HYPERKOMPLEXE ZAHLEN

in Mathematik und Physik

WILLI KAFITZ*)

Abstract:
The term "hypercomplex numbers" was coined by Emmy Noether, who made significant contributions to the theory and greatly formalized it. The term is now almost synonymous with an algebra. The four algebras in which there are divisions are particularly interesting. According to a theorem by Adolf Hurwitz (1898), there are only four real, normalized division algebras with a unit element. They are the real numbers, the complex numbers, the quaternions and the octonions.

Important physical theories of the 20th century can be formulated with quaternions. But at least since the 1970s, octonions have also shifted into focus. There is non-negligible evidence, including from string theory and supersymmetry. They could help in describing the Standard Model of elementary particles. Ideally, even physics should be developable a priori from mathematics.

Keywords: hypercomplex numbers, algebra with division, octonions in physics, physic a priori from mathematics

Zusammenfassung:
Der Begriff „Hyperkomplexe Zahlen“ wurde von Emmy Noether geprägt, die wesentliche Beiträge zur Theorie geliefert und diese stark formalisiert hat. Der Begriff steht heute schon fast synonym für eine Algebra. Besonders interessant sind die vier Algebren, in denen es eine Division gibt. Nach einem Satz von Adolf Hurwitz, (1898), gibt es nur vier reelle, normierte Divisionsalgebren mit einem Einselement. Es sind die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen, die Quaternionen und die Oktonionen. Wichtige physikalische Theorien des 20. Jahrhunderts können mit Quaternionen formuliert werden. Doch mindestens seit den1970-er Jahren stehen auch die Oktonionen im Fokus. Es gibt nicht vernachlässigbare Hinweise, unter anderem aus der Stringtheorie und Supersymmetrie. Sie könnten bei der Beschreibung des Standardmodells der Elementarteilchen helfen. Im Idealfall sollte sogar Physik a priori aus der Mathematik entwickelbar sein.

Stichworte: Hyperkomplexe Zahlen, Divisionsalgebren, Oktonionen in der Physik, Physik a priori aus Mathematik

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

Bemerkenswertes

It is posible to form an analogous theory
with seven imaginary roots of (–1)

Arthur Cayley, 1845, (1821 – 1895)

Octonions are to physics what the Sirens were to Ulysses.

Pierre Ramond (*1943)[1]

The humble 8 is no longer just a number. It's our key to the Universe.

Peter Riedlberger

The safest conceivable theory is one which implements the fewest initial assumptions possible.

Cohl Furey (*1979)

Die moderne Physik ist für die Physiker eigentlich viel zu schwer.

David Hilbert (1862 – 1943)

Dieses Theorem war ein Leitstern für die Physik des 20. *und* 21. *Jahrhunderts*.

Frank Wilczek (*1951), Physik-Nobelpreisträger 2004, über das Noether-Theorem.

Die Algebra hat ein anderes Gesicht bekommen.

Hermann Weyl auf der Gedenkfeier für Emmy Noether am 17.4.1935 in Bryn Mawr

Raum ist der Inbegriff der Trennbarkeit mehrerer Objekte.

Holger Lyre (*1965)

Denn man muss wissen, dass alle Erkenntnis zwei Enden habe, bei denen man sie fassen kann, das eine a priori das andere a posteriori.

Immanuel Kant (1724 – 1804)

[1] https://www.quantamagazine.org/the-octonion-math-that-could-underpin-physics-20180720/

Inhalt

Vorwort

Mit dem im Herbst 2022 veröffentlichten Beitrag „ZAHLEN, Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung des Zahlbegriffes“[2] und dem im Frühjahr 2023 publizierten Artikel „NULL, Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung“[3] liegen zwei Beiträge vor, die sich ergänzen.

„Zahlen“ betrachtet die mathematische und kulturhistorische Entwicklung von Zahlbereichen, wie negativen Zahlen, rationalen und irrationalen Zahlen bis hin zu komplexen Zahlen. Die Quaternionen werden kurz angesprochen und darüber hinaus werden die p-adischen Zahlen besprochen. Die Darstellung der Zahlen in der Praxis, also z.B. römisch, dezimal oder dual, wird weitgehend ausgeklammert. Der Beitrag kommt zu dem Schluss, dass die kulturhistorische und mathematische Entwicklung der Zahlensysteme synchron verlaufen musste.

„Null“ dagegen untersucht den langen Prozess, in dem sich die indo-arabischen Ziffern in der westlichen Welt durchgesetzt haben. Ein weiterer Aspekt ist die Frage, welche Kulturen über die Inder hinaus Positionssysteme inklusive der Null entwickelt haben. Beide Teile sind eher historisch orientiert. Ein dritter Teil untersucht anhand von Beispielen, wo die Null eine besondere Bedeutung in der Mathematik hat und sogar verallgemeinert wurde.

Der nun vorliegende Beitrag adressiert eine Lücke in den beiden Artikeln und möchte diese wenigstens teilweise schließen. Es geht um hyperkomplexe Zahlen. Dabei ist der Begriff „Zahl“ schon ab den Quaternionen[4] umstritten. Da die Quaternionen wegen fehlender Kommutativität bei der Multiplikation keinen Körper, sondern einen Schiefkörper bilden, bezeichnen manche Autoren die Quaternionen und weitere hyperkomplexe „Objekte“ als „Werte“ und nicht als

[2] http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-8380
[3] http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-9873
[4] Der Begriff stammt aus der Vulgata für die vier Rotten von je vier Kriegsknechten des Herodes, die den Apostel Petrus im Gefängnis bewachten. In den „Apostel Geschichten 12.4“ im englischen Neuen Testament heißt es: „*he put him in prison, and delivered him to four quaternions of soldiers to keep him.*“ Vgl. G. Temple, 100 Years of Mathematics, Duckworth, London 1981, S. 46, zitiert nach Ebbinghaus Heinz-Dieter, et. al., Zahlen, Springer-Lehrbuch, 3. Auflage (1983, 1988, 1992), Berlin Heidelberg New York, S. 159

Zahlen. Der Einfachheit halber wird in diesem Text der Begriff „hyperkomplexe Zahlen" verwendet.

<u>*Definition*</u>

Ganz allgemein ist eine hyperkomplexe Zahl ein Element einer Algebra $\mathscr{A}$ und hat die Form $a_0 + a_1 i + \cdots + a_n i_n$. Die $i_k, k > 0,$ heißen imaginäre Einheiten.

Für $\mathscr{A}$ muss gelten:

$\mathscr{A}$ hat als Vektorraum die endliche Dimension n (Rang n)

$\mathscr{A}$ besitzt ein Einselement $e \in \mathscr{A}$, so dass für alle $a \in \mathscr{A}$ gilt $e \cdot a = a \cdot e = a$

Für die Addition gilt das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz.

Die Addition ist invertierbar.

Es gilt das linksseitige und rechtsseitige Distributivgesetz.

Die Multiplikation in einer hyperkomplexen Algebra $\mathscr{A}$ ist bilinear über den reellen Zahlen, d. h., es gilt $(\alpha x)(\beta y) = \alpha\beta(xy),$ für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in \mathscr{A}$

Gemäß dieser Definition sind auch reelle Zahlen oder komplexe Zahlen hyperkomplex, denn auch diese Körper erfüllen die Anforderungen an eine entsprechende Algebra. Man kann generell von unitalen[5] Algebren über $\mathbb{R}$ sprechen. Schwerpunkt der Betrachtungen sollen die sogenannten Divisionsalgebren sein, von denen es nur vier gibt. D.h. algebraischen Strukturen, in denen eine Division existiert, in denen also die Gleichung $a_2 * x = a_1$ und $x * a_2 = a_1$ jeweils eine Lösung hat. Ausgehend von entsprechenden Strukturen bei den komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$, zweidimensional) werden Quaternionen ($\mathbb{H}$, vierdimensional) und Oktonionen ($\mathbb{O}$, achtdimensional) eingeführt.[6] Schwerpunktmethode ist das sogenannte Verdoppelungsverfahren.[7] Die Koeffizienten sind reell.

Generell gilt: Möchte man, über die Dimension zwei hinaus, höherdimensionale Vektorräume bilden, so muss die Dimension entweder unendlich sein oder man muss auf grundlegende algebraische Eigenschaften verzichten.

Diese Divisionsalgebren sollen bzgl. ihrer algebraischen Grundeigenschaften mathematisch ausführlich im Anhang behandelt werden. Obwohl nur im Anhang behandelt, werden diese Ausführungen trotzdem als die mathematische Basis dieses Beitrags betrachtet. Auf die zunehmend strukturloseren weiteren hyperkomplexen Zahlen, wie den Sedenionen ($\mathbb{S}$, sechszehndimensional), wird

[5] In der Mathematik bedeutet unital „ein Einselement betreffend"
[6] Im Deutschen wird oft der Begriff „Oktave" verwendet.
[7] https://de.wikipedia.org/wiki/Verdopplungsverfahren

hier im Detail verzichtet. Sie haben keine Division. Das Verdoppelungsverfahren, also hier ein Sedenion der Dimension 16 als Paar von Oktonionen aufzufassen, kann zwar einigermaßen sinnvoll bis zu den Sedenionen fortgesetzt werden. Dabei gehen jedoch immer mehr algebraische Eigenschaften verloren. Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ besitzt $\mathbb{S}$ sogenannte Nullteiler, d.h. das Produkt von zwei Faktoren ungleich 0 kann 0 ergeben. Eine ernstzunehmende Anwendung, insbesondere in der Physik, kann auch nicht identifiziert werden.

Viele Zusammenhänge, aber vor allem die Einbettung der hyperkomplexen Zahlen in die abstrakte Algebra wurden von Emmy Noether entwickelt. Sie hat mit genialen eigenen Leistungen und mit Anregungen bei ihren Schülern („Noether-Knaben“) die abstrakte Algebra entscheidend geprägt. Das wird angesprochen.

Der Beitrag versteht sich mathematisch als Ergänzung, um einerseits auch diese Zahlenbereiche und ihre Gemeinsamkeiten anzusprechen, andererseits aber auch den schrittweisen Verlust von strukturellen Eigenschaften stärker zu thematisieren. Aber das wäre zu wenig!

Vier Zahlensysteme

Reelle Zahlen $\mathbb{R}$
- Eindimensional (1-D)
- Vollständig geordnet
- Lokal kompakt
- Zusammenhängend
- Algebraischer Körper

Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$
- Zweidimensional (2-D)
- Algebraisch abgeschlossen
- Lokal kompakt
- Zusammenhängend
- Algebraischer Körper

Quaternionen $\mathbb{H}$
- Vierdimensional (4-D)
- Lokal kompakt
- Zusammenhängend
- Schiefkörper, da Multiplikation nicht kommutativ
- Aber Divisionsalgebra

Oktonionen $\mathbb{O}$
- Achtdimensional (8-D)
- Lokal kompakt
- Zusammenhängend
- Kein Körper
- keine Assoziatät, nur Alternativität
- Aber Divisionsalgebra

Abb. 1: Man kann nur vier Zahlensysteme der Dimensionen 2^0, 2^1, 2^2, 2^4 über $\mathbb{R}$ mit Division identifizieren: (Divisionsalgebren). Die Sedenionen, ($\mathbb{S}$, Dimension 2^5), gehören nicht mehr dazu

Die Tafel gibt einen Überblick über die vier Divisionsalgebren. Dabei wird explizit auf den Anhang verwiesen.

Die physikalischen Bezüge der hyperkomplexen Quaternionen sind heute schon offenkundig und für sich genommen bemerkenswert. Da, wo sie bei den Oktonionen noch spekulativ sind, adressieren sie faszinierende Bereiche der theoretischen Grundlagenforschung.

Ein weiterer Abschnitt ist deshalb der Physik gewidmet. Denn es wurde und wird die Physik zunehmend auf die hier dargestellten Strukturen, insbesondere die Divisionsalgebren, aufmerksam und es deuten sich faszinierende Anwendungsbereiche an.

In einem letzten Kapitel wird der Frage nachgegangen, ob aus der Mathematik heraus physikalische Erkenntnis, sozusagen a priori im kantschen Sinne, gewonnen werden kann.

Verallgemeinerung des Begriffs hyperkomplex

Bisher wurden die Divisionsalgebren, komplexe Zahlen (Dimension n=2), die Quaternionen (n=4) und Oktonionen (n=8) angesprochen. Sie sind nach Definition hyperkomplexe Zahlen, denn sie haben ein Einselement e mit ea=ae=a und bilden Vektorräume der Dimension n. Auch die reellen Zahlen mit der Dimension n=1 gehören dazu. Man muss zusätzlich fordern, dass für die Addition das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz gelten muss. Die Addition ist invertierbar und es gilt das linksseitige und rechtsseitige Distributivgesetz. Streng genommen gibt es unendlich viele. Im Kapitel „Verdoppelung und Oktonionen" werden sie allgemein definiert. Dabei werden die Koeffizienten als reell angesehen. Die Multiplikation ist im allgemeinen Fall (z.B. bei den Sedenionen, n=16) nicht nullteilerfrei und es müssen keine Inversen existieren. Schon bei den Quaternionen ist die Multiplikation nicht kommutativ.

Man kann den Begriff „hyperkomplex" aber auf zahlreiche weitere Zahlensysteme erweitern. Viele tragen sogar keinen expliziten Namen. Die Definition, dass eine hyperkomplexe Zahl ein Element einer endlich dimensionalen unitalen Algebra (mit Einselement) über dem Körper der reellen Zahlen ist, kann man als veraltet ansehen. In der Mitte des 19. Jahrhundert kannte man im Prinzip nur Quaternionen, Tessarine[8], Coquaternionen, Biquaternionen und Oktonionen. Biquaternionen wurden noch von Hamilton selbst 1853 eingeführt, der auch erkannte, dass sie keine Divisionsalgebra sind. Sie waren Algebren über den Körpern der reellen und komplexen Zahlen. Man kann auch über dem Körper der rationalen Zahlen hyperkomplexe Zahlen bilden. Weitere, im 19. Jahrhundert bekannte Objekte sind die Clifford-Algebren (nach William Kingdon Clifford 1845 – 1879). Clifford wollte ursprünglich damit die Quaternionen auf höhere Dimensionen erweitern. Auch duale

[8] Die Tessarinen bilden eine assoziative und kommutative hyperkomplexe Algebra der Dimension 4 mit der Basis (1, i, j, k), so dass $i^2 = -1$, $j^2 = 1$ und $k = ij$. Sie gehen auf James Cockle im Jahr 1848 und den Folgejahren zurück. Es ist eine Algebra, die die üblichen komplexen Zahlen und die von Cockle im selben ersten Artikel eingeführten komplexen Zahlen kombiniert (https://de.frwiki.wiki/wiki/Tessarine).

Quaternionen[9] sind mittlerweile bekannt. Weitere Begriffe sind bikomplex (4-dim. über $\mathbb{R}$, 2-dim. über $\mathbb{C}$), Biquaternionen (8-dim.), komplexe Oktonionen, etc. Eine neuere Zusammenstellung findet sich bei Anmerkung[10]. Manche haben nur geringere Bedeutung; sie wurden vor Einführung der Matrizen gefunden.

Zwei Sätze, die gewisse Grenzen aufzeigten, wurden relativ früh bewiesen: Der 1877 publizierte Satz von Ferdinand Georg Frobenius (1849 - 1917), Schüler von Weierstraß, besagt, dass es bis auf Isomorphie nur drei endlich-dimensionale, assoziative Divisionsalgebren über den reellen Zahlen gibt: $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$. Hamilton hat vergeblich Jahre auf der Suche nach 3-dimensionalen assoziativen Divisionsalgebren verbracht. Hätte es diesen Satz vorher gegeben, wäre ihm dies erspart geblieben. Der Satz setzte eine wichtige Grenze, denn es waren Dutzende neuer hyperkomplexer Zahlensysteme bekannt geworden. Gauß hatte noch 1831 vermutet, dass es keine hyperkomplexen Zahlen geben könne, bei denen wichtige, grundlegende algebraische Eigenschaften der komplexen Zahlen erhalten bleiben.

Benjamin Peirce (1809 – 1880), Professor der Mathematik in Harvard, fasste in einem 1871 publizierten Artikel „Linear Associative Algebras“ den Stand der damaligen Forschung zusammen.[11]

Der Satz von Hurwitz (1898) wurde ohne die Zusatzannahme „normiert“ 1958 von M. Kervaire mit topologischen Methoden bewiesen. Hier nochmals das wesentliche Ergebnis, auf das der vorliegende Beitrag aufsetzt:
Die vier reellen, (normierten), Divisionsalgebren mit Eins sind (bis auf Isomorphie):

die reellen Zahlen selbst
die komplexen Zahlen
die Quaternionen
die Oktonionen oder Oktaven oder Cayley-Zahlen.

Alle außer den Oktonionen erfüllen bekanntlich, wie oben ausgeführt, das Assoziativgesetz der Multiplikation.

Auf jeden Fall verlangte diese Zahlen- oder Werteklasse nach einer abstrakten, algebraischen Verallgemeinerung. Dies ist in wesentlichen Teilen das Verdienst

[9] Dual Quaternions (Duale Quaternionen) sind eine Erweiterung der hamiltonschen Quaternionen um die duale Komponente. Geometrisch betrachtet führen duale Quaternionen die Translation ein, während einfache Quaternionen nur Rotation darstellen können. In einem Dual Quaternion lassen sich also sowohl Rotation als auch Translation speichern. https://wiki.delphigl.com/index.php/Dual_Quaternion
[10] https://wikigerman.edu.vn/wiki36/2021/07/10/hyperkomplexe-zahl-wikipedia/
[11] Amer. Journ. Math. 4, 97-229, 1881; https://www.jstor.org/stable/pdf/2369153.pdf

von Emmy Noether und ihrer Schüler, die bis zu ihrem Tod 1935 die abstrakte Algebra der hyperkomplexen Zahlen vorantrieb.

Eine weitere Grenze stellt ein 1940 bewiesener Satz von Heinz Hopf (1894 – 1971) dar. Seine einfache Frage lautet: Was sind die einzigen endlich-dimensionalen, kommutativen (nicht notwendigerweise assoziativen) Divisionsalgebren? Der Beweis ist keineswegs trivial und benutzt tiefliegende, nichttriviale Methoden der Topologie. Die Antwort auf seine Frage: Eine reelle, kommutative Divisionsalgebra kann höchstens 2-dimensional sein.
In diesem Zusammenhang sei auch auf den Satz von Pontrjagin[12] verwiesen, der im Beitrag „ZAHLEN, Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung des Zahlbegriffes“[13] eine Rolle spielt.

Hyperkomplexe Zahlen in der Mathematik

Würdigung von Emmy Noether

Die begabteste Mathematikerin des 20. Jahrhundert, wenn nicht gar aller Zeiten, war zweifellos Emmy Noether. Zur besseren Einschätzung ihrer Leistung ist ein kurzer Blick auf die damaligen Rahmenbedingungen wichtig. Für eine Karriere, die ihrem Talent entsprach, hatte sie in ihrer Zeit das „falsche“ Geschlecht. Sie absolvierte zunächst die Prüfung als Lehrerin. Das war noch innerhalb der Norm, doch implizierte es die erste Restriktion in der damaligen deutschen Gesellschaft. Seit 1879 durften verbeamtete Lehrerinnen nicht heiraten. 1919 wurde das „Lehrerinnen-Zölibat“ gestrichen, aber bereits vier Jahre später wiedereingeführt. Erst 1951 konnte eine Lehrerin auch Ehefrau sein. Bis 1958 entschied in Westdeutschland grundsätzlich der Ehemann, ob seine Frau arbeiten durfte.

Noch viel schlimmer war die Stellung der Frauen an den Universitäten um die Jahrhundertwende und weit darüber hinaus. Eine Reichtagspetition, die 1891 die Zulassung von Frauen zum Studium erwirken sollte, wurde „*mit ungeheurer Heiterkeit*“ registriert und abgelehnt.[14] Zum Vergleich: Bereits 1863 führte dies Frankreich ein. Emmy Noether wechselte nach Göttingen, zum „Mekka“ der internationalen Mathematik, hatte geniale Ergebnisse, aber bekam nur eine unbezahlte Assistentinnenstelle. Vor allem ihre Habilitation per ministerieller Sonderzulassung war ein enormer bürokratischer Kraftakt im 3. Anlauf und nur ihrem Ausnahmetalent zu verdanken. Trotzdem sperrten sich zahlreiche

---

[12] Siehe Pontrjagin, L. S.; Verallgemeinerungen der Zahlen, Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt am Main, 1995
[13] Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Preprint, erscheint in Bd. 71, http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-8380
[14] Jaeger, Lars, Emmy Noether, Südverlag, Konstanz 2022, S. 46

Ordinarien allein wegen ihres Geschlechts als Frau. Erst 1923 wurde sie außerordentliche Professorin und hatte ein festes Einkommen.

Eine andere Stelle dieses Beitrags wird dem Noether-Theorem gewidmet sein. Hier sollen zunächst ihre herausragenden Ergebnisse im Bereich der hyperkomplexen Zahlen sowie ergänzend der nichtkommutativen Algebren erwähnt werden, die den Schwerpunkt der Arbeiten in ihren letzten Jahren von 1928 – 1935 bildeten. Sie sollen nur exemplarisch und in groben Zügen angesprochen werden.

Für sieben Semester kennt man dokumentierte Vorlesungen und Seminare von Emmy Noether in Göttingen:[15]

Wintersemester (WS) 1924/25: Gruppentheorie und hyperkomplexe Zahlen

WS 1927/28: Hyperkomplexe Mengen und Darstellungstheorie

Sommersemester (SS) 1928: Nichtkommutative Algebra

SS 1929: Nichtkommutative Arithmetik

WS 1929/30: Algebra der hyperkomplexen Größen

WS 1930/31: Allgemeine Idealtheorie

WS 1932/33: Nichtkommutative Arithmetik

Meist publizierte sie im Anschluss oder gleichzeitig bedeutende Artikel zu diesen Themen.

„Der von ihr geprägte Begriff „hyperkomplexes System“ hat sich inzwischen als so fundamental herausgestellt, dass er heute schlichtweg als „Algebra“ bezeichnet wird.“[16] Das Credo, das Emmy Noether bei der Formalisierung hin zu der abstrakten Algebra leitete, hat ihr Schüler van der Waerden auf den Punkt gebracht: *Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind.*[17] Die abstrakte Theorie von Idealen und Moduln hat Frau Noether maßgeblich geprägt. Die „Deutsche Biografie“ formuliert es noch grundsätzlicher und schreibt, dass Frau Noether „die Algebra grundsätzlich neu formte“ und damit „ihren Nachruhm“ begründete.[18] „*Die Mutter der modernen Algebra*" hat Cordula Tollmien,

[15] Jaeger, Lars, Emmy Noether, Südverlag, Konstanz 2022, S. 71
[16] Zitiert nach https://www.deutsche-biographie.de/pnd118588443.html
[17] Zitiert nach dem Vortragsmanuskript von Cordula Tollmien, einer wichtigen Noether Biografin, https://www.cordula-tollmien.de/noethervortragbraunschweig2000.html
[18] Ebenda, https://www.deutsche-biographie.de/pnd118588443.html

Historikerin und Biografin von Emmy Noether, ihren Vortrag betitelt, den sie anlässlich der Eröffnung der Ausstellung "Leben und Werk der Mathematikerin Emmy Noether 1882-1935" an der TU Braunschweig am 24. Mai 2000 gehalten hat.

Eine vollständige Publikationsliste 1882 – 1935 findet sich dort[19]. Es sind über 45 Veröffentlichungen. Nicht gezählt sind die Zuarbeiten, bei denen sie entscheidende Ergebnisse zulieferte, aber aufgrund ihrer untergeordneten Stellung in der Universitätshierarchie nicht erwähnt wurde (siehe dazu die Biografie von Lars Jaeger, Emmy Noether).

Sie war weiterhin Mitherausgeberin der Gesammelten Werke von Richard Dedekind und dem Briefwechsel zwischen Georg Cantor und Richard Dedekind.

Richard Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, hg. von Robert Fricke, Emmy Noether, Öystein Ore, Drei Bände, Braunschweig 1930-1932

Briefwechsel Cantor-Dedekind, hg. von E. Noether und J. Cavaillès, Paris 1937.

Emmy Noether verehrte Richard Dedekind. Einer ihrer wichtigsten Schüler, Bartel Leendert van der Waerden (1903 – 1996), hat oft einen Ausspruch von Emmy Noether zitiert: *„Alles steht schon bei Dedekind"*.[20] Sie meinte natürlich damit von ihm gelegte Grundlagen, die oft auch von ihr aufgegriffen und maßgeblich vorangetrieben wurden.

Frau Noether hat sich vielfach mit nichtkommutativen Strukturen auseinandergesetzt. Das begann schon mit ihrer Publikation „*Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie*" vom Jahr 1929. Hier beschränkt sie sich schon nicht mehr auf abelsche Gruppen. Wichtigste Arbeit und Ergebnis einer Reihe von Forschungen und früheren Veröffentlichungen ist ihre Arbeit von 1933 zu „*Nichtkommutative Algebren*". Während sich dieser Beitrag auf Betrachtungen von endlichen Algebren über den Körpern $\mathbb{R}$ oder auch $\mathbb{C}$ beschränkt, hat Frau Noether dies verallgemeinert und z.T. unendlich dimensionale Algebren über beliebigen Körpern studiert.

Wichtige algebraische Strukturen tragen ihren Namen, zum Beispiel:

Ringe oder Moduln heißen *noethersch*, wenn sie keine unendliche Schachtelung von Unterstrukturen enthalten können. Nichtkommutativität wirkt sich folgendermaßen aus: Sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring mit Einselement (unital). Salopp formuliert: Ein R-Linksmodul M heißt noethersch, wenn jedes Untermodul

[19] https://www.cordula-tollmien.de/noetherpublikationen.html
[20] Jaeger, ebenda, S.132, in leicht abgewandelter Formulierung siehe das Zitat bei Stefan Müller-Stach, Emmy Noether und ihre Bedeutung für die moderne Mathematik, S. 10, https://www.staff.uni-mainz.de/stach/Noether.pdf

endlich erzeugt wird oder jede aufsteigende Kette von Untermoduln irgendwann abbricht oder jede nichtleere Menge an Untermoduln ein maximales Element hat. (Analog R-Rechtsmodul).

Ein Ring heißt linksnoethersch, wenn er als R-Linksmodul noethersch ist;
Ein Ring heißt rechtsnoethersch, wenn er als R-Rechtsmodul noethersch ist;
R heißt noethersch, wenn er links- und rechtsnoethersch ist.
Erst dann ist R kommutativ.

R-Links-Moduln (M_L,+) (bzw. analog R-Rechts-Moduln (M_R,+)) sind dann abelsche Gruppen des Rings (R,+,), für die gelten soll:

Es gibt eine Abbildung $R \times M \rightarrow M$, $(r,m) \longmapsto r \cdot m = rm$ und

Für alle $r_1, r_2 \in R$, $m_1, m_2 \in M$ gilt:

$(r_1+r_2)\, m = r_1 \cdot m + r_2 \cdot m$ und
$r \cdot (m_1 + m_2) = r \cdot m_1 + r \cdot m_2$ und für
$r_1 \cdot (r_2 \cdot m) = (r_1 \cdot r_2) \cdot m$, für alle $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$

An diesen verallgemeinerten Definitionen und Regeln sieht man deutlich die Analogie zu den im Kapitel „Zur Mathematik der Divisionsalgebren“ (Anhang) im speziellen Fall angewendeten Regeln.

Emmy Noether erhielt 1932 zusammen mit Emil Artin den Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis für ihre gesamten wissenschaftlichen Leistungen. Bevor die Fields-Medaille (offiziell International Medal for Outstanding Discoveries in Mathematics) 1936 gestiftet wurde, war der Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis die höchste Auszeichnung, die in Deutschland für mathematische Leistungen vergeben wurde.

Im September 1932 hielt Emmy Noether einen Plenarvortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Zürich mit dem Titel *Hyperkomplexe Systeme und ihre Beziehungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie*. Der Kongress wurde von 800 Personen besucht, darunter Mathematiker wie Hermann Weyl, Edmund Landau und Wolfgang Krull sowie eng mit Noether verbundene Algebraiker wie Olga Taussky, Helmut Hasse und Bartel Leendert van der Waerden. Der Kongress wird gelegentlich als der Höhepunkt von Noethers mathematischer Karriere bezeichnet.[21] Eine gute Zusammenfassung ihres Wirkens siehe auch Wußing, Band 2, S. 428 ff[22]

[21] Zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether
[22] Hans Wußing, 6.000 Jahre Mathematik, Bd. 2, Springer Berlin Heidelberg, 2009, S. 428 ff

Moderne Algebra und hyperkomplexe Zahlen

Die klassische Algebra beginnt mit Galois und findet einen gewissen Abschluss in den Lehrbüchern von Heinrich Weber (1842 – 1913).[23] Wichtige Namen und zentrale Sätze in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts, wie Frobenius, Pierce oder Hurwitz wurden schon genannt. Auf Hamilton, Graves und Carley wird im mathematischen Anhang an passender Stelle eingegangen. Auch Webers Zusammenarbeit mit Richard Dedekind, der Emmy Noether so geprägt hat, ist erwähnenswert.[24] Während sich Hilbert mehr um eine *abstrakte Begriffsbildung* kümmerte, arbeiteten Emmy Noether, Ernst Steinitz, Emil Artin, Helmut Hasse, van der Waerden und andere an einer *abstrakten strukturellen Beschreibung*. Begonnen hat diese Entwicklung in den USA mit Edward Vermilye Huntington, Eliakim Hastings Moore und Leonhard Eugene Dickson. Zentrale algebraische Strukturen, wie Gruppe, Körper, Algebra, (später Ring) werden axiomatisch definiert und abstrakt untersucht. Ab etwa 1907/08 entstand durch Dickson und vor allem durch Joseph Henry Maclagan Wedderburn mit zentralen Sätzen die abstrakte Algebren-Theorie. Abstrakter Modulbegriff führte zur Idealtheorie und es wurden Rechenmethoden der linearen Algebra angewendet. Rechts- und Linksideale oder einseitige und zweiseitige Moduloperationen forderten die Beschäftigung mit Nichtkommutativität. Zu nennen ist auch die Bourbaki-Gruppe, die abstraktes, axiomatisches Denken in der Algebra vorantrieb. Sie waren, gemeinsam mit Garett Birkhoff und Saunders MacLane, Impulse für die Entwicklung der algebraischen Geometrie.[25]

Es besteht kaum ein Zweifel, dass das Interesse in den letzten 50 Jahren an hyperkomplexen Zahlen und insbesondere an den Divisionsalgebren und ihren Tensorprodukten durch die Physik maßgeblich indiziert wurde. Das heißt nicht, dass Ergebnisse nur und ausschließlich von physikalischem Interesse sind. Eher kann man eine Zwei-Sichten-Strategie mit Fokussierung auf Mathematik und/oder Physik beobachten:

Beispiel für beide Sichten:
John C. Baez, John Huerta; The Algebra of Grand Unified Theories
arXiv:0904.1556v2 [hep-th] 1 May 2010
John C. Baez; Baez; The Octonions,
arXiv:math/0105155v4 [math.RA] 23 Apr 2002

Beispiel mathematische Sicht:

---

[23] Lehrbuch der Algebra. Braunschweig 1895/96 (Band 1 und Band 2), Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Braunschweig 1891

[24] Heinrich Weber, Richard Dedekind: Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. J. Reine Angew. Math. 92 (1882) 181–190

[25] Siehe weitere Informationen Hans Wußing, ebenda Bd. 2, S. 423 ff

John Horton Conway, Derek Smith; On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry, 1. Auflage, CRC Press, 2003

Beispiel physikalische Sicht:
Borsten, Leron; Dahanayake, Duminda; Duff, Michael J.; Ebrahim, Hajar; Rubens, Williams (2009). „Schwarze Löcher, Qubits und Oktonionen".
Physics Reports, Volume 471, Issue 3-4, p. 113-219. February 2009
DOI: 10.1016/j.physrep.2008.11.002 bzw. 10.48550/arXiv.0809.4685
arXiv:0809.4685.

Hyperkomplexe Zahlen in der Physik

Veranschaulichung der Rechenoperationen

Um sich die Anwendungsmöglichkeiten klarzumachen, ist es sinnvoll, sich die entsprechenden Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bildlich in den jeweiligen Dimensionen anzuschauen, also auf Geometrie und Symmetrie zu achten (Grafiken am Beispiel komplexe Zahlen siehe Anhang).

Reelle Zahlen:

Addition a + b bedeutet das „Verschieben" von a auf dem Zahlenstrahl um b nach rechts.
Subtraktion a – b bedeutet „Verschieben" um b nach links.
Multiplikation a·b bedeutet „Streckung", falls b>0 und „Stauchung", falls b<0. Die Null bleibt unverändert, denn bei 0·b oder a·0 erfolgt weder Strecken noch Stauchen.
Division von a durch b bedeutet Multiplikation von a mit dem Kehrwert von b, also a·$\frac{1}{b}$.
Komplexe Zahlen

Statt auf einem eindimensionalen Zahlenstrahl finden die Symmetrieoperationen nun in der komplexen 2-dimensionalen Ebene statt.
Addition von a+bi und c+di bedeutet „Verschieben" von a+bi um c nach rechts und um d Einheiten nach oben.
Subtraktion ist das „Verschieben" nach links und nach unten.
Multiplikation ist nun nicht mehr „Streckung" oder „Stauchung" der reellen Achse, sondern der ganzen Ebene. Z.B. wenn die Zahl 1 mit i multipliziert wird, wird die ganze Ebene um 90º gedreht, denn 1·i=i. Eine weitere Drehung um 90º Grad nach links bedeutet wieder Multiplikation von i mit i und erneute Drehung um 90º Grad nach links, also zu i^2=–1.
Division ist wieder Multiplikation mit dem Kehrwert, z.B. 2i : 2i = 2i · $\frac{1}{2i} = 1$. Die Drehung findet also im Uhrzeigersinn statt.

Quaternionen

Die Rechenoperationen finden nun in einem 4-dimensionalen Raum statt. Das ist auch plausibel. Selbst eine einfache Drehung im Raum erfordert drei reelle Zahlen, nämlich jeweils für die drei Raumrichtungen. Für die Automobilindustrie ist das in einem DIN-Standard 70.000 festgeschrieben. Z.B. für 3D-Grafik ist noch eine 4. Zahl für „Stauchung“ oder „Streckung“ notwendig.
Es wird auch deutlich, dass es schon bei der Drehung im Raum auf die Reihenfolge ankommt (siehe Abbildung).

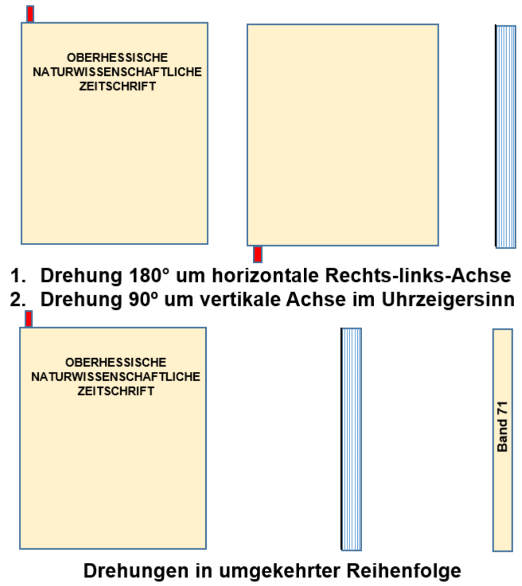

Abb. 2: Bei Drehungen (am Beispiel eines Buches) ist die Reihenfolge wichtig. Sie sind nicht kommutativ.

Allerdings wird heute meist a+bi+cj+dk als reelle Zahl a plus ein Dreiervektor (b,c,d) ausgedrückt. Quaternionen werden aber durchaus in Grafikprozessoren bei 3D-Animationen oder zur Steuerung von Satelliten eingesetzt.

Die Quaternionen haben immerhin noch respektable „Nischenanwendungen“ gefunden. Über 100 Jahre war das bei den Oktonionen nicht der Fall.
Das änderte sich erst in der 2. Hälfte des 20. Jahrhundert. Oktonionen wurden vorher wegen ihrer fehlenden Assoziativität in der Physik kaum beachtet. Beispiele für fehlende Kommutativität kennt man aus dem Alltagsleben („erst Socken anziehen, dann Schuhe – nicht umgekehrt“, oder bei Drehungen). Aber dass $a \cdot (b \cdot c) \neq (a \cdot b) \cdot c$ ist, fand man in der (klassischen) physikalischen Welt höchst selten.

Anwendungen in der Physik

Über die Bedeutung der reellen Zahlen muss nicht viel gesagt werden. Komplexe Zahlen sind in der Physik ebenfalls nicht mehr wegzudenken. Ohne sie gäbe es z.B. keine Quantentheorie. Mit Hilfe der Quaternionen kann die spezielle Relativitätstheorie hergeleitet werden und sogar Teile der Quantentheorie. Grund ist die vierdimensionale Darstellung. Sie erlaubt es in vielen Fällen, getrennte Gleichungen für Raum und Zeit zu vermeiden.

Pascual Jordan zeigte beispielsweise, wie man mit Biquaternionen, also Quaternionen über dem Körper der komplexen Zahlen mit komplexen

Koeffizienten, die Lorentz-Gruppe elegant darstellen kann.[26] Sie hat grundsätzliche Bedeutung der Beschreibung von Elementarteilchen in der relativistischen Quantenmechanik und von Feldern in der Quantenfeldtheorie, in der Felder und Teilchen einheitlich beschrieben werden und auch Kraftteilchen quantisiert sind. Komplexwertige Biquaternionen sind damit Sprachmittel für moderne Physik – mit Ausnahme der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Ansonsten sind eine Fülle von gängigen Rechenmethoden über die Quaternionen realisierbar. Eine detaillierte Übersicht findet sich unter [27]. Beispielsweise lässt die Tatsache, dass bei den Quaternionen eine Division möglich ist, auch zu, dass man logarithmische und exponentielle Funktionen definieren kann.

Die Quaternionen kann man, ebenso wie die komplexen Zahlen, als Spezialfälle einer Clifford-Algebra $\mathscr{A}$ der Ordnung n mit 2^n verallgemeinerten Zahlen als Basis sich vorstellen.

$\mathscr{A} = \sum_{l=1}^{2^n} i_l a_l$

wobei die i_l hyperkomplexe Elemente als Basis sind und die a_l komplexe Zahlen.

n=1 sind die zweidimensionalen komplexen Zahlen mit $i_1 = 1$ und a_1, a_2 reell

n=2 sind die die vierdimensionalen Quaternionen mit $i_1 = 1, i_2 = i, i_3 = j, i_4 = k$ und a_1, a_2, a_3, a_4 reell.

n=3 sind Biquaternionen mit $i_1 = 1, i_2 = i, i_3 = j, i_4 = k$ und a_1, a_2, a_3, a_4 komplex. Sie haben gegenüber den reellen Quaternionen z.B. den Vorteil, dass im Reellen nur Rotationen von starren Körpern dargestellt werden können. Im Komplexen sind auch Dehnungen und Stauchungen möglich.

n=4 sind Clifford-Zahlen, die in der Physik als Dirac-Matrizen eine Rolle spielen. Dirac führte die Gamma-Matrizen ein, um die Klein-Gordon-Gleichung, die eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, in eine Gleichung erster Ordnung umzuwandeln. Sie haben folgende Form:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & -1 & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & -i \\ \cdots & \cdots & i & \cdots \\ \cdots & i & \cdots & \cdots \\ -i & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

(verschwindende Matrixelemente werden nicht als Nullen ausgeschrieben)

[26] P. Jordan, Über die Darstellung der Lorentzgruppe mit Quaternionen, in F. Bopp (ed.), Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit, Vieweg & Sohn, Braunschweig 1961, S. 84-85

[27] https://mathepedia.de/Quaternionen.html

Das Standardmodell der Teilchenphysik

In den 1960-er Jahren wurde der „Teilchen-Zoo immer unübersichtlicher. Es fehlten strukturelle Leitlinien, um Ordnung zu schaffen und Gesetzmäßigkeiten zu bilden. Murray Gell-Mann entdeckte, dass sich die bekannten Teilchen je nach Masse, Ladung, Spin usw. in der Lie-Gruppe SU(2), der sogenannten komplexen Drehgruppe, ordnen ließen. Das war noch kein Beweis. Doch er postulierte 1961, dass an einer Lücke noch ein Teilchen fehlte. Es wurde 1964 am Brookhaven National Laboratory nachgewiesen und erhielt den Namen Ω-Minus (Omega-Minus). Das Quark-Modell war damals noch nicht entdeckt. Heute weiß man, Ω-Minus besteht aus drei strange-Quarks. Voraussage und Entdeckung waren eine wichtige Bestätigung des Modells. Es herrschte eine ungeheure Aufbruchstimmung unter den Physikern. Man hoffte, alle Teilchen und alle Grundkräfte inklusive der Gravitation in einem Standardmodell der Elementarteilchenphysik zu integrieren. Dieses fußte auf einer Kombination von drei Lie-Gruppen. Dies gelang, allerdings ohne die Gravitation berücksichtigen zu können. Die drei Lie-Gruppen sind

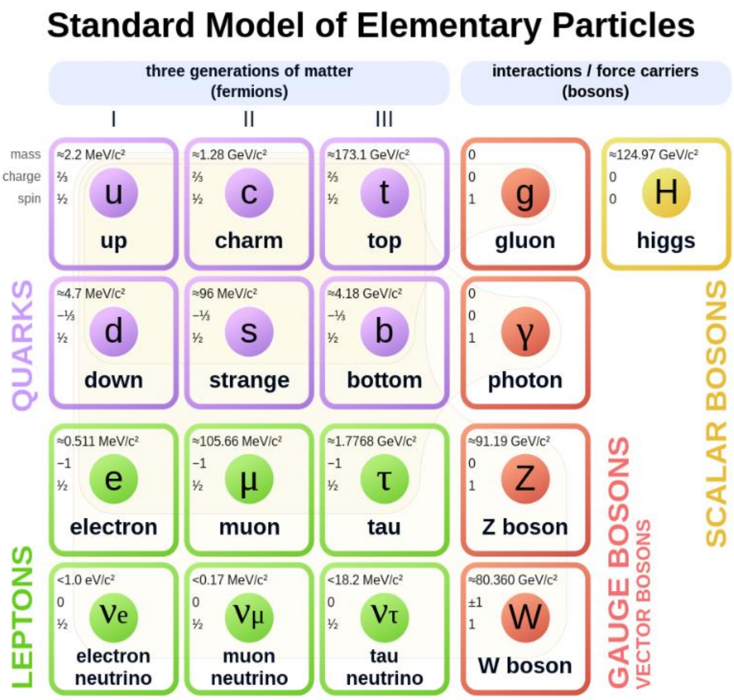

Abb. 3: Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (Teilchen-bezogen)

$U(1)_Y$ als Nullpunktseichung der Phase durch Photonen γ für die elektromagnetische, bzw. W-Bosonen und das Z-Boson für die schwache Wechselwirkung. Mathematisch ist es die Kreisgruppe, also der Abbildungen von komplexen Zahlen, deren Betragsquadrat gleichbleibt. Geometrisch entspricht es einer Drehung um den Nullpunkt.

$SU(2)_L$ als lokale Eichsysmmetrie für Ladungserhaltung. Es ist die sogenannte Spin-Gruppe in der Physik und in der Mathematik die einfachste kompakte nichtabelsche Lie-Gruppe und Gruppe der komplexen Drehungen des zweidimensionalen komplexen Raumes $\mathbb{C}^2$ und wird von den sogenannten drei 2x2 Pauli-Matrizen erzeugt. Im dreidimensionalen reellen Raum $\mathbb{R}^3$ ist sie die Überlagerungsgruppe von SO(3), der Drehgruppe der Ortsdrehimpulse. Es gibt einen durch die Quaternionen vermittelten Isomorphismus zwischen der Gruppe der Einheitsquaternionen und der speziellen unitären Gruppe SU(2).

$SU(3)_C$ ist die Struktur der Quantenchromodynamik, also der Symmetriegruppe für die Umeichung der Farbladung in Baryonen. Es sind bekanntlich die eigentlichen Materieteilchen, die aus Quarks bestehen und durch die starke Kernkraft gebunden werden. $SU(3)_C$ wird von den acht Gell-Mann-Matrizen erzeugt. Eine Analogie zur SO(4) als Drehgruppe im $\mathbb{R}^4$ ist nicht möglich. Es gilt SO(4)=SU(2)xSU(2). Man kann es als orientierungserhaltende orthogonale Abbildung von $\mathbb{H}$ in sich selbst auffassen.

Somit ist das Standardmodell als folgendes Tensorprodukt beschreibbar:

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

<table>
<tr><th colspan="6">Fundamentale Wechselwirkungen und ihre Beschreibungen</th></tr>
<tr><td></td><td>Starke Wechselwirkung</td><td colspan="2">Elektromagnetische Wechselwirkung</td><td>Schwache Wechselwirkung</td><td>Gravitation</td></tr>
<tr><td rowspan="2">klassisch</td><td rowspan="2"></td><td>Elektrostatik</td><td>Magnetostatik</td><td rowspan="2"></td><td>Newton. Gravitation</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elektrodynamik</td><td>Allg. Relativitätsth.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">quanten-theo-retisch</td><td rowspan="2">Quantenchromodynamik</td><td colspan="2">Quantenelektrodynamik</td><td>Fermi-Theorie</td><td rowspan="3">Quanten-gravitation (?)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Elektroschwache Wechselwirkung</td></tr>
<tr><td colspan="4">STANDARDMODELL</td></tr>
<tr><td colspan="4">Große vereinheitlichte Theorie, GUS (?)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Weltformel („Theorie von Allem“) (?)</td></tr>
</table>

Abb. 4: Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (Kräfte-bezogen)

Die Kombination der drei Lie-Gruppen half die nächsten Jahrzehnte, das Standardmodell der Teilchenphysik immer weiter mit Leben zu füllen. Doch eine übergreifende Lie-Gruppe war nicht in Sicht. Es gab Bemühungen, aber es wurden Phänomene vorausgesagt, wie z.B. der Protonenzerfall, die nicht beobachtet werden konnten. Zu nennen ist eine Lie-Gruppe SO(11,3).[28] Garett Lisi hat ein in der Öffentlichkeit vielbeachtetes Paper veröffentlicht, in dem er aus E_8 ein Modell für eine Theory of Everything (ToE) skizziert.[29] Jaques Distler und Skip Garibaldi wiesen aber sehr entschieden nach, dass Lisis Ansatz rein mathematisch begründet war und wichtige physikalische Rahmenbedingungen

[28] Roberto Percacci, International School for Advanced Studies, Triest, mit Fabricio Nesti, Universität Ferrara, https://www.spektrum.de/alias/quantengravitation/zurueck-zu-den-wurzeln/1045683
[29] A. Garett Lisi: An Exceptionally Simple Theory of Everything. 2007 arXiv:0711.0770

außer Acht ließ.[30] Trotzdem ist E_8 immer noch von hohem Interesse, auch wenn für eine ToE mehr gebraucht wird und möglicherweise auch E10 nicht ausreicht.

Die Lie-Gruppe E_8

Im Jahr 2007 ging eine ungewöhnliche Meldung zu einem mathematischen Durchbruch durch die seriöse Tagespresse.[31] In einer fünfjährigen Arbeit konnten Mathematiker um Jeffrey Adams von der University of Maryland (College Park, USA) die Lie-Gruppe E_8 entschlüsseln.

Die Lie-Algebra E_8 hat die Dimension 248 (Freiheitsgrade). Interessant ist vor allem ihr Wurzelsystem, das Rang 8 hat und aus 240 Wurzeln besteht. Die Bedeutung von Wurzelsystemen in euklidischen Räumen liegt darin, dass sie invariant unter einer endlichen Gruppe linearer Abbildungen sind, die von Spiegelungen erzeugt werden. In der Regel normiert man die Wurzeln auf die Länge $\sqrt{2}$. Die Menge aller Vektoren des $\mathbb{R}^8$ bilden ein Gitter, dessen Koordinaten entweder alle ganze Zahlen oder alle halben ganzen Zahlen sind. Die Summe aller Koordinaten ist gerade.

Diese Gruppe ist offenbar von zentraler Bedeutung in der Teilchenphysik. In der Stringtheorie und Supergravitation gilt $E_8 x E_8$ als anomaliefreie Eichgruppe. Namhafte Physiker aus der Stringtheorie glauben, dass E_8 wichtige Impulse für den mathematischen Formalismus liefern kann, um zu einer einheitlichen Stringtheorie der Teilchenphysik mit allen vier Grundkräften zu kommen. Die Existenz der E_8-Gruppe war seit 100 Jahren klar, aber ihre Struktur war unbekannt. Wilhelm Killing entdeckte in den Jahren 1888-1890 die komplexe Lie-Algebra E_8 bei seiner Klassifikation einfacher komplexer Lie-Algebren. Ihre Existenz wurde von Élie Cartan bewiesen. Cartan stellte fest, dass eine komplexe einfache Lie-Algebra vom Typ E_8 drei reelle Formen zulässt. Jede von ihnen führt zu einer einfachen Lie-Gruppe der Dimension 248, von denen genau eine (wie bei jeder komplexen einfachen Lie-Algebra) kompakt ist, d.h. deren zugrundeliegende Topologie ein kompakter Hausdorffraum ist. Die kompakte reelle Form von E_8 ist die Isometriegruppe des 128-dimensionalen außergewöhnlich kompakten Riemannschen symmetrischen Raums (EVIII in Cartans Klassifikation). Er ist informell als "oktooktonionische Projektive Ebene" bekannt, da es mit einer Algebra konstruiert werden kann, die das Tensorprodukt der Oktonionen, mit sich selbst ist, also $\mathbb{O}\otimes\mathbb{O}$ (siehe auch nächstes Kapitel). Direkte Berechnungen zeigen, dass E_8 isometrisch zu $\mathbb{O}$ ist.

---

[30] Jaques Distler, Skip Garibaldi, There is no “Theory of Everything” inside E8, https://arxiv.org/pdf/0905.2658.pdf

[31] Siehe z.B. https://www.faz.net/aktuell/wissen/physik-mehr/mathematik-forscher-entschluesseln-die-lie-gruppe-e8-1434490.html

Das Wurzelgitter ist der einzige nichttriviale positiv-definite, gerade, unimodulare Verband vom Rang 8.[32]

Die 248 Elemente der Gruppe enthalten mehr als 200 Milliarden Komponenten. Sie wurden mit Hilfe eines Supercomputers der University of Washington mit einem speziellen Algorithmus errechnet.
Die Abbildung zeigt im Prinzip die enorme Komplexität einer Struktur eines 57-dimensionalen Körpers, der auf 248 verschiedene Arten gedreht werden kann (zur Konstruktion und Generierung der Grafik siehe Abbildungsverzeichnis).

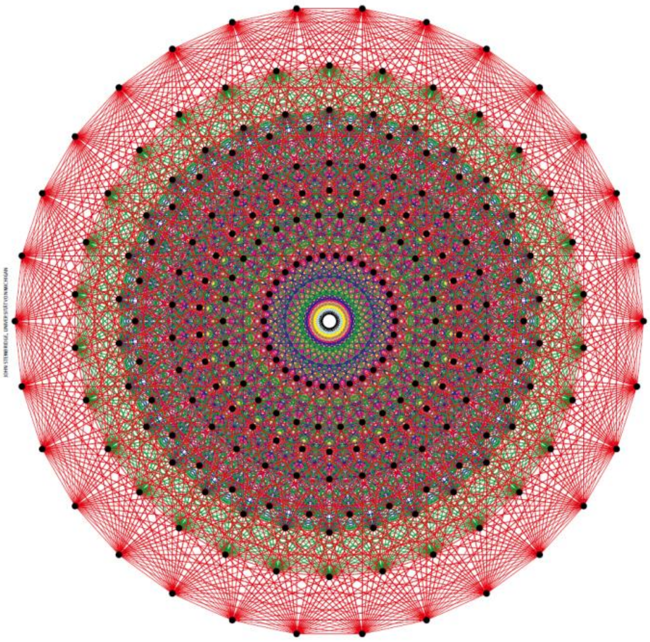

Abb. 5: Eine Darstellung der Lie-Gruppe E_8, wie ein 57-dimensionales Objekt gedreht werden kann ohne sein Aussehen zu verändern.

Was macht die Dimension 8 und damit Querbeziehungen zu den Oktonionen so interessant? Es könnte mit der Packungsdichte zusammenhängen. In der Ebene kann man um eine Münze sechs weitere, gleich große Münzen gruppieren. In drei Dimensionen sind es 12 (kubisch-flächenzentrierte Packung und die hexagonale Packung, aber gemäß mittlerweile bewiesener Keplerscher Vermutung nur mit knapp ¾ Packungsdichte, $\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 0{,}74048\ldots$). In acht Dimensionen kann man 240 Kugeln an eine zentrale Kugel anlegen und zwar ohne Verlust an Packungsdichte, d.h. stramm anliegende Kugeln, deren Struktur man in alle 8 Raumrichtungen per Translation fortsetzen kann. Aus den

[32] Quelle Dissertation von Jiang Chengen bei Prof. Dr. Ralf Köhl (damals Univ. Gießen), „Modular Groups Over Real Normed Division Algebras and Over-extended Hyperbolic Weyl Groups", http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2018/13667/pdf/JiangChengen_2018_07_11.pdf, ein freundlicher Hinweis von Prof. Köhl, heute Universität Kiel

Wurzelvektoren, die vom Mittelpunkt der Zentralkugel zu den anderen benachbarten Kugeln weisen, lässt sich die Gruppe E_8 konstruieren.

Supersymmetrie und Stringtheorie

Reelle, komplexe und ebenfalls die Quaternionen waren lediglich Mittel der mathematischen Beschreibung von physikalischen Gesetzen. Doch mit den Oktonionen hat sich die Qualität geändert. Sie sind stellenweise vom Hilfsmittel zum Gegenstand mathematisch-physikalischer Forschung geworden. Die Oktonionen stehen seit nunmehr über 50 Jahren für mögliche Bezüge zur Teilchenphysik, auch wenn die elegante und ansprechende theoretische Forschung bisher noch keinen entsprechenden experimentellen Nachweis gefunden hat.

Etwa ab Mitte der 1960-Jahre waren Teilchen und Kräfte in ihrem prinzipiellem Aufbau und ihren Wechselwirkungen bekannt. Das Standardmodell der Teilchenphysik entstand. Ein großer Erfolg war, dass im Jahr 1973 durch Makoto Kobayashi und Toshihide Maskawa das Topquark vorhergesagt wurde, das 1995 am Fermilab in Chicago experimentell nachgewiesen wurde. Die Vorhersage war aufgrund der Eichsymmetrie zwingend, sonst hätte eine Anomalie gedroht, die das ganze Standardmodell zu Fall gebracht hätte. 1977 erschien Steven Weinbergs Buch „The First Three Minutes“, das diese Erkenntnisse erstmals auf den Urknall anwenden konnte. Es entstand zusammen mit der Allgemeinen Relativitätstheorie ein weiteres Standardmodell, nämlich das der Kosmologie. Beide Standardmodelle müssen sicherlich revidiert oder zumindest verfeinert werden, denn zu viele Fragen sind noch offen. So werden die Massen der Teilchen und andere freie Parameter nicht genau hergeleitet, sondern müssen experimentell ermittelt werden. Warum gibt es drei Familien an Fermionen? Gibt es weitere Higgs-Bosonen? In der Kosmologie kann man Dunkle Materie und Dunkle Energie noch nicht erklären und die Entstehung von Raum und Zeit im Urknall. Durch welche Symmetriebrüche entstanden die unterschiedlichen Kopplungsstärken? Bei beiden Standardmodellen ist unbeantwortet, woher der eklatante Überschuss an Materie gegenüber Antimaterie herrührt.

In diesen Jahren im letzten Drittel des 20. Jahrhunderts entstanden die Anfänge der Stringtheorie und eine theoretisch bis heute sehr überzeugende Theorie namens Supersymmetrie – auch wenn sich bisher keine experimentellen Belege dafür fanden. Im Standardmodell der Teilchenphysik wird zwischen Fermionen („Materieteilchen“) und Bosonen („Kraftteilchen“) unterschieden. Supersymmetrie bedeutet, dass jedes Teilchen ein supersymmetrisches Partnerteilchen besitzt. Bei einem Austausch der beiden bleiben die Naturgesetze gleich. Wäre unser Universum ohne Zeit und 1-, 2-, 4- oder 8-

dimensional, so wären Vektoren und Spinoren algebraische Elemente in Divisionsalgebren und die Wechselwirkung untereinander entspräche der Multiplikation entsprechender Kennzahlen. Man müsste nicht mehr zwischen Vektor und Spinor unterscheiden und (abhängig von der Dimension) wären die Zahlen reell, komplex, Quaternionen oder Oktonionen. Supersymmetrie wäre eine einheitliche Beschreibung von Materie und Kräften.
An Spinoren kann man den Bezug zur Dimension am besten verdeutlichen. In der dreidimensionalen Raumzeit, z.B. eines Elektrons, benötigt man nur zwei reelle Zahlen für den Spin (meist normiert auf +1/2, -1/2). In der vierdimensionalen Raumzeit sind es zwei komplexe Zahlen, die dann als 2x2-Matrizen vorkommen. In einer sechsdimensionalen Raumzeit sind es Paare von Quaternionen und bei 10 Dimensionen Paare von Oktonionen. Auch die M-Theorie (s.u.) in 11 Dimensionen profitiert von den Symmetrieeigenschaften der Oktonionen, da von den 11 Dimensionen sieben nicht unmittelbar beobachtbar sind („eingerollt“ sind).[33] Wichtig ist die mathematische Bestätigung, dass keine höherdimensionalen Modelle möglich sind. Es gibt nur vier normierte Divisionsalgebren.
Naheliegend ist die Verwandtschaft mit der E_8-Lie-Gruppe, die Anwendungen in der theoretischen Physik und insbesondere in der Stringtheorie und Supergravitation hat. Zur Erinnerung: Die kompakte reelle Form von E_8 ist die Isometriegruppe eines 128-dimensionalen Raumes, der als „oktooktonionische projektive Ebene“ bekannt ist. Er kann algebraisch als Tensorprodukt der Oktonionen mit sich selbst konstruiert werden ($\mathbb{O}\otimes\mathbb{O}$).
Nun fehlt in diesem Bild die Zeit als weitere Dimension sowie die Bewegung eines Raumpunktes in der Zeit als eindimensionale Weltlinie. Diese Weltlinie spannt in der Zeit eine 2-dimensionale Fläche auf. Damit sind die relevanten Dimensionen für die Supersymmetrie, die mehr oder weniger von der Stringtheorie voraussetzt wird (aber nicht umgekehrt), 3, 4, 6 oder 10. Wird nicht in 10 Dimensionen gerechnet, so entstehen Anomalien, d.h. die Reihenfolge spielt bei der Berechnung eine Rolle. In 10 Dimensionen ist das nicht der Fall. Damit entsteht die Querbeziehung zu den Oktonionen. Sollte die Stringtheorie die Natur korrekt beschreiben, so muss das Universum 10 Dimensionen haben und supersymmetrisch sein.

Statt eindimensionaler Strings gibt es Argumente, zu 2-dimensionalen Membranen (kurz 2-Bran) überzugehen. Auch hier zeigt sich zumindest, dass dabei 11 Dimensionen benötigt werden, auch wenn sie noch in den Kinderschuhen steckt.

---

[33] Baez, John C., The Octonions, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), 145-205; arXiv:math/0105155v4

Die experimentellen Möglichkeiten sind immer noch ca. 15 Größenordnungen von einem Nachweis der vermuteten physikalischen Strukturen entfernt. Was zunächst bleibt, sind vor allem Symmetrieüberlegungen. Dies gilt für beide Standardmodelle. Dabei muss man sich den jeweiligen Grenzen (Energie- bzw. Planck-Skala) nähern, um neue Symmetrien zu erkennen. Oder umgekehrt: Man geht davon aus, dass bei ca. 15 GeV alle drei Grundkräfte, deren Kopplungskonstanten heute höchst unterschiedlich sind, sich vereinigen. Symmetriebrechung hat man häufig in der Natur, z.B. beim Ferromagnetismus, der bei höheren Temperaturen reversibel verschwindet. Man sucht also nach Hinweise auf „Symmetrievergrößerungen“ in den jeweiligen Skalen. Ein wichtiger Kandidat bei der Untersuchung von Schwarzen Löchern oder dem Urknall ist die seit einigen Jahrzehnten in der Mathematik bekannte Symmetrie E10. Es liegt eine spezielle Form von unendlichen Lie-Gruppen zugrunde (sogenannte hyperbolische Kac-Moody-Algebren). Sie werden, wie bereits erwähnt, zur Beschreibung von kontinuierlichen Transformationen benötigt. Diese Strukturen weisen auf viele Zusammenhänge hin, die im Rahmen der (Super)stringtheorie in den letzten Jahrzehnten erarbeitet wurden und sind wohl einer der Schlüssel zur Quantengravitation. Bei niedrigen Temperaturen erhält man bereits plausible Ergebnisse, wenn man eine Verallgemeinerung der Allgemeine Relativitätstheorie supersymmetrisch untersucht. Bei der hohen Energie in Raumzeitsingularitäten, wie Schwarzen Löchern, benötigt eine supersymmetrische Theorie eine 11-dimensionale Raumzeit. Die Geometrie entspricht verblüffend genau der E10-Symmetrie.[34]

So schließt sich wieder der vermutete Kreis zwischen Oktonionen und E10.

Diese Querbeziehungen ermutigen zweifellos zu weiteren Forschungen.

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist ein großer Triumph für die Physik. Trotzdem sind die theoretischen Physiker nicht ganz glücklich damit.

1) Es lässt die Schwerkraft außen vor, die momentan nur und ausschließlich gut von der Allgemeinen Relativitätstheorie erklärt wird.
2) Astronomische Erkenntnisse deuten darauf hin, dass es Materie, wie die sogenannte „Dunkle Materie gibt, die nicht im Standardmodell adressiert wird. Das vermutete leichteste supersymmetrische Teilchen konnte bisher am Large Hadron Collider (LHC) des CERN nicht nachgewiesen werden.
3) Es ist zu kompliziert und widerspricht dem Bestreben, in letzter Konsequenz ästhetisch schöne, elegante und einfache Naturgesetze zu entdecken.

Es findet deshalb immer wieder eine Hinwendung zu den Anfängen Mitte der 1970-er Jahre statt, als die Idee einer „Großen vereinheitlichten Theorie“ (Great Unified Theory, GUT) aufkam und man mit Hilfe von Lie-Gruppen, Lie-Algebren

[34] T. Damour, M. Henneaux, Phys. Rev. Lett 2001, 86, 4749

usw. nach Ordnung und Struktur suchte. Diese Idee ist nach wie vor aktuell. Ein früher Verfechter ist z.B. Edward Witten, der bisher als einziger Physiker 1990 die Fields-Medaille erhielt.[35]

Neuere Ergebnisse

Die Fokussierung auf die Algebra in den letzten Jahren ist u.a. verbunden mit dem Namen der jungen kanadischen Wissenschaftlerin Cohl (Nicohl) Furey. Sie sucht einen fast utopisch anmutenden Ansatz, nämlich Elementarteilchenphysik a priori (!) mittels Oktonionen im weitesten Sinn zu erklären. D.h. Verhalten in der Natur aus der Mathematik und nicht nur durch die Mathematik zu erklären. Zumindest ist sie mit diesem hehren Ziel angetreten. Natürlich ist klar, dass die wichtigste Prüfung das Experiment ist. Es ist ein Ansatz, den bereits Immanuel Kant versucht hat, indem er die Geometrie des Raumes als a priori euklidisch dreidimensional darstellte, auch wenn er dabei scheitern musste. Gelungen ist er Emmy Noether, die die drei klassischen physikalischen Erhaltungssätze, Energieerhaltung, Impulserhaltung/ Drehimpulserhaltung und Ladungserhaltung als zwangsläufige Konsequenz aus rein mathematischen Überlegungen zur Invarianz von Symmetrietransformationen heraus abgeleitet hat und im 2. Schritt dies für kovariante Theorien (ohne feste Bezugssysteme) verallgemeinert hat. Anlass war die allgemeine Relativitätstheorie.

Mitte des Jahres 2020 kam die kanadische theoretische Physikerin Nichol (Cohl) Furey mit einem 6-jährigen Freigeist-Stipendium der Volkswagenstiftung zum Forschungszentrum IRIS Adlershof (Berlin).[36] Sie hatte bereits vorher neue Ideen zur theoretischen Beschreibung von Elementarteilchen vorgelegt und in ihrer Dissertation ein regelrechtes Programm dazu aufgezeigt.[37] Sie glaubt, dass mit hyperkomplexen Zahlen sich Zusammenhänge auftun, die (fast nur) aus der Mathematik heraus physikalische Erkenntnisse zulassen.
So wird gezeigt, dass jede der Lorentz-Darstellungen (Skalare, alle links- und rechtshändigen Spinoren oder der Feldstärketensor) des Standardmodells als invariante Unterräume der komplexen Quaternionen identifiziert werden kann (siehe oben dazu den Beitrag von P. Jordan). Bereits 1937 hat A. Conway diesen Ansatz gewählt, die Arbeit von Furey geht aber deutlich darüber

---

[35] Siehe z.B. Edward Witten, Grand unification with and without supersymmetry, in Introduction to supersymmetry in particle and nuclear physics, eds. O. Castanos, A. Frank, L. Urrutia, Plenum Press, 1984, pp. 53–76.
[36] siehe auch https://www.adlershof.de/news/die-magierin-der-oktaven
[37] C. Furey, Standard model physics from an algebra?, PhD thesis, 2015, https://arxiv.org/pdf/1611.09182.pdf

hinaus.[38] Neu ist, dass jede Darstellung der Lorentz-Gruppe des Standardmodells als Linksideal aufgefasst werden kann. Man findet eine Reihe verallgemeinerter Ideale, die aus drei verallgemeinerten Begriffen stammen. Diese verallgemeinerten Ideale führten direkt zu links- und rechtshändigen Weyl-Spinoren, Dirac-Spinoren und Majorana-Spinoren, Vierervektoren, Skalaren und den Feldstärke-Tensor. Dies gilt für alle Lorentz-Darstellungen des Standardmodells.

Furey ist, wie die Beispiele deutlich machen, natürlich nicht die erste Physikerin, die sich für Oktonionen interessiert. Aber zumindest ihre ersten Ziele sind ziemlich hochgesteckt. Zu Beginn des Weges hat sie sich Rat bei Murat Günaydin gesucht. Er ist heute Professor an der Penn State University und hat 1973 als Doktorand in Yale, zusammen mit Feza Gürsey, einen möglichen Zusammenhang zwischen den Oktonionen und der starken Kernkraft entdeckt. In einem Treffen im Jahr 2014 riet Günaydin der jungen Doktorandin von der University of Waterloo, Kanada, von der weiteren Beschäftigung mit dem Thema ab.[39] Allerdings ist die Situation heute eine andere. Damals in den 1970-er Jahren hat man auf die Entdeckungen von Teilchenbeschleunigern geschaut und so überwiegend auf die experimentelle Methode gesetzt, so dass diese Ideen nicht zielstrebig weiterverfolgt wurden. Man setzte auf riesige Anlagen der Experimentalphysik und nicht auf scheinbar zufällige mathematische Gemeinsamkeiten. Heute fehlen die erwarteten experimentellen Ergebnisse z.B. zur Supersymmetrie. Mit dem Higgs-Boson ist das Standardmodell seit 2012 im Prinzip abgeschlossen und es wurden seither keine fundamental neuen Teilchen entdeckt. Eine Physik jenseits des Standardmodells ist nicht oder kaum in Sicht und immer noch können zahlreiche Parameter, wie die Massen der Teilchen, nur experimentell ermittelt werden und ergeben sich nicht aus der Theorie.

Vorausschickend sei gesagt, dass Furey nicht die einzelnen Algebren im Fokus hat, sondern Tensorprodukte von Algebren. Ein Tensorprodukt zweier Algebren ist wieder eine Algebra. Das kann man beliebig steigern und immer wieder neue hyperkomplexe Zahlen erzeugen. Dabei wird gerne über die Schreibweise differenziert, um weniger Erklärungsaufwand zu haben.

$C \otimes_{\mathbb{R}} C$ sind 4-dimensionale Tessarinen
$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sind 8-dimensionale Biquaternionen
$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ sind 16-dimensionale komplexe Oktonionen etc.

---

[38] A. Conway, Quaternion treatment of relativistic wave equation, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and physical sciences, 162, No 909 (1937).
[39] Natalie Wolchover in https://www.quantamagazine.org/the-octonion-math-that-could-underpin-physics-20180720/

Die Koeffizienten sind reelle Zahlen, genauer: es sind Algebren in letzter Konsequenz über dem Körper der reellen Zahlen, denn auch komplexe Zahlen sind aus reellen Zahlen aufgebaut.

Furey konzentriert sich vor allem auf das Tensorprodukt der vier Divisionsalgebren $\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{O}$ über den reellen Zahlen (Dixon Algebra), sowie auf Teile davon. Allein aus Interpretation der Mathematik der Algebra sollen Teilchen, Kausalität und irreversible Zeit hervorgehen. Ideale werden als Teilchen interpretiert. Aus dem $\mathbb{C}\otimes\mathbb{H}$-Teil findet man verallgemeinerte Ideale und kann zeigen, dass sie alle Lorentz-Darstellungen des Standardmodells kurz beschreiben. $\mathbb{C}\otimes\mathbb{H}$ können komplexe Quaternionen sein. Die Symmetrie ist SU(2)L und wirkt damit, wie in der Natur, nur auf linkshändige Zustände.

Aus dem $\mathbb{C}\otimes\mathbb{O}$-Teil der Algebra findet man minimale linke Ideale und kann zeigen, dass sie das Verhalten einer Generation von Quarks und Leptonen widerspiegeln.[40]

In der Teilchenphysik treten drei Familien an Quarks und Leptonen auf. Warum, konnte bisher nicht geklärt werden. Cohl Furey konnte aus einem Oktonionenmodell ableiten, dass sich aus der Mathematik der 8-dimensionalen Oktonionen-Algebra drei Generationen mit zwei ungebrochenen Eichsymmetrien SU(3) und U(1) ergeben.[41]
Insbesondere Kombinationen der Divisionsalgebren mit reellen (oder auch komplexen Koeffizienten) weisen erstaunliche Ähnlichkeiten mit Strukturen des Standardmodells der Teilchenphysik auf.[42] Dabei setzt Furey auf frühere Ergebnisse auf.[43] Sie erhält eine Grundstruktur SU(5) der Großen Vereinheitlichten Theorie (GUT) von Georgi und Glashow, aber ohne deren problematische Implikationen zum Protonenzerfall.

Quarks und Antiquarks können schon aus dem Modell von Gunaydin und Gursey prinzipiell erkannt werden. Furey findet darüber hinaus eine Reihe von Zuständen, die sich analog zu den acht Quarks und Leptonen einer ganzen Generation interpretieren lassen. Außerdem lässt sich in diesem Modell die Quantisierung der elektrischen Ladung verstehen.[44]

---

[40] C. Furey, Standard model physics from an algebra? PhD thesis, 2015, https://arxiv.org/pdf/1611.09182.pdf, S. ii (abstract)
[41] Furey, Three generations, two unbroken gauge symmetries, and one eight-dimensional algebra, Phys.Lett.B (2018), https://arxiv.org/abs/1910.08395
[42] Furey, SU(3)xSU(2)xU(1) (xU(1)) as a symmetry of division algebraic ladder operators, Eur. Phys. J. C (2018), https://arxiv.org/abs/1806.00612
[43] arXiv:1611.09182
[44] Furey, Charge quantization from a number operator, Phys.Lett.B, 742 (2015) 195-199, https://arxiv.org/abs/1603.04078

Die neueste Zusammenarbeit zwischen Furey und Mia Hughes vom Imperial College London beschäftigt sich mit Symmetriebrechung und neuen Hinweisen auf BSM-Physik (beyond the standard modell).[45,46]

Allerdings sind noch viele Fragen offen. Es fehlt noch ein oktonionisches Gesamtmodell aller Kräfte und Teilchen im Standardmodell. Außerdem wurde die Schwerkraft noch nicht berührt. Andererseits sind viele mathematische Methoden noch nicht ausgeschöpft. Deshalb ist es noch zu früh, von einem umfassenden Erfolg dieses Ansatzes zu sprechen. Immerhin kam schon Lob aus berufenem Munde. Michael Duff ist hochdekorierter Professor am Imperial College in London und hat als einer der wenigen die Oktonionen im Rahmen der Stringtheorie betrachtet. Er bescheinigte Cohl Furey „Sie hat einige faszinierende Verbindungen gefunden.“ Er meinte, sie solle auf jeden Fall weitermachen. Ein Erfolg bei der Beschreibung des Standardmodells über diesen Weg wäre schlichtweg „revolutionär“.[47,48]

Ist Physik überhaupt a priori zu begründen?

Es ist offensichtlich, dass die moderne Physik, die mit Beginn des 20. Jahrhunderts begann, philosophische Grundlagen der Erkenntnis schwer erschüttert hat. Dabei ist sicherlich das Hauptwerk von Immanuel Kant, „Kritik der reinen Vernunft“, einer der wichtigsten Maßstäbe für die Möglichkeit, Erkenntnisse über die Natur a priori zu gewinnen.[49] Insbesondere der kantsche Zeit- und Raumbegriff wurde nicht nur erschüttert, sondern regelrecht demontiert.

Kant schreibt z.B. über die Zeit:[50]
Denn das Zugleichsein oder Aufeinanderfolgen würde selbst nicht in die Wahrnehmung kommen, wenn die Vorstellung der Zeit nicht a priori zum Grunde läge. …
Sie hat nur Eine Dimension:
verschiedene Zeiten sind nicht zugleich, sondern nacheinander

---

[45] Furey and Hughes, Division algebraic symmetry breaking, Phys.Lett.B (2022), https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137186
[46] Furey and Hughes, One generation of standard model Weyl representations as a single copy of RCHO, Phys.Lett.B (2022), https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269322000934
[47] Zitiert nach Natalie Wolchover in https://www.quantamagazine.org/the-octonion-math-that-could-underpin-physics-20180720/
[48] Siehe auch https://www.spektrum.de/kolumne/quaternionen-von-komplexen-zahlen-zu-tomb-raider/2109450
[49] Hier soll die lateinische Schreibweise „a priori“ und nicht apriori“ benutzt werden.
[50] Immanuel Kant, Kritik der reinen Vernunft - Der transzendentalen Ästhetik Zweiter Abschnitt - Von der Zeit, §4, Metaphysische Erörterung des Begriffs der Zeit

(so wie verschiedene Räume nicht nacheinander, sondern zugleich sind).

So wäre es keinesfalls im kantschen Sinne, dass sich die Zeit durch die spezielle Relativitätstheorie nicht als a priori Erlebnisform herausgestellt hat, sondern nur als Frage der messbaren Erfahrung in einem speziellen Bezugssystem. Noch schlimmer ist es um den Raumbegriff bestellt. Bernhard Riemann hat zwar in seinem berühmten Habilitationsvortrag den euklidischen Raumbegriff um nichteuklidische Geometrien mathematisch erweitert. Das hatte aber für das physikalische Verständnis des Raums zunächst keine Auswirkungen. Der Spezialfall einer euklidischen Geometrie wurde trotzdem als in der Natur gegeben, als „*anschaulich evident*",[51] angenommen. Nun stellte sich heraus, dass ausgerechnet die euklidische Geometrie die Natur nicht korrekt beschreibt. Die allgemeine Relativitätstheorie hat den philosophischen Konflikt mit Kant noch verschärft, denn der euklidische Raumbegriff wurde überwunden. Die intuitiv „richtige" Geometrie des Raumes, die damit scheinbar prädestiniert für einen a priori Ansatz ist, erweist sich sogar als ungeeignet zur Naturbeschreibung.

Ist Physik, also Naturbeschreibung, überhaupt a priori zu begründen? Diese allgemein gestellte Frage muss man ausgerechnet anhand Beispielen im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie mit Ja beantworten. Emmy Noether hat schließlich die Invarianz von Symmetrietransformationen und damit den Raum als solchen, aber auch die Zeit, als a priori Grundlage genommen und rein mathematische Schlussfolgerungen gezogen. Anlass war die allgemeine Relativitätstheorie (ART), die auch von David Hilbert in fairer Weise Albert Einstein zugesprochen wurde, aber bei der Hilbert mehr als nur ein Sparringspartner von Einstein im Sommer und Herbst des Jahres 1915 war und von Frau Noether entscheidend unterstützt wurde. Beide veröffentlichten die Feldgleichungen fast zeitgleich, Hilbert sogar fünf Tage früher. Er hatte mehr die Mathematik im Fokus, doch Einstein war der geniale Physiker. Einen extrem wichtigen Beitrag lieferte Emmy Noether. Die Theorie schien nämlich den Energieerhaltungssatz zu verletzen. Es fehlten entscheidende Argumente, wie dieses zentrale Naturgesetz durch die ART nicht verletzt wird. Diese entwickelte Emmy Noether in zwei Schritten. Da es sich bei der speziellen Relativitätstheorie (SRT) um kontinuierliche Vorgänge in einem festen Koordinatensystem handelt, benötigt man zwar Lie-Gruppen, die aber endlich dimensional sind. Dies deckt auch tatsächlich die Symmetrie von Koordinatentransformationen in der klassischen Physik mit einem festen

---

[51] http://www.lyre.de/physapri.pdf, s. a.
Reichenbach, Hans, Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori, https://www.mpiwg-berlin.mpg.de/sites/default/files/Preprints/P331.pdf

Bezugsrahmen ab, zu der die SRT gehört. Extrem schwierig wird die Situation bei der ART, die weder für Zeit noch Raum feste Bezugssysteme akzeptiert und in der die lokale Geometrie wechselseitig beeinflusst wird.[52] Damit insbesondere der Energieerhaltungssatz gilt, müsste die ART als eine kovariante Theorie nachgewiesen sein. Hierbei müssen unendlich dimensionale Lie-Gruppen verwendet werden. Emmy Noether konnte mit äußerst anspruchsvoller Mathematik Erhaltungssätze aus rein logisch begründeten Annahmen entwickeln. Die ART ist dabei nur ein Anwendungsfall des Theorems. Frau Noether konnte allgemein zeigen, dass jede unendlich dimensionale Symmetriegruppe, die von einer beliebigen Funktion in einer kovarianten Theorie abhängig ist, eine physikalische Erhaltungsgröße nach sich ziehen muss.[53] Sie zeigte, dass jede Symmetrie einer Lie-Gruppe in einem physikalischen System, das Koordinatenvariationen wie Orts- oder Zeitunabhängigkeit unterliegt, immer einer Erhaltungsgröße zugeordnet ist. So hat Zeitinvarianz, also die Zeitunabhängigkeit eines physikalischen Experiments, Energieerhaltung zur Folge. Analog ist Impuls- bzw. Drehimpulserhalt Folge der räumlichen Homogenität bzw. der Rotationsinvarianz. Beide Theoreme (bzgl. endlichen wie unendlichen Lie-Gruppen) werden heute als Noether-Theorem bezeichnet und sind sowohl aus der klassischen als auch aus der modernen Physik, wie auch der Quantentheorie, nicht mehr wegzudenken. Sie sind ein Musterbeispiel für a priori Erkenntnisse über die Natur aus rein mathematischer Sicht. Emmy Noether bezeichnete das Theorem als „größtmögliche gruppentheoretische Verallgemeinerung der allgemeinen Relativitätstheorie“[54,55].

Raum bedeutet Trennung von Objekten und damit Unterscheidbarkeit; Zeit oder besser Zeitlichkeit bedeutet Trennung in ein Davor und Danach.[56] Noch deutlicher ist die Situation bei der speziellen Relativitätstheorie an sich. Einstein musste „lediglich“ die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit postulieren. Die Theorie, die unser Weltbild veränderte, konnte dann a priori entwickelt werden. Manche Philosophen sprachen anfangs von physikalischer Zeit oder phänomenologischer Zeit, um den Zeitbegriff Kants nicht in Frage stellen zu

---

[52] John Archibald Wheeler hat diese gegenseitigen Abhängigkeiten so formuliert:
Matter tells space how to curve. Space tells matter how to move.
Das Zitat ist im 1973 erschienenen Standardwerk „Gravitation“, von Charles W. Misner, Kip S. Thorne and John A. Wheeler, S. 5, zu finden. Siehe auch https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitation_(book)
[53] Lars Jaeger, Emmy Noether, S. 109
[54] zitiert nach Lars Jaeger, E. Noether, ebenda, S. 113
[55] E. Noether, Invariante Variationstheorie, Göttinger Mathematische Nachrichten, Mathematisch-Physikalische Klasse (1918), Volume: 1918, page 235-257
[56] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Noether-Theorem

müssen. Aber das löst nicht das Problem. Die gleichmäßig fließende Zeit Kants oder Newtons ist für einen a priori Ansatz nicht geeignet. Aber Zeitlichkeit als Davor und Danach am Ort des Beobachters ist etwas grundsätzlich anderes und nicht mehr weiter reduzierbar. Der Widerspruch zum Kantschen a priori entsteht dadurch, dass das Relativitätsprinzip von Newton oder Galilei nur eine Transformation der räumlichen Koordinaten und nicht der zeitlichen Koordinaten vorsah.

Die gleichen Voraussetzungen, Unterscheidbarkeit und Zeitlichkeit, liegen dem Prinzip der Information zugrunde. Es wird heute in der Physik als ausreichend für eine *vollständige* Theorie der Information als Grundlage der Physik angesehen. Vollständig steht hier für eine allumfassende Dimension von Syntax, Semantik, Pragmatik und Zeitlichkeit.[57] Dies gilt insbesondere für die Quantentheorie, aber auch bei der Frage nach der Entropie oder allgemeiner der Thermodynamik Schwarzer Löcher nach Hawking und Bekenstein. Hier werden Objektsysteme durch Zustandsräume beschrieben und zwar mit einem kleinsten Informationsobjekt, das nur ein zweidimensionaler Zustandsraum darstellt, heute Quantenbit oder Qubit genannt. Es darf nicht mit einem Bit verwechselt werden, das nur 0 und 1 annehmen kann. Zweidimensionaler Zustandsraum bedeutet, dass ein Qubit alle Zustände, sozusagen zwischen „0 und 1“, annehmen kann.

Die Symmetrie eines Quantenbits kann mit der Gruppe SU(2), der speziellen unitären Gruppe der Ordnung 2, topologisch als Ortsraum beschrieben werden. Alle Transformationen auf Basis dieser Gruppe lassen den Gesamtzustand der Welt unverändert. SU(2) spielt, wie oben gesehen, eine große Rolle in der Physik, insbesondere in der Teilchenphysik des Standardmodells.

Der Bezug zum vorliegenden Beitrag ist die Tatsache, dass SU(2) isomorph zur Gruppe der Einheitsquaternionen ist, also den Quaternionen mit dem Betrag $|x|=1$.[58]

Eine vollständige Herleitung des Standardmodells auf diesem Weg mag illusorisch sein. Vor allem bei komplizierten, nur statistisch fassbaren Beschreibungen von Symmetriebrüchen ist es schwer vorstellbar, dass man sie aus der Mathematik der Algebren im Detail ableiten kann. Aber der Gedanke ist

[57] Lyre, Holger, Kann moderne Physik a priori begrundbar sein?
Vortrag auf der Tagung “Was sind und warum gelten Naturgesetze?”, 15.-16. September 1999, ZiF Bielefeld. Erscheint in: Philosophia Naturalis 37 (2000), Heft 2., http://www.lyre.de/physapri.pdf, S. 8
[58] https://de.wikipedia.org/wiki/SU(2)

und bleibt reizvoll, dass sich die Natur im Prinzip algebraisch beschreibbar verhält.

Fazit

Nach einem Satz von A. Hurwitz (1898) kann es nur vier reelle Algebren mit Division geben. Es sind die reellen Zahlen ($\mathbb{R}$), die komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$), die Hamiltonschen Quaternionen ($\mathbb{H}$) und die Cayleyzahlen, die Oktonionen ($\mathbb{O}$). Bei der Untersuchung ihrer algebraischen Eigenschaften stellt man fest, dass kontinuierlich Regelmäßigkeiten verloren gehen. $\mathbb{R}$ ist noch ein geordneter Körper, $\mathbb{C}$ ist zwar ein algebraisch abgeschlossener Körper, dagegen nicht mehr geordnet. Bei $\mathbb{H}$ ist die Multiplikation nicht mehr kommutativ; $\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper. Die Division ist nicht mehr eindeutig. Es gibt eine rechts- und eine linksseitige Lösung. $\mathbb{O}$ verliert dazu noch die Eigenschaft der Assoziativität bei der Multiplikation. Es gilt nur die Alternativität, was immerhin Nullteilerfreiheit bedeutet in dieser quadratischen Algebra. Selbstverständliche, wohlvertraute Gesetze in Verbindung mit einem Matrizenkalkül sind nicht mehr anwendbar. Trotz allem lassen sich, durch das sogenannte Verdoppelungsverfahren, ähnliche mathematische Mechanismen anwenden, die gemeinsame Strukturen aufdecken. Allgemein haben die Algebren der hyperkomplexen Zahlen die moderne Algebra maßgeblich beeinflusst. Vor allem Emmy Noether gebührt das Verdienst, dass sie den Abstraktionsgrad wesentlich erweitert und verfeinert hat.

Anwendungen in der Physik sind für $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ seit langem bekannt. Oktonionen ($\mathbb{O}$) wurden anfangs gemieden, da das Assoziativgesetz nicht gilt. Das änderte sich, seit das „Standardmodell der Teilchenphysik“ in den 1960-er und 1970-er Jahren entwickelt wurde und die erfolgreiche Anwendung von Symmetrien gezeigt hat. Mit der Stringtheorie, der Quantengravitation und Großen vereinheitlichten Theorien gerieten auch die Oktonionen in den Fokus der theoretischen Physik. In den letzten Jahren machten u.a. Forschungen einer jungen kanadischen Wissenschaftlerin auf sich aufmerksam. Es zeigten sich weitere bemerkenswerte Parallelen zwischen Oktonionen bzw. Tensorprodukten, die $\mathbb{O}$ enthalten und dem Standardmodell der Teilchenphysik. Auch wenn es noch keinesfalls sicher ist, dass der Ansatz erfolgversprechend ist, ist es einen Versuch wert. Großes Ziel sind Erkenntnisse über die Welt a priori zu gewinnen, also nur durch die Mathematik bzw. durch logisches Denken, wie es bereits Immanuel Kant in seinem Werk „Kritik der reinen Vernunft“ als „synthetisches Urteil a priori“ versucht hat.

Anhang: Zur Mathematik der Divisionsalgebren

Zunächst sollen sehr detailliert Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Zahlensysteme mit Division mathematisch aufgezeigt werden. Sie erscheinen als Grundlage für das tiefere Verständnis unabdingbar. Die Mathematik der Divisionsalgebren ist dabei wohlbekannt. Der Beitrag erfordert deshalb in diesem Anhang kaum eine eigenständige mathematische Leistung. Stattdessen orientiert er sich in den mathematischen Herleitungen und der Terminologie bei den interessierenden Aspekten der komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$), den Quaternionen ($\mathbb{H}$) und den Oktonionen ($\mathbb{O}$) an einer Buchvorlage von I.L. Kantor und A.S. Solodownikow, die besonders geeignet erschien, mathematische Stringenz und Korrektheit mit behutsamer Ausführlichkeit miteinander zu verbinden.[59] Allerdings wurde statt des Begriffes „Oktave" der ebenfalls oft benutzte Begriff „Oktonion" verwendet, der im Englischen eher gebräuchlich ist. Die Entwicklung nach dem Verdoppelungsverfahren mit den algebraischen Eigenschaften wird mit entsprechenden Beweisen bis zu den Oktonionen dargestellt. Weitere Eigenschaften der verallgemeinerten Hyperkomplexen Zahlen werden mit viel weniger Tiefgang behandelt. Nur ein Bruchteil trägt überhaupt Namen.

Ausgewählte Eigenschaften komplexer Zahlen

Es ist sinnvoll, zunächst einige herausragende Eigenschaften der komplexen Zahlen zu identifizieren und erst dann nach Verallgemeinerungen suchen.

Mit der Erweiterung („Vervollständigung") von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ war der Zahlenstrahl, das Kontinuum, komplett. $\mathbb{R}$ ist zudem vollständig geordnet. Zwei reelle Zahlen sind entweder gleich oder eine ist größer als die andere.

Zwei Prinzipien wurden dabei eingehalten:

- Einbettungsprinzip

Die bisherigen Zahlen sollten in die Erweiterung eingebettet sein. Die neu definierten Zahlen sind also eine Obermenge, die sich algebraisch genauso verhält, wie die „alten" Zahlen.

- Permanenzprinzip

Die Rechenregeln sollen sich nicht wesentlich ändern und vor allem vorhanden sein. Die Erweiterung soll die bisherigen Rechenregeln weitgehend erhalten.

[59] Kantor, Isaĭ L'vovich (I.L.), Solodownikow, Aleksandr Stepanovič (A.S.); Hyperkomplexe Zahlen, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1978. https://mathematikalpha.de/wp-content/uploads/2022/11/Hyperkomplexe_Zahlen.pdf

Bei der Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen trifft dies zu. Komplexe Zahlen haben bekanntlich die Form

$$z = a + bi, \text{ wobei } i \coloneqq \sqrt{-1}, \text{ also } i^2 = -1$$

In den komplexen Zahlen sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und (das ist im Rahmen dieses Beitrags bemerkenswert) auch die Division definiert. Es gilt außerdem das Permanenzprinzip, d.h. die Rechenregeln sind denen der reellen Zahlen analog.

Seien $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ so ist

$$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$$

analog ist die Subtraktion definiert. Da $i^2 = -1$ folgt für die Multiplikation:

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz sowohl bei der Addition/Subtraktion und der Multiplikation gelten. Außerdem gilt das Distributivgesetz:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Damit sind die komplexen Zahlen mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation ein algebraischer Körper. Ihre Menge bezeichnet man als $\mathbb{C}$.

Dazu kommt eine Eigenschaft, die so selbstverständlich erscheint, dass sie leicht übersehen wird, nämlich, dass der absolute Betrag eines Produktes gleich dem Produkt der absoluten Beträge ist:

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|$$

Der Betrag als Funktion ist dabei definiert als der „Abstand“ zur Null. Er ist immer größer/gleich 0 und reell. Er ist Voraussetzung für die Existenz einer Metrik und kann im Begriff mit ihr gleichgesetzt werden. $\mathbb{C}$ ist somit ein metrischer Raum (der Dimension 2).

Der Beweis gelingt am einfachsten mit der konjugiert komplexen Zahl, eine häufig benötigte Definition. Sei $z = a + bi$, dann ist die zu z konjugiert komplexe Zahl definiert als $\bar{z} = a - bi$.

Man beweist leicht, dass $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{a_1 + b_1 \imath + a_2 + b_2 \imath} = \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\imath} = (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i$$
$$= a_1 - b_1 i + a_2 - b_2 i = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

$$\overline{z_1 z_2} = \overline{(a_1 + b_1 \imath)(a_2 + b_2 \imath)} = \overline{a_1 a_2 + a_1 b_2 \imath + b_1 a_2 \imath - b_1 b_2}$$
$$= \overline{(a_1 a_2 - b_1 b_2) + \imath(a_1 b_2 + b_1 a_2)} = a_1 a_2 - b_1 b_2 - a_1 b_2 i - b_1 a_2 i$$
$$= (a_1 - b_1 i)(a_2 - b_2 i) = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Summiert man bzw. multipliziert man z und $\bar{z}$, so erhält man reelle Zahlen

$$z + \bar{z} = a + bi + a - bi = 2a$$

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

Als Betrag von $z = a + bi$ wird definiert: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ und somit ist $z\bar{z} = |z|^2$

Daraus kann man folgern:

$$|z_1 z_2|^2 = (z_1 z_2)\overline{(z_1 z_2)} = z_1 z_2 \overline{z_1}\,\overline{z_2} = z_1 \overline{z_1} \cdot z_2 \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$$

Oder verbalisiert: Der absolute Betrag eines Produktes ist gleich dem absoluten Produkt der einzelnen Beträge.

Es gilt also sowohl $|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$ als auch $|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$

Wenn $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1)i$ so gilt andererseits auch

$$(a_1^2 + b_1^2)(a_2^2 + b_2^2) = (a_1 a_2 - b_1 b_2)^2 + (a_1 b_2 + a_2 b_1)^2$$

Etwas salopp formuliert lautet die Erkenntnis:

> **Das Produkt einer Summe von zwei Quadraten ist wieder eine Summe aus zwei Quadraten.**

Dies ist offenbar ein Merkmal komplexer Zahlen. Die Frage stellt sich, ob eine analoge Beziehung zwischen mehr als zwei Quadraten existiert. Wenn ja, liegt hier ein Ansatzpunkt zur Verallgemeinerung der komplexen Zahlen hin zu hyperkomplexen Zahlen mit höherem Rang (Dimension) mit besonderen algebraischen Eigenschaften.

Es fehlt noch die Diskussion einer plausiblen Division. Dazu werden die eben beschriebenen Zusammenhänge benötigt.

Wieder seien z und $z´$ zwei komplexe Zahlen. Der Quotient x ist die Lösung der Gleichung

$$z \cdot x = z´$$

Beide Seiten der Gleichung werden mit $\bar{z}$ multipliziert.

$$\bar{z} \cdot z \cdot x = \bar{z} \cdot z' \text{ oder } |z|^2 x = \bar{z} \cdot z'$$

$$\text{Der Quotient } x = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} z'$$

Beispiele:
$z' = 1 - i,\ z = 1 + i,\ \frac{z'}{z} = \frac{1}{1+1}(1 - i)(1 - i) = \frac{1}{2}(1 - 2i - 1) = -\frac{2i}{2} = -i$

$z' = 5 - i, z = 2 - 3i,\ \frac{z'}{z} = \frac{1}{2^2+3^2}(2 + 3i)(5 - i) = \frac{1}{13}(13 + 13i) = 1 + i$

Alternative Arithmetiken zu komplexen Zahlen

Mit den komplexen Zahlen liegt ein Zahlensystem vor, das die Form a+b·K hat. Aber muss K zwingend K²= $i^2 = -1$ sein?

Einige Überlegungen zur plausiblen und widerspruchsfreien Addition und Multiplikation zeigen, dass es nicht unendlich viele Möglichkeiten für K geben kann. Sie reduzieren sich auf genau drei Fälle:[60]

Komplexe Zahlen $a + bJ, J^2 = -1$
Binäre Zahlen $a + bE, E^2 = +1$ (auch als geteilte komplexe Zahlen bezeichnet)
Duale Zahlen $a + b\Omega, \Omega^2 = 0$, (Binär und dual sind nicht zu verwechseln mit reellen Zahlen zur Basis 2 in der Informatik).

Doch im Gegensatz zu den komplexen Zahlen spielen binäre und duale „Zahlen“ eine untergeordnete Rolle in der Mathematik und kaum eine Rolle in ihren Anwendungen. Insbesondere ist es in der Regel nicht möglich, zwei binäre oder zwei duale Zahlen zu dividieren. Es genügt für den Beweis dieser Behauptung Gegenbeispiele zu zeigen. Dabei bedeutet „Division“ Lösung der Gleichung

$$z_2 x = z_1, (z_2 \neq 0)$$

Binäre Zahlen: Sei $z_1 = 1\ (\text{d.h.} 1 + 0E),\quad z_2 = 1 + E$, multipliziere beide Seiten mit $1 - E$:

$(1 + E)x = 1 + 0E$ ➔ $(1 + E)(1 - E)x = (1 + 0E)(1 - E)$

➔ 0= $1 - E$, also eine widersprüchliche, unrichtige Gleichung.

Im System der dualen Zahlen kann man z.B. nicht 1 durch 2 dividieren.

[60] Beweis https://wikigerman.edu.vn/wiki36/Tessarin2021/07/10/hyperkomplexe-zahl-wikipedia/

Gibt es hyperkomplexe Zahlen der Dimension 3?

Es ist naheliegend, die 2-dimensionalen, komplexen Zahlen um eine weitere Dimension zu erweitern.[61] Zahlen hätten dann die Form

$$z = a + bi + cj$$

a, b, c sollen reell sein und i bzw. j sind noch zu definieren. Zunächst muss eine plausible Additionsregel gelten. Es bietet sich an:

$$(a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j$$

Nach dem Einbettungsprinzip sollte gelten:

$$(a + 0i + 0j)(a' + 0i + 0j) = aa' + 0i + 0j$$

d.h. zumindest die reellen Zahlen sind „eingebettet“.

Weiterhin sollte gelten

1) Für $l = l + 0i + 0j \; und \; z = a + bi + cj$ ist
   $zl = la + lbi + lcj$
2) $(az_1)(bz_2) = (ab)(z_1z_2)$ für $a, b \in \mathbb{R}$
3) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ und $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$
   Also das rechtsseitige und linksseitige Distributivgesetz sollte gelten.

Folgendes Multiplikationsgesetz bietet sich theoretisch an:

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = aa' + (ab' + ba')i + (ac' + ca')j$$

Es würden sogar das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz gelten $(z_1z_2) = (z_2z_1)$ und $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

Jedoch existiert keine Division, denn für 1 geteilt durch i, also für

$$(0 + i + 0j)x = 1 + 0i + 0j$$

gibt es prinzipiell keine Lösung für x und das gilt auch für andere Multiplikationsregeln, die die plausiblen Forderungen 1) – 3) erfüllen würden. Man findet immer ein Zahlenpaar $z_1, z_2, \quad (z_2 \neq 0)$, für die die Divisionsgleichung für x nicht lösbar ist.

D.h. den theoretisch möglichen hyperkomplexen Zahlen der Dimension 3 fehlt prinzipiell die Grundrechenregel für die Division.

[61] Argumentation nach I.L. Kantor, A.S. Solodownikow, Hyperkomplexe Zahlen, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1978. S. 12f

Eine andere Argumentation zielt darauf ab, dass es eine $\mathbb{R}$-lineare Multiplikation im $\mathbb{R}^3$ aller reellen Tripel (α, β, γ) nicht geben kann, die die Multiplikation von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ der Paare (α, β) ins 3-dimensionale fortsetzt.

Sei $e \coloneqq (1,0,0), i \coloneqq (0,1,0), j \coloneqq (0,0,1)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$, so müsste gelten $ij \coloneqq \rho e + \sigma i + \tau j$. Man unterstellt

$i^2 = -e$ und $i(ij) = (ii)j = -j$ Daraus folgt:

$$-j = \rho i - \sigma e + \tau ij = \rho i - \sigma e + \tau(\rho e + \sigma i + \tau j) = (\tau\rho - \sigma)e + (\tau\sigma + \rho)i + \tau^2 j$$

Da e, i, j linear unabhängig sind, muss $\tau^2 = -1$ sein, das bedeutet aber, dass $\tau \notin \mathbb{R}$.

Allgemeiner gilt: Jede reelle Divisionsalgebra $\mathscr{A}$ ungerader Dimension mit Einselement e ist isomorph zu $\mathbb{R}$, hat also die Dimension 1.

Sir Hamilton hat jahrelang versucht, für reelle Tripel plausible Rechenregeln zu finden. Er schreibt 1865 an seinen Sohn: *„Every morning, on my coming down to breakfast, you used to ask me: ´Well, Papa, can you multiply triplets?´ Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake oft he head: ´No, I can only add and subtract them.´*“[62]

Quaternionen

Die Überlegungen zu 3-dimensionalen Verallgemeinerungen hat also auch Sir William Rowan Hamilton angestellt bevor er zu Zahlen der Form

$$a + bi + cj + dk$$

überging. Ihm zu Ehren wird ihre Menge mit $\mathbb{H}$ (Hamilton-Zahlen) bezeichnet. Die Addition folgt einem erwarteten Gesetz:

$$(a + bi + cj + dk) + (a' + b'i + c'j + d'k)$$
$$= (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k$$

Die Legende erzählt, dass Hamilton das Multiplikationsgesetz bei einem Spaziergang einfiel. Er hat auf einer Steintafel an der Broom-Bridge in Dublin die Definition/Multiplikationsregeln einmeißeln lassen.

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j$$

[62] Math. Papers 3, p. XV, Beweis und Zitat nach Ebbinghaus Heinz-Dieter, et. al., Zahlen, Springer-Lehrbuch, 3. Auflage (1983, 1988, 1992), Berlin Heidelberg New York, S. 155, Autoren M. Koecher, R. Remmert

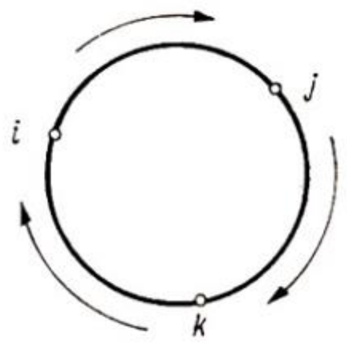

Abb. 6: Merkhilfe für die Multiplikationsregeln

Multipliziert man zwei Zahlen aus dem Tripel i, j und k im Uhrzeigersinn, so ergibt sich die dritte Zahl. Multipliziert man gegen den Uhrzeigersinn, so ergibt sich die dritte Zahl mit negativem Vorzeichen.

Man sieht, bzgl. der Multiplikation ist das Kommutativgesetz nicht erfüllt, da das Ergebnis von der Reihenfolge der Faktoren abhängt.

Trotzdem soll ein Multiplikationsgesetz gesucht werden, das die Regeln der drei Forderungen auch in der 4. Dimension erfüllt und die Definitionen der Multiplikationstafel anwendet.

Forderungen:

1) Für $l = l + 0i + 0j + 0k \; und \; q = a + bi + cj + dk$ ist
$lq = la + lbi + lcj + ldk$
2) $(aq_1)(bq_2) = (ab)(q_1q_2)$ für $a, b \in \mathbb{R}$
3) $q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3$ und $(q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3$

Also das rechtsseitige und linksseitige Distributivgesetz soll gelten.

Man erhält eine Summe multipliziert mit einer Summe unter Berücksichtigung der Regeln und des Distributivgesetzes:

$$\begin{aligned} qq' = {} & aa' + a(b'i) + a(c'j) + a(d'k) + (bi)a' + (bi)(b'i) + (bi)(c'j) + (bi)(d'k) \\ & + (cj)a' + (cj)(b'i) + (cj)(d'k) + (dk)a' + (dk)(b'i) + (dk)(c'j) \\ & + (dk)(d'k) \end{aligned}$$

Durch Umformen unter Berücksichtigung der Forderungen 1) und 2) und den Definitionen der Multiplikationstafel (z.B. $(bi)(c'j) = bc'(ij) = bc'k$) erhält man

$$\begin{aligned} qq' = {} & (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i \\ & + (ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k \end{aligned}$$

Für die Dirac-Gleichung kann man als Zahlbereichserweiterung der komplexen Zahlen die Quaternionen nutzen. Heute wird meist eine Formulierung mit Pauli-Matrizen gewählt, die aber die gleiche algebraische Struktur wie die Quaternionen haben.

Assoziativgesetz für die Multiplikation der Quaternionen

Behauptung: $(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3)$

Jede Quaternion q_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ ist eine Summe von 4 Summanden der Form

$$q_\alpha = a_\alpha + b_\alpha i + c_\alpha j + d_\alpha k$$

Die linke Seite der Behauptung ist somit eine Summe von 4x4x4=64 Summanden der Form $(u_1 u_2)u_3$.

u_1 ist beliebig einer der vier Summanden von q_1
u_2 ist beliebig einer der vier Summanden von q_2
u_3 ist beliebig einer der vier Summanden von q_3

Analog ist die rechte Seite der Behauptung somit eine Summe von 4x4x4=64 Summanden der Form $u_1(u_2 u_3)$.

In einer Fallunterscheidung lassen sich die entsprechenden Terme vergleichen. Falls $q_1, q_2\ oder\ q_3 = 1$ sind, ist der Beweis leicht. Bei den Übrigen kann man die Zahlenfaktoren $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ weglassen, da sie bei q_1, q_2, q_3 gleich sind. Es bleiben 27 Gleichungen zu überprüfen, die sich auf die Assoziativität der imaginären Einheiten beziehen, also z.B.

$$(ii)i = i(ii),\ \ (ii)j = i(ij),\ \ \ (ij)k = i(jk) \qquad \text{etc.}$$

Bei Quaternionen gilt also das Assoziativgesetz $(q_1 q_2)q_3 = q_1(q_2 q_3)$

Hinweis: Eleganter und ohne Fallunterscheidungen ist der Beweis, wenn man über die Matrixalgebra $\mathscr{H}$ und den Isomorphismus F: $\mathbb{H} \to \mathscr{H}$ geht. Die Menge $\mathscr{C}$ aller reellen 2 x 2 Matrizen $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ist eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von Mat(2, $\mathbb{R}$)[63], die Abbildung $\alpha + \beta i \longmapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ist ein $\mathbb{R}$-Algebra-Isomorphismus $\mathbb{C} \to \mathscr{C}$ Man zeigt, dass die Menge $\mathscr{H}$ eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von Mat(2, $\mathbb{C}$) mit Einselement E:=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.
Jede Matrix $A = \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \overline{w} \end{pmatrix} \in \mathscr{H},\ \ w, z \in \mathbb{C}$ genügt über $\mathbb{R}$ der Gleichung:

$A^2 - (\mathrm{Spur}\, A)\, A + (\det A)E = 0$ mit $Spur\ A = 2\ Re\ w, \det A = |w|^2 + |z|^2$

Damit ist $\mathscr{H}$ eine 4-dimensionale, assoziative Divisionsalgebra.

Diese Gleichung wird als Satz von Cayley bzw. Hamilton-Cayley für den Spezialfall 2 x 2 Matrizen bezeichnet.

Konjugierte Quaternionen

Analog zu den komplexen Zahlen hilft die Definition von konjugierten Quaternionen.
Gegeben sei die Quaternion

$$q = a + bi + cj + dk$$

[63] Dem Ring der 2 x 2 – Matrizen über $\mathbb{R}$

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

nennt man zu q konjugiert. Die Summe von q und $\bar{q}$ ist damit eine reelle Zahl.

Das gilt aber auch für das Produkt $q\bar{q}$.

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Analog zu den komplexen Zahlen soll definiert werden: Der absolute Betrag von q soll mit $|q|$ bezeichnet werden und

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Damit ist $\qquad q\bar{q} = |q|^2$

Bemerkenswert ist folgende Tatsache: Sei $q' = bi + cj + dk$ rein imaginär.

Dann folgt $q'^2 = -(b^2 + c^2 + d^2) \leq 0$.

Umgekehrt ist ein Quaternion genau dann rein imaginär, wenn ihr Quadrat eine reelle Zahl ≤ 0 ist.

Division bei den Quaternionen

Bei den komplexen Zahlen wird die Division als Lösung der Gleichung

$$z_2 x = z_1$$

bezeichnet.

Bei den Quaternionen hängt aber das Produkt von der Reihenfolge der Faktoren ab. Man muss also zwei Gleichungen betrachten:

$$q_2 x = q_1 \qquad \text{und} \qquad x q_2 = q_1$$

Die Lösung links möge x_l heißen; die Lösung rechts möge x_r heißen. Bei den komplexen Zahlen sind die Lösungen gleich.

Wie im Komplexen wird von links mit der konjugierten Quaternion $\overline{q_2}$ und dann mit $\frac{1}{|q_2|^2}$ multipliziert. Man erhält

$$x = \frac{1}{|q_2|^2}\overline{q_2}q_1$$

Einsetzen in die linke Gleichung zeigt

$$x_l = \frac{1}{|q_2|^2}\overline{q_2}q_1$$

Analog findet man für die rechte Gleichung

$$x_r = \frac{1}{|q_2|^2} q_1 \overline{q_2}$$

Beispiel:
$$q_1 = 1 - k$$
$$q_2 = 1 + i + j + k$$

$$x_l = \frac{1}{\left|\sqrt{4}\right|^2}(1 - i - j - k)(1 - k)$$
$$= \tfrac{1}{4}(1 - k - i + ik - j + jk - k + k^2)$$
$$= \frac{1}{4}(1 - k - i - j - j + i - k - 1)$$
$$= \frac{1}{4}(-2k - 2j)$$

$$x_r = \frac{1}{\left|\sqrt{4}\right|^2}(1 - k)(1 - i - j - k)$$
$$= (1 - i - j - k - k + ki + kj + k^2)$$
$$= \frac{1}{4}(1 - i - j - k - k + j - i - 1)$$
$$= \frac{1}{4}(-2i - 2k)$$

Bei den Quaternionen gilt also auch für die Multiplikation das Assoziativgesetz und sie sind ein System mit Division, die allerdings zwischen linksseitiger und rechtsseitiger Division unterscheidet.

Weiterhin ist die wichtige Eigenschaft als Voraussetzung für eine Metrik gegeben: Der absolute Betrag eines Produktes ist gleich dem Produkt der absoluten Beträge. Der Beweis soll analog zu den komplexen Zahlen mit Hilfe der konjugierten Quaternionen geführt werden.

Zur Erinnerung: Die Definition ist analog zu $\mathbb{C}$:

Sei $q = a + bi + cj + dk$ dann wird
$\overline{q} = a - bi - cj - dk$ konjugiert zu q genannt.

$q + \overline{q}$ ist somit reell.

Auch das Produkt ist reell:

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Analog zu $\mathbb{C}$ soll $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ der absolute Betrag |q| von q heißen.

d.h. $q\bar{q} = |q|^2$

Es ist offensichtlich, dass

$$\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2} \qquad \text{und}$$

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$$

In $\mathbb{C}$ gelten die gleichen Gleichungen, aber durch die Kommutativität der Multiplikation ist $\overline{z_2}\,\overline{z_1} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$, doch das ist bei $\mathbb{H}$ zunächst nicht gewährleistet.

Mit Hilfe der Multiplikationsregeln lassen sich jedoch alle Fälle leicht überprüfen. So ist

$\overline{\imath\imath} = \overline{\jmath\jmath} = \overline{kk} = \overline{-1} = -1$ und andererseits z.B. $\bar{\imath}\bar{\imath} = (-i)(-i) = i^2 = -1$

$\overline{jk} = -\bar{\imath} = i$ und andererseits $\bar{\jmath}\bar{k} = (-j)(-k) = +jk = i$

Das Kommutativgesetz gilt nicht für die Multiplikation

Es wird sich zeigen, dass

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$$

Bei den Quadraten der Absolutbeträge genügt jedoch die Assoziativität für die Multiplikation der Quaternionen:

$$|q_1 q_2|^2 = (q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2}) = (q_1 q_2)(\overline{q_2}\,\overline{q_1}) = q_1(q_2\overline{q_2})\overline{q_1} = |q_1|^2|q_2|^2$$

Identität für vier Quadrate

Seien $q_1 = a + bi + cj + dk$ und $q_2 = a' + b'i + c'j + d'k$

Dann lässt sich die oben hergeleitete Beziehung

$$|q_1 q_2|^2 = |q_1|^2|q_2|^2$$

ausführlich in folgender Form schreiben. Dazu erinnere man sich an die Begründung des Multiplikationsgesetzes für Quaternionen:

$$qq' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i$$
$$+(ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k$$

Dies wird analog für $q_1 q_2$ angewendet (von rechts nach links gelesen):

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) =$$

$$(aa' - bb' - cc' - dd')^2 + (ab' + ba' + cd' - dc')^2$$

$$+(ac + ca' + db' - ba')^2 + (ad' + da' + bc' - cb')^2$$

Man erinnere sich, dass bei komplexen Zahlen

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

mit $z_1 = a + bi$ und $z_2 = a' + b'i$

sich eine analoge Identität mit zwei Quadraten ergeben hat:

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2$$

Um es deutlich zu machen:

In $\mathbb{C}$: Das Produkt einer Summe von zwei Quadraten mit einer Summe von zwei Quadraten ist wieder eine Summe von zwei Quadraten.

In $\mathbb{H}$: Das Produkt einer Summe von vier Quadraten mit einer Summe von vier Quadraten ist wieder eine Summe von vier Quadraten.

Es stellt sich die Frage, für welche n ist eine solche Aussage möglich?

Für n=1 ist $a^2 b^2 = (ab)^2$ und damit die Aussage trivial.

Für n=2 ist es bei den komplexen Zahlen und für n=4 bei den Quaternionen bewiesen.

Doch wie sieht die Situation bei $n = 3$, $n = 5$, $n = 6$, usw. aus?

Diese Frage wurde im Jahr 1898 von Adolf Hurwitz (1859 – 1919) beantwortet. Er bewies, dass für den infrage kommenden Typ von Zahlen dies nur für

$$n = 1, 2, 4, 8$$

möglich und für alle anderen n unmöglich ist.

Definition der Quaternionen über komplexe Zahlen

Eine beliebige Quaternion hat die Form $q = a + bi + cj + dk$

Da $ij = k$; kann man q auch schreiben als

$q = (a + bi) + (c + di)j$ oder $q = z_1 + z_2 j$

mit $z_1 = a + bi\ und\ z_2 = c + di$

Sei nun r ein weiteres Quaternion der Form

$$r = w_1 + w_2 j$$

Multiplikation von q mit r ergibt:

$$qr = (z_1 + z_2 i)(w_1 + w_2 j) = z_1 w_1 + z_1(w_2 j) + (z_2 j)w_1 + (z_2 j)(w_2 j)$$

$$= z_1 w_1 + z_1 w_2 j + z_2 j w_1 + z_2 j w_2 j \qquad (1)$$

Die Multiplikation der Quaternionen ist assoziativ, deshalb kann man die Klammern weglassen.

Da $ij = -ji$ ist, gilt $(a + bi)j = j(a - bi)$ d.h.

$$zj = j\bar{z}$$

Man sieht leicht, dass z und w der Form $a + bi$ kommutativ sind, d.h.

$$zw = wz$$

Unter Berücksichtigung der Konjugierten und dieser Kommutativität kann man abkürzend im Ausdruck (1) sagen, dass

$z_1 w_2 j = w_2 z_1 j$ und $z_2 j w_1 = z_2 \overline{w_1} j$ sowie $z_2 j w_2 j = z_2 \overline{w_2} j^2 = -\overline{w_2} z_2$

Dadurch bekommt das Multiplikationsgesetz von Quaternionen eine andere Darstellungsform:

$$qr = (z_1 w_1 - \overline{w_2} z_2) + (w_2 z_1 + z_2 \overline{w_1}) j$$

Bei einem Quaternion der Form $q = z_1 + z_2 j$ kann man also z_1 und z_2 als komplexe Zahlen ansehen, wobei $j^2 = i^2 = -1$ ist.

Verdoppelung und Oktonionen

Im Prinzip lassen sich über die Quaternionen hinaus beliebige hyperkomplexe Systeme definieren. Ein hyperkomplexes System $\mathscr{U}$ sei dann allgemein gegeben durch

$$u = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n$$

Allerdings zeigt sich, wie beim Übergang von $\mathbb{C}$ zu $\mathbb{H}$, dass in der Regel zum Teil erhebliche Abstriche an den algebraischen Eigenschaften gemacht werden müssen. Auf diese soll hier im Detail nicht eingegangen werden. Der entsprechende Beweis von A. Hurwitz lässt aber die Vermutung zu, dass im Fall $n = 8$ interessante Eigenschaften zu erwarten sind. Doch ähnlich wie der Übergang vom zweidimensionalen $\mathbb{C}$ zu dreidimensionalen Zahlen mathematisch sinnlos war, so hat die Verdoppelung der Dimension von $\mathbb{C}$ zu $\mathbb{H}$ die Quaternionen sinnvoll gemacht, also ein Zahlensystem, das sogar die Division ermöglicht. Wenn man bei der Argumentation nicht über den Dimensionsbegriff gehen möchte, so ist das Ziel dieses Abschnitts die Verdoppelung des Systems der Quaternionen zu einem Zahlensystem, genannt Oktonionen (in Deutsch oft Oktaven).

Oktonionen sind also definiert als

$$q_1 + q_2 e$$

mit beliebigen Quaternionen q_1 und q_2. Diesen Weg beschritt John Graves, ein mit Hamilton befreundeter Anwalt, der in einem Brief 1843 an Hamilton zeigte, dass Paare von Quaternionen Oktonionen bilden. Unabhängig davon veröffentlichte Arthur Cayley sie als Erster. Deshalb werden sie oft auch Cayley-Zahlen genannt.

Es geht nun darum, das folgende Multiplikationsgesetz zu begründen und zu untersuchen, wie die Oktonionen mit der Darstellung in Form von 8 Summanden verknüpft ist:

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$$

Das bedeutet, es muss die sinnvolle Multiplikationstafel für die imaginären Einheiten $i_1, i_2, \dots, i_7$ gefunden werden. Das Multiplikationsgesetz hat die Form

$$(q_1 + q_2 e)(r_1 + r_2 e) = (q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})e$$

Aus dem Ansatz der Verdoppelung heraus, sei

$q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ und $q_2 = a_4 + a_5 i + a_6 j + a_7 k$. Zur Verdeutlichung und Unterscheidung soll die Schreibweise gewählt werden:

$$a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK$$

a,b,c,d,A,B,C,D entsprechen den früheren $a_0, a_1, \dots, a_7$ und i,j,k,E,I,J,K stehen nun für die „imaginären Einheiten“ $i_1, i_2, \dots, i_7$. Mit den neuen Bezeichnungen werden die Quaternionen q_1 und q_2 zu

$q_1 = a + bi + cj + dk$ und $q_2 = A + Bi + Cj + Dk$

Aus dem so gewählten Multiplikationsgesetz folgt durch fallweise Überprüfung, dass die Multiplikationstafel, wie erhofft, den Quaternionen entspricht:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j$$

Dies sind 9 Gleichungen von insgesamt 7 Einheiten, also 7x7=49 paarweisen Produkten. Man findet 7 Triaden („Dreierpärchen“):

			I	J	-k	i	E	I
i	j	k	I	-j	K	j	E	J
			-i	J	K	k	E	K

Die Multiplikationstafel kann man folgendermaßen erläutern: Mit α, β, γ soll eine beliebige der 7 Triaden bezeichnet werden. Dabei ist die Reihenfolge relevant. Dann ist

$$\alpha^2 = -1, \quad \beta^2 = -1, \quad \gamma^2 = -1$$

$$\alpha\beta = \gamma, \qquad \beta\alpha = -\gamma, \qquad \beta\gamma = \alpha, \qquad \gamma\beta = -\alpha, \qquad \gamma\alpha = \beta, \qquad \alpha\gamma = -\beta$$

analog zu i, j, k bei den Quaternionen.

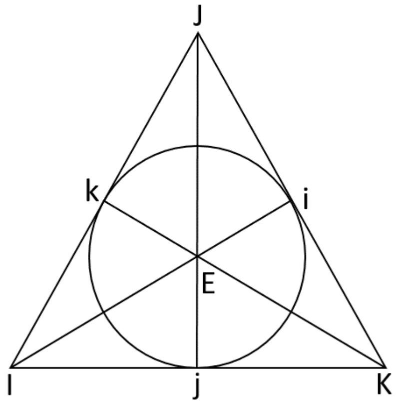

Abb. 7: Illustration der Multiplikationsregeln

Die Abbildung illustriert mit Hilfe eines Dreiecks mit den Ecken I, J, K und den Schnittpunkten der Winkelhalbierenden i, j, k die Multiplikationsregeln. Der Mittelpunkt des Inkreises / Schnittpunkt der Winkelhalbierenden wird durch E markiert. Auf jeder Geraden befinden sich drei „imaginäre Einheiten". Der Inkreis wird symbolisch als „Gerade" betrachtet; auf ihm liegen i, j, k. Die Abbildung enthält also 7 „Geraden", auf denen je drei Einheiten liegen. Um das Produkt zweier Einheiten zu ermitteln, muss man sich die Gerade anschauen, auf der die Einheiten liegen. Das Produkt ist die dritte Einheit, entweder positiv oder negativ, gemäß der entsprechenden Triade.

Die Multiplikationstafel konventionell dargestellt:

$$i^2 = j^2 = k^2 = E^2 = I^2 = J^2 = K^2$$

i = jk = EI = KJ = −kj = −IE = −JK
j = ki = EJ = IK = −ik = −JE = −KI
k = ij = EK = JI = −ji = −KE = −IJ
E = Ii = Jj = Kk = −iI = −jJ = −kK
I = iE = Kj = kJ = −Ei = −jK = −Jk
J = jE = iK = Ik = −Ej = −Ki = −kI
K = Ji = jI = kE = −iJ = −Ij = −Ek

Die Konjugation im System der Oktonionen und absoluter Betrag

Die Definition der Konjugation erfolgt ganz analog zu $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$:

$$u = a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK$$

$$\bar{u} = a - bi - cj - dk - AE - BI - CJ - DK$$

$\bar{u}$ nennt man zu u konjugiert.

Eine kürzere Darstellungsform ist $u = q_1 + q_2 e$ mit

$$q_1 = a + bi + cj + dk \quad \text{und} \quad q_2 = A + Bi + Cj + Dk$$

Für das konjugierte Oktonion erhält man

$$\bar{u} = \overline{q_1} - q_2 e$$

Produkt zwischen einem Oktonion und ihre konjugierten Oktonion:

$$u\bar{u} = (q_1 + q_2 e)(\overline{q_1} - q_2 e) = (q_1\overline{q_1} + \overline{q_2}q_2) + (-q_2 q_1 + q_2 q_1)e$$

Wie bei den komplexen Zahlen oder den Quaternionen ist dies eine reelle Zahl, (genauer: ein Oktonion der Form $a + 0i + 0j + 0k + 0E + 0I + 0J + 0K$).

Für Quaternionen gilt $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$. Daraus folgt

$$u\bar{u} = q_1\overline{q_1} + |q_2\overline{q_2} = |q_1|^2 + |q_2|^2$$

Die Quadratwurzel $\sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2}$ wird absoluter Betrag bzw. Norm des Oktonion u genannt. Für ein Oktonion u ist somit das Quadrat ihres absoluten Betrages gleich

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2$$

Nach Definition des absoluten Betrags ist

$$u\bar{u} = |u|^2$$

aber auch

$$\bar{u}u = |u|^2$$

da der absolute Betrag von u gleich dem absoluten Betrag von $\bar{u}$ ist.

Absoluter Betrag eines Produktes von Oktonionen

Es finden sich weitere Gemeinsamkeiten zwischen Oktonionen, Quaternionen und komplexen Zahlen. So ist

$$|uv| = |u||v|$$

Das ist äquivalent zu

$$|uv|^2 = |u|^2|v|^2$$

Beweis durch Einzelberechnung von $|uv|^2$ und $|u|^2|v|^2$:

Sei $\quad u = q_1 + q_2 e \qquad$ und $\qquad v = r_1 + r_2 e$

$$uv = (q_1 + q_2 e)(r_1 + r_2 e) = (q_1 r_2 - \overline{r_2} q_2) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})e$$

Wegen $u\bar{u} = |q_1|^2 + |q_2|^2$ und der Konjugation folgt

$$|uv|^2 = (q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2)(\overline{q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2}) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})(\overline{r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1}})$$

$$|uv|^2 = (q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2)(\overline{r_1 q_1} - \overline{q_2} r_2) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})(\overline{q_1 r_2} + r_1 \overline{q_2})$$

Andererseits gilt

$$|u|^2|v|^2 = (q_1 \overline{q_1} + q_2 \overline{q_2})(r_1 \overline{r_1} + r_2 \overline{r_2})$$

Vergleicht man beide Ausdrücke, so stellt man fest, dass sie sich durch die Summe S der vier Summanden

$$S = r_2 q_1 r_1 \overline{q_2} + q_2 \overline{r_1 q_1 r_2} - q_1 r_1 \overline{q_2} r_2 - \overline{r_2} q_2 \overline{r_1 q_1}$$

Es bleibt zu beweisen, dass für jeweils vier Quaternionen q_1, q_2, r_1, r_2 immer $S = 0$ ist.

Für den Fall, dass $r_2 \in \mathbb{R}$ ist $S = 0$, da dann $r_2 = \overline{r_2}$ und sich dann alle Summanden aufheben.

Wenn r_2 eine rein imaginäre Quaternion ist (d.h. $\overline{r_2} = -\overline{r_2}$), so erhält man

$$S = r_2(q_1 r_1 \overline{q_2} + q_2 \overline{r_1 q_1}) - (q_1 r_1 \overline{q_2} + q_2 \overline{r_1 q_1}) r_2$$

Unabhängig von r_2 ist aber auch der Ausdruck in Klammern wieder selbst die Summe zweier konjugierter Quaternionen und somit reell. Er soll mit c bezeichnet werden. Dann ist $S = r_2 c - c r_2 = 0$.

Wenn aber S für $r_2 = a$ und $r_2 = b$ gleich 0 ist, so verschwindet er auch für $r_2 = a + b$.

Da jede Quaternion sich als Summe einer reellen Zahl und einer rein imaginären Quaternion darstellen lässt und für beide Summanden $S = 0$ ist, so ist immer $S = 0$. Somit ist bewiesen, dass

$$|uv|^2 = |u|^2|v|^2$$

und damit

$$|uv| = |u||v|$$

Identität für acht Quadrate

Wieder beginnt man, wie bei $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$, mit der Gleichung

$$|uv|^2 = |u|^2|v|^2$$

Gegeben seien u, v zwei Oktonionen (Elemente aus $\mathbb{O}$):

$$u = a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK$$

$$v = a' + b'i + c'j + d'k + A'E + B'I + C'J + D'K$$

und $uv = \Phi_0 + \Phi_1 i + \Phi_2 j + \Phi_3 k + \Phi_4 E + \Phi_5 I + \Phi_6 J + \Phi_7 K$

Dann nimmt die Ausgangsgleichung die Form an

$$(a^2 + \cdots + D^2)(a'^2 + \cdots + D'^2) = \Phi_0^2 + \Phi_1^2 + \cdots + \Phi_7^2$$

Mit Hilfe des Multiplikationsgesetzes der Oktonionen kann man, (wenn auch mühsam), $\Phi_0, \Phi_{1,} \dots, \Phi_7$ durch die gewohnten Ausdrücke mit $a, \dots, D$ $bzw.$ $a', \dots, D'$ ersetzen. Man erhält:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \cdot$$

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 + A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2)$$

$$= (aa' - bb' - cc' - dd' - AA' - BB' - CC' - DD')^2$$

$$+(ab' + ba' + cd' + dc' - A'B + B'A + C'D - D'C)^2$$

$$+(ac' + ca' - bd' + db' - A'C + C'A - B'D + D'B)^2$$

$$+(ad' + da' + bc' + cb' - A'D + D'A + B'C - C'B)^2$$

$$+(A'a - B'b - C'c - D'd + Aa' + Bb' + Cc' + Dd')^2$$

$$+(A'b + B'a + C'd - D'c - Ab' + Ba' - Cd' + Dc')^2$$

$$+(A'c + C'a - B'd + D'b - Ac' + Ca' + Bd' - Db')^2$$

$$+(A'd + D'a + B'c - C'b - Ad' + Da' - Bc' + Cb')^2$$

Somit hat man das Ergebnis, das den Satz von Hurwitz bestätigt:

In $\mathbb{C}$: Das Produkt einer Summe von zwei Quadraten mit einer Summe von zwei Quadraten ist wieder eine Summe von zwei Quadraten.

In $\mathbb{H}$: Das Produkt einer Summe von vier Quadraten mit einer Summe von vier Quadraten ist wieder eine Summe von vier Quadraten.

In $\mathbb{O}$: Das Produkt einer Summe von acht Quadraten mit einer Summe von acht Quadraten ist wieder eine Summe von acht Quadraten.

Tatsächlich hat die Identität von acht Quadraten den Entdecker der Oktonionen (oder auf Deutsch Oktaven), A. Cayley, auf die Spur gebracht. So wie die (reellen) Quaternionen oft auch Hamilton-Zahlen genannt werden, so spricht man bei den (reellen) Oktonionen manchmal von Cayley-Zahlen (nach Arthur Cayley, 1821 – 1895).

Nichtassoziativität der Multiplikation; Alternativität

Bei allen Ähnlichkeiten der komplexen und hyperkomplexen Zahlen mit n =2, 4 und 8 mit nicht selbstverständlichen algebraischen Eigenschaften, gibt es doch weniger Symmetrien, verglichen mit den Körperaxiomen, die die komplexen Zahlen erfüllen. So ist die Multiplikation in der Regel nicht assoziativ. Damit bilden die Oktonionen weder einen Körper noch einen Schiefkörper, wie die Quaternionen.

So ist $E(ji) = -Ek = K$ aber $(Ej)i = -Ji = -K$

oder $(ij)E = kE = K$ aber $i(jE) = iJ = -K$

Das heißt aber nicht, dass es keine Regelmäßigkeiten gibt. Man kann nur sagen, wie die Beispiele zeigen, dass für Oktonionen u, v, w in der Regel gilt:

$$(uv)w \neq u(vw)$$

Allerdings kann man beweisen, dass folgende beiden Formeln gelten:

$$(uv)v = u(vv) \quad \text{bzw.} \quad v(vu) = (vv)u$$

Man kann dies als abgeschwächte Form der Assoziativität sehen. Man nennt sie Alternativität. Zum Beweis lässt sich folgende Beziehung ausnützen.

Dies entspricht nämlich

$$(uv)\bar{v} = u(v\bar{v}) \quad \text{bzw.} \quad \bar{v}(vu) = (\bar{v}v)u$$

Man kann v durch $-v + 2a$ ersetzen, wobei a der Realteil des Oktonion v ist.

Es sei $u = q_1 + q_2 e$ und $v = r_1 + r_2 e$

$$(uv)\bar{v} = ((q_1 + q_2 e)(r_1 + r_2 e))(\overline{r_1} - r_2 e)$$

$$= \big((q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2)\overline{r_1} + \overline{r_2}(r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})\big) + \big((-r_2)(q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1}) r_1\big)e$$

$$= (|r_1|^2 + |r_2|^2) q_1 + (|r_1|^2 + |r_2|^2) q_2 e$$

$$= (|r_1|^2 + |r_2|^2)(q_1 + q_2 e$$

$$= |v|^2 u$$

Andererseits ist $|v\bar{v}| = |v|^2$

Insgesamt gilt deshalb

$$u(v\bar{v}) = |v|^2 u$$

Analog beweist man die zweite Formel.

Oktonionen und Division

Es soll nun die Division bei den Oktonionen untersucht werden. Nachdem bei den Quaternionen eine links- und eine rechtsseitige Lösung existiert, muss man bei den Oktonionen ebenfalls mit Nicht-Eindeutigkeit rechnen.

Seien u , v beliebige Oktonionen.

Der linke Quotient u durch v sei die Lösung der Gleichung

$$vx = u$$

Der rechte Quotient u durch v sei die Lösung der Gleichung

$$xv = u$$

Es soll wie bei den Quaternionen verfahren werden, zunächst linksseitig:

$$\bar{v}(vx) = \bar{v}u$$

Die Alternativität lässt die Umformung zu:

$$|v|^2 x = \bar{v}u$$

$$x = \frac{1}{|v|^2}\bar{v}u$$

Die Überprüfung bestätigt das Ergebnis

$$x_l = \frac{1}{|v|^2}\bar{v}u$$

Analog beweist man (unter Verwendung von $(uv)v = u(vv)$)

$$x_r = \frac{1}{|v|^2}u\bar{v}$$

Damit ist bewiesen, dass auch die Oktonionen ein System mit Division sind. Man nennt $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ Divisionsalgebren.

Hinführung zum Begriff der Algebra

Vorbemerkungen:
Ein hyperkomplexes System der Dimension n+1 sei die Menge aller Ausdrücke der Form

$$a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_n i_n$$

Es gelte die übliche Additionsregel und eine geeignete Multiplikationsregel, d.h. einer Multiplikationstafel der imaginären Einheiten $i_1, i_2, \dots, i_n$ über alle Kombinationen von $i_\alpha i_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, n)$.

Es gilt auf jeden Fall die Abgeschlossenheit bzgl. der Addition, d.h. die Summe von zwei derartigen Zahlen ist wieder eine derartige Zahl. Auch die Multiplikation ist abgeschlossen. Hyperkomplex nennt man jedoch nur Systeme, die ein neutrales Element e der Multiplikation besitzen, d.h.

$$e \cdot a = a \cdot e = a$$

Dieses Element e ist ein „Einselement" der Form $e = 1 + 0i_1 + \cdots + 0i_n$.

Ein weiteres „Kennzeichen" eines hyperkomplexen Systems ist die Multiplikation einer reellen Zahl k mit einem beliebigen Element a, die eng mit der Existenz eines „Einselements" zusammenhängt.

Da $k = k + 0i_1 + \cdots + 0i_n$ ist ka relativ sinnlos definiert. In einem allgemeinen System ohne entsprechende Rahmenbedingungen macht ka keinen Sinn.

Man muss deshalb die Multiplikation mit k definieren als

$$k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) = ka_1 i_1 + ka_2 i_2 + \cdots + ka_n i_n$$

Man nennt Systeme mit Addition, Multiplikation, Einselement und den genannten Rahmenbedingungen eine Algebra (genauer Algebra der Dimension n). Sie soll hier noch genauer definiert werden. Dabei wird sich zeigen, dass die hyperkomplexen Zahlen und erst Recht die betrachteten Divisionsalgebren lediglich Spezialfälle einer Algebra sind.

Definition einer Algebra

Eine Menge von Ausdrücken der Form

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n$$

wird eine Algebra der Dimension n genannt. Dabei sind $a_1, a_2, \dots, a_n$ beliebige reelle Zahlen und $i_1, i_2, \dots, i_n$ Symbole mit folgenden Operationsregeln:

1) Die Multiplikation mit reellen Zahlen wird gemäß folgender Formel durchgeführt:
$$k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) = ka_1 i_1 + ka_2 i_2 + \cdots + ka_n i_n$$
2) Die Addition gemäß
$$(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) + (b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n) =$$
$$(a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + \cdots + (a_n + b_n) i_n$$
3) Die Multiplikation wird analog zu dem Fall eines hyperkomplexen Systems durch eine Multiplikationstafel definiert der Form

$$i_\alpha i_\beta = p_{\alpha\beta,1} i_1 + p_{\alpha\beta,2} i_2 + \cdots + p_{\alpha\beta,n} i_n$$

α, β sind beliebige Zahlen von 1 bis n. Die Tafel wird zum Ermitteln der Produkte

$$(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n)(b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n)$$

genauso verwendet, wie bei einem hyperkomplexen System.

Aus dieser Definition kann man leicht sehen, dass eine Algebra der Dimension n vollständig durch ihre Multiplikationstafel bestimmt ist, die aus einem Satz von n^3 Zahlen $p_{\alpha,\beta,\gamma}$ besteht. Jeder Satz ergibt eine bestimmte Algebra.

Zweifellos sinnvoll ist in diesem Zusammenhang das Verständnis von Vektorräumen und weiteren Strukturen. Es wird im vorliegenden Beitrag bei diesen Aspekten auf den gleichen Tiefgang, wie bei den Divisionsalgebren, verzichtet. Sie sprengen wohl den Rahmen dieser Diskussion und ihre Mathematik ist vertrauter als die der hyperkomplexen Zahlensysteme. Auch weitere hyperkomplexe Zahlen sind nur kurz im Abschnitt „Verallgemeinerung des Begriffs hyperkomplex“ erwähnt. Auf dieser mathematischen Grundlage, die oft nur Andeutungscharakter hat, soll dann die theoretisch gefestigte und die noch spekulative Physik betrachtet werden.

Grafische Illustration der Rechenregeln am Beispiel komplexer Zahlen

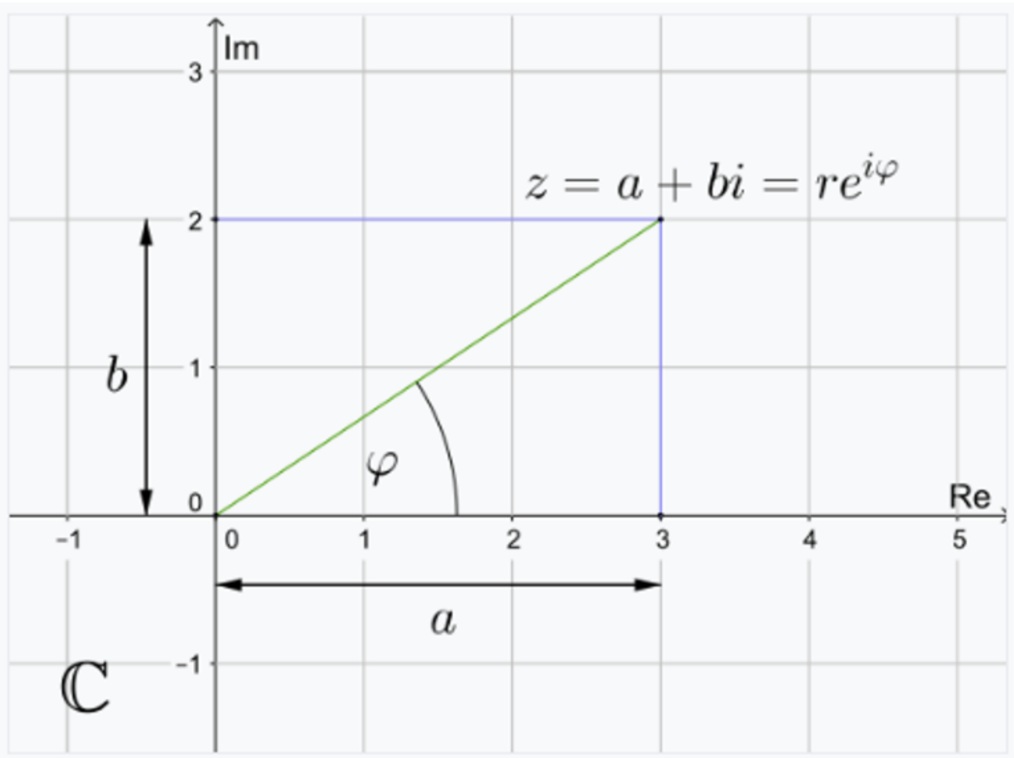

Abb. 8: Gaußsche Ebene mit komplexer Zahl in cartesischen und Polarkoordinaten

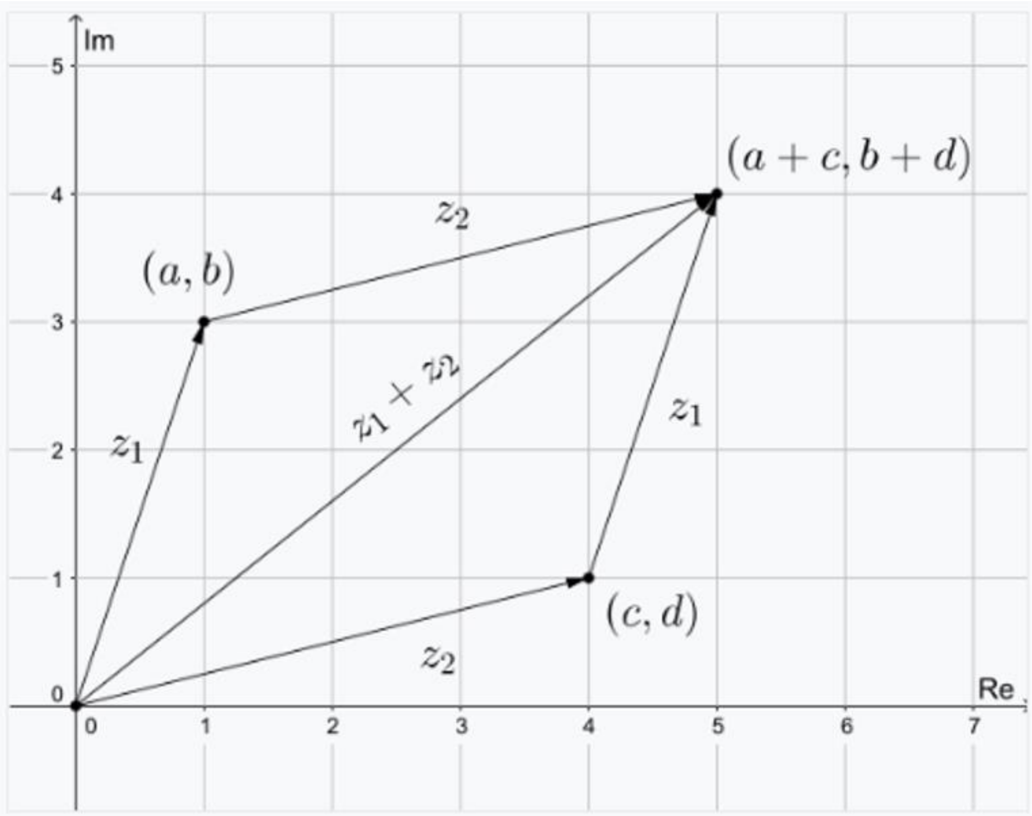

Abb. 9: Darstellung der Addition zweier komplexen Zahlen in der Zahlenebene

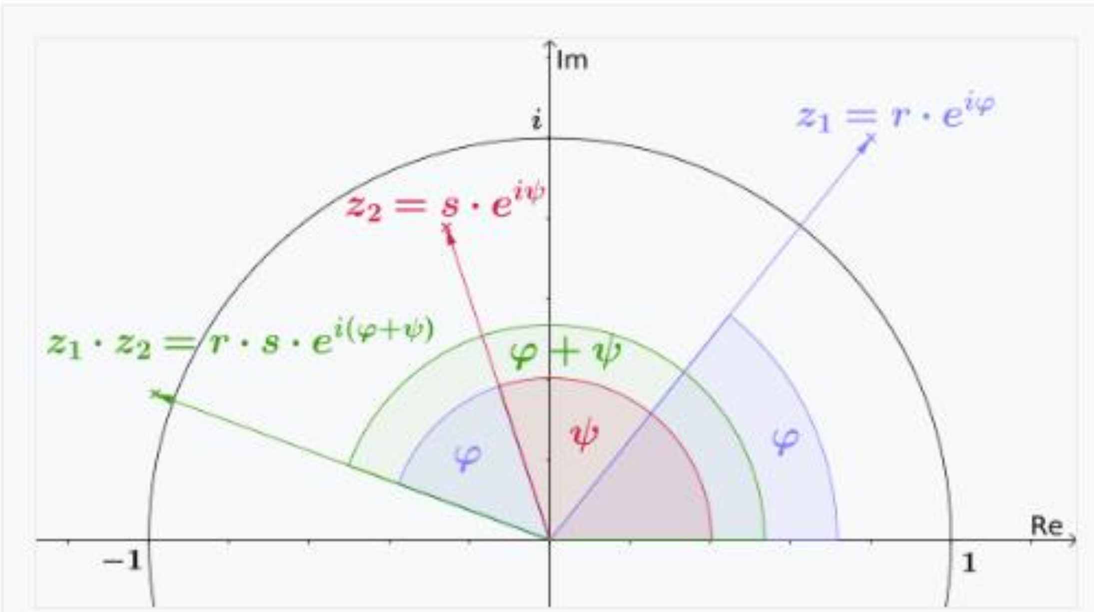

Abb. 10: Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen entspricht der Addition ihrer Winkel und der Multiplikation ihrer Beträge

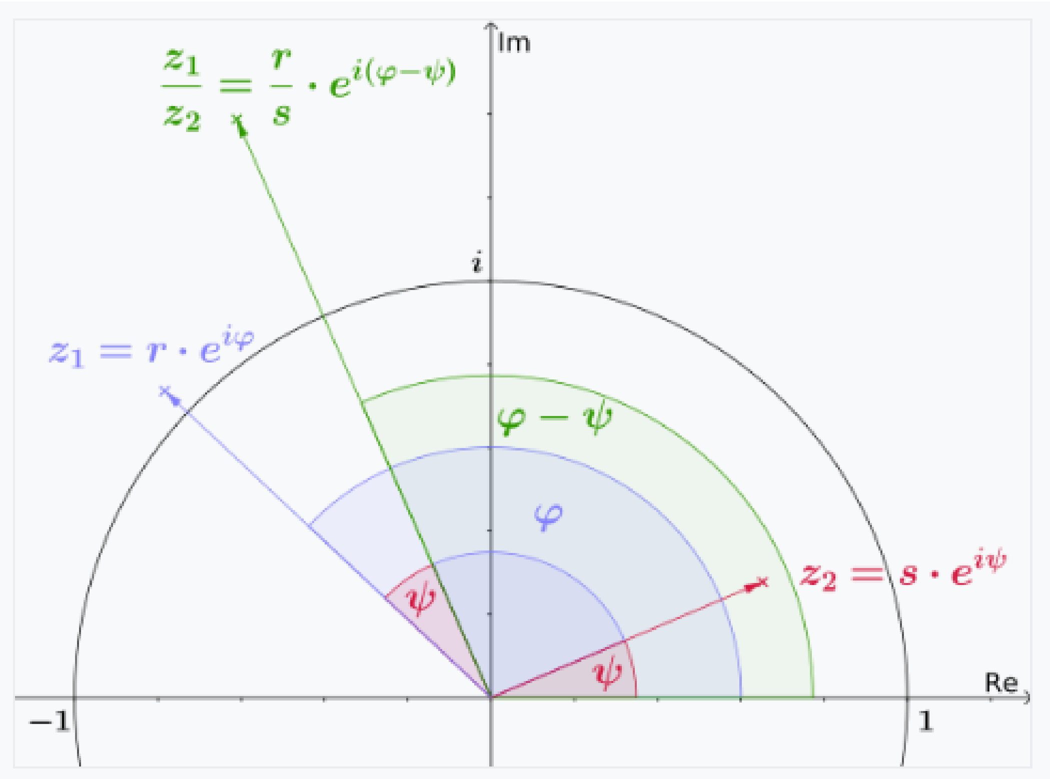

Abb. 11: Die Division zweier komplexer Zahlen entspricht der Subtraktion ihrer Winkel und der Division ihrer Beträge

Literaturhinweise

Baez John C., Huerta, John; Exotische Zahlen und die Stringtheorie, sdw 10/2011, S.54-60

Baez, John; Huerta, John; The Algebra of Grand Unified Theories, arXiv:0904.1556v2 [hep-th] 1 May 2010

Baez, John C.; The Octonions, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), 145-205; arXiv:math/0105155v4 [math.RA] 23 Apr 2002

Bischoff, Manon; https://www.spektrum.de/video/divisionsalgebren-in-der-physik/1614224

Ebbinghaus Heinz-Dieter, et. al.; Zahlen, Springer-Lehrbuch, 3. Auflage (1983, 1988, 1992), Berlin Heidelberg New York

Eschenburg, Jost-Hinrich; Quaternionen und Oktaven, Vorlesungsskript, https://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eschenbu/oktaven.pdf

Furey, Cohl; Standard model physics from an algebra? https://www.repository.cam.ac.uk/handle/1810/254719

https://de.wikipedia.org/wiki/Divisionsalgebra

Jaeger, Lars; Emmy Noether, Südverlag, Konstanz 2022

Kant, Immanuel; Kritik der reinen Vernunft, 2. Auflage, https://www.projekt-gutenberg.org/kant/krvb/krvb011.html (ff)

Kantor, Isaĭ L'vovich (I.L.), Solodownikow, Aleksandr Stepanovič (A.S.); Hyperkomplexe Zahlen, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1978. https://mathematikalpha.de/wp-content/uploads/2022/11/Hyperkomplexe_Zahlen.pdf

Lyre, Holger, Kann moderne Physik a priori begründbar sein? Vortrag auf der Tagung "Was sind und warum gelten Naturgesetze?", 15.-16. September 1999, ZiF Bielefeld. Erscheint in: Philosophia Naturalis 37 (2000), Heft 2., http://www.lyre.de/physapri.pdf

Nicolai, Hermann; Kleinschmidt, Axel; E10: Eine fundamentale Symmetrie der Physik?; Phys. Unserer Zeit |3/2010 (41), S. 134-140

Reichenbach, Hans, Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori, Berlin 1920, Verlag Julius Springer, DOI 10.1007/978-3_642-50774-8, www.gutenberg.org/files/57240/57240-h/5724

Vaas, Rüdiger; https://www.wissenschaft.de/astronomie-physik/oktonionen-und-der-verrueckte-onkel/

Van der Waerden, Bartel Leendert; Moderne Algebra I, Springer-Verlag, Berlin, 1950

Wolchover, Natalie, in https://www.quantamagazine.org/the-octonion-math-that-could-underpin-physics-20180720/

Wußing, Hans; 6.000 Jahre Mathematik, Bd. 2, Springer Berlin Heidelberg, 2009

Abbildungsnachweise:

Abb. 1: Vier Zahlensysteme (eigene Abb.)

Abb. 2: Bei Drehungen (am Beispiel eines Buches) ist die Reihenfolge wichtig. Sie sind nicht kommutativ (eigene Abb.).

Abb. 3: Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (Teilchen-bezogen), Abbildungsnachweis: https://de.wikipedia.org/wiki/Standardmodell_der_Teilchenphysik

Abb. 4: Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (Kräfte-bezogen), Abbildungsnachweis: ebenda

Abb. 5: Eine Darstellung der Lie-Gruppe E_8, wie ein 57-dimensionales Objekt gedreht werden kann ohne sein Aussehen zu verändern. Bildquelle: Spektrum der Wissenschaft Juni 2007, S. 95 (Download) Die 240 nächsten Nachbarn einer Zentralkugel im achtdimensionalen Raum, herunterprojiziert auf die zweidimensionale Ebene. John Stembridge von der Universität von Michigan in Ann Arbor hat die Projektion so gewählt, dass das

Ergebnis maximale Symmetrie hat. Dadurch sortieren sich die 240 Kugelmittelpunkte in acht Ringe zu je dreißig Punkten, und das ganze Bild ist dreißigzählig dreh- sowie spiegelsymmetrisch. Die Linien verbinden jede Kugel mit ihren nächsten Nachbarn; das sind jeweils 56 Stück. Die Farben der Linien wurden zur Verbesserung des Kontrasts gewählt und sind ohne mathematische Bedeutung.

Danksagung

Mein besonderer Dank gilt **Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl** von der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. Sein Peer Review hat dafür gesorgt, dass entscheidende Aspekte im vorliegenden Beitrag berücksichtigt wurden. Er hat mir wieder die feste Überzeugung vermittelt, dass er seine Unterstützung für die Popularisierung der Mathematik als Herzensanliegen und nicht als Pflichtübung sieht.

Herr Dr. Michael Serafin war wieder die engagierte, gute Seele unserer wissenschaftlichen Gesellschaft. Wie immer hat er sich nicht nur auf seine Rolle als Schriftleiter beschränkt, sondern war mir immer ein geschätzter Ansprechpartner.

Math is like love — a simple idea, but it can get complicated.

FÜR FARI