

Die kohärente Photoproduktion von Pionen und Eta-Mesonen an sphärischen Kernen in einem relativistischen, nicht-lokalen Modell

Inaugural-Dissertation
zur
Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Justus-Liebig-Universität Gießen
Fachbereich 13 - Physik

vorgelegt von
Wolfram Peters
aus Gießen

Gießen, 1998

D 26

Dekan: Prof. Dr. Claus-Dieter Kohl

I. Berichterstatter: Prof. Dr. Ulrich Mosel

II. Berichterstatter: PD Dr. Bernd Krusche

Tag der mündlichen Prüfung: 11.9.1998

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Modelle für die kohärente Photoproduktion	5
3	Die Photoproduktion von Mesonen am Nukleon	7
3.1	Vorbemerkungen	7
3.2	Elektromagnetische Wechselwirkung und Eichinvarianz	8
3.3	Photoproduktion von Pionen	10
3.4	Photoproduktion von η -Mesonen	15
4	Die Photoproduktion von Mesonen am Kern	19
4.1	Die Stoßnäherung	19
4.2	Die Kernwellenfunktion	21
4.2.1	Die Bestimmung der Potentialparameter	22
4.3	Das optische Potential	25
4.3.1	Das Pion	25
4.3.2	Das η -Meson	33
4.4	Die kohärente Photoproduktion	35
4.4.1	Kohärenz, Eichinvarianz und Winkelabhängigkeit	35
4.4.2	Kohärenz und Stoßnäherung	37
4.5	Die lokale Näherung	43
4.6	Allgemeine Eigenschaften des kohärenten Wirkungsquerschnitts	48
5	Ergebnisse: Pionen	51
5.1	Vorbemerkungen	51
5.1.1	Existierende Modelle	52
5.2	PWIA	53
5.2.1	Die lokale und die nicht-relativistische Näherung	56
5.3	DWIA	60
5.3.1	Vergleich mit anderen optischen Potentialen	66
5.3.2	Mediummodifikationen des Produktionsoperators	69
6	Ergebnisse: Eta-Mesonen	81
6.1	Vorbemerkungen	81
6.2	Existierende Modelle	81
6.2.1	Der Produktionsoperator abseits der Massenschale	83

6.3	PWIA	86
6.3.1	Der Omega-Graph und die Bornsterme	86
6.3.2	Die $N(1535)$ -Resonanz	89
6.3.3	Die $N(1520)$ -Resonanz	96
6.4	DWIA	99
6.5	Die Photoproduktion an ${}^4\text{He}$	105
7	Zusammenfassung	109
7.1	Pionen	109
7.2	η -Mesonen	111
7.3	Schlußfolgerungen	112
7.4	Ausblick	112
A	Notation	115
A.1	γ -Matrizen	115
B	Die Lösung der Streugleichung für das Pion	117
C	Die Auswertung des Matrixelements	119
C.1	Partialwellenentwicklungen	119
C.2	Die Drehimpulsstruktur des Matrixelements	123
C.3	Die Berechnung der Vertizes	124
C.4	Die Behandlung von Ableitungen in den Vertizes	125
D	Die nicht-lokale Kerndichtematrix	129
E	Die Parametrisierung des optischen Potentials für das Pion	133

Kapitel 1

Einleitung

Ein großer Bereich der Kernphysik beschäftigt sich mit den fundamentalen Eigenschaften von Hadronen sowie mit der Wechselwirkung dieser Teilchen untereinander. Mit der QCD glaubt man heute die fundamentale Theorie für die Struktur und die Wechselwirkung von Hadronen zu kennen. Allerdings ist es bisher nicht gelungen, aus der QCD die dynamischen Eigenschaften von Hadronen bei niedrigen Energien abzuleiten. Aus diesem Grunde existiert eine Vielzahl von Modellen, die Hadronen und deren Wechselwirkung im Rahmen von effektiven Theorien oder mit Hilfe von phänomenologischen Ansätzen beschreiben.

In diesem Rahmen sind insbesondere solche Prozesse von Interesse, die zur Produktion von Teilchen führen. Neben rein hadronischen Reaktionen spielen photonukleare Prozesse hierbei eine wichtige Rolle. Photonukleare Reaktionen bieten den Vorteil, daß sie durch die Kombination der zu untersuchenden starken Wechselwirkung mit der elektromagnetischen Wechselwirkung, die relativ gut verstanden ist, einen komplementären Zugang zu kernphysikalischen Fragestellungen ermöglichen. Aus diesem Grund ist die photonukleare Physik ein Gebiet, auf dem intensiv gearbeitet wird.

Die einfachste photonukleare Reaktion ist die Photoproduktion von Mesonen am Nukleon. Als leichteste Mesonen, wenn man von den Kaonen absieht, sind hierbei Pionen und η -Mesonen von großer Bedeutung. Für die Photoproduktion von Pionen und η -Mesonen am Nukleon existieren heute Modelle, die die experimentellen Daten sehr gut beschreiben. Diese Modelle behandeln alle relevanten hadronischen Freiheitsgrade im Rahmen einer effektiven Feldtheorie und beschreiben den Produktionsprozeß auf mikroskopischer Ebene.

Neben dem elementaren Prozeß ist auch die Photoproduktion von Mesonen am Kern von großer Bedeutung. Dieser Prozeß stellt eine Möglichkeit dar, das mikroskopische Verständnis der Photoproduktion an einem einzelnen Nukleon weiter zu testen. Darüber hinaus bietet die Photoproduktion am Kern die Möglichkeit, den Einfluß des nuklearen Mediums auf den Produktionsprozeß zu untersuchen. Allerdings sind zur Formulierung eines Modells für die Photoproduktion am Kern zusätzliche theoretische Eingaben nötig. Um die Menge dieser theoretischen Vorgaben gering zu halten, ist es von Vorteil, möglichst exklusive Prozesse zu betrachten. Hier bietet sich die kohärente Photoproduktion von Mesonen an, da in diesem Prozeß der Kern nach der Reaktion wieder in den Grundzustand zurückkehrt. Neben einem Modell für den elementaren Produktionsprozeß sowie die Wechselwirkung des produzierten Mesons mit dem Kern

wird bei der kohärenten Photoproduktion also nur ein Modell für den Grundzustand des Kerns benötigt. Die kohärente Photoproduktion von pseudoskalaren Mesonen an Spin-Null-Kernen bietet außerdem den Vorteil, daß die Produktionsamplitude an sich eichinvariant ist, was den nötigen theoretischen Aufwand weiter verringert.

In der vorliegenden Arbeit wird deshalb die kohärente Photoproduktion von Pionen und η -Mesonen an Spin-Null-Kernen untersucht. Die Behandlung dieses Prozesses geschieht im Rahmen der Stoßnäherung. Hierbei wird über existierende Modelle hinausgegangen, indem diese Reaktion relativistisch und nicht-lokal behandelt wird. Dieses Vorgehen bietet die Möglichkeit, die Güte von lokalen und nicht-relativistischen Näherungen zu testen. Der Vergleich mit experimentellen Daten bietet dann die Gelegenheit, das Verständnis des Reaktionsprozesses insgesamt zu überprüfen, sowie einzelne Aspekte der Theorie genauer zu untersuchen.

An dieser Stelle muß zwischen der Photoproduktion von Pionen und von η -Mesonen unterschieden werden. Für die kohärente Photoproduktion von Pionen existieren bereits zahlreiche Rechnungen. Die Behandlung dieses Prozesses wird dadurch erleichtert, daß die Wechselwirkung des Pions mit dem Kern sowohl experimentell als auch theoretisch bereits intensiv untersucht wurde. Alle Rechnungen sagen aus, daß die Produktion von Pionen sowohl elementar als auch am Kern von der Δ -Resonanz dominiert wird. Für die kohärente Photoproduktion von Pionen existieren neue, zum Teil noch vorläufige, experimentelle Daten, die einen großen Energie- und Winkelbereich abdecken. Dieser Prozeß bietet also die Gelegenheit, das in dieser Arbeit zu entwickelnde Modell einerseits mit anderen Rechnungen zu vergleichen sowie gebräuchliche Näherungen zu untersuchen. Zum anderen erlaubt der Vergleich mit den sehr guten experimentellen Daten, das Modell nicht nur als Ganzes zu testen, sondern auch Effekte zu untersuchen, die über das Bild der herkömmlichen Stoßnäherung hinaus gehen.

Im Gegensatz zur Pionenproduktion existieren für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen weniger theoretische Arbeiten und bis jetzt keine experimentellen Daten. Die Entwicklung von theoretischen Modellen wird dadurch erschwert, daß die η -Kern-Wechselwirkung nur ansatzweise bekannt ist. Die existierenden Modelle für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen unterscheiden sich in ihren Ergebnissen erheblich; gemeinsam ist allen bisherigen Rechnungen aber die Vorhersage, daß der im elementaren Fall dominante Beitrag der $N(1535)$ -Resonanz am Kern fast vollständig unterdrückt ist. Diesen Rechnungen zufolge wird die kohärente η -Produktion am Kern von Graphen bestimmt, die bei der Produktion am Nukleon nur kleine Beiträge liefern. Das in dieser Arbeit vorgestellte Modell bietet hier den Vorteil, nicht nur weniger Näherungen als die bisherigen Rechnungen zu machen, sondern auch im Rahmen der Produktion von Pionen getestet zu sein. Dies bietet insbesondere die Möglichkeit die Ursache für die großen Unterschiede zwischen den existierenden Modellen zu untersuchen.

Der Aufbau dieser Arbeit ist der folgende: Im folgenden Abschnitt wird zunächst ein Überblick über existierende Modelle gegeben. In Kap. 3 wird das verwendete Modell für die elementare Photoproduktion von Pionen und η -Mesonen dargestellt. In Kap. 4 werden dann die Grundlagen des Modells für die Produktion am Kern dargelegt und die Eigenschaften der kohärenten Photoproduktion diskutiert. In Kap. 5 werden dann die Ergebnisse für die kohärente Photoproduktion von Pionen präsentiert. Hier wird insbe-

sondere der Einfluß des Kerns auf den Produktionsprozeß eine Rolle spielen. In Kap. 6 wird dann die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen diskutiert. Hierbei wird insbesondere die Diskussion der lokalen Näherung sowie der Vergleich zu existierenden Rechnungen von Bedeutung sein. Die Ergebnisse dieser Arbeit werden schließlich in Kap. 7 zusammengefaßt.

Kapitel 2

Modelle für die kohärente Photoproduktion

In diesem Abschnitt soll ein Überblick über die existierenden Modelle für die kohärente Photoproduktion von Pionen und η -Mesonen am Kern gegeben werden. Außerdem soll aufgezeigt werden, in welcher Hinsicht das in der vorliegenden Arbeit entwickelte Modell über bestehende theoretische Beschreibungen hinausgeht.

Sämtliche existierenden Arbeiten zur kohärenten Photoproduktion gehen von der gemeinsamen Annahme aus, daß der eigentliche Produktionsprozeß, bei dem das Photon absorbiert und das Meson erzeugt wird, nur unter Beteiligung eines einzelnen Nukleons stattfindet. Diese Annahme wird als Stoßnäherung bezeichnet und wird auch in der vorliegenden Arbeit gemacht. Davon ausgehend sind zur Konstruktion eines Modells für die kohärente Photoproduktion noch die folgenden theoretischen Vorgaben nötig: Neben einem Modell für den Grundzustand des Kerns muß der elementare Produktionsoperator, der die Photoproduktion eines Mesons an einem einzelnen Nukleon beschreibt, vorgegeben werden. Außerdem muß die Wechselwirkung des erzeugten Mesons mit dem Kern beschrieben werden. Für diese einzelnen Vorgaben, als auch für deren Verbindung zu einem Gesamtmodell, existieren in der Literatur verschiedene Ansätze, aus denen unterschiedliche Modelle für die kohärente Photoproduktion entwickelt wurden. Für die weitere Betrachtung muß nun zwischen Pionen und η -Mesonen unterschieden werden.

Sowohl die elementare Photoproduktion von Pionen, als auch die kohärente Photoproduktion von Pionen am Kern werden von der Δ -Resonanz dominiert. Für die kohärente Photoproduktion existieren bisher nur nicht-relativistische Rechnungen, die sich in zwei Gruppen aufteilen lassen: Eine Reihe von Arbeiten verwendet die nicht-relativistische Stoßnäherung [gir83, bof86, chu85, chu87, bof91]. In diesem Zugang wird ein nicht-relativistischer Produktionsoperator verwendet, der anhand der elementaren Photoproduktion von Pionen bestimmt wurde. Die Wechselwirkung des Pions mit dem Kern wird dann mit Hilfe eines optischen Potentials beschrieben. Diese Modelle wurden vor allem nahe der Produktionsschwelle und damit unterhalb der Δ -Resonanz benutzt. Alle diese Rechnungen verwenden die sog. lokale Näherung, die, wie auch die Stoßnäherung, in Kap. 4 im Detail beschrieben wird.

Weiterhin gibt es zur kohärenten Photoproduktion von Pionen auch Arbeiten im

Δ -Loch-Modell [koc79, kli80, sah81, kar86, ose87, koc83, car93, lak93, koe94], das für Energien um die Δ -Resonanz geeignet ist. Im Gegensatz zu der herkömmlichen Stoßnäherung gehen diese Arbeiten nicht von einem gegebenen, elementaren Produktionsoperator aus, sondern behandeln die Erzeugung eines Pions über die Δ -Resonanz, indem sie diese Resonanz im Kern dynamisch beschreiben. Die dynamische Behandlung der Δ -Resonanz erlaubt es, den Produktionsprozeß und die Wechselwirkung des Pions mit dem Kern in einem einheitlichen Rahmen zu behandeln. Der größere Teil dieser Arbeiten beinhaltet dabei nur die Δ -Resonanz, und vernachlässigt sämtliche nicht-resonanten Beiträge, die in den Rechnungen in der nicht-relativistischen Stoßnäherung berücksichtigt werden.

Das vorrangige Ziel der vorliegenden Arbeit ist es nun, ein Modell für die kohärente Photoproduktion von Pionen zu entwickeln, das über den gesamten Energiebereich von der Schwelle bis zur Δ -Resonanz anwendbar ist. Dabei wird über die existierenden Rechnungen hinausgegangen, indem die Reaktion relativistisch und nicht-lokal beschrieben wird, wodurch theoretische Unsicherheiten reduziert werden. Der Produktionsoperator wird mit Hilfe einer effektiven Lagrangefunktion aus einem mikroskopischen Modell konstruiert. Dieser Operator enthält sämtliche resonanten und nicht-resonanten Beiträge, und gewährleistet so eine zuverlässige Beschreibung des Produktionsprozesses in einem großen Energiebereich. Die Pion-Kern-Wechselwirkung wird durch ein empirisches optisches Potential beschrieben, daß an die Pion-Kern-Streuung angepasst ist. Dieser Ansatz kann dann durch den Vergleich mit den A2-Daten [sch97] und den vorläufigen Ergebnissen der TAPS-Gruppe [kru98] getestet werden.

Für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen existieren bisher keine experimentellen Daten. Auch die Zahl der theoretischen Arbeiten ist kleiner als im Falle der Pionenproduktion. Die ersten theoretischen Studien verwendeten eine empirische Multipolparametrisierung des Produktionsoperators im Rahmen der nicht-relativistischen Stoßnäherung [ben91, tia94, try95]. Darüber hinaus gibt es zwei jüngere Arbeiten, die den Produktionsoperator mit Hilfe einer relativistischen, effektiven Feldtheorie konstruieren [pie97, fix97]. Alle diese Arbeiten verwenden die lokale Näherung. Die Ergebnisse der einzelnen Modelle unterscheiden sich zum Teil erheblich. Gemeinsam ist allen diesen Rechnungen aber das Ergebnis, daß die $N(1535)$ -Resonanz, die die elementare Photoproduktion von η -Mesonen dominiert, am Kern fast vollständig unterdrückt ist. Als Folge dieser Unterdrückung wird die kohärente η -Produktion am Kern von Termen dominiert, die im elementaren Fall nur einen kleinen Beitrag liefern. Über die Wechselwirkung des η -Mesons mit dem Kern ist nur sehr wenig bekannt. In einigen der existierenden Arbeiten wird ein einfaches optisches Potential verwendet, das zumindest Aufschluß über die globalen Aspekte der η -Kern-Wechselwirkung gibt.

Das für die Pionenproduktion entwickelte Modell läßt sich in gleicher Weise auf die Produktion von η -Mesonen anwenden. Dieses Modell bietet im Gegensatz zu den existierenden Arbeiten über die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen den Vorteil, nicht auf die lokale Näherung angewiesen zu sein. In Anbetracht der großen Diskrepanzen zwischen den existierenden Rechnungen ist es insbesondere wichtig, daß das hier verwendete Modell im Rahmen der Pionenproduktion im Vergleich mit experimentellen Daten getestet werden kann.

Kapitel 3

Die Photoproduktion von Mesonen am Nukleon

3.1 Vorbemerkungen

Die Photoproduktion von Pionen ist die einfachste photonukleare Reaktion und gleichzeitig diejenige mit der niedrigsten energetischen Schwelle. Ein Grund für das frühe Interesse an dieser Reaktion war die Hoffnung, durch die Kombination der relativ gut verstandenen elektromagnetischen Wechselwirkung mit der zu untersuchenden hadronischen Wechselwirkung zusätzliche Informationen über die Eigenschaften von Hadronen zu gewinnen, die komplementär zu den aus hadronischen Reaktionen gewonnenen Erkenntnissen sind. Neben der Photoproduktion von Pionen war auch die Photoproduktion von η -Mesonen von Interesse, da das η -Meson die nächsthöhere Anregung im mesonischen Spektrum ist. Allerdings sind die zur Verfügung stehenden experimentellen Daten bei der Photoproduktion von Pionen deutlich besser.

Gegenwärtig sind effektive Feldtheorien das Standardwerkzeug des Theoretikers zur Beschreibung der Reaktionen von Hadronen [eri88, nag91]. Bei effektiven Feldtheorien werden die als relevant identifizierten Freiheitsgrade, auch wenn das keine Elementarteilchen sind, durch Felder mit entsprechenden Quantenzahlen beschrieben. Diese Felder werden dann durch Wechselwirkungsterme in der Lagrangedichte aneinander gekoppelt. Die Konstruktion dieser Wechselwirkungsterme geschieht im Einklang mit den fundamentalen Prinzipien der Paritätserhaltung, der Lorentzinvarianz und der Eichinvarianz; außerdem werden nur lokale Wechselwirkungsterme angenommen. Die hierbei auftretenden Kopplungskonstanten können nur durch Vergleich mit dem Experiment bestimmt werden.

Auf der einen Seite ermöglicht dieser Ansatz die Verwendung feldtheoretischer Methoden, z.B. der kovarianten Störungstheorie. Andererseits führt die Tatsache, daß Hadronen im strengen Sinne keine elementaren Teilchen sind, sondern innere Freiheitsgrade besitzen, zu technischen und konzeptionellen Problemen. Als Beispiel sei hier die Tatsache genannt, daß die heute gebräuchlichen hadronischen effektiven Feldtheorien nicht renormierbar sind, d.h. daß sie strenggenommen keine mathematisch wohldefinierten Theorien sind. Bei pragmatischem, aber vorsichtigem Gebrauch effektiver Feldtheorien kann aber ein erstaunliches Spektrum von hadronischen und photonuklearen

Reaktionen gut beschrieben werden.

Obwohl Hadronen stark miteinander wechselwirken, ist die Störungstheorie ein weit verbreitetes Werkzeug bei der Arbeit mit effektiven Feldtheorien. Da die Parameter in einer effektiven Lagrangefunktion in jedem Falle an experimentelle Daten angepaßt werden müssen, werden die aus einer störungstheoretischen Behandlung extrahierten Kopplungskonstanten deswegen nicht als elementar interpretiert, sondern als effektive Größen angesehen, die implizit Korrekturen durch höhere Diagramme enthalten. Diese Interpretation stellt zwar eine konzeptionelle Schwäche dar, erlaubt aber gleichzeitig die Vermeidung von Problemen, die durch die Notwendigkeit von Regularisierung und Renormierung bei der Berechnung von Diagrammen höherer Ordnung auftreten würden. In den letzten Jahren wurden deutliche Fortschritte in dem Versuch gemacht, nicht-störungstheoretische Methoden für die Behandlung effektiver Feldtheorien zu verwenden [sch96, ds97, feu98]. Der dafür notwendige Formalismus ist aber technisch so aufwendig, daß er sich nicht ohne weiteres auf Reaktionen am Kern übertragen läßt. Deshalb werden in dieser Arbeit konventionelle störungstheoretische Methoden verwendet. Neben der technischen Machbarkeit wird dieses Vorgehen durch die Tatsache gerechtfertigt, daß die experimentellen Daten für die elementare Photoproduktion von Pionen und η -Mesonen in dem hier betrachteten Energiebereich durch rein störungstheoretische Rechnungen gut beschrieben werden können.

3.2 Elektromagnetische Wechselwirkung und Eichinvarianz

Die feldtheoretische Beschreibung der elektromagnetischen Wechselwirkung geschieht im Rahmen einer Eichfeldtheorie, der QED [itz80, mos89]. Die theoretische Behandlung dieses Formalismus ist in Lehrbüchern zur Feldtheorie erschöpfend beschrieben und soll deswegen hier nur skizziert werden, bevor die Bedeutung der Eichinvarianz für effektive Feldtheorien erläutert wird.

Man geht von einer relativistischen Feldtheorie für die beteiligten geladenen Teilchen aus. Zur Einführung des elektromagnetischen Feldes fordert man dann die Invarianz unter einer lokalen Phasentransformation $U(1)$ der geladenen Felder. Diese Invarianz kann nur gewährleistet werden, wenn man einen zusätzlichen Freiheitsgrad, nämlich das Eichfeld A_μ einführt und bestimmte Transformationseigenschaften dieses Feldes fordert. Die resultierenden Transformationseigenschaften des Eichfeldes sind analog zu der Eichtransformation in klassischer Elektrodynamik, die Identifizierung von A_μ mit dem elektromagnetischen Feld liegt also nahe. Die Modenentwicklung von A_μ lautet im freien Fall [mos89, itz80]:

$$A_\mu(x) = \sum_{\lambda=1,2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2k_o} \left(\hat{a}(k_\mu, \lambda) \varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k_\mu) e^{-ikx} + h.c. \right) \quad . \quad (3.1)$$

Hierbei ist $k_o = |\vec{k}|$. λ ist der Polarisationsindex und $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k_\mu)$ ist der Polarisationsvektor der Mode (k_μ, λ) . Da die Polarisation im freien Fall transversal ist, tauchen in dieser Entwicklung nur zwei mögliche Polarisierungen auf. $\hat{a}(k_\mu, \lambda)$ ist schließlich der zu der Mode (k_μ, λ) gehörende Vernichtungsoperator.

Eine Eichtransformation ändert das elektromagnetische Feld A_μ und damit auch die Wellenfunktion des Photons $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}(k_\mu)e^{-ikx}$, die zum Beispiel bei der Auswertung eines Feynmandiagramms auftritt. A_μ transformiert sich unter einer Eichtransformation wie folgt:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu\chi(x) \quad , \quad (3.2)$$

wobei χ ein beliebiger Lorentzskalar ist, der vom Ort und von der Zeit abhängt.

In niedrigster Ordnung in der elektromagnetischen Kopplungskonstante e kann das Photon wie in Gl. (3.1) als ebene Welle betrachtet werden. Das bedeutet, daß der Polarisationsvektor des Photons, der bei der Berechnung eines Feynmandiagramms auftaucht, sich als Funktion des Impulses des Photons unter einer Eichtransformation wie folgt verhält:

$$\varepsilon_\mu(k_\mu) \rightarrow \varepsilon'_\mu(k_\mu) = \varepsilon_\mu(k_\mu) + \chi(k_\mu)k_\mu \quad , \quad (3.3)$$

wobei k_μ der Impuls des Photons ist. $\chi(k_\mu)$ ist ein Skalar, der sich durch Fouriertransformation aus $\chi(x)$ in Gl. (3.2) ergibt. Da alle Observablen unter einer Eichtransformation unverändert bleiben müssen, muß jedes Matrixelement unter der Transformation (3.3) invariant sein.

Um nun eine bestehende Theorie auf eichinvariante Weise um den elektromagnetischen Freiheitsgrad zu erweitern, geht man von der ursprünglichen Lagrangefunktion aus, die die Dynamik und die Wechselwirkung der zu behandelnden Teilchen beschreibt. Jedem dieser Teilchen wird jetzt eine elektrische Ladung q zugeordnet. Dann führt man eine sogenannte minimale Substitution in dieser Lagrangefunktion durch. Hierbei werden alle in der Lagrangefunktion auftretenden Ableitungen ∂_μ durch die sog. kovariante Ableitung D_μ ersetzt:

$$\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu \quad , \quad (3.4)$$

wobei q die Ladung des Teilchens ist, auf dessen Feld die Ableitung wirkt. Dieses Vorgehen erzeugt zum Beispiel aus dem kinetischen Term eines Teilchens in der Lagrangefunktion, der immer eine Bilinearform in dem entsprechenden Feld ϕ ist, die Kopplung dieses Teilchens an das elektromagnetische Feld:

$$\mathcal{L}_{kin}(\phi, \phi) \xrightarrow{\partial_\mu \rightarrow D_\mu} \mathcal{L}_{kin}(\phi, \phi) - q\mathcal{L}(\phi, \phi, A_\mu) \quad (3.5)$$

Dieses Vorgehen liefert auch für ein System aus Nukleonen und Pionen automatisch die Kopplung dieser Teilchen an das elektromagnetische Feld. Im Falle der Nukleonen muß, um Übereinstimmung mit den experimentellen Daten zu erreichen, dann noch 'per Hand' das anomale magnetische Moment des Nukleons eingeführt werden.

Für den Fall, daß ein Term in der Lagrangedichte, der die Wechselwirkung mehrerer Felder ϕ_1 , ϕ_2 und ϕ_3 beschreibt, eine Ableitung enthält, muß auch in diesem Term die

minimale Substitution durchgeführt werden. Dies führt zu sogenannten Kontakttermen, die die Kopplung des elektromagnetischen Feldes an mehrere andere Felder enthalten:

$$\mathcal{L}_{int}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) \xrightarrow{\partial_\mu \rightarrow D_\mu} \mathcal{L}_{int}(\phi_1, \phi_2, \phi_3) - q\mathcal{L}(\phi_1, \phi_2, \phi_3, A_\mu) \quad (3.6)$$

Aus einer bestehenden Theorie für wechselwirkende, geladene Teilchen kann so eine eichinvariante Theorie der elektromagnetischen Wechselwirkung dieser Teilchen konstruiert werden.

Sobald man aber neben den Nukleonen auch baryonische Resonanzen R als zusätzliche Freiheitsgrade einführt, reicht minimale Substitution nicht mehr aus, um eine in sich abgeschlossene Theorie zu konstruieren. Man benötigt in diesem Fall auch Terme der Form $\mathcal{L}_{int}(R, N, A_\mu)$ in der Lagrangefunktion, die den elektromagnetischen Zerfall $R \rightarrow N\gamma$ beschreiben. Um diese Terme durch minimale Substitution zu erzeugen, wären Wechselwirkungsterme der Form $\mathcal{L}_{int}(R, N)$ nötig, die in einer hadronischen Theorie a priori nicht existieren. Der $RN\gamma$ -Übergangsvortex muß also postuliert werden. Eine als ganzes eichinvariante Lagrangefunktion ist nur dann möglich, wenn der $RN\gamma$ -Vertex so konstruiert wird, daß er an sich bereits eichinvariant ist.

Die Invarianz von Matrixelementen unter einer Eichtransformation ist keine triviale Eigenschaft. Sie ist nur dann gewährleistet, wenn die zugrundeliegenden Lagrangedichte eichinvariant ist und die Auswertung der Diagramme konsistent durchgeführt wird. Eine Konsequenz hiervon ist, daß manche Näherungen, die bei rein hadronischen Theorien üblich und wohl etabliert sind, die Eichinvarianz von Observablen zerstören. Da damit die Vorhersagen der Theorie von dem Eichparameter a in Gl. (3.3) abhängen, ist das mehr als ein ästhetisches Problem. Es tritt sowohl bei der Behandlung der elementaren Photoproduktion auf [oht89, hab97, feu98] auf, als auch bei Reaktionen am Kern [joh94, pol96, gil97]. Jeder Versuch, durch Korrekturterme die Eichinvarianz nachträglich wieder herzustellen [oht89, hab97, pol96], löst das Problem nicht vollständig, da die Forderung der Eichinvarianz diese Korrekturterme nicht eindeutig bestimmt [pol96, feu98]. In diesem Zusammenhang stellt die kohärente Photoproduktion am Kern eine Ausnahme dar. Wie in Kap. 4.4.1 gezeigt wird, ist die kohärente Produktionsamplitude im Fall von pseudoskalaren Mesonen a priori eichinvariant, unabhängig vom verwendeten Modell. Diese Eigenschaft erleichtert die Konstruktion eines theoretischen Modells für diese Reaktion erheblich.

3.3 Photoproduktion von Pionen

Seit Mitte der siebziger Jahre wird die Photoproduktion von Pionen mit Hilfe von effektiven Feldtheorien untersucht [lag77, ols78]. Die Publikationen in diesem Gebiet sind sehr zahlreich, und die theoretische Behandlung ist noch nicht abgeschlossen (siehe Referenzen in [feu98]).

Die zur elementaren Photoproduktion von neutralen Pionen betragenden Feynman-Diagramme sind in Abb. 3.1 dargestellt. Die Wechselwirkungsterme, aus denen diese Diagramme resultieren, werden im folgenden aufgelistet.

Für ein System aus Pionen, Nukleonen und Photonen sind die Wechselwirkungsterme in der Lagrangefunktion die folgenden:

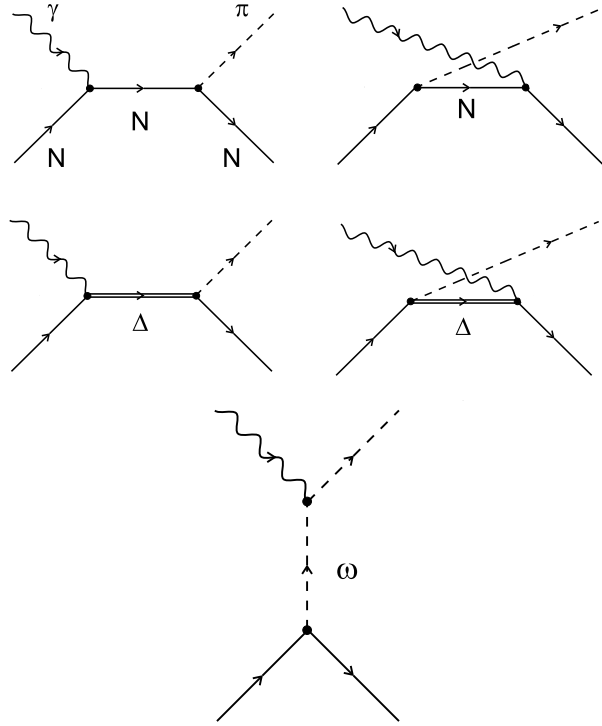


Abb. 3.1: Feynmandiagramme für die Photoproduktion von neutralen Pionen am Nukleon.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\pi NN} &= -\frac{g_{\pi NN}}{m_\pi} \bar{\psi} \gamma_5 (\not{\partial} \vec{\pi}) \vec{\tau} \psi \\
 \mathcal{L}_{\gamma NN} &= -e \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \gamma_\mu \psi A^\mu \\
 &\quad -\frac{1}{2} e \frac{\kappa_p}{2m_N} \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 + \tau_3) \sigma_{\mu\nu} \psi F^{\mu\nu} \\
 &\quad -\frac{1}{2} e \frac{\kappa_n}{2m_N} \bar{\psi} \frac{1}{2} (1 - \tau_3) \sigma_{\mu\nu} \psi F^{\mu\nu} .
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Hierbei steht $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ für den elektromagnetischen Feldtensor. Die in dieser Lagrangefunktion auftretenden dimensionslosen Kopplungskonstanten sind gut bekannt:

$$\begin{aligned}
 e &= 0,3028 \quad , \quad g_{\pi NN} = 0,97 \\
 \kappa_p &= 1,79 \quad , \quad \kappa_n = -1,91 \quad .
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

Die Kopplung des Photons an die Pionen betrifft nur geladene Pionen, die in dieser Arbeit nicht betrachtet werden; der entsprechende Term ist deswegen nicht angegeben. Die aus den Kopplungstermen in Gl. (3.7) resultierenden beiden Graphen mit einem intermediären Nukleon im s - bzw. u -Kanal, die sogenannten Borngraphen, sind zuoberst in Abb. 3.1 dargestellt.

Die elementare Photoproduktion von Pionen am Nukleon wird bis zu einer Gesamtenergie von etwa 1,3 GeV durch die $\Delta(1232)$ Resonanz dominiert. Diese Resonanz trägt

die Quantenzahlen $I(J^P) = \frac{3}{2}(\frac{3}{2}^+)$. Als Spin- $\frac{3}{2}$ Teilchen wird sie im Rarita-Schwinger-Formalismus behandelt [eri88]. In diesem Rahmen wird sie durch ein Diracfeld beschrieben, das zusätzlich einen Lorentzindex trägt. Die Kopplung der Δ -Resonanz an das Pion und an das Photon werden wie folgt angenommen:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pi N\Delta} &= \frac{g_{\pi N\Delta}}{m_\pi} \bar{\psi}_\Delta^\mu (\partial_\mu \vec{\pi}) \vec{T} \psi + \text{h.c.} \\ \mathcal{L}_{\gamma N\Delta} &= \frac{ieg_{\gamma N\Delta}}{m_\pi} \bar{\psi}_\Delta^\mu \gamma^\nu \gamma_5 T_3 \psi F_{\mu\nu} + \text{h.c.} \quad .\end{aligned}\quad (3.9)$$

Hierbei ist ψ_Δ^μ der Δ -Spinor. \vec{T} ist der sogenannte Isospin- $\frac{3}{2}$ Übergangsoperator [eri88]. \vec{T} stellt die Invarianz der $\Delta N\pi$ -Kopplung unter Drehungen im Isospinraum sicher. Diese Wechselwirkungsterme führen zu den beiden mittleren Graphen in Abb. 3.1, die ein intermediäres Δ enthalten.

Der Propagator des Δ ergibt sich im Rahmen des Rarita-Schwinger-Formalismus zu:

$$G_\Delta^{\mu\nu}(p) = i \frac{\not{p} + m_\Delta}{s - m_\Delta^2 + i\sqrt{s} \Gamma(s)} \Lambda^{\mu\nu} \quad , \quad (3.10)$$

wobei

$$\Lambda^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{3} \gamma^\mu \gamma^\nu - \frac{2}{3m_\Delta^2} p^\mu p^\nu - \frac{1}{3m_\Delta} (\gamma^\mu p^\nu - p^\mu \gamma^\nu) \right) \quad . \quad (3.11)$$

Die Zerfallsbreite Γ des Δ in Gl. (3.10) hängt von der invarianten Masse s ab:

$$\Gamma(s) = \Gamma_o \frac{m_\Delta}{\sqrt{s}} \left(\frac{q}{q_o} \right)^3 \left(\frac{q_o^2 + c^2}{q^2 + c^2} \right)^2 \quad . \quad (3.12)$$

Hierbei ist $\Gamma_o = 120$ MeV [pdg96] und c ist eine Konstante, deren Bestimmung weiter unten erläutert wird. q und q_o stehen für den Dreierimpuls des Pions im Ruhesystem der Resonanz mit der Masse \sqrt{s} bzw. 1,232 GeV. Zur Herleitung dieser Formel wertet man das Zerfallsdiagramm für diesen Prozeß aus und führt zusätzlich einen Zentrifugalfaktor $[(q_o^2 + c^2)/(q^2 + c^2)]^2$ ein [mon84].

Wie im vorhergehenden Abschnitt bereits erläutert, ist der $\Delta N\gamma$ -Vertex so konstruiert, daß er an sich schon eichinvariant ist: Bei der Ersetzung $A_\mu \rightarrow k_\mu$, wobei k_μ der Impuls des Photons ist, verschwindet der Wechselwirkungsterm, was bei der Kopplung des Photons an Nukleonen (Gl. (3.7)) nicht der Fall ist. Grundsätzlich ist noch eine weitere Kopplungsart des Δ an das Photon möglich. Der Vergleich mit experimentellen Daten zeigt jedoch, daß die zugehörige Kopplungskonstante sehr klein ist [feu97]. Sie wird deshalb in dieser Arbeit nicht berücksichtigt.

Bevor die Bestimmung der in Gl. (3.9) auftretenden Kopplungskonstanten diskutiert wird sollen noch die Wechselwirkungsterme, die zu dem letzten Graph in Abb. 3.1 führen, angegeben werden:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\omega\pi\gamma} &= \frac{eg_{\omega\pi\gamma}}{4m_\pi} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (V^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}) \pi \\
\mathcal{L}_{\omega NN} &= -g_{\omega NN}^v \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \omega^\mu \\
&\quad - \frac{1}{2} \frac{g_{\omega NN}^t}{2m_N} \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi V^{\mu\nu} \quad .
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Hierbei steht $V_{\mu\nu} = \partial_\mu \omega_\nu - \partial_\nu \omega_\mu$ für den Feldtensor des ω -Mesons. Auch für den $\omega\pi\gamma$ -Übergangsvortex gilt hierbei, wie für den $\Delta N\gamma$ Term, daß $\mathcal{L}_{\omega\pi\gamma}$ an sich bereits eichinvariant ist.

Für die in Gl. (3.13) auftretenden Kopplungskonstanten werden Literaturwerte verwendet:

$$\begin{aligned}
g_{\omega\pi\gamma} &= 0.313 \quad , \quad g_{\omega NN}^v = 10 \\
g_{\omega NN}^t &= 1.4 \quad .
\end{aligned} \tag{3.14}$$

$g_{\omega\pi\gamma}$ kann leicht aus dem Zerfall des ω in ein Pion und ein Photon bestimmt werden [pdg96, feu97]. Die Werte für $g_{\omega NN}^v$ und $g_{\omega NN}^t$ können im Prinzip aus der Analyse von NN -Streudaten extrahiert werden. In der Literatur finden sich allerdings unterschiedliche Werte für diese beiden Konstanten [dum93]. Die in Gl. (3.14) angegebenen Werte stammen aus einer jüngeren Analyse von NN vorwärts-Streudaten [gre80].

Außerdem wird am ωNN -Vertex noch ein Formfaktor eingeführt:

$$F(t) = \frac{\Lambda^2 - m_\omega^2}{\Lambda^2 - t} \quad . \tag{3.15}$$

Die Madelstamvariable t ist durch das Quadrat des Viererimpulses des ω gegeben. Auch für die Werte des Abschneideparameters Λ finden sich verschiedene Werte in der Literatur. Der in dieser Arbeit für die Pionenproduktion verwendete Wert von $\Lambda^2=2$ GeV² stammt ebenfalls aus einer Analyse von NN -Streudaten [mac87].

Die verbleibenden Parameter in Gl. (3.9) und Gl. (3.12) werden ebenfalls durch Vergleich mit experimentellen Daten bestimmt: Der Wert von $g_{\pi N\Delta}$ wurde so festgelegt, daß die gemessene Δ -Zerfallsbreite von 120 MeV [pdg96] reproduziert wird. Die verbleibenden Parameter c aus Gl. (3.12) und $g_{\gamma N\Delta}$ wurden schließlich durch Anpassung des Querschnitts für die Photoproduktion von neutralen Pionen am Proton an die experimentellen Daten [men77] bestimmt:

$$\begin{aligned}
g_{\pi N\Delta} &= 2.1 \quad , \quad g_{\gamma N\Delta} = 0.34 \\
c &= 0.5 \quad .
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Der sich mit diesen Parametern ergebende differentielle Wirkungsquerschnitt für die Photoproduktion von neutralen Pionen am Proton ist in Abb. 3.2 für vier verschiedene Schwerpunktsenergien dargestellt, in Abb. 3.3 ist der totale Wirkungsquerschnitt als Funktion der Schwerpunktsenergie gezeigt. Die Übereinstimmung der Rechnungen mit

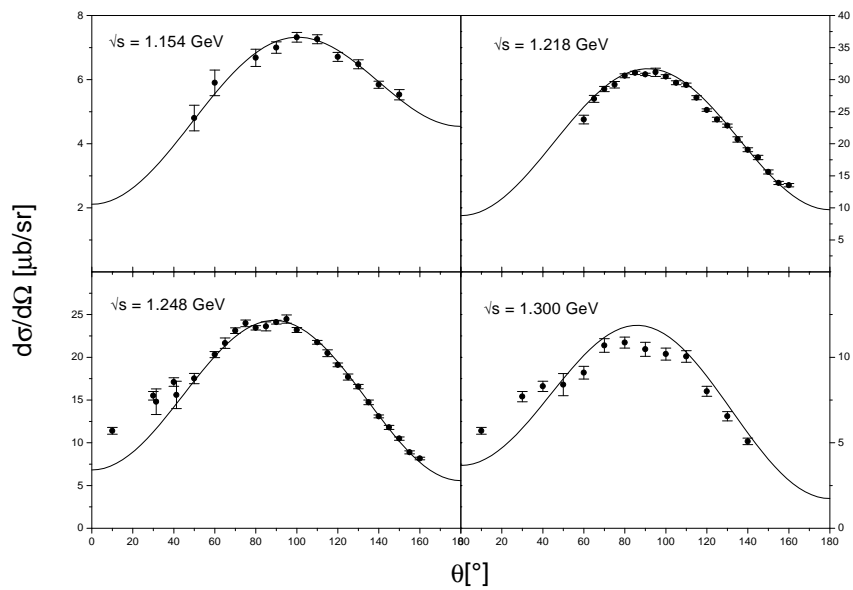


Abb. 3.2: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Produktion von neutralen Pionen am Proton für vier verschiedene Energien \sqrt{s} . Die Daten stammen aus [men77].

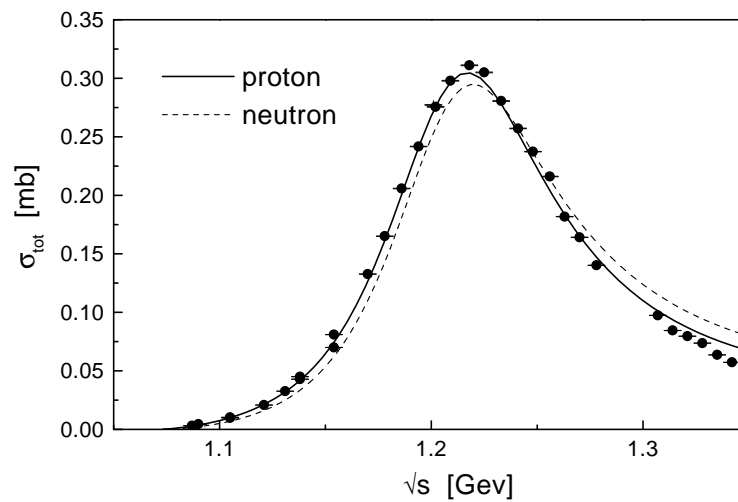


Abb. 3.3: Totaler Wirkungsquerschnitt für die Produktion von neutralen Pionen am Proton und am Neutron. Die Daten sind am Proton gemessen und stammen aus [men77].

den Daten ist bis zu einer Schwerpunktsenergie von 1,3 GeV sehr gut. Oberhalb dieser Energie ist die Berücksichtigung weiterer baryonischer Resonanzen nötig.

Es muß an dieser Stelle angemerkt werden, daß das hier vorgestellte Modell nicht strikt unitär ist, da die Rückstreuung des Pions nicht explizit behandelt wird [gol64, joa83]. Trotz der fehlenden Unitarität kann der elementare Querschnitt in Abb. 3.2 gut die Daten beschreiben. Unitaritätseffekte treten vor allem in den elektromagnetischen Multipolen auf [feu97]. Aus diesem Grund wurde in der vorliegenden Arbeit der Wirkungsquerschnitt zur Bestimmung der Parameter verwendet.

3.4 Photoproduktion von η -Mesonen

Auch über die Photoproduktion von η -Mesonen existieren zahlreiche theoretische Arbeiten ([tia94, ds97, ben95] außerdem [feu98], und Referenzen hierin). Die verfügbaren experimentellen Daten sind allerdings weniger umfangreich und jünger als bei der Photoproduktion von Pionen; erst die Experimente am MAMI-Beschleuniger in Mainz haben zuverlässige, detaillierte Daten geliefert [kru95].

Analog zur Photoproduktion von Pionen wurden Modelle formuliert, die die Photoproduktion von η -Mesonen beschreiben. Wie im Falle der Pionen wird die Produktion von η -Mesonen bei niedrigen Energien von einer Resonanz dominiert, der $N(1535)$ -Resonanz mit $I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}^-)$. Im Rahmen des Anregungsspektrums des Nukleons spielt diese Resonanz eine besondere Rolle, da sie mit Abstand am stärksten an den η -Nukleon Kanal koppelt. Die Ursache hierfür ist bisher ungeklärt. Die $N(1535)$ -Resonanz ist auch deswegen ein Spezialfall, da es einige Arbeiten gibt, die ihre Eigenschaft als Nukleonenresonanz anzweifeln und ihre Existenz grundsätzlich in Frage stellen [hoe92], oder sie z.B. als Kaon-Sigma Bindungszustand beschreiben [Kai97].

In Abb. 3.4 sind die zur Photoproduktion von η -Mesonen beitragenden Feynmangraphen dargestellt. Neben den $N(1535)$ -Diagrammen tragen wie im Fall von Pionen auch die Bornsterme und der ω -Graph zur Photoproduktion von η -Mesonen bei. Außerdem wird in den meisten Rechnungen noch die $N(1520)$ -Resonanz mit $I(J^P) = \frac{1}{2}(\frac{3}{2}^-)$ mit eingeschlossen. Diese Resonanz liefert zwar keinen großen Beitrag, ist aber notwendig, um die Winkelabhängigkeit des elementaren Photoproduktionsquerschnitts wiederzugeben [fix97].

Die Wechselwirkungsterme in der Lagrangedichte, aus denen die Diagramme in Abb. 3.4 konstruiert werden, sind, neben dem γNN -Term und dem ωNN -Term aus Gl. (3.7), die folgenden:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\eta NN} &= -i g_{\eta NN} \bar{\psi}_N \gamma_5 \psi_N \eta \\ \mathcal{L}_{\eta NS_{11}} &= -i g_{\eta NS_{11}} \bar{\psi}_N \psi_{S_{11}} \eta + h.c. \\ \mathcal{L}_{\gamma NS_{11}} &= \frac{e g_{\gamma NS_{11}}}{2m_N} \bar{\psi}_{S_{11}} \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} \psi_N F^{\nu\mu} + h.c.\end{aligned}$$

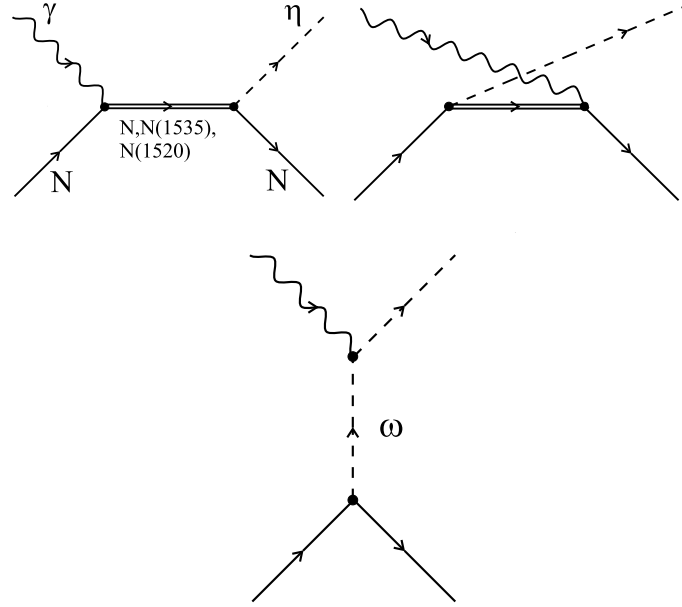


Abb. 3.4: Feynmandiagramme für die Photoproduktion von η -Mesonen am Nukleon.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\eta ND_{13}} &= \frac{g_{\eta ND_{13}}}{m_\eta} \bar{\psi}_{D_{13}}^\mu \gamma_5 \psi_N \partial_\mu \vec{\eta} + h.c. \\
 \mathcal{L}_{\gamma ND_{13}}^{(1)} &= i \frac{eg_{\gamma ND_{13}}^{(1)}}{2m_N} \bar{\psi}_{D_{13}}^\mu \gamma^\nu \psi_N F_{\mu\nu} + h.c. \\
 \mathcal{L}_{\gamma ND_{13}}^{(2)} &= \frac{eg_{\gamma ND_{13}}^{(2)}}{4m_N^2} \bar{\psi}_{D_{13}}^\mu \partial^\nu \psi_N F_{\mu\nu} + h.c. \\
 \mathcal{L}_{\omega\eta\gamma} &= \frac{eg_{\omega\eta\gamma}}{4m_\eta} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} (V^{\mu\nu} F^{\rho\sigma}) \eta \quad , \quad (3.17)
 \end{aligned}$$

Im Gegensatz zu der pseudovektoriellen πNN -Kopplung wird für die Kopplung von η -Mesonen an Nukleonen eine pseudoskalare Form angenommen. A priori ist unklar, welche von beiden Möglichkeiten genommen werden muß. Der Vergleich mit den experimentellen Daten zeigt aber, daß mit der pseudoskalaren Kopplung bessere Übereinstimmung mit den experimentellen Daten erreicht werden kann [tia94].

Auch für die $\eta N(1535)N$ -Kopplung ist neben der pseudoskalaren Form in Gl. (3.17) eine pseudovektorielle Form prinzipiell möglich. Versuche, durch Vergleich mit experimentellen Daten eine der beiden Möglichkeiten auszuschließen, führten nicht zum Erfolg [ben95]. Sämtliche jüngeren Veröffentlichungen [tia94, ds97, feu97] über die Photoproduktion von η -Mesonen verwenden die pseudoskalare $\eta N(1535)N$ -Kopplung, die auch hier angenommen wird.

Bei der Kopplung von Spin- $\frac{3}{2}$ Resonanzen an das Photon existieren, wie für das Δ bereits erwähnt, zwei Möglichkeiten, während bei Spin- $\frac{1}{2}$ Resonanzen die Art der Kopplung an das Photon bereits durch die Bedingung der Eichinvarianz festgelegt ist (vgl. Gl. (3.17)). Wie oben bereits erwähnt, können die auftretenden Kopplungskonstanten nur durch den Vergleich mit dem Experiment festgelegt werden, was beim Δ

$g_{\eta NN} = 2.24$	$g_{\eta NS_{11}} = 2.1$	$g_{\eta ND_{13}} = 6.76$
$g_{\omega\eta\gamma} = 0.31$	$g_{\gamma p S_{11}} = 0.73$	$g_{\gamma p D_{13}}^{(1)} = 5.46$
$g_{\omega NN}^v = 10$	$g_{\gamma n S_{11}} = -0.62$	$g_{\gamma n D_{13}}^{(1)} = -0.97$
$g_{\omega NN}^t = 1.59$		$g_{\gamma p D_{13}}^{(2)} = 5.76$
		$g_{\gamma n D_{13}}^{(2)} = 0.66$

Tab. 3.1: Tabelle der Kopplungskonstanten in Gl. (3.17) aus [fix97].

die klare Dominanz einer der beiden Kopplungsmöglichkeiten an das Photon zeigte.

Die $\omega\eta\gamma$ Kopplung schließlich ist analog zur $\omega\pi\gamma$ -Kopplung in Gl. (3.13) gewählt. Der Wert der Kopplungskonstante wird auch hier mit Hilfe der entsprechenden Zerfallsbreite [pdg96] berechnet [feu97].

Alle numerischen Werte für die Kopplungskonstanten in Gl. (3.17) wurden aus [fix97] genommen. In dieser Referenz wurde das soweit beschriebene Modell zur Beschreibung der Photoproduktion von η -Mesonen am Nukleon verwendet. Hierbei wurde ein Abschneideparameter im ωNN Formfaktor in Gl. (3.15) mit dem Wert $\Lambda^2=1.2 \text{ GeV}^2$ verwendet. Die verwendeten Kopplungskonstanten sind in Tab. 3.1 aufgelistet.

Man sieht aus Tab. 3.1, daß die Kopplungskonstanten für die beiden Möglichkeiten der $N(1520)N\gamma$ -Kopplung in etwa die gleiche Größe haben, so daß im Gegensatz zum Δ beide Kopplungsarten berücksichtigt werden müssen.

Der aus den Kopplungskonstanten in Tab. 3.1 resultierende differentielle Wirkungsquerschnitt für die Photoproduktion von η -Mesonen ist in Abb. 3.5 im Vergleich zu experimentellen Daten [kru95] dargestellt. Diese Abbildung wurde aus [fix97] übernommen.

Damit liegen die Modelle für die elementare Photoproduktion von Pionen und η -Mesonen fest. Die Übertragung dieser Modelle auf Produktionsprozesse am Kern wird im folgenden Kapitel beschrieben.

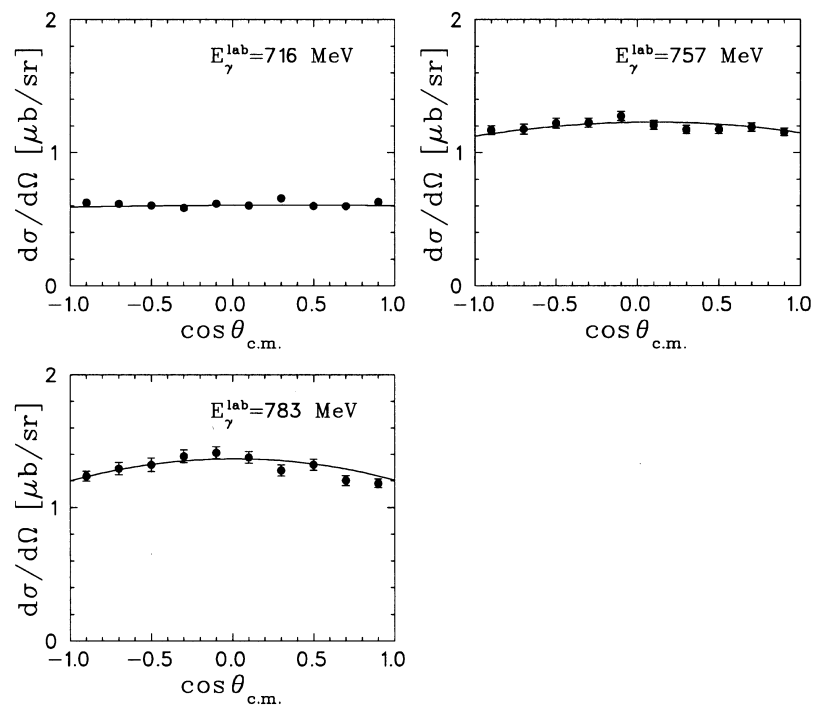


Abb. 3.5: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Photoproduktion von η -Mesonen am Proton. Die Abbildung stammt aus [fix97].

Kapitel 4

Die Photoproduktion von Mesonen am Kern

4.1 Die Stoßnäherung

In diesem Kapitel wird die konzeptionelle Grundlage des in der vorliegenden Arbeit verwendeten Modells für die Photoproduktion von Mesonen am Kern diskutiert. Die technischen Details werden in den darauf folgenden Abschnitten und in Anh. C erläutert.

Grundsätzlich stellt ein Produktionsprozeß an einem Kern mit A Nukleonen ein $A + 1$ -Teilchenproblem dar. Es muß der Tatsache Rechnung getragen werden, daß ein im Kern gebundenes Nukleon nicht mehr dieselben Eigenschaften hat wie ein freies Teilchen, und daß gleichzeitig die restlichen $A - 1$ Teilchen die Reaktion beeinflussen können. Die Situation ist für die kohärente Photoproduktion graphisch in Abb. 4.1 dargestellt.

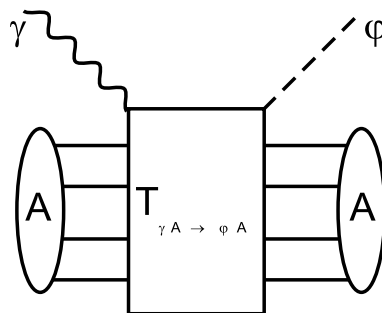


Abb. 4.1: Graphische Darstellung der Produktion von Mesonen am Kern. $\varphi = \pi, \eta$ steht für das produzierte Meson.

Zur Vereinfachung des theoretischen Formalismus wird im allgemeinen die Annahme gemacht, daß nur ein Nukleon am tatsächlichen Produktionsprozeß beteiligt ist; man spricht von der *Stoßnäherung* oder der *Impulse Approximation* (IA). Diese Annahme ist im allgemeinen nur schwer zu verifizieren. In [gol64] wird mit Hilfe von Skalenbetrachtungen gezeigt, daß in dem hier betrachteten Energiebereich die kinematischen

Verhältnisse bei der Reaktion dergestalt sind, daß die gebundenen Nukleonen als Freiheitsgrade tatsächlich aufgelöst werden können. Dies ist allerdings nur eine notwendige Bedingung für die Verwendung der IA, es ist nicht auszuschließen, daß auch Vielteilchenprozesse zur Produktion von Mesonen am Kern beitragen. Diese Fragestellung ist nicht im voraus eindeutig zu beantworten, und man muß bei Rechnungen, die die IA verwenden, die daraus resultierenden Unsicherheiten im Gedächtnis behalten. Letztendlich gehört die IA zu den Näherungen, die physikalisch begründet sind, aber erst durch den Vergleich mit dem Experiment auf ihre Güte hin getestet werden können.

Es wird zwischen zwei verschiedenen Formen der IA unterschieden: Die einfachere der beiden, die sogenannte *Plane Wave Impulse Approximation* (PWIA), nimmt zusätzlich an, daß die ein- und auslaufenden Teilchen nicht mit dem Kern wechselwirken. Diese Vorstellung ist in Abb. 4.2 dargestellt. Die Tatsache, daß die Produktion am Kern stattfindet, geht jetzt nur noch über die Eigenschaften von ein- und auslaufendem Nukleon und über die Summation über alle gebundenen Zustände i in die Rechnung ein. Die PWIA ist natürlich für die Produktion von Hadronen eine unzureichende Näherung, die nur qualitative Aussagen zuläßt.

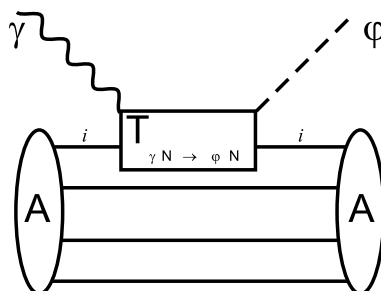


Abb. 4.2: Graphische Darstellung der Produktion von Mesonen am Kern in PWIA.

Bei der Photoproduktion von Mesonen an leichten bis mittelschweren Kernen kann die Wechselwirkung zwischen dem einlaufenden Photon und dem Kern getrost vernachlässigt werden. Die Wechselwirkung zwischen dem auslaufenden Meson und dem Kern wird in der zweiten Version der IA, der *Distorted Wave Impulse Approximation* (DWIA), berücksichtigt. Dies geschieht im allgemeinen dadurch, daß für das auslaufende Meson ein Potential eingeführt wird, das dessen Wechselwirkung mit dem Kern beschreibt. Da die Meson-Kern-Wechselwirkung auch Absorptionsprozesse beinhaltet, ist dieses Potential im allgemeinen komplex, man spricht von einem optischen Potential. Es ist wichtig, sich zu vergegenwärtigen, daß in DWIA zwar der Produktionsprozeß nur ein Nukleon beinhaltet, daß die Endzustandswechselwirkung zwischen Meson und Kern über ein optisches Potential aber den gesamten Kern miteinschließt. Dieser Sachverhalt ist in Abb. 4.3 veranschaulicht.

Technisch läuft die Auswertung eines Diagramms aus Abb. 3.1 oder Abb. 3.4 im Rahmen der IA darauf hinaus, daß bei der Übersetzung des Diagramms in eine Amplitude die Nukleonwellenfunktionen statt durch ebene Wellen durch Wellenfunktionen der gebundenen Zustände im Kern gegeben sind; über die im Kern besetzten Zustände wird dann summiert. Je nachdem ob PWIA oder DWIA verwendet werden, wird dann

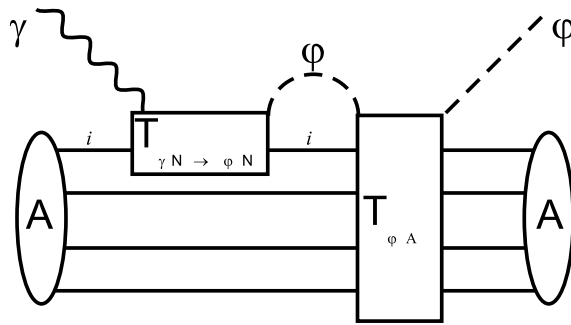


Abb. 4.3: Graphische Darstellung der Produktion von Mesonen am Kern in DWIA.

noch die Mesonwellenfunktion durch eine Streuwellenfunktion ersetzt. Die Bestimmung der Kernwellenfunktionen wird im nächsten Abschnitt erläutert, die der mesonischen Streuzustände in Kap. 4.3

Es gibt in der Literatur Arbeiten, in denen versucht wird, in der Beschreibung von photonuklearen Reaktionen über die IA hinauszugehen. Dies kann zum Beispiel durch die Betrachtung von Mesonen-Austauschströmen geschehen, wie im Fall von (γ, p) Reaktionen [ryc92], oder durch die Mitnahme von Vielteilchenprozessen bei der Photoproduktion von Pionen am Kern [kam95]. Diese Ansätze sind jedoch technisch sehr aufwendig. Da die IA insgesamt mit großem Erfolg auf Reaktionen am Kern angewendet wurde, ist es gerechtfertigt, sie auch auf die kohärente Photoproduktion anzuwenden. Wie oben bereits erwähnt, kann die Güte der IA erst im Vergleich mit dem Experiment endgültig beurteilt werden.

4.2 Die Kernwellenfunktion

Um zuverlässige Wellenfunktionen für die Nukleonen im Kern zu erhalten, wird die allgemeinste Form eines relativistischen, ortsabhängigen Einteilchenpotentials angenommen. Dieses Potential ist für Spin-Null-Kerne sphärisch symmetrisch und besteht aus einem skalaren Anteil V_s und einem Vektoranteil V_v . Eine Nukleonwellenfunktion erfüllt dann folgende Bewegungsgleichung.

$$(\not{p} - m - V_v \gamma_0 - V_s) \psi = 0 \quad , \quad (4.1)$$

Für die Potentiale V_s und V_v wird eine Woods-Saxon-Form gewählt:

$$V(r) = V_i^o \left(1 + e^{\frac{(r-r_i A^{1/3})}{a_i}} \right)^{-1} \quad ; i = v, s \quad , \quad (4.2)$$

wobei V_i^o , r_i und a_i Parameter sind, deren Bestimmung im nächsten Abschnitt erläutert wird.

4.2.1 Die Bestimmung der Potentialparameter

Die Parameter in Gl. (4.2) für das Skalar- und das Vektorpotential müssen für jeden Kern einzeln so bestimmt werden, daß die experimentell gemessenen Grundzustandseigenschaften des Kerns möglichst gut wiedergegeben werden. Gl. (4.1) wird dazu numerisch mit Hilfe des Programms RWAVES [gle93] gelöst. Dieses Programm liefert für vorgegebene Parameter von Skalar- und Vektorpotential sämtliche Grundzustandswellenfunktionen zusammen mit den zugehörigen Einteilchenenergien. Die Einteilchenenergien können mit den gemessenen Separationsenergien verglichen werden [aud95]. Die aus der numerischen Berechnung resultierenden Wellenfunktionen können benutzt werden, um zum Beispiel die Vektordichte für Protonen und Neutronen des Grundzustands auszurechnen:

$$(\rho_v(\vec{r}))_i = \sum_{\alpha} (\bar{\psi}_{\alpha}(\vec{r}) \gamma_0 \psi_{\alpha}(\vec{r}))_i = \sum_{\alpha} (\psi_{\alpha}^{\dagger}(\vec{r}) \psi_{\alpha}(\vec{r}))_i \quad , \quad (4.3)$$

mit $i = n, p$. ψ_{α} steht hierbei für die Diracwellenfunktion des Zustands α und die Summe läuft über alle besetzten Zustände. Experimentelle Information liegt für die Ladungsverteilung von Kernen vor. Um diese Ladungsverteilung aus den Vektordichten in Gl. (4.3) zu berechnen, muß berücksichtigt werden, daß die Nukleonen keine punktförmigen Teilchen sind, sondern eine räumliche Ausdehnung besitzen. Zur Berechnung der Ladungsverteilung ρ_c muß also die aus den Wellenfunktionen resultierende Vektordichte noch mit der Ladungsdichte innerhalb der Nukleonen gefaltet werden [pre93]:

$$\rho_c(\vec{r}) = \sum_{i=n,p} \int d^3r' (\rho_v(\vec{r}'))_i \rho_i(\vec{r} - \vec{r}') \quad . \quad (4.4)$$

$\rho_{n,p}$ steht für die Ladungsverteilung innerhalb der Nukleonen. Das Faltungsintegral in Gl. (4.4) wird bei einer Fouriertransformation in den Impulsraum zu einem Produkt aus der Fouriertransformierten der Vektordichte und dem elektrischen Formfaktor des Nukleons G_E . Über diesen Formfaktor liegt nun experimentelle Information vor, er ist für Proton und Neutron durch folgende Parametrisierungen gegeben [gou74]:

$$\begin{aligned} G_E^p(q^2) &= \frac{1}{1 - \frac{q^2}{0,71}} \\ G_E^n(q^2) &= 1,687 \frac{\lambda}{1 + 10,4\lambda} \quad , \end{aligned} \quad (4.5)$$

wobei $\lambda = q^2/(2m_N^2)$ ist.

Um die Fouriertransformierte der Ladungsverteilung, also den Ladungsformfaktor des Kerns, zu bestimmen, muß folglich die Fouriertransformierte der Vektordichte aus Gl. (4.3) berechnet werden und für Protonen und Neutronen mit G_E^p und G_E^n multipliziert werden. Rücktransformation in den Ortsraum ergibt dann die gesuchte Ladungsverteilung.

Nucleus	Orbital	Separationsenergie [MeV]				r_c [MeV]	
		Proton		Neutron		Exp.	Theorie
		Exp.	Theorie	Exp.	Theorie	Exp.	Theorie
^{12}C	$1p_{\frac{3}{2}}$	15.957	15.653	18.722	18.562	2.472	2.470
^{40}Ca	$1d_{\frac{3}{2}}$	8.328	8.265	15.641	15.797	3.450	3.465

Tab. 4.1: Bindungsenergien und Ladungsradien aus dem Experiment und als Ergebnis der im Text beschriebenen Anpassung.

Nucleus	V_v (MeV)	r_v (fm)	a_v (fm)	V_s (MeV)	r_s (fm)	a_s (fm)
^{12}C	385.7	1.056	0.427	-470.4	1.056	0.447
^{40}Ca	348.1	1.149	0.476	-424.5	1.149	0.506

Tab. 4.2: Potentialparameter, die sich durch Fit an die Grundzustandseigenschaften des Kerns wie im Text beschrieben ergeben.

Experimentelle Daten liegen jeweils für die Separationsenergie des am schwächsten gebundenen Zustands vor, außerdem kann man durch Elektronenstreuung die Ladungsverteilung des Kerns gut bestimmen. Als diejenigen Größen, deren Anpassung zur Bestimmung der Parameter in Gl. (4.2) diene, wurden deswegen die folgenden Größen gewählt:

- Die Separationsenergie des am schwächsten gebundenen Zustands für Protonen und Neutronen.
- Die Lage des ersten Minimums im Ladungsformfaktor:

$$F_c(q) = \frac{1}{Z} 4\pi \int r^2 dr \frac{\sin(qr)}{qr} \rho_c(\vec{r}) \quad . \quad (4.6)$$

Die Lage dieses Minimums hängt vor allem mit dem Radius des betrachteten Kerns zusammen.

- Die Höhe des zweiten Maximums im Ladungsformfaktor. Diese Größe hängt davon ab, wie schnell die Ladungsdichte am Rand des Kerns abfällt [pre93].
- Der mittlere Ladungsradius:

$$r_c = \left[\frac{1}{Z} \int d^3r r^2 \rho_c(\vec{r}) \right]^{\frac{1}{2}} \quad . \quad (4.7)$$

Die experimentellen Daten für die Ladungsdichten sind in [vri87] gesammelt. An diese Daten und an die Separationsenergien aus [aud95] wurden die Ergebnisse der Rechnung angepaßt. Dies geschah durch einen least-square Fit der errechneten Größen an

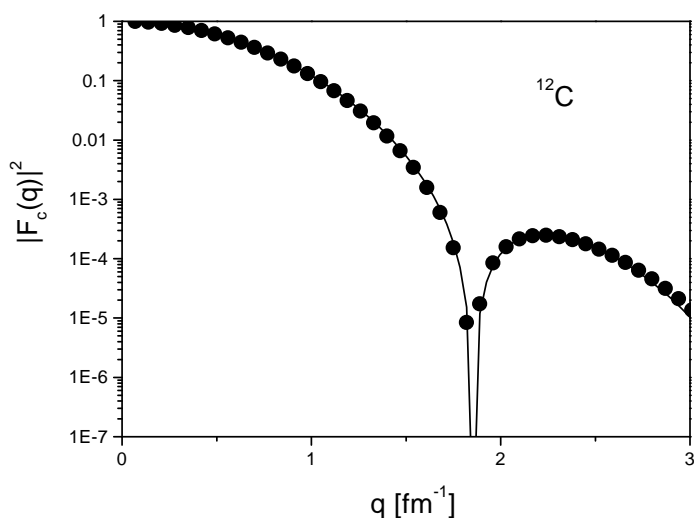


Abb. 4.4: Der Ladungsformfaktor für ^{12}C als Funktion des übertragenen Impulses q unter Verwendung der Parameter aus Tab. 4.2. Die Linie stellt das Ergebnis der Rechnung dar, die Punkte sind das experimentelle Ergebnis aus [vri87].

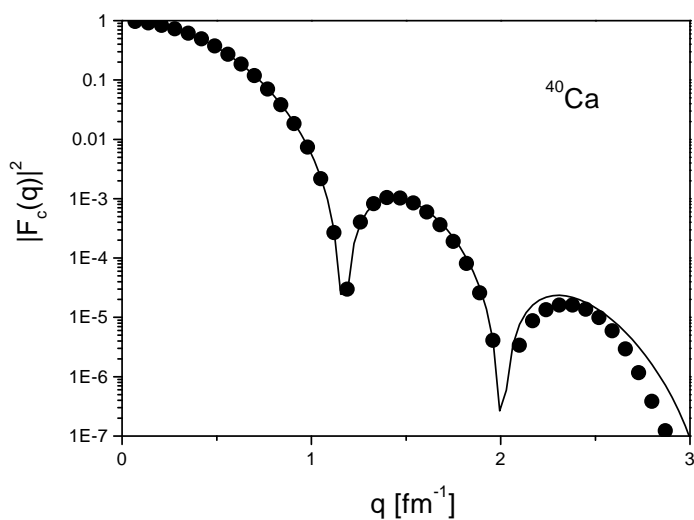


Abb. 4.5: Wie Abb. 4.4 aber für ^{40}Ca .

die experimentellen Werte. Vor allem die gute Wiedergabe des Formfaktors des Grundzustands ist von entscheidender Bedeutung, da der differentielle Wirkungsquerschnitt für die kohärente Photoproduktion sehr eng mit dem Formfaktor zusammenhängt, wie in den folgenden Kapiteln noch erläutert wird.

Die aus dieser Prozedur gewonnenen Potentialparameter für ^{12}C und ^{40}Ca sind in Tab. 4.2 aufgelistet. In Tab. 4.1 sind die Quantenzahlen der am schwächsten gebundenen Orbitale, zusammen mit den experimentellen und den theoretischen Separations-

energien und den mittleren Ladungsradien angegeben. In Abb. 4.4 und Abb. 4.5 sind die entsprechenden Ladungsformfaktoren im Vergleich mit experimentell gewonnenen Werten dargestellt. Die Übereinstimmung bei ^{12}C ist ausgezeichnet, bei ^{40}Ca sieht man erst bei hohen Impulsüberträgen leichte Abweichungen zwischen den Rechnungen und den Daten.

Durch diese Art der Bestimmung der Wellenfunktionen in einem mittleren Feld werden Korrelationen zwischen den Nukleonen im Kern vernachlässigt. Diese Korrelationen hängen mit den kurzreichweitigen Eigenschaften der Nukleon-Nukleon-Wechselwirkung zusammen und sind damit erst bei ausreichend großen Impulsüberträgen sichtbar. Mikroskopische Rechnungen ergaben, daß solche Korrelationen erst jenseits eines Impulsübertrags von etwa 3 fm^{-1} eine Rolle spielen (s. z.B. [mue95, dej96]).

4.3 Das optische Potential

Außer den Nukleonwellenfunktionen werden zur Auswertung der Diagramme in Abb. 3.1 und 3.4 auch die Wellenfunktionen des einlaufenden Photons und des produzierten Mesons benötigt. Wie bereits erwähnt, kann das Photon bei leichten und mittelschweren Kernen als freies Teilchen betrachtet werden. Das auslaufende Meson erfährt jedoch eine starke Wechselwirkung mit dem Kern. Diese Wechselwirkung wird durch optische Potentiale beschrieben. Die Orts- bzw. Energieabhängigkeit und die Struktur dieser Potentiale kann mikroskopisch motiviert werden. Die auftretenden Parameter können aus mikroskopischen Betrachtungen oder im Fall der Pionen auch phänomenologisch durch die Analyse von Pion-Kern Streudaten bestimmt werden.

Die Endzustandswechselwirkung zwischen Meson und Kern kann auch zur vollständigen Absorption des erzeugten Mesons führen. Diese Absorption entsteht durch die Kopplung an Freiheitsgrade, wie zum Beispiel Anregungen des Kerns, die nicht im Modellraum der Streuung eines Pions an einem Potential enthalten sind. Um diese Absorption dennoch mit einzubeziehen, muß das Potential, in dem sich das Meson bewegt, komplex sein. Bei einem solchen komplexen Potential ist der Wahrscheinlichkeitsstrom des betrachteten Mesons nicht mehr erhalten. Die ‘Herleitung’ eines optischen Potentials geschieht üblicherweise ausgehend von der Meson-Nukleon-Wechselwirkung. Diese Vorgehensweise soll im folgenden für Pionen und für η -Mesonen skizziert werden. Es handelt sich hierbei nicht um eine strenge Ableitung, sondern um eine Betrachtung, die eine bestimmte Form des Potentials motiviert.

4.3.1 Das Pion

In der Literatur werden optische Potentiale für das Pion entweder für sehr niedrige Energien $T_\pi < 50\text{ MeV}$ oder für Energien um die Δ -Resonanz angegeben. In dieser Arbeit wird aber eine einheitliche Beschreibung der Pion-Kern-Wechselwirkung im gesamten Energiebereich von der Schwelle bis oberhalb der Δ -Resonanz benötigt. Aus diesem Grunde wurde ein mikroskopisch motivierter Ansatz gewählt, dessen Parameter dann an Pion-Kern-Streudaten für ^{12}C gefittet wurden. Die für das Potential gewählte Form sowie die Bestimmung der Parameter sollen in diesem Kapitel erläutert werden.

Der Ausgangspunkt ist die nicht-relativistische Pion-Nukleon-Streuamplitude. Diese Streuamplitude ist eine Matrix im Spin-Isospinraum und kann als Funktion des Impulses \vec{q} und \vec{q}' des ein- bzw. auslaufenden Pions im Schwerpunktsystem wie folgt geschrieben werden [eri88]:

$$\hat{T}_{\pi N}(\vec{q}, \vec{q}') = b_o + \vec{b}_1 \vec{\tau} + [c_o + \vec{c}_1 \vec{\tau}] \vec{q} \vec{q}' + i [d_o + \vec{d}_1 \vec{\tau}] \vec{\sigma}(\vec{q}' \times \vec{q}) \quad . \quad (4.8)$$

Die Matrix $\vec{\sigma}$ trägt die beiden Spinindizes von $\hat{T}_{\pi N}$, während $\vec{\tau}$ die Isospinindizes trägt. Betrachtet man nun nur Kerne mit verschwindendem Spin und Isospin, so kann von der Pion-Nukleon Amplitude in Gl. (4.8) nur der Spin-Isospin skalare Teil beitragen und wir haben:

$$\hat{T}_{\pi N} = b_o + c_o \vec{q} \vec{q}' \quad . \quad (4.9)$$

Die Größen b_o und c_o sind Parameter, die noch bestimmt werden müssen. Aus der aus Gl. (4.9) resultierenden Winkelabhängigkeit ist leicht zu sehen, daß b_o für eine s -Wellen Wechselwirkung steht, während c_o einen p -Wellenanteil darstellt. Es ist folglich klar, daß die Form (4.9) nur für niedrige Energien gültig ist. Da aber das Δ die Pion-Nukleon Wechselwirkung in dem hier relevanten Energiebereich bis etwa $q \approx 0.3$ GeV dominiert, und diese Resonanz an eine Pion-Nukleon p -Welle koppelt, ist der Ansatz (4.9) durchaus gerechtfertigt.

Bei der Streuung am Kern kann das Pion nicht nur mit einem, sondern mit A Nukleonen gleichzeitig wechselwirken. Um dies zu berücksichtigen, konstruiert man aus der Streuamplitude in Gl. (4.9) einen Operator für die Pion-Kern Streuung, der als Summe von Einteilchenoperatoren angesetzt wird [fes91]:

$$\hat{T}_{\pi A} = \sum_{n=1}^A \hat{T}_{\pi N}(\vec{q}, \vec{q}') e^{i(\vec{q}-\vec{q}') \cdot \vec{r}_n} \quad , \quad (4.10)$$

wobei angenommen wurde, daß das Pion nur einmal mit den Nukleon wechselwirkt (erste Bornsche Näherung). Zur Berechnung der Pion-Kern-Streuamplitude wird nun der Erwartungswert dieses Operators zwischen den Vielteilchenzuständen des Kerns gebildet:

$$\begin{aligned} T_{\pi A}(\vec{q}, \vec{q}') &= \hat{T}_{\pi N}(\vec{q}, \vec{q}') \langle \Psi_A | \sum_{n=1}^A e^{i(\vec{q}-\vec{q}') \cdot \vec{r}_n} | \Psi \rangle \\ &= \hat{T}_{\pi N}(\vec{q}, \vec{q}') F_A(\vec{q} - \vec{q}') \quad , \end{aligned} \quad (4.11)$$

wobei F_A der Formfaktor des Kerns, also die Fouriertransformierte der Teilchendichte $\rho_A(\vec{x})$ ist. $T_{\pi A}$ ist an dieser Stelle proportional zum Formfaktor des Kerns und damit linear in der Kerndichte. Dies ist eine Konsequenz davon, daß in Gl. (4.10) die erste Bornsche Näherung gemacht wurde. Es ist nun leicht, ein Potential V zu konstruieren, das in dieser ersten Bornschen Näherung zu der Pion-Kern-Streuamplitude in Gl. (4.11)

führt [fes91]. Im allgemeinen Fall ist dieses Potential nicht-lokal, das heißt, es ist eine Funktion von zwei Orten \vec{r} und \vec{r}' [sch87]:

$$T_{\pi A}(\vec{q}, \vec{q}') \stackrel{!}{=} -\frac{E_\pi}{2\pi} \int d^3r d^3r' e^{-i\vec{q}'\vec{r}'} V(\vec{r}', \vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} \quad , \quad (4.12)$$

woraus folgt

$$E_\pi V(\vec{r}', \vec{r}) = -2\pi \int \frac{d^3q d^3q'}{(2\pi)^6} e^{i\vec{q}'\vec{r}'} e^{-i\vec{q}\vec{r}} \hat{T}_{\pi N}(\vec{q}, \vec{q}') F_A(\vec{q} - \vec{q}') \quad . \quad (4.13)$$

Setzt man hier nun die in Gl. (4.9) angegebene Form für $\hat{T}_{\pi N}$ ein, so kann man leicht zeigen, daß $V(\vec{r}', \vec{r})$ proportional zu einer Deltafunktion der beiden Orte ist : $V(\vec{r}', \vec{r}) = V_{\pi A}(\vec{r})\delta(\vec{r}' - \vec{r})$, und $V_{\pi A}(\vec{r})$ wie folgt geschrieben werden kann:

$$2E_\pi V_{\pi A}(\vec{r}) = -4\pi(b_o\rho_A(\vec{r}) - c_o\vec{\nabla}\rho_A(\vec{r})\vec{\nabla}) \quad . \quad (4.14)$$

$\rho_A(\vec{r})$ steht wieder für die Teilchendichte des Kerns. Ein Potential dieser Form wurde zuerst von Kisslinger [kis55] vorgeschlagen. Dieses Potential kann nun in die Klein-Gordon-Gleichung für das Pion eingesetzt werden:

$$(\vec{\nabla}^2 + (E_\pi - V_c(\vec{r}))^2 - 2E_\pi V_{\pi A}(\vec{r}) - m_\pi^2)\phi_\pi = 0 \quad , \quad (4.15)$$

wobei Terme der Ordnung $V_{\pi A}^2$ vernachlässigt wurden. $V_c(\vec{r})$ steht für das Coulombpotential des Kerns. Gl. (4.15) kann nun numerisch gelöst werden, um die Streuwellenfunktion des Pions zu erhalten (s. Anh. B). Diese wird dann im Falle der DWIA anstelle einer ebenen Welle zur Auswertung des Produktionsmatrixelements der Photo-Produktion am Kern verwendet. An dieser Stelle sei angemerkt, daß die erste Bornsche Näherung oben nur zur Bestimmung von $V_{\pi A}$ diene. Durch die numerische Lösung der Klein-Gordon-Gleichung wird das so bestimmte Potential in der Untersuchung der Pion-Kern-Streuung exakt behandelt.

Die Form des optischen Potentials in Gl. (4.14) kann in mehrfacher Hinsicht noch verbessert werden:

- Die Form (4.9) für die Pion-Nukleon-Streuamplitude gilt im Pion-Nukleon-Schwerpunktsystem, das nicht identisch mit dem Pion-Kern-Schwerpunktsystem ist. Man kann zeigen, daß die Berücksichtigung einer Lorentztransformation zwischen diesen beiden Bezugssystemen dazu führt, daß b_o und c_o durch folgende Größen ersetzt werden [eri88]:

$$\begin{aligned} b_o &\rightarrow (1 + \varepsilon)b_o \\ c_o &\rightarrow \frac{1}{(1 + \varepsilon)}c_o \quad , \end{aligned} \quad (4.16)$$

wobei $\varepsilon = E_\pi/m_N$. Außerdem tritt noch ein zusätzlicher Term im Potential auf:

$$\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)} \frac{c_o}{2} (\vec{\nabla}^2 \rho_A(\vec{r})) \quad . \quad (4.17)$$

- Rechnungen im Delta-Loch Modell zeigen, daß die Grundzustandseigenschaften von Kernmaterie nur dann korrekt wiedergegeben werden können, wenn eine zusätzliche, repulsive Wechselwirkung zwischen der Δ -Resonanz und dem Nukleon eingeführt wird [eri88]. Diese Wechselwirkung wird im allgemeinen als punktförmig angenommen:

$$V_{\Delta N} \approx \lambda \delta^3(\vec{r}) \quad . \quad (4.18)$$

Wie oben bereits erwähnt, ist das Δ eine Resonanz in der Pion-Nukleon p -Welle, so daß die Antikorrelation zwischen Nukleonen und Δ Δ -Resonanzen den p -Wellenterm in $V_{\pi A}$ modifiziert, der proportional zu c_o ist [eri88, fes91]:

$$c_o \vec{\nabla} \rho_A(\vec{r}) \vec{\nabla} \rightarrow \vec{\nabla} \frac{c_o \rho_A(\vec{r})}{1 + \frac{4\pi}{3} \lambda \rho_A(\vec{r})} \vec{\nabla} \quad . \quad (4.19)$$

Das Auftreten dieses Terms im Pion-Kern Potential wird als Lorentz-Lorenz-Ericson-Ericson Effekt bezeichnet.

- In Gl. (4.9) geht die elastische Streuamplitude $\hat{T}_{\pi N}$ ein. Folglich enthält das Potential in Gl. (4.14) noch keinen absorptiven Anteil. Wegen Impulserhaltung ist zur Absorption eines reellen Pions die Wechselwirkung mit mindestens zwei Nukleonen nötig. Eine Beispiel für eine solche Zweiteilchenabsorption ist in Abb. 4.6 graphisch dargestellt: Ein einlaufendes Pion regt ein Nukleon zu einer Δ Resonanz an, diese Resonanz reagiert mit einem weiteren Nukleon, wobei sie wieder zu einem Nukleon wird. $V_{\pi A}$ in Gl. (4.14) beinhaltet nur die Reaktion des Pions mit jeweils einem Nukleon, was sich darin äußert, daß $V_{\pi A}$ linear in der Nukleondichte ρ_A ist. Zweiteilchenprozesse wie der in Abb. 4.6 dargestellte Prozeß führen zu Beiträgen, die quadratisch in ρ_A sind. Ein solcher Prozeß enthält Beiträge von beliebigen Drehimpulsen. Man führt deshalb zwei zusätzliche Terme in $V_{\pi A}$ ein, die einem s -Wellen und einem p -Wellenprozeß entsprechen und separate Parameter beinhalten:

$$B \rho_A^2 + C \vec{\nabla} \rho_A^2 \vec{\nabla} \quad . \quad (4.20)$$

Die Größen B und C sind komplex und beschreiben absorptive Reaktionen des Pions mit dem Kern. Im Gegensatz zu b_o und c_o können B und C nicht aus der Pion-Nukleon-Streuung extrahiert werden. In der Literatur werden sie oft durch die Analyse von elastischer Pion-Kern-Streuung bestimmt [eri88]; es gibt aber auch Versuche, sie in mikroskopischen Theorien zu berechnen [gar88].

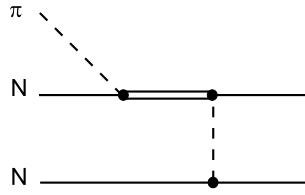


Abb. 4.6: Graphische Darstellung der Zweiteilchenabsorption eines Pions durch die Anregung einer intermediären Δ -Resonanz.

Alles in allem führen die dargelegten Betrachtungen zu folgendem Pion-Kern Potential:

$$\begin{aligned}
2E_\pi U_{opt}(r) = & -4\pi[b(r) + B(r)] \\
& + 4\pi \vec{\nabla} \{L(r)[c(r) + C(r)]\} \vec{\nabla} \\
& - 4\pi \left[\frac{p_1 - 1}{2} \nabla^2 c(r) + \frac{p_2 - 1}{2} \nabla^2 C(r) \right] , \quad (4.21)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
b(r) &= p_1 b_o \rho(r) \\
c(r) &= p_1^{-1} c_o \rho(r) \\
B(r) &= p_2 B_o \rho^2(r) \\
C(r) &= p_2^{-1} C_o \rho^2(r) \\
L(r) &= \left\{ 1 + \frac{4\pi}{3} \lambda [c(r) + C(r)] \right\}^{-1} ,
\end{aligned}$$

wobei

$$p_1 = 1 + \frac{E_\pi}{m_N}; \quad p_2 = 1 + \frac{E_\pi}{2m_N} . \quad (4.22)$$

Ein solches Potential wurde in der Literatur dazu verwendet, die elastische Pion-Kern Streuung bis etwa 50 MeV zu beschreiben [str80, car82]. Die Parameter b_o und c_o wurden dabei aus experimentellen Daten für die Pion-Nukleon-Streuung extrahiert. Für λ , B und C wurden theoretische Rechnungen herangezogen.

Ein solches Ortsraumpotential hat den großen Vorteil, daß es relativ einfach ist, durch die numerische Lösung der Bewegungsgleichung des Pions Gl. (4.15) die Streuwellenfunktion zu erhalten. Leider gibt es aber in der Literatur keine systematische Studie über das Verhalten der Parameter b_o, c_o, λ, C und B in dem gesamten in dieser Arbeit betrachteten Energiebereich bis etwa $T_\pi \approx 300$ MeV. In diesem Bereich führt die Δ -Resonanz zu einer starken Energieabhängigkeit der Parameter. Um eine zuverlässige Parametrisierung des Potentials für die Pionen von der Schwelle bis zur Δ -Resonanz

zu erhalten, wurde in dieser Arbeit eine Anpassung der Parameter an experimentelle Daten vorgenommen.

Um eine möglichst gute Beschreibung der A2-Daten [sch97] für die kohärente Photoproduktion von Pionen an ^{12}C zu gewährleisten, wurde zur Anpassung des optischen Potentials Daten für die elastische Streuung geladener Pionen an ^{12}C gewählt [pid84]. Um auch für hohe Energien noch einen Parametersatz zu erhalten, wurde außerdem eine Anpassung an Daten für die Streuung an ^{16}O bei $T_\pi=330$ MeV durchgeführt. Für die Kerndichte $\rho(r)$ wurden dabei die Parametrisierungen aus [str80] verwendet. Im Fall von ^{12}C wurde diese Parametrisierung mit der im vorhergehenden Abschnitt bestimmten Vektordichte verglichen, was sehr gute Übereinstimmung ergab. Für λ wurde ein Wert von 1,4 aus der Literatur gewählt [str80, car82, eri88].

Ein erster Versuch, b_o , c_o , B und C gleichzeitig an die experimentellen Daten zu fitten, führte jedoch nicht zum Erfolg, da ein solcher Fit für fast alle Größen unphysikalisch große Werte liefert. Die Ursache hierfür ist, daß zwischen den einzelnen Parametern eine deutliche Redundanz besteht. Das bedeutet, daß die Änderung eines Parameters durch die Änderung eines weiteren Parameters weitgehend kompensiert werden kann. Folglich kann es bei einem Fit vorkommen, daß sich große Variationen in den Parametern gegenseitig ausgleichen und das Endergebnis nur wenig beeinflusst wird.

Diese Redundanzen bestehen vor allem zwischen den Parametern eines Drehimpulses also zwischen b_o und B bzw. zwischen c_o und C [sek83]. Das heißt, daß b_o und B bzw. c_o und C nicht gleichzeitig aus einem Fit bestimmt werden können. Um dennoch eine physikalisch sinnvolle Parametrisierung des optischen Potentials zu erhalten, wurden in dieser Arbeit die Zweiteilchenparameter B und C gleich Null gesetzt, und dafür die Einteilchenparameter b_o und c_o komplex gewählt. Die resultierenden vier Freiheitsgrade konnten dann durch die Anpassung der Rechnungen an die Daten für den differentiellen Querschnitt der elastischen Pionenstreuung an ^{12}C bestimmt werden.

Eine technische Schwierigkeit bestand darin, daß bei niedrigen Energien $T_\pi < 100$ MeV der Imaginärteil des p -Wellenparameters c_o nur mit relativ großer Unsicherheit bestimmt werden konnte, während der Realteil sowie b_o gut festgelegt werden konnten. Folglich zeigten für diese kleinen Energien die Fitresultate für den Imaginärteil von c_o eine relativ starke Streuung. Um dennoch die Fitergebnisse als Funktion der Pionenenergie gut parametrisieren zu können, wurde für $T_\pi < 100$ MeV der Imaginärteil von c_o bereits vor dem Fit parametrisiert. Diese Parametrisierung wurde dann in einem Fit der restlichen drei Parameter verwendet. Es war dabei möglich, die Parametrisierung des Imaginärteils von c_o so zu wählen, daß sich χ^2 relativ zu einem Fit aller vier Freiheitsgrade nur unwesentlich änderte. Schließlich wurden die Fitergebnisse als Funktion der Pionenenergie durch geeignete Formeln interpoliert. Die aus der Anpassung resultierende Energieabhängigkeit der Potentialparameter ist in Abb. 4.7 dargestellt. Die für die Interpolation verwendeten Formeln sind in Anhang E aufgelistet. Es ist auffällig, daß für $T_\pi < 100$ MeV alle vier Größen in Abb. 4.7 nur gering mit der Energie variieren, oberhalb dieser Energie führt aber die Kopplung an die Δ -Resonanz zu einer starken Energieabhängigkeit, deren korrekte Implementation für das Endergebnis von großer Bedeutung ist.

Die aus der obigen Prozedur resultierenden differentiellen Streuquerschnitte sind in

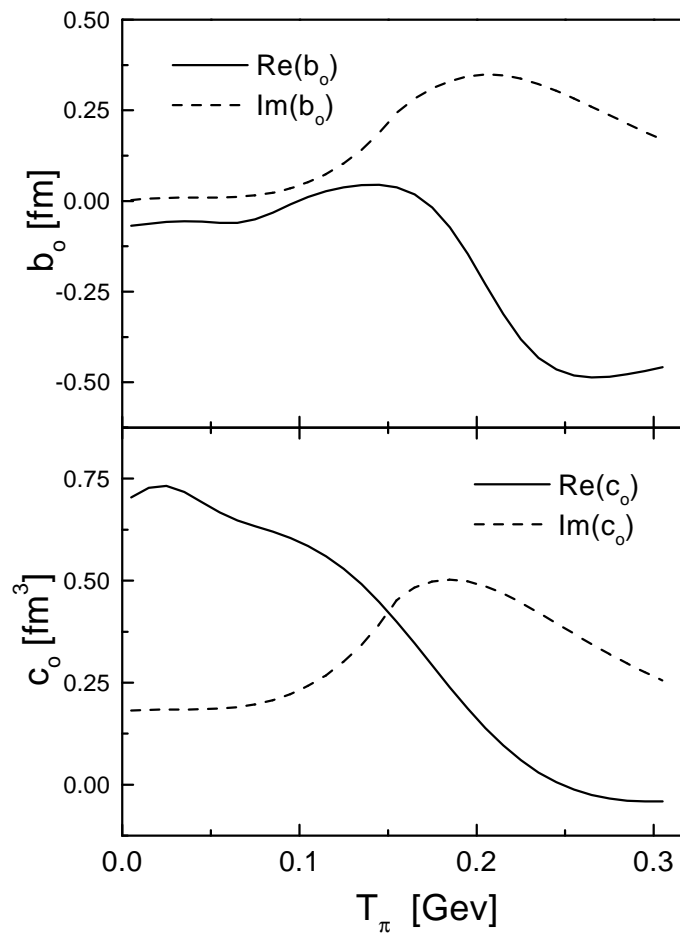


Abb. 4.7: Energieabhängigkeit der Parameter des optischen Potentials des Pions an ^{12}C wie im Text erläutert.

Abb. 4.8 dargestellt (vgl. Anh. B). Die Daten können insgesamt sehr gut reproduziert werden, mit Ausnahme von großen Streuwinkeln bei Pionenenergien von 100 und 150 MeV. Bei diesen Energien war es nicht möglich, die Parameter so zu wählen, daß auch bei großen Streuwinkeln gute Übereinstimmung mit den Daten erreicht wurde, ohne daß Diskrepanzen bei kleineren Winkeln auftraten. Um wenigstens die Daten links vom zweiten Diffraktionsminimum gut beschreiben zu können, wurden bei der Fitprozedur nur die Daten bis zu diesem Minimum berücksichtigt.

Wie bereits erwähnt, existieren Arbeiten, die ein optisches Pion-Kern-Potential aus mikroskopischen Betrachtungen herleiten. Für niedrige Energien bis etwa $T_\pi = 50$ MeV geschah das in [str80, car82]. Für den Bereich der Δ -Resonanz wurde in [gar91] in einer lokalen Näherung des Δ -Loch-Modells [ose87] ein optisches Potential für höhere

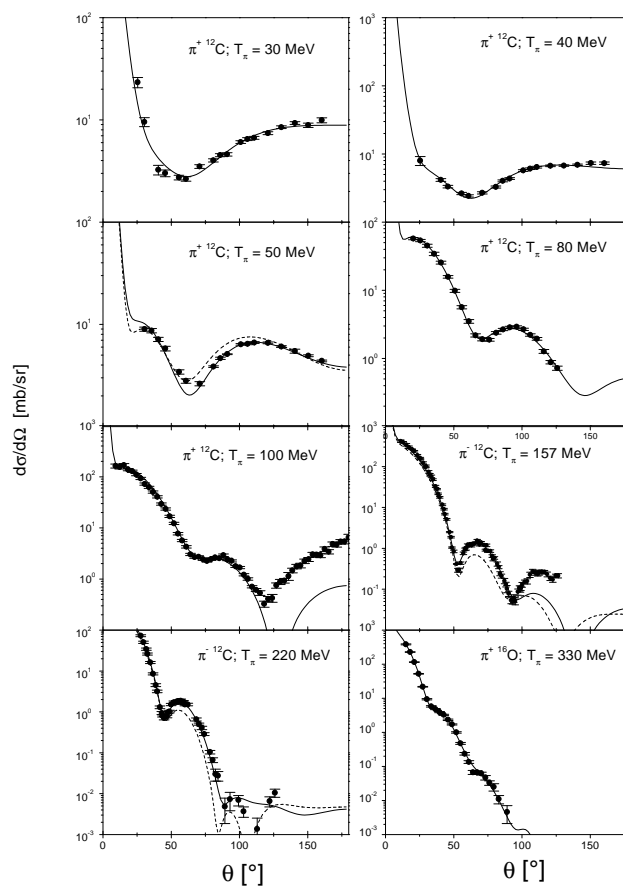


Abb. 4.8: Differentieller elastischer Streuquerschnitt für geladene Pionen an ^{12}C aus der im Text beschriebenen Fitprozedur im Vergleich zu den experimentellen Daten aus [pre81]. Die gestrichelte Linie zeigt bei 50 MeV das Ergebnis für den Parametersatz C aus [str80], bei 157 MeV und bei 220 MeV zeigt sie das Ergebnis von Rechnungen mit dem Potential aus [gar91].

Pionenenergien hergeleitet. Der p -Wellenanteil dieses Potentials sieht für $N=Z$ -Kerne wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
 2E_{\pi}U_{opt}(r) &= -\frac{4}{9} \left(\frac{g_{\Delta N\pi}}{m_{\pi}} \right)^2 \frac{m_N^2}{\bar{s}} \\
 &\times \vec{\nabla} \frac{\rho(\vec{r})}{\sqrt{\bar{s}} - m_{\Delta} + \frac{1}{2}i\tilde{\Gamma}_{\Delta} - \Sigma_{\Delta}} \vec{\nabla} . \quad (4.23)
 \end{aligned}$$

Hierbei steht \bar{m} für die mittlere invariante Masse des Pion-Nukleon Systems, $\tilde{\Gamma}_\Delta$ ist die Pauli-geblockte Zerfallsbreite des Δ und Σ_Δ steht für die Selbstenergie des Δ im Medium, die eine Funktion der Energie des Pions und der Kerndichte $\rho(\vec{r})$ ist. Der Realteil dieser Selbstenergie wird in [gar91] als linear in der Dichte angenommen, während der Imaginärteil ein Polynom in der Kerndichte mit nicht-ganzzahligen Exponenten ist [ose87]. Außerdem wird in [gar91] noch ein s -Wellenanteil angenommen, der eine ähnliche Struktur wie der in [str80, car82] verwendete hat. Die zusätzliche Dichteabhängigkeit im Nenner von Gl. (4.23) stellt den entscheidenden Unterschied zwischen diesem Potential und dem in dieser Arbeit verwendeten dar (Gl. (4.21)). In Abb. 4.8 sind auch Ergebnisse für die elastische Pion-Kern-Streuung unter Verwendung dieses Potentials bei zwei Energien gezeigt. Außerdem ist das Ergebnis einer Rechnung unter Verwendung der Parametersatzes C aus [str80] bei 50 MeV gezeigt. Bei den jeweiligen Energien liefern diese beiden Potentiale, die weitgehend aus mikroskopischen Betrachtungen gewonnen wurden, vergleichbare Wirkungsquerschnitte. Aufgrund der unterschiedlichen Dichteabhängigkeit der verschiedenen Potentiale ist dadurch aber noch nicht sichergestellt, daß sie auch im Falle der Photoproduktion am Kern vergleichbare Ergebnisse liefern. Die Eigenschaften dieser Potentiale bleiben im Falle der kohärenten Photoproduktion also noch zu untersuchen (s. Kap. 5.3.1).

4.3.2 Das η -Meson

Im Gegensatz zum Pion ist für die Wechselwirkung des η -Mesons mit dem Kern keine direkte experimentelle Information verfügbar. Aus naheliegenden Gründen gibt es weder Daten für die η -Nukleon Streuung, die als Ausgangspunkt für die Konstruktion eines optischen Potentials dienen könnten, noch gibt es Daten für die η -Kern Streuung. Es gibt allerdings Arbeiten, in denen versucht wird, aus der Analyse der inklusiven η -Photoproduktion im Rahmen von transporttheoretischen Modellen Informationen über die η -Nukleon-Streumplitude zu erhalten [eff98].

Um die Effekte der Endzustandswechselwirkung im Falle der η -Produktion untersuchen zu können, wird in der vorliegenden Arbeit auf theoretische Betrachtungen zurückgegriffen.

In [ben91] wurde die Photoproduktion von η -Mesonen am Nukleon im Rahmen eines Multipolmodells beschrieben. In diesem Modell wurde die Produktionsamplitude in Multipole zerlegt, die dann entsprechend der Resonanzen, die zu dem jeweiligen Multipol beitragen können, durch Breit-Wigner-Amplituden parametrisiert wurden. Diese Parametrisierung wurde dann auf die Beschreibung der elastischen η -Nukleon Streuung ausgedehnt.

Analog zum Fall der Pionen kann aus dieser Streumplitude ein optisches Potential hergeleitet werden. Die η -Nukleon Streuung wird, genauso wie die η -Photoproduktion, von der $N(1535)$ -Resonanz dominiert. Da diese Resonanz an das η in einer relativen s -Welle koppelt, wird angenommen, daß das η -Nukleus Potential im Gegensatz zum Pion-Nukleus Potential nur einen s -Wellen Anteil hat [ben91]:

$$2E_\eta V_{\eta A}(r) = -b\rho(r) \quad . \quad (4.24)$$

In [pie97] wurde die Abhängigkeit der komplexen Streuamplitude b vom Impuls des η -Mesons parametrisiert:

$$b(p_\eta) = \frac{1}{(\alpha + \beta p_\eta + \gamma p_\eta^2)} \quad , \quad (4.25)$$

wobei

$$\begin{aligned} \alpha &= (+0.136 - i0.052) \text{ fm}^{-1} \\ \beta &= (+0.035 - i0.072) \\ \gamma &= (-0.061 + i0.009) \text{ fm} \quad . \end{aligned} \quad (4.26)$$

Um den Einfluß des optischen Potentials für das η -Meson weiter zu untersuchen, wurde ein zweites Potential mit Hilfe der Ergebnisse von [eff98] konstruiert. In dieser Arbeit wurde versucht, aus experimentellen Ergebnissen der inklusiven Photoproduktion von η -Mesonen Informationen über die η -Kern Wechselwirkung zu gewinnen. Dies geschah im Rahmen von zwei verschiedenen Modellen, dem Glauber-Modell sowie einer transporttheoretischen Rechnung im Rahmen des BUU-Modells. Die η -Kern Wechselwirkung geht in diesen Modellen über den ηN -Querschnitt ein.

In beiden Modellen konnten die existierenden Daten für die inklusive η -Photoproduktion am besten wiedergegeben werden, wenn ein energieunabhängiger ηN -Wirkungsquerschnitt angenommen wurde. Für den inelastischen ηN -Querschnitt ergab sich dabei ein Wert von 30 mb. Analog zu [ben91] kann daraus der Imaginärteil des optischen Potentials konstruiert werden. Setzt man den Realteil gleich Null so ergibt sich:

$$b(p_\eta) = i 3 \text{ fm}^2 p_\eta \quad , \quad (4.27)$$

In Kap. 6 werden die beiden optischen Potentiale (4.25) und (4.27) miteinander verglichen.

4.4 Die kohärente Photoproduktion

4.4.1 Kohärenz, Eichinvarianz und Winkelabhängigkeit

In diesem Kapitel sollen die in den vorhergehenden Abschnitten dargelegten Grundlagen auf die kohärente Photoproduktion angewendet werden. Die kohärente Photoproduktion ist definiert als der Prozeß, bei dem ein Photon in Wechselwirkung mit einem Kern ein Meson produziert, der Kern nach der Reaktion aber wieder im Grundzustand ist. Bevor wir uns mit der mikroskopischen Beschreibung der kohärenten Photoproduktion beschäftigen, ist es nützlich, zuerst die innere Struktur des Kerns außer acht zu lassen und lediglich die Quantenzahlen der Reaktionspartner zu betrachten. In dieser Arbeit werden nur Kerne mit voll besetzten Orbitalen behandelt. Solche Kerne haben positive Parität und den Spin Null. Das Photon ist ein Vektorteilchen mit negativer Parität. Das Pion ist, genau wie das η -Meson, ein Pseudoskalar, d.h. es hat keinen Spin und negative intrinsische Parität. Das Entscheidende ist hierbei, daß außer dem produzierten Meson alle Teilchen ihre natürliche Parität haben. Die kohärente Photoproduktion von pseudoskalaren Mesonen ist also bezüglich der inneren Quantenzahlen der beteiligten Teilchen die folgende Reaktion:

$$1_{\gamma}^{-} + 0_A^{+} \rightarrow 0_{\varphi}^{-} + 0_A^{+} \quad \varphi = \pi, \eta \quad . \quad (4.28)$$

Für die folgende Betrachtung sind die Bahndrehimpulse der Teilchen sowie die möglichen intermediären Zustände nicht von Bedeutung. Eine Diskussion, die die Quantenzahlen der intermediären Zustände betrachtet, wird in Kap. 4.5 und in Kap. 6.3.2 durchgeführt.

Im folgenden werden die ein- und auslaufenden Teilchen als ebene Wellen mit scharfem Impuls angenommen. Im Gegensatz zu Drehimpulzeigenzuständen sind ebene Wellen zwar keine Eigenzustände des Paritätsoperators P , mit Hilfe der Quantenzahlen in Gl. (4.28) können wir aber direkt die Wirkung von P auf diese Zustände angeben:

$$\begin{aligned} P | A, \vec{p} \rangle &= | A, -\vec{p} \rangle \quad ; \quad P | \gamma, \vec{k}, \vec{\epsilon} \rangle = | \gamma, -\vec{k}, -\vec{\epsilon} \rangle \\ P | \varphi, \vec{q} \rangle &= - | \varphi, -\vec{q} \rangle \quad . \end{aligned} \quad (4.29)$$

Hierbei stehen \vec{k} , \vec{p} und \vec{q} für den Dreierimpuls des Photons, des Kerns und des Mesons. $\vec{\epsilon}$ ist der Polarisationsvektor des Photons. φ steht stellvertretend für das Pion bzw. das η -Meson, die in dieser Betrachtung nicht weiter unterschieden werden müssen. Die negative intrinsische Parität des erzeugten Mesons führt für dieses Teilchen zu einem zusätzlichen Minuszeichen in Gl. (4.29), das zum Ausdruck bringt, daß dieses Meson 'unnatürliche' Parität hat. Im Gegensatz dazu entspricht die negative Parität des Photons seinem Vektorcharakter und kommt dadurch zum Ausdruck, daß das Anwenden des Paritätsoperators zusätzlich das Vorzeichen der Polarisation $\vec{\epsilon}$ umkehrt.

Die elektromagnetische und die starke Wechselwirkung sind beide paritätserhaltend. Eine Folge dieser Paritätserhaltung ist, daß ein durch einen Wechselwirkungsoperator \hat{T} erzeugter Übergang zwischen einem Anfangs- und einem Endzustand mit der

gleichen Amplitude geschieht wie der Übergang zwischen den paritätstransformierten Zuständen:

$$\langle f | \hat{T} | i \rangle = \langle f | P^\dagger \hat{T} P | i \rangle \quad . \quad (4.30)$$

Setzen wir nun:

$$T(\vec{k}, \vec{\varepsilon}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{p}') = \langle \varphi, \vec{q}; A, \vec{p}' | \hat{T} | \gamma, \vec{k}, \vec{\varepsilon}; A, \vec{p} \rangle \quad , \quad (4.31)$$

so folgt aus den Gleichungen (4.30) und (4.29) die folgende Eigenschaft der Übergangsamplitude:

$$T(\vec{k}, \vec{\varepsilon}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{p}') = -T(-\vec{k}, -\vec{\varepsilon}, -\vec{p}, -\vec{q}, -\vec{p}') \quad (4.32)$$

Wegen Impulserhaltung sind nur drei der vier beteiligten Impulse unabhängig. Die Amplitude T muß also in einer Lorentz-kovarianten Theorie aus dem Polarisationsvektor ε_μ sowie drei Viererimpulsen so konstruiert werden, daß die Eigenschaft (4.32) gewährleistet ist. Die einzige Möglichkeit hierfür ist [pie97]:

$$T^{(\lambda)}(\vec{k}, \vec{\varepsilon}, \vec{p}, \vec{q}, \vec{p}') = \varepsilon_\mu^{(\lambda)} T^\mu(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) \quad , \quad (4.33)$$

wobei

$$T^\mu(\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}) = \varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} k_\nu p_\rho q_\sigma A(s, t) \quad . \quad (4.34)$$

Hierbei sind $s = (p + k)^2$ und $t = (k - q)^2$ die Mandelstamvariablen und A ist eine skalare Funktion dieser beiden Größen, die die gesamte Dynamik des Prozesses beinhaltet. $\varepsilon_\mu^{(\lambda)} = (\varepsilon_0, \vec{\varepsilon})$ ist der Vierer-Polarisationsvektor des Photons. Die Eichung des elektromagnetischen Feldes kann immer so gewählt werden, daß $\varepsilon_0 = 0$. $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ ist der sog. Levi-Civita-Tensor [itz80]. Dieser Tensor hat nur die Einträge $+1, -1$ und 0 und ist dadurch definiert, daß er vollkommen antisymmetrisch bezüglich der Vertauschung zweier beliebiger Indizes ist. Aus dieser Eigenschaft kann man leicht sehen, daß T in Gl. (4.33) tatsächlich Gl. (4.32) erfüllt: Aus der vollständigen Antisymmetrie folgt sofort, daß bei allen nicht verschwindenden Komponenten von $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ genau einer der vier Indizes gleich Null ist. Folglich enthalten alle zu der impliziten Summe in Gl. (4.33) beitragenden Summanden ein Produkt aus einer zeitartigen Komponente eines Vierervektors und drei raumartigen Komponenten. Ein solches Produkt wechselt immer das Vorzeichen, wenn man das Vorzeichen aller Dreierimpulse umkehrt, so wie das in Gl. (4.32) geschieht.

Aus Gl. (4.33) kann man eine weitere sehr wichtige Schlußfolgerung ziehen: Wenn man den Polarisationsvektor ε_μ durch den Photonenimpuls k_μ ersetzt, so folgt aus der Antisymmetrie von $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ in (4.34) sofort, daß T verschwindet. In Kap. 3.2 wurde

erläutert, daß daraus folgt, daß die Amplitude T eichinvariant ist. Diese Eichinvarianz ist eine Konsequenz der Kohärenzbedingung, also der Tatsache, daß der Kern im Grundzustand bleibt, und gilt unabhängig von der mikroskopischen Theorie die man zur Berechnung von T benutzt. Dies steht im Gegensatz zu inelastischen Reaktionen wie z.B. $(\gamma, \pi N)$ [li93, joh94], $(e, e'p)$ [pol96] oder Reaktionen an Kernen mit endlichem Drehimpuls [tia84], bei denen die Eichinvarianz nicht ohne weiteres gewährleistet ist [joh94, pol96]. Auch aus diesem Grund ist die kohärente Photoproduktion von pseudoskalaren Mesonen ein attraktives Arbeitsfeld, da keine durch Eichabhängigkeit verursachten Modellabhängigkeiten auftreten, man also mit weniger theoretischen Annahmen auskommt.

Wir können noch eine weitere Schlußfolgerung aus Gl. (4.33) ziehen: Für die Berechnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts benötigt man das über die Photonpolarisationen gemittelte Betragsquadrat der Amplitude T . Mit (4.33) und (4.34) zeigt man leicht:

$$\sum_{\lambda} |T^{(\lambda)}|^2 = W^2 k_{cm}^2 q_{cm}^2 \sin^2 \theta_{cm} |A(s, t)|^2 . \quad (4.35)$$

Hierbei stehen k_{cm} und q_{cm} für den Betrag der Dreierimpulse des Photons und des Pions im Schwerpunktsystem der Reaktion. θ_{cm} ist der Streuwinkel in diesem System, und W bezeichnet die zur Verfügung stehende Gesamtenergie. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die kohärente Photoproduktion von Pionen und η -Mesonen ist also proportional zu $\sin^2 \theta_{cm}$ und verschwindet somit in Vorwärts- und in Rückwärtsrichtung.

4.4.2 Kohärenz und Stoßnäherung

Die Grundlage des in dieser Arbeit verwendeten Formalismus ist die Stoßnäherung oder Impulse Approximation, die bereits in Kap. 4.1 beschrieben wurde. Wie erläutert wurde, besteht die zentrale Annahme der IA darin, daß der eigentliche Produktionsprozeß nur unter Beteiligung eines Nukleons stattfindet. Der entsprechende Produktionsoperator ist also bezüglich der Nukleonen ein Einteilchenoperator. Zusätzlich nimmt das hier verwendete Modell für den Grundzustand des Kerns an, daß dieser Grundzustand durch eine Slaterdeterminante aus A Einteilchen-Bindungszuständen beschrieben wird. In der kohärenten Produktion bleibt der Kern nach der Reaktion im Grundzustand, also ist das Nukleon, das in der Reaktion mit dem einlaufenden Photon das Pion erzeugt, vor und nach der Reaktion in dem gleichen Bindungszustand.

Mit Hilfe des in Kap. 3 beschriebenen Modells können wir das Übergangsmatrixelement $\langle f | T_{\gamma N} | i \rangle$ zwischen zwei beliebigen Einteilchen-Nukleonenzuständen $|i\rangle$ und $\langle f|$ berechnen. Aus diesen Matrixelementen und den zu den Zuständen $|i\rangle$ und $\langle f|$ gehörenden Erzeugungs- bzw. Vernichtungsoperatoren a_i und a_f^\dagger können wir dann einen Einteilchen-Übergangoperator \hat{T} konstruieren, mit Hilfe dessen wir dann Zustände mit beliebiger Nukleonenzahl behandeln können:

$$\hat{t} = \sum_{i,f} \langle f | T_{\gamma N} | i \rangle a_f^\dagger a_i \quad , \quad (4.36)$$

wobei die Summe über i und f über eine beliebige, vollständige Einteilchenbasis läuft. Bezeichnet man den Grundzustand des Kerns mit $|\Psi_A\rangle$, so können wir nun das Matrixelement für die kohärente Photoproduktion angeben:

$$\begin{aligned} T &= \langle \Psi_A | \hat{t} | \Psi_A \rangle \\ &= \sum_{i,f} \langle \Psi_A | a_f^\dagger a_i | \Psi_A \rangle \langle f | T_{\gamma N} | i \rangle . \end{aligned} \quad (4.37)$$

Wenn wir nun als Einteilchenbasis die Bindungszustände α des Kerns sowie die dazugehörigen Streuzustände wählen, so kann man Gl. (4.37) leicht umformen:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha} \langle \Psi_A | a_{\alpha}^\dagger a_{\alpha} | \Psi_A \rangle \langle \alpha | T_{\gamma N} | \alpha \rangle \\ &= \sum_{\alpha \text{ bes.}} \langle \alpha | T_{\gamma N} | \alpha \rangle . \end{aligned} \quad (4.38)$$

Aus der Tatsache, daß $|\Psi_A\rangle$ als Slaterdeterminante aus den Einteilchenzuständen α konstruiert ist, ergibt sich, daß in Gl. (4.38) jetzt nur noch das Matrixelement $\langle \alpha | T_{\gamma N} | \alpha \rangle$ zwischen zwei gleichen Bindungszuständen vorkommt. Man sieht an Gl. (4.38), daß die besetzten Zustände α kohärent zur Gesamtamplitude beitragen, was der Grund für die Bezeichnung der kohärenten Produktion ist.

Die Berechnung des Übergangsmatrixelementes $\langle \alpha | T_{\gamma N} | \alpha \rangle$ ist nun die entscheidende Aufgabe, die mit Hilfe der in den vorhergehenden Kapiteln gelegten Grundlagen durchgeführt werden soll.

In Kap. 3 wurde das in dieser Arbeit verwendete Modell für den Produktionsprozeß dargestellt. In diesem Modell wurde die elementare Photoproduktion behandelt, indem ausgehend von einer effektiven Feldtheorie die Amplitude $\langle N | T_{\gamma N} | N \rangle$ berechnet wurde, wobei N für ein freies Nukleon steht. Die Auswertung dieser Amplitude geschah über Feynmandiagramme in niedrigster Ordnung Störungstheorie unter Verwendung von effektiven Kopplungskonstanten. Die Feynmanregeln sind üblicherweise für den Impulsraum gegeben. Im Fall der elementaren Produktion ist der Impulsraum für die Auswertung des Matrixelementes gut geeignet, da die ein- und auslaufenden Teilchen durch ebene Wellen, also δ -Funktionen im Impulsraum dargestellt sind. Bei der Photoproduktion am Kern sind aber sowohl die Nukleonen, als auch das produzierte Meson keine ebenen Wellen mehr. Deshalb geschieht die Auswertung der Produktionsmatrixelemente am Kern in dieser Arbeit im Ortsraum. In dieser Ortsraumdarstellung können zum einem die Wellenfunktionen der gebundenen Nukleonen und insbesondere des auslaufenden Mesons einfach numerisch durch die Lösung der entsprechenden Bewegungsgleichungen bestimmt werden. Wie in Anh. C gezeigt wird, vereinfacht sich außerdem die Auswertung des Matrixelementes im Ortsraum, wenn Partialwellenentwicklungen für die Wellenfunktionen und die Propagatoren verwendet werden.

Als Beispiel soll nun der direkte Borngraph in Abb. 3.1 für die Photoproduktion von Pionen betrachtet werden. Im Ortsraum entspricht dieser Graph im Falle der elementaren Photoproduktion von Pionen dem folgenden Ausdruck:

$$T_N^{(\lambda ss')} = \int d^3x d^3y \bar{\psi}_{Ns'}(\vec{p}', \vec{x}) \phi_\pi^*(\vec{q}, \vec{x}) \\ \times \Gamma_{\pi NN} G_N^o(E; \vec{x}, \vec{y}) \Gamma_{\gamma NN}^\mu \phi_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}, \vec{y}) \psi_{Ns}(\vec{p}, \vec{y}) \quad . \quad (4.39)$$

In dieser Formel stehen ψ_{Ns} , ϕ_π und $\phi_\mu^{(\lambda)}$ für die Wellenfunktionen eines freien Nukleons, des produzierten Pions und des einlaufenden Photons. Die Argumente der Wellenfunktionen geben den asymptotischen Impuls des Teilchens sowie den Ort an, an dem die Wellenfunktion ausgewertet wird. Im Falle des Photons und des Nukleons tragen die Wellenfunktionen auch noch einen Index, der den Spin des Teilchens angibt. $\Gamma_{\pi NN}$ und $\Gamma_{\gamma NN}^\mu$ sind die sich aus den Kopplungstermen in Gl. (3.7) ergebenden Vertizes. $G_N^o(E; \vec{x}, \vec{y})$ ist der freie Nukleonenpropagator im Ortsraum:

$$G_N^o(E; \vec{x}, \vec{y}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{ie^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{E\gamma_0 - \vec{p}\vec{\gamma} - m} \quad , \quad (4.40)$$

wobei $E = E_\gamma + E_N$.

Aus der Amplitude in Gl. (4.39) berechnet sich der differentielle Querschnitt für den elementaren Prozeß im Schwerpunktssystem nach der folgenden Formel [pdg96, itz80]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{q_{cm}}{k_{cm}} \frac{1}{4} \sum_{\lambda, s, s'} |T^{(\lambda ss')}|^2 \quad (4.41)$$

q_{cm} und k_{cm} stehen für die Beträge der Dreierimpulse von Pion und Photon im Schwerpunktssystem, die Mandelstamvariable $s = (p+k)^2$ ist die Gesamtenergie der Reaktion im Schwerpunktssystem. Der Faktor $1/4$ rührt von der Mittelung über die Spins des einlaufenden Photons und des einlaufenden Nukleons her.

Die Amplituden für die Photoproduktion am Nukleon und am Kern im Rahmen der IA unterscheiden sich nun durch die Zustände der ein- und auslaufenden Nukleonen, sowie des erzeugten Pions. Für einen bestimmten nukleonischen Bindungszustand ψ_α mit den Quantenzahlen $\alpha = (nJ\ell M)$ muß man also in Gl. (4.39) nur $\psi_{Ns}(\vec{p}, \vec{y})$ und $\bar{\psi}_{Ns'}(\vec{p}', \vec{x})$ durch $\psi_\alpha(\vec{y})$ und $\bar{\psi}_\alpha(\vec{x})$ ersetzen. Die Wellenfunktion des Pions wird durch die Streuwellenfunktion $\phi_\pi^{(-)*}$ ersetzt. In der IA erfüllt diese Wellenfunktion die Randbedingung einer einlaufenden Welle [joa83, sch87] (s. Anh. B). Man erhält so die Amplitude für die kohärente Photoproduktion an dem Bindungszustand α :

$$T_N^{(\lambda\alpha)} = \int d^3x d^3y \\ \times \bar{\psi}_\alpha(\vec{x}) \phi_\pi^{(-)*}(\vec{q}, \vec{x}) \Gamma_{\pi NN} G_N^o(E; \vec{x}, \vec{y}) \Gamma_{\gamma NN}^\mu \phi_\mu^{(\lambda)}(\vec{k}, \vec{y}) \psi_\alpha(\vec{y}) \quad . \quad (4.42)$$

Die Energie E ist jetzt durch $E = E_\alpha + E_\gamma$ gegeben, wobei E_α die relativistische Gesamtenergie des im Orbital α gebundenen Nukleons ist. Als Bindungszustände tragen die ψ_α kein Impulsargument mehr, sondern sind durch einen Satz von Quantenzahlen charakterisiert. Anstatt einen wohldefinierten asymptotischen Impuls zu haben, stellen sie breite Verteilungen im Impulsraum dar.

Die Auswertung des Matrixelementes (4.42) geschieht im Photon-Kern-Schwerpunktsystem. Die Wellenfunktion Ψ_α des ein- und auslaufenden Nukleons wurde allerdings in einem festen, um den Ursprung symmetrischen mittleren Feld bestimmt (Kap. 4.2). Durch die Verwendung dieser Wellenfunktion wird also implizit angenommen, daß der Kern vor und nach der Reaktion ruht, die Bewegung des Kerns als Ganzes wird vernachlässigt. Die exakte Behandlung der Bewegung des Kerns würde im Rahmen einer relativistischen Theorie den Lorentzboost einer Slaterdeterminante erfordern, was technisch sehr aufwendig ist. Allerdings ist auch für die Produktion von η -Mesonen nur der kinematische Bereich relevant, in dem der Impulstransfer weniger als 500 MeV beträgt und damit sehr viel kleiner als die Masse von ^{12}C oder ^{40}Ca ist. Während der Einfluß des endlichen Kernimpulses auf die Nukleonwellenfunktion vernachlässigt wird, wird bei der Bestimmung der Kinematik der Reaktion die Kernbewegung und die daraus resultierende kinetische Energie des Kerns berücksichtigt.

Für die Gesamtamplitude in Gl. (4.37) muß man jetzt kohärent über alle Bindungszustände α summieren. Folglich ergibt sich die Amplitude für die kohärente Photoproduktion von Pionen am Kern wie folgt, wobei die Impulsargumente von Photon und Pion der Einfachheit halber nicht explizit aufgeführt werden:

$$\begin{aligned} T_N^{(\lambda)} &= \sum_\alpha \int d^3x d^3y \\ &\quad \times \bar{\psi}_\alpha(\vec{x}) \phi_\pi^{(-)*}(\vec{x}) \Gamma_{\pi NN} G_N^o(E; \vec{x}, \vec{y}) \Gamma_{\gamma NN}^\mu \phi_\mu^{(\lambda)}(\vec{y}) \psi_\alpha(\vec{y}) \\ &= \sum_\alpha \int d^3x d^3y \bar{\psi}_\alpha(\vec{x}) \phi_\pi^{(-)*}(\vec{x}) \hat{T}_N^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) \phi_\gamma(\vec{y}) \psi_\alpha(\vec{y}) \quad , \end{aligned} \quad (4.43)$$

Die Wellenfunktion des Photons wurde als $\phi_\mu^{(\lambda)} = \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \phi_\gamma$ geschrieben. Der Produktionsoperator $\hat{T}_N^{(\lambda)}$ ist durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\hat{T}_N^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) = \Gamma_{\pi NN} G_N^o(E; \vec{x}, \vec{y}) \Gamma_{\gamma NN}^\mu \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \quad . \quad (4.44)$$

Für die weiteren in den Abbildungen 3.1 und 3.4 dargestellten Graphen wird der Beitrag zum Produktionsoperator analog aus den Feynmanregeln konstruiert. Die entsprechenden Amplituden müssen jetzt numerisch ausgewertet werden. Eine große Komplikation stellt das sechs-dimensionale Integral dar. Die Auswertung dieses Integrals wird jedoch einfacher, wenn man für alle Wellenfunktionen und den intermediären Propagator Partialwellenentwicklungen einsetzt. Dann faktorisieren die beiden Winkelintegrationen über $d\Omega_x$ und $d\Omega_y$ vollständig und können analytisch im voraus ausgewertet werden. Nur die beiden restlichen Integrationen über x und y müssen dann noch numerisch ausgewertet werden. Anders wäre eine numerische Berechnung der Amplitude nicht mit vertretbarer Rechenzeit realisierbar gewesen. Die technischen Details hiervon sind in Anhang C erläutert.

Durch die separate Abhängigkeit des Propagators von \vec{x} und \vec{y} ist die Amplitude (4.43) *nicht-lokal*. Nicht-lokal bedeutet in diesem Zusammenhang, daß über die beiden Orte \vec{x} und \vec{y} unabhängig integriert wird. Der aus dieser sechs-dimensionalen Integration resultierende technische Aufwand wird oft umgangen, indem die *lokale Näherung*

gemacht wird, die die Nicht-Lokalität des Prozesses vernachlässigt. Diese Näherung wird in Kap. 4.5 diskutiert. Die Berücksichtigung der Nicht-Lokalität des Produktionsoperators stellt eine wesentliche Neuerung gegenüber den existierenden Arbeiten zur kohärenten Photoproduktion dar.

Eine Ausnahme stellen in diesem Zusammenhang ein Teil des Spin- $\frac{3}{2}$ -Propagators und der ωNN Formfaktor dar. So ist z.B. der Δ -Propagator im Impulsraum gegeben durch (vgl. Kap. 3):

$$G_{\Delta}^{\mu\nu}(p) = i \frac{\not{p} + m_{\Delta}}{s - m_{\Delta}^2 + i\sqrt{s}\Gamma(s)} \Lambda^{\mu\nu} \quad , \quad (4.45)$$

wobei

$$\Lambda^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \frac{2}{3m_{\Delta}^2}p^{\mu}p^{\nu} - \frac{1}{3m_{\Delta}}(\gamma^{\mu}p^{\nu} - p^{\mu}\gamma^{\nu}) \right) \quad . \quad (4.46)$$

Die Zerfallsbreite des $\Delta(1232)$ in Gl. (3.10) hängt von der Energie s ab:

$$\Gamma(s) = \Gamma_0 \frac{m_{\Delta}}{\sqrt{s}} \left(\frac{q}{q_0} \right)^3 \left(\frac{q_0^2 + c^2}{q^2 + c^2} \right)^2 \quad . \quad (4.47)$$

Der Spin- $\frac{1}{2}$ -Teil des Propagators (4.45) wird nun analog zum Nukleon behandelt. Der Tensor $\Lambda^{\mu\nu}$ in (4.46) wird zusammen mit dem $\Delta N\gamma$ -Vertex berechnet. Die Δ -Breite hängt nach Gl. (4.47) von der invarianten Masse $s = E^2 - \vec{p}^2$ und damit von dem Dreierimpuls \vec{p} ab. Wie aus Gl. (4.43) zu sehen ist, wird der im Impulsraum gegebene Propagator des intermediären Baryons in den Ortsraum transformiert. Für diese Transformation gibt es allerdings nur dann geschlossene Ausdrücke, die in einer numerischen Rechnung verwendet werden können, wenn der Imaginärteil des Nenners nicht von dem Dreierimpuls, über den bei der Fouriertransformation integriert wird, abhängt (s. Anh. C). Aus diesem Grunde wird in der vorliegenden Arbeit für die Pionenproduktion am Kern die Breite des Δ effektiv berechnet, indem für ein System aus einem einlaufendem Photon der Energie E_{γ} und einem gebundenen Nukleon mit der Energie E_{α} eine mittlere invariante Masse s_0 durch Mittelung über die Fermiverteilung des gebundenen Nukleons berechnet wird:

$$s_0(E_{\gamma}, E_{\alpha}) = (E_{\gamma} + E_{\alpha})^2 - V_F^{-1} \int^{k_F} d^3p' (\vec{k} - \vec{p}')^2 \quad . \quad (4.48)$$

Hierbei steht \vec{k} für den Dreierimpuls des Photons, $k_F = 270$ MeV/c ist der Fermiimpuls und V_F ist das Volumen der Fermikugel. Aus diesem effektiven Wert s_0 wird dann nach Gl. (4.47) die Zerfallsbreite des Δ berechnet. Die so berechnete Breite hängt dann nicht mehr vom Impuls ab.

Auch der $p_{\mu}p_{\nu}$ -Term in Gl. (3.11) wird aus technischen Gründen nicht exakt behandelt, da seine räumlichen Komponenten $p_i p_j$ im Ortsraum zweiten Ableitungen

entsprechen, die die Winkelintegrale sehr komplex werden lassen. Um das zu umgehen, wird der $p_i p_j$ -Anteil dieses Tensors genähert, indem man setzt:

$$p_i p_j \rightarrow k_i k_j \quad , \quad (4.49)$$

wobei \vec{k} der Impuls des Photons ist. Die restlichen Komponenten dieses Tensors, also $p_o p_o$ und $p_o p_i$ bzw. $p_i p_o$, werden exakt behandelt. Dieses Vorgehen ist äquivalent dazu, für diesen Term den Impuls des einlaufenden Nukleons auf Null zu setzen. Der Beitrag des $p_i p_j$ Terms zum Gesamtquerschnitt wird in Kap. 5.2 diskutiert.

In dem ω -Graphen tritt durch die Abhängigkeit des Formfaktors am ωNN -Vertex von $t = (k_\gamma - q_\pi)^2$ eine zusätzliche Abhängigkeit vom Dreierimpuls des ω auf. Im Falle der PWIA, also wenn Photon und Pion bzw. η -Meson als ebene Wellen scharfe Impulse haben, liegt der Dreierimpuls des ω wegen Impulserhaltung fest, so daß der Formfaktor einfach als zusätzlicher Faktor auftaucht, unabhängig davon, ob die Rechnung im Orts- oder im Impulsraum auftaucht. Im Falle der DWIA ist die Wellenfunktion des auslaufenden Pions aber im Impulsraum durch eine Verteilung mit einer gewissen Breite gegeben. Folglich liegt auch der Impuls des ω nicht genau fest. Eine exakte Behandlung dieser Impulsabhängigkeit würde einen großen technischen Aufwand erfordern: Im Nenner des Formfaktors in Gl. (3.15) tritt der Dreierimpuls des ω genau wie im Propagator quadratisch auf. Bei einer Fouriertransformation in den Ortsraum würde diese Impulsabhängigkeit also wie im Falle des Propagators zu einer nicht-lokalen Struktur führen, die dann zusätzlich zur Nichtlokalität des Propagators behandelt werden müßte. Statt eines sechs-dimensionalen Integrals wäre dann ein neun-dimensionales Integral auszuwerten. Aus diesem Grunde wird in der vorliegenden Arbeit auch im Falle der DWIA bei der Auswertung des Matrixelements der ωNN -Formfaktor mit Hilfe des asymptotischen Impulses \vec{q}_π des Pions berechnet:

$$\vec{p}_\omega = \vec{k}_\gamma - \vec{q}_\pi \quad . \quad (4.50)$$

Dies ist zum einen dadurch gerechtfertigt, daß das Pion im Impulsraum zwar durch eine Verteilung beschrieben wird, diese aber den asymptotischen Impuls als Schwerpunkt besitzt. Zum anderen zeigt sich, daß in dem in dieser Arbeit betrachteten Energiebereich der ωNN Formfaktor nur schwach vom Dreierimpuls des ω abhängt, so daß ein geringfügiger Fehler in der Bestimmung dieses Impulses das Endergebnis kaum beeinflußt.

Nun bleibt noch der Zusammenhang zwischen der Amplitude $T^{(\lambda)}$ und dem differentiellen Wirkungsquerschnitt zu bestimmen. Dabei muß man beachten, daß die Wellenfunktionen ψ_α und ψ_{N_s} unterschiedlich normiert sind: Bei der Herleitung von Gl. (4.41) wurde davon ausgegangen, daß die Wellenfunktionen der ein- und auslaufenden Teilchen auf $2E$ normiert sind [ber92]. Der Vielteilchenzustand Ψ_A ist aber auf 1 normiert. Folglich taucht bei Vernachlässigung der kinetischen Energie des Kerns zusätzlich ein Faktor $2M_A$ auf, wobei M_A die Masse des Kerns bezeichnet [ben91]:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{M_A}{4\pi W} \right)^2 \frac{q_{cm}}{k_{cm}} \frac{1}{2} \sum_\lambda |T^{(\lambda)}|^2 \quad . \quad (4.51)$$

Hierbei stehen q_{cm} und k_{cm} für die Beträge der Dreierimpulse von Pion und Photon im Schwerpunktssystem von Photon und Kern, und W bezeichnet die Gesamtenergie in diesem System. Da der Kern keinen Drehimpuls trägt, beinhaltet die Mittelung über die einlaufenden Spins nur noch die Polarisation des Photons.

Damit ist der theoretische Formalismus für die Berechnung von Wirkungsquerschnitten für die kohärente Photoproduktion von Pionen und η -Mesonen vollständig. Bevor die Ergebnisse diskutiert werden, sollen in den folgenden Abschnitten einige Aspekte der kohärenten Photoproduktion sowie in anderen Arbeiten verwendete Näherungen genauer betrachtet werden.

4.5 Die lokale Näherung

Die lokale Näherung wird in allen bisherigen Arbeiten zur kohärenten Photoproduktion von Pionen und η -Mesonen im Rahmen der IA verwendet. Diese Näherung soll in diesem Kapitel erläutert und diskutiert werden.

Die lokale Näherung wird aus technischen Gründen eingeführt. Sie besteht im Prinzip darin, den Impuls des einlaufenden Nukleons als fest anzunehmen. Wie im folgenden gezeigt wird, hat das zur Folge, daß die Auswertung des Matrixelements technisch wesentlich einfacher wird. Außerdem faktorisiert das Matrixelement in einen Teil, der nur den elementaren Produktionsoperator enthält, und einen weiteren, der die Information über die Kernstruktur in sich trägt. Wegen dieser Faktorisierung wird die lokale Näherung zuweilen auch als ‘factorization approximation’ bezeichnet.

Um die lokale Näherung zu definieren, gehen wir von der Amplitude für den direkten Borngraphen in der Pionenproduktion in Gl. (4.43) aus:

$$\begin{aligned} T_N^{(\lambda)} &= \sum_{\alpha} \int d^3x d^3y \\ &\quad \times \bar{\psi}_{\alpha}(\vec{x}) \phi_{\pi}^{(-)*}(\vec{x}) \Gamma_{\pi NN} G_N^o(E; \vec{x}, \vec{y}) \Gamma_{\gamma NN}^{\mu} \phi_{\mu}^{(\lambda)}(\vec{y}) \psi_{\alpha}(\vec{y}) \\ &= \sum_{\alpha} \int d^3x d^3y \bar{\psi}_{\alpha}(\vec{x}) \phi_{\pi}^{(-)*}(\vec{x}) \hat{T}_N^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) \phi_{\gamma}(\vec{y}) \psi_{\alpha}(\vec{y}) \quad , \end{aligned} \quad (4.52)$$

Das Ortsraumintegral wird nun in den Impulsraum transformiert, wobei der Einfachheit halber angenommen wird, daß das Pion ein freies Teilchen ist, also durch eine ebene Welle mit scharfem Impuls beschrieben wird. Man findet:

$$\begin{aligned} T_N^{(\lambda)} &= \sum_{\alpha occ.} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bar{\psi}_{\alpha}(\vec{p} + \vec{k} - \vec{q}) \Gamma_{\pi NN} G_N(E; \vec{p} + \vec{k}) \Gamma_{\gamma NN}^{(\lambda)} \psi_{\alpha}(\vec{p}) \\ &= \sum_{\alpha occ.} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bar{\psi}_{\alpha}(\vec{p} + \vec{k} - \vec{q}) \hat{T}_N^{(\lambda)}(E; \vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) \psi_{\alpha}(\vec{p}) \quad , \end{aligned} \quad (4.53)$$

Hierbei ist $\Gamma_{\gamma NS_{11}}^{(\lambda)} = \Gamma_{\gamma NS_{11}}^{\mu} \varepsilon_{\mu}^{(\lambda)}$. \vec{k} und \vec{q} stehen für den Dreierimpuls des Photons bzw. des Pions. $\psi_{\alpha}(\vec{p})$ steht für die Fouriertransformierte der Ortsraumwellenfunktion $\psi_{\alpha}(\vec{x})$. Folglich gibt \vec{p} den Impuls des einlaufenden Nukleons an, über den integriert

wird. Wegen Impulserhaltung hat dann das auslaufende Nukleon den Impuls $\vec{p} + \vec{k} - \vec{q}$. Gl. (4.53) enthält nur noch ein dreidimensionales Integral, anstelle der sechsdimensionalen Ortsraumintegration in Gl. (4.52), weil sowohl das Photon als auch das Pion als ebene Welle angesetzt wurden, was einer δ -Funktion im Impulsraum entspricht. Bei einer DWIA-Rechnung im Impulsraum muß auch über den Impuls des auslaufenden Pions integriert werden.

Der Produktionsoperator \hat{T}_N ist im Impulsraum durch den folgenden Ausdruck gegeben:

$$\hat{T}_N^{(\lambda)}(E; \vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) = \Gamma_{\pi NN} G_N(E; \vec{p} + \vec{k}) \Gamma_{\gamma NN}^{(\lambda)} \quad , \quad (4.54)$$

wobei $G_N(E; \vec{p} + \vec{k})$ der freie Nukleonenpropagator im Impulsraum ist.

Da die genaue Struktur des Produktionsoperators im folgenden nicht von Belang ist, wird von jetzt ab ein allgemeiner Operator $\hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ betrachtet. Die lokale Näherung besteht nun darin, die Abhängigkeit von $\hat{T}^{(\lambda)}$ vom Impuls \vec{p} des einlaufenden Nukleons zu vernachlässigen. Man ersetzt:

$$\hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) \rightarrow \hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{p}_o, \vec{k}, \vec{q}) \quad , \quad (4.55)$$

wobei \vec{p}_o als konstant angenommen wird. Damit kann $\hat{T}^{(\lambda)}$ aus dem Integral in Gl. (4.53) herausgezogen werden:

$$T_{loc}^{(\lambda)} = Tr \left[\hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{p}_o, \vec{k}, \vec{q}) \hat{\rho}_A(\vec{k} - \vec{q}) \right] \quad . \quad (4.56)$$

Die Impulsintegration ist hierbei in der Matrix

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A(\vec{p}) &= \int \frac{d^3 p'}{(2\pi)^3} \sum_{\alpha occ.} \psi_\alpha(\vec{p}') \otimes \bar{\psi}_\alpha(\vec{p}' + \vec{p}) \\ &= \int d^3 x e^{i\vec{p}\vec{x}} \sum_{\alpha occ.} \psi_\alpha(\vec{x}) \otimes \bar{\psi}_\alpha(\vec{x}) = \int d^3 x e^{i\vec{p}\vec{x}} \hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x}) \end{aligned} \quad (4.57)$$

enthalten. $\hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x})$ ist die lokale Einteilchendichtematrix des Kerns. Sie ist definiert über das dyadische Produkt zweier Diracspinoren, und damit eine 4×4 Matrix. $\hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x})$ enthält die gesamte Information über den Grundzustand des Kerns. Aus dieser Matrix können die fundamentalen Dichten des Kerns, die skalare, die Vektor- und die Tensordichte, extrahiert werden:

$$\begin{aligned} \rho_s(\vec{x}) &= Tr[\hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x})] \quad ; \quad \rho_v(\vec{x}) = Tr[\gamma_o \hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x})] \\ \rho_t(\vec{x}) \hat{x}_i &= Tr[\sigma^{0i} \hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x})] \quad . \end{aligned} \quad (4.58)$$

σ^{0i} steht hierbei für die entsprechenden Komponenten des Tensors $\sigma^{\mu\nu}$ aus der Cliffordalgebra (s. Anh. A).

Man erkennt an Gl. (4.56), daß in der lokalen Näherung die Amplitude in zwei Faktoren aufgespalten wird, die jeweils ausschließlich den Produktionsprozeß bzw. den Grundzustand des Kerns beschreiben. Von dem Produkt dieser beiden Faktoren wird dann die Spur genommen. Insbesondere kann die Berechnung beider Terme für eine bestimmte Kinematik separat geschehen, was die numerische Implementation sehr vereinfacht.

Die Wahl von \vec{p}_o ist für die kohärente Produktion nur schwer durch physikalische Argumente einzuschränken. Im Falle von Reaktionen wie $(\gamma, \pi p)$, bei denen das auslaufende Nukleon asymptotisch frei ist, können die asymptotischen Impulse der auslaufenden Teilchen benutzt werden, um \vec{p}_o abzuschätzen. Für die Reaktion $(\gamma, \pi p)$ wird die Zuverlässigkeit der lokalen Näherung in [li93] diskutiert. Im Falle der kohärenten Produktion werden aber ein- und auslaufende Nukleonen durch breite Verteilungen im Impulsraum repräsentiert, so daß ein asymptotischer Impuls nicht ohne weiteres definiert werden kann. Eine verbreitete Version der lokalen Näherung nimmt an (s. z.B. [chu87]):

$$\vec{p}_o = -\frac{\vec{k}}{A} - \frac{A-1}{2A}(\vec{k} - \vec{q}) \approx -\frac{1}{2}(\vec{k} - \vec{q}) \quad , \quad (4.59)$$

wobei \vec{k} und \vec{q} für den Impuls des Photons bzw. des Pions stehen. Dieser Ansatz entspricht der gleichmäßigen Verteilung des übertragenen Impulses $\vec{k} - \vec{q}$ auf das ein- und das auslaufende Nukleon.

Um nun zu untersuchen, was die lokale Näherung für eine Rechnung im Ortsraum bedeutet, bringen wir Gl. (4.52) in eine Form, die der von Gl. (4.56) ähnlich ist:

$$\begin{aligned} T^{(\lambda)} &= \int d^3x d^3y Tr \left[\hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) \hat{\rho}_A(\vec{y}, \vec{x}) \right] \phi_{\pi}^{(-)*}(\vec{x}) \phi_{\gamma}(\vec{y}) \\ &= \int d^3x d^3y Tr \left[\hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) \hat{\rho}_A(\vec{y}, \vec{x}) \right] e^{-i\vec{q}\vec{x}} e^{i\vec{k}\vec{y}} \quad , \end{aligned} \quad (4.60)$$

wobei wieder angenommen wurde, daß Photon und Pion durch ebene Wellen beschrieben werden. Anstelle der lokalen Dichtematrix in Gl. (4.57) taucht jetzt die nicht-lokale Einteilchendichtematrix $\hat{\rho}_A(\vec{y}, \vec{x})$ des Kerns auf:

$$\hat{\rho}_A(\vec{y}, \vec{x}) = \sum_{\alpha occ.} \psi_{\alpha}(\vec{y}) \otimes \bar{\psi}_{\alpha}(\vec{x}) \quad . \quad (4.61)$$

Durch einen Vergleich von Gln. (4.56), (4.57) und (4.60) kann man nun ablesen, daß die lokale Näherung (4.55) im Ortsraum folgender Ersetzung entspricht:

$$\hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) \rightarrow \hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{p}_o, \vec{k}, \vec{q}) \delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad . \quad (4.62)$$

Auch im Ortsraum vereinfacht sich also durch die lokale Näherung die Integration. Der zentrale Unterschied zwischen einer lokalen und einer nicht-lokalen Rechnung ist der folgende: Im nicht-lokalen Fall werden die Wellenfunktionen des ein- und auslaufenden Nukleons an zwei verschiedenen Orten \vec{x} und \vec{y} ausgewertet. Bei einer lokalen Rechnung

hingegen folgt aus Gl. (4.62), daß die Nukleonwellenfunktionen nur am gleichen Ort ausgewertet werden. Insgesamt gilt:

$$T_{loc}^{(\lambda)} = \int d^3x \text{Tr} \left[\hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{p}_o, \vec{k}, \vec{q}) \hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x}) \right] e^{-i\vec{q}\vec{x}} e^{i\vec{k}\vec{y}} \quad (4.63)$$

Die Vernachlässigung der Nichtlokalität des Produktionsoperators hat auch Konsequenzen für die Struktur der Dichtematrix des Kerns. Um dies zu erläutern, wird die Amplitude T in niedrigster nicht-relativistischer Ordnung betrachtet, indem man die kleinen Komponenten der Nukleonenspinoren und des intermediären Propagators vernachlässigt. Die Dichtematrix $\hat{\rho}_A$ aus Gl. (4.61) ist dann nur noch eine 2×2 Matrix:

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_A^{(n,r.)}(\vec{x}, \vec{y}) &= \sum_{\alpha} \psi_{\alpha}(\vec{x}) \otimes \psi_{\alpha}^+(\vec{y}) \\ &= \sum_a g_a(x) g_a(y) \sum_M \mathcal{Y}_{J\ell}^M(\Omega_x) \otimes \mathcal{Y}_{J\ell}^{M+}(\Omega_y) \quad , \end{aligned} \quad (4.64)$$

mit $\alpha = (a, M)$ und $a = (n, \ell, J)$. g_a steht für den Radialanteil der Wellenfunktionen. $\mathcal{Y}_{J\ell}^M$ sind Spinoren mit zwei Komponenten, die guten Gesamtdrehimpuls und guten Bahndrehimpuls haben:

$$\mathcal{Y}_{J\ell}^M(\Omega) = \begin{pmatrix} \langle J, M | \ell, M - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle Y_{\ell M - \frac{1}{2}}(\Omega) \\ \langle J, M | \ell, M + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle Y_{\ell M + \frac{1}{2}}(\Omega) \end{pmatrix} \quad . \quad (4.65)$$

Die Berechnung der Summe über M in Gl. (4.64) ist in Anh. D durchgeführt [neg72]:

$$\hat{\rho}_A^{(n,r.)}(\vec{x}, \vec{y}) = \alpha(\vec{x}, \vec{y}) + \vec{\beta}(\vec{x}, \vec{y}) \vec{\sigma} \quad , \quad (4.66)$$

mit

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{x}, \vec{y}) &= \sum_{a=(n\ell J)} \frac{g_a(x) g_a(y)}{4\pi} \left(J + \frac{1}{2} \right) P_{\ell}(\cos \theta) \\ \vec{\beta}(\vec{x}, \vec{y}) &= i \sum_{a=(n\ell J)} (-1)^{(\ell - J - \frac{1}{2})} \frac{g_a(x) g_a(y)}{4\pi} P'_{\ell}(\cos \theta) \left[\hat{x} \times \hat{y} \right] \quad . \end{aligned} \quad (4.67)$$

Hierbei stehen P_{ℓ} und P'_{ℓ} für ein Legendrepolynom der Ordnung ℓ bzw. dessen Ableitung. θ ist der Winkel zwischen $\hat{x} = \vec{x}/x$ und $\hat{y} = \vec{y}/y$. $\hat{\rho}_A$ ist in Gl. (4.66) in zwei Terme aufgespalten: Der skalare Anteil α ist proportional zur 2×2 -Einheitsmatrix, der Vektorterm $\vec{\beta}\vec{\sigma}$ enthält die Paulimatrizen $\vec{\sigma}$, deren Spur verschwindet. Die Funktion $\vec{\beta}$ wird offensichtlich Null, wenn die beiden Ortsargumente von $\hat{\rho}_A$ gleich sind, also in einer lokalen Näherung (vgl. Gl. (4.62)).

Da $\hat{T}^{(\lambda)}$ im nicht-relativistischen Fall den Übergang zwischen Nukleonspinoren mit je zwei Komponenten beschreibt, ist auch dieser Operator in einer nicht-relativistischen Näherung eine 2×2 -Matrix. Genau wie die Dichtematrix $\hat{\rho}_A^{(n,r.)}$ in Gl. (4.66) kann jede

beliebige 2×2 -Matrix rein mathematisch mit Hilfe der Einheitsmatrix und der Paulimatrizen in zwei Terme aufgespalten werden, die physikalisch interpretiert werden können. Man kann für den nicht-relativistischen Produktionsoperator im Ortsraum immer schreiben:

$$\hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) = L^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) + i\vec{\sigma}\vec{K}^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) \quad . \quad (4.68)$$

Diese Aufspaltung in einen skalaren Term L und einen Vektorterm $\vec{\sigma}\vec{K}^{(\lambda)}$ erlaubt die Unterscheidung zwischen zwei Arten von Prozessen: L führt zu Übergängen, bei denen der Spin des Nukleons erhalten ist. $\vec{\sigma}\vec{K}^{(\lambda)}$ hingegen erlaubt Reaktionen, bei denen der Spin des Nukleons umgeklappt wird.

Sowohl der Produktionsoperator, als auch die Dichtematrix sind nun in die Form $(a + \vec{b}\vec{\sigma})$ gebracht. Da die Spur über eine einzelne Paulimatrix verschwindet, zeigt man mit Hilfe der Beziehung $(\vec{A}\vec{\sigma})(\vec{B}\vec{\sigma}) = \vec{A}\vec{B} + i\vec{\sigma}(\vec{A} \times \vec{B})$ leicht :

$$Tr \left[(a + \vec{b}\vec{\sigma})(a' + \vec{b}'\vec{\sigma}) \right] = 2(aa' + \vec{b}\vec{b}') \quad , \quad (4.69)$$

wobei a, a' sowie \vec{b}, \vec{b}' beliebig sind. In einer nicht-relativistischen, nicht-lokalen Rechnung findet man damit:

$$\begin{aligned} T^{(\lambda)} &= \int d^3x d^3y Tr \left[\hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) \rho_A(\vec{x}, \vec{y}) \right] \\ &= 2 \int d^3x d^3y \left(L^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) \alpha(\vec{x}, \vec{y}) + i\vec{K}^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) \vec{\beta}(\vec{x}, \vec{y}) \right), \end{aligned} \quad (4.70)$$

mit $L^{(\lambda)}$ und $\vec{K}^{(\lambda)}$ aus Gl. (4.68) und α und $\vec{\beta}$ aus Gl. (4.66). Nicht-lokal können also sowohl der skalare Anteil L als auch der Vektoranteil $\vec{\sigma}\vec{K}$ des Produktionsoperators zur kohärenten Photoproduktion beitragen. Prozesse, bei denen der Spin des Nukleons umgeklappt wird, sind also prinzipiell möglich, solange $\vec{\beta}(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$.

In einer lokalen Rechnung tauchen hingegen nur die Diagonalelemente $\hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x})$ auf (Gl. (4.63)). Aus Gl. (4.67) folgt sofort, daß $\vec{\beta}(\vec{x}, \vec{x}) = 0$, so daß

$$T_{loc}^{(\lambda)} = \int d^3x Tr \left[\hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{x}) \rho_A(\vec{x}, \vec{x}) \right] = 2 \int d^3x L^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{x}) \alpha(\vec{x}, \vec{x}), \quad (4.71)$$

Der Vektorterm $\vec{K}^{(\lambda)}$ aus Gl. (4.68) trägt in diesem Falle also nicht zur kohärenten Photoproduktion bei, das heißt in der lokalen Näherung enthält die kohärente Produktion keine Prozesse, bei denen die Spinausrichtung des Nukleons geändert wird.

Die lokale Näherung betrifft also nicht nur die Impulsabhängigkeit des Produktionsoperators, sondern führt auch dazu, daß der Vektoranteil $\vec{K}\vec{\sigma}$ des nicht-relativistischen Produktionsoperators nicht mehr beiträgt, da $\vec{\beta}(\vec{x}, \vec{x}) = 0$. Wie groß die Auswirkungen dieser Näherung sind, hängt natürlich davon ab, wie groß L und \vec{K} bzw. α und $\vec{\beta}$ relativ zueinander sind. Hierbei muß zwischen der Produktion von Pionen und der von η -Mesonen unterschieden werden.

Über die relative Größe des skalaren und des Vektoranteils des Produktionsoperators kann bereits anhand der Quantenzahlen der beitragenden Resonanzen eine Aussage gemacht werden. Die Photoproduktion von neutralen Pionen wird von der Δ -Resonanz

dominiert. Aufgrund der Quantenzahlen des Δ und der Art der Kopplung an das Photon trägt diese Resonanz fast ausschließlich zum M_{1+} -Multipol bei [eri88]. Dieser Multipol wiederum trägt hauptsächlich zum skalaren Teil L des Produktionsoperators bei, so daß die Photoproduktion von neutralen Pionen von Prozessen dominiert wird, bei denen der Spin des Nukleons erhalten bleibt [feu98, sch97]. Die Photoproduktion von η -Mesonen hingegen geschieht in erster Linie über die $N(1535)$ -Resonanz. Wie in Kap. 6.3 noch ausführlich diskutiert wird, taucht diese Resonanz aufgrund ihrer Quantenzahlen fast nur im E_{0+} -Multipol auf. Dieser Multipol trägt aber in erster Linie zum Vektorterm \vec{K} bei [ben91]. In diesem Fall liefert also der Vektorterm den Hauptbeitrag zum elementaren Wirkungsquerschnitt. Deshalb ist zu erwarten, daß die lokale Näherung, in der nur der skalare Anteil des Produktionsoperators beiträgt, die Produktion von Pionen weniger beeinflusst als die η -Produktion. Die Zuverlässigkeit der lokalen Näherung wird in Kap. 5 und in Kap. 6 untersucht.

Was die Nicht-Lokalität des Produktionsoperators betrifft, stellt der ω -Graph eine Ausnahme dar. Betrachtet man den Beitrag dieses Graphen, so findet man:

$$\begin{aligned} T_\omega^{(\lambda)} &= \sum_{\alpha occ.} \int d^3x d^3y \bar{\psi}_\alpha(\vec{x}) \Gamma_{\omega NN}^\mu \psi_\alpha(\vec{x}) G_{\mu\nu}^\omega(E; \vec{x}, \vec{y}) \Gamma_{\omega\pi\gamma}^{\nu\sigma} \phi_\pi^{(-)*}(\vec{y}) \phi_\sigma^{(\lambda)}(\vec{y}) \\ &= \int d^3x d^3y Tr [\hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x}) \Gamma_{\omega NN}^\mu] \\ &\quad \times G_{\mu\nu}^\omega(E; \vec{x}, \vec{y}) \Gamma_{\omega\pi\gamma}^{\nu\sigma} \phi_\pi^{(-)*}(\vec{y}) \phi_\sigma^{(\lambda)}(\vec{y}) \quad , \end{aligned} \quad (4.72)$$

wobei $E = E_\gamma - E_\pi$. Ein wichtiger Unterschied zwischen Gl. (4.72) und (4.43) bzw. (4.60) ist nun, daß im Falle des ω nur der lokale Teil der Kerndichtematrix $\hat{\rho}_A$ auftritt. Im Impulsraum findet man entsprechend:

$$\begin{aligned} T_\omega^{(\lambda)} &= \sum_{\alpha occ.} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bar{\psi}_\alpha(\vec{p} + \vec{k} - \vec{q}) \Gamma_{\omega NN}^\mu \psi_\alpha(\vec{p}) G_{\mu\nu}^\omega(E; \vec{k} - \vec{q}) \Gamma_{\omega\pi\gamma}^{\nu(\lambda)} \\ &= \sum_{\alpha occ.} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \bar{\psi}_\alpha(\vec{p} + \vec{k} - \vec{q}) \hat{T}_\omega^{(\lambda)}(E; \vec{k}, \vec{q}) \psi_\alpha(\vec{p}) \quad . \end{aligned} \quad (4.73)$$

Man sieht, daß der Beitrag des ω Graphen zum Produktionsoperator sowieso nicht vom Impuls der Nukleonen abhängt. Für diesen Graph ist also die lokale Näherung exakt. Aus der Art der ωNN Kopplung (Gl. (3.13)) sieht man, daß das ω direkt an die Vektor- und die Tensordichte des Grundzustands des Kerns in Gl. (4.58) koppelt. Dies wird insbesondere in der kohärenten Photoproduktion von η -Mesonen noch eine Rolle spielen.

4.6 Allgemeine Eigenschaften des kohärenten Wirkungsquerschnitts

Anhand von nicht-relativistischen, lokalen Betrachtungen sollen in diesem Abschnitt noch einige qualitative Aussagen über die Eigenschaften des kohärenten Wirkungsquerschnitts gemacht werden. Unter der Annahme, daß die elementare Reaktion durch eine

nicht-relativistische Näherung noch gut beschrieben werden kann und daß der Produktionsprozeß vom skalaren Anteil des Produktionsoperators dominiert wird, kann man die kohärente Produktion am Kern näherungsweise nicht-relativistisch und lokal betrachten. So können qualitative Aussagen über das Verhalten des Wirkungsquerschnitts gemacht werden. Beide Bedingungen sind für die Photoproduktion von Pionen erfüllt [lag77, sch97]. Sei $L(E; \vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ der skalare Anteil des nicht-relativistischen Produktionsoperators im Impulsraum, dann läßt sich die kohärente Amplitude in der lokalen, nicht-relativistischen Näherung unter Annahme eines freien auslaufenden Pions wie folgt schreiben (vgl. Gl. (4.63) und (4.70)) :

$$T = 2L(E, \vec{p}_o, \vec{k}, \vec{q}) \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{q})\vec{x}} \alpha(\vec{x}, \vec{x}) \quad , \quad (4.74)$$

mit α aus Gl. (4.66). Aus der Definition von α kann man ablesen, daß $\alpha(\vec{x}, \vec{x}) = 1/2\rho(x)$, wobei $\rho(x)$ die nicht-relativistische Grundzustandsdichte des Kerns ist. Damit hat man:

$$T = L(E, \vec{p}_o, \vec{k}, \vec{q}) \int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{q})\vec{x}} \rho(x) = L(E, \vec{p}_o, \vec{k}, \vec{q}) F(\vec{k} - \vec{q}) \quad . \quad (4.75)$$

$F(\vec{k} - \vec{q})$ ist hierbei die Fouriertransformierte von $\rho(x)$, also der nicht-relativistische Formfaktor des Kerns. Unter der Annahme von nicht-relativistischer und lokaler Näherung sowie eines freien Pions ist die kohärente Amplitude also direkt proportional zum Formfaktor des Kerns. In Kap. 4.4.1 wurde außerdem gezeigt, daß die Quantenzahlen der pseudoskalaren Mesonen zu einem $\sin^2 \theta$ -Term im Wirkungsquerschnitt führen (Gl. (4.35)). Folglich kann man unter all diesen Annahmen den Wirkungsquerschnitt für die kohärente Produktion von Pionen wie folgt schreiben:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \approx f(E_\gamma, \theta) |F_v(Q)|^2 \sin^2 \theta \quad . \quad (4.76)$$

Hierbei ist $Q = |\vec{k} - \vec{q}|$ der auf den Kern übertragene Impuls, und θ ist der Streuwinkel. Die Funktion $f(E_\gamma, \theta)$ enthält die aus dem Produktionsoperator resultierende Energie- und Winkelabhängigkeit. Man sieht aus Gl. (4.76), daß die Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts durch das Produkt aus dem Formfaktor des Kerns und dem $\sin^2 \theta$ -Term dominiert wird. Die Eigenschaften des Produktionsoperators gehen vor allem in die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts ein. Um ein Modell für die kohärente Produktion zu testen, sind also energieabhängige Observablen nötig, da die Winkelabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts vor allem die Grundzustandseigenschaften widerspiegelt, die in diesem Zusammenhang nicht untersucht werden sollen.

Korrekturen zu der in Gl. (4.76) gegebenen Abschätzung kommen durch relativistische Effekte, nicht-lokale Strukturen des Produktionsoperators sowie durch die Wechselwirkung des Pions mit dem Kern zustande. Diese Effekte werden in den nun folgenden Kapiteln diskutiert. Im Falle der η -Produktion wird sich zeigen, daß insbesondere nicht-lokale Effekte zu deutlichen Abweichungen der Eigenschaften des Wirkungsquerschnitts von Gl. (4.76) führen können.

Kapitel 5

Ergebnisse: Pionen

5.1 Vorbemerkungen

Das in den vorhergehenden Abschnitten beschriebene Modell wurde verwendet, um die kohärente Photoproduktion von Pionen an ^{12}C und ^{40}Ca zu untersuchen. Die Ergebnisse hiervon sollen in diesem Kapitel diskutiert werden.

Zunächst soll die Verbindung zwischen der Kinematik dieser Reaktion und der Kernstruktur genauer betrachtet werden. So können qualitative Aussagen über den Wirkungsquerschnitt gemacht werden. Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, daß in einer Rechnung in der lokalen Näherung der differentielle Wirkungsquerschnitt proportional zum Formfaktor des Kerns ist. Zur Veranschaulichung des Zusammenhangs zwischen Photonenergie, Impulsübertrag und Formfaktor dient die Abb. 5.1. Hier sind zum einen im oberen und im unteren Teil die Vektorformfaktoren für ^{12}C und ^{40}Ca als Funktion des Impulsübertrags Q auf den Kern dargestellt. Im mittleren Teil der Abbildung ist der Zusammenhang zwischen Impulsübertrag und Energie des Photons im Schwerpunktsystem bei verschiedenen Winkeln dargestellt. Der Impulsübertrag wurde dabei entlang der x -Achse aufgetragen, um den entsprechenden Wert des Formfaktors ablesen zu können. Außerdem sind drei Photonenergien markiert, für die im folgenden differentielle Wirkungsquerschnitte gezeigt werden.

Wenn ein Photon, dessen Energie gerade gleich der Schwellenenergie ist, ein Pion produziert, so ist dieses Pion relativ zum Kern in Ruhe. Der auf den Kern übertragene Impuls ist dann praktisch gleich dem Impuls des Photons. Das zeigt sich im mittleren Teil der Abb. 5.1 darin, daß sich die Linien für verschiedene Winkel bei der Schwellenenergie bei einem endlichen Impulsübertrag treffen. Oberhalb der Schwellenenergie laufen die Linien für verschiedene Winkel auseinander, und das Impulstransferintervall, das für eine feste Photonenergie abgetastet werden kann, wächst schnell mit der Photonenergie. Abb. 5.1 zeigt, daß die Diffraktionsminima im Formfaktor zu Minima im differentiellen Wirkungsquerschnitt führen, die bei ^{12}C und ^{40}Ca bei unterschiedlichen Winkeln auftreten.

Abgesehen von der Lage der Minima unterscheiden sich die Formfaktoren von ^{12}C und ^{40}Ca auch in der absoluten Höhe. So ist z.B. der Formfaktor von ^{12}C bei einem Impulsübertrag von $1,5 \text{ fm}^{-1}$ um etwa eine Größenordnung größer als der von ^{40}Ca . Dies hat direkten Einfluß auf die im folgenden noch zu diskutierende A -Abhängigkeit

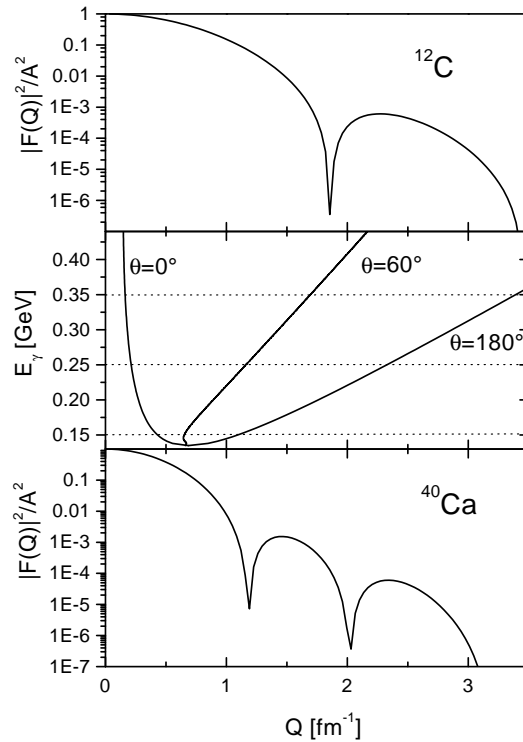


Abb. 5.1: Die Vektorformfaktoren von ^{12}C und ^{40}Ca als Funktion des Impulsübertrags Q . Der mittlere Graph zeigt den Zusammenhang zwischen Impulsübertrag und Energie des Photons bei der Pionenproduktion für feste Streuwinkel θ .

des Wirkungsquerschnitts.

5.1.1 Existierende Modelle

Die existierenden Modelle zur kohärenten Photoproduktion von Pionen teilen sich in zwei Gruppen. Auf der einen Seite gibt es Arbeiten im Rahmen der nicht-relativistischen DWIA, die vor allem Energien nahe der Schwelle betrachten [gir83, bof86, chu85, chu87, bof91]. Alle diese Modelle verwenden neben der nicht-relativistischen Näherung auch die im vorhergehenden Abschnitt diskutierte lokale Näherung. Die Güte dieser beiden Näherungen wird für die kohärente Photoproduktion von Pionen im folgenden diskutiert.

Die zweite Gruppe von Arbeiten beschreibt die kohärente Photoproduktion von Pionen im Bereich des Δ unter Verwendung des Δ -Loch-Modells [koc79, kli80, sah81, kar86, ose87, koc83, car93, lak93, koe94]. Diese nicht-relativistischen Modelle beschreiben die Dynamik von Pionen und Δ -Resonanzen im Kern in einem mikroskopischen Modell. Die Modifikationen des intermediären Δ durch Wechselwirkung mit dem Kern

werden im Δ -Loch-Modell berücksichtigt, sind in der herkömmlichen DWIA aber nicht enthalten. Die Effekte dieser Modifikationen werden in Kap. 5.3.2 untersucht. Die meisten dieser Arbeiten berücksichtigen nur den direkten Δ -Beitrag zum Produktionsprozeß und vernachlässigen die nicht-resonanten Beiträge. Eine Ausnahme stellen hierbei [koc83] und [sah81] dar: in diesen beiden Arbeiten wird der Produktionsoperator mit Hilfe einer empirischen Multipolanalyse der elementaren Photoproduktion von Pionen konstruiert. Aus dieser Analyse wurde dann der Beitrag des Δ zum dominanten M_{1+} Multipol extrahiert und mit Hilfe des Δ -Loch-Modells behandelt. Die restlichen, nicht-resonanten Beiträge werden im Rahmen von herkömmlicher DWIA mit in die Rechnung einbezogen. Am Ende dieses Kapitels werden die Ergebnisse dieser Arbeit mit solchen aus Δ -Loch-Modell verglichen.

5.2 PWIA

Zuerst sollen die Ergebnisse von PWIA-Rechnungen also Rechnungen, bei denen das auslaufende Pion wie ein freies Teilchen behandelt wird, für die kohärente Photoproduktion von Pionen am Kern diskutiert werden. In diesem Rahmen sollen allgemeine Eigenschaften dieses Prozesses aufgezeigt werden. Außerdem werden die nicht-relativistische und die lokale Näherung diskutiert. Da diese Punkte unabhängig von dem betrachteten Kern sind, werden in diesem Kapitel nur Ergebnisse für ^{12}C gezeigt.

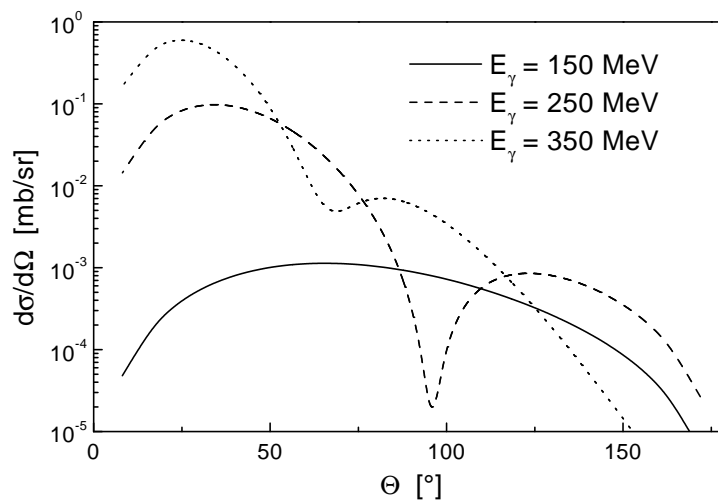


Abb. 5.2: Differentieller Querschnitt für $^{12}\text{C}(\gamma, \pi^0)^{12}\text{C}$ in PWIA für drei verschiedene Einschußenergien.

Als erstes ist in Abb. 5.2 der differentielle Wirkungsquerschnitt für die kohärente Photoproduktion von Pionen an ^{12}C dargestellt. Die Winkelabhängigkeit stimmt weitgehend mit dem überein, was die Abschätzung in Gl. (4.76) vorhersagt: In Vorwärts-

und Rückwärtsrichtung verschwindet der Wirkungsquerschnitt aufgrund des $\sin^2 \theta$ -Terms; bei endlichen Winkeln tauchen, in Abhängigkeit von der Einschubenergie, Minima im Wirkungsquerschnitt auf, deren Lage gut mit denen im Formfaktor in Abb. 5.1 übereinstimmt. Während die Winkelabhängigkeit also durch den Formfaktor dominiert wird, sieht man in Abb. 5.2, daß die absolute Höhe des Wirkungsquerschnitts stark von der Einschubenergie abhängt. Diese Energieabhängigkeit resultiert zum großen Teil aus der Energieabhängigkeit des Produktionsoperators. Auch dies ist in Übereinstimmung mit Gl. (4.76).

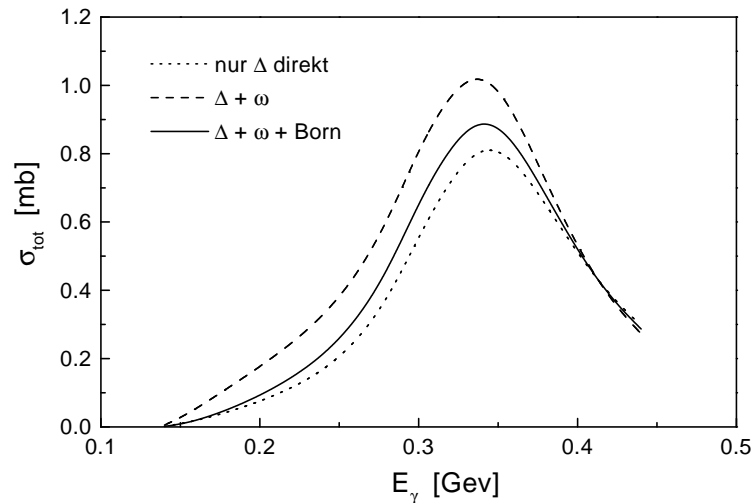


Abb. 5.3: Totaler Querschnitt für $^{12}\text{C}(\gamma, \pi^0)^{12}\text{C}$ in PWIA in einer vollständigen Rechnung, sowie für Beiträge der einzelnen Graphen.

Im totalen Wirkungsquerschnitt, der in Abb. 5.3 dargestellt ist, sieht man diese starke Energieabhängigkeit deutlich. Das Δ führt zu einem resonanten Verhalten des Wirkungsquerschnitts. In Abb. 5.3 ist außerdem der Wirkungsquerschnitt unter Vernachlässigung der einzelnen nicht-resonanten Graphen dargestellt. Das Δ dominiert deutlich die Reaktion. Die restlichen Graphen liefern aber relevante Beiträge, die nicht vernachlässigt werden dürfen, auch wenn sich die Beiträge der Borngraphen und des ω -Terms durch destruktive Interferenz teilweise aufheben. Der Gesamtbeitrag der Bornterme besteht aus der Summe des direkten und des Austauschgraphen, die sich teilweise gegeneinander wegheben. Der Beitrag des ω resultiert fast ausschließlich aus der Vektorkopplung des ω an das Nukleon, vor allem da die entsprechende Tensorkopplungskonstante wesentlich kleiner ist (vgl. Gl. (3.14)).

Es ist auffällig, daß der totale Wirkungsquerschnitt an ^{12}C nur etwa um einen Faktor vier größer ist als der Querschnitt für die Pionenproduktion an einem einzelnen Nukleon in Abb. 3.3. Dies ist zunächst überraschend, da das Photon bei der Produktion von Pionen an ^{12}C zwölf Reaktionspartner hat, über die kohärent summiert wird (Gl. (4.38)). Vernachlässigt man die Tatsache, daß diese zwölf Nukleonen gebunden

sind, so würde man naiv einen Wirkungsquerschnitt für die kohärente Produktion an ^{12}C erwarten, der um einen Faktor 12^2 , also etwa zwei Größenordnungen, über dem elementaren liegt.

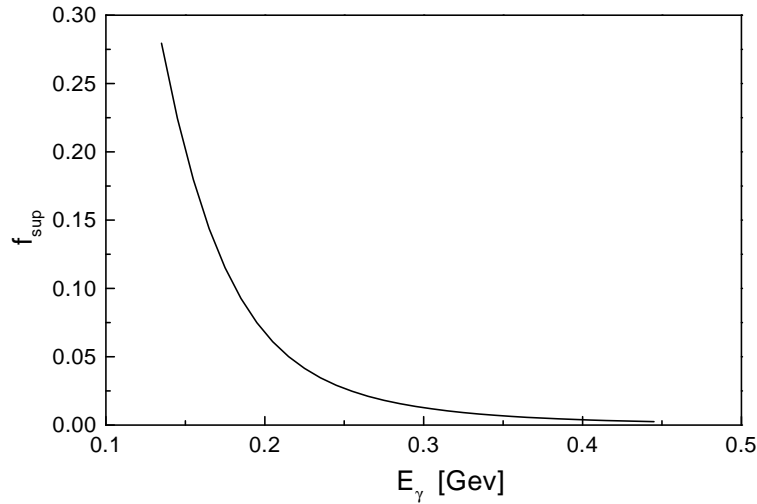


Abb. 5.4: Unterdrückungsfaktor f_{sup} aus Gl. (5.2) als Funktion der Energie des Photons für ^{12}C .

Der Grund für diese Unterdrückung der kohärenten Photoproduktion am Kern wird anhand von folgender Betrachtung deutlich: Vernachlässigt man in Gl. (4.76) die Winkelabhängigkeit des Produktionsoperators und damit der Funktion $f(E_\gamma, \theta)$, so kann man den totalen Wirkungsquerschnitt wie folgt schreiben:

$$\sigma \approx f(E_\gamma) 2\pi A^2 f_{sup}(E_\gamma) \quad , \quad (5.1)$$

wobei

$$f_{sup}(E_\gamma) = \int d\cos\theta \frac{|F_v(Q(E_\gamma, \theta))|^2}{A^2} \sin^2\theta \quad . \quad (5.2)$$

F_v ist hierbei der Vektorformfaktor von ^{12}C aus Abb. 5.1, und Q ist der auf den Kern übertragene Impuls, der von der Energie des Photons und vom Streuwinkel θ abhängt. Der Formfaktor taucht auf, weil es sich bei den Nukleonen, an denen das Pion produziert wird, um gebundene Teilchen handelt. Für die Photoproduktion an einem freien Nukleon ist $F_v = 1$. Der Faktor $\sin^2\theta$ kommt durch die Kohärenzbedingung zustande (vgl. Gl. (4.35)). Die Funktion f_{sup} in Gl. (5.2) ist also ein Maß dafür, wie stark die Bindung der Nukleonen im Kern und die Kohärenzbedingung den Produktionsprozeß unterdrücken, und zwar relativ zu dem naiven Bild der unabhängigen Produktion an A freien Nukleonen.

Abb. 5.4 zeigt, daß diese Unterdrückung auf dem Maximum der Δ -Resonanz etwa zwei Größenordnungen beträgt, was den Effekt der kohärenten Summation über zwölf Nukleonen weitgehend kompensiert. Diese Abbildung zeigt außerdem, daß die Unterdrückung stark von der Energie des Photons abhängt: An der Schwelle hat sie den geringsten Effekt, wird aber mit wachsender Energie des Photons schnell stärker.

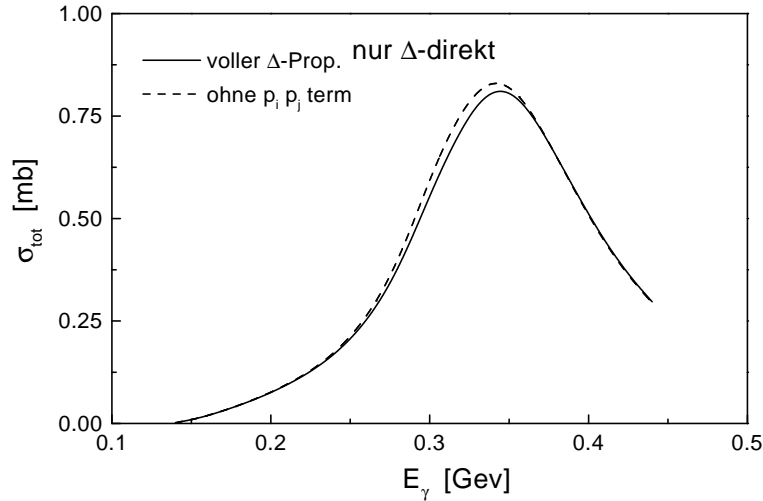


Abb. 5.5: Totaler Wirkungsquerschnitt für den direkten Δ -Graphen mit und ohne den $p_i p_j$ -Term des Δ -Propagators, wie im Text beschrieben.

In Abb. 5.5 wird die Güte der Näherung für den $p_i p_j$ -Term im Δ -Propagator untersucht, der in dieser Arbeit aus technischen Gründen nicht exakt behandelt wird (vgl. Gl. (4.49)). In dieser Abbildung sind die Ergebnisse für zwei Rechnungen für den direkten Δ -Graphen dargestellt. Einmal wurde der $p_i p_j$ -Term im Δ -Propagator näherungsweise behandelt wie in Kap. 4.4.2 beschrieben, für die zweite Rechnung wurde der Term ganz weggelassen. In der hier verwendeten Näherung trägt dieser Term nur einige Prozent zum Gesamtquerschnitt bei. Es ist also nicht zu erwarten, daß diese Näherung das Endergebnis stark beeinflusst.

5.2.1 Die lokale und die nicht-relativistische Näherung

Alle bisherigen DWIA-Rechnungen zur kohärenten Photoproduktion von Pionen verwenden nicht-relativistische und lokale Näherungen [gir83, bof86, chu87, chu85, bof91], während das in dieser Arbeit verwendete Modell diese Reaktion relativistisch, nicht-lokal behandelt. In diesem Abschnitt sollen die Effekte dieser Näherungen untersucht werden.

In [lag77] wurde ausgehend von einer relativistischen effektiven Feldtheorie, ähnlich der in dieser Arbeit verwendeten, eine nicht-relativistische Reduktion des elementaren Produktionsoperators für die Photoproduktion von Pionen am Nukleon angegeben. Es

wurde gezeigt, daß diese nicht-relativistische Reduktion nur sehr geringe Auswirkungen auf die Vorhersagen des Modells für die elementare Photoproduktion von Pionen hat. Aus diesem Grunde wurde dieser nicht-relativistische Produktionsoperator in vielen Arbeiten über die Photoproduktion von Pionen am Kern verwendet, insbesondere in [bof86, chu87] für die kohärente Photoproduktion. Deshalb werden in diesem Abschnitt Rechnungen unter Verwendung dieses Operators diskutiert.

Der direkte Δ -Graph dominiert die kohärente Photoproduktion stark (vgl. Abb. 5.3), deshalb wird im folgenden nur dieser Graph betrachtet. Wie im Kap. 4.5 diskutiert wurde, trägt in einer lokalen, nicht-relativistischen Rechnung nur der skalare Anteil L des nicht-relativistischen Produktionsoperators zu kohärenten Photoproduktion bei (s. Gl. (4.68) und (4.71)). Für den Beitrag des direkten Δ -Graphen zu L wird in [lag77] die folgende Formel angegeben:

$$L_{\Delta}^{(\lambda)} = G \frac{1}{p_{\Delta}^2 - m_{\Delta}^2 + im_{\Delta}\Gamma_{\Delta}} \vec{q}' \cdot (\vec{k}' \times \vec{\varepsilon}^{(\lambda)}) \quad , \quad (5.3)$$

mit

$$G = \frac{4}{9} \frac{g_{\pi N\Delta}(m_{\Delta} + m_N)g_{\gamma N\Delta}e}{m_{\pi}^2} \quad , \quad (5.4)$$

sowie

$$\vec{q}' = \vec{q} - \frac{E_{\pi}}{m_{\Delta}} \vec{p}_{\Delta} \quad ; \quad \vec{k}' = \vec{k} - \frac{m_{\Delta} - m_N}{m_N} \vec{p}_i \quad . \quad (5.5)$$

Hierbei stehen \vec{k} , \vec{q} und \vec{p}_i für die Impulse von Photon, Pion und einlaufendem Nukleon und $\vec{p}_a = \vec{q} + \vec{p}_i$. p_{Δ} ist der Viererimpuls des Δ und $\vec{\varepsilon}^{(\lambda)}$ ist der Polarisationsvektor des Photons.

Mit diesem Operator wurde eine lokale PWIA Rechnung für ^{12}C durchgeführt. Um nun die Ergebnisse dieser nicht-relativistischen, lokalen Rechnung mit den Resultaten dieser Arbeit sinnvoll vergleichen zu können, wurden bei der Auswertung von Gl. (5.3) die in dieser Arbeit verwendeten Kopplungskonstanten sowie die Parametrisierung der Δ -Zerfallsbreite aus Gl. (3.12) benutzt. Dem einlaufenden Nukleon wurde eine Energie \bar{E} zugeordnet, die dem Mittel der Einteilchenenergie der in ^{12}C gebundenen Nukleonen entspricht. Der Impuls \vec{p}_i des Nukleons wurde wie in [chu87] gewählt:

$$\vec{p}_i = -\frac{\vec{k}}{A} - \frac{A-1}{2A}(\vec{k} - \vec{q}) \approx -\frac{1}{2}(\vec{k} - \vec{q}) \quad . \quad (5.6)$$

Diese Wahl ist in lokalen Rechnungen sehr gebräuchlich [ose87, lak93, fix97, pie97].

Das Ergebnis einer solchen Rechnung für den direkten Δ -Graphen ist in Abb. 5.6 als gepunktete Linie dargestellt, im Vergleich zu einer relativistischen, nicht-lokalen Rechnung (durchgezogene Linie) wie in Abb. 5.3. Der Unterschied zwischen beiden Kurven ist beträchtlich. Die nicht-relativistische, lokale Rechnung liefert in dieser Form deutlich größere Querschnitte.

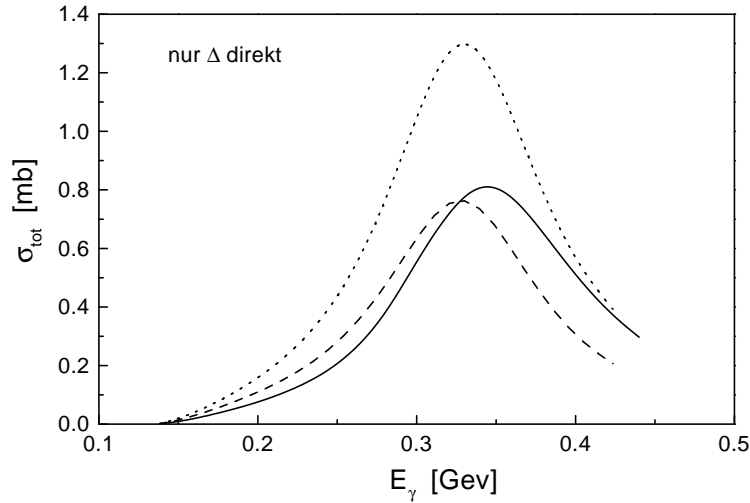


Abb. 5.6: Beitrag des direkten Δ -Graphs zum totalen kohärenten Produktionsquerschnitt an ^{12}C wie im Text erläutert. Gezeigt ist das relativistische, nicht-lokale Ergebnis (durchgezogene Linie), eine nicht-relativistische, lokale Rechnung ähnlich der in [chu87, bof86] (gepunktete Linie), sowie eine nicht-relativistische, lokale Rechnung mit der kinematischen Korrektur aus [ose87] (gestrichelte Linie).

In [ose87, bof91] wurde allerdings gezeigt, daß bei der Verwendung eines nicht-relativistischen Produktionsoperators wie dem in Gl. (5.3) noch zusätzliche kinematische Korrekturen berücksichtigt werden müssen. Der nicht-relativistische Operator in Gl. (5.3) wurde in [lag77] im Schwerpunktsystem der elementaren Reaktion gegen eine voll relativistische Rechnung getestet. Die oben erläuterte Rechnung wurde aber wie in [bof86, chu87] im Photon-Kern-Schwerpunktsystem durchgeführt (vgl. Gl. (5.6)). In [ose87] wurde gezeigt, daß die Berücksichtigung des Unterschieds zwischen diesen beiden Bezugssystemen zu einer Korrektur der Amplitude durch einen Faktor

$$\frac{m_N}{m_N + E_\gamma} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}} \quad (5.7)$$

führt, wobei v die Relativgeschwindigkeit zwischen dem Photon-Kern- und dem Photon-Nukleon-Schwerpunktsystem ist. Dieser Korrekturfaktor wird hergeleitet, indem die Impulse im Produktionsoperator (5.3) explizit vom Photon-Kern- in das Photon-Nukleon-Schwerpunktsystem transformiert werden, bevor der Produktionsoperator berechnet wird [ose87]. Durch die Festlegung des Nukleonimpulses in Gl. (5.6) ist das Photon-Nukleon-Schwerpunktsystem eindeutig bestimmt. Die gestrichelte Linie in Abb. 5.6 zeigt das Ergebnis einer nicht-relativistischen, lokalen Rechnung unter Berücksichtigung dieses Korrekturfaktors. Dieses Ergebnis stimmt wesentlich besser mit den Re-

sultaten dieser Arbeit überein, auch wenn noch Unterschiede sichtbar sind. Der relativistische Zugang in dieser Arbeit ermöglicht die Auswertung der Lorentz-invarianten Produktionsamplitude in einem beliebigen Bezugssystem, wobei die korrekte Behandlung der Kinematik automatisch sichergestellt ist.

Beide Näherungen, die nicht-relativistische und die lokale, betreffen die Impulsabhängigkeit des Produktionsoperators. Folglich kann der Unterschied zwischen der vollen und der gestrichelten Linie in Abb. 5.6 nicht eindeutig in nicht-lokale und relativistische Effekte aufgeteilt werden. Zusammenfassend ist festzustellen, daß für die kohärente Photoproduktion von Pionen nicht-relativistische, lokale Rechnungen einigermaßen zuverlässige Ergebnisse liefern, auch wenn noch Unterschiede zu einer relativistischen, nicht-lokalen Rechnung sichtbar sind. Voraussetzung hierfür ist aber, daß die Kinematik der Reaktion sorgfältig behandelt wird.

5.3 DWIA

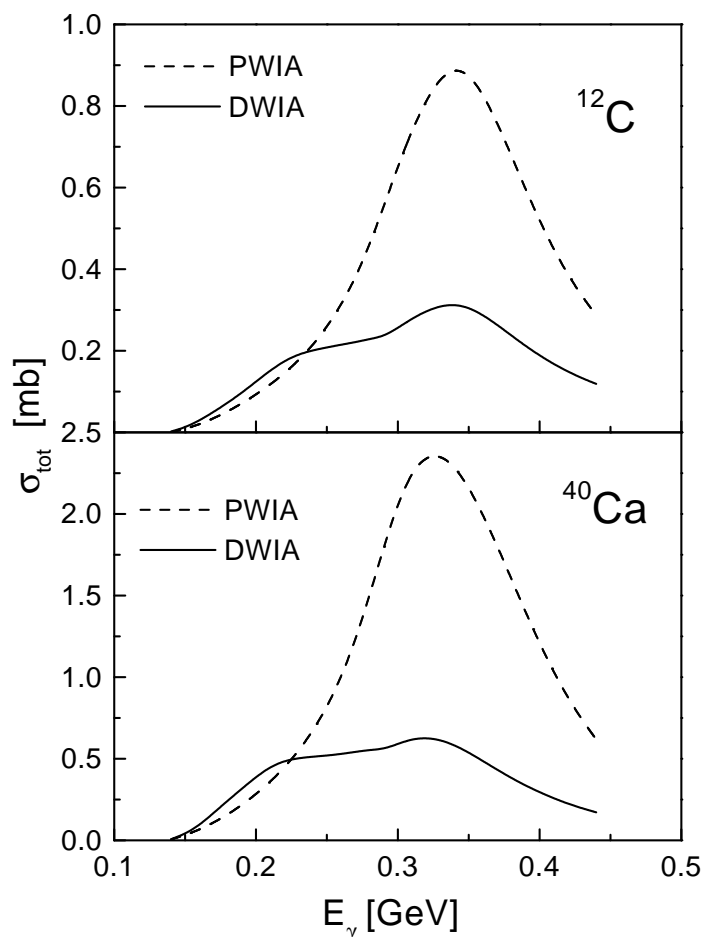


Abb. 5.7: Totaler Wirkungsquerschnitt für die kohärente Produktion von Pionen an ^{12}C und an ^{40}Ca mit einem freien Pion (PWIA) und unter Berücksichtigung der Pion-Kern Wechselwirkung (DWIA).

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse von Rechnungen, die die Wechselwirkung des Pions mit dem Kern miteinschließen (DWIA), diskutiert werden. Diese Wechselwirkung wird, wie in Kap. 4.3.1 beschrieben, berücksichtigt, indem man statt einer ebenen Welle eine Streuwelle für das Pion in Gl. (4.43) verwendet. Diese Streuwelle wird aus der numerischen Lösung einer Klein-Gordon-Gleichung (Gl. (4.15)) unter Verwendung des optischen Potentials aus Kap. 4.3 gewonnen.

Die Ergebnisse für den totalen Wirkungsquerschnitt in DWIA und in PWIA für ^{12}C und ^{40}Ca sind in Abb. 5.7 dargestellt. Man sieht, daß die Wechselwirkung des Pi-

ons mit dem Kern den Wirkungsquerschnitt bis zu einer Energie von 220 MeV erhöht. Bei Energien des Photons oberhalb von 220 MeV führt die Pion-Kern-Wechselwirkung hingegen zu einer starken Unterdrückung. Dies ist leicht anhand der Energieabhängigkeit der Parameter des Pion-Kern-Potentials in Abb. 4.7 zu verstehen: Oberhalb einer kinetischen Energie des Pions von etwa 100 MeV ($E_\gamma \sim 240$ MeV) steigen die Imaginärteile dieser Parameter stark an, was zu einer starken Absorption des Pions im Kern führt. Die Ursache dieses Effekts ist die starke Kopplung des Pions an die Δ -Resonanz. Die resultierende Energieabhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts in DWIA wird also wesentlich durch die Wechselwirkung des auslaufenden Pions mit dem Kern beeinflusst.

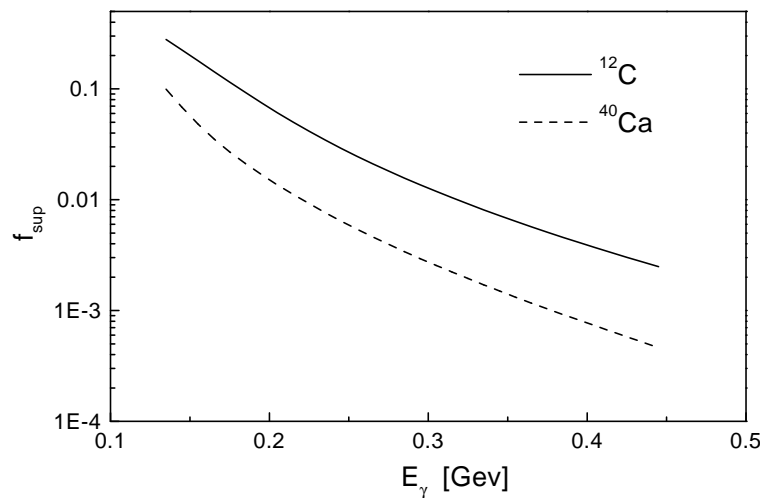


Abb. 5.8: f_{sup} aus Gl. (5.2) für ^{12}C und ^{40}Ca .

Die Form der Wirkungsquerschnitte in Abb. 5.7 ist für ^{12}C und ^{40}Ca sehr ähnlich. Es ist aber auffällig, daß der PWIA Querschnitt an ^{40}Ca nur etwa doppelt so groß ist wie an ^{12}C , obwohl ^{40}Ca etwa drei mal so viele Nukleonen enthält. Auch dies kann durch das Verhalten des Unterdrückungsfaktors f_{sup} aus Gl. (5.2) erklärt werden. In Abb. 5.8 ist f_{sup} für ^{12}C und ^{40}Ca dargestellt. Man erkennt, daß dieser Faktor für ^{40}Ca um etwa einen Faktor 3-4 kleiner ist als für ^{12}C . Die Grund dafür ist, daß der Formfaktor von ^{40}Ca bei gleichem Impulsübertrag deutlich kleiner ist als der von ^{12}C (s. Abb. 5.1). Diese stärkere Unterdrückung des kohärenten Prozesses an ^{40}Ca gleicht die größere Anzahl der Nukleonen in diesem Kern weitgehend aus, was den geringen Unterschied in der Größe der Wirkungsquerschnitte in Abb. 5.7 erklärt.

Um die Massenabhängigkeit der kohärenten Produktion von Pionen weiter zu untersuchen, macht man einen Ansatz $\sigma \sim A^\alpha$. Für die PWIA Rechnungen findet man $\alpha \sim 0,7-0,8$. Dieser Wert spiegelt direkt die Unterdrückung der kohärenten Produktion durch den Formfaktor des Kerns und die Kohärenzbedingung wider. Für die DWIA Ergebnisse hingegen ergibt sich $\alpha \sim 0,5 - 0,7$ je nach Energie. Im Fall der DWIA ist

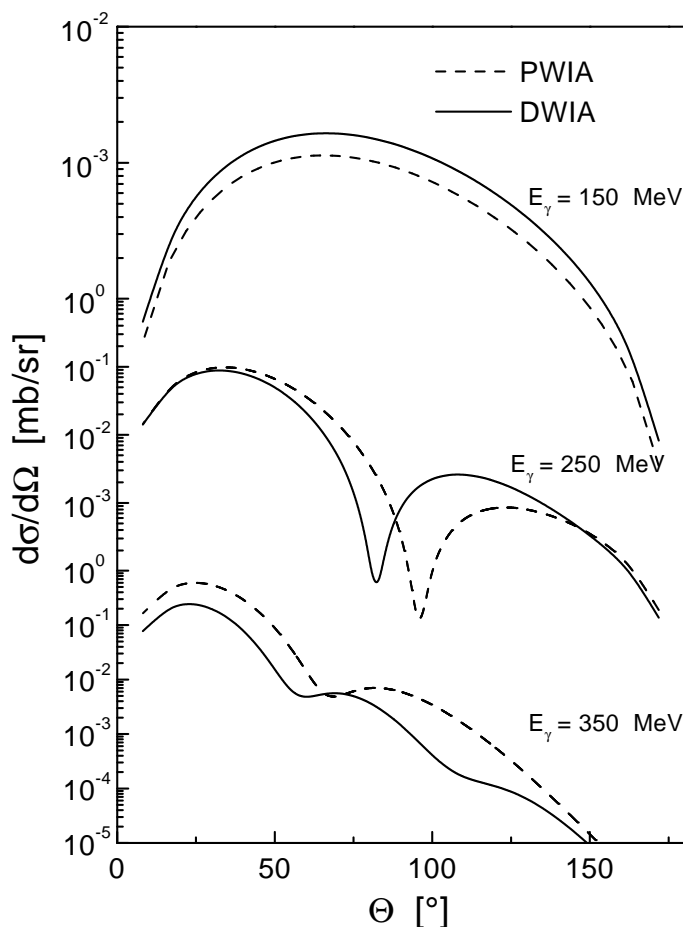


Abb. 5.9: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die kohärente Produktion von Pionen an ^{12}C .

α noch etwas kleiner, da die Pionen, die gleichmäßig im gesamten Kernbereich produziert werden, in einem größeren Kern stärker absorbiert werden. Eine rein geometrische Deutung dieser Werte von α ist bei der kohärenten Produktion nicht möglich. Dies ist leicht anhand des PWIA-Wertes zu sehen: Obwohl die Pionen gleichmäßig im ganzen Kernbereich produziert werden, und die PWIA keine Absorption von Pionen berücksichtigt, findet man $\alpha < 1$. Die Ursache hierfür ist, wie oben diskutiert, das Verhalten des Formfaktors des Kerns, also ein rein quantenmechanischer Effekt.

In den Abbildungen 5.9 und 5.10 sind die differentiellen Wirkungsquerschnitte an ^{12}C und ^{40}Ca für drei verschiedene Energien des Photons dargestellt. Die Endzustandswechselwirkung zwischen Pion und Kern ändert die Form des differentiellen Wirkungsquerschnitts deutlich. Die Minima im Wirkungsquerschnitt werden verschoben und sind

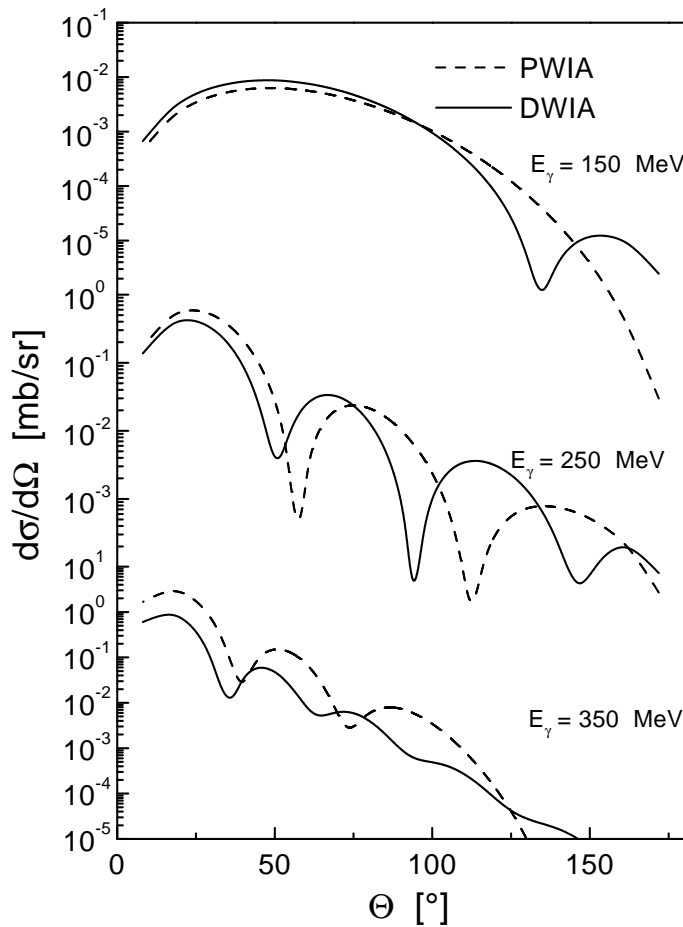


Abb. 5.10: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die kohärente Produktion von Pionen an ^{40}Ca .

in DWIA Rechnungen tendenziell weniger stark ausgeprägt.

An dieser Stelle entsprechen die durchgeführten Rechnungen der herkömmlichen DWIA. Deshalb soll nun ein erster Vergleich mit den Daten der A2-Kollaboration am Beschleuniger MAMI in Mainz [sch97] vorgenommen werden. Bei diesem Experiment wurde die kohärente Photoproduktion von Pionen an ^{12}C bei einem festen Streuwinkel von 60° im Labor bei einer Energie von 140 MeV bis etwa 430 MeV gemessen. In Abbildung Abb. 5.11 sind diese Daten im Vergleich zu dem Ergebnis von DWIA und PWIA Rechnungen dargestellt. Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts in dieser Abbildung ergibt sich aus dem Zusammenspiel des resonanten Charakters der Δ -Resonanz, der im totalen Wirkungsquerschnitt deutlich zu sehen ist, und der Abhängigkeit des Formfaktors des Kerns vom Impulsübertrag: Bei festem Streuwinkel

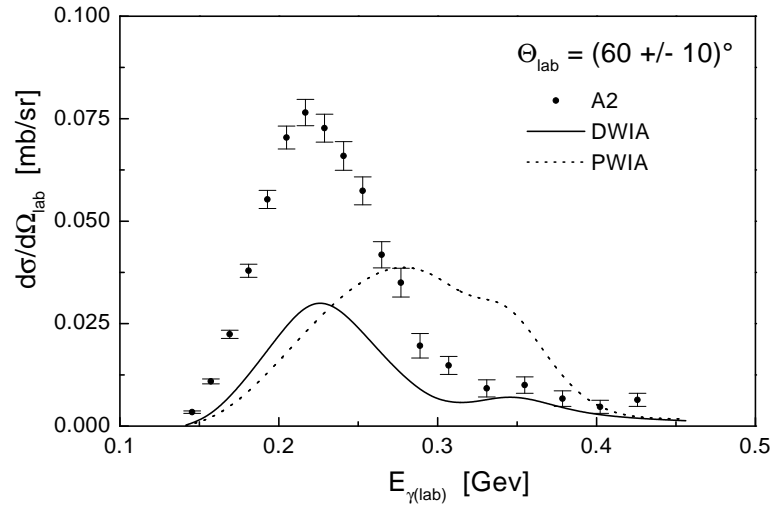


Abb. 5.11: Differentieller Wirkungsquerschnitt für ^{12}C in DWIA und PWIA im Vergleich zu den A2-Daten als Funktion der Laborenergie des Photons.

wird mit größer werdender Energie des Photons der Impulsübertrag größer und folglich der Formfaktor kleiner. Als Ergebnis dieser beiden Effekte weist die PWIA-Rechnung ein Maximum auf, das deutlich unterhalb der Δ -Resonanz liegt. Das Δ selber ist nur noch als schwache Schulter bei etwa 350 MeV zu sehen.

Relativ zu dem PWIA-Ergebnis zeigt die DWIA-Rechnung ein sehr ähnliches Verhalten wie beim totalen Wirkungsquerschnitt in Abb. 5.7: Bei Energien unterhalb von etwa 220 MeV erhöht sich der differentielle Wirkungsquerschnitt, während er bei höheren Energien stark abgesenkt wird. Folglich ist bei der DWIA-Rechnung das Maximum zu niedrigeren Energien hin verschoben. Die Lage dieses Maximums, sowie die Energieabhängigkeit insgesamt stimmt sehr gut mit den A2-Daten überein, die tatsächliche Höhe des Maximums wird allerdings um mehr als einen Faktor zwei unterschätzt.

In Abb. 5.12 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt in DWIA aus Abb. 5.11 aufgeteilt in die Beiträge der verschiedenen Diagramme. Dadurch, daß das Maximum des differentiellen Wirkungsquerschnitts bei einem festen Winkel von 60° deutlich unterhalb des Δ liegt, sind die nicht-resonanten Beiträge im Verhältnis zum Δ auf diesem Maximum relativ groß (vgl. Abb. 5.3). Bei höheren Energien wird der Beitrag des Δ dann dominant, hier ist der differentielle Wirkungsquerschnitt in Abb. 5.12 aber absolut schon sehr viel kleiner als auf dem Maximum.

Im folgenden soll untersucht werden, ob die großen Diskrepanzen zwischen den DWIA-Rechnungen und den A2-Daten durch Unsicherheiten in dem hier verwendeten Modell zu erklären sind.

Wie in Kap. 3 bereits erwähnt, ist der Wert der ωNN -Vektorkopplungskonstante nicht genau bekannt. Auch in elementaren Rechnungen zur Photoproduktion von Pionen und η -Mesonen wird meist einer der in der Literatur angegebenen Werte benutzt

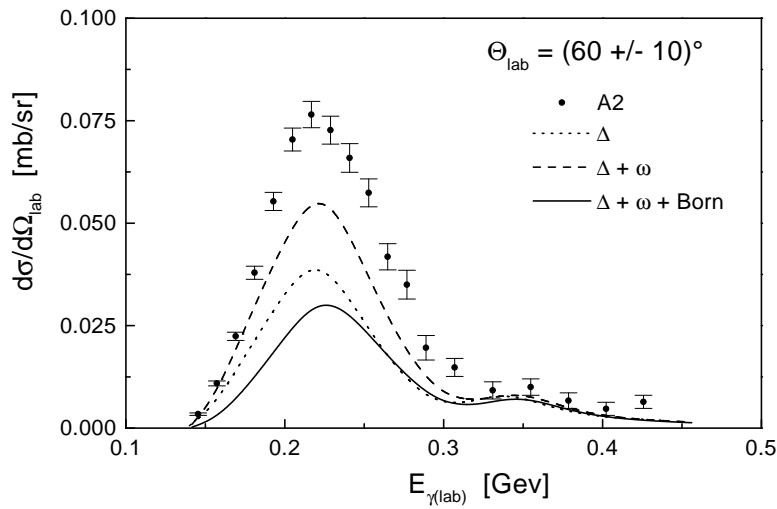


Abb. 5.12: Differentieller Wirkungsquerschnitt für ^{12}C in DWIA wie in Abb. 5.12 für die verschiedenen Graphen.

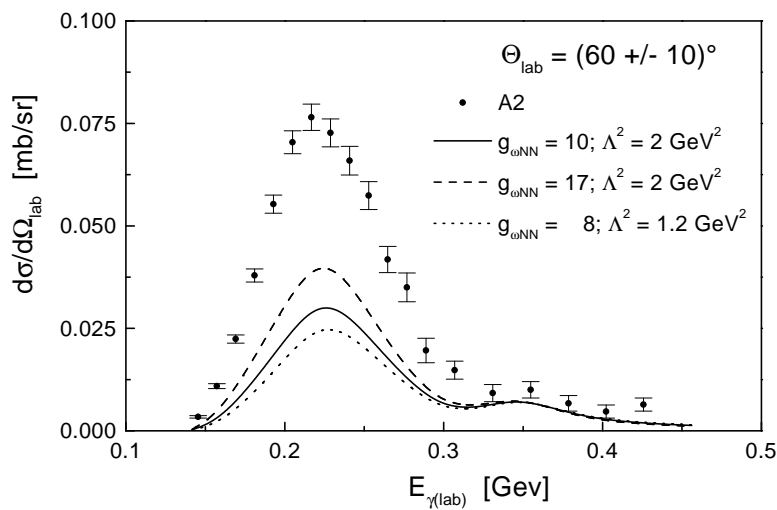


Abb. 5.13: Differentieller Wirkungsquerschnitt für ^{12}C In DWIA für verschiedene Werte der ω -Parameter im Vergleich zu den A2-Daten als Funktion der Laborenergie des Photons.

[feu98, ben95], anstatt den Wert in einem Fit an die Photoproduktionsdaten zu bestimmen, wie das bei Resonanzparametern getan wird. Um die Sensitivität der Rechnun-

gen auf den Wert dieser Kopplungskonstante und den Cutoff Λ im ωNN -Formfaktor (Gl. (3.15)) zu untersuchen, wurden Rechnungen für verschiedene Werte von $g_{\omega NN}^v$ und Λ durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in Abb. 5.13 dargestellt. Die durchgezogene Linie wurde mit den in dieser Arbeit verwendeten Werten berechnet, ein Wert von $g_{\omega NN} = 17$ wurde in [lag77] verwendet und stellt die obere Grenze der möglichen Werte dar. Ein Wert von $g_{\omega NN} = 8$ resultiert aus $SU(3)$ -Betrachtungen [dum93], und ist als untere Grenze zu betrachten. Die beiden Werte für den Cutoff Λ wurden in [ben95] bei der Untersuchung der Photoproduktion von η -Mesonen verwendet. Fits mit den unterschiedlichen Werten von Λ führten dabei zu Ergebnissen gleicher Qualität, so daß eine genaue Bestimmung von Λ aus Photoproduktionsdaten nicht möglich ist. Man sieht aus Abb. 5.13, daß die Unsicherheit bezüglich der Kopplung des ω sich zwar auf die hier gezeigten Ergebnisse auswirkt, die daraus resultierende Schwankungsbreite der Ergebnisse ist aber deutlich kleiner als der Unterschied zu den A2-Daten. Eine Variation der ω -Parameter im physikalisch möglichen Bereich ändert also nichts an der Diskrepanz zwischen den A2-Daten und den herkömmlichen DWIA-Rechnungen.

5.3.1 Vergleich mit anderen optischen Potentialen

In Kap. 4.3.1 wurde erläutert, wie die Parameter des in dieser Arbeit verwendeten optischen Potentials bestimmt wurden. In Abb. 4.8 ist zu sehen, daß die elastische Streuung von Pionen an ^{12}C über den gesamten betrachteten Energiebereich gut beschrieben werden kann. Außerdem ist in Abb. 4.8 zu erkennen, daß das hier verwendete Potential vergleichbare Ergebnisse für die elastische Pionenstreuung liefert wie andere optische Potentiale. Das in dieser Arbeit verwendete optische Potential hat den Vorteil, in einem großen Energiebereich von der Schwelle bis zur Δ -Resonanz eine gute Beschreibung der Pionenstreuung an ^{12}C zu liefern, im Gegensatz zu den Potentialen aus [str80, car82] und [gar91], die jeweils nur in Teilbereichen gelten.

Aus der guten Übereinstimmung der Ergebnisse der verschiedenen optischen Potentiale im Fall der Pion-Kern-Streuung kann nicht automatisch geschlossen werden, daß diese Potentiale auch für die Photoproduktion am Kern vergleichbare Ergebnisse liefern: Die Berechnung des elastischen Streuquerschnitts geschieht mit Hilfe der Streuphasen, die aus dem asymptotischen Verhalten der Wellenfunktionen extrahiert werden. Also können zwei verschiedene optische Potentiale zu dem gleichen elastischen Pion-Kern-Wirkungsquerschnitt führen, wenn sie das gleiche asymptotische Verhalten der Pionwellenfunktion liefern. Das Verhalten der Pionenwellenfunktion im Kerninneren kann dabei aber durchaus unterschiedlich sein [jon96]. An Gl. (4.43) ist zu erkennen, daß gerade die Wellenfunktion im Innern des Kerns in die Berechnung der kohärenten Produktionsamplitude eingeht. Es muß also überprüft werden, ob das hier verwendete optische Potential für die kohärente Photoproduktion vergleichbare Ergebnisse liefert wie andere optische Potentiale, die aus mikroskopischen Modellen gewonnen wurden. Damit soll ausgeschlossen werden, daß die Ergebnisse für die kohärente Photoproduktion abhängig vom verwendeten Modell für die Pion-Kern-Wechselwirkung sind.

Zu diesem Zweck wurden Rechnungen mit optischen Potentialen aus der Literatur durchgeführt. Zuerst wurden die in [str80, car82] für $T_\pi = 50$ MeV angegebenen Parametersätze verwendet. In diesen Parametersätzen haben die Parameter b_o und c_o aus

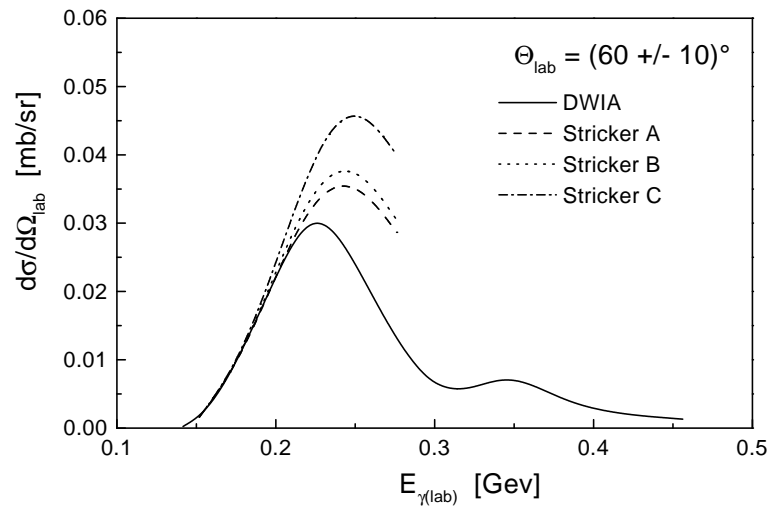


Abb. 5.14: Differentieller Wirkungsquerschnitt für ^{12}C in DWIA wie in Abb. 5.11 und für Parametrisierungen des optischen Potentials aus [str80, car82].

Kap. 4.3.1, nur kleine Imaginärteile, dafür sind aber die Parameter B_o und C_o ungleich Null, das Potential enthält also Terme, die quadratisch in der Kerndichte sind. Das Ergebnis dieser Rechnungen ist in Abb. 5.14 dargestellt. Bei einer Photonenergie von 190 MeV, was etwa einer kinetischen Pionenenergie von 50 MeV entspricht, und darunter stimmen die Ergebnisse aller verwendeten Parametersätze gut miteinander überein. Oberhalb dieser Energie liefern die Parametersätze aus [str80, car82] aber sehr unterschiedliche Ergebnisse, die alle über dem Resultat der vorliegenden Arbeit liegen. Der Grund hierfür ist die starke Energieabhängigkeit der Potentialparameter in Abb. 4.7. Aus der guten Übereinstimmung bei niedrigeren Energien, für die alle Parameter in [str80, car82] bestimmt wurden, kann man aber schließen, daß der Ansatz $B_o = C_o = 0$, also die Annahme eines Potentials, das linear in der Kerndichte ist, zumindest bei niedrigen Energien nicht problematisch ist, solange die verbleibenden Parameter b_o und c_o an die experimentellen Daten angepaßt werden.

Um das optische Potential auch bei Energien im Bereich der Δ -Resonanz zu testen, wurde auf Ergebnisse des Δ -Loch-Modells zurückgegriffen. In [gar91] wurde mit Hilfe einer lokalen Näherung an das Δ -Loch-Modell [ose87] ein optisches Potential für das Pion im Ortsraum konstruiert. Die Vorhersagen dieses Potentials wurden dann mit experimentellen Daten für die elastische Pion-Kern-Streuung verglichen. Dabei wurde ein s -Wellenanteil des optischen Potentials angenommen, der dem in [str80, car82] sehr ähnlich ist, also auch ein Polynom 2. Grades in der Dichte ist. Wie in Kap. 4.3.1 bereits erläutert, hat der p -Wellenanteil des Potentials in [gar91] aber eine qualitativ andere Abhängigkeit von der Kerndichte (vgl. Gl. (4.23)) als der p -Wellenanteil des in dieser Arbeit verwendeten Potentials (Gl. (4.21)).

In [gar91] ist eine Parametrisierung des optischen Potentials für Energien $T_\pi > 85$

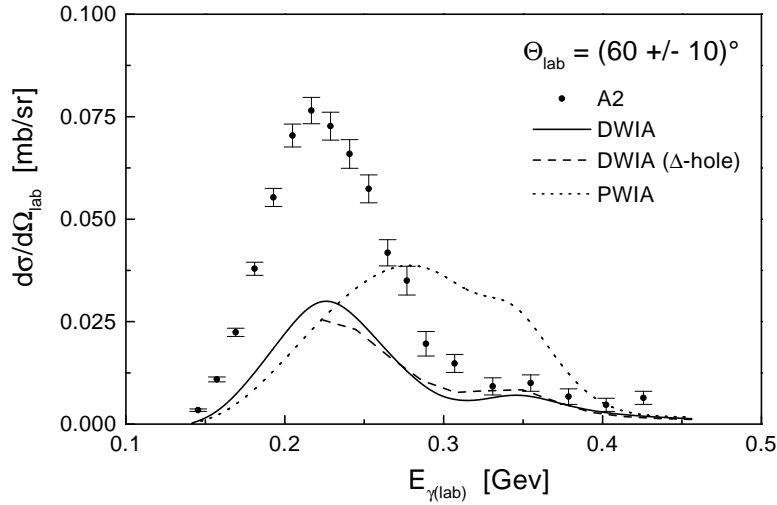


Abb. 5.15: Differentieller Wirkungsquerschnitt für ^{12}C in DWIA und PWIA wie in Abb. 5.11 und für das optische Potential aus [gar91].

MeV, also $E_\gamma > 220$ MeV gegeben. Für diesen Energiebereich wurden Rechnungen an ^{12}C und ^{40}Ca durchgeführt. In Abb. 5.15 ist das Ergebnis für den differentiellen Wirkungsquerschnitt im Vergleich zu DWIA und PWIA Rechnungen dargestellt. Das Δ -Loch Potential führt zu einer sehr ähnlichen Energieabhängigkeit wie das hier verwendete Potential, insbesondere bei Energien um die Δ -Resonanz. In Abb. 5.16 ist der sich mit dem Δ -Loch-Potential ergebende totale Wirkungsquerschnitt für ^{12}C und ^{40}Ca dargestellt, zusammen mit den DWIA und den PWIA Ergebnissen wie in Abb. 5.7. Auch hier zeigt sich eine gute Übereinstimmung zwischen beiden optischen Potentialen im Bereich der Δ -Resonanz. Zu kleineren Energien hin wird die Diskrepanz größer, allerdings verläßt man dort den Gültigkeitsbereich der in [gar91] angegebenen Parametrisierung. Die Unterschiede von etwa 10-15% bei höheren Energien können als verbleibende Modellabhängigkeit gedeutet werden.

Insgesamt findet man also eine gute Übereinstimmung zwischen den verschiedenen optischen Potentialen in den entsprechenden Energiebereichen. Folglich sind eventuelle Modellabhängigkeiten in bezug auf das optische Potential nur gering. Insbesondere kann auch die durch unterschiedliche optische Potentiale entstehende Schwankungsbreite nicht die Diskrepanz zwischen den DWIA-Rechnungen und den A2-Daten in Abb. 5.11 erklären.

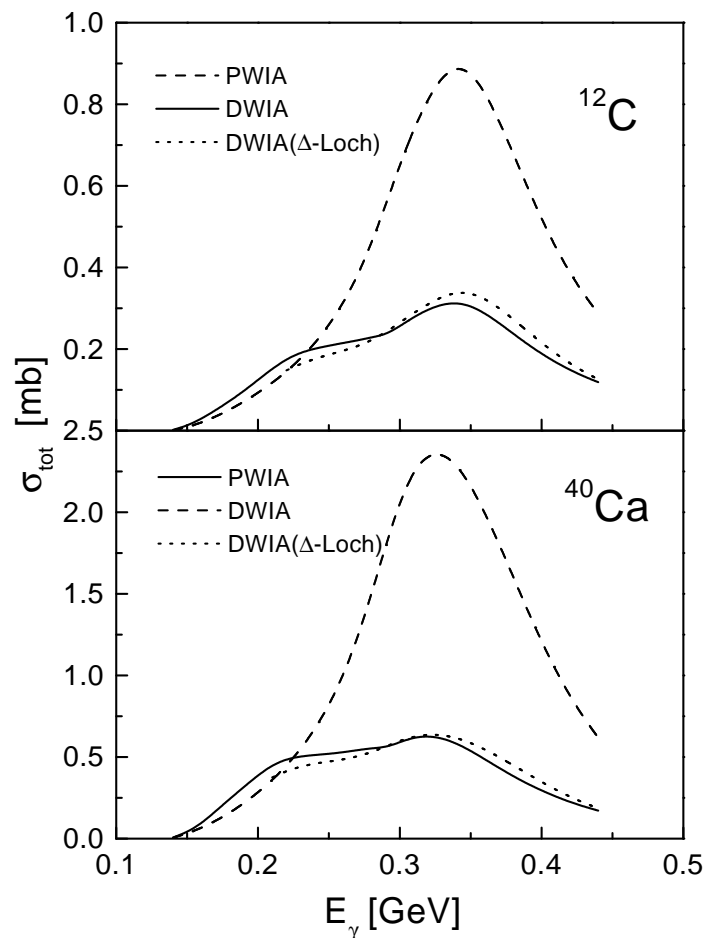


Abb. 5.16: Totaler Wirkungsquerschnitt für ^{12}C und ^{40}Ca wie in Abb. 5.7 im Vergleich zu Rechnungen mit dem optischen Potential aus [gar91]

5.3.2 Mediummodifikationen des Produktionsoperators

Im vorhergehenden Abschnitt wurde gezeigt, daß eine DWIA Rechnung nicht in der Lage ist, die A2-Daten quantitativ zu beschreiben, auch wenn die Form des Wirkungsquerschnitts gut wiedergegeben wird. Es besteht also die Notwendigkeit, über die konventionelle DWIA hinauszugehen. Dies geschieht, indem man berücksichtigt, daß der Produktionsprozeß nicht mehr im Vakuum stattfindet, sondern in einem nuklearen Medium.

Dieser Tatsache wird im Rahmen DWIA nur insoweit Rechnung getragen, als ein- und auslaufende Teilchen, mit Ausnahme des Photons, nicht mehr als freie Teilchen behandelt werden. So ist das am Produktionsprozess beteiligte Nukleon durch die Wech-

selwirkung mit dem restlichen Kern gebunden, und das optische Potential des Pions beschreibt dessen Wechselwirkung mit dem gesamten Kern. Obwohl in der IA also der Produktionsprozess selber nur jeweils ein Nukleon beinhaltet, werden die Eigenschaften der ein- und auslaufenden Teilchen durch die Wechselwirkung mit dem Gesamtkern modifiziert.

Nun können offensichtlich nicht nur die asymptotischen Teilchen, sondern auch die intermediären Zustände mit dem Kern wechselwirken, dies ist im Rahmen der konventionellen DWIA nicht berücksichtigt. Diese Wechselwirkung verändert den Produktionsoperator relativ zum freien Fall, indem die intermediären Propagatoren modifiziert werden. Diese Effekte werden in der vorliegenden Arbeit wie folgt behandelt:

Das ω -Meson: Das ausgetauschte ω -Meson im untersten Graphen in Abb. 3.1 ist raumartig, d.h. $q_\omega^2 = t < 0$. Leider gibt es nur Arbeiten, die die Modifikation eines ω in Kernmaterie im zeitartigen Bereich untersuchen (z.B. [kli97]). Aus diesem Grunde wird dieser Graph wie im Vakuum behandelt. Da das ω den kleinsten Beitrag zur kohärenten Photoproduktion von Pionen liefert (Abb. 5.3), stellt die Annahme eines freien ausgetauschten ω keine entscheidende Einschränkung dar.

Das Nukleon: Die beiden Bornterme in Abb. 3.1 enthalten ein intermediäres Nukleon. Die Wechselwirkung dieses Nukleons mit dem Kern wird berücksichtigt, indem anstelle des freien Propagators aus Gl. (4.40) der volle Propagator im mittleren Feld des Kerns verwendet wird. Dieser ist die Greensfunktion zur Bewegungsgleichung der Nukleonen im Kern (Gl. (4.1)):

$$(\not{p} - m - V_v \gamma_0 - V_s) G_N(p_0; \vec{x}, \vec{y}) = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad . \quad (5.8)$$

Ein solcher aus dem mittleren Feld gewonnener Propagator stellt die natürliche Erweiterung der herkömmlichen DWIA dar. Einlaufende und intermediäre Nukleonen werden auf diese Weise konsistent behandelt. Der Propagator (5.8) beinhaltet die statischen Eigenschaften der Wechselwirkung des intermediären Nukleons mit dem Restkern. Die Berechnung dieses Propagators werden in Anh. C.1 erläutert.

In Abb. 5.17 ist der Effekt des vollen Nukleonpropagators im totalen Wirkungsquerschnitt an ^{12}C dargestellt. Insbesondere bei niedrigen Energien führt die Modifikation des Nukleonpropagators zu einer Erhöhung des Wirkungsquerschnitts. Wie im Zusammenhang mit Abb. 5.2 bereits erwähnt, resultiert der Gesamtbeitrag der beiden Bornterme aus dem teilweisen Wegheben von direktem und Austauschgraph, wobei der direkte Graph den betragsmäßig größeren Beitrag liefert. Die Verwendung des vollen Propagators verringert den Beitrag des direkten Graphen etwas, und erhöht den Beitrag des Austauschgraphen. Der direkte Borngraph interferiert destruktiv mit den übrigen Beiträgen, der Austauschgraph konstruktiv. Folglich führt eine Unterdrückung des direkten und eine Erhöhung des Austauschgraphen zu einer geringfügigen Erhöhung des Gesamtquerschnitts.

Das Delta: Wie bereits erwähnt, existieren einige Arbeiten über die kohärente Photoproduktion von Pionen im Δ -Loch-Modell. Diese Rechnungen beschreiben die Wech-

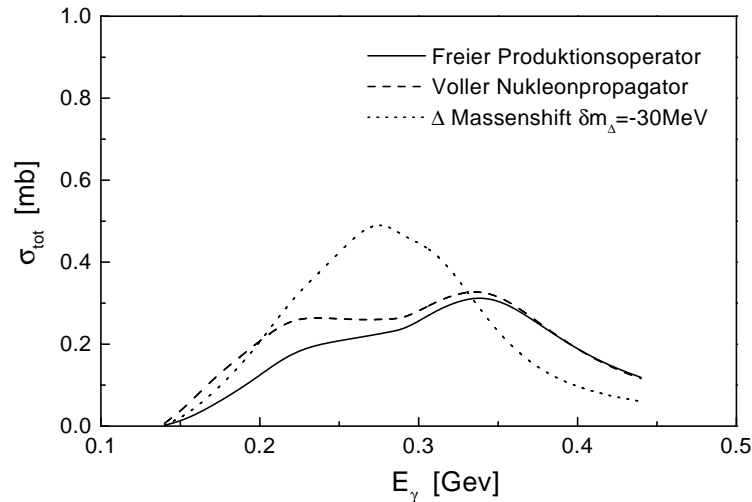


Abb. 5.17: Totaler Wirkungsquerschnitt für ^{12}C in DWIA mit einem freien Produktionsoperator, einem vollen Nukleonpropagator und einer Massenänderung des Δ von -30 MeV.

selwirkung des intermediären Δ sowie des auslaufenden Pions mit dem Kern in einem einheitlichen Formalismus. Die Verbindung zwischen dem Δ -Loch-Modell und der herkömmlichen DWIA wird in [koc83] hergestellt. In dieser Arbeit wird die kohärente Produktionsamplitude dergestalt umgeschrieben, daß sie der Formel für eine nicht-relativistische DWIA unter Verwendung eines modifizierten Δ -Propagators entspricht. In [koc83] wird gezeigt, daß die Modifikation des intermediären Propagators, unabhängig von der Distorsion des auslaufenden Pions, großen Einfluß auf die kohärente Produktionsamplitude hat.

Das Δ -Loch-Modell sagt voraus, daß ein Δ im Kern ein attraktives Potential spürt. Aus dem Vergleich von Vorhersagen dieses Modells z.B. mit Pion-Kern-Streudaten wurde ein empirischer Wert für die Tiefe dieses Potentials von etwa -30 MeV bei normaler Kerndichte extrahiert [eri88]. Der direkte Nachweis der Attraktion des Δ im Kern gelang z.B. in $(^3\text{He}, t)$ und $(d, ^2\text{He})$ Reaktionen. Das Δ führt bei diesen Prozessen zu einem Maximum im Wirkungsquerschnitt, das bei schweren Kernen relativ zu der Reaktion an ^2H verschoben ist [ell87, con86]. Ein Teil dieser Verschiebung resultiert aus dem Formfaktor des Kerns. Rechnungen im Δ -Loch-Modell haben aber gezeigt, daß zur Beschreibung der Daten zusätzlich ein attraktives Δ -Potential nötig ist [del91, uda90]. Im Gegensatz hierzu ist das Δ -Maximum in der Photoabsorption an Kernen relativ zur Absorption an einem freien Nukleon nicht verschoben [bia94]. Um dies zu verstehen, betrachtet man die invariante Masse des Photon-Nukleon-Systems im freien Fall und im Fall eines gebundenen Nukleons: Durch die Attraktion des Δ im Kern tritt das Maximum im Wirkungsquerschnitt bei der Photoabsorption an einem Nukleon im Kern bei niedrigeren invarianten Massen des Photon-Nukleon-Systems auf.

Die invariante Masse dieses Systems ist aber im Kern bei gegebener Photonenergie relativ zum freien Fall kleiner, da das einlaufende Nukleon aufgrund seiner Bindung im Kern eine geringere Energie trägt als ein freies Teilchen. Diese beiden Effekte heben sich gegenseitig in etwa auf, so daß das Maximum im Absorptionsquerschnitt als Funktion der Photonenergie am Kern nicht verschoben wird.

Neben der Attraktion des Δ im Kern treten noch weitere Effekte auf [eri88]. Zum einen ist zur detaillierten Beschreibung der Pion-Kern-Streuung im Δ -Loch-Modell die zusätzliche Einführung eines Spin-Orbit-Potentials für das Δ nötig. Zum anderen werden die Zerfalleigenschaften des Δ modifiziert: Elastische und inelastische Stöße mit den umgebenden Nukleonen öffnen neue Zerfallskanäle, während das Pauliblocking den Zerfall in ein Pion und ein Nukleon unterdrückt. Die mikroskopische Behandlung all dieser Effekte in einem relativistischen Δ -Propagator würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Es muß also versucht werden, die erwähnten Effekte effektiv zu berücksichtigen. Dies geschieht im folgenden dadurch, daß die Masse und die Breite des Δ im Propagator (Gl. (3.10)) modifiziert werden.

Die Attraktion, die ein Δ im Kern verspürt, kann schematisch dadurch berücksichtigt werden, daß die Masse m_Δ im Propagator um einen Wert δm_Δ verschoben wird:

$$m_\Delta^* = m_\Delta + \delta m_\Delta \quad . \quad (5.9)$$

In Gl. (3.10) wird dann die effektive Masse m_Δ^* anstelle von m_Δ eingesetzt. Dies geschieht auch in der Formel für die energieabhängige Breite des Δ (Gl. (3.12)), so daß ein modifiziertes Δ mit $\sqrt{s} = m_\Delta^* < m_\Delta$ die freie Breite von $\Gamma_\sigma = 120$ MeV hat. Die Motivation für dieses Vorgehen ist die folgende: zwar wird mit kleiner werdender Masse des Δ der Phasenraum des Zerfalls zunächst kleiner, gleichzeitig bewegen sich aber die beim Zerfall entstehenden Nukleonen ebenfalls in einem insgesamt attraktiven Potential, was den Zerfallsphasenraum wieder erhöht. Auch wenn das Nukleonenpotential und das Δ -Potential nicht genau dieselbe Tiefe haben, heben sich diese beiden Effekte in erster Näherung auf. Alle weiteren, oben bereits erwähnten Einflüsse des Mediums auf die Breite des Δ werden im folgenden separat behandelt.

Die Auswirkung einer auf diese Weise durchgeführten Massenverschiebung ist ebenfalls in Abb. 5.17 für $\delta m_\Delta = -30$ MeV dargestellt. Man sieht eine Verschiebung des Maximums im Wirkungsquerschnitt hin zu kleineren Energien, und insbesondere eine überproportional starke Erhöhung bei kleineren Energien. Diese starke Erhöhung unterhalb des Δ hat folgende Ursache: Durch die Massenabsenkung wird Stärke im Wirkungsquerschnitt hin zu kleineren Energien verschoben. Bei kleineren Energien ist aber zum einen die kinematische Unterdrückung durch den Formfaktor des Kerns und die Kohärenzbedingung kleiner (siehe Abb. 5.4). Zum anderen ist nahe der Schwelle auch die Unterdrückung durch die Absorption von Pionen schwächer (vgl. Abb. 5.7).

Beide Effekte, der volle Nukleonpropagator und die Massenabsenkung des Δ , führen also zu einer Erhöhung des Wirkungsquerschnitts für $E_\gamma < 350$ MeV. Daß diese Erhöhung geeignet ist, die Diskrepanz zwischen dem DWIA-Ergebnis und den A2-Daten in Abb. 5.12 aufzuheben, ist an Abb. 5.18 zu sehen. Der Wert $\delta m_\Delta = -30$ MeV wurde so bestimmt, daß die A2-Daten bis zu einer Energie von etwa 350 MeV gut wiedergegeben werden. Oberhalb dieser Energie ist die Situation unklar, die Rechnung scheint

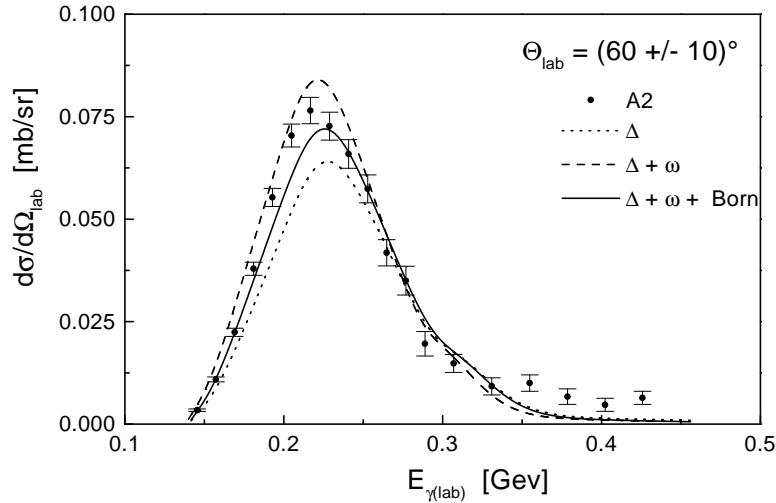


Abb. 5.18: Differentieller Wirkungsquerschnitt für ^{12}C in DWIA mit einem modifizierten Produktionsoperator (voller Nukleonpropagator und Δ -Massenänderung von -30 MeV).

die Daten zu unterschätzen. Allerdings ist der Wirkungsquerschnitt bei diesen Energien absolut sehr viel kleiner als auf dem Maximum, da ein Winkel von 60° und eine Photonenergie von 350 MeV zu einem Impulsübertrag führen, an dem der Formfaktor in Abb. 5.1 ein Minimum hat. Um die Güte des Modells bei dieser Energie zu testen, sind experimentelle Daten bei kleineren Winkeln nötig, bei denen der Impulsübertrag kleiner und damit der Formfaktor größer ist.

Bevor endgültige Schlußfolgerungen gezogen werden können, muß noch untersucht werden, welche Auswirkung die Änderung der Δ -Breite auf den Wirkungsquerschnitt hat. Neben der im Zusammenhang mit der Massenverschiebung bereits diskutierten Änderung in der Zerfallskinematik, haben noch folgende Effekte einen Einfluß auf die Breite des Δ : Das Pauliblocking des freien Zerfalls, die Stoßverbreiterung und die Absorption des Δ in Mehrteilchenprozessen. Eine simple Analyse ergibt, daß in dem hier betrachteten kinematischen Bereich Pauliblocking und Stoßverbreiterung sich in etwa die Waage halten, d.h. die Breite des Δ bleibt in erster Näherung unverändert [eff97]. Mikroskopische Rechnungen im Δ -Loch-Modell sagen aber voraus, daß die zusätzliche Absorption des Δ zu einer Verbreiterung des Δ um etwa 40 MeV bei $\rho=0,75\rho_0$ führt [ose87]. Diese Verbreiterung des Δ wird in der vorliegenden Arbeit dadurch berücksichtigt, daß zu der energieabhängigen Zerfallsbreite in Gl. (3.12) noch eine konstanter Beitrag $\delta\Gamma_\Delta$ addiert wird:

$$\Gamma_\Delta^* = \Gamma_\Delta(s) + \delta\Gamma_\Delta \quad . \quad (5.10)$$

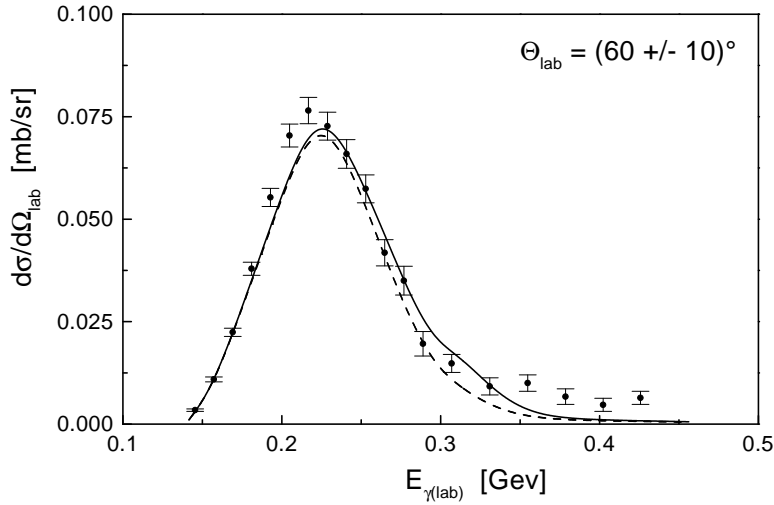


Abb. 5.19: Differentieller Wirkungsquerschnitt für ^{12}C in DWIA mit einem modifizierten Produktionsoperator (voller Nukleonpropagator und Δ -Massenänderung von -30 MeV) wie in Abb. 5.18 (durchgezogene Linie), sowie mit einer zusätzlichen Breitenänderung $\delta\Gamma_{\Delta}=30\text{MeV}$ (gestrichelte Linie).

Die Auswirkungen dieser Verbreiterung auf den Vergleich zu den A2-Daten ist in Abb. 5.19 zu sehen. Eine Breitenänderung von $\delta\Gamma_{\Delta} = 30$ MeV ändert den Wirkungsquerschnitt hauptsächlich bei Energien jenseits des Maximums, wo der Wirkungsquerschnitt wieder relativ klein ist. Qualitativ hat eine Verbreiterung des Δ also wenig Einfluß auf die Übereinstimmung der Rechnungen mit den A2-Daten.

Die Selbstenergie des Δ in Kernmaterie hängt von der Kerndichte ab. Ein konstanter Shift der Breite und der Masse des Δ kann den Effekt dieser Selbstenergie nur qualitativ wiedergeben. Insbesondere können die verwendeten Werte für $\delta\Gamma_{\Delta}$ und δm_{Δ} nur als Durchschnittswerte bei Mittelung über den Gesamtkern interpretiert werden. Dennoch ist diese Methode dazu geeignet, die Auswirkungen einer Mediummodifikation des Δ im Rahmen des vorliegenden Modells zu untersuchen. Der Vergleich mit den A2-Daten zeigt, daß die kohärente Photoproduktion von Pionen sensitiv auf Medienefekte ist, insbesondere in bezug auf die Massenänderung des Δ . Über eine mögliche Verbreiterung des Δ läßt der Vergleich mit den A2-Daten keinen eindeutigen Rückschluß zu, da eine größere Breite erst bei höheren Energien sichtbare Effekte hat, und dort der Wirkungsquerschnitt durch den Formfaktor des Kerns unterdrückt ist.

In diesem Zusammenhang ist ein Experiment der TAPS-Gruppe [kru98], das am Beschleuniger MAMI in Mainz durchgeführt wurde, von großem Interesse. Dieses Experiment liefert Daten für die kohärente Photoproduktion von Pionen über einen großen Energie- und Winkelbereich. Im folgenden sollen die Ergebnisse dieser Arbeit mit den vorläufigen Ergebnissen dieses Experiments für ^{12}C und ^{40}Ca verglichen werden.

Um beim Vergleich von Theorie und Experiment unabhängig von der starken Abhängig-

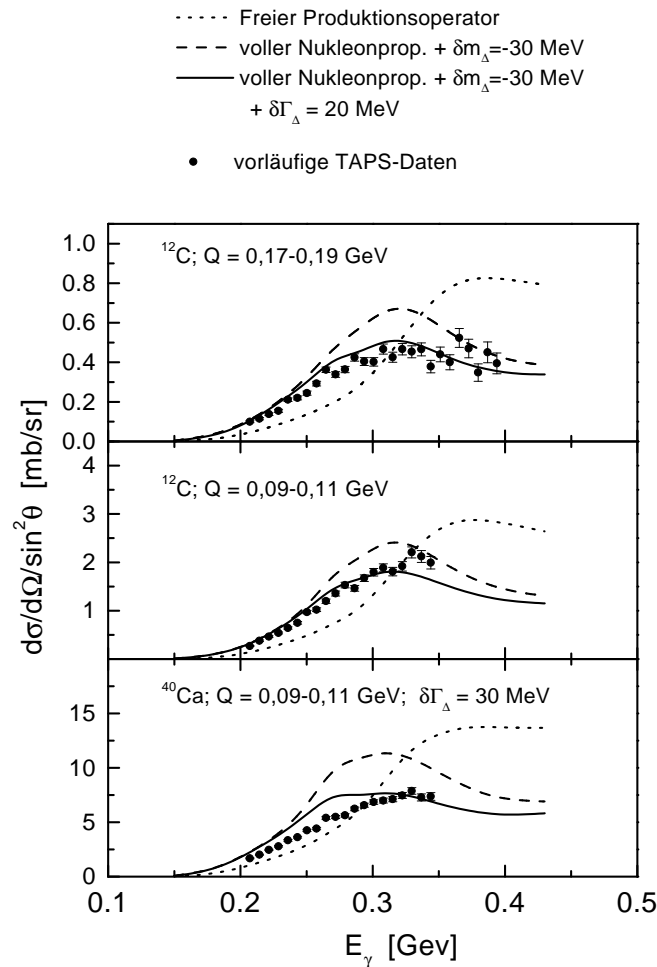


Abb. 5.20: Vergleich von Rechnungen zu den vorläufigen TAPS-Daten. Gezeigt ist der differentielle Wirkungsquerschnitt bei festem Impulsübertrag Q für ^{12}C und ^{40}Ca .

igkeit des Formfaktors des Kerns vom Impulsübertrag zu sein, wurde bei der vorläufigen Analyse der TAPS-Daten der differentielle Wirkungsquerschnitt nicht bei konstantem Winkel, sondern bei konstantem Impulsübertrag Q untersucht. Außerdem wurde die triviale $\sin^2\theta$ -Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts herausdividiert.

Die vorläufigen TAPS-Daten sind in Abb. 5.20 im Vergleich zu Rechnungen mit und ohne Modifikation des Produktionsoperators dargestellt. Es sind jeweils Ergebnisse für eine Rechnung mit dem freien Produktionsoperator, mit einem modifizierten Produktionsoperator (voller Nukleonpropagator und $\delta m_\Delta = 30\text{MeV}$) sowie einem modifizierten Produktionsoperator, der zusätzlich eine Verbreiterung von $\delta\Gamma_\Delta = 20$ MeV für ^{12}C und $\delta\Gamma_\Delta = 30$ MeV für ^{40}Ca dargestellt. Die Werte von $\delta\Gamma_\Delta$ wurden dabei so gewählt, daß

möglichst gute Übereinstimmung mit den Daten besteht. Der etwas größere Wert von $\delta\Gamma_\Delta$ für ^{40}Ca ist einleuchtend, da Mediumeffekte wie die Stoßverbreiterung des Δ gemittelt über den Kern mit der Masse des Kerns zunehmen sollten.

Zunächst ist aus Abb. 5.20 zu sehen, daß ein freier Produktionsoperator die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts falsch vorhersagt. Bei Energien unterhalb von 300 MeV werden die Daten deutlich unterschätzt, bei höheren Energien dagegen überschätzt. Die Situation verbessert sich etwas, sobald der Nukleonpropagator und die Δ -Masse modifiziert werden, allerdings werden die Daten insgesamt immer noch überschätzt. Der in dieser Art aufgetragene Wirkungsquerschnitt ist auch bei höheren Energien ausreichend groß um den Effekt einer zusätzlichen Vergrößerung der Δ -Breite zu zeigen: Durch eine Erhöhung der Breite des Δ kann die Übereinstimmung mit den Daten deutlich verbessert werden. Insgesamt ist die Übereinstimmung mit den Daten bei ^{12}C am besten, aber auch bei ^{40}Ca ergibt ein Vergleich mit den Daten eindeutig die Notwendigkeit einer Verbreiterung des Δ .

Schließlich soll noch eine mögliche Energieabhängigkeit der Modifikationen des Δ -Propagators untersucht werden. Was den Imaginärteil der Δ -Selbstenergie betrifft, so ergaben die mikroskopischen Rechnungen in [ose87], daß er nur in geringem Maße von der Energie des einlaufenden Photons abhängt. Empirische Δ -Potentiale, mit denen die mikroskopischen Rechnungen in [ose87] mit gutem Ergebnis verglichen werden, erlauben im Rahmen der Unsicherheiten in der Extraktion auch einen konstanten Imaginärteil. Die Details der Energieabhängigkeit der Δ -Verbreiterung sind im Rahmen des hier gewählten Vorgehens nicht zugänglich, und werden deshalb nicht weiter betrachtet. Im Gegensatz zum Imaginärteil ergeben die Rechnungen in [ose87] eine eindeutige Energieabhängigkeit des Realteils der Δ -Selbstenergie. Diese Energieabhängigkeit wurde in [car92] für die Kinematik einer Photon-Kern-Reaktion als Funktion der Energie des Photons wie folgt parametrisiert:

$$\text{Re}\Sigma_\Delta = (-E_o + 0,113E_\gamma)\frac{\rho}{\rho_o} \quad , \quad (5.11)$$

mit $E_o = -70$ MeV. Der konkrete Zahlenwert von E_o ist nicht direkt mit der in dieser Arbeit benutzten Massenänderung vergleichbar, zum einen da in [ose87] ein Beitrag zur Δ -Selbstenergie vernachlässigt ist, der durch eine effektive Δ -Loch-Wechselwirkung zustande kommt, und als unabhängig von der Energie angenommen wird. Zum anderen wird die Δ -Selbstenergie im Δ -Loch-Modell immer nur relativ zum Nukleonpotential angegeben, während die in dieser Arbeit verwendete Massenabsenkung relativ zur Masse des freien Δ angegeben ist. Der in dieser Arbeit durch Vergleich mit den A2-Daten bestimmte Wert von $\delta m_\Delta = 30$ MeV wird deshalb als Startpunkt bei einer Photonenergie von 230 MeV (dem Maximum der A2-Daten) genommen. Die Abhängigkeit von der Photonenergie wird dann aus Gl. (5.11) gewonnen, indem eine effektive Kerndichte $\rho_{eff} = 0,75\rho_o$ angenommen wird. Es ergibt sich:

$$\delta m_\Delta(E_\gamma) = -30\text{MeV} + 0,085(E_\gamma - 230\text{MeV}) \quad . \quad (5.12)$$

Mit größer werdender Photonenergie nähert sich also die effektive Masse des Δ wieder dem freien Wert, bei einer Photonenergie von 450 MeV ergibt sich $\delta m_\Delta \approx 10$ MeV. Die

Resultate von Rechnungen unter Verwendung dieser energieabhängigen Massenänderung sind in Abb. 5.21 im Vergleich zu den Ergebnissen einer konstanten Massenänderung dargestellt. Erst bei höheren Energien ist ein deutlicher Unterschied zwischen einem konstanten und einem energieabhängigen Massenshift zu sehen. Der Vergleich mit den vorläufigen TAPS-Daten erlaubt, wie man aus Abb. 5.21 sieht, keine eindeutige Aussage über die Energieabhängigkeit der Δ -Selbstenergie.

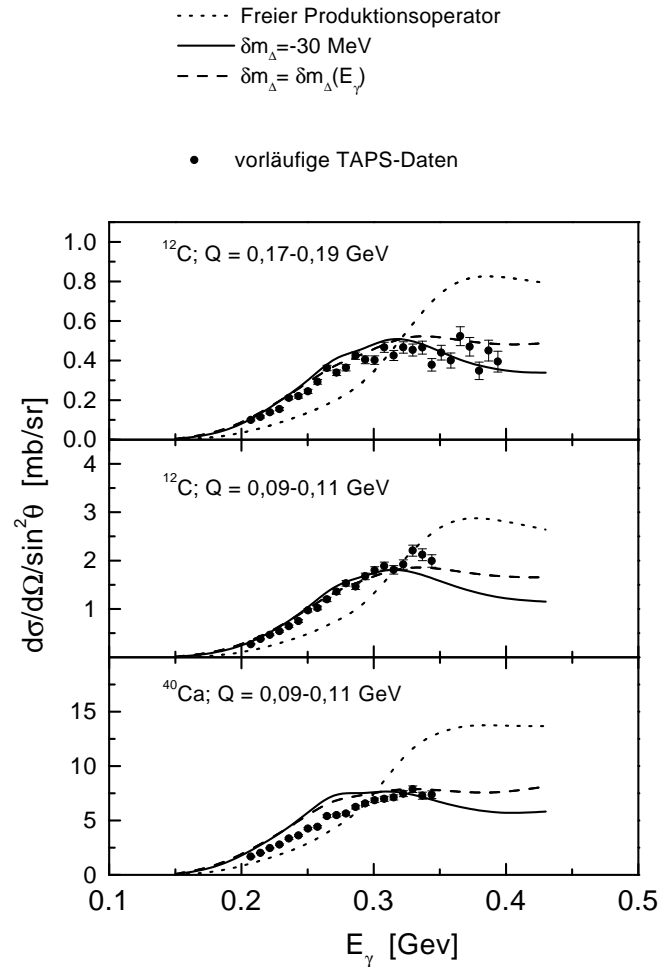


Abb. 5.21: Differentieller Wirkungsquerschnitt bei festem Impulsübertrag Q . Dargestellt ist der Einfluß einer energieabhängigen Änderung der Δ -Masse, die Verbreiterung des Δ ist dieselbe wie in Abb. 5.20.

Schließlich ist in Abb. 5.22 der totale Wirkungsquerschnitt an ^{12}C und ^{40}Ca für einen Medium-modifizierten Produktionsoperator gezeigt. Ebenfalls dargestellt ist der Beitrag des direkten Δ -Graphen alleine. Auf dem Maximum des Wirkungsquerschnitts, das deutlich unterhalb der Δ -Resonanz liegt, machen die nicht-resonanten Beiträge

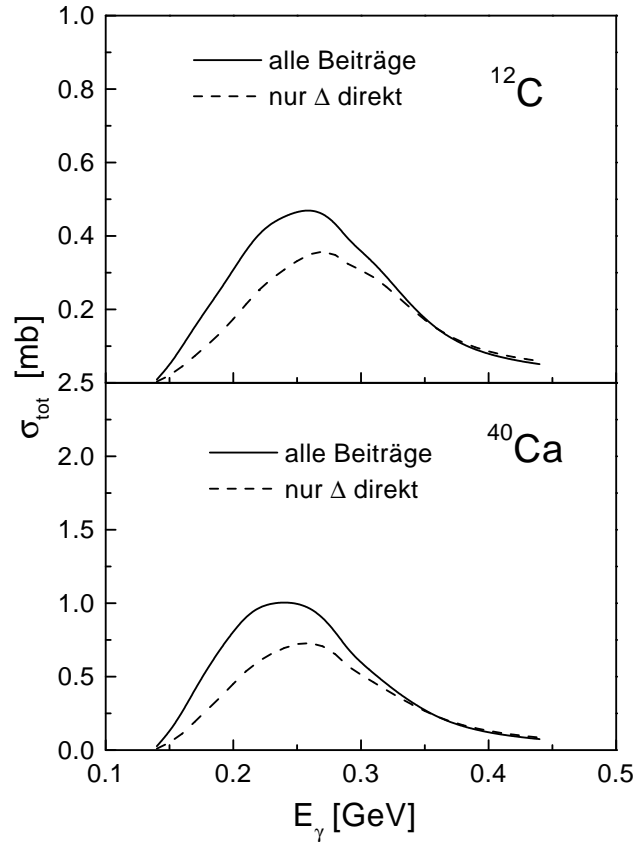


Abb. 5.22: Totaler Wirkungsquerschnitt an ^{12}C und ^{40}Ca unter Verwendung des modifizierten Produktionsoperators (voller Nukleonpropagator, $\delta m_\Delta = -30\text{MeV}$, $\delta\Gamma_\Delta = 20\text{ MeV}$ bei ^{12}C und 30 MeV bei ^{40}Ca). Dargestellt ist jeweils das Ergebnis einer vollen Rechnung, sowie der Beitrag des direkten Δ -Graphen alleine.

etwa 25% des Wirkungsquerschnitts aus.

In Kap. 5.2.1 wurden die Ergebnisse dieser Arbeit bereits mit lokalen, nicht-relativistischen PWIA-Rechnungen verglichen. Um auch einen Vergleich zu Rechnungen im Δ -Loch-Modell anzustellen, sind in Abb. 5.23 die Ergebnisse dieser Arbeit im Vergleich zu den Rechnungen in [car93] und [koc83] dargestellt. Im oberen Teil von Abb. 5.23 ist der Beitrag des direkten Δ -Graphen an ^{12}C mit einem Medium-modifizierten Produktionsoperator wie in Abb. 5.22 im Vergleich zu dem Ergebnis aus [car93] abgebildet. Die Lage des Maximums des Wirkungsquerschnitts unterscheidet sich in beiden Kurven um etwa 50 MeV, auch die absolute Höhe ist unterschiedlich. Allerdings ist dieses Maximum in beiden Arbeiten deutlich unterhalb der Δ -Resonanz, also eigentlich außerhalb des für das Δ -Loch-Modell optimalen Bereichs. Auf der Δ -Resonanz bei etwa

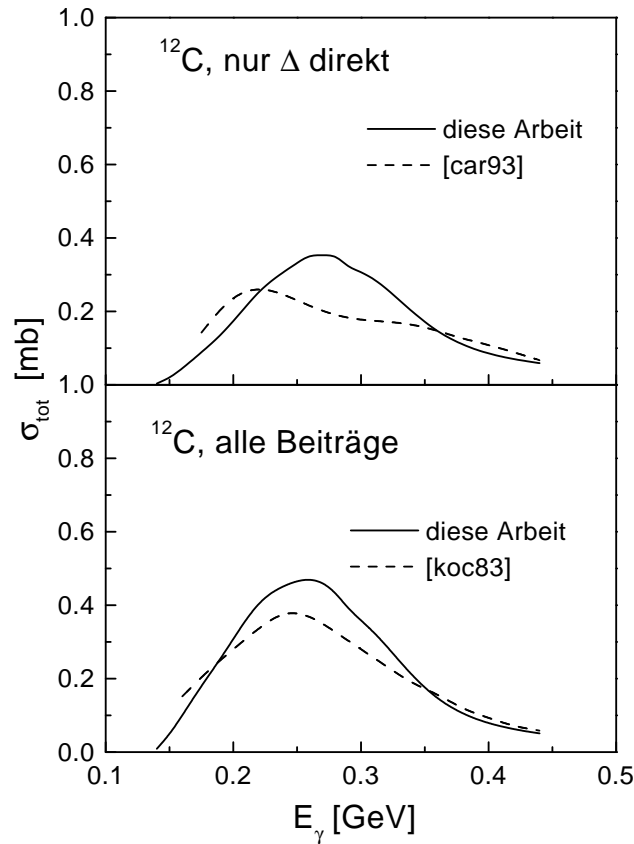


Abb. 5.23: Vergleich der Ergebnisse dieser Arbeit mit Δ -Loch-Rechnungen. Dargestellt sind die Resultate von Rechnungen mit einem Medium-modifizierten Produktionsoperator wie in Abb. 5.22, sowie Ergebnisse aus [car93] und [koc83].

350 MeV stimmen die beiden Kurven im oberen Teil von Abb. 5.23 wesentlich besser überein, auch wenn die Steigung etwas unterschiedlich ist. In Anbetracht der großen Unterschiede in den verwendeten Modellen findet man eine zufriedenstellende Übereinstimmung zwischen den Ergebnissen dieser Arbeit für den direkten Δ -Graphen und den Δ -Loch-Rechnungen, insbesondere im Bereich der Δ -Resonanz.

Von Interesse sind außerdem diejenigen Arbeiten im Δ -Loch-Modell, die auch nicht-resonante Beiträge berücksichtigen [sah81, koc83]. In [koc83] wurde ein Produktionsoperator mit Hilfe einer empirischen Multipolparametrisierung konstruiert. Aus dem M_{1+} -Multipol wurde der Δ -Beitrag extrahiert und im Rahmen des Δ -Loch-Modells behandelt. Die restlichen, nicht-resonanten Beiträge wurden im Rahmen herkömmlicher DWIA ausgewertet. Das Ergebnis von [koc83] kann also direkt mit dem Gesamtquerschnitt der vorliegenden Arbeit verglichen werden, wie das im unteren Teil von

Abb. 5.23 getan wird. Die Lage des Maximums stimmt in beiden Rechnungen gut überein, das Ergebnis aus [koc83] ist aber etwa 20% niedriger. Auf der Δ -Resonanz ist auch in diesem Fall die Übereinstimmung der beiden Kurven besser.

Zusammenfassend läßt sich feststellen, daß im Energiebereich der Δ -Resonanz gute Übereinstimmung mit den Δ -Loch-Rechnungen herrscht. Auf dem Maximum des Wirkungsquerschnitts, unterhalb der Δ -Resonanz, ist die Übereinstimmung mit den Δ -Loch-Ergebnissen schlechter, in Anbetracht der großen Unterschiede zwischen den verwendeten Modellen aber immer noch zufriedenstellend.

Kapitel 6

Ergebnisse: Eta-Mesonen

6.1 Vorbemerkungen

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse zur kohärenten Photoproduktion von η -Mesonen am Kern dargestellt werden. Um die Kinematik dieser Reaktion zu veranschaulichen, ist in Abb. 6.1 analog zu Abb. 5.1 der Zusammenhang zwischen dem Impulstransfer auf den Kern und der Einschußenergie bei drei verschiedenen Winkeln zusammen mit dem Vektorformfaktor von ^{12}C und ^{40}Ca aufgetragen. Durch die größere Masse des η -Mesons ist der Impulsübertrag hier deutlich größer als bei der Pionenproduktion. Das hat zur Folge, daß der differentielle Wirkungsquerschnitt bei relativ kleinen Winkeln am größten ist, da bei größeren Winkeln der Impulstransfer schnell so groß ist, daß der Kernformfaktor die Reaktion unterdrückt. Außerdem ist der Impulstransfer bei fester Einschußenergie und festem Winkel bei ^{12}C und ^{40}Ca nicht mehr genau gleich, da bei größeren Impulsüberträgen die unterschiedliche Masse von ^{12}C und ^{40}Ca wichtig zu werden beginnt.

6.2 Existierende Modelle

Zur kohärenten Photoproduktion von η -Mesonen am Kern gibt es neben älteren Arbeiten [ben91, tia94, try95], die eine einfache Multipolparametrisierung für den Produktionsoperator verwenden, zwei jüngere Arbeiten [pie97, fix97], die den Produktionsoperator aus einer relativistischen Feldtheorie im Rahmen von PWIA bzw. DWIA benutzen. Die Ergebnisse der vorliegenden Arbeit sollen im Vergleich zu den Resultaten dieser Arbeiten diskutiert werden.

In [fix97] wird der Produktionsoperator zuerst auf einen minimalen Satz von Lorentzkovarianten Operatoren projiziert. Dieses Projektionsverfahren wird im folgenden noch näher erläutert. Die resultierende Form des Produktionsoperators wird dann in die Paulischreibweise $\hat{T} = L + i\vec{\sigma}\vec{K}$ gebracht. Dies geschieht in [fix97] unter der Näherung, daß die Relation zwischen oberer und unterer Komponente des Nukleonspinors dieselbe wie für ein freies Nukleon ist. Unter der Annahme von nicht-relativistischen Nukleonwellenfunktionen faktorisiert die Amplitude dann in der lokalen Näherung in den Spin-skalaren Anteil L des Produktionsoperators und den Kernformfaktor (vgl.

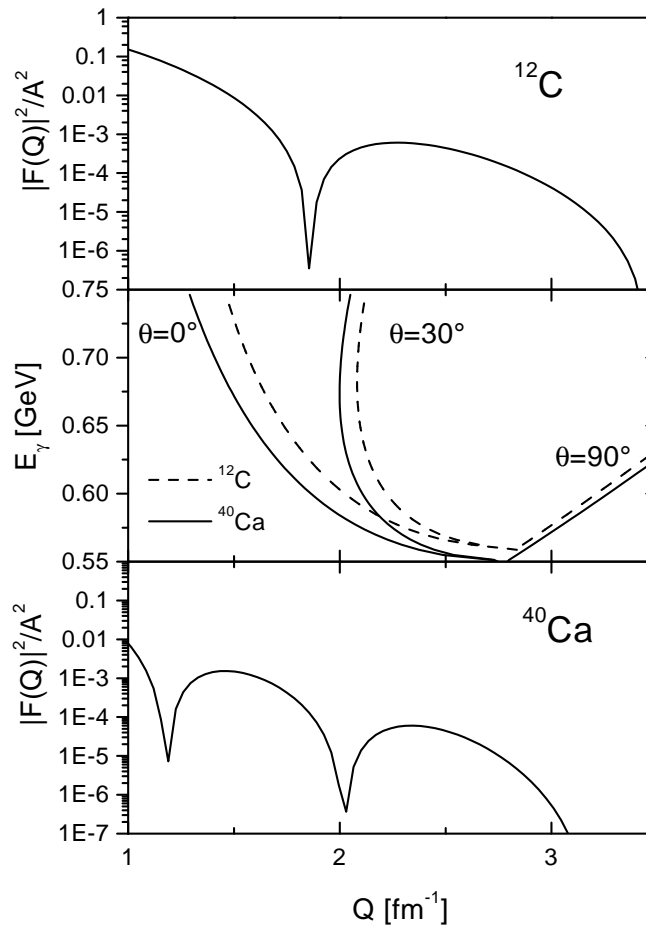


Abb. 6.1: Die Vektorformfaktoren von ^{12}C und ^{40}Ca als Funktion des Impulstransfers Q . Der mittlere Graph zeigt den Zusammenhang zwischen Impulsübertrag und Energie des Photons bei der Etaproduktion für feste Streuwinkel θ .

Gl. (4.74)). Für diesen Formfaktor werden dann empirische Parametrisierungen des Vektorformfaktors verwendet.

In [pie97] wird der elementare Produktionsoperator ähnlich wie in [fix97] auf einem minimalen Satz von Lorentz-kovarianten Operatoren projiziert. Der so erhaltene Operator wird dann in einer lokalen, aber voll relativistischen Rechnung verwendet. Aufgrund der Struktur des Produktionsoperators nach der Projektion ist in [pie97] der differentielle Wirkungsquerschnitt proportional zum Tensorformfaktor des Grundzustands des Kerns.

Zum einen unterscheiden sich [fix97] und [pie97] also dadurch von der vorliegenden Arbeit, daß die lokale Näherung verwendet wird. Die Güte dieser Näherung für

die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen wird in Kap. 6.3.2 diskutiert. Darüber hinaus führt die sowohl in [fix97] als auch in [pie97] durchgeführte Projektion aber zu einem unterschiedlichen Verhalten des Produktionsoperators für Nukleonen abseits der Massenschale. Da die im Kern gebundenen Nukleonen nicht mehr auf der Massenschale sind, ist das Verhalten des Produktionsoperators abseits der Massenschale aber entscheidend für die kohärente Produktion. Dies wird im folgenden Abschnitt genauer untersucht.

6.2.1 Der Produktionsoperator abseits der Massenschale

In [che57] wurde gezeigt, daß sich ein Produktionsoperator, der die Photoproduktion von pseudoskalaren Mesonen an einem freien Nukleon beschreibt, immer mit Hilfe von höchstens vier Elementen der Cliffordalgebra darstellen läßt. Die elementare Photoproduktionsamplitude T kann also immer als

$$T = \bar{u}(p') \hat{T} u(p) = \sum_{i=1}^4 A_i(s, t) \bar{u}(p') M_i u(p) \quad (6.1)$$

dargestellt werden. p und p' stehen für den Impuls des ein- bzw. auslaufenden Nukleons. Die skalare Amplituden $A_i(s, t)$ hängen nur noch von den Mandelstamvariablen s und t ab. Die vier Operatoren M_i sind linear unabhängig, aber nicht eindeutig bestimmt [nag91]. Eine verbreitete Wahl ist die folgende [pie97, feu98]:

$$\begin{aligned} M_1 &= -\gamma_5 \not{k} \\ M_2 &= 2\gamma_5 [(\varepsilon \cdot p)(k \cdot p') - (\varepsilon \cdot p')(k \cdot p)] \\ M_3 &= \gamma_5 [\not{k}(k \cdot p) - \not{k}(\varepsilon \cdot p)] \\ M_4 &= \gamma_5 [\not{k}(k \cdot p') - \not{k}(\varepsilon \cdot p')] \quad . \end{aligned} \quad (6.2)$$

Hierbei stehen k und ε für den Impuls bzw. den Polarisationsvektor des Photons. p und p' sind die Impulse des ein- bzw. auslaufenden Nukleons. Bei der Herleitung von Gl. (6.1) wird die Eichinvarianz der Amplitude, die Erhaltung des Gesamtimpulses und die freie Diracgleichung für das ein- und das auslaufende Nukleon verwendet. Diese Umformung ist also im Falle der elementaren Photoproduktion gerechtfertigt, sie stellt ein Standardverfahren zur Auswertung einer großen Anzahl von Diagrammen dar. Der entscheidende Vorteil besteht darin, daß jedes Feynmandiagramm durch genau vier skalare Amplituden A_i beschrieben wird. Jede Observable kann aus diesen vier Amplituden berechnet werden, so daß die Behandlung eines Diagramms eine einmalige Bestimmung der Amplituden A_i erfordert; die Berechnung von Observablen ist dann numerisch unproblematisch.

Als Beispiel soll nun der ω -Graph unter der Annahme einer reinen ωNN Vektorkopplung betrachtet werden. Die Auswertung des entsprechenden Graphen in Abb. 3.4 liefert dann eine einfache Vektorstruktur des in Gl. (4.73) definierten Produktionsoperators:

$$\hat{T}_\omega^{(\lambda)} = a_\mu \gamma^\mu \quad (6.3)$$

wobei:

$$a_\mu = -ig_{\omega NN}^v G_{\mu\nu}^\omega(E; \vec{k} - \vec{q}) \Gamma_{\omega\eta\gamma}^{\nu(\lambda)} \quad . \quad (6.4)$$

Man kann leicht zeigen, daß die aus diesem Operator resultierende Produktionsamplitude folgende Gleichung erfüllt:

$$\sum_\lambda |T_\omega^{(\lambda)}|^2 = g^2 \frac{\vec{k}^2 \vec{q}^2 \sin^2 \theta}{(t - m_\omega^2)^2} |F_v(Q)|^2 \quad , \quad (6.5)$$

mit

$$g = \frac{eg_{\omega NN}^v g_{\omega\eta\gamma}}{m_\eta} F_\omega(t) \quad . \quad (6.6)$$

Hierbei stehen \vec{k} und \vec{q} für die Dreierimpulse von η und Photon, $t = (q_\eta - k_\gamma)^2$, θ ist der Streuwinkel des η -Mesons und F_ω ist der ωNN -Formfaktor aus Gl. (3.15). $Q = |\vec{k} - \vec{q}|$ ist der auf den Kern übertragene Impuls und $F_v(Q)$ ist der Vektorformfaktor des Kerns, der sich aus einer Fouriertransformation der Vektordichte ρ_v (Gl. (4.58)) ergibt:

$$F_v(Q) = 4\pi \int r^2 dr j_0(Qr) \rho_v(r) \quad , \quad (6.7)$$

Hierbei ist j_0 eine sphärische Besselfunktion nullter Ordnung. In der vorliegenden Arbeit führt also die starke ωNN -Vektorkopplung zu einem differentiellen Wirkungsquerschnitt, der direkt proportional zum Vektorformfaktor des Kerns ist. Dies ist in Analogie zur kohärenten Photoproduktion von Pionen, die ebenfalls vom Vektorformfaktor des Kerns dominiert wurde (Kap. 5.2).

Wird der Operator (6.3) nun auf die Operatoren in Gl. (6.2) projiziert, so wird aus dem Vektorterm eine Summe aus einem Tensorterm und einem pseudovektoriellen Beitrag [pie97, ben95]:

$$\hat{T}_\omega^{(\lambda)} \rightarrow F_T^{\alpha\beta} \sigma_{\alpha\beta} + F_A^\alpha \gamma_5 \gamma_\alpha \quad . \quad (6.8)$$

Die genauen Formeln für F_T und F_A sind in [pie97] angegeben. Der Tensorterm resultiert aus M_1 , der Pseudovektor aus M_3 und M_4 in Gl. (6.2). Für die anderen Graphen tritt durch M_2 auch noch ein pseudoskalarer Term auf, der aber im Fall des ω -Graphen verschwindet [ben95]. Nun ist entscheidend, daß bei der Herleitung dieser Form die freie Diracgleichung benutzt wurde [ben95]. Das bedeutet, daß die Ersetzung (6.8) für den elementaren Prozeß eine analytische Umformung darstellt, die völlig äquivalent zur ursprünglichen Form (6.3) ist. Bei der Produktion am Kern aber, wenn das Nukleon nicht mehr die freie Diracgleichung erfüllt, ist die Äquivalenz von (6.3) und (6.8) nicht mehr gegeben. Der Projektionsformalismus ändert also das Verhalten des Produktionsoperators abseits der Massenschale, wodurch die Ergebnisse für die Produktion am Kern beeinflußt werden.

Berechnet man nun aus dem Operator (6.8) die kohärente Produktionsamplitude, so führen die beiden Terme in Gl. (6.8) zu den Spurausdrücken

$$Tr[\hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x}) \sigma_{\alpha\beta}] \quad \text{und} \quad Tr[\hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x}) \gamma_5 \gamma_\alpha] \quad . \quad (6.9)$$

$\hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{x})$ ist der lokale Anteil der Kerndichtematrix. Bei Spin-Null Kernen kann wegen der sphärischen Symmetrie dieser Kerne nur der Tensorterm einen Beitrag liefern (vgl. Gl. (4.58)). Für das Betragsquadrat der Produktionsamplitude erhält man schließlich eine Gleichung analog zu (6.5), in der aber der Vektorformfaktor ersetzt ist durch:

$$F_v(Q) \rightarrow 2m_N \frac{F_t(Q)}{Q} \quad . \quad (6.10)$$

$F_t(Q)$ ist der Tensorformfaktor des Kerns:

$$F_t(Q) = 4\pi \int dr r^2 j_1(Qr) \rho_t(r) \quad . \quad (6.11)$$

ρ_t ist die Tensordichte aus Gl. (4.58). Schreibt man den relativistischen Nukleonenspinor wie folgt:

$$\psi_\alpha(\vec{r}) = \begin{bmatrix} g_a(r) \mathcal{Y}_{J\ell}^M(\Omega_r) \\ i f_a(r) \mathcal{Y}_{J\ell'}^M(\Omega_r) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \alpha = (a, M), a = (n\ell J) \quad , \quad (6.12)$$

so ist die Tensordichte durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\rho_t(r) = 2 \sum_{a \text{ occ.}} \left(\frac{2J+1}{4\pi} \right) g_a(r) f_a(r) \quad . \quad (6.13)$$

Im Gegensatz dazu gilt für die Vektordichte:

$$\rho_v(r) = \sum_{a \text{ occ.}} \left(\frac{2J+1}{4\pi} \right) (g_a^2(r) + f_a^2(r)) \quad . \quad (6.14)$$

Die beiden Operatoren (6.3) und (6.8) führen also zu unterschiedlichen Formfaktoren im differentiellen Wirkungsquerschnitt, was direkt das unterschiedliche Verhalten der beiden Operatoren abseits der Massenschale aufzeigt.

Aus (6.13) und (6.14) läßt sich leicht ablesen, daß Tensor- und Vektordichte sehr unterschiedliche Eigenschaften haben: Die Tensordichte in Gl. (6.13) ist linear in der kleinen Komponente f_a . Aus diesem Grunde ist sie sensitiv auf die Schalenstruktur des betrachteten Kerns [pie97]. Darüber hinaus hängt das genaue Aussehen von f_a von den Details des verwendeten Kernstrukturmodells ab, und ist außerdem sehr sensitiv auf relativistische Effekte, wie in [pie97] diskutiert wird.

In der Vektordichte treten die kleinen Komponenten aber nur als Korrekturen der Ordnung $(f/g)^2$ auf. Die Vektordichte zeigt deshalb nicht dieselbe Abhängigkeit von der Schalenstruktur des Kerns oder von relativistischen Effekten wie die Tensordichte. Außerdem ist die Vektordichte eng mit der Ladungsdichte im Kern verknüpft (s. Kap. 4.2), die experimentell gut bekannt ist, während über die Tensordichte praktisch keine experimentelle Information vorliegt.

Da über die Photoproduktion von Mesonen an Nukleonen abseits der Massenschale keine experimentelle Information vorliegt, kann kein bestimmtes Verhalten des Produktionsoperators a priori ausgeschlossen werden. Es ist aber zu beachten, daß die Umformung, die zu der Ersetzung (6.8) geführt hat, aus rein technischen Gründen

durchgeführt wurde. Das daraus resultierende Verhalten des Produktionsoperators abseits der Massenschale ist also nicht physikalisch begründet.

An dieser Stelle sei daran erinnert, daß das in der vorliegenden Arbeit verwendete Verhalten abseits der Massenschale dadurch festgelegt wurde, daß die aus den Feynmangraphen resultierenden Produktionsoperatoren direkt ausgewertet wurden, ohne jegliche Umformung. Auf diese Weise wurde das von einer effektiven Feldtheorie vorgegebene Verhalten gewählt. Die so festgelegten Eigenschaften des Produktionsoperators sind also physikalisch motiviert; dennoch stellt auch dieses Verfahren eine Extrapolation des elementaren Modells dar. So können zum Beispiel über das in einer effektiven Feldtheorie vorgegebene Verhalten abseits der Massenschale hinaus zusätzliche Formfaktoren auftreten, über deren Verhalten im voraus kaum eine Aussage möglich ist.

In Kap. 6.3.1 werden die Effekte des unterschiedlichen Verhaltens des Produktionsoperators abseits der Massenschale anhand des ω -Graphen untersucht.

6.3 PWIA

In diesem Abschnitt sollen die Ergebnisse von PWIA-Rechnungen für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen dargestellt werden. Wie im folgenden gezeigt wird, sind die Größenverhältnisse der einzelnen Beiträge zur kohärenten Photoproduktion von η -Mesonen am Kern sehr unterschiedlich zu der Produktion am freien Nukleon. Da außerdem für die verschiedenen Graphen in Abb. 3.4 sehr unterschiedliche Aspekte von Bedeutung sind, werden im folgenden die einzelnen Graphen zuerst separat diskutiert, um dann anschließend Ergebnisse für vollständige Rechnungen zu zeigen.

6.3.1 Der Omega-Graph und die Bornsterme

Wie in Kap. 4.5 bereits gezeigt wurde, hat die lokale Näherung keinen Einfluß auf die ω -Amplitude, da in diesem Fall der Produktionsoperator nur vom Impulsübertrag und nicht vom Impuls der einzelnen Nukleonen abhängt. Für diesen Graph besteht der Unterschied zwischen [fix97, pie97] und dieser Arbeit also nur in der off-shell Extrapolation der Amplitude und in der Behandlung der Kernstruktur.

Wie in Kap. 4.6 bereits diskutiert, koppelt das ω über einen Vektor- und über einen Tensorterm an das Nukleon. (vgl. Gl. (3.13)). Aufgrund der relativen Größe der Kopplungskonstanten (Tab. 3.1), sowie der zusätzlichen Impulsabhängigkeit im Falle der Tensorkopplung, ist der Beitrag der Tensorkopplung praktisch zu vernachlässigen. Wie in Kap. 6.2.1 erläutert, ist dann der differentielle Wirkungsquerschnitt durch den Vektorformfaktor des Kerns bestimmt.

In Abb. 6.2 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen an ^{12}C und ^{40}Ca bei zwei verschiedenen Photonenergien im Labor dargestellt. Die Winkelabhängigkeit spiegelt die Eigenschaften des Vektorformfaktors der beiden Kerne wieder. Der Vergleich mit Abb. 6.1 zeigt, daß das Minimum im Wirkungsquerschnitt bei ^{12}C dem ersten Diffraktionsminimum des Vektorformfaktors entspricht, bei ^{40}Ca aber dem zweiten.

Das Ergebnis für ^{12}C bei 650 MeV kann direkt mit dem Ergebnis aus [fix97] für den ω -Graphen verglichen werden. Da in [fix97] auch der Vektorformfaktor den Wir-

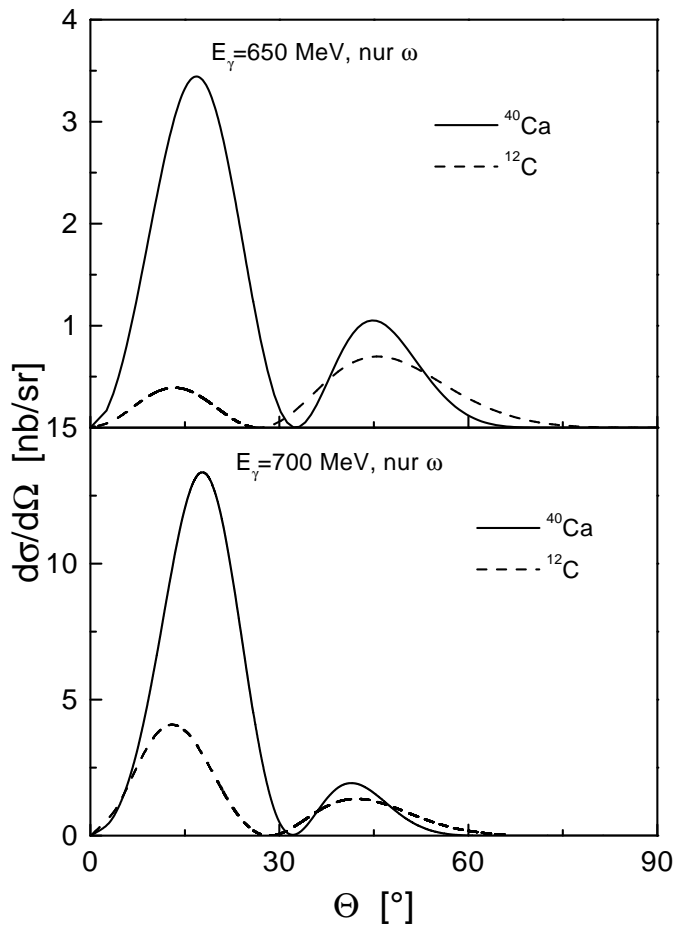


Abb. 6.2: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die kohärente η -Produktion bei Berücksichtigung des ω -Graphen.

kungsquerschnitt bestimmt, ist die Winkelabhängigkeit sehr ähnlich, allerdings ist der Beitrag des ω -Graphen zum Wirkungsquerschnitt in [fix97] etwa 30% größer. Da die in der vorliegenden Arbeit verwendeten Kopplungskonstanten aus [fix97] stammen kann dieser Unterschied nur durch das unterschiedliche Verhalten des Produktionsoperators abseits der Massenschale zustande kommen.

Das Ergebnis für ^{40}Ca in Abb. 6.2 ist im Vergleich zu dem in [pie97] gefundenen ω -Beitrag nur etwa halb so groß. Für ^{12}C ist in [pie97] der ω -Beitrag nicht separat angegeben, der Gesamtquerschnitt ist aber um eine Größenordnung größer als das in Abb. 6.2 gezeigte Resultat. Diese starke Erhöhung im Fall von ^{12}C wird in [pie97] mit den speziellen Eigenschaften des Tensorformfaktors erklärt, der in dieser Arbeit den Wirkungsquerschnitt bestimmt. Die Größe dieses Tensorformfaktors hängt sehr davon

ab, ob der betrachtete Kern vollständig abgeschlossene Schalen hat, wie im Fall von ^{40}Ca , oder nur teilweise besetzte Schalen wie ^{12}C . Ist eine Schale nur teilweise besetzt, so ist der Tensorformfaktor überproportional groß.

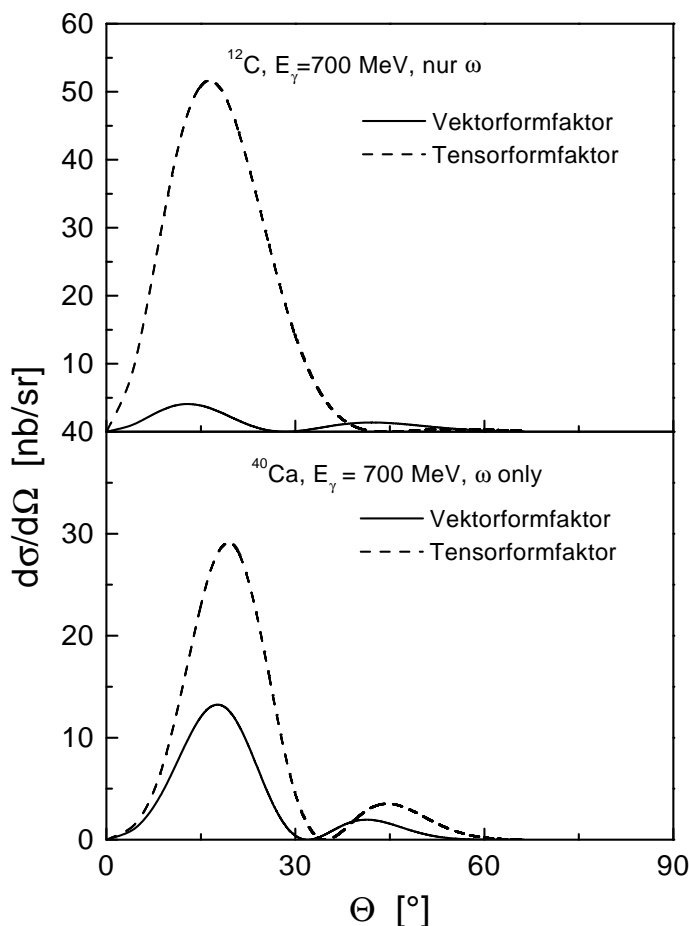


Abb. 6.3: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die kohärente η -Produktion bei Berücksichtigung des ω -Graphen. Gezeigt sind Ergebnisse dieser Arbeit (Vektorformfaktor), sowie Ergebnisse von Rechnungen analog zu [pie97] (Tensorformfaktor), wie im Text erläutert.

Um die Effekte, die aus dem Unterschied zwischen Vektor- und Tensorformfaktor herrühren, explizit darzustellen, wurden für den ω -Graphen Rechnungen analog zu [pie97] durchgeführt, und mit den Ergebnissen der vorliegenden Arbeit verglichen (s. Gl. (6.5) und Gl. (6.10)). Da in beiden Fällen die gleichen Modellgrundlagen (Kopplungskonstanten, Wellenfunktionen) benutzt wurden, kann der Effekt des unterschiedlichen Verhaltens abseits der Massenschale eindeutig gezeigt werden.

In Abb. 6.3 ist das Ergebnis einer Rechnung unter Verwendung des Tensorformfaktors im Vergleich zu den Ergebnissen dervorliegenden Arbeit dargestellt. Man sieht aus dieser Abbildung, daß beide Rechnungen sich bei ^{40}Ca um eine Faktor zwei und bei ^{12}C um eine Größenordnung unterscheiden. Auch die Winkelabhängigkeit ist, vor allem bei ^{12}C , unterschiedlich. Die großen Unterschiede bezüglich des Beitrags des ω -Graphen zwischen den Ergebnissen dieser Arbeit und [pie97] sind also in der Tat eine Konsequenz der unterschiedlichen Eigenschaften von Tensor- und Vektorformfaktor und dem daraus resultierenden unterschiedlichen Verhalten des Produktionsoperators abseits der Massenschale.

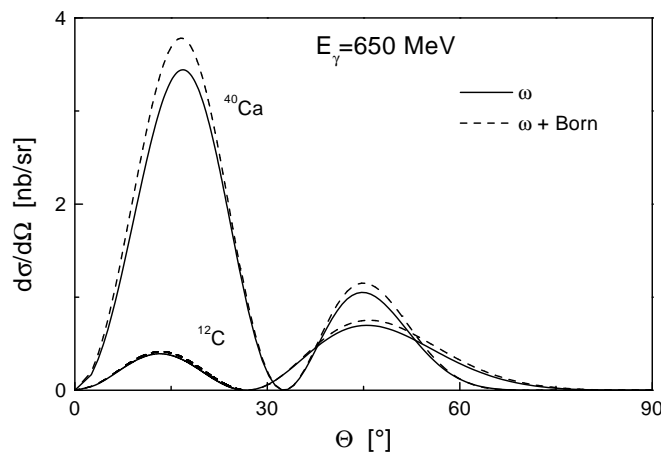


Abb. 6.4: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die kohärente η -Produktion bei Berücksichtigung des ω -Graphen und der Bornsterme.

Schließlich sind in Abb. 6.4 noch Ergebnisse für Rechnungen gezeigt, bei denen zusätzlich die Nukleon-Bornsterme berücksichtigt sind. Im Vergleich zur kohärenten Produktion von Pionen ist ihr Beitrag klein im Verhältnis zum ω -Graphen, vor allem da die ηNN -Kopplungskonstante sehr viel kleiner ist als die πNN -Kopplung. (Hierbei muß die ηNN -Kopplungskonstante von etwa 2, die bei einer pseudoskalaren Kopplung auftritt, mit der pseudoskalaren πNN -Kopplungskonstante verglichen werden, die einen Wert von etwa 13 hat.) In [fix97, pie97] wurde ebenfalls nur ein sehr kleiner Beitrag der Bornsterme gefunden.

6.3.2 Die $N(1535)$ -Resonanz

Das $N(1535)$ dominiert die elementare Photoproduktion von η -Mesonen stark. Alle früheren Untersuchungen der kohärenten Photoproduktion am Kern fanden im Gegensatz dazu, daß der Beitrag des $N(1535)$ zu diesem Prozeß nur sehr klein ist. Dies hat zwei Ursachen: Zum einen hat die $\gamma NN(1535)$ -Kopplungskonstante für Proton und Neutron in etwa den gleichen Betrag, aber ein unterschiedliches Vorzeichen (vgl. Tab. 3.1).

Das hat zur Folge, daß die Beiträge von Protonen und Neutronen sich bei einem $N=Z$ -Kern in der kohärenten Produktion am Kern teilweise wegheben. Dies zeigt sich deutlich an dem Verhältnis der isoskalaren und der isovektoriellen $N(1535)N\gamma$ -Kopplungskonstante:

$$\frac{g_{\gamma NS_{11}}^s}{g_{\gamma NS_{11}}^v} = \frac{g_{\gamma p S_{11}} + g_{\gamma n S_{11}}}{g_{\gamma p S_{11}} - g_{\gamma n S_{11}}} = 0.08 \quad , \quad (6.15)$$

das die starke Dominanz der isovektoriellen Kopplung des $N(1535)$ zeigt. Bei der kohärenten Produktion werden die Beiträge von Protonen und Neutronen im Kern addiert, so daß der kohärente Prozeß bei $N=Z$ -Kernen wie ^{12}C und ^{40}Ca fast nur von der isoskalaren Kopplung abhängt. Der zweite Grund für die Unterdrückung des $N(1535)$ in den bisherigen Arbeiten liegt in der Spinstruktur der $N(1535)$ -Amplitude. Dies soll nun genauer untersucht werden.

In Kap. 4.5 wurde gezeigt, daß in der lokalen Näherung der Vektoranteil $\vec{\sigma}\vec{K}$ des nicht-relativistischen Produktionsoperators keinen Beitrag liefert, da der Vektoranteil $\vec{\beta}$ der Dichtematrix im lokalen Fall verschwindet (vgl. Gl. (4.70) und Gl. (4.71)). Um die Konsequenzen dieser Tatsache für den Beitrag des $N(1535)$ zu beleuchten, soll nun die Struktur der $N(1535)$ -Amplitude untersucht werden. Der Beitrag des $N(1535)$ zum Produktionsoperator hat die folgende Form:

$$\hat{T}_{S_{11}dir}(E; \vec{x}, \vec{y}) = \frac{eg_{\gamma NS_{11}}g_{\eta NS_{11}}}{2m_N} G_{S_{11}}(E; \vec{x}, \vec{y}) \gamma_5 \sigma_{\mu\nu} k^\nu \varepsilon^\mu \quad . \quad (6.16)$$

Die in dieser Formel auftretenden Kopplungskonstanten sind in Tab. 3.1 aufgelistet. k^μ und ε^μ stehen für den Impuls bzw. den Polarisationsvektor des Photons. $G_{S_{11}}$ ist der Propagator des $N(1535)$:

$$G_{S_{11}}(E; \vec{x}, \vec{y}) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} i e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \frac{\not{p} + m_{S_{11}}}{s - m_{S_{11}}^2 + im_{S_{11}}\Gamma(s)} \quad , \quad (6.17)$$

mit $s = E^2 - \vec{p}^2$. Die Energieabhängigkeit der Breite $\Gamma(s)$ ist die aus [fix97]:

$$\Gamma(s) = \Gamma_o \left(b_\eta \frac{q_\eta}{q_\eta^o} + b_\pi \frac{q_\pi}{q_\pi^o} + b_{\pi\pi} \right) \quad . \quad (6.18)$$

Hierbei ist $\Gamma_o = 160$ MeV, die Verzweigungsverhältnisse sind $b_\eta = 0.5$, $b_\pi = 0.4$ und $b_{\pi\pi} = 0.1$. q_η (q_π) steht für den Dreierimpuls des η (des Pions) im Schwerpunktsystem der zerfallenden Resonanz, q_η^o und q_π^o stehen für die entsprechenden Impulse auf der Massenschale der Resonanz.

Wie in Kap. 4.5 erläutert, ist der elementare Produktionsoperator in führender nicht-relativistischer Ordnung eine 2×2 Matrix. Für die Photoproduktion von pseudoskalaren Mesonen hat dieser Operator die allgemeine Form [feu98, ben91]:

$$\begin{aligned} \hat{T} &= L + i\vec{\sigma}\vec{K} \\ &= F_1 \hat{q}(\hat{k} \times \vec{\varepsilon}) + iF_2 \vec{\sigma}(\hat{q} \times (\hat{k} \times \vec{\varepsilon})) + F_3 \vec{\sigma}\vec{\varepsilon} + F_4 (\vec{\sigma}\hat{k})(\vec{\sigma}\vec{\varepsilon}) + F_5 (\vec{\sigma}\hat{q})(\hat{q}\vec{\varepsilon}) \quad . \end{aligned} \quad (6.19)$$

Hierbei sind \hat{k} und \hat{q} Einheitsvektoren in Richtung des Photon- bzw. des Mesonimpulses, und $\vec{\varepsilon}$ ist der Polarisationsvektor des Photons. Die F_i sind skalare Amplituden, die die Information über die Dynamik der Reaktion beinhalten [feu98].

Um nun aus dem $N(1535)$ -Produktionsoperator in Gl. (6.16) den führenden nicht-relativistischen Term zu extrahieren, vernachlässigt man die kleinen Komponenten der Nukleonwellenfunktion sowie des $N(1535)$ -Propagators. Man findet:

$$\hat{T}_{S_{11}dir}^{(n.r.)}(E; \vec{x}, \vec{y}) = i \frac{e g_{\gamma NS_{11}} g_{\eta NS_{11}}}{2m_N} E_{\gamma}(E + m_{S_{11}}) D(E; \vec{x}, \vec{y}) \vec{\sigma} \vec{\varepsilon} \equiv \vec{K} \vec{\sigma} \quad , \quad (6.20)$$

(vgl. Gl. (6.19)) mit

$$D(E; \vec{x}, \vec{y}) = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{ie^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})}}{s - m_{S_{11}}^2 + im_{S_{11}} \Gamma(s)} \quad . \quad (6.21)$$

Im Vergleich zu der allgemeinen Form (6.19) hat der Produktionsoperator für das $N(1535)$ also eine sehr einfache Struktur: Der skalare Anteil L aus Gl. (6.19) verschwindet und für den Vektoranteil findet man $\vec{K} \sim \vec{\varepsilon}$. Das $N(1535)$ trägt also nur zu der Amplitude F_2 in Gl. (6.19) bei. In niedrigster nicht-relativistischer Ordnung führt das $N(1535)$ zu einem Produktionsoperator, der nur aus einem Vektoranteil besteht und somit den Spin des Nukleons ändert. Dies ist eine direkte Konsequenz der Quantenzahlen des $N(1535)$, und kann anhand der folgenden Diskussion verstanden werden.

Man betrachtet die elementare Photoproduktion von η -Mesonen im Schwerpunktsystem, d. h. im Ruhesystem des intermediären $N(1535)$. Aufgrund der negativen Parität des $N(1535)$ und des η hat das produzierte η -Meson relativ zum auslaufenden Nukleon den Bahndrehimpuls $\ell_{\eta} = 0$. $\ell_{\eta} = 2, 4, \dots$ ist ausgeschlossen, da im Ruhesystem des $N(1535)$ der Gesamtdrehimpuls $J = \frac{1}{2}$ ist. Auch für das einlaufende Photon gilt, daß sein Bahndrehimpuls (nicht aber sein Gesamtdrehimpuls) wegen Paritätserhaltung gleich Null sein muß. Um zu einem Gesamtdrehimpuls $J = \frac{1}{2}$ zu koppeln, müssen die Spins des Photons und des einlaufenden Nukleons entgegengesetzt ausgerichtet sein. Der Spin des intermediären $N(1535)$ ist dann dem Spin des einlaufenden Nukleons entgegengesetzt. Wegen $\ell_{\eta} = 0$ weist der Spin des auslaufenden Nukleons in dieselbe Richtung wie der des intermediären $N(1535)$. Für die z -Komponenten der Spins hat man also zum Beispiel:

$$\begin{array}{ccccccc} \gamma & + & N & \rightarrow & N(1535) & \rightarrow & N & + & \eta \\ +1 & & -\frac{1}{2} & \rightarrow & +\frac{1}{2} & \rightarrow & +\frac{1}{2} & & 0 \end{array} \quad . \quad (6.22)$$

Im Schwerpunktsystem der Resonanz wird bei der Photoproduktion von η -Mesonen über das $N(1535)$ also der Spin des beteiligten Nukleons zwangsläufig umgeklappt. Deshalb hat der elementare $N(1535)$ -Produktionsoperator in Gl. (6.20) keinen skalaren Anteil. Dies ist in Übereinstimmung mit einer Multipolanalyse der elementaren η -Photoproduktion [ben91]: Der einzige Multipol, der einen Drehimpuls $\ell_{\eta} = 0$ zuläßt ist der E_{0+} -Multipol. Das $N(1535)$ kann also (zumindest auf seiner Massenschale) nur zu diesem Multipol beitragen. Konstruiert man den Produktionsoperator aus den Multipolen, so findet man, daß der E_{0+} -Multipol nur zu der Amplitude F_2 in Gl. (6.19) beiträgt [ben91, feu98]. Folglich ist $\hat{T} \sim \vec{\sigma} \vec{\varepsilon}$, in Übereinstimmung mit Gl. (6.20).

Bei der Photoproduktion am Kern wird nicht mehr im Schwerpunktsystem der intermediären Resonanz, sondern im Schwerpunktsystem des Kerns gearbeitet. Folglich können die Bahndrehimpulse des Photons und des η -Mesons beliebige Werte annehmen. Der Vektorcharakter des Produktionsoperators ist aber unabhängig vom Bezugssystem, und damit auch in einer Rechnung am Kern gegeben.

Wie in Kap. 4.5 hergeleitet, ist die kohärente Produktionsamplitude in einer nicht-relativistischen Rechnung durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$T^{(\lambda)} = 2 \int d^3x d^3y \left(L^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) \alpha(\vec{x}, \vec{y}) + \vec{K}^{(\lambda)}(E; \vec{x}, \vec{y}) \vec{\beta}(\vec{x}, \vec{y}) \right). \quad (6.23)$$

Hierbei stehen L und \vec{K} für den skalaren bzw. den Vektoranteil des nicht-relativistischen Produktionsoperators. α und $\vec{\beta}$ stellen den skalaren bzw. den Vektoranteil der nicht-lokalen, nicht-relativistischen Dichtematrix des Kerns dar:

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= \sum_{a \text{ occ.}} \frac{g_a(x_1) g_a(x_2)}{4\pi} \left(J + \frac{1}{2} \right) P_\ell(\cos \theta) \\ \vec{\beta}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) &= i \sum_{a \text{ occ.}} (-1)^{(\ell-J-\frac{1}{2})} \frac{g_a(x_1) g_a(x_2)}{4\pi} P'_\ell(\cos \theta) [\hat{x}_1 \times \hat{x}_2] \quad . \end{aligned} \quad (6.24)$$

θ ist der Winkel zwischen $\vec{x}_1 = x_1 \hat{x}_1$ und $\vec{x}_2 = x_2 \hat{x}_2$, P_ℓ und P'_ℓ sind Legendrepolynome der Ordnung ℓ bzw. die Ableitung davon und $a = (n\ell J)$. Zur Herleitung von Gl. (6.23) wurde die Spur bereits ausgeführt (s.Kap. 4.5), so daß der Integrand ein Skalar ist und keine Matrixstruktur mehr hat.

Wie in Kap. 4.5 diskutiert, verschwindet $\vec{\beta}(\vec{x}, \vec{x})$, so daß der Vektoranteil \vec{K} des Produktionsoperators in einer lokalen Rechnung keinen Beitrag zur kohärenten Amplitude liefert. In einer nicht-lokalen Rechnung hingegen, trägt \vec{K} bei, da $\vec{\beta}(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$ für $\vec{x} \neq \vec{y}$.

Da das $N(1535)$ nur im Vektoranteil des nicht-relativistischen Produktionsoperators auftaucht, trägt es in einer lokalen, nicht-relativistischen Rechnung gar nicht bei, und ist auch im Falle einer lokalen, relativistischen Behandlung unterdrückt. Dies erklärt, warum das $N(1535)$ in den bisherigen Rechnungen zur kohärenten Photoproduktion am Kern praktisch bedeutungslos ist. Der in dieser Arbeit gewählte Zugang bietet nun die Möglichkeit, den nicht-lokalen Beitrag des $N(1535)$ zu untersuchen. Die absolute Größe dieses Beitrags hängt dabei von den Eigenschaften nicht-lokaler Effekte ab. Bevor Ergebnisse für das $N(1535)$ gezeigt werden, sollen deshalb diese Effekte genauer diskutiert werden.

An Gl. (6.24) kann man ablesen, daß die Größe des Vektoranteils $\vec{\beta}$ der Kerndichtematrix, und damit die Größe von nicht-lokalen Beiträgen, von der Schalenstruktur des betrachteten Kerns abhängt: Für eine voll besetzte Schale mit dem Drehimpuls ℓ tragen die beiden Unterschalen mit $J = \ell \pm \frac{1}{2}$ mit unterschiedlichem Vorzeichen bei. Vernachlässigt man die Spin-Orbit-Aufspaltung zwischen diesen beiden Unterschalen, so sind die Radialanteile g_a der Wellenfunktionen für beide Orbitale gleich. Folglich heben sich die Beiträge dieser beiden Unterschalen zu $\vec{\beta}$ gegenseitig weg. Das bedeutet, daß bei Vernachlässigung der Spin-Orbit-Aufspaltung nicht-lokale Effekte bei Kernen mit vollständig abgeschlossenen Schalen wie z.B. ^{40}Ca verschwinden.

Im Fall von ^{12}C sind die $1s_{\frac{1}{2}}$ -Schale sowie die $1p_{\frac{3}{2}}$ -Unterschale besetzt. Die $1p$ -Schale ist also nur teilweise aufgefüllt. Wegen $P'_0 = 0$ trägt das $1s_{\frac{1}{2}}$ -Orbital nicht zu $\vec{\beta}$ bei.

Die $1p_{\frac{3}{2}}$ -Unterschale dagegen trägt bei, und dieser Beitrag bleibt bestehen, da die $1p_{\frac{1}{2}}$ -Unterschale nicht besetzt ist. Bei Kernen mit offenen Schalen wie ^{12}C ist also $\vec{\beta} \neq 0$, so daß nicht-lokale Effekte auftreten.

Diese Betrachtung vernachlässigt die Spin-Orbit-Aufspaltung sowie relativistische Effekte. Aufgrund der Spin-Orbit-Aufspaltung sind die Radialanteile der Wellenfunktionen zweier Unterschalen nicht genau gleich, so daß auch bei Kernen mit abgeschlossenen Schalen nicht-lokale Beiträge auftreten können. Im Vergleich zu Kernen mit offenen Schalen wie ^{12}C sind die entsprechenden Beiträge aber deutlich kleiner. Man erwartet also einen nicht-lokalen Beitrag des $N(1535)$ zur kohärenten Photoproduktion, der für ^{12}C deutlich größer ist als für ^{40}Ca , zumindest relativ zu lokalen Beiträgen wie dem ω , die unabhängig von der Schalenstruktur des Kerns sind.

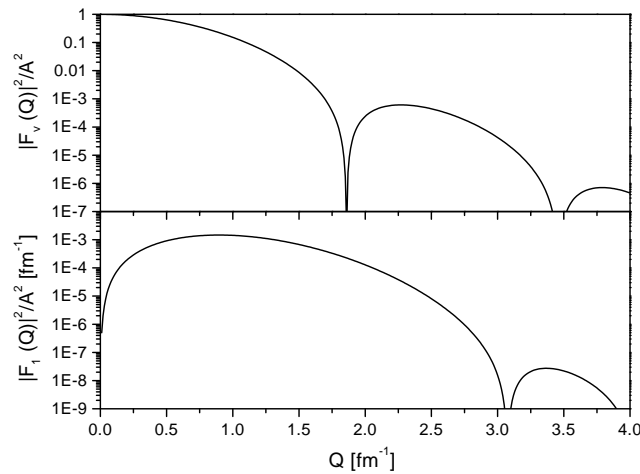


Abb. 6.5: Der modifizierte Formfaktor F_1 wie im Text definiert, im Vergleich zum Vektorformfaktor für ^{12}C .

Neben dieser Abhängigkeit von der Schalenstruktur des Kerns, zeigen nicht-lokale Effekte auch eine andere Winkelabhängigkeit als rein lokale Beiträge. Um dies zu zeigen werden nicht-lokale Korrekturen zur lokalen Näherung aus Gl. (4.62) berechnet. Dies geschieht, indem man vom Produktionsoperator $\hat{T}(E; \vec{p}, \vec{k}, \vec{q})$ im Impulsraum ausgeht, und eine Taylorentwicklung bezüglich des Impulses \vec{p} des einlaufenden Nukleons um einen Wert \vec{p}_o durchführt. Für die Produktionsamplitude findet man dann (vgl. Gl. (4.56)):

$$\begin{aligned}
 T^{(\lambda)} &= Tr \left[\hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{p}_o, \vec{k}, \vec{q}) \hat{\rho}_A(\vec{k} - \vec{q}) \right] \\
 &+ Tr \left[\left(\vec{\nabla}_p \hat{T}^{(\lambda)}(E; \vec{p}, \vec{k}, \vec{q}) \right)_{\vec{p}=\vec{p}_o} \cdot \hat{\rho}_A \right] + \dots \quad . \quad (6.25)
 \end{aligned}$$

Der erste Term auf der rechten Seite dieser Gleichung entspricht der lokalen Näherung. Setzt man $\vec{p}_o = -\frac{1}{2}(\vec{k} - \vec{q})$, so ist die Größe $\hat{\rho}_A$ im zweiten Term durch folgenden

Ausdruck gegeben:

$$\hat{\rho}_A = \frac{i}{2} \sum_{\alpha occ.} \int d^3x \left(\psi_\alpha \otimes (\vec{\nabla} \bar{\psi}_\alpha) - (\vec{\nabla} \psi_\alpha) \otimes \bar{\psi}_\alpha \right) e^{i(\vec{k}-\vec{q})\vec{x}} \quad . \quad (6.26)$$

$\hat{\rho}_A$ ist also die Differenz zweier dyadischer Produkte, die Ableitungen von Nukleonspino-
ren enthalten. Diese Ableitungen ändern nun die Drehimpulsstruktur des Matrixele-
ments im Vergleich zu dem rein lokalen Term. Setzt man z.B. den nicht-relativistischen
Produktionsoperator $\hat{T} = L + i\vec{\sigma}\vec{K}$ in Gl. (6.25) ein, so führt die nicht-lokale Korrektur
erster Ordnung in dieser Gleichung zum Auftreten eines modifizierten Formfaktors, der
für ^{12}C durch folgenden Ausdruck gegeben ist:

$$F_1(Q) = 4\pi \int r dr j_1(Qr) g_{p\frac{3}{2}}^2(r) \quad . \quad (6.27)$$

Hierbei steht $g_{p\frac{3}{2}}$ für den Radialanteil der nicht-relativistischen $1p\frac{3}{2}$ Wellenfunktion.
Im Gegensatz zum Vektorformfaktor in Gl. (6.7) tritt jetzt eine Besselfunktion j_1 er-
ster Ordnung auf. Dies ist eine Konsequenz des Dipolcharakters der Ableitungen in
Gl. (6.26). In Abb. 6.5 ist F_1 im Vergleich zum Vektorformfaktor für ^{12}C dargestellt.
 F_1 zeigt eine deutlich andere Abhängigkeit vom Impulsübertrag Q . Daraus folgt, daß
nicht-lokale Effekte zu einer anderen Winkelabhängigkeit des differentiellen Wirkungs-
querschnitts für die kohärente Produktion führen, als lokale Beiträge wie das ω .

Zusammenfassend erwartet man also, daß der Beitrag des $N(1535)$, der in führender
nicht-relativistischer Ordnung rein nicht-lokal ist, zum einen von der Schalenstruktur
des Kerns abhängt. An einem Kern mit einer offenen Schale wie ^{12}C wird der $N(1535)$
Beitrag wichtiger sein als an ^{40}Ca , das nur abgeschlossene Schalen hat. Weiterhin ist zu
erwarten, daß der Beitrag des $N(1535)$ eine deutlich andere Winkelabhängigkeit zeigt
als der ω -Beitrag.

In Abb. 6.6 ist das Ergebnis einer nicht-relativistischen und einer relativistischen
Rechnung für den Beitrag des $N(1535)$ zur kohärenten Photoproduktion von η -Mesonen
an ^{12}C bei einer Photonenergie von 650 MeV im Labor im Vergleich zum ω -Beitrag dar-
gestellt. In der nicht-relativistischen Rechnung wurden, analog zu der Herleitung von
Gl. (6.20), die kleinen Komponenten der Nukleonwellenfunktionen sowie des $N(1535)$ -
Propagators gleich Null gesetzt. Der nicht-relativistische Beitrag macht etwas mehr
als die Hälfte des Gesamtbeitrags des $N(1535)$ aus, der von der Größe her mit dem
 ω -Beitrag vergleichbar ist. Die Winkelabhängigkeit beider Beiträge ist aber sehr un-
terschiedlich. Aus Abb. 6.1 liest man ab, daß bei einer Photonenergie von 650 MeV
ein Streuwinkel zwischen 0° und 90° etwa einem Impulsübertrag zwischen 1,5 und 3,5
 fm^{-1} entspricht. Die in Abb. 6.6 sichtbare Winkelabhängigkeit stimmt qualitativ mit
der unterschiedlichen Q -Abhängigkeit der Formfaktoren in Abb. 6.5 überein.

In Abb. 6.7 ist der Beitrag des $N(1535)$ für ^{40}Ca im Vergleich zum ω -Beitrag gezeigt.
Für diesen Kern ist der Beitrag des $N(1535)$ zu vernachlässigen. Um zu zeigen, daß
dies aus einem Wegheben der Beiträge von jeweils zwei Unterschalen resultiert, sind in
Abb. 6.7 außerdem die Beiträge der $1d\frac{3}{2}$ und der $1d\frac{5}{2}$ -Unterschale gezeigt. Diese beiden
Einzelbeiträge sind etwa eine Größenordnung größer als die Summe aller Terme.

Zusammenfassend läßt sich sagen, daß der Beitrag des $N(1535)$ die oben vorherge-
sagte Abhängigkeit von der Schalenstruktur des Kerns zeigt: An ^{12}C liefert das $N(1535)$

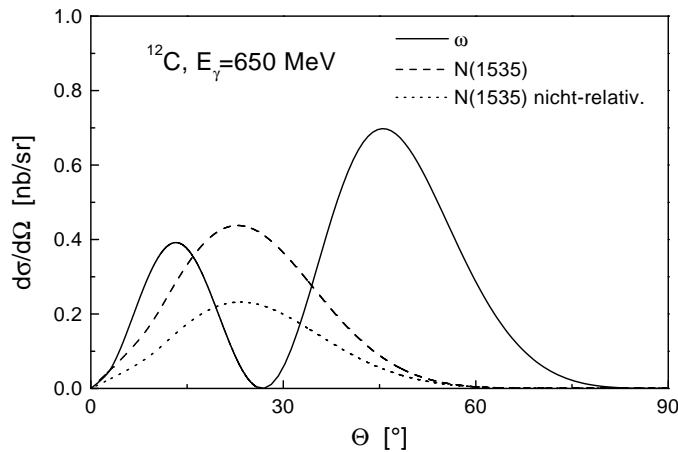


Abb. 6.6: $N(1535)$ -Beitrag zur kohärenten Produktion von η -Mesonen an ^{12}C bei einer Photonenergie von 650 MeV im Labor in einer vollen und in einer nicht-relativistischen Rechnung wie im Text beschrieben im Vergleich zum ω -Beitrag.

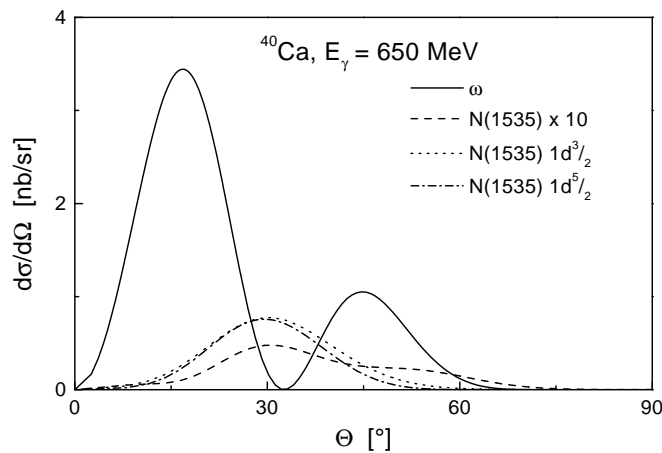


Abb. 6.7: $N(1535)$ -Beitrag zur kohärenten Produktion von η -Mesonen an ^{40}Ca bei einer Photonenergie von 650 MeV im Labor multipliziert mit 10 im Vergleich zum ω -Term. Außerdem sind Ergebnisse gezeigt, bei denen nur das $1d_{3/2}$ bzw. das $1d_{5/2}$ Orbital berücksichtigt wurden.

aufgrund der offenen $1p$ -Schale einen großen Beitrag, während es an ^{40}Ca stark unterdrückt ist. Der nicht-lokale Charakter des $N(1535)$ -Beitrags führt außerdem zu einer Winkelabhängigkeit die sich von dem lokalen ω -Term deutlich unterscheidet. Dies ist anhand der oben diskutierten Eigenschaften von nicht-lokalen Korrekturen gut zu verstehen.

Die in dieser Arbeit durchgeführten nicht-lokalen Rechnungen zeigen, daß die lo-

kale Näherung nur für ^{40}Ca aufgrund der abgeschlossenen Schalen dieses Kerns eine vertretbare Näherung darstellt. Im Fall von ^{12}C , das sowohl in [pie97], als auch in [fix97] untersucht wird, zeigt sich, daß nicht-lokale Effekte zu beträchtlichen Korrekturen führen.

6.3.3 Die $N(1520)$ -Resonanz

Als Spin- $\frac{3}{2}$ -Teilchen wird das $N(1520)$ wie das Δ durch einen Rarita-Schwinger-Propagator beschrieben:

$$G_{D_{13}}^{\mu\nu}(p) = i \frac{\not{p} + m_{\Delta}}{p^2 - m_{D_{13}}^2 + im_{D_{13}}\Gamma} \Lambda^{\mu\nu} \quad , \quad (6.28)$$

wobei $\Gamma=120$ MeV [fix97] und

$$\Lambda^{\mu\nu} = \left(g^{\mu\nu} - \frac{1}{3}\gamma^{\mu}\gamma^{\nu} - \frac{2}{3m_{D_{13}}^2}p^{\mu}p^{\nu} - \frac{1}{3m_{D_{13}}}(\gamma^{\mu}p^{\nu} - p^{\mu}\gamma^{\nu}) \right) \quad . \quad (6.29)$$

Die Behandlung dieses Propagators geschieht analog zu der des Δ -Propagators in der kohärenten Produktion von Pionen (s.Kap. 4.4.2).

Genau wie beim $N(1535)$ stellt sich auch bei dem $N(1520)$ die Frage nach der Bedeutung von nicht-lokalen Effekten. Um hierüber im voraus eine Aussage zu machen, muß der aus dem $N(1520)$ resultierende Produktionsoperator untersucht werden. Dies geschieht am einfachsten mit Hilfe einer Multipolbetrachtung. Aufgrund seiner Quantenzahlen kann das $N(1520)$ nur zum E_{2-} und zum M_{2-} -Multipol der elementaren η -Photoproduktion beitragen. Aus dem Multipolmodell in [ben91] geht hervor, daß der E_{2-} -Multipol nur im Vektoranteil \vec{K} des Produktionsoperators auftaucht; der M_{2-} -Multipol erscheint zwar im skalaren Anteil L des Produktionsoperators, trägt aber vor allem zum Vektoranteil bei [ben91]. Da also die Beiträge des $N(1520)$ zum Vektoranteil des Produktionsoperators von Bedeutung sind, ist zu erwarten, daß auch im Fall des $N(1520)$ nicht-lokale Effekte eine Rolle spielen.

Im Fall des $N(1520)$ tritt eine zusätzliche Komplikation dadurch auf, daß diese Resonanz im Gegensatz zum Δ auf zwei verschiedene Arten an das Photon koppelt. Die erste dieser beiden Kopplungen ist die gleiche wie im Fall des Δ . Aus Gl. (3.17) ist ersichtlich, daß in der zweiten Kopplung der Impuls des Nukleons auftritt. Genau wie im Fall des $p_{\mu}p_{\nu}$ -Terms, führen die Impulse in dieser Kopplung bei der Auswertung im Ortsraum zusammen mit den Impulsen im Spin- $\frac{3}{2}$ -Projektor zu höheren Ableitungen, die den ohnehin großen numerischen Aufwand noch deutlich vergrößern würden. Es ist in diesem Zusammenhang unerheblich, ob der Impuls des Nukleons oder der des intermediären $N(1520)$ auftritt.

Zur Untersuchung der Bedeutung der beiden Kopplungen des $N(1520)$ an das Photon in der elementaren Photoproduktion von η -Mesonen dient die Abb. 6.8. Hier ist das Verhältnis angegeben zwischen dem Gesamtbeitrag des $N(1520)$ zum isoskalaren elementaren Wirkungsquerschnitt, sowie des $N(1520)$ -Beitrags, der sich ergibt wenn nur die erste der beiden Kopplungen berücksichtigt wird. Isoskalar bedeutet hierbei, daß die Amplitude über Proton und Neutron gemittelt wurde, um die Situation mit der Reaktion an einem $N=Z$ -Kern vergleichen zu können. Aus Abb. 6.8 wird deutlich,

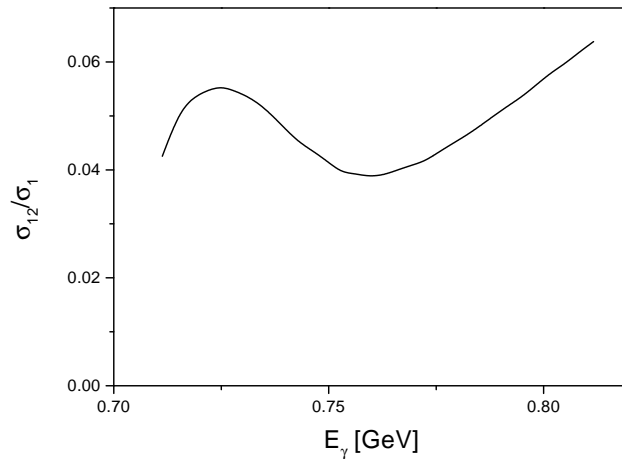


Abb. 6.8: Beiträge des $N(1520)$ zum isoskalaren Wirkungsquerschnitt der elementaren Photoproduktion von η -Mesonen als Funktion der Photonenergie im Labor. σ_{12} ist der Gesamtbeitrag des $N(1520)$ zum totalen Wirkungsquerschnitt, σ_1 ist der Wirkungsquerschnitt der sich ergibt, wenn nur die erste der beiden Kopplungen des $N(1520)$ an das Photon berücksichtigt werden.

daß sich die Beiträge der beiden Kopplungen teilweise wegheben, der Gesamtbeitrag ist etwa um einen Faktor 20 kleiner, als der der ersten Kopplung alleine. Für eine detaillierte Untersuchung der Rolle des $N(1520)$ ist also eine gleichwertige Behandlung beider Kopplungsarten von großer Bedeutung.

Um in dieser Arbeit dennoch eine Aussage über den Beitrag des $N(1520)$ zu machen, wurden näherungsweise Rechnungen durchgeführt, in denen nur die erste der beiden möglichen Kopplungen des $N(1520)$ an das Photon berücksichtigt wurden. Um der Tatsache Rechnung zu tragen, daß sich die Beiträge der beiden Kopplungen im elementaren Fall teilweise aufheben, wurden dabei Kopplungskonstanten verwendet, die um einen Faktor $\sqrt{1/20}$ kleiner waren, als die in der elementaren Produktion verwendeten (Tab.3.1). Dieses Verfahren kann nur als Abschätzung dienen, erlaubt aber qualitative Aussagen über die Bedeutung des $N(1520)$ in der kohärenten Photoproduktion von η -Mesonen. Alle im folgenden gezeigten Resultate wurden mit Hilfe dieser Näherung erlangt.

In [fix97] und [pie97] ist der Beitrag des $N(1520)$ nach dem des ω der zweitgrößte. In Abb. 6.9 werden die Ergebnisse dieser Arbeit für das $N(1520)$ mit den anderen Beiträgen verglichen. Für ^{12}C liefert das $N(1520)$ in der oben beschriebenen Näherung den größten Beitrag. An der Winkelabhängigkeit dieses Beitrags erkennt man, daß auch für diese Resonanz nicht-lokale Effekte wichtig sind, in Übereinstimmung mit der am Anfang dieses Abschnitts gemachten qualitativen Betrachtung. Die Tatsache, daß das $N(1520)$ einen größeren Beitrag als das $N(1535)$ liefert, ist in der Isospinstruktur der Kopplung des $N(1520)$ an das Photon begründet. Das Verhältnis von isoskalarer zu isovektorieller Kopplung (s. Gl. (6.15)) ist für die beiden Kopplungen des $N(1520)$ an das Photon durch 0,7 bzw. 1,3 gegeben, im Gegensatz zum Wert von 0,08 beim

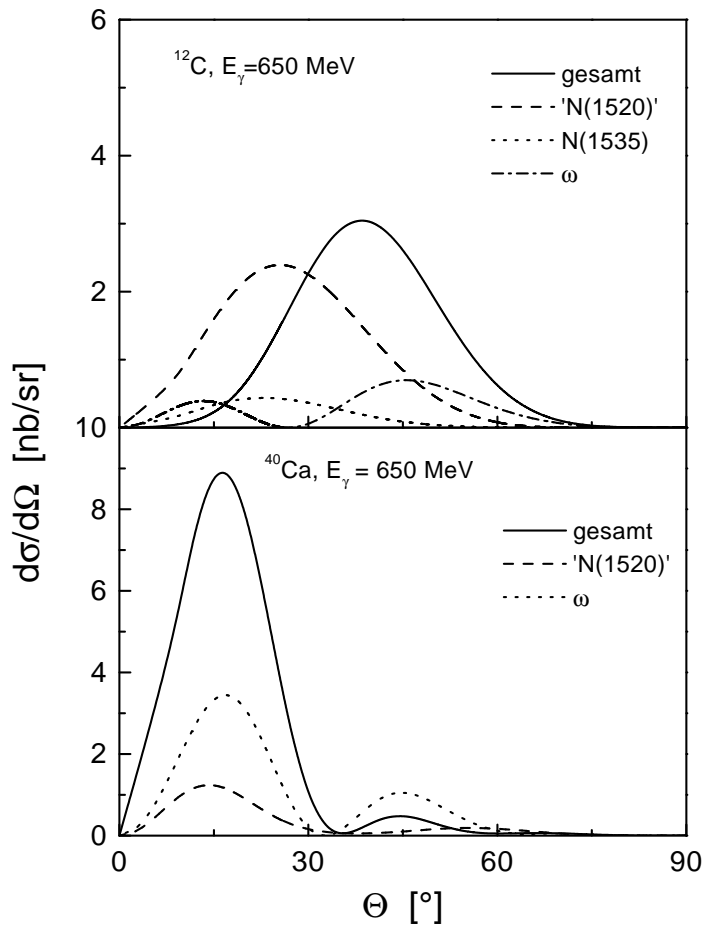


Abb. 6.9: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die kohärente η -Produktion bei einer Laborenergie von 650 MeV. Gezeigt sind jeweils die relevanten Beiträge, sowie der Gesamtquerschnitt.

$N(1535)$. Das bedeutet, daß die mit der kohärenten Summation über Protonen und Neutronen verbundene Isospinmittelung das $N(1520)$ nur wenig beeinflusst, während das $N(1535)$ um etwa eine Größenordnung unterdrückt wird.

In der unteren Hälfte von Abb. 6.9 sind die entsprechenden Ergebnisse für ^{40}Ca dargestellt. Da nicht-lokale Effekte an ^{40}Ca unterdrückt sind, trägt das $N(1520)$ an diesem Kern deutlich weniger bei als an ^{12}C ; sein Beitrag ist nun kleiner als der ω -Beitrag.

Um den Gesamtquerschnitt zu bestimmen wurden Rechnungen durchgeführt, die den ω -Graphen, die Bornsterme, den direkten und den Austauschgraphen des $N(1535)$ sowie den direkten $N(1520)$ -Graphen in der oben beschriebenen Näherung beinhal-

ten. Das Ergebnis ist ebenfalls in Abb. 6.9 dargestellt. Durch die großen nicht-lokalen Beiträge im Fall von ^{12}C hat hier der resultierende Wirkungsquerschnitt eine Winkelabhängigkeit, die sich deutlich von der des ω -Graphen unterscheidet. Im Gegensatz dazu liefert das ω an ^{40}Ca den dominanten Beitrag; die Winkelabhängigkeit des Gesamtquerschnitts ist für diesen Kern deshalb der des ω -Graphen noch sehr ähnlich.

An Abb. 6.9 ist zu erkennen, daß die Interferenz zwischen dem lokalen ω -Graphen und den nicht-lokalen Beiträgen je nach Winkel konstruktiv oder destruktiv sein kann. Die Ursache hierfür ist, daß der Vektorformfaktor (Abb. 6.1), und damit der ω -Beitrag, bei bestimmten Winkeln das Vorzeichen wechselt. An diesen Winkeln hat der aus dem ω -Beitrag resultierende differentielle Wirkungsquerschnitt ein Minimum. Die nicht-lokalen Beiträge wechseln bei diesen Winkeln nicht das Vorzeichen, so daß das Interferenzverhalten beim Durchgang durch das Minimum des ω -Beitrags seinen Charakter ändert.

6.4 DWIA

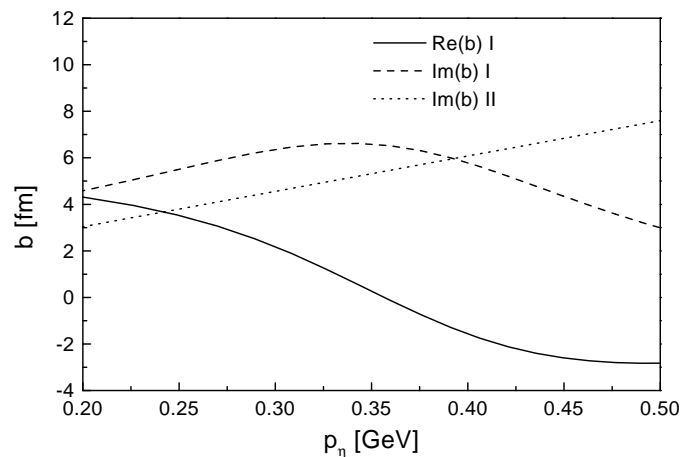


Abb. 6.10: Real- und Imaginärteil des optischen Potentials aus Gl. (4.25) (I) und aus Gl. (4.27) (II).

In diesem Abschnitt werden Ergebnisse für DWIA-Rechnungen zur kohärenten Photoproduktion von η -Mesonen gezeigt. Zunächst sind in Abb. 6.10 die Real- und Imaginärteile der beiden optischen Potentials aus Kap. 4.3.2 dargestellt. Das in [ben91] konstruierte Potential (Nr. I in Abb. 6.10 und im folgenden), das auch in [pie97] verwendet wird, wurde aus einer elementaren ηN Streuamplitude konstruiert. Diese Streuamplitude wird vom $N(1535)$ dominiert und zeigt deshalb ein resonantes Verhalten, was sich in der Impulsabhängigkeit von b widerspiegelt (Maximum in Imaginärteil und Nulldurchgang im Realteil). Im Gegensatz dazu führt der energieunabhängige ηN -Wirkungsquerschnitt, aus dem das Potential II in Abb. 6.10 konstruiert wurde, über das optische Theorem zu einem Imaginärteil, der linear mit dem Impuls ansteigt. Der Realteil des Potentials II wird auf Null gesetzt.

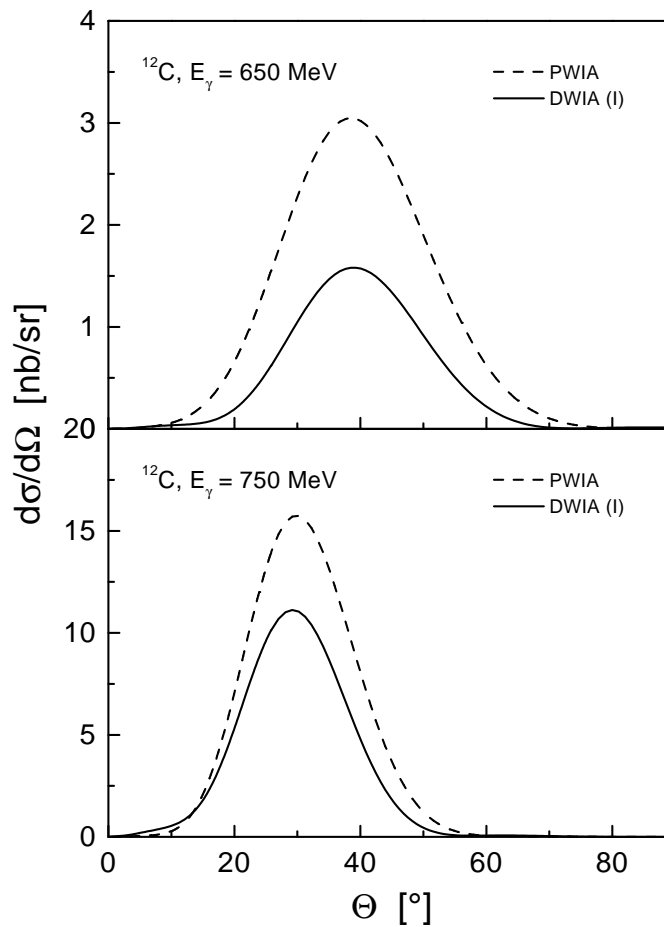


Abb. 6.11: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die kohärente η -Produktion an ^{12}C für zwei verschiedene Photonenergien im Labor in PWIA und DWIA für Potential I.

Zuerst sind in Abb. 6.11 die differentiellen Wirkungsquerschnitte für ^{12}C bei zwei verschiedenen Laborenergien unter Verwendung des optischen Potentials I aus [pie97] dargestellt. Man erkennt, daß dieses optische Potential bei beiden Energien zu einem kleineren Wirkungsquerschnitt führt, was durch den großen Imaginärteil des Potentials zustande kommt. In Abb. 6.12 sind die entsprechenden Ergebnisse für ^{40}Ca dargestellt. Auch hier führt das optische Potential bei beiden Energien zu einer Absenkung des Wirkungsquerschnitts.

Um den Einfluß des Realteils des optischen Potentials zu untersuchen, ist in Abb. 6.13 der totale Wirkungsquerschnitt an ^{12}C in PWIA und in DWIA dargestellt. Es wurde eine Rechnung mit dem vollen Potential I durchgeführt, sowie eine Rechnung in der der Realteil auf Null gesetzt wurde. Nahe der Schwelle hat der Realteil des Potentials einen großen Einfluß auf den Wirkungsquerschnitt. Jenseits einer Energie von 650 MeV aber

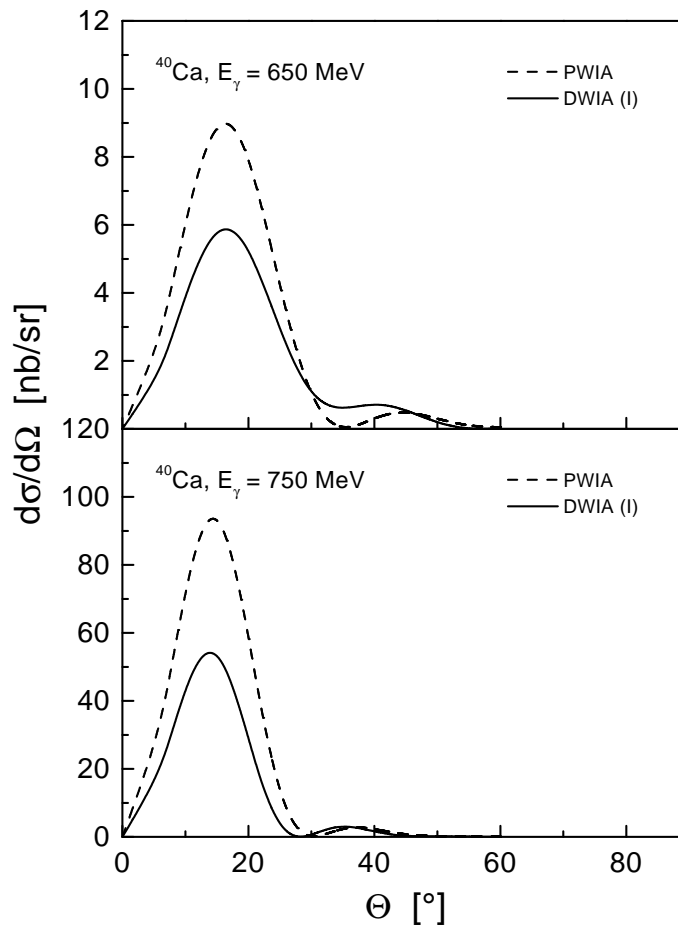


Abb. 6.12: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die kohärente η -Produktion an ^{12}C für zwei verschiedene Photonenergien im Labor in PWIA und DWIA für Potential I.

ist der Imaginärteil entscheidend, und der Realteil praktisch bedeutungslos. Hieraus folgt für das Potential II, daß die Annahme eines verschwindenden Realteils nur bei Energien nahe der Schwelle Einfluß auf das Endergebnis hat.

In Abb. 6.14 ist schließlich der totale Querschnitt für ^{12}C und ^{40}Ca in PWIA, sowie in DWIA unter Verwendung der beiden optischen Potentiale I und II dargestellt. Da der Wirkungsquerschnitt an ^{12}C von Resonanzen dominiert wird, während an ^{40}Ca das ω den größten Beitrag liefert, zeigen die totalen Wirkungsquerschnitte eine unterschiedliche Energieabhängigkeit.

Außer bei kleinen Energien im Fall von ^{40}Ca führen beide optischen Potentiale zu einer Absenkung des totalen Wirkungsquerschnitts. Der Unterschied zwischen Potential I und Potential II in Abb. 6.14 spiegelt die unterschiedliche Energieabhängigkeit des Imaginärteils des optischen Potentials in Abb. 6.10 wieder: Bei niedrigen Energien

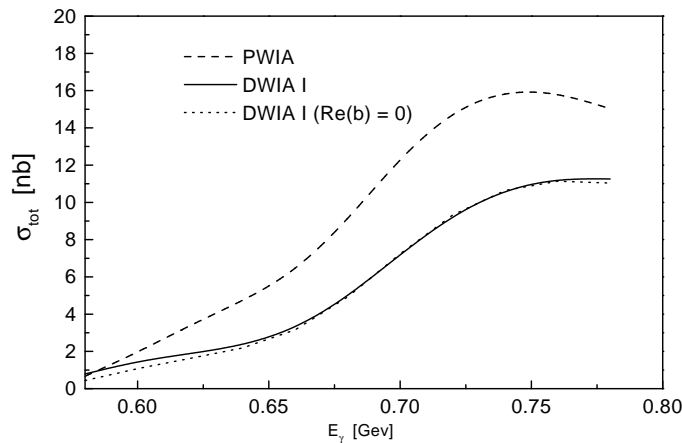


Abb. 6.13: Totaler Querschnitt für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen an ^{12}C in DWIA mit dem vollen optischen Potential I, sowie für $\text{Re}(b)=0$.

ist der Imaginärteil des Potentials I größer, was zu einer etwas stärkeren Absenkung des Wirkungsquerschnitts relativ zu Potential II führt. Bei höheren Energien ist der Imaginärteil des Potentials I kleiner, der daraus resultierende Wirkungsquerschnitt entsprechend größer als bei Potential II.

In [chi91] wurde untersucht, welchen Einfluß das nukleare Medium auf die Eigenschaften des $N(1535)$ hat. Anhand dieser Arbeit sollen nun mögliche Medium-Modifikationen des $N(1535)$ betrachtet werden. In einem dem Δ -Loch-Modell sehr ähnlichen Zugang wurde in [chi91] die $N(1535)$ -Selbstenergie in Kernmaterie berechnet. Dabei ergab sich ein Imaginärteil der Selbstenergie, der einer Verbreiterung des $N(1535)$ um etwa 70 MeV bei $\rho=\rho_o$ entspricht. Über den Realteil der $N(1535)$ -Selbstenergie wird in [chi91] keine abschließende Aussage gemacht, sondern es werden Szenarien untersucht, in denen das $N(1535)$ im Vergleich zu einem Nukleon stärker, schwächer oder in gleichem Maß gebunden ist.

Die Effekte dieser Selbstenergie sollen nun analog zu dem Fall des Δ bei der Pionenproduktion untersucht werden. Im folgenden wird angenommen, daß das $N(1535)$ im Kern dieselbe Attraktion wie ein Nukleon verspürt. Geht man von einer Tiefe des Potentials von 50 MeV bei $\rho=\rho_o$ aus, so entspricht das bei einer Mittelung über den Kern einer Verkleinerung der Masse des $N(1535)$ um 30-40 MeV. In Abb. 6.15 ist der Effekt einer solchen Massenverschiebung für ^{12}C dargestellt. Da der Beitrag des $N(1535)$ für ^{40}Ca nur sehr klein ist, hat die $N(1535)$ -Selbstenergie keinen nennenswerten Einfluß auf die η -Produktion an ^{40}Ca . Der Imaginärteil der Selbstenergie wird durch einen Shift der Breite des $N(1535)$ um 40 MeV realisiert, das Ergebnis einer entsprechenden Rechnung ist in ebenfalls in Abb. 6.15 dargestellt. Die Verkleinerung der Masse des $N(1535)$ führt zu einer Erhöhung des Wirkungsquerschnitts bei kleinen Energien und zu einer leichten Absenkung bei hohen Energien. Eine zusätzliche Verbreiterung des $N(1535)$ führt zu einer weiteren Erniedrigung des Wirkungsquerschnitts.

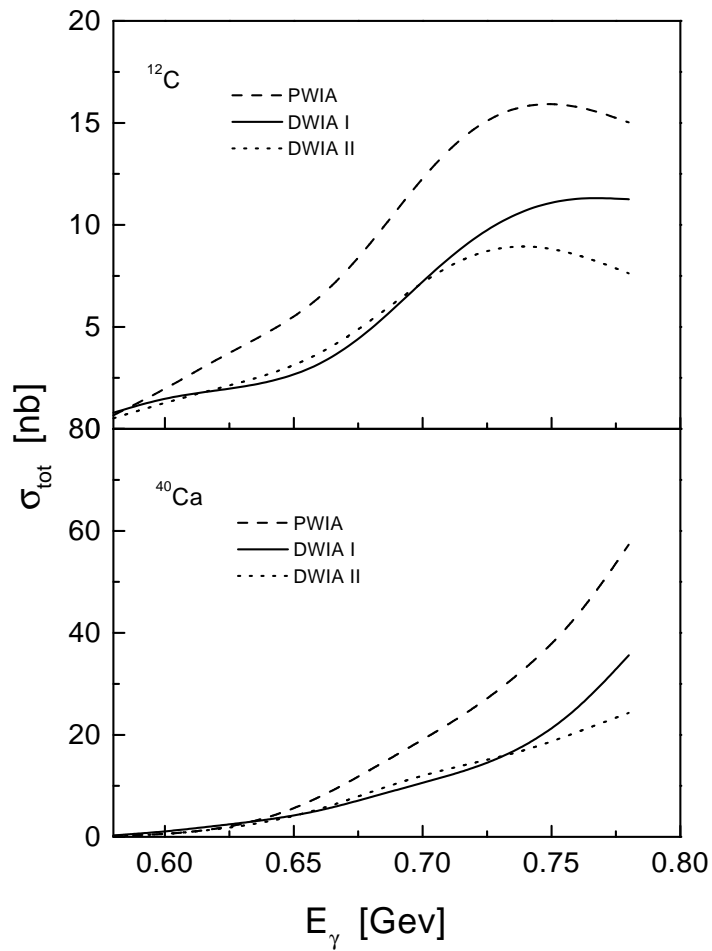


Abb. 6.14: Totaler Querschnitt für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen an ^{12}C und ^{40}Ca als Funktion der Photonenergie im Labor. Gezeigt ist eine PWIA-Rechnung, sowie DWIA-Rechnungen mit den optischen Potentialen aus Gl. (4.25) (I) sowie Gl. (4.27) (II).

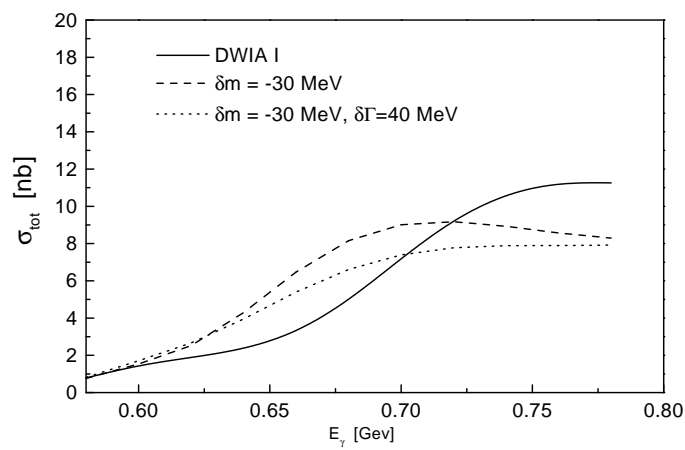


Abb. 6.15: Totaler Querschnitt für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen an ^{12}C in DWIA mit dem optischen Potential I. Dargestellt ist der Effekt einer Absenkung der Masse und einer Erhöhung der Breite des $N(1535)$.

6.5 Die Photoproduktion an ${}^4\text{He}$

Am Mainzer Beschleuniger MAMI wurde ein Experiment zur Photoproduktion von η -Mesonen an ${}^4\text{He}$ durchgeführt [kru98]. Die Auswertung dieses Experiments könnte zu den ersten experimentellen Daten für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen am Kern führen. Aus diesem Grunde wurden auch Rechnungen für ${}^4\text{He}$ durchgeführt.

Das in dieser Arbeit verwendete Modell für die Kernwellenfunktionen beruht auf der Annahme, daß der Grundzustand des Kerns durch ein mittleres Feld beschreiben werden kann. Während für ${}^{12}\text{C}$ und ${}^{40}\text{Ca}$ die Grundzustandseigenschaften gut reproduziert werden konnten (Kap. 4.2), ist nicht zu erwarten daß ein Kern mit nur vier Nukleonen durch ein mittleres Feld noch im Detail beschrieben werden kann. Dennoch kann dieses Modell verwendet werden um qualitative Aussagen über den Prozeß zu machen, insbesondere in bezug auf die Bedeutung von nicht-lokalen Effekten.

Nucleus	V_v (MeV)	r_v (fm)	a_v (fm)	V_s (MeV)	r_s (fm)	a_s (fm)
${}^4\text{He}$	375.7	1.2	0.287	-499.4	1.2	0.287

Tab. 6.1: Die in dieser Arbeit verwendeten Potentialparameter für ${}^4\text{He}$.

In Tab. 6.1 sind die zur Beschreibung von ${}^4\text{He}$ gewählten Potentialparameter angegeben. Der daraus resultierende Ladungsformfaktor ist in Abb. 6.16 dargestellt. Bis zu einem Impulsübertrag von etwa 3 fm^{-1} können die experimentellen Werte gut wiedergegeben werden. Bei der Bestimmung der Potentialparameter in Tab. 6.1 war es nicht möglich, gleichzeitig die Bindungsenergien und den Formfaktor zu reproduzieren. Dies ist ein für ${}^4\text{He}$ bekannter Effekt [pre93] und zeigt die sehr beschränkte Anwendbarkeit einer Rechnung im mittlerem Feld im Fall von ${}^4\text{He}$. Die in Tab. 6.1 angegebenen Parameter führen zu einer sehr großen Einteilchen-Bindungsenergie (-60 MeV). Allerdings kann bei einem so leichten Kern wie ${}^4\text{He}$ diese Einteilchen-Bindungsenergie nicht mehr direkt mit der experimentell bestimmten Separationsenergie verglichen werden, da Rearrangement-Beiträge wichtig werden [vau72, sch86]. Da die kohärente Photoproduktion vor allem auf den Formfaktor des Kerns, d.h. die räumliche Struktur der Wellenfunktionen, sensitiv ist, wurde bei der Bestimmung der Parameter in Tab. 6.1 in erster Linie auf die Reproduktion des Formfaktors Wert gelegt.

In Abb. 6.17 ist der differentielle Wirkungsquerschnitt an ${}^4\text{He}$ bei einer Photonenergie von 700 MeV im Labor dargestellt. Der Gesamtquerschnitt ist etwa um einen Faktor zwei kleiner als in [fix97], und um etwa einen Faktor drei kleiner als in [pie97]. An diesem Kern dominiert der ω -Graph deutlich. Der $N(1535)$ -Beitrag ist zu vernachlässigen und auch der Beitrag des $N(1520)$ ist klein. Dies ist sofort verständlich, da ${}^4\text{He}$ nur eine abgeschlossene Schale hat, so daß nicht-lokale Effekte unterdrückt sind (s. Diskussion im Zusammenhang mit Gl. (6.24)). Insbesondere ist für das $1s_{\frac{1}{2}}$ -Orbital der Vektoranteil der nicht-relativistischen Kerndichtematrix in Gl. (6.24) Null, da $P'_{\ell=0} = 0$. Nicht-lokale Effekte können deswegen nur noch als relativistische Korrekturen durch die kleinen Komponenten der Nukleonwellenfunktion auftreten, die den Bahndrehimpuls $\ell' = 1$ tragen. Die DWIA-Rechnung in Abb. 6.17 wurde mit dem Potential I erzeugt. Das optische Potential hat bei ${}^4\text{He}$ bei dieser Energie nur geringen Einfluß, da die aus

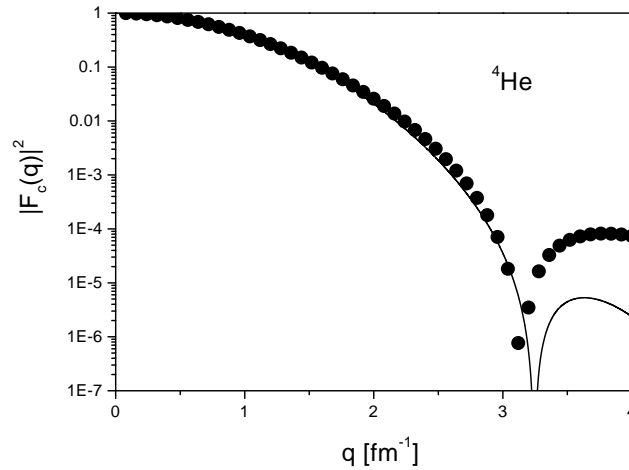


Abb. 6.16: Ladungsformfaktor für ${}^4\text{He}$ in dieser Arbeit (Linie) im Vergleich zu experimentellen Werten (Punkte).

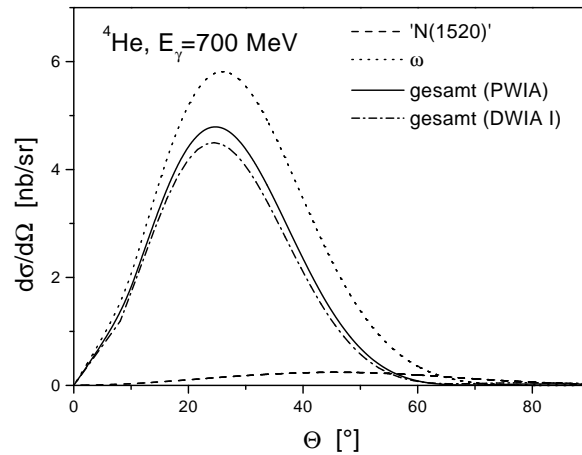


Abb. 6.17: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die kohärente η -Produktion an ${}^4\text{He}$ in PWIA und DWIA für Potential I.

dem Imaginärteil resultierende Absorption bei einem leichten Kern sehr klein ist.

In Abb. 6.18 ist der totale Wirkungsquerschnitt an ${}^4\text{He}$ in PWIA und in DWIA mit den Potentialen I und II dargestellt. Auch hier wird deutlich, daß der Einfluß der Absorption durch den Imaginärteil des optischen Potentials geringer als bei ${}^{12}\text{C}$ und ${}^{40}\text{Ca}$ ist. Es ist bemerkenswert, daß der totale Wirkungsquerschnitt an ${}^4\text{He}$ etwa genauso groß ist wie an ${}^{12}\text{C}$. Die Ursache hierfür ist, daß der Formfaktor von ${}^4\text{He}$ beim gleichen Impulsübertrag wesentlich größer ist als der von ${}^{12}\text{C}$. In [fix97] ist der Wirkungsquerschnitt an ${}^4\text{He}$ sogar um einem Faktor drei bis vier größer als an ${}^{12}\text{C}$.

Eine große Schwierigkeit bei der experimentellen Untersuchung der kohärenten Photoproduktion von η -Mesonen besteht darin, ein kleines kohärentes Signal von einem

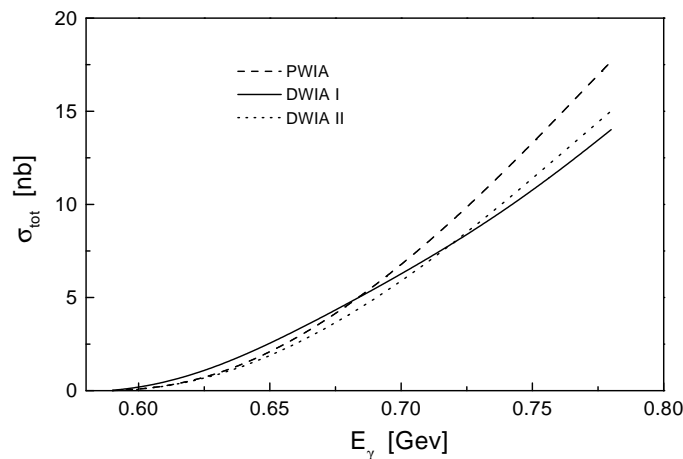


Abb. 6.18: Totaler Wirkungsquerschnitt für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen an ${}^4\text{He}$ in PWIA, sowie in DWIA unter Verwendung der optischen Potentiale I und II.

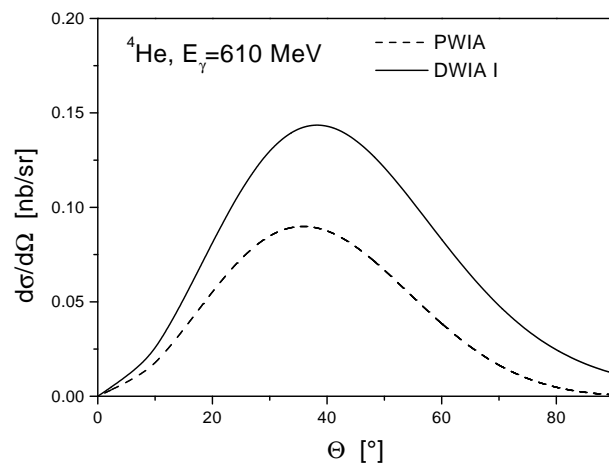


Abb. 6.19: Differentieller Wirkungsquerschnitt für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen an ${}^4\text{He}$ in PWIA und in DWIA für Potential I.

großen Untergrund zu trennen, der hauptsächlich durch quasifreie η -Produktion zustande kommt [kru98]. Bei der quasifreien η -Produktion wird ein Nukleon aus dem Kern herausgeschlagen. Da im Fall von ${}^4\text{He}$ dabei zusätzlich eine Separationsenergie von 20 MeV aufgebracht werden muß, ist die kinematische Schwelle für die quasifreie Produktion mit 610 MeV etwas höher als die für die kohärente Produktion bei etwa 590 MeV. Es gibt also einen kleinen kinematischen Bereich, in dem nur die kohärente Produktion von η -Mesonen möglich ist. Da in diesem Bereich die Chancen experimentell ein kohärentes Signal zu detektieren besonders gut sind, ist in Abb. 6.19 noch der differentielle Wirkungsquerschnitt bei einer Photonenergie von 610 MeV im Labor in

DWIA und PWIA dargestellt. Bei der DWIA-Rechnung wurde das Potential I verwendet. So nahe an der Schwelle hat der Realteil dieses Potentials großen Einfluß auf den Wirkungsquerschnitt und führt zu einer Erhöhung des Wirkungsquerschnitts.

Kapitel 7

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde ein Modell zur kohärenten Photoproduktion von pseudoskalaren Mesonen an sphärischen Kernen entwickelt und auf die Produktion von Pionen und η -Mesonen angewendet.

Die Grundlage des Modells ist die relativistische Stoßnäherung, die annimmt, daß nur ein Nukleon am Produktionsprozeß beteiligt ist. Der in diesem Rahmen benötigte Einteilchenoperator wurde mit Hilfe einer effektiven Feldtheorie konstruiert. Dabei wurde die volle relativistische Struktur des Produktionsoperators beibehalten. Insbesondere wurde der Operator direkt aus den Feynmangraphen extrahiert, dieses Vorgehen legt das Verhalten des Produktionsoperators abseits der Massenschale eindeutig fest. Die im Rahmen einer effektiven Feldtheorie benötigten Kopplungskonstanten wurden so gewählt, daß die Daten für die elementare Photoproduktion von Pionen und η -Mesonen gut reproduziert werden konnten.

Da der Kern nach der kohärenten Produktion wieder im Grundzustand vorliegt, ist zur Beschreibung des Anfangs- und Endzustandes des Kernels lediglich ein Modell für den Grundzustand des Kernels nötig. Es wurde ein relativistisches Modell verwendet, das mit Hilfe von parametrisierten Vektor- und Skalarpotentialen die Einteilchenwellenfunktionen liefert. Die Parameter der Potentiale wurden dabei in einem Fit an die Grundzustandseigenschaften der untersuchten Kerne bestimmt.

Im Gegensatz zu vielen früheren Arbeiten wurde die kohärente Produktion in dem vorliegenden Modell sowohl in bezug auf den Produktionsprozeß als auch hinsichtlich der Kernstruktur voll relativistisch behandelt. Außerdem wurde die nicht-lokale Struktur der Produktionsmatrixelemente berücksichtigt. Auch dies stellt eine entscheidende Erweiterung gegenüber früheren Arbeiten dar.

7.1 Pionen

Im Rahmen dieses Modells wurden Rechnungen zur kohärenten Photoproduktion von Pionen an ^{12}C und ^{40}Ca durchgeführt. Sowohl die elementare Reaktion als auch die Produktion am Kern wird hierbei von der Δ -Resonanz dominiert.

Der Beitrag des direkten Δ -Graphen wurde mit nicht-relativistischen, lokalen Rechnungen verglichen. Es ergab sich, daß die naive Verwendung einer nicht-relativistischen Reduktion des Produktionsoperators in einer lokalen Rechnung einen deutlich größeren

Wirkungsquerschnitt liefert, als die relativistische, nicht-lokale Rechnung dieser Arbeit. Erst die Mitnahme zusätzlicher kinematischer Korrekturen, die den Rückstoß des beteiligten Nukleons berücksichtigen, brachte qualitative Übereinstimmung zwischen beiden Rechnungen. Die verbleibenden Unterschiede sind aber immer noch so groß, daß sie bei einem detaillierten Vergleich mit Daten eine Rolle spielen.

Die Wechselwirkung des auslaufenden Pions mit dem Kern beeinflusst den Wirkungsquerschnitt stark. Diese Wechselwirkung wurde mit Hilfe eines empirischen optischen Potentials beschrieben. Die Parameter dieses Potentials wurden durch einen Fit an Daten für die elastische Streuung von Pionen an ^{12}C bestimmt. Nahe der Schwelle zeigt eine DWIA-Rechnung eine Erhöhung des Wirkungsquerschnitts relativ zur PWIA, während die starke Absorption im Pion-Kern-Potential im Bereich der Δ -Resonanz zu einer starken Absenkung des Wirkungsquerschnitts führt. Der Vergleich zwischen verschiedenen Pion-Kern-Potentialen ergab, daß das in dieser Arbeit verwendete empirische optische Potential in den entsprechenden Energiebereichen sehr ähnliche Ergebnisse lieferte wie mikroskopisch motivierte Potentiale.

Im Rahmen der herkömmlichen DWIA konnte die Energieabhängigkeit der A2-Daten reproduziert werden, die Daten werden aber insgesamt um einen Faktor zwei unterschätzt. Diese Diskrepanz ist deutlich größer als eventuelle Modellunsicherheiten und zeigte die Notwendigkeit, über die übliche Form der DWIA hinauszugehen.

Diese Verbesserung der DWIA geschah durch die Berücksichtigung von Mediummodifikationen des Produktionsoperators. Hierbei wurde der ω -Graph unverändert gelassen, der Nukleonpropagator wurde im mittleren Feld des Kerns berechnet. Die Wechselwirkung des Δ mit dem Kern wurde effektiv durch eine Verkleinerung der Masse des Δ , sowie eine Vergrößerung der Δ -Breite beschrieben. Der Vergleich mit den A2-Daten ergab eine Massenänderung des Δ von -30 MeV. Über eine Verbreiterung des Δ konnte anhand der A2-Daten keine Aussage gemacht werden. Der Vergleich mit den vorläufigen TAPS-Daten ergab hingegen, daß zusätzlich zu einer Massenabsenkung eine Verbreiterung des Δ nötig ist, um den differentiellen Wirkungsquerschnitt bei höheren Energien richtig wiederzugeben. Über eine mögliche Energieabhängigkeit der Δ -Selbstenergie konnte im Vergleich mit den TAPS-Daten keine abschließende Aussage gemacht werden.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß der in dieser Arbeit gewählte Zugang bei Berücksichtigung von Mediummodifikationen des Produktionsoperators die existierenden experimentellen Daten gut beschreiben kann. Die Werte für die Verbreiterung und die Massenabsenkung des Δ , die notwendig waren, um Übereinstimmung mit den Daten zu erreichen, müssen dabei als über den Kernbereich gemittelte Größen interpretiert werden. Der für die Massenabsenkung gefundene Wert von -30 MeV erscheint im Vergleich zu der empirisch bestimmten Tiefe des Δ -Potentials im Kern von 30 MeV [eri88] etwas hoch, aber noch nicht unrealistisch, da zusätzliche Effekte wie z.B. eine Spin-Orbit-Wechselwirkung in der vorliegenden Rechnung nicht miteingeschlossen sind. Der Wert der Verbreiterung des Δ von 20 - 30 MeV liegt etwas unterhalb des in [ose87] angegebenen Wertes von 40 MeV bei einer effektiven Dichte von $0.75\rho_0$.

7.2 η -Mesonen

Die Bedeutung der einzelnen Beiträge sind in der elementaren Photoproduktion von η -Mesonen und in der Produktion am Kern sehr unterschiedlich.

Der ω -Graph zeichnet sich dadurch aus, daß er einen rein lokalen Beitrag liefert, d.h. die lokale Näherung hat keinen Einfluß. In allen bisherigen Arbeiten lieferte das ω den dominanten Beitrag. Anhand dieses Graphen konnte die starke Abhängigkeit des kohärenten Produktionsquerschnitts von dem Verhalten des Produktionsoperators abseits der Massenschale gezeigt werden. Verschiedene Versionen des Produktionsoperators liefern Ergebnisse, die sich um bis zu eine Größenordnung voneinander unterscheiden.

Die $N(1535)$ -Resonanz, die den elementaren Prozeß dominiert, lieferte in allen bisherigen Arbeiten nur einen zu vernachlässigenden Beitrag zur kohärenten Photoproduktion am Kern. Der Grund für diese starke Unterdrückung des $N(1535)$ ist zum einen die Isospinstruktur seiner Kopplung an das Photon, die von einer isovektoriellen Kopplung dominiert wird. Zum anderen führt das $N(1535)$ zu einem Produktionsoperator, der den Spin des Nukleons umklappt. In einer lokalen Näherung, die von allen bisherigen Arbeiten verwendet wurde, ist ein solcher Prozeß stark unterdrückt. Im Rahmen des in der vorliegenden Arbeit verwendeten nicht-lokalen Modells wurde gezeigt, daß das $N(1535)$ durch nicht-lokale Effekte einen beträchtlichen Beitrag zur kohärenten Produktion liefern kann. Diese nicht-lokalen Effekte zeigen eine starke Abhängigkeit von der Schalenstruktur des verwendeten Kerns, so daß im Falle von ^{12}C aufgrund der offenen $1p$ -Schale das $N(1535)$ einen Beitrag liefert, der von der Größe her dem des ω vergleichbar ist, aber eine andere Winkelabhängigkeit zeigt. An ^{40}Ca hingegen ist der Beitrag des $N(1535)$ zu vernachlässigen.

Aufgrund der komplizierten Struktur der Kopplung des $N(1520)$ an das Photon, konnte für diese Resonanz nur eine Abschätzung angegeben werden. Diese Abschätzung ergab, daß auch der Beitrag des $N(1520)$ stark von nicht-lokalen Effekten beeinflusst wird. An ^{12}C war ist der so gefundene $N(1520)$ -Beitrag dominant, während er an ^{40}Ca kleiner ist als der Beitrag des ω .

Der Effekte der η -Kern Wechselwirkung wurden mit Hilfe von zwei einfachen optischen Potentialen untersucht. Es ergab sich, daß beide Potentiale, außer in einem Bereich nahe der Schwelle, aufgrund des großen Imaginärteils zu einer Absenkung des Wirkungsquerschnitts führen. Unterschiede zwischen den beiden untersuchten optischen Potentialen zeigen sich in der Energieabhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts.

Zusätzlich wurden auch Rechnungen für ^4He durchgeführt, obwohl das in dieser Arbeit verwendete Modell für den Grundzustand des Kerns nur sehr bedingt auf einen so leichten Kern anwendbar ist. Unabhängig von den daraus resultierenden Modellabhängigkeiten konnte aber gezeigt werden, daß nicht-lokale Effekte im Fall von ^4He aufgrund der Quantenzahlen dieses Kerns nur klein sind. Folglich ist die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen stark durch den lokalen ω -Graphen dominiert. Diese Ergebnisse sind für ein Experiment am Mainzer Beschleuniger MAMI von Bedeutung, bei dem die Photoproduktion von η -Mesonen an ^4He untersucht wurde, und das zu den ersten experimentellen Daten für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen am

Kern führen könnte.

7.3 Schlußfolgerungen

Zusammenfassend ist zu festzustellen, daß sich das in der vorliegenden Arbeit vorgeschlagene relativistische, nicht-lokale Modell in der kohärenten Photoproduktion von Pionen bewährt hat. Die im Vergleich zu den Daten gewonnenen Erkenntnisse über die Medium-Modifikationen des Produktionsoperators sind in Übereinstimmung mit Ergebnissen des Δ -Loch-Modells.

Im Gegensatz hierzu existieren für die kohärente Photoproduktion von η -Mesonen noch keine experimentellen Daten. Außerdem sind die theoretischen Unsicherheiten größer als im Falle der Produktion von Pionen. Insbesondere das Verhalten des Produktionsoperators abseits der Massenschale, das in erster Linie verantwortlich ist für die zum Teil eklatanten Unterschiede zwischen verschiedenen Rechnungen, ist nicht sicher festgelegt. In diesem Zusammenhang ist aber von Bedeutung, daß das in dieser Arbeit angenommene Verhalten des Produktionsoperators abseits der Massenschale physikalisch motiviert und theoretisch gut fundiert ist, während insbesondere das in [pie97] verwendete Verhalten von den technischen Details der Behandlung des elementaren Prozesses abhängt. Die in [pie97] gefundenen Effekte, wie zum Beispiel die starke Erhöhung der kohärenten Produktion an ^{12}C , müßten so auch in der kohärenten Produktion von Pionen auftreten. Aus diesem Grunde ist die gute Reproduktion der Daten für die Produktion von Pionen an ^{12}C in dieser Arbeit eine deutliche Bestätigung für das verwendete Verhalten des Produktionsoperators abseits der Massenschale.

Weiterhin konnte in dieser Arbeit nachgewiesen werden, daß eine nicht-lokale Behandlung der η -Produktion unabdingbar ist, um diesen Prozeß zuverlässig zu beschreiben. Im Gegensatz dazu ist die kohärente Photoproduktion von Pionen nicht sehr sensitiv auf nicht-lokale Effekte.

Experimentelle Daten für die kohärente Produktion von η -Mesonen würden weitere Schlußfolgerungen erlauben. Hierbei ist insbesondere ^{12}C von Interesse, da die Unterschiede zwischen den Ergebnissen verschiedener Modelle für diesen Kern am größten sind. Um zwischen den einzelnen Modellen zu unterscheiden, wäre es bereits ausreichend, die Größenordnung des differentiellen Wirkungsquerschnitts, sowie die qualitative Winkelabhängigkeit zu kennen.

7.4 Ausblick

Das in dieser Arbeit vorgestellte Modell für die kohärente Photoproduktion stellt eine deutliche Verbesserung gegenüber existierenden Rechnungen dar. Um mögliche Ansatzpunkte für weitere Untersuchungen zu diskutieren, muß wieder zwischen Pionen und η -Mesonen unterschieden werden.

Im Fall der Pionen ist das entwickelte Modell bereits sehr ausgereift, was einen detaillierten Vergleich mit experimentellen Daten zuließ. In Anbetracht der sehr guten Daten ist eine nähere Untersuchung der Effekte der Kernstruktur denkbar. Hierbei könnten verschiedene Modelle für den Grundzustand des Kerns miteinander verglichen

werden. Der Vergleich mit experimentellen Daten bei großen Impulsüberträgen könnte es ermöglichen, Korrelationen in der Kernwellenfunktion zu studieren.

Das Modell könnte außerdem verbessert werden, indem der modifizierte Δ -Propagator in einem mikroskopischen Zugang bestimmt wird. So wären zuverlässigere Schlussfolgerungen über die Eigenschaften dieser Resonanz in Kernmaterie möglich. Leider ist dies in einem relativistischen Zugang an einem endlichen Kern technisch sehr aufwendig, hierzu ist eine vollständig relativistische Version des Δ -Loch-Modells nötig.

In der Produktion von η -Mesonen stellt die näherungsweise Behandlung des $N(1520)$ im Ortsraum einen großen Nachteil dar. Die Rechnung im Ortsraum hat sich bei der Pionenproduktion bewährt; es konnte trotz aufwendiger Numerik eine vertretbare Laufzeit der Programme erreicht werden. Eine exakte Behandlung der $N(1520)$ -Resonanz ist aber im Ortsraum nicht mit vertretbarem Aufwand möglich. Eine Rechnung im Impulsraum würde es ermöglichen, auch das $N(1520)$ exakt zu behandeln. Konzeptionell stellt das auf der Grundlage der vorliegenden Arbeit kein Problem dar. Der dazu nötige technische Aufwand ist aber schwierig abzuschätzen, denn eine naive numerische Implementation würde mit großer Wahrscheinlichkeit zu sehr großem Rechenaufwand führen. Auch die Transformation der Streuwellenfunktion des Pions in den Impulsraum stellt ein mögliches technisches Problem dar, da eine Funktion numerisch berechnet werden muß, die sich bei schwacher Wechselwirkung mit dem Kern einer δ -Funktion annähert. Um vertretbare Laufzeiten zu erreichen wäre es nötig, die Matrixstruktur der nicht-lokalen Dichtematrix des Kerns im Impulsraum genau zu analysieren, und mit Hilfe von Spurrelationen die auszuwertenden Matrixelemente zu vereinfachen. Außerdem müßte versucht werden, die auftretenden Winkelintegrationen, ähnlich wie im Ortsraum, so weit wie möglich analytisch auszuwerten. Eine solche Rechnung im Impulsraum würde es dann ermöglichen, jede beliebige Impulsabhängigkeit des Produktionsoperators exakt zu behandeln. Außerdem könnten nicht-lokale Effekte auch relativistisch untersucht werden.

Anhang A

Notation

In dieser Arbeit wird die Metrik von [itz80] verwendet:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.1})$$

Über doppelt vorkommende Indizes ist zu summieren. Damit ist das Viererskalarprodukt definiert als:

$$x_\mu y^\mu = x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3. \quad (\text{A.2})$$

In der Ortsdarstellung schreibt sich der Impulsoperator als:

$$\begin{aligned} p^\mu &= i\partial^\mu \\ &= \left(i\frac{\partial}{\partial t}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}, \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

A.1 γ -Matrizen

Die γ -Matrizen erfüllen folgende Vertauschungsrelationen:

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2g_{\mu\nu}. \quad (\text{A.4})$$

γ_0 ist hermitesch und die $\gamma_i; i = 1, 2, 3$ sind antihermitesch. Weiter ist definiert:

$$\begin{aligned} \gamma_5 &= i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 \\ \sigma_{\mu\nu} &= \frac{i}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu] \\ &= \frac{i}{2}(\gamma_\mu\gamma_\nu - \gamma_\nu\gamma_\mu). \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Explizite Darstellung der γ -Matrizen, Pauli-Matrizen

Die γ -Matrizen haben die folgenden Eigenschaften:

Bei hermitescher Konjugation

$$\begin{aligned}
\gamma_\mu^\dagger &= \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0 \\
\gamma_5^\dagger &= -\gamma_0 \gamma_5 \gamma_0 = \gamma_5 \\
(\sigma_{\mu\nu})^\dagger &= \gamma_0 \sigma_{\mu\nu} \gamma_0
\end{aligned} \tag{A.6}$$

Bei Kontraktionen

$$\begin{aligned}
a_\mu \gamma^\mu b_\nu \gamma^\nu &= a_\mu b^\mu - i \sigma^{\mu\nu} a_\mu b_\nu \\
\gamma_\lambda \gamma^\lambda &= 4 \\
\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma^\lambda &= -2 \gamma_\mu \\
\gamma_\lambda \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma^\lambda &= 4 g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

Weitere Eigenschaften der γ -Matrizen finden sich z.B. bei [itz80].
In dieser Arbeit wird als explizite Darstellung

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{1} & 0 \\ 0 & -\mathbb{1} \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{A.8}$$

mit

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{A.9}$$

verwendet, wobei die $\vec{\sigma}$ die sog. Pauli-Spinmatrizen sind.
Eine wichtige Relation, die die Paulimatrizen erfüllen, ist

$$\vec{\sigma} \cdot \vec{a} \vec{\sigma} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}), \tag{A.10}$$

was sich leicht durch Ausnutzung der Vertauschungsrelationen

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2i \varepsilon_{ijk} \sigma_k, \quad [\sigma_i, \sigma_j] = 0 \tag{A.11}$$

beweisen läßt.

Anhang B

Die Lösung der Streugleichung für das Pion

In diesem Kapitel wird die numerische Lösung für der Klein-Gordon-Gleichung mit einem optischen Potential erläutert. In der allgemeinsten Form enthält die Klein-Gordon-Gleichung für die Wellenfunktion ψ das Coulombpotential V_c , sowie das optische Potential V_{opt} :

$$\left((E - V_c)^2 - 2EV_{opt} + \Delta - m^2 \right) \psi = 0. \quad (\text{B.1})$$

Hierbei ist E die Energie des Mesons, m seine Masse und $\Delta = \vec{\nabla}^2$ ist der Laplace-Operator. Das Coulombpotential wird aus der Ladungsdichte berechnet:

$$V_c(r) = \alpha Z_\phi \int d^3r' \frac{\rho_c(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (\text{B.2})$$

$\alpha = 1/137$ ist die Feinstrukturkonstante, Z_ϕ ist die Ladung des Mesons in Einheiten von e und ρ_c ist die auf Z normierte Ladungsdichte des Kerns. Das Integral in Gl. (B.2) wird numerisch berechnet.

Die allgemeinste Form des optischen Potentials ist (vgl. Gl. (4.21) und Gl. (4.24):

$$\begin{aligned} -2EV_{opt} &= \tilde{a}_1(r) + \vec{\nabla} a_2(r) \vec{\nabla} \\ &= \tilde{a}_1(r) + a'_2(r) \partial_r + a_2(r) \Delta, \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

wobei die Umformung in der zweiten Zeile dieser Gleichung aufgrund der sphärischen Symmetrie des Potentials möglich ist. Folglich kann man Gl. (B.1) umschreiben:

$$\left(k^2 + a_1(r) + a'_2(r) \partial_r + (1 + a_2(r)) \Delta \right) \psi = 0. \quad (\text{B.4})$$

Hierbei ist $k^2 = E^2 - m^2$ und $a_1(r) = \tilde{a}_1(r) - 2EV_c(r) + V_c^2(r)$. Macht man nun den Ansatz $\psi = u_\ell(r) \mathcal{Y}_{\ell m}(\Omega)$, so findet man:

$$\left\{ \left[k^2 + a_1 - \frac{a'_2}{r} \right] u_\ell + a'_2 u'_\ell + (1 + a_2) \left[u''_\ell - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} u_\ell \right] \right\} = 0. \quad (\text{B.5})$$

Dies läßt sich umformen zu:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{k^2 + a_1 - \frac{a_2'}{r}}{1 + a_2} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] u_\ell + \frac{a_2'}{1 + a_2} u_\ell' + u_\ell'' \\ & = b_2 u_\ell + b_1 u_\ell' + u_\ell'' = 0 \quad . \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

Führt man jetzt folgende Transformation durch:

$$u_\ell(r) = y(r)f(r) \quad (\text{B.7})$$

mit

$$f(r) = \frac{1}{\sqrt{1 + a_2(r)}} \quad , \quad (\text{B.8})$$

so findet man:

$$y'' + \left(\frac{f''(r)}{f(r)} + b_1(r) \frac{f'(r)}{f(r)} + b_2 \right) y = 0 \quad . \quad (\text{B.9})$$

Da diese Gleichung die Form $y'' + f(r)y = 0$ kann sie sehr einfach mit der Numerov-Methode [lam73] numerisch gelöst werden. Aus der Lösung y kann dann mit Hilfe von Gl. (B.7) u_ℓ bestimmt werden. u_ℓ wird dann normiert, indem man das bekannte asymptotische Verhalten einer auslaufenden Welle ausnutzt [joa83]:

$$u_\ell \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{k} e^{i(\sigma_\ell + \delta_\ell)} (\cos(\delta_\ell) F_\ell(kr) + \sin(\delta_\ell) G_\ell(kr)) \quad . \quad (\text{B.10})$$

Hierbei ist δ_ℓ die Streuphase der ℓ 'ten Welle. Im Fall eines komplexen optischen Potentials wird auch δ_ℓ komplex. F_ℓ und G_ℓ sind die sphärischen Coulombfunktionen und σ_ℓ ist die Coulomb-Streuphase. Diese Größen sowie die Anpassungsprozedur sind in Kap. 6 von [joa83] ausführlich diskutiert. Für ein ungeladenes Meson wird aus Gl. (B.10)

$$u_\ell \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{k} e^{i\delta_\ell} (\cos(\delta_\ell) j_\ell(kr) + \sin(\delta_\ell) n_\ell(kr)) \quad , \quad (\text{B.11})$$

wobei j_ℓ und n_ℓ die sphärischen Besselfunktionen sind. Die auslaufende Streuwelle zu gegebenem Impuls \vec{k} ist dann durch folgenden Ausdruck gegeben:

$$\phi_\pi^{(+)}(\vec{k}, \vec{r}) = 4\pi \sum_{\ell, m} i^\ell u_\ell(r) Y_{\ell m}^*(\Omega_k) Y_{\ell m}(\Omega_r) \quad . \quad (\text{B.12})$$

Im Rahmen der DWIA benötigt man schließlich die Streuwellenfunktion mit einlaufenden Randbedingungen [joa83, sch87]:

$$\phi_\pi^{(-)}(\vec{k}, \vec{r}) = 4\pi \sum_{\ell, m} i^\ell u_\ell^*(r) Y_{\ell m}^*(\Omega_k) Y_{\ell m}(\Omega_r) \quad . \quad (\text{B.13})$$

Anhang C

Die Auswertung des Matrixelements

In diesem Anhang sollen die technischen Einzelheiten der numerischen Auswertung des Matrixelements beschrieben werden. Im folgenden Abschnitt werden zunächst die Formeln angegeben, die für die auftretenden Wellenfunktionen und den Propagator verwendet werden. In Kap. C.2 wird dann die daraus resultierende Struktur des Matrixelements diskutiert. Die Auswertung der Vertizes wird schließlich in Kap. C.3 und C.4 beschrieben.

Als Beispiel betrachten wir den Ausdruck, der für den direkten Bornterm der Pionphotoproduktion steht (Gl. (4.43)):

$$T_{Ndir}^{(\lambda)} = \sum_{\alpha occ.} \int d^3x d^3y \times \\ \bar{\psi}_\alpha(\vec{x}) \phi_\pi^{(-)*}(\vec{x}) \Gamma_{\pi NN} G_N(E; \vec{x}, \vec{y}) \Gamma_{\gamma NN}^\mu \phi_\mu^{(\lambda)}(\vec{y}) \psi_\alpha(\vec{y}) \quad . \quad (C.1)$$

In dieser Formel steht ψ_α für die Wellenfunktion des gebundenen Nukleons, $\phi_\pi(\phi_\mu^{(\lambda)})$ ist die Wellenfunktion des Pions (des Photons). $\Gamma_{\pi NN}$ und $\Gamma_{\gamma NN}$ stehen für die entsprechenden Vertizes und G_N ist der Nukleonenpropagator. Die numerische Berechnung dieses Ausdrucks soll im folgenden beschrieben werden.

C.1 Partialwellenentwicklungen

Partialwellenentwicklungen dienen dazu, in Kugelkoordinaten die Abhängigkeit der Wellenfunktion von Radialkoordinate und den Winkeln zu separieren. Wir gehen von der wohlbekanntem Partialwellenentwicklung der ebenen Welle aus:

$$e^{i\vec{k}\vec{x}} = 4\pi \sum_{\ell, m} i^\ell j_\ell(kx) Y_{\ell m}^*(\Omega_k) Y_{\ell m}(\Omega_x) \quad . \quad (C.2)$$

Hierbei steht j_ℓ für die sphärische Besselfunktion der Ordnung ℓ . Da das einlaufende Photon als ebene Welle betrachtet wird, kann seine Wellenfunktion wie folgt geschrieben werden:

$$\phi_\mu^{(\lambda)}(\vec{x}) = e^{i\vec{k}\vec{x}} \varepsilon_\mu^{(\lambda)} \quad , \quad (\text{C.3})$$

wobei $\varepsilon_\mu^{(\lambda)}$ für den Polarisationsvektor des Photons steht. Sämtliche Normierungsfaktoren für die ein- und auslaufenden Wellenfunktionen sind bei der Herleitung von Gl. (4.41) für den Wirkungsquerschnitt bereits berücksichtigt worden, und tauchen deshalb hier nicht mehr auf. Gl. (C.2) kann also direkt für das Photon verwandt werden. Im Falle eines freien auslaufenden Pions kann Gl. (C.2) ebenfalls benutzt werden. Im Falle eines Streupotentials hat man (vgl. Gl. (B.12)):

$$\phi_\pi^{(+)}(\vec{k}, \vec{x}) = 4\pi \sum_{\ell, m} i^\ell u_\ell(x) Y_{\ell m}^*(\Omega_k) Y_{\ell m}(\Omega_x) \quad . \quad (\text{C.4})$$

\vec{k} ist hierbei der asymptotische Impuls des Pions. Der Index '+' zeigt an, dass diese Wellenfunktion einer auslaufenden Randbedingung genügt.

Die Wellenfunktion des gebundenen Nukleons liegt als Bindungszustand in einem rotationssymmetrischen Potential naturgemäß bereits in einer faktorisierten Form vor:

$$\psi_\alpha(\vec{x}) = \begin{pmatrix} g_a(x) \mathcal{Y}_{J\ell}^M(\Omega_x) \\ f_a(x) \mathcal{Y}_{J\ell'}^M(\Omega_x) \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{C.5})$$

Hierbei ist $\alpha = (a, M)$ und $a = (n, \ell, J)$, $\ell' = \ell \pm 1$ für $J = \ell \pm \frac{1}{2}$. $\mathcal{Y}_{J\ell}^M(\Omega_x)$ ist gegeben durch:

$$\mathcal{Y}_{J\ell}^M(\Omega_x) = \begin{pmatrix} \langle J, M | \ell, M - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle Y_{\ell, M - \frac{1}{2}}(\Omega_r) \\ \langle J, M | \ell, M + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle Y_{\ell, M + \frac{1}{2}}(\Omega_r) \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Um eine vollständige Trennung von Radial- und Winkelabhängigkeit in dem zu berechnenden Matrixelement zu erreichen, wird nun eine der Partialwellenentwicklung äquivalente Form des Spin- $\frac{1}{2}$ -Propagators G_N benötigt. Dazu gehen wir von der bekannten Partialwellenentwicklung des skalaren Propagators aus [joa83, mes91]:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} i e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} &= \frac{-i}{4\pi} \frac{e^{ik|\vec{x}-\vec{y}|}}{|\vec{x}-\vec{y}|} \\ &= k \sum_{\ell, m} \left[\theta(y-x) j_\ell(kx) h_\ell^{(1)}(ky) \right. \\ &\quad \left. + \theta(x-y) j_\ell(ky) h_\ell^{(1)}(kx) \right] Y_{\ell m}(\Omega_x) Y_{\ell m}^*(\Omega_y) \quad . \quad (\text{C.7}) \end{aligned}$$

Hierbei ist $k = \sqrt{E^2 - m^2}$. j_ℓ ist die sphärische Besselfunktion und $h_\ell^{(1)}(kx)$ ist die Hankelfunktion erster Art. Diese Funktionen erfüllen dieselbe Differentialgleichung, genügen aber unterschiedlichen Randbedingungen. j_ℓ ist regulär am Ursprung, $h_\ell^{(1)}(kx)$

ist definiert als eine Linearkombination der Besselfunktion j_ℓ und der Neumannfunktion n_ℓ :

$$h_\ell^{(1)}(x) = j_\ell(x) + in_\ell(x) \quad . \quad (\text{C.8})$$

$h_\ell^{(1)}$ ist folglich irregulär am Ursprung und hat das asymptotische Verhalten:

$$h_\ell^{(1)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -i \frac{e^{i(x - \frac{\pi\ell}{2})}}{x} \quad . \quad (\text{C.9})$$

Falls im Nenner des Propagators ein Imaginärteil $\text{Im}\Sigma$ auftritt, so ist k durch $k = \sqrt{E^2 - m^2 + i\text{Im}\Sigma}$ gegeben. Bessel- und Hankelfunktionen sind auch für komplexe Argumente eindeutig definiert [abr68]. Die Voraussetzung hierfür ist aber, daß $\text{Im}\Sigma$ nicht vom Impuls \vec{p} abhängt, da sonst Gl. (C.7) nicht mehr gültig ist. Im Falle eines impulsabhängigen Imaginärteils im Nenner, kann man die Fouriertransformierte des Propagators nicht mehr in geschlossener Form angeben.

Um analog hierzu den Spin- $\frac{1}{2}$ -Propagator zu konstruieren, schreiben wir Gl. (C.7) um:

$$\begin{aligned} & \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} i e^{i\vec{p}(\vec{x}-\vec{y})} \frac{1}{E^2 - \vec{p}^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ &= k \sum_{\ell,m} \left[\theta(y-x) \phi_{\ell m}^{(1)}(\vec{x}) \phi_{\ell m}^{(2)*}(\vec{y}) + \theta(x-y) \phi_{\ell m}^{(3)}(\vec{x}) \phi_{\ell m}^{(4)*}(\vec{y}) \right] \quad , \quad (\text{C.10}) \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \phi_{\ell m}^{(1)}(\vec{x}) &= j_\ell(kx) Y_{\ell m}(\Omega_x) \quad , \quad \phi_{\ell m}^{(2)*}(\vec{y}) = h_\ell^{(1)}(ky) Y_{\ell m}^*(\Omega_y) \quad , \\ \phi_{\ell m}^{(3)}(\vec{x}) &= h_\ell^{(1)}(kx) Y_{\ell m}(\Omega_x) \quad , \quad \phi_{\ell m}^{(4)*}(\vec{y}) = j_\ell(ky) Y_{\ell m}^*(\Omega_y) \quad . \quad (\text{C.11}) \end{aligned}$$

Das Entscheidende an dem Ausdruck in Gl. (C.10) ist nun, daß der Propagator zerlegt ist in eine Summe über lauter Terme, die nicht nur bezüglich der Radial- und der Winkelabhängigkeit faktorisieren, sondern auch bezüglich der Abhängigkeit von \vec{x} und \vec{y} . In jedem einzelnen dieser Terme steht ein Produkt aus zwei Termen $\phi_{\ell m}^{(i)}(\vec{x})$ und $\phi_{\ell m}^{(j)*}(\vec{y})$. Da $h_\ell^{(1)}$ dieselbe Differentialgleichung wie j_ℓ erfüllt, sind beide diese Terme Lösungen der freien Bewegungsgleichung, also der Klein-Gordon-Gleichung. Allerdings sind sie nicht notwendigerweise normierbar, sie sind also nur im mathematischen Sinne Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung. Das asymptotische Verhalten der $\phi_{\ell m}^{(i)}$ ist dergestalt, daß der Propagator die physikalischen Randbedingungen erfüllt, also für $(x \rightarrow 0, y \text{ fest})$ regulär ist, und sich als Funktion von x für $(x \rightarrow \infty, y \text{ fest})$ wie eine auslaufende Kugelwelle verhält.

Analog hierzu kann man nun eine entsprechend Form für den Spin- $\frac{1}{2}$ -Ppropagator konstruieren [she87]:

$$\begin{aligned} G_N(E; \vec{x}, \vec{y}) &= k(E + m_N) \sum_{J\ell M} \left[\theta(y-x) \psi_{J\ell M}^{(1)}(E, \vec{x}) \otimes \bar{\psi}_{J\ell M}^{(2)}(E, \vec{y}) \right. \\ &\quad \left. + \theta(x-y) \psi_{J\ell M}^{(3)}(E, \vec{x}) \otimes \bar{\psi}_{J\ell M}^{(4)}(E, \vec{y}) \right] \quad . \quad (\text{C.12}) \end{aligned}$$

mit

$$\psi_{J\ell M}^{(1,3)}(E, \vec{x}) = \begin{pmatrix} g_{J\ell}^{(1,3)}(kx) \mathcal{Y}_{J\ell}^M(\Omega_x) \\ i f_{J\ell}^{(1,3)}(kx) \mathcal{Y}_{J\ell'}^M(\Omega_x) \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

und

$$\bar{\psi}_{J\ell M}^{(2,4)}(E, \vec{x}) = \left(g_{J\ell}^{(2,4)}(kx) \mathcal{Y}_{J\ell}^{M\dagger}(\Omega_x), i f_{J\ell}^{(2,4)}(kx) \mathcal{Y}_{J\ell'}^{M\dagger}(\Omega_x) \right) \quad , \quad (\text{C.14})$$

wobei $\ell = J \pm \frac{1}{2} = \ell' \pm 1$. Die Radialanteile der großen Komponenten dieser Spinoren sind gegeben durch:

$$g_{J\ell}^{(1,4)}(kx) = j_\ell(kx) \quad \text{und} \quad g_{J\ell}^{(2,3)}(kx) = h_\ell^{(1)}(kx) \quad . \quad (\text{C.15})$$

Die Radialanteile der kleinen Komponenten ergeben sich daraus durch

$$f_{J\ell}^{(i)}(x) = \frac{1}{E + m_N} \left(\frac{d}{dx} + \frac{1 + \kappa}{x} \right) g_{J\ell}^{(i)}(x) \quad , \quad (\text{C.16})$$

mit $\kappa = \pm(J + \frac{1}{2})$ für $\ell = J \pm \frac{1}{2}$. Die auf diese Art konstruierten Spinoren $\psi_{J\ell M}^{(1,3)}(E, \vec{x})$ und $\bar{\psi}_{J\ell M}^{(2,4)}(E, \vec{x})$ sind mathematische Lösungen der freien Diracgleichung zu vorgegebener Energie E . Der Spin- $\frac{1}{2}$ -Ppropagator ist also im Ortsraum eine Summe über dyadische Produkte zweier Spinoren.

Der volle Nukleonpropagator wird analog hierzu konstruiert, indem numerische Lösungen der Bewegungsgleichung Gl. (4.1) eingesetzt werden. Dabei wird dabei als Randbedingung gefordert, daß $g_{J\ell}^{(1,4)}$ regulär im Ursprung ist, während $g_{J\ell}^{(2,3)}$ die Randbedingung einer auslaufenden Streuwelle (Gl. (B.11)) erfüllen. Der so konstruierte Propagator erfüllt dann Gl. (5.8).

C.2 Die Drehimpulsstruktur des Matrixelements

Die im vorhergehenden Abschnitt aufgeführten Partialwellenentwicklungen für die Wellenfunktionen und den Propagator werden nun in Gl. (C.1) eingesetzt:

$$\begin{aligned}
T_{Ndir}^{(\lambda)} &= \sum_{\ell_\pi m_\pi} \sum_{\alpha \text{ occ.}} \sum_{J, \ell, M} \sum_{\ell_\gamma m_\gamma} k(E + m_N) \int d^3x d^3y \\
&\times \left[\theta(y - x) \left(\phi_\pi^{(-)*}(\vec{x}) \right)_{\ell_\pi m_\pi} \bar{\psi}_\alpha(\vec{x}) \Gamma_{\pi NN} \psi_{J\ell M}^{(1)}(E, \vec{x}) \right. \\
&\quad \times \left(\phi_\mu^{(\lambda)}(\vec{y}) \right)_{\ell_\gamma m_\gamma} \bar{\psi}_{J\ell M}^{(2)}(E, \vec{y}) \Gamma_{\gamma NN}^\mu \psi_\alpha(\vec{y}) \\
&+ \left. \theta(x - y) (1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4) \right] \\
&= \sum_{\ell_\pi m_\pi} \sum_{\alpha \text{ occ.}} \sum_{J, \ell, M} \sum_{\ell_\gamma m_\gamma} k(E + m_N) \int x^2 dx y^2 dy \\
&\times \left[\theta(y - x) \int d\Omega_x \left(\phi_\pi^{(-)*}(\vec{x}) \right)_{\ell_\pi m_\pi} \bar{\psi}_\alpha(\vec{x}) \Gamma_{\pi NN} \psi_{J\ell M}^{(1)}(E, \vec{x}) \right. \\
&\quad \times \int d\Omega_y \left(\phi_\mu^{(\lambda)}(\vec{y}) \right)_{\ell_\gamma m_\gamma} \bar{\psi}_{J\ell M}^{(2)}(E, \vec{y}) \Gamma_{\gamma NN}^\mu \psi_\alpha(\vec{y}) \\
&+ \left. \theta(x - y) (1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4) \right] \\
&= \sum_{\ell_\pi m_\pi} \sum_{\alpha \text{ occ.}} \sum_{J, \ell, M} \sum_{\ell_\gamma m_\gamma} k(E + m_N) \int x^2 dx y^2 dy \\
&\times \left[\theta(y - x) V_{\gamma NN}^{(1)}(\ell_\pi m_\pi, \alpha, J, \ell, M; E, x) V_{\pi NN}^{(2)}(\ell_\gamma m_\gamma, \alpha, J, \ell, M; E, y) \right. \\
&+ \left. \theta(x - y) (1 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 4) \right] . \tag{C.17}
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir die Abkürzungen eingeführt:

$$\begin{aligned}
V_{\gamma NN}^{(i)}(\ell_\pi m_\pi, \alpha, J, \ell, M; x) &= \\
&\int d\Omega_x \left(\phi_\pi^{(-)*}(\vec{x}) \right)_{\ell_\pi m_\pi} \bar{\psi}_\alpha(\vec{x}) \Gamma_{\pi NN} \psi_{J\ell M}^{(i)}(E, \vec{x}) \tag{C.18}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
V_{\pi NN}^{(i)}(\ell_\gamma m_\gamma, \alpha, J, \ell, M; E, y) &= \\
&\int d\Omega_y \left(\phi_\mu^{(\lambda)}(\vec{y}) \right)_{\ell_\gamma m_\gamma} \bar{\psi}_{J\ell M}^{(i)}(E, \vec{y}) \Gamma_{\gamma NN}^\mu \psi_\alpha(\vec{y}) . \tag{C.19}
\end{aligned}$$

Diese Umformung hat mehrere Konsequenzen, die technisch von großer Bedeutung sind: Zum einen ist das Matrixelement nun zerlegt in eine Summe über lauter Terme, die aus einem Produkt zweier skalarer Terme $V_{\pi NN}^{(i)}$ und $V_{\gamma NN}^{(i)}$, die nur noch von x oder

von y abhängen, so daß das verbleibende zweidimensionale Integral über x und y in zwei aufeinanderfolgende eindimensionale Integrale umgeschrieben werden kann:

$$\int x^2 dx y^2 dy \theta(x - y) = \int_0^\infty dx \int_0^x dy \quad , \quad (\text{C.20})$$

die leicht numerisch mit Hilfe der Simpsonformel ausgewertet werden können. Der zweite Term mit $\theta(y - x)$ kann analog behandelt werden.

$V_{\pi NN}^{(i)}$ und $V_{\gamma NN}^{(i)}$ enthalten jeweils alle Wellenfunktionen, die zu einem der beiden Vertizes gehören. Sie enthalten auch die Integration über die Winkel, die vollständig faktorisiert werden konnte. Um das Matrixelement zu berechnen muß man nun die beiden Funktionen $V_{\pi NN}^{(i)}$ und $V_{\gamma NN}^{(i)}$ für alle Werte von x und feste Drehimpulse berechnen, um dann die Integration über x und y auszuführen. Schließlich muß nur noch über alle Drehimpulse summiert werden. Die Berechnung der von $V_{\pi NN}^{(i)}$ und $V_{\gamma NN}^{(i)}$ soll nun im folgenden Kapitel beschrieben werden.

C.3 Die Berechnung der Vertizes

Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, müssen zur Berechnung von $V_{\pi NN}^{(i)}$ und $V_{\gamma NN}^{(i)}$ Winkelintegrationen ausgeführt werden. Beide diese Funktionen haben dieselbe Form:

$$V^{(i)}(\ell, m, \alpha, \beta; x) = \int d\Omega_x (\phi(\vec{x}))_{\ell m} \bar{\psi}_\alpha(\vec{x}) \Gamma \psi_\beta(\vec{x}) \quad , \quad (\text{C.21})$$

wobei α und β für jeweils einen Satz nukleonischer Quantenzahlen stehen und Γ ein Vertexoperator ist, von dem zunächst angenommen wird, daß er keine Impulse bzw. Ableitungen enthält.

Die Auswertung dieser Terme geschieht, indem zuerst die Diracstruktur von $\bar{\psi}_\alpha \Gamma \psi_\beta$ ausmultipliziert wird. Der resultierend Ausdruck ist eine Summe über skalare Terme, die aus einem Produkt von drei Wellenfunktionen bestehen. Jede Wellenfunktion ist faktorisiert in ein Produkt aus dem Radialanteil, und dem winkelabhängigen Teil, der durch eine Kugelflächenfunktion gegeben ist (s. C.1).

Das Ausmultiplizieren sowie die Berechnung der Winkelintegration geschieht im voraus mit Hilfe von MATHEMATICA. Dabei müssen jeweils Integrale über das Produkt aus drei Kugelflächenfunktionen ausgewertet werden. Das Ergebnis eines solchen Integrals ist [joa83]:

$$\begin{aligned} \int Y_{\ell_1 m_1}(\Omega) Y_{\ell_2 m_2}(\Omega) Y_{\ell_3 m_3}^*(\Omega) d\Omega &= \int Y_{\ell_1 m_1}^*(\Omega) Y_{\ell_2 m_2}^*(\Omega) Y_{\ell_3 m_3}(\Omega) d\Omega \\ &= \left(\frac{(2\ell_1 + 1)(2\ell_2 + 1)}{4\pi(2\ell_1 + 1)} \right)^{\frac{1}{2}} \langle \ell_1 0 \ell_2 0 | \ell_3 0 \rangle \langle \ell_1 m_1 \ell_2 m_1 | \ell_3 m_3 \rangle \\ &= f(\ell_1, m_1, \ell_2, m_2, \ell_3, m_3) \end{aligned} \quad (\text{C.22})$$

Die Funktion $f(\ell_1, m_1, \ell_2, m_2, \ell_3, m_3)$ wird bei Programmstart für alle Werte der Drehimpulse bis zu einem Maximaldrehimpuls berechnet und in ein Feld abgespeichert. Um hierbei den Speicheraufwand in Grenzen zu halten, wird f nur für Drehimpulse $\ell_1 > \ell_2 > \ell_3$ und $m_1 = m_3 - m_2 > 0$ abgespeichert. Die Extrahierung des Wertes von f für beliebige Drehimpulsquantenzahlen aus den Feldelementen geschieht dann mit Hilfe der Beziehungen

$$\begin{aligned} f(\ell_1, m_1, \ell_3, m_3, \ell_2, m_2) &= (-1)^{m_1} f(\ell_1, m_1, \ell_2, -m_2, \ell_3, -m_3) \\ f(\ell_2, m_2, \ell_1, m_1, \ell_3, m_3) &= f(\ell_1, m_1, \ell_2, m_2, \ell_3, m_3) \\ f(\ell_1, -m_1, \ell_2, -m_2, \ell_3, -m_3) &= f(\ell_1, m_1, \ell_2, m_2, \ell_3, m_3) \quad , \end{aligned} \quad (\text{C.23})$$

die leicht aus den entsprechenden Beziehungen für die Clebsch-Gordan Koeffizienten [joa83] hergeleitet werden können.

Nach dieser Integration ist jeder der beiden Vertizes nur noch eine Funktion der Radialvariablen x bzw. y , und besteht aus einem Produkt aus dem Wert des Winkelintegrals und drei Radialanteilen von Wellenfunktionen. Die verbleibenden beiden Integrationen über x und y werden numerisch ausgeführt.

Ohne die analytische Vorausberechnung der Winkelintegrale wäre eine vertretbare Laufzeit der numerischen Rechnung nicht erreichbar gewesen. Es ist auch entscheidend, die Reihenfolge der Summationen über die beteiligten Drehimpulse so zu wählen, daß innerhalb einer Summationsschleife nur Größen berechnet werden, die tatsächlich von dem Summationsindex abhängen. Die daraus resultierende Struktur machte die numerische Implementation zwar schwieriger, verringert die Laufzeit aber um etwa eine Größenordnung.

C.4 Die Behandlung von Ableitungen in den Vertizes

Die in den Vertizes auftretenden Impulse werden im Ortsraum zu Ableitungsoperatoren, die auf die entsprechende Wellenfunktion wirken. Um den oben beschriebenen Formalismus auch dann verwenden zu können, wenn die Vertizes Ableitungsoperatoren enthalten, müssen im Rahmen der Vorausberechnung der Winkelintegrale die Ableitungen der Wellenfunktionen, insbesondere der auftretenden Kugelflächenfunktionen berechnet werden. Die dazu nötigen Beziehungen für die Kugelflächenfunktionen sollen in diesem Anhang aufgelistet werden.

Da die Diracschen Gammamatrizen in kartesischer Basis gegeben sind und der Impulsoperator z.B. in der πNN -Kopplung mit γ_μ kontrahiert wird, benötigt man Formeln, die eine Ableitung einer Kugelflächenfunktion nach x , y oder z durch eine Summe über Kugelflächenfunktionen mit unterschiedlichen Drehimpulsquantenzahlen ausdrücken.

Hierzu schreiben wir zunächst den Impulsoperator in Kugelkoordinaten:

$$\vec{p} = -i\vec{\nabla} = -i(\vec{e}_r \partial_r + \frac{1}{r} \vec{e}_\theta \partial_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \vec{e}_\phi \partial_\phi) \quad . \quad (\text{C.24})$$

Durch Einsetzen der kartesischen Darstellung der Einheitsvektoren \vec{e}_r , \vec{e}_θ und \vec{e}_ϕ wird daraus:

$$\begin{aligned} \vec{p} = & -i\vec{e}_x \left(\sin\theta \cos\phi \partial_r + \frac{\cos\theta \cos\phi}{r} \partial_\theta - \frac{\sin\phi}{r \sin\theta} \partial_\phi \right) \\ & -i\vec{e}_y \left(\sin\theta \sin\phi \partial_r + \frac{\cos\theta \sin\phi}{r} \partial_\theta + \frac{\cos\phi}{r \cos\theta} \partial_\phi \right) \\ & -i\vec{e}_z \left(\cos\theta \partial_r - \frac{\sin\theta}{r} \partial_\theta \right) \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Mit Hilfe des Drehimpulsoperators \vec{L} und den Auf- und Absteigeoperatoren $L_\pm = L_x \pm iL_y$ kann man die Ableitungen nach den Winkeln durch Drehimpulsoperatoren ersetzen:

$$\begin{aligned} \partial_\theta &= \frac{1}{2}(e^{-i\phi}L_+ - e^{i\phi}L_-) \\ \partial_\phi &= iL_z \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

Mit folgender Abkürzung

$$s_\pm = \sin\theta e^{\pm i\phi} \quad , \quad (\text{C.27})$$

können wir nun Gl. (C.25) umformen zu:

$$\begin{aligned} \vec{p} = & -\frac{i}{2r}\vec{e}_x (r(s_+ + s_-)\partial_r + \cos\theta(L_+ - L_-) - (s_+ - s_-)L_z) \\ & -\frac{i}{2r}\vec{e}_y \left(\frac{r}{i}(s_+ - s_-)\partial_r - i\cos\theta(L_+ + L_-) + i(s_+ + s_-)L_z \right) \\ & -\frac{i}{2r}\vec{e}_z (2r\cos\theta \partial_r - (s_-L_+ - s_+L_-)) \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

Die Wirkung von L_\pm und L_z auf $Y_{\ell m}$ ist gegeben durch [joa83]:

$$\begin{aligned} L_z Y_{\ell m} &= m Y_{\ell m} \\ L_\pm Y_{\ell m} &= \sqrt{\ell(\ell+1) - m(m \pm 1)} Y_{\ell, m \pm 1} \quad . \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

Wir benötigen jetzt nur noch eine Formel für $\cos\theta Y_{\ell m}$ und $s_\pm Y_{\ell m}$. Aus den bekannten Relationen für die Kugelflächenfunktionen sowie die assoziierten Legendrepolynome [joa83, abr68] lassen sich die benötigten Formeln herleiten:

$$\begin{aligned} \cos\theta Y_{\ell m} = & \left(\frac{(\ell+1-m)(\ell+1+m)}{(2\ell+3)(2\ell+1)} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell+1, m} + \left(\frac{(\ell-m)(\ell+m)}{(2\ell+1)(2\ell-1)} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell-1, m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_+ Y_{\ell m} &= \sin \theta e^{i\phi} Y_{\ell m} = \\
&\left(\frac{(\ell-m)(\ell-m-1)}{(2\ell+1)(2\ell-1)} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell-1, m+1} - \left(\frac{(\ell+m+2)(\ell+m+1)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell+1, m+1} \\
s_- Y_{\ell m} &= \sin \theta e^{-i\phi} Y_{\ell m} = \\
&\left(\frac{(\ell-m+2)(\ell-m+1)}{(2\ell+1)(2\ell+3)} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell+1, m-1} - \left(\frac{(\ell+m)(\ell+m-1)}{(2\ell+1)(2\ell-1)} \right)^{\frac{1}{2}} Y_{\ell-1, m-1} \quad . \quad (C.30)
\end{aligned}$$

Mit Hilfe von *MATHEMATICA* werden also die Vertizes zuerst bezüglich ihrer Diracstruktur ausmultipliziert, dann werden eventuell vorkommende Impulsoperatoren auf die entsprechende Wellenfunktion 'losgelassen', das Ergebnis mit Hilfe von Gl. (C.28), (C.29) und (C.30) ausgewertet und wiederum ausmultipliziert. Die aus diesem Vorgehen resultierenden Terme können nun mit Hilfe von Gl. (C.22) weiterbehandelt werden. Die *MATHEMATICA*-Programme für die einzelnen Vertizes liefern dann als Ausgabe Ausdrücke in *FORTRAN*, die den Wert des Winkelintegrals für eine bestimmte Kombination von ein- und auslaufenden Drehimpulsen angeben.

Anhang D

Die nicht-lokale Kerndichtematrix

In diesem Anhang wird die nicht-lokale Kerndichtematrix aus der Kernwellenfunktion berechnet. Wir beginnen mit der Betrachtung für die großen Komponenten eines Diracspinors bzw. für eine nicht-relativistische Wellenfunktion. Da die Kerndichtematrix in Spurausdrücken über die Spinindizes auftaucht, ist eine Form von Vorteil, die diese Matrix aufspaltet in einen skalaren Anteil und einen Vektorteil, der die Paulimatrizen beinhaltet.

Für einen Zustand mit den Quantenzahlen $\alpha = (a, M)$ mit $a = (n\ell J)$ hat die Wellenfunktion die folgende Form:

$$\psi_\alpha(\vec{x}) = g_a(x) Y_{J\ell}^M(\Omega_x) = g_a(x) \begin{pmatrix} \langle J, M | \ell, M - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \rangle \mathcal{Y}_{\ell M - \frac{1}{2}}(\Omega_x) \\ \langle J, M | \ell, M + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \rangle \mathcal{Y}_{\ell M + \frac{1}{2}}(\Omega_x) \end{pmatrix}. \quad (\text{D.1})$$

Im folgenden soll nun die nicht-relativistische Dichtematrix des Kerngrundzustandes für ein vollständig besetztes Orbital berechnet werden:

$$\begin{aligned} \rho_\alpha^{(n.r.)}(\vec{x}, \vec{y}) &= \sum_M \psi_\alpha(\vec{x}) \otimes \psi_\alpha^\dagger(\vec{y}) \\ &= g_a(x) g_a(y) \sum_M Y_{J\ell}^M(\Omega_x) \otimes Y_{J\ell}^{M+}(\Omega_y) \quad . \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Man geht nun von folgender Beziehung aus:

$$\sum_{JM} Y_{J\ell}^M(\Omega_x) \otimes Y_{J\ell}^{M+}(\Omega_y) = \frac{2\ell + 1}{4\pi} P_\ell(\cos \theta) \equiv A_\ell(\Omega_x, \Omega_y) \quad . \quad (\text{D.3})$$

P_ℓ steht hierbei für das Legendrepolynom der Ordnung ℓ und θ ist der Winkel zwischen den Vektoren \vec{x} und \vec{y} .

Wir definieren weiterhin:

$$B_\ell^J = \sum_M Y_{J\ell}^M(\Omega_x) \otimes Y_{J\ell}^{M+}(\Omega_y) \quad . \quad (\text{D.4})$$

Damit gilt:

$$A_\ell = B_\ell^{\ell - \frac{1}{2}} + B_\ell^{\ell + \frac{1}{2}} \quad . \quad (\text{D.5})$$

Wir benutzen nun die Beziehung zwischen $Y_{j\ell}^M$ und $Y_{j\ell\pm 1}^M$: [sak84]:

$$\vec{\sigma}\vec{e}_x Y_{j\ell}^M(\Omega_x) = -Y_{j\ell\mp 1}^M(\Omega_x) \quad \text{mit} \quad \ell = J \pm \frac{1}{2} \quad . \quad (\text{D.6})$$

Hierbei steht $\vec{\sigma}$ für die Paulimatrizen. Setzt man ($s_x = \vec{\sigma}\vec{x}/x$ und $s_y = \vec{\sigma}\vec{y}/y$), so folgt aus den Gleichungen (D.4), (D.5) und (D.6):

$$s_x A_\ell s_y = B_{\ell-1}^{\ell-\frac{1}{2}} + B_{\ell+1}^{\ell+\frac{1}{2}} \quad . \quad (\text{D.7})$$

Im Gegensatz zu Gl. (D.5), stellt diese Gleichung nun den Zusammenhang zwischen den Größen B_ℓ^J zu unterschiedlichem Bahndrehimpuls ℓ her. Wenn man nun Gleichung Gl. (D.5) nach $B_\ell^{\ell+\frac{1}{2}}$ auflöst, und dann abwechselnd (D.5) und (D.7) einsetzt, so findet man:

$$B_\ell^{\ell+\frac{1}{2}} = A_\ell - s_x A_{\ell-1} s_y + A_{\ell-2} - s_x A_{\ell-3} s_y + \dots \quad . \quad (\text{D.8})$$

Ausgehend von Gl. (D.7) kann man auf die gleiche Weise zeigen:

$$B_{\ell+1}^{\ell+\frac{1}{2}} = s_x A_\ell s_x - A_{\ell-1} + s_x A_{\ell-2} s_y - A_{\ell-3} + \dots \quad . \quad (\text{D.9})$$

Unter Verwendung von Gl. (D.3) wird daraus:

$$B_\ell^{\ell+\frac{1}{2}} = \tilde{P}_\ell + \tilde{P}_{\ell-2} + \tilde{P}_{\ell-4} + \dots - s_x s_y (\tilde{P}_{\ell-1} + \tilde{P}_{\ell-3} + \tilde{P}_{\ell-5} + \dots) \quad (\text{D.10})$$

und

$$B_\ell^{\ell-\frac{1}{2}} = s_x s_y (\tilde{P}_{\ell-1} + \tilde{P}_{\ell-3} + \tilde{P}_{\ell-5} + \dots) - (\tilde{P}_{\ell-2} + \tilde{P}_{\ell-4} + \tilde{P}_{\ell-6} + \dots), \quad (\text{D.11})$$

wobei

$$\tilde{P}_\ell(\theta) = \frac{2\ell+1}{4\pi} P_\ell(\theta) \quad , \quad (\text{D.12})$$

und θ der Winkel zwischen \vec{x} und \vec{y} ist. Mit Hilfe der Beziehungen

$$P'_\ell = \sum_{k=l-1, l-3, \dots} (2k+1) P_k \quad \text{und} \quad \vec{\sigma}\vec{a}\vec{\sigma}\vec{b} = \vec{a}\vec{b} + i\vec{\sigma}(\vec{a} \times \vec{b}) \quad , \quad (\text{D.13})$$

können wir (D.10) und (D.11) in eine geschlossene Form bringen:

$$B_\ell^{\ell+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\pi} (P'_{\ell+1} - s_x s_y P'_\ell) = \frac{1}{4\pi} (P'_{\ell+1} - \cos\theta P'_\ell - i(\hat{x} \times \hat{y})\vec{\sigma} P'_\ell) \quad (\text{D.14})$$

und

$$B_\ell^{\ell-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\pi}(\sigma_r \sigma_{r'} P'_\ell - P'_{\ell-1}) = \frac{1}{4\pi}(\cos \theta P'_\ell - P'_{\ell-1} + i(\hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{y}}) \vec{\sigma} P'_\ell) \quad . \quad (\text{D.15})$$

wobei $\hat{\vec{x}} = \vec{x}/x$ und $\hat{\vec{y}} = \vec{y}/y$ Unter Verwendung der Beziehungen zwischen den Legendrepoly-nomen [joa83]

$$\cos \theta P'_\ell - P'_{\ell-1} = \ell P_\ell \quad \text{und} \quad P'_{\ell+1} - \cos \theta P'_\ell = (\ell + 1) P_\ell \quad , \quad (\text{D.16})$$

können wir weiter schreiben

$$B_\ell^{\ell+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\pi} \left((\ell + 1) P_\ell - i(\hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{y}}) \vec{\sigma} P'_\ell \right) \quad (\text{D.17})$$

und

$$B_\ell^{\ell-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\pi} \left(\ell P_\ell + i(\hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{y}}) \vec{\sigma} P'_\ell \right) \quad . \quad (\text{D.18})$$

Dies kann auch in einer einzigen Gleichung zusammengefaßt werden:

$$B_\ell^J = \frac{1}{4\pi} \left(\left(J + \frac{1}{2} \right) P_\ell \pm i(\hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{y}}) \vec{\sigma} P'_\ell \right) \quad \text{mit} \quad \ell = J \pm \frac{1}{2} \quad . \quad (\text{D.19})$$

Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausdruck in Übereinstimmung mit Gl. (D.3) und Gl. (D.5) ist. Für die Dichtematrix aus Gl. (D.2) hat man damit:

$$\hat{\rho}^{(n.r.)}(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_a \frac{g_a(x) g_a(y)}{4\pi} \left(\left(J + \frac{1}{2} \right) P_\ell(\cos \theta) \pm i(\hat{\vec{x}} \times \hat{\vec{y}}) \vec{\sigma} P'_\ell(\cos \theta) \right) \quad . \quad (\text{D.20})$$

Setzt man

$$\psi_\alpha(\vec{x}) = \begin{bmatrix} g_a(x) \mathcal{Y}_{J\ell}^M(\Omega_x) \\ i f_a(x) \mathcal{Y}_{J\ell'}^M(\Omega_x) \end{bmatrix} \quad , \quad (\text{D.21})$$

so läßt sich die volle, relativistische Dichtematrix konstruieren:

$$\hat{\rho}_A(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_\alpha \psi_\alpha(\vec{x}) \otimes \bar{\psi}_\alpha(\vec{y}) = \begin{pmatrix} g_a(x) g_a(y) & B_\ell^J & -i g_a(x) f_a(y) & B_\ell^J s_y \\ -i f_a(x) g_a(y) & s_x B_\ell^J & -f_a(x) f_a(y) & s_x B_\ell^J s_y \end{pmatrix} \quad . \quad (\text{D.22})$$

Anhang E

Die Parametrisierung des optischen Potentials für das Pion

In diesem Abschnitt werden die Parametrisierungen für die Parameter b_o und c_o wie in Abb. 4.7 dargestellt aufgelistet. In den folgenden Formeln wird T_π in MeV eingesetzt, b_o ergibt sich dann in fm, c_o in fm³. Es werden zuerst folgende Funktionen definiert:

$$\begin{aligned}f_r(x) &= p1 + p2 p4 \frac{p3 - x}{(p3 - x)^2 + p4^2} + p5^{-((x-p6)/p7)^2} \\f_{i1} &= p1 + p3 (x - p2)^3 \\f_{i2} &= p1 + \frac{p2 p4^2}{p7 ((x - p6)/p7 - p3)^{p5} + p4^2} .\end{aligned}$$

Re $b_o(T_\pi) = f_r(T_\pi)$ mit

$$\begin{aligned}p1 &= -0,22049 \\p2 &= 0,532 \\p3 &= 0,2039 \\p4 &= 0,06249 \\p5 &= -0,04046 \\p6 &= 0,0703 \\p7 &= 0,02785 .\end{aligned}$$

Für $T_\pi < 157$ MeV ist Im $b_o(T_\pi) = f_{i1}(T_\pi)$ mit

$$\begin{aligned}p1 &= 0,009 \\p2 &= 0,04 \\p3 &= 154 ,\end{aligned}$$

134Anhang E. Die Parametrisierung des optischen Potentials für das Pion

Für $T_\pi > 157$ MeV ist $\text{Im } b_o(T_\pi) = f_{i2}(T_\pi)$ mit

$$\begin{aligned} p1 &= -0,16889 \\ p2 &= 0,51784 \\ p3 &= 0,14 \\ p4 &= 0,1 \\ p5 &= 0,64348 \\ p6 &= 0,1 \\ p7 &= 0,229 \end{aligned} .$$

$\text{Re } c_o(T_\pi) = f_r(T_\pi)$ mit

$$\begin{aligned} p1 &= 0,29753 \\ p2 &= 0,67805 \\ p3 &= 0,17405 \\ p4 &= 0,12452 \\ p5 &= 0,1035 \\ p6 &= 0,02011 \\ p7 &= 0,03176 \end{aligned} .$$

Für $T_\pi < 157$ MeV ist $\text{Im } c_o(T_\pi) = f_{i1}(T_\pi)$ mit

$$\begin{aligned} p1 &= 0,184 \\ p2 &= 0,03 \\ p3 &= 137 \end{aligned}$$

(E.1)

Für $T_\pi > 157$ MeV ist $\text{Im } c_o(T_\pi) = f_{i2}(T_\pi)$ mit

$$\begin{aligned} p1 &= -0,01858 \\ p2 &= 0,52104 \\ p3 &= 0,1175 \\ p4 &= 0,1 \\ p5 &= 0,67422 \\ p6 &= 0,1 \\ p7 &= 0,229 \end{aligned} .$$

Literaturverzeichnis

- [abr68] M. Abramowitz und I.A. Segun, *Handbook of mathematical Functions*, Dover Publications, New York, 1968.
- [aud95] G. Audi und A.H. Wapstra, *Nucl. Phys.* **A595** (1995) 409.
- [ben91] C. Bennhold und H. Tanabe, *Nucl. Phys.* **A530** (1991) 625.
- [ben95] M. Benmerrouche, N.C. Mukhopadhyay und J.F. Zhang, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 3237.
- [ber92] C. Berger, *Teilchenphysik*, Springer Verlag, Berlin, 1992.
- [bia94] N. Bianchi et al., *Phys. Lett.* **B325** (1994) 333.
- [bof86] S. Boffi und R. Mirando, *Nucl. Phys.* **A448** (1986) 637.
- [bof91] S. Boffi, L. Bracci und P. Christillin, *Nuovo Cim.* **A104** (1991) 843.
- [car82] J. A. Carr, H. McManus und K. Stricker-Bauer, *Phys. Rev.* **C25** (1982) 952.
- [car92] R.C. Carrasco und E. Oset, *Nucl. Phys.* **A536** (1992) 445.
- [car93] R.C. Carrasco, J. Nieves und E. Oset, *Nucl. Phys.* **A565** (1993) 797.
- [che57] G.F. Chew, M.L. Goldberger, F.E. Low und Y. Nambu, *Phys. Rev.* **106** (1957) 1345.
- [chi91] H.C. Chiang, E. Oset und L.C. Liu, *Phys. Rev.* **C44** (1991) 738.
- [chu87] A.A. Chumbalov, R.A. Eramzhyan und S.S. Kamalov, *Z. Phys.* **A328** (1987) 195, A.A. Chumbalov und S.S. Kamalov, *Phys. Lett.* **B196** (1987) 23.
- [chu85] S.S. Kamalov und T.D. Kaipov, *Phys. Lett.* **B162** (1985) 260.
- [con86] D. Contardo et al., *Phys. Lett.* **B168** (1986) 331.
- [dej96] F. de Jong und H. Lenske, *Phys. Rev.* **C54** (1996) 1488.
- [del91] J. Delorme et al., *Phys. Lett.* **B263** (1991) 157.
- [ds97] C. Sauermann, Doktorarbeit, Darmstadt 1996; C. Deutsch-Sauermann, B. Frieman und W. Noerenberg, *Phys. Lett.* **B409** (1997) 51.

- [dum93] O. Dumbrajs et al., *Nucl. Phys.* **B216** (1993) 277.
- [eff97] M. Effenberger und U. Mosel, *Nucl. Phys.* **A613** (1997) 353.
- [eff98] M. Effenberger und A. Sibirtsev, *Nucl. Phys.* **A632** (1998) 99.
- [ell87] C. Ellegaard et al., *Phys. Rev. Lett.* **59** (1987) 974.
- [eri88] T. Ericson und W. Weise, *Pions and Nuclei*, Calderon Press, Oxford, 1988.
- [fes91] H. Feshbach, *Theoretical nuclear Physics*, John Wiley & Sons, New York, 1991.
- [feu97] Th. Feuster und U. Mosel, *Nucl. Phys.* **A612** (1997) 375.
- [feu98] Th. Feuster, Dissertation, Gießen 1998.
- [fix97] A. Fix und H. Arenhövel, *Nucl. Phys.* **A620** (1997) 457.
- [gar88] C. Garcia-Recio, E. Oset und L.L. Salcedo, *Phys. Rev.* **37** (1988) 194.
- [gar91] C. Garcia-Recio, E. Oset, L.L. Salcedo, D. Strottman und M.J. Lopez, *Nucl. Phys.* **A526** (1991) 685.
- [gil97] A. Gil, J. Nieves und E. Oset, *Nucl. Phys.* **A627** (1997) 543.
- [gir83] V. Girija, V. Devanathan, A. Nagl und H. Überall, *Phys. Rev.* **C27** (1983) 1169.
- [gle93] N.K. Glendenning et al., *Phys. Rev.* **C48** (1993) 889,
M. Haft, Diplomarbeit, LMU München 1992.
- [gol64] M.L. Goldberger und K.M. Watson, *Collision Theory*, Wiley, New York, 1964.
- [gou74] M. Gourdin, *Phys. Rep.* **11** (1974) 29.
- [gre80] W. Grein und P. Kroll, *Nucl. Phys.* **A338** (1980) 332.
- [hab97] H. Haberzettl, *Phys. Rev.* **C56** (1997) 2041.
- [hoe92] G. Höhler und A. Schulte, *πN Newsletter* No. 7(1992)76.
- [itz80] C. Itzykson und J.-B. Zuber, *Quantum field theory*, McGraw-Hill, Singapore, 1980.
- [joa83] C. J. Joachain, *Quantum collision theory*, 3rd edition, North Holland Physics Publishing, Amsterdam 1983.
- [joh94] J.I. Johansson und H.S. Sherif, *Nucl. Phys.* **A575** (1994) 477.
- [jon96] M.B. Johnson und G.R. Satchler, *Ann. of Phys.* **248** (1996) 134.
- [Kai97] N. Kaiser, T. Waas und W. Weise, *Nucl. Phys.* **A612** (1997) 297.

- [kam95] S.S. Kamalov L. Tiator und C. Bennhold, *Phys. Rev. Lett.* **75** (1995) 1288.
- [kar86] B. Karaoglu und E.J. Moniz, *Phys. Rev.* **C33** (1986) 974.
- [kis55] L.S. Kisslinger, *Phys. Rev.* **98** (1955) 761.
- [kli80] K. Klingenberg und M.G. Huber, *J. of Phys.* **G6** (1980) 961.
- [kli97] F. Klingl, N. Kaiser und W. Weise, *Nucl. Phys.* **A624** (1997) 527.
- [koc79] J.H. Koch und E.J. Moniz, *Phys. Rev.* **C20** (1979) 235.
- [koc83] J.H. Koch und E.J. Moniz, *Phys. Rev.* **C27** (1983) 751.
- [koe94] B. Körfgen, F. Osterfeld und T. Udagawa, *Phys. Rev.* **C50** (1994) 1637.
- [kru95] B. Krusche et al., *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 3736.
- [kru98] B. Krusche, private Mitteilung.
- [lag77] I. Blomquist und J.M. Laget, *Nucl. Phys.* **A280** (1977) 405.
- [lak93] I. Laktineh, W.M. Alberico, J. Delorme und M. Ericson, *Nucl. Phys.* **A555** (1993) 237.
- [lam73] J.D. Lambert, *Computational Methods in ordinary differential Equations*, John Wiley & Sons, London, 1973.
- [li93] X. Li, L.E. Wright und C. Bennhold, *Phys. Rev.* **C48** (1993) 816.
- [mac87] R. Machleidt, K. Holinde und Ch. Elster, *Phys. Rep.* **149** (1987) 1.
- [men77] D. Menze et al., ZAED Compilation of Pion Photoproduction Data, University of Bonn, 1977,
Landolt-Börnstein *Total Cross Sections for Reactions of High-Energy Particles*, Vol. I/12b, Berlin, 1988.
- [mes91] A. Messiah, *Quantenmechanik I*, de Gruyter, Berlin, 1991.
- [mon84] J.H. Koch, E.J. Moniz und N. Ohtsuka, *Ann. of Phys.* **154** (1984) 99.
- [mos89] U. Mosel, *Fields, Symmetries and Quarks*, McGraw-Hill, Hamburg, 1989.
- [mue95] H. Mütter, G. Knehr und A. Polls, *Phys. Rev.* **C52** (1995) 2955.
- [nag91] A. Nagl, V. Devanathan und H. Überall, *Nuclear Pion Photoproduction*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [neg72] J.W. Negele und D. Vautherin, *Phys. Rev.* **C5** (1972) 1472.
- [oht89] K. Ohta, *Phys. Rev.* **C40** (1989) 1335.

- [ols78] M.G. Olsson, *Nucl. Phys.* **B78** (1974) 55; M.G. Olsson und E.T. Osypowski, *Nucl. Phys.* **B87** (1975) 399; *Phys. Rev.* **D17** (1978) 174; *Nucl. Phys.* **B101** (1975) 136.
- [ose87] E. Oset und L.L Salcedo, *Nucl. Phys.* **A468** (1987) 631.
- [pdg96] Particle Data Group, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 1.
- [pie97] J. Piekarewicz, A.J. Sarty und M. Benmerrouche, *Phys. Rev.* **C55** (1997) 2571, L.J. Abu-Raddad, J. Piekarewicz, A.J. Sarty und M. Benmerrouche, *Phys. Rev.* **C57** (1998) 2053.
- [pid84] Preedom et al., *Phys. Rev.* **C23** (1981) 1134;
Blecher et al., *Phys. Rev.* **C20** (1979) 1884;
Leitch et al., *Phys. Rev.* **C29** (1984) 561;
Antonuk et al., *Nucl. Phys.* **A420** (1984) 435;
Piffaretti et al., *Phys. Lett.* **B71** (1977) 324;
Albanese et al., *Nucl. Phys.* **A350** (1980) 301.
- [pol96] S. J. Pollock, H. W. L. Naus und J. H. Koch, *Phys. Rev.* **C53** (1996) 2304.
- [pre81] Preedom et al., *Phys. Rev.* **C23** (1981) 1134;
Blecher et al., *Phys. Rev.* **C20** (1979) 1884;
Leitch et al., *Phys. Rev.* **C29** (1984) 561;
Antonuk et al., *Nucl. Phys.* **A420** (1984) 435;
Piffaretti et al., *Phys. Lett.* **B71** (1977) 324;
Albanese et al., *Nucl. Phys.* **A350** (1980) 301.
- [pre93] M.A. Preston und R.K. Bhaduri, *Structure of the nucleus*, Addison-Wesley, New York, 1993.
- [ryc92] J. Ryckebusch et al., *Phys. Rev.* **C46** (1992) R829.
- [sah81] A.W. Saharia und R.M. Woloshyn, *Phys. Rev.* **C23** (1981) 351.
- [sak84] J.J. Sakurai, *Advanced Quantum Mecahnics*, 10th printing, Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1984.
- [sch86] R. Schiavella, V.R. Pandharipande und R.B. Wiringa, *Nucl. Phys.* **A449** (1986) 219.
- [sch87] L.I. Schiff, *Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, Singapore, 1987.
- [sch96] O. Scholten, A.Yu. Korchin, V. Pascalutsa und D. Van Neck, *Phys. Lett.* **B384** (1996) 13.
- [sch97] M. Schmitz, Dissertation, Johannes Gutenberg-Universität Mainz, Mainz 1996.
- [she87] J.R. Shepard, E. Rost und C.-Y. Cheung, *Phys. Rev.* **C37** (1987) 1130.
- [sek83] T. Seki und K. Matsutani, *Phys. Rev.* **C27** (1983) 2799.

- [str80] K. Stricker, J.A. Carr und H. McManus, *Phys. Rev.* **C22** (1980) 2043.
- [tia84] L. Tiator und L.E. Wright, *Phys. Rev.* **C30** (1984) 989.
- [tia94] L. Tiator, C. Bennhold und S.S. Kamalov, *Nucl. Phys.* **A580** (1994) 455.
- [try95] V.A. Tryasuchev und A.I. Fiks, *Phys. Atom. Nucl.* **58** (1995) 1168.
- [uda90] T. Udagawa, S.W. Hong und F. Osterfeld, *Phys. Lett.* **B245** (1990) 1.
- [vau72] D. Vautherin und D.M. Brink, *Phys. Rev.* **C5** (1972) 626.
- [vri87] H. de Vries et al., *At. Data Nucl Data Tables* **36** (1987) 495.

Danksagung

Zuerst gilt mein Dank Prof. Dr. Ulrich Mosel für die Aufnahme in sein Institut, die Themenstellung und das Interesse am Fortgang der Arbeit. Er hat mir die Teilnahme an Konferenzen sowie Auslandsaufenthalte ermöglicht.

Wesentlich zum Gelingen der Arbeit beigetragen hat Prof.(!) Dr. Lenske. Insbesondere in der Schlußphase meiner Promotion hat er mich mit großem Engagement unterstützt und ermutigt.

Die direkte Zusammenarbeit mit PD Dr. Bernd Krusche machte es möglich Theorie und Experiment frühzeitig miteinander zu vergleichen. Ihm ist es zu verdanken, daß die Ergebnisse dieser Arbeit mit den vorläufigen Ergebnissen des TAPS-Experiments verglichen werden konnten. Außerdem hat er meinen Prüfungstermin gerettet, indem er sich trotz Zeitmangels spontan bereit erklärt hat diese Arbeit zu begutachten!

Mein langjähriger Zimmergenosse Thomas Feuster hatte immer ein offenes Ohr für physikalische und andere Dinge. Er hat mit einigen Rechnungen zur elementaren Photoproduktion direkt zu dieser Arbeit beigetragen. Alle Mitglieder des Instituts, insbesondere Stefan Leupold, Alexander Hombach, Steffen Hardt und Gregor Penner, haben dafür gesorgt, daß der Arbeitsalltag einen abwechslungsreichen, wenn auch rauen Rahmen fand.

Auf administrativer Ebene haben Elke Jung und Christiane Pausch dafür gesorgt, daß alles reibungslos verlief, auch wenn das nicht immer ganz einfach war.

I also want to thank Melissa Lampert for her friendship and her support. Having her as a friend was very important to me.

Meinen Eltern gebührt Dank nicht nur für die finanzielle Unterstützung meines Studiums.

Schließlich ist an dieser Stelle noch ein Mensch zu erwähnen, nämlich Caroline, ohne die ...