

Gruppen mit Wurzelsystem
vom Typ G_2 bzw. 2F_4

Dissertation

eingereicht beim

Fachbereich Mathematik und Informatik, Physik, Geographie
Justus-Liebig-Universität Gießen

von

Helga Oueslati (geb. Kovács)

Gießen, 2005

Vorwort

In der vorliegenden Arbeit wird die Struktur abstrakter Gruppen untersucht, welche von nichttrivialen Untergruppen A_α , $\alpha \in \tilde{\Phi}$ erzeugt werden, wobei $\tilde{\Phi}$ ein Wurzelsystem vom Typ G_2 oder 2F_4 ist. Die Untergruppen A_α , $\alpha \in \tilde{\Phi}$ sollen dabei globale Relationen erfüllen, denen auch die Wurzeluntergruppen zu einem Moufang-Sechseck bzw. zu einem Moufang-Achteck genügen und welche eine Verallgemeinerung der Relationen zwischen den Wurzelementen in Chevalley-Gruppen darstellen. Die Steinberg-Präsentation bestimmt die Gruppen, welche die Chevalley-Kommutatorrelationen erfüllen. Das Ziel ist, eine Art verallgemeinerte Steinberg-Präsentation für die Gruppen mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 bzw. 2F_4 anzugeben. Dies ist Bestandteil eines größeren, von Timmesfeld initiierten Projektes, das eine Verallgemeinerung des Satzes von Steinberg für Gruppen mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ A_l , B_l , C_l , BC_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$), E_l ($6 \leq l \leq 8$), F_4 , G_2 bzw. 2F_4 anstrebt. Die entsprechende Verallgemeinerung ist dank Timmesfeld und Müller schon zu großen Teilen gelungen. Als Hauptresultat dieser Arbeit klassifizieren wir die möglichen Strukturen, die sich für Gruppen mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 bzw. 2F_4 ergeben. Dabei bleibt die Frage nach den möglichen Zentralteilerzerlegungen im Falle von 2F_4 teilweise offen.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt: Wir beginnen mit einem Kapitel, in dem der mathematische Hintergrund erläutert wird. Insbesondere soll nachvollzogen werden, dass die Lie-Typ-Gruppen zu einem Moufang-Sechseck bzw. zu einem Moufang-Achteck konkrete Realisierungen der abstrakten Gruppen G mit Wurzelsystem vom Typ G_2 bzw. 2F_4 sind. Außerdem resümieren wir die Resultate von Timmesfeld und Müller und formulieren die Zielsetzung dieser Arbeit. In dem anschließenden Kapitel stellen wir das für die Beweisführungen notwendige Instrumentarium bereit, indem wir die für uns wesentlichen Eigenschaften von Kommutatoren und Rang-1-Gruppen zusammenfassen, und einige

Lemmata von allgemeiner Natur vorausschicken. Kapitel 3 und 4 sind dann dem Beweis der eingangs formulierten Behauptungen bezüglich der möglichen Strukturen der abstrakten Gruppen G gewidmet. Dies stellt den eigentlichen Inhalt dieser Arbeit dar.

Bei Herrn Professor Dr. Franz Georg Timmesfeld bedanke ich mich für die interessante Themenstellung sowie für die vielen hilfreichen Gespräche und Ratschläge. Herrn Professor Dr. Meixner gilt mein Dank für sein Interesse an dieser Arbeit und den steten ermutigenden Zuspruch. Herrn Dr. Sergei Haller, Frau Doris Hamrodi und Frau Edit Rau danke ich für das Korrekturlesen von Teilen dieser Arbeit.

Inhaltsverzeichnis

1	Motivation und mathematischer Hintergrund	1
1.1	Gebäude und ihre Klassifikation	1
1.2	Eigenschaften von Lie-Typ-Gruppen	2
1.3	Die Steinberg-Präsentation	6
1.4	Die verallgemeinerten Steinberg-Relationen	8
2	Präliminarien	21
2.1	Allgemeines über Kommutatoren	21
2.2	Rang-1-Gruppen	23
2.3	Präliminarien bezüglich Gruppen mit Wurzelsystem vom Typ G_2 bzw. 2F_4	27
3	Gruppen mit Wurzelsystem vom Typ G_2	31
3.1	Grundlegendes	33
3.2	Die „charakteristikfreien“ Ergebnisse von Müller	34
3.3	Der Typ von G anhand der Kommutatoren $[A_{r+s}, A_r]$, $[U_s, A_{2r+s}]$ bzw. $[A_s, A_r]$	36
3.4	Mögliche Zentralteilerzerlegungen von G	56
4	Gruppen mit Wurzelsystem vom Typ 2F_4	61
4.1	Grundlegendes	63
4.2	Die Struktur von $G(\Psi)$ und ihre Auswirkungen	66
4.3	Abschluss des Beweises I	74
4.4	Abschluss des Beweises II	81

Kapitel 1

Motivation und mathematischer Hintergrund

1.1 Gebäude und ihre Klassifikation

Der von Tits vor einem halben Jahrhundert eingeführte Begriff des Gebäudes spielt in der Gruppentheorie eine wesentliche Rolle. Sphärische Gebäude liefern nämlich eine geometrische Interpretation algebraischer Gruppen über beliebigen Körpern. Die Klassifikation der dicken, irreduziblen, sphärischen Gebäude vom Rang $l \geq 3$ gelang TITS in [Tits74]. Die unter (4.4) in [Tits77] beschriebene freie Konstruktion weist darauf hin, dass irreduzible, sphärische Gebäude vom Rang 2 – die so genannten verallgemeinerten Polygone oder n -Ecke – zu allgemeine Objekte sind, um auf eine sinnvolle Art und Weise klassifiziert werden zu können. Infolgedessen war die Einführung einer zusätzlichen Bedingung notwendig, damit ein mit [Tits74] vergleichbares Ergebnis im Rang 2 erzielt werden konnte. Die in [Tits74, S. 274] eingeführte Moufang-Bedingung scheint eine geeignete Einschränkung zu sein, da sie von jedem dicken, irreduziblen, sphärischen Gebäude vom Rang $l \geq 3$ (s. [Tits77, (3.5) Satz (1)] und [Tits74, (4.16)]) sowie auch von jedem irreduziblen Residuum vom Rang mindestens 2 eines solchen Gebäudes erfüllt ist (s. [Tim01, I (4.10)]). Insbesondere genügen diejenigen verallgemeinerten Polygone der Moufang-Bedingung, die irreduzible Rang-2-Residuen von dicken, irreduziblen, sphärischen Gebäuden von höherem Rang sind.

Daher können dicke, irreduzible, sphärische Gebäude von höherem Rang im gewissen Sinne als Vereinigung verallgemeinerter Moufang-Polygone aufgefasst werden. Nach [Tits76, Satz (1)] bzw. einem viel allgemeineren Ergebnis in [Weiss79] (s. auch [Mal98, (5.3.4)]) existieren Moufang- n -Ecke nur für $n = 3, 4, 6$ und 8 . TITS und WEISS klassifizierten die Moufang-Polygone in [TW02]. Zu jedem Moufang- n -Eck können gewissen Kommutatorrelationen genügende Wurzeluntergruppen assoziiert werden (s. [TW02, Kapitel 4–6]), die mit Hilfe bestimmter algebraischer Strukturen parametrisiert werden können. Diese sind zum Beispiel für Moufang-Sechsecke hexagonale Systeme (s. [TW02, Kapitel 15, insbesondere Seite 148, Kapitel 30]) und für Moufang-Achtecke oktagonale Mengen (s. [TW02, Kapitel 10]). (Die letzteren Parametersysteme existieren nur in Charakteristik 2!) Die Klassifikation der verallgemeinerten Polygone überträgt sich auf die von den zugehörigen Wurzeluntergruppen erzeugten so genannten Lie-Typ-Gruppen.

1.2 Eigenschaften von Lie-Typ-Gruppen

Unter einer Lie-Typ-Gruppe verstehen wir ganz allgemein eine Gruppe von gewissen Automorphismen eines sphärischen Moufang-Gebäudes im Sinne von Tits. Dadurch wird die in [Car72] angegebene Definition der Lie-Typ-Gruppen erweitert, da sie – über die Chevalley-Gruppen und die getwisteten Chevalley-Gruppen hinaus – sowohl die einfachen algebraischen Gruppen von relativem Rang mindestens 2 als auch die einfachen klassischen Gruppen vom Witt-Index mindestens 2 über Schiefkörpern umfasst. Es sei erwähnt, dass fast alle endlichen einfachen Gruppen Chevalley-Gruppen oder getwistete Chevalley-Gruppen sind. Damit sind sie Lie-Typ-Gruppen über einem endlichen Körper.

In diesem Abschnitt werden drei Eigenschaften von Lie-Typ-Gruppen zusammenfassend dargestellt, die sie – wie wir es im Abschnitt 1.3 feststellen werden – mit den Chevalley-Gruppen gemeinsam haben. Dabei wird eine möglichst einheitliche Ausdrucksweise angestrebt, die letztendlich in den Eigenschaften (I)–(III) resultiert. Dadurch wird die Formulierung der späteren Resultate wesentlich vereinfacht, wenn wir uns der Untersuchung der Frage widmen werden, inwieweit die Struktur einer Gruppe festgelegt ist, welche von Untergruppen erzeugt wird, die den Eigenschaften (I)–(III) genügen.

An dieser Stelle möchte ich nur auf Wurzeluntergruppen, Lie-Typ-Gruppen bzw. auf die Moufang-Bedingung näher eingehen. Eine Beschreibung der mit der Theorie von Gebäuden in Verbindung stehenden Begriffe befindet sich zum Beispiel in [Tits74] bzw. in [Tim01, I §4, II §5] (s. auch [TW02, Kapitel 3, 4, 39, 40]).

Sei $\mathcal{B}$ ein dickes, irreduzibles, sphärisches Gebäude vom Rang $l \geq 2$, wobei wir $\mathcal{B}$ als Kammersystem über einer Indexmenge I (mit $|I| = l$) auffassen. Ferner sei $\mathcal{A}$ ein Apartment von $\mathcal{B}$ und sei Φ die Menge der Wurzeln von $\mathcal{A}$. Für jede Kammer $c \in \mathcal{B}$ und $i \in I$ steht $\Delta_i(c)$ für die Menge der Kammern von $\mathcal{B}$, die i -benachbart zu c sind. Wenn $\mathcal{A} \cap \Delta_i(c) \neq \emptyset$, dann nennen wir $\mathcal{A} \cap \Delta_i(c)$ ein i -Panel (oder kurz ein Panel) von $\mathcal{A}$. Eine Bijektion $\sigma: \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}$ mit

$$c \overset{i}{\sim} d \text{ genau dann, wenn } c^\sigma \overset{i}{\sim} d^\sigma \text{ für } c, d \in \mathcal{B} \text{ und } i \in I$$

heißt typerhaltender Automorphismus von $\mathcal{B}$. Die Gruppe der typerhaltenden Automorphismen von $\mathcal{B}$ bezeichnen wir mit $\text{Aut}(\mathcal{B})$. Für $r \in \Phi$ heißt die Gesamtheit derjenigen $\sigma \in \text{Aut}(\mathcal{B})$, welche diejenigen Kammern $c \in \mathcal{B}$ festlassen, für die $\Delta_i(c) \cap \mathcal{A}$ für ein $i \in I$ ein in r enthaltenes Panel von $\mathcal{A}$ ist, die zu der Wurzel r von $\mathcal{A}$ korrespondierende Wurzeluntergruppe A_r von $\text{Aut}(\mathcal{B})$. Wir nennen $G := \langle A_r \mid r \in \Phi \rangle \leq \text{Aut}(\mathcal{B})$ Lie-Typ-Gruppe von $\mathcal{B}$.¹ Diese Definition ist nach [Tim01, II (5.16)] unabhängig von der Wahl des Apartments $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$.

Für jede Wurzel r von $\mathcal{A}$ sei $\mathcal{W}(r)$ die Menge der Apartments von $\mathcal{B}$, die r als Teilmenge enthalten. Nach [Tim01, I (4.9)] operiert A_r fixpunktfrei auf $\mathcal{W}(r)$.

Definition (1.1) *Wenn A_r für alle $r \in \Phi$ transitiv auf $\mathcal{W}(r)$ operiert, dann heißt $\mathcal{B}$ ein Moufang-Gebäude.*

Im Weiteren bezeichnen wir mit $\mathcal{B}$ stets ein dickes, irreduzibles, sphärisches Moufang-Gebäude vom Rang $l \geq 2$.

Unter Berücksichtigung der geometrischen Realisation² der zu $\mathcal{A}$ gehörenden Coxeter-

¹Diese Bezeichnung ist von dem in [Tim01, II §5] für den gleichen Begriff verwendeten Ausdruck „Gruppe vom Lie-Typ $\mathcal{B}$ “ abweichend. Die Änderung erfolgte in [Tim05b], da dort auch eine – in einem verallgemeinerten Sinne benutzte – „Gruppe vom Typ $\mathcal{B}$ “ eingeführt wurde (s. Abschnitt 1.4).

²Eine Beschreibung der geometrischen Realisation und der Identifizierung befindet sich in

gruppe³ können wir Φ mit einem Wurzelsystem vom Typ A_l , B_l , C_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$), E_l ($6 \leq l \leq 8$), F_4 oder $I_2(m)$ im Sinne von HUMPHREYS [Hum90] identifizieren. Wir betonen, dass es nach [Tits77, (3.7)] (s. auch [Tits74, S. 275]) keine Moufang-Gebäude vom Typ H_3 bzw. H_4 gibt. Außerdem kann nach [Mal98, (5.3.4)] nur $m = 3, 4, 6$ oder 8 gelten, wenn $\mathcal{B}$ vom Typ $I_2(m)$ ist⁴. Infolgedessen erfüllt Φ nach [Hum90, (2.8), (2.9)] die kristallographische Bedingung, das heißt $\frac{2(r,s)}{(s,s)} \in \mathbb{Z}$ für alle $r, s \in \Phi$, oder ist vom Typ $I_2(8)$.

Wir möchten, dass die zu $\mathcal{B}$ assoziierten Wurzeluntergruppen eine Art „Chevalley-Kommutatorrelationen“ (s. Abschnitt 1.3) erfüllen, indem

$$[A_r, A_s] \leq \langle A_{\lambda r + \mu s} \mid \lambda r + \mu s \in \Phi \text{ und } \lambda, \mu \in \mathbb{N} \rangle$$

für $r, s \in \Phi$ mit $r \neq -s$ gilt. Dabei benutzen wir die Konvention $\langle \emptyset \rangle := 1$. Solche Relationen würden aber $[A_r, A_r] = 1$ für alle $r \in \Phi$ implizieren, was nicht immer der Fall ist.⁵ Ein Beispiel hierfür sind unitäre Gruppen, die nicht vom maximalen Witt-Index sind: die entsprechenden Wurzeluntergruppen sind nämlich nicht alle kommutativ (s. [Tim03a, Einleitung]). Um die gewünschten Kommutatorrelationen zu erhalten, muss man deswegen eventuell zusätzliche Wurzeluntergruppen als Untergruppen der ursprünglichen Wurzeluntergruppen einführen und Φ zu einem möglicherweise nichtreduzierten Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ ergänzen, d.h. aus $r \in \tilde{\Phi}$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ mit $\lambda r \in \tilde{\Phi}$ folgt nicht unbedingt $\lambda = 1$. Bezüglich nichtreduzierter Wurzelsysteme verweisen wir auf [Bour02], insbesondere auf S. 233. Für die Erweiterung von C_l zu BC_l siehe [Tim00, §3] bzw. [Tim01, II (5.3)]. Eine detaillierte Beschreibung von $\widetilde{I_2(8)} = {}^2F_4$ befindet sich in [Tits83] (s. auch [Mal98, (5.4.5)]).

Sei $\mathcal{B}$ von einem Moufang-Achteck verschieden. Wir setzen außerdem $\tilde{\Phi} := \Phi$, wenn $\mathcal{B}$ nicht vom Typ C_l ist. Bezüglich der Struktur der entsprechenden Lie-Typ-Gruppen ist [Tim00, (3.3)] von zentraler Bedeutung:

[Tim01, I (4.6) und S. 125–126].

³Nach Definition ist jedes Apartment eines Gebäudes ein Coxetersystem.

⁴Falls Φ vom Typ $I_2(6)$ ist, dann sagen wir auch, dass es vom Typ G_2 ist.

⁵An Stelle der Einheitsgruppe $\{1\}$ schreiben wir hier und im Folgenden 1.

Satz (1.2) Für $r, s \in \tilde{\Phi}$ mit $r \notin \mathbb{R}^- \cdot s$ gilt

$$[A_r, A_s] \leq \left\langle A_{\lambda r + \mu s} \mid \lambda r + \mu s \in \tilde{\Phi}, \lambda, \mu \in \mathbb{N} \right\rangle.$$

Der Beweis von (1.2) befindet sich in [Tim01, II (5.7)(2)]. Er basiert auf [Tits94] (s. auch [Mal98, (5.4.6)]), wo gezeigt wird, dass die obige Behauptung für $l = 2$ gilt. Es sei bemerkt, dass $A'_r = 1$ in (1.2) inbegriffen ist, falls $2r \notin \tilde{\Phi}$.

Diese Relationen gestalten sich für Moufang-Achtecke etwas komplizierter. Man kann die zu ihnen assoziierten Wurzeluntergruppen mit Hilfe eines Wurzelsystems $\tilde{\Phi}$ vom Typ $\widetilde{I_2(8)} = {}^2F_4$ indizieren, so dass nach [Tits94, (6)] (s. auch [Tits83, (1.4), (1.7)] bzw. [Mal98, (5.4.5), (5.4.6)]) die folgenden globalen Kommutatorrelationen erfüllt sind:

Satz (1.3) Für $r, s \in \tilde{\Phi}$ mit $r \notin \mathbb{R}^- \cdot s$ gilt:

$$[A_r, A_s] \leq \left\langle A_{\lambda r + \mu s} \mid \lambda r + \mu s \in \tilde{\Phi}, \lambda, \mu \in \mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0\sqrt{2}, \lambda > 0, \mu > 0 \right\rangle,$$

wobei $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Für das weitere Vorgehen ist es vorteilhaft, wenn wir die in den beiden vorherigen Sätzen formulierte Eigenschaft in eine einheitliche Form bringen. Wir setzen dabei

$$R := \begin{cases} \mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0\sqrt{2} & \text{für } \tilde{\Phi} = {}^2F_4 \\ \mathbb{N} & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhalten:

(I) Für $r, s \in \tilde{\Phi}$ mit $r \notin \mathbb{R}^- \cdot s$ gilt

$$[A_r, A_s] \leq \left\langle A_{\lambda r + \mu s} \mid \lambda r + \mu s \in \tilde{\Phi}, \lambda, \mu \in R, \lambda > 0, \mu > 0 \right\rangle.$$

Als Nächstes wenden wir uns einer weiteren Eigenschaft der Lie-Typ-Gruppen zu. Es ist dem Resultat [Tim01, I (4.12)(3)] zu verdanken, dass Rang-1-Gruppen im Sinne von Timmesfeld (s. Kapitel 2) in der Strukturtheorie der Lie-Typ-Gruppen von $\mathcal{B}$ eine wichtige Rolle zukommt:

Satz (1.4) Für entgegengesetzte Wurzeln r und $-r$ von $\mathcal{A}$ ist $X_r := \langle A_r, A_{-r} \rangle$ eine Rang-1-Gruppe mit unipotenten Untergruppen A_r und A_{-r} , welche nilpotent der Klasse höchstens 2 sind.

Der Beweis von (1.4) beruht auf [Tim01, I (1.3)]:

Lemma (1.5) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

- (1) $X = \langle A, B \rangle$ ist eine Rang-1-Gruppe mit unipotenten Untergruppen A und B .
- (2) Es existiert eine Gruppe Y , die zweifach transitiv auf einer Menge Ω mit $|\Omega| \geq 3$ operiert, so dass der Stabilisator Y_α eines $\alpha \in \Omega$ einen nilpotenten Normalteiler A enthält, der regulär auf $\Omega \setminus \{\alpha\}$ operiert. Wir setzen $X = \langle A^y \mid y \in Y \rangle$.

Überdies erzeugen die zusätzlichen Wurzeluntergruppen A_{2r} und A_{-2r} nach [Tim00, (3.2)] (s. auch [Tim01, II (5.19)]) eine Rang-1-Gruppe für $\tilde{\Phi} = BC_l$ und eine kurze Wurzel $r \in \Phi$.

Wir setzen

$$\widehat{\Phi} := \begin{cases} \Phi & \text{für } \tilde{\Phi} = {}^2F_4 \\ \tilde{\Phi} & \text{sonst} \end{cases}$$

und erhalten in einheitlicher Form:

- (II) Für $r \in \widehat{\Phi}$ ist $X_r = \langle A_r, A_{-r} \rangle$ eine Rang-1-Gruppe mit unipotenten Untergruppen A_r und A_{-r} .

Nach (1.5) (insbesondere nach dem Beweis dazu in [Tim01, I (1.3)]) operiert X_r für $r \in \widehat{\Phi}$ zweifach transitiv auf $A_r^{X_r}$. (Wir bemerken, dass $A_{-r} \in A_r^{X_r}$ wegen der in Kapitel 2 einzuführenden Definition der Rang-1-Gruppen gilt.) Deswegen existiert ein $n_r \in X_r$ mit $A_r^{n_r} = A_{-r}$ und $A_{-r}^{n_r} = A_r$. Wir benutzen dafür die Schreibweise $A_r \xleftrightarrow{n_r} A_{-r}$. Die folgende Eigenschaft gilt für jedes von einem Moufang-Achteck verschiedene $\mathcal{B}$ nach [Tim01, II (5.11)] und für Moufang-Achtecke nach [Tits94, (6)] (s. auch [Tits83, (1.4)]):

- (III) Sei $r \in \widehat{\Phi}$ und sei n_r ein Element von X_r mit $A_r \xleftrightarrow{n_r} A_{-r}$. Für $s \in \tilde{\Phi}$ gilt dann $A_s^{n_r} = A_{s w_r}$, wobei w_r die Spiegelung entlang r auf $\tilde{\Phi}$ ist.

1.3 Die Steinberg-Präsentation

Die obigen Eigenschaften (I)–(III) der Lie-Typ-Gruppen von $\mathcal{B}$ erinnern an die Steinberg-Präsentation der Chevalley-Gruppen, welche ursprünglich auf komplizierte Weise als Gruppen gewisser Automorphismen von Lie-Algebren eingeführt wurden. Steinberg fand einen rein gruppentheoretischen Zugang zu ihnen in Form einer Präsentation durch Er-

zeugende und Relationen. Um sein Resultat einfacher formulieren zu können, schicken wir die folgende Definition voraus.

Definition (1.6) *Sei G eine Gruppe. Ein Paar $(\pi, \hat{G})$, wobei $\hat{G}$ eine Gruppe und $\pi: \hat{G} \rightarrow G$ ein surjektiver Homomorphismus mit $\text{Kern}(\pi) \subseteq Z(\hat{G})$ sind, heißt zentrale Erweiterung von G .⁶ Eine zentrale Erweiterung (σ, E) von G heißt universell, wenn für jede zentrale Erweiterung $(\hat{\sigma}, \hat{E})$ von G genau ein Homomorphismus $\varphi: E \rightarrow \hat{E}$ mit $\hat{\sigma}\varphi = \sigma$ existiert.*

Bemerkung (1.7) *Angenommen, eine Gruppe G besitzt eine universelle zentrale Erweiterung (σ, E) . Dann ist diese bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. Nach [St67, S. 74] ist ferner $E' = E$ und daher $G' = G$. Ist andererseits $G' = G$, so besitzt G nach [St67, S. 75] eine universelle zentrale Erweiterung.*

Satz von Steinberg (1.8) (vgl. [St67, Theorem 10])

Sei Φ ein unzerlegbares Wurzelsystem vom Rang $l \geq 2$, das der kristallographischen Bedingung genügt und sei K ein Körper mit $|K| > 4$. Ferner sei E die abstrakte Gruppe, die von Symbolen $a_r(t)$, $r \in \Phi$, $t \in K$ erzeugt wird, welche die folgenden Relationen erfüllen:

(1) *Für $r \in \Phi$ und $t, u \in K$ gilt:*

$$a_r(t)a_r(u) = a_r(t+u).$$

(2) *Für linear unabhängige $r, s \in \Phi$ und $t, u \in K$ gilt:*

$$[a_s(u), a_r(t)] = \prod_{\lambda, \mu \in \mathbb{N}; \lambda r + \mu s \in \Phi} a_{\lambda r + \mu s}(C_{\lambda \mu r s}(-t)^\lambda u^\mu)$$

mit festgelegten Konstanten $C_{\lambda \mu r s} \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3\}$, wobei das Produkt nach wachsendem $\lambda + \mu$ angeordnet ist.

Dann ist (σ, E) die universelle zentrale Erweiterung der korrespondierenden universellen Chevalley-Gruppe G ,⁷ wobei σ der natürliche Homomorphismus von E nach G ist.

⁶Man benutzt in dieser Situation auch die Sprechweise: $\hat{G}$ ist eine zentrale Erweiterung von G .

⁷Die korrespondierende universelle Chevalley-Gruppe wird von Symbolen $a'_r(t)$, $r \in \Phi$, $t \in K$ erzeugt, welche den Relationen (1) und (2) genügen. Für $r \in \Phi$ und $t, u \in K^*$ soll außerdem $h'_r(t)h'_r(u) = h'_r(tu)$ gelten. Dabei ist $h'_r(t) := n'_r(t)n'_r(-1)$ mit $n'_r(t) := a'_r(t)a'_{-r}(-t^{-1})a'_r(t)$ für $r \in \Phi$ und $t \in K^*$ (s. [St67, S. 66, S. 78]).

Sei $A_r := \{a_r(t) \mid t \in K\}$ für $r \in \Phi$. Bedingung (I) ist für die A_r , $r \in \Phi$ wegen der so genannten Chevalley-Kommutatorrelationen unter (2) erfüllt. Außerdem erzeugen A_r und A_{-r} für $r \in \Phi$ nach dem Beweis von [St67, Theorem 10] eine Rang-1-Gruppe, wobei A_r und A_{-r} nach (1) abelsch sind.

Nach [St67, Theorem 8(a)] in Verbindung mit [St67, (R7) auf S. 30] gilt auch Relation (III) für die A_r , $r \in \Phi$.

Damit sind die Eigenschaften (I)–(III) der Lie-Typ-Gruppen von $\mathcal{B}$ schwächer als die elementweisen Relationen (1) und (2) von (1.8).

1.4 Die verallgemeinerten Steinberg-Relationen

Timmesfeld arbeitet an der Verallgemeinerung der Steinberg-Präsentation, indem er einen ähnlichen Satz für die Lie-Typ-Gruppen von $\mathcal{B}$ zeigen möchte. Dabei ersetzt er die schwer verifizierbaren elementweisen Chevalley-Kommutatorrelationen durch „globale“ Relationen. Sein Interesse gilt der Frage, inwieweit die Struktur der Lie-Typ-Gruppen durch die Eigenschaften (I)–(III) bestimmt ist. Hierfür betrachtet er – losgelöst von der Vorstellung von Moufang-Gebäuden – abstrakte Gruppen $G = \langle A_\alpha \mid \alpha \in \tilde{\Phi} \rangle$, die von Untergruppen⁸ $A_\alpha \neq 1$ erzeugt werden, wobei der Index α über ein eventuell nichtreduziertes Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ läuft und die A_α die Bedingungen (I)–(III) erfüllen. Er zeigte in [Tim03a, Satz (1)], dass die Relationen (I)–(III) gewissermaßen ausreichend für die Charakterisierung von G sind. Zu G kann nämlich ein Moufang-Gebäude $\mathcal{B}$ assoziiert werden, so dass G eine zentrale Erweiterung einer Lie-Typ-Gruppe von $\mathcal{B}$ ist.

Es sei bemerkt, dass die Voraussetzungen von [Tim03a, Satz (1)] für $\tilde{\Phi} = {}^2F_4$ nicht erfüllt sind. Die Behauptung gilt aber auch in diesem Fall, da die Bedingung, dass X_α eine Rang-1-Gruppe ist, nur für $\alpha \in \Phi$ in den Beweis einfließt.

Satz (1.9) *Sei $\tilde{\Phi}$ ein Wurzelsystem vom Typ A_l , B_l , C_l , BC_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$), E_l ($6 \leq l \leq 8$), F_4 , G_2 oder 2F_4 . Ferner sei G eine Gruppe, die von Untergruppen $A_r \neq 1$, $r \in \tilde{\Phi}$ erzeugt wird, die (I)–(III) genügen. Außerdem gelte $A_{2r} \leq A_r$, wenn $2r \in \tilde{\Phi}$ für*

⁸Diese Untergruppen nennen wir in Analogie zu den Lie-Typ-Gruppen Wurzeluntergruppen.

$r \in \tilde{\Phi}$ bzw. $A_{(\sqrt{2}+1)r} \leq A_r$, wenn $(\sqrt{2}+1)r \in \tilde{\Phi}$ für $r \in \tilde{\Phi}$. Dann existieren ein irreduzibles, sphärisches Moufang-Gebäude $\mathcal{B}$ und ein surjektiver Homomorphismus $\varphi: G \rightarrow \overline{G}$, wobei $\overline{G}$ Lie-Typ-Gruppe von $\mathcal{B}$ ist, so dass die A_r mit $r \neq 2s$ und $r \neq (\sqrt{2}+1)s$ für alle $s \in \tilde{\Phi}$ unter φ auf die zu den Wurzeln eines Apartments $\mathcal{A}$ von $\mathcal{B}$ korrespondierenden Wurzeluntergruppen abgebildet werden. Ferner liegt $\text{Kern}(\varphi)$ in dem Zentrum von G .

Wenn eine Gruppe die Voraussetzungen von (1.9) erfüllt, dann sagen wir, dass sie vom Typ $\mathcal{B}$ bzw. $\tilde{\Phi}$ ist. Leider ist die Eigenschaft (III) schwer zu kontrollieren, deswegen ist ihre Ersetzung durch eine Bedingung erwünscht, die man besser im Griff hat.

Timmesfeld konnte in [Tim03a, Satz (2)] zeigen, dass man auf die explizite Forderung von (III) verzichten kann, wenn man in (I) immer Gleichheit hat:

Satz (1.10) *Sei $\tilde{\Phi}$ wie in (1.9), aber verschieden von 2F_4 .⁹ Sei G eine Gruppe, die von Untergruppen $A_r \neq 1$, $r \in \tilde{\Phi}$ erzeugt wird, die (I) und (II) genügen, so dass in den Kommutatorrelationen von (I) immer Gleichheit herrscht. Dann gilt auch (III) und G ist vom Typ $\tilde{\Phi}$.*

Leider sind die Voraussetzungen von (1.10) zu einschränkend, da sie von Chevalley-Gruppen vom Typ B_l , C_l oder F_4 in Charakteristik 2 oder von denen vom Typ G_2 in Charakteristik 3 nicht erfüllt werden. In diesen Fällen degenerieren nämlich die Kommutatorrelationen von (I) teilweise, das heißt man hat strikte Ungleichheit für eine gewisse Wahl von r und s . Daher kann die Struktur dieser Gruppen unter Verwendung von (1.10) nicht identifiziert werden. Deswegen möchten wir lieber auf die Verschärfung von (I) verzichten, und eine einheitliche Klassifikation solcher Gruppen erzielen, welche von nichttrivialen Untergruppen erzeugt werden, die den Bedingungen (I) und (II) genügen. So eine Klassifikation kann als eine weit reichende Verallgemeinerung der Steinberg-Präsentation von Chevalley-Gruppen aufgefasst werden, deswegen werden wir die folgende Sprechweise benutzen: G genügt den verallgemeinerten Steinberg-Relationen (oder kurz (S)). Unter

⁹Es sei erwähnt, dass der Fall, wenn $\tilde{\Phi}$ vom Typ 2F_4 ist, keine echte Ausnahme in (1.10) darstellt. Auf die Betrachtung von 2F_4 wird in [Tim03a] deswegen verzichtet, weil die Kommutatorrelationen in (I) in diesem Fall viel komplizierter sind. In Kapitel 4 behandeln wir den Fall $\tilde{\Phi} = {}^2F_4$. Die Grundlage der Beweisführung bildet dabei aber (1.9) und nicht (1.10), deswegen verzichten wir auch an dieser Stelle auf den Beweis von (1.10) für $\tilde{\Phi} = {}^2F_4$.

solchen Voraussetzungen ist aber insbesondere der Fall zugelassen, dass alle Kommutatorrelationen in (I) trivial sind, so dass $[X_\alpha, X_\beta] = 1$ für $\alpha \in \Phi$ und $\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$. In dieser Situation ist G das zentrale Produkt der Rang-1-Gruppen X_α , $\alpha \in \Phi$.¹⁰ Deswegen muss so eine Möglichkeit in den Behauptungen bezüglich der Struktur von G auftreten. Das weit gesteckte Ziel besteht in dem Nachweis, dass die Gruppe G zentrales Produkt von Faktoren ist, die Rang-1-Gruppen oder zentrale Erweiterungen von Lie-Typ-Gruppen sind.

Dieses Problem wurde in einer Folge von Artikeln [Tim00], [Tim02a], [Tim02b], [Tim03a], [Tim03b], [Tim05a], [Tim05b], [Mü01] und [Mü04] größten Teils gelöst, deren Resultate in dem restlichen Teil dieses Abschnittes resümiert werden. Außerdem werden noch offene Fragen angesprochen und es wird geklärt, inwieweit die vorliegende Arbeit zur einheitlichen Klassifikation der Gruppen beiträgt, welche (S) genügen.

Als Erstes behandelte TIMMESFELD den Fall, in dem $\tilde{\Phi}$ nur Einfachbindungen hat, und erzielte das folgende Ergebnis in [Tim02a] bezüglich der möglichen Strukturen von G .

Satz (1.11) *Sei G eine Gruppe, die (S) bezüglich eines Wurzelsystems $\tilde{\Phi}$ vom Typ A_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$) oder E_l ($6 \leq l \leq 8$) genügt. Dann gilt:*

- (1) $\tilde{\Phi} = \bigcup \Psi_i$, wobei Ψ_i Unterwurzelsystem¹¹ von $\tilde{\Phi}$ ist oder $\Psi_i = \{\pm r_i\}$ für ein $r_i \in \tilde{\Phi}$.
- (2) Die Gruppe G ist das zentrale Produkt der Untergruppen $G(\Psi_i) = \langle A_r \mid r \in \Psi_i \rangle$.
Überdies ist $G(\Psi_i) = X_{r_i}$ oder $G(\Psi_i)$ erfüllt die Voraussetzungen von (1.9) bezüglich des Wurzelsystems Ψ_i und ist daher vom Typ Ψ_i .¹²

Für den Beweis dient [Tim01, II (1.2)(2)] gewissermaßen als Induktionsverankerung, das an dieser Stelle zitiert wird, da wir dem Wurzelsystem vom Typ A_2 noch des Öfteren begegnen werden.

¹⁰Sei G eine Gruppe und sei $\{G_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ eine Menge von Untergruppen von G . Falls $G = \langle G_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$ und $[G_i, G_j] = 1$ für $i \neq j$, dann nennen wir G das zentrale Produkt der Untergruppen G_i , $1 \leq i \leq n$ und benutzen die Schreibweise $G = \bigstar_{i=1}^n G_i$.

¹¹Eine Teilmenge Ψ von $\tilde{\Phi}$ heißt Unterwurzelsystem, falls $r + s \in \Psi$ für alle $r, s \in \Psi$ mit $r + s \in \tilde{\Phi}$.

¹²Faktoren, die Rang-1-Gruppen sind, werden der Einheitlichkeit halber gegebenenfalls als zum Unterwurzelsystem A_1 gehörende Lie-Typ-Gruppen betrachtet.

Lemma (1.12) Sei $\tilde{\Phi} = \{\pm r, \pm s, \pm(r+s)\}$ ein Wurzelsystem vom Typ A_2 . Angenommen, G erfüllt (S) bezüglich $\tilde{\Phi}$. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:

(1) $G = X_r * X_s * X_{r+s}$.

(2) In den Kommutatorrelationen von (I) herrscht immer Gleichheit.

Überdies ist

$$[a, A_\beta] = A_{\alpha+\beta} = [A_\alpha, b]$$

für alle $a \in A_\alpha^\sharp$, $b \in A_\beta^\sharp$ und alle $\alpha, \beta \in \tilde{\Phi}$ mit $\alpha + \beta \in \tilde{\Phi}$.

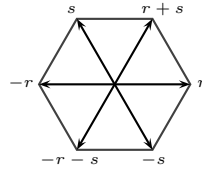


Abb. 1.1: Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ vom Typ A_2 .

Bedauerlicherweise lässt sich Satz (1.11) nicht ohne Weiteres auf Wurzelsysteme mit Mehrfachbindungen übertragen, weil die zu den zentralen Faktoren gehörenden Teilmengen von $\tilde{\Phi}$ nicht unbedingt Unterwurzelsysteme von $\tilde{\Phi}$ sind.

Beispiel (1.13) Typischerweise tritt diese Situation auf, wenn

$$\tilde{\Phi} = C_2 = \{\pm r, \pm s, \pm(r+s), \pm(2r+s)\}, \Psi_1 = \{\pm s\}, \Psi_2 = \{\pm r, \pm(r+s), \pm(2r+s)\}$$

und $G = G(\Psi_1) * G(\Psi_2)$ mit $G(\Psi_1) = X_s \simeq \mathrm{SL}_2$ bzw. $G(\Psi_2) = \langle X_r, X_{r+s}, X_{2r+s} \rangle \simeq \mathrm{SL}_3$. In diesem Fall setzen wir $\alpha := r+s$ und betrachten die Menge $\Psi_2 = \{\pm r, \pm\alpha, \pm(r+\alpha)\}$ als Wurzelsystem vom Typ A_2 und benutzen die Sprechweise: „ Ψ_2 trägt die Struktur eines Wurzelsystems vom Typ A_2 “. Es sei aber betont, dass Ψ_2 kein Unterwurzelsystem von $\tilde{\Phi}$ ist. Die Gruppe G erfüllt somit (S) mit $\tilde{\Phi} = C_2$ und Ψ_1 vom Typ A_1 bzw. Ψ_2 vom Typ A_2 .

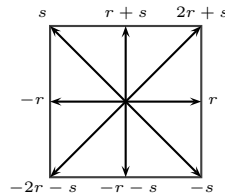


Abb. 1.2: Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ vom Typ C_2 .

Sei $\tilde{\Phi}$ wie in (1.9). Für eine Teilmenge $\Delta \subseteq \tilde{\Phi}$ setzen wir $G(\Delta) := \langle A_r \mid r \in \Delta \rangle$ und sagen im weiteren Verlauf, dass $G(\Delta)$ vom Typ Δ ist, wenn Δ „die Struktur eines Wurzelsystems

trägt“¹³ und $G(\Delta)$ die Voraussetzungen von (1.9) bezüglich Δ erfüllt.

Der erste Schritt zur Lösung des oben dargestellten Problems für Wurzelsysteme mit Mehrfachbindungen ist MÜLLER zu verdanken. Er behandelte den Fall $\tilde{\Phi} = C_2$ in [Mü01]. Sein Hauptresultat lautet wie folgt:

Satz (1.14) *Angenommen, G erfüllt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ C_2 . Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

- (1) *Für eine lange Wurzel $s \in \tilde{\Phi}$ ist $X_s \triangleleft G$ mit $G = X_s * C_G(X_s)$.*
- (2) *Für jedes $r \in \tilde{\Phi}$ ist A_r eine elementarabelsche 2-Gruppe.*
- (3) *In den Kommutatorrelationen von (I) herrscht immer Gleichheit.*

In dem Beweis von (1.14) ist die Existenz zentraler Involutionen in X_α – wobei $\alpha \in \tilde{\Phi} = C_2$ lang ist – ein wichtiges Hilfsmittel. Sie operieren nämlich auf einem Vektorraum V über einem Körper in einer von 2 verschiedenen Charakteristiken wie die lineare Abbildung $-\text{id}$.

In [Tim02b] wurde (1.14) folgendermaßen verschärft:

Folgerung (1.15) *Angenommen, G erfüllt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ C_2 und es gibt kein Element $r \in \tilde{\Phi}$, für das A_r eine elementarabelsche 2-Gruppe ist. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

- (1) *Es ist $G = \bigstar_{r \in \tilde{\Phi}} X_r$.*
- (2) *Für eine lange Wurzel $s \in \tilde{\Phi}$ ist $X_s \triangleleft G$. Überdies ist $G = X_s * G(\Delta)$, wobei $\Delta := \tilde{\Phi} \setminus \{\pm s\}$ die Struktur eines Wurzelsystems vom Typ A_2 trägt und $G(\Delta)$ vom Typ A_2 ist.*
- (3) *Die Gruppe G ist vom Typ C_2 .*

Als Nächstes diene die Kenntnis der Möglichkeiten für $G(C_2)$ als Ausgangspunkt für Wurzelsysteme vom Typ B_l , C_l oder F_4 in von 2 verschiedenen Charakteristiken. Es wurde unter Verwendung von (1.15) in [Tim02b] gezeigt, dass G einen „Lie-Typ-Faktor“

¹³Dieses Wurzelsystem bezeichnen wir auch mit Δ .

hat (der gleich G sein kann).

Satz (1.16) *Sei G eine Gruppe, die (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ B_l, C_l ($l \geq 2$) oder F_4 erfüllt. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

(1) G ist vom Typ $\tilde{\Phi}$.

(2) Es ist $\tilde{\Phi} = J \dot{\cup} K$ mit $J \neq \emptyset \neq K$ und entweder $J = \{\pm r\}$ für ein $r \in \tilde{\Phi}$ oder J trägt die Struktur eines unzerlegbaren Wurzelsystems Ψ vom Rang mindestens 2. Außerdem ist $G = G(J) * G(K)$, und $G(J)$ ist entweder eine Rang-1-Gruppe oder eine Gruppe vom Typ Ψ .

(3) Es ist

$$J' := \{r \in \tilde{\Phi} \mid A_r \text{ ist eine elementarabelsche 2-Gruppe}\} \neq \emptyset$$

$$\text{und } G = G(J') * G(K) \text{ mit } K := \tilde{\Phi} \setminus J'.$$

Satz (1.16) liefert uns erst dann echte Information, wenn die Charakteristik von 2 verschieden ist. Die Einschränkung bezüglich der Charakteristik rührt von [Mü01] und ist für das Erhalten zentraler Involutionen in bestimmten Rang-1-Gruppen nötig. Mit Hilfe von ihnen kann man zeigen, dass entweder Fall (2) zutrifft, oder es herrscht immer Gleichheit in den Kommutatorrelationen von (I) und man kann (1.10) anwenden.

Letztendlich wurden die Ergebnisse von [Tim02b] in [Tim05a] einerseits verfeinert und andererseits auf Charakteristik 2 ausgeweitet.

Satz (1.17) *Angenommen, G erfüllt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ B_l, C_l ($l \geq 2$) oder F_4 . Dann gilt:*

(1) $\tilde{\Phi} = \dot{\bigcup} \Psi_i$, wobei Ψ_i entweder die Struktur eines der Wurzelsysteme A_n, B_n, C_n, D_n oder F_4 trägt oder $\Psi_i = \{\pm r_i\}$ für ein $r_i \in \tilde{\Phi}$.

(2) Die Gruppe G ist das zentrale Produkt der Untergruppen $G(\Psi_i)$ mit $G(\Psi_i)$ vom Typ Ψ_i oder $G(\Psi_i) = X_{r_i}$.

Tatsächlich sind die möglichen Zerlegungen von $\tilde{\Phi}$ und G kompliziert. Falls $\tilde{\Phi} = F_4$ ist, so ist es möglich, dass ein zentraler Faktor von G vom Typ A_5 ist, das heißt von höherem

Rang als das zugrundeliegende Wurzelsystem.¹⁴ Wenn aber $\tilde{\Phi}$ vom Typ B_l oder C_l ist, dann ist $n \leq l$ für n wie unter (1).

Die Behandlung des Falles $\tilde{\Phi} = C_2$ in Charakteristik 2 dient als Induktionsbasis für (1.17). Timmesfeld zeigte, dass (1.15) in jeder Charakteristik gilt, indem er die zentralen Involutionen in Charakteristik 2 durch die Beobachtung ersetzte, dass jede Rang-1-Gruppe speziell ist, deren unipotente Untergruppen elementarabelsche 2-Gruppen sind.

Bezüglich $\tilde{\Phi} = BC_l$ wurde in [Tim03b] ein zu (1.16) korrespondierendes Ergebnis erzielt.

Satz (1.18) *Angenommen, G genügt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ BC_l ($l \geq 2$). Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

(1) *Die Gruppe G ist vom Typ BC_l .*

(2) *Für jedes $r \in \tilde{\Phi}$ mit $2r \in \tilde{\Phi}$ gilt $A_r = A_{2r}$. Bezüglich des Wurzelsystems*

$$\Phi_0 = \{2r \mid r, 2r \in \tilde{\Phi}\} \cup \{s \mid s \in \tilde{\Phi}, 2s \notin \tilde{\Phi}\}$$

vom Typ C_l herrscht stets Gleichheit in den Kommutatorrelationen von (I), und daher ist G vom Typ C_l .

(3) *Es ist $\tilde{\Phi} = J \dot{\cup} K$ mit $J \neq \emptyset \neq K$ und entweder $J = \{\pm r\}$ bzw. $J = \{\pm r, \pm 2r\}$ oder J trägt die Struktur eines unzerlegbaren Wurzelsystems Ψ vom Rang $r \geq 2$. Außerdem ist $G = G(J) * G(K)$ und $G(J)$ ist vom Typ Ψ oder $G(J) = X_r$ ist eine Rang-1-Gruppe.*

(4) *Es ist*

$$J' := \left\{ r \in \tilde{\Phi} \mid A_r \text{ ist eine elementarabelsche 2-Gruppe} \right\} \neq \emptyset.$$

*Wir setzen $J'' := J' \cup \{s \in \tilde{\Phi} \mid 2s \in J'\}$ und $K := \tilde{\Phi} \setminus J''$. Dann ist $G = G(J'') * G(K)$.*

Der Beweis des obigen Satzes erfolgt mit Hilfe eines mit (1.14) vergleichbaren Ergebnisses für BC_2 und der Diskussion der für $G(\Phi_0)$ in [Tim03b, §3] erhaltenen Möglichkeiten, wobei Φ_0 wie unter (2) ist.

¹⁴Wir werden in Kapitel 3 sehen, dass ein ähnlicher Fall auch bei $\tilde{\Phi} = G_2$ in Erscheinung tritt: G kann nämlich vom Typ A_3 sein.

In [Tim05b] wurde (1.18) vertieft und auf Charakteristik 2 verallgemeinert, was bis auf die Fälle $\tilde{\Phi} = G_2$ bzw. $\tilde{\Phi} = {}^2F_4$ zu einer einheitlichen Klassifikation der Gruppen G führte, welche den verallgemeinerten Steinberg-Relationen genügen. Der folgende Satz zeigt, dass G ein zentrales Produkt von Faktoren ist, welche Rang-1-Gruppen oder zentrale Erweiterungen von Lie-Typ-Gruppen sind.

Satz (1.19) *Sei G eine Gruppe, die (S) bezüglich eines Wurzelsystems vom Typ A_l, B_l, C_l, BC_l ($l \geq 2$), D_l ($l \geq 4$), E_l ($6 \leq l \leq 8$) oder F_4 erfüllt.*

Sei $\Psi = \{r \in \tilde{\Phi} \mid 2r \notin \tilde{\Phi}\} \cup \{s \in \tilde{\Phi} \mid 2s \in \tilde{\Phi} \text{ und } A_s \neq A_{2s}\}$. Dann gilt:

(1) $\Psi = \bigcup \Psi_i$, wobei Ψ_i die Struktur eines Wurzelsystems vom Typ A_n, B_n, C_n, BC_n ($n \geq 2$), D_n ($n \geq 4$), E_n ($6 \leq n \leq 8$) oder F_4 trägt oder $\Psi_i = \{\pm r\}$ bzw. $\Psi_i = \{\pm r, \pm 2r\}$ für ein $r \in \Psi$.

(2) Die Gruppe G ist das zentrale Produkt der Untergruppen $G(\Psi_i)$. Ferner ist $G(\Psi_i)$ vom Typ Ψ_i oder $G(\Psi_i) = X_r$ (wenn $\Psi_i = \{\pm r\}$ bzw. $\Psi_i = \{\pm r, \pm 2r\}$).

Das folgende Beispiel aus [Tim05b, §1] zeigt, dass die Unterscheidung zwischen $\tilde{\Phi}$ und Ψ in (1.19) notwendig ist.

Beispiel (1.20) *Sei $\tilde{\Phi} = BC_2 = \{\pm r, \pm s, \pm(r+s), \pm(2r+s), \pm 2r, \pm(2r+2s)\}$ und sei $\Psi_1 = \{\pm r, \pm 2r\}$. Außerdem sei $G(\Psi_1) = X_r$ eine unitäre Gruppe vom Witt-Index 1 und der Dimension mindestens 3. Dann ist $X_{2r} < X_r$ die korrespondierende unitäre Gruppe vom Witt-Index 1 und der Dimension 2. Es ist möglich, dass $A_{r+s} = A_{2r+2s}$, $A_{-r-s} = A_{-2r-2s}$ und so $\Psi_2 \neq \tilde{\Phi} \setminus \Psi_1$. Ferner trägt Ψ_2 die Struktur eines Wurzelsystems vom Typ A_2 und $G(\Psi_2) \simeq \text{SL}_3$. In diesem Fall erfüllt $G(\Psi_1) * G(\Psi_2)$ die Voraussetzungen von (1.19) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ BC_2 .*

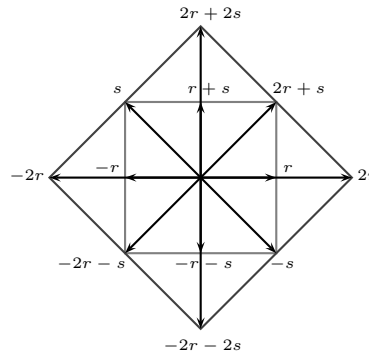


Abb. 1.3: Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ vom Typ BC_2 .

Satz (1.19) lässt noch den Fall offen, in dem $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 bzw. 2F_4 ist. MÜLLER behandelte $\tilde{\Phi} = G_2$ in [Mü04] und erzielte ein zu (1.16) ähnliches Ergebnis. Er zeigte, dass eine (S) bezüglich G_2 genügende Gruppe – bis auf die Charakteristiken 2 und 3 – einen Faktor besitzt, der eine zentrale Erweiterung einer Lie-Typ-Gruppe oder eine Rang-1-Gruppe ist.

Sei $\tilde{\Phi} = \{\pm r, \pm s, \pm(r+s), \pm(2r+s), \pm(3r+s), \pm(3r+2s)\}$ ein Wurzelsystem vom Typ G_2 .

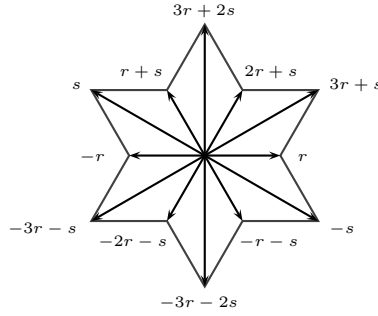


Abb. 1.4: Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 .

Die Menge der langen Wurzeln $\Psi = \{\pm s, \pm(3r+s), \pm(3r+2s)\}$ ist ein Unterwurzelsystem vom Typ A_2 von $\tilde{\Phi}$ ist. Das Hauptresultat von [Mü04] lautet wie folgt:

Satz (1.21) *Angenommen, die Gruppe G erfüllt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 . Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

- (1) *Die Gruppe G ist vom Typ G_2 .*
- (2) *Die Gruppe G ist vom Typ A_3 .*
- (3) *Entweder sind alle A_α , $\alpha \in \tilde{\Phi}$ elementarabelsche 2-Gruppen oder elementarabelsche 3-Gruppen.*
- (4) *Es gilt $G = X_\alpha * C_G(X_\alpha)$ für ein $\alpha \in \tilde{\Phi}$ und $X_\beta \leq C_G(X_\alpha)$ für alle $\beta \in \tilde{\Phi} \setminus \{\pm\alpha\}$, oder $G = G(\Psi) * G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ ist vom Typ $A_2 \times A_2$.*

In dem Beweis kommt es durch eine gruppentheoretische Kennzeichnung der Charakteristiken 2 und 3 zur Abspaltung von (3). Müller zeigte nämlich das Folgende in [Mü04, (4.10)]. Angenommen, $G(\Psi)$ ist vom Typ A_2 , $[A_s, A_r] \neq 1$ und $[A_{r+s}, A_{2r+s}] = 1$. Dann sind alle Wurzeluntergruppen elementarabelsche 2-Gruppen oder elementarabelsche 3-Gruppen. Unter der Annahme, dass (4) nicht gilt und $[A_{r+s}, A_{2r+s}] \neq 1$ ist, folgerte er dann auf die Gültigkeit von (1) oder (2). Dabei sind zentrale Involutionen in X_α , $\alpha \in \Psi$

von entscheidender Bedeutung.

Die Einteilung in (1.21) liefert keine disjunkten Fälle. Als Nächstes geben wir zwei Beispiele hierfür an. Im Falle von $G_2(2)$ sind die Wurzeluntergruppen zu $GF(2)$ isomorphe, elementarabelsche 2-Gruppen und im Falle von $G_2(3)$ zu $GF(3)$ isomorphe, elementarabelsche 3-Gruppen. Ferner sind sowohl $G_2(2)$ als auch $G_2(3)$ vom Typ G_2 , weil sie den Relationen (I)–(III) und damit den Voraussetzungen von (1.9) genügen.

Es stellt sich die Frage, ob man die Ausnahme der kleinen Charakteristiken beheben und eine einheitliche Klassifikation von Gruppen erzielen kann, welche den verallgemeinerten Steinberg-Relationen bezüglich G_2 genügen. Das Hauptanliegen von Kapitel 3 sind die Verallgemeinerung und die Verfeinerung von (1.21). Als Erstes zeigen wir, dass die in (1.21) angegebene Einteilung unabhängig von der Charakteristik gilt. Dabei werden wir uns auf die „charakteristikfreien“ Ergebnisse von Müller stützen.

Proposition (1.22) *Angenommen, die Gruppe G erfüllt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 . Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

- (1) *Die Gruppe G ist vom Typ G_2 .*
- (2) *Die Gruppe G ist vom Typ A_3 .*
- (3) *Es gilt $G = X_\alpha * C_G(X_\alpha)$ für ein $\alpha \in \tilde{\Phi}$ und $X_\beta \leq C_G(X_\alpha)$ für alle $\beta \in \tilde{\Phi} \setminus \{\pm\alpha\}$ oder $G = G(\Psi) * G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ ist vom Typ $A_2 \times A_2$.*

Letztendlich vertiefen wir Proposition (1.22), indem wir auf ihr basierend ein zu (1.19) korrespondierendes Ergebnis für G_2 nachweisen.

Satz (1.23) *Angenommen, die Gruppe G erfüllt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 . Dann gilt:*

- (1) *$\tilde{\Phi} = \dot{\bigcup} \Psi_i$, wobei Ψ_i die Struktur eines Wurzelsystems vom Typ G_2 , A_2 , A_3 oder C_2 trägt oder $\Psi_i = \{\pm r_i\}$ für ein $r_i \in \tilde{\Phi}$.*
- (2) *Die Gruppe G ist das zentrale Produkt der Untergruppen $G(\Psi_i)$, wobei $G(\Psi_i)$ vom Typ Ψ_i ist oder $G(\Psi_i) = X_{r_i}$.*

Beispiel (1.24)

- (1) Die Chevalley-Gruppen vom Typ G_2 (insbesondere auch $G_2(2)$ oder $G_2(3)$) bzw. die Lie-Typ-Gruppen von einem Moufang-Sechseck¹⁵ erfüllen nach Abschnitt 1.3 bzw. 1.2 die Bedingungen (I)–(III) und stellen so nach (1.9) konkrete Realisierungen von (1) in (1.22) dar.
- (2) Es ist etwas überraschender, dass auch der Typ A_3 in Erscheinung tritt. In diesem Fall ist ein zentraler Faktor vom höheren Rang als das zugrundeliegende Wurzelsystem. Dies erinnert an F_4 , da $G(F_4)$ einen zentralen Faktor vom Typ A_5 haben kann. Sei $\tilde{\Phi}_0 = \{\pm R, \pm S, \pm T, \pm(R+S), \pm(S+T), \pm(R+S+T)\}$ ein Wurzelsystem vom Typ A_3 . Wir indizieren die Wurzeluntergruppen nach [Mü04] folgendermaßen um:

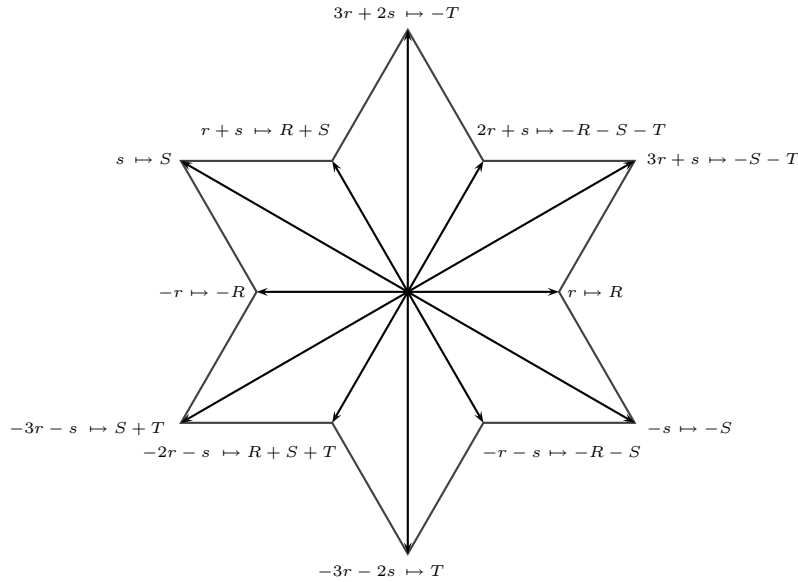


Abb. 1.5: Das Schema der Umindizierung.

Einerseits gilt $i\alpha + j\beta \in \tilde{\Phi}$ für $\alpha, \beta \in \tilde{\Phi}_0$ mit $\beta \neq -\alpha$ und $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i\alpha + j\beta \in \tilde{\Phi}_0$, wenn wir α und β als Wurzeln in $\tilde{\Phi}$ betrachten. Andererseits spannt ein Wurzelsystem vom Typ A_3 einen höherdimensionalen Vektorraum als eines vom Typ G_2 auf. Infolgedessen liegen zwischen zwei Wurzeln in $\tilde{\Phi}$ möglicherweise mehr Wurzeln der Form $i\alpha + j\beta$ als zwischen den entsprechenden in $\tilde{\Phi}_0$. So kann es vorkommen, dass in (I) bezüglich $\tilde{\Phi}_0$ immer Gleichheit gilt, aber nicht bezüglich $\tilde{\Phi}$. In diesem Fall ist G nach (1.10) vom Typ $\tilde{\Phi}_0$. Eine konkrete Realisierung hierfür ist $A_3(K) \simeq \mathrm{SL}_4(K)$

¹⁵Die zu einem Moufang-Sechseck assoziierten Wurzeluntergruppen können nach [Mal98, Abschnitt 5.4] mit Hilfe eines Wurzelsystems vom Typ G_2 indiziert werden.

mit einem Körper K .

- (3) In der extremen Situation, in der alle Kommutatorrelationen in (I) trivial sind, ist G das zentrale Produkt der Rang-1-Gruppen X_α , $\alpha \in \tilde{\Phi}$, d.h. $G = \bigstar_{\alpha \in \tilde{\Phi}} X_\alpha$.

Wenn jede lange Wurzeluntergruppe mit jeder kurzen vertauscht, dann sind die kurzen unter Kommutatorbildung abgeschlossen (s. Kapitel 3). Mithin erfüllen sie die Voraussetzungen von (1.12) mit $\tilde{\Phi} \setminus \Psi$ (als ein Wurzelsystem vom Typ A_2 betrachtet). Daher zerfällt $G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ in ein Produkt von Rang-1-Gruppen oder ist nach (1.10) vom Typ A_2 . Wenn außerdem in dem letzteren Fall innerhalb der langen Wurzeluntergruppen in (I) stets Gleichheit herrscht, dann ist $G(\tilde{\Phi}) = G(\Psi) * G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ vom Typ $A_2 \times A_2$. Eine konkrete Realisierung dieser Möglichkeit ist $G = \mathrm{SL}_3(K_1) * \mathrm{SL}_3(K_2)$ mit Körpern K_1 und K_2 .

In Abschnitt 3.4 werden wir sehen, dass $G = X_\alpha * \langle U_\alpha, U_{-\alpha} \rangle$ für ein $\alpha \in \Psi$ mit $G = X_\beta * \langle U_\beta, U_{-\beta} \rangle$ für ein $\beta \in \Psi \setminus \{\pm\alpha\}$ einhergeht. In dieser Situation sind die Wurzeluntergruppen A_γ , $\gamma \in \Delta := \tilde{\Phi} \setminus \{\pm\alpha, \pm\beta\}$ unter Kommutatorbildung abgeschlossen. Damit erfüllt $G(\Delta)$ die Voraussetzungen von [Tim05a, Korollar (3)] bezüglich Δ (als ein Wurzelsystem vom Typ C_2 betrachtet), mit dessen Hilfe wir die in (1.23) angegebenen „Faktorzerlegungen“ für G erhalten.

Wir weisen in Kapitel 4 ein mit (1.22) vergleichbares Ergebnis für 2F_4 nach.

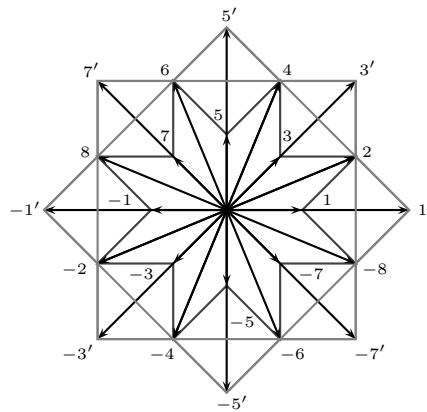


Abb. 1.6: Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ vom Typ 2F_4 .

Unsere Behauptung über die mögliche Struktur von G mit $\tilde{\Phi} = {}^2F_4$ lautet wie folgt:

Satz (1.25) *Angenommen, die Gruppe G erfüllt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ 2F_4 . Außerdem sei $A_{\alpha'}$ Untergruppe von A_{α} für $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$.¹⁶ Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

(A) *Die Gruppe G ist vom Typ 2F_4 .*

(B) *Es gilt*

$$G = X_{\alpha} * C_G(X_{\alpha})$$

für ein $\alpha \in \Phi$ und $X_{\beta} \leq C_G(X_{\alpha})$ für $\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ oder

$$G = G(\Psi) * G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$$

ist vom Typ $C_2 \times C_2$.

¹⁶Hierbei verwenden wir die Bezeichnungen aus Kapitel 4.

Kapitel 2

Präliminarien

Wir sind an der Klassifikation solcher Gruppen interessiert, die den verallgemeinerten Steinberg-Relationen aus Abschnitt 1.4 genügen. Das heißt: die Untergruppen $X_\alpha = \langle A_\alpha, A_{-\alpha} \rangle$, $\alpha \in \widehat{\Phi}$ sind Rang-1-Gruppen. (Dabei ist $\widehat{\Phi}$ wie in Abschnitt 1.2.) Außerdem genügen die Wurzeluntergruppen A_α , $\alpha \in \tilde{\Phi}$ den Kommutatorrelationen in (I). Der Nachweis der in Abschnitt 1.4 formulierten Behauptungen bezüglich der Wurzelsysteme G_2 bzw. 2F_4 wird in Kapitel 3 bzw. 4 auf extensiven Kommutatorrechnungen und auf den Eigenschaften von Rang-1-Gruppen basierend erfolgen. In diesem vorbereitenden Kapitel fassen wir deswegen diejenigen Kommutatoreigenschaften und Ergebnisse über Rang-1-Gruppen zusammen, welche für die späteren Beweisführungen relevant sind. Abschnitt 2.1 enthält Allgemeines über Kommutatoren, während Abschnitt 2.2 den Rang-1-Gruppen gewidmet ist. In Abschnitt 2.3 schicken wir ferner einige Lemmata voraus, die sowohl im Falle von G_2 als auch von 2F_4 gelten.

2.1 Allgemeines über Kommutatoren

Bezüglich Kommutatoren verweisen wir auf [KS98]. Zunächst legen wir einige Bezeichnungen fest. Sei G eine Gruppe. Für $x, y \in G$ setzen wir $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$. Das Element $[x, y]$ heißt der Kommutator von x und y . Wir setzen $[x, y, z] := [[x, y], z]$ für $x, y, z \in G$. Für nichtleere Teilmengen $X, Y, Z \subseteq G$ definieren wir $[X, Y] := \langle [x, y] \mid x \in X, y \in Y \rangle$

und $[X, Y, Z] := [[X, Y], Z]$.¹ Im folgenden Lemma stellen wir einige grundlegende Eigenschaften von Kommutatoren zusammen (s. [KS98, Abschnitt 1.5]).

Lemma (2.1) *Sei G eine Gruppe.*

- (1) *Sei φ ein Homomorphismus von G . Dann ist $\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)]$ für alle $x, y \in G$.*
- (2) *Für nichtleere Teilmengen X, Y von G gilt $[X, Y] = 1$ genau dann, wenn $xy = yx$ für alle $x \in X, y \in Y$.*
- (3) *Für Untergruppen X, Y von G gilt $[X, Y] \leq Y$ genau dann, wenn Y von X normalisiert wird.*
- (4) *Für $x, y, z \in G$ gilt $[x, yz] = [x, z][x, y]^z$ und $[xz, y] = [x, y]^z[z, y]$.*
- (5) *Für Untergruppen X und Y von G ist $[X, Y]$ ein Normalteiler von $\langle X, Y \rangle$.*
- (6) *Seien X, Y, Z Untergruppen von G .*
 - (a) *Es gelte $[X, Y, Z] = [Y, Z, X] = 1$. Dann ist auch $[Z, X, Y] = 1$.²*
 - (b) *Angenommen, $[X, Z, Z] = 1 = [X, Z, Y]$. Dann gilt $[XY, Z, Z] = [Y, Z, Z]$.³*
- (7) *Für nichtleere Teilmengen X, Y und Z von G mit $[X, Z] = 1$ gilt $[XY, Z] = [Y, Z]$.*

Der Übersichtlichkeit halber wird bei den späteren Beweisführungen auf einen Verweis auf dieses Lemma meistens verzichtet.

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Lemma, das die Dedekind-Identität in einer für uns geeigneten, allgemeinen Form angibt (vgl. [KS98, (1.1.11)]).

Dedekind-Identität (2.2) *Sei G eine Gruppe, $X \leq G$, $1 \in U \subseteq X$ und $1 \in A \subseteq G$. Dann gilt $U(A \cap X) = UA \cap X$.⁴*

Beweis: Für $u \in U \subseteq X$, $a \in A \cap X (\neq \emptyset)$ ist $ua \in X$, da $X \leq G$ nach Annahme. Daher ist $ua \in UA \cap X$ und damit $U(A \cap X) \subseteq UA \cap X$.

¹Im Weiteren fassen wir $g \in G$ als einelementige Teilmenge von G auf, wenn wir $[g, M]$ für eine nichtleere Teilmenge M von G bestimmen möchten, d.h. $[g, M] = [\{g\}, M] = \langle [g, m] \mid m \in M \rangle$.

²Auf dieses Ergebnis werden wir im Weiteren als Drei-Untergruppen-Lemma verweisen.

³Dies ist [Mü04, (4.15)].

⁴Für nichtleere Teilmengen X, Y einer Gruppe G setzen wir $XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$.

Sei $g \in UA \cap X (\neq \emptyset)$. Dann ist $g = ua$ mit $u \in U \subseteq X$ und $a \in A$. Daraus folgt $a = u^{-1}g \in X$, da $X \leq G$ nach Annahme. Damit ist $a \in A \cap X$. Dies impliziert $g = ua \in U(A \cap X)$ und damit $UA \cap X \subseteq U(A \cap X)$.

Insgesamt erhalten wir $U(A \cap X) = UA \cap X$, wie gewünscht. $\square$

2.2 Rang-1-Gruppen

Der Begriff „Rang-1-Gruppe“ geht auf TIMMESFELD [Tim01] zurück. Rang-1-Gruppen können als eine Verallgemeinerung von SL_2 aufgefasst werden. Wir listen in diesem Abschnitt diejenigen Eigenschaften von Rang-1-Gruppen auf, welche für die Gedankenführungen in Kapitel 3 bzw. 4 unerlässlich sind. Für die Beweise der Behauptungen siehe [Tim01, Kapitel I] bzw. [Mü01, Kapitel 2].

Definition (2.3) *Wir nennen eine Gruppe X eine Rang-1-Gruppe, falls sie von zwei verschiedenen nilpotenten Untergruppen A und B erzeugt wird, so dass*

($\star$) *für jedes $a \in A^\sharp$ ein $b \in B^\sharp$ mit $A^b = B^a$ existiert und umgekehrt.*

Man nennt X eine spezielle Rang-1-Gruppe, falls für $a \in A^\sharp$, $b \in B^\sharp$, die ($\star$) erfüllen, auch $a^b = (b^{-1})^a =: b^{-a}$ gilt. Die Konjugierten von A (und B) heißen die unipotenten Untergruppen von X . Wir bezeichnen die Menge der unipotenten Untergruppen mit $\Omega := A^X$.

Beispiel (2.4) *(vgl. I (1.5) in [Tim01])*

Sei K ein Körper. Für $t \in K$ definieren wir

$$a(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}, b(t) := \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$A := \{a(t) \mid t \in K\}, B := \{b(t) \mid t \in K\}.$$

Dann ist $\langle A, B \rangle = SL_2(K)$ eine spezielle Rang-1-Gruppe mit zu $(K, +)$ isomorphen unipotenten Untergruppen A und B . Für alle $t \in K^$ sind $A^{n(t)} = B$ und $B^{n(t)} = A$, wobei*

$$n(t) := a(t)b(-t^{-1})a(t) = \begin{pmatrix} 0 & -t^{-1} \\ t & 0 \end{pmatrix}.$$

Für alle $t \in K^*$ gilt ferner

$$n(t)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in Z(\mathrm{SL}_2(K)) = \left\langle \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Beispiel (2.5) (s. I (5.1) in [Tim01])

Die nach (1.7) existierende universelle zentrale Erweiterung $\mathrm{St}_2(K)$ von $\mathrm{SL}_2(K)$, wobei K Körper mit $9 \neq |K| > 4$, wird nach Theorem 10 in [St67] von Symbolen $a(t), b(t), t \in K$ erzeugt, welche den folgenden Relationen genügen:

(1) $a(s)a(t) = a(s+t)$, $b(s)b(t) = b(s+t)$ für $s, t \in K$;

(2) $a(s)^{n(t)} = b(-t^{-2}s)$ für $s \in K$ und $t \in K^*$, wobei $n(t) := a(-t)b(t^{-1})a(-t)$.⁵

Die Relationen (1) und (2) sind äquivalent zu (1) und (2'), wobei

(2') $a(s)^{b(t^{-1})} = b(-t^{-2}s)^{a(t)}$ für $s \in K$ und $t \in K^*$.

Wir setzen $A := \{a(t) \mid t \in K\}$ und $B := \{b(t) \mid t \in K\}$. Aus (2') folgt

$$A^{b(t^{-1})} = B^{a(t)}$$

für $t \in K^*$, da $K = \{-t^{-2}s \mid s \in K\}$ für jedes $t \in K^*$. Ferner gilt

$$a(t)^{b(t^{-1})} = b(-t^{-1})^{a(t)} = (b(t^{-1})^{-1})^{a(t)}.$$

Daher ist $\mathrm{St}_2(K)$ eine spezielle Rang-1-Gruppe mit zu $(K, +)$ isomorphen unipotenten Untergruppen A und B .⁶

In dem folgenden Lemma listen wir einige grundlegende Eigenschaften von Rang-1-Gruppen auf.

Lemma (2.6) Sei $X = \langle A, B \rangle$ eine Rang-1-Gruppe mit unipotenten Untergruppen A und B .

(1) Zu $a \in A^\#$ existiert genau ein $b \in B^\#$ mit $A^b = B^a$. Wir bezeichnen dieses Element mit $b(a)$.

⁵Wir definieren $n(t)$ von [St67, §6] abweichend, da wir von rechts konjugieren, das heißt $x^y = y^{-1}xy$.

⁶Angenommen, $|K|$ ist unendlich. Dann ist $\mathrm{St}_2(K)$ in der Regel verschieden von $\mathrm{SL}_2(K)$.

(2) Sei $\sigma: X \rightarrow \sigma(X)$ ein Homomorphismus mit $\sigma(A) \neq \sigma(B)$. Dann ist

$$\sigma(X) = \langle \sigma(A), \sigma(B) \rangle$$

eine Rang-1-Gruppe mit unipotenten Untergruppen $\sigma(A)$ und $\sigma(B)$.

(3) Sei $N \trianglelefteq X$. Dann gilt entweder $N \leq Z(X)$ oder $X = NA$.

(4) Sei $N \trianglelefteq X$. Genau dann ist X/N eine Rang-1-Gruppe, wenn $N \leq Z(X)$.

(5) Es gilt $N_A(B) = 1 = N_B(A)$.

(6) Für alle $C \neq D \in \Omega$ und $d \in D^\#$ gilt $X = \langle C, D \rangle = \langle C, d \rangle$.

(7) Die Gruppe X ist zweifach transitiv auf Ω . Insbesondere gibt es ein $x \in X$ mit $A^x = B$ und $B^x = A$, d.h. es existiert ein $x \in X$, das A und B vertauscht. (Wir benutzen dafür die Schreibweise $A \xleftrightarrow{x} B$.)

(8) Für $a \in A^\#$ ist $\langle a^X \rangle$ nicht nilpotent. Insbesondere ist X nicht nilpotent.

Ähnlich wie im Falle von Lemma (2.1) werden wir in den Beweisführungen der folgenden Kapitel im Allgemeinen von einem Verweis auf Lemma (2.6) absehen.

Die zahlreichen Beispiele in [Tim01, I §1] weisen darauf hin, dass die Bestimmung der Isomorphietypen von speziellen Rang-1-Gruppen unwahrscheinlich ist. Wie das folgende Lemma zeigt, hat man aber die Struktur spezieller Rang-1-Gruppen mit abelschen unipotenten Untergruppen gut im Griff.

Lemma (2.7) Sei $X = \langle A, B \rangle$ eine spezielle Rang-1-Gruppe mit abelschen unipotenten Untergruppen A und B . Dann gilt eine der folgenden beiden Möglichkeiten:

(1) Die unipotente Untergruppe A ist eine elementarabelsche p -Gruppe für eine Primzahl p . Außerdem gilt

$$\langle a, b(a) \rangle \simeq (\text{P})\text{SL}_2(p)$$

für jedes $a \in A^\#$.

(2) Die unipotente Untergruppe A ist torsionsfrei⁷ und divisibel⁸. Für jedes $a \in A^\#$ sei $A(a) := \{a^{m/n} \mid 0 \neq n, m \in \mathbb{Z}\}$ und $B(a) := \{b(a)^{m/n} \mid 0 \neq n, m \in \mathbb{Z}\}$. Dann ist $\langle A(a), B(a) \rangle \simeq \text{St}_2(\mathbb{Q})/N$ mit $N \leq Z(\text{St}_2(\mathbb{Q}))$.

Beweis: Siehe [Tim01, I (5.2), I (5.6)].

In den folgenden Kapiteln werden wir uns öftermals in einer Situation befinden, in der die X_α für bestimmte $\alpha \in \tilde{\Phi}$ spezielle Rang-1-Gruppen sind. Die Untersuchung ihrer Operation auf gewissen Moduln wird uns Informationen über die Struktur von $G(\tilde{\Phi})$ liefern. Deswegen sind Bedingungen von großer Bedeutung, die sicherstellen, dass eine Rang-1-Gruppe speziell ist. Als Nächstes zählen wir einige – für uns relevante – Kriterien auf.

Lemma (2.8) Sei $X = \langle A, B \rangle$ eine Rang-1-Gruppe, deren unipotente Untergruppen A und B elementarabelsche 2-Gruppen seien. Dann ist X speziell.

Beweis: Dies ist [Tim05a, (2.1)].

Definition (2.9) Sei $X = \langle A, B \rangle$ eine Rang-1-Gruppe mit unipotenten Untergruppen A und B . Eine abelsche Gruppe V , auf der X operiert, heißt $\mathbb{Z}X$ -Modul. Ein treuer $\mathbb{Z}X$ -Modul V mit $[V, A, A] = 0$ heißt quadratischer X -Modul.⁹

Beispiel (2.10) Der natürliche SL_2 -Modul

Sei $X = \text{SL}_2(K)$ für einen Körper K oder sei $X = \text{St}_2(K)$ für einen Körper K mit $9 \neq |K| > 4$. Ein K -Vektorraum V , auf dem X operiert, heißt KX -Modul. Insbesondere wird die skalare Multiplikation auf V von X respektiert. Man nennt einen zweidimensionalen KX -Modul V einen natürlichen KX -Modul, wenn es eine Basis (v, w) von V gibt, so dass

$$\begin{aligned} [v, a(t)] &= 0, & [v, b(t)] &= tw, \\ [w, a(t)] &= tv, & [w, b(t)] &= 0. \end{aligned}$$

⁷Eine Gruppe G heißt torsionsfrei, falls kein Element $1 \neq g \in G$ eine endliche Ordnung hat.

⁸Eine Gruppe G heißt divisibel, falls es für jedes $g \in G$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $h \in G$ mit $h^n = g$ gibt.

Hierfür benutzen wir die Schreibweise $h = g^{1/n}$

⁹In dieser Situation ist A abelsch, da $[A, A, V] = 0$ nach dem Drei-Untergruppen-Lemma und damit $A' \leq C_X(V) = 1$.

Insbesondere ist V ein quadratischer X -Modul.

Sehen wir von der Existenz der skalaren Multiplikation auf V ab, und betrachten V als abelsche Gruppe, so bezeichnen wir V als natürlichen $\mathbb{Z}X$ -Modul.

Lemma (2.11) *Sei $X = \langle A, B \rangle$ eine Rang-1-Gruppe mit abelschen unipotenten Untergruppen A und B . Angenommen, es existiert ein $\mathbb{Z}X$ -Modul V mit $[V, X, X] \neq 0 = [V, A, A]$. Dann ist X speziell.*

Beweis: Dies ist [Tim01, I (2.5)].

Bemerkung (2.12) *Falls es für eine Rang-1-Gruppe X einen quadratischen X -Modul V gibt, so ist $[V, X, X] \neq 0$. Sonst ist nämlich $[X, X, V] = 0$ nach dem Drei-Untergruppen-Lemma und damit $X' \leq C_X(V) = 1$, ein Widerspruch zu (2.6)(8). Daher ist X nach (2.11) speziell.*

Wir schließen diesen Abschnitt mit einem Lemma, das uns in Abschnitt 4.4 gute Dienste leisten wird.

Lemma (2.13) *Sei $X = \langle A, B \rangle$ eine Rang-1-Gruppe, deren unipotente Untergruppen A und B elementarabelsche p -Gruppen seien. Ferner sei V ein $\mathbb{Z}X$ -Modul mit $V = [V, A] \oplus [V, B]$, auf dem A quadratisch operiert. Dann ist V eine elementarabelsche p -Gruppe.*

Beweis: Dies ist [Mü01, (2.26)].

2.3 Präliminarien bezüglich Gruppen mit Wurzelsystem vom Typ G_2 bzw. 2F_4

In diesem Abschnitt formulieren wir einige Lemmata, die sowohl für G_2 als auch für 2F_4 gelten und von grundlegender Natur sind.

Sei $\tilde{\Phi}$ ein Wurzelsystem vom Typ G_2 oder 2F_4 . Ferner sei G eine Gruppe, welche den verallgemeinerten Steinberg-Relationen aus Abschnitt 1.4 bezüglich $\tilde{\Phi}$ genügt.

Für $\alpha \in \tilde{\Phi}$ definieren wir

$$U_\alpha := \langle A_\beta \mid \alpha < \beta < -\alpha \rangle,$$

wobei „ $\alpha < \beta < -\alpha$ “ dafür steht, dass die Wurzel β in Abbildung 1.4 oder in Abbildung 1.6 im Uhrzeigersinn zwischen α und $-\alpha$ liegt. Wegen der Kommutatorrelationen in (I) gilt

$$U_\alpha = \prod_{\alpha < \beta < -\alpha} A_\beta,$$

wobei die A_β „von α nach $-\alpha$ “ angeordnet sind.

Sei ferner $X_\alpha := \langle A_\alpha, A_{-\alpha} \rangle$ für $\alpha \in \tilde{\Phi}$.

Die Gültigkeit der folgenden Behauptung folgt aus den Eigenschaften (I) und (II). Sie wird uns im weiteren Verlauf fast in jedem Beweis begegnen.

Lemma (2.14) *Für $\alpha \in \tilde{\Phi}$ gilt:*

(1) U_α und $U_{-\alpha}$ sind X_α -invariant.

(2) $A_\alpha U_\alpha$ und $A_{-\alpha} U_\alpha$ sind nilpotent.

(3) $A_\alpha \cap U_\alpha = 1 = A_{-\alpha} \cap U_\alpha$. Insbesondere ist $A_\alpha \cap A_\beta = 1$ für $\tilde{\Phi} \ni \beta \notin \mathbb{R}^+ \cdot \alpha$.

Beweis: Siehe [Tim03a, (2.1)].¹⁰

Lemma (2.15) *Sei $y \in A_\alpha U_\alpha \setminus U_\alpha$ für ein $\alpha \in \tilde{\Phi}$. Dann ist $\langle y^{X_\alpha} \rangle$ nicht nilpotent.*

Beweis: Nach (2.6)(8) ist $\langle y^{X_\alpha} \rangle$ nicht nilpotent, da es modulo U_α nicht nilpotent ist. $\square$

Für $\alpha \in \hat{\Phi}$ (mit $\hat{\Phi}$ wie in Abschnitt 1.2) sei n_α ein beliebiges Element in X_α mit $A_\alpha^{n_\alpha} = A_{-\alpha}$ und $A_{-\alpha}^{n_\alpha} = A_\alpha$. Solch ein Element existiert nach (2.6)(7). Wir benutzen hierfür die Schreibweise $A_\alpha \xleftrightarrow{n_\alpha} A_{-\alpha}$.

Nilpotenzargument (2.16) *Seien $\alpha \in \hat{\Phi}$ und $\beta, \gamma \in \tilde{\Phi}$ mit $\alpha < \beta \neq \gamma < -\alpha$, $[X_\gamma, X_\alpha] = 1$ und $\hat{A}_\beta^{n_\alpha} \subseteq A_\gamma U_\gamma$, wobei $\hat{A}_\beta$ für eine nichtleere Teilmenge von A_β steht.¹¹ Dann gilt $\hat{A}_\beta^{n_\alpha} \subseteq U_\gamma$.*

Beweis: Angenommen, die Behauptung gilt nicht. Dann existiert ein $y \in \hat{A}_\beta^{n_\alpha}$ mit

¹⁰Es sei bemerkt, dass zwar [Tim03a, (2.1)] für 2F_4 nicht formuliert wurde, der Beweis gilt auch in diesem Fall.

¹¹Ein Element identifizieren wir dabei mit der ihm entsprechenden einelementigen Teilmenge.

$y \in A_\gamma U_\gamma \setminus U_\gamma$. Nach (2.15) ist $\langle y^{X_\gamma} \rangle$ nicht nilpotent. Wegen $[X_\gamma, X_\alpha] = 1$ gilt andererseits

$$\langle y^{X_\gamma} \rangle \leq \left\langle \left(\hat{A}_\beta^{n_\alpha} \right)^{X_\gamma} \right\rangle = \left\langle \left(\hat{A}_\beta^{X_\gamma} \right)^{n_\alpha} \right\rangle,$$

wobei $\left\langle \left(\hat{A}_\beta^{X_\gamma} \right)^{n_\alpha} \right\rangle \leq U_\gamma^{n_\alpha}$ oder $\left\langle \left(\hat{A}_\beta^{X_\gamma} \right)^{n_\alpha} \right\rangle \leq U_{-\gamma}^{n_\alpha}$ nach (2.14)(1). Diese sind aber nach (2.14)(2) nilpotent, ein Widerspruch. $\square$

Bemerkung (2.17) Die analoge Behauptung gilt auch für $\hat{A}_\beta^{n_\alpha} \leq A_\gamma U_{-\gamma}$. Den entsprechenden Beweis erhalten wir, indem wir U_γ in (2.16) mit $U_{-\gamma}$ ersetzen.

Lemma (2.18) Sei M eine X_α -invariante Gruppe für ein $\alpha \in \hat{\Phi}$ mit $A_\alpha \leq C(M)$ oder $A_{-\alpha} \leq C(M)$. Dann gilt $[X_\alpha, M] = 1$.

Beweis: O.B.d.A. gelte die Kommutatorrelation $[M, A_\alpha] = 1$. Sie impliziert

$$1 = [M, A_\alpha]^{n_\alpha} = [M, A_{-\alpha}],$$

denn M ist invariant unter X_α nach Annahme. Daher gilt $[M, X_\alpha] = 1$, wie es zu zeigen war. $\square$

Lemma (2.19) Angenommen, es existieren $\alpha, \beta \in \hat{\Phi}$ mit $[X_\alpha, A_\beta] = 1$. Dann existiert kein $a_{-\beta} \in A_{-\beta}^\#$ mit $a_{-\beta}^{n_\alpha} \in U_\beta$ oder $a_{-\beta}^{n_\alpha} \in U_{-\beta}$.

Beweis: Wir nehmen an, dass es ein $a_{-\beta} \in A_{-\beta}^\#$ mit $a_{-\beta}^{n_\alpha} \in U_\beta$ gibt, und führen dies zum Widerspruch. Sei $a_{-\beta} \in A_{-\beta}^\#$ mit $a_{-\beta}^{n_\alpha} \in U_\beta$. Dann gilt

$$X_\beta^{n_\alpha} = \langle A_\beta, a_{-\beta} \rangle^{n_\alpha} \leq \langle A_\beta, U_\beta \rangle = A_\beta U_\beta.$$

Demnach ist die nach Lemma (2.6)(8) nicht nilpotente Gruppe $X_\beta^{n_\alpha}$ eine Untergruppe von $A_\beta U_\beta$, welches nach (2.14)(2) nilpotent ist, ein Widerspruch.

Analog führt auch die Annahme $a_{-\beta}^{n_\alpha} \in U_{-\beta}$ für ein $a_{-\beta} \in A_{-\beta}^\#$ zum Widerspruch. Daher gilt die Behauptung. $\square$

Kapitel 3

Gruppen mit Wurzelsystem vom Typ G_2

Sei $\tilde{\Phi} = \{\pm r, \pm s, \pm(r+s), \pm(2r+s), \pm(3r+s), \pm(3r+2s)\}$ ein Wurzelsystem vom Typ G_2 .

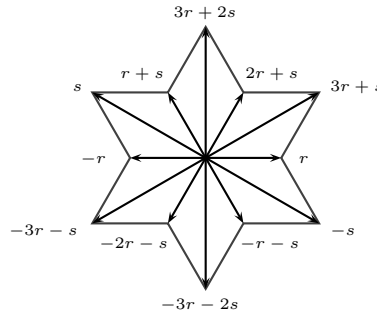


Abb. 3.1: Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 .

Wir betrachten abstrakte Gruppen, welche den verallgemeinerten Steinberg-Relationen (oder kurz (S)) aus Abschnitt 1.4 mit $\tilde{\Phi} = G_2$ genügen, die wir an dieser Stelle in einer für G_2 geeigneten Form in Erinnerung rufen. Wir sind an der Struktur solcher Gruppen G interessiert, die von Untergruppen $A_\alpha \neq 1$ erzeugt werden, wobei der Index α über ein Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 läuft (d.h. $G = \langle A_\alpha \mid \alpha \in \tilde{\Phi} \rangle$) und die Wurzeluntergruppen die folgenden Eigenschaften erfüllen:

(I) Für $\beta \neq -\alpha$ in $\tilde{\Phi}$ gilt

$$[A_\alpha, A_\beta] \leq \left\langle A_{i\alpha+j\beta} \mid i, j \in \mathbb{N} \text{ mit } i\alpha + j\beta \in \tilde{\Phi} \right\rangle.$$

(II) Für $\alpha \in \tilde{\Phi}$ ist $X_\alpha = \langle A_\alpha, A_{-\alpha} \rangle$ eine Rang-1-Gruppe mit unipotenten Untergruppen A_α und $A_{-\alpha}$.

Insbesondere sind die Wurzeluntergruppen allesamt abelsch nach (I). Die Menge der langen Wurzeln

$$\Psi = \{\pm s, \pm(3r + s), \pm(3r + 2s)\}$$

ist ein Unterwurzelsystem von $\tilde{\Phi}$ vom Typ A_2 . Mit positiv, negativ, kurz und lang bezeichnen wir sowohl die Wurzeln als auch die zugehörigen Wurzeluntergruppen.

MÜLLER erzielte ein mit (1.16) vergleichbares Ergebnis bezüglich $\tilde{\Phi} = G_2$ in [Mü04]. Er zeigte nämlich (s. (1.21)), dass eine den Bedingungen von (S) bezüglich $\tilde{\Phi} = G_2$ genügende Gruppe – abgesehen von den Charakteristiken 2 und 3 – über einen Zentralteiler¹ verfügt, der eine Lie-Typ- oder eine Rang-1-Gruppe ist. Bei seiner Beweisführung kommen zwei Aspekte zum Vorschein, bei denen Charakteristik eine entscheidende Rolle spielt: Angenommen, $G(\Psi)$ ist vom Typ A_2 und nicht jede kurze Wurzeluntergruppe vertauscht mit jeder langen. Einerseits ist dann $[A_{r+s}, A_{2r+s}] \neq 1$ in den von 2 bzw. 3 verschiedenen Charakteristiken, andererseits sind so genannte zentrale Involutionen in X_α , $\alpha \in \Psi$ in den von 2 verschiedenen Charakteristiken vorhanden.

Wie bereits erwähnt, führt die Einteilung in (1.21) zu keinen disjunkten Fällen. Ein Beispiel hierfür sind die Chevalley-Gruppen $G_2(2)$ und $G_2(3)$. Sie genügen nämlich den Bedingungen (I)–(III) und sind damit nach (1.9) vom Typ G_2 .

Wir werden den Ausnahmestatus der kleinen Charakteristiken beheben und eine einheitliche Klassifikation angeben. Das Hauptanliegen dieses Kapitels ist die Ausweitung der Ergebnisse von (1.21) auf die kleinen Charakteristiken bzw. die Verfeinerung von (1.21). Wir werden uns dabei auf „charakteristikfreie“ Beweismethoden stützen, wobei wir die in jeder Charakteristik geltenden Ergebnisse von Müller übernehmen werden. Als Erstes zeigen wir:

Proposition (3.1) *Angenommen, die Gruppe G genügt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 . Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

¹Wir bezeichnen in dieser Arbeit einen Normalteiler $N \trianglelefteq G$ als Zentralteiler, falls $G = N * C_G(N)$ ist.

- (A) Die Gruppe G ist vom Typ G_2 .
- (B) Die Gruppe G ist vom Typ A_3 .
- (C) Es gilt $G = X_\alpha * C_G(X_\alpha)$ für ein $\alpha \in \tilde{\Phi}$ und $X_\beta \leq C_G(X_\alpha)$ für alle $\beta \in \tilde{\Phi} \setminus \{\pm\alpha\}$ oder $G = G(\Psi) * G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ ist vom Typ $A_2 \times A_2$.

Im Anschluss verdichten wir Proposition (3.1), indem wir mit ihrer Hilfe einen mit (1.19) vergleichbaren Satz für G_2 nachweisen:

Satz (3.2) *Angenommen, die Gruppe G genügt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 . Dann gilt:*

- (1) $\tilde{\Phi} = \dot{\bigcup} \Psi_i$, wobei Ψ_i die Struktur eines Wurzelsystems vom Typ G_2 , A_2 , A_3 oder C_2 trägt oder $\Psi_i = \{\pm r_i\}$ für ein $r_i \in \tilde{\Phi}$.
- (2) Die Gruppe G ist das zentrale Produkt der Untergruppen $G(\Psi_i)$, wobei $G(\Psi_i)$ vom Typ Ψ_i ist oder $G(\Psi_i) = X_{r_i}$.

Auf dem Weg zur Lösung führen wir in Abschnitt 3.1 einige Bezeichnungen ein. Danach zitieren wir ein grundlegendes Lemma aus [Tim03a], welches den Ausgangspunkt für die kommenden Beweisschritte bildet. In Abschnitt 3.2 resümieren wir die „charakteristikfreien“ Resultate von Müller. Im anschließenden Teil werden wir zeigen, dass wir anhand eines Kommutators entscheiden können, ob wir uns im Fall (A) oder (B) befinden, wenn die Möglichkeit (C) in (3.1) nicht gilt. Im letzten Abschnitt spezifizieren wir die Möglichkeit (C) weiter, indem wir zeigen, dass G in diesem Fall vom Typ $A_2 \times A_2$, $C_2 \times A_1 \times A_1$, $A_2 \times A_1 \times A_1 \times A_1$ oder $A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$ ist.²

3.1 Grundlegendes

In den folgenden Abschnitten sollen stets die Voraussetzungen von (3.1) gelten. In diesem Abschnitt legen wir einige Bezeichnungen fest und zitieren ein Lemma aus [Tim03a].

Für $\alpha \in \Psi$ setzen wir

$$W_\alpha := \langle A_\beta \mid \beta \in \Psi \text{ mit } \alpha < \beta < -\alpha \rangle$$

²Bei dieser Bezeichnungsweise werden Rang-1-Gruppen als Lie-Typ-Gruppen vom Typ A_1 aufgefasst.

und $V_\alpha := W_\alpha A_\gamma$, wobei γ für diejenige kurze Wurzel steht, die zwischen den langen Wurzeln β und δ mit $W_\alpha = A_\beta A_\delta$ liegt.

Zum Beispiel ist

$$\begin{aligned} W_s &= A_{3r+2s} A_{3r+s}, \\ V_s &= A_{3r+2s} A_{2r+s} A_{3r+s}. \end{aligned}$$

Lemma (3.3) *Es gilt genau eine der folgenden beiden Möglichkeiten:*

- (1) Für ein $\alpha \in \Psi$ ist $G = X_\alpha * C_G(X_\alpha)$ und $X_\beta \leq C_G(X_\alpha)$ für alle $\beta \in \tilde{\Phi} \setminus \{\pm\alpha\}$.
- (2) Es ist $[A_\alpha, A_\beta] = A_{\alpha+\beta}$ für $\alpha, \beta \in \Psi$ mit $\alpha + \beta \in \Psi$.

Beweis: Dies ist [Tim03a, (2.5)].

Angenommen, $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$. Dann besagt Lemma (3.3) in Verbindung mit (1.12), dass es eine lange Wurzel gibt, so dass die zu ihr gehörende Rang-1-Gruppe Zentralteiler von G ist.

3.2 Die „charakteristikfreien“ Ergebnisse von Müller

Als Nächstes fassen wir diejenigen Resultate von Müller zusammen, welche in jeder Charakteristik gelten.

Nach (3.3) trifft entweder der erste Fall von (C) für eine lange Wurzel zu, oder es herrscht in den Kommutatorrelationen in (I) zwischen den langen Wurzeluntergruppen stets Gleichheit. In der letzteren Situation ist $G(\Psi)$ nach (1.10) vom Typ A_2 . Vertauscht außerdem jede kurze mit jeder langen Wurzeluntergruppe, so sind die kurzen Wurzeluntergruppen unter Kommutatorbildung abgeschlossen. Nach (1.12) gilt nämlich beispielsweise

$$[A_{2r+s}, A_r] \leq A_{3r+s} \cap C_G(G(\Psi)) = 1$$

und

$$[A_{r+s}, A_r] \leq A_{3r+2s} A_{2r+s} A_{3r+s} \cap C_G(G(\Psi)) = A_{2r+s}.$$

Damit erfüllt das Erzeugnis der kurzen Wurzeluntergruppen die Voraussetzungen von (1.12) bezüglich $\tilde{\Phi} \setminus \Psi$ vom Typ A_2 . So ist entweder $G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi) = \bigstar_{\alpha \in \tilde{\Phi} \setminus \Psi} X_\alpha$ oder es herrscht in

den Kommutatorrelationen in (I) zwischen den kurzen Wurzeluntergruppen stets Gleichheit und $G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ ist nach (1.10) vom Typ A_2 . Das heißt $G = G(\Psi) * G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ ist vom Typ $A_2 \times A_1 \times A_1 \times A_1$ oder $A_2 \times A_2$. Folglich gilt in beiden Fällen die Möglichkeit (C). Von nun an nehmen wir – bis zum Widerruf – an, dass (C) nicht zutrifft und setzen – nach der obigen Gedankenführung berechtigt – voraus, dass zum einen $G(\Psi)$ vom Typ A_2 ist und dass zum anderen nicht alle kurzen Wurzeluntergruppen mit allen langen vertauschen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei A_r eine kurze Wurzeluntergruppe, die nicht mit jeder langen vertauscht. Sei β eine lange Wurzel mit $[A_r, A_\beta] \neq 1$. Nach den Kommutatorrelationen in (I) ist $\beta \in \{s, -3r - s\}$. Da $G(\Psi)$ vom Typ A_2 ist, sind $[A_r, A_s]$ und $[A_r, A_{-3r-s}]$ unter n_{3r+2s} konjugiert. Unsere Annahme bedeutet also, dass die Ungleichungen $[A_r, A_s] \neq 1$ und $[A_r, A_{-3r-s}] \neq 1$ gelten.

Da $G(\Psi)$ vom Typ A_2 ist, sind die langen Wurzeluntergruppen zueinander konjugiert. Wir wenden (2.11) auf die Operation von X_α , $\alpha \in \Psi$ auf W_α an und erhalten, dass die Rang-1-Gruppen X_α , $\alpha \in \Psi$ speziell sind. Mithin sind sie nach (2.7) alle elementarabelsche p -Gruppen für die gleiche Primzahl p , oder sie sind torsionsfrei und divisibel. Die A_α , $\alpha \in \Psi$ können infolgedessen als Vektorräume über einem Primkörper betrachtet werden. Damit haben wir die Struktur der A_α , $\alpha \in \Psi$ gut im Griff. Nach [Tim98, (2.1)] wissen wir sogar, dass jedes X_α , $\alpha \in \Psi$ im Wesentlichen eine SL_2 ist. (Dies folgt, da $G(\Psi)$ nach Annahme vom Typ A_2 ist.)

Lemma (3.4) *Für jede lange Wurzel α ist W_α der natürliche $\mathbb{Z}\overline{X}_\alpha$ -Modul mit $\overline{X}_\alpha := X_\alpha/C_{X_\alpha}(W_\alpha) \simeq SL_2(K)$ für eine Cayley-Divisionsalgebra oder einen Divisionsring K .*

MÜLLER betrachtete die Operation von X_α , $\alpha \in \Psi$ auf U_α , um Information über die kurzen Wurzeluntergruppen zu erhalten, und stellte eine erste Verbindung zwischen den langen und den kurzen Wurzeluntergruppen in [Mü04, (4.6)] her:

Lemma (3.5)

(1) *Für die Operation von X_s auf U_s gilt*

$$C_{U_s}(A_s) = A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s} \text{ und } C_{U_s}(A_{-s}) = A_{2r+s}A_{3r+s}A_r.$$

(2) Sei $\overline{U}_s := U_s/V_s$. Dann gilt

$$\overline{U}_s = \overline{A}_{r+s} \times \overline{A}_r$$

sowie

$$\begin{aligned} C_{\overline{U}_s}(A_s) &= \overline{A}_{r+s} = [\overline{A}_r, A_s] = [\overline{A}_r, a_s], \\ C_{\overline{U}_s}(A_{-s}) &= \overline{A}_r = [\overline{A}_{r+s}, A_{-s}] = [\overline{A}_{r+s}, a_{-s}] \end{aligned}$$

für alle $a_s \in A_s^\sharp$, $a_{-s} \in A_{-s}^\sharp$.

Dieser Zusammenhang wurde in [Mü04, (4.8)] weiter vertieft:

Lemma (3.6) Die n_α , $\alpha \in \Psi$ operieren auf $\{A_\beta \mid \beta \in \tilde{\Phi}\}$ vermöge $A_\beta^{n_\alpha} = A_{\beta w_\alpha}$, wobei w_α die Spiegelung entlang α auf $\tilde{\Phi}$ ist.

MÜLLER zeigte in [Mü01, (4.16)], dass sich die Struktureigenschaften der A_α , $\alpha \in \Psi$, vermöge der Operation von X_α auf $\overline{U}_\alpha$ aus (3.5), auf die kurzen Wurzeluntergruppen übertragen. Dabei benutzte er, dass $\overline{A}_{r+s} \simeq A_{r+s}$ für $\overline{A}_{r+s}$ aus (3.5), denn nach (2.14)(3) ist $A_{r+s} \cap V_s = 1$.

Lemma (3.7)

- (1) Falls die A_α , $\alpha \in \Psi$ elementarabelsche p -Gruppen sind, so sind alle A_β , $\beta \in \tilde{\Phi}$ elementarabelsche p -Gruppen zur selben Primzahl p .
- (2) Falls die A_α , $\alpha \in \Psi$ torsionsfrei und divisibel sind, so sind alle A_β , $\beta \in \tilde{\Phi}$ torsionsfrei und divisibel.

3.3 Der Typ von G anhand der Kommutatoren

$$[A_{r+s}, A_r], [U_s, A_{2r+s}] \text{ bzw. } [A_s, A_r]$$

In diesem Abschnitt setzen wir weiterhin voraus, dass $G(\Psi)$ vom Typ A_2 und $[A_r, A_s] \neq 1$ sind. Diese Annahme wird uns in die Lage versetzen, anhand eines Kommutators, nämlich $[A_{r+s}, A_r]$ oder $[A_s, A_r]$, entscheiden zu können, ob der Fall (A) oder (B) von (3.1) eintritt.

Das folgende Lemma zeigt, dass der Kommutator $[U_s, A_{2r+s}]$ in einem gewissen Sinne entweder „minimal“ oder „maximal“ ist.

Wir benutzen die Bezeichnungen aus Abschnitt 3.1.

Lemma (3.8) *Es gilt entweder $[U_\alpha, \hat{A}_\gamma] = 1$ oder $[U_\alpha, \hat{A}_\gamma] = W_\alpha$ für $\alpha \in \Psi$, wobei $\hat{A}_\gamma$ für eine nichtleere Teilmenge von A_γ steht.*

Beweis: Wegen $[\hat{A}_\gamma, X_\alpha] = 1$ und (2.14)(1) ist der Kommutator $[U_\alpha, \hat{A}_\gamma]$ invariant unter X_α . Nach den Kommutatorrelationen in (I) ist außerdem

$$[U_\alpha, \hat{A}_\gamma] \leq A_\beta A_\delta = W_\alpha.$$

Nach (3.4) ist W_α ein irreduzibler X_α -Modul. Daher ist entweder $[U_\alpha, \hat{A}_\gamma] = 1$ oder $[U_\alpha, \hat{A}_\gamma] = W_\alpha$. $\square$

Wir werden sehen, dass $[A_{r+s}, A_r] = 1$ mit $[U_s, A_{2r+s}] = W_s$ einhergeht. Außerdem zeigen wir, dass die durch ein Wurzelsystem vom Typ A_3 wie in Abschnitt 1.4 umindizierten Wurzeluntergruppen in dieser Situation die Kommutatorrelationen in (I) stets mit Gleichheit erfüllen. Daraus folgt nach (1.10), dass G vom Typ A_3 ist. Daher gilt die Möglichkeit (B) von (3.1). Falls $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$ ist, so werden wir, sowohl wenn der Kommutator $[U_s, A_{2r+s}]$ „minimal“ als auch wenn er „maximal“ ist, darauf schließen, dass jedes n_α , $\alpha \in \tilde{\Phi} \setminus \Psi$ auf $\{A_\beta \mid \beta \in \tilde{\Phi}\}$ vermöge $A_\beta^{n_\alpha} = A_{\beta w_\alpha}$ operiert, wobei w_α die Spiegelung entlang α auf $\tilde{\Phi}$ ist. Dies bedeutet in Verbindung mit (3.6), dass die Bedingung (III) aus Abschnitt 1.2 und damit insgesamt die Voraussetzungen von (1.9) erfüllt sind. Daraus ergibt sich, dass G vom Typ G_2 ist, und wir uns in der Situation von (A) von (3.1) befinden. Tabelle 3.1 bietet einen Überblick über die Möglichkeiten bezüglich der Kommutatoren $[U_s, A_{2r+s}]$ bzw. $[A_{r+s}, A_r]$ und über ihren Einfluss auf den Typ von G .

Typ	$[A_{r+s}, A_r]$	$[U_s, A_{2r+s}]$	Beispiel
A_3	$= 1$	$= W_s$	$SL_4(K)$
G_2	$\neq 1$	$= W_s$	$G_2(2)$
G_2	$\neq 1$	$= 1$	$G_2(3)$

Tab. 3.1: Der Typ von G in Abhängigkeit von $[U_s, A_{2r+s}]$ und $[A_{r+s}, A_r]$.

Wie bereits erwähnt, impliziert der erste Fall in Tabelle 3.1 insbesondere $[A_s, A_r] = A_{r+s}$. Das heißt, falls $[A_s, A_r] \neq A_{r+s}$, so ist G (unter der Annahme, dass $G(\Psi)$ vom Typ A_2

und $[A_s, A_r] \neq 1$ sind!) nach der obigen Einteilung vom Typ G_2 . Wir möchten noch die Möglichkeit ausschließen, dass $[A_s, A_r] = A_{r+s}$ ist, und G trotzdem vom Typ G_2 ist. Dies sehen wir ein, indem wir $[A_s, A_r] = A_{r+s}$ annehmen und daraus auf $[A_{r+s}, A_r] = 1$ folgern, was beim Typ G_2 nicht möglich ist. Aus $[A_s, A_r] = A_{r+s}$ folgt

$$[A_{r+s}, A_r] = [A_s, A_r, A_r] \leq A_{r+s} \cap V_s \leq A_{r+s} \cap U_{r+s} = 1$$

nach (2.14)(3) und (I), wegen der Invarianz von $[A_s, A_r]$ unter A_r . Das heißt: wir sind im Stande anhand des Kommutators $[A_s, A_r]$ zu entscheiden, ob G vom Typ A_3 oder G_2 ist, wenn G keinen echten Zentralteiler besitzt. Die Gruppe G ist nämlich genau dann vom Typ A_3 , wenn $[A_s, A_r] = A_{r+s}$ ist, und sonst vom Typ G_2 .

Typ	$[A_s, A_r]$
A_3	$= A_{r+s}$
G_2	$\neq A_{r+s}$

Tab. 3.2: Der Typ von G in Abhängigkeit von $[A_s, A_r]$.

Wir setzen $N_r := \{x \in U_{-r} \mid [x, A_r, A_r] = 1\}$ und $N_{-r} := \{x \in U_{-r} \mid [x, A_{-r}, A_{-r}] = 1\}$. Es sei bemerkt, dass $N_r \xrightarrow{n_r} N_{-r}$. Ferner ist N_r (bzw. N_{-r}) Untergruppe von U_{-r} , da $C_{U_{-r}}(A_r) \leq U_{-r}$ (bzw. $C_{U_{-r}}(A_{-r}) \leq U_{-r}$).

Zuerst erschließen wir einige Folgerungen aus $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$.

Lemma (3.9) *Falls $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$, so ist $N_r \leq A_{r+s}V_s$.*

Beweis: Die Kommutatorrelationen in (I) implizieren $[V_s, A_r, A_r] = 1$. Damit ist $V_s \leq N_r$. Angenommen, es gibt ein $a_s a_{r+s} \in N_r$ mit $a_s \in A_s^\#$ und $a_{r+s} \in A_{r+s}$. Dann ist $[a_s a_{r+s}, A_r, A_r] = 1$ und so $[a_s a_{r+s}, A_r] \leq C(A_r)$. Aus Lemma (3.5) folgt $[a_s a_{r+s}, A_r]V_s = A_{r+s}V_s$. Demnach haben wir $A_{r+s}V_s = C_{A_{r+s}V_s}(A_r)V_s$ und so

$$[A_{r+s}, A_r] \leq [C_{A_{r+s}V_s}(A_r)V_s, A_r] = [V_s, A_r] \leq A_{3r+s}.$$

Es ergibt sich vermöge Konjugation mit n_s unter Berücksichtigung von (3.6) und (2.14)(3), dass $[A_{r+s}, A_r] = [A_r, A_{r+s}] = [A_{r+s}, A_r]^{n_s} \leq A_{3r+s} \cap A_{3r+s}^{n_s} = A_{3r+s} \cap A_{3r+2s} = 1$. Dies widerspricht aber $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$. $\square$

Folgerung (3.10) *Falls $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$, so ist $V_{-3r-s}^{n_r} \leq A_{r+s}V_s$.*

Beweis: Aus den Kommutatorrelationen in (I) folgt, dass V_{-3r-s} in N_{-r} enthalten ist, welches unter n_r mit N_r vertauscht wird. Unter Berücksichtigung von (3.9) erhalten wir $V_{-3r-s}^{n_r} \leq N_{-r}^{n_r} = N_r \leq A_{r+s}V_s$, wie gewünscht. $\square$

Lemma (3.11) *Angenommen, $[U_s, A_{2r+s}] = W_s$ und $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$. Dann ist $A_s^{n_r} \leq A_{2r+s}A_{3r+s}$.*

Beweis: Aus $[U_s, A_{2r+s}] = W_s$ und (3.6) folgt

$$A_s = A_{3r+2s}^{n_{3r+s}} = [A_{r+s}, A_{2r+s}]^{n_{3r+s}} = [A_{r+s}, A_{-r}].$$

Nach (3.10) impliziert dies

$$A_s^{n_r} = [A_{r+s}, A_{-r}]^{n_r} = [A_{r+s}^{n_r}, A_r] \leq [A_{r+s}V_s, A_r] \leq V_s.$$

Nach dem Nilpotenzargument folgt $A_s^{n_r} \leq U_{3r+2s}$ wegen $[X_{3r+2s}, X_r] = 1$. Hieraus ergibt sich unter Beachtung von (2.14)(3) nach der Dedekind-Identität

$$A_s^{n_r} \leq A_{3r+2s}A_{2r+s}A_{3r+s} \cap U_{3r+2s} = (A_{3r+2s} \cap U_{3r+2s})A_{2r+s}A_{3r+s} = A_{2r+s}A_{3r+s}.$$

$\square$

Bemerkung (3.12) *Wir möchten aus $[U_s, A_{2r+s}] = W_s$ und $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$ darauf schließen, dass G vom Typ G_2 ist. Hierfür weisen wir die Gültigkeit von (3.6) auch für kurze Wurzeln nach, was nach (1.9) zu der Möglichkeit (A) von (3.1) führt. Im Folgenden erörtern wir, warum es hinreichend ist, die zu (3.6) korrespondierenden Konjugationsbeziehungen für nur eine kurze Wurzel zu zeigen. Dazu stellen wir eine gewisse Symmetrie in den Voraussetzungen für die U_α , $\alpha \in \Psi$ fest, die im Anschluss im Detail beschrieben wird.*

Nach dem Beweis von (3.6) in [Mü04, (4.8)] vertauscht jede lange Wurzeluntergruppe A_α , $\alpha \in \Psi$ mit jeweils genau zwei von den drei in U_α bzw. $U_{-\alpha}$ enthaltenen kurzen Wurzeluntergruppen. Dies ist zum Beispiel im Falle von A_{-s} gleichbedeutend mit $[A_{-s}, A_{-r}] \neq 1 \neq [A_{-s}, A_{r+s}]$.

Angenommen, $[U_s, A_{2r+s}] = W_s$, d.h. $[A_{r+s}, A_{2r+s}] = A_{3r+2s}$ und $[A_{2r+s}, A_r] = A_{3r+s}$. Dann überträgt sich diese Eigenschaft durch Konjugation mit zu langen Wurzeln β gehörenden n_β auf alle U_α , $\alpha \in \Psi$ in dem Sinne, dass $[U_\alpha, A_\gamma] = W_\alpha$ mit den Bezeichnungen

aus Abschnitt 3.1 für alle $\alpha \in \Psi$ gilt. Es folgt nämlich nach (3.6) beispielsweise

$$A_s = A_{3r+2s}^{n_{3r+s}} = [A_{r+s}, A_{2r+s}]^{n_{3r+s}} = [A_{r+s}, A_{-r}]$$

und damit $[U_{-3r-s}, A_{r+s}] = W_{-3r-s}$.

Angenommen, $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$. Dann erhalten wir durch Konjugation mit n_{3r+s} bzw. n_{3r+2s} , dass $1 \neq [A_{r+s}, A_r]^{n_{3r+s}} = [A_{r+s}, A_{-2r-s}]$ bzw. $1 \neq [A_{r+s}, A_r]^{n_{3r+2s}} = [A_{-2r-s}, A_r]$ sind. Das folgende Lemma zeigt, dass falls $[U_s, A_{2r+s}] = W_s$ ist, so überträgt sich $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$ auf $[A_{2r+s}, A_{-r}] \neq 1$ und damit durch Konjugation mit zu langen Wurzeln α gehörenden n_α auch auf $[A_{-r}, A_{-r-s}] \neq 1 \neq [A_{-r-s}, A_{2r+s}]$.

Lemma (3.13) Angenommen, $[U_s, A_{2r+s}] = W_s$ und $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$. Dann ist $[A_{-r}, A_{2r+s}] \neq 1$.

Beweis: Wir nehmen

$$[A_{-r}, A_{2r+s}] = 1 \tag{3.1}$$

an, und führen dies zum Widerspruch.

Schritt 1: Erstens zeigen wir, dass unter solchen Voraussetzungen

$$C_{U_{-r}}(A_{-r}) = A_s A_{3r+2s} A_{2r+s} \tag{3.2}$$

ist. Nach (I) und $\mathcal{R}(3.1)$ gilt $A_s A_{3r+2s} A_{2r+s} \leq C_{U_{-r}}(A_{-r})$.³ Um die andere Inklusion zu erhalten, zeigen wir

$$C_{A_{3r+s}A_{r+s}}(A_{-r}) = 1.$$

Sei dazu $a_{3r+s}a_{r+s} \in C_{U_{-r}}(A_{-r})$ mit $a_{3r+s} \in A_{3r+s}$ und $a_{r+s} \in A_{r+s}$. Für jedes $a_{-r} \in A_{-r}$ gilt dann

$$1 = [a_{3r+s}a_{r+s}, a_{-r}] = [a_{3r+s}, a_{-r}]^{a_{r+s}} [a_{r+s}, a_{-r}].$$

Da $[A_{r+s}, A_{-r}] \leq A_s$ und $[A_s, A_{r+s}] = 1$ sind, folgt daraus $[a_{3r+s}, A_{-r}] \leq A_s$. Angenommen, $a_{3r+s} \neq 1$. Dann ist $A_{-r}A_sA_{3r+2s}$ invariant unter $\langle a_{3r+s}, A_{-3r-s} \rangle = X_{3r+s}$ und nach

³Um Mehrdeutigkeit zu vermeiden, verweisen wir auf Nummern, die sich auf nur in einer Zeile enthaltene Zusammenhänge beziehen – im Unterschied zu Definitionen, Lemmata usw. – immer in der Form $\mathcal{R}(\text{Nummer})$.

(3.6) gilt

$$A_{2r+s} = A_{-r}^{n_{3r+s}} \leq A_{-r} A_s A_{3r+2s} \leq U_{-2r-s},$$

ein Widerspruch zu (2.14)(3).

Angenommen, es existiert ein $a_{r+s} \in A_{r+s}^\#$ mit $[a_{r+s}, A_{-r}] = 1$. Wegen $[A_{-r-s}, A_{-r}] = [A_{2r+s}, A_{-r}]^{n_{3r+2s}} = 1$ folgt dann

$$X_{r+s} = \langle a_{r+s}, A_{-r-s} \rangle \leq C(A_{-r}).$$

Nach (3.12) ist aber $[A_{r+s}, A_{-r}] = A_s$, ein Widerspruch.

Daher gilt $\mathcal{R}(3.2)$.

Schritt 2: Zweitens zeigen wir $N_r = A_{r+s} V_s$ und $[A_{r+s}, A_r] \leq C_{A_{2r+s}}(X_r)$.

Nach (I) und (3.5) haben wir

$$[A_{r+s}, A_r] \leq [A_{r+s} V_s, A_r] = [[A_s, A_r] V_s, A_r] = [A_s, A_r, A_r][V_s, A_r] \leq [A_s, A_r, A_r] A_{3r+s}.$$

Nach (I) in Verbindung mit $\mathcal{R}(3.1)$ gilt außerdem

$$[A_s, A_r, A_r]^{n_r} = [A_s^{n_r}, A_{-r}, A_{-r}] \leq [U_{-r}, A_{-r}, A_{-r}] = [A_{3r+s}, A_{-r}, A_{-r}] \leq A_s$$

wegen der Invarianz von U_{-r} unter n_r . Unter Berücksichtigung von (3.11) folgt mithin

$$[A_{r+s}, A_r] \subseteq A_s^{n_r^{-1}} A_{3r+s} \subseteq A_{2r+s} A_{3r+s}. \quad (3.3)$$

Dies impliziert nach (3.6) und (2.14)(3) unter Verwendung der Dedekind-Identität

$$\begin{aligned} [A_{r+s}, A_r] &= [A_r, A_{r+s}] = [A_{r+s}, A_r]^{n_s} \\ &\leq A_{2r+s} A_{3r+s} \cap (A_{2r+s} A_{3r+s})^{n_s} = A_{2r+s} A_{3r+s} \cap A_{2r+s} A_{3r+2s} \\ &= A_{2r+s} (A_{3r+s} \cap A_{2r+s} A_{3r+2s}) \leq A_{2r+s} (A_{3r+s} \cap U_{-3r-s}) = A_{2r+s}, \end{aligned}$$

das heißt

$$[A_{r+s}, A_r] \leq A_{2r+s}. \quad (3.4)$$

Daraus ergibt sich nach (2.14)(3) wegen der Invarianz von $[A_{r+s}, A_r]$ unter A_r , dass

$$[A_{r+s}, A_r, A_r] \leq A_{2r+s} \cap A_{3r+s} = 1$$

ist, und damit $A_{r+s} \subseteq N_r$, d.h. $[A_{r+s}, A_r] \leq C(A_r)$. In Verbindung mit (3.9), $\mathcal{R}(3.4)$ bzw. $\mathcal{R}(3.1)$ bedeutet dies $N_r = A_{r+s}V_s$ und $[A_{r+s}, A_r] \leq C_{A_{2r+s}}(X_r)$.

Schritt 3: Drittens weisen wir $N_{-r} = A_{2r+s}V_{-3r-s}$ nach.

Wegen (I) und $\mathcal{R}(3.1)$ gilt $A_{2r+s}V_{-r-s} \subseteq N_{-r}$. Um die andere Inklusion zu erhalten, zeigen wir $N_{-r} \cap A_{3r+s} = 1$. Sei dazu $a_{3r+s} \in N_{-r} \cap A_{3r+s}$. Wegen $A_{3r+s} \leq C_{U_{-r}}(A_r)$ ist $a_{3r+s}^{n_r} \in C_{U_{-r}}(A_{-r})$ und so $a_{3r+s}^{n_r} \in N_r \cap C_{U_{-r}}(A_{-r})$. Nach $\mathcal{R}(3.2)$ und Schritt 2 hat dies $a_{3r+s}^{n_r} \in A_s A_{3r+2s} A_{2r+s} \cap A_{r+s} V_s$ als Konsequenz. Nach (2.14)(3) folgt daraus mit Hilfe der Dedekind-Identität

$$a_{3r+s}^{n_r} \in (A_s \cap A_{r+s} V_s) A_{3r+2s} A_{2r+s} \subseteq (A_s \cap U_s) A_{3r+2s} A_{2r+s} = A_{3r+2s} A_{2r+s}.$$

Das heißt $a_{3r+s}^{n_r} = a_{3r+2s} a_{2r+s}$ für ein $a_{3r+2s} \in A_{3r+2s}$ und ein $a_{2r+s} \in A_{2r+s}$. Angenommen, $a_{3r+s} \neq 1$. Dann wird das Element a_{2r+s} von A_r nicht zentralisiert, da sonst $a_{3r+s} \in C_{U_{-r}}(A_{-r})$, im Widerspruch zu $\mathcal{R}(3.2)$. Nach (3.12) ist dies gleichbedeutend mit $[a_{2r+s}, U_s] = W_s$. Insbesondere ist

$$A_{3r+2s} = [a_{2r+s}, A_{r+s}] = [a_{3r+2s} a_{2r+s}, A_{r+s}] = [a_{3r+s}^{n_r}, A_{r+s}].$$

Nach (3.10) hat dies

$$A_{3r+2s} = A_{3r+2s}^{n_r^{-1}} = [a_{3r+s}, A_{r+s}^{n_r^{-1}}] \leq [a_{3r+s}, A_{r+s} V_s] = 1$$

wegen $[X_r, X_{3r+2s}] = 1$ zur Folge, ein Widerspruch.

Dementsprechend existiert kein $a_{3r+s} \in A_{3r+s}^\#$ mit $a_{3r+s} \in N_{-r}$. So ist $N_{-r} = A_{2r+s}V_{-3r-s}$, wie gewünscht.

Abschließend kehren wir zu unserer ursprünglichen Zielsetzung zurück, und führen $\mathcal{R}(3.1)$ unter Verwendung der früheren Schritte zum Widerspruch. Aus $A_{2r+s}^{n_r} \leq N_r^{n_r} = N_{-r} = A_{2r+s}V_{-3r-s}$ folgt

$$A_{3r+s}^{n_r} = [A_{2r+s}, A_r]^{n_r} = [A_{2r+s}^{n_r}, A_{-r}] \leq [A_{2r+s}V_{-3r-s}, A_{-r}] \leq A_s.$$

Aus $\mathcal{R}(3.3)$ ergibt sich

$$[A_{r+s}, A_r] = [A_{r+s}, A_r]^{n_r} \leq A_s A_{3r+s}^{n_r} \cap A_{2r+s} \leq A_s \cap A_{2r+s} = 1$$

unter Berücksichtigung von $[A_{r+s}, A_r] \leq C_{A_{2r+s}}(X_r)$, ein Widerspruch zu $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$. $\square$

Satz (3.14) *Angenommen, $[U_s, A_{2r+s}] = W_s$ und $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$. Dann ist G vom Typ G_2 .*

Beweis: Nach Bemerkung (3.12) reicht es, wenn wir zeigen, dass n_α für eine kurze Wurzel $\alpha \in \tilde{\Phi}$ auf $\{A_\beta \mid \beta \in \tilde{\Phi}\}$ vermöge $A_\beta^{n_\alpha} = A_{\beta w_\alpha}$ operiert, wobei w_α die Spiegelung entlang α auf $\tilde{\Phi}$ ist. O.B.d.A. sei r diese kurze Wurzel.

Schritt 1: Als Erstes zeigen wir, dass $A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}$ unter jedem n_r aus Abschnitt 2.3 invariant bleibt, das heißt

$$(A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s})^{n_r} = A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}. \quad (3.5)$$

Es ist hinreichend hierfür

$$(A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s})^{n_r} \leq A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s} \quad (3.6)$$

zu zeigen. Falls $\mathcal{R}(3.6)$ erfüllt ist, so ist nämlich insbesondere

$$(A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s})^{n_r^{-1}} \leq A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}$$

und damit

$$A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s} \leq (A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s})^{n_r},$$

woraus $\mathcal{R}(3.5)$ hervorgeht.

Einerseits ist $A_{3r+2s}^{n_r} = A_{3r+2s}$ wegen (I). Andererseits gelten die entsprechenden Voraussetzungen für U_{-3r-s} wie für U_s nach (3.12). Es reicht also wegen Symmetrie

$$A_{2r+s}^{n_r} \leq A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}$$

nachzuweisen.

Aus (2.14)(1) folgt $A_{2r+s}^{n_r} \leq U_{-r}$. Es ist sogar $A_{2r+s}^{n_r} \leq N_r^{n_r} = N_{-r} \leq A_{2r+s}V_{-3r-s}$ nach (3.12) in Verbindung mit (3.9). Nach den Kommutatorrelationen in (I) gilt ferner $[A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}, A_{-r}, A_{-r}] \leq A_s$. Nach (3.11) impliziert dies

$$[(A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s})^{n_r}, A_r, A_r] \leq A_s^{n_r} \leq A_{2r+s}A_{3r+s}.$$

Angenommen, $A_{2r+s}^{n_r} \not\leq A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}$. Dann existiert ein $a_s \in A_s^\sharp$ mit

$$[a_s, A_r, A_r] \leq A_{2r+s}A_{3r+s}.$$

Nach (I) und (3.5) gilt dann

$$[A_{r+s}, A_r] \leq [A_{r+s}V_s, A_r] = [[a_s, A_r]V_s, A_r] \leq A_{2r+s}A_{3r+s},$$

was analog wie bei dem Beweis von (3.13) mit $[A_{r+s}, A_r] \leq A_{2r+s}$ und $[A_{r+s}, A_r, A_r] = 1$ einhergeht. Letzteres ist nach (3.9) mit

$$N_r = A_{r+s}V_s \tag{3.7}$$

gleichbedeutend.

Als Nächstes weisen wir nach, dass infolge von $[A_{r+s}, A_r, A_r] = 1$ auch $[A_{2r+s}, A_{-r}, A_{-r}] = 1$ ist.

Angenommen, $[A_{2r+s}, A_{-r}, A_{-r}] \neq 1$. Eine Anwendung von (3.5) auf die Situation von U_{-3r-s} und die Kommutatorrelationen in (I) liefern dann

$$\begin{aligned} 1 \neq [A_{2r+s}, A_{-r}, A_{-r}] &= [A_{2r+s}V_{-3r-s}, A_{-r}, A_{-r}] \\ &= [[A_{3r+s}, A_{-r}]V_{-3r-s}, A_{-r}, A_{-r}] \\ &= [A_{3r+s}, A_{-r}, A_{-r}, A_{-r}] \\ &\leq [U_{-r}, A_{-r}, A_{-r}, A_{-r}]. \end{aligned}$$

Nach $\mathcal{R}(3.7)$ ist aber

$$[U_{-r}, A_r, A_r, A_r] \leq [A_{r+s}V_s, A_r, A_r] = 1,$$

ein Widerspruch.

Daher ist $[A_{2r+s}, A_{-r}, A_{-r}] = 1$.

Daraus ergibt sich $[A_{2r+s}^{n_r}, A_r, A_r] = 1$ und damit $[a_s, A_r, A_r] = 1$ für ein $a_s \in A_s^\#$ nach Annahme. Dies widerspricht aber $\mathcal{R}(3.7)$.

Insgesamt erhalten wir $A_{2r+s}^{n_r} \leq A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}$, was $\mathcal{R}(3.5)$ impliziert.

Schritt 2: Zweitens zeigen wir

$$A_s \xleftrightarrow{n_r} A_{3r+s}. \tag{3.8}$$

Dabei gehen wir folgendermaßen vor: Zuerst stellen wir fest, dass $[A_{r+s}, A_r]A_{3r+s}$ unter n_r mit $A_s[A_{2r+s}, A_{-r}]$ vertauscht wird. Daraus folgern wir auf $U'_s \longleftrightarrow U'_{-3r-s}$. Die Bezeichnungen aus Abschnitt 3.1 benutzend, setzen wir $A_\gamma^\circ := A_\gamma \cap U'_\alpha$ für $\alpha \in \Psi$ und zeigen, dass

A_{r+s}° unter n_r mit A_{2r+s}° vertauscht wird. Dies wird uns in die Lage versetzen, mit Hilfe einer Fallunterscheidung auf das Konjugationsverhältnis in $\mathcal{R}(3.8)$ schließen zu können.

Nach Voraussetzung ist $[U_s, A_{2r+s}] = W_s$. Unter Berücksichtigung der Kommutatorrelationen in (I) gilt

$$[A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}, A_r] = [A_{r+s}A_{2r+s}, A_r] = [A_{r+s}, A_r][A_{2r+s}, A_r] = [A_{r+s}, A_r]A_{3r+s}$$

bzw.

$$[A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}, A_{-r}] = [A_{r+s}A_{2r+s}, A_{-r}] = [A_{r+s}, A_{-r}][A_{2r+s}, A_{-r}] = A_s[A_{2r+s}, A_{-r}].$$

Nach Schritt 1 werden $[A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}, A_r]$ und $[A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}, A_{-r}]$ unter n_r vertauscht. Mithin gilt

$$[A_{r+s}, A_r]A_{3r+s} \xleftrightarrow{n_r} A_s[A_{2r+s}, A_{-r}].$$

Daraus ergibt sich wegen $A_{3r+2s} \xleftrightarrow{n_r} A_{3r+2s}$ in Verbindung mit

$$\begin{aligned} A_{3r+2s}[A_{r+s}, A_r]A_{3r+s} &= U'_s = A_{3r+2s}A_{2r+s}^\circ A_{3r+s} \text{ und} \\ A_s[A_{2r+s}, A_{-r}]A_{3r+2s} &= U'_{-3r-s} = A_sA_{r+s}^\circ A_{3r+2s}, \end{aligned}$$

dass $A_sA_{r+s}^\circ A_{3r+2s}$ unter n_r mit $A_{3r+2s}A_{2r+s}^\circ A_{3r+s}$ vertauscht wird. Das Nilpotenzargument liefert

$$A_{2r+s}^\circ A_{3r+s} \xleftrightarrow{n_r} A_sA_{r+s}^\circ. \quad (3.9)$$

Unter Verwendung der Dedekind-Identität und von (2.14)(3) erhalten wir

$$\begin{aligned} A_{r+s}^\circ{}^{n_r} &\leq A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s} \cap A_{2r+s}^\circ A_{3r+s} \\ &= A_{2r+s}^\circ (A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s} \cap A_{3r+s}) \\ &\leq A_{2r+s}^\circ (U_{-3r-s} \cap A_{3r+s}) \\ &= A_{2r+s}^\circ, \end{aligned}$$

d.h. $A_{r+s}^\circ{}^{n_r} \leq A_{2r+s}^\circ$. Mit Symmetrie folgt $A_{2r+s}^\circ{}^{n_r} \leq A_{r+s}^\circ$. Diese Relationen gelten insbesondere auch für n_r^{-1} an Stelle von n_r , d.h. $A_{r+s}^\circ{}^{n_r^{-1}} \leq A_{2r+s}^\circ$ und $A_{2r+s}^\circ{}^{n_r^{-1}} \leq A_{r+s}^\circ$. Folglich gilt

$$A_{r+s}^\circ \xleftrightarrow{n_r} A_{2r+s}^\circ. \quad (3.10)$$

Konjugation mit n_r liefert, dass $A_{r+s}^\circ = 1$ genau dann, wenn $A_{2r+s}^\circ = 1$ bzw. dass A_{r+s}° genau dann A_{-r} zentralisiert, wenn $A_{2r+s}^\circ \leq C(A_r)$. Auf diesen Zusammenhängen und $\mathcal{R}(3.9)$ basierend, zeigen wir mit Hilfe der folgenden Fallunterscheidung, dass A_s und A_{3r+s} unter n_r vertauscht werden.

- (1) Angenommen, $A_{r+s}^\circ = 1 = A_{2r+s}^\circ$. Dann folgt $\mathcal{R}(3.8)$ direkt aus $\mathcal{R}(3.9)$. Es sei erwähnt, dass in diesem Fall $U'_s = W_s$ und $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$ sind. Ein Beispiel hierfür ist $G_2(2)$.
- (2) Angenommen, $A_{r+s}^\circ \neq 1 \neq A_{2r+s}^\circ$. Dann ist $W_s < U'_s$ und wir betrachten die folgenden zwei Unterfälle:

- (a) Angenommen, $[A_{r+s}^\circ, A_{-r}] \neq 1$. Nach Lemma (3.8) haben wir dann $[A_{r+s}^\circ, U_{-3r-s}] = W_{-3r-s}$ bzw. $[A_{2r+s}^\circ, U_s] = W_s$ und so insbesondere $[A_{r+s}^\circ, A_{-r}] = A_s$ bzw. $[A_{2r+s}^\circ, A_r] = A_{3r+s}$. Konjugation mit n_r liefert

$$A_s^{n_r} = [A_{r+s}^\circ, A_{-r}]^{n_r} = [A_{2r+s}^\circ, A_r] = A_{3r+s},$$

wie gewünscht.

- (b) Angenommen, $[A_{r+s}^\circ, A_{-r}] = 1 = [A_{2r+s}^\circ, A_r]$. Durch Konjugation mit n_{3r+s} folgt dann

$$1 = [A_{r+s}^\circ, A_{-r}]^{n_{3r+s}} = [A_{r+s}^\circ, A_{2r+s}]. \quad (3.11)$$

Aus $\mathcal{R}(3.10)$ folgt durch Konjugation mit n_{3r+2s}

$$A_{-r-s}^\circ \xleftarrow{n_r} A_{-2r-s}^\circ. \quad (3.12)$$

Wir zeigen $A_s \xleftarrow{n_r} A_{3r+s}$, indem wir

$$C_{A_s A_{r+s}^\circ}(A_{-2r-s}^\circ) = A_s \quad (3.13)$$

und

$$C_{A_{2r+s}^\circ A_{3r+s}}(A_{-r-s}^\circ) = A_{3r+s} \quad (3.14)$$

nachweisen, welche unter Beachtung von $\mathcal{R}(3.9)$ unter n_r vertauscht werden.

Aus Symmetriegründen ist es hinreichend, $\mathcal{R}(3.13)$ nachzuweisen.

Nach (I) gilt $A_s \leq C_{A_s A_{r+s}^\circ}(A_{-2r-s}^\circ)$. Um die andere Inklusion zu erhalten,

zeigen wir $C_{A_{r+s}}(A_{-2r-s}) = 1$. Sei dazu $a_{r+s}^\circ \in A_{r+s}^\circ$ mit $[a_{r+s}^\circ, A_{-2r-s}^\circ] = 1$. Angenommen, $a_{r+s}^\circ \neq 1$. Dann folgt $\langle A_{2r+s}, A_{-2r-s}^\circ \rangle = X_{2r+s} \leq C(a_{r+s}^\circ)$ wegen $\mathcal{R}(3.11)$, und Konjugation mit n_{3r+s} liefert $[a_{r+s}^\circ, X_r] = 1$. Unter Berücksichtigung von (2.14)(3) und von $\mathcal{R}(3.10)$ führt dies aber zu

$$1 \neq a_{r+s}^\circ = (a_{r+s}^\circ)^{n_r} \in A_{r+s}^\circ \cap A_{2r+s}^\circ = 1,$$

ein Widerspruch.

Wir haben also in allen Fällen

$$A_s \xleftrightarrow{n_r} A_{3r+s}$$

erhalten. Durch Konjugation mit n_{3r+2s} folgt auch

$$A_{-3r-s} \xleftrightarrow{n_r} A_{-s}.$$

Schritt 3: Drittens zeigen wir

$$A_{r+s} \xleftrightarrow{n_r} A_{2r+s}, \quad (3.15)$$

indem wir

$$C_{A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}}(A_{-3r-s}) = A_{r+s} \quad (3.16)$$

und

$$C_{A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}}(A_{-s}) = A_{2r+s} \quad (3.17)$$

nachweisen. Dies ist hinreichend im Hinblick auf die Konjugationsbeziehung in $\mathcal{R}(3.15)$, da der Zentralisator in (3.16) nach Schritt 1 und 2 mit dem in $\mathcal{R}(3.17)$ unter n_r vertauscht wird.

Wegen Symmetrie reicht es, $\mathcal{R}(3.17)$ nachzuweisen.

Nach (I) gilt $A_{2r+s} \subseteq C_{A_{r+s}A_{3r+2s}A_{2r+s}}(A_{-s})$. Wir zeigen

$$C_{A_{r+s}A_{3r+2s}}(A_{-s}) = 1,$$

um die andere Inklusion zu bekommen. Seien dazu $a_{r+s} \in A_{r+s}$ und $a_{3r+2s} \in A_{3r+2s}$ mit $a_{r+s}a_{3r+2s} \in C(A_{-s})$. In Verbindung mit $[A_{r+s}A_{3r+2s}, A_s] = 1$ bedeutet dies $a_{r+s}a_{3r+2s} \in C(X_s)$. Nach (3.6) und (2.14)(3) gilt dann

$$\begin{aligned} a_{r+s}a_{3r+2s} &= (a_{r+s}a_{3r+2s})^{n_s} \in A_{r+s}A_{3r+2s} \cap A_{r+s}^{n_s}A_{3r+2s}^{n_s} \\ &\subseteq A_{r+s}A_{3r+2s}A_{3r+s} \cap A_rA_{3r+s} \\ &= A_{3r+s}(A_{r+s}A_{3r+2s}A_{3r+s} \cap A_r) \\ &\leq A_{3r+s}(U_{-r} \cap A_r) \\ &= A_{3r+s} \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung der Dedekind-Identität. Nach (2.14)(3) folgt daraus

$$a_{r+s}a_{3r+2s} \in A_{r+s}A_{3r+2s} \cap A_{3r+s} \leq U_{-3r-s} \cap A_{3r+s} = 1$$

und mithin $a_{r+s} = a_{3r+2s}^{-1} \in A_{r+s} \cap A_{3r+2s} = 1$. Also gilt $\mathcal{R}(3.17)$. Analog erhalten wir auch $\mathcal{R}(3.16)$. Daher wird A_{r+s} unter n_r mit A_{2r+s} vertauscht.

Konjugation mit n_{3r+2s} liefert auch

$$A_{-r-s} \xleftrightarrow{n_r} A_{-2r-s}.$$

Abschließend fassen wir die Ergebnisse der früheren Schritte zusammen: Unter Berücksichtigung von $A_{3r+2s} \xleftrightarrow{n_r} A_{3r+2s}$ folgt, dass n_r auf $\{A_\beta \mid \beta \in \tilde{\Phi}\}$ vermöge $A_\beta^{n_r} = A_{\beta^{w_r}}$ operiert, wobei w_r für die Spiegelung entlang r auf $\tilde{\Phi}$ steht. Nach (3.12) impliziert dies in Verbindung mit (3.6), dass die Voraussetzungen von (1.9) erfüllt sind. Daher ist G vom Typ G_2 . $\square$

Zunächst wenden wir uns dem „Typ A_3 “ zu. Wir formulieren einige Lemmata, und im Anschluss zeigen wir, dass im Falle von $[A_{r+s}, A_r] = 1$ die Gruppe G (unter den Voraussetzungen von Abschnitt 3.3!) vom Typ A_3 ist.

Lemma (3.15) *Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.1 gilt $C_{V_\alpha}(A_{-\gamma}) = 1$ für jedes $\alpha \in \Psi$.*

Beweis: Sei $v_\alpha = a_\beta a_\gamma a_\delta$ mit $[v_\alpha, A_{-\gamma}] = 1$, wobei $a_\beta \in A_\beta$, $a_\gamma \in A_\gamma$ und $a_\delta \in A_\delta$ sind. Es gelte o.B.d.A. $\alpha < \beta < \delta < -\alpha$.

Angenommen, $a_\beta \neq 1$. Wegen (1.12) und $[a_\gamma a_\delta, A_{-\alpha}] = 1$ folgt dann

$$A_\delta = [v_\alpha, A_{-\alpha}] \leq C(A_{-\gamma}),$$

ein Widerspruch zu $[A_\delta, A_{-\gamma}] \neq 1$ (s. Bemerkung (3.12)).

Angenommen, $a_\delta \neq 1$. Dann folgt analog

$$A_\beta = [v_\alpha, A_\alpha] \leq C(A_{-\gamma}),$$

was aber $[A_\beta, A_{-\gamma}] \neq 1$ widerspricht.

Nach (2.6)(5) ist ferner $N_{A_\gamma}(A_{-\gamma}) = 1$. Daher gilt die Behauptung. $\square$

Lemma (3.16) *Angenommen, $[A_{r+s}, A_r] = 1$. Dann gilt*

$$[A_s, A_r] = A_{r+s} \text{ und } [A_{-s}, A_{r+s}] = A_r.$$

Beweis: Die Kommutatoren $[A_r, A_{-2r-s}] = [A_r, A_{r+s}]^{n_{3r+2s}} = 1$ und $[A_s, A_{-2r-s}] = 1$ implizieren $[A_s, A_r] \leq C_{A_{r+s}V_s}(A_{-2r-s})$. Wegen $1 = [A_{r+s}, A_r]^{n_{3r+s}} = [A_{r+s}, A_{-2r-s}]$ ergibt sich daraus $[A_s, A_r] \leq A_{r+s}C_{V_s}(A_{-2r-s}) = A_{r+s}$ unter Verwendung von (3.15). Nach (3.5) gilt $[A_s, A_r]V_s = A_{r+s}V_s$. In Verbindung mit $[A_s, A_r] \leq A_{r+s}$ impliziert dies $[A_s, A_r] = A_{r+s}$. Konjugation mit n_s liefert auch $[A_{-s}, A_{r+s}] = [A_s, A_r]^{n_s} = A_{r+s}^{n_s} = A_r$ nach (3.6), wie gewünscht. $\square$

Lemma (3.17) *Falls $[A_{r+s}, A_r] = 1$, so ist $A_s^{n_r} \leq A_{r+s}$.*

Beweis: Die Gruppe $A_s A_{r+s}$ ist invariant unter X_r , da einerseits $[A_s, A_{-r}] = 1$ und $[A_{r+s}, A_{-r}] \leq A_s$ aufgrund von den Kommutatorrelationen in (I) und andererseits $[A_s, A_r] = A_{r+s}$ nach (3.16) bzw. $[A_{r+s}, A_r] = 1$ nach Voraussetzung. Dies hat $A_s^{n_r} \leq A_{r+s}$ zur Folge. Sonst gibt es nämlich ein $a_s \in A_s^\#$ mit $a_s \in C(A_r)$ und damit $X_s = \langle a_s, A_{-s} \rangle \leq C(A_r)$ wegen $[A_r, A_{-s}] = 1$ nach (I), ein Widerspruch zu $[A_s, A_r] \neq 1$ nach Annahme. $\square$

Lemma (3.18) *Angenommen, $[A_{r+s}, A_r] = 1$. Dann ist $[U_s, A_{2r+s}] = W_s$.*

Beweis: Angenommen, $[A_{r+s}, A_r] = 1$ und $[U_s, A_{2r+s}] = 1$.

Dann wird A_s von X_r zentralisiert, da $A_s^{n_r} \leq A_{r+s}$ nach (3.17) und $A_{r+s} \leq C(X_r)$ wegen $1 = [A_{r+s}, A_{2r+s}]^{n_{3r+s}} = [A_{r+s}, A_{-r}]$, ein Widerspruch zu $[A_s, A_r] \neq 1$ nach Annahme. $\square$

Satz (3.19) *Falls $[A_{r+s}, A_r] = 1$, so ist G vom Typ A_3 .*

Beweis: Sei

$$\tilde{\Phi}_0 = \{\pm R, \pm S, \pm T, \pm(R+S), \pm(S+T), \pm(R+S+T)\}$$

ein Wurzelsystem vom Typ A_3 . Wir wenden die in Abschnitt 1.4 dargestellte Umindizierung an und zeigen, dass G den Voraussetzungen von (1.10) bezüglich des Wurzelsystems $\tilde{\Phi}_0$ genügt, d.h. die umindizierten Wurzeluntergruppen erfüllen die Kommutatorrelationen in (I) stets mit Gleichheit.

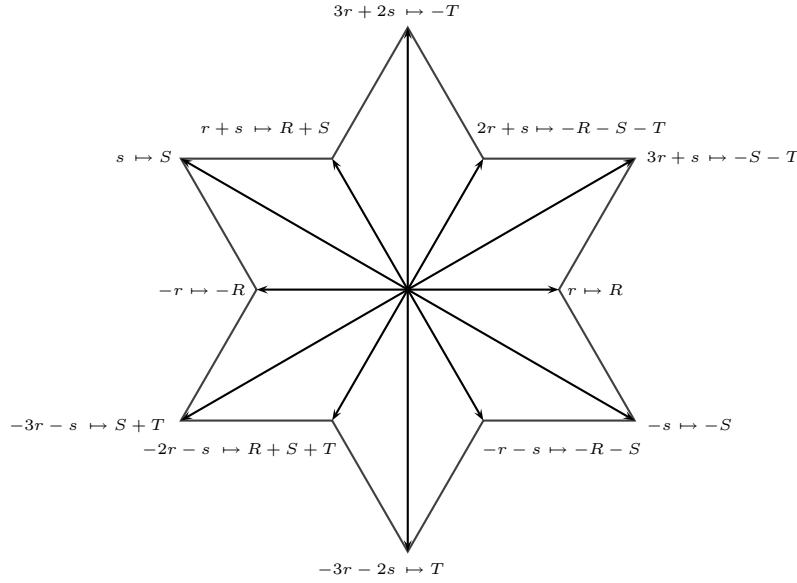


Abb. 3.2: Das Schema der Umindizierung.

Hierfür sind $\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 10 = 60$ Kommutatorrelationen nachzuweisen. Von diesen erhalten wir 45 direkt infolge der Umindizierung. Es gilt zum Beispiel:

$$\begin{aligned} [A_S, A_{R+S}] &= [A_S, A_{r+s}] = 1, \\ [A_S, A_{-T}] &= [A_S, A_{3r+2s}] = 1, \\ [A_S, A_{-R-S-T}] &= [A_S, A_{2r+s}] = 1, \\ [A_S, A_{-S-T}] &= [A_S, A_{3r+s}] = A_{3r+2s} = A_{-T}, \\ [A_{-R-S-T}, A_R] &= [A_{2r+s}, A_r] = A_{3r+s} = A_{-S-T}, \\ [A_{R+S}, A_R] &= [A_{r+s}, A_r] = 1. \end{aligned}$$

Es sei erwähnt, dass $[U_s, A_{2r+s}] = W_s$ nach (3.18) und $[A_{R+S}, A_R] = [A_{r+s}, A_r] = 1$ nach Voraussetzung gelten. Konjugation mit zu langen Wurzeln α gehörenden n_α liefert auch $[U_\alpha, A_\gamma] = W_\alpha$ für jedes $\alpha \in \Psi$ mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.1 (s. (3.12)) bzw.

$[A_{R+S}, A_{R+S+T}] = [A_{r+s}, A_{-2r-s}] = 1 = [A_{-2r-s}, A_r] = [A_{R+S+T}, A_R]$. Unter Berücksichtigung von (3.12) und (3.13) folgt

$$\begin{aligned} [A_{-R-S-T}, A_{-R}] &= [A_{2r+s}, A_{-r}] = 1 \\ [A_{-R}, A_{-R-S}] &= [A_{-r}, A_{-r-s}] = 1 \\ [A_{-R-S}, A_{-R-S-T}] &= [A_{-r-s}, A_{2r+s}] = 1. \end{aligned}$$

Dies impliziert, dass die Voraussetzungen von (3.16) entsprechend für jedes $\alpha \in \Psi$ erfüllt sind. Es sind beispielsweise

$$[A_R, A_S] = [A_r, A_s] = A_{r+s} = A_{R+S} \text{ bzw. } [A_{R+S}, A_{-S}] = [A_{r+s}, A_{-s}] = A_r = A_R.$$

Es herrscht infolgedessen auch in den restlichen Kommutatorrelationen von (I) stets Gleichheit. Daher ist G nach (1.10) vom Typ A_3 . $\square$

Wir runden den Fall „Typ G_2 “ ab, indem wir zeigen, dass im Falle von $[U_s, A_{2r+s}] = 1$ die Gruppe G (unter den Voraussetzungen von Abschnitt 3.3!) vom Typ G_2 ist.

Satz (3.20) *Falls $[U_s, A_{2r+s}] = 1$, so ist G vom Typ G_2 .*

Beweis: Vermöge Konjugation mit n_α , $\alpha \in \Psi$ folgt aus $[U_s, A_{2r+s}] = 1$ mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 3.1, dass $[U_\alpha, A_\gamma] = 1$ für jedes $\alpha \in \Psi$. Für beliebige zwei „benachbarte“ kurze Wurzeln⁴ sind also die entsprechenden kurzen Wurzeluntergruppen vertauschbar. Außerdem ist der entsprechende Kommutator für beliebige zwei „nicht benachbarte“ kurze Wurzeln unter Berücksichtigung von (3.18) nicht trivial.

Wir zeigen unter Verwendung von (1.9), dass G vom Typ G_2 ist, indem wir die Gültigkeit von Bedingung (III) nachweisen. Aufgrund von (3.6) und der gerade angesprochenen Symmetrie reicht es, die entsprechenden Konjugationseigenschaften von (3.6) für eine kurze Wurzel nachzuweisen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei r diese kurze Wurzel.

Schritt 1: Erstens zeigen wir

$$V_s \xleftarrow{n_r} V_{-3r-s}, \quad (3.18)$$

⁴Sei $\Delta \subseteq \tilde{\Phi}$. Wir nennen $\alpha \neq \beta \in \Delta$ „in Δ benachbart“, falls keine Wurzel von Δ zwischen α und β im Uhrzeigersinn oder zwischen β und α im Uhrzeigersinn liegt.

indem wir

$$C_{U_{-r}}(A_r) = V_s \quad (3.19)$$

und

$$C_{U_{-r}}(A_{-r}) = V_{-3r-s} \quad (3.20)$$

nachweisen. Im Hinblick auf $\mathcal{R}(3.18)$ ist dies hinreichend, da die obigen Zentralisatoren unter n_r vertauscht werden. Es reicht hierfür wegen Symmetrie, $\mathcal{R}(3.19)$ nachzuweisen. Aufgrund von $[U_s, A_{2r+s}] = 1$ und nach (I) gilt $V_s \leq C_{U_{-r}}(A_r)$. Die andere Inklusion zeigen wir, indem wir

$$C_{A_s A_{r+s}}(A_r) = 1$$

nachweisen.

Sei dazu $a_s a_{r+s} \in C_{A_s A_{r+s}}(A_r)$ mit $a_s \in A_s$ und $a_{r+s} \in A_{r+s}$. Für jedes $a_r \in A_r$ gilt dann

$$1 = [a_r, a_s a_{r+s}] = [a_r, a_{r+s}][a_r, a_s]^{a_{r+s}}.$$

Wegen $[A_r, a_{r+s}] \leq V_s$ und $[V_s, A_{r+s}] = 1$ folgt daraus $[A_r, a_s] \leq V_s$. Angenommen, $a_s \neq 1$. Nach (3.5) ist dann $V_s = [a_s, A_r]V_s = A_{r+s}V_s$ und damit $A_{r+s} \leq U_{r+s}$, ein Widerspruch zu (2.14)(3).

Angenommen, es gibt ein $a_{r+s} \in A_{r+s}^\#$ mit $[a_{r+s}, A_r] = 1$. Wegen $[A_r, A_{-r-s}] = 1$ wird dann A_r von $X_{r+s} = \langle a_{r+s}, A_{-r-s} \rangle$ zentralisiert, ein Widerspruch zu $[A_{r+s}, A_r] \neq 1$.

Hieraus folgt $\mathcal{R}(3.19)$. Analog erhalten wir $\mathcal{R}(3.20)$. Daher gilt $\mathcal{R}(3.18)$.

Schritt 2: Zweitens zeigen wir

$$A_{r+s} \xleftrightarrow{n_r} A_{2r+s}. \quad (3.21)$$

Es ist $[X_r, X_{3r+2s}] = 1$, deswegen folgt aus Schritt 1 unter Verwendung des Nilpotenzarguments die folgende Konjugationsbeziehung:

$$A_s A_{r+s} \xleftrightarrow{n_r} A_{2r+s} A_{3r+s}. \quad (3.22)$$

Wir bemerken, dass einerseits $N_r = A_{r+s}V_s$ nach (3.9) unter Berücksichtigung von $\mathcal{R}(3.19)$. Andererseits liefert eine Anwendung von (3.9) auf die Situation von U_{-3r-s} wegen

$\mathcal{R}(3.20)$, dass $N_{-r} = A_{2r+s}V_{-3r-s}$ ist. In Verbindung mit $\mathcal{R}(3.22)$ impliziert dies

$$\begin{aligned} A_{r+s}^{n_r} &\leq A_{2r+s}V_{-3r-s} \cap A_{2r+s}A_{3r+s} \\ &= A_{2r+s}(A_{2r+s}V_{-3r-s} \cap A_{3r+s}) \\ &\leq A_{2r+s}(U_{-3r-s} \cap A_{3r+s}) \\ &= A_{2r+s}. \end{aligned}$$

Mit Symmetrie ergibt sich daraus $\mathcal{R}(3.21)$. Konjugation mit n_{3r+2s} liefert auch $A_{-2r-s} \xleftrightarrow{n_r} A_{-r-s}$.

Schritt 3: Als Nächstes weisen wir

$$A_s \xleftrightarrow{n_r} A_{3r+s} \quad (3.23)$$

nach, indem wir

$$C_{A_s A_{r+s}}(A_{-2r-s}) = A_s \quad (3.24)$$

und

$$C_{A_{2r+s} A_{3r+s}}(A_{-r-s}) = A_{3r+s} \quad (3.25)$$

zeigen. Diese Zentralisatoren werden nämlich nach Schritt 2 unter n_r vertauscht. Es reicht wegen Symmetrie, $\mathcal{R}(3.24)$ zu zeigen. Nach den Kommutatorrelationen in (I) gilt $A_s \subseteq C_{A_s A_{r+s}}(A_{-2r-s})$. Um die andere Inklusion zu erhalten, zeigen wir, dass $C_{A_{r+s}}(A_{-2r-s}) = 1$ ist. Sei dazu $a_{r+s} \in A_{r+s}$ mit $[a_{r+s}, A_{-2r-s}] = 1$. Angenommen, $a_{r+s} \neq 1$. Konjugation mit n_{3r+s} liefert dann $[a_{r+s}, A_r] = [a_{r+s}, A_{-2r-s}]^{n_{3r+s}} = 1$. Unter Beachtung von (2.14)(3) widerspricht dies aber $\mathcal{R}(3.19)$. Daher gilt $\mathcal{R}(3.23)$, und durch Konjugation mit n_{3r+2s} erhalten wir auch $A_{-3r-s} \xleftrightarrow{n_r} A_{-s}$.

Unter Berücksichtigung von $[X_r, X_{3r+2s}]$ folgt aus den vorherigen Schritten, dass jedes n_r auf $\{A_\beta \mid \beta \in \tilde{\Phi}\}$ vermöge $A_\beta^{n_r} = A_{\beta^{w_r}}$ operiert, wobei w_r für die Spiegelung entlang r auf $\tilde{\Phi}$ steht. In Verbindung mit (3.6) folgt daraus, dass die Voraussetzungen von (1.9) für G bezüglich $\tilde{\Phi} = G_2$ erfüllt sind. Daher ist G vom Typ G_2 . $\square$

Wir schließen diesen Abschnitt ab, indem wir die in (3.20) dargestellte Möglichkeit auf Charakteristik untersuchen. Nach [Mü04, (4.10)] folgt aus $[U_s, A_{2r+s}] = 1$, dass alle Wurzeluntergruppen elementarabelsche 2-Gruppen oder elementarabelsche 3-Gruppen sind,

d.h. wir können sie als Vektorräume über $GF(2)$ oder $GF(3)$ auffassen. Als Nächstes zeigen wir, dass $[U_s, A_{2r+s}] = 1$ sogar Charakteristik 3 impliziert. Als Motivation hierfür erwähnen wir, dass der Kommutator $[U_s, A_{2r+s}]$ in $G_2(3)$ trivial ist, aber in $G_2(2)$ nicht.

Satz (3.21) *Angenommen, $[U_s, A_{2r+s}] = 1$. Dann sind die A_α , $\alpha \in \tilde{\Phi}$ allesamt elementarabelsche 3-Gruppen, d.h. Vektorräume über $GF(3)$.*

Beweis: Es reicht nach [Mü04, (4.10)], Charakteristik 2 auszuschließen. Wir nehmen an, dass die Wurzeluntergruppen elementarabelsche 2-Gruppen sind, und führen diese Möglichkeit zum Widerspruch. Dabei dient (2.8) als Ausgangspunkt.

Schritt 1: Sei $a_r \in A_r^\#$. Dann existiert ein $(b(a_r) =) a_{-r} \in A_{-r}^\#$ mit $A_r^{a_{-r}} = A_{-r}^{a_r}$ nach (2.3). Somit sind $A_r^{a_{-r}} = A_{-r}$ und $A_{-r}^{a_r} = A_r$. Da X_r nach (2.8) speziell ist, gilt außerdem $a_r^{a_{-r}} = (a_{-r}^{-1})^{a_r} = a_{-r}^{a_r}$. Dies impliziert

$$A_r \xrightarrow{a_r^{a_{-r}} = a_{-r}^{a_r}} A_{-r}. \quad (3.26)$$

Schritt 2: Als Nächstes betrachten wir $M := A_{r+s}[A_{r+s}, a_r]A_{2r+s}$. Es handelt sich hierbei um eine abelsche Gruppe, da $[U_s, A_{2r+s}] = 1$ nach Annahme. Wir zeigen, dass M invariant unter $\langle a_r, a_{-r} \rangle$ ist, wobei $a_{-r} = b(a_r)$. Hierfür weisen wir nach, dass M sowohl unter a_r als auch unter a_{-r} invariant ist. Es gilt einerseits

$$[M, a_r] = [A_{r+s}[A_{r+s}, a_r]A_{2r+s}, a_r] = [A_{r+s}, a_r] \leq M,$$

da $[U_s, A_{2r+s}] = 1$ nach Annahme. Wegen $[A_{r+s}, A_{-r}] = [A_{r+s}, A_{2r+s}]^{n_{3r+s}} = 1$ folgt andererseits

$$[M, a_{-r}] = [A_{r+s}[A_{r+s}, a_r]A_{2r+s}, a_{-r}] = [[A_{r+s}, a_r]A_{2r+s}, a_{-r}].$$

Es reicht also, noch $[A_{r+s}, a_r]^{a_{-r}} \leq M$ und $A_{2r+s}^{a_{-r}} \leq M$ zu zeigen.

Nach (3.20) gilt $A_{r+s}^{a_{-r}} = A_{2r+s}$ wegen $\mathcal{R}(3.26)$. Dies impliziert

$$[A_{r+s}, a_r]^{a_{-r}} = [A_{r+s}, a_r^{a_{-r}}] \subseteq A_{r+s}A_{r+s}^{a_{-r}} = A_{r+s}A_{2r+s} \leq M.$$

Aus $A_{2r+s}^{a_r} = A_{r+s}$ folgt $A_{2r+s}^{a_{-r}} = A_{r+s}^{a_r}$ wegen $[A_{2r+s}, A_r] = 1$. Damit haben wir

$$A_{2r+s}^{a_{-r}} = A_{r+s}^{a_r} \leq A_{r+s}[A_{r+s}, a_r] \leq M.$$

Schritt 3: Drittens weisen wir $[A_{-r}, A_{2r+s}] \leq A_{r+s}$ und $[A_{r+s}, A_r] \leq A_{2r+s}$ nach. Nach Schritt 2 und nach den Kommutatorrelationen in (I) folgt

$$[A_{2r+s}, a_{-r}] = [A_{r+s}, a_r]^{a_{-r}} \leq V_{-3r-s} \cap M$$

wegen $a_{-r} = a_r^{a_{-r}} a_r^{a_{-r}} a_{-r} = a_r^{a_{-r}} a_r^{a_{-r}} a_{-r} = a_r^{a_{-r}}$. In Verbindung mit (2.14)(3) ergibt sich daraus nach der Dedekind-Identität

$$[A_{2r+s}, a_{-r}] \leq V_{-3r-s} \cap A_{r+s} V_s = A_{r+s} A_{3r+2s} (A_s \cap A_{r+s} V_s) = A_{r+s} A_{3r+2s}.$$

Da die Argumentation der früheren Schritte für ein beliebiges $a_r \in A_r^\#$ wiederholt werden kann und da es für jedes $a_{-r} \in A_{-r}^\#$ ein $a_r \in A_r^\#$ mit $b(a_r) = a_{-r}$ nach der Definition der Rang-1-Gruppen gibt, erhalten wir $[A_{2r+s}, A_{-r}] \leq A_{r+s} A_{3r+2s}$. Konjugation mit n_{3r+s} liefert dann

$$\begin{aligned} [A_{2r+s}, A_{-r}] &= [A_{-r}, A_{2r+s}]^{n_{3r+s}} \leq A_{r+s} A_{3r+2s} \cap (A_{r+s} A_{3r+2s})^{n_{3r+s}} \\ &\leq A_{r+s} A_{3r+2s} \cap A_{r+s} A_s \\ &= A_{r+s} (A_{3r+2s} \cap A_{r+s} A_s) \\ &\leq A_{r+s} (A_{3r+2s} \cap U_{-3r-2s}) \\ &= A_{r+s} \end{aligned}$$

unter Verwendung der Dedekind-Identität in Verbindung mit (2.14)(3). Nach (3.20) operiert jedes n_r auf $\{A_\beta \mid \beta \in \tilde{\Phi}\}$ vermöge $A_\beta^{n_r} = A_{\beta^{w_r}}$, wobei w_r die Spiegelung entlang r auf $\tilde{\Phi}$ ist. Mithin folgt insbesondere $[A_{r+s}, A_r] = [A_{2r+s}, A_{-r}]^{n_r} \leq A_{r+s}^{n_r} = A_{2r+s}$.

Abschließend zeigen wir $[A_s, A_r] \leq V_s$, was aber in Verbindung mit (2.14)(3) ein Widerspruch zu $[A_s, A_r] V_s = A_{r+s} V_s$ ist.

Da $[A_s, a_r] = [A_s, \langle a_r \rangle]$ in Charakteristik 2, normalisiert $\langle A_s, \langle a_r \rangle \rangle$ den Kommutator $[A_s, a_r]$ nach (2.1)(5). Nach Schritt 3 folgt daraus

$$\begin{aligned} [A_s, a_r, a_r] &\subseteq [A_{r+s} V_s, a_r] \cap A_s A_{3r+s}^{a_{-r}} \\ &= [A_{r+s}, a_r] \cap A_s A_{3r+s}^{a_{-r}} \\ &\subseteq A_{2r+s} \cap A_s A_{3r+s}^{a_{-r}} \end{aligned}$$

wegen $[A_s, a_r] \subseteq A_s A_s^{a_r} = A_s A_{3r+s}^{a_{-r}}$. Unter Berücksichtigung von $[A_s, A_{-r}] = 1$ nach (I) impliziert dies $[A_s, a_r, a_r]^{a_{-r}} \subseteq A_{2r+s}^{a_{-r}} \cap A_s^{a_{-r}} A_{3r+s}^{a_{-r} a_{-r}} \subseteq A_{2r+s} [A_{2r+s}, a_{-r}] \cap A_s A_{3r+s}$. Aufgrund von Schritt 3 geht dies mit $[A_s, a_r, a_r]^{a_{-r}} \subseteq A_{r+s} A_{2r+s} \cap A_s A_{3r+s}$ einher. Nach der Dedekind-Identität in Verbindung mit (2.14)(3) folgt hieraus

$$[A_s, a_r, a_r]^{a_{-r}} \subseteq A_s A_{3r+s} \cap A_s A_{r+s} A_{2r+s} = A_s (A_{3r+s} \cap A_s A_{r+s} A_{2r+s}) \subseteq A_s (A_{3r+s} \cap U_{-3r-s}) = A_s.$$

Wegen $[A_s, A_{-r}] = 1$ folgt hieraus $[A_s, a_r, a_r] \leq U_s \cap A_s = 1$ nach (2.14)(3).

Dies impliziert $[A_s, a_r] \leq V_s$. Sonst existiert nämlich ein $a_{r+s} \in A_{r+s}^\#$ mit $[a_{r+s}, a_r] = 1$. Wegen $[A_r, A_{-r-s}] = [A_{2r+s}, A_r]^{n_{3r+2s}} = 1$ folgt daraus $X_{r+s} = \langle a_{r+s}, A_{-r-s} \rangle \leq C(a_r)$, ein Widerspruch dazu, dass G vom Typ G_2 ist.

Dies gilt für ein beliebiges $a_r \in A_r^\#$, deswegen haben wir $[A_s, A_r] \leq V_s$. Nach (3.5) ergibt sich daraus $A_{r+s} \leq A_{r+s}V_s = [A_s, A_r]V_s = V_s$, ein Widerspruch zu (2.14)(3). $\square$

3.4 Mögliche Zentralteilerzerlegungen von G

In diesem Abschnitt nehmen wir den Fall (C) von (3.1) unter die Lupe, indem wir G auf mögliche Zentralteilerzerlegungen untersuchen. Das heißt: wir sind – über die „Abspaltung“ einer Rang-1-Gruppe als Zentralteiler hinaus – auch an der Struktur des „verbleibenden Teils“ interessiert. Wir zeigen, dass G in der Situation von (C) in (3.1) vom Typ $A_2 \times A_2$, $C_2 \times A_1 \times A_1$, $A_2 \times A_1 \times A_1 \times A_1$ oder $A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$ ist. In Verbindung mit (3.1) hat dies (3.2) zur Folge. Dabei werden wir von (3.3) ausgehend zeigen, dass entweder keine oder mindestens zwei der zu langen Wurzeln gehörenden Rang-1-Gruppen Zentralteiler von G sind. Angenommen, $\beta \neq \pm\alpha \in \Psi$ mit $G = X_\alpha * \langle U_\alpha, U_{-\alpha} \rangle$ und $G = X_\beta * \langle U_\beta, U_{-\beta} \rangle$. Dann sind die Wurzeluntergruppen A_γ , $\gamma \in \Delta := \tilde{\Phi} \setminus \{\pm\alpha, \pm\beta\}$ unter Kommutatorbildung abgeschlossen, wie wir es sehen werden. Damit erfüllt $G(\Delta)$ die Voraussetzungen von [Tim05a, Korollar (3)]⁵ bezüglich Δ ,⁶ mit dessen Hilfe wir die Liste der möglichen „Faktorzerlegungen“ von G vervollständigen können.

Nach (3.3) gibt es entweder ein $\alpha \in \Psi$, so dass X_α Zentralteiler von G ist, oder es herrscht in den Kommutatorrelationen von (I) zwischen den langen Wurzeluntergruppen stets Gleichheit. Letzteres bedeutet, dass $G(\Psi)$ vom Typ A_2 ist. Nach Abschnitt 3.3 ist in dieser Situation G vom Typ $A_2 \times A_1 \times A_1 \times A_1$, $A_2 \times A_2$, A_3 oder G_2 . Im Hinblick auf den Beweis von (3.2) können und werden wir daher von nun an voraussetzen, dass es eine

⁵Es sei bemerkt, dass [Tim05a, Korollar (3)] die auch in Charakteristik 2 geltende Verallgemeinerung von (1.15) ist.

⁶Dabei betrachten wir Δ als Wurzelsystem vom Typ C_2 .

lange Wurzel gibt, welche den Bedingungen von (3.3)(1) genügt. Es sei bemerkt, dass in dieser Situation $G(\Psi) = X_s * X_{3r+2s} * X_{3r+s}$ nach (1.12) gilt.

Lemma (3.22) *Angenommen, X_α ist Zentralteiler von G für ein $\alpha \in \Psi$. Für $\beta \in \Psi \setminus \{\pm\alpha\}$ gilt dann genau eine der folgenden beiden Möglichkeiten:*

(1) *Die Rang-1-Gruppe X_β ist Zentralteiler von G .*

(2) *Es gilt*

$$\begin{aligned} C_{U_\beta}(A_\beta) &= A_{\beta'}V_\beta \xleftrightarrow{n_\beta} A_{\beta''}V_\beta = C_{U_\beta}(A_{-\beta}), \\ C_{U_{-\beta}}(A_{-\beta}) &= A_{-\beta'}V_{-\beta} \xleftrightarrow{n_\beta} A_{-\beta''}V_{-\beta} = C_{U_{-\beta}}(A_\beta), \end{aligned}$$

wobei $U_\beta = A_{\beta'}V_\beta A_{\beta''}$ mit $\beta', \beta'' \in \tilde{\Phi} \setminus \Psi$ und $\beta < \beta' < \beta'' < -\beta$.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit seien $\alpha = 3r + 2s$ und $\beta = s$. Nach den Kommutatorrelationen in (I) und nach (1.12) gilt $A_{r+s}V_s \leq C_{U_s}(A_s)$. Dementsprechend gibt es zwei Möglichkeiten: entweder $C_{A_r}(A_s) = 1$ und daher $C_{U_s}(A_s) = A_{r+s}V_s$ oder es existiert ein $a_r \in A_r^\sharp$ mit $[a_r, A_s] = 1$ und daher $X_r = \langle a_r, A_{-r} \rangle \leq C(A_s)$ wegen $[A_{-r}, A_s] = 1$, das heißt $[U_s, A_s] = 1$. Im letzteren Fall folgt $[U_s, X_s] = 1$ nach (2.18), denn U_s ist invariant unter X_s nach (2.14)(1). Es folgt analog, dass entweder $C_{U_s}(A_{-s}) = A_rV_s$ oder $[U_s, X_s] = 1$. Insgesamt erhalten wir für U_s entweder

$$C_{U_s}(A_s) = A_{r+s}V_s \xleftrightarrow{n_s} A_rV_s = C_{U_s}(A_{-s})$$

oder $[U_s, X_s] = 1$. Mit der gleichen Begründung folgt für U_{-s} , dass entweder $[U_{-s}, X_s] = 1$ oder $C_{U_{-s}}(A_{-s}) = A_{-r-s}V_{-s} \xleftrightarrow{n_s} A_{-r}V_{-s} = C_{U_{-s}}(A_s)$.

Ferner ist $[U_s, X_s] = 1$ genau dann, wenn $[U_{-s}, X_s] = 1$, da wir sonst einen Widerspruch zu (2.19) erhalten.

Daher ist X_s entweder Zentralteiler von G oder

$$\begin{aligned} C_{U_s}(A_s) &= A_{r+s}V_s \xleftrightarrow{n_s} A_rV_s = C_{U_s}(A_{-s}), \\ C_{U_{-s}}(A_{-s}) &= A_{-r-s}V_{-s} \xleftrightarrow{n_s} A_{-r}V_{-s} = C_{U_{-s}}(A_s). \end{aligned}$$

□

Im Folgenden weisen wir nach, dass G unter den Voraussetzungen von (3.22) mindestens zwei der zu langen Wurzeln gehörenden Rang-1-Gruppen als Zentralteiler besitzt.

Lemma (3.23) *Angenommen, X_α ist Zentralteiler von G für ein $\alpha \in \Psi$. Dann existiert ein $\beta \in \Psi \setminus \{\pm\alpha\}$, so dass X_β ebenfalls Zentralteiler von G ist.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha = 3r + 2s$. Wir nehmen an, dass weder X_s noch X_{3r+s} Zentralteiler von G sind, und führen dies zum Widerspruch.

Nach (3.22) gilt unter dieser Annahme

$$C_{U_s}(A_s) = A_{r+s}V_s \xrightarrow{n_s} A_rV_s = C_{U_s}(A_{-s}).$$

Mehrfache Anwendung des Nilpotenzarguments liefert $A_{r+s}^{n_s} \leq A_r$ wegen

$$[X_s, X_{3r+2s}] = [X_s, X_{2r+s}] = [X_s, X_{3r+s}] = 1.$$

Mit Symmetrie folgt $A_{r+s} \xrightarrow{n_s} A_r$. Daraus ergibt sich

$$[A_{-3r-s}, A_r]^{n_s} = [A_{-3r-s}, A_{r+s}] = 1$$

unter Berücksichtigung von $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ nach (1.12). Dies widerspricht aber nach (3.22) der Annahme, dass X_{3r+s} kein Zentralteiler von G ist. $\square$

Dieses Ergebnis verdichten wir in dem folgenden

Lemma (3.24) *Angenommen, für ein $\alpha \in \Psi$ und ein $\beta \in \Psi \setminus \{\pm\alpha\}$ sind X_α, X_β Zentralteiler von G . Dann sind die A_γ , $\gamma \in \Delta := \tilde{\Phi} \setminus \{\pm\alpha, \pm\beta\}$ unter Kommutatorbildung abgeschlossen.*

Beweis: O.B.d.A. seien X_{3r+2s} und X_{3r+s} Zentralteiler von G . Wir zeigen, dass die Wurzeluntergruppen A_δ , $\delta \in \Delta = \{\pm r, \pm s, \pm(r+s), \pm(2r+s)\}$ in dieser Situation unter Kommutatorbildung abgeschlossen sind. Nach (I) und wegen Symmetrie reicht es, die folgenden vier Kommutatorrelationen nachzuweisen:

- (a) $[A_{r+s}, A_{2r+s}] = 1,$
- (b) $[A_s, A_r] \leq A_{r+s}A_{2r+s},$
- (c) $[A_r, A_{-2r-s}] \leq A_{-s}A_{-r-s},$
- (d) $[A_{r+s}, A_r] \leq A_{2r+s}.$

Die Gültigkeit dieser Kommutatorrelationen beruht auf dem gleichen Prinzip. Man kann nämlich die in $\langle X_{3r+2s}, X_{3r+s} \rangle$ enthaltenen Teile aus den Kommutatoren jeweils „abspalten“, da $[A_\alpha, A_\beta] = 1$ für $\alpha \in \{\pm(3r+2s), \pm(3r+s)\}$ und $\beta \in \tilde{\Phi} \setminus \{-\alpha\}$ nach Voraussetzung, aber $C_{A_\alpha}(A_{-\alpha}) = 1$ nach (2.6)(5). Im Einzelnen sieht dies wie folgt aus.

Wegen $[A_{r+s}, A_{2r+s}] \leq C_{A_{3r+2s}}(A_{-3r-2s}) = 1$ gilt (a).

Infolge von $[A_s, A_r] \leq C_{A_{r+s}V_s}(A_{-3r-2s}A_{-3r-s}) \leq C_{A_{r+s}A_{2r+s}A_{3r+s}}(A_{-3r-s}) = A_{r+s}A_{2r+s}$ gilt (b).

Wegen $[A_r, A_{-2r-s}] \leq C_{V_{3r+s}}(A_{3r+2s}) = A_{-s}A_{-r-s}$ gilt (c).

Wir erhalten ferner $[A_{r+s}, A_r] \leq C_{V_s}(A_{-3r-2s}A_{-3r-s}) \leq C_{A_{3r+2s}A_{2r+s}}(A_{-3r-2s}) = A_{2r+s}$. Daher gilt (d). $\square$

Nach (3.23) können wir davon ausgehen, dass ein $\alpha \in \Psi$ und ein $\beta \in \Psi \setminus \{\pm\alpha\}$ existieren, so dass X_α und X_β Zentralteiler von G sind. Lemma (3.24) zeigt, dass $G(\Delta)$ in dieser Situation die Voraussetzungen von [Tim05a, Korollar (3)] bezüglich Δ erfüllt.⁷ Demnach ist $G(\Delta)$ vom Typ C_2 , $A_2 \times A_1$ oder $A_1 \times A_1 \times A_1 \times A_1$. Unter Berücksichtigung von $G = X_\alpha * X_\beta * G(\Delta)$ und von den „charakteristikfreien“ Ergebnissen von Müller (s. Abschnitt 3.2) ergeben sich hieraus die auf Seite 56 aufgezählten Möglichkeiten für die Struktur von G in der Situation von (C) in (3.1). In Verbindung mit (3.1) gilt daher (3.2).

⁷Wir fassen Δ als Wurzelsystem vom Typ C_2 auf. Es sei erwähnt, dass dabei eine ursprünglich kurze Wurzel von $\tilde{\Phi} = G_2$ möglicherweise die Rolle einer langen Wurzel in Δ als C_2 übernimmt.

Kapitel 4

Gruppen mit Wurzelsystem vom Typ 2F_4

Sei $\tilde{\Phi} = \{\pm r_{2i}, \pm r_{2i-1}, \pm r_{(2i-1)'} \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ ein Wurzelsystem vom Typ 2F_4 .

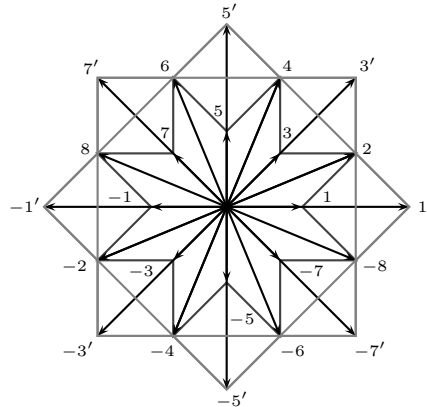


Abb. 4.1: Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ vom Typ 2F_4 .

Wir untersuchen abstrakte Gruppen, welche die Steinberg-Relationen (oder kurz (S)) aus Abschnitt 1.4 mit $\tilde{\Phi} = {}^2F_4$ erfüllen, die wir an dieser Stelle in einer für 2F_4 geeigneten Form wiederholen. Unser Interesse gilt der Struktur solcher Gruppen G , die von Untergruppen $A_\alpha \neq 1$ erzeugt werden, wobei der Index α über $\tilde{\Phi}$ läuft, das heißt $G = \langle A_\alpha \neq 1 \mid \alpha \in \tilde{\Phi} \rangle$. Ferner sollen die Wurzeluntergruppen den folgenden Eigenschaften genügen:

(I) Für $\alpha, \beta \in \tilde{\Phi}$ mit $\beta \notin \mathbb{R}^- \cdot \alpha$ gilt

$$[A_\alpha, A_\beta] \leq \langle A_{\lambda\alpha + \mu\beta} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{N}_0 + \mathbb{N}_0 \cdot \sqrt{2}, \lambda > 0, \mu > 0 \text{ mit } \lambda\alpha + \mu\beta \in \tilde{\Phi} \rangle,$$

wobei $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

(II) Für $\alpha \in \Phi := \{\pm r_{2i}, \pm r_{2i-1} \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ ist $X_\alpha = \langle A_\alpha, A_{-\alpha} \rangle$ eine Rang-1-Gruppe mit unipotenten Untergruppen A_α und $A_{-\alpha}$.

Insbesondere sind die Wurzeluntergruppen $A_{\pm r_{2i}}$ und $A_{\pm r_{(2i-1)'}}$ für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ abelsch nach (I). Die Menge der Wurzeln $\Psi = \{\pm r_{2i} \mid i \in \{1, 2, 3, 4\}\}$ ist ein Unterwurzelsystem von $\tilde{\Phi}$ vom Typ C_2 . Wir schreiben von nun an der Einfachheit halber $\pm k$ an Stelle von $\pm r_k \in \tilde{\Phi}$ bzw. $\pm k'$ an Stelle von $\pm r_{k'} \in \tilde{\Phi}$.

Das Hauptanliegen dieses Kapitels ist der Nachweis eines mit Proposition (3.1) vergleichbaren Ergebnisses für 2F_4 . Unsere Behauptung über die mögliche Struktur von G lautet wie folgt:

Satz (4.1) *Angenommen, die Gruppe G genügt (S) mit $\tilde{\Phi}$ vom Typ 2F_4 . Sei ferner $A_{\alpha'}$ Untergruppe von A_α für $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$. Dann gilt eine der folgenden Möglichkeiten:*

(A) *Die Gruppe G ist vom Typ 2F_4 .*

(B) *Es gilt*

$$G = X_\alpha * C_G(X_\alpha)$$

für ein $\alpha \in \Phi$ und $X_\beta \leq C_G(X_\alpha)$ für $\beta \in \Phi \setminus \{\pm\alpha\}$ oder

$$G = G(\Psi) * G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$$

ist vom Typ $C_2 \times C_2$.

Bei der Lösung dieses Problems werden wir ähnlich wie im Falle von G_2 in Kapitel 3 vorgehen. Als Erstes führen wir in Abschnitt 4.1 einige Bezeichnungen ein. Im Anschluss formulieren wir einige Lemmata, die eine übersichtlichere und einheitlichere Beweisführung ermöglichen. In Abschnitt 4.2 untersuchen wir die Struktur von $G(\Psi)$ und ihre Auswirkungen. Wir werden nachweisen, dass entweder $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ oder $G(\Psi)$ vom Typ C_2 ist. Wir zeigen insbesondere ein mit (3.3) vergleichbares Ergebnis für 2F_4 , indem wir aus $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ darauf schließen, dass X_β Zentralteiler von G für ein $\beta \in \Psi$ ist. In Abschnitt 4.3 zeigen wir, dass falls $[A_\alpha, G(\Psi)] = 1$ für jedes $\alpha \in \tilde{\Phi} \setminus \Phi$, so ist $G = G(\Psi) * G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ und die Wurzeluntergruppen A_β , $\beta \in \tilde{\Phi} \setminus \Psi$ sind unter Kommutatorbildung abgeschlossen. In dieser Situation gilt ferner $G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi) = \bigstar_{\alpha \in \tilde{\Phi} \setminus \Psi} X_\alpha$ oder $G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ ist vom Typ C_2 . In Abschnitt 4.4 gehen wir davon aus, dass die Möglichkeit

(B) von (4.1) nicht gilt, und zeigen, dass dann notwendigerweise (A) von (4.1) eintreten muss.

4.1 Grundlegendes

In den folgenden Abschnitten sollen stets die Voraussetzungen von (4.1) gelten. In diesem Abschnitt legen wir zunächst einige Bezeichnungen fest. Danach formulieren wir einige Hilfssätze. Diese bilden zusammen mit Kapitel 2 die Grundlage für die späteren Beweisführungen.

Für $\alpha \in \Psi$ setzen wir $W_\alpha := A_{\beta'} A_{\gamma'}$ mit $\alpha < \beta' < \gamma' < -\alpha$ für in $\tilde{\Phi} \setminus \Phi$ benachbarte Wurzeln β', γ' . Zum Beispiel ist $W_{-2} = A_{7'} A_{5'}$. Für jedes $\alpha \in \Psi$ ist $W_\alpha \leq Z(U_\alpha)$ invariant unter X_α wegen der Kommutatorrelationen in (I).¹

Wir setzen $M_{-1} := A_{7'} A_6 A_{5'} A_4 A_{3'}$ und führen analog M_β für jedes $\beta \in \Phi \setminus \Psi$ ein. Es sei erwähnt, dass M_β eine abelsche Untergruppe von U_β ist, welche invariant unter X_β ist.²

In den folgenden Abschnitten wird die Betrachtung der Operation von X_α auf W_α für $\alpha \in \Psi$ bzw. von X_β auf M_β für $\beta \in \Phi \setminus \Psi$ von entscheidender Wichtigkeit sein.

Lemma (4.2) *Sei $M_\alpha = A_{\beta'} A_\gamma A_{\delta'} A_\varepsilon A_{\eta'}$ mit $\alpha < \beta' < \gamma < \delta' < \varepsilon < \eta' < -\alpha$, wobei $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$, $\beta', \delta', \eta' \in \tilde{\Phi} \setminus \Phi$ und $\gamma, \varepsilon \in \Psi$. Angenommen, $A_{\beta'} A_{\delta'}$ (bzw. $A_{\delta'} A_{\eta'}$) ist invariant unter X_α . Dann gilt $[X_\alpha, A_{\beta'}] = 1$ (bzw. $[X_\alpha, A_{\eta'}] = 1$).*

Beweis: O.B.d.A. sei $\alpha = -1$. Angenommen, $A_{7'} A_{5'}$ ist invariant unter X_1 . Dann liefert eine Anwendung des Nilpotenzarguments $A_{7'}^{n_1} = A_{7'}$ und damit $[X_1, A_{7'}] = 1$, da $[A_{7'}, A_{-1}] = 1$ nach (I). Mit Symmetrie folgt die Behauptung. $\square$

Lemma (4.3) *Sei M_α wie in (4.2).*

(1) *Angenommen, $[X_\alpha, A_{\beta'}] = 1$. Dann gelten die folgenden Kommutatorrelationen $[A_\alpha, A_\gamma] = 1$ und $[A_{\alpha'}, A_\varepsilon] = 1$. Ist außerdem $[A_\gamma, A_{-\alpha'}] = 1$, so folgt $[X_\alpha, M_\alpha] = 1$.*

¹Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 2 ist W_α ein $\mathbb{Z}X_\alpha$ -Modul für jedes $\alpha \in \Psi$.

²Mit den Bezeichnungen aus Kapitel 2 ist also M_β ein $\mathbb{Z}X_\beta$ -Modul für jedes $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$.

(2) Angenommen, $[X_\alpha, A_{\eta'}] = 1$. Dann gelten die folgenden Kommutatorrelationen $[A_{-\alpha}, A_\varepsilon] = 1$ und $[A_{-\alpha'}, A_\gamma] = 1$. Ist außerdem $[A_\varepsilon, A_{\alpha'}] = 1$, so folgt $[X_\alpha, M_\alpha] = 1$.

Beweis: O.B.d.A. sei $\alpha = -1$. Angenommen,

$$[X_1, A_{7'}] = 1. \quad (4.1)$$

Unter Berücksichtigung der Kommutatorrelationen in (I) folgt dann

$$[A_{-1}, A_6]^{n_1} \leq A_{7'}^{n_1} \cap [A_1, M_{-1}] \leq A_{7'} \cap U_7 = 1$$

nach (2.14)(3). Daher gilt

$$[A_{-1}, A_6] = 1. \quad (4.2)$$

Die Kommutatorrelationen in (I) implizieren außerdem

$$[A_{-1'}, A_4]^{n_1} \leq A_{7'}^{n_1} \cap [A_1, M_{-1}] \leq A_{7'} \cap U_7 = 1$$

unter Verwendung von (2.14)(3), da $A_{7'}^{n_1} = A_{7'}$ nach Annahme. Das heißt

$$[A_{-1'}, A_4] = 1. \quad (4.3)$$

Ist außerdem

$$[A_6, A_{1'}] = 1, \quad (4.4)$$

so folgt $X_1 = \langle A_{-1}, A_{1'} \rangle \leq C(A_6)$ nach $\mathcal{R}(4.2)$. Nach (2.14)(3) ergibt sich daraus

$$\begin{aligned} [A_4, A_{-1}]^{n_1} &\leq (A_{7'} A_6 A_{5'})^{n_1} \cap [M_{-1}, A_1] \\ &= A_{7'} A_6 A_{5'} \cap [A_{7'} A_6 A_{5'} A_4 A_{3'}, A_1] \\ &= A_{7'} A_6 A_{5'} \cap [A_4, A_1] \\ &\leq A_{7'} A_6 A_{5'} \cap A_{3'} \\ &\leq U_{-3} \cap A_{3'} \\ &= 1 \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von $\mathcal{R}(4.1)$ und von (I). Dies impliziert $X_1 = \langle A_{-1}, A_{1'} \rangle \leq C(A_4)$ wegen $[A_4, A_{1'}] = 1$ nach (I).

Nach (I) gilt $[M_{-1}, A_{1'}] = 1$ unter Berücksichtigung von $\mathcal{R}(4.1)$ und $\mathcal{R}(4.4)$. Dies geht mit $[M_{-1}, A_{1'}^{n_1}] = 1$ einher, wobei $A_{1'}^{n_1} \leq A_{-1}$. Daraus ergibt sich

$$X_1 = \langle A_{1'}^{n_1}, A_1 \rangle \leq C(A_{3'}),$$

da $[A_{3'}, A_1] = 1$ nach (I). Insgesamt erhalten wir, $[X_1, M_{-1}] = 1$, wie gewünscht. Mit Symmetrie folgt die Behauptung. $\square$

Lemma (4.4) *Sei $U_\alpha = A_\beta A_\gamma A_\delta A_\varepsilon A_\eta A_\kappa A_\mu$ mit $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon < \eta < \kappa < \mu < -\alpha$, wobei $\alpha, \gamma, \varepsilon, \kappa \in \Psi$ und $\beta, \delta, \eta, \mu \in \Phi \setminus \Psi$.*

(1) *Angenommen, $[X_\alpha, A_\beta] = 1$. Dann gilt $[A_\alpha, A_\delta] = 1$. Ist außerdem $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ und $[W_\alpha, X_\alpha] = 1$, so folgt $A_\beta A_\gamma A_\delta A_\varepsilon A_\eta A_\kappa \subseteq C_{U_\alpha}(A_\alpha)$.*

(2) *Angenommen, $[X_\alpha, A_\mu] = 1$. Dann gilt $[A_\eta, A_{-\alpha}] = 1$. Ist außerdem $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ und $[W_\alpha, X_\alpha] = 1$, so folgt $A_\gamma A_\delta A_\varepsilon A_\eta A_\kappa A_\mu \subseteq C_{U_\alpha}(A_{-\alpha})$.*

Beweis: O.B.d.A. sei $\alpha = -2$. Angenommen, $[X_2, A_{-1}] = 1$. Dann gilt

$$[A_{-2}, A_7]^{n_2} \leq A_{-1'}^{n_2} \cap [A_2, U_{-2}] = A_{-1'} \cap [A_2, U_{-2}] \leq A_{-1'} \cap U_{-1} = 1$$

nach (I) und nach (2.14)(3). Das heißt

$$[A_{-2}, A_7] = 1 \tag{4.5}$$

Angenommen, $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ und $[W_{-2}, X_2] = 1$. Die mehrfache Anwendung der Dedekind-Identität und des Lemmas (2.14)(3) liefert dann

$$\begin{aligned} [A_5, A_{-2}]^{n_2} &\leq (A_{-1'} A_8 A_{7'})^{n_2} \cap [U_{-2}, A_2] \\ &= A_{-1'} A_8 A_{7'} \cap [A_{-1} A_8 A_7 A_6 A_5 A_4 A_3, A_2] \\ &= A_{-1'} A_8 A_{7'} \cap [A_7 A_6 A_5 A_4 A_3, A_2] \\ &\leq A_{-1'} A_8 A_{7'} \cap U_{-1} \cap U_8 \cap U_7 \\ &= (A_{-1'} \cap U_{-1}) A_8 A_{7'} \cap U_8 \cap U_7 \\ &= (A_8 \cap U_8) A_{7'} \cap U_7 \\ &= A_{7'} \cap U_7 \\ &= 1, \end{aligned}$$

da $(A_{-1'}A_8A_{7'})^{n_2} = A_{-1'}A_8A_{7'}$ nach Annahme. In Verbindung mit $\mathcal{R}(4.5)$ ergibt sich daraus $A_{-1}A_8A_7A_6A_5A_4 \subseteq C_{U_{-2}}(A_{-2})$, denn $G(\Psi)$ zerfällt in das zentrale Produkt von Rang-1-Gruppen nach Annahme. Mit Symmetrie folgt die Behauptung. $\square$

Lemma (4.5) *Angenommen, $[X_\alpha, U_\alpha] = 1$ und $A_{-\beta}A_{-\gamma}A_{-\delta}A_{-\varepsilon}A_{-\eta}A_{-\kappa} \subseteq C_{U_{-\alpha}}(A_{-\alpha})$ oder $A_{-\gamma}A_{-\delta}A_{-\varepsilon}A_{-\eta}A_{-\kappa}A_{-\mu} \subseteq C_{U_{-\alpha}}(A_\alpha)$ für ein $\alpha \in \Phi$, wobei $U_\alpha = A_\beta A_\gamma A_\delta A_\varepsilon A_\eta A_\kappa A_\mu$ mit $\alpha < \beta < \gamma < \delta < \varepsilon < \eta < \kappa < \mu < -\alpha \in \Phi$. Dann ist X_α Zentralteiler von G .³*

Beweis: Angenommen, $[X_\alpha, U_\alpha] = 1$ und $A_{-\gamma}A_{-\delta}A_{-\varepsilon}A_{-\eta}A_{-\kappa}A_{-\mu} \subseteq C_{U_{-\alpha}}(A_\alpha)$. Dann gibt es ein $a_{-\beta} \in A_{-\beta}^\#$ mit $[a_{-\beta}, A_\alpha] = 1$. Sonst ist nämlich

$$A_{-\beta}^{n_\alpha} \leq C_{U_{-\alpha}}(A_\alpha) = A_{-\gamma}A_{-\delta}A_{-\varepsilon}A_{-\eta}A_{-\kappa}A_{-\mu} \subseteq U_{-\beta},$$

ein Widerspruch zu (2.19).

Sei also $a_{-\beta}$ ein Element von $A_{-\beta}^\#$ mit $[a_{-\beta}, A_\alpha] = 1$. Dann gilt $X_\beta = \langle A_\beta, a_{-\beta} \rangle \leq C(A_\alpha)$ wegen $[A_\beta, A_\alpha] = 1$ nach (I). Damit gilt $[A_\alpha, U_{-\alpha}] = 1$ und eine Anwendung von (2.18) liefert $[X_\alpha, U_{-\alpha}] = 1$, denn $U_{-\alpha}$ ist invariant unter X_α . Daher ist X_α ein Zentralteiler von G , wie es zu zeigen war. $\square$

4.2 Die Struktur von $G(\Psi)$ und ihre Auswirkungen

In diesem Abschnitt untersuchen wir die Möglichkeiten, die sich für die Struktur von $G(\Psi)$ ergeben. Darauf basierend zeigen wir im Anschluss ein zu (3.3) korrespondierendes Ergebnis für 2F_4 . Dabei sollen weiterhin die Voraussetzungen von (4.1) gelten.

Die Menge Ψ ist ein Unterwurzelsystem von $\tilde{\Phi}$ vom Typ C_2 . Demnach erfüllt $G(\Psi)$ die Voraussetzungen von [Tim05a, Korollar (3)]. Dies impliziert, dass $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ gilt oder $G(\Psi)$ vom Typ C_2 ist, oder es ein $\beta \in \Psi$ gibt, so dass X_β Zentralteiler von $G(\Psi)$ ist und $G(\Psi \setminus \{\pm\beta\})$ vom Typ A_2 ist. Das folgende Lemma zeigt, dass sich die letzte Möglichkeit wegen der Kommutatorrelationen in (I) ausschließen lässt.

³Es sei bemerkt, dass das entsprechende Analogon dieser Behauptung auch für G_2 gilt. Dieses Lemma haben wir nur deswegen nicht in Abschnitt 2.3 integriert, weil die einheitliche Formulierung Schwierigkeiten bereitet hätte. Ferner kann (4.5) als direkte Konsequenz von (2.19) aufgefasst werden.

Lemma (4.6) *Es gilt genau eine der folgenden Möglichkeiten:*

- (1) *Es gilt $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$.*
- (2) *Die Gruppe $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 .*

Beweis: Nach [Tim05a, Korollar (3)] reicht es zu zeigen, dass (1) gilt, falls X_α für ein $\alpha \in \Psi$ Zentralteiler von $G(\Psi)$ ist. Sei o.B.d.A. X_2 Zentralteiler von $G(\Psi)$. Unter Berücksichtigung von (I) folgt dann $1 = [A_8, A_6 A_4 A_2]$ und damit $[X_8, A_6 A_4 A_2] = 1$ nach (2.18), da die kommutative Gruppe $A_6 A_4 A_2$ invariant unter X_8 ist. Analog folgt $[A_{-6} A_{-4} A_{-2}, X_8] = 1$. Insgesamt ergibt sich daraus, dass X_8 Zentralteiler von $G(\Psi)$ ist. Mit Symmetrie folgt auch, dass X_4 Zentralteiler von $G(\Psi)$ ist. Das heißt $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$, wie gewünscht. $\square$

Die Struktur der Wurzeluntergruppen A_α , $\alpha \in \Psi$ ist uns nach (1.14) weitgehend bekannt, wenn es kein $\alpha \in \Psi$ existiert, so dass X_α Zentralteiler von $G(\Psi)$ ist. Der Fall (3) von (1.14) ist nämlich wegen der Kommutatorrelationen in (I) nicht möglich. Deswegen sind die A_α , $\alpha \in \Psi$ in der Situation von (4.6)(2) allesamt elementarabelsche 2-Gruppen. In Abschnitt 4.4 werden wir sehen, dass sich diese Eigenschaft auf die Wurzeluntergruppen A_α , $\alpha \in \tilde{\Phi} \setminus \Phi$ überträgt, falls die Möglichkeit (B) von (4.1) nicht gilt. In dieser Situation ergibt sich sogar $a^4 = 1$ für jedes $a \in A_\beta$, $\beta \in \Phi \setminus \Psi$. Dies deckt sich mit den in [Tits94] beschriebenen Eigenschaften der zu Moufang-Achtecken assoziierten Wurzeluntergruppen.

Zunächst ziehen wir aus $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ weit reichende Folgerungen. Das folgende Lemma zeigt, dass falls es zwei in Ψ benachbarte Wurzeln β, γ mit $[X_\beta, W_\beta] = 1 \neq [X_\gamma, W_\gamma]$ gibt, so ist die Rang-1-Gruppe X_β Zentralteiler von G .

Lemma (4.7) *Angenommen, $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ und es existieren in Ψ benachbarte Wurzeln β und γ mit $[X_\beta, W_\beta] = 1 \neq [X_\gamma, W_\gamma]$. Dann ist X_β Zentralteiler von G .*

Beweis: O.B.d.A. seien $\beta = -2$ und $\gamma = -4$. Dann sind die Annahmen gleichbedeutend mit $[X_2, W_{-2}] = 1 \neq [X_4, W_{-4}]$.

Schritt 1: Als Erstes zeigen wir

$$A_{-1} A_8 A_7 A_6 A_5 A_4 \subseteq C_{U_{-2}}(A_{-2}). \quad (4.6)$$

Es gilt $1 \neq [A_{7'}, A_{-4}] \leq C_{A_{-1'}}(A_2)$ nach Annahme und nach den Kommutatorrelationen in (I). Daraus folgt

$$X_1 = \langle [A_{7'}, A_{-4}], A_1 \rangle \leq C(A_2). \quad (4.7)$$

Damit gilt $[X_2, A_{-1}] = 1$. Eine Anwendung von (4.4) auf U_{-2} liefert $\mathcal{R}(4.6)$, da $[X_2, W_{-2}] = 1$ und $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ nach Annahme.

Schritt 2: Als Nächstes weisen wir $[X_2, W_2] = 1$ nach.

Angenommen, $[X_2, W_2] \neq 1$. Dann ist $[A_2, A_{-5'}] \neq 1$. Unter Berücksichtigung von $\mathcal{R}(4.6)$ impliziert dies $1 \neq [A_2, A_{-5'}] \leq C_{A_{-7'}}(A_{-1})$. Mithin gilt $X_7 = \langle [A_2, A_{-5'}], A_7 \rangle \leq C_G(A_{-1'})$. Nach (4.3) folgt hieraus $[A_{-4}, A_{7'}] = 1$, ein Widerspruch zur Annahme. Daher ist $[A_2, A_{-5'}] = 1$ und damit $[X_2, W_2] = 1$ nach (2.18), denn W_2 ist invariant unter X_2 und $[A_2, W_2] = 1$.

Schritt 3: Drittens zeigen wir

$$A_{-8}A_{-7}A_{-6}A_{-5}A_{-4}A_{-3} \subseteq C_{U_2}(A_{-2}). \quad (4.8)$$

Aufgrund von $\mathcal{R}(4.6)$ gilt

$$X_5 = \langle A_5, A_{-5'} \rangle \leq C(A_{-2}),$$

d.h. insbesondere $[A_{-5}, A_{-2}] = 1$. Nach Schritt 2 und aufgrund von $\mathcal{R}(4.6)$ erhalten wir außerdem $X_7 = \langle A_7, A_{-7'} \rangle \leq C(A_{-2})$, d.h. insbesondere $[A_{-7}, A_{-2}] = 1$. Unter Berücksichtigung der Annahme, dass $G(\Psi)$ ein zentrales Produkt von Rang-1-Gruppen ist, ergibt sich daraus $\mathcal{R}(4.8)$.

Schritt 4: Viertens zeigen wir

$$[X_2, U_2] = 1. \quad (4.9)$$

Nach $\mathcal{R}(4.8)$ reicht es, $C_{A_1}(A_{-2}) \neq 1$ zu zeigen. Dies impliziert nämlich $X_1 = \langle C_{A_1}(A_{-2}), A_{-1} \rangle \leq C(A_{-2})$ wegen $[A_{-1}, A_{-2}] = 1$ nach (I). Damit ist $[A_{-2}, U_2] = 1$, was nach (2.18) mit $\mathcal{R}(4.9)$ einhergeht, denn U_2 ist invariant unter X_2 .

Wir nehmen $C_{A_1}(A_{-2}) = 1$ an, und führen dies zum Widerspruch. Nach $\mathcal{R}(4.8)$ gilt dann $C_{U_2}(A_{-2}) = A_{-8}A_{-7}A_{-6}A_{-5}A_{-4}A_{-3}$ und damit $A_1^{n_2} \leq C_{U_2}(A_{-2}) \leq U_1$. Nach Schritt 1 ist

aber $[X_2, A_{-1}] = 1$, ein Widerspruch zu (2.19). Daher gilt $C_{A_1}(A_{-2}) \neq 1$ und damit $\mathcal{R}(4.9)$.

Wegen $\mathcal{R}(4.6)$ und $\mathcal{R}(4.9)$ sind die Voraussetzungen von (4.5) bezüglich X_2 erfüllt. Demzufolge ist X_2 Zentralteiler von G . $\square$

Lemma (4.8) *Angenommen, $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ und $[X_\alpha, W_\alpha] = 1$ für jedes $\alpha \in \Psi$. Dann existiert ein $\alpha \in \Psi$, so dass X_α Zentralteiler von G ist.*

Beweis:

Schritt 1: Sei $\alpha \in \Psi$ und $W_\alpha = A_{\beta'} A_{\gamma'}$ mit $\alpha < \beta' < \gamma' < -\alpha$, wobei β', γ' entsprechende Wurzeln von $\tilde{\Phi} \setminus \Psi$ sind. Zunächst zeigen wir, dass entweder

$$[A_{\beta'}, A_{-\gamma'}] = 1 = [A_{\gamma'}, A_{-\beta'}]$$

gilt oder X_α Zentralteiler von G ist.

Sei o.B.d.A. $\alpha = -2$. Wir zeigen, dass entweder

$$[A_{7'}, A_{-5'}] = 1 \tag{4.10}$$

gilt oder X_2 Zentralteiler von G ist.

Wir nehmen an, dass X_2 kein Zentralteiler von G ist, und zeigen, dass in diesem Fall $\mathcal{R}(4.10)$ gilt. Nach den Kommutatorrelationen in (I) gilt $[A_{-5'}, A_{7'}] \leq A_{-3'} A_{-2} A_{-1'}$. Sei $a_{-3'} a_{-2} a_{-1'} \in [A_{-5'}, A_{7'}]$ mit $a_{-3'} \in A_{-3'}$, $a_{-2} \in A_{-2}$ und $a_{-1'} \in A_{-1'}$. Dann gilt $a_{-3'} a_{-2} a_{-1'} \in C(A_2)$, da $[A_{7'}, A_2] = 1 = [A_{-5'}, A_2]$ nach Annahme. In Verbindung mit (I) impliziert dies $[a_{-3'} a_{-2} a_{-1'}, A_{5'}] = [a_{-3'}, A_{5'}] \leq C_{A_{-1'}, A_8 A_{7'}}(A_2)$ wegen $[X_2, W_{-2}] = 1$ nach Annahme. Wir nehmen $a_{-3'} \neq 1$ an, und führen dies zum Widerspruch.

Sei $a_{-1'}^* a_8^* a_{7'}^* \in [a_{-3'}, A_{5'}]$ mit $a_{-1'}^* \in A_{-1'}$, $a_8^* \in A_8$ und $a_{7'}^* \in A_{7'}$. Dann gilt

$$1 = [a_{-1'}^* a_8^* a_{7'}^*, A_2] = [a_{-1'}^*, A_2] = 1,$$

denn $[A_8, A_2] = 1 = [A_{7'}, A_2]$ nach Annahme. Angenommen, $a_{-1'}^* \neq 1$. Dann folgt $X_1 = \langle a_{-1'}^*, A_1 \rangle \leq C(A_2)$ und damit $X_2 = \langle A_2, A_{-2} \rangle \leq C(A_{-1})$. Daraus ergibt sich unter Beachtung der Annahme $[X_2, W_2] = 1$ analog wie in dem Beweis von (4.7), dass X_2 Zentralteiler von G ist, ein Widerspruch zur Annahme. Wir erhalten also $[a_{-3'}, A_{5'}] \leq A_8 A_{7'}$.

Damit ist $L := A_8 A_{7'} A_6 A_{5'}$ invariant unter $X_3 = \langle a_{-3'}, A_3 \rangle$. Konjugation mit n_3 liefert $[L, A_{3'}^{n_3}] = 1$ wegen $[L, A_{3'}] = 1$. Dies impliziert $X_3 = \langle A_{3'}^{n_3}, A_3 \rangle \leq C(A_{5'})$. Insbesondere gilt $[A_{5'}, A_{-3}] = 1$ und damit $X_5 = \langle A_{5'}, A_{-5} \rangle \leq C(A_{-3'})$ wegen $[A_{-5}, A_{-3'}] = 1$ nach (I). Daraus folgt $[M_{-5}, A_{5'}] = 1 = [M_{-5}, A_{5'}^{n_5}]$, da $[A_{-2}, A_{5'}] = 1$ nach Annahme. Unter Berücksichtigung von $A_{5'}^{n_5} \leq A_{-5}$ erhalten wir hieraus $X_5 = \langle A_{5'}^{n_5}, A_5 \rangle \leq C(A_{7'})$. Hieraus folgt $a_{-3'} a_{-2} a_{-1'} \in [A_{-5'}, A_{7'}] = 1$ und damit

$$1 \neq a_{-3'} = (a_{-2} a_{-1'})^{-1} \leq A_{-3'} \cap A_{-2} A_{-1'} \leq A_{-3'} \cap U_{-3} = 1$$

nach (2.14)(3), ein Widerspruch zur Annahme. Insgesamt erhalten wir

$$[A_{7'}, A_{-5'}] \leq A_{-2} A_{1'}.$$

Die entsprechende Wiederholung der obigen Argumentation mit a'_{-1} an Stelle von $a_{-3'}$ unter der Annahme, dass X_2 kein Zentralteiler von G ist, liefert $[A_{7'}, A_{-5'}] \leq A_{-2}$. Dies hat $[A_{-5'}, A_{7'}] \leq C_{A_{-2}}(A_2) = 1$ als Konsequenz, denn $[A_{-5'}, A_2] = 1 = [A_{7'}, A_2]$ nach Annahme.

Analog erhalten wir, dass entweder $[A_{5'}, A_{-7'}] = 1$ gilt oder X_2 Zentralteiler von G ist.

Infolge von Schritt 1, reicht es zu zeigen, dass X_β für ein $\beta \in \Psi$ Zentralteiler von G ist, falls $[A_{\beta'}, A_{-\gamma'}] = 1 = [A_{\gamma'}, A_{-\beta'}]$ für jedes $\alpha \in \Psi$. Lemma (4.3) liefert unter solchen Voraussetzungen $[X_\alpha, M_\alpha] = 1$ für jedes $\alpha \in \Psi$. Dabei verwenden wir, dass $[X_\alpha, W_\alpha] = 1$ für jedes $\alpha \in \Psi$ nach Annahme. Dies impliziert insbesondere $[X_5, X_2] = 1 = [X_7, X_2]$ und $[X_5, X_8] = 1 = [X_3, X_8]$. Unter Berücksichtigung von (4.5) erhalten wir: entweder ist X_2 Zentralteiler von G oder die mehrfache Anwendung des Nilpotenzarguments liefert die Konjugationsverhältnisse

$$A_{-1} \xleftrightarrow{n_2} A_3 \text{ und } A_{-3} \xleftrightarrow{n_2} A_1$$

wegen $[X_2, X_8] = [X_2, X_7] = [X_2, X_6] = [X_2, X_5] = [X_2, X_4] = 1$. Daraus ergibt sich insbesondere $[A_1, A_8]^{n_2} = [A_{-3}, A_8] = 1$, was nach (4.5) damit einhergeht, dass X_8 Zentralteiler von G ist.

Daher existiert ein $\alpha \in \Psi$, so dass X_α Zentralteiler von G ist, wie es zu zeigen war. $\square$

Lemma (4.9) *Angenommen, $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$. Dann existiert ein $\alpha \in \Psi$ mit $[X_\alpha, W_\alpha] = 1$.*

Beweis:

Wir nehmen $[X_\alpha, W_\alpha] \neq 1$ für jedes $\alpha \in \Psi$ und $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$ an, und führen dies zum Widerspruch.

Schritt 1: Wir verwenden die Bezeichnungen aus (4.2). Als Erstes zeigen wir

$$C_{M_\alpha}(A_{\alpha'}) = A_{\beta'} A_\gamma A_{\delta'}$$

und

$$C_{M_\alpha}(A_{-\alpha'}) = A_{\delta'} A_\varepsilon A_{\eta'}$$

für jedes $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$.

Sei o.B.d.A. $\alpha = -1$. Aus Symmetriegründen reicht es,

$$C_{M_{-1}}(A_{-1'}) = A_{7'} A_6 A_{5'} \tag{4.11}$$

zu zeigen.

Nach (I) gilt $A_{7'} A_6 A_{5'} \leq C_{M_{-1}}(A_{-1'})$. Um die andere Inklusion zu erhalten, zeigen wir $C_{A_4 A_{3'}}(A_{-1'}) = 1$. Sei dazu $a_4 \in A_4$ und $a_{3'} \in A_{3'}$ mit $[a_4 a_{3'}, A_{-1'}] = 1$. Für jedes $a_{-1'} \in A_{-1'}$ gilt dann

$$1 = [a_4 a_{3'}, a_{-1'}] = [a_4, a_{-1'}]^{a_{3'}} [a_{3'}, a_{-1'}].$$

Wegen $[A_4, A_{-1'}] \leq A_{7'}$ und $[A_{7'}, A_{3'}] = 1$ impliziert dies $[a_{3'}, A_{-1'}] \leq A_{7'}$. Angenommen, $a_{3'} \neq 1$. Dann ist $A_{-1'} A_{7'}$ invariant unter $X_3 = \langle a_{3'}, A_{-3} \rangle$. Daraus folgt $[X_3, A_{-1'}] = 1$ nach (4.2). Dies impliziert $[A_{-3'}, A_6] = 1$ nach (4.3), ein Widerspruch zur Annahme. Angenommen, $a_4 \neq 1$. Dann gilt $[a_4, A_{-1'}] = 1$ und damit $X_4 = \langle a_4, A_{-4} \rangle \leq C(A_{-1'})$, ein Widerspruch zu $[A_4, A_{-1'}] \neq 1$ nach Annahme. Daher gilt $\mathcal{R}(4.11)$.

Schritt 2: Zweitens zeigen wir

$$A_{-1}^{n_2} \subseteq A_7 A_6 A_5 A_4 A_3. \tag{4.12}$$

Es gilt $A_8A_6A_5A_4A_3 \subseteq C_{U_{-2}}(A_2)$, da $[A_8, A_2] = 1$ nach Annahme. Angenommen, $[a_{-1}a_7a_5, A_2] = 1$ für ein $a_{-1} \in A_{-1}$, $a_7 \in A_7$ und $a_5 \in A_5$. Für jedes $a_2 \in A_2$ gilt dann

$$\begin{aligned} 1 &= [a_{-1}a_7a_5, a_2] \\ &= [a_{-1}, a_2]^{a_7a_5} [a_7a_5, a_2] \\ &= [a_{-1}, a_2]^{a_7a_5} [a_7, a_2]^{a_5} [a_5, a_2]. \end{aligned}$$

Wegen $[A_7, A_2] \leq A_{5'}A_4A_{3'}$, $[A_{5'}A_4A_{3'}, A_5] = 1$, $[A_5, A_2] \leq A_{3'}$ und $[A_{5'}A_4A_{3'}, A_7] \leq A_{5'}$ liefert dies $[a_{-1}, A_2] \leq A_{5'}A_4A_{3'}$. Angenommen, $a_{-1} \neq 1$. Dann ist $M_{-1}A_2$ invariant unter $X_1 = \langle a_{-1}, A_1 \rangle$. Nach Schritt 1 folgt daraus

$$[A_{7'}, A_2]^{n_1} \leq [C_{M_{-1}}(A_{1'}), M_{-1}A_2] = [A_{5'}A_4A_{3'}, M_{-1}A_2] = 1,$$

da $A_{5'}A_4A_{3'} \leq Z(M_{-1}A_2)$; ein Widerspruch zur Annahme.

Wir erhalten $C_{U_{-2}}(A_2) \subseteq A_8A_7A_6A_5A_4A_3$, und eine Anwendung des Nilpotenzarguments liefert $\mathcal{R}(4.12)$ wegen $[X_8, X_2] = 1$ nach Annahme.

Schritt 3: Als Nächstes zeigen wir

$$[A_{7'}, A_{-4}]^{n_2} \leq A_7A_6A_5. \quad (4.13)$$

Es gilt $[[A_{7'}, A_{-4}], A_2]^{n_2} \leq [[A_{7'}A_{5'}, A_{-4}], A_{-2}] \leq A_{-1'}$ nach den Kommutatorrelationen in (I), denn W_{-2} ist invariant unter X_2 und $[A_{-4}, X_2] = 1$ nach Annahme. Nach $\mathcal{R}(4.12)$ wissen wir außerdem $[A_{7'}, A_{-4}]^{n_2} \leq A_7A_6A_5A_4A_3$. Sei $a_7a_6a_5a_4a_3 \in [A_{7'}, A_{-4}]^{n_2}$, wobei $a_i \in A_i$ für $i \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$. Dann gilt

$$A_{-1'} \geq [a_7a_6a_5a_4a_3, A_{-2}] = [a_7a_5a_4a_3, A_{-2}] = [a_7a_4a_5a_3, A_{-2}] = [a_4a_7[a_7, a_4]a_5a_3, A_{-2}]$$

unter Berücksichtigung der Kommutatorrelationen in (I). Es gilt $[a_7, a_4]a_5 = a_5^*$ für ein Element $a_5^* \in A_5$. Damit erhalten wir $[a_7a_5^*a_3, A_{-2}] \leq A_{-1'}$, da $[a_4, A_{-2}] = 1$ nach Annahme. Für alle $a_{-2} \in A_{-2}$ gilt hiermit

$$\begin{aligned} A_{-1'} &\ni [a_7a_5^*a_3, a_{-2}] \\ &= [a_7, a_{-2}]^{a_5^*a_3} [a_5^*a_3, a_{-2}] \\ &= [a_7, a_{-2}]^{a_3} [a_5^*, a_{-2}]^{a_3} [a_3, a_{-2}]. \end{aligned}$$

Wegen $[A_7, A_{-2}] \leq A_{-1'}$, $[A_{-1'}, a_3] \leq A_8 A_{7'} A_6 A_{5'}$, $[A_5, A_{-2}] \leq A_{-1'} A_8 A_{7'}$ gilt $[a_3, A_{-2}] \leq M_{-3}$. Angenommen, $a_3 \neq 1$. Dann ist $A_{-2} M_{-3}$ invariant unter $X_3 = \langle a_3, A_{-3} \rangle$. Nach Schritt 1 folgt daraus

$$[A_{-2}, A_{5'}]^{n_3} \leq [A_{-2} M_{-3}, A_{-1'} A_8 A_{7'}] = 1,$$

da $A_{-1'} A_8 A_{7'} \leq Z(A_{-2} M_{-3})$, ein Widerspruch zur Annahme. Dies impliziert $[A_{7'}, A_{-4}]^{n_2} \leq A_7 A_6 A_5 A_4$. Eine Anwendung des Nilpotenzarguments liefert $\mathcal{R}(4.13)$ wegen $[X_4, X_2] = 1$ nach Annahme.

Schritt 4: Viertens zeigen wir

$$[A_{7'}, A_{-4}]^{n_2} \leq A_7. \quad (4.14)$$

Es gilt $[A_{7'}, A_{-4}]^{n_2} \leq [A_{7'} A_{5'}, A_{-4}] \leq U_{-5}$ nach den Kommutatorrelationen in (I), denn W_{-2} ist invariant unter X_2 . In Verbindung mit $\mathcal{R}(4.13)$ hat dies $[A_{7'}, A_{-4}]^{n_2} \leq A_7 A_6 A_5 \cap U_{-5} = A_7 A_6 (A_5 \cap U_{-5}) = A_7 A_6$ als Konsequenz unter Verwendung der Dedekind-Identität und von (2.14)(3). Mit Hilfe des Nilpotenzarguments folgt daraus $\mathcal{R}(4.14)$ wegen $[X_6, X_2] = 1$.

Abschließend führen wir unsere ursprüngliche Annahme zum Widerspruch. Es gilt $[[A_{-4}, A_{7'}], A_{-5'}] = 1$ nach (I) und damit $[[A_{-4}, A_{7'}]^{n_2}, A_{-5'}^{n_2}] = 1$. Außerdem gibt es ein $a_{-5'} \in A_{-5'}^\#$ mit $a_{-5'}^{n_2} \in A_{-7'}^\#$, da $[A_{-5'}, A_2] \neq 1$ nach Annahme. Unter Berücksichtigung von $\mathcal{R}(4.14)$ ergibt sich daraus $[a_7, a_{-7'}] = 1$ für ein $a_7 \in A_7^\#$ und ein $a_{-7'} \in A_{-7'}^\#$. Dies impliziert $X_7 = \langle a_7, A_{-7} \rangle \leq C(a_{-7'})$ wegen $[a_{-7'}, A_{-7}] = 1$ nach (I), ein Widerspruch zu $N_{A_{-7}}(A_7) = 1$ nach (2.6)(5).

Daher existiert ein $\alpha \in \Psi$ mit $[X_\alpha, W_\alpha] = 1$, falls $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$, wie es zu zeigen war. $\square$

Satz (4.10) *Es gilt genau eine der folgenden Möglichkeiten:*

- (1) Für ein $\alpha \in \Psi$ gilt $G = X_\alpha * C_G(X_\alpha)$ und $X_\beta \leq C_G(X_\alpha)$ für alle $\beta \in \Psi \setminus \{\pm\alpha\}$.
- (2) Die Gruppe $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 .

Beweis: Nach (4.9) existiert ein $\alpha \in \Psi$ mit $[X_\alpha, W_\alpha] = 1$, falls $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$. Dies impliziert nach (4.8) und (4.7) die Existenz von einem $\gamma \in \Psi$, so dass X_γ Zentralteiler von G ist. Demnach gilt (1), falls $G(\Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$. Nach (4.6) trifft sonst (2) zu. $\square$

4.3 Abschluss des Beweises I

Lemma (4.11) *Angenommen, $[A_\alpha, G(\Psi)] = 1$ für jedes $\alpha \in \tilde{\Phi} \setminus \Phi$. Dann ist $[G(\Psi), G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)] = 1$ und die Wurzeluntergruppen A_β , $\beta \in \tilde{\Phi} \setminus \Psi$ sind unter Kommutatorbildung abgeschlossen. Ferner gilt $G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Phi \setminus \Psi} X_\alpha$ oder $G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)$ ist vom Typ C_2 .*

Beweis:

Schritt 1: Es gilt $X_3 = \langle A_{3'}, A_{-3} \rangle \leq C(A_{-2})$, da $[A_{3'}, A_{-2}] = 1$ nach Annahme. Analog erhalten wir $[A_{-2}, X_1] = 1$ und $[A_2, X_1] = 1$. Nach (4.4) impliziert dies $[A_{-2}, A_7] = 1$. Daraus ergibt sich $X_7 = \langle A_7, A_{-7'} \rangle \leq C(A_{-2})$. Analog folgt auch $[A_{-2}, X_5] = 1$. Daher gilt $[A_{-2}, G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)] = 1$. Mit Symmetrie erhalten wir

$$[G(\Psi), G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi)] = 1. \quad (4.15)$$

Schritt 2: Als Nächstes zeigen wir, dass die Wurzeluntergruppen A_α , $\alpha \in \tilde{\Phi} \setminus \Psi$ unter Kommutatorbildung abgeschlossen sind. Hierfür reicht es, die Abgeschlossenheit der A_α , $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$ unter Kommutatorbildung nachzuweisen. Wir zeigen die entsprechenden Kommutatorrelationen o.B.d.A. für A_1 . Nach $\mathcal{R}(4.15)$ gilt $[A_1, A_3] \leq C_{A_2}(A_{-2}) = 1$. Ferner ist $[A_1, A_5] = 1$ nach (I). Um die fehlende Kommutatorrelation $[A_1, A_7] \leq A_5 A_3$ zu zeigen, nehmen wir eine Fallunterscheidung vor:

(a) Angenommen, $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 . Nach den Kommutatorrelationen in (I) gilt dann

$$\begin{aligned} [A_1, A_7] &\leq A_6 A_5 A_4 A_3 A_2 \cap C_G(A_8) \cap C_G(A_{-8}) \cap C_G(A_{-4}) \\ &\leq A_6 A_5 A_4 A_3 \cap C_G(A_{-8}) \cap C_G(A_{-4}) \\ &\leq A_5 A_4 A_3 \cap C_G(A_{-4}) \leq A_5 A_3 \end{aligned}$$

unter Berücksichtigung von $\mathcal{R}(4.15)$.

(b) Angenommen, $G(\Psi) = X_2 * X_4 * X_6 * X_8$. Nach den Kommutatorrelationen in (I) folgt dann

$$\begin{aligned} [A_1, A_7] &\leq A_6 A_5 A_4 A_3 A_2 \cap C_G(A_{-2}) \cap C_G(A_{-6}) \cap C_G(A_{-4}) \\ &\leq A_6 A_5 A_4 A_3 \cap C_G(A_{-6}) \cap C_G(A_{-4}) \\ &\leq A_5 A_4 A_3 \cap C_G(A_{-4}) \leq A_5 A_3 \end{aligned}$$

unter Verwendung von $\mathcal{R}(4.15)$.

Abschließend zeigen wir, dass unter solchen Voraussetzungen A_α für jedes $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$ abelsch ist oder $G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Phi \setminus \Psi} X_\alpha$. Sei o.B.d.A. $\alpha = 1$. Nach Schritt 2 folgt

$$[A_7, A_1, A_1] \leq [A_5 A_3, A_1] = 1.$$

Nach (I) und nach dem Drei-Untergruppen-Lemma gilt $A'_1 = [A_1, A_1] \leq C_{A_1'}(A_7)$. Angenommen, $A'_1 \neq 1$. Analog wie in dem Beweis von (4.6) folgt dann $G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Phi \setminus \Psi} X_\alpha$.

Angenommen, $A'_\alpha = 1$ für jedes $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$. Dann erfüllen die Wurzeluntergruppen A_α , $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$ die Voraussetzungen von (1.9) bezüglich eines Wurzelsystems vom Typ C_2 . Analog wie in dem Beweis von (4.6) erhalten wir hieraus, dass $G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi) = G(\Phi \setminus \Psi)$ vom Typ C_2 ist oder $G(\tilde{\Phi} \setminus \Psi) = \bigstar_{\alpha \in \Psi} X_\alpha$. $\square$

Satz (4.12) *Angenommen, $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 und $C_{A_{\beta'}}(A_{-\alpha}) \neq 1$ oder $C_{A_{\gamma'}}(A_\alpha) \neq 1$ für ein $\alpha \in \Psi$, wobei $W_\alpha = A_{\beta'} A_{\gamma'}$ mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.1. Dann gilt die Möglichkeit (B) von (4.1).*

Satz (4.12) folgt aus den folgenden, diesen Abschnitt abrundenden Lemmata.

Lemma (4.13) *Angenommen, $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 und es existieren in Ψ benachbarte Wurzeln α und β mit $C_{A_{\delta'}}(A_\alpha) \cap C_{A_{\delta'}}(A_{-\beta}) \neq 1$, wobei $W_\alpha = A_{\gamma'} A_{\delta'}$ und $W_\beta = A_{\delta'} A_{\eta'}$ mit $\alpha < \beta < \gamma' < \delta' < \eta' < -\alpha < -\beta$ für entsprechende Wurzeln $\gamma', \delta', \eta' \in \tilde{\Phi} \setminus \Psi$. Dann gilt $[A_{\delta'}, G(\Psi)] = 1$.*

Beweis: O.B.d.A. seien $\alpha = -4$, $\beta = -2$ und $\delta' = 7'$. Dann sind die Annahmen bezüglich W_α und W_β gleichbedeutend mit $[a_{7'}, A_{-4}] = 1 = [a_{7'}, A_2]$ für ein $a_{7'} \in A_{7'}^\sharp$. Daraus ergeben sich die folgenden Kommutatorrelationen:

$$1 = [a_{7'}, A_2]^{n_4} = [a_{7'}, A_{-6}] \text{ und } 1 = [a_{7'}, A_{-4}]^{n_2} = [a_{7'}, A_{-8}],$$

denn $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 nach Annahme. Dies impliziert $X_7 = \langle a_{7'}, A_{-7} \rangle \leq C(A_{-6})$, d.h. $[X_7, A_{-6}] = 1$ und damit $[A_7, X_6] = 1$ bzw. $X_7 = \langle a_{7'}, A_{-7} \rangle \leq C(A_{-8})$, d.h. $[X_7, A_{-8}] = 1$ und damit $[A_7, X_8] = 1$. Daraus ergibt sich

$$[A_7, A_2]^{n_8} = [A_7, A_6] = 1 \text{ bzw. } [A_7, A_{-4}]^{n_6} = [A_7, A_8] = 1.$$

Daher gilt $[A_{7'}, G(\Psi)] = 1$. $\square$

Lemma (4.14) *Angenommen, $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 und es existieren drei Wurzeln α, β, τ in Ψ , so dass $C_{A_{\delta'}}(A_{\alpha}) \cap C_{A_{\delta'}}(A_{-\beta}) \neq 1$ und $[X_{\tau}, W_{\tau}] \neq 1$, wobei $\alpha < \beta$ und $\beta < \tau$ benachbart in Ψ und W_{α} und W_{β} wie unter (4.13) sind. Dann ist X_{δ} Zentralteiler von G .*

Beweis: O.B.d.A. seien $\alpha = -4$, $\beta = -2$ und $\tau = 8$. Nach dem Beweis von (4.13) gilt dann

$$[X_7, A_{-8}] = 1 = [X_7, A_{-6}]. \quad (4.16)$$

Außerdem gilt $[A_{5'}, A_{-8}] \neq 1$ nach Annahme. Wegen $A_4 A_{3'} A_2 A_{1'} \subseteq C_{M_7}(A_{-8})$ nach (I) und $A_{-8}^{n_7} = A_{-8}$ ergibt sich daraus, dass es ein $1 \neq a_{5'} \in A_{5'}^{\#}$ und ein $a_4 \in A_4$ mit $[a_{5'} a_4, A_{-7'}] = 1$ gibt, da $A_{5'}^{n_7} \leq C_{M_7}(A_{-7'})$ und $A_{3'} A_2 A_{1'} \leq C_{M_7}(A_{-7'})$. Für jedes $a_{-7'} \in A_{-7'}$ gilt dann

$$1 = [a_{5'} a_4, a_{-7'}] = [a_{5'}, a_{-7'}]^{a_4} [a_4, a_{-7'}].$$

Wegen $[A_4, A_{-7'}] \leq A_{1'}$ und $[A_4, A_{1'}] = 1$ impliziert dies $[a_{5'}, A_{-7'}] \leq A_{1'}$. Damit ist $A_{1'} A_{-7'}$ invariant unter $X_5 = \langle a_{5'}, A_{-5} \rangle$. Nach (4.2) folgt hieraus $[A_{-7'}, X_5] = 1$ und damit auch $X_7 = \langle A_{-7'}, A_7 \rangle \leq C(A_{5'})$ wegen $[A_7, A_{5'}] = 1$ nach (I). Nach (4.3) hat dies

$$[A_{-8}, A_{-5}] = 1 = [A_2, A_{-5'}] \quad (4.17)$$

bzw. $[A_4, A_7] = 1$ als Konsequenz. Damit gilt $X_4 = \langle A_4, A_{-4} \rangle \leq C(A_7)$, da $[A_7, A_{-4}] = 1$ nach dem Beweis von (4.13). Dies impliziert $[A_7, A_{-2}]^{n_4} = [A_7, A_6] = 1$ und damit $[X_2, A_7] = 1$, da $[A_7, A_2] = 1$ nach dem Beweis von (4.13).

Es gilt außerdem $[A_4, A_{-7'}] = 1$. Sonst erhalten wir nämlich einen Widerspruch zu (2.19) wegen $[X_4, A_7] = 1$. In Verbindung mit $[X_7, A_{5'}] = 1$ impliziert dies

$$[M_7, X_7] = 1 \quad (4.18)$$

nach (4.3).

Nach $\mathcal{R}(4.17)$ folgt

$$1 = [A_{-2}, A_{-7'}]^{n_4} = [A_6, A_{-7'}]$$

und $\mathcal{R}(4.18)$ hat

$$1 = [A_4, A_{-7'}]^{n_2} = [A_8, A_{-7'}]$$

zur Folge. Demnach erhalten wir die folgenden Kommutatorrelationen: $[X_7, A_6] = 1$ und damit $[X_6, A_{-7}] = 1$ bzw. $[X_7, A_8] = 1$ und damit $[X_8, A_{-7}] = 1$. Außerdem gilt $[A_{-2}, A_{-7}]^{n_8} = [A_{-6}, A_{-7}] = 1$ und damit $[X_7, A_{-2}] = 1$. Es gilt ferner

$$[A_{-7}, A_{-5}]^{n_7} \leq A_{-6}^{n_7} \cap [A_{-7}, U_{-7}]^{n_7} \leq A_{-6} \cap U_{-6} = 1 \quad (4.19)$$

wegen $[X_7, A_{-6}] = 1$ nach $\mathcal{R}(4.16)$. Daraus ergibt sich

$$X_5 = \langle A_{-5}, A_{5'} \rangle \leq C(A_{-7}) \quad (4.20)$$

unter Berücksichtigung von $\mathcal{R}(4.18)$. Analog wie unter $\mathcal{R}(4.19)$ erhalten wir auch $[A_7, A_5] = 1$ wegen $[X_7, A_6] = 1$. In Verbindung mit $\mathcal{R}(4.20)$ impliziert dies $[X_7, A_5] = 1$. Es gilt auch $[A_1, A_{-7}] = 1$, da $[X_7, A_{-8}] = 1$ nach $\mathcal{R}(4.16)$. Insgesamt ergibt sich $[U_7, A_{-7}] = 1$ und mithin $[U_7, X_7] = 1$ nach (2.18), denn U_7 ist invariant unter X_7 . Es folgt hieraus $[M_{-7}, X_7] = 1$ unter Berücksichtigung von $A_{-5'}A_{-4}A_{-3'}A_{-2} \subseteq C_{M_{-7}}(A_{-7})$, da wir sonst einen Widerspruch zu (2.19) erhalten. Dies impliziert

$$X_1 = \langle A_{-1'}, A_1 \rangle \leq C(A_{-7}).$$

Daher ist $[U_{-7}, A_{-7}] = 1$ unter Berücksichtigung von $[A_{-7}, A_8] = 1$. Nach (2.18) folgt dann $[U_{-7}, X_7] = 1$. Insgesamt erhalten wir, dass X_7 Zentralteiler von G ist. $\square$

Lemma (4.15) *Angenommen, $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 und es existieren in Ψ benachbarte Wurzeln α und β , so dass $C_{A_{\delta'}}(A_\alpha) \cap C_{A_{\delta'}}(A_{-\beta}) \neq 1$ mit den Bezeichnungen aus (4.13). Dann gilt (B) von (4.1).*

Beweis: Nach (4.13) und (4.14) folgt, dass X_ν Zentralteiler von G für ein $\nu \in \Phi \setminus \Psi$ ist oder jede Wurzeluntergruppe A_α , $\alpha \in \tilde{\Phi} \setminus \Phi$ mit jeder Wurzeluntergruppe A_β , $\beta \in \Psi$ vertauschbar ist. Im zweiten Fall sind die Voraussetzungen von (4.11) erfüllt. Daher gilt in beiden Fällen die Möglichkeit (B) von (4.1). $\square$

Lemma (4.16) *Angenommen, $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 und es existieren in Ψ benachbarte Wurzeln α und β , so dass $C_{A_{\delta'}}(A_{-\beta}) \neq 1$ und $C_{A_{\delta'}}(A_\alpha) \cap C_{A_{\delta'}}(A_{-\beta}) = 1$, wobei W_α und W_β wie in (4.13) sind. Dann gilt (B) von (4.1).*

Beweis: O.B.d.A. seien $\alpha = -4$, $\beta = -2$ und $\delta' = 7'$. Sei ferner $a_{7'} \in A_{7'}^\#$ mit $[a_{7'}, A_2] = 1 \neq [a_{7'}, A_{-4}]$.

Schritt 1: Als Erstes zeigen wir $a_{7'}^{n_4} \in A_{-1'}$. Es gilt $a_{7'}^{n_4} = a_{-1'} a_{7'}^*$, wobei $a_{-1'} \in A_{-1'}$ und $a_{7'}^* \in A_{7'}$, denn W_{-4} ist invariant unter X_4 . Damit ist $(a_{7'} (a_{7'}^*)^{-1})^{n_4} = a_{-1'}$, denn $a_{7'}^{n_4} \in C_{W_{-4}}(A_{-4})$ und $A_{-1'} \leq C_{W_{-4}}(A_{-4})$ nach (I). Es gilt ferner

$$1 = [a_{7'}, A_2]^{n_4} = [a_{-1'} a_{7'}^*, A_{-6}],$$

denn $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 nach Annahme. Dies impliziert

$$1 = [a_{-1'} a_{7'}^*, a_{-6}] = [a_{-1'}, a_{-6}]^{a_{7'}^*} [a_{7'}^*, a_{-6}]$$

für jedes $a_{-6} \in A_{-6}$. Wegen $[A_{-1'}, A_{-6}] \leq A_{-3'}$ und $[A_{-3'}, A_{7'}] = 1$ folgt hieraus $[a_{7'}^*, A_{-6}] \leq A_{-3'}$. Angenommen, $a_{7'}^* \neq 1$. Dann ist $A_{-6} A_{-3'}$ invariant unter $X_7 = \langle a_{7'}^*, A_{-7} \rangle$, und eine Anwendung des Nilpotenzarguments liefert $A_{-6}^{n_7} = A_{-6}$ wegen $[X_3, X_7] = 1$ nach (I). Damit ist $[A_{-6}, X_7] = 1$ und somit auch $[X_6, A_7] = 1$. Dies impliziert $[A_7, A_{-4}]^{n_6} = [A_7, A_8] = 1$, ein Widerspruch zu $[a_{7'}, A_{-4}] \neq 1$ nach Annahme. Daher gilt $a_{7'}^* = 1$ und damit $a_{7'}^{n_4} \in A_{-1'}$.

Schritt 2: Als Nächstes zeigen wir $a_{-1'}^{n_2} \in A_5 A_4 A_3$ mit $a_{-1'}$ aus Schritt 1.

Die Gruppe $[A_{7'}, A_{-4}] A_{7'}$ ist invariant unter X_4 . Nach Schritt 1 und nach der Dedekind-Identität ergibt sich daraus

$$a_{-1'} = a_{7'}^{n_4} \in [A_{7'}, A_{-4}] A_{7'} \cap A_{-1'} = [A_{7'}, A_{-4}] (A_{7'} \cap A_{-1'}) = [A_{7'}, A_{-4}]$$

unter Verwendung von (2.14)(3). Dies impliziert

$$a_{-1'}^{n_2} \in [A_{7'}, A_{-4}]^{n_2} \leq [A_{7'} A_{5'}, A_{-8}] \subseteq A_6 A_5 A_4 A_3 A_2 A_1$$

nach den Kommutatorrelationen in (I). Wegen $[a_{7'}, X_2] = 1$ nach Annahme und $[A_{7'}, A_{-1'}] = 1$ nach (I) folgt hieraus

$$a_{-1'}^{n_2} \in C_{A_6 A_5 A_4 A_3 A_2 A_1}(a_{7'}) \subseteq A_6 A_5 A_4 A_3 A_2.$$

Andernfalls ist nämlich $[X_1, A_{7'}] = 1$ wegen $A_6 A_5 A_4 A_3 A_2 \subseteq C_{A_6 A_5 A_4 A_3 A_2 A_1}(a_{7'})$. Nach (4.3) impliziert dies aber $[A_4, A_{-1'}] = 1$, ein Widerspruch zu $[A_{-4}, A_{7'}] \neq 1$ nach Annahme. Andererseits gilt $a_{-1'}^{n_2} \in U_{-2}$, denn U_{-2} ist invariant unter X_2 nach (2.14)(1). Damit erhalten wir

$$a_{-1'}^{n_2} \in A_6 A_5 A_4 A_3 A_2 \cap U_{-2} = A_6 A_5 A_4 A_3 (A_2 \cap U_{-2}) = A_6 A_5 A_4 A_3$$

nach der Dedekind-Identität unter Verwendung von (2.14)(3). Eine Anwendung des Nilpotenzarguments liefert $a_{-1'}^{n_2} \in A_5 A_4 A_3$ wegen $[X_6, X_2] = 1$.

Schritt 3: Als Nächstes zeigen wir $[A_{-5'}, A_2] \neq 1$.

Angenommen, $[A_{-5'}, A_2] = 1$. Nach Schritt 2 folgt dann

$$a_{-1'}^{n_2} \in A_5 A_4 A_3 \cap C(A_{-5'})$$

wegen $[A_{-1'}, A_{-5'}] = 1$. Seien $a_5 \in A_5$, $a_4 \in A_4$ und $a_3 \in A_3$ mit $a_{-1'}^{n_2} = a_5 a_4 a_3$. Für jedes $a_{-5'} \in A_{-5'}$ gilt dann

$$1 = [a_5 a_4 a_3, a_{-5'}] = [a_5, a_{-5'}]^{a_4 a_3} [a_4 a_3, a_{-5'}] = [a_5, a_{-5'}]^{a_4 a_3} [a_4, a_{-5'}]^{a_3} [a_3, a_{-5'}].$$

Wegen $[a_4, a_{-5'}]^{a_3} = [a_4, a_{-5'}][a_4, a_{-5'}, a_3] \in A_3 A_2 A_1 A_{-8} A_{-7} A_{-6} \subseteq U_5$ ergibt sich daraus $[a_5, A_{-5'}] \leq U_5$. Angenommen, $a_5 \neq 1$. Dann ist $U_5 A_{-5'}$ invariant unter $X_5 = \langle a_5, A_{-5} \rangle$ wegen $[A_{-5}, A_{-5'}] = 1$ nach (I). Damit gilt

$$X_5 = \langle A_{-5'}^{n_5}, A_{-5} \rangle \leq U_5 A_{-5}.$$

Damit ist aber die nach (2.6)(8) nicht nilpotente Gruppe X_5 in $U_5 A_{-5}$ enthalten, welches nach (2.14)(2) nilpotent ist, ein Widerspruch. Daher gilt $a_5 = 1$ und somit $a_{-1'}^{n_2} = a_4 a_3$.

Für jedes $a_{-6} \in A_{-6}$ gilt dann

$$1 = [a_4 a_3, a_{-6}] = [a_4, a_{-6}]^{a_3} [a_3, a_{-6}],$$

da $1 = [a_{7'}, A_2]^{n_4 n_2} = [a_{-1'}, A_{-6}]^{n_2} = [a_4 a_3, A_{-6}]$. Wegen $[A_3, A_{-6}] \leq A_{1'} A_{-8} A_{-7'}$ und $(A_{1'} A_{-8} A_{-7'})^{a_3} \subseteq A_{1'} A_{-8} A_{-7'}$ folgt hieraus $[a_4, A_{-6}] \leq A_{1'} A_{-8} A_{-7'}$. Angenommen, $a_4 \neq 1$. Dann ist $A_{1'} A_{-8} A_{-7'} A_{-6}$ invariant unter $X_4 = \langle a_4, A_{-4} \rangle$. Nach (2.14)(3) impliziert dies $A_2 = A_{-6}^{n_4} \leq A_2 \cap U_2 = 1$, denn $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 nach Annahme, ein Widerspruch.

Daher gilt $a_4 = 1$ und damit $a_{-1'}^{n_2} = a_3$.

Wegen $1 = [A_{-7'}, a_3]^{n_2^{-1}} = [A_{-7'}, a_{-1'}]$ ergibt sich daraus $X_7 = \langle A_{-7'}, A_7 \rangle \leq C(a_{-1'})$ und damit $X_1 = \langle a_{-1'}, A_1 \rangle \leq C(A_{-7'})$. Dies impliziert $X_7 = \langle A_{-7'}, A_7 \rangle \leq C(A_{-1'})$. Nach (4.3) folgt daraus aber $[A_{-4}, A_{7'}] = 1$, ein Widerspruch zu $[a_{7'}, A_{-4}] \neq 1$ nach Annahme.

Daher gilt $[A_{-5'}, A_2] \neq 1$.

Schritt 4: Als Nächstes zeigen wir $a_{-1}^{n_2} \in A_3$ mit $a_{-1'}$ aus Schritt 1. Nach Schritt 3 ist $[A_{-5'}, A_2] \neq 1$. Demnach existiert ein $a_{-5'} \in A_{-5}^\#$ mit $a_{-5'}^{n_2} = a_{-7'}$. Nach Schritt 2 ergibt sich daraus

$$1 = [a_{-1'}^{n_2}, a_{-7'}] = [a_5 a_4 a_3, a_{-7'}]$$

wegen $[A_{-1'}, A_{-5'}] = 1$ nach (I). (Dabei ist $a_5 \in A_5$, $a_4 \in A_4$, $a_3 \in A_3$ mit $a_{-1'}^{n_2} = a_5 a_4 a_3$.) Unter Berücksichtigung von $[A_3, A_{-7'}] = 1$ folgt hieraus

$$1 = [a_5 a_4 a_3, a_{-7'}] = [a_5 a_4, a_{-7'}] = [a_5, a_{-7'}]^{a_4} [a_4, a_{-7'}].$$

Wegen $[A_4, A_{-7'}] \leq A_{1'}$ und $[A_{1'}, A_4] = 1$ impliziert dies $[a_5, a_{-7'}] \in A_{1'}$. Angenommen, $a_5 \neq 1$. Dann ist $\langle a_{-7'} \rangle A_{1'}$ invariant unter $X_5 = \langle a_5, A_{-5} \rangle$. Eine Anwendung des Nilpotenzarguments liefert $\langle a_{-7'} \rangle^{n_5} \leq \langle a_{-7'} \rangle$ wegen $[X_1, X_5] = 1$ nach (I). Daher gilt $[\langle a_{-7'} \rangle, X_5] = 1$. Dies impliziert $[X_7, A_{5'}] = 1$, was $[X_5, A_{-7'}] = 1$ mit sich bringt. Nach (4.3) folgt hieraus $[A_2, A_{-5'}] = 1$, ein Widerspruch. Daher gilt $a_5 = 1$ und somit $a_{-1'}^{n_2} = a_4 a_3$.

Analog wie in Schritt 3 folgt daraus $a_4 = 1$ und damit $a_{-1'}^{n_2} = a_3$.

Schritt 5: Als Nächstes zeigen wir

$$C_{W_2}(A_{-2}) = A_{-5'} \xleftarrow{n_2} C_{W_2}(A_2) = A_{-7'}. \quad (4.21)$$

Nach (I) gilt $A_{-5'} \subseteq C_{W_2}(A_{-2})$. Um die andere Inklusion zu erhalten, zeigen wir $C_{A_{-7'}}(A_{-2}) = 1$. Sei $a_{-7'} \in C_{A_{-7'}}(A_{-2})$. Dann gilt $1 = [a_{-7'}, a_3]^{n_2^{-1}} = [a_{-7'}, a_{-1'}]$. Angenommen, $a_{-7'} \neq 1$. Dann gilt $X_7 = \langle a_{-7'}, A_7 \rangle \leq C(a_{-1'})$ wegen $[A_7, A_{-1'}] = 1$ nach (I). Dies führt analog wie in Schritt 3 zu einem Widerspruch. Daher gilt $C_{W_2}(A_{-2}) = A_{-5'}$.

Wir wenden uns dem Zentralisator von A_2 in W_2 zu. Nach (I) gilt $A_{-7'} \subseteq C_{W_2}(A_2)$. Um die andere Inklusion zu erhalten, zeigen wir $C_{A_{-5'}}(A_2) = 1$. Sei hierfür $a_{-5'} \in C_{A_{-5'}}(A_2)$. Dann gilt $1 = [a_{-5'}, a_{-1'}]^{n_2} = [a_{-5'}, a_3]$. Angenommen, $a_{-5'} \neq 1$. Dann folgt $[X_5, A_{3'}] = 1$. Nach (4.3) impliziert dies $[A_5, A_2] = 1$. Damit folgt $X_5 = \langle A_5, a_{-5'} \rangle \leq C(A_2)$, ein Widerspruch zu $[A_2, A_{-5'}] \neq 1$ nach Schritt 3. Daher gilt $C_{A_{-5'}}(A_2) = 1$.

Insgesamt erhalten wir $\mathcal{R}(4.21)$, denn W_2 ist invariant unter X_2 nach (2.14)(1).

Schritt 6: Als Nächstes weisen wir $[A_{-5'}, A_8] = [A_{-7'}, A_4] = 1$ nach.

Nach $\mathcal{R}(4.21)$ gilt $[A_{-5'}, A_8] \xleftarrow{n_2} [A_{-7'}, A_4]$, denn $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 nach Annahme.

Wir nehmen $[A_{-5'}, A_8] \neq 1 \neq [A_{-7'}, A_4]$ an, und führen dies zum Widerspruch. Angenommen, $[A_{-5'}, A_8] \neq 1 \neq [A_{-7'}, A_4]$. Dann ist $C_{W_{-2}}(A_2) = A_{5'}$. Andernfalls existiert nämlich ein $\hat{a}_{7'} \in A_{7'}^\sharp$ mit $[\hat{a}_{7'}, A_2] = 1$. Dies impliziert $1 = [[A_{-5'}, A_8], \hat{a}_{7'}]^{n_2} = [[A_{-7'}, A_4], \hat{a}_{7'}]$. Daher gilt $X_1 = \langle [A_{-7'}, A_4], A_{-1} \rangle \leq C(\hat{a}_{7'})$ und damit $X_7 = \langle \hat{a}_{7'}, A_{-7} \rangle \leq C(A_{1'})$. Nach Lemma (4.3) ergibt sich daraus $[A_{-7'}, A_4] = 1$, ein Widerspruch zur Annahme. Daher ist $C_{W_{-2}}(A_2) = A_{5'}$. Dies widerspricht aber $C_{A_{7'}}(A_2) \neq 1$ nach Annahme.

Ferner gilt $C_{A_{1'}}(A_6) \neq 1$ oder nach (4.15) trifft (B) von (4.1) zu, da $[A_{1'}, A_{-4}] = 1$ nach Schritt 6. Im ersten Fall kann man die obige Argumentation mit $\alpha = 6$ und $\beta = 4$ entsprechend wiederholen. Demnach gilt $A_{-1'} \xleftrightarrow{n_4} A_{7'}$ und $[A_{7'}, A_2] = 1 = [A_{-1'}, A_{-6}]$. In Verbindung mit Schritt 6 ergibt sich daraus $[A_{-3'}, A_6] = 1 = [A_{-3'}, A_{-8}]$, was nach (4.15) zu der Möglichkeit (B) von (4.1) führt. $\square$

4.4 Abschluss des Beweises II

In diesem Abschnitt gehen wir davon aus, dass die Möglichkeit (B) von (4.1) nicht gilt, und zeigen, dass dann notwendigerweise (A) von (4.1) eintreten muss. Nach Abschnitt 4.2 und 4.3 setzen wir von nun an im Hinblick auf den Beweis von (4.1) voraus, dass $G(\Psi)$ vom Typ C_2 ist und dass nicht alle Wurzeluntergruppen A_α , $\alpha \in \Psi$ mit allen Wurzeluntergruppen A_β , $\beta \in \tilde{\Phi} \setminus \Phi$ vertauschen. Ferner nehmen wir $C_{A_{\beta'}}(A_{-\alpha}) = 1$ und $C_{A_{\gamma'}}(A_\alpha) = 1$ für $\alpha \in \Psi$ an, wobei $W_\alpha = A_{\beta'}A_{\gamma'}$ mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.1. Zunächst zeigen wir, dass jedes n_α , $\alpha \in \Psi$ auf der Menge $\{A_\beta \mid \beta \in \tilde{\Phi}\}$ vermöge $A_\beta^{n_\alpha} = A_{\beta^{w_\alpha}}$ operiert, wobei w_α für die Spiegelung entlang α auf $\tilde{\Phi}$ steht. Im Anschluss weisen wir die analogen Konjugationseigenschaften auch für n_α , $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$ nach. Dies ist damit gleichbedeutend, dass die Voraussetzungen von (1.9) für G bezüglich 2F_4 erfüllt sind. Daher ist G unter solchen Bedingungen vom Typ 2F_4 .

Wir beginnen mit dem folgenden

Lemma (4.17) *Mit den Bezeichnungen aus Abschnitt 4.1 sei $W_\alpha = A_{\beta'}A_{\gamma'}$ für $\alpha \in \Psi$.*

(1) *Dann gilt $C_{W_\alpha}(A_\alpha) = A_{\beta'} \xleftrightarrow{n_\alpha} C_{W_\alpha}(A_{-\alpha}) = A_{\gamma'}$.*

(2) *Außerdem gilt $[W_\alpha, A_{-\alpha}] = A_{\gamma'}$ und $[W_\alpha, A_\alpha] = A_{\beta'}$.*

(3) Ferner gilt $C_{A_{-\alpha}}(A_{\beta'}) = 1 = C_{A_\alpha}(A_{\gamma'})$.

Beweis: Es gilt $C_{W_\alpha}(A_\alpha) = A_{\beta'}$, da einerseits $[A_{\beta'}, A_\alpha] = 1$ nach (I) und andererseits $C_{A_{\gamma'}}(A_\alpha) = 1$ nach Annahme. Analog folgt $C_{W_\alpha}(A_{-\alpha}) = A_{\gamma'}$. Daher gilt (1), denn W_α ist invariant unter X_α .

Die Gruppe $A_{\beta'}[A_{\beta'}, A_{-\alpha}]$ ist invariant unter X_α , weshalb $A_{\gamma'} = A_{\beta'}^{n_\alpha} \leq A_{\beta'}[A_{\beta'}, A_{-\alpha}]$ unter Berücksichtigung von (1). Folglich ist $A_{\beta'}A_{\gamma'} = A_{\beta'}[A_{\beta'}, A_{-\alpha}]$ und damit $A_{\gamma'} = [A_{\beta'}, A_{-\alpha}] = [W_\alpha, A_{-\alpha}]$. Mit Symmetrie folgt (2).

Wir nehmen $C_{A_{-\alpha}}(A_{\beta'}) \neq 1$ an, und führen dies zum Widerspruch. Angenommen, es existiert ein $a_{-\alpha} \in C_{A_{-\alpha}^\#}(A_{\beta'})$. Dann gilt

$$X_\alpha = \langle a_{-\alpha}, A_\alpha \rangle \leq C(A_{\beta'}),$$

da $[A_\alpha, A_{\beta'}] = 1$ nach (I). Dies widerspricht aber $C_{\beta'}(A_{-\alpha}) = 1$ nach Annahme. Daher gilt $C_{A_{-\alpha}}(A_{\beta'}) = 1$, und mit Symmetrie erhalten wir (3). $\square$

Lemma (4.18) Jedes n_α , $\alpha \in \Psi$ operiert auf $\{A_\beta \mid \beta \in \tilde{\Phi}\}$ vermöge $A_\beta^{n_\alpha} = A_{\beta^{w_\alpha}}$, wobei w_α die Spiegelung entlang α auf $\tilde{\Phi}$ ist.

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $\alpha = -2$.

Schritt 1: Nach (4.17)(1) gilt $A_{7'} \xleftrightarrow{n_2} A_{5'}$ bzw. $A_{-5'} \xleftrightarrow{n_2} A_{-7'}$. Nach (4.17)(1) und (2) implizieren diese Konjugationsverhältnisse

$$A_{-1'} = [A_{7'}, A_{-4}] \xleftrightarrow{n_2} [A_{5'}, A_{-8}] = A_{3'} \quad (4.22)$$

und

$$A_{-3'} = [A_{-5'}, A_8] \xleftrightarrow{n_2} [A_{-7'}, A_4] = A_{1'}, \quad (4.23)$$

denn $G(\Psi)$ ist vom Typ C_2 nach Annahme.

Schritt 2: Als Nächstes weisen wir

$$C_{U_{-2}}(A_{-1'}) = A_{-1}A_8A_7A_6A_5 \quad (4.24)$$

nach. Aufgrund von (I) gilt $A_{-1}A_8A_7A_6A_5 \subseteq C_{U_{-2}}(A_{-1'})$. Um die andere Inklusion zu erhalten, zeigen wir $C_{A_4A_3}(A_{-1'}) = 1$. Seien dazu $a_4 \in A_4$ und $a_3 \in A_3$ mit $[a_4a_3, A_{-1'}] = 1$.

Für jedes $a_{-1'} \in A_{-1'}$ gilt dann

$$1 = [a_4 a_3, a_{-1'}] = [a_4, a_{-1'}]^{a_3} [a_3, a_{-1'}].$$

Wegen $[A_4, A_{-1'}] \leq A_{7'}$ und $[A_{7'}, A_3] = 1$ nach (I) folgt hieraus $[a_3, A_{-1'}] \leq A_{7'}$. Angenommen, $a_3 \neq 1$. Dann ist $A_{-1'} A_{7'}$ invariant unter $X_3 = \langle a_3, A_{-3} \rangle$. Nach (4.3) folgt daraus $[A_6, A_{-3'}] = 1$ in Verbindung mit (4.2), ein Widerspruch zu $C_{A_{-3'}}(A_6) = 1$ nach Annahme.

Außerdem ist $a_4 = 1$, da wir andernfalls einen Widerspruch zu (4.17)(3) erhalten.

Daher gilt $\mathcal{R}(4.24)$.

Schritt 3: Drittens zeigen wir

$$A_5 \xleftrightarrow{n_2} A_7 \tag{4.25}$$

und

$$A_{-5} \xleftrightarrow{n_2} A_{-7}. \tag{4.26}$$

Analog wie in Schritt 2 folgt auch $C_{U_{-2}}(A_{3'}) = A_7 A_6 A_5 A_4 A_3$ und damit

$$C_{U_{-2}}(A_{-1'}) = A_{-1} A_8 A_7 A_6 A_5 \xleftrightarrow{n_2} C_{U_{-2}}(A_{3'}) = A_7 A_6 A_5 A_4 A_3$$

unter Verwendung von $\mathcal{R}(4.22)$.

Ferner gilt $C_{C_{U_{-2}}(A_{3'})}(A_{-1'}) = A_7 A_6 A_5$, da andernfalls die gleiche Argumentation wie bei $\mathcal{R}(4.24)$ einen Widerspruch liefert. Analog erhalten wir $C_{C_{U_{-2}}(A_{-1'})}(A_{3'}) = A_7 A_6 A_5$. Damit ist $A_7 A_6 A_5$ invariant unter n_2 unter Berücksichtigung von $\mathcal{R}(4.22)$.

Analog wie bei $\mathcal{R}(4.24)$ ergibt sich daraus $C_{A_7 A_6 A_5}(A_{1'}) = A_5$ und $C_{A_7 A_6 A_5}(A_{-3'}) = A_7$, was nach $\mathcal{R}(4.23)$ mit $\mathcal{R}(4.25)$ einhergeht. Mit Symmetrie folgt auch $\mathcal{R}(4.26)$.

Analog wie in Schritt 3 erhalten wir

$$C_{C_{U_{-2}}(A_{-1'})}(A_{-3'}) = A_{-1} A_8 A_7 \xleftrightarrow{n_2} C_{C_{U_{-2}}(A_{3'})}(A_{1'}) = A_5 A_4 A_3$$

und damit $C_{A_{-1} A_8 A_7}(A_{-5'}) = A_{-1} \xleftrightarrow{n_2} C_{A_5 A_4 A_3}(A_{-7'}) = A_3$. Analog erhalten wir auch $A_{-3} \xleftrightarrow{n_2} A_1$.

Insgesamt operiert n_2 auf $\{A_\beta \mid \beta \in \tilde{\Phi}\}$ vermöge $A_\beta^{n_\alpha} = A_{\beta^{w_\alpha}}$, wobei w_α die Spiegelung entlang α auf $\tilde{\Phi}$ ist. Dabei benutzen wir, dass $G(\Psi)$ nach Annahme vom Typ C_2 ist. $\square$

Als Nächstes zeigen wir für die Wurzeln in $\Phi \setminus \Psi$ ein mit (4.18) vergleichbares Ergebnis.

Lemma (4.19) *Jedes n_α , $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$ operiert auf $\{A_\beta \mid \beta \in \tilde{\Phi}\}$ vermöge $A_\beta^{n_\alpha} = A_{\beta w_\alpha}$, wobei w_α die Spiegelung entlang α auf $\tilde{\Phi}$ ist.*

Beweis: Ohne Beschränkung der Allgemeinheit zeigen wir die entsprechenden Konjugationsbeziehungen für die Wurzel -1 .

Schritt 1: Wir verwenden die Bezeichnungen aus (4.2). Zunächst zeigen wir

$$C_{M_\alpha}(A_{\alpha'}) = A_{\beta'} A_\gamma A_{\delta'}$$

und

$$C_{M_\alpha}(A_{-\alpha'}) = A_{\delta'} A_\varepsilon A_{\eta'}$$

für jedes $\alpha \in \Phi \setminus \Psi$. Sei o.B.d.A. $\alpha = -1$. Nach Schritt 2 in dem Beweis von (4.18) gilt

$$C_{M_{-1}}(A_{-1'}) = A_{7'} A_6 A_{5'}.$$

Aus Symmetriegründen gilt auch

$$C_{M_{-1}}(A_{1'}) = A_{5'} A_4 A_{3'}.$$

Schritt 2: Zweitens zeigen wir

$$A_{7'} \xleftrightarrow{n_1} A_{3'} \tag{4.27}$$

und

$$A_{-3'} \xleftrightarrow{n_1} A_{-7'}. \tag{4.28}$$

Nach Schritt 1 gilt $A_{7'}^{n_1} \leq C_{M_{-1}}(A_{1'}) = A_{5'} A_4 A_{3'}$ bzw. $A_{3'}^{n_1} \leq C_{M_{-1}}(A_{-1'}) = A_{7'} A_6 A_{5'}$. Unter Verwendung des Nilpotenzarguments impliziert dies $A_{7'}^{n_1} \leq A_4 A_{3'}$ bzw. $A_{3'}^{n_1} \leq A_{7'} A_6$, da $[X_5, X_1] = 1$ nach (I). Analog erhalten wir auch $A_{-7'}^{n_1} \leq A_{-4} A_{-3'}$ bzw. $A_{-3'}^{n_1} \leq A_{-7'} A_{-6}$.

Sei $a_{-3'}a_{-4} \in (A_{-7'}^{n_1})^\#$ mit $a_{-3'} \in A_{-3'}$ und $a_{-4} \in A_{-4}$ und sei $a_{7'}a_6 \in (A_{3'}^{n_1})^\#$ mit $a_{7'} \in A_{7'}$ und $a_6 \in A_6$. Wegen $[A_{-7'}, A_{3'}]^{n_1} = 1$ nach (I) gilt dann

$$\begin{aligned}
1 &= [a_{-3'}a_{-4}, a_{7'}a_6] \\
&= [a_{-3'}, a_{7'}a_6]^{a_{-4}} [a_{-4}, a_{7'}a_6] \\
&= ([a_{-3'}, a_6][a_{-3'}, a_{7'}]^{a_6})^{a_{-4}} [a_{-4}, a_6][a_{-4}, a_{7'}]^{a_6} \\
&= [a_{-3'}, a_6][a_{-4}, a_6][a_{-4}, a_{7'}].
\end{aligned}$$

Wegen $[A_{-3'}, A_6] \leq A_{-1'}$ und $[A_{-4}, A_{7'}] \leq A_{-1'}$ impliziert dies $[a_{-4}, a_6] \in A_{-1'}$. Andererseits gilt $[a_{-4}, a_6] \in A_{-2}A_8$ wegen der Kommutatorrelationen in (I). Mit Hilfe der Dedekind-Identität und des Lemmas (2.14)(3) folgt hieraus

$$\begin{aligned}
[a_{-4}, a_6] &\in A_{-1'} \cap A_{-2}A_8 \\
&\leq (A_{-2}A_{-1'} \cap A_{-2}A_8) \cap (A_{-1'}A_8 \cap A_{-2}A_8) \\
&\leq A_{-2}(A_{-2}A_{-1'} \cap A_8) \cap A_8(A_{-1'}A_8 \cap A_{-2}) \\
&\leq A_{-2}(U_{-8} \cap A_8) \cap A_8(U_{-2} \cap A_{-2}) \\
&= A_{-2} \cap A_8 \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Wir werden aus $[a_{-4}, a_6] = 1$ auf $a_{-4} = 1 = a_6$ schließen.

Angenommen, $a_{-4} \neq 1 \neq a_6$. Dann folgt $X_4 = \langle a_{-4}, A_4 \rangle \leq C(a_6)$, ein Widerspruch, denn $G(\Psi)$ ist nach Annahme vom Typ C_2 . Es reicht also, noch den Fall zum Widerspruch zu führen, in dem das eine Element 1 ist und das andere von 1 verschieden ist. O.B.d.A. gelte $a_{-4} = 1$ und $a_6 \neq 1$. Dann ist $1 = [a_{-3'}, a_{7'}a_6] = [a_{-3'}, a_6]$ und damit

$$X_6 = \langle a_6, A_{-6} \rangle \leq C(a_{-3'}),$$

ein Widerspruch zu $C_{A_{-3'}}(A_6) = 1$ nach Annahme. (Es sei bemerkt, dass $a_{-3'} \neq 1$, da $a_{-3'}a_4 = a_{-3'} \in (A_{-7'}^{n_1})^\#$ nach Annahme.) Daher gilt $a_{-4} = 1 = a_6$.

Insgesamt erhalten wir $A_{3'}^{n_1} \leq A_{7'}$ und $A_{-7'}^{n_1} \leq A_{-3'}$. Mit Symmetrie folgt hieraus $\mathcal{R}(4.27)$ bzw. $\mathcal{R}(4.28)$.

Schritt 3: Drittens zeigen wir

$$A_8 \xleftarrow{n_1} A_2 \tag{4.29}$$

und

$$A_{-2} \xleftarrow{n_1} A_{-8}. \quad (4.30)$$

Nach $\mathcal{R}(4.27)$ gilt $C_{U_{-1}}(A_{3'}) \xleftarrow{n_1} C_{U_{-1}}(A_{7'})$, denn U_{-1} ist invariant unter X_1 . Ferner gilt

$$C_{U_{-1}}(A_{3'}) = A_7 A_6 A_5 A_4 A_3 A_2. \quad (4.31)$$

Nach (I) gilt nämlich $A_7 A_6 A_5 A_4 A_3 A_2 \subseteq C_{U_{-1}}(A_{3'})$, und die andere Inklusion folgt aus $C_{A_8}(A_{3'}) = 1$ nach (4.17)(3). Daher gilt $\mathcal{R}(4.31)$ und mit Symmetrie ergibt sich auch $C_{U_{-1}}(A_{7'}) = A_8 A_7 A_6 A_5 A_4 A_3$.

Dies impliziert

$$A_8^{n_1} \leq (C_{U_{-1}}(A_{7'}))^{n_1} = C_{U_{-1}}(A_{3'}) = A_7 A_6 A_5 A_4 A_3 A_2.$$

Außerdem gilt $[A_8, A_{-1}] = 1$ und daher $A_8^{n_1} \leq C_{U_{-1}}(A_{1'})$. Insgesamt erhalten wir $A_8^{n_1} \leq C_{A_7 A_6 A_5 A_4 A_3 A_2}(A_{1'})$. Als Nächstes zeigen wir

$$C_{A_7 A_6 A_5 A_4 A_3 A_2}(A_{1'}) = A_5 A_4 A_3 A_2. \quad (4.32)$$

Nach (I) gilt $A_5 A_4 A_3 A_2 \subseteq C_{A_7 A_6 A_5 A_4 A_3 A_2}(A_{1'})$. Demzufolge reicht es, $C_{A_7 A_6}(A_{1'}) = 1$ zu zeigen. Sei hierfür $a_7 a_6 \in C_{A_7 A_6}(A_{1'})$ mit $a_7 \in A_7$ und $a_6 \in A_6$. Für alle $a_{1'} \in A_{1'}$ gilt dann $1 = [a_7 a_6, a_{1'}] = [a_7, a_{1'}]^{a_6} [a_6, a_{1'}]$. Wegen $[A_6, A_{1'}] \leq A_{3'}$ und $[A_{3'}, A_6] = 1$ folgt hieraus $[a_7, A_{1'}] \leq A_{3'}$. Angenommen, $a_7 \neq 1$. Dann ist $A_{3'} A_{1'}$ invariant unter $X_7 = \langle a_7, A_{-7} \rangle$. Nach (4.3) impliziert dies $[A_4, A_{-7}] = 1$ in Verbindung mit (4.2), ein Widerspruch zu $C_{A_{-7'}}(A_4) = 1$ nach Annahme.

Ferner gilt $a_6 = 1$, da wir andernfalls einen Widerspruch zu (4.17)(3) erhalten. Daher gilt $\mathcal{R}(4.32)$.

Infolgedessen gilt $A_8^{n_1} \leq A_5 A_4 A_3 A_2$, und eine Anwendung des Nilpotenzarguments liefert $A_8^{n_1} \leq A_4 A_3 A_2$, da $[X_5, X_1] = 1$ nach (I). Damit gilt $A_8^{n_1} \leq C_{A_4 A_3 A_2}(A_{-7'})$, da $[A_8, A_{-3'}] = 1$ nach (I) und $A_{-3'}^{n_1} = A_{-7'}$ nach $\mathcal{R}(4.28)$. Daraus ergibt sich $A_8^{n_1} \leq A_3 A_2$, da $C_{A_4}(A_{-7'}) = 1$ nach (4.17)(3) und $[A_3 A_2, A_{-7'}] = 1$ nach (I). Abschließend folgern wir auf $A_8^{n_1} \leq A_2$.

Angenommen, es existiert ein $a_8 \in A_8$ mit $a_8^{n_1} = a_3 a_2$ für ein $a_2 \in A_2$ und für ein $a_3 \in A_3^\#$. Dann gilt $A_{-7'} = A_{-3'}^{n_1} \geq [a_8, A_{-5'}]^{n_1} = [a_3 a_2, A_{-5'}]$

Wegen $[A_2, A_{-5'}] \leq A_{-7'}$ und $[A_{-7'}, A_2] = 1$ impliziert dies $[a_3, A_{-5'}] \leq A_{-7'}$. Demzufolge ist $A_{-7'}A_{-5'}$ invariant unter $X_3 = \langle a_3, A_{-3} \rangle$ und somit $[X_3, A_{-5'}] = 1$ infolge von (4.2). Nach (4.3) folgt daraus $[A_{-8}, A_{-3'}] = 1$, ein Widerspruch zu $C_{A_{-3'}}(A_{-8}) = 1$ nach Annahme. Daher gilt $A_8^{n_1} \leq A_2$. Analog erhalten wir auch $A_2^{n_1} \leq A_8$. Daher gilt $\mathcal{R}(4.29)$, und wegen Symmetrie folgt auch $\mathcal{R}(4.30)$.

Schritt 4: Viertens zeigen wir

$$A_6 \xleftrightarrow{n_1} A_4 \quad (4.33)$$

und

$$A_{-4} \xleftrightarrow{n_1} A_{-6}. \quad (4.34)$$

Unter Berücksichtigung der Kommutatorrelationen in (I) erhalten wir

$$C_{M_{-1}}(A_8) = A_{7'}A_6A_{5'}A_4 \xleftrightarrow{n_1} C_{M_{-1}}(A_2) = A_6A_{5'}A_4A_{3'},$$

denn $C_{A_{3'}}(A_8) = 1 = C_{A_{7'}}(A_2)$ nach Annahme und $A_8 \xleftrightarrow{n_1} A_2$ nach Schritt 3. Hieraus folgt

$$C_1 := C_{C_{M_{-1}}(A_8)}(A_2) = A_6A_{5'}A_4 \xleftrightarrow{n_1} C_{C_{M_{-1}}(A_2)}(A_8) = A_6A_{5'}A_4 =: C_2,$$

d.h. $A_6A_{5'}A_4$ ist invariant unter n_1 . Abschließend zeigen wir, dass $C_{C_1}(A_{-2}) = A_6$ und $C_{C_2}(A_{-8}) = A_4$. Daraus folgt $\mathcal{R}(4.33)$ nach $\mathcal{R}(4.30)$. Nach (I) gilt $A_6 \subseteq C_{C_1}(A_{-2})$. Um die andere Inklusion zu erhalten, zeigen wir $C_{A_{5'}A_4}(A_{-2}) = 1$. Sei hierfür $a_{5'}a_4 \in C_{A_{5'}A_4}(A_{-2})$ mit $a_{5'} \in A_{5'}$ und $a_4 \in A_4$. Für jedes $a_{-2} \in A_{-2}$ gilt dann

$$1 = [a_{5'}a_4, a_{-2}] = [a_{5'}, a_{-2}]^{a_4}[a_4, a_{-2}].$$

Wegen $[A_{5'}, A_{-2}] \leq A_{7'}$ und $[A_{7'}, A_4] = 1$ impliziert dies $[a_4, A_{-2}] \leq A_{7'}$. Angenommen, $a_4 \neq 1$. Dann ist $A_{-2}A_{-1'}A_{7'}$ invariant unter $X_4 = \langle a_4, A_{-4} \rangle$. Hieraus folgt

$$A_{-2}^{n_4} \leq A_6 \cap U_{-6} = 1$$

nach (2.14)(3), ein Widerspruch.

Außerdem gilt $a_{5'} = 1$, da $C_{A_{5'}}(A_{-2}) = 1$ nach Annahme.

Analog folgt auch $C_{C_2}(A_{-8}) = A_4$. Daher gilt $\mathcal{R}(4.33)$, und mit Symmetrie erhalten wir auch $\mathcal{R}(4.34)$.

Schritt 5: Nach Schritt 2 und nach Schritt 4 gilt

$$A_{-1'} = [A_6, A_{-3'}] \xrightarrow{n_1} [A_4, A_{-7'}] = A_{1'}$$

unter Berücksichtigung von (4.17)(2).

Letzten Endes zeigen wir

$$A_7 \xrightarrow{n_1} A_3 \tag{4.35}$$

und

$$A_{-7} \xrightarrow{n_1} A_{-3}. \tag{4.36}$$

Nach Schritt 3 gilt $C_{U_{-1}}(A_{7'}) = A_8 A_7 A_6 A_5 A_4 A_3$ und $C_{U_{-1}}(A_{3'}) = A_7 A_6 A_5 A_4 A_3 A_2$. Dies impliziert $C_{C_{U_{-1}}(A_{3'})}(A_{7'}) = C_{C_{U_{-1}}(A_{7'})}(A_{3'}) = A_7 A_6 A_5 A_4 A_3$, d.h. $M := A_7 A_6 A_5 A_4 A_3$ ist invariant unter n_1 . Analog wie in Schritt 3 folgt hieraus $C_M(A_{-1'}) = A_7 A_6 A_5$ und $C_M(A_{1'}) = A_5 A_4 A_3$. Unter Verwendung des Nilpotenzarguments ergibt sich daraus

$$A_7 A_6 \xrightarrow{n_1} A_4 A_3.$$

Nach $\mathcal{R}(4.28)$ folgt mithin

$$A_7 = C_{A_7 A_6}(A_{-3'}) \xrightarrow{n_1} C_{A_4 A_3}(A_{-7'}) = A_3,$$

da $[A_7, A_{-3'}] = 1 = [A_3, A_{-7'}]$ nach (I) und $C_{A_6}(A_{-3'}) = 1 = C_{A_4}(A_{-7'})$ nach (4.17)(3). Daher gilt $\mathcal{R}(4.35)$, und mit Symmetrie erhalten wir auch $\mathcal{R}(4.36)$.

Unter Berücksichtigung von $[X_5, X_1] = 1$ nach (I) folgt insgesamt, dass jedes n_1 auf $\{A_\beta \mid \beta \in \tilde{\Phi}\}$ vermöge $A_\beta^{n_1} = A_{\beta w_1}$ operiert, wobei w_1 für die Spiegelung entlang der Wurzel 1 auf $\tilde{\Phi}$ steht. $\square$

Nach (4.18) und (4.19) ist Bedingung (III) für die Wurzeluntergruppen A_α , $\alpha \in \tilde{\Phi}$ erfüllt, wenn die Möglichkeit (B) von (4.1) nicht gilt. Infolgedessen ist G in dieser Situation nach (1.9) vom Typ 2F_4 .

Abschließend untersuchen wir die Möglichkeit (A) von (4.1) detaillierter. Wir haben bereits in Abschnitt 4.2 gesehen, dass die A_α , $\alpha \in \Psi$ in dieser Situation allesamt elementarabelsche 2-Gruppen sind. Eine Anwendung von (2.13) auf die Operation von X_α auf W_α ,

$\alpha \in \Psi$ liefert – unter Berücksichtigung von (4.17) –, dass die A_β , $\beta \in \tilde{\Phi} \setminus \Phi$ ebenfalls elementarabelsche 2-Gruppen sind. Das folgende Lemma zeigt, dass ferner $a_\gamma^4 = 1$ für jedes $a_\gamma \in A_\gamma$ für $\gamma \in \Phi \setminus \Psi$ gilt. Insgesamt erhalten wir eine weitgehende Übereinstimmung mit den in [Tits94] beschriebenen Eigenschaften der zu Moufang-Achtecken assoziierten Wurzeluntergruppen.

Lemma (4.20) *Angenommen, die Möglichkeit (A) von (4.1) gilt. Für $\gamma \in \Phi \setminus \Psi$ ist dann $a_\gamma^4 = 1$ für jedes $a_\gamma \in A_\gamma$.*

Beweis: Sei o.B.d.A. $\gamma = 5$. Nach (I) gilt $[A_5, A_2] \leq A_{3'}$. Dies impliziert $[a_5, a_2]^2 = 1$ für $a_5 \in A_5$ und $a_2 \in A_2$, da $A_{3'}$ eine elementarabelsche 2-Gruppe ist. Außerdem ist

$$[a_5^2, a_2] = [a_5, a_2]^{a_5} [a_5, a_2] = [a_5, a_2]^2$$

für $a_2 \in A_2$ und $a_5 \in A_5$. Das heißt: $a_5^2 \in C(A_2)$ für $a_5 \in A_5$.

Andererseits ist

$$[A_5, A_{-2}] \leq A_{-1'} A_8 A_{7'}$$

nach (I) und damit $[a_5, a_{-2}]^2 = 1$ für $a_5 \in A_5$ und $a_{-2} \in A_{-2}$, denn $A_{-1'} A_8 A_{7'}$ ist eine elementarabelsche 2-Gruppe. Für $a_5 \in A_5$ und $a_{-2} \in A_{-2}$ gilt daher

$$\begin{aligned} [a_5^2, a_{-2}] &= [a_5, a_{-2}]^{a_5} [a_5, a_{-2}] \\ &= [a_5, a_{-2}] [a_5, a_{-2}, a_5] [a_5, a_{-2}] \\ &= [a_5, a_{-2}]^2 a_{7'} \\ &= a_{7'} \end{aligned}$$

für ein $a_{7'} \in A_{7'}$. Daraus ergibt sich $[a_5^2, a_{-2}]^2 = 1$, denn $A_{7'}$ ist eine elementarabelsche 2-Gruppe. Für $a_5 \in A_5$ und $a_{-2} \in A_{-2}$ gilt daher

$$[a_5^4, a_{-2}] = [a_5^2, a_{-2}]^{a_5^2} [a_5^2, a_{-2}] = [a_5^2, a_{-2}]^2 = 1.$$

Insgesamt erhalten wir $a_5^4 \in C(A_{-2}) \cap C(A_2)$ und damit $a_5^4 \in C(X_2)$. Dies impliziert $a_5^4 = 1$ für $a_5 \in A_5$, denn G ist vom Typ 2F_4 nach Annahme. $\square$

Literaturverzeichnis

- [Bour02] N. Bourbaki, *Lie Groups and Lie Algebras, Chapters 4–6*, Springer, 2002.
- [Car72] R. W. Carter, *Simple Groups of Lie-Type*, John Wiley & Sons, 1972.
- [Hum90] J. E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1990.
- [KS98] H. Kurzweil und B. Stellmacher, *Theorie der endlichen Gruppen*, Springer, 1998.
- [Mal98] H. van Maldeghem, *Generalized Polygons*, Monogr. Math., Vol. 93, Birkhäuser, 1998.
- [Mü01] C. Müller, *Über die Steinberg-Präsentation für Lie-Typ-Gruppen vom Typ C_2* , Diplomarbeit an der Justus-Liebig-Universität Gießen, 2001.
(Erschienen als *On the Steinberg presentation for Lie-type groups of type C_2* , J. Alg. **252**, 150-160 (2002).)
- [Mü04] C. Müller, *Gruppen mit Wurzelsystem vom Typ G_2* , Dissertation an der Universität Bielefeld, 2004.
(Erschienen als *Groups with root system of type G_2* , J. Alg. **294**, 552-568 (2005).)
- [St67] R. Steinberg, *Lectures on Chevalley groups*, Yale University (1967).
- [Tim98] F. G. Timmesfeld, *Presentations for certain Chevalley groups*, Geom. Ded. **73**, 85-117 (1998).

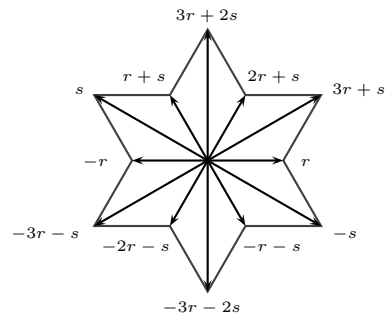
- [Tim00] F. G. Timmesfeld, *Structure and Presentations of Lie-type-groups*, Proc. Lond. Math. Soc. **81**, 428-484 (2000).
- [Tim01] F. G. Timmesfeld, *Abstract Root Subgroups and Simple Groups of Lie-Type*, Monogr. Math., Vol. 95, Birkhäuser, 2001.
- [Tim02a] F. G. Timmesfeld, *A remark on presentations of certain Chevalley groups*, Arch. Math. **79**, 404-407 (2002).
- [Tim02b] F. G. Timmesfeld, *Groups with a central factor of Lie type*, J. Alg. **257**, 528-559 (2002).
- [Tim03a] F. G. Timmesfeld, *On the Steinberg-Presentation for Lie-Type-Groups*, Forum Math. **15**, 645-663 (2003).
- [Tim03b] F. G. Timmesfeld, *Groups with Root-System of Type BC_l* , Contributions to Algebra and Geometry, **44**, 213-227 (2003).
- [Tim05a] F. G. Timmesfeld, *Groups with root system of type B_l , C_l or F_4* , J. Alg. **284**, 737-754 (2005).
- [Tim05b] F. G. Timmesfeld, *Steinberg-type presentation for Lie-type groups*, erscheint in J. Alg.
- [Tits74] J. Tits, *Buildings of Spherical Type and Finite BN-Pairs*, Lecture Notes in Mathematics **386**, Springer (1974).
- [Tits76] J. Tits, *Non-existence de certains polygones généralisés, I*, Inventiones Math. **36**, 275-284, Springer (1976).
- [Tits77] J. Tits, *Endliche Spiegelungsgruppen, die als Weylgruppen auftreten*, Inventiones Math. **43**, 283-295, Springer (1977).
- [Tits83] J. Tits, *Moufang octagons and the Ree groups of type 2F_4* , Amer. J. Math. **105**, 539-594 (1983).
- [Tits94] J. Tits, *Moufang polygons I: Root data*, Bull. Belg. Math. Soc. **1**, 455-468 (1994).

- [TW02] J. Tits und R. M. Weiss, *Moufang Polygons*, Monogr. Math., Springer, Berlin, 2002
- [Weiss79] R. Weiss *The nonexistence of certain Moufang polygons*, Inventiones Math. **51**, 261-266, Springer (1979)

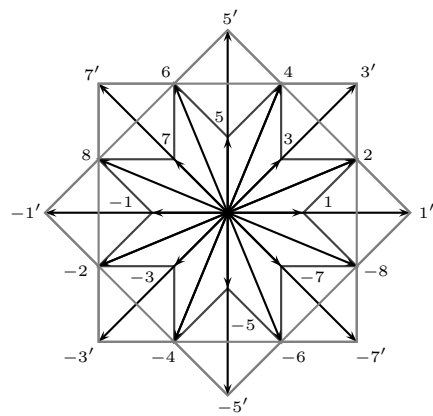
Hiermit versichere ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig und unter ausschließlicher Verwendung der angeführten Quellen und Hilfsmittel angefertigt habe.

Gießen, 23. Dezember 2005

Wurzelsysteme



Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ vom Typ G_2 .



Das Wurzelsystem $\tilde{\Phi}$ vom Typ 2F_4 .