

Hadronische Formfaktoren in Quarkmodellen

Diplomarbeit
vorgelegt von
Milan Diebel
aus Gießen

Institut für Theoretische Physik I
der Justus-Liebig-Universität Gießen

Gießen, im April 1999

„Sprich: Die Natur . . . ist mit einer Kraft begabt, deren Wirklichkeit die Gelehrten nicht begreifen können. Der Einsichtsvolle kann fürwahr nichts in ihr wahrnehmen als den Strahlenglanz Unseres Namens, der Schöpfer.“

Bahá'u'lláh

獻給我唯一心愛的 林欣樺

Inhalt

1	Einleitung	3
2	Quarkmodelle des Nukleons	7
2.1	Eigenschaften der QCD	9
2.2	Die Dirac-Gleichung mit Confinement	11
2.3	Bag-Modelle	14
2.4	Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell	16
2.5	Grundzustand des Nukleons	19
3	Random-Phase-Approximation	21
3.1	Einführung	21
3.2	Ungekoppelte RPA	22
3.3	SU(2)-Kopplung von Teilchen- mit Loch-Zuständen	25
3.4	Tensor-Equation-Of-Motion	27
3.5	Tensor-RPA	31
3.6	Normierung im Tensor-RPA-Fall	33
4	Hadronische Formfaktoren	37
4.1	Nukleon-Übergangsformfaktoren	38
4.2	Übergangsformfaktor in RPA-Näherung	40
4.3	Wechselwirkungen im Dirac-Raum	46
4.4	Wechselwirkungen im Isospin-Raum	48
4.5	Multipolentwicklung des Übergangsoperators	48
4.6	Spin-Flavor-Mittelung	51

5	Ergebnisse	53
5.1	Mean-Field-Einteilchenbasis	53
5.2	RPA-Baryonenspektrum	61
5.3	RPA-Übergangsformfaktoren	63
5.3.1	Übergangsformfaktoren im $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^+$ -Kanal	65
5.3.2	Übergangsformfaktoren der $N(2220)$ H_{19} -Resonanz	81
6	Zusammenfassung und Ausblick	85
A	Notationen und Konventionen	87
B	SU(2)-Kopplungsrelationen	89
C	Strommatrixelemente	93
D	Numerov-Verfahren	95
D.1	Herleitung des Verfahrens	95
D.2	Anwendung auf Dirac-Gleichung	96
D.3	Randbedingungen und Normierung	97
D.4	Stetigkeitsbedingungen	97
	Literaturverzeichnis	99

Kapitel 1

Einleitung

Die Geschichte der Atom-, Kern- bzw. Teilchen-Physik begann vor ungefähr 100 Jahren. Vor dem Jahr 1895, der Entdeckung der „X-Strahlung“ durch Röntgen, wurde diese Domäne ausschließlich von Chemikern untersucht. Doch seitdem sich dieser spezielle Teil der Physik zu einem eigenständigen Fachgebiet entwickelt hat, ist die Zahl der Entdeckungen bis zum heutigen Tag rasant angestiegen. In Anbetracht dieser kurzen Zeitspanne eines Jahrhunderts ist es umso erstaunlicher, daß bis zur Entdeckung des Neutrons durch Chadwick 1932 mehr als 20 Jahre vergehen mußten, nachdem Rutherford schon 1911 die Entdeckung des Atomkerns und somit des Protons gelungen war. Zwar postulierte Rutherford schon 1920 die Existenz des Neutrons, doch es dauerte noch zehn weitere Jahre, bis Chadwick seine Ergebnisse schließlich veröffentlichte [Ca32].

Bis Mitte der 50er Jahre ging man davon aus, daß sowohl Proton als auch Neutron elementare Teilchen sind. Hadronische Streuversuche zeigten jedoch, daß auch diese beiden Teilchen eine innere Struktur haben. Unterstützt von sehr vielen experimentellen Daten, wurde es mit Hilfe des Quark-Modells möglich, sowohl Resonanzen zu identifizieren, als auch Regeln für Wirkungsquerschnitte aufzustellen [CG89].

Solange man Streuversuche mit Leptonen betrachtet, kann man mit Hilfe der Quantenelektrodynamik (QED) diese Prozesse auch störungstheoretisch mit sehr hoher Präzision berechnen. Geht es jedoch um die Berechnung von Prozessen der starken Wechselwirkung, ist man schon bei fundamentalen Prozessen wie der Proton-Proton-Streuung selbst heute noch nicht in der Lage, diese im Detail zu interpretieren [CG89]. Es existiert zwar seit den 60er Jahren eine Theorie der starken Wechselwirkung, die Quantenchromodynamik (QCD), es gibt jedoch erhebliche Probleme, diese hochgradig nichtlineare Theorie mit

einer starken Kopplung für solche Prozesse zu lösen.

Formal läßt sich diese zwar recht einfach formulieren, es ergeben sich allerdings erhebliche Probleme beim Lösen konkreter Fragestellungen. Einer der Gründe, warum dies bisher so problematisch ist, besteht darin, daß man im Fall der QCD anders als bei der QED Störungstheorie nur für sehr hohe Energien betreiben kann. Nur in diesem Energiebereich nimmt die „laufende“ Kopplungskonstante Werte an, die eine Störungsentwicklung erlauben. Formal ähneln sich QED und QCD stark, jedoch differieren diese beiden Theorien in einem entscheidenden Punkt. Die Austauschteilchen der QCD, die Gluonen, tragen, im Gegensatz zu ihrem QED-Pendant, den Photonen, eine „Ladung“.

Wenn man mehr über die Physik bei mittleren bis kleinen Energien erfahren will, ist der Ansatz der Störungstheorie aufgrund der großen Kopplungskonstante ungeeignet. Auch QCD-Gitterrechnungen haben sich als sehr aufwendig erwiesen und waren bis vor einigen Jahren aus rein technischen Gründen nur in eingeschränktem Maß durchführbar. Durch die enormen Entwicklungen auf dem Gebiet der Hardware-Technologie eröffnen sich nun ganz andere Möglichkeiten. Doch selbst mit solchen „Supercomputern“ sind die Rechenzeiten für solche Gittersimulationen immer noch fast inakzeptabel [We96].

Um diese Restriktionen zu umgehen und damit mehr Einblick in die Physik dieser Wechselwirkung für mittlere und kleine Energien zu bekommen, hat man sich daher bemüht, effektive Theorien zu entwickeln. Die Grundidee dabei ist, nicht mit der eigentlichen QCD-Lagrangedichte zu rechnen, sondern sich eine Lagrangedichte aufzustellen, die dieselben Symmetrien wie die QCD aufweist. Es besteht nämlich die Hoffnung, daß die Physik hauptsächlich durch Symmetrieeigenschaften dominiert wird, was seine Wurzeln in der Formulierung der eigentlichen QCD-Lagrangedichte durch Yang, Mills und Gell-Mann hat, um nur einige Namen zu nennen.

Eines der bekanntesten Modelle in dieser Hinsicht ist das nach seinen Entwicklern benannte Nambu-Jona-Lasinio-Modell. Es wird in vielen effektiven Modellen zur Beschreibung der starken Wechselwirkung benutzt. Die Ähnlichkeiten von QCD und dem eben erwähnten Modell werden in Kapitel 2 näher beleuchtet. Der Vollständigkeit halber sei an dieser Stelle noch erwähnt, daß es bereits ein sehr erfolgreiches Modell zur Beschreibung der Physik der starken Wechselwirkung im Niederenergiebereich gibt, die chirale Störungstheorie [Ec95, Pi95].

In dieser Arbeit sollen hadronische Formfaktoren basierend auf einer $SU(3)$ -Color-Nambu-Jona-Lasinio Wechselwirkung mittels Random-Phase-

Approximation (RPA) [Ro70] untersucht werden. Die RPA ist eine nichtperturbative Theorie und hat in der Kernphysik bereits zu sehr guten Ergebnissen geführt. Erste Anwendungen auf die Hadronenspektroskopie findet man in den Arbeiten von S. Hardt [Ha96] und J. Geiss [Ge95]. Hier soll die RPA-Theorie zur Berechnung hadronischer Übergangsformfaktoren direkt auf Quarkebene angewendet werden.

Im nachfolgenden Kapitel wird zunächst ein kurzer Überblick über einige Quarkmodelle und die wichtigsten QCD-Eigenschaften präsentiert. Des weiteren werden dann die für diese Arbeit relevanten Modelle, das MIT-Bag und das Nambu-Jona-Lasinio-Modell, vorgestellt. Im dritten Kapitel wird zuerst die einfachste Formulierung der RPA vorgestellt, die dann zur einer drehimpulsgekoppelten Version, der Tensor-RPA, erweitert wird.

Kapitel 4 stellt schließlich den Hauptteil dieser Diplomarbeit dar. Zunächst wird die Bedeutung von Formfaktoren im allgemeinen erläutert, bevor dann speziell auf die Rechnung in der RPA-Näherung eingegangen wird.

Im Kapitel 5 werden dann die Ergebnisse präsentiert, und Kapitel 6 gibt sowohl einen kleinen Ausblick auf noch offenstehende Fragestellungen bzw. Erweiterungsmöglichkeiten, als auch eine Zusammenfassung der gewonnenen Erkenntnisse.

Im Anhang findet man eine Übersicht über die benutzte Notation, ebenso eine kurze Zusammenfassung über Drehimpulskopplungsrelationen. Der letzte Teil des Anhangs geht näher auf das Lösen der Dirac-Gleichung mit dem Numerov-Verfahren ein.

Kapitel 2

Quarkmodelle des Nukleons

Da es bisher nicht möglich war, die QCD-Gleichungen zu lösen, und auch QCD-Gitterrechnungen nur unter sehr großem Aufwand Erfolge gebracht haben [We96], führt der zur Zeit einzig gangbare Weg, auf dem man mehr über die starke Wechselwirkung bei mittleren bis kleinen Energien erfahren kann, über effektive Theorien.

Die grundlegende Idee bei solchen Modellen ist immer, einige QCD-Eigenschaften explizit zu behandeln und die vernachlässigten Freiheitsgrade auf phänomenologische Weise einzuschließen. Unter den Eigenschaften der QCD-Gleichungen versteht man i. a. erhaltene sowie spontan gebrochene Symmetrien der QCD-Lagrangedichte.

Möchte man Hadronen, insbesondere das Nukleon und seine Anregungen, in einem effektiven Quarkmodell beschreiben, gilt spezielles Interesse den Niederenergie-Phänomenen. Hierbei spielen die Symmetrien der QCD-Lagrangedichte und Confinement die entscheidende Rolle. Letztere Eigenschaft entspricht der Tatsache, daß man in der Natur nur hadronische Zustände vorfindet, die dem Farbsinglett angehören. In einer effektiven Theorie muß man daher für die Farbladung sicherstellen, daß diese zu allen Zeiten in hadronischen Zuständen erhalten bleibt. Im MIT-Bag-Modell, welches anschließend vorgestellt werden soll, wird dies durch ein stark attraktives Potential für größere Abstände der Quarks in Verbindung mit einer sogenannten Bag-Konstante gewährleistet.

Es gibt verschiedene Modelle, um mehr über die innere Struktur der Hadronen zu lernen [Ba88], jedoch ist bis heute die Aufgabe der Beschreibung des Baryonenspektrums noch nicht zufriedenstellend gelöst. Bevor auf das in dieser Arbeit benutzte Modell näher eingegangen wird, sollen einige Nukleonmodelle kurz referiert und ihre Stärken und Schwächen aufgezeigt werden.

Das erste Nukleonmodell auf Quarkbasis wurde von Faiman und Hendry [FH68], kurz nachdem Gell-Mann und Zweig drei elementare Konstituenten für Baryonen postuliert hatten, entwickelt. Dieses nichtrelativistische Modell, besser bekannt unter dem Namen „Konstituentenquarkmodell“, behandelt in seiner einfachsten Fassung die starke Wechselwirkung zwischen den drei Quarks in Form von harmonischen Oszillatorpotentialen. Zusammen mit der Forderung von Valenzquarkmassen von einigen hundert MeV ist dieses Modell in der Lage, den negativen Paritätskanal des Baryonenspektrums gut zu beschreiben. Hingegen gab es lange Zeit Probleme, den positiven Paritätskanal zu verstehen, da es dort zu einer falschen Zustandsabfolge bzgl. der Parität kommt. Dies hat zur Folge, daß beide Kanäle nur mit unterschiedlichen Sätzen von Parametern beschrieben werden können. Dieses Problem konnte kürzlich durch das Einführen einer zusätzlichen Spin-Flavor-Wechselwirkung gelöst werden [GR96]. Trotz dieses Erfolgs ist es jedoch bisher noch nicht möglich, eine direkte Verbindung zur QCD zu schaffen. Besonders problematisch erscheint der Zusammenhang zwischen den Konstituentenquarks und den in der QCD-Lagrangedichte verwendeten Stromquarks mit Massen von wenigen MeV. Neben diesem Problem postuliert das Modell außerdem unbeobachtete Baryonenanregungen. Ein solches Verhalten ist jedoch auch aus anderen Modellen bekannt, wie z. B. dem MIT-Bag-Modell. Auch im Fall der Bag-Modelle stellt das Ableiten des Modells als Grenzfall der QCD ein Problem dar. Im Gegensatz zu den chiralen Modellen besitzen diese Confinement nach Konstruktion.

Die beiden bekanntesten chiralen Modelle sind das NJL- [NJL61] und das Skyrme-Modell [Sk61]. Beschränkt man sich auf den $SU(2)$ -Flavorraum, so ist der chirale Limes für das NJL-Modell gut erfüllt. Der Zusammenhang mit der QCD-Lagrangedichte ist somit auf Grund der analogen Symmetrien zu erkennen. Das Skyrme-Modell ist eine rein mesonische Beschreibung der starken Wechselwirkung. Eine direkte Ableitung aus der QCD existiert jedoch nicht, da die QCD im $N_c \rightarrow \infty$ nicht explizit bosonisiert [Ha96].

Im Gegensatz zu den ersten beiden Modellen besitzen die chiralen Modelle keinen Confinement-Mechanismus, was zur Folge hat, daß in Mean-Field-Näherung angeregte Einteilchenquarkzustände ungebunden sind. Die Beschreibung von angeregten Zuständen ist somit fragwürdig.

Man erkennt sehr schön, daß die vorgestellten Modelle entweder chirale Symmetrie und deren spontane Brechung enthalten oder die Bedingung des Confinements realisieren. Keines dieser phänomenologischen Modelle ist jedoch in der Lage, diese beiden wichtigen Eigenschaften der starken Wechselwirkung gleichzeitig zu modellieren. Es gibt einige Versuche, die QCD-Vakuum-Struktur und

die Bedingung des Confinements in einem Modell gleichzeitig zu realisieren, doch sind diese Modelle noch mit einigen Problemen behaftet [HG97].

Da bisher kein zufriedenstellender Mechanismus zu dynamisch generiertem Quarkconfinement bekannt ist, wird in dieser Arbeit eine vereinfachte Beschreibung des Nukleon-Grundzustandes mittels eines Bag-Modells benutzt. Im Tensor-RPA-Schema, welches im Kapitel 3 vorgestellt werden soll, wird dann eine zusätzliche Restwechselwirkung vom NJL-Typ auf diesen Mean-Field-Ansatz aufgesetzt. Die Folgen dieses Konsistenzbruchs werden in Kapitel 5 betrachtet.

Bevor auf die einzelnen Modelle näher eingegangen wird, sollen zunächst die grundlegenden Eigenschaften der QCD zusammengefaßt werden. Danach wird untersucht, wie man die Dirac-Gleichung mit einem Confinement gewährleistenden Mean-Field-Potential löst. Bevor dann das Nambu-Jona-Lasinio-Modell vorgestellt wird, sollen noch Bag-Modelle betrachtet werden, die das oben erwähnte Mean-Field-Modell repräsentieren. Besondere historische Bedeutung hat hier das MIT-Bag-Modell, welches das erste Modell dieser Art war, das trotz seiner Einfachheit zu großen Erfolgen geführt hat.

2.1 Eigenschaften der QCD

Die QCD-Lagrangedichte lautet:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=1}^{N_f} \bar{q}_f (i\gamma_\mu D^\mu - m_f) q_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (2.1)$$

wobei q_f die Felder der sechs Quarks (u,d,c,s,t,b) sind. Jedes dieser Felder ist jeweils nochmal ein SU(3)-Color-Triplett. Für die kovariante Ableitung D^μ gilt:

$$D_\mu = \partial_\mu - ig \frac{\lambda^a}{2} A_\mu^a. \quad (2.2)$$

A_μ^a bezeichnet jeweils eines der acht Gluonenfelder. Die Matrizen λ^a ($a = 1, \dots, 8$) sind die Generatoren der SU(3)-Gruppe, für die

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = i f^{abc} \frac{\lambda^c}{2} \quad (2.3)$$

gilt, wobei f^{abc} die Strukturkonstanten der SU(3) sind [Mo89]. Die Feldstärke $F_{\mu\nu}^a$ der Gluonenfelder ist gegeben als

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (2.4)$$

Dabei ist die Lagrangedichte gerade so gewählt, daß sie eine lokale $SU(3)$ -Color Eichinvarianz besitzt. Die Transformationen der Felder unter dieser Symmetrie lauten:

$$q_f \rightarrow e^{-i\frac{\lambda^a}{2}\Theta^a(x)} q_f, \quad (2.5)$$

$$A_\mu^a \rightarrow A_\mu^a - \frac{1}{g} \partial_\mu \Theta^a(x) + f^{abc} \Theta^b(x) A_\mu^c. \quad (2.6)$$

Neben dieser Symmetrie ist $\mathcal{L}_{QCD}$ lorentzinvariant, zeigt Invarianz unter der diskreten CPT-Symmetrie und besitzt eine globale $U(1)_V$ Symmetrie. Diese entspricht der einfachen Transformation

$$q_f \rightarrow e^{i\alpha_V} q_f, \quad (2.7)$$

welche die Erhaltung des Baryonenstroms zur Folge hat. α_V ist hierbei ein konstanter Phasenfaktor.

Untersucht man das hadronische Spektrum, befindet man sich auf der Energieskala bei rund einem GeV. In diesem Fall darf man sich auf die leichtesten drei Quarks u, d und s beschränken, was unmittelbar einleuchtet, wenn man die Quarkmassen betrachtet [PDG98].

$$\begin{array}{ll} m_u = (1.5 - 5) \text{ MeV} & m_c = (1.1 - 1.4) \text{ GeV} \\ m_d = (3 - 9) \text{ MeV} & m_b = (4.1 - 4.4) \text{ GeV} \\ m_s = (60 - 170) \text{ MeV} & m_t = (173.8 \pm 5.2) \text{ GeV} \end{array} \quad (2.8)$$

An dieser Stelle sei angemerkt, daß Stromquarkmassen nicht direkt gemessen werden können, sondern nur indirekt durch ihren Einfluß auf hadronische Eigenschaften bestimmt werden. Die Massen sind somit stark modellabhängig. Die oben angegebenen Massen sind die sogenannten Quarkstrommassen, die auch in $\mathcal{L}_{QCD}$ vorkommen. Die Massen der drei leichtesten Quarks werden i. A. mit Hilfe chiraler Störungstheorie in Verbindung mit QCD-Sum-Rules bestimmt. Mehr zu diesem Thema findet man in [Ma96].

In der Näherung von gleichen Quarkstrommassen der drei leichtesten Quarks erhält man eine globale Flavor- $SU(3)$ -Symmetrie der QCD. Im Limes von verschwindenden Massen geht diese in eine chirale $SU(3)$ -Symmetrie über, d. h. eine separate $SU(3)$ -Symmetrie für links- und rechtshändige Quarkfelder. Bei Energien von 1 GeV ist diese Näherung vertretbar. Die dazugehörige Transformation lautet:

$$\begin{aligned}
q^L &\rightarrow e^{-i\frac{\lambda^a}{2}\lambda_L^a} q^L \\
q^R &\rightarrow e^{-i\frac{\lambda^a}{2}\lambda_R^a} q^R,
\end{aligned} \tag{2.9}$$

wobei $q_f^{L,R} = (1 \mp \gamma_5) q_f$ ist. λ^a sind nun die Generatoren der Flavor-SU(3). In dieser Darstellung hat γ_5 die Weyl-Form [PS95].

Diese Symmetrie erfährt in zweifacher Weise eine Brechung: zum einen eine spontane durch den Mechanismus einer dynamischen chiralen Symmetriebrechung, und zum anderen eine explizite durch die nur in der Näherung verschwindenden Quarkmassen.

Beide Effekte findet man auch in der Natur wieder. Die spontane chirale Symmetriebrechung führt zu acht masselosen Goldstone-Bosonen. Diese kann man mit dem pseudoskalaren Mesonen-Oktett π^0 , $\pi^\pm$, K^0 , $\bar{K}^0$, $K^\pm$ und η identifizieren, da die chirale Symmetrie nur näherungsweise gilt und man somit den Goldstone-Bosonen kleine Massen zuschreiben darf.

Geht man nur von einer chiralen Flavor-SU(2)-Symmetrie aus, gilt diese Näherung in noch höherem Maße, da zum einen die explizite Symmetriebrechung durch die Quarkmassen sehr viel kleiner ist, und zum anderen die Interpretation der drei Pionen, mit einer Masse von ca. 140 MeV, als masselose Goldstone-Bosonen besser zutrifft. Besonders diese chirale Symmetrie und die damit verbundene spontane Symmetriebrechung spielt für das Nambu-Jona-Lasinio-Modell eine fundamentale Rolle.

Neben den bereits erwähnten Symmetrien ist die QCD-Lagrangedichte im chiralen Limit ebenso invariant unter einer $U(1)_A$ -Transformation, für die gilt:

$$q_f \rightarrow e^{i\alpha_A \gamma_5} q_f. \tag{2.10}$$

Den aus dieser Symmetrietransformation resultierenden erhaltenen Strom nennt man Axialstrom. Diese Symmetrie existiert in der Natur nicht. Der Mechanismus dieser Symmetriebrechung ist die Quantisierung und wird daher auch als Anomalie bezeichnet.

2.2 Die Dirac-Gleichung mit Confinement

Um relativistische Fermionen zu beschreiben, die die Eigenschaft des Confinements haben sollen, führt man im einfachsten Fall eine skalare Mean-Field-Wechselwirkung ein, d. h. man fügt dem Massenterm der freien Dirac-Gleichung ein skalares Potential hinzu.

Soll die Theorie rotationsinvariant bleiben, muß auch das skalare Potential dieser Bedingung genügen. Durch eine ortsabhängige Masse kann man die Bedingung des Confinements realisieren. Es sei angemerkt, daß man hierdurch die Lorentzinvarianz der Gleichung zerstört, sobald das Potential kein Lorentzskalar ist. In erweiterten Modellen fügt man neben diesem Term auch noch ein minimal gekoppeltes Vektorpotential ein. Zunächst jedoch die Herleitung ohne Vektorpotential. Im übrigen sei noch darauf hingewiesen, daß die Bedingung des Confinements nicht allein durch ein minimal gekoppeltes Vektorpotential realisiert werden kann.

Die freie Dirac-Gleichung lautet:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\Psi(x) = 0. \quad (2.11)$$

Reduziert man diese Gleichung durch den Ansatz

$$\Psi(x) = e^{-iEt} \Psi(\vec{x}) \quad (2.12)$$

auf eine stationäre Gleichung in Schrödingerform, erhält man:

$$E \Psi(\vec{x}) = (-i\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \beta m) \Psi(\vec{x}) = H_{Dirac} \Psi(\vec{x}), \quad (2.13)$$

$$\text{wobei} \quad \vec{\alpha} \equiv \gamma^0 \vec{\gamma} \quad \text{und} \quad \beta \equiv \gamma^0.$$

Nun ersetzt man die Masse m durch einen neuen Massenterm $m(r)$. Im allgemeinen Fall sieht dieser folgendermaßen aus:

$$m(r) = m + V(r). \quad (2.14)$$

Aus der Rotationsinvarianz dieser Gleichung folgt sofort, daß der Drehimpulsoperator $\vec{J}$ und der Paritätsoperator $P = e^{i\varphi} \beta P_0$ (P_0 führt $\vec{x} \rightarrow -\vec{x}$ über) mit dem Hamiltonoperator vertauschen und somit Erhaltungsgrößen sind [Gr87]. Zum Lösen der Dirac-Gleichung macht man nun den folgenden Ansatz:

$$\Psi_{jm}(\vec{x}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} i F(r) \Omega_{jlm}(\vartheta, \varphi) \\ -G(r) \Omega_{jl'm}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix},$$

wobei

$$\Omega_{jlm}(\vartheta, \varphi) = \sum_{m_l, m_s} \langle l \frac{1}{2} m_l m_s | jm \rangle Y_{lm_l}(\vartheta, \varphi) \chi_{\frac{1}{2} m_s} \quad (2.15)$$

ist. Dabei sind $\chi_{\frac{1}{2}m_s}$ die Zweierspinoren, die Eigenfunktionen der Spinoperatoren $\vec{S}^2 = \frac{1}{4}\vec{\sigma}^2$ und $S_3 = \frac{1}{2}\sigma_3$ sind. Es gilt:

$$\chi_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Aus Gleichung (2.15) folgt, daß für j immer gelten muß:

$$j = l + \frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad j = l - \frac{1}{2} \quad (\text{analog für } l'). \quad (2.17)$$

Weiter kann problemlos gezeigt werden, daß

$$P_0 \Omega_{jlm} = (-1)^l \Omega_{jlm} \quad (2.18)$$

gilt. Da der ganze Dirac-Spinor immer gute Parität haben muß, folgt für l' :

$$l' = \begin{cases} l + 1 & \text{für } j = l + \frac{1}{2} \\ l - 1 & \text{für } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (2.19)$$

Berücksichtigt man, daß Ω_{jlm} Eigenfunktion zu den Drehimpulsoperatoren $\vec{J}^2$, $\vec{L}^2$ und $\vec{S}^2$ ist und nutzt man die Beziehung $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$, erhält man nach kurzer Rechnung [Gr87] folgendes Paar von gekoppelten Differentialgleichungen für die Radialfunktionen:

$$\begin{aligned} \frac{dF(r)}{dr} + \frac{\kappa}{r} F(r) - (E + m(r)) G(r) &= 0 \\ \frac{dG(r)}{dr} - \frac{\kappa}{r} G(r) + (E - m(r)) F(r) &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Zur Vereinfachung wurde eine neue Quantenzahl κ definiert, für die gilt:

$$\kappa = \mp(j + \frac{1}{2}) = \begin{cases} -(l + 1) & \text{für } j = l + \frac{1}{2} \\ l & \text{für } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}. \quad (2.21)$$

Mit dieser neuen Quantenzahl läßt sich der Dirac-Spinor in der folgenden vereinfachten Form schreiben:

$$\Psi_{\kappa m}(\vec{x}) = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} i F(r) \Omega_{\kappa m}(\vartheta, \varphi) \\ -G(r) \Omega_{-\kappa m}(\vartheta, \varphi) \end{pmatrix}.$$

Die gekoppelten Differentialgleichungen aus (2.20) lassen sich auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung in $F(r)$ reduzieren, indem man die erste

Gleichung nach $G(r)$ auflöst und das Ergebnis in die zweite Gleichung einsetzt. Für $G(r)$ erhält man:

$$G(r) = \frac{1}{E + m(r)} \left(\frac{dF}{dr} + \frac{\kappa}{r} F(r) \right). \quad (2.22)$$

Macht man zusätzlich die Transformation

$$F(r) = \sqrt{E + m(r)} \tilde{F}(r), \quad (2.23)$$

verschwinden alle Terme proportional zur ersten Ableitung in der Dgl. für $\tilde{F}(r)$, und man erhält:

$$\frac{d^2 \tilde{F}(r)}{dr^2} = w(r) \tilde{F}(r), \quad (2.24)$$

wobei

$$\begin{aligned} w(r) = & \frac{3}{4} \frac{1}{(E + m(r))^2} \left(\frac{dm(r)}{dr} \right)^2 + \frac{1}{E + m(r)} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 m(r)}{dr^2} - \frac{\kappa}{r} \frac{dm(r)}{dr} \right) \\ & + \frac{\kappa(\kappa + 1)}{r^2} - (E^2 - m^2(r)) \end{aligned} \quad (2.25)$$

ist. Dieses Eigenwertproblem läßt sich durch Kombination eines Shooting- mit dem Numerov-Verfahren lösen. Letzteres ist im Anhang D.1 beschrieben.

2.3 Bag-Modelle

Das erste relativistische Bag-Modell wurde in den 70er Jahren von einer Gruppe am MIT entwickelt [CJ74]. Diese Modell enthält Confinement nach Konstruktion. Grundidee ist, daß sich die Quarks nur innerhalb eines Volumens V bewegen und der Baryon- und Farbstrom durch die Oberfläche dieser Kavität verschwindet.

Der Ansatz für die Lagrangedichte der Fermionen im MIT-Bag Modell lautet [Mo89, Ba88]:

$$\mathcal{L}_{MIT} = \left(-\frac{1}{2} \bar{q} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) q + \frac{1}{2} (i(\partial_\mu \bar{q})\gamma^\mu + m \bar{q}) q - B \right) \Theta(V). \quad (2.26)$$

Dies ist ein symmetrisierter Ansatz für die Dirac-Quarkfelder q und $\bar{q}$. q ist ein SU(3)-Triplet im Color-Raum und ein SU(2)-Dublett im Flavor-Raum. B ist

die schon vorher erwähnte Bag-Konstante. Diese beschreibt die Tatsache, daß eine gewisse Energie notwendig ist, um einen Bag im QCD-Vakuum zu bilden. Die Notwendigkeit dieser Konstante wird nachfolgend noch genauer gezeigt.

Es läßt sich leicht verifizieren, daß aus der obigen Lagrangedichte die Dirac-Gleichung des letzten Abschnitts für einen Massenterm der Form

$$m(r) = \begin{cases} m & \text{für } r \in V \\ \infty & \text{sonst} \end{cases} \quad (2.27)$$

folgt. V beschreibt hierbei das sphärische Volumen des Bags. Geht man davon aus, daß die Hadronen durch einen statischen sphärischen Bag in ihrem Ruhesystem beschrieben werden können, entspricht die Lösung der Dirac-Gleichung der im letzten Abschnitt.

Man kann leicht verifizieren, daß die Bedingung des Verschwindens des Baryon-, Flavor- und Farb-Stroms durch die Oberfläche S des Bags

$$n_\mu j^\mu|_S = 0 \quad (2.28)$$

äquivalent ist zur Forderung, daß die skalare Dichte auf der Oberfläche S verschwinden muß.

$$\bar{q}q|_S = 0 \quad (2.29)$$

n_μ ist hierbei der nach innen zeigende Normalenvektor der Oberfläche S . Betrachtet man die Gleichungen im Ruhesystem des Bags, verschwindet die nullte Komponente von $n_\mu = (0, \vec{n})$.

Betrachtet man den Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ auf der Oberfläche, erhält man

$$n^\mu T_{\mu\nu}|_S = (-P + B) n_\nu, \quad (2.30)$$

wobei $\partial_\nu(\bar{q}q) = 2Pn_\nu$ ist. Wählt man $P = B$, ist sichergestellt, daß Energie und Impuls erhalten bleiben. Physikalisch kann man die Bag-Konstante B somit als den Druck des nichtpertubativen QCD-Vakuums auf den Bag interpretieren [Mo89].

Für die Berechnungen in dieser Arbeit wurde der Massenterm $m(r)$ in folgender Weise parametrisiert:

$$m(r) = m + g r^n; \quad (2.31)$$

g ist dabei eine noch zu bestimmende Kopplungskonstante. Dieser Ansatz modelliert Confinement in einer viel „weiche“ Art und Weise und ist daher durch seine Stetigkeit realistischer.

Zur Lösung der Tensor-RPA-Gleichungen und der Berechnung von hadronischen Formfaktoren dient das letztere Potentialmodell nur zur Beschreibung des Meanfield-Anteils der starken Wechselwirkung, d. h. es wird benutzt, um zum einen den Grundzustand des Nukleons zu approximieren, und zum anderen eine Einteilchenbasis zu bestimmen, in der die RPA gelöst wird. Daher kommt es bei diesem Modell hauptsächlich darauf an, daß es die grundlegende Eigenschaft der QCD, das Confinement der Quarks, reproduzieren kann.

2.4 Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell

In der Beschreibung der RPA-Gleichungen wurde bisher nicht darauf eingegangen, wie der Hamiltonoperator des zu beschreibenden Systems genau aussieht. Der Hamiltonoperator in dieser Arbeit basiert auf einem Mean-Field-Anteil, der durch das im letzten Abschnitt betrachtete Bag-Modell gegeben ist und einer Restwechselwirkung, die im Rahmen des Nambu-Jona-Lasinio-Modells beschrieben wird. Der Ansatz für den Hamiltonoperator lautet demnach:

$$H = H_{MF} + H_{Rest}. \quad (2.32)$$

Diese Vorgehensweise ist notwendig, da die Polarisierung des Vakuums als dynamische Eigenschaft nicht aus der RPA abgeleitet werden kann.

Das Nambu-Jona-Lasinio-Modell wurde Anfang der 60er Jahre von Y. Nambu und G. Jona-Lasinio entwickelt [NJL61]. Es ist auch heute noch sehr populär, da es wie die QCD-Lagrangedichte neben chiraler Symmetrie auch deren spontane Brechung enthält.

Die grundlegende Annahme bei dieser Art von effektiven Modellen ist, daß im Niederenergie-Limes die Wechselwirkung nur durch ihre fermionischen Freiheitsgrade beschrieben werden kann. Letztere sind im Fall der starken Wechselwirkung die Quarkfelder. Außerdem geht man davon aus, daß man die Quark-Quark-Wechselwirkung, die in der QCD durch Gluonen vermittelt wird, zu einer effektiven Vierfermionen-Punktwechselwirkung vereinfachen darf. Die gluonischen Freiheitsgrade sind somit als „eingefroren“ angenommen.

Ähnliche Annahmen führen bei der Fermi-Theorie, einer Theorie für die schwache Wechselwirkung, zu sehr guten Resultaten. In diesem Fall haben

die Austauschbosonen Z und W jedoch eine relative große Masse ($m_Z = 80\text{GeV}$, $m_W = 91\text{GeV}$), wodurch die Annahme einer punktförmigen Wechselwirkung im Niederenergie-Limes sehr gut ist. Gluonen haben jedoch in diesem Limes eine verschwindende Masse, und somit ist unklar, ob der Ansatz einer δ -förmigen Wechselwirkung realistisch ist. Neben diesen Annahmen soll der effektive Lagrangian dieselbe Symmetrie besitzen wie die ursprüngliche QCD-Lagrangedichte.

Die ursprüngliche U(1)-Fassung des NJL-Modells lautet:

$$\mathcal{L}_{NJL} = \bar{\Psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0) \Psi + G \left((\bar{\Psi}\Psi)^2 - (\bar{\Psi}\gamma_5\Psi)^2 \right). \quad (2.33)$$

Für einen verschwindenden Massenterm m_0 besitzt diese Lagrangedichte chirale Symmetrie. Neben dieser Eigenschaft beinhaltet das NJL-Modell einen Mechanismus zur dynamischen Massengenerierung. Betrachtet man die obige Lagrangedichte in Mean-Field-Näherung, reduziert sie sich auf folgende Form:

$$\mathcal{L}_{MF} = \bar{\Psi} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m_0 + 2 G \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle \right) \Psi. \quad (2.34)$$

Man sieht nun, daß sich der Massenterm wie folgt zusammensetzt:

$$m = m_0 - 2 G \langle \bar{\Psi}\Psi \rangle. \quad (2.35)$$

Für ein nicht verschwindendes Kondensat $\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle$ erhält man einen zusätzlichen Beitrag zur Masse. Dies bezeichnet man als spontane Symmetriebrechung. Das Verhalten des Kondensats läßt sich untersuchen, wenn man den Zusammenhang mit dem Fermionen-Propagator nutzt:

$$\langle \bar{\Psi}\Psi \rangle = -i \text{Tr}(S_F(0)), \quad (2.36)$$

wobei

$$S_F(x - y) = -i \langle T [\Psi(x) \bar{\Psi}(y)] \rangle. \quad (2.37)$$

Die aus diesem Zusammenhang folgende Gleichung bezeichnet man als Gap-Gleichung [HG97]. Diese kann unter Verwendung eines Regularisierungsverfahrens selbstkonsistent gelöst werden.

Somit enthält das NJL-Modell gerade die wichtigen QCD-Eigenschaften, nämlich: chirale Symmetrie und deren spontane Brechung.

Erweitert man das Modell aus Gleichung (2.33) auf den SU(2)-Flavor-Sektor, erhält man im allgemeinsten Fall für den Wechselwirkungsanteil [HG97]:

$$\mathcal{L}_{int} = \mathcal{L}_{int}^s + \mathcal{L}_{int}^o, \quad (2.38)$$

wobei

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{int}^s = & G_S \sum_{k=0}^3 \left((\bar{\Psi} \tau_k \Psi)^2 - (\bar{\Psi} \gamma_5 \tau_k \Psi)^2 \right) \\ & - G_V \sum_{k=0}^3 \left((\bar{\Psi} \gamma_\mu \tau_k \Psi)^2 - (\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \tau_k \Psi)^2 \right) \\ & - \delta G_V (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)^2 - \delta G_A (\bar{\Psi} \gamma_\mu \gamma_5 \Psi)^2. \end{aligned} \quad (2.39)$$

τ_k für $k = 1, 2, 3$ bezeichnen die Isospin-Matrizen, und τ_0 ist die dazugehörige Einheitsmatrix. Der Term für $\mathcal{L}_{int}^o$ folgt sofort aus Gleichung (2.39) durch zusätzliches Einfügen der Gell-Mann-Matrizen $\frac{\lambda_i}{2}$. Die Kopplungskonstanten G_S , G_V , δG_V und δG_A zusammen mit den analog definierten Kopplungskonstanten für die Farboktett-Wechselwirkung $\mathcal{L}_{int}^o$ bilden hier die freien Parameter des Modells.

Dieser komplette Ausdruck ist invariant unter einer $U(2)_L \otimes U(2)_R$ -Transformation und enthält acht unabhängige Kopplungsparameter.

In der Arbeit von Hardt [HG97] wurden drei vereinfachte Versionen des allgemeinen NJL-Modells aus Gleichung (2.38) als Restwechselwirkung in einer RPA-Rechnung untersucht.

Die besten Resultate ergibt ein Modell mit Farb-Oktett- und Farb-Singlett-Wechselwirkung:

$$\mathcal{L}_{NJL} = i \bar{\Psi} \gamma_\mu \partial^\mu \Psi - G^{oct} \left(\bar{\Psi} \frac{\lambda_a}{2} \gamma_\mu \Psi \right)^2 - G^{sin} (\bar{\Psi} \gamma_\mu \Psi)^2. \quad (2.40)$$

Die Parameter in diesem Fall bilden die Kopplungskonstanten G^{oct} und G^{sin} und zusätzlich der Cut-Off-Parameter des Regularisierungsverfahrens. Für die Berechnungen in dieser Arbeit wurde ausschließlich diese Variante des NJL-Modells verwendet.

2.5 Grundzustand des Nukleons

Will man den Grundzustand des Nukleons in Form von drei Quarks konstruieren, müssen die drei Valenzquarks zu Spin $J^\pi = \frac{1}{2}^+$ und Isospin $T = \frac{1}{2}$ gekoppelt werden. Außerdem muß die Nukleon-Wellenfunktion antisymmetrisch sein und ein Color-Singlett bilden.

Macht man den allgemeinen Ansatz

$$\psi = \psi(x) \cdot \psi_{Spin} \cdot \psi_{Flavor} \cdot \psi_{Color}, \quad (2.41)$$

folgt aus der Forderung des Color-Singletts, daß ψ_{Color} antisymmetrisch sein muß. Ebenso ist für den Grundzustand klar, daß sich die räumliche Wellenfunktion symmetrisch unter Teilchenaustausch verhält. Dies hat zur Folge, daß das Produkt von Spin- und Flavor-Wellenfunktion symmetrisch sein muß.

Führt man folgende Notation ein:

$$|u \uparrow\rangle = 1 \quad |u \downarrow\rangle = 2 \quad |d \uparrow\rangle = 3 \quad |d \downarrow\rangle = 4 \quad |s \uparrow\rangle = 5 \quad |s \downarrow\rangle = 6 \quad (2.42)$$

und geht davon aus, daß das Nukleon nur aus u - und d -Quarks besteht, kann man die symmetrisierte Spin-Flavor-Wellenfunktion für das Proton mit Spinprojektionsquantenzahl $+\frac{1}{2}$ schreiben als:

$$|p \uparrow\rangle_{SF} = N T_{\alpha\beta\gamma} |\alpha\beta\gamma\rangle, \quad (2.43)$$

wobei N die Normierungskonstante ist und für $T_{\alpha\beta\gamma}$ gilt[Mo89]:

$$T_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} -1 & \text{für } (\alpha\beta\gamma) = 123 \quad + \quad \text{Permutationen} \\ 2 & \text{für } (\alpha\beta\gamma) = 114 \quad + \quad \text{Permutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} . \quad (2.44)$$

Der Tensor $T_{\alpha\beta\gamma}$ gehört zu der 56-dimensionalen Darstellung der $SU(6)$, bei der die fundamentale Darstellung gegeben ist durch das Sextett der drei Quarks mit beiden Spinorientierungen aus Gleichung (2.42). Mit Hilfe dieser Entwicklungskoeffizienten ist immer sichergestellt, daß die Spin-Flavor-Wellenfunktion symmetrisch ist, und man kann sich somit leicht Wellenfunktionen auch für andere Baryonen und Mesonen konstruieren.

Die expliziten Spin-Flavor-Wellenfunktionen für Proton und Neutron lauten somit [Mo89]:

$$|p \uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \{ -|123\rangle - |312\rangle - |231\rangle - |321\rangle - |132\rangle - |213\rangle \\ + 2|114\rangle + 2|411\rangle + 2|141\rangle \} \quad (2.45)$$

und

$$|n \uparrow\rangle = -\frac{1}{\sqrt{18}} \{ -|341\rangle - |134\rangle - |413\rangle - |143\rangle - |314\rangle - |431\rangle \\ + 2|332\rangle + 2|323\rangle + 2|233\rangle \} \quad (2.46)$$

Die Wellenfunktionen mit umgekehrter Spin-Isospinorientierung folgen unmittelbar durch Anwendung von Spin- und Isospin-Absteigeoperatoren. Man erhält somit:

$$|n \downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{18}} \{ -|234\rangle - |243\rangle - |342\rangle - |324\rangle - |423\rangle - |432\rangle \\ + 2|144\rangle + 2|414\rangle + 2|441\rangle \} \quad (2.47)$$

und

$$|p \downarrow\rangle = -\frac{1}{\sqrt{18}} \{ -|124\rangle - |142\rangle - |241\rangle - |214\rangle - |412\rangle - |421\rangle \\ + 2|223\rangle + 2|232\rangle + 2|322\rangle \}. \quad (2.48)$$

In diesem Modell werden keine Strangeness-Komponenten berücksichtigt. Hinweise auf Strangeness-Beimischungen findet man jedoch im (T=1/2)-Kanal in der noch recht leichten N(1535)-Resonanz, die zu 30-55 % in ein Nukleon und ein η -Meson [PDG98] zerfällt. Zum anderen wäre das Auftreten von $s\bar{s}$ Beiträgen im Nukleon eine Möglichkeit zur Erklärung des Spinrätsels. Betrachtet man jedoch das (T=3/2)-Anregungsspektrum, so findet man dort kein ähnliches Phänomen; der Zerfall in Strange-Mesonen ist viel stärker unterdrückt.

Hier werden das Nukleon und seine Anregungen daher nur im Rahmen einer SU(2)-Flavor-Symmetrie betrachtet.

Kapitel 3

Random-Phase-Approximation

3.1 Einführung

RPA steht für Random-Phase-Approximation; diese Methode wurde ursprünglich 1953 von Bohm und Pines [BP53] zur Beschreibung von Plasmaoszillationen eines Elektronengases entwickelt. Der Name RPA geht auf diese Theorie zurück.

Später erkannte man, daß die RPA-Gleichungen sich aus dem niederenergetischen Grenzfall der zeitabhängigen Hartree-Fock-Näherung ergeben. Das führte zu einer sehr anschaulichen Deutung der RPA [Fe57] für die Kernphysik: Die angeregten Zustände konnten als Vibrationsmoden des Vielteilchensystems interpretiert werden. Eine kurze Übersicht zur historischen Entwicklung der RPA findet man in der Arbeit von J. Geiss [Ge95].

Bis heute wird die RPA sehr erfolgreich in der Kernphysik angewandt. Es stellte sich heraus, daß man mit dieser Methode ohne exakte Kenntnis des Grundzustandes gute Ergebnisse für angeregte Zustände berechnen kann. Die Erfolge dieser Näherung betreffen hauptsächlich die korrekte Beschreibung von Übergangsstärken; die Berechnung von Spektren ist hingegen weniger erfolgreich [Ge95]. Des weiteren erlaubt die RPA-Methode analog dem Hartree-Fock-Verfahren, Korrekturen des Grundzustandes in einer selbstkonsistenten Rechnung zu bestimmen.

Zur Herleitung der RPA gibt es einige, allerdings völlig unterschiedliche, Wege, wobei jeder Zugang aus ganz anderen Gründen interessant ist. Hier soll nur auf drei Arten eingegangen werde. Historisch von Bedeutung ist der Zugang im Dichtematrixformalismus mittels der Time-Dependent-Hartree-Fock-Methode (TDHF). Wie schon oben erwähnt, kommt man hier zu einer anschaulichen Deutung der angeregten Zustände. Der zweite Weg mittels der Bethe-Salpeter-

Gleichung verdeutlicht den Zusammenhang zwischen RPA und Quantenfeldtheorie. Bei diesem Zugang wird sehr deutlich, daß es sich bei der RPA-Näherung um eine nichtstörungstheoretische Methode handelt. Im Rahmen des dritten Zugangs, basierend auf der Equation-Of-Motion-Methode, sollen im nächsten Abschnitt zunächst die ungekoppelten RPA-Gleichungen abgeleitet werden. Diese Herleitung hat den Vorteil, daß sie mathematisch gut verständlich ist und man außerdem in diesem Formalismus recht leicht die drehimpuls- und isospingekoppelte Version der RPA, die Tensor-RPA, ableiten kann.

Letztere dient bei der Berechnung der hadronischen Formfaktoren in Kapitel 4 als Grundlage. Die Herleitung der Tensor-RPA wird im zweiten Teil dieses Kapitels durchgeführt.

3.2 Ungekoppelte RPA

Die Idee, die der Equation-Of-Motion-Methode zugrunde liegt, ist mittels eines Anregungsoperators $Q_\nu^\dagger$ aus dem Grundzustand $|0\rangle$ den angeregten Zustand $|\nu\rangle$ zu erzeugen. Hierbei muß man zunächst den Grundzustand mindestens näherungsweise kennen. Sodann ist es die Aufgabe, den geeigneten Anregungsoperator zu finden. Für diesen fordert man:

$$|\nu\rangle = Q_\nu^\dagger |0\rangle \quad \text{und} \quad Q_\nu |0\rangle = 0. \quad (3.1)$$

Die Eigenfunktionen und Eigenwerte des Hamiltonoperators des Systems seien in folgender Weise gegeben:

$$H |\nu\rangle = E_\nu |\nu\rangle \quad \text{und} \quad H |0\rangle = E_0 |0\rangle. \quad (3.2)$$

Hierbei bezeichnet $|0\rangle$ den Grundzustand des Systems und nicht das Vakuum. Dieser Ansatz führt dann weiter zu folgender Gleichung:

$$[H, Q_\nu^\dagger] |0\rangle = (E_\nu - E_0) Q_\nu^\dagger |0\rangle. \quad (3.3)$$

Multipliziert man diese Gleichung von links mit einem anderen beliebigen Zustand $\langle\nu'| = \langle 0| Q_{\nu'}$ erhält man:

$$\langle 0| Q_{\nu'} [H, Q_\nu^\dagger] |0\rangle = (E_\nu - E_0) \langle 0| Q_{\nu'} Q_\nu^\dagger |0\rangle. \quad (3.4)$$

Schreibt man diese Relation noch ein wenig um, ergibt sich:

$$\langle 0| [Q_{\nu'}, [H, Q_\nu^\dagger]] |0\rangle = (E_\nu - E_0) \langle 0| [Q_{\nu'}, Q_\nu^\dagger] |0\rangle. \quad (3.5)$$

Bis hierher ist die Struktur der Operatoren $Q_\nu^\dagger$ und $Q_{\nu'}$ noch unbestimmt. Eine Definition eines Anregungsoperators, der die Teilchenzahl erhält, ist gegeben durch die Menge der Thouless-Transformationen auf dem Grundzustand $|0\rangle$, der als N-Teilchen-Slaterdeterminante angesetzt ist [SF74]:

$$|\nu\rangle = \exp\left(\sum_m \sum_i C_{mi} a_m^\dagger a_i\right) |0\rangle. \quad (3.6)$$

Hierbei beziehen sich die Laufindizes m und i auf Zustände oberhalb bzw. unterhalb der Fermikante.

In dem nachfolgenden Ansatz für einen Anregungsoperator werden nur Teilchen-Loch-Anregungen berücksichtigt; demnach entspricht die RPA-Näherung der eben erwähnten Thouless-Transformationen erster Ordnung in den Koeffizienten C_{mi} .

$$Q_\nu^\dagger = \sum_{m,i} X_{mi}^\nu a_m^\dagger a_i - Y_{mi}^\nu a_i^\dagger a_m \quad (3.7)$$

und analog für $Q_{\nu'}$:

$$Q_{\nu'} = \sum_{n,j} (X_{nj}^{\nu'})^* a_j^\dagger a_n - (Y_{nj}^{\nu'})^* a_n^\dagger a_j. \quad (3.8)$$

Wie oben bezeichnen i, j Zustände unterhalb und m, n oberhalb der Fermikante. Die Operatoren $a^\dagger$ und a sind gewöhnliche Einteilchenerzeugungs- bzw. -vernichtungsoperatoren. Im fermionischen Fall gilt:

$$\{a_i, a_j\} = 0 \quad \text{und} \quad \{a_i^\dagger, a_j\} = \delta_{ij}. \quad (3.9)$$

Das Minuszeichen vor dem Term Y_{mi}^ν hat keine weitere Bedeutung, es dient nur der vereinfachten Schreibweise des Endresultats.

Neben den Termen $\propto X_{mi}^\nu$, welche Teilchen-Loch-Anregungen auf dem Grundzustand darstellen, werden bei der RPA-Näherung durch die Terme $\propto Y_{mi}^\nu$ auch Grundzustandskorrelationen mit angeregten Zuständen erlaubt.

Nähert man den in obiger Ableitung verwendeten RPA-Grundzustand $|0\rangle$ durch eine Slaterdeterminante, hat dies zur Folge, daß die Bedingung $Q_\nu|0\rangle = 0$ nicht mehr erfüllt wird. Um Konsistenz zu gewährleisten, muß man zusätzlich fordern:

$$\sum_{mi} |Y_{mi}^\nu|^2 \ll 1. \quad (3.10)$$

Im Rahmen einer solchen Näherung des Grundzustandes ist man dann ebenfalls in der Lage, selbstkonsistent analog der Hartree-Fock-Methode Grundzustandskorrelationen zu berechnen. In dieser Arbeit wird jedoch darauf verzichtet. Das selbstkonsistente RPA-Schema wird aufgrund des enormen numerischen Aufwands nur mit einem Iterationschritt betrachtet.

Setzt man die beiden Ansätze in Gleichung (3.5) ein, erhält man auf der rechten Seite folgende vier Kommutatoren:

$$\begin{aligned} [a_j^\dagger a_n, a_m^\dagger a_i] &= a_j^\dagger a_i \delta_{mn} + a_n a_m^\dagger \delta_{ij} - \delta_{mn} \delta_{ij}, \\ -[a_n^\dagger a_j, a_i^\dagger a_m] &= a_i^\dagger a_j \delta_{mn} + a_m a_n^\dagger \delta_{ij} - \delta_{mn} \delta_{ij} \end{aligned} \quad (3.11)$$

und

$$\begin{aligned} [a_j^\dagger a_n, a_i^\dagger a_m] &= a_j^\dagger a_m \delta_{in} - a_i^\dagger a_n \delta_{mj}, \\ [a_n^\dagger a_j, a_m^\dagger a_i] &= a_n^\dagger a_i \delta_{mj} - a_m^\dagger a_j \delta_{ni}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Betrachtet man den Erwartungswert dieser Kommutatoren bzgl. des Grundzustandes $|0\rangle$, der von nun an als Slaterdeterminante angenommen wird, erhält man für die ersten beiden Terme aus (3.11) $\delta_{mn} \delta_{ij}$. Gleichung (3.12) hat einen verschwindenden Erwartungswert bzgl. jeden Zustands, sobald man von einer scharfen Fermikante ausgeht.

Das Auswerten der Kommutatoren bezüglich eines solchen Grundzustandes nennt man auch Quasibosonen-Näherung. Der Name wird noch deutlicher, wenn man Teilchen-Loch-Erzeugungs- und -vernichtungsoperatoren einführt:

$$A_{mi}^\dagger = a_m^\dagger a_i \quad \text{und} \quad A_{mi} = a_i^\dagger a_m. \quad (3.13)$$

Das obige Ergebnis läßt sich nun in der Form einer Kommutator-Relation für Bosonen schreiben:

$$[A_{nj}, A_{mi}^\dagger] = \delta_{mn} \delta_{ij} \quad \text{und} \quad [A_{nj}, A_{mi}] = 0. \quad (3.14)$$

Für die rechte Seite von Gleichung (3.5) erhält man somit:

$$(E_\nu - E_0) \langle 0 | [Q_\nu, Q_\nu^\dagger] | 0 \rangle = (E_\nu - E_0) \sum_{nj} (X_{nj}^{\nu'})^* X_{nj}^\nu - (Y_{nj}^{\nu'})^* Y_{nj}^\nu. \quad (3.15)$$

Da man den Zustand $\langle \nu' |$ beliebig gewählt hat, erhält man mittels Koeffizientenvergleich der linken und rechten Seite von Gleichung (3.5) folgende beiden Relationen:

$$\begin{aligned}\langle 0 | [a_j^\dagger a_n, [H, Q_\nu^\dagger]] | 0 \rangle &= (E_\nu - E_0) X_{nj}^\nu, \\ \langle 0 | [a_n^\dagger a_j, [H, Q_\nu^\dagger]] | 0 \rangle &= (E_\nu - E_0) Y_{nj}^\nu.\end{aligned}\quad (3.16)$$

Diese beiden unter Punkt (3.16) erhaltenen Gleichungen kann man nun in Matrixschreibweise zusammenfassen.

$$\begin{pmatrix} A_{njmi} & B_{njmi} \\ B_{njmi}^* & A_{njmi}^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{mi}^\nu \\ Y_{mi}^\nu \end{pmatrix} = (E_\nu - E_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{nj}^\nu \\ Y_{nj}^\nu \end{pmatrix}, \quad (3.17)$$

wobei

$$\begin{aligned}A_{njmi} &= \langle 0 | [a_j^\dagger a_n, [H, a_m^\dagger a_i]] | 0 \rangle, \\ A_{njmi}^* &= \langle 0 | [a_n^\dagger a_j, [H, a_i^\dagger a_m]] | 0 \rangle, \\ B_{njmi} &= - \langle 0 | [a_j^\dagger a_n, [H, a_i^\dagger a_m]] | 0 \rangle, \\ B_{njmi}^* &= - \langle 0 | [a_n^\dagger a_j, [H, a_m^\dagger a_i]] | 0 \rangle.\end{aligned}\quad (3.18)$$

Dies ist die Darstellung, die man meistens in der Literatur findet [Ro70, RS80]. Nun gilt es nur noch, diese Eigenwertgleichung auf einer beschränkten Einteilchenbasis zu lösen. Wie man eine solche Basis generiert, ist im Kapitel 2 beschrieben.

3.3 SU(2)-Kopplung von Teilchen- mit Loch-Zuständen

Oft möchte man die RPA-Näherung auf Systeme anwenden, die rotationsinvariant sind, d. h. bei denen der Drehimpuls eine gute Quantenzahl ist. Demzufolge ist es wünschenswert, daß auch die Anregungsoperatoren mit gutem Drehimpuls definiert sind. Geht man davon aus, daß die Einteilchenbasiszustände guten Drehimpuls haben, muß man in der RPA-Näherung die Teilchen-Loch-Anregungen zu gutem Drehimpuls koppeln, d. h. Teilchenzustände mit Antiteilchen-Zuständen koppeln.

Führt man eine solche Kopplung naiv durch, stellt man schnell fest, daß sich Loch-Zustände anders unter Rotation transformieren als die äquivalenten Teilchen-Zustände [Ro70].

Der Zusammenhang zwischen den Rotationseigenschaften von Loch- und Teilchen-Zuständen findet man z. B. im Buch von Rowe [Ro70]. Demnach folgt aus Zeitumkehrinvarianz:

$$|(jm)^{-1}\rangle \doteq (-1)^{j-m} |j-m\rangle. \quad (3.19)$$

Um eine richtige Kopplung von Teilchen- und Loch-Zuständen zu gewährleisten, muß man demzufolge jeden Loch-Zustand zunächst durch den zugeordneten Teilchen-Zustand ersetzen. Definiert man einen neuen Zustand $|(\bar{j}m)^{-1}\rangle$, der gute Transformationseigenschaften unter Rotation per Definition besitzt, wie folgt:

$$|(\bar{j}m)^{-1}\rangle = (-1)^{j+m} |(j-m)^{-1}\rangle, \quad (3.20)$$

läßt sich diese Problematik beim Koppeln umgehen.

Gruppentheoretisch formuliert entspricht das Problem einer Kopplung eines Operators $O_\lambda^\dagger$ der Tensorstufe λ mit einem adjungierten Operator $O_{\lambda'}$. Der zu einem Operator $O_\lambda^\dagger$ eines SU(2)-Multipletts adjungierte Operator $O_{\lambda'}$ bildet jedoch ebenfalls eine Darstellung der SU(2), die sich jedoch um einen Phasenfaktor unterscheidet. Der Einfachheit wegen definiert man einen neuen Operator

$$O_{\bar{\lambda}\mu} \equiv (-1)^{\lambda+\mu} O_{\lambda-\mu} \quad (3.21)$$

und kommt bei der Kopplung $O_\lambda^\dagger \otimes O_{\bar{\lambda}}$ ohne weitere Phasenfaktoren aus.

Praktisch bedeutet dies, daß der adjungierte Operator O_λ durch $O_{\bar{\lambda}}$ ersetzt werden muß.

Ein richtig gekoppelter RPA-Teilchen-Loch-Anregungsoperator zu gutem Drehimpuls (J, M) läßt sich demnach in folgender Form schreiben:

$$Q_\nu^\dagger(JM) = \sum_{m,i} X_{mi}^\nu(JM) A_{mi}^\dagger(JM) - Y_{mi}^\nu(JM) A_{mi}(\bar{J}M), \quad (3.22)$$

wobei

$$A_{mi}^\dagger(JM) = \sum_{m_m, m_i} \langle j_m j_i m_m m_i | JM \rangle a_m^\dagger a_{\bar{i}} \quad (3.23)$$

und

$$\begin{aligned}
A_{mi}(\bar{J}M) &= (-1)^{J+M} A_{mi}(J-M) \\
&= (-1)^{J+M} \sum_{m_i, m_m} \langle j_i j_m m_i m_m | J-M \rangle a_i^\dagger a_m.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Im folgenden sollen nun die RPA-Gleichungen aus Abschnitt 3.2 in einen drehimpulsgekoppelten Formalismus verallgemeinert werden. Hierbei wird davon ausgegangen, daß auch der Grundzustand nicht mehr skalaren Charakter hat. Diese erweiterte Fassung der RPA bezeichnet man als Tensor-RPA. Bevor jedoch die Tensor-RPA-Gleichungen abgeleitet werden können, muß zunächst die Equation-Of-Motion-Methode verallgemeinert werden.

3.4 Tensor-Equation-Of-Motion

Möchte man die RPA-Näherung zur Beschreibung des Nukleons verwenden, muß man selbstverständlich berücksichtigen, daß der Grundzustand sowohl in Spin als auch Isospin von nicht-skalarem Charakter ist.

Der bisherige Ansatz der Equation-Of-Motion-Methode muß zunächst auf den Fall eines nicht-skalaren Grundzustandes erweitert werden. Diese erweiterte Formulierung nennt man dann Tensor-Equation-Of-Motion-Methode.

Eine adäquate Nomenklatur ist, sofern sie nicht direkt erklärt ist, im Anhang B angeführt.

Der Grundzustand $|\Delta\rangle\rangle$ sei ein SU(2)-Tensor der Stufe Δ . Der zu bestimmende Anregungszustand $|x\Lambda\rangle\rangle$ habe die Tensorstufe Λ . x stehe für alle übrigen Quantenzahlen.

Für den Anregungsoperator $O_{x\lambda}^\dagger$ muß demnach gelten:

$$|x\Lambda\rangle\rangle = (O_{x\lambda}^\dagger \times |\Delta\rangle\rangle)^\Lambda. \tag{3.25}$$

Im Hinblick auf die SU(2)-Kopplungsrelationen (siehe Anhang B), wird an dieser Stelle klar, daß es mehrere Werte für λ gibt, mit denen diese Kopplung realisiert werden kann. Bedingung für eine mögliche Kopplung ist die wohlbekannte Dreiecksungleichung:

$$|\lambda - \Delta| \leq \Lambda \leq \lambda + \Delta. \tag{3.26}$$

Für den allgemeinsten Anregungsoperator des Zustandes $|x\Lambda\rangle\rangle$ gilt somit:

$$Q_{x\Lambda}^\dagger = \sum_i O_{x\lambda_i}^\dagger. \quad (3.27)$$

Analog der Bedingung im ungekoppelten Fall fordert man auch hier:

$$Q_{x\Lambda}|\Delta\rangle\rangle = 0. \quad (3.28)$$

Betrachtet man den Kommutator $[H, Q_{x\Lambda}^\dagger]$, erhält man:

$$([H, Q_{x\Lambda}^\dagger] \times |\Delta\rangle\rangle)^\Lambda = H|x\Lambda\rangle\rangle - E_\Delta|x\Lambda\rangle\rangle = (E_\Lambda - E_\Delta) (Q_{x\Lambda}^\dagger \times |\Delta\rangle\rangle)^\Lambda. \quad (3.29)$$

Die Tensormultiplikation und die Kopplung zu 0 mit einem beliebigen Zustand $\langle\langle y\bar{\Lambda}|$ gleicher Tensorstufe ergeben dann:

$$(\langle\langle y\bar{\Lambda}| \times ([H, Q_{x\Lambda}^\dagger] \times |\Delta\rangle\rangle)^\Lambda)^0 = (E_\Lambda - E_\Delta) (\langle\langle y\bar{\Lambda}| \times |x\Lambda\rangle\rangle)^0. \quad (3.30)$$

Schreibt man auch $\langle\langle y\bar{\Lambda}|$ in Form einer Anregung des Grundzustandes $\langle\langle \bar{\Delta}|$ durch einen Operator $Q_{y\bar{\Lambda}}$, erhält man:

$$((\langle\langle \bar{\Delta}| \times Q_{y\bar{\Lambda}})^\Lambda \times ([H, Q_{x\Lambda}^\dagger] \times |\Delta\rangle\rangle)^\Lambda)^0 = (E_\Lambda - E_\Delta) (\langle\langle y\bar{\Lambda}| \times |x\Lambda\rangle\rangle)^0. \quad (3.31)$$

Rückblickend auf die Ausführungen im Abschnitt 3.3 ist sofort ersichtlich, daß man an dieser Stelle nicht den Operator $O_{y\lambda}$ und den Zustand $\langle\langle \Delta|$ benutzen darf, da diese sich nicht wie die sphärischen Tensoren $|\Delta\rangle\rangle$ und $O_{y\Lambda}^\dagger$ unter Rotation transformieren.

Setzt man die Entwicklung für die Operatoren $Q_{x\Lambda}^\dagger$ und $Q_{y\bar{\Lambda}}$ - wie in Gleichung (3.27) - ein, ergibt sich:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} ((\langle\langle \bar{\Delta}| \times O_{y\bar{\lambda}_j})^\Lambda \times ([H, O_{x\lambda_i}^\dagger] \times |\Delta\rangle\rangle)^\Lambda)^0 = \\ (E_\Lambda - E_\Delta) \sum_{i,j} ((\langle\langle \bar{\Delta}| \times O_{y\bar{\lambda}_j})^\Lambda \times (O_{x\lambda_i}^\dagger \times |\Delta\rangle\rangle)^\Lambda)^0. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Bevor man diese Relation unkoppelt, betrachte man zunächst die Kopplung von drei Tensoren zur Tensorstufe 0. Mit der Racah-Umkopplungsrelation aus Anhang B erhält man für diesen speziellen Fall:

$$((R^{\lambda_1} \times S^{\lambda_2})^{\lambda_{12}} \times T^{\lambda_3})^0 = \sum_{\lambda_{23}} \hat{\lambda}_{12} \hat{\lambda}_{23} W(\lambda_1 \lambda_2 0 \lambda_3; \lambda_{12} \lambda_{23}) (R^{\lambda_1} \times (S^{\lambda_2} \times T^{\lambda_3})^{\lambda_{23}})^0. \quad (3.33)$$

Diese Kopplung ist nur dann möglich, wenn $\lambda_{12} = \lambda_3$ und $\lambda_{23} = \lambda_1$ ist, somit ergibt sich:

$$((R^{\lambda_1} \times S^{\lambda_2})^{\lambda_3} \times T^{\lambda_3})^0 = \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_3 W(\lambda_1 \lambda_2 0 \lambda_3; \lambda_3 \lambda_1) (R^{\lambda_1} \times (S^{\lambda_2} \times T^{\lambda_3})^{\lambda_1})^0. \quad (3.34)$$

Unter Berücksichtigung der Symmetrieeigenschaften der Racah-Koeffizienten W findet man, daß die Reihenfolge der Kopplung in diesem Fall keine Rolle spielt, da gilt:

$$((R^{\lambda_1} \times S^{\lambda_2})^{\lambda_3} \times T^{\lambda_3})^0 = (R^{\lambda_1} \times (S^{\lambda_2} \times T^{\lambda_3})^{\lambda_1})^0. \quad (3.35)$$

Koppelt man Gleichung (3.32) unter Verwendung des letzten Resultats um, erhält man:

$$\sum_{i,j} (((\langle \bar{\Delta} | \times O_{y\bar{\lambda}_j})^\Lambda \times [H, O_{x\lambda_i}^\dagger])^\Delta \times |\Delta\rangle\rangle)^0 = (E_\Lambda - E_\Delta) \sum_{i,j} (((\langle \bar{\Delta} | \times O_{y\bar{\lambda}_j})^\Lambda \times O_{x\lambda_i}^\dagger)^\Delta \times |\Delta\rangle\rangle)^0. \quad (3.36)$$

Durch nochmaliges Umkoppeln der linken drei Tensoren folgt:

$$\sum_{i,j,\Gamma} \hat{\Lambda} \hat{\Gamma} W(\Delta \lambda_j \Delta \lambda_i; \Lambda \Gamma) (\langle \bar{\Delta} | \times (O_{y\bar{\lambda}_j} \times [H, O_{x\lambda_i}^\dagger])^\Gamma \times |\Delta\rangle\rangle)^0 = (E_\Lambda - E_\Delta) \sum_{i,j,\Gamma} \hat{\Lambda} \hat{\Gamma} W(\Delta \lambda_j \Delta \lambda_i; \Lambda \Gamma) (\langle \bar{\Delta} | \times (O_{y\bar{\lambda}_j} \times O_{x\lambda_i}^\dagger)^\Gamma \times |\Delta\rangle\rangle)^0. \quad (3.37)$$

Diese Gleichung läßt sich mit der Relation (B.20) in Form von reduzierten Matrixelementen umschreiben. Durch die Konstante $\hat{\Lambda}$ darf gekürzt werden, da sie in keiner Summation auftaucht, und man erhält somit:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j,\Gamma} (-1)^{2\Delta-\Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta\lambda_j\Delta\lambda_i; \Lambda\Gamma) \langle \Delta || (O_{y\bar{\lambda}_j} \times [H, O_{x\lambda_i}^\dagger])^\Gamma || \Delta \rangle = \\
& (E_\Lambda - E_\Delta) \sum_{i,j,\Gamma} (-1)^{2\Delta-\Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta\lambda_j\Delta\lambda_i; \Lambda\Gamma) \langle \Delta || (O_{y\bar{\lambda}_j} \times O_{x\lambda_i}^\dagger)^\Gamma || \Delta \rangle.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Die reduzierten Matricelemente lassen sich noch in Matricelemente bzgl. Kommutatoren umschreiben, wenn man berücksichtigt, daß $O_{x\lambda_i} |\Delta\rangle = 0$ ist.

$$\begin{aligned}
\langle \Delta || (O_{y\bar{\lambda}_j} \times [H, O_{x\lambda_i}^\dagger])^\Gamma || \Delta \rangle &= \langle \Delta || [O_{y\bar{\lambda}_j}, [H, O_{x\lambda_i}^\dagger]]^\Gamma || \Delta \rangle, \\
\langle \Delta || (O_{y\bar{\lambda}_j} \times O_{x\lambda_i}^\dagger)^\Gamma || \Delta \rangle &= \langle \Delta || [O_{y\bar{\lambda}_j}, O_{x\lambda_i}^\dagger]^\Gamma || \Delta \rangle,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

wobei die Notation $[\dots]^\lambda$ bedeutet:

$$[R^{\lambda_1}, S^{\lambda_2}]^\lambda = (R^{\lambda_1} \times S^{\lambda_2})^\lambda - (S^{\lambda_2} \times R^{\lambda_1})^\lambda. \tag{3.40}$$

Da $|\Delta\rangle$ nach Konstruktion ein Eigenzustand des Hamiltonoperators H ist, kann man die Kommutatoren aus Gleichung (3.39) durch symmetrisierte Doppelkommutatoren (Definition siehe (A.8)) ausdrücken und erhält aus Gleichung (3.38) die Tensor-Equation-Of-Motion:

$$\begin{aligned}
& \sum_{i,j,\Gamma} (-1)^{2\Delta-\Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta\lambda_j\Delta\lambda_i; \Lambda\Gamma) \langle \Delta || [O_{y\bar{\lambda}_j}, [H, O_{x\lambda_i}^\dagger]]^\Gamma || \Delta \rangle = \\
& (E_\Lambda - E_\Delta) \sum_{i,j,\Gamma} (-1)^{2\Delta-\Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta\lambda_j\Delta\lambda_i; \Lambda\Gamma) \langle \Delta || [O_{y\bar{\lambda}_j}, O_{x\lambda_i}^\dagger]^\Gamma || \Delta \rangle.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Es sei angemerkt, daß diese Form der Tensor-Equation-Of-Motion nur bis auf einen Phasenfaktor der in [Ha92, RN75] entspricht, da in dieser Arbeit eine unterschiedliche Phasenkonvention benutzt wird.

Um die Tensor-RPA-Gleichungen zu erhalten, muß man in obige Gleichung jetzt den RPA-Ansatz für die Anregungsoperatoren einsetzen.

3.5 Tensor-RPA

Die Ergebnisse aus Abschnitt 3.3 berücksichtigend macht man folgenden Ansatz für die Anregungsoperatoren $O_{x\lambda_k}^\dagger$ und $O_{y\bar{\lambda}_l}$ (Um die Schreibweise so einfach wie möglich zu halten, werden die Quantenzahlen x und y nicht explizit in der Entwicklung ausgeschrieben.):

$$\begin{aligned} O_{x\lambda_k}^\dagger &= \sum_{\alpha} X_{\alpha}(\lambda_k) A_{\alpha}^\dagger(\lambda_k) - Y_{\alpha}(\lambda_k) A_{\alpha}(\bar{\lambda}_k), \\ O_{y\bar{\lambda}_l} &= \sum_{\beta} X_{\beta}^*(\lambda_l) A_{\beta}(\bar{\lambda}_l) - Y_{\beta}^*(\lambda_l) A_{\beta}^\dagger(\lambda_l). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Die Operatoren $A_{\alpha}^\dagger(\lambda_k)$, $A_{\alpha}(\bar{\lambda}_k)$, $A_{\beta}(\bar{\lambda}_l)$ und $A_{\beta}^\dagger(\lambda_l)$ sind genau die im Abschnitt 3.3 beschriebenen Teilchen-Loch-Operatoren. α entspricht einem Teilchen-Loch-Paar (mi) und β analog einem Paar (nj).

Setzt man diese Operatoren in Gleichung (3.41) ein und berücksichtigt man dabei, daß der Zustand $\langle\langle y\bar{\lambda} |$ bis auf die Tensorstufe beliebig gewählt ist, kann man das Ergebnis in folgender Matrixschreibweise zusammenfassen:

$$\begin{pmatrix} M^{(1)} & -M^{(2)} \\ M^{(3)} & -M^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\alpha k} \\ Y_{\alpha k} \end{pmatrix} = (E_{\Lambda} - E_{\Delta}) \begin{pmatrix} N^{(1)} & -N^{(2)} \\ N^{(3)} & -N^{(4)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{\alpha k} \\ Y_{\alpha k} \end{pmatrix}, \quad (3.43)$$

wobei für die Untermatrizen M und N gilt:

$$\begin{aligned} M_{\beta l, \alpha k}^{(1)} &= \sum_{\Gamma} (-1)^{2\Delta - \Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta \lambda_l \Delta \lambda_k; \Gamma \Lambda) \langle \Delta || [A_{\beta}(\bar{\lambda}_l), H, A_{\alpha}^\dagger(\lambda_k)]^{\Gamma} || \Delta \rangle, \\ M_{\beta l, \alpha k}^{(2)} &= \sum_{\Gamma} (-1)^{2\Delta - \Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta \lambda_l \Delta \lambda_k; \Gamma \Lambda) \langle \Delta || [A_{\beta}(\bar{\lambda}_l), H, A_{\alpha}(\bar{\lambda}_k)]^{\Gamma} || \Delta \rangle, \\ M_{\beta l, \alpha k}^{(3)} &= \sum_{\Gamma} (-1)^{2\Delta - \Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta \lambda_l \Delta \lambda_k; \Gamma \Lambda) \langle \Delta || [A_{\beta}^\dagger(\lambda_l), H, A_{\alpha}^\dagger(\lambda_k)]^{\Gamma} || \Delta \rangle, \\ M_{\beta l, \alpha k}^{(4)} &= \sum_{\Gamma} (-1)^{2\Delta - \Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta \lambda_l \Delta \lambda_k; \Gamma \Lambda) \langle \Delta || [A_{\beta}^\dagger(\lambda_l), H, A_{\alpha}(\bar{\lambda}_k)]^{\Gamma} || \Delta \rangle, \\ N_{\beta l, \alpha k}^{(1)} &= \sum_{\Gamma} (-1)^{2\Delta - \Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta \lambda_l \Delta \lambda_k; \Gamma \Lambda) \langle \Delta || [A_{\beta}(\bar{\lambda}_l), A_{\alpha}^\dagger(\lambda_k)]^{\Gamma} || \Delta \rangle, \\ N_{\beta l, \alpha k}^{(2)} &= \sum_{\Gamma} (-1)^{2\Delta - \Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta \lambda_l \Delta \lambda_k; \Gamma \Lambda) \langle \Delta || [A_{\beta}(\bar{\lambda}_l), A_{\alpha}(\bar{\lambda}_k)]^{\Gamma} || \Delta \rangle, \\ N_{\beta l, \alpha k}^{(3)} &= \sum_{\Gamma} (-1)^{2\Delta - \Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta \lambda_l \Delta \lambda_k; \Gamma \Lambda) \langle \Delta || [A_{\beta}^\dagger(\lambda_l), A_{\alpha}^\dagger(\lambda_k)]^{\Gamma} || \Delta \rangle, \\ N_{\beta l, \alpha k}^{(4)} &= \sum_{\Gamma} (-1)^{2\Delta - \Gamma} \hat{\Gamma} W(\Delta \lambda_l \Delta \lambda_k; \Gamma \Lambda) \langle \Delta || [A_{\beta}^\dagger(\lambda_l), A_{\alpha}(\bar{\lambda}_k)]^{\Gamma} || \Delta \rangle. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Der Vollständigkeit halber sei die Notation kurz wiederholt. Δ bezeichnet die Tensorstufe des Grundzustandes, Λ die des angeregten Zustandes.

λ_k und λ_l können Werte zwischen $|\Delta - \Lambda|$ und $|\Delta + \Lambda|$ annehmen. Die Summe über Γ erstreckt sich über alle Werte Γ , für die die Racah-Koeffizienten nicht verschwinden.

Wie bei der Motivation zur Tensor-RPA bereits erwähnt wurde, besitzt das Nukleon in doppelter Hinsicht einen nicht-skalaren Grundzustand. Somit muß man den Tensor-RPA-Formalismus sowohl für den Isospin als auch für den Gesamtdrehimpuls J benutzen. Die Verallgemeinerung auf den Produktraum aus Isospin und Gesamtdrehimpuls bereitet jedoch keinerlei Probleme. Hierfür hat man jedes Symbol, das eine Tensorstufe bzw. eine Komponente eines solchen Tensors bezeichnet, einfach als ein Drehimpuls-Isospin-Dublett (J, T) zu interpretieren. Möchte man diese Dublettschreibweise wieder auflösen, muß man alle Funktionen, die von solchen Dubletts abhängen, wie z. B. die Racah-Koeffizienten oder Summationen, durch die entsprechenden Produktfunktionen ersetzen. Dies ist so einfach möglich, da es sich um disjunkte Vektorräume handelt. Es gilt einfach

$$f(\Gamma_1, \dots, \Gamma_n) = f(J_1, \dots, J_n) f(T_1, \dots, T_n). \quad (3.45)$$

In Anbetracht der Tatsache, daß in dieser Arbeit die starke Wechselwirkung durch eine lokale Farbstromwechselwirkung modelliert wird, auf welche im vorherigen Kapitel bereits näher eingegangen wurde, läßt sich bereits an dieser Stelle die Frage stellen, ob auch bezüglich der Color-SU(3) ein gekoppelter Formalismus, wie oben hergeleitet, benutzt werden muß.

Dies ist jedoch nicht notwendig, da sowohl Grundzustand als auch die angeregten Zustände Color-Singletts sind, woraus folgt, daß auch die Anregungsoperatoren ebenfalls diese Eigenschaft besitzen. Alle Tensoren sind somit von der Tensorstufe 0, und der Kopplungsformalismus reduziert sich auf den trivialen Fall keiner expliziten Kopplung.

Die Berechnung der Matrixelemente M und N mit einem Hamiltonoperator der Gestalt $H = H_{MF} + H_{Rest}$ ist ausführlich in der Arbeit von Hardt [Ha92] behandelt worden, und es soll daher hier nicht weiter darauf eingegangen werden.

3.6 Normierung im Tensor-RPA-Fall

Im Fall der ungekoppelten RPA ist die Normierung der angeregten Zustände und damit die Normierungsbedingung für die Koeffizienten X_{mi} und Y_{mi} leicht zu erhalten. In der Quasi-Bosonen-Näherung lautet sie:

$$\sum_{mi} |X_{mi}|^2 - |Y_{mi}|^2 = 1. \quad (3.46)$$

Die Normierung der angeregten Zustände im Rahmen der Tensor-RPA gestaltet sich jedoch etwas komplizierter. Man fordert analog für die Zustände $|\Lambda_1\mu_1\rangle$ und $|\Lambda_2\mu_2\rangle$:

$$\langle \Lambda_1\mu_1 | \Lambda_2\mu_2 \rangle = \delta_{\Lambda_1, \Lambda_2} \delta_{\mu_1, \mu_2}. \quad (3.47)$$

Durch den Kopplungsmechanismus ist bereits sichergestellt, daß die Zustände orthogonal sind; d. h. es steht nur noch aus, nachfolgende Normierungsbedingung zu erfüllen:

$$\langle \Lambda\mu | \Lambda\mu \rangle = 1. \quad (3.48)$$

Stellt man beide Zustände in Form von Grundzustandanregungen dar, erhält man:

$$\langle \Lambda\mu | \Lambda\mu \rangle = (-1)^{-\Lambda+\mu} \sum_{\lambda_k} \sum_{\lambda_l} (\langle \bar{\Delta} | \times O_{\bar{\lambda}_k})_{-\mu}^{\Lambda} (O_{\lambda_l}^{\dagger} \times |\Delta\rangle)_{\mu}^{\Lambda}. \quad (3.49)$$

Führt man dann die Kopplung aus und benutzt einige Relationen aus Anhang B, läßt sich die Gleichung nach kurzer Rechnung reduzieren auf:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda\mu | \Lambda\mu \rangle &= \sum_{\lambda_k, \lambda_l} \sum_{\mu_k, \mu_l} \sum_{\tilde{\mu}_{\Delta}, \mu_{\Delta}} \langle \Delta\lambda_k \tilde{\mu}_{\Delta} \mu_k | \Lambda\mu \rangle \langle \lambda_l \Delta\mu_l \mu_{\Delta} | \Lambda\mu \rangle \\ &\quad \cdot \langle \Delta\tilde{\mu}_{\Delta} | [O(\lambda_k \mu_k), O^{\dagger}(\lambda_l \mu_l)] | \Delta\mu_{\Delta} \rangle. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Um eine Normierungsbedingung für die RPA-Koeffizienten X_{mi} und Y_{mi} analog zu Gleichung (3.46) zu erhalten, muß das Matricelement mit der expliziten Darstellung der Anregungsoperatoren in RPA-Gestalt berechnet werden.

Hierbei ist es sinnvoll, zunächst nur den Kommutator zu betrachten. Setzt man die RPA-Anregungsoperatoren explizit ein, so erhält man:

$$\begin{aligned}
[O(\lambda_k \mu_k), O^\dagger(\lambda_l \mu_l)] &= \sum_{mi} \sum_{nj} \\
&X_{nj}^* X_{mi} [A_{nj}(\lambda_k \mu_k), A_{mi}^\dagger(\lambda_l \mu_l)] + Y_{nj}^* Y_{mi} [A_{nj}^\dagger(\bar{\lambda}_k \mu_k), A_{mi}(\bar{\lambda}_l \mu_l)] \\
&- Y_{nj}^* X_{mi} [A_{nj}^\dagger(\bar{\lambda}_k \mu_k), A_{mi}^\dagger(\lambda_l \mu_l)] - X_{nj}^* Y_{mi} [A_{nj}(\lambda_k \mu_k), A_{mi}(\bar{\lambda}_l \mu_l)]. \quad (3.51)
\end{aligned}$$

Für den Fall eines skalaren Grundzustandes kann man aus Gleichung (3.51) die Normierungsbedingung in Quasi-Bosonen-Näherung leicht ableiten. Sie reduziert sich nach kurzer Rechnung erwartungsgemäß auf Gleichung (3.46).

Der nicht-skalare Charakter des Grundzustandes erfordert, eine explizite Darstellung der Teilchen-Loch-Operatoren einzusetzen. Mit Hilfe der Gleichungen (3.11) und (3.12) läßt sich der Kommutator aus Gleichung (3.51) in expliziter Darstellung der Teilchen-Loch-Operatoren bestimmen, und man erhält als Resultat:

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda \mu | \Lambda \mu \rangle &= \sum_{\lambda_k, \lambda_l} \sum_{\mu_k, \mu_l} \sum_{\tilde{\mu}_\Delta, \mu_\Delta} \sum_{nj} \sum_{mi} \sum_{\mu_n, \mu_j} \sum_{\mu_m, \mu_i} \langle \Delta \lambda_k \tilde{\mu}_\Delta \mu_k | \Lambda \mu \rangle \langle \lambda_l \Delta \mu_l \mu_\Delta | \Lambda \mu \rangle \\
&\left(X_{nj}^* X_{mi} (-1)^{\lambda_j + \lambda_i - \mu_j - \mu_i} \langle \lambda_n \lambda_j \mu_n - \mu_j | \lambda_k \mu_k \rangle \right. \\
&\cdot \langle \lambda_m \lambda_i \mu_m - \mu_i | \lambda_l \mu_l \rangle \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_j^\dagger a_i \delta_{mn} - a_m^\dagger a_n \delta_{ij} | \Delta \mu_\Delta \rangle \\
&- Y_{nj}^* Y_{mi} (-1)^{\lambda_k + \lambda_l + \lambda_j + \lambda_i + \mu_k + \mu_l - \mu_j - \mu_i} \langle \lambda_n \lambda_j \mu_n - \mu_j | \lambda_k - \mu_k \rangle \\
&\cdot \langle \lambda_m \lambda_i \mu_m - \mu_i | \lambda_l - \mu_l \rangle \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_i^\dagger a_j \delta_{mn} - a_n^\dagger a_m \delta_{ij} | \Delta \mu_\Delta \rangle \\
&- Y_{nj}^* X_{mi} (-1)^{\lambda_k + \lambda_j + \lambda_i + \mu_k - \mu_j - \mu_i} \langle \lambda_n \lambda_j \mu_n - \mu_j | \lambda_k - \mu_k \rangle \\
&\cdot \langle \lambda_m \lambda_i \mu_m - \mu_i | \lambda_l \mu_l \rangle \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_n^\dagger a_i \delta_{mj} - a_m^\dagger a_j \delta_{ni} | \Delta \mu_\Delta \rangle \\
&- X_{nj}^* Y_{mi} (-1)^{\lambda_l + \lambda_j + \lambda_i + \mu_l - \mu_j - \mu_i} \langle \lambda_n \lambda_j \mu_n - \mu_j | \lambda_k \mu_k \rangle \\
&\cdot \langle \lambda_m \lambda_i \mu_m - \mu_i | \lambda_l - \mu_l \rangle \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_j^\dagger a_m \delta_{in} - a_i^\dagger a_n \delta_{mj} | \Delta \mu_\Delta \rangle \Big). \quad (3.52)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe der Einordnung im Kapitel 4, wo die verschiedenen Anregungstypen klassifiziert werden, kann man sehen, daß sich die letzten beiden Terme nur auf Anregungen in der Valenzschale beziehen. Dabei ist gemeint, daß sowohl

Teilchen als auch Loch in der Valenzschale liegen. Bei der Berechnung der Formfaktoren im Rahmen dieses Modells werden jedoch genau solche Moden nicht berücksichtigt. Vernachlässigt man diese Terme auch hier, ist zwischen der hier erhaltenen Fassung der Normierungsbedingung und Gleichung (3.46) eine formale Ähnlichkeit zu entdecken.

Kapitel 4

Hadronische Formfaktoren

In der Quantenfeldtheorie wird das System durch die Quantenfelder der „elementaren“ Teilchen und Wechselwirkungen zwischen diesen Feldern beschrieben. Diese Teilchen werden zunächst als punktförmig angenommen. Akzeptiert man die QCD als die Theorie der starken Wechselwirkung, sind in diesem Fall die elementaren Teilchen Quarks und Gluonen.

Möchte man hadronische Zustände beschreiben, ist bereits aus der obigen Tatsache klar, daß diese Zustände nicht-elementare Teilchen sind. Um der inneren Struktur der Hadronen Rechnung zu tragen, führt man daher sogenannte Formfaktoren ein.

Die am besten untersuchten Fälle sind die elektromagnetischen Ladungsformfaktoren für Grundzustände und Übergänge in angeregte Zustände [Do94]. Betrachtet man die Streuung von unpolarisierten Elektronen an einer statischen, spinlosen Ladungsverteilung, so sieht man, daß sich der gesamte Wirkungsquerschnitt als Produkt des Wirkungsquerschnitts einer punktförmigen Ladungsverteilung und einer Funktion $F(q^2)$ schreiben läßt:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right) = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Punkt}} \cdot |F(q^2)|^2. \quad (4.1)$$

q bezeichnet hierbei den Impulsübertrag zwischen der Ladungsverteilung und dem Streuelektron. Die Funktion $F(q^2)$ bezeichnet man als Formfaktor. Diese ist gerade die Fouriertransformierte der räumlich-ausgedehnten Ladungsverteilung [Ma84].

In diesem Kapitel sollen im Rahmen der Tensor-RPA, welche hier die starke Wechselwirkung auf Quark-Ebene modelliert, Übergangsformfaktoren des Nukleons berechnet werden. Sowohl der Grundzustand als auch das Mean-Field werden durch ein erweitertes Bag-Modell angenähert. Die eigentliche

starke Wechselwirkung wird durch eine $SU(3)$ -Farbstromwechselwirkung als Restwechselwirkung in den RPA-Hamiltonoperator eingefügt.

4.1 Nukleon-Übergangsformfaktoren

Verändert das Targetnukleon bei einer Reaktion mit einem externen Feld seinen Zustand, d. h. geht es in einen angeregten Zustand über, kann man einen sogenannten Übergangsformfaktor für diesen Prozeß berechnen. Dieser trägt, wie auch die anderen Formfaktoren, der Tatsache Rechnung, daß das Nukleon kein Punktteilchen ist, sondern eine innere Struktur besitzt.

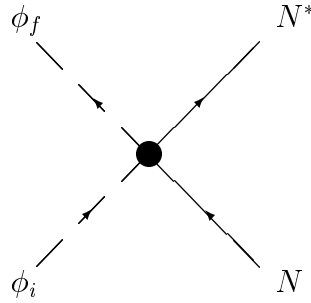


Abbildung 4.1: Anregung des Nukleons durch Wechselwirkung mit einem externen Feld

Eine solche Reaktion ist in Abbildung 4.1 gezeigt. Das äußere Feld ist hierbei zunächst beliebig. Das dazugehörige Matrixelement läßt sich formal einfach beschreiben. Es lautet:

$$\langle \phi_f N^* | \hat{T} | \phi_i N \rangle. \quad (4.2)$$

Der Vertex wird hierbei repräsentiert durch den Übergangsoperator $\hat{T}$, welchen man in Form einer Strom-Strom-Kopplung parametrisieren kann:

$$\hat{T} = \hat{T}_{NN^*}^\alpha \hat{T}_\alpha^{\phi_i \phi_f}. \quad (4.3)$$

Bei dieser Parametrisierung wirkt $\hat{T}_{NN^*}^\alpha$ nur im Raum der Zustände $\langle N^* |$ und $| N \rangle$, $\hat{T}_\alpha^{\phi_i \phi_f}$ analog nur auf die Felder $\langle \phi_f |$ und $| \phi_i \rangle$. Mit dem Index α werden

Kontraktionen über die Dirac-Struktur und innere Quantenzahlen berücksichtigt. Für das Matrixelement folgt in dieser Schreibweise:

$$\langle \phi_f N^* | \hat{T} | \phi_i N \rangle = \langle \phi_f | \hat{T}_\alpha^{\phi_i \phi_f} | \phi_i \rangle \langle N^* | \hat{T}_{NN^*}^\alpha | N \rangle. \quad (4.4)$$

Den nukleonischen Anteil von $\hat{T}$, der $N \rightarrow N^*$ beschreibt, entwickelt man gemäß

$$\hat{T}_{NN^*}^\alpha = g \bar{\psi} \Gamma^\alpha \psi, \quad (4.5)$$

wobei die Operatoren $\bar{\psi} \Gamma^\alpha \psi$ den nachfolgenden invarianten Dirac-Bilinearformen entsprechen [PS95]; g bezeichnet die Kopplungskonstante:

$\bar{\psi} \psi$	skalar,	
$\bar{\psi} \gamma^\mu \psi$	vektoriell,	
$\bar{\psi} \sigma^{\mu\nu} \psi = \bar{\psi} \frac{i}{2} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \psi$	tensoriell,	(4.6)
$\bar{\psi} \gamma^5 \psi$	pseudo-skalar,	
$\bar{\psi} \gamma^\mu \gamma^5 \psi$	pseudo-vektoriell.	

Die oben aufgeführten Terme beinhalten zunächst nur Wechselwirkungen im Dirac-Raum. Die Erweiterung auf den Isospin-Raum wird in Abschnitt 4.4 behandelt.

Zur Berechnung von Übergangsformfaktoren des Nukleons genügt es offensichtlich,

$$F_{NN^*}^\alpha = \langle N^* | \hat{T}_{NN^*}^\alpha | N \rangle \quad (4.7)$$

zu betrachten. Stellt man das Matrixelement aus Gleichung (4.4) im Ortsraum dar und geht gleichzeitig von einer lokalen Wechselwirkung aus, erhält man:

$$\int d^4x e^{i(E_f - E_i + E_{N^*} - E_N)t} \langle \phi_f | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \hat{T}_\alpha^{\phi_i \phi_f} | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \phi_i \rangle \langle N^* | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | \hat{T}_{NN^*}^\alpha | \vec{x} \rangle \langle \vec{x} | N \rangle \quad (4.8)$$

Führt man die Zeitintegration durch, folgt

$$\langle \phi_f N^* | \hat{T} | \phi_i N \rangle = 2\pi \delta(E_f - E_i + E_{N^*} - E_N) \int d^3x j_{NN^*}^\alpha(\vec{x}) j_\alpha^{ext}(\vec{x}). \quad (4.9)$$

Die δ -Funktion bzgl. der Energie entspricht gerade der Energieerhaltung am Vertex. Außerdem wird hier noch einmal sehr deutlich, daß das externe Feld zur Berechnung des Formfaktors keine direkte Rolle spielt, da dieser nur vom Strom $j_{NN^*}^\alpha(\vec{x})$ abhängt.

Geht man bei den externen Feldern von freien Punktteilchen aus, läßt sich der externe Strom schreiben als:

$$j_\alpha^{ext}(\vec{x}) = A_\alpha e^{i(\vec{k}_i - \vec{k}_f)\vec{x}}. \quad (4.10)$$

Für die Impulsraumdarstellung folgt in diesem Fall unmittelbar:

$$\langle \phi_f N^* | \hat{T} | \phi_i N \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k_f - k_i + k_{N^*} - k_N) \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} A_\alpha j_{NN^*}^\alpha(\vec{p}), \quad (4.11)$$

wobei $\vec{p} = \vec{k}_{N^*} - \vec{k}_N$ genau dem Impulsübertrag bei dieser Reaktion entspricht.

4.2 Übergangsformfaktor in RPA-Näherung

Wie schon im vorherigen Abschnitt erläutert, entspricht der Strom $j_{NN^*}^\alpha(\vec{x})$ dem Formfaktor. Da die zeitliche Komponente bereits ausintegriert wurde, entspricht dieser Strom gerade dem stationären Übergangsmatrixelement im Ortsraum

$$\langle N^* | \hat{T}_{NN^*}^\alpha | N \rangle. \quad (4.12)$$

Den angeregten Zustand N^* muß man nun im Rahmen eines Modells des Nukleons beschreiben. Der Übersicht und Konsistenz halber wird dieselbe Notation wie in Kapitel 3 benutzt. Der angeregte Zustand $\langle N^* |$ sei von der Tensorstufe Λ , wobei sich diese Tensorstufe auf den Produktraum von Drehimpuls und Isospin bezieht. Des weiteren sei der Grundzustand $|N\rangle$ gegeben als ein Zustand der Stufe Δ .

Da an dieser Stelle noch nicht spezifiziert werden soll, ob man es mit polarisierten Zuständen zu tun hat, muß man sich eine beliebige Zustandskonfiguration für Anfangs- und Endzustand auswählen. In diesem Zusammenhang bedeutet Polarisation eine Ausrichtung von Drehimpuls und Isospin. Das Mittelungsverfahren über Anfangs- und Endzustände muß am Ende dem Experiment angepaßt werden:

$$\langle N^* | \hat{T}^\alpha | N \rangle \equiv \langle \Lambda \mu_\Lambda | \hat{T}^\alpha | \Delta \mu_\Delta \rangle. \quad (4.13)$$

Unter Berücksichtigung der Relation

$$\langle \bar{\Lambda} \mu_\Lambda | = \sum_{\lambda_k} (\langle \bar{\Delta} | \times O_{\bar{\lambda}_k})_{\mu_\Lambda}^\Lambda, \quad (4.14)$$

welche sich leicht bestätigen läßt, kann man den angeregten Zustand $\langle \Lambda \mu_\Lambda |$ als eine Anregung des Grundzustandes beschreiben:

$$\begin{aligned} \langle \Lambda \mu_\Lambda | &= \sum_{\lambda_k} (-1)^{-\Lambda + \mu_\Lambda} (\langle \bar{\Delta} | \times O_{\bar{\lambda}_k})_{-\mu_\Lambda}^\Lambda \\ &= \sum_{\lambda_k} \sum_{\tilde{\mu}_\Delta, \mu_k} \langle \Delta \lambda_k \tilde{\mu}_\Delta \mu_k | \Lambda \mu_\Lambda \rangle \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | O(\lambda_k \mu_k). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Berücksichtigt man die Forderung $O(\lambda_k \mu_k) |\Delta \mu_\Delta\rangle = 0$, läßt sich das komplette Matrixelement schreiben als:

$$\langle N^* | \hat{T}^\alpha | N \rangle = \sum_{\lambda_k} \sum_{\tilde{\mu}_\Delta, \mu_k} \langle \Delta \lambda_k \tilde{\mu}_\Delta \mu_k | \Lambda \mu_\Lambda \rangle \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | [O(\lambda_k \mu_k), \hat{T}^\alpha] | \Delta \mu_\Delta \rangle. \quad (4.16)$$

Die Berechnung des Übergangsformfaktors ist somit reduziert auf die Auswertung des Matrixelements des Kommutators $[O(\lambda_k \mu_k), \hat{T}^\alpha]$ bzgl. einer bestimmten Grundzustandskombination.

Setzt man die RPA-Entwicklung des Anregungsoperators $O(\lambda_k \mu_k)$ in obigen Kommutator ein, erhält man:

$$[O(\lambda_k \mu_k), \hat{T}^\alpha] = \sum_{mi} X_{mi}^* [A_{mi}(\lambda_k \mu_k), \hat{T}^\alpha] - Y_{mi}^* [A_{mi}^\dagger(\bar{\lambda}_k \mu_k), \hat{T}^\alpha]. \quad (4.17)$$

Schreibt man nun die Operatoren $A_{mi}^\dagger$ und A_{mi} explizit aus, erhält man für das komplette Matrixelement:

$$\begin{aligned} \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | [O(\lambda_k \mu_k), \hat{T}^\alpha] | \Delta \mu_\Delta \rangle &= \sum_{mi} \sum_{\mu_m, \mu_i} (-1)^{\lambda_i - \mu_i} \\ &\left(X_{mi}^*(\lambda_k \mu_k) \langle \lambda_m \lambda_i \mu_m - \mu_i | \lambda_k \mu_k \rangle \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | [a_i^\dagger a_m, \hat{T}^\alpha] | \Delta \mu_\Delta \rangle \right. \\ &\left. - (-1)^{\lambda_k + \mu_k} Y_{mi}^*(\lambda_k \mu_k) \langle \lambda_m \lambda_i \mu_m - \mu_i | \lambda_k - \mu_k \rangle \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | [a_m^\dagger a_i, \hat{T}^\alpha] | \Delta \mu_\Delta \rangle \right). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Für die weitere Rechnung ist es sinnvoll, die Quarkfelder ψ und $\bar{\psi}$ nicht in der üblichen Normalmodenentwicklung auszuschreiben, sondern die Felder bzgl.

der Mean-Field-Einteilchenbasis aus Kapitel 2 zu entwickeln. Die Entwicklung lautet in diesem Fall:

$$\psi(\vec{x}) = \sum_{\tilde{i}} \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}) a_{\tilde{i}} + \sum_{\tilde{m}} \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}) a_{\tilde{m}} \quad (4.19)$$

und analog

$$\bar{\psi}(\vec{x}) = \sum_{\tilde{j}} \bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) a_{\tilde{j}}^{\dagger} + \sum_{\tilde{n}} \bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) a_{\tilde{n}}^{\dagger}. \quad (4.20)$$

Die Indizes $\tilde{i}$ und $\tilde{j}$ beziehen sich hierbei auf Zustände unterhalb, $\tilde{m}$ und $\tilde{n}$ auf Zustände oberhalb der Fermikante. An dieser Stelle sei schon angemerkt, daß im Fall des in dieser Arbeit verwendeten Modells für den Nukleongrundzustand keine scharfe Fermikante existiert, da die Valenzschale nicht voll besetzt ist. Valenzschalenzustände kommen daher sowohl in der ersten als auch in der zweiten Summe vor, was zur Folge hat, daß die Auswertung des Matrixelements komplizierter wird.

Setzt man die Entwicklung der Felder in Gleichung (4.5) ein, erhält man für den Übergangsoperator $\hat{T}^{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \hat{T}^{\alpha} = g & \left(\sum_{\tilde{j}, \tilde{i}} \bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) \Gamma^{\alpha} \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}) a_{\tilde{j}}^{\dagger} a_{\tilde{i}} + \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}} \bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) \Gamma^{\alpha} \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}) a_{\tilde{n}}^{\dagger} a_{\tilde{m}} \right. \\ & \left. + \sum_{\tilde{n}, \tilde{i}} \bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) \Gamma^{\alpha} \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}) a_{\tilde{n}}^{\dagger} a_{\tilde{i}} + \sum_{\tilde{j}, \tilde{m}} \bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) \Gamma^{\alpha} \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}) a_{\tilde{j}}^{\dagger} a_{\tilde{m}} \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Betrachtet man Gleichung (4.18) mit einem solchen Operator $\hat{T}^{\alpha}$, erkennt man sofort, daß sich die Berechnung des Übergangsformfaktors auf die Berechnung von acht Kommutatormatrixelementen reduzieren läßt. Diese Kommutatoren wurden bereits in Kapitel 3 bestimmt. Setzt man die Ergebnisse ein, erhält man schließlich:

$$\begin{aligned} \langle \Delta \tilde{\mu}_{\Delta} | [O(\lambda_k \mu_k), \hat{T}^{\alpha}] | \Delta \mu_{\Delta} \rangle &= \sum_{mi} \sum_{\mu_m, \mu_i} (-1)^{\lambda_i - \mu_i} \\ & \left(X_{mi}^*(\lambda_k \mu_k) < \lambda_m \lambda_i \mu_m - \mu_i | \lambda_k \mu_k > \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \cdot \left(\sum_{\tilde{j}, \tilde{i}} \bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}) \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_i^\dagger a_{\tilde{i}} \delta_{m\tilde{j}} - a_j^\dagger a_m \delta_{i\tilde{i}} | \Delta \mu_\Delta \rangle \right. \\
& + \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}} \bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}) \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_i^\dagger a_{\tilde{m}} \delta_{m\tilde{n}} - a_n^\dagger a_m \delta_{i\tilde{m}} | \Delta \mu_\Delta \rangle \\
& + \sum_{\tilde{n}, \tilde{i}} \bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}) \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_i^\dagger a_{\tilde{i}} \delta_{m\tilde{n}} - a_n^\dagger a_m \delta_{i\tilde{i}} | \Delta \mu_\Delta \rangle \\
& \left. + \sum_{\tilde{j}, \tilde{m}} \bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}) \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_i^\dagger a_{\tilde{m}} \delta_{m\tilde{j}} - a_j^\dagger a_m \delta_{i\tilde{m}} | \Delta \mu_\Delta \rangle \right) \\
& - (-1)^{\lambda_k + \mu_k} Y_{mi}^*(\lambda_k \mu_k) < \lambda_m \lambda_i \mu_m - \mu_i | \lambda_k - \mu_k > \\
& \cdot \left(\sum_{\tilde{j}, \tilde{i}} \bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}) \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_m^\dagger a_{\tilde{i}} \delta_{i\tilde{j}} - a_j^\dagger a_i \delta_{m\tilde{i}} | \Delta \mu_\Delta \rangle \right. \\
& + \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}} \bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}) \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_m^\dagger a_{\tilde{m}} \delta_{i\tilde{n}} - a_n^\dagger a_i \delta_{m\tilde{m}} | \Delta \mu_\Delta \rangle \\
& + \sum_{\tilde{n}, \tilde{i}} \bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}) \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_m^\dagger a_{\tilde{i}} \delta_{i\tilde{n}} - a_n^\dagger a_i \delta_{m\tilde{i}} | \Delta \mu_\Delta \rangle \\
& \left. + \sum_{\tilde{j}, \tilde{m}} \bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}) \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_m^\dagger a_{\tilde{m}} \delta_{i\tilde{j}} - a_j^\dagger a_i \delta_{m\tilde{m}} | \Delta \mu_\Delta \rangle \right) \Bigg) .
\end{aligned} \tag{4.22}$$

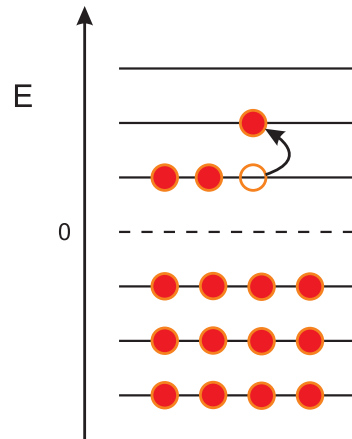
Die expliziten Darstellungen der verschiedenen Grundzustandskonfigurationen sind bereits in Abschnitt 2.5 angegeben worden. Somit lassen sich die Matrixelemente in Gleichung (4.22) prinzipiell bestimmen.

Bevor man das Matrixelement weiter auswertet, ist es zunächst jedoch sinnvoll, alle Anregungsmöglichkeiten zu betrachten. Wie schon vorher kurz erwähnt, besitzt das Nukleon in dem in dieser Arbeit verwendeten Modell für den Grundzustand keine scharfe Fermikante. Dies ist begründet in der Tatsache, daß die Valenzschale im Drehimpuls-Isospin-Raum 4-fach entartet ist ($J = \frac{1}{2}, T = \frac{1}{2}$), diese Schale jedoch nur mit drei Quarks besetzt ist.

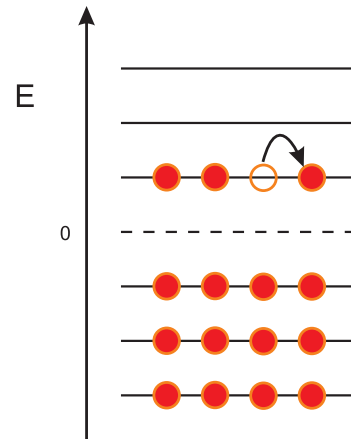
Es ist leicht nachzuvollziehen, daß es vier Typen von Anregungen gibt. Diese sind in Abbildung 4.2 gezeigt.

Anregungstyp 1 ist eine Anregung der Valenzquarks in höhere Zustände. Solche Anregungen entsprechen den Anregungen in nichtrelativistischen Modellen. Anregungen vom Typ 3 und 4 sind die zusätzlichen Dirac-See-Beiträge, die in eine relativistische Theorie einbezogen werden müssen. Anregungen des Typs 2 sind Anregungen in der Valenzschale. Diese treten nur dann auf, wenn keine

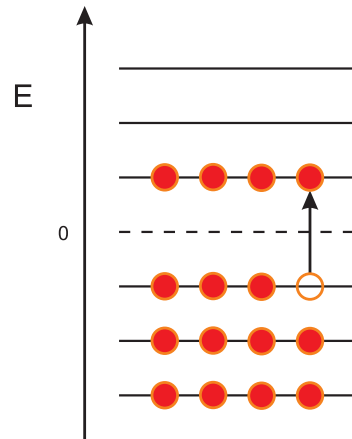
Typ 1



Typ 2



Typ 3



Typ 4

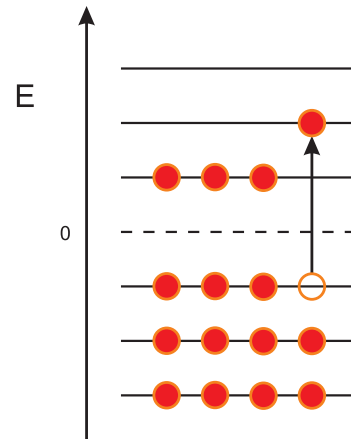


Abbildung 4.2: RPA-Anregungstypen für eine nicht-scharfe Fermikante

scharfe Fermikante existiert. Da die Valenzschale in diesem einfachen Modell des Grundzustandes energetisch entartet ist, haben diese Anregungen die Anregungsenergie 0. Solche Anregungen deuten auf das Auftreten von spuriosen Moden hin.

Es ist leicht einzusehen, daß solche Anregungen mit der Formulierung der Tensor-RPA in dieser Arbeit nicht beschrieben werden können. Betrachtet man den $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^+$ -Kanal, findet man als energetisch niedrigste Quarkkonfiguration die $\Delta(1232)$ -Resonanz. Auf Hartree-Fock-Ebene ist dieser Zustand mit dem Nukleongrundzustand entartet, weil ein zeitumkehrinvariantes Mean-Field benutzt wurde. Eine Anregung vom Typ 2 entspricht gerade dem Übergang vom Nukleon zur $\Delta(1232)$ -Resonanz. Ausgehend von der Bedingung, daß die Y_{mi} im Vergleich zu den X_{mi} sehr viel kleiner sein müssen, damit die Forderung

$$Q |0\rangle = 0 \quad (4.23)$$

näherungsweise erfüllt ist, stellt man fest, daß diese nicht erfüllt werden kann. Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren sind in diesem Fall äquivalent, und somit müssen auch die Amplituden Y_{mi} und X_{mi} von derselben Größenordnung sein. Dies ist jedoch gleichbedeutend mit der Nichterfüllung der Forderung (4.23). In der gegenwärtigen Formulierung der Tensor-RPA sind solche Anregungen daher nicht zu beschreiben.

In der Arbeit von Hardt [Ha96] ist beschrieben, wie man die Tensor-RPA modifizieren müßte, um auch solche Anregungen beschreiben zu können. Es bleibt jedoch auch nach dieser Modifikation zweifelhaft, ob damit eine gute Beschreibung der $\Delta(1232)$ -Resonanz erfolgen kann.

Im weiteren werden daher Anregungen in den $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^+$ -Kanal nicht betrachtet. Mit dieser Annahme läßt sich Gleichung (4.22) stark vereinfachen, man erhält:

$$\begin{aligned} \langle \Delta\tilde{\mu}_\Delta | [O(\lambda_k\mu_k), \hat{T}^\alpha] | \Delta\mu_\Delta \rangle &= \sum_{mi} \sum_{\mu_m, \mu_i} (-1)^{\lambda_i - \mu_i} \\ & X_{mi}^*(\lambda_k\mu_k) < \lambda_m \lambda_i \mu_m - \mu_i | \lambda_k \mu_k > \\ & \cdot \left(\sum_{\tilde{n}, \tilde{m}} \bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}) \langle \Delta\tilde{\mu}_\Delta | a_i^\dagger a_{\tilde{m}} \delta_{m\tilde{n}} | \Delta\mu_\Delta \rangle \right. \\ & - \sum_{\tilde{j}, \tilde{i}} \bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}) \langle \Delta\tilde{\mu}_\Delta | a_{\tilde{j}}^\dagger a_m \delta_{i\tilde{i}} | \Delta\mu_\Delta \rangle \\ & \left. + \sum_{\tilde{n}, \tilde{i}} \bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}) \langle \Delta\tilde{\mu}_\Delta | a_i^\dagger a_{\tilde{i}} \delta_{m\tilde{n}} - a_n^\dagger a_m \delta_{i\tilde{i}} | \Delta\mu_\Delta \rangle \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -(-1)^{\lambda_k + \mu_k} Y_{mi}^*(\lambda_k \mu_k) < \lambda_m \lambda_i \mu_m - \mu_i | \lambda_k - \mu_k > \\
& \cdot \left(\sum_{\tilde{j}, \tilde{i}} \bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}) \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_m^\dagger a_{\tilde{i}} \delta_{i\tilde{j}} | \Delta \mu_\Delta \rangle \right. \\
& - \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}} \bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}) \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_{\tilde{n}}^\dagger a_i \delta_{m\tilde{m}} | \Delta \mu_\Delta \rangle \\
& \left. + \sum_{\tilde{j}, \tilde{m}} \bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}) \langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_m^\dagger a_{\tilde{m}} \delta_{i\tilde{j}} - a_j^\dagger a_i \delta_{m\tilde{m}} | \Delta \mu_\Delta \rangle \right).
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Wertet man Gleichung (4.24) aus und setzt das Ergebnis in Gleichung (4.16) ein, erkennt man, daß das stationäre Übergangsmatrixelement bzw. der $N-N^*$ -Strom folgende formale Struktur besitzt:

$$j_{NN^*}^\alpha(\vec{x}) = \sum_{kl} a_{kl}(\Lambda \mu_\Lambda, \Delta \mu_\Delta) \bar{\varphi}_k(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_l(\vec{x}). \tag{4.25}$$

Die Koeffizienten a_{kl} lassen sich aus den Gleichungen (4.24) und (4.16) bestimmen.

Um Übergangsformfaktoren für explizite Prozesse zu berechnen, bleibt jetzt nur noch, die Funktionen $\bar{\varphi} \Gamma^\alpha \varphi$ für konkrete Darstellungen von Γ^α zu bestimmen.

4.3 Wechselwirkungen im Dirac-Raum

Zur expliziten Auswertung wird folgende, sich an Gleichung (2.2) anlehrende, kompakte Schreibweise für die Quarkwellenfunktionen φ_k benutzt:

$$\varphi_k(\vec{x}) = \begin{pmatrix} u_k \\ v_k \end{pmatrix}. \tag{4.26}$$

k bezeichnet hier einen Satz von Quantenzahlen. Im Dirac-Raum bezeichnet $k = (E_1 j_1 l_1 m_1)$ bzw. $l = (E_2 j_2 l_2 m_2)$ den vollständigen Satz von Einteilchen-Quantenzahlen einschließlich der Energieeigenwerte. Im Einzelnen ergibt sich für die isoskalaren Vertizes:

Skalare Wechselwirkung

$$\bar{\varphi}_k(\vec{x}) \varphi_l(\vec{x}) = u_k^\dagger u_l - v_k^\dagger v_l = \frac{1}{r^2} \left(F_k^* F_l \Omega_k^\dagger \Omega_l - G_k^* G_l \Omega_k'^\dagger \Omega_l' \right) \quad (4.27)$$

Pseudoskalare Wechselwirkung

$$\bar{\varphi}_k(\vec{x}) \gamma_5 \varphi_l(\vec{x}) = u_k^\dagger v_l - v_k^\dagger u_l = \frac{i}{r^2} \left(F_k^* G_l \Omega_k^\dagger \Omega_l' + G_k^* F_l \Omega_k'^\dagger \Omega_l \right) \quad (4.28)$$

Vektorielle Wechselwirkung

$$\bar{\varphi}_k(\vec{x}) \gamma_\mu \varphi_l(\vec{x}) \quad (4.29)$$

Die vier Komponenten lauten:

$$\bar{\varphi}_k(\vec{x}) \gamma_0 \varphi_l(\vec{x}) = u_k^\dagger u_l + v_k^\dagger v_l = \frac{1}{r^2} \left(F_k^* F_l \Omega_k^\dagger \Omega_l + G_k^* G_l \Omega_k'^\dagger \Omega_l' \right) \quad (4.30)$$

$$\bar{\varphi}_k(\vec{x}) \vec{\gamma} \varphi_l(\vec{x}) = u_k^\dagger \vec{\sigma} v_l + v_k^\dagger \vec{\sigma} u_l = \frac{i}{r^2} \left(F_k^* G_l \Omega_k^\dagger \vec{\sigma} \Omega_l' - G_k^* F_l \Omega_k'^\dagger \vec{\sigma} \Omega_l \right) \quad (4.31)$$

Pseudovektorielle Wechselwirkung

$$\bar{\varphi}_k(\vec{x}) \gamma_\mu \gamma_5 \varphi_l(\vec{x}) \quad (4.32)$$

Analog der vektoriellen Wechselwirkung wird auch die pseudovektorielle komponentenweise betrachtet.

$$\bar{\varphi}_k(\vec{x}) \gamma_0 \gamma_5 \varphi_l(\vec{x}) = u_k^\dagger v_l + v_k^\dagger u_l = \frac{i}{r^2} \left(F_k^* G_l \Omega_k^\dagger \Omega_l' - G_k^* F_l \Omega_k'^\dagger \Omega_l \right) \quad (4.33)$$

$$\bar{\varphi}_k(\vec{x}) \vec{\gamma} \gamma_5 \varphi_l(\vec{x}) = u_k^\dagger \vec{\sigma} u_l + v_k^\dagger \vec{\sigma} v_l = \frac{1}{r^2} \left(F_k^* F_l \Omega_k^\dagger \vec{\sigma} \Omega_l + G_k^* G_l \Omega_k'^\dagger \vec{\sigma} \Omega_l' \right) \quad (4.34)$$

Isovektorielle Prozesse werden durch Hinzufügen der Isospin-Matrizen beschrieben, sie werden im nächsten Abschnitt kurz diskutiert.

Winkelanteil der Wechselwirkungen

Betrachtet man den Winkelanteil genauer, so erkennt man zwei Kombinationen: $\Omega^\dagger \Omega$ und $\Omega^\dagger \vec{\sigma} \Omega$. Diese lassen sich einfach auswerten:

$$\begin{aligned} \Omega_k^\dagger \Omega_l &= \sum_{m_{l_1}, m_{l_2}} \sum_{m_{s_1}} \langle l_1 \frac{1}{2} m_{l_1} m_{s_1} | j_1 m_1 \rangle \langle l_2 \frac{1}{2} m_{l_2} m_{s_1} | j_2 m_2 \rangle \\ &\quad \cdot Y_{l_1 m_{l_1}}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_{l_2}}(\vartheta, \varphi) \delta_{m_{s_1} m_{s_2}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

und

$$\begin{aligned} \Omega_k^\dagger \vec{\sigma} \Omega_l = \sum_{m_{l_1}, m_{l_2}} \sum_{m_{s_1}, m_{s_2}} < l_1 \frac{1}{2} m_{l_1} m_{s_1} | j_1 m_1 > < l_2 \frac{1}{2} m_{l_2} m_{s_2} | j_2 m_2 > \\ \cdot Y_{l_1 m_{l_1}}^*(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_{l_2}}(\vartheta, \varphi) \chi_{m_{s_1}}^\dagger \vec{\sigma} \chi_{m_{s_2}}. \end{aligned} \quad (4.36)$$

Diese beiden Gleichungen lassen sich mit Hilfe des Entwicklungssatzes für Kugelflächenfunktionen (B.21) aus dem Anhang zu gutem Drehimpuls koppeln, jedoch soll in dieser Arbeit eine etwas andere Ableitung zur Berechnung von reduzierten Matrixelementen gewählt werden. Diese findet man in Abschnitt 4.5.

4.4 Wechselwirkungen im Isospin-Raum

Die Operatoren für die Wechselwirkungen im Isospin-Raum sind durch die τ -Matrizen gegeben. Diese entsprechen im Fall eines halbzahligen Isospins gerade den Paulispinmatrizen.

Wählt man die Darstellung in τ_+ , τ_- und τ_3 , wird die Wirkung dieser Operatoren offensichtlich. Zusammen mit der Relation $Q = \frac{1}{2}B + T_3$ sieht man, daß τ_+ die Ladung um 1 erhöht und τ_- die gegensätzliche Wirkung hat.

Betrachtet man nur Anregungen, bei der sich die Ladung des Targets nicht verändert, so folgt daraus, daß alle Isospin-Wechselwirkungsoperatoren nur aus Kombinationen von der Identität 1 und τ_3 bestehen können. Die ladungsändernden Operatoren τ_+ und τ_- sind in diesem Fall ausgeschlossen.

Die Operatoren, welche die Projektionsoperatoren der einzelnen Isospinkomponenten bilden, lauten wie folgt:

$$\frac{1}{2} (1 + \tau_3) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} (1 - \tau_3). \quad (4.37)$$

Der erste Operator projiziert die $+\frac{1}{2}$ -Komponente, der zweite die $-\frac{1}{2}$ -Komponente.

4.5 Multipolentwicklung des Übergangsoperators

Eine wesentliche Vereinfachung für praktische Rechnungen wird durch Multipoldarstellungen der Übergangsoperatoren erreicht. Insbesondere erhält man

mit Hilfe des Wigner-Eckhardt-Theorems eine Zerlegung in reduzierte Matrixelemente, die von den Spinorientierungen unabhängig sind.

Eine Darstellung des Operators zu gutem Drehimpuls bzw. Isospin erreicht man durch eine Multipolentwicklung in der jeweiligen Quantenzahl;

$$\hat{T}^\alpha = \sum_{\lambda, \nu} a_{\lambda \nu} \hat{T}_{\lambda \nu}^\alpha. \quad (4.38)$$

Die Form $\hat{T}_{\lambda \nu}^\alpha$ wird durch die Struktur $\hat{T}^\alpha$ festgelegt. In dieser Arbeit werden lokale Übergangsoperatoren betrachtet:

$$\hat{T}^\alpha = g \bar{\Psi} \Gamma^\alpha \Psi, \quad (4.39)$$

wobei g die Kopplungskonstante ist. Mit Gleichung (4.21) reduziert sich diese Entwicklung auf:

$$\hat{T}^\alpha = g \sum_{i,j} \bar{\varphi}_i(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_j(\vec{x}) a_i^\dagger a_j, \quad (4.40)$$

wobei i und j unabhängig über alle Einteilchenzustände laufen und für Zustände mit negativer Energie jeweils die zeitumgekehrten Operatoren aus Abschnitt 3.3 zu verwenden sind. Ändert Γ^α nicht Drehimpuls bzw. Isospin, kann man diese beiden Feldoperatoren wie gewohnt koppeln. Das Endergebnis enthält wieder alle notwendigen Phasenfaktoren. Für Vertizes mit räumlichen Monopol-Charakter ergibt sich:

$$\hat{T}^\alpha = g \sum_{i,j} \sum_{\lambda \nu} \langle \lambda_i \lambda_j \nu_i \nu_j | \lambda \nu \rangle (\bar{\varphi}_i \Gamma^\alpha \varphi_j)_\nu^\lambda a_i^\dagger a_j. \quad (4.41)$$

Eine entsprechende Beziehung gilt im Isospinraum. Entwickelt man nur bzgl. (j, m) , erhält man nachfolgende Multipolentwicklung für $\hat{T}^\alpha$:

$$\begin{aligned} \hat{T}^\alpha = g \sum_{j_\lambda, m_\lambda} & \left(\sum_{\tilde{j}, \tilde{i}} (-1)^{j_{\tilde{i}} - m_{\tilde{i}}} \langle j_{\tilde{j}} j_{\tilde{i}} m_{\tilde{j}} - m_{\tilde{i}} | j_\lambda m_\lambda \rangle (\bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}))_{m_\lambda}^{j_\lambda} a_{\tilde{j}}^\dagger a_{\tilde{i}} \right. \\ & + \sum_{\tilde{n}, \tilde{m}} (-1)^{j_{\tilde{m}} - m_{\tilde{m}}} \langle j_{\tilde{n}} j_{\tilde{m}} m_{\tilde{n}} - m_{\tilde{m}} | j_\lambda m_\lambda \rangle (\bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}))_{m_\lambda}^{j_\lambda} a_{\tilde{n}}^\dagger a_{\tilde{m}} \\ & + \sum_{\tilde{n}, \tilde{i}} (-1)^{j_{\tilde{i}} - m_{\tilde{i}}} \langle j_{\tilde{n}} j_{\tilde{i}} m_{\tilde{n}} - m_{\tilde{i}} | j_\lambda m_\lambda \rangle (\bar{\varphi}_{\tilde{n}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{i}}(\vec{x}))_{m_\lambda}^{j_\lambda} a_{\tilde{n}}^\dagger a_{\tilde{i}} \\ & \left. + \sum_{\tilde{j}, \tilde{m}} (-1)^{j_{\tilde{m}} - m_{\tilde{m}}} \langle j_{\tilde{j}} j_{\tilde{m}} m_{\tilde{j}} - m_{\tilde{m}} | j_\lambda m_\lambda \rangle (\bar{\varphi}_{\tilde{j}}(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_{\tilde{m}}(\vec{x}))_{m_\lambda}^{j_\lambda} a_{\tilde{j}}^\dagger a_{\tilde{m}} \right). \end{aligned} \quad (4.42)$$

Benutzt man dieses Resultat, um $j_{NN^*}^\alpha(\vec{x})$ auszuwerten, kann man den Strom mit Hilfe des Wigner-Eckhardt-Theorems (siehe Anhang B.19) durch reduzierte Matrixelemente ausdrücken. Man erhält:

$$\begin{aligned}
 j_{NN^*}^\alpha(\vec{x}) &= \sum_{j_\lambda, m_\lambda} \langle \tilde{\Lambda}\mu_\Lambda | \hat{T}^\alpha(j_\lambda, m_\lambda) | \Delta\mu_\Delta \rangle \\
 &= \sum_{j_\lambda, m_\lambda} \frac{\langle j_\Delta j_\lambda m_\Delta m_\lambda | j_\Lambda m_\Lambda \rangle}{\sqrt{2j_\Delta + 1}} \langle (j_\Lambda, t_\Lambda, t_{3_\Lambda}) || \hat{T}_{j_\lambda}^\alpha || (j_\Delta, t_\Delta, t_{3_\Delta}) \rangle,
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

wobei $\langle \tilde{\Lambda}\mu_\Lambda |$ für $\langle \bar{J}_\Lambda M_\Lambda | \langle T_\Lambda T_{3_\Lambda} |$ steht. Dies ist ein Zustand mit guten Transformationseigenschaften unter Rotation im Dirac-Raum, jedoch einem „normalen“ adjungierten Zustand im Isospin-Raum. Letztere hat keine guten Transformationseigenschaften unter Rotation im Isospin-Raum. Diese Beschreibung ist so sinnvoll, da sich das reduzierte Matrixelement nur auf den Dirac-Raum bezieht.

Führt man die Rechnung für den Strom $j_{NN^*}^\alpha(\vec{x})$ mit dem Übergangsoperator in Gleichung (4.42) analog Abschnitt 4.2 durch, verändern sich die Gleichungen nur unwesentlich. Das Endresultat läßt sich dann schreiben als:

$$j_{NN^*}^\alpha(\vec{x}) = \sum_{j_\lambda, m_\lambda} \sum_{k,l} a_{kl}(\Lambda\mu_\Lambda, \Delta\mu_\Delta, j_\lambda m_\lambda) \bar{\varphi}_k(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_l(\vec{x}). \tag{4.44}$$

Das reduzierte Matrixelement folgt sofort aus den Gleichungen (4.43) und (4.44):

$$\langle (j_\Lambda, t_\Lambda, t_{3_\Lambda}) || \hat{T}_{j_\lambda}^\alpha || (j_\Delta, t_\Delta, t_{3_\Delta}) \rangle = \sum_{k,l} \tilde{a}_{kl}(\Lambda\mu_\Lambda, \Delta\mu_\Delta, j_\lambda m_\lambda) \bar{\varphi}_k(\vec{x}) \Gamma^\alpha \varphi_l(\vec{x}) \tag{4.45}$$

wobei

$$\tilde{a}_{kl}(\Lambda\mu_\Lambda, \Delta\mu_\Delta, j_\lambda m_\lambda) = \frac{\sqrt{2j_\Delta + 1} a_{kl}(\Lambda\mu_\Lambda, \Delta\mu_\Delta, j_\lambda m_\lambda)}{\langle j_\Delta j_\lambda m_\Delta m_\lambda | j_\Lambda m_\Lambda \rangle}. \tag{4.46}$$

4.6 Spin-Flavor-Mittelung

Bei der Berechnung des Übergangsformfaktors wurde bisher noch nicht darauf eingegangen, wie die Grundzustandsmatrixelemente aus Gleichung (4.24) explizit auszuwerten sind. Im Anhang C wird beschrieben, wie ein Matrixelement der Form:

$$\langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_k^\dagger a_l | \Delta \mu_\Delta \rangle \quad (4.47)$$

für das in dieser Arbeit angeführte Nukleongrundzustandsmodell berechnet werden kann. Für die Diagonalmatrixelemente erhält man gerade die Quark-Besetzungszahlen der jeweiligen Grundzustandskonfiguration.

Läßt man bei der Bestimmung der Übergangsformfaktoren Übergänge zwischen verschiedenen Nukleongrundzustandskonfigurationen zu, erhält man Beiträge in unphysikalischen Multipolmoden. Dies hat seine Ursache in der Tatsache, daß die in dieser Arbeit verwendete Formulierung der Tensor-RPA Übergänge in der Valenzschale nicht beschreiben kann. Zuvor wurden bereits solche Anregungsmoden vernachlässigt. Dies bedeutet jedoch, daß auch hier solche Anregungsmoden nicht mit einbezogen werden dürfen. Es wird somit folgende Näherung notwendig:

$$\langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | [a_i^\dagger a_m, a_k^\dagger a_l] | \Delta \mu \rangle \approx \delta_{\tilde{\mu}_\Delta \mu_\Delta} \langle \Delta \mu_\Delta | [a_i^\dagger a_m, a_k^\dagger a_l] | \Delta \mu \rangle. \quad (4.48)$$

Grundzustandskonfiguration	$\langle u \rangle$	$\langle d \rangle$	$\langle \uparrow \rangle$	$\langle \downarrow \rangle$
$ p \uparrow \rangle$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$ p \downarrow \rangle$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
$ n \uparrow \rangle$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$ n \downarrow \rangle$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Tabelle 4.1: Besetzungswahrscheinlichkeit von u- und d-Quarks bzw. Spinorientierung für verschiedene Nukleongrundzustandskonfigurationen

Wertet man den Kommutator aus und betrachtet Tabelle 4.1, wird deutlich, daß die Bestimmung dieses Grundzustandsmatrixelements für einen über alle Nukleongrundzustandskonfigurationen gemittelten Grundzustand gerade der Quasi-Bosonen-Näherung entspricht. Diese lautet:

$$\langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | [a_i^\dagger a_m, a_k^\dagger a_l] | \Delta \mu \rangle \approx \delta_{\tilde{\mu}_\Delta \mu_\Delta} \delta_{il} \delta_{km}. \quad (4.49)$$

Dieses Ergebnis kann man sich noch besser visualisieren, wenn man den Nukleongrundzustand als eine Superposition aller Grundzustandskonfigurationen schreibt:

$$|\Delta\mu_\Delta\rangle = \frac{1}{2} (|p\uparrow\rangle + |p\downarrow\rangle + |n\downarrow\rangle + |n\uparrow\rangle). \quad (4.50)$$

Bestimmt man mit einem solchen gemittelten Grundzustand das Matrixelement in Zusammenhang mit den Gewichtungsfaktoren aus Anhang C, erhält man gerade die Quasi-Bosonen-Näherung.

Die Ergebnisse des nachfolgenden Kapitels wurden alle in dieser Näherung berechnet.

Kapitel 5

Ergebnisse

Die Präsentation der Ergebnisse gliedert sich in drei Teile. Zunächst sollen die Resultate aus der Berechnung der Einteilchenbasis in Mean-Field-Näherung für unterschiedliche Massenterme diskutiert werden.

Im zweiten Teil wird dann das in einer Tensor-RPA-Rechnung gewonnene Nukleon-Spektrum mit experimentellen Daten verglichen. Die numerische Umsetzung stammt hierbei von S. Hardt [HG97]. Der Vollständigkeit halber sind diese Ergebnisse hier ebenfalls aufgeführt, da die übrigen Resultate ohne diese explizite Angabe des Spektrums wenig aussagekräftig sind.

Im dritten Teil dieses Kapitels werden dann die eigentlichen Übergangsformfaktoren für ausgewählte Prozesse genauer betrachtet.

5.1 Mean-Field-Einteilchenbasis

Die Motivation zur Bestimmung einer Mean-Field-Einteilchenbasis im Rahmen eines Bag-Modells wurde bereits im Kapitel 2 eingehend erläutert. Hauptargument, warum man diese inkonsistente Beschreibung von Mean-Field und Restwechselwirkung wählt, ist das Fehlen eines Confinement-Mechanismus für NJL-Modelle. Man erhält auf Mean-Field-Ebene ungebundene Quarkzustände, was im direkten Widerspruch zur starken Wechselwirkung steht. Die beiden dominierenden Eigenschaften sind nämlich gerade Confinement und chirale Symmetrie. Es ist daher notwendig, diese experimentellen Tatsachen in ein Modell zur Beschreibung des Baryonenspektrums aufzunehmen.

Basierend auf den Ergebnissen in diesem Abschnitt wird eine Tensor-RPA-Rechnung durchgeführt, um das Spektrum zu bestimmen. Die in die RPA-Rechnung eingehenden Größen sind hierbei die Einteilchen-Wellenfunktionen und die dazugehörigen Energieeigenwerte.

Die in dieser Arbeit verwendete Klasse von Bag-Modellen realisiert Confinement durch das Einführen eines skalaren Potentials. Der Massenterm setzt sich somit wie folgt zusammen:

$$m(r) = m + g r^n. \quad (5.1)$$

Das zusätzliche Einführen eines Vektorpotentials kann zu weiteren Problemen führen, da sich nicht normierbare Lösungen ergeben [HG97]. Aus diesem Grund wird sich hier auf das Einführen eines skalaren Potentials beschränkt.

Der Grenzfall $n \rightarrow \infty$ für den obigen Massenterm stellt gerade das MIT-Bag-Modell dar. Dieser Grenzfall ist jedoch keine gute Basis für eine RPA-Rechnung, da man in RPA-Näherung auch Beiträge von Monopolmoden, Teilchen-Loch-Zuständen mit $J^P = 0^+$ erwartet, die auf Grund der „harten“ Randbedingung des MIT-Bag-Modells nicht adäquat beschrieben werden.

Nachfolgend werden die Einteilchen-Spektren für die Fälle eines linearen und eines quadratischen Potentials untersucht. Der einzige Parameter in diesem Mean-Field-Modell stellt die Kopplungskonstante g des Confinement gewährenden Potentials aus Gleichung (5.1) dar.

Diese Kopplungskonstante wird gerade so bestimmt, daß die Wellenfunktionen einen sinnvollen rms-Radius wiedergeben. Normalerweise geht man im Fall des Nukleons von einem rms-Radius von ca. 0.8 fm aus. Dieser Radius beinhaltet jedoch ebenfalls die das Nukleon umgebende Mesonenwolke. Da diese Effekte im Prinzip in der RPA-Rechnung enthalten sind, sollte beim Anpassen der Kopplungskonstante von einem verringerten rms-Radius ohne Mesonenwolke ausgegangen werden. Experimentelle Daten in dieser Richtung zu erhalten ist sehr schwierig. Es existieren jedoch Abschätzungen, die zwischen 0.2 fm bis 0.6 fm liegen [Or78, BR86]. Motiviert durch diese Arbeiten wird hier ein rms-Radius von 0.35 fm zum Anpassen der Kopplungskonstante angenommen.

Führt man die Rechnungen für die beiden erwähnten Potentialformen durch und geht des weiteren von einer Current-Quarkmasse von 5 MeV aus, erhält man für die ersten 30 Zustände die in den Tabellen 5.1 und 5.2 aufgelisteten Resultate für das jeweilige Einteilchen-Spektrum.

Vergleicht man die beiden Potentiale, erkennt man in Abbildung 5.1, daß, obwohl das lineare Potential weniger Confinement bietet, es am Ursprung sehr viel „härter“ ist als das harmonische Oszillatorpotential.

Betrachtet man nun die Energien der einzelnen angeregten Zustände, so stellt man fest, daß alle Energien oberhalb 1 GeV liegen. Zunächst erscheint somit

Nr.	κ	n	j	l	E [MeV]	rms [fm]
1	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	1465.60	0.350000
2	1	0	$\frac{1}{2}$	1	1725.96	0.379306
3	-2	0	$\frac{3}{2}$	1	1832.92	0.431596
4	2	0	$\frac{3}{2}$	2	2038.28	0.450144
5	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	2118.80	0.488946
6	-3	0	$\frac{5}{2}$	2	2140.26	0.499778
7	3	0	$\frac{5}{2}$	3	2315.00	0.513346
8	1	1	$\frac{1}{2}$	1	2336.33	0.524150
9	-2	1	$\frac{3}{2}$	1	2396.08	0.553116
10	-4	0	$\frac{7}{2}$	3	2409.35	0.559669
11	4	0	$\frac{7}{2}$	4	2563.17	0.570887
12	2	1	$\frac{3}{2}$	2	2577.28	0.577243
13	-1	2	$\frac{1}{2}$	0	2626.16	0.601225
14	-3	1	$\frac{5}{2}$	2	2642.25	0.609248
15	-5	0	$\frac{9}{2}$	4	2652.00	0.613433
16	5	0	$\frac{9}{2}$	5	2791.00	0.623092
17	3	1	$\frac{5}{2}$	3	2800.27	0.627920
18	1	2	$\frac{1}{2}$	1	2815.61	0.635431
19	-2	2	$\frac{3}{2}$	1	2856.08	0.654576
20	-4	1	$\frac{7}{2}$	3	2866.48	0.660081
21	-6	0	$\frac{11}{2}$	5	2873.47	0.663416
22	6	0	$\frac{11}{2}$	6	3001.45	0.671808
23	4	1	$\frac{7}{2}$	4	3008.63	0.675269
24	2	2	$\frac{3}{2}$	2	3019.28	0.680216
25	-1	3	$\frac{1}{2}$	0	3054.16	0.696601
26	-3	2	$\frac{5}{2}$	2	3066.30	0.703237
27	-5	1	$\frac{9}{2}$	4	3074.00	0.707036
28	-7	0	$\frac{13}{2}$	6	3080.00	0.709285
29	7	0	$\frac{13}{2}$	7	3199.00	0.716906
30	5	1	$\frac{9}{2}$	5	3204.26	0.719872

Tabelle 5.1: Lineares Potential mit $g = 613 \cdot 10^3 \text{ MeV}^2$

Nr.	κ	n	j	l	E [MeV]	rms [fm]
1	-1	0	$\frac{1}{2}$	0	1342.18	0.350327
2	1	0	$\frac{1}{2}$	1	1593.66	0.358657
3	-2	0	$\frac{3}{2}$	1	1747.84	0.411947
4	2	0	$\frac{3}{2}$	2	1933.18	0.407435
5	-3	0	$\frac{5}{2}$	2	2107.57	0.457967
6	-1	1	$\frac{1}{2}$	0	2109.74	0.423518
7	3	0	$\frac{5}{2}$	3	2258.47	0.449639
8	1	1	$\frac{1}{2}$	1	2394.46	0.444217
9	-4	0	$\frac{7}{2}$	3	2438.02	0.495795
10	-2	1	$\frac{3}{2}$	1	2471.45	0.466737
11	4	0	$\frac{7}{2}$	4	2567.85	0.486264
12	2	1	$\frac{3}{2}$	2	2697.92	0.476712
13	-5	0	$\frac{9}{2}$	4	2747.15	0.528402
14	-1	2	$\frac{1}{2}$	0	2796.58	0.484168
15	-3	1	$\frac{5}{2}$	2	2797.39	0.503098
16	5	0	$\frac{9}{2}$	5	2862.70	0.518598
17	3	1	$\frac{5}{2}$	3	2987.41	0.507288
18	-6	0	$\frac{11}{2}$	5	3039.67	0.557318
19	1	2	$\frac{1}{2}$	1	3071.12	0.504066
20	-4	1	$\frac{7}{2}$	3	3099.73	0.534780
21	-2	2	$\frac{3}{2}$	2	3119.34	0.516599
22	6	0	$\frac{11}{2}$	6	3144.85	0.547613
23	4	1	$\frac{7}{2}$	4	3264.81	0.535624
24	-7	0	$\frac{13}{2}$	6	3318.68	0.583456
25	2	2	$\frac{3}{2}$	2	3351.00	0.529559
26	-5	1	$\frac{9}{2}$	4	3384.79	0.563047
27	7	0	$\frac{11}{2}$	6	3415.96	0.573999
28	-1	3	$\frac{1}{2}$	0	3416.69	0.533962
29	-3	2	$\frac{5}{2}$	2	3417.70	0.545812
30	5	1	$\frac{9}{2}$	5	3531.77	0.561840

Tabelle 5.2: Harmonisches Oszillator-Potential mit $g = 214 \cdot 10^6 \text{ MeV}^3$

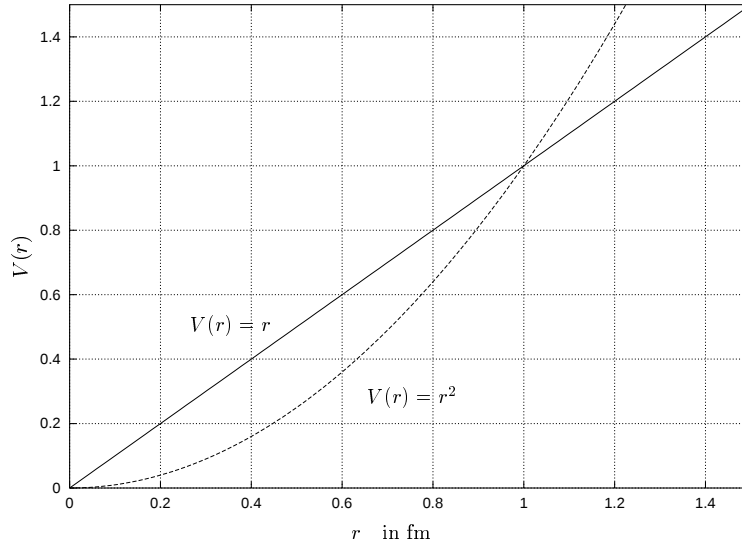


Abbildung 5.1: Potentialvergleich

die Beschreibung des Nukleons mit einem solchen Mean-Field-Modell widersprüchlich, da die Ruhemasse des Nukleons bereits bei 938 MeV liegt. Dieser Schluß ist jedoch voreilig, da man durch das Einführen eines Vektorpotentials mit einer konstanten zeitartigen Komponente die Energieeigenwerte des Spektrums beliebig verschieben kann. Das Einführen einer solchen Komponente hat somit eine ähnliche Wirkung, wie die Bag-Konstante B im MIT-Bag-Modell. Von Interesse sind daher weniger die absoluten Energien der angeregten Zustände, als der relative Abstand zum Grundzustand. In der nachfolgenden RPA-Rechnung geht nur die relative Zustandsabfolge ein. Der Grundzustand des Nukleons wird dort auf 940 MeV festgesetzt.

Abbildung 5.2 und 5.3 zeigen die zeitartigen Komponenten der Vektordichteverteilung $|F(r)|^2$ und $|G(r)|^2$ des Dirac-Spinors. Aus Gleichung (2.2) folgt der Zusammenhang zu den Dichteverteilungen ρ_f und ρ_g . Es gilt:

$$|F(r)|^2 = r^2 \rho_f(r) \quad \text{und} \quad |G(r)|^2 = r^2 \rho_g(r). \quad (5.2)$$

Dargestellt ist jeweils der Grundzustand und der erste angeregte Zustand, wobei die Wellenfunktionen in den Abbildungen wie folgt normiert sind:

$$1 = \int \bar{\Psi}(\vec{x}) \gamma^0 \Psi(\vec{x}) d^3x = \int (|F(r)|^2 + |G(r)|^2) dr \equiv \int (\rho_f(r) + \rho_g(r)) r^2 dr. \quad (5.3)$$

Dies ist gerade die zeitartige Komponente der Vektordichte $\bar{\Psi}(\vec{x}) \gamma^\mu \Psi(\vec{x})$.

Bei dem Vergleich von $|F(r)|^2$ bzw. $|G(r)|^2$ für verschiedene Potentiale ist kaum ein Unterschied festzustellen.

Betrachtet man hingegen $\rho(r)$, hier nicht dargestellt, erkennt man das charakteristische Verhalten für die jeweilige Potentialform. Beschränkt auf die oberen Komponenten, die im nichtrelativistischen Grenzfall dominierend sind, erkennt man für den Fall eines quadratischen Potentials, daß ρ_f für den Grundzustand am Ursprung einen endlichen Wert annimmt. In allen angeregten Zuständen verschwindet die Funktion am Ursprung auf Grund der Zentrifugalbarriere.

Der Grundzustand in einem linearen Potential zeigt dieses Verhalten nicht. In diesem Fall verschwindet ρ_f am Ursprung, was genau dem Verhalten entspricht, das man aus Gleichung (2.25) ableiten kann. Lineare Potentiale besitzen auch im Grundzustand $\kappa = -1$ einen repulsiven Anteil am Ursprung. Der erste angeregte Zustand hingegen zeigt wieder ein vergleichbares Verhalten wie im quadratischen Fall.

Für die RPA-Rechnung benötigt man neben den positiven Energiezuständen auch die Lösungen mit negativer Energie, die man jedoch durch Ladungskonjugation aus den positiven Einteilchenzuständen gewinnen kann. Die Transformation dafür lautet [PS95]:

$$C \Psi(x) C = -i \gamma^2 \Psi^*(x). \quad (5.4)$$

Nach dieser Betrachtung von verschiedenen Bag-Modellen zur Modellierung des Mean-Field, sollen im nächsten Abschnitt die Ergebnisse der RPA-Rechnung zur Bestimmung des Baryonenspektrums basierend auf dem Bag-Modell mit quadratischem Massenterm dargestellt werden. Diese Umsetzung der Tensor-RPA stammt von S. Hardt [HG97] und dient als Grundlage für die Berechnung von Übergangsformfaktoren. Der Vollständigkeit halber sollen daher diese Ergebnisse in dieser Arbeit ebenfalls angeführt werden.

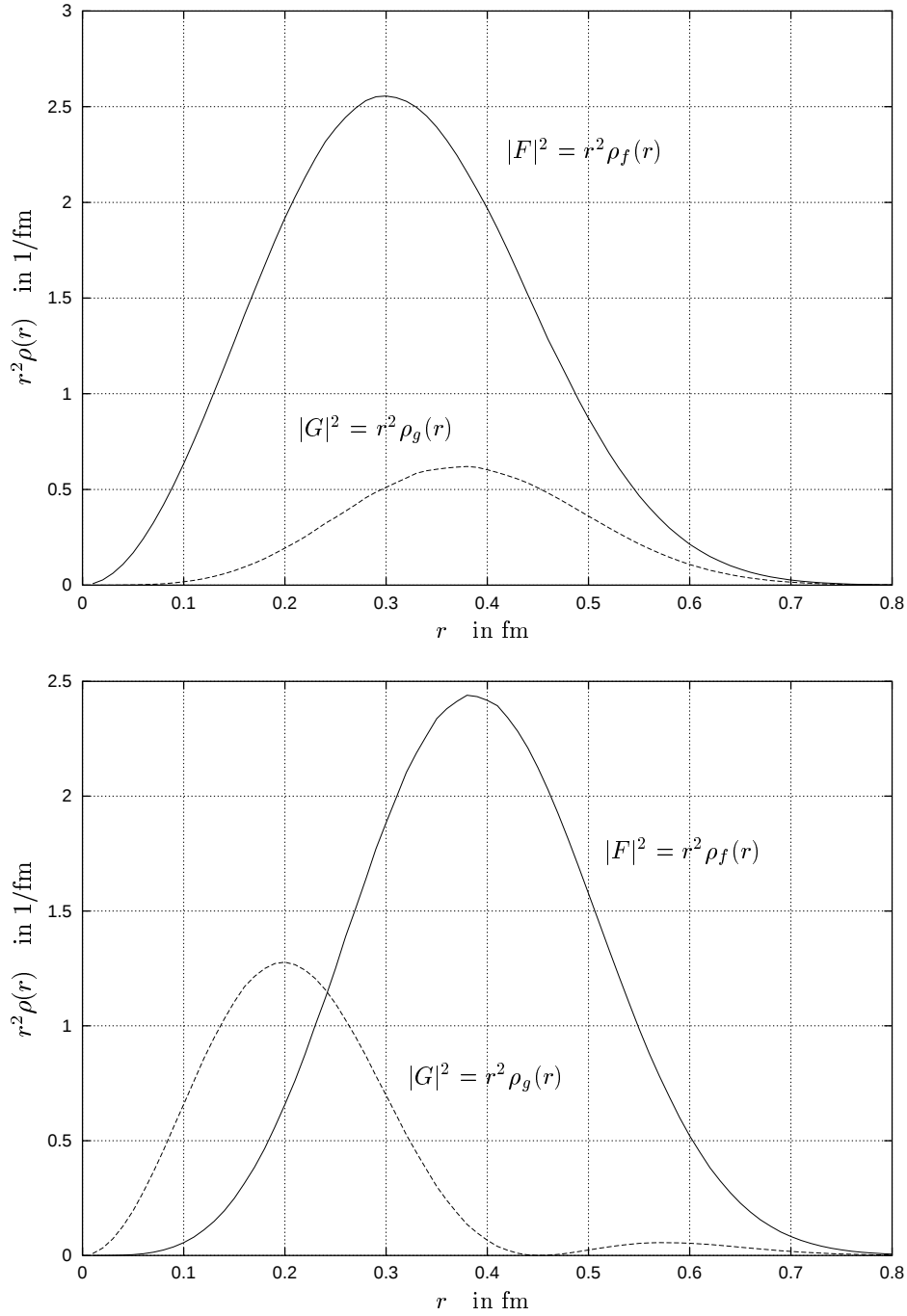


Abbildung 5.2: $r^2 \rho(r)$ -Verteilung für harm. Oszillatorpotential im Grundzustand ($\kappa = -1$, oben) und ersten angeregten Zustand ($\kappa = 1$, unten). Die Beiträge der oberen Komponente $r^2 \rho_f$ (volle Linien) und unteren $r^2 \rho_g$ (gestrichelte Linien) sind separat dargestellt.

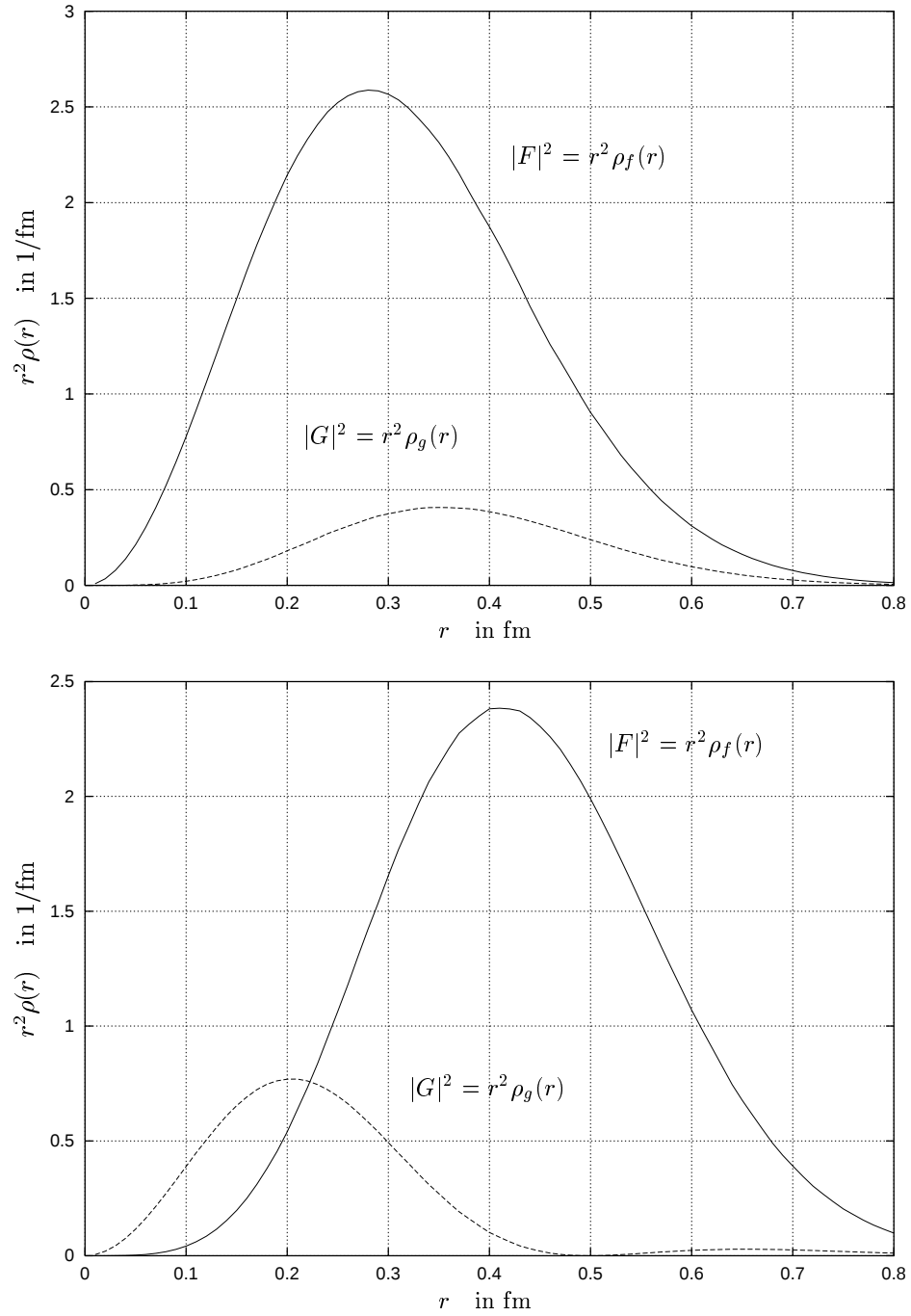


Abbildung 5.3: $r^2 \rho(r)$ -Verteilung für lineares Potential im Grundzustand ($\kappa = -1$, oben) und ersten angeregten Zustand ($\kappa = 1$, unten). Die Beiträge der oberen Komponente $r^2 \rho_f$ (volle Linien) und unteren $r^2 \rho_g$ (gestrichelte Linien) sind separat dargestellt.

5.2 RPA-Baryonenspektrum

Vor der Darstellung der Ergebnisse der RPA-Rechnung sollen zunächst einige Problematiken dieser Methode erörtert werden [Ha96].

Neben den erwähnten Schwierigkeiten im $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^+$ -Kanal ist die konsistente Beschreibung von Mean-Field und Restwechselwirkung nicht zufriedenstellend gelöst. Dies hat zur Folge, daß für den Grundzustand die Translations- und die chirale Invarianz gebrochen werden. Nach dem Goldstone-Theorem erwartet man somit spuriose Moden im Anregungsspektrum. Da die Generatoren dieser beiden Symmetrien jedoch negative Paritätsoperatoren sind, hat man nur im negativen Paritätskanal spuriose nichtseparable Beimischungen zum Anregungsspektrum. Anregungen mit positiver Parität sind somit nicht von spuriosen Beimischungen betroffen. Die Ergebnisse werden daher nur für Zustände mit positiver Parität angegeben.

Benutzt man für die Restwechselwirkung ein NJL-Modell wie in Gleichung (2.40), besitzt das Modell zwei freie Parameter G^{sin} und G^{oct} . Die verbleibenden Parameter werden durch Anpassung des RPA-Baryonenspektrums an experimentelle Daten festgelegt. Hierbei wird eine Simplexoptimierung basierend auf den experimentellen Daten von 4*- und 3*-Resonanzen [PDG98] benutzt. Die in diese Rechnung eingegangenen Werte sind in Tabelle 5.3 angegeben.

Um die RPA-Rechnung für einen bestimmten Anregungskanal durchzuführen, muß man zunächst eine Teilchen-Loch-Basis generieren. In dem gewählten RPA-Formalismus erhält man jedoch einen übervollständigen Teilchen-Loch-Basisraum, wenn man nur die (J/T)-Auswahlregeln berücksichtigt. Die Ableitung soll an dieser Stelle nicht weiter ausgeführt werden. Es sei auf die Arbeit von S. Hardt [Ha96] verwiesen, in der diese Problematik ausführlich behandelt wird.

Das nachfolgende Baryonenspektrum für den positiven Paritätskanal wurde mit einer Teilchen-Loch-Basis der Dimension 50 berechnet. Der Energie-Cut-Off zur Beschränkung der Teilchen-Loch-Basis wurde dabei mit 3800 MeV angesetzt.

Neben den in Abb. 5.4 angegebenen 3*- und 4*-Resonanzen gibt die Particle Data Group [PDG98] noch weitere 1*- und 2*-Resonanzen an. Für diese existieren jedoch nur grobe Abschätzungen. Sie sind daher nicht in der Abb. 5.4 dargestellt. Der Vollständigkeit halber werden sie aber in Tabelle 5.4 aufgelistet.

Resonanz	$I (J^P)$	Typ	Energie [MeV]
N(1440) P_{11}	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	4*	1430-1470
N(1680) F_{15}	$\frac{1}{2}(\frac{5}{2}^+)$	4*	1675-1690
N(1710) P_{11}	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	3*	1680-1740
N(1720) P_{13}	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^+)$	4*	1650-1750
N(2220) H_{19}	$\frac{1}{2}(\frac{9}{2}^+)$	4*	2180-2310
$\Delta(1905)$ F_{35}	$\frac{3}{2}(\frac{5}{2}^+)$	4*	1870-1920
$\Delta(1910)$ P_{31}	$\frac{3}{2}(\frac{1}{2}^+)$	4*	1870-1920
$\Delta(1950)$ F_{37}	$\frac{3}{2}(\frac{7}{2}^+)$	4*	1940-1960
$\Delta(2420)$ $H_{3,11}$	$\frac{3}{2}(\frac{11}{2}^+)$	4*	2300-2500

Tabelle 5.3: Experimentelle Daten der 3*- und 4*-Resonanzen [PDG98] zur Bestimmung der Parameter G^{sin} und G^{oct} .

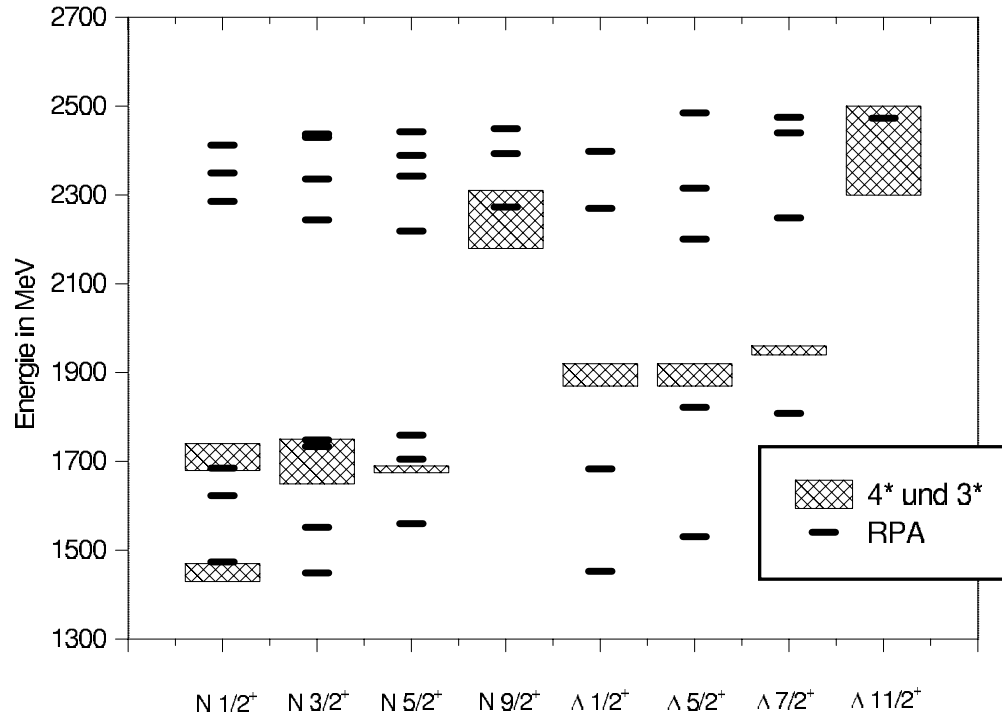


Abbildung 5.4: RPA-Spektrum für positiven Paritätskanal.

Resonanz	$I (J^P)$	Typ	Energie [MeV]
N(2100) P_{11}	$\frac{1}{2}(\frac{1}{2}^+)$	1*	≈ 2100
N(1900) P_{13}	$\frac{1}{2}(\frac{3}{2}^+)$	2*	≈ 1900
N(2000) F_{15}	$\frac{1}{2}(\frac{5}{2}^+)$	2*	≈ 2000
$\Delta(1750)$ P_{31}	$\frac{3}{2}(\frac{1}{2}^+)$	1*	≈ 1750
$\Delta(2000)$ F_{35}	$\frac{3}{2}(\frac{5}{2}^+)$	2*	≈ 2000
$\Delta(2390)$ F_{37}	$\frac{3}{2}(\frac{7}{2}^+)$	1*	≈ 2390

Tabelle 5.4: Experimentelle Daten der 1*- und 2*-Resonanzen [PDG98].

5.3 RPA-Übergangsformfaktoren

Wie man aus Abbildung 5.4 entnehmen kann, ist die RPA nur in begrenztem Maße in der Lage, das Baryonenspektrum wiederzugeben. Allerdings ist die Übereinstimmung recht zufriedenstellend, wenn man beachtet, daß sie mit nur zwei freien Parametern erreicht wurde. Dennoch kommt an dieser Stelle natürlich sofort die Frage auf, ob die Berechnung von Übergangsformfaktoren im Rahmen eines solchen Modells sinnvolle Resultate hervorbringen kann.

Die Motivation zu solchen Rechnungen ist durch Arbeiten in der Kernphysik gegeben. Dort macht man die Erfahrung, daß mit Hilfe von RPA-Rechnungen Übergangsstärken gut reproduziert werden können. Der Grund dafür ist, daß Übergangseigenschaften durch relative Größen bestimmt werden, die in erster Linie durch die Umbesetzung von Einteilchenzuständen festgelegt werden.

Experimentelle Informationen zu Übergangsformfaktoren des Nukleons existieren bisher nur ansatzweise [BL98]. Dies hat zur Folge, daß im Augenblick noch keinerlei Möglichkeit besteht, Resultate aus Modellrechnungen an experimentellen Daten zu überprüfen.

Schon bei der Berechnung des Baryonenspektrums im Rahmen einer RPA-Rechnung ist es schwierig, die Ergebnisse mit zuverlässigen Daten zu vergleichen. Neben den acht 4*- bzw. 3*-Resonanzen findet man im Particle Data Book [PDG98] für den positiven Paritätskanal fast ebenso viele 1*- und 2*-Resonanzen. Die energetische Lage der letzteren ist jedoch nur als grobe Schätzung zu verstehen. Ein quantitativer Vergleich ist somit kaum sinnvoll. Sicherlich ist man jedoch in der Lage, eine Idee davon zu bekommen, inwiefern die RPA unbeobachtete Zustände vorhersagt.

Aus diesem Grund sollte man die nachfolgenden Resultate als explorative Modellrechnungen betrachten. Der Anspruch auf „wirkliche“ Vorhersage von Übergangsformfaktoren soll nicht erhoben werden, zumal weitere Beiträge aus der Mesonenwolke zu erwarten sind. Da experimentelle Daten in absehbarer Zeit nur im N^* -Kanal zu erwarten sind, wird die weitere Betrachtung auf diesen Kanal beschränkt.

Von RPA-Rechnungen ist generell zu erwarten, daß hochangeregte Zustände in dieser Näherung nicht gut beschrieben werden können. Dies hat zum einen den Grund, daß solche Rechnungen immer auf einer begrenzten Teilchen-Loch-Basis ausgeführt werden, zum anderen, daß die Näherung des Anregungsoperators als ein purer Einteilchen-Operator für hochangeregte Zustände fraglich ist. Bei solchen Zuständen nämlich ist zu erwarten, daß nicht zu vernachlässigende Beiträge von Operatorprodukten höherer Ordnung existieren, die eine genaue Kenntnis der höheren Korrelationen in den Anfangs- und Endzuständen erfordern würde. Zudem müßten Verzweigungsverhältnisse sehr genau bekannt sein.

Unter Berücksichtigung dieser Tatsache und der Übereinstimmung der RPA-Anregungen mit den experimentellen Daten des Baryonenspektrums sollen nachfolgend die Übergangsformfaktoren im $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^+$ -Kanal näher untersucht werden. Von besonderem Interesse sind dabei isoskalare und -vektorielle Übergangseigenschaften für photon- und pionartige Vertizes. Am Ende dieses Kapitels sollen als explorativer Vorstoß die Ergebnisse im isoskalaren Kanal der Hochspinresonanz $N(2220) H_{19}$ kurz untersucht werden.

Dargestellt werden jeweils die Radialanteile der Multipolkomponenten. Das abgebildete Matrixelement lautet:

$$j_{NN^*}^\alpha(m_\Lambda, t_{3_\Lambda}, m_\Delta, t_{3_\Delta}, \vec{x}) = \langle \Lambda\mu_\Lambda | \hat{T}^\alpha | \Delta\mu_\Delta \rangle. \quad (5.5)$$

Bei der Darstellung der Ergebnisse wird auf eine Summation über die Drehimpulsprojektionszahlen m_Δ und m_Λ von Anfangs- bzw. Endzuständen verzichtet. Gezeigt werden in allen Fällen Protonenübergangsformfaktoren mit positiver Spinorientierung. Da nur ladungserhaltende Wechselwirkungen untersucht werden, ist durch diese Annahme ebenfalls die Isospinprojektionsquantenzahl des angeregten Zustandes festgelegt. Durch die Quasi-Bosonen-Näherung muß des weiteren die Drehimpulsprojektionszahl des angeregten Zustandes m_Λ der des Anfangszustandes entsprechen. Zusammengefaßt heißt dies:

$$m_\Lambda = m_\Delta \quad \text{und} \quad t_{3_\Lambda} = t_{3_\Delta}. \quad (5.6)$$

Neben den nachfolgenden Resultaten wurden zum Test des Modells auch isoskalare Übergangsformfaktoren im Δ -Kanal berechnet. Erwartungsgemäß verschwanden diese Formfaktoren, da solche Übergänge nur mit isovektoriellen Wechselwirkungen zu realisieren sind. Der Übergangsoperator muß in solchen Fällen die Quantenzahlen $T = 1$ besitzen.

5.3.1 Übergangsformfaktoren im $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^+$ -Kanal

Die Diskussion der Ergebnisse für den $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^+$ -Kanal gliedert sich in zwei Teile. Zunächst sollen die Übergangsstärken im isoskalaren mit dem im isovektoriellen Kanal verglichen werden. Hiermit kann den einzelnen Resonanzen eine Iso-Charakteristik zugewiesen werden. Im zweiten Teil dieses Abschnitts wird dann die explizite räumliche Darstellung für alle betrachteten Fälle angegeben und kurz diskutiert.

Zur Notation sei an dieser Stelle erklärend hinzugefügt, daß im folgenden die drei energetisch tiefliegensten RPA-Resonanzen im $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^+$ -Kanal mit den Resonanzen $N(1440) P_{11}$ und $N(1710) P_{11}$ identifiziert werden.

Übergangsstärken

Wenn man Übergangsstärken berechnen will, muß man das in Gleichung (5.5) dargestellt Matrixelement mit dem Strom des externen Feldes falten. Geht man im einfachsten Fall von freien Feldern aus, entspricht dieser Strom gerade einer ebenen Welle. Diese kann man in Form einer Partialwellenzerlegung ausschreiben; man erhält [Ma84]:

$$e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = \sum_{l=0}^{\infty} i^l (2l+1) j_l(qr) P_l(\cos \vartheta), \quad (5.7)$$

wobei für die Besselfunktion $j_l(qr)$ gilt:

$$j_l(qr) = \frac{(qr)^l}{2^l l!} \left(1 - \frac{(qr)^2}{2(2l+2)} + O((qr)^4) \right). \quad (5.8)$$

Es ist nun offensichtlich, daß die Übergangsstärke bestimmt wird durch das Radialintegral dieser Entwicklung mit dem Matrixelement aus Gleichung (5.5). Geht man weiter von einer Langwellennäherung aus, reduziert sich die Besselfunktion für skalare bzw. vektorielle Wechselwirkungen auf r^2 und für pseudoskalare sowie pseudovektorielle Wechselwirkungen auf r . In den Tabellen 5.5, 5.6, 5.7 und 5.8 sind die Ergebnisse dieser Integrationen angegeben.

Resonanz	isoskalar [MeV^{-2}]	isovektoriell [MeV^{-2}]
$N(1440) P_{11}$	$0.673 \cdot 10^{-7}$	$0.656 \cdot 10^{-7}$
$N_1(1710) P_{11}$	$-0.118 \cdot 10^{-5}$	$-0.587 \cdot 10^{-6}$
$N_2(1710) P_{11}$	$-0.117 \cdot 10^{-5}$	$-0.482 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 5.5: Übergangsstärken für skalare Wechselwirkung.

Resonanz	isoskalar [MeV^{-2}]	isovektoriell [MeV^{-2}]
$N(1440) P_{11}$	$0.648 \cdot 10^{-7}$	$0.660 \cdot 10^{-7}$
$N_1(1710) P_{11}$	$-0.113 \cdot 10^{-5}$	$0.584 \cdot 10^{-6}$
$N_2(1710) P_{11}$	$-0.114 \cdot 10^{-5}$	$-0.477 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 5.6: Übergangsstärken für vektorielle Wechselwirkung.

Resonanz	isoskalar [MeV^{-1}]	isovektoriell [MeV^{-1}]
$N(1440) P_{11}$	$0.335 \cdot 10^{-3}$	$0.173 \cdot 10^{-6}$
$N_1(1710) P_{11}$	$-0.154 \cdot 10^{-3}$	$-0.154 \cdot 10^{-5}$
$N_2(1710) P_{11}$	$0.152 \cdot 10^{-4}$	$0.122 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 5.7: Übergangsstärken für pseudoskalare Wechselwirkung.

Resonanz	isoskalar [MeV^{-1}]	isovektoriell [MeV^{-1}]
$N(1440) P_{11}$	$0.647 \cdot 10^{-3}$	$0.539 \cdot 10^{-6}$
$N_1(1710) P_{11}$	$0.324 \cdot 10^{-3}$	$-0.625 \cdot 10^{-5}$
$N_2(1710) P_{11}$	$-0.387 \cdot 10^{-4}$	$0.141 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 5.8: Übergangsstärken für pseudovektorielle Wechselwirkung.

Aus den Tabellen 5.5 und 5.6 kann man eine erhöhte isoskalare Übergangsstärke für die Resonanzen $N_1(1710) P_{11}$ und $N_2(1710) P_{11}$ erkennen. Die $N(1440) P_{11}$ -Resonanz hingegen hat in beiden Fällen eine demgegenüber unterdrückte Übergangsstärke.

Auch in den pseudoskalaren bzw. pseudovektoriellen Kanälen, die in den Tabellen 5.7 und 5.8 gezeigt sind, ist eine Dominanz in den jeweiligen isoskalaren Moden festzustellen.

Zusammengefaßt erhält man eine klare Dominanz der isoskalaren Kanäle gegenüber den isovektoriellen. Ausnahme bilden nur die skalaren und vektoriellen Kanäle der $N(1440) P_{11}$ -Resonanz. Diese sind generell unterdrückt.

Ein solches Verhalten widerspiegelt die Erwartungen. Größere Beiträge im isovektoriellen Kanal erwartet man hauptsächlich für Δ -Resonanzen.

Räumliche Darstellung der Übergangsformfaktoren im $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^+$ -Kanal

In der Abbildung 5.5 ist der räumliche isoskalar-skalare Übergangsformfaktor der $N(1440) P_{11}$ -Resonanz dargestellt. Erwartungsgemäß existiert nur ein Beitrag für die Monopolmode. Vergleicht man dieses Ergebnis mit dem isoskalar-vektoriellen Übergangsformfaktor dieser Resonanz, welcher in Abbildung 5.6 gezeigt ist, findet man eine deutliche Übereinstimmung der Ergebnisse. Es ist lediglich eine leichte Verschiebung der Maxima zu größeren Radien zu erkennen. Diese Tatsache deutet darauf hin, daß Dirac-See-Anregungen eine nur untergeordnete Rolle spielen, da sich die zeitartige Komponente des vektoriellen Übergangsformfaktors vom skalaren Übergangsformfaktor nur durch das relative Vorzeichen für Dirac-See-Beiträge unterscheidet.

Des weiteren entspricht die zeitartige Komponente des isoskalar-vektoriellen Übergangsformfaktors gerade der Baryonenflußdichte für einen solchen Prozeß. Da Anfangs- und Endzustand dieselbe Baryonenzahl tragen, darf sich die Baryonenzahl nicht ändern. In der Quasi-Bosonen-Näherung wird diese Tatsache bis auf ca. 0.5 % erfüllt.

Der isoskalar-pseudoskalare Übergangsformfaktor der $N(1440) P_{11}$ -Resonanz ist in Abbildung 5.7 gezeigt. Im Vergleich zu dem isoskalar-skalaren Übergangsformfaktor ist ein deutlicher Unterschied zu erkennen. Beitragende Multipolmode ist hier Y_{10} . Das Maximum liegt in diesem Fall bei ca. 0.25 fm. Im Vergleich zu der isoskalar-skalaren bzw. zeitartigen Komponente des isoskalar-vektoriellen Übergangsformfaktors ist eine deutlich größere Übergangsstärke zu erkennen.

Die zeitartige Komponente des isoskalar-pseudovektoriellen Übergangsformfaktors der $N(1440) P_{11}$ -Resonanz ist in Abbildung 5.8 dargestellt. Formal ist bis auf einen Vorzeichenwechsel eine gute Übereinstimmung mit dem isoskalar-pseudoskalaren Übergangsformfaktor zu erkennen. Der Vorzeichenwechsel läßt jedoch an dieser Stelle nicht den Schluß auf eine Dominanz von Dirac-Sec-Beiträgen zu, da isoskalar-pseudoskalare bzw. isoskalar-pseudovektorielle Wechselwirkungen eine veränderte Struktur im Vergleich zu isoskalar-skalaren bzw. isoskalar-vektoriellen Wechselwirkungen im Dirac-Raum besitzen.

Neben dem Vorzeichenwechsel erkennt man außerdem eine leichte Verschiebung des Maximums nach 0.27 fm hin sowie eine Erhöhung der Übergangsstärke im isoskalar-pseudovektoriellen Fall.

Betrachtet man im Vergleich die isoskalaren Übergangsformfaktoren der Resonanzen $N_1(1710) P_{11}$ und $N_2(1710) P_{11}$, ist das Verhalten im isoskalar-skalaren sowie isoskalar-vektoriellen Kanal bis auf die Amplitude gleich. Diese ist für $N_1(1710)$ und $N_2(1710)$ um ca. den Faktor 20 größer. Zu sehen ist in diesen Fällen eine Kompressionsanregung.

Vergleicht man den isoskalar-pseudoskalaren und isoskalar-pseudovektoriellen Kanal, findet man auch in diesem Fall für alle Resonanzen eine formal gleiche Struktur. Der Unterschied besteht lediglich in Vorzeichenwechsel und Veränderung der Amplitude. Die Gestalt der Formfaktoren zeigt, daß in diesen Kanälen keine Kompressionsanregungen auftreten.

Für isovektor-skalare und isovektor-vektorielle Wechselwirkungen findet man wieder eine Kompressionsschwingung wie im isoskalar-skalaren Fall. Die Übergangsformfaktoren in den Kanälen isovektor-pseudoskalar und isovektor-pseudovektoriell unterscheiden sich deutlich von den Ergebnissen im isoskalaren Kanal. Wie bereits diskutiert wurde, sind diese Moden jedoch gegenüber den isoskalaren unterdrückt.

Insgesamt ergeben die Rechnungen, daß das Radialverhalten der skalaren und vektoriellen übrigen Formfaktoren nahezu zustandsunabhängig ist. Der Grund hierfür ist, daß diese beiden Kanäle schon weitgehend durch die Forderung der Baryonenzahlerhaltung festgelegt sind. Aus den Tabellen 5.5 - 5.8 wird außerdem deutlich, daß die Hauptkomponenten der 0^+ Kompressionsanregungsstärke bei höheren Anregungsenergien ($E > 1700$ MeV) zu erwarten sind. Die Einschränkungen aus der Baryonenzahlerhaltung entfallen in den pseudoskalaren bzw. pseudovektoriellen Kanälen, in denen eine wesentlich ausgeprägtere Variation der Übergangsformfaktoren mit der Anregungsenergie beobachtet wird.

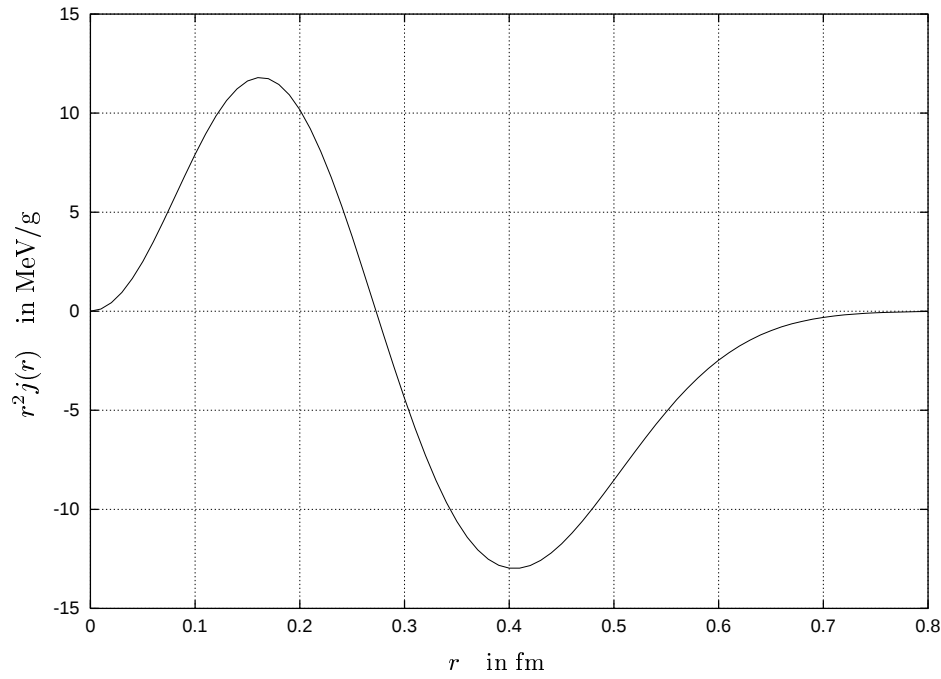


Abbildung 5.5: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isoskalaren Übergangsformfaktors der $N(1440)$ P_{11} -Resonanz.

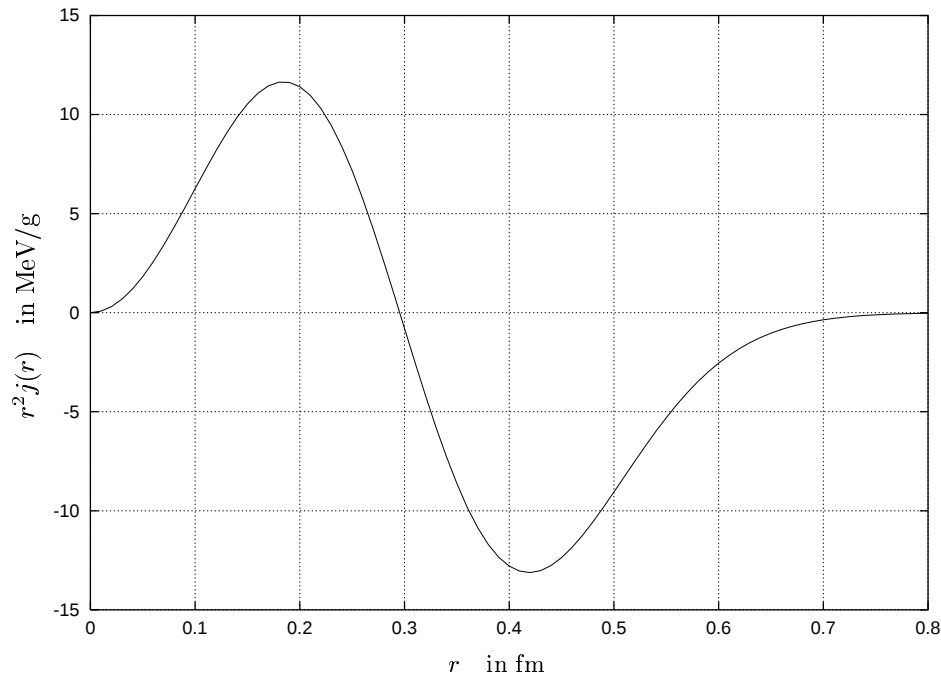


Abbildung 5.6: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isoskalar-vektoriellen Übergangsformfaktors der $N(1440)$ P_{11} -Resonanz.

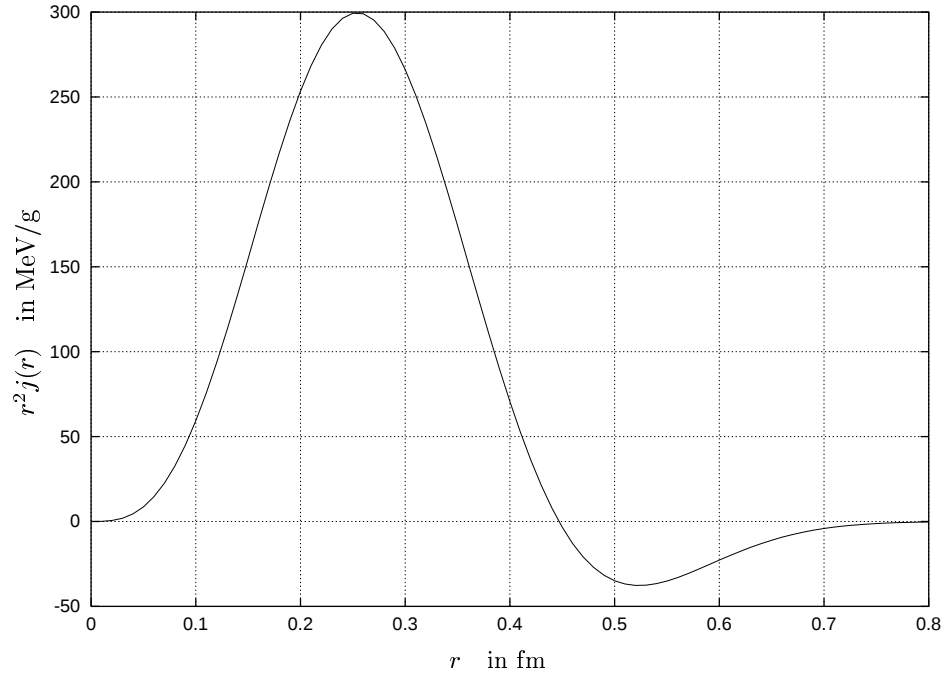


Abbildung 5.7: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isoskalar-pseudoskalaren Übergangsformfaktors der $N(1440) P_{11}$ -Resonanz.

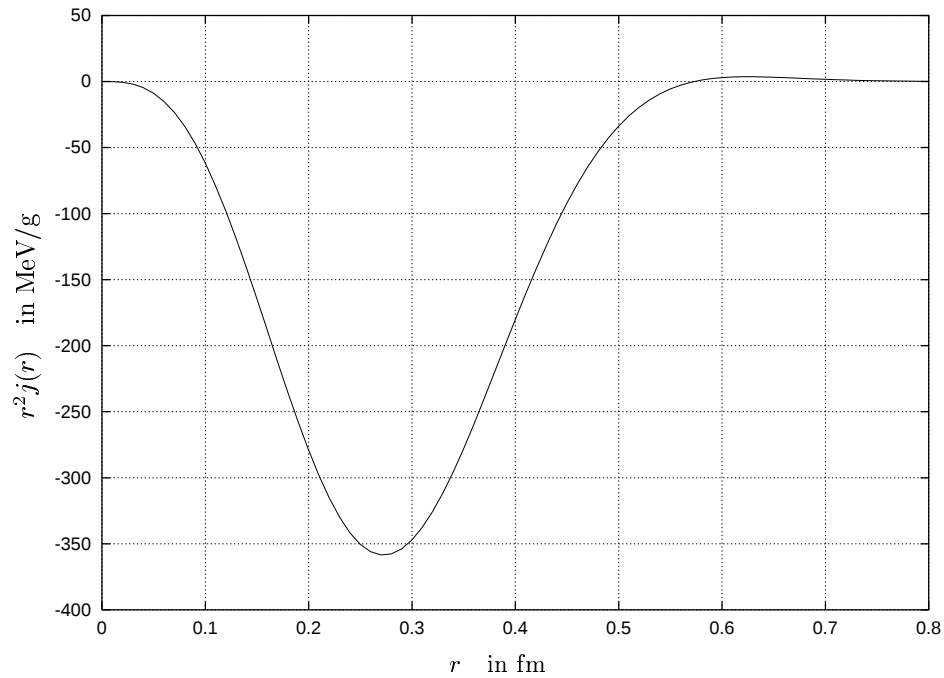


Abbildung 5.8: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isoskalar-pseudovektoriellen Übergangsformfaktors der $N(1440) P_{11}$ -Resonanz.

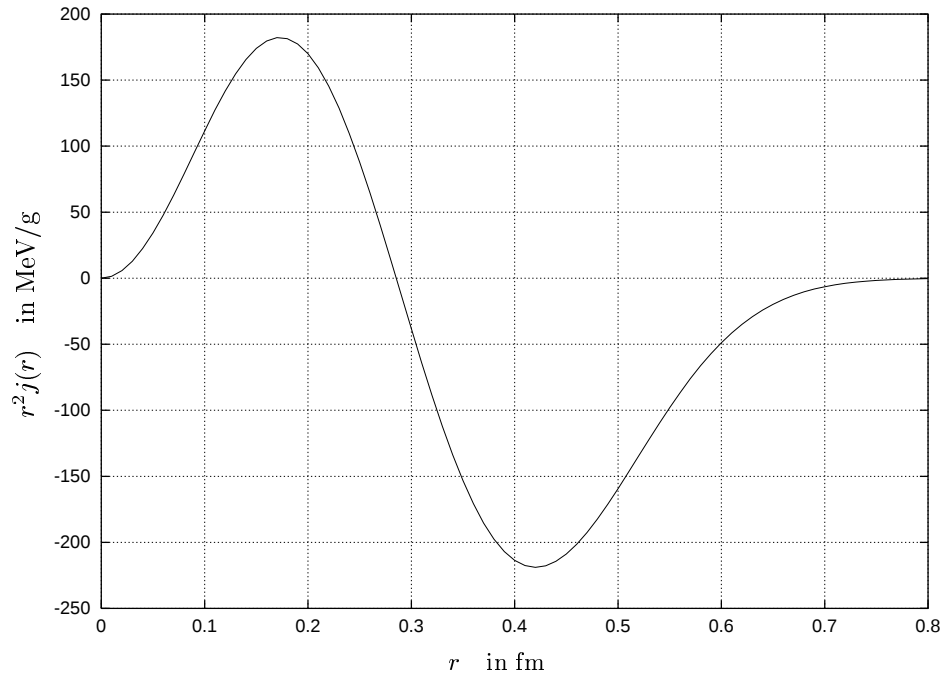


Abbildung 5.9: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isoskalar-skalaren Übergangsformfaktors der $N_1(1710) P_{11}$ -Resonanz.

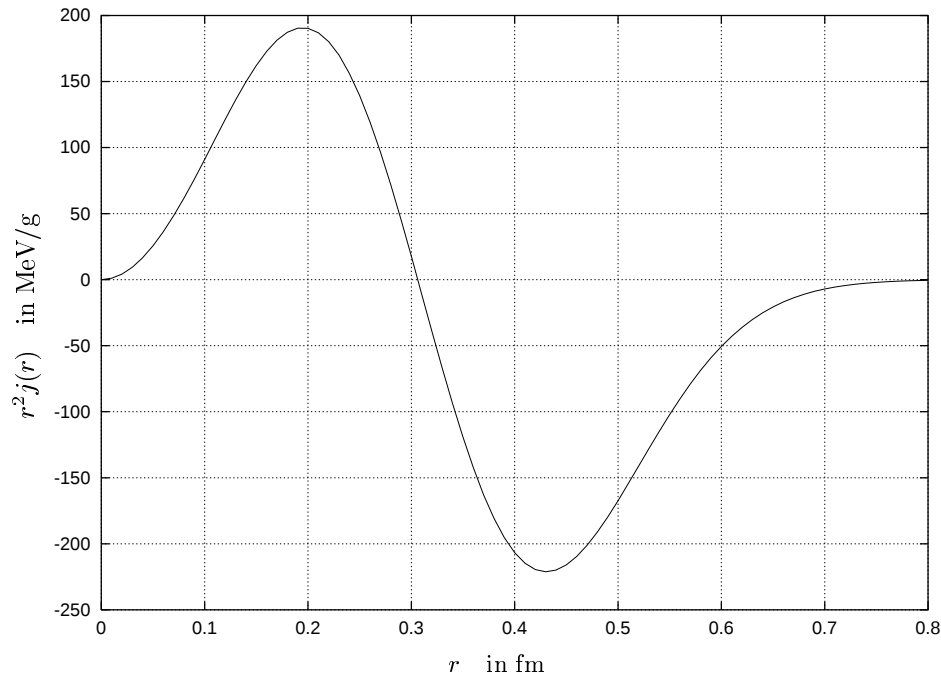


Abbildung 5.10: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isoskalar-vektoriellen Übergangsformfaktors der $N_1(1710) P_{11}$ -Resonanz.

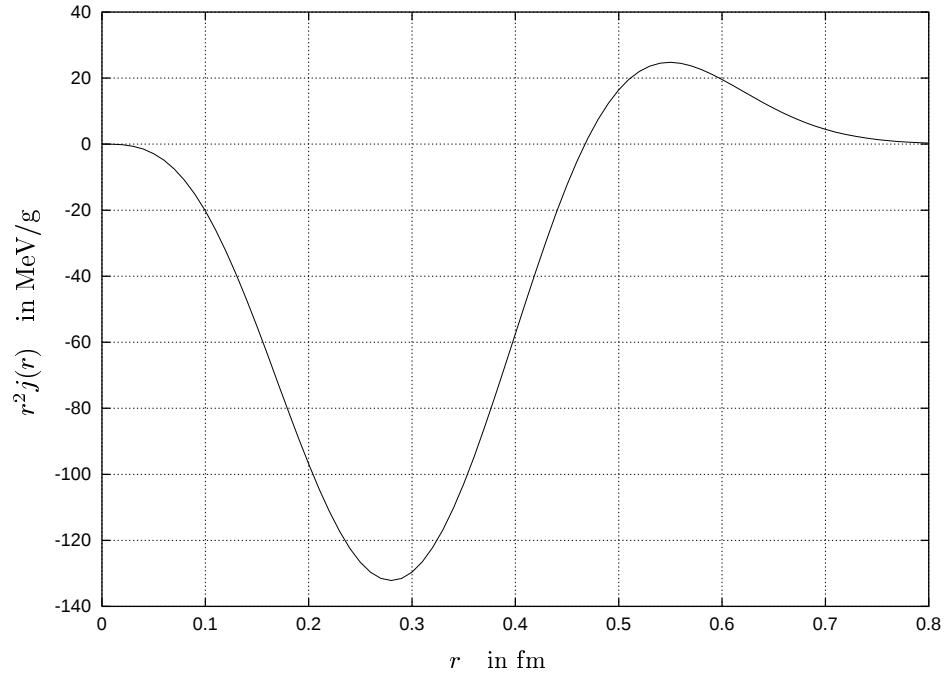


Abbildung 5.11: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isoskalar-pseudoskalaren Übergangsformfaktors der $N_1(1710)$ P_{11} -Resonanz.

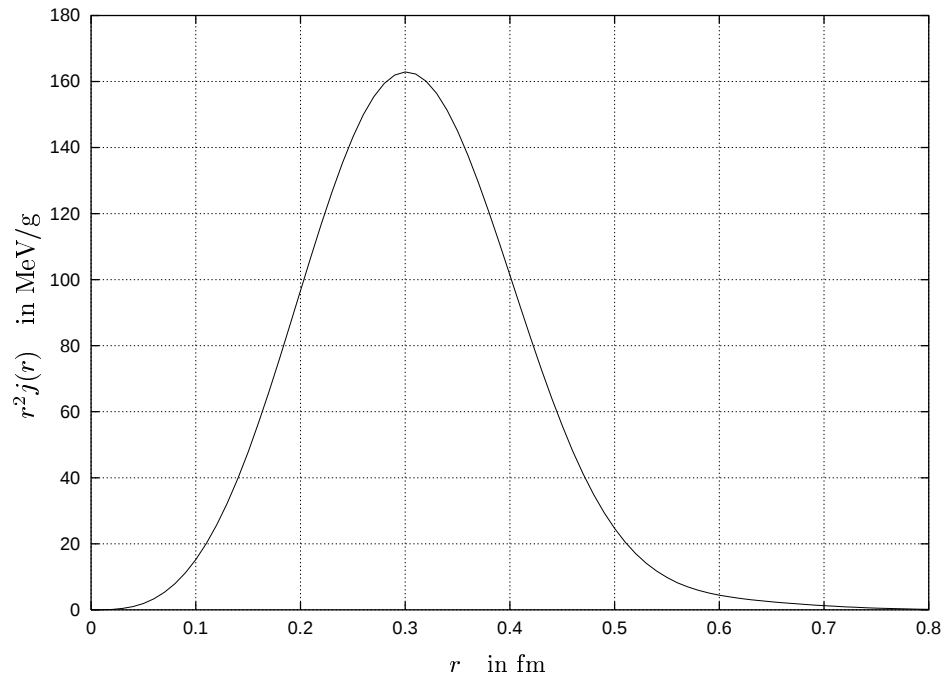


Abbildung 5.12: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isoskalar-pseudovektoriellen Übergangsformfaktors der $N_1(1710)$ P_{11} -Resonanz.

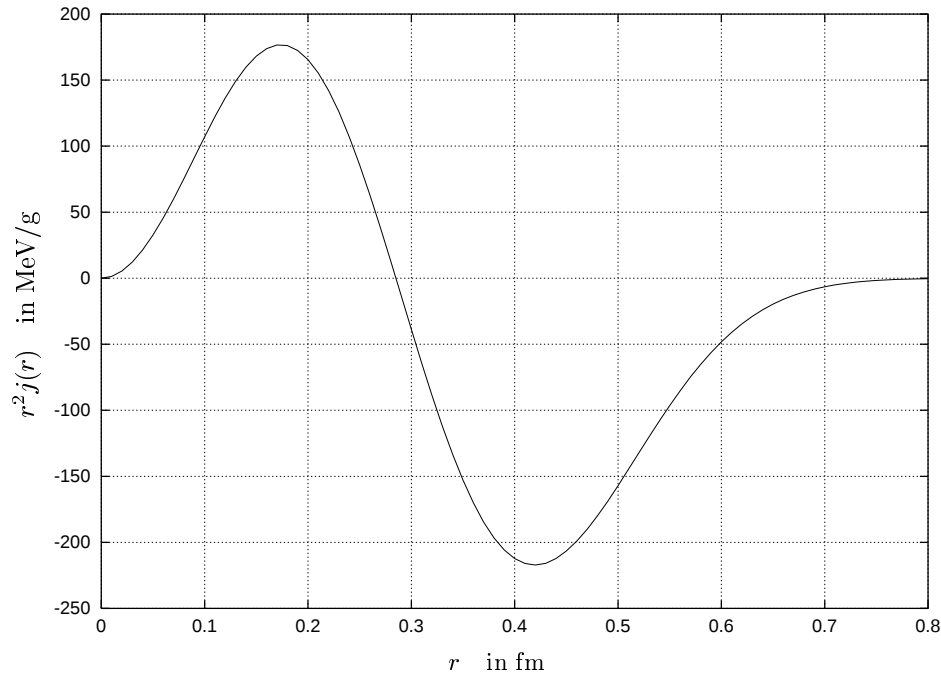


Abbildung 5.13: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isoskalar-skalaren Übergangsformfaktors der $N_2(1710) P_{11}$ -Resonanz.

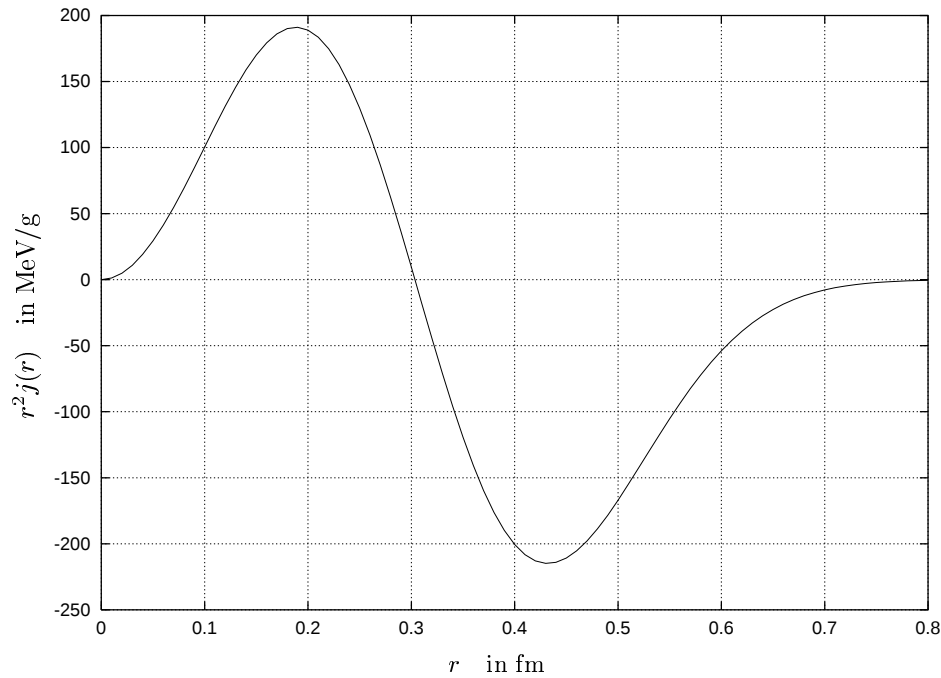


Abbildung 5.14: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isoskalar-vektoriellen Übergangsformfaktors der $N_2(1710) P_{11}$ -Resonanz.

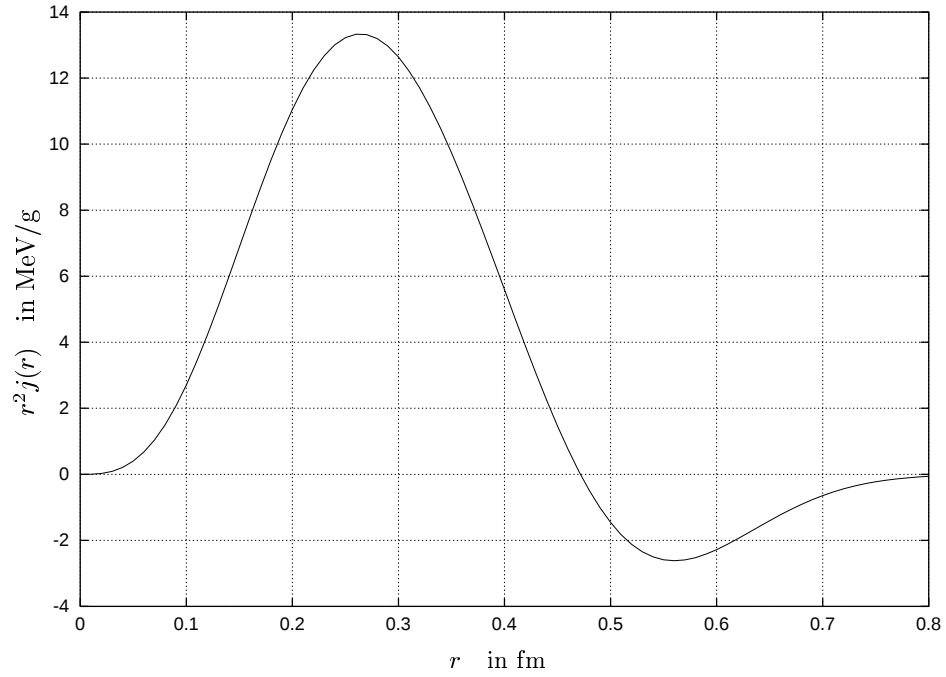


Abbildung 5.15: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isoskalar-pseudoskalaren Übergangsformfaktors der $N_2(1710)$ P_{11} -Resonanz.

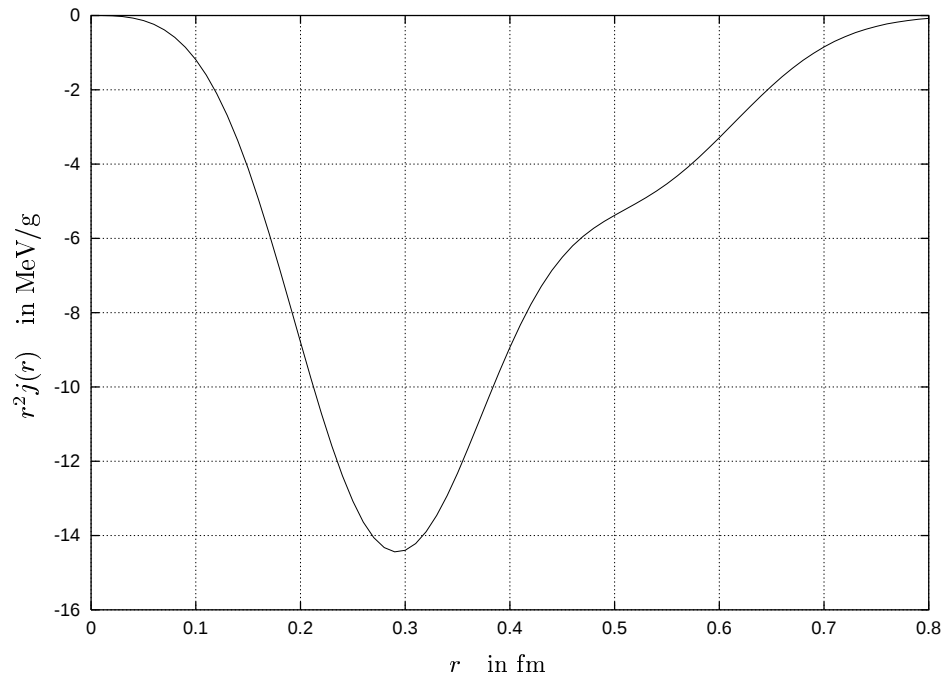


Abbildung 5.16: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isoskalar-pseudovektoriellen Übergangsformfaktors der $N_2(1710)$ P_{11} -Resonanz.

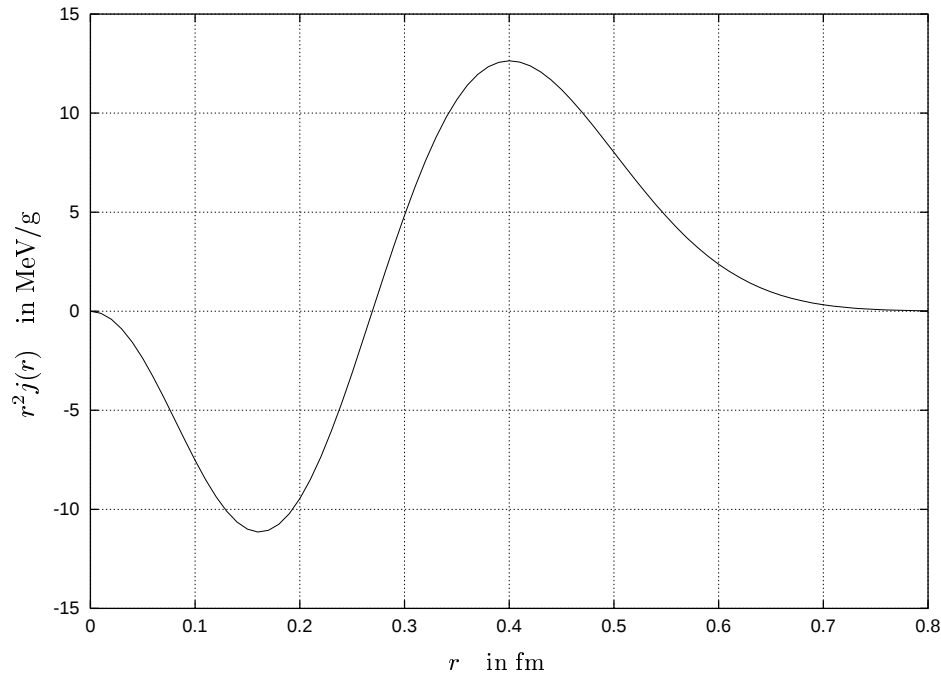


Abbildung 5.17: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isovektor-skalaren Übergangsformfaktors der $N(1440) P_{11}$ -Resonanz.

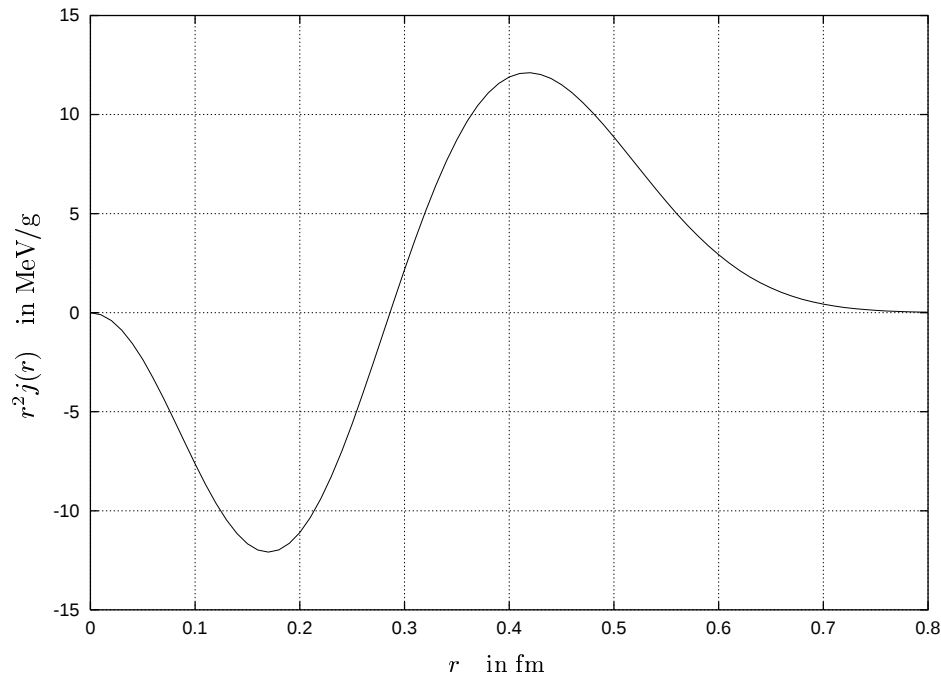


Abbildung 5.18: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isovektor-vektoriellen Übergangsformfaktors der $N(1440) P_{11}$ -Resonanz.

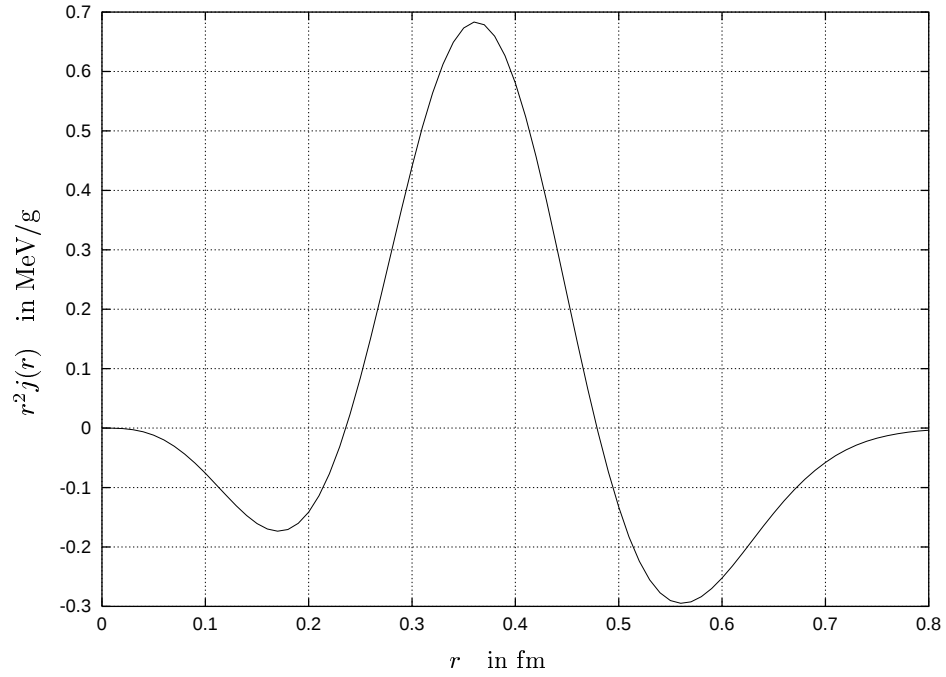


Abbildung 5.19: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isovektor-pseudoskalaren Übergangsformfaktors der $N(1440) P_{11}$ -Resonanz.

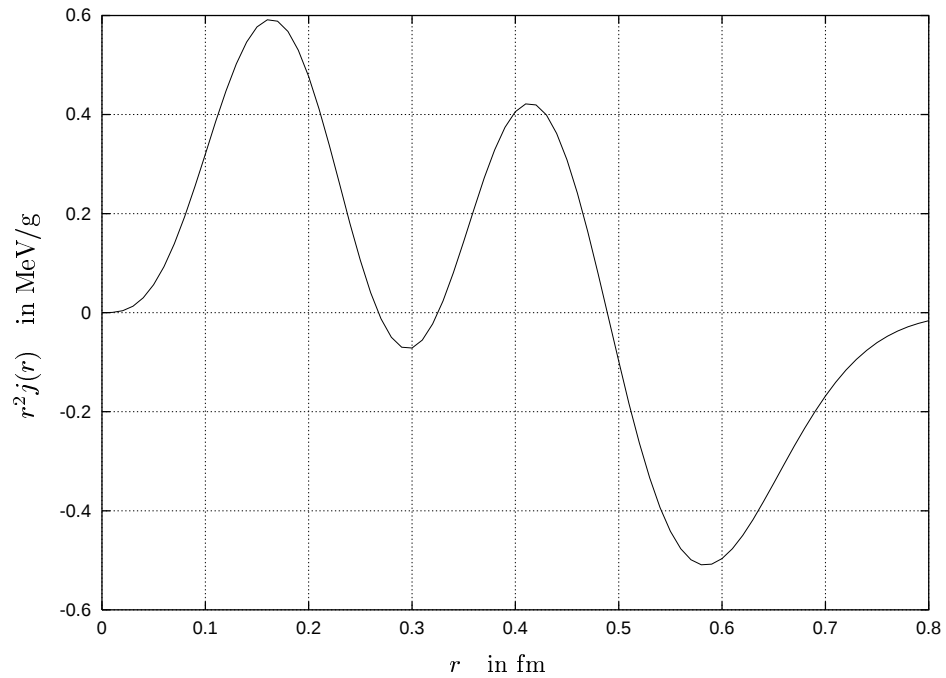


Abbildung 5.20: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isovektor-pseudovektoriellen Übergangsformfaktors der $N(1440) P_{11}$ -Resonanz.

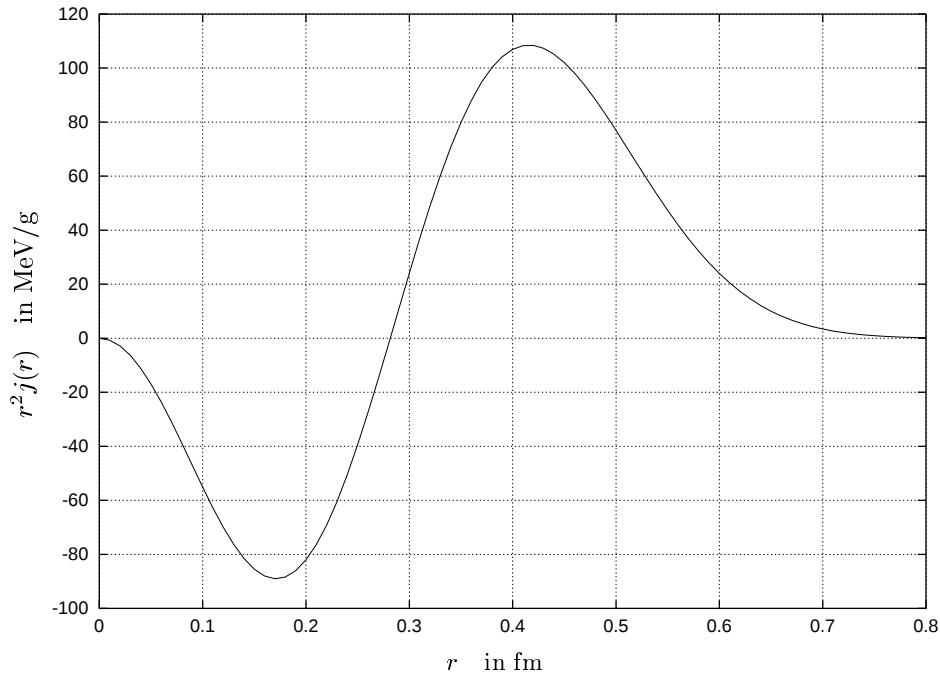


Abbildung 5.21: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isovektor-skalaren Übergangsformfaktors der $N_1(1710)$ P_{11} -Resonanz.

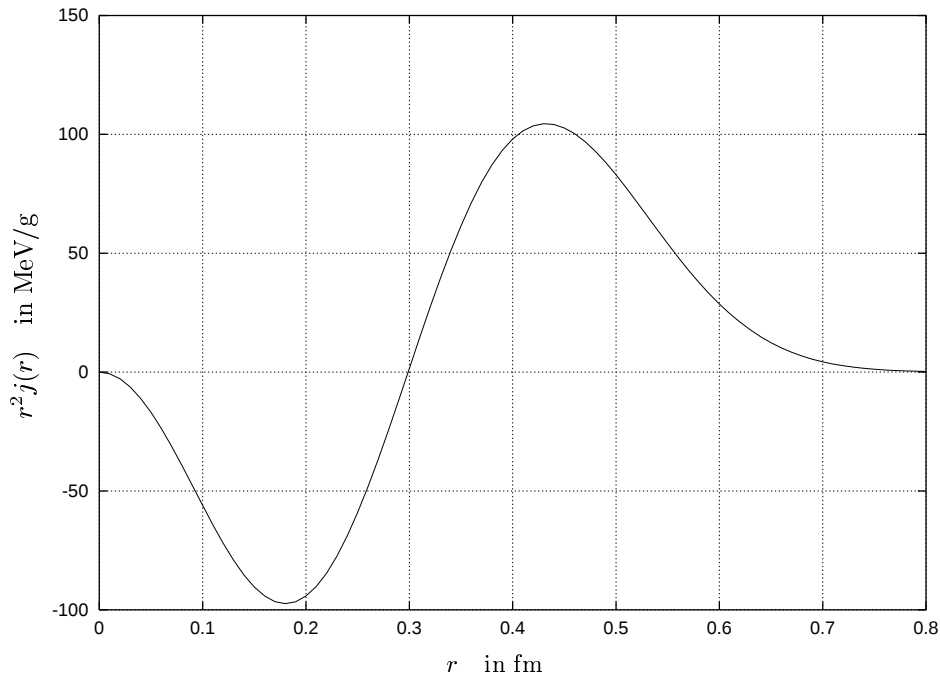


Abbildung 5.22: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isovektor-vektoriellen Übergangsformfaktors der $N_1(1710)$ P_{11} -Resonanz.

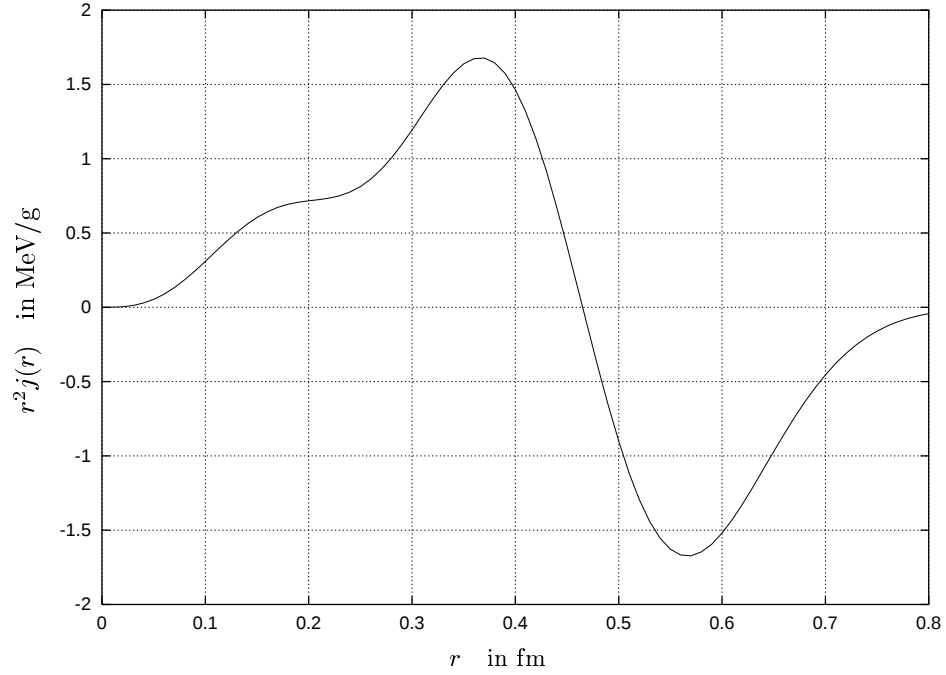


Abbildung 5.23: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isovektor-pseudoskalaren Übergangsformfaktors der $N_1(1710)$ P_{11} -Resonanz.

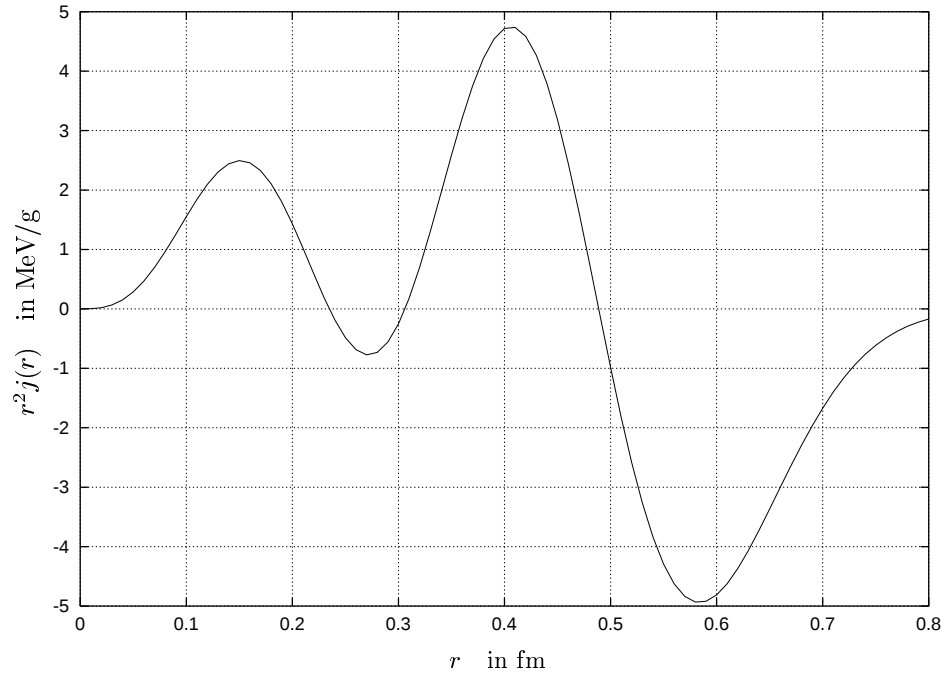


Abbildung 5.24: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isovektor-pseudovektoriellen Übergangsformfaktors der $N_1(1710)$ P_{11} -Resonanz.

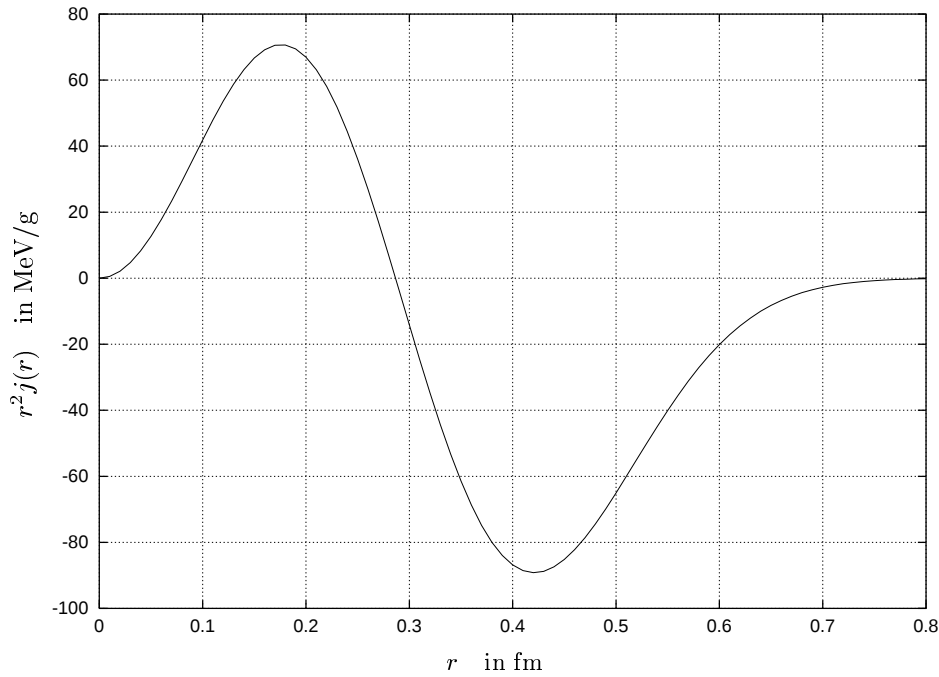


Abbildung 5.25: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isovektor-skalaren Übergangsformfaktors der $N_2(1710) P_{11}$ -Resonanz.

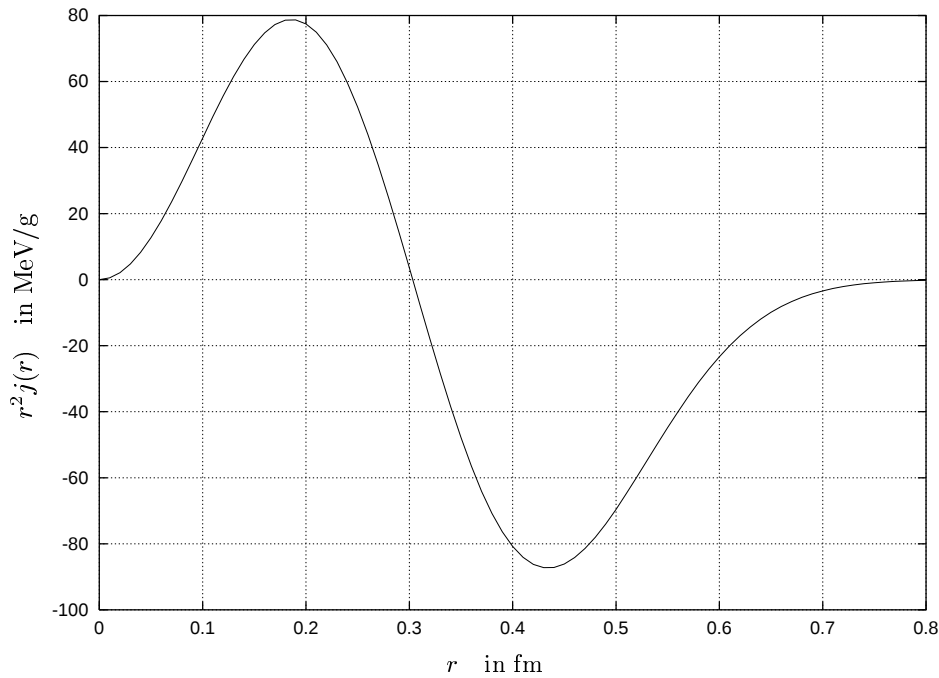


Abbildung 5.26: Y_{00} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isovektor-vektoriellen Übergangsformfaktors der $N_2(1710) P_{11}$ -Resonanz.

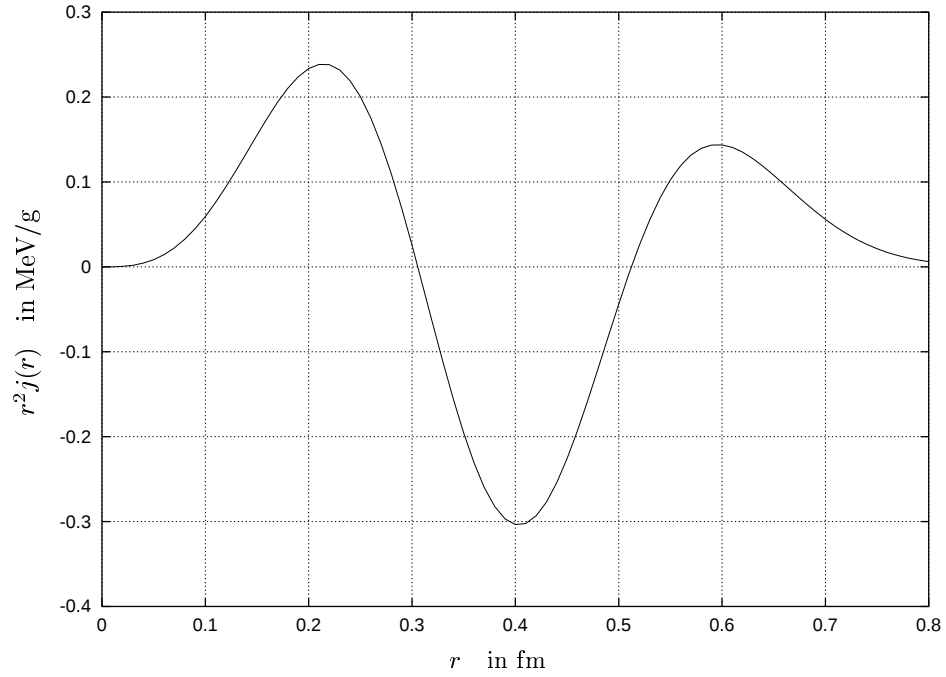


Abbildung 5.27: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung des räumlichen isovektor-pseudoskalaren Übergangsformfaktors der $N_2(1710)$ P_{11} -Resonanz.

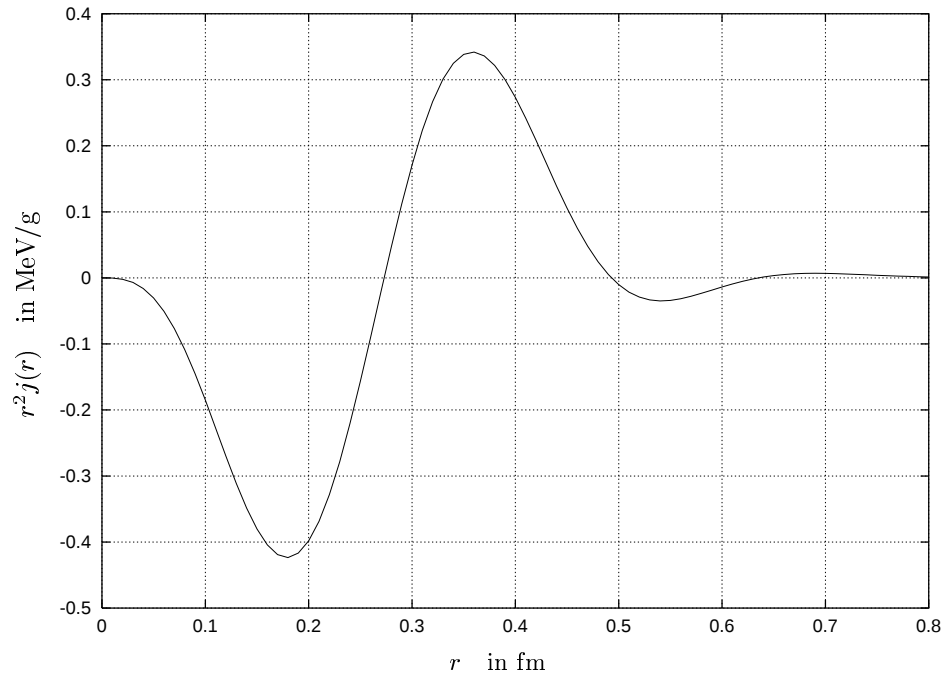


Abbildung 5.28: Y_{10} -Komponente der Radialverteilung der zeitartigen Komponente des isovektor-pseudovektoriellen Übergangsformfaktors der $N_2(1710)$ P_{11} -Resonanz.

5.3.2 Übergangsformfaktoren der $N(2220)$ H_{19} -Resonanz

Die Resultate bzgl. dieser Resonanz sind unter dem Versuch eines explorativen Vorstoßes zu Hochspinresonanzen zu verstehen. Es ist fraglich, ob die Tensor-RPA überhaupt noch in der Lage ist diese energetisch hochliegende Resonanz physikalisch zu beschreiben. Allein schon am rms-Radius dieses Übergangsformfaktors wird deutlich, daß mesonische Vakuumsanregungen nicht zu vernachlässigen sind. Aus diesem Grund sollen die Ergebnisse nur kurz präsentiert werden.

In der Abbildung 5.29 ist der skalare Übergangsformfaktor der $N(2220)$ H_{19} -Resonanz gezeigt. Erwartungsgemäß gibt er nur Beiträge in der Y_{40} -Mode. Das Maximum liegt in diesem Fall bei ca. 0.42 fm. Im Vergleich mit dem skalaren Übergangsformfaktor der $N(1440)$ P_{11} -Resonanz liegt hier eine deutlich höhere Übergangsstärke vor.

Die in Abbildung 5.30 gezeigte zeitartige Komponente des vektoriellen Übergangsformfaktors der $N(2220)$ H_{19} -Resonanz unterscheidet sich kaum vom skalaren Fall dieser Resonanz. Diese Tatsache legt nahe, daß Dirac-See-Beiträge auch in diesem Fall eine untergeordnete Rolle spielen. Der Übergangsformfaktor unterscheidet sich lediglich durch eine leicht erhöhte Übergangsstärke, sowie eine kleine Verschiebung des Maximums nach 0.41 fm.

Betrachtet man den pseudoskalaren Übergangsformfaktor in Abbildung 5.31, erkennt man eine ähnliche räumliche Ausdehnung wie im skalaren Fall dieser Resonanz. Das Maximum hingegen ist nach 0.36 fm verschoben und die Übergangsstärke deutlich geringer.

Der pseudovektorielle Übergangsformfaktor weist gegenüber dem pseudoskalaren Fall einen Vorzeichenwechsel auf, unterscheidet sich jedoch sonst nur geringfügig. Dies äußert sich in einer Verschiebung des Maximums nach 0.38 fm und einer leicht erhöhten Übergangsstärke im Vergleich zum pseudoskalaren Fall.

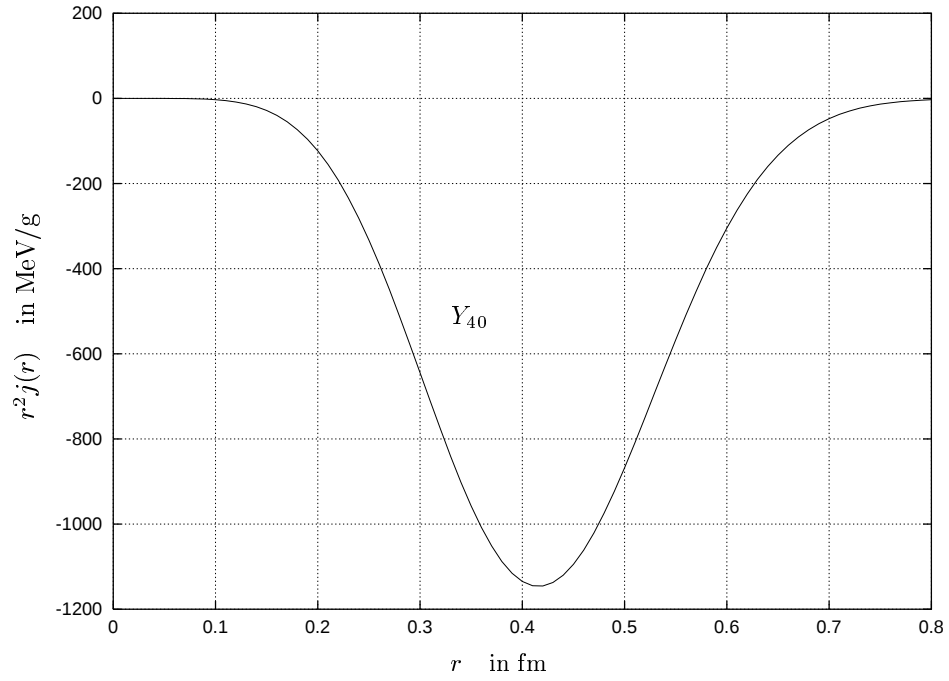


Abbildung 5.29: Radialverteilung des räumlichen skalaren Übergangsformfaktors der $N(2220)$ H_{19} -Resonanz.

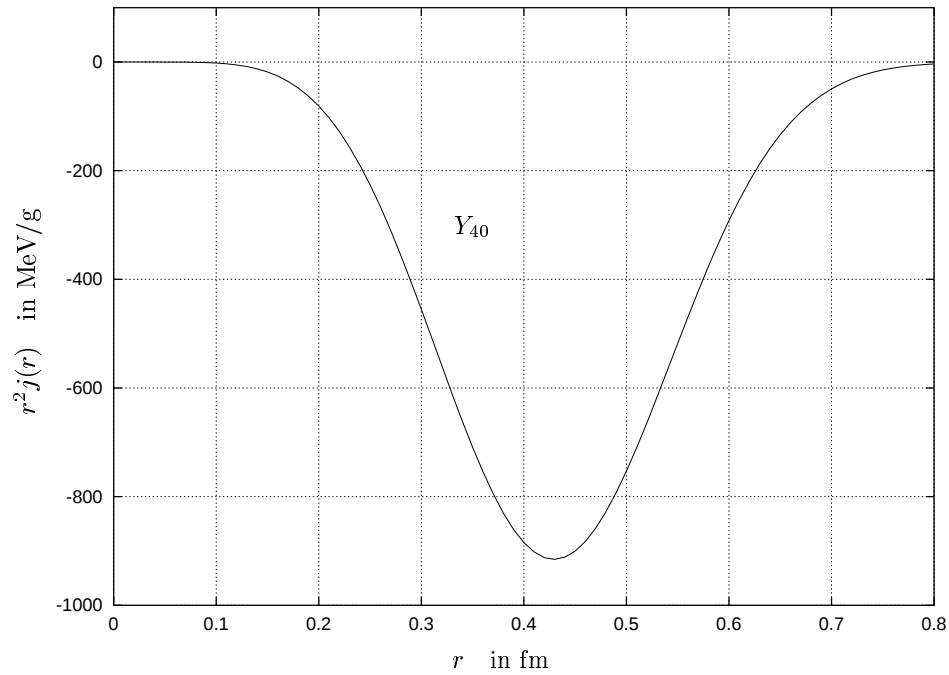


Abbildung 5.30: Radialverteilung der zeitartigen Komponente des vektoriellen Übergangsformfaktors der $N(2220)$ H_{19} -Resonanz.

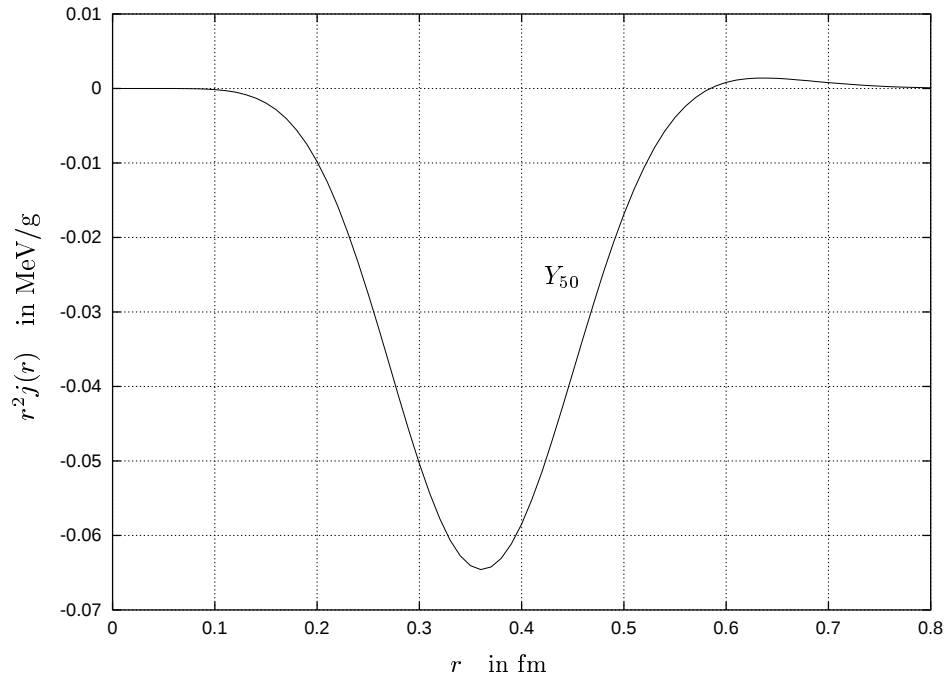


Abbildung 5.31: Radialverteilung des räumlichen pseudoskalaren Übergangsformfaktors der $N(2220)$ H_{19} -Resonanz.

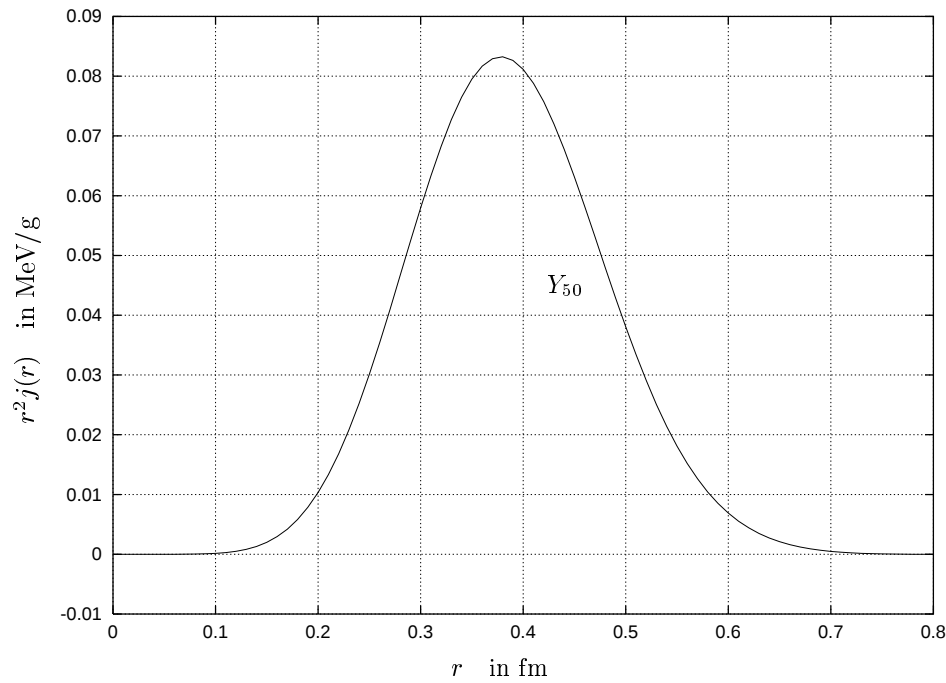


Abbildung 5.32: Radialverteilung der zeitartigen Komponente des pseudovektoriellen Übergangsformfaktors der $N(2220)$ H_{19} -Resonanz.

Zusammenfassend sei festgestellt, daß die Ergebnisse rein qualitativ die Erwartungen erfüllen. Insbesondere die Reproduktion der Erhaltung der Baryonenzahl bis auf 0.5 %, die man aus der zeitartigen Komponente des vektoriellen Übergangsformfaktors der P_{11} -Resonanzen folgern kann, verifiziert die Gültigkeit der Quasi-Bosonen-Näherung bei der Auswertung der Grundzustandsmatrixelemente.

Nicht dargestellt sind die Ergebnisse für die andere Spinorientierung des Nukleongrundzustandes. An dieser Stelle sei nur referiert, daß sich die Ergebnisse qualitativ nicht unterscheiden.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, basierend auf einer Tensor-RPA-Rechnung, Übergangsformfaktoren für Anregungen des Nukleons zu bestimmen.

Der Hamiltonoperator setzt sich in unserem Modell des Nukleons aus einem Mean-Field- und einem Restwechselwirkungsanteil zusammen. Dieses Mean-Field wird modelliert durch ein erweitertes Bag-Modell, und die Restwechselwirkung ist eine Farbstromwechselwirkung im Rahmen des NJL-Modells. Die durch die inkonsistente Beschreibung von Mean-Field und Restwechselwirkung resultierenden spuriosen Moden im negativen Paritätskanal und die damit verbundene Beschränkung auf positive Paritätszustände wurden in Kauf genommen.

Um die Tensor-RPA anzuwenden, mußte zunächst die Dirac-Gleichung für das erweiterte Bag-Modell gelöst werden. Dies wurde mit dem Numerov-Verfahren realisiert. Die Kopplungskonstante der Confinement generierenden Wechselwirkung wurde gerade so gewählt, daß sich ein rms-Radius von 0.35 fm ergibt. Beim Lösen der Tensor-RPA-Gleichungen wurde auf die Arbeit von S. Hardt [Ha96] zurückgegriffen. Die Kopplungskonstanten der Restwechselwirkung sowie der Cut-Off-Parameter wurden so bestimmt, daß die bereits gesicherten Daten des Baryonspektrums (4^* - und 3^* -Resonanzen) bestmöglich wiedergegeben werden. Dazu wurde der Simplex-Algorithmus verwendet.

Neben der Beschränkung auf den positiven Paritätskanal ist es aus konzeptionellen Gründen auch nicht möglich, den $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2})^+$ -Kanal adäquat zu beschreiben. Die Berechnungen der Übergangsformfaktoren wurden für den kompletten positiven Paritätskanal bis zu einer Energie von 2200 MeV durchgeführt. Da jedoch die RPA-Näherung für hochangeregte Zustände ihre Gültigkeit verliert, und ebenso die RPA-Resultate zur Beschreibung des Baryonenspektrums keine sehr gute Übereinstimmung mit experimentellen Daten aufweisen, wurden die

Übergangsformfaktoren nur für die vielversprechendsten Resonanzen in der vorliegenden Arbeit explizit dargestellt. Da nur im N^* -Kanal in absehbarer Zeit experimentelle Daten zu erwarten sind, wurden die Untersuchungen auf diesen Kanal beschränkt.

Die Ergebnisse wurden im vorherigen Kapitel für die folgenden Resonanzen dargestellt: $N(1440) P_{11}$, $N_1(1710) P_{11}$, $N_2(1710) P_{11}$ und $N(2220) H_{19}$.

Ein großes Problem stellt das Fehlen von experimentellen Daten für Übergangsformfaktoren im positiven Paritätskanal dar. Für den negativen Paritätskanal existieren jedoch vorläufige Daten [BL98] und Untersuchungen [AG98]; diese sind allerdings nicht von Nutzen, da die Tensor-RPA diesen Kanal aus oben aufgeführtem Grund nicht beschreiben kann. Es bleibt daher abzuwarten, was Messungen für den positiven Paritätskanal ergeben.

Für die oben erwähnten Resonanzen wurde der Übergangsformfaktor für acht Wechselwirkungstypen berechnet. Es wurden skalare, pseudoskalare, vektorielle und pseudovektorielle Kopplungen sowohl für den isoskalaren als auch den isovektoriellen Kanal berücksichtigt, wobei von einem ladungserhaltenden Übergangsoperator ausgegangen wurde. Rechnungen für Übergangsoperatoren mit anderer Struktur im Isospin-Raum stehen noch aus. Die im vorherigen Kapitel dargestellten Resultate beziehen sich auf einen Protongrundzustand, d. h. $T_{3\Delta} = +1/2$ mit positiver Spinorientierung.

Als Ausblick verbleibt eine $SU(3)$ -Flavorerweiterung der Tensor-RPA, um auch eventuelle Strangeness-Anteile des Nukleons zu beschreiben. In dem bisherigen Formalismus wurde von einer $SU(2)$ -Flavor-Symmetrie ausgegangen. Konzeptionell stellt diese Erweiterung kein Problem dar, sie ist jedoch mit erheblichem Aufwand verbunden.

Anhang A

Notationen und Konventionen

In der vorliegenden Arbeit werden durchgehend natürliche Einheiten ($\hbar = c = 1$) verwendet. Außerdem gilt die Einstein-Summenkonvention, d. h. über doppelt auftretende Indizes wird immer summiert. Griechische Indizes implizieren eine Summation von 0 bis 4, römische von 1 bis 3.

Vierervektoren werden durch folgende kovarianten und kontravarianten Vierervektoren ausgedrückt:

$$\begin{aligned} a^\mu &= (a^0, \vec{a}) && \text{kontravariant,} \\ a_\mu &= (a_0, -\vec{a}) && \text{kovariant.} \end{aligned} \tag{A.1}$$

Das Skalarprodukt zweier Vierervektoren ist hier wie folgt definiert:

$$a \cdot b = a^\mu b_\mu = a^0 b_0 - \vec{a} \cdot \vec{b}. \tag{A.2}$$

Um die Quantisierung analog der nichtrelativistischen Beschreibung durchzuführen ($p^\mu \rightarrow i\partial^\mu$), muß man die partiellen Ableitungen wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = (\partial_t, -\vec{\nabla}) && \text{kontravariante Ableitung,} \\ \partial_\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (\partial_t, \vec{\nabla}) && \text{kovariante Ableitung.} \end{aligned} \tag{A.3}$$

Die γ -Matrizen genügen folgenden Vertauschungsrelationen:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = g^{\mu\nu}, \quad \{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0. \tag{A.4}$$

In der Dirac-Darstellung lauten die Matrizen dann:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{A.5}$$

wobei die Pauli-Spinmatrizen hier wie folgt definiert sind:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.6})$$

Matrixrelationen für γ_5 und γ_μ :

$$\begin{aligned} (\gamma_5)^\dagger &= \gamma_5, \\ (\gamma_5)^2 &= 1, \\ \{\gamma_5, \gamma_\mu\} &= 0, \\ (\gamma_\mu)^\dagger &= \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Für den symmetrisierten Doppelkommutator der Operatoren A, B, C gilt:

$$2 [A, B, C] \equiv [A, [B, C]] + [[A, B], C]. \quad (\text{A.8})$$

Die Fouriertransformation wird wie folgt definiert:

$$f(k) = \int d^4x \, e^{ikx} f(x) \quad \text{und} \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4k \, e^{-ikx} f(k). \quad (\text{A.9})$$

In dieser Schreibweise gilt die Relation:

$$\int d^4x \, e^{ikx} = (2\pi)^4 \delta^4(k). \quad (\text{A.10})$$

Anhang B

SU(2)-Kopplungsrelationen

Nachfolgend eine kurze Zusammenfassung der in dieser Arbeit verwendeten Notationen und Kopplungsrelationen. Für weitere Relationen sei an dieser Stelle nur auf die Quellen dieser Sammlung verwiesen [Ed64, Me79, Ro57, Ro70, RN75].

Allgemeine Tensorkopplung

R^λ sei ein sphärischer Tensor der Tensorstufe λ und R_μ^λ eine der $(2\lambda + 1)$ -Komponenten.

Das gekoppelte Produkt zweier Tensoren R^{λ_1} und S^{λ_2} zu einem Tensor der Stufe λ kann man schreiben als

$$(R^{\lambda_1} \times S^{\lambda_2})_\mu^\lambda = \sum_{\mu_1, \mu_2} \langle \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 | \lambda \mu \rangle R_{\mu_1}^{\lambda_1} S_{\mu_2}^{\lambda_2}, \quad (\text{B.1})$$

wobei $\langle \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 | \lambda \mu \rangle$ ein Clebsch-Gordan-Koeffizient ist.

Clebsch-Gordan-Koeffizienten

Für diese Koeffizienten gelten folgende Relationen:

Normierung:

$$\sum_{\mu_1, \mu_2} |\langle \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 | \lambda \mu \rangle|^2 = 1. \quad (\text{B.2})$$

Alle Clebsch-Gordan-Koeffizienten sind reel:

$$\langle \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 | \lambda \mu \rangle = \langle \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 | \lambda \mu \rangle^* . \quad (\text{B.3})$$

Symmetriebeziehungen:

$$\langle \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 | \lambda \mu \rangle = (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda} \langle \lambda_1 \lambda_2 - \mu_1 - \mu_2 | \lambda - \mu \rangle \quad (\text{B.4})$$

$$= (-1)^{\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda} \langle \lambda_2 \lambda_1 \mu_2 \mu_1 | \lambda \mu \rangle \quad (\text{B.5})$$

$$= (-1)^{\lambda_1 - \mu_1} \hat{\lambda} \hat{\lambda}_2^{-1} \langle \lambda \lambda_1 \mu - \mu_1 | \lambda_2 \mu_2 \rangle, \quad (\text{B.6})$$

wobei $\hat{\lambda}$ eine Abkürzung für $\sqrt{2\lambda + 1}$ ist.

Spezielle Werte:

$$\langle \lambda \lambda - \mu \mu | 00 \rangle = (-1)^{\lambda + \mu} \hat{\lambda}^{-1}. \quad (\text{B.7})$$

Eine explizite Formel zur Berechnung von Clebsch-Gordan-Koeffizienten lautet [Ed64]:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 | \lambda \mu \rangle &= \delta_{\mu_1 + \mu_2, \mu} \\ &\left[\frac{(2\lambda + 1)(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda)!(\lambda_1 - \mu_1)!(\lambda_2 - \mu_2)!(\lambda + \mu)!(\lambda - \mu)!}{(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda + 1)!(\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda)!(\lambda_2 - \lambda_1 + \lambda)!(\lambda_1 + \mu_1)!(\lambda_2 + \mu_2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\sum_{s=0} (-1)^{s + \lambda_1 - \mu_1} \frac{(\lambda_1 + \mu_1 + s)!(\lambda_2 + \lambda - \mu_1 - s)!}{s!(\lambda_1 - \mu_1 - s)!(\lambda - \mu - s)!(\lambda_2 - \lambda + \mu_1 + s)!} \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

Summiert wird über alle positiven ganzzahligen s , bei denen die Ausdrücke im Nenner nicht negativ sind.

Eine weitere sehr nützliche Relation ist

$$(R^{\lambda_1} \times S^{\lambda_2})^{\lambda \dagger} = (S^{\lambda_1 \dagger} \times R^{\lambda_2 \dagger})^{\lambda}. \quad (\text{B.9})$$

Racah-Umkopplungsrelation

Bei der Kopplung von drei sphärischen Tensoren kommt es auf die interne Tensorstufe an. Um von einer Darstellung zur anderen zu gelangen, benötigt man die Racah-Umkopplungsrelation.

Für die Tensoren R^{λ_1} , S^{λ_2} und T^{λ_3} gilt:

$$((R^{\lambda_1} \times S^{\lambda_2})^{\lambda_{12}} \times T^{\lambda_3})^\lambda = \sum_{\lambda_{23}} \hat{\lambda}_{12} \hat{\lambda}_{23} W(\lambda_1 \lambda_2 \lambda \lambda_3; \lambda_{12} \lambda_{23}) (R^{\lambda_1} \times (S^{\lambda_2} \times T^{\lambda_3})^{\lambda_{23}})^\lambda. \quad (\text{B.10})$$

Für die Racah-Koeffizienten $W(abcd; ef)$ gelten folgende Relationen:

$$W(abcd; ef) = W(badc; ef) = W(acbd; fe) \quad (\text{B.11})$$

$$W(abab; f0) = W(aabb; 0f) = (-1)^{a+b-f} \hat{a}^{-1} \hat{b}^{-1} \quad (\text{B.12})$$

$$W(aabb; fa + b) = \hat{f}^{-2} < aaa - a|f0 > < bbb - b|f0 > . \quad (\text{B.13})$$

Tensorzustände

$|\lambda\rangle\rangle$ bezeichnet einen Tensorzustand der Tensorstufe λ . Dieser Tensor besitzt $(2\lambda + 1)$ -Komponenten. Die μ -te Komponente wird geschrieben als $(|\lambda\rangle\rangle)_\mu \equiv |\lambda\mu\rangle$.

Tensorzustände verhalten sich wie Tensoroperatoren, daher gilt:

$$(R^{\lambda_1} \times |\lambda_2\rangle\rangle)_\mu^\lambda = \sum_{\mu_1, \mu_2} < \lambda_1 \lambda_2 \mu_1 \mu_2 | \lambda \mu > R_{\mu_1}^{\lambda_1} |\lambda_2 \mu_2\rangle. \quad (\text{B.14})$$

Adjungierte Zustände:

$$(\langle\langle\lambda|)_\mu \equiv \langle\lambda\mu| \quad \text{und} \quad (\langle\langle\bar{\lambda}|)_\mu \equiv (-1)^{\lambda+\mu} \langle\lambda - \mu|. \quad (\text{B.15})$$

Der Tensorzustand $\langle\langle\bar{\lambda}|$ transformiert sich wie ein Tensor der Stufe λ , $\langle\langle\lambda|$ hingegen nicht.

Erwartungswerte

Für zwei Zustände $|x\lambda\mu\rangle$, $|y\lambda'\mu'\rangle$ gilt:

$$\langle x\lambda\mu | y\lambda'\mu' \rangle = \hat{\lambda}^{-1} (-1)^{-2\lambda} (\langle\langle x\bar{\lambda}| \times |y\lambda'\rangle\rangle)^0 = \delta_{xy} \delta_{\lambda\lambda'} \delta_{\mu\mu'}. \quad (\text{B.16})$$

Erwartungswert eines Tensoroperators:

$$\langle \Gamma_1 \mu_1 | W_\nu^\lambda | \Gamma_2 \mu_2 \rangle = < \lambda \Gamma_2 \nu \mu_2 | \Gamma_1 \mu_1 > \langle \Gamma_1 \mu_1 | (W^\lambda \times |\Gamma_2\rangle\rangle)_{\mu_1}^{\Gamma_1}. \quad (\text{B.17})$$

Wendet man Gleichung (B.16) auf Gleichung (B.17) an und schreibt außerdem den CG-Koeffizienten um, ergibt sich:

$$\langle \Gamma_1 \mu_1 | W_\nu^\lambda | \Gamma_2 \mu_2 \rangle = (-1)^{\lambda + \Gamma_2 - 3\Gamma_1} \hat{\Gamma}_1^{-1} < \lambda \Gamma_2 \nu \mu_2 | \Gamma_1 \mu_1 > (\langle \bar{\Gamma}_1 | \times W^\lambda \times | \Gamma_2 \rangle)^0 \quad (\text{B.18})$$

Wigner-Eckhardt-Theorem

$$\langle \Gamma_1 \mu_1 | W_\nu^\lambda | \Gamma_2 \mu_2 \rangle = \hat{\Gamma}_1^{-1} < \Gamma_2 \lambda \mu_2 \nu | \Gamma_1 \mu_1 > \langle \Gamma_1 || W^\lambda || \Gamma_2 \rangle; \quad (\text{B.19})$$

$\langle \Gamma_1 || W^\lambda || \Gamma_2 \rangle$ ist das reduzierte Matrixelement, welches von den Projektionsquantenzahlen μ_1 , μ_2 und ν unabhängig ist.

Aus den Gleichungen (B.19) und (B.18) folgt die Relation:

$$(\langle \bar{\Gamma}_1 | \times W^\lambda \times | \Gamma_2 \rangle)^0 = (-1)^{3\Gamma_1 - \Gamma_2 - \lambda} \langle \Gamma_1 || W^\lambda || \Gamma_2 \rangle. \quad (\text{B.20})$$

Multipolentwicklung

Zur Bestimmung von Multipolentwicklungen von Produktfunktionen aus zwei Y_{lm} sind folgende Identitäten sehr hilfreich:

$$\begin{aligned} \langle l_1 m_1 | Y_{LM} | l_2 m_2 \rangle &= \int Y_{l_1 m_1}^*(\vartheta, \varphi) Y_{LM}(\vartheta, \varphi) Y_{l_2 m_2}(\vartheta, \varphi) d\Omega = \\ &= (-1)^{-m_1} \left(\frac{(2l_1 + 1)(2L + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \begin{pmatrix} l_1 & L & l_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_1 & L & l_2 \\ -m_1 & M & m_2 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

Die dabei auftretenden 3j-Symbole sind wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 - j_2 - m_2} \hat{j}_3^{-1} < j_1 j_2 m_1 m_2 | j_3 - m_3 >. \quad (\text{B.22})$$

Am Ende dieser kurzen Zusammenfassung über $SU(2)$ -Kopplungsrelationen soll noch auf eine Referenz zur Berechnung von Clebsch-Gordan-Koeffizienten hingewiesen werden. In der Arbeit von K. Schertler [ST96] wird eine sehr intuitive Methode vorgestellt, um diese Koeffizienten zu berechnen. Diese unterscheidet sich grundlegend von den Standardmethoden [Me79, Ed64, Ro57] und beleuchtet eine ganz neue Interpretation dieser Entwicklungskoeffizienten.

Anhang C

Strommatrixelemente

Die Berechnung von Grundzustandsübergangsmatrixelementen der Form

$$\langle \Delta \tilde{\mu}_\Delta | a_i^\dagger a_m | \Delta \mu_\Delta \rangle \quad (\text{C.1})$$

mit Hilfe des Tensors $T_{\alpha\beta\gamma}$ aus Abschnitt 2.5 ist prinzipiell möglich, erfordert jedoch größeren Aufwand. Nutzt man hingegen direkt die explizite Darstellung der verschiedenen Nukleongrundzustandskonfigurationen, erhält man leicht nachfolgende Relationen. Die Notation entspricht der in Abschnitt 2.5.

Proton

$$\begin{aligned} a_1 |p \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (-|23\rangle - |32\rangle + 2|14\rangle + 2|41\rangle) \\ a_2 |p \uparrow\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{18}} (|13\rangle + |31\rangle) \\ a_3 |p \uparrow\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{18}} (|12\rangle + |21\rangle) \\ a_4 |p \uparrow\rangle &= \frac{2}{\sqrt{18}} |11\rangle \\ a_1 |p \downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (|24\rangle + |42\rangle) \\ a_2 |p \downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (|14\rangle + |41\rangle - 2|23\rangle - 2|32\rangle) \\ a_3 |p \downarrow\rangle &= \frac{-2}{\sqrt{18}} |22\rangle \\ a_4 |p \downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (|12\rangle + |21\rangle) \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Neutron

$$\begin{aligned}
a_1 |n \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (|34\rangle + |43\rangle) \\
a_2 |n \uparrow\rangle &= \frac{-2}{\sqrt{18}} |33\rangle \\
a_3 |n \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (|14\rangle + |41\rangle - 2 |23\rangle - 2 |32\rangle) \\
a_4 |n \uparrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (|13\rangle + |31\rangle) \\
a_1 |n \downarrow\rangle &= \frac{-2}{\sqrt{18}} |44\rangle \\
a_2 |n \downarrow\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{18}} (|34\rangle + |43\rangle) \\
a_3 |n \downarrow\rangle &= \frac{-1}{\sqrt{18}} (|24\rangle + |42\rangle) \\
a_4 |n \downarrow\rangle &= \frac{1}{\sqrt{18}} (-|23\rangle - |32\rangle + 2 |14\rangle + 2 |41\rangle)
\end{aligned} \tag{C.3}$$

Mit Hilfe dieser Relationen ist es nun sehr leicht, unter Ausnutzung der Orthogonalität der einzelnen Zustände, die Strommatrixelemente zu bestimmen.

Anhang D

Numerov-Verfahren

Das Numerov-Verfahren dient zum Lösen von Differentialgleichungen des folgenden Typs, welche keine ersten Ableitungen enthalten [AF66]:

$$f''(x) = w(x)f(x). \quad (\text{D.1})$$

Wie im Kapitel 2 gezeigt, kann man das Lösen der Dirac-Gleichung für sphärischsymmetrische Systeme auf eine solche Differentialgleichung reduzieren. In den nachfolgenden Abschnitten wird die Rekursionsformel des Numerov-Verfahrens hergeleitet und danach noch die konkrete Anwendung des Verfahrens beschrieben. In diesem Zusammenhang sind besonders die Wahl der Randbedingungen sowie das Gewährleisten der Stetigkeit von besonderer Bedeutung.

D.1 Herleitung des Verfahrens

Entwickelt man $f(x)$ in einer Umgebung von x in einer Taylorreihe, erhält man folgende zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4), \\ f(x-h) &= f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + O(h^4). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Addiert man nun die beiden Gleichungen, erhält man:

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2f''(x) + \frac{h^4}{12}f''''(x) + O(h^6). \quad (\text{D.3})$$

Entwickelt man $f''(x)$ analog und setzt es in die obige Formel ein, folgt:

$$\begin{aligned} f(x+h) + f(x-h) = \\ 2 f(x) + \frac{5}{6} h^2 f''(x) + \frac{1}{12} h^2 (f''(x+h) + f''(x-h)) + O(h^6). \end{aligned} \quad (\text{D.4})$$

Mit Hilfe der Differentialgleichung $f''(x) = w(x)f(x)$ kann man alle Ableitungsterme ersetzen und erhält eine einfache Rekursionsformel für $f(x)$ der Ordnung $O(h^6)$. Definiert man eine neue Funktion

$$\xi(x) \equiv f(x) - \frac{h^2}{12} f''(x) = f(x) \left(1 - \frac{h^2}{12} w(x)\right), \quad (\text{D.5})$$

kann die Rekursionsformel in nachfolgende Form gebracht werden. Dies hat den Vorteil, daß das Vefahren schneller ist [AF66]:

$$\xi(x+h) = 2 \xi(x) - \xi(x-h) + \frac{h^2 w(x)}{1 - \frac{h^2}{12} w(x)} \xi(x) + O(h^6). \quad (\text{D.6})$$

Zum Starten der Rekursion benötigt man zwei Startwerte, nämlich $\xi(x)$ und $\xi(x-h)$.

D.2 Anwendung auf Dirac-Gleichung

Will man eine sphärischsymmetrische Dirac-Gleichung lösen, reduziert sich das Problem auf den Radialanteil, wie in Kapitel 2.2 gezeigt.

An Stelle eines Anfangswertproblems hat man es hier mit einem Randwertproblem zu tun. Sucht man eine Lösung im Intervall $[0, r_{max}]$, fängt man an an beiden Intervallgrenzen nach innen zu integrieren (Shooting-Verfahren). Das Verifizieren der Lösung geschieht mittels Stetigkeitsbedingungen von $F(r)$ und $F'(r)$ an einer Zwischenstelle. Auf die Details wird in den nächsten Abschnitten eingegangen.

D.3 Randbedingungen und Normierung

Da man neben den Stetigkeitsbedingungen auch noch eine Normierungsbedingung zu erfüllen hat, kann man seine Startbedingungen fast frei wählen. Nur für den Ursprung muß die Funktion $F(r)$ (siehe Kapitel 2.2) verschwinden. Für die Startwerte wählt man:

$$\begin{aligned} F(0) &= 0, \\ F(h) &= a, \\ F(r_{max}) &= b_1, \\ F(r_{max} - h) &= b_2. \end{aligned} \tag{D.7}$$

Um das Verfahren noch zu stabilisieren, ist es sinnvoll, die Startwerte a , b_1 und b_2 so zu wählen, daß bereits die Asymptotik der Lösung physikalisch richtig wiedergegeben wird, d. h. im Außenbereich expotentiell abfallend und im Ursprung Drehimpulsrelationen berücksichtigend. Der Grund für diese Stabilisierung läßt sich leicht erklären. Die allgemeine Lösung der Dgl. enthält sowohl im Innenbereich als auch im Außenbereich divergierende Terme, die schon nach wenigen Iterationsschritten die Lösung dominieren. Durch das Ansetzen mit der richtigen Asymptotik kann man diese dominierenden Lösungen länger unterdrücken und somit das Verfahren stabilisieren.

D.4 Stetigkeitsbedingungen

Wie bereits erwähnt, muß die Lösung stetig in F und F' sein. Um diese Bedingung zu überprüfen, wählt man günstigerweise den Punkt, in dem die Wellenfunktion in den expotentiellen Abfall übergeht. Dies passiert an der Stelle, für die $w(x) = 0$ gilt. Außerdem muß an diesem Punkt gelten:

$$\begin{aligned} N_1 F_{innen}(x) &= N_2 F_{außen}(x), \\ N_1 F'_{innen}(x) &= N_2 F'_{außen}(x). \end{aligned} \tag{D.8}$$

Ersetzt man die Funktions- und Ableitungswerte durch Ausdrücke wie in (D.2), kann man die beiden o. a. Bedingungen in folgende Ausdrücke umschreiben:

$$\begin{aligned}
N_1 F_{innen}(x-h) &= N_2 F_{au\beta en}(x-h), \\
N_1 F_{innen}(x+h) &= N_2 F_{au\beta en}(x+h).
\end{aligned}
\tag{D.9}$$

Damit dieses Gleichungssystem eine Lösung hat, muß die dazugehörige Determinante verschwinden. Dies läßt sich leicht nachprüfen. Wenn dies erfüllt ist, ist nur noch das Verhältnis der Normierungskonstanten $\frac{N_1}{N_2}$ zu bestimmen. Die komplette Lösung kann danach noch einer beliebigen Normierung unterzogen werden.

Literaturverzeichnis

- [AF66] B. Adler, S. Fernbach und M. Rothenberg, *Methods in Computational Physics Vol. 6*, Academic Press, New York, 1966
- [AG98] M. Aiello, M. M. Giannini und E. Santopinto, J. Phys. **G 24** (1998), 753
- [Ba88] R. K. Baduri, *Models of the Nucleon*, Addison-Wesley, Redwood City, 1988
- [Ba82] Bahá'u'lláh, *Botschaften aus 'Akká*, Bahá'í-Verlag, Hofheim, 1982
- [BB94] G. F. Bertsch und R. A. Broglia, *Oscillations in finite quantum systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994
- [BL98] R. Bijker und A. Leviatan, nucl-th/9811013
- [BR86] G. E. Brown, M. Rho und W. Weise, Nucl. Phys. **A 454** (1986), 669
- [BP53] D. Bohm und D. Pines, Phys. Rev. **85** (1952), 338
- [CG89] R. N. Cahn und G. Goldhaber, *The Experimental Foundations of Particle Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1989
- [Ca32] J. Chadwick, Nature **129** (1932), 312
- [CJ74] A. Chodos, R. Jaffe, K. Johnson, C. Thorn und V. Weisskopf, Phys. Rev. **D 9** (1974), 3471
- [DF90] J. F. Dawson und R. J. Furnstahl, Phys. Rev. **C 42** (1990), 2009
- [Do94] H. Dönges, *Der elektromagnetische Formfaktor des Nukleons unveröffentl. Doktorarbeit*, Giessen, 1994
- [Ec95] G. Ecker, Prog. Part. Nucl. Phys. **35**, 1

- [Ed64] A. R. Edmonds, *Drehimpulse in der Quantenmechanik*, BI Hochschultaschenbücher, Mannheim, 1964
- [FH68] D. Faiman und A. W. Hendry, Phys. Rev. **173** (1968), 1720
- [Fe57] R. A. Ferrel, Phys. Rev. **107** (1957) 450, 1631
- [FW71] A. Fetter und J. Walecka, *Quantum Theory of Many Particle Systems*, Mc Graw Hill, NewYork, 1971
- [FL95] C. Fuchs, H. Lenske und H. H. Wolter, Phys. Rev. **C 52** (1995), 3043
- [Ge95] J. Geiss, *Kollektive Anregungen auf dem Nukleon in RPA-Näherung*, unveröffentl. Diplomarbeit, Giessen, 1995
- [GR96] L. Y. Glozman und D. O. Riska, Phys. Rep. **268** (1996), 263
- [Gr87] W. Greiner, *Relativistische Quantenmechanik, Wellengleichungen*, Harri Deutsch, Frankfurt, 1987
- [HM84] F. Halzen und A. D. Martin, *Quarks and Leptons*, John Wiley & Sons, New York, 1984
- [Ha92] S. Hardt, *Angeregte Zustände des Nukleons in RPA-Näherung*, unveröffentl. Diplomarbeit, Giessen, 1992
- [Ha96] S. Hardt, *Dirac-RPA-Theorie des Nukleons und effektive Quark-Modelle*, unveröffentl. Doktorarbeit, Giessen, 1996
- [HG97] S. Hardt, J. Geiss und U. Mosel, Nucl. Phys. **A 627** (1997), 391
- [HG97] S. Hardt, J. Geiss und U. Mosel, Nucl. Phys. **A 627** (1997), 427
- [KL90] S. Klimt, M. Lutz, U. Vogl und W. Weise, Nucl. Phys. **A 516** (1990), 429
- [Ma96] A. Manohar, Phys. Rev. **D 54** (1996), 303
- [Ma84] T. Mayer-Kuckuk, *Kernphysik*, Teubner, Stuttgart, 1984
- [Me79] A. Messiah, *Quantenmechanik Bd. 2*, Walter de Gruyter, Berlin, 1979
- [Mo89] U. Mosel, *Fields, Symmetries and Quarks*, Mc Graw Hill, New York, 1989

- [NJL61] Y. Nambu und G. Jona-Lasinio, Phys. Rev. **122** (1961), 345
- [Or78] J. Orear, Phys. Rev. **D 18** (1978), 2484
- [PDG98] Particle Data Group Eur. Phys. J. **C 3** (1998)
- [PS95] M. E. Peskin und D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Addison-Wesley, Reading, 1995
- [Pe87] D. Perkins, *Introduction to High Energy Physics*, Addison Wesley, Redwood City, 1987
- [Pi95] A. Pich, Rept. Prog. Phys. **58** (1995), 563
- [RS80] P. Ring und P. Schuck, *The Nuclear Many-Body Problem*, Springer, New York, 1980
- [Ro57] M. E. Rose, *Elementary Theory of Angular Momentum*, John Wiley & Sons, New York, 1957
- [Ro70] D. J. Rowe, *Nuclear Collective Motion*, Methuen and Co., London, 1970
- [RN75] D. J. Rowe und C. Ngo-Tong, Rev. Mod. Phys. **47** (1975), 471
- [ST96] K. Schertler und M. H. Thoma, Ann. Physik **5** (1996), 103
- [SR89] J. R. Shepard und J. A. McNeil, Phys. Rev. **C 40** (1989), 2320
- [SF74] A. de Shalit und H. Feshbach, *Theoretical Nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1974
- [Sk61] T. H. R. Skyrme, Proc. R. Soc. London **A260** (1961), 127
- [We96] D. H. Weingarten, Scientific American **274** (1996), 104

Danksagung

An erster Stelle danke ich Prof. Dr. U. Mosel für die Aufnahme an sein Institut, sowie für die interessante Themenstellung.

Für die durchgehende Betreuung und stete Diskussionsbereitschaft bin ich Prof. Dr. H. Lenske zu großem Dank verpflichtet. Er hat entscheidend zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Bei Dr. Steffen Hardt möchte ich mich besonders bedanken. Er las nicht nur mein Manuskript und gab mir wertvolle Anregungen, sondern führte mich auch in seinen Programm-Code ein.

Danken möchte ich ebenfalls Dr. Jochen Geiss, der mir neben dem Computersupport auch fachlich hilfreich zur Seite stand.

In diesem Zusammenhang seien auch Frank Hoffmann und Klaus Schertler erwähnt, die ebenfalls für einen guten Computerservice am Institut sorgten.

Nicht zu vergessen sei Sascha Juchem, der täglich hunderte von Fragen beantworteten mußte. Ihm danke ich herzlich.

Neben der immer sehr guten Stimmung im 5. Stock möchte ich die allgemein sehr gute Arbeitsatmosphäre am Institut lobend erwähnen.

Elke Jung und Christiane Pausch danke ich für die administrative Hilfe.

Schließlich bin ich meinen Eltern zu größtem Dank für den Rückhalt und die finanzielle Unterstützung, die sie mir während des gesamten Studiums gewährt haben, verpflichtet.

Milan Diebel

Gießen, im April 1999