

Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift

Bericht der Oberhessischen Gesellschaft
für Natur- und Heilkunde zu Gießen

Naturwissenschaftliche Abteilung

Natur  OHG 1833

Band 67

Gießen 2017

ISSN 0340-4498

Redaktion und Schriftleitung:

Dr. Michael Serafin

Riegelpfad 64

35392 Gießen

email: Michael.Serafin@t-online.de

Vertrieb:

Geschäftsstelle der Oberhessischen Gesellschaft

für Natur- und Heilkunde

- Naturwissenschaftliche Abteilung-

c/o Universitätsbibliothek

Frau Hochstein

Otto-Behaghel-Straße 8

35394 Gießen

Dieser Band erscheint auch in gedruckter Form in der
"Oberhessischen Naturwissenschaftlichen Zeitschrift", Volume 67, Gießen 2017

Inhaltsverzeichnis

Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 67, 2017

Editorial	4
OEDER, R. & SCHWABE, D.:	
Evidence that no liquid equilibrium process is involved in the comb building of honey bees (<i>Apis Mellifera</i>)	8
KAFITZ, W.:	
Symmetrie	
„Ebenmaß“ in Mathematik und Naturwissenschaften Eine Übersicht anhand von Beispielen	28
Kurzfassung von Vorträgen, die in der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde – Naturwissenschaftliche Abteilung – gehalten wurden	
DRAHORAD, S. (24.05.2016)	
Biologische Krusten in der Wüste: Wie Mikroorganismen den Sand zusammenhalten	115
STEINMANN, H.-H. (21.03.2017)	
Glyphosat — das umstrittene Pflanzenschutzmittel	117

EDITORIAL

Das vorliegende Heft stellt im fachlichen Teil zwei Beiträge vor, die im weitesten Sinne mit Symmetrie zu tun haben. Da sind auf der einen Seite Bienenwaben, die schon als klassisches Beispiel für symmetrische Muster in der Natur genannt werden können. Da sind auf der einen Seite Bienenwaben, die schon als klassisches Beispiel für symmetrische Muster in der Natur genannt werden können. Immer wieder fasziniert die regelmäßige Anordnung tausender hexagonaler Zellen auf der Fläche einer Bienenwabe. Dabei bringen schon einfachste Prinzipien in der belebten Natur eine solche hexagonale Anordnung hervor, was z.B. die dichtgepackte Anordnung von gleichgroßen Insekteneiern auf dem Blatt einer Pflanze zeigen kann. Die Autoren widerlegen eindrucksvoll überholte Vorstellungen vom Wabenbau und zeigen, dass Bienen als Baumeister unmittelbar die symmetrische hexagonale Zellenstruktur ihrer Waben aufbauen. Andererseits widmet sich ein Übersichtsartikel dem Thema Symmetrie im Allgemeinen anhand von Beispielen aus Mathematik und mehreren Naturwissenschaften. Die Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift positioniert sich schon durch ihren Namen als naturwissenschaftlich orientiertes Medium. Der als Übersicht gedachte Beitrag ist bereits in diesem Sinne interdisziplinär. Trotzdem wurde im Rahmen des Gutachterprozesses die Frage gestellt, wieso Symmetrie in Kunst und Architektur darin ausgeklammert wird. Diese Frage ist berechtigt.

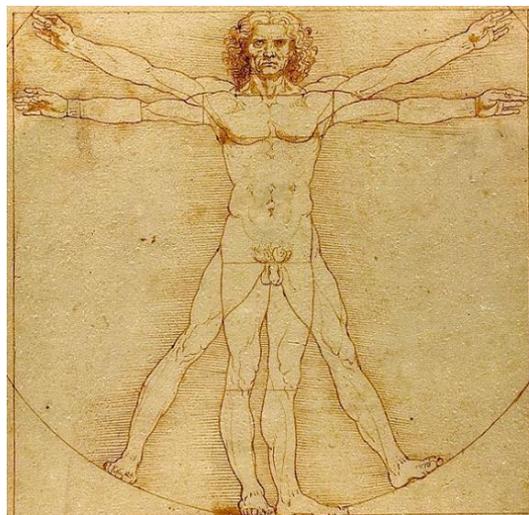


Abb. 1: Leonardo da Vincis Vitruvianischer Mensch beeinflusste die Proportionenlehre in der Kunst maßgeblich.

Bei der Jahresversammlung der Leopoldina als nationaler Akademie der Wissenschaften im September 2015 in Halle an der Saale war „Symmetrie und Asymmetrie“ das Leitthema der Vorträge. Die Festrede hielt Bundeskanzlerin

Angela Merkel. Das Programm zeigt dabei umso mehr, wie weit der Begriff „Symmetrie“ in verschiedensten Bereichen eine prägende Rolle spielt. Der Festvortrag von dem Philosophen Prof. Dieter Birnbacher mit dem Titel „Symmetriebrüche in der Moral“ zeigt überdeutlich, welche Bedeutung sogar in unerwarteten Themen Symmetrie und ihr Gegenteil – Asymmetrie und Symmetriebrüche – haben können.

Kann die Symmetrie als gemeinsames „Dach“, eben als Klammer über bildende Künste, Architektur, Mathematik und Naturwissenschaften angesehen werden? Ist „Ausklammern“ deshalb in hohem Maße willkürlich; vielleicht sogar arrogant gegenüber der Kunst? Es ist daher sinnvoll, sich übergreifend mit dem Symmetriebegriff in den unterschiedlichen Disziplinen zu beschäftigen, um Unterschiede oder Gemeinsamkeiten zu analysieren. Der griechische Begriff *συμμετρία* / *symmetria* hat zweifellos antike Ursprünge und verbindet beide Welten. Aber bei näherem Hinsehen erkennt man, dass Symmetrie in Mathematik und Naturwissenschaften und Symmetrie in der Kunst und Architektur vollkommen unterschiedliche Wurzeln und fast nur den Begriff gemeinsam haben.

Es stellt sich heraus, dass Symmetrie in der Kunst vor allem aus der Analyse des menschlichen Körpers heraus zu erklären ist. Die Proportionslehre, die sich z.B. aus Leonardo da Vincis „Vitruvianischen Menschen“¹ ergibt, war die ursprüngliche Bedeutung von Symmetrie und wurde erst später vom Begriff „Proportion“, im Sinne des ins Verhältnis gesetzte System wesentlicher Maßzahlen, ersetzt². Bestenfalls die bilaterale Symmetrie, die man überall disziplinär übergreifend findet und nach der z.B. über 95% aller Tierarten aufgebaut sind, ist ein Bindeglied zur Naturwissenschaft. Entscheidend scheint dabei jedoch noch nicht einmal die Spiegelebene zu sein - als das Kriterium für anschauliche Symmetrie in räumlichen Strukturen schlechthin. Vitruv hatte dafür noch nicht einmal ein eigenes Wort. Doch bereits die allgemeine Kompositionslehre, die „*ein Gleichgewicht abstrakt bestimmter Pole bedeutet*“ (Schummer), ist ein ausschließliches Merkmal der Kunst. Zweifellos haben diese auf die Kunst bezogenen Bedeutungen von Symmetrie antike Wurzeln. Auch der goldene Schnitt, (mathematisch formuliert die „stetige Teilung“) eignet sich als Klammer nicht. Er wurde erst im 19. Jahrhundert ein wesentliches ästhetisches Kriterium.

Ganz anders verhält es sich mit dem Symmetriebegriff in Mathematik und Naturwissenschaften, vielleicht mit Sonderstellung der Biologie. Évariste

¹ Bildquelle: de.wikipedia.org/wiki/Vitruvianischer_Mensch; (Vitruv, ca. 80-15 v.Chr.)

² Siehe Joachim Schummer, Symmetrie und Schönheit in Kunst und Wissenschaft. Erschienen in: Wolfgang Krohn (Hg.): Ästhetik in der Wissenschaft, Hamburg: Meiner, 2006, S. 59-78 (Sonderband der Zeitschrift für Ästhetik und Allgemeine Kunstwissenschaft)

Galois hat vor knapp 200 Jahren, im Alter von 20 Jahren, vor allem in der Nacht bevor er in einem Duell starb, die Grundlage für die systematische Lösung algebraischer Gleichungen gelegt. Aus dieser ist dann nach und nach die Gruppentheorie in der heutigen Form hervorgegangen. Sie bildet die Basis für das Symmetrieverständnis in der Mathematik, bei räumlichen Betrachtungen in Kristallographie, Chemie und Molekülphysik und für den abstrakteren Symmetrieanatz in der Physik, in dem es darum geht, in der Formulierung von grundsätzlichen physikalischen Gesetzen die Invarianz prinzipieller Erhaltungsgrößen unabhängig von (Koordinaten-) Transformationen zu garantieren.

Doch wie steht es mit der Schönheit? Schließlich bedeutet der antike griechische Begriff „symmetría“ Ebenmaß, ist also in gewissem Maße synonym zu schön. Möglicherweise ist das Streben nach „Schönheit“ eine Gemeinsamkeit. Zumindest hat es vielen berühmten Künstlern, Mathematikern oder Physikern als Leitlinie gedient; Zoologen wie Ernst Haeckel inbegriffen. Am radikalsten hat es Paul Dirac 1963 formuliert: „Es ist wichtiger, Schönheit in seinen Gleichungen zu haben als Übereinstimmung mit dem Experiment“³.



Abb. 2: Ästhetisierung der Natur: René Binet's Porte Monumentale der Weltausstellung, Paris 1900. Sonderausgabe der Zeitung L'illustration vom 14. April 1900 nach einer Zeichnung einer Radiolarie von Ernst Haeckel⁴.

³ *It is more important to have beauty in one's equations than to have them fit experiment.* Paul M. Dirac, in 'The Evolution of the Physicist's Picture of Nature', Scientific American, May 1963, 208, 47.

⁴ Bildquelle: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Grand_entrance,_Exposition_Universal,_1900,_Paris,_France.jpg#filelinks)

[Grand_entrance,_Exposition_Universal,_1900,_Paris,_France.jpg#filelinks](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Grand_entrance,_Exposition_Universal,_1900,_Paris,_France.jpg#filelinks)

Aber auch bei diesem Begriff muss man zwischen Ästhetik und Erkenntnistheorie unterscheiden. Allerdings geht die Trennlinie nicht unbedingt genau zwischen dem künstlerischen und mathematisch-naturwissenschaftlichen Bereich hindurch. Allzu oft führte z.B. die Erkenntnis um „harmonische“ Proportionen zur Ästhetik oder ästhetisches Empfinden zu neuen Erkenntnissen. Prominentes Beispiel ist Johannes Kepler, dessen heute etwas mystisch anmutendes Erstlingswerk „Mysterium cosmographicum“, z.B. auf Basis von Proportionen in platonischen Körpern Erklärungen zur Himmelsmechanik zu liefern, durchaus als Zwischenschritt zu seinen quantitativen Erkenntnissen bei den Planetenbahnen verstanden werden kann. Untersuchungen bei menschlichem und tierischem Verhalten zeigen andererseits, dass keinesfalls Schönheit mit Symmetrie gleichgesetzt werden darf. Asymmetrie definiert in gewissem Maße das Schönheitsempfinden mit und ist häufig auch notwendige funktionale Voraussetzung. Asymmetrie und Symmetriebrüche waren sogar notwendig, damit wir heute in einem materiedominierten Weltall leben können und es offenbar nicht gleichviel Materie und Antimaterie gibt.

Es bleibt als Konsequenz dieser Überlegungen, dass eine klare Differenzierung zwischen Kunst und Mathematik/Naturwissenschaft bei der Symmetrie sinnvoll ist. Der gleiche Begriff wird höchst unterschiedlich verstanden und angewendet. Dies gilt besonders dort, wo „moderne“ Mathematik, unabhängig von antiken Wurzeln, die Grundlagen zur exakten Beschreibung und Quantifizierung gelegt hat.

Eine interessante Sonderstellung nimmt die Biologie ein, in der die mathematische Gruppentheorie kaum eine Rolle spielt, aber eine Fülle von Beispielen sowohl funktionale als auch ästhetische Aspekte der Symmetrie adressieren.

Gleichwohl verbindet „Schönheit“ die unterschiedlichsten Disziplinen. Egal, ob die Schönheit künstlerisch-ästhetische Ergebnisse beeinflusst, ob sie die optimal funktionale Symmetrie einer Bienenwabe widerspiegelt, ob sie in der sexuellen Selektion eine Rolle spielt oder erkenntnistheoretische Bedeutung hat: Der Künstler, der Architekt, der Mathematiker und der Naturwissenschaftler ziehen aus der Schönheit der Symmetrie Schaffenskraft und Schaffensfreude.

Evidence that no liquid equilibrium process is involved in the comb building of honey bees (*Apis Mellifera*)

ROBERT OEDER and DIETRICH SCHWABE *)

Abstract:

According to Pirk et al. (2004), honeybees first build free standing cylindrical cells which are then transformed to hexagonal cross-section by wax-flow in a kind of self-organization. We show that there is no self-organization of the wax. Bees cannot form juxtaposed wax tubes which are in contact to each other. They would have to produce temperatures close to the melting point in order to accomplish flow of the wax in a time which is meaningfully short for honeycomb construction. The cells would collapse at this temperature. The form of the comb-cells adjacent to the walls of the nest cannot stem from circular tubes. From this it is clear that bees build their honeycomb in a direct and holistic way. They begin and continue building at the edge of the mid-wall. The combination of the following two principles inevitably generates the hexagonal cross-section of the cells: (1) the hexagonal close packing of the cells and (2) a common wall between all adjacent cells. This results in an economic use of space and material. The mid-wall can be considered as assembled of parts of Plateau's minimum plane of the regular tetrahedron and is built with minimum consumption of wax as are the cells.

Zusammenfassung

Nach Pirk et al. (2004) bauen Honigbienen beim Wabenbau zunächst frei stehende zylindrische Zellen, die dann durch das Fließen des Wachses in einer Art Selbstorganisation in den hexagonalen Querschnitt umgeformt werden. Wir zeigen, dass Selbstorganisation des Wachses nicht auftritt. Bienen können keine dicht nebeneinander liegenden, sich berührenden Wachsröhren bauen. Um ein Fließen des Wachses in einer für den Wabenbau sinnvoll kurzen Zeit zu bewerkstelligen, müssten sie Temperaturen knapp

*) R. Oeder, Lärchenstraße 16, D-84533 Marktl, e-mail: robert-oeder@web.de
D. Schwabe, I. Physikalisches Institut der Justus-Liebig-Universität Gießen
Heinrich-Buff-Ring 16, D-35392 Gießen,
e-mail: Dietrich.Schwabe@physik.uni.giessen

unterhalb des Schmelzpunktes erzeugen. Bei dieser Temperatur würden die Zellen kollabieren. Die Form der Zellen im Kontakt mit den Wänden der Nisthöhle kann nicht aus runden Röhren entstanden sein. Das macht klar, dass Bienen ihre Waben direkt und in einer ganzheitlichen Weise bauen. Sie beginnen den Bau mit der Mittelwand und bauen an deren Rand sukzessive weiter. Die Kombination folgender zwei Prinzipien erzeugt zwangsläufig den hexagonalen Querschnitt der Zellen: (1) die hexagonal dichteste Packung der Zellen und (2) eine gemeinsame Wand zwischen allen benachbarten Zellen. Das führt zu einer ökonomischen Nutzung von Raum und Material. Die Mittelwand kann als aus Teilen der Plateau'schen Minimalfläche des regulären Tetraeders zusammengesetzt betrachtet werden.

Keywords: honeycomb/comb building/hexagonal cells/mid-wall/minimum consumption of wax/direct building of hexagonal cells

1 Introduction

Recently the age-old question has been increasingly discussed of how honeybees build their combs with the regularly arranged hexagonal cells. These combs are admired of their well-engineered architecture and their astonishing multi-functionality. We will not discuss all the many questions related to the building of such a complex honeycomb in a combined action of hundreds of individuals but we will confine ourselves to just one: "Do the bees build circular precursor structures of the comb cells which are then transformed into hexagonal cells, or do they build the hexagonal cells directly?" This question was raised in the past by many researchers – amongst them Charles Darwin – as sketched by Oldroyd and Pratt (2015). The question was taken as hypothesis by Pirk et al. (2004) and has been spread through the literature for some years (Karihaloo et al., 2013, Dietemann et al., 2011, Tautz, 2012, Tautz and Steen, 2017). Pirk et al. (2004) present their hypothesis with a question mark in the title, but this questioning nature of the title is not found in the article any more. Their hypotheses read:

1. Honeybees build cells not as hexagonal prisms, but as cylinders.
2. The cylindrical cells are transformed into cells with hexagonal cross-section by thermoplastic flow of the wax in a self-organising process upon heating of the wax by the bees.
3. The cell bottom has a hemispherical shape and is not formed by three rhomboids. The apparent rhomboids are an optical illusion.

Despite an earlier rebutting publication (Bauer and Bienefeld, 2013), these hypotheses are still repeated in the literature (Tautz, 2015) and in many posts on the internet. This is why we try to contribute to the discussion with our additional findings in order to resolve the dispute.

In the following we use “cylinder hypothesis” as an alias term comprising the points of Pirk et al. (2004) mentioned above. The cylinder hypothesis was probably accepted so uncritically because one can deform cylindrical model-tube bundles in a way that the cross-section of the tubes is converted into a hexagonal form. But the effective mechanisms are different in these cases and cannot be applied to honeycombs. Also the realization of honeycomb structures in ceramics (Melcher, 2008) does not apply to the formation of hexagonal cells in honeycombs. In terms of Camazine et al. (2001), self-organization of the wax does not take place since the bees would already impose an external ordering influence on the system by grouping of the cylinders in the hexagonal close-packed pattern.

Pirk et al. (2004) created the term “... wax flowing in liquid equilibrium”. We note that “flowing” excludes equilibrium. The authors refer to the famous physicist L. Boltzmann when asserting “... the liquid wax hardens and moves into a more probable state...the result of which is the regular hexagonal pattern”. However, one cannot find any hint about that and “the more probable state of wax” in the cited literature (Boltzmann, 1905). This formulation and citation were used again by Hepburn et al. (2007) in the same way.

Tautz (2012) still postulates a hemispherical cell bottom at least for a couple of days after comb-formation. Hepburn et al. (2007) finally state that the cell bottom has rhombic shape. But their explanation for the formation of the rhombi is not plausible. Bauer and Bienefeld (2013) found no indication of “thermoplastic flow” by observation of comb building. Several authors report on the chemical and physical properties of beeswax but their data do not make thermoplastic flow reasonable (Oelsen and Rademacher, 1979, Buchwald et al., 2008, Kleinhenz, 2008). Calculations which should support the cylinder hypothesis are based on a model with free surfaces in the triple junction of the circular tubes (Karihaloo et al., 2013), which is not the case for honeycombs. The necessary heat transfer from the bees to the wax is questionable (Mazzucco and Mazzucco, 2007, Dietemann et al., 2011). Oldroyd and Pratt (2015) doubt the cylinder hypothesis because the temperature generated by the bees is insufficient to melt the wax. They agree with Bauer and Bienefeld (2013) that bees develop cells actively rather than forming a passive matrix around which wax flows. However, these papers do not seem sufficient to correct the cylinder hypothesis in the eyes of a large public.

When discussing the formation of the hexagonal shape of cells, the three-dimensional structure of the comb is often neglected. The need to think in three dimensions is emphasized already by Fejes Tóth (1964), Weaire and Phelan (1994) and Rätz (2013).

The cylinder hypothesis suggests that thermoplastic building material is a prerequisite for the formation of a uniform array of hexagonal cells. The combs of wasps and hornets prove that this is not the case.

Here we show that one cannot follow the cylinder hypothesis. Moreover, we will try to make a large part of the honeycomb construction intelligible.

This paper is structured as follows. We point out in 3.1 the importance of the cell bottom (mid-wall) for the comb structure and its amazing construction. In 3.2 we are dealing with a number of aspects of the cylinder hypothesis which are unrealistic for comb building and we oppose facts based on our own observations. In 3.3 we argue from the hexagonal cells of wasps and hornets that flowable material is not essential for the construction of hexagonal cells and we present in 4 our own arguments and considerations on honeycomb construction on the basis of our own observations and the literature.

2 Materials and Methods

Samples of honeycombs (partly freshly built) were taken from the beehive to demonstrate certain features of building and the building process (Fig. 1, 4, 6).

Wax samples were prepared with razor blades and needles under a binocular microscope (Zeiss). We used only virgin wax, e.g. wax scales or just built comb samples. All photos were taken with digital cameras partly under artificial illumination.

Warming of wax scales was performed over about six hours in several steps from 40 °C to 55 °C in a vessel dipped in a thermostat (stirring thermostat IKA HS7 C-LIKED with IKA ETS-DS sensor). Just built pieces of comb were stored for three hours at a temperature of 55.5 °C in an incubator INCU Line with officially calibrated temperature sensor.

The hornet comb was provided by an expert on wasps and hornets. The hexagons on the back of this comb were sketched using Microsoft PowerPoint (Fig. 8b)

3 Results and discussions

3.1 Construction of the cell bottom

Honeycomb construction by the bees always happens holistically with mid-wall and cells. This can be observed in Fig. 1 on a piece of honeycomb under construction where different stages of comb-building can be seen, beginning with mid-wall and short incomplete cells and almost finished deep cells. Bottomless cells have never been observed even in the earliest stage of cell construction. So the bees first have to set up the bottom to be able to establish a cell on it (Fig. 1). Fig. 1 proves by the rare case of a honeycomb developed only on one side that the rhombi are set up first during its construction. One can see that comb building proceeds by forming new rhombi at the rim of the comb and thus the bottoms of the cells on both sides of the comb are produced in a single work cycle. With a vaulted layer of wax serving as foundation, with the minimum amount of work and without energy-intensive secondary processes, a stable honeycomb with maximum capacity evolves. In case of Fig. 1 we assume that lack of space was the reason for the bees to build cells only on one side. What would the bees have built on this empty side if the comb were given back to the hive with enough space for building? They surely would not have constructed circular tubes, but cells with hexagonal cross-section! This would be the well known behaviour observed with the artificial mid-walls provided by the beekeeper. The above observations show that the cylinder hypothesis is not consistent with the real construction of mid-wall and cells.

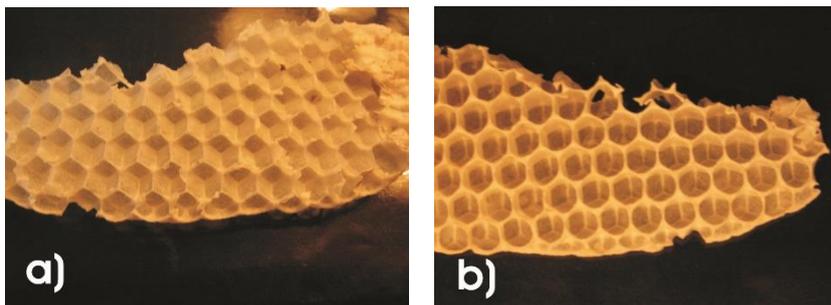


Fig. 1 Half-sided built-up natural honeycomb. a) On this side of the comb no cells have been erected. Thus the rhombic structure of the mid-wall can be seen: three rhombi form the bottom of a cell. b) Opposite side with cells. The construction of the mid-wall is continued at the lower edge. The 5 mm deep cells in the lower row, as well as the 10 mm deep ones three rows above, are all hexagonal. Particularly in the lowest cell-row the cells are strongly bevelled to the edge (different illumination of the sides)

Pirk et al. (2004) claimed that the cell bottom is of hemispherical shape. This is a contradiction to the literature and everybody's evidence. Their experimental procedure using a polyester resin for moulding the cells seems problematic since the lipophilic casting material can migrate into the beeswax, changing its properties. Hepburn et al. (2007) revised their statements of hemispherically shaped cell bottoms and acknowledged that the bottom of the honeycomb cells is built up with rhombi. However, they still postulate that the rhombi form by themselves "exactly like soap bubbles". This presupposes that the bees initially built a differently shaped cell bottom which ensures the right offset of the cells on both sides of the honeycomb in order to match to the rhombi formed later. This is very unlikely because it is the rhombic form of the cell bottom which is coupled with the displacement of the back-to-back hexagonal cells. We assume that the bees build both the cell bottom and the hexagonal cells in a contiguous way without intermediate steps. The soap-bubble analogy is untenable, because there are no bubble-like intermediate stages in the honeycomb construction. The "formation by itself" is not possible for the non-planar cell bottom. However, one can look at the rhombi in the image of the Plateau's minimum plane of a regular tetrahedron (Fig. 2).



Fig. 2 Minimum plane of the regular tetrahedron; picture from Walser (2011)

The minimal surface is formed by six isosceles triangles whose flat surfaces intersect at angles of 120° . The obtuse angled tips of the triangles meet in the centre of the tetrahedron. Here their sides enclose an angle of $109^\circ 28' 26''$. This corresponds to the obtuse angle of the rhombi forming the mid-wall. The sides of the tetrahedron plane considered correspond to the long diagonal of the rhombi. Adding together those sections of the minimal surface (formed from the blue, red and olive triangles in Fig. 2) with alternating convex and concave orientation, one gets the structure of the mid-wall (Fig. 3). This approach, not found in the literature up to now, is a confirmation of the principle of minimum wax consumption not only for the cells (Hales, 2001) but also for the cell bottom which gets an extraordinary mechanical strength due to its vaulted structure.

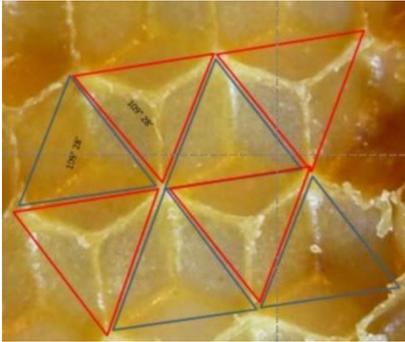


Fig. 3 By alternately joining together concave (blue) and convex (red) sections of the Plateau's minimum plane of the regular tetrahedron, one gets the structure of the mid-wall of a honeycomb

A “liquid equilibrium process” would not lead to the rhombic structure of the mid-wall, since the surface energy of a flat sheet of beeswax would be lower. The surface area of the three rhombi is about 22 % greater than the surface area of a flat bottom, so the latter would be the “energetically more probable state”. The “liquid equilibrium process” would never by itself produce a cell bottom made up by rhombi.

3.2 Construction of the cell walls and the “melting” of wax by the bees

3.2.1 Self-organization of the wax is an illusion

Pirk et al. (2004) write: “When heated by the bees, the viscosity of the wax will decrease and the surface tension of the wax will cause the cylindrical tubes to merge ... and thus the hexagonal shape of the cells is created”. This, indeed, works for a man-made tube-bundle by applying external effects (Melcher, 2008) and works with appropriate assumptions in numerical simulation (Karihaloo et al., 2013). Even if that were similar for cells on honeycombs, one could not speak of “self-organization”, because the close-packed arrangement of the cells would have already existed with the close-packed cylindrical tubes created under the external influence of the bees (Camazine et al., 2003). We cannot see the development of a new pattern by the transformation of circular tubes into hexagonal ones but only a modification of the shape of the pattern-forming objects.

3.2.2 The connection to the wall and structural variations on the same honeycomb contradict the cylinder hypothesis

If our honeybees create a new comb on the ceiling of their nesting hole, they start with patches of wax strips, which are subsequently built to form the mid-wall. Perpendicular to it they build on both sides a short series of “half” cells that lie parallel to the ceiling with their longitudinal axis. Their cell bottoms already show an incomplete rhombic structure of the mid-wall and the offset of opposite rows of “half cells” by half a cell diameter (Fig. 4).



Fig. 4 The beginning of the honeycomb structure on a vertical wall with “half cells” in house-shape next to the wall. In the cells attached to the wall one can already recognize in translucent light the vaulted rhombic mid-wall of the completed cells. Even in the very first row the cell-bottom has an incomplete rhombic structure

The conversion of cylindrical tubes into hexagonal cells cannot cope with the observed shape of the cells attached to the wall of the nest. This type of cell could never originate from a free-standing tube adjacent to the solid wall (Fig. 4). When melting, we would expect the spreading of some wax on the solid wall of the nest. This is not observed, and the cell walls standing perpendicular on the nest wall cannot be understood as well in the picture of flowing wax. Since the nest wall shown in Fig. 4 is vertical, thermoplastic flowing wax, following gravity, would never result in cell walls standing perpendicular on it. The cylinder hypothesis is practically disproved by the observed bonding of the comb to the walls of the nest.

In addition to the “normal” vertical pattern, cells in both horizontal and tilted patterns can also sometimes be found on the same honeycomb (Oelsen and Rademacher, 1979). Furthermore bigger drone cells directly adjacent to smaller worker cells can be observed almost on all breeding combs. All of these local variations of the comb structure are not likely to occur as a result of the flowing of wax to a state of liquid equilibrium.

3.2.3 The cylinder hypothesis neglects the third dimension

Both the authors who stand in for the cylinder hypothesis and Karihaloo et al. (2013), who support the cylinder hypothesis with their calculations, consider only the hexagonal cross-section of the cells and not the entire honeycomb with mid-wall and the opposite side of the comb. A real cell, however, has not only a cross-section but also a height.

The surface tension of liquids leads them to take the shape with the lowest surface energy. The cylinder hypothesis is based on this phenomenon. Surface tension driven thermoplastic flow of the beeswax at elevated temperature should cause the claimed outer surfaces at the triple points of the

wax cylinders to disappear. However, if a surface tension driven thermoplastic flow were relevant, the cell wall and therefore the whole cell will shrink in height as soon as the wax reaches the onset temperature for thermoplastic flow. This happens because the surface of the cell walls can be reduced in this direction without a force counteracting surface tension. This would also have happened already at incremental steps during the progress of wall building if the bees at that time would produce the temperature required for merging the cylinders. So, if point 1 of the cylinder hypothesis were correct, the bees by warming the wax (point 2) would cause the cylinders to collapse in height. This would make the construction of a cell impossible.

3.2.4 Bees cannot build abutting tubes with wax-free triple junctions

A further objection to the cylinder hypothesis is to ask how the bees can build close to each other freestanding wax-tubes with a wall thickness of about 0.035 mm. It is known that during the cell building process, honeybees mould the wax with the mandibles and add wax portions on the upper rim of the cell. Therefore a gap at least the width of a jaw should remain between the tubes. But wax tubes which do not touch would never flow together.

In areas where three tubular cells would abut, the outer surfaces of the tubes would include wax-free cavities. For drone cells, these cavities would have a diameter of about 1 mm, and should be visible with the naked eye. Since some time is required for heating and flow of the wax (Karihaloo et al., 2013), cylindrical cells should be observable on a honeycomb just under construction. But on such honeycombs, which we took from the hive, neither even rudimentary cylindrical tubes nor wax-free cavities can be found by thorough inspection. This is confirmed by Oldroyd and Pratt (2015).

On the contrary, in naturally built honeycombs we observe cells near the edge with low altitude which already have hexagonal cross-sections (Fig. 1 and Fig. 7). Bevelled cells at the rim of the comb have the appearance of elliptically rounded skew cuts and can give the impression that their cross-section is not hexagonal. Even Karihaloo et al. (2013) report cells with a height of only 0.5 mm that are already hexagonal in shape. They do not report cylindrical cells. Our observation is supported by direct video observation (Bauer and Bienefeld, 2013) showing that neighbouring cells have only one common wall and therefore only internal surfaces. These authors investigated both the building at the edge of the comb and the reconstruction of excised cells.

Even if the transition from round cells and hemispherical bottom to the regular hexagons including the three rhomboids were a continuous process (Tautz J., 2016), one should be able to observe all these forms together with their

intermediate states on a honeycomb just under construction. But this is not the case. Moreover, we cannot imagine that bees can afford to waste that much time by first building twice as many thin walls as are finally needed and later fusing them together into thicker walls.

3.2.5 Problems with necessary temperature and time

Another argument against the cylinder hypothesis relates to the warming up of the wax by so-called “heater bees”. Beeswax as a multi-component material contains organic molecules of different chain lengths, branching, and saturation. Measurements of Buchwald et al. (2008) indicate the softening of wax beginning at 40 °C and melting at about 64 °C. However the temperatures in the beehive measured by different authors are too low to cause a flow driven by the small surface tension of the viscous wax in a time relevant for the honeycomb construction.

We made experiments on wax scales and cell walls of a newly built comb to test the significance of surface-tension-driven flow for joining the cylindrical cells at the temperatures reported. Both, wax scales and cells have a large surface to volume ratio. If surface tension would be relevant at temperatures in the beehive, they should change their shape on warming in such a way that their surface becomes smaller. When warming the wax scales over about six hours in several steps from 40 °C to 55 °C no observable change of their shape and size occurred.

Fig. 5 shows a cut-out piece of honeycomb with free-standing cell walls with a large surface area. It was stored for three hours at a temperature of 55.5 °C. Here also we could not recognize any change reducing the surface of the cell walls.

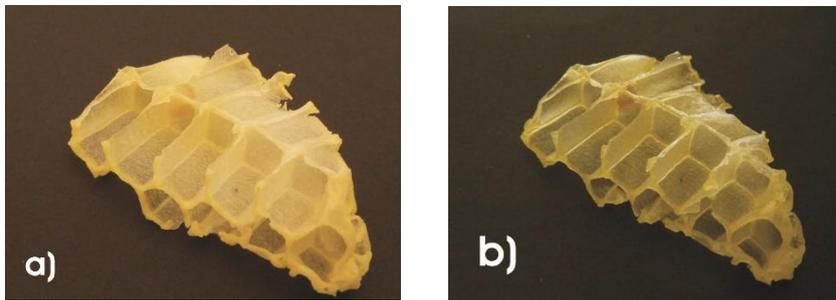


Fig. 5 Honeycomb piece; a) before and b) after the annealing 3 hours at 55.5 °C. No changes are to be recognized (small deformations are due to the handling)

Our simple experiments prove that even at temperatures slightly below the melting point the viscosity of the wax is too high for the surface tension to cause the wax to flow. And this although the viscosity decreases exponentially with increasing temperature, while the surface tension decreases only linearly. This confirms undoubtedly that the surface tension of the wax is irrelevant for honeycomb construction. The conditions necessary for the cylinder hypothesis would evidently be met only under the unreasonable assumption that the wax is not only plastic, but liquid.

Bauer and Bienefeld (2013) also found no indication of “thermoplastic flow”. They measured a temperature around the worker bees between 33.6 °C and 37.6 °C. This is significantly below 40 °C, the reported transition temperature from solid to plastic wax.

We will now discuss the problems with temperature and time that arise if bees were to try to construct a comb, especially a drone-comb, according to the cylinder hypothesis. The cross-section of drone cells is more than 40 % bigger than that of worker cells. In a drone cylinder a bee would therefore not only be surrounded by its thermally insulating hair coat (Mazzucco and Mazzucco, 2007, Dietemann et al., 2011) but also by an insulating layer of air with a heat conductivity $\sigma = 0.02$ W/mK (von Böckh, 2006). Also wax with $\sigma = 0.15$ W/mK (Kleinhenz, 2008) is a good thermal insulator. To heat the wax to the temperature of 40–45 °C (Pirk et al., 2004, Karihaloo et al., 2013) under these poor heat transfer conditions, the construction bees would have either to spend much time or have to develop a body temperature that is presumably lethal for them.

Apart from that, let us consider the following scenario: a drone cell can only hold one worker bee, but the bee is too small to heat the wall completely. Therefore the heating at the corners of the future hexagon must be performed sequentially. To do so, two other bees, one in each of the cells adjacent to the corner in question, would have to wait and realize that they have to heat at the interface to the central cell at exactly the same time as their colleague in the middle heats at this triple junction. In each case three workers would have to co-ordinate themselves with their heating work. Both this coordination effort and the amount of workers needed are unlikely. On a honeycomb (400 mm x 200 mm) 3900 cells with a cylinder diameter of 6.3 mm could be built corresponding to 7800 corners of evolving hexagons. According to Karihaloo et al. (2013) in this scenario it takes 36.3 s to reduce the original radius R_0 of a cylinder to $r^*=1/3 R_0$ at the corner of a rounded hexagon. They measured r^* at the thickened upper rim of the final rounded hexagonal cells, which is a methodological mistake. However, our Fig. 6 shows that the original radius is not reduced to 1/3 but to 1/8 to 1/10. From Fig. 4 of Karihaloo et al. (2013) one can read that in this case the time necessary to reach this radius is about 70 s. Therefore a total of about 450 hours would be required only for heating. The authors explain that their calculations are based on a two dimensional model and that "the constraint provided by the third dimension is likely to increase the time we have calculated". In other words: the working time of the bees needed for fusing the cylinders to hexagons for this one honeycomb is substantially more than 450 hours. Taking all this into account we can say that the time derived by Karihaloo et al. (2013) for the transformation of cylindrical tubes into hexagonal cells does not support the cylinder hypothesis, but proves it wrong.

At this point it should be noted that the claim that honeybees use their own body as a mould for the construction of the cells (Tautz, 2012, Tautz and Steen, 2017) cannot be valid for drone cells. For worker cells, a bee should be inside the cell during the construction and build the wax cylinder around itself (Tautz, 2012). Or other bees build the cylindrical cell around it. How that should work for short cells in the beginning of cell construction, is a mystery. In addition, the cross section of the bees' body is not really circular and has not the same diameter over the body length. It is not explained how a wax cylinder with a uniform diameter over its entire length is formed by using the bees' body as a mould. Moreover, not all individuals of a colony are of the same size. If the authors were right, the cell diameters of a honeycomb would also show this size distribution, which is not the case.

3.2.6 The uniform thickness of the cell walls cannot be generated by fusion of adjacent cell walls

The cell walls beneath the bulge on the upper rim show a uniform thickness of approximately 0.07 mm over the entire length, which is considerably thinner than directly at the rim (Fig. 6). Let us assume that the walls were formed by fusing two adjacent cylinders. At the corners of the hexagons where three adjacent cylinders would have merged according to the cylinder hypothesis, the wall should be 1.5 times thicker. But the bee-made cells in Fig. 6 do not show this. In pictures of Karihaloo et al. (2013), which are intended to make the cylinder hypothesis plausible, the walls are about twice as thick and the corners are formed of flat triangles. When comparing their Fig. 1a with 1b the question arises of where all the wax has remained during the transition to the hexagonal shape. Flowing of the wax would explain a small mass displacement to the cell corners, but not the disappearance of at least 50 % of the wax.

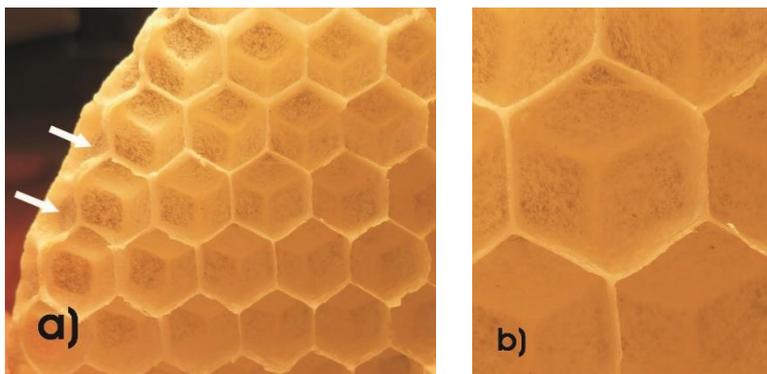


Fig. 6 Cross-section of cells, upper rim cut off; a) uniform thick cell walls of a natural honeycomb; on the edge rhombuses are already put on (arrows) which are completed during ongoing construction; b) detail of 6 a

3.2.7 The particular importance of the cell bottom (mid-wall) for the honeycomb construction

After completely removing the cell walls of a honeycomb, one can see that the corners of the cells on both sides of the comb are determined by the rhombic structure of the respective bottoms (Fig. 7). With the construction of the bottom the foundation of the honeycomb is laid down and it becomes evident that the plan of the cells is hereby fixed. Therein both the hexagonal shape of the cell and its lateral dimensions are already specified. It is hard to conceive that circular tubes are built on this hexagonal basis. According to Tautz (2012, p. 162) it is innate to the bees to stick wax lumps where wax already exists. The construction bees recognize “wax available” at the convex edges of the base structure as it is progressively built. It seems evident that on these wax lines

the cell walls are pulled up directly in the hexagonal shape. This is supported by experiments with mid-walls cast to provoke the bees to build smaller brood cells (e. g. with 4.9 mm diameter) as a means of mite-control. Here too the bees build up the cells on the convex wax lines of this mid-wall with the smaller measure (Spiewok, 2014). Thus it is not so much to answer the question of how the bees build the regular hexagonal cells, but rather to ask how they manage to create the structure of the base, which contains the blueprint for the cells. The question of how bees build hexagonal cells is obviously the wrong one. The question should be: how do bees build their honeycombs? The consideration of the cells in isolation, without including the mid-wall, is misleading.



Fig. 7 After the cells are cut off, the view on the mid-wall of a natural comb shows that it contains the blueprint for the hexagonal cells

When constructing a comb, the bees stick wax lump to wax lump and so they build up the complete 3-d structure step by step. One can assume that honeybees build mid-walls and cells after the principles of modern 3d-printers.

3.3 Combs of wasps and hornets

Not only honeybees, but also the phylogenetically related wasps and hornets, build combs with hexagonal cells. However, they cannot produce their own building material, but they can make it by chewing rotten wood. The paper-like mass hardens and has no plastic properties. Thus the cylinder hypothesis fails to explain the construction principle of these species. This point was recently made by, amongst others, Oldroyd and Pratt (2015). Therefore it is reasonable to assume that no flow-assisted formation of the hexagonal cells takes place in the bees' honeycomb construction either. The protagonists of the cylinder hypothesis say that these species build "geometrically more generously" (Tautz, 2012, p. 167). Fig. 8 shows that this is not true. Bergmann and Ishay (2007) found that for *Vespa orientalis* the width of a single comb cell is about 10 mm and the basic symmetry of an entire comb of such cells is usually satisfied within absolute errors of no more than a few tenths of 1 mm. Wasps and hornets begin the construction of their nests with a vaulted roof, which corresponds in some way with the mid-wall of a honeybee comb. The common

walls of the cells are constructed on the elevations on its underside. The arrangement of the curvatures which stabilize the construction (Mirtsch, 2011) reveals hexagonally close-packed structures (Fig. 8b). We can formulate that the combination of the two construction principles, (1) “hexagonal close-packing (space economy)” and (2) “adjacent cells, have a thin common wall (material economy)”, as in the case of honeybees, inevitably result in an assembly of cells with hexagonal cross-section without a planned action by the wasps or hornets. Hexagonal cells are therefore the consequence of the above-mentioned principles, not vice versa. It can therefore be assumed that comb construction with hexagonal cells was already established, even before honeybees and wasps diverged in their evolution about 100 million years ago.

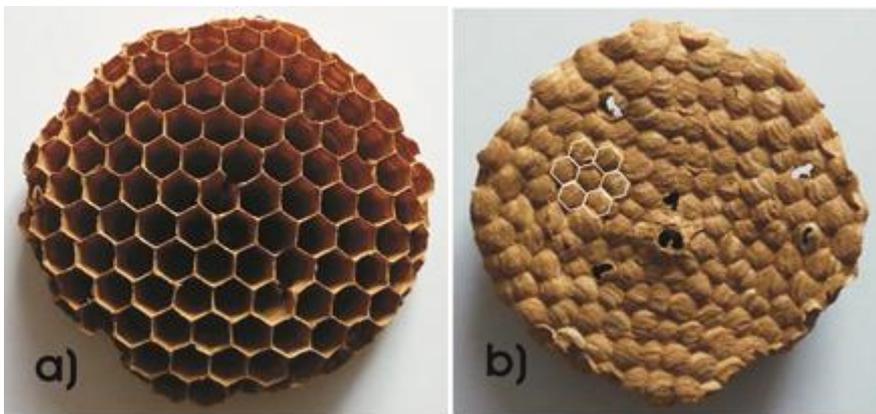


Fig. 8 Hornet’s comb with slight mechanical damage; a) hexagonal cells made of paper; b) back of the comb with convex vaults, hexagonal structures visible (white hexagons drawn). Courtesy of wasps-adviser Karl Lipp from Neuötting, Germany.

4 Conclusions

Based on scientific publications and our own considerations and observations, we show that the hypotheses of Pirk et al. (2004) concerning comb building of honey bees are not correct. Many constructive details of the honeycomb cannot be explained with them. The bees build mid-wall and hexagonal cells directly and without intermediate steps, in contrary to these authors who assume a construction of cylindrical tubes first. Furthermore bees are not able to build close-packed circular precursor cells. We proved experimentally that surface tension driven flow of the wax is irrelevant for comb building. The cylinder hypothesis would work only under the unreasonable condition that the wax is not only plastic, but liquid. Also self-organisation of the wax into hexagonal cells does not take place. Even in the model of Pirk et al. (2004) the formation of hexagonal cells by an increase of the temperature could only be called a “shape-transformation” without changing the existing hexagonal close-packed pattern of the circular cells. The high temperature needed for the

fusing of the circular wax tubes cannot be generated by the bees. The calculations which should support the cylinder hypothesis prove the opposite according to our analysis. The construction of drone combs, under the assumptions of the cylinder hypothesis, would require an expenditure of co-ordination and time which could not be carried out by the bees. It is also very unlikely that the body of the bees serves as a mould for the wax cylinders.

The bottom of a cell is shaped of three congruent rhombi which are first of all formed during the construction at the edge of the honeycomb. We are convinced that the mid-wall contains the construction plan for the hexagonal cells, which are directly built on the convex wax lines of the rhombic structure. In order to obtain new insights into the comb building process, the three dimensional structure of the comb must be taken into account. This corresponds to the observable progress of the construction of new combs where the bees build small hexagonal cells at the comb rim. Also the so-called half-cells in "house-shape", which connect the comb with the nest wall, prove that the cells are built directly without intermediate stages. These peripheral cells cannot be generated by the mechanism of the cylinder hypothesis.

To confirm our argumentation, we examined the rim of combs, the rear of a one-sided built comb, the onset of comb building, the mid-wall, cells with the upper rim cut off, heat treated wax samples and a hornet comb. We did not observe any wax-free voids on combs just under construction. They would be expected according to the cylinder hypothesis at the points where three tubes meet. We recognized that the mid-wall can be regarded as assembled of parts of the Plateau's minimum plane of the regular tetrahedron. This confirms that not only the cells but also the mid-wall is built with minimal wax consumption in combination with extraordinary mechanical strength. We observe not only on combs of honeybees but also on combs of wasps and hornets two construction principles: (1) the cells are arranged in a hexagonal close-packed manner and (2) neighbouring cells are separated by a common thin wall. We state that the combination of these two construction principles will inevitably produce cells with hexagonal cross-section without intentional action of the bees, wasps or hornets.

We come to the following findings and conclusions:

- a. Bees build the cells directly in hexagonal shape without any intermediate steps.
- b. The building plan for the cells is established in the mid-wall.
- c. The bees build the cell-walls directly on the convex wax lines of the structured mid-wall.

- d. The three rhombi which form the cell bottom are built directly during the construction at the rim of the comb.
- e. A flowing of the wax which could influence the cell geometry does not take place.
- f. No detail of the honeycomb structure is produced by self-organization of the wax.
- g. The hexagonal cross-section of the cells is generated by the combination of two building principles: hexagonal close-packing of the cells and adjacent cells share a common cell-wall.
- h. The answer to the question in the title of Pirk et al. (2004) is NO.

Up to now, the question remains of how the tilt (up) of the long axis of the cells relative to the horizontal on both sides of the comb is made. This tilt against gravity is an additional argument against self-organization of the wax and thermoplastic flow in honeycomb construction.

Acknowledgement

We thank Monica Thorp, Milngavie, Glasgow very much for editing the article.

References

- Bauer, D., Bienefeld, K. (2013) Hexagonal comb cells of honeybees are not produced via a liquid equilibrium process. *Naturwissenschaften* 100:45–49
- Bergmann, D.J., Ishay, J.S. (2007) Do Bees and Hornets Use Acoustic Resonance in Order to Monitor and Coordinate Comb Construction? *Bulletin of Mathematical Biology* 69:1777-1790
- Boltzmann, L. (1905) *Populäre Schriften*. Barth, Leipzig, Germany
- Buchwald, R., Breed, D., Greenberg, A.R. (2008) The thermal properties of beeswaxes: unexpected findings. *J Exp Biol* 211:121-127
- Dietemann, V., Duvoisin, N., Lehnerr, B. (2011) *Das schweizerische Bienenbuch, Band 2, Biologie der Honigbiene*. Druckerei Appenzeller Volksfreund

Camazine, S., Deneubourg, J.L., Franks, N.R., Sneyd, J., Theraulaz, G., Bonabeau, E. (2003) *Self-Organization in Biological Systems*. Princeton University Press, Second Printing

Fejes Tóth, L. (1964) What bees know and what they do not know. *Bulletin Amer. Math. Soc.* 70:468-481

Hales, T.C. (2001) The honeycomb conjecture. *Discrete and Computational Geometry* 25:1–22

Hepburn, H.R., Muerrle, T., Radloff, S.E. (2007) The cell bases of honeybee combs. *Apidologie* 38:268–271

Karihaloo, B.L., Zhang, K., Wang, J. (2013) Honeybee combs: how the circular cells transform into rounded hexagons. *J. R. Soc. Interface* 10:20130299

Kleinhenz, M. (2008) *Wärmeübertragung im Brutbereich der Honigbiene (Apis mellifera)*. Dissertation, Julius-Maximilians-Universität, Würzburg

Mazzucco, K., Mazzucco, R. (2007), Mazzucco, R. (2007) Wege der Mikroevolution und Artbildung bei Bienen (Apoidea, Hymenoptera): Populationsgenetische und empirische Aspekte. *Denisia* 0020:617–686

Melcher, J. (2008) Der Trick der Bienen. *DLR Nachrichten* 119:36–39

Mirtsch, F. (2011) Drastisch höhere Steifigkeiten. *Deutsches IngenieurBlatt* 07–08:22–26

Oelsen, G., Rademacher, E. (1979) Untersuchungen zum Bauverhalten der Honigbiene. *Apidologie* 10(2):175–209

Oldroyd, B.P., Pratt, S.C. (2015) Comb Architecture of the Eusocial Bees Arises from Simple Rules Used During Cell Building. *Advances in Insect Physiology*, 49:101–121

Pirk, C.W.W., Hepburn, H.R., Radloff, S.E., Tautz, J. (2004) Honeybee combs: construction through a liquid equilibrium process? *Naturwissenschaften* 91:350–353

Rätz, T. (2013) On the application of the honeycomb conjecture to the bee`s honeycomb. *Philosophia Mathematica* 21(3):351–360

Spiewok, S. (2014) Kleine Zellen – großer Streit. *Deutsches Bienen-Journal* 9:14–15

Tautz, J. (2012) *Phänomen Honigbiene*. Springer Verlag Berlin Heidelberg

Tautz, J. (2015) Die Erforschung der Bienenwelt. Neue Daten-neues Wissen. S. 27, Klett MINT Verlag

Tautz J., (2016) Private communication

Tautz, J., Steen, D. (2017) Die Honigfabrik. S. 63, Gütersloher Verlagshaus

von Böckh, R. (2006) Wärmeübertragung – Grundlagen und Praxis. Springer Verlag Berlin Heidelberg, Anhang 7: Stoffwerte der Luft bei 1 bar Druck

Walser, H. (2011) Modell der Minimalfläche im Oktaeder. <http://www.walser-h-m.ch/hans/Miniaturen/M/Minimalflaeche/Minimalflaeche.htm>

Weaire, D., Phelan, R. (1994) Optimal design of honeycombs. Nature 367:123

Symmetrie

„Ebenmaß“ in Mathematik und Naturwissenschaften

Eine Übersicht anhand von Beispielen

WILLI KAFITZ *)

Abstract:

Symmetry is important in nearly all natural sciences. However, less for its aesthetic characteristics, but the structural role it plays.

In chemistry for example, it is used to explain molecular oscillations, while in crystallography it is the basis for all classifications of crystal forms.

In physics and cosmology on the other hand, the term 'Symmetry' is used in a more abstract way ranging from laws of conservation to explaining the moments after the Big Bang.

Regardless, in all cases math is required to describe "Symmetry" adequately, in particular its field of Group Theory.

The following article is intended to illustrate a small number of symmetry effects and their mathematical theory in an easily understandable way.

Zusammenfassung:

Symmetrie ist in fast allen Naturwissenschaften von Bedeutung. Allerdings ist dabei weniger die ästhetische Dimension relevant, sondern die Symmetrie als Strukturierungs- und Ordnungsmerkmal. Sie hat oft unterschiedliche Ausprägungen: z.B. in der Chemie als Mittel, um Molekülschwingungen zu verstehen. In der Kristallographie dient sie der Klassifizierung von kristallinen Formen. Sehr abstrakt ist der Symmetriebegriff in der Physik oder der Kosmologie: Er geht von klassischen Erhaltungssätzen bis hin zum Verständnis, was in den ersten Momenten nach dem Urknall geschah. Immer ist die Mathematik gefordert. In vielen Fällen benötigt man mit der Gruppentheorie ein wichtiges Teilgebiet der Mathematik. Der vorliegende Beitrag soll anhand einiger weniger Beispiele die Bandbreite der Symmetrieeffekte in einzelnen Naturwissenschaften und der Mathematik auf möglichst leicht verständliche Art und Weise aufzeigen.

Keywords: symmetry, group theory, symmetry in molecules, symmetry in biology, symmetry and conserved quantities, spontaneous symmetry breaking

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, D-35112 Fronhausen, willikafitz@web.de

Dieser Beitrag erscheint auch in gedruckter Form in der "Oberhessischen Naturwissenschaftlichen Zeitschrift", Volume 67, Gießen 2017

Einleitung und Problemstellung

Die Symmetrie ist diejenige Idee, mit deren Hilfe der Mensch im Laufe der Jahrhunderte versuchte, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu begreifen und zu schaffen.
Hermann Weyl¹

Wenn wir das Wort „symmetrisch“ oder „Symmetrie“ hören, so glauben wir oft ohne zusätzliche Erklärung zu wissen, was gemeint ist. Schließlich haben wir alle symmetrische Figuren betrachtet und dabei die Muster erkannt. Dieses intuitive Verständnis muss hier hinterfragt werden. Ein (reales oder virtuelles) Objekt soll in diesem Beitrag „symmetrisch“ heißen, wenn es durch eine Operation, die Symmetrieoperation oder Deckoperation, in eine Lage überführt werden kann, die nicht von der Ausgangslage oder -situation unterscheidbar ist. Im weitesten Sinne ist dies immer eine Koordinatentransformation. Diese mathematische Sichtweise ist mit knapp 200 Jahren relativ neu, hat keine antiken Wurzeln und unterscheidet sich radikal von der in der Kunst². Ausgeklammert bleibt deshalb hier in diesem Beitrag die ganze Vielfalt an kunsthistorischen oder architektonischen Aspekten.

Drehung um eine Achse oder Spiegelung an einer Ebene sind in diesem Sinn oft unmittelbar als Symmetriekriterium einsichtig. Auch die Punktsymmetrie, wie sie z.B. beim Buchstaben N vorkommt, ist leicht zu verstehen. Schwieriger wird es bei der mathematischen Beschreibung oder bei der Frage, wie der Begriff in einzelnen naturwissenschaftlichen Disziplinen zu verstehen ist. Komplex, aber uns noch gut zugänglich, sind Symmetrien in der Kristallographie bzw. Mineralogie. Sie beziehen die 3. Dimension mit ein, was ein gewisses räumliches Vorstellungsvermögen erfordert. Es bleibt aber immer eine Symmetrie räumlicher und gegenständlicher Strukturen.

In der Physik gehen wir wie selbstverständlich davon aus, dass ein Experiment, das sich auf elementare Naturgesetze stützt, zeitlich („zeitinvariant“) und örtlich („translationssymmetrisch“³) unabhängig verläuft. Auch die Rotationsinvarianz, also Richtungsunabhängigkeit elementarer Gesetze, gehört dazu. Für die makroskopische Welt reichen kontinuierliche Symmetrien wie die Eichtransformationsinvarianz, also, salopp gesagt, die Unabhängigkeit des gewählten Koordinatensystems wie z.B. des Nullpunktes⁴. Unanschaulich wird der Symmetriebegriff in der Elementarteilchenphysik. Hier benötigt man diskrete Symmetrien wie die CPT-Invarianz⁵. Darauf wird noch einzugehen sein. Physikalische Symmetrie bezieht sich auf Erhaltungsgrößen.

1 Zitiert nach <http://www.alt.mathematik.uni-mainz.de/Members/mattheis/listen/mathphorismen> 03.12.2016

2 Siehe Anmerkung 59

3 Der Begriff ist in Mathematik, Physik und Kristallographie unterschiedlich besetzt.

4 Vorsicht: Dies gilt nur für willkürlich gewählte Skalen, nicht z.B. für Energie.

5 **C** = Ladungskonjugation, **P** = Räumliche Spiegelung, **T** = Zeitumkehr

Das intuitive Verständnis kommt oft ganz ins Wanken, wenn weitere Ordnungskriterien ins Spiel kommen. So stellt in der Natur die Periodizität oder Periodik eine Symmetrie bzgl. zeitlicher Verschiebung dar. Beispiele sind die sogenannte biologische Uhr, biologische/biochemische Oszillationen, Biorhythmik, Chronobiologie, Quasiperiodik, Jahreszyklen der Jahreszeiten, etc. Eine Tierfährte bildet die dynamische Abfolge in eine räumliche Struktur ab. Im weitesten Sinne ist auch eine anlassbezogene Periodik eine Form von Symmetrie. Wir sehen gleiche oder ähnliche Reaktionen in der Natur z.B. bei Dürre, Regen oder Feuer. Auch Symmetrien bzgl. Dehnungs- oder Streckungsoperationen kann man identifizieren („Skalensymmetrie“ im Sinne von Skaleninvarianz). Sie gehen oft mit Selbstähnlichkeit einher („Fraktale“). Ein einzelnes Farnblatt ist dem ganzen Wedel, ein Blumenkohlröschen dem ganzen Blumenkohl selbstähnlich. Eine regelmäßige Streckung als Symmetrieoperation kann den kleineren Teil im Prinzip auf das größere Objekt abbilden und eine Stauchung wirkt umgekehrt. Im Goldenen Schnitt ist das Verhältnis der ganzen Strecke zum größeren Teil gleich dem Verhältnis des größeren zum kleineren Teil. Kann man so weit gehen, diese Selbstähnlichkeit von Strecken als Symmetrie zu bezeichnen? Gilt dies dann auch für ein Goldenes Rechteck, ein Goldenes Dreieck, die Goldene Spirale, den Goldenen Winkel oder bei sonstigen gleichbleibenden Faktoren? Ist somit Proportionalität auch Symmetrie?

An diesen Überlegungen sieht man: Man wird möglicherweise Symmetrie spezieller fassen müssen, man wird sicher gleiche Muster in unterschiedlichen Disziplinen finden und man wird sich im Zweifelsfall an der mathematischen Systematik orientieren müssen, um prinzipielles Übertragen und die nötige exakte Beschreibung ohne sprachliche Unschärfe zu gewährleisten. Es geht aber andererseits um Naturwissenschaften, die immer mit Naturbeobachtung und ihrer exakten Beschreibung beginnen oder zumindest die Naturbeobachtung als entscheidendes Kriterium für die Verifizierung oder Falsifizierung von postulierten Naturgesetzen heranziehen müssen. In diesen Fällen ist die Mathematik oder die sprachliche Logik Mittel zum Zwecke einer möglichst exakten Beschreibung und sie soll es in diesem Beitrag auch wenigstens skizzenhaft bleiben. Es gilt gerade beim Symmetriebegriff der Satz von Immanuel Kant:

In jeder reinen Naturlehre ist nur so viel an eigentlicher Wissenschaft enthalten, als Mathematik in ihr angewandt werden kann⁶.

Es bietet sich also für diesen Aufsatz keine uneingeschränkt natürliche Gliederung an. Werden die einzelnen naturwissenschaftlichen Disziplinen beispielhaft auf Symmetrien untersucht, so liefert diese Vorgehensweise

⁶ Zitiert nach Hans Josef Pesch, Schlüsseltechnologie Mathematik, G. B. Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden 2002, S. 21.

lediglich heuristische Beispiele. Wird die Mathematik als alleiniges Vorgehensmuster verwendet, so besteht die Gefahr, dass der Naturbezug verloren geht. Der Beitrag soll deshalb über das unterschiedliche naturwissenschaftliche Verständnis von Symmetrie strukturiert werden:

- 1) Gruppentheorie als mathematische Grundlage der Symmetrie
- 2) Symmetrien räumlicher Strukturen in Kristallographie, Festkörperphysik, Chemie und Biologie
- 3) Symmetrie und Erhaltungsgrößen in Physik und Kosmologie

Oft werden aus didaktischen Gründen keine komplexen mathematischen Formalismen bemüht, sondern nur verbal auf die mathematischen Bezüge hingewiesen. Mit der Mathematik soll an einfachen Beispielen begonnen werden, um entsprechende Grundlagen zu legen.

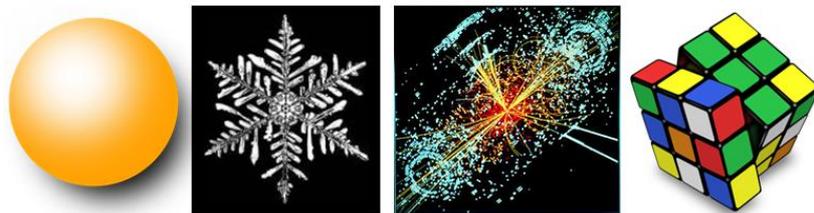


Abb. 1: Einige anschauliche und weniger anschauliche Aspekte von Symmetrie in angewandter Mathematik und Natur⁷.

Symmetrie kann über die Mathematik verallgemeinert werden, aber sie hat ihre spezielle Ausprägung in den einzelnen Disziplinen. Dies gilt besonders für die Terminologie: So muss man sich per se hüten, die Bezeichnungen aus der Mathematik mit den Notationen und Abkürzungen z.B. in Kristallographie und Chemie gleichzusetzen. Die mathematische Basis bleibt übertragbar und ist die theoretische Grundlage, aber in den einzelnen Fachdisziplinen sind teilweise andere Bezeichnungen entstanden. Insbesondere Physik und Mathematik haben sich durchaus gegenseitig befruchtet. Dies gilt weniger für die frühe Gruppentheorie, deren anwendungsorientierte Ergebnisse, die für Anwendungen z.B. in der Chemie oder Molekülphysik benötigt werden, bereits im 19. Jahrhundert entwickelt wurden. Am wenigsten lässt sich Symmetrie bei biologischen Beispielen durch die mathematische Gruppentheorie systematisieren und formalisieren. Dies darf aber kein Freibrief für sprachliche Unschärfe sein. Der ästhetische Reiz der „Symmetrie für das Auge“ kommt besonders in der Biologie zum Tragen. Aber auch für berühmte Physiker war die Ästhetik der Symmetrie Leitlinie⁸.

⁷ Bildnachweise: openclipart.org/detail/34045/kugel-orange, de.wikipedia.org/wiki/Schnee#/media/File:Schnee1.jpg, de.wikipedia.org/wiki/Large_Hadron_Collider, de.wikipedia.org/wiki/Zauberwürfel

⁸ Siehe z.B. Yakov A. Smorodinski, Heisenberg und Dirac: Die Bedeutung des Schönen in der Naturwissenschaft, Phys. Bl. 49 (1993) Nr. 5, S.436-438.

Gruppentheorie als mathematische Grundlage der Symmetrie

An einem Beispiel sollen Grundprinzipien der Gruppentheorie aufgezeigt werden. Die folgende Abb. zeigt Drehungen und Spiegelungen eines Quadrates, die wieder deckungsgleich zur ursprünglichen Orientierung führen. Als *Symmetrieelemente* hat ein Quadrat vier Spiegelebenen und eine sogenannte vierzählige Drehachse C_4 als Schnittlinie der vier Spiegelebenen⁹. Die theoretisch denkbare Spiegelebene in der „Papierebene“ wird in der Geometrie, im Gegensatz auch zu planaren räumlichen Strukturen, nicht genannt. Die Operationen, die wieder zur vollständigen Deckung führen, stellen die *Symmetrieeoperationen* dar. In diesem Fall sind es die möglichen Dreh- und Spiegelungen des Quadrates, wobei die Orientierung gleich bleibt und nur die Ecken vertauscht werden. Um diese „Transformationen“ zu verdeutlichen, wurde nur zur Illustration ein „F“ eingebettet; die Ecken des Ausgangsquadrates wurden von A bis D gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv) durchgezählt. Die indizierten d- bzw. σ -Symbole bezeichnen die zu erläuternden Symmetrieeoperationen. i wie Identität entspricht einer Drehung um 0 oder 360 Grad oder einfach der Tatsache, nichts an der ursprünglichen Lage des Quadrats verändert zu haben. d_1 dreht um 90 Grad nach links, d_2 um 180 Grad. Das entspricht zweimaliger Anwendung von d_1 . Analog d_3 mit dreifacher Anwendung von d_1 . Man sieht unschwer, dass viermalige Anwendung wieder zu i führt ($d_1^4 = i$, 4 nennt man Ordnung von d_1 , die Ordnung der sog. Gruppe ist 8, also Anzahl der Elemente). Die Spiegelungen an den vier Spiegelebenen werden mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und σ_4 bezeichnet. Das Zeichen \circ bezeichnet die Verknüpfung der Symmetrieeoperationen.

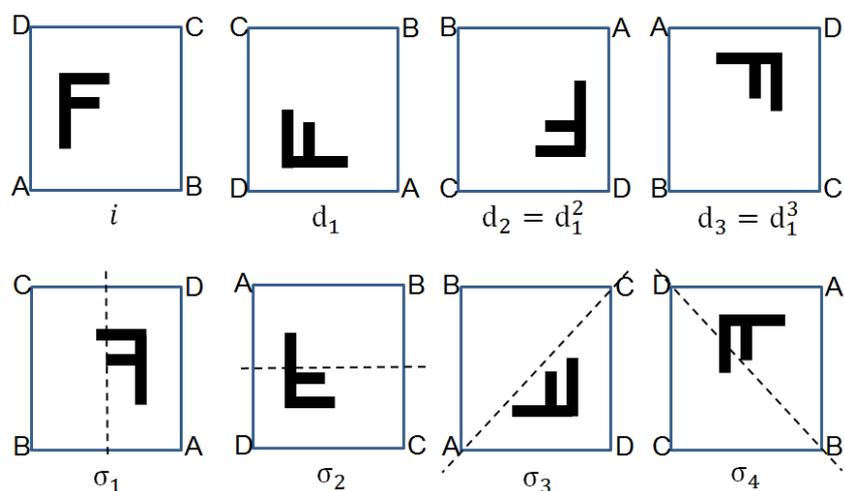


Abb. 2: Die sogenannte Diedergruppe D_n (Di-eder, hier regelmäßiges Viereck, $n=4$) charakterisiert z.B. die Drehungen und Spiegelungen eines Quadrates.

⁹ Siehe auch Abkürzungsverzeichnis und Glossar am Ende des Beitrags;
Vorsicht: die Konventionen können je nach Fachgebiet unterschiedlich sein.

Sie hat $4+2+2 = 8$ Elemente. Deshalb findet man auch die Bezeichnung D_8 . Di-edergruppen haben die Form D_{2k} , $k \in \mathbb{N}$. In diesem Beitrag wird die Nomenklatur D_n , also hier D_4 , verwendet¹⁰.

Man beachte, dass die d_i und σ_i Symmetrieoperationen, also kongruente Abbildungsvorschriften, sind. Man sollte im Zweifelsfall auf die Eckenvertauschungen schauen, die eine Symmetrieoperation definieren („Permutation“). So vertauscht σ_2 die Ecke rechts oben mit rechts unten sowie links oben mit links unten. Nur auf die Ausgangslage angewendet ist es auch eine Spiegelung des eingebetteten „F“ an der waagrecht verlaufenden Symmetrieebene. Sonst ist es eine Rechenvorschrift bzw. Handlungsanweisung, wie die Verknüpfung eines beliebigen Elementes x mit σ_2 (also $x \circ \sigma_2$) zu erfolgen hat. Es wird sich zeigen, dass dabei die Reihenfolge wichtig sein kann. In Permutationsdarstellung lauten die Verknüpfungsanweisungen sehr umständlich, aber korrekt formuliert, wie folgt:

Bilde das vorliegende Quadrat in einer der acht Orientierungen gemäß der Eckenvertauschung ab, wie sie den Handlungsanweisungen bzgl. der ursprünglichen Grundstellung zur neuen, deckungsgleichen Konstellation entspricht.

- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{A, B, C, D\}$ entspricht i (Identität) mit Drehung um 0°
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{D, A, B, C\}$ entspricht d_1 mit Drehung um 90° nach links
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{C, D, A, B\}$ entspricht d_2 mit Drehung um 180° nach links
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{B, C, D, A\}$ entspricht d_3 mit Drehung um 270° nach links
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{B, A, D, C\}$ entspricht σ_1 (Spiegelebene senkrecht)
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{D, C, B, A\}$ entspricht σ_2 (Spiegelebene waagrecht)
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{A, D, C, B\}$ entspricht σ_3 (Ebene links unten nach rechts oben)
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{C, B, A, D\}$ entspricht σ_4 (Ebene rechts unten nach links oben)

Abb. 3: Permutationsdarstellung der Diedergruppe D_4 (erster Buchstabe kennzeichnet die Ecke links unten; dann weiter gegen den Uhrzeigersinn d.h. mathematisch positiv).

Beispiel: $d_3 \circ \sigma_2$

Hier steht das Quadrat in der Stellung $\{B, C, D, A\}$ und Anwendung von σ_2 bedeutet Vertauschung von A und B bzw. von D und C. Es resultiert $\{A, D, C, B\}$, das der Symmetrieoperation σ_3 entspricht.

Somit gilt $d_3 \circ \sigma_2 = \sigma_3$. Umgekehrt sieht man, dass $\sigma_2 \circ d_3 = \sigma_4$ ist.

Man darf also nicht so ohne weiteres vertauschen.

¹⁰ Die gewählte Alternative erfolgt aus didaktischen Gründen, um den Bezug zum regelmäßigen Viereck/Quadrat zu betonen, obwohl D_4 mehr im geometrischen Kontext verwendet wird und $D_{2 \cdot 4}$ mehr in der Gruppentheorie.

Der Anwendungsgegenstand ist im Prinzip beliebig und die möglichen acht Symmetrioperationen müssen lediglich dieselben formalen Kriterien erfüllen. Z.B. gelten die Überlegungen auch für ein magisches Quadrat mit neun unterschiedlichen Ziffern. Es hat bekanntlich die Summe 15 bei allen Zeilen, Spalten und Diagonalen. Entsprechende „Deckoperationen“ funktionieren auch bei anderen magischen Quadraten oder bei entsprechenden Kartenlegespelen. Die Menge an Elementen muss gleich sein (hier acht) und die Verknüpfung muss für diese Beispiele analog zu den vier Drehungen und $2+2=4$ verschiedenen Spiegelungen (diagonal oder durch die Seitenmittelpunkte) sein. Ihre so gebildete Gruppe (aus acht Elementen mit entsprechend definierter Verknüpfung) lässt sich umgekehrt eindeutig (bijektiv) auf D_4 abbilden. Man sagt: Sie ist zu D_4 isomorph. Die Mathematik bietet somit, wie wir es für viele andere Bereiche kennen, für einen dermaßen gelagerten Fall eine Universalbeschreibung an, die relativ unabhängig eingesetzt werden kann. Mathematik ist bekanntlich unabhängig vom jeweiligen Anwendungsbereich. Dies gilt auch für die Beschreibung von Symmetrieeigenschaften durch die Gruppentheorie. Die nachfolgende Abb. zeigt alle Verknüpfungen der acht Elemente untereinander:

\circ	i	d_1	d_2	d_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
i	i	d_1	d_2	d_3	σ_1	σ_2	σ_3	σ_4
d_1	d_1	d_2	d_3	i	σ_3	σ_4	σ_2	σ_1
d_2	d_2	d_3	i	d_1	σ_2	σ_1	σ_4	σ_3
d_3	d_3	i	d_1	d_2	σ_4	σ_3	σ_1	σ_2
σ_1	σ_1	σ_4	σ_2	σ_3	i	d_2	d_3	d_1
σ_2	σ_2	σ_3	σ_1	σ_4	d_2	i	d_1	d_3
σ_3	σ_3	σ_1	σ_4	σ_2	d_1	d_3	i	d_2
σ_4	σ_4	σ_2	σ_3	σ_1	d_3	d_1	d_2	i

Abb. 4: Verknüpfungstafel der Diedergruppe D_4 . Die Gruppe wird von 2 Elementen erzeugt (Drehung um 90° und Spiegelung mit anschl. Drehung um 0° , 90° , 180° bzw. 270° gegen den Uhrzeigersinn).

Man sieht ebenfalls, wie oben angedeutet, dass es auf die Reihenfolge der Operationen ankommen kann. So ergibt auch $d_1 \circ \sigma_1 = \sigma_3$, aber $\sigma_1 \circ d_1 = \sigma_4$. Es gilt hier nicht das Kommutativgesetz wie z.B. bei der Multiplikation von reellen Zahlen, bei denen für beliebige Zahlen a und $b \in \mathbb{R}$ gilt: $a \cdot b = b \cdot a$.

Außerdem besitzt das Beispiel die nachfolgenden Eigenschaften.

- 1) Jede Verknüpfung führt wieder zu einem Gruppenelement (abgeschlossen).
- 2) Es gibt ein Element, das keine Veränderung bewirkt (neutrales Element, i).

- 3) Zu jedem Element a_x existiert ein inverses Element a_x^{-1} , so dass durch die Verknüpfung beider wieder das neutrale Element entsteht ($a_x \circ a_x^{-1} = i$).
- 4) Es gilt das Assoziativgesetz, wonach die Klammersetzung unerheblich ist, also $a_x \circ (a_y \circ a_z) = (a_x \circ a_y) \circ a_z$ mit $a_x, a_y, a_z \in \{i, d_1, d_2, d_3, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_7\}$

Es zeigt sich, dass jede mathematische Gruppe mit einer Menge an Elementen und einer Verknüpfung zwischen den Elementen durch 1) – 4) charakterisiert ist. Die genannten vier Eigenschaften können zum Nachweis der Gruppeneigenschaft herangezogen werden.

Bei näherem Hinschauen erkennt man, dass diese vier Eigenschaften auch auf eine Untergruppe zutreffen, die aus den Elementen i, d_1, d_2 und d_3 , also den Drehungen, besteht. Sie können als Potenzen von d_1 aufgefasst werden. Man nennt solche Gruppen „zyklisch“ (s.u.). Für diese Untergruppe gilt auch das Kommutativgesetz, denn dieser Tabellenteil ist spiegelsymmetrisch zur Hauptdiagonalen von links oben nach rechts unten. Solche Gruppen nennt man „abelsch“ nach dem norwegischen Mathematiker Niels Henrik Abel (1802 – 1829), einem Pionier auf diesem Gebiet. Auch die 180 Grad Drehung d_2 bildet mit dem neutralen Element eine Untergruppe. Das neutrale Element alleine ist immer trivialerweise eine Untergruppe. Es ist kein Zufall, dass die Anzahl der Elemente 1, 2 und 4 und 8 selber den Teilern von 8 entspricht. Es gibt übrigens noch eine zweite nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8, wobei sich beide nicht ineinander überführen lassen (nicht isomorph sind). Es ist die Gruppe der Quaternionen¹¹. Auch drei vollkommen unabhängige abelsche Gruppen der Ordnung 8 sind bekannt. Bei nur acht Elementen in der Gruppe können also fünf unterschiedliche, nicht isomorphe Strukturen gefunden werden.

Es ist ein elementarer Satz der Gruppentheorie („Satz von Lagrange“), dass die Ordnung eines Elementes die Gruppenordnung teilt. Das sind die Teiler 8, 4, 2 und 1 (für das neutrale Element). Bei einer Ordnung 8, also eines Elementes, das die ganze Gruppe erzeugt, liegt eine zyklische Gruppe vor, also z.B. die Drehungen eines regelmäßigen Achtecks.

Diese Gruppe nennt man bei 8 Elementen \mathbb{Z}_8 .

Ein weiteres Beispiel der drei abelschen Gruppen sei hier genannt: Die Gruppe hat ein Element a der Ordnung 4 und ein Element b der Ordnung 2, d.h. es gilt $a^4=i$ und $b^2=i$. Die Gruppe hat somit die Elemente $\{i, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$.

¹¹ Quaternionen kann man salopp als Erweiterung der komplexen Zahlen sehen mit $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1$. Verknüpfungsregel ist $i \cdot j = k$, aber $j \cdot i = -k$. Die Gruppe besteht aus den Elementen $1, -1, i, -i, j, -j, k, -k$ und ist ebenfalls nicht-abelsch. Hier soll nicht näher darauf eingegangen werden. Die Eigenschaften sind gut beschrieben unter <https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternionengruppe>

So ist z.B. $a^2 b \circ a^3 b = a^5 b^2 = a^4 b^2 = a i i = a$, denn $a^4 = b^2 = i$ und $a i = i a = a$. Die Gruppe wird von b der Ordnung 2 und a der Ordnung 4 erzeugt und wird deshalb mit $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ bezeichnet. Analog heißt die 3. abelsche Gruppe $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}_2^3$.

Die Multiplikationstafel oder Gruppentafel von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ist symmetrisch zur Diagonalen von links oben nach rechts unten, d.h. die Gruppe ist abelsch – es gilt das Kommutativgesetz.

○	i	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
i	i	a	a ²	a ³	b	ab	a ² b	a ³ b
a	a	a ²	a ³	i	ab	a ² b	a ³ b	b
a ²	a ²	a ³	i	a	a ² b	a ³ b	b	ab
a ³	a ³	i	a	a ²	a ³ b	b	ab	a ² b
b	b	ab	a ² b	a ³ b	i	a	a ²	a ³
ab	ab	a ² b	a ³ b	b	a	a ²	a ³	i
a ² b	a ² b	a ³ b	b	ab	a ²	a ³	i	a
a ³ b	a ³ b	b	ab	a ² b	a ³	i	a	a ²

Abb. 5: Multiplikationstafel oder Gruppentafel von $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$. Die Gruppe ist eine der nicht isomorphen 5 Gruppen der Ordnung 8. D_4 und Q_8 sind nicht-abelsch; \mathbb{Z}_8 , $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ und \mathbb{Z}_2^3 sind abelsch.

Ist dagegen die Zahl der Elemente eine Primzahl p , so gibt es nur die Gruppe der Drehungen in einem regelmäßigen Vieleck mit p Ecken und es lässt sich nur das neutrale Element als Untergruppe identifizieren („Zyklische Gruppen“). Die nicht weiter zerlegbaren Gruppen nennt man endliche einfache Gruppen. Sie haben eine ähnliche Rolle wie die Primzahlen, der Sachverhalt ist aber deutlich komplexer: Im Gegensatz zu der Primfaktorzerlegung lässt sich aber aus der Zerlegung in endliche einfache Gruppen die ursprüngliche endliche Gruppe nicht eindeutig rekonstruieren¹².

Was sich hier bei diesem überschaubaren Beispiel noch als relativ einfach darstellt, ist Teil der mächtigsten Theorie der Mathematik. Die Gruppentheorie wurde ursprünglich entwickelt, um systematisch algebraische Gleichungen lösen zu können¹³. Erst später wurden über die Untersuchung von

12 Ein Beispiel für eine große, aber endliche Gruppe liefert der sogenannte Zauberwürfel Rubik's Cube. Die Anzahl aller Elemente in dieser Gruppe, also alle möglichen Drehungen, ist eine 20-stellige Zahl.

13 Hinweis: Insbesondere wurden dazu zunächst in der Linearen Algebra die Matrizenrechnung und bei quadratischen Matrizen der Begriff der Determinante

geometrischen Strukturen die Eigenschaften deutlich, die Symmetriebeziehungen betreffen. Das Beispiel D_4 ist ein Vertreter endlicher Gruppen, an dem sich auch die Definition endlicher *einfacher* Gruppen erläutern ließ. Ihre Untersuchungen erstrecken sich auf geschätzte 10.000 - 15.000 Druckseiten¹⁴. Ca. 180 Jahre wurde an der Gruppentheorie gearbeitet; ca. 60 Jahre an endlichen einfachen Gruppen. Hunderte von Artikeln sind dazu entstanden. Sie gipfeln letztendlich in einem mathematischen Satz („Riesentheorem“, „enormous theorem“), der einfach zu formulieren, aber schwer zu beweisen war und noch schwerer zu überblicken ist¹⁵. Alle mathematischen Beschreibungen von Symmetrie in endlichen Mengen lassen sich danach in vier Klassen oder Großfamilien einordnen:

- 1) Ein Vertreter der **zyklischen Gruppen** sind z.B. die Drehungen beim Quadrat, deren Elemente sich alle aus d_1 erzeugen lassen. Analog werden im Prinzip alle zyklischen Gruppen definiert, indem es in ihnen genau ein erzeugendes Element geben muss.
- 2) Die **alternierenden Gruppen** haben mit Permutationen zu tun, also unterschiedliche Anordnungen einer Folge von Elementen. Alle Permutationen bilden eine Gruppe, aber in der Regel keine einfache. Man kann Permutationen auf das Vertauschen von jeweils zwei Elementen zurückführen (Transpositionen). Konzentriert man sich nur auf eine gerade Anzahl von Transpositionen, so erhält man alternierende Gruppen¹⁶.
- 3) Die reichhaltigste Großfamilie bilden die **Gruppen vom Lie-Typ**. Es gehören z.B. feste Drehungen um den Nullpunkt im dreidimensionalen Raum mit nur endlich möglichen Koordinatenpositionen dazu. Das „Riesentheorem“ bezieht sich nur auf endliche (einfache) Gruppen. Lie-Gruppen müssen nicht nur eine endliche Anzahl an Elementen haben und sind erst recht nicht auf einen dreidimensionalen Raum beschränkt. Lie-Gruppen sind in der theoretischen Physik das bevorzugte

eingeführt, die ihnen einen skalaren Wert zuordnet. Mittels Determinanten wurden schon früh lineare Gleichungssysteme untersucht. Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Determinante ungleich Null ist.

14 Für diese und folgende allgemeine Aussagen bzw. teils wörtliche Zitate siehe Spektrum der Wissenschaft, März 2016, S. 48 ff.

15 Vier emeritierte Professoren, Stephen D. Smith, Michael Aschbacher, Richard Lyons, Ronald Solomon, haben 2011 ein Buch veröffentlicht, das auf 350 Seiten in groben Zügen den Beweis skizziert. Sie gelten als die wenigen Menschen, die noch die Thematik ganz überblicken (nach Anm. 14).

16 Beispiel: Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$ sind $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$. Die ersten drei Permutationen vertauschen jeweils zwei Zahlen, sind also geradzahlig. Die letzten drei vertauschen die Plätze aller drei Zahlen. Somit bilden $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$ eine alternierende Gruppe.

Werkzeug, um Symmetrien in der Physik mathematisch zu beschreiben¹⁷. Die mathematische Struktur einer Lie-Gruppe hat somit erhebliche Bedeutung in der Physik. Sie wird insbesondere auch bei der Teilchenphysik diskutiert, bei der sie eine zentrale Bedeutung bei der Weiterentwicklung des Standardmodells der Elementarteilchen besitzen könnte.

- 4) Die vierte Großfamilie ist ein Sammelsurium von 26 schwer fassbaren Gruppen – die **sporadischen Gruppen**. Dazu gehört das sogenannte „Monster“ mit mehr als 10^{53} Elementen¹⁸, die man als Kongruenzabbildungen in einem 196883-dimensionalen Raum auffassen kann. Es ist noch kein gesicherter Anwendungsfall dafür bekannt, aber es ranken sich mathematisch begründete Spekulationen um diese Gruppe, die Zusammenhänge mit dem Universum vermuten. Sie sind als Monstrous Moonshine bekannt^{19,20}. Auf jeden Fall gibt es einen gesicherten unerwarteten Zusammenhang zwischen der Monstergruppe und bestimmten modularen Funktionen, die in Kernbereiche von Mathematik

17 Wenn die Gruppenelemente durch n reelle Koordinaten darstellbar sind, so handelt es sich, salopp definiert, um eine sogenannte Mannigfaltigkeit und eine kontinuierliche Gruppe. Die Anzahl der Gruppenelemente kann endlich, abzählbar unendlich oder überabzählbar unendlich sein. Die Koordinaten des Ergebnisses einer Verknüpfung lassen sich durch eine stetige Funktion f_1 ausdrücken; entsprechend Inversenbildung durch eine weitere stetige Funktion f_2 . Sind f_1 und f_2 unendlich oft differenzierbar („glatt“) und lassen sich in eine Potenzreihe entwickeln („analytisch“), so ist die Gruppe eine Lie-Gruppe.

18 Genau $808\ 017\ 424\ 794\ 512\ 875\ 886\ 459\ 904\ 961\ 710\ 757\ 000\ 754\ 368\ 000\ 000\ 000 = 2^{46} \cdot 3^{20} \cdot 5^9 \cdot 7^6 \cdot 11^2 \cdot 13^3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$ einzelne Elemente, die man sich als Drehungen in einem 196 883 dimensionalen Raum vorstellen kann. Es treten nur Primzahlen bis 71 auf (supersinguläre Primzahlen). Es fiel bei den Raumdimensionen die Nähe zum 1. Koeffizienten der modularen j -Funktion auf: $j(\tau) = q^{-1} + 744 + 196884 q + 21493760 q^2 + \dots$, $q = \exp(2\pi i \tau)$, $\text{Im}(\tau) > 0$. Dies führte zum Beweis der Moonshine Vermutung durch Richard Ewen Borcherds. Er basiert auf Erkenntnissen aus der konformen Quantenfeldtheorie (String-Theorie).

19 Siehe dazu https://en.wikipedia.org/wiki/Monstrous_moonshine

20 Im Kapitel „Symmetrie und Erhaltungsgrößen in Physik und Kosmologie“ wird in diesem Zusammenhang auf sog. Kac-Moody-Gruppen verwiesen. Siehe dazu vorab: https://www.mpg.de/324293/forschungsSchwerpunkt1?c=166410&force_lang=de Eher mathematisch orientierte Resultate finden sich z.B. unter <https://www.degruyter.com/view/j/jgth.ahead-of-print/jgth-2016-0034/jgth-2016-0034.xml?format=INT> bzw. analog <https://arxiv.org/abs/1502.07294> mit einer Reihe von zitierten Ergebnissen aus der Stringtheorie.

Dreh- und Angelpunkt ist die Gruppe $E(10)$, die in der Nähe des Urknalls auftauchen sollte. Die mathematische Konstruktion von Zukunft und Vergangenheit auf $E(10)$ ist kürzlich gelungen. Siehe Sätze 1.16 und 1.17 folgender Arbeit:

<https://arxiv.org/abs/1702.08426>. Es ist offen, inwieweit dies der physikalischen Raumzeit der Allgemeinen Relativitätstheorie entspricht (mehr bei Physik/Kosmologie).

und Physik reichen. Modulare Funktionen messen Rechts-Links-Asymmetrie von Gruppen.

Obwohl in den Naturwissenschaften nur endliche Objekte betrachtet werden, sind auch unendliche Gruppen dann von Bedeutung, wenn große Zahlen oder makroskopische Vorgänge eine Rolle spielen. Das einfachste Beispiel sind die ganzen Zahlen mit der Null als neutralem Element und der Addition als Verknüpfung. Sie ist abgeschlossen, denn es entstehen immer wieder ganze Zahlen. Ein inverses Element existiert für jede Zahl a in seiner negativen Zahl $(-a)$, denn $a+(-a)=0$. a kann dabei selbst negativ sein. Ist $a=-b$, so ist $-b+(-(-b))=-b+b=0$. Es gilt außerdem das Assoziativgesetz und auch darüber hinaus das Kommutativgesetz. Analog bilden die rationalen Zahlen / Brüche eine Gruppe, die reellen Zahlen und auch die komplexen Zahlen. Eine wichtige Erweiterung des Gruppenbegriffes ist der mathematische Körper. Dabei wird auf der endlichen oder unendlichen Menge eine zweite Verknüpfung definiert. Sie entspricht z.B. der Multiplikation (mit Division als ihrer Umkehrung). Das neutrale Element ist die 1. Nur das neutrale Element der 1. Verknüpfung, z.B. der Null bei der Addition, ist für die zweite Verknüpfung ausgeschlossen (denn zur Null gibt es kein Inverses mit $a \cdot a^{-1}=1$ bzgl. der Multiplikation; man „darf“ nicht durch Null dividieren). In Körpern gelten für beide Verknüpfungen das Kommutativgesetz und auch bei beiden Verknüpfungen erweiterte Distributivgesetze mit gemischten Verknüpfungen. Zweifellos sind die reellen Zahlen (mit der Addition und/oder Multiplikation) die wichtigste Gruppe für eine Vielzahl an wissenschaftlichen Disziplinen. Auch die „allgemeine lineare Gruppe“ (über einem Vektorraum) mit der Matrizenmultiplikation als Verknüpfung hat viele Anwendungsfälle. Es ist viel einfacher, mit Matrizen zu rechnen statt die unhandlichen Gruppenelemente zu behandeln. Einen solchen Vektorraum bezeichnet man unter bestimmten Voraussetzungen als Lie-Algebra, d.h. man definiert eine zweite Verknüpfung analog zur Multiplikation zusätzlich zur Matrizen-Addition. Das ist das zentrale Werkzeug vieler Symmetrie-Betrachtungen in der Physik.

Symmetrien räumlicher Strukturen

Kristalle haben schon früh die Menschen fasziniert. Es scheint besonders die Schönheit der Strukturen für den Reiz verantwortlich zu sein. Diese machen vor allem Symmetriekriterien aus.



Abb. 6: Einige Kristalle als Repräsentanten der sieben Kristallsysteme²¹

Versuche, eine Strukturierung zu erzielen, gehen bis auf Theophrastos von Eresos (371-287 v. Chr.) und auf Plinius dem Älteren (26-79 n. Chr.) zurück²². Weitere Versuche zur Systematisierung folgten und waren häufig mit geometrischen Überlegungen verknüpft. Der formale Symmetriebegriff wurde dabei von dem katholischen Pfarrer René-Just Haüy (1743-1822) mit seinem Symmetriegesetz eingeführt. Doch erst die Entwicklung der Gruppentheorie brachte das nötige Instrumentarium, um eine vollständige mathematische Beschreibung zu erzielen.

Die Gruppentheorie muss jedoch bei weitem nicht voll ausgeschöpft werden. So sind neben Inversionszentrum und Spiegelebene nur Drehachsen bis zur Sechszähligkeit bekannt (2, 3, 4, 6)²³. Translationssymmetrie als Begriff wird unterschiedlich verwendet: In der Mathematik ist der Graph der Sinus-Funktion translationssymmetrisch (bzgl. x-Achse); in der Physik versteht man darunter eher die Invarianz gegenüber Koordinatentransformationen des Raumes. In der Kristallographie sind periodische Verschiebungen im Kristallgitter ohne

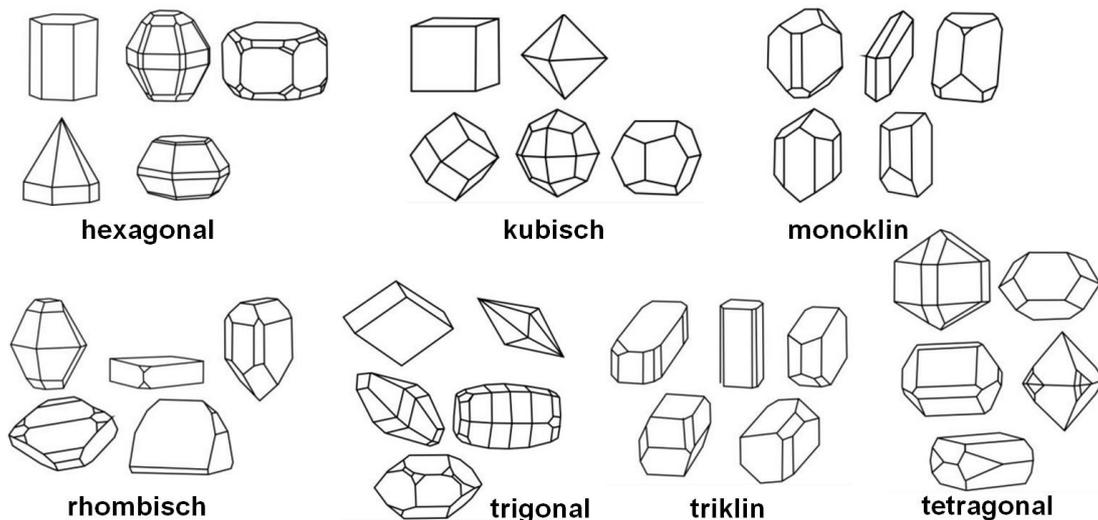
21 Von links nach rechts (abgerufen 06.02.2017):

Kristallsystem	Name	Formel	Bildnachweis
Triklin	Albit	$\text{Na}[\text{AlSi}_3\text{O}_8]$	de.wikipedia.org/wiki/Albit (Natronfeldspat)
Monoklin	Gips	$\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$	de.wikipedia.org
Orthorhombisch	Schwefel	S	de.wikipedia.org/wiki/Schwefel#/media/File:Sulfur-t07-67a.jpg
Tetragonal	Zirkon	$\text{Zr}[\text{SiO}_4]$	de.wikipedia.org/wiki/Zirkon
Trigonal	Quarz	SiO_2	de.wikipedia.org/wiki/Quarz
Hexagonal	Beryll	$\text{Al}_2\text{Be}_3[\text{Si}_6\text{O}_{18}]$	de.wikipedia.org/wiki/Beryll
Kubisch	Halit	NaCl, Steinsalz	de.wikipedia.org/wiki/Halit

22 de.wikipedia.org/wiki/Kristallographie, 06.12.2016

23 Fünfzähligkeit muss in der Kristallographie (im Gegensatz zur Molekülphysik) fehlen, weil sie keine periodische Raumstruktur zulässt. Allerdings findet man bei Quasikristallen entsprechende Muster. Die dafür zugrunde liegende mathematische Theorie war übrigens bei ihrer Entdeckung schon durch Roger Penrose über unendliche Parkettierungen der Ebene entwickelt worden.

Konsequenzen für die sog. Elementarzelle translationssymmetrisch²⁴. Man unterscheidet in Translation der drei Basisvektoren, zusätzliche Zentrierungen, Gleitspiegelebenen und Schraubenachsen. Alle möglichen gruppentheoretischen Kombinationen dieser Symmetrieelemente ergeben dann die möglichen Raumgruppen in der Kristallographie. Man erhält 230 Raumgruppen, die die mikroskopische Struktur bestimmen und die sich je nach Betrachtungsweise noch weiter strukturieren lassen.



Kristallsysteme	Restriktionen bei Kantenlängen	Restriktionen in den Winkeln
triklin	keine	keine
monoklin	keine	$\alpha = \gamma = 90^\circ$
orthorhombisch	keine	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
tetragonal	$a = b$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$
trigonal	$a = b$	$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$
hexagonal	$a = b$	$\alpha = \beta = 90^\circ, \gamma = 120^\circ$
kubisch	$a = b = c$	$\alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$

Abb. 7: Die 32 Kristallklassen²⁵ lassen sich in sieben Kristallsysteme unterteilen. Dazu werden die Längenrestriktionen der Basisvektoren zueinander angegeben²⁶. Für die Winkel gelten ebenfalls entsprechende

24 Natürlich ist dies nicht unendlich oft möglich.

25 Übersichtliche Darstellungen siehe [https://de.wikipedia.org/wiki/Punktgruppe bzw. www.spektrum.de/lexikon/geowissenschaften/kristallklasse/8902](https://de.wikipedia.org/wiki/Punktgruppe_bzw._www.spektrum.de/lexikon/geowissenschaften/kristallklasse/8902), (26.01.2017).

26 Nur die Kristalle dieser Kristallklassen haben die volle Flächenanzahl genau dann, wenn die Punktgruppe eines Kristalls mit der Punktgruppe seines Kristallgitters über-

Restriktionen²⁷. Mehr Restriktion bedeutet zwar mehr Regelmäßigkeit, aber weniger Symmetrie im Sinne von weniger Freiheitsgraden. (Grafiken der Kristallformen mit freundlicher Genehmigung von Mineralien Bremen, Herr Alfred Schäfer.)

Die Betrachtung kann dabei die makroskopischen Symmetrieeigenschaften in den Vordergrund stellen (Kristallklassen) oder man betrachtet es aus Sicht der Kristallstrukturanalyse als Symmetrie des Röntgenbeugungsbildes (11 Laue-Gruppen) oder der Symmetrie des Translationsgitters (14 Bravaisgitter)²⁸. Hier sind nicht nur die Ecken mit Atomen besetzt, sondern auch andere Positionen in der geometrischen Form (Mitte, Flächen, Raum etc.). Allerdings ist selbst eine Systematisierung verschiedener Kristalle, die zu einer Raumgruppe gehören, ggfs. noch schwierig. Man muss für den allgemeinen Fall eine virtuelle Ebene festlegen (vektoriell aufspannen) und die Struktur mittels drei Indices für die drei Raumdimensionen in Bezug auf diese Ebene beschreiben („Millersche Indices“). Dies ist meist bei monoklinen oder triklinen Kristallen der Fall. So versucht man die Elementarzelle zu identifizieren. Computerprogramme haben in den letzten Jahrzehnten die Arbeit enorm erleichtert. In zunehmend vielen Fällen sind die Kristallstrukturbestimmungen / Röntgenstrukturanalysen zum Service einer zentralen Abteilung der Universität oder des Fachbereiches geworden²⁹.

Weitere Drehachsen oder andere Symmetrieelemente führen dazu, dass einzelne Indices zusammen fallen können, also Restriktionen bei den Gitterkonstanten entstehen. Es bleiben dabei aber 32 unterschiedliche Kristallklassen, die die möglichen Punktgruppen repräsentieren (siehe dazu auch Chemie/Molekülphysik) in sieben grundsätzlichen Kristallsystemen, die man durch gruppentheoretische oder trigonometrische Rechnungen nicht weiter vereinfachen kann. Meist verwendet man für die Kristallklassen die internationale Symbolik von Hermann-Mauguin. Molekülsymmetrie wird nach einer von Schoenflies vorgeschlagenen Systematik bezeichnet.

Die sieben Kristallsysteme vernachlässigen dabei den Inhalt und konzentrieren sich auf die grundsätzliche Symmetrie der Elementarzelle, d.h. betrachten lediglich die möglichen Restriktionen bei den Gitterkonstanten, wie

einstimmt; sie sind dann holoedrisch und haben eine maximale Symmetrie (Näheres siehe Kapitel Chemie).

27 Bildnachweis Kristallsysteme oben: alfs-mineralien.de.tl. Die 35 abgebildeten Kristallformen oben gehören jeweils zu den 7 Kristallsystemen, entsprechen aber nicht den 32 Kristallklassen.

28 Unter Verwendung von Materialien der Universität Marburg zu Röntgenbeugungsmethoden.

29 Beispiele Zentrale Abteilung für Kristallstrukturanalyse der Philipps-Universität Marburg, <https://www.uni-marburg.de/fb15/xray> oder <http://www.uni-regensburg.de/chemie-pharmazie/roentgenstrukturanalyse/>

den Kantenlängen a , b , c und den Winkeln α , β , γ . Die Kristallstrukturanalyse ist in den letzten Jahrzehnten eine sehr wichtige physikalische Untersuchungsmethode geworden. Es ist oft die einzige Methode, um die Struktur eines Festkörpers exakt zu beschreiben und die Bindungsverhältnisse bzgl. Atomabstände und Winkel genau angeben zu können. Dies gilt für fast alle Bereiche der Chemie und Mineralogie. Die theoretische Grundlage war dabei die Gruppentheorie und die experimentelle Basis der Nachweis der Röntgenbeugung an Kristallen durch Max von Laue.

Klarstellung zur Terminologie:

Die Schoenflies-Bezeichnungen orientieren sich nur grob an der Terminologie endlicher Gruppen. Die Mathematik ist deutlich mächtiger als die in der Natur vertretenen Symmetriegruppen und verwendet deshalb weitergehende Bezeichnungen. Man sollte also keinesfalls einen 1:1-Zusammenhang suchen. Die Diedergruppe D_4 mit Drehungen und Spiegelungen eines Quadrats aus dem Kapitel Mathematik ist in der planaren Papierebene zu veranschaulichen. In der Chemie muss andererseits auch die Symmetrie eines Moleküls wie das planare XeF_4 oder das AgF_4^- -Anion dreidimensional interpretiert werden, d.h. es kommen planare Symmetrieelemente hinzu (Spiegelebene, Drehachsen senkrecht zur vierzähligen Achse), die für ein Quadrat keine Rolle spielen. Dies entspricht der Punktgruppe D_{4h}

nach Schoenflies. Andererseits werden die Symmetrieeigenschaften insofern vereinfacht dargestellt, dass eine irreduzible Darstellung gewählt wird („Charaktertafel“, siehe unten). Die zweite nicht-abelsche Gruppe der Ordnung 8 (8 Elemente), die Quaternionengruppe Q_8 , ergibt aber diese gleiche formale Symmetriecharakterisierung, also die gleiche Charaktertafel. D_4 und Q_8 lassen sich jedoch nicht ineinander überführen – es gibt keine bijektive Abbildung zwischen ihnen. Sie sind also nicht isomorph. Der gebräuchliche Name Q_8 taucht in der Schoenflies-Terminologie gar nicht auf. Die Sicht der Mathematik / Gruppentheorie ist somit deutlich umfassender. Es gibt viele Gruppen, die in der Natur nicht vorkommen und man kann mit Symmetrieeoperationen in beliebigen Dimensionen rechnen.

Hier einige Beispiele, die sich zunächst im folgenden Abschnitt auf Kernresonanz-Spektroskopie (NMR) und Rückschlüsse auf die

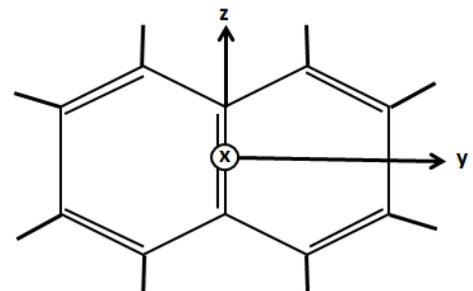


Abb. 8: Das Naphthalin-Molekül ist planar. Man wählt gemäß Mulliken-Vorschlag die x-Achse sinnvollerweise senkrecht zur Ebene sowie die y- und z-Achse jeweils senkrecht dazu. Es folgt der Punktgruppe D_{2h} , hat drei erzeugende Elemente und acht Symmetriespezies. Die Gruppenordnung ist acht.

Molekülsymmetrie, Interpretationen der Farbtemperatur, optische Aktivität und auf die Molekülorbitalmethode wie LCAO (linear combination of atomic orbitals), beziehen. Man kann den Abschnitt „Makroskopische Stoffeigenschaften und Symmetrie“ nennen.

Anschließend soll in einem weiteren Abschnitt an zwei Beispielgruppen auf Symmetrieaspekte eingegangen werden, die vor allem für die Schwingungsspektroskopie sehr wichtig sind. Man kann diesen Abschnitt „Molekülbewegungen und Symmetrie“ nennen.

Makroskopische Stoffeigenschaften und Symmetrie:

Das NMR-Spektrum von Benzol lässt sich bekanntlich nicht nur mit einer der Kekulé-Formeln interpretieren, nach der alternierend Einfach- und Doppelbindungen auftreten (gemäß Valenzstrukturtheorie, VB). Analoges gilt für alle Aromaten z.B.

das abgebildete Naphthalin und viele andere Moleküle, bei denen die Betrachtung von Valenzelektronen ungenügende Ergebnisse bringt. Man findet deshalb heute bei Aromaten oft die Mulliken-Darstellung (mit „Kreis im Ring“) als Zeichen, dass hier die Molekülsymmetrie nach der Molekülorbitaltheorie zu interpretieren ist³⁰. Vorsicht: Der Kreis entspricht 6 π -Elektronen.

Fuchsin, dessen Farbe heute gerne Magenta genannt wird, ist symmetrischer, als die Abb. 9 suggeriert³¹, weil die positive Ladung über das ganze Molekül hinweg delokalisiert wird („Mesomerie-Stabilisierung“) und dadurch insbesondere die Protonen an den Stickstoffatomen spiegelsymmetrisch sind. Damit kann die intensive Farbe erklärt werden. Protonen sind dann chemisch

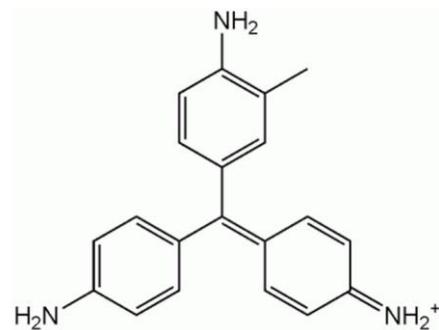


Abb. 9: Fuchsin-Struktur, die nicht die symmetrischen Eigenschaften widerspiegelt.

30 Symmetriebetrachtungen sind vor allem bei quantenchemischen Rechnungen von großem Nutzen beim LCAO-Ansatz. Bindungsenergien werden durch Überlappungsintegrale quantenchemisch berechnet. Wenn die beiden Wellengleichungen im Integral orthogonal zueinander sind oder sie zu unterschiedlichen irreduziblen Darstellungen gehören, so wird das resultierende Integral durch diese Symmetrie Null und vereinfacht somit die Gleichung. Auf diesen Bereich wird wegen der erforderlichen Mathematik, trotz seiner Bedeutung für die theoretische Chemie und Molekülphysik, nicht eingegangen.

31 Durch die CH₃-Gruppe kann aber keine reine dreizählige Drehachse entstehen. Die Molekülsymmetrie ist nur in grober Näherung C_{3v}, s.u. Das IR-Spektrum weist mehr als 3 stark ausgeprägte Absorptionslinien auf (25.01.2017, vgl. a. NH₃-Beispiel, siehe <http://webbook.nist.gov/cgi/cbook.cgi?ID=C7664417&Type=IR-SPEC&Index=1#IR-SPEC>

äquivalent, wenn sie spiegelsymmetrisch sind. Im NMR-Spektrum werden sie durch die gleiche Bande repräsentiert. Die Gruppentheorie ist für fast alle Spektroskopie-Methoden relevant³².

Eine andere wichtige Gruppe von Farbstoffen sind die Azofarben. Es sind seit Ende des 19. Jahrhunderts synthetisch hergestellte Farbstoffe, von denen man mittlerweile über 2.000 kennt³³. Ihre

oft intensive Farbe erhalten sie von einer (oder mehreren) Stickstoff-Stickstoff Doppelbindungen als Brücke zwischen zwei Molekülteilen (oft Aromaten). Diese Brücke ist das zentrale Symmetrieelement und die Bindungsverhältnisse an dieser Stelle bestimmen oft maßgeblich die Farbe. Man kann über eine eindimensionale, zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung³⁴ aus Bindungsabständen die Farbe berechnen oder umgekehrt aus der Farbtemperatur / Wellenlänge bzw. Frequenz der Azofarbe auf die Bindungsverhältnisse schließen.

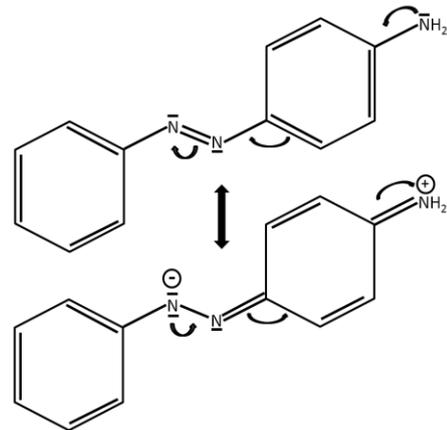


Abb. 10: π -Elektronenverteilung und Polarisation im **p-Aminoazobenzol**.

Die Elektronen bewegen sich auf der „Azobrücke“ entlang einer (symmetrischen) stehenden Welle. Wird die Schwingungsebene von transversal polarisiertem Licht beim Durchgang durch einen Stoff gedreht, so nennt man den Stoff „optisch aktiv“. Wenn ein Molekül mit seinem Spiegelbild zur Deckung gebracht werden kann, so kann es nicht optisch aktiv sein und umgekehrt. Beispiele sind die beiden Isomere von CHFClBr , die optisch aktiv sind, weil keine Spiegelsymmetrieebene existiert. Dagegen ist CH_2ClBr optisch nicht aktiv (s.a. Biologie, Enantiomere).

Einen Schritt weiter geht man bei Überlegungen zum Dipolmoment. So ist das Wassermolekül ein Dipol, weil die elektrische Ladung verstärkt am Sauerstoff zu finden ist. Ähnliches gilt für „einseitig“ halogenierte Verbindungen wie Methylchlorid (Dichlormethan, CH_2Cl_2). Eine Verbindung wie $\text{C}_6\text{H}_2\text{F}_2\text{Cl}_2$, die

32 Einige Spektroskopie-Methoden und ihr Anwendungsbereich: IR steht für Infrarot-Spektroskopie. Sie misst Änderungen des Schwingungszustandes zweier Atome im Molekül. NMR misst die Änderung des Kernspinzustandes, ESR, Elektronenspinresonanz, misst Änderung des Elektronenspinzustandes oder Hyperfeinzustandes. Bei der Raman-Spektroskopie geht es um inelastische Streuung von Licht an molekularen, kristallinen oder amorphen Substanzen.

33 Der erste Azofarbstoff war 1883 Kongorot, der auch als Säure-Base – Indikator wirken kann (Umschlag von Blauviolett zu Rotorange im leicht Basischen). Es wird heute noch zu unterschiedlichen Zwecken kommerziell vertrieben und verwendet.

34 Die Schrödinger-Gleichung beschreibt die möglichen Superpositionen, also Überlagerung von Zuständen eines quantenmechanischen Systems und damit seine Dynamik. Erst durch die Messung entscheidet sich das System für einen Zustand.

symmetrisch als 1,4-Difluor-2,5-dichlor-benzol aufgebaut ist, kann aus Symmetriegründen kein Dipol sein. Das Molekül ist lediglich punktsymmetrisch mit einem Inversionszentrum³⁵.

Molekülbewegungen und Symmetrie:

Über die Kristallstruktur und andere makroskopische physikalische Eigenschaften hinaus sind Symmetriebetrachtungen auch bei einzelnen Molekülen sinnvoll, insbesondere wenn Bewegungen mit Einfluss auf die Molekülsymmetrie damit zumindest qualitativ erklärt werden können. Das

Standardwerk von J. Michael Hollas, „Symmetry in Molecules“, erschien 1972 in Englisch. 1975 hat es Ralf Steudel ins Deutsche übersetzt³⁶. Hollas nutzt ebenfalls intensiv die Gruppentheorie. Lässt man Schraubenbewegungen und Gleitspiegelungen außer Acht, so sind in der Kristallographie lediglich 32 Punktgruppen (Kristallklassen) relevant. In der Molekülphysik sind die Verhältnisse anders. Die Ursache liegt darin, dass für die Symmetrieeigenschaften von Molekülen nicht nur die Gleichgewichts-anordnung der Atomkerne berücksichtigt werden muss, sondern auch die Bindungs- und Ladungsverhältnisse der Elektronen, Rotationen, Schwingungen, Kernspin, Elektronenspin und ggfs. translatorische Bewegungen des ganzen Moleküls etc. mit verantwortlich sind. Grundsätzlich gilt, dass ein Molekül genau dann symmetrisch

ist, wenn es im Raum mindestens zwei nichtunterscheidbare Orientierungen gibt. Die Gruppentheorie zeigt qualitativ an, welche Molekülzustände gleiche Energie haben; quantitative Aussagen über die relativen Energielagen können rechnerisch („Störungsrechnung“) ermittelt werden. Der Begriff Charaktertafel, Symmetriespezies und die Querbeziehungen zwischen Molekülphysik, Chemie und Mathematik sollen an dieser Stelle über zwei Beispiele verdeutlicht werden. In der Chemie und der Kristallographie verwendet man in der Regel keine Gruppentafeln. Diese haben kaum eine übersichtliche

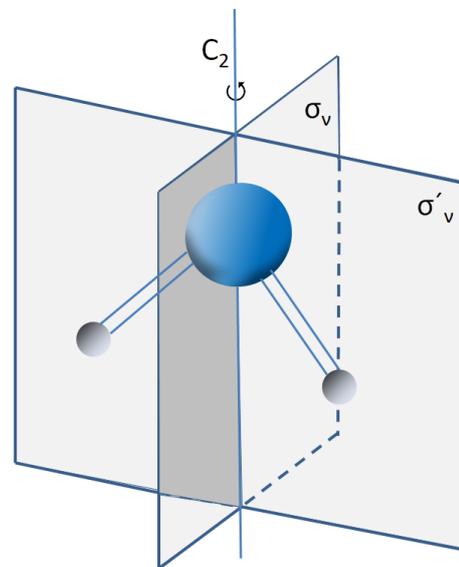


Abb. 11:
Symmetrieeigenschaften des
 H_2O -Moleküls in der
Punktgruppe C_{2v} .

35 S. Hollas, J. Michael, Die Symmetrie von Molekülen, S. 116 ff

36 S. Hollas, J. Michael, Die Symmetrie von Molekülen, Walter de Gruyter, Berlin New York 1975.

Aussagekraft, wenn es um die symmetrischen Eigenschaften geht. Stattdessen benutzt man irreduzible Darstellungen der Punktgruppe. Irreduzibel bedeutet, dass die Darstellung nicht weiter zerlegt werden kann und praktisch „auf einen Blick“ die wichtigsten Symmetrieeigenschaften zeigt. Die so gebildete Charaktertafel ist eine $n \times n$ - Matrix, wenn n die Anzahl an Symmetrieelementen ist (Identität, Drehachsen, Spiegelebenen etc.). Diese n anschaulichen Eigenschaften stehen waagrecht in der Matrix. Senkrecht stehen die sogenannten n Symmetriespezies. Die Charaktertafel stellt sozusagen eine Übersicht über die Charaktere aller Symmetriespezies dar. Aus der Charaktertafel kann man die mathematische Gruppe nicht unbedingt rekonstruieren. So hat die Diedergruppe D_4 und die Quaternionengruppe, wie bereits erwähnt, dieselbe Charaktertafel, obwohl beide nicht zueinander isomorph sind (es keine bijektive Abbildung zwischen beiden gibt). Die Gruppentafel ist für Kristallstrukturanalyse oder die Interpretation von Spektren nur indirekt relevant, wohl aber für die Mathematik, weil sie die Gruppe am genauesten beschreibt. Die dazu nötige Gruppentheorie und weitere Mathematik wurde zwar bzgl. des in der Chemie bzw. Molekülphysik benötigten mathematischen Instrumentariums weitgehend im 19. Jahrhundert entwickelt, auf Atome und Moleküle angewendet wurde sie aber erst in den 20er und 30er Jahren des 20. Jahrhunderts. Hollas versucht gemäß der Denkweise in Chemie bzw. Physikochemie, den Weg über mehr anschauliche Wege mit Beispielen aus der Chemie und beginnt bewusst nicht mit der mathematischen Theorie abstrakter Gruppen. An diesen Bezügen kommt man jedoch z.B. dann nicht vorbei, wenn übertragbare Anwendungen der Molekülsymmetrie ins Spiel kommen. So besitzen H_2O und CH_2F_2 die gleichen Symmetrieelemente. Sie sind (natürlich) unveränderlich gegenüber einer Drehung von 2π (genannt I oder i wie Identität als neutrales Element), besitzen eine zweizählige Drehachse (C_2) sowie zwei Spiegelebenen; nämlich eine in der Molekülebene und eine senkrecht dazu (σ_v und σ'_v). Hier benötigt man Punktgruppen; ein Begriff äquivalent zur Symmetriegruppe. Beim Wassermolekül heißt sie C_{2v} nach Schoenflies. Sie entspricht $mm2$ (oder $2mm$) und heißt als Kristallklasse orthorhombisch-pyramidal. C_{2v} soll unten nochmals als Beispielgruppe zur näheren Charakterisierung von Symmetrieeigenschaften angesprochen werden. Sie ist übrigens abelsch, d.h. es gilt in dieser Gruppe das Kommutativgesetz. Egal, wie viele Symmetrieoperationen man an einem Molekül macht, wird es immer einen im Raum unveränderten Punkt geben, daher der Name „Punktgruppe“. Ein solcher ist z.B. der Mittelpunkt eines Benzol-Moleküls.

Man unterscheidet zwischen nicht nicht-entarteten und entarteten Punktgruppen. Wenn völlig gleichartige, aber unabhängige, bei Frequenz und Energie gleiche Schwingungen entstehen können, spricht man von entarteten

Schwingungen. Das ist oft bei hoher Symmetrie der Fall. Von beiden Vertretern soll ein Beispiel diskutiert werden. Dabei wird die bereits erwähnte Punktgruppe C_{2v} , in der etwa das Molekül H_2O beschrieben werden kann und die Punktgruppe C_{3v} mit dem Beispiel Ammoniak, NH_3 , gewählt. Die Charaktertafel zeigt durch Beibehaltung oder Änderung des Vorzeichens an, welche Symmetrieeigenschaften, z.B. durch Deformations- oder Valenzschwingungen, erhalten bleiben oder sich ändern. Es gibt vier verschiedene Möglichkeiten, wie die beiden Spiegelungen an den beiden Spiegelebenen die Symmetrie beeinflussen können. Deshalb gibt es auch vier verschiedene Varianten, +1 und -1 zu „verteilen“, d.h. es gibt vier verschiedene „Symmetrietypen“ („Symmetriespezies oder Rassen“) bei der Punktgruppe C_{2v} , die mit A_1 , A_2 , B_1 und B_2 bezeichnet werden. A steht für Bewegungen, bei denen die Symmetrie zur C_2 -Achse erhalten bleibt; bei B entsteht Asymmetrie. Bei vieratomigen planaren Molekülen wie H_2CO oder $ClNO_2$, die zu C_{2v} gehören, benötigt man alle vier Symmetriespezies; bei einfachen Beispielen wie H_2O oder SO_2 vereinfachen sich die entsprechenden Symmetriebetrachtungen etwas, weil es nur eine asymmetrische Symmetriespezies geben kann. Das wird bei der anschaulichen Herleitung außen vor gelassen. Beim NH_3 ist eine zweifach entartete Schwingung zu beobachten. Deshalb wird in der Charaktertafel eine „2“ auftauchen (Punktgruppe C_{3v}).

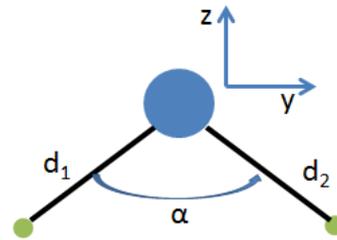


Abb. 12: Schematische Darstellung des H_2O -Moleküls (Deformation von α oder Valenzschwingung entlang d_1 bzw. d_2).

	I	C_2	$\sigma_v(xz)$	$\sigma'_v(yz)$
Translation zu z, T_z	+1	+1	+1	+1
Translation zu x, T_x	+1	-1	+1	-1
Translation zu y, T_y	+1	-1	-1	+1
Rotation um z, R_z	+1	+1	-1	-1
Rotation um x, R_x	+1	-1	-1	+1
Rotation um y, R_y	+1	-1	+1	-1

Abb. 13: Anschauliche Herleitung der C_{2v} Charaktertafel.

Man kann die resultierende Charaktertafel auch anschaulich verdeutlichen. Dazu betrachtet man die Änderungen an der Symmetrie bei allen möglichen Bewegungen im Raum. Das sind bei dieser einfachen Struktur drei

Translationen und drei Rotationen in den jeweiligen Raumrichtungen. Gleichbleibende Symmetrie wird mit +1 und Änderungen mit -1 bezeichnet. Verschieben parallel zur z-Achse bewirkt keine Veränderung; Rotation um z wirkt sich auf beide Spiegelungen aus, usw. Man sieht, dass Translation parallel zu x die Symmetrie wie Rotation um die y-Achse beeinflusst; Translation parallel zu y verändert die Symmetrie wie Rotation um die x-Achse, also $T_x \triangleq R_y$ und $T_y \triangleq R_x$. Somit ergibt sich eine Charaktertafel, wie sie in Abb. 14 für die Punktgruppe C_{2v} dargestellt ist.

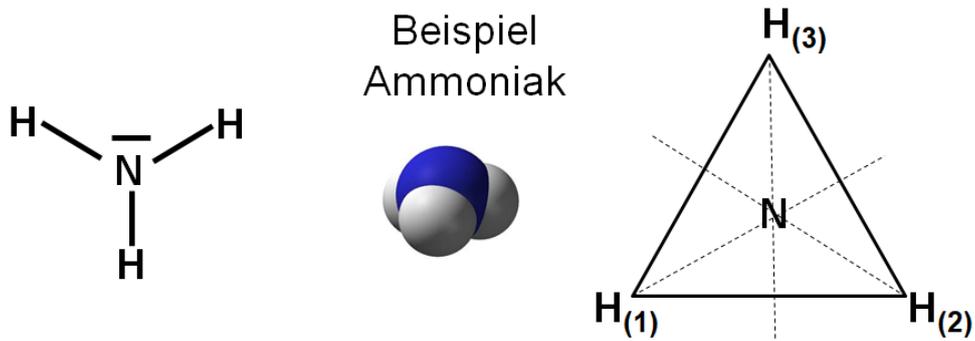
C_{2v}	I	C_2	$\sigma_v(xz)$	$\sigma'_v(yz)$	
A_1	1	1	1	1	T_z
A_2	1	1	-1	-1	R_z
B_1	1	-1	1	-1	T_x, R_y
B_2	1	-1	-1	1	T_y, R_x

Abb. 14: Charaktertafel der Punktgruppe C_{2v} .

Aus Sicht der Mathematik erzeugt die Drehung C_2 und eine der beiden Spiegelungen σ_v oder σ'_v die Gruppe. Aus C_2 und σ_v kann man I und σ'_v erzeugen. Abb. 14 zeigt die aus diesen Überlegungen resultierende Charaktertafel. Sie zeigt relativ übersichtlich, was zueinander symmetrisch (+1) bzw. asymmetrisch (-1) ist.

Je nachdem, aus welcher Fachrichtung man blickt, kann die jeweilige Terminologie verwirrend sein. Zur Verdeutlichung von Unterschieden, aber auch der übergreifenden Zusammenhänge in Mathematik, Kristallographie und Chemie/Molekülphysik, soll das folgende Beispiel dienen: Dazu wurde das trigonal-pyramidale Molekül des Ammoniaks, NH_3 , gewählt. Es ist näherungsweise ein Tetraeder, weil das zusätzliche Elektronenpaar am Stickstoff die 4. Ecke des Tetraeders besetzt. Der Winkel im Tetraeder als platonischem Körper von $109,47^\circ$ unterscheidet sich kaum vom Winkel \sphericalangle H-N-H von $107,8^\circ$. Räumlich bzw. mathematisch gesehen könnte man also mit der Tetraedergruppe S_4 arbeiten. Sie hat $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ Elemente, ist eine symmetrische Gruppe (s.o.) und entspricht nach Schoenflies T_d . In mathematischer Idealisierung soll aber ein gleichseitiges Dreieck mit den Kongruenzabbildungen als Symmetrieoperationen genügen und wird auch in der Chemie für das NH_3 -Molekül unter Berücksichtigung planarer Symmetrieelemente angewendet, denn für Schwingungen von Atomen ist das freie Elektronenpaar nur bedingt relevant. Aus Sicht der Chemie bzw. Kristallographie nach der Schoenflies-Notation heißt dann die Punktgruppe C (wegen Drehachse), C_3 (wegen Dreizähligkeit) und C_{3v} (wegen der vertikalen Spiegelebenen, die die Drehachse enthalten. Aus Sicht der Mathematik ist das

gleichseitige Dreieck auch ein Dieder und die mathematische Gruppe kann D_3 genannt werden (analog D_4 beim gleichseitigen Viereck, also Quadrat). Bei näherer Betrachtung stellt man fest, dass die Symmetrieeoperationen auch als Permutationen einer Menge mit drei Elementen aufgefasst werden können. Solche Gruppen heißen „symmetrisch“, so dass auch die Gruppenbezeichnung S_3 zulässig ist. Manchmal findet man auch die Bezeichnung Sym_3 in der Literatur.



Symmetrieelemente:

3 Spiegelebenen $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2, \tilde{\sigma}_3$

1 Drehachse C_3 als Schnittlinie der Spiegelebenen

Symmetrieeoperationen der Gruppe C_{3v} (D_3 bzw. S_3):

	$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	$C_3, C_3^2, C_3^3 = I$
<i>Identität</i>	<i>Spiegelungen</i>	<i>Drehungen (120° bzw. 240° nach links)</i>

Abb. 15: Symmetrieelemente und -operationen am Beispiel NH_3

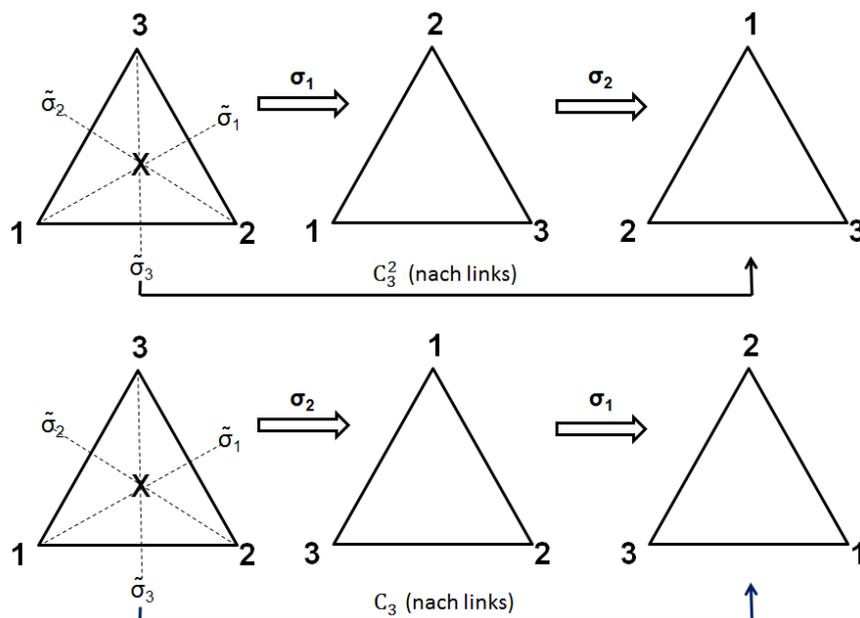


Abb. 16: Illustration von Symmetrieeoperationen bei der Gruppe C_{3v}/D_3

Permutation	Symmetrieoperation	Fehlstellen	Signum	Trivial
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$	$\cong I$ (Identität)	--	+1	+1
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 3, 2\}$	\cong Spiegelung σ_1	(2,3)	-1	+1
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 2, 1\}$	\cong Spiegelung σ_2	(1,2),(1,3),(2,3)	-1	+1
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 1, 3\}$	\cong Spiegelung σ_3	(1,2)	-1	+1
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{3, 1, 2\}$	\cong Drehung C_3 n. links	(1,2),(1,3)	+1	+1
$\{1, 2, 3\} \rightarrow \{2, 3, 1\}$	\cong Drehung C_3^2 n. links	(1,3),(2,3)	+1	+1

Abb. 17: Symmetrieoperationen der Gruppe S_3 , der Gruppe von Permutationen einer Menge mit 3 Elementen. Sie ist isomorph zur Gruppe D_3 und entspricht der Punktgruppe C_{3v} (nach Schoenflies) oder $3m$ (nach Hermann-Mauguin Terminologie). Eine Permutation kann als hintereinander geschaltetes Ausführen von Transpositionen (von links kommend) aufgefasst werden. Fehlstellen geben an, welche Transpositionen (Vertauschen von 2 Zahlen) in der Permutation vorgenommen wurden. Bei gerader Anzahl ist das Signum +1; bei ungerader -1. Dies ist eine der 3 möglichen irreduziblen Darstellungen³⁷ von S_3 . Der triviale Homomorphismus bildet immer auf das neutrale Element (der Multiplikation in \mathbb{C} , also +1) ab. Zum 3. Homomorphismus siehe Anm. 42 und Text zu Abb. 19. Es reicht für diese 3 Abbildungen (Homomorphismen), nur die „Bilder“ von σ_1 und C_3 anzugeben, denn diese Elemente erzeugen die ganze Gruppe S_3 .

In der Kristallographie fällt diese Symmetrie unter das Trigonale Kristallsystem. In Wikipedia wird die Kristallklasse gemäß $3m$ nach Hermann-Mauguin als „ditrigonal-pyramidal“ bezeichnet³⁸. Sie ist eine der 32 Kristallklassen (kristallographische Punktgruppen). Durch Verschiebungen im Kristallgitter können verschiedene Raumgruppen entstehen. Prominentes Beispiel in dieser Kristallklasse ist der Halbedelstein Turmalin, ein Mischkristall³⁹.

37 Signum (Vorzeichen) wird auch als Parität bezeichnet (siehe Physik). Es ist eine eindimensionale irreduzible Darstellung, in der Mathematik eine Funktion, die immer 1 oder -1 ist mit einer Unstetigkeit bei 0. In der Physik gibt die Parität an, ob die Symmetrie bei Punktspiegelung am Ursprung erhalten bleibt und ist eine bedeutende Erhaltungsgröße. Die triviale Abbildung gibt es immer und bildet jedes Element einer Gruppe auf das neutrale Element der Multiplikation in \mathbb{C} , also der 1, ab.

38 <https://de.wikipedia.org/wiki/Kristallmorphologie> (24.1.2017)

39 <https://de.wikipedia.org/wiki/Turmalingruppe> (24.1.2017)

C_{3v}/D_3 S_3	I	σ_1	σ_2	σ_3	C_3	C_3^2
I	I	σ_1	σ_2	σ_3	C_3	C_3^2
σ_1	σ_1	I	C_3	C_3^2	σ_2	σ_3
σ_2	σ_2	C_3^2	I	C_3	σ_3	σ_1
σ_3	σ_3	C_3	C_3^2	I	σ_1	σ_2
C_3	C_3	σ_3	σ_1	σ_2	C_3^2	I
C_3^2	C_3^2	σ_2	σ_3	σ_1	I	C_3

Abb. 18: Multiplikationstafel der Gruppe C_{3v} (nach Schoenflies). In der Mathematik heißt sie D_3 oder S_3 . Neben dem hier benötigten Beispiel der Kongruenzabbildungen im gleichseitigen Dreieck (Diedergruppe D_3) lässt sich die Gruppe als die 6 möglichen Permutationen einer dreielementigen Menge $\{1, 2, 3\}$ auffassen (symmetrisch, S_3). Somit fällt sie unter die Dieder- und unter die symmetrischen Gruppen. Sie ist eine von zwei nicht isomorphen Gruppen der Ordnung 6 und die kleinste nicht-abelsche Gruppe⁴⁰.

Überprüfung auf Kommutativität:

$\sigma_1 \circ \sigma_2 = C_3, \sigma_2 \circ \sigma_1 = C_3^2 \rightarrow$ Das Kommutativgesetz gilt nicht. Somit ist die Gruppe nicht-abelsch. Es ist leicht einzusehen, wieso Gruppen mit der Ordnung 1, 2, 3, 4, 5 abelsch sein müssen. Ordnung 1 hat die triviale Gruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht. Die Ordnung 2, 3, 4, 5 können nur Gruppen haben, die isomorph zu den Drehungen von einer Strecke bzw. von regelmäßigem Dreieck, Quadrat oder Fünfeck sein müssen, also zyklisch sind. Die zusätzliche Ausnahme bildet mit Ordnung 4 die sogenannte Klein'sche Vierergruppe (Symmetriegruppe Rechteck), die aber auch abelsch ist.

40 Auch eine sog. Zyklendarstellung ist möglich, die die Vertauschung von Ziffern in der Permutation beschreibt. Die zweite Gruppe der Ordnung 6 (\mathbb{Z}_6) ist zyklisch und damit abelsch, d.h. die Elemente werden nur von einem erzeugenden Element e gebildet $\{i, e, e^2, e^3, e^4, e^5\}$. Es gibt eine Reihe von verblüffend unterschiedlichen, aber isomorphen Beispielen: Am einfachsten sind noch die Restklassengruppen Modulo 6 $\{i, e, e^2, e^3, e^4, e^5\} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ mit $e=1$ bzw. $\{i, e, e^2, e^3, e^4, e^5\} = \{0, 5, 4, 3, 2, 1\}$ mit $e=5$ als erzeugende Elemente und der Addition als Verknüpfung. Oder $\{i, e, e^2, e^3, e^4, e^5\} = \{1, 3, 2, 6, 4, 5\}$ mit $e=3$ bzw. $\{i, e, e^2, e^3, e^4, e^5\} = \{1, 5, 4, 6, 2, 3\}$ mit $e=5$ als erzeugende Elemente und der Multiplikation als Verknüpfung. Weitere Beispiele siehe <http://www.michael-holzapfel.de/themen/zyklzahl/zyklzahl.htm> (25.01.2017).

C_{3v}	I	$2C_3$	$3\sigma_v$		
A_1	1	1	1	T_z	$\alpha_{x^2+y^2}, \alpha_z$
A_2	1	1	-1	R_z	
E	2	-1	0	$(T_x, T_y), (R_x, R_y)$	$(\alpha_{x^2-y^2}, \alpha_{xy}),$ $(\alpha_{xz}, \alpha_{yz})$

Abb. 19: Punktgruppe C_{3v} in der von Hollas verwendeten Notation⁴¹ (erweitert um Polarisierbarkeit α , Rotationen R und Translationen T im cartesischen Koordinatensystem um bzw. in Richtung der x -, y - und z -Achse). Mathematisch finden sich in der 3×3 -Matrix links die Werte der 3 möglichen irreduziblen Abbildungen von S_3 in \mathbb{C} bzw. $M_2(\mathbb{C})$. Die erste Spalte zeigt, dass dies zwei eindimensionale (trivial, Signum) und eine zweidimensionale Abbildung von S_3 sind ($M_2(\mathbb{C})$ bedeutet 2×2 Matrizen mit komplexen Werten)⁴². $2C_3$ heißt, es gibt 2 Drehungen, $3\sigma_v$ bezeichnet, es gibt 3 Spiegelungen.

Abb. 21 illustriert aus Sicht der Chemie bzw. Molekülphysik, dass „eindimensional“ Schwingungen unter Erhaltung der Symmetrie der Hauptachse bedeutet (Typ A), „zweidimensional“ zweifache Entartung durch die hohe Symmetrie der dreizähligen Achse (Typ E). Damit lassen sich messbare Eigenschaften von NH_3 , wie das IR-Spektrum (siehe Abb. 20), über die Symmetrie erklären.

41 Hollas, J. Michael; Die Symmetrie von Molekülen, Zur Charaktertafel von C_{3v} siehe Hollas, Tabelle 4.12, S. 66. Aus Sicht der Mathematik zeigt die Charaktertafel von $S_3 = C_{3v}$ drei verschiedene Abbildungen/Homomorphismen: 1. Zeile trivialer Gruppenhomomorphismus (Dimension 1), 2. Zeile Signum-Funktion (Dimension 1). Es gilt, dass die Quadrate der Dimensionen der irr. Abb. die Gruppenordnung, also 6, ergeben müssen. Es muss also eine 3. Abb. (Dimension 2) geben, damit $1^2+1^2+2^2=6$ ergibt. So erklärt sich die „2“. (Weitere Werte ergeben sich aus sog. Orthogonalitätsrelationen.)

42 2-dimensionaler Homomorphismus für die erzeugenden Elemente C_3 =Drehung um 120° nach links und Spiegelung z.B. σ_1 . Die beiden anderen Spiegelungen σ_2 und σ_3 ergeben äquivalente Darstellungen.

$S_3 \rightarrow M_2(\mathbb{C})$: $C_3 \rightarrow \begin{bmatrix} e^{2\pi i/3} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i/3} \end{bmatrix}, \sigma \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

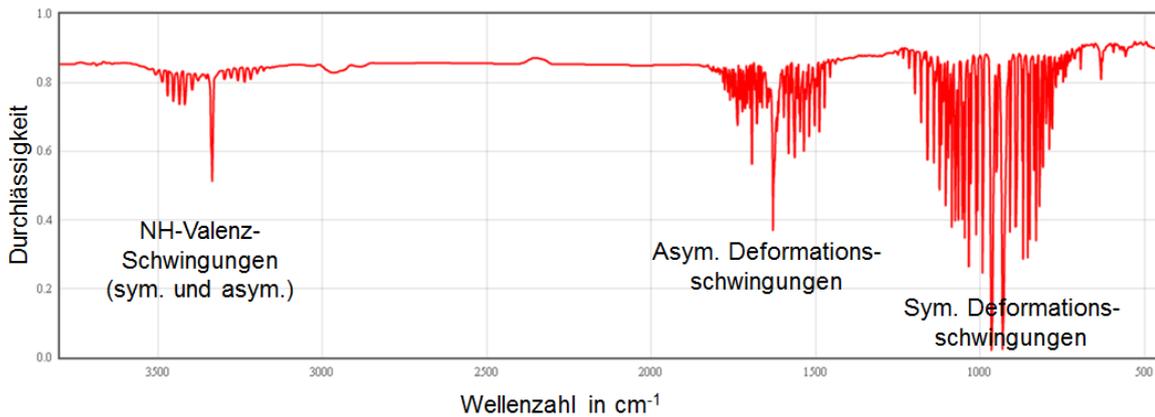


Abb. 20: IR-Spektrum von Ammoniak⁴³. Man kann deutlich die IR-aktiven Anregungsfrequenzen gemäß der Tabelle unten erkennen.

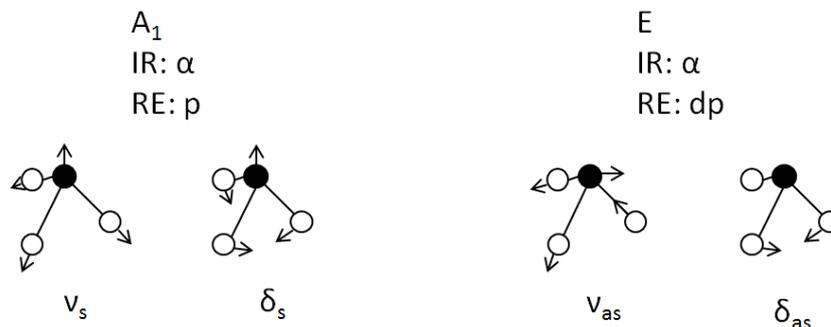


Abb. 21: Infrarot (IR) und Raman aktive (RE) Schwingungsformen eines vieratomigen pyramidenförmigen Moleküls analog zu NH_3 ⁴⁴.

Legende zur Terminologie: v_s bzw. v_{as} sind symmetrische bzw. asymmetrische Valenzschwingungen, also schwingende Veränderungen des Bindungsabstandes. δ_s bzw. δ_{as} steht für Deformationsschwingungen, also schwingende Veränderungen des Bindungswinkels. A bedeutet einen Schwingungszustand, bei dem die Symmetrie der Hauptachse erhalten bleibt, E sind hier zweifach entartete Schwingungen aufgrund der hohen Symmetrie der dreizähligen Drehachse. IR: α bedeutet Infrarot aktiv, RE p bzw. dp ist eine polarisierte bzw. depolarisierte Bande beim Raman-Effekt. Die entsprechenden Schwingungsfrequenzen in $[cm^{-1}]$ ⁴⁵ bei NH_3 sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Schwingung	flüssig	gasförmig	fest
v_s	3294	3337	3223
δ_s	1054		
v_{as}	3380	3444	3375
δ_{as}	1628		

43 Bildnachweis: <http://webbook.nist.gov/chemistry>, nachbeschriftet (01.05.2017).

44 Bildnachweis: Erstellt nach Johann Weidlein, Ulrich Müller, Kurt Dehnicke, Schwingungsspektroskopie, Thieme Verlag, Stuttgart New York, 1982, S. 103.

45 Nach Johann Weidlein, Ulrich Müller, Kurt Dehnicke, Schwingungsspektroskopie, Thieme Verlag, Stuttgart New York, 1982, S. 51 und 103.

Die mathematische Gruppentheorie ist für die Biologie weniger relevant. Symmetrie als Strukturierungselement ist gleichwohl biologisch bedeutsam und mathematisch fassbar, wenn auch oft auf einfache Weise. Die Mathematik hat auf jeden Fall Eingang in die Biologie gefunden. Als erster „Biomathematiker“ gilt D’Arcy Wentworth Thompson mit seinem wegweisenden Buch „Über Wachstum und Form“⁴⁶. Bei der Musterbildung kam auch er um den Begriff „Symmetrie“ nicht herum. Er blieb aber deskriptiv, warnte vor einer „Teleologiefalle“ und dämpfte Erwartungshaltungen an eine geradlinige Evolution: „Alles ist, was es ist, weil es so wurde“⁴⁷.

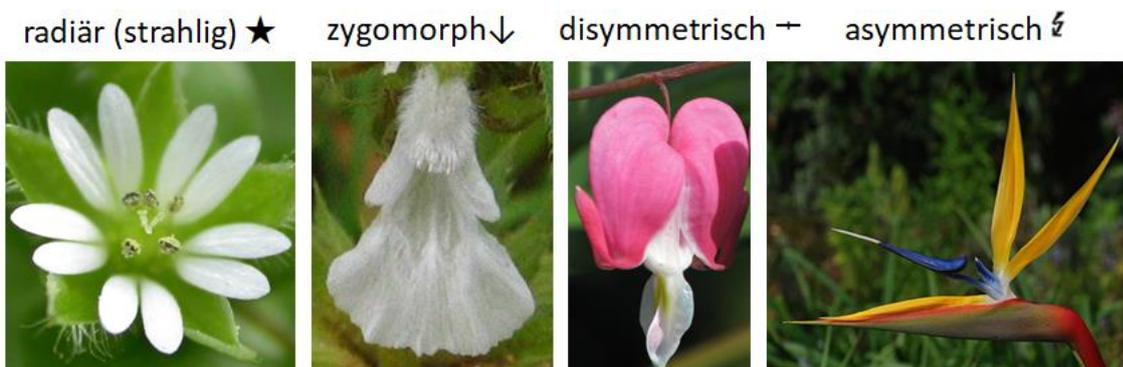


Abb. 22: Symmetrie bei Blüten. Asymmetrie ist dabei extrem selten.

Das übergeordnete Taxon „Bilateria“ (siehe unten), also „Zweiseitentiere“, umfasst die mit Abstand allermeisten Arten. Symmetrie kommt somit in vielen, ja fast allen lebenden Formen vor. Asymmetrisch sind viele Amöben. Symmetrie muss jedoch entweder weiter gefasst und stärker idealisiert werden als in der Kristallographie oder gar der Physik. Oder aber Symmetrie- und Asymmetrieeffekte weisen eine komplexe, dem Selektionsdruck oder anderen Einflüssen gehorchende Gesetzmäßigkeit auf. Gleichzeitig gibt es Grenzen der Quantisierbarkeit. Dies reicht von makroskopischen Eigenschaften bis hin zur Organisationsebene z.B. von Proteinen, wenn die räumliche Anordnung von zwei oder mehr Polypeptidketten eine bestimmte stereometrische Konstellation determiniert.

46 „Wir wollen sehen – wenigstens in einigen Fällen -, wie die Formen der lebenden Dinge und ihrer Teile durch physikalische Überlegungen erklärt werden können, und uns klarmachen, dass es im allgemeinen keine anderen organischen Formen gibt als solche, die mit den physikalischen und mathematischen Gesetzen übereinstimmen“. D’Arcy Wentworth Thompson, *Über Wachstum und Form*, Verlag Ab - Die Andere Bibliothek Bd. 255 (2002), Einleitung, S.15.

47 „*Everything is the way it is because it got that way.*“ wird in zahlreichen Publikationen D. W. Thompson zugeschrieben. Die Literaturstelle ist aber unbekannt! Siehe dazu z.B. bactra.org/notebooks/darcy-thompson.html (20.04.2017).

Die einzelnen Polypeptidketten können als relativ flexible Untereinheiten bezeichnet werden, aber das Gesamtkonstrukt ist einer mehr oder weniger starren, organisch sinnvollen Organisationsform unterworfen, die mathematisch schwer fassbar ist. Hier tun sich aber andere Formen der interdisziplinären Zusammenarbeit auf, z.B. ist ein DNA-Strang über einen Meter lang. Im Zellkern ist er auf ein Fünfmillionstel Meter zusammen geknäuelte. Trotzdem funktioniert Replikation und Trennung der beiden Stränge. Ein Teilgebiet der Mathematik ist die Topologie, in der wiederum Spezialisten sich mit den theoretischen Grundlagen von allen denkbaren unterschiedlichen Knoten und ihrer Auflösung bzw. Transformation beschäftigen. Genetiker und Knotentheoretiker versuchen seit einiger Zeit gemeinsam neue Erkenntnisse zu gewinnen, indem ihre Kompetenzen auch auf DNA-Moleküle angewendet werden⁴⁸. In diesen Themen sind Fragen nach Symmetrieeigenschaften jedoch meist nicht zielführend. Ein deutlich weniger komplexes Beispiel aus der Botanik ist die Unterscheidung nach Symmetrieeigenschaften bei den Blüten⁴⁹. Hier hat man sogar eigene Symbole geschaffen (s. Abb. 22). Hinter dem Begriff „radiär bzw. strahlig“ verbirgt sich die bekannte Drehsymmetrie. Hier wird zur Quantifizierung der nötigen Drehbewegungen oft der Begriff „Zähligkeit“ verwendet: Z.B. ist eine Blüte n-zählig, wenn n Drehungen um den Winkel $360^\circ/n$ nötig sind, um wieder die Ausgangsstellung zu erhalten. Die Drehachse ist in der Regel der Stängel oder Stamm, also die vertikale Achse. Die Zähligkeit ist aber nicht unbedingt die Anzahl an Blütenblätter. Diese müssen schon in der gleichen Ebene liegen. So ist die Madonnen-Lilie (*Lilium candidum*)⁵⁰ nicht sechszählig, weil nur jeweils drei Blütenblätter versetzt um ca. 60° in einer Ebene liegen.



Abb. 23: Die Madonnen-Lilie (*Lilium candidum*) ist nicht sechszählig

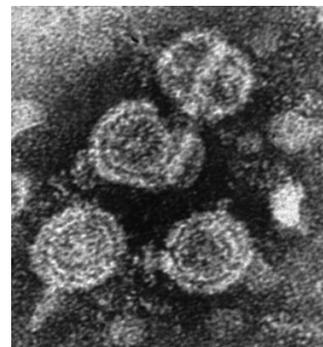


Abb. 24: Hepatitis -B Virus mit ikosaedrischer Struktur.

48 <https://people.math.ethz.ch/~makveld/ArtikelAkveldNeumaier.pdf>, (01.02.2017).

49 Bildquelle: [de.wikipedia.org/wiki/Nelkengewächse](https://de.wikipedia.org/wiki/Nelkengew%C3%A4chse) (*Stellaria media*, radiär), [de.wikipedia.org/wiki/Lippenblütler](https://de.wikipedia.org/wiki/Lippenbl%C3%BCtler) (*Leucas aspera*, zygomorph), [de.wikipedia.org/wiki/Tränendes Herz](https://de.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%A4nendes_Herz) (*Lamprocapnos spectabilis*, disymmetrisch), de.wikipedia.org/wiki/Strelitzien (*Strelitzia reginae*, asymmetrisch, alle 23.06.2017).

50 Bildquelle: de.wikipedia.org/wiki/Madonnen-Lilie (*Lilium candidum*, 18.06.2017).

Über die Drehsymmetrie hinaus gibt es wenige Symmetrieeoperationen, die als ordnendes Prinzip herangezogen werden können. In der Zoologie ist z.B. Radiärsymmetrie trotz der ganzen Fülle an Biodiversität vergleichsweise selten. Trotzdem gibt es in absoluten Zahlen gemessen viele Beispiele von Lebewesen mit dieser Symmetrie (siehe Abb. 26-28 von E. Haeckel), auch wenn diese weitgehend beschränkt auf Organismen ist, die nicht oder kaum in der Lage sind, sich selbst zu bewegen („sessil“).

Eine ganze Klasse von DNA- bzw. RNA-Viren hat sogar ikosaedrische Struktur, auch HIV oder *Herpes simplex* gehören dazu. Die Abb. 24 zeigt eine elektronenmikroskopische Aufnahme von Viren⁵¹. Es sind Hepatitis-B-Viren. Das ikosaederförmige Capsid⁵² ist aus 72 Capsomeren aufgebaut. Capside sind komplexe, regelmäßige Strukturen aus Proteinen bei Viren. Die Kugeln entsprechen den einzelnen Capsomeren. Die Ikosaederstruktur ist nach der Kugel die beste Struktur, um bei gegebenen Bindungsverhältnissen der Viren-DNA oder RNA eine optimale Packungsdichte zu erreichen. Es geht darum, optimal 60 äquivalente Untereinheiten der Proteinhülle zu verpacken. Die Form der Untereinheiten muss alle geometrischen Zwänge von drei Symmetrieeigenschaften erfüllen. Der Ikosaeder besitzt dazu 15 zweizählige, 10 dreizählige und sechs fünfzählige Drehachsen, dazu 15 Spiegelebenen. Weiterhin ist Punktspiegelung am Mittelpunkt möglich. Die aus den Symmetrieeoperationen bestehende mathematische Gruppe („Ikosaedergruppe“) besitzt 120 Elemente. Der Ikosaeder⁵³ ist einer der fünf platonischen Körper. Die Ikosaeder-Oberfläche besteht aus 20 gleichseitigen Dreiecken. Die Ecken liegen auf den Ecken von drei senkrecht zueinander stehenden Goldenen Rechtecken, also Rechtecke,

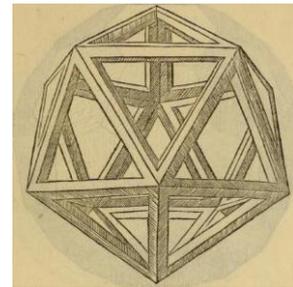


Abb. 25:
Ikosaeder.
Oben nach einer
Zeichnung von
Leonardo da Vinci in
Luca Pacioli's *De
Divina Proportione*.
Unten in moderner
3d-Grafik.

51 Bildquelle: de.wikipedia.org/wiki/Hepatitis-B-Virus (01.02.2017).

52 Man liest auch die Schreibweise „Kapsid“.

53 Oben: Nach einer Zeichnung von Leonardo da Vinci in Luca Pacioli's „De Divina Proportione“, Ausgabe von 1509, S. 241; Bildnachweis:

<https://archive.org/details/divinaproportion00paci>

Unten: Bildquelle <http://www.3d-meier.de/tut12/Seite3.html>.

Mit freundlicher Genehmigung von Herrn Jürgen Meier.

deren Seitenverhältnis im Goldenen Schnitt steht⁵⁴. Dementsprechend kommt der Goldene Schnitt in vielen Formeln zu Volumen und vielen anderen Beziehungen im Ikosaeder vor. Dies gilt besonders für die kartesischen Koordinaten der 12 Ecken. Wenn man den Mittelpunkt eines Ikosaeders mit der Kantenlänge 2 in den Ursprung, also Achsenschnittpunkt, legt, so taucht der Goldene Schnitt $\varphi = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ sechsmal auf (zweimal pro Achse)^{55,56}. In der unbelebten Natur der Kristalle kann ein Ikosaeder als Einkristall wegen der fünfzähligen Drehachsen übrigens nicht vorkommen, da keine raumfüllende Struktur möglich ist.

Eine Art in der Tierwelt hat ebenfalls eine ikosaederförmige Struktur und trägt dieses Strukturmerkmal sogar im Namen, nämlich die Radiolarie *Circogonia icosahedra*⁵⁷, hier gezeichnet von Ernst Haeckel. An dieser Stelle bietet sich an, auf das Werk von Haeckel mit einigen Beispielen aus seiner lithographischen Buchsammlung „Kunstformen der Natur“ zu verweisen, aus der die Radiolarie stammt (10 Bände, erschienen 1899-1904). Diese Beispiele sollen vorab die eingangs angesprochene „ästhetische Seite“ von Symmetrie illustrieren. Diese Seite allein wird aber Ernst Haeckel keinesfalls gerecht⁵⁸. Nach einigen weiteren Aspekten, u.a. zur Terminologie von symmetrischen Strukturen, soll Haeckel nochmals angesprochen werden.

54 Einer interdisziplinären Ausstellung zum Goldenen Schnitt hat sich 2017 die Museumsstiftung Post und Telekommunikation gewidmet (inkl. biologischer Aspekte). Essay-Begleitband: Göttlich Golden Genial, Hirmer Verlag München, 2016.

55 Beweisidee: Jede Symmetrieebene des Ikosaeders enthält vier Ecken (E_1, E_2, E_3, E_4) und vier Kantenmittelpunkte (K_1, K_2, K_3, K_4), wovon zwei mit den Ecken ein regelmäßiges Sechseck bilden. In seiner Mitte liegt der Ikosaedermittelpunkt M; eine Kante habe die Länge a. Über Pythagoras und Höhensatz erhält man eine quadratische Gleichung, von der nur die positive Lösung sinnvoll ist. Der Abstand von M zu den K_i beträgt dann $a/4(1 + \sqrt{5})$. Für $a=2$ ist das der Goldene Schnitt.

56 Der Leipziger Mathematiker Felix Klein hat eine berühmte Vorlesung zu den fünf regulären Körpern, insbesondere des Ikosaeders und der Ikosaeder-Gruppe, gehalten. Klein, Felix; Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. G.B. Teubner, Leipzig, 1884. Dort wird z.B. die berühmte Klein'sche Vierergruppe erwähnt und die Tatsache, dass die Gruppe der 60 Ikosaeder-Drehungen mit den 60 Vertauschungen von fünf Dingen (Permutationen z.B. von {a, b, c, d, e}) holodrisch isomorph ist. Es ist Teil seines „Erlanger Programms“, einer Metatheorie der Geometrie auf der Basis von Transformationseigenschaften (siehe dazu auch nächstes Kapitel).

57 Die Abbildung der Radiolarie und die folgenden Abbildungen stammen aus Ernst Haeckel, Kunstformen der Natur, Leipzig und Wien, Verlag des Bibliographischen Instituts, (1899-1904).

58 Die „Tragfähigkeit des Symmetriebegriffs als Brücke oder Dach von Kunst und Wissenschaft“ wurde in folg. Aufsatz untersucht: Joachim Schummer, Symmetrie und Schönheit in Kunst und Wissenschaft. Erschienen in: Wolfgang Krohn (Hg.): Ästhetik in der Wissenschaft, Hamburg: Meiner, 2006, S. 59-78 (Sonderband der Zeitschrift für Ästhetik und Allgemeine Kunstwissenschaft).

http://joachimschummer.net/papers/2006_Symmetrie_Krohn.pdf (21.04.2017)

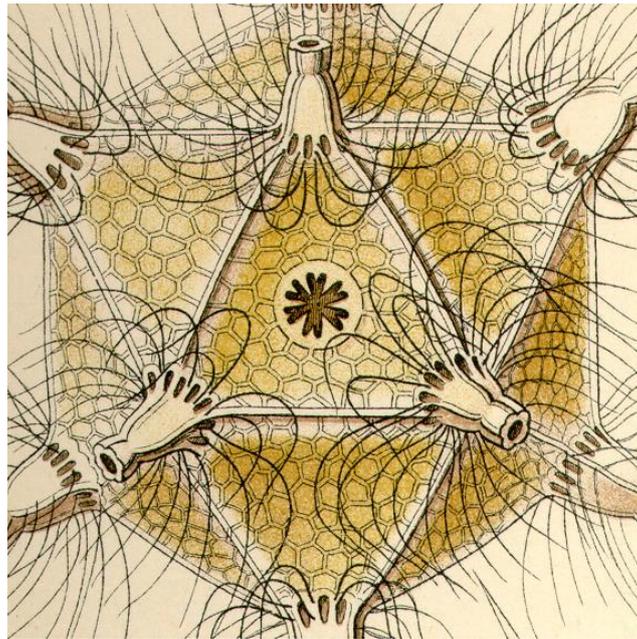


Abb. 26: Radiolarie *Circogonia icosahedra*

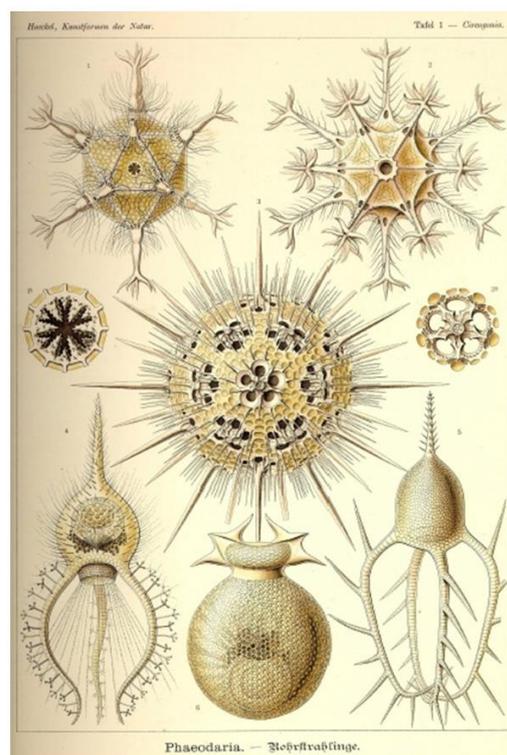
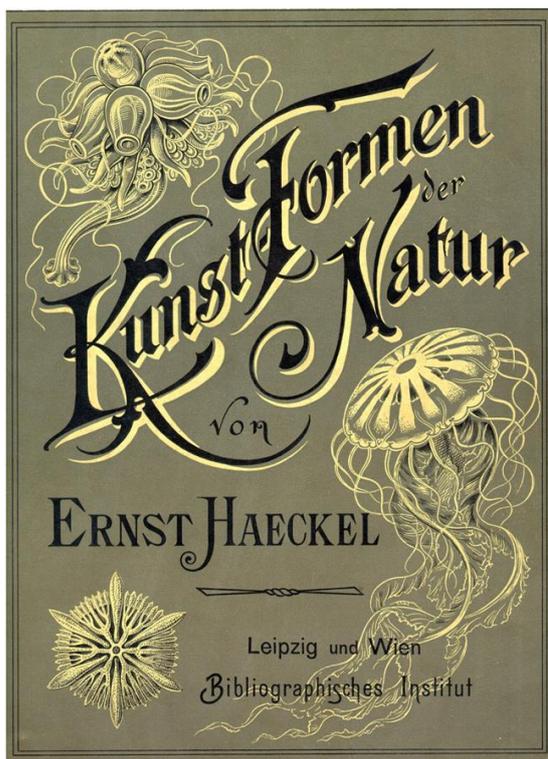


Abb. 27: HTML-Version herausgegeben von Kurt Stüber, 1999⁵⁹, fast vollständige elektronische Faksimile-Ausgabe, inkl. des Titelbildes der Komplettausgabe aus dem Jahr 1904.

59 siehe caliban.mpipz.mpg.de/haeckel/kunstformen/index.html (16.03.2017)

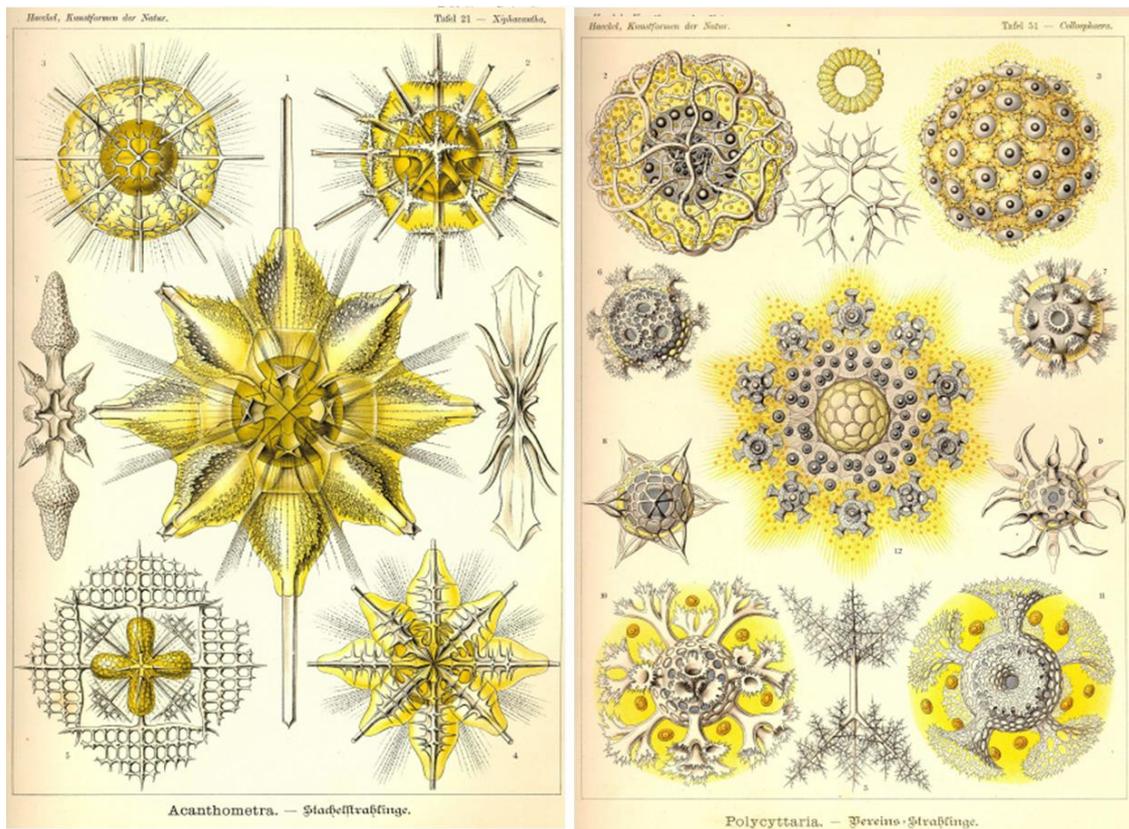


Abb. 28: Weitere Beispiele aus Ernst Haeckel, *Kunstformen der Natur*.

95% aller Tierarten auf der Erde sind bilateral-symmetrisch. Das übergeordnete Taxon „Bilateria“ fasst diese unter diesem Begriff zusammen, der die charakteristische Spiegelebene adressiert, so dass beide Hälften des Körpers symmetrisch zu einer sogenannten Sagittalebene liegen (sozusagen in Pfeilrichtung nach lateinisch sagitta, Pfeil). Außerdem kann man bei Bilateria eindeutig eine Dorsalseite (dorsum, Rücken) und eine Ventralseite (venter, Bauch) unterscheiden. Als einzelnes Merkmal einer spiegelsymmetrischen Form in der Natur ist die Chiralität zu nennen (nach griechisch χέρι=chéri=Hand). Die menschlichen Hände sind das wichtigste Beispiel für spiegelsymmetrische, chirale Paare in der Biologie. Sie lassen sich nicht durch eine Drehung zur Deckung bringen. Mathematisch gesehen ist in der Gruppentafel der Diedergruppe D_4 die Symmetrieoperation σ_1 ein Beispiel, das, wenn überhaupt, dem Sachverhalt noch am nächsten kommt. Mehrere Symmetrieebenen findet man ebenfalls. Pio Fioroni⁶⁰ widmet in seiner „Allgemeinen und vergleichenden Embryologie der Tiere“ dem Symmetriebegriff ein Kapitel. Immerhin ist ein riesiger Bereich der Biologie davon betroffen. So umfasst allein die Unterklasse Hexacorallia, sechsstrahlige Blumentiere oder Zoantharia mit sechs bis heute lebenden

60 Fioroni, Pio; Allgemeine und vergleichende Embryologie der Tiere“, Springer Verlag, 1987, S.19.

Ordnungen fast 4.000 der über 6.000 Arten der Klasse der Blumentiere⁶¹. Besonders häufig äußert sich Chiralität beim Drehsinn. Im Abschnitt zur „Chemie“ wurde bereits optische Aktivität angesprochen. Sie kommt bei chemisch gleichen Verbindungen vor, die sich nur in der Symmetrie unterscheiden und deshalb die Schwingungsebene von polarisiertem Licht unterschiedlich beeinflussen („linksdrehend“ und „rechtsdrehend“). Sie fallen unter den Begriff „Enantiomere“. In diesem Abschnitt werden Beispiele aus Biologie und Chemie zu diesen Phänomenen diskutiert. So kommen bei den Landschnecken, z.B. der Weinbergschnecke *Helix pomatia*, vorwiegend rechtsdrehende Gehäuse vor. Es gibt allerdings Mutationen im Bereich von kleiner/gleich 0,1 Promille mit linksdrehendem Drehsinn. Weil jedoch bei den Schnecken als Hermaphroditen der ganze Körper inkl. der Genitalien von der Drehrichtung abhängt⁶², sind spiegelverkehrte Mutanten in der Regel nicht fortpflanzungsfähig⁶³. Der Leidener Evolutionsbiologe Menno Schilthuizen hat intensiv die Gattung *Amphidromus* untersucht. Es ist die einzige Gehäuseschnecke weltweit unter immerhin 150.000 Arten mit rechts- oder links gewundenen Gehäusen, deren Vertreter untereinander paarungsfähig sind. Hier „passen“ die Geschlechtsorgane unabhängig vom Drehsinn zusammen⁶⁴. Es sind „simultane Hermaphroditen“; beide Partnerinnen nehmen die männliche Rolle ein und profitieren somit jeweils vom anderen Drehsinn⁶⁵. Rechtshändige und linkshändige Formen bei männlichen Genitalien kommen auch bei einigen Arten der Gottesanbeterinnen vor (Gattung *Ciulfina*)⁶⁶. Dagegen sind übrigens die entsprechenden Genitalien der Weibchen alle symmetrisch im Sinne, dass zwei geeignet gedachte Hälften sich durch einfache Spiegelung zur Deckung bringen lassen. Es ist ein Widerspruch zum alltäglichen, komplementären Schlüssel-Schloss-Prinzip („Ergänzungssymmetrie“), der nur funktional zu begründen ist.

Von nicht zu unterschätzender Bedeutung ist der funktionale Aspekt der Symmetrie in der Biologie. Trivial aber bedeutsam erscheint es, dass ein symmetrischer Organismus (z.B. mit gleichlangen Beinen rechts und links) besser funktionieren wird. Es sollte daher einen (evolutionären) Selektionsdruck auf eine solche Symmetrie geben. Es gibt sehr

61 <https://de.wikipedia.org/wiki/Hexacorallia>

62 Schilthuizen, M. P.G. Craze, et.al. Sexual Selection Maintains Whole-Body Chiral Dimorphism, *Journal of Evolutionary Biology*, 20:1941-49

63 Schilthuizen, M., Divison A., The Convoluting Evolution of Snail Chirality. *Naturwissenschaften*, 92:504-515

64 Weitere Beispiele s.a. Menno Schilthuizen, *Darwins Peep Show*, dtv München, 2014, S. 265 f, *Amphidromus* bedeutet „in beide Richtungen drehend“.

65 Ebenda S. 272.

66 Schilthuizen, Menno; S. 61, mit Verweis auf Holwell und Herberstein, *Journal of Morphology* 271: 1176-84

aussagekräftige experimentelle Studien zu solchen funktionalen Aspekten. Die Symmetrie der Blüten hat beispielweise Konsequenzen für deren Attraktivität für blütenbestäubende Insekten. Symmetrische Blüten, deren Blütenblätter auf beiden Seiten gekürzt wurden, werden von Bienen besser besucht als solche, deren Blütenblätter einseitig gekürzt wurden⁶⁷. Die Symmetrie von Ornamenten wie Hörnern oder Schwanzfedern spielt eine wichtige Rolle in der sexuellen Selektion, wie der Partnerwahl durch Weibchen⁶⁸. Auch bei menschlichen Gesichtern und der Bedeutung für Attraktivität ist dies gut untersucht⁶⁹. Besonders bemerkenswert ist die Bedeutung von Abweichungen von der strengen Symmetrie – und zwar rechts oder links, also nicht einseitig. Dabei spricht man von „fluktuierender Asymmetrie“, wenn die Rechts-Links-Unterschiede einer Normalverteilung entsprechen, deren Mittelwert in etwa Null ist. Dieses Phänomen kann auch krankhafte Ursachen haben; es kann ein Indikator für umweltbedingten oder genetischen Stress sein⁷⁰. Symmetrie und Asymmetrie haben aber insgesamt meist sehr differenzierte Bedeutungen, weit über Attraktivität der Geschlechter oder Monitor für Stress hinaus – siehe zum Beispiel Anm.⁷¹.

Man muss also in der Biologie einerseits stärker abstrahieren und idealisieren, andererseits stehen Differenzierungen oft in einem sehr komplexen biologischen Zusammenhang unter dem Einfluss entsprechender (evolutionär wirkender) Rahmenbedingungen. Dabei kann man biologische Komplexität nicht mit mathematischer Komplexität gleichsetzen und meist auch nicht korrelieren. Schließlich werden auch bei den meisten unter das Taxon „Bilateria“ fallenden Arten wohl beide Hälften nie exakt spiegelsymmetrisch sein. Aber das hat Gründe, die zumindest z.B. über den Begriff der „fluktuierenden Asymmetrie“ adressiert werden und deren Ursachen erforscht werden können.

Dagegen sind in der Chemie bei enantiomeren Molekülen die prinzipiellen Bindungsverhältnisse vollkommen gleich. Prominente Beispiele findet man

67 Proc. Natl. Acad. Sci. USA Vol.92, pp.2288-2292, March1995, Evolution, Bumblebee preference for symmetrical flowers, Anders Pape Møller

68 Bilateral Symmetry and Sexual Selection: A Meta Analysis; A. P. Møller and R. Thornhill. Source: The American Naturalist, Vol. 151, No. 2 (February 1998), pp. 174-192.

69 Journal of Comparative Psychology1994, Vol. 108, No. 3, 233-242, Human (Homo sapiens) Facial Attractiveness and Sexual Selection: The Role of Symmetry and Averageness, Karl Grammer, Randy Thornhill

70 P. A. Parsons, Fluctuating asymmetry: a biological monitor of environmental and genomic stress, Heredity 68 (1992) 361—364, The Genetical Society of Great Britain, 1991.

71 Anthony C. Little et. al., Symmetry Is Related to Sexual Dimorphism in Faces: Data Across Culture and Species; Published: May 7, 2008, <https://doi.org/10.1371/journal.pone.0002106> (20.04.2017).

z.B. bei den Zuckermolekülen oder bei der Milchsäure⁷². Da immer die 3. Dimension eine Rolle spielt, aber auf Papier eine eindeutige planare Darstellung erforderlich ist, sind Darstellungsformen entwickelt worden. Außerdem muss der formale Name des Moleküls eindeutig sein und den Drehsinn charakterisieren. Man findet häufig noch die alte Bezeichnung („Fischer-Projektion“) mit D(extro) = rechtsdrehend und L(evo) = linksdrehend. Eine Mischung aus beiden Varianten wird gelegentlich mit dem Präfix „Rac“ wie Racemat charakterisiert⁷³. Die moderne Darstellungsweise ist (+) für rechts- und (-) für linksdrehend.

Zu den angesprochenen Beispielen: Rüben- bzw. Rohrzucker (Sacharose, ein sog. Doppelzucker) ist rechtsdrehend. Ebenfalls kommt der Traubenzucker (früher Dextrose) in der Natur nur rechtsdrehend vor. Milchsäure kommt dagegen in beiden enantiomeren Varianten vor. Sie entsteht durch bakteriellen Abbau des Milchzuckers (Lactose). Säuglingen fehlt im ersten halben Jahr noch das entsprechende Enzym, um linksdrehende Milchsäure verdauen zu können, was bei falscher Ernährung, z.B. mit ungeeignetem Joghurt, zu einer Übersäuerung führen kann. Im Übrigen gilt, dass enantiomere Formen sich in Geruch, Geschmack oder sogar Toxizität von der Form mit anderem Drehsinn unterscheiden können⁷⁴. Beim Contergan-Skandal war es sogar ein fruchtschädigender Effekt des Wirkstoffes Thalidomid beim ungeborenen Kind. Auch die nachträgliche Umwandlung im Stoffwechsel („Metabolisierung“) kann insbesondere bei Pharmazeutika problematisch sein. Es ist bemerkenswert, dass die Natur durchaus nur eine enantiomere Form herstellen kann; in der chemischen Synthese ist dies nicht ohne weiteres möglich. Pierre Curie hat diese Tatsache (aus der Festkörperphysik heraus) zu einem physikalischen Symmetrieprinzip verallgemeinert. Symmetrie ist damit im Prinzip zu einem Erhaltungswert in allen kausalen Prozessen geworden⁷⁵.

Die lebenswichtigsten Aminosäuren sind alle linksdrehend. Es wird manchmal spekuliert, dass die Natur dies deshalb so bevorzugt, weil in der schwachen Wechselwirkung linksdrehend dominiert und nur der unten angesprochene Symmetriebruch beim neutralen Kaonenzerfall eine Ausnahme bildet.

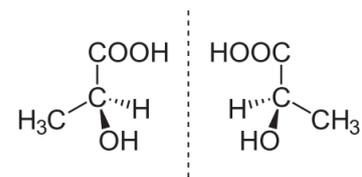


Abb. 29: Die zwei Enantiomere der Milchsäure.

72 Bildnachweis der Strukturformeln: de.wikipedia.org, Stichwort Milchsäure (14.01.2017)

73 Es ist meist sehr schwierig, eine optisch aktive, enantiomere Substanz in reiner Form zu synthetisieren.

74 Beispiele siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Enantiomer> (20.04.2017)

75 <https://de.wikipedia.org/wiki/Curie-Prinzip>

Eine Erweiterung des Symmetriebegriffes, der erst recht nicht mehr gruppentheoretisch beschrieben werden kann, ist die „Symmetrie“ bzgl. Streckungs- oder Stauchungsoperationen also eine Proportionalitätsbeziehung. Insbesondere bei Selbstähnlichkeit und Fraktalen in der Biologie findet man „Skalensymmetrie“; d.h. ähnliche Strukturen in unterschiedlichen Größenordnungen. Eine fraktale (also gebrochene, nicht-euklidische) Dimension kann scheinbar allometrische Daten, z.B. beim Stoffwechselumsatz unterschiedlich großer Landsäugetiere, erklären⁷⁶. Verwandt ist der Begriff „Isomerie“. So korreliert z.B. das Gewicht der Leber bei vielen Säugetieren und dem Menschen sehr genau mit ihrem Körpergewicht⁷⁷. Gegenbeispiel ist die Gehirnmasse. Hier spricht man von Allometrie („das andere Maß“).

Auch in der Terminologie der Chemie wird „Isomerie“ über die Spiegelsymmetrie der Enantiomere hinaus verwendet. Isomere Verbindungen sind generell unterschiedliche Stoffe, die aber die gleiche Summenformel haben. Das erste Beispielpaar war Silberfulminat $\text{Ag}^{\oplus}(\text{O}-\text{N}\equiv\text{C})^{\ominus}$ und Silbercyanat $\text{Ag}^{\oplus}(\text{O}-\text{C}\equiv\text{N})^{\ominus}$ ⁷⁸. Berühmt und schließlich von historischer Bedeutung für die terminologische Trennung von organischer Chemie und anorganischer Chemie sind auch die Isomere Ammoniumcyanat $\text{H}_4\text{N}^{\oplus} \ominus \text{O}-\text{C}\equiv\text{N}$ und Harnstoff $\text{O}=\text{C}(\text{NH}_2)_2$, der sich in endothermer Reaktion aus Ammoniumcyanat in der Wöhler'schen Harnstoffsynthese herstellen lässt⁷⁹.

Der nächste Abschnitt widmet sich einem Biologen, der Mitte des 20. Jahrhunderts einen weiteren Versuch unternommen hat, Symmetrie als Strukturierungsmerkmal für die Biologie stärker heranzuziehen. Die Ansätze von ihm und Ernst Haeckel sollen repräsentativ verglichen werden. Natürlich sind dies nicht die einzigen Biologen, die sich mit Symmetrie beschäftigt haben (siehe z.B. Literaturhinweis Josef H. Reichholf, „Der Ursprung der Schönheit“).

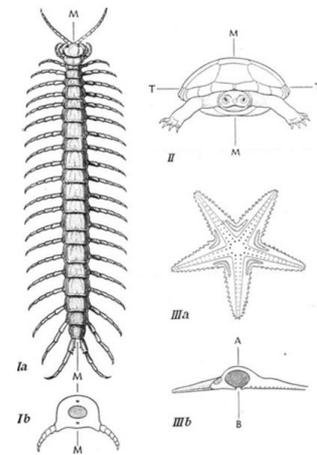
76 Willi Kafitz, Die Natur denkt fraktal! Oberhess. Naturwissen. Zeitschrift 2016, 66: 7-37, Gießen mit Bezug auf Manfred Sernetz; Fraktale biologische Strukturen: Chaos und Ordnung im Organismus, Berichte der Justus-Liebig-Gesellschaft, Gießen 2001.

77 Hans Riedwyl, Lineare Regression und Verwandtes: Beispiele mit Lösungsvorschlägen, Basel Boston Berlin, Birkhäuser 1997, S.59f.

78 Erste Ergebnisse im Jahr 1820 durch Justus Liebig, Gay-Lussac und Friedrich Wöhler, Beweis der Isomerie 1824; Ann. Physik, 1, 87 (1824) J. Liebig, J.L. Gay-Lussac und Ann. Physik, 1, 117 (1824) F. Wöhler; siehe auch Sieghard Neufeldt, Chronologie Chemie: Entdecker und Entdeckungen, John Wiley & Sons, 2016.

79 Siehe z.B. O. Wallach (Hg.): Briefwechsel zwischen J. Berzelius und F. Wöhler; Sändig Reprint Verlag, Hans R. Wohlwend, Vaduz/Liechtenstein 1984.

Wilhelm Troll war ein deutscher Botaniker, der bis zu seiner Emeritierung an der Johannes Gutenberg-Universität in Mainz tätig war. Dort hat er z.B. unter schwierigsten Nachkriegsbedingungen mit großer Eigenleistung den Botanischen Garten aufgebaut. Er arbeitete vor allem an der Morphologie der Pflanzen in der Tradition von Johann Wolfgang von Goethe⁸⁰. Das war in den 1950er Jahren ein längst überholter wissenschaftlicher Ansatz, aber durch Fleiß und Materialfülle konnte Troll dennoch interessante Beiträge liefern. In seinem Lehrbuch „Allgemeine Botanik“⁸¹ widmet Troll sich dem Thema „Symmetrie“ im ganzen achten Kapitel und versucht eine möglichst umfassende, systematische Strukturierung von Symmetrie in der belebten Natur. Obwohl veraltet, ist dieser morphologische Ansatz bei der Pflanzensymmetrie durchaus reizvoll. Während z.B. die Taxonomie nach immer neuen Unterschieden sucht, um die Biodiversität zu beschreiben, zu benennen, unzweifelhaft zu bestimmen und zu klassifizieren, so geht es bei den Symmetriebetrachtungen eher um Gemeinsamkeiten. Troll hat dabei wichtige Begriffe geprägt.



*Abb. 30:
Beispiele aus Wilhelm
Trolls Symmetriehre
für longitudinale und
laterale Symmetrie*

Interessanterweise kommen seine Beispiele mehr aus der Zoologie als aus der Botanik. Dieses Vorgehen wird mit der „Geschlossenheit des Körperbaus“ bei Tieren begründet (S. 98). Er beginnt jedoch zunächst klassisch mit einer Begriffsdefinition und einer formalen Strukturierung des Themas Symmetrie in Translationen, Drehungen und Spiegelungen. Die weit gefasste Translationssymmetrie erweitert dabei durchaus den Symmetriebegriff, wie er z.B. so in der Kristallographie nicht gebräuchlich ist. So wäre eine schön gewachsene Tanne mit immer kürzeren Zweigen, die im gleichen Abstand zueinander stehen, ein Beispiel für Translationssymmetrie in der belebten Natur. Troll macht dazu aber nur eine sehr abstrakte Skizze (S. 97, Abb. 77, IV). Dazu kommt natürlich noch im Prinzip die Drehachse durch den Stamm

80 https://de.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Troll, dem Autor standen zudem einige Informationen aus zweiter Hand durch einen akademischen Schüler von Troll zur Verfügung (Privatmitteilung PD Dr. S. Schneckenburger, TU Darmstadt).

81 Troll, Wilhelm, Allgemeine Botanik, Ferdinand Enke Verlag Stuttgart, 4. Auflage, 1973. Dem Autor lag die 2. unveränderte Auflage von 1954 und zur Symmetriehre die „4. verbesserte und vermehrte Auflage“ von 1973 vor (s.a. Literaturverzeichnis). Das Kapitel Symmetriehre findet sich auf den Seiten 79-91 (2. Auflage) bzw. 96-109 (4. Auflage). Wenn nicht anders angegeben, beziehen sich die Seitenangaben im Text auf die 4. Auflage. Bildquelle: Troll, Wilhelm, Allgemeine Botanik, Ferdinand Enke Verlag Stuttgart, 4. Auflage, 1973, Abb. 79, S. 99. Mit freundlicher Genehmigung durch die Georg Thieme Verlag KG als Rechtsnachfolger.

und entsprechende Spiegelebenen, die ebenfalls den Stamm enthalten. Bei der Drehachse wird auf den Begriff der Zähligkeit hingewiesen. Mehr biologisch motiviert erfolgt die Unterscheidung in zwei grundsätzliche Formen der Symmetrie (S. 100).

- I. Longitudinale Symmetrie (Metamerie)
- II. Laterale Symmetrie
 - a. Actinomorphie (Paramerie)
 - b. Bilateralität (ebenfalls Paramerie)
 - c. Dorsiventralität (Antimerie)

Beispiele⁸²:

Longitudinal: Scolopender (Gliederfüßler)

Die Glieder heißen Metamere, daher der Begriff Metamerie.

Lateral: Hier ist der Scolopender ebenfalls ein Beispiel durch die spiegelbildliche Symmetrie beider Körperhälften (analog Schildkröte). Als weiteres Beispiel für laterale Symmetrie dient hier der Seestern mit einem fünfstrahligen, radiären Bau (auch als Actinomorphie bezeichnet (S. 99 oben)). Dorsiventralität (Antimerie) steht für die unterschiedliche Rücken- und Bauchansicht. Die laterale Symmetrie bei Blüten wurde schon in Abb. 22 thematisiert. Für weitere Begriffe und Anwendungen in der Botanik sei für vertiefende Betrachtungen auf die Originalliteratur verwiesen. Der Abschnitt §3, longitudinale Symmetrie, verweist auch auf „Deckoperationen“ wie Gleitspiegelung und Schraubung beim Pflanzenwachstum. Troll erkannte die Kombination von Deckoperationen wie Translation und Rotation bei der Schraubung bzw. Spirale. Sie treten selten in mathematisch reiner Form auf, sondern werden durch (Zitat) „*Polarität*“ modifiziert. Hier kommen besonders die in der Einleitung dieses Beitrags genannten sprachlichen Grauzonen zum Tragen. Polarität im Troll'schen Sinne ist einerseits (Zitat) „*Antithese des Ungleichartigen*“ und damit zur Symmetrie ein (Zitat) „*konträres Prinzip*“ (S.106 oben), sie ist aber trotzdem laut Troll insbesondere mit der „Längensymmetrie“ (longitudinal) sehr oft verknüpft.

Das Bemerkenswerte an dieser Formulierung ist die Tatsache, dass hier durch Troll sprachliche Unschärfe beim Thema Symmetrie, offenbar wegen der übergroßen Bandbreite an Beispielen in der Biologie, billigend in Kauf genommen wird. Troll scheint vor der Biodiversität zu kapitulieren. Zumindest bewegt sich diese Charakterisierung des Symmetriebegriffes in einem sprachlich und erst recht mathematisch-naturwissenschaftlich nicht mehr sauber fassbaren Bereich und kollidiert damit zumindest mit dem Kant'schen Verständnis einer „*reinen Naturlehre*“.

82 Textquelle: Troll, Wilhelm, Allgemeine Botanik, Ferdinand Enke Verlag Stuttgart, 4. Auflage, 1973.

Erst mit den oben diskutierten Begriffen wie fluktuierende Asymmetrie wird wieder eine wohldefinierte, sprachliche Grundlage geschaffen. Auch die funktionale Symmetrie mit Termini wie z.B. Ergänzungssymmetrie / Komplementarität („Antisymmetrie“) schafft hier eine wissenschaftliche Basis.

Berührungspunkte zur Physik bietet schließlich nicht zuletzt die dynamische Symmetrie, insbesondere bei Bewegungen, bei deren Untersuchung man wieder bei D.W. Thompson anknüpfen könnte.

Als gänzlich anderen Standpunkt soll hier nochmals auf Haeckel verwiesen werden. Ernst Haeckel hat eine Reihe von Reisen bzw. Seereisen machen können. Seine meeresbiologischen Monographien sind auch heute noch wissenschaftlich interessant. Er war neben vielen anderen Aktivitäten auch maßgeblich an der Auswertung der Challenger-Expedition⁸³ beteiligt, wohl die erste globale reine Forschungsexpedition überhaupt. Er dokumentierte allein 3.500 verschiedene Radiolarien⁸⁴. Mit seinen biologischen Kenntnissen und seinem großen zeichnerischen Geschick hat er eine ganze Reihe ästhetisch faszinierender Monographien geschaffen. Es fallen vor allem die symmetrischen Muster der Meeresbewohner auf, die in diesen Werken anspruchsvoll dokumentiert wurden, auch wenn manches idealisiert dargestellt erscheint. Was seine Bildmuster betraf, so war er ein Kind des Jugendstils, der die Natur ästhetisierte. Seine Werke zur damals neuen Evolutionstheorie waren wegweisend für die ganze Epoche. Symmetrie war bei ihm ein zentraler Theoriebestandteil. Die ästhetisch schönen Abbildungen von Ernst Haeckel, insbesondere seine symmetrischen Organismen aus „Kunstformen der Natur“, sollten nicht bedeuten, dass er natürliche, symmetrische Formen nur auf ihren ästhetischen Reiz reduziert hat⁸⁵. In seinen Zeichnungen hat er sich nicht zwischen Kunst und Wissenschaft entschieden, sondern für beides. Naturformen werden zwar scheinbar wie Kunstformen dargestellt, aber für Haeckel war es ein Mittel, um „*zeichnend und malend tiefer in das Geheimnis ihrer Schönheit einzudringen*“⁸⁶. Eine Idealisierung weist er von sich; „*diese*

83 Siehe z.B. Zum tiefsten Punkt der Weltmeere: Die Challenger-Expedition (1872 – 1876); Rudolf von Willemoes-Suhms, Briefe von der Challenger-Expedition mit Auszügen aus dem Reisebericht des Schiffsingenieurs W. J. J. Spry, Hrsg. Gerhard Müller, Verlag Thienemann, Edition Erdmann, Stuttgart 1984.

84 Als Vorbild diente René Binet für sein monumentales Tor zur Pariser Weltausstellung von 1900 eine von Haeckel gezeichneten Radiolarien.

85 An dieser Stelle sei auf das Buch des Evolutionsbiologen Josef H. Reichholf „Der Ursprung der Schönheit“ verwiesen (S. 203 ff). Im Kapitel „Symmetrien und ihre Bedeutung“ werden ästhetische Aspekte und funktionale Aspekte von Symmetrie gemeinsam diskutiert.

86 Haeckel, Kunstformen der Natur, Leipzig und Wien, Verlag des Bibliographischen Instituts, 1899-1904, Vorwort.

überlasse ich den bildenden Künstlern selbst⁸⁷. Schönheit und gleichzeitig wissenschaftliche Genauigkeit ist seiner Doppelbegabung als Künstler und Naturwissenschaftler geschuldet, zu der später auch eine einflussreiche philosophische Tätigkeit kam. Er hat immerhin bei seiner Italienreise damit geliebäugelt, Maler zu werden, hat sich aber nach Intervention seines Vaters und aus Verantwortung seiner Braut Anna Sethe gegenüber für eine wissenschaftliche Karriere entschieden⁸⁸. Als glühender Anhänger von Alexander von Humboldt⁸⁹ und als überzeugter Darwinist⁹⁰ dienten diese ästhetischen Formen in einem ganzheitlichen Ansatz durchaus einem theoretisch fassbaren und klar formulierbaren Zweck. Das Naturverständnis von Humboldt hat ihn immer geleitet⁹¹. Er gilt als Wegbereiter der Neuroästhetik, die ästhetische Empfindungen auf neuronaler Basis erklärt⁹². Als früher Verfechter des Darwinismus hat das Lehrverbot für die Darwin'schen Thesen an Schulen in Preußen damals Haeckel regelrecht die Deutungshoheit über diese neue Theorie erlaubt. Er nutzte dies auch außerhalb der wissenschaftlichen Diskussion in populären Schriften. In manchen Ansichten und Formulierungen hat er allerdings auch polarisiert⁹³. „*Der Mensch stammt vom Affen ab*“. Diese, wenn auch mindestens überpointierte, Aussage trug ihm den Namen „Affen-Professor von Jena“ ein⁹⁴. Die Arbeiten zu den Radiolarien bildeten die Grundlage zu seiner „Generellen

87 ebenda

88 Carl Gottlob Haeckel an Ernst Haeckel, Ende 1859, zitiert nach Andrea Wolf, Alexander von Humboldt und die Erfindung der Natur S. 502, Anm. 32 in Kap. 22.

Bzw. Haeckel an Anna Sethe, 26. November 1859, ebenda.

89 Er hat Efeukränze um das Portrait Humboldts in seinem Zimmer gehängt. Haeckel an seine Eltern, 23. Mai 1853, in Entwicklungsgeschichte einer Jugend. Briefe an die Eltern, 1852-1856, Leipzig, K.F.Köhler, 1921, S.54. (nach Andrea Wolf).

90 Haeckel an Darwin, 9. Juli 1864, in Darwin Briefe, Bd. 12, S 482. (nach Andrea Wolf).

91 Zu Haeckel und Humboldt: siehe Andrea Wolf, Alexander von Humboldt und die Erfindung der Natur, S. 372 ff. Ernst Haeckel und Anna Sethe haben sich sogar an A. v. Humboldts Geburtstag am 14. September 1858 verlobt. Sie starb an seinem 30. Geburtstag, dem 16. Februar 1864. Er benannte eine Fahnenqualle (Meduse) aus der Familie der Cyaneiden (Cyaneidae), *Desmonema Annasethe*, nach ihr.

92 Vergleiche dazu http://wiki.bnv-bamberg.de/flg-wiki/index.php/Ernst_Haeckel_Naturwissenschaftler_Philosoph_und_Künstler#Ernst_Haeckels_Suche_nach_dem_i_dealen_Symmetriegesetz (04.03.2017)

93 „In ... widerspruchsvoller Art leben zwei Wesen in Haeckel. Ein Mensch mit mildem, liebeerfülltem Natursinn, und dahinter etwas wie ein Schattenwesen mit unvollendet gedachten, engumgrenzten Ideen, die Fanatismus atmeten ... Ein Menschenrätsel, das man nur lieben konnte, wenn man es sah; über das man oft in Zorn geraten konnte, wenn es urteilte.“ (Rudolf Steiner: Mein Lebensgang, 1925, zitiert nach freimaurer-wiki.de/index.php/Ernst_Haeckel, 17.05.2017).

94 (Menschen und Affen haben gemeinsame Vorfahren.) Siehe z.B. www.themen-der-zeit.de/content/Ernst_Haeckel_und_Rudolf_Steiner.2112.0.html (17.05.2017)

Morphologie der Organismen“ von 1866. Sie entstand in Rekordzeit, offenbar als Reaktion auf den Tod seiner ersten Frau. Es war ein einziger großer Beleg für Darwins „Entstehung der Arten“, aber auch ein streitbares Werk gegen die Zweifler⁹⁵. Inkl. des Menschen entwickelte er ausgefeilte mögliche Stammbäume aller Organismen. Das Symmetrieverständnis ist dabei sein grundlegender theoretischer Ansatz.

Die Evolution hat nach Haeckels Ansicht auf einfache „Baupläne“ primitiver Organismen zurückgegriffen und darauf aufbauend in immer größer werdender Komplexität der Symmetriebeziehungen die Biodiversität bis zum heutigen Tag entwickelt. Man kann sozusagen bei diesem holistischen Ansatz von „organischer Kristallographie“ (Breidbach, Vorwort zu den „Kunstformen“) sprechen. Vielfältige Formen entstanden somit, indem Symmetriebeziehungen dazu beigetragen haben, dass sich komplexe Muster in einem globalen Stammbaum ausdifferenzieren konnten⁹⁶. Allerdings hatte Darwin noch eine gradualistische Grundhaltung – d.h. er hatte vor allem langfristige, kontinuierliche Entwicklungen im Blick. Der starke Druck der sexuellen Selektion wurde erst nach und nach erkannt.

Auch andere wesentliche Einflussfaktoren auf die Entwicklung der Arten, wie die Kontinentalverschiebung und Plattentektonik, wodurch räumlich getrennte Lebensbereiche entstanden oder abrupte und katastrophale Ereignisse, wie Meteoroiden-Einschläge⁹⁷ und Vulkanausbrüche, Klimaveränderungen u.v.m.

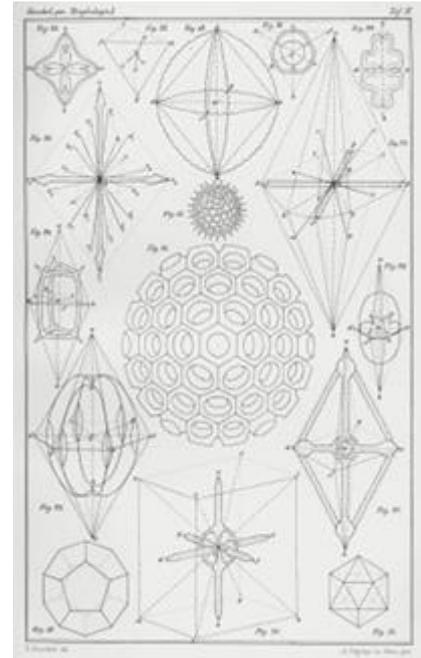


Abb. 31: Polyaxonie und homopole Grundformen. In : Ernst Haeckel, »Generelle Morphologie der Organismen. Allgemeine Grundzüge der Organischen Formen-Wissenschaft, mechanisch begründet durch die von Charles Darwin reformierte Descendenz-Theorie«. Erster Band : Allgemeine Anatomie der Organismen, Berlin, 1866.

95 Darwin nannte es die „prachtvollste Eulogie“ (Darwin an Haeckel, 18. August 1866, in Darwin Briefe, Bd. 14, S. 294, zitiert nach Wolf Andrea, S. 503, Anm. 61).

96 Siehe dazu auch das Vorwort von Olaf Breidbach; Die allerreizendsten Tierchen Haeckels Radiolarien-Atlas von 1862, in Ernst Haeckel, Kunstformen der Natur – Kunstformen aus dem Meer, PRESTEL München London New York, 2011. In diesem Vorwort wurde auch Abb. 31 inkl. Abbildungstext abgedruckt.

97 Als Beispiel wird meist der Chicxulub-Krater im heutigen Yucatan / Mexiko angeführt. Der Meteoroidenachweis und der Zusammenhang mit Artensterben war zweifellos ein Musterbeispiel internationaler und interdisziplinärer Zusammenarbeit. Der Einschlag führte zu einem Massensterben, insbesondere der Dinosaurier, vor 66

wurden bzw. konnten somit auch von Haeckel noch nicht gründlich mitbetrachtet werden. Erst recht hat die Genetik und DNA-Analyse ganz neue Perspektiven eröffnet, wenn es darum geht, Verwandtschaftsbeziehungen zu identifizieren und Entwicklungslinien abzugrenzen. Trotzdem ist es ein durchaus „moderner“ Ansatz, die Entwicklung von Formen als evolutionäre Richtschnur zu wählen. Denn die (funktionale und schöne)⁹⁸ Form bestimmt die Überlebens- und Fortpflanzungsfähigkeit des Individuums und der Art zumindest wesentlich mit. Evolution kommt somit ohne Betrachtung der Formtypen nicht aus und stößt damit automatisch auch auf die Symmetrie⁹⁹. Symmetrie erlaubt, rein formal betrachtet, effizientere Codierung und Vererbung von Strukturen und kann damit auch Reduktion der Sprachmittel auf genetischer Ebene bedeuten. Effiziente DNA-Codierung unter Einbeziehung von Symmetrie könnte somit als „Blaupause“ für die sukzessive Entwicklung der „Baupläne“ im Haeckel’schen Sinne Vorteile haben. Symmetrieeffekte könnten somit auch wichtige Einflussfaktoren bei der Entwicklung des Lebens gewesen sein. Für Ernst Haeckel waren sie sogar wesentlicher Bestandteil für sein theoretisches Fundament:

„Die Theorie bleibt für jede wahre Wissenschaft unentbehrlich, denn sie erklärt erst die Tatsachen durch Annahme von Ursachen. Wer auf die Theorie ganz verzichtet und reine Wissenschaft bloß aus sicheren Tatsachen aufbauen will, der verzichtet damit auf die Erkenntnis der Ursachen überhaupt¹⁰⁰.“

Millionen Jahren. Die Earth Impact Database zeigt mit aktuell 190 nachgewiesenen Kratern, dass dies kein einmaliges Ereignis war.

www.passc.net/EarthImpactDatabase/index.html (08.02.2017). Der Begriff „Meteoroid“ folgt der neueren, international normierten Terminologie und ist noch nicht Bestandteil des Dudens (s.a. Lisa Randall, Dunkle Materie und Dinosaurier, S. Fischer, Frankfurt/M. 2016, S. 106 ff).

98 „Funktional“ steht hier für die notwendige Anpassung, „schön“ u.a. für die sexuelle Selektion. Bei der Symmetrie kann manchmal beides zusammenfallen, wenn z.B. symmetrische Muster „nützlich“ sind. Siehe dazu auch Anm. 86 mit Bezug auf Josef H. Reichholf, Der Ursprung der Schönheit, dtv, München 2013.

99 In seinem Buch „Geschichten vom Ursprung des Lebens – Eine Zeitreise auf Darwins Spuren“ entwickelte Richard Dawkins einen retrospektiven Ansatz unter Einbeziehung moderner Erkenntnisse aus der Genetik, wobei in Form von „Begegnungen“ sich jeweils ursprünglichere Äste am Stammbaum des Lebens entwickelt haben bzw. zu einer Aufspaltung geführt haben (Richard Dawkins, Geschichten vom Ursprung des Lebens, Ullstein, Berlin 2008).

100 Haeckel, Ernst; Die Welträthsel, 16. Kapitel, Wissen und Glaube, zitiert aus Ernst Haeckel: Gemeinverständliche Werke. Band 3, Leipzig und Berlin [o.J.], S. 302-317. Permalink: <http://www.zeno.org/nid/20009174974> (08.02.2017).

Symmetrie und Erhaltungsgrößen

Der Symmetriebegriff in der Physik ist besonders abstrakt. Eine schöne Definition stammt von Prof. Mikko Laine (jetzt Univ. Bern): „*Die möglichen Symmetrien der Zustände werden dabei durch die Invarianzen der Naturgesetze bestimmt, ohne dass wir die genaue Form der letzteren kennen müssen. Dies macht die mathematische Behandlung von Symmetrien zu einem wichtigen Werkzeug für die Physik.*“ (Zitatende)¹⁰¹. Dies ist eine gewaltige Anforderung an die mathematische Formulierung. Es bedeutet, dass jede plausible, zulässige Transformation, z.B. dass ein Naturgesetz unabhängig von austauschbaren Parametern gilt, die mathematische Formulierung invariant lässt. Dabei muss man zwischen kontinuierlichen und diskreten Vorgängen unterscheiden. Die klassische Physik beschreibt kontinuierliche Veränderungen, wie die Geschwindigkeit als infinitesimale Änderung des Ortes bei infinitesimaler Änderung der Zeit. Bei der Quantenphysik spielen diskrete Vorgänge eine Rolle. Einen fundamentalen Beitrag zur klassischen inkl. der relativistischen Physik lieferte die deutsch-jüdische Mathematikerin Emmy Noether¹⁰². Sie hatte erkannt, dass grundlegende, plausible Postulate zur geometrischen Natur von Raum und Zeit dazu dienen können, um insbesondere wichtige Erhaltungsgesetze mathematisch abzuleiten. Sie machte für ihren Beweis lediglich die Voraussetzung, dass die fundamentalen Naturgesetze zu jeder Zeit, an jedem Ort und in jeder Richtung überall gleich sind. Daraus leitete sie Energieerhaltung (symmetrisch bei Verschiebungen in der Zeit), Impulserhaltung (symmetrisch bei Verschiebungen im Raum) und Drehimpulserhaltung (symmetrisch bei Drehungen im Raum) ab. Symmetrie hat somit nicht nur eine Bedeutung bei räumlichen Strukturen, sondern impliziert aus den Naturgesetzen durch ihre Invarianz gegenüber Zeit, Ort und Richtung erst die wichtigen Erhaltungssätze, auf denen wesentliche Teile der Physik beruhen. Man spricht von Erhaltungsgrößen der Bewegung (im Gegensatz zu Stoffeigenschaften wie Masse oder Ladung). Der Begriff Symmetrie ist damit sehr abstrakt geworden. Noether legte die Lagrange-Funktion des mechanischen (also kontinuierlichen) Systems zugrunde, die von Zeit, Ort und Geschwindigkeit abhängt. Joseph-Louis Lagrange hatte sie Ende des 18. Jahrhunderts eingeführt und damit die mathematische Seite der Newton'schen Mechanik flexibler gemacht, weil sie jetzt invariant, also

101 Laine Mikko; Symmetrien in der Physik, Vorlesungsskript, Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, 2005, S. 5.

102 Einstein 1935 in seinem Nachruf in der New York Times: „Fräulein Noether war das bedeutendste mathematische Talent [...] seit die höhere Ausbildung von Frauen begann.“ (zitiert nach www.weltderphysik.de/gebiet/theorie/symmetrien/kontinuierliche-symmetrien-und-das-noether-theorem/, 07.12.2016)

unabhängig gegenüber Koordinatentransformationen, ist. Das ist das Symmetriekriterium schlechthin. Damit wird die Dynamik des Systems mit **einer** Gleichung beschrieben. Sie gilt somit im Gegensatz zur Newton'schen Beschreibung z.B. auch in beschleunigten Systemen. Newton ging (im Gegensatz zu Leibniz) von einem absoluten Raum und einer absoluten Zeit aus¹⁰³ – invariante, beschleunigte Systeme waren nicht beschreibbar. Die lokalen Transformationen heißen dann Symmetrien der Wirkung, wenn sich bei beliebig kleinen Transformationen die Lagrange-Funktion (für alle denkbaren Kurven) nur um die Ableitung nach der Zeit einer nur von Zeit und Ort abhängigen Funktion ändert. Nach diesem Prinzip hat Emmy Noether alle drei Erhaltungsgrößen abgeleitet und damit die Symmetrie bei kontinuierlichen Systemen bewiesen. Für die Übertragung auf die relativistische Physik benötigt man dann noch die Spezielle Relativitätstheorie¹⁰⁴.

Im Bereich der Quantenphysik ist mit dem Standardmodell der Teilchenphysik ein in sich geschlossener, symmetrischer Komplex entstanden. Symmetrie heißt in diesem Zusammenhang, dass es eine Anzahl an Transformationen gibt, so dass der System bestimmende Operator („Rechenvorschrift“) invariant bleibt. Es ist die eigentliche mathematische Erhaltungsgröße. Diese Transformationen sind die Elemente der Gruppe; die Anzahl ist die Ordnung der Gruppe. Auch Energie, Spin, Ladung, Leptonenzahl, Baryonenzahl und einige mehr sind Erhaltungsgrößen in dem Sinne, dass in einer quantenmechanischen Reaktion links und rechts des Pfeils die gleichen Werte erhalten bleiben. Beispiel ist der Zerfall eines Neutrons (genauer eines d-Quarks in ein u-Quark, ein Elektron und ein Elektronantineutrino):

	D	→	$u + e^- + \bar{\nu}_e$
Ladung	$-\frac{1}{3}$	→	$\frac{2}{3} + (-1) + 0$
Baryonenzahl	$\frac{1}{3}$	→	$\frac{1}{3} + 0 + 0$
Leptonenzahl	0	→	$0 + 1 + (-1)$
Spin	z.B. $+\frac{1}{2}$	→	$+\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

Abb. 32: Erhaltungsgrößen beim β^- -Zerfall eines Neutrons sind z.B. Ladung, Leptonenzahl, Baryonenzahl oder Spin, aber natürlich auch die Energie.

103 Obwohl er philosophisch unbefriedigende Konsequenzen erkannte, aber noch nicht auflösen konnte.

104 Hier spielt auch die Skalensymmetrie eine Rolle, auf die aber nicht näher eingegangen werden soll. Ein großer Forschungsbereich sind insbesondere nichtlineare Systeme in Verbindung mit Chaos und Fraktalen, in denen Skalensymmetrie über Selbstähnlichkeit auftritt; siehe auch Fazit.

Bevor näher auf das Standardmodell eingegangen wird, sollen einige Begriffe angesprochen werden, die für den Zusammenhang von quantentheoretischen Erhaltungsgrößen und Symmetrie wesentlich sind.

Den elementaren Begriff „Teilchen“ sollte man bei Verwendung immer hinterfragen. Das aus der Alltagserfahrung entstandene intuitive Verständnis von „Teilchen“ ist in der Regel bei Elementarteilchen falsch. In der Quantentheorie sind Teilchen jeder Größe zuerst Quantenfelder, die interferieren können. Sie werden durch Wellenfunktionen beschrieben, die tiefgreifenden Symmetrieanforderungen unterliegen. Die Quantentheorie beschreibt die entsprechenden Naturgesetze in der Quantenwelt. Erst durch Wechselwirkung mit dem Messsystem bzw. der Umgebung („Dekohärenz“) wird daraus ein Objekt der makroskopischen Welt, das mit den Methoden der klassischen Physik behandelt werden kann. Dieser Vorgang erfolgt sehr schnell, weshalb es so schwierig ist Quantencomputer zu bauen und wir „große“ Objekte als „real“ ansehen. Im Jahr 2000 hat Max Tegmark diesen Effekt im Detail an einem Beispiel ausgerechnet (feuern von Neuronen im Gehirn)¹⁰⁵ und kommt auf die Größenordnung von 10^{-13} - 10^{-20} Sekunden. Das ist um Vieles schneller als der biologische, makroskopische Vorgang (Neuronen feuern 500-mal pro Sekunde, das entspricht ca. 2×10^{-4} oder 2 ms). Man kann dadurch definitiv ausschließen, dass das Gehirn bzw. Bewusstsein quantenmechanische Effekte nutzt¹⁰⁶. Dieses Ergebnis ist verallgemeinerbar. Dekohärenz nennt man gerne auch „Messung durch die Umgebung“. Die Fähigkeit von Quantensystemen, Überlagerungen („Superpositionen“) zu bilden, die nicht-klassische Eigenschaften haben (z.B. an zwei verschiedenen Orten gleichzeitig zu sein), gehen verloren. Teilchen werden mit extremer Geschwindigkeit sofort „klassisch“; sind dadurch z.B. genau lokalisierbar. Zur Thematik Dekohärenz wurden zahlreiche Experimente von Anton Zeilinger und Mitarbeitern in Wien durchgeführt, um den zeitlichen Verlauf des „Weges“ von der Quantenwelt zur makroskopischen Welt besser aufzulösen^{107,108}.

105 Max Tegmark, The importance of quantum decoherence in brain processes Phys.Rev.E61:4194-4206,2000, <https://arxiv.org/abs/quant-ph/9907009>

106 Diese Idee wurde Ende der 1980er Jahre von Sir Roger Penrose ins Spiel gebracht. Siehe Roger Penrose, Computerdenken, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg,1991. Original: The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds and The Laws of Physics, Oxford Landmark Science, Erstveröffentlichung 1989.

107 S.a. Claus Kiefer, Der Quantenkosmos, S. Fischer, Frankfurt/Main, 2009, S. 107.

108 Ein Artikel als Beispiel zu den Experimenten mit Fullerenen (C_{60} , C_{70}) siehe "Decoherence of matter waves by thermal emission of radiation" von Klaus Hornberger, Lucia Hackermüller, Anton Zeilinger, Björn Brezger und Markus Arndt, in "Nature" (Bd. 427, S. 711, Ausgabe vom 19. Feb. 2004). Zur Grundidee der Dekohärenz siehe

<http://homepage.univie.ac.at/Franz.Embacher/Quantentheorie/Dekohaerenz/>

Teilchen in diesem nichtklassischen Sinne unterliegen den vier Naturkräften. Dabei kann man die Gravitation wegen ihrer Schwäche in dieser Größenordnung zunächst ausklammern, so dass elektromagnetische Kraft, starke Kernkraft und die schwache Wechselwirkung bleiben. Die elektromagnetische Kraft wirkt deshalb über beliebige Entfernungen, weil das Photon als Kraft vermittelndes Teilchen masselos ist. Globale Eichinvarianz gilt deshalb, weil die Phase einer Wellenfunktion wegen der Ortsunschärfe nicht messbar ist und sie deshalb beliebig umdefiniert werden kann. Erst in den bilateralen Wechselwirkungen der Elementarteilchen, also bei den lokalen Eichsymmetrien, treten Effekte zutage, die entscheiden, ob massive oder masselose Austauscheteilchen zur Übertragung der Naturkräfte entstehen. Sie sind vom Typ „Boson“ und haben ganzzahligen Spin (-2, -1, 0, 1, 2; näheres zum Spin s.u.). Bosonen sind allgemein Teilchen, die den gleichen Zustand einnehmen können (z.B. zusammengesetzte Teilchen bei suprafluidem Helium, Elementarteilchen bei Photonen beim Laser, etc.). Eichsymmetrie bedeutet im weitesten Sinne Invarianz gegenüber Maßstabsänderungen bei Ort und Zeit. Die mathematische Form der Gleichungen bleibt gleich, wenn bestimmte physikalisch relevante Transformationen durchgeführt werden („Lorentzsymmetrie“ bei verschiedenen Bezugssystemen unter Einbeziehung der Speziellen Relativitätstheorie) oder Eichtransformationen (Änderung ortsbezogener Variablen ohne Einfluss auf das Experiment). Beide Transformationen werden durch Lie-Gruppen beschrieben. Bekanntes klassisches Beispiel ist die Elektrodynamik mit der abelschen Eichgruppe $U(1)$ ¹⁰⁹ (Kreisgruppe). Man führt für das elektrische und magnetische Feld ein Potential ein, das durch Skalare mit frei wählbarer Skala beschrieben wird. Für richtungsabhängige Komponenten wird das Vektorpotential eingeführt. Dies erlaubt Eichfreiheiten, die sich nicht auf messbare Werte auswirken. In der Quantenfeldtheorie findet man oft als globale Eichsymmetrie $U(1)$. Die oben angesprochenen, von Emmy Noether erarbeiteten Sätze, liefern eine zu dieser Symmetrie zugehörige Erhaltungsgröße (z.B. der elektrischen Ladung). Physikalisch äußert sich Symmetrie oft in der Invarianz gegenüber Raumspiegelung (Erhaltung von Parität, P), Invarianz bei Ladungsumkehr

¹⁰⁹ $U(1)$ ist die sogenannte Kreisgruppe, also alle Drehungen um einen Punkt im 2-Dimensionalen. Man kann sie als Menge aller komplexen Zahlen verstehen, die den gleichen Betrag haben, also auf einem Kreis um den Ursprung liegen. Sie ist also über mehrere Wege definierbar (Winkel, Euler'sche Formel, Lie-Gruppe, unitäre Gruppe, etc.). Eine der möglichen korrekten Definitionen: „ $U(1)$ ist die unitäre Gruppe, deren Elemente komplexwertige quadratische Matrizen sind, deren Zeilen- und Spaltenvektoren orthonormal bzgl. des Standardskalarproduktes sind.“ Dadurch zeigen sich bei vielen Operationen große Regelmäßigkeiten und Invarianzen. Die ursprüngliche Formulierung der Quantenmechanik von Heisenberg und Born nutzt diese Mathematik intensiv.

(charge, C) und Invarianz gegenüber Zeitumkehr (time, T). Dies sind grundlegende Symmetrien mit weitreichender Bedeutung.

Paritätserhaltung bedeutet, dass ein zweites, gleichartiges Experiment bei einer Raumspiegelung am Ursprung unveränderte Ergebnisse bringt. Der Ursprung kann dabei willkürlich gewählt werden, d.h. ein Punkt mit den Koordinaten (t, x, y, z) geht durch eine „Paritätstransformation“ über in einen Punkt $(t, -x, -y, -z)$. Es entspricht im anschaulichen Beispiel der Diedergruppe D_4 der Symmetrieoperation σ_3 , also Spiegelung mit anschließender Drehung um 180° . Bei Gravitation und elektromagnetischer Kraft hat man keine Verletzung der Paritätserhaltung gefunden. Somit kann man die Parität als Erhaltungsgröße für die klassische Physik betrachten. In der Quantenmechanik ist es schwieriger, anschauliche Modelle für die Paritätstransformation zu finden. Ein Teilchen wird durch eine Wellenfunktion ψ mit komplexen Parametern beschrieben. Manipulationen von ψ werden durch Operatoren, also sozusagen Rechenvorschriften, vollzogen. Der Paritätsoperator \hat{P} hat im Erhaltungsfall einige besondere mathematische Eigenschaften. Einfach einzusehen ist die Tatsache, dass doppelte Spiegelung wieder die ursprüngliche Funktion ergibt ($\hat{P}\hat{P}\psi=\psi$). Somit ist \hat{P} seine eigene Umkehrfunktion \hat{P}^{-1} , denn auf sich selbst angewendet ergibt sich die Identität. In der Gruppentheorie wird die Eigenschaft dann erfüllt, wenn ein Element, wie d_2 (Drehung um 180°) in der Diedergruppe, sein eigenes Inverses ist. Dies gilt auch für jede Spiegelung im Quadrat.

Der Operator darf nicht verzerren, ist also eine Längen- und Winkel erhaltende lineare Abbildung. Aus beiden Eigenschaften ergibt sich, vereinfacht formuliert, dass \hat{P} eine bijektive Abbildung (ein Isomorphismus) zwischen zwei mathematischen Strukturen ist, die wohldefinierte Längen- und Winkelmaße besitzen („unitärer bzw. hier wegen reeller Werte orthogonaler Operator mit Erhaltung des Skalarprodukts“). Eine weitere Eigenschaft („selbstadjungiert“), auf die hier nicht mathematisch eingegangen werden soll, verlangt eine Modifizierung des Symmetriebegriffs. Sie sorgt dafür, dass die Parität reell ist und nur die Werte +1 und -1 annehmen kann („Signum“). Analog wird der Begriff in der Mathematik für „gerade“ und „ungerade“ ganze Zahlen z verwendet, denn $(-1)^z$ ist entweder +1 oder -1. Auch diese Werte sind physikalisch einsichtig, da es bei Raumspiegelung nur zwei Zustände geben kann, wobei die „+1“ eine symmetrische Funktion ergibt (analog z.B. regelmäßiger Parabel), die „-1“ erzeugt eine „schiefe“ Symmetrie (daher ist Modifikation der Definition nötig). Man kann von den beiden Paritäts-Quantenzahlen sprechen. Diese mathematischen Eigenschaften, die einer einfachen, relativ anschaulichen Symmetrieoperation zugrunde liegen, haben dort erhebliche Auswirkungen, wo Wellenfunktionen Übergänge und Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen quantenmechanischen Zuständen

beschreiben. Das ist in der Atom-, Molekül- und Kernphysik sowie der Chemie der Fall.

Als Paul Dirac die spezielle Relativitätstheorie auf die Quantenmechanik anwandte, erhielt er für das Elektron vier Lösungen. Da das Elektron zwei verschiedene Spinzustände („Eigendrehimpuls“) annehmen kann, musste man sich fragen, was die anderen beiden Lösungen bedeuten. Mit der Entdeckung des Positrons als Antiteilchen des Elektrons (durch Anderson) wurde nach und nach deutlich, dass jeder Typ eines Elementarteilchens auch ein Antiteilchen hat. Neutrale *elementare* Teilchen sind dabei ihr eigenes Antiteilchen. Dabei ist die Unterscheidung „elementar“ wichtig, denn z.B. ein Anti-Neutron ist nicht identisch mit dem Neutron. (Vorgriff: Die Ladungsumkehr der Quarks führt zu einem anderen Teilchen). Das bedeutet aber nicht, dass es gleich viele Teilchen wie Antiteilchen im Universum gibt. Wir leben offenbar in einer materiedominierten Welt. Was das Ungleichgewicht hervorgerufen hat, spricht die Symmetriebrüche in der frühen Geschichte des Universums, wird noch zu thematisieren sein. Antiteilchen entstehen also formal durch Ladungsumkehr (C wie charge) und verhalten sich ansonsten physikalisch gleich zu den Teilchen (genügen der C-Symmetrie). Teilchen und Antiteilchen vernichten sich unter Freisetzung reiner Energie (Photonen). Innerhalb von Teilchen oder Antiteilchenprozessen bleibt die Ladung als positives oder negatives Vielfaches der Elementarladung eines Elektrons erhalten.

Die dritte wichtige Erhaltungsgröße ist die Invarianz gegenüber Zeitumkehr, auch als T-Symmetrie bezeichnet. Die meisten elementaren Prozesse sind entsprechend invariant. Mathematisch bedeutet es, dass ein plausibler Vorgang auch dann entsteht, wenn man das Vorzeichen der Zeit ändert, sie rückwärts laufen lässt. Erst auf makroskopischer Ebene, wenn die Entropie bzw. Dekohärenz ins Spiel kommt, entsteht der Zeitpfeil, macht die Unterscheidung zwischen Vergangenheit und Zukunft Sinn. Allerdings gibt es auch bei der T-Symmetrie erste subtile Experimente, die zeigen, dass „Uhren“ auf elementarer Ebene vorwärts anders gehen können als rückwärts¹¹⁰.

Bei allen drei Symmetrien wurden Verstöße gefunden (s.u.). Dies gilt auch für Kombinationen wie der CP-Symmetrie. Die einzige Symmetrie, die offenbar unangefochten gilt, ist die CPT-Symmetrie, also die Tatsache, dass ein Experiment, das gespiegelt unter Zeitumkehr und bei dem Teilchen durch Antiteilchen vertauscht werden, gleich abläuft.

110 Originalveröffentlichung:

J. P. Lees et al.: Observation of Time Reversal Violation in the B_0 Meson System, Phys. Rev. Lett. 109, (2012); DOI: 10.1103/PhysRevLett.109.211801, siehe auch http://www.pro-physik.de/details/news/3732621/Zeitasymmetrie_erstmals_direkt_nachgewiesen.html (07.04.2017)

Nach diesen Ausführungen soll auf das Standardmodell der Teilchenphysik näher eingegangen werden¹¹¹. Es ist ebenfalls eine sogenannte Eichtheorie, in der die kraftvermittelten Bosonen Eichvariablen sind, die über Eichfelder wirken. Sie sind aber nicht nur mathematische Konstrukte, sondern es sind damit Elementarteilchen verbunden, die die Kräfte vermitteln (Photon, Gluonen, W^\pm - und Z-Boson sowie weitere wie das Higgs-Teilchen und das hypothetische Graviton). Das Higgs-Teilchen (Spin 0) hat Skalarcharakter, z.B. das Photon (Spin 1) hat Vektorcharakter (linear) und das vermutete Graviton (Spin 2) Tensorcharakter (multilinear).

Drei Generationen
der Materie (Fermionen)

	I	II	III		
Masse →	2,3 MeV	1,275 GeV	173,07 GeV	0	125,9 GeV
Ladung →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0
Spin →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
Name →	u up	c charm	t top	γ Photon	H Higgs Boson
Quarks	4,8 MeV $-\frac{1}{3}$ d down	95 MeV $-\frac{1}{3}$ s strange	4,18 GeV $-\frac{1}{3}$ b bottom	0 0 g Gluon	
	<2 eV 0 $\frac{1}{2}$ ν_e Elektron- Neutrino	<0,19 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_μ Myon- Neutrino	<18,2 MeV 0 $\frac{1}{2}$ ν_τ Tau- Neutrino	91,2 GeV 0 1 Z^0 Z Boson	
	0,511 MeV -1 $\frac{1}{2}$ e Elektron	105,7 MeV -1 $\frac{1}{2}$ μ Myon	1,777 GeV -1 $\frac{1}{2}$ τ Tau	80,4 GeV ± 1 1 W^\pm W Boson	Eichbosonen

Abb. 33: Teilchen im Standardmodell (ohne Antiteilchen)

Die Symmetriebeziehungen beim Standardmodell sollen hier kurz dargestellt werden. Sie sind sehr gut experimentell belegt. Das Standardmodell unterscheidet zwischen Quarks und Leptonen. Die uns bekannte Materie enthält in den Atomkernen Quarks der Familie up (u) und down (d). Jedes

111 Bildnachweis:

https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg (08.04.2016)

Teilchen hat auch ein Antiteilchen (\bar{u}, \bar{d}). Daneben gibt es zwei weitere Familien mit Quarks namens charm (c) und strange (s) sowie top (t) und bottom (b)¹¹² (sowie die jeweiligen Antiteilchen). c, s, b und t sowie $\bar{c}, \bar{s}, \bar{b}$ und \bar{t} können nur in Teilchenbeschleunigern erzeugt werden. Die sechs Quarks unterliegen der starken Kernkraft (aber auch der schwachen Wechselwirkung, siehe Neutron-Zerfall), die nur in den Abständen wirkt, wie sie in Atomkernen anzutreffen ist. Immerhin ist ihre Reichweite um mehr als den Faktor 1.000 größer als die schwache Kraft. Die starke Kernkraft wirkt in Verbindung mit sogenannten Farbladungen, ein Begriff, der in Analogie zur Farbenlehre gewählt wurde, weil sich die Farbladungen rot, grün, blau nach außen kompensieren müssen („confinement Hypothese“). Antiquarks tragen die Farbladungen anti-rot, anti-grün und anti-blau. Außerdem ist die elektrische Ladung entweder $-\frac{1}{3}$ (z.B. beim d-Quark) oder $+\frac{2}{3}$ (z.B. beim u-Quark) und muss nach außen immer ganzzahlig, bezogen auf die Elementarladung, sein. Ein (einfach) positiv geladenes Proton trägt dementsprechend zwei u-Quarks und ein d-Quark; ein (neutrales) Neutron ein u-Quark und zwei d-Quarks¹¹³. Mathematisch wird die starke Kernkraft als Quantenchromodynamik in der Eichgruppe SU(3) beschrieben¹¹⁴. Die Symmetrie spiegelt sich noch in einer Reihe von Quantenzahlen wider, die z.T. spezifisch für das Teilchen sind. Quantenzahlen sind wohldefinierte Werte, die nicht der Unschärferelation unterliegen. Alle Quarks und alle Leptonen haben die Spinquantenzahl $\frac{1}{2}$ und sind somit Fermionen¹¹⁵. Sie ergibt sich aus dem Faktor $\frac{1}{2}$ im „Eigendrehimpuls“ multipliziert mit dem Planck'schen Wirkungsquantum durch 2π ; formal: $\frac{1}{2}\hbar = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{2\pi}$. (\hbar lässt man i.d.R. weg und sagt, der Spin sei $\frac{1}{2}$). Fermionen „spüren“ Kräfte rein passiv. Das bedeutet, einfach formuliert, dass

112 Warum es genau drei Familien gibt ist noch unklar. Es wird spekuliert, dass es mit den drei Raumdimensionen zusammenhängen könnte.

113 Daneben gibt es noch kurzlebige Mesonen, die immer aus einem Quark und einem Anti-Quark bestehen (es muss nicht vom gleichen Typ sein).

114 SU steht für die Spezielle unitäre Gruppe, U für die Unitäre Gruppe. (Weitere Bezeichnungen: O für die Orthogonale Gruppe und SO für die Spezielle orthogonale Gruppe.) Die Gruppe kann aus 8 sog. spurlosen unitären 3x3 Matrizen gebildet werden. Meist nimmt man die Gell-Mann-Matrizen als erzeugende Elemente. Sie haben reelle Eigenwerte (hermitsch), sind spurlos (Summe der Hauptdiagonalwerte ist 0) und sind orthogonal bzgl. eines speziellen Skalarproduktes. SU(3) eignet sich sehr gut, um die Eigenschaften und Wechselwirkungen von Quarks mathematisch zu beschreiben. Auf Murray Gell-Mann geht übrigens die Bezeichnung „Quark“ nach einer Literaturstelle aus James Joyces „Finnegans Wake“ zurück.

115 h steht für das sogenannte Planck'sche Wirkungsquantum ($h=6,62606957 \cdot 10^{-34}$ Joulesekunden). Diese Naturkonstante impliziert, dass elektromagnetische Strahlung nicht beliebig teilbar ist, sondern in kleinsten Paketen, den Quanten, auftritt. Weil in Formeln zur Quantentheorie sehr oft $h/2\pi$ auftritt, kürzt man dies gerne mit \hbar (gesprochen „h quer“) ab.

sie Kräften unterliegen, aber diese nicht übertragen. Das Gegenstück sind Bosonen, also (u.a.) die Vermittler der Grundkräfte¹¹⁶. Sie tragen, wie gesagt, eine ganzzahlige Spinquantenzahl. Sie war z.B. ein wichtiges Indiz, um das Higgs-Teilchen als Boson und Überträger der Kräfte des Higgs-Feldes identifizieren zu können (Spin 0, da skalar und Parität 1, s.u.). Die Bosonen Photon (Spin 1) und das vermutete Graviton (Spin 2) übertragen die beiden unendlich reichenden Kräfte elektromagnetische Kraft und Gravitation. Sie müssen deshalb masselos sein. Für die starke Kraft sind Gluonen (ebenfalls Spin 1) verantwortlich. Die aktuellen Messungen des LHC¹¹⁷ am CERN haben erheblich zum Verständnis beigetragen. Dies gilt für Proton-Proton-Kollisionen und für Experimente mit Blei-Ionen, die ein Quark-Gluon-Plasma simulieren sollen. Gluonen tragen durch ihre Bindungsenergie erheblich zur Masse eines Atomkerns bei. Die schwache Wechselwirkung wird durch drei Austauscheteilchen ebenfalls mit Spin 1 vermittelt. Das kommt daher, dass diese Kraft drei verschiedene Arten von Strömen beinhaltet: W^+ und W^- vermitteln geladene Ströme zwischen (linkshändigen) Quarks oder zwischen (linkshändigen) Leptonen bzw. zwischen Anti-Quarks und Anti-Leptonen (rechtshändig). Das neutrale Z^0 -Boson bewirkt Wechselwirkungen zwischen allen Quarks/Anti-Quarks bzw. Leptonen/Anti-Leptonen unabhängig von ihrer Händigkeit („Chiralität“).

Korrespondierend zu den sechs Quarks (plus sechs Antiquarks) gibt es sechs Leptonen (und ihre Antiteilchen). Neben dem altbekannten Elektron (e^-) kennt man noch das Myon (μ) und das Tauon (τ). Sie „spüren“ die elektromagnetische Kraft. Dazu gehören drei Neutrinos ν_e , ν_μ und ν_τ . Sie unterliegen der schwachen Kraft. Alle haben Masse, auch wenn man bei Neutrinos noch nicht weiß, warum, also unterliegen alle auch der Gravitation als vierter Kraft. Die Gravitation ist gegenüber allen drei anderen Grundkräften (inkl. der sogenannten „Schwachen Kraft“) allerdings verschwindend klein.

Bei Fermionen führt der Austausch eines Teilchens gegen ein gleichartiges zum gespiegelten Zustand, denn es gilt das sog. Pauli'sche

116 Genauer: Bosonen gehorchen nicht dem Pauli'schen Ausschließungsprinzip, d.h. sie können den gleichen Zustand einnehmen. Für die Symmetrie bedeutet das, dass bei Vertauschung einer der 3 Ortsvariablen bzw. der Spinvariablen die Wellenfunktion von Bosonen nicht das Vorzeichen wechseln; Fermionen dagegen schon (also insb. die Händigkeit/Chiralität wechseln, Boson: $\Psi \rightarrow \Psi$; Fermion: $\Psi \rightarrow -\Psi$). Die Bosonen, die Kräfte vermitteln, sind dabei nicht zusammengesetzte Teilchen. Ein Beispiel für ein zusammengesetztes Boson ist das ^4He -Atom mit seinen suprafluiden Eigenschaften unterhalb des Lambdapunktes bei 2,1768 K.

117 LHC = Large Hadron Collider, der zurzeit leistungsstärkste Teilchenbeschleuniger am Europäischen Kernforschungszentrum CERN bei Genf. Zwei gegenläufige Strahlen mit Protonen kollidieren in den Detektorbereichen mit mittlerweile 2x6,5 TeV (Teraelektronenvolt).

Ausschließungsprinzip (s. Anm.¹¹⁸). So hat ein Elektron beim Wasserstoffatom im Grundzustand (1S-Orbital) z.B. linkshändigen Spin. Beim Wasserstoffmolekül muss das zweite, eigentlich gleichartige Elektron dann den rechtshändigen Spin annehmen. Die Fermionen müssen sich in mind. einer Quantenzahl / Variablen unterscheiden.

Im Jahr 2012 ist mit der Entdeckung des Higgs-Teilchens am Large Hadron Collider (LHC) des Europäischen Kernforschungszentrums CERN bei Genf ein wichtiger Schritt zur Vervollständigung des Modells getan worden, der überhaupt erst die prinzipielle Entstehung von Masse eines Teilchens erklären kann¹¹⁹. Man sollte jedoch bedenken, dass der Großteil der Masse aus Bindungsenergie im Kern stammt und nicht aus dem Higgs-Feld. Das Higgs-Teilchen war trotzdem sehr wichtig für den vorerst vollständigen experimentellen Nachweis des Standardmodells.

Elektroschwache Vereinigung:

Es ist zunächst schwer verständlich, dass sich elektromagnetische Kraft und schwache Kraft vereinigen lassen. Bei kleinen Energien, verglichen mit den Massen der Austauschteilchen (intermediäre Vektorbosonen, W^\pm und Z^0 mit 80 bzw. 90 GeV), unterscheiden sie sich grundlegend. Die schwache Wechselwirkung fällt durch lange Lebensdauer ($>10^{-13}$ s), kleine Wirkungsquerschnitte ($\approx 10^{-43}$ s) und sehr kurze Reichweiten ($\approx 10^{-18}$ m) auf. Strukturell ist die schwache Wechselwirkung besonders durch die großen Massen der Austauschteilchen deutlich verschieden von Interaktionen über Photonen. Die schwache Wechselwirkung kennt keine gebundenen Zustände. Sie ist fast eine eigene „Welt“ innerhalb der Atom- und Kernphysik, außerhalb der langjährigen Erfahrungen mit der elektromagnetischen Kraft. Sie ist Teil von möglichen Wechselwirkungen zwischen Quarks und Leptonen, ohne sie zu binden und gleichzeitig verantwortlich für ihren Zerfall. Die schwache Wechselwirkung wird in der Eichgruppe SU(2) beschrieben; elektromagnetische Kraft in der Eichgruppe U(1) mit dem Photon als Boson. Die Symmetrie U(1) wird lediglich bestimmt durch die Phasentransformation. Eine Vereinigung beider Kräfte bei hohen Energien muss in einer Symmetriegruppe SU(2)xU(1) erfolgen. Das ist auch mit Einschränkungen gelungen.

Um nun die Austauschteilchen in einer elektroschwachen Theorie zu identifizieren, muss man sich zunächst klarmachen, dass die schwache

118 Siehe dazu explizit Fußnote 116.

119 <http://journals.aps.org/prl/pdf/10.1103/PhysRevLett.13.508>, mittlerweile liegen erwartete Ergebnisse vor, dass das Higgs-Boson sowohl an (massive) Leptonen als auch an (massive) Quarks koppelt und ihnen somit Masse verleiht (<http://www.scinexx.de/wissen-aktuell-21676-2017-07-20.html>, 8.8.2017).

Wechselwirkung nur an linkshändige Teilchen (und rechtshändige Antiteilchen) koppelt. Rechtshändige Fermionen nehmen nicht an der Wechselwirkung teil. Man kann einen sog. Schwachen Isospin als neue Quantenzahl T definieren, der dieser Tatsache Rechnung trägt. Der mathematische Mechanismus ist ähnlich wie bei der Quantenchromodynamik mit dem Isospin. Er zeigt, dass aus W^+ , W^- , Z^0 und dem Photon γ in einer vereinigten Theorie die Austauscheteilchen W^+ , W^- , W^0 und B^0 verlangt werden. Man kann salopp sagen, dass die Vereinigung beider Kräfte im Prinzip das Photon γ und das Z^0 als Mischzustände aus B^0 und W^0 darstellt.

Ursprünglich wurde die elektroschwache Wechselwirkung von S. Glashow, A. Salam und S. Weinberg 1967 durch eine (nicht-abelsche) Eichtheorie erklärt, in der die Austauscheteilchen (also Eichbosonen) masselos sind. Das widerspricht aber der geringen Reichweite der schwachen Wechselwirkung und der Beobachtung, dass es massive W^\pm - und Z^0 -Bosonen gibt. Der Symmetriebruch wurde durch Peter Higgs, Robert Brout, François Englert und anderen erklärt. Durch Postulierung eines zusätzlichen Skalarfeldes, des Higgs-Feldes, wird die Symmetrie gebrochen und die W^\pm - und Z -Bosonen erhalten, wie später 1983 am CERN beobachtet, Masse¹²⁰. Damit wird die Symmetriebrechung nicht den Bosonen angelastet, sondern einer Eigenschaft des Raumes im Grundzustand, also des Vakuums. Das Massenverhältnis von W^\pm - und Z^0 -Bosonen sagt der sogenannte Weinbergwinkel voraus,

$$\frac{m_W}{m_Z} = \cos \theta_W \approx 0,8768$$

Experimentell wurde etwa 0,882 gefunden.

Zitat: Die Grundidee der elektroschwachen Vereinheitlichung ist, [dass] das Photon und das Z^0 als zueinander orthogonale Linearkombinationen von B^0 und W^0 zu beschreiben. Die beiden neutralen Felder B^0 und W^0 , die an die gleichen Endzustände koppeln können, mischen zu den physikalisch beobachteten Feldern γ und Z^0 mit den Weinberg-Mischungswinkel θ_W der elektroschwachen Wechselwirkung¹²¹.

Diese Stelle markiert im Prinzip den Stand der heutigen experimentellen Forschung.

120 Wichtig war in der Theorie von Higgs und anderen Forschern auch, dass in ihren gruppentheoretischen Überlegungen das Photon masselos bleibt.

121 http://www-hera-b.desy.de/people/nedden/lectures/02_03/struma/struma2_kap11.pdf

An einer Vereinigung der elektroschwachen und starken Kernkraft wird noch gearbeitet. Meist werden die Ansätze unter dem Begriff „Grand Unified Theory“ (GUT) geführt. Im engeren Sinne der Symmetrie müssen die beiden Eichtheorien des Standardmodells in eine Eichgruppe zusammengeführt werden; also die Quantenchromodynamik mit der Eichgruppe $SU(3)$ und der elektroschwachen Theorie mit $SU(2) \times U(1)$. Sie hat u.a. die Eigenschaft zu besitzen, dass die starke Kraft bei höheren Energien schwächer wird und die vereinigte elektroschwache Kraft stärker wird (Stichworte „asymptotische Freiheit“, „Energieabhängigkeit der starken Kopplungskonstanten α_8 “, α_8 steht für 8 verschiedene Gluonen). Die vielfach mit extremer Genauigkeit verifizierten einzelnen Theorien müssen sich als niederenergetische Grenzfälle der GUT ergeben. Experimentell wurde eine Reihe von Experimenten installiert, meist kilometertief, um Störereignisse zu minimieren. Sie sollen den Protonenzerfall untersuchen, der in vereinigten Theorien postuliert wird. Dieser ist noch nicht nachgewiesen worden. Die Energie, bei der die Vereinigung mindestens stattfinden kann, konnte aber mit 10^{24} eV dadurch abgeschätzt werden. Die Halbwertszeit liegt mind. bei 10^{32} Jahren. Der Fokus dieser Experimente liegt heute weitgehend auf der Neutrinforschung; der Nachweis eines Protonenzerfalls ist aber nach wie vor ein Ziel dieser Anlagen¹²².

Supersymmetrie:

Ausgangspunkt für eine plausible, wenn auch spekulative Erweiterung namens Supersymmetrie ist die lange bekannte Poincaré-Gruppe. Ähnlich, wie die Euklidische Gruppe alle Kongruenzabbildungen im dreidimensionalen Raum enthält, gilt dies in der vierdimensionalen Raumzeit für die Poincaré-Gruppe. Die Poincaré-Gruppe hat sogenannte erzeugende Elemente (siehe Mathematik-Teil), also Gruppenelemente, die alle Elemente der Gruppe erzeugen können. Darüber hinaus ist es aber plausibel, dass Poincaré-Transformationen alle Erzeugenden von physikalisch relevanten Symmetrien invariant lassen sollten, auch wenn sie nichts mit der Raumzeit zu tun haben. Die Konsequenz bedeutet, dass die Poincaré-Gruppe erweitert werden kann durch sogenannte supersymmetrische Transformationen, die Fermionen und Bosonen ineinander umwandeln können. Die Situation erinnert an die Voraussage des Positrons, bei der auch eine plausible mathematische Lösung nicht einfach als physikalisch unsinnig zurück gewiesen werden konnte, sondern die Existenz eines neuen Teilchens nahelegte. Diese Supersymmetrie (SuSy) verdoppelt aber auf einen Schlag die Anzahl an

122 Literaturhinweise (vor allem aus Sicht der Neutrinforschung): Heinrich Päs, Die perfekte Welle, Piper, München 2011; Frank Close, Neutrino, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2012.

Elementarteilchen, weil jedem heutigen Teilchen im Standardmodell ein supersymmetrisches Teilchen zugeordnet werden kann (Boson zu Fermion und umgekehrt). Insbesondere sollte das leichteste SuSy-Teilchen einigermaßen stabil sein und könnte ein Kandidat für die kalte, dunkle Materie (Cold Dark Matter, CDM) sein. Wichtigstes Argument für die SuSy wäre die Auflösung eines der größten existierenden Widersprüche in der modernen Physik. Die Energiedichte im feldfreien Raum wird durch SuSy endlich und erhält einen plausiblen Wert. Die Masse des korrespondierenden SuSy-Teilchens kann nicht gleich der Masse des Teilchens im Standardmodell sein, sonst hätte man diese Teilchen bereits gefunden. Sollten sie existieren, dann liegt auf jeden Fall ein Symmetriebruch vor. Aber auch bei den derzeit laufenden Experimenten am LHC mit 13 TeV sind bisher keine Indizien für Supersymmetrie gefunden worden.

Spekulative Entwicklungen

Bestimmte Symmetriebetrachtungen wurden gerade in der Astronomie und der Kosmologie besonders interessant, weil hier extreme Phänomene zu erklären sind. Dass die Raumzeit in einem Schwarzen Loch eine Singularität bilden soll, also eine mathematische Unendlichkeit und ein physikalisch undefinierter Punkt, an dem alle Naturgesetze zusammen brechen, ist unbefriedigend. Erst recht herrschten in der Nähe des sogenannten Urknalls extreme Bedingungen, die unsere heutigen Theorien nicht mehr beschreiben können. Bereits die Spezielle Relativitätstheorie hat Inkonsistenzen bei der Umrechnung von (unbeschleunigten) Bezugssystemen vermieden. Die allgemeine Relativitätstheorie (ART) ist eine Theorie, die unabhängig von Bezugssystemen ist („Relativitätsprinzip“), schwere und träge Masse gleich behandelt („Starkes Äquivalenzprinzip“) und damit auch beschleunigte Bezugssysteme einbezieht¹²³. Außerdem wird der Raum nicht mehr wie bei

123 Die Allgemeine Relativitätstheorie ist sehr komplex, aber das Prinzip kann man versuchen einfach zu erklären: Links stehen mit R Ausdrücke zur Krümmung des Raumes, g stellt den Bezug zur Metrik des Raumes her. Ergänzt wurde später die kosmologische Konstante Λ in Abhängigkeit zur Metrik. Rechts stehen alle Energieformen in Form des Energie-Impuls-Tensors $T_{\mu\nu}$. $T_{\mu\nu}$ ist kein beliebiger symmetrischer Tensor 2. Ranges, sondern muss der Energie- und Impulserhaltung genügen

$$R_{\mu\nu} - \frac{R}{2} g_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu}$$

$R_{\mu\nu}$ und R charakterisieren die Krümmung des Raumes im Rahmen der Riemann'schen Geometrie. $g_{\mu\nu}$ sorgt in dem Raum für eine Metrik, also für Abstände und Winkel, die allerdings nicht überall gleich, sondern ortsabhängig sind. $T_{\mu\nu}$ steht für die Energie inkl. Materie und G ist die Newton'sche Gravitationskonstante, c die Lichtgeschwindigkeit, π die Kreiszahl. Die Indices μ und ν stehen paarweise für die 4

Newton als absolut angenommen. Hier war Einstein stark von Ernst Mach beeinflusst. Die ART ist hervorragend empirisch bestätigt; zuletzt wieder durch Messungen im Rahmen des im Gravitationsfeld verzögerten Funkverkehrs mit der Raumsonde Cassini („Shapiro-Effekt“). Trotzdem sind in den letzten Jahrzehnten alternative Gravitationstheorien entstanden. Irritierend war insbesondere auch die Entdeckung, dass sich Sterne weiter weg vom galaktischen Zentrum deutlich schneller bewegen, als es die Newton'sche Theorie und damit auch die ART vorhersagen. Das wird meist mit nicht-baryonischer kalter dunkler Materie erklärt (**Cold Dark Matter**), die nicht elektromagnetisch wechselwirkt, also aus bisher unbekanntem Elementarteilchen besteht. Der Punkt wurde bei der Supersymmetrie angesprochen. Das kosmologische Standardmodell bezieht zudem die sog. kosmologische Konstante Λ (Lambda) mit ein, die die Energie des Raumes repräsentiert¹²⁴. Das gängige Modell heißt deshalb Λ CDM.

Die Phänomene können aber bedingt auch durch Abänderung der etablierten physikalischen Gesetze erklärt werden. Eine radikale Variante, die Modifizierte Newton'sche Dynamik (MOND), stellt die Existenz von Dunkler Materie infrage und postuliert, dass die Kepler'schen Gesetze und die Newton'sche Gravitationstheorie für sehr geringe Beschleunigungen nicht exakt gelten¹²⁵.

Raumzeitkoordinaten 0,1,2,3. Ihre 16 Paare definieren ein Gleichungssystem mit 16 Gleichungen. Die Tensoren sind symmetrisch, d.h. dass z.B. $R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}$ gilt. Das bedeutet, dass nur 10 Gleichungen wegen Symmetrien voneinander unabhängig sind. Raumzeit wird so zu Materie und Energie in eine geometrische Beziehung gesetzt. So konnte John Wheeler formulieren: „*Die Materie sagt der Raumzeit, wie sie sich zu krümmen hat, und die Raumzeit sagt der Materie, wie sie sich bewegen muss.*“ Zitiert nach Dieter Bedenig, *Physikalische Weltbilder*, Weissenstein Verlag, August 2011, S.152. Die mathematische Darstellung folgt einer Vereinfachung aus Carlo Rovelli, *Die Wirklichkeit, die nicht so ist, wie sie scheint*. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg, 2016, S.102

124 Der Zusammenhang liegt nahe, ist aber noch nicht bewiesen.

125 Im Gegensatz zu vielen anderen neuen Modellen mutet die Mathematik bei MOND erstaunlich einfach an: Es wird eine neue Naturkonstante a_0 mit der Dimension einer Beschleunigung eingeführt. Sie führt zu einem Bewegungsgesetz der Form $\frac{GM}{r^2} = \frac{a^2}{a_0}$. (G=Gravitationskonstante, M=Masse, a=Beschleunigung, r=Abstand des Sterns z.B. vom galaktischen Zentrum). Die Rotationsgeschwindigkeit $v = (GMa_0)^{\frac{1}{4}}$ hängt nicht mehr von r ab. Mit $a_0 \approx 10^{-10} \frac{m}{s^2}$ ist a_0 viel zu klein, als dass es messbare Effekte bei der Rotationsgeschwindigkeit der äußeren Planeten geben könnte. Allerdings könnte die Masse des Gravitons nicht mehr zu Null angenommen werden müssen. Die jüngsten Beobachtungen von Gravitationswellen haben für die Gravitonmasse eine obere Grenze von $1,2 \cdot 10^{-22} \text{ eV}/c^2$ ergeben. Das entspricht einer unteren Schranke für die Compton-Wellenlänge des Gravitons von $\lambda_g > 10^{13} \text{ km}$ (B. P. Abbott et al. (LIGO Scientific Collaboration and Virgo Collaboration): *Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*. In: *Physical*

MOND kann die Rotationskurven von Galaxien erstaunlich gut interpretieren, aber viele Wissenschaftler sträuben sich, deshalb Jahrhunderte alte Gesetze infrage zu stellen; Symmetrieaspekte bleiben bei MOND unberücksichtigt.

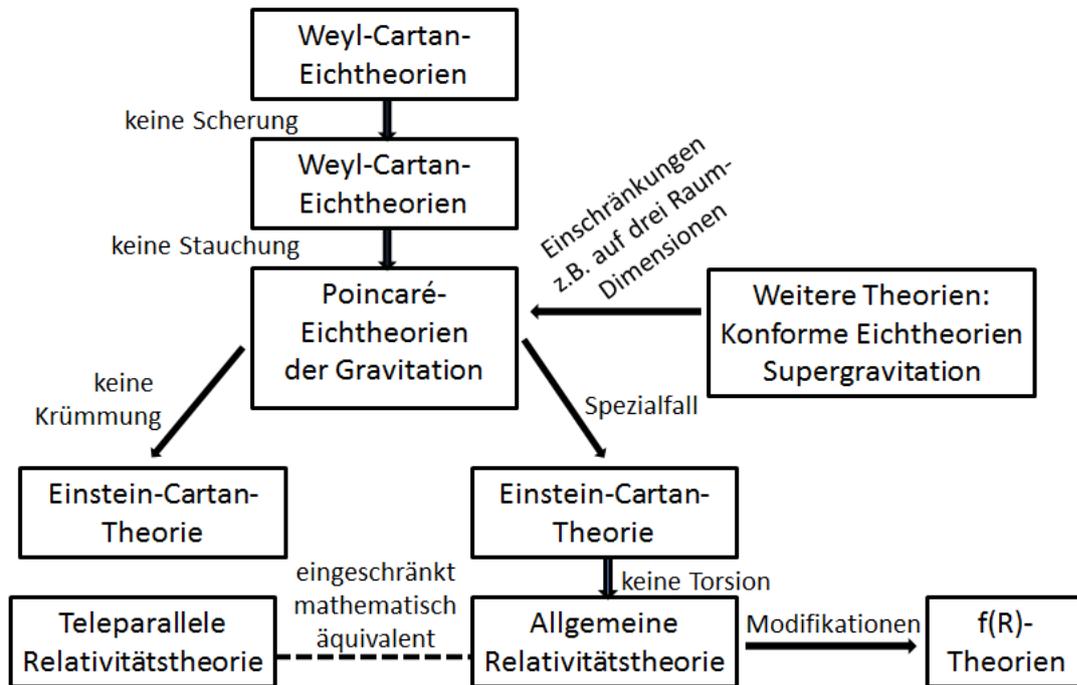


Abb. 34: Zur Illustration von erweiterten Anforderungen an Gravitationstheorien sei auf die Grafik von Rüdiger Vaas verwiesen¹²⁶. Auf jeden Fall ergeben sich bei steigender Hierarchiestufe immer größere Anforderungen an die Symmetrie, um die Invarianz von Erhaltungsgrößen zu gewährleisten. Die ART lässt sich also in übergeordnete Geometrien einbetten.

Noch radikaler ist ein Ansatz des Niederländers Erik Verlinde¹²⁷. Er wurde Anfang November 2016 publiziert und hat schon in der Vorabveröffentlichung für theoretische Furore und Überprüfung anhand von Beobachtungsdaten gesorgt. Streng genommen wird die Gravitation als 4. Grundkraft in dieser Theorie obsolet, weil sie durch quantenmechanische Effekte zwischen Raum und Materie erklärt wird. Die Theorie integriert eine Vielzahl an neuen Konzepten in Kosmologie und Astrophysik, wie die Quanteninformationstheorie, die Thermodynamik Schwarzer Löcher oder die Idee

Review Letters. 116, Nr. 6, 2016. arxiv:1602.03837. bibcode:2016PhRvL.116f1102A. doi:10.1103/PhysRevLett.116.061102).

126 Vaas, Rüdiger: Jenseits von Einsteins Universum. Franckh- Kosmos Verlag 2015, S. 397 zit. nach M. Blagojević, F. W. Hehl (Hrsg.): Gauge Theories of Gravitation. Imperial College Press 2013. In freundlicher Abstimmung mit dem Franck-Kosmos Verlag wurde die Grafik 1:1 vom Autor umgesetzt (Bildzitat).

127 Verlinde, E.P.: Emergent Gravity and the Dark Universe. arXiv, 1611.02269, 2016. S.a. Spektrum der Wissenschaft, 5/17, S. 56 ff.

eines holographischen Prinzips, also der äquivalenten Beschreibung eines Raumzeit-Gebietes durch Eigenschaften seiner Oberfläche (Reduktion um eine Dimension). Sie knüpft an Verlindes Konzept der „entropischen Gravitation“ an, das von der Stringtheorie inspiriert ist und ebenfalls die Gravitation nicht über das Austauschteilchen Graviton erklärt. Sie wird als emergentes, also aus sich selbst ergebendes Zusammenspiel von mikroskopischen Freiheitsgraden gesehen.

Obwohl nicht zuerst publiziert, hat die Brans-Dicke-Theorie einen gewissen Einfluss gewonnen¹²⁸. Ihre Grundhypothese ist, dass die Newton'sche Gravitationskonstante G eben keine Konstante ist (genauer: dass das „Starke Äquivalenzprinzip“ nicht gilt). Die Symmetrieanforderungen komplizieren sich dadurch enorm. Die Theorie führt einen zusätzlichen Parameter ω ein, der im Nenner der (gegenüber ART) zusätzlichen Terme auftritt und die Theorie in die ART überführt, wenn ω gegen unendlich geht. Nach heutigem Stand ist ω schon größer 40.000¹²⁹. Interessant ist die Tatsache, dass der niederenergetische Grenzfall bei der String-Theorie eher zu einer Theorie vom Brans-Dicke-Typ, als zur ART führt.

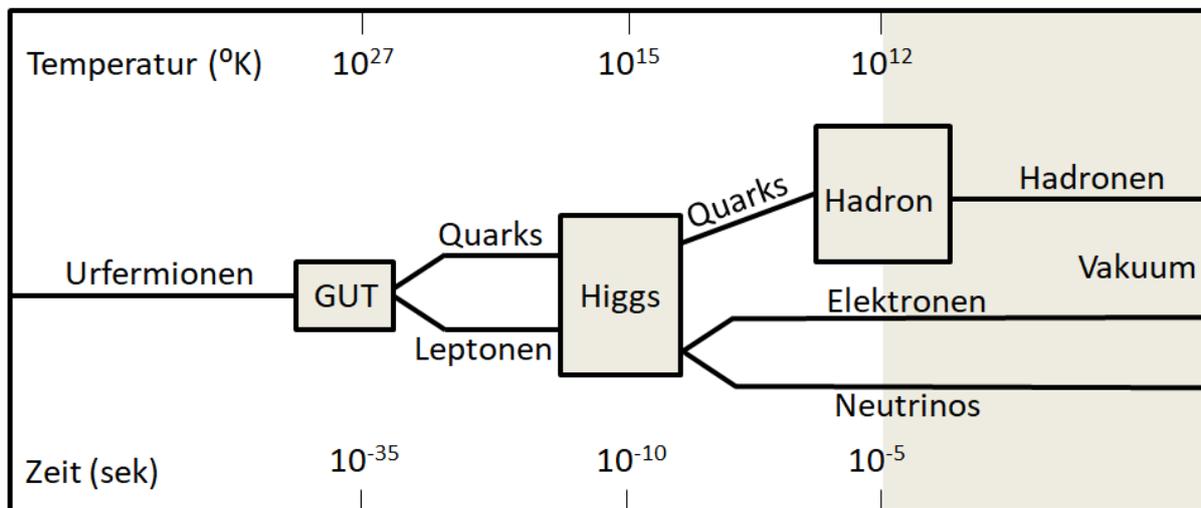


Abb. 35: Die Übergänge durch Symmetriebrechung im frühen Universum und ihre Auswirkungen auf **Materieteilchen**¹³⁰.

Einstein war selbst der Auffassung, dass die ART irgendwann durch eine übergeordnete Theorie ersetzt werden muss, für die wiederum die ART ein Grenzfall ist. Einsteins Arbeit in späteren Lebensjahren an einer

128 Siehe z.B. https://en.wikipedia.org/wiki/Brans-Dicke_theory (29.03.2017).

129 Vaas, Rüdiger: Jenseits von Einsteins Universum, Kosmos, Stuttgart 2015, S. 413f.

130 Nach Helmut Satz, Kosmische Dämmerung, C.H.Beck, München 2016, S. 87. Nachdruck mit freundlicher Genehmigung des C.H.Beck Verlages.

Vereinheitlichten Feldtheorie, die Gravitation und Elektromagnetismus in einer Theorie beschrieben sollten, werden oft als Fehlschlag bezeichnet. Natürlich hat er sein selbst gestecktes Ziel nicht erreicht. Er hat aber durchaus nach einigen Sackgassen verstanden, welche Symmetrieanforderungen für erweiterte Theorien erforderlich sind. Mit der Einstein-Cartan-Theorie wurde ein erster Schritt gemacht. Abb. 34 zeigt, dass weitere Schritte folgten.

Doch mit einer verbesserten Beschreibung der Gravitation, ohne dass die Quantentheorie einbezogen wird, ist es nicht getan.

Man vermutet in unmittelbarer zeitlicher Nähe zum Urknall einen spontanen Symmetriebruch der vier Grundkräfte – insbesondere möglicherweise zuerst der Abspaltung der Gravitation von den noch kurzzeitig vereinigten drei, zu diesem Zeitpunkt gleich starken anderen Kräften.

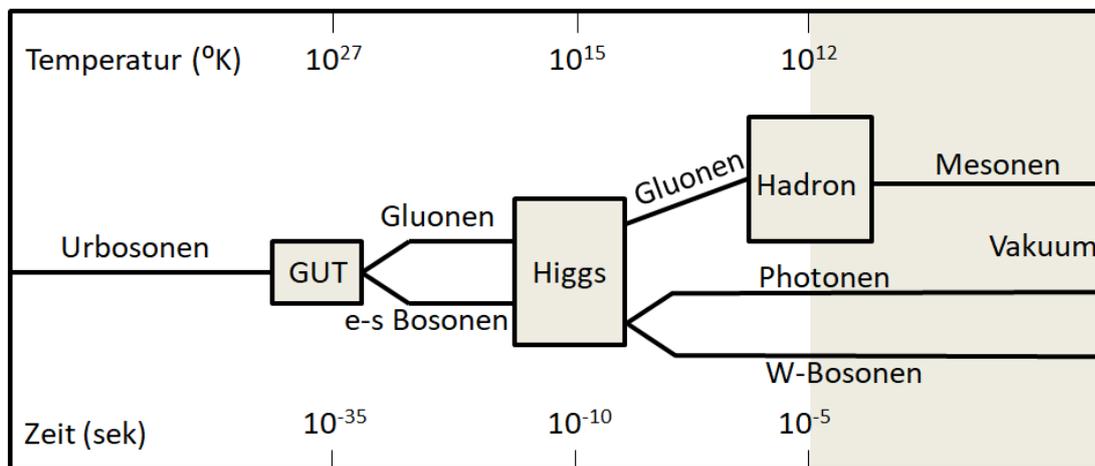


Abb. 36: Die Übergänge durch Symmetriebrechung im frühen Universum und ihre Auswirkungen auf **Kraftteilchen**¹³¹.

Sie liegen vor allem und zuerst in der Phase vor dem sogenannten GUT-Übergang, in der starke Kernkraft, die schwache Kernkraft und die elektromagnetische Kraft wahrscheinlich vereinigt waren. GUT steht hier, wie oben bereits thematisiert, für **Grand Unified Theory**, die diese Vereinigung der drei Kräfte zukünftig beschreiben muss. Dies ist ein Zustand deutlich höherer Symmetrie und es gibt eindeutige experimentelle Belege aus Teilchenbeschleunigern, dass dies bei etwa $2 \cdot 10^{16}$ GeV der Fall ist. Diese Phase ist eng verbunden mit der kosmischen Inflation. Die Modelle wurden in den letzten Jahrzehnten, manche sagen willkürlich¹³², modifiziert, aber die

131 Nach Helmut Satz, Kosmische Dämmerung, C.H.Beck, München 2016, S. 88. Nachdruck mit freundlicher Genehmigung des C.H.Beck Verlages.

132 Siehe Anna Ijjas, Paul J. Steinhardt, Abraham Loeb; Inflationsmodell in der Kritik, Spektrum der Wissenschaft 6.2017, S. 12 f.

meisten Physiker sind grundsätzlich davon überzeugt, dass zwischen 10^{-35} s und maximal 10^{-30} s nach dem Urknall sich das Universum inflationär ausgedehnt hat¹³³. Diese Inflationsphase muss, bei allen guten Argumenten, trotzdem genauer hinterfragt werden. Die sehr genauen Daten über die Verteilung und Temperaturschwankungen der kosmischen Hintergrundstrahlung durch den Planck-Satelliten verlangen neue Modelle. Inflationäre, abstoßend wirkende Energie bleibt auf jeden Fall eine Hypothese ohne gänzlich überzeugende experimentelle Belege. Jenseits dieser Grenze von etwa 10^{-35} s beginnt auf jeden Fall erst recht die Spekulation.

Die drei Kräfte waren „anfangs“ nicht unterscheidbar, d.h. erst nach dieser Phase (dem GUT-Übergang als Symmetriebruch) haben sich die vereinigte elektroschwache Kraft (mit der Symmetriegruppe $SU(2) \times U(1)$) und die starke Kernkraft (genauer Quantenchromodynamik, nicht-abelsche Symmetriegruppe $SU(3)$) getrennt. Die Grafiken Abb. 35 und 36 zeigen weiterhin, dass damit nicht nur unterschiedliche Materieteilchen bildeten, sondern auch Kraft vermittelnde Teilchen entstanden, die entweder masselos oder unterschiedlich massebehaftet sein konnten. Es ist das Forschungsfeld der relativistischen Quantenfeldtheorie. Hier sagt ein Theorem („Goldstone-Theorem“), wenn die Symmetrie spontan bricht, die Existenz masseloser Teilchen voraus (Photon bei elektromagnetischer Kraft, das vermutete Graviton bei der Gravitation).

Starke Wechselwirkung	Elektrostatik	Magnetostatik	Schwache Wechselwirkung	Gravitation
	Elektromagnetische Wechselwirkung			
Quantenchromodynamik	Quantenelektrodynamik		Allgemeine Relativitätstheorie	
	Elektroschwache Wechselwirkung			
Standardmodell			Quantengravitation	
Große vereinheitlichte Theorie (GUT)				
„Weltformel“, Theory of Everything (ToE)				

Abb. 37: Historische und mögliche zukünftige Entwicklung unseres Verständnisses über die vier Naturkräfte. Quantengravitation, Große vereinheitlichte Theorie (GUT) und die sogenannte Weltformel oder Theory of Everything sind in Entwicklung und spekulativ.

133 Manche Autoren sprechen von 10^{-36} bis 10^{-34} s (z.B. Claus Kiefer).

Umgekehrt „vermeidet“ der Higgs-Mechanismus¹³⁴ masselose Teilchen und verleiht den Eichbosonen der starken Kernkraft (Gluonen) und der schwachen Kraft (W^+ und W^- sowie dem Z-Boson) Masse. Das spielt sich in den ersten Momenten ab, in denen das Universum in dieser kurzen Zeit um den Faktor 10^{26} gewachsen ist und damit seine bis heute erhaltene flache Geometrie erhalten hat.

Die theoretischen Physiker haben eine Reihe von Theorien entwickelt, die die Symmetrie der vier Grundkräfte unmittelbar nach dem Ursprung von Raum, Materie und Zeit und in ihrer weiteren Entwicklung beschreiben sollen¹³⁵. Diese Forschung geht unvermindert weiter. Die Quantengravitation versucht dabei die Quantentheorie auf die Gravitation anzuwenden. Die Schleifen-Quantengravitation¹³⁶ postuliert dabei, dass die Raumzeit kein beliebig teilbares Kontinuum darstellt, sondern eine kleinste, nicht weiter teilbare Entität besitzt. Raumvolumina oder Oberflächen hätten somit eine gewisse Körnigkeit im Bereich der Planck-Länge¹³⁷. Es bilden sich durch den gewählten mathematischen Ansatz diskrete, nicht weiter teilbare Strukturen¹³⁸. Es gibt keine kleinere Oberfläche als $8\pi L_P^2$, also etwa 10^{-66} m². Der Ansatz ist wohlbegründet und soll mittlerweile von Näherungslösungen befreit sein. Er entsteht dadurch, dass Diracs Gleichungen auf die Allgemeine Relativitätstheorie angewendet werden. Es sind erste Hinweise auf die Möglichkeit experimenteller Überprüfung veröffentlicht worden¹³⁹.

134 P. W. Higgs, "Broken Symmetries, Massless Particles and Gauge Fields," Physics Letters, Vol. 12, No. 2, 1964, pp. 132-133.

135 Bildnachweis: erstellt nach einer Grafik unter https://de.wikipedia.org/wiki/Große_vereinheitlichte_Theorie

136 Alternativer Begriff: kanonische Quantengravitation

137 Die Planck-Zeit ist die Zeitdauer, die das Licht benötigt um die Planck-Länge zu durchlaufen. Die Planck-Länge L_P , Planck-Zeit T_P und Planck-Masse M_P kombinieren die 3 Universalkonstanten, die für Gravitation (Newtons Gravitationskonstante G), Relativität (Lichtgeschwindigkeit c) und Quantentheorie (Planck'sches Wirkungsquantum $\hbar=h/2\pi$) stehen und sind somit ideale Maßeinheiten:

$$L_P = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^3}} \approx 1,62 \cdot 10^{-35} \text{ m.}$$

$$T_P = \frac{L_P}{c} = \sqrt{\frac{\hbar G}{c^5}} \approx 5,40 \cdot 10^{-44} \text{ s.}$$

$$M_P = \frac{\hbar}{L_P c} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G}} \approx 2,17 \cdot 10^{-8} \text{ kg.}$$

138 Informationen dazu siehe z.B. Carlo Rovelli, Die Wirklichkeit, die nicht so ist, wie sie scheint. Rowohlt, Reinbek bei Hamburg, 2016, S. 179ff.

139 Siehe Abhay Ashtekar, Ivan Agullo, William Nelson, The pre-inflationary dynamics of loop quantum cosmology: Confronting quantum gravity with observations, submitted 01. Feb 2013 (v1), last revised 08. Apr 2013 (v2), <https://arxiv.org/abs/1302.0254> (28.02.2017).

Mathematisch schön und physikalisch vielversprechend schien lange Zeit die Stringtheorie zu sein, in die bei weitem die meisten personellen Ressourcen in diesem Bereich der mathematischen Physik der letzten Jahrzehnte gegangen sind. Sie geht davon aus, dass auch scheinbar punktförmige Teilchen eine Dimension größer Null haben (z.B. schwingende Saiten, strings). Entscheidend ist jedoch der Unterschied, dass erstmals nicht nur eine Quantisierung der Gravitation angestrebt wird, sondern aller Grundkräfte in einer „Theory of Everything“. Man will ebenfalls physikalisch unsinnige unendliche Ausdrücke vermeiden, aber die damit verbundene Mathematik ist extrem schwierig. Die Tatsache, dass mit Edward Witten 1990 erstmals ein Physiker die Fields-Medaille¹⁴⁰ bekommen hat, zeigt, wie mathematisch anspruchsvoll die theoretische Physik in diesem Bereich geworden ist (Wittens Arbeitsgebiete: allgemeine Relativitätstheorie, Supersymmetrie, topologische Quantenfeld-Theorien).

Leider sind experimentell überprüfbare Voraussagen zur Verifizierung der Theorie kaum zu verzeichnen. Was bleibt sind immer bessere Belege für das Standardmodell der Elementarteilchen. Die Experimente am LHC, bald bis hin zu 14 TeV, können das eine oder andere weitergehende Modell mangels Ergebnissen in bestimmten Energiebereichen ausschließen. Insbesondere konnten bisher keine supersymmetrischen Teilchen gefunden werden, die die Stringtheorie fordert und deren stabilster Vertreter ein Kandidat für die Dunkle Materie wäre. Das gibt z.B. den Verfechtern der Schleifen-Quantengravitation Auftrieb. Solche negativen Ergebnisse sind aber eher frustrierend. Dabei gibt es durchaus Hinweise auf eine Physik jenseits des Standardmodells. Z.B. hat man in den Daten des LHCb-Detektors Abweichungen gefunden. So sollten beim Zerfall von B-Mesonen genauso viele Elektronen wie Myonen entstehen. Der Detektor fand jedoch eine möglicherweise signifikante Unregelmäßigkeit. Der aktuelle Wiederanlauf des LHC soll hier möglichst Klarheit verschaffen¹⁴¹. Die Stringtheorie ist nur in einem 10-, 11- (oder 26-dimensionalen) Raum konsistent. Das ist aber nicht das einzige Problem. Ausgerechnet die Stringtheorie und ihre Weiterentwicklung zur M-Theorie, auf die aus mathematischen Gründen große Hoffnungen gesetzt werden und an der sehr viele Forscher arbeiten, bewegt sich in scheinbar experimentell unerreichbaren Größenordnungen im Bereich der Planck-Länge L_P von 10^{-35} m. Planck-Länge und Planck-Zeit (10^{-44} s) stellen gewisse prinzipielle Grenzen dar, weil dort hypothetische Strukturen, wie die Strings, aufgrund der Heisenberg'schen Unschärferelation zu Schwarzen Löchern kollabieren müssten bzw. müssen. Sie eignen sich deshalb auch als Einheiten. Zum

140 Die Fields-Medaille wird gerne als Nobel-Preis für Mathematik bezeichnet; wird aber nur alle vier Jahre an maximal vier Forscher unter 40 Jahren vergeben.

141 Informationsquelle <http://www.lhc-facts.ch/index.php?page=news2017> (3.6.2017)

Vergleich: Die „Auflösung“ des LHC liegt für die geplanten 14 TeV Kollisionen bei 10^{-19} m, das entspricht dem Zehnmillionstel eines Billionstelometers und liegt immer noch 16 Größenordnungen über der Planck-Länge. In kaum absehbarer Zeit wird jedes Labor der Welt Teilchen dieser Planck-Größenordnung als punktförmig betrachten und damit eventuell vorhandene Substrukturen nicht identifizieren können. Zudem ist es noch offen, wie die bestehenden zeitabhängigen Theorien inkl. der klassischen Physik als Grenzfälle hervorgehen sollen, denn der Zeitparameter ist als isolierte Größe durch die Quantelung der Raumzeit praktisch „verloren gegangen“. Beiden Theorien sind gemeinsam, dass sie von einer fest vorgegebenen Raumzeit wegkommen wollen. Beide Theorien wollen sozusagen ohne starren Hintergrund auskommen. Im Bereich der derzeit erreichbaren Energien von aktuell 13 TeV hat man jedoch andererseits Erkenntnisse gewonnen, die hin zu höheren Energien in Teilchenkollisionen extrapolierbar sind. Dies betrifft die Vereinigung der Grundkräfte und ihre mögliche mathematische Beschreibung. In der 4-dimensionalen Raumzeit der ART sind 3 Variablen plus Zeit notwendig; in der Stringtheorie mind. 10 variable Größen. Man vergleicht diese 10 Variablen gerne mit für alle Kräfte gleichartigen Billardbanden, an denen die Bewegung eines Teilchens „abprallt“. Hier kommt mit der unendlich dimensional Gruppe $E(10)$, „10“ steht für die minimale Variablenanzahl, eine mathematische Gruppenstruktur ins Spiel, die überraschend gut auf die extrapolierte Physik der Hochenergiekollisionen passt¹⁴² und deutlich höhere Symmetrie besitzt. Offen ist noch die bereits im mathematischen Teil angesprochene Frage, ob $E(10)$ überhaupt eine plausible Raumzeit liefern kann. Man hofft, dass die Quantengravitation bzw. sogar die Stringtheorie in einem unendlich dimensional $E(10)$ -Raum beschrieben werden kann. Doch auch elementarere Fragen sind offen: Warum gibt es drei makroskopisch erlebbare Raumdimensionen? Warum gibt es drei Familien von Elementarteilchen im Standardmodell? Warum enthält das Standardmodell drei Grundkräfte, die mit den unitären Gruppen $U(1)$, $SU(2)$ und $SU(3)$

142 Siehe ein Übersichtsbeitrag der Max-Planck-Gesellschaft von 2006: <https://www.mpg.de/324293/forschungsSchwerpunkt1> mit einigen Hinweisen auf Originalveröffentlichungen im Anhang (28.04.2017). Es handelt sich um eine sogenannte Kac-Moody-Lie-Algebra, an der vor allem zwei grundsätzliche Fragestellungen mathematisch untersucht werden: 1) Inwieweit bleibt die $E(10)$ -Symmetrie erhalten, wenn man sich zeitlich weiter weg vom Urknall bewegt. 2) Welche Rolle haben die Fermionen im $E(10)$ -Modell bzw. wie verhält es sich mit der Supersymmetrie. Die Materie ist aus Fermionen aufgebaut; die Kräfte werden durch Bosonen vermittelt. Die Supersymmetrie weist jedem Fermion ein Boson zu und umgekehrt und ist ein wesentlicher Bestandteil der String-Theorie. Erneut auch an dieser Stelle den Hinweis auf die kürzlich gelungene mathematische Konstruktion von Zukunft und Vergangenheit auf dieser Basis unter: <https://arxiv.org/abs/1702.08426> (28.04.2017).

beschrieben werden können? Warum gibt es drei verschiedene Spins elementarer Teilchen: 0, $\frac{1}{2}$ und 1?¹⁴³

Ein weitergehendes Verständnis der vier Grundkräfte kann nur mit mathematischen und physikalischen Symmetriebetrachtungen erreicht werden, weil vielfach bewährte, aber isolierte Theorien, darin als Spezialfälle enthalten sein müssen. Es stellt sich die Frage, ob die jetzigen großen Modelle noch etwas weitergeführt werden sollten. Wir müssen zumindest wissen, ob mathematisch aus den jetzigen Ansätzen die etablierten Theorien als Grenzwert entstehen können und konsistent bleiben. Das sind insbesondere Allgemeine Relativitätstheorie, Quantentheorie und das Standardmodell der Elementarteilchen; für die Stringtheorie kommt noch elektroschwache und Kernkraft dazu. Es ist zurzeit die größte Herausforderung, weil besonders beide herausragenden Theorien des 20. Jahrhunderts sich konzeptionell widersprechen. Dies gilt insbesondere für den Zeitbegriff. Hier verwendet die Quantentheorie im Prinzip noch die absolute Zeit Newtons. Gravitation als stetige geometrische Eigenschaft des Raumes und die Forderung nach Quantisierung der Raumzeit sind ebenfalls scheinbar inkonsistente mathematische Forderungen an eine gemeinsame, übergeordnete Theorie. Schuld ist auch die Tatsache, dass ein beliebig teilbares Kontinuum, z.B. des Raumes, immer zu unendlichen Werten führt. In früheren Theorien (z.B. der Quantenelektrodynamik oder der Quantenchromodynamik) konnten diese unendlichen Werte durch einen (eigentlich mathematisch unzulässigen) Trick beseitigt werden („Renormierbarkeit“): Man „kürzte“ unendliche Werte weg. Das scheint bei der Quantengravitation nicht zu funktionieren und die Stringtheorie wird noch grundsätzlicher. Nur wenn es eine nicht weiter teilbare Untergrenze gibt, der Raum als granular, also aus diskreten Teilen bestehend, behandelt wird oder Teilchen als nicht mehr punktförmig angesehen werden, können unendliche Werte vermieden werden¹⁴⁴. Sollte diese Vereinigung gelingen, kommt spätestens dann die Physik zum Tragen, d.h. die Frage an die Natur, ob sie sich gemäß der dann hoffentlich als mathematisch konsistent erwiesenen neuen Theorie verhält.

143 Siehe z.B. Jakob Schwichtenberg; Durch Symmetrie die moderne Physik verstehen, Springer Spektrum, Berlin 2017, S.3. Das Graviton als Austauscheteilchen der Gravitationskraft ist hypothetisch. Es gibt aber gute theoretische Gründe, dass es, wenn es existiert, den Spin 2 haben sollte. Das Gravitationsfeld sollte über einen symmetrischen Tensor 2. Stufe, als Energie-Impuls-Tensor, beschrieben werden und das kraftvermittelnde Teilchen somit den Spin 2 besitzen (siehe auch die Passage zur ART). Beim Elektromagnetismus ist es ein Vektor und somit hat das Photon den Spin 1.

144 Es ist philosophisch interessant, dass hier die Atomtheorie des griechischen Philosophen Demokrit sogar bis in den Raum hinein, sozusagen bis zu den „atomaren Raumteilchen“, wirkt.

Die moderne Kosmologie hat zweifellos viele faszinierende Ideen hervorgebracht und noch mehr wichtige Fragen gestellt. Einige dieser Ideen haben bereits heute in manchen Bereichen die Mathematik wesentlich befruchtet und sind faszinierende Theoriegebäude geworden. Aber noch ist nicht klar, inwieweit diese Ideen mit der Realität etwas zu tun haben¹⁴⁵.

Die dabei entstehenden und schon entstandenen Modelle müssen in nicht zu ferner Zukunft experimentell überprüfbare Voraussagen machen. Der Bereich des experimentell Möglichen und der Bereich des experimentell Machbaren sollte möglichst nahe beieinander liegen. Sie müssen mittelfristig zeigen, dass sie Teil einer Naturwissenschaft sind und nicht nur Teil der Mathematik. Dabei wird man höchstwahrscheinlich immer auch Symmetriebetrachtungen im mathematischen Sinne und im physikalischen Sinne als Invarianz physikalischer Gesetze unter Symmetrietransformationen mit einbeziehen müssen.

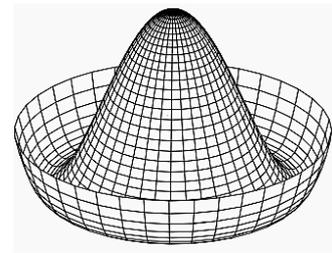


Abb. 38: Eine Kugel auf der Spitze des „Sombros“ besitzt maximale Symmetrieeigenschaften. Rollt sie in beliebiger Richtung herunter, so entspricht dies einer spontanen Symmetriebrechung, wobei potentielle Energie frei wird.

Symmetriebrüche

Am Schluss soll noch auf nichtspekulative Phänomene hingewiesen werden, die, obwohl meist sehr subtile Ausnahmen von den physikalischen Gesetzen, entscheidend für unsere Welt sind. Sie sind aber auch beim Thema Symmetrie und Erhaltungsgrößen relevant, z.B. wenn die wichtige Frage auftaucht, wieso wir in einer materiedominierten Welt leben, in der Antimaterie nur in winzigen Mengen existiert. Gemeint sind Symmetriebrüche, die besonders bei der C-, P- und T-Symmetrie solche grundsätzlichen Fragen berühren.

Symmetriebrechung ist seit langem bei Systemen bekannt, die einen Phasenübergang durchlaufen. So kann um mehrere Grade unterkühltes flüssiges Wasser bei kleinsten Erschütterungen plötzlich gefrieren. Die hohe Symmetrie der flüssigen Phase, in der keine Raumrichtung ausgezeichnet ist, reduziert sich auf die restriktive Gittersymmetrie des Eiskristalls. Ein weiterer Phasenübergang spielt sich bei Ferromagneten bei der Curie-Temperatur ab.

145 Umgekehrt ist es problematisch das Vorhandensein von Realität, wie wir sie beobachten, damit zu begründen, dass es sonst keine Beobachter gäbe, wenn die Realität anders wäre. Dieses Argument ist als anthropisches Prinzip bekannt. Es ist legitim, dies zu konstatieren. Aber beim Zusammenspiel von theoretischem Modell und experimentellen Indizien reicht die bloße Existenz von Beobachtern als naturwissenschaftlich fundiertes Indiz noch nicht aus.

Oberhalb dieser Temperatur ist das Material drehsymmetrisch; die Spins sind isotrop verteilt. Eine Magnetisierung unter spontaner Festlegung der Polrichtung erfolgt unterhalb dieser Temperaturgrenze. Sie liegt bei Cobalt am höchsten (1121 °C), bei Eisen bei 768 °C, bei Nickel bei knapp der Hälfte (360 °C) und bei Gadolinium schon bei Zimmertemperatur¹⁴⁶. In beiden Fällen bewirkt die niedrigere Temperatur ein Übergang zu weniger Ordnung im Sinne von weniger Freiheitsgraden. Gruppentheoretisch wird die volle Rotationssymmetrie (der orthogonalen Gruppe $O(3)$) auf die Untergruppe der Drehungen um eine ausgezeichnete Achse ($O(2)$) reduziert. Kristallisieren ist dabei ein (unstetiger) Phasenübergang 1. Ordnung (es wird Kristallisationswärme frei bzw. umgekehrt muss Energie nur zum Schmelzvorgang und nicht gleich zur Temperaturerhöhung zugeführt werden). Magnetisierung ist ein kontinuierlicher Phasenübergang 2. Ordnung, denn das Maß an Magnetisierung geht beim Erhitzen stetig gegen Null.

Symmetriebrechung kann bei einem Quantensystem mit nur endlich vielen Freiheitsgraden nicht spontan sein. Es gibt keine Symmetrie, die den Grundzustand in einen anderen Zustand mit gleichem Energieniveau überführen kann¹⁴⁷. Erst bei unendlich vielen Freiheitsgraden, z.B. bei der quantenmechanischen Behandlung von Problemstellungen aus der Festkörperphysik, gibt es Szenarien mit spontaner Symmetriebrechung¹⁴⁸. Ein eklatantes Beispiel von Symmetriebrechung äußert sich in einer Paritätsverletzung bei der schwachen Wechselwirkung. Es ist ein sehr subtiler Effekt. Die psychologische Bedeutung dieser Entdeckung war jedoch enorm und ist bei näherer Betrachtung geradezu verstörend für den sogenannten „gesunden Menschenverstand“. Sie bedeutet, dass es Prozesse gibt, die „im Spiegel beobachtet“ anders ablaufen als in einem spiegelbildlich angeordneten Quantenexperiment. In der makroskopischen Welt wäre das ein Widerspruch in sich. Spiegelsymmetrie ist sicher eine elementare Basis für das menschliche Symmetrieverständnis in unseren gewohnten makroskopischen Dimensionen.

Die Physiker waren schockiert, als bei einem Experiment mit radioaktivem Cobalt-60, bei dem Nickel-60, ein Elektron und ein Elektron-Antineutrino

146 de.wikipedia.org/wiki/Curie-Temperatur, 05.12.2016

147 Die Schrödinger-Gleichung ist im Prinzip in diesem Sinne eindeutig bis auf die komplementären Äquivalenzen wie Orts- und Impulszusammenhang, die sich auch in der berühmten Heisenberg'schen Unschärferelation wiederfinden. Fasst man Materie als Welle auf, so lässt sich z.B. Ort und Impuls jeweils nicht beliebig genau messen. Ist die Ortsunschärfe Δx und die Impulsunschärfe Δp , so ist $\Delta x \cdot \Delta p \sim h$, (also proportional zur Planck-Konstante, meist schreibt man: $\Delta x \cdot \Delta p \gtrsim h$). Dagegen unterliegen Elementarladung oder Spin („Drehimpuls“ bei Elementarteilchen) nicht der Unschärferelation und konnten mit großer Genauigkeit gemessen werden.

148 Bildnachweis: de.wikipedia.org/wiki/Spontane_Symmetriebrechung (01.02.2017)

entstehen, eine 100%-ige Paritätsverletzung (der Punktsymmetrie am Ursprung) auftrat¹⁴⁹. Es erschien als selbstverständlich, dass es immer einen Punkt als Symmetriezentrum geben müsste, so dass das so gespiegelte Experiment gleichartig ablaufen muss. Dies war unzweifelhaft bei diesem Vorgang nicht der Fall.



Eine Verletzung der Paritätserhaltung hätte niemand für möglich gehalten, ist aber ein weiteres Beispiel für Quantenverhalten, das unserem Alltagsempfinden empfindlich widersprechen kann.

Als unumstößlich galt die Symmetrie gegenüber Spiegelung (P wie Parität) und Vertauschen von Materie gegen Antimaterie (C wie Charge also Ladungskonjugation). Außerdem existiert dort, wo noch keine Entropie-Effekte herrschen, auch eine Symmetrie gegenüber der Zeitumkehr T (T wie time).

Man vermutete deshalb zunächst, dass wenigstens die Kombination aus C und P, also die anschließende Vertauschung von Teilchen und Antiteilchen, eine absolut gültige Erhaltungsgröße sei. Doch acht Jahre später fand man auch dabei eine Symmetriebrechung, allerdings nur im winzigen Zweipromillebereich, wenn neutrale Kaonen (K-Mesonen) in zwei Pionen (π -Mesonen) zerfallen.



Beide Phänomene sind theoretisch noch nicht restlos geklärt, aber experimentell unstrittig. Schon Andrej Sacharow leitete daraus ab, dass das offenbare Übergewicht von Materie zu Antimaterie im Universum durch die CP-Verletzung erklärt werden kann. Allerdings ist der neutrale Kaonenzerfall, noch nicht geeignet, dieses starke Übergewicht von Materie zu erklären.

Schon etwas anders sieht es bei sogenannten B-Mesonen aus. Die vier B-Mesonen-Typen enthalten das beauty-Quark oder Antiquark - entweder zusammen oder in Verbindung mit stabilen u- oder d-Quarks bzw. Antiquarks. Für den Zerfall des beauty-Quarks wurde das LHCb-Experiment am LHC im CERN konzipiert. Das „b“ steht für „beauty“. Der Detektor ist ein sogenanntes Vorwärtsspektrometer und wird nahe am Strahl platziert. Bei B-Mesonen wurde die CP-Verletzung bereits nachgewiesen. Erst Anfang des Jahres wurde aber am CERN durch die LHCb-Arbeitsgruppe berichtet, dass es starke Anzeichen gibt, dass auch bei Baryonen mit beauty-Quark, also Bindungszuständen von drei Quarks, eine lang gesuchte CP-Verletzung

149 Das Experiment der chinesisch-amerikanischen Physikerin Chien-Shiung Wu in Zusammenarbeit mit der Tieftemperaturgruppe des National Bureau of Standards ist sehr gut in de.wikipedia.org/wiki/Wu-Experiment beschrieben (07.12.2016).

auftreten kann¹⁵⁰. Dies wurde beim Λ_B^0 -Teilchen und seinem Antiteilchen beobachtet. Als gesicherte Entdeckung gilt ein Sigma-Wert von 5; das entspricht einer Fehlerwahrscheinlichkeit von 1 zu 1.744.278 oder 0,000 057 3303%. Die ursprünglich untersuchten 6.000 plus 1.000 weiteren Fälle waren noch nicht für eine unzweifelhafte Entdeckung ausreichend, aber mittlerweile ist Sigma 5 erreicht. Das Λ_B^0 -Teilchen besteht aus einem up-, einem down- und einem beauty-Quark (auch bottom-Quark genannt) und zerfällt in einem sehr seltenen Prozess in ein Proton und 3 geladene Pionen bzw. Kaonen ($\Lambda_B^0 \rightarrow p\pi^-\pi^+\pi^-$ bzw. $\Lambda_B^0 \rightarrow p\pi^+K^-K^-$). Man fand teilweise eine über 20%-ige Verletzung der CP-Symmetrie in Form unterschiedlicher Winkel, in denen die Zerfallsprodukte von Teilchen und Antiteilchen auseinander schossen. Es ist die erste CP-Verletzung, die man bei Baryonen gefunden hat. Sie hat zwar die gleiche physikalische Ursache, nämlich die Schwache Kraft, wie der Zerfall von B-Mesonen. Kaonen bzw. D- oder B-Mesonen können aber oszillieren d.h. ineinander übergehen. Deshalb ist die Beobachtung beim Baryon aufgrund der anderen Bindungsverhältnisse ein eigenständiges Phänomen. Die Analyse beruht übrigens noch auf den älteren Daten als der LHC erst ca. die halbe Leistungskraft (7 TeV) erreicht hatte.

Keine Verletzung fand man bisher bei der CPT-Symmetrie, also der gleichzeitigen Vertauschung von Ladung, Parität und Zeitumkehr, wenn die Theorie bestimmte Voraussetzungen erfüllt^{151,152}. Die Symmetrien C, P und T

150 Siehe z.B. www.weltmaschine.de/news/30012017 (17.02.2017) oder lhcb-public.web.cern.ch/lhcb-public/Welcome.html#BaryonCP (17.02.2017)
Ausführlich siehe auch „New source of asymmetry between matter and antimatter“ by Stephanie Pandolfi, Originalpublikation unter www.nature.com/nphys/journal/vaop/ncurrent/full/nphys4021.html (17.02.2017)
Originalmeldung: <http://home.cern/about/updates/2017/04/lhcb-finds-new-hints-possible-standard-model-deviations> (18.4.2017).

Der LHCb-Detektor, dem die Entdeckung zu verdanken ist, wurde für diese Untersuchungen speziell konzipiert. Er hat die Abmessungen 21 x 13 x 10 m und ein Gewicht von 5600 Tonnen. Weit über 1.000 Forscher arbeiten an Betrieb, Optimierung und Datenauswertung. Das LHCb-Experiment konzentriert sich auf die Frage, warum wir in einem materiedominierten Universum leben und hat damit ein zentrales Bauziel erreicht (siehe LHCb-Webseite unter <http://lhcb-public.web.cern.ch/lhcb-public/>). Weitere Entdeckung des LHCb Anfang 07/2017: Baryon erstmals mit 2 schweren Quarks (2 charm, 1 up-Quark, 2-fach positiv, Name Ξ_{cc}^{++} , Ξ_{cc}^{++}); press.cern/sites/press.web.cern.ch/files/file/press/2017/07/lhcb_paper_2017.07.06.pdf. Ein weiterer, erst kürzlich von der T2K-Kooperation des Super-Kamiokande-Experiments bekannt gegebener, starker Hinweis könnte im unterschiedlichen Umwandlungsverhalten von Neutrinos und Antineutrinos liegen. Siehe <https://naturwissenschaften.ch/topics/particlephysics/92546-moegliche-erklaerung-fuer-die-dominanz-der-materie-ueber-antimaterie-im-universum> bzw. <https://www.t2k.org/docs/talk/282/kekseminar20170804> (17.08.2017).

151 Wolfgang Pauli leitete ab, dass es keine CPT-Verletzung geben kann, wenn die Theorie u.a. folg. Voraussetzungen erfüllt: Invarianz gegenüber bestimmten Lorentz-

bleiben bei starker Kraft, elektromagnetischer Kraft und Gravitation erhalten. Nur in der schwachen Wechselwirkung sind C und P offenkundig und seit langem bekannt einzeln verletzt, wie das Beispiel Neutrino in Abb. 39 zeigt.

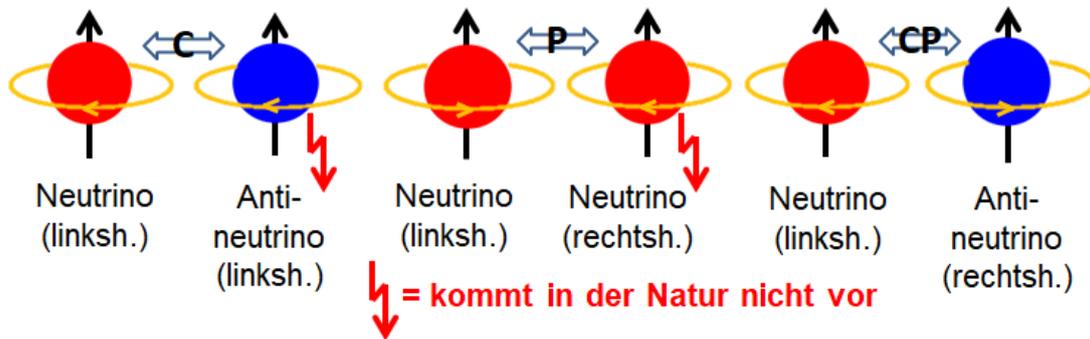


Abb. 39: Verdeutlichung der physikalisch unmöglichen Ladungsumkehr C (linkshändig zu linkshändig) und der Parität P (linkshändig zu rechtshändig). Erst beide zusammen als CP-Symmetrie ergeben ein in der Natur vorkommendes, rechtshändiges Antineutrino-Teilchen.

Neutrinos kommen in der Natur nur linkshändig vor, denn ihr Spin („Eigendrehimpuls“) ist immer antiparallel zur Bewegungsrichtung („Impulsrichtung“). Antineutrinos dagegen sind immer rechtshändig. Die CP-Symmetrie gilt in den überwiegenden Fällen zu 100%. Lediglich der Kaonen-Zerfall ist bisher ein bestätigtes Gegenbeispiel (99,8 %) mit weitreichenden Konsequenzen für unser Symmetrieverständnis und wahrscheinlich auch für unsere Existenz, denn wir leben offenbar in einem von Materie dominierten Universum und nicht in einem von Antimaterie dominierten. Da das Beauty-Quark kurz nach dem Urknall kurzzeitig gebildet wurde (Masse $4,18 \pm 0,03$ GeV), so ist die wahrscheinliche CP-Verletzung ein starkes Indiz, dass vor allem in dieser Phase das Ungleichgewicht zwischen Materie und Antimaterie entstanden ist. Ursache dürfte die schwache Wechselwirkung sein, der auch die von starker Kernkraft zusammengehaltenen Hadronen unterliegen. Der entsprechende Zeitpunkt wird bestimmt durch den Hadron-Phasenübergang

Transformationen. Diese Forderung geht tief in die Gruppentheorie hinein, weil sie von der Theorie fordert, dass Abbildungen (Homomorphismen) eines Objektes, hier Naturgesetzes, auf sich selbst umkehrbar eindeutig sind (bijektiv). Bijektive Homomorphismen nennt man Isomorphismen; Isomorphismen auf sich selbst nennt man Automorphismen. Gute Beispiele solcher homomorpher Theorien sind die Spezielle Relativitätstheorie oder die Quantenelektrodynamik QED, also im weitesten Sinne die Theorie des Elektrons. Speziell wurden in diesem Beitrag mit dem Begriff „isomorph“ Gruppenisomorphismen erwähnt. Dies kann man verallgemeinern.

152 Bildnachweis: Erstellt vom Autor.

bei 10^{12} K und 10^{-5} s nach dem Urknall (s.a. Abb. 35, 36), bei dem Nukleonen (und Mesonen) entstanden und nur die stabilen Nukleonen Proton und Neutron aus up und down Quarks übrig blieben. Ideal wäre es allerdings, wenn ein Ungleichgewicht gegenüber Materie direkt z.B. beim neutralen Antiwasserstoff-Atom nachweisbar wäre. Im Gegensatz zu geladenen Teilchen ist es sehr schwierig, in einer Falle ausreichend viele und ausreichend lange Antiwasserstoffatome zu speichern, um präzise Messungen ausführen zu können. Hier sind beim ALPHA-Experiment des CERN Fortschritte erzielt worden. Allerdings zeigt es sich bisher, dass die CPT-Symmetrie mit einer Genauigkeit von $2 \cdot 10^{-10}$ erhalten bleibt. Das experimentelle Prinzip der sogenannten Laserspektroskopie wird aber sicherlich in Zukunft noch weitere und präzisere Untersuchungen möglich machen. Dies gilt sogar für mögliches unterschiedliches Verhalten von Materie und Antimaterie in neuen Gravitationstheorien¹⁵³.

Symmetrie und Symmetriebrechung sind insbesondere von entscheidender Bedeutung in der Kosmologie geworden. Sie spielen, wie bereits angesprochen, bei einigen Theorien eine zentrale Rolle, die beschreiben bzw. erklären wollen, wie die vier Grundkräfte Gravitation, starke Wechselwirkung, schwache Wechselwirkung und Elektromagnetismus sich in den ersten Momenten nach dem Urknall entwickelt haben und vor allem, warum sie solch unterschiedliche Beträge haben. Hier wirkt Temperaturerhöhung so, dass die Kräfte ununterscheidbar werden und ein Zustand höherer Symmetrie entsteht. Man kann mit Fug und Recht sagen, dass sich mit dem Begriff der Symmetrie die grundlegenden Fragen zur frühen Geschichte unseres Universums verbinden

153 Ahmadi, M. et. al.: Observation of the $1S-2S$ Transition in Trapped Antihydrogen. In: Nature 541, S. 506-510, 2016. Nach Spektrum der Wissenschaft 7.17, S. 30-32.

Fazit:

Symmetrie ist in allen Naturwissenschaften ein Zustand größerer Ordnung. Es genügen weniger Sprachmittel, um einen Zustand mit größerer Symmetrie zu beschreiben. Die mathematische Beschreibung ist in der Regel allgemein, also disziplinübergreifend, anwendbar. Allerdings haben die einzelnen wissenschaftlichen Disziplinen unterschiedliche Anforderungen an Ordnungsprinzipien. Terminologien unterscheiden sich und können verwirren. Die Kristallographie untersucht strenge, stereometrische Formen in der Natur. Die Gruppentheorie liefert die Hilfsmittel zur vollständigen Systematisierung. In der Chemie können die Symmetrieeigenschaften von ganzen Molekülen komplexer sein, weisen insgesamt oft nur Punktsymmetrie auf und sind oft nur lokal begrenzt anwendbar. Hier ist die Wahl der Methode entscheidend, um z.B. bei der IR-Spektroskopie lokale Schwingungsverhältnisse mehr oder weniger theoretisch unabhängig von der Gesamtsymmetrie des Moleküls messen zu können. Mit Punktgruppen auf Basis der Gruppentheorie lassen sich Symmetrieeigenschaften aller Moleküle vollständig und umfassend klassifizieren. Am wenigsten trägt in der Biologie die mathematische Beschreibung bei. Oft muss der Symmetriebegriff sehr weit gefasst werden oder es sind starke Idealisierungen erforderlich. Hier empfindet und schätzt der Naturliebhaber aber die Symmetrie besonders, aber nicht nur, als ästhetisches Kriterium in der Biodiversität. In den genannten Naturwissenschaften geht es ausschließlich um die Symmetrie räumlicher Strukturen.

Physiker verstehen Symmetrie jedoch allgemeiner als ein Mehr an Freiheitsgraden und vor allem als Invarianz von Erhaltungsgrößen gegenüber Transformationen bei den Naturgesetzen. Die Frage nach Symmetrie ist immer die Frage nach Erhaltungsgrößen. Klassisches Beispiel ist der Phasenübergang, bei dem der kristalline Zustand (durch Abkühlung) formal geringere Ordnung aufweist, weil er durch feste Winkel und andere Parameter Restriktionen unterliegt. Grundlegend ist die Erhaltung von Energie, Impuls und Drehimpuls. In der modernen Physik sind konkrete Größen, wie z.B. der Spin, aber auch abstrakte Symmetrien, wie die Parität, Erhaltungsgrößen.

Die Palette an mathematisch-naturwissenschaftlichen Disziplinen ist damit übrigens keineswegs vollständig. Im vorliegenden Beitrag wurde die Skalensymmetrie weitgehend ausgeklammert. Dabei hat sich in den letzten Jahrzehnten in Verbindung mit den Begriffen Selbstähnlichkeit, Chaos und Fraktalen ein riesiger Bereich der mathematisch-naturwissenschaftlichen und auch technischen Forschung aufgetan, der in zahlreiche Einzeldisziplinen hineinreicht. Es gibt durchaus Bezüge zur geometrischen Gruppentheorie, die sich aber der plakativen Gliederung dieses Beitrages entziehen.

Verzeichnis der wichtigsten im Text verwendeten Abkürzungen

!	Zeichen für Fakultät; $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$
(+), (-)	Moderne Darstellungsweise für rechts- und für linksdrehend
$\bar{\nu}_e$	Elektronantineutrino
K_L^0	neutrale Kaonen (siehe auch K-Mesonen)
L_P	Planck-Länge (ca. 10^{-35} m), analog Planck-Zeit T_P (ca. 10^{-44} s) bzw. Planck-Masse M_P (ca. $2,17 \cdot 10^{-8}$ kg)
Λ_B^0	Teilchen, besteht aus einem up-, einem down- und einem beauty-Quark (auch bottom-Quark genannt)
{A, B, C, D}	Permutationsdarstellung einer hier vierelementigen Menge. Erster Buchstabe kennzeichnet die Ecke links unten; dann nummeriert man weiter gegen den Uhrzeigersinn, d.h. mathematisch positiv.
	Zeichen für „parallel“
\in	Zeichen für „Element aus“
\sphericalangle	Zeichen für Winkel
\triangleq	Zeichen für „entspricht“
\circ	Zeichen bezeichnet in diesem Beitrag die Verknüpfung der Symmetrioperationen
\downarrow	botanisches Zeichen für zygomorph
2π	entspricht 360° , hier die Identität bei Drehungen
$3m$	Punktgruppe nach der Hermann-Mauguin Terminologie; entspricht C_{3v} (nach Schoenflies).
ART	Allgemeine Relativitätstheorie
a_x^{-1}	Inverses Element von a_x d.h. es gilt $a_x \circ a_x^{-1} = i$
B-Mesonen	Quark/Antiquark Teilchen, die ein beauty-Quark oder sein Antiteilchen und das jeweilige u- oder d-Quark (bzw. Antiquarks) enthalten
\mathbb{C}	Menge der komplexen Zahlen
C	siehe auch CPT, P, T, Umkehr der Ladung, entspricht Vertauschung eines Teilchens gegen sein Antiteilchen
C_{3v}	Punktgruppe mit 3-zähliger Drehachse und drei vertikalen Spiegelebenen
C_4	Drehachse, hier vierzählig
CDM	Cold Dark Matter, nicht elektromagnetisch wechselwirkende, hypothetische Materieform
CERN	Europäisches Kernforschungszentrum (bei Genf)
CPT	C = Ladungskonjugation, P = Räumliche Spiegelung, T = Zeitumkehr
d	wird meist als Symbol für eine Drehung verwendet; als Elementarteilchen ist das d(own)-Quark gemeint

D(extro)	rechtsdrehend
D ₄	Diedergruppe, z.B. eines regelmäßigen Vierecks/Quadrates; wird oft auch als D ₈ bezeichnet, da sie 2x4=8 Elemente hat.
D _{4h}	Punktgruppe nach Schoenflies
DNA	Desoxyribonukleinsäure, Molekül als Träger der Erbinformation
dp	beim Raman Effekt bedeutet dp depolarisiert
e ⁻	Elektron
E(10)	Mathematische Gruppe, die in der Nähe des Urknalls zur Vereinigung der vier Grundkräfte vermutet wird (String-Theorie).
ESR	Elektronenspinresonanz, misst Änderung des Elektronenspinzustandes oder Hyperfeinzustandes.
eV	Elektronenvolt
exp(x)	steht für die Exponentialfunktion $f(x)=e^x$ mit der Euler'schen Konstanten e als Basis
GeV	Gigaelektronvolt, 10 ⁹ eV
GUT	Grand Unified Theory, Theorie zur Vereinigung von starker, schwacher und elektromagnetischer Kraft
h	Planck'sches Wirkungsquantum
Hg.	Herausgeber
HIV	Humanes Immundefizienz-Virus
HTML	Hypertext Markup Language (englisch für Hypertext-Auszeichnungssprache), ist eine textbasierte Sprache zur Strukturierung digitaler Dokumente
i oder I	Identitätsabbildung, z.B. Drehung um 0 Grad, in Formeln ist $i=\sqrt{-1}$
Im(c)	Imaginärteil einer komplexen Zahl c
IR	Infrarot-Spektroskopie, neben dem Raman-Effekt die Messung von Schwingungen in Molekülen
K	Kelvin, Grad über dem absoluten Nullpunkt
K ⁺ , K ⁻	Kaonen, K-Mesonen, die ein strange-Quark enthalten (z.B. $\bar{u}s$, $u\bar{s}$)
†	botanisches Zeichen für disymmetrisch (90° gedreht)
L(evo)	linksdrehend
LCAO	linear combination of atomic orbitals
LHC	Large Hadron Collider, Teilchenbeschleuniger am CERN
LHCb	Large Hadron Collider beauty, Teilchendetektor am CERN
M ₂ (\mathbb{C})	bedeutet 2x2 Matrizen mit komplexen Werten
MOND	Modifizierte Newton'sche Dynamik, stellt die Existenz von Dunkler Materie infrage.
\mathbb{N}	Menge der natürlichen Zahlen
NMR	Kernresonanz-Spektroskopie
O(2)	Untergruppe der Drehungen um eine ausgezeichnete Achse
O(3)	orthogonalen Gruppe, also volle Rotationssymmetrie im Raum

p	polarisiert beim Raman Effekt, Proton in der Teilchenphysik
P	Parität, Symmetrie bzgl. Spiegelung am Ursprung, Vorzeichenumkehr der Raumkoordinaten, siehe auch CPT, T.
Q_8	Gruppe der Quaternionen
\mathbb{R}	Menge der reellen Zahlen
Rac	Racemat, Mischung aus rechtsdrehend und linksdrehend
Raman	Beim Raman-Effekt (RE) bzw. der Raman-Spektroskopie geht es um inelastische Streuung von Licht an molekularen, kristallinen oder amorphen Substanzen.
Re(c)	Realteil einer komplexen Zahl c
R_z	Rotation um die z-Achse, analog R_x, R_y
s, ms	Sekunde(n), Millisekunde(n)=tausendstel Sekunde
$SU(2) \times U(1)$	Eichgruppe der elektroschwachen Theorie
$SU(3)$	Eichgruppe der Quantenchromodynamik (starke Kernkraft)
SuSy	Supersymmetrie
T	Symmetrie bzgl. Zeitumkehr; Vorzeichenumkehr der Zeitkoordinate, siehe auch CPT, C, P.
T_d	Tetraeder-Punktgruppe
TeV	Teraelektronenvolt, 10^{12} eV
T_x	Translation parallel zur x-Achse, analog T_y, T_z
\bar{u}	Antiquark zum u-Quark, analog \bar{d} , Antiteilchen des d-Quarks
$U(1)$	globale Eichsymmetriegruppe, sog. Kreisgruppe, also alle Drehungen um einen Punkt im 2-Dimensionalen
u-Quark	Up-Quark, Elementarteilchen, neben d(own)-Quark Bestandteil der „normalen“ Materie; \bar{u} und \bar{d} bezeichnen die Antiteilchen
VB	Valenzbindung
W^+, W^-, Z	Überträger der schwachen Kraft
$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	Verknüpfung von 3 zyklischen Gruppen der Ordnung 2, geschrieben \mathbb{Z}_2^3 ; analog $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ für Ordnung 2 verknüpft mit Ordnung 4.
\mathbb{Z}_8	Zyklische Gruppe, hier mit 8 Elementen
α, β, γ	Winkel in Kristallsystemen
β^- -Zerfall	Beta-Minus Zerfall, radioaktiver Zerfall u.a. zu Elektronen
Δp	Impulsunschärfe
δ_s	bzw. δ_{as} steht für symmetrische bzw. asymmetrische Deformationsschwingungen
Δx	Ortsunschärfe
Λ	Lambda steht für die sog. kosmologische Konstante
v_s	(bzw. v_{as}) sind symmetrische bzw. asymmetrische Valenzschwingungen, also schwingende Veränderungen des Bindungsabstandes.

π^- bzw. π^+ Pionen (π -Mesonen), $\pi^+ \triangleq u\bar{d}$, $\pi^- \triangleq \bar{u}d$, $\pi^0 \triangleq$ Überlagerung $d\bar{d}$ mit $u\bar{u}$
 π Kreiszahl 3,14..., π -Elektronen sind delokalisierte Elektronen in chemischen Bindungen.
 σ z.B. $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, Symbol für eine Spiegelung
 \hbar gesprochen h-quer, Planck'sches Wirkungsquantum $h/2\pi$

Glossar

(unterschiedlich besetzter Begriffe in den einzelnen Fachdisziplinen)

Legende:

(B)=Biologie, (C)=Chemie/Molekülphysik/Kristallographie, (M)=Mathematik, (P)=Physik

Chiral:

(B) „spiegelbildlich“ (siehe Beispiel „Hände“, daher das Synonym „Händigkeit“); (C) unterschiedlicher Drehsinn bei ansonsten gleichen Molekülen; (P) Händigkeit, bei Vertauschung einer der 3 Ortsvariablen bzw. der Spinvariablen wechselt die Wellenfunktion von Bosonen nicht das Vorzeichen wechseln; bei Fermionen dagegen schon.

Dieder:

(M) Di-edergruppen haben die Form D_{2k} , $k \in \mathbb{N}$. In der Mathematik werden synonym zwei Nomenklaturen D_n und D_{2n} verwendet; z.B. D_4 , wenn der Schwerpunkt auf den Drehungen eines Quadrates liegt oder D_8 wenn die Anzahl an Elementen (hier 8) hervorgehoben werden soll. In diesem Beitrag wird D_n (z.B. D_4) verwendet. (C) Bezeichnung nach Schoenflies folgt einer eigenen Systematik und kann differieren.

Enantiomere:

(C) bis auf den Drehsinn gleiche Moleküle; (B) Bedeutung in Biologie und Pharmazie mit weitergehenden Aspekte (z.B. unterschiedlicher Geruch, Geschmack, Toxizität, Stoffwechseleigenschaften etc.).

Invers/Inversion:

(M) In der Gruppentheorie ergibt die Verknüpfung eines Elementes mit seinem inversen Element wieder das neutrale Element der Gruppe bzgl. der Verknüpfung. (C) Punktspiegelung, wird oft mit i=Inversion abgekürzt. Die Punktgruppe C_i entspricht der Punktgruppe S_2 , also eine 2-zählige Drehspiegelachse als einzigem Symmetrieelement (triklin-pinakoidal).

Isomerie:

(B) Korrelation eines Parameters (z.B. Gewicht der Leber) mit dem Körpergewicht; (C) unterschiedliche Moleküle bzw. Substanzen mit gleicher Summenformel (Konstitutionsisomerie), Enantiomere und Diastereomere haben gleiche Summenformel und Struktur (Konfigurationsisomerie), wobei sich nur Enantiomere wie Bild und Spiegelbild verhalten. Die dritte Gruppe sind Konformationsisomere, bei denen kein Bindungsbruch, sondern nur die Rotation um eine Einfachbindung nötig ist, um in eine andere Struktur zu kommen. Weitere Differenzierungen und ausführliche Strukturierung siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Isomerie> (05.06.2017).

Isomorph/Isomorphie:

(C) Kristalle mit gleichen Strukturen auf molekularer Ebene und damit Voraussetzung für Mischkristalle; (M) hier meist Gruppen mit gleicher Struktur, die sich durch eine bijektive Abbildung umkehrbar eindeutig ineinander überführen lassen.

Neutral:

(M) neutrales Element, Verknüpfung mit jedem Element der Gruppe ergibt wieder Element; (P) Teilchen trägt keine Ladung (insbesondere elektrische Ladung).

Parität:

(M) Eigenschaft einer ganzen Zahl ob sie gerade oder ungerade ist; (P) Invarianz gegenüber Raumspiegelung (siehe auch Signum).

Signum:

(M) Vorzeichen (gerade, ungerade), Anzahl Transpositionen in einer Permutation; (C) irreduzible Abbildung bzgl. Anzahl Transpositionen in einer Permutation in der Charaktertafel; (P) Aussage zur Parität.

Symmetrisch:

(M) spezielle Bedeutung symmetrische Gruppe S_n für die Drehungen eines regelmäßigen n-Ecks; (C) Ein Molekül ist genau dann symmetrisch ist, wenn es im Raum mindestens zwei nichtunterscheidbare Orientierungen gibt; (P) Invarianz von Erhaltungsgrößen gegenüber Transformationen bei den Naturgesetzen.

Translationssymmetrisch:

(M) z.B. Sinus-Funktion bzgl. Verschiebung entlang der x-Achse; (C) periodische Verschiebungen im Kristallgitter ohne Konsequenzen für die sog. Elementarzelle; (P) Invarianz bzgl. Koordinatentransformationen des Raumes.

Literaturhinweise:

Für eine umfassende Literatursammlung zum Thema Symmetrie siehe
<http://vismath2.tripod.com/denes1/index.html>

Dénes Nagy: Symmetro-graphy (Bibliographic section)

Symmetry:

A bibliography of interdisciplinary books

(university-textbooks, scholarly monographs, popular-scientific works)

About 600 books in 25 languages

Adams, Fred, Laughlin, Greg; Die fünf Zeitalter des Universums, dtv München 2002.

Alder, Ken; Das Maß der Welt, Bertelsmann München 2002.

Ananthaswamy, Anil; Reisen an die Grenzen der Physik, Spektrum Akademischer Verlag, 2012.

Andretsch, Jürgen, Mainzer, Klaus (Hg.) Philosophie und Physik der Raumzeit, B I Wissenschaftsverlag Mannheim Wien Zürich 1988.

Barrow, John D.; Das 1x1 des Universums, Rowohlt TB 2006.

Berry, M.; Kosmologie und Gravitation, Teubner Stuttgart 1990.

Börner, Gerhard; Kosmologie, Fischer Kompakt, Frankfurt/M. 2002.

Clegg, Brian; Vor dem Urknall, rowohlt, Reinbek bei Hamburg, 2012.

Close, Frank; Antimaterie, Spektrum Akademischer Verlag, 2009.

Close, Frank; Neutrino Spektrum Akademischer Verlag, 2010.

Coulson, C.A.; Die chemische Bindung, S. Hirzel Verlag Stuttgart 1969.

Dawkins, Richard; Geschichten vom Ursprung des Lebens, Ullstein, Berlin 2008.

Feynman, Richard P.; QED, Piper München Zürich 1990.

Feynman, Richard P.; Vom Wesen physikalischer Gesetze, Piper München Zürich 1993, 11. Auflage.

Finkelburg, Wolfgang; Einführung in die Atomphysik, 11.&12.Auflage Springer Berlin Heidelberg New York 1967.

Fischer, Ernst Peter; Brücken zum Kosmos, Libelle Verlag 2004.

Genz, Henning; Die Entdeckung des Nichts, Hanser München Wien 1994.

Genz, Henning; Elementarteilchen, Fischer Frankfurt/M. 2003.

Genz, Henning; Nichts als das Nichts, Wiley-VCH Weinheim 2004.

Genz, Henning; Wie die Naturgesetze Wirklichkeit schaffen, Hanser München Wien 2006.

Gisin, Nicolas; Der unbegreifliche Zufall, Springer Spektrum, dt. Übersetzung im Springer Verlag, Heidelberg 2014.

Glosauer, Tobias; Elementare Gruppentheorie, Springer Spektrum, Wiesbaden 2016.

- Greene, Brian; Das elegante Universum, Siedler Berlin 2000.
- Greene, Brian; Der Stoff, aus dem der Kosmos ist, Rowohlt, Reinbek bei Hamburg 1998.
- Gubser, Stephen S.; Stringtheorie, Spektrum Akademischer Verlag 2010.
- Guilini, Domenico, Kiefer, Claus; Gravitationswellen, Springer Spektrum Wiesbaden 2017.
- Haeckel, Ernst; "Kunstformen der Natur", Prestel Verlag, München, New York: Online unter www.fisch-blog.blog.de, (1998).
- Haeckel, Ernst; Kunstformen der Natur, Leipzig und Wien, Verlag des Bibliographischen Instituts, (1899).
- Halling, Horst, Möller, Rolf; Mathematik fürs Auge, Spektrum akademischer Verlag, Heidelberg, Berlin, Oxford, 1995.
- Heisenberg, Werner; Ordnung der Wirklichkeit, Serie Piper, München 1989.
- Hermann, Dieter; Antimaterie, C.H.Beck, 4. Auflage 2009.
- Hetznecker, Helmut; Kosmische Strukturbildung, Spektrum Akademischer Verlag, 2009.
- Hildebrandt, Dieter; Die Sonne, dtv München 2010.
- Hollas, J. Michael; Die Symmetrie von Molekülen, Walter de Gruyter, Berlin New York 1975.
- Hooper, Dan; Dunkle Materie, Spektrum Akademischer Verlag, 2009.
- Janka, Hans Thomas; Supernovae und kosmische Gammablitz, Spektrum Akademischer Verlag, 2010.
- Kean, Sam; Die Ordnung der Dinge, Hoffmann & Campe, Hamburg 2010.
- Kiefer, Claus; Der Quantenkosmos, S. Fischer, 3. Auflage 2009
- Kiefer, Claus; Quantentheorie, Fischer Frankfurt/M. 2003.
- Krauss, Lawrence M.; Ein Universum aus Nichts, Knaus München 2013.
- Krauss, Lawrence M.; Schwarze Materie, Insel TB, Frankfurt/M. Leipzig 1998.
- Laine Mikko; Symmetrien in der Physik, Vorlesungsskript, Fakultät für Physik, Universität Bielefeld, Stand: 22. Oktober 2005.
- Layzer, David; Das Universum, Spektrum Akademischer Verlag, 1989.
- Lederman, Leon, Schramm David N.; Vom Quark zum Kosmos Spektrum Akademischer Verlag, 1980.
- Lederman, Leon; (Teresi, Dick); Das Schöpferische Teilchen, Goldmann 1995.
- Lesch, Harald (Hg.); Die Entdeckung des Higgs-Teilchens, Bertelsmann München 2013.
- Lesch, Harald; Müller, Jörn; Kosmologie für helle Köpfe, Goldmann 2. Aufl. 2006.
- Lincoln, Don; Die Weltmaschine, Spektrum Akademischer Verlag, 2011.
- Linde, Andrei; Elementarteilchen und inflationärer Kosmos, Spektrum Akademischer Verlag, 1993.

- Mayer-Kuckuk, Theo; Der gebrochene Spiegel, Birkhäuser Basel Boston Berlin 1989.
- Ne'eman, Yuval, Kirsh, Yoram; Die Teilchenjäger, Springer 1990.
- Ostendorff, Eberhard; Steine in Farben, Otto Maier Verlag Ravensburg.
- Päs, Heinrich; Die perfekte Welle (Neutrinoforschung), Piper München 2011.
- Pauldrach, Adalbert; Dunkle kosmische Energie, Spektrum Akademischer Verlag, (Springer 2011).
- Pauling, Linus; Die Natur der chemischen Bindung, Verlag Chemie, Weinheim 1968.
- Penrose, Roger; Computerdenken, Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, 1991.
- Penrose, Roger; Der Weg zur Wirklichkeit, Spektrum Akademischer Verlag 2005.
- Penrose, Roger; Zyklen der Zeit, Springer Heidelberg 2011.
- Pesch, Hans Josef; Schlüsseltechnologie Mathematik, G. B. Teubner, Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden 2002.
- Randall, Lisa; Die Vermessung des Universums, S. Fischer Verlag Frankfurt/M. 2012.
- Randall, Lisa; Dunkle Materie und Dinosaurier, S. Fischer Verlag, Frankfurt/M. 2016.
- Randall, Lisa; Verborgene Universen, S: Fischer Verlag, Frankfurt/M., 2006.
- Rees, Martin; Das Rätsel unseres Universums, C.H.Beck München 2003.
- Rees, Martin; Vor dem Anfang, S. Fischer Frankfurt/M. 1998.
- Reichholf, Josef H.; Der Ursprung der Schönheit – Darwins größtes Dilemma, dtv, München 2013.
- Rovelli, Carlo; Die Wirklichkeit, die nicht so ist, wie sie scheint, Rowohlt 2016, Reinbek bei Hamburg.
- Rowan-Robinson; Das Flüstern des Urknalls, Spektrum Akademischer Verlag, 1994.
- Scarani, Valerio; Physik in Quanten, Spektrum Akademischer Verlag und Elsevier München 2007.
- Schilthuizen, Menno; Darwins Peep Show, dtv München, 2014.
- Schumann, Walter; Steine und Mineralien, BLV Verlagsgesellschaft, München – Bern – Wien, 1974.
- Schwichtenberg, Jakob; Durch Symmetrie die moderne Physik verstehen, Springer Spektrum, Berlin 2017.
- Silk, Joseph; Der Urknall, Birkhäuser Springer 1990.
- Smolin, Lee; Im Universum der Zeit, DVA 2014.
- Smolin, Lee; Warum gibt es die Welt, C.H.Beck, München 1999.
- Spanner, Günter; Das Geheimnis der GRAVITATIONSWELLEN; Kosmos Stuttgart 2016.

- Spektrum der Wissenschaft, 03/2016, Stephen Ornes, Die Rettung des Riesentheorems, S.48 ff.
- Spektrum der Wissenschaft, 06/2016, S.32, Sabine Hossenfelder, Quantengravitation.
- Spektrum der Wissenschaft: Verständliche Forschung, Elementare Materie, Vakuum und Felder, 1988.
- Spektrum der Wissenschaft: Verständliche Forschung, Gravitation, 1987.
- Spektrum der Wissenschaft: Verständliche Forschung, Kosmologie und Teilchenphysik, 1990.
- Spektrum der Wissenschaft: Verständliche Forschung, Teilchen, Felder und Symmetrien 1988.
- Susskind, Leonhard; Der Krieg um das schwarze Loch, Suhrkamp Berlin 2010.
- Tarassow, L.; Symmetrie, Symmetrie! Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg Berlin Oxford 1993.
- Thompson, D'Arcy Wentworth; Über Wachstum und Form, Verlag Ab - Die Andere Bibliothek Bd.255 (2002).
- Thorne, Kip S.; Gekrümmter Raum und verbogene Zeit, Droemer Knauer München 1994.
- Troll, Wilhelm; Allgemeine Botanik, Ferdinand Enke Verlag Stuttgart, 2. Auflage 1954 und 4. Auflage, 1973.
- Ullmann, John; Quantengravitation, Die Theorie des Higgs-Teilchens, epubli GmbH, Berlin 2015.
- Vaas, Rüdiger; Jenseits von Einsteins Universum, Kosmos, Stuttgart 2015.
- Weidlein, Johann, Müller, Ulrich, Dehnicke, Kurt; Schwingungsspektroskopie, Georg Thieme Stuttgart New York 1982.
- Weinberg, Stephen; Die ersten drei Minuten, dtv-Taschenbuch, 1987.
- Weinberg, Stephen; Teile des Unteilbaren, Spektrum Akademischer Verlag, 1984.
- Weizsäcker, C.F. von; Zum Weltbild der Physik, S. Hirzel Stuttgart, 13. Aufl. 1990.
- Wheeler, John Archibald; Gravitation und Raumzeit, Spektrum Akademischer Verlag, 1992.
- Zeilinger, Anton; Einsteins Schleier, Goldmann, München März 2005.
- Zeilinger, Anton; Einsteins Spuk, Goldmann, München Febr. 2007.

Abbildungsnachweise:

- Abb. 1 Einzelbilder: openclipart.org/detail/34045/kugel-orange,
[de.wikipedia.org/wiki/ Schnee#/media/File:Schnee1.jpg](https://de.wikipedia.org/wiki/Schnee#/media/File:Schnee1.jpg),
[de.wikipedia.org/wiki/ Large_Hadron_Collider](https://de.wikipedia.org/wiki/Large_Hadron_Collider),
de.wikipedia.org/wiki/Zauberw%C3%BCfel (23.06.2017).
- Abb. 2 Erstellt vom Autor
- Abb. 3 Erstellt vom Autor
- Abb. 4 Erstellt vom Autor
- Abb. 5 Erstellt vom Autor
- Abb. 6 Kristallsystem: Name: Formel: Bildnachweis
Triklin: Albit: $\text{Na[AlSi}_3\text{O}_8]$: de.wikipedia.org/wiki/Albit
(Natronfeldspat)
Monoklin: Gips: $\text{CaSO}_4 \cdot 2\text{H}_2\text{O}$: de.wikipedia.org
Orthorhombisch: Schwefel: S:
de.wikipedia.org/wiki/Schwefel#/media/File:Sulfur-t07-67a.jpg
Tetragonal: Zirkon: $\text{Zr[SiO}_4]$: de.wikipedia.org/wiki/Zirkon
Trigonal: Quarz: SiO_2 : de.wikipedia.org/wiki/Quarz
Hexagonal: Beryll: $\text{Al}_2\text{Be}_3[\text{Si}_6\text{O}_{18}]$: de.wikipedia.org/wiki/Beryll
Kubisch: Halit: NaCl : Steinsalz: de.wikipedia.org/wiki/Halit
(01.02.2017).
- Abb. 7 Oben: alfs-mineralien.de/tl; Grafiken der Kristallformen mit
freundlicher Genehmigung von Mineralien Bremen, Herr Alfred
Schäfer (01.02.2017), Tabelle unten erstellt vom Autor.
- Abb. 8 Erstellt vom Autor
- Abb. 9 Bildquelle Fuchsin: cs.wikipedia.org (01.02.2017).
- Abb. 10 Erstellt vom Autor
- Abb. 11 Erstellt vom Autor
- Abb. 12 Erstellt vom Autor
- Abb. 13 Erstellt vom Autor
- Abb. 14 Erstellt vom Autor nach Hollas, Tab. 4.11
- Abb. 15 Erstellt vom Autor, Kalottenmodell NH_3 siehe
commons.wikimedia.org/wiki/File:Ammonia-3D-vdW.png
- Abb. 16 Erstellt vom Autor
- Abb. 17 Erstellt vom Autor
- Abb. 18 Erstellt vom Autor
- Abb. 19 nach Hollas, J. Michael; Die Symmetrie von Molekülen, zur
Charaktertafel von C_{3v} siehe Hollas, Tabelle 4.12, S. 66.
- Abb. 20 IR-Spektrum ergänzt um die Beschriftung von Schwingungen
siehe www.nist.gov/chemistry (Ammonia, 07.05.2017).
- Abb. 21 Erstellt vom Autor nach einer Skizze von Johann Weidlein, Ulrich
Müller, Kurt Dehnicke, Schwingungsspektroskopie, Thieme
Verlag, Stuttgart New York, 1982, S. 103.
- Abb. 22 Bildquellen:
de.wikipedia.org/wiki/Nelkengew%C3%A4chse (*Stellaria media*, radiär),
de.wikipedia.org/wiki/Lippenbl%C3%BCtler (*Leucas aspera*, zygomorph),
de.wikipedia.org/wiki/Tr%C3%A4nendes_Herz (*Lamprocapnos spectabilis*,

- disymmetrisch),
de.wikipedia.org/wiki/Strelitzien (*Strelitzia reginae*, asymmetrisch),
(23.06.2017).
- Abb. 23 Bildquelle Lilie: de.wikipedia.org/wiki/Madonnen-Lilie (*Lilium
candium*, 18.06.2017).
- Abb. 24 Bildquelle: de.wikipedia.org/wiki/Hepatitis-B-Virus (24.06.2017).
- Abb. 25 Oben:
Nach einer Zeichnung von Leonardo da Vinci in Luca Pacioli's
„De Divina Proportione“, Ausgabe von 1509, S. 241;
Bildnachweis: <https://archive.org/details/divinaproportion00paci>.
Unten:
Unten: Bildquelle <http://www.3d-meier.de/tut12/Seite3.html>.
Mit freundlicher Genehmigung von Herrn Jürgen Meier.
- Abb. 26 Bildquelle: Ernst Haeckel, Kunstformen der Natur.
[caliban.mpipz.mpg.de/haeckel/kunstformen/haeckel_kunstformen
_der_natur.pdf](http://caliban.mpipz.mpg.de/haeckel/kunstformen/haeckel_kunstformen_der_natur.pdf) (Page 65, Tafel 1, Ausschnitt, letzter Abruf für Abb.
26-28 am 19.06.2017). Dieses Buch wurde von www.BioLib.de
produziert. Es steht unter dem Schutz der GNU Free Document
License. Weitergabe und Kopieren sind ausdrücklich erwünscht.
- Abb. 27 Bildquelle: ebenda, Page 0 (Titel) und Page 65, Tafel 1 (ganz).
- Abb. 28 Bildquelle: ebenda, Page 126 /Tafel 21 und Page 226 / Tafel 51.
- Abb. 29 Bildnachweis der Strukturformeln: de.wikipedia.org, Stichwort
Milchsäure (14.01.2017).
- Abb. 30 Bildquelle: Troll, Wilhelm, Allgemeine Botanik, Ferdinand Enke
Verlag Stuttgart, 4. Auflage, 1973, Abb. 79, S. 99.
Mit freundlicher Genehmigung durch die Georg Thieme Verlag KG
als Rechtsnachfolger des Ferdinand Enke Verlags.
- Abb. 31 Bild- und Textquelle: Zeichnungen von Ernst Haeckel aus dem
Jahr 1866, Thema „Polyaxonie und homopole Grundformen“.
In : Ernst Haeckel, »Generelle Morphologie der Organismen.
Allgemeine Grundzüge der Organischen Formen-Wissenschaft,
mechanisch begründet durch die von Charles Darwin reformierte
Descendenz-Theorie«. Erster Band : Allgemeine Anatomie der
Organismen, Berlin, 1866.
Neu abgedruckt im Vorwort von Olaf Breidbach zu: Die
allerreizendsten Tierchen Haeckels Radiolarien-Atlas von 1862, in
Ernst Haeckel, Kunstformen der Natur – Kunstformen aus dem
Meer, PRESTEL München London New York, 2011, S. 22.
- Abb. 32 Erstellt vom Autor
- Abb. 33 Bildnachweis:
[https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Standard_M
odel_of_Elementary_Particles-de.svg](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/1c/Standard_Model_of_Elementary_Particles-de.svg) (08.04.2016).
- Abb. 34 Vaas, Rüdiger: Jenseits von Einsteins Universum. Franckh-
Kosmos Verlag 2015, S. 397 zit. nach M. Blagojević, F. W. Hehl
(Hrsg.): Gauge Theories of Gravitation. Imperial College Press
2013.

- In freundlicher Abstimmung mit dem Franck-Kosmos Verlag wurde die Grafik 1:1 vom Autor umgesetzt (Bildzitat).
- Abb. 35 Nach Helmut Satz, Kosmische Dämmerung, C.H.Beck, München 2016, S. 87. In freundlicher Abstimmung mit dem C.H.Beck Verlag wurde die Grafik 1:1 vom Autor umgesetzt (Bildzitat).
- Abb. 36 Nach Helmut Satz, Kosmische Dämmerung, C.H.Beck, München 2016, S. 88. In freundlicher Abstimmung mit dem C.H.Beck Verlag wurde die Grafik 1:1 vom Autor umgesetzt (Bildzitat).
- Abb. 37 Vom Autor erstellt nach einer Grafik unter https://de.wikipedia.org/wiki/Große_vereinheitlichte_Theorie (01.02.2017).
- Abb. 38 Bildquelle: de.wikipedia.org/wiki/Spontane_Symmetriebrechung
- Abb. 39 Erstellt vom Autor

Danke (in alphabetischer Reihenfolge)

Herzlicher Dank geht an Herrn **Prof. Dr. Nico Blüthgen** vom Fachbereich Biologie der Technischen Universität Darmstadt. Er hat mich entgegen meiner Zweifel ermuntert, den Biologieteil trotz geringer Bezüge zur Gruppentheorie weiter zu verfolgen. Seine interessanten und wichtigen Hinweise, ergänzt um aussagekräftige Originalarbeiten, haben die Impulse geliefert um einige Defizite im Text zu beseitigen.

Besonderer Dank geht an Frau **Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Evamarie Hey-Hawkins** vom Institut für Anorganische Chemie der Universität Leipzig. Unsere langjährige freundschaftliche Verbundenheit hat ihren Blick nicht für viele verbesserungswürdige Details verstellt, die durch ihre aufmerksamen und klugen Hinweise korrigiert werden konnten.

Dankeschön für das mathematische Kurzgutachten an Herrn **Prof. Dr. Ralf Köhl** vom mathematischen Institut der Justus-Liebig Universität.

Man musste eine massive Unterforderung für ihn als Algebraiker befürchten, denn es handelt sich in diesem Beitrag um elementarste Gruppentheorie. Doch seine interessanten und brandaktuellen Hinweise und Literaturstellen, vor allem zu mathematischen Fortschritten in der theoretischen Physik, haben den Artikel bereichert.

Herrn **Florian Ruckelshausen**, Fachreferent an der Universitätsbibliothek Gießen, danke ich für seine Hilfe die Untiefen des Urheberrechts zu vermeiden.

Herr **Prof. Dr. Andreas Schrimpf** von der Philipps-Universität Marburg hat sich freundlicherweise für den Physikteil als Gutachter zur Verfügung gestellt.

Aber er war mir vielmehr ein sehr guter Mentor.

Mit seinem Strukturierungsvorschlag hat er innere Ordnung in das Manuskript gebracht. Seine wertvollen Vorschläge im Detail haben wesentlich zur Fokussierung beigetragen.

Ich bin ihm zu großem Dank verpflichtet.

Wie so oft hat Herr **Dr. Michael Serafin** dankenswerterweise deutlich mehr getan, als es seine Pflicht als Schriftleiter der Oberhessischen Naturwissenschaftlichen Zeitschrift erfordert hätte. Als gelernter Chemiker und Kristallograph an der Justus-Liebig Universität in Gießen hat er mir wichtige Anstöße gegeben.

Zitate

*Das Erste, des Zäzilie beflissen,
ist dies: sie nimmt von Tisch und Stuhl die Bücher
und legt sie Stück auf Stück, wie Taschentücher,
jeweils nach bestem Wissen und Gewissen.*

*Desgleichen ordnet sie die Schreibereien,
die Hefte, Mappen, Bleis und Gänsekiele,
vor Augen nur das eine Ziel der Ziele,
dem Genius Ordnung das Gemach zu weihen.*

*Denn Sauberkeit ist zwar nicht ihre Stärke,
doch Ordnung, Ordnung ist ihr eingeboren.
Ein Scheuerweib ist nicht an ihr verloren.
Dafür ist Symmetrie in ihrem Werke.*

*Christian Morgenstern
(1871 - 1914)¹⁵⁴*

*Die Symmetrie ist diejenige Idee, mit deren Hilfe der Mensch im Laufe der
Jahrhunderte versuchte, Ordnung, Schönheit und Vollkommenheit zu
begreifen und zu schaffen. Hermann Weyl (1885 - 1955)¹⁵⁵*

Widmung:

Herrn Prof. Dr. Dr. h.c. Kurt Dehnicke (1931 - 2011) in dankbarer Erinnerung.

154 Christian Morgenstern: Alle Galgenlieder, Insel Verlag, Leipzig 1938, Zäzilie.
155 Zitiert nach <http://www.alt.mathematik.uni-mainz.de/Members/mattheis/listen/mathphorismen> (03.12.2016).

Kurzfassung von Vorträgen, die in der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde – Naturwissenschaftliche Abteilung – gehalten wurden

Biologische Krusten in der Wüste:

Wie Mikroorganismen den Sand zusammenhalten

Vortrag von **Frau Dr. Sylvie Drahorad**, JLU Gießen

am 24. Mai 2016

Böden bestehen aus mineralischen Partikeln, welche im Wüstensand als kleinste Gesteinsbruchstücke verstanden werden können, sowie aus abgestorbenem Pflanzenmaterial und aus Wasser und Luft. Die Mineralpartikel stützen sich an sogenannten Kornkontaktpunkten ab. Ähnlich wie bei verschiedenen großen Bällen in einem Gefäß, bilden sich Zwischenräume. Im Fall eines natürlich gewachsenen Bodens liegen diese in der Größenordnung weniger Mikrometer bis zu mehreren Millimeter. Die Zwischenräume, die „Poren des Bodens“, und die Mineralpartikel sorgen für eine Struktur ähnlich der eines Schwamms, dessen Hohlräume mit Gasen, Wasser und darin gelösten Nährstoffen gefüllt sind. Diese Porenräume sind perfekte Lebensräume für Mikroorganismen, wie zum Beispiel autotrophe und heterotrophe Bakterien. Sie sondern während ihres Wachstums Mehrfachzucker, die Polysaccharide, ab und verkleben so die Mineralbruchstücke. Sie tragen also dazu bei, dass alle losen Partikel miteinander verbunden werden. Meist findet man ganze Lebensgemeinschaften von Mikroorganismen, sogenannte Biofilme, die sich im Prinzip an jede Oberfläche anheften und dort wachsen. Biofilme entstehen überall, wo es genug Wasser und Nahrung gibt.

In Wüsten- und Halbwüstenböden findet man nun diese Biofilme besonders stark ausgeprägt direkt an der Grenzfläche Luft/Boden. Hier siedeln besonders gut an Austrocknung angepasste Cyanobakterien. Sie sind die ersten, die als Pioniere den Sand erobern und zu ihrem Lebensraum machen. Ihr Wachstum führt im Boden zu einem starken Verkleben der Partikel und es kommt zu der Ausbildung einer verhärteten Schicht, einer biologisch induzierten Kruste. Diese Kruste ist einige wenige Millimeter dick und bedeckt den Boden dort, wo es zu trocken für höhere Pflanzen ist. Biologische Bodenkrusten besiedeln somit als erste und meist auch dauerhaft die Bodenoberfläche im Ökosystem

Wüste. Im Zuge der Verbesserung des Standortes kommt es dann zu einer Weiterentwicklung der Kruste in die Tiefe, wo nun heterotrophe Bakterien und Pilze optimale Bedingungen vorfinden. An der Oberfläche treten mit zunehmender Feuchte oft auch Flechten, Algen oder Moose in Erscheinung.

Vor allem in Gebieten mit besonders sensiblen sandigen Landoberflächen tragen biologische Krusten aktiv zum Schutz der Menschen und Infrastruktur bei, da sie den mobilen Sand an Ort und Stelle halten. Neben der rein biologischen Stabilisierung durch die Wachstumsbewegung der Mikroorganismen kommt eine partielle physikalische Stabilisierung durch eine Anreicherung von Staub zum Tragen. Die Stäube der Negev enthalten zum Beispiel viele sehr feine Partikel und Kalk, was, ähnlich eines Zements im Häuserbau, zu einer weiteren Verfestigung beiträgt.

Die biologische Aktivität der Mikroorganismen führt darüber hinaus zu einer Anreicherung von Kohlenstoff und Stickstoff im Boden, da einige der Mikroorganismen in der Lage sind, diese Nährstoffe aktiv aus der Luft zu binden. Hierdurch wird der oft annähernd nährstofffreie Sandboden gedüngt und es entstehen nach und nach optimale Bedingungen für die zeitweilige Ansiedlung höherer Pflanzen während der Regenzeit. Vergleicht man die beiden Dünenökosystem entlang der israelisch-ägyptischen Grenze, so zeigt sich auf der seit 30 Jahren stabilisierten israelischen Seite ein etabliertes Ökosystem, in dem bereits eine Vielzahl von kleinen Tieren, wie Geckos, Chamäleons und Stachelschweinen leben können. Die ägyptische Seite bleibt, aufgrund immer wieder kehrender Störungen durch Beweidung, von mobilen Sanden dominiert.

Neuere Studien zeigen jedoch auch, dass dieses Phänomen nicht nur auf die Trockengebiete der Erde beschränkt ist. Auch in humiden Klimabereichen sind die ersten Bodenbesiedler nach einer Störung, zum Beispiel durch Viehtritt, Bodenbearbeitung oder nach einem erosiven Starkregen, mikrobielle Gemeinschaften. Ein Verständnis der grundlegenden Mechanismen der Stabilisierung durch diese Gemeinschaften könnte auch die Möglichkeit bieten, diese Mechanismen für aktiven Bodenschutz zu nutzen.

Glyphosat — das umstrittene Pflanzenschutzmittel

Vortrag von **Herr Dr. Horst-Henning Steinmann**, Universität Göttingen

am 21. März 2017

Nur wenige Pflanzenschutzmittel sind in der Öffentlichkeit so präsent wie das Glyphosat. Dieser seit 1974 zugelassene Herbizidwirkstoff ist Bestandteil hunderter kommerzieller Präparate zur nicht-selektiven Unkraut- und Vegetationskontrolle. Das bekannteste dürfte das Präparat Roundup sein. „Nicht-selektiv“ steht für eine (nahezu) vollständige Unkrautkontrolle, da alle grünen Kräuter zum Absterben gebracht werden. Ursache ist eine Unterbrechung eines Syntheseweges im pflanzlichen Stoffwechsel. Durch die Hemmung eines Enzyms können keine aromatischen Aminosäuren gebildet werden, was die Pflanzen zum Absterben bringt. Glyphosathaltige Herbizide sind seit dem Ablauf des Patentschutzes sehr preiswert und verfügen über breite zugelassene Anwendungsgebiete in nahezu allen Kulturpflanzengruppen. In Europa erfolgen die Anwendungen so, dass die Kulturpflanzen nicht getroffen werden, da auch sie sonst absterben würden. In Ländern mit zugelassenen gentechnisch herbizidresistenten Kulturpflanzen kann Glyphosat auch in die wachsende Kultur gespritzt werden, ohne nennenswerte Schäden zu verursachen.

In Deutschland wird alljährlich eine Größenordnung von ca. 5.000 t des Wirkstoffs verkauft. Weltweit beträgt der Absatz ca. 700.000 bis 800.000 t. Diese Absatzzahlen belegen, dass Glyphosat wohl das weltweit meistgenutzte Pflanzenschutzmittel sein dürfte. In der EU müssen Pflanzenschutzmittelwirkstoffe in einem bestimmten Turnus neu zugelassen werden. Bei Glyphosat steht diese Wiederzulassung derzeit an. Aufgrund von vielen Protesten und Diskussionen über die Zulassungsdaten und deren Aussagen über drohende Gesundheitsgefahren ist das Glyphosatverfahren mittlerweile sehr in die Länge gezogen. Bis zum Ende des Jahres 2017 soll nun eine Entscheidung getroffen werden.

Großer Diskussionsbedarf und teilweise Uneinigkeit herrscht hinsichtlich der Auswirkungen auf die Biodiversität und die von Glyphosat ausgehende Krebsgefahr. Die Einstufung eines Komitees der Weltgesundheitsorganisation WHO aus dem Jahr 2015 rangiert Glyphosat in die Kategorie „wahrscheinlich krebserregend“. Die europäischen Bewertungsbehörden schließen sich dieser Einstufung nicht an und sehen auf der Basis der vorliegenden Studien kein Krebsrisiko. Grund für diese unterschiedlichen Einstufungen ist, dass die Gremien einerseits eine abstrakte Gefahr und andererseits ein Risiko

bewerten. Die Risikobetrachtung bewertet neben der theoretischen Gesundheitsgefahr eines Stoffes auch die Menge und die Wahrscheinlichkeit, mit der Verbraucher oder die Umwelt tatsächlich mit dem zu bewertenden Stoff in Kontakt kommen. Sollte Glyphosat weiterhin eine Zulassung erhalten, so werden voraussichtlich Einschränkungen verhängt werden, die zur Verbesserung der Biodiversität in der Agrarlandschaft beitragen.

Wie setzen die Landwirte überhaupt Glyphosat ein? Hierzu verfügt die Universität Göttingen derzeit über den ausführlichsten Überblick. Wichtigster Grund für den Glyphosateinsatz ist die reduzierte Intensität der Bodenbearbeitung. Betriebe, die viel pflügen, setzen in der Regel weniger Glyphosat ein als Betriebe, die reduzierte Bodenbearbeitung betreiben. Eine reduzierte Bodenbearbeitung schont aber die Bodenorganismen, fördert die Regenwurmaktivität und kann dadurch helfen, die Bodenstruktur zu verbessern und Erosion zu verhindern. Bei manchen Betrieben spielt auch die Einsparung von Arbeitskräften eine Rolle. Weiterhin hat der Zwischenfruchtanbau Einfluss auf das Glyphosatregime, vor allem in Verbindung mit einem hohen Anteil von Sommerfrüchten im Betrieb. Neben ackerbaulich gerechtfertigten Anwendungen gibt es aber auch Hinweise auf Routineanwendungen von Glyphosat. Wichtig für die Zukunft wird es sein, Glyphosat wirklich nur in den notwendigen Anwendungen einzusetzen. Aus der Erfahrung mit anderen Herbiziden ist bekannt, dass zu häufige Anwendungen zur Selektion resistenter und damit nicht mehr bekämpfbarer Unkräuter führen können. Das muss unbedingt vermieden werden.

Nach dem sehr informativen und ausgewogenen Vortrag folgte eine sehr intensive Diskussion. Gegner wie Nutzer von Glyphosat trugen ihre Argumente vor und forderten den Vortragenden mit vielen dezidierten Fragen heraus. Herr Dr. Steinmann, ein überragender Fachmann auf diesem Gebiet, der seine Standpunkte sehr souverän vertrat, erläuterte beharrlich, wie komplex sich die Sachverhalte in Wirklichkeit darstellen. Extreme Forderungen konnte er plausibel entkräften, verwies jedoch auf vielfältige Möglichkeiten, die eingesetzten Mengen an dem umstrittenen Pflanzenschutzmittel zu reduzieren, um damit die unerwünschten Nebenwirkungen zu verringern.