Kurt Endl

Ästhetik der platonischen Körper

Abbildung 1:
Die fünf platonischen Körper

Die platonischen Körper

Neben der Kugel sind die fünf sogenannten platonischen Körper die vollkommensten räumlichen Gebilde. Jeder dieser Körper ist von einer einzigen Art regelmäßiger Vielecke begrenzt, wobei aneinander anstoßende Vielecke jeweils denselben Winkel miteinander bilden. Hierbei ist das Tetraeder von vier Dreiecken, der Würfel von sechs Quadraten, das Oktaeder von acht Dreiecken, das Dodekaeder von zwölf Fünfecken und das Ikosaeder von zwanzig Dreiecken gebildet.

Abbildung 1 zeigt die fünf platonischen Körper in einer Gesamtschau, wobei die Flächen mit konzentrischen Vielecken ausgemalt sind. Der Hintergrund wird von einer Ornamentik aus Kreisen gebildet.

Die Konstruktion dieser fünf Körper ist im Prinzip ein Kinderspiel. Man lasse an einem verregneten Nachmittag ein Kind gleichgroße Dreiecke aus Pappe ausschneiden und ermuntere es, aus diesen Dreiecken ein räumliches Gebilde zusammenzukleben. Mit ziemlicher Sicherheit wird es das Tetraeder aus vier Dreiecken entdecken. Etwas schwieriger wäre schon das Oktaeder aus acht Dreiecken oder gar das Ikosaeder aus zwanzig Dreiecken. Der analoge Versuch mit Quadraten wird ganz sicher zum Würfel führen, während das Experiment mit Fünfecken zur Konstruktion des Dodekaeders wahrscheinlich auch nicht an einem Nachmittag gelänge.

Diese Anregung zu einer kreativen, kindlichen Beschäftigung soll den elementaren Charakter dieser Körper aufzeigen. Hierbei weiß aber jeder, der einige Semester Mathematikstudium durchlitten hat, daß elementar nicht gleichbedeutend mit leicht ist. Diese fünf Körper haben äußerst komplexe Eigenschaften und sind heute noch Gegenstand mathematischer Forschung.

Im folgenden werden einige herausragende Eigenschaften der platonischen Körper vorgestellt. Hierbei soll zusätzlich versucht werden, die Schönheit der geometrischen Sachverhalte durch Aufschneiden der Flächen, durch Zeichnen von Ornamentik und die Heranziehung von Projektionen sinnfällig zu machen. Dies ist nur unter Heranziehung des Computers möglich, da die enorme räumliche Komplexität der hier dargestellten Motive umfangreiche, genaue Berechnungen erfordert.

Die Programmierung der Bilder erfolgte mit der „Software zur Geometrie“, die in den letzten sieben Jahren am hiesigen Mathematischen Institut entwickelt wurde. Die Bilder selbst sind mit einem HP-Plotter erstellt. Ein Plotter ist ein elektronisches Zeichengerät, das mit unerhörter Präzision einen Zeichenstift auf einer Zeichenfolie führen kann, wobei vom Programm her die Farben beliebig gewechselt werden können.

Die „Software zur Geometrie“ wurde auf dem Hochschul-Computer-Forum 93 in Berlin vom Bundesminister für Bildung und Wissenschaft mit dem Deutsch-Österreichischen Hochschul-Software-Preis 1993 als beste Lehrsoftware in Mathematik ausgezeichnet.

Zur Geschichte der platonischen Körper

Die Entdeckung der platonischen Körper liegt weitgehend im Dunkeln. Während Tetraeder, Würfel und Oktaeder sicher schon sehr früh bekannt waren, scheint die allgemeine Theorie der platonischen Körper und ihrer Gesetzmäßigkeiten erst den Pythagoräern zuzuschreiben zu sein.

Diese wußten auch schon, daß es nur diese fünf regelmäßigen Körper gibt, das heißt, daß man aus Dreiecken, Vierecken und Fünfecken wirklich nur die fünf platonischen Körper gewinnen kann und daß die Verwendung von Sechsecken usw. zu keinem räumlichen Körper führt.

Die Tatsache, daß es nur diese fünf vollkommenen Körper gibt, war immer wieder Anlaß zu philosophischen Spekulationen und wurde zum Beispiel weidlich in der platonischen Schule bemüht. So heißt es etwa in einem der platonischen Dialoge:

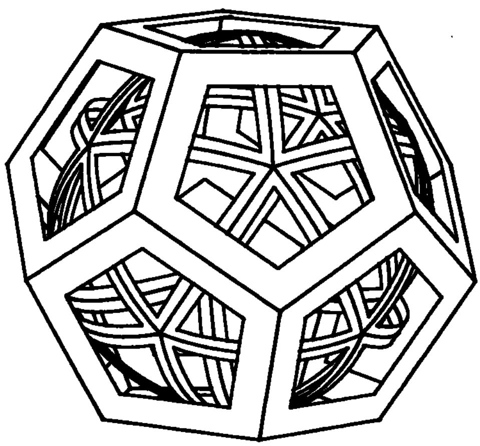
„Das Feuer trete als Tetraeder auf, die Luft bestehe aus Oktaedern, das Wasser aus Ikosaedern, die Erde aus Würfeln, und da noch eine fünfte Gestaltung möglich war, so habe Gott diese, das Dodekaeder benutzt, als Umriß des Weltganzen zu dienen".

Dieser ungenierten Einbindung in die platonische Philosophie ist es offenbar auch zuzuschreiben, daß die fünf platonischen Körper nach Plato benannt sind, obwohl er sie, im Gegenatz zu seiner gleichnamigen Liebe, gar nicht erfunden hatte. Vorher hießen diese Körper nach übereinstimmenden Berichten pythagoräische Körper.

Die Schönheit der platonischen Körper, ihre faszinierenden Symmetrieeigenschaften haben später auch Kepler zu Spekulationen verführt, die dann aber leider nicht standhielten.

Um seine erste Beschreibung der Planetenbahnen mittels der platonischen Körper zu verstehen, muß noch eine ihrer wichtigsten Eigenschaften vorausgeschickt werden. Die platonischen Körper sind Mittelpunktskörper, das heißt, man kann jedem dieser Körper zwei konzentrische Kugeln zuordnen, eine Innenkugel und eine Umkugel.

Die Innenkugel liegt, wie der Name vermuten läßt, ganz im Inneren des Körpers und berührt die Flächen in ihren Mittelpunkten. In der folgenden Abbildung ist exemplarisch die Innenkugel des Dodekaeders gezeichnet. Die Bögen verbinden hierbei die Mittelpunkte der Flächen und liegen sämtlich auf einer Kugel.



Auf der Außenkugel dagegen liegen sämtliche Ecken des Körpers. In der folgenden Abbildung ist dies am Beispiel des Ikosaeders demonstriert. Hier verbinden die Bögen die Ecken des Ikosaeders und liegen wieder sämtlich auf einer Kugel.

Bei Keplers Untersuchungen über die Planetenbahnen war die Verschiedenheit der Abstände von der Sonne eines der zentralen Probleme. In seinem tiefen Glauben an die Vollkommenheit und Harmonie der Schöpfung war er überzeugt, daß diese Abstände einer göttlichen Gesetzmäßigkeit genügen müßten. Eines Tages hatte er

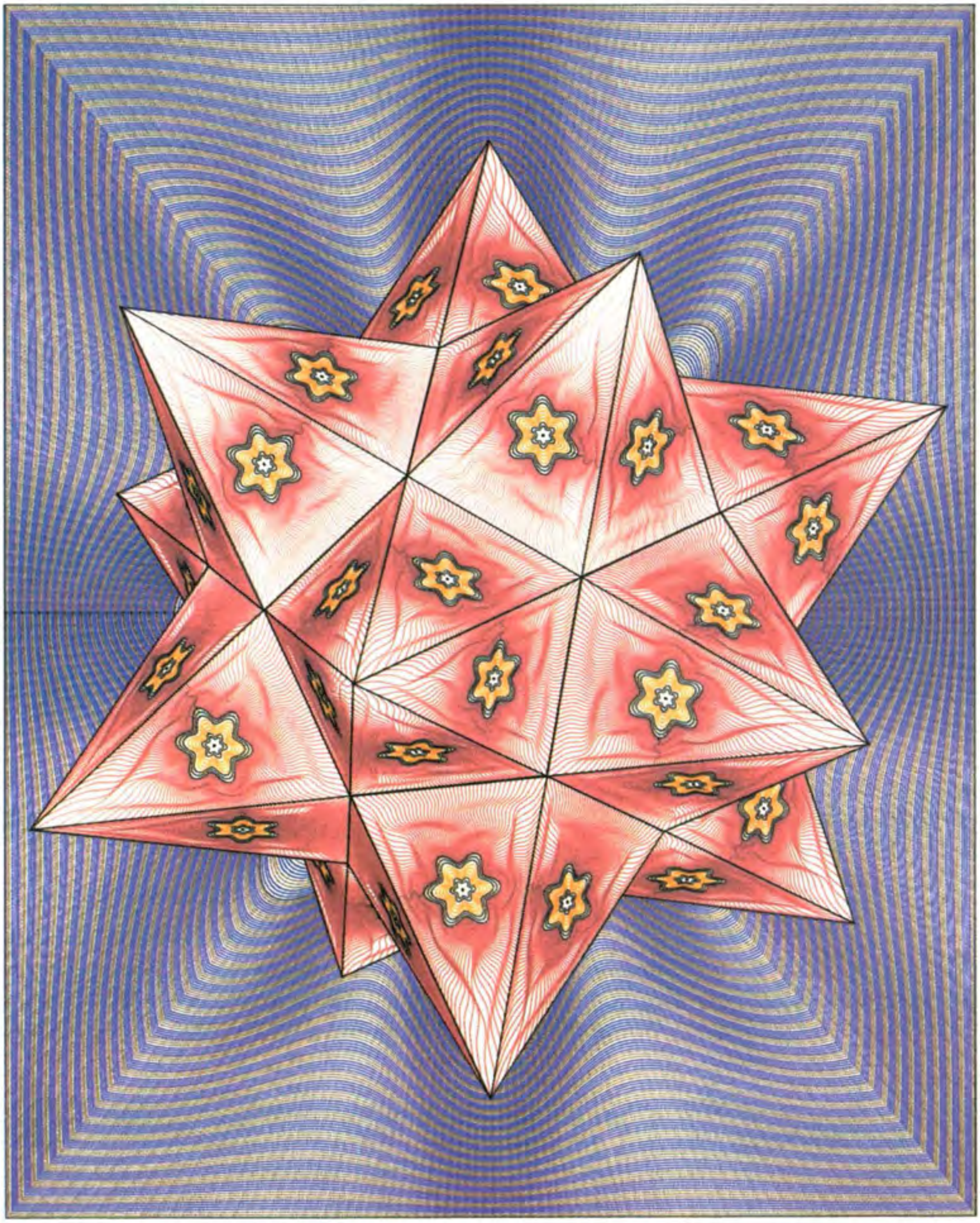
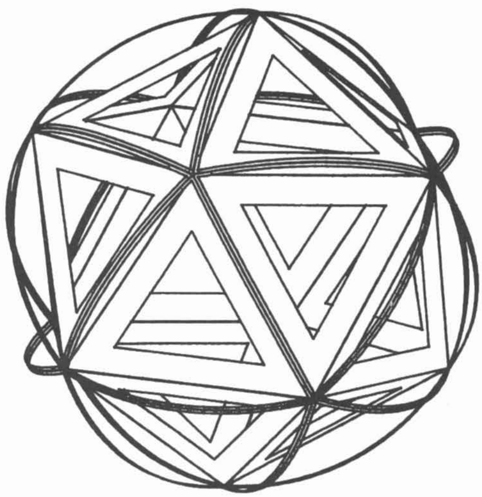


Abbildung 2:
Kepler's Dodekaederstern

Abbildung 3:
Tempel des Fußballgottes (Rekonstruktion)

den Einfall, diese Abstände mittels der In- und Umkugeln der platonischen Körper zu erklären. Die fünf platonischen Körper langten dabei gerade zu einer wunderbaren Theorie, da zu seiner Zeit nur sechs Planeten bekannt waren. Leider hat diese schöne Theorie, die vom logisch-ästhetischen her viel befriedigender als die real existierende ist, nie gestimmt und wäre auch spätestens mit der Entdeckung des siebten Planeten obsolet geworden.



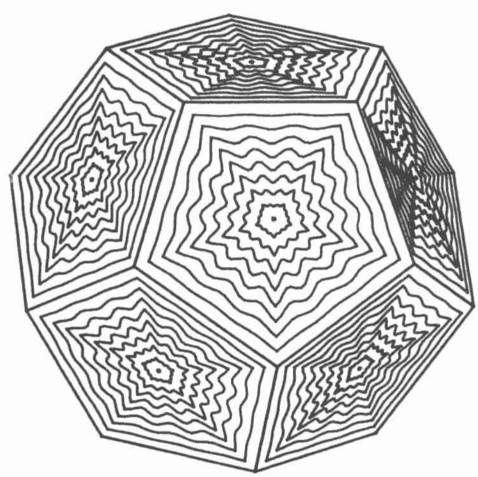
Immerhin lieferte Kepler mit der Erfindung zweier berühmter Sternkörper, die er aus dem Dodekaeder und dem Ikosaeder ableitete, auch in diesem geometrischen Zusammenhang einen unsterblichen Beitrag. *Abbildung 2* zeigt den Kepler'schen Dodekaederstern. Hierbei sind die Flächen mit einer Sternornamentik versehen, die radial in die Dreiecke übergeführt wird. Der Hintergrund wird von einer Kurvenornamentik gebildet, welche durch stetige Überführung von Sternkurven in das Bildrechteck entsteht.

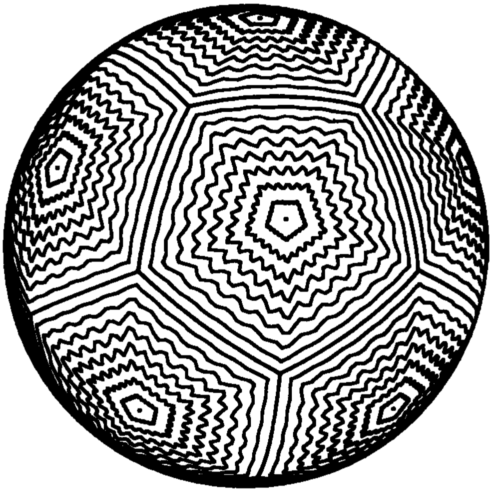
Gleichmäßige Unterteilung der Kugel mittels platonischer Körper

Nach wie vor zählt es zu den schwierigen geometrischen Problemen, eine Kugel in gleiche Flächenstücke zu unterteilen. Hier spielen die platonischen Körper eine fundamentale Rolle. Durch Projektion der Flächen eines platonischen Körpers auf seine Umkugel entsteht auf dieser eine vollkommene Unterteilung in kongruente Flächenstücke. Zeichnet man auf den Flächen noch irgendeine Ornamentik, so kann diese mit auf die Umkugel projiziert werden.

Als Beispiel hierzu zeigen wir zuerst ein Dodekaeder, auf dessen Flächen konzentrische Fünfecke gezeichnet sind, deren Seite noch mit Schwingungen versehen sind. In der folgenden Abbildung ist diese Konstellation vom Mittelpunkt des Dodekaeders auf die Umkugel projiziert.

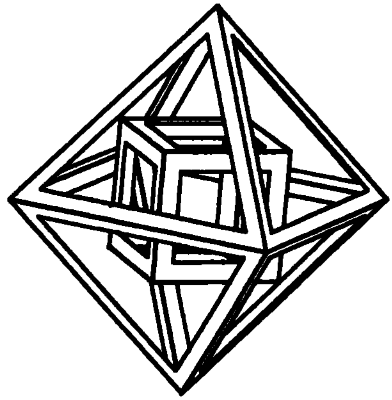
Abbildung 3 zeigt im „Tempel des Fußballgottes" eine Ornamentik auf einer Kugel, die durch Projektion einer Familie von Sternkurven in den Fünfecken eines Dodekaeders auf die Umkugel entsteht.





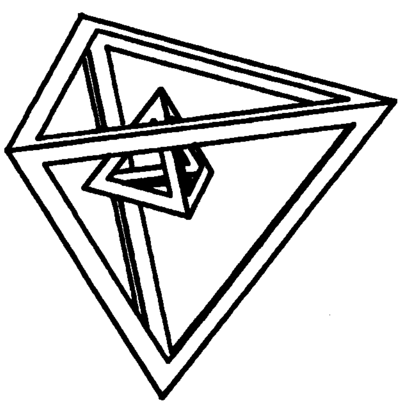
neren Tetraeders genau in den Mittelpunkten der vier Flächen des äußeren Tetraeders liegen.

Es ist ferner möglich, den Würfel so in das Oktaeder zu legen, daß die acht Ecken des Würfels genau in den Mittelpunkten der acht Flächen des Oktaeders liegen.



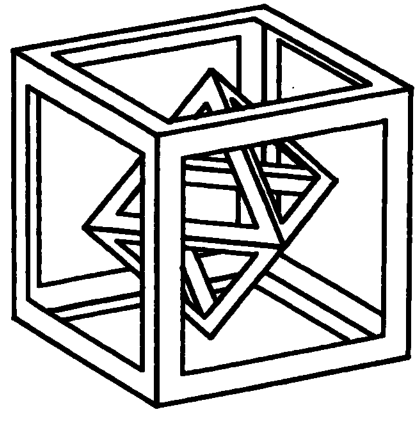
Dualitäten der platonischen Körper

Unter den Eigenschaften, welche seit Jahrtausenden die Geometer faszinieren, sind die Dualitäten platonischer Körper. Diese können sehr einfach beschrieben werden:



Es ist möglich, ein Tetraeder so in ein anderes zu legen, daß die vier Ecken des in-

Gleichermaßen kann man das Oktaeder so in den Würfel legen, daß die sechs Ecken des Oktaeders genau in den Mittelpunkten der sechs Flächen des Würfels liegen.



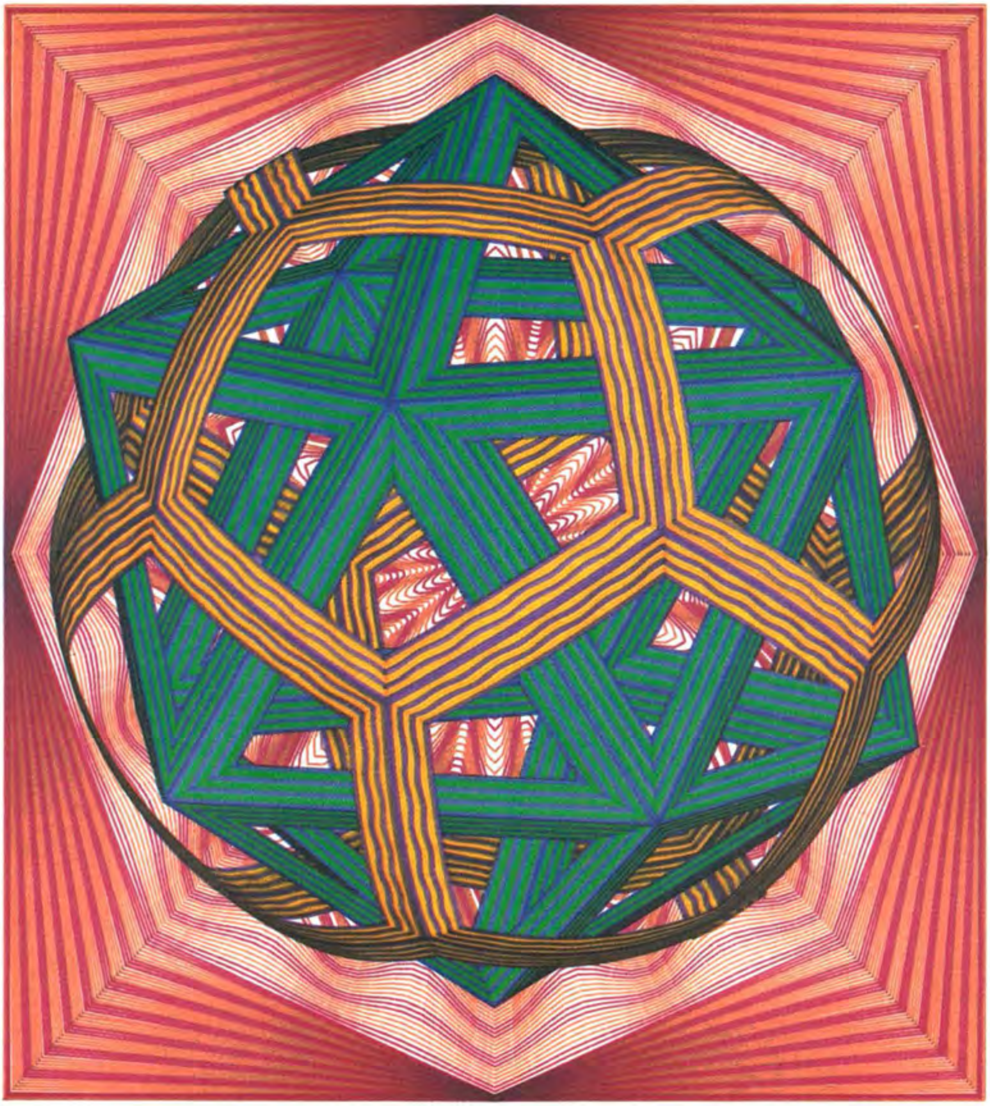


Abbildung 4:
Dualität von Dodekaeder und Ikosaeder

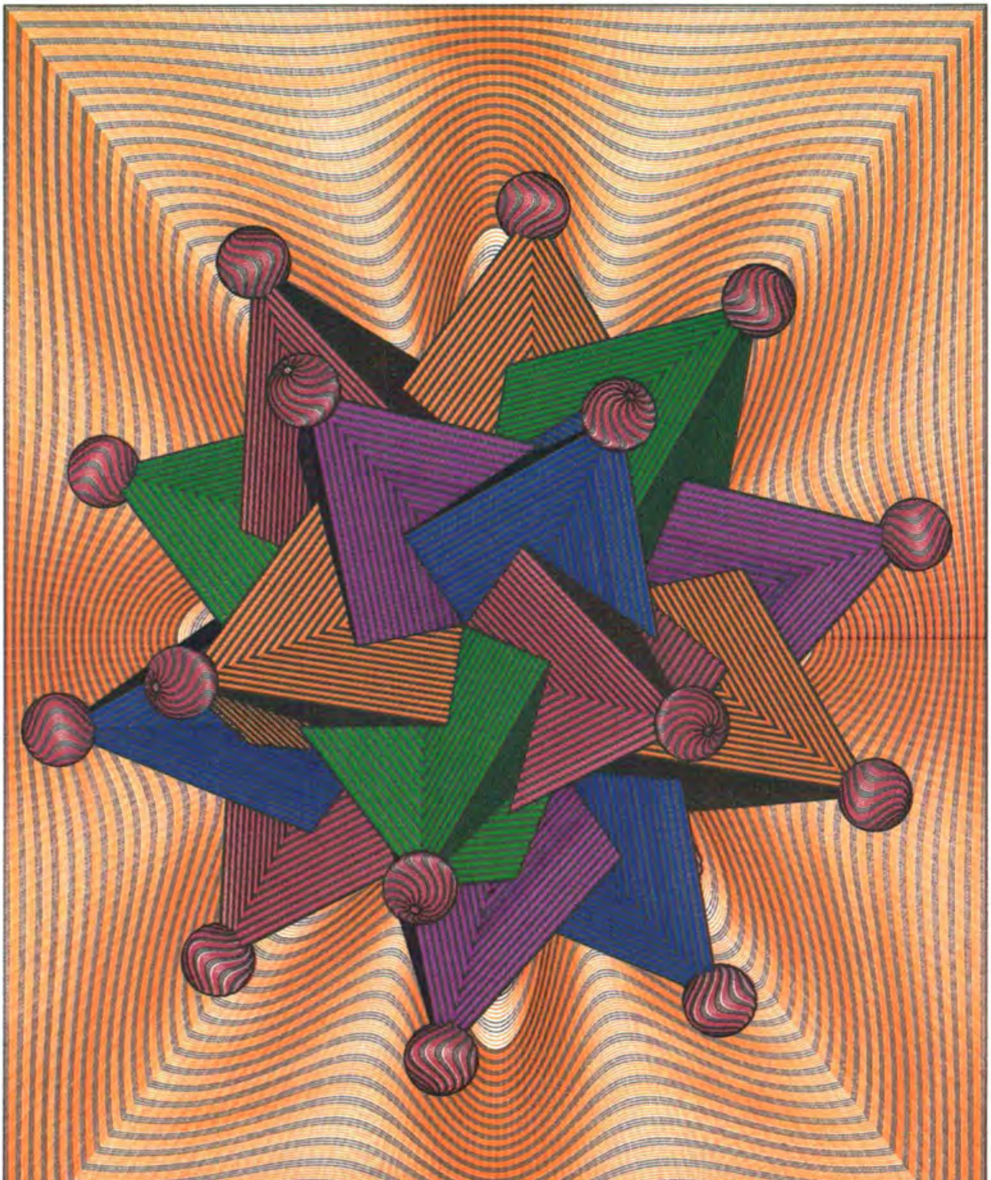
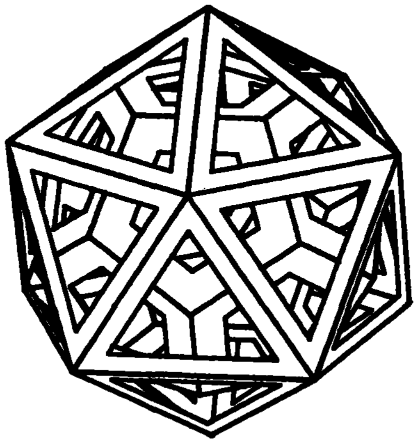
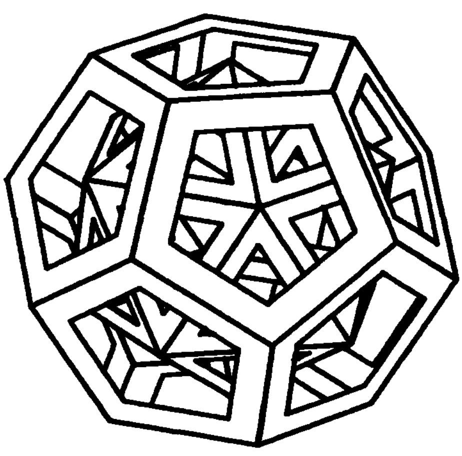


Abbildung 5:
Tetraederfünfling

Es ist weiterhin möglich, das Dodekaeder so in das Ikosaeder zu legen, daß die zwanzig Ecken des Dodekaeders genau in den Mittelpunkten der zwanzig Flächen des Ikosaeders liegen.



Wiederum gleichermaßen kann man das Ikosaeder so in das Dodekaeder legen, daß die zwölf Ecken des Ikosaeders genau in den Mittelpunkten der zwölf Flächen des Dodekaeders liegen.



Diese erstaunlichen Sachverhalte beschreibt man durch die Aussagen, daß das Tetraeder zu sich selbst dual ist, daß Würfel und Oktaeder zueinander dual sind, ebenso wie Dodekaeder und Ikosaeder.

Abbildung 4 zeigt eine Dualität von Dodekaeder und Ikosaeder. Hierbei ist das Dodekaeder noch auf seine Umkugel projiziert. Auf dem Hintergrund wird im wesentlichen ein Achteck stetig in ein Viereck übergeführt.

Weitere Beziehungen zwischen den platonischen Körpern

Die Dualitätseigenschaften könnten zu der Annahme verführen, daß das Tetraeder nur mit sich selbst in Verbindung steht, der Würfel nur mit dem Oktaeder und das Dodekaeder nur mit dem Ikosaeder. Dies ist jedoch nicht der Fall. Es gibt eine Fülle weiterer interessanter Wechselbeziehungen zwischen den platonischen Körpern.

Man kann zum Beispiel fünf Tetraeder so in das Dodekaeder einbeschreiben, daß deren zwanzig Ecken genau in den zwanzig Ecken des Dodekaeders liegen. Ebenso gelingt dies mit fünf Würfeln. Hierbei müssen allerdings je zwei der vierzig Würfelecken in eine Ecke des Dodekaeders gelegt werden. Auf eine etwas kompliziertere Art kann man auch fünf Oktaeder in das Dodekaeder einbeschreiben.

Abbildung 5 zeigt den Tetraederfünfling, wobei die fünf Tetraeder nicht ausgeschnitten sind und auf ihren Spitzen noch mit einer Kugel verziert sind, auf denen geschwungene Meridiane gezeichnet sind. Der Hintergrund ist ähnlich wie in *Abbildung 2*.

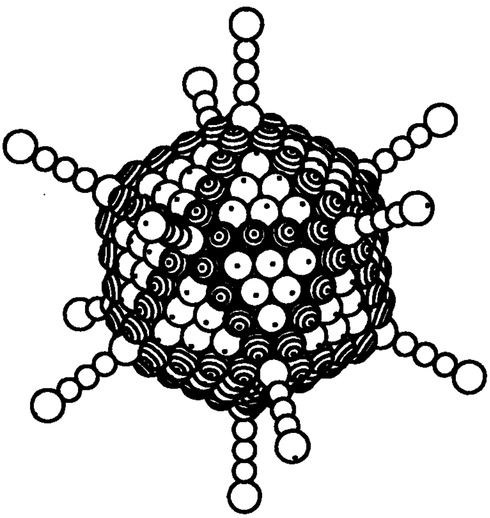
Die platonischen Körper werden von Vielecken einer einzigen Art begrenzt, nämlich von Dreiecken, Vierecken oder Fünfecken. Läßt man diese Restriktion fallen und erlaubt zwei oder drei verschiedene Arten von Vielecken, so führt dies zu einem wahren Kosmos von geometrischen Gebilden, die Archimedische Körper genannt werden.

Platonische Körper in der Natur

In der Natur findet man die platonischen Körper in den verschiedensten Formen. Dies hängt mit der überragenden Gesetzmäßigkeit zusammen, welche diese Körper auszeichnet, insbesondere mit ihren Symmetrieeigenschaften. Diese geometrischen Eigenschaften haben in der Natur nämlich wichtige physikalische Konsequenzen.

Betrachten wir dazu kurz als vertrautes Beispiel die vollkommenste räumliche Form, die Kugel. Warum haben Wassertropfen oder Planeten die Form einer Kugel? Dieser Sachverhalt hängt mit gewissen Minimaleigenschaften der Kugel zusammen. Die Kugel hat von allen räumlichen Körpern mit gleichem Rauminhalt die kleinste Oberfläche. Da alle Naturgesetze in irgendeiner Form Extremalgesetze sind, nimmt ein Wassertropfen oder ein Planet notwendig die Form an, bei der die Oberflächenspannung zu einem Minimum wird. Diese Form ist aber die Kugelform.

Ganz analog bewirken die geometrischen Eigenschaften der platonischen Körper in der Natur gewisse Minimaleigenschaften. Ein Paradebeispiel hierzu bilden die Mineralien. Die Welt der Kristalle ist ja eine eminent geometrische Welt. Alle Kristalle sind räumliche Gebilde, die von ebenen Flächenstücken begrenzt sind. So nimmt es nicht Wunder, daß wir hier unsere platonischen Körper mit ihren erlesenen geometrischen Symmetrien wiederfinden. So kann zum Beispiel Diamant in Form des Oktaeders kristallisieren, Bleiglanz und Florit in Form des Würfels oder Oktaeders und Pyrit in Form des Würfels oder Dodekaeders.



Erstaunlicherweise finden die Baupläne der platonischen Körper auch in der belebten Natur Verwendung. Eines der schönsten Beispiele ist der Adenovirus. Hier sitzen auf jeder Dreiecksfläche des Ikosaeders Kugeln, während an den Ekken radial angereihte Kugeln ausgehen. Wie kommt es zu einer solch komplexen geometrischen Architektur? Auch hier liegt der Grund in komplizierten physikalisch-chemischen Minimalbedingungen, welche eben gerade von dem Ikosaeder befriedigt werden.

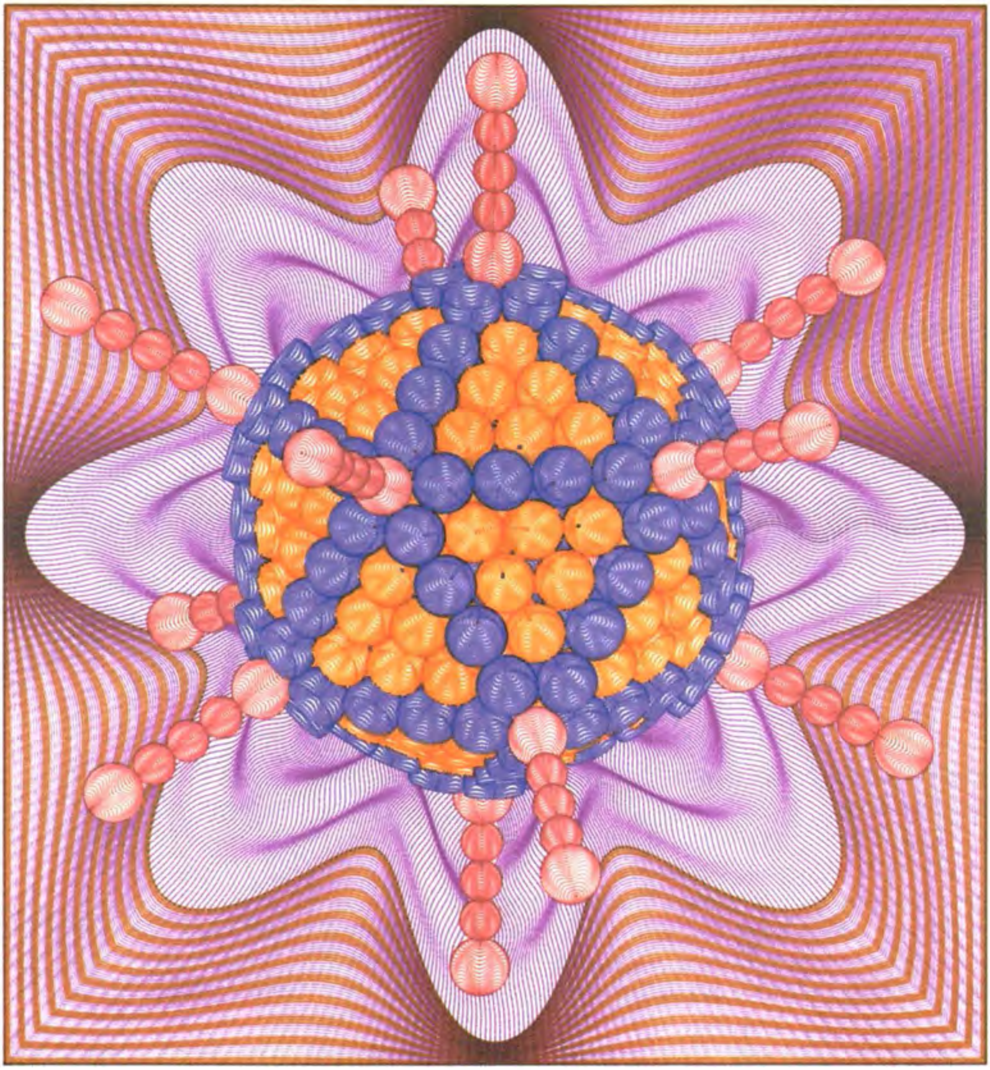


Abbildung 6:
Adenovirus

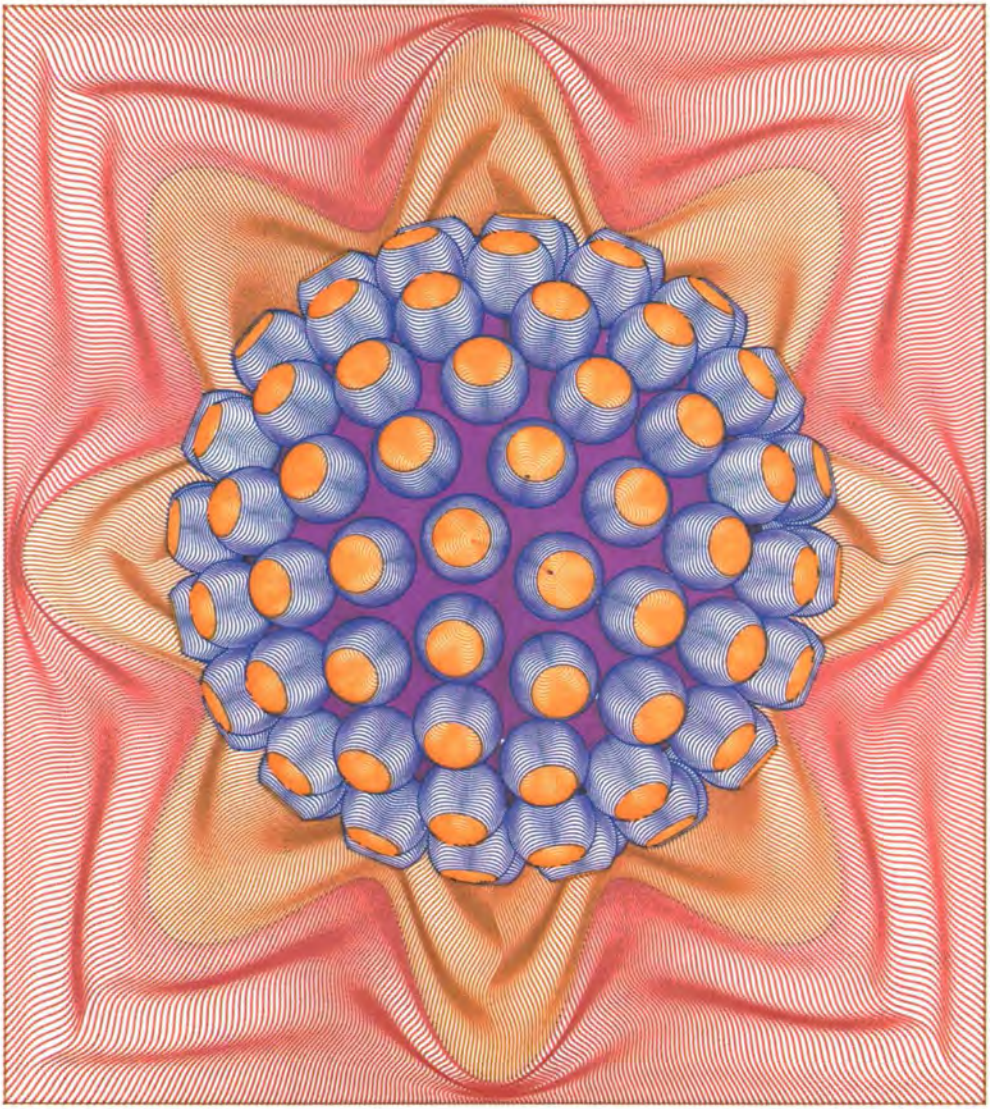


Abbildung 7:
Papovavirus

Abbildung 6 zeigt ein idealisiertes Prachtexemplar eines Adenovirus, sozusagen ein Adenovirus im festlichen Gewande. Die Kugeln auf den Flächen sind aufgeschnitten, und zur Hervorhebung des Ikosaeders sind die Kugeln auf den Kanten mit blauen Breitenkreisen bemalt, während für die restlichen gelb bzw. rot verwandt ist. Den Hintergrund bildet eine radial ausgemalte Sternfigur, die dann stetig in das Rahmenrechteck übergeführt wird.

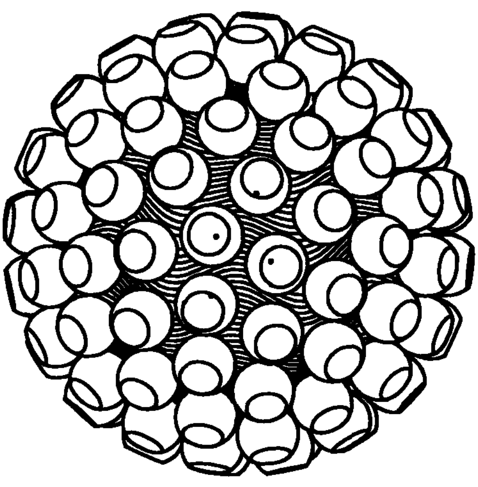
Ein weiteres Beispiel in dieser Richtung ist der Papovavirus. Hier sitzen auf einer Kugel zahlreiche kugelförmige Ausstülpungen. Während aber auf dem Adenovirus die Mittelpunkte und Achsen der Kugeln genau durch die Geometrie des zugrundeliegenden Ikosaeders bestimmt sind, ist es ein schwieriges Problem, auf dem großen Kugelkörper die Mittelpunkte der kleinen Kugeln in einer möglichst guten Gleichverteilung festzulegen. Dies gelingt jedoch ganz leicht dadurch, daß man die Mittelpunkte und Ecken des Dodekaeders und Ikosaeders heranzieht. Man könnte auch sagen, daß dem Papovavirus die Dualität dieser beiden platonischen Körper zugrundeliegt.

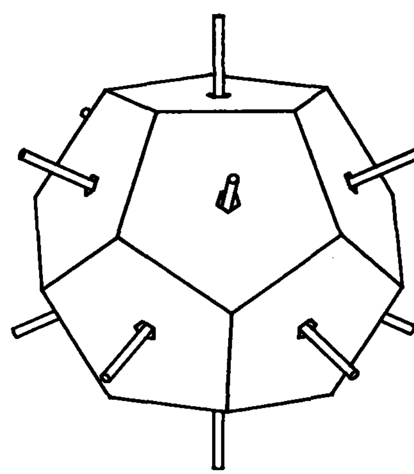
Abbildung 7 zeigt ein recht ansehnliches Exemplar eines Papovavirus, bei dem die Innenseiten der kleinen Kugeln orange ausgemalt sind, während die Außenhaut blau gezeichnet ist. Der Hintergrund wird von einer radial ausgemalten Sternfigur gebildet, die ebenfalls radial in das Rahmenrechteck übergeführt wird.

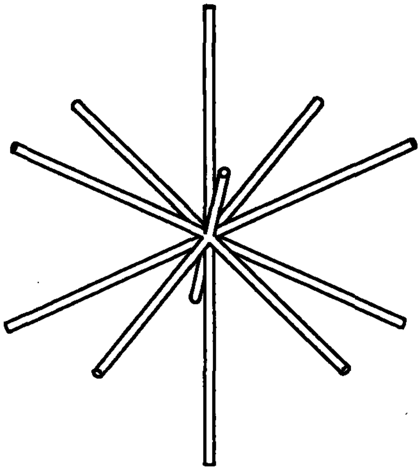
Die platonischen Körper als „Richtungslieferanten" im Raum

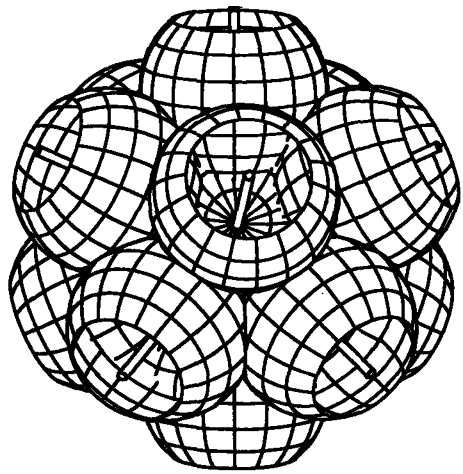
Die einzigartige Symmetrie der Platonischen Körper kann in der verschiedensten Art und Weise auch zur Erstellung von Motiven herangezogen werden, denen man auf den ersten Blick ihre Genesis nicht ansieht. So entsteht das Motiv in *Abbildung 8* dadurch, daß auf zwölf, mit Hilfe eines Dodekaeders ausgerichteter Kugeln, je fünf Blätter gezeichnet werden.

Dazu werden in einem ersten Schritt durch die Flächenmittelpunkte eines Dodekaeders Zylinder gelegt.









Anschließend nehmen wir das Dodekaeder wieder weg. Wir haben es nur benutzt, um im Raum 12 Richtungen in vollendeter Symmetrie zu definieren.

Wir nehmen nun diese 12 Richtungen als Achsen von 12 Kugeln, deren Mittelpunkte wir im gleichen Abstand vom Mittelpunkt des Dodekaeders wählen. Um diese geometrische Konstellation anschaulich zu machen, versehen wir diese Kugeln noch mit Meridianen und Breitenkreisen. Offensichtlich sind die Kugeln so plaziert, daß sie sich noch durchdringen.

Aus jeder Kugel schneiden wir nun Blätter heraus, die wir noch mit Rippen versehen. Die Komplexität des entstehenden Bildes ist so groß, daß die zugrunde liegende überschaubare geometrische Konstruktion nicht mehr zu sehen ist.

Dies ist eine der großartigen Möglichkeiten, welche die Computergrafik bietet. Symmetrie und Ordnung, die unter Umständen einen ästhetischen Eindruck stören, können durch Komplexität aufgelöst werden.

Literatur:

Adam, Paul/Wyss, Arnold: Platonische und Archimedische Körper, Verlag Freies Geistesleben, 1984
Brückner, Max: Vielecke und Vielflache, Theorie und Geschichte, Teubner, Leipzig 1900
Endl, Kurt/Endl, Robert: Computergrafik 1, Würfel-Verlag 1989
Endl, Kurt: Computergrafik 2, Würfel-Verlag, 1991
Endl, Kurt: Eine offene Software zur Geometrie, Messestand HESSISCHE HOCHSCHULEN, Uni Gießen, CEBIT 93
Endl, Kurt: Kreative Computergrafik mit QBASIC, Würfel-Verlag 1993
Hildebrandt, S./Tromba, A.: Panoptikum, Mathematische Grundmuster des Vollkommenen, Spektrum der Wissenschaft, 1986

Abbildung 8:
Dodekaederstrauß