

Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift

Bericht der Oberhessischen Gesellschaft
für Natur- und Heilkunde zu Gießen

Naturwissenschaftliche Abteilung

Natur  OHG 1833

Band 72

Gießen 2025

ISSN 0340-4498

Redaktion und Schriftleitung:

Dr. Michael Serafin

Riegelpfad 64

35392 Gießen

Vertrieb:

Geschäftsstelle der Oberhessischen Gesellschaft

für Natur- und Heilkunde

- Naturwissenschaftliche Abteilung-

c/o Universitätsbibliothek

Frau Hochstein

Otto-Behaghel-Straße 8

35394 Gießen

Druck:

Druckerei Bender GmbH

Hauptstraße 27

35435 Wettenberg/Gießen

Dieser Band erscheint auch in gedruckter Form in der

"Oberhessischen Naturwissenschaftlichen Zeitschrift", Volume 72, Gießen 2025

Inhaltsverzeichnis

Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 72, 2025

Editorial 4

KAFITZ, W.:

Wahrheit und Realität

Gedanken zu mathematischen und physikalischen
Grundsatzfragen 6

KAFITZ, W.:

Chaos und Fraktale

Ausgewählte Begriffe aus Sicht der Mathematik,
Informatik und Erkenntnistheorie 75

EDITORIAL

Die Jahreszahl 2025 hat einige interessante, zahlentheoretische Besonderheiten:

Es ist immerhin ein Quadratzahljahr, denn

$$45^2 = 2025.$$

Das ist selten, denn das letzte war 1936 (44^2) und das nächste kommt erst 2116 (46^2).

Damit ist auch $(20 + 25)^2 = 2025$

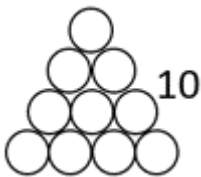
Die Zahl 45 hat ebenfalls regelmäßige Eigenschaften.

Das bedeutet, dass

$$(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2 = 45^2 = 2025$$

$\sqrt{2025} = 45$ ist eine „Dreieckszahl“, also eine Zahl, die sich aus der Summe der ersten natürlichen Zahlen ergibt und sich als Dreieck legen lässt. Bei den Griechen waren diese Zahlen heilig.

Am bekanntesten ist die 10 (siehe Abbildung).



$$1 + 2 + 3 + 4 = 10 = \Delta_4$$

Mittels vollständiger Induktion lassen sich eine Fülle von Eigenschaften beweisen. Allgemeine Beziehungen über die speziellen Zahlen 45 bzw. 2025 hinaus finden sich bei

<https://de.wikipedia.org/wiki/Dreieckszahl>

So ist auch

$$2025 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9)^2$$

Diese Eigenschaft ist ebenfalls selten. Es gibt nur 13 Zahlen kleiner 10.000, die diese Eigenschaft haben:

1; 9; 36; 100; 225; 441; 784; 1296; 2025; 3025; 4356; 6084; 8281.

Man sieht 2025 ist die Nummer 9.

Auch die Summe der Kubikzahlen von 1 bis 9 ist 2025:

$$\sum_{n=1}^9 n^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + 8^3 + 9^3 = 2025 = (\Delta_9)^2$$

Es lässt sich tatsächlich allgemein beweisen, dass die Summe der ersten n Kubikzahlen das Quadrat der heiligen Dreieckszahl Δ_n ist. Grundlage ist die Summenformel des kleinen Gauß, mit der er seinen Lehrer verblüfft hatte.

$$\Delta_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Oder als Binomialkoeffizient $\Delta_n = \binom{n + 1}{2}$

Es dauert lange bis $2025 + 10^3 = 3025 = (\Delta_{10})^2$, also ein Jahrtausend.

Eine weitere regelmäßige Summe ergibt sich aus ungeraden Zahlen:

$$2025 = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \dots + 81 + 83 + 85 + 87 + 89$$

45 lässt sich in $5 \cdot 9$ zerlegen und damit in $5 \cdot 3 \cdot 3$.

Es gilt $5^2 \cdot 9^2 = 5^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2 = 2025$

Damit ist 2025 das Produkt von zwei Quadratzahlen aber auch von drei Quadratzahlen.

Darüber hinaus ist unsere Jahreszahl auch die Summe von zwei Quadratzahlen

$$36^2 + 27^2 = 2025$$

Sogar die Summe von drei Quadratzahlen:

$$40^2 + 20^2 + 5^2 = 2025$$

Und zu guter Letzt:

$$1013^2 - 1012^2 = 2025$$

Wir gedenken in diesem Jahr auch besonders dem 100. Todestag von Felix Klein (24.4.1849 - 22.6.1925) am 22. Juni 2025

Darüber hinaus:

Bernoulli, Daniel (8.2.1700 - 17.3.1782) --> 325. Geburtstag

Descartes (lat. Cartesius) (31.3.1596 - 11.2.1650) --> 375. Todestag

Kowalewskaja, Sonja (15.1.1850 - 10.2.1891) --> 175. Geburtstag

Napier, John (1550 - 3.4.1617) --> 475. Geburtstag

Dieses Editorial mit dem scheinbar spielerischen Umgang mit numerologischen Aspekten zur Jahreszahl ist absichtlich gewählt. Die Zahlentheorie untersucht seit Jahrhunderten oder gar Jahrtausenden unumstößliche Beziehungen in der Welt der Zahlen.

Der Kontrast zu den folgenden Beiträgen ist somit besonders krass, denn sie sind vollkommen anderer Natur. Wir stoßen in der Logik und bei nicht-linearen Phänomenen an prinzipielle Grenzen der Erkenntnis.

Gießen, im März 2025

WAHRHEIT und REALITÄT

Gedanken zu mathematischen und physikalischen Grundsatzfragen

WILLI KAFITZ*)

Abstract:

David Hilbert wanted to achieve a complete axiomatization of mathematics. But Kurt Gödel showed that not only the Peano axioms, but any axiom system, even one with infinitely many rules/axioms, is incomplete. He further showed that if a given system of axioms for arithmetic appears to be free of contradictions, then the system itself is not able to prove its freedom from contradictions. Gödel's incompleteness theorem showed the limits of mathematics. Truth and proof are not the same.

For a jubilee volume for Einstein's 70th birthday, Kurt Gödel wrote an article concerning science of his friend Albert Einstein. He found: There is a whole class of solutions to general relativity that lead to rotating universes and that have disturbing implications for our understanding of time.

Quantum theory poses great challenges to common sense. Locally realistic explanations are ruled out. Hidden variables cannot exist (Bell's inequality). In this case, if the wave function is non-local, nature seems to give up the principle of locality. The de Broglie-Bohm theory follows this path.

The Copenhagen interpretation denies that quantum mechanics even allows for a realistically oriented explanation. The initial state is in principle inaccessible.

Keywords:

Axiomatization, incompleteness theorem, continuum hypothesis, Gödel-universe, uncertainty principle, abandonment of locality, Copenhagen interpretation, De-Broglie-Bohm theory

Zusammenfassung:

David Hilbert wollte eine vollständige Axiomatisierung der Mathematik erreichen. Doch Kurt Gödel zeigte, dass nicht nur die Peano-Axiome, sondern jedes Axiomensystem, sogar eines mit unendlich vielen Regeln/Axiomen, unvollständig ist. Er zeigte weiterhin, wenn ein gegebenes Axiomensystem für die Arithmetik frei von Widersprüchen scheint, so ist das System selbst nicht in der Lage, seine Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Der gödelsche Unvollständigkeitssatz zeigte die Grenzen der Mathematik auf. Wahrheit und Beweis sind nicht dasselbe.

Für einen Jubiläumsband zu Einsteins 70. Geburtstag verfasste Kurt Gödel einen Beitrag aus dem Bereich seines Freundes Albert Einstein. Er fand heraus: Es gibt eine ganze Klasse von Lösungen der Allgemeinen Relativitätstheorie,

die zu rotierenden Universen führen und die verstörende Implikationen auf unser Zeitverständnis haben.

Die Quantentheorie stellt den gesunden Menschenverstand vor große Herausforderungen. Lokal-realistische Erklärungen scheiden aus. Verborgene Variablen können nicht existieren (Bellsche Ungleichung). Wenn die Wellenfunktion nicht-lokal ist, so scheint in diesem Fall die Natur das Prinzip der Lokalität aufzugeben. Die De Broglie-Bohm-Theorie geht ebenfalls diesen Weg. Die Kopenhagener Deutung bestreitet, dass die Quantenmechanik überhaupt einen realistisch orientierten Erklärungsansatz zulässt. Der Ausgangszustand sei prinzipiell unzugänglich.

Schlüsselwörter:

Axiomatisierung, Unvollständigkeitssatz, Kontinuumshypothese, Gödel-Universen, Unschärferelation, Aufgabe der Lokalität, Kopenhagener Deutung, De-Broglie-Bohm Theorie

Dieser Beitrag kann auch von der Publikationsplattform „JLUpub“ der Universitätsbibliothek der Justus-Liebig-Universität Gießen unter folgendem Link heruntergeladen werden: <http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-18223>

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

Zitate

In der Welt der Mathematik ist alles im Gleichgewicht und perfekt geordnet. Sollte man nicht dasselbe für die Welt der Realität annehmen?

Kurt Gödel

Vor Allem aber möchte ich unter den zahlreichen Fragen, welche hinsichtlich der Axiome gestellt werden können, dies als das wichtigste Problem bezeichnen, zu beweisen, daß dieselben untereinander widerspruchslos sind, d.h. daß man auf Grund derselben mittelst einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu Resultaten gelangen kann, die miteinander in Widerspruch stehen.¹

David Hilbert

Wir müssen uns daran erinnern, dass das, was wir beobachten, nicht die Natur selbst ist, sondern Natur, die unserer Art der Fragestellung ausgesetzt ist.²

Werner Heisenberg

Hinter den offenbar grundlegenden Sinneseindrücken, die vom Bewusstsein reflektiert werden, existiert keine materielle Welt.³

George Berkley

Es gibt triviale Wahrheiten und es gibt große Wahrheiten. Das Gegenteil einer trivialen Wahrheit ist einfach falsch. Das Gegenteil einer großen Wahrheit ist auch wahr.⁴

Niels Bohr

"Genügend reichhaltig" oder nicht:

Widerspruchsfreiheit

ist eine Mangelerscheinung

oder ein Widerspruch.⁵

Hans Magnus Enzensberger, aus: Hommage an Gödel

¹ Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongreß zu Paris 1900

² Zitiert nach G. Rasche und B. L. van der Waerden, „Werner Heisenberg und die moderne Physik“, in: Werner Heisenberg, Physik und Philosophie (Stuttgart: Hirzel 4/1984), S. 41

³ Treatise Concerning the Principles of Human Knowledge, 1710

⁴ Quelle: https://www.science-at-home.de/wiki/index.php/Niels_Bohr

⁵ Zitiert nach <http://www.ingo-tessmann.de/goedel/enzensberger.html>

Inhalt

| | |
|---------------------------------------|----|
| Einleitung und Fokus | 9 |
| Einige Grundsatzfragen der Mathematik | 11 |
| Einige Grundsatzfragen der Physik | 33 |
| Fazit | 62 |
| Literaturverzeichnis | 65 |
| Danksagung | 68 |
| Personenregister | 69 |

Einleitung und Fokus

Zweifellos war David Hilbert der einflussreichste Mathematiker zu Beginn des 20. Jahrhunderts. Viele seiner Impulse führten zu neuen Forschungsgebieten und schufen klarere Begriffe, Beweise und Methoden. Ein wichtiges Anliegen war ihm die vollständige Axiomatisierung der Mathematik. Es war deshalb ein riesiger „Schlag ins Kontor“, als Kurt Gödel seinen „Unvollständigkeitssatz“ bewies und 1931 veröffentlichte. Damit wurde deutlich, dass es eine vollständig bewiesene Widerspruchsfreiheit in der Mathematik nicht geben kann. Es wird immer wieder Sätze geben, die unentscheidbar in jedem beliebig großen und zumindest in einem Axiomensystem sind, das so reichhaltig wie die Arithmetik ist. Sie können wahr sein, aber sie sind nicht beweisbar. Gödel lieferte später ein Beispiel mit der sogenannten „Kontinuumshypothese“. Ob es zwischen dem abzählbar Unendlichen, z.B. den natürlichen Zahlen und dem nicht abzählbar Unendlichen des Kontinuums der reellen Zahlen auf dem Zahlenstrahl noch Zwischenstufen gibt, ist im gängigen Axiomensystem nicht entscheidbar. Immerhin führt die Annahme, die Kontinuumshypothese sei korrekt, zu keinem Widerspruch. Mathematische Wahrheit und mathematischer Beweis müssen also nicht dasselbe sein.

Immanuel Kant prägte den Ausdruck „das Ding an sich“ und meinte damit das, was man mit objektiver Realität bezeichnen kann. Er stritt dabei aber ab, dass Menschen in der Lage sind, diese objektive Realität wahrzunehmen. Für Kant sind „Dinge-an-sich“ Bestandteile der Außenwelt, die nur über Wahrnehmungen schlaglichtartig zugänglich sind. Er erkennt aber an, dass diese Wahrnehmungen in gleicher Weise in das menschliche Bewusstsein gelangen und deshalb überprüfbar sind. Hier kann man ansetzen, um insbesondere in der Naturbeschreibung sich möglichst nahe einer „objektiven Realität“ zu nähern. Das gilt für die Quantenphysik, die unser Weltbild und unser Realitätsverständnis verändert hat, aber auch für die Kosmologie. Auch hierzu hat Kurt Gödel einen Beitrag geliefert. Für einen Jubiläumsband aus Anlass vom 70. Geburtstag seines Freundes Albert Einstein stürzte er sich in die Mathematik

der Allgemeinen Relativitätstheorie. Er fand eine ganze Klasse von Lösungen, die alle ein rotierendes Universum beschreiben und verstörende Auswirkungen auf das Verständnis der „Zeit“ haben.

David Bohm, Doktorand von J. Robert Oppenheimer, Schüler von Albert Einstein und Schöpfer einer alternativen Interpretation der Quantentheorie, hat Möglichkeiten und Grenzen der Erkenntnis in seinem Werk „Die implizite Ordnung“⁶ untersucht. Als „Explizite Ordnung“ bezeichnet er die dreidimensionale Welt der Objekte, des Raumes und der Zeit. Verständnis (der Realität) ist nur auf einer tieferen Ebene möglich – der „Impliziten Ordnung“. Doch er erkennt an, dass nur die Summe unserer individuellen Erfahrungen (physisch, psychologisch, spirituell) Zugang zu dieser Ebene schafft. Er beginnt insbesondere bei sprachlichen Strukturen, die zweifellos Denkstrukturen zumindest stark beeinflussen, wenn nicht gar determinieren. Bedeutung ist für ihn eine Form des Seins.⁷ Wir verstehen die Welt nur so weit, wie wir sie beschreiben können. Aber wir schaffen auch die Welt, in dem wir sie beschreiben. Und die Welt verändert sich, wenn wir im Dialog mit ihr zu einem modifizierten Verständnis kommen. Weiterhin kann man über Sprache teilweise die Brücke zur Logik und damit zur Mathematik schlagen. Bohm konstatiert, dass in allen modernen Sprachen eine Subjekt-Prädikat-Objekt Struktur vorherrscht. Dabei kann das Objekt sich auf das Subjekt beziehen und damit eine reflexive Aussage treffen. Diese generell vorherrschende Struktur führt nach Bohm dazu, dass lediglich fragmentierte Aussagen möglich sind und damit insbesondere dynamische Vorgänge schlechter beschrieben werden können. Bohm stand in der ersten Reihe führender theoretischer Physiker seiner Zeit. In seinen späteren Werken wandte er sich verstärkt der Philosophie und Mystik zu und hat in dem „Dreiklang“ aus Wissenschaft, Mystik und Philosophie wesentliche Beiträge geliefert. *„Ich glaube, man macht damit einen Rückzieher. Wenn man die theoretische Physik zu schwer findet, wendet man sich der Mystik zu.“* Dieser böse Satz von Stephen Hawking trifft auf David Bohm nicht zu.⁸

Jahrzehntelang dominierte die sogenannte „Kopenhagener Deutung“ der Quantentheorie. Den freundschaftlichen Streit zwischen Albert Einstein und Niels Bohr hat Bohr nach Ansicht vieler Physiker für sich entschieden. Die mathematische Seite der Theorie ist die genaueste Beschreibung eines naturwissenschaftlichen Modells, das wir kennen. Dies gilt vor allem für die

⁶ David Bohm; Die implizite Ordnung, Deutsche Ausgabe 2. Auflage 2021, Crotona Verlag, Amerang

⁷ Vergleiche dazu Renée Weber, Alles Leben ist Eins, Crotona Verlag, Dt. Ausgabe 2019, S. 38

⁸ Zitiert nach Weber, ebenda, S. 39

Quantenfeldtheorie (QFT), die Teilchen und Felder einheitlich beschreibt. Bisher gibt es kein Experiment, das Diskrepanzen zur Theorie aufgezeigt hat. Warum also nach dem fragen, was man nicht beantworten kann: Was ist die eigentliche Realität hinter dieser perfekt funktionierenden, faszinierend präzisen Theorie? Es war deshalb viele Jahre ein „Karrierekiller“, wenn man sich mit alternativen Interpretationen beschäftigen wollte. „*Shut up and calculate*“⁹ wurde jungen Wissenschaftlern geraten, wenn sie philosophische Ambitionen entwickelten. Die Frage nach der eigentlichen physikalischen Realität wurde lange zurückgestellt oder besser zurückgedrängt und dies ist nach wie vor eine verbreitete Haltung. Man hat kein Problem mit der Realität, weil eine fast perfekte Theorie keinen Anlass gibt, über die Realität nachzudenken. Der vorliegende Beitrag soll Gedanken zur mathematischen Wahrheit und der physikalischen Realität ansprechen. Der Autor ist ein mathematischer Naturwissenschaftler und kein „gelernter“ Philosoph. Trotzdem sind Rückgriffe auf die Philosophie unvermeidlich, aber müssen deshalb unvollkommen bleiben.

Einige Grundsatzfragen der Mathematik

Man kann sagen, dass bis zur 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts die Mathematik (wieder) auf festen Füßen stand. Sie hatte zwei große Krisen überwunden. Da war zuerst die Entdeckung der irrationalen Zahlen, die dem Pythagoräer Hippasos von Metapont zugeschrieben wird und die die griechische Mathematik stark erschütterte. Doch auch rationale Zahlen, die als „kommensurabel“ galten, waren für die Griechen lediglich Werte. So konnten über diesen Weg schließlich die irrationalen Zahlen in das Gesamtgebäude der Mathematik integriert werden. Heron von Alexandria schrieb: *„Rationale und irrationale Größen gehören beide nicht zu dem an sich Gedachten, sondern zu dem mit Anderem Verglichenen.“*¹⁰

Eine zweite Krise stellte die Entdeckung der Infinitesimalrechnung durch Leibnitz und Newton dar. Sie „funktioniert“ hervorragend, trug aber anfangs den Makel eines mathematischen Tricks in sich. Eine positive Größe dx nähert sich der Null und wird am Ende der Umformungen gleich Null gesetzt, obwohl vorher durch dx dividiert wurde. Erst Cauchy und Weierstraß haben eine saubere Formulierung gefunden, die diesen Konflikt beseitigt hat.

Mit dem Namen Georg Cantor begann eine turbulente Phase in der Mathematik. Schon die Griechen haben nur das potentiell Unendliche indirekt akzeptiert.

⁹ N. David Mermin 1990, *Boojums All the Way Through: Communicating Science in a Prosaic Age* (Cambridge), S. 199

¹⁰ https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf

Man musste es schließlich nicht „unendlich“ nennen, denn zu den natürlichen Zahlen, geraden Zahlen oder Primzahlen fand man immer noch eine weitere Zahl. Das aktuell Unendliche, wir würden es heute eine unendliche Menge nennen, war streng verpönt. Cantor war klar, dass es mindestens zwei verschiedene „Unendlich“ geben musste, denn es gibt keine Surjektion von einer abzählbar unendlichen Menge in ihre Potenzmenge. Damit konnte er sogar ganze Klassen von Unendlichkeiten durch jeweilige Bildung der Potenzmenge postulieren. Diese Mengen (nicht ihre jeweiligen Elemente) sind abzählbar unendlich. Seine Thesen spalteten die „reine“ Mathematik, er wurde sogar von seinem einflussreichen Doktorvater Leopold Kronecker persönlich als „Verderber der Jugend“ angegriffen. Für die Positivisten, denen die a priori Wissenschaft Mathematik schon vorher zu weit ging, war nun endgültig eine Grenze überschritten. David Hilbert, obgleich im Grunde seines Herzens ebenfalls Positivist, stand auf der Seite Cantors, da er das Potential der neuen Möglichkeiten sah. Allerdings hat der naive Mengenbegriff Cantors schnell Paradoxien aufgezeigt, zuerst durch Bertrand Russell, Autor von *The Principles of Mathematics*,¹¹ der Aussagen zur Menge aller Mengen als widersprüchlich erkannte.¹² Cantor sah dies, trotz vieler verletzender Anfeindungen, gelassen. Er war sich sicher, dass das Axiomensystem so erweitert werden könnte, dass Paradoxien ausgeschlossen werden können. Doch die Unsicherheiten vergrößerten sich, je mehr sich die Ansicht durchsetzte, dass Mathematik nur erweiterte und angewandte Logik sei. Man konnte drei Gruppen von Logikern unterscheiden: Formalisten (wie Hilbert), Intuitionisten (wie Brouwer) und Logizisten (wie Frege). Hilbert kämpfte vor allem gegen Brouwer, der die mangelhafte Konsistenz der Grundlagen z.B. in der Anwendung des Widerspruchsbeweises sah: *Tertium non datur*, das Prinzip des ausgeschlossenen Dritten, ist eine uralte, etablierte Methode der Beweisführung. Um eine Aussage A zu beweisen, nimmt man an, dass A nicht gilt und führt dies zum Widerspruch. Brouwer lehnte dies ab. Später etablierte sich u.a. dafür der Begriff „Konstruktivismus“. Heute hat sich ein gewisser Kompromiss herausgebildet. Im Zweifel ist ein direkter Beweis vorzuziehen. Erst wenn dies nicht möglich ist, sollte man per Widerspruch beweisen. Man muss sich jedoch darüber im Klaren sein, dass dann sowohl ein Widerspruch zur Annahme als auch ein subtiler Widerspruch im Axiomensystem vorliegen kann.

Man beachte, dass dem Standpunkt von Brouwer und dem von Hilbert verschiedene Wahrheitstheorien zugrunde liegen. Alle Aussagen mit rein syntaktischen Eigenschaften und zwar unabhängig von ihrer Form bzw. ob sie

¹¹ <https://people.umass.edu/klement/pom/pom.pdf>

¹² Bekannte Beispiele: 1) Ein Friseur hat ein Schild im Laden: „Ich rasiere alle, die sich nicht selbst rasieren“. Rasiert er sich nun selbst oder nicht?

2) Der Kreter Epimenides sagt: „Alle Kreter sind Lügner“. Lügt er oder lügt er nicht?

verifiziert oder falsifiziert werden können, sind wahre oder falsche mathematische Aussagen. Das gilt erst recht für Formeln einer beliebigen Metatheorie (z.B. Mengenlehre, Zahlentheorie, Topologie, etc.).

Der konstruktivistische Ansatz schaut zwar ebenfalls auf die Syntax, aber auf Basis einer realistischen Semantik, lässt aber nur Implikationen mit zulässigen konstruktiven Methoden zu. Deshalb kann es darin nicht entscheidbare Aussagen geben.¹³ Die Dichotomie von wahr und falsch war für Brouwer nicht absolut, etwa so wie gerade Zahlen und ungerade Zahlen oder rationale und irrationale Zahlen. Für jede reelle Zahl gilt jeweils nur das eine oder das andere. Er unterschied vier Möglichkeiten von wahr und falsch:

- 1) Eine Aussage kann direkt als wahr oder falsch bewiesen werden
- 2) Wenn der direkte Beweis nicht möglich ist, liegt ein Algorithmus als Kriterium für Wahrheit oder Falschheit vor
- 3) Ein Algorithmus ist nicht bekannt; die Entscheidung ist (zunächst) offen
- 4) Einen Algorithmus kann es prinzipiell nicht geben. Die Aussage, ob wahr oder falsch, ist nicht entscheidbar.

Heute wird der vollkommen unabhängig von der Semantik betriebene reine Formalismus nicht mehr unbedingt propagiert und ist nur in abstrakten Theorien nützlich. Eine nicht-realistische Semantik in Form einer syntaktischen Verifikationstheorie der Bedeutung würde eine rein syntaktische Verifikationstheorie der Wahrheit bedeuten. Das hat Gödel für mathematische Aussagensysteme, die ausreichend reichhaltig sind, widerlegt. Der radikale Ansatz von Hilbert wurde also dadurch deutlich zurückgenommen. Trotzdem hat Hilbert unschätzbare Impulse in vielen Bereichen der Mathematik geliefert und damit zur Präzisierung maßgeblich beigetragen. Brouwers Intuitionismus bzw. Konstruktivismus hatte ebenfalls großen Einfluss in seiner Zeit des Umbruchs der Mathematik und Logik. Der Widerspruchsbeweis oder z.B. das Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem der noch jungen Mengenlehre, die er ablehnte, haben sich aber durchgesetzt. Doch gerade bei der doppelten Negation hat er Klarheit in die (intuitionistische) Logik gebracht. So verwendet er für bestimmte Fragestellungen alternativ die Begriffe „Absurdität und Korrektheit“ anstelle von „wahr und falsch“.¹⁴ Man muss dies wohl so verstehen, dass er vor Gödels Unvollständigkeitssatz „intuitiv“ erkannte, dass es auch in der Mathematik Aussagen gibt, die sich der Dichotomie wahr/falsch verweigern.

Im Jahr 1902 erfuhr Gottlob Frege in Jena, ein herausragender Logiker und Vertreter des logizistischen Standpunkts, Mathematiker und Philosoph, von den

¹³ Vergleiche Rosemarie Rheinwald, Der Formalismus und seine Grenzen, Untersuchungen zur neueren Philosophie der Mathematik, Königstein/Taunus, Hain 1984, S. 66ff

¹⁴ Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Luitzen_Egbertus_Jan_Brouwer

russellschen Paradoxien. Eines seiner großen Verdienste ist die Entwicklung einer formalen Sprache als Grundlage für formale Beweise. Die Erkenntnis von Russell musste nicht nur ihn verunsichern, aber trotzdem irgendwie berücksichtigt werden. Er war kurz vor der Veröffentlichung eines grundlegenden Werkes und konnte nur in einem zerknirschten Addendum auf Russell reagieren, dem er großmütig dankte: *Solatium miseris, socios habuisse malorum.*¹⁵ Kurt Gödel formulierte es später so: *[Russell] brachte Licht in die erstaunliche Tatsache, dass unsere logische Intuition ... in sich selbst widersprüchlich ist.*¹⁶

Hilbert hatte in Göttingen das internationale Zentrum für Mathematik aufgebaut. In relativ kurzer Zeit hatte es auch viele geniale Köpfe im Bereich der jungen theoretischen Quantenmechanik angezogen. Für ihn war der inkonsistente Zustand der Mathematik schlichtweg inakzeptabel. Im ersten Jahrzehnt des 20. Jahrhunderts hatte er noch eine Fülle von Impulsen aus unterschiedlichsten Fachbereichen der Mathematik geliefert und nicht zuletzt auch damit neue Disziplinen ins Leben gerufen. Ein Beispiel ist sein berühmter Vortrag im Jahr 1900 auf dem 2. internationalen Mathematikerkongress, der in Paris anlässlich der Weltausstellung zur Jahrhundertwende stattfand. Er stellte 23 „Jahrhundertprobleme“ aus den unterschiedlichsten Bereichen der Mathematik vor, von denen einige immer noch ungelöst sind. Bekanntestes Beispiel heute ist die Riemannsche Vermutung zur Verteilung der Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion. Von ihrem Beweis erhofft man sich Erkenntnisse über das Wesen der Primzahlen, also ebenfalls eine Grundsatzfrage. Sein größtes Anliegen war unter den 23 Problemen die Nummer 2: Die Widerspruchslösbarkeit der arithmetischen Axiome. In seiner Rede lieferte er eine flammende Begründung: *„Überzeugung von der Lösbarkeit eines jeden mathematischen Problems ist uns ein kräftiger Ansporn während der Arbeit; wir hören in uns den steten Zuruf: Da ist das Problem, suche die Lösung. Du kannst sie durch reines Denken finden; denn in der Mathematik gibt es kein Ignorabimus!“*¹⁷

Doch nun war Hilberts größtes Projekt, die vollständige Axiomatisierung der Mathematik, in ernsthafter Gefahr und er konzentrierte sich voll unter Einsatz seiner beträchtlichen Möglichkeiten auf diese Aufgabe. Noch deutlich themenbezogener war Hilberts Vortrag auf dem Mathematikerkongress 1928 in Bologna. Deutschlands Mathematiker waren nach dem verlorenen 1. Weltkrieg

¹⁵ Es ist ein Trost für Unglückliche, Leidensgenossen zu haben. Zitiert nach Budiansky, Stephen; *Reise zu den Grenzen der Vernunft*, Kurt Gödel und die schwerste Krise der Mathematik, Propyläen 2. Auflage 2023, S. 151

¹⁶ Zitiert nach Yourgrau, Palle; *Gödel, Einstein und die Folgen*, C.H.Beck, S. 64

¹⁷ <https://www.math.uni-goettingen.de/historisches/hilbert/rede.html>
(Ignorabimus = Wir werden nicht wissen)

1920 und 1924 nicht zur Teilnahme zugelassen worden. 1928 waren sie mit 67 Personen vertreten und wurden von Hilbert angeführt, der auch den Eröffnungsvortrag halten durfte und mit Applaus begrüßt wurde. In seinem Vortrag mit dem Titel „*Probleme der Grundlegung der Mathematik*“ isolierte er gleich vier markante Grundsatzfragen: Beweis der Widerspruchsfreiheit mathematischer Systeme in zweierlei Hinsicht, Vollständigkeit, also der Forderung, dass jede gültige Aussage aus Axiomen ableitbar sein muss und Vollständigkeit des zugrunde liegenden Logiksystems erster Ordnung, auch Prädikatenlogik genannt.¹⁸

Der Grundkonflikt liegt immer in der Frage, ob Mathematik und Logik a priori im kantischen Sinne entstehen oder sich als das Ergebnis von Erfahrung, also a posteriori, entwickeln. Das ist die Position der Empiristen.

Kurt Gödel wurde 1906 in Brünn (Mähren) in einem wohlhabenden Elternhaus geboren. Nach dem 1. Weltkrieg wurde die Stadt als Brno tschechisch. Er war ein sehr guter Schüler und später auch ein Student, der sich selbst ein enormes Pensum an Vorlesungen zumutete und dieses Pensum auch bewältigte. Gödel studierte in Wien zunächst theoretische Physik, wandte sich aber bald der Mathematik und Logik, aber auch der Philosophie, zu. Gödel stieß zu einem Kaffeehauszirkel aus Mathematikern und Philosophen, von denen die meisten später berühmt wurden: Karl Menger, Rudolf Carnap, Olga Tausky, Herbert Feigl oder Alfred Tarski. Auf den weißen Marmortischen des Café Herrenhof oder des Café Central wurden Gleichungen geschrieben. Gödel, gerade mal 22 Jahre alt als Hilbert in Bologna die vier grundlegenden Ziele formulierte, wandte sich der vierten Aufgabe zu. Nach nur sechs Monaten vollendete er 1929 seine Dissertation „*Über die Vollständigkeit des Logikkalküls*“ und wurde Anfang 1930 promoviert. Er hatte damit einen riesigen Beitrag zum hilbertschen formalistischen Programm geliefert. Es geht um die Prädikatenlogik erster Stufe, also um grundlegende Aussagen, Beziehungen oder logischen Verknüpfungen wie „und“, „oder“, „nicht“, „wenn ... dann“, usw. Diese kann man zur weiteren Formalisierung mit entsprechenden Symbolen ausstatten, die auf Frege zurückgehen. Man benutzt dazu sogenannte Quantoren. Z.B. x sei ein Element der Menge aller Katzen und $F(x)$ stehe für die Aussage „ x ist schwarz“. Dann schreibt man $(\exists x)F(x)$ \exists ist der Existenzquantor. Die Aussage „alle Katzen sind schwarz“ schreibt man mit dem Allquantor \forall : $(\forall)F(x)$
Die Arbeit war bemerkenswert kurz und umfasste in der Veröffentlichung in den „Monatsheften für Mathematik und Physik“ gerade mal 12 Seiten.¹⁹

¹⁸ Budiansky, Stephen; Reise zu den Grenzen der Vernunft, Kurt Gödel und die schwerste Krise der Mathematik, Propyläen 2. Auflage 2023, S. 110-111

¹⁹ Kurt Gödel, Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, Monatshefte für Mathematik und Physik Bd. 37, S. 349–360 (1930)

Zweifellos machte erst sein 2. „Unvollständigkeitssatz“ Gödels späteren Ruhm aus. Trotzdem ist der „Vollständigkeitssatz“ durchaus ein Meilenstein. Die Axiome reichen aus, dass alle universell gültigen logischen Aussagen daraus hergeleitet werden können. Sie sind auch alle nötig, keines ist zu viel und keines zu wenig.²⁰

Noch während seines Studiums wurde Gödel von Hans Hahn eingeladen und schloss sich dem „Wiener Kreis“ an.²¹ Man konnte die Einladung durchaus als Auszeichnung verstehen. Die Teilnehmerzahl lag immer zwischen 10 und 20 Personen. Eine Einladung war Voraussetzung zur Teilnahme. Heute wie damals berühmte Persönlichkeiten, wie der Wissenschaftstheoretiker Karl Popper, wären gerne dabei gewesen und Popper stand dann später eher in Opposition zu dem Kreis.²² Die Treffen fanden alle zwei Wochen donnerstags um 18:00 Uhr statt. Es war ein hochrangig besetzter Diskussionszirkel, der sich zunächst in der Tradition von Ernst Mach sah, aber dann eine eigene Linie des logischen Empirismus verfolgte. Der sprachgewaltige Mach, nach dem die Skala für Überschallgeschwindigkeiten benannt ist und der die Hochgeschwindigkeitsfotographie entwickelte, übertrieb den Empirismus nicht nur gelegentlich. Er führte ihn in neue Extreme. So leugnete er trotz überzeugender Belege zeitlebens die Existenz von Atomen („*Hamm's welche g'sehn*“). Er war Vordenker einer positivistischen Wissenschaftsphilosophie, die sogar so weit ging, Atome als Forschungsgegenstand generell abzulehnen. Von a priori Erkenntnissen wollte er nichts wissen. Eine Realität im objektiven Sinn lehnte er ab. Er war erbitterter Gegner von Ludwig Boltzmann, der aus der Atomistik heraus die Thermodynamik entscheidend vorantrieb. Boltzmann definierte die Entropie statistisch und verwendete erstmals den Begriff der Wahrscheinlichkeit in der Physik. Die Entropie S eines Makrozustands kann man berechnen durch die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Mikrozustände. Weiterhin sprach er 1896 die Vermutung aus, dass die Brownsche Bewegung von Schwebeteilchen in Flüssigkeiten von wechselnden Drucken auf ihre Oberfläche herrührt, die von der unregelmäßigen Wärmebewegung von Atomen oder Molekülen herrührt. Mit diesen kontroversen Themen wurden entscheidende Entwicklungen Anfang des 20. Jahrhunderts angestoßen. So wies Albert Einstein 1905 mit mathematischen Mitteln aus dem Radius der Zitterbewegung nach, wie man experimentell vorgehen musste.

²⁰ Vergleiche Budiansky, S. 161f

²¹ Siehe auch Karl Sigmund; Sie nannten sich „Der Wiener Kreis“, Springer, Wiesbaden 2015, 2. Auflage 2018

²² Ebenda, S. 16

Er zeigte, „..., dass die Existenz des osmotischen Druckes eine Konsequenz der molekularkinetischen Theorie der Wärme ist, ...“.²³ Als Autodidakt, der mit 26 Jahren als Experte 3. Klasse im Berner Patentamt arbeite, hatte er erst im Laufe seiner Überlegungen von der „Brownschen Molekularbewegung“ erfahren und in seiner Publikation den Bezug dazu hergestellt. Der französische Physiker Jean Perrin führte 1908 sorgfältige Experimente und Messungen durch, die Einsteins Rechnungen bestätigten.²⁴ Es war der Durchbruch der Atomtheorie.²⁵

In der Tradition des logischen Empirismus wurde also im Wiener Kreis debattiert, auch wenn sich die Gruppe durchaus mit der Zeit etwas von Mach emanzipierte, weil sich zu viele Niederlagen der Positivisten abzeichneten. Gödel war fasziniert von den tiefschürfenden Diskussionen im Wiener Kreis, geleitet durch den Physiker und Philosophen Moritz Schlick, auch wenn er sich nicht in den Vordergrund drängte und beileibe nicht alle Meinungen teilte. Er erkannte aber das hohe intellektuelle Niveau an. Ständige Teilnehmer waren z.B. Rudolf Carnap, analytischer Philosoph und eigentlicher Vordenker des logischen Empirismus, der sich bereits früh mit Frege, Whitehead und Russell auseinandergesetzt hatte. Schlick galt als äußerst seriöser, unprätentiöser, zurückhaltender, aber selbstsicherer Mensch. Er hatte Aufsätze und populäre Bücher über die Relativitätstheorie geschrieben, die auch Einstein lobte. Er stand im Briefwechsel mit Einstein, insbesondere über die philosophischen Implikationen der Relativität. Er war sehr von Ludwig Wittgensteins „*Tractatus*“ beeindruckt.

Gödel schloss in diesem Kreis langandauernde Freundschaften; erregte aber auch Entsetzen durch seine „atemberaubende Naivität“²⁶ bzgl. des Nazieinflusses in Wien und schließlich der Machtergreifung. In dieser Zeit war nichts und niemand unpolitisch. Jede öffentliche oder halböffentliche Aktivität wurde in eine „Ecke gestellt“: individualistisch, antinational, sozialistisch, jüdisch, undeutsch, sogar Psychoanalyse, Positivismus oder neuere ökonomische Theorien. Der Gegenpol waren Ultrationalismus und

²³ A. Einstein: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. In: Annalen der Physik. Band 17, 1905, S. 549–560, Zitat: S. 553

Online: https://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eckern/adp/history/einstein-papers/1905_17_549-560.pdf

²⁴ A. Einstein, Elementare Theorie der Brownschen Bewegung, Zeitschrift für Elektrochemie und angewandte physikalische Chemie, Band 14, 1908, S. 235–239. Ausführlichere Darstellung von Einstein.

Jean Perrin: Mouvement brownien et réalité moléculaire. In: Annales de chimie et de physique. ser. 8, 18, 1909, S. 5–114.

²⁵ John von Neumann hat übrigens analog zur klassischen Definition in der Quantenmechanik einen Entropiebegriff eingeführt, der auf Verschränkung beruht (S. Carroll, Was ist die Welt ..., S. 320)

²⁶ Budiansky, ebenda S. 125

Antisemitismus, die an den Universitäten sich vor allem in das Deutschtum glorifizierenden Burschenschaften formierten. Gödel beteiligte sich nicht und behielt seine Ansichten links von der Mitte für sich. Doch auch er war durch seine (wissenschaftlich motivierten) Kontakte zu Schlick, Carnap, Hahn, Neurath und anderen für die Ultrakonservativen eher verdächtig geworden. Man lebte auf jeden Fall gefährlicher, zudem beide Seiten zunehmend zur Gewalt griffen und paramilitärische Organisationen aufbauten. Man kann aber davon ausgehen, dass für die weitere Entwicklung seiner mathematisch/logischen und seiner philosophischen bzw. wissenschafts-philosophischen Ansichten vom Wiener Kreis maßgebliche Impulse ausgingen. In Gödels „Philosophischen Notizbüchern“ finden sich immer wieder Anspielungen.²⁷ Es war seine frühe Angewohnheit, Notizbücher zu führen, die er bis ins Alter beibehielt. Sie schärften sein Bewusstsein für philosophische Strömungen und halfen ihm, seine eigene Position zu finden. Sie scheinen bei oberflächlicher Betrachtung oft nur eine Fülle von Aphorismen zu enthalten. Erst bei näherem Hinsehen finden sich kognitive Entwicklungsschritte (ein Beispiel ist die Frage „Was ist Erkenntnis?“). Als Vorgriff auf seine Einschätzung seiner Arbeit in den letzten Jahren soll folgende Passage aus einem Brief dienen:

Ich betrachte meine Arbeit nicht als „Facette der intellektuellen Atmosphäre des frühen 20. Jahrhunderts“, ganz im Gegenteil. Zwar wurde mein Interesse an den Grundlagen der Mathematik in der Tat durch den „Wiener Kreis“ geweckt, aber die philosophischen Konsequenzen meiner Ergebnisse, sowie die heuristischen Prinzipien, die zu ihnen führten, sind alles andere als positivistisch oder empiristisch. Meine Arbeit weist mithin in Richtung einer gänzlich anderen Weltsicht.²⁸

Korrespondierend dazu ein Eintrag in sein Notizbuch:

Mathematische und logische Erkenntnis ist von prinzipiell anderer Art als Wirklichkeitserkenntnis. Nur diese ist eine eigentliche Erkenntnis und für diese interessiert sich die Philosophie in erster Linie.²⁹

²⁷ Beispiel eines Notizbucheintrags: *Durch Leibniz ging die Logik von der spekulativen Philosophie auf die Mathematik über.* Kurt Gödel, Philosophische Notizbücher, Bd. 1, S. 48, bei Schlick heißt es: *Erst durch Leibniz ging die Logik aus den Händen von der bloss spekulativen Philosophen in die Hände der Mathematiker.* Schlick, MSGA, Abt. II, Bd. 1.3, S. 360, zitiert aus den Kommentaren, ebenda S. 48. Moritz Schlick, führender Kopf des Wiener Kreises, wurde am 22. Juni 1936 von dem Nazi und ehemaligen Studenten Schlicks, Hans Nelböck, ermordet. Dies markierte auch im Prinzip das endgültige Ende des Wiener Kreises.

²⁸ Kurt Gödel an Burke D. Grandjean, Januar 1976, Collected Works, Bd. 4, S443f, zitiert nach Budiansky, ebenda S. 139

²⁹ Kurt Gödel, Philosophische Notizbücher, Bd. 1, S. 57

Heute wissen wir: Kurt Gödel hat die Hilbertsche Agenda zerstört, weil sie sich als falsch herausgestellt hat. Aber im Rückblick auch auf sein philosophisches Werk zeigt sich, dass er immer Suchender war. Die „*Wirklichkeitserkenntnis*“, dazu hat er Kant zu gut studiert, ist eine a posteriori Erkenntnis. In Mathematik und Logik suchte er sein ganzes Leben nach der a priori Wahrheit.

Gödel als Wissenschaftler begann nicht als „Revolutionär“ seines Faches. Sein von ihm bewundener Doktorvater Hans Hahn unterstützte das hilbertsche Programm und Gödel war ebenso der Ansicht, dass intuitive Mathematik und Logik durch ein auf Axiomen aufgebautes Gebäude ersetzt werden musste, um versteckten Widersprüchen und offenen Paradoxien keinen Raum zu geben. Hilbert begann mit der Neuformulierung der euklidischen Geometrie, in der die Semantik der Begriffe, wie Punkte, Geraden, Dreiecke, Ebenen keine Rolle mehr spielte, sondern lediglich die logischen Beziehungen zwischen den „implizit definierten“ Elementen. Die Jahrtausende alte euklidische Geometrie, a priori Struktur des Raumes für Immanuel Kant, hatte im 19. Jahrhundert „Konkurrenz“ bekommen. Die nichteuklidische Geometrie wurde von János Bolyai, Nikolai Lobatschewski und Carl Friedrich Gauß entdeckt. Sie wurde vom Gauß-Schüler Bernhard Riemann zur Differentialgeometrie gekrümmter Räume weiterentwickelt und 1854 in seinem Aufsehen erregenden Habilitationsvortrag vorgestellt. Sie führte zunächst zur Verunsicherung unter den Mathematikern; auch rechnete niemand damit, dass sie einmal physikalische Bedeutung erlangen sollte. Aber sie verlangte nach einer Nachjustierung der geometrischen Axiome, Definitionen und Begriffe. So galt auf jeden Fall das klassische Parallelenaxiom in der nichteuklidischen Mathematik nicht mehr. Gottlob Frege, einer der Väter einer formalen Herangehensweise, hat übrigens die radikale, sinnentleerende Sicht abgelehnt. Er war einer der Autoren, die auch im „Wiener Kreis“ ausführlich diskutiert wurden. Für Hilbert war formale Widerspruchsfreiheit, nicht semantisch identifizierte Wahrheit, das Ziel seines formalen Systems.

Gödel, durchaus wohlwollend zum Hilbertschen Programm eingestellt, nahm trotzdem die Sicht „von oben“ ein. Hofstadter formuliert es so: *Seine Idee war es, mathematisches Denken zur Erforschung des mathematischen Denkens selbst zu verwenden.*³⁰ Mathematik wurde „*introspektiv*“ benutzt. Nach dem Erfolg in seiner Dissertation machte er zunächst im Stillen weiter. Er untersuchte, ob man in einem solchen formalen Axiomensystem überhaupt Vollständigkeit und Widerspruchsfreiheit beweisen kann. Er begann, gemäß Hilberts zweitem, 1900 noch allgemein formulierten Problem, mit der arithmetischen Zahlentheorie als Teilgebiet der Analysis. Sie wurde von Gottlob

³⁰ Hofstadter, Douglas R.; Gödel, Escher, Bach. Ein Endloses Geflochtenes Band, Klett-Cotta, Stuttgart 1985, S. 19

Frege (Jena), Richard Dedekind (Braunschweig) und Giuseppe Peano (Turin) axiomatisiert. Sie hatte den gleichen hohen Status wie die Jahrtausende alten Axiome der klassischen euklidischen Geometrie.

Es stellt sich die Frage, wie man die Konsistenz beweist und Kurt Gödel erkannte: Es geht einerseits nur durch formalisierte Logik, wie sie Frege im Prinzip in seiner „*Begriffsschrift*“ entwickelt hat.³¹ Aber die Auseinandersetzung Hilbert-Brouwer hatte auch gezeigt, dass es einen Unterschied ausmacht, ob man zeigen kann, dass ein System richtig ist, also keine falschen Aussagen abgeleitet werden können und dass es nicht widersprüchlich ist, also daraus „wahr“ und „nichtwahr“ abgeleitet werden kann. Im ersten Fall liegt eine semantische Frage vor, im zweiten Fall eine syntaktische. Dies hatte Gödel verstanden. Ein sinnvolles Vorgehen musste beide Aspekte enthalten.

Ausgangspunkt für das von Hilbert formulierte Problem war Alfred North Whiteheads und Bertrand Russells *Principia Mathematica*,³² worin diese versuchten, die Korrektheit der Mathematik nachzuweisen, indem sie sie auf selbstevidente Prinzipien reduzierten.³³ Doch das sollte sich als schwieriges Unterfangen erweisen. Schon allein der Zahlbegriff stellte sich als Problem heraus, die nötige Nomenklatur war unübersichtlich und lag für einfachste Sachverhalte keineswegs auf der Hand. Russell und Whitehead benötigten 700 Seiten, um zum Ergebnis zu kommen, dass $1 + 1 = 2$ ergibt. In typisch englischer Ironie bezeichneten sie dies als „mitunter nützliche“ Aussage.³⁴

Doch Gödel wollte eben mehr als bloße Formalisierung und ging einen Schritt weiter. Er wollte zeigen, dass dann, wenn ein gegebenes Axiomensystem für die Arithmetik frei von Widersprüchen scheint, so ist das System selbst nicht in der Lage, seine Widerspruchsfreiheit zu beweisen. Erst wenn das System widersprüchlich ist, kann es seine Widerspruchsfreiheit (also nicht Widersprüchlichkeit!) beweisen. Damit wären beide Seiten der Medaille bewiesen: Widerspruchsfreiheit lässt sich so oder so nicht beweisen. Es gibt also doch ein *Ignorabimus!*³⁵

³¹ Gottlob Frege: *Begriffsschrift*, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens;

<https://www.marilia.unesp.br/Home/Instituicao/Docentes/RicardoTassinari/B.pdf>

³² <https://lesharmoniesdelesprit.files.wordpress.com/2015/11/whiteheadrussell-principiamathematicavolumei.pdf>

³³ Vergleiche Buidiansky, ebenda S. 148f

³⁴ Die „*Principia*“ war übrigens wirtschaftlich eine rekordverdächtige Katastrophe. Die beiden Autoren machten trotz Zuschüsse von der Royal Society und anderen Institutionen jeweils 50 Pfund Sterling Verlust. Gödel war einer der wenigen Leser.

³⁵ Der Satz findet sich als Behauptung VI in der 1931 erschienenen Arbeit „Über formal unentscheidbare Sätze der *Principia Mathematica* und verwandter Systeme“:

Gödel hatte sich für einen Vortrag auf der großen Konferenz am 5. – 7. September 1930 in Königsberg angemeldet, wo er auf jeden Fall über das (gesicherte) Thema seiner Dissertation sprechen wollte. Dort trafen sich die Deutsche Mathematiker Vereinigung, die deutsche physikalische Gesellschaft und die Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte. Doch Gödel hatte seinen Vollständigkeitsatz schon als erledigt abgehakt und dachte intensiv über nächste Schritte nach. Ein vorsichtiger erster Hinweis auf einen Durchbruch findet sich in den Tagebucheinträgen von Carnap kurz vor Weihnachten 1929:

Café Arkaden 23.12.29, 5:45-8:30. Gespräch mit Gödel, Über die Unausschöpflichkeit der Mathematik. Er ist durch Brouwers Wiener Vorlesung angeregt worden. Mathematik nicht vollständig formalisierbar. Er scheint recht zu haben.

Kurz vor der Konferenz im September trafen sich einige Teilnehmer wieder im Café um über die Reise zu sprechen. Gödel enthüllte zum ersten Mal, dass er der Lösung des Problems entscheidend nahegekommen ist. Wieder ist Carnaps Tagebucheintrag die einzige Aufzeichnung eines historischen Moments in der Geschichte der Mathematik.³⁶ In seinem Vortrag besprach Gödel ausführlich seinen Vollständigkeitsatz. Doch die abschließenden Ausführungen über seine nächsten Schritte hat er in den wenigen Tagen vor seinem Referat mehrfach geändert. In seiner typischen Bescheidenheit formuliert er zum Schluss die Sensation:

Könnte man den Vollständigkeitsatz auch für die höheren Teile der Logik (den erweiterten Funktionenkalkül) beweisen, so würde ... daraus die Lösbarkeit jedes in der Principia Mathematica ausdrückbaren Problems der Arithmetik und Analysis folgen.

Indessen ist eine solche Ausdehnung des Vollständigkeitsatzes, wie ich ihn in letzter Zeit bewiesen habe, unmöglich, d.h. es gibt mathematische Probleme, die sich in der Principia Mathematica ausdrücken, aber mit den logischen Elementen der Principia Mathematica nicht lösen lassen ... Doch es würde zu weit führen, auf diese Dinge näher einzugehen.³⁷

In der die Konferenz abschließenden Diskussion konnte Gödel die Tragweite erläutern und weitere Einzelheiten und mögliche Beispiele präsentieren. Sie finden sich in einer Protokollnotiz von Hans Hahn. Die Beispiele enthielten noch

Zu jeder ω -widerspruchsfreien rekursiven Klasse k von Formeln gibt es rekursive Klassenzeichen r , so dass weder $v\text{Gen } r$ noch $\text{Neg}(v\text{Gen } r)$ zu $\text{Fig}(k)$ gehört (wobei v die freie Variable aus r ist). Zitiert nach D. Hofstadter, ebenda, S. 19

³⁶ Vergleiche Budiansky, ebenda S. 167f

³⁷ Kurt Gödel, Vortrag in Königsberg, Collected Works, Bd. 3, S. 28, zitiert nach Budiansky, ebenda S. 168

nicht die Kontinuumshypothese. Sie sollte ein weiteres Glanzstück von Kurt Gödel werden. Der Beweis des Unvollständigkeitssatzes wurde im Folgejahr veröffentlicht.³⁸ Er bildete die Basis für seine Habilitationsschrift.³⁹

Durch ein ausgefeiltes Verfahren, auf das noch einzugehen ist, zeigte Gödel, dass nicht nur die Peano-Axiome, sondern jedes Axiomensystem, sogar eines mit unendlich vielen Regeln/Axiomen, unvollständig ist.⁴⁰ Es kann zwar durch einen endlichen Verstand mit vernünftigen mathematischen Kriterien überprüft werden. Aber es werden immer in Beweisen nicht entscheidbare Fragen sich ergeben. Beweis und Wahrheit sind nicht dasselbe. Mathematische Wahrheit lässt sich nicht durch formale, mechanistische Regelanwendung, heute würde man sagen „wie mit einem Computer“, erzielen. Ein mathematischer Beweis nimmt zwar immer auch Bezug auf das zugrundeliegende Regelsystem. Wahrheit geht aber darüber hinaus. Sie ist mehr als bloße Konformität zur Syntax. Sie ist auch eine Frage der Semantik. Es geht um Inhalte, Sinn und Bedeutungen logischer Objekte und ihre Kombination. Ohne (menschliche) Intuition kommt selbst das einfachste Axiomensystem, nämlich das der Arithmetik, auf das die ganze Mathematik aufbaut, nicht aus. Es bleibt abzuwarten, ob eine künstliche Intelligenz (KI) mehr ist als ein wenn auch komplexes Computerprogramm und bis zur Qualität von menschlicher Intuition vorstoßen kann. Chatbots, wie das Sprachmodell ChatGPT, sind von der Konzeption her wohl nicht geeignet. Sie machen neben seltenen, aber krassen sprachbasierten und logischen Fehlern auch simple Rechenfehler. Sprachmodelle können ihre Fehler nicht selbst erkennen. Ein anderes Konzept steckt hinter dem Begriff „*Reinforcement Learning*“. Modelle auf Basis dieser Algorithmen zeigen erstaunliche Leistungen bei strategischen Spielen, wie Schach oder Go. Ausgestattet mit diesen Algorithmen können mathematische Aussagen formalisiert werden. Den formalen Code kann dann ein „Beweisassistent“ überprüfen. Einen komplexen Beweis so zu formalisieren, übersteigt noch die technischen und vor allem semantischen Möglichkeiten. Vor allem muss verhindert werden, dass das Modell mathematische Begriffe von

³⁸ Kurt Gödel: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. In: Monatshefte für Mathematik und Physik. 38, 1931, S. 173–198, online doi:10.1007/BF01700692. Siehe auch Kurt Gödel: Diskussion zur Grundlegung der Mathematik: Erkenntnis 2. In: Monatshefte für Math. und Physik. 39, 1931–32, S. 147–148.

³⁹ Siehe auch Dawson, John W. jr; Kurt Gödel und die Grenzen der Logik, Spektrum der Wissenschaft 9 / 1999, Seite 74f

⁴⁰ Die Peano-Axiome enthalten auch die Beweismethode der „vollständigen Induktion“. D.h., wenn eine Aussage für 0 bzw. 1 gilt und unter der Annahme, sie gelte für natürliches n , sie dann auch für $n+1$ beweisbar ist, so gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen. Manche Mathematiker sahen dieses Axiom problematisch, da es auch Eigenschaften der natürlichen Zahlen beinhaltet (z.B. vollkommene Zahlen).

ihrer Bedeutung nicht kennt und sie deshalb erfindet. Richtige Antworten bei Mathematikaufgaben können auch daran liegen, dass das Modell eine analoge Aufgabe und seinen Lösungsweg kennt. Insgesamt sind 70% falsche Antworten nicht selten, was immerhin bedeutet, dass 30% richtig sind und evtl. durch *Reinforcement Learning* gesteigert werden können. Trotzdem ist die Mathematik ein ideales Betätigungsfeld für die KI-Forschung.⁴¹ Leider ist diese Forschung weitgehend in privater Hand. Die USA und die EU haben 2021 jeweils etwas mehr als eine Milliarde Euro an Forschungsgeldern für KI ausgegeben. Der Google Mutterkonzern Alphabet soll geschätzte 320 Milliarden Euro investiert haben.⁴² Zudem wandern begabte Absolventen in die Industrie ab und schlagen zu selten den mühsamen Weg bis zu einer Festanstellung in der akademischen Welt ein.

Diese Situation und diese Anstrengungen im Bereich der modernen Informatik zeigen aber auch, welche intellektuelle Leistung Kurt Gödel mit seinem Unvollständigkeitssatz vor fast 100 Jahren vollbracht hat.

Doch wie kann man eine solche weitreichende Tatsache beweisen, die das Hilbertsche Programm als letzten Endes für undurchführbar erklärte? Mehr noch: Das Ergebnis der beiden Teile des Unvollständigkeitssatzes von Kurt Gödel hatten das Potential, zur nächsten großen Krise der Mathematikgeschichte zu werden. Es zeigt, dass alle widerspruchsfreien, axiomatischen Formulierungen der Zahlentheorie unentscheidbare Aussagen enthalten. Dabei ist die Logik der natürlichen Sprache nicht ausreichend.

Der Beweis findet in der Kombination dreier „sprachlicher“ Ebenen statt.

Die erste Ebene ist die intuitive Arithmetik. Sie kann über Wahrheiten oder Unwahrheiten von Zahlen entscheiden. Wahrheiten heißen mathematische Sätze. Sie sind Bestandteil der Lehrbücher und enthalten neben der mathematischen Formelsprache in der Regel auch normale, natürliche Sprache. Damit werden Inhalte (also Semantik) adressiert.

Die zweite Ebene ist geprägt von reiner Syntax, also den Elementen der freigeschriebenen Begriffsschrift, die von Bertrand Russell und Alfred North Whitehead weiterentwickelt wurden. Damit lässt sich die Arithmetik als rein formales, deduktives System beschreiben. Es hat Axiome und Deduktionsregeln, aber ohne Bezug zu semantischen Inhalten. Auf dieser Ebene spielt es keine Rolle, ob eine Formel, also eine rein deduktive Herleitung, mit Bezug auf Inhalte wahr oder falsch ist. Die Formeln sind jedoch aus der formalen Arithmetik heraus beweisbar.

⁴¹ Kevin Hartnett, Spektrum der Wissenschaft (SdW), 7/23, S. 28f

⁴² Michael Springer, SdW, 7/23, S. 33

Die dritte Ebene reichert nun die formale Ebene um eine Metatheorie an. Sie stellt erst das „Bedienungshandbuch“ für die formale Arithmetik dar.

Gödels eigentliche geniale Leistung liegt in der Kombination der drei Ebenen, von denen keine verzichtbar ist, aber trotzdem zum Teil durch die beiden anderen ausgedrückt werden und so verzahnt werden kann. Die formale Arithmetik kann teilweise die intuitive Arithmetik ersetzen oder besser repräsentieren. Gleiches gilt für die Metatheorie der formalen Arithmetik, also der Repräsentation der eigenen Metatheorie durch die formale Arithmetik selbst (soweit möglich).

Gödel gelang es, in der formalen Arithmetik eine Beziehung zu finden, die Metatheorie und intuitive Arithmetik sinnvoll in „Beziehung setzen“ konnte ohne in Details gehen zu müssen, die einer Verallgemeinerung im Wege stehen würden. Man nennt dieses Vorgehen heute „Arithmetisierung der Syntax“. Eine solche Beziehung ist im Prinzip eine Formel, die mit formaler Arithmetik nicht beweisbar ist, aber auf den beiden semantischen Ebenen wahr ist. Man kann somit beweisen, dass sie formal unbeweisbar ist. Intuitiv macht diese Formel wahre Aussagen bis „herunter“ zu den natürlichen Zahlen. Die Metaebene macht andererseits die wahre Aussage zur eigenen Unbeweisbarkeit.

Gödel hatte damit u.a. die Russellschen Paradoxien oder Antinomien (wie Aussagen zur Menge aller Friseur oder der Menge aller Kreter) eliminiert und entsprechende Fragen „unentscheidbar“ gemacht. Aussagen über solche selbstbezüglichen Fragen bzw. Mengen können nicht bewiesen werden.

Hier sei darauf hingewiesen, dass bereits Decartes über seine kartesischen Koordinaten auch eine „Arithmetisierung der (euklidischen) Geometrie“ erreicht hat. Jede geometrische Figur lässt sich somit arithmetisch in einem kartesischen Koordinatensystem behandeln, was sogar bis in die Schulmathematik Anwendung findet. Gödel verwendet für die formale Arithmetik ein Nummerierungssystem, das eine Aussage zur Syntax in eine Aussage über Ordinalzahlen umsetzt („Gödel-Nummerierung“). Die Anforderung geht allerdings darüber hinaus, denn eine beliebige Formel in der formalen Arithmetik muss für sich genommen „wohl formuliert“ sein und in der Abfolge mit anderen Formeln einen Beweis ergeben. Gödel gelang es zu zeigen, dass dieser Anforderung über bestimmten rekursiven Funktionen in der intuitiven Arithmetik entsprochen werden kann. Genauer: Die fundamentalen Objekte der Metatheorie, die die Beweistheorie der formalen Arithmetik enthalten, entsprechen bestimmten rekursiven Funktionen der intuitiven Arithmetik. Wenn es zu einer rekursiven Funktion auf der intuitiven Ebene eine Wahrheit gibt, so muss es auf der formalen Ebene einen beweisbaren Satz geben.

Gödel hat mit der Aussage, aber noch mehr mit seiner Terminologie und Methodik, die Grundlage der modernen Informatik in Form der sogenannten Rekursions- oder Berechenbarkeitstheorie geschaffen. Seine „intuitive Arithmetik“ im Unvollständigkeitsbeweis entspricht in etwa dem, was heute in der Rekursionstheorie „formale Semantik“ genannt wird. Die heutige Kenntnis über die prinzipiellen Grenzen von digitalen Berechnungen sind somit Folgen seiner Ideen. Eine Konsequenz ist auch, dass das berühmte „Halteproblem“ einer Turingmaschine (sprich Computer mit beliebigem Input) nicht lösbar ist (s.u.). Er kann immer in eine Endlosschleife geraten. In der Informationstechnologie (IT) entspricht das Betriebssystem in einer einfachen Analogie dem Axiomensystem der Mathematik bzw. Logik. Ein Virenprogramm muss deshalb Eingriffe in das Betriebssystem machen können um Viren zu erkennen, die dies tun.

Eine weitere große Herausforderung stellte die sogenannte Kontinuumshypothese von Georg Cantor dar. Cantor hatte erkannt, dass die abzählbar unendlichen Zahlen die unterste Stufe von Unendlich darstellen und nannte dieses Unendlich \aleph_0 , gesprochen Aleph Null, nach dem ersten Buchstaben im hebräischen Alphabet. Die Potenzmenge einer endlichen Menge mit n Elementen ist 2^n groß. Also ist die Potenzmenge einer abzählbar unendlichen Menge $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Aber \aleph_1 ist nach \aleph_0 nichtabzählbar unendlich und hat damit die Mächtigkeit der reellen Zahlen. Die Kontinuumshypothese lautet also, dass es kein weiteres Unendlich zwischen \aleph_0 und \aleph_1 geben kann. Eine solche Hypothese ist natürlich abhängig vom zugrundeliegenden Axiomensystem. Dies ist nach Zermelo-Fraenkel benannt und wird mit ZF benannt. Wenn das sogenannte Auswahlaxiom hinzu genommen wird, wird es ZFC genannt (C für choice).⁴³ Das Kontinuumproblem war übrigens ein wichtiger Impuls für Felix Hausdorff⁴⁴, auch wenn sich an den Ergebnissen von Gödel und Cohen später zeigte, dass seine Strategie nicht erfolgreich sein konnte. Er entwickelte aber eine Theorie der wohlgeordneten Mengen und baute diese zu einer umfassenden „Theorie der Mengenlehre“ aus, die weit über das Wissen seiner Zeit hinausging. Man kann sie mit Recht als sein „opus magnum“ bezeichnen, das neben der allgemeinen Mengenlehre auch die

⁴³ Siehe dazu Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 70, Beitrag Unendlich, W. Kafitz, S. 89 ff

⁴⁴ In einem Brief an Hilbert vom 29. September 1904 spricht er davon, dass dieses Problem ihn „beinahe wie eine Monomanie geplagt hatte“. (Quelle https://de.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff, nach Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek zu Göttingen, Handschriftenabteilung, NL Hilbert, Nr. 136.)

Theorie der Punktmengen sowie die Inhalts- und Maßtheorie enthielt und um eine Fülle neuer Ergebnisse ergänzt wurde.⁴⁵

Gödel bewies, als er schon im Exil in Princeton war, dass bzgl. ZF und ZFC die als wahr angenommene Kontinuumshypothese nicht zu Widersprüchen führt. Im Jahr 1963 bewies ein junger US-Amerikaner namens Paul Cohen auch die negierte Aussage. Wird die Kontinuumshypothese als falsch angenommen, führt es ebenfalls zu keinem Widerspruch in ZF/ZFC. Cohen führte dazu eine sensationell neue Methode ein, das Forcing.⁴⁶ Um beide Ergebnisse voneinander abzugrenzen heißt Gödels Ergebnis „relativer Konsistenzbeweis“ und Cohens Resultat „Unabhängigkeitsbeweis“ jeweils der Kontinuumshypothese. Beide Arbeiten gehören zusammen, beide sind gleich genial. Cohen wurde für seine Leistung mit der Fields-Medaille ausgezeichnet. Beide Ergebnisse sprechen kein Urteil über wahr oder falsch der Kontinuumshypothese. Sie sagen lediglich, dass beide Ansichten konform mit dem Zermelo-Fraenkel-Axiomensystem der Mengenlehre sind, auf dem mittlerweile große Teile der Mathematik fußen. Es ist eine nicht entscheidbare Hypothese. Es kann keinen Forscher geben, der mit noch so scharfsinnigen Argumenten eine Entscheidung für oder wider herbeiführen kann. Die Kontinuumshypothese ist in ZF/ZFC weder wahr noch falsch.

Die Gödelsche Logik und Vorgehensweise hat durchaus Konsequenzen auf die Philosophie der neueren Mathematik. Der Begriff der Folgerung oder Implikation ist seit Jahrtausenden grundlegend und alle Mathematiker können sich darauf einigen, dass mathematische Aussagen Implikationsaussagen sind. Doch eine Differenzierung nach formalen oder semantischen Ebenen verdeutlicht erst, auf welcher Ebene die Implikation stattgefunden hat. Rosemarie Rheinwald⁴⁷ unterscheidet zwischen syntaktischer Implikation, semantischer Implikation und strikter Implikation im Sinne von notwendiger Folgerung (engl. *entailment*).

⁴⁵ In diese Zeit fallen auch Hausdorffs philosophische Betrachtungen und Erkenntniskritik zu Raum und Zeit, die er unter dem Pseudonym Paul Mongré publizierte. Hausdorff setzte sich zwar intensiv mit Friedrich Nietzsche auseinander, wurde aber zweifellos ebenso wie Gödel von Immanuel Kant beeinflusst. Mit der Speziellen Relativitätstheorie sind diese Überlegungen nur noch historisch interessant, aber physikalisch überholt. Für die Entwicklung zum genialen Mathematiker, Begründer der Topologie, waren diese philosophische Studien aber wichtige Zwischenschritte zur mathematischen Erkenntnis. Der Name Hausdorff steht für viele mathematische Anwendungen wie Hausdorff-Raum, Hausdorff-Maß, Hausdorff-Dimension, Hausdorff-Konvergenz oder Hausdorff-Metrik. In wesentlichen Teilen hat er die Mathematik in die Moderne geführt.

⁴⁶ Siehe Paul Cohen; Wie ich „Forcing“ entdeckte, Paul Cohens Vortrag über die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese 2001, enterprise e< Lemgo 2017, mit Kommentaren von Marietta Ehret

⁴⁷ Rheinwald, Rosemarie; Der Formalismus und seine Grenzen, Untersuchungen zur neueren Philosophie der Mathematik, Königstein/Taunus, Hain 1984, S. 11

Entsprechend der „formalen Arithmetik“ bei Gödel, liegt das Hauptproblem bei der syntaktischen Implikation bei Beweisen zur Negierung von Aussagen. Konsistenz-, Unentscheidbarkeits-, Unvollständigkeits- und Unabhängigkeitsaussagen⁴⁸ können ohne Bezug zur Semantik kaum getroffen werden. Bedeutung, Wahrheit, Verifikation machen einen ontologischen Bezugsrahmen für Implikationen nötig, der sich nicht nur auf syntaktisch-linguistische Entitäten beschränken kann. Hier könnte der eigentliche „Geburtsfehler“ des hilbertschen Programms liegen.

Gödels Unvollständigkeitssatz wird von einigen Physikern und Mathematikern in Verbindung mit Phänomenen in chaotischen Systemen diskutiert. So ist bekannt, dass unvermeidliche Rundungsfehler zu einer „Informationslücke“ führen können, die bei nichtlinearen Abhängigkeiten zu einer extrem hohen Sensibilität von den Anfangsbedingungen führt. Abweichungen z.B. in der Millionstel Nachkommastelle beim Start von zwei Systemen können durch Rückkopplungseffekte, wie fortgesetzte Iterationen, zu gänzlich anderen Ergebnissen führen. Typisches physikalisches Beispiel ist das Wetter. Einer der Pioniere ist Edward Lorenz, der in einem Vortrag die Frage stellte, ob der Flügelschlag eines Schmetterlings in Brasilien in Texas einen Tornado auslösen kann.⁴⁹ Peitgen et. al.⁵⁰ zeigen den Effekt z.B. bei der altbekannten logistischen Gleichung, die bereits 1837 von Pierre François Verhulst z.B. zur Beschreibung von Jäger–Beute-Beziehungen genutzt wurde.⁵¹ Chaos darf man nicht als zufällig oder regellos betrachten. „Nicht-Vorhersagbarkeit“ und „Zufall“ sind zwei verschiedene Dinge. Man spricht auch von „deterministischem Chaos“. Iterationen oder Rückkopplungseffekte können zwar „durch die Schwerkraft eines Elektrons am Rande der Milchstraße“ jede Vorhersagbarkeit zunichtemachen“, (Crutchfield et. al.). Andererseits findet sich im Chaos auch erstaunlich viel Ordnung: Dem „Zufall“ liegt eine mehr oder weniger komplexe geometrische Form zugrunde („Attraktoren“). Ein Startpunkt im Phasenraum wird durch fortgesetzte Iterationen, wie Faltung, Strecken und Stauchung, an immer unbestimmtere Positionen verschoben. Er bleibt aber im Bereich des „Seltsamen Attraktors“. Chaos setzt der Vorhersage grundlegende Grenzen, zeigt aber auch kausale Zusammenhänge auf, wo zuvor keine vermutet

⁴⁸ Rheinwald, ebenda, S. 12

⁴⁹ Edward N. Lorenz, Predictability: Does the Flap of a butterfly's wings in Brazil set off a Tornado in Texas? American Association for the Advancement of Science, 139th Meeting, New York, December 29, 1972

⁵⁰ Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S.43

⁵¹ Pierre-François Verhulst: *Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement*. In: *Correspondance Mathématique et Physique*. Band 10, 1838, S. 113–121, zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Logistische_Gleichung

wurde.⁵² Für das Wetter bedeutet das beispielsweise, dass es lokal unvorhersagbar ist, aber global stabil bleibt.⁵³

Gödels Methoden, mit denen er seinen Unvollständigkeitssatz bewies, lassen sich ohne weiteres auf die Informationstheorie übertragen. In ihrem schon 1990 erschienen Standardwerk „Die Entdeckung des Chaos“⁵⁴ verweisen Briggs und Peat auf Gregory Chaitin⁵⁵, IBM Forschungslab in Yorktown Heights, New York. Ihn interessiert, ganz in der Tradition von Kurt Gödel und Alan Turing, die Grenzen der Berechenbarkeit und Beweisbarkeit. Er nutzt u.a. für diese Argumentationen einen informationstheoretischen Beweis von Gödels Satz. Dieses Theorem - betrachtet in einem neuem Zusammenhang - kann man in Verbindung zu den Erkenntnissen des englischen Mathematikers Alan Turing sehen, nämlich dass es Computerprogramme gibt, die ein Rechner aus Prinzip nie analysieren kann. Anders formuliert, es lässt sich zeigen, dass Gödels Unvollständigkeitssätze der Behauptung entsprechen, dass es keine allgemeine Methode geben kann, um systematisch zu entscheiden, ob ein Computerprogramm jemals anhalten wird. Gödel entdeckte also die Unvollständigkeit, Turing die Unberechenbarkeit. Chaitin hat sich in seinem wissenschaftlichen Leben bemüht, den Begriff der Komplexität bzw. des algorithmischen Informationsgehaltes besser zu beschreiben. Er möchte damit explizit an die grundlegenden Arbeiten von Gödel und Turing anknüpfen. Es geht ihm darum, die Grenzen mathematischer Methoden sowohl in der Logik als auch in der Informationstheorie weiter zu erforschen. Ein bemerkenswertes frühes Ergebnis seiner Arbeiten in algorithmischer Informationstheorie ist die Erkenntnis, dass es den „Zufall“ sogar in der als „reinen Zweig der Mathematik“ bekannten Zahlentheorie geben kann.⁵⁶

⁵² https://csc.ucdavis.edu/~chaos/courses/poci/Readings/Chaos_SciAm1986/Chaos_SciAm1986.html, James P. Crutchfield, J. Doyne Farmer, Norman H. Packard, and Robert S. Shaw, Chaos, SCIENTIFIC AMERICAN, December, 1986 VOL. 254 NO. 12, 46-57, („If the player ignored an effect even as minuscule as the gravitational attraction of an electron at the edge of the galaxy, the prediction would become wrong after one minute!“).

⁵³ John Briggs, F. David Peat, Die Entdeckung des Chaos, Hanser, München Wien 1990, S. 106

⁵⁴ Briggs, Peat, ebenda S. 107

⁵⁵ https://de.wikipedia.org/wiki/Gregory_Chaitin

Die Titel von Chaitins Werken sind oft Programm:

The Limits of Mathematics, Springer-Verlag, 1998.

The Unknowable, Springer-Verlag, 1999.

Exploring Randomness, Springer-Verlag, 2001.

Thinking about Gödel and Turing - Essays on Complexity 1970-2007, Singapore 2007.

Randomness and mathematical proof, Scientific American 1975

⁵⁶ Siehe auch Gregory J. Chaitin, Randomness in Arithmetic,

An dieser Stelle könnte man die Ausführungen zu Kurt Gödel schließen und auf einschlägige biografische Literatur verweisen. Doch ein wichtiger Lebensabschnitt in seinem Leben war die tiefe Freundschaft, die sich in der gemeinsamen Zeit in Princeton zwischen Albert Einstein und ihm entwickelte. Diese Freundschaft fand durchaus auf gleicher Augenhöhe statt. Im Gegenteil, Einstein sagte einmal, er gehe nur ins Institut, um das Privileg zu haben, mit Gödel zusammen nach Hause gehen zu können. Die beiden machten lange Spaziergänge und diskutierten zentrale Themen der Wissenschaft, Philosophie oder Politik in ihrer Muttersprache Deutsch. Natürlich kannte Einstein Gödels Verdienste in der Logik und seine philosophischen Ansichten und umgekehrt hatte sich Gödel mit Einsteins Physik auseinandergesetzt und seiner Philosophie als Naturforscher.

Gödel wurde gebeten, für den von P.A. Schilpp aus Anlass des 70. Geburtstags herausgegebenen Band „*Albert Einstein als Philosoph und Naturforscher*“ einen Essay zu verfassen. Gödel nahm die Aufgabe sehr ernst, sagte sogar seinen obligatorischen Sommerurlaub ab und stürzte sich auch noch intensiver in die Mathematik der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART). Er fand eine Klasse von Lösungen der ART, die „Zeitreisen“ in einem rotierenden Universum theoretisch möglich machten. Der Band war ein großer Erfolg, aber Gödels Beitrag wurde zunächst kaum beachtet und sogar von Chandrasekhar und J.P. Wright als fehlerhaft bezeichnet.⁵⁷ Vor allem das Wort des Astrophysikers Subrahmanyan Chandrasekhar hatte Gewicht. Er war bekannt durch seine Untersuchungen zum Aufbau und der Dynamik von Sternen und der mathematischen Theorie von Schwarzen Löchern. Doch Gödel hatte recht. Das bewies ausgerechnet ein Philosoph, Howard Stein.⁵⁸

Zeitreisen hört sich nach *science fiction* an, doch dahinter stecken fundamentale Überlegungen über die Natur der Zeit. Immanuel Kant hat Raum und Zeit als a priori gegeben angesehen. Er nannte sie die beiden essentiellen „Formen der sinnlichen Anschauung des Menschen“. Es war für ihn der Newtonsche, starre Euklidische Raum und die gleichmäßig fließende Zeit. Einsteins spezielle und allgemeine Relativitätstheorie hat diese a priori Annahmen beide widerlegt. In der Physik gibt es keinen absoluten Raum und keine absolute Zeit. Nach den neuesten Messungen des Planck-Teleskop sprechen wir vom Alter des

Scientific American 259, No. 1 (July 1988), pp. 80-85

online: <https://jillian.rootaction.net/~jillian/science/chaitin/www.cs.umaine.edu/chaitin/sciamer2.html>. Er bemüht darin sogar die Analogie zu Einsteins berühmten Zitat: God sometimes plays dice with whole numbers!

⁵⁷ Chandrasekhar S., J.P. Wright, The Geodesics in Godel's Universe, DOI: 10.1073/pnas.47.3.341

⁵⁸ Siehe Yourgrau, Palle; Gödel, Einstein und die Folgen, C.H.Beck, München 2005, S. 141f, nach John W. Dawson jr., Kurt Gödel, Leben und Werk, Wien/New York 1999, S. 158

Universums ($13,81 \pm 0,04$ Milliarden Jahre). Genau genommen ist dies ein Schnappschuss unseres Inertialsystems, der besagt, dass in unserem „Jetzt“ diese Anzahl an Jahren seit dem Urknall vergangen ist. Es ist unzulässig, diese Zahl auf das gesamte Universum, also alle Inertialsysteme der vierdimensionalen Raumzeit, zu übertragen. Einstein war das vollkommen bewusst:

„Das vierdimensionale Kontinuum ist nicht mehr objektiv in Abschnitte auflösbar, die alle gleichzeitige Ereignisse enthalten. Das „Jetzt“ verliert für die dreidimensionale Welt seine objektive Bedeutung.“⁵⁹

Unsere Alltagserfahrung und damit unsere Sprache hat diesen gedanklichen Schritt immer noch nicht vollzogen. Wir gehen einerseits immer noch davon aus, dass der „Fluss der Zeit“ und die Spezielle Relativitätstheorie, aus unserer lokalen Sicht heraus, vereinbar sind. Das muss falsch sein, denn der „Fluss der Zeit“ ist keine Frage der Geometrie und daher nicht nur lokal beurteilbar. Wie sieht es bei der Allgemeinen Relativitätstheorie mit der „Zeit“ aus? Sie ist nicht beschränkt auf isolierte Inertialsysteme. Es gilt weiterhin die Äquivalenz von Masse und Energie. Die ART behandelt auch die Gravitation, also eine beschleunigende Kraft, die Schwerkraft und Raumzeitkrümmung miteinander in Beziehung setzt, sie sogar als identisch ansieht. Sie ist somit die Grundlage für die moderne Kosmologie. Diese macht Aussagen über das ganze Universum und somit auch Aussagen über die Zeit seit dem Urknall in einer Art und Weise, die viel mit der intuitiven Zeit vor Einstein gemeinsam hat.

An dieser Stelle setzt Gödel an!

Wieder ist es die dialektische Beziehung zwischen formal und intuitiv, die sich wie ein roter Faden durch sein Lebenswerk zieht.⁶⁰

Er gab seinem Beitrag deshalb den Titel: *„Eine Bemerkung über die Beziehungen zwischen der Relativitätstheorie und der idealistischen Philosophie“*. Eine gewisse Ergänzung stellt seine Arbeit mit dem Titel *„Ein Beispiel für einen neuen Typ kosmologischer Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen der Gravitation“*, publiziert im gleichen Jahr 1949 in den *„Reviews of Modern Physics“*. Weiter ergänzend ist eine Protokollnotiz zu einem Vortrag am 7. Mai 1949 im „Institute for Advanced Study“ in Princeton, wo Gödel seine kosmologischen Erkenntnisse vorstellte. Ein Begleitartikel des österreichischen Rundfunks zur Sendung „Ö1 Nachtjournal“ zum 100. Geburtstag von Kurt Gödel vermerkt: *„Die Reaktion war eine Mischung aus Bewunderung, Erstaunen und Unverständnis.“⁶¹* Gödel hatte mit einer eigenen Technik Lösungen aus der ART gefunden, die einem Universum entsprechen,

⁵⁹ Albert Einstein, Relativity. The Special and General Theory, New York 1962, S. 149, zitiert nach Yourgrau, ebenda, S. 145

⁶⁰ Vergleiche die Argumentation von Yourgrau, ebenda, S. 147f

⁶¹ <https://oe1.orf.at/artikel/204398/Die-rotierende-Welt-des-Herrn-Warum>

in der die Materie so stark rotiert, dass sich geschlossene zeitartige Kurven ergeben. Allerdings war dieses erste Modell noch auf Basis eines statischen, sich nicht ausdehnenden Universums. Seit der Entdeckung von Hubble 1929 wurde aber immer deutlicher, dass sich das Weltall ausdehnt. Dies berücksichtigte Gödel in einer Überarbeitung des Modells, wobei die geschlossenen zeitartigen Kurven entfielen, also theoretisch mögliche Zeitreisen nicht mehr möglich wären. Trotzdem sind seine Erkenntnisse über die Zeit höchst bemerkenswert. Sie stellen laut Einstein schon an sich einen bedeutenden Beitrag zur Relativitätstheorie dar. Die verblüffende und geniale Beweisführung in einer komplizierten Abfolge von logischen Schlüssen erinnert stark an den Unvollständigkeitssatz. Sie basiert wieder auf der Dialektik zwischen der formalen und der intuitiven Ebene, die unterschiedlich sind, aber doch in einer gewissen Beziehung zueinanderstehen. Der Unterschied beider Begriffe besteht vor allem in der Tatsache, dass die intuitive Ebene einer formalen Darstellung nicht zugänglich ist.

Formale Zeit, insbesondere in der Einstein-Minkowski Darstellung der vierdimensionalen Raumzeit der SRT (also das kleine „t“ in den Formeln) ist nicht identisch mit der intuitiven Zeit unserer alltäglichen Erfahrung. Das „Jetzt“ unserer Erfahrung fließt, aber ein „Jetzt“ in der SRT gibt es nicht.⁶² Für Gödel ist der Schluss zwangsläufig: Wenn die Relativitätstheorie richtig ist, kann es keine intuitive Zeit geben. Das was wir für die Zeit halten, ist eigentlich eine Illusion, z.B. durch ständige Beobachtung von Vorgängen in unserer Wahrnehmung, deren „zeitliche“ Umkehrung extrem unwahrscheinlich ist, die aber nicht die Wahrscheinlichkeit Null haben. Berühmtes Beispiel ist das zerbrochene Ei – ein Ereignis, das praktisch nicht umkehrbar ist. Solche Ereignisse, die uns ein Fließen der Zeit vorspiegeln, sind bedingt durch die damit verbundene Entropiezunahme.⁶³

Die SRT ist bekanntlich ein Sonderfall der ART. Während die SRT nur unbeschleunigte Bewegung auf geraden Bahnen kennt und deshalb kein Inertialsystem bevorzugt, definiert die ART die Gravitation geometrisch als Raumzeitkrümmung, deren Krümmung andererseits wieder durch die Materieverteilung (und Energie) bestimmt wird. John Archibald Wheeler hat diese gegenseitigen Abhängigkeiten so formuliert:

Matter tells space how to curve.

⁶² Siehe auch Muller, Richard A.; JETZT – Die Physik der Zeit, deutsche Ausgabe S. Fischer Verlag, Frankfurt am Main, 2018

⁶³ Vergleiche Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, W. Kafitz, ZEIT, Bd. 69, Gießen 2021, S. 84, online <http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-1091>

*Space tells matter how to move.*⁶⁴

Die ART aber privilegiert doch einige Bezugssysteme, nämlich die, die laut Gödel „*der mittleren Bewegung der Materie im Universum folgen*.“⁶⁵

Über die ART kommt damit, im Gegensatz zur SRT, ein „Rest“ von Zeit ins Spiel, nämlich die kosmische Zeit, von der wir das Alter des Universums ableiten.

Im nächsten Schritt muss man sich klarmachen, dass über die ART die vierdimensionale Raumzeit (und nicht nur der Raum) vollständig geometrisiert wurde. Dabei erlaubt die ART mathematisch und physikalisch unterschiedliche Lösungen, die jeweils ein anderes Universum, eine andere Welt, darstellen. Gödel hat eine ganze „Schar“ von Lösungen entdeckt, die Wege zulässt, die in unserer vertrauten Welt als unmöglich gelten. Mit der Verfeinerung der Theorie auf expandierende Welten entfällt zwar die Möglichkeit zu Zeitreisen, insbesondere in die Vergangenheit. Dies liegt auch an der Geschwindigkeit der Expansion des Universums, die die Lichtgeschwindigkeit übersteigen kann. Die Expansion des Raums kann schneller sein als elektromagnetische Wellen. Was auf jeden Fall bleibt ist die Rotation. Es gibt jedoch keinen newtonschen absoluten Raum, um den sich die Materie drehen kann. Stattdessen gibt es ein Inertialfeld, das die Bewegung der Körper bestimmt, auf die keine Kraft ausgeübt wird. Dieses Inertialfeld bestimmt das Verhalten der Achse eines vollkommen frei hängenden Kreisels.⁶⁶ Auch in diesen rotierenden Gödel-Universen gibt es zwar keine geschlossenen zeitartigen Kurven und damit keine Zeitreisen, aber auch keine objektive Zeit. Es bleiben also trotzdem verstörende Implikationen, die die Zeit in diesen Welten in Frage stellen.

Doch diese Welten sind nicht unsere Welt. Welche Konsequenzen haben die mathematisch fundierten, also nicht spekulativen Überlegungen auf die „wirkliche Welt“?

Das ist nun der subtilste Schluss, den Gödel ins Felde führt. Lösungen der ART sind mathematische Objekte, die erstmal grundsätzlich existieren. Sie sind möglich und damit also notwendigerweise wirklich, also real. Es ist der berühmte platonische Schluss vom Möglichen zum real Existierenden. Das prinzipiell Mögliche ist Teil der Realität, sonst müsste man keine Wahrscheinlichkeitsrechnung betreiben. Es kann höchstens eine Bewertung des prinzipiell Möglichen vorgenommen werden, wie wahrscheinlich die Möglichkeit ist. Die physikalischen Gesetze gelten auch im Gödel-Universum, da dieses aus dem

⁶⁴ Das Zitat steht im 1973 erschienen Standardwerk Gravitation, von Charles W. Misner, Kip S. Thorne and John A. Wheeler, S. 5. Siehe auch [https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitation_\(book\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitation_(book))

⁶⁵ Zitiert nach Yourgrau, ebenda, S. 162, vergleiche auch die dortige Argumentation

⁶⁶ Kurt Gödel, Lecture on Rotating Universe (1949), in Solomon Feferman et. al. (Hsgr.), Kurt Gödel, Collected Works, Bd. III, New York 1995, S. 269-287, hier 271, zitiert nach Yourgau, ebenda S. 157

physikalischen Gesetz der ART hervorgeht. Wenn es aber im Gödel-Universum keine Zeit gibt, wäre es philosophisch unbefriedigend unserer Welt eine Zeit zuzuschreiben, auch wenn dies nicht zum Widerspruch führt.

Der ansonsten geniale Stephen Hawking war sehr irritiert von Gödels kosmologischen Modellen. Er sah nur die Möglichkeit, die ART so abzuwandeln, dass die so veränderten Einstein-Gleichungen keine Lösung für ein Gödel-Universum ergeben könnten. Er schlug ein „*Chronology Protection Conjecture*“ vor.⁶⁷ Der Ad-hoc-Charakter war jedoch zu offensichtlich und fand keinen Anklang.

Einige Grundsatzfragen der Physik

Hermann Weyl schreibt 1928 in seinem Buch „*Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaften*“: „*Das objektive Weltbild darf keine Verschiedenheiten zulassen, die nicht in Verschiedenheiten der Wahrnehmung sich kundgeben können.*“⁶⁸ Er bemüht David Hume, der auf dem Standpunkt steht, dass das Gegebene nicht die volle Wirklichkeit ist. Über das Gegebene hinaus führen physikalische Theorien. Sie müssen falsifizierbar sein, sich bewähren, Experimente und Beobachtungen erklären können, Voraussagen machen können und werden möglicherweise nach vielen Prüfungen zu Naturgesetzen. Wenn Menschen unterschiedliche Sichten auf die Wirklichkeit haben, benötigt man Methoden, um den Menschen als Faktor auszuschließen. Die Physik liefert entsprechende Methoden. Doch was ist die Aufgabe der Physik? Welches Verständnis haben große Physiker von ihrem Aufgabengebiet? Niels Bohr hat es so formuliert: *Es ist falsch zu denken, es wäre Aufgabe der Physik herauszufinden, wie die Natur beschaffen ist. Aufgabe ist vielmehr, herauszufinden, was wir über die Natur sagen können.* Das ist die Haltung der Positivisten. Zulässige Erkenntnisse über die Realität sind nur beobachtbare Tatsachen. Oder noch klarer: Nur das, was sich konkret beobachten lässt, kann als real anerkannt werden. Man kann hinzufügen: Alles andere sind unzulässige Schlüsse.

Stephen S hat sich in seinem Buch *Der Traum von der Einheit des Universums* mit der Frage nach der Realität beschäftigt und bringt einen weiteren, differenzierenden Aspekt ein. Es geht Weinberg um die Realität der Naturgesetze; „... *nicht der Glaube an die objektive Realität an sich, sondern der Glaube an die Realität der Naturgesetze*“ ist ihm wichtig. Unter Wissenschaftlern, nicht nur Physikern, ist diese Haltung durchaus

⁶⁷ Stephen Hawking, *Chronology Protection Conjecture*, *Physical Review D*46. Nr. 2 (15. Juli 1992), zitiert nach Yourgrau, S. 156

⁶⁸ Herrmann Weyl; *Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft*, R. Oldenburg Verlag, 8. Auflage, München 2009, S. 152

konsensfähig. Naturgesetze sind nicht nur anpassbare Spielregeln eines Spiels, nach ihnen funktioniert die Welt. Doch ist es nun nur die Aufgabe der Physik, die Naturgesetze zu finden? Hier scheiden sich die Geister. Die einen betrachten es als Selbstbeschränkung, die anderen vermissen die Frage nach der „eigentlichen Realität“. Vor allem in der Quantentheorie ist eine Antwort noch offen, auch wenn viele Physiker auch ohne Antwort gut leben und arbeiten können.

Dieses Kapitel beschäftigt sich insbesondere mit Theorien, die auf Basis der heute verfügbaren Experimental- und Messtechnik dieselben experimentell überprüfbar Aussagen machen und zu gleichen mathematischen Schlussfolgerungen kommen. Insofern ist das Erklärungspotential beider Theorien in letzter Konsequenz gleich. Es werden auch gleiche Grundannahmen gemacht, denn eine Theorie mit weniger Annahmen ist einer Theorie mit stärkeren Annahmen vorzuziehen. Die eine, vollkommen plausible Theorie betrachtet die Frage nach der „eigentlichen Realität“ als irrelevant oder sogar als unzulässig. Die andere, ebenso plausible Theorie, bietet ein Modell der Wirklichkeit an, ein durchaus konsistentes Bild, wie die Realität aussehen kann bzw. könnte. Die erste Theorie ist bequemer, weil sie unbequeme Fragen erst gar nicht zulässt. Die andere Theorie ist zweifellos physikalisch, wirft aber auch philosophische Fragen auf, die zuerst einmal für Physiker fachfremd sind, denn Physiker müssen keine Philosophen sein.

Unabhängig von Interpretationen muss man sich vergegenwärtigen, dass am Anfang der Quantenmechanik zwei oder drei willkürliche, nur mathematisch, nicht nach klassischen Kriterien physikalisch begründbare Postulate standen. Das war die Erkenntnis von Max Planck, dass sich die Wärmestrahlung „Schwarzer Körper“ nur korrekt beschreiben lässt, wenn man die Existenz eines kleinsten Energiepaketes annimmt.⁶⁹ Er postulierte eine neue Naturkonstante als Proportionalitätsfaktor, die mit h abgekürzt wird. Die Existenz von h in einer Gleichung ist ein untrügliches Zeichen, dass es um Quantenmechanik geht. Ein Quant⁷⁰ wird in der Physik als ein Objekt definiert, das durch einen Zustandswechsel in einem System mit diskreten Werten einer physikalischen Größe (meist Energie) erzeugt wird. Daher können Quanten immer nur mit bestimmten „Portionen“ dieser physikalischen Größe auftreten. Insbesondere Energie ist somit gequantelt, nicht kontinuierlich skalierbar, sondern in kleinsten Skalen diskret – ein damals ungeheuerliches Ergebnis, das allen klassischen Prinzipien widersprach. Trotzdem ist die Behauptung von Einstein, 5 Jahre

⁶⁹ Max Planck: Über das Gesetz der Energieverteilung im Normalspectrum. In: Annalen der Physik. Band 309, Nr. 3, 1901

⁷⁰ Definition siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Quant> oder z.B. wortgleich <https://www.chemie.de/lexikon/Quant.html>

später, noch radikaler. Energie wird nicht nur in einzelnen Paketen emittiert, sie besteht nach Einstein aus einzelnen Teilchen, den Photonen. Das hat er aus dem „Lichtelektrischen Effekt“ abgeleitet, den Einstein 1905 als Strom von Lichtteilchen interpretierte, die Elektronen aus einer Metalloberfläche schlagen können.⁷¹ Dieser photoelektrische Effekt hängt nicht von der Intensität, sondern allein von der Frequenz ab, wie auch die Energie eines Photons proportional zur Frequenz ist mit h als Proportionalitätsfaktor. Dies widersprach der bisher fest etablierten Wellennatur des Lichts, die sich in vielfach bestätigten Interferenzeffekten manifestiert. Licht, generell elektromagnetische Strahlung, hat also sowohl Wellen, als auch Teilchencharakter. Einstein führte den Begriff „Lichtquant“ ein. Der Proportionalitätsfaktor in der Einsteinschen Rechnung stimmt tatsächlich mit dem bereits bekannten Planckschen Wirkungsquantum überein. Das ist das experimentelle Resultat von Robert Andrews Millikan rund 10 Jahre später.⁷² Einstein hat für die Entdeckung den Nobelpreis 1921 bekommen und nicht, wie viele glauben, für die Relativitätstheorie. Millikan wurde 1923 für die Messung der Elementarladung ausgezeichnet. Dies waren die Anfänge der Quantenmechanik oder Quantentheorie.

Das zweite Postulat betrifft die Interpretation des Wasserstoffspektrums, insbesondere der sogenannten Balmer-Serie. Niels Bohr hat dazu Annahmen getroffen, die sich nur rechtfertigen ließen, weil sie das richtige Ergebnis lieferten. Das erste Bohrsche Modell sieht definierte Elektronenbahnen als „Schalenmodell“ vor und das Atomspektrum resultiert aus Absorption und Emission von Photonen, die durch Sprünge von Elektronen zwischen den Schalen hervorgerufen werden.

Der erst 25 Jahre alte Werner Heisenberg verfasste im März 1927 eine Arbeit, die Physikgeschichte schreiben sollte.⁷³ Sie trägt den Titel „*Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik.*“ Er war kein Unbekannter in der wissenschaftlichen Gemeinschaft. Zwei Jahre vorher war ihm die mathematische Beschreibung der Quantenmechanik gemeinsam mit Max Born und Pascual Jordan in einer für Physiker damals ungewöhnlichen Sprache gelungen, der Matrizenmechanik. Einstein hielt nicht viel davon: *Ein wahres Hexeneinmaleins ... höchst geistreich und durch große*

⁷¹ Albert Einstein: Über einen die Erzeugung und Verwandlung des Lichtes betreffenden heuristischen Gesichtspunkt. In: Annalen der Physik. Band 322, Nr. 6, 1905, S. 132–148

⁷² A Direct Photoelectric Determination of Planck's "h", R. A. Millikan, Phys. Rev. 7, 355, nicht zu verwechseln mit der Bestimmung der elektrischen Elementarladung e , für die Millikan mit dem Nobelpreis ausgezeichnet wurde. Das Experiment führte Millikans Doktorand Harvey Fletcher aus.

⁷³ <http://www.fisicafundamental.net/relicario/doc/Heisenberg1927.pdf>

*Kompliziertheit gegen den Beweis der Unrichtigkeit abgesichert.*⁷⁴ Hier sollte er sich irren.

Die Formulierung über Matrizen konkurrierte einige Zeit mit der Wellenmechanik von Erwin Schrödinger, bis sie als mathematisch äquivalent erkannt wurde (Diese Äquivalenz wurde zuerst von Schrödinger, dann auch von Pauli, Eckart, Dirac, Jordan sowie durch von Neumann auf unterschiedliche Art nachgewiesen).

Heisenberg spricht nun in der Arbeit von 1927 von „Ungenauigkeit“, Niels Bohr hat Heisenberg genötigt es auch „Unsicherheit“ (*uncertainty*) zu nennen. Im Deutschen heißt es mittlerweile Unschärferelation oder Unbestimmtheitsrelation, im angelsächsischen Sprachraum hat sich „*uncertainty principle*“ durchgesetzt.

Während man im makroskopischen Bereich, etwa durch sich ergänzende Experimente, z.B. bei Ort und Impuls bzw. Geschwindigkeit, beide Parameter beliebig genau bestimmen kann, ist dies im Quantenbereich nicht gleichzeitig möglich.

Die Heisenbergsche Unschärferelation ist unstrittig: In ihrer ursprünglichen Formulierung sagt sie aus, dass das Produkt aus Ortsunschärfe und Impulsunschärfe nicht kleiner als die Größenordnung der sehr kleinen Planck-Konstante sein kann. Gleichberechtigt daneben steht die Erkenntnis von Max Planck, dass alle Materie und Energie quantisiert vorliegt, salopp formuliert, die Welt ist granular. Energie und damit Materie tritt nur in Paketen mit einer unteren Grenze auf. Insbesondere Lichtteilchen/Photonen unterliegen dieser nach unten beschränkten Granularität. Energie bildet kein beliebig teilbares Kontinuum.

Die Unschärferelation lässt sich für eine Reihe von komplementären Paaren oder Observablen⁷⁵ zu gültigen, unstrittigen Naturgesetzen in Form einer einfachen Formel herleiten oder durch Experimente bestätigen. Sie ist elementar und steht außerhalb von Interpretationen der Quantenmechanik. Mathematisch bedeutet das, dass die beschreibenden Gleichungen für alle Wellenphänomene sich nicht in Form von trigonometrischen oder Exponentialfunktionen entwickeln lassen (Fourier-Theorem). Man beachte: Das

⁷⁴ Zitiert nach Sean Carroll, Was ist die Welt ..., deutsche Ausgabe, Stuttgart 2021, S. 75, siehe auch David Botanis, Einsteins Irrtum

⁷⁵ Ein Beispiel ist die experimentell nachgewiesene Korrelation von Winkelstellung und Drehimpuls (Quelle: Sonja Franke-Arnold et al.: Uncertainty Principle for angular position and angular momentum, in: New Journal of Physics Vol. 6 (2004) S. 103). Bei einem Spin-1/2-Teilchen sind je zwei Spinkomponenten, die zueinander senkrecht stehen, komplementär. Beim Photon ist die Unterscheidung der Polarisationsrichtung horizontal/vertikal komplementär zu der Unterscheidung der um 45° gedrehten Polarisationsrichtungen, sowie zur Zirkularpolarisation (linkszirkular/rechtszirkular). (Quelle: https://www.chemie.de/lexikon/Komplementäre_Observablen.html)

Unschärfeprinzip ist keine direkte Konsequenz der Quantisierung, sondern folgt aus der prinzipiellen Unmöglichkeit komplementäre Parameterpaare gleichzeitig beliebig genau messen zu können. Doch es geht nicht nur um Messgenauigkeit. So ist eine Konsequenz der Unschärfe, dass das, was man Vakuum nennt, keineswegs ein absolut leerer Raum ist, sondern Raum, in dem ständig „virtuelle“ Teilchen entstehen und vergehen.

Man betrachte die Konsequenzen am Beispiel des Paares Geschwindigkeit/Impuls und Ort/Position eines Teilchens: Natürlich kann man zuerst die Geschwindigkeit eines Teilchens mit großer Genauigkeit messen und anschließend (also nicht gleichzeitig) seinen Ort. Allerdings hat sich dann die Geschwindigkeit entscheidend und selbst bei mehreren Messungen an identisch präparierten Systemen nicht kausal vorhersagbar verändert. Die Unbestimmtheitsrelation ist Ursache für den probabilistischen Aspekt der Quantenmechanik – außerhalb von ihren verschiedenen Interpretationen. Man sollte auch beachten, dass sich die Messergebnisse unterscheiden, wenn zuerst die Position und dann der Impuls oder umgekehrt gemessen wird. Der Vorgang und die damit verbundene Rechnung sind nicht kommutativ. Deshalb war Heisenberg auch mit dem mathematischen Hilfsmittel der Matrizenrechnung erfolgreich, in der in der Regel das Kommutativgesetz nicht gilt. Es ist nichtkommutative Algebra.

Heisenberg konnte konstatieren:⁷⁶ *„An der scharfen Formulierung des Kausalgesetzes: „Wenn wir die Gegenwart genau kennen, können wir die Zukunft berechnen“, ist nicht der Nachsatz, sondern die Voraussetzung falsch. Wir können die Gegenwart in allen Bestimmungsstücken prinzipiell nicht kennenlernen.“*

Diese Haltung ist beispiellos in der klassischen Wissenschaftsgeschichte der Physik. Hier ging es nicht um die Empfindlichkeit eines Experiments und seiner Messgenauigkeiten oder der Komplexität von Ergebnissen, die den wissenschaftlichen Verstand überforderten. Hier ging es um eine Erkenntnisgrenze, die die Natur selbst gesetzt hat. Das Ideal, dass der Messvorgang unabhängig vom zu messenden Objekt stattfinden kann, ist nur in makroskopischen Dimensionen erreichbar. In der klassischen Mechanik hat ein Messvorgang keine Auswirkungen auf das zu messende System. Die Newtonsche Mechanik hat kein Messproblem. Auf der Quantenebene aber gilt: *Der Beobachter verändert das, was er beobachtet.*⁷⁷

Dieses Prinzip kann man bei direkter Beobachtung (und damit Energieaustausch) unbedenklich unterschreiben.⁷⁸ Doch muss man dazu die

⁷⁶ Heisenberg, ebenda, S. 26 der Abhandlung (Hervorhebung gemäß Original)

⁷⁷ Lindley, David; Die Unbestimmbarkeit der Welt, DVA, München, 2008, S. 16

⁷⁸ Es gibt ein Gedankenexperiment von M. Renninger, das sehr wohl indirekte Rückschlüsse über den Weg eines Photons zulässt, ohne dass eine Wechselwirkung

eigentliche Frage nach der Realität einfach als „unwissenschaftlich“ abtun? Die sogenannte Kopenhagener Deutung der Quantenphysik haben Niels Bohr und Werner Heisenberg gemeinsam entwickelt. Die Frage nach der eigentlichen Realität wird von beiden als unzulässig betrachtet. Doch während Heisenberg sich anfangs vor allem auf physikalische Grenzen der Messung bezog, war die Haltung von Bohr restriktiver. Für ihn gab es Grenzen der Erkenntnis, die man nicht hinterfragen darf. Ein über die mathematische Theorie hinausgehendes Verständnis der Realität war nicht messtechnisch verstellbar, sondern erkenntnistheoretisch unzulässig. Doch es gab Abweichler von der Kopenhagener Deutung. Die Interpretation von Hugh Everett mit seiner Viele-Welten-Version besagt, dass nach jeder Verzweigung der Wellenfunktion sich eine neue, gleichzeitig und parallel zu den bisherigen existierenden multiplen Welten, sogenannte „Multiversen“, aufspalten. Diese Deutung, die mathematisch nicht zu Widersprüchen führt, wurde manchmal belächelt, aber meist als zu extrem eingestuft, auch wenn sich Fürsprecher in den letzten Jahrzehnten häufiger zu Wort melden. Z.B. hat der bereits erwähnte David Bohm einen alternativen Ansatz für die Quantenmechanik entwickelt, der ebenfalls die mathematische Genauigkeit und Vorhersagekraft der Theorie beibehält und dabei die Frage nach der Realität nicht ausklammert.

An dieser Stelle ist es sinnvoll, über den Begriff der Kausalität in der Quantenmechanik nachzudenken. Eine einfache kausale Erklärung wäre: Ein Ereignis A beeinflusst Ereignis B, indem maximal mit Lichtgeschwindigkeit eine Information von A nach B übertragen wird, die zu einer kausalen, also vom Informationsgehalt der „Nachricht“ abhängigen Beeinflussung von B führt. Die Quantenmechanik selbst verlangt diese Beschränkung der Geschwindigkeit nicht. Erst wenn man relativistische Aspekte berücksichtigt, ergibt sich als Konsequenz, dass Überlichtgeschwindigkeit durch relativistische, nicht durch quantenmechanische Gesetze ausgeschlossen wird. Weiterhin beschreibt die Quantenmechanik im Prinzip lediglich eine feste Anzahl an Teilchen. Schon allein die Experimente am Large Hadron Collider (LHC) benötigen eine erweiterte Quantenmechanik. Das bedeutet zunächst die Einbeziehung von relativistischen Aspekten und andererseits eine Quantenfeldtheorie im Sinne

unter Energieaustausch stattgefunden hat. Er bezieht sich auf einen Satz von Jordan: *„Es ergibt sich unausweichlich, dass jede messende Beobachtung mit einem nicht zu vernachlässigenden Eingriff in das Objekt naturgesetzlich verbunden ist.“* Sein Gedankenexperiment steht dazu im Widerspruch. Er hat mit Heisenberg korrespondiert. Dieser hat eine subjektivistische Erklärung und plädiert für eine Änderung der Wellenfunktion bevor ein Weg genommen wird, der zu keiner Messung führt. Im Gegensatz zum Doppelspaltexperiment, wo die Kopenhagener Deutung wegen der Welle/Teilchen-Dualität auf Interferenz der Wellenfunktion mit sich selbst verweisen kann, ist diese Erklärung hier nicht schlüssig.
M. Renninger, Messung ohne Störung des Messobjekts, Z. Physik 158 (1960) 417

einer variablen Anzahl an Teilchen, weil im LHC Teilchen erzeugt oder vernichtet werden können.⁷⁹ Der Sprung von der Quantenmechanik zur (von Natur aus auch relativistischen) Quantenfeldtheorie gewährleistet zudem die Kausalität, da diese bereits in der Speziellen Relativitätstheorie gilt.

Das Interessante an der Quantenfeldtheorie ist die Tatsache, dass es nun nicht um die Wahrscheinlichkeit einer einzelnen Wellenfunktion geht, ein Teilchen an einer bestimmten Position zu sehen. Es geht um einen „Schnappschuss“ des gesamten Feldes in Form einer großen Wellenfunktion, die jedem Punkt des Raumes eine zu quadrierende Amplitude zuordnet, die der Wahrscheinlichkeit entspricht, dass sich Teilchen dort nachweisen lassen. In dieser Form lässt sich „Verschränkung“ relativ einfach beschreiben. Es ist eine Wellenfunktion der Menge aller Konfigurationen. In ihrem „Modus“ mit niedrigster Energie entspricht sie dem, was man „Vakuum“ nennt. Dabei ist die Energie nicht Null, sondern es können spontan ständig Paare sogenannter virtueller Teilchen bzw. Antiteilchen entstehen, die sich wieder vernichten können und deren Einfluss sich in Experimenten nachweisen, also messen, lässt. Sogar eine Superposition eines Null-Teilchen-Zustands mit einem Ein-Teilchen-Zustand ist in der Quantenfeldtheorie denkbar. Es ist ein Zustand ohne eine ganzzahlige Anzahl an Teilchen. Paul Dirac nennt das Superpositionsprinzip die *konzeptionelle Grundlage der Quantentheorie*.⁸⁰ Auch in angeregten Zuständen kann die scheinbare Anzahl an Teilchen variieren, denn Teilchen können zerfallen oder gebildet werden. Trotzdem wird erst durch Beobachtung ein konkreter Ort des Teilchens festgelegt. Das Teilchen ist also nicht an zwei oder mehreren Orten beobachtbar, aber durch die beobachtbare Quanteninterferenz können wir indirekt auf die Superposition schließen. Die ursprüngliche Fassung der Quantenmechanik betrachtet Teilchen und Wellen als zwei Seiten einer Medaille. In der Quantenfeldtheorie sind die Felder wesentlich elementarer. Teilchen manifestieren sich erst bei einer Messung. Paul Davies hat 1984 einen Artikel betitelt: *Particles do not Exist*.⁸¹ In manchen Fällen sind das, was wir der Einfachheit halber als Teilchen, wie die Quarks und Gluonen in Protonen und Neutronen, bezeichnen, überhaupt nicht isoliert beobachtbar. Hier sind wir wieder bei dem Begriff der Messung und was die „eigentliche Realität“ ist.

Die gegensätzlichen Grundpositionen werden in einem Gespräch zwischen Einstein und Heisenberg deutlich, das Heisenberg der Nachwelt überliefert

⁷⁹ Vergleiche Ecker, Gerhard; Teilchen, Felder, Quanten, Springer Spektrum, Berlin 2017, S. 33f

⁸⁰ Carlo Rovelli, Helgoland, S. 50

⁸¹ Paul C.W. Davies, Quantum Theory of Gravity: Essays in honor of the 60th birthday of Bryce S. DeWitt. Edited by Bryce S. DeWitt. Published by Adam Hilger Ltd., Bristol, England, 1984., p.66

hat.⁸² Nach seinen beispiellosen Erfolgen wurde Heisenberg zu einem Vortrag 1926 in der Berliner Universität eingeladen und wurde im Nachgang von Einstein in sein Appartement zu einem Gespräch gebeten.

Heisenberg weigerte sich in dem Vortrag, die Bahnen der Elektronen in Atomen zu diskutieren, weil man sie nicht beobachten kann und bezieht sich deshalb nur auf die beobachtbaren Lichtspektren. Einstein war schockiert und fragte, ob Heisenberg allen Ernstes glaube, dass man in eine Theorie nur direkt beobachtbare Größen aufnehmen kann. Heisenberg bezog sich auf den Empiriker Ernst Mach, den Einstein auch bei seiner Relativitätstheorie zitierte. Einstein lehnte jedoch dessen extreme Art ab: *Mach tut so, als wisse man schon was „beobachten“ bedeutet ... und er glaubt, sich an dieser Stelle um die Entscheidung objektiv oder subjektiv drücken zu können.*⁸³

Heisenberg beginnt seine bahnbrechende, auf Helgoland erarbeitete Arbeit mit dem Satz: *In der Arbeit soll versucht werden, Grundlagen zu gewinnen für eine quantentheoretische Mechanik, die ausschließlich auf Beziehungen zwischen prinzipiell beobachtbaren Größen basiert ist.*⁸⁴ Es wird die Geburtsstunde der theoretischen Quantenphysik, die dann gemeinsam mit Max Born, der die Matrixstruktur in der Arbeit erkannte und Pascual Jordan zur Matrizenmechanik ausgestaltet wurde. Es ist ein Plädoyer für eine ausschließlich auf Beobachtung fokussierte, wenn nicht sogar reduzierte Haltung des Logischen Empirismus oder Positivismus, wie sie vor allem Ernst Mach proklamierte. Für Mach war alles, was nach der „wahren Realität“ hinter den beobachteten Phänomenen fragte, Metaphysik.

Beobachten heißt messen, doch was ist eine Messung? Egal, ob in der unanschaulichen Matrizenmechanik oder der äquivalenten, aber leichter anwendbaren Wellenmechanik von Schrödinger blieb die strenge Kausalität auf der Strecke. Wellenfunktionen der Teilchen verhalten sich anders, wenn sie gemessen werden. Noch wichtiger ist die Frage, was die Wellenfunktion, die die Natur so fast perfekt beschreibt, eigentlich bedeutet. *Welches physikalische Phänomen repräsentiert sie, wenn sie überhaupt eines repräsentiert.*⁸⁵ Max Born hatte im Jahr 1929 immerhin eine Wahrscheinlichkeitsinterpretation der quantenmechanischen Wellenfunktion vorgeschlagen und eine statistische Lösung erarbeitet. Das Quadrat der Wellenfunktion entspricht danach der Wahrscheinlichkeit, mit der sich ein Teilchen gerade an einem bestimmten Ort

⁸² Werner Heisenberg, *Der Teil und das Ganze*, Piper, München 1971

⁸³ Ebenda, S. 95, zitiert nach Becker, Adam; *Was ist real?* deutsch bei Springer Sachbuch 2021, S. 23

⁸⁴ Werner Heisenberg, *Über quantentheoretische Umdeutung kinematischer und mechanischer Beziehungen*. *Zeitschrift für Physik* 33 (1): 879–893. Online: <http://www.psiquadrat.de/downloads/heisenberg1925.pdf>

⁸⁵ Sean Carroll, *Was ist die Welt ...*, deutsche Ausgabe, Stuttgart 2021, S. 82

aufhält, wenn man es dort messen würde. Doch die Messung bewirkt, dass die Wellenfunktion „kollabiert“; ein umstrittener Begriff. Teilchen scheinen sogar die Messung, z.B. die Frage nach dem Weg des Teilchens durch einen Doppelspalt, gemäß ausgeklügelten Experimenten regelrecht zu „ahnen“. Hier kommt die „Unbestimmtheitsrelation“ und die Grenzen des Beobachtbaren wieder ins Spiel. Bohr griff das Unschärfeprinzip auf der International Physics Conference im September 1926 am Comer See auf. *„Deshalb kann eine unabhängige Realität im üblichen physikalischen Sinn weder dem Phänomen noch dem Beobachtungsmedium zugeschrieben werden.“*⁸⁶ Man kann also, nach Bohr, prinzipiell nicht danach fragen, was die „unabhängige Realität“ ist. Bohrs wichtigste Philosophie war das Komplementaritätsprinzip, das insbesondere eine Konsequenz aus der „Welle-Teilchen-Dualität“ ist. Jedes Objekt beliebiger Masse hat nach Louis Victor De Broglie Teilchen- und Wellencharakter. De Broglie hat die bekannten Gesetze für masselose Photonen in seiner Dissertation 1924 auf massebehaftete Teilchen angewendet und im klassischen wie relativistischen Fall entsprechende Wellenlängen je nach Impuls hergeleitet.⁸⁷ Wellen haben jedoch keinen Ort, Teilchen schon. Für Bohr offenbart sich hierbei kein Widerspruch, sondern eine komplementäre Beziehung. Eine vollständige Beschreibung eines Quantenobjektes ist nach Bohr nicht möglich, sondern nur eine komplementäre. Aus dieser Position heraus wurde die bereits angesprochene Kopenhagener Deutung oder Kopenhagener Interpretation entwickelt.

*Wovon man nicht sprechen kann, darüber muss man schweigen.*⁸⁸

Nach diesem vielzitierten letzten Satz aus dem „Tractatus“ von Ludwig Wittgenstein, ein wichtiger Philosoph für den „Wiener Kreis“, wird heute noch durch viele Physiker die Kopenhagener Deutung verteidigt. Doch andere Deutungen sind mittlerweile veröffentlicht worden. Es gibt sie also, egal ob sie die „wahre Realität“ richtig deuten oder nicht. Sie sind jedenfalls voll kompatibel mit der unbestrittenen mathematischen Theorie. Ihre Autoren haben ein Jahrzehnte altes Denkverbot des übermächtigen Nestors der Quantentheorie, Niels Bohr, ignoriert.

Die ebenfalls zahlreichen Verfechter der Kopenhagener Deutung betrachten bis heute Einstein als Verlierer der hochrangigen Diskussionen mit Bohr, bis hin zu

⁸⁶ zitiert nach Becker, Adam; Was ist real? Springer Sachbuch, Berlin 2021, S. 33

⁸⁷ Für einen mit $v = 15$ km/h laufenden Menschen von $m = 70$ kg kommt man auf eine deBroglie-Wellenlänge von $\lambda_{dB} = \frac{h}{mv} \approx 2,27 \cdot 10^{-36}$ m. Den relativistischen Fall setzt man meist bei $0,1 \cdot c$ an ($c =$ Lichtgeschwindigkeit, $h =$ Plancksches Wirkungsquantum, $m =$ Masse, $v =$ Geschwindigkeit)

⁸⁸ Ludwig Wittgenstein, Tractatus logico-philosophicus, https://zs.thulb.uni-jena.de/rsc/viewer/jportal_derivate_00229770/00000268.tif.original.jpg?logicalDiv=jportal_jparticle_00326119 Satz 7. Seite 262

den Duellen auf der berühmten 5. Solvay-Konferenz im September 1927 in Brüssel.⁸⁹ Alles in allem wurde von Bohr, Born, Heisenberg und anderen Teilnehmern in Brüssel die Quantentheorie als mathematisch und physikalisch abgeschlossen und ausgereift betrachtet, bei der es keinen Grund gab, nach einer objektiven Realität zu fragen. Hier ist man wieder bei den Gedanken des „Wiener Kreis“, der sich in der Nachfolge von Ernst Mach sieht und im „Logischen Positivismus“ die Ansicht vertritt, dass das, was nicht beobachtet werden kann, bedeutungslos ist.⁹⁰ Einstein und Bohr trennte die Antwort auf eine grundsätzliche Frage, die Bohr in für ihn ungewöhnlicher Klarheit folgendermaßen beantwortet:

*Es ist falsch zu denken, die Aufgabe der Physik sei herauszufinden, wie die Natur ist. Physik beschäftigt sich damit, was wir über die Natur sagen können.*⁹¹

Die Grundhaltung von Einstein drückt sich in dem viel zitierten Zitat aus:

Das Wichtigste ist, dass man nicht aufhört zu fragen.

Diese Haltung schließt Denkverbote kategorisch aus. *Das programmatische Ziel der ganzen Physik [war] die vollständige Beschreibung aller (individueller) realer Situationen (die vermeintlich unabhängig von jedem Akt der Beobachtung oder Begründung sind).*⁹² Er erkannte klar im Positivismus und seinen Anhängern das philosophische Problem und verglich ihre Haltung mit dem Prinzip [des irischen Philosophen George] Berkeley: „esse est percipi“ [Sein ist Wahrgenommen werden]. Auch Heisenberg macht in einem Vortrag 1955 in St. Andrews (Schottland) deutlich, dass er voll die Linie Bohrs vertritt. Die „Vorstellung einer objektiven, realen Welt, deren kleinste Teile in der gleichen Weise objektiv existieren wie Steine und Bäume, gleichgültig, ob wir sie beobachten oder nicht“, ist unmöglich. „Wenn wir beschreiben wollen, was in einem Atomvorgang geschieht, so müssen wir davon ausgehen, dass das Wort „geschieht“ sich nur auf die Beobachtung beziehen kann, nicht auf die Situation zwischen zwei Beobachtungen.“⁹³ Die Frage, was passiert, wenn wir nicht hinschauen und das Besondere am Messvorgang, also das bis heute bestehende Messproblem, darf nicht gestellt werden. Physiker, wie Hans-Peter Dürr, nehmen eine differenzierte Haltung ein. Obwohl er Einstein widerspricht, werden extreme Positionen der Kopenhagener Deutung, wie leugnen der Existenz von Quantenobjekten, bevor sie durch Messung identifiziert wurden,

⁸⁹ Ausgerichtet vom belg. Unternehmer Ernest Solvay und initiiert von Walther Nernst

⁹⁰ Siehe Becker, ebenda S. 43

⁹¹ N. David Mermin 1985, „Ist he Moon There When Nobody Looks? Reality and the Quantum Theory“, Physics Today 38 (4): 38-47, zitiert nach Becker, ebenda, S. 45

⁹² Albert Einstein, Reply to Criticisms, in Schilpp Hsgr. 1949, Albert Einstein Philosopher-Scientist, MJF Books, New York, zitiert nach Becker, ebenda S. 45

⁹³ W. Heisenberg, Physik und Philosophie, Ullstein TB, Frankfurt a. M. 1990, zitiert nach Becker, ebenda S. 59

nicht übernommen. Als Schüler von Werner Heisenberg ist aber klar, welches Lager er vertritt:

„Unter dem starken Einfluss der Naturwissenschaft ... haben wir uns daran gewöhnt, unsere Wahrnehmung von der Wirklichkeit mit der Wirklichkeit gleichzusetzen und diese Wirklichkeit sogar im Sinne einer materiell fundierten, in Teile zerlegbaren Realität zu interpretieren. Die moderne Physik hat uns da jedoch eine interessante Lektion erteilt, die zu einer tief greifenden Korrektur dieser Vorstellung führte. Sie hat uns bedeutet, dass die Vorstellung einer objektiven Realität, einer materiell ausgeprägten Wirklichkeit wohl in einer gewissen Näherung angemessen, aber als absolutes Naturprinzip unzulässig und falsch ist, ja, dass diese Vorstellung uns sogar einen tieferen Einblick in das Wesen der eigentlichen Wirklichkeit versperrt.“⁹⁴

Interessant ist der Zusatz *„... einen tieferen Einblick in das Wesen der eigentlichen Wirklichkeit versperrt.“* Es ist also nach Dürr nicht nur erlaubt zu fragen. Die Formulierung ein *„tiefere[r] Einblick“* kann ein Physiker wie er nicht nur philosophisch oder metaphysisch verstehen, sondern als zumindest potentielle Möglichkeit, physikalisch tiefergehende Antworten zu geben.

Es ist nicht vorhersagbar, wann ein radioaktives Atom zerfällt. Man kann lediglich statistische Aussagen über die Häufigkeit des Zerfalls, in Form der Halbwertszeit, machen. Sie sagt aus, in welchem Zeitraum die Hälfte der Atome zerfallen ist. Die Standardlehrmeinung ist, dass der Zerfall eines Atoms rein zufällig ist. Insbesondere das Prinzip der strengen Kausalität wird dabei aufgegeben. Einstein schrieb in einem auf den 4. Dezember 1926 datierten Brief an Max Born:

„Die Quantenmechanik ist sehr achtunggebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, daß das noch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, daß der nicht würfelt.“⁹⁵

Allerdings muss man diese Haltung differenziert betrachten. Man kann in identisch konzipierten Experimenten Konstellationen von Teilchen betrachten und vermessen, die exakte Kopien darstellen (siehe Verschränkung). Man erhält dabei aber in der Regel verschiedene Messwerte für Position und Impuls.

⁹⁴ Zitiert nach [https://de.wikipedia.org/wiki/Realismus_\(Philosophie\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Realismus_(Philosophie)), Hans Peter Dürr auf der Tagung Geist und Natur 1988, zitiert nach: Fritz Schäfer: *Der Buddha sprach nicht nur für Mönche und Nonnen*. 2. Aufl. Kristkeitz, Heidelberg-Leimen 2000, S. 10

⁹⁵ Nach Wikipedia https://de.wikipedia.org/wiki/Gott_würfelt_nicht

Albert Einstein, Hedwig und Max Born: Briefwechsel 1916–1955. Rowohlt Taschenbuchverlag, Reinbek bei Hamburg, 1972, S. 97f, Online: https://wuecampus.uni-wuerzburg.de/moodle/pluginfile.php/2044577/mod_resource/content/1/Einstein,Born - Briefwechsel.pdf

Max Born: Physik im Wandel meiner Zeit. Verlag Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 1959, 3. Auflage, S. 244

Sie sind nicht beliebig willkürlich oder zufällig, sondern es lassen sich für jede Observable Wahrscheinlichkeiten bestimmen und diese statistisch verifizieren. Man muss also deshalb Observable, Zustände und Abhängigkeiten unterschiedlicher Messungen getrennt behandeln. Der Begriff „Observable“ hat deshalb in der Quantenmechanik eine vollkommen unterschiedliche Bedeutung als in der klassischen Mechanik. Determinismus ist zumindest eingeschränkt. Wesentlich verstörender als die Unschärferelation oder der Aufgabe des Determinismus, in dem der Zufall akzeptiert wird, ist jedoch ein anderes Phänomen der Quantenmechanik. Es geht um sogenannte verschränkte Teilchen. Zwei oder mehr verschränkte Teilchen haben bestimmte, voneinander abhängige Eigenschaften, z.B. hat ein Teilchen Spin up und das andere Spin down. Es steht aber vor der Messung nicht fest, welches Teilchen welche Eigenschaft hat. Werden diese Teilchen beliebig weit voneinander getrennt und wird an einem der Teilchen eine Messung des Spins vorgenommen, so wird instantan, also sofort ohne Zeitverzögerung und unabhängig von der Entfernung das eine Teilchen Spin up und das andere Teilchen Spin down annehmen. Dabei spielt die Relativitätstheorie bzw. die Lichtgeschwindigkeit keine Rolle. Eine Informationsübermittlung ist auch nicht möglich, da sich das Verhalten der Teilchen nicht vorhersagen lässt. Es wird zunehmend deutlich, dass der Vorgang technisch von Bedeutung werden wird. Anwendungen in der Kryptographie und bei den Möglichkeiten von Quantencomputern sind greifbar nahe. Trotzdem ist die reine physikalische Tatsache verstörend für unser Weltbild. Erst zum Zeitpunkt der Messung hat man wieder unverschränkte Systeme; zum Zeitpunkt der Verschränkung ist das Gesamtsystem wohlgeordnet und nicht in Einzelsysteme separabel. Einstein sprach von „*spukhafter Fernwirkung*“⁹⁶, heute sind die durch Verschränkung verursachten Korrelationen unbestreitbar und in vielen Experimenten zweifelsfrei nachgewiesen. Das letzte Aufbäumen in der Auseinandersetzung Einstein - Bohr fand 1935 statt, als Einstein mit zwei Kollegen, Boris Podolsky und Nathan Rosen, ein Gedankenexperiment publizierte, das nach den Initialen der Autoren EPR-Papier genannt wird. Das Szenario: Zwei Teilchen, A und B, die anfänglich durch Verschränkung miteinander wechselwirken, fliegen diametral auseinander und können an weit voneinander entfernten Orten gemessen werden. Wenn der Impuls von A gemessen wird, ist verzögerungslos der Impuls von B festgelegt.⁹⁷ Ein solches System wird durch einen einzigen, speziellen quantenmechanischen Zustand beschrieben. Dieser Zustand ist kein Produktzustand, sondern die beiden Teilchen befinden sich in einem speziellen, korrelierten Zustand, für den Erwin Schrödinger den Begriff „Verschränkung“ eingeführt hat.

⁹⁶ spooky action at a distance

⁹⁷ Vergleiche <https://de.wikipedia.org/wiki/Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon>

An den räumlich getrennten Teilchen werden zwei sog. komplementäre Messgrößen betrachtet, z. B. Ort und Impuls, oder zwei verschieden-gerichtete Spins („Drehimpulskomponenten“). Die gleichzeitige exakte Bestimmung dieser Messgrößen ist nach der Heisenbergschen Unschärferelation unmöglich.

Es kann gezeigt werden, dass die Werte dieser Messgrößen für die beiden Teilchen, trotz der Trennung und trotz der Unschärferelation, streng korreliert sind: Eines der beiden Teilchen befindet sich nach der Messung in einem Eigenwert der ersten Messgröße, das andere im dazu komplementären Wert der zweiten Größe. Welches der beiden Teilchen den einen Messwert und welches den anderen ergibt, das muss dabei nach den Gesetzen der Wahrscheinlichkeitsrechnung ermittelt werden. Dieses experimentelle Ergebnis wäre bei einer klassischen Theorie nicht möglich. Einstein sprach deshalb von einer „spukhaften Fernwirkung/ spooky action at a distance“. Das EPR-Papier brachte zunächst nochmal Bewegung in die Diskussion. Podolsky lancierte übrigens die Information unabgestimmt an die Presse, die eine reißerische Schlagzeile daraus machte. Einstein intervenierte und brach auch die Zusammenarbeit mit Podolsky ab, der das Papier auch letztlich nicht unbedingt in der nötigen Klarheit formuliert hatte. Bohr antwortete sechs Wochen später in der gleichen Zeitschrift und auch seine Replik war ebenfalls schwammig. Damit endete die Diskussion der zwei wichtigen Protagonisten. Was bleibt, ist die übermächtige Stellung der Kopenhagener Deutung. Lange Zeit stand ein Beweis des brillanten John von Neumann im Raum, der bewies, dass die Kopenhagener Deutung die einzige konsistente Theorie ohne verborgene Variablen sei. Von Neumanns Ergebnis, der noch dazu ein vielbeachtetes Buch zur Quantentheorie veröffentlicht hatte, wurde gar nicht bezweifelt. Doch Jahre später fand Grete Hermann,⁹⁸ leider weitgehend unbeachtet, eine Lücke in diesem Beweis.

Trotzdem muss man konstatieren: Es gibt konkurrierende Erklärungsansätze, von denen die De Broglie-Bohm-Theorie wohl noch am meisten ernst zu nehmen ist. Auf diese muss noch eingegangen werden. Auf jeden Fall wurde viel später (1966) durch die sogenannte Bellsche Ungleichung⁹⁹ ausgeschlossen, dass verborgene Variablen existieren können. John Stewart Bell hat ähnlich wie Hermann argumentiert, aber darüber hinaus überprüfbare Voraussagen gemacht. Eine lokal-realistische Erklärung, wie sie Einstein favorisierte, ist demnach nicht möglich.

Die Kopenhagener Deutung bestreitet, dass die Quantenmechanik überhaupt einen realistisch orientierten Erklärungsansatz zulässt. Realistisch bedeutet in diesem Zusammenhang, dass Aussagen über den Zustand auch vor der

⁹⁸ https://de.wikipedia.org/wiki/Grete_Hermann

⁹⁹ https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Ungleichung,
https://cds.cern.ch/record/111654/files/vol1p195-200_001.pdf

Messung gemacht werden können. Eine Messung ermittele nicht den Zustand, wie er vor der Messung vorlag, sondern schreibe einen gänzlich neuen Zustand fest. Der Ausgangszustand sei prinzipiell unzugänglich. Das Messproblem besteht in der willkürlichen Annahme, dass die Wellenfunktion durch die Messung kollabiert, ein Modell, das von Neumann eingeführt hat. Damit wird ein altes Prinzip verletzt: *Natura non facit saltus* (Die Natur macht keine Sprünge). Schon die Griechen postulierten diesen Grundsatz über Prozesse in der physikalischen Welt. Gottfried Wilhelm Leibniz formulierte es als „*loi de continuité*“. Ein Objekt passiert jeden Punkt und wenn es aufgehalten wird, so erzeugt es auf jeden Fall durch seinen Impuls eine Wirkung. Das ist aber nicht das eigentliche Problem. Eine Wellenfunktion hat nach der Kopenhagener Deutung gemäß Friebe et. al. nämlich tatsächlich zwei diametral unterschiedliche zeitliche Dynamiken:¹⁰⁰

- *Eine kontinuierliche, deterministische und zeitlich-reversible, unitäre Zeitentwicklung ...*
- *Eine diskontinuierliche, indeterministische, zeitlich-irreversible Zeitentwicklung ...*

Außerdem müsste eigentlich Messsystem und das zu messende Quantenobjekt als ein Ganzes betrachtet werden. Die Kopenhagener Deutung trennt bewusst zwischen dem klassisch zu beschreibenden Messsystem und dem Quantenobjekt. Man bezeichnet diese Trennlinie als *Heisenberg Schnitt*. Es gibt aber kein physikalisches Kriterium, wo man die Grenze ziehen sollte, ab der ein Objekt makroskopische Eigenschaften hat; wann also Dekohärenz stattfindet. Neuere Experimente zeigen, dass immer schwerere Teilchen Quanteneigenschaften besitzen können. Man kann aber Zeiten angeben, wann Teilchen unter welchen Bedingungen kohärente Eigenschaften verlieren:

Z.B. ein freies Elektron bei 300 K im Ultrahochvakuum in 10 Sekunden (s), ein Staubteilchen 10 μm in 10^{-4} s, eine Bowlingkugel in 10^{-12} s. Unter Einfluss von Sonnenlicht auf der Erde schon in 10^{-9} bzw. 10^{-10} bzw. 10^{-18} s.¹⁰¹

Im Jahr 1932 hat John von Neumann den Kollaps in seinem Buch *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik* als ein Postulat eingeführt, also als eine willkürliche Festlegung. Ein Kollaps der Wellenfunktion bleibt daher eine unbefriedigende Erklärung ohne physikalischen Beleg. Wenn Quantensysteme mit ihrer Umgebung wechselwirken und dabei kohärente Eigenschaften verlieren, nennt man es also Dekohärenz. Der Begriff geht auf Hans Dieter Zeh zurück, der von seinem Doktorvater gewarnt wurde, dass

¹⁰⁰ Vergleiche Friebe, Cord; Kuhlmann, Meinard; Lyre, Holger, Näger, Paul; Pason, Oliver; Stöckler, Manfred; Philosophie der Quantenphysik, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2015, S. 58f

¹⁰¹ Quelle der Zahlenwerte: <https://de.wikipedia.org/wiki/Dekohärenz>

solche Forschungen die Karriere kosten können. Sie bietet immerhin eine lokale physikalische Erklärung, wieso Superpositionen aufbrechen und die Objekte des „ehemaligen“ Quantensystems makroskopische Eigenschaften annehmen. Die Idee lässt sich durchaus auf den Messvorgang ausdehnen. Es liegt eben kein abgeschlossenes System zwischen Messgerät und Quantenobjekten vor, sondern betrifft die gesamte Umgebung inkl. des Einflusses von Licht bzw. elektromagnetischer Strahlung. Friebe et. al. verweisen auf Pionierarbeiten z.B. von Hans Dieter Zeh und einen bei Erscheinen ihres Buches aktuellen Stand bei Maximilian Schlosshauer.¹⁰² Es sind immerhin Modelle entstanden, warum der lokale Beobachter keine Superpositionen mehr sieht. Die Modelle sind kontinuierlich(!), da lokal die Interferenzterme in einem zwar schnellen, aber stetigen Vorgang verschwinden. Diskontinuierliche Erklärungen und Begriffe, wie Kollaps oder Beobachterabhängigkeit, werden dadurch vermieden. Es gibt darin keine wie auch immer geartete Subjektabhängigkeit der Wirklichkeit. Und vor allem: *Natura non facit saltus* - Die Natur macht keine Sprünge.

Die meisten Physiker beteiligen sich nicht an Fragen zur Interpretation der Quantentheorie. Eine moderate Kopenhagener Deutung ist der bequemste *modus vivendi* für sie. Für die meisten Physiker stellt sich die Frage nach der Realität nicht, sie halten sich aus der Interpretation der Quantentheorie heraus und nutzen ihre zweifellos beispiellos exakte mathematische Beschreibung, kurzum, sie rechnen nur damit (siehe *shut up and calculate*). Nur für einige wenige Physiker und Philosophen ist die Frage nach der „*eigentlichen Wirklichkeit*“ (Dürr), noch offen. Sie fragen immer noch: Was ist Realität?

Oppenheimer, bei dem Bohm studiert hatte, sagte einmal: *Wenn wir Bohm nicht widerlegen können, müssen wir uns darauf verständigen, ihn zu ignorieren.*

Der Herausgeber von *Physical Review*, Samuel Goudsmit, wies 1973 seine Redakteure schriftlich an, keine Veröffentlichung von Artikeln zu Grundlagen der Quantenmechanik auch nur in Betracht zu ziehen, wenn sie keine neuen Voraussagen machten.¹⁰³

Mit dem Namen Aharonov verbindet sich eine bezeichnende Geschichte, die Sean Carroll berichtet.¹⁰⁴ David Albert ist heute Philosophie-Professor an der Columbia-University und führend in Bezug auf die Grundlagen der Quantenmechanik. Das interessierte ihn schon als Doktorand und er veröffentlichte mehrere Artikel gemeinsam mit dem heute renommierten

¹⁰² Schlosshauer, Maximilian; *Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition*, Berlin/Heidelberg 2007, Springer

Zeh, Heinz-Dieter; *On the interpretation of measurement in quantum theory*, *Foundations of Physics* 1, 1970, S. 69-76

¹⁰³ Beispiele zitiert nach Sean Carroll, *Was ist die Welt ...*, S. 209-211

¹⁰⁴ Carroll, ebenda, S. 209

israelischen Physiker Yakir Aharonov und ehemaligem Mitarbeiter von David Bohm zu diesen Themen. Er wollte dann diese wichtigen Beiträge zu seiner Dissertation zusammenfassen. Man drohte ihm daraufhin, ihn aus dem Promotionsprogramm auszuschließen und verdonnerte ihn, seine Arbeit in mathematischer Physik zu schreiben. Das Ganze war eindeutig als Strafe gedacht und sollte seinen „Charakter festigen“.

An dieser Stelle ist ein kurzer historischer Rückblick hilfreich.

Die Machtergreifung Hitlers, das Ausbluten der „großdeutschen“¹⁰⁵ Wissenschaft durch die Judenverfolgung, die Entwicklung der Atombombe in den USA setzten andere Prioritäten. Heisenberg und andere hochrangige Physiker, darunter Otto Hahn, der Entdecker der Kernspaltung als Chemiker, wurden in Farm Hill unter komfortabelsten Bedingungen interniert.¹⁰⁶ Ziel der sogenannten Epsilon-Mission war der erfolgreiche Versuch, möglichst umfassende Kenntnis über den Stand der deutschen Kernphysikforschung zu erlangen. Die zehn Internierten, acht Physiker und zwei Chemiker, spotteten noch über die harmlosen Restriktionen im Vergleich zu Gestapo-Methoden, doch ihre Quartiere waren gespickt mit Mikrofonen und die Alliierten konnten hören, dass das deutsche Atomprogramm mit Heisenberg als wissenschaftlichem Leiter nie eine ernsthafte Gefahr für den Kriegsverlauf dargestellt hat. Heisenberg erzählte Zeit seines Lebens die Geschichte, dass er nur an Grundlagenforschung interessiert war. Niels Bohr war nach der Besetzung Dänemarks nach Schweden geflohen und dann über England nach Amerika gereist. In den USA arbeiteten im Krieg 125.000 Menschen am Nuklearprogramm, dem Manhattan-Projekt. Wigner, Szillard und Teller hatten die militärischen Möglichkeiten erkannt und befürchtet, dass auch Deutschland an der Bombe arbeitet. Sie gewannen Albert Einstein, einen Brief an Roosevelt zu unterschreiben, der dazu beitrug, dass schließlich in Los Alamos die erste Atombombe auf Basis Uran-235 testweise gezündet wurde. Am 6.8.1945 wurde die Bombe aus hochangereichertem Uran auf Hiroshima abgeworfen; drei Tage später eine Plutonium-Bombe auf Nagasaki. Otto Hahn wurde in Farm Hill vom britischen Offizier informiert. Erst durch einen BBC-Bericht konnten die deutschen Physiker die Nachricht glauben.

In den Nachkriegsjahren boomte die physikalische Forschung insbesondere in den USA. Noch 1938 wurden 17 Millionen US-Dollar für die physikalische Forschung in den USA ausgegeben; 1953 waren es knapp 400 Millionen Dollar,

¹⁰⁵ Viele Physiker mit jüdischen Wurzeln, die am Manhattan-Projekt arbeiten, stammte aus dem ehemaligen Vielvölkerstaat Österreich-Ungarn, wie Edward Teller, John von Neumann, Leó Szillárd, Eugene Wigner, Paul Erdős, Geoge Pólya und andere. Aber auch Theodore von Kármán, als genialen Aerodynamikexperten, der 1934 in die USA auswanderte.

¹⁰⁶ https://de.wikipedia.org/wiki/Operation_Epsilon

davon 98% vom Pentagon oder militärnahen Institutionen.¹⁰⁷ Doch für philosophische Interpretationen war wenig Platz. Die Quantentheorie funktionierte mathematisch unglaublich gut. Von der Entwicklung immer kleinerer Siliziumtransistoren bis zum LASER nahm ihre Bedeutung zur Entwicklung militärischer, ziviler und Dual-Use-Produkten bis heute stetig zu. Die Quantentheorie als mächtige und äußerst präzise Theorie funktioniert hervorragend.

Die De Broglie-Bohm-Theorie änderte an der praxisorientierten Situation kaum etwas. Sie macht keine neuen bzw. weitergehenden Voraussagen, die durch experimentelle Überprüfung neue Argumente für sie liefern könnte. Theoretische Weiterentwicklungen, etwa im relativistischen Bereich, finden eher dort statt, wo nicht über den Ausgangszustand spekuliert werden muss. Damit hinkt bei der De Broglie-Bohm-Theorie auch die Verallgemeinerung, hin zur Quantenfeldtheorie, hinterher.

Wenn die Wellenfunktion das gesamte verschränkte System beschreibt, so scheint in diesem Fall die Natur das Prinzip der Lokalität aufzugeben. Die De Broglie-Bohm-Theorie geht diesen Weg. Teilchen werden von einer Führungswelle geleitet und hängen von der Wellenfunktion der Schrödingergleichung ab, aber auch von allen anderen Positionen aller beliebig weit entfernten Teilchen. Das macht die Nichtlokalität aus. Vor allem: Teilchen existieren nach dieser Theorie, auch wenn sie nicht beobachtet werden. Das Chaos und der Zufall werden weitgehend ferngehalten. Die Theorie bleibt deterministisch und alle Zustandsänderungen sind durch die Anfangsbedingungen festgelegt. Alle Teilchen unterliegen der Kontrolle von „Steuerwellen“, die ihre Bewegung bestimmen, die geordnet und vorhersehbar bleibt. Damit hat die Theorie kein Messproblem. Die Positionen der Teilchen sind nicht willkürlich, sondern so verteilt, dass die Bornsche Regel gilt. Hier ist eher die Natur „willkürlich“, aber das entspricht eben den Messergebnissen im Experiment. Dabei ist die De Broglie-Bohm-Theorie mathematisch vollkommen äquivalent zur Quantenmechanik, die gemäß „Kopenhagen“ interpretiert wurde. Plötzlich hatten auch alternative Interpretationen, wie die Natur auf Quantenebene funktioniert, wieder eine Chance. Die Frage: Was ist Realität, hatte wieder ihre Existenzberechtigung.

Während die Bohmsche Quantenmechanik einen ontologischen Ansatz vertritt, existieren mittlerweile epistemische Strategien; d.h. Wellenfunktionen sind für diese Interpretationen nicht real, sondern rein subjektive Beschreibungen. Die bekannteste ist das Modell namens Quanten-Bayesianismus – kurz QBismus (gesprochen wie Kubismus). Sie kombiniert Quanten- und

¹⁰⁷ Quelle Becker, ebenda, S. 80

Wahrscheinlichkeitstheorie.¹⁰⁸ Ein interessanter Bestandteil ist die Herleitung der Bornschen Regel fast ausschließlich aus der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Im Jahr 1966 formulierte John Stewart Bell und Michael Nauenberg schon fast trotzig: *Wir betonen nicht nur, dass unsere Ansicht die einer Minderheit ist, sondern auch, dass das Interesse an diesen Fragen derzeit gering ist. Der normale Physiker hat das Gefühl, dass sie längst beantwortet sind und dass er vollkommen verstehen würde, wie, wenn er nur einmal 20 freie Minuten hätte, um sich darüber Gedanken zu machen.*¹⁰⁹

Das war 15 Jahre nach einem Gespräch von David Bohm mit Albert Einstein. Bohm hatte ein Buch veröffentlicht, das zwar die Kopenhagener Deutung noch vertrat, aber doch eine differenziertere Sicht auf das Thema einnahm. Einstein akzeptierte voll die mathematische Seite der Theorie, erneuerte aber seine Kritik an der Kopenhagener Deutung. Diese Deutung schwieg beharrlich auf die Frage: Was ist real und untersagte sogar die Frage. Er forderte eine Theorie, die diese Frage nicht ausklammert und die sich nicht ständig auf einen Beobachter beziehen muss, wenn man nach der Realität auf Quantenebene fragt. Für Bohm war das ein Impuls, der ihn eine neue Sichtweise finden ließ. Es entstanden in kurzer Zeit einige Artikel, die er bei der angesehenen Fachzeitschrift *Physical Review* einreichte.

Leider war Bohm in die Untersuchungen der McCarthy-Ära geraten. Er hatte während des Kriegs lose Kontakte zur kommunistischen Studentenbewegung. Obwohl er am 31. Mai 1951 von allen Anklagepunkten freigesprochen wurde, landete er auf der schwarzen Liste und verlor seine Anstellung in Princeton. Scheinbar stand er auch unter Beobachtung durch das FBI. Empfehlungsschreiben von Einstein oder Oppenheimer hatten innerhalb der USA keinen Erfolg, er bekam lediglich an der Universität von São Paulo in Brasilien eine Stelle. Er hoffte auf eine positive Reaktion der Fachöffentlichkeit auf seine Artikel, fürchtete aber gleichzeitig, dass sie als für die Praxis irrelevant eingestuft werden. Als falsch konnte man sie nicht abtun, denn die Mathematik, also die Beschreibung mittels der Schrödinger-Gleichung, blieb vollkommen unberührt. Auch die Heisenbergsche Unschärferelation gilt darin unverändert. Die Teilchen „surfen“ auf einer Steuerwelle, wodurch ihre Bewegung jederzeit gesteuert wird. Dadurch wird insbesondere dem Bereich, den die Kopenhagener Deutung tabuisiert, eine von der Beobachtung unabhängige Realität gegeben. Die berühmte Schrödingersche Katze ist also, gemäß dieser Interpretation, ohne dass man die Kiste öffnet nicht in einem „Überlagerungszustand zwischen tot und lebendig“, sondern eindeutig

¹⁰⁸ Siehe Hans Christian von Baeyer, Eine neue Quantentheorie, Spektrum der Wissenschaft, 2013/11 S. 46-51

¹⁰⁹ Becker, ebenda, S. 87

entweder tot oder lebendig. Genau wie der Mond existiert, auch wenn er nicht beobachtet wird (Einstein).¹¹⁰

Ist das nun die „wirkliche physikalische Realität“? Das kann man noch nicht beantworten. Die Antwort muss ein Experiment geben. Aber es ist eine Alternative.

Das wichtigste Experiment der Quantenmechanik ist der Doppelspaltversuch. Photonen oder andere Quantenobjekte werden durch zwei sehr nahe beieinanderliegende Spalte geschickt und dahinter auf einer Fotoplatte registriert. Es bilden sich nicht zwei senkrechte Striche, sondern ein Interferenzmuster aus Maxima und Minima. Licht hat Wellen- und Teilchencharakter. De Broglie hat diese komplementäre Eigenschaft auch für alle Materieteilchen angenommen. Man kann nun die Intensität so weit reduzieren, dass nur einzelne Quanten durch die Spalte fliegen. Auch dann entsteht ein Interferenzmuster. Wenn man jedoch einen Detektor dazwischenschaltet und damit den Weg der Quanten ermittelt, so verschwindet das Muster. Es sieht so aus, als „wüssten“ die Quanten, dass sie beobachtet werden.

Die Kopenhagener Deutung erklärt das Phänomen so: Auch einzelne Photonen/Quanten haben Wellen- und Teilchencharakter. Sie sind gemäß der Wellennatur in der Lage, mit sich selbst zu interferieren und somit beide Spalte gleichzeitig zu passieren. Wenn sie aber detektiert werden, also der genaue Aufenthaltsort bestimmt wird, werden sie gezwungen, sich wie Teilchen zu verhalten und damit nur durch einen Spalt zu fliegen. Die Frage, wo sie vor der Messung waren, ist bedeutungslos, weil man einer Welle keinen genauen Ort zuordnen kann.

Genau diese nach „Kopenhagen“ scheinbar grundsätzlich unmögliche Unkenntnis des Aufenthaltsortes erklärt die Bohmsche Theorie. Für Bohm sind Quanten Teilchen, die auf ihren Steuerwellen surfen.¹¹¹ Das Teilchen kann nur durch einen Spalt fliegen, aber die ihm zugeordnete Welle passiert beide Spalte und ist auch in der Lage mit sich selbst zu interferieren. Weil aber das Teilchen durch seine Steuerwelle geführt wird, werden beliebig gut konstruierte Detektoren die Steuerwelle und damit das Teilchen beeinflussen. Es tritt der gleiche Effekt ein – es entsteht kein Interferenzmuster mehr. Allerdings ist zu jedem Zeitpunkt die Flugbahn der Teilchen determiniert.

Hier prallen zwei unterschiedliche Philosophien aufeinander.

¹¹⁰ Ein anderes Paradoxon, genannt Wigners Freund, beschreibt Eugene Wigner. Er verknüpfte den Bohrschen „Beobachter“ mit dem Problem des Bewusstseins. Auch hier spielt die Frage nach der makroskopischen Bedeutung von Superpositionen eine Rolle. Näheres siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Wigners_Freund

¹¹¹ Becker, ebenda S. 103

Ist eine Theorie nur ein Modell, um mathematisch genaue Vorhersagen machen zu können? Zählt nur die Rechnung, alles andere ist irrelevantes Beiwerk?

Oder möchten wir uns ein Bild der Welt machen können, ohne die Genauigkeit der mathematischen Seite aufzugeben?

Natürlich denken wir auch in Bildern und Abstraktionen, wenn wir von Teilchen und ihren Steuerwellen sprechen. Doch ist es nicht befriedigender, wenn das Bild, das wir uns von der Realität machen, keine willkürlichen Lücken aufweist, die mit prinzipieller Unkenntnis erklärt werden?

Die Unschärferelation oder verschränkte Teilchen über beliebige Entfernungen verlangen dem „gesunden Menschenverstand“ bei der Quantenmechanik sowieso eine ganze Menge ab. Die Forderung nach Lokalität müssen wir aufgeben. Ein deterministisches Modell erhält zumindest die strenge Kausalität. Es erscheint den Vertretern der Bohmschen Ideen auf jeden Fall sinnvoll, dass man ein Bild der Realität hat, auch wenn es zunächst noch nicht beobachtbar ist. Der Positivismus kann Erkenntnis behindern, dazu ist Ernst Mach ein Beispiel, der die Existenz von Atomen bis zu seinem Tod abgelehnt hat. Ein gänzlich anderes Beispiel stellen zwei Ergebnisse dar, die Paul Dirac 1928 im Rahmen der relativistischen Quantenmechanik erhielt. Eines war plausibel und das andere scheinbar unsinnig. Er nahm es trotzdem ernst und postulierte ein neues Teilchen, das Positron, also erstmals Antimaterie, das vier Jahre später von Carl David „Charles“ Anderson in der kosmischen Strahlung entdeckt wurde.

Bohr tat alles, was Kopenhagen widersprach, als zu dumm ab. Andere setzten sich immerhin mit der Theorie auseinander und es wurden weitere Zweifel geäußert, ob die Bohmsche Theorie tatsächlich alle Aspekte der Quantenphysik abdeckt. Von Neumann und Pauli bezweifelten, ob das Phänomen „Spin“ integriert werden kann – sie irrten sich. Von Neumann sah die Theorie als konsistent an und sogar für sehr elegant. Pauli, übrigens Patenkind von Ernst Mach, betrachtete die Theorie nach langen Briefwechseln mit Bohm ebenfalls endlich als konsistent, sah aber keine Möglichkeit sie gegen die Kopenhagener Interpretation zu testen. Sie sei deshalb „*ein Scheck, der nicht eingelöst werden kann*“.¹¹² Einstein störte sich an der Nicht-Lokalität. Heute gibt es zahllose ausgefeilte Experimente, die im Prinzip Abwandlungen des EPR-Gedankenexperiments sind, die zeigen, dass man einerseits die Lokalität nicht mehr fordern kann und andererseits durch die Überlegungen von John Bell verborgene Variablen ausgeschlossen sind.

¹¹² Brief von Wolfgang Pauli an David Bohm, ca. 1951, Pauli Archives am CERN, <https://cds.cern.ch/record/80946>

Für Positivisten gibt es bis heute nicht nur kein Anlass für eine Neuinterpretation. Für sie gibt es überhaupt keinen Grund zur Interpretation. Ihnen reicht die Mathematik. Philosophie ist für sie brotlose Kunst. Sie bleiben in der „Komfortzone des Physikers“ (Sean Carroll).

In einem Brief an seinen Freund Arthur Wightman (undatiert ca. 1952) schreibt David Bohm aus Brasilien:¹¹³

Vorläufige Konzepte werden gebraucht, selbst bevor empirische Beweise zur Verfügung stehen, um uns vor eine Wahl zu stellen und Experimente zu entwerfen und auch, um bei ihrer Interpretation zu helfen.

Es geht also Bohm bei der Frage nach der Realität in erster Linie um Physik und ihre Weiterentwicklung; philosophische Einordnung ist dabei durchaus nützlich bei der Suche nach einem besseren Naturverständnis, wenn sie nicht zum Selbstzweck wird. Entscheidend ist seine Definition von Wissenschaft. Es ist mehr als eine „Mess- und Experimentiermethode“. In dieser Definition gibt es keine Überlappung zur Philosophie oder zur Mystik. Für Bohm ist Wissenschaft *„Der Versuch, die Wirklichkeit der Natur in ihrer Ganzheit zu begreifen.“*¹¹⁴ Er geht sogar so weit, dass das wahre Verständnis der Realität auf der Quantenebene mittlerweile durch zu viel Mathematik verdeckt wird. Er plädiert dafür, „kreative Imagination“ niemals auszublenden, die die *„Bedeutung der Mathematik direkt wiedergibt“*. Dabei muss immer wieder betont werden, dass die Mathematik bei allen führenden Physikern vollkommen unstrittig ist. In einem Gespräch mit Renée Weber sagt er *„... man erkennt sonst nicht den ganzen Gehalt dieser Mathematik, [sondern] beschränkt sie darauf, empirische Voraussagen zu machen.“*¹¹⁵

Bohm konnte sich schließlich mit Hilfe einiger Gönner aus dem Exil in Brasilien befreien und erhielt die brasilianische Staatsbürgerschaft und damit einen Pass. Es folgten Stationen in Israel und Großbritannien. Trotz Angebote aus den USA scheiterte ein Wechsel an seiner vermeintlich politischen Vergangenheit – er stand einfach auf einer schwarzen Liste. Er hatte als Einzelkämpfer keine Chance gegen die Phalanx der Kopenhagen-Befürworter und die Steuerwellentheorie blieb eine zunächst weitgehend ignorierte, aber wissenschaftlich korrekte Einzelmeinung. Seine Lebensleistung beinhaltet aber neben der Quantenphysik und Relativität vor allem auch seine späteren Beiträge zur Philosophie, zur Kognitionspsychologie und zur Mystik. Etwa ab dem Jahr 1985 oder etwas früher änderte sich die Einstellung der öffentlichen Meinung gegenüber seiner Person. Er konnte eine Vortragsreise durch die

¹¹³ Zitiert nach Becker, ebenda S. 107

¹¹⁴ Renée Weber, Alles Leben ist Eins, Die Begegnung von Quantenphysik und Mystik, Crotona Verlag 2019, S. 196,

¹¹⁵ Weber ebenda, S. 60/61 sowie folgend S. 194/195.

Vereinigten Staaten beginnen; darunter Stationen auch von besonderer persönlicher Bedeutung, wie Princeton und die University of Texas in Austin auf Einladung von John A. Wheeler. Ein Vortrag vor der UNO zu seiner Theorie der Impliziten Ordnung mit möglicher Bedeutung für den Weltfrieden war ein weiterer Höhepunkt. Seine Schriften wurden jetzt viel stärker beachtet und er gilt nun als kompetenter Brückenbauer zwischen Wissenschaft und spirituellen Wegen.

Ein physikalischer Effekt trägt immerhin auch seinen Namen und ist Beleg für seine Qualifikation als Quantenphysiker. Sein israelischer Kollege Yakir Aharonov und er haben ihn vorausgesagt.¹¹⁶ Die Quantenmechanik kennt einige Phänomene, die dem gesunden Menschenverstand zuwiderlaufen. Der Aharonov-Bohm-Effekt (AB-Effekt) gehört zweifellos dazu. Der Versuchsaufbau entspricht dem Doppelspalt-Experiment, mit dem Unterschied, dass zwischen den Spalten eine „ideale“ Spule sitzt; d.h. außerhalb der Spule existiert praktisch kein Magnetfeld. Trotzdem „spürt“ ein Teilchen den Einfluss, obwohl es ihm scheinbar gar nicht ausgesetzt ist. Benutzt man z.B. Elektronen, so verschiebt sich ihre Phase proportional zur entsprechenden Stärke des Magnetfeldes. Auch bei ungeladenen Teilchen, wie Photonen wurde der Effekt nachgewiesen.¹¹⁷ Im Jahr 2022 wurde durch den AB-Effekt sogar gezeigt, dass die Gravitation Quanteneigenschaften haben muss.¹¹⁸ Die elektromagnetische Feldstärke galt früher in der klassischen Physik als einzige reale Größe, ist aber schwer punktgenau berechenbar. Sie ist hier idealerweise Null im gut abgeschirmten Experiment. In der quantenmechanischen Beschreibung tauchen dagegen Vektorpotentiale auf. Sie wurden zuerst als mathematische Hilfskonstruktion gesehen, dessen Gleichungen wesentlich besser handhabbar sind. Das Vektorpotential deckt sich veranschaulicht mit den Feldlinien, wie man sie bei der Darstellung von Ferromagneten kennt. Der AB-Effekt zeigt: *Das Kreisintegral über dem Potential liefert die im Experiment beobachtete Interferenzmuster-Verschiebung.*¹¹⁹ Zusammenfassend kann man sagen: In der klassischen Betrachtung sind die Felder messbar; das Vektorpotential ist nur Rechenhilfe. Der AB-Effekt zeigt, dass das Vektorpotential nicht nur eine Hilfsgröße ist.

Scheinbar wurde der Effekt schon 1939 von Walter Franz auf einer Konferenz erwähnt. Auf jeden Fall haben ihn Werner Ehrenberg und Raymond Siday 1949 in einer kaum beachteten Veröffentlichung ohne Erwähnung im Abstract

¹¹⁶ Y. Aharonov and D. Bohm. Significance of Electromagnetic Potentials in the Quantum Theory. *Physical Review*, 115(3):485{491, August 1959.

¹¹⁷ <https://www.nature.com/articles/ncomms4225>

¹¹⁸ <https://science.orf.at/stories/3210961/>

¹¹⁹ Formulierung: Friebe et. al; *Philosophie der Quantenphysik*, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2015, S. 283

geschildert. Erst im Jahr 1959 haben Bohm und Yakir Aharonov ohne Kenntnis der Ergebnisse von Ehrenberg und Siday den Effekt mit dem nötigen Nachdruck auf seine Bedeutung vorausgesagt. Robert Chambers¹²⁰ führte 1960 das bestätigende Experiment durch. Ein sehr sorgfältig bzgl. der Abschirmung geplanter Versuch von Tonomura et. al. beseitigte alle Zweifel.¹²¹

Was bedeuten diese Ergebnisse für den Wettstreit der Interpretationen? Was bedeuten sie für die Grundsatzfrage im vorliegenden Beitrag: Was ist Realität? Hier eine Meinung von Ralf Köhl, Christian-Albrechts-Universität zu Kiel:¹²²

Meiner Meinung nach ist das der Durchbruch der Quantenphysik, weil klar wurde, dass bei den Teilchen Phasenverschiebungen stattfinden, je nachdem, welchen Weg sie um das Magnetfeld laufen, obwohl das Magnetfeld nicht auf sie wirken kann! Das ist die Geburtsstunde der topologischen Physik! Die Windungszahl taucht in einem Experiment auf!

Die Windungszahl oder auch Umlaufzahl bzw. Index genannt, gibt die Zahl der Umrundungen im mathematisch positiven Sinn (gegen den Uhrzeigersinn) einer Kurve um einen Punkt an.¹²³

Der AB-Effekt stützt durchaus die De Broglie-Interpretation der Quantentheorie. Für die Kopenhagener Deutung ist die Frage, wo Teilchen vor einer Messung waren, ohne Bedeutung. Es wird argumentiert, dass man Wellen keinen genauen Ort zuordnen kann und deshalb eine Welle durch beide Spalte gleichzeitig geht, solange man sie nicht zwingt Teilcheneigenschaften anzunehmen. Eine Abhängigkeit vom Weg um das Magnetfeld konterkariert diese Argumentation und macht das Steuerwellenprinzip wahrscheinlicher.

Einstein war Bohms Weg übrigens immer noch nicht radikal genug, obwohl er ihn als talentierten jungen Kollegen schätzte. Bohm interpretierte die Experimente auf Basis der Mathematik der Quantentheorie neu. Einstein wollte eine neue, „vollständige“ Theorie unterhalb der Quantentheorie. Aus dieser Theorie sollte die Quantenphysik hervorgehen.

Ähnlich, wie die Newtonsche Gravitationstheorie als Grenzfall aus der Allgemeinen Relativitätstheorie hervorgeht und wie seine Suche nach einer

¹²⁰ R. G. Chambers. Shift of an Electron Interference Pattern by Enclosed Magnetic Flux. Physical Review Letters, 5(1):3{5, July 1960.

¹²¹ Akira Tonomura, Tsuyoshi Matsuda, Ryo Suzuki, Akira Fukuhara, Nobuyuki Osakabe, Hiroshi Umezaki, Junji Endo, Kohsei Shinagawa, Yutaka Sugita, and Hideo Fujiwara. Observation of Aharonov-Bohm Effect by Electron Holography. Physical Review Letters, 48(21):1443–1446, May 1982.

¹²² Privatmitteilung von Prof. Köhl am 17.7.2023

¹²³ [https://de.wikipedia.org/wiki/Umlaufzahl_\(Mathematik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Umlaufzahl_(Mathematik))

vereinheitlichten Feldtheorie angelegt war. Max Born sagte dazu nach Einsteins Tod im Vergleich beider Konzepte:

*Seine Ideen waren radikaler, aber Zukunftsmusik.*¹²⁴

Im EPR-Paradoxon werden diese Forderungen als notwendige und hinreichende Bedingungen folgendermaßen definiert:

“Jedes Element in der physikalischen Realität muss eine Entsprechung in der physikalischen Theorie besitzen.”

Korrespondierend wird dort die „*physikalische Realität*“ als hinreichende Bedingung definiert:

*“Wenn wir, ohne das System in irgendeiner Weise zu stören, mit Gewissheit (d.h., mit einer Wahrscheinlichkeit von 1) den Wert einer physikalischen Größe vorhersagen können, dann existiert ein physikalisch reales Element, welches dieser physikalischen Größe entspricht.”*¹²⁵

Unabhängig von der quantenmechanischen Deutung (Kopenhagen versus Alternativen) werden die EPR-Grundannahmen „Lokalität und (im einsteinschen Sinn lokalen) Realismus“ widerlegt. Messergebnisse verschränkter Teilchen korrelieren viel stärker, als durch die Bellsche Ungleichung in einer klassischen Theorie gefordert ist. Das wären nur in 50% aller Fälle. Korrelation bedeutet, dass bei vielen Messungen 71% (1 geteilt durch $\sqrt{2}$), der Ergebnisse eine gegenseitige Abhängigkeit zeigen. Damit sind die „verborgenen Variablen“, wie von Einstein hartnäckig gefordert, keine Erklärung des EPR-Paradoxons.

Aharonov und Bohm haben das EPR-Gedankenexperiment nochmals 1957 aufgegriffen, denn es gab damals experimentell keine Möglichkeit der Überprüfung.¹²⁶ Im Gegensatz zu Einstein, Podolsky und Rosen, die Ort und Impuls als komplementäre Parameter angenommen haben, haben Bohm und Aharonov mit gutem Grund die Spinverschränkung gewählt. Solche Konstellationen werden heute Bell-Zustände genannt. Die Namensnennung von David Bohm wurde erneut übergangen.

Der Stern-Gerlach-Versuch, der in der Nacht vom 7. auf den 8. Februar 1922 in den Räumen der heutigen Physikalischen Gesellschaft in Frankfurt am Main gelang, zeigt, dass das Elektron einen Eigendrehimpuls besitzt.¹²⁷ Dieser Spin genannte Impuls hat eine enorme Trennschärfe, denn es gibt bei Spin $\frac{1}{2}$

¹²⁴ Max Born, Albert Einstein Max Born Briefwechsel 1916-1955, Nymphenburger, München 1969, S. 271, zitiert nach Becker, ebenda, S. 117

¹²⁵ Einstein, A., Podolsky, B. & Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?, Physical review 47(10): 777

¹²⁶ Bohm, D. & Aharonov, Y. (1957). Discussion of experimental proof for the paradox of einstein, rosen, and podolsky, Physical Review 108(4): 1070.

¹²⁷ Wolfgang Trageser, Der Stern-Gerlach-Versuch, Springer Spektrum, Berlin 2022

Teilchen und gegebener Richtung nur zwei Möglichkeiten der Einstellung, nämlich $\pm\hbar/2$, wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, gesprochen h-quer, das sogenannte reduzierte Plancksche Wirkungsquantum ist. Die erste Idee dazu hatte Heisenberg. Sein akademischer Lehrer Arnold Sommerfeld versuchte mit einer vierten (ganzzahligen) Quantenzahl Ordnung in die Interpretation der Atomspektren zu bringen. Heisenberg präsentierte eine Formel, in der halbzahlige Werte für das, was später Spin genannt wurde, auftauchten. Sowohl für Sommerfeld als auch für seinen weiteren hochbegabten Schüler Wolfgang Pauli war dies eine Zumutung für ihr ästhetisches Empfinden. Publiziert wurde die Idee dann, ärgerlich für Heisenberg, durch Alfred Landé.¹²⁸ Doch er blieb hartnäckig und erfolgreich an der theoretischen Erklärung des Themas dran. Der Stern-Gerlach Versuch brachte die experimentelle Bestätigung. Zusammen mit den drei Raumrichtungen hat das Elektron damit nur vier Freiheitsgrade. Mit der Eigenbewegung des Elektrons als bewegte Ladung ist ein magnetisches Moment μ_B verknüpft. Das Verhältnis von magnetischem Moment zum Drehimpuls ist doppelt so groß wie bei der Bahnbewegung. Im homogenen Magnetfeld wirkt auf einen Dipol nur ein Drehmoment und damit keine signifikante Kraft. Der Stern-Gerlach-Versuch wurde deshalb in einem inhomogenen Magnetfeld mit Silberatomen durchgeführt. Silber hat ein einzelnes 5s-Elektron und ist deshalb fast immer einwertig. Dieses 5s-Elektron ist für den Effekt verantwortlich: Es werden zwei getrennte Punkte auf dem Film gefunden, denn das Magnetfeld spaltet den Strahl nach den beiden Spinrichtungen auf. Es ist ein direkter Nachweis der Richtungsquantelung.

Soviel als Vorbemerkungen zu Bohms Neuformulierung des EPR-Paradoxons. Er geht von einer Spinverschränkung aus und betrachtet zwei Ausgangssysteme, (die jeweils zusammengesetzt sind als Linearkombination der Basisvektoren) und ein System Spin-up und ein System Spin-down bilden. Es existieren genau zwei Zustände des zusammengesetzten Systems, die sich nicht als reine Linearkombination der Einzelsysteme schreiben lassen, nämlich ein Singulett-Zustand mit Spin $S_S = 0$ und ein Triplett-Zustand mit Spin $S_T = \hbar^2$.

Man kann sie einzeln durch eine Messung des Gesamtspins unterscheiden.

In einem so verschränkten Zwei-Spin-System wird man jeweils 50% der Spin-Zustände messen.

In dieser Form ist ein EPR-Experiment durchführbar.

Der Spin ist die typische quantenmechanische Eigenschaft schlechthin. Materieteilchen haben halbzahligen Spin (Fermionen) und kraftvermittelnde

¹²⁸ Alfred Landé, "Über den anomalen Zeemaneffekt (Teil I)," ZS. f. Phys., 5 (23. Juni 1921), 231–241

Teilchen den Spin 1 (Bosonen). Das Higgs-Teilchen hat Spin 0. Andere postulierte Teilchen, wie das Graviton, sind bisher hypothetisch geblieben. Es gibt für den Spin keine Entsprechung in der klassischen Physik. Die Eigenrotation ist nur eine anschauliche Hilfe. Eine eigentliche Erklärung liefert erst die relativistische Quantentheorie.

Der halbzahlige Spin der Elektronen und Quarks führt über das Spin-Statistik-Theorem weiter zum Pauli-Prinzip, das grundlegend für den Aufbau der Atomkerne und der Atomhüllen ist. Das Pauli-Prinzip bestimmt damit auch das chemische Verhalten der Atome, wie es sich im Periodensystem der Elemente ausdrückt. Demnach spielt der halbzahlige Spin beim Aufbau der Materie bis hin zu ihren makroskopischen Eigenschaften eine bestimmende Rolle.¹²⁹

Der Spin ist somit ein zentraler Baustein in der theoretischen Physik. Der Weg führte zunächst über eine Arbeit, die Satyendranath Bose aus Indien 1924 an Einstein zu Begutachtung geschickt hat.¹³⁰ Er leitete das Plancksche Strahlungsgesetz unter der Annahme ab, dass die Photonen nicht unterscheidbare Teilchen sind, was der klassischen Maxwell-Boltzmann-Theorie und Statistik widerspricht. Einstein erkannte die Bedeutung, übersetzte die Arbeit und reichte sie unter Boses Namen zur Publikation ein. Er übernahm die Idee und wandte sie in einer eigenen Veröffentlichung auf einatomige neutrale Gase an.¹³¹ Sie sagt u.a. Bose-Einstein-Kondensate voraus, also makroskopische Systeme, die sich wie ein Quantenobjekt verhalten. Erst 1995 wurde dies experimentell bestätigt. Elektronen können sich so nicht verhalten, da sie sonst gleiche Quantenzahlen haben müssten, was das Paulische Ausschließungsprinzip verbietet. Enrico Fermi und Paul Dirac schlugen unabhängig voneinander eine entsprechende Statistik vor, die Fermi-Dirac-Statistik. Teilchen, wie das Elektron mit halbzahligem Spin, bezeichnet man deshalb als Fermionen, Teilchen mit ganzzahligem Spin als Bosonen. Die Bezeichnung betrifft nicht nur Elementarteilchen, sondern auch zusammengesetzte Systeme (z.B. Cooper-Paare bei der Supraleitung, Mesonen, also Quark-Antiquark-Teilchen). Nur die Fermionen im Standardmodell der Teilchenphysik (nicht zusammengesetzte Teilchen) haben

¹²⁹ <https://de.wikipedia.org/wiki/Spin>

¹³⁰ Satyendranath Bose: Plancks Gesetz und Lichtquantenhypothese. In: Zeitschrift für Physik. Band 26, 1924, S. 178–181 (Übersetzung Albert Einstein), Online: <https://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Lehre/09qm/lec15-16-BoseEinsteinCondensation/Bose1924.pdf>

¹³¹ Albert Einstein: Quantentheorie des einatomigen idealen Gases – Zweite Abhandlung. In: Sitzungsberichte der preussischen Akademie der Wissenschaften. 1925, S. 3–10, Online: https://www.lorentz.leidenuniv.nl/history/Einstein_archive/Einstein_1925_publication/index.html#paper_1925_00.html

einen Spin von $\frac{1}{2}$. Sie haben die quantenmechanische Eigenschaft, dass ihre Wellenfunktion nach einer ganzen Drehung das Vorzeichen ändert und erst nach einer doppelten Drehung (Rotation um 720°) wieder im Ausgangszustand ist. Dies erklärt den Spin von $\frac{1}{2}$.

An dieser Stelle soll noch eine extreme Interpretation der Quantentheorie erwähnt werden. Sie kann regelrecht radikal genannt werden und stammt von einem Doktoranden, der Einsteins letzte Vorlesung in Princeton am 14.4.1954 gehört hatte. Es war ein Gastvortrag in John Archibald Wheelers Seminar und sollte eigentlich die Relativität behandeln. Doch es wurde eine „Pro und Contra Kopenhagen Veranstaltung“. Die Argumente von Einstein beeindruckten Hugh Everett. Er schuf in seiner Dissertation¹³² eine Interpretation der Quantenphysik, die man eigentlich fast nicht „Theorie“ nennen kann. Die Grundidee ist dabei, dass die Wellenfunktion verzweigt und jeder Zweig wird als real in einer eigenen Welt angesehen. Man kann es auch so formulieren, dass ein Teilchen nicht nur potentiell, sondern real alle möglichen Zustände seiner Wellenfunktion (in Superposition mit dem Messapparat), die bei einer Messung realisiert werden können, tatsächlich annimmt, aber in einer jeweils anderen Welt. Es gibt kein Messproblem und keinen Kollaps. Kausalität und Determiniertheit sind gewährleistet, aber jeweils in einer eigenen, fast identischen Welt. Es ist die einfachste, optimal ökonomische und vielleicht ästhetisch schönste Erklärung der Quantenmechanik. Es ist eine perfekte Anwendung von „Ockham’s Rasiermesser“, dem „*lex parsimoniae*“ oder Sparsamkeitsprinzip der Scholastik, das besagt, dass das einfachste Prinzip in der Natur auch realisiert wird. Der Charme von Everetts Theorie liegt in der Tatsache, dass er nur und ausschließlich eine Wellenfunktion und die Schrödingergleichung benötigt. Eigentlich ist es auch keine „Interpretation“, denn in einer Superposition sind alle Möglichkeiten, nennen wir sie Welten, schon ursprünglich angelegt. Allerdings liegt darin auch ein gewisses Problem: Wie passt die exakt berechenbare Verteilung von Wahrscheinlichkeiten nach der Bornschen Regel mit der Verzweigung zusammen? Aber viele schrecken vor diesem drastischen Schritt zurück, dass in jeder Millisekunde viele Billionen neue Verzweigungen unserer Welt entstehen sollten. Erst später im Jahr 1970 publizierte der amerikanische Physiker Bryce DeWitt einen Aufsatz mit dem Titel *Quantum mechanics and reality*. Er griff darin die Everett’sche Interpretation auf und verwendete den Begriff *Many-Worlds-Interpretation*. Die Viele-Welten-Interpretation wurde kurzfristig populär. Das lag einerseits daran, weil sie an *science fiction* erinnerte, aber auch die Idee der Dekohärenz unterstützt einige Aspekte. Diese geht von einer möglichst weitreichenden Gültigkeit der

¹³² *The relative state formulation of quantum mechanics*. In: *Reviews of Modern Physics*. Band 29, 1957, S. 454–462, mit einem Kommentar von Wheeler, S. 463–365

Schrödinger-Gleichung aus. Dies widerspricht dem Konzept der Kopenhagener Deutung.¹³³ Everett konnte aber damals ebenfalls wie Bohm in der wissenschaftlichen Gemeinschaft nur Teilerfolge verbuchen, seine Theorie wurde kaum richtig ernst genommen und er war frustriert, denn er konnte nicht in der Klarheit argumentieren, wie er es für nötig erachtete, denn sein Doktorvater Wheeler war trotz Unterstützung immerhin Schüler von Niels Bohr. Everett hatte noch ein zweites wissenschaftliches Standbein, die mathematische Spieltheorie und wechselte damit noch vor Fertigstellung seiner Dissertation in die militärische Forschung zur *Weapons Systems Evaluation Group* des US-Verteidigungsministeriums.

Die Kopenhagener Deutung hatte sich auf der ganzen Linie behauptet. Sie ist wahr unter einem reduzierten Realitätsbegriff; sie ist unvollständig, legt man höhere Ansprüche an die „physikalische Realität“.

Weitere seriöse Interpretationen finden sich in einem Wikipedia-Artikel.¹³⁴ Mehrere neuere Ansätze, die einer generellen Tendenz zum informationsbasierten Denken in der Physik folgen, nehmen eine informationstheoretische Perspektive ein. Auch die Kopenhagener Deutung enthält subjektivistische Elemente. Gerade einige „Gründerväter“ beharren auf einer Interpretation der Theorie als das, was wir über ein Quantensystem wissen (können). Carlo Rovelli hat den Standpunkt eingenommen, den Einstein bei der Relativitätstheorie vertreten hat und eine „Relationale Interpretation“ als rekonstruktiven, informationstheoretischen Ansatz formuliert.¹³⁵ Siehe auch dazu einen aktuellen Übersichtsartikel aus dem Jahr 2019 von Federico Laudisa und Carlo Rovelli.¹³⁶

Rob Clifton, Jeffrey Bub und Hans Halvorson haben 2003 ebenfalls mit ihrem CBH-Theorem (nach den Anfangsbuchstaben) eine informationstheoretische Rekonstruktion der Quantenmechanik ausgearbeitet.¹³⁷

Ähnlich argumentiert Anton Zeilinger.¹³⁸

Die Kopenhagener Interpretation ist weiterhin unvollständig, aber das gilt fairerweise nicht nur für sie allein, wenn man die Quantentheorie in den großen physikalischen Zusammenhang stellt: Ursprung des Universums oder Urknall, Quantenverschränkung und Raumzeit, insbesondere Krümmung der Raumzeit,

¹³³ Vergleiche <https://de.wikipedia.org/wiki/Viele-Welten-Interpretation>

¹³⁴ https://de.wikipedia.org/wiki/Interpretationen_der_Quantenmechanik

¹³⁵ C. Rovelli, Relational Quantum Mechanics, Stanford Encyclopedia of Philosophy, 2008.

¹³⁶ <https://plato.stanford.edu/entries/qm-relational/>

¹³⁷ <https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0211089.pdf>

¹³⁸ A. Zeilinger, A foundational principle for quantum mechanics, Found. Phys. 29 (1999), S. 631–643.

also Quantentheorie der Gravitation sind nur einige der sich daraus ergebenden Megathemen. Steven Weinberg hat mit seinem berühmten Buch „*The First Three Minutes*“, das 1973 erschien, erstmals den Bogen zwischen Quantenphysik und Kosmologie geschlagen. Das damals bekannte Teilchenmodell reichte aus, um den Urknall aus Sicht der Quantenphysik prinzipiell zu rekonstruieren.¹³⁹

Nach wie vor ungelöst ist es, die beiden großen Theorien Allgemeine Relativitätstheorie (ART) und Quantentheorie miteinander zu verbinden. Ein neuer Ansatz lässt zumindest aufhorchen. Bei der ART ist in diesem Zusammenhang der entscheidende Gedanke, dass sie die Expansion des Universums vorhersagt. Zwei unabhängige Astronomenteams haben sogar 1998 entdeckt, dass sich das Universum beschleunigt ausdehnt und dafür 2011 den Nobelpreis erhalten. Vieles spricht dafür, dass die treibende Kraft die Vakuumenergie ist. Versuche, diese zu berechnen, liefern jedoch geradezu skurril paradoxe Ergebnisse. Es ist die größte Diskrepanz zwischen Theorie und Beobachtung in der gesamten Physik. Man nennt es „Problem der kosmologischen Konstanten“, mit Bezug auf die Ergänzung seiner ART-Gleichungen, die Einstein nachträglich eingefügt hat um ursprünglich sogar die voraussagbare Expansion zu verhindern. Er nannte dies einmal die „größte Eselei seines Lebens“ (*"biggest blunder"*).

Das zentrale mathematische Element der Quantenphysik ist bekanntlich die Schrödingergleichung. Sie beschreibt insbesondere auch die zeitliche Entwicklung und ihre Lösungsmenge beinhaltet auch die Menge aller Wege oder Möglichkeiten, die ein Teilchen gehen kann. Dabei ist auch klar, dass einer der Wege auf jeden Fall beschritten wird und es war bisher selbstverständlich, dass sich alle Wahrscheinlichkeiten, die jeweils nach der Bornschen Regel berechnet werden können, zu 1 addieren müssen. Dies ist das Prinzip der Unitarität – alle potentiellen Möglichkeiten ergeben zusammen 100%.¹⁴⁰ Bei den mathematischen Sprachmitteln tauchen deshalb immer unitäre Elemente auf, z.B. Unitäre Abbildung, Unitärer Charakter, Unitäre Gruppe, Unitäre Matrix, Unitärer Operator, Unitärer Ring, Unitärer Vektorraum, etc. In der Quantenphysik spielt vor allem die Unitäre Gruppe $U(H)$ eine zentrale Rolle, also die Menge aller unitären, komplex linearen Abbildungen über einem komplexen Hilbert-Raum. Sie beschreiben die Symmetrien der Wellenfunktion, also transformationsinvariante Umformungen. Sie werden durch unitäre $n \times n$ -Matrizen gebildet, d.h. die Zeilen und Spalten der Matrix, als Vektoren

¹³⁹ https://en.wikipedia.org/wiki/The_First_Three_Minutes

¹⁴⁰ Genaueres siehe Charlie Wood, Ein neues Konzept der Zeit, Spektrum der Wissenschaft 2023-09, S. 12-19, Kurzfassung online unter: [spektrum.de/magazin/quantenzeit-ein-neues-konzept-der-zeit/2160270](https://www.spektrum.de/magazin/quantenzeit-ein-neues-konzept-der-zeit/2160270)

aufgefasst, sind orthonormal. Die Bezeichnung „Ortho“ steht für senkrecht zueinander und „normal“ heißt normiert auf die Länge 1. Multiplikation mit einer unitären Matrix lässt die Abstände unverändert und hier liegt das Problem.

Der Kosmos dehnt sich bekanntlich aus; seine Zukunft sieht also vollkommen unterschiedlich zu seiner Vergangenheit aus. In der Quantenphysik ist eine Umkehrung des Zeitpfeils rein mathematisch denkbar; zumindest verlangt sie eine saubere Symmetrie zwischen Vergangenheit und Zukunft. Unitarität ist dabei ein entscheidendes Element. In einschlägigen Standardwerken, wie dem theoretischen Minimum der Quantenmechanik von Leonhard Susskind und Art Friedman wird Unitarität als feststehendes „Prinzip“ (*principle*) behandelt.¹⁴¹ Für die Quantengravitation ist das ein zunächst unüberwindlicher Dissens.

Die bestehende Schrödingergleichung und die einschränkende Unitarität schließen die mathematische Beschreibung von Dehnungen und Stauchungen aus. Die Abstände zwischen zwei Punkten bleiben gleich. Es wird deshalb vorgeschlagen, die Unitarität hin zur sogenannten Isometrie aufzuweichen. Cotler und Strominger formulieren dies mit Bezug zum Phänomen „Zeit“ folgendermaßen:

*This motivates the hypothesis that quantum mechanical time evolution is always isometric, in the sense of preserving inner products, but not necessarily unitary.*¹⁴²

Hier bleiben im Rahmen einer isometrischen Abbildung in der nichteuklidischen Riemannschen Geometrie die Länge von Vektoren und Kurven zwar gleich, die Abstände zwischen zwei Punkten können sich aber ändern. Isometrie kann nun den expandierenden Raum berücksichtigen, in dem Teilchen mehr Möglichkeiten haben, ohne mit den mathematischen Zwängen der Unitarität konfrontiert zu sein.

Fazit

Mathematik und Physik zählt man zu den exakten Wissenschaften. Aber es stellt sich heraus, dass beide jeweils „Körper und Seele“ haben. Dabei soll „Körper“ für die etablierte, gesicherte, greifbare Wissenschaft stehen. „Seele“ ist viel schwerer zu definieren. Es sind die schwerer greifbaren, dem hehren, exakten Verständnis der exakten Wissenschaft zuwiderlaufenden oder nicht in ihr integrierten Erkenntnisse. Dazu gehört auch die Philosophie bzw. die philosophischen Strömungen, sowie die „seriöse“ Mystik, weit entfernt von

¹⁴¹ Susskind, Leonhard, Friedman, Art; Quantenmechanik – Das theoretische Minimum, Springer 2020, S. 64-65

¹⁴² Siehe z.B. Cotler, Jordan, Strominger, Andrew: The universe as a quantum encoder, <https://arxiv.org/pdf/2201.11658.pdf>

jeglicher Art von okkultem Mystizismus. Sie werden zwar in philosophische Kategorien gefasst, sind aber trotzdem in der Regel vielfältig.

Viel wichtiger ist jedoch ein grundsätzliches Argument: Wissenschaft darf nicht als die Verkörperung der Wahrheit missverstanden werden und Wissenschaftler dürfen nicht der Arroganz des Wissens verfallen. Dadurch bleibt Wissenschaft ein offener Prozess, offen auch für neue Ideen und neue Fragen. Kein Gebiet ist per se abgeschlossen. Information ist heute allgegenwärtig, Wissen ist viel mehr wert, aber die Suche nach Erkenntnis sollte andauern. Das Streben nach Wahrheit und Realität sollten ein zentrales, wenn auch nie erreichbares Ziel bleiben. Dabei sollte der Fokus keinesfalls bei der Wissenschaft allein bleiben. Oft zieht eine wissenschaftliche Disziplin ihren eigenen Rahmen zu eng. Der in diesem Text in der Einleitung so genannte „Dreiklang“ aus Wissenschaft, Philosophie und (seriöser) Mystik bleibt treibende Kraft der Erkenntnis. Die Trennung der Kultur in eine humanistische und eine wissenschaftliche Seite bezeichnet der Philosoph und Chemie-Nobelpreisträger Ilya Prigogine deshalb als „Schisma“. Er muss auch für manchen Wissenschaftler schmerzhaft extreme Positionen, wie z.B. die von Rupert Sheldrake, verkraften. Sein 1981 veröffentlichtes Buch „Das schöpferische Universum“ hat die angesehene Zeitschrift *nature* „den besten Kandidaten seit vielen Jahren für eine Bücherverbrennung“ genannt. Der *New Scientist* schrieb dagegen „Sicherlich liegt hiermit eine der wichtigsten wissenschaftlichen Untersuchungen über die Natur der biologischen und physikalischen Wirklichkeit vor.“¹⁴³

In der Mathematik drückt der sprachlich negativ besetzte Begriff der „Unvollständigkeit“ diese „Seele“ nur sehr unvollkommen aus. Natürlich wollen alle Mathematiker zu einem Problem den Beweis sehen oder finden. Das Vorgehen ist aber nicht unbedingt rational zu erklären. Bohm sagte dazu in einem Gespräch mit Frau Weber: „Und doch haben viele Mathematiker höchsten Ranges – wie Gödel und andere – eine fast mystische Haltung der Quelle ihrer mathematischen Erkenntnis gegenüber.“ Er übertrug dies auch auf Physiker: „Ich glaube, viele Physiker spüren, dass sie an etwas rühren, das über ihr Wissen hinausgeht – an eine Art Wahrheit.“¹⁴⁴ Dieses Bestreben im „Dreiklang“ bringt die Dynamik in diese alte und doch immer wieder kreative Wissenschaft. Der Unvollständigkeitssatz von Kurt Gödel zeigt ein Manko auf, hat aber auch etwas Tröstliches. Es gibt Grenzen der Beweisbarkeit und dahinter liegt durchaus Wahrheit. Wahrheit als Seele der Mathematik zu

¹⁴³ Siehe https://www.datadiwan.de/netzwerk/index.htm?experten/he_003d_.htm, https://en.wikipedia.org/wiki/Rupert_Sheldrake, A book for burning?. *Nature* 293, 245–246 (1981). <https://doi.org/10.1038/293245b0>

¹⁴⁴ Renée Weber, ebenda S. 205

bezeichnen ist sicherlich zu pathetisch. Aber es gibt zweifellos Wahrheit jenseits der Beweisbarkeit. Und nach Enzensbergers „Hommage an Gödel“:

*Du kannst dein eignes Gehirn / mit deinem eignen Gehirn erforschen: / aber nicht ganz.*¹⁴⁵

Jede Analogie ist nie vollständig korrekt. Aber um bei dem (hinkenden) Vergleich zu bleiben: Auch die Physik hat so etwas wie Körper und Seele. Man muss auf der Ebene der beobachtbaren Phänomene bleiben. Das Experiment und die Beobachtung sind das Maß aller Dinge. Sie führen zu Hypothesen und nach langer Prüfung zu Naturgesetzen, die evtl. wieder in ihrem Geltungsbereich relativiert werden müssen, wenn ein genaueres Gesetz gefunden wird. Die Allgemeine Relativitätstheorie ersetzt das Newtonsche Gravitationsgesetz, das aber immer noch für einen Flug zum Mars vollkommen ausreicht. Einstein hat ein Weltbild verändert; die a priori Erkenntnisse von Immanuel Kant zu Raum und Zeit mussten radikal korrigiert werden. Kants Art der Fragestellungen aber bleiben prinzipiell bestehen. Besonders verstörend waren aber die experimentellen Ergebnisse im ganz Kleinen. Sie rüttelten an einem uralten Grundverständnis von Lokalität oder Kausalität. Sie führten aber zu der mathematisch genauesten Naturbeschreibung, die es in der Physik gibt und die eine beispiellose Technologieentwicklung der letzten 100 Jahre bewirkt hat – im Schlechten wie im Guten, von der Atombombe bis zum MRT.

Doch unser Realitätsverständnis ist immer noch gespalten: Die einen wollen nicht fragen und die anderen stellen die Frage nach der „eigentlichen Realität“. Den einen genügt ein fast perfektes Gesetz und sie verzichten auf vermeintliche Spekulationen, die anderen möchten keine Denkverbote akzeptieren und fragen nach der Realität hinter den Naturgesetzen.

Die faustische Frage, was die Welt im Innersten zusammenhält, interpretieren beide Seiten unterschiedlich:

Ist sie mit einem Naturgesetz beantwortet oder bedarf es mehr?

¹⁴⁵ Aus dem Gedicht von Hans Magnus Enzensberger, Hommage an Gödel, zitiert aus <http://ulrichnortmann.net/Aufsätze/Anarcho-Logik.pdf>

Literaturverzeichnis

Audretsch, Jürgen; Mainzer, Klaus; Wieviele Leben hat Schrödingers Katze? B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim/Wien/Zürich, 1990

Becker, Adam; Was ist real? Amerikanische Ausgabe Basic Books 2018, deutsch bei Springer Sachbuch 2021

Bohm, David; Die implizite Ordnung, Deutsche Ausgabe 2. Auflage 2021, Crotona Verlag, Amerang

Briggs, John; Peat, F. David; Die Entdeckung des Chaos, Hanser, München Wien 1990

Budiansky, Stephen; Reise zu den Grenzen der Vernunft, Kurt Gödel und die schwerste Krise der Mathematik, Propyläen 2. Auflage 2023

Carroll, Sean; Was ist die Welt und wenn ja, wie viele, Klett-Cotta, Stuttgart, 2. Auflage 2011

Cohen, Paul; Wie ich „Forcing“ entdeckte, Paul Cohens Vortrag über die Unentscheidbarkeit der Kontinuumshypothese 2001, enterprise e< Lemgo 2017, mit Kommentaren von Marietta Ehret

Dawson, John W. jr; Kurt Gödel und die Grenzen der Logik, Spektrum der Wissenschaft 9 / 1999, Seite 74

Ecker, Gerhard; Teilchen, Felder, Quanten, Springer Spektrum, Berlin 2017

Gödel, Kurt; Philosophische Notizbücher, Bd. 1, De Gruyter, Berlin/München/Boston 2021 (deutsch und englisch)

Fischer, Ernst Peter; Der Physiker – Max Planck und das Zerfallen der Welt, Siedler Verlag, München, 2007

Fischer, Ernst Peter; Niels Bohr, Siedler Verlag, München, 2012

Fischer, Ernst Peter; Schrödingers Katze auf dem Mandelbrotbaum, Goldmann, TB, München 2008

Gottlob Frege: Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens; online: www.marilia.unesp.br/Home/Instituicao/Docentes/RicardoTassinari/B.pdf

Frege, Gottlob; Über Sinn und Bedeutung. In: Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik, N. F., Bd. 100/1 (1892), S. 25-50.

Friebe, Cord; Kuhlmann, Meinard; Lyre, Holger, Näger, Paul; Pason, Oliver; Stöckler, Manfred; Philosophie der Quantenphysik, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2015

Genz, Henning; Gedankenexperimente, Wiley-VCH, Weinheim 1999

- Genz, Henning; Wie die Naturgesetze Wirklichkeit schaffen – über Physik und Realität, Hanser, München Wien 2002
- Gribbin, John; Schrödingers Kätzchen und die Suche nach der Wirklichkeit, S. Fischer, Frankfurt 1996
- Hofstadter, Douglas R.; Gödel, Escher, Bach. Ein Endloses Geflochtenes Band, Klett-Cotta, Stuttgart 1985
- Holt, Jim; Als Einstein und Gödel spazieren gingen, Rowohlt, Juni 2020
- Knorr-Cetina, Karin; Die Fabrikation von Erkenntnis, Suhrkamp Taschenbuch Wissenschaft, Frankfurt am Main, 1991
- Korsch, Hans Jürgen; Mathematik der Quantenmechanik, Hanser, München 2019
- Lindley, David; Die Unbestimmbarkeit der Welt, DVA, München, 2008
- Muller, Richard A.; Jetzt – Die Physik der Zeit, S. Fischer, Frankfurt a. Main, 2018
- Penrose, Roger; Der Weg zur Wirklichkeit, Springer Spektrum, Heidelberg 2010
- Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994
- Prigogine, Ilya; Stengers, Isabelle; Das Paradox der Zeit, Piper, München Zürich 1993
- Rennert, Peter; Chassé, Angelika; Hergert, Wolfram; Einführung in die Quantenphysik, Springer Spektrum, Wiesbaden 2013
- Rheinwald, Rosemarie; Der Formalismus und seine Grenzen, Untersuchungen zur neueren Philosophie der Mathematik, Königstein/Taunus, Hain 1984
- Rovelli, Carlo; Helgoland, Rowohlt, Hamburg, Nov. 2021
- Scarani, Valerio; Physik in Quanten, Spektrum Akademischer Verlag, München 2007
- Scherer, Wolfgang; Mathematik der Quanteninformatik, Springer Spektrum, Heidelberg 2016
- Schrödinger, Erwin; Mein Leben, meine Weltansicht, dtv, München, 2006
- Selleri, Franco; Die Debatte um die Quantentheorie, Vieweg, Braunschweig 1990
- Stillwell, John; Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2014
- Susskind, Leonhard; Friedman, Art; Quantenmechanik – Das theoretische Minimum, Springer 2020

Trageser, Wolfgang; Der Stern-Gerlach-Versuch, Springer Spektrum, Berlin 2022

Von Wallwitz, Georg; Meine Herren, dies ist keine Badeanstalt, Berenberg, Berlin, 5. Auflage, Feb. 2019

Von Weizsäcker, C.F.; Zum Weltbild der Physik, S. Hirzel, Stuttgart 1990

Wang, Hao; Reflections on Kurt Gödel, MIT-Press, 1987

Weber, Renée; Alles Leben ist eins, Crotona Verlag, Dt. Ausgabe 2019

Weyl, Hermann; Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft, R. Oldenburg Verlag, 8. Auflage, München 2009

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1 und Band 2, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Yourgrau, Palle; Gödel, Einstein und die Folgen, C.H.Beck, München 2005

Zeilinger, Anton; Einsteins Schleier, Die neue Welt der Quantenphysik, C.H.Beck, München 2003

Zeilinger, Anton; Einsteins Spuk, Goldmann, München, 2007

Danksagung

Prof. Dr. Ralf Köhl hat sich wieder spontan als Mentor bereit erklärt. Sein Engagement für die Popularisierung von mathematisch-naturwissenschaftlichen Themen, auch außerhalb des Mainstreams, ist ungebrochen. Verblüfft haben mich auch seine fundierten Impulse zum physikalischen Teil des vorliegenden Aufsatzes. Er war mir in den letzten Arbeiten immer eine verlässliche Stütze als Mentor und Garant für Qualität und Seriosität. Mein tiefer Dank geht deshalb weit über seine Impulse für diese Publikation hinaus.

Privatdozent Dr. Bernd-Jochen Schaefer habe ich trotz seiner massiven gesundheitlichen Probleme wertvolle Hinweise im Physikteil des Aufsatzes zu verdanken.

Es ist noch nicht entschieden, ob der vorliegende Beitrag auch in der Printausgabe der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Zeitschrift veröffentlicht wird. Es gibt Kritik an zu viel mathematisch-physikalischen Aufsätzen, wobei andererseits kaum andere Beiträge in den letzten Jahren eingereicht wurden. Umso mehr geht mein Dank an **Dr. Michael Serafin**, dass er sich dieses Mal nicht als Schriftleiter, sondern aus langjähriger Verbundenheit und Zusammenarbeit für eine redaktionelle Qualitätssicherung zur Verfügung gestellt hat.

Love comforteth like sunshine after rain¹⁴⁶

FÜR FARI

¹⁴⁶ William Shakespeare - Venus and Adonis,
<https://www.gutenberg.org/cache/epub/1045/pg1045.txt>, Zeile 799

Personenregister

| Name | Lebensdaten | Bemerkung | Seite |
|----------------------------------|-------------|----------------------------------|--|
| Aharonov, Jakir | *1932 | Israel. Physiker | 42,43,49-51 |
| Albert, David Z. | *1954 | US-am. Philosoph | 42 |
| Anderson, Carl David | 1905-1991 | US-am. Physiker, Nobelpr. 1936 | 47 |
| Balmer, Johann Jakob | 1825-1898 | Schweizer Math./Physiker | 30 |
| Becker, Adam | *1984 | US-am. Astrophysiker, Autor | 35-37,44-46,48,51,60 |
| Bell, John Stewart | 1928-1990 | Irisch. Physiker | 40,45,47,51 |
| Berkley, George | 1685-1753 | Irisch. Theologe u. Philosoph | 3 |
| Bohm, David | 1917-1992 | US-am. Quantenphysiker | 1,2,5,33,40,42-52,55,58,60 |
| Bohr, Niels | 1885-1962 | Dän. Physiker, Nobelpreis 1922 | 3,5,28,30,31,33,36,37,39,40,43,46,47,55,60 |
| Bolgai, János | 1802-1860 | Ung. Mathematiker | 14 |
| Boltzmann, Ludwig | 1844-1906 | Öst. Physiker | 11,53 |
| Born, Max | 1882-1970 | Dt. Physiker, Nobelpreis 1954 | 30,35,37,38,44,45,51,54,56 |
| Bose, Satyendramath | 1894-1974 | Ind. Physiker | 53 |
| Briggs, John | *1945 | US-am. Psychologe u. Autor | 23,60 |
| Brown, Robert | 1773-1858 | Botaniker | 11,12 |
| Brouwer, Luitzen Egbertus Jan | 1881-1966 | Niederl. Mathematiker | 7,8,15,16 |
| Bub, Jeffrey | *1942 | US-am. Physiker/Philosoph | 55 |
| Budiansky, Stephen | *1957 | US-am. Wissenschaftsjournalist | 9,10-13,15,16,60 |
| Cantor, Georg | 1845-1918 | Dt. Mathematiker | 6,7,20 |
| Carnap, Rudolf | 1891-1970 | Dt. Philosoph | 10,12,16 |
| Cauchy, Aigustin-Louis | 1789-1857 | Franz. Mathematiker | 6 |
| Chaitin, Gregory | *1947 | US-am. Mathematiker u. Informat. | 23,24 |
| Chambers, Robert | 1924-2016 | Brit. Physiker | 50 |
| Clifton, Robert (Rob) K. | 1964-2002 | Geschichte, Philos. Physik | 55 |
| Chandrasekhar, Subrahmanyan | 1888-1970 | Ind. Physiker, Nobelpreis 1930 | 24 |
| Cohen, Paul | 1934-2007 | US-am. Mathem., Fields-Med. | 20,21,60 |

| | | | |
|-------------------------|--------------|--|---|
| Cooper, Leon Neil | *1930 | US-am. Physiker | 53 |
| Cotler, Jordan | ? | US-am. Physiker | 57 |
| Crutchfield, James P. | *1955 | US-am. Physiker | 22,23 |
| Dawson, John W. jr. | *1944 | US-am. Mathematiker | 17,24,60 |
| De Broglie, Luis Victor | 1892-1987 | Franz. Physiker, Nobelpreis 1929 | 1,2,36,40,44,46,50 |
| Dedekind, Richard | 1831-1916 | Dt. Mathematiker | 14 |
| DeWitt, Bryce | 1923-2004 | US-am. Physiker | 34,54 |
| Dirac, Paul | 1902-1984 | Brit. Physiker, Nobelpreis 1933 | 31,34,47,53 |
| Dürr, Hans-Peter | 1929-2014 | Dt. Physiker | 37,38,42 |
| Ehrenberg, Werner | 1901-1975 | Dt. Physiker | 49,50 |
| Ehret, Marietta | ? | Dt. Mathematikerin/Informatikerin | 21,60 |
| Einstein, Albert | 1879-1955 | Dt./schweiz./US-am. Physiker, Nobelpreis 1922 | 1,4,5,9,11,12,24-31,34-40,43,45,47,50,51, 53-56,59,61,62 |
| Enzensberger, Hans M. | 1929-2022 | Dt. Dichter | 3,59 |
| Epimenides | 5./6./7.Jht. | v.Chr., griech. Philosoph | 7 |
| Everett, Hugh | 1939-1982 | US-am. Physiker | 33,54,55 |
| Farmer, Doyne J. | *1952 | US-am. Physiker | 23 |
| Feigl, Herbert | 1902-1988 | Öst. Physiker u. Philosoph | 10 |
| Fermi, Enrico | 1901-1954 | Ital. Physiker | 52,53 |
| Fletcher, Harvey | 1884-1981 | US-am. Physiker | 30 |
| Fraenkel, Abraham A. | 1891-1965 | Dt.-israel. Mathematiker | 8,20,21 |
| Franz, Walter | 1911-1992 | Dt. Physiker | 49 |
| Frege, Gottlob | 1848-1925 | Dt. Logiker | 7,8,10,12,14,15,18,60 |
| Friebe, Cord | *1968 | Dt. Philosoph | 41,42,49,60 |
| Friedman, Art | *1950 | US-am. Autor | 57,61 |
| Gauß, Carl Friedrich | 1777-1855 | Dt. Mathematiker | 14 |
| Gerlach, Walther | 1889-1979 | Dt. Physiker | 51,52,62 |
| Gödel, Kurt | 1906-1978 | Öst./US-am. Mathematiker | 1,2,3,4,8-28,58-62 |
| Goudsmit, Samuel | 1902-1978 | Niederl. Physiker | 42 |
| Hahn, Hans | 1879-1934 | Öst. Mathematiker | 11,12,14,16 |
| Hahn, Otto | 1879-1968 | Dt. Chemiker, Nobel. 1945(für 44) | 43 |

| | | | |
|-----------------------------|-------------|------------------------------------|------------------------------|
| Halvorson, Hans P. | *1973 | US-am. Philosoph der Physik | 55 |
| Hao, Wang | 1921-1995 | Chin./US-am. Logiker | 62 |
| Hausdorff, Felix | 1868-1942 | Dt. Mathematiker | 20,21 |
| Hawking, Stephen | 1942-2018 | Brit. Physiker | 5,28 |
| Heisenberg, Werner | 1901-1976 | Dt. Physiker, Nobel. 1933 (für 32) | 3,30-35,37,38,40,41,45,52 |
| Hermann, Grete | 1901-1984 | Dt. Mathematikerin | 28,40 |
| Heron von Alexandria | ?-70 n.Chr. | Griech. Mathematiker | 6 |
| Higgs, Peter | *1929 | Brit. Physiker, Nobelpr. 2013 | 53 |
| Hilbert, David | 1862-1943 | Dt. Mathematiker | 1,3,4,7-10,13-15,18,20,22,56 |
| Hippassos von Metapont | 6.-5.Jht. | v.Chr., gr. Mathematiker | 6 |
| Hofstadter, Douglas | *1945 | US-am. Physiker, Autor | 14,15,61 |
| Hubble, Edwin | 1889-1953 | US-am. Astronom | 26 |
| Hume, David | 1711-1776 | Schott. Philosoph | 28 |
| Jordan, Pascual | 1902-1980 | Dt. Physiker | 30,31,33,35,57 |
| Jürgens, Hartmut | 1955-2017 | Dt. Mathematiker u. Informatiker | 22,61 |
| Kálmán, Theodore von | 1881-1963 | Ungar./US-am. Physiker | 43 |
| Kant, Immanuel | 1724-1804 | Dt. Philosoph | 4,10,13,14,21,24,52,59 |
| Köhl, Ralf (gb. Gramlich) | *1976 | Dt. Mathematiker | 50,63 |
| Kronecker, Leopold | 1828-1891 | Dt. Mathematiker | 7 |
| Landé, Alfred | 1888-1976 | Dt. Physiker | 52 |
| Laudisa, Federico | *1965 | Ital. Philosoph der Physik | 55 |
| Leibniz, Gottfried-Wilh. | 1646-1716 | Dt. Philosoph | 6,13,41 |
| Lobatschewski, Nikolai | 1792-1856 | Russ. Mathematiker | 14 |
| Lorenz, Edward Norton | 1917-2008 | US-am. Mathem. und Meteorologe | 22 |
| Mach, Ernst | 1838-1916 | Öst. Physiker, Philosoph | 11,35,37,47 |
| McCarthy, Joseph | 1908-1957 | US-am. Politiker | 45 |
| Menger, Karl | 1902-1985 | Öst. Mathematiker | 10 |
| Mermin, N. David | *1935 | US-am. Physiker | 6,37 |
| Millikan, Robert Andrews | 1868-1953 | US-am. Physiker, Nobelpr. 1923 | 30 |
| Minkowski, Hermann | 1864-1909 | Russ.-dt. Mathematiker | 26 |

| | | | |
|----------------------|-----------|----------------------------------|----------------------------|
| Misner, Charles W. | *1932 | US-am. Physiker | 27 |
| Nauenberg, Michael | 1934-2019 | US-am. Physiker | 45 |
| Nelböck, Hans | 1903-1954 | Öst. Student, Mörder M. Schlick | 13 |
| Nernst, Walther | 1864-1941 | Dt. Physiker/Chem., Nobelp. 1920 | 36 |
| Neurath, Otto | 1882-1945 | Öst. Ökonom | 13 |
| Newton, Isaac | 1643-1727 | Engl. Physiker, Astronom, Math. | 6,24,27,32,50,59 |
| Nietzsche, Friedrich | 1844-1900 | Dt. Philosoph | 21 |
| Ockham, Wilhelm von | 1288-1347 | Engl. Philosoph | 54 |
| Oppenheimer, Robert | 1904-1967 | US-am. Physiker | 5,42,45 |
| Packard, Norman H. | *1954 | US-am. Physiker | 23 |
| Pauli, Wolfgang | 1900-1958 | Öst. Physiker, Nobelpreis 1945 | 31,47,52,53 |
| Peano, Giuseppe | 1858-1932 | Ital. Mathematiker | 1,14,17 |
| Peat, F. David | 1938-2017 | US-am. Physiker | 23,60 |
| Peitgen, Heinz-Otto | *1945 | Dt. Informatiker | 22,61 |
| Perrin, Jean | 1870-1942 | Franz. Physiker | 12 |
| Planck, Max | 1858-1945 | Dt. Physiker | 24,29-31,36,52,53,60 |
| Podolsky, Boris | 1896-1966 | US-am. Physiker | 39,40,51 |
| Popper, Karl | 1902-1994 | Öst.-brit. Philosoph | 11 |
| Prigogine, Ilya | 1917-2003 | Rus./belg. Chem/Phil Nobel 1977 | 58,61 |
| Rasche, Günther | *1934 | Dt. Physiker | 3 |
| Renninger, Mauritius | 1905-1987 | Dt. Physiker und Kristallograph | 32,33 |
| Rheinwald, Rosemarie | 1948-2009 | Dt. Math.-Philosophin | 8,21,22,61 |
| Riemann, Bernhard | 1826-1866 | Dt. Mathematiker | 9,14,57 |
| Rosen, Nathan | 1909-1995 | US-am.-israel. Physiker | 39,51 |
| Rovelli, Carlo | *1956 | It. Physiker | 34,55,61 |
| Russell, Bertrand | 1872-1970 | Brit. Philosoph u. Logiker | 7-9,12,15,18,19 |
| Saupe, Dietmar | *1954 | Dt. Informatiker | 22,61 |
| Schilpp Paul Arthur | 1897-1993 | Dt.-US-am. Philosoph | 24,37 |
| Schlick, Moritz | 1882-1936 | Dt. Physiker u. Philosoph | 12,13 |
| Schrödinger, Erwin | 1887-1961 | Öst. Physiker, Nobelpreis 1933 | 31,35,39,44,45,54-57,60,61 |
| Shaw, Robert S. | *1946 | US-am. Physiker | 23 |

| | | | |
|-------------------------------------|-----------|----------------------------------|-------------------|
| Sheldrake, Rupert | *1942 | Brit. Autor und Biologe | 58 |
| Siday, Raymond | 1912-1956 | Brit. Quantenmathematiker | 49,50 |
| Sigmund, Karl | *1945 | Öst. Mathematiker | 11 |
| Solvay, Ernest | 1838-1922 | Belg. Unternehmer | 36 |
| Sommerfeld, Arnold | 1868-1951 | Dt. Mathematiker u. Physiker | 52 |
| Strominger, Andrew | *1955 | Brit./US-am. Physiker | 57 |
| Susskind, Leonhard | *1940 | US-am. Physiker | 57,61 |
| Stein, Howard | *1929 | US-am. Philosoph | 24 |
| Stern, Otto | 1888-1969 | Dt.-US-am. Physiker, Nobel 1943 | 51,52,62 |
| Tarski, Alfred | 1901-1983 | Pol.-US-am. Mathematiker | 10 |
| Taussky, Olga | 1906-1995 | Öst./tsch.-US-am. Mathematikerin | 10 |
| Thorne, Kip S. | *1940 | US-am. Physiker, Nobelpr. 2017 | 27 |
| Tonomura, Akira | 1942-2012 | Jap. Physiker | 50 |
| Turing, Alan | 1912-1954 | Brit. Logiker/Math./Informatiker | 20,23 |
| Van der Waerden, Bartel Leendert | 1903-1996 | Niederl. Mathematiker | 3 |
| Verhulst, Pierre- François | 1804-1849 | Belgischer Mathematiker | 22 |
| Von Neumann, John | 1903-1957 | Ungar.-US-am. Mathematiker | 12,31,40,41,43,47 |
| Weber, Renée | *1986 | US-am. Philosophin | 5,48,58,62 |
| Weierstraß, Karl | 1815-1897 | Dt. Mathematiker | 6 |
| Weinberg, Steven | 1933-2021 | US-am. Physiker, Nobel 1979 | 28,56 |
| Weyl, Hermann | 1885-1965 | Dt. Mathematiker und Physiker | 28,62 |
| Wheeler, John Archibald | 1911-2008 | US-am. Physiker | 26,27,49,54,55 |
| Whitehead, Alfred North | 1861-1947 | Brit. Philosoph u. Mathematiker | 12,15,18 |
| Wigner, Paul Eugene | 1902-1995 | Ungar./US-am. Phys., Nobel 1963 | 43,46 |
| Wightman, Arthur | 1922-2013 | US-am. Physiker | 48 |
| Wittgenstein, Ludwig | 1889-1951 | Öst. Philosoph | 12,36 |
| Wood, Charlie | ? | US-am. Redakteur Physik | 56 |
| Wright, James P. | ? | US-am. Physiker | 24 |
| Yourgrau, Palle | *1950 | US-am. Philosoph | 9,24,25,27,28,62 |

| | | | |
|------------------|-----------|---------------------------------|---------|
| Zeh, Hans Dieter | 1932-2018 | Dt. Physiker | 41,42 |
| Zeilinger, Anton | *1945 | Österr. Physiker, Nobelpr. 2022 | 55,62 |
| Zermelo, Ernst | 1871-1953 | Dt. Mathematiker | 8,20,21 |

Chaos und Fraktale

Einsichten, Begriffe und Beispiele

Ein Überblick

WILLI KAFITZ*)

Abstract:

Chaos theory has not only created a new field for mathematics and information theory, it has also initiated profound changes within and outside of the disciplines. On the one hand, there are clearly defined, deterministic processes that can often be described using simple formulas. On the other hand, the courses of these processes take on a behavior for which the term "coincidence" is almost obvious, even though the mathematical description is still deterministic. As a modern society, we have already advanced far into digitalization and are taking more or less big steps in this direction. Many fractals would not have been discovered without the new technical possibilities. The technology was and is a pioneer of mathematical research in this area. Despite their computing power and performance, digital computers have a shortcoming compared to analytical methods of pure mathematics. You will inevitably have to round decimal numbers of appropriate length depending on the type of computer and operating system. In nonlinear systems, through iteration and feedback, a small deviation from the initial value can develop into a completely unpredictable development. Development becomes chaotic. Another variant can lead to an attractor, i.e. in which no exact target point of development can be identified, but in which the system moves towards a multi-dimensional phase space - a fractal. Chaos and fractals are two sides of the same coin. This article will discuss key terms about chaos and fractals from the perspective of mathematics and computer science. Epistemological aspects are pointed out.

Keywords:

Chaos, nonlinearity, fractals, attractor, dimension, iteration, feedback, dissipative systems, synergetics.

Zusammenfassung:

Die Chaostheorie hat nicht nur der Mathematik und der Informationstheorie ein neues Gebiet beschert, sie hat auch tiefgreifende Veränderungen innerhalb und außerhalb der Fachwissenschaften initiiert. Da existieren einerseits klar definierte, deterministische Prozesse, die sich oft mit einfachen Formeln beschreiben lassen. Andererseits nehmen die Verläufe dieser Prozesse ein Verhalten an, für das sich der Begriff „Zufälle“ geradezu aufdrängt, obwohl die mathematische Beschreibung nach wie vor deterministisch ist. Wir als moderne

Gesellschaft sind schon weit in die Digitalisierung vorgedrungen und gehen mit mehr oder weniger großen Schritten weiter in diese Richtung. Viel Fraktale wären nicht ohne die neuen technischen Möglichkeiten entdeckt worden. Die Technik war und ist Wegbereiter der mathematischen Forschung in diesem Gebiet. Trotz ihrer Rechenstärke und Leistungsfähigkeit haben digital arbeitende Computer gegenüber analytischen Methoden der reinen Mathematik ein Manko. Sie müssen zwangsläufig Dezimalzahlen entsprechender Länge je nach Rechner- und Betriebssystem runden. In nichtlinearen Systemen kann durch Iteration und Rückkopplung eine kleine Abweichung vom Ausgangswert eine vollkommen unvorhersehbare Entwicklung nehmen. Die Entwicklung wird chaotisch. Eine weitere Variante kann zu einem Attraktor führen, d.h. bei dem kein genauer Zielpunkt der Entwicklung identifizierbar ist, sondern in dem System sich auf einen mehrdimensionalen Phasenraum hinbewegt – ein Fraktal. Chaos und Fraktale sind dabei zwei Seiten einer Medaille. Es sollen im vorliegenden Beitrag Schlüsselbegriffe zu Chaos und Fraktale aus Sicht der Mathematik und Informatik diskutiert werden. Es wird dabei auf erkenntnistheoretische Aspekte hingewiesen.

Schlüsselwörter:

Chaos, Nichtlinearität, Fraktale, Attraktor, Dimension, Iteration, Rückkopplung, dissipative Systeme, Synergetik.

Dieser Beitrag kann auch von der Publikationsplattform „JLUpub“ der Universitätsbibliothek der Justus-Liebig-Universität Gießen unter folgendem Link heruntergeladen werden: <https://doi.org/10.22029/jlupub-19177>

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

Zitate

Chaos often breeds life, when order breeds habit.¹

Henry Brooks Adams (1838 – 1918)

A fractal is a way of seeing infinity.²

Benoit Mandelbrot (1924 – 2010)

Schließlich besteht ja jedes Ding nur durch seine Grenzen und damit durch einen gewissermaßen feindseligen Akt gegen seine Umgebung.³

Robert Musil (1880 – 1942)

Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen, soll uns niemand vertreiben können.⁴

David Hilbert (1862 – 1943)

In re mathematica ars proponendi quaestionem pluris facienda est quam solvendi.⁵

Georg Cantor (1845 – 1918)

... wenn wir uns eine Intelligenz vorstellen, die zu einem gegebenen Zeitpunkt alle Beziehungen zwischen den Teilen des Universums verarbeiten kann, so könnte sie Orte, Bewegungen und allgemeine Beziehungen zwischen all diesen Teilen für alle Zeitpunkte in Vergangenheit und Zukunft vorhersagen.

*Pierre Simon de Laplace (1749 – 1827)*⁶

Inhalt

| | |
|--|----|
| Zum fachlichen Begriffsverständnis | 79 |
| Zum historischen Begriffsverständnis und Stellenwert von Chaos | 81 |
| Abgrenzung und Fokus | 85 |
| Fraktale – Abgrenzung und Beispiele | 88 |
| Weierstraßsche Monsterkurve | 90 |
| Cantor-Funktion oder Teufelstreppe | 91 |
| Cantor-Menge | 92 |

¹ In: The Education of Henry Adams, Chapter XVI (The Press, 1868), <https://www.gutenberg.org/files/2044/2044-h/2044-h.htm>

² James Gleick verwendete das Zitat von Mandelbrot in seinem berühmten Buch „Chaos“ als *In the mind's eye, a fractal is a way of seeing infinity.*

³ Robert Musil, Der Mann ohne Eigenschaften, 1. Buch, Kap. 7

⁴ David Hilbert; Über das Unendliche. In: Mathematische Annalen 95, 1926, S. 170

⁵ In der Mathematik ist die Kunst, eine Frage zu stellen, höher zu bewerten als die Kunst, sie zu lösen. Georg Cantor, Abschließende These seiner in Latein verfassten Dissertation.

⁶ P.S.de Laplace; Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeiten; Leipzig, Duncker und Humblot, 1776

| | |
|--|-----|
| Peano-, Gosper- und Hilbert-Kurve | 97 |
| Dreiecksfraktal | 100 |
| Cesàro-Kurven und verallgemeinerte Koch-Kurve | 101 |
| Sierpinski-Dreieck | 104 |
| Zur Gruppentheorie der Fraktale – eine Skizze | 108 |
| Weiterer kurzer Ausblick in die 3D-Welt | 120 |
| Iteration, Selbstähnlichkeit, Rückkopplung und Hausdorff-Dimension | 123 |
| Abhängigkeit vom Maßstab und weitere Dimensionsbegriffe | 127 |
| Zusammenhang Chaos und Fraktale | 131 |
| Logistische Gleichung | 131 |
| Ordnung und Chaos – der Lyapunov Exponent | 137 |
| Kausale Zusammenhänge | 140 |
| Zeltabbildung | 145 |
| Seltene Attraktoren, Tori und Solitonen | 148 |
| Lorenz-Attraktor | 148 |
| Hénon-Attraktor | 149 |
| Rössler-Attraktor | 149 |
| Thomas-Attraktor | 150 |
| Solitonen | 152 |
| Mandelbrot-Menge | 154 |
| Julia-Mengen | 165 |
| Höherdimensionale Verallgemeinerungen | 170 |
| Weitere Beispiele aus Physik, Chemie, Medizin und Sozialwissenschaften | 172 |
| Dynamik und Thermodynamik | 180 |
| Fazit und Ausblick | 190 |
| Abbildungsverzeichnis | 197 |
| Literaturverzeichnis | 204 |
| Danksagung | 206 |
| Personenverzeichnis | 208 |
| Linksammlung zu Fraktalen | 214 |

Zum fachlichen Begriffsverständnis

Zunächst sollte man sich klarmachen, was lineare und nichtlineare Dynamiken ausmachen. Beispiel für eine typische lineare Beziehung ist die Fruchtbarkeit einer Population (etwa einzelliger) Organismen, hier r genannt. In der Grafik kann B_n z.B. als n -te Generation gesehen werden, die multipliziert mit r wiederum ein neues B_{n+1} ergibt. Wie der Name schon sagt, ist das Kennzeichen

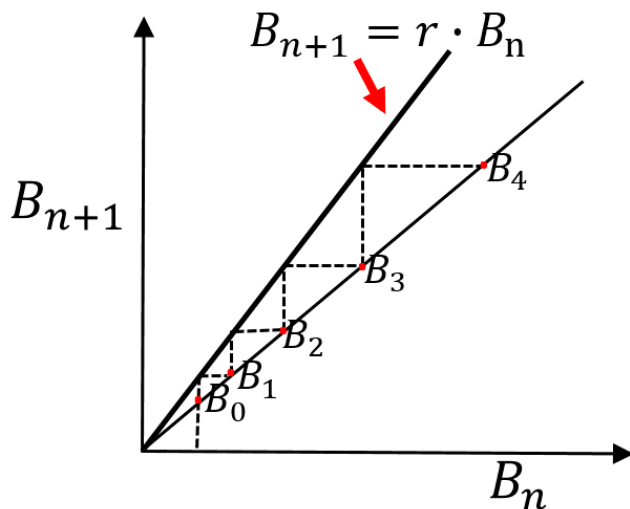


Abb. 1: Lineare Entwicklung der ersten vier Iterationen von $B_{n+1} = r \cdot B_n$

der linearen Entwicklung eine Gerade in der grafischen Darstellung. Ist $r > 1$, (z.B. Fruchtbarkeit größer Todesrate, etc.), so ist $B_{n+1} > B_n$. Im Fall $r < 1$ stirbt die Population aus, d.h. B_{n+1} geht gegen Null. Kontinuierliches Abfallen und erst recht unbegrenztes Wachstum ist eher die Ausnahme. Normal ist nicht nur die positive Vermehrungsrate, sondern auch eine Begrenzung der Ressourcen, etwa in Jäger-Beute-Modellen. Dies führt zu

nichtlinearen Dynamiken. Sie waren auch vor fast 200 Jahren der Anlass zu entsprechenden Modellen.

„Chaos und Fraktale“ stehen für nichtlineare Dynamiken und so heißt auch lapidar der Titel des vorliegenden Beitrags. Beide Begriffe markieren Unterschiede, aber es gibt auch viele Gemeinsamkeiten. An dieser Stelle soll genauer von Chaostheorie und von fraktaler Geometrie gesprochen werden und nach Gemeinsamkeiten und Unterschieden strukturiert werden. Später werden, wo nicht sprachliche Genauigkeit erforderlich ist, auch die Kurzbegriffe verwendet.

Gemeinsamkeiten:

1. Komplexe Muster und Strukturen:

Sowohl die Chaostheorie als auch die fraktale Geometrie beschäftigen sich mit komplexen Mustern und Strukturen, die in natürlichen und künstlichen Systemen auftreten. Diese Muster sind oft nicht durch traditionelle geometrische oder lineare Ansätze erklärbar.

2. Nichtlineare Dynamik:

Beide Disziplinen betonen die Bedeutung der Nichtlinearität. In der Chaostheorie führen nichtlineare Dynamiken häufig zu chaotischem Verhalten,

während in der fraktalen Geometrie nichtlineare Gleichungen oft Basis zur Erzeugung von Fraktalen sind.

3. Selbstähnlichkeit:

Fraktale, die in der fraktalen Geometrie untersucht werden, zeigen eine Eigenschaft der Selbstähnlichkeit oder zumindest Selbstaffinität, d.h., sie sehen auf verschiedenen Skalen gleich oder ähnlich aus. Ähnliche Konzepte der wiederholenden Muster finden sich auch in chaotischen Systemen, wo bestimmte Trajektorien oder Attraktoren wiederkehrende Muster aufweisen können. Sie stellen sich häufig als Fraktale heraus.

4. Interdisziplinäre Anwendung:

Beide Felder finden Anwendung in einer Vielzahl von Wissenschaften wie Physik, Biologie, Medizin, Wirtschaftswissenschaften und sogar in der Kunst, um komplexe Phänomene zu verstehen und zu modellieren.

Unterschiede zwischen Chaostheorie und fraktaler Geometrie

1. Jeweiliger Fokus und Ziel:

Die Chaostheorie konzentriert sich auf das Verhalten dynamischer Systeme, die hochsensibel auf Anfangsbedingungen reagieren, was zu scheinbar zufälligem und unvorhersehbarem Verhalten führt. Die fraktale Geometrie hingegen beschäftigt sich mit der mathematischen Modellierung und Analyse von Mustern und Strukturen, die oft Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz aufweisen.

2. Mathematische Methoden:

In der Chaostheorie werden häufig Differentialgleichungen und dynamische Systeme analysiert, um das Verhalten über die Zeit zu verstehen. Fraktale Geometrie verwendet oft iterative Algorithmen und komplexe Zahlen zur Erzeugung von Fraktalen.

3. Ergebnisse und Vorhersagbarkeit:

Chaostheorie zeigt auf, dass in bestimmten Systemen langfristige Vorhersagen unmöglich sein können, auch wenn die zugrundeliegenden Regeln bekannt sind. Fraktale Geometrie hingegen bietet ein Werkzeug zur Beschreibung von Strukturen, die zwar komplex, aber durch ihre selbstähnlichen Eigenschaften mathematisch beschreibbar sind.

Insgesamt ergänzen sich Chaostheorie und fraktale Geometrie, indem sie unterschiedliche Aspekte der Komplexität in natürlichen und künstlichen Systemen erforschen und erklären. Sie bieten ein tieferes Verständnis für die Art und Weise, wie Muster und Strukturen auf verschiedenen Ebenen der Realität entstehen und interagieren. Es gibt selten Chaos allein. Es wechseln sich Phasen von chaotischem Verhalten und Inseln der Ordnung ab oder umgekehrt. Chaos ist nur ein Systemzustand von mehreren. Es ist sozusagen der irreguläre Output einer deterministischen Quelle.

Zum historischen Begriffsverständnis und Stellenwert von Chaos

Während in der christlichen Genesis das Nichts am Anfang der Schöpfung stand, war es in der griechischen Mythologie das Chaos. Chaos war Voraussetzung für den Schöpfungsakt, in Hesiods Theogonie sogar Voraussetzung für die Existenz der Götter. Dies gilt in ähnlicher Form auch für die Schöpfungsmythen anderer Kulturen. So schreibt in China Laotse im Tao-te-King (~600 v.Chr.) „*Im Anfang war das Chaos, Leere, Dunkelheit, unergründliche Tiefe des Ur-Ozeans. Aus dem Chaos entstand das Ur-Ei, das Weltenei.*“⁷ Etwas subtiler ist der Begriff des „*clinamen*“ bei Lukrez bzw. den frühen Atomisten. Man kann es als geringfügige Abweichung oder Störung verstehen, die erhebliche Auswirkungen haben kann. So ist der Übergang von laminarem Fluss zu „chaotischer“ Turbulenz Folge von mikroskopischen atomaren Vorgängen hin zu einem hochgradig makroskopisch organisierten dynamischen Zustand. Der französische Philosoph Michel Serres bezieht sich auf Lukrez und das *clinamen*, wenn er schreibt, ohne es gäbe es nur „*die Gesetze des Schicksals, das heißt die Ketten der Ordnung.*“⁸

Aber im westlichen Kulturraum verlor in der Spätantike Chaos seinen ursprünglichen Rang und nahm seine heutige Bedeutung von Unvorhersehbarkeit, Unberechenbarkeit und eigentlich auch Zufälligkeit an. Dabei ist es eine paradoxe Tatsache, dass ausgerechnet deterministische, nichtlineare Systeme oft schnell Kennzeichen von Unvorhersehbarkeit aufweisen, die gerne als „Zufall“ bezeichnet werden. Philosophen werden dabei sofort hellhörig. Die alte Debatte um Determinismus und freien Willen ist keineswegs ausdiskutiert. In einer deterministischen Welt bestimmt scheinbar die Vergangenheit vollkommen die Zukunft. Deterministisches Chaos hat darin etwas Unheimliches oder sogar Gefährliches, etwas Umstürzlerisches, etwa genauso, wie man revolutionäre Wirmköpfe als politische Chaoten bezeichnet. Eine wesentliche Basis ist das Newtonsche deterministische Wissenschaftsverständnis. Sein Gravitationsgesetz reicht immer noch aus, um Raumsonden über lange Jahre und Entfernungen zu fremden Himmelskörpern zu schicken. Es hat eine einheitliche Ordnung auf der Erde und am Himmel geschaffen. Ausgerechnet die Gravitation hat aber dazu geführt, dass dieses Weltverständnis trotzdem erschüttert wurde. Während die Bewegungen von zwei Himmelskörpern sehr gut berechnet werden können, hat der geniale französische Mathematiker Jules Henri Poincaré darauf hinweisen müssen, dass sich schon die Bewegungen von drei (Himmels)körpern einer genauen

⁷ Zitiert nach <https://texteundtoene.ch/wp-content/uploads/2018/08/Schöpfungsmythen-anderer-Kulturen.pdf>

⁸ Zitiert nach H.J. Schlichting, https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/274_der_flutterhafte_falter_der_chaosphysik.pdf

Berechnung entziehen. König Oskar II von Schweden hatte für die Lösung des n-Körper-Problems einen Preis ausgesetzt. Poincaré bewies, dass sogar eine sehr vereinfachte („restringierte“) Aufgabenstellung zu divergenten Reihen führt und damit keine analytische Lösung möglich ist.⁹ Zentraler mathematischer Beweis in seiner Ausarbeitung ist der poincarésche Wiederkehrsatz¹⁰. Er gehört zur Ergodentheorie, die damals auf Stochastik und Maßtheorie beschränkt war und hat das Gebiet der dynamischen Systeme begründet. Er besagt, dass es bei autonomen hamiltonschen Systemen, deren Phasenraum ein endliches Volumen hat, in jeder offenen Menge U im Phasenraum Zustände gibt, deren Trajektorien beliebig oft wieder nach U zurückkehren. Wir finden das Problem später z.B. bei seltsamen Attraktoren; es weist viele Kennzeichen von chaotischem Verhalten auf. Damit wurde der Determinismus von Newton und der Reduktionismus, der Laplace zugeschrieben wird, erstmals erschüttert. Mit den Entdeckungen von Planck, Bohr, Heisenberg und vielen anderen Pionieren der Quantenmechanik ging der Glaube an ein deterministisches und reduktionistisches Weltbild weiter verloren.

Poincaré entdeckte jedoch etwas Grundsätzliches, nämlich die Unterscheidung zwischen integrablen und nichtintegrablen Systemen. Bei integrablen Systemen lässt sich die Wechselwirkung zwischen Körpern bzw. Teilchen eliminieren und nur die Impulse spielen eine Rolle.¹¹ Vor ihm ging man stillschweigend davon aus, dass alle dynamischen Systeme integrabel sind. Dies ist schon beim System Sonne – Erde – Jupiter nicht mehr der Fall und dies gilt für die allermeisten dynamischen Systeme. Die Tatsache, dass Poincaré sogar den

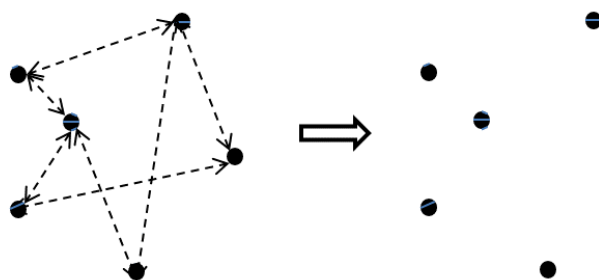


Abb. 2: Links wechselwirkende Punkte; rechts Wechselwirkung ließ sich formal eliminieren, System ist integrabel

Grund für die Nichtintegrierbarkeit nannte, macht seine Erkenntnis zu einem wichtigen Theorem und ihn zu einem der Väter der Chaostheorie. Es existieren nämlich Resonanzen zwischen den Freiheitsgraden und damit eine starke Kopplung, die eine Störungsrechnung erforderlich macht. Es finden

⁹ Les Méthodes Nouvelles de la Mécanique Celeste, 3. Bd., Paris 1892-1899

Man beachte: Es ist ein mathematisches Problem, da die Massen als punktförmig angenommen werden müssen, was physikalisch eine unendliche Dichte bedeutet.

¹⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Wiederkehrsatz>

¹¹ Genauer: Die Hamilton-Funktion H hängt nur von den Wirkungen J ab ($H(J)$) und diese sind bewegungsinvariant, also $\frac{dJ}{dt} = 0$.

sich also in diesem Fall immer Punkte im Phasenraum, die zu verschwindenden Nennern und damit zu Divergenzen / Unendlichkeiten führen.

Die Thermodynamik markierte durchaus ein neues Physikverständnis. Zum ersten Mal tauchten Wahrscheinlichkeiten auf. Im 19. Jahrhundert betrachtete man nur den Endzustand der thermodynamischen Entwicklung. Die Zeit wurde auf einen Parameter reduziert. Es ging um das „Sein“, nicht um das „Werden“. Mathematischer Ausdruck ist die Hamilton-Funktion \mathcal{H} , also die Gesamtenergie als Funktion der Orte und Impulse der Teilchen und bei dynamischer Betrachtung der Zeit. Die Gleichungen, die durch Ableitung von \mathcal{H} die zeitliche Änderung der Koordinaten und Impulse angeben, nennt man kanonisch. Sie sind reversibel und beschreiben damit integrable Systeme.

Man nennt es das Problem der „kleinen Nenner“, das auch an anderen Stellen in der Physik auftaucht und manchmal durch Renormierung (z.B. in Quantenfeldtheorien) behoben werden kann. Max Born schrieb: *„Es wäre in der Tat bemerkenswert, wenn die Natur sich gegen weitere Erkenntnisfortschritte hinter den analytischen Schwierigkeiten des Mehrkörperproblems verschanzte hätte.“*¹²

Der US-amerikanische Chaosforscher Joseph Ford bringt es auf den Punkt: *Die Relativitätstheorie beendete die Newtonsche Illusion von Zeit und Raum als absoluten Kategorien; die Quantentheorie setzte dem Newtonschen Traum von einem exakt kontrollierbaren Messprozess ein Ende; und nun erledigt die Chaostheorie Laplaces Utopie deterministischer Voraussagbarkeit.*¹³

Man muss allerdings zur Ehrenrettung von Laplace sagen, dass er keineswegs der engstirnige Forscher war, als der er manchmal auch von Verfechtern der Chaostheorie hingestellt wird. Dagegen spricht, dass er zu Recht als Mitbegründer der Wahrscheinlichkeitsrechnung gilt. Ihm war sehr wohl klar, dass trotz fehlender vollständiger Kenntnisse über ein System man belastbare Ergebnisse bekommen kann. Ihm ist auch bewusst, dass man Wahrscheinlichkeiten, im Sinne Aristoteles, nicht streng mathematisch behandeln kann. Auch wenn die „Ära Laplace“ ein mechanistisch orientiertes Weltbild geprägt hat, tun renommierte Autoren ihm unrecht, wenn sie ihn als Gegenpol zur Chaostheorie sehen. Folgendes Zitat von Laplace soll diese Meinung zurechtrücken: *Es gibt also Dinge, die unbestimmt sind, und wir*

¹² Zitiert nach Prigogine, Ilya, Stengers, Isabell; Das Paradox der Zeit – Zeit, Chaos und Quanten. Piper, München 1993, S. 163

¹³ Siehe Joseph Ford: What is Chaos that we should be mindful for it? Manuskript, Georgia Institute of Technology, Atlanta (Ga.), o.J., S. 12, zitiert nach: James Gleick: Chaos - die Ordnung des Universums. Vorstoß in Grenzbereiche der modernen Physik. München 1990, S. 15

*versuchen, die Unmöglichkeit, sie zu bestimmen, dadurch zu kompensieren, dass wir die verschiedenen Grade der Wahrscheinlichkeit bestimmen*¹⁴

Ein wichtiger deutscher Pionier der Chaosforschung, Siegfried Großmann, beginnt einen Vortrag mit dem Titel „Deterministisches Chaos“ bei der 299. Sitzung der Rheinisch-Westfälischen Akademie der Wissenschaften am 6. Oktober 1982 in Düsseldorf mit dem Ausruf „*Chaos ist in.*“¹⁵

Dies ist Fluch und Segen zugleich!

Um „Chaos“ wurde bzw. wird oft regelrecht ein Kult getrieben. Das gilt vor allem für zweifelhafte populär- oder pseudowissenschaftliche Schriften. Erkenntnisse der Chaostheorie werden immer wieder in anderen sozialwissenschaftlichen Disziplinen oder im Alltag undifferenziert oder sogar missverständlich angewendet. Der Biophysiker, Chaosforscher und Philosoph Bernd-Olaf Küppers, der mittlerweile einen Lehrstuhl am Philosophischen Institut der Universität Jena hat, vertritt die Ansicht, „*dass es grundsätzlich unbeweisbar ist, ob soziale Vorgänge tatsächlich nichtlinear und chaotisch sind. Eine vermutete Nichtlinearität lasse sich nicht endgültig beweisen, womit der wissenschaftliche Grundsatz der Verifizierbarkeit verletzt werde.*“¹⁶ Auch manche seriöse Autoren und Wissenschaftler erlagen zunächst dem Hype. Es erinnerte sinngemäß an den Gedanken in Kants „Kritik der reinen Vernunft“, dass die Wissenschaft ihre Befugnisse durch metaphysische Spekulationen überschreitet, wenn die Philosophie sie nicht durch fundierte methodische Kritik korrigiert.

Richtig ist, dass die Untersuchung nichtlinearer dynamischer Systeme in der experimentellen Physik und praktischen Mathematik bzw. Informatik mittlerweile zu einem fruchtbaren großen Forschungsgebiet mit Anwendungen darüber hinaus geführt hat. Dabei hat es durchaus eine bemerkenswerte Entwicklung mitgemacht. Komplexität wurde anfangs sogar falsch eingeschätzt bis man erkannte, dass es nicht nur eine Überlagerung von vielen, aber einfachen Prozessen ist. Turbulenz sah man als eine Art Mischung vieler Schwingungen, für die das bewährte Additions- oder Überlagerungsprinzip von linearen Naturgesetzen gilt. Siegfried Großmann beginnt einen Artikel mit den Worten:

Das Überlagerungsprinzip der linearen Naturgesetze weicht bei nichtlinearen Phänomenen dem Prinzip vielskaliger Selbstähnlichkeit, regelmäßig oder

¹⁴ Zitiert nach Wehr, Marco; Der Schmetterlingsdefekt, Turbulenzen in der Chaostheorie, 2002, S. 201 mit Verweis auf Crutchfield (SdW 02/87, 78-90)

¹⁵ Großmann, Siegfried; Deterministisches Chaos, Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Vorträge N 321, Westdeutscher Verlag 1983, S. 7-29

¹⁶ Zitiert nach Stefan Frerichs, Grundlagen der Chaostheorie, https://www.stefre.de/Grundlagen_der_Chaostheorie.pdf

*chaotisch (statistisch). Die angemessene Beschreibung ist die fraktale Geometrie.*¹⁷

Mit den Gesetzen der linearen Naturbeschreibung, für die mehr als 200 Jahre Newton als Vorbild galt, hat die Chaostheorie jedenfalls gründlich aufgeräumt. Ähnliche Ursachen haben eben nicht unbedingt ähnliche Wirkungen. Doch die Chaostheorie ist nicht gesetzlos und irrational. Damit hätte sie kein Erklärungspotential. In den 1980-er Jahren gab es den Versuch, Chaos mit der algorithmischen Komplexitätstheorie von Kolmogorov, Chaitin und Solomonov zu erklären. Das ist eher das andere Extrem, denn man ignoriert die Determiniertheit und erklärt die Nicht-Vorhersehbarkeit. Die dadurch entstandene algorithmische Informationstheorie ist aber zum wichtigen Eckpfeiler geworden. In der relativ jungen Geschichte der Chaostheorie sind jedenfalls eine Reihe alter Dogmen infrage gestellt worden. Aber das gilt auch für andere große Themen des 20. Jahrhunderts, wie sie Joseph Ford in seinem Zitat benannt hat. Sowohl die Relativitätstheorie als auch die Quantenmechanik haben Weltbilder erschüttert oder gar zerstört. In der Mathematik sind solche Revolutionen seltener. Die Entdeckung der irrationalen Zahlen durch die Griechen in der Antike und die Infinitesimalrechnung von Newton und Leibniz gehören z.B. dazu. Mandelbrot zitiert Paul du Bois-Reymond in Bezug zur Weierstraß-Funktion („Monsterkurve“): *Ich komme von dem Gedanken nicht los, dass sie uns an die Grenzen unseres Intellekts führen werden.*¹⁸ Die Chaostheorie wurde aber durchaus zu einer „disruptiven Kraft“ in der Mathematik. Sie hat zumindest dazu beigetragen unser Verständnis von bestimmten Systemen und ihrem Verhalten in Frage zu stellen. Der Einsatz von Computern tat dabei sein Übriges. Man muss also einerseits „die Kirche im Dorf lassen“, aber andererseits anerkennen, dass die Chaostheorie neue Fragestellungen suggeriert hat, deren Antworten uns dem Verständnis der komplexen Welt ein Stück näherbringen.

Abgrenzung und Fokus

Im Band 66 der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Zeitschrift wurde bereits ein Artikel vom Autor zum Thema „Chaos und Fraktale“ veröffentlicht. Der Beitrag liegt nur als Printausgabe vor.¹⁹ Eine Veröffentlichung im Internet war in der wissenschaftlichen Gesellschaft damals noch nicht üblich. Er führt relativ einfach und elementar zu den zentralen Begriffen, Definitionen und mathematischen Beziehungen des Themengebiets. Hauptfokus sind allerdings

¹⁷ Siegfried Großmann, Selbstähnlichkeit: Das Strukturgesetz im und vor dem Chaos, in: Physikalische Blätter 45 (1989), S. 172-80

¹⁸ Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, S. 426

¹⁹ Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 66, Gießen 2016, W. Kafitz, Die Natur denkt fraktal, S. 7-37

die Anwendungen der fraktalen Geometrie auf die Skalengesetze in der Natur. Dies drückt sich im Titel des Beitrags aus: „Die Natur denkt fraktal.“ Wichtige Erkenntnisse bei landlebenden Säugetieren haben dazu der Gießener Forscher Manfred Sernetz und sein Team in der Veterinärmedizin beigesteuert.²⁰ Dies war der eigentliche Impuls für den genannten Artikel. Die US-Biologen und Physiker Geoffrey B. West, James S. Brown und Brian J. Enquist haben dann mit „vernünftigen“, logischen Grundannahmen ein einheitliches Skalengesetz in der gesamten belebten Natur postuliert.²¹ Egal ob Bronchien, Blutkreislauf, Nierenfunktion, Tracheen der Insekten oder Xylem und Phloem bei Gefäßpflanzen scheint bei allen Lebewesen unabhängig von der Größe und bei allen physiologisch relevanten Strukturen der Lebensprozesse ein universelles Skalengesetz zu gelten. Die sogenannte fraktale Dimension d beträgt aufgrund der sinnvollen Postulate der drei amerikanischen Forscher offenbar immer ca. $d=2,25$. D.h. scheinbar linear aufgebaute Strukturen, wie fast beliebig klein verästelte Blutgefäße oder der Wassertransport von den Wurzeln zu den Blättern in Bäumen, bilden insgesamt eine Struktur, die zwischen der euklidischen Dimension einer Fläche und einem räumlichen Objekt liegt.

Bei dem vorliegenden Beitrag soll vor allem die Sicht der Mathematik und Informatik, aber nicht noch einmal die der Biologie berücksichtigt werden. Die Skalengesetze in der Biologie, deren scheinbar widersprüchliche „Allometrie“²² nur durch fraktale Überlegungen aufgelöst werden kann, sollen hier nicht wieder adressiert werden, so wichtig sie auch sind. Auch das damals behandelte Lindenmayer-System wird hier ausgeklammert. Gleiches gilt für künstlerische Werke (z.B. Maurits Cornelis Escher oder Jackson Pollock). M.C. Escher hatte für sein mathematisch inspiriertes Werk mit dem US-amerikanischen Gruppentheoretiker H.S.M. Coxeter korrespondiert. Beispiele aus der belebten oder unbelebten Natur können zwar hilfreich sein, der Schwerpunkt soll aber in der Mathematik, Informatik und begrenzt auch in der Physik liegen. Andererseits sollen auch philosophische oder erkenntnistheoretische Aspekte nicht zu kurz kommen. Dazu sollte das letzte Kapitel schon einen einführenden Beitrag leisten. Insbesondere die enge Beziehung zwischen Chaos und Fraktalen und ihre Auswirkung auf das, was wir Erkenntnis nennen, ist dabei wichtig.

Mit dem Begriff „Chaostheorie“ wird, wie gesagt, manchmal „Schindluder“ getrieben. Man muss sich deshalb in einem seriösen Beitrag strikt auf

²⁰ Sernetz, Manfred; Fraktale biologische Strukturen: Chaos und Ordnung im Organismus, Berichte der Justus-Liebig-Gesellschaft, Gießen 2001

²¹ Geoffrey B. West, James H. Brown, Brian J. Enquist, A General Model for the Origin of Allometric Scaling Laws in Biology, SCIENCE, VOL. 276, 4th APRIL 1997, Seite 122-126

²² Siehe z.B. <https://www.spektrum.de/lexikon/biologie/allometrie/2273>

wissenschaftliche Prinzipien beschränken. Der in der Universität de Lausanne (Schweiz) arbeitende Wissenschaftsphilosoph Michael Esfeld hat es in einem Beitrag auf den Punkt gebracht:²³ Vor allem gilt:

„Es gibt keine alternativen Fakten.“

Die einzige wissenschaftliche Erkenntnistheorie ist der Realismus. Andere Sichtweisen führen zu heillosen Inkonsistenzen und Widersprüchen. Entweder man akzeptiert Realismus ganz oder gar nicht. Deterministisches Chaos hat nichts Geheimnisvolles oder Mystisches.

Insbesondere für das Thema „Chaos und Fraktale“ ist es wichtig, dass ein (physikalisches) Gesetz nicht unbedingt universell sein muss. Meist haben wir nur unvollständiges Wissen über den Zustand eines komplexen Systems. Aber auch dann muss die Theorie überprüfbare Aussagen machen können.

Man muss deshalb nach „Ordnung im Chaos“ suchen.

Warum sind bei der Chaostheorie universelle Gesetze nicht unbedingt das Maß aller Dinge? Es ist schön, universelle Gesetze zu haben, aber man muss sie hier leider auf ein Gebiet anwenden, in dem zwar die „Universalität“ in bestimmten Grenzen durchaus vorkommt (Stichwort Feigenbaum-Konstante). Aber sonst ist sie nicht immer gegeben, wird ggfs. auch nicht benötigt und bringt damit keinen zusätzlichen Nutzen. Esfeld nennt sie sogar „nutzlos“, wenn man sie nicht auf ein Teilsystem anwenden kann. Trotzdem wird sich zeigen, dass sich im chaotischen Verhalten Universalität finden lässt. Mathematisch lassen sich dabei viele Aspekte fassen; physikalisch sind uns Grenzen gesetzt, weil wir z.B. die Anfangsbedingungen der (kosmischen) Vergangenheit nicht gut genug kennen. Aber auch beim deterministischen Chaos oder bei der vollständigen Isolierung eines Quantensystems sind uns nicht nur praktische Grenzen gesetzt. Die Natur bzw. die Berechenbarkeit (Turing, Chaitin) selbst setzt heute gewisse Grenzen. Diese sollten nicht immer auch prinzipielle Grenzen der Erkenntnis sein. Insbesondere die Physik tut gut daran, diese Grenzen ständig zu hinterfragen und möglichst zu verschieben.

Realismus ist insbesondere nicht Empirismus. Es geht bei der Chaostheorie nicht um die Trennung zwischen Beobachtbarem und nicht Beobachtbarem. Diese Grenze wird heute laufend überschritten bzw. verschoben. Noch willkürlicher wäre der radikale Konstruktivismus, der postuliert, dass sich die Menschen erst ihre eigene Realität durch eigene Erfahrungen, Beobachtungen und entsprechende individuelle Interpretationen selbst konstruieren. Auch diese Haltung ist (nicht nur) bei deterministischem Chaos fehl am Platze.

²³ Spektrum der Wissenschaft Spezial 2-2018, S. 71-76

Fraktale – Abgrenzung und Beispiele

Die folg. Tabelle (Abb. 4) zeigt Unterschiede zwischen euklidischer und fraktaler Geometrie auf. Es gibt aber auch wichtige Gemeinsamkeiten. So beschränkt sich auch die fraktale Geometrie auf Teilmengen metrischer Räume, auch wenn der Abstandsbegriff nicht unbedingt euklidisch definiert sein muss. In der fraktalen Geometrie werden deshalb durchaus altbekannte Eigenschaften studiert. Dazu gehören Cauchy-Folgen, Grenzwerte, Fixpunkte, offene und

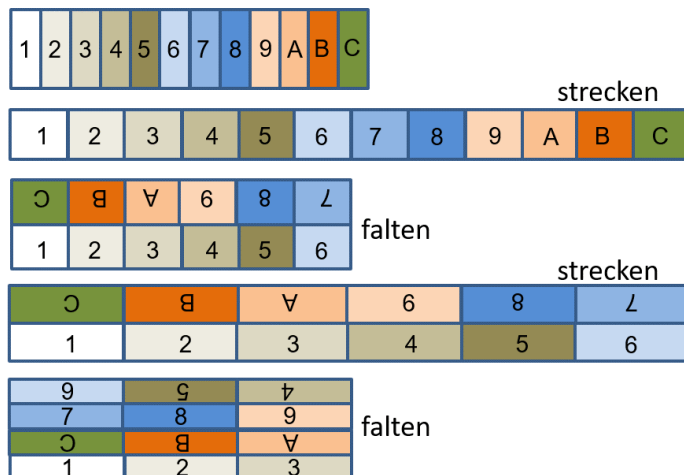


Abb. 3: Strecken und falten bei 12 virtuellen „Teigstücken“ als „chaotischer“ Vorgang. (Prinzip Bäcker-Transformation, invertierbar)

abgeschlossene Mengen, Kompaktheit oder auch (perfekte) Mengen und (vollständige) metrische Räume u.v.m. Insbesondere die topologischen Eigenschaften sind bezüglich der Äquivalenz metrischer Räume invariant, d.h. sie sind auch invariant gegenüber Homöomorphismen. Im vorliegenden Beitrag werden diese wesentlichen Begriffe nicht in voller Tiefe und mathematischer Strenge vorausgesetzt und oft nur für

das prinzipielle Verständnis heuristisch definiert bzw. begründet. Mit dem bereits eingeführten Begriff des deterministischen Chaos wurde ein Weg aufgezeigt, wie wahre Aussagen über ein sich chaotisch verhaltendes System gemacht werden können, also wo „Ordnung im Chaos“ herrscht.

Es sind oft zumindest Aussagen möglich, wohin sich ein System durch fortgesetzte Rückkopplung („Orbit“) entwickelt. Man nennt einen solchen Phasenraum „Attraktor“, im einfachsten Fall ist es ein Fixpunkt oder Periodizität. In der fraktalen Geometrie kann man, im Sinne des letzten Abschnitts, auf etablierte Begriffe zurückgreifen. Darüber hinaus finden sich Gesetzmäßigkeiten und sogar universelle Konstanten in der Theorie. Es gibt also durchaus Ordnung im Chaos und bedingt Universalität, also übertragbare Regeln.

Dabei muss immer klar sein, dass es im deterministischen Chaos keine Zufälle gibt, es gibt lediglich in vielen Fällen durch die Nichtlinearität zwangsläufig Effekte, durch die sich bei beliebig nahe bei einander liegenden Ausgangswerten nach genügend vielen Iterationen die Zielwerte nicht vorhersehbar auseinander entwickeln können.

Der Meteorologe Edward Lorenz hat in einem berühmten Vortrag Ende 1972 die Frage gestellt und bejaht, ob ein Schmetterlingsflügelschlag in Brasilien einen Tornado in Texas auslösen kann.²⁴ Im doppelten Sinn wird ein solches Phänomen als Schmetterlingseffekt bezeichnet. So muss z.B. jeder Computer, ob Taschenrechner oder Großrechner, nach mehr oder weniger vielen Stellen runden. Schon allein deshalb sind etwa einer mittel- oder gar langfristigen Wettervorhersage Grenzen gesetzt. Die Fehler der Gittermodelle werden ständig verstärkt.

Dies ist nur ein, wenn auch prominentes Beispiel. Es ist aber kein Gegenargument. Nach mehr als einem halben Jahrhundert wird zunehmend deutlich, dass die Chaosforschung gemäß den bisherigen Ausführungen „echte“ Wissenschaft ist. Und zwar in dem Sinne, dass es ein theoretisches Fundament gibt, so dass über (z.B. digitale) Methoden experimentell geforscht werden kann und dass dann Vorhersagen gemacht werden können, mit denen Theorien verifiziert oder falsifiziert werden können. Chaos widersetzt sich keineswegs einem tieferen Verständnis. Es findet sich tatsächlich Ordnung im Chaos oder besser formuliert, man kann erstaunliche, oft auch ästhetisch wunderschöne Strukturen in nichtlinearen dynamischen („chaotischen“) Systemen finden. Der vorliegende Beitrag versucht dies zu vermitteln, kann aber nur einige grundsätzliche und trotzdem unvollständige Themen aus diesem mächtigen

| Grundlegende Unterschiede zwischen der euklidischen Geometrie und der fraktalen Geometrie | |
|---|--|
| Euklidisch | Fraktal |
| Traditionell (über 2.000 Jahre alt) | Modern (ca. 70 Jahre alt) |
| Ganzzahlige Dimension | Fraktale (gebrochene) Dimension |
| Beschäftigt sich mit vom Menschen erzeugten Gegenständen | Geeignet für natürlich vorkommende Formen |
| Wird unter Verwendung von Formeln beschrieben | Wird unter Verwendung rekursiver Algorithmen (Iteration) beschrieben |

Abb. 4: Euklidische versus fraktale Geometrie

Gebiet ansprechen.

Im Folgenden sollen einige Grundbegriffe aus der Chaostheorie erläutert werden. Eng verbunden mit dem Begriff „Chaos“ ist die fraktale Geometrie, mit der begonnen wird. Mittlerweile gibt es neben fragwürdigen Webseiten, Druckerzeugnissen und sogar Spielfilmen eine Fülle von seriösen

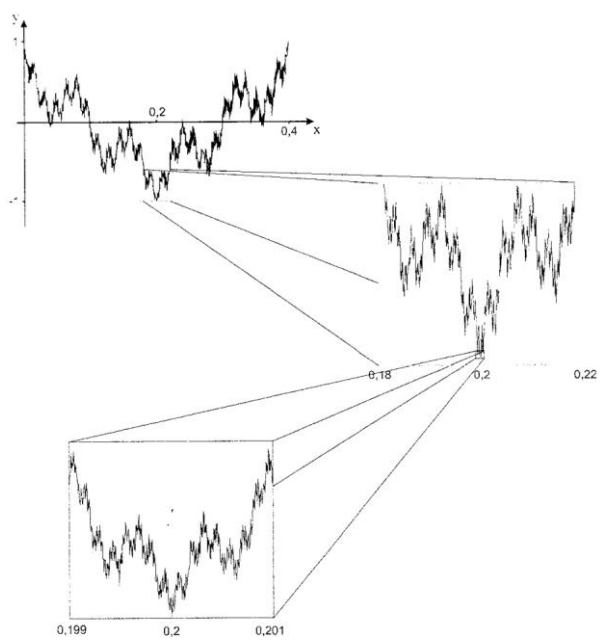
²⁴ Edward N. Lorenz, Predictability: Does the Flap of a butterfly's wings in Brazil set off a Tornado in Texas?
American Association for the Advancement of Science, 139th Meeting, New York, December 29, 1972

populärwissenschaftlichen Publikationen und anspruchsvolle Fachliteratur. Computer ermöglichen mit teilweise gigantischem Rechenaufwand faszinierende Bilder und Zoom-Videos von Fraktalen.

Weierstraßsche Monsterkurve

Vorweg sollen einige Beispiele insbesondere zeigen, dass der euklidische Dimensionsbegriff erweitert werden muss. Begonnen wird mit zwei Beispielen, die sich nur „widerspenstig“ unter die Fraktale subsummieren lassen, insbesondere wie sie der Erfinder der Wortschöpfung gemeint hat: Der „Weierstraßschen Monsterkurve“ und der Cantor-Funktion, die allgemein unter dem Namen „Teufelstreppe“ bekannt ist.

Nach vielfältigen Vorüberlegungen, auch von anderen Forschern, prägte Benoit Mandelbrot im Jahr 1975 den zentralen Begriff „fraktal“ bzw. „Fraktal“ (von lateinisch *fractus*, gebrochen) als Adjektiv und als Substantiv. Er bezieht sich auf die Tatsache, dass viele Strukturen dem klassischen, euklidischen Dimensionsbegriff $d_{E(\text{uklid})}$ nicht gerecht werden. Danach hat ein Punkt die euklidische Dimension $d_E=0$, eine Linie die Dimension $d_E=1$, Fläche $d_E=2$ und eine räumliche Struktur $d_E=3$. In der Mathematik kamen entsprechende ungewöhnliche mathematische Objekte Ende des 18. Jahrhunderts auf und erhielten zunächst die Bezeichnung „Monsterkurven“. Allerdings war der Begriff auf alle „pathologischen“ Strukturen gemünzt, also nicht nur auf Punktfolgen, wie z.B. Cantor-Staub oder raumfüllende, spiegelsymmetrische oder punktsymmetrische Kurven (z.B. Hilbert-Kurve, Peano-Kurve). So hat Karl Weierstraß zur Verblüffung der Fachwelt 1875 eine reellwertige Funktion veröffentlicht, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist.



veröffentlicht, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist. Sie lässt sich in einer Formel ausdrücken. Zuerst wurden diese „Monster-Kurven“ nicht zu den Fraktalen gezählt. Es gibt aber einige Argumente, wieso man diese Abgrenzung hinterfragen kann. Der Autor des entsprechenden Wikipedia - Artikels bezeichnet jedenfalls den Funktionsgraphen als eine

Abb. 5: Weierstraßsche Monsterkurve

der ersten fraktalen Kurven.²⁵ Man beachte auch das Zitat von Paul du Bois-Reymond.

$$f(t) := \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(\pi a^n t)$$

Bereits um 1830 hatte Bernhard Bolzano ebenfalls eine entsprechende, allerdings abschnittsweise definierte Funktion, gefunden.²⁶ Sie ist nirgends differenzierbar außer für eine Menge mit dem Maß 0. Das vollständige Manuskript galt als verschollen und wurde erst nach dem 1. Weltkrieg von dem tschechischen Mathematiker Martin Jasek in der Nationalbibliothek Wien entdeckt.²⁷

Cantor-Funktion oder Teufelstreppe

Eine Konstruktion, die auf der Cantor-Menge basiert, ist die sogenannte Teufelstreppe oder Cantor-Funktion. Sie entsteht, wie viele Fraktale, durch

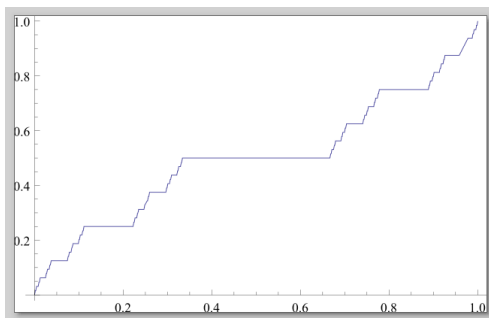


Abb. 6: Bildungsprinzip der „Teufelstreppe“ nach 10 Iterationen

Iteration, also rekursiv, im Gegensatz zur Weierstraßschen Kurve. Die Hausdorff-Dimension sollte analog zur Cantor-Menge $\frac{\log 2}{\log 3}$ sein. Die englische Wikipedia-Seite schreibt dazu: *We may define the Cantor function alternatively as the D-dimensional volume of sections of the Cantor set.* Sie ist in unendlich vielen Teilintervallen differenzierbar (abzüglich der „Knicke“). Man kann sie mit drei Kreisen vom Durchmesser $1/3$ überdecken (siehe Lebesgue-Überdeckungsdimension). Man

darf sie wohl trotz einiger Gegenargumente zu den Fraktalen zählen. Betrachtet man den Grenzfall, so ist der Graph so lang wie Höhe plus Breite zusammen; genauer: die schrägen Stücke addieren sich zur Höhe der Figur und die waagrechten Stücke zur Breite. Trotz der beliebig kleinen Treppenstufen hat die fraktale Figur also eine endliche Länge.

In der Mathematik, wie auch in der belebten wie unbelebten Natur oder vielen Anwendungsbereichen, wird gerne die Selbstähnlichkeit als Kriterium genannt.

²⁵ <https://de.wikipedia.org/wiki/Weierstraß-Funktion>

²⁶ <https://de.wikipedia.org/wiki/Bolzano-Funktion>

²⁷ Siehe Binimelis Bassa, Maria Isabel; *Fraktale Geometrie*, Für die deutsche Ausgabe: Librero, Kerkdriel (Niederlande), 2017, S. 98, M. Jasek, „Über den wissenschaftlichen Nachlass Bernhard Bolzanos,“ *Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung* 31 (1922), 109–110.

Doch auch einfache geometrische Strukturen, wie ein Parallelogramm, Quadrat, Würfel oder sogar Strecken sind selbstähnlich. Die DIN Ax Formate sind selbstähnlich mit dem Verkleinerungsfaktor $\sqrt{2}$. Die Norm adressiert $x=0$ (1 m^2), $x=1, 2, 3, 4, 5$ bis $x=6$ (Postkartenformat).

Auch der Goldene Schnitt erzeugt selbstähnliche Proportionen, denn die ganze Strecke verhält sich zum größeren Teil wie der größere Teil zur kleineren Teilstrecke. In diesen Strukturen ist die Dimension euklidisch; es liegt keine gebrochene Dimension vor. In der Literatur wird genau diese Dimension, die in der Regel keine ganze Zahl sein muss, aber meist größer als die euklidische Dimension ist, als das entscheidende Kriterien genannt, was ein Objekt zu einem Fraktal werden lässt. Allerdings zeigt das Bildungsprinzip der Teufelstreppe, dass die rekursive Abbildung zum nächsten Iterationsschritt nicht ähnlich, sondern nur affin ist. Die ganze Figur ist also nicht selbstähnlich, sondern nur selbst-affin.

Cantor-Menge²⁸

Die Cantor-Menge²⁹ entsteht, wenn man von einer Strecke (der Einfachheit

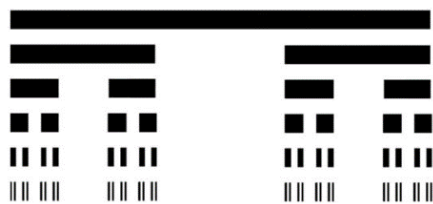


Abb. 7: Die ersten fünf Iterationen der Cantor-Menge

halber am Anfang der Länge 1, hier rechts halboffen definiert) jeweils das mittlere Drittel entfernt und diesen Vorgang beliebig oft wiederholt. Es bleiben unendlich viele Punkte übrig (die noch dazu nicht abzählbar sind, also nicht mit natürlichen Zahlen durchnummeriert werden können.)

Es soll nun berechnet werden, wieviel von der ursprünglichen Strecke entfernt wurde. Dieser Wert habe die Länge L.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{3} + 2 \frac{1}{9} + 4 \frac{1}{27} + \dots \\ &= \frac{1}{3} + 2 \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4 \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

²⁸ Erste Passage ist Auszug aus Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Kafitz, Die Natur denkt fraktal, Band 66, Gießen 2016, S. 17

²⁹ Cantor-Staub kann man als Synonym für nichtabzählbare Punktmengen verwenden. Nach dem Moore-Kline Theorem ist jeder Cantor-Raum homöomorph zu der Mitteldrittel Cantor Menge

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}}$$

$$= 1$$

Die ersten 3 Zeilen sind einfache Umformungen. Nur die 4. Zeile verwendet die Formel einer konvergenten unendlichen geometrischen Reihe.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = \frac{a_0}{1-x} \text{ für } |x| < 1 \text{ wenn } \frac{a_0 x^{n+1}}{a_0 x^n} = \text{konstant}$$

Hier ist: $a_0 = 1, \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{2}{3}$

Man erkennt, dass die entfernte Länge L so lang ist wie die ursprüngliche Strecke, also 1. Man hat also „alles“ entfernt und trotzdem bleiben (nicht abzählbar) unendlich viele Punkte übrig. Die Cantor-Menge müsste demnach die euklidische Dimension 0 haben.

Man kann zeigen³⁰, dass die Cantor-Menge die Hausdorff-Dimension D_H hat

$$D_H = \frac{\log 2}{\log 3} = \log_3(2) \approx 0,6309 \dots$$

Nach Hausdorff liegt also die Dimension des auch Cantor-Staub genannten Gebildes/Punktmenge sogar etwas näher an der euklidischen Dimension einer Linie. Auf jeden Fall ist sie eine gebrochene Zahl. Die Cantor-Menge ist geradezu ein klassisches Fraktal.

Es fällt auf, dass die Verteilung der Punkte mit der Zahl 3, genauer mit Potenzen

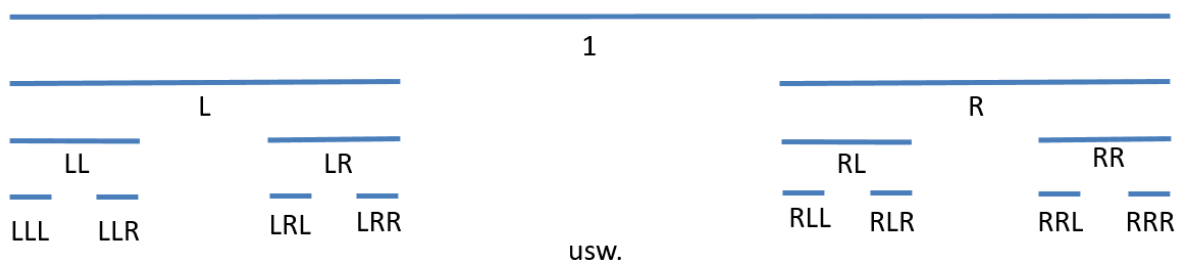


Abb. 8: Bildungsprinzip eines ungeeigneten Bezeichnungssystems für die Cantor-Menge

von $1/3$, korreliert. Es ist also eine triadische Sicht auf die Cantor-Menge möglich, bei der nur die Zahlen 0 und 2 vorkommen. Ist jeder Punkt der Menge Endpunkt, der durch immer kürzer werdenden Striche oder Intervalle? Diese Vermutung ist falsch! Man könnte die Punkte dann durchnummerieren, d.h. die

³⁰ Zum Beweis siehe z.B. https://metaphor.ethz.ch/x/2018/fs/401-2284-00L/ex/serie6_lsg.pdf, S.4

Menge wäre „nur“ abzählbar unendlich. Wie kann man das plausibel zeigen? Man braucht ein Bezeichnungssystem für die Intervalle und untersucht die Grenzwertbildung.

Folgende Abb. 8 zeigt das Bildungsprinzip, L steht für links, R für rechts.

Es wird deutlich, dass je länger die Adresse wird, umso kleiner wird das Intervall im Iterationsprozess. Die Adresse ist aber immer noch endlich. Für einen Punkt müsste man eine unendlich lange Adresse haben. Irgendwann hat man aber nach einem L unendlich viele R oder umgekehrt: Z.B....LRRRRRRR... . Das muss man aber schreiben als ...L \bar{R} (gesprochen Links-Rechts-Periode). Man könnte nun, um zu einer binären Darstellung zu kommen, L= 0 und R=1 setzen. Man betrachte nun den Punkt 1/3. Er wird durch L \bar{R} dargestellt, was der Binärzahl 0,0 $\bar{1}$ entspricht, die aber gleich 0,1 ist. Aber zurück übersetzt hat 1/3=0,1 die Adresse R \bar{L} und das ist die Adresse des Punktes 2/3.

Das ist ein Widerspruch. Unendliche Zwei-Buchstaben-Adressen können also nicht mit binären Zahlen gleichgesetzt werden. Nicht binäre Zahlen, sondern eine triadische (3-adische) Darstellung aus Nullen und Zweien charakterisiert die Cantor-Menge und sie lässt sich elegant mit Hilfe der 3-adischen Entwicklung reeller Zahlen darstellen. (Man kann aber auch leicht eine bijektive Zuordnung der Punkte über „0-1-Folgen“ finden). Damit ist eine bijektive Abbildung zwischen den Punkten der Cantor-Menge und dem Intervall [0,1] möglich. Dies ist aber gleichmächtig zu \mathbb{R} . Die Cantor-Menge C ist somit nicht abzählbar, da C die Mächtigkeit von \mathbb{R} hat ($|\mathbb{R}|=|C|$).³¹

Ist die Cantor-Menge selbstähnlich? Dies ist sehr leicht über eine Grafik zu verdeutlichen (s.u.):

Nimmt man z.B. ab der ersten Iteration zwei um einen Faktor 1/3 verkleinerte Kopien und vereinigt diese, so erhält man wieder die ganze Cantor-Menge. Dies

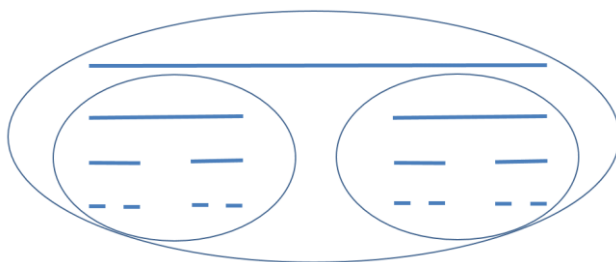


Abb. 9: Cantor-Menge als Vereinigung exakter, verkleinerter Kopien.

kann man leicht auf die N-te Iteration übertragen. Man erhält 2N Kopien, die um den Faktor $\frac{1}{3^N}$ verkleinert sind und vereinigt diese Mengen. Ursprünglich wurde die Entdeckung von Georg Cantor als mathematisches Kuriosum ohne konkreten Wert und Anwendungsbezug

eingestuft. Die Cantor-Menge tauchte aber mit der Zeit an vielen, oft unerwarteten Stellen, auf. Im vorliegenden Beitrag ist z.B. erwähnt, dass ein Schnitt durch den Hénon-Attraktor isomorph zu der Cantor-Menge ist. Weiterhin

³¹ Vergleiche Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S. 92f

ist die Cantor-Menge eine Lebesgue Nullmenge (s.u.). Sie ist ein Diskontinuum, also total unzusammenhängend und nirgends dicht. Bekanntlich gilt: Jede nichtleere offene Menge U enthält ein Intervall positiver Länge.³² Die Cantor-Menge C ist aber abgeschlossen. Deshalb gilt diese Aussage nicht für C . Sie besteht nur aus Randpunkten, denn das Innere ist leer. In einem früheren Beitrag des Autors wurde auch verdeutlicht, dass die Cantor-Menge homöomorph zu den ganzen p -adischen Zahlen ist.³³

Konsequenzen aus der triadischen Darstellung der Cantor-Menge:³⁴

Man vergegenwärtige sich noch einmal das Bildungsprinzip der Cantor-Menge und denke in triadischen, also 3-adischen oder Ternärzahlen. Man starte wieder mit dem halboffenen Intervall $[0,1[$ und streiche bei der ersten Iteration das halboffene Intervall $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$. Es gilt aber $\frac{1}{3} = (0,1)_3$ und $\frac{2}{3} = (0,2)_3$

Daraus folgt, dass alle Zahlen des gestrichenen Intervalls mit 0,1 beginnen. In den nächsten Iterationen muss man die weiteren Stellen hinter dem Komma betrachten. O.B.d.A. siehe das offene Intervall $[0, \frac{1}{3}[$. Alle Zahlen in diesem Intervall beginnen mit einer 0 hinter dem Komma. Den Dezimalbrüchen $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}$ und $\frac{1}{3}$ entsprechen die Ternärzahlen $(0,01)_3, (0,02)_3$ und $(0,1)_3$. Für die verbleibenden Intervalle $[0, \frac{1}{9}[$ und $[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}[$ gilt, dass sie in Ternärdarstellung an erster und zweiter Stelle nur die Ziffern 0 und 2, aber keine 1 haben.

Nach n Iterationen bzw. Streichungen ergibt sich:

- (a) Jede Zahl in den gestrichenen Abschnitten enthält irgendwo eine 1 in ihrer Ternärdarstellung.
- (b) Die nach n Iterationen verbliebenen Zahlen enthalten in den ersten n Stellen nur die Ziffern 0 und 2, aber keine 1.

Das gilt auch nach Grenzwertbildung für $n \rightarrow \infty$: Die gestrichenen Zahlen enthalten Einsen; die verbliebenen Zahlen, nennen wir sie Cantor-Zahlen, enthalten nur die Ziffern 0 und 2. Sie sind den Punkten des Cantor-Staubs bijektiv zugeordnet.

Aus diesen Überlegungen heraus lässt sich eine Vorstellung entwickeln, wie dicht (bzw. dünn) der Cantor-Staub verteilt ist. Es lässt sich nämlich zeigen, dass ein zufällig auf den Cantor-Staub abgeschossener Pfeil mit der Wahrscheinlichkeit 0 einen Punkt der Menge trifft. Oder anders formuliert,

³² d.h., es gibt $a < b$ mit $]a, b[\subseteq U$

³³ Kafitz, W., ZAHLEN-Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung des Zahlbegriffes, <http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-8380>

³⁴ Vergleiche Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 68 und 69

dass die Wahrscheinlichkeit 0 ist, dass eine willkürlich aus dem Intervall $[0,1[$ „erwischte“ Zahl M in Ternärdarstellung keine 1 enthält.

M habe m Stellen nach dem Komma, auf die die drei Ziffern 0,1,2 verteilt werden können. Das ergibt 3^m mögliche Fälle. Man sieht leicht

Z.B. $m=2$:
0,00 0,10 0,20
0,01 0,11 0,21
0,02 0,12 0,22

Die Anzahl der auftretenden Fälle ohne die Ziffer 1 beträgt 2^m , nämlich bei

$m=2$:
0,00 0,20
0,02 0,22

Die relative Häufigkeit für das Treffen einer Cantor-Zahl ist somit $\left(\frac{2}{3}\right)^m$ und nach Grenzwertbildung

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^m = 0$$

Die Dimension der 3-adischen Cantor-Menge (C_3) ist, wie gesehen,

$$D_{H(C_3)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} = \ln_3(2) \approx 0,6309 \dots$$

Wir wollen jetzt zur 5-adischen Menge übergehen.³⁵ Nennen wir sie C_5 . Dabei wird das halboffene Einheitsintervall in fünf Teile zerlegt und jeweils die beiden mittleren, halboffenen Teile gestrichen. Übrig bleiben nun drei halboffene Strecken, mit denen iterativ analog zur Cantor-Menge C_3 vorgegangen wird.

Da wegen $\frac{2}{5} > \frac{1}{3}$ ist und diese Ungleichung auch bei fortgesetzter Iteration und damit Streichungen offenbar gültig bleibt, scheint also der C_5 -Cantor-Staub „dünner“ verteilt zu sein als der C_3 -Cantor-Staub. Wie ist nun die Hausdorff-Dimension von C_5 ?

$$D_{H(C_5)} = \frac{\ln 3}{\ln 5} = 0,6826 \dots$$

Man sieht, der „Staub“ wird zwar „dünner“, aber die Dimension wächst. Bei allen C_n , n ungerade, wird sich die Situation entsprechend entwickeln.

Wie sieht es bei geradem n aus? Bei $n=2$ ist der Fall trivial, denn nimmt man nur jeweils das rechte, halboffene Intervall weg, so bleibt im Grenzfall nur die 0 als einziger Punkt übrig.

³⁵ Vergleiche teilweise wörtlich Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 73 und 74

Für $n=4$ streicht man exemplarisch das rechte, halboffene Intervall, sowie die Mitte des Restes. Es bleibt $[0, \frac{1}{4}[\cup [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ übrig. Man geht nun zu den 4-adischen Zahlen über mit $\frac{1}{4} = (0,1)_4, \frac{1}{2} = (0,2)_4, \frac{3}{4} = (0,3)_4$

Die 2. Iteration kann man sich am Intervall $[(0,0);(0,1)_4[$ verdeutlichen. Es werden die Intervalle $[0,01;0,02[$ und $[0,03;0,1[$ gestrichen. Es sind Zahlen, die in der 4-adischen Darstellung eine 1 oder 3 hinter dem Komma haben.

Führt man iterativ nach dieser Methode fort, so sieht man, dass immer Zahlen übrigbleiben, die nach der n -ten Iteration nur die Ziffern 0 und 2 enthalten und das gilt auch für die Grenzwertbildung. Der Streckungsfaktor k ist gleich n . Die Zahl der Teilmengen von C_n ist jeweils $\frac{n}{2}$.

Die Selbstähnlichkeitsdimension $d = \frac{\ln \frac{n}{2}}{\ln n}$ für $n=2$ ist 0.

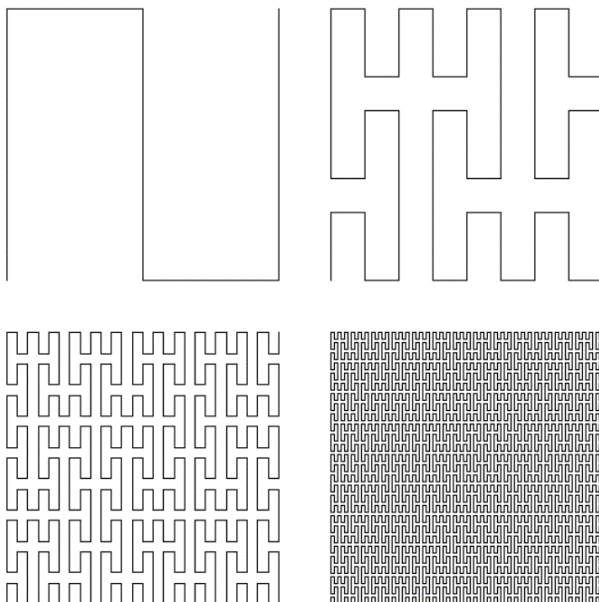
Für $n=4$ folgt: $d = \frac{\ln 2}{2 \ln 2} = \frac{1}{2}$

Für $n=2^n$ folgt: $d = \frac{\ln 2^{n-1}}{\ln 2^n} = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$. Grenzwertbildung $n \rightarrow \infty \Rightarrow d = 1$

Für ungerades n folgt die gleiche Argumentation. C_∞ hat also Liniencharakter.

Peano-, Gosper- und Hilbert-Kurve

Im nächsten Beispiel sollen zwei Kurven diskutiert werden, die zu einer flächendeckenden Punktmenge konvergieren. Sie sind wie die Cantor-Menge



iterativ definiert. Die erste wurde von Giuseppe Peano 1890 entdeckt und publiziert. Mathematisch ist die Kurve eine stetige, surjektive Abbildung des Einheitsintervalls in das Einheitsquadrat, also eine raumfüllende Kurve.³⁶ Man erinnere sich: Cantor hatte damit 1878 bewiesen, dass die Kardinalität (Anzahl der Elemente, Mächtigkeit) von $[0,1]$ gleich der Kardinalität von $[0,1]^2$, oder Räume höherer Dimension, ist. Wichtig ist hier die Surjektivität der Abbildung f . Es gibt zu jedem

Abb. 10: Peano-Kurve. Abgebildet sind die vier ersten Iterationsschritte.

³⁶ Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano

Punkt des Einheitsquadrates einen Punkt des Einheitsintervalls, der auf $z=f(x)$ abgebildet wird. Die Abbildung ist also kein Homöomorphismus, ist nicht stetig und kann damit ad hoc keine raumfüllende Kurve liefern. Über Zwischenschritte durch Betrachtungen zur Differenzierbarkeit kann man aber beweisen, dass die Peano-Kurve stetig ist.³⁷ Obwohl die Dimension nach unendlich vielen Iterationen die ganzzahlige Dimension 2 ergibt, muss die Peano-Kurve zu den Fraktalen gezählt werden. Sie ist punktsymmetrisch und ebenso wie die Cantor-Menge eine Menge von Punkten, aber gegenüber der euklidischen Dimension einer nulldimensionalen Punktmenge ist die Hausdorff-Dimension $D_H = \frac{\log 9}{\log 3} = 2$ sogar die einer Fläche.³⁸

Inspiziert von Peanos Publikation hat im gleichen Jahr David Hilbert, einer der

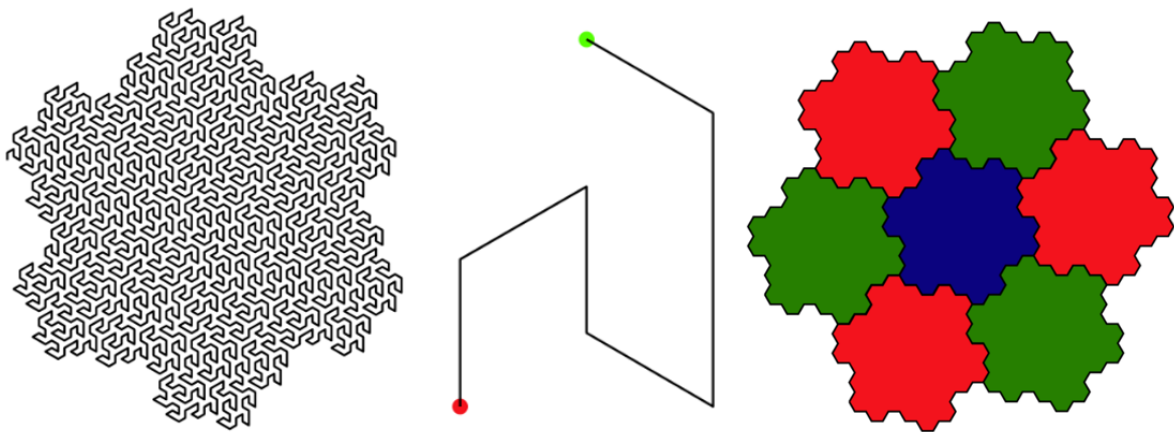


Abb. 11: a) Gosper-Kurve in der 4. Iterationsstufe,
b) Bildungsprinzip: Gerade Linie zwischen rotem und grünen Punkt wird durch Kurve der Stufe 1 ersetzt (Winkel 60° oder 120°)
c) Selbstähnliche Gosper-Inseln, Parkettierung der Ebene
d) Fraktale Dimension $D = \frac{2 \cdot \ln 3}{\ln 7} = 1,12915 \dots$

führenden Mathematiker jener Zeit, ebenfalls eine Konstruktionsvorschrift in einer nur zweiseitigen Publikation veröffentlicht. Im Gegensatz zu Peano handelt es sich aber um eine spiegelsymmetrische raumfüllende Kurve. Eigentlich präsentierte Hilbert das Ergebnis „*erstmal*s am 18. September 1890 während der vierten Abteilungssitzung für Mathematik und Astronomie auf der

³⁷ 1879 bewies der deutsche Mathematiker Eugen Netto, dass die bijektive Abbildung des Einheitsintervalls auf das Einheitsquadrat von Georg Cantor nicht stetig sein konnte.

³⁸ Siehe auch https://de.wikiversity.org/wiki/Topologie/Stetige_Abbildungen/Peano-Kurve/Beispiel

63. *Versammlung der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte in Bremen.*³⁹

Erst die Bitte von Felix Klein, der damals die mathematischen Annalen herausgab, führte zur Veröffentlichung für eine breite Leserschaft.

Auch die Hilbert-Kurve ist stetig, unterscheidet sich aber in den mathematischen Eigenschaften von der Peano-Kurve. Beides sind sogenannte FASS-Kurven („space-filling, self-avoiding, simple and self-similar). Ein weiteres bekanntes FASS-Beispiel ist die Gosper-Kurve.^{40,41,42} Peano- und Hilbert-Kurven sind auf

höhere Dimensionen verallgemeinerbar. Hilbert hat aber insbesondere das Grundsätzliche an diesen raumfüllenden Kurven betont. Entsprechend trägt Hilberts Publikation den Titel „*Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück.*“⁴³ Fachliteratur zu diesem Kapitel siehe auch⁴⁴.

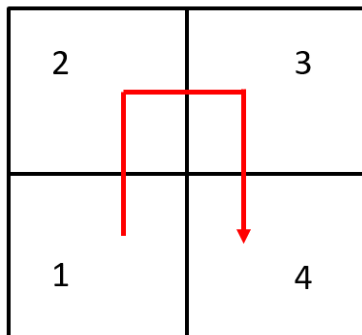


Abb. 12: Generator der Hilbert-Kurve.

Hilbert hat rein geometrisch argumentiert und ist über den Generator der Kurve vorgegangen.

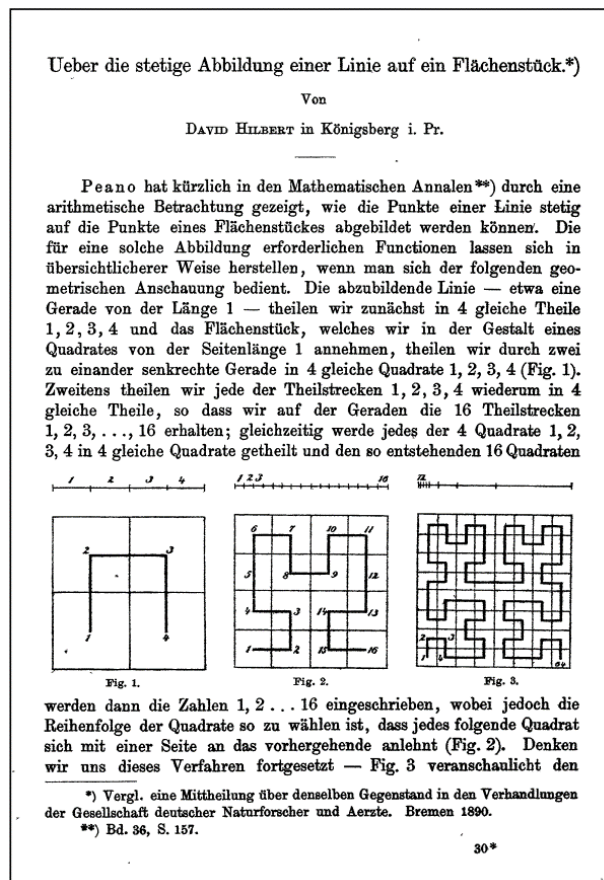


Abb. 13: Hilberts Originalpublikation aus dem Jahr 1890 (Seite 1 von 2).

³⁹ <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/sagan2.pdf>

⁴⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Gosper-Kurve>

⁴¹ Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, Basel, Boston, Birkhäuser 1987, Tafeln 83, 83, S. 82-83

⁴² <https://mathcurve.com/fractals/gosper/gosper.shtml>

⁴³ <https://terpconnect.umd.edu/~jmr/HonorsSem/Hilbert-orig.pdf>

⁴⁴ Für dieses Kapitel siehe auch ein Vorlesungsskript zu raumfüllenden Kurven <https://web.archive.org/web/20050317185150/http://www5.in.tum.de/lehre/vorlesungen/algowiss/ss04/vorlesung/rfk.pdf>

Ausgangspunkt ist ein Punkt im Intervall $I=[0,1]$ und das Quadrat $Q=[0,1]^2$. Zu jedem Punkt aus I gehört eine Intervallschachtelung, jedes Intervall entsteht dabei durch Viertelung des Vorhergehenden. Jedes Intervall kann man einer 2D-Intervallschachtelung zuordnen. Man muss dabei Nachbarschaftsrelationen und Teilmengenrelationen geschickt berücksichtigen, also z.B. Teilintervalle über Kanten jeweils benachbarter Teilquadrate zuordnen. So konvergiert im Grenzfall die Hilbert-Kurve zu einer Punktmenge, die im Einheitsquadrat dicht ist und über diese Konstruktion ist die „Kurve“ auch stetig.

Hilbert schreibt übrigens auf Seite 2 lapidar: *Die oben gefundenen abbildenden Funktionen sind zugleich einfache Beispiele für überall stetige und nirgends differenzierbare Funktionen.*

Ein Beweis dieser Aussage wurde aber offenbar erst 100 Jahre später, also 1991, von Hans Sagan veröffentlicht.⁴⁵

Auch dies ist nicht nur ein mathematisches Kuriosum. In der belebten Natur gibt es zahlreiche Beispiele, in denen lineare Systeme raumfüllende Strukturen bilden. Eingangs wurden bereits Blutgefäße, Bronchien, Nierenfunktion, Tracheen der Insekten oder Xylem und Ploem bei Stengelpflanzen und Bäumen erwähnt. Die Herausbildung entsprechender Strukturen ist geradezu eine Voraussetzung für das hochentwickelte Leben.

Dreiecksfraktal

Das Fraktal beginnt mit einem gleichseitigen Dreieck als Initiator. An jeder Ecke wird wieder ein verkleinertes gleichseitiges Dreieck Spitze an Spitze angehängt. Dieser Vorgang wird ad infinitum iteriert. Der Verkleinerungsfaktor oder Teilungsfaktor f zwischen der Seite des größeren Dreiecks und der Seite des kleineren Dreiecks soll dem Goldenen Schnitt Φ entsprechen.⁴⁶ Das Initiator-Dreieck habe die Seitenlänge 1. Die folgenden Dreiecke haben dann die Seitenlänge $f, f^2, f^3, f^4, f^5, f^6 \dots$ usw.

Gemäß der Definition des Goldenen Schnitts ist dann

$$\frac{1}{f} = \frac{1+f}{1} = \Phi$$

und somit

$$f = 1 - \Phi = \frac{1}{\Phi} \\ \approx 0,618033987 \dots$$

⁴⁵ Original: <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/sagan2.pdf>

⁴⁶ Roger Herz-Fischler: *A mathematical History of the Golden Ratio*. Dover Publications, Minneola (New York) 1998, S. 158, zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt#Dreiecksfraktal

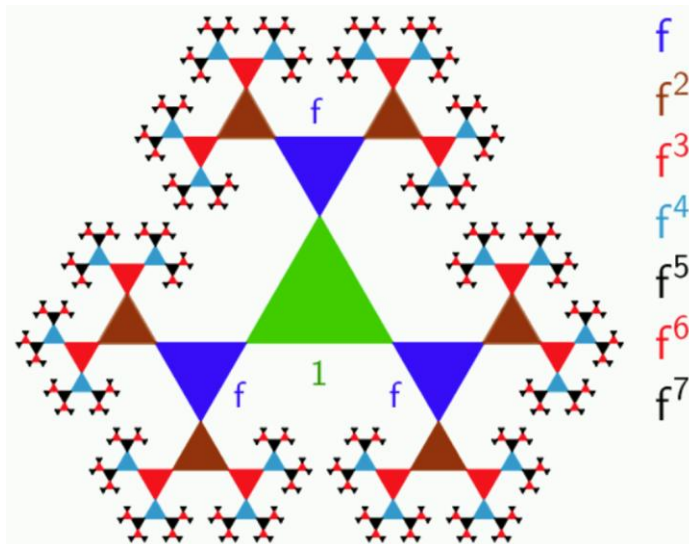


Abb. 14: Das Dreiecksfraktal nach sieben Iterationen

Interessant ist noch der Abstand, bei dem sich die entgegenkommenden Äste im Grenzfall berühren. Beutelspacher und Petri⁴⁷ ermittelten ihn über die kubische Gleichung

$$f^3 + 2f^2 - 1 = 0.$$

Deren einzige positive Lösung ist $f = \frac{1}{\phi}$.

Dieser Verkleinerungsfaktor ist also auch der Wert des optimalen Abstands, bei dem sich im Grenzfall die „Äste“ des Fraktals berühren und

nicht überlappen.⁴⁸

Cesàro-Kurven und verallgemeinerte Koch-Kurve

In keiner populärwissenschaftlichen Arbeit über Fraktale darf die Koch-Kurve oder Kochsche Schneeflocke fehlen. Sie wurde 1904 von dem schwedischen Mathematiker Helge von Koch vorgestellt, sofort zu den „Monsterkurven“ gezählt, aber durchaus schnell mathematisch untersucht. Sie ist überall stetig und nirgends differenzierbar. Die Fläche, die sie umschließt ist endlich, aber die Länge der Kurve divergiert. Der Initiator ist ein gleichseitiges Dreieck. In den weiteren Stufen kommen ebenfalls nur die Winkel 60° und 240° (zur Basislinie) vor. Die Hausdorff-Dimension ($\theta = 60^\circ$ oder $\pi/3$) beträgt $D = \frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,262 \dots$.

Weniger bekannt sind die bereits 1905 beschriebenen Verallgemeinerungen dieses Bildungsprinzips, die als Cesàro-Kurven bezeichnet werden (nach dem italienischen Mathematiker Ernesto Cesàro). Bei diesen Kurven kann der Winkel

⁴⁷ Albrecht Beutelspacher, Bernhard Petri: Der Goldene Schnitt. Spektrum, Heidelberg/Berlin/Oxford 1996, S. 74f

⁴⁸ Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt#Dreiecksfraktal

θ variieren. Eine gute Beschreibung findet man in⁴⁹. Entsprechend schwieriger ist die Bestimmung der fraktalen Dimension in Abhängigkeit von θ :

$$D_{\text{Cesàro}}(\theta) = \frac{\log 4}{\log(2(1 + \cos \theta))}$$

Für den Fall $\theta = \frac{5\pi}{18}$ wird $D \approx 1,165$. Für die Grenzfälle $\theta = 0$ und $\theta = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich $D=1$ (eindimensional) bzw. $D=2$ (zweidimensional). Mit wachsendem θ variiert die Dimension also zwischen Linie und Fläche.

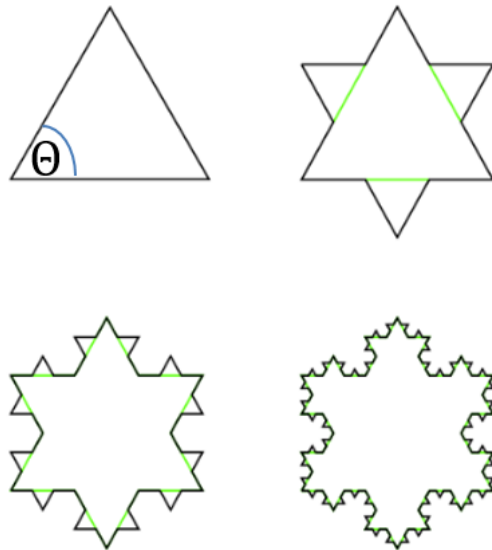


Abb. 15: Die ersten 4 Iterationen der Koch-Schneeflocke, $\theta=60^\circ$.

Viele planare (2D-)Fraktale lassen sich auf 3D verallgemeinern. Diese sind mit deutlich höherem Aufwand, aber trotzdem oft mit elementarer Mathematik berechenbar. Problem kann die auch mehrfache Flächendurchdringung sein, die die räumliche Vorstellungskraft stören kann. Vollkommen unanschaulich sind schnell noch höhere Dimensionen. Hier hilft nur die reine Mathematik.

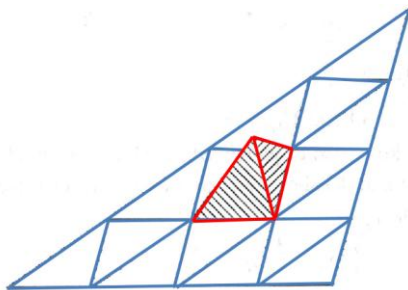


Abb. 16: Bildungsprinzip für eine dreidimensionale Kochfläche

Interessant sind die Koch-Flächen.⁵⁰ Es soll zunächst der Übergang von der planaren Form als Initiator in die dritte Dimension als Generator an einem gleichseitigen Dreieck demonstriert werden, das wiederum durch 16 gleichseitige Dreiecke gepflastert wird. Ein mittleres Dreieck D wird entfernt und stattdessen ein dreiseitiger Tetraeder als Generator eingesetzt. Die Fläche erhöht sich mit der Anzahl N an Dreiecken zu

$$N = 15 + 3 = 18$$

Die Dimension d erhöht sich auf $d = \frac{\ln 18}{\ln 4} = 2,0849 \dots$

⁴⁹ <https://quadsoft.org/fraktale/#x1-240003.3>

⁵⁰ Vergleiche teilweise wörtlich Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 99-102

Ein besonders schönes Beispiel ist die Koch-Schneeflocke als 3D-Fraktal. Allgemein gilt der Satz, dass sich zu jeder gegebenen rationalen Zahl d mit $2 \leq d \leq 3$ eine räumliche Koch-Fläche finden lässt, die eine entsprechende Dimension hat. Man beachte aber dabei die Selbstdurchdringungen, die als Fläche mitgezählt werden.

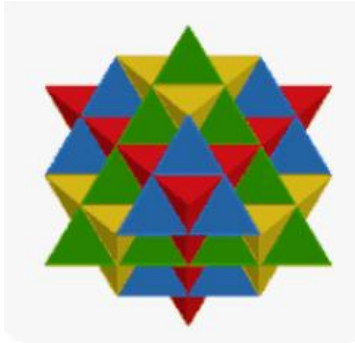


Abb. 17: räumlicher Koch-Stern.

Startfigur für den dreidimensionalen Koch-Stern oder Koch-Schneeflocke ist ein reguläres Tetraeder, o.B.d.A. mit der Kantenlänge $s=1$. Ziel ist, abhängig von der Iterationsstufe, die Bestimmung der Oberflächen O_i , die Anzahl der kongruenten Teilflächen N_i und die von den Oberflächen eingeschlossenen Volumina V_i .

Stufe 0:

Die Dreieckshöhe h ist $\frac{\sqrt{3}}{2}$, die Fläche $F = \frac{1}{2} \cdot s \cdot h = \frac{\sqrt{3}}{4}$. $O_0 = 4 \cdot F = \sqrt{3}$. $N_0=4$.

Stufe 1: $O_1 = O_0 - \frac{1}{4}O_0 + \frac{3}{4}O_0 = \frac{3}{2}O_0$, $N_1 = 6 \cdot N_0 = 24$, $V_1 = V_0 + N_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V_0 = V_0 + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot V_0 = \frac{3}{2}V_0$

Stufe 2: $O_2 = O_1 - \frac{1}{4}O_1 + \frac{3}{4}O_1 = \frac{3}{2}O_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \sqrt{3}$, $N_2 = 6 \cdot N_1 = 6^2 \cdot N_0 = 6^2 \cdot 4$
 $V_2 = V_1 \cdot N_1 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2 \cdot V_0 = V_0 + 4 \cdot V_0 \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 6 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^2\right)$

Durch Induktion folgt für die Iterationsstufe n :

$$O_n = \frac{3}{2} \cdot O_{n-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^n \sqrt{3}, N_n = 6^n \cdot 4, V_n = V_0 + \frac{2}{3}V_0 \left(-1 + \sum_{i=0}^n \left(6 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^3\right)^i\right)\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} O_n \rightarrow \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(V_0 \cdot \left(1 + \frac{2}{3}\right) \cdot \left(-1 + \frac{1}{1 - \frac{3}{4}}\right) \right) = 3 \cdot V_0 = \frac{1}{4} \sqrt{2}$$

Das ist genau das Volumen des umschriebenen Würfels mit der Seitenlänge $\frac{\sqrt{2}}{2}$, denn $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 = \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{8} = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Die Oberfläche geht dagegen gegen Unendlich.

Weitere Methoden um Fraktale zu generieren sind z.B. Iterierte Funktionen Systeme (IFS)⁵¹ oder das Lindenmayer-System.⁵²

⁵¹ Siehe z.B. https://en.wikipedia.org/wiki/Iterated_function_system

⁵² Siehe z.B. <https://de.wikipedia.org/wiki/Lindenmayer-System>, Przemysław Prusinkiewicz, Aristid Lindenmayer: The Algorithmic Beauty of Plants. Springer Verlag,

Sierpinski-Dreieck (englisch Gasket oder Triangle)

Als weiteres von vielen möglichen Beispielen für Fraktale soll das Sierpinski-Dreieck dienen. Es ist nach dem bedeutenden polnischen Mathematiker Waclaw Sierpinski benannt. Es existiert neben dem Dreieck ein analoges viereckiges Fraktal, als Sierpinski-Teppich bekannt. Auch entsprechende Strukturen im Dreidimensionalen gibt es (Sierpinski Tetraeder).

Der Fokus in diesem Abschnitt soll weniger auf den mathematischen Eigenschaften liegen, sondern in der Tatsache, dass die Struktur des Sierpinski-Dreiecks sich in einer Reihe von anderen Konstruktionsprinzipien widerspiegelt, an die man im ersten Moment nicht denken würde. Die erste Grafik soll zunächst das klassische Bildungsprinzip verdeutlichen.



Abb. 18: Die ersten Iterationen beim Sierpinski Dreieck

Das erste gleichseitige Dreieck wird Initiator genannt, die zweite Figur entsteht, in dem die Mittelpunkte der Seiten wieder ein gleichseitiges Dreieck bilden und diese Fläche entfernt wird. Dieses Bildungsprinzip heißt Generator und wird auf alle kleineren (schwarzen) Dreiecke angewendet. Ad infinitum entstehen nicht-abzählbar unendlich viele Punkte, die von dem Initiator-Dreieck überdeckt werden.

Die Rechnung, wieviel Fläche im Laufe der Iterationen entfällt, lässt sich analog zur Cantor-Menge erschließen. Das Initiator-Dreieck I_0 habe die Seitenlänge 1.

Es hat dann die Fläche $I_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} 1^2$. Jeder Iterationsschritt reduziert die Fläche um

$\frac{1}{4}$, der k-te Iterationsschritt führt zu einem Flächeninhalt $I_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\sqrt{3}}{4}$ mit 3^k

Teildreiecken der Seitenlänge $\frac{1}{2^k}$. Grenzwertbildung führt zu

$$\lim_{k \rightarrow \infty} I_k = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^k \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

New York, 1990. Das L-System wurde im Artikel „Die Natur denkt fraktal“, Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 66, Gießen 2016, W. Kafitz, S. 7-37, ab S. 23f besprochen.

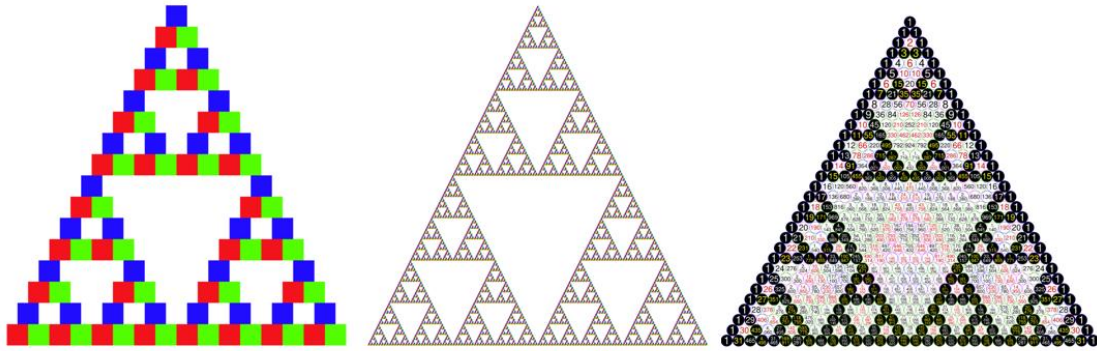


Abb. 19: Rechts Farbkodierung der geraden und ungeraden Einträge im Pascalschen Dreieck mit bis zu Level 32.

Wie durch die Rechnung bei der Cantor-Menge erwartet, bleibt keine Fläche größer Null nach unendlich vielen Iterationsschritten und es entsteht eine überabzählbar unendlich große Punktmenge.

Wieder im Vorgriff auf den nächsten Abschnitt beträgt die Hausdorff-Dimension

$$D = \frac{\ln(\text{Anzahl selbstähnlicher Kopien})}{\ln(\text{Verkleinerungsfaktor})}$$

für unendlich viele Iterationsschritte:

$$\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,5850 \dots$$

Sie liegt, wie erwartet, unterhalb der euklidischen Dimension einer Fläche. Nach Diskussion der Basiskonstruktion sollen nun Fälle betrachtet werden, in denen die Struktur des Sierpinski-Dreiecks klar erkennbar ist. Die Abb. 19 rechts bezieht sich auf das bekannte Pascalsche Dreieck, in dem die Binomialkoeffizienten von binomischen Formeln $(a + b)^k$ für beliebiges natürliches k enthalten

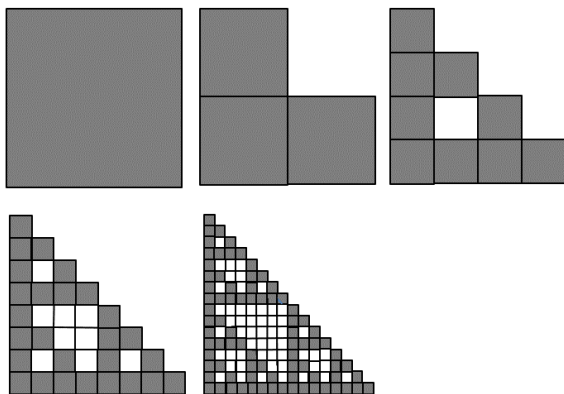


Abb. 20: Iterative Verarbeitung eines Quadrats

sind (analog $(a - b)^k$). Die Binomialkoeffizienten haben grundlegende Bedeutung in der Kombinatorik. Der Name geht zwar auf Blaise Pascal zurück, die Form ist aber in einer Reihe von mathematischen Kulturen entdeckt worden. In China spricht man vom Yang-Hui-Dreieck (nach Yang Hui), in Italien vom Tartaglia-Dreieck (nach Nicolo Tartaglia) und im Iran vom Chayyām-Dreieck (nach Omar Chayyām).

Eine weitere verblüffende Anwendung ist das sogenannte Chaos-Spiel.

Folgende Regeln gelten für das Chaos-Spiel:

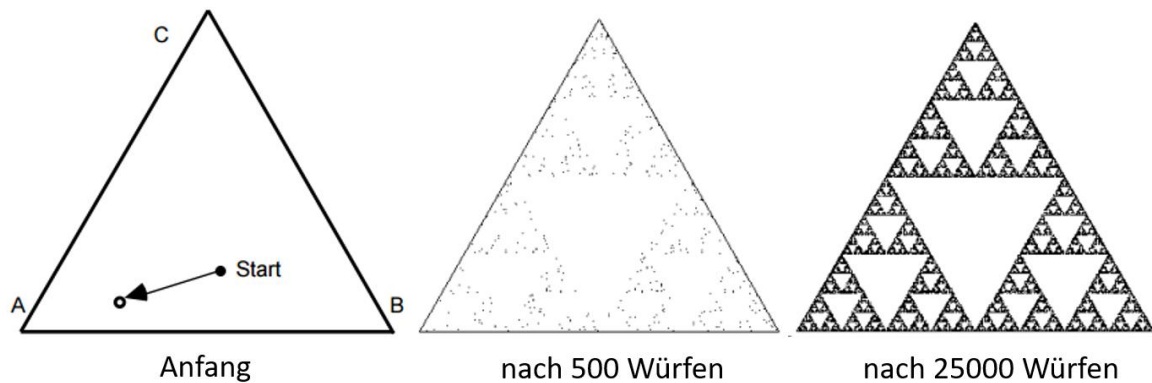


Abb. 21: Entwicklung beim „Chaos-Spiel“

- 1) Markiere einen beliebigen Startpunkt im gleichseitigen Dreieck ABC
- 2) Würfle und gehe von diesem Punkt aus um die Hälfte der Strecke in Richtung
 - A, wenn der Würfel 1 oder 2 zeigt
 - B, bei 3 oder 4 Augen
 - C, bei 5 oder 6 Augen
- 3) Wiederhole mit dem so erhaltenen neuen Punkt Schritt 2)

Selbst in der Natur tauchte die Form des Sierpinski-Dreiecks auf. Ein komplexes Biomolekül bildet diese fraktale Struktur aus. Ein Forschungsteam der Universität Marburg entdeckte es durch Aufnahmen mit einem Elektronenmikroskop und veröffentlichte die Entdeckung in einem nature-Artikel.^{53,54} Anstatt eines Dreiecks, kann auch eine analoge, quadratische Form durch den DNA-Code des Enzyms Amylase erzeugt werden.⁵⁵

⁵³ <https://www.derstandard.de/story/3000000215497/mysterioeses-biomolekuel-bildet-spontan-fraktale>

⁵⁴ <https://www.nature.com/articles/s41586-024-07287-2>

⁵⁵ David Peak, Michael Frame, Komplexität – das gezähmte Chaos, S. 38-39

Durch Iteration⁵⁶ lassen sich im Prinzip beliebige geometrische Objekte selbstähnlich verkleinern. Man erkennt nach einigen Schritten die charakteristische Form des Sierpinski-Dreiecks, hier als rechtwinkliges Dreieck.

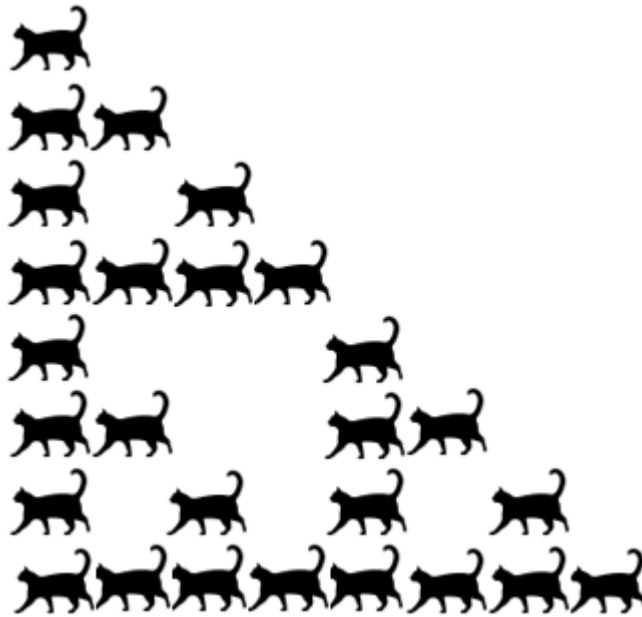


Abb. 22: Durch Grenzwertbildung konvergiert jede Form zu einer Punktmenge

Durch die Grenzwertbildung wird die ursprüngliche Ausgangsform unerheblich. Sie konvergiert nach Grenzwertbildung zu einer Punktmenge. Die Abb. 20 demonstriert dies zunächst an einem Quadrat als Initiator und Abb. 22 dann an einer beliebigen Form.

Ein Beispiel aus der digitalen Welt hat Peitgen, Jürgens und Saupe als das „Kürzeste mögliche Programm für ein schiefes Sierpinski-Dreieck“ bezeichnet.⁵⁷

Die zentrale Anweisung steckt in dem BASIC-Befehl

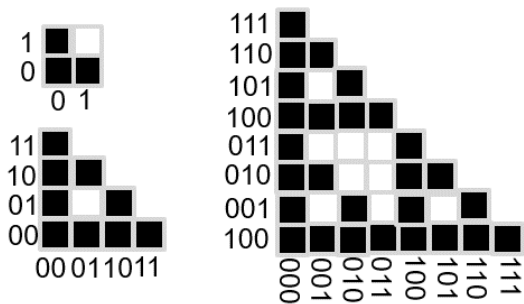


Abb. 23: Test von digitalen Adressen auf bitweise binäre Addition

IF (x AND y) = 0 THEN PSET (x+30, y+30)

Dabei geht es um die bitweise logische AND-Operation.

Dadurch ist z.B. 101 AND 010 Null, aber 101 AND 110 ist Eins. Es ist dadurch möglich zu prüfen, ob in der binären Addition von x und y Überträge auftreten. Die Grafik zeigt bzgl. dieser Addition die farblich markierten „Testergebnisse“ digitaler Adressen.

⁵⁶ Eine Form der Iteration ist die fortgesetzte Potenzierung, ${}^n a = a^{a^{\dots a}}$. Sie wird Tetration genannt. Tetration komplexer Zahlen erzeugen ebenfalls filigrane Fraktale (siehe <https://en.wikipedia.org/wiki/Tetration>). Fortgesetzte Tetration heißt Pentation

⁵⁷ Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Bausteine der Ordnung Fraktale, Springer Verlag / Klett Cotta, 1992, S. 158
Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S. 597

Zur Gruppentheorie der Fraktale – eine Skizze

Das folgende Kapitel folgt in sehr groben Zügen dem Lehrbuch von Heinz-Otto Peitgen, Hartmut Jürgens und Dietmar Saupe; Bausteine der Ordnung Fraktale, Kapitel 5, S. 275 - ca. 340. Einzelne Abbildungen wurden als Idee übernommen

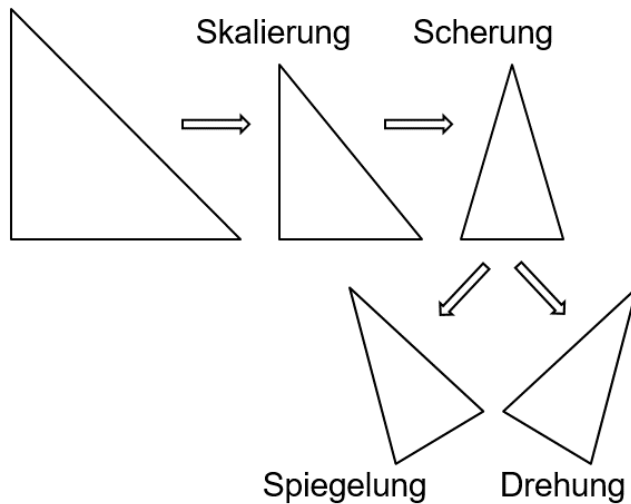


Abb. 24: Elementare Transformationen der Ebene

und selbst erstellt. Ziel ist es dabei lediglich, dem Leser einen groben Überblick zu verschaffen, mit welchen Mitteln man die riesige Vielfalt an fraktalen Strukturen systematisieren und ihre grob skizzierte, möglichst anschauliche Mathematik erahnen kann. Und auch darin wird im Wesentlichen nur eine kleine Untermenge betrachtet, nämlich „Stilmittel“, die symmetrische, planare Formen begünstigen („symmetrische Attraktoren“). Das iterative Verfahren (genannt Integriertes Funktionen System = IFS) führt in Abb. 18-23 unabhängig vom Anfangsbild zur gleichen Struktur. Das Sierpinski-Dreieck stellt sich also als universeller symmetrischer Attraktor heraus. Dabei ist das Verfahren aus elementaren Transformationen zusammengesetzt. Diese können (selbst)ähnlich oder nur (selbst)affin wirken.

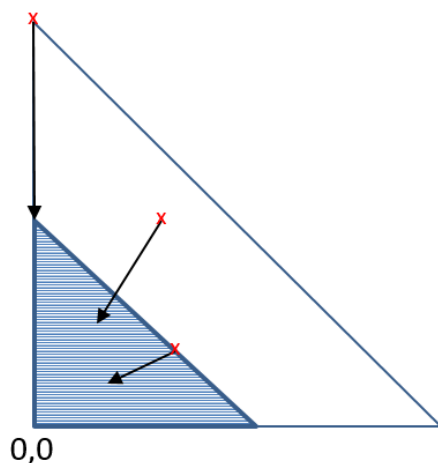


Abb. 25: Kontraktion um einen Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$.

Das Sierpinski-Dreieck kann durch drei affin-lineare Transformationen der Ebene mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$ beschrieben werden - allerdings nicht ganz. Es gibt immerhin zwei Varianten als gleichseitiges und rechtwinkliges Dreieck.

Erzeugen diese Transformationen immer ein Sierpinski-Dreieck? Um diese Frage zu beantworten, ist etwas Gruppentheorie erforderlich.

Abb. 24 verdeutlicht zunächst die elementaren Transformationen. Es fehlt, neben dem Ähnlichkeitsfaktor pro Transformation, noch die maßstabsgerechte Translation (Verschiebung) in den entsprechenden Raumrichtungen.

Eine Kontraktion mit Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$ bedeutet, dass jeder Punkt des ursprünglichen Initiators um die Hälfte in Richtung Nullpunkt verschoben wird.

Ein Sierpinski-Dreieck wird durch drei Transformationen erzeugt. Sie entsprechen Skalierung, sowie Skalierung und Verschieben in x-Richtung bzw. in y-Richtung.

Betrachten wir nun die Skalierung, die in den überwiegenden Fällen bei Fraktalen den Charakter von Kontraktionen haben.

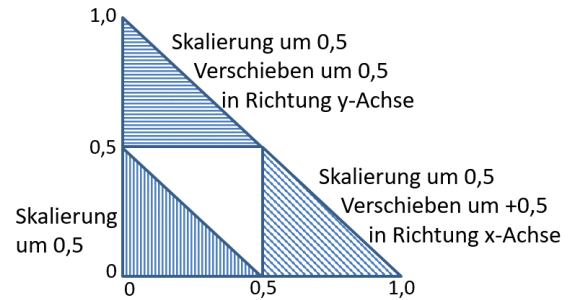


Abb. 26: Anwenden der drei Transformationen, Skalierung (um $\frac{1}{2}$), Translation in Richtung der Achsen.

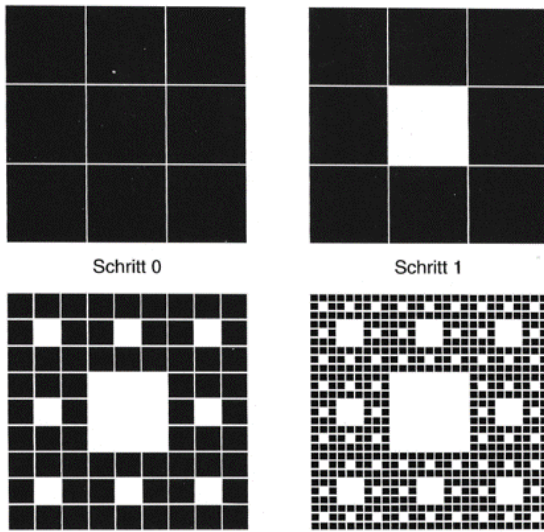


Abb. 27: Iterative Verarbeitung eines Quadrates zum Sierpinski-Teppich

Es hat sich bewährt, wie schon Abb. 20 und Abb. 23 deutlich gemacht haben, dass prinzipielle Symmetrieeoperationen an Quadraten verdeutlicht werden können.

Bei entsprechender Wahl der Transformationen können Quadrate die gewünschte Zielfigur erzeugen.

Abb. 27 zeigt den bisher noch nicht angesprochenen Sierpinski-Teppich.

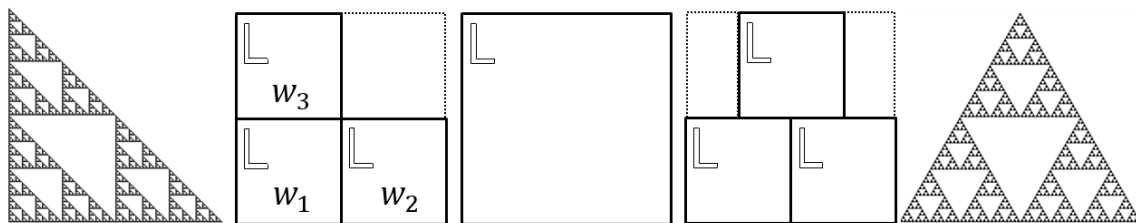


Abb. 28: Die beiden Sierpinski-Dreiecke können durch ein IFS mit drei Ähnlichkeitstransformationen mit Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$ erzeugt werden. Sie stellen den prinzipiellen Bauplan einer ganzen Familie dar. Symmetrieeoperationen an den drei Quadraten werden w_1 , w_2 und w_3 genannt.

Abb. 28 zeigt das Bauprinzip der beiden Varianten eines Sierpinski-Dreiecks aus Sicht von Symmetrieeoperationen eines Quadrats. Es wird gemäß Abb. 26

aus drei Transformationen erzeugt, die ein Anfangsquadrat verkleinern und entsprechend positionieren. Man sieht am eingebetteten „L“ in den Teilquadraten, dass diese nicht gedreht oder gespiegelt wurden.

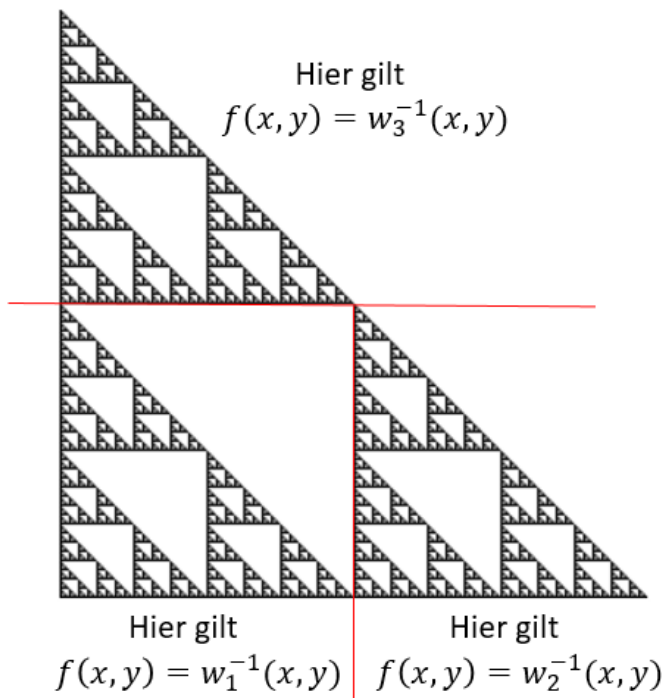


Abb. 29: Das dynamische System $\{\mathbb{R}^2; f\}$

Gegenüber diesem einfachen IFS ohne Drehungen und Spiegelungen in Abb. 28 stehen prinzipiell noch mehr Varianten zur Verfügung. Richtschnur ist dabei der Bauplan, ausgehend von einem Quadrat und seinen symmetrischen Eigenschaften. Doch zunächst soll die Wirkungsweise von w_1, w_2, w_3 beispielhaft mathematisch exakt beschrieben werden. Auch wenn der Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$ ist, so bleibt nach beliebig vielen Iterationen die Fläche des Dreiecks gleich. Die Transformationen w_1, w_2, w_3 müssen deshalb expansiven Charakter haben. Der nächste

Abschnitt zeigt das zugrundeliegende dynamische System.

Man betrachte das dynamische System $\{\mathbb{R}^2; f\}$, wobei $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ durch folgende Abbildung definiert ist:⁵⁸

$$f(x, y) = \begin{cases} (2x, 2y - 1), & \text{wenn } y \geq 0,5 \\ (2x - 1, 2y), & \text{wenn } x \geq 0,5 \text{ und } y < 0,5 \\ (2x, 2y), & \text{anderenfalls} \end{cases}$$

Es erinnert an die Zeltabbildung im x,y-Koordinatensystem (siehe S. 72f).

Man kann folgendes IFS daraus ableiten:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2; \quad w_1(x, y) = (0,5x, 0,5y + 0,5), \\ \quad \quad w_2(x, y) = (0,5x + 0,5, 0,5y), \\ \quad \quad w_3(x, y) = (0,5x, 0,5y) \end{array} \right\}$$

⁵⁸ Vergleiche Barnsley, Michael F.; Fraktale - Theorie und Praxis der Deterministischen Geometrie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford, 1995, S. 282-283

Der Attraktor ist ein Sierpinski-Dreieck \mathcal{S}_Δ mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 0)$.

Die Beziehung zwischen dem dynamischen System $\{\mathbb{R}^2; f\}$ und dem IFS $\{\mathbb{R}^2; w_1, w_2, w_3\}$ besteht darin, dass $\{\mathcal{S}_\Delta; f\}$ eine zu dem IFS gehörende Shift-Abbildung ist.

Diese Abbildung wirkt gemäß Grafik in Abb. 29 und f bildet auch \mathcal{S}_Δ auf sich selbst ab. Man kann zeigen: Der Orbit divergiert für alle x , die nicht zu \mathcal{S}_Δ gehören.

Man kann nachweisen, dass für die Einschränkung von f auf \mathcal{S}_Δ gilt:

$$f(x, y) = \begin{cases} w_1^{-1}(x, y), & \text{falls } (x, y) \in w_1(\mathcal{S}_\Delta) \\ w_2^{-1}(x, y), & \text{falls } (x, y) \in w_2(\mathcal{S}_\Delta) \setminus \{(0, 5, 0, 5)\} \\ w_3^{-1}(x, y), & \text{falls } (x, y) \in w_3(\mathcal{S}_\Delta) \setminus \{(0, 0, 5), (0, 5, 0)\} \end{cases}$$

Das dynamische System $\{\mathbb{R}^2; f\}$ erhält man also, in dem man die Definition einer Shift-Abbildung auf einem Sierpinski-Dreieck auf ganz \mathbb{R}^2 erweitert.

Ein Quadrat hat acht Symmetrieeoperationen – vier Drehungen um jeweils 90 Grad und vier Spiegelungen. Diese werden wieder durch ein „L“ symbolisiert und die Ecken bleiben fest nummeriert, d.h. die Zahlen wandern bei den Symmetrieeoperationen mit.

d_0 bedeutet Drehung um 0 Grad oder 360 Grad

d_1 bedeutet Drehung um 90 Grad (immer gegen Uhrzeigersinn)

d_2 bedeutet Drehung um 180 Grad oder zwei Drehungen um 90 Grad $d_2 = d_1^2$

d_3 bedeutet Drehung um 270 Grad oder drei Drehungen um 90 Grad $d_3 = d_1^3$

d_4 entspricht einer vertikalen Spiegelung

d_5 entspricht einer horizontalen Spiegelung

d_6 entspricht diagonaler Spiegelung nach rechts ($d_6 = d_1 \circ d_4$)

d_7 entspricht diagonaler Spiegelung nach links ($d_7 = d_1^3 \circ d_4$)

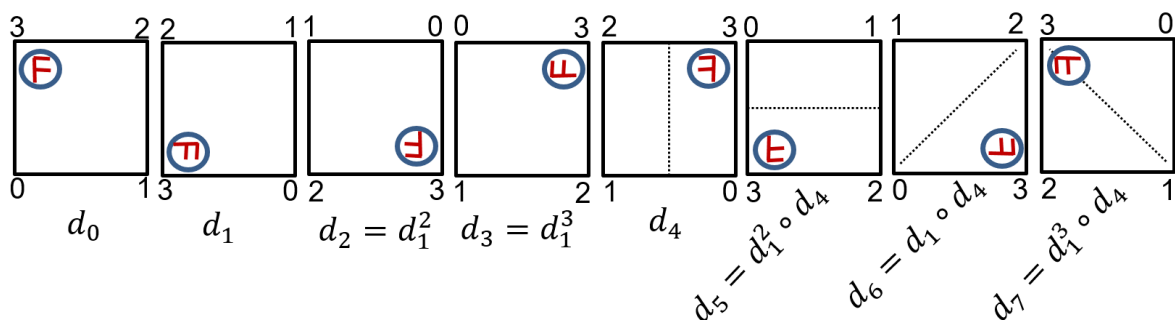


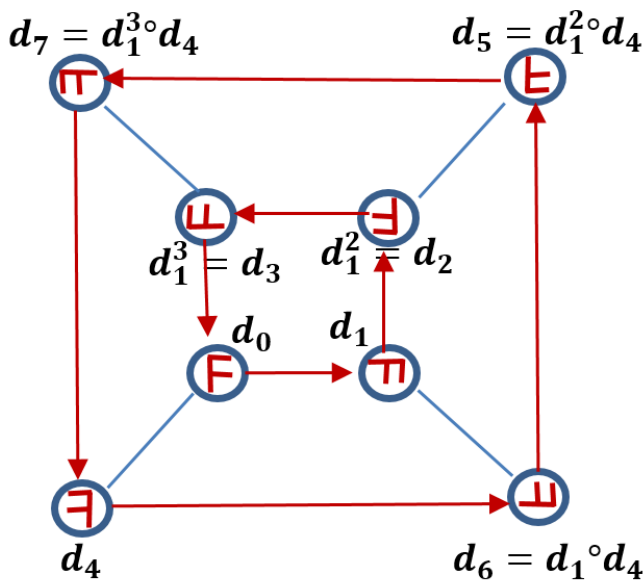
Abb. 30: Drehungen und Spiegelungen eines Quadrats

$$\begin{aligned} \text{E} &= \text{J} \circ \text{F} & \text{L} &= \text{M} \circ \text{F} & \text{N} &= \text{L} \circ \text{F} \\ d_5 &= d_1^2 \circ d_4 & d_6 &= d_1 \circ d_4 & d_7 &= d_1^3 \circ d_4 \end{aligned}$$

Die acht Symmetrieoperationen bilden die Elemente einer algebraischen Gruppe, die sogenannte Diedergruppe D_4 . Die

Verknüpfung zwischen den Elementen soll durch das Zeichen \circ symbolisiert werden. d_0 ist das neutrale Element bzgl. \circ , da für ein beliebiges Element d_x aus D_4 gilt: $d_x \circ d_0 = d_0 \circ d_x = d_x$. Man sieht, die Gruppe ist nicht kommutativ, denn z.B. $d_3 \circ d_5 = d_7$ aber $d_5 \circ d_3 = d_6$.

Beziehungen zwischen den Elementen einer Gruppe werden gerne graphisch



in Form von Cayley-Graphen dargestellt.⁵⁹ Als Beispiel einer endlichen Gruppe ist die Dieder-Gruppe D_4 abgebildet.

Insbesondere in der hyperbolischen Geometrie spielen Kleinsche Gruppen eine zentrale Rolle. Interessant für Fraktale ist die hyperbolische Ebene mit konstanter Krümmung von -1 . Hier gelten die euklidischen Axiome außer dem Parallelenaxiom. Eine Kleinsche Gruppe ist definitionsgemäß eine diskrete Untergruppe der Isometrie-Gruppe des 3-

Abb. 31: Cayley-Graph der Dieder-Gruppe

dimensionalen hyperbolischen Raumes \mathbb{H}^3 , d.h. hier gilt die Riemannsche Metrik.

Die unendlichen Gruppen werden so fraktal visualisiert, dass der unendliche Graph in einen begrenzten Bereich hineinragt. Durch Variation der Farbwahl für diese fraktalen Darstellungen der Cayley-Graphen können bestimmte Merkmale wie die Positivität visuell erkannt werden. Der Cayley-Graph hat einen sogenannten „Rand“ im Unendlichen. Die Wirkung der Gruppe auf dem Rand im Unendlichen ist ein chaotisches, dynamisches System. Es kodiert viele Eigenschaften der Gruppe.^{60,61}

⁵⁹ Siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Cayleygraph>

⁶⁰ John Meier, Clifford A. Reiter, Fractal representations of Cayley Graphs Published in Computers & graphics 1996, Computer Science, Mathematics

⁶¹ <https://dgulotta.github.io/kleinian.pdf>

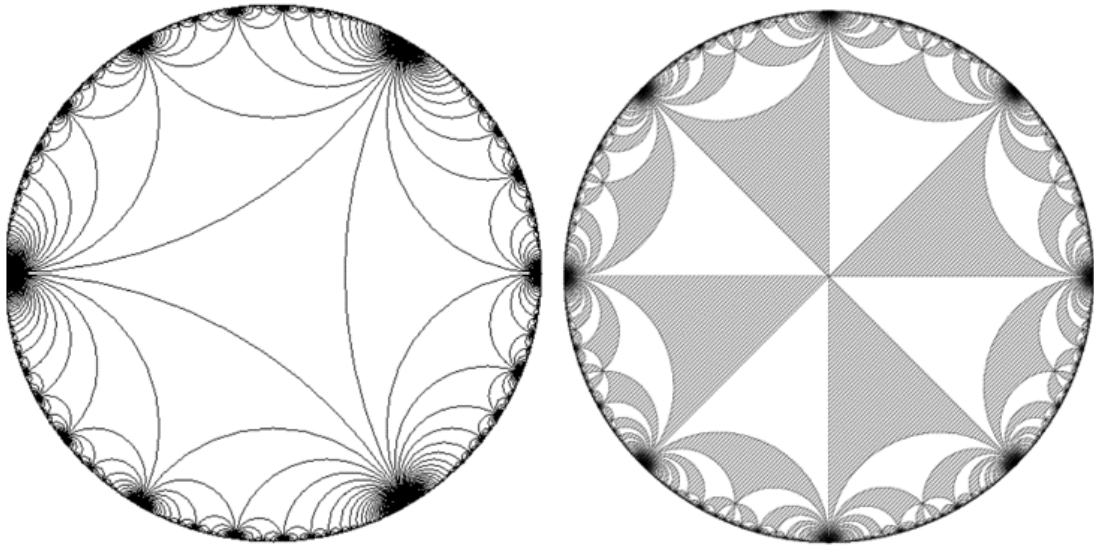


Abb. 32: Die Abb. zeigt zwei denkbar einfache Beispiele eines Cayley-Graphen einer unendlichen Kleinschen Gruppe mit einem Rand im Unendlichen. Links ist es die Parkettierung mit gleichseitigen Dreiecken, rechts die Kachelung der hyperbolischen Scheibe durch Keile.

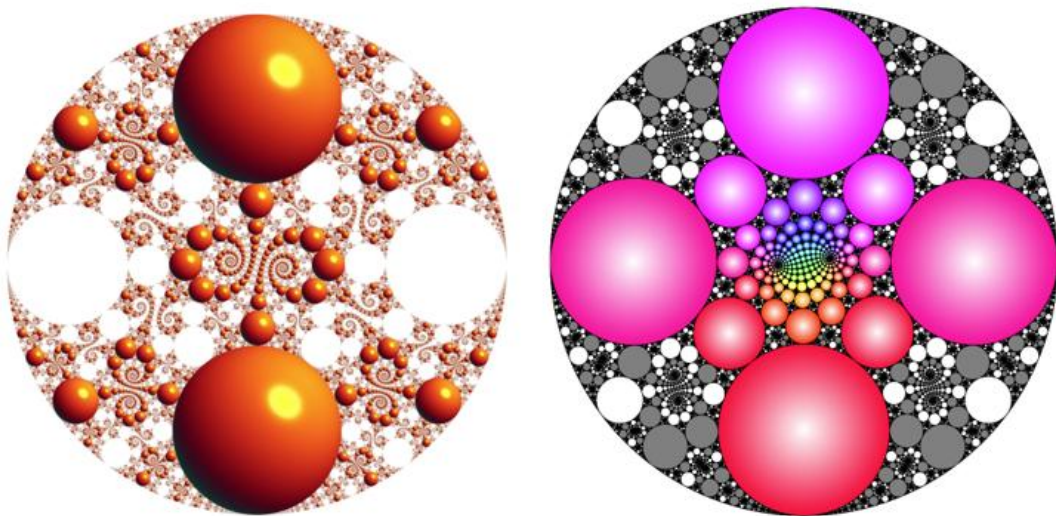


Abb. 33: Grenzmengen / fraktaler, unendlicher Rand von Kleinsche Gruppen erzeugt von Möbius-Abbildungen

Schön ist die Querbeziehung zur Cantor-Menge bei der Gruppe $PSL(2, \mathbb{Z})$, der Gruppe der ganzzahligen 2×2 -Matrizen mit der Determinante 1.⁶² Die Wirkung von $PSL(2, \mathbb{Z})$ behält die sog. Farey-Pakettierung durch ideale Dreiecke (Innenwinkel $0, 60, 60$ Grad) auf der hyperbolischen Ebene bei.

⁶² Vorsicht, die Bezeichnungen wechseln in der Literatur, siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Modular_group

Gleichbedeutend zur Farey-Kachelung ist ein trivalenter Baum, dessen Endpunkte im Rand der hyperbolischen Ebene gleich der Cantor-Menge ist.⁶³

Für freie Gruppen, die erlauben, jede Gruppe durch erzeugende Elemente und deren Relationen darzustellen, ist der Rand im Unendlichen eine Cantor-Menge. Für die „meisten“ (sogenannten wort-hyperbolischen) Gruppen ist der Rand im Unendlichen aber ein Menger-Schwamm (3-D, siehe nächstes Kapitel). Im DMV-Blog findet sich die Arbeit eines hinduistischen Mönchs über den Beweis der Cannon-Thurston-Vermutung für Flächen.

Limes-Mengen von Kleinschen Gruppen sind gut geeignet, um Fraktale mit vielen Symmetrien zu erzeugen.⁶⁴ Man geht über die Isometrien einer diskreten Gruppe des hyperbolischen Raumes. Der „Rand des Unendlichen“ ist die Limes-Menge derjenigen Punkte, die sich durch Punkte im Orbit gemäß der Gruppenregeln beliebig gut annähern lassen.⁶⁵

Die Abb. 33 zeigt die Grenzmengen von Kleinschen Gruppe in willkürlicher Farbgebung, wie es heute ein Computer möglich macht. Sie werden von zwei Möbius-Abbildungen erzeugt, die denen ähneln, die Felix Klein vor über hundert Jahren untersucht hat. Er schrieb dazu in „*Lectures on Mathematics*“⁶⁶, 1894. *Die Frage ist, welche Konfiguration die Gesamtheit aller Kreise bilden wird und insbesondere, wie die Lage der Grenzpunkte aussehen wird. Es ist kein Problem, diese Fragen durch rein logisches Denken zu beantworten, aber die Vorstellungskraft scheint völlig zu versagen, wenn wir versuchen, uns das Ergebnis bildlich vorzustellen.*

Die drei Ähnlichkeitstransformationen beim Sierpinski-Dreieck nutzen nur d_0 und der Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$ ist gesetzt.

⁶³ Inhaltlich siehe <https://mathoverflow.net/questions/212716/hausdorff-dimensions-of-limit-set-of-subgroups-of-sl2-z>

⁶⁴ "Cannon-Thurston maps for surface groups". <https://www.mathematik.de/dmv-blog/3785-hochsymmetrische-fraktale-und-peano-kurven>

⁶⁵ Cannon-Thurston maps for surface groups *Annals of Mathematics* , 179 (1), 1-80
DOI: 10.4007/annals.2014.179.1.1

Siehe auch die Gallery <https://people.math.harvard.edu/~ctm/gallery/index.html>

⁶⁶ Originalzitat: *The question is, what will be the configuration formed by the totality of all the circles and in particular what will be the position of the limiting points. There is no difficulty in answering these questions by purely logical reasoning, but the imagination seems to fail utterly when we try to form a mental image of the result.*

Felix Klein, *Lectures on Mathematics*, American Math. Soc., 2000

Zitiert nach David Mumford, Caroline Series, and David Wright, *Indra's Pearls: The Vision of Felix Klein*, Cambridge University Press, 2002 Auszug online unter <http://klein.math.okstate.edu/IndrasPearls/posters/>

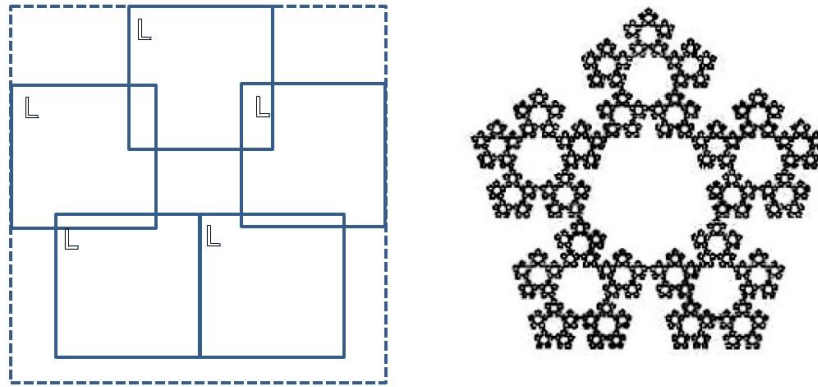


Abb. 34: Das Sierpinski-Pentagon kann man als IFS mit fünf Ähnlichkeitstransformationen konstruieren. Hier wird die echte fünfzählige Symmetrie durch Überlagerung von fünf d_0 erzeugt.

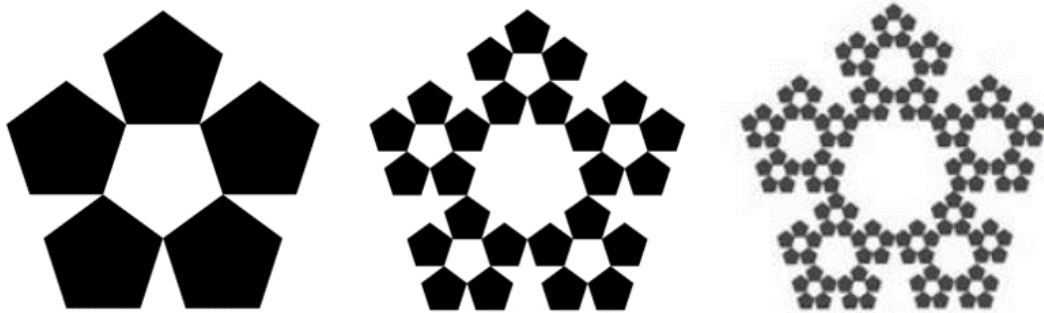


Abb. 35: Das Sierpinski-Pentagon wird jedoch in der Regel gemäß dieser Abbildung über regelmäßige Fünfecke konstruiert.

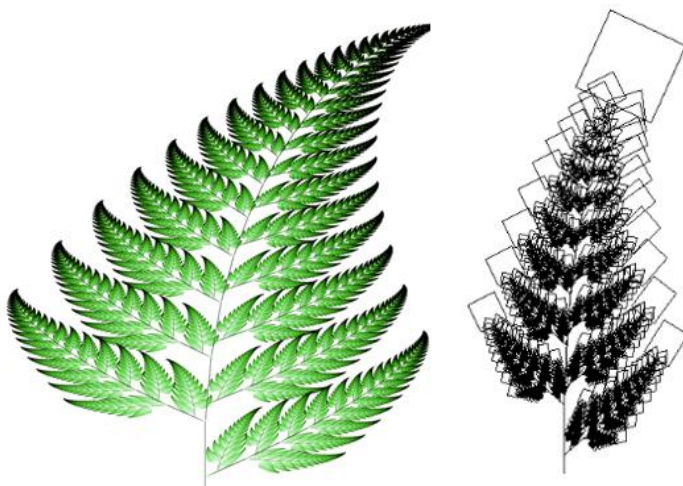


Abb. 36: Man erkennt hier die IFS-Baupläne natürlicher Formen am Beispiel des Barnsley-Farns.

Michael Barnsley entwickelte einen Collage-Satz, bestehend aus vier affinen Abbildungen, die das Urbild als verkleinerte Kopien in Form einer Collage abbilden. Sie bilden den sogenannten Hutchinson-Operator des IFS⁶⁷. Am Beispiel eines Farnblattes (*Asplenium adiantum-nigrum*) wird gezeigt, wie der entstehende Attraktor nach 10 Iterationen aussieht.

⁶⁷ https://en.wikipedia.org/wiki/Hutchinson_operator, https://en.wikipedia.org/wiki/Barnsley_fern, siehe auch <https://quadsoft.org/fraktale/>, Abbildung 21

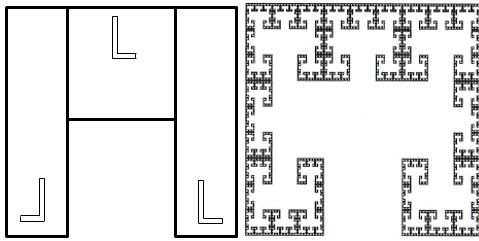


Abb. 37A: Der Cantor-Irrgarten (auch Cantor-Labyrinth) hat nur eine selbstähnliche Transformation (Mitte). Die Transformationen rechts und links sind selbstaffin. Der Attraktor steht in enger Beziehung zur Cantor-Menge.

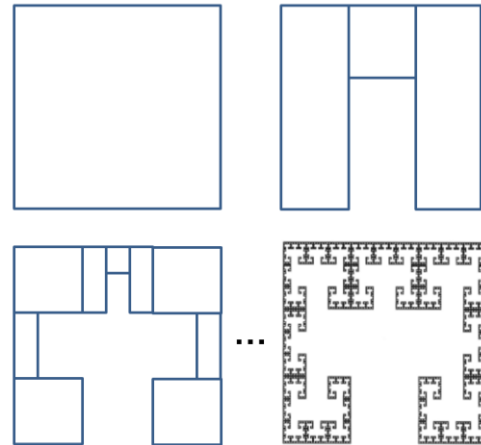


Abb. 37B: Auflösung der ersten Iterationen beim Cantor-Irrgarten

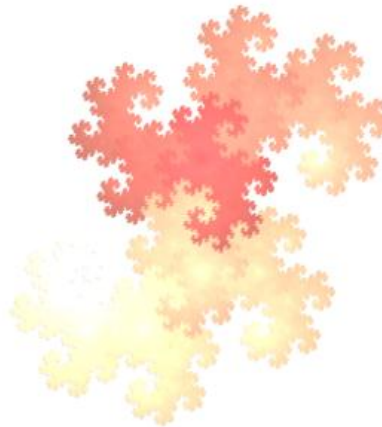
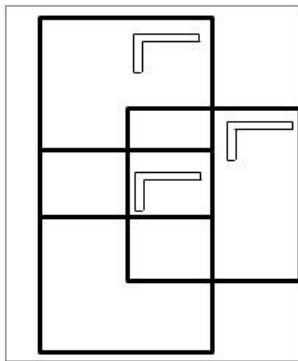


Abb. 37C: Die Drachenkurve kann die Ebene lückenlos parkettieren. Das IFS zeigt hier 3 Komponenten.

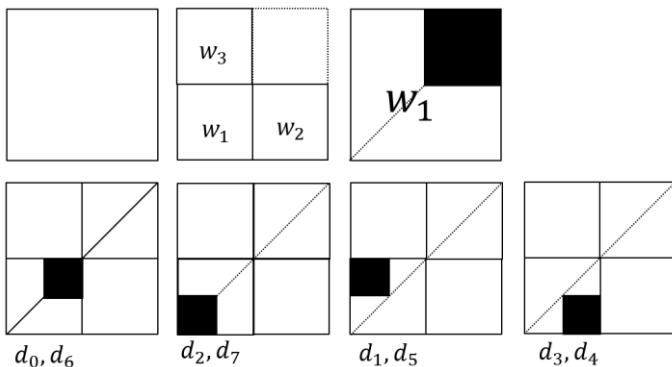


Abb. 38: Ausgehend von den drei Ähnlichkeits-Transformationen w_1, w_2 und w_3 betrachte man z.B. eine Transformation mit w_1

Nach diesem Einschub sollen Symmetrieüberlegungen fortgesetzt werden.

Dies sind Beispiele, die sich auch überlagernd fortsetzen lassen.

Von größerem Interesse sind die symmetrischen Attraktoren. Zunächst sind die verschiedenen möglichen bzw. zulässigen

Transformationen anhand der Gruppeneigenschaften zu ermitteln. Abb. 38 zeigt ein symmetrisches Bild (Winkelhalbierende geht durch das große schwarze Quadrat). Die beiden linken Transformationen d_0, d_6 und d_2, d_7 erhalten die Symmetrie; rechts wird durch d_1, d_5 und d_3, d_4 die Symmetrie verletzt.

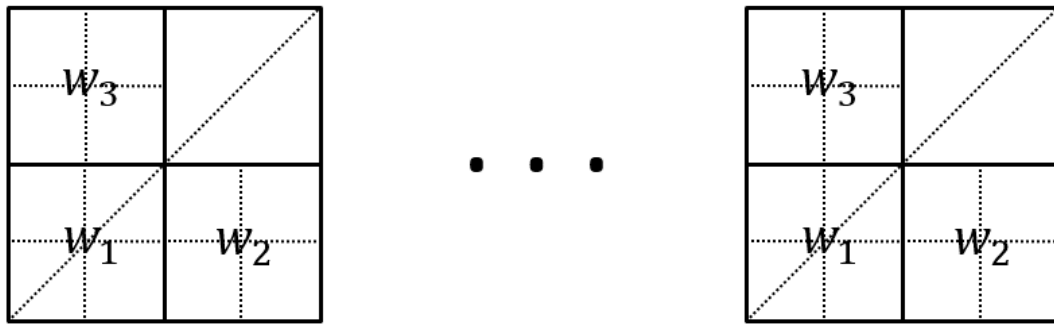


Abb. 39: Das Prinzip von Abb. 38 wird jetzt auf w_2 und w_3 ausgedehnt.

Es stellt sich gemäß Abb. 40 heraus: Es gibt acht verschiedene universelle symmetrische Attraktoren. Die Symbole charakterisieren die jeweiligen prinzipiellen Transformationen.

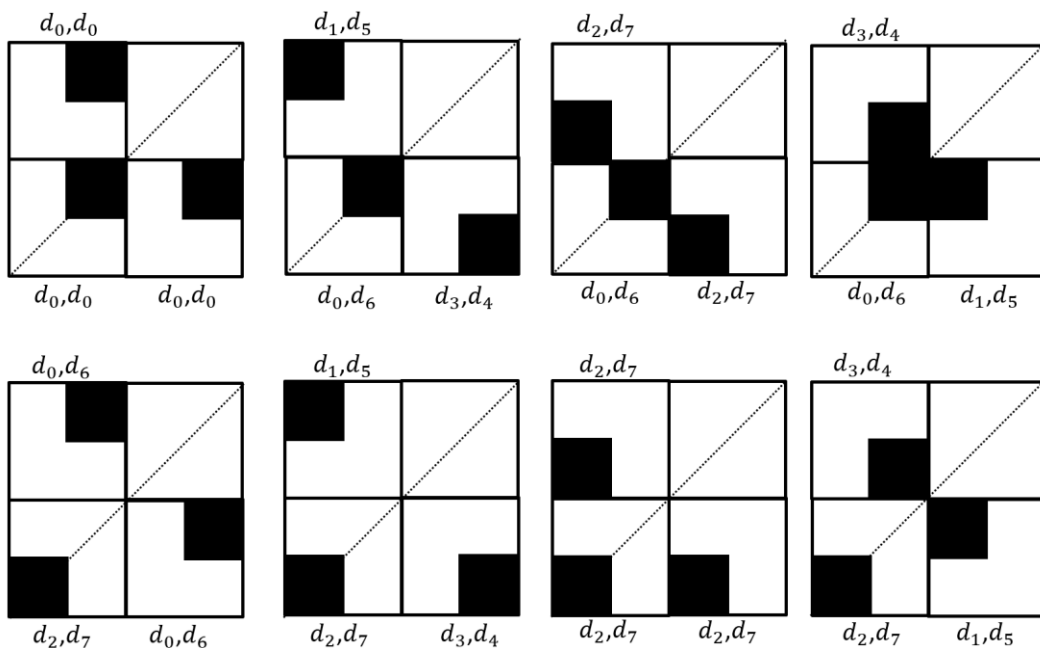


Abb. 40: 64 Transformationen für symmetrische Attraktoren. Jede aus Quadraten zusammengesetzte Figur erzeugt wiederum acht symmetrische Bilder.

Will man nur symmetrische, planare Attraktoren betrachten, so ergeben sich nur die Varianten gemäß Abb. 38. Alle schwarzen Quadrate sind symmetrisch zur Winkelhalbierenden verteilt.

Insgesamt gibt es $2 \times 2 \times 2 = 8$ Möglichkeiten für jede Anordnung der L-förmigen Kästchen in den Symbolen. Jede kann wiederum durch 8 verschiedene Sätze kodiert werden. Das ergibt $8 \times 8 = 64$ deterministische iterierte Funktionensysteme (IFS).

Eines der 8 prinzipiellen Typen mit Bauplan gemäß Abb. 28 ist das Sierpinski-Dreieck. Mit Hilfe von gruppentheoretischen Überlegungen erkennt man, dass insgesamt 224 verschiedene Varianten („Verwandte“) allein des Sierpinski-Dreiecks mit Bauplan gemäß Abb. 28 existieren. Sie bilden sozusagen eine Familie.⁶⁸

Diese Überlegungen anhand einer Familie zeigen die ungeheure Vielfalt alleine der symmetrischen Attraktoren für planare Fraktale. Selbst für symmetrische Formen konnte nur ein kleiner Teil der Welt der Fraktale adressiert werden.

Der nächste Abschnitt behandelt ein wichtiges mathematisches Instrument.

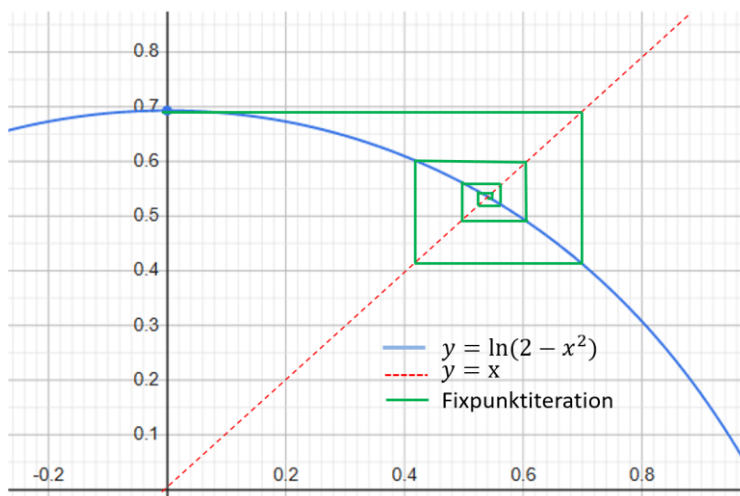


Abb. 41: Illustration des Banachschen Fixpunktsatzes an dem Beispiel der positiven Lösung der Gleichung $2 - x^2 = e^x$. Logarithmieren führt zur Fixpunktgleichung $x = \ln(2 - x^2)$

Das mathematische „Herz“ von Integrierten Systemen (IFS) ist der Banachsche Fixpunktsatz. Er ist prädestiniert, bei den dynamischen Prozessen präzise Aussagen zu machen, die auf dem Rückkopplungsprinzip basieren. Das ist in sehr vielen Beispielen der Fall. Bekanntlich ist dabei die größte Herausforderung die Vorhersage des Langzeitverhaltens.

Wenn dabei die Wahl des Startpunkts nicht sofort eine große Rolle spielt und in chaotisches Verhalten mündet, so kann man das Banachsche Fixpunktprinzip anwenden. Das ist nur für eine Klasse von Rückkopplungssystemen gegeben. Es müssen bestimmte Voraussetzungen gelten. Es geht um Grenzwertprozesse, d.h. der Grenzwert muss in der Menge liegen. Die Annäherung muss man messen können, d.h. es existiert eine Metrik. Es muss sich also um einen vollständig abgeschlossenen, metrischen Raum handeln.

Die Abbildung f muss im Rückkopplungssystem als Kontraktion wirken, denn es geht um eine Grenzwertbetrachtung. Sei a_0 das Anfangsglied, so definiert

⁶⁸ Zur wissenschaftlichen Begründung siehe https://www.asc.ohio-state.edu/golubitsky.4/reprintweb-0.5/output/papers/symmetric_attractors.pdf

$a_{n+1} = f(a_n)$, $n=0,1,2,\dots$ eine Folge a_0, a_1, a_2, \dots Sei x, y zwei beliebige Elemente, so ist $|f(x) - f(y)| < |x-y|$, da f kontrahierend wirkt.

Unter diesen Voraussetzungen und entsprechenden Rückkopplungssystemen liefert der Banachsche Fixpunktsatz erstaunlich weitreichende und allgemeine Ergebnisse:

Attraktor: $a_{n+1} = f(a_n)$ wird für jedes a_0 ein vorhersagbares Langzeitverhalten haben. Es gibt ein Grenzobjekt a_∞ des Rückkopplungssystems, das für alle a_0 dasselbe ist; also den Attraktor des Rückkopplungssystems.

Invarianz: Das Rückkopplungssystem lässt a_∞ invariant, d.h. $f(a_\infty) = a_\infty$ also a_∞ ist ein Fixpunkt.

Abschätzung: Es lässt sich voraussagen, wie schnell das Rückkopplungssystem in die Nähe von a_∞ gelangt, bei a_0 als Startpunkt. Ein Durchgang genügt um das prinzipielle Systemverhalten einschätzen zu können. Daraus lässt sich abschätzen, wie viele Durchgänge erforderlich sind, um bei vorgegebener Genauigkeit in die Nähe von a_∞ zu kommen.⁶⁹

Versuch einer Zusammenfassung: Fraktale sind komplexe geometrische Formen, die sich durch Selbstähnlichkeit und unendliche Detailgenauigkeit auszeichnen. Die Gruppentheorie der Fraktale ist ein interdisziplinäres Forschungsfeld, das Konzepte der Gruppentheorie und der Fraktalgeometrie kombiniert, um die Symmetrien und Strukturen von fraktalen Objekten zu untersuchen.

Wichtige Konzepte

Selbstähnlichkeit: Fraktale zeigen bekanntlich oft Selbstähnlichkeit, was bedeutet, dass sie auf verschiedenen Skalen ähnliche Strukturen aufweisen. Diese Eigenschaft kann mathematisch durch Gruppen von Transformationen beschrieben werden, die auf das Fraktal angewendet werden.

Transformationen: In der Gruppentheorie werden Transformationen, die auf fraktale Strukturen angewendet werden, als Elemente einer Gruppe betrachtet. Diese Transformationen können z.B. Drehungen, Skalierungen oder Spiegelungen sein. Die Menge dieser Transformationen bildet eine Gruppe, die die Symmetrien des Fraktals beschreibt.

Iterierte Funktionensysteme (IFS): Ein häufiges Modell zur Erzeugung von Fraktalen ist das iterierte Funktionensystem, bei dem eine Menge von

⁶⁹ Vergleiche Peitgen, Jürgens, Saupe, Bausteine der Ordnung Fraktale, S. 317 bis 319

Funktionen wiederholt auf einen Punkt oder eine Menge angewendet wird. Die Symmetrien dieser Funktionen können durch Gruppen beschrieben werden.

Fraktale und Gruppen: Bestimmte Fraktale, wie die Mandelbrot-Menge oder die Julia-Mengen, können durch die Anwendung von Gruppen von komplexen Transformationen erzeugt werden. Die Struktur dieser Gruppen kann tiefere Einsichten in die Eigenschaften der Fraktale geben.

Topologische Gruppen: In einigen Fällen können die Symmetrien von Fraktalen durch topologische Gruppen beschrieben werden, die sowohl algebraische als auch topologische Eigenschaften kombinieren. Dies ist besonders relevant, wenn man die kontinuierlichen Transformationen betrachtet, die auf fraktale Strukturen angewendet werden.

Anwendungen

Die Gruppentheorie der Fraktale hat Anwendungen in verschiedenen Bereichen, darunter:

Physik: In der statistischen Mechanik und der Quantenfeldtheorie, wo Symmetrien eine zentrale Rolle spielen.

Biologie: Bei der Modellierung von Wachstumsprozessen in biologischen Systemen, die fraktale Eigenschaften aufweisen.

Computergrafik: Bei der Erzeugung von fraktalen Mustern und Texturen, z.B. in der Computerkunst und Animation.

Die Gruppentheorie der Fraktale ist ein riesiges faszinierendes Forschungsfeld, das die Verbindung zwischen algebraischen Strukturen und geometrischen Objekten untersucht. Es konnte im Rahmen dieser Arbeit nur skizzenhaft angerissen werden. Durch das Verständnis der Symmetrien und Transformationen, die Fraktale charakterisieren, können Mathematiker tiefere Einsichten in die Natur und die Eigenschaften dieser komplexen Strukturen gewinnen.

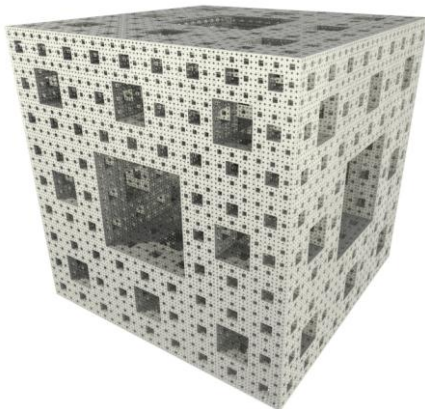


Abb. 42: Menger Schwamm

Weiterer kurzer Ausblick in die 3D-Welt

Die fraktale 3D-Kunst hat eine Fülle von dreidimensionalen Fraktalen bekannt gemacht. Es gibt unter diesem Suchwort eine Reihe von meist privaten Webseiten, die in der Regel nach ästhetischen Gesichtspunkten handeln. In diesem Kapitel sollen nur vier Fraktale angesprochen werden, deren mathematische Eigenschaften gut studiert wurden und neue Aspekte aufzeigen. Zwei sind exakt selbstähnlich.

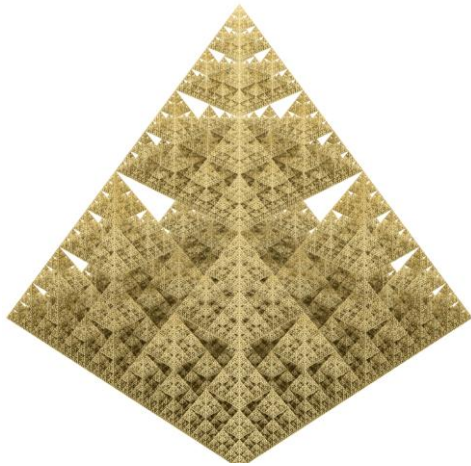


Abb. 43: Sierpinski-Tetraeder

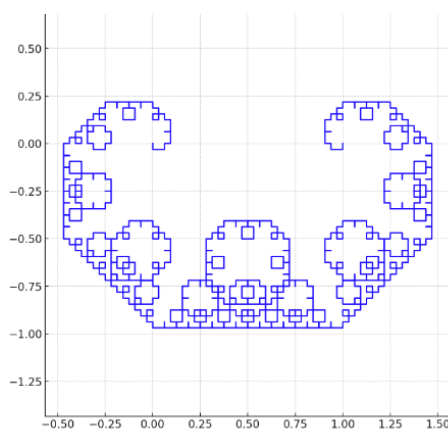


Abb. 44: Man beachte die Konstruktion von Mandelbrot eines 3D-Gebildes als Beispiel für ein selbstquadiertes Fraktal (self-reproducing fractal). Im einfachsten Fall (in 2D) kann man die Drachenkurve als Repräsentant sehen (hier mit 10 Iterationen).

Abb. 42 zeigt den Menger-Schwamm, (benannt nach Karl Menger). Es ist eine dreidimensionale Verallgemeinerung des in diesem Beitrag nicht besprochenen Sierpinski-Teppich.^{70 71} Der erste Iterationsschritt geht von einem Würfel aus, der in 27 Einzelwürfel geteilt wird und von dem 7 Würfel aus der Mitte entfernt werden. Die Menger-Kurve hat die bemerkenswerte Eigenschaft, dass man jede 1-dimensionale Kurve in diesem Fraktal finden kann. Es ist eine universelle Kurve, d.h., jeder eindimensionale kompakte metrische Raum lässt sich in die Menger-Kurve einbetten. Wie jetzt von François Dahmani, Vincent Guirardel und Piotr Przytycki bewiesen wurde, kommt er auch in der Gruppentheorie als typischer 'Rand' von Gruppen vor.⁷² Der Beweis baut auf der Arbeit von M. Kapovich und B. Kleiner auf, die gezeigt hatten, dass es für 1-dimensionale Ränder hyperbolischer Gruppen nur 3 Möglichkeiten gibt: den Kreis, den Sierpinski-Teppich oder eben den Menger-Schwamm. In der neuen Arbeit werden jetzt die ersten beiden Möglichkeiten "mit überwältigender Wahrscheinlichkeit" ausgeschlossen.^{73,74}

Das nächste Fraktal (Abb. 43) geht auf Sierpinski selbst zurück. Interessant ist bei

⁷⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Menger-Schwamm>

⁷¹ Siehe auch die kuriose Dissertation zum Papierfalten von Fraktalen z.B. der Drachenkurve <http://nbn-resolving.de/urn:nbn:de:gbv:46-diss000105747> (Autor Raimund Albers, Betreuer Heinz-Otto Peitgen)

⁷² François Dahmani, Vincent Guirardel, Piotr Przytycki: 'No-splitting property and boundaries of random groups', <https://arxiv.org/abs/0904.3854>

⁷³ <https://scienceblogs.de/mathlog/2009/04/28/zufallige-gruppen-und-das-mengerfraktal/>

⁷⁴ Michail Kapovich, Bruce Kleiner: 'Hyperbolic groups with low-dimensional boundary', Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 33 (2000), no.5, 647-669, <https://www.math.ucdavis.edu/~kapovich/EPR/KK2000.pdf>

diesem dem ersten Anschein nach ebenfalls räumlichen Objekt, dass die fraktale Dimension D exakt 2 ist.

Die Liste an Fraktalen lässt sich fast beliebig fortsetzen. Interessant sind die schon von Mandelbrot⁷⁵ erwähnten und von Fatou allgemein untersuchten selbstabbildenden (selbst-quadrierenden) Fraktale, insbesondere in der noch weiter unten zu diskutierenden Form (in der Notation von Mandelbrot):

$$x \rightarrow f(x) = \lambda x(1 - x)$$

$$x \rightarrow f^*(x) = x^2 - \mu,$$

$$\text{hier mit } \mu = \frac{\lambda^2}{4 - \frac{\lambda}{2}}$$

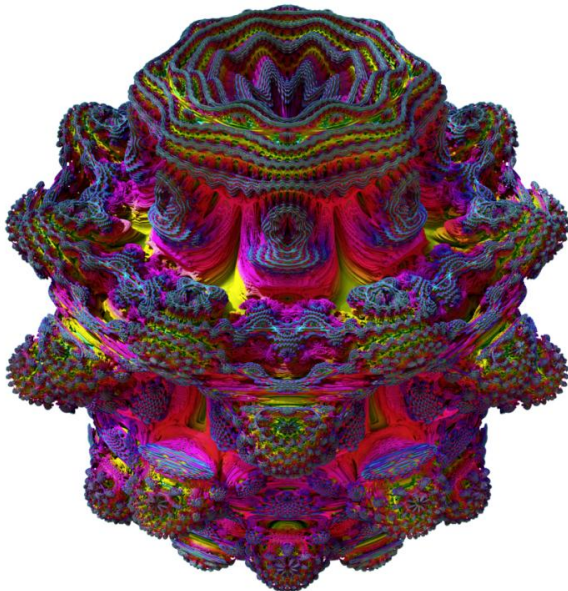


Abb.: 45: Mandelbulb, $v \rightarrow v^9 + c$

In der (nicht abgebildeten) Figur aus Anmerkung 77 durchläuft der Parameter λ die Werte 1 bis 4 und sorgt für die 3. Dimension. Die x und y -Koordinaten repräsentieren die komplexen Zahlen $x + i \cdot y$. Alle Punkte, die für

$$z \rightarrow f(z) = \lambda z(1 - z)$$

gegen Unendlich gehen, sind sozusagen transparent dargestellt. Mandelbrot beschreibt das entstehende fraktale Gebilde als „Klotz“, von dem die divergierenden Punkte „weggeschnitzt“ wurden. Jeder horizontale Schnitt liefert das

maximal beschränkte Gebiet, das zum Parameter λ gehört. Für $\lambda = 2$ entsteht ein Kreis – sozusagen als „Gürtel“ für die Falten. Für jeden λ -Wert versteckt sich, wie ein Gerüst, ein fraktaler Baum, der je nach Wert mehr den Charakter von Ästen oder den Charakter von filigranen Zweigen hat. Nur längs $x=1/2$ bzw. $y=0$ sind die Strukturen der Zweige etwas deutlicher zu sehen. Die Grafik lässt die Vielfalt an Strukturen nur erahnen.

⁷⁵ Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, S. 194f.

Pierre Fatou, Sur les solutions uniformes de certaines équations fonctionnelles. Comptes rendus (Paris), 143, 546-548

Eine geradezu beängstigende Figur (Abb. 45) entsteht, wenn man die Mandelbrot-Menge einer sphärischen Koordinatentransformation unterzieht.⁷⁶ Auch deren Eigenschaften sind gut untersucht.

Iteration, Selbstähnlichkeit, Rückkopplung und Hausdorff-Dimension

Selbstähnlichkeit, dies zeigen die Beispiele, ist ein weiteres mögliches Kennzeichen bei Fraktalen. Das kann man allgemeiner formulieren: Wie die Determiniertheit bei den klassischen Naturgesetzen durch das „Chaos“ konterkariert wird, so bildet sich zum linearen Überlagerungsprinzip ebenso eine Alternative bei nichtlinearen Prozessen heraus. Das Überlagerungsprinzip (oder Additionsprinzip) war Jahrhunderte so selbstverständlich, dass man sich kaum Gedanken dazu machen musste.

Überlagerungsprinzip
Ist $x_1(t)$ eine Lösung des zugrunde liegenden Naturgesetzes und $x_2(t)$ ebenfalls eine Lösung. Dann ist auch die Summe $x_1(t)+x_2(t)=x_s(t)$ ein dritter möglicher Geschehensablauf.

Meilensteine der Physik, wie die Maxwell'schen Gleichungen, das Coulombsche Gesetz oder Interferenzphänomene, sind linear, Musik besteht aus der linearen Überlagerung akustischer Schwingungen und sogar die Schrödinger Gleichung ist eine lineare Differentialgleichung und beschreibt

Superpositionen.

Erst nichtlineare Phänomene verlangten nach einem neuen Ordnungsprinzip. In vielen Fällen ist eine Skaleninvarianz auffällig. Mathematisch spielen affine Abbildungen eine Rolle.⁷⁷ Es gilt also das Ordnungsprinzip der Selbstähnlichkeit, auch wenn sie nicht immer vollkommen exakt gilt. Der vorliegende Beitrag zeigt viele Vertreter von mathematischen Fraktalen, die perfekt selbstähnlich sind; in der Natur gilt das Prinzip nur annähernd und über endlich viele Hierarchien. Selbstähnlichkeit wird bekanntlich in der Mathematik oft durch rekursive Funktionen, z.B. fortgesetzte Iterationen, erreicht. Wie bereits diskutiert, entsteht dadurch ein „Rückkopplungseffekt“, der enorme Bedeutung in den Anwendungen hat (z.B. Wetter, Dissipation, Allometrie, Turbulenz). Man muss aber zwischen positiver und negativer Rückkopplung unterscheiden, also zwischen Hemmung und Verstärkung. Negative Rückkopplung findet z.B. in einem Thermostaten statt.

⁷⁶ <https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbulb>

⁷⁷ Vergleiche S. Großmann; Überarbeitete Fassung eines Vortrages, gehalten auf der 115. Versammlung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte (GDNA), Freiburg, 17.-20. September 1988. Sämtliche Vorträge dieser GDNA-Versammlung erschienen in dem Band „Ordnung und Chaos in der unbelebten und belebten Natur“. Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft mbH, Stuttgart 1989.

Viele prominente mathematische Fraktale haben eine vollkommen skaleninvariante Selbstähnlichkeit. Man kann Selbstähnlichkeit und Skaleninvarianz deshalb als ansonsten fehlenden natürlichen Maßstab interpretieren. In der Natur oder in Anwendungen muss oder darf die Ähnlichkeit nicht exakt sein. So ist ein Romanesco zu seinen Rößchen selbstähnlich, da diese in einer gewissen Bandbreite von Verkleinerung dem ganzen Romanesco gleichen. Im Gegensatz zu russischen Matroschka-Puppen sind die Rößchen natürlich zusammengewachsen. Dies kann man mengentheoretisch mit der sogenannten „Open Set Condition (OSC)“⁷⁸ ausdrücken. Ähnliches gilt für immer kleinere Strukturen bei Bronchien oder dem Blutkreislauf, die zu dem ganzen Organ selbstähnlich sind. Eines von vielen Anwendungsbeispielen sind sich gleichende Details in unterschiedlicher Auflösung bei Börsenkursen, u.v.m.

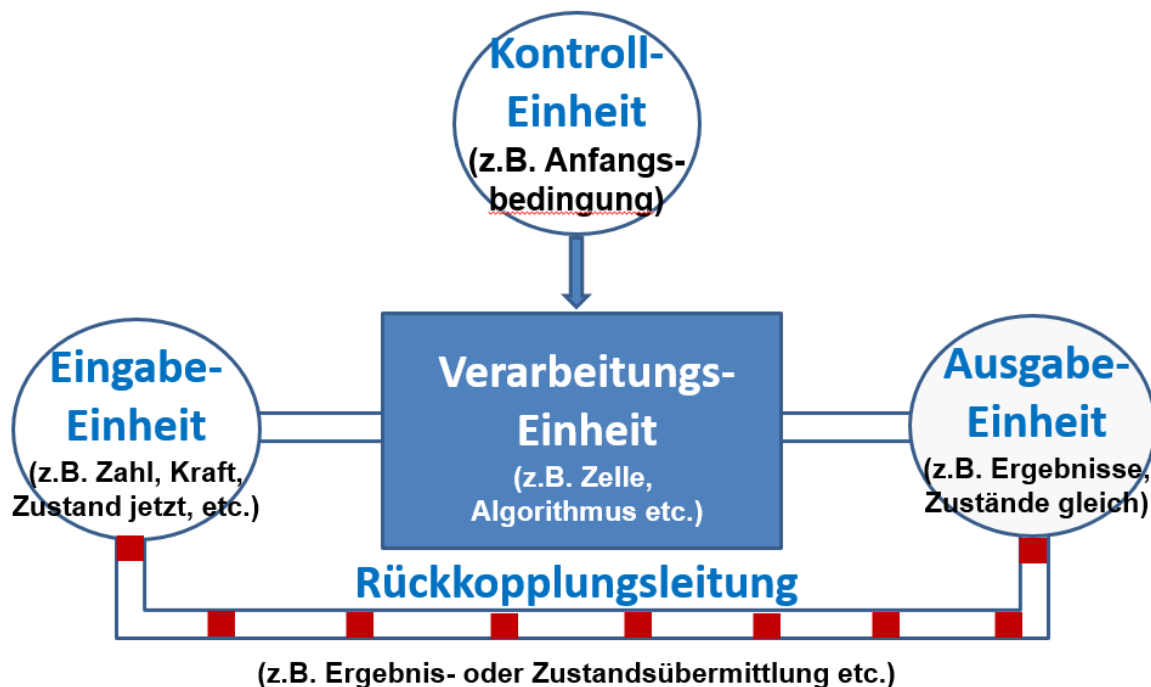


Abb. 46: Ein rekursiver Prozess lässt sich als „Rückkopplungsmaschine“ verstehen, in dem Ausgabewerte zu neuen Eingabewerten werden.

Bei einem mathematischen Fraktal mit unendlich vielen Iterationen ist die Dimension meist gebrochen; daher der Name Fraktal. Ist die Dimension ganzzahlig, wie z.B. bei einer Kurve, die alle Punkte einer Fläche berührt, also raumfüllend ist, so liegt eher ein extremes Beispiel eines Fraktals vor (Hilbert- oder Peano-Kurve, Mandelbrot-Menge).

⁷⁸ Open Set Condition: Es gibt eine offene Menge U mit $f_k(U) \in U$ für alle k , so dass gilt $f_j(U) \cap f_k(U) = \emptyset$ für $j \neq k$

Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, die Dimension zu definieren. Einsichtig, wenn auch formal unvollständig, ist die Definition von Mandelbrot, wie sie von Wikipedia zitiert wird:⁷⁹

Ein Fraktal ist eine Menge, bei der die Hausdorff-Dimension \dim_H größer ist als die Überdeckungsdimension, benannt nach Henri Léon Lebesgue.

In Mandelbrots zentralem Werk, „Die fraktale Geometrie der Natur“, findet sich eine etwas anders formulierte Definition:⁸⁰

Ein Fraktal ist nach Definition eine Menge, deren Hausdorff-Besicovitch-Dimension echt die topologische Dimension übersteigt.

Im allgemeinen Sprachgebrauch wird der Begriff der *Hausdorff-Besicovitch-Dimension* synonym mit der Hausdorff-Dimension gesetzt und „Besicovitch“ weggelassen. In diesem Text wird für die Dimension von Fraktalen die Bezeichnung „Hausdorff-Dimension“ verwendet. Der Bezug zu Lebesgue soll trotzdem kurz diskutiert werden, sowie eine weitere Definition. Das mag irritieren, aber der Dimensionsbegriff hat in der Mathematik eine wechselvolle Geschichte – besonders in den Jahren 1890 bis 1910. Hausdorffs Arbeit fällt in diese Zeit. Einerseits benötigte die damals noch junge Disziplin Topologie Homöomorphismen, bei denen die topologische Dimension eines Objekts erhalten bleibt. Andererseits gab es die Ergebnisse von Cantor, dass die Kardinalität des n -dimensionalen Einheitswürfel gleich der Kardinalität des m -dimensionalen Einheitswürfel ist, $m \neq n$. Es konnte erst durch Brouwer 1911 gezeigt werden, dass die Abbildung nicht homöomorph ist bzw. sein kann. Es gibt also keine stetigen Bijektionen zwischen verschieden-dimensionalen Räumen, wie \mathbb{R}^n und \mathbb{R}^m , $m \neq n$.⁸¹

Die beiden Definitionen von Mandelbrot beziehen sich auf eine bestimmte endliche oder unendliche Anzahl selbstähnlicher Kopien mit gleichem Verkleinerungsfaktor. Die Ähnlichkeitsdimension D ist dann (s.u.)

$$D = \frac{\log(\text{Anzahl selbstähnlicher Kopien})}{\log(\text{Verkleinerungsfaktor})}$$

In diesem Fall ist die Ähnlichkeitsdimension gleich der Hausdorff-Dimension. Obwohl eine Vielzahl an Fällen durch diese Definition abgedeckt werden kann, handelt es sich trotzdem um einen Spezialfall. Das genannte Beispiel zu den Börsenkursen ist ein statistisches Fraktal („Zufallsfraktal“), genügt nur näherungsweise den Kriterien und fällt deshalb nur bedingt in diese Kategorie.

⁷⁹ Zitiert nach <https://de.wikipedia.org/wiki/Fraktal>

⁸⁰ Siehe Mandelbrot, Die fraktale Geometrie der Natur, S. 27.

⁸¹ Brouwer, Luitzen, Beweis der Invarianz der Dimensionszahl. Mathematische Annalen 70, 1911, S.161–165.

Eine analoge Aussage gilt für das Zickzack-Muster, das man bei der Brownschen Bewegung unter dem Mikroskop beobachten kann.

Bisher wurde der Begriff Dimension weitgehend unspezifisch benutzt und erst durch die Definition von Mandelbrot differenziert betrachtet.

Physikalische Beispiele zur Skalentransformation gibt es beliebig viele. Diese Form von Symmetrie gegenüber Transformationen macht oft das Wesen von physikalischen Gesetzen aus und fußt ebenfalls auf Ähnlichkeitsargumenten. Dass (klassische) physikalische Gesetze invariant bei Symmetrioperationen sind, hat Emmy Noether zu den Erhaltungssätzen geführt (Noether-Theorem). Man betrachte auch als Beispiel den sogenannten harmonischen, also linearen Oszillator. Im einfachsten Fall ist es ein Pendel mit geringer Auslenkung. Seine potentielle Energie ist eine homogene quadratische Funktion. Die Bewegungsgleichung zeigt, dass die Schwingungsperiode unabhängig von der Schwingungsamplitude ist. Alle Zeitgrößen, inklusive der Schwingungsperiode, bleiben invariant für Skalentransformationen. Oder anders ausgedrückt, die Frequenz eines linearen Oszillators in einem quadratischen Potential ist unabhängig von seiner Amplitude und damit von der Energie. Über die Newtonsche Dynamik lässt sich die Schwingungsperiode T herleiten:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

L ist die Länge des Pendels und g die Erdbeschleunigung ($9,81 \frac{m}{s^2}$).

Eine ganze Reihe von weiteren möglichen Parametern, insbesondere die Masse/Gewicht am Pendel, spielt keine Rolle.

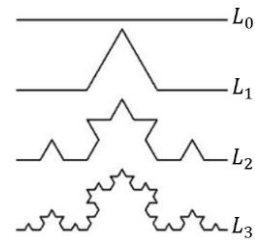
Erst ein Doppelpendel, also ein einfaches Pendel, an dem ein weiteres Pendel hängt, kann man nicht mehr linear beschreiben. Es ist deshalb ein beliebtes Beispiel, um chaotisches nichtlineares Verhalten zu demonstrieren.

Iterierte Funktionen Systeme (IFS), inkl. sogenannte stochastische dynamische Systeme, die Fraktale generieren, sind heute als Basis für Algorithmen zur Datenkompression von Bedeutung und werden z.B. in der digitalen Fotografie und ihrer Datenübertragung im Internet eingesetzt.⁸² In der Regel werden Bilder zuerst zeilenweise abgetastet und so in übertragbare Information umgewandelt. Würde man wirklich pixelweise abtasten und übertragen, so entsteht oft eine riesige Datenmenge. Man betrachte als einfaches Beispiel für eine effektive Datenkompression mit minimalem Übertragungsaufwand die Koch-Kurve mit

⁸² Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Bausteine der Ordnung Fraktale, Springer Verlag / Klett Cotta, 1992, S. 473 (Anhang A)

ihrer filigranen Struktur nach n Iterationen. Die Ausgangsstrecke L_0 habe die Länge l_0 . Der Generator L_1 vergrößert l_0 um $\frac{4}{3}$, also

$$L_1 = l_0 \left(\frac{4}{3}\right)^1, L_2 = l_0 \left(\frac{4}{3}\right)^2, \dots, L_n = l_0 \left(\frac{4}{3}\right)^n.$$



Überträgt man nun diese einfache Formel und wenige Parameter für die Rahmenbedingungen, so lässt sich das ursprüngliche Bild wieder rekonstruieren. Das ist das Prinzip von Datenübertragung auf Basis IFS.

Abhängigkeit vom Maßstab und weitere Dimensionsbegriffe

Benoit Mandelbrot nannte in seinem berühmten Buch⁸³ „Die fraktale Geometrie der Natur“ maßstabsabhängige Messmethoden einen Richardson-Effekt⁸⁴.

Richardson erkennt im unten zitierten Artikel neidlos an, dass die von Benoit Mandelbrot, Siegfried Großmann, Stefan Thomae oder Mitchell Feigenbaum initiierte fraktale Geometrie „... is a new branch of mathematics that proves useful in representing natural phenomena whose dimensions (fractal dimensions) are non-integer values.“ Die Längenmessung mit unterschiedlichen Maßstäben führte z.B. dazu, dass in älteren Lexika einzelner Länder jeweils

| | | | |
|--------------------|---------------|-----------------|----------------|
| Spanien | 987 km | Portugal | 1214 km |
| Niederlande | 380 km | Belgien | 449 km |

unterschiedliche Längen der Grenze zum Nachbarland genannt werden.

Folgerichtig postulierte Mandelbrot für die beliebig aufgelöste Länge der Küstenlinie von Großbritannien den Wert unendlich. Dies verblüfft nur beim ersten

Abb. 47: Unterschiedliche Auffassungen bei der Länge der gemeinsamen Grenze.

Hinschauen. In der Tat hängt die Länge einer nicht geraden Linie extrem stark von der Messmethode ab. Man kann dies verdeutlichen, in dem man den Küstenverlauf mit mehr oder weniger großen Kreisen oder Polygonzügen überdeckt, wobei die Kreise sich nur in einem Punkt berühren.

Die Anzahl N an benötigten Kreisen ist dabei ein Maß für die Länge L bezogen auf den Durchmesser d der Kreise. Je kleiner man den Durchmesser wählt, umso feinere Strukturen kann man „messen“.

⁸³ Benoit B. Mandelbrot, Die fraktale Geometrie der Natur, Birkhäuser-Verlag 1987, S. 45, siehe auch Eingangszitat

⁸⁴ Richardson, L.F. (1961). The problem of contiguity: an appendix of statistics of deadly quarrels. General Systems Yearbook 6, 139-187, zitiert nach Benoit B. Mandelbrot, Anm. 6.

Wählt man z.B. bei der Küstenlinie von Großbritannien einen Durchmesser $d_1=200$ km bzw. $d_2=100$ km, so erhält man:

$$d_1 = 200 \text{ km}, L_1 = 2600 \text{ km}, N_1 = \frac{L_1}{d_1} = \frac{2600}{200} = 13$$

$$d_2 = 100 \text{ km}, L_2 = 3000 \text{ km}, N_2 = \frac{L_2}{d_2} = \frac{3000}{100} = 30$$

Beim Durchmesser d_1 benötigt man 13 Kreise oder Polygonabschnitte; beim feineren Durchmesser d_2 , also einem kleineren Maßstab auf einer Karte, dagegen schon 30.

Rechnet man dies auf eine gebrochene Hausdorff-Dimension D um, so erhält man in diesem Beispiel

$$1 - D = \frac{\log(2600) - \log(3000)}{\log(200) - \log(100)} \approx -0,21$$

Also auch in diesem groben Beispiel ist $D \approx 1,21 \dots$ und damit eine gebrochene, also fraktale Dimension. Dies ist eine abstrakte, theoretische Betrachtung. Schon allein die zu beobachtende Veränderung der Küstenlinien durch Wind, Wetter und Klimaveränderungen erfordert eine pragmatische Messmethode.⁸⁵

Allgemein lässt sich die Hausdorff-Dimension (in ihrer für die meisten Zwecke vereinfachten Definition) analog zum obigen Beispiel definieren. Sei N die Anzahl an Kreisen mit Radius R , mit denen sich eine nicht gerade Linie überdecken lässt. Die Mindestanzahl der Kreise ist eine Funktion $N(R)$. Je kleiner man den Radius wählen muss, umso größer wird N . Aus der Potenz von R , mit der $N(R)$ für $R \rightarrow 0$ wächst, ergibt sich die Hausdorff-Dimension D :

$$N(R) \sim \frac{1}{R^D}$$
$$D = - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{\log N(R)}{\log R}$$

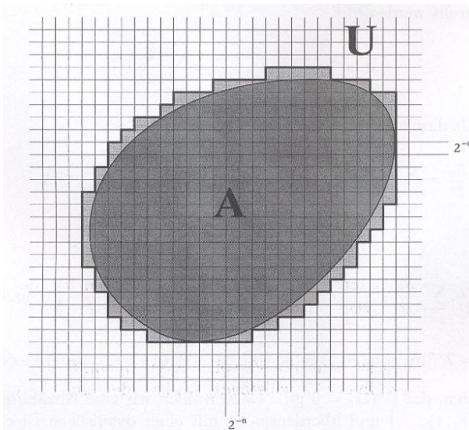


Abb. 48: Lebesgue-Maß
(anschaulich)

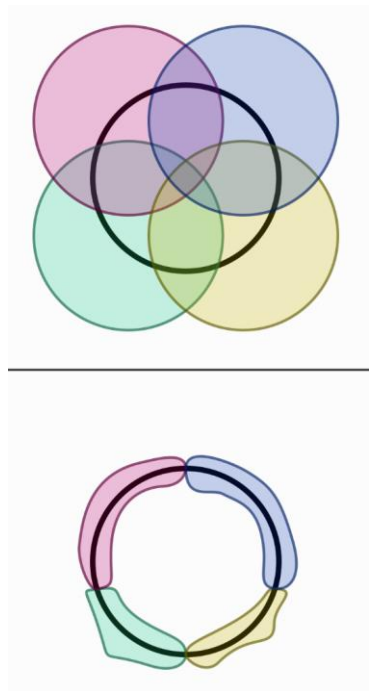
Mandelbrot nimmt in seiner Definition für Fraktale ebenfalls Bezug auf Lebesgue. Als Vorstufe zur Lebesgue-Überdeckungsdimension soll hier zunächst das Lebesgue-Maß betrachtet werden. Die Grafik verdeutlicht auf einfache Weise das Prinzip. Die zu vermessende Punktmenge A wird mit einem Gitter überdeckt, dessen Raster aus Quadraten mit der Seitenlänge 2^{-n} bestehen. Verkleinert man die Quadrate durch immer

⁸⁵ <https://bioone.org/journals/journal-of-coastal-research/volume-39/issue-1/JCOASTRES-D-22-00034.1/The-Coastline-Paradox-A-New-Perspective/10.2112/JCOASTRES-D-22-00034.1.short>

größeres n , so nähert sich die überdeckende Fläche der Fläche von A .

Die Lebesgue-Überdeckungsdimension ist folg. definiert:

Ein topologischer Raum X hat die Dimension n , wenn n die kleinste natürliche Zahl ist, dass es in jeder endlichen offenen Überdeckung eine feinere offene



Überdeckung gibt, sodass jeder Punkt aus X in höchstens $n+1$ der Überdeckungsmengen liegt. Ansonsten ist die Lebesgue-Überdeckungsdimension unendlich. Anschaulich heißt das, dass die ganzzahlige Dimension n von X schon erreicht ist, wenn durch den Versuch der „Verfeinerung“ man maximal eine weitere Überdeckungsmenge für X benötigt. Es ist übrigens nützlich, wenn man die Dimension der leeren Menge auf -1 setzt.

Die Fragestellung lässt sich mühelos auf Räume oder sogar höherdimensionale Objekte übertragen.

Die Abb. 49 zeigt als Beispiel die Überdeckung eines Kreises (oben) und maximale Verfeinerung (unten). Ein Punkt gehört dann maximal zu zwei Überdeckungsmengen, woraus sich die Dimension ergibt.

Abb. 49: Lebesgue-Überdeckungsdimension

In der Fraktalen Geometrie findet man häufig den Begriff der Boxdimension. Es ist der plakative Ausdruck für die Minkowski–Bouligand Dimension, oder kurz Minkowski Dimension. Im Englischen findet man den Ausdruck box-counting dimension. Sie eignet sich besonders für unregelmäßige fraktale Formen. Wie bei der Lebesgue-Überdeckungsdimension wird eine fraktale Kurve gemessen, in dem man sie von unten und von oben mit leicht berechenbaren Flächen approximiert und den Grenzwert bildet. Der folgende Abschnitt wird fast wörtlich aus einem Vorlesungsskript der Uni Ulm übernommen.⁸⁶

Mathematisch formuliert (für euklidische Räume, übertragbar auf allgemeine metrische Räume):

F sei eine nicht-leere, beschränkte Untermenge des \mathbb{R}^n . Die untere und obere Boxdimension sind definiert als

⁸⁶ Wörtlich zitiert bei https://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ws06_07/seminar_fraktale/ausarbeitung_bendig.pdf

$$\underline{\dim}_B(F) = \underline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

$$\overline{\dim}_B(F) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta(F)}{-\log \delta}$$

Wenn beide übereinstimmen und der Grenzwert existiert, ist

$$\dim_B(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log N_\delta}{-\log \delta}$$

Man kann zeigen: Die Boxdimension von F , $N_\delta(F)$, kann dabei eine der folgenden Anzahlen sein:

- Die kleinste Anzahl von geschlossenen Kugeln mit Radius δ , die F überdecken
- Die kleinste Anzahl von Würfeln mit Seitenlänge δ , die F überdecken
- Die Anzahl von Würfeln eines δ -Gitters, die sich mit F überschneiden
- Die kleinste Anzahl von Mengen mit einem Diameter⁸⁷ von höchstens δ , die F überdecken
- Die größte Anzahl von disjunkten Kugeln mit Radius δ und Mittelpunkt in F

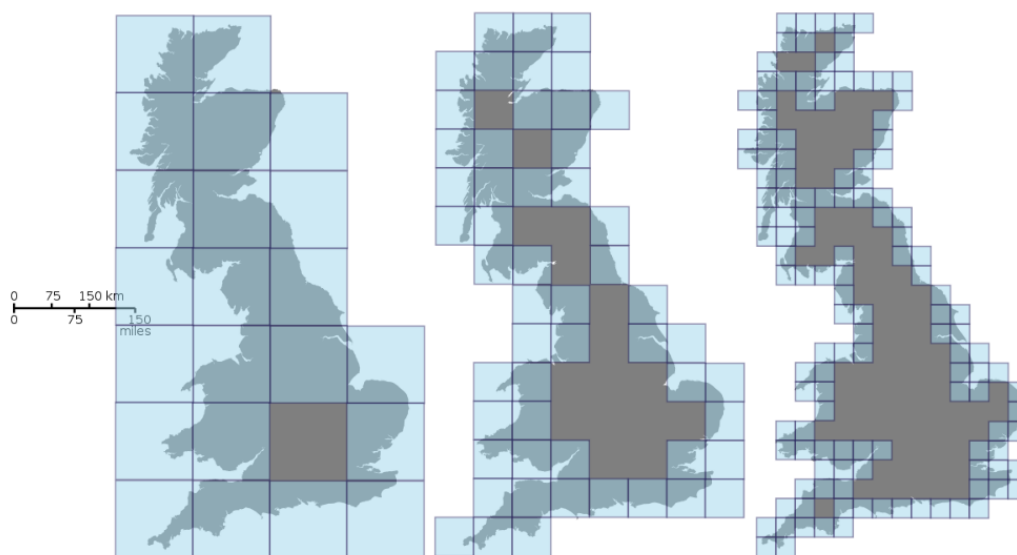


Abb. 50: Vorgehen bei der Boxdimension am Beispiel der Küstenlinie

All diese Definitionen sind äquivalent und machen damit die Boxdimension sehr flexibel anwendbar. Sie ist durch die einheitlich gleichen „Boxen“ leichter berechenbar, stimmt aber in vielen Fällen mit der Hausdorff-Dimension überein. Die Beschränkung auf nicht-leere, beschränkte Mengen verhindert Probleme mit dem Logarithmus („log 0“ oder „log ∞ “). Ein Würfel bzw. eine Kugel ist jeweils in der entsprechenden Dimension definiert, z.B. ein Quadrat oder ein Kreis im

⁸⁷ Entspricht analog dem Durchmesser

\mathbb{R}^2 oder ein Intervall im \mathbb{R}^1 . Anschaulich kann die Boxdimension als die logarithmische Geschwindigkeit betrachtet werden, mit der $N_\delta(F)$ sich vergrößert, wenn δ gegen 0 strebt.

Zusammenhang Chaos und Fraktale

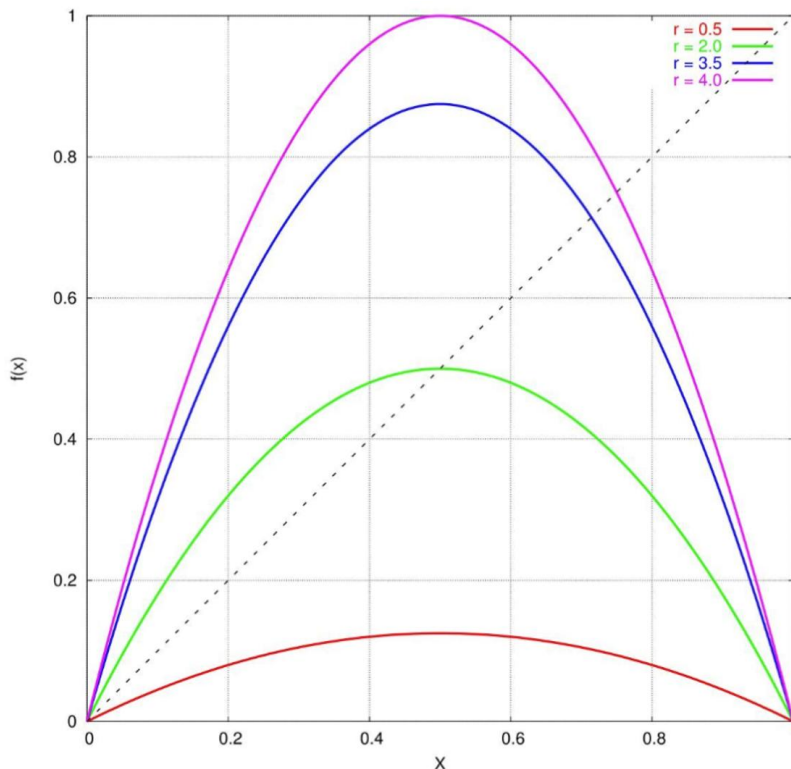


Abb. 51: Logistische Gleichung $f_r(x) = rx(1 - x)$ bei vier verschiedenen r-Werten

Logistische Gleichung:

Mandelbrot war nicht der Erste, der sich mit nichtlinearen Phänomenen beschäftigt hat. Bereits 1845 entwickelte der belgische Mathematiker Pierre-François Verhulst eine Gleichung, die ein ideales Studienobjekt für Ordnungsmerkmale im Chaos bietet, die logistische Gleichung oder logistische Abbildung.⁸⁸

Gleichzeitig ist sie Grundlage der Beschreibung von dynamischen Systemen

in einer Reihe von Anwendungsgebieten geworden. Dazu gehören so unterschiedliche Bereiche, wie das gefährliche Kammerflimmern, bei dem das Herz von Menschen oder Säugetieren in einen unbeherrschbaren turbulenten Zustand geraten kann. Die Gleichung ist auch anwendbar auf Jäger-Beute-Systeme oder generell auf die Entwicklung von Tierpopulationen. Einzelne Parameter in der Gleichung werden deshalb in der Biologie z.B. als „Begrenzungsfaktor“ oder „Vermehrungsfaktor“ bezeichnet. Die logistische Gleichung ist eine Abbildung f , die eindimensional und quadratisch ist.⁸⁹ Durch Iteration entsteht der nächste diskrete Wert $x_{n+1}, n = 0, 1, 2, 3, \dots$

⁸⁸ In diesem Beitrag werden logistische Gleichung, logistische Abbildung und logistische Parabel synonym verwendet.

⁸⁹ Formeln und Argumentation siehe z.B.

<https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/logistische-gleichung/6896>. Grafik:

<https://de.wikipedia.org/wiki/Feigenbaum-Konstante>

$$x_{n+1} = f(x_n) = r \cdot x_n(1 - x_n)$$

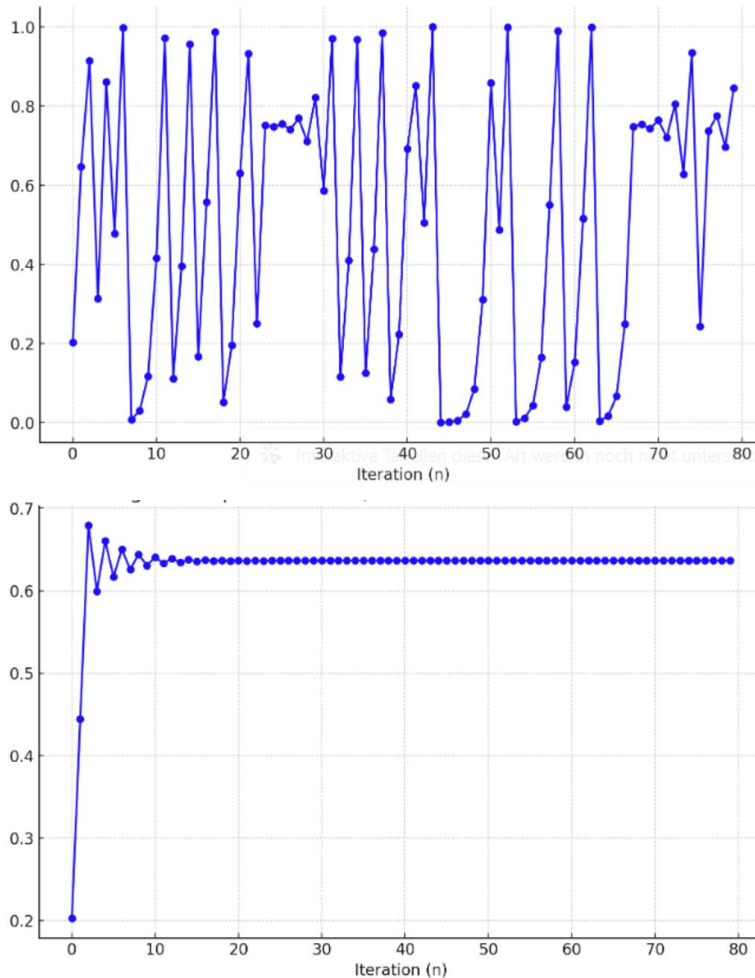


Abb. 52: Oben Logistische Gleichung mit Startwert $x_0=0,1882550$ und $r=4$: Es ist keine Ordnung zu erkennen. Unten $r=2,75$. Alle Anfangswerte konvergieren zum gleichen Endwert.

Die x -Werte liegen im Intervall $[0,1]$. Der Verlauf der Funktionswerte wird von r bestimmt. Die Abb. 51 zeigt den Kurvenverlauf am Beispiel von vier r -Werten:

$r=0,5$ (rot), $r=2,0$ (grün), $r=3,5$ (blau) und $r=4,0$ (magenta).

Die Fixpunkte liegen auf der Winkelhalbierenden bei $x=0$ und $x=1-\frac{1}{r}$ (außer $r=0,5$, rot).

Betrachtet man die Entwicklung des Systems, so erkennt man die entstehende relativ komplexe Dynamik. Ab $r \approx 3,45$ setzt eine zunehmende Komplexität ein. Das Diagramm wird ein Fraktal, das Verhalten wird chaotisch und hängt sensitiv vom Parameter r

ab. Bei der folgenden Abb. 53 wurde $r = 2,4$ bis $r = 4$ variiert ($0 \leq x_n \leq 1$). Es ergibt sich eine berühmte Werteverteilung, benannt nach einem Pionier der Chaostheorie, Mitchell Feigenbaum.

Ein wichtiger Begriff in der Chaostheorie ist die Bifurkation und die damit verbundene Periodenverdoppelung. Der erste Bifurkationspunkt liegt im Feigenbaum Diagramm bei: $r=3,0$, die zweiten beiden Bifurkationspunkte bei $r = 1 + \sqrt{6} = 3,4494 \dots$

Iterationen erfolgen mit einem Startwert $0 \leq x_0 \leq 1$. Jedes $f(x_n)$ wird in die logistische Formel eingesetzt und ergibt ein neues x_{n+1} .

Die eigentliche Variable ist aber r . Es ergeben sich in Abhängigkeit von r folgende Fälle:⁹⁰

- Nach einigen Iterationen erhält man 0 für $0 \leq r \leq 1$
- Liegt r zwischen 1 und 3 stellt sich ein Grenzwert ein, ein sogenannter Attraktor.
- Bei $3 \leq r \leq 1 + \sqrt{6}$ ist eine Bifurkation zu beobachten. Die Folge wechselt zwischen zwei Attraktoren mit Ausnahme der Startwerte $0, 1, r - \frac{1}{r}$.
- Bei $1 + \sqrt{6} \leq r \leq \approx 3,54$ beobachtet man, noch deutlich separiert, vier Attraktoren.
- Dann stellen sich in rascher Folge Periodenverdoppelungen ein. Bei genügend feiner Auflösung kann man 8, 16, 32, usw. Attraktoren identifizieren.
- Bei ca. $r \approx 3,54$ beginnt chaotisches Verhalten.

Als Fixpunkt von f bezeichnet man Punkte, in der $f(x)=x$ ist. Bei eindimensionalen Abbildungen sind die Fixpunkte die Schnittpunkte von f mit der Winkelhalbierenden.

Das Quadrat von f hat die Fixpunkte:

$$x_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{r} \pm \sqrt{\left(1 + \frac{1}{r}\right) \left(\frac{2}{3}\right)} \right)$$

Das ursprüngliche System bewegt sich also immer zwischen den beiden Zuständen x_1 und x_2 . Für weitere kritische Werte von r findet jeweils eine Periodenverdopplung statt. Orbits der Periode 2 lassen sich gerade noch analytisch berechnen, aber weitergehende Rechnungen sind kaum genau möglich.

Analysiert man das Verhältnis der Abstände bzw. Längen zwischen zwei Bifurkationspunkten, so strebt dieses gegen eine universelle, mathematische Konstante, ebenfalls benannt nach Mitchell Feigenbaum. Sei r_k der k -te Wert von r . Dann wird der Grenzwert δ konstant.⁹¹

$$\delta = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = 4,6692016090 \dots$$

⁹⁰ Vergleiche <http://walter.bislins.ch/blog/index.asp?page=Analytische+Lösung+für+die+erste+Bifurkationsstelle+im+Feigenbaumdiagramm>

⁹¹ Mitchell F. Feigenbaum, Quantitative Universality for a Class of Nonlinear Transformations, Journal of Statistical Physics, Vol 19. No.1, 1978, S. 25-52

Auch das Verhältnis der Breiten bildet als Grenzwert eine universelle Konstante $\alpha = 2,5029078 \dots$

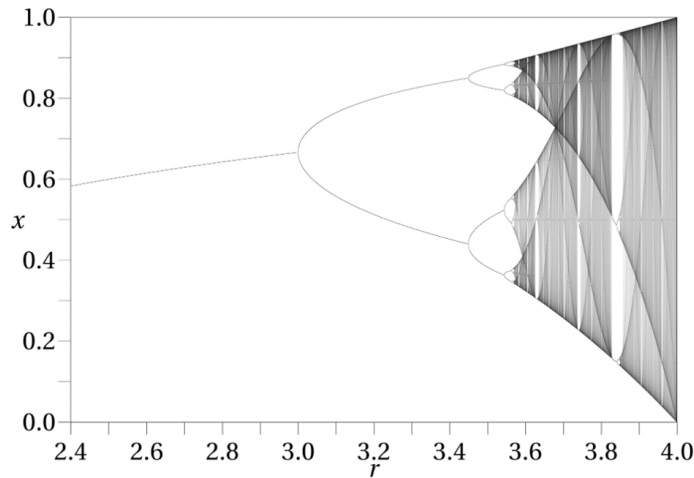


Abb. 53: Feigenbaum-Konstante. Zumindest 3 der Bifurkationspunkte sind gut erkennbar. Die weiteren verlieren sich nur scheinbar im Chaos.

Man vermutet, dass die Feigenbaum-Konstante transzendent ist, aber der Beweis steht noch aus.

Diese universale Gesetzmäßigkeit ist nicht auf die logistische Parabel beschränkt. Wenn man diese z.B. durch die Sinus-Abbildung ersetzt:

$x_{n+1} = \left(\frac{2}{\pi}\right) \cdot \sin(\pi \cdot x_n)$, so erhält man wieder nach fortgesetzter Periodenverdoppelung Chaos und das Verhältnis der

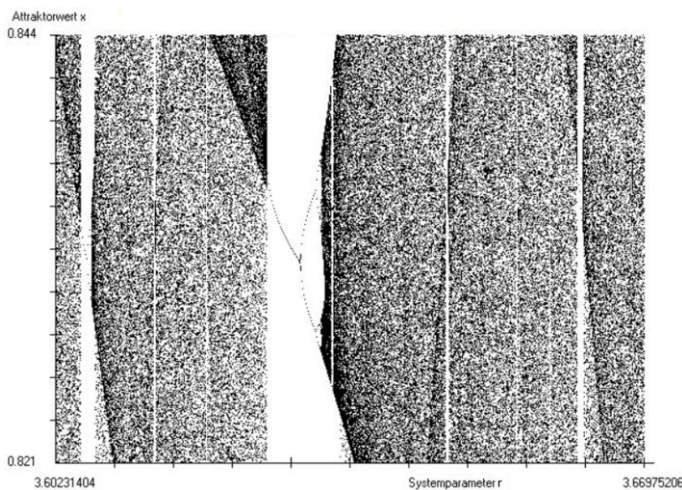


Abb. 54: Inseln der Stabilität im Chaos

Abstände konvergiert gegen $\delta = 4,6692016090 \dots$ ⁹²

| Intervall | Verhältnis |
|-----------|------------|
| L_1/L_2 | 4,4495... |
| L_2/L_3 | 4,7515... |
| L_3/L_4 | 4,6562... |
| L_4/L_5 | 4,6683... |
| L_5/L_6 | 4,6686... |

Abb. 55: Das Verhältnis der Intervalle strebt zu δ

⁹² Weitere Beispiele: <https://de.wikipedia.org/wiki/Sattel-Knoten-Bifurkation>

Dies ist unter dem Begriff Universalität bekannt. Scheinbar unzusammenhängende Phänomene haben gemeinsame oder zumindest verwandte Gesetzmäßigkeiten. Beispiele aus der Physik sind Phasenübergänge beim Magnetismus oder bei Übergängen in einen anderen Aggregatzustand. Hier ist es sogar das Feigenbaumszenario mit denselben Naturkonstanten. Die Ergebnisse sind nicht auf die Mathematik beschränkt. So

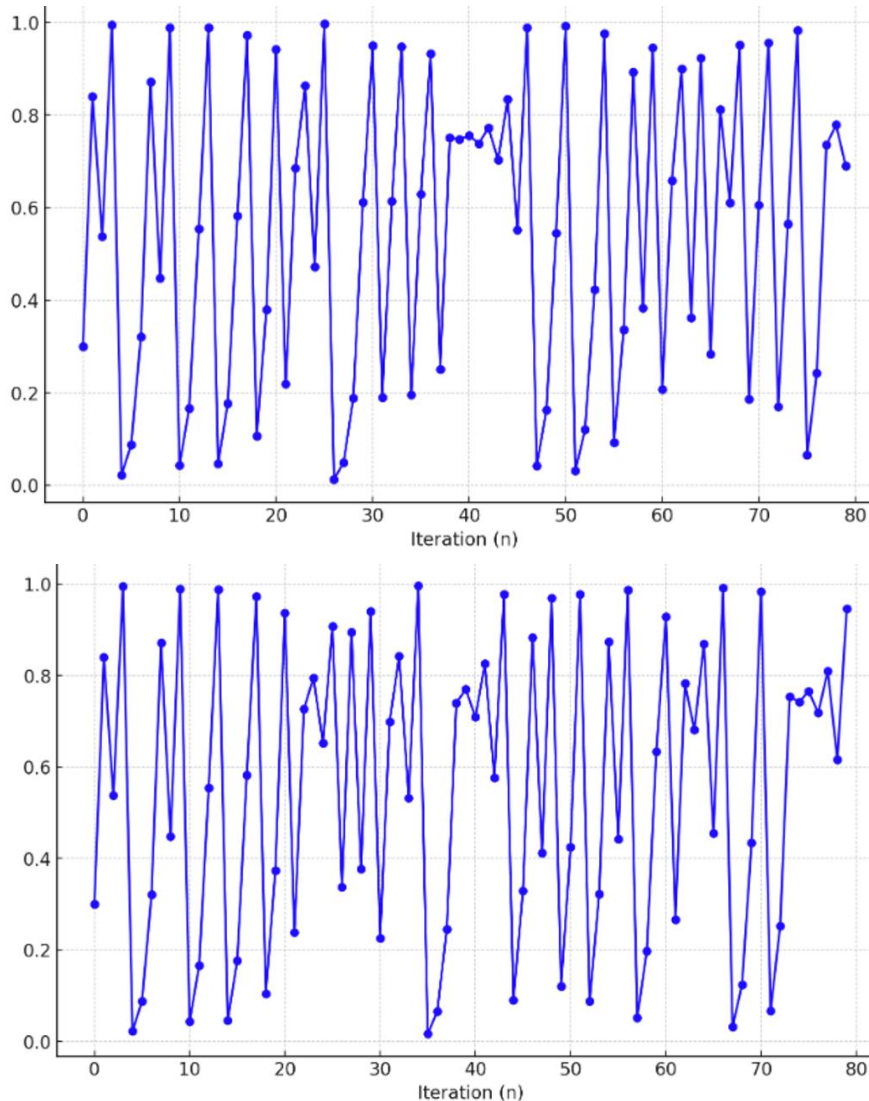


Abb. 56: Zwei Orbits für $r=4$, die sich beim Startwert $x_0=0,300000000$ bzw. $x_0=0,300000001$ um ein Milliardstel unterscheiden.

konnte ein Forschungsteam um den Experimentalphysiker Albert Libchaber die Verdopplung der Periodizität in flüssigem Helium beobachten.⁹³ Mittlerweile liegt auch ein streng mathematischer Beweis vor, dass es sich nicht um zufällige

⁹³ A. Libchaber, C. Laroche, S. Fauve. Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement. *Journal de Physique Lettres*, 1982, 43 (7), pp.211-216. [ff10.1051/jphyslet:01982004307021100ff](https://doi.org/10.1051/jphyslet:01982004307021100ff). [ffjpa00232033f](https://doi.org/10.1051/jphyslet:01982004307021100ff). Online: <https://hal.science/jpa-00232033/document>

Übereinstimmungen bei einzelnen Beispielen handelt.⁹⁴ Diese Universalität macht die ansonsten schwer einheitlich zu definierende Chaostheorie, zumindest in diesem Aspekt, zu einer „echten“ Theorie mit wissenschaftlicher Vorhersagekraft.

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass es für Bifurkationen von Fixpunkten verschiedene Normalformen gibt. Sie sollen zuerst am Beispiel der Änderung eines eindimensionalen Parameters $\mu \in \mathbb{R}$ in einfachen einparametrischen Differentialgleichungen verdeutlicht werden. Nach einem Satz treten generisch vier Bifurkationstypen gemäß folgenden Normalformen auf:

- | | |
|-------------------------------|--|
| a) Tangentialbifurkation | $M = \mathbb{R}^1: \quad \dot{x} = \mu - x^2$ |
| b) Transkritische Bifurkation | $M = \mathbb{R}^1: \quad \dot{x} = \mu x - x^2$ |
| c) Heugabel-Bifurkation | $M = \mathbb{R}^1: \quad \dot{x} = \mu x - x^3$ |
| d) Hopf-Bifurkation | $M = \mathbb{R}^2: \quad \dot{x} = \mu x - y - x(x^2 + y^2)$ $\dot{y} = x + \mu y - y(x^2 + y^2)$ |

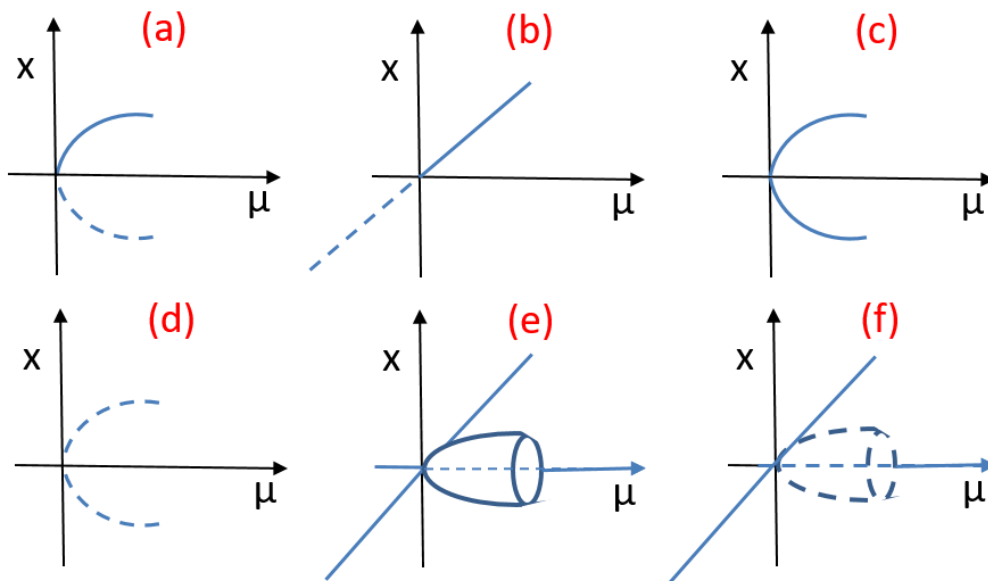


Abb. 57: Typische Bifurkationen von Fixpunkten einparametrischer Differentialgleichungen: (a) Tangentialbifurkation, (b) transkritische Bifurkation, (c) superkritische Heugabelbifurkation, (d) subkritische Heugabelbifurkation. (e) superkritische Hopf-Bifurkation, (f) subkritische Hopf-bifurkation (Ausgezogene Linien entsprechen stabilen Lösungen)

⁹⁴ Feigenbaum-Coullet-Tresser universality and Milnor's Hairiness Conjecture Mikhail Lyubich, <https://arxiv.org/abs/math/9903201>

Analog zu Differentialgleichungen existiert Bifurkation von Fixpunkten einparametrischer iterierter Abbildungen, wie sie bei der logistischen Abbildung bereits angesprochen wurden. Sie haben das bekannte Bildungsprinzip

$$M = \mathbb{R}^1: \quad x_{k+1} = f(x_k, \mu)$$

Tangentenbifurkation: $f(x, \mu) = \mu + x - x^2$

transkritische Bifurkation $f(x, \mu) = \mu x + x - x^2$

Heugabel-Bifurkation $f(x, \mu) = \mu x + x - x^3$

Beispiel: Die hinlänglich bekannte logistische Parabel-Abbildung im Wertebereich $M=[0,1]$: $x_{k+1} = r x_k (1 - x_k), k = 0, 1, 2, \dots$

besitzt bei $r=1$ eine transkritische Bifurkation und anschließend bei $r=r_1, r_2, \dots$ eine Folge von superkritischen Periodenverdoppelungen, die sich bei r_∞ häufen. An den Stellen, an denen sich periodische Fenster öffnen, finden dagegen Tangentenbifurkationen statt.⁹⁵

Ordnung und Chaos – der Lyapunov Exponent

Gesucht ist ein Maß, wie schnell ein nichtlineares dynamisches System im Laufe der Iterationen in ein chaotisches Verhalten migrieren kann. Oder anders formuliert, wie sensitiv ein System für leichte Veränderungen der Anfangsbedingungen ist.

Die Abb. 58 verdeutlicht die Fragestellung, der Einfachheit halber im Eindimensionalen. Gegeben seien zwei Punkte x_0 und $x_0 + \varepsilon$, also im Abstand ε . Es wird die Iterationsfunktion f N-mal auf beide Punkte, (also f^N) angewendet und ermittelt, wie groß der Abstand $|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)|$ nach N Iterationen geworden ist. Es ergibt sich (was explizit zu zeigen ist):

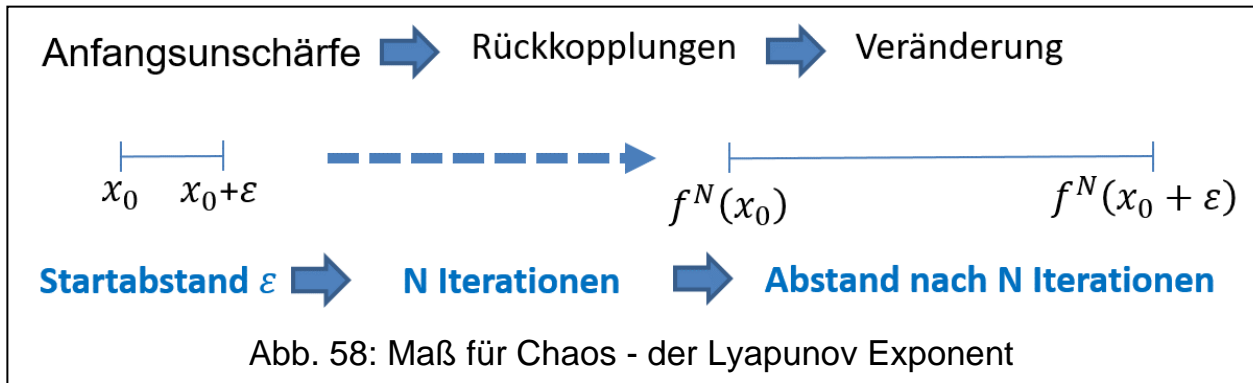
$$|f^N(x_0 + \varepsilon) - f^N(x_0)| = \varepsilon e^{N\lambda(x_0)}$$

Die Auflösung nach $\lambda(x_0)$ und nach Grenzwertbildung für $\varepsilon \rightarrow 0$ und $N \rightarrow \infty$ findet man die Beziehung

$$\lambda(x_0) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \log |f'(x_i)|$$

⁹⁵ Vergleiche Gottfried Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, S. 158-170

Dies ist insofern heuristisch plausibel, als fortgesetzte N-malige Anwendung von $f \circ f \circ f \circ \dots \circ f := f^N$ zu einem exponentiellen Wachstum des Fehlers ε führt. Das erklärt die e-Funktion in der Formel. Die Steigung der e-Funktion wird über die Ableitung ermittelt, deshalb führt die Grenzwertbildung bei $\lambda(x_0)$ zu einer Funktion f' . Die Summe geteilt durch N kann man als das durchschnittliche Wachstum infinitesimal kleiner Fehler in der Umgebung von x_0 verstehen. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass der Exponent λ nicht von x_0 abhängt. Das macht den Lyapunov Exponenten zu einem universellen Maß, wie sich eine



anfängliche Ordnung zu einem chaotischen Verhalten entwickeln kann.⁹⁶ Es ist klar, dass dies nur bei positivem λ erfolgen kann. Es ergeben sich folgende drei Fälle:

$\lambda > 0$, Sensitivität von den Anfangsbedingungen, also chaotisches Verhalten

$\lambda = 0$, neutrales Verhalten

$\lambda < 0$, das System konvergiert gegen einen Attraktor (s.u.)

Diese Systemzustände müssen nicht getrennt vorliegen. Die Entdeckung verdanken wir dem australischen Physiker und Biologen Robert May Anfang der 1970er Jahre. Er war ähnlich wie lange vor ihm Verhulst an der Entwicklung von Populationen interessiert und untersuchte Systemübergänge, hin zum chaotischem Verhalten. Wie Verhulst verwendete er die logistische Gleichung, allerdings hatte er leistungsfähige Computer zur Verfügung. May entdeckte, dass nach Bifurkationen sich je nach Geburtenrate das System auf einen Attraktor zubewegt oder zwischen zwei Attraktoren pendelt. Aber auch mitten in der chaotischen Phase können „Inseln der Ordnung“ entstehen. Diese „Inseln“ entstehen durch einen Prozess der Selbstorganisation und verschwinden wieder in anderen Parameterbereichen. Man nennt das Phänomen Intermittenz. Es kann als Ordnung im Chaos oder umgekehrt als chaotische Intermittenzen in vorwiegend geordneten Zuständen auftreten. Briggs und Peat zeigen Beispiele auf in einem Kapitel mit dem bezeichnenden Titel „Intermittenz: das

⁹⁶ Vergleiche Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S. 45f

Sandwich im Chaos“.⁹⁷ Sie stellen an dieser Stelle die Grundsatzfrage: „*Sind die einfachsten Ordnungen und das Chaos eines Systems beides Züge ein und desselben unteilbaren Prozesses? Die Erscheinung der Intermittenz legt es sehr nahe, dass dies der Fall ist.*“⁹⁸ Auch Mandelbrot beschäftigte sich mit dem Phänomen der Intermittenz in Zusammenhang mit Störungen der Datenübertragung über Telefonleitungen, wie sie in den 1960er Jahren praktiziert wurde und Reduktion von Störungen erhebliche wirtschaftliche Bedeutung hatte.⁹⁹ Er stellte fest, dass die höchst unregelmäßige Verteilung der Intermittenzen an die Cantor-Menge erinnert. Tatsächlich stimmte die Fehlerverteilung bei der Datenübertragung mit der Cantor-Menge in ihren wesentlichen Elementen überein. Insbesondere tritt zu keinem Zeitabschnitt der Datenübertragung eine regelmäßige Fehlerverteilung auf. In jedem fehlerhaften Abschnitt gibt es auch immer wieder Zeiträume mit fehlerfreier Übertragung.

Das Verhältnis zwischen fehlerfreien und fehlerhaften Abschnitten ist sogar in verschiedenen Zeitmaßstäben selbstähnlich. Das kann sogar unabhängig von

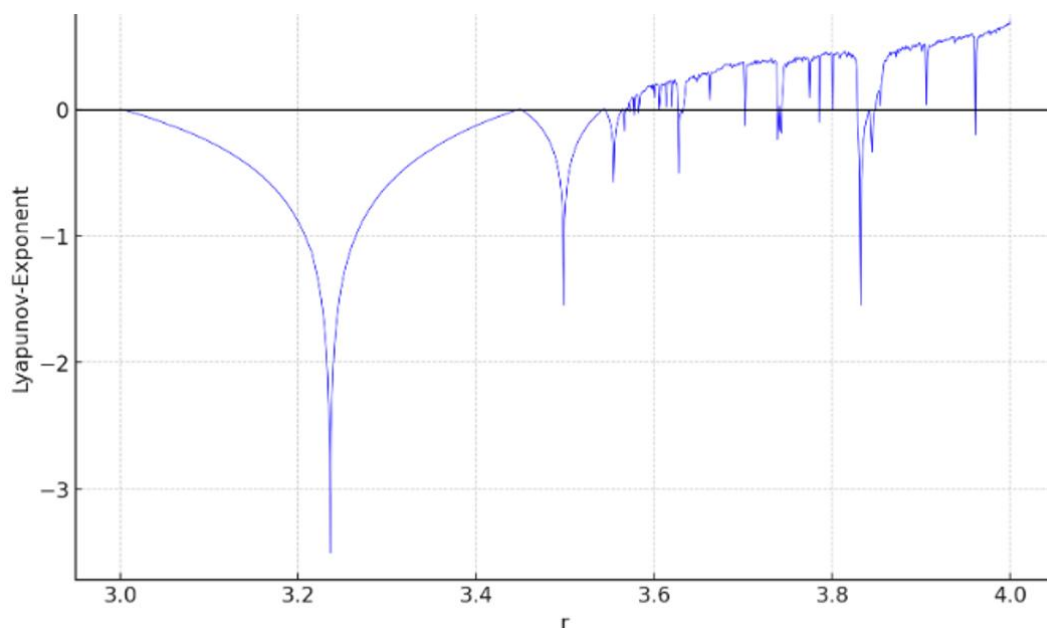


Abb. 59: Entwicklung des Lyapunov-Exponenten in der logistischen Abbildung von $3 \leq r \leq 4$.

⁹⁷ Briggs, John, Peat, F. David; Die Entdeckung des Chaos, Hanser, München Wien 1990, S. 86, Beispiele: Niederfrequenzrauschen, die schwankende Länge eines Erdtages etc. Es wird auch nach wie vor vermutet, dass große Rechnernetze durch Intermittenz von plötzlichem Chaos bedroht sind.

⁹⁸ Ebenda S. 87

⁹⁹ Siehe auch den Hinweis in seiner Autobiographie: Mandelbrot, Benoit B., Schönes Chaos, Piper München Zürich 2013, S. 357

Messungen im Stunden- oder Sekundenmaßstab sein.¹⁰⁰ Mandelbrot weist im Abschnitt „Äußere Schranken und extrapolierter Cantor-Staub“ darauf hin, dass Cantor bei der Entdeckung der Cantor-Menge noch kaum sein ursprüngliches Feld, das Studium trigonometrischer Reihen, verlassen hatte. Diese hängen mit periodischen Funktionen zusammen und deshalb kann die einzig mögliche Extrapolation in unendlichen Wiederholungen bestehen. Die innere und äußere Schranke wird ε bzw. Ω genannt und bezeichnet auch das kleinste bzw. größte „Merkmal“ (Zitat Mandelbrot) einer Menge. Cantor hat sich auf $\Omega = 1$ beschränkt. Die Selbstähnlichkeit wird aber durch Wiederholungen zerstört. Man muss deshalb den Initiator zur Interpolation verwenden um zu einem anderen Ω zu kommen (z.B. das für Fourier-Reihen passende 2π). So kann man die Verteilung des Cantor-Staubes trotzdem für die Beschreibung der Fehlerverteilung bei der Datenübertragung nutzen.¹⁰¹

Kausale Zusammenhänge

Fixpunkte x^* , also Punkte in denen $x^* = f(x^*)$ ist, sind von entscheidender Bedeutung für das dynamische Verhalten der Abbildung. Sie selbst sind zwar invariant. Die Steigung in diesen Punkten bestimmt aber die Dynamik. Ein Attraktor zieht benachbarte Orbits an.

Bei der logistischen Abbildung ist dabei die Ableitung am Fixpunkt $|f'(x^*)| < 1$. Es gibt aber auch abstoßende Elemente. Dort ist die Ableitung $|f'(x^*)| > 1$. Dafür wird der Begriff „Repeller“ verwendet. Punkte mit $|f'(x^*)|=1$ beeinflussen Punkte in ihrer Umgebung nicht, sind also „indifferent“, Punkte mit $|f'(x^*)|=0$ sind „superstabil“. Diese Argumentation lässt sich auf größere Perioden der Länge p , also p -periodische Punkte, verallgemeinern.

Die möglichen Fälle sollen anhand der vier Grafiken Abb. 60 A-D am Beispiel der logistischen Abbildung demonstriert werden.¹⁰²

$$x_{n+1} = f(x_n) = r \cdot x_n(1 - x_n)$$

¹⁰⁰ Originalquelle: Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, Basel, Boston, Birkhäuser 1987, S. 86-91. Vergleiche auch den Aufsatz von Stefan Frerichs, Grundlagen der Chaostheorie,

https://www.stefre.de/Grundlagen_der_Chaostheorie.pdf

¹⁰¹ Ebenda Mandelbrot, S.89

¹⁰² Beispiele der Abb. 60A-D aus der Facharbeit von Andreas Schmid,

https://www.fraktalwelt.de/systeme/as_weg_ins_chaos.pdf (neu erstellt mit ChatGPT 4o) mit Dank für die Idee und die freundliche, (nicht genutzte) Abdruckgenehmigung.

Die Fixpunkte liegen dort auf der Winkelhalbierenden. Es werden vier Segmente oder Intervalle, in denen sich r bewegt, beispielhaft untersucht. Die Anhaltspunkte für die Wahl der Intervalle für r liefert das Feigenbaum-

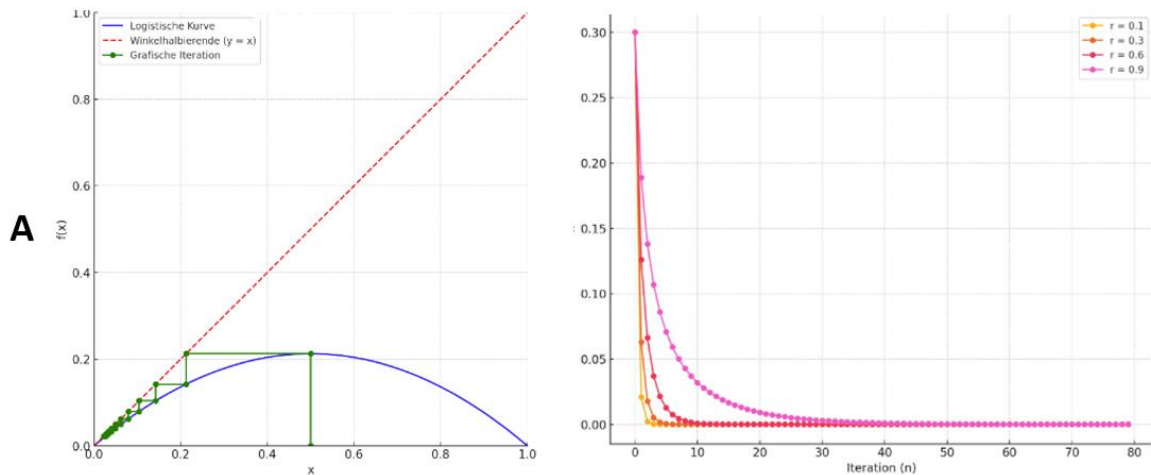


Abb. 60A: $0 < r \leq 1$. Einziger Fixpunkt $x_0=0$, $f'(x_0)=r$. Konsequenz: Die Population stirbt mit den Jahren aus. (Diagramm $r=0,85$, $x_0=0,5$)

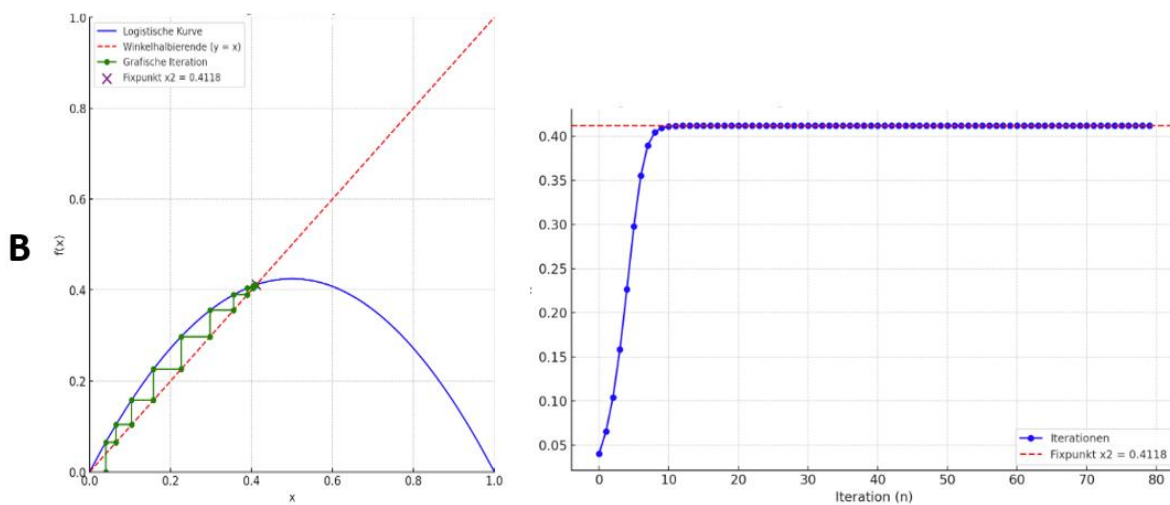


Abb. 60B: $1 < r \leq 3$. $x_1^* = 0$, $f'(0) = r$. Weiterer Fixpunkt $x_2^* = rx - rx^2 = 1 - \frac{1}{r}$
 $|f'(x_2^*)| = |r - 2rx_2^*| = |2 - r| \leq 1$. Population konvergiert mit $n \rightarrow \infty$.
 (Diagramm $r=1,7$, $x_0=0,04$, Fixpunkt $x_2^*=0,4118\dots$)

Diagramm. Das langfristige dynamische Verhalten wird auf der rechten Seite durch die Populationsentwicklung, wie sie bereits Verhulst analysiert hatte, grafisch angezeigt

Untersucht man solche einfachen Beispiele mit Hilfe der Mathematik und mit Hilfe der Informatik, so kann man bei fortgesetzten Iterationen $f^n(x)$ drei prinzipielle Lösungsmuster erkennen:

- 1) Die Funktionswerte $f^n(x)$ bewegen sich periodisch.
- 2) Die Funktionswerte $f^n(x)$ bewegen sich auf einen Fixpunkt.
- 3) Die Funktionswerte $f^n(x)$ bewegen sich „zufällig“ (chaotisch).

Als Untersuchungsfunktion f soll wieder die logistische Gleichung dienen, wobei hier sofort $r=4$ gesetzt wird, also

$$x_{n+1} = f(x_n) = 4 \cdot x_n(1 - x_n) = 4x_n - 4x_n^2$$

Im allgemeinen Fall, über die logistische Abbildung hinaus, sind die Fälle 1), 2) und 3) dabei nicht leicht zu unterscheiden. Oft ist eine erhebliche Anzahl an Iterationen erforderlich.

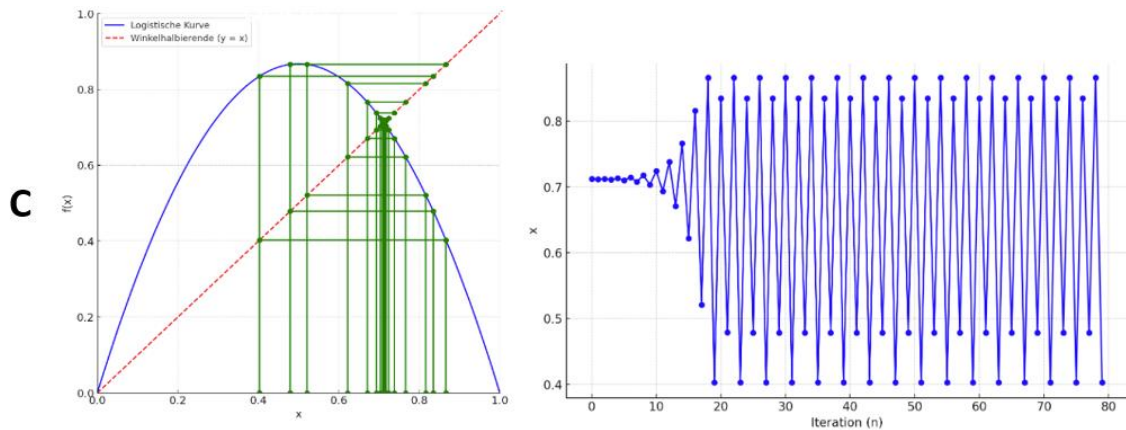


Abb. 60C: $3 < r \leq 3,57$. Es entstehen periodische Zyklen der Periode 2^p (Diagramm mit $r=3,47$, $x_0=0,71208$)

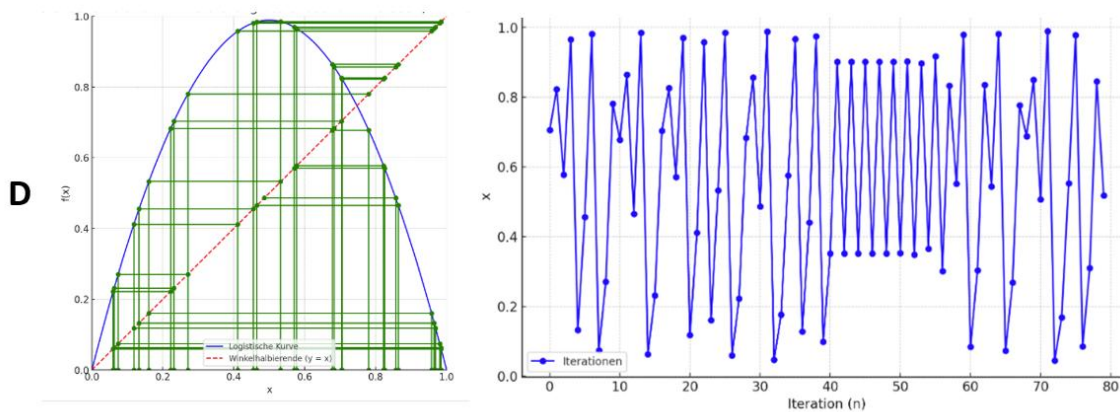


Abb. 60D: $3,57 < r \leq 4$. Das Diagramm rechts beginnt chaotisch, wird dann bei n -Werten (hier rund um $n=40$) periodisch und geht dann wieder in chaotisches Verhalten über. (Diagramm mit $r=3,9552$. $x_0=0,705$)

Außerdem sollte man sich klar machen, dass $4x_n(1 - x_n) = 4x_n - 4x_n^2$ natürlich aus Sicht der Mathematik gleich ist, aus Sicht der Informatik jedoch nicht unbedingt. Heutige Computer schneiden nicht einfach am Ende der Genauigkeit Stellen ab, sondern runden.

Die Zahl π , auf 4 Dezimalstellen genau, ist also nicht 3,1415, sondern wegen der 9 an der 5. Nachkommastelle 3,1416. Dieser kleine Unterschied macht sich in additiven linearen Beziehungen viel weniger stark bemerkbar als in der quadratischen nichtlinearen Form.

Ein Beispiel für eine noch vergleichsweise mäßig lange Periode der Länge 436 ist der Anfangswert $\sin 2$ in der logistischen Gleichung. Im Prinzip sind in anderen Beispielen/Anfangswerten beliebig lange, aber endliche Perioden nachweisbar.

Eine sehr kurze Periode der Länge 3 hat z.B. $x_n = \sin^2(\frac{\pi}{7})$ als Anfangswert in der logistischen Gleichung:

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right) \rightarrow \sin^2\left(\frac{2\pi}{7}\right) \rightarrow \sin^2\left(\frac{4\pi}{7}\right) \rightarrow \sin^2\left(\frac{\pi}{7}\right)$$

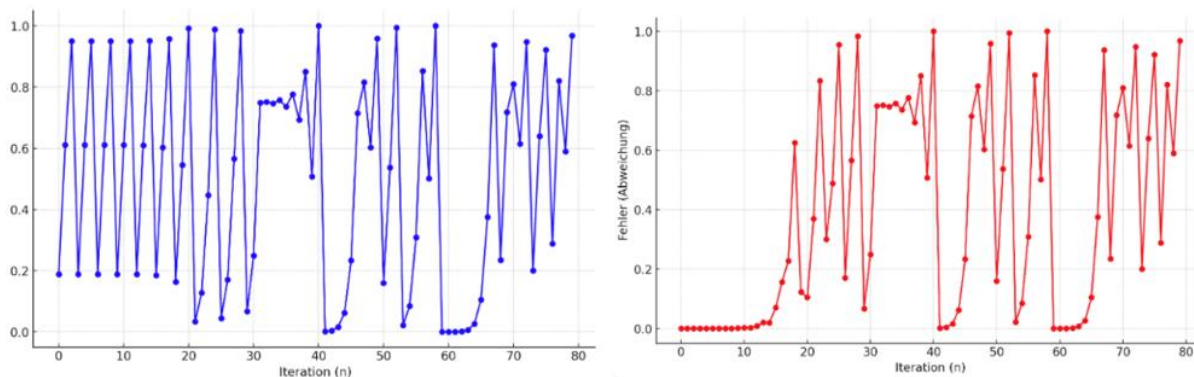


Abb. 61: Auswirkungen des Rundungsfehlers auf Periodik und Sensitivität.

Dies ist die mathematische Sicht. Benutzt man jedoch die Dezimalform, so wird $\sin^2 \frac{\pi}{7} = 0,1882550 \dots$ als Startwert benutzt. Je nach Rechner kann man bei einfacher Gleitkommagenauigkeit von einem Fehler von ca. 0,000000005 ausgehen. Die Grafik verdeutlicht die Sensitivität dieses Fehlers. Links sieht man, wie die Periode 3 etwa in der Mitte instabil wird Rechts ist die Fehlerentwicklung durch die iterativ verstärkten Rundungen dargestellt.¹⁰³

Welche kausalen Rückschlüsse und Erkenntnisse kann man unter Berücksichtigung von (reiner) Mathematik, Informatik und physikalischer Prozesse aus diesen Beispielen ziehen? Einfache Repräsentanten in der reinen

¹⁰³ Grafik und Argumentation siehe Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Bausteine der Ordnung Fraktale, Springer / Klett Cotta, 1992, S. 56-57

Mathematik sind vor allem Problemstellungen, die sich mit kausalen, algorithmischen Methoden lösen lassen. Doch schon für gekoppelte Gleichungssysteme kann man i.a. keine rein analytischen Lösungen finden. Man kann sie heute in der Regel leicht numerisch lösen (integrieren), kommt damit aber wieder in den Einflussbereich der digitalen Probleme. Allerdings spielen hier kaum Rückkopplungseffekte eine Rolle. Gemäß nachfolgender Abb. 62 liegt hier in der Regel eher schwache Kausalität vor, insbesondere natürlich bei bijektiven Abbildungen.

In Systemen, die sich linear verhalten oder bei klassischen stetigen und sogar differenzierbaren Funktionen findet man starke Kausalität. Auch wenn man den Computer mit unvermeidlichen Rundungsfehlern einsetzt, kann man in vielen Fällen noch gut mit starker Kausalität umgehen. Es gibt vergleichbar wenige Anwendungsfälle, in denen diese Rundungsfehler bei im Prinzip starker Kausalität zumindest formale Probleme machen können. Ein altes Beispiel ist der „fehlende Pfennig“ bei den ersten Datenbankimplementierungen. Das darf in Bankbelegen nicht vorkommen. Als Laplace seinen allwissenden Dämon erschuf, hatte er in überspitzter Form die schwache Kausalität verwendet. Später hat insbesondere James Clark Maxwell 1873 weitergesehen. Er dachte über

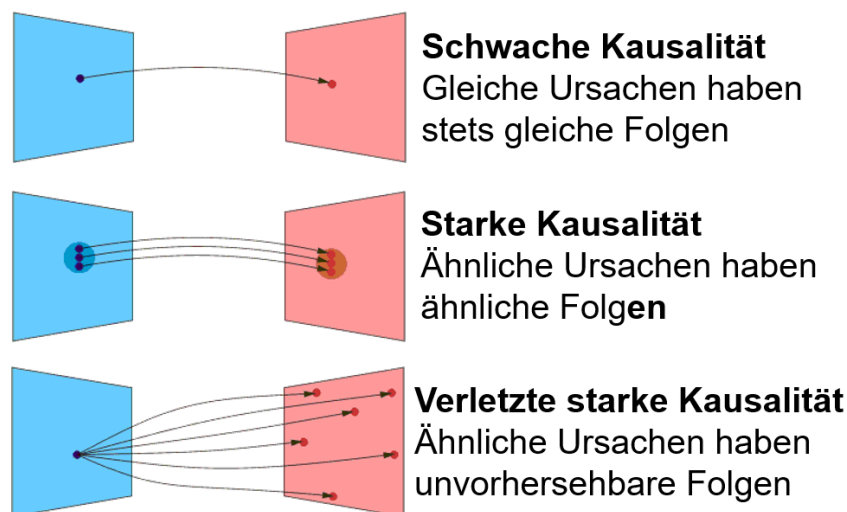


Abb. 62: Deterministisches Chaos und Kausalität

Determinismus und Willensfreiheit nach und schrieb:

It is manifest that the existence of unstable conditions renders impossible the prediction of future events, if our knowledge of the present state is only approximate, and not accurate. ¹⁰⁴ (Es ist offensichtlich, dass die Existenz

¹⁰⁴ Maxwell J.C., Science and Free Will in: Campbell, Lewis, Garnett, William, The Life of James Clark Maxwell, New York, Johnson Reprint Corporation, 1969, pp. 434-444, Chapter XIV, Maxwells Einzelbeitrag online: https://www.informationphilosopher.com/solutions/scientists/maxwell/science_and_free_will.html

instabiler Bedingungen die Vorhersage künftiger Ereignisse unmöglich macht, wenn unser Wissen über den gegenwärtigen Zustand nur ein angenähertes und kein genaues ist.)

Doch weder Maxwell noch 30 Jahre später Henri Poincaré drangen mit der Meinung durch, die heute als Unterschied zwischen schwacher und starker Kausalität bekannt ist.¹⁰⁵

Am Beispiel der logistischen Gleichung mit quadratisch wachsendem Fehler bei Iterationen kann man als dritte Variante die verletzte starke Kausalität des Chaos verdeutlichen.

Vorher sei auf Abb. 3 (Strecken-Falten-Kleben) hingewiesen. Mathematisch wird sie durch die Sägezahn-Funktion als quadratische Iteration beschrieben.

$$S(x) = \begin{cases} 2x & \text{wenn } x < 0,5 \\ 2x - 1 & \text{wenn } x \geq 0,5 \end{cases}$$

Verblüffend ist die zunächst unerwartet große Komplexität, die sich hinter den einfachen Formeln verbirgt. In der physikalischen Welt haben dissipative Systeme ähnliche Erscheinungsfolgen. Sie gehören ebenfalls in das Reich des deterministischen Chaos und werden noch weiter unten thematisiert.

Zeltabbildung:

Die logistische Abbildung ist auch aus historischen Gründen ein gutes Beispiel um chaotisches Verhalten zu demonstrieren. Noch einfacher ist die sogenannte Zeltabbildung T_s ¹⁰⁶ aufgebaut und sie verblüfft, wie sich mit einer derart (scheinbar) simplen Abbildungsvorschrift chaotisches Verhalten erzeugen lässt. Sie bildet das Intervall $[0,1]$ in das Intervall $[0,1]$ ab und ist folgendermaßen definiert:

$$x_{n+1} = s \cdot x_n, \text{ wenn } x_n \leq 0,5 \text{ und}$$

$$x_{n+1} = s \cdot (1 - x_n), \text{ wenn } 0,5 < x_n \leq 1 \quad \text{oder formal für } s=2$$

$$T_2: [0,1] \rightarrow [0,1], x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{wenn } x \in [0, \frac{1}{2}] \\ 2 - 2x & \text{wenn } x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Um den Schmetterlingseffekt zu demonstrieren, muss man die Zeltabbildung n-fach hintereinander auf den Anfangswert x_0 anwenden und das Ergebnis als neue Abbildung F_{x_0} betrachten. Die rechte, blaue Kurve zeigt dann die

¹⁰⁵ Poincaré, H.; Wissenschaft und Methode, Leipzig Berlin, Teubner, 1914, Hinweis siehe Peitgen, ebenda, S. 5

¹⁰⁶ Für den Fall $s=2$, also T_2 , siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Zeltabbildung>

Entwicklung der Unterschiede mit steigender Iterationenzahl bei den Anfangswerten $x_0 = 0,506$ und $x_0 = 0,506127$.

Die Zeltabbildung hat aber auch Periodik. Man betrachte $s=2$ und $x_0 = \frac{2}{5}$ und wende die Abbildungsvorschrift an:

$$x_1 = s \cdot x_0 = 2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

$$x_2 = s \cdot (1 - x_1) = 2 \cdot \left(1 - \frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5} = x_0$$

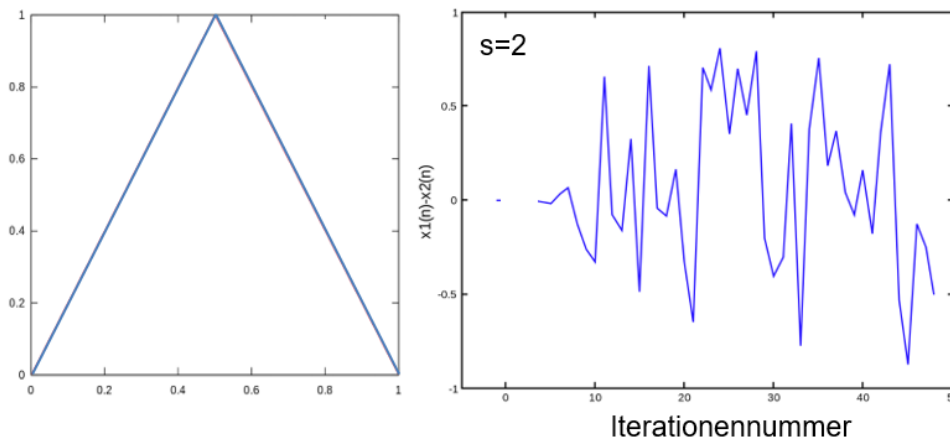


Abb. 63: Links Zeltabbildung und rechts ihr „Schmetterlingseffekt“

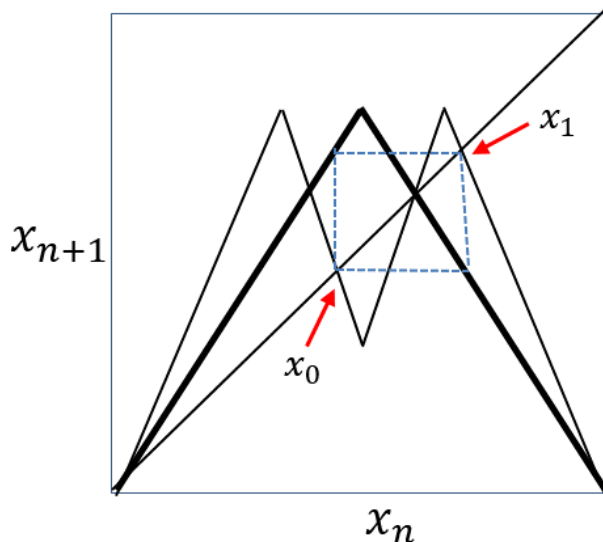


Abb. 64: Grafische Illustration einer 2-er Periodik bei der Zeltabbildung

Die Grafik zeigt einen 2-er Zyklus beispielhaft für $s > 1$. Die Doppelspitze ist die 2. Iteration (nicht maßstabsgerecht gezeichnet).

Man sieht aber auch, dass dieser Zyklus nicht stabil sein kann. Schon eine winzige Modifikation von x_0 verschiebt bei Folgeiterationen das x_0 und x_1 verbindende Rechteck und es entsteht wieder chaotisches Verhalten.

Insgesamt ist es offensichtlich, wie schnell sich der

„Schmetterlings-effekt“ bei dieser einfachen Abbildung zeigt.¹⁰⁷

Zusammenfassend kann man sagen: Für $s < 1$ gibt es nur den stabilen Fixpunkt 0 und damit keine Periodizität.

Bei jeder weiteren Iteration für $s > 1$ wird die Winkelhalbierende einmal mehr geschnitten und es entstehen M-ähnliche Faltungen. Die Steigung ist vom Betrag größer als 1.

An diesen Stellen ist eine Vielzahl von periodischem Verhalten möglich, sogar Perioden beliebiger Länge. Diese Fixpunkte sind aber alle instabil; bei immer

mehr „Zacken“ werden Voraussagen bei minimaler Änderung des Ausgangswertes immer schwieriger.¹⁰⁸

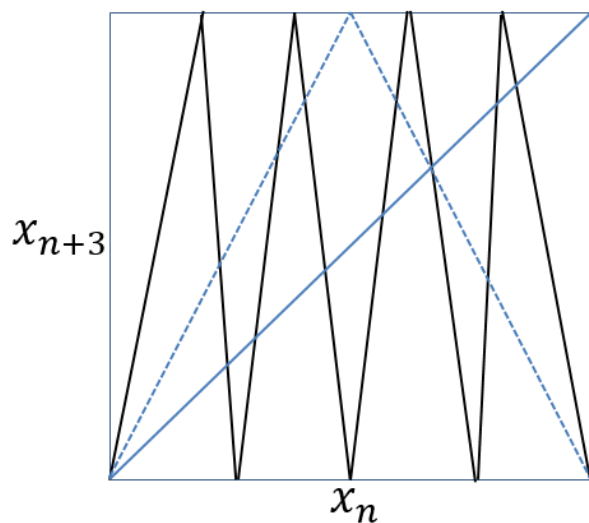


Abb. 65: Dritte Iterierte bei $s=2$

Die Zeltabbildung war deshalb auch eines der ersten Untersuchungsobjekte, bei denen es gelang, die chaotische Phase in der Nähe ihrer instabilen Fixpunkte zu synchronisieren.¹⁰⁹ Man kann dabei leichte Veränderungen am Parameter s als gezielte Störung der Steuergröße verstehen. Damit

wird erreicht, dass wieder ein Orbit erreicht wird, der das System an einem schnellen

Abdriften in chaotisches Verhalten hindert.

Entsprechende Techniken und Verfahren sind von erheblicher Bedeutung in der physikalischen Kybernetik.

Streng genommen versucht man durch Steuerung ein nichtlineares System jeweils für kurze Zeit in eine

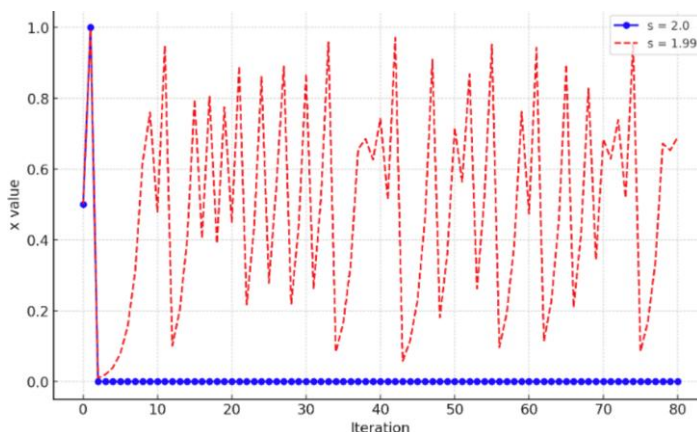


Abb. 66: Rasche Ausbreitung von Unterschieden Nähe $s=2$.

¹⁰⁷ Ausführlich widmet sich D. Peak und M. Frame in „Komplexität – das gezähmte Chaos“, S. 135-143, der Zeltabbildung. Vergleichbar einfache Abbildungen sind die Dreiecksfunktion und die Rechteckfunktion $\text{rect}(t)$. Sie repräsentieren (neben Sinus) Schwingungsformen und haben beide ihre Bedeutung in der Signalverarbeitung.

¹⁰⁸ Ebenda S. 142-143

¹⁰⁹ Siehe z.B. ebenda S. 225

näherungsweise lineare Dynamik zu versetzen, in der im begrenzten Rahmen wieder Voraussagen möglich sind. Dabei nutzt man aus, dass kleine Kurvenstücke in erster Näherung linear sind.

Seltsame Attraktoren, Tori und Solitonen

Allgemeine Eigenschaften:

Ein seltsamer Attraktor ist eine Struktur im Phasenraum, die für ein nichtlineares dynamisches System einen Einzugsbereich darstellt, auf das es sich bei geeigneten Anfangsbedingungen hin entwickelt. Dabei können beliebig kleine Änderungen des Anfangszustandes zwar zu vollkommen unterschiedlichen Verläufen führen. Das Verhalten des Systems ist also chaotisch. Die prinzipielle Struktur bleibt aber erhalten und bildet ein Fraktal, hat also eine gebrochene Dimension. Jede Bahn, die im Einzugsbereich des Attraktors startet, nähert sich beliebig stark an jeden Punkt des Attraktors an. Die einzelnen Verläufe sind also nicht separierbar. Die gewählten Beispiele sind eher einfach (z.B. nichtlinear quadratisch).

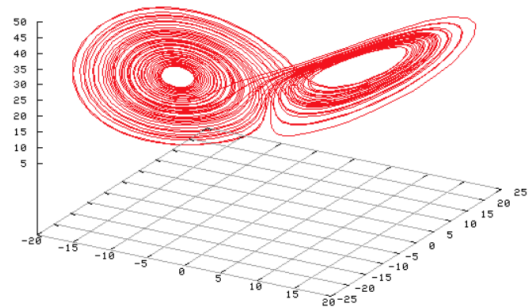


Abb. 67: Lorenz-Attraktor

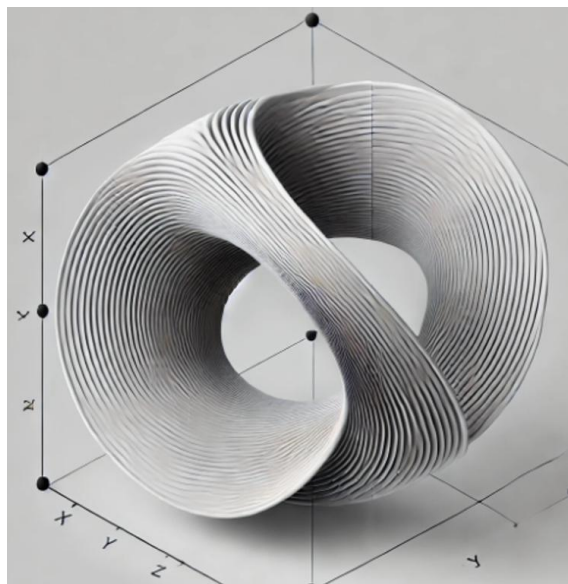


Abb. 68: Schematische Darstellung der Dynamik. Es handelt sich um eine Kombination von Streck-, Spalt- und Verschmelzungsprozessen.

und gab sowohl dem Fraktal als auch dem vermuteten Effekt („Schmetterlingseffekt“) seinen Namen.

Komplizierter wird es schnell bei Bahnkurven, die z.B. von einem hyperbolischen Fixpunkt ausgehen und von diesem wieder zurückführen (sogenannter homokliner Orbit, Beispiel Smalesches Hufeisen).

Es folgen einige Beispiele:

Lorenz-Attraktor

Eines der ersten Beispiele fand der Meteorologe Edward N. Lorenz (1917–2008) bereits im Jahr 1963. Es ging ihm um Modellierung hydrodynamischer Systeme in der Erdatmosphäre zur langfristigen Wettervorhersage. Die Parameter zur Kopplung von Konvektion und Wärmeleitung waren noch sehr speziell. Die Form des Attraktors ähnelt einem Schmetterling

Lorenz konstruierte drei Differential-gleichungen in den drei Raum-kordinaten X, Y und Z.¹¹⁰ Unter bestimmten Anfangsbedingungen der Parameter σ, ρ, β kommt man auf die fraktale Dimension von 2,401.¹¹¹ Im Prinzip beschreibt man damit auch das Bénard-Problem (s.u.).¹¹²

Hénon-Attraktor

Eines der einfachsten Beispiele eines Attraktors im 2-dimensionalen Raum ist der Hénon-Attraktor. Er ist charakterisiert durch die beiden Gleichungen

$$x_{k+1} = y_k + 1 - ax_k^2$$

$$y_{k+1} = bx_k$$

Auch hier wird bei besserer Auflösung der letzte Punkt der allgemeinen Eigenschaften deutlich. Die einzelnen Linien lassen sich nicht separieren. Ein Querschnitt durch den Attraktor kann als bijektive Abbildung der Cantor-Menge verstanden werden.

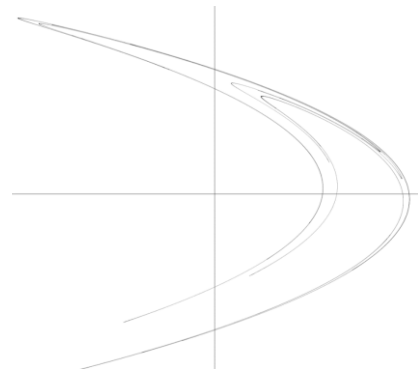


Abb. 69: Hénon-Attraktor

Rössler-Attraktor

Ein ästhetisch sehr schönes Beispiel ist der im Jahr 1976 von Otto Rössler entdeckte Rössler-Attraktor.¹¹³ Er wird durch das Gleichungssystem der folgenden drei Differentialgleichungen bestimmt:

$$\dot{x} = -(y + z)$$

$$\dot{y} = x + ay$$

$$\dot{z} = b + xz - cz$$

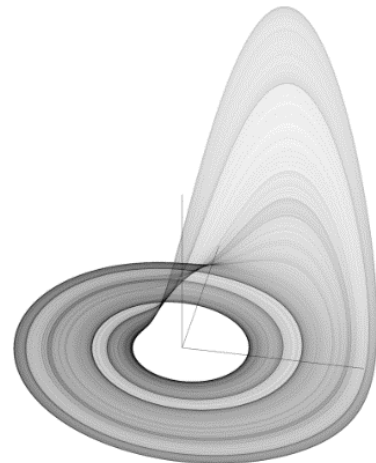


Abb. 70: Rössler-Attraktor

¹¹⁰ Siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Lorenz_system

¹¹¹ <https://doi.org/10.1080/02681119508806207>

¹¹² Zur mathematischen Diskussion siehe Jetschke, S. 130-138

¹¹³ O. E. Rössler: An Equation for Continuous Chaos. Physics Letters Vol. 57A no 5, pp 397-398, 1976.

O. E. Rössler: An Equation for Hyperchaos. Physics Letters Vol. 71A no 2,3, pp 155-157, 1979.

Die einzige Nichtlinearität in dem System ist durch den Term in der dritten Koordinate gegeben, die anderen Koordinaten weisen nur lineare Terme auf. Der Fluss auf dem Attraktor bewegt sich spiralförmig um einen instabilen

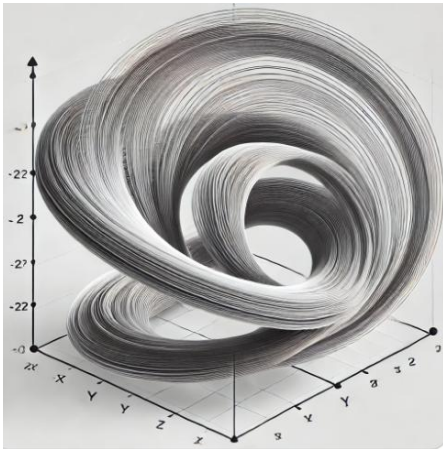


Abb. 71: Dynamik des Rössler-Attraktors

Fixpunkt. Der äußere Teil des Attraktors wird jedoch aufgrund der dort stärker wirkenden Nichtlinearität wieder in den inneren Teil injiziert und von dort aus sozusagen in die z-Richtung katapultiert. Durch die dabei entstandene Drehung hat der Attraktor Ähnlichkeiten mit einem Möbiusband.¹¹⁴ Der Rössler-Attraktor weist eine bemerkenswert hohe Dynamik aus. Die nebenstehende Abbildung vermittelt einen qualitativen Eindruck von der Dynamik. Die drei Schnitte zeigen, dass der Attraktor keineswegs so flach ist, wie es den Anschein hat. Zwei Startwerte, die anfangs sehr nahe zusammenliegen,

entfernen sich extrem stark voneinander. Betrachtet man zwei Trajektorien, die sich am Anfang nur minimal unterscheiden, so beträgt schon im dritten "Zyklus um den Fixpunkt" ihre Differenz mehr als das Zwanzigfache.

Thomas-Attraktor

Dieser Attraktor spielt bei der Bewegung von Teilchen eine Rolle, die sich in einem dreidimensionalen Kräftegitter bewegen und deren Flugbahn als durch Reibung gedämpft betrachtet werden kann. Er hat eine vergleichsweise einfache Form, denn die x-, y- und z-Variablen sind zyklisch symmetrisch. Diese einfache Form eignet sich besonders als Modellcharakter. Entdeckt wurde der Attraktor von René Thomas.¹¹⁵

$$\frac{dx}{dt} = \sin(y) - bx$$

$$\frac{dy}{dt} = \sin(z) - by$$

$$\frac{dz}{dt} = \sin(yx) - bz$$

Der Thomas-Attraktor wird durch drei Differentialgleichungen¹¹⁶ beschrieben, wobei b eine Konstante ist, die der Dissipativität des Systems entspricht und als Bifurkationsparameter fungiert. Für $b > 1$ ist der Ursprung der einzige stabile Fixpunkt.

¹¹⁴ Zitiert nach <https://www.cosmos-indirekt.de/Physik-Schule/Rössler-Attraktor> oder kaum ausführlicher unter <https://de.wikipedia.org/wiki/Rössler-Attraktor>

¹¹⁵ René Thomas; Deterministic Chaos seen in terms of Feedback Circuits, International Journal of Bifurcation and Chaos, Vol. 09, No. 10, pp. 1889-1905 (1999). <https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/S0218127499001383>

¹¹⁶ Um die Bewegung zu verdeutlichen explizit nach der Zeit notiert

Bei $b=1$ erfährt das System eine sogenannte Pitchfork-Bifurkation (siehe Heugabel, auch Stimmgabel) und teilt sich in zwei attraktive Fixpunkte.

Wenn der Parameter weiter verringert wird, erfährt er bei

$b \approx 0,32899$ eine sogenannte Hopf-Bifurkation, wodurch ein stabiler Grenzzyklus entsteht. Der Grenzzyklus erfährt dann eine Periodenverdopplungskaskade und

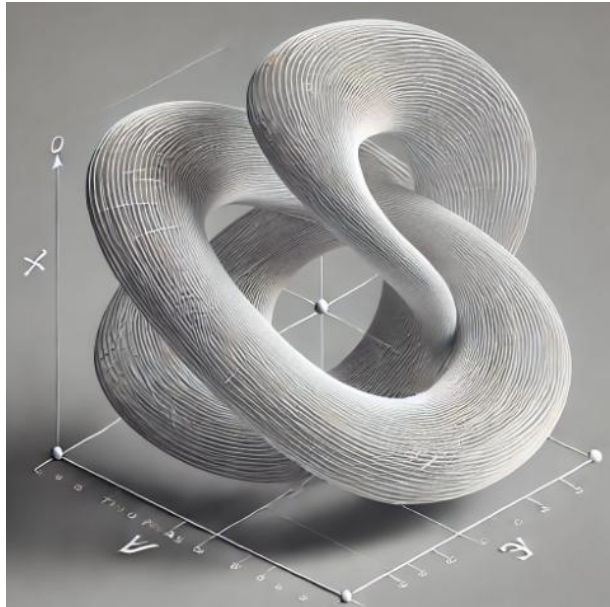


Abb. 72: Thomas-Attraktor und eine monochromatische Darstellung seiner Dynamik.

wird bei $b \approx 0,208186$ chaotisch. Darüber hinaus dehnt sich der Attraktor unkontrolliert aus und bei bestimmten Werten können bis zu sechs separate Attraktoren koexistieren. Die fraktale Dimension des Attraktors nimmt in Richtung 3 zu. Im Grenzfall $b=0$ fehlt dem System die Dissipation und die Trajektorie wandert ergodisch durch den gesamten Raum, (mit einer Ausnahme). Die Dynamik wurde als deterministische fraktionale Brownsche Bewegung beschrieben und weist eine anomale Diffusion auf.¹¹⁷

An dieser Stelle soll darauf hingewiesen werden, dass auch Kurven, die der Oberfläche eines Torus folgen, im allgemeinen Fall keiner Regelmäßigkeit folgen, also nur in Ausnahmefällen periodische Grenzzyklen ergeben. Man kann den Torus jedoch noch nicht zu den seltsamen Attraktoren zählen.

Nach den Beispielen zu seltsamen Attraktoren soll hier abschließend der Begriff allgemein charakterisiert werden.

Ein Attraktor ist in erster Linie ein Konzept aus der Mathematik der Chaostheorie, das sich auf Zustände oder Mengen von Zuständen bezieht, zu denen ein dynamisches System im „Laufe der Zeit“ tendiert. Attraktoren sind zwar besonders wichtig in der Untersuchung von nichtlinearen Systemen, die chaotisches Verhalten zeigen. Aber der Begriff ist universell anwendbar. Im Prinzip ist jeder Konvergenzpunkt ein Attraktor. In der Chaostheorie wird ein Attraktor als eine Menge von Punkten im Phasenraum eines dynamischen Systems definiert, zu der das System über die Zeit konvergiert. Es gibt verschiedene Arten von Attraktoren:

¹¹⁷ Eng zitiert nach

https://en.wikipedia.org/wiki/Thomas%27_cyclically_symmetric_attractor

- Punktattraktoren: Ein einzelner Punkt im Phasenraum, zu dem das System konvergiert.
- Zyklische Attraktoren: Eine geschlossene Kurve, auf der das System oszilliert oder periodisch verläuft.
- Der Torus als Attraktor für Kurven auf seiner Oberfläche als Ausnahme.
- Seltsame Attraktoren (Strange Attractors): Komplexe, fraktale Strukturen, die in chaotischen Systemen auftreten und nicht-periodisches Verhalten zeigen.

Anwendungen: Attraktoren finden in vielen Bereichen Anwendung, insbesondere in der Physik, Biologie, Wirtschaft und Ingenieurwissenschaften:

- Physik: In der Thermodynamik und Fluidodynamik werden Attraktoren verwendet, um das Verhalten von Systemen zu modellieren, die chaotische Strömungen aufweisen.
- Biologie: In der Populationsdynamik können Attraktoren helfen, das langfristige Verhalten von Populationen zu verstehen, z.B. das Gleichgewicht zwischen Räubern und Beute.
- Wirtschaft: In der Wirtschaftstheorie können Attraktoren verwendet werden, um das Verhalten von Märkten zu analysieren, insbesondere in Bezug auf Gleichgewichtszustände und zyklische Trends.

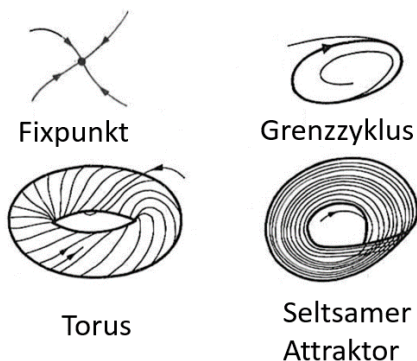


Abb. 73: Vier Arten von Attraktoren

- Ingenieurwissenschaften: In der Regelungstechnik werden Attraktoren genutzt, um stabile Zustände in dynamischen Systemen zu erreichen, z.B. in der Robotik oder bei der Regelung von Maschinen.

- Kunst und Musik: Auch in der generativen Kunst und Musik können seltsame Attraktoren verwendet werden, um komplexe, unvorhersehbare Muster zu erzeugen. Die musikalische Kunstform wird „Fraktale Musik“ genannt.¹¹⁸

Insgesamt sind Attraktoren ein zentrales Konzept in der Chaostheorie, das hilft, das Verhalten komplexer dynamischer Systeme zu verstehen und vorherzusagen.

Solitonen

An dieser Stelle soll ein nichtlineares Wellenphänomen erwähnt werden.

¹¹⁸ Siehe z.B. <https://www.mpg.de/9369189/fraktal-musik-jeff-porcaro>

Es wirkt manchmal wie ein Kuriosum der Natur, kann aber erhebliches Potential in Anwendungen entfalten. Zur Definition:¹¹⁹

Ein Soliton ist ein Wellenpaket, welches sich zugleich durch ein dispersives und ein nichtlineares Medium bewegt und sich trotzdem ohne Änderung seiner Form ausbreitet. Selbst wenn zwei Solitonen zusammenstoßen laufen sie nacheinander unverändert weiter.

Das Phänomen wurde schon 1834 von dem schottischen Forscher John Scott Russell entdeckt. Es wollte Kanalboote optimieren, die damals mit Pferden gezogen, also „getreidelt“ wurden und durchaus für das damalige Transportwesen einen bedeutenden Wirtschaftsfaktor darstellten. Als in einem engen Kanal ein Testboot abrupt gestoppt wurde, löste sich ein Wellenberg vom Boot und bewegte sich ohne erkennbare Abschwächung durch den Kanal. Russell konnte ihn reitend kilometerweit verfolgen, bis er ihn, nach wie vor stabil und von scheinbar gleicher Höhe, aus den Augen verlor.

Normalerweise besteht eine Welle aus einer Kombination unterschiedlicher Wellen mit verschiedenen Frequenzen. Deshalb findet in der Regel immer eine Dämpfung statt, genannt Dispersion. Man kann salopp formulieren, dass die Dispersion der Reibungsverlust bei Wellenübertragungen ist. Sie zu unterdrücken, würde bei vielen Anwendungen regelrecht revolutionäre Fortschritte ermöglichen. Denn offenbar findet bei einem Soliton, egal in welchem Medium es entsteht und sich fortbewegt, keine oder kaum Dispersion statt.

Eine Anwendung, die eine zukunftsweisende Bedeutung hat, ist die Spintronik. Jede Form von Elektronik nutzt elektrische Ladungen, also Elektronen, zur Übermittlung. Doch diese Elementarteilchen nutzen eine fundamentale Eigenschaft von Quanten, zumindest kommerziell, bisher nicht. Gemeint ist der Spin, eine Art Drehmoment, das nur in zwei Zuständen vorkommt und für das magnetische Drehmoment eines Elektrons verantwortlich ist. Es verhält sich im

Prinzip wie ein kleiner Stabmagnet. Zwei Möglichkeiten eröffnen sich dadurch für zukünftige

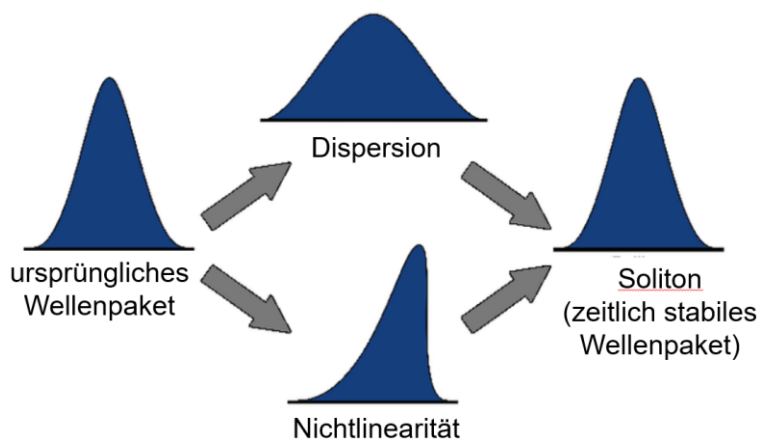


Abb. 74: Entstehung eines Solitons

¹¹⁹ Wörtlich aus <https://de.wikipedia.org/wiki/Soliton>

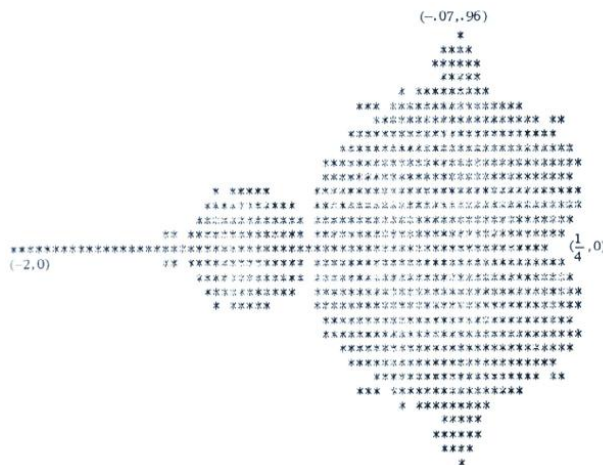
Übertragungstechnologien. Man könnte eine Spinwelle induzieren. Ist diese stabil, so könnten, ohne dass lineare elektrische Verbindungen existieren, elektronische Bauteile Informationen austauschen. Eine Schicht aus magnetischem Material würde als Trägermedium genügen. Gegenüber der Halbleitertechnologie sind dann Geschwindigkeiten möglich, die nahe an die Lichtgeschwindigkeit in dem Medium heranreichen. Bleibt noch die Dispersion, die bei längerer Übertragungstrecke zu Verlusten führt. An dieser Stelle kommen Solitonen mit ins Spiel. Sie würden eine weitgehend verlustfreie Übertragung ermöglichen.¹²⁰

Mandelbrot-Menge

Ein Übersichtsbeitrag zum Thema Chaos und Fraktale wäre unvollständig, wenn man nicht die berühmte Mandelbrot-Menge M und Julia-Mengen J betrachten würde. Es sei im Internet auf die faszinierend ästhetischen Computergrafiken hingewiesen, in denen mit Zoom-Effekten diese Fraktale in Form von Videos präsentiert werden.¹²¹ Man sollte dabei nicht vergessen: Der Computer hat den Mathematikern dieses „nähere Hinsehen“ erlaubt. Julia und Fatou war dies noch nicht möglich. Auch Galilei benötigte das Teleskop, um die Jupitermonde zu entdecken.

Kurz zur Geschichte dieser Menge:

Der erste grobe Plot dieser Menge, noch mit einem Nadeldrucker erstellt, stammt nicht von Mandelbrot. Er wurde erstmals 1978 in einem Paper mit dem Titel „*The Dynamics of 2-Generator Subgroups of $PSL(2, C)$* “ von Robert Brooks



and J. Peter Matelski veröffentlicht.¹²² Liest man ihre Arbeit, so scheint sie sich mit scheinbar unabhängigen Fragen der Gruppentheorie und der hyperbolischen Geometrie zu befassen.

Mandelbrot, der bei den IBM-Forschungslaboren am Thomas J. Watson Research Center, Yorktown Heights (Westchester County, New York) arbeitete, erahnte das Potential dieser

Abb. 75: Erstes 1978 veröffentlichtes Bild der Mandelbrot-Menge.

¹²⁰ <https://www.weltderphysik.de/gebiet/materie/spintronik/solitonen/>

¹²¹ Z.B. <https://www.youtube.com/watch?v=fFyC68CIEio> und vor allem die Linksammlung in https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge#Bezug_zur_Chaostheorie sowie im Anhang dieser Arbeit

¹²² https://abel.math.harvard.edu/archive/118r_spring_05/docs/brooksmatelski.pdf

Menge. Er hatte sich intensiv mit Julia-Mengen beschäftigt und dabei die damals enorme Rechenleistung der IBM-Labore ausnützen können. Im Jahr 1980 gelang ihm eine deutlich bessere Auflösung der Menge, auch wenn diese gegenüber heute fast lächerlich erscheint. Aber er propagierte das Fraktal und man gab der Menge schließlich seinen Namen. Erst später wurde deutlich, wie sehr diese Struktur regelrecht als ein mathematisches Kaleidoskop verstanden werden kann, das viele Elemente der Chaos-Theorie in sich vereinigt. Mit der Wortschöpfung "Fraktal" und mit der Menge \mathbb{M} , auch oft liebevoll „Apfelmännchen“ genannt, wurde Benoit Mandelbrot zum Medienstar.

Mandelbrot war allerdings als Mathematiker und Mensch bei seinen Fachkollegen nicht besonders beliebt. Er wandte sich nach allgemeiner Meinung zu vielen Themen zu und schöpfte deren Potential zu schlecht oder sogar zu plakativ aus, bevor er zu einem neuen Thema sprang. Sein wichtigstes Verdienst ist es, dass der Computer in der mathematischen Forschung, zumindest zuerst als Medium zur Veranschaulichung, enorm an Bedeutung gewann. Plötzlich war man in der Lage, auf experimentellem Weg mathematische Probleme zu visualisieren. Mathematiker erkannten Zusammenhänge, für die vorher das Vorstellungsvermögen nicht ausreichte. Diese Untersuchungen, die immer leistungsfähigere Computer, aber auch entdeckungsfreudige Forscher möglich machten, eröffneten eine neue Welt.

Doch auch die Mathematik, die in der unwahrscheinlich komplexen Struktur steckt, erwies sich als sehr anspruchsvoll. Im Oktober 2023 trafen sich die 20 führenden Forscher zur Mandelbrotmenge zu einem Workshop in einer alten Kaserne mitten im Wald im Nordwesten von Dänemark. Stimmung, Personen und Hintergründe wurden in einem Beitrag des Quantamagazins von Jordana Cepelewicz am 26. Januar 2024 veröffentlicht.¹²³

Die Menge \mathbb{M} kann man als eine Art Hauptkatalog dynamischer Systeme verstehen. Es geht um die Möglichkeiten, wie sich ein Punkt nach einer einfachen Iterationsregel durch den Raum bewegen könnte. Diese möglichen Varianten waren und sind seit über 40 Jahren Gegenstand der Forschung und die 20, in Dänemark anwesenden Protagonisten haben wesentliche Beiträge geliefert. Führend im Überblick über diese Varianten ist Mikhail Lyubich, der aus der Sowjetunion emigrierte und heute an der State University of New York at Stony Brook (SUNY) eine Professur hat. Mit \mathbb{M} sind nicht nur viele Aspekte von dynamischen Systemen verständlich geworden, sondern auch Zusammenhänge in Zahlentheorie, Topologie, algebraischer Geometrie, Gruppentheorie und sogar der Physik. Man hat in ganz anderen Zusammenhängen, z.B. bei der Suche nach numerischen Lösungen für kubische Gleichungen, Querbeziehungen zur Mandelbrot-Menge entdeckt.

¹²³ <https://www.quantamagazine.org/the-quest-to-decode-the-mandelbrot-set-maths-famed-fractal-20240126>

Noch nicht gelöst ist die sogenannte MLC-Vermutung ("Mandelbrot locally connected"). Wikipedia formuliert sie sehr anschaulich: *Egal, wie weit man in die Menge hineinzoomt, sie sieht immer wie ein zusammenhängendes Stück aus.* Lyubich und sein enger Mitarbeiter und Kollege Dzmitry Dudko konnten auf dem Workshop Fortschritte beim Versuch, die MLC-Vermutung zu beweisen, präsentieren. MLC ist Teil ihrer später veröffentlichten Orsay-Notes.¹²⁴ Douady und Hubbard schreckten sogar nicht von der sogenannten Renormierungstheorie zurück. Diese Technik verwenden Physiker um Unendlichkeiten bei der Untersuchung von Quantenfeldtheorien zu zähmen und verschiedene Skalen bei der Untersuchung von Phasenübergängen zu verbinden. Sie ist bei Mathematikern lange Zeit verpönt gewesen, da „willkürlich“ Divergenzen behandelt werden, die Unendlichkeiten erzeugen würden. Mitchell Feigenbaum als Physiker wandte in den 1970-er Jahren erstmals Renormierung in dynamischen Systemen an.

Yoccoz bewies MLC für alle Punkte außer denjenigen, die „unendlich renormierbare“ Parameter sind. Das sind die Punkte, die immer wieder beim Zoomen in immer kleineren Mandelbrot-Kopien auftauchen. Scheinbar kann das bis in unendliche Tiefe gehen und damit als Figur (nicht als Punkt) in eine Periodik münden – aber warum? Man vermutet, dass Punkte im Spiel sind, die oszillieren, aber nicht periodisch sind. Stichwort ist „Hyperbolizitätsdichte“, als die zentrale Frage in der Dynamik. Mittlerweile wurde Renormierung zu einer Schlüsseltechnik bei der Untersuchung von \mathbb{M} und MLC. Dabei befasst sich die Hyperbolizitätsdichte mit dem Inneren der Mandelbrot-Menge, da wo immer neue „Baby-Mandelbrot-Mengen“ auftauchen können. MLC hingegen, wenn die Vermutung wahr ist, würde es ermöglichen, jedem Punkt auf der Grenze der Menge eine Adresse zuzuweisen. „Lokal zusammenhängend“ ist ein wichtiges topologisches Konzept, das Auswirkungen auf die Struktur und die Eigenschaften der Mandelbrot-Menge hat. Die Bestätigung der MLC-Vermutung würde bedeuten, dass sie gewissermaßen "glatt" ist, wenn man sie auf beliebig kleinen Skalen betrachtet. Es ist eine Verallgemeinerung der Stetigkeit.

Soviel zur Tragweite, die die Mandelbrot-Menge für die Mathematik der dynamischen Systeme hat.

Hier soll zunächst das Bildungsprinzip der Menge \mathbb{M} erläutert werden. Dann wird der Zusammenhang mit der Fibonacci-Folge und dem Feigenbaum-Szenario erläutert und auf die Querbeziehungen zwischen Mandelbrot- und Julia-Mengen wird eingegangen.

¹²⁴ Siehe auch die sog. Orsay-Notes:

<https://mathoverflow.net/questions/118180/roadmap-to-complex-dynamics-particularly-the-works-of-hubbard-douady-and-yoccoz> (Jean-Christophe Yoccoz)

Zwei gängige Definitionen für die Mandelbrot-Menge können im Prinzip gewählt werden:

- Definition über Rekursion und
- Definition über komplexe quadratische Polynome.

Beides ist leicht einsichtig; aufgrund der bisherigen Überlegungen bei reellen Fraktalen soll hier die Rekursion/Iteration gewählt werden.

Wikipedia definiert wörtlich:

Die Mandelbrot-Menge \mathbb{M} ist die Menge aller komplexen Zahlen c , für welche die rekursiv definierte Folge komplexer Zahlen z_0, z_1, z_2, \dots mit dem

Anfangsglied $z_0 = 0$ und dem

Bildungsgesetz $z_{n+1} = z_n^2 + c$

beschränkt bleibt.

Der Anfangspunkt muss zwingend $z_0 = 0$ sein, denn $z_0 = 0$ ist superstabiler Fixpunkt von $f_c(z)$. Nach dem Banachschen Fixpunktsatz folgt, dass dann, wenn es einen stabilen Zyklus gibt, der Orbit ab $z_0 = 0$ von dem Fixpunkt angezogen wird.¹²⁵ Die Konsequenz lautet, dass es zu jedem c höchstens einen stabilen Zyklus geben kann.

Die eigentliche Variable ist also c und sie ist Bestandteil der Mandelbrot-Menge, wenn die Beträge der mit c berechneten z_n bei $n \rightarrow \infty$ nicht ebenfalls über alle Schranken wachsen, also „gegen unendlich gehen“¹²⁶. Die Grafik in Abb. 81 verdeutlicht die Situation.

Das Verdienst von Benoit Mandelbrot ist unbestritten. Doch es beschäftigten sich schon vor ihm Mathematiker mit Abbildungen, die letztendlich Querbeziehungen zwischen der Mandelbrotmenge und einer verallgemeinerten logistischen Parabel aufzeigen. Grundlage ist ein Gleichungssystem, das trotzdem den Namen Mandelbrot-Abbildung trägt:

$$x_{n+1} = x_n^2 - y_n^2 + a \quad (1a)$$

$$y_{n+1} = 2 \cdot x_n \cdot y_n + b \quad (1b)$$

Damit kann man die Untersuchung von der eleganten, aber ungewohnten komplexen Ebene in eine kartesische Ebene verlagern. Es geht jetzt darum, welche Punkte (a, b) wie reagieren. Bleiben sie im Endlichen oder „verschwinden“ sie im Unendlichen? Es stellt sich aber die Frage, nach wieviel Iterationen diese Frage mit Sicherheit beantwortet werden kann. Dazu gibt es einen Satz, der besagt, dass dann, wenn der Abstand zwischen $(x_0 = 0, y_0 = 0)$

¹²⁵ Der Satz wird oft „Prinzip der kontrahierenden Abbildung“ genannt.

¹²⁶ Hinweis: Der Betrag einer komplexen Zahl ist eine reelle Zahl.

und (x_n, y_n) größer als 2 wird, die entsprechende Folge ins Unendliche entweicht.¹²⁷

Man sieht mit etwas Verständnis von komplexen Zahlen (mit $i^2 = -1$), dass

$$x_{n+1} + y_{n+1} \cdot i =: z_{n+1}, \quad a + b \cdot i =: c, \quad z, c \in \mathbb{C},$$

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \text{ identisch ist zu}$$

$$x_{n+1} + y_{n+1} \cdot i = (x_n^2 + y_n^2 + 2 \cdot x_n \cdot y_n \cdot i) + (a + b \cdot i)$$

An dieser Stelle ist ein erster Hinweis auf die angesprochenen Querbeziehungen zwischen der Mandelbrot-Abbildung und dem Feigenbaum-Szenario sinnvoll. Es kann wieder beim Verhalten der Folge zwischen den üblichen vier Fällen unterschieden werden:

1. Konvergenz gegen Fixpunkt
2. Konvergenz gegen periodischen Grenzyklus (2 oder mehr Werte)
3. keine Periodizität, chaotisches Verhalten
4. Divergenz

Konkrete Zahlenbeispiele siehe dazu die Tabelle¹²⁸ in Abhängigkeit mit dem Parameter c und Glied z_1 . Es werden Folgenglieder z_2, z_3, z_4, \dots berechnet und das prinzipielle Verhalten gemäß der vier Fälle analysiert. Dabei wird ebenfalls das Verhalten ausgewählter reeller c -Werte und auch einiger komplexer c -Werte betrachtet.

Z.B. für reelles c

$c = -2$, Konvergenz gegen Fixpunkt 2

$c = -1,75$, Konvergenz gegen Dreiergrenzyklus

$c = 1, \overline{777}$, 12-er Grenzyklus

Oder für komplexes c

$c = \pm i$, Konvergenz gegen alternierenden Grenzyklus $-1, \pm i, \mp i, \dots$ oder

$c = -\frac{1}{8} \pm \frac{3}{4}i$, Konvergenz gegen Dreiergrenzyklus

Im Gegensatz dazu: $c = -1,5 \Rightarrow$ chaotisches Verhalten

Reduziert man die Gleichungen (1a) und (1b) auf $b = 0$ und $y_0 = 0$ so erhält man eine eindimensionale Abbildung, die nur über Sprünge auf der x -Achse ihre Dynamik entfaltet und mit a eine Steuergröße enthält.

¹²⁷ Bodil Branner. „The Mandelbrot Set“, S. 75-105 in Chaos and Fractals, the Mathematics Behind the Computer Graphics. R. Devaney und L. Keen, Providence, RI, American Mathematical Society, zitiert nach Peak, Frame „Komplexität – das gezähmte Chaos“, Kap. 7, Anm. 105

¹²⁸ https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge#Bezug_zur_Chaostheorie

$$x_{n+1} = x_n^2 + a$$

Dies verdeutlicht im Eindimensionalen die Relation zwischen der Mandelbrot-Abbildung und der logistischen Abbildung ohne Einschränkung von r auf den Bereich zwischen 0 und 4.

$$x_{n+1} = r \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

Man sieht durch graphische Iteration schnell, dass z.B. für $r > 4$ die logistische Parabel gegen minus Unendlich geht. Damit kann man natürlich die Analogie zu Populationsentwicklungen nicht mehr aufrechterhalten. Es gibt keine negative Population.

Ein weiterer Bezug zwischen der Mandelbrotmenge und der logistischen Gleichung, die sich im Feigenbaum-Szenario zeigt, wird über Abb. 77 angesprochen, in dem man beide Strukturen auf der x-Achse vergleicht.

\mathbb{M} ist definiert durch $z^2 + c$, die logistische Gleichung durch $rx(1 - x)$. Sie stehen durch eine quadratische Transformation in Relation zueinander.

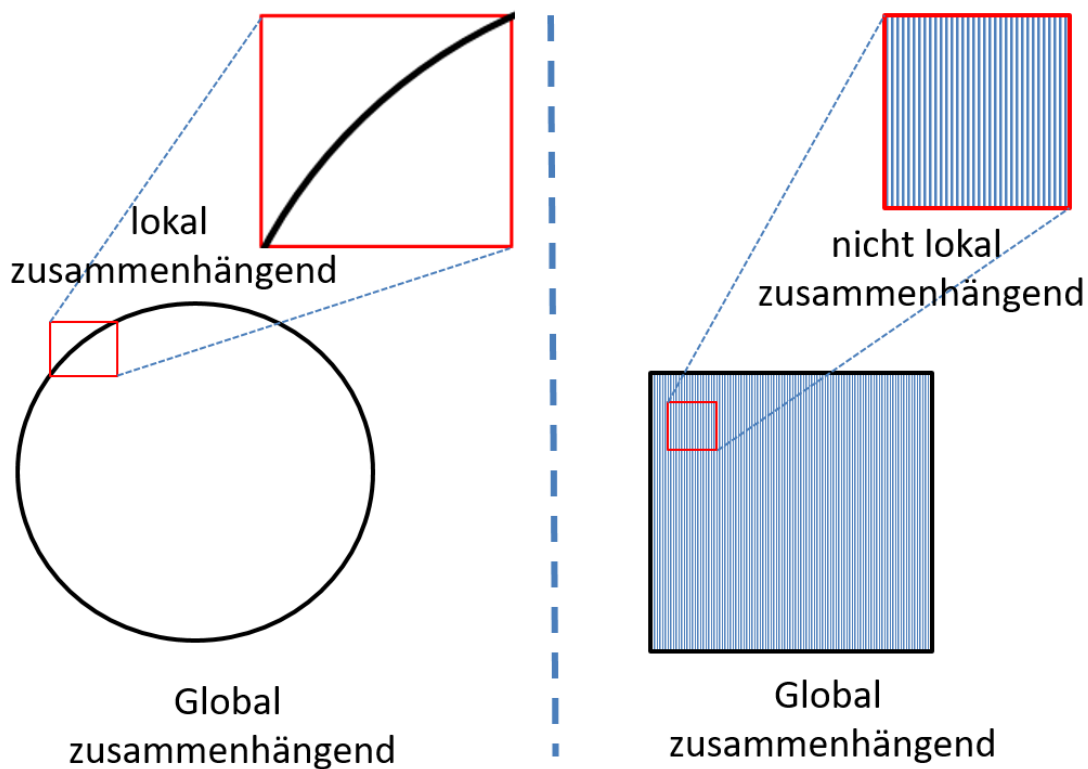


Abb. 76: Die Kernfrage von MLC: Mandelbrot locally connected ?

D.h. die logistische Abbildung kann auch als eine nichtlineare Transformation der komplexen Ebene interpretiert werden. Sie erzeugt eine fraktale Menge, die sogenannte logistische Mandelbrot-Menge. Sie wird „Mandelbrot Lambda“ bezeichnet, da in diesem Zusammenhang meist r durch λ ersetzt wird, also $\lambda x(1 - x)$.

Im folgenden Abschnitt sollen einige wesentliche oder interessante mathematische Eigenschaften der Mandelbrotmenge \mathbb{M} angesprochen werden:

\mathbb{M} kann man als die Menge der reellen Steuereinstellungen a, b bzw. einer komplexen Zahl c betrachten, für die der Orbit $ab(0,0)$ nicht nach unendlich geht. Es ist somit die Menge aller „sicheren“ Sprünge. \mathbb{M} selbst ist Teil des „Steuerraums“ (Gefangenenmenge). Der Startpunkt muss zwingend

$$x_0 = 0, y_0 = 0 \text{ bzw. } z_0 = 0$$

sein.

Da alle Startpunkte auf dem „Rand“ zur Menge gehören, ist \mathbb{M} abgeschlossen und ihre Komplementmenge ist offen. Der Rand ist unendlich lang, aber die

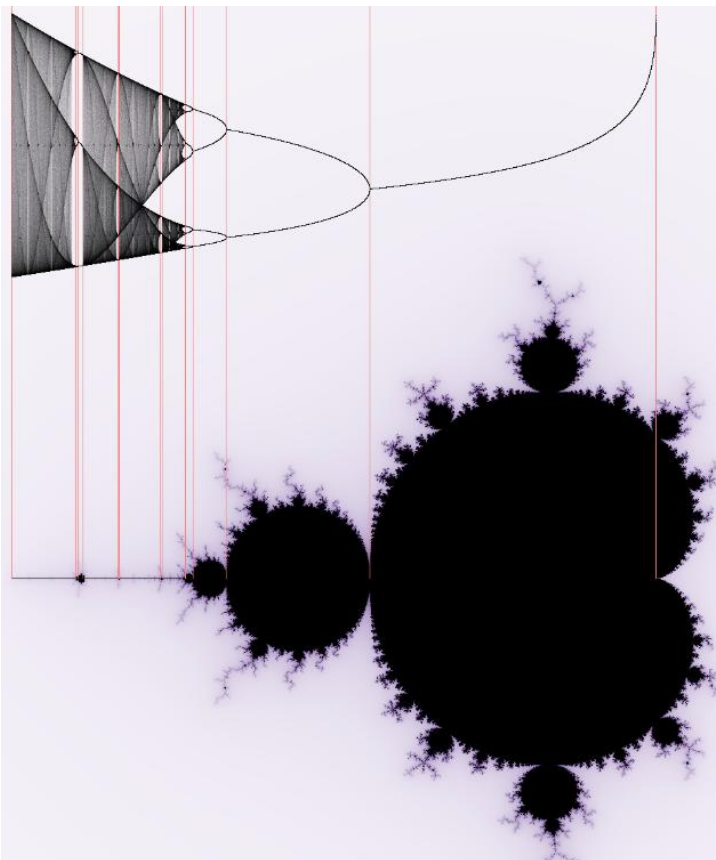


Abb. 77: Tiefliegende Grundlagen der Chaos-Theorie zwischen Feigenbaum-Diagramm und der Mandelbrot-Menge \mathbb{M} .

Fläche ist begrenzt (ungefähr 1,507... Flächeneinheiten). Für die Beträge der Punkte P , die zu \mathbb{M} gehören, kann man eine Abschätzung gemäß dem angesprochenen Satz von Bodil Branner geben.

$P_c(z) = z^2 + c$ und $P_c^n(z)$ bezeichne die n -te Iteration. Ein Punkt c gehört genau dann zur Mandelbrot-Menge \mathbb{M} , falls

$$|P_c^n(0)| \leq 2 \text{ für alle } n \geq 0$$

D.h. alle Punkte der Mandelbrot-Menge liegen in einem Kreis mit dem Radius 2 um den Ursprung.¹²⁹

\mathbb{M} ist spiegelsymmetrisch zur reellen Achse. Das liegt

¹²⁹ Weitgehend wörtlich zitiert aus <https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge>

¹³⁰ Exploring the Mandelbrot set. The Orsay Notes. Adrien Douady John H. Hubbard Siehe in <https://pi.math.cornell.edu/~hubbard/OrsayEnglish.pdf>

Es wird vermutet, dass die Mandelbrot-Menge auch in ihren feinsten Verästelungen lokal zusammenhängend ist. Für die gesamte nichtlineare Dynamik wäre dies ein sehr wichtiges, noch unbewiesenes Ergebnis (MLC-Vermutung (Abb. 76) ebenfalls von Douady und Hubbard, siehe auch die nach ihm benannte Julia-Menge, das „Douady-Kaninchen“). Die MLC-Vermutung würde über die Topologie von \mathbb{M} weitreichende Folgerungen erlauben (Hyperbolizitätsvermutung, also, dass \mathbb{M} hyperbolisch ist). Manche Punkte führen zu begrenzten Orbits, sind aber nicht periodisch. Falls MLC stimmt, sind solche Punkte selten und ihre Häufigkeit wird als „Dichte der Hyperbolizität“ bezeichnet. Diese Eigenschaft ist bei allen dynamischen Systemen so interessant, dass sie als wichtigste Frage in der nichtlinearen Dynamik gilt.

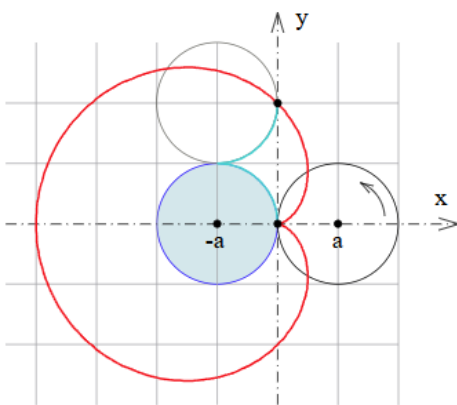


Abb. 78: Wie eine Kardioide entsteht

\mathbb{M} ist übrigens nicht perfekt selbstähnlich. Am Rand sind je zwei Teilstrukturen nicht vollkommen deckungsgleich.

Die gesamte Mandelbrot-Menge \mathbb{M} , bildet sich also, wie die Funktion $f(z) = z^2 + c$ für komplexe Werte c und z sich in einem Kreis mit Radius 2 verhält. Der »Körper« des Apfelmännchens ist eine zentrale sogenannte Kardioide.¹³¹ Abb. 78 zeigt, wie eine Kardioide entsteht. Eine Kreisscheibe mit Radius r rollt auf einem weiteren Kreis mit gleichem Radius ab . So beschreibt jeder Punkt P auf dem Rand des Rollkreises eine

Kardioide. Im kartesischen Koordinaten-system legen wir den Mittelpunkt des ersten Kreises auf 0.

Eleganter sind komplexe Zahlen z zur Beschreibung des Punktes P :

$$z = x + i y = 2r (\cos \varphi + i \sin \varphi) - r (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

oder in der Eulerschen Darstellung $z = 2re^{i\varphi} - re^{2i\varphi}$

Damit sind prinzipielle analytische Mittel vorhanden, um Eigenschaften von \mathbb{M} zu untersuchen.¹³²

An dieser zentralen, herzförmigen Kardioide (daher der Name) wachsen Knospen, die Ausgangspunkt von weiteren kleineren Knospen sind. In den Eigenschaften finden sich eine Reihe verblüffender Ergebnisse. So enthält \mathbb{M} eindeutig Beziehungen zur Kreiszahl π ¹³³ und es versteckt sich die Fibonacci-Folge 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... in der Struktur. Das nächste Folgenglied errechnet sich

¹³¹ Vergleiche für diesen Abschnitt <https://www.spektrum.de/kolumne/in-der-mandelbrot-menge-steckt-die-fibonacci-folge/2094057>

¹³² Vergleiche Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 184-185

¹³³ <https://www.doc.ic.ac.uk/~jb/teaching/jmc/pi-in-mandelbrot.pdf>

bekanntlich einfach aus der Summe der beiden letzten Glieder. Das ist besonders überraschend, weil diese rekursive Folge sich mit denkbar einfachsten arithmetischen Mitteln bilden lässt, während die Mandelbrot-Menge \mathbb{M} aus feinsten Strukturen besteht.

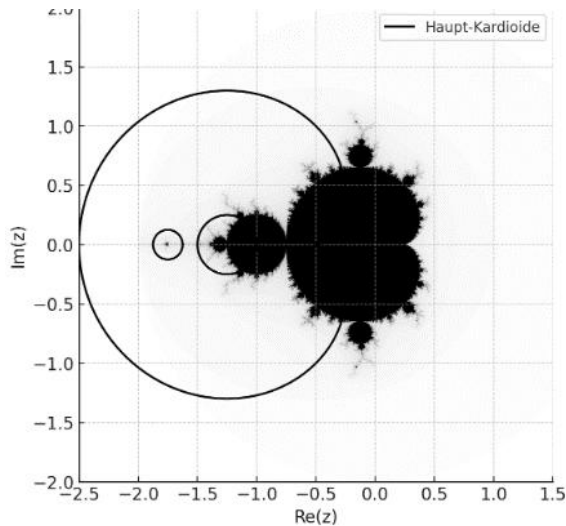


Abb. 79: Prinzip der Knospenbildung

Fixpunkte z_{fix} die Beziehung

$$z_{fix} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - c}$$

Die Fixpunkte sind zentrales Charakteristikum der Kardioide. Punkte c in der Kardioide führen alle zu Folgen, die zu entsprechenden Fixpunkten konvergieren oder diese „umrunden“. So liefert $c = -\frac{1}{4}$ eine Folge mit

dem Fixpunkt $z = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4}} = 0,207\dots$

Analog ist $-\frac{1}{2}$ Fixpunkt für die Folge, die $c = -\frac{3}{4}$ generiert.

Das Beispiel $c = -1$ zeigt einen Zyklus der Periodizität 2, hier $-1, 0, -1, 0 \dots$

Diesen kann man charakterisieren, dass gilt $f(f(z)) = z$.

Innerhalb der ersten Knospe, also dem Kopf des Apfelmännchens, ist jedes c mit Zyklen der Periodizität 2, also der 2. Fibonacci-Zahl, verknüpft.

Der Zusammenhang zur Fibonacci-Folge erschließt sich, wenn man die Eigenschaften der Punkte innerhalb der verschiedenen Knospen untersucht. Man betrachte zunächst den Nullpunkt $c = 0$. Er liegt innerhalb der Kardioide.

$c = 0$ ist ein Fixpunkt, d.h. $f(0)$ ist auch 0. Auch andere Werte von c führen zu Fixpunkten. Da dort $f(z) = z$ ist, kann man $z^2 + c = z$ nach z auflösen und erhält für die

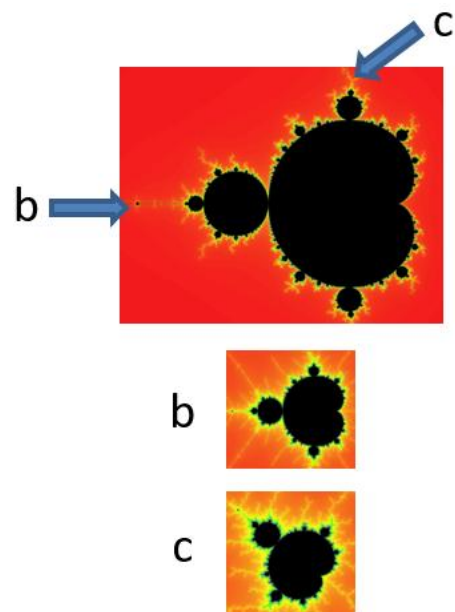


Abb. 80:

Ausschnittsvergrößerungen

Leider muss nun eine komplexere Argumentation folgen, um weitere Fibonacci-Zahlen zu identifizieren. Es ist aber tatsächlich beweisbar, dass in den Mustern der Knospen, die sich immer weiter verästeln, über ihre Periodizität sich die Zahlen der Fibonacci-Folge zeigen.

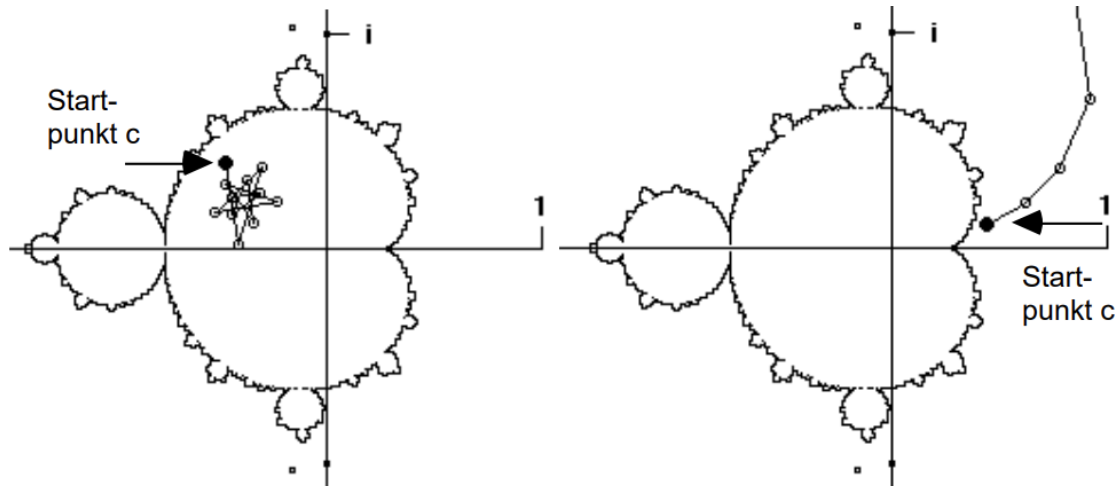


Abb. 81: Linke Seite – Punkte bleiben im Endlichen „gefangen“

Rechte Seite – Punkte „entweichen“ ins Unendliche.

Ein weiteres Muster zeigt sich, wenn man markante Realwerte des Feigenbaum-Diagramms mit markanten Realwerten der Menge \mathbb{M} vergleicht. Eine maßstabgerechte Gegenüberstellung beider Strukturen zeigt die tiefen mathematischen Gemeinsamkeiten (siehe Abb. 77).

Die Periodenverdoppelung im Feigenbaum-Diagramm beginnt genau bei dem reellen Wert, bei dem der „Apfel“ in den „Kopf“ übergeht.

Für gewisse komplexe c -Werte stellen sich Grenzyklen ein, die auf einer geschlossenen Kurve liegen, deren Punkte jedoch nicht periodisch, sondern chaotisch abgedeckt werden. Dies ist in der Chaostheorie das Kennzeichen der sogenannten seltsamen Attraktoren. Die Mandelbrot-Menge \mathbb{M} ist daher ein elementares Objekt für die Chaostheorie, an der sich fundamentale Phänomene studieren lassen.¹³⁴

Auch wenn \mathbb{M} eine abgeschlossene Menge ist und damit für jeden Punkt klar ist, ob er zur Menge gehört oder nicht, wird die Menge gerne coloriert dargestellt. Ein Fraktal, das eng mit \mathbb{M} zusammenhängt, „lebt“ allerdings von der Colorierung, da diese einen strengen mathematischen Bezug hat. Gemeint ist das Buddhabrot-Fraktal, dessen spezielle Rendering-Methode von Melinda

¹³⁴ Teilweise wörtlich zitiert nach <https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge>

Green entdeckt wurde.¹³⁵ Seine Form ähnelt dem meditierenden Gautama Buddha, mit Stirnpunkt (tikka) und seinem traditionellen Haarknoten.¹³⁶



Abb. 82: Buddhabrot

Nach dem Rendern zeigt das Fraktal eine Dichteverteilung, deren Colorierung Regionen hervorhebt, in denen die Iterationswerte (z-Werte) auf ihrem Weg in die Unendlichkeit sozusagen die höchste Aufenthaltswahrscheinlichkeit besitzen. Melinda Green hat dabei die gleiche Methode verwendet, die die NASA für ihre Falschfarbenaufnahmen von Himmelsobjekten, z.B. für das Hubble Teleskop, nutzt und weist darauf explizit hin: *„For my color Buddhabrot images the three different threshold values are analogous to the different frequencies of light which NASA combined into their beautiful false-color images.“*

Die zweite berühmte Klasse von Fraktalen, die durch Variation von komplexen Zahlen entstehen und die dementsprechend in der komplexen Ebene visualisiert werden müssen, sind die Julia-Mengen (manchmal abgekürzt J). Sie sind (in quadratischer Form) sehr eng mit der Mandelbrot-Menge mathematisch verbunden. Die Mandelbrot-Menge M kann über Julia-Mengen definiert werden. M ist die Menge der Parameter c , für die die Julia-Menge von J_c zusammenhängend ist. Sie wurden bereits Anfang des 20. Jahrhunderts von den französischen Mathematikern Gaston Maurice Julia und Pierre Fatou untersucht. Ihr nach ihnen benannter Satz sagt aus, welche Julia-Mengen zusammenhängend sind und welche aus „Cantor-Staub“ bestehen. Dabei muss man sich klarmachen, dass damals eine Visualisierung jenseits aller technischen Möglichkeiten lag. Peitgen, Jürgens und Saupe verweisen darauf, dass erst 1925 die erste Julia-Menge als grobes Bild skizziert wurde.¹³⁷ Interessanterweise hat Mandelbrot „seine Menge“ gefunden, weil er über die Klassifizierung von Julia-Mengen nachgedacht hatte. M wird gerne als das „Lexikon der Julia-Mengen auf einer Seite“ bezeichnet.

¹³⁵ <https://superliminal.com/fractals/bbrot/> persönliche Webseite

¹³⁶ <https://de.wikipedia.org/wiki/Buddhabrot>

¹³⁷ Hubert Cremer, „Über die Iteration rationaler Funktionen“ (Jahrbuch der Deutschen Mathematischen Vereinigung 33, 1925, 185-210)

Julia-Mengen

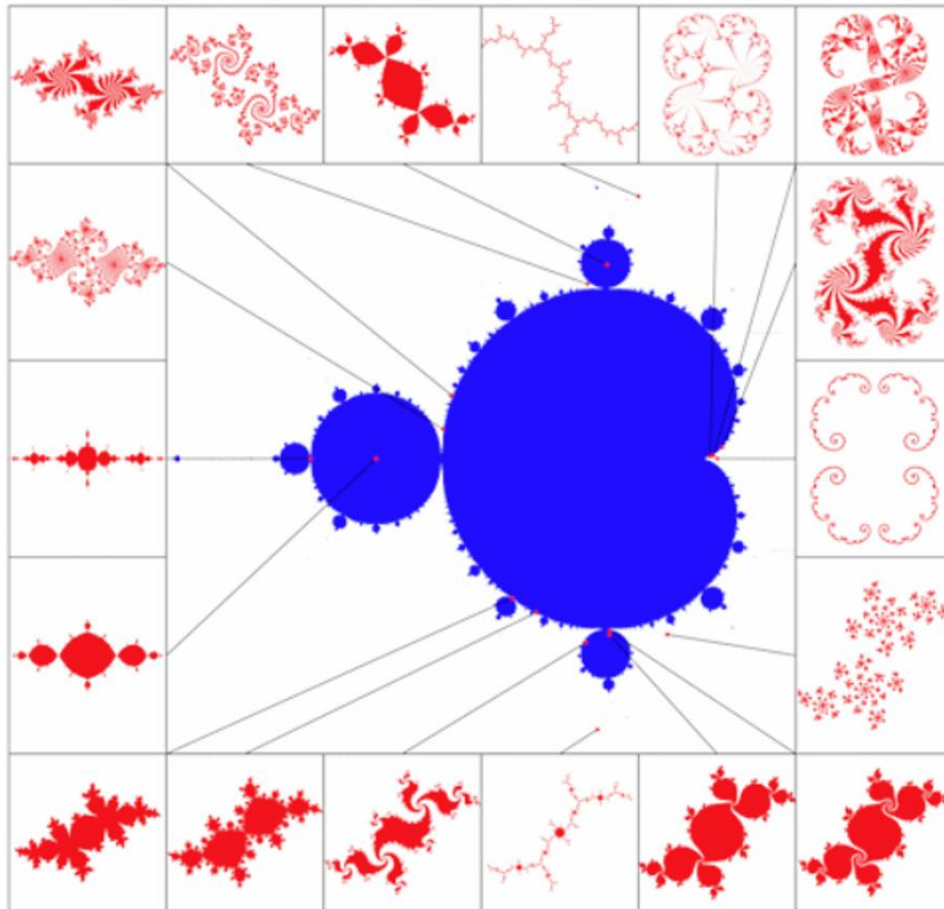


Abb. 83: Punkte in der Mandelbrot-Menge mit der zugehörigen Julia-Menge (mit freundlicher Genehmigung von Jürgen Meier, siehe auch eine Fülle von Beispielen: <http://www.3d-meier.de/tut20/Seite1.html>)

Die Julia-Mengen wurden nach dem Bildungsprinzip $z_{n+1} = z_n^2 + c$ mit Werten von c gemäß Abb. 84 generiert.

Die Julia-Menge $\mathbb{J}(c)$ zu einer bestimmten komplexen Zahl c ist definiert als der Rand der Menge aller Anfangswerte z_0 , für die die obige Zahlenfolge beschränkt bleibt. Die ausgefüllte Julia-Menge für (a, b) ist die Menge aller (x, y) im Dynamikraum, deren Orbits für eine bestimmte Steuereinstellung (a, b) unter der Mandelbrot-Abbildung gegeben ist. D.h. alle Punkte der Mandelbrot-Menge gehören zum Steuerraum, also die Menge der Steuereinstellungen, für die der Orbit ab $z_0 = 0$ im Dynamikraum nicht nach Unendlich geht. Bei Julia-Mengen dagegen wird c fest gewählt. Es ist relativ leicht einsehbar, dass jede Julia-Menge punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

Man betrachte dazu einen Punkt $z \in \mathbb{J}_c$

Nach der ersten Iteration folgt $f_c(z) = z^2 + c = f_c(-z) = (-z)^2 + c$.

Also $|f_c(z)| = |f_c(-z)|$.

Dann ist auch $|f_c^n(z)| = |f_c^n(-z)| < A$, $A \in \mathbb{R}$, also beschränkt für beliebiges n .

Damit ist $\lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(z)| = \lim_{n \rightarrow \infty} |f_c^n(-z)| \rightarrow \infty$

Aus $z \in \mathbb{J}_c$ folgt damit $-z \in \mathbb{J}_c$

| Obere Reihe | Linke Spalte | Rechte Spalte | Untere Reihe |
|--------------------------|--------------------------|----------------------|-----------------------------|
| $c = -0,712 + 0,241i$ | $c = -0,74543 + 0,1130i$ | $c = 0,320 + 0,043i$ | $c = -0,481762 - 0,531657i$ |
| $c = -0,194 + 0,6657i$ | $c = -1,250$ | $c = 0,300$ | $c = -0,39054 - 0,58679i$ |
| $c = -0,120 + 0,740i$ | $c = -1,000$ | $c = 0,15 - 0,8i$ | $c = -0,200 - 0,700i$ |
| $c = 1,000i$ | | | $c = -0,15652 - 1,03225i$ |
| $c = 0,27334 + 0,00742i$ | | | $c = -0,11031 - 0,67037i$ |
| $c = 0,28600 + 0,01150i$ | | | $c = -0,11000 - 0,65570i$ |

Abb. 84: c -Werte mit denen die Julia-Mengen in Abb. 83 generiert wurden.

Als Generierungsprogramm eignet sich (in anderer Farbgebung):

<https://www.mathematik.ch/anwendungenmath/fractal/julia/julia.html>

Als einfachen Fall kann man wieder $z_{n+1} = z_n^2 + c$ betrachten. Es ist sozusagen die komplexe Verallgemeinerung der logistischen Abbildung. Für $c = 0$ besitzt die iterierte Abbildung zwei Attraktoren, nämlich 0 und ∞ . In diesem Fall ist die Julia-Menge nicht fraktal, sondern ein Kreis mit Radius $|z|=1$. Folgen mit Anfangswerten im Kreis konvergieren gegen Null; mit Anfangswerten außerhalb divergieren.

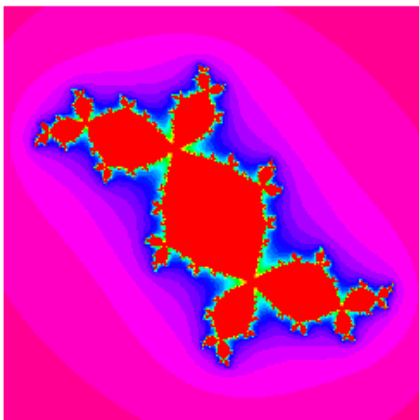


Abb. 85: Douady-Kaninchen Julia-Menge mit $f(z) = z^2 - 0,123 \dots + 0,745 \dots i$

Viele Computergrafiken von Julia-Mengen findet man in dem spektakulären Buch von Peitgen und Richter „The Beauty of Fractals“. Die experimentelle Mathematik hat dabei eine Reihe von Zusammenhängen aufgedeckt. Die Beweise haben auch die sogenannte reine Mathematik befruchtet. Als Beispiel sei ein Beweis von Xavier Buff und Arnaud Chéritat aus dem Jahr 2005 erwähnt. Danach gibt es quadratische Polynome, für die die nicht ausgefüllte Julia-Menge, (also der Rand der Gefangenenmenge), einen Flächeninhalt größer Null hat. Der Beweis

umfasst immerhin 74 Seiten.¹³⁸ Die Abb. 85 zeigt eine Julia-Menge, die nach dem französischen Mathematiker Adrien Douady (1935 – 2006) benannt ist (siehe auch MLC-Vermutung).^{139,140}

Wir gehen von zwei gleichseitigen Dreiecken $\triangle A_1 A_2 A_3$ und $\triangle A_1 A_4 A_5$ mit der Seite a aus, die an der Ecke A_1 aneinanderstoßen (Fig. 2). Sie bilden zusammen den geschlossenen polygonalen Zug $p_1 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, der die Ebene in 3 Bereiche teilt:

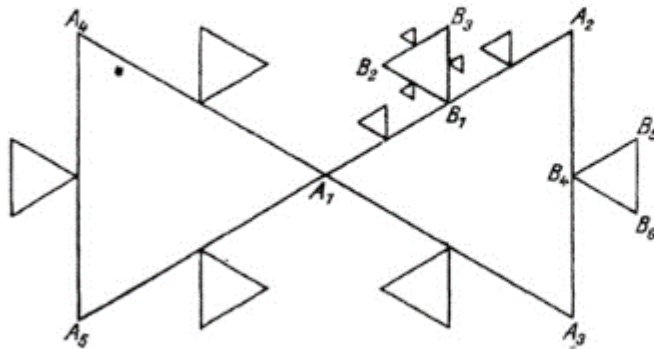


Fig. 2.

Sie bilden zusammen den geschlossenen polygonalen Zug $p_1 = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$, der die Ebene in 3 Bereiche teilt:

1. Das Innere von $\triangle A_1 A_2 A_3$: \mathfrak{B}_1 .
2. Das Innere von $\triangle A_1 A_4 A_5$: \mathfrak{B}'_1 .

3. Den Bereich \mathfrak{B}''_1 , der den unendlich fernen Punkt enthält und vom ganzen polygonalen Zug p_1 begrenzt wird.

Abb. 86: Erster Versuch der Veranschaulichung einer Julia-Menge durch Hubert Cremer, Berlin 1925

Die Abb. 86 zeigt die erste Skizze einer Julia-Menge.¹⁴¹

Es kann bewiesen werden, dass die Mandelbrot-Menge \mathbb{M} genau die Menge der Werte c ist, für die die zugehörige Julia-Menge $\mathbb{J}(c)$ zusammenhängend ist.¹⁴² Genauer: eine Julia-Menge ist entweder zusammenhängend oder vollständig disjunkt. Dies wird als die "Connectedness-Lemma" bezeichnet.

Das ist eine weitere Möglichkeit \mathbb{M} zu definieren und ist oft auch Grundlage zu Beweisen über das Verhalten der Mandelbrot-Menge. Siehe z.B. die

¹³⁸ <https://annals.math.princeton.edu/wp-content/uploads/annals-v176-n2-p01-p.pdf>

¹³⁹ https://en.wikipedia.org/wiki/Douady_rabbit

¹⁴⁰ https://de.wikipedia.org/wiki/Adrien_Douady

¹⁴¹ Cremer, Hubert. "Über die Iteration rationaler Funktionen.." *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 33 (1925): 185-209. <http://eudml.org/doc/145695>.

¹⁴² Lei Tan: Similarity between the Mandelbrot set and the Julia sets. In: *Communications in Mathematical Physics*. 1990, Band 134, Nr. 3, S. 587–617. Fußnote und Definition im Text zitiert nach <https://anthrowiki.at/Mandelbrot-Menge>

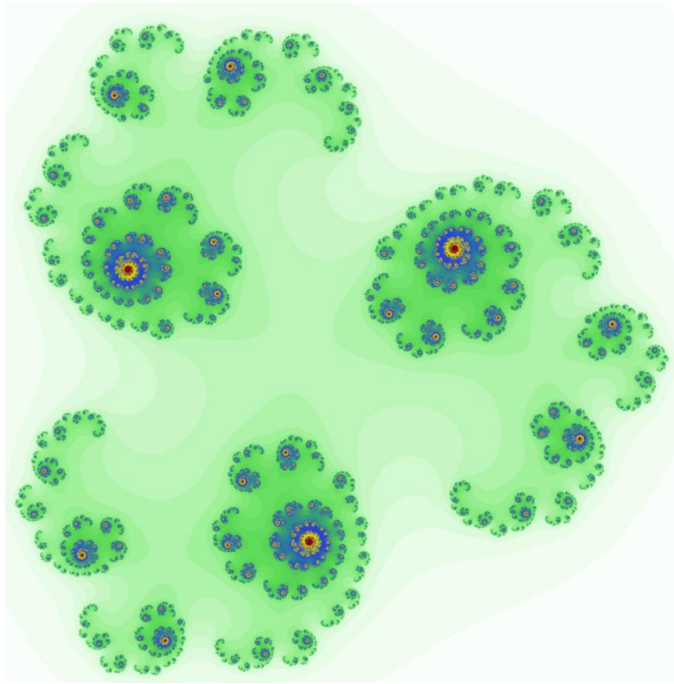


Abb. 87: Julia-Menge gemäß $z_{n+1} = z_n^3 + c$

Veröffentlichung von Shishikura, dass die Mandelbrot-Menge ebenso wie die korrespondierende Julia-Menge die Hausdorff-Dimension 2 hat.¹⁴³

Die Strukturen von \mathbb{M} in der Umgebung eines Wertes c sind ein genaues Abbild der assoziierten Julia-Menge. Man kann es so formulieren, dass die Mandelbrot-Menge von unendlich vielen Julia-Mengen ihre vielfältigen Formen enthält.

Besonders am Rand fällt auf, dass sich in den fraktalen Strukturen kleine, leicht veränderte Kopien der gesamten Menge \mathbb{M} finden. Man nennt sie Satelliten und sie weisen wieder Kennzeichen der originalen Formen auf.

Julia-Mengen sind nicht auf das quadratische Polynom $z_{n+1} = z_n^2 + c$ beschränkt.¹⁴⁴ Die Funktion $f(z) = z^2 + c$ ist nur auf besondere Weise mit der Mandelbrotmenge verbunden.

Allgemeine Definition einer Julia-Menge: Die ausgefüllte Julia-Menge des Polynoms f ist definiert als

$$K(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \nrightarrow \infty\}$$

für ausreichend großes k . k ist die k -fache Komposition von f . Die Julia-Menge von f ist der Rand der ausgefüllten Julia-Menge $K(f)$, bezeichnet als $\mathbb{J}(f)$, also formal geschrieben $\mathbb{J}(f) = \partial K(f)$. Die Komplementmenge der Julia-Menge $K(f)$ wird Fatou-Menge $F(f)$ genannt. Wenn keine Verwechslungen drohen, schreibt man $\mathbb{J} = \mathbb{J}(f)$ und $K = K(f)$.

Einige Eigenschaften von Julia-Mengen: Sei $\mathbb{J}(f)$ die Julia-Menge vom Polynom f , dann gilt

¹⁴³ Mitsuhiro Shishikura: The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets. März 1998, Band 147, Nr. 2, S. 225–267. Online siehe https://www.jstor.org/stable/121009?origin=crossref&seq=1#page_scan_tab_contents

¹⁴⁴ Vergleiche https://www.mathematik.uni-ulm.de/stochastik/lehre/ws06_07/seminar_fraktale/ausarbeitung_voelkel.pdf

- $J(f) = \partial\{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \rightarrow \infty\}$, (Rand der ausgefüllten Menge)
- $J(f)$ ist eine nicht-abzählbare, nicht-leere, kompakte Menge, die keine isolierten Punkte enthält.
- $J(f)$ ist vorwärts und rückwärts invariant gegenüber f , also $f(J(f)) = J(f)$
- Für alle $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ gilt: $J(f) = J(f^p)$. Somit haben f und f^p identische ausgefüllte Julia-Mengen und damit auch identische Julia-Mengen.
- Ist f ein Polynom, dann ist $J(f)$ der Abschluss der abstoßenden periodischen Punkte von f . Dieser Satz ist entscheidend für die Darstellung von Julia-Mengen per Computer.
- Wenn w ein anziehender Fixpunkt ist, dann ist $A(w)$ definiert als der Anziehungsbereich von w für $k \rightarrow \infty$

$$A(w) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \rightarrow w\}$$

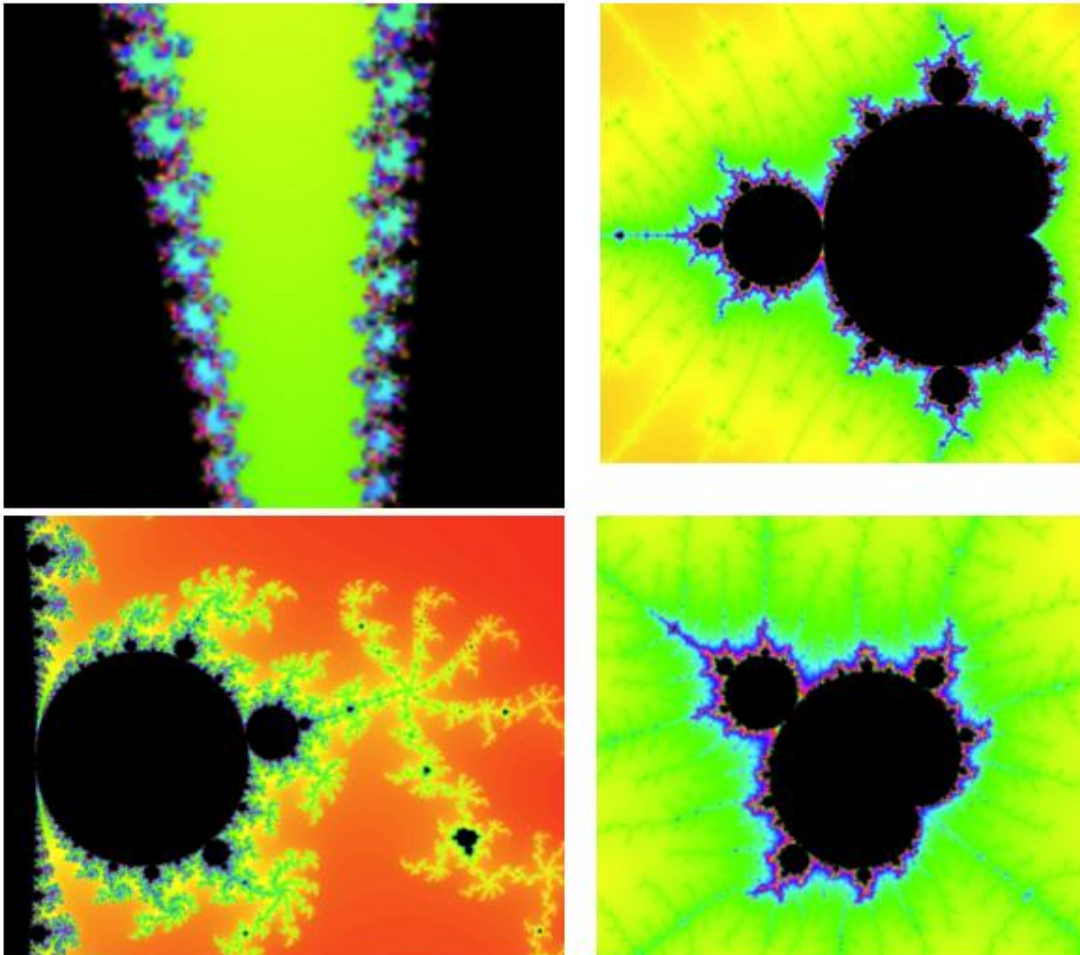


Abb. 88: Extremer Zoom in die Mandelbrot-Menge. Links 100.000-fache Vergrößerung; rechts Teile der Ausschnitte b und c aus Abb. 80 10^{15} - fach vergrößert.

Sei w ein attraktiver Fixpunkt von f . Dann gilt: $\partial A(w) = \mathbb{J}(f)$. Das gilt auch, wenn $w = \infty$.

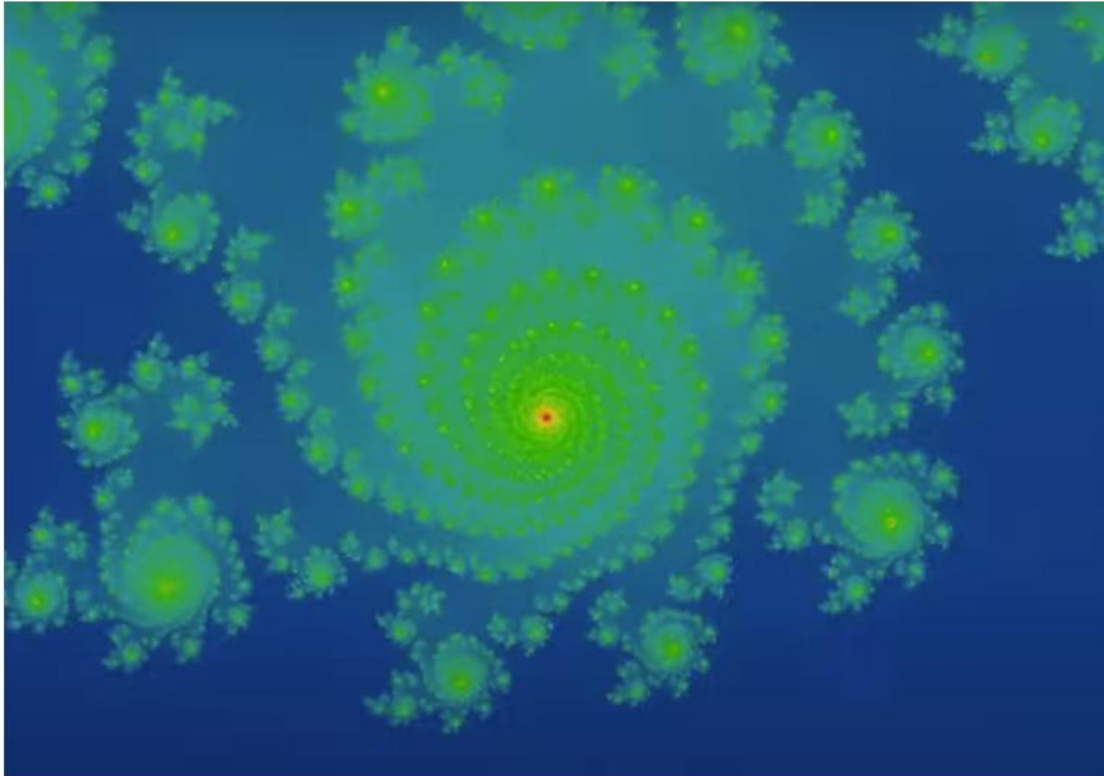


Abb. 89: Extremer Zoom (ca. 10^{13} -fach) in eine Julia-Menge beim Punkt $0.0958598997051 + 1.1501990019993i$ mit $c = 0.355 + 0.355i$

Höherdimensionale Verallgemeinerungen

Schon ein Schritt in Abbildungen mit kubischen Komponenten führt dazu, dass die Mathematik das bisherige Niveau dieses Beitrags, mit eher wenig erforderlichen Vorkenntnissen, übersteigt und die Anschaulichkeit oder gar eine Visualisierung immer schwieriger wird.

Eine erste Verallgemeinerung der Überlegungen von Mandelbrot, Julia und Fatou bezeichnet man als „kubische Iteration“. Die entsprechende Mathematik fällt unter diskrete Dynamiken der komplexen Ebene.¹⁴⁵

Bis auf Koordinatenwechsel durch Multiplikation mit -1 existiert eine Normalform, die eine Äquivalenzklasse eines kubischen Polynoms bezüglich komplexer, affiner Koordinatenwechsel festlegt. Der Parameterraum kubischer Polynome ist also \mathbb{C}^2 . Schon dies schränkt die Anschaulichkeit stark ein, da in vier Dimensionen gedacht werden muss.

¹⁴⁵ Siehe dazu teilweise wörtlich https://de.wikipedia.org/wiki/Kubische_Iteration

Ein kubisches Polynom der Äquivalenzklasse $p \in \mathbb{C}[X]$ mit der Ableitung $p'(z)$ hat zwei Nullstellen, sogenannte kritische Punkte.

Es gibt drei Fälle:

Die Orbits beider kritischen Punkte gehen gegen Unendlich. Dann ist die Julia-Menge total unzusammenhängend.

Der Orbit eines kritischen Punktes geht gegen Unendlich, während der Orbit des anderen kritischen Punktes beschränkt bleibt. Dann ist die Julia-Menge unzusammenhängend, aber im Allgemeinen nicht total unzusammenhängend.

Beide kritische Punkte haben beschränkte Orbits. Dann ist die Julia-Menge zusammenhängend.

Die zum dritten Fall (zusammenhängende Julia-Menge) gehörenden Polynome

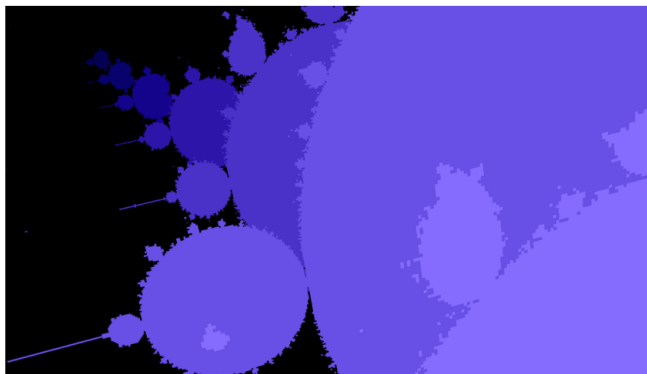


Abb. 90: Zweidimensionaler Schnitt durch die dreidimensionale Projektion des 4D-Fraktals

beschreiben den Zusammenhangsort (engl. „connectedness locus“, nach Branner-Hubbard) oder die kubische Mandelbrot-Menge S . Ihr Parameterraum ist komplex zweidimensional, was reell vier Dimensionen entspricht. Eine Visualisierung gelingt nur, wenn man von dem vierdimensionalen Gebilde einen Parameter „festhält“ (invariant hält) und so einen

dreidimensionalen Schnitt / Projektion erhält.

Insbesondere ist S kompakt und zusammenhängend, und ihr Komplement ist ebenfalls zusammenhängend.

Die Menge S hat eine fraktale Oberfläche und weist starke Parallelen mit der Mandelbrotmenge auf. Wenn man an den dreidimensionalen Objekten, die entstehen, wiederum zweidimensionale Schnitte ausführt, findet man in diesen Schnittebenen an manchen Stellen die charakteristische Form des Apfelmännchens wieder (siehe Abb. 90).

Ein Spezialfall ist das Cactus Fractal.¹⁴⁶

$$z_{n+1} = z_n^3 + (z_0 - 1)z_n - z_0$$

¹⁴⁶ <https://paulbourke.net/fractals/cactus/> Hochauflösende Detailgraphic siehe <https://www.flickr.com/photos/pagedooley/19262854724/in/photostream/>

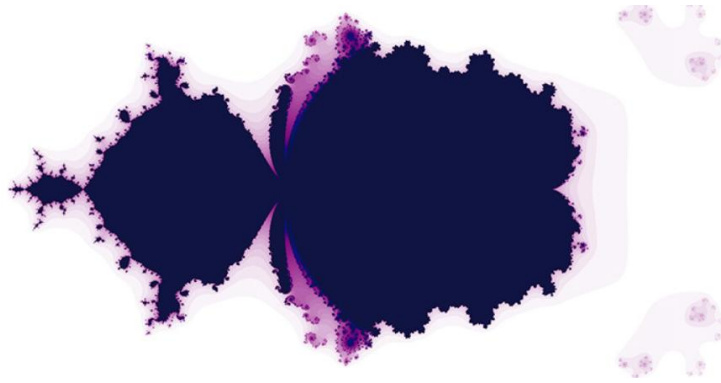


Abb. 91: Cactus-Fraktal mit kubischem Glied

Weitere Beispiele aus Physik, Chemie, Medizin und Sozialwissenschaften

Schon früh beschäftigten sich Naturwissenschaftler mit Phänomenen, in denen wir nach dem heutigen Wissensstand chaotisches Verhalten erkennen. Berühmt ist eine Zeichnung des Universalgenies Leonardo da Vinci, in der er im Bild Turbulenzen bei Wasser beschrieb, das in ein Becken gegossen wird. Die Zeichnung ist in den Jahren 1509 bis 1511 entstanden.¹⁴⁷ Heuristische Beobachtungen gab es also schon ab der Renaissance, aber Laborexperimente kamen erst deutlich später. Bekannt wurde das Experiment von Osborne Reynolds, das er erstmals 1883 an der Universität Manchester durchführte. Es demonstriert, wann ein laminares Verhalten von strömenden Flüssigkeiten durch ein Glasrohr in ein chaotisches Verhalten übergeht. Reynolds erreichte aussagekräftige Beobachtungen durch gefärbtes Wasser.¹⁴⁸

Noch viel später und das ist Gegenstand des vorliegenden Textes, konnten vereinzelt mathematische Muster identifiziert werden. Grundsätzlich lassen sich die Gleichungen, wie Strömungen chaotisch werden, nicht umfassend lösen. Wie aber der vorliegende Beitrag zeigt, gibt es doch „Phasen der Ordnung“ in Strömungsmustern, die sich mathematisch erschließen lassen. Es sind die bereits angesprochenen Begriffe, wie Attraktoren, Fixpunkte, periodische Orbits, Bifurkationen usw. Speziell Strömungen werden durch die Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben. Zugrunde liegt streng genommen eine

¹⁴⁷ <https://www.weltderphysik.de/gebiet/materie/turbulenz/turbulenz-und-chaos/>

¹⁴⁸ Siehe z.B. https://gunt.de/images/datasheet/565/HM-150.18-Osborne-Reynolds-experiment-gunt-565-pdf_1_en-GB.pdf



Abb.92: Turbulenzen nach Leonardo da Vinci

deterministische Beschreibung der Newtonschen Bewegungsgleichungen, was aber keine Rückschlüsse auf leichte Lösbarkeit erlaubt. Sie können bei der Hydrodynamik, bei der Luftfahrttechnik, bis hin zum Verhalten von Sternen in Galaxien angewendet werden. Numerische Lösungen in Form von differenzierten Tabellenwerken erleichtern die Arbeit der Ingenieure.

Die Abb. 93 zeigt selbstähnliche Maße in atmosphärischen Wirbeln ausgelöst durch Kelvin-Helmholtz Instabilitäten. Sie entstehen durch das Anwachsen kleiner Störungen in der Scherschicht zweier Fluide mit unterschiedlichen Strömungsgeschwindigkeiten. Experimentelle Messungen geben Hinweise darauf, „dass die

*Dissipationsrate der kinetischen Energie in vollständig ausgeprägter Turbulenz ein Multifraktal ist.*¹⁴⁹ Dies hat auch bereits Mandelbrot vermutet. Er verbindet die phänomenologischen Ergebnisse von Kolmogorov, und die



Abb. 93: Kelvin-Helmholtz-Wirbel, Australien

¹⁴⁹ Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, S. 663
Benzi R. Paladin G., Parisi G., Vulpiani A.; On the multifractal nature of fully developed turbulence and chaotic systems, J. Phys. A 17 (1078) 3521

Differentialgleichungen für nichtviskose Flüssigkeiten von Euler bzw. für viskose Flüssigkeiten von Navier und Stokes. Er behauptet, dass die Singularitäten der Bewegung einer Flüssigkeit fraktale Mengen sind.¹⁵⁰ Sie spielen in der Natur bei fraktalen Mustern bei Blitzen eine Rolle oder beim dendritischen Wachstum. Peitgen et. al. führen diese Phänomene auf die Selbstähnlichkeit elektrostatischer Ladungen auf fraktalen Rändern zurück. Dies würde auch fraktale Muster betreffen, wie z.B. Julia-Mengen oder Koch-Bäume. In Verbindung mit Wetterphänomenen sind turbulente Strömungen praktisch immer ein Zeichen, wenn Luftmassen unterschiedlicher Temperatur aufeinanderprallen. Im Luftverkehr ist das nicht in allen Fällen an der Wolkenbildung erkennbar (Stichwort Clear Air Turbulence,¹⁵¹ umgangssprachlich Luftloch).

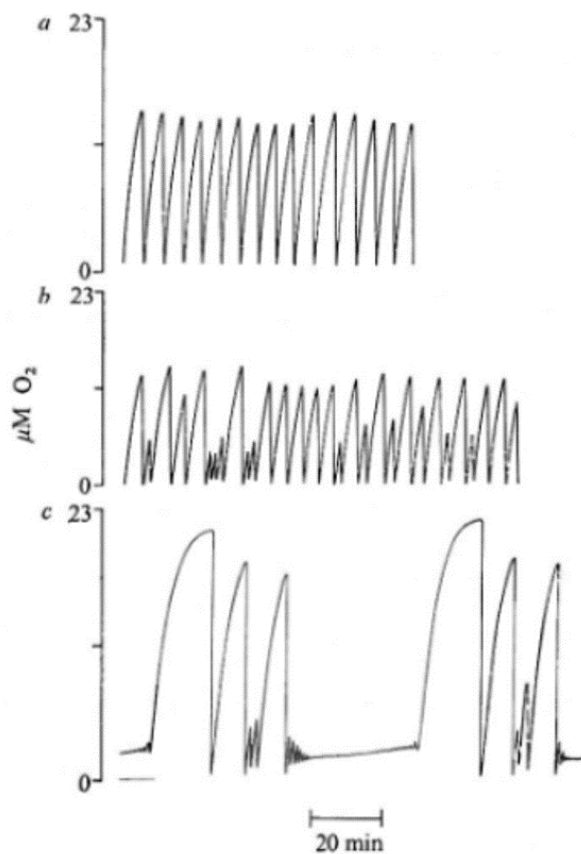


Abb. 94: Zeitliche Änderung in einem offenen chemischen Reaktionssystem

Turbulentes Verhalten ist zweifellos ein prominentes Beispiel für chaotisches Verhalten in der Physik. Aber es ist nur eines unter vielen.

Der deutsche Nestor der statistischen Physik und einer der Väter der Chaostheorie skizzierte in dem bereits zitierten Vortrag¹⁵² vollkommen unterschiedliche Phänomene, in denen „*Chaos als irreguläres quasi-stochastisches zeitliches Verhalten in nichtlinearen dynamischen Systemen*“ auftreten kann. Ein graphisch gut dokumentiertes Beispiel, das mehr aus der chemischen Reaktionskinetik stammt, sei hier zitiert.¹⁵³ Man sieht gut den Übergang in ein deterministisches Chaos mit einem stark verzögerten Wechsel zwischen Ordnung und

¹⁵⁰ Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, S. 118f

¹⁵¹ https://de.wikipedia.org/wiki/Clear_Air_Turbulence

¹⁵² Großmann, Siegfried; Deterministisches Chaos, Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Vorträge N 321, Westdeutscher Verlag 1983, S. 7-29, hier S. 7f

¹⁵³ Ebenda S. 9, Es handelt sich um die zeitliche Änderung der Sauerstoffkonzentration bei der Meerrettich-Peroxidase-katalysierten Oxidation durch Sauerstoff (Von oben

Chaos. Aber auch vollkommen alltägliche Vorgänge kann man anführen: Natürlich das Wetter, Spiele wie Billard oder Flipper, das Doppelpendel, tödliche Embolien wie ein Schlaganfall, plötzlicher Herztod, das Dreikörperproblem mit Konsequenzen für die Stabilität unseres Sonnensystems oder anderer Sternensysteme, periodische chemische Reaktionen, Börsenkurse oder Konjunktorentwicklung. Einige Erkenntnisse haben praktische Konsequenzen. So wurde bereits 1991 in München das Zentrum für nichtlineare Dynamik in der Kardiologie gegründet. Interessant und verblüffend ist die Zusammensetzung der Arbeitsgruppe aus Kardiologen aber auch Astrophysikern. Sie haben das Ziel, für das komplexe System Herz zuverlässigere Indikatoren zu erhalten, wann nichtlineare dynamische Vorgänge eine Gefährdung bedeuten.

Immerhin sterben pro Jahr 100.000 Patienten und zwar nicht nur Herzranke, sondern vermeintlich gesunde Menschen an diesem Phänomen. Zukünftig wird man wohl auch darauf achten müssen, dass man bei der Entwicklung von schnellen Computerchips auf Basis „ballistischer Elektronen“ unliebsame Konsequenzen durch deterministisches Chaos vermeidet.¹⁵⁴



Abb. 95: Cartwheel-Galaxie

Ein weiteres, faszinierendes Anschauungsbeispiel für turbulentes und chaotisches Verhalten findet sich in der Astronomie bei der Dynamik von Galaxien. Insbesondere das James-Webb-Weltraumteleskop (JWST), das nach mehr als 20 Jahren Bauzeit am 24. Januar 2022 seine Umlaufbahn am Lagrange-Punkt L2 in 1,5 Millionen Kilometer Entfernung zur Erde erreichte, hat tiefe Einblicke in die Galaxienentwicklung geliefert. Als Beispiel soll hier die Cartwheel-Galaxie dienen, die vom JWST mit seinen Möglichkeiten im Infrarot-Bereich im

August 2022 erneut untersucht wurde.¹⁵⁵ Die hochsensiblen IR-Kameras zeigen nun im Vergleich zu „Hubble“ deutlich bessere, detaillierte Einblicke in das Chaos bei dieser Galaxie, die ihren Namen von ihrer Wagenrad-Form erhalten

nach unten abnehmende Peroxidase-Konzentration). Nach L.F. Olsen, H. Degn, Nature 267, 177 (1977)

¹⁵⁴ Siehe z.B. den PTB-Bericht

<https://oar.ptb.de/resources/show/10.7795/110.20211111>

¹⁵⁵ Bild und Textinformationen

<https://www.nationalgeographic.de/wissenschaft/2022/12/james-webb-weltraumteleskop-2022-jahresueckblick-in-bildern-weltall>

hat. Ihr heller Kern enthält gigantische Mengen von heißem Staub und ist die „Kinderstube“ von riesigen Haufen junger Sterne. Selbst ihr äußerer Ring mit einem Durchmesser von ca. 145.000 Lichtjahren, ist geprägt von einem chaotischen Durcheinander von Sternentstehung und Supernovae. Ihren dynamischen Charakter verdankt sie scheinbar daher, weil sie als zunächst normale Spiralgalaxie mit einer kleineren Galaxie kollidiert ist. Dies ist kein seltener Vorgang im Alterungsprozess von Galaxien, weshalb alte Galaxien chaotischer sind als junge. Man spricht von „Demenz“ der Galaxien.¹⁵⁶

Eine besondere Klasse von fraktalen Objekten sind sogenannte zelluläre Automaten. Sie bestehen aus einem Gitter, dessen Zellen sich von Generation zu Generation entwickeln. Das

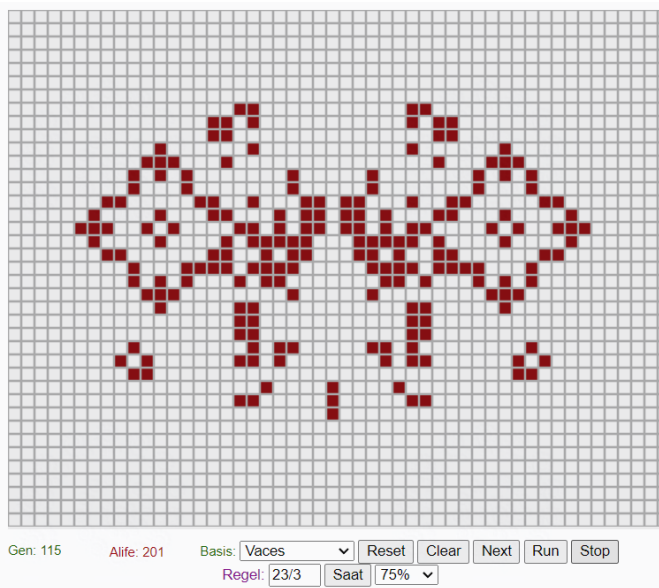


Abb. 96: Zellulärer Automat – Game of Life

berühmteste Beispiel ist das „Game of Life“, das nach dem implementierten Regelwerk des Mathematikers John Conway (1937 - 2020) arbeitet. Dabei sind „lebende“ Zellen dunkel und „tote“ grau gefärbt. Man beginnt mit einer ersten Generation. In der nächsten Generation überleben Zellen, wenn sie zwei oder drei Nachbarn haben; ansonsten sterben sie. Tote Zellen werden wieder „lebendig“, wenn sie drei lebende Nachbarn haben, usw.

Zelluläre Automaten darf man aber keinesfalls auf die Musterbildung reduzieren. Sie dienen besonders der Modellierung räumlich diskreter dynamischer Systeme, insbesondere im Nichtgleichgewichtszustand. Man kann ihren prinzipiellen Ablauf durch wenige, zwingend nötige Rahmenbedingungen festlegen:

- Einen Zellarraum R
- Eine endliche Nachbarschaft N
- Eine Zustandsmenge Q
- Eine lokale Überföhrungsfunktion $\delta: QN \rightarrow Q$

¹⁵⁶ <https://www.mdr.de/wissen/astronomie-raumfahrt/news-alte-galaxien-sind-chaotischer-100.html>

Genau diese Eigenschaften findet man bei oszillierenden chemischen Reaktionen. Diese Reaktionen werden gerne in der Schulchemie ignoriert. Dort geht man vereinfacht von Reaktanden, wie A und B aus, die möglichst vollständig und zeitlich linear zu Reaktionsprodukten, etwa C und D, reagieren.



Das ist eher die Ausnahme als die Regel bei chemischen Prozessen. Vor Bekanntwerden von oszillierenden chemischen Reaktionen hielt man diese für unmöglich. Physikalisch bemühte man dazu den 2. Hauptsatz der Thermodynamik, der scheinbar einen periodischen Ablauf und damit einen Wechsel von „Ordnung“ und „Unordnung“ ausschließt. Doch das gilt nicht für offene Systeme, bei denen der „Energieverlust“ durch Entropie ständig durch Energiezufuhr (oder Materie) kompensiert wird.

Im zweiten Hauptsatz wird die Entropie S als Zustandsgröße definiert, die irreversible Vorgängen ein quantitatives Maß zuordnet. Es sind chemische Reaktionen, Wärmeleitung und Diffusion. Die Entropieproduktion erreicht im Gleichgewicht, wie in einem geschlossenen System ihr Maximum. Diffusion und Wärmeleitung kommen zum Erliegen (werden als Beitrag zur Entropieproduktionsdichte 0). Für chemische Reaktionen im Ungleichgewicht gilt das nicht. Deren Beitrag zur Entropie kann in einem offenen System durch Energiezufuhr E (und/oder Masse) kompensiert werden. S hat

die Dimension $\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{K} \cdot \text{s}^2}$,¹⁵⁷ E hat die Dimension $\frac{\text{m}^2 \cdot \text{kg}}{\text{s}^2}$. Man kann S gemäß des Dimensionsvergleichs also formal als Energie pro Kelvin auffassen. Für Diffusion und Wärmeleitung reichen übrigens lineare Beschreibungen vollkommen aus. Also muss die nichtlineare Komponente ausschließlich aus der chemischen Reaktion stammen.

Natürlich findet auch nach Verbrauch der Reaktanden die oszillierende chemische Reaktion ein Ende. Über die genannten Rahmenbedingungen sind jedoch Rückkopplungseffekte möglich, die über einen begrenzten Zeitraum Oszillation begünstigen und verblüffende makroskopisch-räumliche Strukturen durch Selbstorganisation ermöglichen.

Bekannt und beliebt als Demonstrationsobjekt, sowohl für oszillierende chemische Reaktionen als auch für dynamische Systeme im Nichtgleichgewicht, ist die Belousov-Zhabotinsky-Reaktion.



Abb. 97: Belousov Zhabotinsky Reaktion als „chemische Uhr“

¹⁵⁷ m=Meter, kg=Kilogramm, s=Sekunde, K=Kelvin (genauer thermodynamische Temperatur θ in Kelvin)

Wikipedia charakterisiert den chemischen Ablauf folgendermaßen:

An der Reaktion sind Lösungen von vier Stoffen, Kaliumbromat, Malonsäure, Kaliumbromid und konzentrierter Schwefelsäure, sowie Ferroin oder ein anderer Redoxindikator beteiligt. Bei der Reaktion wechselt der Zustand des Indikators ständig zwischen der reduzierten und der oxidierten Form, was einen typischen Farbwechsel verursacht. Bei Ferroin als Indikator wechselt die Farbe zwischen Blau (Ferroin, mit Fe^{3+}) und Rot (Ferroin, mit Fe^{2+}), bei Cer zwischen Gelb (Ce^{4+}) und Farblos (Ce^{3+}), bei Mangan zwischen Rot (Mn^{3+}) und Farblos (Mn^{2+}). Die Reaktion verläuft nicht beliebig lange, da sowohl Malonsäure als auch Bromat verbraucht werden.¹⁵⁸

Eine ausgezeichnete, ausführliche Arbeit zu der Reaktion wurde 2001 von Jan Krieger beim Wettbewerb „Jugend forscht“ eingereicht. Seine Arbeit wurde beim Landeswettbewerb Bayern als beste interdisziplinäre Arbeit ausgezeichnet und gewann einen Sonderpreis, der vom Hasso-Plattner-Institut für Softwaresystemtechnik gestiftet wurde. Weiterhin wurde die Arbeit als „hervorragend auf dem Gebiet der Chaosforschung“ eingestuft.¹⁵⁹ Sie gelangte bis in den Bundeswettbewerb.

Prigogine und René Lefever haben dazu ein quantitatives Modell aus vier prinzipiellen Reaktionsgleichungen entwickelt, das passend den Namen Brüsselator erhielt.¹⁶⁰ Die Differentialgleichungen können numerisch gelöst werden und über Phasenraumplots grafisch

interpretiert

werden. Man kann selbsterregte Schwingungen



Abb. 98: ruhige Kerzenflamme

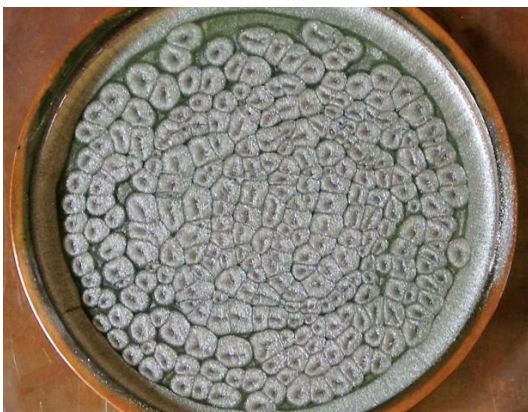


Abb. 99: Bénard-Konvektion (hier in Kupferschale erhitztes Silikonöl mit Silberbronze)

nachweisen. Bei Überschreiten kritischer Parameterwerte und stetiger Diffusion zeigen sich zwei Typen dissipativer Strukturen: räumlich periodisch stationäre Konzentrationsprofile und wellenartige zeitlich-periodische Änderungen. Diffusion und Nichtlinearität der Reaktion wirkt strukturbildend.

¹⁵⁸ <https://de.wikipedia.org/wiki/Belousov-Zhabotinsky-Reaktion>

¹⁵⁹ Siehe seine Webseite <https://jkrieger.de/bzr/inhalt.html>. Ein download der Arbeit ist dort möglich.

¹⁶⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Brüsselator> u. Jetschke, ebenda S. 193 f

Soviel zur Chemie und Physik dieses Reaktionstyps. Er widerspricht als offenes System natürlich nicht dem 2. Hauptsatz.

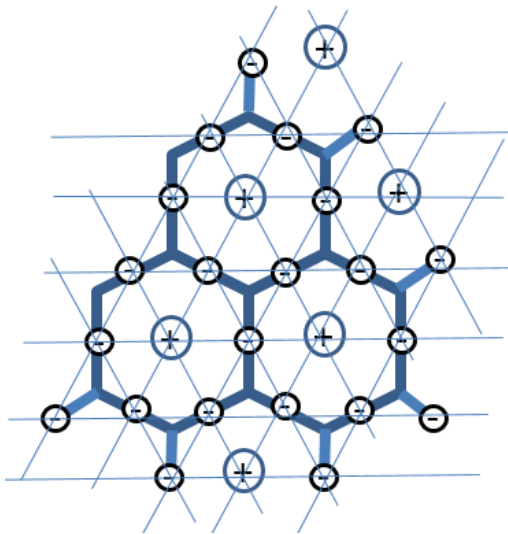


Abb. 100: Hexagonale Walzen, Mitte aufsteigende heiße, am Rand abgekühlte Flüssigkeit

Zu offenen, dissipativen Systemen kann man eine Fülle von Beispielen anführen.¹⁶¹

Ein Auto, das mit einer konstanten Geschwindigkeit fährt, verliert Energie durch Reibung und Abwärme und benötigt kontinuierliche Treibstoffzufuhr, also Materie, die zur Energieerzeugung taugt. Eine Kanne Tee wird mit Hilfe eines Stövchens warmgehalten. Diese Beispiele zeigen allerdings noch keine Selbstorganisation. Da erscheint die Kerzenflamme unter der Kanne eher als ein perfektes System. Sie wird durch Materie (Wachs) und Energie (Verbrennungsenergie) gespeist und gibt Wärme und Materie (z.B. Rauch) ab.

Dünen und Sandrippel können sich sogar gegen die Windrichtung bewegen, doch ihre charakteristische Form bleibt erhalten. Erhitzt man in einem flachen, offenen Gefäß eine Flüssigkeit, so entstehen bienenwabenähnliche fluide Strukturen – bekannt als Rayleigh-Bénard-Konvektion. Diese Phänomene nennt Ilya Prigogine „dissipative Strukturen“. Sie liegen erst dann vor, wenn die Kerzenflamme ruhig brennt und sich der Tee in der Kanne durch die Wärmezufuhr bewegt, wenn also durch einen vertikalen Temperaturgradienten aus einem instabilen stationären Zustand sich spontan Selbstorganisation entwickeln kann. Voraussetzung ist, dass oberhalb eines Schwellenwertes durch die asymmetrischen Randbedingungen Wärme über makroskopische Bewegung transportiert wird. Indem Konvektionseffekte auftreten, entstehen sichtbare Strukturen, die durch die Wärmeleitfähigkeit nicht mehr erklärt werden können. Es bilden sich Zellen aus, in denen heiße Flüssigkeit hochsteigt, an der Oberfläche abkühlt und an den Zellengrenzen in Wechselwirkung mit den Nachbarzellen wieder absinkt. Die sehr kleinen molekularen Teilchen der Flüssigkeit bilden also selbstorganisierte, nur durch die Gesetze der Physik bestimmte, makroskopische Strukturen.

Wo spielt nun die Nichtlinearität eine Rolle? Es ist bemerkenswert, dass einmal gebildete dissipative Strukturen erstaunlich robust sind. Störungen können

¹⁶¹ Siehe H.J. Schlichting, https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/dissipation_struktur.pdf

dann, wenn sie nicht zu massiv sind, wieder ausgeglichen werden. Dies wäre in linearen Systemen schwierig bis unmöglich.

Erst nichtlineare Energieströme und damit Entropiekompensierung können ein Nichtgleichgewichtssystem stabil halten. Der transportierte Wärmestrom und somit Entropiestrom ist nämlich proportional zur strömenden Flüssigkeit (Materie, Masse). Die Konvektion ist anders als die Wärmeleitung mechanische Energie, die quadratisch mit der Konvektionsgeschwindigkeit wächst. Die damit verbundene Abnahme der Entropie muss mindestens kompensiert werden. Die neu erzeugte Entropie nimmt also ebenfalls mindestens quadratisch und damit nichtlinear zu. Sie muss abgeführt werden damit ein stabiler Nichtgleichgewichtszustand erhalten bleibt. Es liegt ein für nichtlineare, dynamische Systeme typischer Rückkopplungseffekt vor.

Dynamik und Thermodynamik

Die moderne Physik kann man in drei fundamentale Theorien unterteilen: der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART), der Quantentheorie im weitesten Sinne (Quantenfeldtheorien) und der Thermodynamik. Keine der drei Theorien kann von einer der anderen abgeleitet werden. Bei Quantentheorie und ART hat man dies akzeptiert und arbeitet an einer übergreifenden Lösung. Für die Thermodynamik wurden zahlreiche Versuche unternommen, sie aus der mikroskopischen Physik abzuleiten, beginnend mit Boltzmann selbst. Die Thermodynamik kann nicht vollständig aus der Mikrophysik abgeleitet werden. Es ist die alte Frage nach Syntax und Semantik. Man braucht die Thermodynamik zur Interpretation, also ihre Semantik.

In diesem Kapitel geht es um thermodynamisches Ungleichgewicht in Abgrenzung zum Gleichgewicht. Die Definition bezieht sich auf die Boltzmannsche Wahrscheinlichkeitsbetrachtung der Thermodynamik: Ein System ist abhängig von den Bedingungen nämlich dann genau im thermischen Gleichgewicht, wenn es sich im statistisch wahrscheinlichsten makroskopischen stationären Zustand befindet. Sonst spricht man von Ungleichgewicht, etwa für die Zeitdauer, die zwei unterschiedliche Gase in geschlossenen Gefäßen zur vollständigen Durchmischung benötigen, wenn ein Hahn dazwischen geöffnet wird. In diesem Fall ist die Entropie maximal. Auch eine qualitative Veränderung des Systems im thermodynamischen Gleichgewicht ist möglich. Es ist ein Phasenübergang.

Interessant sollen hier vor allem thermodynamisch offene Systeme sein, bei denen ein stetiger Energie- und/oder Materiefluss besteht. Dabei können komplexe, geordnete Strukturen entstehen, für die Ilya Prigogine den Begriff „Dissipative Strukturen“ populär gemacht hat.

Mit der Belousov Zhabotinsky Reaktion und der Bénard-Konvektion wurden bereits typische Beispiele besprochen, die Ilya Prigogine veranlasst hat, diesen Ausdruck programmatisch zu verwenden; die Wortschöpfung geht wahrscheinlich auf Landauer zurück.

Ilya Prigogine und seine Koautorin Isabell Stengers haben die spontane Bildung solcher Strukturen physikalisch begründet und philosophisch in einem wichtigen Buch für die breite Öffentlichkeit diskutiert.¹⁶² Wissenschaftliche Grundlagen wurden von Prigogine, Nicolis und Glansdorf in der 1960-er Jahren gelegt.¹⁶³ Sie können im Rahmen der von ihnen entwickelten irreversiblen Thermodynamik beschrieben werden. Sie formulierten das Prigogine-Glansdorf-Theorem, wonach die zeitliche Evolution eines makroskopischen Systems mit zeitunabhängigen Randbedingungen zu einem stationären Zustand führt. Zur strengen mathematischen Ausarbeitung siehe etwa P. Glansdorf, G. Nicolis, I. Prigogine; *The Thermodynamic Stability Theory of Non-Equilibrium States*.¹⁶⁴

Allerdings zerschlug sich die Hoffnung, dass sich eine allgemeine mathematische Beschreibung ergeben könnte – ähnlich wie für Gleichgewichtsstrukturen z.B. bei fester Temperatur und festem Volumen oder fester Temperatur und festem Druck. Das sind Fälle maximaler Entropie, aber ohne Entropie-Änderung ($\Delta S = 0$). Dies zeigte Landauer im Jahr 1975.¹⁶⁵ Der Grund ist bedeutsam für diesen Beitrag. Er zeigt, dass ein nichtlineares System noch lange nicht durch die Gleichungen verstanden werden kann, die es momentan und in isolierten Teilen beschreiben.

Die Kenntnis von lokal stabilen Zuständen ist nicht ausreichend. Übergreifende, auch zufällige Verbindungen, wie sie etwa durch typisch nichtlineare Effekte wie Verzweigungen/Bifurkationen entstehen, sind entscheidend und verhindern eindeutige Kriterien. Nichtlinearität verhindert zwar absolute Vorhersagekraft, schafft aber Struktur und Stabilität. Aber Struktur ist nicht nur eine Eigenschaft eines Systems als Ganzes. Die Verbindung ist wesentlich enger. Eine veränderte Struktur macht daraus ein vollkommen neues System. Nur eine Struktur ist nur und ausschließlich durch die Summe seiner Teile definiert, z.B. eine Gruppe mit der Addition als Verknüpfung. Nur die Struktur lässt das Ganze erkennen; sonst ist es nur ein Konglomerat an Einzelkomponenten. Carl

¹⁶² Prigogine I.: Stengers. I., *Dialog mit der Natur*. München 1981

¹⁶³ Glansdorf P, Prigogine I. *Thermodynamic Theory of Structure, Stability, and Fluctuations*. Wiley Interscience; New York, NY, USA: 1971.

Nicolis, Prigogine: *Self-Organization in Nonequilibrium Systems*. Wiley-Interscience, New York, 1977

¹⁶⁴ <https://www.pnas.org/doi/pdf/10.1073/pnas.71.1.197>

¹⁶⁵ Landauer, R. (1975). Inadequacy of entropy and entropy derivatives in characterizing the steady state. *Physical Reviews A* 12, 636.

Friedrich von Weizsäcker schrieb: „Die beliebte Frage, ob Mathematik eine Natur- oder Geisteswissenschaft sei, geht von einer unvollständigen Einteilung aus. Sie ist eine Strukturwissenschaft.“¹⁶⁶

In diesem Abschnitt soll Dynamik und Thermodynamik gegenübergestellt werden. Ziel ist dabei zu verstehen, wie überhaupt komplexe Strukturen in der unbelebten wie belebten Natur entstehen können bzw. entstanden sind und wie sie sich selbstorganisieren können.

Nach einem Vorschlag von Peter Schuster (Wien) sollte ein System, das zur Selbstorganisation fähig ist, sich an folgende Kriterien halten können:

1. Es muss einen Selbstverstärkungsmechanismus geben.
2. Das System muss zur Variabilität insofern fähig sein, als verschiedene Muster entstehen und abgewandelt werden können; und
3. Es muss ein Energie- und/oder Materiefluss vorliegen, der verhindert, dass

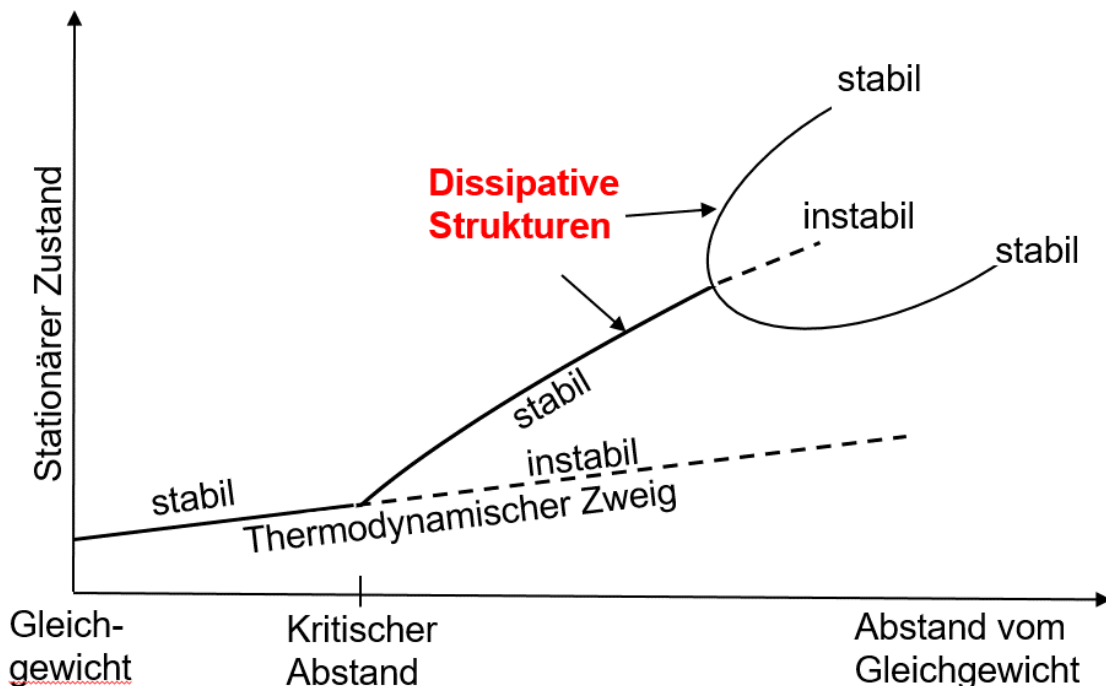


Abb. 101: Dissipative Strukturen jenseits des instabilen thermodynamischen Zweigs.

das System einem thermodynamischen Gleichgewicht zustrebt.¹⁶⁷

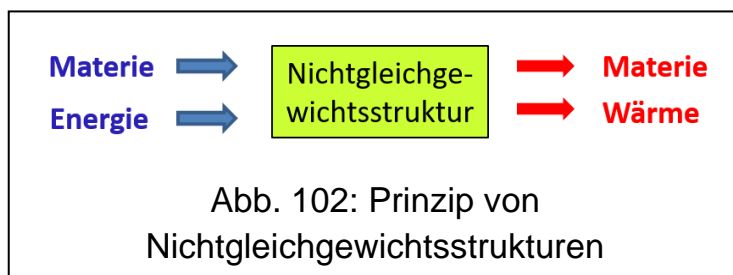
Punkt 3 impliziert, dass es sich um ein offenes System handeln muss.

¹⁶⁶ C. F. v. Weizsäcker: Die Einheit der Natur. 1971, S. 22

¹⁶⁷ Schuster. P.; z.B. in „Ordnung und Chaos“. Küppers, B. (Hrsg.). München 1987. S. 49ff, zitiert nach Hartmut Kahlert, Inaugurationsrede am 22. November 1991, <https://diglib.tugraz.at/download.php?id=4e9d7e05e9156&location=browse>

Diese Kriterien sind klar, genügend allgemein und sind somit nicht auf chemische Beispiele, wie die Belousov Zhabotinsky Reaktion, beschränkt. Auch wenn man die chemischen Teilprozesse nicht verharmlosen darf, so ist es doch ein vergleichsweise einfaches Beispiel von Selbstorganisation. Die Natur hat bewiesen, dass bis hin zur Entwicklung von Leben extrem deutlich mehr möglich ist.

Unter dem Begriff „dissipative Strukturen“ werden also Phänomene verstanden, in denen sich fern vom thermodynamischen Gleichgewicht geordnete, stationäre, selbstorganisierende, dynamische Strukturen in nichtlinearen, offenen Systemen ausbilden. Genau genommen sind alle lebenden Organismen in der gesamten Biologie dissipative Systeme. Damit eine solche Nichtgleichgewichtsstruktur stabil bleibt, muss ein im zeitlichen Mittel beständiger Strom an Materie und/oder Energie zur Verfügung stehen, der den Abfluss von Materie und/oder Wärme kompensiert. Es handelt sich unbedingt um offene Systeme, genügend weit entfernt vom Gleichgewicht. Es ist deshalb



sinnvoll, sich grundsätzliche Gedanken über das Wesen von Dynamik und Thermodynamik zu machen, die diese Strukturen ermöglichen.

Im Jahr 1811 gewann Baron Jean-Joseph Fourier einen Preis der Akademie mit einer theoretischen Arbeit über die Wärmeausbreitung in Festkörpern. Man muss sich vergegenwärtigen, dass Windkraft, Wasserkraft und physische Kraft von Tieren und Menschen die einzigen Kraftquellen waren, die man sich im 18. Jahrhundert vorstellen konnte. Der frühe Ökonom Adam Smith sah in der Kohle den einzigen Nutzen, Heizwärme zu liefern. Doch fast gleichzeitig tüftelte James Watt bereits an seiner Dampfmaschine. Fouriers Arbeit postulierte ein einfaches Resultat: Der Wärmefluss ist dem Temperaturgradienten proportional. Es ist ein universelles Gesetz, das keineswegs auf Festkörper beschränkt ist. Nur der Proportionalitätsfaktor ist stoffspezifisch. Das Gesetz gilt für beliebig komplexe Körper, unabhängig von ihrer Zusammensetzung und Größe. Es ist der Beginn einer quantitativen, mathematisch-physikalischen Theorie, die nicht von Newton begründet worden ist.

Diese Entkoppelung hielt über mehrere wichtige und bedeutsame Zwischenschritte an. Sadi Carnot formulierte seinen Kreisprozess etwa um das Jahr 1824. Es ging ihm um die Idealisierung von mechanischen Maschinen und implizierte irreversible Vorgänge. Diese wollte er unterdrücken, in dem keine Temperaturänderung durch direkten Kontakt von Körpern entsteht und somit

„verloren geht“. Seine Überlegungen bereiteten dem Zweiten Hauptsatz der Thermodynamik den Boden. Mit dem Prinzip der Erhaltung der Energie haben Robert Mayer (1842) und Hermann von Helmholtz (1847) den Ersten Hauptsatz der Thermodynamik formuliert.

Im Jahr 1865 strukturierte Rudolf Clausius ältere Überlegungen neu und vergegenwärtigte sich, dass das am besten abgeschlossene System das Universum ist. Er gab den beiden Hauptsätzen der Thermodynamik die einprägsame Form:

- Die Energie der Welt ist konstant.
- Die Entropie der Welt strebt einem Maximum zu.

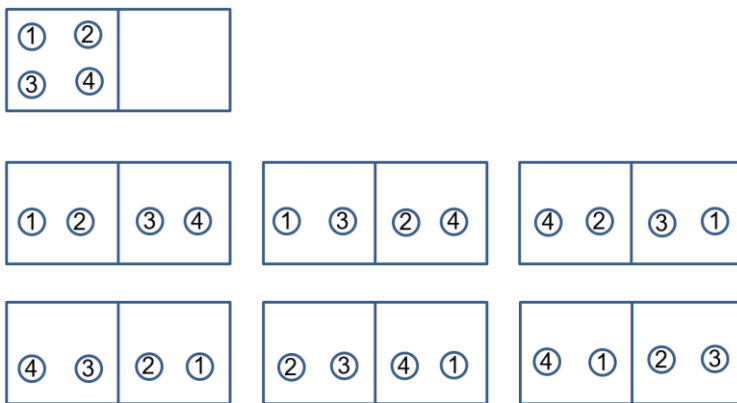


Abb. 103: Entropiezunahme erklärt sich statistisch nach Boltzmann aus der Zunahme von möglichen Mikrozuständen. Für vier Teilchen gibt es nur eine Möglichkeit sie in einem Gefäß unterzubringen; bei zwei Gefäßen sind es schon sechs Möglichkeiten. Diese Argumentation gilt nur für abgeschlossene (adiabatische) Systeme:

2. Hauptsatz der Thermodynamik.

geschaffen. Griechisch $\epsilon\nu\tau\rho\pi\acute{\alpha}$ (entropía) steht für „Änderung der Entwicklung“. Üblicherweise wird der Buchstabe S dafür verwendet.

Prigogine interessierte sich für offene Systeme fernab des Gleichgewichts. Es geht also um Änderung von S , ausgedrückt als ΔS genauer dS . Dabei ist es bedeutsam, zwischen irreversiblen Prozessen ($d_i S$) und Prozessen zu

Dabei wird also einerseits „die Welt“ als abgeschlossenes System betrachtet, gleichzeitig definiert aber auch die Entropiezunahme eine Richtung, einen Zeitpfeil, der Vergangenheit und Zukunft durch Irreversibilität identifizieren lässt. Sie werden getrennt durch einen kurzen, physikalisch, philosophisch und religiös schwer fassbaren Moment, den man Gegenwart nennt.¹⁶⁸

Es wird mit der Entropie ein zentraler Begriff

¹⁶⁸ Siehe z.B. Muller, Richard A., Jetzt – Die Physik der Zeit, S. Fischer, Frankfurt a. Main, 2018, S. 131.

unterscheiden, in denen Entropie durch Austausch (exchange, $d_e S$) von Energie ausgeglichen werden.

H.J. Schlichting hat eine entsprechende einfache, aber repräsentative Rechnung anhand der Kerzenflamme durchgeführt.¹⁶⁹ Damit kann man das Grundprinzip einer dissipativen Struktur quantitativ illustrieren:

Man kann annehmen, dass der Stoffwechsel sich über das gesamte Volumen der Flamme erstreckt, also die irreversible Entropieproduktion proportional zum Volumen der Flamme ist; r sei die Flammengröße, ϕ eine dimensionsbehaftete Proportionalitätskonstante.

$$\Delta S_i = \phi \cdot r^3$$

Die Entropie durch Austausch ΔS_e muss der Energiemenge entsprechen, die durch Verbrennen von Kerzenwachs für eine stabile Flamme benötigt wird. Sie ist proportional zur Oberfläche der Flamme, da nur dort Entropie zu- bzw. abfließen kann. λ ist wieder eine entsprechende Proportionalitätskonstante.

$$\Delta S_e = \lambda \cdot r^2$$

Die ausgeglichene Entropiebilanz beträgt somit

$$\Delta S = \Delta S_i + \Delta S_e$$

Eine ruhig brennende Flamme entspricht dem stationären Zustand:

$$\Delta S = \phi \cdot r^3 - \lambda \cdot r^2 = 0$$

Man sieht, dass die Größe der Flamme r für die Steuerung der Entropiebilanz verantwortlich ist. Kleines r bedeutet $\Delta S < 0$ und die Flamme hat noch nicht ihre optimale Größe erreicht. Bei großem r ist $\Delta S > 0$. Hier „staut“ sich Entropie und schränkt damit die optimalen Bedingungen ein. Trotz dieser groben Rechnung und ohne Kenntnis der genauen physikalischen und chemischen Prozesse lassen sich erstaunliche Schlüsse ziehen. Dies ist auch bei viel komplizierteren Strukturen möglich. Sogar die Wabengröße bei der Bénardkonvektion lässt sich so erschließen und erlaubt sogar Analogien zu Zellen in der Biologie und die Evolution vom Einzeller zum Vielzeller.

Die Entropie wird zu einem Indikator des Systems und entscheidend ist dabei die Entropiebilanz. Bei der Abgabe von insbesondere Wärme wird unweigerlich die Entropie ansteigen. Dies geht auf Kosten der zugeführten Energie. Die

¹⁶⁹ https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/dissipation_struktur.pdf

Energie wird dissipiert; sie steht zur Verrichtung von Arbeit nicht mehr zur Verfügung. Sie wird aber in einem offenen System ständig durch den Zufluss von Energie und/oder Materie ergänzt. Bei dissipativen Systemen kann dabei eine „supramolekulare Organisation“ entstehen. Sie ist notwendige, aber nicht hinreichende Voraussetzung für einen wachsenden Organisationsgrad mit komplexeren Strukturen. Sie ist nur fernab vom Gleichgewicht möglich. Erst jenseits der Schwelle von chemischer Instabilität, die im Bereich von 10^{-8} liegt, können makroskopische Effekte im Bereich von Zentimetern auftreten.

Selbstorganisation ist also nur mit einer stabilen Energiequelle und fernab des thermodynamischen Gleichgewichts möglich. Bei selbstorganisiertem Leben ist es im Wesentlichen die Sonne als Energielieferant. Lebensformen in Nischenbereichen, die z.B. den Vulkanismus als Energiequelle nutzen, haben nur eine minimale Bedeutung.

Die Theorie der Selbstorganisation steht in der Tradition der allgemeinsten bisher bekannten Theorie der Physik über Objekte in der Zeit - der Quantentheorie. Carl Friedrich von Weizsäcker hat die Quantentheorie als „eine Theorie über mögliches menschliches Wissen in der Zeit“ bezeichnet (Zeit und Wissen, 1992, S. 981).

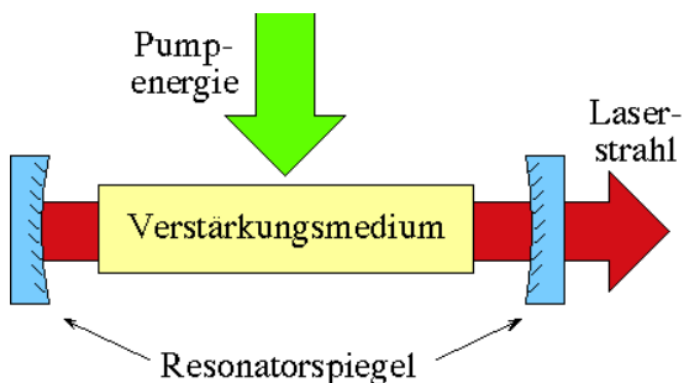


Abb. 104: Prinzipieller Aufbau eines Lasers

In den letzten Kapiteln wurden Beispiele angesprochen, die auch häufig für die wissenschaftliche Disziplin der Synergetik herangezogen werden. Dazu kommen noch z.B. die bei der Logistischen Gleichung erwähnten Jäger-Beute-Beziehungen oder Attraktoren und Solitonen. Synergetik ist die Theorie der Selbstorganisation.

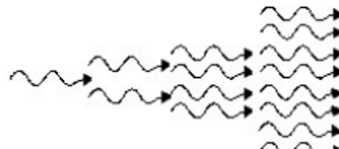
Synergetik steht für die „Lehre vom Zusammenwirken“. Es geht um die Kooperation von räumlichen, zeitlichen und funktionalen Strukturen. Synergetik umfasst nicht nur deterministische nichtlineare Aspekte, sondern auch stochastische. Auf diese wird nur kurz am Ende des Beitrags eingegangen. Im weitesten Sinne ist es eine Theorie über die Entwicklung von Objekten in der Zeit. Die Physik von Objekten in der Zeit war höchstens Anlass, aber Synergetik geht weit darüber hinaus. Auch das menschliche Wissen oder Handeln kann Objekt sein. Hier setzt auch der gängigste Vorwurf an, nämlich der angeblich zu großen Verallgemeinerung.

Synergetik gilt als Lehre von Beziehungen jeglicher Art, die in komplexen dynamischen Systemen wechselwirken.¹⁷⁰ In diesem Sinne beschränkt sich die Synergetik nicht auf Naturwissenschaften, sondern sucht nach einheitlichen mathematischen Beschreibungen, die möglichst interdisziplinär gelten. Entstehen dabei einheitliche synergetische Strukturen, gleich welcher Art, so spricht man von Selbstorganisation. Das Fachgebiet ist ursprünglich aus der statistischen Physik der Nichtgleichgewichtssysteme hervorgegangen. Pionier dieser Forschung war Hermann Haken. Er konnte interessante Zusammenhänge identifizieren, allerdings hat sich seine etwas seltsame Terminologie (z.B. „Versklavungsprinzip“) nur teilweise durchgesetzt. Sein Verdienst ist es, dass sich das Wissen um komplexe Systeme, z.B. in den Sozialwissenschaften, der Wirtschaft oder der Psychologie, im Einklang mit der Natur und nicht unabhängig von ihr oder gar gegen die Natur entwickeln sollte.

Der Physiker Haken begann den Laser als Prototypen für Selbstorganisation zu untersuchen. Das Akronym *laser* steht für Englisch *light amplification (by) stimulated emission (of) radiation*, (Licht-Verstärkung durch stimulierte



**Thermische
Lampe**



Laser

Emission von Strahlung) und bezeichnet sowohl das physikalische Prinzip als auch das Gerät. Die Idee kam über den *maser*, wobei das „m“ für *microwave* steht.

Abb. 105: Unterschied Lampe - Laser

Die Betonung von Hakens Lasertheorie liegt auf der

Selbstorganisation, also der Entwicklung eines komplexen Systems ohne äußeren Zwang. Vor dieser Theorie war man der Auffassung, dass z.B. wie bei einer Gasentladungslampe bei steigender Stromstärke das Gemisch an Wellen immer stärker wird. Auch beim Laser bestimmen Differentialgleichungen die zeitliche Entwicklung des Systems. Der Laser ist jedoch ein komplexes System, bei dem Licht und Trägermedium nichtlineare Abhängigkeiten aufweisen. Die Gleichungen können mit klassischen Methoden nicht gelöst werden. Dieser Übergang findet fernab vom thermodynamischen Gleichgewicht statt. Dies ist ein Unterschied zu einem Magneten. Wenn ein bei niedrigen Temperaturen ferromagnetisches Metall erhitzt wird, so ist es ab einer bestimmten Temperaturschwelle nicht mehr magnetisch. Darunter ist das Metall im thermischen Gleichgewicht stabil magnetisch. Das Gerät wird aber erst durch den Phasenübergang von unterschiedlichen Wellenlängen zu einer ausgezeichneten Wellenlänge zu einem „Laser“. Ab dieser „Laserschwelle“

¹⁷⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Synergetik>

vereinfacht sich die mathematische Behandlung und es werden nur noch drei Variablen benötigt. Sie stehen für unterschiedliche Prozessgeschwindigkeiten, in denen sich diese Variablen verändern. Synergetik bedeutet in diesem Zusammenhang, dass eine Frequenz das „Rennen“ gewinnt und den Schwingungstakt aller anderen Frequenzen vorgibt. Sie wird zum Ordnungsparameter, was spontan die Differentialgleichungen vereinfacht. Physikalisch ist der Ordnungsparameter eine „Grundmode“ und es liegt eine Symmetriebrechung bzgl. Medium und Strahlung vor. Solche Schwingungsmoden kennen wir als Eigenschwingungen in der Musik oder Raumakustik, bei Brückenkonstruktionen u.v.m. Als Mode bezeichnet man die Beschreibung bestimmter zeitlich stationärer Eigenschaften, wie Eigenschwingung oder Partialschwingung, einer Welle. Der Begriff „Welle“ steht dabei als Summe verschiedener Moden. Synergetisch betrachtet, folgen also die Atome und damit die durch spontane Emission entstandenen Photonen im Laser dem taktgebenden Ordnungsparameter. Das makroskopische Lichtfeld kann dann weitere Atome dazu zwingen, Photonen gleicher Richtung, Phase und Frequenz zu emittieren. Man nennt dies induzierte Emission. Ein Laser gibt dann die so insgesamt stimulierten Energiepakete in Form von gepulstem Licht ab. Die stimulierte Emission braucht etwas Zeit; dafür sorgen die Spiegel, zwischen denen die Lichtpakete bis zum Erreichen der Pulsenergie oszillieren. Aber auch der beste Spiegel ermöglicht Streuverluste. Gewollte und ungewollte abgegebene Energie werden durch die angelegte Spannung kompensiert. Dieser ständige Austausch macht den Laser zu einem energetisch offenen System mit einem durch Selbstorganisation der Wellenpakete induzierten Phasenübergang als makroskopischen Ordnungszustand. Haken selbst hat das Prinzip der Selbstorganisation schnell auf andere Bereiche übertragen und fand rasch Nachahmer in und außerhalb der Naturwissenschaften.

Gottfried Jetsche hat sich in einem Anhang an sein ansonsten sehr mathematisch orientiertes Buch bereits 1989 an eine Tabelle gewagt, die eine Reihe von Systemen und ihre Ordnungsparameter aufzählt.

Sie illustriert weitsichtig zumindest die Bandbreite an Disziplinen und Themengebieten, denen sich die Synergetik widmet. Diese Gebiete wurden mittlerweile deutlich erweitert und umfassen weite Aspekte der Sozialwissenschaften wie Soziologie, Psychologie und Wirtschaft (siehe auch Fazit und Ausblick).

| Gesamtsystem | Untersysteme | Ordnung | Ordnungs-Parameter | Äußere Parameter |
|--------------|-------------------|-----------------|--------------------|------------------|
| Ferromagnet | Elementar-magnete | Magneti-sierung | Mittleres Feld | Temperatur |
| Supraleiter | Elektronen | Supraleitung | Paarwellen- | Temperatur |

| | Photonen | | Funktion | |
|-----------------------------------|-------------------------------------|--|-------------------------------------|--|
| Röhren-Generator | Elektronen | Oszillation | Gitterspannung | Kapazitäten Induktivitäten |
| Laser | Atome und Photonen | Kohärenz | Feldstärke des Lichts | Pumprate Verluste |
| Flüssigkeit | Moleküle | z.B. Benard- Zellen | Temperatur Dichtegrad- ienten | Wärmezufuhr |
| chemisch reagierende Stoffe | Moleküle verschiedener Sorten | Räumliche und zeitliche Strukturen | Konzentration | Rohstoff-, Energie- Zufuhr |
| Biologische Zelle | Moleküle | Konzentra- tions- verteilung | Konzentra- tionen | Nährstoff- zufuhr, Licht, Temperatur |
| Gehirn | Neuronen | Funktion | Elektrische Anregung | Äußere Reize |
| Population | Lebewesen | Natürliche Koexistenz | Räumliche Dichte | Rohstoff- vorräte |
| Gesellschaft | Individuen | Kommuni- kation | Sprache | Andere Sprachen |
| Gesellschaft | Individuen | Gesellschaft- liche Klassen, Funktion | Ökonomische Verhältnisse | Natürliche Gegeben- heiten |

Abb. 106: Beispiele für die Realisierung abstrakter Begriffe der Synergetik bei Selbstorganisation in verschiedenen Gebieten.

Zur Erläuterung von Abb. 106: Organisation ist die makroskopische Steuerbarkeit eines Systems. Die Reaktion ist in der Regel deutlich schneller als durch steuernde Einflüsse von mikroskopischen Kräften. Bei der Selbstorganisation kommt die Steuerung hauptsächlich von innen und resultiert aus der inneren Dynamik zwischen „Kraft“ und Untersystem. Trotzdem sind Selbstorganisation und Fremdorganisation keine Antagonismen. Das Gesamtsystem besteht aus vielen gleichartigen Untersystemen. Diese wechselwirken untereinander unter zufälligen oder systematischen Einflüssen. Das makroskopische Verhalten wird von wenigen Ordnungsparametern bestimmt. Sie beeinflussen die Untersysteme und sind gleichzeitig von ihnen erzeugt worden. Die Ordnungsparameter sind auf der Zeitachse wesentlich stabiler als die Untersysteme, die unter dem dominierenden Einfluss der Ordnungsparameter stehen. Die wenigen mathematischen Regeln für die Ordnungsparameter zeigen Nichtgleichgewichts-Phasenübergänge oder Übergänge von Unordnung zu Ordnung und verstärkter Kooperation. Die Tabelle zeigt unterschiedliche Systeme, Ordnung und Ordnungsparameter aus

verschiedenen Disziplinen der Natur- und Sozialwissenschaften. Dies sind nur im engeren physikalischen Sinn durch Naturgesetze festgelegte Strukturen. Ein Beispiel ist Sprache, die eine extrem wichtige ordnende Funktion hat, aber sich im Laufe der Zeit deutlich geändert hat und sich weiter ändert (z.B. durch Anglizismen, Jugendsprache, Begriffe aus der Pandemie etc.).¹⁷¹

Fazit und Ausblick

Wir sind es gewöhnt, in Kategorien von Ursache und Wirkung zu denken. Seit der Renaissance mit der Aufklärung und dem wissenschaftlichen Weltbild beurteilen wir so die Welt, in der wir leben. Das mechanistische Weltbild, zumindest ausgelöst von Laplace (siehe Zitate am Anfang dieses Beitrags), hat das Denken über den Menschen, Tiere und der Umwelt geprägt. J.O. de La Mettrie nannte es „*l'homme machine*“ und diese Vorstellung von Mensch und Tier als Maschinen hat sogar die Medizin lange Zeit geprägt. In der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts setzte ein Umdenken ein. Wichtige Namen in der Mathematik dieser Forschung sind Poincare, Cantor oder Hilbert, aber auch Lyapunov, Julia, Fatou, Hausdorff oder Sierpinski – um nur einige zu nennen. In den 1970-er Jahren muss man Mitchell Feigenbaum und Siegfried Großmann nennen. Der Begriff „Chaostheorie“ wurde vor allem mit Mandelbrot populär und hat durchaus unvermittelt, durch Beispiele aus den unterschiedlichsten Lebensbereichen, ein Element aufgezeigt, das wesentliche Teile der Welt unbeherrschbar und nicht vorhersagbar macht. Determinismus kann eben trotzdem zu „indeterminierten“ Verhalten führen, weil die Anfangsbedingungen oft prinzipiell nicht genau zu bestimmen sind. Bereits die Quantentheorie hat die traditionellen Vorstellungen von Kausalität erschüttert. Diese Theorie war aber noch relativ weit weg vom Alltag und seinen Dimensionen – im Mikrokosmos. Sie betraf eine Größenordnung, die uns in unserer Alltagsphilosophie noch wenig irritieren musste. Ähnliches gilt für die Kosmologie, sozusagen dem Megakosmos, die spätestens in der zweiten Hälfte des 20. Jahrhundert zu einer exakten Wissenschaft wurde. Nun erschüttert die Chaostheorie unsere Vorstellungen von unmittelbar einsichtigen Prozessen unserer Umwelt, dem Mesokosmos – vom chaotisch tropfenden Wasserhahn bis zu Wetterphänomenen. Sie kann schnell scheinbar einfache Vorgänge in eine fast unheimliche Komplexität verwandeln. Kausalität wird plötzlich regelrecht probabilistisch und fordert, dass gängige Beziehungen von Ursache und Wirkung hinterfragt werden müssen. Erst bei näherem Hinsehen und nach über 70 Jahren Forschung erkennt man langsam das Wechselspiel von Ordnung und Chaos und seine tieferen Gesetze. Wir erkennen, dass ein mechanistisches

¹⁷¹ Vergleiche Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, S. 299

Weltbild, in dem die genaue Kenntnis der Vergangenheit die Zukunft vollkommen bestimmt hat, nun endgültig ausgedient hat.

Dies ist keine Katastrophe. A.N. Whitehead schrieb in „Science and the modern world“: *A clash of doctrines is not a disaster—it is an opportunity.*¹⁷²

Wir erkennen aber im Ausblick auch, dass es nicht die linearen Gesetze alleine und vor allem nicht Systeme im Gleichgewicht sind, die Selbstorganisation ermöglichen. Ein Pionier auf diesem Gebiet ist Ilya Prigogine mit seiner sogenannten belgischen Schule. Sein Interesse galt der Zeit und offenen thermodynamischen Systemen. Beides gehört zusammen, denn wenn man von Selbstorganisation in dynamischen Systemen spricht, muss man der Zeit eine konstruktive Rolle zubilligen. Auch der „Zeitpfeil“ ist seit der These von Arthur Eddington eng mit der Thermodynamik verflochten, wonach die Zunahme von Entropie die Richtung der Zeit bestimmt. Dissipative Prozesse und Strukturen können trotzdem einen höheren Ordnungsgrad erreichen, der von Prigogine thermodynamisch erklärt werden konnte. *„Ordnung entwickle sich aufgrund der Entropie, nicht trotz derselben.“*¹⁷³ Die Evolution bekommt dadurch eine thermodynamische Grundlage und der von der Entropie bestimmte Zeitpfeil führt nicht zwangsläufig schnell zum Wärmetod. Wie lassen sich quasi-stationäre oder meta-stabile Zustände fern des Gleichgewichts erklären? Dazu muss man die zeitliche Entropieänderung in zwei Komponenten zerlegen. Das führt zur wichtigen Unterscheidung zwischen „Entropiefluss“, das ist der Austausch des offenen Systems mit seiner Umgebung ($d_e S$) und die „Entropieerzeugung“, die innerhalb des Systems aus irreversiblen Prozessen resultiert ($d_i S$).¹⁷⁴ Insgesamt kann man drei Bereiche der Thermodynamik unterscheiden:

- 1) Im Gleichgewicht ist die Entropieerzeugung = 0.
- 2) In Gleichgewichtsnähe gelten näherungsweise lineare und damit vorhersagbare Entwicklungen.

¹⁷² Alfred North Whitehead, Science and the modern world, S. 230, online <https://ia800809.us.archive.org/20/items/b29978531/b29978531.pdf>

¹⁷³ Ilya Prigogine im Gespräch mit Renée Weber, New York, 1984. In: Alles Leben ist Eins, Crotona Verlag, Amerang, englisches Original 1986, deutsche Ausgabe 2019, S. 249

¹⁷⁴ Prigogine, Ilya, Stengers, Isabell; Das Paradox der Zeit – Zeit, Chaos und Quanten. Piper, München 1993, S. 77-78

3) Fern vom Gleichgewicht kommen nichtlineare Effekte zum Tragen.

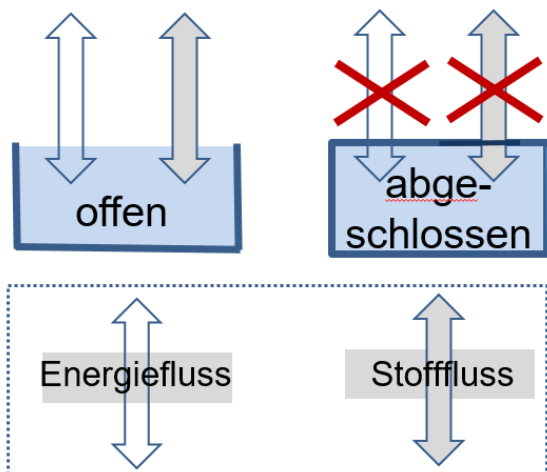


Abb. 107: Dissipative Systeme verlangen offene Systeme

Erst dadurch kommt man aus thermodynamischer Sicht zu neuen Definitionen von Ordnung und Unordnung. Es spielen Verzweigungspunkte, also Bifurkationen eine Rolle, an denen das System mehrere mögliche Entwicklungswege hat. Hier gibt es abnorm große Schwankungen, wie sie auch bei makroskopischen Mittelwerten auftreten. Dynamik kann dort Ordnung überwinden. In einem turbulenten Strudel sind zwei Wassermoleküle makroskopisch

(mindestens in Zentimetern messbar) korreliert. In einem Kristall schwingen die Teilchen dagegen inkohärent. Korrelierung zwischen verschiedenen Regionen oder Ereignissen lässt das System sich als Ganzes verhalten und ist der erste Schritt, der zu Selbstorganisation führen kann. Außerdem bricht bei einer korrelierten und somit kollektiven Bewegung die räumliche Symmetrie, die eine laminar fließende oder gar stehende Flüssigkeit ausmacht. Ein Kristall bleibt immer statisch, wenn er nicht äußeren Kräften ausgesetzt wird.

Über diese Sichtweise lassen sich Strukturen, die aus Nichtgleichgewichtsprozessen heraus entstehen, aus dem Wechselspiel aus Entropiefluss und Entropieerzeugung verstehen. Beispiele können ebenso aus der unbelebten Natur (z.B. Bénard-Konvektion) wie der Biologie kommen (z.B. dissipierte Sonnenenergie versus Entropieaufwand für die Erzeugung von komplexen Biomolekülen).

Diese neuartigen Strukturen passen nicht in das Weltbild, das ausgehend von Newton die Naturwissenschaften oder besser den wissenschaftlichen Zugang zur Natur geprägt hat. Mit diesem Weltbild kam es erst zur Polarisierung zwischen Naturwissenschaften und Geisteswissenschaften. Prigogine zeigte, dass weitab vom thermodynamischen Gleichgewicht in offenen Systemen sich komplexere Strukturen spontan ausbilden können. Korrelation bedeutet mehr als Wechselwirkung. Neue Strukturen der Materie im Nichtgleichgewicht unterscheiden sich grundsätzlich von Gleichgewichtsstrukturen. Molekulare Wechselwirkungen liegen in der Größenordnung von einem Ångström (10^{-8} cm); Korrelationen liegen in der Größenordnung von mindestens mehreren Zentimetern. Es spricht viel dafür, dass es bei Hurrikanen Kilometer sein können und bei Galaxien Lichtjahre. Unordnung und Chaos bekommen ordnenden

Charakter und dissipative Strukturen lassen in der Dynamik nichtlinearer Systeme und fern vom Gleichgewicht Selbstorganisation zu. Die bereits besprochenen technischen Begriffe Sensibilität von den Anfangsbedingungen, Instabilität oder Bifurkation gewinnen an Bedeutung. Prigogine nennt es andererseits prosaisch „*Die Wiederverzauberung der Natur*“ und begründet es damit, „*Weil sie uns die Vielfalt zurückbringt und daher auch das Unerwartete.*“¹⁷⁵ Auf jeden Fall benötigt man andere kausale Begründungen als bei Zuständen im Gleichgewicht oder in Gleichgewichtsnähe.

Selbstorganisation ist plötzlich mehr als deduktive Wissenschaft in linearem Kontext; sie wird zum Narrativ, die auch die Physiker beschäftigt. An Verzweigungspunkten geht es nicht um unzureichendes Wissen, sondern um ein intrinsisches Verhalten des Systems. Schwellenwerte, an denen Bifurkationen stattfinden, lassen sich nicht mehr deterministisch erklären. Es gibt mehrere mögliche Vergangenheiten.

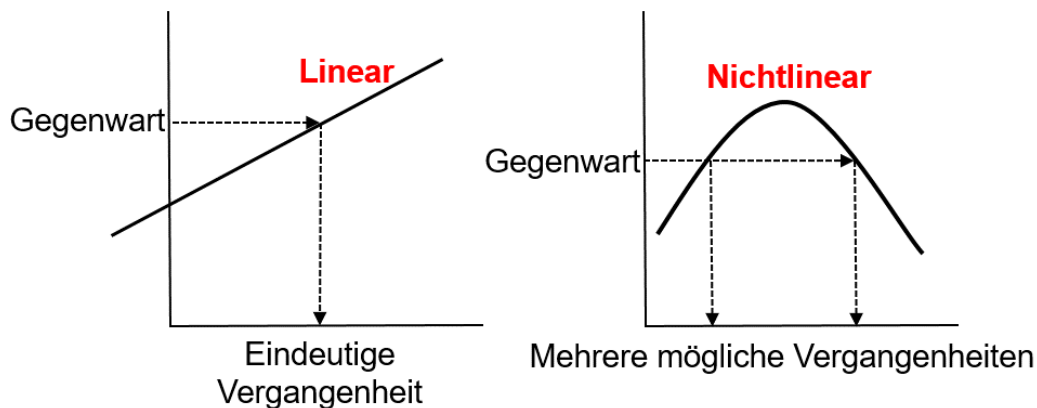


Abb. 108: Zur Vorhersage der Vergangenheit

Dank Selbstorganisation lösen sich frühere Diskrepanzen zwischen Biologie und mathematischer Physik auf. Proteine, Nukleinsäuren bis hin zu der Doppel-Helix der DNA sind molekularbiologisch gut verstanden. Anders sah es bei dem Zusammenspiel von unzähligen Biomolekülen bei hunderten oder gar tausenden chemischen Prozessen in lebenden Zellen aus. Noch vor gut einem Jahrhundert hat man dazu auf metaphysische Erklärungen zurückgegriffen. Eine Theorie der Selbstorganisation hat diese Erklärungsversuche, zumindest unter Wissenschaftlern und in aufgeklärten Kreisen, obsolet gemacht. Jetschke nennt folgende Sachverhalte, die damit erklärt werden können:

1. *Die Aufrechterhaltung des Lebens, darunter Regulationsprozesse auf zellulärer und subzellulärer Ebene Zellteilung, Zelldifferenzierung, Gestaltbildung*

¹⁷⁵ Ilya Prigogine im Gespräch mit Renée Weber, ebenda, S. 263

2. *Die Entstehung und Entwicklung des Lebens, also den Übergang vom Nicht-Leben zum Leben und die weiteren Phasen der Evolution*
3. *Das Verhalten und die Wechselwirkung von Populationen mit großen Individuenzahlen.*¹⁷⁶

Wesentliche Voraussetzung in einem System sind dabei Rückkopplungseffekte aller am System beteiligten Komponenten. Punkt 3 ist nicht unbedingt selbstverständlich. Man kann nun leicht postulieren, dass dies nicht nur für die Naturwissenschaft gilt. Jede hinreichend große soziale Einheit besitzt komplexe nichtlineare Wechselwirkungsprozesse, die Selbstorganisationsprozesse ermöglichen können. Hier ist jedoch Vorsicht geboten. Selbstorganisation als sinnstiftendes Narrativ muss sich immer am Wahrheitsgehalt der Fakten orientieren.

Eine Theorie, die versucht, insbesondere Musterbildungen in den unterschiedlichsten Disziplinen der Natur- und Sozialwissenschaften zu ordnen, ist die bereits angesprochene Synergetik. Sie ist ursprünglich aus der statistischen Physik der Nichtgleichgewichtssysteme hervorgegangen. Wie bereits erwähnt, hat einer der Begründer, Herrmann Haken, zunächst den Laser als Beispiel für kollektives Verhalten betrachtet. Damit konnte Selbstorganisation fern vom thermodynamischen Gleichgewicht mit seinen wesentlichen Prinzipien studiert und der Zusammenhang mit der Theorie der Phasenübergänge entwickelt werden.¹⁷⁷ Der Analogieschluss von einem physikalischen System in andere Wissenschaftsbereiche wird aber auch heftig als unzulässigen logischen Schluss „*post hoc, ergo propter hoc*“ („danach, also deswegen“) kritisiert. Immerhin haben Erkenntnisse über nichtlineare Nichtgleichgewichtssysteme und somit „chaotische“ Prozesse es geschafft, eine emergent wachsende Theorie der Selbstorganisation zu befruchten, an deren Anfang wir erst stehen. Eine Systemtheorie, wie die Synergetik, möchte umfassend sein. Für sie liegen soziale Fragestellungen nicht außerhalb der Naturgesetze, sondern sie folgen ihnen. Die Folgerungen, so sie in dieser Allgemeinheit zutreffen, können positiv wie negativ erhellend sein und allgemeingültige Strukturen bzw. Mechanismen offenlegen. So scheinen ökonomische oder biologisch-evolutionäre Wechselbeziehungen Ähnlichkeiten mit Gesetzmäßigkeiten in Physik oder Chemie zu haben. Ein wichtiges frühes Beispiel aus der Soziologie ist die Etablierung einer öffentlichen Meinung. Hermann Haken bezeichnet sie als „Ordnungszustand“, der die Individuen sehr stark beeinflusst („versklavt“) und dadurch erst recht dominiert.¹⁷⁸ Analoge

¹⁷⁶ Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, ebenda, S. 277

¹⁷⁷ Teilweise Passagen zitiert aus <https://de.wikipedia.org/wiki/Synergetik>

¹⁷⁸ Haken, Hermann; Erfolgsgeheimnisse der Natur, Synergetik – die Lehre vom Zusammenwirken, S. 157f. Dieser Gedanke ist für viele Soziologen schockierend.

Mechanismen zum Laser sind für ihn unverkennbar. Die öffentliche Meinung ist zweifellos ein offenes, nichtlineares System fernab vom Gleichgewicht, das im Internetzeitalter sogar viel stärker als in der Vergangenheit manipulierbar geworden ist. Hier setzt auch die in den letzten Jahren entstandene Nachrichtenforschung ein, die den Begriff „Konstruktives Chaos“ verwendet. Bei Auswahl und Gestaltung von Nachrichten kann aufgezeigt werden, dass der Nachrichtenfluss von den Quellen bis zu den Mediennutzern nichtlinear ist. Das System organisiert sich nach eigenen Regeln selbst. Nachrichtenforschung konnte mit Hilfe der Chaostheorie weiterentwickelt werden. Nachricht ist Kommunikation und diese ist sehr empfindlich gegenüber kleinen Veränderungen im Nachrichtenfluss. Man identifiziert eng nebeneinander Ordnung, Chaos, Stabilität, kritische bzw. labile Phasen, Intermittenzen, Bifurkationen u.v.m. Aus Sicht der Chaostheorie wirken Nachrichtenfaktoren als seltsame Attraktoren.¹⁷⁹

Viel fundamentaler sind die Konsequenzen für die Evolution des Lebens. Manfred Eigen bewies die Existenz von kinetischen, nichtlinearen Effekten beim selbstorganisierten Ursprung genetischer Information und zeigte die molekulare Selbstorganisation als Basis der Evolutionstheorie.¹⁸⁰

Streng genommen muss man die Theorie der Selbstorganisation als Oberbegriff sehen, unter dem eine Reihe von Disziplinen Beiträge geliefert haben. Das ist die Chaostheorie selbst (H. Poincaré, E. Lorenz, B. Mandelbrot), die Synergetik (H. Haken), die Ungleichgewichtsthermodynamik (I. Prigogine), die molekulare Selbstorganisation und Evolutionstheorie (M. Eigen), aber auch die biologische und kybernetische Systemtheorie (H. v. Förster), die Ökologie (P. R. Ehrlich et.al.) sowie Autopoiese (Selbsterzeugung) und Selbstreferentialität (H. R. Maturana; F. Varela).^{181,182}

Haken findet wissenschaftliche Argumente in Form von Studien von dem amerikanischen Sozialpsychologen Solomon E. Asch, zitiert in Elisabeth Noelle-Neumann, Die Schweigespirale, Piper, München, 1980.

¹⁷⁹ Siehe z.B.

https://www.stefre.de/assets/Journalismus_als_konstruktives_Chaos_2016.pdf

¹⁸⁰ Manfred Eigen: Molekulare Selbstorganisation und Evolution (Self organization of matter and the evolution of biological macro molecules.), Naturwissenschaften Bd. 58(10), S. 465 - 523, 1971

Manfred Eigen und Peter Schuster: The Hypercycle - A Principle of Natural Self-Organization, Springer-Verlag, Berlin, 1979

¹⁸¹ Vergleiche [https://refubium.fu-](https://refubium.fu-berlin.de/bitstream/handle/fub188/7579/05_kap4.pdf?sequence=6&isAllowed=y)

[berlin.de/bitstream/handle/fub188/7579/05_kap4.pdf?sequence=6&isAllowed=y](https://refubium.fu-berlin.de/bitstream/handle/fub188/7579/05_kap4.pdf?sequence=6&isAllowed=y)

¹⁸² Zellen, als autopoietische Systeme, dienen als Beispiel für alle lebenden Systeme. In autopoietischen Systemen produzieren die Systemelemente sich selbst und die Organisation der Relationen zwischen den Elementen in rekursiver Weise, d.

Zum Abschluss folgt noch eine Bemerkung zum Ausblick.

Alle bisherigen Ausführungen bezogen sich auf deterministische, nichtlineare Phänomene. Auch wenn gerade in chaotischen Phasen der Vorhersagegrad häufig gegen Null geht, so bleiben die betrachteten mathematischen Beispiele doch von rein deterministischer Natur. Die mathematische Beschreibung erfolgt in den meisten Fällen durch gewöhnliche oder partielle Differentialgleichungen (stetige Zeit), wobei in diesem Beitrag meist iterierte Abbildungen zur Sprache kamen (diskrete Zeit).

Insbesondere bei physischen Systemen, die Selbstorganisation zeigen, haben wir es jedoch damit zu tun, dass die makroskopische Dynamik von kleinen mikroskopischen Fluktuationen in einem Vielteilchensystem überlagert wird. Entsprechende umfassende Bewegungsgleichungen kann man nur in Ausnahmefällen aufstellen. Diese Fluktuationen in dynamischen Systemen sind nicht deterministischer, sondern stochastischer Natur. Sie können dazu führen, dass ein System einen instabilen stationären Zustand spontan verlässt oder dass im Falle von Mehrfachstabilität die weitere Entwicklung des Systems entscheidend dadurch geprägt wird, welchen Weg es nimmt. Mathematisch sind dazu Bifurkationen / Periodenverdoppelung, ohne die möglichen Ursachen zu thematisieren, angesprochen worden. In der Biophysik kann man spontan induzierte Mutationen nennen – etwa durch kosmische Strahlung. Bei stochastisch induzierten Veränderungen lassen sich Gesetzmäßigkeiten in der Regel nur über Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen ermitteln. Doch deterministische und stochastische Effekte schließen sich nicht gegeneinander aus, sondern überlagern sich. Ein Beispiel liegt bei der Brownschen Bewegung vor. Hier wird zu der deterministischen Differentialgleichung ein „fluktuierender“ Term als sozusagen stochastische Kraft $\eta(t)$ addiert:

$$\dot{X}(t) = f[X(t)] + \eta(t)$$

Ein relativ grobes Modell kann man bei der Untersuchung von sogenanntem weißem Rauschen anwenden.

Bei der Zeltabbildung wurde bereits angesprochen, dass es gelang, die chaotische Phase in der Nähe ihrer instabilen Fixpunkte zu synchronisieren. Dabei nutzt man aus, dass kleine Kurvenstücke in erster Näherung linear sind. Ähnliche Ziele verfolgt man bei zeitdiskreten Systemen in Form iterierter Abbildungen, allerdings mit Hilfe von stochastischen Überlagerungen. Beide Techniken sind von erheblicher wirtschaftlicher Bedeutung in der Kybernetik.

h. sie beziehen sich dabei nur auf sich selbst (Selbstreferenz). Quelle: Wörterbuch der Psychotherapie.

Generell kann man sagen, dass der erste Hype zur Chaostheorie wissenschaftlich längst überwunden ist und differenzierteren Betrachtungen gewichen ist. Rein deterministische, nichtlineare Prozesse werden meist in der physikalischen (oder sozialen) Realität durch stochastische Einflüsse verwässert. Aber nichtlineare Wechselwirkungen, insbesondere unter Nichtgleichgewichtsbedingungen, bis hin zur Selbstorganisation, sind längst als Naturgesetze erkannt worden – mit Elementen von Ordnung und Chaos gleichermaßen. Nichtlinearität scheint über die mathematisch beschreibbare Naturwissenschaft hinaus, bestimmend in unserer Welt zu sein.

Ist es vermessen zu fragen, ob wir nicht als gleichermaßen hochentwickelte Spezies und als hochentwickelte Gesellschaft ihnen unsere Existenz zu verdanken haben?

Ich glaube, wir leben in einer Welt, die uns nicht überlassen wurde. Sie zeigt sich uns nicht als offenes Buch, das wir lesen und in dem wir dieses oder jenes Kapitel aufschlagen können. Wir besitzen Hinweise und Fragmente. Aber um zu wissen, wie man damit zu einem allgemeinen Bild kommen könnte, würde man ein andersgeartetes Wissen benötigen oder wenigstens ein vollständigeres Wissen als jenes, auf das wir zurückgreifen können.

*Ilya Prigogine*¹⁸³

Abbildungsverzeichnis

- Abb. 1: Lineare Entwicklung der ersten vier Iterationen von $B_{n+1} = r \cdot B_n$. Eigene Grafik nach Peak, David; Frame, Michael; Komplexität – das gezähmte Chaos, S. 126
- Abb. 2: Links wechselwirkende Punkte; rechts Wechselwirkung ließ sich formal eliminieren, System ist integrierbar, eigene Grafik
- Abb. 3: Falten und strecken bei 12 virtuellen „Teigstücken“. Eigene Grafik, Inspiration Peitgen et. al. Chaos, S. 74
- Abb. 4: Euklidische versus fraktale Geometrie, Inspiration Maria Isabel Binimelis Bassa; Fraktale Geometrie, Für die deutsche Ausgabe: Librero, Kerkdriel (Niederlande), 2017, S. 48
- Abb. 5: Weierstraßsche Monsterkurve für $b=1/2$, $a=9$, Vergrößerung bei $x \approx 0,2$, Quelle: https://www.mathematik.uni-marburg.de/~bschwarz/Sem_09W_files/09%20Lydia%20Gro%C3%9Fhennig%20-%20Weierstrassches%20Monster%20-%20Ausarbeitung.pdf
- Abb. 6: Bildungsprinzip der „Teufelstreppe“, Bildquelle:

¹⁸³ Ilya Prigogine im Gespräch mit Renée Weber, New York, 1984. In: Alles Leben ist Eins, deutsche Ausgabe 2019, S. 266

- Cantor-Funktion.svg, Ljfa-ag - Eigenes Werk, CC BY-SA 3.0,
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=7456420>
- Abb. 7: <https://funfacts.mathi.uni-heidelberg.de/index.php/Cantor-Menge>
- Abb. 8: Bildungsprinzip eines ungeeigneten Bezeichnungssystems für die Cantor-Menge, eigene Grafik
- Abb. 9: Cantor-Menge als Vereinigung exakter, verkleinerter Kopien, eigene Grafik, inspiriert von Peitgen et. al. Chaos, S. 96
- Abb. 10: Peano-Kurve. Abgebildet sind die vier ersten Iterationsschritte
<https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Kurve>
- Abb. 11: Gosper-Kurve, Bildungsprinzip, Parkettierung, Dimension
<https://de.wikipedia.org/wiki/Gosper-Kurve>
- Abb. 12: Generator der Hilbert-Kurve, eigene Grafik
- Abb. 13: Quelle <https://www.maths.ed.ac.uk/~v1ranick/papers/hilbert.pdf>. Hilberts Originalpublikation aus dem Jahr 1890 (Seite 1 von 2).
- Abb. 14: Bildquelle
https://de.wikipedia.org/wiki/Goldener_Schnitt#Dreiecksfraktal
- Abb. 15: Vier Iterationen der Koch'schen Schneeflocke, Bildquelle um Winkel θ ergänzt: <https://de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve>
- Abb. 16: Bildungsprinzip für eine dreidimensionale Kochfläche. Eigene Grafik nach Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 99, Bildquelle aus Camp D.R., A Fractal Excursion, Mathematics Teacher, April 1991, 265-275
- Abb. 17: Räumlicher Koch-Stern, <https://de.wikipedia.org/wiki/Koch-Kurve>
- Abb. 18: Die ersten 5 Iterationen des Sierpinski-Dreiecks. Bildelemente entnommen aus
<https://e.math.cornell.edu/people/belk/projects/ShuyiWeng.pdf>
- Abb. 19: Sierpink-Dreieck und geraden und ungeraden Einträge im Pascalschen Dreieck bis zu Level 32. Modifizierte Bildquelle aus Elementen von https://de.wikipedia.org/wiki/Sierpinski-Dreieck#/media/Datei:Sierpinski_Pascal_triangle.svg
- Abb. 20: Iterative Verarbeitung eines Quadrats. Eigene Grafik, nach Peak, David; Frame, Michael; Komplexität – das gezähmte Chaos, S. 32
- Abb. 21: Entwicklung beim Chaos-Spiel. Für die Grafiken siehe das Applet auf der Seite <http://www.jgiesen.de/ChaosSpiel/Spiel100.html>
- Abb. 22: Durch Grenzwertbildung konvergiert jede Form zu einer Punktmenge. Eigene Grafik, nach Peak, David; Frame, Michael; Komplexität – das gezähmte Chaos, S. 34
- Abb. 23: Test von digitalen Adressen auf bitweise binäre Addition, eigene Grafik, nach Peitgen, Jürgens, Saupe, Bausteine der Ordnung Fraktale, S. 158, bzw. Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos Bausteine der Ordnung, S. 597
- Abb. 24: Elementare Transaktionen der Ebene, eigene Grafik nach Peitgen, Jürgens, Saupe, Bausteine der Ordnung Fraktale, S. 281
- Abb. 25: Kontraktion um einen Ähnlichkeitsfaktor $\frac{1}{2}$. Eigene Grafik nach Peak, Frame, Komplexität, S. 54

- Abb. 26: Anwenden der drei Transformationen, Skalierung (um $\frac{1}{2}$), Translation in Richtung der Achsen. Eigene Grafik nach Peak, Frame, Komplexität, S. 55
- Abb. 27: Iterative Verarbeitung eines Quadrates zum Sierpinski-Teppich. Eigene Grafik nach Peitgen, Jürgens, Saupe, Bausteine der Ordnung Fraktale, S. 102
- Abb. 28: Die beiden Sierpinski-Dreiecke können durch ein IFS mit drei Ähnlichkeitstransformationen mit Verkleinerungsfaktor $\frac{1}{2}$ erzeugt werden. Sie stellen den prinzipiellen Bauplan einer ganzen Familie dar. Symmetrie-operationen an den drei Quadraten werden w_1, w_2 und w_3 genannt. Eigene Grafik, angeregt von Peitgen, Jürgens, Saupe, Bausteine der Ordnung Fraktale, S. 286-287
- Abb. 29: Das dynamische System $\{\mathbb{R}^2; f\}$. Eigene Grafik nach Barnsley, Michael F.; Fraktale - Theorie und Praxis der Deterministischen Geometrie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford, 1995, S. 283
- Abb. 30: Drehungen und Spiegelungen eines Quadrats, eigene Grafik
- Abb. 31: Cayley-Graph der Diedergruppe D_4 , eigene Grafik nach https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Dih_4_Cayley_Graph;_generators_a,_b.svg
- Abb. 32: Die Abb. zeigt zwei denkbar einfache Beispiele eines Cayley-Graphen einer unendlichen Kleinschen Gruppe mit einem Rand im Unendlichen. Links ist es die Parkettierung mit gleichseitigen Dreiecken, rechts die Kachelung der hyperbolischen Scheibe durch Keile. <https://abel.math.harvard.edu/~ctm/gallery/index.html>
- Abb. 33: Grenzmengen / fraktaler, unendlicher Rand von Kleinsche Gruppen erzeugt von Möbius-Abbildungen <http://klein.math.okstate.edu/IndrasPearls/posters/>
- Abb. 34: Das Sierpinski-Pentagon kann man als IFS mit fünf Ähnlichkeitstransformationen konstruieren. Hier wird die echte fünfzählige Symmetrie durch Überlagerung von fünf d_0 erzeugt.
- Abb. 35: Das Sierpinski-Pentagon wird jedoch in der Regel gemäß dieser Abbildung über regelmäßige Fünfecke konstruiert. Grafik aus <https://pythonturtle.academy/sierpinski-pentagon-with-python-turtle>
- Abb. 36: Man erkennt hier die IFS-Baupläne natürlicher Formen am Beispiel des Barnsley-Farns. Grafiken aus: <https://quadsoft.org/fraktale/> und https://en.wikipedia.org/wiki/Barnsley_fern

- Abb. 37A: Der Cantor-Irrgarten (auch Cantor-Labyrinth) hat nur eine selbstähnliche Transformation (Mitte). Die Transformationen rechts und links sind selbstaffin. Der Attraktor steht in enger Beziehung zur Cantor-Menge.
- Abb. 37B: Auflösung der ersten Iterationen beim Cantor-Irrgarten, eigene Grafik nach
https://www.researchgate.net/publication/314947133_Fraktale_Geometrie_-_Eine_Einfuehrung
- Abb. 37C: Die Drachenkurve kann die Ebene lückenlos parkettieren. Das IFS zeigt hier 3 Komponenten. Eigene Grafik bzw. aus https://en.wikipedia.org/wiki/Dragon_curve
- Abb. 38: Ausgehend von den drei Ähnlichkeits-transformationen w_1, w_2 und w_3 betrachte man z.B. eine Transformation mit w_1 , eigene Grafik
- Abb. 39: Das Prinzip von Abb. 38 wird jetzt auf w_2 und w_3 ausgedehnt, eigene Grafik.
- Abb. 40: Es gibt acht universelle symmetrische Attraktoren. Die Symbole charakterisieren die jeweiligen prinzipiellen Transformationen. eigene Grafik.
- Abb. 41: Illustration des Banachschen Fixpunktsatzes an dem Beispiel der positiven Lösung der Gleichung $2 - x^2 = e^x$. Logarithmieren führt zur Fixpunktgleichung $x = \ln(2 - x^2)$, eigene Grafik
- Abb. 42: Menger-Schwamm, Bildquelle
<https://www.mathematik.de/Forschung/511-menger-schwamm>
- Abb. 43: Sierpinski-Tetraeder,
https://en.m.wikipedia.org/wiki/Sierpinski_triangle
- Abb. 44: Drachenkurve, 2D-Gebilde als Beispiel für ein „self-reproducing“ Fraktal. Grafik erstellt mit ChatGPT 4o, siehe auch Mandelbrot, Benoit B., Die fraktale Geometrie der Natur, S. 199.
- Abb. 45: Mandelbulb, $v \rightarrow v^9 + c$, https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mandelbulb_1,024GP_Overview_20211110_002_ALT.png
- Abb. 46: Rückkopplungsmaschine, eigene Grafik.
- Abb. 47: Unterschiedliche Auffassungen bei der Länge der gemeinsamen Grenze, eigene Grafik.
- Abb. 48: Lebesgue-Maß (anschaulich)
https://www.math.tugraz.at/~ganster/lv_masstheorie_ss_11/05_lebesgue_mass.pdf,
- Abb. 49: Lebesgue-Überdeckungsdimension
https://en.wikipedia.org/wiki/Lebesgue_covering_dimension
- Abb. 50: Vorgehen bei der Boxdimension am Beispiel der Küstenlinie Großbritanniens, Bildquelle
https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Great_Britain_Box.svg
- Abb. 51: Logistische Gleichung $f_r(x) = rx(1 - x)$ bei vier verschiedenen r-Werten. Bildquelle: <https://www.yumpu.com/de/document/>

- read/27051983/logistische-abbildung
- Abb. 52: Oben Logistische Gleichung mit Startwert $x_0=0,1882550$ und $r=4$: Keine Ordnung zu erkennen. Unten $r=2,75$. Alle Anfangswerte konvergieren zum gleichen Endwert. Siehe auch Wehr, Marco; Der Schmetterlingsdefekt, Turbulenzen in der Chaostheorie, S. 69, Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o (o für Vollversion)
- Abb. 53: <https://de.wikipedia.org/wiki/Feigenbaum-Konstante>
- Abb. 54: Inseln der Stabilität im Chaos. Bildquelle https://www.fraktalwelt.de/myhome/figtree_2.htm
- Abb. 55: Das Verhältnis der Intervalle strebt gegen δ . Eigene Grafik, Zahlenwerte aus www.spektrum.de
- Abb. 56: Zwei Orbits für $r=4$, die sich beim Startwert um ein Zehnmillionstel unterscheiden. Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o, Idee https://www.fraktalwelt.de/systeme/as_weg_ins_chaos.pdf
- Abb. 57: Typische Bifurkationen von Fixpunkten einparametrischer Differentialgleichungen; eigene Grafik, Idee aus Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, S. 159
- Abb. 58: Maß für Chaos - der Lyapunov Exponent, eigene Grafik
- Abb. 59: Entwicklung des Lyapunov-Exponenten in der logistischen Abbildung von $3 \leq r \leq 4$. Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o, Idee https://web.fs.uni-lj.si/lasin/wp-content/include-me/chaotic/Lyap_logistic/ly_logistic.html
- Abb. 60 A,B,C,D: Beide Seiten erstellt mit ChatGPT Version 4o, links prinzipielle Rechnung, Facharbeit Andreas Schmid, https://www.fraktalwelt.de/systeme/as_weg_ins_chaos.pdf mit Dank für die freundliche Abdruckgenehmigung
- Abb. 61: Auswirkungen des Rundungsfehlers auf Periodik und Sensitivität, Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o, Idee Peitgen et. al. Chaos, S. 57,
- Abb. 62: Deterministisches Chaos und Kausalität, eigene Grafik,
- Abb. 63: Zeltabbildung und ihr „Schmetterlingseffekt“, Bildquelle <https://de.wikipedia.org/wiki/Zeltabbildung>
- Abb. 64: Grafische Illustration einer 2-er Periodik bei der Zeltabbildung, eigene Grafik
- Abb. 65: Dritte Iterierte bei $s=2$, eigene Grafik nach Peak, Frame, S. 142
- Abb. 66: Rasche Ausbreitung von Unterschieden Nähe $s=2$. Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o, Idee Peak, Frame, S. 145
- Abb. 67: <https://www.mathematik.de/dmv-blog/3122-lorenz-entwickelte-in-den-60er?highlight=WyJmcmFrdGFsZSIsImZyYWt0YWxlJyJd>
- Abb. 68: Schematische Darstellung der Dynamik. Es handelt sich um eine Kombination von Streck-, Spalt- und Verschmelzungsprozessen. Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o
- Abb. 69: https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Henon_attractor.png
- Abb. 70: wikiwand.com/de/Rössler-Attraktor

- Abb. 71: Dynamik des Rössler-Attraktors, Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o
- Abb. 72: Thomas-Attraktor, Idee <http://www.3d-meier.de/tut19/Seite41.html>, Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o
- Abb. 73: Vier Arten von Attraktoren; Grafikelemente aus Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, S. 148
- Abb. 74: Entstehung eines Solitons, Bildquelle: <https://www.weltderphysik.de/gebiet/materie/spintronik/solitonen/>
- Abb. 75: Erstes 1978 veröffentlichtes Bild der Mandelbrot-Menge. https://abel.math.harvard.edu/archive/118r_spring_05/docs/brooksmatelski.pdf
- Abb. 76: Die Kernfrage von MLC (Mandelbrot locally connected). Eigene Grafik
- Abb. 77: Tiefliegende Grundlagen der Chaos-Theorie zwischen Feigenbaum-Diagramm und der Mandelbrot-Menge M. Bildquelle <https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge>
- Abb. 78: Wie eine Kardioide entsteht. <https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/51/Kardioide.svg>
- Abb. 79: Prinzip der Knospenbildung. Idee Zeitler, Neidhardt; Fraktale und Chaos, S. 190, Grafiken erstellt mit ChatGPT Version 4o
- Abb. 80: Ausschnittsvergrößerungen. Selbst erstellt über das Tool <https://math.hws.edu/eck/js/mandelbrot/MB.html>
- Abb. 81: Linke Seite – Punkte bleiben im Endlichen „gefangen“
Rechte Seite – Punkte „entweichen“ ins Unendliche.
Bildquelle: <http://www.jgiesen.de/Divers/ChaosVortrag/Chaos.pdf>
- Abb. 82: Buddhabrot, <https://superliminal.com/fractals/bbrot/>
- Abb. 83: Punkte in der Mandelbrot-Menge mit der zugehörigen Julia-Menge
Bildquelle und Datenquelle für c:
<http://www.3d-meier.de/tut20/Julia2/Seite1.html>
Abdruck mit freundlicher Genehmigung von Herrn Jürgen Meier.
- Abb. 84: Tabelle der c-Werte mit denen die Julia-Mengen in Abb. 83 generiert wurden.
- Abb. 85: Douady Kaninchen, Bildquelle <https://mathworld.wolfram.com/DouadysRabbitFractal.html>
- Abb. 86: Erster Versuch der Veranschaulichung einer Julia-Menge durch Hubert Cremer, Berlin 1925, <http://eudml.org/doc/145695>
- Abb. 87: Julia-Menge gemäß $z_{n+1} = z_n^3 + c$
<https://paulbourke.net/fractals/julia3/>
- Abb. 88: Zoom in die Mandelbrot-Menge.
Links 100.000-fache Vergrößerung; rechts Teile der Ausschnitte b und c aus Abb. 80 10^{15} - fach vergrößert. Erstellt mit dem Tool aus <https://math.hws.edu/eck/js/mandelbrot/MB.html>
- Abb. 89: Extremer Zoom (ca. 10^{13} -fach) in eine Julia-Menge beim Punkt $0.0958598997051 + 1.1501990019993i$ mit $c = 0.355 + 0.355i$ erstellt mittels eines Python-Programms. Sourcecode zur Veränderung des Zentrums und von c siehe

- <https://pythonturtle.academy/zooming-1013-times-into-julia-set-animation/>
- Abb. 90: Zweidimensionaler Schnitt durch die dreidimensionale Projektion des 4D-Fraktals. Bildquelle
https://de.wikipedia.org/wiki/Kubische_Iteration
- Abb. 91: Cactus-Fraktal mit kubischem Glied.
<https://paulbourke.net/fractals/cactus>
- Abb. 92: Turbulenz nach Leonardo da Vinci
<https://www.weltderphysik.de/gebiet/materie/turbulenz/turbulenz-und-chaos/>.
- Abb. 93: Kelvin-Helmholtz-Wirbel in der Atmosphäre hinter dem Monte Duval, Australien.
Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Turbulente_Strömung
- Abb. 94: Zeitliche Änderung in einem offenen chemischen Reaktionssystem, zitiert nach Großmann, Siegfried; Deterministisches Chaos, Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Vorträge N 321, Westdeutscher Verlag 1983, S. 9
- Abb. 95: Cartwheel-Galaxie,
<https://www.nationalgeographic.de/wissenschaft/2022/12/james-webb-weltraumteleskop-2022-jahresrueckblick-in-bildern-weltall>
- Abb. 96: Zellulärer Automat – Game of Life, Screenshot aus
<https://www.fraktalwelt.de/myhome/gol-g.htm>
- Abb. 97: Belousov Zhabotinsky Reaktion. Bildquelle:
<https://www.weltderphysik.de/thema/chaos-und-ordnung/ordnung-in-natur/>
- Abb. 98: <https://www.weltderphysik.de/thema/hinter-den-dingen/farben-einer-kerzenflamme/>
- Abb. 99: Bénard-Konvektion (hier in Kupferschale erhitztes Silikonöl mit Silberbronze), <https://www.experimente.physik.uni-freiburg.de/Thermodynamik/waermeleitungundkonvektion/konvektion/benardkonvektionszellen>
- Abb. 100: Hexagonale Walzen, Mitte aufsteigende heiße, am Rand abgekühlte Flüssigkeit, eigene Grafik
- Abb. 101: Dissipative Strukturen jenseits des instabilen thermodynamischen Zweigs. Eigene Grafik nach Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, S. 21
- Abb. 102: Prinzip von Nichtgleichgewichtsstrukturen, nach H.J. Schlichting, https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/fachbereich_physik/didaktik_physik/publikationen/dissipation_struktur.pdf
- Abb. 103: Entropiezunahme erklärt sich statistisch nach Boltzmann aus der Zunahme von möglichen Mikrozuständen. Für vier Teilchen gibt es nur eine Möglichkeit sie in einem Gefäß unterzubringen; bei zwei

Gefäßen sind es schon sechs Möglichkeiten. Diese Argumentation gilt nur für abgeschlossene (adiabatische) Systeme:

2. Hauptsatz der Thermodynamik. Eigene Grafik

Abb. 104: Prinzipieller Aufbau eines Lasers, Bildquelle <https://astro.uni-bonn.de/~deboer/pdm/laser/laser.html>

Abb. 105: Unterschied Lampe – Laser, unter Verwendung von <https://www.ilt.fraunhofer.de/de/studium/laser-tutorial/laserprinzip.html>

Abb. 106: Beispiele für die Realisierung abstrakter Begriffe der Synergetik in verschiedenen Gebieten. Eigene Abschrift aus Jetschke, Mathematik der Selbstorganisation, ebenda, S. 298

Abb. 107: Dissipative Systeme verlangen offene Systeme, 1. Hauptsatz der Thermodynamik, eigene Grafik nach Haken, Erfolgsgeheimnisse der Natur, S. 28.

Abb. 108: Zur Vorhersage der Vergangenheit, eigene Grafik nach einer Idee von Peak, David; Frame, Michael; Komplexität – das gezähmte Chaos, Birkhäuser, Basel Boston Berlin, 1995, S. 80

Literaturverzeichnis

Bader, Michael; Raumfüllende Kurven, Begleitendes Skriptum zum entsprechenden Kapitel der Vorlesung „Algorithmen des Wissenschaftlichen Rechnens“, TU München, SS 2004, <https://web.archive.org/web/20050317185150/http://www5.in.tum.de/lehre/vorlesungen/algowiss/ss04/vorlesung/rfk.pdf>

Barnsley, Michael F.; Fraktale Theorie und Praxis der Deterministischen Geometrie, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford, 1995

Bauberger, Stefan; Was ist die Welt? – Zur philosophischen Interpretation der Physik, Kohlhammer Stuttgart, 2005, 2. Auflage

Behr, Reinhart; Fraktale – Formeln aus Mathematik und Natur, Ernst Klett, Stuttgart 1993

Beutelspacher, Albrecht; Petri, Bernhard; Der Goldene Schnitt. 2., überarbeitete und erweiterte Auflage. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford, 1996

Binimelis Bassa, Maria Isabel; Fraktale Geometrie, Für die deutsche Ausgabe: Librero, Kerkdriel (Niederlande), 2017

Briggs, John, Peat, F. David; Die Entdeckung des Chaos, Hanser, München Wien, 1990

Covency, Peter; Highfield, Roger; Anti-Chaos, Rowohlt, Reinbek bei Hamburg, April 1992

Esfeld, Michael; Wissenschaft, Erkenntnis und ihre Grenzen; Spektrum Spezial. Physik Mathematik, 2.18, S. 70-76

Feigenbaum, Mitchell, Journal Statistische Physik, 19, 25 (1978)

Gerok, Wolfgang u. a. (Hrsg.); Ordnung und Chaos in der unbelebten und belebten Natur. Verhandlungen der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte, 115. Versammlung, 17. bis 20. Sept. 1988, Freiburg i. Br., Wissenschaftliche Verlagsgesellschaft, Stuttgart (1989).

Gleick, James; Chaos, vollständige TB-Ausgabe, Droemersch Verlagsgesellschaft Th. Knaur Nachf., München, Juli 1990

Großmann, Siegfried; Deterministisches Chaos, Rheinisch-Westfälische Akademie der Wissenschaften, Vorträge N 321, Westdeutscher Verlag 1983, S. 7-29

Großmann, Siegfried; Selbstähnlichkeit: Das Strukturgesetz im und vor dem Chaos, in: Physikalische Blätter 45 (1989), S. 172-80

Großmann, S.; Thomae, S.; Zeitschrift für Naturforschung, 32a, 1353, (1977)

Haken, Hermann; Erfolgsgeheimnisse der Natur, Ullstein Sachbuch, Frankfurt/M. Berlin Wien 1984

Halling, Horst; Möller, Rolf; Mathematik fürs Auge, Spektrum akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1995

Jetschke, Gottfried; Mathematik der Selbstorganisation, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften (Verlag Harri Deutsch), Berlin, 1989

Lindley, David; Die Unbestimmbarkeit der Welt, DVA, München, 2008

Mandelbrot, Benoit B.; Die fraktale Geometrie der Natur, Basel, Boston, Birkhäuser 1987

Mandelbrot Benoit B.; Fractal Aspects of the Iteration of $z \rightarrow \lambda z(1 - z)$
Mathematics Department Harvard University Cambridge, Massachu., 02138,
IBM T. J. Watson Research Center Yorktown Heights, New York 10598
http://www0.cs.ucl.ac.uk/staff/p.bentley/teaching/L6_reading/mandelbrot.pdf

Mandelbrot, Benoit B.; Schönes Chaos, Piper München Zürich 2013

Muller, Richard A.; Jetzt – Die Physik der Zeit, S. Fischer, Frankfurt a. Main, 2018

Peak, David; Frame, Michael; Komplexität – das gezähmte Chaos, Birkhäuser, Basel Boston Berlin, 1995

Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Bausteine der Ordnung Fraktale, Springer Verlag / Klett Cotta, 1992

Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994

Peitgen, Heinz-Otto; Richter, Peter H.; The Beauty of Fractals, Springer Verlag, Berlin Heidelberg New York Tokyo, 1986

Prigogine, Ilya; Stengers, Isabell; Das Paradox der Zeit – Zeit, Chaos und Quanten. Piper, München 1993

Prigogine, Ilya; Stengers, Isabell; Dialog mit der Natur. Neuauflage 1990, Piper, München 1981

Schroeder, Manfred; Fraktale, Chaos und Selbstähnlichkeit; Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg-Berlin-Oxford, 1994

Sernetz, Manfred; Fraktale biologische Strukturen: Chaos und Ordnung im Organismus, Berichte der Justus-Liebig-Gesellschaft, Gießen, 2001

Sernetz, Manfred; Pharmakokinetik und Wachstumskinetik, Vorlesung am FB Biomedizintechnik FH Gießen und am FB Veterinärmedizin der JLU Gießen, Vorlesungsskript aus dem Jahr 2000, www.staff.uni-giessen.de/~gi38/publica/pharma/pharma.pdf

Weber, Renée; Alles Leben ist Eins, Crotona Verlag, engl. Ausgabe 1986, Dialogues with Scientists and Sages, Dt. Ausgabe 1. Auflage, 2019, insbesondere Kap. X, Die Wiederverzauberung der Natur, Ilya Prigogine

Wehr, Marco; Der Schmetterlingsdefekt, Turbulenzen in der Chaostheorie, Klett-Cotta, 2002

Weizsäcker, Carl Friedrich von; Die Einheit der Natur: Studien. Hanser Verlag, 1971

West, Geoffrey B.; Brown James H.; Enquist, Brian J.; A General Modell for the Structure, Funktion and Allometry of Plant Vascular Systems, Nature 400, 664-667 (12 August 1999)

Zeitler, Herbert; Neidhardt, Wolfgang; Fraktale und Chaos, Wissenschaftliche Buchgesellschaft Darmstadt, 1993

Danksagung

Mein Dank geht an **Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl** vom Mathematischen Seminar der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. Vor allem schulde ich ihm Dank für

seine Geduld für meine mehrmaligen Nachbesserungen des Manuskripts. Er hat einen unerschütterlichen Glauben daran, dass es nötig ist an der Popularisierung der Mathematik zu arbeiten. Seine wertvollen Impulse und seine Qualitätskontrolle als Mentor haben bereits einige meiner Beiträge unterstützt und möglich gemacht.

Zum 12. Mal bei Veröffentlichungen in der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Zeitschrift steht mir **Herr Dr. Michael Serafin** zur Seite. Er war mir immer mehr als formaler Schriftleiter. Er ist Sparringspartner, engagiert sich inhaltlich für die Themen und sorgt für die formale Qualitätssicherung durch äußerst gründliche Durchsicht des Manuskripts. Da wo der Autor durch zahlreiche Überarbeitungen „betriebsblind“ geworden ist, findet er noch Fehler in der Orthographie, im Ausdruck oder bei der Formatierung und den Grafiken. Ihm gilt mein freundschaftlicher Dank.

Liebe ist der Wunsch etwas zu geben, nicht etwas zu erhalten.

Bertolt Brecht

FÜR FARI

Personenverzeichnis

| Name, Vorname | Lebensdaten | Bemerkung | Seite |
|---|---------------------|---|----------------------------------|
| Adams, Henry Brooks | 1838 - 1918 | US-am. Historiker | 4 |
| Ångström, Anders Jonas | 1814 – 1874 | Schwedischer Astronom und Physiker | 118 |
| Aristoteles | 384-322 vChr | Griech. Universalgelehrter | 9 |
| Asch, Solomon Elliot | 1907 – 1996 | US-amerikanischer Sozialpsychologe | 121 |
| Belousov, Boris Pawlowitsch | 1892 – 1970 | Russ.-sowjet. Chemiker/Biophysiker | 103,104,107,109,129 |
| Banach, Stefan | 1892 – 1945 | Polnischer Mathematiker | 44,45,83,126 |
| Bénard, Henri Claude | 1874 – 1939 | Französischer Physiker | 75,104,105,107,111,118,129 |
| Barnsley, Michael Fielding | *1946 | Britischer Mathematiker | 36,41,125 |
| Besicovitch, Abram S. | 1891 – 1970 | Russischer Mathematiker | 51 |
| Beutelspacher, Albrecht | *1950 | Deutscher Mathematiker | 27,130 |
| Bohr, Niels | 1885 – 1962 | Dän. Physiker, Nobelpreis 1932 | 8 |
| Bolzano, Bernhard | 1781 – 1848 | Böhm. Priester u. Mathematiker | 17 |
| Bouligand, Georges Louis | 1889 – 1979 | Franz. Mathematiker | 55 |
| Branner, Bodil | *1943 | Dänischer Mathematiker | 84,86,97 |
| Briggs, John | *1946 | US-am. Autor | 64,65,130 |
| Brouwer, Luitzen Egbertus Jan (Bertus) | 1881 – 1966 | Niederländischer Mathematiker | 51 |
| Brown, James H. | *1942 | US-am. Biologe | 12,132 |
| Brown, Robert | 1773 – 1858 | Schottischer Arzt und Botaniker | 52,77,122 |
| Buddha, Gautama (Siddhartha Gautama) | 563 – 483 v.Chr. | Indischer Weisheitslehrer und Religionsstifter | 89,90,128 |
| Buff, Xavier | *1971 | Franz. Mathematiker | 92 |
| Cannon, James W. | *1943 | US-amerikanischer Mathematiker | 40 |
| Carnot, Nicolas Léon. Sadi | 1796 – 1832 | Französischer Physiker u. Ingenieur | 109 |
| Cantor, Georg | 1845 - 1918 | Deutscher Mathematiker | 3,16-24,30,31,39,40,42,51,65,66, |

| | | | |
|------------------------------------|---------------|-------------------------------------|--------------------------------|
| | | | 75,90,116,124,126 |
| Cauchy, Augustin-Louis | 1789 – 1857 | Franz. Mathematiker | 14 |
| Cayley, Arthur | 1821 – 1895 | Englischer Mathematiker | 38,39,125 |
| Cepelewicz, Jordana | *? | US-amerikanische Autorin | 81 |
| Cesàro, Ernesto | 1859 – 1906 | Ital. Mathematiker | 4,27,28 |
| Chaitin, Gregory | *1947 | US-am. Mathematiker u. Philosoph | 11,13 |
| Chayyām, Omar | 1048 – 1131 | Pers. Mathematiker und Dichter | 31 |
| Chéritat, Arnaud | *1975 | Franz. Mathematiker | 92 |
| Clausius, Rudolf | 1822 – 1888 | Deutscher Physiker | 110 |
| Conway, John Horton | 1937 - 2020 | Brit. Mathematiker | 102 |
| Coulomb, Charles Aug. de | 1736 – 1806 | Franz. Physiker | 49 |
| Coxeter, Harold Scott MacDonald | 1907 – 2003 | Britisch-kanadischer Mathematiker | 12 |
| Cremer, Hubert | 1897 – 1983 | Deutscher Mathematiker | 90,93,128 |
| Dahmani, François | ? | Franz. Mathematiker | 47 |
| Da Vinci, Leonardo | 1452 - 1519 | It. Künstler u. Universalgelehrter | 98,99,129 |
| Du Bois-Reymond, Paul | 1831 – 1889 | Deutscher Mathematiker | 11,17 |
| Dudko, Dzmitry | ? | Polnischer Mathematiker | 82 |
| Douady, Adrien | 1935 – 2006 | Franz. Mathematiker | 82,86,87,92,93,128 |
| Eddington, Sir Arthur Stanl. | 1882 – 1944 | Englischer Physiker | 117 |
| Ehrlich, Paul R. | *1932 | Us-amerikanischer Biologe | 121 |
| Eigen, Manfred | 1927 – 2019 | Deutscher Physikochemiker | 121 |
| Enquist, Brian J. | ? | US-am. Biologe | 12,132 |
| Escher, Maurits Cornelis | 1898 - 1972 | Niederländischer Künstler | 12 |
| Esfeld, Michael | *1966 | Deutscher Wissenschaftsphilosoph | 13,131 |
| Euklid | 3. Jh. v.Chr. | Griechischer Mathematiker | 12,14-16,18,19,24,31,38,55,123 |
| Euler, Leonhard | 1707 – 1783 | Schweizer Math./Phys./Astronom etc. | 87,100 |
| Fatou, Pierre | 1878 – 1929 | Franz. Mathematiker | 48,80,90,64,96,116 |
| Farey, John Sr. | 1766 – 1826 | Englischer Geologe | 39,40 |

| | | | |
|-------------------------|-------------|---|---|
| Feigenbaum, Mitchell | 1944 – 2019 | US-am. Physiker | 13,53,57-62,67,82,84-86,89,116 127,128,131 |
| Fibonacci, Leonardo | ~1170~1240 | Ital. Mathematiker des Mittelalters | 82,87-89 |
| Förster, Heinz von | 1911 – 2002 | Österr. Physiker, Kybernetiker, Philosoph | 121 |
| Ford, Joseph | 1927 – 1995 | US-am. Physiker | 9,11 |
| Fourier, Joseph | 1768 – 1830 | Franz. Mathematiker | 66,109 |
| Frerich, Stefan | *1964 | Deutscher Autor | 10,66 |
| Glansdorf, Paul Gustave | 1904 – 1999 | Belgischer Physiker | 107, |
| Gleick, James | *1954 | US-am. Autor | 3,9,131 |
| Gosper, Bill | *1943 | US-amerikanischer Mathematiker | 4,23-25,124,Links |
| Green, Melinda | ? | https://superliminal.com/fractals/bbrot/ | 90 |
| Großmann, Siegfried | *1930 | Deutscher Physiker | 10,11,49,53,100,116,129,131 |
| Guirardel, Vincent | ? | Franz. Mathematiker | 47 |
| Haken, Hermann | *1927 | Deutscher Physiker | 113,114,120,121,130,131 |
| Hausdorff, Felix | 1868 – 1942 | Deutscher Mathematiker | 4,17,19,22,24,27,31,40,49,51,54,56 94,116 |
| Heisenberg, Werner | 1901 – 1976 | Deutscher Physiker, Nobelpreis 1932 | 8 |
| Helmholtz, Hermann von | 1821 – 1894 | Deutscher Physiker | 99,110,129 |
| Hénon, Michel | 1931 – 2016 | Franz. Mathematiker | 4,20,75 |
| Herz-Fischler, Roger | *1940 | US-amerikanischer Mathematiker | 26 |
| Hilbert, David | 1862 - 1943 | Deutscher Mathematiker | 3,4,16,23-26,50,116,124 |
| Hubbard, John Hamal | *1945 | US-am. Mathematiker | 82,86,87,97 |
| Hutchinson, John Irwin | 1867 - 1935 | US-am. Mathematiker | 41 |
| Jasek, Martin | ? | Czech. Mathematikhistoriker? | 17 |
| Yoccoz, Jean-Christophe | 1957 – 2016 | Franz. Mathematiker | 82 |
| Julia, Gaston Maurice | 1893 – 1978 | Franz. Mathematiker | 4,46,80-82,87,90-97,100,116,128 129 |
| Jürgens, Hartmut | 1955 – 2017 | Deutscher Mathematiker | 20,33,34,45,52,64,69,90,99,124,125 |

| | | | |
|---------------------------------|----------------------|-------------------------------------|--|
| | | | 132 |
| Kant, Immanuel | 1724 – 1804 | Deutscher Philosoph | 12 |
| Kapovich, Michail | *1963 | Russisch/US-am. Mathematiker | 47 |
| Kelvin, Lord (William Thomson) | 1824 – 1907 | Britischer Physiker | 99,103,129 |
| Klein, Felix | 1849 – 1925 | Deutscher Mathematiker | 25,38-40 |
| Kleiner, Bruce Alan | ? | US-am. Mathematiker | 48 |
| Koch, Helge von | 1870 – 1924 | Schwedischer Mathematiker | 4,27-29,52,100,124 |
| Köhl, Ralf | *1967 | Deutscher Mathematiker | 132 |
| Kolmogorov, Andrei Nikolaj. | 1903 – 1987 | Sowj. Mathematiker | 11,99 |
| Küppers, Bernd-Olaf | *1944 | Deutscher Physiker u. Philosoph | 10,108 |
| La Mettrie, Julien Offray de | 1709 – 1751 | Franz. Arzt u. Schriftsteller | 116 |
| Landauer, Rolf William | 1927 – 1999 | Deutsch-US-amerikanisch. Physiker | 107 |
| Laplace, Pierre Simon de | 1749 – 1827 | Franz. Math./Physiker/Astronom | 9,70,116 |
| Lebesgue, Henri Léon | 1875 – 1941 | Franz. Mathematiker | 17,21,51,54,55,126 |
| Lei Tan bzw. Tan Lei | 1963 – 2016 | Chin. Mathematikerin | 91 |
| Leibniz, Gottfried-Wilhelm | 1646 – 1716 | Deutscher Philosoph u. Mathematiker | 11 |
| Lefever, René | *1943 | Belgischer Physikochemiker | 104 |
| Libchaber, Albert L. | *1934 | Franz. Physiker | 61 |
| Lindenmayer, Aristid | 1925 – 1989 | Ungar. theoretischer Biologe | 12,29 |
| Lorenz, Edward | 1917 – 2008 | US-am. Mathem. u. Meteorologe | 15,74,75,121,127 |
| Lukrez, (Titus Lucretius Carus) | 99/94 - 55/53 v.Chr. | Römischer Dichter und Philosoph | 7 |
| Lyapunov, Aleksandr M. | 1857 – 1918 | Russ. angewandter Mathematiker | 4,63-65,116,127 |
| Lyubich, Mikhail | *1959 | Russ./Ukrain. US-amer. Mathem. | 62,81,82 |
| Mandelbrot, Benoit | 1924 - 2010 | Franz. – US-am. Mathematiker | 3,4,11,16,25,46-54,57,65,66,80-91,95-97,99,100,116,121,126,128,131 |
| Maturana, Humberto | 1928 – 2021 | Chilenischer Biologe u. Philosoph | 121 |

| | | | |
|----------------------------|-------------|-------------------------------------|--|
| Maxwell, James Clerk | 1831 – 1879 | Schottischer Physiker | 49,70,71 |
| May, Robert | 1936 – 2020 | Australischer Physiker u. Biologe | 64 |
| Mayer, Julius Robert | 1814 – 1878 | Deutscher Arzt und Physiker | 29,110 |
| Menger, Karl | 1902 – 1985 | Österreichischer Mathematiker | 40,46,47,126,Links |
| Minkowski, Hermann | 1864 – 1909 | Russ.-Dt. Mathematiker u. Physiker | 55 |
| Möbius, August Ferdinand | 1790 – 1868 | Deutscher Mathematiker u. Astronom | 39,40,76,125 |
| Moore, Eliakim Hastings | 1862 – 1932 | US-amerik. Mathematiker | 18 |
| Mumford, David Bryant | *1937 | Englischer Mathematiker | 40 |
| Musil, Robert | 1880 – 1942 | Österreichischer Schriftsteller | 3 |
| Navier, Claude Louis M. H. | 1585 – 1836 | Franz. Mathematiker | 98,100 |
| Netto, Eugen | 1848 – 1919 | Deutscher Mathematiker | 24 |
| Newton, Isaak | 1642 – 1727 | Engl. Physiker/Mathem./Astronom | 7-9,11,52,99,109,118 |
| Nicolis, Grégoire | 1939 – 2018 | Griechisch-belgischer Physiker | 107 |
| Noether, Emmy | 1882 – 1935 | Deutscher Mathematikerin | 52 |
| Noelle-Neumann, Elisabeth | 1916 – 2010 | Dt. Kommunikationswissenschaftlerin | 121 |
| Oskar II von Schweden | 1829 – 1907 | Schwedischer König | 8 |
| Pascal, Blaise | 1623 – 1662 | Franz. Mathematiker u. Physiker | 31,124 |
| Peano, Guiseppe | 1858 – 1932 | Italienischer Mathematiker | 4,16,23-25,40,50,124 |
| Peat, F. David | 1938 – 2017 | Brit. Physiker und Autor | 64,65,130 |
| Peitgen, Heinz-Otto | *1945 | Deutscher Mathematiker | 20,33,35,45,47,52,64,69,71,90,92,99 100,123-125,127 |
| Petri, Bernhard | ? | Deutscher Mathematiker | 27,130 |
| Planck, Max | 1858 – 1947 | Deutscher Physiker, Nobelpreis 1918 | 8 |
| Poincaré, Jules Henri | 1854 - 1912 | Franz. Math./Physiker/Astronom | 7,8,71,121 |
| Pollock, Jackson | 1912 - 1956 | US-am. Maler | 12 |
| Prigogine, Ilya | 1917 – 2003 | Russ.-belg. Physikochem Nobel 1977 | 9,104-107,110117-119,121,123,132 |
| Prusinkiewicz, Przemyslaw | *1952 | Polnischer Informatiker | 29 |
| Przytycki, Piotr | *1981 | Polnischer Mathematiker | 47 |

| | | | |
|-----------------------------|--------------|--|---|
| Rayleigh, Lord John William | 1842 – 1919 | Englischer Physiker (geb. J.W. Strutt) | 105 |
| Reynolds, Osborne | 1842 – 1912 | Brit. Physiker | 98 |
| Richardson, Lewis Fry | 1881 – 1953 | US-am. Math./Physiker/Meteorologe | 53 |
| Richter, Peter H. | 1925 – 1993 | Deutscher Physiker | 92,132 |
| Rössler, Otto | *1940 | Deutscher Biochemiker | 4,75,76,127,128 |
| Russell, John Scott | 1808 – 1882 | Brit. Ingenieur | 79 |
| Sagan, Hans | 1928 – 2000 | Öster. Mathematiker | 25,26 |
| Saupe, Dietmar | *1954 | Deutscher Informatiker | 20,33,34,45,52,64,69,90,99,124,125 132 |
| Smith, Adam | 1723 – 1790 | Schottischer Nationalökonom | 109 |
| Schlichting, Hans-Joachim | *1946 | Deutscher Physiker/Physikdidaktiker | 7,105,111,129 |
| Schrödinger, Erwin | 1887 – 1961 | Öster. Physiker, Nobelpreis 1933 | 49 |
| Schuster, Peter | *1941 | Österreichischer Chemiker | 108,121 |
| Series, Caroline | *1951 | Englische Mathematikerin | 40 |
| Sernetz, Manfred | ? | Deutscher Veterinärmediziner | 12,132 |
| Serres, Michel | 1930 – 2019 | Französischer Philosoph | 7 |
| Sierpinski, Waclaw | 1882 - 1969 | Polnischer Mathematiker | 4,30-35,37,40,41,44,47,116,124-126 |
| Shishikura, Mitsuhiro | *1960 | Japanischer Mathematiker | 94 |
| Smale, Stephen | *1930 | US-am. Mathematiker | 74 |
| Solomonoff, Ray | 1926 – 2009 | US-am. Mathematiker | 11 |
| Stengers, Isabelle | *1949 | Belg. Philos/Wissenschaftshistorikerin | 9,107,117,132 |
| Stokes, Sir George Gabriel | 1819 – 1903 | Irischer Mathematiker u. Physiker | 98,100 |
| Tao-te-King von Laotse | *571 v. Chr. | Chin. Philosoph, Werk ~ 600 v.Chr. | 7 |
| Tartaglia, Nicolo | 1499 – 1557 | Ital. Mathematiker | 31 |
| Thurston, William „Bill“ | 1946 – 2012 | US-amerikanischer Mathematiker | 40 |
| Turing, Alan | 1912 – 1954 | Brit. Logiker/Mathem./Informatiker | 18 |
| Varela, Francisco J. | 1946 – 2001 | Chilenischer Biologe/Philosoph | 121 |
| Verhulst, Pierre François | 1804 – 1849 | Belgischer Mathematiker | 57,64,67 |

| | | | |
|--|--------------|--------------------------------------|---------------------|
| Webb, James Edwin | 1906 – 1992 | US-am. Regierungsbeamter NASA | 101,129 |
| Weber, Renée | *1986 | US-amerikanische Philosophin | 117,119,123,132 |
| Weierstraß, Karl | 1815 – 1897 | Deutscher Mathematiker | 3,11,16,17,123 |
| Carl Friedrich Freiherr von Weizsäcker | 1912 – 2007 | Deutscher Physiker und Philosoph | 108,112,132 |
| West, Geoffrey | *1940 | Britischer Physiker | 12,132 |
| Whitehead, Alfred North | 1861 – 1947 | Britischer Philosoph u. Mathematiker | 117 |
| Wright, David | *1949 | US-am. Mathematiker u. Komponist | 40 |
| Yang Hui | ~1238 - 1298 | Chin. Mathematiker | 31 |
| Zhabotinsky, Anatoli Markowitch | 1938 – 2008 | Sowjetischer Physiker | 103,104,107,109,129 |

Kleine Linksammlung (Stand 03.06.2024)

<https://www.mathematik.de/dmv-blog/145-ausflug-in-die-vierte-dimension?highlight=WyJmcmFrdGFsZSIsImZyYWt0YWxlJyJd>

<https://www.dimensions-math.org/>

<https://www.youtube.com/watch?v=fFyC68CIEio>

https://de.wikipedia.org/wiki/Mandelbrot-Menge#Bezug_zur_Chaostheorie

<https://people.math.harvard.edu/~ctm/gallery/index.html>

<http://www.3d-meier.de/tut20/Seite1.html>

<https://www.mathematik.ch/anwendungenmath/fractal/julia/julia.html>

<https://commons.wikimedia.org/wiki/Fractal?uselang=de>

<https://xaos-project.github.io/>

<https://www.youtube.com/watch?v=7Pf6jZWguCc>

https://de.wikipedia.org/wiki/Kategorie:Fraktale_Geometrie

<https://www.youtube.com/watch?v=LhOSM6uCWxk>
<https://www.fraktale-kunstwerke.de/blog-1/videos/>
<https://fractal.foundation.org/resources/fractal-software/>
<https://fraktalwelt.de/fracgal/index.html>
<https://www.sekinoworld.com/fractal/>
https://www.wackerart.de/fractal_gallery_overview.html
<https://sprott.physics.wisc.edu/FRACTALS.HTM>
https://store.steampowered.com/app/1081600/Fractal_Gallery_VR/?l=german&curator_clanid=32247615
https://www.ocf.berkeley.edu/~www/fractals/fractal_gallery.html
<https://www.jmndesign.be/midjourney-art-creations/fractal/>
https://www.f-lohmueller.de/fractal/gfr_00.htm
<https://www.magicgallery.de/fractals.htm>
<https://scratch.mit.edu/studios/33129>
<https://www.deviantart.com/fractal-resources/gallery>
<https://mathcurve.com/fractals/gosper/gosper.shtml>
https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Menger_sponges?uselang=de
siehe auch z.B. shadertoy.com mit parallelem veränderbarem Open GL-Script
<http://klein.math.okstate.edu/IndrasPearls/>
<http://klein.math.okstate.edu/IndrasPearls/resources.html> (Viele Links!)