

Selbstkonsistente numerische 1D/3D Hybridmodellierung von Radiofrequenz-Ionentriebwerken

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades

DR. RER. NAT.

am I. Physikalischen Institut des Fachbereichs 07
der Justus-Liebig-Universität Gießen

vorgelegt von

Chris Volkmar

aus Braunfels

Gießen, den 23. Juli 2015

Dekan: Prof. Dr. Peter J. Klar
Erstgutachter: Prof. Dr. Peter J. Klar
Zweitgutachter: Prof. Dr. Ubbo Ricklefs

Tag der Disputation: 21. Juli 2015

Meiner Frau Anna

“Logic is the beginning of wisdom, not the end.”

–Spock–

Kurzzusammenfassung

In dieser Arbeit wird ein numerisches Simulationsmodell für Radiofrequenz-Ionentriebwerke vorgestellt, das neben eindimensionalen Modellen zur Beschreibung des Plasmas ein vollwertig dreidimensionales elektromagnetisches Modell nutzt, wodurch komplexe Induktionsspulengeometrien bei gleichzeitig kurzer Simulationsdauer untersuchbar werden. Neben der Implementierung der Teil- sowie des Gesamtmodelles werden auch experimentelle Verifikationen gezeigt, die die physikalisch korrekte Arbeitsweise des Modells unterstreichen. Mit Hilfe des vorgestellten Modells wird ein Virtual-Prototyping Werkzeug bereitgestellt, mit dessen Hilfe sowohl strukturelle (Entladungsgefäß- und Spulengeometrie) als auch arbeitspunktabhängige (bestehend aus extrahiertem Ionenstrom, Extraktionsspannungen sowie Volumenstrom des Arbeitsgases) Parametersätze evaluiert werden können. Sowohl die elektrischen Ersatzschaltbildparameter aus Sicht eines Generators als auch die resultierende Performance des Triebwerks, d. h. Antriebsvermögen und zugehörige Wirkungsgrade, können aus dem Modell gewonnen werden. Damit wird eine Optimierung der triebwerkseigenen Performance bei gleichzeitiger Evaluierung der sich dadurch ändernden elektrischen Lastsituation, die auf einen Generator wirkt, ermöglicht. Der Gesamtwirkungsgrad, welcher durch Triebwerk und Generator definiert ist, kann deshalb durch geeignete Regelungsmaßnahmen stets optimiert werden.

Ein wichtiger Optimierungspunkt für kommerzielle Radiofrequenz-Ionentriebwerke, welcher mit Hilfe des Modells herausgefunden und untersucht werden konnte, ist die Induktionsspule. Mit einer alternativen Geometrie, basierend auf der einer gegenläufig gewickelten Bifilarspule, lässt sich eine effizientere Plasmaheizung bei gleichzeitiger Verringerung des benötigten elektrischen Stroms im Vergleich zur normalen spiralförmigen Spulenform erreichen.

Neben allen durchgeführten Performancestudien wurden stets die Gültigkeitsbereiche des Modells evaluiert. Kommerzielle Radiofrequenz-Ionentriebwerke mit typischen geometrischen Ausdehnungen lassen sich problemlos mit dem vorgestellten Modell simulieren.

Vorwort

Die vorliegende Arbeit wurde im Rahmen meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter der Technischen Hochschule Mittelhessen und des I. Physikalischen Institutes der Justus-Liebig-Universität Gießen im Forschungsprojekt LOEWE-RITSAT¹ angefertigt. Dieses vom Land Hessen geförderte Projekt profitiert neben der vollwertigen Partnerschaft zwischen Justus-Liebig-Universität Gießen und Technischer Hochschule Mittelhessen von assoziierten Partnern wie dem Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik des Deutschen Zentrums für Luft- und Raumfahrt (DLR) aus Göttingen sowie dem GSI Helmholtzzentrum für Schwerionenforschung aus Darmstadt. Dabei zielt LOEWE, was synonym steht für *Landes-Offensive zur Entwicklung Wissenschaftlich-ökonomischer Exzellenz*, auf eine intensive Vernetzung von Wissenschaft, inner- und außeruniversitärer Forschung und Wirtschaft ab, was durch die oben gezeigten Partnerschaften verdeutlicht wird.

Der Projektschwerpunkt RITSAT thematisiert Radiofrequenz-Ionentriebwerke (**RIT**) für **Satelliten**applikationen im Weltall. Dieser Forschungsschwerpunkt stellt eine Weiterführung der seit den frühen 1960er Jahren laufenden Entwicklungen und Untersuchungen dieser Triebwerke an der Justus-Liebig-Universität Gießen dar, die damals von Prof. Horst W. Löb initiiert wurden. In diesem Themenkomplex gingen aus Gießen zahlreiche Publikationen, Konferenzbeiträge sowie Bücher und Buchkapitel hervor, die den historischen Werdegang von RIT detailliert aufzeigen [5, 11, 19, 20, 22, 29, 49, 53, 67–74, 97, 98]. Dass diese Triebwerke neben Raumfahrtanwendungen auch für irdische Applikationen, wie Materialbearbeitung oder zur Heizung von Fusionsplasmen, genutzt werden können, erweiterte den Forschungsschwerpunkt um die Optimierung der Triebwerke für ihren jeweiligen Einsatzzweck. Einige Informationen zu diesen Thematiken sind in Refs. 23–25 ersichtlich. Kommerziell werden RIT bereits seit annähernd 20 Jahren erfolgreich eingesetzt. Auch dazu existiert eine Vielzahl an Informationen, vornehmlich publiziert vom Industrieunternehmen Airbus Defence & Space (ehemals EADS Astrium), welches die RIT-Technologie seit mehreren Jahren erfolgreich kommerziell entwickelt [57–61, 63].

RIT sollen hauptsächlich zur Lage- und Bahnstabilisierung² von Satelliten eingesetzt werden; doch spätestens bei der durch die RIT-Technologie ermöglichten Rettung des *Advanced Relay and Technology Mission* (ARTEMIS) Satelliten wurde ein weiteres Potenzial dieser Triebwerke entdeckt – der kostengünstige Spiralfly auf höhergelegene Orbits [46]. Durch einen Fehler in der dritten Raketenstufe seiner Ariane-5-Trägerrakete wurde der drei Tonnen schwere ARTEMIS Satellit nicht wie geplant auf einem geostationären (etwa 36,000 km) sondern auf einem Orbit viel geringerer Höhe (etwa 17,000 km) ausgesetzt. Zu Testzwecken waren vier elektrische Triebwerke, darunter zwei RIT, am Satelliten angebracht, die aufgrund ihrer unverhältnismäßig höheren Ergiebigkeit gegenüber chemischen Antriebssystemen [27, 64, 79] durch Umprogrammierung der Steuersoftware durch Ingenieure der ESA-Operationszentrale dauerhaft Schub generierten und somit den Satelliten innerhalb eines Jahres auf den gewünschten Zielorbit aufspiralen konnten. Damit wurde die 700 Millionen Euro teure Mission gerettet – wenn auch mit Verzögerung.

¹<http://www.proloewe.de/ritsat>

²engl.: north/south station keeping

Im Vergleich zu anderen Technologien aus dem Sektor der elektrischen Antriebe, zu welchem elektrothermische Triebwerke wie Resistojet und Arcjet, elektromagnetische Triebwerke wie gepulste Plasmatriebwerke (PPT), magnetoplasmadynamische Triebwerke (MPD) und Hall-Effekt Triebwerke zählen, bietet die RIT-Technologie, die in die Kategorie der elektrostatischen Triebwerke einsortiert wird, vergleichsweise hohe Treibstoffmassenwirkungsgrade. Obwohl dadurch Kosteneinsparungen für langjährige Missionen erzielt werden können, setzen die Weltraumorganisationen aktuell auf elektromagnetische Antriebe, allen voran auf Hall-Effekt Triebwerke. Der Grund dafür liegt zum einen in der Etablierung dieser Antriebssysteme, da sie schon sehr lange kommerziell eingesetzt werden und zum anderen daran, dass die RIT-Technologie einen entscheidenden Nachteil aufweist, der sie vor allem für langlebige Missionen aus dem Fokus drängt: ihr Schuberzeugungssystem besteht aus einer Gitteranordnung, durch deren sogenannte Extraktionskanäle Ionen beschleunigt werden, die nachweislich diese Gitter erodieren. Genau aus diesem Grund wurden Optimierungsszenarien und -testreihen bisher priorisiert an Technologien vorgenommen, die diese Einschränkungen nicht mit sich bringen – unter Inkaufnahme des niedrigeren Massenwirkungsgrades. Es gibt allerdings Bestrebungen, im europäischen Raum führend verwirklicht durch Airbus Defence & Space, die RIT-Technologie weiter zu optimieren und die genannten Nachteile zu minimieren, um so die RIT-Technologie am Markt zu etablieren. Dazu ist es nötig, dass universitäre mit außeruniversitärer Forschung Hand in Hand geht, um nötige grundlegende Studien zu schaffen und um diese anhand von Prototypen und Testszenarien zu evaluieren. Die hier vorliegende Arbeit stellt einen Teil des universitären Forschungs- und Entwicklungsaufwandes dar, welcher unumgänglich für Optimierungen und Anpassungen vorhandener RIT-Technologie ist.

Die Dissertation ist in sechs Kapitel untergliedert, wobei die Fragestellung und die Motivation in Kap. 1 erläutert werden. Wichtige Zusammenhänge, welche sowohl für Optimierungsarbeiten als auch für eine umfassende elektrische Beschreibung von RIT benötigt werden, sind dort dargestellt. Schließlich sind in Kap. 1.2 die Vorteile der numerischen Modellierung erwähnt, ganz besonders die eines multidimensionalen Hybridmodells.

Kapitel 2 behandelt die theoretischen Hintergründe, die für die durchgeführten Arbeiten beachtet werden mussten. Dazu zählen unter anderem elektromagnetische Feldtheorie (Kap. 2.1), die Physik von Niedertemperaturplasmen (Kap. 2.2) sowie die Wirkungsweise von Radiofrequenz-Ionentriebwerken (Kap. 2.3).

Die Modellbildung sowie die dazu genutzten Algorithmen sind in Kap. 3 dargestellt. Die einzelnen Modellteile, die in den Abschnitten 3.2 – 3.8 erläutert werden, bilden einen selbstkonsistenten Zusammenhang, der im Laufe dieser Abschnitte verdeutlicht wird.

Theoretische und experimentelle Verifikationen sowohl einzelner Teilmodelle als auch des Gesamtmodells sind in Kap. 4 gezeigt. Letzteres ist in Form eines vollständigen Performance-Mappings eines RIM-4 Triebwerks gegeben, welches im Labor der Justus-Liebig-Universität aufgenommen wurde.

Nach der Verifikation des Modells, zeigt Kap. 5 Simulationsergebnisse des Gießener RIM-4 Triebwerks. Dazu werden in Kap. 5.2 optimierte Spulen- und Entladungskammergeometrien des Triebwerks evaluiert, welche den Wirkungsgrad steigern. Dabei werden auch die sich dadurch ändernden elektrischen Lastbedingungen untersucht, die durch geeignete Regelstrukturen ausgeglichen werden müssten, um das Triebwerk weiterhin effizient betreiben zu können.

Abschließend werden in Kap. 6 die gezeigten Ergebnisse diskutiert, Gültigkeitsbereiche der eingesetzten Theorien und Modelle aufgezeigt sowie weiterführende Arbeiten genannt, die auf Basis dieser Dissertation durchgeführt werden können.

Danksagung

Dass ich in einem solch komplexen Thema Fuß fassen und gegebenenfalls einen substantiellen Beitrag leisten konnte, habe ich vielen Menschen zu verdanken, denen ich an dieser Stelle meine Verbundenheit aussprechen möchte. Zuallererst möchte ich mich herzlich bei Prof. Dr. Peter J. Klar bedanken, welcher als mein Doktorvater und Koordinator des Forschungsschwerpunktes stets ein offenes Ohr für Fragen hatte und mir nachdrücklich zugesprochen hat, den eingeschlagenen Weg weiterzugehen, auch wenn mir dieser anfänglich als äußerst holprig vorkam. Die nette Art und Weise seiner Betreuung gab mir Motivation und Ehrgeiz, was mich vor allem im dritten Jahr fachlich sehr angetrieben hat.

Nicht minder möchte ich mich bei meinem direkten Betreuer Prof. Dr. Ubbo Ricklefs bedanken, auf dessen fundamentale Hilfestellung ich jederzeit setzen konnte und immer noch kann. Die stundenlangen Fachgespräche, die mitunter in stundenlangen Small-Talk mündeten, zeigten, dass wissenschaftliches Arbeiten durch gut funktionierende, freundschaftliche Beziehungen umso besser funktioniert. Dass der Teufel im Detail steckt, hat mir Prof. Ricklefs mehr als einmal gezeigt, was mich um einiges strukturierter werden lies im Laufe meiner Tätigkeiten als wissenschaftlicher Mitarbeiter der Technischen Hochschule Mittelhessen.

Für zahlreiche Gespräche, Diskussionen und Gruppenmeetings möchte ich Prof. Dr. Uwe Probst und Prof. Dr. Rainer Thüringer ganz herzlichen Dank aussprechen. Prof. Thüringer hat mir, besonders in der Anfangszeit, dank seines (plasma)physikalischen Hintergrunds stets mit Rat und Tat zur Seite gestanden und ist darüber hinaus mit einer offenen Art gesegnet, die ihresgleichen sucht und die die Arbeit mit ihm sehr angenehm macht. Für die finanzielle Unterstützung in Form diverser Lehraufträge, die mir die Arbeit immens erleichterte, gebührt Prof. Probst der herzlichste Dank.

Des Weiteren möchte ich auch Prof. Dr. Bruno Meyer posthum meinen Dank aussprechen, dessen offene und freundliche Art Gespräche mit ihm stets sehr angenehm machte. Wir werden ihn alle sehr vermissen.

Meinen Kollegen Timo Baruth und Niklas Wolf danke ich für die vielen fruchtbaren Gedankenaustausche, die in einer Arbeitsgruppe obligatorisch sind. Weiterhin danke ich speziell Timo Baruth für die Ausübung seines Amtes als “Finanzminister”, die mit einer Menge Arbeit verbunden ist und nicht als selbstverständlich angesehen werden darf.

Meinem Kollegen und Büronachbarn Jens Simon gebührt der allerherzlichste Dank für die kontinuierlichen Diskussionen, die des öfteren in Streits ausarteten, und die stets kritische Hinterfragung meiner Behauptungen. Diese Kritiken haben es mir ermöglicht, Fehler einzusehen und Verbesserungen anzufertigen. Das freundschaftliche Verhältnis, das über die Zusammenarbeit hinaus besteht, erleichterte mir den Alltag ungemein.

Auch den Kollegen, inklusive ehemaligen, Martin Becker, Patrick Dietz, Waldemar Gärtner, Dr. Robert Henrich, Dr. Kristof Holste, Katharina Huhn, Peter Köhler, Dr. Benjamin Lotz, Prof. Dr. Slobodan Mitić, Markus Piechotka und Daniel Reppin möchte ich meinen Dank aussprechen für die angenehme Zusammenarbeit und die vielen gemeinsamen fröhlichen Konferenz- und Workshopbesuche. Ein besonderer Dank gilt hier Kristof Holste, dessen kritische Korrekturen dieser Arbeit unbezahlbar sind. Auch für die vielen, vielen fachspezifischen Ge-

spräche bei abendlichen Veranstaltungen möchte ich mich herzlich bei ihm und seiner stets freundschaftlichen Art bedanken. Ein weiterer ganz besonderer Dank gilt Martin Becker und Patrick Dietz, die bereit waren, ihre experimentellen Daten mit mir zu teilen, um das numerische Modell zu verifizieren. Auf keinen Fall darf der Dank an Waldemar Gärtner an dieser Stelle zu kurz kommen. Mit seiner Hilfe haben wir einen Fehler im Code lokalisieren und beheben können, der andererseits wahrscheinlich unentdeckt geblieben wäre. Deshalb möchte ich ihm den größtmöglichen Dank dafür aussprechen, dass er mir bei diesen umständlichen Berechnungen zur Seite stand und mit einem Geistesblitz die missliche Lage letztendlich beheben konnte.

Meinen Eltern sowie meiner Großmutter danke ich von ganzem Herzen für die kontinuierliche Unterstützung, sei es finanzieller, materieller oder anderweitiger Natur. Ohne sie hätte ich diesen Weg nicht gehen können. Ein besonders herzlicher Dank sei zusätzlich an meinen Vater gerichtet, der mir bei so vielen Publikationen als Lektor grammatikalisch unter die Arme gegriffen hat.

Besonderen Dank möchte ich weiterhin auch allen übrigen Familienmitgliedern aussprechen, die mich auf meinem Lebensweg stets tatkräftig unterstützt haben.

Zum Schluss möchte ich meiner Frau Anna danken. In jeglicher Lebenslage konnte ich auf ihr bedingungsloses Verständnis vertrauen, was mit Sicherheit nicht immer leicht fiel, ganz besonders an den langen Abenden, die ich im Büro oder Labor verbracht habe. Ihre lebensfrohe Einstellung und ihre Bestätigung haben mir oft neuen Mut gegeben, wenn ich meinen fast verloren glaubte. Dafür werde ich ihr immer dankbar sein.

Diese Arbeit wurde im Rahmen des LOEWE-Schwerpunktes RITSAT durchgeführt, welcher vom Hessischen Ministerium für Wissenschaft und Kunst (HMWK) gefördert wurde.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	ix
Danksagung	xi
Nomenklatur	xv
1 Einleitung und Motivation	1
1.1 Fragestellung und Anforderungen	1
1.2 Numerische Modellierung als Teil des Virtual Prototypings	4
2 Theoretische Grundlagen	7
2.1 Theorie elektromagnetischer Felder	7
2.1.1 Elektromagnetische Potenziale	8
2.1.2 Vereinfachende Annahmen für quasi-stationäre Felder	10
2.1.3 Semi-analytisches Lösungsverfahren	16
2.1.4 Numerische Finite-Differenzen-Methode	19
2.2 Induktiv-gekoppelte Niedertemperaturplasmen	27
2.2.1 Beschreibung eines Maxwell-Boltzmann-Plasmas im Fluidbild	32
2.2.2 Dielektrische Eigenschaften	38
2.2.3 Plasmaimpedanz induktiv-gekoppelter Plasmen	40
2.3 Physik der Radiofrequenz-Ionentriebwerke	41
2.3.1 Die Raketengleichung	41
2.3.2 Child-Langmuir Raumladungsgesetz	46
2.3.3 Schub und Triebwerkseffizienz bei RIT	47
3 Implementierung des numerischen Modells	51
3.1 Modellüberblick	51
3.2 Quasi-homogenes Ladungserhaltungsmodell	53
3.3 Elektromagnetisches Modell	58
3.4 Energieerhaltungsmodell	64
3.5 Ionen-Extraktionsmodell	66
3.5.1 Modifiziertes Child-Langmuir-Modell	67
3.6 Massenerhaltungsmodell	69
3.7 Transformator-Modell der induktiven Plasmaentladung	70
3.7.1 Bestimmung der Spulenimpedanz	74
3.8 Performance- und Effizienzmodell	78
4 Modellverifikation	81
4.1 Verifikation der elektromagnetischen Modelle	81
4.1.1 Verifikation des magnetoquasistatischen Modells	81
4.1.2 Experimentelle Verifikation des berechneten elektrischen Feldes	84

4.1.3	Einstellung des FDM-basierten Solvers	86
4.2	Analytische Verifikation des Plasmamodells	88
4.3	Experimentelle Verifikation des Gesamtmodells	90
5	Simulationsergebnisse des Gießener RIM-4 Triebwerks	95
5.1	Optimierte Betriebsparameter eines RIM-4 Triebwerks	95
5.1.1	Quasi-homogene Plasmaparameter	95
5.1.2	Elektromagnetische Feldverteilung	98
5.1.3	Elektrische Entladungsparameter	101
5.1.4	Performancedaten	104
5.2	Strukturelle Modifikation zur Optimierung der Triebwerkseffizienz	107
5.2.1	Modifizierung der Windungszahl	107
5.2.2	Alternative Spulengeometrie: Gegenläufige Bifilarspule	112
5.2.3	Modifizierung des Entladungsgefäßes	114
6	Ergebnisdiskussion und Fazit	117
6.1	Gültigkeitsanalyse	117
6.2	Abschließende Bewertung mit Zukunftsaussicht	121
	Literatur- und Quellenverzeichnis	123
	Abbildungsverzeichnis	131
	Tabellenverzeichnis	133
	Eidesstattliche Erklärung	135
	Publikationsliste und Konferenzteilnahmen	137
	Anhang	I
A.1	Zu Kapitel 2	I
A.1.1	Zu Kapitel 2.1.3	I
A.1.2	Zu Kapitel 2.2.1	III
A.1.3	Zu Kapitel 2.3.1	VI
A.1.4	Zu Kapitel 2.3.2	VII
A.2	Zu Kapitel 3	IX
A.2.1	Zu Kapitel 3.2	IX

Nomenklatur

(\mathbf{A}) : Systemmatrix	R : Ohm'scher Widerstand in Ω
$[\tilde{\mathbf{A}}]$: Vektorpotenzialvektor in V s m^{-1}	R : Radius in m
\mathbf{A}, A : Flächeninhalt in m^2	$\ \mathbf{R}\ $: Euklidische Norm in m
\mathbf{A}, A : Vektorpotenzial in V s m^{-1}	\mathbf{S} : Poyntingvektor in W m^{-2}
\mathbf{B}, B : Magnetische Induktion in T	T : Periodendauer in s
C : Kapazität in F	T : Temperatur in K
D : Diffusionskoeffizient in $\text{m}^2 \text{s}^{-1}$	T : Temperatur/Energie in eV
\mathbf{D}, D : Dielektrische Verschiebung in C m^{-2}	U : Energie in J
\mathbf{E}, E : Elektrische Feldstärke in V m^{-1}	V : Gleichspannung oder Effektivwert der Wechselspannung in V
F : Kraft in N	V : Volumen in m^3
G : Green'sche Funktion in w. E.	\dot{V} : Volumenstrom in scm
\mathbf{H}, H : Magnetische Feldstärke in A m^{-1}	X : Reaktanz in Ω
I : Gleichstrom, Effektivwert des Wechselstroms in A	Z : Impedanz in Ω
I_{sp} : Gewichtsspezifischer Impuls in s	a : Beschleunigung in m s^{-2}
\mathbf{J}, J : Stromdichte in A m^{-2}	$[\mathbf{b}]$: Randbedingungs- und Quelltermvektor in w. E.
K : Ratenkoeffizient in $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$	c_0 : Vakuum-Lichtgeschwindigkeit in m s^{-1}
Kn: Knudsen-Zahl	d : Durchmesser in m
L : Induktivität in H	\mathbf{e} : Einheitsvektor in m
L : Länge in m	e : Elementarladung in C
M : Gegeninduktivität in H	f : Signalfrequenz in Hz
N : Anzahl	g_0 : Erdbeschleunigung in m s^{-2}
N : Teilchenanzahl	\hbar : Red. Planck'sches Wirkungsquantum in eV s
P : Leistung in W	h : Dichtefaktor

h : Ganghöhe in m	\mathbf{x}' : Strompfad in m
h : Schrittweite in m	x : Raumkomponente in m
i : Zeitlicher Stromverlauf in A	x : Regelgröße in w. E.
idx: 3D-Adressierungsindex	y : Raumkomponente in m
k : Perveanz in $\text{A V}^{-\frac{3}{2}}$	y : Stellgröße in w. E.
k_B : Boltzmann-Konstante in JK^{-1}	z : Raumkomponente in m
k_{PI} : PI-Verstärkung	Γ : Teilchenflussdichte in $\text{m}^{-2} \text{s}^{-1}$
l : Länge in m	Λ : Coulomb-Logarithmus
\dot{m} : Massenfluss in kg s^{-1}	Φ : Skalares Potenzial in V
m : Masse in kg	$[\Phi]$: Potenzialvektor in V
m : Stützstellenanzahl	Ψ : Magnetischer Fluss in Wb
\mathbf{n} : Normaleneinheitsvektor in m	Ω : Simulationsgebiet in w. E.
n : Teilchendichte in m^{-3}	α : Gewichtungsfaktor
\mathbf{p}, p : Impuls in Ns	β : Skalierungsparameter
p : Druck in Pa	γ : Fortpflanzungskonstante in m^{-1}
p : Leistungsdichte in W m^{-3}	γ : Teilchenfluss in s^{-1}
p : Zeitlicher Leistungsverlauf in W	δ : Abklingkonstante in s^{-1}
q : Ladung in C	δ : Dirac-Delta-Distribution
\mathbf{r}, r : Radius in m	δ : Skineindringtiefe in m
\mathbf{s}, s : Tangentialvektor und Betrag in m	ϵ_0 : Elektrische Feldkonstante in F m^{-1}
s : Weg in m	ϵ_r : Relative Permittivität
t : Dicke in m	η : Wirkungsgrad
t : Zeit in s	ζ : Koppelfaktor
u : Energiedichte in J m^{-3}	θ : Elevationswinkel in rad
\mathbf{v}, v : Geschwindigkeit in m s^{-1}	ι : Übertragungseffizienz
v_{eff} : Massenspezifischer Impuls / effektive Austrittsgeschwindigkeit in m s^{-1}	κ : Elektrische Leitfähigkeit in S m^{-1}
w : Führungsgröße in w. E.	λ : Mittlere freie Weglänge in m
\mathbf{x} : Raumvektor in m	λ : Wellenlänge in m
	λ_{De} : Debye-Länge in m
	μ_0 : Magnetische Feldkonstante in H m^{-1}

μ_r : Relative Permeabilität	τ : Zeit in s
ν : Kollisionsfrequenz in s^{-1}	ϕ : Gittertransparenz
ξ : Entladungsverlust in $W A^{-1}$	ϕ : Phasenwinkel in rad
ρ : Dichte in $kg m^{-3}$	φ : Azimutwinkel in rad
ρ : Polare Radialkomponente in m	χ : Ionisierungsgrad
ρ : Raumladungsdichte in $C m^{-3}$	ω : Kreisfrequenz in $rad s^{-1}$
ρ : Spezifischer Widerstand in Ωm	ω : Relaxationsparameter
σ : Flächenladungsdichte in $C m^{-2}$	ω_0 : Resonanzkreisfrequenz in $rad s^{-1}$
σ : Stoßquerschnitt in m^2	ω_{pe} : Elektronenplasmafrequenz in $rad s^{-1}$

Kapitel 1

Einleitung und Motivation

Das vorliegende Kapitel gibt Aufschluss über die Fragestellung, die dieser Arbeit zugrunde liegt sowie die Anforderungen an das entwickelte numerische Modell. Dabei wird besonderes Augenmerk auf die numerische Modellierung an sich gelegt und kurz erläutert, warum diese als zweckdienlich erachtet wurde.

1.1 Fragestellung und Anforderungen

Der an die Technische Hochschule Mittelhessen angegliederte RITSAT-Projektbereich E – Elektronik und elektromagnetische Verträglichkeit (EMV) – beschäftigt sich mit der Konzeptionierung und Entwicklung peripherer Geräte für den Einsatz mit RIT. Die Motivation dabei liegt auf der Kompetenz, ein Gesamtsystem bestehend aus Triebwerk und Peripherie autark im universitären Umfeld entwickeln zu können. Nur so ist es möglich, zielgerichtete Entwicklungsarbeit durchzuführen, da die einzelnen Teilsysteme starke gegenseitige Abhängigkeiten aufweisen. Die Weltraumqualifizierung von Triebwerk und Elektronik ist kein Aspekt dieser Entwicklungen, es sollen vielmehr fundamentale Verbesserungsansätze (vor allem im Hinblick auf Wirkungsgrade der elektrischen Versorgungseinheiten) gefunden werden. Da Weltraumqualifizierung vor allem darin besteht, vorhandene Konzepte mit für den Einsatz im Weltraum zertifizierter Hardware zu produzieren, welche aufgrund der dafür notwendigen Tests und weiterer Zertifizierungsmaßnahmen sehr teuer ist, leisten universitäre Einrichtung einen wesentlichen Beitrag vor allem in der Erarbeitung neuer, verbesserter Konzepte. Erfolgversprechende Konzepte werden der Industrie zur Weltraumqualifizierung übergeben.

Neben der Entwicklung eines in Abb. 1.1.1 verdeutlichten Regelsystems für den Triebwerkschub als Funktion des extrahierten Ionenstrahlstroms¹ I_b , welches mehrere parallel arbeitende Peripheriegeräte beinhaltet – regelungstechnisch als Aktuatoren bezeichnet – wird ein Radiofrequenz-Generator (RFG), der selbst einen dieser Aktuatoren darstellt, zur Energieeinspeisung in das Triebwerk im Projektbereich E konzeptioniert und aufgebaut.

Die Motivation dabei besteht vor allem in der Realisierung eines hohen elektrischen Wirkungsgrades, was konkret beim RFG durch Minimierung von Verlusten der Halbleiterschalter erreicht werden kann. Zu den Verlusten zählen Schalt- sowie Leitverluste, wobei im weiteren Verlauf nur Leitverluste berücksichtigt werden, um prinzipielle Funktionen zu erläutern. Detaillierte Informationen zum Thema der Vermeidung von Verlusten bei Halbleiterschaltern sind in Ref. 86 nachzulesen.

Das Erzielen hoher Wirkungsgrade ist nicht bloß aufgrund der eingeschränkt zur Verfügung stehenden elektrischen Energie eines Satelliten anzustreben. Der Wirkungsgrad, hier den RFG

¹engl.: ion beam current

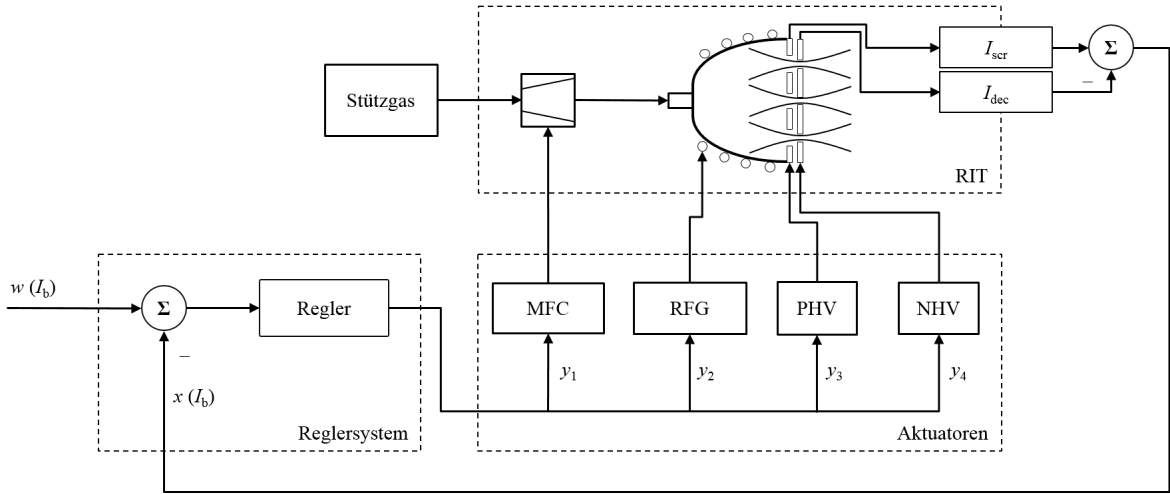


Abbildung 1.1.1: Regelungsschema eines RIT samt Peripheriegeräten. Der extrahierte Ionenstrom I_b ist die Regelgröße x und wird an die Führungsgröße w durch eine geeignete Reglerstruktur angepasst. Die Stellgrößen y_n bezeichnen die Signaleingänge der Aktuatoren, die ihrerseits das Triebwerk mit physikalischen Signalen wie Spulenstrom und Gitterspannung beaufschlagen.

beschreibend, ist als

$$\eta_{\text{RFG}} = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{zu}}} = \frac{P_{\text{ab}}}{P_{\text{ab}} + P_1} \quad (1.1.1)$$

definiert, wobei P_{ab} die abgegebene Leistung, P_{zu} die zugeführte Leistung und P_1 die Verlustleistung² beschreibe. Die Verlustleistung ist wiederum ein Indiz für die erzeugte Wärme im RFG. Mit Gl. (1.1.1) lässt sich weiterhin eine Relation zwischen thermischem Verhalten und erreichtem Wirkungsgrad ableiten. Das Abführen von Wärme ist im Weltraum ein äußerst kompliziertes Thema, da Wärme nur über Radiatoren in Form von Strahlung abgegeben werden kann. Radiatoren bringen allerdings zusätzliches Gewicht mit sich, das die Masse des Satelliten signifikant erhöhen könnte. Es muss also ein Kompromiss zwischen maximal zulässigem Gewicht sowie maximal tolerierbarer Wärme gefunden werden. Letztere ist wiederum eine Funktion der Verlustleistung der elektrischen Einheiten, die möglichst minimal zu halten ist, um die Wärmebelastung in akzeptablen Bereichen zu halten. Dies motiviert die Erreichung hoher Wirkungsgrade doppelt. Es existiert eine Vielzahl von Methoden und Schaltungstopologien, die die Verlustleistung reduzieren, auf welche hier aber nicht näher eingegangen wird. Grundlegende Konzepte können unter anderem in Refs. 6, 7 und 18 nachgelesen werden. Ein konkreter Ansatz ist die optimierte Topologie des Serienresonanzwandlers, wobei MOSFETs³ als Leistungshalbleiter eingesetzt und nahe des Nulldurchgangs des harmonischen Laststromes⁴ $i_{\text{ld}}(t) = i_{\text{ld}}$ geschaltet werden, was nach

$$p_1 = i_{\text{ld}}^2 R_{\text{ds}}, \quad (1.1.2)$$

mit Drain-Source Durchgangswiderstand R_{ds} , zu einer Minimierung der Verluste führt [94]. In Gl. (1.1.2) beschreibt $p_1(t) = p_1$ den zeitlich harmonischen Verlauf der Verlustleistung, wobei

²engl.: power loss

³Metall-Oxid-Halbleiter-Feldeffektransistor, engl.: metal-oxide-semiconductor field-effect transistor

⁴engl.: load current

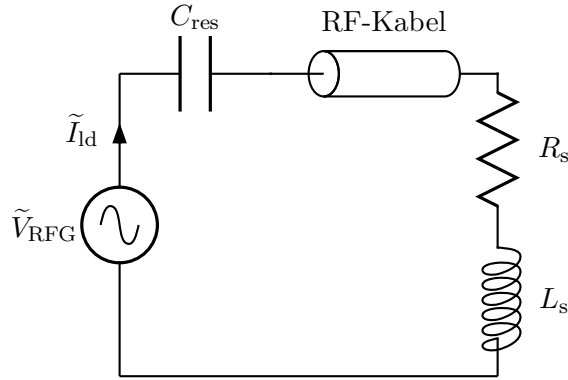


Abbildung 1.1.2: Ersatzschaltbild der Leistungseinkopplung vom RFG in die Induktionsspule des Triebwerks. Die Resonanzkapazität C_{res} ist Teil des RFG und bildet einen Serienresonanzkreis mit der Triebwerksimpedanz $Z_s = R_s + i\omega L_s$, wodurch die Güte der Leistungseinkopplung verbessert wird.

sich der zeitliche Mittelwert dieser Leistung P_1 , wie er in Gl. (1.1.1) gegeben ist, über das Integral

$$P_1 = \overline{p_1} = \frac{R_{\text{ds}}}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} i_{\text{Id}}^2 dt \quad (1.1.3)$$

berechnet. Dabei bezeichnet T die Periodendauer des Stromverlaufs, welcher hier topologiebedingt harmonisch ist, da die elektrische Last, die hier durch die Serienimpedanz $Z_s = R_s + i\omega L_s$, mit Kreisfrequenz ω , des Triebwerks gegeben ist, einen Serienresonanzkreis bildet, in welchem der Strom gemäß

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\delta \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0 \quad (1.1.4)$$

oszilliert. In Gl. (1.1.4) bezeichnet $\delta = R_s/2L_s$ die Abklingkonstante, mit Serienwiderstand R_s und -induktivität L_s , und $\omega_0 = 1/\sqrt{L_s C_{\text{res}}}$ die Resonanzkreisfrequenz, wobei C_{res} die Kapazität im Resonanzkreis darstellt.

Ein Ersatzschaltbild dieses Einkopplungsvorganges ist in Abb. 1.1.2 dargestellt. Die Serienresonanzkapazität C_{res} ist dabei kein Teil der Triebwerksimpedanz; sie ist Teil des Generators und wird für die Frequenzanpassung benötigt.

Das in der Abbildung dargestellte RF-Kabel wird beim Einkopplungsvorgang weiterhin als verlustlos angenommen. Es wird hier dennoch gezeigt, um die Grenze zwischen RFG und dessen Last besser zu visualisieren. In der Realität verursacht das RF-Kabel allerdings Ohm'sche Verluste sowie Phasenverschiebungen aufgrund reaktiver, blindleistungserzeugender Komponenten, die bei Einkopplungsvorgängen stets beachtet werden müssen. Da im weiteren Verlauf dieser Arbeit jedoch speziell auf die Herleitung der Triebwerksimpedanz eingegangen wird, wird der Einfluss des Kabels aus Gründen der Einfachheit vernachlässigt. Selbiges gilt für den Generatorinnenwiderstand.

Die in der Abbildung dargestellten Größen \tilde{V}_{RFG} und \tilde{I}_{Id} beschreiben die komplexen Phasoren der Generatorspannung sowie des Laststromes. Der Phasor des Stromes ergibt sich aus der Amplitude \hat{i}_{Id} des sinusförmigen Verlaufs sowie der Startphase ϕ_0 gemäß $\tilde{I}_{\text{Id}} = \hat{i}_{\text{Id}} \exp(i\phi_0)$. Die Beschreibung im Frequenzbereich lässt sich für harmonische Größen einfach in den Zeitbereich transformieren nach $i_{\text{Id}} = \text{Re} \left\{ \tilde{I}_{\text{Id}} \exp(i\omega t) \right\}$.

Die Entwicklung neuer Schaltungstopologien zur Optimierung der übertragenen Energie in Ionentriebwerke ist nicht Bestandteil dieser Arbeit. Vielmehr soll mit dieser Arbeit die Basis für solche Entwicklungen durch mathematische Beschreibungen sowie elektrische Ersatzschaltbilder für diskrete Arbeitspunkte bei RIT gelegt werden. Darüber hinaus soll bei diesen Betrachtungen stets die Performance evaluiert werden, was zeitgleich Optimierungen der Triebwerke an sich zulässt.

Ohne die einzelnen Größen an dieser Stelle detailliert zu erläutern – dazu sei auf Kap. 2.3 verwiesen – sollen hier qualitative Abhängigkeiten erwähnt werden, die zur Beschreibung der Performance von RIT wichtig sind. Mit einer Performancebeschreibung lässt sich aufbauend auf dem Wirkungsgrad aus Gl. (1.1.1), der den Energietransport ins Triebwerk beschreibt, noch die Verwertung dieser Energie zur Schubzeugung evaluieren. Der resultierende Gesamtwirkungsgrad lässt sich dann zu

$$\eta_{\text{ges}} = \eta_{\text{RFG}}\eta_{\text{RIT}} = \eta_{\text{RFG}}\eta_m\eta_{\text{el}} \quad (1.1.5)$$

berechnen, wobei η_{RIT} sowohl den Massenwirkungsgrad der Treibstoffnutzung η_m als auch den elektrischen Wirkungsgrad der Ionenstrahlerzeugung η_{el} beschreibt.

Die Motivation dieser Arbeit lässt sich nun komplett anhand von Gl. (1.1.5) erläutern. Eine Performancebeschreibung soll optimierte geometrische Designs ermöglichen, die η_{RIT} steigern, wobei die durch diese Optimierungen hervorgerufenen Änderungen der Triebwerksimpedanz Z_s quantitativ erfasst werden, so dass η_{RFG} über geeignete Maßnahmen ebenfalls erhöht oder zumindest erhalten werden kann. Weiterhin sollen die Einflüsse von veränderbaren Eingangsparametern auf die Performance sowie auf die Impedanz des Triebwerks evaluiert werden, was für eine bestehende Triebwerksgeometrie wiederum beide Wirkungsgrade betrifft. Die arbeitspunkt- und geometrieabhängige Triebwerksimpedanz kann beispielsweise in einer Tabelle einer digitalen Reglerstruktur abgelegt sein, um das stark nichtlineare Verhalten adäquat ausregeln zu können. Dies betrifft sowohl die Regelung des RFG, mit der η_{RFG} direkt erhöht werden kann, als auch die übergeordnete Reglerstruktur aus Abb. 1.1.1, auf die hier nicht weiter eingegangen wird.

1.2 Numerische Modellierung als Teil des Virtual Prototypings

Numerische Modellierung ist dank der Rechenleistung aktueller Computer ein weit verbreitetes Vorgehen in Industrie und Forschung. Sie begünstigt Entwicklungsprozesse erheblich, da sie teure und zeitaufwändige Prototypentests sukzessive ersetzt. Allerdings besteht stets der Zweifel der Zuverlässigkeit und Gültigkeit dieser Modelle, weshalb Verifikationen unerlässlich sind. Ein iteratives Verfahren, das numerische Modellierung mit der Entwicklung von Labormustern vereint ist das sogenannte Virtual Prototyping. Dabei werden am numerischen Modell Optimierungen vorgenommen, die am Labormuster experimentell evaluiert werden und somit wiederum eine Aussage über die Verlässlichkeit des Modells zulassen. Dabei werden sowohl die Hard- als auch die Software stets verbessert, weshalb dieses Verfahren sehr gerne eingesetzt wird.

Das hier entwickelte Modell kann auch in einem solchen Virtual-Prototyping-Prozess eingesetzt werden, wobei in dieser Arbeit lediglich eine Iteration gezeigt wird. Dabei ist das Modell als Performance-Toolset anzusehen, welches verschiedene physikalische Prozesse beinhaltet und diese iterativ zur Konvergenz bringt, abhängig von den eingestellten Eingabeparametern. Um welche Größen es sich dabei genau handelt, ist detailliert in Kap. 3 dargestellt und erläutert.

Es soll letztendlich einerseits einen effizienteren Betrieb aktueller RIT durch die Bestimmung optimal zueinander eingestellter Eingangsgrößen und andererseits die Entwicklungen neuer Triebwerke mit optimierten Geometrien zum Erreichen höherer Wirkungsgrade unterstützen.

Man ist stets daran interessiert, die numerischen Modelle so komplex wie nötig aber dabei so einfach wie möglich zu halten. Dies ist aus vielerlei Gründen der Fall; angefangen bei der leichteren Wart- und Erweiterbarkeit bis hin zum Rechenaufwand, welcher natürlich mit steigender Komplexität steigt. In dieser Arbeit wurde ebenfalls Wert auf die angesprochenen Aspekte gelegt. Dabei hat sich herausgestellt, dass einfache Modelle, wie sie in diversen Publikationen vorgestellt werden [14, 26, 100–103], meist nicht auf die Geometrien der Gießener RIT angewendet werden können, da sie meist stark vereinfachte eindimensionale Ansätze verfolgen, die aufgrund physikalischer Gegebenheiten dieser Triebwerke ungültig sind. Ein konkretes Beispiel ist die in RIT eingesetzte Induktionsspule⁵. Sie ist elektrisch kurz, was bedeutet, dass ihre Maße im Verhältnis $d_c \geq l_c$ zueinander stehen, wobei d_c den Durchmesser und l_c die axiale Länge der Spule bezeichnen. Dadurch sind die von ihr eingekoppelten elektromagnetischen Felder nicht mehr analytisch zu beschreiben; im Gegensatz zu jenen bei elektrisch langen Spulen [41]. Dies ist unter anderem dadurch bedingt, dass das induzierte elektrische Feld in einem zylindrischen RIT-Entladungsgefäß zum radialen Mittelpunkt hin nicht auf null abklingt, sondern eine axiale Komponente erhalten bleibt, die eine ein- bzw. zweidimensionale Beschreibung ungültig macht. Die Konsequenz ist eine dreidimensionale Beschreibung, um den Effekt dieser zusätzlichen Komponente korrekt darzustellen. Trotz dieser wichtigen Erkenntnis können die erwähnten Publikationen als Basis der hier vorliegenden Arbeit angesehen werden, die diesbezüglich als Weiterentwicklung angesehen werden kann.

⁵engl.: coil

Kapitel 2

Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden die physikalischen und technischen Grundlagen erklärt, die zur Anfertigung des numerischen Modells benötigt werden. Das Modell ist aus modularen Funktionen aufgebaut, zu welchen die jeweils benötigten theoretischen Hintergründe hier dargestellt sind. Diese sind vor allem die physikalische Beschreibung der elektromagnetischen Felder, die zur Energieeinkopplung in RIT genutzt werden und des induktiv-gekoppelten Niedertemperaturplasmas, das im entwickelten Modell im Fluidbild betrachtet wird. Weiterhin wird die Kopplung zwischen Feldtheorie und Plasma erläutert, welche letztendlich die Funktionsweise eines RIT gewährleistet, das aus der ins Plasma eingekoppelten Energie einen Antriebsschub generiert. Dazu werden weiterhin die Grundlagen der Raketentechnik erläutert.

2.1 Theorie elektromagnetischer Felder

Im Folgenden werden grundlegende Zusammenhänge gezeigt, die aus den Maxwell'schen Gleichungen abgeleitet werden können. Diese Gleichung bestehen aus einem Satz von gekoppelten Zusammenhängen, die die Verknüpfung zwischen elektrischen und magnetischen Feldern vollständig beschreiben. Sie können als Grundpfeiler der modernen Elektrodynamik verstanden werden und bilden gleichzeitig die Basis dieser Arbeit. James Clerk Maxwell hat die später nach ihm benannten Gleichungen im Jahr 1865 erstmals veröffentlicht [78].

Bis auf eine Korrektur, die Maxwell selbst an einer der Gleichungen vornahm, hat er die vorangegangenen Arbeiten anderer Wissenschaftler, namentlich Michael Faraday im Bereich der elektromagnetischen Induktion, André-Marie Ampère im Bereich der Magnetostatik und Charles Augustin de Coulomb im Bereich der Elektrostatik, lediglich in eine mathematisch miteinander kompatible Form von Gleichungen gebracht. Die Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum in ihrer allgemeinsten Form lauten in SI-Einheiten [41]

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (2.1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1.2)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (2.1.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}. \quad (2.1.4)$$

Hier und im weiteren Verlauf der Dissertation bezeichnen fettgedruckte, aufrecht geschriebene Größen Vektoren. Skalare sind in normaler Druckstärke und kursiv dargestellt. Weiterhin gilt

für beliebige Vektorfelder in kartesischen Koordinaten im Allgemeinen

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} V_x(\mathbf{x}, t) \\ V_y(\mathbf{x}, t) \\ V_z(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_x(x, y, z, t) \\ V_y(x, y, z, t) \\ V_z(x, y, z, t) \end{pmatrix}. \quad (2.1.5)$$

Analog dazu gilt für beliebige Skalarfelder

$$S = S(\mathbf{x}, t) = S(x, y, z, t). \quad (2.1.6)$$

Der Raumvektor berechnet sich in kartesischen Koordinaten zu $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$, wobei \mathbf{e} den Einheitsvektor der jeweiligen Raumrichtung bezeichnet.

In Gl. (2.1.1) – (2.1.4) beschreibt \mathbf{D} die dielektrische Verschiebung, ρ die Raumladungsdichte, \mathbf{B} die magnetische Induktion, \mathbf{H} die magnetische Feldstärke, \mathbf{J} die Stromdichte, $\partial\mathbf{D}/\partial t$ den Verschiebungsstrom und \mathbf{E} die elektrische Feldstärke. Die zuvor erwähnte Korrektur führte Maxwell an Gl. (2.1.3), dem Ampère’schen Durchflutungsgesetz durch, indem er den Term des Verschiebungsstroms hinzuaddierte, um das Gesetz geschlossen gültig zu machen [41]. Man redet daher auch vom Ampère-Maxwell’schen Durchflutungsgesetz.

Einige der oben aufgeführten Größen lassen sich durch wiederum andere anhand von Materialgleichungen darstellen. Die dielektrische Verschiebung aus dem Gauß’schen Gesetz in Gl. (2.1.1) ist beispielsweise durch $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E} = \epsilon_0\epsilon_r\mathbf{E}$ definiert, wobei $\epsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F m}^{-1}$ die elektrische Feldkonstante und ϵ_r die materialspezifische, relative Permittivität bezeichnen. Analog dazu lassen sich magnetische Feldstärke sowie magnetische Induktion aus Ampère-Maxwell’schem Durchflutungsgesetz in Gl. (2.1.3) und Faraday’schem Induktionsgesetz in Gl. (2.1.4) ineinander überführen gemäß $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H} = \mu_0\mu_r\mathbf{H}$. Dabei ist $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ die magnetische Feldkonstante und μ_r die materialspezifische, relative Permeabilität. Für nicht-magnetisierbare Medien gilt $\mu_r \approx 1$ [41]. Im Allgemeinen ist zu beachten, dass die materialspezifischen Parameter neben einer Richtungs- auch eine Frequenzabhängigkeit aufweisen können, die neben Verlusten weiterhin zu dispersiven Effekten führen kann [41]. Allgemein gilt also $\epsilon_r = \epsilon_r(\mathbf{x}, \omega)$ und $\mu_r = \mu_r(\mathbf{x}, \omega)$.

Die Maxwell’schen Gleichungen können für zeitharmonische Vorgänge, also unter der Voraussetzung sinusförmiger Feldoszillationen, durch die Transformation $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$ ebenso im Frequenzbereich definiert werden [41] und lauten dort in Phasorschreibweise (vgl. Kap. 1.1)

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\rho} \quad (2.1.7)$$

$$\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0 \quad (2.1.8)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{H}} = \tilde{\mathbf{J}} + i\omega\tilde{\mathbf{D}} \quad (2.1.9)$$

$$\nabla \times \tilde{\mathbf{E}} = -i\omega\tilde{\mathbf{B}}. \quad (2.1.10)$$

2.1.1 Elektromagnetische Potenziale

Die Maxwell’schen Gleichungen (2.1.1) – (2.1.4) und (2.1.7) – (2.1.10) bilden je ein System gekoppelter, partieller Differenzialgleichungen erster Ordnung für die Komponenten der elektrischen und magnetischen Felder und lassen sich in einfachen Fällen direkt lösen [41]. Im Allgemeinen ist es jedoch zweckmäßig, diese vier Differenzialgleichungen durch Potenziale darzustellen. Die resultierenden Differenzialgleichungen sind zwar zweiter Ordnung, aber dafür lassen sich dank ihnen die vier Maxwell’schen Gleichungen mit nur zwei Potenzialgleichungen ausdrücken.

Aus der Elektro- bzw. Magnetostatik kennt man das skalare Potenzial Φ sowie das Vektorpotenzial \mathbf{A} [28, 36, 41, 47, 50, 55, 84, 87, 93]. Die Potenzialgleichung für das elektrische Feld lautet

$$\mathbf{E} = -\nabla\Phi. \quad (2.1.11)$$

Folgt man den Ausführungen in Ref. 41, kann man weiterhin aus Gl. (2.1.2) erschließen, dass sich \mathbf{B} als Rotation eines Vektorfeldes beschreiben lässt (da dessen Divergenz null beträgt und ein Vektorfeld sich aus einem Rotations- und einem Divergenzanteil zusammensetzt). Dieses ‘‘künstliche’’ Vektorfeld ist das Vektorpotenzial, welches über

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (2.1.12)$$

mit der magnetischen Induktion verkoppelt ist. Setzt man diesen Zusammenhang nun in Gl. (2.1.4) ein, erhält man

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A}. \quad (2.1.13)$$

Auf Gl. (2.1.13) kann man nun den Satz von Schwarz anwenden, welcher Integritätsbedingungen partieller Ableitungen auf einem beliebigen Gebiet behandelt [9], um die Reihenfolge der vorkommenden partiellen Ableitungen zu vertauschen und somit

$$\nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \quad (2.1.14)$$

zu erhalten. Da die Rotation des in Klammern stehenden Vektorfeldes in Gl. (2.1.14) verschwindet, kann es als Gradient eines skalaren Potentials dargestellt werden, um die Existenz des Vektorfeldes zu gewährleisten. Es ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= -\nabla\Phi \\ \Rightarrow \mathbf{E} &= -\nabla\Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Setzt man nun Gl. (2.1.15) in die Maxwell’schen Gleichungen im Vakuum ein, wobei dort explizit $\epsilon_r = \mu_r = 1$ gilt, erhält man ein immer noch gekoppeltes System aus zwei Potenzialgleichungen zweiter Ordnung, welches durch

$$\nabla^2\Phi + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1.16)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right) = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (2.1.17)$$

gegeben ist. In Gl. (2.1.17) bezeichnet $c_0 = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2} = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum.

Um diese beiden Potenzialgleichungen zu entkoppeln, bedient man sich der Tatsache, dass bei deren Definition einige Freiheitsgrade enthalten sind, die ausgenutzt werden können. Da \mathbf{B}

in Gl. (2.1.12) über die Rotation von \mathbf{A} definiert ist, spielt es keine Rolle, ob man zu \mathbf{A} noch den Gradienten einer beliebigen, skalaren Funktion Λ hinzufügt [41], womit

$$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla\Lambda \quad (2.1.18)$$

gilt. Selbst nach dieser Transformation bleibt \mathbf{B} unverändert. Damit auch das elektrische Feld aus Gl. (2.1.15) unverändert bleibt, muss das skalare Potenzial Φ weiterhin der Transformation

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \Phi - \frac{\partial\Lambda}{\partial t} \quad (2.1.19)$$

unterzogen werden. Die beiden zusätzlichen Terme in den letzten beiden Gleichungen zeigen die o. g. Freiheitsgrade. Man darf letztendlich die Potentiale \mathbf{A} und Φ so wählen, dass sie der Lorenz-Eichung, gemäß

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial\Phi}{\partial t} = 0 \quad (2.1.20)$$

genügen, was direkt aus Gl. (2.1.18) und (2.1.19) folgt [41]. Unterzieht man die beiden gekoppelten Potenzialgleichungen Gl. (2.1.16) und Gl. (2.1.17) dieser Eichung, lassen sie sich zu zwei inhomogenen Wellengleichungen für Φ und \mathbf{A} entkoppeln [41]. Diese lauten

$$\nabla^2\Phi - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1.21)$$

$$\nabla^2\mathbf{A} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\mathbf{J}. \quad (2.1.22)$$

Diese beiden Gleichungen sind den Maxwell'schen Gleichungen im Vakuum vollkommen äquivalent.

Eine weitere wichtige Eichung ist die Coulomb-Eichung, die durch

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (2.1.23)$$

definiert ist [41]. Mit Hilfe dieser Eichung erhält man beispielsweise die Poisson-Gleichung zur Bestimmung des skalaren Potentials bei beliebigen Raumladungsverteilungen (durch Anwendung auf Gl. (2.1.16)), welche sich zu

$$\nabla^2\Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.1.24)$$

ergibt. Die Coulomb-Eichung gewinnt vor allem dadurch an Bedeutung, dass man mit ihrer Hilfe eine vereinfachte Form der elektromagnetischen Potentiale aus Gl. (2.1.21) und (2.1.22) ableiten kann, die für diese Arbeit wichtig ist. Dies ist im folgenden Abschnitt näher erläutert.

2.1.2 Vereinfachende Annahmen für quasi-stationäre Felder

Neben dem statischen Fall, bei dem keine zeitliche Änderungsrate der Felder auftritt, d. h. $\partial/\partial t = 0$, und dem allgemeinen dynamischen Fall, der im letzten Abschnitt diskutiert wurde, kann man ein vereinfachendes Regime für zeitliche Änderungsraten definieren, die als "langsam" anzunehmen sind. Diesem Bereich schreibt man quasi-stationäres Verhalten zu [41]. Ob man von quasi-stationärem Verhalten reden kann, womit eine langsame zeitliche Änderung

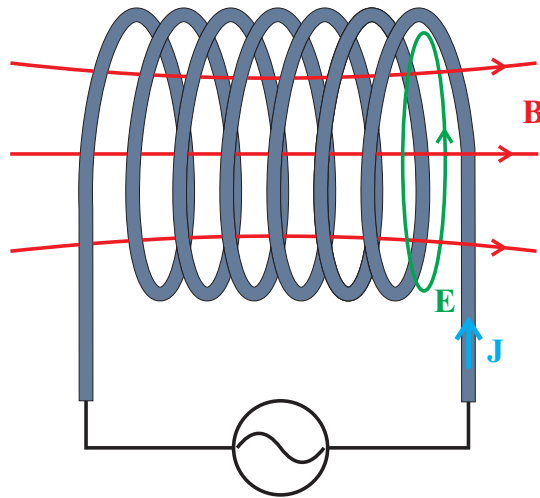


Abbildung 2.1.1: Induktionsspule zur Erläuterung von quasi-stationären Vorgängen. Die Stromdichte ist hier vom Generator aufgeprägt und erzeugt ein Magnetfeld. Durch die zeitliche Änderungsrate tritt elektromagnetische Induktion auf, welche ein elektrisches Wirbelfeld inner- und außerhalb der Spule erzeugt.

der Felder gemeint ist, kann anhand einfacher Zusammenhänge zwischen der geometrischen Ausdehnung des betrachteten Leiters und der Änderungsrate der Quellterme (z. B. der Oszillationsfrequenz der Stromdichte) abgeschätzt werden. Die folgenden Erklärungen stützen sich auf die Geometrie aus Abb. 2.1.1.

Am Beispiel der elektromagnetischen Induktion kann man von einem quasi-stationären Verhalten ausgehen, wenn die Wellenlänge des Stromsignals, bzw. des Stromdichtesignals, groß gegenüber der Ausdehnung des führenden Leiters ist. Da die Wellenlänge λ nach

$$\lambda = \frac{c_0}{f} \frac{1}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (2.1.25)$$

invers proportional zur Signalfrequenz f ist, muss diese ausreichend klein sein, um eine quasi-homogene Stromverteilung entlang des Leiters zu gewährleisten. Es gibt keine klar definierte Grenze. Die Annahme wird allerdings umso besser, je größer das Verhältnis λ/l , mit der Länge des Leiters l , wird. Um eine quantitative Aussage zu bekommen, muss man die Leitungsstromdichte mit der Verschiebungsstromdichte in Relation setzen, um deren möglichen Einfluss zu bestimmen. Näherungsweise ist die Verschiebungsstromdichte vernachlässigbar, was einer homogenen Strombedeckung des Leiters äquivalent ist, sofern das Verhältnis $\lambda \gg l$ (Wellenlänge mindestens zehn mal größer als die Leiterlänge) eingehalten wird.

Die relevanten, teils angepassten, Gleichungen für das quasi-stationäre Regime lauten [36, 41]

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (2.1.26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1.27)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.1.28)$$

$$\mathbf{J} = \kappa \mathbf{E}. \quad (2.1.29)$$

Dabei fällt auf, dass der Term des Verschiebungsstroms aus Gl. (2.1.3) hier in Gl. (2.1.26) nicht mehr vorkommt. Der lineare Zusammenhang zwischen Stromdichte und elektrischem Feld in

Gl. (2.1.29) entspricht im Wesentlichen dem Ohm'schen Gesetz, allerdings kann die Leitfähigkeit $\kappa = \kappa(\mathbf{x})$ hier komplex sein, wodurch Phasenverschiebungen zwischen elektrischem und magnetischem Feld hervorgerufen werden können.

Um nun die Felder mit der quasi-stationären Näherung zu berechnen, gibt es verschiedene Ansätze. Diese Ansätze haben gemeinsam, dass die Berechnung der Felder über das Vektorpotenzial (das kein physikalisches Feld darstellt) relativ einfach wird, weil man damit die Möglichkeit einer Eichtransformation hat (s. Kap. 2.1.1).

Zuerst schreibt man Gl. (2.1.26) in der etwas gebräuchlicheren Form $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}$ und substituiert danach \mathbf{B} durch Gl. (2.1.12) wodurch

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \mu_0 \mathbf{J} \quad (2.1.30)$$

resultiert. Wendet man daraufhin die Vektoridentität $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$ aus Ref. 9 auf Gl. (2.1.30) an, ergibt sich

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.1.31)$$

Durch Anwendung der eingeführten Coulomb-Eichung aus Gl. (2.1.23) ergibt sich schließlich die vektorielle Poisson-Gleichung zur Bestimmung des Vektorpotenzials

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.1.32)$$

Ein direktes, semi-analytisches Lösungsverfahren für Gl. (2.1.32), das auch in dieser Arbeit verwendet wurde, wird in Kap. 2.1.3 detailliert beschrieben und erläutert. Anzumerken ist, dass die Lösung die gleiche Form wie das Biot-Savart'sche Gesetz hat, das jedoch nicht aus den Maxwell-Gleichungen abgeleitet wurde, sondern von Oersted, Biot, Savart und später auch Ampère experimentell bestimmt und postuliert wurde [41].

Gleichung (2.1.32) ist aufgrund ihrer Herleitung nur für den Spezialfall des Vakuums gültig. Betrachtet man stattdessen ein Gebiet, das mit einem Medium gemäß $\epsilon_r \neq 1$ oder $\mu_r \neq 1$ gefüllt ist, verliert die vektorielle Poisson-Gleichung ihre Gültigkeit und kann nicht zur Berechnung der Felder über deren Vektorpotenzial benutzt werden. Im weiteren Verlauf sind magnetisierbare Medien ausgeschlossen, es gilt also für alle Herleitungen $\mu_r = 1 \neq f(\mathbf{x}, \omega)$. Kann man keine weiteren vereinfachenden Annahmen treffen und geht von einem inhomogenen, dispersiven Medium aus ($\epsilon_r = \epsilon_r(\mathbf{x}, \omega) \neq 1$), muss man die Wellengleichung zur Berücksichtigung dieser Inhomogenität mit Hilfe eines anderen Ansatzes lösen. Dazu bedient man sich der Eichung

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\epsilon_r}{c_0^2} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mu_0 \kappa \Phi = 0, \quad (2.1.33)$$

die im Gegensatz zur Lorenz-Eichung aus Gl. (2.1.20) einen zusätzlichen verlustbehafteten Term und eine materialspezifische relative Permittivität $\epsilon_r = \epsilon_r(\mathbf{x}, \omega)$ beinhaltet [120].

Setzt man diese Eichung nun in Gl. (2.1.17) ein, ergibt sich die allgemeine Formulierung für nicht-magnetisierbare Medien der zu lösenden Differenzialgleichung im Zeit- sowie im Frequenzbereich zu

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\epsilon_r}{c_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \mu_0 \kappa \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (2.1.34)$$

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}} + \frac{\epsilon_r}{c_0^2} \omega^2 \tilde{\mathbf{A}} - i\omega \mu_0 \kappa \tilde{\mathbf{A}} = -\mu_0 \tilde{\mathbf{J}}. \quad (2.1.35)$$

Die Gleichungen beschreiben das Vektorpotenzial in seiner allgemeinsten Form und sind demnach auch nicht einfach zu lösen. Man muss sich numerischer Methoden bedienen oder Ansätze über ebene Wellen finden, die die Gleichungen erfüllen. Dies ist aufgrund der Geometrie der hier vorgestellten RIT-Systeme nicht nötig, da man sich bei der Energieübertragung von der Spule in das Plasma gerade in dem Näherungsbereich des quasi-stationären Regimes bewegt, in dem man nicht mit Wellenablösung zu rechnen hat. Daher wird der gesamte Term, der die zweite zeitliche Ableitung beinhaltet, nicht zu berücksichtigen sein. Man redet in diesem Regime auch von evaneszenten Feldern [41]. Im Folgenden soll ein Ansatz aus den für dieses Regime gültigen Gleichungen ((2.1.26) – (2.1.29)) hergeleitet werden, mit dessen Hilfe sich die elektromagnetischen Felder über ihr skalares und ihr Vektorpotenzial berechnen lassen.

Dazu nutzt man als erstes wieder die Definition aus Gl. (2.1.12) und setzt sie in Gl. (2.1.28) ein. Danach kann man unter erneuter Anwendung des Satzes von Schwarz das elektrische Feld zu $\mathbf{E} = -\partial\mathbf{A}/\partial t - \nabla\Phi$ berechnen. Setzt man diesen Ausdruck nun in Gl. (2.1.29) ein, ergibt sich für die Stromdichte die Beziehung

$$\mathbf{J} = \kappa\mathbf{E} = -\kappa\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} - \kappa\nabla\Phi. \quad (2.1.36)$$

Der Term mit dem skalaren Potenzial Φ kann gemäß $-\mathbf{J}_s = \kappa\nabla\Phi$ als Quellterm¹ aufgefasst werden [91], weil er für bewegte Ladungsträger steht. Somit gilt

$$\mathbf{J} = \kappa\mathbf{E} = -\kappa\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{J}_s. \quad (2.1.37)$$

Hierbei ist zu beachten, dass das Vorzeichen über die Potenzialgleichung des elektrischen Feldes $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ bei $-\mathbf{J}_s$ fest vorgeschrieben ist.

Setzt man nun Gl. (2.1.37) in Gl. (2.1.26) ein und geht weiterhin von obiger Annahme $\mu_r = 1$ im gesamten Gebiet aus, ergibt sich nach Ersetzen der magnetischen Induktion mit der Rotation des Vektorpotenzials

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = -\kappa\mu_0\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \mu_0\mathbf{J}_s \quad (2.1.38)$$

und schließlich unter Einbeziehung der Vektoridentität $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2\mathbf{A}$ und der Coulomb-Eichung $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ die Diffusionsgleichung des Vektorpotenzials

$$\nabla^2\mathbf{A} - \kappa\mu_0\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} = -\mu_0\mathbf{J}_s \quad (2.1.39)$$

für eine räumlich variable Leitfähigkeit $\kappa = \kappa(\mathbf{x})$. Dabei stellt der medienspezifische Term die irreversible Umwandlung elektromagnetischer Feldenergie in Wärme dar, da unter der Annahme dass $\nabla\Phi = 0$, was zumindest im Innenbereich² eines Plasmas stets der Fall ist [65], die zeitliche Ableitung des Vektorpotenzials nach Gl. (2.1.15) dem induzierten elektrischen Feld entspricht. Zusammen mit der Leitfähigkeit wird also durch dieses Feld ein Strom induziert, welcher auf kreisförmigen geschlossenen Feldlinien verläuft. Man bezeichnet diese Art von induzierten Strömen auch als Wirbelströme [41, 47]. An der Vorzeichenkonvention kann man erkennen, dass der induzierte Wirbelstrom entgegengesetzt der Quellstromdichte \mathbf{J}_s verläuft, was der Grundaussage der Lenz'schen Regel entspricht.

¹engl.: source

²auch bulk-Bereich genannt

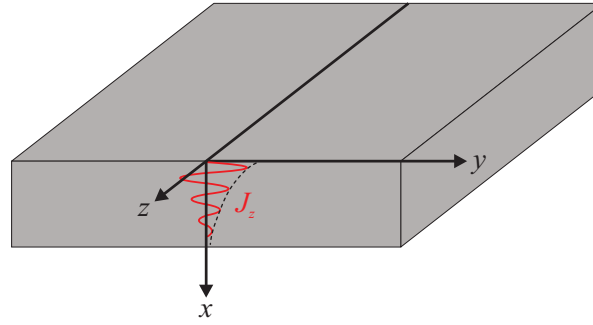


Abbildung 2.1.2: Zur Herleitung des Skin-Effekts nach Ref. 50 für ein eindimensionales Randwertproblem. Der in y - und z -Richtung unendlich ausgedehnte Leiter trägt einen in z -Richtung fließenden Strom, dessen Amplitudenabnahme in das Medium des Leiters hinein hier schematisch dargestellt ist.

Die Diffusionsgleichung, dargestellt in Gl. (2.1.39), ist mathematisch gesehen eine dreidimensionale parabolische partielle Differentialgleichung [9] und kann in der Regel nur numerisch gelöst werden. Aus der parabolischen lässt sich eine einfacher zu lösende, elliptische Differentialgleichung machen, indem die zeitliche Ableitung ersetzt wird. Die funktionelle Basis dazu liefert wieder die elektrodynamische Theorie, da man über die bekannte und auch hier bereits gezeigte Transformation der Gleichung in den Frequenzbereich gemäß $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$ eine Substitution der zeitlichen Ableitung durchführen kann. Die zu lösende Gleichung mit $\kappa = \kappa(\mathbf{x}, \omega)$ lautet dann

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}} - i\omega\kappa\mu_0 \tilde{\mathbf{A}} = -\mu_0 \tilde{\mathbf{J}}_s. \quad (2.1.40)$$

Die materialspezifische Induktion von Wirbelströmen gemäß der Lenz'schen Regel bewirkt, dass der induzierte dem erregenden Strom entgegenwirkt und die von diesem generierten Felder somit abschwächt. Dieser Mechanismus wird als Skin-Effekt bezeichnet [41]. Für eindimensionale Problemstellungen lässt sich die Skineindringtiefe δ , also die charakteristische Dämpfungslänge der eingekoppelten Felder, aus der Diffusionsgleichung herleiten. Dazu wird als erstes eine quellenfreie Diffusionsgleichung mit $\tilde{\mathbf{J}}_s = \mathbf{0}$ für die Stromdichte im Frequenzbereich formuliert. Sie lautet

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{J}} - i\omega\kappa\mu_0 \tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{0}. \quad (2.1.41)$$

Des Weiteren gilt für die Herleitung, dass der nicht-magnetisierbare Leiter, der mit dem lediglich in z -Richtung fließenden Strom gemäß $\mathbf{J}(x, t) = \text{Re} \left\{ \tilde{J}_z(x) \exp(i\omega t) \mathbf{e}_z \right\}$ beaufschlagt sei, die Leitfähigkeit κ habe und in y - und z -Richtung unendlich ausgedehnt sei, wie in Abb. 2.1.2 dargestellt. Es sei erwähnt, dass die gedämpfte Schwingung in der Abbildung lediglich die Amplitudenabnahme (bzw. die Abnahme des Effektivwerts) aufzeigt und dabei keine Hinweise auf die Wellenzahl liefern soll, da im quasi-stationären Regime die Wellenlänge selbst im Medium als groß gegenüber der geometrischen Ausdehnung des Leiters anzusehen ist. Damit reduziert sich der betrachtete Fall zu einem eindimensionalen Problem [50].

Mit den Definitionen des Stroms sowie der räumlichen Abhängigkeiten für dieses Problem lautet die zu lösende Diffusionsgleichung also (die partielle Ableitung wird zum totalen Differential, da außer in x -Richtung keine weiteren Abhängigkeiten bestehen)

$$\frac{d^2 \tilde{J}_z(x)}{dx^2} - i\omega\kappa\mu_0 \tilde{J}_z(x) = 0, \quad (2.1.42)$$

wobei \tilde{J}_z für den Phasor der Stromdichte steht. Der explizite zeitliche Verlauf wird an dieser Stelle noch nicht eingeführt, da die Differenzialgleichung ebenso im Frequenzbereich gelöst werden kann.

Die Lösung für die Differenzialgleichung ist nach Ref. 9 durch

$$\tilde{J}_z(x) = \tilde{J}_{z,1}(0) \exp(-\gamma x) + \tilde{J}_{z,2}(0) \exp(\gamma x) \quad (2.1.43)$$

gegeben. Dabei ist $\gamma^2 = i\omega\mu_0 \operatorname{Re} \kappa$ und folglich

$$\gamma = (1 + i) \sqrt{\frac{\omega\mu_0 \operatorname{Re} \kappa}{2}}. \quad (2.1.44)$$

Für die Quadratwurzel einer komplexen Zahl existieren zwei Lösungen. Da die zweite Lösung im zweiten Quadranten der komplexen Zahlenebene liegt, wird diese als unphysikalisch angenommen. In diesem Fall würde sich ein negativer spezifischer Widerstand $\rho = 1/\operatorname{Re} \kappa$ ergeben. Auch stellt die Lösung der Fortpflanzungskonstante aus Gl. (2.1.44) keine Einschränkung für allgemein komplexwertige Leitfähigkeiten gemäß $\kappa = \operatorname{Re} \kappa + i \operatorname{Im} \kappa$ dar, da die imaginäre Komponente eine Phasenverschiebung hervorrufen würde, die nicht zur Dämpfung beiträgt.

Der zweite Term aus Gl. (2.1.43), welcher mit einer positiven Exponentialfunktion multipliziert wird, wird als unphysikalisch angesehen und eliminiert. Daher ergibt sich für die Stromdichte im Zeitbereich

$$J_z(x, t) = \operatorname{Re} \left\{ J_{z,1}(0) \exp\left(-x \sqrt{\frac{\omega\mu_0 \operatorname{Re} \kappa}{2}}\right) \exp\left(-ix \sqrt{\frac{\omega\mu_0 \operatorname{Re} \kappa}{2}}\right) \exp(i\omega t) \exp(i\phi) \right\}. \quad (2.1.45)$$

Bei dieser Lösung beschreibt der erste Exponentialfaktor die Feldamplitudenabnahme in x -Richtung, der zweite die Phasendrehung in x -Richtung, der dritte die zeitliche Abhängigkeit und der vierte die Anfangsphase des Phasors. Um nun die Skineindringtiefe zu erhalten, benötigt man den ersten dieser Faktoren. Die Skineindringtiefe ist definiert als die Länge, bei welcher die Feldamplitude auf das 1/e-Fache ($\approx 37\%$) abgeklungen ist [50]. Daraus ergibt sich die Skineindringtiefe zu

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0 \operatorname{Re} \kappa}}. \quad (2.1.46)$$

Vergleicht man Gl. (2.1.40) mit Gl. (2.1.32), fällt als Unterschied lediglich der Verlustterm auf, der die Leitfähigkeit enthält, welche den Skin-Effekt bedingt. Genau durch diesen wird allerdings eine direkte Lösung über den Fundamentalansatz mit Hilfe Green'scher Funktionen äußerst kompliziert, insbesondere durch die räumliche Abhängigkeit der Leitfähigkeit. Einfacher und intuitiver ist an dieser Stelle die numerische Lösung der Differenzialgleichung unter Vorgabe von definierten Randbedingungen (siehe dazu Kap. 2.1.4). Eine Lösung der elliptischen Differenzialgleichung aus Gl. (2.1.32) ist jedoch analytisch herleitbar über deren Fundamentallösung, was genauer in Kap. 2.1.3 gezeigt wird. Die Auswertung der Lösung ist allerdings sehr rechenintensiv, weshalb dies nur automatisiert sinnvoll ist. Aus diesem Grund kann man das komplette Lösungsverfahren als semi-analytisch bezeichnen. Dessen Implementierung ist in Kap. 3.7.1 dargestellt.

2.1.3 Semi-analytisches Lösungsverfahren

Dieser Abschnitt soll die Lösungsmethode der vektoriellen Poisson-Gleichung (Gl. (2.1.32)) näher beschreiben. Um eine analytische Lösung für diese Gleichung zu finden, muss eine Möglichkeit geschaffen werden, den Laplace-Operator analytisch aufzulösen. Dazu bedient man sich der Green'schen Funktion dieses Operators [41], die man auch als Fundamentallösung bezeichnet. Green'sche Funktionen sind Hilfsmittel bei der Lösung inhomogener linearer Differenzialgleichungen und drücken physikalisch gesehen das Superpositionsprinzip aus. Die Green'sche Funktion für den Laplace-Operator in drei Dimensionen lautet

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = -\frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.1.47)$$

Die Herleitung dazu ist im Anhang in Kap. A.1.1 dargestellt.

Mit Hilfe der Green'schen Funktion aus Gl. (2.1.47) kann man Gl. (2.1.32) unter Einbeziehung von Gl. (A.1.7) nach dem Vektorpotenzial gemäß des Superpositionsprinzips lösen. Die Lösung lautet

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= -\mu_0 \iiint_{V'} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \mathbf{J}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \\ \Rightarrow \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (2.1.48)$$

Dabei bezeichnet V' das von der Stromdichte $\mathbf{J}(\mathbf{x}')$ beaufschlagte Leitervolumen.

Aus diesem Zusammenhang lässt sich auch das ursprünglich experimentell hergeleitete Biot-Savart'sche Gesetz unter der Einbeziehung von Gl. (2.1.12) [55] zu

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \times \left(\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \right) \\ \Rightarrow \mathbf{B}(\mathbf{x}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \nabla_{\mathbf{x}} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \end{aligned} \quad (2.1.49)$$

ableiten. Unter Ausnutzung der Vektoridentität

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{x}} \times \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} &= \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \nabla_{\mathbf{x}} \times \mathbf{J}(\mathbf{x}') - \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right) \\ &= -\mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \left(-\frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \right) \\ &= \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \end{aligned} \quad (2.1.50)$$

aus Ref. 9, ergibt sich für Gl. (2.1.49)

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{V'} \mathbf{J}(\mathbf{x}') \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} d^3\mathbf{x}'. \quad (2.1.51)$$

Im quasi-stationären Regime kann man vereinfachend annehmen, dass es keine Stromdichteverteilung entlang des Spulendrahtes gibt (siehe Kap. 2.1.2), sodass mit einem konstanten Strom I außerhalb des Integrals gemäß

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{C'} d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} \quad (2.1.52)$$

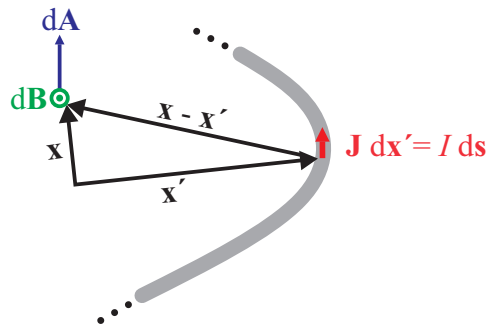


Abbildung 2.1.3: Visualisierung des Biot-Savart'schen Gesetzes im quasi-stationären Regime. Es kann mit einem konstanten Strom gerechnet werden, da die Wellenlänge sehr viel größer als die Leiterlänge ist und somit eine homogene Strombedeckung des Leiters angenommen werden darf.

gerechnet werden darf, wobei ds ein infinitesimales Stück entlang des Strompfades C' bezeichnet. Diese Zusammenhänge sind nochmals visuell in Abb. 2.1.3 dargestellt, um sie besser zu verdeutlichen.

Das Integral aus Gl. (2.1.52) kann mit einem Computer automatisiert für alle Raumpunkte \mathbf{x} gelöst werden, womit sich die räumliche magnetische Induktion ergibt. Dazu muss man dem Lösungsalgorithmus lediglich den Strompfad in Form von Koordinatenpaaren zuführen. Weitere Randbedingungen sind aufgrund der Herleitung über die Green'sche Funktion nicht nötig, da man dort ohnehin davon ausgeht, dass das Vektorpotenzial im Unendlichen abklingt. Die numerische Implementierung dieses Integrals ist in Kap. 3.7.1 dargestellt.

Bestimmung der Selbstinduktivität beliebig geformter Spulen

Gleichung (2.1.52) kann dazu genutzt werden, die Induktivität der Triebwerksspule (oder beliebig geformter Spulen im Allgemeinen) für den Zustand des ungezündeten Plasmas zu berechnen, was für das Gesamtmodell äußerst wichtig ist. Eine numerische Studie zu diesem Thema ist in Ref. 108 veröffentlicht.

Bekanntere Berechnungsformeln sind meist nur sehr bedingt gültig, bspw. für lange Zylinder-spulen, deren Durchmesser d_c gemäß $d_c \ll l_c$ sehr viel kleiner als deren axiale Längen l_c sind. In solchen Fällen kann man von einer homogenen Magnetfeldinduktion ausgehen und mit ein-dimensionalen Näherungen rechnen. Für eine lange Luftspule ergibt sich etwa eine Induktivität von

$$L = \frac{\mu_0 N_c^2 A}{l_c}, \quad (2.1.53)$$

wobei N_c die Windungszahl und A die Querschnittsfläche normal zum magnetischen Fluss bezeichnen [51]. Im Allgemeinen aber können Induktionsspulen beliebig geformt sein, wodurch auch inhomogene magnetische Feldeinkopplung vorliegen kann, was eine spezielle Herangehensweise an diese Problematik verlangt, wie auch im Falle der Radiofrequenz-Ionentriebwerke, die in den meisten Fällen mit kurzen Spulen ausgestattet sind, bei denen die erwähnte Näherung nicht gültig ist.

Die Induktivität L ist im Allgemeinen definiert als

$$L = \frac{\Psi}{I}, \quad (2.1.54)$$

wobei Ψ den magnetischen Fluss durch eine beliebig geformte Leiterschleife beschreibt. Um den magnetischen Fluss zu berechnen, muss man die magnetische Induktion gemäß

$$\Psi = \iint_A \mathbf{B} \, d\mathbf{A} = \iint_A \mathbf{B} \mathbf{n} \, dA = \iint_A B \cos[\angle(\mathbf{B}, \mathbf{n})] \, dA \quad (2.1.55)$$

über die Querschnittflächenelemente integrieren, zu welchen die Feldvektoren normal stehen.

Die magnetische Induktion \mathbf{B} kann mittels des Biot-Savart'schen Gesetzes aus Gl. (2.1.52) für beliebige Spulengeometrien dreidimensional ausgerechnet werden. Dabei muss allerdings eine homogene Strombeaufschlagung des Leiters gewährleistet sein, was im statischen und quasi-stationären Regime stets gilt. In anderen Bereichen muss Gl. (2.1.51) zur Lösung der Felder herangezogen werden. Vor allem für den elektrodynamischen Bereich, in welchem man nicht mehr von retardierten Potenzialen sprechen kann, d. h., wo die Felder nicht instantan wirken, muss eine zeitliche Abhängigkeit mit modelliert werden, die die endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der elektromagnetischen Wellen berücksichtigt. Retardierte Felder und Potenziale werden aufgrund der zuvor genannten Einschränkungen in dieser Arbeit allerdings nicht berücksichtigt.

Bei der numerischen Implementierung von Gl. (2.1.52) (vgl. Kap. 3.7.1) ist die Kenntnis der Feldvektoren genau so wichtig wie die der Normaleneinheitsvektoren der diskreten Flächenelemente im Simulationsvolumen. Deshalb ist es teilweise notwendig, das Berechnungsnetz so zu wählen, dass es gut zur zu simulierenden Geometrie passt. Am Beispiel einer Zylinderspule bieten sich etwa Zylinderkoordinaten an.

Bestimmung der induzierten elektrischen Feldstärke

Ersetzt man den Gleichstrom durch eine Wechselgröße gemäß $I \rightarrow \tilde{I}$, ändert sich Gl. (2.1.52) entsprechend zu

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, \omega) = \frac{\mu_0 \tilde{I}(\omega)}{4\pi} \int_{C'} d\mathbf{s} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3}. \quad (2.1.56)$$

Aufgrund der oben erwähnten Näherungen kann man alle frequenzabhängigen Amplituden einzeln berechnen, sofern man durch Variation der Frequenz das quasi-stationäre Regime nicht verlässt, was zur Ungültigkeit dieser Gleichung führen würde. Eine auf retardierte Felder verallgemeinerte Darstellung des Biot-Savart'schen Gesetzes, die unbeschränkt gültig ist, wurde von Jefimenko in Ref. 42 veröffentlicht. Für RIT eignet sich die in Gl. (2.1.56) angegebene Form allerdings sehr gut, was durch Vergleichsmessungen in Kap. 4.1.1 verifiziert wird.

Unter Einbeziehung von Gl. (2.1.15) lässt sich das induzierte elektrische Feld berechnen. Da Gl. (2.1.56) aus Gl. (2.1.32) hervorgeht, welche keinen verlustbehafteten Term aufweist ($\kappa = 0$), ist sie nur im Vakuum gültig, wodurch sich Gl. (2.1.15), unter Einbeziehung der Transformation $\partial/\partial t \rightarrow i\omega$, zu

$$\tilde{\mathbf{E}} = -i\omega \tilde{\mathbf{A}} \quad (2.1.57)$$

vereinfacht. Ein numerisches Modell zu dieser Thematik, das u. a. die Impedanz als Funktion der eingekoppelten Felder von RIT-Spulen im Vakuum bestimmt, ist in Ref. 112 veröffentlicht. Aufgrund des Verlustterms aus Gl. (2.1.40), der in den Triebwerken durch das Plasma repräsentiert wird, kann Gl. (2.1.56) allerdings nicht zur Berechnung der induzierten Felder in einem RIT mit gezündetem Plasma verwendet werden. Stattdessen wird dazu ein vollwertig numerisches Verfahren genutzt, dessen Grundlagen im folgenden Abschnitt erläutert werden.

2.1.4 Numerische Finite-Differenzen-Methode

Die Finite-Differenzen-Methode, kurz auch FDM, ist ein numerisches Lösungsverfahren für gewöhnliche und partielle Differentialgleichungen. Das Prinzip dieser Methode ist relativ einfach und basiert auf der Ersetzung aller Differenziale in einer Differentialgleichung durch Differenzenquotienten. Diese Differenzenquotienten können durch Taylor-Reihen approximiert werden, was im weiteren Verlauf noch gezeigt wird. Aus der Differentialgleichung wird durch diese Diskretisierung eine Differenzengleichung, welche mit numerischen Methoden gelöst werden kann. Die Diskretisierung der Differenziale zieht in jedem Fall einen Fehler nach sich, welcher als Diskretisierungsfehler³ bezeichnet wird. Um diese kurze Einführung der Thematik abzuschließen, sei darauf hingewiesen, dass eine Vielfalt an Literatur, Forschungsarbeiten und Software zum Thema FDM existiert, wobei konkrete Anwendungen auf elektromagnetische Felder u. a. in Refs. 13, 21, 30, 44, 76, 82, 92, 115 und 120 nachgelesen werden können. Die wohl prominenteste Publikation zu diesem Thema (im Bereich der Elektrodynamik) von Yee beschreibt eine allgemeine Lösungsstrategie der Wellengleichung in beliebigen Medien und ist heutzutage Grundlage für viele kommerzielle Softwarelösungen zur dreidimensionalen Berechnung elektromagnetischer Felder (z. B. CST Studio Suite, COMSOL Multiphysics, ANSYS Maxwell, etc.) und kann in Ref. 119 nachgelesen werden. Der Grund, warum in der hier vorliegenden Arbeit keine der o. g. kommerziellen Lösungen verwendet wurde, ist, dass der hier entwickelte Feld-Solver einen modularen Teil eines selbst-konsistenten Modells darstellt. Darüber hinaus wurde er explizit auf die Interaktion mit Niedertemperatur-Plasmen zugeschnitten, sodass er die nötigen Freiheitsgrade für den Umgang mit den elektrischen Parametern dieser Plasmen bietet, was kommerzielle Solver ohne größeren Konfigurationsaufwand nicht leisten können.

Allgemein umfasst ein FDM-Lösungsverfahren drei Schritte [92]:

1. Einteilung des Simulationsgebietes in ein Gitternetz⁴
2. Approximation der Differentialgleichung durch (finite) Differenzen, welche die Lösungsvariable an einem Punkt des Simulationsgebietes mit deren Werten an benachbarten Punkten in Verbindung setzt
3. Lösung des Differenzenquotienten-Gleichungssystems unter Berücksichtigung von Randbedingungen⁵, Anfangswerten⁶ und Quelltermen

Bevor diese drei wichtigen Punkte näher erläutert werden, werden die notwendigen mathematischen Grundlagen zur numerischen Differenziation aufgezeigt.

Die Ableitung bzw. Steigung der in Abb. 2.1.4 gezeigten Funktion $f(x)$ im Punkt x_0 kann durch die Steigung der Sekante \overline{PB} unter Anwendung der Vorwärtsdifferenzenregel gemäß

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (2.1.58)$$

angenähert werden. Alternativ führt die Rückwärtsdifferenzenregel über die Steigung von \overline{AP} ebenfalls zu dem gewünschten Ergebnis von

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x}. \quad (2.1.59)$$

³engl.: truncation error

⁴engl.: mesh, grid

⁵engl.: boundary conditions

⁶engl.: initial conditions

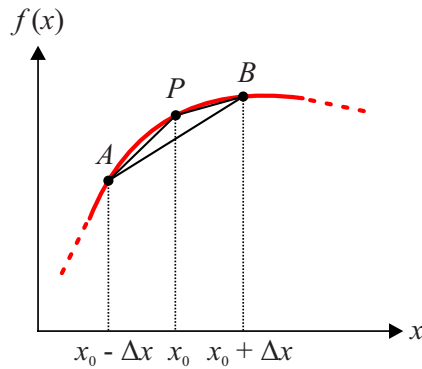


Abbildung 2.1.4: Approximationen der Ableitung von $f(x)$ im Punkt x_0 unter Ausnutzung des Vorwärts-, Rückwärts- und zentralen Differenzenquotienten nach Ref. 92.

Eine dritte Möglichkeit ist die Verwendung der zentralen Differenzenregel, die über die Steigung der Sekante \overline{AB} definiert ist, die sich nach

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x} \quad (2.1.60)$$

berechnet.

Die numerischen Ableitungsschemata sind problemlos auf mehrere Dimensionen anwendbar. Mit den gezeigten Verfahren für die erste Ableitung ist also der numerische Nabla-Operator vollständig beschreibbar. Um den Laplace-Operator ∇^2 darzustellen, bedarf es der zweiten Ableitung, die mit

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (2.1.61)$$

approximiert werden kann [92].

Eine etwas allgemeinere (und aussagekräftigere) Herleitung der finiten Approximationen lässt sich über eine Taylor-Entwicklung gemäß $f(x; a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$ der Funktionen $f(x_0 + \Delta x)$ und $f(x_0 - \Delta x)$ zeigen, wobei a die Entwicklungsstelle x_0 beschreibt und $\Delta x = x - x_0$ gilt. Die Entwicklungen ergeben sich zu

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (2.1.62)$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} (\Delta x)^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} (\Delta x)^3 f'''(x_0) + \dots \quad (2.1.63)$$

Addiert man diese beiden Gleichungen und bricht die unendlichen Reihen nach der vierten Ordnung ab, ergibt sich

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + (\Delta x)^2 f''(x_0) + \mathcal{O}\{(\Delta x)^4\}. \quad (2.1.64)$$

Dabei beschreibt $\mathcal{O}\{(\Delta x)^4\}$ die Fehlerordnung, die durch die Unterbrechung der Serie existiert. Der Ausdruck impliziert, dass der Fehler nicht größer werden kann als $(\Delta x)^4$. Geht man nun davon aus, dass dieser Fehler vernachlässigbar ist (sofern $\Delta x < 1$), wird Gl. (2.1.64), nach Auflösen nach $f''(x_0)$ zu

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \quad (2.1.65)$$

approximiert, was genau der Approximation des Laplace-Operators aus Gl. (2.1.61) entspricht. Generell sollte man allerdings den Fehler mit in die Berechnung der zweiten Ableitung einfließen lassen, um den Unterschied zwischen Approximationsfehler und führendem Fehler klarzustellen. Der führende Fehler ist derjenige, der sich auf die Güte der Berechnung auswirkt [92]. Die zweite Ableitung mit führendem Fehler lautet

$$\begin{aligned} f''(x_0) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \frac{\mathcal{O}\{(\Delta x)^4\}}{(\Delta x)^2} \\ \Rightarrow f''(x_0) &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{(\Delta x)^2} - \mathcal{O}'\{(\Delta x)^2\}, \end{aligned} \quad (2.1.66)$$

wobei \mathcal{O}' eine reduzierte Fehlerordnung beschreibt, die durch die Quotientenbildung im zweiten Summanden resultiert. Daran sieht man, dass die Ordnung des führenden Fehlers bei der Approximation der zweiten Ableitung nicht mit $(\Delta x)^4$ sondern mit $(\Delta x)^2$ skaliert.

Auch die Differenzenregeln für den Nabla-Operator können nach dem oben gezeigten Verfahren hergeleitet werden und lassen somit auch Aussagen über deren Fehlerordnungen zu. Um etwa die zentrale Differenzenregel aus Gl. (2.1.60) abzuleiten, subtrahiert man Gl. (2.1.63) von Gl. (2.1.62) und vernachlässigt alle Terme ab $(\Delta x)^3$. Die Fehlerordnung dieser Regel ergibt sich daher zu $\mathcal{O}\{(\Delta x)^2\}$. Um die Vorwärts- und Rückwärtsdifferenzenregel aus Gl. (2.1.58) bzw. Gl. (2.1.59) abzuleiten, nimmt man nur die der Richtung entsprechende Taylorreihe und vernachlässigt alle Terme ab $(\Delta x)^2$, womit sich eine Fehlerordnung von $\mathcal{O}\{(\Delta x)\}$ ergibt. Daran sieht man direkt den Vorteil der zentralen Differenzenregel gegenüber den beiden letztgenannten. Der Fehler nimmt dort quadratisch mit der Zahl der Diskretisierungsschritte ab und nicht linear.

Natürlich kann man auch höherwertige Terme der Taylorreihe(n) mit einbeziehen, was zu kleineren Fehlern führen würde. In der Praxis werden allerdings stets die Terme ab der zweiten Ordnung vernachlässigt, da der zusätzliche Rechenaufwand für die höherwertigen Terme meist nicht in Relation zu deren verursachten Fehlern steht [92]. Durch diesen stets existierenden "truncation error" ist somit jede FDM-Simulation mit einem deterministischen Fehler versehen, der lediglich durch die Maximierung der Diskretisierungsschritte minimiert werden kann.

Lösungsverfahren für elliptische partielle Differenzialgleichungen

Da die Diffusionsgleichung (2.1.40) durch die Transformation in den Frequenzbereich von einer parabolischen partiellen Differenzialgleichung (PDGL) in eine elliptische PDGL übergeht, muss die zeitliche Dimension nicht berücksichtigt werden. Dadurch wird der Rechenaufwand erheblich reduziert, ohne dabei die Möglichkeit zu verlieren, verschiedene zeitliche Abhängigkeiten zu untersuchen. Dies ist mittels Fourierdarstellung problemlos möglich. Natürlich benötigt man dazu entsprechend viele Spektraldaten, die jeweils über eine eigene Simulation gewonnen werden müssen. Da die Energieeinkopplung in RIT über einen Resonanzkreis geschieht, ist die Festlegung auf eine diskrete Frequenz eine sehr gute Näherung, was die Lösung der Diffusionsgleichung im Frequenzbereich ausreichend motiviert.

Im Folgenden soll das Lösungsschema für ein elliptisches Randwertproblem⁷ gezeigt werden. Bei partiellen Differenzialgleichungen werden räumliche Abhängigkeiten als Randwertprobleme, zeitliche Abhängigkeiten als Anfangswertprobleme⁸ und räumlich sowie zeitliche

⁷abgk.: RWP

⁸abgk.: AWP

Abhängigkeiten als Rand- und Anfangswertprobleme⁹ bezeichnet [9]. Physikalisch beschreibbare Probleme können als Differenzialgleichungen elliptischen (RWP), parabolischen (ARWP) oder hyperbolischen (ARWP) Typs dargestellt werden. Konkrete Beispiele sind die Poisson-Gleichung (vgl. Gl. (2.1.24)) als elliptische PDGL, die Diffusionsgleichung im Zeitbereich (vgl. Gl. (2.1.39)) als parabolische PDGL und die Wellengleichung (vgl. bspw. Gl. (2.1.22)) als hyperbolische PDGL. Hat man die Möglichkeit, durch Transformation eines Anfangs- und Randwertproblems dieses auf ein Randwertproblem zu reduzieren, begünstigt dies durch den Wegfall der zeitlichen Dimension erheblich den Rechenaufwand zur Lösung dieses Problems.

Um die drei wichtigen Schritte zur Lösung eines FDM-Problems aus Kap. 2.1.4 wieder aufzugreifen, soll ein einfaches, zweidimensionales elliptisches Randwertproblem aus Ref. 83 betrachtet werden. Mit der Laplace-Gleichung

$$\nabla^2 \Phi = 0, \quad (2.1.67)$$

die den Sonderfall für $\rho = 0$ der Poisson-Gleichung aus Gl. (2.1.24) darstellt, soll das elektrostatische Potenzial im gesamten Simulationsgebiet Ω berechnet werden. Dazu müssen als erstes Randbedingungen definiert werden, deren Bedeutung erst dann völlig einleuchtet, wenn man sich das zu lösende lineare Gleichungssystem anschaut, was im weiteren Verlauf geschieht.

Man unterscheidet generell zwei verschiedene Arten von Randbedingungen. Sind die Funktionswerte an den Rändern Ω_D des Gebietes gemäß

$$\Phi(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) \quad (2.1.68)$$

vorgegeben, wobei $\mathbf{x} \in \Omega_D \subseteq \Omega$, spricht man von Dirichlet'schen Randbedingungen. Ist stattdessen die (nach außen gerichtete) Normalableitung des Funktionswertes gemäß

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{n}} = f'(\mathbf{x}) \quad (2.1.69)$$

an den Randbereichen Ω_N bekannt, wobei $\mathbf{x} \in \Omega_N \subseteq \Omega$, handelt es sich um Neumann'sche Randbedingungen. Es existieren auch noch gemischte Formen von Randbedingungen, auf die jedoch hier nicht weiter eingegangen werden soll. Mehr dazu kann in Ref. 92 nachgelesen werden.

Das einfache Beispiel, das hier untersucht werden soll, ist in Abb. 2.1.5 dargestellt. Das Gebiet Ω umfasst 1 cm^2 mit je einem Zentimeter in x - und y -Richtung.

Wie man erkennt, ist das quadratische Simulationsgebiet in äquidistante Stützstellen mit der Schrittweite

$$\Delta x = \Delta y = h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{m - 1} = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{m - 1} \quad (2.1.70)$$

eingeteilt. Dabei beschreibt m die Anzahl der diskreten Stützstellen pro Dimension und ist somit der Parameter zur Beeinflussung der Auflösung. Im gezeigten Beispiel ist $m = 4$ gewählt, so dass man die folgenden Vorgänge systematisch nachvollziehen kann. Um nun die einzelnen Gitterpunkte zu adressieren, muss den Nummerierungsschemata $x_j = jh$ sowie $y_i = ih$ gefolgt werden. Da j den Index in x - und i jenen in y -Richtung beschreibt, lässt sich die Konvention

$$\Phi(j, i) = \Phi(x_j, y_i) \quad (2.1.71)$$

⁹abgek.: ARWP

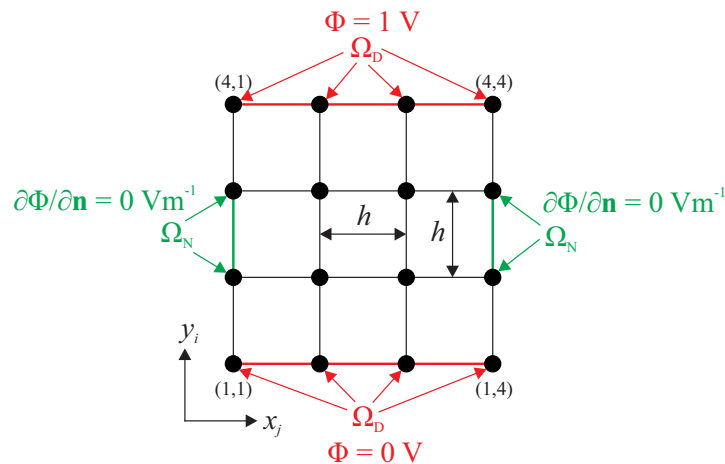


Abbildung 2.1.5: Einfaches Beispiel zur numerischen Lösung der Laplace-Gleichung in zwei Dimensionen nach Ref. 83.

eingeführen, um etwas Platz zu sparen. Ausgeschrieben lautet Gl. (2.1.67) nun

$$\frac{\partial^2 \Phi(j, i)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(j, i)}{\partial y^2} = 0. \quad (2.1.72)$$

Um die numerische Form dieser Gleichung zu erhalten, ersetzt man den Laplace-Operator, respektive die beiden partiellen Ableitungen zweiter Ordnung, durch ihr numerisches Pendant aus Gl. (2.1.61). Es ergibt sich

$$\Phi(j-1, i) + \Phi(j+1, i) + \Phi(j, i-1) + \Phi(j, i+1) - 4\Phi(j, i) = 0. \quad (2.1.73)$$

Ein Umstellen nach $\Phi(j, i)$ liefert

$$\Phi(j, i) = \frac{1}{4} [\Phi(j-1, i) + \Phi(j+1, i) + \Phi(j, i-1) + \Phi(j, i+1)]. \quad (2.1.74)$$

Man erkennt, dass der Potenzialwert an jeder Stelle $\Phi(j, i)$ von den Werten seiner vier nächsten Nachbarn abhängt. Um dies besser zu verdeutlichen, werden sog. numerische Moleküle oder Sterne eingeführt, die die Abhängigkeiten sowie die Gewichtungsfaktoren darstellen. Das hier benutzte numerische Schema nennt sich 5-Punkte-Stern und basiert auf einer Approximation des Laplace-Operators durch Abschneiden der Taylor-Terme nach der zweiten Ordnung (s. vorheriges Kapitel) und ist in Abb. 2.1.6 (a) verdeutlicht. Würde man die Taylorreihe erst nach der vierten Ordnung abschneiden, würde die Approximation besser, wobei der Stern – und damit der Rechenaufwand – dementsprechend größer würde. Der sich dadurch ergebende 9-Punkte-Stern ist in Abb. 2.1.6 (b) dargestellt.

Bevor das lineare Gleichungssystem aufgebaut werden kann, müssen die Randbedingungen gemäß Abb. 2.1.5 noch genauer untersucht werden. Die obere Kante, bestehend aus 4 Gitterpunkten, soll ein definiertes Potenzial von $\Phi = 1 \text{ V}$ haben. Demnach handelt es sich nach Gl. (2.1.68) um Dirichlet'sche Randbedingungen. Gleiches gilt für die untere Kante mit $\Phi = 0 \text{ V}$. Die Kanten links und rechts haben Neumann'sche Randbedingungen. Die Normalableitung des Potenzials ergibt nach $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ das elektrische Feld. Setzt man nun die Neumann'sche Randbedingung an der linken und rechten Wand zu null, bedeutet dies, dass

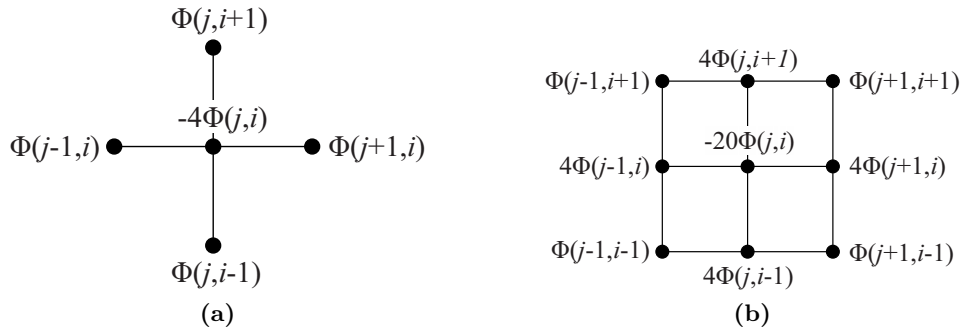


Abbildung 2.1.6: 5-Punkte-Stern (a) und 9-Punkte-Stern (b) zur numerischen Berechnung des zweidimensionalen Laplace-Operators. Der führende Fehler für (a) ist von der Ordnung $\mathcal{O}\{h^2\}$ und für (b) $\mathcal{O}\{h^4\}$.

aus dem zweidimensionalen ein eindimensionales Problem wird, da es jetzt als in x -Richtung unendlich ausgedehnt angesehen werden kann. Die numerische Form der Normalableitung kann als

$$\frac{\Phi_R - \Phi_i}{h} = f' \tag{2.1.75}$$

geschrieben werden, wobei der Index “R” auf das jeweilige Potenzial am Neumann-Rand des Gebietes Ω_N und der Index “i” auf das dazu nächste innenliegende Potenzial hinweist.

Nun sind alle nötigen Randbedingungen geschaffen, um die Laplace-Gleichung nach dem Potenzial aufzulösen. Dies geschieht hier mit Hilfe des 5-Punkte-Sterns, der nach Gl. (2.1.74) die Potenziale in den vier innenliegenden Punkten berechnen kann. Die Randpunkte werden nicht über diesen Stern gelöst, sondern sind in Form der Randbedingungen vorgegeben. Um das aufzubauende lineare Gleichungssystem noch mit der Geometrie aus Abb. 2.1.5 zu verknüpfen, ist die Nummerierungskonvention hier so gewählt, dass Φ_1 im Punkt (1, 1), Φ_2 im Punkt (1, 2) und Φ_{16} im Punkt (4, 4) zu finden sind. Der Vektor der unbekanntenen Potenziale ist also

$$[\Phi] = [\Phi_1 \ \Phi_2 \ \dots \ \Phi_{16}]^T, \tag{2.1.76}$$

wobei T für die Transponierte einer Matrix bzw. eines Vektors steht.

Stellvertretend für alle innenliegenden Punkte sei die Benutzung des 5-Punkte-Sterns des Weiteren an der Anwendung auf Punkt (2, 2) erläutert. Setzt man die zugehörigen Potenziale in Gl. (2.1.73) ein, ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi(1, 2) + \Phi(3, 2) + \Phi(2, 1) + \Phi(2, 3) - 4\Phi(2, 2) &= 0 \\ \Rightarrow \Phi_5 + \Phi_7 + \Phi_2 + \Phi_{10} - 4\Phi_6 &= 0. \end{aligned} \tag{2.1.77}$$

Ähnlich wird mit den Randbedingungen verfahren; als Beispiel ergibt sich die Gleichung

$$\Phi_2 = 0 \tag{2.1.78}$$

im Punkt (1, 2) für den Fall der Dirichlet’schen Randbedingungen und

$$\frac{\Phi_5 - \Phi_6}{h} = 0 \tag{2.1.79}$$

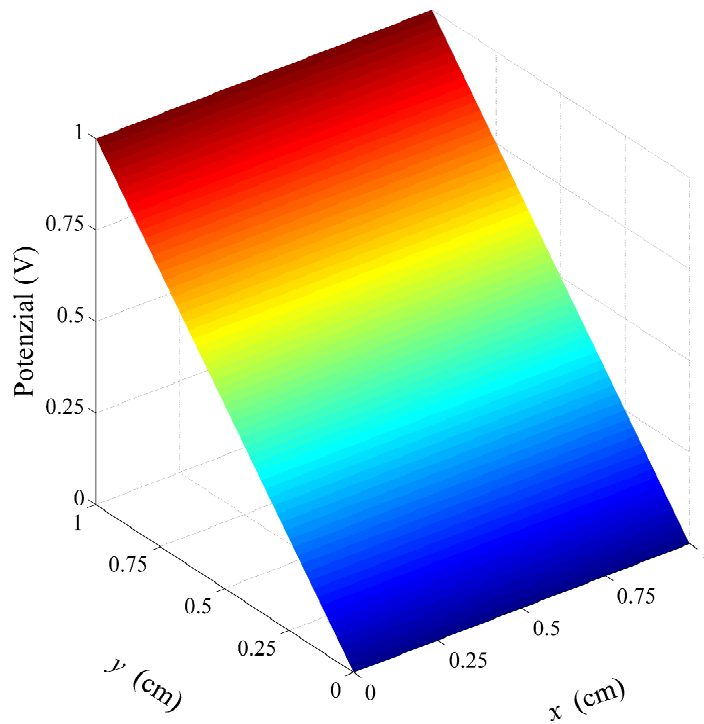


Abbildung 2.1.7: Potenzialverlauf der zweidimensionalen Laplace-Gleichung des Beispiels aus Ref. 83.

Dabei wird aufbauend auf einer ersten Approximation der Lösung eine zweite Approximation berechnet, welche wiederum für eine dritte Approximation als Basis dient. Daran erkennt man den iterativen Charakter der Berechnung [92]. Das SOR-Verfahren ist artverwandt mit dem Gauß-Seidel- und dem Jacobi-Verfahren, welche ebenfalls iterative Lösungsverfahren darstellen. Der Vorteil des SOR-Verfahrens ist die vergleichsweise schnelle Konvergenz [92].

Um das lineare Gleichungssystem zu lösen, wird das SOR-Verfahren auf jede Matrixzeile angewandt. Für das Beispiel aus Gl. (2.1.80) wird das Verfahren direkt auf Gl. (2.1.74) angewendet, welche stellvertretend für eine Zeile in (\mathbf{A}) steht. Als erstes wird ein Rest $R(j, i)$ für jeden Knoten definiert, der angibt, um wie viel das berechnete Potenzial an diesem Knoten $\Phi(j, i)$ von dem in Gl. (2.1.74) abweicht. Der Rest berechnet sich also zu

$$R(j, i) = \Phi(j + 1, i) + \Phi(j - 1, i) + \Phi(j, i + 1) + \Phi(j, i - 1) - 4\Phi(j, i). \quad (2.1.82)$$

Der sich ergebende Rest in der k -ten Iteration $R^k(j, i)$ wird als Korrektur angesehen, die zu $\Phi(j, i)$ addiert werden muss, um dies näher an den korrekten Wert zu bringen. Je näher man der Konvergenz zu $\Phi(j, i)$ kommt, desto näher liegt $R^k(j, i)$ an null. Um die Konvergenzgeschwindigkeit zu erhöhen, multipliziert man den Rest mit einem Relaxationsparameter ω und addiert den Summanden zur k -ten Iteration von $\Phi(j, i)$, um dessen Beitrag zur $(k + 1)$ -ten Iteration gemäß

$$\Phi^{k+1}(j, i) = \Phi^k(j, i) + \frac{\omega}{4}R^k(j, i) \quad (2.1.83)$$

zu bekommen [92]. Der Wert von ω liegt zwischen 0 und 2, wobei man mit $\omega = 1$ zum Gauß-Seidel-Verfahren gelangt. In diesem Fall redet man auch von sukzessiver Relaxation. Liegt

der Wert unter 1, nennt sich das Schema sukzessive Unterrelaxation und konvergiert nicht zwingend. Wählt man ω im Bereich 1–2, ist man im Bereich der sukzessiven Überrelaxation und das Verfahren konvergiert garantiert (aber noch nicht unbedingt sehr effizient). Ein optimaler Wert für ω , der die Konvergenzgeschwindigkeit maximiert, muss prinzipiell über die Trial-and-Error-Methode gefunden werden, da dieser Wert von der Beschaffenheit der Systemmatrix abhängt [92]. Weiterhin braucht man zum initialen Start Schätzwerte für die 0-te Iterationsstufe, deren Genauigkeit ebenso die Konvergenz beeinflusst. Typischerweise wählt man $\Phi^0(j, i) = 0$ [92].

Ist das Simulationsgebiet Ω allerdings quadratisch (oder im dreidimensionalen Fall kubisch), bei äquidistanter Schrittweite in alle Dimensionen, existiert eine analytische Lösung für den optimalen Relaxationsparameter [118]. Dieser berechnet sich zu

$$\omega_{\text{opt}} = \frac{2}{1 + \sin\left(\frac{\pi}{m+1}\right)}. \quad (2.1.84)$$

Wählt man diesen Wert für den Relaxationsparameter, ist eine schnellstmögliche Konvergenz garantiert.

Das gezeigte zweidimensionale Schema kann analog auf eine dritte Dimension erweitert werden. Dadurch wächst dementsprechend der Programmier- und Lösungsaufwand. Dessen Implementierung ist in Kap. 3.3 gezeigt.

2.2 Induktiv-gekoppelte Niedertemperaturplasmen

Bei einem Plasma handelt es sich um ein ionisiertes Gas, das im Allgemeinen neben Elektronen ein- und/oder mehrfach negativ oder positiv geladene Ionen, Atome und molekulare Verbände verschiedenen Ladungszustands enthalten kann. Für diese Arbeit sind vor allem schwach ionisierte Niedertemperaturplasmen von großem Interesse, da sie als Stützmedium für die Schubgenerierung in RIT genutzt werden. Obwohl auch vermehrt Gasgemische und molekulare Gase untersucht werden – siehe dazu beispielsweise Ref. 75 – wird in dieser Arbeit von einem rein atomaren Stützgas ausgegangen, da dies bei wissenschaftlichen und kommerziellen Weltraummissionen präferiert wird. Der Grund dafür ist zum einen die inerte Natur von Edelgasen, die im Gegensatz zu reaktiven Gasen wie Sauerstoff keine chemische Erosion der Extraktionsgitter hervorrufen. Zum anderen bietet vor allem Xenon neben einer hohen Atommasse eine moderate erste Ionisierungsenergie, wodurch die Anforderungen an die energiever sorgende Hardware geringer ausfällt. Auf die genauen Zusammenhänge wird in Kap. 3.2 eingegangen.

Schwach ionisierte Plasmen haben nach Ref. 65 fünf charakteristische Merkmale:

1. Sie werden elektrisch geheizt
2. Kollisionen zwischen geladenen Partikeln und Atomen bzw. neutralen Molekülen sind wichtig
3. Oberflächenverluste an angrenzenden Wänden sind wichtig
4. Ionisation der Neutralteilchen erhält das Plasma im stationären Zustand
5. Elektronen befinden sich nicht im thermischen Gleichgewicht mit den Ionen

Weiterhin wird der Volumen-Bereich eines Plasmas als quasi-neutral angesehen, was bedeutet, dass dort Elektronen- und Ionendichte gemäß $n_e \approx n_i$ nahezu identisch sind. Dieser Umstand wird im weiteren Verlauf genauer erklärt. Aufgrund der Quasi-Neutralitätsbedingung kann man eine übergreifende Volumen-Ladungsträgerdichte $n_0 \approx n_e \approx n_i$ definieren. Zusammen mit der Neutralgasdichte n_n lässt sich der Ionisierungsgrad

$$\chi = \frac{n_0}{n_n + n_0} \quad (2.2.1)$$

eingeführen. Für schwach ionisierte Plasmen gilt i. a. $\chi \ll 1$ [65].

Um ein Plasma allgemein zu beschreiben, muss man es mikroskopisch betrachten [15, 65]. Diese mikroskopische Betrachtung baut auf der kinetischen Gastheorie auf. Die kinetische Gastheorie beschreibt Geschwindigkeit \mathbf{v} , Aufenthaltsort \mathbf{x} und weitere Parameter der Partikel eines Gases anhand von Verteilungsfunktionen, welche i. a. Funktionen von Raum und Zeit sind. Die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion $f_v(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ beschreibt zum Beispiel die Anzahl der Partikel, die sich zur Zeit t im sechsdimensionalen Phasenraum $dxdydz \times dv_x dv_y dv_z = d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}$ befinden, sie gibt also Aufschluss über Aufenthalts- und Geschwindigkeitswahrscheinlichkeit der in einem Gas befindlichen Partikel. Die Anzahl der Partikel, die sich im oben gezeigten infinitesimalen Phasenraum befinden, berechnet sich zu

$$dN = f_v(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v}. \quad (2.2.2)$$

Mit Hilfe der Verteilungsfunktion hat man nun die Möglichkeit, makroskopische Größen zur Beschreibung des Gases herzuleiten, indem man über die orts aufgelösten Geschwindigkeiten mittelt. Diese makroskopischen Zusammenhänge sind Grundlage für die Beschreibung von Plasmen, oder Gasen i. a., im Fluidbild, was in Kap. 2.2.1 näher erläutert wird.

Eine wichtige makroskopische Größe ist die bereits zuvor eingeführte Teilchendichte n , die sich über die Geschwindigkeitsverteilungsfunktion zu

$$n(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_v(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3\mathbf{v} \quad (2.2.3)$$

berechnet.

Näherungsweise kann man davon ausgehen, dass sich die Elektronen in einem Plasma untereinander in einem thermischen Gleichgewicht befinden und einer Maxwell-Boltzmann-Verteilungsfunktion unterliegen [15]. Allerdings befinden sich die Elektronen gegenüber den Ionen und Neutralpartikeln im Ungleichgewicht, was durch die Annahme $T_i < T_e$ aus Ref. 65 für den Volumen-Bereich, mit Ionen- bzw. Elektronentemperatur T_i und T_e , angedeutet wird. Bei den in RIT genutzten induktiv-gekoppelten Niedertemperaturplasmen befinden sich Ionen und Neutralteilchen im Volumen-Bereich näherungsweise im thermischen Gleichgewicht gemäß $T_i \approx T_n$, mit der Neutralteilchentemperatur T_n .

Die Maxwell-Boltzmann-Verteilung ordnet der gemittelten kinetischen Energie bzw. der mittleren Geschwindigkeit der Partikel eine Temperatur gemäß

$$\frac{1}{2} m_e \bar{v}_e^2 = \frac{3}{2} k_B T_e \quad (2.2.4)$$

zu, womit man die statistischen Werkzeuge der kinetischen Gastheorie nutzen kann. Gleichung (2.2.4) beschreibt in dieser Form die Elektronen und beinhaltet demnach die Elektronenmasse $m_e = 9.10938291 \times 10^{-31}$ kg sowie die Elektronentemperatur T_e in Kelvin. Weiterhin beschreibt $k_B = 1.3806488 \times 10^{-23}$ J K⁻¹ die Boltzmann-Konstante in SI-Einheiten.

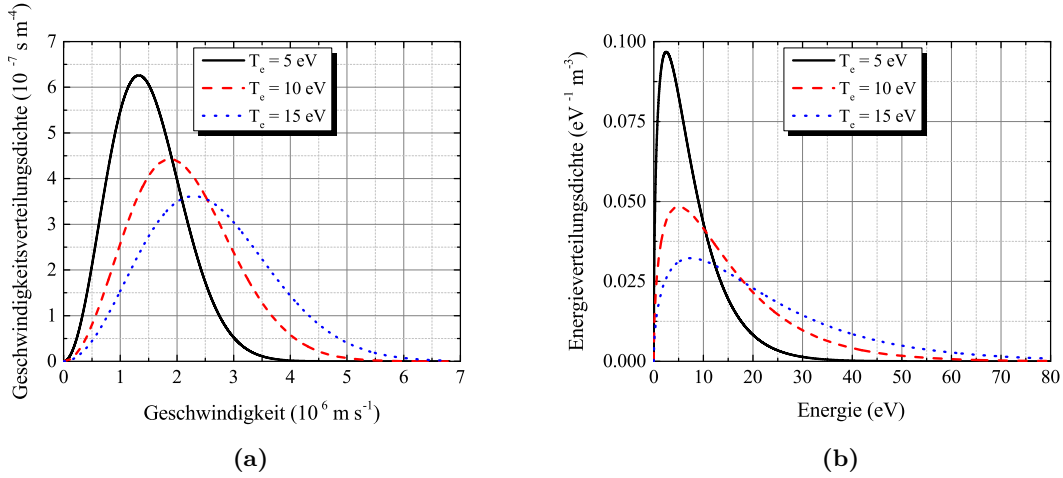


Abbildung 2.2.1: Teilbild (a) zeigt die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilungsdichte und Teilbild (b) die davon abgeleitete Maxwell-Boltzmann-Energieverteilungsdichte jeweils für Elektronen mit $n_e = 1 \text{ m}^{-3}$ und drei verschiedenen mittleren Elektronentemperaturen.

Unter bestimmten Voraussetzungen, zum Beispiel bei extrem niedrigem Druck, können die Elektronen in den hier betrachteten induktiv-gekoppelten Niedertemperaturplasmen allerdings anderen Verteilungsfunktionen gehorchen. Studien dazu sind beispielsweise in Refs. 39 und 66 veröffentlicht. Im weiteren Verlauf dieser Arbeit wird jedoch von einer reinen Maxwell-Boltzmann-Verteilung ausgegangen.

Die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung ist allgemein definiert als (unter Vernachlässigung der räumlichen und zeitlichen Abhängigkeiten) [15]

$$f_v(\mathbf{v}) d\mathbf{v} = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{m(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2k_B T} \right) dv_x dv_y dv_z. \quad (2.2.5)$$

Den Ausdruck in Gl. (2.2.5) kann man in Kugelkoordinaten gemäß

$$f_v(v) dv = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \exp \left(-\frac{mv^2}{2k_B T} \right) dv \quad (2.2.6)$$

darstellen, wobei nur noch der Betrag der Geschwindigkeit $|\mathbf{v}| = v$ relevant ist. Der Faktor 4π resultiert aus der Integration über den vollständigen Raumwinkel und ist Teil der Funktionaldeterminante $4\pi v^2$ für eine geschlossene Integration über das gesamte Kugelkoordinatenvolumen [15]. Die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung aus Gl. (2.2.6) ist zur Veranschaulichung in Abb. 2.2.1 (a) für Elektronen bei drei verschiedenen Elektronentemperaturen dargestellt. Die Funktionen sind auf eine Elektronendichte von $n_e = 1 \text{ m}^{-3}$ normiert.

In der Plasma- und Teilchenphysik hat sich die Nutzung des Elektronenvolts als Energieeinheit bewährt, um unnötig große bzw. kleine Zahlen zu vermeiden. Die Umrechnung erfolgt nach dem Schema

$$T = \frac{k_B T}{e}, \quad (2.2.7)$$

mit der Elementarladung $e = 1.602176565 \times 10^{-19}$ C, wobei in dieser Arbeit Temperaturen in der Einheit eV aufrecht und in der Einheit K kursiv geschrieben sind. Aus Gl. (2.2.6) ergibt sich demnach

$$f_v(v) = n \left(\frac{m}{2\pi eT} \right)^{\frac{3}{2}} 4\pi v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2eT}\right). \quad (2.2.8)$$

Um die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen in einem Maxwell-Boltzmann'schen Plasma zu berechnen, kann man sich nun statistischer Methoden bedienen. Dazu kann Gl. (2.2.3) als erstes auf Gl. (2.2.8) angewendet werden, um die Elektronendichte zu berechnen. Daraus resultiert

$$n_e = \int_0^\infty f_v(v_e) dv_e. \quad (2.2.9)$$

Mittlere Größen berechnen sich allgemein durch Integration über die Verteilungsfunktion gewichtet mit der interessierenden Größe und dividiert durch die Teilchendichte. Für die mittlere Geschwindigkeit der Elektronen resultiert daraus

$$\bar{v}_e = \frac{\int_0^\infty v_e f_v(v_e) dv_e}{\int_0^\infty f_v(v_e) dv_e} = 4\pi \left(\frac{m_e}{2\pi eT_e} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty v_e^3 \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2eT_e}\right) dv_e \quad (2.2.10)$$

$$\Rightarrow \bar{v}_e = \sqrt{\frac{8eT_e}{\pi m_e}}. \quad (2.2.11)$$

Aus der Geschwindigkeitsverteilungsdichte aus Gl. (2.2.8) lässt sich eine Energieverteilungsdichte nach

$$\begin{aligned} f_v dv &\stackrel{!}{=} f_U dU \\ \Rightarrow f_U &\stackrel{!}{=} f_v \frac{dv}{dU} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

bestimmen [65]. Ersetzt man $v = \sqrt{2U/m}$ und $dv/dU = \sqrt{1/2mU}$, ergibt sich für die Energieverteilungsdichte

$$f_U(U) = \frac{2n}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{eT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{U} \exp\left(-\frac{U}{eT}\right). \quad (2.2.13)$$

Die Maxwell-Boltzmann-Energieverteilungsdichte für Elektronen¹² ist in Abb. 2.2.1 (b) unter den gleichen Voraussetzungen dargestellt, die auch auf die Geschwindigkeitsverteilung aus Teilbild (a) zutreffen und oben erläutert sind. Diese Darstellung ist sehr nützlich, wenn man Ionisierungs- und Anregungsenergien evaluiert, was im weiteren Verlauf nötig ist. Es sei hier vorweggenommen, dass unter normalen Bedingungen bei Niedertemperaturplasmen, d. h. $1 \text{ eV} \leq T_e \leq 10 \text{ eV}$, nur ein kleiner Bruchteil der Elektronen überhaupt zur Ionisation beiträgt, da die Ionisationspotenziale für gängige Stützgase oberhalb dieses Bereiches liegen [15].

Eine wichtige Größe im Umgang mit Plasmen ist die Teilchenflussdichte Γ . Um die durch thermische Bewegung hervorgerufene mittlere Flussdichte in positiver z -Richtung, d. h., durch

¹²engl.: electron energy distribution function (EEDF)

die im jeweiligen z -Punkt aufgespannte $\varphi - \theta$ -Ebene, zu berechnen, kann man die Geschwindigkeitsverteilung aus Gl. (2.2.8) sowie die Mittelwertbildung aus Gl. (2.2.10) ansetzen. Aus der Vorgabe rein positiver Flussdichten im positiven sphärischen Halbraum nach Ref. 65 ergibt sich $v_z > 0$, wobei $v_z = v \cos \theta$ aufgrund der Berechnung in Kugelkoordinaten gilt [65]. Nach dieser Annahme berechnet sich die Flussdichte in z -Richtung zu

$$\Gamma_z = n \langle v_z \rangle_{\mathbf{v}} \quad (2.2.14)$$

$$\Rightarrow \Gamma_z = n \left(\frac{m}{2\pi e T} \right)^{\frac{3}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta \cos \theta d\theta \int_0^{\infty} v^3 \exp \left(-\frac{mv^2}{2eT} \right) dv. \quad (2.2.15)$$

Die Lösung des Integrals unter Einbeziehung von Gl. (2.2.11) für beliebige Teilchen liefert

$$\Gamma_z = \frac{1}{4} n \bar{v}. \quad (2.2.16)$$

Da sich die Ionen in Niedertemperaturplasmen näherungsweise im thermischen Gleichgewicht mit den Atomen befinden, deren Temperatur sich weit unterhalb der Elektronentemperatur befindet, sind auch die mittleren Geschwindigkeiten sehr unterschiedlich. Dieser Umstand ist bei den hier betrachteten Radiofrequenz¹³-Plasmen vor allem durch die schnellen anregenden Wechselfelder bedingt, denen die Ionen aufgrund ihrer Massenträgheit im Gegensatz zu den Elektronen ($m_i \gg m_e$) nicht folgen können, womit sie näherungsweise als statisch angenommen werden [14, 16, 38, 65]. Dadurch "heizen" sich die Ionen nicht kinetisch durch die induzierten Wechselfelder auf und bleiben somit im Gleichgewicht mit dem Stützgas. Dies führt dazu, dass die Temperatur der Elektronen gemäß $T_e \gg T_i$ höher liegt als die der Ionen und Atome.

Da Ionen und Elektronen zu gleichen Anteilen im Plasmavolumen erzeugt werden, muss das Potenzial des in dieser Arbeit ausschließlich elektropositiven Plasmas höher sein als an der angrenzenden Wand. Dadurch ergibt sich ein Potenzialgefälle $\Delta\Phi$ zwischen Plasma und Wand, das nur von Elektronen mit einer Geschwindigkeit $v_e > \sqrt{2e\Delta\Phi/m_e}$ überwunden werden kann. Stellt man sich die Wand senkrecht zur z -Ebene vor, kann man Gl. (2.2.14) so modifizieren, dass als untere Integrationsgrenze in z -Richtung nun $\sqrt{2e\Delta\Phi/m_e}$ eingesetzt wird, um nur die Elektronen zu bewerten, die die entsprechende kinetische Energie aufweisen, um die Potenzialbarriere zu überwinden. Die Lösung des Integrals ergibt nach Ref. 15 eine Elektronenflussdichte gewichtet mit dem Boltzmann-Faktor, der durch die Potenzialbarriere bedingt ist. Die Flussdichte berechnet sich nach der Gewichtung zu

$$\Gamma_{e,w} = \frac{1}{4} n_e \bar{v}_e \exp \left(\frac{\Delta\Phi}{T_e} \right), \quad (2.2.17)$$

wobei $\Delta\Phi = \Phi_w - \Phi_0$, mit dem Potenzial an der Wand Φ_w und dem Potenzial im Volumen-Bereich Φ_0 . Aufgrund der oben definierten Bedingungen ergibt sich, dass $\Delta\Phi$ negativ sein muss. Elektronen, deren kinetische Energie nicht groß genug ist, werden von der Potenzialbarriere wieder zurück ins Plasma reflektiert.

Der Boltzmann-Faktor spielt eine erhebliche Rolle bei der Beschreibung der Quasi-Neutralitätsbedingung in Plasmen, was im folgenden Abschnitt erläutert wird.

¹³Abk.: RF

2.2.1 Beschreibung eines Maxwell-Boltzmann-Plasmas im Fluidbild

Unter Ausnutzung der Zustandsgleichung für ideale Gase

$$p = nk_{\text{B}}T = neT \quad (2.2.18)$$

mit Druck p , die nach Ref. 65 näherungsweise für Maxwell-Boltzmann-Plasmen gilt, sowie dem davon abgeleiteten Druck-Gradienten

$$\nabla p = eT\nabla n, \quad (2.2.19)$$

lässt sich aus Massen- und Impulserhaltungsbedingungen nach Ref. 65 der Zusammenhang

$$en_e\mathbf{E} + \nabla p_e = \mathbf{0} \quad (2.2.20)$$

für Elektronen ableiten, wobei alle Größen als zeitlich konstant mit $\partial/\partial t = 0$ angenommen werden [65]. Das elektrische Feld aus Gl. (2.2.20) ist durch die Potenzialbarriere aus dem letzten Abschnitt gemäß $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ gegeben, wobei das Potenzial im Plasma Φ_{bulk} zu null normiert wird, d. h. $\Delta\Phi = \Phi_{\text{Wand}} = \Phi < 0$. Nach Einsetzen von Gl. (2.2.18) in Gl. (2.2.19) ergibt sich für Elektronen [65]

$$-en_e\nabla\Phi + eT_e\nabla n_e = \mathbf{0}. \quad (2.2.21)$$

Nach partieller Integration (s. Kap. A.1.2 im Anhang) unter der Annahme eines konstanten, isotropen Druck-Gradienten [65], der bei homogener Elektronentemperatur zu $\nabla n_e = \text{const}$ führt, ergibt sich

$$\Phi - T_e \ln n_e = \text{const}. \quad (2.2.22)$$

Aufgelöst nach der Elektronendichte ergibt sich

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{\Phi}{T_e}\right), \quad (2.2.23)$$

woran man erkennt, dass die Elektronendichte zu Bereichen höheren Potentials ansteigt, zur Wand hin also abnimmt, da $\Phi = \Phi_w < 0$.

Quasi-Neutralität

Eine charakteristische Längenskala in Plasmen ist die Debye-Länge λ_{De} . Die Debye-Länge, welche auch als Abschirmlänge bezeichnet wird, beschreibt allgemein die Länge, auf welcher das elektrische Potenzial einer lokalen Ladung auf das 1/e-Fache abgefallen ist. Im Mittel befinden sich in der Umgebung einer Ladung, bedingt durch elektrostatische Felder, weniger Ladungsträger gleicher Polarität als jene mit entgegengesetzter Polarität, wodurch der betrachtete Ladungsträger nach außen hin abgeschirmt wird. Dies ist schematisch in Abb. 2.2.2 (a) am Beispiel eines positiv geladenen Ions dargestellt. Das abschirmende Potenzial hat eine ähnliche Form wie das allgemein bekannte Coulomb-Potenzial

$$\Phi_{\text{C}}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (2.2.24)$$

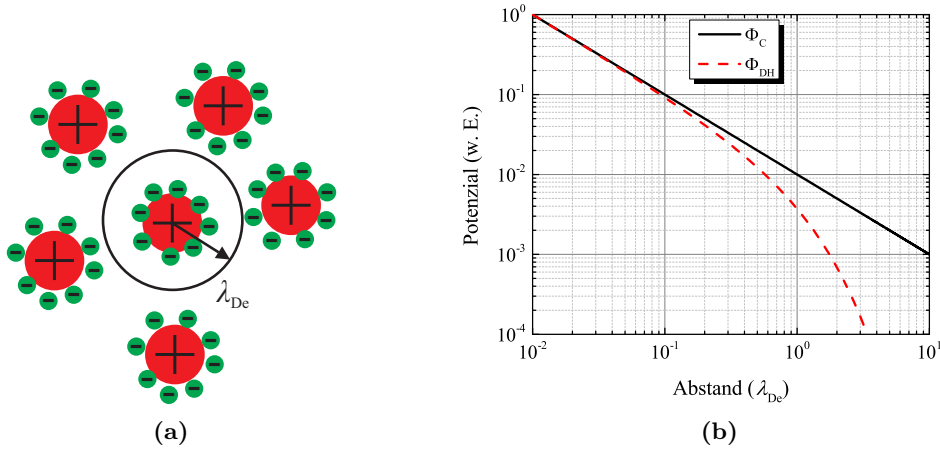


Abbildung 2.2.2: Teilbild (a) zeigt positive Ionen, welche Elektronen akkumulieren, die deren Potenzial abschirmen. Das abgeschirmte Potenzial nimmt auf das $1/e$ -fache bei der Debye-Länge λ_{De} ab. Teilbild (b) vergleicht die Verläufe des ungestörten Coulomb-Potenzials gemäß Gl. (2.2.24) und des abgeschirmten Debye-Hückel-Potenzials gemäß Gl. (2.2.25).

wobei q hier für die Ladung steht. Allerdings kommt beim abschirmenden Potenzial, das auch Debye-Hückel-Potenzial genannt wird, ein weiterer Term hinzu, der den zusätzlichen exponentiellen Abfall hervorruft. Das Debye-Hückel-Potenzial berechnet sich demnach zu

$$\Phi_{DH}(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_{De}}\right). \quad (2.2.25)$$

Wie man daran sieht, geht das Debye-Hückel-Potenzial bei $r \rightarrow 0$ in das Coulomb-Potenzial über. Ein Vergleich der beiden Potentiale ist in Abb. 2.2.2 (b) dargestellt. Dort erkennt man deutlich, dass die Überschussladung erfolgreich innerhalb weniger Debye-Längen abgeschirmt wird.

Eine potenzialfreie Plasmarandschicht ist typischerweise einige Debye-Längen breit. Dies kann mit einer einfachen eindimensionalen Annahme nach Ref. 65 gezeigt werden. Dazu wird eine unendlich lange ebene Oberfläche mit negativer Flächenladungsdichte $\sigma < 0 \text{ C m}^{-2}$ in einem unendlich ausgedehnten Plasma in der y/z -Ebene bei $x = 0$ angenommen. Im Volumen-Bereich dieses Plasmas gilt $n_e = n_i = n_0$. Weiterhin werden die Ionen als unbeweglich angenommen, was, wie bereits erwähnt, ebenso eine für die in dieser Arbeit behandelten RF-Plasmen gültige Annahme ist. Aufgrund von Gl. (2.2.23) werden die Elektronen von der negativen Flächenladung der Ebene abgestoßen, wodurch sich die Elektronendichte nahe dieser Ebene reduziert. Mit Hilfe der Poisson-Gleichung aus Gl. (2.1.24) kann nun die örtliche Variation der Elektronendichte sowie des Potentials in x -Richtung mit

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = -\frac{e}{\epsilon_0} (n_0 - n_e) \quad (2.2.26)$$

ermittelt werden. Setzt man nun Gl. (2.2.23) für die Elektronendichte in Gl. (2.2.26) ein, ergibt

sich

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{en_0}{\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{\Phi}{T_e} - 1\right) \right]. \quad (2.2.27)$$

Eine Taylor-Entwicklung von $\exp(\Phi/T_e)$ für $\Phi \ll T_e$ ergibt bei Abbruch nach dem Term erster Ordnung

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{en_0}{\epsilon_0} \frac{\Phi}{T_e}. \quad (2.2.28)$$

Man kann fordern, dass das Potenzial im Unendlichen zu null wird gemäß $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \Phi = 0$, was zu einer symmetrischen Lösung von Gl. (2.2.28) führt. Sie lautet

$$\Phi = \Phi_0 \exp\left(-\frac{|x|}{\lambda_{De}}\right), \quad (2.2.29)$$

wobei der Dämpfungsfaktor in der Exponentialfunktion einer Debye-Länge

$$\lambda_{De} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 T_e}{en_0}} \quad (2.2.30)$$

entspricht.

Mit der Debye-Länge lässt sich nun die für Plasmen gültige Quasi-Neutralitätsbedingung bestimmen. Es wird dazu wieder ein eindimensionaler Fall betrachtet, in welchem die Potentialvariation eines Plasmas mit Länge $l \gg \lambda_{De}$ mit Hilfe der Poisson-Gleichung aus Gl. (2.1.24) untersucht wird (es werden hier nur einfach geladene Ionen berücksichtigt). Aus dieser Bedingung ergibt sich

$$\nabla^2\Phi \approx \frac{\Phi}{l^2} = \left| \frac{e}{\epsilon_0} (n_i - n_e) \right|. \quad (2.2.31)$$

Nach Ref. 65 kann man generell davon ausgehen, dass das Potenzial des Plasmas größenordnungsmäßig etwas unterhalb der Elektronentemperatur liegt, d. h.,

$$\Phi \lesssim T_e = \frac{e}{\epsilon_0} n_e \lambda_{De}^2. \quad (2.2.32)$$

Dabei entspricht die rechte Seite der Definition der Debye-Länge aus Gl. (2.2.30) aufgelöst nach T_e . Nach Einsetzen von Gl. (2.2.31) in Gl. (2.2.32) resultiert

$$\frac{|n_i - n_e|}{n_e} \lesssim \frac{\lambda_{De}^2}{l^2}. \quad (2.2.33)$$

Mit $\lambda_{De}^2/l^2 \ll 1$ wird aus Gl. (2.2.33)

$$|n_i - n_e| \ll n_e, \quad (2.2.34)$$

wodurch die Quasi-Neutralitätsbedingung im Plasma

$$n_i \approx n_e \quad (2.2.35)$$

definiert ist, die die Ungleichung (2.2.34) erfüllt. Die Quasi-Neutralitätsbedingung wird oftmals auch als Plasma-Näherung bezeichnet. Sie hat im gesamten Volumen-Bereich des Plasmas Gültigkeit, aber nicht in der Randschicht aufgrund $|\Phi| \gg T_e$ [65].

Teilchenkollisionen

Allgemein interagieren die verschiedenen Partikel eines Plasmas, wie Elektronen, Ionen, Atome, freie Radikale und Moleküle, indem sie Kollisionen auf sehr kurzen Zeitskalen durchführen [15]. Bei den in RIT zum Einsatz kommenden Niedertemperatur-Edelgasplasmen sind Elektronen, einfach geladene Ionen und Atome die dominanten Spezies, die miteinander stoßen [27]. Alle weiteren Spezies, wie mehrfach geladene Ionen, werden in dieser Arbeit nicht berücksichtigt. Des Weiteren sind binäre Stöße zwischen je einem Elektron und Atom bei diesen Plasmen dominant, wodurch Stöße mit drei oder mehreren Stoßpartnern vernachlässigt werden können [15].

Kollisionen zwischen Elektronen und Atomen können elastisch oder inelastisch sein. Bei elastischen Kollisionen findet ein Impulsübertrag statt, wohingegen inelastische Kollisionen durch die Transformation kinetischer in innere Energie geprägt sind. Diese innere Energie regt die gestoßenen Atome auf höhere Energieniveaus an oder ionisiert sie – je nach Betrag der transformierten Energie. Ionisation und Anregung (in dieser Arbeit werden alle in Ref. 33 hinterlegten angeregten Zustände für Argon und Xenon berücksichtigt) lassen sich mit Reaktionsgleichungen gemäß



darstellen, wobei e für Elektronen und A für Atome steht.

Weiterhin kommen nach Ref. 15 Kollisionen zwischen geladenen Partikeln (Elektron–Elektron, Elektron–Ion und Ion–Ion) nicht sehr häufig vor. Von diesen drei Prozessen ist der Kollisionsprozess zwischen Elektronen und Ionen der wahrscheinlichste, weshalb er in dem in dieser Arbeit entwickelten Modell mit in Betracht gezogen wird. Die anderen beiden werden in guter Näherung vernachlässigt.

Diese Vernachlässigung führt dazu, dass man annehmen kann, dass alle Ladungsträger im Plasma-Volumen durch Ionisation erzeugt werden und ausschließlich an den Gefäßwänden rekombinieren. Das charakteristische Leuchten des Plasmas ist dabei durch das Abstrahlen von Photonen bedingt, wenn ein angeregtes Atom wieder in den Grundzustand gemäß



übergeht [65], wobei $\hbar = h/2\pi = 6.58211928 \times 10^{-16}$ eV s das reduzierte Planck'sche Wirkungsquantum beschreibt. Die Ionisation bei den hier beschriebenen Plasmen wird auch Elektronenstoß-Ionisation genannt, da wie oben erwähnt, der Stoßprozess zwischen Elektronen und Atomen der dominanteste ist. Weiterhin wird hier davon ausgegangen, dass die Ionisation instantan aus dem Grundzustand erfolgt, d. h. ohne Zwischenanregung eines oder mehrerer metastabiler Zustände.

Um die oben erwähnten binären Stoßprozesse zu beschreiben, zu denen in dieser Arbeit die Prozesse Elektron–Atom, Ion–Atom und Elektron–Ion zählen, kann man die Modellvorstellung harter Kugeln verwenden. Dabei werden sowohl das eintreffende Projektil als auch das statische Ziel als harte Kugeln angesehen (vgl. Abb. 2.2.3). Bei oben genannten Stoßprozessen bezeichnet man weiterhin den Prozess Elektron–Ion, oder allgemein einen Stoß zwischen zwei Ladungsträgern, als Coulomb-Kollision [65].

Das Szenario in Abb. 2.2.3 zeigt einen Ausschnitt eines beliebigen Gasvolumens, welcher die Grundfläche A sowie die Dicke dx hat. Weiterhin enthält der Ausschnitt n_n identische Gasatome pro Einheitsvolumen. Auf die Fläche trifft ein Fluss γ kleinerer Partikel, bspw. Elektronen,

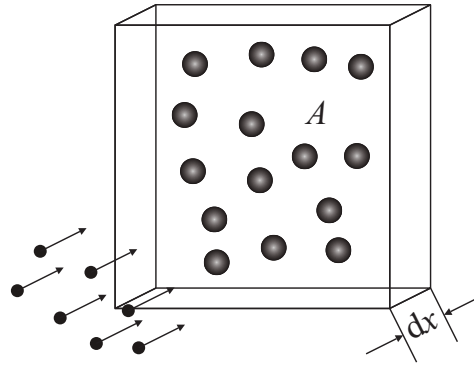


Abbildung 2.2.3: Fluss γ eintreffender Elektronen (Projektile) kollidiert mit Atomen (Zielen) der Dichte n_n auf der Fläche A . Diese Modellvorstellung wird zur Herleitung des Stoßquerschnittes nach Ref. 65 genutzt.

wobei die Anzahl der Gasatome $N = n_n A dx$ des Ausschnitts eine Stoßquerschnittsfläche (oder kürzer Stoßquerschnitt) σ bietet. Dabei ist der Stoßquerschnitt proportional zur Wahrscheinlichkeit einer Kollision [15]. Der durch den Ausschnitt fliegende Partikelfluss wird proportional zur absoluten Stoßquerschnittsfläche der Zielatome verringert, weil die kleineren und leichteren Projektile elastisch von den schwereren und größeren Zielen unter verschiedenen Winkeln reflektiert werden. Diese Abnahme in x -Richtung lässt sich nach Ref. 15 darstellen als

$$\frac{d\gamma}{\gamma} = -n_n A dx \frac{\sigma}{A} = -n_n \sigma dx. \quad (2.2.39)$$

Integration von Gl. (2.2.39) liefert

$$\begin{aligned} \ln \gamma &= -x n_n \sigma + \text{const} \\ \Rightarrow \gamma &= \exp(-x n_n \sigma) \exp(\text{const}) \\ \Rightarrow \gamma &= \gamma_0 \exp(-x n_n \sigma) = \gamma_0 \exp\left(-\frac{x}{\lambda}\right); \end{aligned} \quad (2.2.40)$$

dabei ist

$$\lambda = \frac{1}{n_n \sigma} \quad (2.2.41)$$

die mittlere freie Weglänge zwischen zwei Kollisionen [15]. Physikalisch gesehen ist die mittlere freie Weglänge eine Dämpfungslänge, die den Projekttilfluss auf das 1/e-Fache entlang der Länge x dämpft.

Geht man von einer konstanten Projekttilstrahl-Geschwindigkeit v aus, berechnet sich die Zeit zwischen zwei Kollisionen mit Gl. (2.2.41) zu

$$\tau = \frac{\lambda}{v}. \quad (2.2.42)$$

Eine wichtige Größe ist die Kollisionsfrequenz ν , welche man durch Inversion von Gl. (2.2.42) gemäß

$$\nu = \frac{1}{\tau} = n_n \sigma v \quad (2.2.43)$$

erhält. Normiert man die Kollisionsfrequenz auf die Teilchendichte, spricht man vom Ratenkoeffizienten, der im weiteren Verlauf der Arbeit benutzt wird. Er berechnet sich zu

$$K = \frac{\nu}{n_n} = \sigma v. \quad (2.2.44)$$

Um die gemittelten Kollisionsparameter wie Ratenkoeffizient oder Stoßfrequenz für ein Maxwell-Boltzmann-Plasma zu erhalten, integriert man die Maxwell-Boltzmann-Geschwindigkeitsverteilung in Gl. (2.2.8) [65]. Näherungsweise kann man die Atome als unbeweglich ansehen, da ihre thermische Geschwindigkeit sehr viel kleiner als die der Elektronen ist. Der Stoßquerschnitt weist aufgrund der Mittelwertbildung eine Abhängigkeit von der Relativgeschwindigkeit $v \approx v_e$ auf, mit der die Elektronen auf die Atome treffen. Der mittlere Ratenkoeffizient ist somit aufgrund von Gl. (2.2.10) abhängig von der Temperatur der Elektronen und berechnet sich nach Ref. 65 zu

$$\begin{aligned} K(T_e) &= \langle \sigma(v_e) v_e \rangle_{\mathbf{v}_e} \\ \Rightarrow K(T_e) &= 4\pi \left(\frac{m_e}{2\pi e T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \sigma(v_e) v_e^3 \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2e T_e}\right) dv_e. \end{aligned} \quad (2.2.45)$$

Stoßquerschnitte bzw. Ratenkoeffizienten für elastische und inelastische Stöße zwischen Elektronen und Atomen sind für die für diese Arbeit interessanten Energiebereiche sehr umfangreich in der Literatur und in Datenbanken enthalten. Die messtechnisch ermittelten Daten sind meist in tabellarischer Form angegeben, wie u. a. in Refs. 33, 106, 107 für Argon oder Refs. 33, 34, 45, 80 für Xenon nachzulesen ist. Weitere Informationen über die hier genutzten Stoßquerschnitte bzw. Ratenkoeffizienten sind in Kap. 3.2 dargestellt.

Eine gesonderte Rolle für diese Arbeit spielt der Ratenkoeffizient für Ionisation K_{iz} , da dieser analytisch darstellbar ist. Dies ist für die Modellbildung von Vorteil, da der Ausdruck dort nach der Elektronentemperatur abgeleitet werden muss, was im folgenden Kapitel näher erläutert wird. Um K_{iz} abzubilden, dient nach Ref. 65 der Thomson-Querschnitt für Ionisation, welcher durch

$$\sigma_{iz} = \pi \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{\Phi} \left(\frac{1}{\Phi_{iz}} - \frac{1}{\Phi} \right) \quad \text{für } \Phi > \Phi_{iz} \quad (2.2.46)$$

gegeben ist. Dabei ist die notwendige Energie zur Ionisation U_{iz} hier als Potenzial in der Einheit Volt angegeben gemäß $\Phi_{iz} = U_{iz}/e$. Aufgrund der im Vergleich zur Ionisationsenergie niedrigen Elektronentemperatur bei Niedertemperaturplasmen – $T_e < \Phi_{iz}$ – wirkt sich lediglich das exponentiell abfallende Ende der EEDF, welches auch als “tail” bezeichnet wird, auf diesen Prozess aus (s. Abb. 2.2.1 (b)) [65]. Entwickelt man Gl. (2.2.46) für Potenziale nahe des Ionisationspotenzials $\Phi \gtrsim \Phi_{iz}$ erhält man (die Entwicklung ist im Anhang unter Kap. A.1.2 dargestellt)

$$\sigma_{iz}(\Phi) = \begin{cases} \sigma_0 \frac{\Phi - \Phi_{iz}}{\Phi_{iz}} & \text{für } \Phi \geq \Phi_{iz} \\ 0 & \text{für } \Phi < \Phi_{iz} \end{cases}. \quad (2.2.47)$$

In Gl. (2.2.47) beträgt der lediglich vom Gas abhängige Vorfaktor $\sigma_0 = \pi(e/4\pi\epsilon_0\Phi_{iz})^2$, was in Gl. (A.1.25) dargestellt ist.

Setzt man Gl. (2.2.47) in Gl. (2.2.45) ein und berücksichtigt nur die Geschwindigkeit derjenigen Elektronen, deren thermische Energie mindestens der Ionisierungsenergie entspricht gemäß $v_e \geq \sqrt{2e\Phi_{iz}/m_e}$, erhält man nach Integration den Ratenkoeffizienten für Ionisation [65]

$$K_{iz}(T_e) = \sigma_0 \bar{v}_e \left(1 + \frac{2T_e}{\Phi_{iz}} \right) \exp\left(-\frac{\Phi_{iz}}{T_e}\right). \quad (2.2.48)$$

Die Herleitung von Gl. (2.2.48) ist im Anhang in Kap. A.1.2 dargestellt.

Mit Hilfe der Ratenkoeffizienten für die inelastischen Prozesse Ionisation¹⁴ K_{iz} und Anregung¹⁵ K_{ex} sowie für elastischen Impulsübertrag¹⁶ K_m lässt sich eine Energiebilanz für die betrachteten Stoßprozesse im Plasma aufstellen [65], welche sich zu

$$K_{iz}\Phi_\Sigma = K_{iz}\Phi_{iz} + \sum_{n=1}^{\infty} K_{ex,n}\Phi_{ex,n} + K_m \frac{3m_e}{m_i} T_e \quad (2.2.49)$$

ergibt. Dabei beschreiben Φ_{iz} und $\Phi_{ex,n}$ das erste Ionisations- bzw. n -te Anregungspotenzial des jeweiligen Gases und $3T_e m_e/m_i$ die mittlere verlorene Energie pro Elektron für einen elastischen Stoß [65]. Φ_Σ bezeichnet die Summe aller Verluste pro generiertem Elektron-Ion-Paar. Der Zusammenhang aus Gl. (2.2.49) wird für die Modellierung eines Plasmas in Kap. 3.4 wieder aufgegriffen.

2.2.2 Dielektrische Eigenschaften

Um die Interaktion eines Niedertemperaturplasmas mit extern beaufschlagten elektromagnetischen Feldern aufzuzeigen, betrachtet man harmonische Einkopplungen. Die Gültigkeit wurde bereits in Kap. 1.1 besprochen und durch die Nutzung eines Resonanzkreises zur Speisung des Plasmas bestätigt. Da die Teilchendichte im Plasma in dieser Arbeit als homogen angenommen wird, kann man eine globale Aussage über die dielektrischen Eigenschaften des Plasmas sowie dessen Leitfähigkeit treffen [65]. Dazu sei das extern beaufschlagte elektrische Feld

$$\mathbf{E}(t) = \tilde{\mathbf{E}} \cos(\omega t) = \text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{E}} \exp(i\omega t) \right\}. \quad (2.2.50)$$

Da die Ionen zu träge sind, dem schnellen Wechselfeld zu folgen, ergibt sich die Newton'sche Bewegungsgleichung

$$m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - m_e \nu_{m,\text{eff}} \mathbf{v}_e, \quad (2.2.51)$$

bei der nur Elektronen berücksichtigt werden. Dabei beschreibt der zweite Term auf der rechten Seite von Gl. (2.2.51) die effektiven impulsübertragenden Stoßprozesse zwischen Elektronen und Atomen sowie Elektronen und Ionen. Eine genaue Beschreibung der effektiven Stoßfrequenz folgt in Kap. 3.2. Nach Ref. 65 lässt sich nun eine komplexe Geschwindigkeit analog zum komplexen elektrischen Feld gemäß

$$\mathbf{v}_e(t) = \text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{v}}_e \exp(i\omega t) \right\} \quad (2.2.52)$$

¹⁴engl.: ionization

¹⁵engl.: excitation

¹⁶engl.: momentum transfer

definieren. Setzt man nun Gl. (2.2.50) und Gl. (2.2.52) in Gl. (2.2.51) ein, kann man diese nach dem Geschwindigkeitsphasor auflösen und erhält

$$\tilde{\mathbf{v}}_e = -\frac{e}{m_e} \frac{1}{i\omega + \nu_{m,\text{eff}}} \tilde{\mathbf{E}}. \quad (2.2.53)$$

Die in Gl. (2.1.3) eingeführte totale Stromdichte (im Vakuum) $\mathbf{J}_t = \mathbf{J} + \partial\mathbf{D}/\partial t = \mathbf{J} + \epsilon_0 \partial\mathbf{E}/\partial t$ beinhaltet sowohl die Leitungs- als auch die Verschiebungsstromdichte. Die Leitungsstromdichte ist dabei nach Ref. 65 bedingt durch die Bewegung der Elektronen und berechnet sich somit zu

$$\tilde{\mathbf{J}} = -en_0 \tilde{\mathbf{v}}_e. \quad (2.2.54)$$

Ersetzt man weiterhin die Zeitableitung des elektrischen Feldes gemäß

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \text{Re} \left\{ i\omega \tilde{\mathbf{E}} \exp(i\omega t) \right\}, \quad (2.2.55)$$

kann man den Phasor der totalen Stromdichte durch

$$\tilde{\mathbf{J}}_t = i\omega\epsilon_0 \tilde{\mathbf{E}} - en_0 \tilde{\mathbf{v}}_e \quad (2.2.56)$$

ausdrücken. Ersetzt man als nächstes den Geschwindigkeitsphasor mit Gl. (2.2.53), ergibt sich

$$\tilde{\mathbf{J}}_t = \tilde{\mathbf{J}}_p = i\omega\epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\nu_{m,\text{eff}})} \right) \tilde{\mathbf{E}}, \quad (2.2.57)$$

wobei $\tilde{\mathbf{J}}_p$ für den Phasor der Plasmastromdichte und ω_{pe} für die Elektronenplasmafrequenz, also die charakteristische Schwingfrequenz der Plasmaelektronen, stehen. Sie resultiert auf der durch die Auslenkung der trägen Elektronen entstehenden Kraft $\mathbf{F} = m_e d^2\mathbf{x}/dt^2$ und der Rückstellkraft $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$, die durch das elektrische Feld entsteht, das bei der Auslenkung der Elektronen hervorgerufen wird [65]. Werden die Elektronen um den Abstand l in x -Richtung ausgelenkt, verursachen sie ein elektrisches Feld gemäß $E_x = en_0 l/\epsilon_0$. Die dadurch hervorgerufene Rückstellkraft beträgt $F = -eE_x$. Die dadurch entstehende Newton'sche Bewegungsgleichung lautet

$$m_e \frac{d^2 l}{dt^2} = -\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0} l. \quad (2.2.58)$$

Gleichung (2.2.58) beschreibt eine Schwingungsdifferentialgleichung gemäß $d^2 l/dt^2 = -\omega_{pe}^2 l$, wobei die Elektronenplasmafrequenz im Volumen-Bereich mit $n_0 = n_e$ nach

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e}} \quad (2.2.59)$$

definiert ist.

Analog dazu kann man auch eine Ionenplasmafrequenz formulieren, welche für typische RF-Niedertemperaturplasmen allerdings keine Relevanz hat, da die Ionen, wie bereits mehrfach erwähnt, durch ihre große Masse nicht durch die schnellen Wechselfelder zum Schwingen angeregt werden können [65].

Mit Hilfe von Gl. (2.2.57) können nun die plasmaspezifischen Parameter mit extern beaufschlagten elektromagnetischen Feldern verkoppelt werden. Die Verkopplung entspricht dabei genau dem linearen Zusammenhang zwischen Stromdichte und elektrischem Feld aus Gl. (2.1.29). Demnach lässt sich nun eine komplexe Leitfähigkeit für das Plasma aus Gl. (2.2.57) gemäß

$$\kappa_p = i\omega\epsilon_0 \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - i\nu_{m,eff})} \right) \quad (2.2.60)$$

ableiten. Man bezeichnet diese Verkopplung auch als Drude-Modell¹⁷ [15].

Der Begriff der komplexen Leitfähigkeit suggeriert, dass nicht bloß Leitungsströme dort mit einfließen, sondern auch Verschiebungsströme. Man kann daher eine relative Plasmapermittivität mit der komplexen Leitfähigkeit in Verbindung setzen, die durch

$$\kappa_p = i\omega\epsilon_0\epsilon_p \quad (2.2.61)$$

gegeben ist. Dabei entspricht $\epsilon_p = 1 - \omega_{pe}^2/\omega(\omega - i\nu_m)$. Je nach Anwendung kann man das Plasma also eher als Strom- oder eher als Wellenleiter ansehen. Bei RIT kann man aufgrund des großen Verhältnisses zwischen Wellen- und Spulenlänge (vgl. Kap. 2.1.2) davon ausgehen, dass Wellenleitung eine untergeordnete Rolle spielt, was unter anderem dazu führt, dass die “1” in Klammern in Gl. (2.2.60) vernachlässigt werden kann, da sie gerade die Verschiebungsstromkomponente $i\omega\epsilon_0$ bezeichnet, die durch obiges Verhältnis gegenüber der Leitungsstromdichte sehr klein wird [15]. Der Vollständigkeit halber wird diese Komponente allerdings in der Modellierung mit berücksichtigt, was in Kap. 3.4 genauer dargestellt ist.

2.2.3 Plasmaimpedanz induktiv-gekoppelter Plasmen

Die Impedanz eines Plasmas lässt sich mit Hilfe des Poyntingtheorems, einem Energieerhaltungssatz für elektromagnetische Felder, berechnen. Das Poyntingtheorem lautet nach Ref. 41 allgemein

$$\iiint_V \mathbf{J}\mathbf{E} \, dV = - \iiint_V \left(\frac{\partial u_{em}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} \right) \, dV. \quad (2.2.62)$$

Das Poyntingtheorem setzt die aufgrund Ohm’scher Wärme verlorene Leistungsdichte (linke Seite) mit der Änderungsrate der elektromagnetischen Energiedichte $u_{em} = 1/2 \cdot (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{B}\mathbf{H})$ sowie der Divergenz, also der Ergiebigkeit, des Poyntingvektors $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ in Verbindung, die eine Energieflussdichte beschreibt – also einer Leistungsdichte gleichwertig ist [41]. Die Kernaussage dieses Theorems ist, dass ein elektromagnetisches Feld Arbeit verrichtet, wenn es schwächer wird, was durch die Divergenz ausgedrückt wird.

Für diese Arbeit ist die linke Seite des Poyntingtheorems sehr interessant, da die vom Plasma absorbierte Leistungsdichte mit den im vorhergehenden Verlauf gezeigten Theorien bestimmt werden kann. Die Leistungsdichte lässt eine lokale Beschreibung der Heizprozesse zu, für ein globales elektrisches Ersatzschaltbild muss die Volumenintegration allerdings ausgeführt werden. In komplexer Schreibweise folgt für die absorbierte Leistung im Plasma (unter Berücksichtigung der Plasmastromdichte aus Gl. (2.2.57))

$$P_{abs} = \frac{1}{2} \iiint_V \operatorname{Re} \{ \tilde{\mathbf{J}}_p^* \tilde{\mathbf{E}} \} \, dV. \quad (2.2.63)$$

¹⁷nach Paul Drude

Weiterhin lässt sich der effektiv im Plasma fließende Strom über

$$\tilde{I}_p = \iint_A \tilde{\mathbf{J}}_p \, d\mathbf{A} \quad (2.2.64)$$

darstellen, wodurch eine weitere globale Beschreibungsgröße existiert. Um das Volumenintegral aus Gl. (2.2.63) auszuwerten, muss der Einfluss des Skin-Effekts aus Gl. (2.1.46) auf die effektive stromtragende Fläche berücksichtigt werden. Durch das FDM-Lösungsverfahren für Gl. (2.1.40) wird dies automatisch erfüllt und muss nicht gesondert programmiert werden. Mehr Informationen dazu sind in Kap. 2.1.2 bzw. Kap. 3.4 nachzulesen.

Mit Gl. (2.2.63) und Gl.(2.2.64) lässt sich nun der Ohm'sche Widerstand des Plasmas zu

$$R_p = \frac{2P_{\text{abs}}}{|\tilde{I}_p|^2} \quad (2.2.65)$$

bestimmen. Aufgrund der Massenträgheit der Elektronen entsteht eine Phasenverschiebung zwischen dem die Elektronen zur Schwingung anregenden elektrischen Feld und dem dadurch erzeugten Strom. Diese Charakteristik lässt sich mit einem induktiven Verhalten beschreiben und kann ebenfalls als globale Größe angegeben werden [15, 65]. Die globale Plasmainduktivität berechnet sich damit zu

$$L_p = \frac{R_p}{\nu_{m,\text{eff}}}. \quad (2.2.66)$$

Diese globalen Ersatzschaltbild-Parameter beschreiben die Impedanz des Plasmas physikalisch korrekt, haben jedoch auf Schaltungsebene noch keinen Bezug zum Generator bzw. zur energiespeisenden Einrichtung. Dieser Bezug ist abhängig von der Art der Kopplung. Bei RIT ist diese Kopplung induktiver Natur, wodurch sich eine Beschreibung mittels Transformator-Modell anbietet. Dies wird in Kap. 3.7 verdeutlicht, wo die auf den hier gezeigten Theorien basierte Modellbildung erläutert wird.

Ein numerisches Modell zur Berechnung der oben aufgeführten Ersatzschaltbildwerte als Funktion der Teilchendichte wurde in Ref. 109 veröffentlicht. Ein darauf aufbauendes Modell, das die Teilchendichte wiederum iterativ berechnet, indem eine weitere iterative Schleife abgearbeitet wird, die die Energieerhaltungsgleichung gemäß Gl. (2.2.49) löst, wurde in Ref. 110 veröffentlicht.

2.3 Physik der Radiofrequenz-Ionentriebwerke

Mit den theoretischen Grundlagen der elektromagnetischen Felder aus Kap. 2.1 sowie der Niedertemperaturplasmen aus Kap. 2.2 und deren Verkopplung (s. Kap. 2.2.2) soll in diesem Abschnitt die Funktionsweise von RIT erläutert werden. Die hier gezeigten Zusammenhänge sind fundamental wichtig für die Modellbildung, ganz besonders im Hinblick auf die Problematik des Wirkungsgrades eines RIT.

2.3.1 Die Raketengleichung

Alle flugfähigen Antriebssysteme, seien es elektrische oder chemische, fußen auf dem Rückstoßprinzip, das dem dritten Newton'schen Axiom entspricht [27, 51, 64, 79, 105]. Prinzipiell

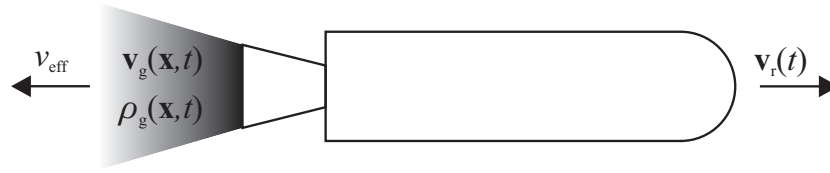


Abbildung 2.3.1: Kenngrößen zur Herleitung der Impulserhaltungsgleichung einer Rakete nach Ref. 79. Da sowohl die Geschwindigkeit der ausgestoßenen Gaspartikel \mathbf{v}_g als auch deren Dichte ρ_g von Ort und Zeit abhängen, wird mit einer mittleren, effektiven Austrittsgeschwindigkeit v_{eff} gerechnet.

entwickelt eine Rakete eine entgegengerichtete Schubkraft F durch Ausstoß von Massepartikeln, um das Kräftegleichgewicht zu erhalten. Abbildung 2.3.1 zeigt eine Schemaskizze einer Rakete mit zugehörigen Geschwindigkeitsvektoren. Um das Prinzip mathematisch genauer zu beschreiben, entwickelte Konstantin Ziolkowsky Ende des 19. Jahrhunderts die nach ihm benannte Raketengleichung, welche durch

$$\Delta v = v_{\text{eff}} \ln \left(\frac{m_{\text{initial}}}{m_{\text{final}}} \right) \quad (2.3.1)$$

gegeben ist. Sie wird aus der Impulserhaltung einer Rakete inklusive Treibstoff hergeleitet und wird genutzt, den Geschwindigkeitszuwachs Δv zu berechnen, soweit die effektive Austrittsgeschwindigkeit der Raketengase an der Düse v_{eff} und das Verhältnis der Raketenmasse beim Brennschluss m_{final} zur Startmasse m_{initial} bekannt sind. Weiterhin kann ebenso bei Vorgabe einer gewünschten Geschwindigkeitsänderung der Rakete die dazu notwendige Treibstoffmasse bestimmt werden [79]. Letzteres ist besonders zum Aufstieg auf höhere Orbits wichtig, da dazu die dem jeweiligen Startorbit zugeordnete kosmische Fluchtgeschwindigkeit von den Antriebssystemen des Satelliten bereitgestellt werden muss [64]. Die Herleitung der Raketengleichung nach [79] ist im Anhang unter Kap. A.1.3 gezeigt.

Der axial von der Rakete bzw. dem Triebwerk erzeugte Schub F gibt die zeitliche Änderung des Impulses der Rakete wieder, beschreibt also eine Kraft, und lässt sich mit der effektiven Austrittsgeschwindigkeit des, im Falle von RIT, ionisierten Gases über die Beziehung

$$F = v_{\text{eff}} \frac{dm_r}{dt} - (p_a - p_\infty) A_a \quad (2.3.2)$$

bestimmen [27, 64, 79], wobei m_r die Raketenmasse, p_a den Druck an der Austrittsfläche A_a der Düse und p_∞ den Umgebungsdruck beschreiben. Bei RIT kann der Subtrahend aus Gl. (2.3.2) in guter Näherung vernachlässigt werden, da der typische Entladungsdruck in der Ionisationskammer im Bereich < 1 Pa liegt und somit gegenüber der vergleichsweise hohen effektiven Austrittsgeschwindigkeit nicht ins Gewicht fällt [27]. Damit vereinfacht sich Gl. (2.3.2) zu

$$F = v_{\text{eff}} \frac{dm_r}{dt}. \quad (2.3.3)$$

Der axiale Gesamtimpuls des Triebwerks berechnet sich mittels Integration über den zeitlichen Verlauf des Schubs,

$$p_{\text{tot}}(t) = \int_0^t F(t) dt, \quad (2.3.4)$$

wobei τ die Dauer eines Impulsbits, d. h., eines zeitlich minimal aufgelösten Schubs, beschreibt. Geht man von konstantem Schub aus, vereinfacht sich Gl. (2.3.4) zu

$$p_{\text{tot}} = F\tau. \quad (2.3.5)$$

Um Antriebssysteme zu vergleichen und eine Aussage über deren Effizienz zu bekommen, lässt sich der massenspezifische Impuls einführen [64], der aufgrund der Normierung des Gesamtimpulses p_{tot} auf die Raketenmasse m_r gleich der effektiven Austrittsgeschwindigkeit ist (unter Berücksichtigung von Gl. (2.3.3)), wie in der Gleichung

$$\frac{F\tau}{m_r} = \frac{F dt}{dm_r} = v_{\text{eff}} \quad (2.3.6)$$

verdeutlicht ist.

In der Raketentechnik ist es üblich, den gewichtsspezifischen Impuls I_{sp} statt des massenspezifischen Impulses zu benutzen, welcher nach Refs. 64, 79 definiert ist als

$$I_{\text{sp}} = \frac{F\tau}{g_0 m_r} = \frac{F dt}{g_0 dm_r} = \frac{v_{\text{eff}}}{g_0}, \quad (2.3.7)$$

wobei $g_0 \approx 9.81 \text{ m s}^{-2}$ die Erdbeschleunigung darstellt. Die Einheit des gewichtsspezifischen Impulses ist Sekunde, was in allen Einheitssystemen gleich definiert und massenunabhängig ist. Aufgrund dessen hat sich der gewichtsspezifische Impuls als *die* Vergleichsgröße der Effizienz für Antriebssysteme weltweit eingebürgert [64].

Da die effektive Austrittsgeschwindigkeit und somit auch der spezifische Impuls von chemischen Antriebssystemen durch die Energie der chemischen Bindungen des benutzten Treibstoffes limitiert ist [64], ergeben sich typische Werte für v_{eff} von bis zu 4 km s^{-1} , gleichbedeutend mit einem gewichtsspezifischen Impuls von bis zu 400 s. Im Gegensatz dazu gilt diese Limitierung bei elektrischen Triebwerken nicht, da die Energie dort nicht im Treibstoff direkt steckt, sondern Energiequelle und Treibstoff als zwei verschiedene Systeme betrachtet werden können. Aktuelle RIT mit Xenon als Treibstoff bieten Austrittsgeschwindigkeiten von $20 - 40 \text{ km s}^{-1}$, was einem I_{sp} von etwa $2000 - 4000 \text{ s}$ entspricht [27]. Daran kann man den Mehrwert elektrischer Antriebssysteme erkennen, der sich vor allem in der Kostenkalkulation des Treibstoffes für langlebige Missionen widerspiegelt.

Nichtsdestotrotz ist ein chemisches Triebwerk nicht in jedem Fall durch ein elektrisches zu ersetzen. Chemische Triebwerke bieten sehr viel höhere Schübe (bis kN) als elektrische ($\mu\text{N} - \text{N}$), wodurch sie immer noch das Mittel der Wahl bei Raketenstarts sind, da die Schubkraft elektrischer Triebwerke letztlich nicht ausreichen würde, die Erdanziehungskraft zu überwinden [64]. Verlässt die Rakete allerdings die Atmosphäre und setzt ihre Nutzlast auf Orbits mit genügend kleiner Restluftreibung aus, zeigt sich die Stärke elektrischer Triebwerke, was bereits im Vorwort anhand des ARTEMIS-Beispiels erwähnt wurde.

Um aufbauend auf den fundamentalen Kenntnissen der Schuberzeugung die Funktionalität von RIT aufzuzeigen, dient Abb. 2.3.2. Wie in dieser Abbildung ersichtlich ist, ist der RFG direkt an die Induktionsspule angeschlossen, die um das Entladungsgefäß gewickelt ist. Durch den Massenflusscontroller¹⁸ wird die Gaszufuhr in das Triebwerk dosiert. Das atomare Gas gelangt in die Entladungskammer und kann zeitgleich durch das angelegte Gittersystem mit thermischer Geschwindigkeit entweichen. Deshalb baut sich kein großer Druck in der Kammer

¹⁸engl.: mass flow controller (MFC)

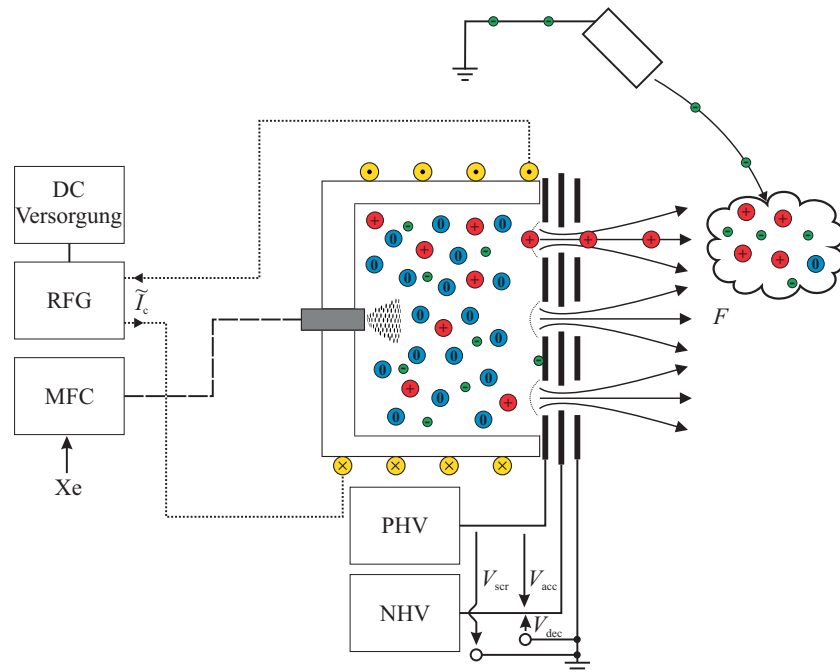


Abbildung 2.3.2: RIT-Antriebssystem bestehend aus Triebwerk, RFG, MFC, PHV, NHV und Neutrisator. Im Entladungsgefäß ist das quasi-neutrale Xenonplasma dargestellt. Die extrahierten Ionen werden durch Elektronen aus dem Neutrisator ausbalanciert.

auf. Wenn nun mit Hilfe des RFG ein elektrischer Wechselstrom (im Bild dargestellt als komplexe Amplitude \tilde{I}_c) durch die Spule fließt, induziert dieser Strom zunächst ein zu ihm senkrecht wirkendes Magnetfeld gemäß des Ampère'schen Durchflutungsgesetzes aus Gl. (2.1.26). Durch die explizite Zeitabhängigkeit wird durch das sich ebenso zeitlich ändernde Magnetfeld ein wiederum dazu senkrecht verlaufendes elektrisches Feld gemäß des Faraday'schen Induktionsgesetzes aus Gl. (2.1.28) induziert. Das induzierte elektrische Feld hat die gleiche vektorielle Richtung wie der erregende Spulenstrom, ist zu diesem aber um $\approx \pi$ zeitlich phasenverschoben. Dies entspricht der Lenz'schen Regel, weshalb man diese Art der induktiven Einkopplung auch mittels Transformator-Modell beschreiben kann [85]. Das zirkulare elektrische Feld kann nun freie Elektronen beschleunigen und ihnen somit Energie verleihen. Ist diese Energie größer als die Ionisierungsenergie der benutzten Gasart (im Bild: Xenon), kann ein schnelles Elektron bei einer Kollision mit einem der viel häufiger vorkommenden Atome ein weiteres Elektron aus dessen Elektronenschalen herausschlagen und es somit ionisieren, wie in Kap. 2.2.1 erläutert.

Um den Ionenstrahl zu formen (s. Abb. 2.3.3 (a)), bzw. die Ionen aus dem Plasma zu extrahieren, dient das in Abb. 2.3.2 dargestellte Gittersystem. Die in der Abbildung gezeigten relativen Abstände und vor allem die Anzahl der Extraktionskanäle sind zu Gunsten der Visualisierung nicht realitätsgetreu wiedergegeben. Abbildung 2.3.3 (b) zeigt eine Aufnahme eines Gießener RIM-4 Triebwerkes, welches ein Gittersystem mit 151 Extraktionskanälen hat. Die RIM-Serie wird vor allem für Materialbearbeitung genutzt und unterscheidet sich zur RIT-Serien lediglich durch die Anzahl der Extraktionskanäle. Die Extraktionskanäle, welche auch als Beamlets bezeichnet werden, extrahieren je einen Teil des gesamten Ionenstrahls, der letztendlich den Schub verursacht.

Die Ionen werden mittels konstanter Hochspannung aus dem Triebwerk extrahiert, welche

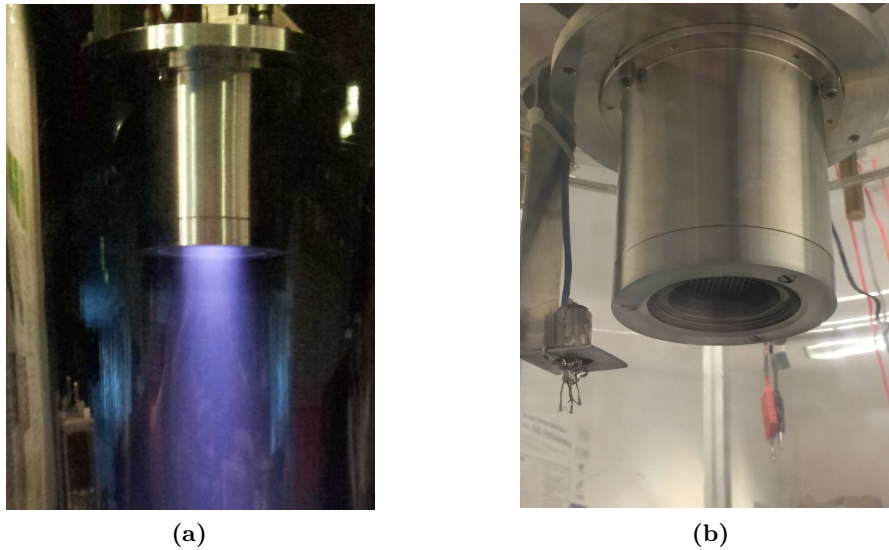


Abbildung 2.3.3: Aufnahme eines RIM-4 Triebwerkes im Betrieb (a) und im ausgeschalteten Zustand (b). In Teilbild (b) kann man den Neutralisator erkennen, der hier in Form einer Glühwendel installiert wurde.

zwischen Abschirmgitter¹⁹ und Beschleunigungsgitter²⁰ anliegt. Die Spannungsquelle, welche das Abschirmgitter versorgt, wird als **positive high voltage** (PHV) bezeichnet. Analog dazu nennt man die Spannungsquelle des Beschleunigungsgitters **negative high voltage** (NHV). Das Beschleunigungsgitter hat die besondere Aufgabe, im Plasma des extrahierten Ionenstrahls existierende Elektronen daran zu hindern, ins Triebwerk zu gelangen. Dieser Effekt wird als *electron backstreaming* bezeichnet [27]. Die Beschleunigungsspannung, die die Ionen extrahiert, berechnet sich zu

$$V_{\text{acc}} = V_{\text{scr}} + V_{\text{dec}} + \Phi_{\text{bulk}}, \quad (2.3.8)$$

dabei bezeichnen V_{scr} die von PHV bereitgestellte und V_{dec} die von NHV bereitgestellte Spannung (vgl. Abb. 2.3.2). Φ_{bulk} bezeichnet das Plasmapotenzial im Volumen-Bereich, das in Kap. 2.2.1 eingeführt wurde. Letzteres ist gegenüber den Hochspannungen sehr klein, mit typischen Werten bis 20 V, und wird deshalb für die Extraktion in dieser Arbeit vernachlässigt.

Bei der Extraktion der Ionen muss besonders auf die Divergenz des Strahls geachtet werden, denn diese wirkt sich auf die Effizienz des Triebwerks aus. Der Strahl soll einen möglichst kleinen Divergenzwinkel aufweisen, um maximalen Impuls in axialer Richtung zu gewährleisten. Die normal dazu entstehenden Impulskomponenten heben sich gegenseitig auf und verbrauchen daher unnötig Energie, ohne axialen Schub zu erzeugen. Um nun den Ionenstrahl nach diesen Vorgaben zu formen, dient das Gittersystem zusätzlich als Ionenoptik, die, in Analogie zur geometrischen Optik, den Ionenstrahl wie eine Linse fokussiert. Eine perfekte Fokussierung ist dabei arbeitspunktabhängig. Sobald ein anderes Stützgas als jenes, auf welches das Gittersystem initial ausgelegt wurde, eingesetzt wird, müssten unter Umständen die Abstände der Gitter zueinander angepasst werden. Um diese Effekte genauer zu untersuchen, können Simula-

¹⁹engl.: screen grid

²⁰engl.: acceleration grid

tionen mit dem Programm KOBRA3-INP [12, 52, 95, 96] durchgeführt werden, die langwierige Prototypentests ersetzen können. Darauf soll hier nicht näher eingegangen werden.

Das in Abb. 2.3.2 dargestellte dritte Gitter (Bremsgitter²¹) liegt auf Massepotenzial und hat die Aufgabe, die extrahierten positiv geladenen Ionen daran zu hindern, wieder zum zweiten, negativ vorgespannten Gitter zurückzuflogen und dieses zu beschädigen. Dadurch werden die extrahierten, schubgenerierenden Ionen allerdings wieder abgebremst. Das insgesamt auf die Ionen wirkende Potenzial, das letztendlich auch deren kinetische Energie nach der Extraktion vorgibt, entspricht der an das Abschirmgitter angelegten Spannung V_{scr} , welche an PHV eingestellt wird. Der qualitative Potenzialverlauf für die extrahierten Ionen ist in Abb. 2.3.4 (b) schematisch dargestellt.

Durch den Bremsvorgang wird weiterhin die Fokussierung der Ionen verbessert, wodurch die Gittererosion minimiert werden kann. Um das Triebwerk effizient nutzen zu können, muss also ein Kompromiss zwischen Lebensdauer und Schub (beides hängt von der Fokussierung ab!) gefunden werden [27].

Dem Neutralisator wird in dieser Arbeit keine Beachtung geschenkt. In der Praxis wird er benötigt, da der Satellit sich sonst im Weltraum negativ aufladen würde, sobald positiv geladene Ionen das System verlassen würden. Dies würde dazu führen, dass die extrahierten Ionen wieder zum Satelliten zurückkehren und diesen eventuell beschädigen würde. Weiterhin würde der Schub dadurch drastisch reduziert werden. Meistens nutzt man Hohlkathodenneutralisatoren zur Neutralisation [27], es wurden jedoch Studien an der Justus-Liebig-Universität zu alternativen Technologien durchgeführt [114].

2.3.2 Child-Langmuir Raumladungsgesetz

Der aus dem Plasma extrahierbare Ionenstrom ist raumladungsbegrenzt, was sich dadurch bemerkbar macht, dass selbst bei unendlich angenommener Ergiebigkeit des Plasmas der Ionenstrom mit $V_{acc}^{3/2}$ skaliert. Dies wird formal durch das Child-Langmuir Raumladungsgesetz beschrieben, das die maximal mögliche extrahierbare Stromdichte für eine über dem Abstand l_g (bei RIT zwischen Abschirm- und Beschleunigungsgitter) angelegte Extraktionsspannung V_{acc} bestimmt. Die raumladungsbegrenzte Stromdichte berechnet sich zu [65]

$$J_i = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_i} \frac{V_{acc}^{\frac{3}{2}}}{l_g^2}}. \quad (2.3.9)$$

Eine umfassende Herleitung dieses eindimensionalen Zusammenhangs ist am Beispiel eines unendlich ausgedehnten Kondensators im Anhang unter Kap. A.1.4 gezeigt.

Für runde Extraktionsaperturen, wie es bei RIT typischerweise der Fall ist [27], berechnet sich der insgesamt extrahierbare Ionenstrahlstrom I_b zu

$$I_b = \frac{N_g \pi d_s^2 \epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_i} \frac{V_{acc}^{\frac{3}{2}}}{l_g^2}}, \quad (2.3.10)$$

wobei d_s den Durchmesser der Extraktionsöffnungen des Abschirmgitters und N_g die Anzahl der Extraktionsöffnungen der Gitter bezeichnet. Diese Gleichung geht idealisiert davon aus, dass keinerlei Strahldivergenz und Defokussierung vorliegen. In der Realität hat man stets mit solchen parasitären Effekten zu tun, weshalb Korrekturfaktoren eingeführt werden, die

²¹engl.: deceleration grid

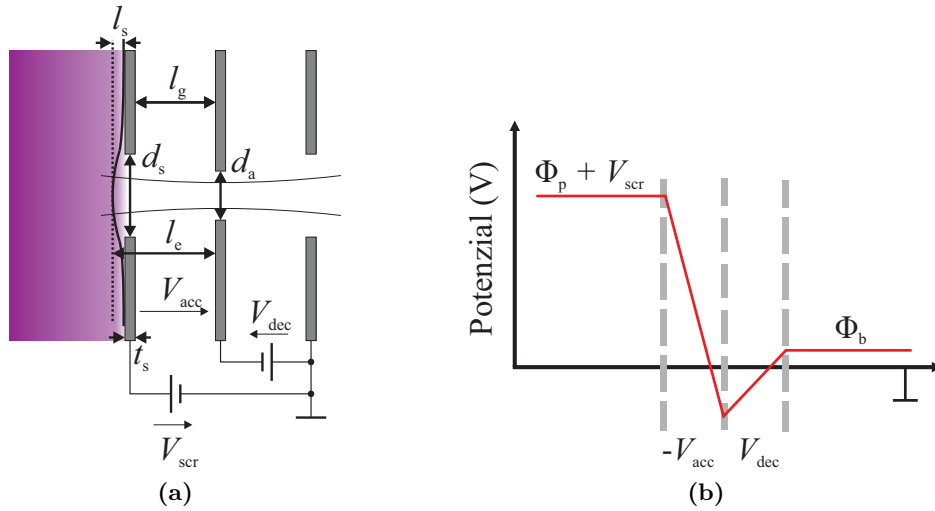


Abbildung 2.3.4: (a) zeigt ein typisches Dreigittersystem vergrößert auf einen Extraktionskanal. Der Gitterabstand l_g ist gleich zwischen Abschirm-, Beschleunigungs- und Bremsgitter. Wichtige Parameter zur Beschreibung der Extraktion sind weiterhin die Dicke der Plasmarandschicht l_s sowie der effektive Gitterabstand l_e , der den Abstand zwischen Plasmarand und Beschleunigungsgitter bezeichnet. (b) zeigt den nach Ref. 27 typischen Potenzialverlauf, wobei Φ_p das Plasma- und Φ_b das Raumladungspotenzial des Ionentrahls bezeichnet.

Gl. (2.3.10) auf Messergebnisse kalibrieren. Im weiteren Verlauf wird allerdings eine ideale Stromfokussierung des modellierten RIT angenommen. Abbildung 2.3.4 (a) zeigt eine Skizze eines Extraktionskanals im Schnitt durch das für RIT typische Dreigittersystem mit den zugehörigen Abständen und Maßen.

2.3.3 Schub und Triebwerkseffizienz bei RIT

Die allgemeine Form des Schubs ist in Gl. (2.3.3) gegeben. Bei RIT tragen sowohl die auf hohe Austrittsenergien beschleunigten Ionen als auch die mit thermischer Geschwindigkeit austretenden Atome zum axialen Schub gemäß

$$F = v_{\text{eff}} \frac{dm_r}{dt} = \dot{m}_i v_i + \dot{m}_n \bar{v}_n = m_i \gamma_i v_i + m_n \gamma_n \bar{v}_n \quad (2.3.11)$$

bei. Die Treibstoffflussrate ist hier in Form der Änderung der Gesamtmasse des Satelliten gegeben; da die Grundmasse des Satelliten ohne Treibstoff als konstant anzunehmen ist, muss keine separate Größe für die Treibstoffmasse per se eingeführt werden. Weiterhin bezeichnet \dot{m}_i die Massenflussrate der Ionen und \dot{m}_n die der Atome, mit $\dot{m} = dm/dt$. Diese lässt sich weiter untergliedern in $\dot{m} = \gamma m$, wobei γ den Teilchenfluss in s^{-1} bezeichnet. Für die mittlere thermische Geschwindigkeit der Atome gilt Gl. (2.2.11) mit entsprechend veränderter Temperatur und Masse. Die Geschwindigkeit der extrahierten Ionen berechnet sich über die Energieerhaltungsgleichung

$$v_i = \sqrt{\frac{2eV_{scr}}{m_i}}, \quad (2.3.12)$$

die die kinetische Energie der extrahierten Ionen abhängig von der an PHV eingestellten Spannung angibt. Wie bereits erwähnt, bewirkt die an NHV angelegte Spannung V_{dec} eine höhere Beschleunigungsspannung. Diese trägt jedoch nicht zur insgesamt aufgenommenen Energie der Ionen bei, da der zusätzlich zwischen Abschirm- und Beschleunigungsgitter aufgenommene Energieanteil zwischen Beschleunigungs- und Bremsgitter wieder abgegeben wird (vgl. Abb. 2.3.4 (b)).

Um den Begriff der effektiven Austrittsgeschwindigkeit wieder aufzugreifen und für RIT zu definieren, ergibt sich diese über Gl. (2.3.11) zu [27]

$$v_{\text{eff}} = \frac{F}{\gamma_i m_i + \gamma_n m_n}. \quad (2.3.13)$$

Näherungsweise wird nur Schub durch die extrahierten Ionen bereitgestellt. Um jedoch eine Aussage über Wirkungsgrade zuzulassen, wird der atomare Einfluss hier mit einbezogen.

Die Massenflussrate der Ionen ist über die Beziehung

$$\dot{m}_i = \frac{I_b m_i}{e} \quad (2.3.14)$$

mit dem Strahlstrom aus Gl. (2.3.10) verkoppelt. Setzt man dies und Gl. (2.3.12) in Gl. (2.3.11) ein, erhält man den durch ein RIT verursachten axialen Schub. Unter Vernachlässigung des atomaren Beitrages ergibt sich

$$F = I_b \sqrt{\frac{2m_i V_{\text{scr}}}{e}}. \quad (2.3.15)$$

Um eine Aussage über die Effizienz von RIT treffen zu können, kann man die in Kap. 1.1 eingeführten Wirkungsgrade benutzen. Da sowohl atomare als auch (hier ausschließlich einfach) ionisierte Teilchen das Triebwerk durch das Gittersystem verlassen, der Schub jedoch näherungsweise nur von den Ionen verursacht wird, kann man den Massenwirkungsgrad so definieren, dass er den Massenfluss der Ionen auf den gesamten, das Triebwerk verlassenden, Treibstoffmassenfluss bezieht [27]. Der Massenwirkungsgrad berechnet sich zu

$$\eta_m = \frac{\dot{m}_i}{\dot{m}_i + \dot{m}_n}. \quad (2.3.16)$$

Da hier lediglich einfach ionisierte Teilchen betrachtet werden, ist die Näherung $m_i \approx m_n$ aufgrund $m_e \ll m_n$ sinnvoll, wodurch sich Gl. (2.3.16) zu

$$\eta_m = \frac{\dot{m}_i}{\dot{m}_i + \dot{m}_n} = \frac{\gamma_i m_i}{\gamma_i m_i + \gamma_n m_n} \approx \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \gamma_n} \quad (2.3.17)$$

vereinfacht.

Eine weitere wichtige Größe zur Beschreibung von Effizienz bei Antriebssystemen ist die Strahlleistung [27]

$$P_b = \frac{1}{2} \dot{m}_r v_{\text{eff}}^2. \quad (2.3.18)$$

Setzt man Gl. (2.3.3) in Gl. (2.3.18) ein, erhält man

$$P_b = \frac{F^2}{2\dot{m}_r}. \quad (2.3.19)$$

Anhand dieser Gleichung lässt sich erkennen, dass Techniken, die den Schub erhöhen, ohne dabei die Treibstoffflussrate $\dot{m}_r = \dot{m}_i + \dot{m}_n$ zu erhöhen, in höherer Strahlleistung resultieren [27].

Neben dem Massenwirkungsgrad wurde in Kap. 1.1 noch der elektrische Wirkungsgrad definiert, der die Strahlleistung auf die gesamte elektrische Leistung im Triebwerk normiert. Dabei beinhaltet die Gesamtleistung zusätzlich noch die vom Plasma absorbierte Leistung, die notwendig ist, um die Ladungsträger zu erzeugen, die den Strahl letztlich formen. Die absorbierte Leistung ist Gl. (2.2.63) zu entnehmen. Für die Strahlleistung aus Gl. (2.3.19) kann man durch Einsetzen von Gl. (2.3.15) und unter Vernachlässigung des atomaren Einflusses vereinfachend

$$P_b \approx \frac{F^2}{2\dot{m}_i} = I_b V_{scr} \quad (2.3.20)$$

schreiben.

Insgesamt ergibt sich für den elektrischen Wirkungsgrad

$$\eta_{el} = \frac{P_b}{P_b + P_{abs}} = \frac{I_b V_{scr}}{I_b V_{scr} + P_{abs}}. \quad (2.3.21)$$

Den Gesamtwirkungsgrad des RIT erhält man, indem man elektrischen und Massenwirkungsgrad multipliziert. Allerdings macht es meist mehr Sinn, die beiden Wirkungsgrade einzeln zu betrachten, was im weiteren Verlauf der Arbeit deutlich wird.

Um eine Aussage darüber zu bekommen, wie viel Energie nötig ist, um ein schuberzeugendes Ion bereitzustellen, dient die Berechnung des Entladungsverlusts ξ [27]. Der Entladungsverlust berechnet sich zu

$$\xi = \frac{P_{abs}}{I_b}, \quad (2.3.22)$$

wobei ξ die Einheit $W A^{-1}$ bzw. eV/Ion hat und demnach möglichst klein sein sollte, um einen hohen elektrischen Wirkungsgrad zu erzielen.

Ein letzter Parameter, der die Effizienz eines RIT unter Einbeziehung des Gittersystems evaluiert, ist die Perveanz k . Sie gibt an, wie viel Strom ein RIT für eine bestimmte Extraktionsspannung unter Einbeziehung der Raumladungsbegrenzung, die aus dem Child-Langmuir Gesetz resultiert, extrahiert werden kann [27]. Sie berechnet sich zu

$$k = \frac{I_b}{V_{scr}^{\frac{3}{2}}}. \quad (2.3.23)$$

Kapitel 3

Implementierung des numerischen Modells

Dieses Kapitel erläutert die numerische Modellierung eines RIT für einen stationären Arbeitspunkt, definiert durch den Gasmassenfluss des ausgewählten Gases, den eingespeisten RF-Strom und die PHV- sowie NHV-Gitterspannungen. Auch die Geometrie des Triebwerks, bestehend aus Entladungsgefäß, Induktionsspule sowie Gittersystem, kann parametrisiert werden. Das Gesamtmodell setzt sich aus modularen Teilen zusammen, welche teilweise iterativ ausgeführt werden, bevor das nächste modulare Teilmodell aufgerufen wird. Die grundlegenden Theorien und Zusammenhänge aus Kap. 2 werden hier wieder aufgegriffen und implementiert.

3.1 Modellüberblick

Das entwickelte numerische Modell besteht aus insgesamt acht modularen Teilen, die sukzessive abgearbeitet werden. Drei dieser acht Teilmodelle stellen Lösungsalgorithmen physikalischer Erhaltungsgleichungen dar, weshalb sie iterativ aufgerufen werden, bis die jeweilige Ausgangsgröße konvergiert. Das Konvergenzkriterium hängt dabei von der entsprechenden Gleichung ab und kann von Hand eingestellt werden. Von Konvergenz redet man, wenn sich die Ausgangsgröße in zwei aufeinanderfolgenden Iterationsschritten maximal innerhalb des definierten Konvergenzkriteriums ändert. Das Konvergenzkriterium beschreibt also ein Toleranzband. Stellt man das Toleranzband zu grob ein, erreicht man schnell ein Ergebnis, nimmt dabei jedoch teilweise nicht-akzeptable Abweichungen in Kauf. Im Gegensatz dazu dauert das Erreichen der Konvergenz unter Umständen sehr lange, wenn man das Toleranzband zu fein definiert. Es muss demnach ein Kompromiss zwischen Simulationsgenauigkeit und -dauer gefunden werden. In dieser Arbeit liegt der Fokus auf Genauigkeit – vor allem, da die Ergebnisse mit Messungen verglichen werden. Nichtsdestotrotz kann man diese Einstellungen jederzeit ändern, was vor allem qualitative Vergleiche verschiedener Parametersätze, die möglichst schnell gezogen werden sollen, ermöglicht.

Bevor die Implementierung der einzelnen Teilmodelle erläutert wird, soll an dieser Stelle eine Übersicht über den Zusammenhang dieser gezeigt werden. Ein Flussdiagramm des gesamten Modells ist in Abb. 3.1.1 dargestellt. Daran erkennt man besonders, dass die Iterationen verschachtelt sind, weshalb die Abarbeitung des Programms, je nach Wahl des Toleranzbandes, sehr lange dauern kann.

Die drei weiter oben erwähnten Erhaltungsgleichungen, welche im Laufe des Kapitels gezeigt werden, bilden einen selbstkonsistenten Zusammenhang, der in der Abbildung dargestellt ist. Die Selbstkonsistenz ergibt sich aus der iterativen Berechnung der voneinander abhängigen Gleichungen bis die Gesamtlösung stabil ist. Nach Definition von strukturellen sowie arbeits-

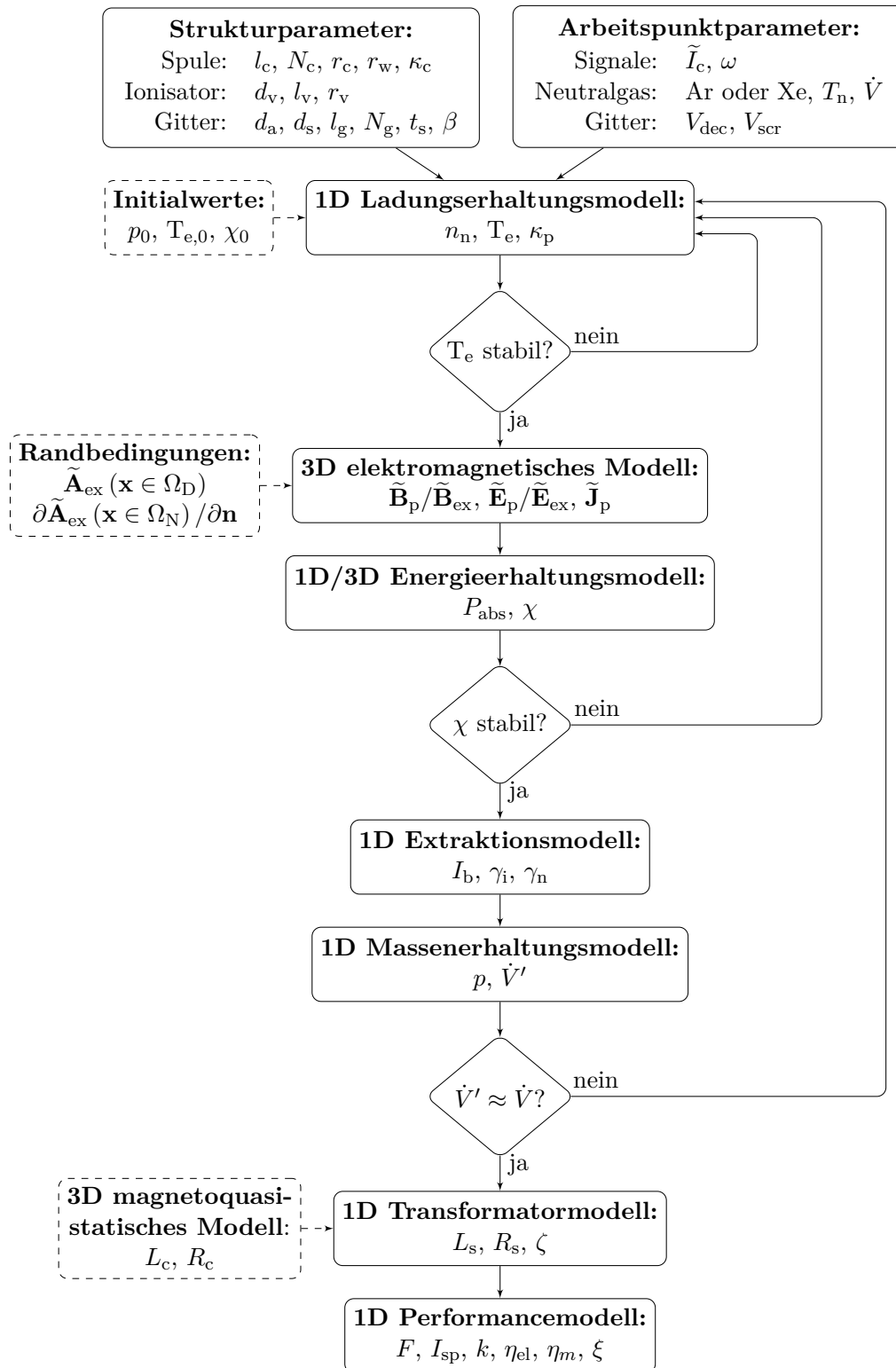


Abbildung 3.1.1: Flussdiagramm des numerischen Modells auf oberster Hierarchieebene. Die Kerngrößen sind die Ergebnisse der jeweiligen Erhaltungsgleichung, d. h., Elektronentemperatur T_e , Ionisierungsgrad χ und die Regelgröße des Volumenstroms \dot{V}' .

punktspezifischen Eingangsparametern und initialen Werten für die iterativen Berechnungen der Erhaltungsgrößen wird das globale Ladungserhaltungsmodell (vgl. Kap. 3.2) aufgerufen, das die plasmazpezifischen Parameter wie Neutralteilchendichte, Elektronentemperatur und Plasmaleitfähigkeit iterativ berechnet. Ist dessen Konvergenzkriterium erreicht, wird das dreidimensionale Modell zur Berechnung der induzierten Felder (vgl. Kap. 3.3), unter Berücksichtigung definierter Randbedingungen, abgearbeitet. Mit Hilfe der induzierten Felder sowie der induzierten Plasmastromdichte wird als nächstes die absorbierte Leistungsdichte dreidimensional iterativ berechnet, bis der Ionisierungsgrad bzw. die Ladungsträgerdichte konvergiert (vgl. Kap. 3.4). Die Leistungsdichte wird anschließend über das effektive Plasmavolumen integriert, um eine globale Größe zu erhalten, die für die Berechnung der Komponenten des Ersatzschaltbildes genutzt werden kann. Das anschließend aufgerufene Extraktionsmodell (vgl. Kap. 3.5) berechnet u. a. den extrahierten Ionenstrom. Danach wird die dritte Erhaltungsgleichung iterativ gelöst (vgl. Kap. 3.6), die den Entladungsdruck berechnet, bis die Menge des entweichenden Gases (ionisiert und neutral) der des zugeführten Neutralgases mit definierten Toleranzen entspricht. Nach Erreichen dieses Konvergenzkriteriums ist der selbstkonsistente Ablauf beendet und aus den berechneten Größen können die arbeitspunkt- und strukturabhängigen Impedanzen (vgl. Kap. 3.7) sowie Performancedaten (vgl. Kap. 3.8) gewonnen werden.

3.2 Quasi-homogenes Ladungserhaltungsmodell

Das implementierte Ladungserhaltungsmodell basiert in den Grundzügen auf dem **Uniform Density Discharge Model** (UDDM) von Lee und Lieberman [54, 65]. Es handelt sich dabei um ein globales Modell, das Plasmaparameter wie Temperatur, Teilchendichte und Leitfähigkeit als Funktionen des Drucks und der Geometrie des Entladungsgefäßes berechnet. Das Modell ist global, was bedeutet, dass die erwähnten Größen als homogen im Volumen-Bereich angenommen werden. Im Gegensatz dazu gilt im Randbereich $n_e \ll n_i$, weil, wie bereits in Kap. 2.2 erwähnt, nur Elektronen mit sehr großer kinetischer Energie die Randschicht durchdringen können, da sie von der dem Plasma gegenüber negativen Wand abgestoßen werden. Diejenigen Elektronen, die eine ausreichend große Energie besitzen, sind sehr viel schneller als die in der Randschicht befindlichen Ionen, wodurch die stationäre Elektronendichte weit unterhalb der Ionendichte liegt. Der quasi-homogene qualitative Dichteverlauf der Ionen und Elektronen nach Ref. 54, ist für planare und zylindrische Wände in Abb. 3.2.1 gezeigt.

Für die Implementierung ist vor allem das Verhältnis der Elektronendichte in der Randschicht zu jener im Volumen-Bereich wichtig, das über $h = n_{e,w}/n_{e,0}$ definiert ist. Die jeweiligen Verhältnisse berechnen sich nach Ref. 54 an zylindrischen Wänden (Index r) und an planaren Wänden (Index l) zu

$$h_r = \frac{0.8}{\sqrt{4 + \frac{r_v}{\lambda_i} + \left(\frac{0.8T_i r_v v_B}{2.405J_1(2.405)T_e D}\right)^2}} \quad (3.2.1)$$

$$h_l = \frac{0.86}{\sqrt{3 + \frac{l_v}{2\lambda_i} + \left(\frac{0.86T_i l_v v_B}{\pi T_e D}\right)^2}} \quad (3.2.2)$$

In den letzten beiden Gleichungen bezeichnen l_v und r_v die Länge sowie den Radius des Entladungsgefäßes¹, λ_i die mittlere freie Weglänge zwischen zwei Ion-Atom-Stößen, v_B die

¹engl.: discharge vessel

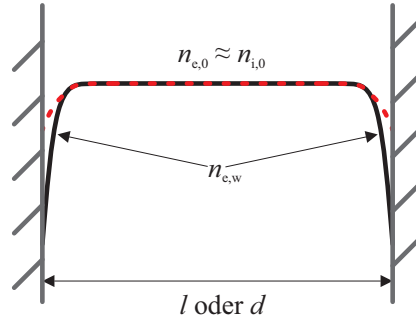


Abbildung 3.2.1: Das hier implementierte Uniform Density Discharge Model aus Ref. 54 geht von einer homogenen Teilchendichte im Volumen-Bereich aus. Aufgrund der Quasi-Neutralität (vgl. Kap. 2.2.1) gilt dort $n_e \approx n_i$. Im Randbereich nehmen die Teilchendichten ab, um ein selbstkonsistentes Plasma aufrecht zu erhalten. Die Dichteverteilung der Elektronen ist in schwarz dargestellt, die der Ionen rot-gepunktet. Aufgrund der Quasi-Neutralität ergibt sich, dass die Dichte der beweglicheren Elektronen zum Rand hin stärker abnimmt als die der Ionen.

Bohm-Geschwindigkeit der Ionen, D den Diffusionskoeffizienten der Ionen und J_1 die Bessel-Funktion erster Gattung und erster Ordnung.

Um die mittlere freie Weglänge für Stöße zwischen Ionen und Atomen nach Gl. (2.2.41) zu berechnen, wird der Stoßquerschnitt für diesen Prozess benötigt. Dieser wurde im vorhergehenden Verlauf nicht erwähnt, da er nicht zur Heizung des Plasmas beiträgt, sondern explizit für das UDDM benötigt wird. Für das Arbeitsgas Argon wird er nach Ref. 65 als konstant über den gesamten Energiebereich mit $\sigma_{Ar,in} = 10^{-18} \text{ m}^2$ angenommen. Bei Xenon berechnet er sich als Funktion der Neutralgastemperatur nach Ref. 4 zu $\sigma_{Xe,in} = 8.20871 \times 10^{-16} / |\bar{v}_r| \text{ m}^2$. Dabei wird die relative mittlere Geschwindigkeit zwischen Ionen und Atomen $\bar{v}_r = \sqrt{16eT_n/\pi m_n}$ mit reduzierter Masse $m_r = m_i m_n / (m_i + m_n) \approx m_n / 2$ genutzt.

Mit Gl. (2.2.41) kann nun der Diffusionskoeffizient der Ionen nach Ref. 54 zu

$$D = \frac{eT_i \lambda_i}{m_i \bar{v}_i} \quad (3.2.3)$$

berechnet werden. Die Bohm-Geschwindigkeit berechnet sich nach dem Bohm-Randschicht-Kriterium unter der Annahme einer kollisionsfreien Randschicht zu

$$v_B = \sqrt{\frac{eT_e}{m_i}}. \quad (3.2.4)$$

Die Herleitung der Bohm-Geschwindigkeit findet sich im Anhang unter Kap. A.2.1.

Nachdem die Verhältnisse der Elektronendichten bekannt sind, kann man eine effektive Wandverlustfläche für Partikel bzw. Ladung definieren. Für zylindrische Entladungsgefäßgeometrien mit ebener Rückwand und ebenem Extraktionsgitter, was typisch für RIT ist, berechnet sich diese Fläche zu

$$A_{\text{eff}} = 2\pi r_v^2 h_l + 2\pi r_v l h_r. \quad (3.2.5)$$

Die effektive Fläche ist Bestandteil einer Ladungserhaltungsgleichung [31, 65], gegeben durch

$$n_0 v_B A_{\text{eff}} = K_{iz} n_n n_0 \pi r_v^2 l_v. \quad (3.2.6)$$

Die linke Seite von Gl. (3.2.6) beschreibt den totalen Ladungsverlust an den Gefäßwänden, der durch ausreichend energiereiche Ionen, die die Randschicht mit der Bohm-Geschwindigkeit durchdringen, hervorgerufen wird (vgl. Kap. A.2.1). Die rechte Seite beschreibt im Gegensatz dazu die Generierung von Ladungsträgern durch Ionisation im zylindrischen Ionisatorvolumen $V = \pi r_v^2 l_v$. Um globale Berechnungen zu vereinfachen, wird im Folgenden nach Refs. 31, 65 mit der eindimensionalen, effektiven Plasmagröße d_{eff} gerechnet. Diese ergibt sich durch Division des Ionisatorvolumens durch die effektive Fläche aus Gl. (3.2.5) zu

$$d_{\text{eff}} = \frac{\pi r_v^2 l_v}{A_{\text{eff}}} = \frac{1}{2} \frac{r_v l_v}{r_v h_l + l_v h_r}. \quad (3.2.7)$$

Setzt man dies nun in Gl. (3.2.6) ein, kürzt n_0 und stellt um, erhält man

$$K_{\text{iz}}(T_e) n_n(T_e) = \frac{v_B(T_e)}{d_{\text{eff}}(T_e)}. \quad (3.2.8)$$

Alle Größen in dieser Gleichung sind Funktionen der Elektronentemperatur, was bis auf die Neutralgasdichte im vorangegangenen Teil schon erläutert wurde. Die Neutralgasdichte berechnet sich aus der Zustandsgleichung für ideale Gase aus Gl. (2.2.18) zu

$$n_n = \frac{p}{\frac{\chi}{1-\chi} e (T_e + T_n) + e T_n}. \quad (3.2.9)$$

Dabei ist χ der Ionisierungsgrad aus Gl. (2.2.1). Die Ionen haben weiterhin die gleiche Temperatur wie das neutrale Stützgas. Gleichung (3.2.8) kann aufgrund der Abhängigkeit von T_e mittels Newton-Verfahren iterativ gelöst werden. Allgemeine Informationen zum Newton-Verfahren sind u. a. in Ref. 9 nachzulesen. Die zu berechnende Gleichung für die Elektronentemperatur in der $(k+1)$ -ten Iteration lautet

$$T_{e,k+1} = T_{e,k} - \frac{K_{\text{iz}}(T_e) n_n(T_e) - \frac{v_B(T_e)}{d_{\text{eff}}(T_e)}}{\frac{\partial}{\partial T_e} \left[K_{\text{iz}}(T_e) n_n(T_e) - \frac{v_B(T_e)}{d_{\text{eff}}(T_e)} \right]}. \quad (3.2.10)$$

Die Auflösung des Differenzials im Nenner ist durch die explizite Abhängigkeit jeder Größe von T_e mit viel Schreibarbeit verbunden, bietet aber keinen weiteren Mehrwert. Aufgrund dessen wird auf eine umfassende Auflösung hier verzichtet. Das Differenzial wurde numerisch mit der Symbolic Math Toolbox als Teil von MATLAB berechnet, um Fehlern aufgrund der verschachtelten Abhängigkeiten (bspw. $h_r(T_{e,k})$ und $h_l(T_{e,k})$ in $d_{\text{eff}}(T_{e,k})$) vorzubeugen. Das Ladungserhaltungsmodell wird als innerste Schleife ausgeführt, wie in Abb. 3.1.1 gezeigt ist. Es wird iterativ ausgeführt, bis die Elektronentemperatur einen stabilen Wert erreicht, der der Relation $|T_{e,k+1} - T_{e,k}| < T_{e,k}/10^3$ genügt. Dabei kann der Konvergenzquotient, hier 1000, frei gewählt werden.

Mit der Elektronentemperatur ist es nun möglich, die Stoßprozesse bzw. -frequenzen im Plasma zu evaluieren. Dazu werden, wie bereits erwähnt, impulsübertragende elastische sowie anregende und ionisierende inelastische Stöße berücksichtigt. Da im numerischen Modell mit Ratenkoeffizienten gerechnet wird, müssen die energieabhängigen Stoßquerschnitte für die o. g. Prozesse, die in Datenbanken und Publikationen veröffentlicht sind, als erstes nach Gl. (2.2.45) über eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung gemittelt und mit der ebenso mittleren

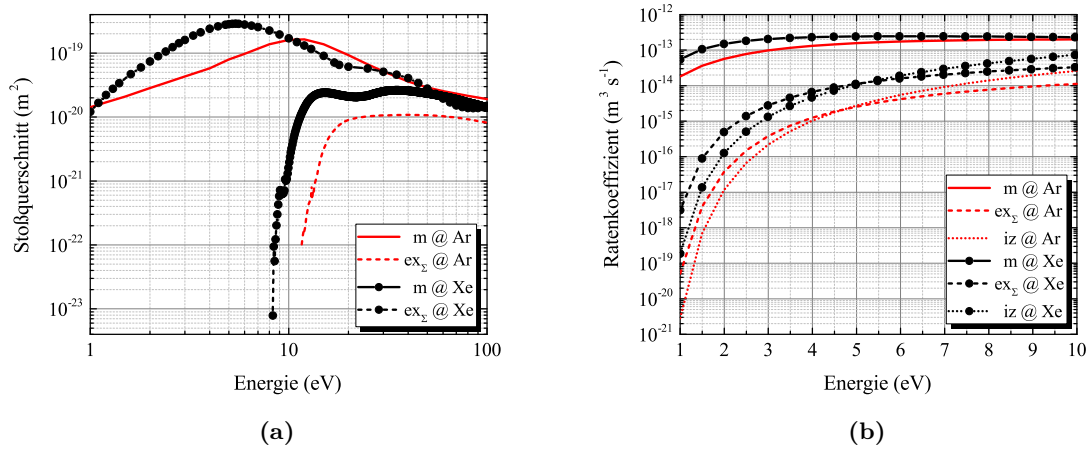


Abbildung 3.2.2: Teilbild (a) zeigt Stößquerschnitte von Argon und Xenon für elastische (durchgezogene Verläufe) sowie anregende (gestrichelte Verläufe) Elektron-Atom-Stöße aus Ref. 33. Aus diesen Daten werden über Integration über eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung (vgl. Gl. (3.2.11)) die zugehörigen Ratenkoeffizienten ermittelt, die in Teilbild (b) dargestellt sind. Der interessante Energiebereich für Niedertemperaturplasmen ist etwa 1 – 10 eV.

Elektronengeschwindigkeit multipliziert werden. Dazu wird die Integration über die Energieverteilungsfunktion aus Gl. (2.2.13), für Energien im Bereich 1 – 100 eV, durchgeführt. Sie ergibt

$$K(T_e) = \sqrt{\frac{4e}{\pi m_e T_e^3}} \int_{1 \text{ eV}}^{100 \text{ eV}} \sigma(\Phi) \Phi \exp\left(-\frac{\Phi}{T_e}\right) d\Phi, \quad (3.2.11)$$

wobei anstelle der Energie das entsprechende Potenzial gemäß $\Phi = U/e$ angegeben ist.

Die Stößquerschnitte für Argon und Xenon aus Ref. 33 sind in Abb. 3.2.2 (a) und die zugehörigen nach Gl. (3.2.11) berechneten Ratenkoeffizienten in Abb. 3.2.2 (b) dargestellt. Der Stößquerschnitt für Ionisation wird dort nicht gezeigt, da sich der zugehörige Ratenkoeffizient in dieser Arbeit nicht aus experimentellen Daten, sondern nach analytischen Zusammenhängen aus Gl. (2.2.48) berechnet. Der Stößquerschnitt für Anregung resultiert aus einer Summation aller in Ref. 33 hinterlegten Anregungsstufen, wobei als Energieverlust für jeden Stoß (unabhängig von der Anregungsstufe) die Energie des ersten angeregten Zustandes angenommen wird. Dies ist eine nach Ref. 34 gültige Näherung, da die Anregungspotenziale sehr eng zusammen liegen. Abbildungen 3.2.3 (a) und (b) zeigen alle in Ref. 33 hinterlegten Anregungsstößquerschnitte für Argon und Xenon, die zur Summation genutzt wurden.

Die Stoßfrequenz für impulsübertragende Stöße kann nun durch Umstellen von Gl. (2.2.44) berechnet werden und lautet

$$\nu_m = n_n K_m. \quad (3.2.12)$$

Neben impulsübertragenden Stößen werden in dieser Arbeit weiterhin Stoßprozesse zwischen Elektronen und Ionen berücksichtigt. Die Stoßfrequenz dieses Prozesses approximiert sich nach

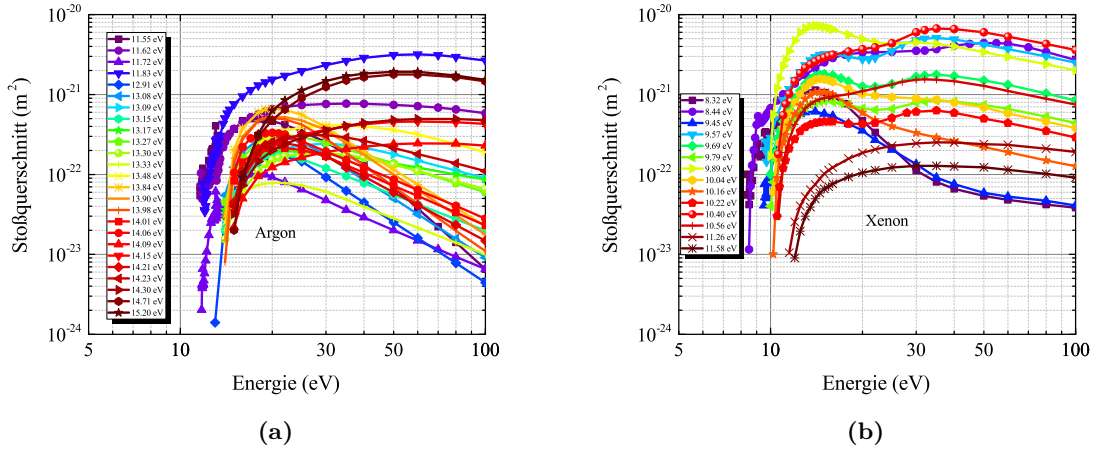


Abbildung 3.2.3: Stoßquerschnitte für anregende Elektron-Atom-Stöße aus Ref. 33 für Argon (a) und Xenon (b).

einer empirischen Gleichung aus Ref. 40 zu

$$\nu_{ei} \approx 2.9 \times 10^{-12} \frac{\text{m}^3}{\text{eV}^{-\frac{3}{2}}} \frac{n_e \ln \Lambda}{T_e^{\frac{3}{2}}} \text{s}^{-1}, \quad (3.2.13)$$

dabei bezeichnet $\Lambda = 23 - 1/2 \times \ln(10^{-6} \text{m}^3 \text{eV}^3 n_e / T_e^3)$ den Coulomb-Logarithmus [40].

Eine weitere Art von Stößen ist durch stochastisches Aufheizen des Plasmas implementiert. Dabei handelt es sich nicht direkt um Stöße zwischen Partikeln, sondern um den Energiegewinn, den Elektronen erfahren, welche einer normal zum elektrischen Feldvektor gerichteten Bewegung folgen. Da das elektrische Feld durch den Skin-Effekt nur auf einer begrenzten Fläche induziert wird, kann ein Elektron, welches sich kürzer als eine halbe Periodendauer des elektrischen Feldes in diesem Gebiet aufhält, diesem Feld Energie entziehen und dadurch aufnehmen. Reicht die Energie des Elektrons nicht aus, um das negative Randschichtpotenzial zu überwinden, wird es zurück ins Plasma reflektiert. Abstrakt formuliert kollidiert das Elektron also mit dem elektrischen Feld. Die zugehörige Stoßfrequenz wird im weiteren Verlauf als ν_{stoc} bezeichnet.

Stochastische Heizung ist vor allem in Arbeitspunkten niedriger Drücke mit $\nu_m/\omega < 1$ ausschlaggebend, wobei ω die Kreisfrequenz des eingekoppelten elektromagnetischen Feldes beschreibt. Die Ungleichung kann aus dem Drude-Modell in Gl. (2.2.60) abgeleitet werden, wie in Ref. 65 gezeigt ist. Jenseits dieses Bereiches überwiegen impulsübertragende Stöße [15, 65]. Detaillierte Informationen und Studien zur stochastischen Heizung sind in Refs. 104 und 113 gegeben.

Die stochastische Kollisionsfrequenz berechnet sich zu

$$\nu_{\text{stoc}} = \frac{\bar{v}_e}{4\delta_{\text{stoc}}}. \quad (3.2.14)$$

Dabei bezeichnet $\delta_{\text{stoc}} \approx (c_0^2 \bar{v}_e / \omega \omega_{pe}^2)^{1/3}$ die anormale Skin-Eindringtiefe [65]. Die effektive Stoßfrequenz berechnet sich nach Ref. 15 aus der Addition der drei Teilprozesse gemäß

$$\nu_{m,\text{eff}} = \nu_m + \nu_{ei} + \nu_{\text{stoc}}. \quad (3.2.15)$$

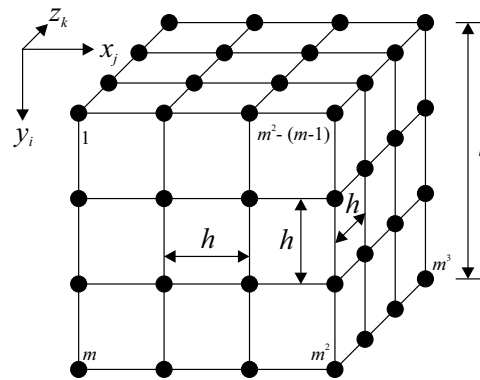


Abbildung 3.3.1: Kubisches Simulationsgebiet für das auf der FDM basierende elektromagnetische Modell.

Mit Kenntnis der effektiven Stoßfrequenz kann nun die Plasma-Leitfähigkeit mit Hilfe des Drude-Modells aus Gl. (2.2.60) berechnet werden. Diese Information wird als nächstes an das elektromagnetische Modell weitergegeben, welches die Wechselwirkung des Plasmas mit den beaufschlagten Felder berechnet.

3.3 Elektromagnetisches Modell

Wie in Abb. 3.1.1 gezeigt, befindet sich das elektromagnetische Modell zwischen erster und zweiter Iterationsschleife. Das bedeutet, dass es für jede berechnete Plasma-Leitfähigkeit aufgerufen wird, um die eingekoppelten Felder und deren Wechselwirkung mit dem Plasma zu evaluieren. Deshalb muss darauf geachtet werden, dass das elektromagnetische Modell möglichst kurze Verarbeitungszeiten bei genügend großer Genauigkeit mit sich bringt. Da dieses Modell auf der dreidimensionalen Finite-Differenzen-Methode beruht, ist es aufgrund der Anforderungen an dessen Schnelligkeit sehr wichtig, dass der Lösungsalgorithmus effizient programmiert wird, da ansonsten sehr große Verzugszeiten entstehen würden.

Die in diesem Abschnitt gezeigte numerische Lösung der magnetischen Diffusionsgleichung aus Gl. (2.1.40) basiert auf den Theorien aus Kap. 2.1.4. Da der hier vorgestellte Solver dreidimensional arbeitet, müssen einige Anpassungen an den Formalismen aus Kap. 2.1.4 vorgenommen sowie besonderes Augenmerk auf die Randbedingungen gelegt werden. Am generellen Schema der FDM ändert sich jedoch nichts.

Abbildung 3.3.1 zeigt schematisch das dreidimensionale, kubische Simulationsgebiet mit Kantenlänge l . Das Gebiet ist mit m^3 äquidistanten Stützstellen versehen, um den effizienten SOR-Algorithmus zum Lösen der Systemmatrix nutzen zu können (vgl. Kap. 2.1.4). Daraus ergibt sich eine Schrittweite von $h = l / (m - 1)$ für jede Dimension. Im Vergleich zum zweidimensionalen Fall (s. Abb. 2.1.5) sind hier mehr Randbedingungen zu beachten, da die gesamte Oberfläche des Würfels (abzüglich der Punkte auf den Kanten) das Simulationsgebiet umschließt. Bei m Stützstellen pro Dimension erhält man so insgesamt $6m$ effektive Randbedingungen. Da, wie bereits im zweidimensionalen Beispiel in Kap. 2.1.4 erwähnt, die Eckpunkte nicht gefiltert werden, manifestiert sich dies hier in überflüssigen Kantenpunkten, die mit in die Systemmatrix aufgenommen werden, ohne der Lösung des Problems dienlich zu sein. Dennoch ist der Aufwand, diese Punkte auszufiltern, größer als der Verlust an Speicherplatz, der durch sie verursacht wird, weshalb an diesem Vorgehen festgehalten wird.

Die entstehende Systemmatrix und somit der gesamte Rechenaufwand ist nun nicht mehr proportional zu m^2 , wie im Zweidimensionalen, sondern zu m^3 , was sich deutlich in der Rechenzeit niederschlägt. Des Weiteren kann man Abb. 3.3.1 entnehmen, dass sich das Nummerierungsschema bezogen auf den zweidimensionalen Fall insofern geändert hat, als dass die Indizierung der Matrix nun an der oberen linken vorderen Ecke beginnt. Dies ist ein wichtiger Punkt, denn dadurch ändert sich auch die Ablage der zugehörigen Daten im Programmspeicher, was in Ref. 17 dargestellt ist. Um bei der aktuellen Speicherstruktur Datenpunkte anzusprechen, zum Beispiel in einer Schleife, wurde ein Adressierungsschema für die Indizes idx in den Matrizen, die das kubische Simulationsgebiet beschreiben, gefunden, das durch

$$\text{idx} = (k - 1)m^2 + (j - 1)m + i \quad (3.3.1)$$

gegeben ist. Dabei steht k für den Index in z -, j für jenen in x - und i für den Index in y -Richtung des Simulationsgebietes. Diese direkte Adressierung mittels Schleife gilt es allerdings zu vermeiden, sofern möglich. Es ist sehr viel effizienter, alle Operationen vektorisiert über Matrixoperationen vorzunehmen.

Die magnetische Diffusionsgleichung, die die Einkopplung elektromagnetischer Felder in Form des in das Plasma induzierten Vektorpotenzials $\tilde{\mathbf{A}}_p$ beschreibt, erhält man, indem man die Quellstromdichte sowie die Leitfähigkeit aus Gl. (2.1.40) mit der die Spule beaufschlagenden Stromdichte $\tilde{\mathbf{J}}_c$ und der berechneten Plasma-Leitfähigkeit κ_p aus Gl. (2.2.60) ersetzt. Sie lautet

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}}_p - i\omega\kappa_p\mu_0\tilde{\mathbf{A}}_p = -\mu_0\tilde{\mathbf{J}}_c. \quad (3.3.2)$$

Um Gl. (3.3.2) lösen zu können, muss sie über einen für dreidimensionale Gitternetze geeigneten Stern in eine Differenzgleichung transformiert werden. Die einfachste Variante ist der 7-Punkte-Stern, der eine um eine Dimension erweiterte Version des 5-Punkte-Sterns aus Abb. 2.1.6 (a) darstellt. Der zur Lösung des dreidimensionalen Laplace-Operators aus Gl. (3.3.2) eingesetzte 7-Punkte-Stern ist in Abb. 3.3.2 dargestellt und lautet

$$\nabla^2 f \approx \frac{1}{h^2} \left(-6f + f^{j-1} + f^{j+1} + f^{i-1} + f^{i+1} + f^{k-1} + f^{k+1} \right), \quad (3.3.3)$$

wobei $f = f^{j,i,k} = f(j, i, k)$ und $f^{j-1} = f^{j-1,i,k} = f(j-1, i, k)$ bezeichnet. Auf eine explizite Herleitung von Gl. (3.3.3) wird an dieser Stelle verzichtet, da sie analog zu jener für den 5-Punkte-Stern aus Kap. 2.1.4, jedoch erweitert um eine Dimension, durchgeführt werden kann.

Mit der Vorschrift des 7-Punkte-Sterns zur Berechnung von ∇^2 in dreidimensionalen kartesischen Koordinaten aus Gl. (3.3.3) und einer kleinen, durch die Transformation der Diffusionsgleichung in den Frequenzbereich resultierenden Modifikation, ergibt sich die numerische Repräsentation von Gl. (3.3.2) zu

$$\tilde{\mathbf{A}}_p^{k-1} + \tilde{\mathbf{A}}_p^{k+1} + \tilde{\mathbf{A}}_p^{i-1} + \tilde{\mathbf{A}}_p^{i+1} + \tilde{\mathbf{A}}_p^{j-1} + \tilde{\mathbf{A}}_p^{j+1} - \left(6 + i\omega h^2 \mu_0 \kappa_p \right) \tilde{\mathbf{A}}_p = -h^2 \mu_0 \tilde{\mathbf{J}}_c. \quad (3.3.4)$$

Die erwähnte Modifikation besteht aus der Aufnahme des plasmaspezifischen Terms $i\omega h^2 \mu_0 \kappa_p$ in die durch den 7-Punkte-Stern vorgegebene Differenzgleichung. An Gl. (3.3.4) kann man erkennen, dass diese Gleichung der vektoriellen Poisson-Gleichung aus Gl. (2.1.32) entspricht, wenn die Leitfähigkeit zu null wird. Weiterhin kann man erkennen, dass die sich ergebende Gleichung für das Vektorpotenzial $\tilde{\mathbf{A}}_p = \tilde{A}_{p,x} \mathbf{e}_x + \tilde{A}_{p,y} \mathbf{e}_y + \tilde{A}_{p,z} \mathbf{e}_z$ aus drei Teilen besteht, die separat gelöst werden müssen. Die zu lösenden Systemmatrizen $(\mathbf{A})_x$, $(\mathbf{A})_y$ und $(\mathbf{A})_z$

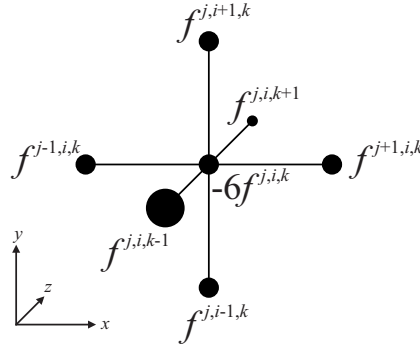


Abbildung 3.3.2: 7-Punkte-Stern zur numerischen Lösung des dreidimensionalen Laplace-Operators aus Gl. (3.3.2).

stellen jeweils lineare Gleichungssysteme dar, die aufgrund der Orthogonalität des Koordinatensystems unabhängig voneinander gelöst werden können. Dies begünstigt eine parallele Verarbeitung mit Multi-Core-Methoden. Die Systemmatrizen haben jeweils eine Ordnung von $\mathcal{O}\{(\mathbf{A})\} = m^3 \times m^3$, was bedeutet, dass sie m^3 Zeilen und m^3 Spalten besitzen, um jeden Punkt im Simulationsgebiet abzudecken (vgl. Gl. (2.1.80) für den zweidimensionalen Laplace-Operator).

Die drei zu lösenden Differenzgleichungen bilden die zugehörigen Systemmatrizen und lauten

$$\tilde{A}_{p,x}^{k-1} + \tilde{A}_{p,x}^{k+1} + \tilde{A}_{p,x}^{i-1} + \tilde{A}_{p,x}^{i+1} + \tilde{A}_{p,x}^{j-1} + \tilde{A}_{p,x}^{j+1} - (6 + i\omega h^2 \mu_0 \kappa_p) \tilde{A}_{p,x} = -h^2 \mu_0 \tilde{J}_{c,x} \quad (3.3.5)$$

$$\tilde{A}_{p,y}^{k-1} + \tilde{A}_{p,y}^{k+1} + \tilde{A}_{p,y}^{i-1} + \tilde{A}_{p,y}^{i+1} + \tilde{A}_{p,y}^{j-1} + \tilde{A}_{p,y}^{j+1} - (6 + i\omega h^2 \mu_0 \kappa_p) \tilde{A}_{p,y} = -h^2 \mu_0 \tilde{J}_{c,y} \quad (3.3.6)$$

$$\tilde{A}_{p,z}^{k-1} + \tilde{A}_{p,z}^{k+1} + \tilde{A}_{p,z}^{i-1} + \tilde{A}_{p,z}^{i+1} + \tilde{A}_{p,z}^{j-1} + \tilde{A}_{p,z}^{j+1} - (6 + i\omega h^2 \mu_0 \kappa_p) \tilde{A}_{p,z} = -h^2 \mu_0 \tilde{J}_{c,z}. \quad (3.3.7)$$

Die Plasma-Leitfähigkeit ist aufgrund des globalen Ladungserhaltungsmodells im Plasmabereich homogen. Dieser wird von der Geometrie des Entladungsgefäßes, um das die Induktionsspule gewickelt ist, begrenzt. Das induzierte Vektorpotenzial kann auch im Außenbereich dargestellt werden, wo $\kappa_p = 0$ gilt. In diesen externen Bereichen werden statt Gl. (3.3.5) – Gl. (3.3.7) Differenzgleichung für die vektorielle Poisson-Gleichung

$$\nabla^2 \tilde{\mathbf{A}}_{\text{ex}} = -\mu_0 \tilde{\mathbf{J}}_c \quad (3.3.8)$$

gelöst, die keinen materialspezifischen Term aufweisen. Es wird in den Simulationen davon ausgegangen, dass sich das Triebwerk im Vakuum befindet. Die sich ergebenden Differenzgleichungen für die Bereiche außerhalb des Plasmas lauten

$$\tilde{A}_{\text{ex},x}^{k-1} + \tilde{A}_{\text{ex},x}^{k+1} + \tilde{A}_{\text{ex},x}^{i-1} + \tilde{A}_{\text{ex},x}^{i+1} + \tilde{A}_{\text{ex},x}^{j-1} + \tilde{A}_{\text{ex},x}^{j+1} - 6\tilde{A}_{\text{ex},x} = -h^2 \mu_0 \tilde{J}_{c,x} \quad (3.3.9)$$

$$\tilde{A}_{\text{ex},y}^{k-1} + \tilde{A}_{\text{ex},y}^{k+1} + \tilde{A}_{\text{ex},y}^{i-1} + \tilde{A}_{\text{ex},y}^{i+1} + \tilde{A}_{\text{ex},y}^{j-1} + \tilde{A}_{\text{ex},y}^{j+1} - 6\tilde{A}_{\text{ex},y} = -h^2 \mu_0 \tilde{J}_{c,y} \quad (3.3.10)$$

$$\tilde{A}_{\text{ex},z}^{k-1} + \tilde{A}_{\text{ex},z}^{k+1} + \tilde{A}_{\text{ex},z}^{i-1} + \tilde{A}_{\text{ex},z}^{i+1} + \tilde{A}_{\text{ex},z}^{j-1} + \tilde{A}_{\text{ex},z}^{j+1} - 6\tilde{A}_{\text{ex},z} = -h^2 \mu_0 \tilde{J}_{c,z}. \quad (3.3.11)$$

Abbildung 3.3.3 zeigt das Flussdiagramm des elektromagnetischen Modells, das die Diffusionsgleichung (oder die vektorielle Poisson-Gleichung im Außenbereich) im Frequenzbereich auf einem kubischen, äquidistanten Gitternetz löst.

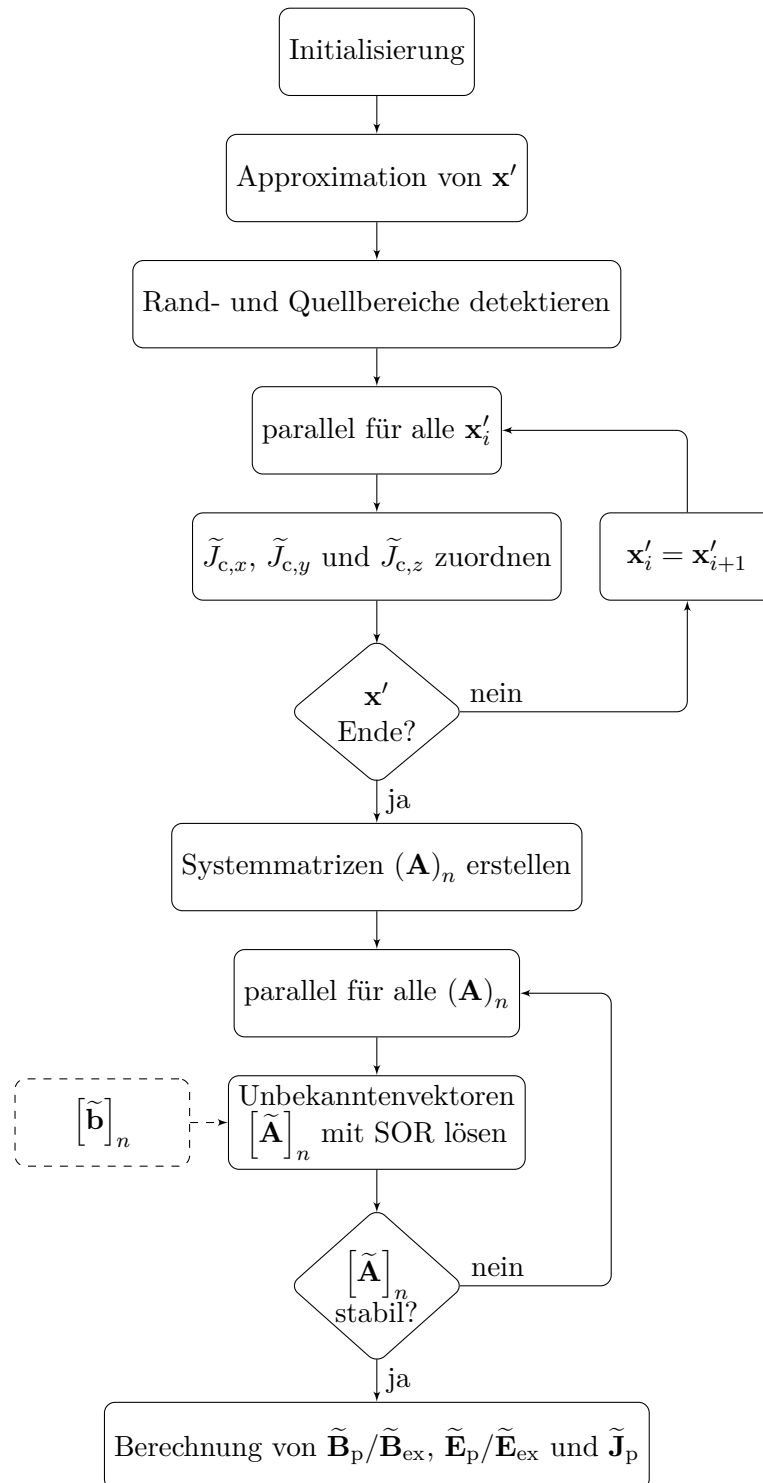


Abbildung 3.3.3: Flussdiagramm des auf der FDM basierenden elektromagnetischen Modells zur Lösung der Diffusions- und Vektor-Poisson-Gleichung im kartesischen Raum. \mathbf{x}' beschreibt den Vektor der Spule und $[\tilde{\mathbf{b}}]_n$ den Vektor der Randbedingungen der jeweiligen Feldkomponente.

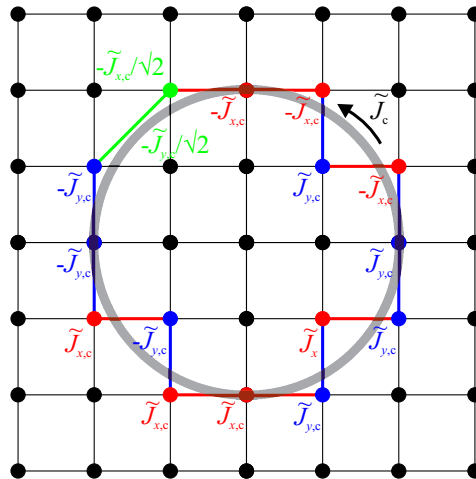


Abbildung 3.3.4: Mapping der Quellstromterme auf das Simulationsgitter (hier stellvertretend in 2D). Das Mapping wird automatisiert über die kleinsten Abstände des Spulenpfades von den jeweiligen Gitterpunkten vorgenommen. Wie im Bild dargestellt, kann es vorkommen, dass die gemappten Punkte stufenförmig oder diagonal verbunden werden. Um jedem Punkt den richtigen Betrag der Stromdichte zuzuordnen, muss zwischen diesen beiden Arten unterschieden werden. Im dreidimensionalen Fall, bei diagonalen Verbindungen über drei Raumrichtungen, würde jede Komponente einen Betrag von $\tilde{J}_{x,c} = \tilde{J}_{y,c} = \tilde{J}_{z,c} = \tilde{J}_c/\sqrt{3}$ aufweisen.

Ein wichtiger Punkt bei der hier vorgestellten FDM-basierten Lösung der elektromagnetischen Felder ist, dass die definierte Spulengeometrie \mathbf{x}' auf das bestehende Gitternetz \mathbf{x} approximiert werden muss, da die Punkte der Spule, bzw. des Strompfades, mit den Quelltermen des linearen Gleichungssystems korrespondieren. Dabei wird die komplexe Amplitude der Stromdichte $|\tilde{\mathbf{J}}_c| = \tilde{J}_c$ hier als konstant entlang der Spule angenommen (vgl. Kap. 2.1.2). Für Bereiche entlang des Strompfades, in denen lediglich die x -Komponente existiert, bedeutet dies $\tilde{J}_c = \tilde{J}_{c,x}$. Das Vorzeichen des Quellterms ist bei dieser Konvention noch zu beachten. Das prinzipielle Vorgehen des Mappings der Quellterme auf das Simulationsgitter ist anhand einer kreisförmigen Leiterschleife in 2D in Abb. 3.3.4 dargestellt. An diesem Vorgehen ändert sich durch Hinzufügen einer dritten Dimension nichts, allerdings steigt der Aufwand der Zuordnung.

In der Abbildung erkennt man zum einen die Approximation der Spule auf die diskreten Gitterknoten und zum anderen die dadurch entstehende Klassifizierung der Stromdichtekomponenten. Alle in rot dargestellten Punkte sind Knoten im Simulationsgebiet, in denen nur die x -Komponente der Stromdichte wirksam ist. Das Vorzeichen kann im zweidimensionalen Fall durch die Nummer des jeweiligen Knotens, die nach Gl. (3.3.1) bekannt ist, herausgefunden werden. Für $\tilde{J}_{c,x}$ gilt, dass der Betrag in der oberen Hälfte des Simulationsgebietes negativ und in der unteren Hälfte positiv ist. Für $\tilde{J}_{c,y}$ muss das Simulationsgebiet entsprechend an der vertikalen Achse aufgeteilt werden. Diese Annahmen gelten allerdings nur dann, wenn die Approximation mittels Treppenstufen geschieht. Da die Approximation auf der Berechnung der kleinsten Abstände zwischen idealer Spule und Gitterknoten beruht, kann auch ein Fall existieren, der die Gitterknoten diagonal verbindet, wie es in Abb. 3.3.4 in grün verdeutlicht ist. In diesem Fall existieren in diesem Knotenpunkt zwei Stromdichtekomponenten. Allerdings ist der Betrag der Stromdichte immer überall gleich \tilde{J}_c , so dass für die beiden Komponenten $\tilde{J}_{c,x} = \tilde{J}_{c,y} = \tilde{J}_c/\sqrt{2}$ gilt. Im dreidimensionalen Fall ist die Funktionalität die gleiche. Aller-

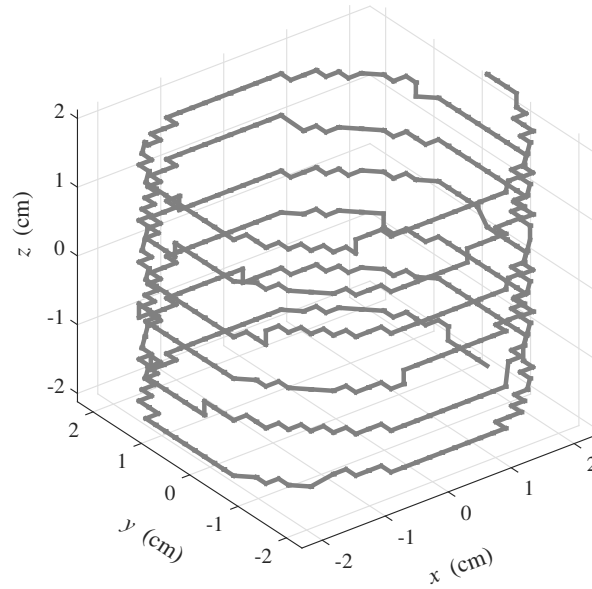


Abbildung 3.3.5: Approximation der RIM-4 Spule auf ein 3D Gitternetz mit $m = 100$ und Würfelkantenlänge von 30 cm (gezoomte Darstellung).

dings kommen noch einige Fälle durch den dritten Freiheitsgrad hinzu, die separat abgefangen werden müssen. Als Beispiel könnten in einem Knotenpunkt alle drei Komponenten vorhanden sein. Dann würden sich analog zu o. g. Berechnung Werte von $\tilde{J}_{c,x} = \tilde{J}_{c,y} = \tilde{J}_{c,z} = \tilde{J}_c/\sqrt{3}$ ergeben. Die Kategorisierung des Spulenpfades ist der zeitaufwändigste Teil des Algorithmus, was nicht zuletzt an der iterativen Implementierung liegt (die aktuell parallelisiert auf bis zu 32 Kernen durchgeführt wird).

Als Beispiel für die Approximation der Spulengeometrie des RIM-4 auf ein Simulationsgitter mit $m = 100$ in 3D sei auf Abb. 3.3.5 verwiesen. Dabei beträgt die Würfelkantenlänge des gesamten Simulationsgebietes 30 cm. In der Abbildung ist nur der Bereich der Spule dargestellt, um die Diskretisierung besser zu visualisieren. Je mehr diskrete Punkte m pro Dimension verwendet werden, desto besser wird die Approximation der Spulengeometrie, aber desto größer wird auch die Systemmatrix und somit die Simulationsdauer.

Als Eingangsgröße dient der Spulenstrom \tilde{I}_c , wie in Abb. 3.1.1 dargestellt ist. Um den Strom in die Systemmatrizen aufzunehmen, wird die resultierende Stromdichte abhängig vom Drahradius der Spule r_w nach

$$\tilde{J}_c = \sqrt{\operatorname{Re}^2 \left\{ \tilde{J}_{c,x} + \tilde{J}_{c,y} + \tilde{J}_{c,z} \right\}} + i \sqrt{\operatorname{Im}^2 \left\{ \tilde{J}_{c,x} + \tilde{J}_{c,y} + \tilde{J}_{c,z} \right\}} = \frac{\tilde{I}_c}{\pi r_w^2} \quad (3.3.12)$$

berechnet. Es werden in dieser Arbeit ausschließlich zylindrische Drähte angenommen.

Um die Differenzgleichungen nach den Komponenten des Vektorpotenzials auflösen zu können, müssen genügend Randbedingungen (oder Quellterme) vorhanden sein, um lineare

Gleichungssysteme gemäß

$$(\mathbf{A})_x [\tilde{\mathbf{A}}]_x = [\tilde{\mathbf{b}}]_x \quad (3.3.13)$$

$$(\mathbf{A})_y [\tilde{\mathbf{A}}]_y = [\tilde{\mathbf{b}}]_y \quad (3.3.14)$$

$$(\mathbf{A})_z [\tilde{\mathbf{A}}]_z = [\tilde{\mathbf{b}}]_z \quad (3.3.15)$$

zu erhalten. Dabei beinhalten die Spaltenvektoren $[\tilde{\mathbf{A}}]_n$ die zu lösenden unbekanntes (komplexen) Vektorpotenzialwerte der jeweiligen Raumkomponente und $[\tilde{\mathbf{b}}]_n$ die entsprechenden Randbedingungen und Quellterme. Diese Vektoren beinhalten jeweils m^3 Werte, damit die linearen Gleichungssysteme nicht unterbestimmt sind. Aktuell sind homogene Dirichlet-Randbedingungen hinterlegt, die das Vektorpotenzial an den Simulationsgrenzen zu null abklingen lassen. Dies setzt zwingend voraus, dass das Simulationsgebiet groß genug ist, um dem physikalischen Verlauf des Feldes zu entsprechen. Um dies zu gewährleisten, ist der FDM-basierte Solver auf die dreidimensionale Lösung der vektoriellen Poisson-Gleichung für die Geometrie des RIM-4 eingestellt, was in Kap. 4.1.3 genauer erläutert wird.

Die Lösung der Gleichungssysteme kann aufgrund der Größen der Systemmatrizen nicht mittels Inversion erfolgen. Die iterative SOR-Methode wird stattdessen genutzt, um die Gleichungssysteme zu berechnen. Dazu wird eine Funktion aus der MATLAB Central File Exchange Datenbank² genutzt. Auf den Algorithmus wird hier nicht näher eingegangen, er kann jedoch frei bezogen werden [88]. Im Initialisierungsteil des elektromagnetischen Modells wird der optimale Relaxationsparameter nach Gl. (2.1.84) abhängig von der Diskretisierungsgüte des Simulationsgebietes vor jedem Lösungsvorgang erneut berechnet, um eine optionale Methode adaptiver Netzverfeinerung offen zu halten. Abbildung 3.3.6 zeigt den Einfluss des Relaxationsparameters auf die zur Lösung der linearen Gleichungssysteme benötigten Dauer für Systemmatrizen der Ordnung $\mathcal{O}\{(\mathbf{A})\} = 100^3 \times 100^3$ mit einer Toleranz von 10^{-6} . Das Minimum liegt nahe des über Gl. (2.1.84) berechneten optimalen Relaxationsparameters $\omega_{\text{opt}} \approx 1.94$, was als Verifikation dieser Gleichung verstanden werden kann.

Nach der Konvergenz des SOR-Verfahrens steht eine stabile Lösung des örtlich variierenden Vektorpotenzials zur Verfügung. Nach Gl. (2.1.12) und Gl. (2.1.57) lassen sich damit die magnetische Induktion $\tilde{\mathbf{B}}_p$ innerhalb und $\tilde{\mathbf{B}}_{\text{ex}}$ außerhalb des Plasmas sowie das induzierte elektrische Feld $\tilde{\mathbf{E}}_p$ innerhalb und $\tilde{\mathbf{E}}_{\text{ex}}$ außerhalb des Plasmas berechnen. Die induzierte Plasmastromdichte berechnet sich nach Gl. (2.2.57) nun zu

$$\tilde{\mathbf{J}}_p = \kappa_p \tilde{\mathbf{E}}_p. \quad (3.3.16)$$

3.4 Energieerhaltungsmodell

Dieses Modell evaluiert die vom Plasma absorbierte, den elektromagnetischen Feldern entzogene, Leistung P_{abs} aus Gl. (2.2.63) und setzt sie mit der Leistung in Relation, die aufgrund der Stoßprozesse im Plasma und Wandverlusten durch Elektronen umgesetzt wird (P_l). Dazu dient eine Energieerhaltungsgleichung aus Ref. 81, die die Terme aus Gl. (2.2.49) wieder aufgreift.

²Bei der Datenbank handelt es sich um eine Plattform zum Austausch von MATLAB-Skripten, die von MathWorks unterhalten wird.

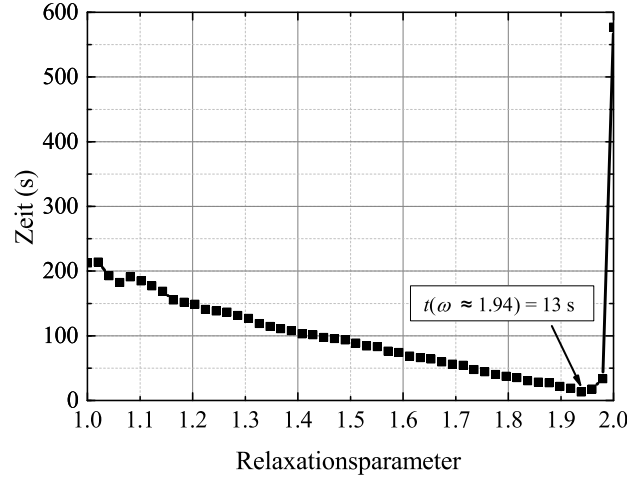


Abbildung 3.3.6: Bei korrekt gewähltem Relaxationsparameter reduziert sich die Dauer zur Lösung der linearen Gleichungssysteme drastisch. Der optimale Relaxationsparameter kann mit Gl. (2.1.84) für kubische, äquidistante Gitternetze berechnet werden [118].

Diese Gleichung wurde um die Wandverluste erweitert. Die Verlustleistung³ berechnet sich zu

$$P_1 = \left(n_e \nu_{m,\text{eff}} \frac{3m_e}{m_n} e (T_e - T_n) + \dot{n}_e \left(1 + \frac{\Phi_{\text{ex}} K_{\text{ex}\Sigma}}{\Phi_{\text{iz}} K_{\text{iz}}} \right) e \Phi_{\text{iz}} \right) V_{\text{eff}} + (2eT_e + eV_s) \Gamma_{e,w} A_w. \quad (3.4.1)$$

Das effektive Plasmavolumen berechnet sich dabei aus den in Gl. (3.2.5) und Gl. (3.2.7) eingeführten Größen $V_{\text{eff}} = A_{\text{eff}} d_{\text{eff}}$. Der erste Term der rechten Seite von Gl. (3.4.1) beschreibt die an elastische Kollisionen verlorene Leistung (mit den in Kap. 3.2 definierten Stoßprozessen), wohingegen der zweite Term die inelastischen Prozesse Anregung und Ionisation beschreibt. Wie bereits erwähnt, wird trotz des effektiven Ratenkoeffizienten für Anregung (vgl. Kap. 3.2) lediglich die erste Anregungsenergie zur Berechnung der Verlustleistung genutzt, was eine nach Ref. 34 gültige Näherung beschreibt. Der letzte Summand beschreibt den Leistungsverlust durch auf die Wände mit der Fläche A_w auftreffende Elektronen. Zum einen ist die mittlere Energie, die pro Elektron auf die Wand übertragen wird $2eT_e$ [65]. Auf dem Weg zur Wand müssen die Elektronen das Randschichtpotenzial überwinden, was sie weiterhin Energie der Größe eV_s kostet, wobei V_s für die Spannung über der Randschicht⁴ steht (s. Kap. 3.5.1). Ersetzt man in obiger Gleichung die Ionisationsrate \dot{n}_e mit der Ionisationsfrequenz und differenziert zwischen der zylindrischen Entladungsgefäßwand (Index r) und den beiden ebenen Wänden (Index l), wovon eine das Abschirmgitter darstellt, erhält man

$$P_1 = \left(n_e \nu_{m,\text{eff}} \frac{3m_e}{m_n} e (T_e - T_n) + n_e \nu_{\text{iz}} \left(1 + \frac{\Phi_{\text{ex}} K_{\text{ex}\Sigma}}{\Phi_{\text{iz}} K_{\text{iz}}} \right) e \Phi_{\text{iz}} \right) V_{\text{eff}} + (2eT_e + eV_s) (\Gamma_{e,w,r} A_{w,r} + \Gamma_{e,w,l} A_{w,l}). \quad (3.4.2)$$

Die Elektronenflüsse auf die Wände $\gamma_{e,w} = \Gamma_{e,w} A_w$ werden über eine modifizierte Version von Gl. (2.2.17) berechnet, bei welcher die Dichtefaktoren (h -Faktoren) aus Kap. 3.2 mit

³engl.: power loss

⁴engl.: sheath

einfließen, um nur die an der Randschichtgrenze befindlichen Elektronen in die Leistungsbilanz zu integrieren. Sie berechnen sich zu

$$\gamma_{e,w} = \frac{1}{4} n_e \bar{v}_e h \exp\left(\frac{\Delta\Phi}{T_e}\right) A_w. \quad (3.4.3)$$

Die Energieerhaltungsgleichung ist erfüllt, wenn $P_{\text{abs}} = P_1$ gilt. Da diese Erhaltungsgleichung iterativ gelöst wird, folgt, dass die Elektronendichte bei Erfüllung der Gleichung stabil ist. Aufgelöst nach der Elektronendichte lautet die Energieerhaltungsgleichung somit

$$\begin{aligned} n_e = P_{\text{abs}} \left[V_{\text{eff}} \left(\nu_{m,\text{eff}} \frac{3m_e}{m_n} e (T_e - T_n) + \nu_{iz} \left(1 + \frac{\Phi_{\text{ex}} K_{\text{ex}\Sigma}}{\Phi_{iz} K_{iz}} \right) e \Phi_{iz} \right) + \right. \\ \left. + (2eT_e + eV_s) \frac{1}{4} \bar{v}_e \exp\left(-\frac{V_s}{T_e}\right) (h_r A_{w,r} + h_l A_{w,l}) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

Alle anderen in dieser Gleichung vorkommenden Größen sind Funktionen der Elektronentemperatur, die jeweils iterativ für jede Iterationsstufe $P_{\text{abs},k}$ in einer untergeordneten Schleifenstruktur berechnet wird, wie in Abb. 3.1.1 dargestellt.

Die absorbierte Leistung nach Gl. (2.2.63) wird im kartesischen Raum mittels numerischer Trapezregel gemäß

$$\begin{aligned} P_{\text{abs}} \approx \frac{h}{4} \left(\sum_{j=1}^{m^3-1} \text{Re} \left\{ \tilde{J}_{p,x}^*(j) \tilde{E}_{p,x}(j) + \tilde{J}_{p,x}^*(j+1) \tilde{E}_{p,x}(j+1) \right\} + \right. \\ \left. + \sum_{i=1}^{m^3-1} \text{Re} \left\{ \tilde{J}_{p,y}^*(i) \tilde{E}_{p,y}(i) + \tilde{J}_{p,y}^*(i+1) \tilde{E}_{p,y}(i+1) \right\} + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^{m^3-1} \text{Re} \left\{ \tilde{J}_{p,z}^*(k) \tilde{E}_{p,z}(k) + \tilde{J}_{p,z}^*(k+1) \tilde{E}_{p,z}(k+1) \right\} \right) \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

approximiert, wobei h hier die Schrittweite beschreibt.

Die Konvergenz der iterativen Berechnung von Gl. (3.4.4) wird über den Ionsierungsgrad aus Gl. (2.2.1) ermittelt. Ändert dieser sich zwischen zwei Iterationsschritten nur noch innerhalb des Toleranzbandes $|\chi_{k+1} - \chi_k| < \chi_k/10^2$, wobei der Quotient frei gewählt werden kann, gilt die Schleife als konvergiert und das Extraktionsmodell wird aufgerufen (vgl. Abb. 3.1.1).

Parallel zur über das Plasmavolumen integrierten globalen Leistung kann die örtlich aufgelöste Leistungsdichte $p_p(\mathbf{x}) = \text{Re} \left\{ \tilde{\mathbf{J}}_p^* \tilde{\mathbf{E}}_p \right\}$ genutzt werden, um Bereiche eingekoppelter Energie visuell darzustellen, wie in Kap. 5 gezeigt wird.

3.5 Ionen-Extraktionsmodell

Das Extraktionsmodell basiert auf der Annahme einer homogenen Randschicht am Abschirmgitter, wie in Abb. 2.3.4 (a) dargestellt. Die extrahierbare Stromdichte kann mittels Gl. (2.3.9),

$$J_i = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_i}} \frac{V_{\text{acc}}^{\frac{3}{2}}}{l_g^2},$$

berechnet werden. Dabei setzt dieses klassische Child-Langmuir Raumladungsgesetz voraus, dass der Ionenstrom zum Abschirmgitter hin im Plasmarandbereich, also entlang der Länge

l_s (vgl. Abb. 2.3.4 (a)), durch die Spannung zwischen Plasma und Abschirmgitter V_s raumladungsbegrenzt ist [10, 89, 90]. Zu einer Raumladungsbegrenzung kann es nur kommen, wenn die Plasmaquelle ergiebig genug ist. Dies ist vor allem bei den Plasmen in RIT nicht stets der Fall, da man mit kleinen Ionisierungsgraden arbeitet.

In den Arbeiten von Rovang und Wilbur [89, 90] kamen diese Wissenschaftler zu dem Ergebnis, dass der extrahierte Ionenstrom nur dann raumladungsbegrenzt ist, wenn der Gitterabstand zwischen Abschirm- und Beschleunigungsgitter (normiert auf den Durchmesser der Löcher im Abschirmgitter) größer 0.6 und das Verhältnis von Anodenspannung V_{scr} zu Gesamtspannung V_{acc} größer als 0.5 ist. In diesem Fall sättigte sich die Perveanz, was einer Raumladungsbegrenzung des Stromes gleichbedeutend ist. Für ein RIM-4 Triebwerk berechnet sich das geometrische Verhältnis zu etwa 0.4, was die Beschreibung des Extraktionsvorganges mittels Gl. (2.3.9) ungültig macht. Prinzipiell kann der geometrische Makel durch Erhöhen der Extraktionsspannung kompensiert werden. Dies ist jedoch aufgrund von Überschlügen zwischen den Gittern nicht ratsam, da diese zu Defekten oder schlimmstenfalls zur Zerstörung der Gitter führen können. Weiterhin kann die Fokussierung des Ionenstrahls durch Erhöhung der Spannung beeinflusst werden, was dessen Divergenz begünstigen könnte und deshalb ebenfalls zu vermeiden ist. Darüber hinaus bietet das Verhältnis der Spannungen V_{scr}/V_{acc} ebenfalls nicht viel Spielraum und sollte stets kleiner 0.9 sein, um das Akkumulieren von Elektronen aus dem Neutralisator am Gittersystem⁵ zu verhindern [89, 90].

Aus diesen Gründen haben sich die Wissenschaftler weiterer Experimente angenommen, die das Raumladungsgesetz genauer untersuchten. Diese Experimente haben ergeben, dass für den oben skizzierten Fall eine modifizierte Version des Child-Langmuir Raumladungsgesetzes Gültigkeit hat. Die Ergebnisse wurden später von Brophy in Ref. 10 verifiziert und veröffentlicht. Dabei spielt die Ausdehnung der Plasmarandschicht am Abschirmgitter (ohne angelegte Spannung) eine Rolle, da diese Ausdehnung proportional zur Spannung über der Randschicht ist, die letztendlich für die Raumladungsbegrenzung sorgt.

3.5.1 Modifiziertes Child-Langmuir-Modell

Das modifizierte Child-Langmuir Raumladungsgesetz, dessen Implementierung u. a. in Ref. 100 dargestellt ist, führt einen Skalierungsparameter β ein, der die effektive Länge zwischen der Plasmarandschichtgrenze und dem Beschleunigungsgitter, innerhalb derer die Raumladungsbegrenzung eintritt, beschreibt. Durch den Skalierungsparameter ist es möglich, die nicht-lineare und inhomogene Randschicht, die aufgrund der Extraktionsgeometrie und -spannung vorliegt, mittels eindimensionalen Ansätzen berechnen zu können, sofern das klassische Child-Langmuir Raumladungsgesetz aufgrund der o. g. Kriterien nicht anwendbar ist. In der Implementierung dieses Modells werden deshalb vor jedem Berechnungsstart die Bedingungen des klassischen Ansatzes $l_g/d_s > 0.6$ sowie $0.5 < V_{scr}/V_{acc} < 0.9$ geprüft.

Ist das klassische Modell gültig, kann der extrahierte Ionenstrom mittels Gl. (2.3.10) berechnet werden. Da dies, wie bereits erwähnt, für die aktuelle RIM-4-Geometrie nicht möglich ist, wird stattdessen mit dem modifizierten Modell gearbeitet. Dafür wird zuerst die effektive Länge l_e gemäß Abb. 2.3.4 (a) berechnet, wozu die Dicke der Randschicht l_s am ebenen Abschirmgitter evaluiert werden muss. Bei der folgenden Berechnung wird davon ausgegangen, dass die intrinsische Plasmastromdichte entlang der Schichtdicke l_s durch die Spannung zwischen Plasma und potenzialfreiem Gitter (ohne angelegte Gitterspannung) V_s nach Gl. (2.3.9)

⁵engl.: electron backstreaming

raumladungsbegrenzt ist. Sie berechnet sich mit dieser Annahme zu

$$J_{p,i} = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_i}} \frac{V_s^{\frac{3}{2}}}{l_s^2}. \quad (3.5.1)$$

Die intrinsische Plasmastromdichte, welche durch die Ionen gegeben ist, die am ebenen Gitter die Randschicht durchqueren können, spiegelt die Ergiebigkeit des Plasmas gemäß

$$J_{p,i} = eh_l n_e v_B \quad (3.5.2)$$

wider. Nach Gleichsetzen von Gl. (3.5.1) und Gl. (3.5.2) kann man nach der Schichtdicke auflösen und erhält

$$l_s = \sqrt{\frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_i}} \frac{V_s^{\frac{3}{2}}}{eh_l n_e v_B}}. \quad (3.5.3)$$

Da das (nicht vorgespannte) Potenzial des Gitters aufgrund der Quasi-Neutralität schwebt⁶ (s. Kap. 2.2.1), sind Elektronen- und Ionenflussdichte zur Wand identisch und lauten

$$\Gamma_{w,e,l} = \Gamma_{w,i,l} = h_l n_e v_B. \quad (3.5.4)$$

Unter Einbeziehung der Boltzmann-Gleichung aus Gl. (3.4.3) und dem Fakt, dass das Wandpotenzial negativ gegenüber dem Plasmapotenzial ist, folgt weiterhin

$$\Gamma_{e,w,l} = \frac{1}{4} n_e \bar{v}_e h_l \exp\left(-\frac{\Phi_s}{T_e}\right), \quad (3.5.5)$$

dabei ist das Plasmapotenzial hier auf null normiert, woraus $V_s = -\Phi_s$ folgt. Um die Spannung über der Randschicht V_s bzw. das Potenzial am schwebenden Gitter Φ_s zu berechnen, kann man Gl. (3.5.4) und Gl. (3.5.5) gleichsetzen und nach Φ_s auflösen, wodurch sich

$$\Phi_s = -T_e \ln\left(\frac{4v_B}{\bar{v}_e}\right) \quad (3.5.6)$$

$$\Rightarrow V_s = T_e \ln\left(\frac{4v_B}{\bar{v}_e}\right) \quad (3.5.7)$$

ergibt.

Die oben eingeführte effektive Länge des modifizierten Raumladungsgesetzes setzt sich aus der Ausdehnung der Randschicht am Abschirmgitter l_s , dessen Dicke t_s , dem Abstand zwischen Abschirm- und Beschleunigungsgitter l_g sowie dem Skalierungsparameter β zusammen [90] und berechnet sich demnach zu

$$l_e = \beta l_s + t_s + l_g. \quad (3.5.8)$$

Dem Skalierungsparameter liegt keine analytische Beschreibung zugrunde. Er hängt sehr stark von der Geometrie des Triebwerks ab und muss iterativ herausgefunden werden. Der Skalierungsparameter wird, wie in Kap. 4.3 gezeigt, auf Messergebnisse kalibriert. Da der Skalierungsparameter die Dicke der Randschicht am Abschirmgitter gewichtet, hängt er erwartungsgemäß vom Plasmameniskus, also dem Verlauf der Äquipotenziallinien im Plasma, ab, wodurch

⁶engl.: floating potential

eine Abhängigkeit der angelegten Gitterspannungen resultieren würde. Dies ist hier nicht berücksichtigt, da die Abhängigkeit von der Geometrie nach Ref. 100 als dominantes Kriterium anzunehmen ist. Dennoch werden Simulationen hier nur für die im Experiment verwendeten Extraktionsspannungen durchgeführt, auf welche der Skalierungsparameter kalibriert ist. Ein Einfluss der Spule auf den Skalierungsparameter ist nicht anzunehmen, da Extraktion und Energieeinkopplung unabhängig voneinander betrachtet werden können.

Der extrahierte Ionenstrom berechnet sich schließlich nach dem modifizierten Child-Langmuir Raumladungsgesetz zu

$$I_b = \frac{N_g \pi d_s^2 \epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_i} \frac{V_{acc}^{\frac{3}{2}}}{l_e^2}}. \quad (3.5.9)$$

Aus dem extrahierten Ionenstrom kann anschließend der Fluss der Ionen

$$\gamma_i = \frac{I_b}{e} \quad (3.5.10)$$

durch das Gittersystem berechnet werden. Bevor das Massenerhaltungsmodell aufgerufen wird, stellt das Extraktionsmodell noch den Fluss neutraler Gaspartikel aus dem Triebwerk heraus bereit. Dazu wird die Gittertransparenz für Neutralteilchen eingeführt, die sich nach Ref. 77 aus dem Verhältnis von Löcher- zu Gittergesamtfläche für alle drei Gitter zu

$$\phi_n = \frac{1}{\frac{2}{\phi_{scr}} + \frac{1}{\phi_{acc}} - 1} \quad (3.5.11)$$

berechnet, wobei die Extraktionsöffnungen von Abschirm- und Bremsgitter identisch groß sind. Die einzelnen Gittertransparenzen berechnen sich zu

$$\phi_{scr} = \frac{N_g d_s^2}{d_v^2} \quad (3.5.12)$$

$$\phi_{acc} = \frac{N_g d_a^2}{d_v^2}, \quad (3.5.13)$$

wobei N_g die Anzahl der Extraktionsöffnungen, d_s den Durchmesser der Extraktionsöffnungen des Abschirm- und Bremsgitters und d_a den Durchmesser der Extraktionsöffnungen des Beschleunigungsgitters bezeichnet. Die Gittergesamtfläche berechnet sich über den Innendurchmesser des Ionisators d_v . Der Fluss neutraler Partikel berechnet sich nun nach Gl. (2.2.16) und Gl. (2.2.11), angewandt auf Atome, und unter Berücksichtigung der Transparenz aus Gl. (3.5.11) zu

$$\gamma_n = \frac{\pi}{16} n_n \bar{v}_n \phi_n d_v^2. \quad (3.5.14)$$

3.6 Massenerhaltungsmodell

Das Massenerhaltungsmodell vergleicht in jedem Iterationsschritt den (konstanten) Volumenstrom des eingeführten Gases \dot{V} mit jenem Volumenstrom \dot{V}' , welcher aufgrund der Extraktion aus dem Triebwerk austritt. Der austretende Volumenstrom berechnet sich anhand des Neutralteilchenflusses aus Gl. (3.5.14) sowie des extrahierten Ionenflusses aus Gl. (3.5.10). Nach Gl. (2.3.17) lässt sich der Massenwirkungsgrad anhand dieser beiden Flüsse gemäß

$$\eta_m = \frac{\gamma_i}{\gamma_i + \gamma_n}$$

definieren. Dieser Massenwirkungsgrad kann weiterhin zur Berechnung des austretenden Massenflusses

$$\dot{m} = \frac{m_i I_b}{e \eta_m} = \frac{m_i I_b \gamma_n}{e \gamma_i} + \frac{m_i I_b}{e} = m_i (\gamma_n + \gamma_i) \quad (3.6.1)$$

genutzt werden, wobei $m_i \approx m_n$ gilt. Um diesen Massenfluss mit dem einströmenden Volumenstrom, der bei elektrischen Triebwerken üblicherweise in sccm^7 angegeben wird, vergleichen zu können, muss erst eine Umrechnung in einen Volumenstrom nach

$$\dot{V}' = 6 \times 10^7 \frac{\dot{m}}{\rho} \quad (3.6.2)$$

erfolgen. Dabei bezeichnet ρ die Dichte des Gases unter Normalbedingungen. Der angegebene Faktor 6×10^7 resultiert aus der Umrechnung von $\text{m}^3 \text{s}^{-1}$ in $\text{cm}^3 \text{min}^{-1}$ (sccm).

In jeder Iterationsstufe k wird der austretende Volumenstrom \dot{V}'_k genutzt, um den Druck im Entladungsgefäß zu berechnen. Dadurch kann man den Einfluss der Extraktion auf das Plasma selbstkonsistent abbilden. Die iterative Druckberechnung resultiert aus der Differenz von zugeführtem und austretendem Gas gemäß

$$p_{k+1} = p_k \left[1 + \alpha \left(1 - \frac{\dot{V}'_k}{\dot{V}} \right) \right]. \quad (3.6.3)$$

Der Parameter α stellt einen Gewichtungsfaktor dar, welcher bei einer Oszillation des Druckes dekrementiert wird, um die Genauigkeit zu erhöhen und somit konvergentes Verhalten herbeizuführen. Generell sind Oszillation selten zu beobachten. Bisher traten sie lediglich in Bereichen extremst kleiner Volumenströme mit $\dot{V} < 0.1 \text{sccm}$ auf. Da in diesen Bereichen die Fluid-Behandlung des Plasmas nicht uneingeschränkt gültig ist, muss man dort ggf. mit solchen Störungen und Artefakten rechnen. Eine genauere Untersuchung der Gültigkeitsgrenzen des Modells findet sich in Kap. 6.

Die iterative Berechnung wird im Normalfall beendet, sofern $|\dot{V} - \dot{V}'_k| < \dot{V}/10^2$ erreicht wird. Auch hier ist der Quotient frei wählbar, jedoch beeinflusst diese Wahl die Simulationsdauer sehr stark, da es sich bei der Lösung dieser Erhaltungsgleichung um die äußerste der drei verschachtelten Schleifen gemäß Abb. 3.1.1 handelt.

3.7 Transformator-Modell der induktiven Plasmaentladung

Radiofrequenz-Ionentriebwerke haben typischerweise eine zylindrische Entladungskammer, um welche eine ebenso zylindrische, nicht aber rotationssymmetrische Spule gewickelt ist. Alternative Geometrien, wie die in Ref. 56 vorgestellte Dom-förmige, sind aktuell noch nicht in das numerische Modell implementiert, obwohl mit dem dreidimensionalen elektromagnetischen Modell die prinzipielle Möglichkeit dazu besteht. Für alle typischen RIT-Geometrien gilt, dass aufgrund der zylindrischen Spule ein ebenso zylindrischer Plasmastrom induziert wird. Demnach bietet es sich an, in Zylinderkoordinaten mit $\mathbf{x} = \rho \cos \varphi \mathbf{e}_x + \rho \sin \varphi \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z$ zu rechnen, um überschaubare Gleichungen zu erhalten. Dazu wird die Plasmastromdichte aus Gl. (3.3.16) mit Hilfe der Funktionalmatrix

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_\rho \\ \mathbf{e}_\varphi \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \rho} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} & \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial z} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_x \\ \mathbf{e}_y \\ \mathbf{e}_z \end{pmatrix} \quad (3.7.1)$$

⁷Standardkubikzentimeter pro Minute nach DIN 1343

transformiert [9]. Die Feldkomponenten berechnen sich nach dieser Vorschrift zu

$$\tilde{J}_{p,\rho} = \tilde{J}_{p,x} \cos \varphi + \tilde{J}_{p,y} \sin \varphi \quad (3.7.2)$$

$$\tilde{J}_{p,\varphi} = \tilde{J}_{p,y} \cos \varphi - \tilde{J}_{p,x} \sin \varphi \quad (3.7.3)$$

$$\tilde{J}_{p,z} = \tilde{J}_{p,z}. \quad (3.7.4)$$

Des Weiteren kann nun mit der Skin-Eindringtiefe aus Gl. (2.1.46),

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_0 \operatorname{Re} \kappa_p}},$$

die für kollisionsbehaftete Plasmen mit $\nu_{m,\text{eff}} \geq \omega$ gilt [65], und jener für kollisionsfreie Plasmen,

$$\delta = \frac{c_0}{\omega_{pe}}, \quad (3.7.5)$$

gültig für $\nu_{m,\text{eff}} < \omega$ [65], die effektive vom Plasmastrom durchsetzte Fläche pro Komponente

$$A_{\text{eff},\varphi} = \delta l_v \quad (3.7.6)$$

$$\langle A_{\text{eff},\rho} \rangle_\rho = \frac{2\pi l_v (r_v - (r_v - \delta))}{2} = \pi l_v \delta \quad (3.7.7)$$

$$A_{\text{eff},z} = \pi \delta (2r_v - \delta) \quad (3.7.8)$$

berechnet werden. Aufgrund der effektiven Flächen kann die Integration der Stromdichte über Mittelwerte approximiert werden, um den induzierten Plasmastrom zu erhalten. Dazu werden die numerischen Stromdichtevektoren über das gesamte Simulationsgebiet Ω gemittelt. Der Strom berechnet sich danach zu

$$\tilde{I}_p = \iint_A \tilde{\mathbf{J}}_p \, d\mathbf{A} \approx \langle \tilde{J}_{p,\rho} \rangle_\Omega \langle A_{\text{eff},\rho} \rangle_\rho + \langle \tilde{J}_{p,\varphi} \rangle_\Omega A_{\text{eff},\varphi} + \langle \tilde{J}_{p,z} \rangle_\Omega A_{\text{eff},z}. \quad (3.7.9)$$

Die radiale Komponente ist für gängige RIT-Geometrien vernachlässigbar klein. Dies hat sich auch im Rahmen der Simulationen herausgestellt. Der Vollständigkeit halber wird dieser Term jedoch stets mit berücksichtigt. Der Phasenwinkel des Plasmastroms wird aufgrund der numerischen Berechnung der Diffusionsgleichung, unter Berücksichtigung der Leitfähigkeit, stets korrekt berechnet. Der sich ergebende Phasenwinkel entspricht jenem gemäß der Lenz'schen Regel unter Berücksichtigung des komplex-leitfähigen Plasmas, das selbst eine Phasenverschiebung hervorruft. Diese ist jedoch vergleichsweise klein. Dies wird u. a. in Kap. 5 dargestellt.

Da in dieser Arbeit rein induktiv-gekoppelte Plasmen betrachtet werden, werden parasitäre kapazitive Kopplungseffekte, wie sie in der Realität vor allem in Bereichen niedriger Ladungsträgerdichten vorherrschen [48], nur am Rande berücksichtigt, wie im weiteren Verlauf gezeigt wird. Für die Herleitung der globalen Impedanz induktiv-gekoppelter Plasmen wird die kapazitive Kopplung vernachlässigt, was eine für die meisten stabilen Arbeitspunkte bei RIT zulässige Näherung darstellt [27].

Um die reaktive Komponente des Ersatzschaltbildes zu berechnen, kann der Poynting'sche Satz für Felder mit harmonischer Zeitabhängigkeit nach [41] gemäß Gl. (2.2.62) erneut aufgegriffen werden. Danach berechnet sich die induzierte Reaktanz X_{ind} aus den zeitharmonischen Feldern zu [41]

$$X_{\text{ind}} = \frac{1}{|\tilde{I}_c|^2} \left[4\omega \iiint_V \operatorname{Re} \{ \tilde{u}_m - \tilde{u}_e \} \, dV - \iiint_V \operatorname{Im} \{ \tilde{\mathbf{J}}_p^* \tilde{\mathbf{E}}_p \} \, dV \right]. \quad (3.7.10)$$

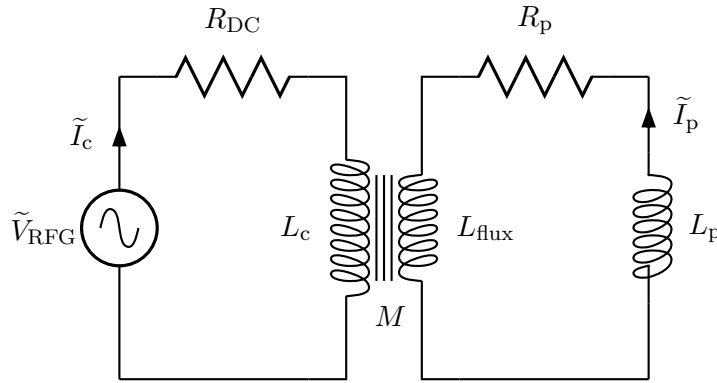


Abbildung 3.7.1: Transformatorbasiertes Ersatzschaltbild einer induktiv-gekoppelten Plasmaentladung nach Ref. 85.

Die im ersten Integral vorkommenden elektrischen und magnetischen Energiedichten \tilde{u}_e und \tilde{u}_m berechnen sich dabei zu

$$\tilde{u}_e = \frac{1}{4} (\tilde{\mathbf{D}}^* \tilde{\mathbf{E}}) \quad (3.7.11)$$

$$\tilde{u}_m = \frac{1}{4} (\tilde{\mathbf{B}}^* \tilde{\mathbf{H}}). \quad (3.7.12)$$

Die Felder ohne Indizes stehen jeweils für das Gesamtfeld im Simulationsgebiet, bestehend aus Feld im Plasma und Feld außerhalb des Plasmas. Am Beispiel des elektrischen Feldes lautet das Gesamtfeld $\tilde{\mathbf{E}} = \tilde{\mathbf{E}}_p + \tilde{\mathbf{E}}_{ex}$. Der zweite Term aus Gl. (3.7.10) stellt den Imaginärteil der im Plasma umgesetzten Leistung dar. Beide Integrationen werden numerisch nach der Trapezregel berechnet, analog zur absorbierten Leistung aus Gl. (3.4.5). Aus der induzierten Reaktanz lässt sich die Art der Kopplung direkt ablesen. Ist der Wert positiv, handelt es sich um induktives Verhalten, ist er negativ, so überwiegen kapazitive Effekte. Da hier, wie bereits erwähnt, kapazitive Kopplung zwischen Spule und Plasma vernachlässigt wird, ergeben sich stets positive Werte für die Reaktanz. Demnach ist es möglich, das Verhalten mit einer Induktivität gemäß

$$L_{ind} = \frac{X_{ind}}{\omega} \quad (3.7.13)$$

zu modellieren. Es ist zwar nicht explizit eine kapazitive Kopplung zwischen Spule und Plasma modelliert, doch ergibt sich aufgrund des Potentials zwischen Entladungsgefäßwand und Plasmarandschichtgrenze eine intrinsische Kapazität. Dies erkennt man vor allem daran, dass in diesen Bereichen die elektrische Energiedichte zunimmt. Der Beitrag der elektrischen Energie zur elektromagnetischen Gesamtenergie ist jedoch bei den durchgeführten Simulationen stets $< 1\%$ und ändert somit nichts am induktiven Verhalten der Entladung.

Die induzierte Induktivität L_{ind} kann genutzt werden, um die Art der Kopplung zu evaluieren und die Systemimpedanz zu überschlagen, doch mangelt es dabei an Genauigkeit, da unter anderem die Massenträgheit der Elektronen nicht berücksichtigt wird. Diesem Umstand wird Rechnung getragen, indem die oben gezeigte induktive Kopplung nach Ref. 85 mittels Transformator-Theorie, wie in Abb. 3.7.1 dargestellt, beschrieben wird. Dabei beschreibt die Primärseite die Impedanz der Energiequelle (RFG) sowie der Induktionsspule, die das Plasma mit Energie versorgt und die Sekundärseite die Impedanz des Plasmas für einen jeweiligen

Arbeitspunkt. Eine geometrische Induktivität L_{flux} verbindet beide Stromkreise als Teil einer Gegeninduktivität M , was im weiteren Verlauf genauer dargestellt wird. Die geometrische Induktivität berechnet sich über die Differenz der magnetischen Energie ohne Beeinflussung durch Plasma $U_{m,0}$ und der mit Plasma U_m zu

$$L_{\text{flux}} = \frac{2(U_{m,0} - U_m)}{|\tilde{I}_p|^2}. \quad (3.7.14)$$

Dabei berechnen sich die magnetischen Energien über Volumen-Integration der zugehörigen Energiedichten zu

$$U_m = \iiint_V \text{Re} \tilde{u}_m \, dV. \quad (3.7.15)$$

Um die Sekundärseite des Transformators vollständig beschreiben zu können, werden zunächst Plasmawiderstand R_p und -induktivität L_p eingeführt. Der Ohm'sche Plasmawiderstand wird über Gl. (2.2.65) bestimmt gemäß

$$R_p = \frac{2P_{\text{abs}}}{|\tilde{I}_p|^2}.$$

Zusätzlich zur geometrischen Induktivität aus Gl. (3.7.14), die aufgrund des vom Plasmastrom hervorgerufenen induzierten magnetischen Flusses⁸ existiert, bedingt die durch die Stoßprozesse im Plasma hervorgerufene Trägheit der Elektronen eine weitere Induktivität L_p , welche sich nach Gl. (2.2.66) zu

$$L_p = \frac{R_p}{\nu_{m,\text{eff}}}$$

berechnet. Damit ergibt sich die Impedanz der Sekundärseite zu

$$Z_p = R_p + i\omega(L_{\text{flux}} + L_p). \quad (3.7.16)$$

Die elektrische Last, die der RFG mit Energie versorgen muss, kann mittels Impedanztransformation auf die Primärseite des Transformatorersatzschaltbildes abgebildet werden, wie in Abb. 3.7.2 dargestellt. Dies eröffnet die Möglichkeit, die Last als Serienimpedanz darzustellen, wodurch leichter mit Laständerungen umzugehen ist. Insbesondere ist diese Darstellung vorteilhaft, wenn man den RFG real darstellt, mit der Resonanzkapazität im Lastkreis gemäß Abb. 1.1.2. In dieser Arbeit wird der RFG als ideale Stromquelle betrachtet, wodurch kein Schwingkreis abgebildet wird und somit keine Resonanzeffekte auftreten. Die Beschreibung hier dient ausschließlich zur Charakterisierung der induktiven Last, was in Kap. 1.1 definiert ist.

Die Transformation von Sekundär- auf Primärseite geschieht unter Anwendung von Transformator- und Schaltungstheorie, wie bspw. in Ref. 8 dargestellt. Um die Transformation durchzuführen, werden als erstes die Maschengleichungen unter Anwendung der Kirchhoff'schen Regeln auf Abb. 3.7.1 gebildet. Diese lauten

$$\tilde{V}_{\text{RFG}} = i\omega L_c \tilde{I}_c + R_{\text{DC}} \tilde{I}_c + i\omega M \tilde{I}_p \quad (3.7.17)$$

$$\tilde{V}_p = i\omega L_{\text{flux}} \tilde{I}_p + i\omega M \tilde{I}_c \quad (3.7.18)$$

$$= -\tilde{I}_p (R_p + i\omega L_p). \quad (3.7.19)$$

⁸engl.: magnetic flux

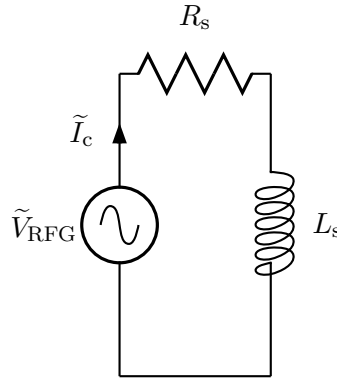


Abbildung 3.7.2: Ersatzschaltbild der in den Primärkreis transformierten effektiven, vom RFG zu versorgenden, induktiven Last.

Gleichsetzen von Gl. (3.7.18) und Gl. (3.7.19), Auflösen nach M und Bildung des Betrages ergibt

$$|M| = \left| \frac{\tilde{I}_p}{\tilde{I}_c} \left(\frac{iR_p}{\omega} - (L_{\text{flux}} + L_p) \right) \right|. \quad (3.7.20)$$

Man erkennt, dass die Gegeninduktivität allgemein eine komplexe Größe ist, was u. a. in Ref. 15 erläutert ist. Um Sekundär- auf Primärseite abzubilden, muss mit dem Betrag von M gearbeitet werden [15, 85]. Mit der Gegeninduktivität lässt sich nach Ref. 85 der Koppelfaktor ζ zu

$$\zeta = \frac{|M|}{\sqrt{L_c L_{\text{flux}}}} \quad (3.7.21)$$

bestimmen, welcher als Maß für die Güte der induktiven Kopplung angesehen werden kann. Die Transformation erfolgt über eine Vorschrift aus Ref. 99 und ergibt

$$Z_s = Z_c + \frac{(\omega |M|)^2}{Z_p} = R_s + i\omega L_s. \quad (3.7.22)$$

Dabei beschreibt $Z_c = R_{\text{DC}} + i\omega L_c$ die Impedanz der Spule im Primärkreis des Transformators. Die Bestimmung der Bauteilwerte dieser Impedanz findet sich in Kap. 3.7.1. Die transformierten Komponenten des in Abb. 3.7.2 dargestellten Lastkreises können über den Real- bzw. Imaginärteil der resultierenden Serienimpedanz Z_s zu

$$R_s = \text{Re } Z_s \quad (3.7.23)$$

$$L_s = \frac{\text{Im } Z_s}{\omega} \quad (3.7.24)$$

berechnet werden.

3.7.1 Bestimmung der Spulenimpedanz

Um die Transformation aus dem letzten Abschnitt vorzunehmen, muss die Serienimpedanz der Spule, bestehend aus Ohm'schem Realteil und induktivem Imaginärteil, bekannt sein.

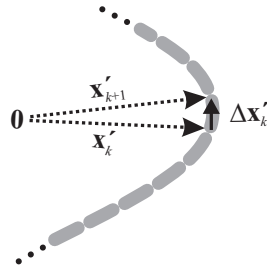


Abbildung 3.7.3: Diskretisierung des Strom- bzw. Spulenpfades.

Da es sich um eine elektrisch kurze, nicht rotationssymmetrische Spule handelt, kann die Induktivität nicht mit eindimensionalen Ansätzen berechnet werden. Um diese zu bestimmen, wird das magnetoquasistatische Biot-Savart'sche Gesetz aus Gl. (2.1.56) in eine numerische Form gebracht, womit schließlich der magnetische Fluss nach Gl. (2.1.55) berechnet werden kann, welcher wiederum, dividiert durch den erregende Strom, die Selbst-Induktivität der Spule ergibt (vgl. Kap. 2.1.3). Ein numerisches Modell zur Berechnung der Induktivität für beliebig geformte Spulen wurde im Laufe der Projektarbeit in Ref. 108 veröffentlicht.

Um die numerische Form von Gl. (2.1.56) zu erhalten, diskretisiert man als erstes den Vektor des infinitesimalen Strompfadelements ds gemäß Abb. 3.7.3 zu $\Delta \mathbf{x}'_k = \mathbf{x}'_{k+1} - \mathbf{x}'_k \approx ds$. Damit ergibt sich für die magnetische Induktion im Punkt \mathbf{x}

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0 \tilde{I}_c}{4\pi} \sum_i \frac{\Delta \mathbf{x}'_i \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|^3}. \quad (3.7.25)$$

Diese Berechnung kann nun iterativ für alle Punkte \mathbf{x}_j in Ω durchgeführt werden, um die räumliche Verteilung zu erhalten. Die entsprechende Funktion ist als Flussdiagramm in Abb. 3.7.4 gezeigt. Dabei beschreibt der Vektor \mathbf{x}' die Spulenform. Iteratives Ausführen der Funktion ist äußerst langwierig, vor allem wenn das Simulationsgebiet sehr fein unterteilt ist. Von daher bietet sich die von MATLAB gewährleistete Funktionalität der parallelen Verarbeitung⁹ mittels der Distributed Computing Toolbox an, die auch in dieser Arbeit genutzt wurde. Diese Funktionalität ermöglicht es, dieselbe Funktion mittels MPI¹⁰ semi-parallel auf mehreren Kernen (oder gar Computern) auszuführen. Die Anzahl der benutzten Kerne ist dabei invers proportional zur Rechendauer. Das lokale parallele Verarbeiten ist auf 512 Kerne begrenzt, da ansonsten die interne Kommunikation der nebenläufig arbeitenden Kerne die Performance wieder verschlechtern könnte. Dieses Phänomen wird u. a. in Ref. 37 detailliert dargestellt.

Am Beispiel einer kurzen, zylindrischen Spulengeometrie mit $N_c = 1$ Windung sei im Folgenden die Berechnung des magnetischen Flusses Ψ gezeigt. Eine solche Spule kann nicht mit analytischen Mitteln berechnet werden, da die magnetische Induktion nicht als homogen angenommen werden kann. Selbst empirische Formeln, wie sie z. B. in Refs. 116 und 117 gegeben sind, lassen sich nicht auf diese Geometrien anwenden, da die Spulensteigungen aufgrund der niedrigen Windungszahl zu groß sind. Hier wird als Exempel eine extrem kurze Spule verwendet, um die gekrümmte Wendelfläche besser darzustellen. Um diese zylindrische Spule zu

⁹engl.: parallel computing

¹⁰Message Passing Interface

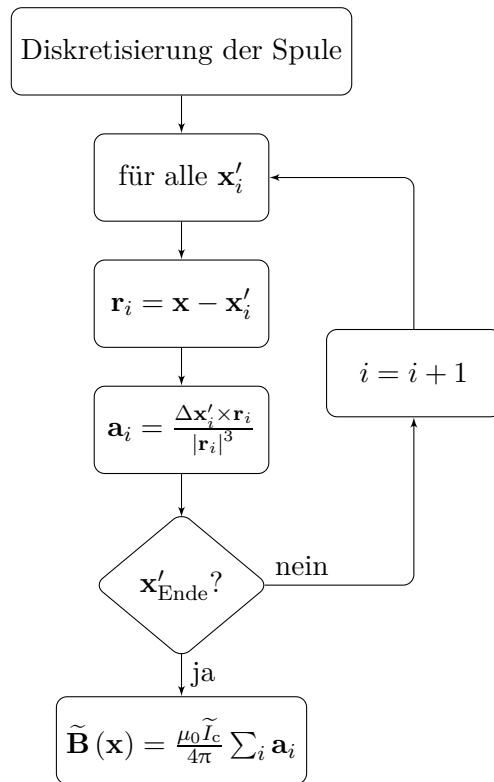


Abbildung 3.7.4: Flussdiagramm der Implementierung des Biot-Savart'schen Gesetzes. \mathbf{x}' bezeichnet den Vektor des Strompfades.

beschreiben, bedient man sich erneut der Parametrisierung für Zylinderkoordinaten, d. h.,

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_c \cos(N_c \varphi) \\ r_c \sin(N_c \varphi) \\ z' \end{pmatrix}. \quad (3.7.26)$$

Das generierte Simulationsgebiet ist in Abb. 3.7.5 mit 100 diskreten Punkten für die Spule sowie 10 radialen Abstufungen dargestellt.

Bevor Gl. (2.1.55) diskretisiert werden kann, müssen die Normalenvektoren (oder Flächennormalen) jeder einzelnen Gitter-Zelle herausgefunden werden. Da die aufgespannte Wendelfläche der Zylinderspule im dreidimensionalen Raum gemäß

$$\mathbf{x}'(\rho, \varphi) = \begin{pmatrix} r_c \cos(N_c \varphi) \\ r_c \sin(N_c \varphi) \\ h\varphi \end{pmatrix}, \quad (3.7.27)$$

mit $\varphi \in [0, 2\pi]$ und der Ganghöhe $h = 1/2\pi N_c$, parametrisiert ist, kann man die Flächennor-

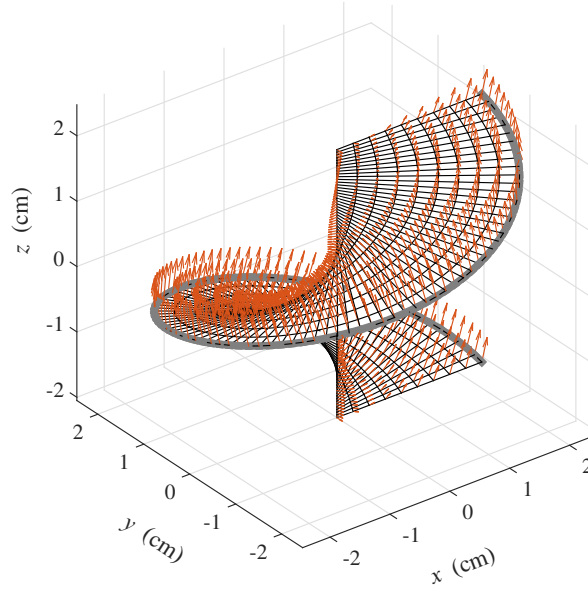


Abbildung 3.7.5: Simulationsgebiet zur Induktivitätsberechnung mit Normalenvektoren. Zur besseren Veranschaulichung der Problematik unebener Flächenelemente ist eine Spule mit einer Windung entlang ihrer gesamten Länge gezeigt.

malen abhängig von den Parametern ρ und φ zu

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A} &= \frac{\partial \mathbf{x}'(\rho, \varphi)}{\partial \rho} \times \frac{\partial \mathbf{x}'(\rho, \varphi)}{\partial \varphi} \\
 &= \begin{pmatrix} \cos(N_c \varphi) \\ \sin(N_c \varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -N_c r_c \sin(N_c \varphi) \\ N_c r_c \cos(N_c \varphi) \\ h \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} h \sin(N_c \varphi) \\ -h \cos(N_c \varphi) \\ N_c r_c \end{pmatrix} \tag{3.7.28}
 \end{aligned}$$

berechnen [9] (wichtig: die Normalenvektoren sind hier nicht normiert, da der Betrag den Flächeninhalt der Zelle widerspiegelt und dieser zwingend für das Skalarprodukt in Gl. (2.1.55) benötigt wird). Die Flächennormalen sind in Abb. 3.7.5 dargestellt.

Um die diskrete Form von Gl. (2.1.55) aufzustellen, kann man jeweils über die parametrisierten Größen summieren und erhält somit aus dem Flächenintegral

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi} &\approx \sum_j \sum_k \tilde{\mathbf{B}}[j, k] \Delta \mathbf{A}[j, k] \\
 &\approx \sum_j \sum_k \tilde{B}_x[j, k] \Delta A_x[j, k] + \tilde{B}_y[j, k] \Delta A_y[j, k] + \tilde{B}_z[j, k] \Delta A_z[j, k], \tag{3.7.29}
 \end{aligned}$$

wobei j den radialen Index und k den Index der Spulendiskretisierung bezeichnet. Die Induktivität berechnet sich dann nach Gl. (2.1.54) zu $L_c = |\tilde{\Psi}| / |\tilde{I}_c|$, wobei der Strom \tilde{I}_c derjenige ist, der für die Berechnung der magnetischen Induktion aus Gl. (3.7.25) benutzt wird.

Der Ohm'sche Widerstand R_{DC} der Spule kann mit eindimensionalen Zusammenhängen beschrieben werden. Der Index DC bedeutet, dass es sich um den äquivalenten Gleichstrom- oder DC¹¹-Widerstand handelt, der aufgrund des Skin-Effekts für eine diskrete Frequenz vorliegt. Die Skin-Eindringtiefe berechnet sich nach Gl. (2.1.46), wobei bei RIT die Spulen meist aus Kupfer, mit einer Leitfähigkeit von $\kappa_{\text{Cu}} = 59.6 \times 10^6 \text{ S m}^{-1}$, bestehen. Die Skin-Eindringtiefe kann nun genutzt werden, um eine effektive Fläche $A_{\text{c,eff}}$ für den Wechselstrom im Leiter zu berechnen. Der äquivalente DC-Widerstand berechnet sich zu

$$R_{\text{DC}} = \frac{1}{\kappa_{\text{Cu}}} \frac{l_{\text{c}}}{A_{\text{c,eff}}}. \quad (3.7.30)$$

Die Länge der Spule kann über eine Summierung über die diskreten Spulenelemente $\Delta \mathbf{x}'$ aus Abb. 3.7.3 gemäß

$$l_{\text{c}} \approx \sum_k \Delta \mathbf{x}'_k \quad (3.7.31)$$

gewonnen werden. Letztendlich ergibt sich die Impedanz der Spule zu $Z_{\text{c}} = R_{\text{DC}} + i\omega L_{\text{c}}$.

3.8 Performance- und Effizienzmodell

Das Performancemodell basiert vollständig auf den in Kap. 2.3.3 gezeigten Zusammenhängen und greift deshalb auf keine bestimmten numerischen Methoden zu. Es werden lediglich Gleichungen ausgewertet, deren Terme und Faktoren in den vorhergehenden Modellen bereitgestellt wurden. Dieses Modell wird nach vollständiger Konvergenz der drei Erhaltungsgleichungen aufgerufen; alle Gleichungen sind demnach geschlossen lösbar.

Zunächst wird die Austrittsgeschwindigkeit der Ionen v_{i} nach Gl. (2.3.12) bestimmt, welche daraufhin, unter Berücksichtigung des austretenden Ionen- und Neutralteilchenflusses, γ_{i} und γ_{n} , nach Gl. (3.5.10) und Gl. (3.5.14), zur Berechnung des Schubes F nach Gl. (2.3.11),

$$F = m_{\text{n}} (\gamma_{\text{i}} v_{\text{i}} + \gamma_{\text{n}} \bar{v}_{\text{n}}),$$

mit $m_{\text{i}} \approx m_{\text{n}}$, genutzt wird. Mit dem Schub kann weiterhin die effektive Austrittsgeschwindigkeit v_{eff} nach Gl. (2.3.13) berechnet werden, woraus man schließlich den gewichtsspezifischen Impuls nach Gl. (2.3.7),

$$I_{\text{sp}} = \frac{v_{\text{eff}}}{g_0}$$

bestimmen kann. Der gewichtsspezifische Impuls bietet eine Übersicht auf die Gesamtperformance des Triebwerks (für den jeweils eingestellten Arbeitspunkt) und ist demnach eine erheblich wichtige Größe, wenn man Effizienz anstrebt. Entkoppelt davon werden zusätzlich Massenwirkungsgrad und elektrischer Wirkungsgrad nach Gl. (2.3.17) und Gl. (2.3.21) zu

$$\eta_{\text{m}} = \frac{\gamma_{\text{i}}}{\gamma_{\text{i}} + \gamma_{\text{n}}}$$

$$\eta_{\text{el}} = \frac{I_{\text{b}} V_{\text{scr}}}{I_{\text{b}} V_{\text{scr}} + P_{\text{abs}}}$$

¹¹engl.: direct current

berechnet. Der Massenwirkungsgrad ist vor allem vom Volumenstrom des Stützgases abhängig, was in Kap. 5.2 genauer gezeigt wird. Im Gegensatz dazu gibt der elektrische Wirkungsgrad Aufschluss über den Anteil der Leistung, welcher zur Erhaltung des Plasmas benötigt wird. Dieser Zusammenhang wird zusätzlich quantitativ durch den Entladungsverlust ξ aus Gl. (2.3.22),

$$\xi = \frac{P_{\text{abs}}}{I_{\text{b}}},$$

berechnet. Als letztes liefert das Performancemodell die Perveanz

$$k = \frac{I_{\text{b}}}{V_{\text{scr}}^{\frac{2}{3}}},$$

welche letztlich eine Funktion der Gittergeometrie ist. Explizite Perveanzuntersuchungen werden in dieser Arbeit keine gezeigt, das Modell bietet jedoch grundsätzlich die Möglichkeit dazu.

Kapitel 4

Modellverifikation

In diesem Kapitel werden analytische und experimentelle Verifizierungen des numerischen Modells gezeigt und erläutert. Dabei stehen vor allem das dreidimensionale elektromagnetische Modell, welches die induzierten Felder evaluiert sowie das ebenso dreidimensionale magnetoquasistatische Modell zur Berechnung der Spuleninduktivität im Vordergrund. Weiterhin wird das quasi-homogene Plasmamodell anhand einer Entladungsgeometrie verifiziert, die analytisch berechenbar ist. Zum Schluss wird das gesamte selbstkonsistente Triebwerksmodell anhand gemessener Performance-Mappings eines RIM-4 experimentell verifiziert.

4.1 Verifikation der elektromagnetischen Modelle

In dieser Arbeit werden zwei unabhängig voneinander wirkende elektromagnetische Modelle genutzt. Um die induzierten gekoppelten elektromagnetischen Felder zu berechnen, wird eine voll-numerische Form der magnetischen Diffusionsgleichung gemäß Gl. (3.3.4) in dem in diskrete Bereiche eingeteilten dreidimensionalen Simulationsgebiet gelöst. Die Impedanz der Triebwerksspule, bzw. deren Induktivität, wird im Gegensatz dazu basierend auf dem analytischen Gesetz von Biot-Savart evaluiert, mit dessen Hilfe die magnetische Durchflutung durch die von der Spule aufgespannten unebenen Flächenelemente berechnet wird (vgl. Kap. 3.7.1). Da dieser Vorgang automatisiert für alle Punkte im Simulationsgebiet durchgeführt wird, wird das Lösungsschema als semi-analytisch bezeichnet. Um den voll-numerischen Solver effizient einzustellen, wird die experimentell verifizierte semi-analytische Lösung des induzierten elektrischen Feldes, welche ähnlich jener des Biot-Savart'schen Gesetzes implementiert ist, als Basis verwendet.

4.1.1 Verifikation des magnetoquasistatischen Modells

Um den semi-analytischen magnetoquasistatischen Solver zu verifizieren, wird als erstes eine analytisch geschlossen lösbare Geometrie damit berechnet. Konkret handelt es sich dabei um eine kreisförmige Leiterschleife, durch die ein Wechselstrom \tilde{I} fließt, welcher als quasi-stationär angenommen werden kann (vgl. Kap. 2.1.3). Die Leiterschleife und ihre Lage relativ zum Koordinatensystem sind in Abb. 4.1.1 dargestellt.

Die magnetische Induktion soll entlang der z -Achse der in der xy -Ebene liegenden Leiterschleife aus Abb. 4.1.1 ermittelt werden. Dazu substituiert man zunächst die vektoriellen Grö-

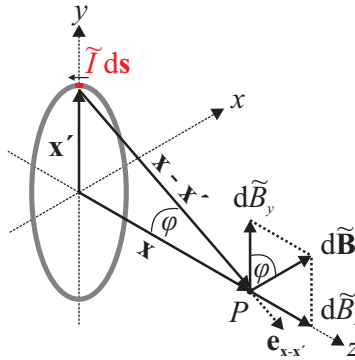


Abbildung 4.1.1: Kreisförmige Leiterschleife mit für die analytische Berechnung mittels Biot-Savart'schen Gesetzes wichtigen vektoriellen Zusammenhängen.

ben aus Gl. (2.1.56) und erhält

$$\tilde{\mathbf{B}}(z) = \frac{\mu_0 \tilde{I}}{4\pi} \int_{C'} ds \times \frac{\mathbf{r}}{r^3}, \quad (4.1.1)$$

wobei $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}'$ und $r = |\mathbf{r}|$. Betrachtet man den Betrag der magnetischen Induktion $d\tilde{B}$, der im Punkt P durch einen Abschnitt der Stromschleife $\tilde{I} ds$ verursacht wird, ergibt sich

$$d\tilde{B} = \left| \frac{\mu_0 \tilde{I}}{4\pi} ds \times \frac{\mathbf{r}}{r^3} \right| \quad (4.1.2)$$

$$\Rightarrow d\tilde{B} = \left| \frac{\mu_0 \tilde{I}}{4\pi} ds \times \frac{\mathbf{e}_r}{r^2} \right| \quad (4.1.3)$$

$$\Rightarrow d\tilde{B} = \frac{\mu_0 \tilde{I} ds}{4\pi r^2}. \quad (4.1.4)$$

Da die Vektoren ds und \mathbf{e}_r senkrecht zueinander stehen, ergibt sich, dass aus dem Kreuzprodukt in Gl. (4.1.3) eine skalare Multiplikation wird. Setzt man $|\mathbf{x}'| = R$ sowie $|\mathbf{x}| = z$, ergibt sich $r^2 = R^2 + z^2$. Setzt man dies in Gl. (4.1.4) ein, erhält man

$$d\tilde{B}(z) = \frac{\mu_0 \tilde{I}}{4\pi} \frac{ds}{R^2 + z^2}. \quad (4.1.5)$$

Aus der Abbildung lässt sich weiterhin entnehmen, dass $d\tilde{\mathbf{B}}$ aus einer azimutalen sowie einer axialen Komponente besteht. Die azimutale Komponente setzt sich, je nach Lage des Leiterstückes $\tilde{I} ds$, aus $d\tilde{B}_x$ und $d\tilde{B}_y$ zusammen, wobei die axiale Komponente stets durch $d\tilde{B}_z$ gegeben ist. Entlang der z -Achse gilt für diese Geometrie, dass sich die Einflüsse der radialen Komponenten stets aufgrund der Rotationssymmetrie aufheben. Für die axiale Komponente kann man weiterhin aufgrund der in Abb. 4.1.1 dargestellten Winkelbeziehungen

$$d\tilde{B}_z = d\tilde{B} \sin \varphi \quad (4.1.6)$$

schreiben. Setzt man nun den errechneten Betrag aus Gl. (4.1.4) sowie die trigonometrische Winkelbeziehung des Sinus ein und substituiert $r = \sqrt{R^2 + z^2}$, ergibt sich

$$d\tilde{B}_z = \frac{\mu_0 \tilde{I}}{4\pi} \frac{ds}{R^2 + z^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}. \quad (4.1.7)$$

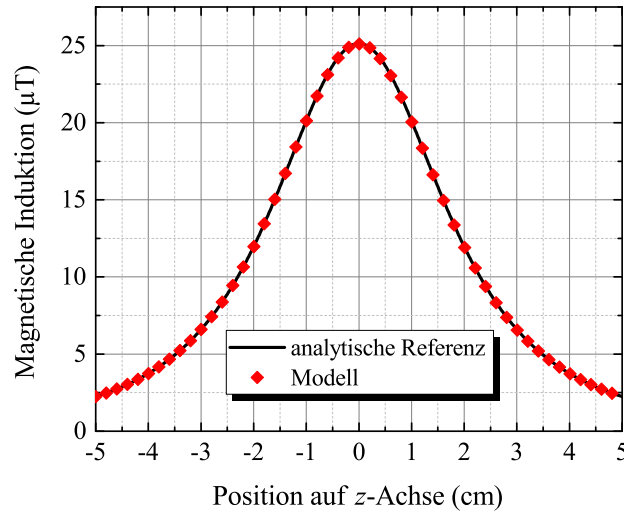


Abbildung 4.1.2: Magnetische Induktion einer kreisförmigen Leiterschleife entlang der Mittelpunktsachse. Die analytische Referenz gemäß Gl. (4.1.9) und die semi-analytisch modellierten Funktionswerte sind deckungsgleich.

Eine Integration von Gl. (4.1.7) über die Leiterschleife C' liefert die magnetische Induktion entlang der z -Achse gemäß

$$\tilde{B}_z(z) = \frac{\mu_0 \tilde{I}}{4\pi} \frac{R}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \oint_{C'} ds \quad (4.1.8)$$

$$\Rightarrow \tilde{B}_z(z) = \frac{\mu_0 \tilde{I}}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (4.1.9)$$

Das Ergebnis von Gl. (4.1.9) ist für einen Radius von $R = 25$ mm und einen Stromphasor von $\tilde{I} = 1$ A in Abb. 4.1.2 zusammen mit dem semi-analytisch simulierten Verlauf gezeigt. Die Verläufe decken sich perfekt, wodurch sich das magnetoquasistatische Modell prinzipiell verifizieren lässt. Für die Berechnungen wurden sowohl 1000 Werte entlang der z -Achse als auch für die Diskretisierung des Strompfades definiert.

Experimentelle Verifikation

Eine einfache Geometrie, wie die einer kreisförmigen Leiterschleife, lässt sich analytisch berechnen, wie im letzten Abschnitt dargestellt. Um den magnetoquasistatischen Solver für RIT-Geometrien zu verifizieren, wurde eine Vergleichsmessung durchgeführt. Die simulierte und vermessene Spule ist in Abb. 4.1.3 (a) dargestellt. Es handelt sich dabei um eine RIT-4 Triebwerksspule mit 25 mm Radius, 3 mm Drahtdurchmesser und 8 Windungen auf 40 mm axialer Länge. Die Verifizierung des Solvers wird anhand der Spuleninduktivität vorgenommen. Zur messtechnischen Bestimmung der Induktivität wird das RLC-Meter “ST2822C” von Source-tronic genutzt. Das in Abb. 4.1.3 (a) dargestellte Entladungsgefäß besteht aus Aluminiumoxid, welches nach Ref. 1 diamagnetische Eigenschaften aufweist. Demnach kann man für die Simulation $\mu_r \approx 1$ ansetzen. Um die Induktivität als Funktion der Windungszahl darzustellen, wurde

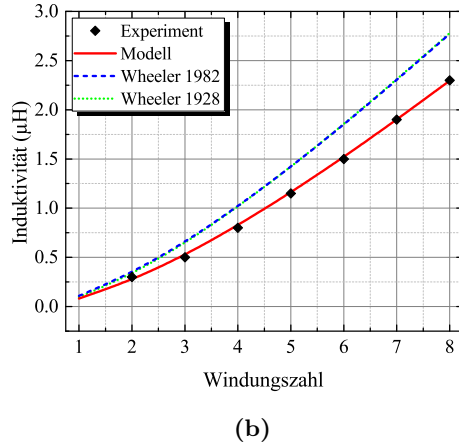
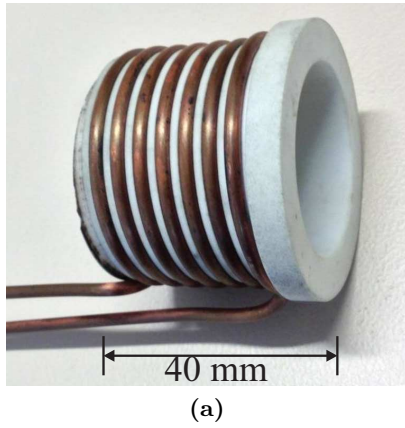


Abbildung 4.1.3: RIT-4 Entladungsgefäß mit Spule (a). Simulierte, gemessene und empirisch berechnete Verläufe der RIT-4 Spule abhängig von der Windungszahl (b).

eine der Messgerätklemmen an verschiedenen Stellen der Spule angeschlossen, wodurch sich die axiale Gesamtlänge für die Simulation ebenso wie die Windungszahl ändert. Dies wurde entsprechend in der Simulation berücksichtigt. Die simulierten und gemessenen Werte sind in Abb. 4.1.3 (b) dargestellt. Man erkennt, dass die simulierten Werte in guter Übereinstimmung mit den gemessenen stehen. Da das Messprinzip auf einer Wechselstrom-Messbrücke basiert, speist das Messgerät einen Wechselstrom mit einer eingestellten Frequenz im Bereich Hz–kHz ein. Die Messergebnisse sind als valide anzunehmen, da die vermessene Spule kein magnetisches Medium umschloss. Somit ist die Selbstinduktivität keine Funktion der Frequenz.

Zusätzlich sind berechnete Induktivitätswerte gemäß zweier empirischer Gleichungen nach H. Wheeler dargestellt, wobei sich die Induktivität nach Ref. 116 zu

$$L \approx \frac{10\pi\mu_0 N_c^2 r_c^2}{9r_c + 10l_c} \quad (4.1.10)$$

sowie nach Ref. 117 zu

$$L \approx \mu_0 N_c^2 r_c \left(\ln \left(1 + \frac{\pi r_c}{l_c} \right) + \frac{1}{2.3 + 1.6 \frac{l_c}{r_c} + 0.44 \left(\frac{l_c}{r_c} \right)^2} \right) \quad (4.1.11)$$

berechnet. Obwohl diese Gleichungen prinzipiell auf kurze Spulengeometrien anwendbar sind, liefern sie hier aufgrund der großen Spulensteigung keine exakten Werte, weshalb eine numerische Lösung unumgänglich ist. Das zylindrische Simulationsgebiet wurde in 1000 Winkelschritte im Bereich $0 - 2\pi$, 1000 äquidistante Teile in z -Richtung sowie 13 radiale Abstufungen unterteilt. Die simulierten Werte sind stabil; eine weitere Erhöhung der Diskretisierungstiefe kostet mehr Zeit, ändert aber nichts mehr substantiell am Ergebnis. Ausführliche Konvergenzstudien zum magnetoquasistatischen Solver sind in Ref. 108 dargestellt.

4.1.2 Experimentelle Verifikation des berechneten elektrischen Feldes

Das elektrische Feld wird für einen vorgegebenen Spulenstrom \tilde{I}_c , wie in Ref. 112 und Kap. 2.1.3 ausführlich dargestellt, aus der dreidimensionalen semi-analytischen Lösung des Vektorpotenzi-

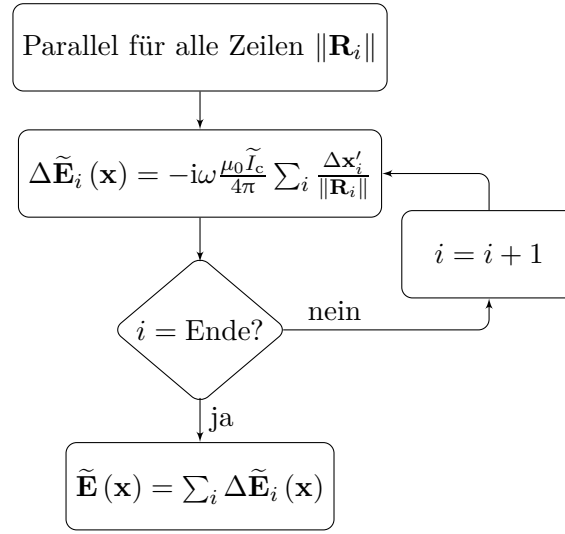


Abbildung 4.1.4: Implementierung der semi-analytischen Lösung des elektrischen Feldes.

als gemäß Gl. (2.1.48) nach Gl. (2.1.57) berechnet. Die Implementierung der semi-analytischen Lösung für das elektrische Feld,

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega) = -i\omega \frac{\mu_0 \tilde{I}_c}{4\pi} \sum_i \frac{\Delta \mathbf{x}'_i}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_i|}, \quad (4.1.12)$$

unterscheidet sich kaum von der des Biot-Savart'schen Gesetzes gemäß Abb. 3.7.4. Das Flussdiagramm in Abb. 4.1.4 zeigt die Implementierung der Lösung. Der Hauptunterschied zur Lösung des Biot-Savart'schen Gesetzes, bei der der euklidische Abstand zwischen \mathbf{x}' und \mathbf{x} für jeden Punkt einzeln in der Funktion berechnet wird, liegt darin, dass die euklidischen Abstände zwischen jedem Punkt im Raum \mathbf{x}_k und jedem Punkt auf der Spule \mathbf{x}'_j bei der Lösung des Vektorpotenzials bzw. des elektrischen Feldes vor Aufruf der eigentlichen Berechnungsfunktion in einer Matrix

$$\|\mathbf{R}_{j,k}\| = \sqrt{(x'_j - x_k)^2 + (y'_j - y_k)^2 + (z'_j - z_k)^2} \quad (4.1.13)$$

gespeichert werden. Dadurch kann, wie in Abb. 4.1.4 dargestellt, pro Iteration eine komplette Matrixzeile berechnet werden, was erheblich Rechenzeit einspart.

Den Gewinn an Geschwindigkeit erkaufte man sich in diesem Fall durch den deutlich höheren Ressourcenverbrauch. Da die euklidischen Abstände alle in einer Matrix gespeichert werden, kann diese bei vielen Simulationspunkten sehr groß werden. Aus diesem Grund wird das semi-analytische Modell zur Berechnung des induzierten elektrischen Feldes nur zur Einstellung des voll-numerischen FDM-Solvers genutzt, wie in Kap. 4.1.3 erläutert wird. Zunächst wird jedoch das simulierte elektrische Feld im Innenbereich des Entladungsgefäßes ohne Plasma anhand von Messungen verifiziert.

Zur Verifikation des induzierten elektrischen Feldes wurde eine Feldsonde entworfen, die das annähernd kreisförmig induzierte elektrische Feld entlang einer Leiterschleife integriert. Die Sonde ist in Abb. 4.1.5 (a) dargestellt. Die vermesse Spule ist wieder jene des RIT-4 aus Abb. 4.1.3 (a). Ein Einfluss der dielektrischen Wand auf das induzierte elektrische Feld kann

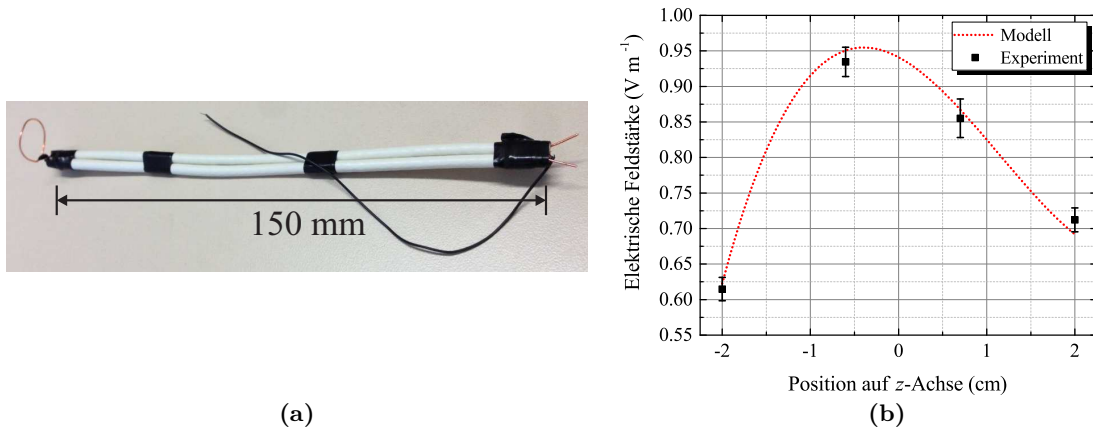


Abbildung 4.1.5: Messsonde für induziertes elektrisches Feld (a), Verifikation des semi-analytischen Solvers für das elektrische Feld durch Messung (b). Die angegebenen Feldstärken entsprechen jeweils den simulierten und gemessenen Amplituden.

nach Ref. 41 ausgeschlossen werden, da die Rand- und Stetigkeitsbedingung

$$\mathbf{n} \times (\tilde{\mathbf{E}}_w - \tilde{\mathbf{E}}_i) = 0, \quad (4.1.14)$$

wobei der Index “w” das Feld in der dielektrischen Wand und der Index “i” jenes im Inneren des Entladungsgefäßes und \mathbf{n} den Normalenvektor der Wand beschreibt, stets erfüllt ist, da bei Solenoiden, die auch als quellenfreie Spulen bezeichnet werden, keine radialen und somit normal zur Wand gerichteten elektrischen Feldkomponenten entstehen. Damit gilt für die Messung $\tilde{\mathbf{E}}_w = \tilde{\mathbf{E}}_i \neq f(\epsilon)$.

Der Radius der an der Sonde angebrachten Leiterschleife beträgt 14 mm und das elektrische Feld wurde an vier verschiedenen Stellen innerhalb des Entladungsgefäßes gemessen. Das angelegte Spannungssignal hatte eine Frequenz von 2 MHz und eine Amplitude von 5,69 V, was bei der Spulenimpedanz von $Z_c = (0,036 + i28,78) \Omega$ eine Stromamplitude von etwa 200 mA bedingt. Die Messung wurde per Hand einige Male durchgeführt; die Fehlerbalken in Abb. 4.1.5 (b) stellen die Standardabweichungen der gemessenen Mittelwerte dar. Wie man der Abbildung weiterhin entnehmen kann, passt der simulierte Verlauf gut zum gemessenen. Die asymmetrische Form der induzierten Feldwerte ist durch die relativ große Spulensteigung bedingt, wodurch das elektrische Feld, wie bereits erwähnt, nur annähernd kreisförmig induziert wird. Das induzierte Feld folgt einem Vektor, der durch die Form der Spule gegeben ist. Dies führt weiterhin dazu, dass die Feldwerte im radialen Mittelpunkt nicht auf null abklingen, wodurch rotationssymmetrische Ansätze nicht anwendbar sind. Dies wird in Kap. 5 näher erläutert.

4.1.3 Einstellung des FDM-basierten Solvers

Da im Modell die elektromagnetisch gekoppelten Felder durch die numerische Repräsentation der magnetischen Diffusionsgleichung aus Gl. (3.3.4) berechnet werden, wird der numerische Solver zunächst optimal eingestellt. Diese optimale Einstellung ist nicht zwingend nötig – sie dient jedoch zur Steigerung der Effizienz des Solvers. Generell könnte man das Simulationsvolumen sehr groß und die Schrittweite gleichzeitig sehr klein machen, wodurch die Approxima-

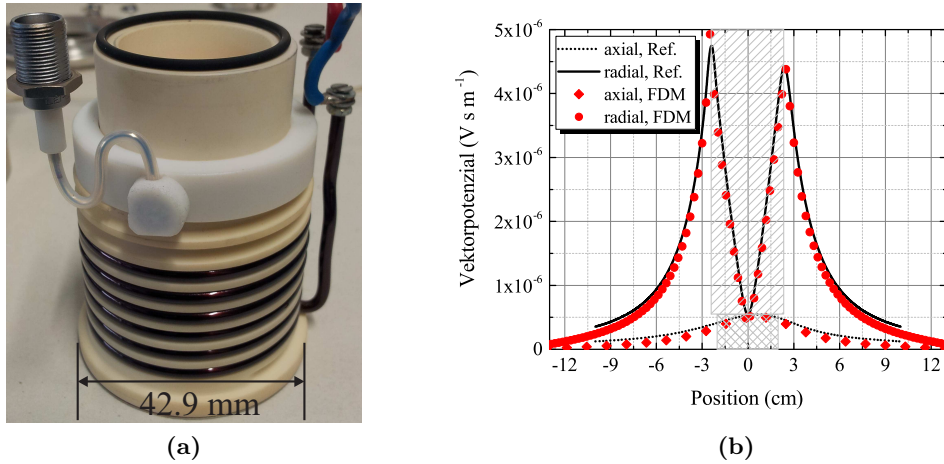


Abbildung 4.1.6: RIM-4 Entladungsgefäß und Spule (a), auf experimentell verifizierte semi-analytisch berechnete Referenz (mit $\kappa = 0$) eingestellte FDM-Lösung (b). Die Simulationen wurden jeweils entlang des axialen und radialen Schnittes durch das Entladungsgefäß durchgeführt. Die schraffierten Bereiche stellen jeweils den axialen bzw. radialen Innenbereich des Entladungsgefäßes dar. Dort decken sich die Verläufe gut.

tion an die physikalischen Verläufe immer besser wird. Allerdings steigt die Simulationsdauer, was in Kap. 3.3 bereits angesprochen wurde, zur dritten Potenz der Diskretisierungstiefe. Deshalb bietet es sich an, die Diskretisierungstiefe sowie die Größe des Simulationsvolumens anhand der semi-analytischen Lösung, welche experimentell verifiziert ist, festzulegen. Da das elektromagnetische Modell iterativ aufgerufen wird (vgl. Abb. 3.1.1), würde aus einer Gesamtsimulationsdauer von etwa einer Stunde ohne effiziente Einstellung leicht ein Tag werden. Im Folgenden ist der Einstellungsprozess anhand der RIM-4 Geometrie dargestellt, da dieses Triebwerk letztendlich detailliert in Kap. 5 untersucht wird. Abbildung 4.1.6 (a) zeigt das RIM-4 Entladungsgefäß mit Spule. Es unterscheidet sich marginal zur vorher vorgestellten RIT-4 Geometrie.

Die entlang eines axialen und radialen Schnittes durch das Entladungsgefäß berechneten Verläufe des optimal eingestellten FDM-Solvers decken sich im Innenbereich des Entladungsgefäßes gut mit der experimentell verifizierten analytischen Referenz für eine Leitfähigkeit von $\kappa = 0$. Im Außenbereich klingt die FDM-Lösung schneller ab, da die Randbedingungen mit $\tilde{\mathbf{A}}(\mathbf{x}_D) = \mathbf{0}$ dies vorgeben (s. Kap. 2.1.4 und Kap. 3.3). Da zur selbstkonsistenten Behandlung des Modells die Felder im Plasmabereich wichtig sind, ist der Effekt des schnelleren Abklingens an den Simulationsgrenzen vernachlässigbar auf die Qualität der Berechnungen. Für die RIM-4 Geometrie ergibt die Einstellung auf die semi-analytische Lösung eine Diskretisierungstiefe von $m = 116$ diskreten Punkten pro Raumrichtung in einem Simulationswürfel mit 30 cm Kantenlänge. Das Lösen der Systemmatrizen beläuft sich damit auf etwa 16 s bei rund 8 GiB Arbeitsspeicherbelegung. Im Gegensatz dazu dauert die semi-analytische Berechnung dieses Problems etwa 4 min bei extrem großer Arbeitsspeicherbelegung (etwa 180 GiB).

Aus den Verläufen kann weiterhin der Charakter der kurzen Spule herausgelesen werden. Wie bereits erwähnt, klingen die Felder zum radialen Mittelpunkt hin nicht zu null ab, was eine perfekte rotationssymmetrische Anordnung allerdings diktieren würde. Man sieht, dass ein erheblicher Anteil des elektrischen Feldes (oder des Vektorpotenzials) in axialer Richtung

Tabelle 4.1: Geometrische Daten des 1D-Plasmagenerators aus Ref. 15.

N_c	r_c (mm)	d_w (mm)	l (mm)	d_v (mm)
5	80	6	300	130

wirkt, was durch die Steigung der Spule bedingt ist.

Die experimentelle Verifikation der Ergebnisse des semi-analytischen Solvers für das Vektorpotenzial bzw. das elektrische Feld aus Kap. 4.1.2 setzte die Abwesenheit eines leitfähigen Mediums voraus. Dies ist zum einen dadurch bedingt, dass die Messungen im Plasma hätten durchgeführt werden müssen und zum anderen, dass der semi-analytische Solver auf der vektoriellen Poisson-Gleichung beruht, die nur im Vakuum gilt. Der Einfluss des Plasmas auf die Felder wird durch die Lösung der FDM-basierten Diffusionsgleichung berücksichtigt. Dass sich die Felder auch im Plasma korrekt verhalten, wird anhand einer Verifikation über die absorbierte Leistung im folgenden Abschnitt gezeigt.

4.2 Analytische Verifikation des Plasmamodells

Das Plasmamodell aus Kap. 3.2 kann über die absorbierte Leistung verifiziert werden, da es letztendlich die globale Leitfähigkeit des Plasmas κ_p nach Gl. (2.2.60) bestimmt. Dies ist zur Verifikation für einen Plasmagenerator aus Ref. 15, bestehend aus Entladungsgefäß und Spule, durchgeführt worden. Die geometrischen Daten des Plasmagenerators sind in Tab. 4.1 dargestellt, wobei N_c die Anzahl der Spulenwindungen, r_c den Radius der Spule, d_w den Durchmesser des Spulendrahtes, l die axiale Länge der Spule und des Entladungsgefäßes und d_v den Innendurchmesser des Entladungsgefäßes bezeichnen.

Aufgrund der langen Form der Spule, können die eingekoppelten Felder nach Ref. 15 näherungsweise eindimensional betrachtet werden. Die durch die Felder absorbierte Leistung dient der Ausgabe des hier vorgestellten Modells als Referenz. Obwohl die Felder hier dreidimensional berechnet werden, wird die absorbierte Leistungsdichte nach Gl. (3.4.5) integriert, um die Leistung zu erhalten. Diese Leistung wird mit jener in Ref. 15 berechneten verglichen. Zuvor soll jedoch der Einfluss des Skin-Effekts auf das induzierte elektrische Feld dargestellt werden. Dieser ist nach Gl. (2.1.46) eine Funktion der Leitfähigkeit, welche wiederum nach Gl. (2.2.60) eine Funktion der Elektronendichte (durch ω_{pe}) darstellt.

Abbildungen 4.2.1 (a)–(d) stellen den Einfluss wachsender Elektronendichte auf die Einkopplung elektrischer Felder in das Plasma dar. Dazu wurde die Elektronendichte nicht als selbstkonsistente Größe angesehen, sondern fest definiert, wie in Ref. 109 erläutert. Weiterhin wurde der Programmablauf für diese Simulation vor dem Energieerhaltungsmodell abgebrochen, um die selbstkonsistente Berechnung von n_e nicht stattfinden zu lassen. Wie in Ref. 15, wurde auch hier der Druck so angepasst, dass stets ein Verhältnis von $\nu_{m,eff}/\omega = 1$ eingehalten wird, wodurch sich die Entladung im kollisionsbehafteten Regime befindet.

In den Abbildungen erkennt man, dass die Eindringtiefe für elektromagnetische Felder bei einer niedrigen Elektronendichte von 10^{16} m^{-3} (Teilbild (a)) kaum gestört ist. Sie unterscheidet sich in diesem Falle nicht von jener im Vakuum, was in Ref. 15 dargestellt ist. Erhöht sich die Elektronendichte auf 10^{17} m^{-3} (Teilbild (b)), erkennt man ein rascheres radiales Abklingen des Feldes. In diesem Bereich kompensieren sich die Einflüsse des Skin-Effekts und der Leitfähigkeit nahezu, wodurch die Einkopplung dort maximal ist. Darauf wird im Folgenden

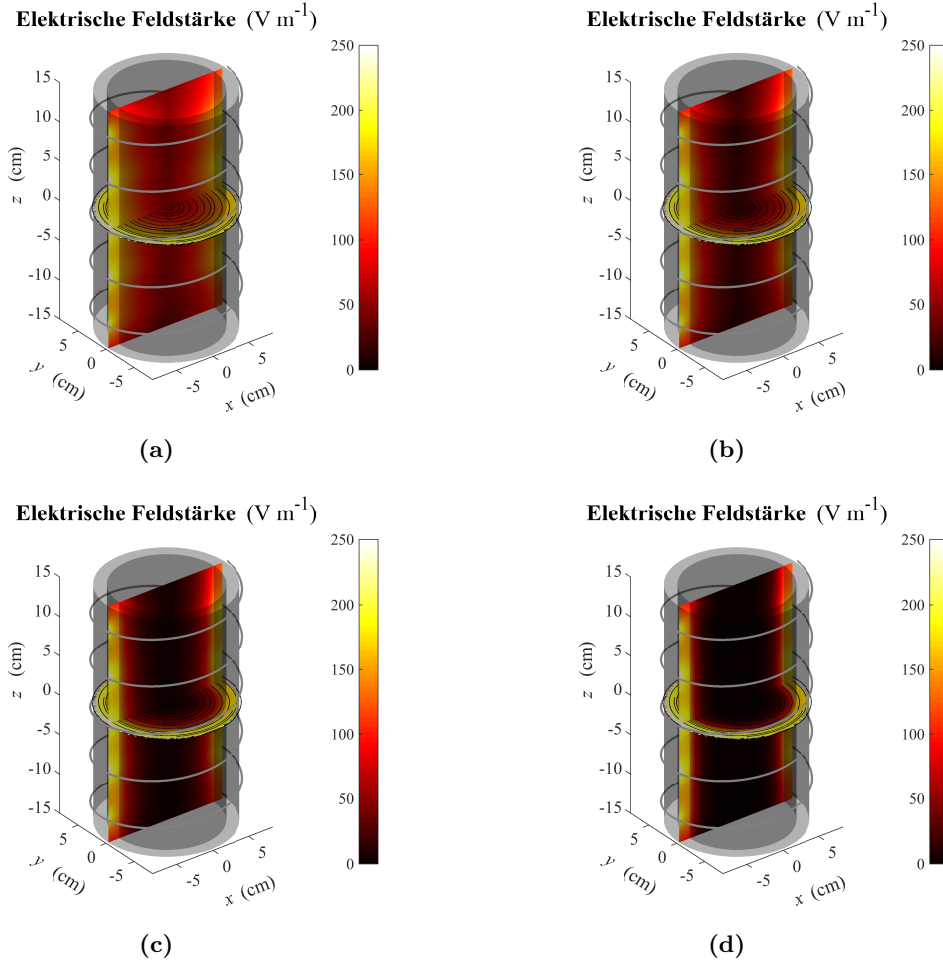


Abbildung 4.2.1: Einfluss der Elektronendichte auf die Eindringtiefe elektromagnetischer Felder am Beispiel des Plasmagenerators aus Ref. 15. Bei sehr hohen Elektronendichten ist eine Kopplung in das Plasma kaum mehr möglich. Die Teilbilder zeigen Elektronendichten von (a) 10^{16} m^{-3} , (b) 10^{17} m^{-3} , (c) $3 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$ und (d) 10^{18} m^{-3} .

genauer eingegangen. Der Skin-Effekt überwiegt bereits bei einer Elektronen- bzw. Plasma- dichte von $3 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$, was in Teilbild (c) ersichtlich ist. Wächst die Elektronendichte weiter auf 10^{18} m^{-3} (Teilbild (d)), ist die Eindringtiefe zu klein, um effizient Leistung einkoppeln zu können. In allen Teilbildern wird jeweils der gleiche Anteil elektromagnetischer Leistung in der dielektrischen Gefäßwand deponiert, welche das Plasma von der Spule trennt. Da die Gefäßwand beim Gießener RIM-4 sehr dünn im Vergleich zu jener aus Abb. 4.2.1 ist, werden Leistungsverluste dort im weiteren Verlauf nicht berücksichtigt.

Im vorherigen Absatz wurde angedeutet, dass die Energieeinkopplung bei einer Elektronen- dichte von etwa 10^{17} m^{-3} , bedingt durch die gegenseitige Kompensation von Leitfähigkeit und Skin-Effekt, ein Maximum erreicht. Ist die Elektronendichte kleiner als dieser Schwellwert, hat der Skin-Effekt nahezu keinen Einfluss und die eingekoppelte Leistung ist gemäß $P_{\text{abs}} \propto n_e$ proportional zur Elektronendichte. Durch eine Erhöhung der Elektronendichte wird die Leit- fähigkeit zwar immer größer, doch lässt sich ab dem Schwellwert die Leistung nicht mehr gut

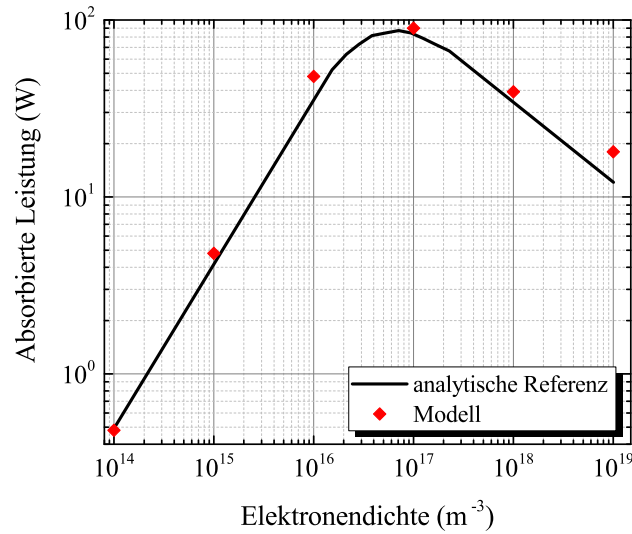


Abbildung 4.2.2: Verifikation des Plasmamodells anhand der von Elektronen- bzw. Plasmadichte abhängigen eingekoppelten Leistung aus Ref. 15. In Bereichen niedriger Plasmadichten überwiegt der Einfluss der Leitfähigkeit, die die absorbierte Leistung als Funktion der Elektronendichte steigen lässt. Nach dem Kompensationspunkt steigt die Leitfähigkeit zwar weiterhin an; dadurch bedingt sinkt allerdings die Skin-Eindringtiefe, was in Summe zu einer schlechteren Einkopplung führt.

einkoppeln aufgrund der stets kleiner werdenden Eindringtiefe für elektromagnetische Felder nach Gl. (2.1.46). Nach dem Schwellwert verhält sich die Leistung gemäß $P_{\text{abs}} \propto n_e^{-1/2}$ proportional zur inversen Wurzel der Elektronendichte, da sich die Wurzel der Leitfähigkeit selbst invers auf die Skin-Eindringtiefe auswirkt. Eine Referenzkurve aus Ref. 15 stellt dies quantitativ in Abb. 4.2.2 dar. Die Simulationsergebnisse des hier vorgestellten Modells sind ebenso in der Abbildung ersichtlich. Bis auf Bereiche extrem hoher Plasmadichten, wo das entwickelte Modell an seine Gültigkeitsgrenzen stößt (mehr dazu findet sich in Kap. 6) ist die Übereinstimmung mit der analytischen Referenz gut, wodurch sich das angewandte Verfahren verifizieren lässt. Da solche extrem hohen Plasmadichten für typische Arbeitspunkte bei RIT, besonders beim Gießener RIM-4, nicht erreichbar sind, ist die Abweichung an dieser Stelle akzeptabel. Um Plasmadichten in diesem Bereich zu erhalten, müsste sehr viel elektrische Leistung aufgebracht werden, was die Effizienz des Triebwerkes extrem klein werden ließe, sofern ein stabiler Betrieb überhaupt gewährleistet werden könnte. Detaillierte Studien zum Thema der Effizienzen sind in Kap. 5 dargestellt.

4.3 Experimentelle Verifikation des Gesamtmodells

In den vorherigen Abschnitten wurden einzelne Modellteile unabhängig voneinander verifiziert. Im aktuellen Abschnitt soll das Modell in seiner Gesamtheit verifiziert werden. Dies wird anhand von RIT-typischen Performance-Mappings durchgeführt. Diese Performance-Mappings evaluieren die Leistung, die abhängig vom Volumenstrom benötigt wird, um einen konstanten Schub, bzw. extrahierten Ionenstrom bei fixen Extraktionsspannungen, aufrecht zu erhalten.

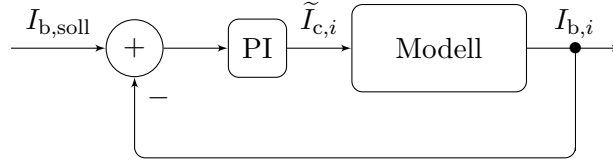


Abbildung 4.3.1: *Proportional-Integral-Regelkreis des extrahierten Ionenstromes. Durch diese Regelstruktur lässt sich der Spulenstrom der aktuellen Iterationsstufe $\tilde{I}_{c,i} = f(I_{b,i})$ als Funktion des extrahierten Ionenstromes der aktuellen Iterationsstufe beschreiben. $I_{b,soll}$ beschreibt dabei die Führungsgröße.*

Tabelle 4.2: *Geometrische Daten des RIM-4 Triebwerks.*

N_c	r_c (mm)	d_w (mm)	l (mm)	d_v (mm)	d_s (mm)	d_a (mm)	t_s (mm)	N_g	l_g (mm)
6	22.70	3.00	41.00	42.90	1.90	1.20	0.50	151	0.75

Solche Performance-Mappings wurden für das RIM-4 an der JLU aufgenommen.

Um die benötigte Leistung für verschiedene Volumenströme bei konstanten Extraktionsströmen zu erhalten, muss das Modell selbst iterativ aufgerufen werden, da der extrahierte Ionenstrom eine Ausgangsgröße beschreibt. Die Iteration wird gemäß Abb. 4.3.1 mittels Proportional-Integral-Regler (PI-Regler) realisiert. Dazu wird die Regelgröße bzw. der extrahierte Ionenstrom I_b , der selbst eine Funktion des Spulenstromes \tilde{I}_c ist, wieder an den Eingang der Regelschleife zurückgeführt und mit der Führungsgröße, dem Soll-Wert des extrahierten Ionenstroms $I_{b,soll}$, verglichen. Die Stellgröße in der i -ten Iteration, d. h. der Spulenstrom $\tilde{I}_{c,i}$, wird durch Multiplikation der Differenz von Führungs- und Regelgröße mit einem konstanten Verstärkungsfaktor k_{PI} und Addition mit einem initialen Strom $\tilde{I}_{c,0}$ gemäß

$$\tilde{I}_{c,i} = \tilde{I}_{c,0} + k_{PI} \sum_{i=1}^{\infty} (I_{b,soll} - I_{b,i}) \quad (4.3.1)$$

gebildet. Das Verfahren konvergiert umso schneller, je genauer der Initialwert gewählt wird.

Durch den Einsatz eines PI-Reglers ist es möglich, stationäre Genauigkeit der Regelgrößenabweichung zu erhalten [8]. Das bedeutet, dass das Verfahren garantiert, innerhalb eines vorgegebenen Toleranzbandes, konvergiert. Der Verstärkungsfaktor beträgt hier 100 und wirkt sich auf die Konvergenzgeschwindigkeit aus. Wird sein Wert zu klein angesetzt, dauert die Konvergenz sehr lange. Ist der Wert zu groß, kann es zu Überschwingern kommen, welche auch wiederum die Konvergenzgeschwindigkeit herabsetzen. Das Toleranzband für zulässige Abweichungen wurde an die Messungen angepasst und beträgt $\pm 1\%$.

Abbildung 4.3.2 (a) zeigt simulierte Performance-Mappings des RIM-4 Triebwerks für vier extrahierte Ionenströme im Bereich 5 – 12.5 mA. Die geometrischen Daten des Triebwerks sind in Tab. 4.2 dargestellt. Für die Simulationen werden die Verluste des RFGs und der Zuleitung zur Triebwerksspule vernachlässigt, da das Modell die Triebwerksimpedanz entkoppelt vom Generator berechnen soll.

Die Performance-Mappings werden für das Stützgas Xenon mit Abschirmgitterspannung von $V_{scr} = 1250$ V, Bremsgitterspannung von $V_{dec} = 150$ V und Umgebungs- sowie Neutralgastemperatur von $T_n = 400$ K evaluiert. Man kann nicht von Raumtemperatur ausgehen, da sich das Triebwerk real im Vakuum befindet, wodurch Konvektion zum Wärmeaustausch ausgeschlos-

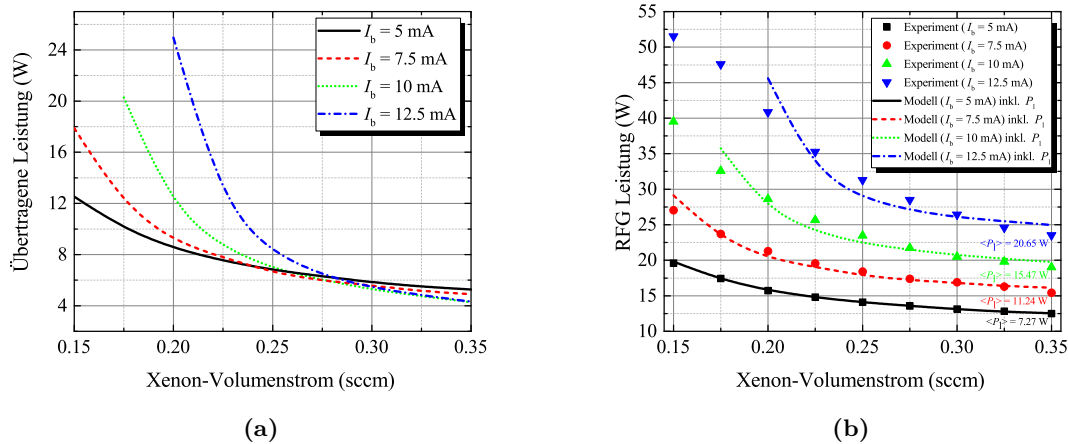


Abbildung 4.3.2: Simulierte Performance-Mappings eines RIM-4 Triebwerks unter Vernachlässigung peripherer Verluste (a). Ist der Skalierungsparameter β korrekt bestimmt, decken sich die Kurvenverläufe mit den experimentell ermittelten (b). Die konstant angenommene Differenz zwischen modellierten und gemessenen Verläufe entspricht der peripheren Verlustleistung $\langle P_l \rangle$ und kann nun mittels Offset-Korrektur kompensiert werden.

sen ist. Wie in Ref. 100 beschrieben, hat der Wert der Neutralgastemperatur allerdings keinen großen Einfluss auf das Gesamtergebnis, da in jedem Fall $T_e \gg T_n$ gewährleistet ist.

Die Verifikation der Performance-Mappings, und somit der Ausgabe des Gesamtmodells, ist in Abb. 4.3.2 (b) dargestellt. Dazu wird der Skalierungsparameter β iterativ geändert, bis die Verläufe der simulierten Daten jenen der experimentellen Daten entsprechen. Setzt man weiterhin konstante RFG- und Zuleitungsverluste $\langle P_l \rangle$ innerhalb des Volumenstrombereichs 0.15 – 0.35 sccm voraus, kann man aus der Differenz der modellierten und gemessenen Werte die Verlustleistung dieser peripheren Geräte ermitteln. Wie man der Abbildung entnehmen kann, decken sich die Verläufe nach einer Offset-Korrektur vor allem für kleine Strahlströme und größere Volumenströme gut. Die wachsende Abweichung zu kleineren Volumen- und größeren Strahlströmen hin ist durch Gültigkeitsgrenzen des Modells bedingt und wird in Kap. 6 genauer diskutiert. Mit dem Modell kann man also, zusätzlich zur Beschreibung des Arbeitspunktes des Triebwerkes, eine Abschätzung über die Verluste im RFG und in der Zuleitung liefern. Dies ist zwar kein fundamentaler Bestandteil dieser Arbeit gewesen, doch schafft es eine neue Qualität, die in weiterführenden Studien beachtet werden sollte.

Ein Punkt, der hier nicht unerwähnt bleiben darf, ist die Wahl des Skalierungsparameters β . Im Gegensatz zur Darstellung in Ref. 100, in der davon ausgegangen wird, dass β einzig von der Extraktionsapertur der Gitter abhängt, wurde während des Verifikationsprozesses der Ausgaben des hier vorgestellten Modells ebenso eine starke Abhängigkeit vom extrahierten Ionenstrom festgestellt. Dies ist in Abb. 4.3.3 visuell dargestellt. Durch einen exponentiellen Fit konnte eine empirische Formel entwickelt werden, die den Skalierungsparameter als Funktion der Gittergeometrie und der Führungsgröße, dem Soll-Wert des extrahierten Ionenstroms,

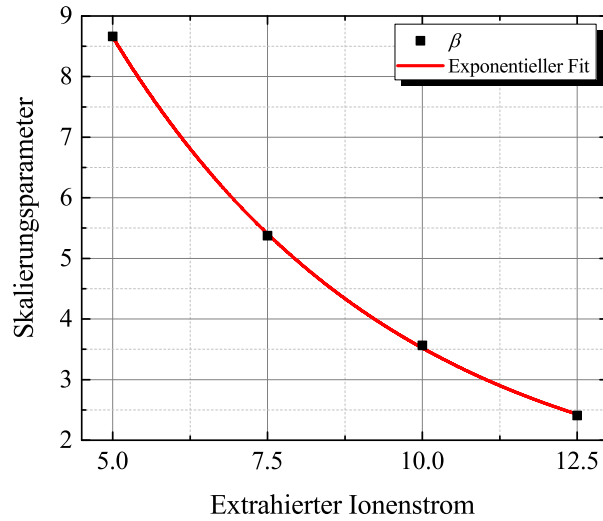


Abbildung 4.3.3: Skalierungsparameter und exponentieller Fit zur Herleitung des empirischen Zusammenhangs aus Gl. (4.3.2).

abbildet. Der empirische Zusammenhang ergibt sich zu

$$\beta \approx \frac{d_a l_g}{t_s d_s} + \frac{d_v}{d_s} \exp\left(-\frac{t_s + l_g}{2(d_a + d_s)} \frac{I_{b,\text{soll}}}{\text{mA}}\right). \quad (4.3.2)$$

Wie der Abbildung zu entnehmen ist, wird sich der Skalierungsparameter bei höheren Ionenströmen sättigen. Rechnungen haben ergeben, dass sich die Kurve asymptotisch dem Wert 1 annähert. Physikalisch ist dies der Übergang von modifiziertem zu klassischem Child-Langmuir Modell. Extrahiert man also mehr Strom, wird die klassische Lösung immer wahrscheinlicher, was durch eine ansteigende Randschichtdicke und dadurch bedingt die früher eintretende Raumladungsbegrenzung des Stroms erklärbar ist. Dies lässt sich mit dem Modell hier nicht weiter verfolgen, da man bei diesen hohen Strömen schnell den Gültigkeitsbereich der Fluid-Annahme der Plasmaentladung überschreitet, was detaillierter in Kap. 6 dargestellt wird.

Kapitel 5

Simulationsergebnisse des Gießener RIM-4 Triebwerks

Dieses Kapitel zeigt zunächst Simulationsergebnisse für das untersuchte RIM-4 Triebwerk. Dabei werden neben elektromagnetischer Feldverteilung auch die entladungsbeschreibenden Plasmaparameter und Impedanzen sowie die von den Eingabeparametern abhängigen Performance-daten evaluiert. Die Evaluation geschieht im Hinblick auf das Auffinden optimaler Betriebsparameter. Weiterhin werden strukturelle Einflüsse sowohl der Spule als auch des Entladungsgefäßes auf den Gesamtwirkungsgrad des Triebwerks aufgezeigt. Durch diese Virtual-Prototyping-Funktionalität lässt sich das entwickelte Modell sehr gut als Optimierungswerkzeug einsetzen.

5.1 Optimierte Betriebsparameter eines RIM-4 Triebwerks

Im letzten Teil des vorangegangenen Kapitels wurden simulierte Performance-Mappings des RIM-4 Triebwerks gezeigt, welche anhand experimenteller Messwerte verifiziert werden konnten. Darauf aufbauend sollen im ersten Teil des aktuellen Kapitels die zugehörigen physikalischen und technischen Daten der Plasmaentladung und des Antriebssystems in seiner Gesamtheit für die gezeigten Performance-Mappings dargestellt werden.

5.1.1 Quasi-homogene Plasmaparameter

Zu Anfang werden die quasi-homogenen plasmaphysikalischen Eigenschaften der induktiven Entladung betrachtet. Die Simulationsergebnisse beschreiben selbstkonsistent das Plasma, das sich nach Konvergenz der verschachtelten physikalischen Erhaltungsgleichungen aus den vorangehenden Kapiteln ergibt. Das Konvergenzverhalten des Gesamtmodells für Eingabeparameter gemäß Tab. 5.1, die einen Ionenstrom von $I_b = 5 \text{ mA}$ bewirken, ist in Abb. 5.1.1 dargestellt. Das Erreichen der Konvergenz innerhalb von 40 Iterationszyklen, wie in der Abbildung dargestellt, dauert etwa 40 Minuten, so dass man näherungsweise, für eine Diskretisierungstiefe

Tabelle 5.1: *Eingabeparameter des Konvergenzplots aus Abb. 5.1.1. Der sich nach Gl. (4.3.1) ergebende Spulenstrom ist hier für einen Ionenstrom von 5 mA angegeben.*

Gas	m	f (MHz)	\dot{V} (sccm)	\tilde{I}_c (A)	T_n (K)	V_{scr} (V)	V_{dec} (V)
Xenon	116	2.435	0.15	5.28	400	1250	150

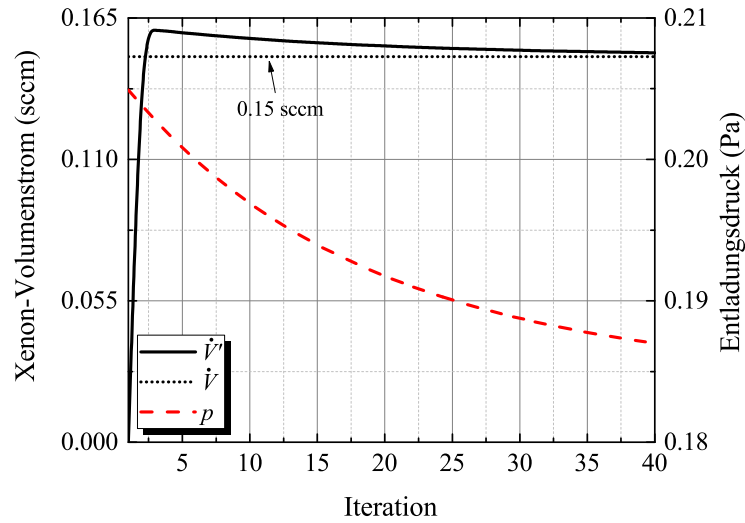


Abbildung 5.1.1: Konvergenzverhalten der verschachtelten Erhaltungsgleichungen des numerischen Modells für $I_b = 5 \text{ mA}$. Abhängig vom iterativ berechneten Volumenstrom \dot{V}' wird gleichzeitig der Entladungsdruck p zur Konvergenz gebracht. Konvergenz wird angenommen, wenn der vorgegebene Volumenstrom \dot{V} innerhalb der definierten Genauigkeitsgrenzen erreicht ist.

von $m = 116$ Knoten pro Raumrichtung (vgl. Kap. 4.1.3), eine Rechenperformance von einer Minute/Zyklus erhält. Wie bereits erwähnt, steigt die Simulationsdauer allerdings zur dritten Potenz der Anzahl der diskreten Knoten pro Raumrichtung, so dass die optimale Einstellung des Solvers auf die Referenzlösung einen erheblichen Geschwindigkeitszuwachs, bei ausreichender Rechengenauigkeit, mit sich bringt.

Die Simulationen werden mit Xenon als Stützgas durchgeführt, um praxisrelevante Aussagen machen zu können. Für neutrales Xenon liegt die erste Ionisierungsenergie bei 12.13 eV [32] und die notwendige Energie zur Anregung des ersten angeregten Zustandes bei etwa 8.31 eV [43]. Trotz der Beschränkung auf diese Anregungsenergie wird, wie in Kap. 3.2 erläutert, die Summe aller zur Verfügung stehenden korrespondierenden Stoßquerschnitte für die Modellierung des Plasmas genutzt. Da die Anregungsenergien der einzelnen angeregten Zustände ziemlich nah beieinander liegen, ist dies eine nach Ref. 34 gültige Vorgehensweise.

Abbildung 5.1.2 zeigt die konvergierten Plasmaparameter Elektronentemperatur (Teilbild (a)), Entladungsdruck (Teilbild (b)), Teilchendichten (Teilbild (c)) und Ionisierungsgrad (Teilbild (d)). Um die Verläufe zu analysieren, muss man stets alle Größen betrachten, da die selbstkonsistente Beschreibung des Plasmas von allen vier Parametern abhängt.

Man erkennt in Teilbild (a), dass die Elektronentemperatur zu kleineren Volumen- und größeren Ionenströmen hin ansteigt. Dies ist über den Zusammenhang von Temperaturen, Teilchendichten und Druck nach Gl. (3.2.9) erklärbar. In Bereichen kleinerer zugeführter Neutralgasvolumenströme ist demzufolge die Neutralgasdichte n_n ebenso niedrig (vgl. Teilbild (c)). Um nach dem idealen Gasgesetz einen konstanten Entladungsdruck zu erhalten, muss die Elektronentemperatur (bei konstanter Neutralgas- und Iontemperatur) entsprechend groß sein. Erhöht man die einströmende Gasmenge, nimmt die Neutralgasdichte erwartungsgemäß zu und die Elektronentemperatur ab. Interessanterweise ergibt sich daraus ein Minimum für

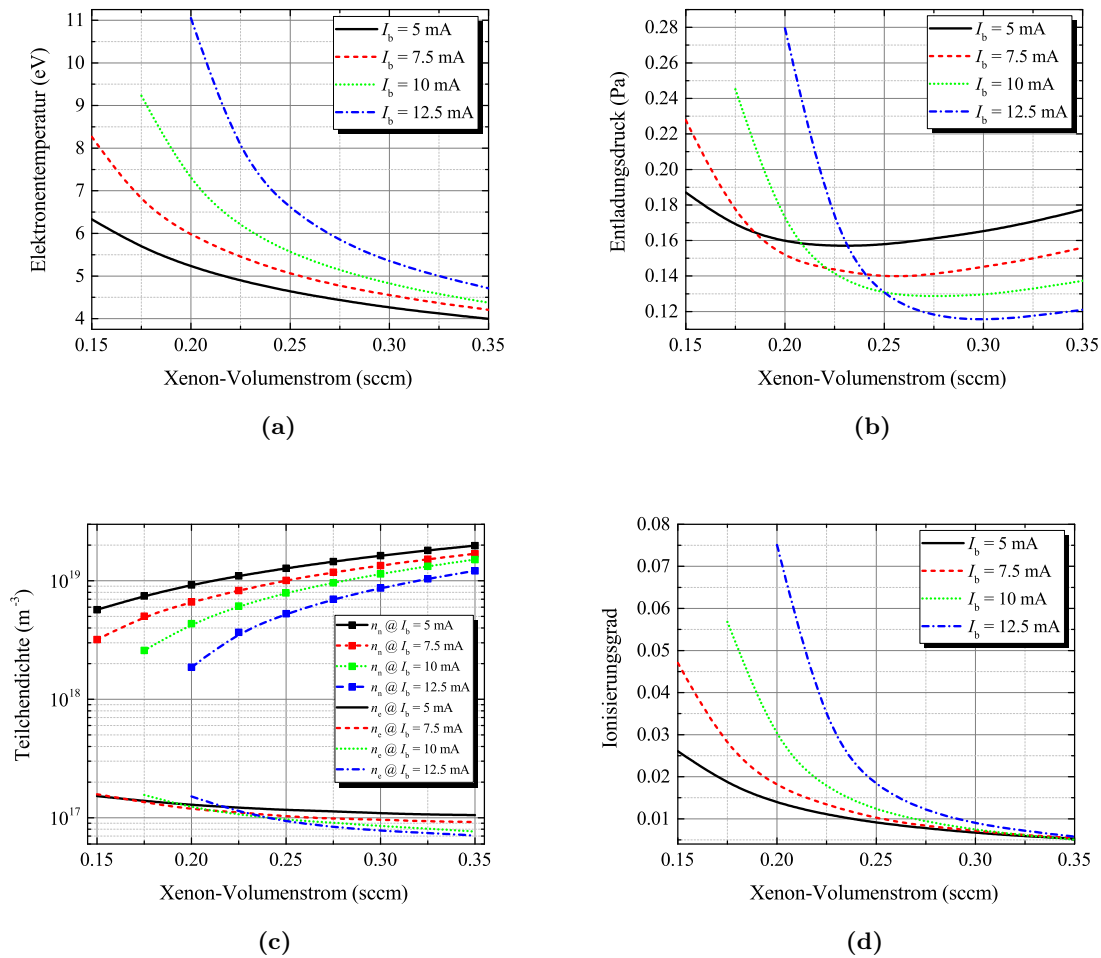


Abbildung 5.1.2: Konvergierte Plasmaparameter des RIM-4 Triebwerks. Die Verläufe sind abhängig von Volumen- und Strahlstrom dargestellt. Die Abbildung zeigt die selbstkonsistenten Parameter Elektronentemperatur (a), Entladungsdruck (b), Neutralgas- und bulk-Ladungsträgerdichte (c) sowie den Ionisierungsgrad (d).

den Entladungsdruck, wie in Teilbild (b) für die verschiedenen Strahlströme erkennbar ist. In Bereichen niedriger Volumenströme, in denen die Elektronentemperatur relativ hoch ist, sind ionisierende Stöße umso wahrscheinlicher (vgl. Abb. 3.2.2), was sich wiederum im Ionisierungsgrad (Teilbild (d)) niederschlägt. Durch den relativ hohen Ionisierungsgrad und die relativ hohe Elektronentemperatur dominiert der erste Term im Nenner von Gl. (3.2.9), was zu einem erhöhten Druck führt. In Bereichen großer Volumenströme ist dieser Einfluss gering; der leicht ansteigende Entladungsdruck ist dort durch die größer werdende Menge an Gaspunkten bedingt. Eine Korrelation zwischen der Lage des Druckminimums und des maximalen Gesamtwirkungsgrads des Triebwerks ist weiterhin zu beobachten, was in Kap. 5.1.4 verdeutlicht wird.

Der Volumenstrom-Bereich von 0.15 bis 0.35 scm wurde für die Simulation ausgewählt, da in diesem Bereich auch die Verifikation des Modells vorgenommen werden konnte (vgl. Kap. 4.3).

Weiterhin ist dies der für die aktuelle Geometrie interessante Bereich, da der Gesamtwirkungsgrad zu höheren Volumenströmen abnimmt, was im weiteren Verlauf des Kapitels besprochen wird. Eine Abweichung vom vermeintlich nach Abb. 5.1.2 auftretenden asymptotischen Verhalten der Plasmaparameter tritt auf, wenn die Elektronentemperatur zu gering wird, wodurch die Stoßwahrscheinlichkeit geringer und somit mehr Leistung für die Entladung benötigt wird. Diese Änderung ist allerdings im Bereich kleiner Massenwirkungsgrade anzusiedeln und wird daher nicht genauer untersucht.

5.1.2 Elektromagnetische Feldverteilung

Dieser Abschnitt behandelt die elektromagnetische Feldverteilung inner- und außerhalb des RIM-4 Entladungsgefäßes. Dazu wird als erstes die Abhängigkeit der induzierten Felder vom extrahierten Ionenstrom I_b , der selbst wiederum vom Spulenstrom \tilde{I}_c abhängt, für einen konstant gehaltenen Xenon-Volumenstrom von 0.2 sccm in Abb. 5.1.3 dargestellt. Dabei zeigen die Teilabbildungen (a), (c) und (e) den Betrag des induzierten elektrischen Feldes $E = |\tilde{\mathbf{E}}|$ und (b), (d) und (f) den Betrag der magnetischen Induktion $B = |\tilde{\mathbf{B}}|$. Weiterhin sind die charakteristischen Feldlinien eingezeichnet; allerdings nur in der entsprechenden kartesischen Tangentialebene, in der sie dominant verlaufen.

Erwartungsgemäß steigen die Beträge der induzierten Größen mit I_b (resp. \tilde{I}_c) an. Die Phasenverschiebung zwischen Spulenstrom und Plasmastrom beträgt etwa -138° , was zum einen durch die komplexe Leitfähigkeit des Plasmas und zum anderen durch den Ohm'schen Widerstand des Spulendrahtes bedingt ist. Die Phasenverschiebung kann für die gezeigten Ionenströme als konstant angenommen werden, da die relative Änderung der komplexen Leitfähigkeitskomponenten etwa gleich ist. Anhand der Phasenverschiebung kann man erkennen, dass die Lenz'sche Regel hier nicht ohne Modifikation anwendbar ist, da sie von einer idealen induktiven Kopplung ausgeht. Dies wirkt sich auf die Gegeninduktivität des Transformators aus und wird im nächsten Abschnitt genauer untersucht.

Die Feldlinien des elektrischen Feldes geben Aufschluss über die kurze Geometrie der Spule. Da die Feldlinien – wie bereits erwähnt – auf die ihnen nächstliegende kartesische Tangentialebene abgebildet werden (am Beispiel des elektrischen Feldes also auf die xy -Ebene), sind sie in dieser Ebene nicht geschlossen. Dies ist über eine axiale z -Komponente des Feldes erklärbar, welche den Feldlinienverlauf entsprechend ändert. Diese Änderung ist auf die Steigung der Spule zurückzuführen. Den Einfluss der axialen Komponente kann man sehr gut in Abb. 5.1.4 erkennen, wo sowohl das elektrische Feld in (b) als auch die magnetische Induktion in (a) entlang der x -Achse dargestellt sind. Um eine Aussage über den Einfluss des Plasmas auf die Felder zu erhalten, sind magnetische Induktion und induziertes elektrisches Feld im Entladungsgefäß für ein gezündetes und ein ungezündetes Plasma (entspricht dem Vakuumfall) aufgetragen. Durch den induzierten Plasmastrom, welcher selbst wiederum ein dem ursprünglichen Magnetfeld teilweise entgegengesetztes Magnetfeld hervorruft (wie oben erklärt, sind die Felder nicht exakt gegenläufig), wird das resultierende Magnetfeld bzw. die resultierende magnetische Induktion gegenüber der ursprünglichen gedämpft. Bei diesem Effekt handelt es sich um den Skin-Effekt, der für eindimensionale Berechnungen nach Gl. (2.1.46) berechnet werden kann. Hier ist der Zusammenhang dreidimensional über den Verlustterm in der Diffusionsgleichung aus Gl. (2.1.40) gegeben. Das elektrische Feld ist weniger anfällig. Obwohl es ebenso durch den Skin-Effekt beeinflusst wird wie die magnetische Induktion, ist kaum ein Unterschied zwischen den Verläufen ohne und mit Plasma zu verzeichnen. Dies ist dadurch

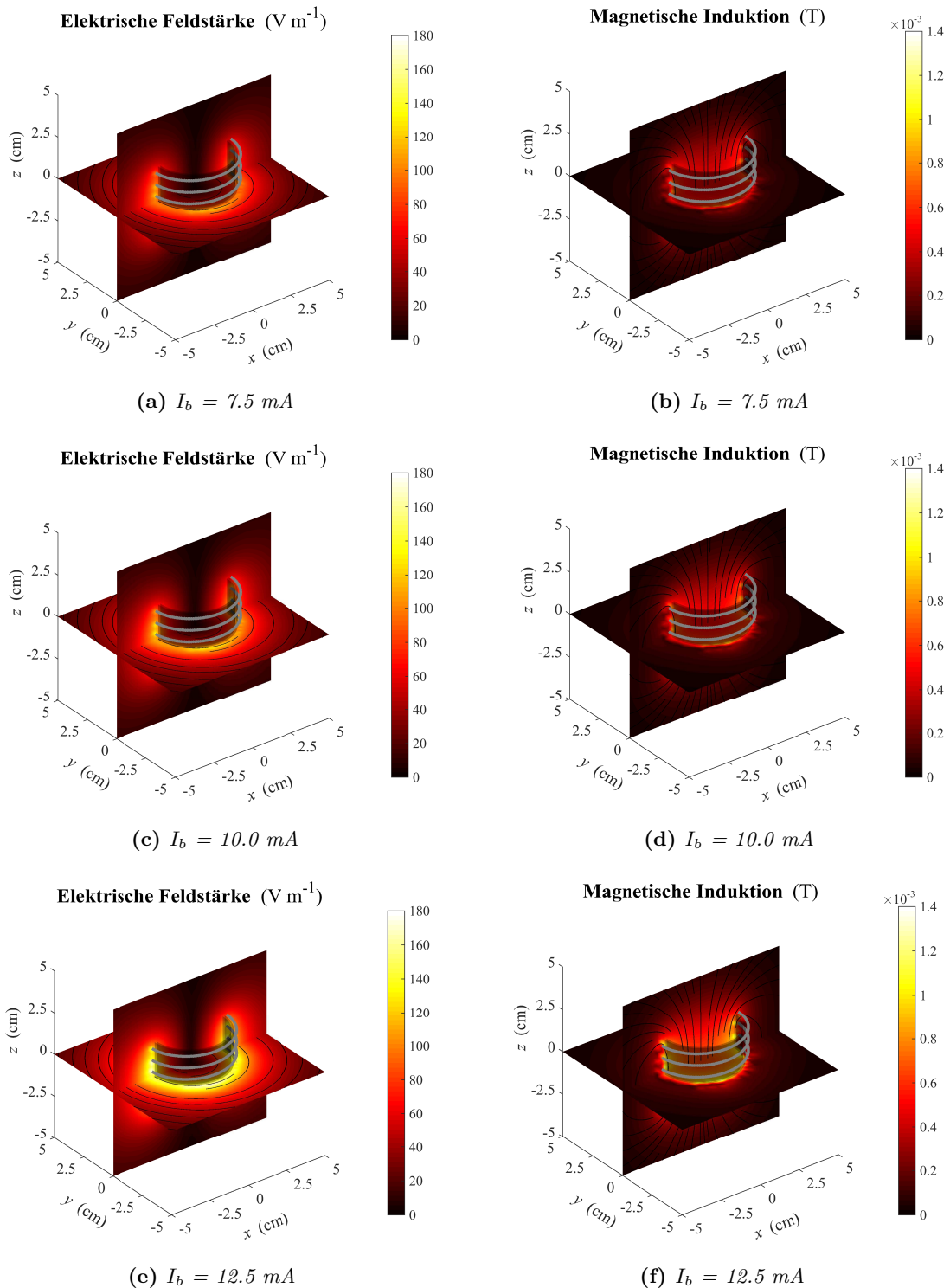


Abbildung 5.1.3: Elektromagnetische Feldverteilung im RIM-4 Entladungsgefäß. Abhängig vom extrahierten Ionenstrom I_b ist in den Teilbildern (a), (c) und (e) der Betrag des induzierten elektrischen Feldes und in den Teilbildern (b), (d) und (f) der Betrag der magnetischen Induktion für $\dot{V} = 0.2$ sccm dargestellt.

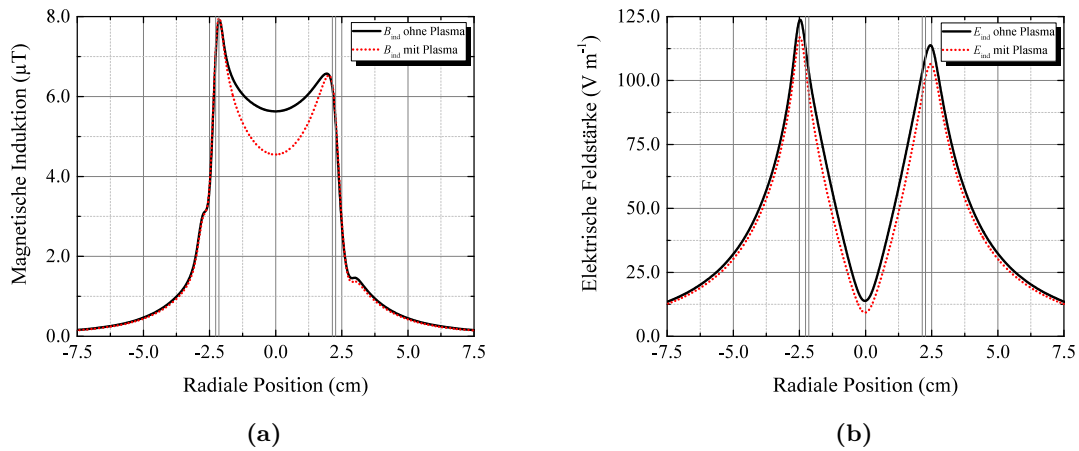


Abbildung 5.1.4: Elektromagnetische Felder im radialen Schnittbild. Die magnetische Induktion (a) sowie das induzierte elektrische Feld (b) sind für ein gezündetes und ein ungezündetes Plasma (Vakuum) dargestellt, um den Einfluss des Plasmas auf die Feldverteilung zu sehen. Das Plasma beeinflusst das elektrische Feld kaum, da es bereits aus geometrischen Gründen stark gedämpft wird. Die magnetische Induktion wird allerdings massiv beeinflusst und zur radialen Mitte hin stark gedämpft. Man erkennt weiterhin, dass das elektrische Feld aufgrund fehlender Rotationssymmetrie nicht auf null zum radialen Mittelpunkt hin abklingt.

bedingt, dass das elektrische Feld aufgrund der zylindrischen Geometrie radial linear abnimmt und diese lineare Abnahme, bei gegebener Eindringtiefe, genau der linearen Näherung des exponentiellen Abfalls, welcher durch den Skin-Effekt verursacht wird, entspricht. Das magnetische Feld bzw. die magnetische Induktion klingt naturgemäß bei der gezeigten Geometrie nicht so stark ab, so dass sich der Skin-Effekt dort bereits bei Eindringtiefen, die die Dimension des Radius des Entladungsgefäßes aufweisen, stark bemerkbar macht. Ob der Skin-Effekt die Entladung beeinflusst wird jedoch anhand des elektrischen Feldes evaluiert, da dieses die Elektronen beschleunigt und somit die Stoßprozesse steuert.

Das induzierte elektrische Feld nimmt zum radialen Mittelpunkt des Entladungsgefäßes (und somit des Plasmas) ab, wohingegen sich die magnetische Induktion auf den ersten Blick homogen im Innenbereich darstellt. Dass dies nicht der Fall ist, kann beispielsweise in Teilbild (f) aus Abb. 5.1.3 sowie in Abb. 5.1.4 (a) erkannt werden, wo eine deutliche Feldstärkenenerhöhung in den Randbereichen des Entladungsgefäßes beobachtbar ist. Durch die Konzentration der elektrischen Feldstärke nahe der Gefäßwand wird auch dort die meiste Leistung gemäß Gl. (3.4.5) eingekoppelt und vom Plasma absorbiert. Die induzierte Plasmastromdichte und die absorbierte Leistungsdichte für einen extrahierten Ionenstrom von $I_b = 10 \text{ mA}$ bei 0.2 sccm Xenon-Volumenstrom sind in Abb. 5.1.5 (a) und (b) dargestellt. Der Verlauf der absorbierten Leistungsdichte, welche das Produkt aus elektrischer Feldstärke und Stromdichte gemäß Gl. (2.2.62) beschreibt, zeigt deutlich, dass die Einkopplung nicht bis in den Innenbereich des Plasmas geschieht, sondern dass, wie bereits erwähnt, lediglich nahe der Entladungsgefäßwand effizient geheizt wird. Bei dem eingestellten Arbeitspunkt beträgt die Skin-Eindringtiefe 21.45 mm , was genau dem Innenradius r_v des Entladungsgefäßes entspricht. Demnach hat der Skin-Effekt bei diesem Arbeitspunkt keinen nennenswerten Einfluss auf die Feldeinkopp-

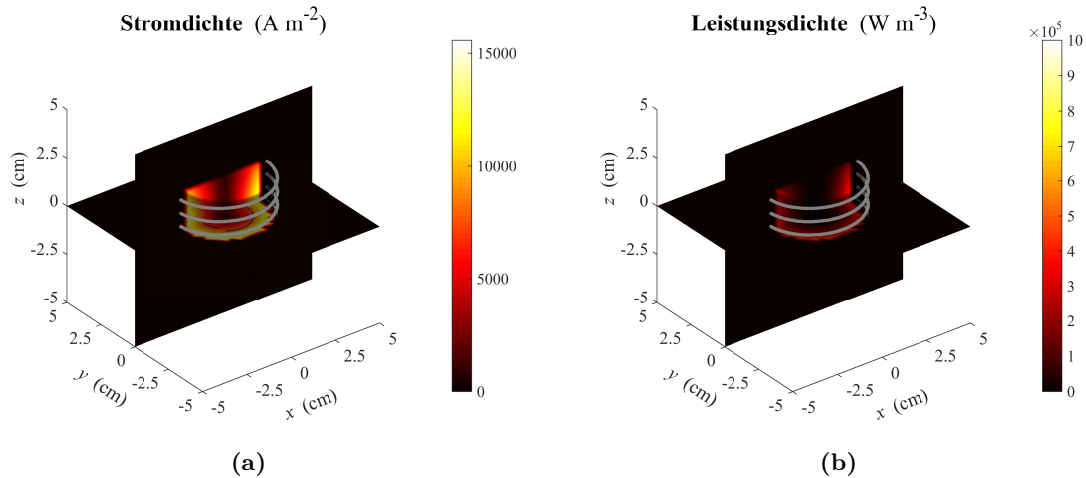


Abbildung 5.1.5: Stromdichte (a) und vom Plasma absorbierte Leistungsdichte (b) für $I_b = 10 \text{ mA}$ und $\dot{V} = 0.2 \text{ sccm}$. Man erkennt, dass die Leistungseinkopplung dominant an den Randbereichen des Entladungsgefäßes auftritt. Der Verlauf der Plasmastromdichte folgt hier jenem des elektrischen Feldes, da die Leitfähigkeit als homogen angenommen wird.

lung. Würde ein Einfluss existieren, würde noch stärker im Rand- und noch schwächer im Innenbereich geheizt werden. Beim RIM-4 ist für alle untersuchten Arbeitspunkte jedoch kein signifikanter Einfluss erkennbar.

5.1.3 Elektrische Entladungsparameter

Die elektrischen Ersatzschaltparameter des RIM-4 Triebwerks innerhalb des Xenon-Volumenstrombereichs von 0.15 bis 0.35 sccm werden in diesem Abschnitt für vier Schubniveaus gezeigt (wie oben mit fixen Extraktionsspannungen von $V_{\text{scr}} = 1250 \text{ V}$ und $V_{\text{dec}} = 150 \text{ V}$ und vier Extraktionsströmen von 5 bis 12.5 mA). Die für den treibenden Generator seriellen Lastkomponenten werden über das Transformator-Modell aus Kap. 3.7 berechnet und hier evaluiert. Abbildung 5.1.6 zeigt den Ohm'schen Widerstand (a) sowie die resultierende Gesamtinduktivität des Triebwerks im Betrieb (b). Der Betrag der Impedanz $|Z_s| = \sqrt{R_s^2 + (\omega L_s)^2}$ weist aufgrund des gegenläufigen Verhaltens von Real- und Imaginärteil nur eine leichte Dynamik auf, was in Abb. 5.1.7 (a) dargestellt ist.

Aussagekräftig für den Entwurf von Regelalgorithmen für den RFG sind vor allem die Verläufe von Widerstand und Induktivität, da typischerweise mittels Phasen- und Frequenzregelung die Radiofrequenz des Generators auf die sich ändernde Lastsituation eingestellt wird. Eine Veränderung der Induktivität führt dabei zu einer Verstimmung des Resonanzkriteriums (s. Abb. 1.1.2) und eine Veränderung des Ohm'schen Anteils zur Fehlanpassung. Beide Änderungen müssen über die Anpassung der Frequenz und der Strom- bzw. Spannungsamplitude des Generators kompensiert werden. Die hier evaluierten Verläufe werden dazu genutzt, die Stellbereiche des Generators festzulegen und ihn demnach zu kalibrieren.

Die Verläufe von Widerstand und Induktivität aus Abb. 5.1.6 spiegeln das Verhalten des Plasmas wider. In Bereichen niedrigen Volumenstroms ist nach Abb. 5.1.2 (d) der Ionisierungsgrad recht groß, wodurch Widerstand und Gegeninduktivität des Plasmas aufgrund der

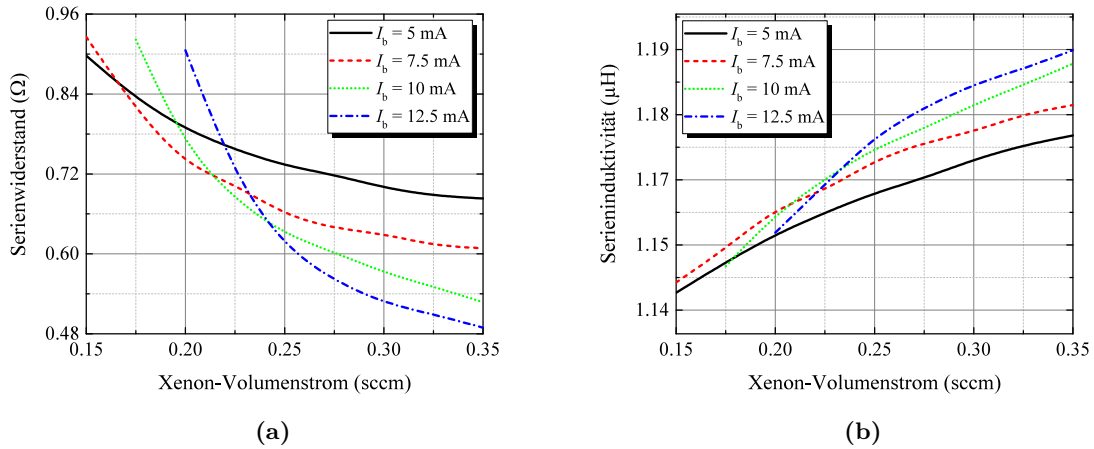


Abbildung 5.1.6: Elektrische Ersatzschaltbildparameter eines RIM-4 Triebwerks für typische Arbeitspunkte. (a) zeigt den für den speisenden Generator seriellen Ohm'schen Lastanteil, (b) den induktiv-reaktiven. Der Widerstand nimmt mit steigendem Volumenstrom ab, da der Ionisierungsgrad ebenso sinkt, wodurch weniger Leistung benötigt wird. Der sinkende Ionisierungsgrad bedingt auch die Zunahme der Serieninduktivität, da das durch die Trägheit der Elektronen bedingte Gegenfeld ebenso schwächer wird.

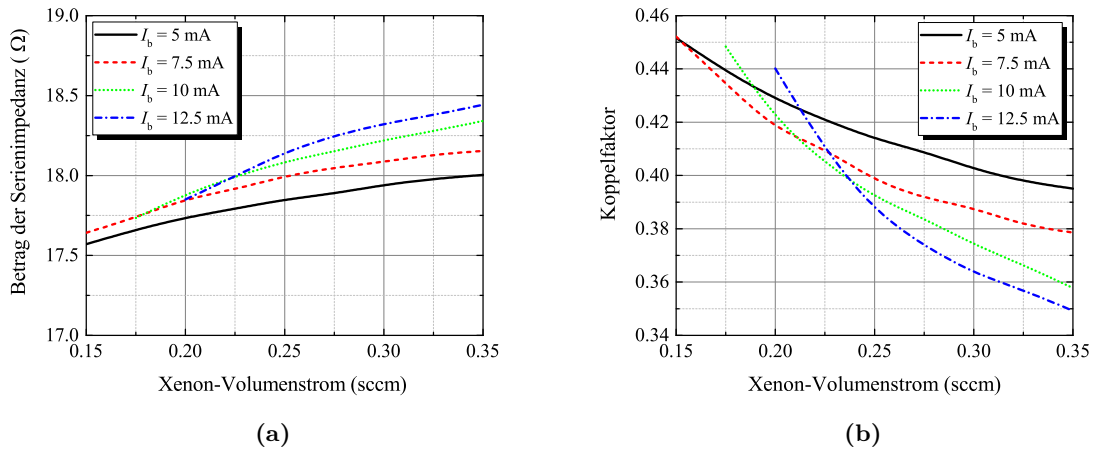


Abbildung 5.1.7: Betrag der Serienimpedanz eines RIM-4 Triebwerks im Betrieb (a). Durch gegenläufiges Verhalten von Ohm'schem und induktiv-reaktivem Anteil (s. Abb. 5.1.6) ändert sich der Betrag der Impedanz nicht sehr stark. Der Koppelfaktor der induktiven Kopplung nach Abb. 3.7.1 ist in (b) dargestellt. Zu höheren Volumenströmen wird die induktive Kopplung ineffizienter. Da in diesen Bereichen jedoch ohnehin weniger Leistung benötigt wird, wirkt sich die Abnahme nicht stark auf den benötigten Strom aus.

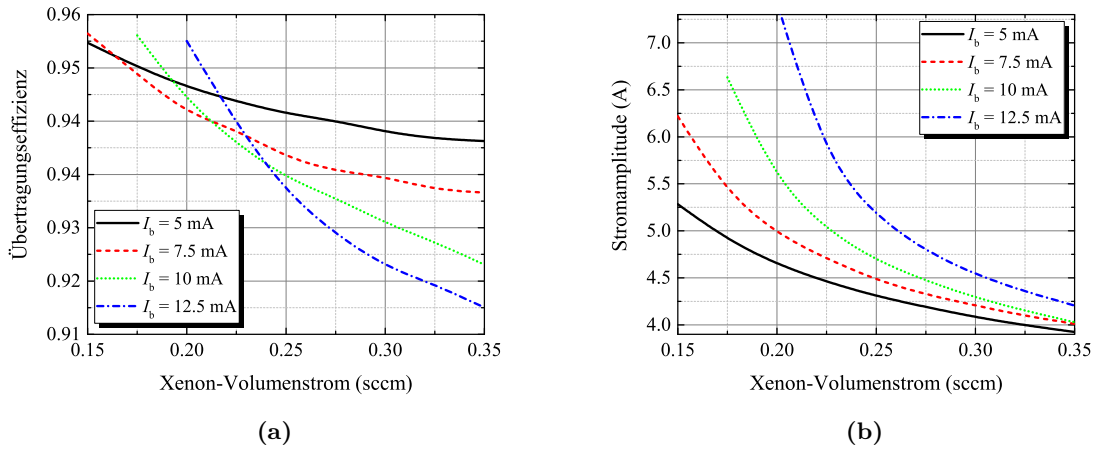


Abbildung 5.1.8: Übertragungseffizienz des RIM-4 Triebwerks nach Gl. (5.1.1) (a). Die Abnahme der absorbierten Leistung mit steigendem Volumenstrom (s. Abb. 4.3.2 (a)) wiegt stärker als die Abnahme des Spulenstroms, welche in (b) dargestellt ist. Der Spulenstrom ruft Leitungsverluste in der Spule hervor.

relativ hohen Anzahl an Elektronen im Gasgemisch steigen. Die steigende Gegeninduktivität, die durch die Massenträgheit der Elektronen bedingt ist, setzt die Gesamtinduktivität des Triebwerks herab, da sich die magnetischen Felder gegenseitig teilweise kompensieren.

Dass sich der Betrag der Impedanz aus Abb. 5.1.7 (a) nur leicht für verschiedene Arbeitspunkte ändert, hat keinen direkten technischen Nutzen, da die Dynamiken von Widerstand und Induktivität entscheidend für die Kalibrierung des RFG sind. Allerdings kann man an den Verläufen des Betrages ablesen, dass der reaktive Charakter der Impedanz, also deren induktiver Imaginärteil $X_s = \omega L_s$, den Realteil R_s überwiegt. Daraus kann man schließen, dass das Thema der Leistungseinkopplung gesondert betrachtet werden muss, um ausreichend Energie bereitzustellen, die die Entladung aufrecht erhält. Bei kleinem Lastwiderstand wird verhältnismäßig viel Leistung im Innenwiderstand des Generators selbst verbraucht, was die Effizienz deutlich verringert. Um diesem Umstand Rechnung zu tragen, kommen getaktete Wechselrichter mit Resonanzeinkopplung zum Einsatz, welche aufgrund ihrer Topologie einen niedrigen Innenwiderstand mit sich bringen. Mehr Information zu diesem Thema kann in Ref. 94 nachgelesen werden.

Eine wichtige Größe zur Evaluierung der induktiven Energieeinspeisung ist der Koppelfaktor ζ aus Gl. (3.7.21). Bei einer perfekten Kopplung zwischen Primärinduktivität L_c und Sekundärinduktivität L_{flux} wäre $\zeta = 1$. Abbildung 5.1.7 (b) zeigt den Koppelfaktor für die verschiedenen untersuchten Arbeitspunkte eines RIM-4. Hier lässt sich wieder der prinzipielle Verlauf des Ionisierungsgrades erkennen. Die Kopplung wird schwächer, wenn die einströmende Menge an Neutralgas erhöht wird, was durch die nichtlineare Veränderung der geometrischen Induktivität, hervorgerufen durch den Plasmastrom, bedingt ist.

Zuletzt kann noch eine Aussage über das Verhältnis der Verluste im Spulendraht zur Gesamtleistung getroffen werden, wobei sich die Verluste nach $P_w = R_{\text{DC}} |\tilde{I}_c|^2 / 2$ berechnen. Dabei bezeichnet R_{DC} den äquivalenten Gleichstromwiderstand, der den Skin-Effekt im Leiter berücksichtigt und nach Gl. (3.7.30) berechnet wird. Das genannte Verhältnis wird hier als

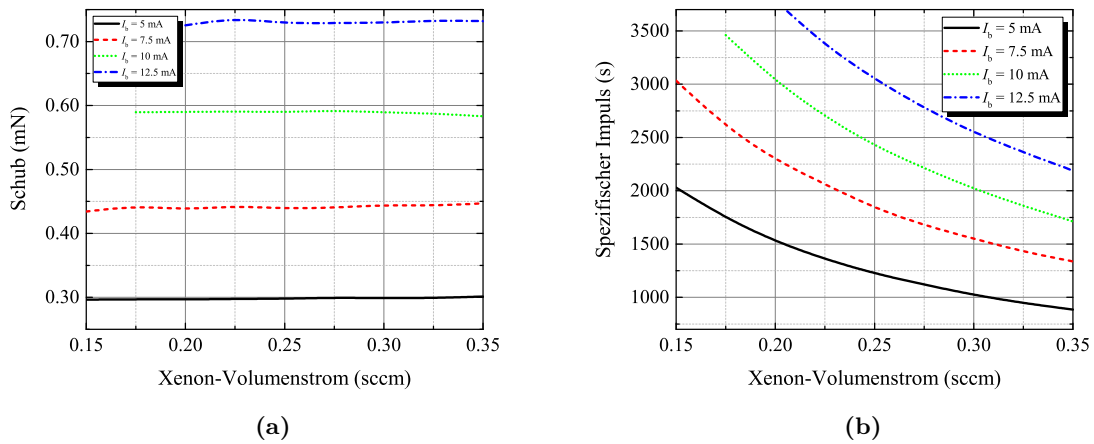


Abbildung 5.1.9: Schub (a) und spezifischer Impuls (b) eines RIM-4 Triebwerks. Die leichte Welligkeit des Schubverlaufs wird durch die PI-Regelung des Strahlstroms hervorgerufen.

Übertragungseffizienz ι bezeichnet und berechnet sich zu

$$\iota = \frac{P_{\text{abs}}}{P_{\text{abs}} + P_{\text{w}}}. \quad (5.1.1)$$

Die Übertragungseffizienz des RIM-4 Triebwerks ist in Abhängigkeit des typischen Arbeitspunktes in Abb. 5.1.8 (a) dargestellt. Man erkennt, dass die Abnahme der absorbierten Leistung aus Abb. 4.3.2 (a) dominant gegenüber der Abnahme des Leitungsverlustes im Spulendraht ist, da die Übertragungseffizienz mit steigendem Volumenstrom abnimmt. Die Abnahme der Stromamplitude, die die Leitungsverluste hervorruft, ist in Teilbild (b) dargestellt. Bei Optimierungsmaßnahmen, die den Spulendraht betreffen, muss stets darauf geachtet werden, dass der Querschnitt groß genug ist, um die Stromdichte führen zu können. Weiterhin muss der Skin-Effekt im Leiter berücksichtigt werden, welcher die effektiv genutzte Fläche verringert. Da die Übertragungseffizienz beim RIM-4 für typische Arbeitspunkte im Bereich $\iota > 90\%$ liegt, werden keine Optimierungsstudien diesbezüglich vorgenommen.

5.1.4 Performancedaten

Abschließend werden wichtige Performance-Daten des RIM-4 Triebwerks im aktuellen Abschnitt gezeigt, mit deren Hilfe sich optimierte Betriebsparameter für den Einsatz dieses Triebwerks festlegen lassen. Zusammen mit den elektrischen Betriebsparametern des vorhergehenden Abschnitts soll neben eines optimierten triebwerkseigenen Wirkungsgrades gewährleistet werden, dass auch der Gesamtwirkungsgrad nach Gl. (1.1.5), durch gezielte Abstimmung des RFG auf die arbeitspunktabhängige elektrische Last des Triebwerks, erhöht werden kann. Teile dieser Performance-Studie wurden in Ref. 111 veröffentlicht.

Eine der wichtigsten Größen eines Antriebssystems ist der erreichbare Schub F . Von RIT erreichbare Schübe liegen typischerweise im Bereich μN bis zu einigen hundert mN. Die vier simulierten Schubbereiche des RIM-4, abhängig vom jeweilig extrahierten Ionenstrom, sind in Abb. 5.1.9 (a) dargestellt. Man erkennt, dass die Schübe als näherungsweise konstant in Bezug auf den Volumenstrom des Xenon-Stützgases angesehen werden können. Die leicht welligen

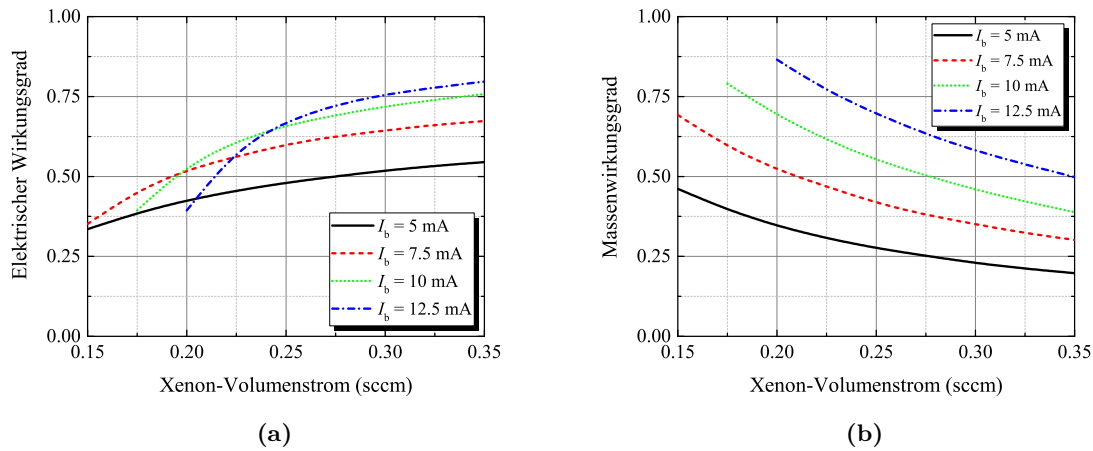


Abbildung 5.1.10: Elektrischer Wirkungsgrad (a) und Massenwirkungsgrad (b) eines RIM-4 Triebwerks innerhalb der typischen Arbeitspunktbereiche.

Verläufe, besonders bei höheren Ionenströmen, sind auf die Regelung des Strahlstroms zurückzuführen. Wie in Kap. 4.3 erläutert, wird eine maximale Stromabweichung von einem Prozent zugelassen, die diese Schwankungen nach sich zieht.

Neben der eigentlichen Schuberzeugung ist deren Effizienz ein Schlüsselkriterium, vor allem beim Einsatz von elektrischen Triebwerken. Die simulierten Verläufe des in Kap. 2.3.1 eingeführten (gewichts)spezifischen Impulses I_{sp} , welcher die internationale Referenz für Triebwerkperformance beschreibt, sind für das RIM-4 Triebwerk in Abb. 5.1.9 (b) dargestellt. Erwartungsgemäß erreicht der spezifische Impuls bei steigendem Volumenstrom Bereiche, in denen ein effizienter Betrieb des Antriebssystems nicht gewährleistet werden kann. Im Gegenzug dazu kann das RIM-4 Triebwerk beispielsweise auch sehr effizient eingesetzt werden, wenn niedrigere Volumenströme eingehalten werden. Dabei muss man allerdings die erhöhte Stromamplitude in Kauf nehmen, die sich nach Abb. 5.1.8 (b) ergibt. Der treibende RFG muss also im Stande sein, die notwendige elektrische Energie bereitzustellen, die im Falle hoher spezifischer Impulse benötigt wird. Anhand dieser Abhängigkeit merkt man, dass die Angabe des spezifischen Impulses als alleiniges Effizienzmerkmal bei elektrischen Triebwerken nicht ausreichend ist, da Energiebereitstellung und Schuberzeugung entkoppelt voneinander geschehen. Aufgrund dessen macht es Sinn, einen Wirkungsgrad des Triebwerks nach Gl. (1.1.5) zu definieren, welcher sowohl die Effizienz des Treibstoffverbrauchs als auch jene der elektrischen Energiebereitstellung in Betracht zieht. Betrachtet man elektrischen Wirkungsgrad und Massenwirkungsgrad einzeln, ergeben sich Verläufe gemäß Abb. 5.1.10.

Da die vom Plasma absorbierte Leistung aus Abb. 4.3.2 (a) mit ansteigendem Volumenstrom sinkt und die Strahlleistung für einen konstanten Schub nach Gl. (2.3.20) ebenso konstant ist, steigt der elektrische Wirkungsgrad nach Gl. (2.3.21) mit dem Volumenstrom an, was in Abb. 5.1.10 (a) deutlich erkennbar ist. Für die Definition des elektrischen Wirkungsgrades stellt das Plasma einen Verlust dar, der die Effizienz der eigentlichen Schubbereitstellung herabsetzt. Im Gegensatz zu den Verläufen des elektrischen Wirkungsgrades sinken jene des Massenwirkungsgrades mit zunehmendem Volumenstrom. Der Massenwirkungsgrad hat den gleichen qualitativen Verlauf wie der spezifische Impuls aus Abb. 5.1.9 (b), wodurch dieses

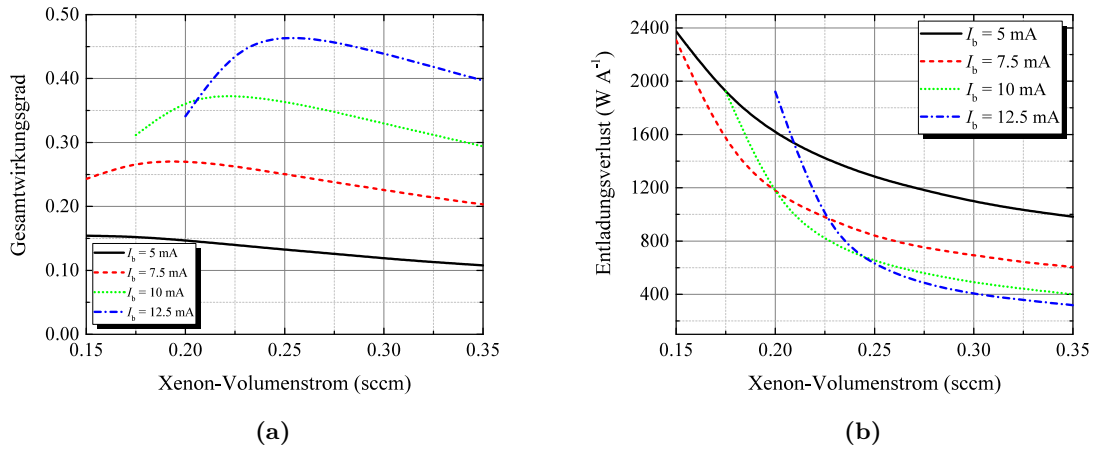


Abbildung 5.1.11: Gesamtwirkungsgrad (a) sowie Entladungsverlust (b) des RIM-4 Triebwerks. Um das Triebwerk am effizientesten zu betreiben, sollte ein Arbeitspunkt gewählt werden, der einem Maximum aus Teilbild (a) (je nach eingestelltem Schubbereich) entspricht. Der Entladungsverlust für diesen Arbeitspunkt kann direkt aus (b) abgelesen werden.

Verhalten erklärbar wird. Da das Verhältnis der extrahierten Ionen zu den das Triebwerk verlassenden Neutralteilchen vom Ionisierungsgrad abhängt, ist der nach Abb. 5.1.2 (d) auftretende abnehmende Verlauf bezogen auf den Volumenstrom einströmender Neutralteilchen realistisch.

Um ein Optimum zwischen Massenwirkungsgrad und elektrischem Wirkungsgrad für die gezeigten Arbeitspunkte zu finden, dient der Gesamttriebwerkswirkungsgrad η_{RIT} aus Gl. (1.1.5). Durch die Multiplikation werden beide einzelnen Wirkungsgrade gleichwertig genutzt, um die Gesamtleistung des Triebwerks zu beschreiben. Dies ist als sinnvoll zu erachten, da nicht nur effiziente Treibstoffnutzung, sondern auch ein effizienter Betrieb der peripheren elektrischen Geräte erstrebenswert ist. Ein optimierter elektrischer Wirkungsgrad wirkt sich letztendlich positiv auf das thermische Verhalten der Geräte aus, da Verluste minimiert werden, wodurch entscheidende Vorteile für die Konzeption des Satelliten entstehen können. Der Gesamttriebwerkswirkungsgrad ist in Abb. 5.1.11 (a) dargestellt. Um den Schub möglichst effizient bereitzustellen, sollte auf das jeweilige Maximum des Gesamtwirkungsgrades geregelt werden (stellvertretend hier für die vier oben eingeführten Schübe bzw. Strahlströme bei konstanter Extraktionsspannung).

Um den Einfluss des Strahlstroms auf die Energieversorgung zu evaluieren, kann der Entladungsverlust ξ nach Gl. (2.3.22), wie in Teilbild (b) von Abb. 5.1.11 dargestellt, angegeben werden. Mit dieser Darstellung ist es möglich, die den RFG betreffenden technischen Voraussetzungen zu evaluieren und somit Durchführbarkeitsstudien zu unternehmen, was mit den Wirkungsgraden allein nicht möglich ist. Ein hoher Wirkungsgrad ist beispielsweise nicht erstrebenswert, wenn sich dieser bei Stromamplituden einstellen würde, die jenseits der durch die Anforderungen an das Wärmemanagement sowie die elektrische Hardware selbst definierten Grenzen lägen.

5.2 Strukturelle Modifikation zur Optimierung der Triebwerkseffizienz

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit strukturellen Modifikationen des Triebwerks bzw. der umgebenden Induktionsspule. Die sich ergebenden elektrischen Parameter sowie Performanceparameter werden evaluiert. Darauf aufbauend wird versucht, geometrische Relationen und Spulencharakteristika zu finden, die den Gesamttriebwerkswirkungsgrad erhöhen oder anderweitige Vorteile bringen. Ein intuitiver Ansatz ist die Modifizierung der Windungszahl der Induktionsspule. Der folgende Unterabschnitt behandelt dies ausführlich.

5.2.1 Modifizierung der Windungszahl

Ausgehend von einem RIM-4 Triebwerk mit geometrischen Daten nach Tab. 4.2 wird hier der Einfluss der Windungszahl der Spule auf die Parameter des Triebwerks untersucht. Dabei werden am Entladungsgefäß selbst keine strukturellen Modifikationen vorgenommen, wodurch die Extraktion unverändert bleibt. Lediglich die Energieeinkopplung und damit die elektrische Entladungscharakteristik soll durch die Modifikation der Windungszahl beeinflusst werden. Die Windungszahl wird hier bis einschließlich 13 Windungen untersucht. Bei 13 Windungen mit einem Drahtdurchmesser von 3 mm ist sichergestellt, dass sich die einzelnen Windungen auf der Gesamtlänge von 41 mm des RIM-4 Entladungsgefäßes im Falle nicht isolierten Drahtes nicht gegenseitig kurzschließen.

Abbildung 5.2.1 (a) zeigt den elektrischen Wirkungsgrad, den Massenwirkungsgrad und den resultierenden Gesamttriebwerkswirkungsgrad als Funktionen der Windungszahl. Die Simulation wurde für $\dot{V} = 0.2 \text{ sccm}$, $V_{\text{scr}} = 1250 \text{ V}$, $V_{\text{dec}} = 150 \text{ V}$ und $I_{\text{b,soll}} = 10 \text{ mA}$ durchgeführt. Es fällt auf, dass die Wirkungsgrade annähernd konstant bleiben und sich lediglich kleine Schwankungen ausprägen, die wieder auf die Regelung des extrahierten Ionenstroms zurückzuführen sind. Dies korreliert mit der Erwartung an ein elektrisches Triebwerk, dessen Energieeinspeisung strikt von der Schuberzeugung getrennt betrachtet werden kann [27].

Da der extrahierte Ionenstrom sich wiederum auf die Eigenschaften des Plasmas auswirkt, wird ein selbstkonsistenter Ablauf gebildet. Die Wirkungsgrade beziehen sich auf eben jenen selbstkonsistenten Ablauf und können demnach hier nicht genutzt werden, um die Qualität einer Modifikation der Spulenwindungen zu untersuchen. Betrachtet man jedoch den durch die Spule fließenden Strom \tilde{I}_c , welcher in Abb. 5.2.1 (b) dargestellt ist, kann man einen deutlichen Einfluss der Windungszahl erkennen. Die Amplitude des Stroms nimmt mit steigender Windungszahl ab, da der zur Aufrechterhaltung des Ionisierungsgrades im Plasma notwendige magnetische Fluss für einen gewissen Strahlstrom (hier 10 mA) mit der Windungszahl skaliert. Im Gegenzug dazu ändert sich die Plasmaimpedanz und somit auch die in den Primärkreis transformierte Impedanz, da die insgesamt umgesetzte Leistung für einen Arbeitspunkt konstant bleibt.

Um den Einfluss der Modifizierung der Anzahl der Spulenwindungen auf die Entladungscharakteristik zu bewerten, bietet sich zunächst an, die Information aus Abb. 5.2.1 (b) zu nutzen. Der dort dargestellte Verlauf des Spulenstroms in Abhängigkeit von der Windungszahl ist nicht direkt gleichzusetzen mit jenem Strom, der physikalisch durch den RFG bereitgestellt wird. Vielmehr handelt es sich hierbei um den Strom im Resonanzkreis nach Abb. 1.1.2. Experimente haben ergeben, dass bei Generatoren des Herstellers APCON AeroSpace & Defence, welche auch kommerziell eingesetzt werden, eine Resonanzüberhöhung des Stroms um den Faktor 3–4 auftritt. Die Resonanzüberhöhung basiert auf elektromagnetischer Energie, die zwischen Reso-

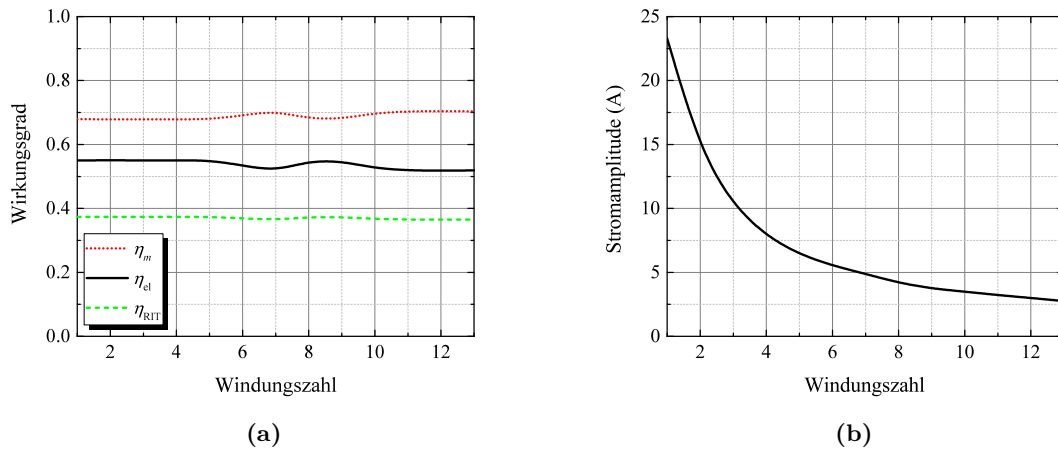


Abbildung 5.2.1: Die Wirkungsgrade aus Teilbild (a) können als konstant innerhalb der Regeltoleranz angenommen werden. Dies unterstreicht die Entkopplung von Energiebereitstellung und Schuberzeugung eines elektrischen Triebwerks, welche u. a. in Ref. 27 angesprochen wird. Die Amplitude des Spulenstromes (b) nimmt mit steigender Windungszahl ab, da die induzierten magnetischen Flüsse mit der Anzahl der Windungen skalieren.

nanzkondensator C_{res} und Lastspule L_s schwingt. Der RFG regt den resonanten Lastkreis nahe der Resonanzfrequenz an, um den Verstärkungseffekt zu maximieren. Mehr Informationen zu diesem Thema sind in Ref. 94 sowie in Ref. 7 nachzulesen.

Dennoch kann man anhand dieses Stromverlaufs prinzipielle Einschränkungen treffen, die die Wahl der Windungszahl betrifft. Generell möchte man die fließenden Ströme oft so klein wie möglich halten, um thermische Effekte sowie EMV-bedingte Einstrahlung in andere Geräte gut kontrollieren zu können. Demnach würde es sich in diesem Fall anbieten, die maximal mögliche Anzahl an Windungen zu benutzen, da dort der geringste Primärstrom benötigt wird, um den Arbeitspunkt des Triebwerks bei konstanten Wirkungsgraden aufrecht zu erhalten. Die Ohm'schen Verluste innerhalb des Spulendrahts nehmen ebenso ab, da sie zwar proportional zum Widerstand, aber auch proportional zum Quadrat des Stroms sind. Dies ist in Abb. 5.2.2 (a) anhand der Übertragungseffizienz ι gemäß Gl. (5.1.1) dargestellt.

Der induktive Koppelfaktor ζ , der prinzipiell angibt, welcher Anteil der gesamten elektromagnetischen Energie genutzt werden kann, um das Plasma zu heizen, ist in Abb. 5.2.2 (b) dargestellt. Dort erkennt man, dass sich ein Kopplungsmaximum bei etwa sechs Windungen einstellt, was genau der Windungszahl des RIM-4 entspricht.

Ausgehend von den hier gezeigten Ergebnissen ist die Induktionsspule des RIM-4 aus elektrischer Sicht optimal gewickelt, da sie den maximal erreichbaren Koppelfaktor liefert (welcher allerdings arbeitspunktabhängig ist, da das Plasma selbst die von vielen Größen abhängige Last beschreibt, was in den vorhergehenden Kapiteln bereits erläutert wurde) und darüber hinaus vertretbare Stromamplituden im Resonanzkreis begünstigt. Die Simulationen zeigen, dass für das RIM-4 Triebwerk die optimale Windungszahl für alle typischen Arbeitspunkte (0.15–0.35 sccm) zwischen 5 und 7 liegt, so dass es als vollständig optimiert bezeichnet werden kann, was die Anzahl der Spulenwindungen betrifft. Der dargestellte Arbeitspunkt ist typisch für den Betrieb des RIM-4 Triebwerks und ist deshalb am aussagekräftigsten, wenn alternative

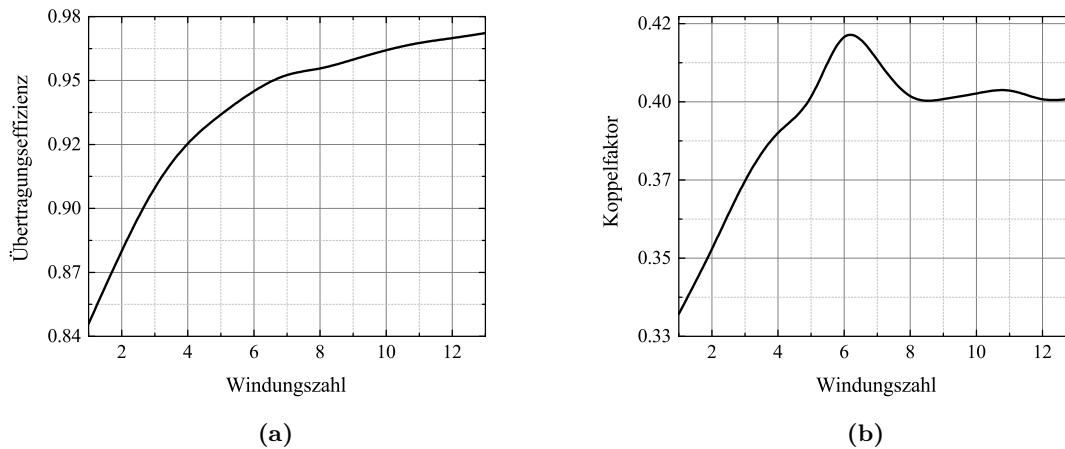


Abbildung 5.2.2: Die Übertragungseffizienz (a) sowie der induktive Koppelfaktor (b) in Abhängigkeit von der Spulenzahl. Die Übertragungseffizienz nimmt zu, da sich der sinkende Strom (vgl. Abb. 5.2.1 (a)) quadratisch, der zunehmende Ohm'sche Widerstand des länger werdenden Spulendrahtes jedoch lediglich linear auf die Verlustleistung auswirkt. Die optimale Kopplung für den Arbeitspunkt ist bei etwa sechs Windungen gegeben. Dies trifft auch auf die übrigen typischen Arbeitspunkte zu.

Geometrien untersucht werden.

Der Vollständigkeit halber sind in Abb. 5.2.3 (a), (c) und (e) die elektrischen Feldstärken inner- und außerhalb des Entladungsgefäßes abhängig von der Windungszahl an drei Beispielen dargestellt. Es ist hier äußerst interessant, sich die z -Feldkomponenten allein anzuschauen, die die Elektronen in axialer Richtung beschleunigen (s. Abb. 5.2.3 (b), (d) und (f)). Generell ist es sinnvoll, kreisförmige geschlossene Felder zu induzieren, die die Elektronen auf eben solchen Kreisbahnen beschleunigen, weil dadurch die Stoßwahrscheinlichkeit steigt, wodurch wiederum die notwendige Leistung zur Erhaltung des Plasmas sinkt. Steckte beispielsweise ein großer Anteil der elektrischen Feldenergie in der axialen z -Komponente, wäre es möglich, dass die Elektronen vor Ablauf einer Halbperiode bereits so viel kinetische Energie aufwiesen, dass sie in die planare Randschicht der jeweiligen z -Grenze übergangen, ohne auf diesem Weg einen Stoß auszuführen, der ihren Impuls übertragen oder gar ein Atom anregen oder ionisieren würde. Dies ist vor allem ein wichtiger Aspekt, da die mittlere freie Weglänge bei typischen RIM-4 Arbeitspunkten etwa eine Größenordnung über der axialen Ausdehnung des Entladungsgefäßes liegt. Die Elektronen müssen in diesem Fall zumindest auf eine Spiralbahn gezwungen werden, um überhaupt einen Stoß ausführen zu können. Man verstärkt die Stoßwahrscheinlichkeit also am wirkungsvollsten, wenn man den größten Anteil der elektrischen Feldenergie in die azimutale Komponente verlagert. Simulationen haben ergeben, dass die radiale Komponente vernachlässigt werden kann, da auch die Induktionsspule keine solche aufweist.

Anhand der Abbildung lässt sich erkennen, dass bereits ab sechs Windungen verhältnismäßig kleine axiale Feldstärkenkomponenten existieren, die das effiziente Heizen des Plasmas begünstigen. Um diesen Umstand etwas genauer zu durchleuchten, sind die axialen Komponenten entlang der z -Achse (auf der der axiale Anteil aufgrund der Geometrie naturgemäß am größten ist) nochmals in Abb. 5.2.4 dargestellt. Einer kruden Approximation des zurückgelegten Wegs in axialer Richtung $s_z(t)$ folgend, welche nur diejenigen Elektronen betrachtet,

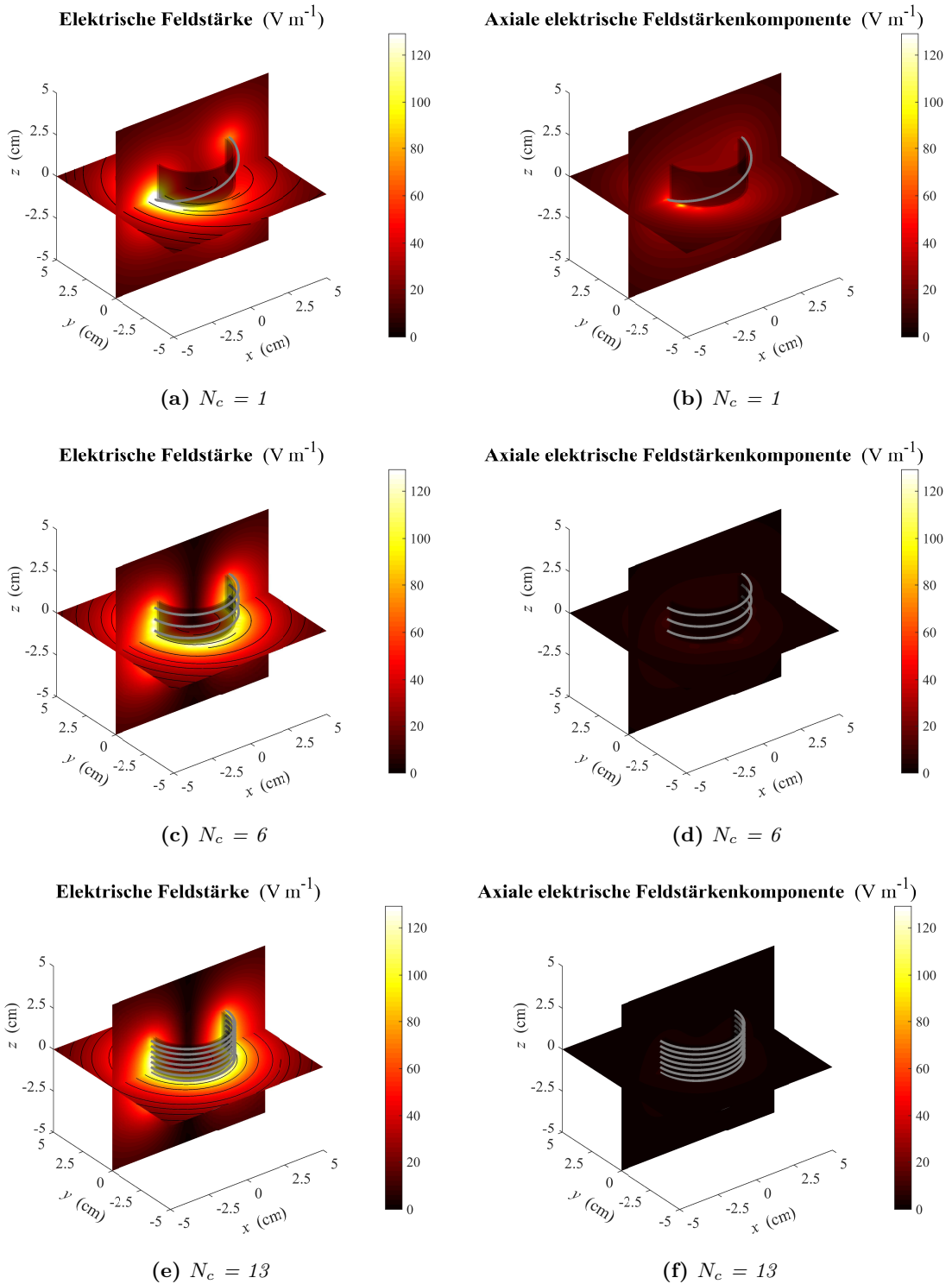


Abbildung 5.2.3: Die gesamte elektrische Feldstärke ist in (a), (c) und (e) abhängig von der Windungszahl dargestellt. Die jeweils axialen z-Komponenten sind in (b), (d) und (f) veranschaulicht. Je kleiner das Verhältnis E_z/E wird, desto effizienter lässt sich das Plasma heizen.

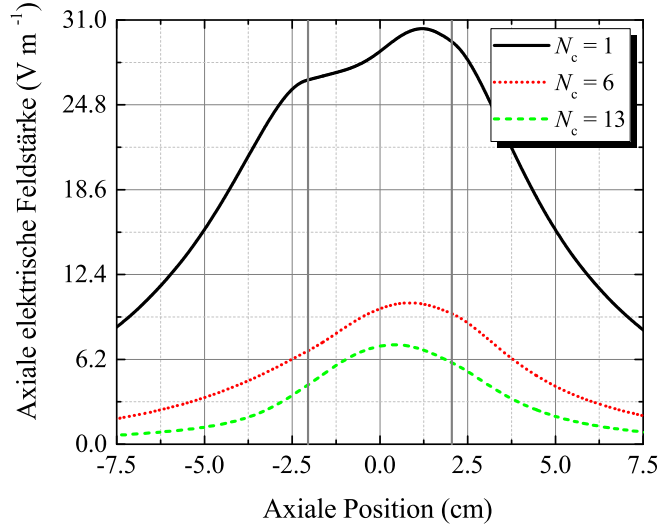


Abbildung 5.2.4: Die axiale elektrische Feldstärkenkomponente ist hier abhängig von der Windungszahl für die RIM-4 Geometrie dargestellt. Ziel ist es, diese Komponente möglichst gering zu halten, um effizienter heizen zu können.

Tabelle 5.2: Zurückgelegter axialer Weg der Elektronen abhängig von Windungszahl.

N_c	$s_z(T/2)$ (mm)	$s_z(T/2) / L_v$
1	46.0	1.12
6	15.3	0.37
13	10.8	0.26

die zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Rückwand des Entladungsgefäßes bei $s_{z,0} = 0$ starten und keine Initialgeschwindigkeit in z -Richtung aufweisen ($v_{z,0} = 0$), lässt sich der zurückgelegte Weg jener Elektronen innerhalb einer Halperiode der Dauer $T/2 = 204$ ns bei $f = 2.451$ MHz unter Nutzung der Newton'schen Bewegungsgleichung $eE_z(t) = m_e a_z(t)$ ableiten. Es wird also die maximal mögliche Referenzlänge L_v betrachtet. Umstellen dieser Gleichung und zweifache zeitliche Integration liefert (unter der Annahme, dass $E_z(t) = |E_z| \cos(\omega t)$)

$$s_z\left(\frac{T}{2}\right) = \iint_0^{\frac{T}{2}} a_z(t) dt^2 = \frac{2e|E_z|}{m_e\omega^2}. \quad (5.2.1)$$

Das elektrische Feld folgt hier einem Kosinus-Verlauf, da der treibende Spulenstrom ohne Anfangsphase modelliert ist und sich durch die Induktion eine Phasenverschiebung von näherungsweise $\pi/2$ ergibt.

Im Folgenden wird ein worst-case-Szenario betrachtet, bei welchem die maximalen axialen Amplituden aus Abb. 5.2.4 zur Beschleunigung der Elektronen verwendet werden. Tabelle 5.2 zeigt den zurückgelegten axialen Weg $s_z(T/2)$ abhängig von der Windungszahl. Da sich nach der Halperiode lediglich das Vorzeichen der Feldstärke dreht, wird aus Symmetriegründen nur bis zu dieser oberen Grenze gerechnet.

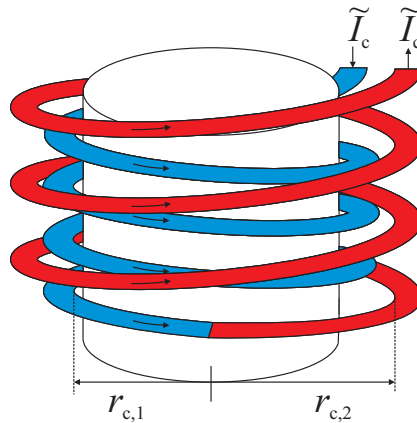


Abbildung 5.2.5: Gegenläufig gewickelte Bifilarspule zur Unterdrückung der axialen Komponente. Durch diese Art der Wicklung wird weiterhin das induzierte Feld erhöht, da die Ströme durch die Spulen in die gleiche Richtung fließen, wodurch sich die induzierten Feldkomponenten konstruktiv überlagern.

Anhand des Verhältnisses des zurückgelegten Weges zur Entladungsgefäßlänge $s_z(T/2)/L_v$ lässt sich zeigen, dass die Plasmaheizung mit nur einer Windung als ineffizient betrachtet werden kann, da es sehr wahrscheinlich ist, dass die Elektronen vor Ablauf der Halbperiode bereits in die Randschicht übergehen. Haben sie zu diesem Zeitpunkt nicht genügend Energie, um das Randschichtpotenzial zu überwinden, werden sie wieder reflektiert. Dies ist an dieser Stelle jedoch nicht modelliert, da es hier lediglich um eine Abschätzung der Heizgüte gehen soll. Es ist sicher zu behaupten, dass mit dem aktuellen Design des RIM-4 Triebwerks, dessen Induktionsspule sechs Windungen aufweist, dieser Effekt als vernachlässigbar aufgefasst werden kann, da der zurückgelegte axiale Weg kleiner als die halbe Entladungsgefäßlänge ist, wodurch effizientes Heizen in z -Richtung aufgrund der Vorzeichenumkehr des elektrischen Feldes gewährleistet ist. Weitere Erhöhungen der Windungszahl wirken sich nicht mehr sehr stark auf die Unterdrückung der z -Komponente aus, was in Abb. 5.2.4 sowie in Tab. 5.2 verdeutlicht ist.

Die Simulationsergebnisse zeigen, dass das RIM-4 Triebwerk mit seinen sechs Spulenwindungen als optimal angesehen werden kann, was sowohl die elektrische Charakteristik als auch die Heizeffizienz betrifft. Der nächste Unterabschnitt stellt ein alternatives Spulenkonzep vor, das aufgrund seiner besonderen Wicklungsart die axiale Komponente von Natur aus sehr stark unterdrückt und dabei gleichzeitig die benötigte Stromamplitude zur Aufrechterhaltung des jeweiligen Arbeitspunktes herabsenkt.

5.2.2 Alternative Spulengeometrie: Gegenläufige Bifilarspule

In diesem Unterabschnitt wird eine Spulengeometrie untersucht, die aufgrund ihrer Wicklungsart keine starke axiale Komponente induziert. Es handelt sich dabei um eine gegenläufig gewickelte Bifilarspule. Bei dieser Wicklungsart wird der rechtsläufigen Induktionsspule des RIM-4 eine linksläufige Spule mit größerem Radius überlagert (oder ggf. vice versa), indem der Wicklungssinn am Ende des Ionisators gedreht und die Spule mit größerem Radius $r_{c,2}$ der mit kleinerem Radius $r_{c,1}$ überlagert wird. Eine Konzeptzeichnung ist in Abb. 5.2.5 verdeutlicht.

Da der Strom durch beide Spulen in die gleiche Richtung fließt, überlagern sich die induzier-

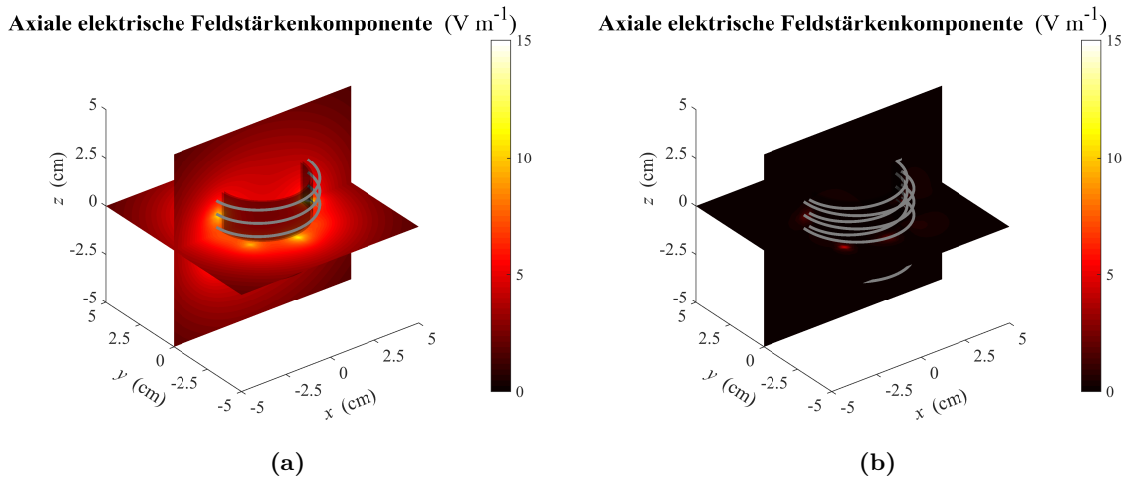


Abbildung 5.2.6: Die axial induzierte elektrische Feldstärkenkomponente des unmodifizierten RIM-4 Triebwerks ist in (a) dargestellt. Durch die Wicklung einer gegenläufigen Bifilarspule wird das axial induzierte Feld sehr stark gedämpft (b), was zu einer effizienteren Heizung führt, da ein Großteil des elektrischen Feldes in azimuthaler Richtung induziert wird.

ten Felder werden damit verstärkt, was dazu führt, dass weniger Strom benötigt wird, um einen Arbeitspunkt des Triebwerks aufrechtzuerhalten. Allerdings steigt die Induktivität der Anordnung und somit die Impedanz, was zu einem höheren Spannungsabfall an der komplexen Last führt. Dieser Effekt muss berücksichtigt werden, da die anliegenden Spannungsamplituden im Resonanzfall nochmals erhöht werden. Es können sich dadurch Amplituden im kV-Bereich einstellen.

Das Prinzip der Wicklung diktiert, dass sich die axial induzierten Felder aufgrund der Symmetrie nahezu aufheben, da derselbe Strom sowohl in positiver als auch in negativer z -Richtung fließt. Der Radius der äußeren Spule ist größer als der der inneren, wodurch das durch die äußere Spule induzierte Feld betragsmäßig etwas kleiner ist als das der inneren. Dennoch kann man davon ausgehen, dass nahezu alle axialen Komponenten vernachlässigt werden können, wie in Abb. 5.2.6 (b) dargestellt ist. Im direkten Vergleich dazu sieht man in Teilbild (a) der Abbildung die axial induzierte elektrische Feldstärkenkomponente des unmodifizierten RIM-4 Triebwerks.

Wie im letzten Unterabschnitt (Kap. 5.2.1) bereits angesprochen, ist der Einfluss der axialen Komponente bei der unmodifizierten RIM-4 Spule zwar vorhanden, wirkt sich aber nicht stark nachteilig aus, da auch in z -Richtung effizient geheizt werden kann. Einen direkten Vergleich der elektrischen Parameter sowie der Performancedaten zwischen RIM-4 und RIM-4 mit gegenläufig bifilar gewickelter Spule für den Arbeitspunkt $I_b = 10 \text{ mA}$ bei $\dot{V} = 0.2 \text{ sccm}$ liefert Tab. 5.3.

Bei gleichbleibendem Massenwirkungsgrad steigt der elektrische Wirkungsgrad des Triebwerks mit gegenläufiger Bifilarspule leicht an, was durch die niedrigere absorbierte bzw. seriell übertragene Leistung P_s gemäß Gl. (2.3.21) gewährleistet ist. Dass weniger Leistung zur Aufrechterhaltung des Arbeitspunktes benötigt wird, liegt vor allem daran, dass die axiale Komponente hier sehr stark gedämpft ist (vgl. Abb. 5.2.6). Die Übersichtsrechnung aus dem letzten Unterabschnitt beschrieb ein idealisiertes Szenario, das die Elektronen als uniform ver-

Tabelle 5.3: Vergleich elektrischer Parameter und Performancedaten zwischen RIM-4 und RIM-4 mit gegenläufig bifilar gewickelter Spule (RIM-4 mod.) für $I_b = 10 \text{ mA}$ bei $\dot{V} = 0.2 \text{ sccm}$.

Triebwerk	η_m	η_{el}	R_s (Ω)	L_s (μH)	\tilde{I}_c (A)	P_s (W)	ζ	ι
RIM-4	0.70	0.46	0.92	1.16	5.77	15.23	0.43	0.95
RIM-4 mod.	0.70	0.48	3.20	4.72	2.94	13.82	0.43	0.97

teilt am unteren Ende des Entladungsgefäßes betrachtete. In Wirklichkeit trägt immer nur ein Teil der Elektronen zur Heizung in axialer Richtung bei. Da die Felder mit gegenläufig gewickelter Bifilarspule fast ausschließlich in der Azimutalebene induziert werden, wird eine verhältnismäßig geringere Zahl von Elektronen in axialer Richtung beschleunigt. Von diesen Elektronen trägt wie erwähnt nur ein gewisser Teil zur effizienten Heizung bei, der Rest verursacht Wandverluste. In Summe wird weniger Leistung für die Stoßprozesse verbraucht, weil diese effizienter ablaufen, da weniger Elektronen verloren gehen. Zusätzlich dazu ergibt sich ein geringerer Leistungsabfall im Spulendraht, wie Eingangs erwähnt. Der Unterschied zwischen unmodifiziertem und modifiziertem RIM-4 mag gering erscheinen, doch lässt sich daraus der Mehrwert des neuen Spulenkonzpts ableiten. Bei 1.5 W Leistungersparnis handelt es sich immerhin um 10 % der Gesamtleistung. Viel wichtiger ist aber die Tatsache, dass mit etwa der halben Stromamplitude gearbeitet werden kann, was wiederum thermische Effekten sowie EMV-bedingte Einflüsse mindert.

Unter Anwendung der modifizierten Spule sollte sich auch der Wirkungsgrad des RFG verbessern, da sowohl Ohm'scher als auch induktiver Anteil der seriellen Last steigen. Dadurch wird für die meisten Generatortopologien das Anpassverhalten begünstigt, da der Generatorinnenwiderstand i. a. größer ist als der Triebwerkswiderstand, wodurch wenig Wirkleistung eingekoppelt werden kann.

5.2.3 Modifizierung des Entladungsgefäßes

In den vorhergehenden beiden Unterabschnitten wurden Modifizierungen der Windungszahl sowie der Spulenform evaluiert. Hier soll der Einfluss des Entladungsgefäßes auf die Performance des Triebwerks untersucht werden. Dabei wird die zylindrische Form des Entladungsgefäßes beibehalten, um die Gültigkeit des Skalierungsparameters β aus Kap. 4.3 weiterhin zu gewährleisten. Die Performancestudie untersucht die Einflüsse des Verhältnisses d_c/L_v auf die Entladungscharakteristik. Dazu wird der Einfluss variierender Entladungsgefäßlänge L_v bei konstantem Spulendurchmesser d_c untersucht.

Für diese Studie beträgt die Referenzgröße $d_c = 45.4 \text{ mm}$. Weiterhin gilt $N_c = 6$, was der RIM-4 Geometrie entspricht. Die Simulationen wurden für den Arbeitspunkt $I_b = 10 \text{ mA}$ bei $\dot{V} = 0.2 \text{ sccm}$ und $V_{scr} = 1250 \text{ V}$ sowie $V_{dec} = 150 \text{ V}$ durchgeführt.

Abbildung 5.2.7 zeigt die Wirkungsgrade des Triebwerks, die sich in Abhängigkeit von der Entladungsgefäßlänge ergeben. Zusätzlich sind die Wirkungsgrade der nominellen RIM-4 Geometrie eingezeichnet. Wie man der Abbildung entnehmen kann, kann der Massenwirkungsgrad als konstant angenommen werden. Dies beruht auf der Tatsache, dass er aus der Regelgröße, dem extrahierten Ionenstrom, abgeleitet wird. Der elektrische Wirkungsgrad hingegen durchläuft ein Maximum. Links dieses Maximums steigen Wandverluste relativ zu den Plasmaverlusten an, wodurch der größte Teil der Leistung an den Wänden deponiert wird. Rechts des Maxi-

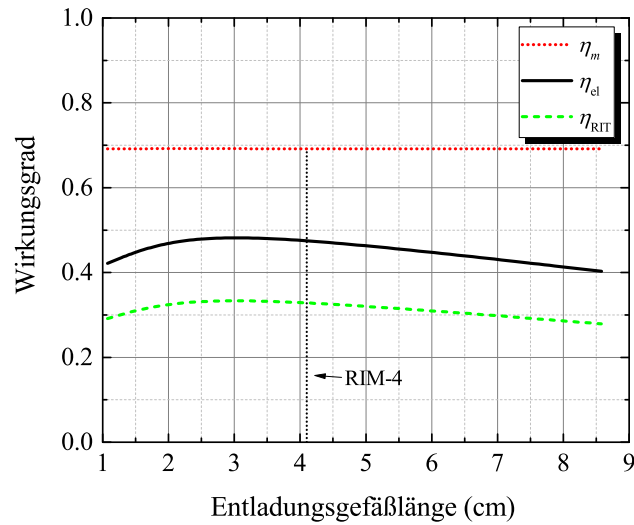


Abbildung 5.2.7: Die Wirkungsgrade sind in Abhängigkeit des geometrischen Verhältnisses d_c/L_v dargestellt, wobei der Spulendurchmesser konstant bei $d_c = 45.5$ mm gehalten wird. Der Wirkungsgrad des RIM-4 ist eingezeichnet. d_c/L_v nimmt mit steigender Entladungsgefäßlänge ab. Der konstante Massenwirkungsgrad ist durch die Regelung des extrahierten Ionenstroms bedingt und somit kein Freiheitsgrad. Links des Maximums des elektrischen Wirkungsgrades (und somit des Gesamtwirkungsgrades) nimmt der Wirkungsgrad ab, da die Wandverluste zunehmen. Rechts des Maximums klingt der Wirkungsgrad leicht ab, da die Entladungsverluste durch wachsendes Plasmavolumen zunehmen.

mums sorgt das ansteigende Plasmavolumen für eine allgemein wachsende Leistungsaufnahme aufgrund plasmainterner Stoßprozesse. Das Maximum verschiebt sich je nach Arbeitspunkt.

Um die Betrachtungen der Wirkungsgrade zu untermauern, ist der Entladungsverlust nebst induktivem Koppelfaktor in Abb. 5.2.8 dargestellt. Um kleine d_c/L_v -Verhältnisse zu untersuchen, wird die Entladungsgefäßlänge erhöht. Extrem kleine Entladungsgefäßlängen können mit dem numerischen Modell aufgrund von Stabilitätsproblemen nicht untersucht werden; diese sind jedoch in der Praxis auch nicht relevant, da, wie in Abb. 5.2.8 gezeigt, der Entladungsverlust in diesen Bereichen zu hoch ist, um das Triebwerk effizient betreiben zu können. Obwohl kleine d_c/L_v -Verhältnisse äußerst stabil berechnet werden können (vgl. Kap. 6.1), sind auch diese nicht praxisrelevant aufgrund des hohen Entladungsverlustes. Mehr Information zur Stabilitätsproblematik und zu Gültigkeitsbereichen des numerischen Modells ist in Kap. 6 gegeben.

Der Entladungsverlust in Abb. 5.2.8 (a) durchläuft ein Minimum genau an der Stelle, wo der elektrische Wirkungsgrad sein Maximum aufweist. Dies ist zum einen durch die relative Zunahme der Wandverluste in Bereichen kleiner Entladungsgefäßlängen bedingt und zum anderen durch die Abnahme des induktiven Koppelfaktors, dargestellt in Teilbild (b), wodurch ein größerer Anteil elektromagnetischer Energie zur Erhaltung des Arbeitspunktes eingespeist werden muss.

Wie man den letzten beiden Abbildungen entnehmen kann, liegt das Design des RIM-4 Triebwerks nahe des Optimums für den eingestellten Arbeitspunkt. Entwickelt man Triebwerke, die

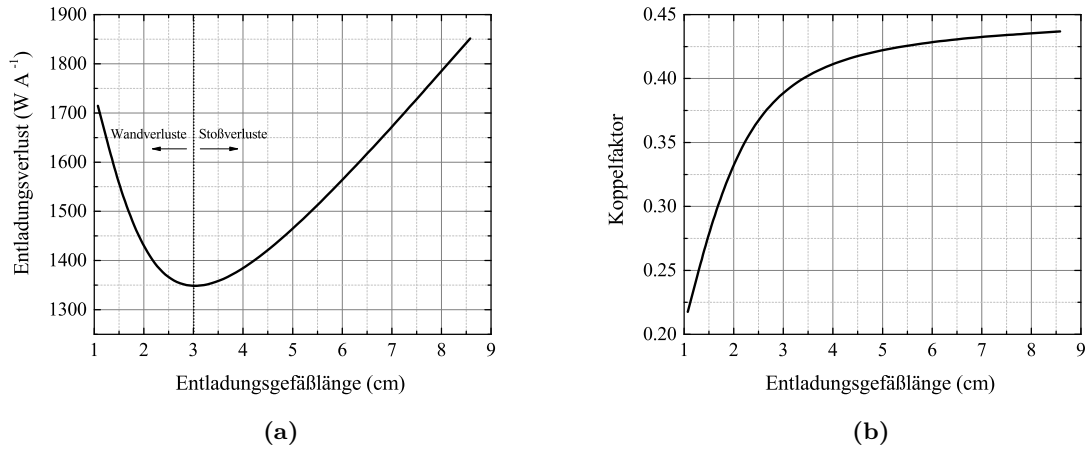


Abbildung 5.2.8: Entladungsverlust ξ (a) und induktiver Koeffizient ζ (b) für konstanten Spulendurchmesser d_c und variable Entladungsgefäßlänge L_v . Das sich ergebende Minimum in (a) ist zum einen dadurch bedingt, dass linksseitig Wandverluste stark ansteigen und zum anderen, dass der induktive Koeffizient dort sehr gering ist, wodurch mehr elektromagnetische Energie zur Erhaltung des Arbeitspunktes benötigt wird. Rechtsseitig nimmt der Entladungsverlust zu, da das Plasmavolumen ansteigt, wodurch mehr Leistung aufgrund der Stoßprozesse verloren geht. Extrem große Entladungsgefäßlängen konnten nicht untersucht werden, da das numerische Modell sonst seinen Gültigkeitsbereich überschritten hätte (vgl. Kap. 6.1).

einen größeren Schubereich durchfahren können sollen, wird eine geometrische Optimierung äußerst schwierig, da der Entladungsverlust (und somit der elektrische Wirkungsgrad) stark vom eingestellten Arbeitspunkt, bestehend aus extrahiertem Ionenstrom, angelegter Gitterspannung sowie einströmender Neutralgasmenge abhängig ist. Falls nur ein bestimmter Schub bzw. ein kleiner Schubereich bereitgestellt werden soll, kann das geometrische Verhältnis des Entladungsgefäßes auf höchste Effizienz eingestellt werden. Zusammen mit dem vorgestellten Konzept der gegenläufigen Bifilarspule aus Kap. 5.2.2 könnte somit ein effizientes Triebwerk entwickelt werden.

Kapitel 6

Ergebnisdiskussion und Fazit

In diesem Kapitel werden zunächst die mit dem numerischen Modell gewonnenen Erkenntnisse in puncto Gültigkeit evaluiert. Darüber hinaus werden im zweiten Teil dieses Kapitels die technischen und physikalischen Bedeutungen der Ergebnisse diskutiert und davon abgeleitet der Mehrwert des gezeigten numerischen Modells motiviert, was zugleich auf die Fragestellung aus Kap. 1 projiziert werden kann. Zum Schluss gibt ein Fazit Aufschluss über zukünftige Applikationen des Modells sowie geplante Modifikationen und Erweiterungen.

6.1 Gültigkeitsanalyse

Um die Gültigkeit des numerischen Modells bewerten zu können, muss man insbesondere die kritische Komponente in Betracht ziehen. In diesem Fall handelt es sich dabei um die Modellierung der Gasentladung, da für das Plasma die Beschreibung im Fluidbild mittels Uniform Density Discharge Model [65] als Approximation der tatsächlich ablaufenden physikalischen Prozesse gewählt wurde. Um gasdynamische und strömungsmechanische Problemstellungen zu klassifizieren, bedient man sich der Knudsen-Zahl Kn [64], die die mittlere freie Weglänge λ zwischen zwei Stößen mit der charakteristischen Länge L_λ , auf der diese Stöße geschehen, in Bezug setzt gemäß

$$Kn = \frac{\lambda}{L_\lambda}. \quad (6.1.1)$$

Für jeden Strömungsbereich kann ein äquivalenter Knudsen-Zahlenbereich ermittelt oder überschlagen werden, sofern genügend Kenntnisse über die Stoßprozesse vorliegen. Eine Übersicht in Abb. 6.1.1 nach Refs. 2 und 3 stellt die verschiedenen Bereiche vor, zeigt mathematische Modellansätze und setzt beides in Bezug zur Knudsen-Zahl.

Wie in der Abbildung dargestellt, lassen sich alle Strömungstypen mittels Boltzmann-Gleichung beschreiben. Die Boltzmann-Gleichung ist eine Integro-Differenzialgleichung, die die Verteilungsdichte im sechsdimensionalen Phasenraum beschreibt [2]. Die Implementierung einer Lösung der Boltzmann-Gleichung für Plasmaprozesse (besonders im Themenbereich der elektrischen Triebwerke) ist äußerst rechenintensiv und geschieht meist durch eine Kopplung von DSMC (Direct Simulation Monte Carlo)-Methoden mit PIC (Particle-In-Cell)-Ansätzen. Durch die vollständige Beschreibung der Plasmaentladung auf Ebene der kinetischen Gastheorie bekommt man so den Einblick in mikroskopische, orts aufgelöste Prozesse. Diese Vollständigkeit erkaufte man sich mit langen Rechenzeiten und hohem Ressourcenbedarf. Eine Studie zur Implementierung eines vollständig kinetischen Modells der Abläufe in einem RIT kann in Ref. 37 eingesehen werden. Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist eine Kenntnis der mikroskopischen Parameter für die vorliegende Arbeit nicht nötig, bzw. kontraproduktiv, da hier eine

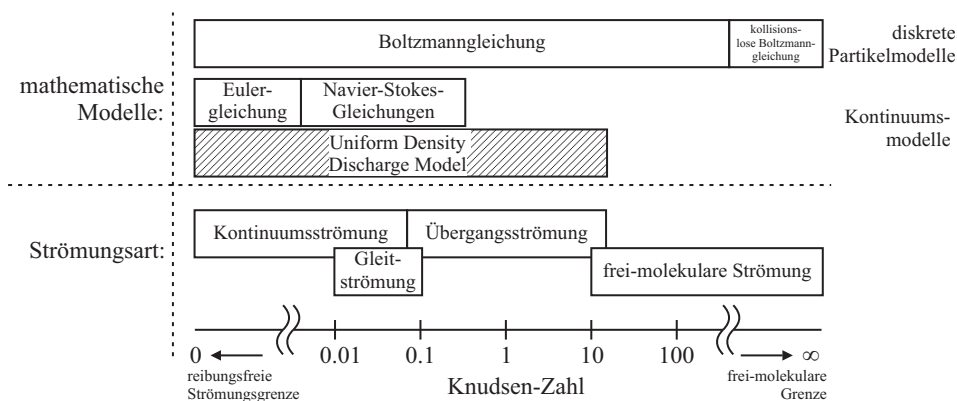


Abbildung 6.1.1: Übersicht der strömungsmechanischen Bereiche und entsprechenden mathematischen Modelle in Abhängigkeit der Knudsen-Zahl nach Refs. 2 und 3. Das in dieser Arbeit implementierte Uniform Density Discharge Model ist gültig für Kontinuums- und Übergangsströmungen. Wird die Knudsen-Zahl zu groß (allgemein > 10), verliert es allmählich seine Gültigkeit. Es existiert allerdings keine harte Grenze; Grenzfälle müssen stets gesondert untersucht werden, da auch sie u. U. als Fluid-Strömung betrachtet werden können.

Toolbox bereitgestellt werden soll, mit deren Hilfe man schnell verschiedenste Parametersätze evaluieren und vergleichen können soll.

Kommerziell erhältliche RIT mit Ionisator durchmessern $d_v \geq 4$ cm, so auch das RIM-4, arbeiten physikalisch im Bereich der Übergangsströmung, was man durch eine Approximation der Knudsen-Zahl belegen kann. Betrachtet wird im Folgenden das RIM-4 mit $d_v = 4.29$ cm. Die mittlere freie Weglänge, die zur Berechnung der Knudsen-Zahl genutzt wird, ist nicht jene, welche den dominanten Stoß zwischen Elektronen und Atomen beschreibt, sondern jene, welche den unwahrscheinlichsten Stoß beschreibt, damit stets die Gültigkeit des Gesamtsystems betrachtet wird. Dieser Stoß ist jener zwischen Ionen und Atomen, da sich beide Spezies lediglich mit thermischer Energie ungerichtet fortbewegen. Als charakteristische Länge L_λ wird im Falle des RIM-4 der Durchmesser d_v des Ionisators genutzt (da $d_v > L_v$), um die worst-case-Betrachtung aufrechtzuerhalten. Für die Studien, in welchen die geometrischen Verhältnisse des Ionisators modifiziert wurden, wurde stets die kleinste sich ergebende Strecke im Ionisator als charakteristische Länge genutzt. Für den typischen Arbeitspunkt von $\dot{V} = 0.2$ sccm Xenon-Volumenstrom bei $V_{scr} = 1250$ V und $V_{dec} = 150$ V bei Strahlströmen im Bereich 5 – 12.5 mA ergeben sich nach obigen Annahmen Knudsen-Zahlen im Bereich 1.7 – 5.7. Selbst bei dieser worst-case-Betrachtung liegen die Knudsen-Zahlen in einem handhabbaren Gültigkeitsbereich für die Anwendung des Uniform Density Discharge Modells.

Eine Übergangsströmung kann oft mittels Fluidmodellen berechnet werden [3], wobei die Ergebnisse stets experimentell verifiziert werden sollten. Das Uniform Density Discharge Model, das in seinen Grundzügen das ideale Gasgesetz widerspiegelt, basiert ebenso auf der Behandlung des Plasmas als Fluid und kann demnach bis zur Grenze zur frei-molekularen Strömung als Werkzeug eingesetzt werden. Diese Grenze ist nicht hart, sondern kann u. U. herauf- bzw. herabgesetzt werden.

Anhand numerischer Oszillationen kann der Gültigkeitsbereich von Fluidmodellen gut evaluiert werden. In dieser Arbeit liefert die innerste Erhaltungsgleichung (Gl. (3.2.10)) kein stabiles Ergebnis, wenn die Elektronentemperatur für den eingestellten Arbeitspunkt zu groß wird. Die

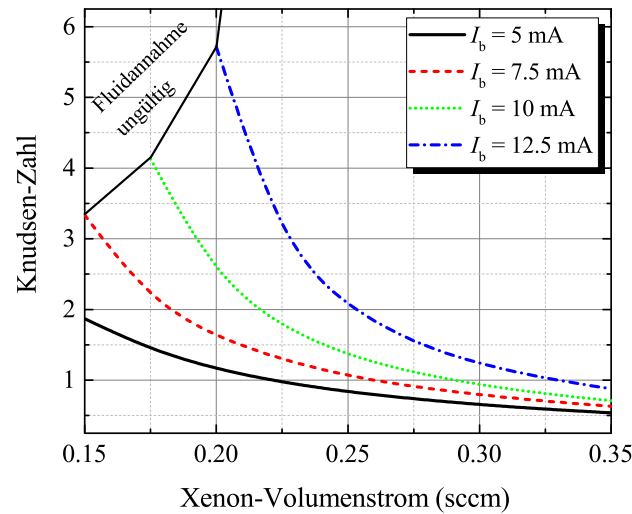


Abbildung 6.1.2: Knudsen-Zahl in Abhängigkeit des Arbeitspunktes. Die Lösungen fangen an zu oszillieren, wenn der Volumenstrom sinkt und zugleich der Ionenstrom zunimmt. Man erkennt, dass das Modell bereits in Bereichen $Kn < 10$ seine Gültigkeit verliert, was die obige Behauptung, die Gültigkeitsgrenzen seien nicht hart, verifiziert.

Lösung beginnt zu oszillieren. Anhand dieser Oszillation kann man sehr gut die Gültigkeitsgrenzen herausfinden. Im weiteren Verlauf sind die Gültigkeitsgrenzen für die Simulationen dargestellt und auf die Knudsen-Zahl bezogen. Des Weiteren werden die Knudsen-Zahlen für die verschiedenen Simulationen in Abhängigkeit der eingestellten Arbeitspunkte aufgeführt, wodurch sich eine umfassende Gültigkeitsanalyse des numerischen Modells ergibt.

Abbildung 6.1.2 zeigt die Knudsen-Zahlen für die in Kap. 4.3 und Kap. 5.1 durchgeführten Simulationen in Abhängigkeit des jeweilig eingestellten Arbeitspunktes bestehend aus Volumen- sowie Ionenstrahlstrom. Anhand der Abbildung kann man erkennen, dass die Gültigkeitsgrenze für diese Simulation bereits vor $Kn = 10$ liegt, da für die Konstellation kleiner Volumen- und großer Ionenstrahlströme die Lösungen teilweise oszillieren oder gar divergieren. Dies unterstreicht, dass die in Abb. 6.1.1 gezeigten Grenzen nicht hart sind, sondern für den Einzelfall evaluiert werden müssen. Da Arbeitspunkte extrem kleiner Volumen- bei recht großen Ionenstrahlströmen auch in der Praxis aufgrund ihrer Ineffizienz (vgl. Abb. 5.1.11 (a)) nicht erstrebenswert sind, leidet die Qualität des Modells nicht an dieser begrenzten Gültigkeit (zumindest für das RIM-4 Triebwerk). Die technisch interessanten Bereiche können aufgelöst werden, wie in Kap. 5.1.4 dargestellt.

In Kap. 5.2 wurden strukturelle Modifikationen des Triebwerks vorgenommen und deren Auswirkungen auf die Performance und Impedanz untersucht. Die Windungszahl wurde in Kap. 5.2.1 modifiziert mit dem Ergebnis, dass sich die Wirkungsgrade davon nicht beeinflussen ließen, wohl aber die benötigte Stromstärke. Aus diesem Grund ist es nicht verwunderlich, dass auch die Knudsen-Zahl annähernd konstant bleibt, wie in Abb. 6.1.3 (a) dargestellt. Die Entladungscharakteristik ändert sich durch Modifikation der Windungszahl nicht, da die Eingangsparameter auf den Strahlstrom geregelt werden. Da die Knudsen-Zahl von der entladungsbeschreibenden mittleren freien Weglänge abhängt, liefert sie hier lediglich die Aussage,

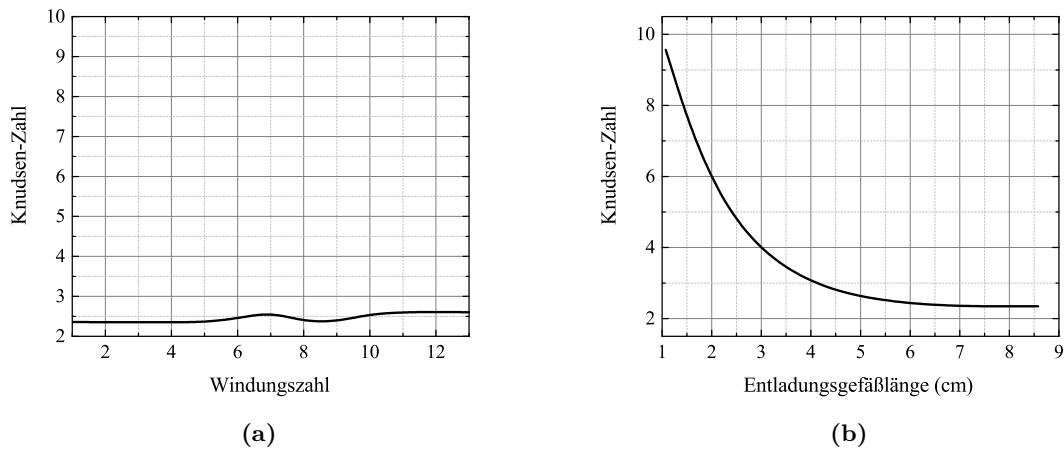


Abbildung 6.1.3: Gültigkeitsanalyse der in Kap. 5.2 durchgeführten Optimierungssimulationen. (a) zeigt die als konstant anzunehmende Knudsen-Zahl in Abhängigkeit von der Windungszahl der Spule. Die Entladungscharakteristik des Plasmas wird durch die Windungszahl nicht beeinflusst; um den extrahierten Ionenstrom aufrechtzuerhalten, muss allerdings der Eingangsstrom variiert werden, um die notwendigen magnetischen Flüsse durch die Windungen liefern zu können. (b) zeigt hingegen, dass die Knudsen-Zahl abhängig von der Geometrie des Ionisatorgefäßes ist. Die effektive Verlustfläche an den Wänden sowie das Plasmavolumen werden durch Veränderungen der Geometrie modifiziert, was sich wiederum auf die Entladungscharakteristik auswirkt.

dass sich die Entladung aus strömungsmechanischer Sicht in einem Bereich befindet, welcher mit Fluidgleichungen beschrieben werden kann.

Im Gegensatz dazu ändert eine Modifikation des Verhältnisses des Ionisatordurchmessers zu dessen Länge d_v/L_v , welche in Kap. 5.2.3 untersucht wurde, die grundlegende Entladungscharakteristik, da sich diese Änderung auf die effektive Wandverlustfläche sowie das Plasmavolumen auswirken. Die Knudsen-Zahl für variable Entladungsgefäßlängen L_v bei konstantem Spulendurchmesser d_c bzw. konstantem Entladungsgefäßdurchmesser $d_v = d_c - 2t_v$, wobei t_v die Dicke der dielektrischen Entladungsgefäßwand beschreibt, ist in Abb. 6.1.3 (b) dargestellt. Man erkennt, dass die Knudsen-Zahl mit abnehmenden d_v/L_v -Verhältnis stark anwächst. Bei einer axialen Länge von etwa 1 cm wird die Knudsen-Zahl nach Gl. (6.1.1) bereits so groß, dass die Fluidannahme fraglich ist. Kleinere axiale Längen (bei dem gegebenen Durchmesser) können aus diesem Grund mit dem hier vorgestellten Modell nicht untersucht werden. Sie werden allerdings auch nicht als praxisrelevant interpretiert, da sich zu große Entladungsverluste einstellen (vgl. Abb. 5.2.8 (a)).

Steigt das Verhältnis d_v/L_v an, sättigt sich die Knudsen-Zahl, da die charakteristische Länge ab einem Grenzwert der Entladungsgefäßlänge durch den Durchmesser des Entladungsgefäßes gegeben ist, der hier konstant bleibt. In diesen Bereichen ist die Gültigkeit des Modells gewährleistet. Die Knudsen-Zahl für den eingestellten Arbeitspunkt für ein RIM-4 Triebwerk lässt sich bei der Entladungsgefäßlänge von 4.1 cm ablesen und beträgt $\text{Kn} \approx 2.5$. Dies korrespondiert mit den entsprechenden Werten aus Teilbild (a) (bei 6 Windungen) sowie aus Abb. 6.1.2 (für $I_b = 10 \text{ mA}$ bei $\dot{V} = 0.2 \text{ sccm}$).

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass das vorgestellte numerische Modell stabile Ergebnisse für die Simulation der RIM-4 Triebwerksgeometrie liefert, sofern man praxisrelevante Arbeitspunkte als Eingabeparameter nutzt. Auch optimierte geometrische Strukturen, wie zum Beispiel jene der gegenläufig bifilar gewickelten Induktionsspule, lassen sich stabil simulieren und beeinflussen die Knudsen-Zahl kaum. Einzig die Veränderung der charakteristischen Längen ist mit Vorsicht zu betrachten, da diese sich direkt auf den Gültigkeitsbereich der Fluidannahme auswirkt. Arbeitspunkte rund um die maximale Effizienz des Triebwerks können problemlos simuliert werden, wodurch der praktische Nutzen des Modells verifiziert wird.

6.2 Abschließende Bewertung mit Zukunftsaussicht

In dieser Arbeit wurde die Entwicklung eines numerischen Modells zur Beschreibung von Radiofrequenz-Ionentriebwerken vorgenommen. Weiterhin wurden experimentelle Verifikationen einzelner Teil- aber auch des Gesamtmodells durchgeführt. Um die Anwendungsmöglichkeiten darzustellen, wurde ein RIM-4 Triebwerk unter verschiedenen Arbeitspunkteinstellungen (bestehend aus extrahiertem Ionenstrom, Extraktionsspannungen und Volumenstrom des Arbeitsgases) sowie unter Modifizierung der Spulen- und Entladungsgefäßgeometrie simulatorisch untersucht. Dabei wurde das Konzept der gegenläufig bifilar gewickelten Induktionsspule als Optimierungskriterium entdeckt, wodurch eine effizientere Plasmaheizung realisierbar wird. Obwohl das Modell das Plasma mittels Fluidannahme behandelt, sind praxisrelevante Arbeitspunkte und Geometrien problemlos simulatorisch abbildbar und bewegen sich im Gültigkeitsbereich der genutzten Modellvorschriften.

Das implementierte Modell besteht aus eindimensionalen Ladungs-, Energie- und Massenerhaltungsmodellen zur Berechnung der Plasmaparameter sowie aus einem dreidimensionalen elektromagnetischen Modell, welches beliebige Geometrien der Spule ermöglicht. Mit dieser Konstellation ist es möglich, praxisorientiert und schnell Lösungen zu produzieren, die aufgrund der experimentellen Verifikation die Funktionsweise einer existenten RIM-Quelle sehr gut widerspiegeln. Das dreidimensionale elektromagnetische Modell ist hier vonnöten, da die Induktionsspule als elektrisch kurz angesehen wird, weshalb keine analytischen Zusammenhänge zur Beschreibung existieren. Spätestens die modifizierten Spulengeometrien aus Kap. 5.2 diktieren die Nutzung eines dreidimensionalen Solvers an dieser Stelle. Im Gegensatz zu einer weiteren Arbeit des Projektschwerpunktes RITSAT, die eine vollständig dreidimensionale auf PIC und DSMC basierende numerische Lösung bietet [37], wurde hier zugunsten der Simulationsdauer auf die mikroskopische orts aufgelöste Beschreibung des Plasmas verzichtet. Durch die hybride 1D/3D Simulation können komplette Parameterstudien innerhalb weniger Stunden berechnet werden, was die Funktionalität des Virtual Prototypings begünstigt. Weiterhin kann das entwickelte Modell aufgrund dessen problemlos auf einem aktuellen PC mit vier CPU-Kernen und mindestens vier GiB Arbeitsspeicher ausgeführt werden. Natürlich profitiert auch dieses Modell von mehr zur Verfügung stehender Ressourcen, nicht zuletzt, da der Quellcode so gestaltet wurde, dass parallele Berechnungen auf bis zu 512 Kernen möglich sind. Mit der Anzahl der Kerne wächst jedoch auch der genutzte Arbeitsspeicher. Die Simulationen in dieser Arbeit wurden auf einer Dell Precision R7610 Workstation mit 32 CPU-Kernen (mit jeweils 2 GHz-Taktung) sowie 192 GiB Arbeitsspeicher durchgeführt, weshalb massive parallele Berechnungen durchgeführt werden konnten. Die genutzte MATLAB Version war das Release R2104b.

Zukünftige Modifikationen des Modells sollten die Geometrie des Entladungsgefäßes betref-

fen. Prinzipiell bietet das genutzte Uniform Density Discharge Model die Möglichkeit, plane und zylindrische Gefäßwände zu untersuchen. Da in der Praxis teilweise kegelförmige Entladungsgefäße genutzt werden [62], ist eine Implementierung dieser Geometrie sinnvoll. Weiterhin ist zu überlegen, ob eine modifizierte Version des Modells orts aufgelöste Plasmaparameter liefern können soll. Im Hinblick darauf wäre es möglich, den vorhandenen Code, vor allem die Implementierung des Uniform Density Discharge Models so anzupassen, dass dieser für beliebig viele Kontrollvolumina im gesamten Simulationsgebiet aufgerufen wird. Eine Implementierung wäre das Non-Uniform Density Discharge Model [65], das weiterhin auf Fluidgleichungen basiert, aber orts aufgelöste Parameter berechnen kann. Ob der Mehrwert des aktuellen Modells, namentlich dessen Geschwindigkeit bei experimenteller Genauigkeit, dann noch aufrechterhalten werden kann, muss geprüft werden. Die zusätzliche Information der örtlichen Verteilung von Elektronentemperatur und Teilchendichte(n) könnte dazu genutzt werden, noch genauere Vorschriften für die optimale Geometrie der Induktionsspule bzw. des Entladungsgefäßes zu finden.

Literatur- und Quellenverzeichnis

- [1] ALBACH, M.: *Grundlagen der Elektrotechnik 1: Erfahrungssätze, Bauelemente, Gleichstromschaltungen*. 3. Aufl., Pearson, 2011
- [2] ANDERSON, J. D. JR.: *Computational Fluid Dynamics*, McGraw-Hill, 1995
- [3] ANDERSON, J. D. JR.: *Hypersonic and High-Temperature Gas Dynamics*. 2. Aufl., AIAA, 2006
- [4] BANKS, P.: Collision frequencies and energy transfer electrons. In: *Planet. Space Sci.* 14 (1966), Nr. 11, S. 1085–1103
- [5] BASSNER, H. ; BERG, H. P. ; GROH, K. H. ; LÖB, H. W.: RF-ion engine RIT-35–Operation experience and application possibilities. In: *Proceedings of the 37th International Astronautical Congress*, 1986
- [6] BASSO, C. P.: *Switch-Mode Power Supplies: SPICE Simulations and Practical Designs*, McGraw-Hill, 2008
- [7] BILLINGS, K. ; MOREY, T.: *Switchmode Power Supply Handbook*. 3. Aufl., McGraw-Hill, 2011
- [8] BÖGE, W. (Hrsg.): *Handbuch Elektrotechnik*. 2. Aufl., Vieweg, 2002
- [9] BRONŠTEIN, I. N. ; SEMENDJAJEW, K. A. ; MUSIOL, G.: *Taschenbuch der Mathematik*. 6. Aufl., Harri Deutsch, 2005
- [10] BROPHY, J. R.: Effect of screen grid potential on perveance (in Advanced Ion Thruster Research (NASA CR-168340)) / NASA. 1984. – Forschungsbericht
- [11] BROPHY, J. R.: NASA's Deep Space 1 ion engine. In: *Rev. Sci. Instrum.* 73 (2002), Nr. 2, S. 1071
- [12] BROWN, I. G. (Hrsg.): *The Physics and Technology of Ion Sources*. 2. Aufl., John Wiley & Sons, 2006
- [13] BUNGARTZ, H.-J. ; ZIMMER, S. ; BUCHHOLZ, M. ; PFLÜGER, D.: *Modellbildung und Simulation: Eine anwendungsorientierte Einführung*. 2. Aufl., Springer Spektrum, 2013
- [14] CHABERT, P. ; ARANCIBIA MONREAL, J. ; BREDIN, J. ; POPELIER, L. ; AANESLAND, A.: Global model of a gridded-ion thruster powered by a radiofrequency inductive coil. In: *Phys. Plasmas* 19 (2012), Nr. 073512
- [15] CHABERT, P. ; BRAITHWAITE, N.: *Physics of Radio-Frequency Plasmas*, Cambridge University Press, 2011

- [16] CHEN, F. F.: *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion - Volume 1: Plasma Physics*. 2. Aufl., Plenum Press, 1984
- [17] CHEN, L.: Programming of Finite Difference Methods in MATLAB / University of California Irvine. <http://www.math.uci.edu/~chenlong/226/FDMcode.pdf>. – Vorlesungsskript "Math 226: Computational PDEs - Fall 2011". – Abgerufen am 27.06.2014
- [18] ERICKSON, R. W. ; MAKSIMOVIĆ, D.: *Fundamentals of Power Electronics*. 2. Aufl., Kluwer Academic, 2001
- [19] FEILI, D. ; COLLINGWOOD, C. ; LOTZ, B. ; GÄRTNER, W. ; LÖB, H. W. ; DEL AMO, J. G. ; DI CARA, D. M.: Ion thrusters for space applications. In: *Proceedings of the 31st International Conference on Phenomena in Ionized Gases*, 2013
- [20] FEILI, D. ; LOTZ, B. ; LÖB, H. W. ; LEITER, H. J. ; BOSS, M. ; BRAEG, R. ; DI CARA, D. M.: Radio frequency mini ion engines for fine attitude control and formation flying applications. In: *Proceedings of the Second CEAS European Air & Space Conference*, 2009
- [21] FETZER, J. ; HAAS, M. ; KURZ, S.: *Numerische Berechnung elektromagnetischer Felder*, Expert, 2002
- [22] FREISINGER, J. ; GROH, K. ; LÖB, H. W.: Extraction and acceleration mechanism in RF-ion thrusters. In: *Proceedings of the AIAA 7th Electric Propulsion Conference*, AIAA, 1969
- [23] FREISINGER, J. ; LÖB, H. W.: Application of the RF-thruster technique for fusion plasma heating. In: *Proceedings of the JSASS/AIAA/DGLR 17th International Electric Propulsion Conference*, 1984
- [24] FREISINGER, J. ; LÖB, H. W.: The neutral particles injectors RIG for fusion reactors. In: *Atomenergie Kerntechnik* 44 (1984), Nr. 1, S. 81–86
- [25] FREISINGER, J. ; LÖB, H. W. ; SCHARMANN, A.: Radiofrequency ion beam source RIM-10 for material processing. In: *Kerntechnik* 51 (1987), S. 125–128
- [26] GOEBEL, D. M.: Analytical discharge model for RF ion thrusters. In: *IEEE Trans. Plasma Sci.* 36 (2008), Nr. 5, S. 2111–2121
- [27] GOEBEL, D. M. ; KATZ, I.: *Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters*, John Wiley & Sons, 2008
- [28] GRIFFITHS, D. J.: *Introduction to Electrodynamics*. 3. Aufl., Prentice Hall, 1999
- [29] GROH, K. H. ; LÖB, H. W.: Radio-frequency ion thruster activities at Giessen University. In: *Proceedings of the 20th International Symposium on Space Technology and Science*, 1996, S. 178–185
- [30] GROSSMANN, C. ; ROOS, H.-G.: *Numerik partieller Differentialgleichungen*. 2. Aufl., Teubner, 1994

- [31] GUDMUNDSSON, J. T. ; LIEBERMAN, M. A.: Magnetic induction and plasma impedance in a cylindrical inductive discharge. In: *Plasma Sources Sci. Technol.* 6 (1997), Nr. 4, S. 540
- [32] HARWELL, K. E. ; JAHN, R. G.: Initial ionization rates in shock-heated argon, krypton, and xenon. In: *Phys. Fluids* 7 (1964), Nr. 2, S. 214–222
- [33] HAYASHI, M.: *Cross-section database*. Online-Ressource: <http://www.lxcat.net>, Abgerufen am 29.01.2015
- [34] HAYASHI, M.: Determination of electron-xenon total excitation cross-sections, from threshold to 100 eV, from experimental values of Townsend's α . In: *J. Phys. D: Appl. Phys.* 16 (1983), Nr. 4, S. 581
- [35] HEES, H. van: *Die Poisson-Gleichung und die Green-Funktion des Laplace-Operators*. Online-Ressource: <http://theory.gsi.de/~vanhees/faq/edyn/node10.html>, Abgerufen am 07.12.2014
- [36] HENKE, H.: *Elektromagnetische Felder: Theorie und Anwendung*. 3. Aufl., Springer, 2007
- [37] HENRICH, R.: *Development of a Plasma Simulation Tool for Radio Frequency Ion Thrusters*, Justus-Liebig-Universität Gießen, Dissertation, 2013
- [38] HIPPLER, R. (Hrsg.) ; KERSTEN, H. (Hrsg.) ; SCHMIDT, M. (Hrsg.) ; SCHOENBACH, K. H. (Hrsg.): *Low Temperature Plasmas: Fundamentals, Technologies and Techniques*. Bd. 1. 2. Aufl., Wiley-VCH, 2008
- [39] HORI, T. ; BOWDEN, M. D. ; UCHINO, K. ; MURAOKA, K.: Measurement of non-Maxwellian electron energy distributions in an inductively coupled plasma. In: *Appl. Phys. Lett.* 69 (1996), Nr. 24, S. 3683
- [40] HUBA, J. D.: Naval Research Laboratory Report on Plasma Formulary / U. S. Naval Research Laboratory. 1994. – Forschungsbericht
- [41] JACKSON, J. D.: *Classical Electrodynamics*. 3. Aufl., John Wiley & Sons, 1998
- [42] JEFIMENKO, O. D.: Solutions of Maxwell's equations for electric and magnetic fields in arbitrary media. In: *Am. J. Phys.* 60 (1992), Nr. 10, S. 899
- [43] JIANG, J. ; DONG, C.-Z. ; XIE, L.-Y. ; ZHOU, X.-X. ; WANG, J.-G.: Electron impact excitation of xenon from the metastable state to the excited states. In: *J. Phys. B: At., Mol. Opt. Phys.* 41 (2008), Nr. 24, 245204
- [44] KAN, J. J. I. M. ; SEGAL, A.: *Numerik partieller Differentialgleichungen für Ingenieure*, Teubner, 1995
- [45] KATZ, I. ; ANDERSON, J. R. ; POLK, J. E. ; BROPHY, J. R.: One-dimensional hollow cathode model. In: *J. Propul. Power* 19 (2003), Nr. 4, S. 595–600
- [46] KILLINGER, R. ; KUKIES, R. ; SURAUER, M. ; ; TOMASETTO, A. ; HOLTZ, L. van: ARTEMIS orbit raising inflight experience with ion propulsion. In: *Acta Astronautica* 53 (2003), Nr. 4, S. 607–621

- [47] KNOEPFEL, H. E.: *Magnetic Fields: A Comprehensive Theoretical Treatise for Practical Use*, Wiley-Interscience, 2000
- [48] KORTSHAGEN, U. ; GIBSON, N. D. ; LAWLER, J. E.: On the E-H mode transition in RF inductive discharges. In: *J. Phys. D: Appl. Phys.* 29 (1996), Nr. 5, S. 1224
- [49] KOSCHADE, S. E. ; PINKS, W. ; TROJAN, F. ; LÖB, H. W. ; BASSNER, H. W.: Development of a flight prototype of the RF-ion thruster RIT 10. In: *Proceedings of the AIAA 9th Electric Propulsion Conference*, AIAA, 1972
- [50] KRÖGER, R. ; UNBEHAUEN, R.: *Elektrodynamik: Einführung für Physiker und Ingenieure*. 3. Aufl., Teubner, 1993
- [51] KUCHLING, H.: *Taschenbuch der Physik*. 19. Aufl., Carl Hanser, 2007
- [52] KUMAR, L. ; SPÄDTKE, P. ; CARTER, R. G. ; PERRING, D.: Three-dimensional simulation of multistage depressed collectors on micro-computers. In: *IEEE Trans. Electron Devices* 42 (1995), Nr. 9, S. 1663–1673
- [53] LANG, H. ; LÖB, H. W.: Mission capabilities of the RIT-engines. In: *Proceedings of the 10th Electric Propulsion Conference*, 1973
- [54] LEE, C. ; LIEBERMAN, M. A.: Global model of Ar, O₂, Cl₂, and Ar/O₂ high-density plasma discharges. In: *J. Vac. Sci. Technol. A* 13 (1995), Nr. 2, S. 368
- [55] LEHNER, G.: *Elektromagnetische Feldtheorie: für Ingenieure und Physiker*. 7. Aufl., Springer, 2010
- [56] LEITER, H. J.: *Entwicklung und physikalische Untersuchung eines Hochfrequenz-Ionentriebwerks unter besonderer Berücksichtigung des Extraktionsgittersystems und der Ionisatorform*, Justus-Liebig-Universität Gießen, Dissertation, 2000
- [57] LEITER, H. J. ; ELLERBROCK, H. ; BERGER, M. ; BOSS, M. ; FEILI, D. ; LOTZ, B. ; DI CARA, D. M.: Development of a miniaturized RF ion engine system for commercial and scientific applications. In: *Proceedings of the AIAA/ASME/SAE/ASEE 47th Joint Propulsion Conference & Exhibit*, 2011
- [58] LEITER, H. J. ; KILLINGER, R. ; BASSNER, H. ; KUKIES, R. ; MÜLLER, J.: Evaluation of the performance of the advanced 200 mN radio frequency ion thruster RIT XT. In: *Proceedings of the 38th Joint Propulsion Conference*, 2002
- [59] LEITER, H. J. ; KILLINGER, R. ; BASSNER, H. ; MÜLLER, J. ; KUKIES, R.: Development of the radio frequency ion thruster RIT XT–A status report. In: *Proceedings of the 27th International Electric Propulsion Conference*, 2001
- [60] LEITER, H. J. ; KILLINGER, R. ; BASSNER, H. ; MÜLLER, J. ; KUKIES, R. ; FRÖHLICH, T.: Development and performance of the advanced radio frequency ion thruster RIT-XT. In: *Proceedings of the 28th International Electric Propulsion Conference*, 2003
- [61] LEITER, H. J. ; KILLINGER, R. ; BOSS, M. ; BRAEG, M. ; GOLLOR, M. ; WEIS, S. ; FEILI, D. ; TARTZ, M. ; NEUMANN, H. ; DI CARA, D. M.: RIT- μ X–High precision micro ion propulsion system based on RF-technology. In: *Proceedings of the AIAA 43rd Joint Propulsion Conference*, 2007, S. 5250

- [62] LEITER, H. J. ; KUKIES, R. ; KILLINGER, R. ; BONELLI, E. ; SCARANZIN, S. ; SCORTECCI, F. ; NEUMANN, H. ; TARTZ, M.: RIT-22 ion propulsion system: 5,000h endurance test results and life prediction. In: *Proceedings of the 43rd AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit*, 2007
- [63] LEITER, H. J. ; LÖB, H. W. ; SCHARTNER, K.-H.: The RIT 15 ion engines—A survey of the present state of radio frequency ion thruster technology and its future potentiality. In: *Proceedings of the 3rd International Spacecraft Propulsion Conference*, 2000, S. 423
- [64] LEY, W. (Hrsg.) ; WITTMANN, K. (Hrsg.) ; HALLMANN, W. (Hrsg.): *Handbuch der Raumfahrttechnik*. 4. Aufl., Carl Hanser, 2011
- [65] LIEBERMAN, M. A. ; LICHTENBERG, A. J.: *Principles of Plasma Discharges and Materials Processing*. 2. Aufl., Wiley-Interscience, 2005
- [66] LISTER, G. G. ; LI, Y.-M. ; GODYAK, V. A.: Electrical conductivity in high-frequency plasmas. In: *J. Appl. Phys.* 79 (1996), Nr. 12, S. 8993
- [67] LÖB, H. W.: Ein elektrostatisches Raketentriebwerk mit Hochfrequenzenergiequelle. In: *Astronautica Acta VIII* 1 (1962), S. 49
- [68] LÖB, H. W.: State of the art and recent developments of the radio frequency ion motors. In: *Proceedings of the AIAA 7th Electric Propulsion Conference*, AIAA, 1969
- [69] LÖB, H. W.: Recent work on radio frequency ion thrusters. In: *J. Spacecraft Rockets* 8 (1971), Nr. 5, S. 494–500
- [70] LÖB, H. W.: Electric propulsion technology status and development plans—European programs. In: *J. Spacecraft Rockets* 11 (1974), Nr. 12, S. 821–828
- [71] LÖB, H. W.: Ionentriebwerke für Satelliten und Raumsonden. In: *Physikalische Blätter* 41 (1985), Nr. 8, S. 292–294
- [72] LÖB, H. W. ; FEILI, D. ; POPOV, G. A. ; OBUKHOV, V. A. ; BALASHOV, V. V. ; MOGULKIN, A. I. ; MURASHKO, V. M. ; NESTERENKO, A. N. ; KHARTOV, S.: Design of high-power high-specific impulse RF-ion thruster. In: *Proceedings of the 32nd International Electric Propulsion Conference*, 2011, S. 1–8
- [73] LÖB, H. W. ; FREISINGER, J.: *Ionenraketen*, Vieweg, 1967
- [74] LÖB, H. W. ; FREISINGER, J. ; GROH, K. H. ; SCHARMANN, A.: State-of-the-art of the RIT-ion thrusters and their spin-offs. In: *Proceedings of the 39th International Astronautical Congress*, 1988
- [75] LOTZ, B.: *Plasma Physical and Material Physical Aspects of the Application of Atmospheric Gases as a Propellant for Ion-Thruster of the RIT-Type*, Justus-Liebig-Universität Gießen, Dissertation, 2013
- [76] MARSAL, D.: *Finite Differenzen und Elemente: Numerische Lösung von Variationsproblemen und partiellen Differentialgleichungen*, Springer, 1989
- [77] MARTINEZ-SANCHEZ, M.: *Kapitel "Electrostatic Thrusters"*. Massachusetts Institute of Technology : *Vorlesungsskript "16.522 – Space Propulsion"*, 2004

- [78] MAXWELL, J. C.: A dynamical theory of the electromagnetic field. In: *Philos. Trans. Roy. Soc. London* 155 (1865), S. 459–512
- [79] MESSERSCHMID, E. ; FASOULAS, S.: *Raumfahrtssysteme: Eine Einführung mit Übungen und Lösungen*. 4. Aufl., Springer, 2010
- [80] MIKELLIDES, I. G. ; KATZ, I. ; MANDELL, M. ; SNYDER, C. A.: A 1-D model of the hall-effect thruster with an exhaust region. In: *Proceedings of the AIAA-2001-3505 37th Joint Propulsion Conference*, 2001
- [81] MITCHNER, M. ; KRUGER, C. H.: *Partially Ionized Gases (Wiley Series in Plasma Physics)*, John Wiley & Sons, 1973
- [82] MUNZ, C.-D. ; WESTERMANN, T.: *Numerische Behandlung gewöhnlicher und partieller Differenzialgleichungen: Ein interaktives Lehrbuch für Ingenieure*. 3. Aufl., Springer, 2012
- [83] NAGEL, J. R.: *Solving the generalized Poisson equation using the Finite-Difference-Method (FDM)*. Online-Ressource: <http://www.ece.utah.edu/~ece6340/LECTURES/Feb1/Nagel%202012%20-%20Solving%20the%20Generalized%20Poisson%20Equation%20using%20FDM.pdf>, Abgerufen am 13.12.2014
- [84] NOLTING, W.: *Grundkurs Theoretische Physik 3: Elektrodynamik*. 8. Aufl., Springer, 2007
- [85] PIEJAK, R. B. ; GODYAK, V. A. ; ALEXANDROVICH, B. M.: A simple analysis of an inductive RF discharge. In: *Plasma Sources Sci. Technol.* 1 (1992), Nr. 3, S. 179
- [86] PROBST, U.: *Leistungselektronik für Bachelors: Grundlagen und praktische Anwendungen*. 2. Aufl., Hanser, 2011
- [87] PURCELL, E.: *Electricity and Magnetism*. 3. Aufl., Cambridge University Press, 2013
- [88] RAVACH, T.: *MATLAB Central File Exchange: Successive Over-Relaxation*. Online-Ressource: <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/28226-successive-over-relaxation/content/sor.m>, Abgerufen am 04.02.2015
- [89] ROVANG, D. C. ; WILBUR, P. J.: Ion Extraction Capabilities of Very Closely Space Grids. In: *Proceedings of the AIAA/JSASS/DGLR 16th International Electric Propulsion Conference*, 1982
- [90] ROVANG, D. C. ; WILBUR, P. J.: Ion Extraction Capabilities of Two-Grid Accelerator Systems. In: *J. Propul. Power* 1 (1985), Nr. 3, S. 172–179
- [91] SADIKU, M. N. O.: *Elements of Electromagnetics (Oxford Series in Electrical and Computer Engineering)*. 3. Aufl., Oxford University Press, 2000
- [92] SADIKU, M. N. O.: *Numerical Techniques in Electromagnetics*. 2. Aufl., CRC Press, 2000
- [93] SCHWAB, A. J.: *Begriffswelt der Feldtheorie: Elektromagnetische Felder, Maxwell-Gleichungen, Gradient, Rotation, Divergenz (Springer-Lehrbuch)*. 7. Aufl., Springer Vieweg, 2013

-
- [94] SIMON, J. ; PROBST, U. ; KLAR, P. J.: Development of a radio-frequency generator for RF ion thrusters. In: *Proceedings of the 34th International Electric Propulsion Conference*, 2015
- [95] SPÄDTKE, P.: The physics of ion beam extraction from an electron cyclotron resonance ion source. In: *IEEE Trans. Plasma Sci.* 36 (2008), Nr. 4, S. 1569–1573
- [96] SPÄDTKE, P. ; TINSCHERT, K. ; LANG, R. ; MÄDER, J. ; ROSSBACH, J. ; STETSON, J. W. ; CELONA, L.: Prospects of ion beam extraction and transport simulations (invited) a). In: *Rev. Sci. Instrum.* 79 (2008), Nr. 2, S. 02B716
- [97] STUHLINGER, E.: *Ion Propulsion for Space Flight*, McGraw-Hill, 1964
- [98] STUHLINGER, E.: Electric propulsion—Past history and future prospects. In: *Proceedings of the 3rd European Electric Propulsion Conference*, AIAA, 1974, S. 9–17
- [99] TERMAN, F. E.: *Radio Engineer's Handbook*, McGraw-Hill, 1943
- [100] TSAY, M. M.: *Numerical Modeling of a Radio-Frequency Micro Ion Thruster*, Massachusetts Institute of Technology, Masterthesis, 2006
- [101] TSAY, M. M.: *Two-Dimensional Numerical Modeling of Radio-Frequency Ion Engine Discharge*, Massachusetts Institute of Technology, Dissertation, 2010
- [102] TSAY, M. M. ; MARTINEZ-SANCHEZ, M.: Simple performance modeling of a radio-frequency ion thruster. In: *Proceedings of the 30th International Electric Propulsion Conference*, 2007
- [103] TURKOZ, E. ; CELIK, M.: 2-D electromagnetic and fluid models for inductively coupled plasma for RF ion thruster performance evaluation. In: *IEEE Trans. Plasma Sci.* 42 (2013), Nr. 1, S. 235–240
- [104] TURNER, M.: Collisionless electron heating in an inductively coupled discharge. In: *Phys. Rev. Lett.* 71 (1993), Nr. 12, S. 1844–1847
- [105] TURNER, M. J. L.: *Rocket and Spacecraft Propulsion: Principles, Practice and New Developments*. 3. Aufl., Springer, 2009
- [106] VAHEDI, V. ; DIPESO, G. ; BIRDSALL, C. K. ; LIEBERMAN, M. A. ; ROGNLIEN, T. D.: Capacitive RF discharges modelled by particle-in-cell Monte Carlo simulation. I. Analysis of numerical techniques. In: *Plasma Sources Sci. Technol.* 2 (1993), Nr. 4, S. 261
- [107] VAHEDI, V. ; LIEBERMAN, M. A. ; DIPESO, G. ; ROGNLIEN, T. D. ; HEWETT, D.: Analytic model of power deposition in inductively coupled plasma sources. In: *J. Appl. Phys.* 78 (1995), Nr. 3, S. 1446
- [108] VOLKMAR, C. ; BARUTH, T. ; SIMON, J. ; RICKLEFS, U. ; THÜRINGER, R.: Arbitrarily shaped coils' inductance simulation based on a 3-dimensional solution of the Biot-Savart law. In: *Proceedings of the 36th International Spring Seminar on Electronics Technology*, IEEE, 2013, S. 210–215

- [109] VOLKMAR, C. ; RICKLEFS, U.: Modeling of electrical parameters of an inductively-coupled plasma generator in 3-dimensional Cartesian space. In: *Proceedings of the Space Propulsion 2014 Conference*, 2014
- [110] VOLKMAR, C. ; RICKLEFS, U.: Implementation and verification of a self-consistent 1D/3D hybrid performance and impedance model of gridded radio-frequency ion thrusters. In: *Eur. Phys. J. D* (2015). – unter Begutachtung
- [111] VOLKMAR, C. ; RICKLEFS, U. ; KLAR, P. J.: Self-consistent numerical 1D/3D hybrid modeling of radio-frequency ion thrusters. In: *Proceedings of the 34th International Electric Propulsion Conference*, 2015
- [112] VOLKMAR, C. ; SIMON, J. ; RICKLEFS, U.: Numerical determination of induced electric eddy fields inside arbitrarily shaped induction coils. In: *J. Phys. Sci. Appl.* 4 (2014), Nr. 4, S. 262–268
- [113] WEIBEL, E. S.: Anomalous skin effect in a plasma. In: *Phys. Fluids* 10 (1967), Nr. 4, S. 741
- [114] WEIS, S.: *Entwicklung und physikalische Charakterisierung einer kompakten Elektronenquelle mit kapazitiver Radiofrequenz-Entladung zur Strahlneutralisation von Ionenantrieben*, Justus-Liebig-Universität Gießen, Dissertation, 2006
- [115] WESTERMANN, T.: *Modellbildung und Simulation: Mit einer Einführung in ANSYS*, Springer, 2010
- [116] WHEELER, H. A.: Simple inductance formulas for radio coils. In: *Proc. IRE* 16 (1928), Nr. 10, S. 1398–1400
- [117] WHEELER, H. A.: Inductance formulas for circular and square coils. In: *Proc. IEEE* 70 (1982), Nr. 12, S. 1449–1450
- [118] YANG, S. ; GOBBERT, M. K.: The optimal relaxation parameter for the SOR method applied to the Poisson equation in any space dimensions. In: *Appl. Math. Lett.* 22 (2009), Nr. 3, S. 325–331
- [119] YEE, K. S.: Numerical solution of initial boundary value problems involving Maxwell's equations. In: *IEEE Trans. Antennas Propag.* 14 (1966), Nr. 3, S. 302–307
- [120] ZHOU, P.-b.: *Numerical Analysis of Electromagnetic Fields*, Springer, 1993

Abbildungsverzeichnis

1.1.1	Regelungsschema: RIT und Peripherie	2
1.1.2	Ersatzschaltbild: Leistungseinkopplung RFG \rightarrow RIT	3
2.1.1	Schemaskizze Induktionsspule	11
2.1.2	Zur Herleitung des Skin-Effekts	14
2.1.3	Biot-Savart'sches Gesetz	17
2.1.4	Approximationen der Ableitung von $f(x)$ im Punkt x_0	20
2.1.5	Beispiel: 2D-Laplace-Gleichung	23
2.1.6	Numerische Sterne für 2D-Laplace-Operator	24
2.1.7	Potenzialverlauf der 2D-Laplace-Gleichung	26
2.2.1	Maxwell-Boltzmann-Verteilungsdichtefunktionen für Elektronen	29
2.2.2	Debye-Hückel-Potenzial und Abschirmlänge	33
2.2.3	Kollisionsmodell harter Kugeln	36
2.3.1	Zur Raketengleichung	42
2.3.2	RIT Schemaskizze	44
2.3.3	Aufnahmen des RIM-4	45
2.3.4	Dreigittersystem und Potenzialverlauf	47
3.1.1	Flussdiagramm des Gesamtmodells	52
3.2.1	Ladungsträgerdichten im UDDM	54
3.2.2	Kollisionsdaten für Argon und Xenon	56
3.2.3	Stoßquerschnitte für Anregungsprozesse für Argon und Xenon	57
3.3.1	Kubisches Simulationsgebiet des FDM-Solvers	58
3.3.2	3D 7-Punkte-Stern	60
3.3.3	Flussdiagramm des elektromagnetischen Modells	61
3.3.4	Mapping der Quellstromterme	62
3.3.5	Approximation der RIM-4 Spule auf 3D Gitternetz	63
3.3.6	Zur Verifikation des optimalen Relaxationsparameters	65
3.7.1	ESB einer induktiv-gekoppelten Plasmaentladung	72
3.7.2	Effektive Last	74
3.7.3	Diskretisierung des Strom- bzw. Spulenpfades.	75
3.7.4	Implementierung des Biot-Savart'schen Gesetzes	76
3.7.5	Simulationsgebiet zur Induktivitätsberechnung	77
4.1.1	Kreisförmige Leiterschleife	82
4.1.2	Magnetische Induktion einer kreisförmigen Leiterschleife	83
4.1.3	Zur experimentellen Verifikation des magnetoquasistatischen Solvers	84
4.1.4	Implementierung der semi-analytischen Lösung des elektrischen Feldes	85
4.1.5	Zur experimentellen Verifikation der semi-analytischen Lösung des elektrischen Feldes	86
4.1.6	Zur optimalen Einstellung des FDM-Solvers für RIM-4 Geometrie	87

4.2.1	Einfluss der Elektronendichte auf die Eindringtiefe elektromagnetischer Felder	89
4.2.2	Verifikation des Plasmamodells	90
4.3.1	PI-Regelkreis des extrahierten Ionenstromes	91
4.3.2	Zur Verifikation des Gesamtmodells	92
4.3.3	Skalierungsparameter	93
5.1.1	Konvergenzverhalten des Gesamtmodells	96
5.1.2	Plasmaparameter des RIM-4 Triebwerks	97
5.1.3	Elektromagnetische Feldverteilung im RIM-4 Entladungsgefäß	99
5.1.4	Elektromagnetische Felder im radialen Schnittbild	100
5.1.5	Stromdichte und vom Plasma absorbierte Leistungsdichte	101
5.1.6	Elektrische Ersatzschaltbildparameter eines RIM-4 Triebwerks	102
5.1.7	Betrag der Serienimpedanz und Koppelfaktor eines RIM-4 Triebwerks	102
5.1.8	Übertragungseffizienz und Stromamplitudenverlauf des RIM-4 Triebwerks	103
5.1.9	Schub und spezifischer Impuls eines RIM-4 Triebwerks	104
5.1.10	Wirkungsgrade des RIM-4 Triebwerks	105
5.1.11	Gesamtwirkungsgrad und Entladungsverlust des RIM-4 Triebwerks	106
5.2.1	Wirkungsgrade und Spulenstrom abhängig von Spulenwindungszahl	108
5.2.2	Übertragungseffizienz und Koppelfaktor abhängig von Spulenwindungszahl	109
5.2.3	Elektrisches Feld abhängig von Windungszahl	110
5.2.4	Axiale elektrische Feldstärkenkomponente abhängig von Windungszahl	111
5.2.5	Gegenläufig gewickelte Bifilarspule	112
5.2.6	Vergleich der axial induzierten Feldkomponenten	113
5.2.7	Wirkungsgrade abhängig vom geometrischen Verhältnis	115
5.2.8	Entladungsverlust und Koppelfaktor abhängig vom geometrischen Verhältnis	116
6.1.1	Übersicht strömungsmechanischer Bereiche und Lösungsansätze	118
6.1.2	Knudsen-Zahl in Abhängigkeit des Arbeitspunktes	119
6.1.3	Knudsen-Zahl abhängig von Windungszahl und Ionisatorlänge	120
A.1.1	Zur Herleitung des Child-Langmuir Raumladungsgesetzes	VIII
A.2.1	Zur Herleitung des Bohm-Randschicht-Kriteriums	X

Tabellenverzeichnis

4.1	Geometrische Daten des 1D-Plasmagenerators aus Ref. 15.	88
4.2	Geometrische Daten des RIM-4 Triebwerks.	91
5.1	Eingabeparameter des Konvergenzplots aus Abb. 5.1.1	95
5.2	Zurückgelegter axialer Weg der Elektronen abhängig von Windungszahl . . .	111
5.3	Elektrische Parameter und Performancedaten RIM-4 / RIM-4 mit gegenläufig bifilar gewickelter Spule	114

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre: Ich habe die vorgelegte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt, die ich in der Dissertation angegeben habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der "Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis" niedergelegt sind, eingehalten.

Chris Volkmar, 23. Juli 2015

Publikationsliste und Konferenzteilnahmen

Journal-Beiträge

Chris Volkmar, Jens Simon, and Ubbo Ricklefs, “Numerical Determination of Induced Electric Eddy Fields Inside Arbitrarily Shaped Induction Coils”, *Journal of Physical Science and Application* 4(4), pp. 262–268, 2014

Chris Volkmar and Ubbo Ricklefs, “Implementation and Verification of a Self-Consistent 1D/3D Hybrid Performance and Impedance Model of Gridded Radio-Frequency Ion Thrusters”, *European Physical Journal D*, under review, 2015

Konferenz-Proceedings und -teilnahmen

Chris Volkmar, Timo Baruth, Jens Simon, Ubbo Ricklefs, and Rainer Thueringer, “Arbitrarily Shaped Coils’ Inductance Simulation Based on a 3-Dimensional Solution of the Biot-Savart Law”, *Proceedings of the 36th International Spring Seminar on Electronics Technology*, Alba Iulia, Romania, 2013

Teilnahme mit Poster, Ausgezeichnet mit “Excellent Poster Award for Young Scientists” des Steering Committee der Konferenz

Chris Volkmar, Jens Simon, and Ubbo Ricklefs, “Numerical Determination of Induced Electric Eddy Fields Inside Arbitrarily Shaped Induction Coils”, *Proceedings of the 33rd International Electric Propulsion Conference*, Washington, D. C., USA, 2013

Teilnahme mit Vortrag, Ausgezeichnet mit “Best Talk in Session”-Prädikat des Steering Committee der Konferenz

Chris Volkmar and Ubbo Ricklefs, “Modeling of Electrical Parameters of an Inductively-Coupled Plasma Generator in 3-Dimensional Cartesian Space”, *Proceedings of Space Propulsion 2014*, Cologne, Germany, 2014

Teilnahme mit Vortrag

Chris Volkmar and Ubbo Ricklefs, “Self-Consistent Equivalent Circuit Diagram Modeling of a Radio-Frequency Ion Thruster Based on a 3D Inductively-Coupled Plasma Solver”, *Proceedings of the 5th Russian-German Conference on Electric Propulsion*, Dresden, Germany, 2014

Teilnahme mit Vortrag

Chris Volkmar, Ubbo Ricklefs, and Peter J. Klar, “Self-Consistent Numerical 1D/3D Hybrid Modeling of Radio-Frequency Ion Thrusters”, *Proceedings of the 34th International Electric Propulsion Conference*, Kobe-Hyogo, Japan, 2015

Teilnahme mit Vortrag

Anhang

Im Anhang sind detaillierte Rechnungen, Herleitungen und weiterführende Informationen dargestellt, die den Lesefluss im Hauptteil mindern würden.

A.1 Zu Kapitel 2

Dieser Abschnitt zeigt detaillierte Herleitungen der genutzten Theorien der elektromagnetischen Felder, Plasmaphysik sowie der Funktionsweise von Radiofrequenz-Ionentriebwerken.

A.1.1 Zu Kapitel 2.1.3

Herleitung der Green'schen Funktion des Laplace-Operators in drei Dimensionen nach Ref. 41

Eine inhomogene lineare Differenzialgleichung hat die Form

$$Ly = f, \quad (\text{A.1.1})$$

wobei L ein linearer Differenzialoperator ist (bspw. ∇^2) und f die Inhomogenität bezeichnet. Das Ziel ist es nun, eine partikuläre Lösung y_p zu f zu finden. Da ein Umkehroperator L^{-1} zu L im Allgemeinen nicht existiert, bedient man sich eines Tricks, der durch den Operator G , der Green'schen Funktion zu L , ermöglicht wird. Man sucht eine Funktion G derart, dass

$$LG = 1. \quad (\text{A.1.2})$$

gilt. Für den Fall, dass $y = Gf$, hat man somit eine partikuläre Lösung gefunden gemäß

$$Ly = L(Gf) = (LG)f = 1f = f. \quad (\text{A.1.3})$$

Die gesamte Lösung ergibt sich durch Addition der allgemeinen Lösungen des homogenen Problems. Dies basiert darauf, dass die Green'sche Funktion G eine spezielle partikuläre Lösung für die δ -Distribution als Inhomogenität ist, die nach Ref. 41 als

$$\delta(x - a) = 0 \quad \text{für } x \neq a \quad (\text{A.1.4})$$

definiert ist. Eine Integration von δ über x liefert

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = \begin{cases} 1 & \text{für } x = a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}. \quad (\text{A.1.5})$$

Es gilt also $LG = \delta$. Um die partikuläre Lösung y_p für die Inhomogenität f aus der Green'schen Funktion G zu gewinnen, schreibt man

$$Ly_p = f = \delta * f = (LG) * f = L(G * f) \Rightarrow y_p = G * f. \quad (\text{A.1.6})$$

Gleichung (A.1.6) beschreibt, dass für jede Funktion f die Faltung (*-Operator) mit der Delta-Funktion δ die Funktion f selbst ergibt. Setzt man also $\delta = LG$ und berücksichtigt, dass die Ableitung einer Faltung gemäß $L(f * G) = (Lf) * G = f * (LG)$ in die Faltung hineingezogen wird, kann man folgern, dass die partikuläre Lösung als Faltung der Green'schen Funktion mit der Inhomogenität identifiziert werden kann. Löst man den Faltungsoperator auf, ergibt sich

$$y_p(x) = \int G(x - x') f(x') dx'. \quad (\text{A.1.7})$$

Auf den Laplace-Operator angewandt, ergibt sich für Gl. (A.1.2)

$$\nabla_{\mathbf{x}}^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'). \quad (\text{A.1.8})$$

Um die Green'sche Funktion zu finden, kann man den Ansatz

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = g(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (\text{A.1.9})$$

machen, wobei $\nabla^2 g(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ gilt [35]. Da die letzte Gleichung invariant unter Drehungen um den Ursprung ist, kann man sie als $g(\mathbf{x}) = h(|\mathbf{x}|) = h(r)$ ausdrücken und den Laplace-Operator schließlich in Kugelkoordinaten ausdrücken (dabei spielt hier nur die r -Komponente eine Rolle aufgrund der Abhängigkeiten von g) gemäß

$$\nabla^2 h(r) = \frac{1}{r} \frac{d^2}{dr^2} [rh(r)] = 0 \quad \text{für } r \neq 0. \quad (\text{A.1.10})$$

Nach Multiplikation mit r kann man diese Gleichung mittels Integration zu

$$\begin{aligned} \int \frac{d^2}{dr^2} [rh(r)] dr &= \int 0 dr \\ \Rightarrow \frac{d}{dr} [rh(r)] &= C_1 \\ \Rightarrow \int \frac{d}{dr} [rh(r)] dr &= \int C_1 dr \\ \Rightarrow rh(r) &= C_1 r + C_2 \\ \Rightarrow h(r) &= C_1 + \frac{C_2}{r} \end{aligned} \quad (\text{A.1.11})$$

lösen. Da es bei dieser Herleitung um physikalische Größen, wie in diesem Fall um das Vektorpotenzial, geht, kann man verlangen, dass dieses gemäß $h(r \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ im Unendlichen verschwindet. Daraus resultiert, dass C_1 gleich null zu setzen ist, weil ansonsten ein Abklingen des Feldes auf null nicht möglich wäre.

Um die Konstante C_2 zu bestimmen, integriert man mit Hilfe des Gauß'schen Integralsatzes $\nabla^2 g(\mathbf{x}) = \nabla^2 h(\mathbf{x})$ über ein Kugelvolumen V_K um deren Ursprung mit beliebigem Radius R (die rechte Seite ergibt eins aufgrund von Gl. (A.1.5)) und erhält

$$\iiint_{V_K} \nabla^2 h(\mathbf{x}) dV_K = \oiint_{\partial K} \nabla h(\mathbf{x}) d\mathbf{A}_K \stackrel{!}{=} 1, \quad (\text{A.1.12})$$

dabei gilt für den Gradienten

$$\begin{aligned}\nabla h(\mathbf{x}) &= \frac{d}{dr} \left(\frac{C_2}{r} \right) \mathbf{e}_r \\ \Rightarrow \nabla h(\mathbf{x}) &= -\frac{C_2}{r^2} \mathbf{e}_r \\ \Rightarrow \nabla h(\mathbf{x}) &= -\frac{C_2 \mathbf{x}}{r^3},\end{aligned}\tag{A.1.13}$$

unter der vorher getroffenen Voraussetzung, dass $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r$. Das Oberflächenintegral nach Gl. (A.1.12) bestimmt sich also zu

$$-C_2 \oint_{\partial K} \frac{\mathbf{x}}{r^3} r^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = 1.\tag{A.1.14}$$

Da $\mathbf{x} = r\mathbf{e}_r$ und hier über den Rand bei Radius $r = R$ integriert wird, folgt

$$\begin{aligned}-C_2 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{R^2} R^2 \sin \theta \, d\theta \, d\varphi &= 1 \\ \Rightarrow C_2 &= -\frac{1}{4\pi}.\end{aligned}\tag{A.1.15}$$

Mit diesem Zusammenhang und unter Berücksichtigung von Gl. (A.1.9) sowie deren Invarianz ($g(\mathbf{x}) = h(|\mathbf{x}|)$) ergibt sich

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = h(|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}\tag{A.1.16}$$

als Green'sche Funktion für den Laplace-Operator in drei Dimensionen [35].

A.1.2 Zu Kapitel 2.2.1

Zusammenhang zwischen Potenzial, Temperatur und Elektronendichte im Fluidbild nach Ref. 65

$$\begin{aligned}-en_e \nabla \Phi + eT_e \nabla n_e &= 0 \\ \Rightarrow \nabla \Phi - T_e \frac{\nabla n_e}{n_e} &= 0 \\ \Rightarrow \underbrace{\iiint_V \nabla \Phi \, d^3 \mathbf{x}}_{\textcircled{1}} &= T_e \underbrace{\iiint_V \frac{\nabla n_e}{n_e} \, d^3 \mathbf{x}}_{\textcircled{2}}\end{aligned}$$

Die Lösung von ① ist trivial gemäß

$$\iiint_V \nabla \Phi \, d^3 \mathbf{x} = \Phi + C_1.\tag{A.1.17}$$

Die Lösung von ② ergibt sich nach partieller Integration gemäß

$$\int f'(x) g(x) \, dx = f(x) g(x) - \int f(x) g'(x) \, dx$$

zu

$$\begin{aligned} T_e \iiint_V \frac{\nabla n_e}{n_e} d^3\mathbf{x} &= T_e \iiint_V \frac{1}{n_e} \left(\frac{\partial n_e}{\partial x} \mathbf{e}_x + \frac{\partial n_e}{\partial y} \mathbf{e}_y + \frac{\partial n_e}{\partial z} \mathbf{e}_z \right) d^3\mathbf{x} \\ &= T_e \left(\frac{n_e}{n_e} + C_2 + \iiint_V \frac{n_e}{n_e^2} d^3\mathbf{x} \right) \\ &= T_e (\ln n_e + 1 + C_2 + C_3). \end{aligned}$$

Mit $C_{2'} = T_e (1 + C_2 + C_3)$ ergibt sich schließlich

$$T_e \iiint_V \frac{\nabla n_e}{n_e} d^3\mathbf{x} = T_e \ln n_e + C_{2'}. \quad (\text{A.1.18})$$

Nun liefert Gleichsetzen von ① und ②

$$\Phi = T_e \ln n_e + \text{const}. \quad (\text{A.1.19})$$

Taylor-Reihenentwicklung des Thomson-Querschnittes

Man entwickelt den Thomson-Querschnitt aus Gl. (2.2.46)

$$\sigma_{\text{iz}} = \pi \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \frac{1}{\Phi} \left(\frac{1}{\Phi_{\text{iz}}} - \frac{1}{\Phi} \right) \quad \text{für } \Phi > \Phi_{\text{iz}}$$

nahe des Ionisationspotenzials Φ_{iz} und bricht nach der ersten Ordnung ab gemäß

$$\sigma_{\text{iz}}(\Phi; \Phi_{\text{iz}}) \approx \sum_{n=0}^1 \frac{\sigma_{\text{iz}}^{(n)}(\Phi_{\text{iz}})}{n!} (\Phi - \Phi_{\text{iz}})^n \quad (\text{A.1.20})$$

$$\approx \sigma_{\text{iz}}(\Phi_{\text{iz}}) + \frac{d\sigma_{\text{iz}}(\Phi_{\text{iz}})}{d\Phi} (\Phi - \Phi_{\text{iz}}). \quad (\text{A.1.21})$$

Unter Anwendung der Produktregel ergibt sich nun für die Ableitung

$$\frac{d\sigma_{\text{iz}}(\Phi_{\text{iz}})}{d\Phi} = \pi \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left[-\frac{1}{\Phi^2} \left(\frac{1}{\Phi_{\text{iz}}} - \frac{1}{\Phi} \right) + \frac{1}{\Phi^3} \right]_{\Phi=\Phi_{\text{iz}}} \quad (\text{A.1.22})$$

$$= \pi \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0\Phi} \right)^2 \left[-\frac{1}{\Phi_{\text{iz}}} + \frac{2}{\Phi} \right]_{\Phi=\Phi_{\text{iz}}} \quad (\text{A.1.23})$$

$$= \pi \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0\Phi_{\text{iz}}} \right)^2 \frac{1}{\Phi_{\text{iz}}}. \quad (\text{A.1.24})$$

Einsetzen dieses Ausdruckes in Gl. (A.1.21) liefert schließlich

$$\sigma_{\text{iz}} \approx \pi \left(\frac{e}{4\pi\epsilon_0\Phi_{\text{iz}}} \right)^2 \frac{\Phi - \Phi_{\text{iz}}}{\Phi_{\text{iz}}} \approx \sigma_0 \frac{\Phi - \Phi_{\text{iz}}}{\Phi_{\text{iz}}}. \quad (\text{A.1.25})$$

Berechnung des Ratenkoeffizienten für Ionisation

Einsetzen von Gl. (2.2.47) bzw. Gl. (A.1.25) in Gl. (2.2.45)

$$K(T_e) = 4\pi \left(\frac{m_e}{2\pi e T_e} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty \sigma(v_e) v_e^3 \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2e T_e}\right) dv_e$$

und Anpassung der unteren Integrationsgrenze zur thermischen Geschwindigkeit der Elektronen, die gerade die Ionisierungsenergie erreicht haben liefert

$$K_{iz}(T_e) = \left(\frac{m_e}{2\pi e T_e}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma_0 4\pi \int_{\sqrt{2e\Phi_{iz}/m_e}}^{\infty} \frac{m_e}{2e\Phi_{iz}} v_e^5 \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2eT_e}\right) dv_e - \left(\frac{m_e}{2\pi e T_e}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma_0 4\pi \int_{\sqrt{2e\Phi_{iz}/m_e}}^{\infty} v_e^3 \exp\left(-\frac{m_e v_e^2}{2eT_e}\right) dv_e. \quad (\text{A.1.26})$$

Mit den Konventionen

$$A = \left(\frac{m_e}{2\pi e T_e}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma_0 4\pi \quad (\text{A.1.27})$$

$$B = \sqrt{\frac{2e\Phi_{iz}}{m_e}} \quad (\text{A.1.28})$$

$$C = \frac{m_e}{2eT_e} \quad (\text{A.1.29})$$

$$D = \frac{m_e}{2e\Phi_{iz}} \quad (\text{A.1.30})$$

ergeben sich Integrale der folgenden Form

$$K_{iz}(T_e) = \underbrace{AD \int_B^{\infty} v_e^5 \exp(-Cv_e^2) dv_e}_{\textcircled{1}} - \underbrace{A \int_B^{\infty} v_e^3 \exp(-Cv_e^2) dv_e}_{\textcircled{2}}. \quad (\text{A.1.31})$$

Beide Integrale wurden numerisch mit MATLAB gelöst. Auf die Algorithmen dazu wird nicht näher eingegangen; diese können jedoch unter <http://de.mathworks.com/help/symbolic/int.html> eingesehen werden.

Für $\textcircled{1}$ ergibt sich

$$\begin{aligned} AD \int_B^{\infty} v_e^5 \exp(-Cv_e^2) dv_e &= \frac{AD}{2C^3} \left[B^2 C (B^2 C + 2) + 2 \right] \exp(-B^2 C) \\ &= \frac{A}{2C^2} \left[B^4 C D + 2B^2 D + \frac{2D}{C} \right] \exp(-B^2 C). \end{aligned} \quad (\text{A.1.32})$$

Analog ergibt sich für $\textcircled{2}$

$$A \int_B^{\infty} v_e^3 \exp(-Cv_e^2) dv_e = \frac{A}{2C^2} \left[B^2 C + 1 \right] \exp(-B^2 C). \quad (\text{A.1.33})$$

Subtraktion von $\textcircled{2}$ von $\textcircled{1}$ gemäß Gl. (A.1.31) ergibt

$$K_{iz}(T_e) = \frac{A}{2C^2} \exp(-B^2 C) \left[B^4 C D + 2B^2 D + \frac{2D}{C} - B^2 C - 1 \right]. \quad (\text{A.1.34})$$

Als nächstes folgt die Rücksubstitution der Gln. (A.1.27) – (A.1.30) in Gl. (A.1.34) gemäß

$$\begin{aligned} K_{iz}(T_e) &= \left(\frac{m_e}{2\pi e T_e}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma_0 4\pi \frac{1}{2 \left(\frac{m_e}{2eT_e}\right)^2} \exp\left(-\frac{2e\Phi_{iz}}{m_e} \frac{m_e}{2eT_e}\right) \times \\ &\times \left[\left(\frac{2e\Phi_{iz}}{m_e}\right)^2 \frac{m_e}{2eT_e} \frac{m_e}{2e\Phi_{iz}} + 2 \frac{2e\Phi_{iz}}{m_e} \frac{m_e}{2e\Phi_{iz}} + \frac{2m_e}{2e\Phi_{iz}} \frac{1}{2eT_e} - \frac{2e\Phi_{iz}}{m_e} \frac{m_e}{2eT_e} - 1 \right]. \end{aligned} \quad (\text{A.1.35})$$

Nach Kürzen und Umstellen folgt

$$\begin{aligned} K_{\text{iz}}(T_e) &= \frac{m_e^{\frac{3}{2}} \sigma_0 4 (2\pi) e^2 T_e^2}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{3}{2}} T_e^{\frac{3}{2}} m_e^2} \exp\left(-\frac{\Phi_{\text{iz}}}{T_e}\right) \left[1 + \frac{2T_e}{\Phi_{\text{iz}}}\right] \\ &= \sigma_0 \sqrt{\frac{16eT_e}{2\pi m_e}} \exp\left(-\frac{\Phi_{\text{iz}}}{T_e}\right) \left[1 + \frac{2T_e}{\Phi_{\text{iz}}}\right]. \end{aligned} \quad (\text{A.1.36})$$

Mit Gl. (2.2.11) ergibt sich schließlich der in Ref. 65 aufgeführte Ratenkoeffizient für Ionisation zu

$$K_{\text{iz}}(T_e) = \sigma_0 \bar{v}_e \left[1 + \frac{2T_e}{\Phi_{\text{iz}}}\right] \exp\left(-\frac{\Phi_{\text{iz}}}{T_e}\right). \quad (\text{A.1.37})$$

A.1.3 Zu Kapitel 2.3.1

Herleitung der Raketengleichung nach Ref. 79

Auch wenn die folgende Herleitung der Raketengleichung aus Ref. 79 von der Annahme ausgeht, dass sich die Rakete im absolut schwerkfreien Raum befindet – was außer an den sog. Lagrange-Punkten¹ nirgendwo in unserem Sonnensystem der Fall ist [64] – kann die Gleichung in guter Näherung auch auf praktikable Umlaufbahnen angewendet werden, sofern die Antriebsdauer nur einen sehr kleinen Teil der Umlaufperiode darstellt. Weiterhin gelten die Annahmen des nichtbeschleunigten Inertialsystems sowie des flugrichtungsparallelen Schubvektors der Rakete bei der Herleitung.

Mit diesen Annahmen ergibt sich der Raketenimpuls zu

$$\mathbf{p}(t) = m_R(t) \mathbf{v}_R(t), \quad (\text{A.1.38})$$

mit $m_R(t)$ der Masse der Rakete zum Zeitpunkt t und $\mathbf{v}_R(t)$ dem Geschwindigkeitsvektor der Rakete relativ zu einem inertialen Bezugssystem zum Zeitpunkt t .

Der Impuls des ausgestoßenen Abgasstrahls berechnet sich mit dem Integral über das Strahlvolumen V zu

$$\mathbf{p}_S(t) = \iiint_V \mathbf{v}_G(\mathbf{x}, t) \rho_G(\mathbf{x}, t) dV = \int_{m_S(t_0)}^{m_S(t)} \mathbf{v}_S(t) dm_S, \quad (\text{A.1.39})$$

dabei beschreibt $\mathbf{v}_G(\mathbf{x}, t)$ den räumlich und zeitlich variablen Geschwindigkeitsvektor der Abgaspartikel (mit $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$), $\rho_G(\mathbf{x}, t)$ die räumlich und zeitlich variable Dichte des Abgasstrahls, $\mathbf{v}_S(t)$ den resultierenden Geschwindigkeitsvektor des Strahls zum Zeitpunkt t und dm_S ein infinitesimales Masseteilchen im Abgasstrahl.

Nun kann der Gesamtimpuls des Systems zur Zeit t durch Addition von Gl. (A.1.38) und Gl. (A.1.39) definiert werden zu

$$\mathbf{p}_{\text{Sys}}(t) = \mathbf{p}_R(t) + \mathbf{p}_S(t). \quad (\text{A.1.40})$$

Dieser Gesamtimpuls genügt der Impulserhaltung, d. h. seine zeitliche Ableitung darf keine Werte verschieden von Null annehmen. Unter Anwendung der Produktregel ergibt sich

$$\frac{d\mathbf{p}_{\text{Sys}}}{dt} = \frac{d\mathbf{p}_R}{dt} + \frac{d\mathbf{p}_S}{dt} = \frac{dm_R}{dt} \mathbf{v}_R + m_R \frac{d\mathbf{v}_R}{dt} + \mathbf{v}_S \frac{dm_S}{dt} \stackrel{!}{=} \mathbf{0}. \quad (\text{A.1.41})$$

¹dort heben sich die gravitativen Kräfte der Himmelskörper gegenseitig auf

Setzt man nun fest, dass eine negative Massenänderung der Rakete (durch Ausstoß von Treibstoff) einer positiven Massenänderung des Abgasstrahls entspricht, kann man eine Massenbilanzgleichung gemäß

$$dm_R = -dm_S = -\frac{dm(t)}{dt}dt \quad (\text{A.1.42})$$

formulieren.

Durch Einführung der Abgasaustrittsgeschwindigkeit² \mathbf{v}_{ex} lässt sich die Strahlgeschwindigkeit mit der der Rakete in Verbindung bringen (s. Abb. 2.3.1). Es ergibt sich

$$\mathbf{v}_S(t) = \mathbf{v}_R(t) + \mathbf{v}_{\text{ex}}(t). \quad (\text{A.1.43})$$

Setzt man nun Gl. (A.1.43), unter Berücksichtigung von Gl. (A.1.42), in Gl. (A.1.41) ein, ergibt sich

$$m_R(t) d\mathbf{v}_R = \mathbf{v}_{\text{ex}}(t) dm_R. \quad (\text{A.1.44})$$

Aufgrund der getroffenen Annahmen lässt sich Gl. (A.1.44) auch mit skalaren Größen beschreiben, da die jeweiligen Vektoren in entgegengesetzte Richtungen weisen. Der Ausdruck vereinfacht sich zu

$$dv_R = -v_{\text{ex}}(t) \frac{dm_R}{m_R(t)}. \quad (\text{A.1.45})$$

In Gl. (A.1.45) gilt für die jeweilige Geschwindigkeit $v = |\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$. Um die Geschwindigkeitsverteilung des ausströmenden Gases an der Düse realistischer zu beschreiben, wird im Folgenden statt der idealen Austrittsgeschwindigkeit v_{ex} die effektive Austrittsgeschwindigkeit v_{eff} verwendet, welche als mittlere Austrittsgeschwindigkeit des Gases in axialer Richtung zu verstehen ist. Dadurch entfällt auch die explizite zeitliche Abhängigkeit von Gl. (A.1.45) und es ergibt sich

$$dv_R = -v_{\text{eff}} \frac{dm_R}{m_R}. \quad (\text{A.1.46})$$

Geht man nun von einer konstanten effektiven Austrittsgeschwindigkeit v_{eff} aus, lässt sich aus Gl. (A.1.46) mittels Integration die Raketengrundgleichung nach Ziolkowsky zu

$$v_{\text{final}} - v_{\text{initial}} = \Delta v = -v_{\text{eff}} \int_{m_{\text{initial}}}^{m_{\text{final}}} \frac{dm_R}{m_R} = v_{\text{eff}} \ln \left(\frac{m_{\text{initial}}}{m_{\text{final}}} \right) \quad (\text{A.1.47})$$

bestimmen.

A.1.4 Zu Kapitel 2.3.2

Herleitung des Child-Langmuir Raumladungsgesetzes nach Ref. 65

Im Folgenden wird der Einfluss der Raumladung der Ionen zwischen Abschirm- und Beschleunigungsgitter auf den maximal erreichbaren Ionenstrom bzw. die maximal erreichbare Ionenstromdichte evaluiert. Dieser Zusammenhang wurde um 1910 erstmals von Clement D. Child und Irving Langmuir am Beispiel eines Plattenkondensators postuliert.

²engl.: exhaust velocity

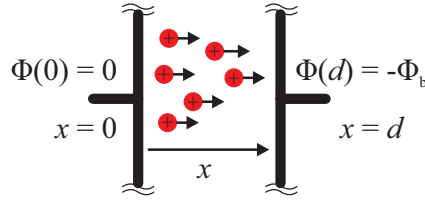


Abbildung A.1.1: Der unendlich ausgedehnte Plattenkondensator vereinfacht das Problem zu einem eindimensionalen. Die Platten stehen im Abstand $x = d$ zueinander. Da die Ionen kontinuierlich dem elektrischen Feld zwischen den Platten ausgesetzt sind, nehmen sie ständig Energie auf, womit sich ihre Geschwindigkeit in aufsteigender x -Richtung erhöht. Es resultiert, dass die Raumladungsdichte proportional dazu abnimmt, wodurch weiterhin die Ionenstromdichte zwischen $x = 0$ sowie $x = d$ als konstant anzunehmen ist.

Für die Herleitung ist der idealisierte Fall des in y - und z -Richtung unendlich ausgedehnten Plattenkondensators gemäß Abb. A.1.1 anzunehmen. Dadurch vereinfacht sich das Problem auf eine Dimension. Eine wichtige Randbedingung ist, dass der Ionenstrom bzw. die Ionenstromdichte als konstant anzunehmen ist, da die Geschwindigkeit der Ionen in positiver x -Richtung durch das beschleunigende elektrische Feld zu- und die Raumladungsdichte dadurch gleichermaßen abnimmt, um eine Gleichgewichtssituation darzustellen. Weiterhin ist die Anode hier auf Masse normiert. Dadurch ergibt sich, dass das Potenzial an der Kathode negativ ist gemäß $\Phi(d) = -\Phi_b$. Im Kondensator befindet sich weiterhin kein dielektrisches Material, was zu $\epsilon = \epsilon_0$ führt.

Unter Anwendung des Gauß'schen Gesetzes aus Gl. (2.1.1) sowie der Potenzialgleichung $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ ergibt sich die Poisson-Gleichung dieses Problems zu

$$\nabla \cdot E_x \mathbf{e}_x = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{A.1.48})$$

$$\Rightarrow \nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{A.1.49})$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0}. \quad (\text{A.1.50})$$

Ersetzt man nun die Raumladungsdichte in Gl. (A.1.50) mit $\rho(x) = J_i/v_i(x)$, ergibt sich mit $v_i(x) = \sqrt{2e\Phi(x)/m_i}$ für einfach geladene Ionen

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = -\frac{J_i}{v_i(x) \epsilon_0} \quad (\text{A.1.51})$$

$$\frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} = -\underbrace{\frac{J_i \sqrt{m_i}}{\epsilon_0 \sqrt{2e}}}_A \frac{1}{\sqrt{\Phi(x)}}. \quad (\text{A.1.52})$$

Die Lösung der Differentialgleichung aus Gl. (A.1.52) erhält man durch Multiplikation mit $d\Phi/dx$ und anschließender Integration über x . Sie lautet

$$\int \frac{d^2 \Phi}{dx^2} \frac{d\Phi}{dx} dx = A \int \Phi^{-\frac{1}{2}} \frac{d\Phi}{dx} dx. \quad (\text{A.1.53})$$

Mit der Substitution $R(x) = d\Phi/dx$ bzw. $dR/dx = d^2\Phi/dx^2$ ergibt sich für Gl. (A.1.53)

$$\int \frac{dR}{dx} R dx = \int R dR = A \int \Phi^{-\frac{1}{2}} d\Phi. \quad (\text{A.1.54})$$

Die Integration ergibt

$$\frac{1}{2} R^2 = 2A\Phi^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.1.55})$$

Nach Rücksubstitution, Umstellen und Auflösen ergibt sich

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = 2A\Phi^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.1.56})$$

$$\Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = \sqrt{4A\Phi^{\frac{1}{2}}}. \quad (\text{A.1.57})$$

Die Lösung dieser Differenzialgleichung erhält man durch Trennung der Veränderlichen und anschließender Integration. Sie lautet

$$\int \Phi^{-\frac{1}{4}} d\Phi = \sqrt{4A} \int dx \quad (\text{A.1.58})$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} \Phi^{\frac{3}{4}} = \sqrt{4A} x \quad (\text{A.1.59})$$

$$\Rightarrow \Phi(x) = \left(\frac{3}{2} \sqrt{A} \right)^{\frac{4}{3}} x^{\frac{4}{3}}. \quad (\text{A.1.60})$$

Schließlich erhält man das Child-Langmuir Raumladungsgesetz,

$$\Phi(d) = -\Phi_b = \left(\frac{3}{2} \sqrt{Ad} \right)^{\frac{4}{3}} \quad (\text{A.1.61})$$

$$\Rightarrow -\frac{4\Phi_b^{\frac{3}{2}}}{9} = Ad^2 \quad (\text{A.1.62})$$

$$\Rightarrow -\frac{4\Phi_b^{\frac{3}{2}}}{9} = -\frac{J_i}{\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_i}{2e}} d^2 \quad (\text{A.1.63})$$

$$\Rightarrow J_i = \frac{4\epsilon_0}{9} \sqrt{\frac{2e}{m_i}} \frac{\Phi_b^{\frac{3}{2}}}{d^2}, \quad (\text{A.1.64})$$

nach Rücksubstitution von A sowie Einsetzen der Randbedingungen.

A.2 Zu Kapitel 3

In diesem Abschnitt werden ausführlichere Informationen zur Implementierung des numerischen Modells erläutert.

A.2.1 Zu Kapitel 3.2

Herleitung des Bohm-Randschicht-Kriteriums nach Ref. 65

Für die Herleitung werden eine Maxwell-Boltzmann-Verteilung der Elektronen mit Temperatur T_e , kalte Ionen mit $T_i = 0$ und Ladungsträgergleichheit $n_e(0) = n_i(0)$ an der Randschichtgrenze bei $x = 0$ angenommen. Dort ist ebenfalls der Nullpunkt des Potentials $\Phi(0) = 0$ definiert.

Diese Zusammenhänge als auch die sich im weiteren Verlauf ergebende Vorsicht sind in Abb. A.2.1 dargestellt. In diesem Grenzpunkt haben die Ionen weiterhin die Geschwindigkeit $v_i(0) = v_s$.

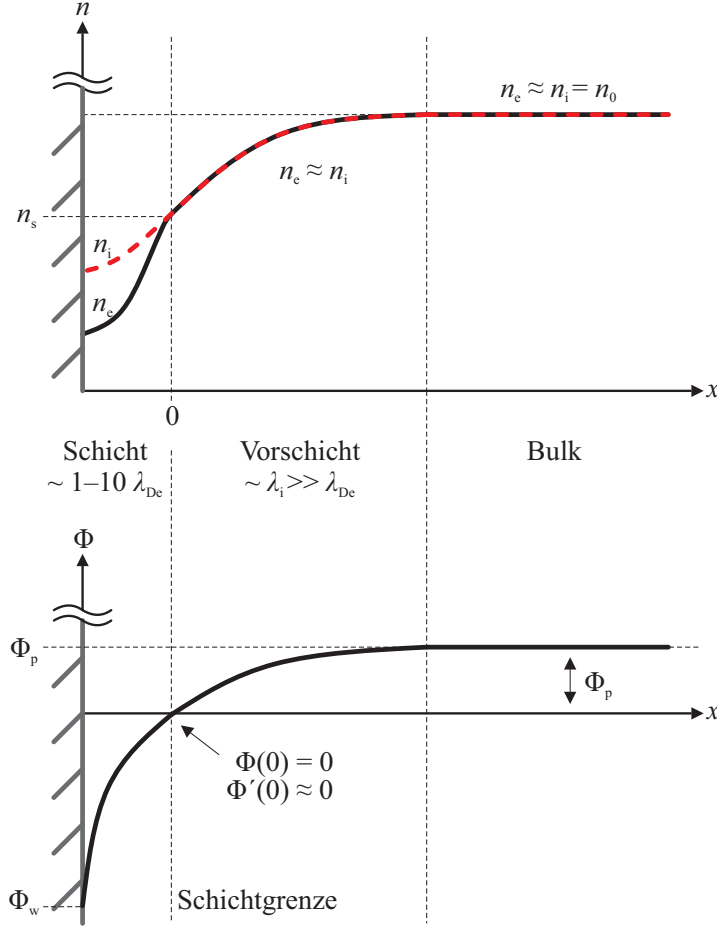


Abbildung A.2.1: Qualitativer Verlauf der Randschicht- sowie Vorsichtgrößen Teilchendichten und Potenzial nach Ref. 65.

Die Energieerhaltung für Ionen fordert (die Schicht wird als kollisionsfrei angenommen)

$$\frac{1}{2}m_i v_i^2(x) = \frac{1}{2}m_i v_s^2 - e\Phi(x). \quad (\text{A.2.1})$$

Weiterhin folgt aus der Kontinuitätsgleichung des Ionenflusses (wobei keine Ionisation in der Rand- und Vorsicht stattfindet)

$$n_i(x) v_i(x) = n_{is} v, \quad (\text{A.2.2})$$

dabei bezeichnet n_{is} die Ionendichte an der Randschichtgrenze. Löst man nun Gl. (A.2.1) nach v_i auf und ersetzt dies in Gl. (A.2.2), ergibt sich

$$n_i = n_{is} \left(1 - \frac{2e\Phi}{m_i v_s^2} \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (\text{A.2.3})$$

Die Elektronendichte ist durch den Boltzmann-Faktor aus Gl. (2.2.23) gegeben gemäß

$$n_e = n_{es} \exp\left(\frac{\Phi}{T_e}\right).$$

Aufgrund der Quasi-Neutralität gilt an der Schichtgrenze $n_{es} = n_{is} = n_s$. Setzt man weiterhin Elektronen- und Ionendichte in die eindimensionale Poisson-Gleichung aus Gl. (2.2.26) ein, erhält man

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2} = \frac{en_s}{\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{\Phi}{T_e}\right) - \left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_s}\right)^{-\frac{1}{2}} \right], \quad (\text{A.2.4})$$

dabei ist $e\Phi_s = m_i v_s^2/2$ die initiale Energie der Ionen an der Schichtgrenze. Um eine stabile Lösung von Gl. (A.2.4) zu erhalten, muss Φ_s bzw. v_s genügend groß sein, was im Folgenden gezeigt wird. Dies impliziert, dass die Ionen schon vor der eigentlichen Randschicht Energie aufnehmen müssen, was hier über das Konstrukt der quasi-neutralen Vorschicht geschieht (vgl. Abb. A.2.1).

Um zur Lösung zu kommen, multipliziert man Gl. (A.2.4) als erstes mit $d\Phi/dx$ und integriert über x gemäß

$$\int \frac{d\Phi}{dx} \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right) dx = \frac{en_s}{\epsilon_0} \int \frac{d\Phi}{dx} \left[\exp\left(\frac{\Phi}{T_e}\right) - \left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_s}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] dx. \quad (\text{A.2.5})$$

Nach Kürzen erhält man eine Integration über Φ gemäß

$$\int_0^\Phi \frac{d}{dx} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right) d\Phi = \frac{en_s}{\epsilon_0} \int_0^\Phi \left[\exp\left(\frac{\Phi}{T_e}\right) - \left(1 - \frac{\Phi}{\Phi_s}\right)^{-\frac{1}{2}} \right] d\Phi. \quad (\text{A.2.6})$$

Die untere Grenze wurde mit $\Phi = 0$ und $d\Phi/dx = \Phi' \approx 0$ bei $x = 0$ (an der Grenze zum quasi-neutralen Plasma, s. Abb. 3.2.1) festgelegt, wobei man mit der oberen Grenze den Verlauf des Potentials $\Phi(x)$ in der Randschicht darstellen kann.

Die Lösung der Integrale erhält man über die Substitutionsregel. Substituiert man $d\Phi/dx$ auf der linken und jeweils Φ/T_e und $(1 - \Phi/\Phi_s)^{-1/2}$ auf der rechten Seite, erhält man als Lösung der Integration

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = \frac{en_s}{\epsilon_0} \left[T_e \exp\left(\frac{\Phi}{T_e}\right) - T_e + 2\Phi_s \sqrt{1 - \frac{\Phi}{\Phi_s} - 2\Phi_s} \right]. \quad (\text{A.2.7})$$

Um den genauen Potenzialverlauf zu erhalten, muss man Gl. (A.2.7) numerisch integrieren. Aber auch analytisch sagt diese Gleichung etwas aus, da man erkennen kann, dass die rechte Seite positiv sein muss, um zu einer physikalisch sinnvollen Lösung zu kommen (die linke Seite ist quadratisch!). Was dies für die einzelnen Terme bedeutet, ist leichter nach einer Normierung der Gleichung auf dimensionslose Größen zu sehen. Dazu wird als erstes $\Phi_s = m_i v_s^2/2e$ rücksubstituiert, was zu dem Ausdruck

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\Phi}{dx} \right)^2 = \frac{en_s}{\epsilon_0} \left[T_e \exp\left(\frac{\Phi}{T_e}\right) - T_e + \frac{m_i v_s^2}{e} \sqrt{1 - \frac{2e\Phi}{m_i v_s^2} - \frac{m_i v_s^2}{e}} \right] \quad (\text{A.2.8})$$

führt. Die dimensionslosen Größen zur Normierung sind definiert als

$$\chi = -\frac{\Phi}{T_e} \quad (\text{A.2.9})$$

$$\xi = x \sqrt{\frac{en_s}{\epsilon_0 T_e}} \quad (\text{A.2.10})$$

$$\mathfrak{M} = v_s \sqrt{\frac{m_i}{e T_e}}. \quad (\text{A.2.11})$$

Substituiert man nun Φ , x und v_s aus Gl. (A.2.8) mit diesen Größen, ergibt sich

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\chi}{d\xi} \right)^2 = \mathfrak{M}^2 \left(\sqrt{1 + \frac{2\chi}{\mathfrak{M}^2}} - 1 \right) + \exp(-\chi) - 1. \quad (\text{A.2.12})$$

An dieser Gleichung kann man erkennen, dass große Werte für χ kein Problem aufweisen, da die rechte Seite somit stets positiv wird. Für kleine Werte ist dies nicht direkt ersichtlich, weshalb man eine Taylor-Entwicklung um $\chi = 0$ vornimmt. Kleine Werte χ bedeuten im Übrigen ein kleines negatives Potenzial in der Randschicht. Davon kann man an dieser Stelle schon ableiten, dass Ionen- und Elektronendichte dort nicht gleich sein dürfen, was zu $\Phi = 0$ führen würde. Weiterhin ist $\chi > 0$ in der Randschicht, da dort das Potenzial negativ gegenüber dem bulk-Bereich sein muss. Die Taylor-Entwicklung der rechten Seite von Gl. (A.2.12), hier als R bezeichnet, liefert nach Abbruch nach dem Term zweiter Ordnung (die beiden vorhergehenden werden zu null)

$$\begin{aligned} R(\chi; 0) &\approx \sum_{n=0}^2 \frac{R^{(n)}(0)}{n!} \chi^n \\ &\approx R(0) + \frac{dR(0)}{d\chi} \chi + \frac{d^2R(0)}{d\chi^2} \frac{\chi^2}{2} \\ &\approx \left(1 - \frac{1}{\mathfrak{M}^2} \right) \frac{\chi^2}{2}. \end{aligned} \quad (\text{A.2.13})$$

Mit dieser Näherung kann nun die rechte Seite von Gl. (A.2.12) substituiert werden. Es gilt noch immer, dass die rechte Seite aufgrund der quadratischen linken Seite nicht kleiner null sein darf, um eine physikalische Lösung darzustellen. Für die rechte Seite ergibt sich somit die Ungleichung

$$\left(1 - \frac{1}{\mathfrak{M}^2} \right) \frac{\chi^2}{2} \geq 0. \quad (\text{A.2.14})$$

Wie bereits erwähnt, muss $\chi > 0$ überall in der Randschicht gewährleistet sein. Demnach ergibt sich aus Gl. (A.2.14)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\mathfrak{M}^2} &\geq 0 \\ \Rightarrow \mathfrak{M}^2 &\geq 1. \end{aligned} \quad (\text{A.2.15})$$

Resubstituiert man schließlich Gl. (A.2.15) mit Gl. (A.2.11), ergibt sich die Bohm-Geschwindigkeit der Ionen zu

$$v_s \geq v_B = \sqrt{\frac{e T_e}{m_i}}. \quad (\text{A.2.16})$$