei der Annäherung von Allgemeiner Relativitätstheorie und dem nichtdeterministischen Charakter der Quantenphysik ergeben. Er möchte damit einen neuen Zugang zur Bedeutung der „Zeit“ in physikalischen Theorien erreichen.[192] Aber, wie gesagt, für die tägliche Arbeit werden die meisten Mathematiker die Philosophie ausblenden. Es gibt das Bonmot: Mathematiker sind

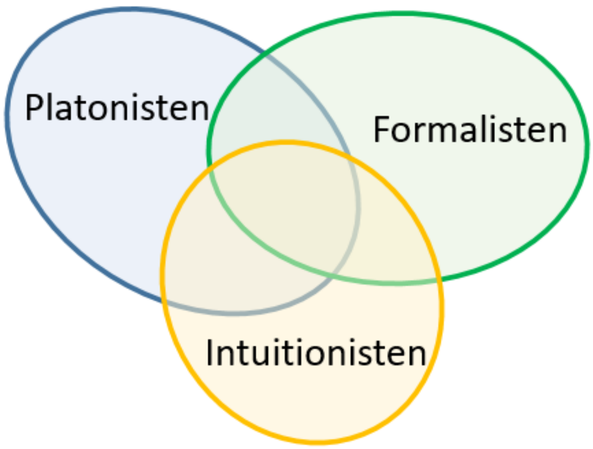


Abb. 63 Die wesentlichsten Denkschulen der Mathematik

[191] Dies gilt z.B. bei Quantengravitationstheorien, die vielfältige Grenzwertbildung benötigen. Beispiele sind die „kausale dynamische Triangulation“ (CDT) und die „Asymptotische Sicherheit in der Quantengravitation“ (Asymptotic safety in quantum gravity).

[192] Natalie Wolchover, Eine neue Mathematik der Zeit, Spektrum der Wissenschaft, 4/21, S. 62-67

werktags Platonisten und am Wochenende Formalisten.

Was bleibt, ist die Faszination, die das Unendliche auf uns Menschen ausübt und die wir (nach dem aktuellen Stand der Lebenserwartung und der Gerontologie) nur in einer endlichen Zeitspanne erleben dürfen.

Fazit

Das naturwissenschaftliche Wissen in der Antike wird trotz des vorhandenen Quellenmaterials unterschätzt. Leider hat nur ein Bruchteil der schriftlichen Aufzeichnungen die Jahrhunderte überlebt. Das gilt besonders für mathematische Texte. Vergleichsweise Weniges ist über arabische oder lateinische Übersetzungen überliefert worden. Nur über Querverweise kann man erahnen, welche Dimension der Stand der Forschung insbesondere im hellenistischen Zeitalter gehabt haben muss. Als Glücksfall muss man deshalb das Palimpsest des Archimedes ansehen. Archimedes ist mit dem „Unendlichen" schon meisterhaft umgegangen, aber seine Werke fanden nicht die ihnen angemessene Verbreitung. Im „dunklen" Mittelalter wurde meist ignoriert, bestenfalls bewahrt, aber kaum weiterentwickelt. Indien und die islamischen Länder waren deutlich weiter. Erst in der frühen Neuzeit begann wieder mathematische Forschung außerhalb der Himmelsmechanik. Einen wissenschaftlichen Durchbruch erzielten Newton und Leibniz mit der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Doch besonders das „unendlich Kleine" wurde naiv, wenn auch durchaus erfolgreich, verwendet. Die Infinitesimalrechnung wurde unter dem Namen Analysis nach und nach von Paradoxa befreit und hat in der heutigen Form kaum zu überschätzende Bedeutung in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik. Über die Analysis hinaus fand der Umgang mit dem Unendlichen immer mehr Eingang in die Mathematik. Unendliche Folgen oder Reihen, Integrale und das weite Feld der Mengenlehre sind nur wenige Schlagworte für diese Entwicklung. Bolzano legte die Scheu vor dem aktual Unendlichen ab. Mit Cantor wurden unendliche Mengen nach ihrer Mächtigkeit klassifizierbar; mit Zermelo-Fraenkel entstand eine Axiomatik der Mengenlehre, auch wenn der Hilbert´sche Traum einer vollständigen Axiomatisierung der Mathematik durch die Unvollständigkeitssätze von Gödel zunichtegemacht wurde; Robinson bemühte sich, Unendlichkeiten wieder in das logische Gebäude der Mathematik im Rahmen einer Nichtstandardanalysis zu integrieren. Unendlichkeiten in der Physik oder Kosmologie beruhen manchmal auf Unzulänglichkeiten in den angewendeten Theorien. Doch beim Universum können wir nicht entscheiden, ob es unbegrenzt bzw. unendlich groß ist. Bei einer Reihe von Elementarteilchen wissen wir nicht, ob sie trotz Masse eine

Ausdehnung ungleich Null besitzen. Schließlich hat der Umgang mit dem Unendlichen die Mathematik bereichert, aber auch in Denkschulen gespalten.

Literaturverzeichnis

Alsina, Claudi; Der Satz des Pythagoras, deutsch bei Librero RBA, 2016

Bellos, Alex; Im Wunderland der Zahlen, Piper, München, 11/2013

Beutelspacher, Albrecht; Pasta all´infinito, C.H.Beck, München, 3. Auflage 2000

Binimelis Bassa, Maria Isabel; Fraktale Geometrie, Librero, 2017

Cantor, Georg; Gesamtausgabe seiner Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zermelo, Julius Springer, Berlin, 1932, digital verfügbar unter https://gdz.sub.uni-goettingen.de/

Clegg, Brian; Eine kleine Geschichte der Unendlichkeit, rororo, Reinbek bei Hamburg, dt. Erstausgabe 2015

Cohen, Paul; Wie ich »Forcing« entdeckte, e-enterprise, Lemgo, 2017

Cohn, Jonas; Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant, Reprint Hanse, Leipzig, Verlag Wilhelm Engelmann, 1896

Dedekind, Richard; Stetigkeit und irrationale Zahlen, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1872, digital verfügbar unter https://publikationsserver.tu-braunschweig.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs_derivate_00005740/Aa_2043.pdf

Euklid; Die Elemente, Hsgr. Clemens Thaer, Europa-Lehrmittel, 2003

Freely, John; Platon in Bagdad; dt. Ausgabe Klett-Cotta, Stuttgart, 2012

Hilbert, David, Gesammelte Abhandlungen, Julius Springer, Berlin, 1935, digital verfügbar unter https://gdz.sub.uni-goettingen.de/

Holt, Jim; Als Einstein und Gödel spazieren gingen, Rowohlt, Juni 2020

Jori, Alberto; Das Unendliche, Books on Demand, Norderstedt 2010

Kramp, Klaus (Übersetzung und Redaktion); Das Buch der Unendlichkeit, Librero Kerkdriel (NL), 2012

Meschkowski, Herbert; Mathematisches Begriffswörterbuch, BI Hochschultaschenbücher Band 99, Mannheim 1971

Netz, Reviel; Noel, William; Der Kodex des Archimedes, C.H.Beck, München 2008

Peitgen, Heinz-Otto, Jürgens, Hartmut, Saupe, Dietmar; Fraktale, Bausteine des Chaos, Klett-Cotta/Springer, Berlin Heidelberg/ New York, 1992

Russo, Lucio, Die vergessene Revolution, Springer, Berlin Heidelberg, 2005

Seife, Charles; Zwilling der Unendlichkeit, Goldmann, München, 4. Auflage 2002

Spektrum der Wissenschaft Spezial, Das Unendliche, 1/2003

Spektrum der Wissenschaft Kompakt, UNENDLICH, 05/20

Stillwell, John; Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, Springer Spektrum, Heidelberg, 2014

Taschner, Rudolf; Das Unendliche, Springer, 2. Verbesserte Auflage, Berlin Heidelberg, 2006

Taschner, Rudolf; Die Farben der Quadratzahlen, Hanser, München 2019

Toenniessen, Fridtjof; Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Spektrum, Heidelberg, 2010

Wallace, David Foster; Die Entdeckung des Unendlichen, Piper München Zürich, 1. dt. Auflage 2007 oder Wallace, David Foster; Die Entdeckung des Unendlichen, Piper München Zürich, 3. Auflage 2010

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 2, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Zellini, Paolo; Eine kurze Geschichte der Unendlichkeit, C.H.Beck, München, 2010

Abbildungsnachweise:

Hinweis: Im Text wird nur in Fußnoten auf externe Inhalte in Grafiken hingewiesen. Eigene Grafiken werden nur im Abbildungsverzeichnis erwähnt.

Abb. 1:	https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lemniscate_of_Bernoulli_props.svg (Lemniscate)
Abb. 2:	Quelle: en.wikipedia.org (Tarot-Karten)
Abb. 3:	Eigene Grafik unter Verwendung von Powerpoint-Cliparts. Inspiriert von Netz, Reviel; Noel, William; Der Kodex des Archimedes, C.H.Beck, München 2008, S. 75 (Rolle/Kodex)
Abb. 4:	Eigene Grafik, nach C. Seife, Zwilling der Unendlichkeit, S. 35, Quadrat- und Dreieckszahlen
Abb. 5a, b:	https://de.wikipedia.org/wiki/Pentagramm (Pentagramm)
Abb. 5c:	ergänzt um eigene Grafik (Pentagramm ergänzt)
Abb. 6:	Eigene Grafik (Parallelen-Axiom)

Danksagung

Mein besonderer Dank geht an **Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl**, der die Professur für Algebra am Mathematischen Institut der Justus-Liebig-Universität Gießen innehat. Er hat mir behutsam sehr nützliche Anregungen gegeben, die es erlaubt haben, wichtige Eckpunkte zu setzen. Der Beitrag nennt sich im Untertitel „Eine mathematisch-historische Reise“. Durch seinen Hinweis war mit algebraischen Mitteln eine saubere Abgrenzung des Themas zur Philosophie und Theologie möglich. Über einen geschickt gewählten beispielhaften Einstieg mit der Möglichkeit zur Verallgemeinerung konnten viele Begriffe, Strukturen und Methoden angesprochen werden und mit „potentiell unendlich“ verknüpft werden. Abgerundet wurde sein Rat durch einige Hinweise auf Defizite und Unklarheiten. **Herr Prof. Dr. Köhl** war mir viel mehr Mentor als Gutachter und ich danke ihm herzlich für seine Unterstützung.

Wie so oft hat **Herr Dr. Michael Serafin** den Entstehungsprozess des vorliegenden Beitrags in einer bewunderungswürdigen Intensität und Sorgfalt begleitet. Obwohl er bei dem Thema fachfremd ist, hat er eine ganze Reihe an Unklarheiten und auch einige Fehler, die durch meine Unachtsamkeit entstanden sind, sowohl im formalen als auch im fachlichen Kontext entdeckt. Ein professioneller Lektor hätte die Qualitätssicherung nicht besser und effizienter machen können. Gerade in der Pandemie, in der das Vereinsleben der Naturwissenschaftlichen Abteilung der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde praktisch zum Erliegen gekommen ist, hat sein Engagement dafür gesorgt, dass mit der Oberhessischen Naturwissenschaftlichen Zeitschrift der Verein sichtbar bleibt. Ich bin **Herrn Dr. Serafin** zu großem Dank verpflichtet.

To see a World in a Grain of Sand
And a Heaven in a Wild Flower,
Hold Infinity in the palm of your hand
And Eternity in an hour.
A Robin Redbreast in a Cage
Puts all Heaven in a Rage.[193]

William Blake

Aus „Auguries of Innocence“
Vers 1 - 6, 1803

FÜR FARI

[193] „Um eine Welt in einem Sandkorn und einen Himmel in einer wilden Blume zu sehen, halte die Unendlichkeit in deiner Handfläche und die Ewigkeit in einer Stunde. Ein Rotkehlchen in einem Käfig versetzt den ganzen Himmel in Wut.“