

**Nichtperturbative  
Untersuchungen der  
SU(2) Yang-Mills-Theorie  
in 2 + 1 Dimensionen**

Inaugural-Dissertation  
zur  
Erlangung des Doktorgrades  
der Naturwissenschaftlichen Fakultät  
der Justus-Liebig-Universität Gießen  
Fachbereich Physik

vorgelegt von  
Jörn Matthias Häuser  
aus Grünberg

Gießen 1997

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Quantisierung in temporaler Eichung</b>	<b>3</b>
2.1	Kanonische Quantisierung . . . . .	3
2.1.1	Das Integralmaß . . . . .	6
2.1.2	Hermitezität von Operatoren . . . . .	7
2.1.3	Der freie Propagator im Heisenbergbild . . . . .	11
2.2	Pfadintegralquantisierung . . . . .	12
<b>3</b>	<b>Bewegungsgleichungen</b>	<b>19</b>
3.1	Hierarchie für volle Greenfunktionen . . . . .	19
3.2	Clusterzerlegung von Greenfunktionen . . . . .	22
3.3	Abschneideschema für die Hierarchie . . . . .	27
3.4	Diagrammatische Analyse . . . . .	30
3.4.1	Die Terme der 2-Punkt-Gleichungen . . . . .	31
3.4.2	Die Terme der 3-Punkt-Gleichungen . . . . .	33
3.4.3	Die Terme der 4-Punkt-Gleichungen . . . . .	37
<b>4</b>	<b>Gauß-Hierarchie</b>	<b>41</b>
4.1	Hierarchie für volle Greenfunktionen . . . . .	41
4.2	Clusterzerlegung und Diagramme . . . . .	46
<b>5</b>	<b>Numerische Propagation</b>	<b>51</b>
5.1	Infraroteigenschaften und Eichinvarianz . . . . .	54
5.2	Skalierungsverhalten und UV-Konvergenz . . . . .	62
5.3	Wiederherstellung des Gauß-Gesetzes . . . . .	68
5.4	Eine erweiterte Impulsbasis . . . . .	77
<b>6</b>	<b>Adiabatisches Einschalten</b>	<b>83</b>
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>93</b>
7.1	Zusammenfassung . . . . .	93
7.2	Ausblick . . . . .	96

<b>A</b>	<b>Ein quantenmechanisches Beispiel</b>	<b>99</b>
<b>B</b>	<b>Clusterzerlegung</b>	<b>103</b>
<b>C</b>	<b>Bewegungsgleichungen</b>	<b>109</b>
<b>D</b>	<b>Farbstruktur der 4-Punkt-Funktionen</b>	<b>133</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Nichtabelsche Eichtheorien wie die Quantenchromodynamik (QCD) erfordern den Einsatz nichtperturbativer Methoden für alle Prozesse mit „kleinem“ Impulstransfer, d.h. sobald die Region der asymptotischen Freiheit verlassen wird. Wichtige Beispiele hierfür sind der Confinement-Mechanismus, eng verknüpft mit der Vakuumstruktur [1], sowie die Untersuchung von Hadronenspektren und hadronischer Materie. Weitere Phänomene sind der Deconfinement-Phasenübergang, die Wiederherstellung der chiralen Symmetrie, der Mechanismus der Hadronisierung in relativistischen Schwerionenkollisionen und nichtperturbative Effekte in einem Quark-Gluon-Plasma oberhalb der kritischen Temperatur  $T_c$  [2].

Neben numerisch sehr aufwendigen Rechnungen im Rahmen der Gittereichtheorie [3] existieren derzeit nur vorläufige Versuche einer nichtperturbativen Beschreibung nichtabelscher Eichtheorien mit Hilfe von Dyson-Schwinger-Gleichungen [4]-[10], diskretisierter Lichtkegelquantisierung [11], Variationsrechnungen [12]-[16] und Transporttheorien auf der Basis von eichkovarianten Wigner-Funktionen mit oder ohne die Einschränkung auf den Grenzfall gleicher Zeitargumente [17]-[21].

In dieser Arbeit wird ein anderes Verfahren verwendet, das sich an der Methode der  $n$ -Punkt-Korrelationsdynamik [22]-[26] orientiert. Diese besteht in einem Abschneiden der Hierarchie von Bewegungsgleichungen für gleichzeitige Greenfunktionen mit Hilfe einer Entwicklung in verbundene Greenfunktionen bis zur Ordnung  $n$ . Im Gebiet der relativistischen Feldtheorien wurde diese Methode bereits erfolgreich auf die  $\Phi^4$ -Theorie in  $0+1$ ,  $1+1$  und  $2+1$  Raum-Zeit-Dimensionen [27]-[31] und auf die Yukawa-Theorie in  $1+1$  Raum-Zeit-Dimensionen [32] angewandt.

Hier wird die einfachste nichttriviale nichtabelsche lokale Eichtheorie untersucht, d.h. die  $SU(2)$  Yang-Mills-Theorie in  $2+1$  Raum-Zeit-Dimensionen. Dabei wird zur Formulierung der entsprechenden Gleichungen die temporale Eichung verwendet. Die Theorie hat den Vorteil, nicht nur superrenormierbar, sondern sogar endlich zu sein [33].

Das neue Phänomen in der Anwendung der  $n$ -Punkt-Korrelationsdynamik auf die Yang-Mills-Theorie in temporaler Eichung ist dadurch gegeben, daß das Gauß-Gesetz als Randbedingung an physikalische Zustände zu allen Zeiten zusätzlich erfüllt sein muß. Ob die Korrelationsdynamik unter diesen Bedingungen noch eine konvergente Näherung darstellt, ist die zentrale Fragestellung dieser Arbeit, die sich wie folgt gliedert: In Kapitel 2 wird allgemein die Quantisierung nichtabelscher Eichtheorien diskutiert und die hier verwendete Methode zur Fixierung der residualen rein räumlichen Eichfreiheitsgrade in temporaler Eichung vorgestellt. In Kapitel 3 wird die Herleitung der korrelationsdynamischen Bewegungsgleichungen präsentiert, und in Kapitel 4 wird die Hierarchie von Randbedingungen für gleichzeitige Greenfunktionen diskutiert, die aus dem Gauß-Gesetz folgen. In Kapitel 5 werden numerische Resultate für die Propagation des Systems bei gegebenen Anfangsbedingungen vorgestellt, und in Kapitel 6 wird die Methode der dynamischen Generierung einer approximativen Grundzustandskonfiguration mit der Methode des adiabatischen Einschaltens diskutiert. Kapitel 7 schließt mit einer Zusammenfassung der Arbeit und einem Ausblick.

# Kapitel 2

## Quantisierung in temporalen Eichung

In diesem Kapitel werden die Quantisierung der  $SU(N)$  Yang-Mills-Theorie in temporalen Eichung ( $A_0^a = 0$ ) und der dazu korrespondierende freie Propagator diskutiert. Der freie Propagator ist in diesem Zusammenhang von Interesse, da er zum einen ein instruktives Beispiel für das Auftreten expliziter Zeitabhängigkeiten in Gleichgewichtskonfigurationen liefert und zum anderen für die Bestimmung perturbativer Anfangsbedingungen für die korrelationsdynamische Propagation gleichzeitiger Greenfunktionen benötigt wird. Die Diskussion gliedert sich auf in einen Abschnitt über die kanonische Quantisierung (die in dieser Arbeit verwendet wird) und einen Abschnitt über die Pfadintegralquantisierung.

### 2.1 Kanonische Quantisierung

In diesem Abschnitt wird zunächst die kanonische Quantisierung diskutiert. Die Lagrangedichte der  $d + 1$  dimensionalen  $SU(N)$  Yang-Mills-Theorie ist

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu}, \quad F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + gf^{abc}A_\mu^b A_\nu^c, \quad (2.1)$$

wobei  $a, b, c$  die Farbindizes in der adjungierten Darstellung der  $SU(N)$  sind und die griechischen Indizes  $\mu, \nu$  über die  $d + 1$  Raumzeit-Komponenten des Eichfelds laufen. In der gesamten Arbeit wird über doppelt vorkommende Indizes summiert. Die Lagrangedichte (2.1) ist invariant unter infinitesimalen lokalen Eichtransformationen der Form

$$A_\mu^a(x) \rightarrow A_\mu^a(x) + gf^{abc}\delta\Theta^b(x)A_\mu^c(x) - \partial_\mu\delta\Theta^a(x) \quad (2.2)$$

und unter den entsprechenden finiten Eichtransformationen. Für die kanonische Quantisierung wird zunächst eine bestimmte Eichung ausgewählt, d.h. es

wird versucht, über eine zusätzliche Randbedingung, die Eichfixierungsbedingung, aus jedem Raum eichäquivalenter klassischer Feldkonfigurationen nur einen möglichst kleinen Unterraum auszuwählen. Es wäre wünschenswert, genau *eine* solche Konfiguration auszuwählen, was sich jedoch in der Praxis als recht schwierig und in einer kompakten Raumzeit sogar als unmöglich erweist [34, 35]. Die in dieser Arbeit zunächst gewählte Eichung ist die temporale Eichung (auch Weyl-Eichung genannt) mit der Bedingung  $A_0^a = 0$ .

Der zu (2.1) korrespondierende quantenfeldtheoretische Hamiltonoperator in  $A_0^a = 0$ -Eichung ist [36]

$$H = \int d^d x \left( \frac{1}{2} \Pi_i^a(\vec{x}) \Pi_i^a(\vec{x}) + \frac{1}{4} F_{ij}^a(\vec{x}) F_{ij}^a(\vec{x}) \right), \quad (2.3)$$

und die kanonischen gleichzeitigen Kommutatorrelationen sind

$$[A_i^a(\vec{x}, t), \Pi_j^b(\vec{y}, t)] = i \delta_{ij} \delta^{ab} \delta(\vec{x} - \vec{y}), \quad (2.4)$$

wobei nun die lateinischen Indizes  $i, j$  nur über die  $d$  räumlichen Komponenten des Eichfelds laufen und die  $\Pi_i^a$  die konjugierten Feldimpulse bezeichnen.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen für die räumlichen Komponenten des Eichfelds  $A_i^a$ , die aus (2.1) in der  $A_0^a = 0$ -Eichung folgen, können mit (2.3) und (2.4) als die Heisenberggleichungen für die Operatoren  $A_i^a$  und  $\Pi_i^a$  reproduziert werden. Im Gegensatz dazu ist die Euler-Lagrange-Gleichung für  $A_0^a$ , das *Gauß-Gesetz*, nicht in der Dynamik enthalten, die von (2.3) generiert wird. Es kann weiterhin nicht als eine Operatoridentität realisiert werden, da dies im Widerspruch zu den Kommutatorrelationen (2.4) stehen würde. Das Gauß-Gesetz muß daher als eine Randbedingung an die physikalischen Zustände gefordert werden [37]:

$$G^a(\vec{x}) |\Psi_{ph}\rangle = 0, \quad G^a(\vec{x}) = \left( \partial_{x_i} \Pi_i^a(\vec{x}) + g f^{abc} A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \right). \quad (2.5)$$

Die obige Formulierung der Yang-Mills-Theorie über die direkte Ableitung aus der Lagrangedichte (2.1) ist lediglich eine mögliche Methode. Sie impliziert, daß der dazu einzuführende Hilbert-Raum bezüglich seiner Darstellung durch Schrödingersche Wellenfunktionale von Beginn an aus Wellenfunktionalen besteht, die lediglich von den räumlichen Komponenten des Eichfelds abhängen.

Es ist an dieser Stelle jedoch sinnvoll, darauf hinzuweisen, daß man alternativ genausogut von einer Lagrangedichte mit einem zusätzlichen Eichfixierungsterm (für kovariante Eichung) ausgehen kann, wobei dann zunächst ein Hilbert-Raum von Wellenfunktionalen eingeführt wird, die von allen  $d + 1$  raumzeitlichen Komponenten des Eichfelds abhängen. Diese Wellenfunktionale müssen dann zusätzlich zum Gauß-Gesetz (2.5) die Lorentz-Bedingung erfüllen, welche dazu benutzt werden kann, die obige Formulierung in temporaler Eichung durch eine Separation der Variablen zu erhalten [38].

Die nichttrivialen Aspekte der obigen Formulierung in temporaler Eichung entstehen nun dadurch, daß die Bedingung  $A_0^a = 0$  die Eichung *nicht vollständig* fixiert, so daß eine residuale Eichsymmetrie übrigbleibt, die aus der Untergruppe aller zeitunabhängigen Eichtransformationen besteht. Die Gauß-Gesetz-Operatoren  $G^a(\vec{x})$  (2.5) sind die Generatoren dieser residualen Eichsymmetrie (wobei eine Einschränkung auf diejenigen Transformationen vorgenommen werden muß, die bezüglich der räumlichen Koordinaten im Kontinuum im Unendlichen gegen 1 konvergieren bzw. auf einem Torus periodisch sind), d.h. es gilt

$$[G^a(\vec{x}), H] = 0 \quad (2.6)$$

und für infinitesimales  $\delta\Theta^a(\vec{x})$  (das im Kontinuum im räumlich-unendlichen gegen 0 konvergiert bzw. auf einem Torus periodisch ist)

$$\begin{aligned} U[\delta\Theta] &= e^{-i \int d^d x \delta\Theta^b(\vec{x}) G^b(\vec{x})}, \\ U^{-1}[\delta\Theta] A_i^a(\vec{x}) U[\delta\Theta] &= g f^{abc} \delta\Theta^b(\vec{x}) A_i^c(\vec{x}) - \partial_{x_i} \delta\Theta^a(\vec{x}), \\ U^{-1}[\delta\Theta] \Pi_i^a(\vec{x}) U[\delta\Theta] &= g f^{abc} \delta\Theta^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Die Bedingung (2.5) ist daher äquivalent zu der Forderung, daß alle physikalisch erlaubten Zustände invariant unter (vom Gauß-Gesetz generierten) Eichtransformationen sind, d.h.

$$U[\Theta] |\Psi_{ph}\rangle = |\Psi_{ph}\rangle. \quad (2.8)$$

Gleichung (2.8) mit (2.7) impliziert außerdem, daß die physikalischen Zustände nicht normierbar sind, da das Volumen der residualen Eichgruppe unendlich groß ist.

Das Problem der residualen (rein räumlichen) Eichfreiheit kann nun mit verschiedenen Methoden behandelt werden. Eine Möglichkeit besteht darin, die verbleibenden unphysikalischen Freiheitsgrade zu eliminieren und die Theorie ausschließlich mit randbedingungsfreien Größen zu formulieren. Dies kann entweder durch eine Variablentransformation [36, 38] oder durch die Anwendung einer unitären Eichfixierungstransformation [39] erreicht werden. Eine Formulierung mit randbedingungsfreien Freiheitsgraden als Ausgangspunkt für nichtperturbative Rechnungen hat den Vorteil, daß das Gauß-Gesetz (2.5) nicht als zusätzliche Randbedingung in einem Approximationschema beachtet werden muß, da es bereits durch die Wahl der Variablen implementiert ist. Weiterhin sind die entsprechenden Wellenfunktionale, die bezüglich der randbedingungsfreien Variablen definiert sind, dann normierbar. Formulierungen dieser Art haben jedoch den Nachteil, zu sehr komplizierten (im allgemeinen nicht-polynomischen) Ausdrücken für die entsprechenden quantenfeldtheoretischen Hamiltonoperatoren zu führen [36]. Die Anwendung der korrelationsdynamischen Methode ist aber auf Hamiltonoperatoren beschränkt, die eine einfache Struktur ausschließlich mit Polynomen niedriger Ordnung in den Feldoperatoren aufweisen.



### 2.1.1 Das Integralmaß

In dieser Arbeit wird daher eine andere Methode zum Umgang mit der residualen Eichfreiheit (2.6), (2.7) angewandt, die in der Einführung eines nichttrivialen Integralmaßes für Matrixelemente zwischen physikalischen Zuständen, die (2.5) erfüllen, besteht. Dieses Integralmaß wird mit Hilfe der Fadeev-Popov-Methode erzeugt (vergl. [40] und für ein einfaches quantenmechanisches Beispiel Anhang A), die zwar eine wohlbekannt Standardmethode darstellt, deren Anwendung jedoch normalerweise im Rahmen der Pfadintegralquantisierung nichtabelscher Eichfelder erfolgt (vergl. Abschnitt 2.2).

Als Ausgangspunkt sei das Matrixelement eines eichinvarianten Operators  $O_{inv}$  (d.h.  $[O_{inv}, G^a(\vec{x})] = 0$ ) zwischen zwei physikalischen Zuständen  $|\Phi_{ph}\rangle$  und  $|\Psi_{ph}\rangle$  betrachtet:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{ph} | O_{inv} | \Psi_{ph} \rangle &= \int \mathcal{D}\mu[A] \Phi_{ph}^*[A] O_{inv}^A \Psi_{ph}[A], \\ O_{inv}^A \Psi_{ph}[A] &\equiv \langle A | O_{inv} | \Psi_{ph} \rangle. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Da der Integrand in (2.9) eichinvariant ist, ist es für den Erhalt eines wohldefinierten Resultats hinreichend, das Integralmaß  $\mathcal{D}\mu[A]$  so zu wählen, daß es einen Faktor des inversen (unendlichen) Volumens der residualen Eichgruppe enthält, d.h.

$$\mathcal{D}\mu[A] = \left( \int \mathcal{D}h^{res}[U] \right)^{-1} \mathcal{D}A, \quad (2.10)$$

so daß die Normierung der physikalischen Zustände wie folgt gewählt werden kann:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{ph} | \Psi_{ph} \rangle &= \int \mathcal{D}\mu[A] \Psi_{ph}^*[A] \Psi_{ph}[A] \\ &= \left( \int \mathcal{D}h^{res}[U] \right)^{-1} \int \mathcal{D}A \Psi_{ph}^*[A] \Psi_{ph}[A] = 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Hierbei ist  $\mathcal{D}h^{res}[U]$  das Haar-Maß für die Integration über die residuale Eichgruppe und (in formaler Schreibweise)  $\mathcal{D}A = \prod_{\vec{x}, i, \alpha} dA_i^\alpha(\vec{x})$ . Das Integralmaß  $\mathcal{D}\mu[A]$  führt jedoch noch immer zu nicht wohldefinierten Matrixelementen für Operatoren, die nicht eichinvariant sind. Um die durch  $\mathcal{D}\mu[A]$  definierten Matrixelemente für eichinvariante Operatoren beizubehalten und gleichzeitig wohldefinierte Matrixelemente für *eichabhängige Operatoren* zu erhalten, wird nun die Fadeev-Popov-Methode auf das Integral (2.9) angewandt. Zunächst sei eine Fadeev-Popov-Determinante  $\Delta[A]$  definiert durch

$$1 = \Delta[A] \int \mathcal{D}h^{res}[U] \delta[F[A^U]], \quad (2.12)$$

wobei  $F[A]$  eine beliebige, rein räumliche Eichfixierungsbedingung ist und  $A^U$  das durch die Eichtransformation  $U$  (2.7) transformierte Feld  $A$  bezeichnet.

Es sei darauf hingewiesen, daß die hier verwendete Schreibweise für  $F[A]$  als Abkürzung für  $F^a(\vec{x}, [A])$  aufzufassen ist, d.h.  $F$  bildet die klassischen Eichfelder  $A_i^a(\vec{x})$  auf farb- und ortsabhängige Funktionen ab, wobei lediglich über den räumlichen Vektorindex des Feldes kontrahiert wird. Die funktionale  $\delta$ -Distribution in (2.12) steht entsprechend für  $\prod_{\vec{x}, a} \delta(F^a(\vec{x}, [A]))$ . Das so definierte  $\Delta[A]$  ist ein unter rein räumlichen Eichtransformationen invariantes Funktional, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \Delta[A^U] &= \left( \int \mathcal{D}h^{res}[U'] \delta[F[(A^U)^{U'}]] \right)^{-1} \\ &= \left( \int \mathcal{D}h^{res}[UU'] \delta[F[A^{UU'}]] \right)^{-1} \\ &= \left( \int \mathcal{D}h^{res}[U''] \delta[F[A^{U''}]] \right)^{-1} = \Delta[A]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Man erhält dann in der üblichen Vorgehensweise

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{ph} | O_{inv} | \Psi_{ph} \rangle &= \int \mathcal{D}\mu[A] \Delta[A] \int \mathcal{D}h^{res}[U] \delta[F[A^U]] \Phi_{ph}^*[A] O_{inv}^A \Psi_{ph}[A] \\ &= \int \mathcal{D}h^{res}[U] \int \mathcal{D}\mu[A^U] \Delta[A^U] \delta[F[A^U]] \Phi_{ph}^*[A^U] O_{inv}^{A^U} \Psi_{ph}[A^U] \\ &= \int \mathcal{D}A \Delta[A] \delta[F[A]] \Phi_{ph}^*[A] O_{inv}^A \Psi_{ph}[A]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

An dieser Stelle könnte man die Methode noch weiter verallgemeinern, indem man die funktionale  $\delta$ -Distribution durch Einführung einer Inhomogenität  $\xi(\vec{x})$  in der Eichfixierungsbedingung und anschließende Funktionalintegration über  $\xi(\vec{x})$  mit einem zu wählenden Gewichtsfunktional ausschmiert (dies ist die übliche Methode, die bei der Pfadintegralquantisierung z.B. auf den Eichparameter der kovarianten Eichungen führt, vergl. Abschnitt 2.2). Dies ist für die weitere Analyse in dieser Arbeit jedoch nicht erforderlich, da hier jeweils die homogene Coulomb-Eichbedingung verwendet wird.

Gleichung (2.14) definiert ein Integralmaß

$$\mathcal{D}\nu[A] = \mathcal{D}A \Delta[A] \delta[F[A]], \quad (2.15)$$

das dieselben Resultate wie  $\mathcal{D}\mu[A]$  für die Matrixelemente von eichinvarianten Operatoren liefert und gleichzeitig zu wohldefinierten endlichen Resultaten für die Matrixelemente von eichabhängigen Operatoren führt.

## 2.1.2 Hermitezität von Operatoren

Die Nichtnormierbarkeit der physikalischen Zustände und das aus diesem Grund eingeführte Maß (2.15) für die Definition von Matrixelementen im Raum der physikalischen Zustände hat nun wichtige Auswirkungen auf die

Hermitezitatseigenschaften von Operatoren, die im Raum der normierbaren Zustände hermitesch sind. Natürlich bleiben entsprechende eichinvariante Operatoren, z.B. der Hamiltonoperator (2.3) für sich allein betrachtet, im Raum der physikalischen Zustände weiterhin hermitesch [38, 40]. Steht ein solcher Operator in einem Matrixelement jedoch *links* von einem *eichabhängigen* Operator (der aus dem Raum der physikalischen Zustände in den Raum der eichabhängigen nicht normierbaren Zustände führt), so gehen die Hermitezitatseigenschaften verloren (vergl. Anhang A).

Das in diesem Zusammenhang auftauchende Standardbeispiel für einen Operator, der im Raum der normierbaren Zustände hermitesch ist und der diese Eigenschaft im Raum der nicht normierbaren Zustände verliert, ist der Erwartungswert des Kommutators  $[G^a(\vec{x}), A_i^b(\vec{y})]$  bezüglich eines physikalischen Zustands, bei dessen Berechnung die Annahme der Hermitezität des (eichkovarianten) Gauß-Gesetz-Operators auf ein unsinniges Ergebnis führt [40, 41, 42]. Es ist dabei bereits ausreichend, dieses Beispiel im abelschen Grenzfall der Kopplung  $g = 0$  (d.h. für ein freies Maxwell-Feld mit Farbfreiheitsgrad) zu betrachten. Unter Benutzung der Kommutatorrelationen (2.4) erhält man

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{ph} | [G^a(\vec{x}), A_i^b(\vec{y})] | \Psi_{ph} \rangle |_{g=0} &= \langle \Psi_{ph} | [\partial_{x_j} \Pi_j^a(\vec{x}), A_i^b(\vec{y})] | \Psi_{ph} \rangle \\ &= -i \delta^{ab} \partial_{x_i} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \langle \Psi_{ph} | \Psi_{ph} \rangle . \end{aligned} \quad (2.16)$$

Unter der (falschen) Annahme, daß  $G^a(\vec{x})$  stets seine Hermitezitatseigenschaften beibehält, erhält man hingegen

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{ph} | [G^a(\vec{x}), A_i^b(\vec{y})] | \Psi_{ph} \rangle &= \langle \Psi_{ph} | G^a(\vec{x}) A_i^b(\vec{y}) | \Psi_{ph} \rangle \\ &= \langle G^a(\vec{x}) \Psi_{ph} | A_i^b(\vec{y}) | \Psi_{ph} \rangle = 0 \text{ (falsch) } , \end{aligned} \quad (2.17)$$

was in offensichtlichem Widerspruch zu (2.16) steht. Der sich aus (2.16) und (2.17) ergebende *scheinbare* Widerspruch hat interessanterweise noch in einer Veröffentlichung im Jahre 1983 zu der fehlerhaften Schlußfolgerung geführt, daß die kanonische Quantisierung in temporaler Eichung unter der Verwendung der Kommutatorrelationen (2.4) eine unsinnige Vorgehensweise ist [43].

Um die oben erwähnte Nicht-Hermitezität des (eichinvarianten) Hamiltonoperators zu demonstrieren, soll die Zeitentwicklung des gleichzeitigen Erwartungswertes

$$\langle \Psi_{ph} | \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}) | \Psi_{ph} \rangle \quad (2.18)$$

im abelschen Grenzfall ( $g = 0$ ) betrachtet werden. Unter der Annahme, daß das System in einem Eigenzustand des Hamiltonoperators ist, d.h.

$$H | \Psi_{ph} \rangle = E | \Psi_{ph} \rangle \Leftrightarrow H^A \Psi_{ph}[A] = E \Psi_{ph}[A] , \quad (2.19)$$

und bei Verwendung des Schrödingerbildes, d.h. bei Beschreibung der gesamten Zeitentwicklung durch die Schrödingergleichung für den Zustand  $|\Psi_{ph}\rangle$ , erhält man

$$\begin{aligned} & \partial_t \langle \Psi_{ph} | \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}) | \Psi_{ph} \rangle_{S.p.} \\ &= \int \mathcal{D}\nu[A] \left( -iH^A \Psi_{ph}[A] \right)^* \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}) \Psi_{ph}[A] \\ &+ \int \mathcal{D}\nu[A] \Psi_{ph}^*[A] \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}) \left( -iH^A \Psi_{ph}[A] \right) = 0, \end{aligned} \quad (2.20)$$

wobei  $\partial_t \cdot |_{S.p.}$  die Zeitableitung im Schrödingerbild bezeichnet (der Einfachheit halber wird die gleiche Notation für klassische Felder und für Feldoperatoren verwendet). Im Gegensatz dazu liefert das Heisenbergbild, d.h. die Beschreibung der gesamten Zeitentwicklung durch die Heisenberggleichung für das Operatorprodukt  $\partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y})$ ,

$$\begin{aligned} & \partial_t \langle \Psi_{ph} | \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}) | \Psi_{ph} \rangle_{H.p.} = \langle \Psi_{ph} | \frac{1}{i} [\partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}), H] | \Psi_{ph} \rangle \\ &= \langle \Psi_{ph} | \partial_{x_i} \Pi_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}) | \Psi_{ph} \rangle + \langle \Psi_{ph} | \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} \Pi_j^b(\vec{y}) | \Psi_{ph} \rangle \\ &= -i \partial_{x_i} \partial_{y_j} \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta^{ab} \delta_{ij} = i \vec{\partial}_x^2 \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta^{ab}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

wobei  $\partial_t \cdot |_{H.p.}$  für die Zeitableitung im Heisenbergbild steht. In (2.21) wurden (2.4) und der abelsche Grenzfall von (2.5) sowie die Normierung  $\langle \Psi_{ph} | \Psi_{ph} \rangle = 1$  verwendet.

Die Diskrepanz zwischen (2.20) und (2.21) kann in der Darstellung der Theorie durch Schrödingersche Wellenfunktionale verstanden werden, indem die Transformation vom Schrödingerbild in das Heisenbergbild zum Zeitpunkt der Koinzidenz der beiden Bilder betrachtet wird: um von einem Bild in das andere zu gelangen, muß man die in der elektrischen Feldenergie

$$\frac{1}{2} \int d^d x [\Pi_i^a(\vec{x}) \Pi_i^a(\vec{x})]^A = -\frac{1}{2} \int d^d x \frac{\delta}{\delta A_i^a(\vec{x})} \frac{\delta}{\delta A_i^a(\vec{x})} \quad (2.22)$$

auftretenden Funktionalableitungen partiell integrieren, was zu zusätzlichen nichttrivialen Termen führt, wenn die Funktionalableitungen auf die  $A$ -abhängigen Terme im Integralmaß (2.15) wirken:

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\nu[A] \left( \int d^d z \frac{\delta}{\delta A_k^c(\vec{z})} \frac{\delta}{\delta A_k^c(\vec{z})} \Psi_{ph}[A] \right)^* \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}) \Psi_{ph}[A] \\ &= \int d^d z \int \mathcal{D}A \Psi_{ph}[A]^* \times \\ &\quad \times \frac{\delta}{\delta A_k^c(\vec{z})} \frac{\delta}{\delta A_k^c(\vec{z})} \left( \Delta[A] \delta[F[A]] \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}) \Psi_{ph}[A] \right) \\ &= \int d^d z \int \mathcal{D}A \Psi_{ph}[A]^* \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \left( \frac{\delta}{\delta A_k^c(\vec{z})} \frac{\delta}{\delta A_k^c(\vec{z})} \Delta[A] \delta[F[A]] \right) \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}) \Psi_{ph}[A] \right. \\
& + 2 \left( \frac{\delta}{\delta A_k^c(\vec{z})} \Delta[A] \delta[F[A]] \right) \left( \frac{\delta}{\delta A_k^c(\vec{z})} \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}) \Psi_{ph}[A] \right) \left. \right\} \\
& + \int \mathcal{D}\nu[A] \Psi_{ph}[A]^* \left( \int d^d z \frac{\delta}{\delta A_k^c(\vec{z})} \frac{\delta}{\delta A_k^c(\vec{z})} \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) \partial_{y_j} A_j^b(\vec{y}) \Psi_{ph}[A] \right) .
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Während das Ausgangsintegral in (2.23) ein Baustein der Zeitentwicklung im Schrödingerbild ist, korrespondiert lediglich der letzte Summand des Endausdrucks zu dem entsprechenden Baustein im Heisenbergbild, den man bei Hermitezität der elektrischen Feldenergie erhalten würde, während der Rest des Endausdrucks aus den durch die Nichthermitezität verursachten Zusatztermen besteht.

Eine andere Sichtweise, die zum gleichen Resultat führt, ist die folgende [44]: angenommen, anstatt (2.15) verwendet man (2.10) und regularisiert die Matrixelemente eichinvarianter Operatoren, indem man nur über ein endliches Intervall von Feldamplituden integriert. Die oben erwähnten nicht-trivialen Zusatzterme entstehen dann bei der partiellen Integration durch hermitezitätszerstörende Oberflächenbeiträge.

Allgemein kann dazu festgestellt werden, daß die Heisenberg-Zeitentwicklung eichabhängiger Größen nicht die gleichen Resultate liefert wie die entsprechende Schrödinger-Zeitentwicklung und daß sie sogar dann Zeitabhängigkeiten liefert, wenn sich das System in einer Gleichgewichtssituation befindet (z.B. in einem Eigenzustand von (2.3)). Weiterhin ist im Schrödingerbild die Eichfixierungsbedingung  $F[A] = 0$  zu allen Zeiten erfüllt, während sie im Heisenbergbild nur zum Zeitpunkt der Koinzidenz mit dem Schrödingerbild erfüllt ist. Betrachtet man aber die Zeitentwicklung von eichinvarianten Größen, so liefern beide Bilder identische Resultate.<sup>1</sup> Da alle physikalischen Observablen eichinvariant sind, sind das Schrödingerbild und das Heisenbergbild somit selbstverständlich immer noch äquivalent.

Um im Schrödingerbild Bewegungsgleichungen für nicht eichinvariante Greenfunktionen zu erhalten, muß man nun explizit die oben diskutierte partielle Integration ausführen, was zu *zusätzlichen nichttrivialen Termen* gegenüber den entsprechenden Gleichungen im Heisenbergbild führt. Diese Terme entsprechen dann denjenigen Termen, die man auch durch die nicht-triviale Struktur des Hamiltonoperators im Rahmen einer Formulierung der Theorie mit randbedingungsfreien Variablen erhält. Durch entsprechendes Umschreiben der Fadeev-Popov-Determinante als Funktionalintegral über komplexe Grassmann-Variablen und durch gleichzeitiges Ausschmieren der

---

<sup>1</sup>Rekonstruiert man z.B. einen Gleichgewichts-Erwartungswert einer eichinvarianten Größe aus eichabhängigen Größen, so müssen sich alle im Heisenbergbild auftretenden Zeitabhängigkeiten gegenseitig wegheben.

$\delta$ -Distribution kann man die Terme in (2.15) auf Exponentialform bringen, so daß die zusätzlichen Terme in den Bewegungsgleichungen als Ankopplung an Geistfelder und als Eichfixierungsterme auftreten (vergl. Abschnitt 2.2). Dies wird hier jedoch nicht durchgeführt.

### 2.1.3 Der freie Propagator im Heisenbergbild

Eine unmittelbare Konsequenz der obigen Überlegungen ist die explizite Brechung der zeitlichen Translationsinvarianz im *longitudinalen* Anteil des freien Propagators, der durch den abelschen Grenzfall der Heisenberggleichungen definiert ist. Wird als Bedingung zur Fixierung der residualen Eichfreiheit die Coulomb Eichbedingung gewählt, d.h.

$$F[A] = \partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}) = 0, \quad (2.24)$$

so erhält man (im Kontinuum), falls das Heisenbergbild und das Schrödingerbild zum Zeitpunkt  $t_0$  zusammenfallen,

$$\begin{aligned} \langle T A_i^a(\vec{x}, t) A_j^b(\vec{x}', t') \rangle &= \frac{\delta^{ab}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \left[ \frac{1}{|\vec{k}|} e^{-i|\vec{k}||t-t'|} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{i}{2} (|t-t'| + (t+t') - 2t_0) \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right], \end{aligned} \quad (2.25)$$

wobei  $T$  den Zeitordnungsoperator bezeichnet. Die Herleitung dieses Resultats im Rahmen der kanonischen Quantisierung erfordert nur einfaches Einsetzen und kann z.B. in [44, 45] gefunden werden. Am Rande sei angemerkt, daß (2.24) zu einem intermediären Zeitpunkt  $t_0 \neq \pm\infty$  möglicherweise aufgrund von Gribov-Mehrdeutigkeiten [46] noch immer keine ausreichende Eichfixierungsbedingung darstellt. Eine genaue Diskussion dieses Tatbestandes sprengt jedoch den Rahmen der vorliegenden Arbeit.

Die ersten Autoren, die einen longitudinalen Propagator der Form (2.25) veröffentlichten, waren Carraciolo, Curci und Menotti [47], die ihr Resultat auf eine eher heuristische Weise erhielten, indem sie zunächst von der allgemeinsten Lösung der Bewegungsgleichung ausgingen. Diese Lösung, die zusätzlich symmetrisch in  $t$  und  $t'$  sein und die Bedingung

$$\partial_t^2 \langle T A_{L,i}^a(\vec{x}, t) A_{L,j}^b(\vec{x}', t') \rangle = -\partial_t \partial_{t'} \langle T A_{L,i}^a(\vec{x}, t) A_{L,j}^b(\vec{x}', t') \rangle \quad (2.26)$$

erfüllen muß, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} \langle T A_{L,i}^a(\vec{x}, t) A_{L,j}^b(\vec{x}', t') \rangle &= -\frac{i}{2} (|t-t'| + \alpha(t+t') + \gamma) \frac{\delta^{ab}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

In (2.27) steht der untere Index  $L$  für den longitudinalen Anteil des Eichfeldes. Eine perturbative Berechnung eines Wilson-Loops bis zur Ordnung  $g^4$

und ein Vergleich des Resultats mit dem in Feynman- und Coulomb-Eichung erhaltenen Ergebnis führt über die Forderung nach Eichinvarianz auf die Bedingung  $\alpha = \pm 1$ , während  $\gamma$  keinen Beitrag zum Wilson-Loop liefert und unbestimmt bleibt. Das Resultat  $\alpha = -1$  erhält man in der oben erwähnten Herleitung im Rahmen der kanonischen Quantisierung, falls man anstatt (2.5) die Bedingung

$$\langle \Psi_{ph} | G^a(\vec{x}) = 0 \Leftrightarrow G^a(\vec{x})^\dagger | \Psi_{ph} \rangle = 0 \quad (2.28)$$

verwendet, die ebenfalls zu einer konsistenten Formulierung der Theorie führt.<sup>2</sup> Die Autoren in [47] schließen nun, daß ein Kontakt mit der Coulomb-Eichung nur bei  $t_0 = \pm\infty$  (oder äquivalent an einem der Endpunkte eines endlichen Zeitvolumens) möglich ist. Dies ist richtig, falls die Coulomb-Eichbedingung tatsächlich das Verschwinden **aller** Greenfunktionen fordert, die ein longitudinales Eichfeld  $A_{L,i}^a(\vec{x}, t_0)$  enthalten. Dies würde jedoch wiederum bedeuten, daß an irgendeinem Punkt jeder Rechnung der Grenzübergang  $|\gamma| \rightarrow \infty$  vorgenommen werden muß.

Um unter anderem auf den letzten Punkt näher einzugehen, soll im nächsten Abschnitt eine kurze Diskussion der Pfadintegralquantisierung in temporaler Eichung gegeben werden.

## 2.2 Pfadintegralquantisierung

Sei  $f_{inv}[A]$  ein eichinvariantes Funktional des klassischen Eichfeldes  $A_\mu^a(x)$ . Man betrachte nun das Pfadintegral

$$\mathcal{N} \int \mathcal{D}A f_{inv}[A] e^{i \int d^{d+1}x \mathcal{L}} \equiv \mathcal{N} \int \mathcal{D}A f_{inv}[A] e^{iS[A]}, \quad (2.29)$$

wobei  $\mathcal{L}$  wie in (2.1) definiert ist,  $S[A]$  das klassische Wirkungsintegral bezeichnet und (formal)  $\mathcal{D}A = \prod_{\mu,a,x} dA_\mu^a(x)$  gilt. Die Normierungskonstante  $\mathcal{N}$  muß so gewählt werden, daß (2.29) für  $f_{inv}[A] = 1$  den Wert 1 ergibt:

$$\mathcal{N} = \left( \int \mathcal{D}A e^{iS[A]} \right)^{-1}. \quad (2.30)$$

Gleichung (2.29) beschreibt nun per Definition den Grundzustandserwartungswert der zu  $f_{inv}[A]$  zugehörigen Größe in der quantisierten Theorie.

Es sei angemerkt, daß für einfachere Feldtheorien (z.B. für die  $\Phi^4$ -Theorie) die Äquivalenz der Pfadintegralquantisierung und der kanonischen Quantisierung relativ einfach zu zeigen ist, dies bei nichtabelschen Eichtheorien jedoch eine nichttriviale Aufgabe darstellt. Dieses zeigt sich besonders bei nichtkovarianten Eichungen, zu denen auch die hier verwendete temporale Eichung gehört.

---

<sup>2</sup>Es sei angemerkt, daß  $G^a(\vec{x}) \neq G^a(\vec{x})^\dagger$  und daß (2.5) und (2.28) nicht beide gleichzeitig gefordert werden können, da dies im Widerspruch zu (2.4) stehen würde.

Aufgrund der Eichinvarianz des Integranden und des Integralmaßes in (2.29) enthält das Pfadintegral einen Faktor vom (unendlichen) Volumen der lokalen Eichgruppe, der durch den entsprechenden inversen Faktor in der Normierungskonstanten  $\mathcal{N}$  wieder herausgekürzt wird, so daß sich insgesamt ein endliches Ergebnis ergibt. Es sei darauf hingewiesen, daß es sich im Gegensatz zu der Diskussion im vorhergehenden Abschnitt 2.1 an dieser Stelle um die gesamte Eichgruppe und nicht nur um die Untergruppe der zeitunabhängigen Eichtransformationen handelt.

Betrachtet man nun anstatt  $f_{inv}[A]$  ein eichabhängiges Funktional (z.B. um den zeitgeordneten Propagator des Eichbosonenfeldes zu berechnen), so ist das durch  $\mathcal{N}$  bewirkte Herauskürzen des Volumens der Eichgruppe nicht mehr ausreichend, um ein wohldefiniertes Ergebnis zu erzeugen. Daher wird nun mit Hilfe der Fadeev-Popov-Methode ein Pfadintegral hergeleitet, das für eichabhängige Größen wohldefinierte endliche Resultate und für eichinvariante Größen die gleichen Ergebnisse wie (2.29) liefert.

Sei  $\mathcal{D}h^{tot}[U]$  das Haar-Maß für die Integration über die (gesamte) lokale  $SU(N)$ -Eichgruppe. Die Fadeev-Popov-Determinante  $\Delta[A]$  sei definiert durch

$$1 = \Delta[A] \int \mathcal{D}h^{tot}[U] \delta[F[A^U]] , \quad (2.31)$$

wobei  $F[A]$  eine beliebige Eichfixierungsbedingung ist und  $A^U$  das durch die Eichtransformation  $U$  transformierte Feld  $A$  bezeichnet.  $F[A]$  und  $\delta[\cdot]$  sind dabei als Abkürzungen analog zu der in (2.12) eingeführten Schreibweise aufzufassen. Das so definierte  $\Delta[A]$  ist wiederum ein eichinvariantes Funktional; der Beweis hierfür verläuft analog zu (2.13). Das Pfadintegral (2.29) kann nun analog zu der Vorgehensweise in (2.14) in Abschnitt 2.1 umgeformt werden:

$$\begin{aligned} & \mathcal{N} \int \mathcal{D}A f_{inv}[A] e^{iS[A]} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \Delta[A] \int \mathcal{D}h^{tot}[U] \delta[F[A^U]] f_{inv}[A] e^{iS[A]} \\ &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}h^{tot}[U] \int \mathcal{D}A^U \Delta[A^U] \delta[F[A^U]] f_{inv}[A^U] e^{iS[A^U]} \\ &= \mathcal{N} \left( \int \mathcal{D}h^{tot}[U] \right) \int \mathcal{D}A \Delta[A] \delta[F[A]] f_{inv}[A] e^{iS[A]} \\ &\equiv \tilde{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}A \Delta[A] \delta[F[A]] f_{inv}[A] e^{iS[A]} . \end{aligned} \quad (2.32)$$

Die Determinante  $\Delta[A]$  kann nun noch weiter ausgewertet werden. Durch Umformung von (2.31) erhält man zunächst

$$\Delta[A] = \left\{ \int \mathcal{D}F \left( \det \frac{\delta F[A^U]}{\delta h^{tot}[U]} \right)^{-1} \delta[F] \right\}^{-1} = \det \frac{\delta F[A^U]}{\delta h^{tot}[U]} \Big|_{F[A^U]=0} . \quad (2.33)$$

Die Eichinvarianz von  $\Delta[A]$  kann nun vereinfachend ausgenutzt werden, indem man  $A$  von vornherein so wählt, daß die Eichfixierungsbedingung erfüllt



ist, so daß sich die Bedingung  $F[A^U] = 0$  auf  $U = 1$  reduziert. Somit sind zur weiteren Berechnung von (2.33) nur noch infinitesimale Eichtransformationen zu betrachten, so daß sich das Haar-Maß auf das Produkt der Differentiale der lokalen Eichwinkel reduziert:

$$\mathcal{D}h^{tot}[U] = \mathcal{D}\Theta = \prod_{a,x} d\Theta^a(x). \quad (2.34)$$

Man erhält somit:

$$\Delta[A] = \det \frac{\delta F^a(x, [A^{U[\Theta]}])}{\delta \Theta^b(y)} \Big|_{\Theta=0} \equiv \det M^{ab}(x, y, [A]); \quad F[A] = 0. \quad (2.35)$$

Die Matrix  $M^{ab}(x, y, [A])$  kann nun für praktische Berechnungen noch weiter umgeformt werden. Unter Verwendung der infinitesimalen Eichtransformation (2.2) erhält man

$$\begin{aligned} M^{ab}(x, y, [A]) &= \int d^{d+1}z \frac{\delta F^a(x, [A]) \delta A_\nu^c(z)}{\delta A_\nu^c(z) \delta \Theta^b(y)} \Big|_{F[A]=0} \\ &= \int d^{d+1}z \frac{\delta F^a(x, [A])}{\delta A_\nu^c(z)} \left( g f^{cbd} A_\nu^d(z) - \partial_{z\nu} \delta^{cb} \right) \delta(z - y) \Big|_{F[A]=0}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Eine weitere Verallgemeinerung der Fadeev-Popov-Eichfixierung erhält man, wie bereits in Abschnitt 2.1 avisiert, indem man die Eichfixierungsbedingung mit einer Inhomogenität versieht, d.h.

$$F[A] = 0 \rightarrow F[A] = \xi(x), \quad (2.37)$$

wobei  $\xi(x)$  im Prinzip auch noch vom Farbindex der Eichfixierungsbedingung abhängen kann. Wie man anhand von (2.36) erkennt, ist  $\Delta[A]$  offensichtlich unabhängig von der Wahl von  $\xi(x)$ , d.h. (2.37) definiert eine Klasse von Eichfixierungsbedingungen, die jeweils die gleiche Fadeev-Popov-Determinante haben. Darum kann (2.32) geschrieben werden als

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \int \mathcal{D}A f_{inv}[A] e^{iS[A]} \\ = \tilde{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}A \Delta[A] \delta[F[A] - \xi(x)] f_{inv}[A] e^{iS[A]}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Da die rechte Gleichungsseite in (2.38) nicht von  $\xi(x)$  abhängt, kann sie weiter umgeformt werden, indem man sie mit einem frei wählbaren Gewichtsfunktional  $G[\xi]$  über  $\xi(x)$  funktional integriert, wobei die gesamte Änderung des Ausdrucks in einer Neudefinition der Normierungskonstanten absorbiert werden kann. Dieses Vorgehen führt zu einer Ausschmierung der funktionalen  $\delta$ -Distribution entsprechend der Wahl der Gewichtsfunktion. Man erhält also

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \int \mathcal{D}A f_{inv}[A] e^{iS[A]} \\ = \tilde{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}\xi G[\xi] \int \mathcal{D}A \Delta[A] \delta[F[A] - \xi(x)] f_{inv}[A] e^{iS[A]} \\ = \tilde{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}A \Delta[A] f_{inv}[A] e^{iS[A]} G[F[A]]. \end{aligned} \quad (2.39)$$

Ein weitverbreiteter Ansatz für  $G[\xi]$  ist

$$G[\xi] = e^{-\frac{i}{2\alpha} \int d^{d+1}x \xi(x)^2}, \quad (2.40)$$

was äquivalent ist zu einer Ersetzung der ursprünglichen Lagrangedichte (2.1) durch

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} F[A]^2. \quad (2.41)$$

Um auch die Fadeev-Popov-Determinante in einen zusätzlichen Term in der Lagrangedichte umzuwandeln, sei daran erinnert, daß man jede Determinante der Form  $\det M^{ab}(x, y, [A])$  gemäß

$$\det M^{ab}(x, y, [A]) = \mathcal{C} \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* e^{i \int d^{d+1}x \int d^{d+1}y \eta^a(x) * M^{ab}(x, y, [A]) \eta^b(y)} \quad (2.42)$$

als Funktionalintegral über komplexe Grassmann-Variablen  $\eta(x)$  schreiben kann, wobei  $\mathcal{C}$  eine Normierungskonstante ist. Unter Verwendung von (2.40), (2.41) und (2.42) kann (2.39) nun weiter umgeformt werden zu

$$\mathcal{N} \int \mathcal{D}A f_{inv}[A] e^{iS[A]} = \check{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* f_{inv}[A] e^{iS_{tot}[A, \eta, \eta^*]} \quad (2.43)$$

mit

$$\begin{aligned} S_{tot}[A, \eta, \eta^*] &= S[A] + S_{fix}[A] + S_{ghost}[A, \eta, \eta^*], \\ S_{fix}[A] &= -\frac{1}{2\alpha} \int d^{d+1}x F^a(x, [A]) F^a(x, [A]), \\ S_{ghost}[A, \eta, \eta^*] &= \int d^{d+1}x \int d^{d+1}y \eta^a(x) * M^{ab}(x, y, [A]) \eta^b(y). \end{aligned} \quad (2.44)$$

$S_{fix}[A]$  in (2.44) ist der Eichfixierungsterm der Wirkung, während  $S_{ghost}[A, \eta, \eta^*]$  die freie Wirkung der komplexen, antikommutierenden Hilfsfelder  $\eta^a(x)$  (Geistfelder) sowie deren Ankopplung an das Eichbosonenfeld enthält.

Wählt man  $F[A]$  als

$$F^a(x, [A]) = \partial^\mu A_\mu^a(x), \quad (2.45)$$

so führt dies zur Klasse der **kovarianten** Eichungen. Besonders populäre kovariante Eichungen erhält man z.B. für die Wahl  $\alpha \rightarrow 0$  (Lorentz- oder Landau-Eichung; hier geht das Gewichtsfunktional  $G[F[A]]$  wieder in eine Darstellung der  $\delta$ -Distribution über) und für die Wahl  $\alpha = 1$  (Feynman-Eichung). Der Parameter  $\alpha$  wird in diesem Zusammenhang als Eichparameter der kovarianten Eichungen bezeichnet.

Die Wahl

$$F^a(x, [A]) = n^\mu A_\mu^a(x) \quad (2.46)$$

mit einem konstanten Vektor  $n^\mu$  führt zur Klasse der (nichtkovarianten) *axialen* Eichungen. Diese Eichungen haben gegenüber den kovarianten Eichungen den Nachteil der expliziten Brechung der Lorentz-Kovarianz, was z.B. störungstheoretische Rechnungen erschwert. Andererseits haben sie den Vorteil, zunächst nicht zu einer Ankopplung der Geistfelder an die Eichbosonenfelder zu führen. Dies sieht man anhand der expliziten Auswertung von (2.36) mit (2.46):

$$\begin{aligned} M^{ab}(x, y, [A]) &= \int d^{d+1}z n^\nu \delta^{ac} \delta(x-z) \left( g f^{cbd} A_\nu^d(z) - \partial_{z^\nu} \delta^{cb} \right) \delta(z-y) \Big|_{n^\mu A_\mu^a=0} \\ &= -\delta^{ab} n^\nu \partial_{x^\nu} \delta(x-y) . \end{aligned} \quad (2.47)$$

Da in (2.47) keine Abhängigkeit von  $A$  auftritt, kann die gesamte Fadeev-Popov-Determinante in die Normierung des Pfadintegrals absorbiert werden, und man erhält:

$$\mathcal{N} \int \mathcal{D}A f_{inv}[A] e^{iS[A]} = \check{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}A f_{inv}[A] e^{iS[A]} e^{iS_{fix}[A]} . \quad (2.48)$$

Die in dieser Arbeit behandelte (reine) *temporale* Eichung  $A_0^a = 0$  ergibt sich als Spezialfall aus der Klasse der axialen Eichungen für  $n^\mu = \delta^{\mu 0}$  und für  $\alpha \rightarrow 0$ , d.h. ohne Ausschmierung der  $\delta$ -Distribution für die Eichfixierungsbedingung. Für diesen Fall erhält man

$$\begin{aligned} \mathcal{N} \int \mathcal{D}A f_{inv}[A] e^{iS[A]} &= \check{\mathcal{N}} \int \mathcal{D}A f_{inv}[A] e^{iS[A]} \delta[A_0^a] \\ &= \int \prod_{i,a,x} dA_i^a(x) \left( f_{inv}[A] e^{iS[A]} \right) \Big|_{A_0^a=0} , \end{aligned} \quad (2.49)$$

d.h. ein Funktionalintegral nur über die räumlichen Vektorindizes des Eichbosonenfeldes und ohne Beiträge von Geistfeldern.

Wie jedoch bereits aus der Diskussion in Abschnitt 2.1 hervorgeht, ist die Eichung in (2.49) noch nicht ausreichend fixiert, da als residuale Eichfreiheit noch die Untergruppe aller zeitunabhängigen Eichtransformationen übrigbleibt. Um diese residuale Eichfreiheit zu fixieren, kann man nun wiederum mit Hilfe der Fadeev-Popov-Methode eine zusätzliche Eichbedingung auf einer Raumzeit-Hyperfläche konstanter Zeit implementieren. Wählt man hierzu die Coulomb-Eichbedingung zu fester Zeit  $t_0$ , d.h.

$$\partial_{x_i} A_i^a(\vec{x}, t_0) = 0 , \quad (2.50)$$

so erhält man nach einer zur bisherigen Betrachtung analogen Rechnung für den longitudinalen Anteil des freien (abelschen) Propagators [48]

$$\begin{aligned} \langle T A_{L,i}^a(\vec{x}, t) A_{L,j}^b(\vec{x}', t') \rangle &= -\frac{i}{2} (|t-t'| - |t-t_0| - |t'-t_0|) \frac{\delta^{ab}}{2} \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k}(\vec{x}-\vec{x}')} \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} . \end{aligned} \quad (2.51)$$

Weiterhin führt die Eichbedingung (2.50) in der nichtabelschen Theorie zu einer Ankopplung an Geistfelder, die auf der Raumzeit-Hyperfläche  $t = t_0$  leben.

Der longitudinale Propagator (2.51) verschwindet, falls  $t_0$  zwischen  $t$  und  $t'$  liegt; er stimmt mit (2.27) für  $\alpha = -1$  überein, falls  $t, t' > t_0$  und für  $\alpha = +1$ , falls  $t, t' < t_0$ . Übereinstimmung zwischen (2.51) und (2.25) kann daher nur im Grenzfall  $|t_0| \rightarrow \infty$  erreicht werden. Die voneinander abweichenden Resultate im Fall eines endlichen Wertes von  $t_0$  können jedoch leicht verstanden werden, wenn man sich vor Augen hält, daß die Implementierung der Coulomb-Eichbedingung in der kanonischen Quantisierung (vergl. Abschnitt 2.1) und in der Pfadintegralquantisierung völlig verschieden durchgeführt wird. Die Verwendung des durch (2.24) induzierten Integralmaßes (2.15) für die Definition von Matrixelementen zwischen physikalischen Zuständen führt nur dann zu verschwindenden Greenfunktionen, wenn  $A_{L,i}^a(\vec{x}, t_0)$  links von allen anderen Operatoren steht, mit denen es nicht kommutiert (für ein einfaches Beispiel sei der Leser auf Anhang A verwiesen). Dagegen zwingt die Implementation von (2.50) in der Pfadintegralformulierung ohne Rücksicht auf die Operatorordnung (die durch das Ausführen der Zeitordnung entsteht) **alle** Greenfunktionen zum Verschwinden, die ein longitudinales Eichbosonenfeld  $A_{L,i}^a(\vec{x}, t_0)$  enthalten.

Es besteht daher kein a priori-Widerspruch zwischen (2.25) und (2.51), da beide aus inäquivalenten Eichfixierungsbedingungen hergeleitet wurden. Dieser Punkt wird hier besonders hervorgehoben, da er in den zu diesem Thema erschienenen Artikeln nicht klar herausgearbeitet wird und überdies oft Anlaß zu Mißverständnissen gibt.

Zum Abschluß der Diskussion der Pfadintegralquantisierung muß noch auf eine besondere Schwierigkeit im Hinblick auf die korrekte Operatorordnung im Pfadintegral hingewiesen werden. Das in diesem Zusammenhang auftretende Problem liegt darin begründet, daß bei einer formalen Rechnung, wie sie im Rahmen der oben erläuterten Fadeev-Popov-Eichfixierung durchgeführt wurde, keine Rücksicht auf die genaue Definition des Pfadintegrals als Grenzwert bezüglich einer Zeitdiskretisierung genommen wird. Bei der Zeitdiskretisierung können verschiedene Vorschriften verwandt werden, z.B. können zeitliche Ableitungen durch verschiedene Formen von Differenzenquotienten ersetzt werden, und Felder können durch verschiedene Linearkombinationen des Feldes an bestimmten Stellen des infinitesimalen Zeitintervalls ersetzt werden. Diese Vorschriften sind jedoch nicht äquivalent miteinander, sondern entsprechen in der Operatorsprache jeweils verschiedenen Operatorordnungen. Dadurch können bei der formalen Fadeev-Popov-Eichfixierung Terme unterschlagen werden, die bei korrekter Behandlung vom Durchkommutieren von Feldimpulsen durch die Fadeev-Popov-Determinante herrühren. In der normalen Quantenmechanik treten analoge Probleme bei der Verwendung von Feynman-Pfadintegralen für die Quan-

tisierung von Systemen in krummlinigen Koordinaten auf [49, 50, 51]. Bei  $SU(N)$  Eichfeldtheorien muß für eine korrekte Behandlung von der kanonischen Quantisierung in temporaler Eichung ausgegangen werden (diese Eichung entspricht den kartesischen Koordinaten in der Quantenmechanik), und von dort aus müssen andere Eichungen durch Koordinatentransformationen erreicht werden. Während eine solche konsistente Betrachtung zeigt, daß die naive formale Vorgehensweise im Falle der kovarianten Eichungen korrekte Ergebnisse liefert, ergeben sich z.B. für den Fall der Coulomb-Eichung gegenüber der formalen Rechnung zusätzliche Multi-Eichbosonen-Vertizes [52, 36]. Bei störungstheoretischen Rechnungen in der Coulomb-Eichung führen diese zusätzlichen Vertizes des weiteren zu bisher ungelösten Problemen bei der Renormierung [53, 54], so daß die Verwendung der Coulomb-Eichung für nichtabelsche Eichtheorien im Gegensatz zur Situation in der Quantenelektrodynamik zur Zeit nicht als attraktive Alternative für praktische Rechnungen erscheint.

Am Ende dieses Kapitels läßt sich für das weitere Vorgehen folgendes Fazit ziehen: auf der einen Seite bietet der in Abschnitt 2.1 diskutierte Weg der kanonischen Quantisierung die Möglichkeit, die einfachen Heisenberggleichungen des Hamiltonoperators (2.3) für die Formulierung von Bewegungsgleichungen für Greenfunktionen zu verwenden, ohne sich die (durch die Fixierung der residualen Eichfreiheit) im Schrödingerbild entstehenden Zusatzterme einzuhandeln, die als Eichfixierungsterme und eine Ankopplung an Geistfelder geschrieben werden können. Auf der anderen Seite hat diese Vorgehensweise den Nachteil, daß eichabhängige Größen nun selbst in Gleichgewichtskonfigurationen explizite Zeitabhängigkeiten aufweisen können und daß das Gauß-Gesetz nicht automatisch implementiert ist, sondern als zusätzliche Randbedingung beachtet werden muß.

# Kapitel 3

## Bewegungsgleichungen für verbundene gleichzeitige Greenfunktionen

In diesem Kapitel wird die Herleitung eines geschlossenen Satzes von Bewegungsgleichungen für verbundene gleichzeitige Greenfunktionen im Rahmen des Approximationsschemas der Korrelationsdynamik präsentiert. Das Kapitel gliedert sich auf in Abschnitte zur Herleitung der Hierarchie von Heisenberg-Bewegungsgleichungen für volle gleichzeitige Greenfunktionen, zur Diskussion der Clusterzerlegung voller Greenfunktionen in verbundene Greenfunktionen, zur Betrachtung des mit Hilfe der Clusterzerlegung generierten Abschneideschemas für die Greenfunktionenhierarchie und zur diagrammatischen Analyse der resultierenden Gleichungssysteme.

Es sei besonders darauf hingewiesen, daß in der vorliegenden Arbeit nicht auf das in [55, 56] vorgeschlagene Quantisierungsschema zurückgegriffen wird, das auf der „schwachen“ Version des Gauß-Gesetzes basiert, welches lediglich die Forderung  $\langle G^a(\vec{x}) \rangle = 0$  beinhaltet.

### 3.1 Hierarchie von Bewegungsgleichungen für volle gleichzeitige Greenfunktionen

Ausgangspunkt für die Herleitung in diesem Abschnitt sind die Bewegungsgleichungen für Operatoren, die sich im Heisenbergbild ergeben (falls nicht explizit anders angegeben, beziehen sich von hier ab alle Zeitableitungen auf das Heisenberg-Bild), d.h.

$$i\partial_t O(t) = [O(t), H]. \quad (3.1)$$

Mit (3.1), (2.3) und (2.4) erhält man

$$\partial_t A_i^a(\vec{x}) = \Pi_i^a(\vec{x}) \quad (3.2)$$

und

$$\begin{aligned} \partial_t \Pi_i^a(\vec{x}) &= \left( \vec{\nabla}^2 \delta_{ik} - \partial_{x_i} \partial_{x_k} \right) A_k^a(\vec{x}) \\ &+ 2g f^{abc} A_k^b(\vec{x}) \partial_{x_k} A_i^c(\vec{x}) + g f^{abc} A_i^c(\vec{x}) \partial_{x_k} A_k^b(\vec{x}) - g f^{abc} A_k^b(\vec{x}) \partial_{x_i} A_k^c(\vec{x}) \\ &+ g^2 f^{abc} f^{cde} A_k^b(\vec{x}) A_k^d(\vec{x}) A_i^e(\vec{x}), \end{aligned} \quad (3.3)$$

wobei alle Operatoren zur gleichen Zeit  $t$  genommen werden, die in der Notation unterdrückt wird. Auf die gleiche Art erhält man die Bewegungsgleichungen für Operatorprodukte höherer Ordnung, z.B.

$$\begin{aligned} \partial_t \left( A_i^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \right) &= (\partial_t A_i^a(\vec{x})) A_j^b(\vec{y}) + A_i^a(\vec{x}) (\partial_t A_j^b(\vec{y})) \\ &= \Pi_i^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) + A_i^a(\vec{x}) \Pi_j^b(\vec{y}), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \Pi_i^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \right) &= (\partial_t \Pi_i^a(\vec{x})) A_j^b(\vec{y}) + \Pi_i^a(\vec{x}) (\partial_t A_j^b(\vec{y})) \\ &= \left\{ \left( \vec{\nabla}^2 \delta_{ik} - \partial_{x_i} \partial_{x_k} \right) A_k^a(\vec{x}) \right. \\ &+ 2g f^{acd} A_k^c(\vec{x}) \partial_{x_k} A_i^d(\vec{x}) + g f^{acd} A_i^d(\vec{x}) \partial_{x_k} A_k^c(\vec{x}) - g f^{acd} A_k^c(\vec{x}) \partial_{x_i} A_k^d(\vec{x}) \\ &+ \left. g^2 f^{acd} f^{def} A_k^c(\vec{x}) A_k^e(\vec{x}) A_i^f(\vec{x}) \right\} A_j^b(\vec{y}) \\ &+ \Pi_i^a(\vec{x}) \Pi_j^b(\vec{y}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \left( \Pi_i^a(\vec{x}) \Pi_j^b(\vec{y}) \right) &= (\partial_t \Pi_i^a(\vec{x})) \Pi_j^b(\vec{y}) + \Pi_i^a(\vec{x}) (\partial_t \Pi_j^b(\vec{y})) \\ &= \left\{ \left( \vec{\nabla}^2 \delta_{ik} - \partial_{x_i} \partial_{x_k} \right) A_k^a(\vec{x}) \right. \\ &+ 2g f^{acd} A_k^c(\vec{x}) \partial_{x_k} A_i^d(\vec{x}) + g f^{acd} A_i^d(\vec{x}) \partial_{x_k} A_k^c(\vec{x}) - g f^{acd} A_k^c(\vec{x}) \partial_{x_i} A_k^d(\vec{x}) \\ &+ \left. g^2 f^{acd} f^{def} A_k^c(\vec{x}) A_k^e(\vec{x}) A_i^f(\vec{x}) \right\} \Pi_j^b(\vec{y}) \\ &+ \Pi_i^a(\vec{x}) \left\{ \left( \vec{\nabla}^2 \delta_{ik} - \partial_{y_i} \partial_{y_k} \right) A_k^b(\vec{y}) \right. \\ &+ 2g f^{bcd} A_k^c(\vec{y}) \partial_{y_k} A_i^d(\vec{y}) + g f^{bcd} A_i^d(\vec{y}) \partial_{y_k} A_k^c(\vec{y}) - g f^{bcd} A_k^c(\vec{y}) \partial_{y_i} A_k^d(\vec{y}) \\ &+ \left. g^2 f^{bcd} f^{def} A_k^c(\vec{y}) A_k^e(\vec{y}) A_i^f(\vec{y}) \right\}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Man erhält somit eine unendliche gekoppelte Hierarchie von Operator-Bewegungsgleichungen, wobei die Zeitableitung jedes Produkts von  $n$  Feldoperatoren, welches mindestens einen konjugierten Impuls enthält, an Produkte von  $n$ ,  $n+1$  und  $n+2$  Feldoperatoren ankoppelt; die letzteren korrespondieren zur freien Propagation und zur Selbstwechselwirkung der Eichbosonen über den 3-Punkt-Vertex und den 4-Punkt-Vertex.

Die Gleichungen (3.2)-(3.6) und die entsprechenden Gleichungen für Feldoperatorprodukte höherer Ordnung induzieren nun direkt eine unendliche Hierarchie von Bewegungsgleichungen für volle gleichzeitige Greenfunktionen, wobei die letzteren als Erwartungswerte der obigen gleichzeitigen Operatorprodukte definiert sind.

Der allgemeinste Ausdruck für den Erwartungswert eines Operators  $O$  ist

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= Tr(O\rho) , \\ \rho &= \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} P_{\Psi_{ph,\alpha}} , \quad \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} = 1 , \quad \rho_{\alpha} \geq 0 \quad \forall \alpha \end{aligned} \quad (3.7)$$

wobei  $P_{\Psi_{ph,\alpha}}$  den Projektionsoperator auf den physikalischen Zustand  $|\Psi_{ph,\alpha}\rangle$  bezeichnet und die Zustände  $\{|\Psi_{ph,\alpha}\rangle\}$  o.B.d.A. so gewählt sind, daß sie eine bezüglich (2.15) orthonormale Basis für den Raum der physikalischen Zustände darstellen, bezüglich derer der statistische (Nichtgleichgewichts-) Dichteoperator  $\rho$  diagonal ist. Die Spur  $Tr(\cdot)$  wird nur über den Raum der physikalischen Zustände ausgeführt, wobei jedes in der Spur auftretende Matrixelement über das Integralmaß (2.15) definiert ist. Die explizite Form von (3.7) in der Formulierung mit Schrödingerschen Wellenfunktionalen lautet dann

$$\langle O \rangle = \sum_{\alpha} \rho_{\alpha} \int \mathcal{D}\nu[A] \Psi_{ph,\alpha}^*[A] O^A \Psi_{ph,\alpha}[A] . \quad (3.8)$$

Da die gegenwärtige Betrachtung im Heisenbergbild durchgeführt wird, ist  $\rho$  zeitunabhängig und es gilt

$$\partial_t Tr(O(t)\rho) = Tr(\partial_t O(t)\rho) = Tr\left(\frac{1}{i}[O(t), H]\rho\right) \quad (3.9)$$

für einen beliebigen Operator  $O(t)$ . Die Bewegungsgleichungen für volle gleichzeitige Greenfunktionen, die zu (3.2), (3.3), etc. korrespondieren, sind daher einfach gegeben durch

$$\partial_t \langle A_i^a(\vec{x}) \rangle = \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle , \quad (3.10)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle &= \left( \vec{\nabla}^2 \delta_{ik} - \partial_{x_i} \partial_{x_k} \right) \langle A_k^a(\vec{x}) \rangle \\ &+ 2g f^{abc} \langle A_k^b(\vec{x}) \partial_{x_k} A_i^c(\vec{x}) \rangle + g f^{abc} \langle A_i^c(\vec{x}) \partial_{x_k} A_k^b(\vec{x}) \rangle \\ &- g f^{abc} \langle A_k^b(\vec{x}) \partial_{x_i} A_k^c(\vec{x}) \rangle + g^2 f^{abc} f^{cde} \langle A_k^b(\vec{x}) A_k^d(\vec{x}) A_i^e(\vec{x}) \rangle , \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Die aus (3.10), (3.11) und den entsprechenden Gleichungen höherer Ordnung bestehende Hierarchie kann als das feldtheoretische Analogon zur BBGKY<sup>1</sup>-Dichtematrixhierarchie der nichtrelativistischen Vielteilchenphysik gesehen werden. Der einzige grundlegend neue Gesichtspunkt ist der bereits in Kapitel 2 diskutierte Unterschied zwischen den im Heisenbergbild und im Schrödingerbild hergeleiteten Hierarchien, wobei eine Möglichkeit zur Formulierung der Schrödinger-Hierarchie in der expliziten Einführung von Geistfeldern zusammen mit zusätzlichen, vom Eichisierungsterm im Integralmaß herrührenden Termen in den Bewegungsgleichungen besteht.

---

<sup>1</sup>Born Bogoliubov Green Kirkwood Yvon



Es sei als Nebenbemerkung erwähnt, daß die von Neumann-Gleichung im Schrödinger-Bild auch im Falle der Beschreibung der Zeitentwicklung von eichabhängigen Operatoren  $O$  gültig bleibt, da für ihre Herleitung nur die Hermitezität von  $H$  im Raum der physikalischen Zustände benötigt wird (alle Manipulationen in der Herleitung werden rechts von  $O$  ausgeführt). Man könnte daher zu dem Fehlschluß neigen, daß die Heisenberg-Zeitentwicklung aus dem Schrödingerbild einfach durch Verwendung der Invarianz der Spur unter zyklischen Permutationen zurückerhalten werden kann. Dies ist jedoch inkorrekt, da die Spur im vorliegenden Fall ihre zyklische Invarianz verliert. Dieser Verlust der zyklischen Invarianz liegt grob gesprochen daran, daß die Spur nur über den Unterraum der physikalischen Zustände läuft, und daß daher die im Invarianz-Beweis zur Umwandlung der ursprünglichen Summe über Zustände in eine 1 benötigte Vollständigkeitsrelation nicht angewandt werden kann<sup>2</sup>.

## 3.2 Clusterzerlegung von Greenfunktionen

Für praktische Rechnungen muß die unendliche gekoppelte Hierarchie von Heisenberg-Bild-Bewegungsgleichungen für volle gleichzeitige Greenfunktionen abgeschnitten werden, d.h. es muß eine Näherung gemacht werden, die diese Hierarchie in einen geschlossenen, endlichen Satz von Gleichungen umwandelt. Bei dem in dieser Arbeit verwendeten Verfahren der Korrelationsdynamik (= Dynamik verbundener Greenfunktionen) wird dies durch Anwendung der Clusterzerlegung von vollen  $n$ -Punkt-Greenfunktionen [26], d.h. deren Zerlegung in Summen von Produkten von verbundenen Greenfunktionen, erreicht.

Man erwartet eine gute Konvergenz der Clusterzerlegung bezüglich der mitgenommenen Ordnung von verbundenen Greenfunktionen, falls das betrachtete Quantensystem sich in einer reinen Phase befindet (d.h. falls das entsprechende Wellenfunktional in nur einem Gebiet im Raum der Feldkonfigurationen lokalisiert ist), wobei die Konvergenz tendenziell um so besser ist, je besser sich der Zustand durch ein Gaußsches Wellenfunktional annähern läßt. Befindet sich das Quantensystem dagegen in einer Konfiguration, die durch die Koexistenz verschiedener Phasen gekennzeichnet ist (z.B. falls für das hier betrachtete Yang-Mills-System ein Grundzustandswellenfunktional vorliegt, das durch Tunnelprozesse zwischen verschiedenen Minima der magnetischen Feldenergie stark delokalisiert ist), so erwartet man für die verbundenen  $n$ -Punkt-Funktionen höherer Ordnung, daß sie in der glei-

---

<sup>2</sup>Für eine genauere Betrachtung dieses Sachverhalts müßte im übrigen zusätzlich diskutiert werden, warum die Eigenschaft von  $\rho$ , auf den physikalischen Unterraum zu projizieren, nicht zur Erweiterung der ursprünglichen Spur auf eine Summe über eine vollständige Basis benutzt werden kann.

chen Größenordnung zu den vollen  $n$ -Punkt-Funktionen beitragen wie die entsprechenden unverbundenen Anteile. Eine eingehende Diskussion dieses Sachverhaltes, speziell im Hinblick auf die Korrelationsdynamik-Näherung, findet sich in [31].

Die explizite Form der Clusterzerlegung kann mit Hilfe der erzeugenden Funktionale für volle und verbundene zeitgeordnete Greenfunktionen,  $Z[J, \sigma]$  und  $W[J, \sigma]$ , hergeleitet werden. Diese Funktionale sind im hier verwendeten kanonischen Formalismus in temporaler Eichung (vergl. Abschnitt 2.1) gegeben durch

$$\begin{aligned} Z[J, \sigma] &= Tr \left\{ \left[ T e^{i \int d^{d+1}x (J_i^a(x) A_i^a(x) + \sigma_i^a(x) \Pi_i^a(x))} \right] \rho \right\} \\ &= \langle T e^{i \int d^{d+1}x (J_i^a(x) A_i^a(x) + \sigma_i^a(x) \Pi_i^a(x))} \rangle \\ \text{und } Z[J, \sigma] &= e^{W[J, \sigma]}, \end{aligned} \quad (3.12)$$

wobei  $\rho$  ein beliebiger statistischer Dichteoperator (auch im Nichtgleichgewicht) ist, der den (reinen oder gemischten) Systemzustand beschreibt.

Im Pfadintegralformalismus (nach Fixierung einer bestimmten Eichung, vergl. Gleichung (2.43)) können entsprechende erzeugende Funktionale für den Spezialfall von Grundzustandserwartungswerten, die in der hier gegebenen Formulierung jedoch keine direkte Erzeugung von Greenfunktionen mit konjugierten Impulsen erlauben, geschrieben werden als

$$\begin{aligned} Z[J, \zeta, \zeta^*] &= \mathcal{N} \int \mathcal{D}A \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta^* e^{i S_{tot}[A, \eta, \eta^*]} \times \\ &\quad \times e^{i \int d^{d+1}x (J_\mu^a(x) A^{a\mu}(x) + \zeta^{*a}(x) \eta^a(x) + \zeta^a(x) \eta^{*a}(x))} \\ \text{und } Z[J] &= e^{W[J]}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Entsprechende erzeugende Funktionale mit Quellen für die konjugierten Impulse erhält man durch Übergang zur Phasenraumdarstellung des Pfadintegrals, d.h.  $\mathcal{D}A \rightarrow \mathcal{D}A \mathcal{D}\Pi$ . Gleichung (3.13) ist zwar für viele formale Rechnungen besser geeignet als (3.12), kann jedoch im vorliegenden Fall aufgrund der bei der Fixierung der residualen Eichfreiheit auftretenden Unterschiede zwischen dem kanonischen und dem Pfadintegralformalismus (vergl. Kapitel 2) nicht direkt zur Anwendung gebracht werden.

Eine andere Schreibweise für die erzeugenden Funktionale (3.12) erhält man, indem man sie durch ihre Taylor-Entwicklung nach den Quellen  $J$  und  $\sigma$  ausdrückt. Wie an Gleichung (3.12) direkt abzulesen ist, treten dabei als Entwicklungskoeffizienten für  $Z[J, \sigma]$  die vollen zeitgeordneten Greenfunktionen auf, d.h. es gilt

$$\begin{aligned} Z[J, \sigma] &\equiv Z[j] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^{d+1}x_1 \dots d^{d+1}x_n \times \\ &\quad \times \langle T B_{i_1}^{a_1}(m_1; x_1) \dots B_{i_n}^{a_n}(m_n; x_n) \rangle j_{i_1}^{a_1}(m_1; x_1) \dots j_{i_n}^{a_n}(m_n; x_n) \end{aligned} \quad (3.14)$$

mit  $m_i \in \{1, 2\}$  und  $B_i^a(1; x) = A_i^a(x)$ ,  $B_i^a(2; x) = \Pi_i^a(x)$  sowie  $j_i^a(1; x) = J_i^a(x)$ ,  $j_i^a(2; x) = \sigma_i^a(x)$ .

Für das in (3.12) als natürlicher Logarithmus von  $Z[J, \sigma]$  definierte  $W[J, \sigma]$  bleibt zunächst noch zu zeigen, daß seine Entwicklungskoeffizienten tatsächlich durch die verbundenen zeitgeordneten Greenfunktionen gegeben sind, d.h. daß gilt:

$$W[J, \sigma] \equiv W[j] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int d^{d+1}x_1 \dots d^{d+1}x_n \times \\ \times \langle T B_{i_1}^{a_1}(m_1; x_1) \dots B_{i_n}^{a_n}(m_n; x_n) \rangle_c j_{i_1}^{a_1}(m_1; x_1) \dots j_{i_n}^{a_n}(m_n; x_n), \quad (3.15)$$

wobei  $\langle \cdot \rangle_c$  für den verbundenen Anteil des Erwartungswertes  $\langle \cdot \rangle$  steht. Dazu wird zunächst die *Clusterzerlegungseigenschaft* der vollen Greenfunktionen betrachtet, die immer dann gilt, wenn im betrachteten System keine spontane Symmetriebrechung vorliegt, d.h. wenn es einen eindeutigen Vakuumzustand gibt. Falls  $x_1, \dots, x_n$  und  $y_1, \dots, y_m$  zwei Koordinatensätze sind, für die jeweils  $x_i - y_j$  raumartig ist, so gilt in diesem Fall

$$\langle T B_{i_1}^{a_1}(k_1; x_1) \dots B_{i_n}^{a_n}(k_n; x_n) B_{j_1}^{b_1}(l_1; y_1) \dots B_{j_m}^{b_m}(l_m; y_m) \rangle \\ \rightarrow \langle T B_{i_1}^{a_1}(k_1; x_1) \dots B_{i_n}^{a_n}(k_n; x_n) \rangle \langle B_{j_1}^{b_1}(l_1; y_1) \dots B_{j_m}^{b_m}(l_m; y_m) \rangle \\ \text{falls } |x_i - y_j| \rightarrow \infty \forall i, j. \quad (3.16)$$

Da die faktorisierte Form auf der rechten Seite von (3.16) per Definition keinen verbundenen Anteil enthält, gilt entsprechend

$$\langle T B_{i_1}^{a_1}(k_1; x_1) \dots B_{i_n}^{a_n}(k_n; x_n) B_{j_1}^{b_1}(l_1; y_1) \dots B_{j_m}^{b_m}(l_m; y_m) \rangle_c \rightarrow 0 \\ \text{falls } |x_i - y_j| \rightarrow \infty \forall i, j. \quad (3.17)$$

Seien nun die Quellen im Argument des erzeugenden Funktionals derart gewählt, daß sie gemäß

$$j_i^a(n; x) = (j_1)_i^a(n; x) + (j_2)_i^a(n; x) \quad (3.18)$$

additiv in zwei Anteile zerlegt werden können, deren jeweils kompakte Träger durch einen hinreichend großen raumartigen Abstand  $R$  voneinander getrennt sind. Dann muß nach (3.16) gelten:

$$Z[J, \sigma] \equiv Z[j] = Z[j_1 + j_2] \rightarrow Z[j_1]Z[j_2] \text{ falls } R \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Entsprechend kann man für (3.15) schließen, daß in der Taylor-Entwicklung von  $W[J, \sigma]$  jeder Term additiv in 2 Anteile zerfällt, die jeweils nur  $j_1$  oder nur  $j_2$  enthalten; alle Mischterme verschwinden aufgrund von (3.17). Es muß somit gelten:

$$W[J, \sigma] \equiv W[j] = W[j_1 + j_2] \rightarrow W[j_1] + W[j_2] \text{ falls } R \rightarrow \infty. \quad (3.20)$$

Geht man nun davon aus, daß  $W[J, \sigma]$  als Funktion von  $Z[J, \sigma]$  geschrieben werden kann, d.h.

$$W[J, \sigma] = f(Z[J, \sigma]) , \quad (3.21)$$

so folgt aus (3.19) und (3.20) direkt

$$f(Z_1 Z_2) = f(Z_1) + f(Z_2) \Rightarrow f(Z) = \alpha \ln(Z) . \quad (3.22)$$

Die Integrationskonstante  $\alpha$  kann nun aus der Bedingung, daß die niedrigste nichtverschwindende Ordnung voller  $n$ -Punkt-Funktionen gleich den verbundenen  $n$ -Punkt-Funktionen sein soll (da keine unverbundenen Anteile auftreten) zu 1 bestimmt werden, womit die Gültigkeit der Gleichung für  $W[J, \sigma]$  in (3.12) gezeigt ist.

Eine andere Methode zur Herleitung der Beziehung  $Z[j] = e^{W[j]}$  ist durch die Replika-Technik gegeben [28, 57]. Während die oben diskutierte Betrachtung auf die Raumzeit-Struktur der vollen und verbundenen Greenfunktionen abhebt, wird bei der Replika-Technik die diagrammatische Struktur der Greenfunktionen zugrunde gelegt, d.h. deren Entwicklung in Feynman-Graphen, die die eigentliche Grundlage für die Definition der verbundenen Greenfunktionen darstellt. Die Bezeichnung „verbunden“ rührt in diesem Zusammenhang daher, daß in den entsprechenden Greenfunktionen nur Diagramme berücksichtigt werden, die nicht in mehrere unverbundene Teile zerfallen. Für den in dieser Arbeit später betrachteten Fall einer Theorie auf einem Torus ist die diagrammatische Betrachtungsweise vorzuziehen, da eine Diskussion für das Verhalten bei sehr großen raumartigen Abständen hier in Ermangelung solcher Abstände nicht durchgeführt werden kann. Da für eine Diskussion der Replika-Technik im Rahmen der kanonischen Quantisierung in temporaler Eichung zuerst eine Herleitung der Störungstheorie in diesem Formalismus durchzuführen wäre, soll die Betrachtung an dieser Stelle auf den einfacheren Fall der Pfadintegralquantisierung beschränkt bleiben. Dazu sei zunächst das System  $p$ -fach repliziert, so daß  $Z[J, \zeta, \zeta^*]^p$  als Funktionalintegral über  $p$  unterschiedliche Felder geschrieben werden kann:

$$Z[J, \zeta, \zeta^*]^p = \tilde{\mathcal{N}}^p \int \left( \prod_{\tau=1}^p \mathcal{D}A_\tau \mathcal{D}\eta_\tau \mathcal{D}\eta_\tau^* \right) \times \\ \times e^{i \sum_{\tau=1}^p [S_{tot}[A_\tau, \eta_\tau, \eta_\tau^*] + \int d^{d+1}x (J_\mu^a(x) A_\tau^{a\mu}(x) + \zeta^{*a}(x) \eta_\tau^a(x) + \zeta^a(x) \eta_\tau^{*a}(x))] } . \quad (3.23)$$

Da der Exponent in (3.23) keine Kopplungsterme enthält, die Felder mit verschiedenem Index  $\tau$  koppeln, tragen alle ein- und auslaufenden Propagatoren eines Vertex den gleichen Index  $\tau$ . Somit kann auch in jedem verbundenen Anteil eines Diagramms nur ein einziger Index  $\tau$  auftreten; ein solches Diagramm muß daher proportional zu  $p$  sein. Dementsprechend muß ein unverbundenes Diagramm, das aus  $N_c$  verbundenen Subdiagrammen besteht, proportional zu  $p^{N_c}$  sein. Demzufolge werden aus der Taylor-Entwicklung von

$Z[J, \zeta, \zeta^*]^p$  nach den Quellen die verbundenen Beiträge zur Taylor-Entwicklung von  $Z[J, \zeta, \zeta^*]$  isoliert, indem man den Grenzübergang

$$W[J, \zeta, \zeta^*] = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial p} (Z[J, \zeta, \zeta^*]^p) \quad (3.24)$$

vornimmt. Dies führt zusammen mit

$$Z[J, \zeta, \zeta^*]^p = e^{p \ln Z[J, \zeta, \zeta^*]} = 1 + p \ln Z[J, \zeta, \zeta^*] + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(p \ln Z[J, \zeta, \zeta^*])^n}{n!} \quad (3.25)$$

auf

$$W[J, \zeta, \zeta^*] = \ln Z[J, \zeta, \zeta^*]. \quad (3.26)$$

Mit Hilfe von (3.12) wird nun zunächst die explizite Form der Clusterzerlegung für zeitgeordnete Greenfunktionen abgeleitet. Man erhält:

$$\langle A_i^a(x) \rangle = \langle A_i^a(x) \rangle_c, \quad \langle \Pi_i^a(x) \rangle = \langle \Pi_i^a(x) \rangle_c, \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \langle T A_{i_1}^{a_1}(x_1) A_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle &= \lim_{J, \sigma \rightarrow 0} \frac{\delta}{i \delta J_{i_1}^{a_1}(x_1)} \frac{\delta}{i \delta J_{i_2}^{a_2}(x_2)} e^{W[J, \sigma]} \\ &= \lim_{J, \sigma \rightarrow 0} e^{W[J, \sigma]} \left\{ \left( \frac{\delta}{i \delta J_{i_1}^{a_1}(x_1)} \frac{\delta}{i \delta J_{i_2}^{a_2}(x_2)} W[J, \sigma] \right) \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{\delta}{i \delta J_{i_1}^{a_1}(x_1)} W[J, \sigma] \right) \left( \frac{\delta}{i \delta J_{i_2}^{a_2}(x_2)} W[J, \sigma] \right) \right\} \\ &= \langle T A_{i_1}^{a_1}(x_1) A_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle_c + \langle A_{i_1}^{a_1}(x_1) \rangle \langle A_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle \end{aligned} \quad (3.28)$$

und analog dazu

$$\langle T \Pi_{i_1}^{a_1}(x_1) A_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle = \langle T \Pi_{i_1}^{a_1}(x_1) A_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle_c + \langle \Pi_{i_1}^{a_1}(x_1) \rangle \langle A_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle,$$

$$\langle T \Pi_{i_1}^{a_1}(x_1) \Pi_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle = \langle T \Pi_{i_1}^{a_1}(x_1) \Pi_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle_c + \langle \Pi_{i_1}^{a_1}(x_1) \rangle \langle \Pi_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle,$$

$$\begin{aligned} \langle T A_{i_1}^{a_1}(x_1) A_{i_2}^{a_2}(x_2) A_{i_3}^{a_3}(x_3) \rangle &= \langle T A_{i_1}^{a_1}(x_1) A_{i_2}^{a_2}(x_2) A_{i_3}^{a_3}(x_3) \rangle_c \\ &\quad + \langle T A_{i_1}^{a_1}(x_1) A_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle_c \langle A_{i_3}^{a_3}(x_3) \rangle + \langle T A_{i_1}^{a_1}(x_1) A_{i_3}^{a_3}(x_3) \rangle_c \langle A_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle \\ &\quad + \langle T A_{i_2}^{a_2}(x_2) A_{i_3}^{a_3}(x_3) \rangle_c \langle A_{i_1}^{a_1}(x_1) \rangle + \langle A_{i_1}^{a_1}(x_1) \rangle \langle A_{i_2}^{a_2}(x_2) \rangle \langle A_{i_3}^{a_3}(x_3) \rangle, \\ &\text{etc.} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für gleichzeitige Greenfunktionen ergeben sich nach Durchführung des wohldefinierten Übergangs zum gleichzeitigen Grenzfalle, der die gewünschte Operatorordnung in der Clusterzerlegung liefert. Auf diese Art gelangt man zu

$$\langle A_i^a(\vec{x}) \rangle = \langle A_i^a(\vec{x}) \rangle_c, \quad \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle = \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle_c,$$

$$\begin{aligned}
\langle A_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1)A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle &= \langle A_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1)A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle_c + \langle A_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1) \rangle \langle A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle , \\
\langle \Pi_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1)A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle &= \langle \Pi_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1)A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle_c + \langle \Pi_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1) \rangle \langle A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle , \\
\langle \Pi_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1)\Pi_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle &= \langle \Pi_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1)\Pi_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle_c + \langle \Pi_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1) \rangle \langle \Pi_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle , \\
\langle A_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1)A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2)A_{i_3}^{a_3}(\vec{x}_3) \rangle &= \langle A_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1)A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2)A_{i_3}^{a_3}(\vec{x}_3) \rangle_c \\
&\quad + \langle A_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1)A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle_c \langle A_{i_3}^{a_3}(\vec{x}_3) \rangle + \langle A_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1)A_{i_3}^{a_3}(\vec{x}_3) \rangle_c \langle A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle \\
&\quad + \langle A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2)A_{i_3}^{a_3}(\vec{x}_3) \rangle_c \langle A_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1) \rangle + \langle A_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1) \rangle \langle A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle \langle A_{i_3}^{a_3}(\vec{x}_3) \rangle , \\
&\quad \text{etc. ,}
\end{aligned} \tag{3.30}$$

wobei alle Zeitargumente jetzt gleich sind und in der Notation unterdrückt wurden. Die weiteren für diese Arbeit benötigten Clusterzerlegungen sind in Anhang B enthalten.

Es sei an dieser Stelle lediglich erwähnt, daß man anstatt von (3.12) äquivalent auch mit einem erzeugenden Funktional starten könnte, das nur von der Quelle  $J_i^a(\vec{x})$  abhängt, wobei man dann Greenfunktionen, die konjugierte Impulse  $\Pi_i^a(\vec{x})$  enthalten, durch Differentiation nach der entsprechenden Zeitkoordinate erhält. Eine Alternative zur Herleitung von (3.30) ohne den Umweg über zeitgeordnete Greenfunktionen stellt die Verwendung eines gleichzeitigen erzeugenden Funktionals dar, wobei aufgrund der Abwesenheit des Zeitordnungsoperators dem nichtverschwindenden Kommutator zwischen  $A_i^a(\vec{x})$  und  $\Pi_i^a(\vec{x})$  Rechnung getragen werden muß, indem man den die Quellen  $J$  und  $\sigma$  enthaltenden Exponentialfaktor mit Hilfe der Campbell-Baker-Hausdorff-Formel umschreibt [58].

### 3.3 Abschneideschema für die Greenfunktionshierarchie

Ein Einsetzen der Clusterzerlegung in die Hierarchiegleichungen der Form (3.10), (3.11), etc., führt zu einer unendlichen gekoppelten Hierarchie von Bewegungsgleichungen für verbundene Greenfunktionen. Das in dieser Arbeit verwendete Approximationsschema besteht nun im Abschneiden dieser Hierarchie durch Vernachlässigung aller verbundenen  $n$ -Punkt-Funktionen mit  $n > N$ , was zu einem geschlossenen Satz von gekoppelten, nichtlinearen Bewegungsgleichungen für die verbundenen Greenfunktionen bis zum  $N$ -Punkt-Niveau führt. Dieser endliche Satz von Gleichungen wird dann als *N-Punkt-Korrelationsdynamik* bezeichnet. Da die Zeitableitungen der vollen  $N$ -Punkt-Funktionen maximal an volle  $N + 2$ -Punkt-Funktionen ankoppeln, werden für die Herleitung der  $N$ -Punkt-Korrelationsdynamik alle Clusterzerlegungen bis zum  $N + 2$ -Punkt-Niveau benötigt.

Als Beispiel sei hier die Ableitung der Bewegungsgleichungen für die verbundenen 2-Punkt-Funktionen diskutiert. Obwohl sich später herausstellen wird (vergl. Kapitel 4), daß aufgrund des Verschwindens der 1-Punkt-Funktion die Gleichungen für die 2- und 3-Punkt-Funktion eine Sonderrolle einnehmen, da ohnehin keine unverbundenen Anteile auftauchen, soll die Herleitung unter Mitnahme der 1-Punkt-Funktion durchgeführt werden, um so ein instruktiveres Beispiel für die Vorgehensweise bei höheren Ordnungen zu liefern. Ausgehend von (3.10) und den entsprechenden Gleichungen höherer Ordnung erhält man zunächst:

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle A_i^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c &= \partial_t \left( \langle A_i^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle - \langle A_i^a(\vec{x}) \rangle \langle A_j^b(\vec{y}) \rangle \right) \\
&= \langle \Pi_i^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle + \langle A_i^a(\vec{x}) \Pi_j^b(\vec{y}) \rangle - \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle \langle A_j^b(\vec{y}) \rangle - \langle A_i^a(\vec{x}) \rangle \langle \Pi_j^b(\vec{y}) \rangle \\
&= \langle \Pi_i^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c + \langle A_i^a(\vec{x}) \Pi_j^b(\vec{y}) \rangle_c .
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Analog ergibt sich ausgehend von (3.10), (3.11) und den entsprechenden Gleichungen höherer Ordnung:

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle \Pi_i^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c &= \partial_t \left( \langle \Pi_i^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle - \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle \langle A_j^b(\vec{y}) \rangle \right) \\
&= \left( \vec{\nabla}^2 \delta_{ik} - \partial_{x_i} \partial_{x_k} \right) \langle A_k^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle \\
&\quad + 2gf^{acd} \langle A_k^c(\vec{x}) \partial_{x_k} A_i^d(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle + gf^{acd} \langle A_i^d(\vec{x}) \partial_{x_k} A_k^c(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle \\
&\quad - gf^{acd} \langle A_k^c(\vec{x}) \partial_{x_i} A_k^d(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle \\
&\quad + g^2 f^{acd} f^{def} \langle A_k^c(\vec{x}) A_k^e(\vec{x}) A_i^f(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle \\
&\quad + \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \Pi_j^b(\vec{y}) \rangle \\
&\quad - \left\{ \left( \vec{\nabla}^2 \delta_{ik} - \partial_{x_i} \partial_{x_k} \right) \langle A_k^a(\vec{x}) \rangle \right. \\
&\quad \left. + 2gf^{acd} \langle A_k^c(\vec{x}) \partial_{x_k} A_i^d(\vec{x}) \rangle + gf^{acd} \langle A_i^d(\vec{x}) \partial_{x_k} A_k^c(\vec{x}) \rangle \right. \\
&\quad \left. - gf^{acd} \langle A_k^c(\vec{x}) \partial_{x_i} A_k^d(\vec{x}) \rangle + g^2 f^{acd} f^{def} \langle A_k^c(\vec{x}) A_k^e(\vec{x}) A_i^f(\vec{x}) \rangle \right\} \langle A_j^b(\vec{y}) \rangle \\
&\quad - \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle \langle \Pi_j^b(\vec{y}) \rangle .
\end{aligned} \tag{3.32}$$

Nach Einsetzen der Clusterzerlegungen für die entsprechenden vollen Greenfunktionen auf der rechten Seite von (3.32) heben sich alle durch die Zeitableitung des unverbundenen Anteils  $\partial_t \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle \langle A_j^b(\vec{y}) \rangle$  erzeugten Terme gegen entsprechende unverbundene Anteile der Zeitableitung der vollen Greenfunktion  $\partial_t \langle \Pi_i^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle$  weg. Man erhält dadurch eine Bewegungsgleichung für die verbundene 2-Punkt-Funktion, die auf ihrer rechten Seite wiederum nur verbundene Terme beinhaltet:

$$\begin{aligned}
\partial_t \langle \Pi_i^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c &= \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \Pi_j^b(\vec{y}) \rangle_c + \left( \vec{\nabla}^2 \delta_{ik} - \partial_{x_i} \partial_{x_k} \right) \langle A_k^a(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \\
&\quad + gf^{acd} \left\{ - \langle [\partial_{x_i} A_k^d(\vec{x})] \rangle_c \langle A_k^c(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c - \langle A_k^c(\vec{x}) \rangle_c \langle [\partial_{x_i} A_k^d(\vec{x})] A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \right. \\
&\quad \left. - \langle A_k^c(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) [\partial_{x_i} A_k^d(\vec{x})] \rangle_c + \langle [\partial_{x_k} A_k^c(\vec{x})] \rangle_c \langle A_i^d(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \right. \\
&\quad \left. + 2 \langle [\partial_{x_k} A_i^d(\vec{x})] \rangle_c \langle A_k^c(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c + 2 \langle A_k^c(\vec{x}) \rangle_c \langle [\partial_{x_k} A_i^d(\vec{x})] A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \langle A_i^d(\vec{x}) \rangle_c \langle [\partial_{x_k} A_k^c(\vec{x})] A_j^b(\vec{y}) \rangle_c + \langle A_i^d(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) [\partial_{x_k} A_k^c(\vec{x})] \rangle_c \\
& + 2 \langle A_k^c(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) [\partial_{x_k} A_i^d(\vec{x})] \rangle_c \} \\
& + g^2 f^{acd} f^{def} \{ \langle A_k^c(\vec{x}) \rangle_c \langle A_k^e(\vec{x}) \rangle_c \langle A_i^f(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \\
& + \langle A_i^f(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \langle A_k^c(\vec{x}) A_k^e(\vec{x}) \rangle_c + \langle A_i^f(\vec{x}) \rangle_c \langle A_k^e(\vec{x}) \rangle_c \langle A_k^c(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \\
& + \langle A_k^c(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \langle A_k^e(\vec{x}) A_i^f(\vec{x}) \rangle_c + \langle A_i^f(\vec{x}) \rangle_c \langle A_k^c(\vec{x}) \rangle_c \langle A_k^e(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \\
& + \langle A_k^c(\vec{x}) A_i^f(\vec{x}) \rangle_c \langle A_k^e(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c + \langle A_k^c(\vec{x}) \rangle_c \langle A_i^f(\vec{x}) A_k^e(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \\
& + \langle A_k^c(\vec{x}) \rangle_c \langle A_i^f(\vec{x}) A_k^e(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c + \langle A_i^f(\vec{x}) \rangle_c \langle A_k^c(\vec{x}) A_k^e(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \\
& + \langle A_i^f(\vec{x}) A_k^c(\vec{x}) A_k^e(\vec{x}) A_j^b(\vec{y}) \rangle_c \} . \tag{3.33}
\end{aligned}$$

Die Ableitung der Bewegungsgleichung für  $\langle \Pi_i^a(\vec{x}) \Pi_j^b(\vec{y}) \rangle_c$  verläuft analog und wird hier nicht mehr explizit vorgeführt. Die Bewegungsgleichungen für verbundene  $n$ -Punkt-Funktionen höherer Ordnungen ergeben sich ebenfalls analog durch Subtraktion der Zeitableitung der unverbundenen Anteile der  $n$ -Punkt-Funktion von der Zeitableitung der vollen  $n$ -Punkt-Funktion.

Im Abschneideschema mit  $N = 1$  erhält man für die Korrelationsdynamik die klassischen Hamiltonschen Bewegungsgleichungen für die Yang-Mills-Theorie in temporaler Eichung (die 1-Punkt-Funktionen sind identisch mit klassischen (Hintergrund-)Feldern). Im Abschneideschema mit  $N = 2$  erhält man dagegen die zeitabhängigen Hartree-Fock-Bogoliubov-Gleichungen; dieses Abschneideschema korrespondiert zu einem Gaußschen Zustand und zu einer Gaußschen Form des Integralmaßes, was allerdings im Widerspruch zur Eichinvarianz steht. Das  $N = 3$ -Abschneideschema ist die Approximation niedrigster Ordnung, die den 3-Punkt-Vertex berücksichtigt, falls das System in einer (globalen) Farbsinglett-Konfiguration ist; falls das System nicht in einer globalen Farbsinglett-Konfiguration ist, kann der 3-Punkt-Vertex über die unverbundenen Anteile der vollen 3-Punkt-Funktion beitragen, die sonst aufgrund des Verschwindens der 1-Punkt-Funktion ebenfalls verschwinden müssen. Die 3-Punkt-Vertexfunktion, d.h. die Summe der amputierten, einteilchenirreduziblen (1PI) 3-Punkt-Diagramme kann generell nur unter Mitnahme der verbundenen 3-Punkt-Funktionen berücksichtigt werden.

Die Approximation der höchsten Ordnung, die in dieser Arbeit untersucht wird, ist  $N = 4$ . Für die konzeptionell einfache, jedoch sehr lange Herleitung der Gleichungen der 2-, 3- und 4-Punkt-Korrelationsdynamik wurden im Rahmen dieser Arbeit unter Verwendung der Mathematica-Programmiersprache Computer-Algebra-Codes entwickelt, die gleichzeitig dazu dienen, hochgradig optimierte Fortran-Routinen für die Zeitintegration der Gleichungen in einem endlichen Satz von Einteilchenzuständen zu generieren. Als Einteilchenzustände werden dabei ebene Wellen auf einem Torus verwendet. Die resultierenden Gleichungen werden aufgrund ihrer Länge in Anhang C angegeben, wobei die Darstellung bezüglich einer beliebigen orthonormierten Einteilchenbasis gewählt wurde.



### 3.4 Diagrammatische Analyse der Bewegungsgleichungen

Die Bewegungsgleichungen der Korrelationsdynamik, deren Herleitung in den vorhergehenden Abschnitten diskutiert wurde, werden in diesem Abschnitt nun bezüglich ihrer diagrammatischen Struktur analysiert. Dazu werden die einzelnen Kopplungsterme der in Anhang C (bezüglich einer beliebigen Einteilchenbasis) gegebenen Gleichungen in eine graphische Darstellung überführt, wobei jeweils Termgruppen der gleichen topologischen Struktur zusammengefaßt werden. Es ist für diese Untersuchung ausreichend, nur die Bewegungsgleichungen für  $n$ -Punkt-Funktionen mit genau einem konjugierten Feldimpuls zu betrachten, da für den Fall mehrerer konjugierter Feldimpulse wiederum für jeden der Impulse ein Satz von Kopplungstermen der gleichen Struktur entsteht.

Die Analyse wird im Rahmen des 4-Punkt-Abschneideschemas durchgeführt; die diagrammatische Darstellung der 2- und 3-Punkt-Korrelationsdynamik ergibt sich durch Weglassen der entsprechenden Diagramme. Wie in Anhang C werden alle 1-Punkt-Funktionen aufgrund der vorliegenden globalen Farbsinglett-Konfiguration Null gesetzt (vergl. Kapitel 4).

Bei der graphischen Darstellung werden die folgenden Konventionen gewählt:

- Verbundene 2-Punkt-Funktionen werden durch schattierte Kreise, verbundene 3-Punkt-Funktionen durch schattierte Dreiecke und verbundene 4-Punkt-Funktionen durch schattierte Vierecke repräsentiert.
- Vertizes werden durch einen schwarzen Punkt dargestellt, an dem die entsprechende Potenz der Kopplungskonstanten steht.
- An den internen Linien der Diagramme stehen jeweils Indizes  $\lambda_i$ , die gemäß der Notation in Anhang C die entsprechenden Einteilchenbasiselemente bezeichnen, über die summiert wird.
- An den externen Linien der Diagramme stehen jeweils Indizes  $\alpha_i$ , die gemäß der Notation in Anhang C die entsprechenden Einteilchenbasiselemente bezeichnen, die zu den Operatoren auf der linken Seite der Bewegungsgleichungen gehören.

Auf eine explizite Darstellung von Farb- und Vektorindizes wurde verzichtet, wie auch auf eine diagrammatische Darstellung der freien Anteile der Bewegungsgleichungen.

Die Termgruppen gleicher Struktur sind derart zusammengefaßt, daß sie bis auf eine Permutation der Indizes  $\lambda_i$  und eine Permutation der Indizes  $\alpha_j$ ,  $j \neq 1$  durch das gleiche Diagramm repräsentiert werden; der Index  $\alpha_1$  gehört jeweils zu dem Feldimpuls, dessen Zeitableitung die betrachteten Kopplungsterme generiert hat.

Da in der vorliegenden Arbeit ein translationsinvariantes System auf einem Torus betrachtet wird, wobei als Einteilchenbasis ebene Wellen benutzt werden, können die griechischen Indizes  $\alpha_i$  und  $\lambda_i$  direkt als diskrete Impulse betrachtet werden. Dabei treten dann sowohl für jeden Vertex ein Kronecker-Delta der Form  $\delta_{\vec{k}_{\alpha_1}, \sum_j \vec{k}_{\lambda_j}}$  als auch für jede verbundene gleichzeitige Greenfunktion ein Kronecker-Delta der Form  $\delta_{\sum_i \vec{k}_{\alpha_i} + \sum_j \vec{k}_{\lambda_j}, \vec{\sigma}}$  auf, was zu einem entsprechenden Zusammenbrechen von intermediären Summationen führt. Die resultierende Impulsstruktur der Diagramme ist (bei Abwesenheit eines Cutoffs) die gleiche wie bei herkömmlichen Feynman-Graphen, wobei lediglich zu beachten ist, daß es sich im vorliegenden Fall aufgrund des Formalismus gleichzeitiger Funktionen um rein räumliche Impulse und nicht um Energie-Impuls-Vektoren handelt.

### 3.4.1 Die Terme der 2-Punkt-Gleichungen

In diesem Unterabschnitt werden die Kopplungsterme in der Bewegungsgleichung für die verbundene 2-Punkt-Funktion  $\langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c$  untersucht.

Über den 3-Punkt-Vertex ergibt sich eine Ankopplung an die volle 3-Punkt-Funktion, die aufgrund des Verschwindens der 1-Punkt-Funktion keine unverbundenen Anteile enthält und somit mit der verbundenen 3-Punkt-Funktion identisch ist. Die diagrammatische Struktur der entsprechenden Terme (C.4a) ist in Abb. 3.1 dargestellt.

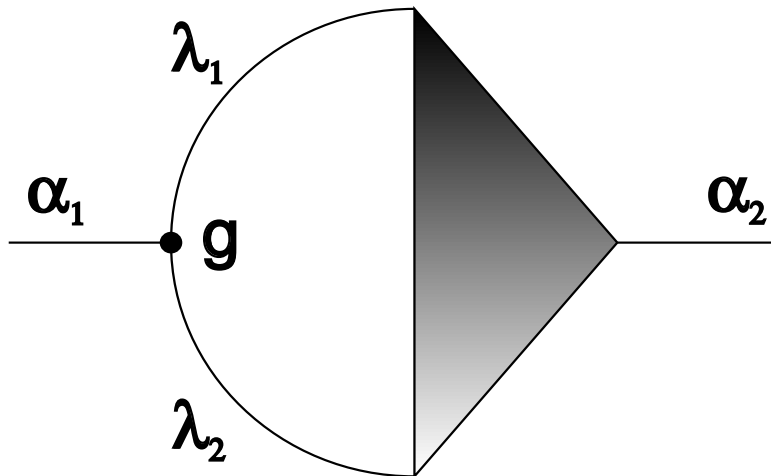


Abbildung 3.1: Ankopplung der verbundenen 2-Punkt-Funktion an die verbundene 3-Punkt-Funktion über den 3-Punkt-Vertex

Über den 4-Punkt-Vertex ergibt sich eine Ankopplung an die volle 4-Punkt-Funktion, die in Produkte aus 2 verbundenen 2-Punkt-Funktionen und in eine verbundene 4-Punkt-Funktion zerfällt. Die diagrammatische Darstellung der Terme (C.4b), die für die Kopplung an 2 verbundene 2-Punkt-Funktionen verantwortlich sind, ist in Abb. 3.2 gegeben. Dieses Diagramm ist das einzige Kopplungsdiagramm, das in der 2-Punkt-Näherung auftritt. Es entspricht dem angezogenen Eichbosonen-Tadpole (=verbundene 2-Punkt-Funktion in einer Summationsschleife) der herkömmlichen Hartree-Fock-Dyson-Schwinger-Gleichung. Analog zu den Verhältnissen bei einer störungstheoretischen Entwicklung mit normalen Feynman-Diagrammen ist zu erwarten, daß die in Abb. 3.1 und in Abb. 3.2 dargestellten Terme beide für sich genommen ultraviolette Divergenzen enthalten, die sich jedoch bei einer Gewährleistung der Eichinvarianz – zumindest in der Zeitentwicklung eichinvarianter Größen – in einer 2 + 1-dimensionalen Raumzeit gegenseitig wegheben sollten.<sup>3</sup> Entsprechende Auslöschungen von Divergenzen sollten auch an anderer Stelle auftreten. Eine genauere Diskussion dieses Punktes erfolgt im Rahmen der Präsentation der numerischen Ergebnisse in Kapitel 5.

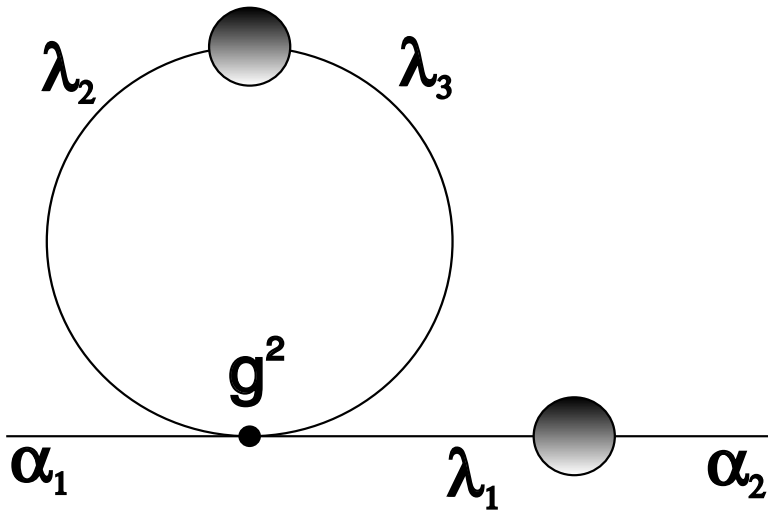


Abbildung 3.2: Selbstkopplung der verbundenen 2-Punkt-Funktion an ein Produkt aus 2 verbundenen 2-Punkt-Funktionen über den 4-Punkt-Vertex (angezogener Tadpole-Term)

In Abb. 3.3 ist die Ankopplung an die volle 4-Punkt-Funktion über den 4-Punkt-Vertex gemäß (C.4c) dargestellt. Das entsprechende störungstheore-

<sup>3</sup>In 3 + 1 Raumzeit-Dimensionen entspricht dies der gegenseitigen Auslöschung nicht-logarithmischer Divergenzen.

tische Diagramm niedrigster Ordnung in  $g$ , das zu dieser Struktur beiträgt, ist das auch in der  $\Phi^4$ -Theorie auftretende *Setting Sun-Diagramm* (vergl. [28, 30]), das von der Ordnung  $g^4$  ist. Im Gegensatz dazu enthalten die in den Abb. 3.1 und 3.2 dargestellten Diagramme bei formaler störungstheoretischer Betrachtung zu niedrigster Ordnung Beiträge der Ordnung  $g^2$ . Es ist jedoch darauf hinzuweisen, daß eine solche formale störungstheoretische Betrachtung hier zwar für die diagrammatische Analyse gewisse Einsichten liefert, da Vergleiche mit den Resummationsmethoden herkömmlicher Dyson-Schwinger-Gleichungen möglich sind, daß sie jedoch eigentlich nicht zulässig ist, da i) die Korrelationsdynamik für gleichzeitige Greenfunktionen formuliert ist und daher allenfalls zu einer *dynamischen Resummation* von Diagrammen im Rahmen der zeitlichen Evolution des Systems führt und ii) das betrachtete System in Wirklichkeit keine perturbative Entwicklung in  $g$  um den abelschen Grenzfall erlaubt, wie in Kapitel 5 eingehender diskutiert werden wird.

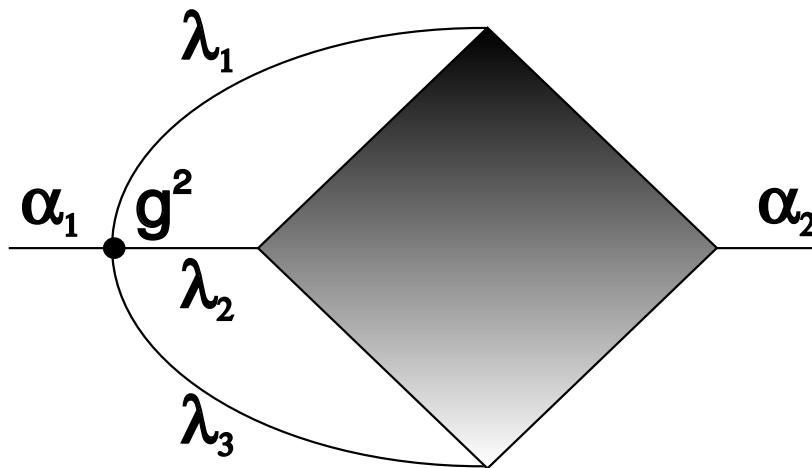


Abbildung 3.3: Ankopplung der verbundenen 2-Punkt-Funktion an die verbundene 4-Punkt-Funktion über den 4-Punkt-Vertex

### 3.4.2 Die Terme der 3-Punkt-Gleichungen

In diesem Unterabschnitt werden die Kopplungsterme in der Bewegungsgleichung für die verbundene 3-Punkt-Funktion  $\langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c$  untersucht.

Über den 3-Punkt-Vertex ergibt sich eine Ankopplung an die volle 4-Punkt-Funktion, die wiederum in Produkte aus 2 verbundenen 2-Punkt-

Funktionen und in eine verbundene 4-Punkt-Funktion zerfällt.

In Abb. 3.4 ist die Ankopplung an ein Produkt aus 2 verbundenen 2-Punkt-Funktionen gemäß den in (C.7a) enthaltenen Termen dargestellt. Im Impulsraum brechen bei diesem Diagramm alle intermediären Summationen zusammen, da keine Summationsschleifen (Loops) auftreten. Weiterhin liegt hier nur eine Ankopplung an verbundene Greenfunktionen niedrigerer Ordnung vor. Die Struktur kann in Analogie zu den in der NQCD und der NCBCD auf dem 4-Punkt- (2-Körper-) Niveau auftretenden Born-Termen gesehen werden (vergl. [59, 60, 61, 27]). Zu niedrigster Ordnung in  $g$  liefern diese Diagramme bei formaler störungstheoretischer Betrachtung einen Beitrag der Ordnung  $g$ , was gleichzeitig die niedrigste beitragende Ordnung für die verbundene 3-Punkt-Funktion ist.

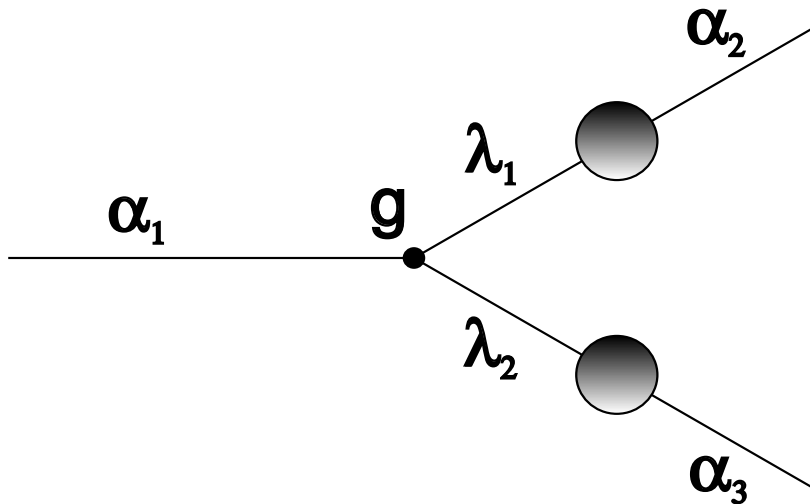


Abbildung 3.4: Ankopplung der verbundenen 3-Punkt-Funktion an ein Produkt aus 2 verbundenen 2-Punkt-Funktionen über den 3-Punkt-Vertex

Die Ankopplung an die verbundene 4-Punkt-Funktion gemäß (C.7b) ist in Abb. 3.5 dargestellt.

Über den 4-Punkt-Vertex ergibt sich eine Ankopplung an eine volle 5-Punkt-Funktion, die in Produkte aus einer verbundenen 2-Punkt-Funktion und einer verbundenen 3-Punkt-Funktion und in eine verbundene 5-Punkt-Funktion zerfällt, wobei die letztere jedoch im Rahmen der 4-Punkt-Korrelationsdynamik (und somit auch in den Näherungen niedrigerer Ordnung) vernachlässigt wird.

Für die Ankopplung an ein Produkt aus einer verbundenen 2-Punkt-Funktion und einer verbundenen 3-Punkt-Funktion ergeben sich 2 Möglichkeiten, die in Abb. 3.6 dargestellt sind. Zum einen kann gemäß der in (C.7c)

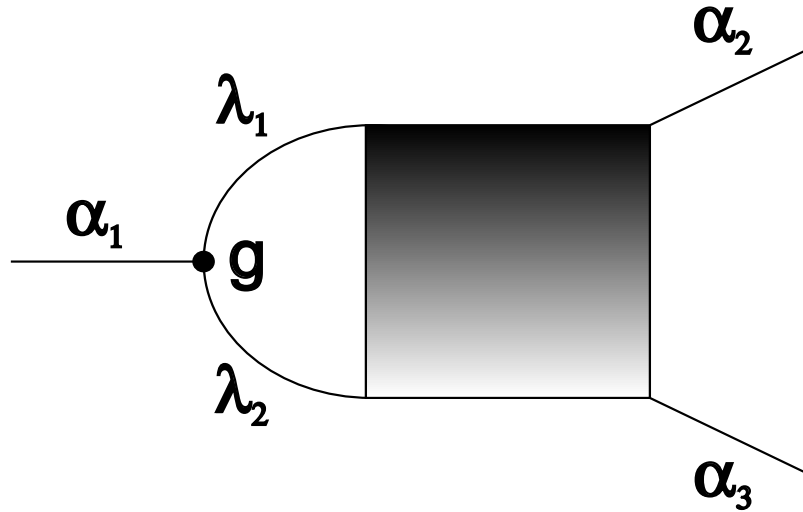


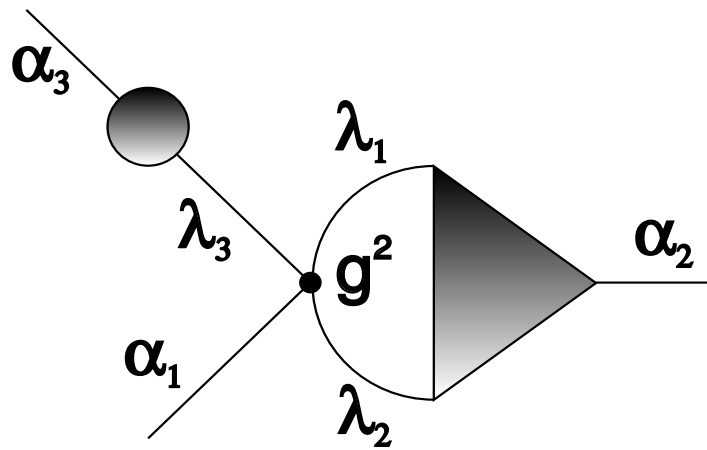
Abbildung 3.5: Ankopplung der verbundenen 3-Punkt-Funktion an die verbundene 4-Punkt-Funktion über den 3-Punkt-Vertex

aufgelisteten Terme eine Summationsschleife an der verbundenen 3-Punkt-Funktion angreifen, während die verbundene 2-Punkt-Funktion an einer externen Linie auftritt, dargestellt in Teil a) von Abb. 3.6 a). Zum anderen kann gemäß der in (C.7d) aufgelisteten Terme die verbundene 3-Punkt-Funktion mit zwei externen Linien verbunden sein, während die verbundene 2-Punkt-Funktion in einer Summationsschleife auftritt (analog dem Tadpole-Diagramm in Abb. 3.2), was in Teil b) von Abb. 3.6) dargestellt ist.

Die in Abb. 3.5 und in Abb. 3.6 a) dargestellten Terme sorgen für eine dynamische parquet-artige Resummation von Diagrammen, wobei die in Abb. 3.4 dargestellten (Born-) Terme die unterste Stufe der Resummation bilden.

Die in Abb. 3.6 b) dargestellten Terme können, wiederum in Analogie zur Betrachtung bei der NQCD und der NCBCD, als Mean-Field-Terme angesehen werden. Es ist hierbei jedoch zu beachten, daß im Gegensatz zur normalen Vielteilchentheorie hier zwischen den Mean-Field-Diagrammen und den für die parquet-artige Resummation zuständigen Diagrammen über die Forderung nach Eichinvarianz, d.h. über das Gauss-Gesetz, ein nichttrivialer Zusammenhang besteht, der u.a. zur gegenseitigen Auslöschung von ultravioletten Divergenzen führen sollte.

a)



b)

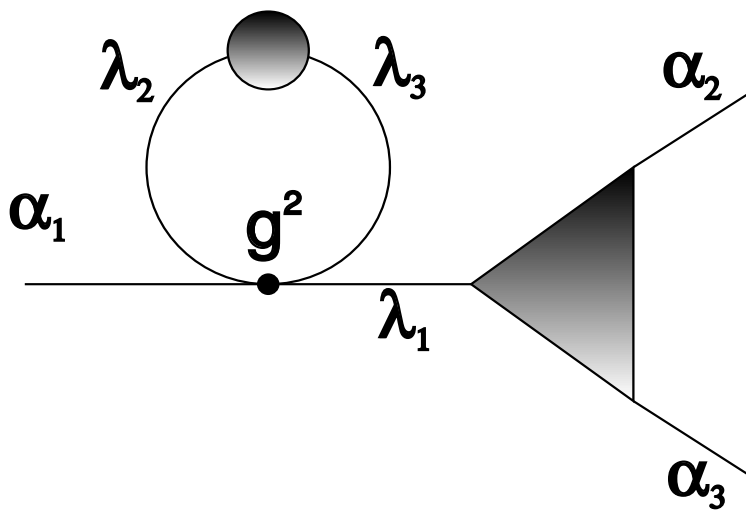


Abbildung 3.6: Ankopplung der verbundenen 3-Punkt-Funktion an ein Produkt aus einer verbundenen 2-Punkt-Funktion und einer verbundenen 3-Punkt-Funktion über den 4-Punkt-Vertex

### 3.4.3 Die Terme der 4-Punkt-Gleichungen

In diesem Unterabschnitt werden die Kopplungsterme in der Bewegungsgleichung für die verbundene 4-Punkt-Funktion  $\langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_{i_4}^{c_4}(\alpha_4) \rangle_c$  untersucht.

Über den 3-Punkt-Vertex ergibt sich eine Ankopplung an die volle 5-Punkt-Funktion, in deren Clusterzerlegung wiederum nur Produkte aus einer verbundenen 2-Punkt-Funktion und einer verbundenen 3-Punkt-Funktion mitgenommen werden, während die verbundene 5-Punkt-Funktion vernachlässigt wird. Die entsprechenden Terme (C.11a) sind in Abb. 3.7 diagrammatisch dargestellt. Im Impulsraum brechen bei diesem Diagramm, analog zum Verhalten in Abb. 3.4, alle intermediären Summationen zusammen. Auch hier liegt lediglich eine Ankopplung an verbundene Greenfunktionen niedrigerer Ordnung vor.

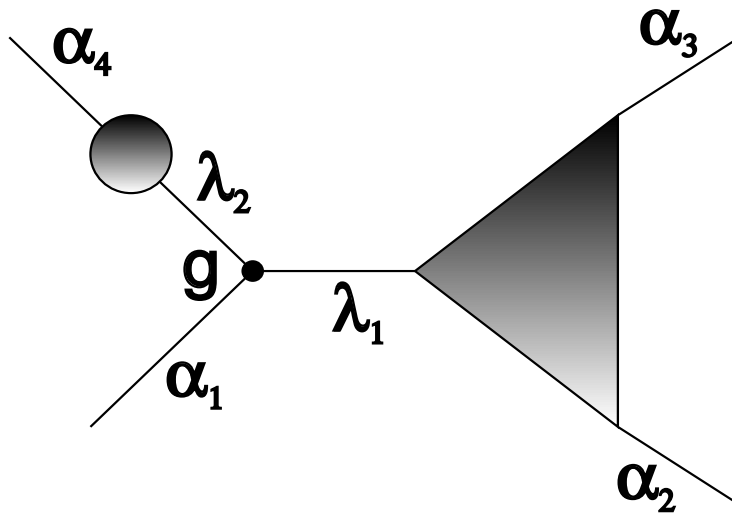


Abbildung 3.7: Ankopplung der verbundenen 4-Punkt-Funktion an ein Produkt aus einer verbundenen 2-Punkt-Funktion und einer verbundenen 3-Punkt-Funktion über den 3-Punkt-Vertex

Über den 4-Punkt-Vertex ergibt sich eine Ankopplung an die volle 6-Punkt-Funktion, die in Produkte aus 3 verbundenen 2-Punkt-Funktionen, Produkte aus 2 verbundenen 3-Punkt-Funktionen und Produkte aus einer verbundenen 2-Punkt-Funktion und einer verbundenen 4-Punkt-Funktion zerfällt. Die daneben auftretende verbundene 6-Punkt-Funktion wird in der 4-Punkt-Korrelationsdynamik wiederum vernachlässigt.

Die Ankopplung an Produkte aus 3 verbundenen 2-Punkt-Funktionen, die durch die in (C.11b) enthaltenen Terme gegeben ist, ist in Abb. 3.8 diagrammatisch dargestellt. Wie bei dem vorhergehenden Diagramm aus Abb. 3.7



sind auch hier keine Summationsschleifen vorhanden, so daß im Impulsraum alle intermediären Summationen zusammenbrechen; daneben handelt es sich wiederum nur um eine Ankopplung an verbundene Greenfunktionen niedrigerer Ordnung.

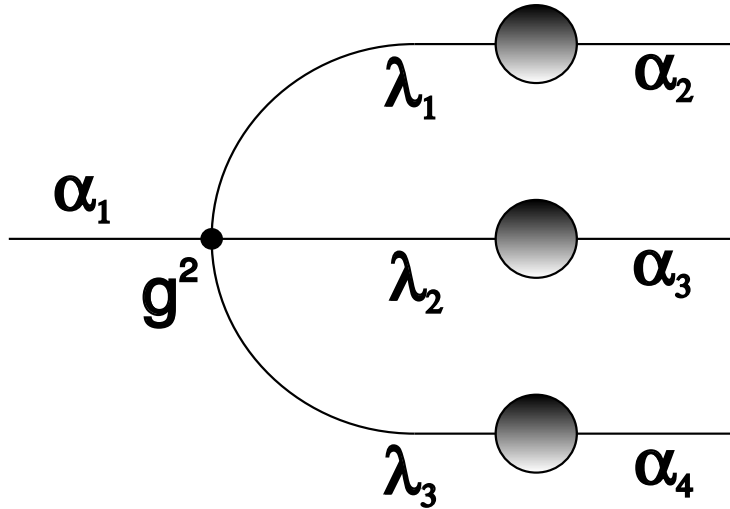


Abbildung 3.8: Ankopplung der verbundenen 4-Punkt-Funktion an ein Produkt aus 3 verbundenen 2-Punkt-Funktionen über den 4-Punkt-Vertex

Die in den Abb. 3.7 und 3.8 diagrammatisch dargestellten Terme können, wie die in Abb. 3.4 dargestellten Terme der 3-Punkt-Bewegungsgleichung, in Analogie zu den Born-Termen der NQCD und der NCBCD gesehen werden. Sie liefern bei formaler störungstheoretischer Betrachtung jeweils zu niedrigster Ordnung in  $g$  einen Beitrag der Ordnung  $g^2$ , was gleichzeitig die niedrigste beitragende Ordnung für die verbundene 4-Punkt-Funktion ist.

Die Ankopplung an ein Produkt aus 2 verbundenen 3-Punkt-Funktionen, gegeben durch die Terme in (C.11c), ist in Abb. 3.9 dargestellt. Hierbei greift jeweils eine Summationsschleife an einer der verbundenen 3-Punkt-Funktionen an, die mit einer externen Linie verbunden ist, während die andere verbundene 3-Punkt-Funktion mit 2 externen Linien verbunden ist.

Für die Ankopplung an ein Produkt aus einer verbundenen 2-Punkt-Funktion und einer verbundenen 4-Punkt-Funktion ergeben sich 2 Möglichkeiten, die in Abb. 3.10 dargestellt sind. Zum einen kann gemäß der in (C.11d) aufgelisteten Terme eine Summationsschleife an der verbundenen 4-Punkt-Funktion angreifen, die mit 2 externen Linien verbunden ist, während die verbundene 2-Punkt-Funktion an einer externen Linie auftritt, dargestellt in Abb. 3.10 a). Zum anderen kann gemäß der in (C.11e) aufgelisteten Terme die verbundene 4-Punkt-Funktion mit 3 externen Linien verbunden

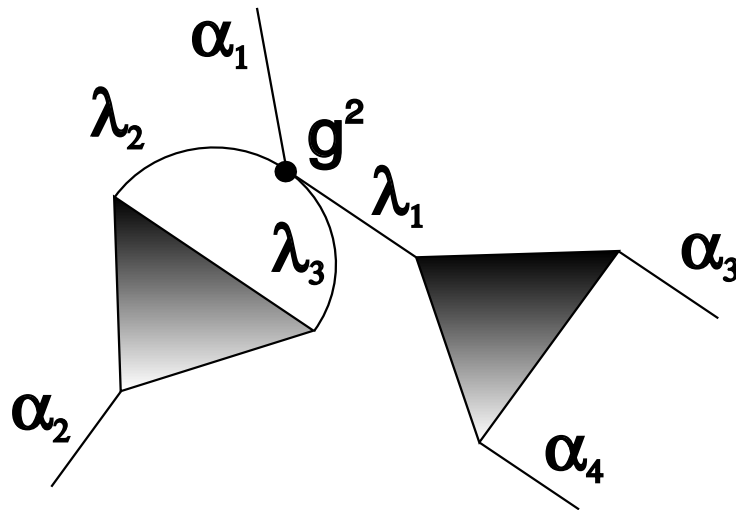
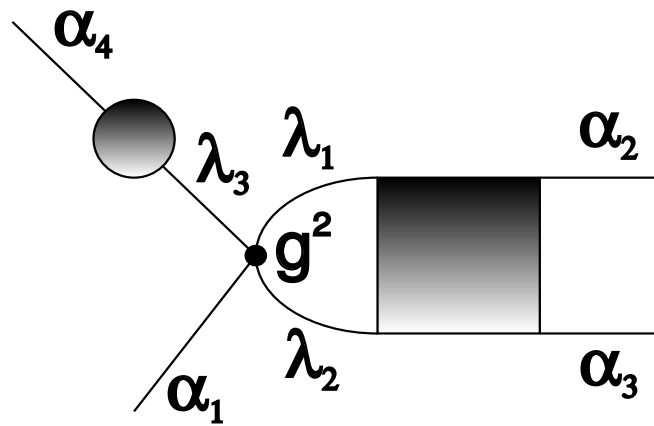


Abbildung 3.9: Ankopplung der verbundenen 4-Punkt-Funktion an ein Produkt aus 2 verbundenen 3-Punkt-Funktionen über den 4-Punkt-Vertex

sein, während die verbundene 2-Punkt-Funktion in einer Summationsschleife auftritt (wiederum analog dem Tadpole-Diagramm in Abb. 3.2), was in Abb. 3.10 b) dargestellt ist. Während die in Abb. 3.9 und in Abb. 3.10 a) dargestellten Terme für eine parquet-artige Resummation von Diagrammen auf dem 4-Punkt-Niveau zuständig sind, wobei die (Born-) Terme aus den Abb. 3.7 und 3.8 als unterste Resummationsstufe fungieren, besitzt das Diagramm von Abb. 3.10 b) die Struktur eines Mean-Field-Beitrags, so wie bereits die Diagramme in Abb. 3.2 und in Abb. 3.6 b). Hierbei ist jedoch wiederum zu beachten, daß zwischen den verschiedenen Termgruppen durch die Forderung nach Eichinvarianz nichttriviale Abhängigkeiten auftreten.

a)



b)

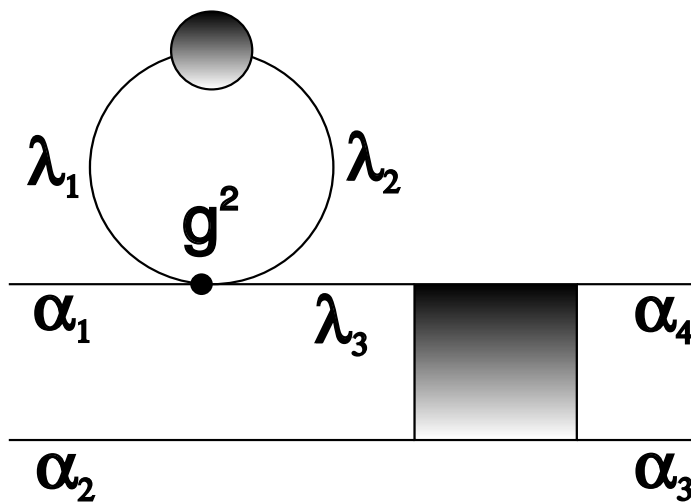


Abbildung 3.10: Ankopplung der verbundenen 4-Punkt-Funktion an ein Produkt aus einer verbundenen 2-Punkt-Funktion und einer verbundenen 4-Punkt-Funktion über den 4-Punkt-Vertex

# Kapitel 4

## Hierarchie von Randbedingungen aus dem Gauß-Gesetz

Zusätzlich zu den aus dem Heisenbergbild folgenden Bewegungsgleichungen, die im vorangehenden Kapitel 3 diskutiert wurden, müssen die gleichzeitigen Greenfunktionen noch die Bedingungen erfüllen, die aus dem Gauß-Gesetz (2.5) abgeleitet werden können. Dieses ist, wie in Kapitel 2 festgestellt, nicht automatisch in der Hamiltonschen Dynamik der Theorie enthalten. Dieses Kapitel dient dazu, die aus dem Gauss-Gesetz folgenden Bedingungen aufzustellen und zu diskutieren.

### 4.1 Hierarchie von Gauß-Gesetz-Bedingungen für volle Greenfunktionen

Es sei zuerst bemerkt, daß aus (2.5) unmittelbar folgt

$$OG^a(\vec{x})|\Psi_{ph}\rangle = 0 \tag{4.1}$$

für ein beliebiges Produkt von Feldoperatoren  $O$  and für jeden physikalischen Zustand  $|\Psi_{ph}\rangle$ . Für jeden gemäß (3.7) definierten Erwartungswert gilt daher

$$\langle OG^a(\vec{x}) \rangle = 0 , \tag{4.2}$$

was im Prinzip bereits den kompletten Satz von Gleichungen für gleichzeitige Greenfunktionen beinhaltet, die aus dem Gauß-Gesetz abgeleitet werden können. Es ist dabei wichtig, darauf hinzuweisen, daß in (4.2)  $G^a(\vec{x})$  rechts von allen anderen Operatoren steht, und daß die Operatorordnung nicht umgedreht werden kann, indem mit der Hermitezität der beteiligten Operatoren

argumentiert wird (obwohl der Gauß-Gesetz-Operator im Raum der normierbaren Zustände hermitesch ist, verliert er diese Eigenschaft im vorliegenden Fall von physikalischen Zuständen, vgl. Kapitel 2 und [40, 41, 42]).

Ersetzt man  $O$  in (4.2) durch ein Produkt von  $n$  Feldoperatoren, dann erhält man aufgrund der Struktur von  $G^a(\vec{x})$  eine Relation zwischen einer gleichzeitigen vollen  $n + 1$ - und einer gleichzeitigen vollen  $n + 2$ -Punkt-Funktion. Daher ergibt sich insgesamt, genau wie im Fall der Heisenberg-Bewegungsgleichungen, eine unendliche gekoppelte Hierarchie von Gleichungen. Im einfachsten Fall,  $O = 1$  ( $n = 0$ ), erhält man eine Beziehung zwischen 1- und 2-Punkt-Funktionen:

$$\langle G^a(\vec{x}) \rangle = \partial_{x_i} \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle + g f^{abc} \langle A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle = 0 . \quad (4.3)$$

Auf dem nächsthöheren Niveau, mit  $O = A_j^d(\vec{y})$  und  $O = \Pi_j^d(\vec{y})$ , führt das Gauß-Gesetz auf 2 verschiedene Beziehungen zwischen 2- und 3-Punkt-Funktionen:

$$\partial_{x_i} \langle A_j^d(\vec{y}) \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle + g f^{abc} \langle A_j^d(\vec{y}) A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle = 0 , \quad (4.4)$$

$$\partial_{x_i} \langle \Pi_j^d(\vec{y}) \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle + g f^{abc} \langle \Pi_j^d(\vec{y}) A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle = 0 . \quad (4.5)$$

Auf dem wiederum nächsthöheren Niveau ergeben sich 3 verschiedene Beziehungen zwischen 3- und 4-Punkt-Funktionen, indem man  $O = A_j^d(\vec{y}) A_k^e(\vec{z})$ ,  $O = \Pi_j^d(\vec{y}) A_k^e(\vec{z})$ , und  $O = \Pi_j^d(\vec{y}) \Pi_k^e(\vec{z})$  wählt ( $O = A_j^d(\vec{y}) \Pi_k^e(\vec{z})$  ist redundant, da es über Vertauschungsrelationen erhalten werden kann):

$$\partial_{x_i} \langle A_j^d(\vec{y}) A_k^e(\vec{z}) \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle + g f^{abc} \langle A_j^d(\vec{y}) A_k^e(\vec{z}) A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle = 0 , \quad (4.6)$$

$$\partial_{x_i} \langle \Pi_j^d(\vec{y}) A_k^e(\vec{z}) \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle + g f^{abc} \langle \Pi_j^d(\vec{y}) A_k^e(\vec{z}) A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle = 0 , \quad (4.7)$$

$$\partial_{x_i} \langle \Pi_j^d(\vec{y}) \Pi_k^e(\vec{z}) \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle + g f^{abc} \langle \Pi_j^d(\vec{y}) \Pi_k^e(\vec{z}) A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle = 0 . \quad (4.8)$$

Für die höheren Ordnungen ist das Vorgehen analog.

Im Rahmen der hier verwendeten Formulierung in temporaler Eichung sind (4.3)-(4.8) und die entsprechenden Gleichungen höherer Ordnung die *Slavnov-Taylor-Identitäten* für gleichzeitige Greenfunktionen und müssen erfüllt werden, um Eichinvarianz zu garantieren.

Betrachtet man die Zeitableitung (im Heisenberg-Bild) einer der obigen Slavnov-Taylor-Identitäten, so erhält man

$$\partial_t \langle O G^a(\vec{x}) \rangle = \langle \frac{1}{i} [O, H] G^a(\vec{x}) \rangle + \langle O \frac{1}{i} [G^a(\vec{x}), H] \rangle = 0 . \quad (4.9)$$

Für den Fall, daß  $O$  ein  $n$ -Punkt-Operator ist, verschwindet der erste Term in (4.9) aufgrund der Slavnov-Taylor-Identitäten, die jeweils die gleichzeitigen Greenfunktionen der Ordnungen  $n + 1$  und  $n + 2$ ,  $n + 2$  und  $n + 3$  sowie

$n + 3$  und  $n + 4$  miteinander in Beziehung setzen, da die Zeitableitung eines  $n$ -Punkt-Operators im allgemeinen an  $n$ -,  $n + 1$ - und  $n + 2$ -Punkt-Operatoren koppelt. Der zweite Term verschwindet aufgrund von (2.6). Daher reduziert sich im Prinzip die Bedingung, die Hierarchie von Slavnov-Taylor-Identitäten zu allen Zeiten zu erfüllen, auf eine entsprechende Wahl von Anfangsbedingungen für die Hierarchie von Heisenberg-Bewegungsgleichungen.

Die letztere Eigenschaft bleibt jedoch nur gültig, wenn man eine exakte Lösung der Hierarchie von Bewegungsgleichungen betrachtet; sie bricht in dem hier betrachteten Näherungsschema der Korrelationsdynamik in einer endlichen Einteilchenbasis zusammen. Dieser Zusammenbruch der Eichinvarianz hat zwei verschiedene Gründe:

Einerseits wird die Identität (2.6) verletzt, da für die numerische Integration der Bewegungsgleichungen die Theorie auf einem Torus betrachtet wird, wo nur eine endliche Anzahl ebener Wellen als Einteilchenbasis berücksichtigt wird (vergl. Kapitel 5); d.h., wenn  $H$  und  $G^a(\vec{x})$  durch die entsprechenden Ausdrücke in einer endlichen Impulsbasis ersetzt werden, verschwindet ihr Kommutator nicht mehr. Dies ist nichts als der wohlbekannt Tatbestand, daß jeder einfache Impulscutoff die lokale Eichinvarianz verletzt. In Kapitel 5 wird diskutiert, wie dies teilweise behoben werden kann, indem im Rahmen des 3-Punkt-Abschneideschemas verschiedene Impulscutoffs für die 2- und die 3-Punkt-Funktionen verwendet werden.

Andererseits ist das Abschneiden nach der Ordnung der verbundenen Greenfunktionen ebenfalls nicht konsistent mit der Hierarchie der aus dem Gauß-Gesetz folgenden Randbedingungen, so daß sogar im Falle einer Lösung der korrelationsdynamischen Gleichungen mit einem eichinvarianten Regularisierungsschema *nicht alle* Slavnov-Taylor-Identitäten zeitlich erhalten sein können.

Um den letzten Punkt für den Fall der SU(2)-Theorie genauer zu untersuchen, sei zunächst bemerkt, daß die Gleichungen der 2-, 3- und 4-Punkt-Korrelationsdynamik – auch in einer endlichen Impulsbasis – die folgende globale Farbsinglett-Struktur für verbundene gleichzeitige Greenfunktionen zeitlich erhalten ( $O$  bezeichnet Felder  $A$  und/oder konjugierte Impulse  $\Pi$ ):

$$\langle O_i^a(\vec{x}) \rangle = 0 , \quad (4.10)$$

$$\langle O_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1) O_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \rangle_c = \delta^{a_1 a_2} \langle\langle O_{i_1}(\vec{x}_1) O_{i_2}(\vec{x}_2) \rangle\rangle_c , \quad (4.11)$$

$$\langle O_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1) O_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) O_{i_3}^{a_3}(\vec{x}_3) \rangle_c = \varepsilon^{a_1 a_2 a_3} \langle\langle O_{i_1}(\vec{x}_1) O_{i_2}(\vec{x}_2) O_{i_3}(\vec{x}_3) \rangle\rangle_c , \quad (4.12)$$

wobei  $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$  für die SU(2)-Theorie gilt. Die doppelten spitzen Klammern  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle$  bezeichnen dabei eine farzunabhängige Funktion, die nur von den räumlichen Koordinaten und von den Vektorindizes der entsprechenden Feldoperatoren abhängt. Die Notation unter Verwendung von Operatoren ohne

Farbindizes innerhalb der doppelten spitzen Klammern ist als rein symbolisch zu verstehen und dient lediglich dazu, die Art des Operators ( $A$  oder  $\Pi$ ) zu kennzeichnen, zu dem die räumlichen Koordinaten und Vektorindizes gehören<sup>1</sup>. Während für die 2-Punkt-Funktionen gilt

$$\begin{aligned}\langle\langle A_{i_1}(\vec{x}_1)A_{i_2}(\vec{x}_2)\rangle\rangle_c &= \langle\langle A_{i_2}(\vec{x}_2)A_{i_1}(\vec{x}_1)\rangle\rangle_c, \\ \langle\langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1)\Pi_{i_2}(\vec{x}_2)\rangle\rangle_c &= \langle\langle \Pi_{i_2}(\vec{x}_2)\Pi_{i_1}(\vec{x}_1)\rangle\rangle_c\end{aligned}\quad (4.13)$$

und

$$\langle\langle A_{i_1}(\vec{x}_1)\Pi_{i_2}(\vec{x}_2)\rangle\rangle_c = \langle\langle \Pi_{i_2}(\vec{x}_2)A_{i_1}(\vec{x}_1)\rangle\rangle_c + i\delta_{i_1i_2}\delta(\vec{x}_1 - \vec{x}_2), \quad (4.14)$$

ist die farbunabhängige 3-Punkt-Funktion (aufgrund der Antisymmetrie der  $SU(2)$ -Strukturkonstanten) antisymmetrisch bezüglich des Austauschs zweier beliebiger Felder bzw. Impulse, d.h. es gilt

$$\begin{aligned}\langle\langle O_{i_1}(\vec{x}_1)O_{i_2}(\vec{x}_2)O_{i_3}(\vec{x}_3)\rangle\rangle \\ = -\langle\langle O_{i_2}(\vec{x}_2)O_{i_1}(\vec{x}_1)O_{i_3}(\vec{x}_3)\rangle\rangle = -\langle\langle O_{i_1}(\vec{x}_1)O_{i_3}(\vec{x}_3)O_{i_2}(\vec{x}_2)\rangle\rangle.\end{aligned}\quad (4.15)$$

Die Farbstruktur der verbundenen 4-Punkt-Funktionen ist komplizierter und wird daher im Anhang D angegeben.

Da die in dieser Arbeit verwendete Bedingung zur Fixierung der residualen Eichfreiheit (2.24) keine Richtung im Farbraum bevorzugt, liegt hier stets die obige Farbsinglettstruktur vor, so daß man (4.10), (4.11), (4.12), und (D.1)-(D.4) für eine explizite Reduktion der Anzahl von Freiheitsgraden in den korrelationsdynamischen Gleichungen verwenden kann. Dies, genauso wie der Beweis für die zeitliche Erhaltung der obigen Farbsinglett-Struktur, verlangt recht umfangreiche Rechnungen und wurde im Rahmen dieser Arbeit mit computeralgebraischen Methoden ausgeführt.

Eine unmittelbare Konsequenz von (4.10) besteht darin, daß die vollen 2- und 3-Punkt-Funktionen keine unverbundenen Anteile besitzen und daher identisch mit den verbundenen 2- und 3-Punkt-Funktionen sind. Weiterhin ist (4.3) im Rahmen der Korrelationsdynamik stets trivial erfüllt, da für alle Zeiten gilt

$$\begin{aligned}\langle G^a(\vec{x})\rangle &= \partial_{x_i}\langle \Pi_i^a(\vec{x})\rangle + g\varepsilon^{abc}\langle A_i^b(\vec{x})\Pi_i^c(\vec{x})\rangle \\ &= g\varepsilon^{abc}\delta^{bc}\langle A_i(\vec{x})\Pi_i(\vec{x})\rangle_c = 0.\end{aligned}\quad (4.16)$$

Ebenso verwandeln sich die Identitäten (4.4) und (4.5), die volle 2- und 3-Punkt-Funktionen miteinander in Beziehung setzen, aufgrund der globalen Farbsinglett-Struktur direkt in Identitäten für verbundene Greenfunktionen. Die Gauß-Gesetz-Randbedingungen höherer Ordnung, die volle  $n$ - und  $n+1$ -Punkt-Funktionen verbinden, gehen im allgemeinen in Identitäten

---

<sup>1</sup>Insbesondere sollte die Notation nicht mit der von matrixwertigen Feldern in der fundamentalen Darstellung der  $SU(2)$  verwechselt werden.

über, die verbundene  $n$ - und  $n + 1$ -Punkt-Funktionen und Produkte aus allen gleichzeitigen verbundenen Greenfunktionen niedrigerer Ordnung bis hinunter zur 2-Punkt-Funktion verbinden. Daher bleiben in einem  $N$ -Punkt-Abschneideschema alle Identitäten bis zur denjenigen, die volle  $N - 1$ - und  $N$ -Punkt-Funktionen verbinden, unverändert, während die Identitäten, die volle  $N$ - und  $N + 1$ -Punkt-Funktionen verbinden, durch das Vernachlässigen der verbundenen  $N + 1$ -Punkt-Funktion abgeschnitten werden; z.B. im 3-Punkt-Abschneideschema hat man Relationen zwischen verbundenen 2- und 3-Punkt-Funktionen und Identitäten, die verbundene 3-Punkt-Funktionen mit Produkten von 2 verbundenen 2-Punkt-Funktionen verbinden.

Da die zeitliche Erhaltung einer gleichzeitigen Slavnov-Taylor-Identität, wie oben diskutiert, die zeitliche Erhaltung der entsprechenden Identitäten der 2 nächsthöheren Ordnungen voraussetzt, führt ein Abschneiden bezüglich der Ordnung der mitgenommenen verbundenen Greenfunktionen im allgemeinen zu einer Nicht-Erhaltung der Relationen (4.4)-(4.8) und der Randbedingungen höherer Ordnung.

Eine Untermenge von erhaltenen Identitäten bekommt man jedoch, indem man, anstatt  $G^a(\vec{x})$  von links mit einem beliebigen Operatorprodukt zu multiplizieren, Erwartungswerte von Produkten mehrerer Gauß-Gesetz-Operatoren betrachtet. Im allgemeinen enthält ein Produkt aus  $n$  Gauß-Gesetz-Operatoren Produkte von bis zu  $2n$  Feldern oder konjugierten Impulsen, und sein Erwartungswert ist daher in einem  $2n$ -Punkt-Abschneideschema erhalten, solange  $[G^a(\vec{x}), H] = 0$  gilt [26]. Die zeitliche Erhaltung dieser Identitäten wird allerdings ebenfalls zerstört, sobald man in einer endlichen Impulsbasis arbeitet.

An dieser Stelle ist es erwähnenswert, daß im Rahmen der Korrelationsdynamik für nichtrelativistische Fermionensysteme eine ähnliche Randbedingung existiert, die auf die gleiche Art durch das  $N$ -Punkt-Abschneideschema verletzt wird wie das Gauß-Gesetz im vorliegenden Fall der Korrelationsdynamik für eine nichtabelsche Eichtheorie. Diese Randbedingung ist die Forderung, daß das System „gute“ Teilchenzahl hat, d.h. wenn  $N_{Fermi} = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{\dagger} a_{\alpha}$  der Teilchenzahloperator ist und  $H_{Fermi}$  der Hamiltonoperator, wobei  $[H_{Fermi}, N_{Fermi}] = 0$  gilt, und wenn  $|\Psi_{Fermi}\rangle$  der Zustand ist, der das System im Fockraum beschreibt, dann lautet die entsprechende Randbedingung

$$(N_{Fermi} - \langle N_{Fermi} \rangle) |\Psi_{Fermi}\rangle = 0, \quad (4.17)$$

woraus man für einen beliebigen Operator  $O$  direkt erhält

$$\langle O (N_{Fermi} - \langle N_{Fermi} \rangle) \rangle = 0. \quad (4.18)$$

Durch Einsetzen aller denkbaren Produkte von Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren für  $O$  erhält man aus (4.18) nun eine Hierarchie von Randbedingungen ähnlich der Hierarchie von Slavnov-Taylor-Identitäten, die oben



aus dem Gauß-Gesetz gewonnen wurden. Diese Hierarchie von Randbedingungen ist nichts anderes als der Satz von Spurrelationen, der die  $n$ -Teilchen-( $2n$ -Punkt-) und die  $n + 1$ -Teilchen-( $2n + 2$ -Punkt-)Dichtematrizen einer reinen  $M$ -Teilchen-Wellenfunktion verbindet. Die Verletzung dieser Spurrelationen ist eines der wohlbekanntesten konzeptionellen Probleme des Korrelationsdynamik-Zugangs. Genau wie im Fall des Gauß-Gesetzes kann eine Untermenge von erhaltenen Identitäten gefunden werden, indem man die Erwartungswerte von  $N_{Fermi}^k$ ,  $k \leq N/2$  betrachtet (z.B.  $\langle N_{Fermi}^2 \rangle$  ist in einem 2-Teilchen-(4-Punkt-)Abschneideschema erhalten).

Es existiert jedoch auch ein qualitativer Unterschied zwischen dem Gauß-Gesetz der Yang-Mills-Theorie und den Spurrelationen der fermionischen Vielteilchentheorie. Während das Gauß-Gesetz (2.5) von einer *lokalen* Eichsymmetrie herrührt, wird die Bedingung (4.17), oder die Bedingung, in einem Ladungseigenzustand des Systems zu sein<sup>2</sup>, von einer *globalen* Symmetrie des Systems induziert. Dadurch sind z.B. die Spurrelationen nicht bereits auf dem Operatorniveau verletzt, wenn man die Theorie in einer endlichen Einteilchenbasis betrachtet.

Obwohl bisherige Analysen ergeben haben, daß zumindest für die Anwendung der nichtrelativistischen fermionischen Korrelationsdynamik (NQCD) auf leichte Kerne die Verletzung der Spurrelationen nur schwach ist und keine signifikanten Auswirkungen auf die zeitliche Evolution des Systems hat [59], ist es nicht a priori klar, ob dies im Fall der Verletzung des Gauß-Gesetzes genauso sein wird.

## 4.2 Clusterzerlegung und diagrammatische Analyse

In die Identitäten (4.4)-(4.8) werden an dieser Stelle zunächst die Clusterzerlegungen der entsprechenden vollen Greenfunktionen eingesetzt, wobei das Vorliegen der im vorangehenden Abschnitt erläuterten Farbsinglett-Struktur bereits ausgenutzt wird.

Wie im vorangehenden Abschnitt erläutert, enthalten die vollen 2- und 3-Punkt-Funktionen aufgrund des Verschwindens der 1-Punkt-Funktion keine unverbundenen Anteile, so daß aus (4.4) und (4.5) direkt folgt:

$$\partial_{x_i} \langle A_j^d(\vec{y}) \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle_c = -g f^{abc} \langle A_j^d(\vec{y}) A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle_c, \quad (4.19)$$

$$\partial_{x_i} \langle \Pi_j^d(\vec{y}) \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle_c = -g f^{abc} \langle \Pi_j^d(\vec{y}) A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle_c. \quad (4.20)$$

---

<sup>2</sup>Hier wird noch einmal die Ähnlichkeit beider Randbedingungen deutlich, denn die beiden Anteile von  $G^a(\vec{x})$  entsprechen dem Farbladungsdichteoperator der Eichbosonen und der Divergenz des von der Farbladung erzeugten farbelektrischen Feldes.

Die jeweils auf der rechten Seite von (4.6)-(4.8) auftauchenden vollen 4-Punkt-Funktionen zerfallen nach Einsetzen der Clusterzerlegung in Produkte aus 2 verbundenen 2-Punkt-Funktionen und in eine verbundene 4-Punkt-Funktion. Man erhält:

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \langle A_j^d(\vec{y}) A_k^e(\vec{z}) \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle_c &= -g f^{abc} \left\{ \langle A_j^d(\vec{y}) A_i^b(\vec{x}) \rangle_c \langle A_k^e(\vec{z}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle_c \right. \\ &\quad \left. + \langle A_j^d(\vec{y}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle_c \langle A_k^e(\vec{z}) A_i^b(\vec{x}) \rangle_c + \langle A_j^d(\vec{y}) A_k^e(\vec{z}) A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle_c \right\} , \end{aligned} \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \langle \Pi_j^d(\vec{y}) A_k^e(\vec{z}) \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle_c &= -g f^{abc} \left\{ \langle \Pi_j^d(\vec{y}) A_i^b(\vec{x}) \rangle_c \langle A_k^e(\vec{z}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle_c \right. \\ &\quad \left. + \langle \Pi_j^d(\vec{y}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle_c \langle A_k^e(\vec{z}) A_i^b(\vec{x}) \rangle_c + \langle \Pi_j^d(\vec{y}) A_k^e(\vec{z}) A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle_c \right\} , \end{aligned} \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \partial_{x_i} \langle \Pi_j^d(\vec{y}) \Pi_k^e(\vec{z}) \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle_c &= -g f^{abc} \left\{ \langle \Pi_j^d(\vec{y}) A_i^b(\vec{x}) \rangle_c \langle \Pi_k^e(\vec{z}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle_c \right. \\ &\quad \left. + \langle \Pi_j^d(\vec{y}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle_c \langle \Pi_k^e(\vec{z}) A_i^b(\vec{x}) \rangle_c + \langle \Pi_j^d(\vec{y}) \Pi_k^e(\vec{z}) A_i^b(\vec{x}) \Pi_i^c(\vec{x}) \rangle_c \right\} , \end{aligned} \quad (4.23)$$

wobei die Farbdagonalität der verbundenen 2-Punkt-Funktion in Verbindung mit  $f^{abc} \delta^{bc} = 0$  verwendet wurde.

Die Identitäten (4.19)-(4.23) werden nun noch in einer Einteilchenbasis entwickelt, um einerseits die bei der numerischen Analyse in Kapitel 5 verwendete diskretisierte Form zu erhalten und um andererseits zu einem geeigneten Ausgangspunkt für eine diagrammatische Analyse (analog zu Abschnitt 3.4) zu gelangen. Dabei wird die Notation aus Anhang C verwendet, d.h. die Feldoperatoren und die konjugierten Feldimpulse werden gemäß

$$A_i^a(\vec{x}) = \sum_{\alpha} A_i^a(\alpha) \Psi_{\alpha}(\vec{x}) , \quad \Pi_i^a(\vec{x}) = \sum_{\alpha} \Pi_i^a(\alpha) \Psi_{\alpha}(\vec{x}) \quad (4.24)$$

entwickelt, wobei  $\{\Psi_{\alpha}\}$  eine orthonormale Einteilchenbasis ist. Analog zu (C.2) sei weiterhin definiert

$$\begin{aligned} \langle \alpha | \beta^i \rangle &= \int dx \Psi_{\alpha}^*(\vec{x}) (\partial_{x_i} \Psi_{\beta}(\vec{x})) , \\ \langle \alpha | \beta \gamma \rangle &= \int dx \Psi_{\alpha}^*(\vec{x}) \Psi_{\beta}(\vec{x}) \Psi_{\gamma}(\vec{x}) . \end{aligned} \quad (4.25)$$

Nach Ausführen der Operation  $\int dx \int dy \Psi_{\alpha}^*(\vec{x}) \Psi_{\beta}^*(\vec{y}) (\cdot)$  auf (4.19) und (4.20) erhält man

$$\sum_{\lambda} \langle \alpha | \lambda^i \rangle \langle A_j^d(\beta) \Pi_i^a(\lambda) \rangle_c = -g f^{abc} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \langle \alpha | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \langle A_j^d(\beta) A_i^b(\lambda_1) \Pi_i^c(\lambda_2) \rangle_c , \quad (4.26)$$

$$\sum_{\lambda} \langle \alpha | \lambda^i \rangle \langle \Pi_j^d(\beta) \Pi_i^a(\lambda) \rangle_c = -g f^{abc} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \langle \alpha | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \langle \Pi_j^d(\beta) A_i^b(\lambda_1) \Pi_i^c(\lambda_2) \rangle_c . \quad (4.27)$$

Die Ausführung von  $\int dx \int dy \int dz \Psi_\alpha^*(\vec{x})\Psi_\beta^*(\vec{y})\Psi_\gamma^*(\vec{z}) (\cdot)$  auf (4.21)-(4.23) liefert entsprechend

$$\begin{aligned} & \sum_\lambda \langle \alpha | \lambda^i \rangle \langle A_j^d(\beta) A_k^e(\gamma) \Pi_i^a(\lambda) \rangle_c \\ &= -gf^{abc} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \langle \alpha | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \left\{ \langle A_j^d(\beta) A_i^b(\lambda_1) \rangle_c \langle A_k^e(\gamma) \Pi_i^c(\lambda_2) \rangle_c \right. \\ & \quad \left. + \langle A_j^d(\beta) \Pi_i^c(\lambda_1) \rangle_c \langle A_k^e(\gamma) A_i^b(\lambda_2) \rangle_c + \langle A_j^d(\beta) A_k^e(\gamma) A_i^b(\lambda_1) \Pi_i^c(\lambda_2) \rangle_c \right\}, \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$\begin{aligned} & \sum_\lambda \langle \alpha | \lambda^i \rangle \langle \Pi_j^d(\beta) A_k^e(\gamma) \Pi_i^a(\lambda) \rangle_c \\ &= -gf^{abc} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \langle \alpha | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \left\{ \langle \Pi_j^d(\beta) A_i^b(\lambda_1) \rangle_c \langle A_k^e(\gamma) \Pi_i^c(\lambda_2) \rangle_c \right. \\ & \quad \left. + \langle \Pi_j^d(\beta) \Pi_i^c(\lambda_1) \rangle_c \langle A_k^e(\gamma) A_i^b(\lambda_2) \rangle_c + \langle \Pi_j^d(\beta) A_k^e(\gamma) A_i^b(\lambda_1) \Pi_i^c(\lambda_2) \rangle_c \right\}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} & \sum_\lambda \langle \alpha | \lambda^i \rangle \langle \Pi_j^d(\beta) \Pi_k^e(\gamma) \Pi_i^a(\lambda) \rangle_c \\ &= -gf^{abc} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \langle \alpha | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \left\{ \langle \Pi_j^d(\beta) A_i^b(\lambda_1) \rangle_c \langle \Pi_k^e(\gamma) \Pi_i^c(\lambda_2) \rangle_c \right. \\ & \quad \left. + \langle \Pi_j^d(\beta) \Pi_i^c(\lambda_1) \rangle_c \langle \Pi_k^e(\gamma) A_i^b(\lambda_2) \rangle_c + \langle \Pi_j^d(\beta) \Pi_k^e(\gamma) A_i^b(\lambda_1) \Pi_i^c(\lambda_2) \rangle_c \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Wählt man für  $\{\Psi_\alpha\}$  eine Basis von ebenen Wellen auf einem Torus, d.h.  $\Psi_\alpha(\vec{x}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\vec{k}_\alpha \vec{x}}$ , wobei  $V$  das Quantisierungsvolumen ist, so muß analog zur Diskussion in Abschnitt 3.4 bei einem translationsinvarianten System in jeder nichtverschwindenden Greenfunktion die Summe der Impulse Null ergeben. Weiterhin gilt für diesen Fall  $\langle \alpha | \beta^i \rangle = ik_{\alpha,i} \delta_{\alpha\beta}$  und  $\langle \alpha | \beta \gamma \rangle = \frac{1}{\sqrt{V}} \delta_{\vec{k}_\alpha, \vec{k}_\beta + \vec{k}_\gamma}$ , d.h. auf der linken Seite von (4.26)-(4.27) bricht jeweils die intermediäre Summation zusammen, und es bleibt lediglich ein Skalarprodukt mit dem Impulsvektor  $\vec{k}_\alpha$  stehen, so daß dort auf den longitudinalen Anteil des Feldimpulses  $\Pi_i^a(\alpha)$  projiziert wird, während auf der rechten Seite jeweils zunächst noch eine Summation übrigbleibt.

Die diagrammatische Darstellung der Identitäten (4.26)-(4.30) findet sich in Abb. 4.1. Dabei werden für die graphische Darstellung die gleichen Konventionen verwendet wie in Abschnitt 3.4, wobei zusätzlich ein hellgrauer Kreis mit einem  $k$  für das durch  $\langle \alpha | \lambda^i \rangle$  beschriebene Skalarprodukt mit  $\vec{k}_\alpha$  steht.

Für die durch (4.26) und (4.27) gegebenen 2-Punkt/3-Punkt-Identitäten, dargestellt in Abb. 4.1 a), ergibt sich jeweils eine Beziehung zwischen einer

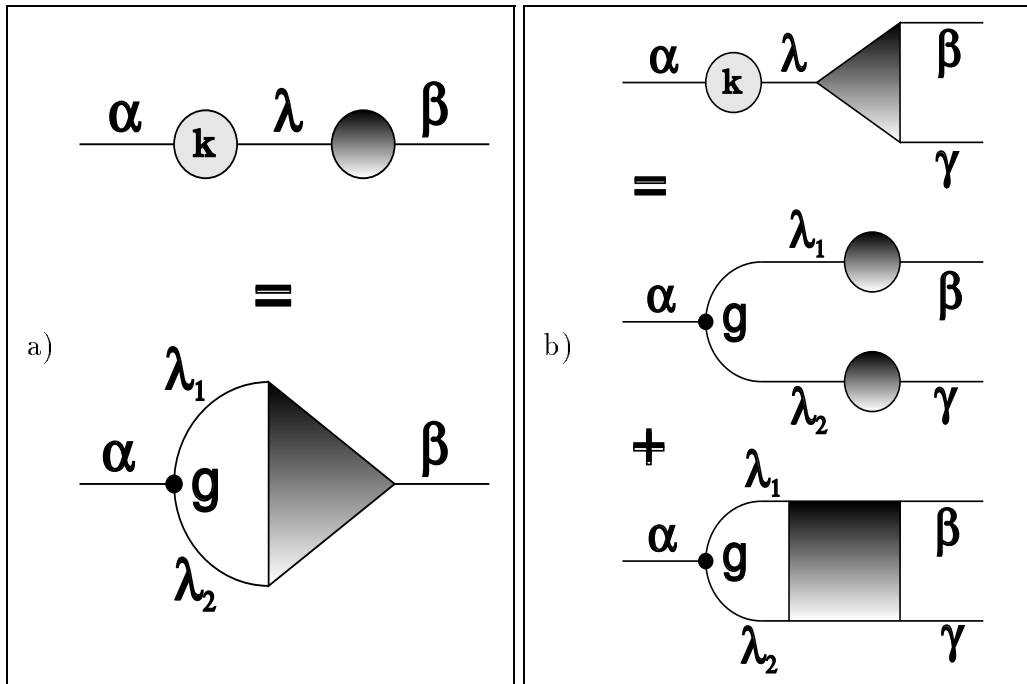


Abbildung 4.1: a) diagrammatische Darstellung der 2-Punkt/3-Punkt Gauß-Identität b) diagrammatische Darstellung der 3-Punkt/4-Punkt Gauß-Identität

verbundenen 2-Punkt-Funktion mit einem longitudinalen Feldimpuls und einer verbundenen 3-Punkt-Funktion, an die eine Schleifensumation angreift.

Für die durch (4.28)-(4.30) gegebenen 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten, dargestellt in Abb. 4.1 b), ergibt sich jeweils eine Beziehung zwischen einer verbundenen 3-Punkt-Funktion mit einem longitudinalen Feldimpuls, einem Born-artigen Diagramm entsprechend der Diskussion in Abschnitt 3.4 und einer verbundenen 4-Punkt-Funktion, an die eine Schleifensumation angreift.

Während der in den Heisenberg-Bewegungsgleichungen von Kapitel 3 auftauchende 3-Punkt-Vertex räumliche Ableitungen enthält, ist dies bei dem im Gauß-Gesetz auftretenden 3-Punkt-Vertex nicht der Fall. Im Gegenzug ist hier jedoch jeweils ein konjugierter Feldimpuls  $\Pi_i^a$  mit einer internen Summationslinie verbunden, während bei den Heisenberg-Gleichungen dort ausschließlich Felder  $A_i^a$  zu finden sind. Dies kommt dadurch zustande, daß im Gauss-Gesetz, d.h. der Euler-Lagrange-Gleichung für  $A_0^a$  in temporaler Eichung, gegenüber den übrigen Euler-Lagrange-Gleichungen im Kopplungsterm räumliche Ableitungen durch zeitliche Ableitungen ersetzt werden.



# Kapitel 5

## Numerische Propagation der SU(2) Yang-Mills-Theorie in 2+1 Dimensionen

Für die folgenden numerischen Untersuchungen wird die Gruppe SU(2) bezüglich der inneren Farbstruktur zugrunde gelegt, und die Felder und konjugierten Impulse werden gemäß

$$A_i^a(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{L} e^{i\vec{k}\vec{x}} A_i^a(\vec{k}), \quad \Pi_i^a(\vec{x}) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{L} e^{i\vec{k}\vec{x}} \Pi_i^a(\vec{k}) \quad (5.1)$$

in ebene Wellen auf einem Torus in 2+1 Raumzeit-Dimensionen<sup>1</sup> entwickelt, wobei  $L$  die Kantenlänge der 2-dimensionalen Box ist und die diskreten Impulsvektoren  $\vec{k}$  sich aus der Forderung nach Periodizität zu

$$\vec{k} = \frac{2\pi}{L} \vec{n}, \quad \vec{n} \in \mathbb{Z}^2 \quad (5.2)$$

ergeben.

In diesem Kapitel wird das Verhalten des Systems im Grenzfall schwacher Kopplung untersucht, indem bestimmte Anfangsbedingungen gewählt werden und die verbundenen gleichzeitigen Greenfunktionen dann gemäß der korrelationsdynamischen Bewegungsgleichungen im Rahmen verschiedener Approximationsschemata propagiert werden.

Der Grenzfall schwacher Kopplung wird zur Untersuchung herangezogen, da die Eigenschaften des regularisierten Systems mit einer gegebenen Anzahl von Basiszuständen eindeutig durch die dimensionslose Größe  $gL^{1/2}$  determiniert sind (in 2+1 Dimensionen hat  $g^2$  die Dimension Energie); der Grenzfall  $gL^{1/2} \rightarrow 0$  ist daher äquivalent zum Grenzfall kleiner Quantisierungsvolumina. Dies sollte wiederum sicherstellen, daß die verschiedenen Basisgrößen, die

---

<sup>1</sup>d.h. in einer 2-dimensionalen räumlichen Box mit periodischen Randbedingungen und mit einer unbeschränkten Zeitachse

für die numerische Propagation verwendet werden können, ausreichend sind, um das asymptotische Verhalten der Theorie für einen gegen  $\infty$  gehenden ultravioletten Cutoff zu untersuchen.

Um die nichtabelschen Aspekte zu untersuchen, wird weiterhin mit perturbativen Anfangsbedingungen gearbeitet, die nahe an der durch den gleichzeitigen Grenzfall von (2.25) bei  $t = t_0$  gegebenen Konfiguration sind. Der Vorteil dieser Vorgehensweise liegt darin begründet, daß für (2.25) bei  $t = t_0$  nur die Kopplungsterme in den Bewegungsgleichungen beitragen, während die freien (abelschen) Terme verschwinden (bis auf die expliziten Zeitabhängigkeiten, die bereits im Falle der abelschen Grundzustandslösung vorhanden sind; vergl. Kapitel 2). Andernfalls ist die zeitliche Evolution im Grenzfall schwacher Kopplung ( $g \rightarrow 0$ ) durch die (uninteressante) Propagation eines freien Feldes dominiert. Der gleichzeitige Grenzfall von (2.25) bei  $t = t_0$  führt auf

$$\langle A_i^a(\vec{k}) A_j^b(\vec{q}) \rangle_c = \delta^{ab} \delta_{\vec{k}+\vec{q},\vec{0}} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right) \frac{1}{2|\vec{k}|}, \quad (5.3)$$

$$\langle \Pi_i^a(\vec{k}) \Pi_j^b(\vec{q}) \rangle_c = \delta^{ab} \delta_{\vec{k}+\vec{q},\vec{0}} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right) \frac{|\vec{k}|}{2}, \quad (5.4)$$

$$\langle A_i^a(\vec{k}) \Pi_j^b(\vec{q}) \rangle_c = \delta^{ab} \delta_{\vec{k}+\vec{q},\vec{0}} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right) \frac{i}{2} \quad \text{und} \quad (5.5)$$

$$\langle \Pi_i^a(\vec{k}) A_j^b(\vec{q}) \rangle_c = \delta^{ab} \delta_{\vec{k}+\vec{q},\vec{0}} \left( \delta_{ij} + \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right) \frac{-i}{2}; \quad (5.6)$$

alle verbundenen Greenfunktionen höherer Ordnung verschwinden. Man beachte, daß  $\langle AA \rangle_c$ ,  $\langle \Pi\Pi \rangle_c$ , und  $\langle A\Pi \rangle_c$  aufgrund der Eichfixierungsbedingung (2.24) und des abelschen Grenzfalls des Gauß-Gesetzes (2.5) rein transversal sind, dies jedoch für  $\langle \Pi A \rangle_c$  nicht der Fall ist.

Während im Prinzip die Kantenlänge  $L$  der Box eine infrarote Skala in die Theorie einführt, enthält (5.3) – aufgrund der periodischen Randbedingungen – noch immer eine infrarote Singularität, die regularisiert werden muß. Die Aufgabe, eichinvariante infrarote Regularisierungen für Yang-Mills-Theorien zu finden, ist nichttrivial [62], und die resultierende Theorie würde im allgemeinen sehr schwer im Rahmen der Korrelationsdynamik zu behandeln sein. Daher werden hier zwei verschiedene Wege beschritten, mit diesem Problem umzugehen, ohne daß von Hand eine zusätzliche Massenskala eingeführt werden muß: entweder die Impulsmode mit  $\vec{k} = \vec{0}$  (die *Null-Impuls-Mode*) wird aus der Einteilchenbasis weggelassen (was keine eichinvariante Vorschrift ist) oder es wird selbstkonsistent eine Masse für die Anfangsbedingung generiert,

indem das quantenmechanische Problem ausschließlich für die Null-Impuls-Mode gelöst wird.

Die Dynamik der Null-Impuls-Mode wird durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2} \Pi_i^a \Pi_i^a + \frac{g^2}{4L^2} \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ade} A_i^b A_j^c A_i^d A_j^e, \quad (5.7)$$

mit  $A_i^a \equiv A_i^a(\vec{k} = \vec{0})$ ,  $\Pi_i^a \equiv \Pi_i^a(\vec{k} = \vec{0})$  und  $[A_i^a, \Pi_j^b] = i\delta^{ab}\delta_{ij}$  beschrieben. Der Gaußsche Ansatz

$$\Psi(A) = \prod_{i,a} \left( \frac{2\alpha}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\alpha(A_i^a)^2} \quad (5.8)$$

liefert die Konfiguration niedrigster Energie im 2-Punkt-Abschneideschema für  $\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{g}{L} \right)^{2/3}$  und somit für eine effektive Masse

$$m_{\text{eff}} = 2\alpha = \left( \frac{g}{L} \right)^{2/3}. \quad (5.9)$$

Daher wird anstatt von (5.3) und (5.4) nun  $(\omega(\vec{k}) = \sqrt{\vec{k}^2 + m_{\text{eff}}^2})$

$$\langle A_i^a(\vec{k}) A_j^b(\vec{q}) \rangle_c = \delta^{ab} \delta_{\vec{k}+\vec{q},\vec{0}} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right) \frac{1}{2\omega(\vec{k})}, \quad (5.10)$$

$$\langle \Pi_i^a(\vec{k}) \Pi_j^b(\vec{q}) \rangle_c = \delta^{ab} \delta_{\vec{k}+\vec{q},\vec{0}} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\vec{k}^2} \right) \frac{\omega(\vec{k})}{2}, \quad (5.11)$$

zusammen mit (5.5) und (5.6) als Anfangsbedingung benutzt, wobei dann die  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode mitgenommen wird, so daß sich bei  $t = t_0$  die Terme der freien Propagation und die Terme, die die Kopplung an die Null-Impuls-Mode über den 4-Punkt-Vertex beschreiben, gegenseitig wegheben. Da die Masse nur im transversalen Sektor auftritt, liegt bei  $t = t_0$  immer noch ein Zustand vor, der das abelsche Gauß-Gesetz erfüllt und der somit nicht normierbar ist.

Bevor mit den weiteren Untersuchungen begonnen wird, soll noch festgestellt werden, daß nach allen bisherigen Erfahrungen die Lösungen der Gleichungen der  $n$ -Punkt-Korrelationsdynamik für  $n \geq 3$  (im Rahmen jeder bisher untersuchten Theorie) zu einem bestimmten Zeitpunkt instabil werden, was sich darin äußert, daß die Absolutwerte der gleichzeitigen Greenfunktionen beginnen, als Funktion der Zeit sehr stark anzusteigen. Dies scheint kein numerischer Effekt zu sein, da die entsprechenden Lösungen unverändert bleiben, wenn höhere Mantissenlängen und kleinere Zeitschrittweiten verwendet werden. Im folgenden werden daher diejenigen Zeitintervalle betrachtet, in denen die Lösungen stabil sind.



## 5.1 Infraroteigenschaften und Eichinvarianz

Es wird nun entweder

- die Null-Impuls-Mode weggelassen und (5.3)-(5.6) als Anfangsbedingung initialisiert oder
- die Null-Impuls-Mode mitgenommen und (5.10), (5.11), (5.5), und (5.6) initialisiert.

Beginnend bei  $t = t_0 = 0$  werden dann die in Anhang C gegebenen korrelationsdynamischen Gleichungen – im jeweiligen Abschneideschema – numerisch in der Zeit integriert.

Abb. 5.1 zeigt die resultierende elektrische Feldenergie ( $Re E_{el}$ ,  $Im E_{el}$ ),

$$E_{el} = \langle \hat{E}_{el} \rangle = \frac{1}{2} \int d^2x \langle \Pi_i^a(\vec{x}) \Pi_i^a(\vec{x}) \rangle, \quad (5.12)$$

als Funktion der Zeit, wobei der Wert bei  $t = 0$  nach Null verschoben ist. Da  $\hat{E}_{el}$  ein eichinvarianter Operator ist, der hermitesch im Raum der physikalischen Zustände ist, sollte  $E_{el}$  eine rein reelle Größe sein. Die Darstellungen in der rechten Spalte zeigen jedoch, daß in allen Abschneideschemata (erste Zeile: 2-Punkt; zweite Zeile: 3-Punkt; dritte Zeile: 4-Punkt) ein Imaginärteil auftritt, der in etwa die gleiche Größe wie der Realteil besitzt. Diese Oszillationen von  $E_{el}$  in der komplexen Ebene sind in einer Verletzung der Eichinvarianz begründet, die dazu führt, daß bei der Rekonstruktion der Zeitableitung von eichinvarianten Größen aus gleichzeitigen Greenfunktionen die gegenseitige Auslöschung der Terme in (2.23), die in der Propagation von eichabhängigen Größen zwischen dem Heisenberg- und dem Schrödinger-Bild differenzieren, nicht stattfindet. Während es klar ist, daß im 2-Punkt-Abschneideschema (erste Zeile) die Eichinvarianz verletzt werden muß, da der 3-Punkt-Vertex vernachlässigt wird, zeigt die vorliegende Rechnung, daß im 3- und 4-Punkt-Abschneideschema (zweite und dritte Zeile) diesbezüglich keine wesentliche Verbesserung eintritt. Die Tatsache, daß die Mitnahme höherer verbundener Greenfunktionen keine Verbesserung der Eichinvarianz mit sich bringt, deutet darauf hin, daß der aufgrund der endlichen Basis vorliegende nicht eichinvariante UV-Cutoff eine wesentliche Rolle bei der Verletzung des Gauß-Gesetzes spielt.

Man könnte argumentieren, daß die verwendeten Anfangsbedingungen ebenfalls eine Ursache für das Problem sein könnten, da sie das Gauß-Gesetz nur im abelschen Grenzfall erfüllen, d.h. während bei  $t = 0$  die Gauss-Gesetz-Identitäten (4.4) und (4.5) erfüllt sind (da die 3-Punkt-Funktionen verschwinden), sind (4.6)-(4.8) verletzt. Man kann jedoch numerisch nachprüfen, daß sich bei einer Wiederherstellung von (4.6)-(4.8) bei  $t = 0$  (vergl. die Diskussion im Zusammenhang mit Abb. 5.10) keine nennenswerte Veränderung der Resultate ergibt. Dies ist in Abb. 5.2 für den Fall der 3-Punkt-Näherung mit

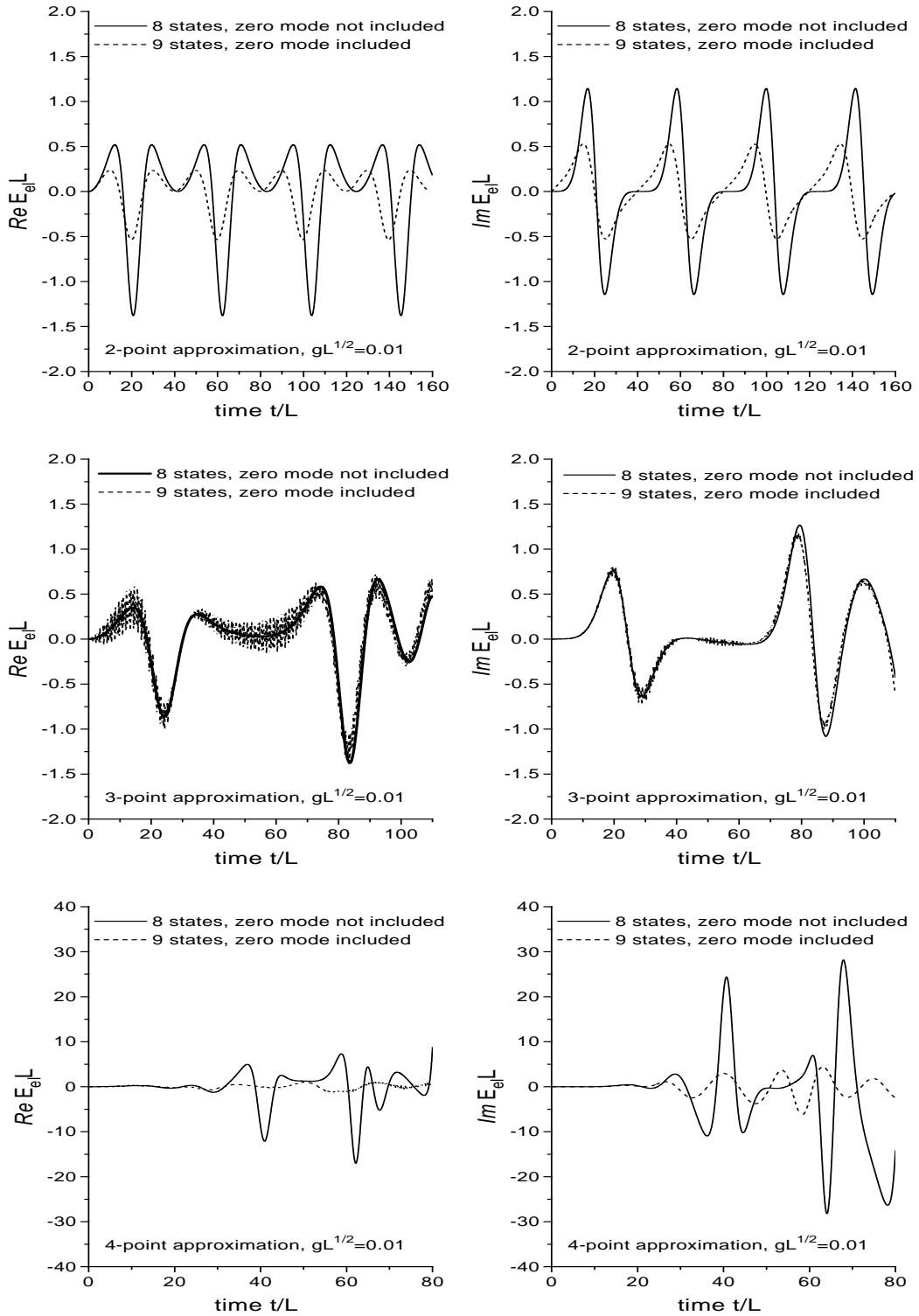


Abbildung 5.1: Elektrische Feldenergie  $E_{el} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \langle \Pi_i^a(\vec{k}) \Pi_i^a(-\vec{k}) \rangle$  als Funktion der Zeit in 2-Punkt- (Zeile 1), 3-Punkt- (Zeile 2) und 4-Punkt-Näherung (Zeile 3) mit 8 Impulszuständen ( $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode vernachlässigt) und 9 Impulszuständen ( $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode mitgenommen); linke Spalte: Realteil, rechte Spalte: Imaginärteil

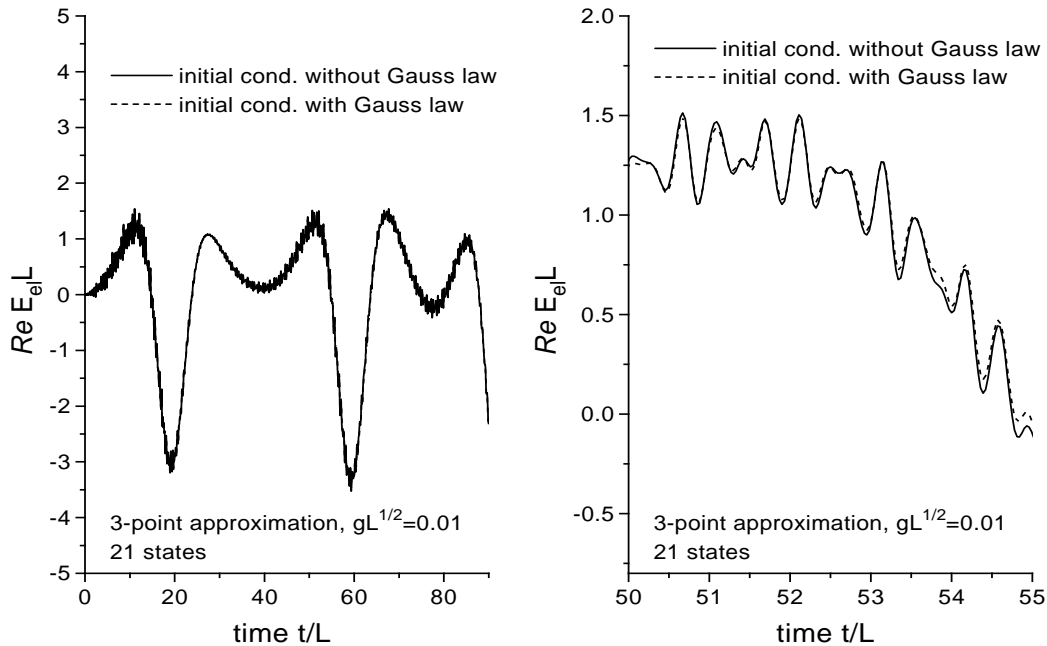


Abbildung 5.2: Realteil der elektrischen Feldenergie als Funktion der Zeit in 3-Punkt-Näherung mit 21 Zuständen mit und ohne Wiederherstellung der 2-Punkt/3-Punkt- und 3-Punkt/4-Punkt-Gauß-Gesetz-Identitäten; links:  $t/L = 0 \dots 90$ , rechts:  $t/L = 50 \dots 55$

21 Zuständen gezeigt; im linken Teil (Zeitintervall  $t/L = 0 \dots 90$ ) liegen die beiden verglichenen Kurven im Rahmen der Darstellungsgenauigkeit aufeinander; im rechten Teil (Zeitintervall  $t/L = 50 \dots 55$ ) zeigen sich bei höherer Auflösung lediglich minimale Unterschiede in den der globalen Kurvenform überlagerten hochfrequenten Schwingungen.

Das folgende Resultat ergibt sich bezüglich der infraroten Konvergenz: Abb. 5.1 zeigt, daß im Rahmen der 2- und 4-Punkt-Korrelationsdynamik (erste und dritte Zeile) die Mitnahme der  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode (wobei die 9 niedrigstliegenden Impulszustände als Basis verwendet werden) zu einer signifikanten Reduktion der Amplituden der Oszillation im Vergleich zu der Vernachlässigung der  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode führt (wobei die restlichen 8 niedrigstliegenden Impulszustände als Basis verwendet werden); im 4-Punkt-Fall werden die Amplituden sogar um fast eine Größenordnung reduziert. Im Gegensatz dazu führt im Rahmen der 3-Punkt-Korrelationsdynamik die Mitnahme der Null-Impuls-Mode lediglich zu einem signifikanten Anstieg von schnellen Oszillationen mit vergleichsweise kleinen Amplituden, die hauptsächlich im Realteil von  $E_{el}$  auftreten, und deren Frequenzen durch die Dynamik des freien Feldes gegeben sind. Die Form der Kurve bezüglich der langsamen Oszillationen mit großer Amplitude – die die Eichinvarianz verletzen – ist fast invariant unter der Mitnahme oder der Vernachlässigung von  $\vec{k} = \vec{0}$ . Dies kann als ein Anzei-

chen für infrarote Konvergenz im Rahmen des 3-Punkt-Abschneideschemas angesehen werden, während auf dem 2- und 4-Punkt-Niveau keine infrarote Konvergenz vorliegt.

In Abb. 5.3 sind der transversale und der longitudinale Beitrag zum Realteil von  $E_{el}$  für die gleiche Rechnung wie in Abb. 5.1 gezeigt; die linke Spalte zeigt die Resultate bei Vernachlässigung der  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode, die rechte Spalte zeigt diejenigen bei Mitnahme der  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode. Im Rahmen des 2-Punkt-Abschneideschemas (erste Zeile) ergibt sich, daß die Oszillationen ohne die Null-Impuls-Mode fast vollständig (bis auf kleine Abweichungen innerhalb der Linienbreite) im longitudinalen Sektor der Theorie auftreten. Die Mitnahme der Null-Impuls-Mode führt dann ebenfalls zu Oszillationen im transversalen Sektor. Dies ist jedoch lediglich darauf zurückzuführen, daß die hier verwendete Vorschrift, daß der longitudinale Projektor bei  $\vec{k} = \vec{0}$  verschwindet, auf eine vollständig transversale Null-Impuls-Mode führt; die beobachteten transversalen Schwingungen sind fast ausschließlich die der  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode. Im Rahmen der 3-Punkt-Korrelationsdynamik läßt die Mitnahme der Null-Impuls-Mode den longitudinalen Sektor fast vollständig unberührt und führt lediglich zu einer Verstärkung der schnellen Oszillationen, die bereits in der Diskussion von Abb. 5.1 erwähnt wurden. Diese Oszillationen erscheinen offensichtlich nur im transversalen Sektor; eine Kopplung zwischen dem transversalen und dem longitudinalen Sektor tritt nur insofern auf, daß eine Amplitudenmodulation für die schnellen transversalen Schwingungen generiert wird; die transversalen Moden haben im Gegenzug fast keinen Einfluß auf die longitudinalen Moden. Im Rahmen der 4-Punkt-Korrelationsdynamik ist ein ähnliches Verhalten wie bei der 2-Punkt-Korrelationsdynamik zu beobachten, d.h. langsame Oszillationen der Null-Impuls-Mode tauchen im transversalen Sektor auf, wobei wie im 3-Punkt-Abschneideschema zusätzlich eine Verstärkung der schnellen transversalen Oszillationen auftritt.

Um die Natur der hochfrequenten Oszillationen im transversalen Sektor näher zu untersuchen, ist in Abb. 5.4 die Fouriertransformierte des transversalen Anteils der elektrischen Feldenergie in 3-Punkt-Näherung ohne Null-Impuls-Mode (links) und mit Null-Impuls-Mode (rechts) aufgetragen. Zusätzlich sind die der mitgenommenen Impulsbasis entsprechenden Ein- und Zweiteilchen-Energien im transversalen Sektor  $\omega = |\vec{k}|$  (für 21 Zustände:  $\omega L/(2\pi) = 1, \sqrt{2}, 2, \sqrt{3}$ ) und  $\omega = 2|\vec{k}|$  (für 21 Zustände:  $\omega L/(2\pi) = 2, 2\sqrt{2}, 4, 2\sqrt{3}$ ) als senkrechte gepunktete Linien dargestellt. Für den Fall der Vernachlässigung der  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode erhält man sowohl für 8 Zustände (oben) als auch für 20 Zustände (unten) jeweils Peaks, die den transversalen freien Einteilchenenergien entsprechen; es tritt lediglich eine minimale Verschiebung zu kleineren Frequenzen auf. Für den Fall der Mitnahme der  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode erhält man sowohl für 9 Zustände (oben) als auch für 21 Zustände (unten) zusätzlich wesentlich stärkere Peaks bei den entsprechenden Zweiteilchenenergien, während die Einteilchenmaxima etwas abgeschwächt werden.

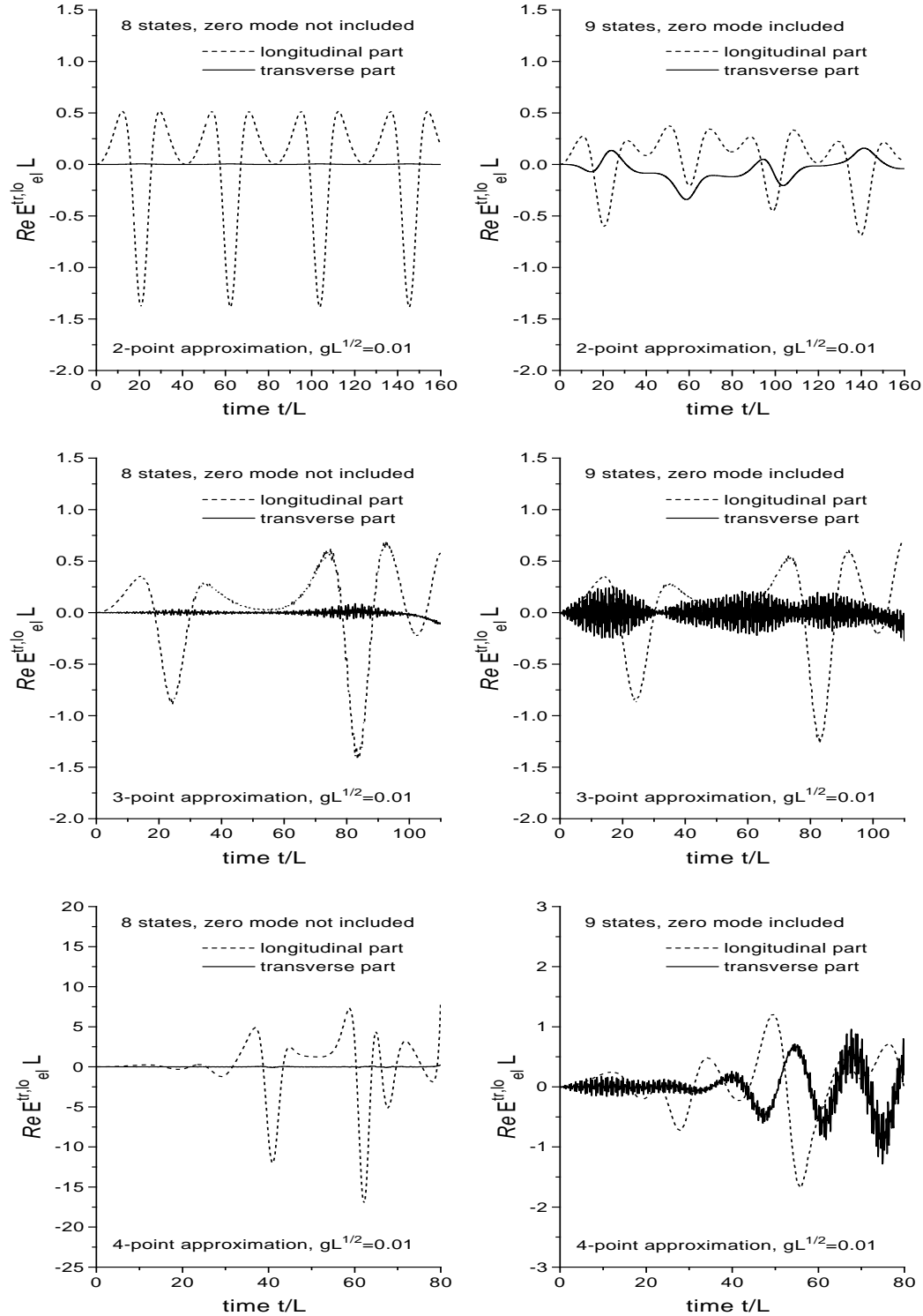


Abbildung 5.3: Realteil des transversalen und des longitudinalen Anteils der elektrischen Feldenergie,  $E_{el}^{tr} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} (\delta_{ij} - l_{ij}(\vec{k})) \langle \Pi_i^a(\vec{k}) \Pi_j^a(-\vec{k}) \rangle$ ,  $E_{el}^{lo} = \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} l_{ij}(\vec{k}) \langle \Pi_i^a(\vec{k}) \Pi_j^a(-\vec{k}) \rangle$ ,  $l_{ij}(\vec{k}) = k_i k_j / k^2 (\vec{k} \neq \vec{0})$ ,  $l_{ij}(\vec{k}) = 0 (\vec{k} = \vec{0})$ , als Funktion der Zeit in 2-Punkt- (Zeile 1), 3-Punkt- (Zeile 2) und 4-Punkt-Näherung (Zeile 3); linke Spalte: 8 Impulszustände ( $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode vernachlässigt), rechte Spalte: 9 Impulszustände ( $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode mitgenommen)

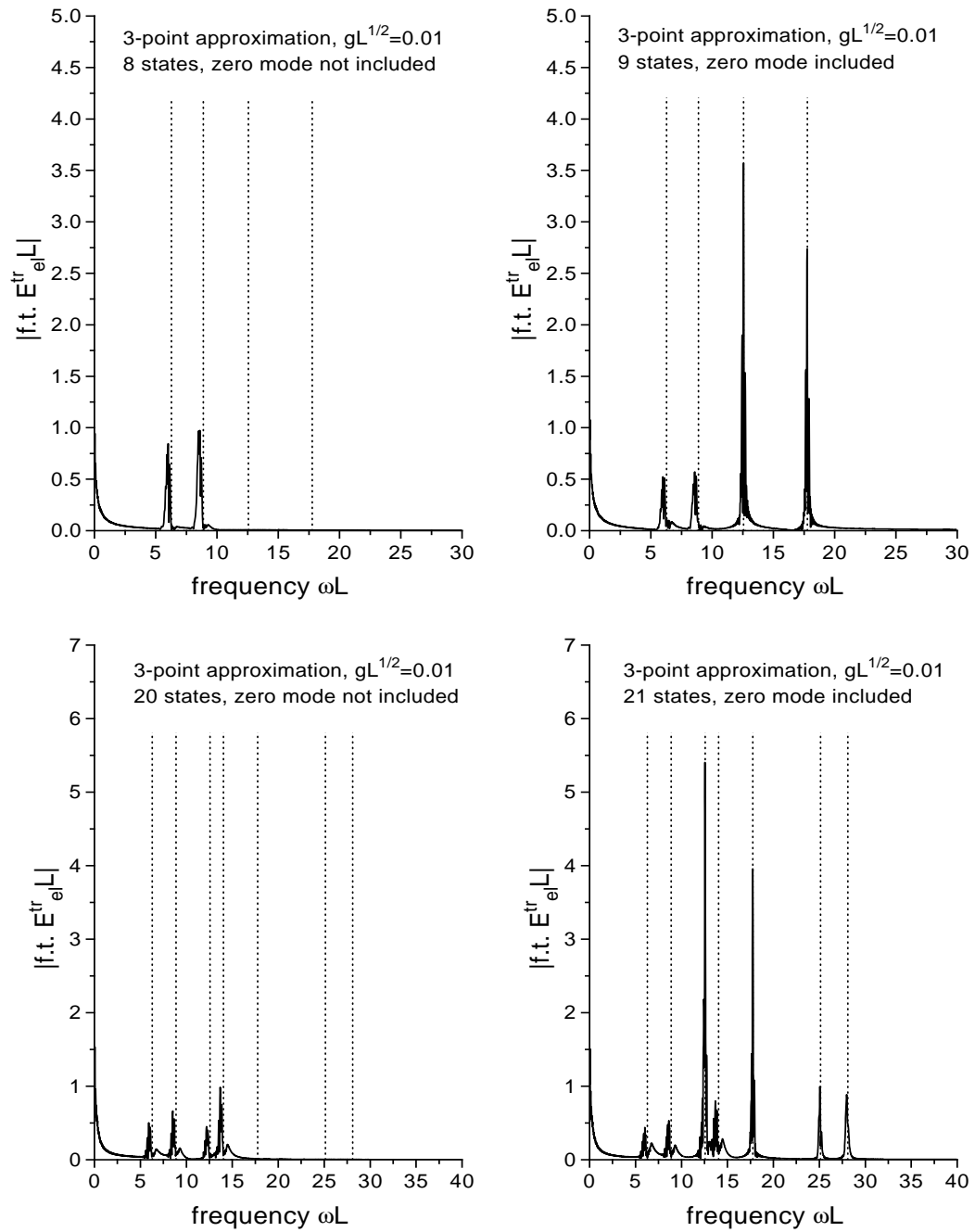


Abbildung 5.4: Betrag der Fouriertransformierten des transversalen Anteils der elektrischen Feldenergie  $|\int dt e^{i\omega t} E_{el}^{tr}(t)|$  in 3-Punkt-Näherung; links: ohne Null-Impuls-Mode, rechts: mit Null-Impuls-Mode; oben: 8/9 Zustände ( $t/L = 0 \dots 110$ ), unten: 20/21 Zustände ( $t/L = 0 \dots 90$ ); senkrechte gepunktete Linien: freie transversale 1- und 2-Teilchen-Energien entsprechend der mitgenommenen Impulszustände

An den Zweiteilchenpeaks tritt dabei *keine* minimale Verschiebung wie bei den Einteilchenmaxima auf.

Die Verletzung der Eichinvarianz im Rahmen der hier diskutierten Näherungen kann direkt beobachtet werden, indem die Verletzung des Gauß-Gesetzes mithilfe der in Kapitel 4 hergeleiteten Gauss-Gesetz-Identitäten quantifiziert wird. Der obere Teil von Abb. 5.5 zeigt die Größe

$$\frac{1}{3} \sum_{\vec{k}, i} \left| \langle A_i^a(\vec{k}) G^a(-\vec{k}) \rangle \right|, \quad (5.13)$$

die ein Maß für die Verletzung der entsprechenden Identität zwischen 2-Punkt-Funktionen der Form  $\langle A\Pi \rangle$  und 3-Punkt-Funktionen der Form  $\langle A\Pi\Pi \rangle$  ist (vergl. Gleichung (4.4)). Die zugrundeliegenden Rechnungen sind die gleichen wie in den Abb. 5.1 und 5.3, wobei die Null-Impuls-Mode jeweils mitgenommen wird. Bis etwa  $t/L = 100$ , wo die betrachteten Lösungen noch stabil sind, führen alle Abschneideschemata zu einer Verletzung in etwa der gleichen Größenordnung.

Die Größe

$$\frac{1}{6} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, i, j} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3} \left| \varepsilon^{abc} \langle A_i^a(\vec{k}_1) A_j^b(\vec{k}_2) G^c(\vec{k}_3) \rangle \right|, \quad (5.14)$$

die im unteren Teil von Abb. 5.5 dargestellt ist, mißt die Verletzung der entsprechenden Identität zwischen 3-Punkt-Funktionen der Form  $\langle A\Pi\Pi \rangle$  und vollen 4-Punkt-Funktionen der Form  $\langle A\Pi\Pi\Pi \rangle$  (vergl. Gleichung (4.6)). Sie wird im Gegensatz zu (5.13) mit steigender Ordnung des Abschneideschemas wesentlich größer. Beide Resultate zeigen wiederum, daß die Strategie der Verbesserung des Näherungsverfahrens durch Mitnahme höherer Ordnungen von verbundenen Greenfunktionen alleine nicht zu einer Reduktion der Verletzung der Eichinvarianz führt.

Weiterhin soll am Ende dieses Abschnitts noch gezeigt werden, daß im Rahmen der 3-Punkt-Näherung in den Bewegungsgleichungen für die 3-Punkt-Funktionen der Beitrag der Terme, die über den 4-Punkt-Vertex an ein Produkt aus 2- und 3-Punkt-Funktionen koppeln, zumindest im Anfangsstadium der zeitlichen Evolution in guter Näherung vernachlässigt werden kann. Die so entstehende Näherung kann in Übereinstimmung mit der Klassifizierung der Terme in Abschnitt 3.4 als 3-Punkt-Born-Approximation bezeichnet werden. In Abb. 5.6 ist der Realteil der elektrischen Feldenergie im Rahmen der vollen 3-Punkt-Approximation und der 3-Punkt-Born-Approximation für 20 Zustände (ohne  $\vec{k} = \vec{0}$ , links) und für 21 Zustände (mit  $\vec{k} = \vec{0}$ , rechts) dargestellt. In beiden Fällen führt die Mitnahme der zusätzlichen Terme in der vollen Näherung lediglich zu einer längeren Stabilisierung des Systems, das in der Born-Näherung jeweils durch das Anwachsen der Amplitude der hochfrequenten Schwingungen instabil wird. Dabei wird das System für den Fall

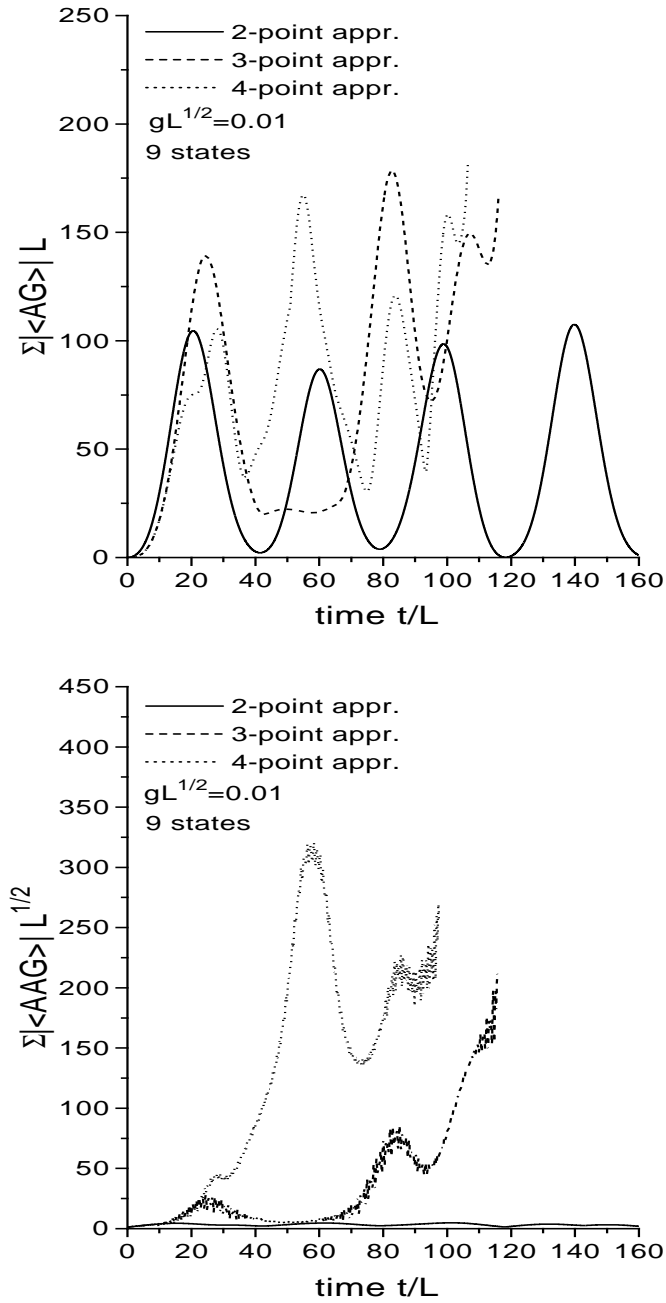


Abbildung 5.5: Verletzung der Gauß-Gesetz-Identitäten, gemessen durch  $\frac{1}{3} \sum_{\vec{k}, i} |\langle A_i^a(\vec{k}) G^a(-\vec{k}) \rangle|$  (oberer Teil) und  $\frac{1}{6} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, i, j} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3} |\varepsilon^{abc} \langle A_i^a(\vec{k}_1) A_j^b(\vec{k}_2) G^c(\vec{k}_3) \rangle|$  (unterer Teil) als Funktion der Zeit in 2-Punkt-, 3-Punkt- und 4-Punkt-Näherung mit 9 Impulszuständen



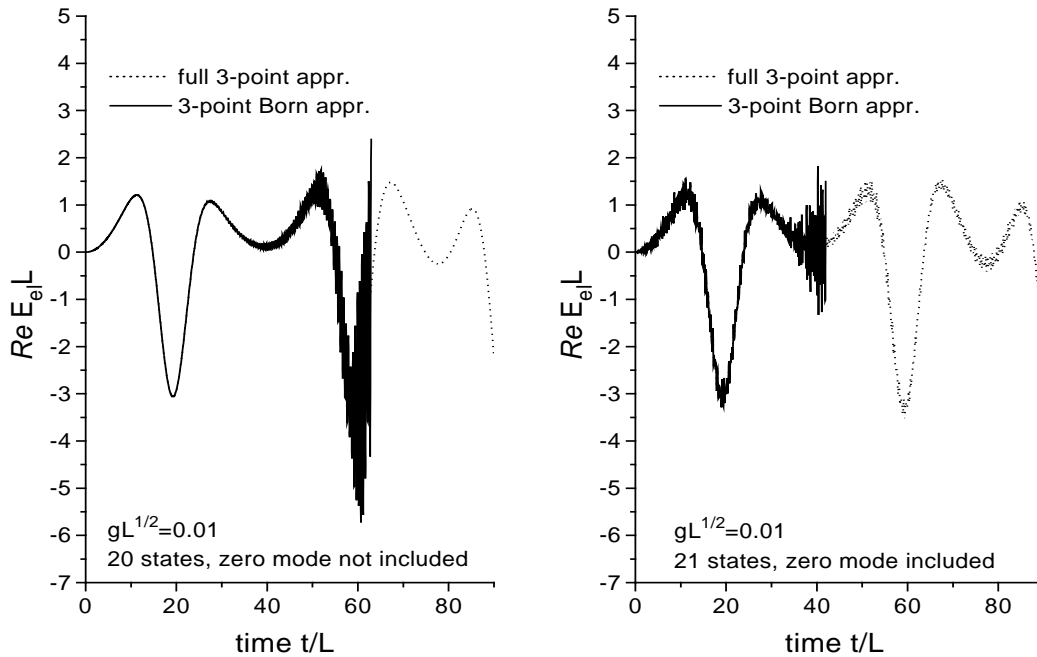


Abbildung 5.6: Realteil der elektrischen Feldenergie in voller 3-Punkt-Näherung und in 3-Punkt-Born-Näherung mit 20 Zuständen (ohne  $\vec{k} = \vec{0}$ , links) und 21 Zuständen (mit  $\vec{k} = \vec{0}$ , rechts)

der Mitnahme der  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode in der Born-Näherung früher instabil, was sich durch die – durch ein zusätzliches Auftreten von Zweiteilchenfrequenzen – ohnehin erhöhte Stärke der hochfrequenten transversalen Oszillationen erklärt (vergl. Abb. 5.4).

## 5.2 Skalierungsverhalten und UV-Konvergenz

Um die Eigenschaften der Theorie im Rahmen der Korrelationsdynamik besser zu verstehen, wird das System nun bezüglich seines Verhaltens für verschiedene Werte der dimensionslosen Kopplung  $gL^{1/2}$  und für verschiedene Anzahlen von ebenen Wellen in der Einteilchenbasis untersucht.

In der linken Spalte von Abb. 5.7 wird der Realteil der elektrischen Feldenergie als Funktion der Zeit für 3 verschiedene Werte von  $gL^{1/2}$  gezeigt, wobei für die 2- und 3-Punkt-Näherung die 21 niedrigstliegenden Impulszustände und für die 4-Punkt-Näherung die 9 niedrigstliegenden Impulszustände (inklusive  $\vec{k} = \vec{0}$ ) mitgenommen werden. In jedem der 3 Abschneideschemata haben die Kurven für die verschiedenen Werte der Kopplung offensichtlich (bis auf die schnellen transversalen Oszillationen in der 3- und 4-Punkt-Korrelationsdynamik, zweite und dritte Zeile) die gleiche Form und sind nur in Richtung der Achsen relativ zueinander gestreckt bzw. gestaucht. Dies deu-

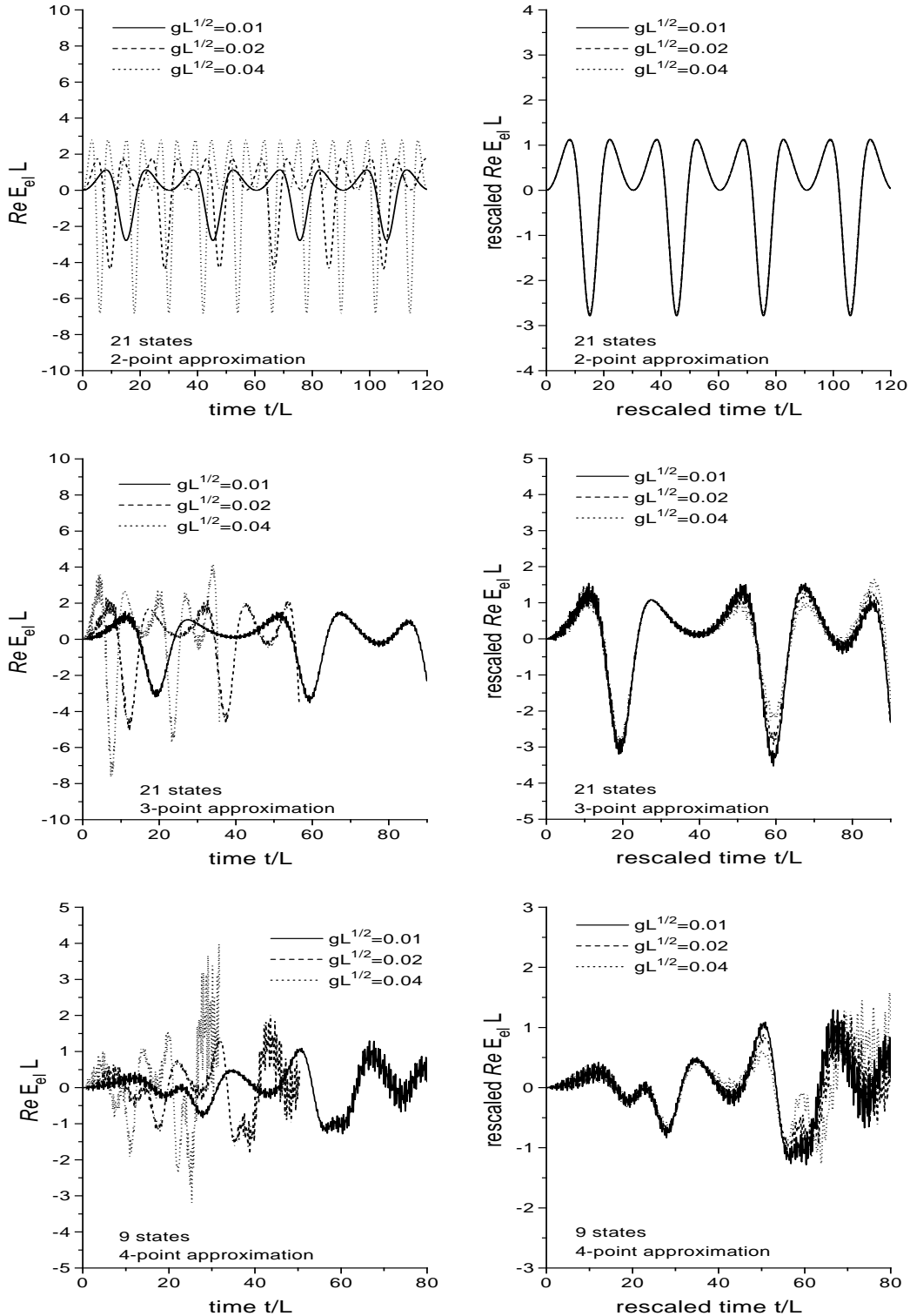


Abbildung 5.7: Realteil der elektrischen Feldenergie als Funktion der Zeit in 2-Punkt- (Zeile 1), 3-Punkt- (Zeile 2) und 4-Punkt-Näherung (Zeile 3) mit 21 Impulszuständen für verschiedene Kopplungen (linke Spalte); Kurven reskaliert auf  $gL^{1/2} = 0.01$  entsprechend  $E_{el}(g_2, t) = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{2/3} E_{el}(g_1, \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{2/3} t)$  (rechte Spalte)

tet darauf hin, daß im longitudinalen Sektor (zuzüglich der entsprechenden Anteile der Null-Impuls-Mode) die Theorie ein bestimmtes Skalierungsverhalten bezüglich der Kopplung aufweist. Eine genauere Analyse zeigt, daß die entsprechenden Frequenzen sowie die Amplituden der Dimension Energie sich wie  $\omega \propto g^{2/3}$  verhalten, wie in der rechten Spalte von Abb. 5.7 gezeigt wird, indem alle Kurven entsprechend dem Skalierungsgesetz

$$E_{el}(g_2, t) = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{2/3} E_{el}(g_1, \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{2/3} t) \quad (5.15)$$

reskaliert werden. Nach dieser Reskalierung zeigen alle Kurven eine sehr gute Übereinstimmung.

Das Skalierungsgesetz (5.15) erweist sich nun als eine generelle Eigenschaft für Systeme mit einer rein quartischen Kopplung. Dies kann wie folgt gesehen werden: Man betrachte einen Hamiltonoperator der Form

$$H = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{g^2}{4}A^4, \quad (5.16)$$

wobei dies als rein formale Notation gemeint ist, d.h. alle Indizes oder Raumzeit-Koordinaten sind unterdrückt. Man kann nun eine kanonische Transformation

$$A = g^{-1/3}A', \quad \Pi = g^{1/3}\Pi', \quad [A, \Pi] = [A', \Pi'], \quad (5.17)$$

durchführen, was auf

$$H = g^{2/3} \left( \frac{1}{2}\Pi'^2 + \frac{1}{4}A'^4 \right) \quad (5.18)$$

führt und damit auf eine  $g^{2/3}$ -Skalierung aller Eigenwerte des Hamiltonoperators.

Im Fall der 2-Punkt-Korrelationsdynamik für die Yang-Mills-Theorie kann ein solches  $g^{2/3}$ -Skalierungsgesetz in der Tat für den longitudinalen Sektor der Theorie erwartet werden (falls dieser vom transversalen Sektor entkoppelt), da der 3-Punkt-Vertex nicht berücksichtigt wird und da die 2-Punkt-Terme  $\propto A^2$  einen transversalen Projektor enthalten. Die Tatsache, daß die  $g^{2/3}$ -Skalierung in 3- und 4-Punkt-Korrelationsdynamik trotz der Berücksichtigung des 3-Punkt-Vertex überlebt, ist jedoch in Übereinstimmung mit dem von Lüscher [63] erhaltenen Resultat, daß alle Eigenwerte des (rein diskreten) Spektrums der Yang-Mills-Theorie auf einem Torus in eine Potenzreihe bezüglich des Entwicklungsparameters  $\lambda = g^{2/3}$  entwickelt werden können.

Um das asymptotische Verhalten des Systems zu untersuchen, wenn der ultraviolette Cutoff gegen  $\infty$  geht, wird in der linken Spalte von Abb. 5.8 der Realteil der elektrischen Feldenergie als Funktion der Zeit für verschiedene Anzahl von Impulzuständen gezeigt. In der ersten Zeile ist das entsprechende

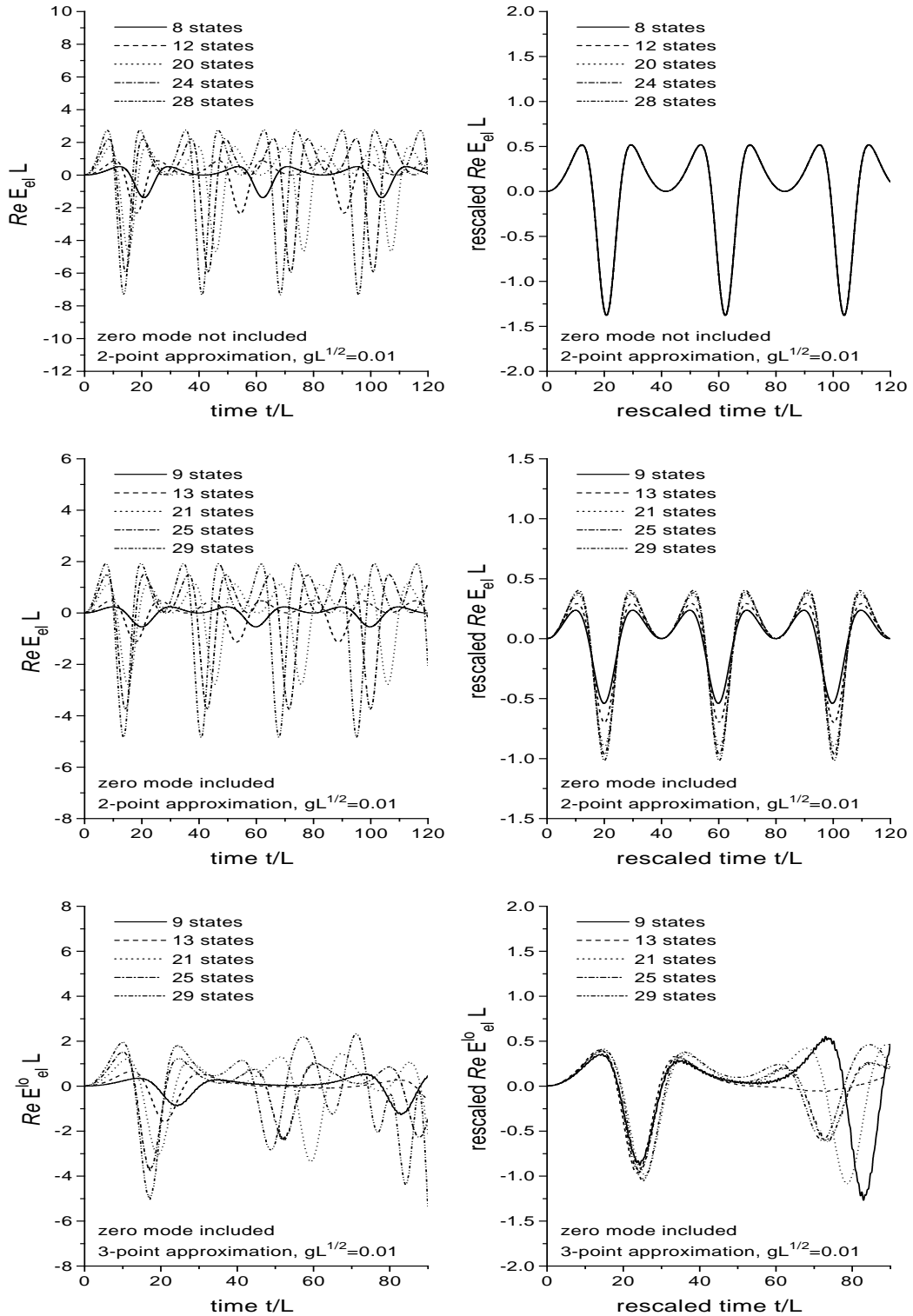


Abbildung 5.8: Realteil der elektrischen Feldenergie als Funktion der Zeit in 2-Punkt-Näherung ohne die  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode (Zeile 1), in 2-Punkt-Näherung mit der  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode (Zeile 2) und in 3-Punkt-Näherung mit der  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode (nur der longitudinale Anteil von  $E_{el}$ , Zeile 3) für verschiedene Anzahl  $n$  von Impulszuständen (linke Spalte); Kurven reskaliert auf die niedrigste Zahl von Zuständen entsprechend  $E_{el}(n_2, t) = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{4/3} E_{el}(n_1, \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/3} t)$  (rechte Spalte)

Resultat im Rahmen des 2-Punkt-Abschneideschemas bei Vernachlässigung der Null-Impuls-Mode gezeigt. Alle Kurven haben offensichtlich wiederum die gleiche Form und sind lediglich relativ zueinander in Richtung der Achsen gestreckt bzw. gestaucht. In der rechten Spalte wird gezeigt, daß die Kurven die Relation

$$E_{el}(n_2, t) = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{4/3} E_{el}\left(n_1, \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/3} t\right) \quad (5.19)$$

erfüllen, indem sie entsprechend reskaliert werden;  $n_i$  bezeichnet dabei die Anzahl der Basiszustände. Wie im Fall von Abb. 5.7 zeigen die reskalierten Kurven sehr gute Übereinstimmung. Dies bedeutet jedoch, daß die Frequenzen und die Amplituden der Dimension Energie divergieren, wenn der ultraviolette Cutoff gegen  $\infty$  geht – was ein unerwünschtes Verhalten darstellt, da die Yang-Mills-Theorie in  $2+1$  Raumzeit-Dimensionen endlich sein sollte.

In der zweiten Zeile sind die entsprechenden Resultate ebenfalls im Rahmen des 2-Punkt-Abschneideschemas gezeigt, wobei die  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode nun mitgenommen wird. Während die Frequenzen immer noch entsprechend (5.19) wie  $\omega \propto n^{1/3}$  skalieren, wird die  $n^{4/3}$ -Skalierung der Amplitude von  $E_{el}$  durch die Mitnahme der Null-Impuls-Mode zerstört.

In der dritten Zeile sind die entsprechenden Resultate in 3-Punkt-Näherung dargestellt, wobei die  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode mitgenommen wird; dabei wird nur der longitudinale Anteil gezeigt, um die schnellen Oszillationen im transversalen Sektor (die nicht entsprechend (5.19) skalieren) abzuspalten. Aus den Abb. 5.1 und 5.3 ist bereits bekannt, daß die Resultate für diesen Fall im wesentlichen identisch sind, wenn die Null-Impuls-Mode vernachlässigt wird. Die Reskalierung der Kurven führt auf eine sehr gute Übereinstimmung in der ersten Hälfte des gezeigten Zeitintervalls; in der zweiten Hälfte führt die Anwendung von (5.19), obwohl sie die richtige Tendenz aufweist, nicht zu einer wirklich beeindruckenden Übereinstimmung der reskalierten Kurven.

Weiterhin macht es bei der hier erreichten Genauigkeit der Übereinstimmung nach erfolgter Reskalierung nur einen kleinen Unterschied, ob in (5.19) die Null-Impuls-Mode mitgezählt wird oder nicht. Dabei führt jedoch tendenziell die Reskalierung ohne Mitzählen der Null-Impuls-Mode auf eine bessere Übereinstimmung, was einen weiteren Hinweis auf das Entkoppeln der Nullmode von der Dynamik im longitudinalen Sektor im Rahmen der 3-Punkt-Korrelationsdynamik liefert. Der Vergleich zwischen beiden Reskalierungsvorschriften ist in Abb. 5.9 gezeigt.

Das Skalierungsgesetz (5.19) kann a priori im Rahmen der 2-Punkt-Näherung erwartet werden, da sich dort der longitudinale Sektor (falls er vom transversalen Sektor entkoppelt) im wesentlichen wie eine  $\Phi^4$ -artige Theorie mit einer rein quartischen Kopplung verhält, d.h. wie ein System, das durch

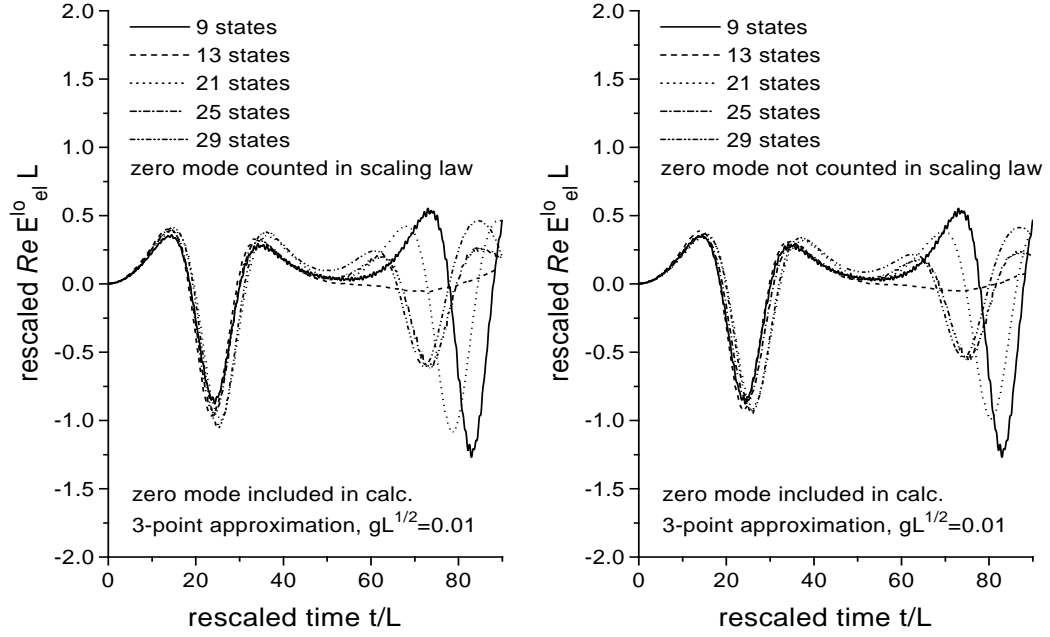


Abbildung 5.9: Links: gleiches Bild wie in Abb. 5.8 unten rechts; rechts: gleiches Bild, jedoch wird die  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode im Skalierungsgesetz nicht mitgezählt

den (Impulsraum-) Hamiltonoperator

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \Pi(\vec{k}) \Pi(-\vec{k}) \\
 &+ \frac{g^2}{4V} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4, \vec{0}} \Phi(\vec{k}_1) \Phi(\vec{k}_2) \Phi(\vec{k}_3) \Phi(\vec{k}_4), \quad (5.20)
 \end{aligned}$$

beschrieben wird, wobei  $V$  das Quantisierungsvolumen bezüglich beliebig vieler räumlicher Dimensionen beschreibt. Die Berechnung des Erwartungswertes von (5.20) mit einem Hartree-Fock-Bogoliubov-Ansatz mit effektiven Einteilchenenergien  $\Omega(\vec{k})$  liefert das Energiefunktional

$$\langle H \rangle_{\Omega} \equiv E[\Omega] = \frac{1}{4} \sum_{\vec{k}} \Omega(\vec{k}) + \frac{3g^2}{16V} \left( \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\Omega(\vec{k})} \right)^2, \quad (5.21)$$

das durch

$$\Omega(\vec{q})^2 = \frac{3g^2}{2V} \sum_{\vec{k}} \frac{1}{\Omega(\vec{k})} \quad (5.22)$$

minimiert wird. Gleichung (5.22) impliziert direkt, daß  $\Omega(\vec{q})$  unabhängig von  $\vec{q}$  ist und führt daher auf

$$\Omega(\vec{q}) \equiv \Omega = g^{2/3} \left( \sum_{\vec{k}} \right)^{1/3} \left( \frac{3}{2V} \right)^{1/3}, \quad (5.23)$$

was die Frequenz-Skalierung ist, die in (5.15) und in (5.19) enthalten ist. Mit

$$E_{el} = \frac{1}{4} \sum_{\vec{k}} \Omega(\vec{k}) = \frac{1}{4} g^{2/3} \left( \sum_{\vec{k}} \right)^{4/3} \left( \frac{3}{2V} \right)^{1/3} \quad (5.24)$$

erhält man ebenfalls die entsprechende Abhängigkeit für die Amplituden.

Das Ergebnis, daß (5.19) im 3-Punkt-Abschneideschema näherungsweise gültig bleibt, zeigt, daß im Gegensatz zum Verhalten des Systems im Infraroten die Auslöschungen zwischen Divergenzen, die für die ultraviolette Konvergenz benötigt werden, *nicht* stattfinden. Dies ist wiederum eine Konsequenz der Verletzung der Eichinvarianz.

### 5.3 Wiederherstellung des Gauß-Gesetzes

In den Abschnitten 5.1 und 5.2 wurde eine Verletzung des Gauß-Gesetzes beobachtet, die unphysikalische Imaginärteile für eichinvariante hermitesche Größen und die Nicht-Auslöschung von ultravioletten Divergenzen zur Folge hatte.

Daher soll nun versucht werden, das Näherungsschema der Korrelationsdynamik dadurch zu verbessern, daß die dynamischen Bewegungsgleichungen teilweise durch die Randbedingungs-Gleichungen ersetzt werden, die aus dem Gauß-Gesetz folgen (vergl. Kapitel 4). Die dabei zu verwendende Vorgehensweise ist keineswegs eindeutig, da man zunächst auswählen muß, nach welcher der beteiligten Greenfunktionen die jeweilige Gauss-Gesetz-Identität aufgelöst werden soll. In dieser Arbeit soll das Gauß-Gesetz mithilfe der Ersetzung

$$ik_i \Pi_i^a(\vec{k}) \rightarrow -\frac{g}{L} \varepsilon^{abc} \sum_{\vec{q}_1, \vec{q}_2} \delta_{\vec{k}, \vec{q}_1 + \vec{q}_2} A_i^b(\vec{q}_1) \Pi_i^c(\vec{q}_2), \quad (5.25)$$

implementiert werden, d.h. in einer gleichzeitigen Greenfunktion, die einen longitudinalen Feldimpuls enthält, wird dieser nach rechts durchkommutiert, und die resultierende  $n$ -Punkt-Funktion wird dann entsprechend (5.25) durch eine Summe über  $n + 1$ -Punkt-Funktionen ersetzt.<sup>2</sup> Dies wird während der gesamten Zeitintegration durchgeführt, während die verbleibenden Greenfunktionen wie vorher unter Verwendung der korrelationsdynamischen Bewegungsgleichungen propagiert werden. Natürlich kann (5.25) nicht für  $\vec{k} = \vec{0}$  angewandt werden; es stellt sich jedoch heraus, daß das Gauß-Gesetz für die Null-Impuls-Mode im Rahmen der hier durchgeführten Untersuchungen automatisch erfüllt ist.

---

<sup>2</sup>Da in dieser Arbeit die Vorschrift nur zur Ersetzung von 2- und 3-Punkt-Funktionen verwendet wird, die keine unverbundenen Anteile besitzen, muß kein Unterschied zwischen vollen und verbundenen gleichzeitigen Greenfunktionen auf der linken Seite von (5.25) gemacht werden.

Die obige Methode wird im 3-Punkt-Abschneideschema angewandt, wobei die Auswirkungen

- der Wiederherstellung der Gauß-Gesetz-Identitäten, die 2- und 3-Punkt-Funktionen verknüpfen (4.4), (4.5) und
- der Wiederherstellung sowohl dieser als auch der Identitäten, die 3- und volle 4-Punkt-Funktionen verknüpfen (4.6)-(4.8)

untersucht werden. Im letzteren Fall ist die volle 4-Punkt-Funktion jeweils durch ein Produkt aus zwei 2-Punkt-Funktionen gegeben (vergl. Abschnitt 4.2), so daß ein gekoppeltes Gleichungssystem für 2- und 3-Punkt-Funktionen vorliegt, das durch Iteration gelöst wird.

Bei dem verwendeten Verfahren tritt noch das folgende Problem auf: Immer wenn eine Greenfunktion mehr als einen longitudinalen Feldimpuls enthält, ergibt sich eine Mehrdeutigkeit in der Anwendung von (5.25). Im Fall der 2-Punkt/3-Punkt-Identitäten, d.h. für eine 2-Punkt-Funktion mit 2 longitudinalen Feldimpulsen, stellt dies kein Problem dar, da aufgrund der Symmetrien des Systems beide Möglichkeiten für die Anwendung von (5.25) auf das gleiche Resultat führen. Für den Fall der 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten ist dies jedoch nicht der Fall, und daher wird hier jeweils die Wahl getroffen, zwischen den verschiedenen Möglichkeiten zu symmetrisieren; die stationäre Lösung des Iterationsverfahrens kann dann die entsprechenden Identitäten nicht exakt erfüllen. Es zeigt sich jedoch, daß die verbleibende Verletzung der 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten im Vergleich mit der ursprünglichen Verletzung nur sehr klein ist.

Abb. 5.10 zeigt die elektrische Feldenergie  $E_{el}$  und die magnetische Feldenergie

$$E_{mag} \equiv \langle \hat{E}_{mag} \rangle = \frac{1}{4} \int d^2x \langle F_{ij}^a(\vec{x}) F_{ij}^a(\vec{x}) \rangle \quad (5.26)$$

als Funktion der Zeit, berechnet im obigen Schema für 21 Impulszustände (inklusive  $\vec{k} = \vec{0}$ ). Dabei wurden bis auf die Wiederherstellung der Gauß-Gesetz-Identitäten die gleichen Anfangsbedingungen wie in den Abschnitten 5.1 und 5.2 verwendet. Während die Rechnung, in der nur die 2-Punkt/3-Punkt-Identitäten implementiert werden (oberer Teil), bei etwa  $t/L = 40$  instabil wird, ist der Haupteffekt der zusätzlichen Wiederherstellung der 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten (unterer Teil) eine Stabilisierung des Systems. In beiden Rechnungen sinkt der Realteil von  $E_{mag}$  im Mittel mit der Zeit ab, während der Realteil von  $E_{el}$  im Mittel konstant bleibt (linke Spalte); beide weisen zusätzliche schnelle Schwingungen auf, deren Frequenzen im wesentlichen durch die Dynamik des freien Feldes gegeben sind.

Da die Gesamtenergie durch  $E_{tot} = E_{el} + E_{mag}$  gegeben ist, impliziert dieses Resultat, daß durch die hier verwendete Methode zur Wiederherstellung des



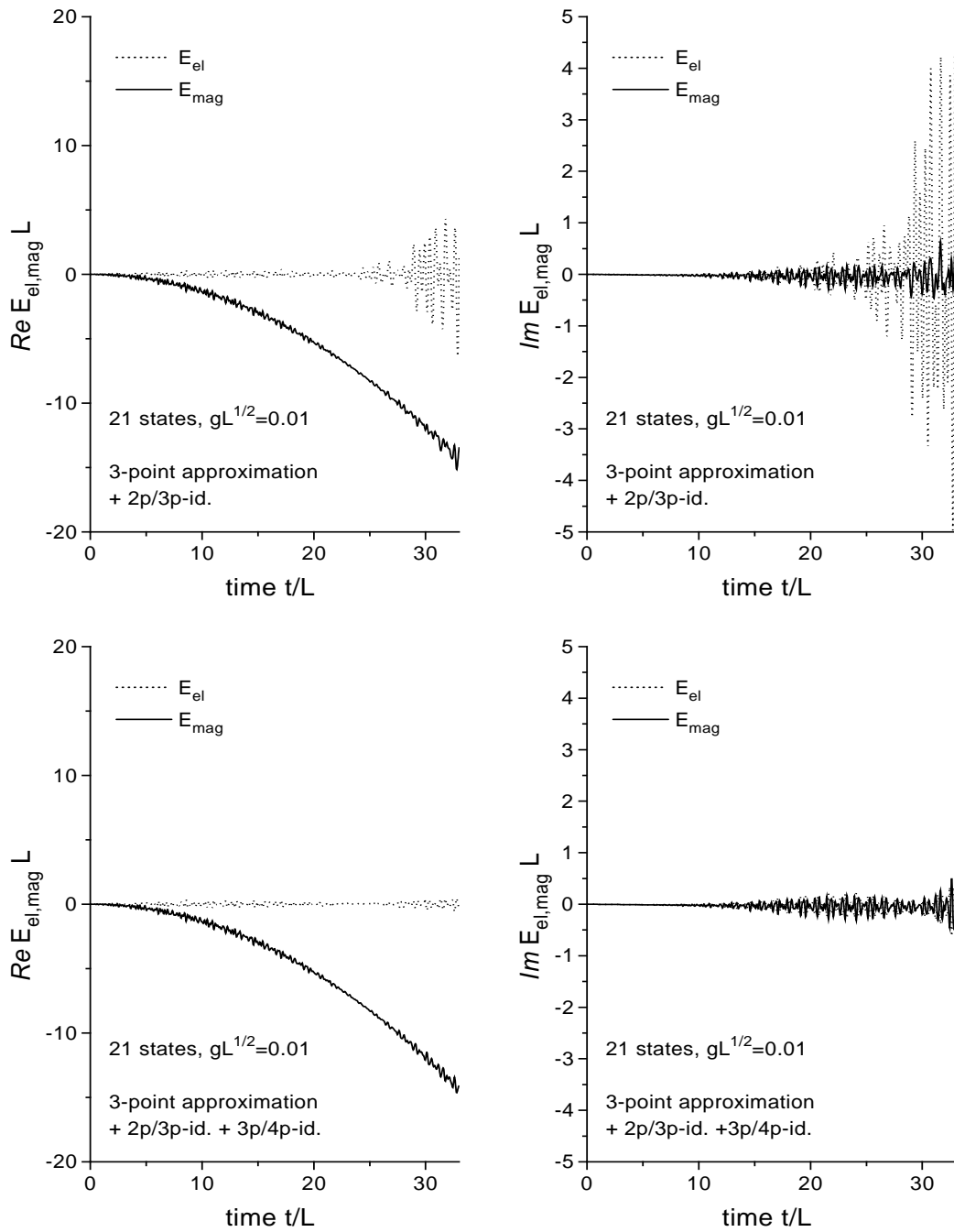


Abbildung 5.10: Elektrische und magnetische Feldenergie als Funktion der Zeit in 3-Punkt-Näherung mit 21 Zuständen unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt-Gauß-Identitäten (oberer Teil) und unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt- und der 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten (unterer Teil); linke Spalte: Realteil, rechte Spalte: Imaginärteil

Gauß-Gesetzes die Energieerhaltung verletzt wird; der Grund hierfür ist die Ersetzung der 2-Punkt-Funktion mit zwei longitudinalen Feldimpulsen, die zu  $E_{el}$  beiträgt, mithilfe von (5.25). Die Energieerhaltung kann im Prinzip wiederhergestellt werden, indem stattdessen die entsprechende 2-Punkt/3-Punkt-Identität zur Modifikation der 3-Punkt-Funktionen verwendet wird (diese tauchen in der Gesamtenergie nicht auf). Eine solche Vorschrift müßte jedoch relativ willkürlich konstruiert werden, da auf der rechten Seite von (5.25) eine Impulssummation und eine Kontraktion über Vektorindizes steht. Darüberhinaus haben die im Rahmen dieser Arbeit durchgeführten Versuche in diese Richtung jeweils auf Bewegungsgleichungen geführt, die wesentlich früher als die ursprünglichen Gleichungen instabil werden und die noch immer große Imaginärteile für die magnetische und die elektrische Feldenergie generieren.

Die Imaginärteile von  $E_{el}$  und  $E_{mag}$  (rechte Spalte) bleiben beide bis etwa  $t/L = 10$  sehr klein, worauf sich dann schnelle Oszillationen aufbauen; werden diese subtrahiert, so bleiben die Imaginärteile sehr klein, was als Verbesserung gegenüber der unmodifizierten Korrelationsdynamik angesehen werden kann. Dabei sollte noch erwähnt werden, daß bei Vernachlässigung der Null-Impuls-Mode die schnellen Oszillationen fast vollständig verschwinden.

In Abb. 5.11 wird die Verletzung der 3-Punkt/4-Punkt-Gauß-Gesetz-Identitäten für 3 verschiedene Näherungen verglichen, wobei die gleichen Parameter wie in Abb. 5.10 verwendet werden:

- ohne Wiederherstellung des Gauß-Gesetzes,
- mit Wiederherstellung der 2-Punkt/3-Punkt-Identitäten und
- mit zusätzlicher Wiederherstellung der 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten.

Im linken Bild ist, wie in Abb. 5.5, die Größe (5.14) dargestellt. Da hier keine Mehrdeutigkeiten bezüglich mehrerer longitudinaler Feldimpulse auftreten können, verschwindet (5.14) für das Näherungsschema, in dem die 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten gemäß (5.25) implementiert werden. Während die Stärke der Verletzung der entsprechenden Relation (4.6) ohne jegliche Wiederherstellung des Gauß-Gesetzes oszilliert, steigt sie in der Näherung, in der die 2-Punkt/3-Punkt-Identitäten implementiert werden, monoton an, bis das System bei etwa  $t/L = 40$  instabil wird.<sup>3</sup> Das gleiche Verhalten kann für die Größen

$$\frac{1}{6} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, i, j} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3} \left| \varepsilon^{abc} \langle \Pi_i^a(\vec{k}_1) A_j^b(\vec{k}_2) G^c(\vec{k}_3) \rangle \right| \quad (5.27)$$

(mittleres Bild) und

$$\frac{1}{6} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, i, j} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3} \left| \varepsilon^{abc} \langle \Pi_i^a(\vec{k}_1) \Pi_j^b(\vec{k}_2) G^c(\vec{k}_3) \rangle \right| \quad (5.28)$$

---

<sup>3</sup>Die Kurve verläßt den dargestellten Bereich vorher

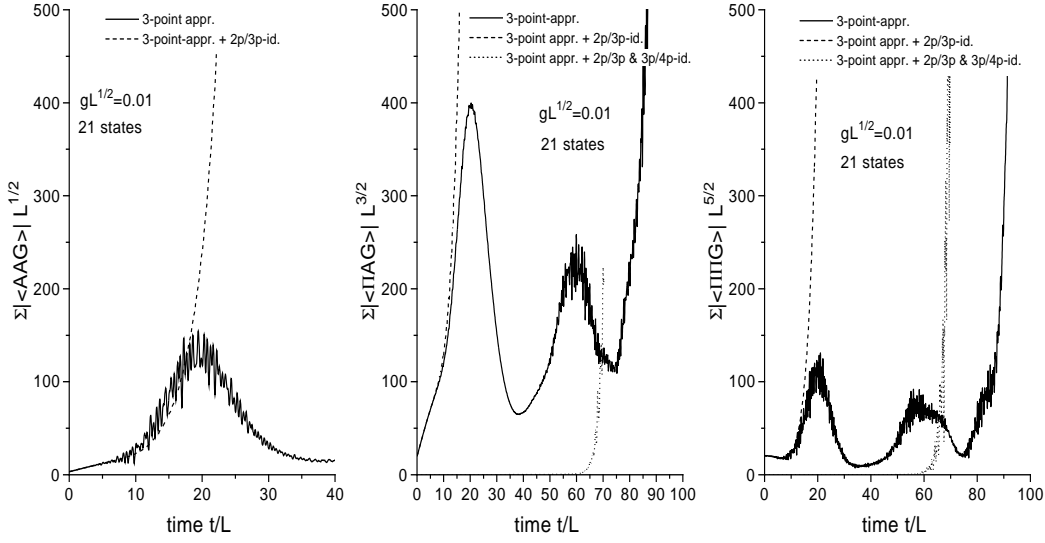


Abbildung 5.11: Verletzung der Gauß-Gesetz-Identitäten, gemessen durch  $\frac{1}{6} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, i, j} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3} \left| \varepsilon^{abc} \langle A_i^a(\vec{k}_1) A_j^b(\vec{k}_2) G^c(\vec{k}_3) \rangle \right|$  (linker Teil),  $\frac{1}{6} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, i, j} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3} \left| \varepsilon^{abc} \langle \Pi_i^a(\vec{k}_1) A_j^b(\vec{k}_2) G^c(\vec{k}_3) \rangle \right|$  (mittlerer Teil), und  $\frac{1}{6} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, i, j} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3} \left| \varepsilon^{abc} \langle \Pi_i^a(\vec{k}_1) \Pi_j^b(\vec{k}_2) G^c(\vec{k}_3) \rangle \right|$  (rechter Teil) als Funktion der Zeit in 3-Punkt-Näherung mit 21 Impulszuständen i) ohne jegliche Gauß-Identitäten, ii) unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt-Gauß-Identitäten und iii) unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt und der 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten

(rechtes Bild) beobachtet werden, wobei das Zeitintervall für die Darstellung nun größer gewählt wurde. Ohne jegliche Wiederherstellung des Gauß-Gesetzes bleiben die Bewegungsgleichungen bis etwa  $t/L = 100$  stabil. Im mittleren und rechten Teil von Abb. 5.11 kann zusätzlich die kleine Verletzung der entsprechenden Relationen (4.7) und (4.8) gesehen werden (punktierete Linie), die bei einer Implementierung des Gauß-Gesetzes mithilfe von (5.25) aufgrund der oben diskutierten Mehrdeutigkeit für den Fall mehrerer longitudinaler Feldimpulse auftritt; das hierbei verwendete Gleichungssystem wird bei etwa  $t/L = 70$  instabil.

In Abb. 5.12 wird die zeitliche Entwicklung des Realteils der magnetischen Feldenergie, berechnet mit einer Implementierung sowohl der 2-Punkt/3-Punkt- als auch der 3-Punkt/4-Punkt-Gauß-Identitäten, für verschiedene Werte der Kopplung verglichen (oberer Teil). Nach der Reskalierung beider Achsen wie in Abb. 5.7 zeigen alle Kurven eine sehr gute Übereinstimmung, was die Gültigkeit des  $g^{2/3}$ -Skalierungsgesetzes (5.15) impliziert. Man erhält das gleiche Resultat, wenn nur die 2-Punkt/3-Punkt-Identitäten wiederhergestellt werden.

Abb. 5.13 zeigt den entsprechenden Vergleich für feste Kopplung und

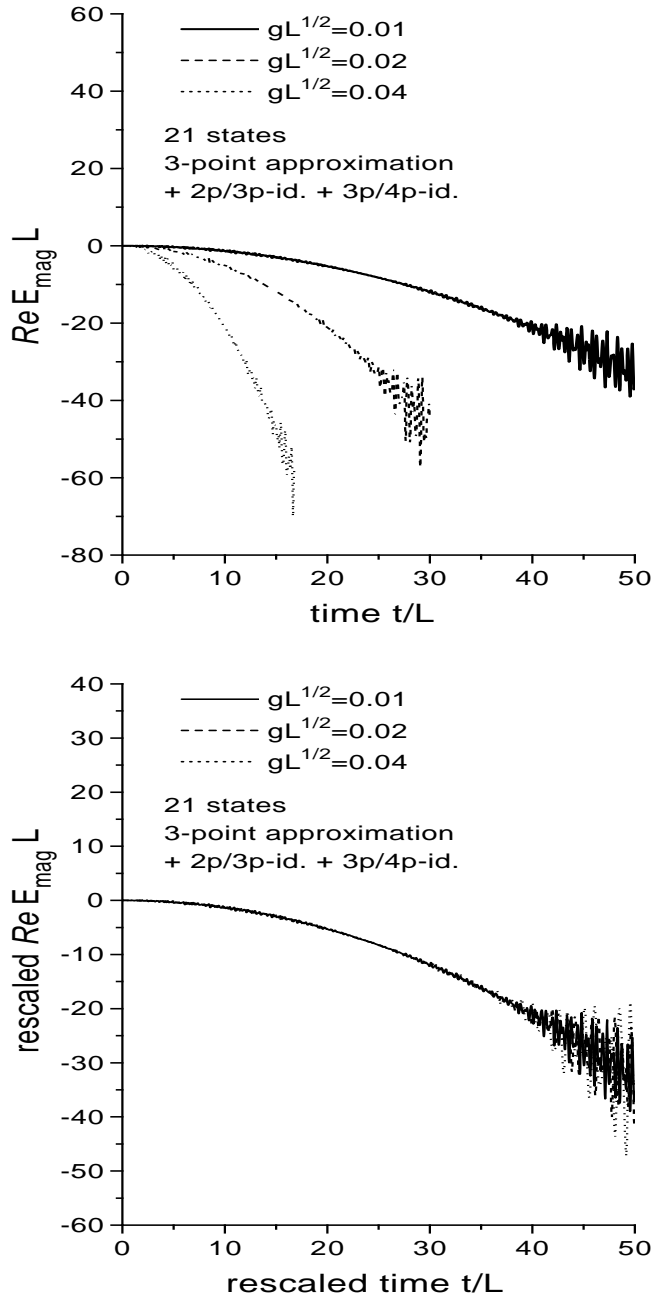


Abbildung 5.12: Realteil der magnetischen Feldenergie als Funktion der Zeit in 3-Punkt-Näherung mit 21 Zuständen unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt- und der 3-Punkt/4-Punkt-Gauß-Identitäten für verschiedene Kopplungen (oberer Teil); Kurven reskaliert auf  $gL^{1/2} = 0.01$  entsprechend  $E_{\text{mag}}(g_2, t) = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{2/3} E_{\text{mag}}(g_1, \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{2/3} t)$  (unterer Teil)

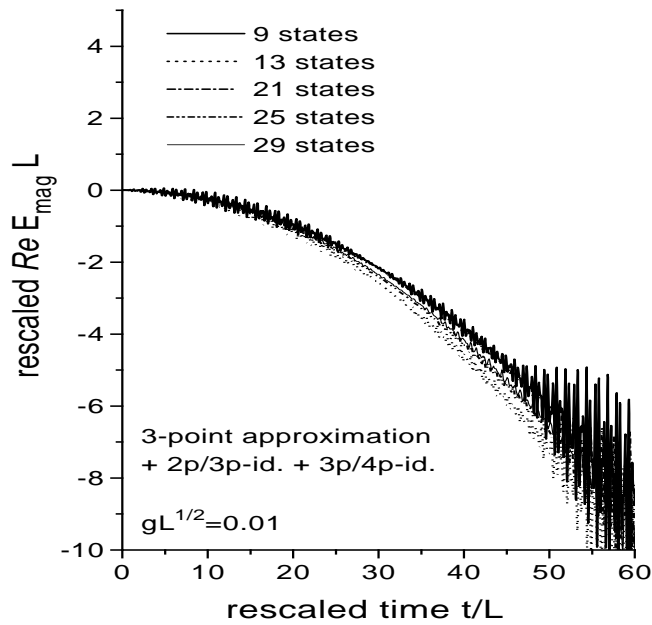
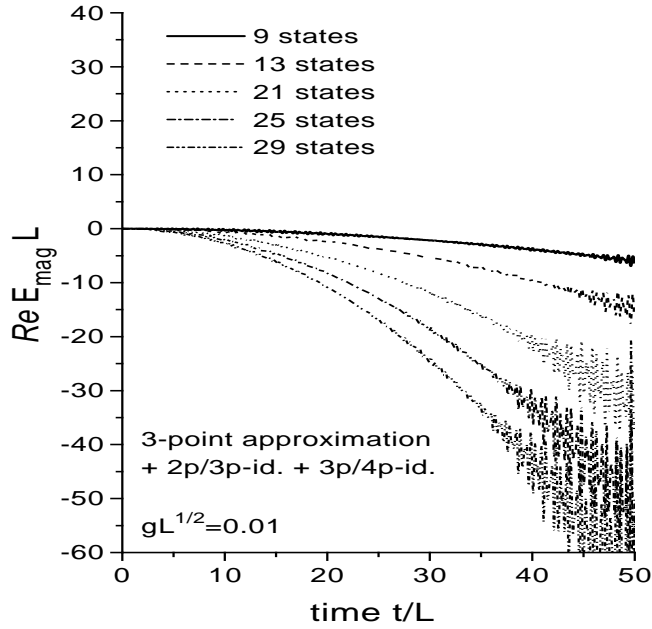


Abbildung 5.13: Realteil der magnetischen Feldenergie als Funktion der Zeit in 3-Punkt-Näherung unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt- und der 3-Punkt/4-Punkt-Gauß-Identitäten für verschiedene Anzahl  $n$  von Impulszuständen (oberer Teil); Kurven reskaliert auf 9 Zustände entsprechend  $E_{\text{mag}}(n_2, t) = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{4/3} E_{\text{mag}}\left(n_1, \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^{1/3} t\right)$  (unterer Teil)

verschiedene Anzahlen von Impulszuständen in der Einteilchenbasis (oberer Teil). Nach einer Reskalierung beider Achsen wie in Abb. 5.8 liegen alle Kurven näherungsweise aufeinander (unterer Teil), was ebenfalls die Gültigkeit des  $(\sum_{\vec{k}})^{1/3}$ -Skalierungsgesetzes (5.19) impliziert. Dieses Resultat kann ebenfalls reproduziert werden, wenn nur die 2-Punkt/3-Punkt-Identitäten wiederhergestellt werden. Das ultraviolette Konvergenzverhalten ist somit unverändert; die Wiederherstellung des Gauß-Gesetzes hat nicht dazu geführt, daß die notwendigen gegenseitigen Auslöschungen zwischen divergenten Termen stattfinden. Es tritt nun jedoch anstatt ultraviolett-divergenter Schwingungen ein „ultraviolett-divergentes“ Absinken der Gesamtenergie auf, das alleine durch ein entsprechendes Absinken der magnetischen Energie bei im Mittel konstanter elektrischer Energie bewirkt wird.

Das in den Abb. 5.10-5.13 beobachtete Verhalten kann wiederum durch die Betrachtung eines vereinfachten Modells für die 2-Punkt-Dynamik des longitudinalen Sektors der Theorie reproduziert werden, das sich ebenfalls, wie schon bei der Diskussion in Abschnitt 5.2, aus dem  $\Phi^4$ -artigen Hamiltonoperator (5.20) ergibt. Im Rahmen des 2-Punkt-Abschneideschemas reduzieren sich die Gauß-Gesetz-Identitäten (4.4) und (4.5) aufgrund der Vernachlässigung der 3-Punkt-Funktionen auf das abelsche Gauß-Gesetz; im hier verwendeten Schema, das durch (5.25) gegeben ist, korrespondiert dies zum Nullsetzen aller 2-Punkt-Funktionen mit einem rechtsstehenden longitudinalen Feldimpuls. Um das daraus resultierende Verhalten im Rahmen des  $\Phi^4$ -artigen Modells zu untersuchen, werden daher die Bedingungen

$$\langle \Phi(\vec{k})\Pi(-\vec{k}) \rangle = \langle \Pi(\vec{k})\Pi(-\vec{k}) \rangle = 0, \quad \langle \Pi(\vec{k})\Phi(-\vec{k}) \rangle = -i \quad (5.29)$$

während der zeitlichen Evolution implementiert. Die einzige verbleibende Bewegungsgleichung lautet dann

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \Phi(\vec{k})\Phi(-\vec{k}) \rangle &= \langle \Pi(\vec{k})\Phi(-\vec{k}) \rangle + \langle \Phi(\vec{k})\Pi(-\vec{k}) \rangle = -i \\ \Rightarrow \langle \Phi(\vec{k})\Phi(-\vec{k}) \rangle &= -it. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Der Erwartungswert von (5.20) wird nun gemäß

$$\begin{aligned} E_{el} &= \frac{1}{2} \sum_{\vec{k}} \langle \Pi(\vec{k})\Pi(-\vec{k}) \rangle, \\ E_{mag} &= \frac{g^2}{4V} \sum_{\vec{k}_1 \vec{k}_2 \vec{k}_3 \vec{k}_4} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3 + \vec{k}_4, \vec{0}} \langle \Phi(\vec{k}_1)\Phi(\vec{k}_2)\Phi(\vec{k}_3)\Phi(\vec{k}_4) \rangle \end{aligned} \quad (5.31)$$

in einen Teil  $E_{el}$ , der der elektrischen Feldenergie im longitudinalen Sektor entspricht, und einen Teil  $E_{mag}$ , der der magnetischen Feldenergie im longitudinalen Sektor entspricht, aufgeteilt. Einsetzen von (5.29) und (5.30) im Rahmen des 2-Punkt-Abschneideschemas liefert dann

$$E_{el} = 0, \quad E_{mag} = -\frac{3g^2 t^2}{4V} \left( \sum_{\vec{k}} \right)^2. \quad (5.32)$$

Gleichung (5.32) stellt eine besonders einfache Lösung dar, die das  $g^{2/3}$ -Skalierungsgesetz (5.15) und das  $(\sum_k)^{1/3}$ -Skalierungsgesetz (5.19) erfüllt, und die darüberhinaus keine Imaginärteile für  $E_{el}$  und  $E_{mag}$  zur Folge hat.

In der Tat erfüllen die in Abb. 5.10 dargestellten magnetischen Feldenergien trotz der zusätzlichen Mitnahme der 3-Punkt-Funktion im Mittel  $E_{mag} \propto -t^2$ , während die elektrischen Feldenergien im Mittel konstant bleiben.

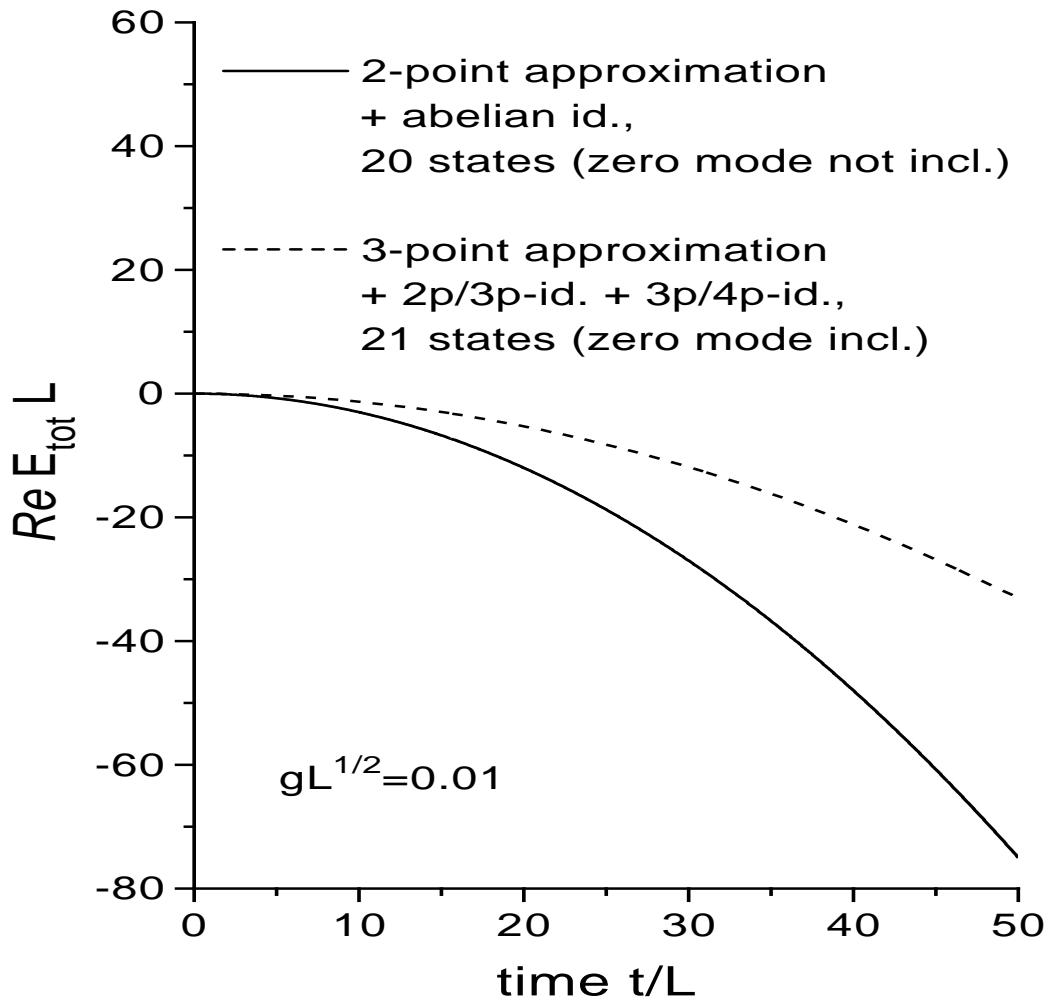


Abbildung 5.14: Realteil der Gesamtenergie als Funktion der Zeit in 2-Punkt-Näherung mit 20 Zuständen ( $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode vernachlässigt) unter Verwendung des abelschen Gauß-Gesetzes und in 3-Punkt-Näherung mit 21 Zuständen ( $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode mitgenommen) unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt- und der 3-Punkt/4-Punkt-Gauß-Identitäten

Um den Effekt der 3-Punkt-Funktion zu zeigen, ist in Abb. 5.14 der Realteil der Gesamtenergie im Rahmen des 2-Punkt-Abschneideschemas mit Implementierung des abelschen Gauß-Gesetzes dargestellt, und im Vergleich

dazu der Realteil der Gesamtenergie im Rahmen des 3-Punkt-Abschneideschemas mit Implementierung der 2-Punkt/3-Punkt- und der 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten. Im Falle der 2-Punkt-Näherung wird dabei die  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode vernachlässigt, da sonst die zeitliche Evolution durch Oszillationen dominiert wird, die von der Dynamik der Null-Impuls-Mode herrühren. Die Mitnahme der 3-Punkt-Funktion führt zu einer signifikanten Reduktion der Verletzung der Energieerhaltung; sie führt jedoch nicht zu einer vollständigen Auslöschung der entsprechenden Terme. Die Mitnahme der Null-Impuls-Mode hat dabei keinen wesentlichen Einfluß auf das Ergebnis in der 3-Punkt-Näherung.

## 5.4 Eine erweiterte Impulsbasis

Nach dem Studium der Konsequenzen einer Wiederherstellung des Gauß-Gesetzes mittels (5.25) soll in diesem Abschnitt nun eine andere Methode zur Verbesserung der 3-Punkt-Korrelationsdynamik untersucht werden, die in einer Veränderung der Impulsbasis besteht.

In einer *endlichen* Impulsbasis tritt die Verletzung der Eichinvarianz bereits auf dem Operatorniveau auf, d.h. der Kommutator zwischen dem Gauß-Gesetz-Operator und dem Hamiltonoperator verschwindet nicht. Dies liegt darin begründet, daß für eine Anzahl von Termen, die den Projektionsoperator im Impulsraum  $\sum_{\vec{k}} |\vec{k}\rangle\langle\vec{k}|$  enthalten, die Vollständigkeitsrelation nicht anwendbar ist, da die Summe von 2 oder mehr Impulsen aus dem mitgenommenen (endlichen) Impulsraum herausführen kann.

Durch Betrachtung der Zeitableitung einer der Gauß-Gesetz-Identitäten, die 2- und 3-Punkt-Funktionen verknüpfen, kann man erkennen, daß für diese speziellen Relationen das Problem der Eichinvarianz zumindest teilweise dadurch gelöst werden kann, daß auch 3-Punkt-Funktionen mitgenommen werden, bei denen einer der Impulse außerhalb des für die 2-Punkt-Funktionen erlaubten Impulsraums liegt. Daher wird der erlaubte Impulsraum für die 3-Punkt-Funktionen nun entsprechend vergrößert. Die Erwartung ist, daß die verbleibende Verletzung der 2-Punkt/3-Punkt-Identitäten, die dann auf das 3-Punkt-Abschneideschema zurückzuführen ist, d.h. auf die Verletzung von Identitäten höherer Ordnung, einen kleineren Effekt auf die zeitliche Evolution hat als die ursprüngliche Verletzung.

Es soll am Rande bemerkt werden, daß ebenfalls im Rahmen dieser Arbeit durchgeführte Rechnungen, bei denen auch 3-Punkt-Funktionen mit 2 oder 3 Impulsen oberhalb des 2-Punkt-Cutoffs zugelassen werden, keinen signifikanten Unterschied zu den Rechnungen mit nur einem solchen Impuls zeigen. Dies hängt damit zusammen, daß die Zeitableitungen dieser 3-Punkt-Funktionen keine Beiträge vom 3-Punkt-Vertex-Term erhalten, der den dominanten nichtabelschen Beitrag darstellt (vergl. die Bemerkung am Ende



von Abschnitt 5.1).

Die Näherung mit der vergrößerten Impulsbasis für die 3-Punkt-Funktion kann nun ebenfalls mit der Implementierung des Gauß-Gesetzes gemäß (5.25) kombiniert werden, die in Abschnitt 5.3 diskutiert wurde.

Abb. 5.15 zeigt die elektrische Feldenergie  $E_{el}$  (oberer Teil) und die magnetische Feldenergie  $E_{mag}$  (unterer Teil) als Funktion der Zeit, die man mit der oben beschriebenen Methode erhält. Dabei werden die 9 niedrigstliegenden Impulse für die 2-Punkt-Funktionen mitgenommen, was dann durch Aufsummation zweier solcher Impulse in einer 3-Punkt-Funktion zu einem erlaubten Raum von 25 Impulsen für den dritten Impuls führt (die Summe aller 3 Impulse muß aufgrund der räumlichen Translationsinvarianz verschwinden). Es werden jeweils die Resultate in 3 Näherungen verglichen:

- ohne eine zusätzliche Implementierung des Gauß-Gesetzes,
- mit einer zusätzlichen Implementierung der 2-Punkt/3-Punkt-Identität und
- mit einer zusätzlichen Implementierung der 2-Punkt/3-Punkt- und der 3-Punkt/4-Punkt-Identität.

Für sowohl den Realteil (linke Spalte) als auch den Imaginärteil (rechte Spalte) von  $E_{mag}$  sind die Resultate ohne Gauß-Identitäten und die unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt-Identität fast identisch. Bis etwa  $t/L = 10$  gilt das gleiche für  $E_{el}$ . Während für beide Näherungen das Gleichungssystem bei etwa  $t/L = 25$  instabil wird, stabilisiert die zusätzliche Implementierung der 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten das System bis etwa  $t/L = 80$ .

Im Rahmen aller drei Näherungen findet im Mittel, d.h. bei Weglassen der schnellen Oszillationen, ein starkes Absinken des Realteils von  $E_{el}$  und ein vergleichsweise schwaches Absinken des Realteils von  $E_{mag}$  statt, was impliziert, daß wiederum die Energieerhaltung verletzt wird. Die Situation ist ähnlich der in Abschnitt 5.3, nur daß nun die Rollen von  $E_{el}$  und  $E_{mag}$  vertauscht sind.

Die Imaginärteile von  $E_{el}$  und  $E_{mag}$  bleiben bis etwa  $t/L = 10$  sehr klein. Falls keine oder nur die 2-Punkt/3-Punkt-Gauß-Identitäten implementiert werden, beginnt der Imaginärteil von  $E_{el}$  danach, sowohl schnelle (durch die freie Dynamik dominierte) Oszillationen mit kleinen Amplituden als auch eine langsame Schwingung hoher Amplitude aufzubauen. Werden zusätzlich die 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten implementiert, dann verschwindet die langsame Schwingung. Im Imaginärteil von  $E_{mag}$  bauen die schnellen Oszillationen nach  $t/L = 10$  vergleichsweise große Amplituden auf, die durch die Wiederherstellung der 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten signifikant reduziert werden.

In Abb. 5.16 wird demonstriert, daß die zeitliche Evolution des Realteils der elektrischen Feldenergie wieder dem  $g^{2/3}$ -Skalierungsgesetz für Frequenzen und Amplituden folgt; das obere Bild zeigt die entsprechenden Kurven in

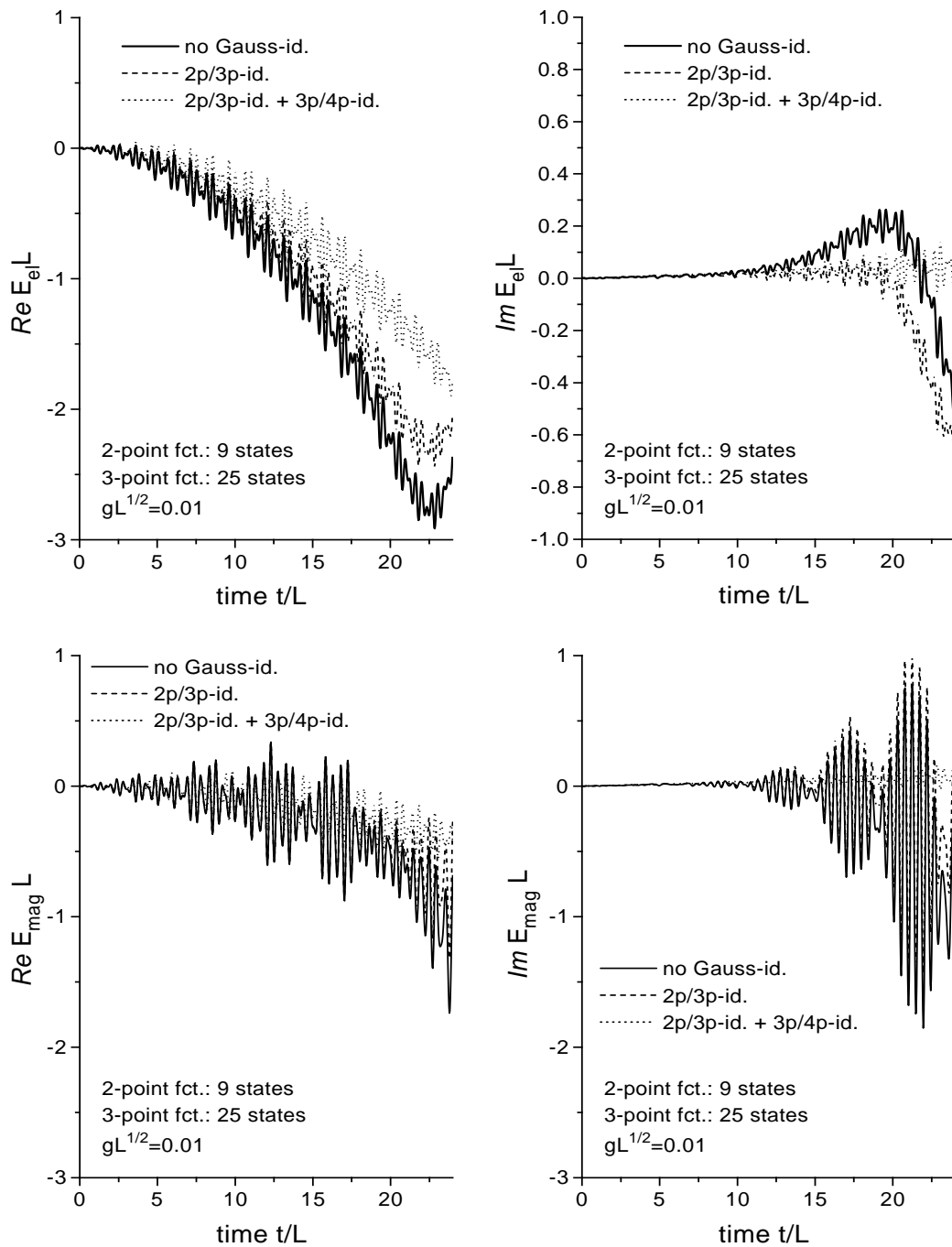


Abbildung 5.15: Elektrische Feldenergie (oberer Teil) und magnetische Feldenergie (unterer Teil) als Funktion der Zeit in 3-Punkt-Näherung mit 9 Impulszuständen für die 2-Punkt-Funktionen und 25 Impulszuständen für die 3-Punkt-Funktionen i) ohne Verwendung von Gauß-Identitäten, ii) unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt-Identitäten und iii) unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt und der 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten; linke Spalte: Realteil, rechte Spalte: Imaginärteil

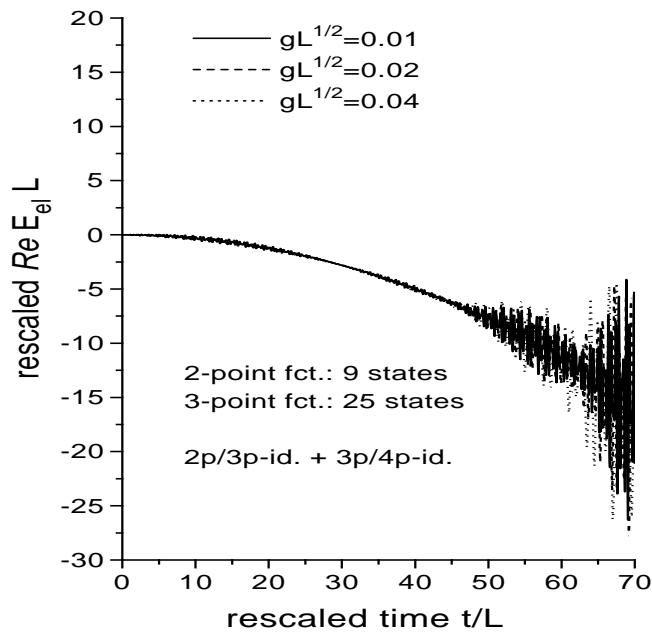
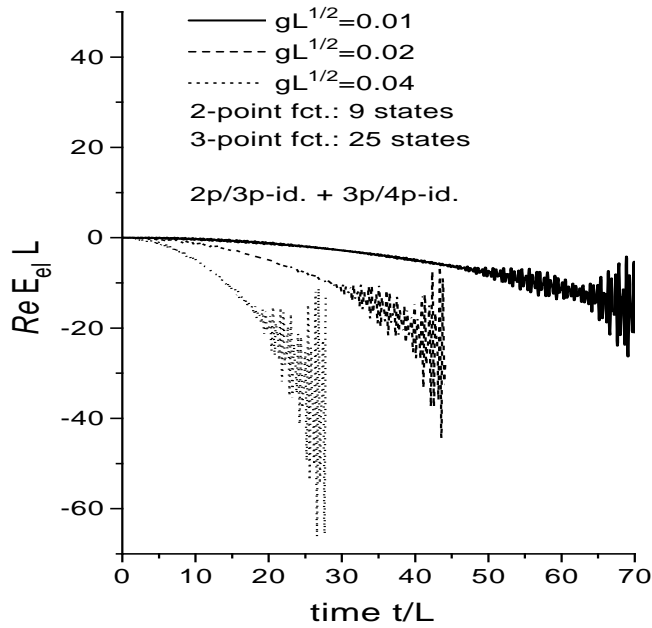


Abbildung 5.16: Realteil der elektrischen Feldenergie als Funktion der Zeit in 3-Punkt-Näherung mit 9 Zuständen für die 2-Punkt-Funktionen und 25 Zuständen für die 3-Punkt-Funktionen unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt- und der 3-Punkt/4-Punkt-Gauß-Identitäten für verschiedene Kopplungen (oberer Teil); Kurven reskaliert auf  $gL^{1/2} = 0.01$  entsprechend  $E_{mag}(g_2, t) = \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{2/3} E_{mag}(g_1, \left(\frac{g_2}{g_1}\right)^{2/3} t)$  (unterer Teil)

dem Approximationsschema, das sowohl die 2-Punkt/3-Punkt- als auch die 3-Punkt/4-Punkt-Gauß-Identitäten wiederherstellt, für verschiedene Werte der Kopplung. Das untere Bild zeigt, daß dieselben Kurven, die wie in Abb. 5.7 und 5.12 entsprechend (5.15) reskaliert sind, sehr gut übereinstimmen. Das gleiche Resultat kann auch im Rahmen der beiden anderen in Abb. 5.15 untersuchten Näherungen erhalten werden.

Eine Untersuchung des ultravioletten Verhaltens für die hier betrachtete Näherung ist gegenwärtig nicht möglich, da nicht genug Basiszustände für die 3-Punkt-Funktion mitgenommen werden können.

Abb. 5.17 vergleicht die Verletzung des Gauß-Gesetzes, gemessen durch (5.13) und (5.14) wie in Abb. 5.5, für alle 3 in diesem Abschnitt diskutierten Näherungen, und für die in den Abschnitten 5.1 und 5.2 diskutierte unmodifizierte Korrelationsdynamik. Am Anfang führt die Mitnahme höherer Impulszustände für die 3-Punkt-Funktionen zu einer signifikant kleineren Verletzung der 2-Punkt/3-Punkt-Identität (4.4) (oberes Bild) als im unmodifizierten Fall. Die Stärke der Verletzung nimmt ab, wenn mehr Gauß-Identitäten implementiert werden, aber es gibt selbst dann einen nichtverschwindenden Wert für (5.13), (der jedoch erst groß wird, wenn das System instabil wird) wenn die 2-Punkt/3-Punkt-Identität implementiert wird. Dies rührt daher, daß das Gauß-Gesetz für die Null-Impuls-Mode, das nicht explizit wiederhergestellt wird, nicht mehr wie im Falle von Abschnitt 5.3 automatisch erfüllt ist.

Die 3-Punkt/4-Punkt-Identität (4.6) zeigt, sofern sie nicht explizit wiederhergestellt wird, eine steil ansteigende Verletzung (unteres Bild), die wesentlich stärker ist als in der unmodifizierten Korrelationsdynamik (Abschnitte 5.1 und 5.2). Werden die 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten jedoch gemäß (5.25) wiederhergestellt, so gibt es nur eine sehr kleine Verletzung aufgrund der Null-Impuls-Mode. Angesichts der gewaltigen Unterschiede zwischen den drei in diesem Abschnitt diskutierten Näherungen in Abb. 5.17 ist es bemerkenswert, wie insensitiv die in Abb. 5.15 dargestellten Resultate insbesondere in der frühen Phase der Propagation gegenüber der zusätzlichen Wiederherstellung von Gauß-Gesetz-Identitäten sind.

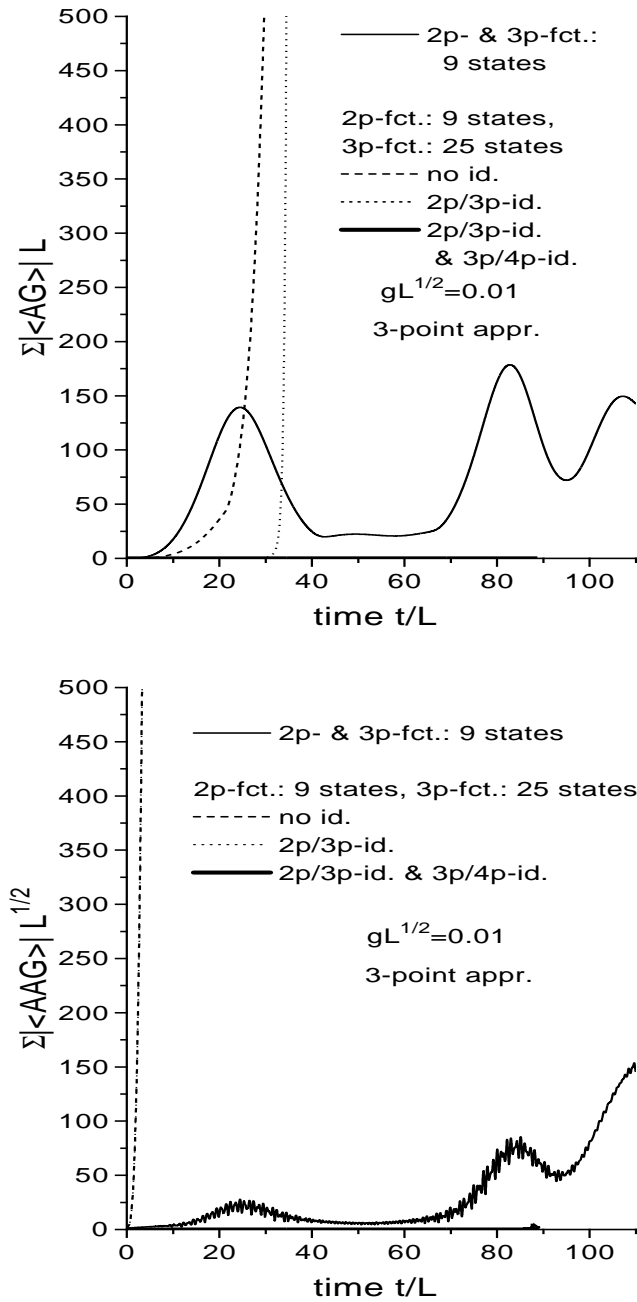


Abbildung 5.17: Verletzung der Gauß-Gesetz-Identitäten, gemessen durch  $\frac{1}{3} \sum_{\vec{k}, i} | \langle A_i^a(\vec{k}) G^a(-\vec{k}) \rangle |$  (oberer Teil) und  $\frac{1}{6} \sum_{\vec{k}_1, \vec{k}_2, \vec{k}_3, i, j} \delta_{\vec{k}_1 + \vec{k}_2 + \vec{k}_3} | \varepsilon^{abc} \langle A_i^a(\vec{k}_1) A_j^b(\vec{k}_2) G^c(\vec{k}_3) \rangle |$  (unterer Teil) als Funktion der Zeit in 3-Punkt-Näherung mit 9 Zuständen und in 3-Punkt-Näherung mit 9 Zuständen für die 2-Punkt-Funktionen und 25 Zuständen für die 3-Punkt-Funktionen i) ohne Verwendung von Gauß-Identitäten, ii) unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt-Identitäten und iii) unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt und der 3-Punkt/4-Punkt-Identitäten

## Kapitel 6

# Adiabatische Erzeugung einer Grundzustandskonfiguration

In der Yang-Mills-Theorie ist es – wie in jeder Feldtheorie – von zentraler Bedeutung, eine gute Näherung für den Grundzustand zu besitzen. In diesem Kapitel wird daher darauf abgezielt, im Rahmen der Korrelationsdynamik eine approximative Lösung für die gleichzeitigen Greenfunktionen im Grundzustand der  $SU(2)$  Yang-Mills-Theorie auf einem Torus in  $2 + 1$  Raumzeit-Dimensionen zu berechnen.

Bei den bisherigen Anwendungen der  $n$ -Punkt-Korrelationsdynamik auf das nukleare Vielteilchenproblem [59, 64, 61] und auf die  $\Phi^4$ -Theorie in  $0 + 1$ ,  $1 + 1$  und  $2 + 1$  Raumzeit-Dimensionen [29, 30, 31] ergab sich hierbei das Problem, daß die Gesamtenergie der betrachteten Systeme im Raum der stationären Lösungen der Korrelationsdynamik im allgemeinen nicht von unten beschränkt ist. Dies impliziert, daß die korrelationsdynamischen Gleichungen nicht ohne zusätzliche Randbedingungen dazu verwendet werden können, die gleichzeitigen Grundzustands-Greenfunktionen mittels einer Variationsrechnung zu ermitteln.

In dem in dieser Arbeit betrachteten Fall von Bewegungsgleichungen für die Yang-Mills-Theorie, die im Heisenbergbild definiert sind, ist die Situation sogar noch komplexer, da in einem Gleichgewichtszustand nur Erwartungswerte von eichinvarianten Operatoren stationär sein müssen, und somit die Aufgabe, den Raum der Gleichgewichtslösungen zu bestimmen, wesentlich komplizierter ist als in einer Theorie ohne lokale Eichsymmetrie.

In den dieser Arbeit vorangehenden Untersuchungen [64, 61, 29, 30, 31] wurde daher, um den mit einer Variationsrechnung verbundenen Schwierigkeiten aus dem Weg zu gehen, erfolgreich ein anderer Weg beschritten, der in der Methode des adiabatischen Einschaltens besteht. Diese Methode basiert auf dem Theorem von Gell-Mann und Low, dessen Aussage wie folgt lautet: Sei  $H(t)$  ein zeitabhängiger Hamiltonoperator der Form

$$H(t) = H_0 + e^{-\epsilon|t|} H_I \tag{6.1}$$

und sei  $|\Psi_0\rangle$  ein Eigenzustand von  $H_0$ , d.h.

$$H_0|\Psi_0\rangle = E_0|\Psi_0\rangle. \quad (6.2)$$

Man betrachte  $H_0$  als ungestörten Anteil und  $e^{-\epsilon|t|}H_I$  als Störungsanteil von  $H(t)$  und definiere entsprechend das Diracbild (Wechselwirkungsbild) der Theorie, so daß für die Zeitentwicklung von Zuständen im Diracbild  $|\Psi(t)\rangle_{D.p.}$

$$i\partial_t|\Psi(t)\rangle_{D.p.} = e^{-\epsilon|t|}H_I|\Psi(t)\rangle_{D.p.} \quad (6.3)$$

gilt. Sei weiterhin  $U_\epsilon^{D.p.}(t_2, t_1)$  der zu (6.3) korrespondierende Diracbild-Zeitentwicklungsoperator mit

$$|\Psi(t_2)\rangle_{D.p.} = U_\epsilon^{D.p.}(t_2, t_1)|\Psi(t_1)\rangle_{D.p.}. \quad (6.4)$$

Existiert nun der Zustand

$$|\Psi\rangle \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{U_\epsilon^{D.p.}(0, -\infty)|\Psi_0\rangle}{\langle\Psi_0|U_\epsilon^{D.p.}(0, -\infty)|\Psi_0\rangle} \quad (6.5)$$

in jeder Ordnung Störungstheorie, so ist er ein Eigenzustand des zeitunabhängigen Hamiltonoperators  $H = H_0 + H_I$ , d.h. es gilt

$$H|\Psi\rangle = (H_0 + H_I)|\Psi\rangle = E|\Psi\rangle. \quad (6.6)$$

Der Grenzübergang  $\epsilon \rightarrow 0$  in (6.5) entspricht einem unendlich langsamen Einschalten der Störung  $H_I$  in der Zeit, wobei  $H(-\infty) = H_0$  und  $H(0) = H$  gelten. Dabei dient der Nenner in der Definition von  $|\Psi\rangle$  in (6.5) dazu, divergierende Phasen herauszukürzen. Der Beweis für das Theorem von Gell-Mann und Low kann z.B. in [65] gefunden werden.

Die auf dem Theorem von Gell-Mann und Low aufbauende Methode, die in der Korrelationsdynamik für Vielteilchen- und Feldtheorien ohne lokale Eichsymmetrie jeweils erfolgreich war und deren Anwendbarkeit auf Yang-Mills-Systeme in diesem Kapitel getestet werden soll, läßt sich wie folgt formulieren:

Sei  $H(b)$  ein von dem Parameter  $b$  abhängiger Hamiltonoperator, und sei  $b$  wiederum gemäß  $b = b(t)$  mit  $b(0) = b_i$  und  $b(t_f) = b_f$  zeitabhängig parametrisiert. Das System wird nun zum Zeitpunkt  $t = 0$  jeweils in einem Eigenzustand von  $H(b_i)$  initialisiert. Ist eine adiabatische Propagation möglich, so bewegt sich das System im Grenzfall einer unendlich langsamen zeitlichen Variation des Parameters  $b$  entlang einer Trajektorie von Eigenzuständen von  $H(b)$  mit  $b \in [b_i, b_f]$ . Für praktische Anwendungen im Rahmen der Korrelationsdynamik muß also zunächst untersucht werden, ob die propagierten Größen, aufgetragen gegen  $b(t)$ , für eine Folge zeitabhängiger Parametrisierungen mit gegen Null strebendem  $\sup_{t \in [0, t_f]} |\partial_t b(t)|^1$  gegen eine asymptotische Trajektorie konvergieren.

---

<sup>1</sup>D.h.  $t_f$  muß gegen  $\infty$  streben, was den Rechenaufwand ebenfalls gegen  $\infty$  streben läßt.

In den vorangehenden Untersuchungen [64, 61, 29, 30, 31] wurden drei Verfahren herausgearbeitet, um mit der oben beschriebenen Methode eine korrelationsdynamische Näherung für den Grundzustand zu berechnen:

- startend vom Grundzustand der *freien* Feldtheorie wird die Kopplungskonstante adiabatisch eingeschaltet oder
- startend von einer Hartree-Fock-Bogoliubov-Lösung (d.h. im Rahmen der Korrelationsdynamik einer 2-Punkt-Lösung) für den Grundzustand wird die Restwechselwirkung adiabatisch eingeschaltet oder
- startend von einer semiklassischen oder einer 2-Punkt-Lösung für den Fall eines hohen klassischen Hintergrundfeldes wird das klassische Feld adiabatisch abgeschaltet.

Dabei ist zu beachten, daß jeweils für  $t = 0$  ein ungestörter Hamiltonoperator gefunden werden muß, dessen Grundzustandslösung bekannt bzw. analytisch berechenbar ist.

Es soll im folgenden jedoch demonstriert werden, daß im Rahmen der in dieser Arbeit untersuchten Approximationsschemata die Methode der adiabatischen Erzeugung einer Grundzustandskonfiguration für den Fall der Yang-Mills-Theorie in temporaler Eichung auf schwerwiegende Probleme stößt.

Zunächst ist klar, daß eine Methode analog dem Abschalten eines klassischen Hintergrundfeldes hier nicht anwendbar ist, da ein solches Feld in einer  $SU(N)$  Yang-Mills-Theorie stets durch eine Eichtransformation beseitigt werden kann. Im hier betrachteten Fall der in Kapitel 2 beschriebenen Quantisierungsprozedur ist dies durch die Wahl der Eichfixierung bereits geschehen.

Darüber hinaus ist klar, daß eine Vorgehensweise analog dem Einschalten der Restwechselwirkung ebenfalls zum Scheitern verurteilt ist, da der entsprechende Startzustand, d.h. der Grundzustand bezüglich einer Hartree-Fock-Bogoliubov-Näherung, nicht nur das Gauß-Gesetz nicht erfüllen kann, sondern – was entscheidend ist – ein normierbares Wellenfunktional besitzt. Da der gesuchte Grundzustand das Gauß-Gesetz erfüllen soll und somit nicht normierbar sein kann, ist also keine kontinuierliche Deformierung des Hartree-Fock-Bogoliubov-Grundzustandes in den gesuchten Grundzustand möglich. Dies aber ist eine Voraussetzung für einen adiabatischen Übergang, da hierbei die beiden Zustände durch den adiabatischen Grenzfall eines Zeitentwicklungsoperators ineinander überführt werden sollen.

Im Rahmen der Beschreibung mit gleichzeitigen Greenfunktionen äußert sich dies wie folgt: Im Hartree-Fock-Bogoliubov-Grundzustand liegt eine vollständig stationäre Konfiguration auch für Erwartungswerte von eichabhängigen Operatoren vor. Bei einer adiabatischen Propagation führt dies zwangsläufig zu einer ebensolchen Konfiguration für den so generierten korrelierten



Zustand, was das für eine Erfüllung des Gauß-Gesetzes erforderliche Auftreten expliziter Zeitabhängigkeiten für eichabhängige Erwartungswerte nicht zuläßt.

Es soll daher im folgenden das Verfahren untersucht werden, bei dem startend von der freien Theorie die Kopplung adiabatisch eingeschaltet wird. Im  $2 + 1$ -dimensionalen Kontinuum ohne Anwesenheit von Regulatoren ist es offensichtlich, daß die adiabatische Methode nicht funktionieren kann, da die Kopplung  $g$  in diesem Fall der einzige dimensionsbehaftete Parameter ist, und da das System somit einen diskontinuierlichen Übergang zum abelschen Grenzfall ( $g = 0$ ) aufweisen muß. Für den Fall der Theorie auf einem Torus kann im Rahmen der Implementierung einer rein räumlichen axialen Eichbedingung gezeigt werden, daß die Theorie ebenfalls einen solchen diskontinuierlichen Übergang aufweist, obwohl hier die Seitenlänge  $L$  der Box als weiterer dimensionsbehafteter Parameter auftritt. Dies liegt daran, daß das abelsche Gauß-Gesetz und das nichtabelsche Gauß-Gesetz eine verschiedene Zahl *unabhängiger* Nullmoden besitzen [39]. Man könnte nun trotzdem hoffen, daß bei Verwendung einer zusätzlichen infraroten Regularisierungsvorschrift (z.B. gegeben durch das Weglassen der Null-Impuls-Mode), dieses Verhalten eine Änderung erfährt. Da weiterhin der Zustand niedrigster Energie im gesamten Hilbertraum (ohne Gauß-Randbedingung) automatisch das Gauß-Gesetz erfüllen sollte [33], könnte man hoffen, daß in einem möglichen adiabatischen Grenzfall für die Propagation keine zusätzlichen Schwierigkeiten dadurch auftreten, daß die Propagation mit einer zeitabhängigen Kopplung durch die zwangsläufig auftretende explizite Zeitabhängigkeit des Gauß-Gesetz-Operators die Eichinvarianz nicht erhält.

Zunächst wird nun die Kopplung gemäß  $g(t)L^{1/2} = \alpha t$  zeitabhängig parametrisiert. Als Anfangsbedingung wird die freie Lösung (5.3)-(5.6) verwendet. Die Null-Impuls-Mode wird vernachlässigt, da bei  $t = 0$  die Kopplung und somit die effektive Masse der Null-Impuls-Mode (5.9) verschwindet, so daß die ursprüngliche Infrarotsingularität des freien Propagators auftritt. Für den Fall, daß die adiabatische Methode funktioniert, sollte das System, wie oben beschrieben, im Grenzfall  $\alpha L \rightarrow 0$  entlang einer adiabatischen Trajektorie propagieren. Um dies zu untersuchen, ist in Abb. 6.1 der Realteil der Gesamtenergie als Funktion der Kopplung für verschiedene Werte von  $\alpha$  aufgetragen, wobei zur Berechnung die unmodifizierten korrelationsdynamischen Gleichungen verwendet wurden (vergl. Abschnitte 5.1 und 5.2).<sup>2</sup> In allen drei Näherungen – 2-Punkt (erste Zeile), 3-Punkt (zweite Zeile) und 4-Punkt (dritte Zeile) – zeigen die dargestellten Kurven, anstatt für kleiner werdendes  $\alpha$  gegen eine asymptotische Kurve zu konvergieren, ein Skalierungsverhalten bezüglich  $\alpha$ , das dem in Kapitel 5 diskutierten Skalierungsverhalten bezüglich der Kopplung bzw. bezüglich des UV-Cutoffs ähnelt (linke Spalte). Das dem

---

<sup>2</sup>Es tritt auch ein Imaginärteil auf, was wie in Kapitel 5 auf eine Verletzung der Eichinvarianz zurückzuführen ist.

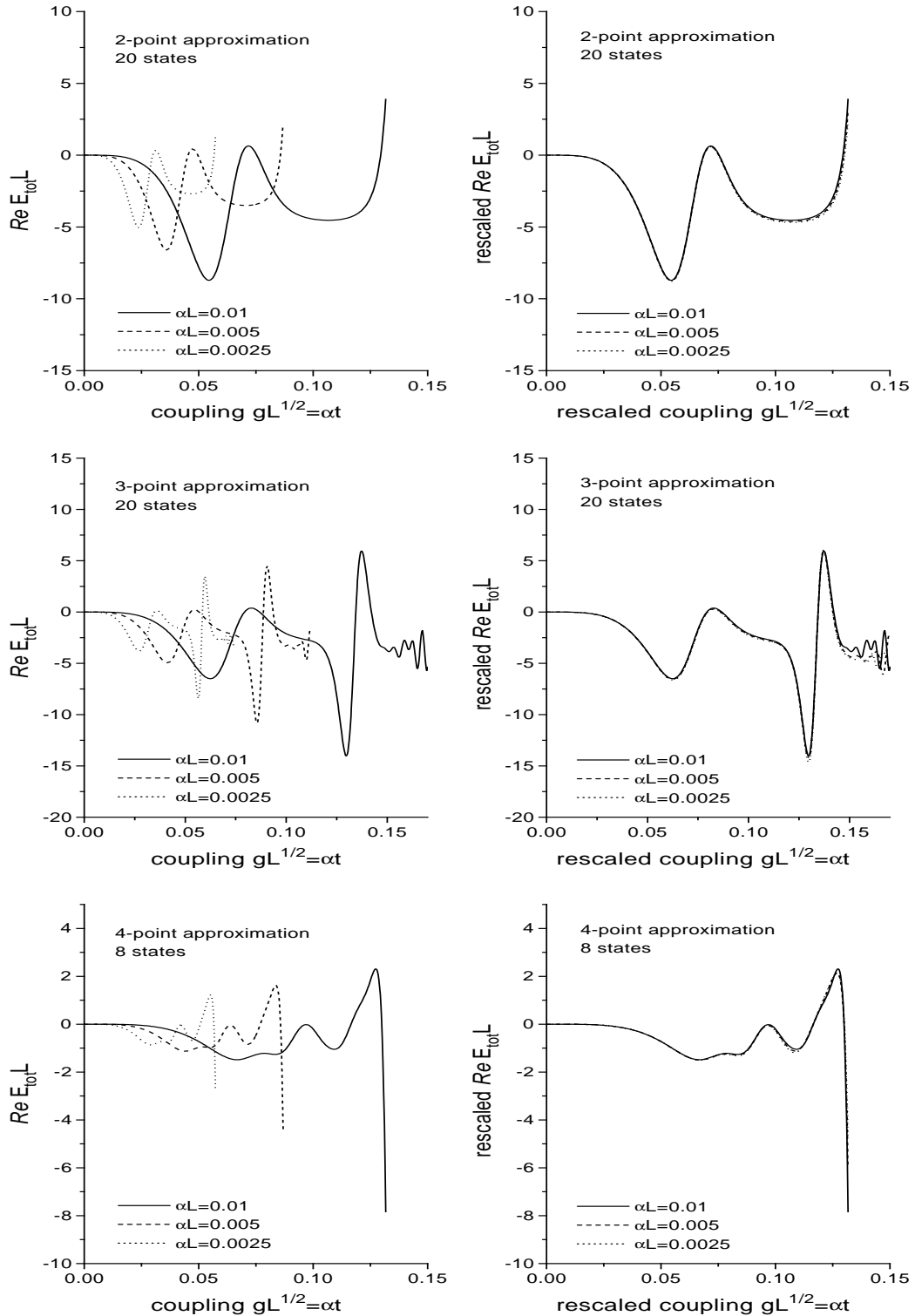


Abbildung 6.1: Realteil der Gesamtenergie als Funktion der zeitabhängigen Kopplung in 2-Punkt-Näherung (Zeile 1) und 3-Punkt-Näherung (Zeile 2) mit 20 Zuständen und in 4-Punkt-Näherung mit 8 Zuständen (Zeile 3),  $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode jeweils vernachlässigt (linke Spalte); Kurven reskaliert auf  $\alpha L = 0.01$  entsprechend  $E_{\text{tot}}(\alpha_2, g) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{2/5} E_{\text{tot}}\left(\alpha_1, \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{3/5} g\right)$  (rechte Spalte)

beobachteten Verhalten zugrundeliegende Skalierungsgesetz lautet

$$E_{tot}(\alpha_2, g) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{2/5} E_{tot}\left(\alpha_1, \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{3/5} g\right), \quad (6.7)$$

was durch entsprechende Reskalierung der Achsen verifiziert werden kann (rechte Spalte); die reskalierten Kurven zeigen in der Tat eine sehr gute Übereinstimmung.

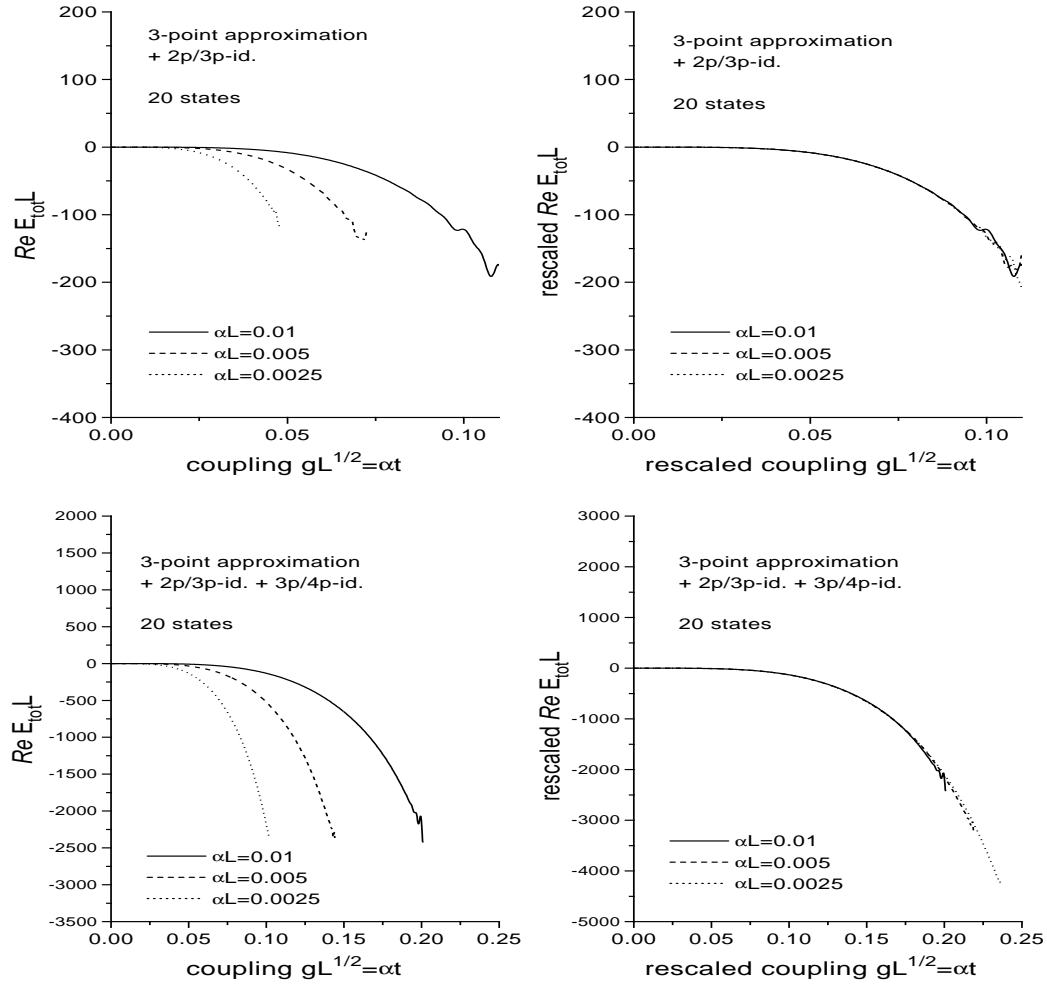


Abbildung 6.2: Realteil der Gesamtenergie als Funktion der zeitabhängigen Kopplung in 3-Punkt-Näherung unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt-Gauß-Identitäten (Zeile 1) und unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt- und der 3-Punkt/4-Punkt-Gauß-Identitäten (Zeile 2) mit 20 Zuständen ( $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode vernachlässigt (linke Spalte); Kurven reskaliert auf  $\alpha L = 0.01$  entsprechend  $E_{tot}(\alpha_2, g) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{2/5} E_{tot}\left(\alpha_1, \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{3/5} g\right)$  (rechte Spalte)

Abb. 6.2 zeigt das gleiche Skalierungsverhalten für die Näherungen, bei denen das Gauß-Gesetz mittels (5.25) wiederhergestellt wird (vergl. Abschnitt

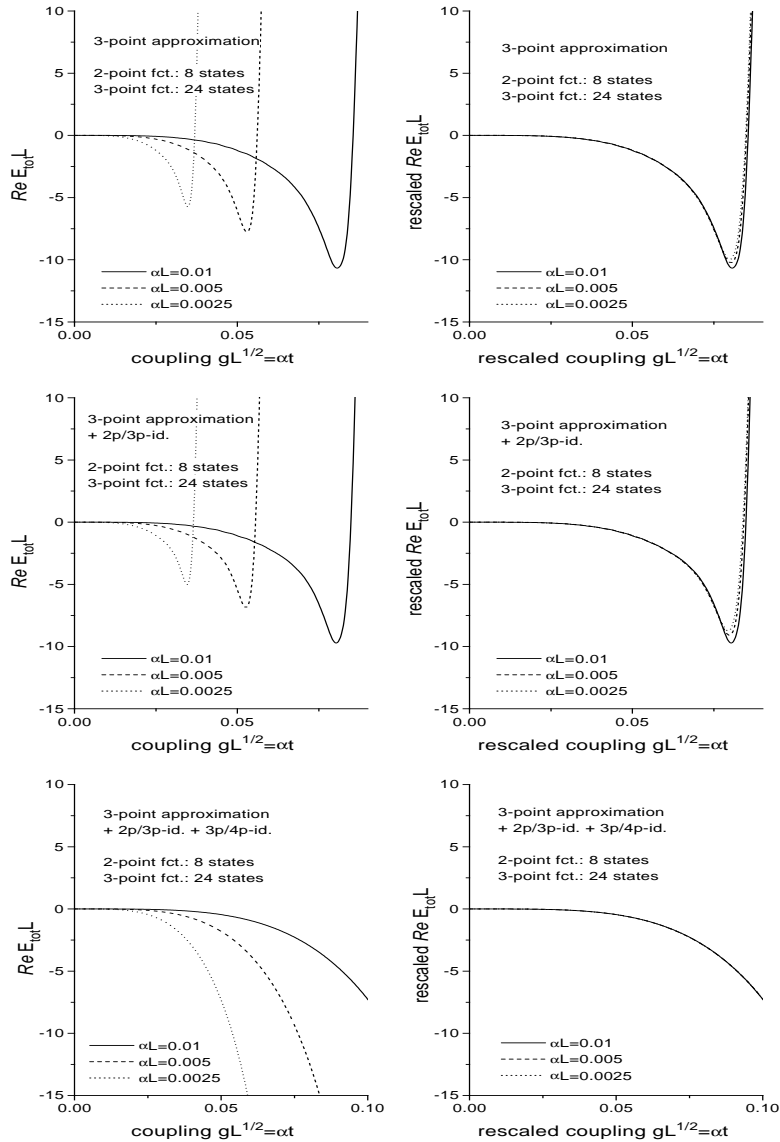


Abbildung 6.3: Realteil der Gesamtenergie als Funktion der zeitabhängigen Kopplung in 3-Punkt-Näherung (Zeile 1), in 3-Punkt-Näherung unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt-Gauß-Identitäten (Zeile 2) und in 3-Punkt-Näherung unter Verwendung der 2-Punkt/3-Punkt- und der 3-Punkt/4-Punkt-Gauß-Identitäten (Zeile 3) mit 8 Zuständen für die 2-Punkt-Funktionen und 24 Zuständen für die 3-Punkt-Funktionen ( $\vec{k} = \vec{0}$ -Mode vernachlässigt) (linke Spalte); Kurven reskaliert auf  $\alpha L = 0.01$  entsprechend  $E_{tot}(\alpha_2, g) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{2/5} E_{tot}\left(\alpha_1, \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{3/5} g\right)$  (rechte Spalte)

5.3), und Abb. 6.3 zeigt wiederum das gleiche Verhalten für die Näherungen, bei denen eine vergrößerte Impulsbasis für die 3-Punkt-Funktionen berücksichtigt wird, mit und ohne zusätzliche Verwendung von (5.25) (vergl. Abschnitt 5.4).

Alle dargestellten Resultate implizieren, daß die Methode des adiabatischen Einschaltens der Kopplung im vorliegenden Fall *nicht konvergent* ist.

Die Skalierungsgesetze (5.15) und (5.19) konnten in Kapitel 5 jeweils im Rahmen der Betrachtung einfacher Modellsysteme mit rein quartischer Kopplung reproduziert werden. Um auf diesem Wege ebenfalls ein vertieftes qualitatives Verständnis für das Auftreten des Skalierungsgesetzes (6.7) zu erlangen, soll an dieser Stelle das einfache Beispiel eines quantenmechanischen Systems in einer Raumdimension betrachtet werden, das durch den (rein quartischen) zeitabhängigen Hamiltonoperator

$$H_\alpha(x, p, t) = \frac{p^2}{2} + (\alpha t)^2 \frac{x^4}{4} . \quad (6.8)$$

beschrieben wird. Es sei zunächst angenommen, daß eine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung für  $\alpha = 1$  bereits gefunden ist:

$$[i\partial_t - H_1(x, p, t)] \Psi_1(x, t) = 0 . \quad (6.9)$$

Mit Hilfe von (6.9) soll nun eine entsprechende Lösung für  $\alpha \neq 1$  durch den Ansatz

$$\Psi_\alpha(x, t) = \Psi_1(x', \gamma t) \quad (6.10)$$

konstruiert werden, wobei  $x'$  durch die kanonische Transformation

$$x = \beta^{-1/3} x' , \quad p = \beta^{1/3} p' \quad (6.11)$$

gegeben ist. Einsetzen von (6.10) in die zeitabhängige Schrödingergleichung liefert

$$\begin{aligned} & [i\partial_t - H_\alpha(x, p, t)] \Psi_\alpha(x, t) \\ &= \left[ i\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma t} - \beta^{2/3} \left\{ \frac{p'^2}{2} + \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 t^2 \frac{x'^4}{4} \right\} \right] \Psi_1(x', \gamma t) \stackrel{!}{=} 0 \\ &\Rightarrow \beta^{2/3} \left\{ \frac{p'^2}{2} + \left( \frac{\alpha}{\beta} \right)^2 t^2 \frac{x'^4}{4} \right\} \stackrel{!}{=} \gamma H_1(x', p', \gamma t) \\ &\Rightarrow \gamma = \beta^{2/3} , \quad \gamma = \frac{\alpha}{\beta} \Rightarrow \gamma = \alpha^{2/5} , \end{aligned} \quad (6.12)$$

was unmittelbar ein Skalierungsverhalten wie in (6.7) impliziert. Falls die Anfangsbedingung unabhängig von  $\alpha$  gewählt ist, gilt weiterhin

$$\Psi_\alpha(x, t = 0) = \Psi_1(x, t = 0) = \Psi_1(\beta^{1/3} x, 0) \Rightarrow \Psi_\alpha(x, 0) = \text{const} , \quad (6.13)$$

so daß die obige Betrachtung nur für die ebene Welle mit Impuls Null gültig ist, was genau der Initialisierung des freien Grundzustandes entspricht. Für ebene Wellen mit Impulsen  $\neq 0$  schließt die hier gezeigte Ableitung jedoch (6.7) nicht aus, da die Wellenfunktionen bei ihrer Zeitentwicklung immer komplexe Phasen bekommen können, die sich bei der Berechnung von Erwartungswerten herauskürzen.

Es ist a priori klar, daß für das obige Beispiel die Methode des adiabatischen Einschaltens nicht konvergieren kann, da ein nicht normierbarer Streuzustand (z.B. eine ebene Welle) nicht kontinuierlich in einen normierbaren gebundenen Zustand eines quartischen Potentials transformiert werden kann. Für das dargestellte einfache Beispiel besteht ein sofort einsichtiger Weg zur Umgehung dieses Problems darin, einen Massenterm (d.h. ein harmonisches Oszillatorpotential) einzuführen, der adiabatisch abgeschaltet wird, während die quartische Kopplung eingeschaltet wird. Im Fall der Yang-Mills-Theorie ist die Situation jedoch anders gelagert: beide Zustände, der ungestörte (freie, abelsche) und der gestörte (nichtabelsche) sind nicht normierbar aufgrund ihrer Invarianz unter abelschen bzw. nichtabelschen Eichtransformationen. Daher ist auch die Einführung eines Massenterms für die longitudinalen Eichfelder keine Lösung für das vorliegende Problem, da dann der Anfangszustand ebenfalls normierbar wäre. Die Situation ist qualitativ die gleiche wie die weiter oben diskutierte, die beim Verfahren des adiabatischen Einschaltens der Restwechselwirkung auftritt; dort wäre der Anfangszustand eine normierbare Hartree-Fock-Bogoliubov-Lösung.



# Kapitel 7

## Zusammenfassung und Ausblick

### 7.1 Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war es, die Methode der Korrelationsdynamik, die bisher für Vielteilchensysteme und Feldtheorien ohne lokale Eichsymmetrie eingesetzt wurde, auf  $SU(N)$  Yang-Mills-Theorien anzuwenden und ihre Konvergenzeigenschaften zu untersuchen.

In Kapitel 2 wurde zunächst die Quantisierung von  $SU(N)$  Yang-Mills-Theorien diskutiert, wobei besonderes Augenmerk auf die in dieser Arbeit verwendete kanonische Quantisierung in temporaler Eichung gelegt wurde. Dabei wurde demonstriert, daß aufgrund der durch das Gauß-Gesetz bedingten Nichtnormierbarkeit der physikalischen Zustände die Erwartungswerte von eichabhängigen Operatoren im Heisenbergbild und im Schrödingerbild verschiedene Zeitentwicklungen erfahren, wohingegen für eichinvariante Operatoren beide Bilder das gleiche Ergebnis liefern. Als besondere Konsequenz ergab sich hieraus das Auftreten expliziter Zeitabhängigkeiten für eichabhängige Erwartungswerte im Heisenbergbild auch für Gleichgewichtszustände des Systems. Da bei einer Formulierung der Dynamik im Rahmen des Schrödingerbildes gegenüber den Heisenberg-Bewegungsgleichungen nichttriviale Zusatzterme auftreten, die z.B. im Rahmen der Fixierung der residualen Eichfreiheit mit Hilfe eines Integralmaßes im Raum der physikalischen Wellenfunktionale hergeleitet werden können, wurde für das weitere Vorgehen die Formulierung im Rahmen des Heisenbergbildes zugrundegelegt.

In Kapitel 3 wurden die Gleichungen der Korrelationsdynamik hergeleitet, die durch das Abschneiden der Hierarchie von (Heisenberg-)Bewegungsgleichungen für gleichzeitige Greenfunktionen bezüglich der Ordnung der berücksichtigten *verbundenen* Greenfunktionen entstehen. Dabei wurden zunächst zum einen die Hierarchie für gleichzeitige *volle* Greenfunktionen analog der BBGKY-Dichtematrixhierarchie und zum anderen die Clusterzerlegung der vollen Greenfunktionen in verbundene Greenfunktionen (unabhängig voneinander) hergeleitet. Nach Einsetzen der Clusterzerlegung in die BBGKY-



artige Hierarchie und Vernachlässigung aller verbundenen Greenfunktionen mit  $n > N$  ergab sich schließlich die als  $N$ -Punkt-Korrelationsdynamik bezeichnete Näherung.

In Kapitel 4 wurde die Hierarchie von Randbedingungen diskutiert, die zusätzlich aus dem Gauß-Gesetz folgen. Die Gleichungen dieser Hierarchie stellen im Rahmen der Formulierung mit gleichzeitigen Greenfunktionen die Slavnov-Taylor-Identitäten der Theorie dar, und ihre Verletzung im Rahmen einer Näherung ist gleichbedeutend mit der Verletzung der Eichinvarianz. Bei der Diskussion wurde besonders auf die strukturelle Ähnlichkeit der Gauß-Gesetz-Hierarchie zu den aus der Korrelationsdynamik für fermionische Systeme bekannten Spurrelationen hingewiesen, wobei letztere jedoch nicht auf eine lokale, sondern auf eine globale Symmetrie des Systems zurückzuführen sind. Während sowohl die Spurrelationen als auch die Gauß-Gesetz-Hierarchie durch das Abschneideschema der Korrelationsdynamik verletzt werden, ergibt sich aufgrund des lokalen Charakters der Symmetrie im Falle des Gauß-Gesetzes zusätzlich eine Verletzung der Eichinvarianz durch die verwendete endliche Einteilchenbasis.

In den Kapiteln 5 und 6 wurde schließlich die  $SU(2)$  Yang-Mills-Theorie auf einem Torus in  $2 + 1$  Raumzeit-Dimensionen numerisch untersucht. Um dabei mit der durch die numerische Realisierung erzwungenen Maximalzahl von Impulszuständen bereits das ultraviolette Verhalten untersuchen zu können, wurden die Untersuchungen in Kapitel 5 jeweils im Grenzfall schwacher Kopplung durchgeführt, was zum Grenzfall kleiner Quantisierungsvolumina äquivalent ist. Die Theorie in  $2 + 1$  Raumzeit-Dimensionen zeichnet sich in diesem Zusammenhang dadurch aus, daß sie keine ultravioletten Divergenzen besitzt<sup>1</sup> und daß daher außer der Renormierung der kosmologischen Konstanten keine weiteren Wellenfunktions- oder Kopplungsrenormierungen nötig sind.<sup>2</sup> Die Resultate der numerischen Untersuchungen lassen sich wie folgt zusammenfassen:

- Die Verletzung des Gauß-Gesetzes im Rahmen der 2-, 3- und 4-Punkt-Korrelationsdynamik führt zu großen Imaginärteilen für die elektrische und die magnetische Feldenergie – was eindeutig ein „unphysikalisches“ Resultat darstellt – während die Gesamtenergie erhalten ist.
- Die Frequenzen der niederfrequenten Oszillationen im longitudinalen Sektor der Theorie skalieren wie  $g^{2/3}$  wie bei einem rein quartischen Oszillator.

---

<sup>1</sup>Bei einer störungstheoretischen Entwicklung in einer dafür angemessenen Eichung können dabei durchaus einzelne divergente Feynman-Diagramme auftreten, die Divergenzen müssen sich jedoch bei der Berechnung von Observablen alle gegenseitig auslöschen. Die Situation ist analog zur Auslöschung nichtlogarithmischer Divergenzen in  $3 + 1$  Raumzeit-Dimensionen.

<sup>2</sup>Eine Massenrenormierung für  $SU(N)$ -Eichbosonenfelder würde die Eichinvarianz der Lagrangefunktion bzw. des Hamiltonoperators verletzen.

- Im Rahmen der 2- und 3-Punkt-Korrelationsdynamik ergibt sich außerdem eine Skalierung dieser Frequenzen gemäß  $(\sum_{\vec{k}})^{1/3}$  wie bei einer  $\Phi^4$ -artigen Theorie, die durch einen Hamiltonoperator der Form  $H = \int d^d x \left( \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{g^2}{4} \Phi^4 \right)$  beschrieben wird. Dieses Resultat zeigt, daß die für die ultraviolette Konvergenz erforderliche gegenseitige Auslöschung von Divergenzen auf dem 3-Punkt-Niveau nicht auftritt, was ebenfalls der Verletzung der Eichinvarianz zugeschrieben werden kann.
- Im Rahmen der 3-Punkt-Näherung zeigt sich, daß das Verhalten der niederfrequenten Oszillationen im longitudinalen Sektor durch die Mitnahme oder Vernachlässigung der Null-Impuls-Mode nicht beeinflusst wird, was als ein Anzeichen von Infrarotkonvergenz gedeutet werden kann. Dabei tritt sowohl in der 2-Punkt- als auch in der 4-Punkt-Näherung keine solche Infrarotkonvergenz auf.
- Die Modifikation des 3-Punkt-Abschneideschemas durch die Wiederherstellung der Gauß-Gesetz-Identitäten verschiedener Ordnungen führt zu keiner Änderung des Verhaltens bezüglich der Kopplungsskalierung oder der ultravioletten Skalierung des Systems; sie resultiert jedoch in einer Reduktion der unphysikalischen Imaginärteile der elektrischen und der magnetischen Feldenergie. Allerdings tritt in dieser Näherung auch eine Verletzung der Gesamtenergieerhaltung auf, was wiederum ein neues unerwünschtes Verhalten darstellt.
- Durch die Berücksichtigung einer vergrößerten Impulsbasis für die 3-Punkt-Funktionen erhält man qualitativ ähnliche Resultate wie im Falle der oben diskutierten Wiederherstellung von Gauß-Gesetz-Identitäten bei gleichem Impulscutoff für 2- und 3-Punkt-Funktionen, wobei allerdings die Rollen der elektrischen und der magnetischen Feldenergie bei der Verletzung der Gesamtenergieerhaltung in etwa vertauscht sind. Die *zusätzliche* Implementierung von Gauß-Identitäten stabilisiert zwar das System, führt jedoch nicht zu einer signifikanten Änderung des Verhaltens der elektrischen und der magnetischen Feldenergie, speziell in der Frühphase der zeitlichen Propagation.
- Die adiabatische Erzeugung einer Näherung für den Grundzustand ausgehend vom freien (abelschen) Grundzustand ist in keinem der oben diskutierten Approximationsschemata möglich, da bezüglich der Einschaltgeschwindigkeit für die Kopplung das gleiche Skalierungsverhalten auftritt, das auch ein rein quartischer Oszillator in einem entsprechenden Prozeß zeigt.

Aus den aufgelisteten Ergebnissen kann geschlossen werden, daß eine Entwicklung in verbundene Greenfunktionen niedriger Ordnung – obwohl diese

sich für das nukleare Vielteilchenproblem und für die  $\Phi^4$ -Theorie als sehr erfolgreich herausgestellt hat – im Rahmen der vorliegenden Formulierung *keine Berechnung* der Niederenergie-Response von *nichtabelschen Eichtheorien* erlaubt, was letztendlich in der Verletzung der Eichinvarianz begründet ist. Diese äußert sich jeweils in der Verletzung der Gauß-Gesetz-Identitäten, der Verletzung der Energieerhaltung und/oder im Nichtverschwinden der Imaginärteile von Erwartungswerten eichinvarianter hermitescher Operatoren sowie in der nicht vollständigen Auslöschung ultravioletter Divergenzen.

Mit Blick auf die beteiligten Terme in den Bewegungsgleichungen läßt sich für alle betrachteten Approximationsschemata feststellen, daß das beobachtete dynamische Verhalten im wesentlichen auf die nicht vollständige Auslöschung zwischen den Divergenzen in den 3-Punkt-Vertex-Termen und in den Hartree-Fock-Bogoliubov-Beiträgen zu den 4-Punkt-Vertex-Termen (dem angezogenen Eichbosonentadpole) zurückzuführen ist.

## 7.2 Ausblick

Für das mögliche weitere Vorgehen bieten sich hier 3 Verfahren an, die auch miteinander kombiniert werden können.

### Verfahren 1:

Anstatt die Theorie in einer endlichen Impulsbasis zu betrachten, kann auch durchgehend eine eichinvariante Regularisierung verwendet werden. Eine solche Vorgehensweise erscheint ohnehin wünschenswert, da nichtabelsche Eichtheorien streng genommen nur im Rahmen des entsprechenden Grenzübergangs einer eichinvariant regularisierten Theorie wohldefiniert sind. Zum einen könnte man dabei versuchen, das Verfahren der Korrelationsdynamik im Rahmen der Gittereichtheorie anzuwenden. Zum anderen könnte man versuchen, zunächst bei einer kontinuierlichen Formulierung zu bleiben und z.B. Schwingers Proper time-Regularisierung (Operator-Regularisierung),  $\zeta$ -Funktions-Regularisierung oder dimensionale Regularisierung auf die Theorie anzuwenden [66]. Dabei bleibt jeweils genauer auszuarbeiten, wie dies technisch im einzelnen zu geschehen hat, damit das Verfahren der Korrelationsdynamik für gleichzeitige Greenfunktionen zum Einsatz kommen kann.

Speziell im Rahmen der temporalen Eichung erscheint in diesem Zusammenhang zunächst die Methode der *Heat-Kernel-Regularisierung* [67, 68] für die elektrische Feldenergie als Methode der Wahl. Die Notwendigkeit der ultravioletten Regularisierung entsteht im Hamiltonschen Formalismus in temporaler Eichung dadurch, daß die elektrische Feldenergie ein Produkt aus zwei Funk-

tionalableitungen am gleichen Ort enthält, wodurch sie in ihrer Wirkung im Raum der Summen von Produkten räumlicher Integrale über lokale Funktionen von  $A_i^a$  mit endlichen Koeffizienten nicht wohldefiniert ist. Z.B. erhält man

$$\frac{1}{2} \int dx \frac{\delta}{\delta A_i^a(\vec{x})} \frac{\delta}{\delta A_i^a(\vec{x})} \int dy A_j^b(\vec{y}) A_j^b(\vec{y}) = \int dx \delta(0), \quad (7.1)$$

was nicht sinnvoll definiert ist. Die elektrische Feldenergie kann nun mit Hilfe des Heat-Kernels  $K_{ij}^{ab}(\vec{x}, \vec{y}, t, [A])$  gemäß

$$\hat{E}_{el}^t = \frac{1}{2} \int dx \int dy \frac{\delta}{\delta A_i^a(\vec{x})} K_{ij}^{ab}(\vec{x}, \vec{y}, t, [A]) \frac{\delta}{\delta A_j^b(\vec{y})} \quad (7.2)$$

regularisiert werden, wobei die Randbedingung

$$\lim_{t \downarrow 0} K_{ij}^{ab}(\vec{x}, \vec{y}, t, [A]) = \delta(\vec{x} - \vec{y}) \delta^{ab} \delta_{ij} \quad (7.3)$$

zu fordern ist. Die Forderung nach Eichinvarianz von  $\hat{E}_{el}^t$  führt dann auf die Heat-Kernel-Gleichung

$$\begin{aligned} \partial_t K_{ij}^{ab}(\vec{x}, \vec{y}, t, [A]) &= \left[ \delta_{ik} D_i^{ac}(\vec{x}) D_i^{cd}(\vec{x}) \right. \\ &\quad \left. - D_i^{ac}(\vec{x}) D_k^{cd}(\vec{x}) + 2f^{acd} F_{ik}^c(\vec{x}) \right] K_{kj}^{db}(\vec{x}, \vec{y}, t, [A]), \end{aligned} \quad (7.4)$$

wobei  $D_i^{ab}(\vec{x})$  eine kovariante Ableitung bezeichnet. Gleichung (7.4) führt jedoch auf eine extrem nichttriviale (nichtpolynomi-sche) funktionale Abhängigkeit des Heat-Kernels vom Eichfeld  $A_i^a$ , was die Anwendung der Korrelationsdynamik in diesem Kontext auf fundamentale Schwierigkeiten stoßen läßt.

### Verfahren 2:

Die in Abschnitt 5.4 untersuchte Methode der Erweiterung der Impulsbasis für die 3-Punkt-Funktion wird systematisch für höhere Ordnungen verbundener Greenfunktionen fortgesetzt, möglicherweise ebenfalls unter gleichzeitiger Wiederherstellung der Gauß-Gesetz-Identitäten bis zu einer gewissen Ordnung mit Hilfe von (5.25). Dieser Ansatz geht in eine ähnliche Richtung wie die Verwendung einer eichinvarianten Regularisierung, da hier versucht wird, die Effekte eines nicht eichinvarianten scharfen Impulscut-offs zu umgehen. Es ist jedoch keineswegs a priori klar, ob die so gewonnene systematische Entwicklung gegen ein korrektes Ergebnis konvergiert. Außerdem steigt mit jeder Ordnung verbundener Greenfunktionen die für die numerische Integration der gekoppelten Differentialgleichungen benötigte Rechnerleistung enorm an.

Verfahren 3:

Die expliziten Zeitabhängigkeiten von z.B. Propagatoren für Gleichgewichtszustände werden beseitigt. Dies kann zum einen durch die Verwendung einer anderen Eichung – z.B. einer kovarianten Eichung – geschehen, wobei dann zusätzliche Geistfelder mitpropagiert werden müssen. Zum anderen kann dies auch in der temporalen Eichung geschehen, indem die Bewegungsgleichungen im Schrödingerbild betrachtet werden. Dabei erscheint es am sinnvollsten, im Integralmaß (2.15) die Eichfixierungsbedingung Gaußförmig auszuschmieren und die Fadeev-Popov-Determinante ähnlich wie bei der Pfadintegralquantisierung durch ein Funktionalintegral über komplexe Grassmann-Variablen auszudrücken, was ebenfalls zu einer Ankopplung an entsprechende Geistfelder führt.

Der Vorteil einer solchen Vorgehensweise läge zum einen in einem leichteren Zugang zum Raum der Gleichgewichtszustände, welche dann den vollständig stationären Zuständen entsprächen. Zum anderen wäre es denkbar, daß sich aufgrund der veränderten Struktur generell eine Verbesserung der Eigenschaften der korrelationsdynamischen Näherung ergibt.

Neben den vorgeschlagenen Erweiterungen, deren Ergebnisse erst noch abzuwarten sind, könnte das Scheitern der Korrelationsdynamik auch generell mit speziellen Vakuumeigenschaften nichtabelscher Yang-Mills-Theorien in Verbindung stehen. Falls das Vakuum einer Vielzahl von Konfigurationen entspricht, zwischen denen das System tunnelt, so kann ein solcher Zustand nicht erfolgreich mit einer endlichen Ordnung von verbundenen Greenfunktionen beschrieben werden, da die Clusterentwicklung in diesem Fall nicht konvergiert [31]. Es gibt mittlerweile Hinweise aus Gitter-QCD-Rechnungen, daß Instantonen in euklidischer Raum-Zeit eine bedeutende Rolle spielen [69, 70]. Diesen Instantonen entsprechen in der Minkowski-Raumzeit gerade die Tunnelamplituden, zu deren Beschreibung die Korrelationsdynamik ungeeignet ist.

# Anhang A

## Ein einfaches quantenmechanisches Beispiel für die Fixierung der Eichfreiheit in kanonischer Quantisierung

In diesem Anhang soll ein einfaches Beispiel diskutiert werden, das der normalen Quantenmechanik in  $1 + 1$  Raumzeit-Dimensionen entnommen ist. Dieses Beispiel ist hervorragend dazu geeignet, die wesentlichen Eigenschaften des Ansatzes von Abschnitt 2.1 zur Eichfixierung im kanonischen Formalismus zu präsentieren, ohne daß explizit die komplizierte Struktur der Yang-Mills-Theorie betrachtet werden muß. Das gleiche Beispiel wurde auch in [44] verwendet, um eine andere Regularisierungsprozedur für Matrixelemente zwischen physikalischen Zuständen zu illustrieren, die die Boxnormierung von ebenen Wellen als quantenmechanisches Analogon hat. Diese Regularisierungsprozedur führt zum gleichen Ergebnis wie die in dieser Arbeit verwendete Eichfixierung.

Der Hamiltonoperator sei der eines freien, nichtrelativistischen Teilchens mit Masse 1:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2}, \quad H^x \Psi(x) \equiv \langle x | \hat{H} | \Psi \rangle = -\frac{\partial_x^2}{2} \Psi(x) \quad (\text{A.1})$$

(um Verwirrung zu vermeiden, werden in diesem Anhang Operatoren jeweils durch  $\hat{\cdot}$  bezeichnet, ihre Ortsraumdarstellung wird in Analogie zu Kapitel 2 mit  $\cdot^x$  bezeichnet). Die Eigenzustände von (A.1) sind die nichtnormierbaren ebenen Wellen (Impulseigenzustände)  $|p\rangle$  mit

$$\langle x | p \rangle = N e^{ipx}. \quad (\text{A.2})$$

Man kann nun  $\hat{p}$  als das Analogon zum Gauß-Gesetz-Operator (2.5) ansehen, d.h. es gilt

$$[\hat{p}, \hat{H}] = 0 \quad (\text{A.3})$$

und die von  $\hat{p}$  generierten „Eichtransformationen“ sind die Translationen

$$\begin{aligned} \hat{U}(\Theta) &= e^{i\Theta\hat{p}}, \quad U^x(\Theta)\Psi(x) = \Psi(x + \Theta), \\ \hat{U}^{-1}(\Theta)\hat{x}\hat{U}(\Theta) &= \hat{x} - \Theta, \quad \hat{U}^{-1}(\Theta)\hat{p}\hat{U}(\Theta) = \hat{p}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Definiert man einen Raum von „physikalischen“ Zuständen durch die Bedingung der Eichinvarianz (=Translationsinvarianz), so ist der einzige überlebende Zustand die ebene Welle mit Impuls Null, d.h.

$$\hat{p}|\Psi_{ph}\rangle = 0 \Leftrightarrow |\Psi_{ph}\rangle = |p = 0\rangle. \quad (\text{A.5})$$

Für die anderen ebenen Wellen kann der Impulseigenwert  $p$  als das Analogon zu einer statischen Hintergrundladungsverteilung gesehen werden.

Sei  $\hat{O}_{inv}$  ein translationsinvarianter Operator, d.h.  $[\hat{O}_{inv}, \hat{p}] = 0$ . Um den Erwartungswert von  $\hat{O}_{inv}$  im physikalischen Zustand zu erhalten, wird zunächst ein Integralmaß eingeführt, daß zu (2.10) korrespondiert, indem das Volumen der Translationsgruppe herausdividiert wird:

$$\begin{aligned} d\mu(x) &= \left(\int d\Theta\right)^{-1} dx, \\ \langle \Psi_{ph} | \hat{O}_{inv} | \Psi_{ph} \rangle &= \int d\mu(x) \Psi_{ph}^*(x) O_{inv}^x \Psi_{ph}(x) = \left(\int d\Theta\right)^{-1} \int dx O_{inv}^x 1, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

wobei die Konstante  $N$  durch die Forderung  $\langle 1 \rangle = 1$  zu 1 bestimmt wurde. Jedoch führt  $d\mu(x)$  noch immer zu nicht wohldefinierten (unendlichen) Erwartungswerten für nicht translationsinvariante Operatoren, wie z.B.  $\hat{x}^2$ . In Analogie zur Herleitung von (2.15) wird daher geschrieben

$$\begin{aligned} 1 &\equiv \Delta(x) \int d\Theta \delta(f(x - \Theta)), \\ \int d\mu(x) \Psi_{ph}^*(x) O_{inv}^x \Psi_{ph}(x) &= \int d\Theta \int d\mu(x - \Theta) \Delta(x - \Theta) \delta(f(x - \Theta)) \Psi_{ph}^*(x - \Theta) O_{inv}^{x-\Theta} \Psi_{ph}(x - \Theta) \\ &= \int dx \Delta(x) \delta(f(x)) O_{inv}^x 1 \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

und  $d\nu(x) = dx \Delta(x) \delta(f(x))$  als neues Integralmaß definiert, welches im Fall einer Funktion  $f(x)$  mit genau einer einfachen Nullstelle  $x = x_0$  übergeht in

$$d\nu(x) = dx \delta(x - x_0). \quad (\text{A.8})$$

D.h., anstatt die räumliche Dichteverteilung für eine translationsinvariante Größe zu berechnen, indem zuerst über den gesamten Raum integriert und dann durch das Volumen dividiert wird, kann man äquivalent einfach den Wert der Größe an einem bestimmten Punkt auswählen.

Die Nichtthermitizität des Hamiltonoperators (A.1), falls er nach einem nicht translationsinvarianten Operator wirkt, kann mit Hilfe der durch (A.8) gegebenen Regularisierung z.B. einfach für den Fall des Operators  $\hat{x}^2$  diskutiert werden:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{ph} | \widehat{H} \hat{x}^2 | \Psi_{ph} \rangle &= \int d\nu(x) \Psi_{ph}^*(x) H x^2 \Psi_{ph}(x) \\ &= \int dx \delta(x - x_0) \left( -\frac{1}{2} \partial_x^2 \right) x^2 = \int dx \delta(x - x_0) (-1) = -1 \\ &\neq \langle \widehat{H} \Psi_{ph} | \hat{x}^2 | \Psi_{ph} \rangle = \int d\nu(x) \left( -\frac{1}{2} \partial_x^2 \Psi_{ph}^*(x) \right) x^2 \Psi_{ph}(x) = 0 . \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Ebenso kann ein einfaches Beispiel gegeben werden, um zu illustrieren, daß die Eichfixierungsbedingung  $x - x_0 = 0$  nur dann zu verschwindenden Erwartungswerten führt, wenn  $\hat{x}(t=0) - x_0 = \hat{x} - x_0$  **links** von allen anderen Operatoren auftaucht, mit denen es nicht kommutiert:

$$\begin{aligned} \langle \Psi_{ph} | (\hat{x} - x_0) \hat{p} \hat{x} | \Psi_{ph} \rangle &= \int dx \delta(x - x_0) (x - x_0) \frac{1}{i} = 0 \\ &\neq \langle \Psi_{ph} | \hat{p} (\hat{x} - x_0) \hat{x} | \Psi_{ph} \rangle = \int dx \delta(x - x_0) \frac{1}{i} (2x - x_0) = \frac{1}{i} x_0 . \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$





# Anhang B

## Clusterzerlegung bis zur 6-Punkt-Funktion

Zur Bestimmung der Bewegungsgleichungen für die SU(N) Yang-Mills-Theorie bis zum 4-Punkt-Niveau werden die Clusterzerlegungen bis zur vollen 6-Punkt-Funktion benötigt (vergl. Kapitel 3), wobei die verbundenen 5- und 6-Punkt-Funktionen vernachlässigt werden. Bezeichnen die Buchstaben  $A, \dots, F$  jeweils Felder  $A_i^a$  oder konjugierte Impulse  $\Pi_j^a$  (mit gleichem Zeitargument), so erhält man mittels der in Abschnitt 3.2 dargestellten Vorgehensweise:

$$\langle A \rangle = \langle A \rangle_c \tag{B.1}$$

$$\langle AB \rangle = \langle A \rangle_c \langle B \rangle_c + \langle AB \rangle_c \tag{B.2}$$

$$\begin{aligned} \langle ABC \rangle &= \langle A \rangle_c \langle B \rangle_c \langle C \rangle_c + \langle C \rangle_c \langle AB \rangle_c \\ &\quad + \langle B \rangle_c \langle AC \rangle_c + \langle A \rangle_c \langle BC \rangle_c + \langle ABC \rangle_c \end{aligned} \tag{B.3}$$

$$\begin{aligned} \langle ABCD \rangle &= \langle A \rangle_c \langle B \rangle_c \langle C \rangle_c \langle D \rangle_c + \langle C \rangle_c \langle D \rangle_c \langle AB \rangle_c \\ &\quad + \langle B \rangle_c \langle D \rangle_c \langle AC \rangle_c + \langle B \rangle_c \langle C \rangle_c \langle AD \rangle_c + \langle A \rangle_c \langle D \rangle_c \langle BC \rangle_c \\ &\quad + \langle AD \rangle_c \langle BC \rangle_c + \langle A \rangle_c \langle C \rangle_c \langle BD \rangle_c + \langle AC \rangle_c \langle BD \rangle_c \\ &\quad + \langle A \rangle_c \langle B \rangle_c \langle CD \rangle_c + \langle AB \rangle_c \langle CD \rangle_c + \langle D \rangle_c \langle ABC \rangle_c \\ &\quad + \langle C \rangle_c \langle ABD \rangle_c + \langle B \rangle_c \langle ACD \rangle_c + \langle A \rangle_c \langle BCD \rangle_c \\ &\quad + \langle ABCD \rangle_c \end{aligned} \tag{B.4}$$

$$\begin{aligned} \langle ABCDE \rangle &= \langle A \rangle_c \langle B \rangle_c \langle C \rangle_c \langle D \rangle_c \langle E \rangle_c + \langle C \rangle_c \langle D \rangle_c \langle E \rangle_c \langle AB \rangle_c \\ &\quad + \langle B \rangle_c \langle D \rangle_c \langle E \rangle_c \langle AC \rangle_c + \langle B \rangle_c \langle C \rangle_c \langle E \rangle_c \langle AD \rangle_c + \langle B \rangle_c \langle C \rangle_c \langle D \rangle_c \langle AE \rangle_c \\ &\quad + \langle A \rangle_c \langle D \rangle_c \langle E \rangle_c \langle BC \rangle_c + \langle E \rangle_c \langle AD \rangle_c \langle BC \rangle_c + \langle D \rangle_c \langle AE \rangle_c \langle BC \rangle_c \\ &\quad + \langle A \rangle_c \langle C \rangle_c \langle E \rangle_c \langle BD \rangle_c + \langle E \rangle_c \langle AC \rangle_c \langle BD \rangle_c + \langle C \rangle_c \langle AE \rangle_c \langle BD \rangle_c \end{aligned}$$







$$\begin{aligned}
& +\langle A \rangle_c \langle F \rangle_c \langle BCDE \rangle_c + \langle AF \rangle_c \langle BCDE \rangle_c \\
& +\langle A \rangle_c \langle E \rangle_c \langle BCDF \rangle_c + \langle AE \rangle_c \langle BCDF \rangle_c \\
& +\langle A \rangle_c \langle D \rangle_c \langle BCEF \rangle_c + \langle AD \rangle_c \langle BCEF \rangle_c \\
& +\langle A \rangle_c \langle C \rangle_c \langle BDEF \rangle_c + \langle AC \rangle_c \langle BDEF \rangle_c \\
& +\langle A \rangle_c \langle B \rangle_c \langle CDEF \rangle_c + \langle AB \rangle_c \langle CDEF \rangle_c
\end{aligned} \tag{B.6}$$



# Anhang C

## Die Bewegungsgleichungen der Korrelationsdynamik

Dieser Anhang enthält die Bewegungsgleichungen für verbundene gleichzeitige Greenfunktionen, die sich im 4-Punkt-Abschneideschema der Korrelationsdynamik für die  $SU(N)$  Yang-Mills-Theorie in temporalen Eichung im Heisenbergbild ergeben (cf. Kapitel 2, 3). Die entsprechenden Gleichungen im 2- und 3-Punkt-Abschneideschema erhält man durch Weglassen der Terme bzw. Bewegungsgleichungen von zu hoher Ordnung.

Da in der vorliegenden Arbeit jeweils globale Farbsinglett-Konfigurationen betrachtet werden, werden in sämtlichen Bewegungsgleichungen die 1-Punkt-Funktionen auf Null gesetzt. Auf eine darüber hinausgehende explizite Elimination der Farbfreiheitsgrade unter Zuhilfenahme von (4.11), (4.12) und (D.1)-(D.4) wird jedoch in diesem Anhang verzichtet, um einerseits nicht auf den  $SU(2)$ -Spezialfall eingeschränkt zu sein und um andererseits keine Vervielfachung der Anzahl der darzustellenden 4-Punkt-Gleichungen zu bekommen<sup>1</sup>.

Die Gleichungen werden in ihrer Darstellung bezüglich einer beliebigen orthonormierten Einteilchenbasis  $\{\Psi_\alpha\}$  angegeben, wobei die folgende Notation verwendet wird:

$$A_i^a(\vec{x}) = \sum_\alpha A_i^a(\alpha)\Psi_\alpha(\vec{x}), \quad \Pi_i^a(\vec{x}) = \sum_\alpha \Pi_i^a(\alpha)\Psi_\alpha(\vec{x}), \quad (\text{C.1})$$

$$\langle \alpha | \beta \gamma \delta \rangle = \int dx \Psi_\alpha^*(\vec{x}) \Psi_\beta(\vec{x}) \Psi_\gamma(\vec{x}) \Psi_\delta(\vec{x}),$$

$$\langle \alpha | \beta^i \gamma \rangle = \int dx \Psi_\alpha^*(\vec{x}) (\partial_{x_i} \Psi_\beta(\vec{x})) \Psi_\gamma(\vec{x}),$$

$$\langle \alpha | \beta \gamma^i \rangle = \int dx \Psi_\alpha^*(\vec{x}) \Psi_\beta(\vec{x}) (\partial_{x_i} \Psi_\gamma(\vec{x})),$$

---

<sup>1</sup>Daher werden noch einzelne Terme mit aufgeführt, die im Farbsinglett ohnehin verschwinden.



$$\langle \alpha | \beta^{ij} \rangle = \int dx \Psi_\alpha^*(\vec{x}) \left( \partial_{x_i} \partial_{x_j} \Psi_\beta(\vec{x}) \right). \quad (\text{C.2})$$

Mit (C.1) und (C.2) lauten die Gleichungen:

$$\begin{aligned} & \partial_t \langle A_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\ &= \langle A_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c + \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \end{aligned} \quad (\text{C.3})$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\ &= \langle \alpha_1 | \lambda_1^{kk} \rangle \langle A_{i_1}^{c_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c - \langle \alpha_1 | \lambda_1^{i_1 k} \rangle \langle A_k^{c_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\ &+ \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\ &+ g f^{c_1 f_1 f_2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \times \\ &\times \{ 2 \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^k \rangle \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \\ &+ \langle \alpha_1 | \lambda_1^k \lambda_2 \rangle \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \\ &- \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^{i_1} \rangle \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \} \end{aligned} \quad (\text{C.4a})$$

$$\begin{aligned} &+ g^2 f^{c_1 f_1 f_2} f^{f_2 f_3 f_4} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rangle \times \\ &\times \{ \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \langle A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \\ &+ \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \langle A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\ &+ \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_3}(\lambda_2) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \} \end{aligned} \quad (\text{C.4b})$$

$$\begin{aligned} &+ g^2 f^{c_1 f_1 f_2} f^{f_2 f_3 f_4} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rangle \times \\ &\times \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \end{aligned} \quad (\text{C.4c})$$

$$\begin{aligned} & \partial_t \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\ &= \langle \alpha_1 | \lambda_1^{kk} \rangle \langle A_{i_1}^{c_1}(\lambda_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c - \langle \alpha_1 | \lambda_1^{i_1 k} \rangle \langle A_k^{c_1}(\lambda_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\ &+ \langle \alpha_2 | \lambda_1^{kk} \rangle \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\lambda_1) \rangle_c - \langle \alpha_2 | \lambda_1^{i_2 k} \rangle \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_k^{c_2}(\lambda_1) \rangle_c \\ &+ g f^{c_1 f_1 f_2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \times \\ &\times \{ 2 \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^k \rangle \langle \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \\ &+ \langle \alpha_1 | \lambda_1^k \lambda_2 \rangle \langle \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \\ &- \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^{i_1} \rangle \langle \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \} \\ &+ g f^{c_2 f_1 f_2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \times \\ &\times \{ 2 \langle \alpha_2 | \lambda_1 \lambda_2^k \rangle \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \\ &+ \langle \alpha_2 | \lambda_1^k \lambda_2 \rangle \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\langle \alpha_2 | \lambda_1 \lambda_2^{i_2} \rangle \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \} \\
& + g^2 f^{c_1 f_1 f_2} f^{f_2 f_3 f_4} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rangle \times \\
& \times \{ \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \langle A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \\
& + \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \langle A_k^{f_3}(\lambda_2) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\
& + \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_3}(\lambda_2) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\
& + \langle \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \} \\
& + g^2 f^{c_2 f_1 f_2} f^{f_2 f_3 f_4} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \langle \alpha_2 | \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rangle \times \\
& \times \{ \langle A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_2}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_k^{f_1}(\lambda_1) \rangle_c \\
& + \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_k^{f_3}(\lambda_2) \rangle_c \\
& + \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_3}(\lambda_2) \rangle_c \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \\
& + \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_2}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \}
\end{aligned} \tag{C.5}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_t \langle A_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \\
& = \langle \Pi_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c + \langle \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \\
& + \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c
\end{aligned} \tag{C.6}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_t \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \\
& = \langle \alpha_1 | \lambda_1^{kk} \rangle \langle A_{i_1}^{c_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \\
& - \langle \alpha_1 | \lambda_1^{i_1 k} \rangle \langle A_k^{c_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \\
& + \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) \Pi_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c + \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \\
& + g f^{c_1 f_1 f_2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \times \\
& \times \{ 2 \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^k \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\
& + \langle \alpha_1 | \lambda_1^k \lambda_2 \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\
& + 2 \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^k \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \\
& + \langle \alpha_1 | \lambda_1^k \lambda_2 \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \\
& - \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^{i_1} \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \langle A_k^{f_2}(\lambda_2) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \\
& - \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^{i_1} \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \langle A_k^{f_2}(\lambda_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \} \\
& + g f^{c_1 f_1 f_2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \times \\
& \times \{ 2 \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^k \rangle \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \\
& + \langle \alpha_1 | \lambda_1^k \lambda_2 \rangle \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c
\end{aligned} \tag{C.7a}$$

$$-\langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^{i_1} \rangle \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \} \quad (\text{C.7b})$$

$$+g^2 f^{c_1 f_1 f_2} f^{f_2 f_3 f_4} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rangle \times$$

$$\times \{ \langle A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_3}(\lambda_2) \rangle_c$$

$$+ \langle A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \langle A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_3}(\lambda_2) \rangle_c$$

$$+ \langle A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c$$

$$+ \langle A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \langle A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c$$

$$+ \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c$$

$$+ \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \langle A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \} \quad (\text{C.7c})$$

$$+g^2 f^{c_1 f_1 f_2} f^{f_2 f_3 f_4} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3} \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \rangle \times$$

$$\times \{ \langle A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_1}(\lambda_1) \rangle_c$$

$$+ \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_3}(\lambda_2) \rangle_c$$

$$+ \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_3}(\lambda_2) \rangle_c \langle A_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_{i_1}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \} \quad (\text{C.7d})$$

$$\partial_t \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c$$

$$= \langle \alpha_1 | \lambda_1^{kk} \rangle \langle \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_1}^{c_1}(\lambda_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c$$

$$+ \langle \alpha_2 | \lambda_1^{kk} \rangle \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_{i_2}^{c_2}(\lambda_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c$$

$$- \langle \alpha_1 | \lambda_1^{i_1 k} \rangle \langle \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_k^{c_1}(\lambda_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c$$

$$- \langle \alpha_2 | \lambda_1^{i_2 k} \rangle \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_k^{c_2}(\lambda_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c$$

$$+ \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \Pi_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c$$

$$+ g f^{c_1 f_1 f_2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \times$$

$$\times \{ 2 \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^k \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c$$

$$+ \langle \alpha_1 | \lambda_1^k \lambda_2 \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c$$

$$+ 2 \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^k \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c$$

$$+ \langle \alpha_1 | \lambda_1^k \lambda_2 \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c$$

$$- \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^{i_1} \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c$$

$$- \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^{i_2} \rangle \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \langle A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \rangle_c$$

$$+ 2 \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^k \rangle \langle \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c$$

$$+ \langle \alpha_1 | \lambda_1^k \lambda_2 \rangle \langle \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_1}^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c$$

$$- \langle \alpha_1 | \lambda_1 \lambda_2^{i_1} \rangle \langle \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_2}(\lambda_2) \rangle_c \} \quad (\text{C.7d})$$

$$+ g f^{c_2 f_1 f_2} \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \times$$

$$\times \{ 2 \langle \alpha_2 | \lambda_1 \lambda_2^k \rangle \langle A_{i_2}^{f_2}(\lambda_2) A_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) \rangle_c \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_k^{f_1}(\lambda_1) \rangle_c$$











































$$\begin{aligned}
& + \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) A_k^{f_1}(\lambda_1) \rangle_c \langle \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \Pi_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_3}(\lambda_2) A_{i_4}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \\
& + \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_{i_4}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \Pi_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_k^{f_3}(\lambda_2) \rangle_c \\
& + \langle A_k^{f_1}(\lambda_1) A_k^{f_3}(\lambda_2) \rangle_c \langle \Pi_{i_1}^{c_1}(\alpha_1) \Pi_{i_2}^{c_2}(\alpha_2) \Pi_{i_3}^{c_3}(\alpha_3) A_{i_4}^{f_4}(\lambda_3) \rangle_c \}
\end{aligned} \tag{C.14}$$

# Anhang D

## Erhaltene Farbstruktur der 4-Punkt-Funktionen

In diesem Anhang wird die Farbstruktur der verschiedenen verbundenen 4-Punkt-Funktionen aufgeföhrt, die zu einer globalen Farbsinglett-Struktur korrespondiert und die von den Bewegungsgleichungen der 4-Punkt-Korrelationsdynamik in der Zeit erhalten wird.

In einer entsprechenden Konfiguration gilt:

$$\begin{aligned}
& \langle A_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1) A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}^{a_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}^{a_4}(\vec{x}_4) \rangle_c \\
&= \delta^{a_1 a_2} \delta^{a_3 a_4} (1 - \delta^{a_1 a_3}) \langle \langle A_{i_1}(\vec{x}_1) A_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle \rangle_c^{aabb} \\
&+ \delta^{a_1 a_3} \delta^{a_2 a_4} (1 - \delta^{a_1 a_2}) \langle \langle A_{i_1}(\vec{x}_1) A_{i_3}(\vec{x}_3) A_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle \rangle_c^{aabb} \\
&+ \delta^{a_1 a_4} \delta^{a_2 a_3} (1 - \delta^{a_1 a_2}) \langle \langle A_{i_1}(\vec{x}_1) A_{i_4}(\vec{x}_4) A_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}(\vec{x}_3) \rangle \rangle_c^{aabb} \\
&+ \delta^{a_1 a_2} \delta^{a_2 a_3} \delta^{a_3 a_4} \langle \langle A_{i_1}(\vec{x}_1) A_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle \rangle_c^{aaaa}, \tag{D.1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle \Pi_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1) A_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}^{a_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}^{a_4}(\vec{x}_4) \rangle_c \\
&= \delta^{a_1 a_2} \delta^{a_3 a_4} (1 - \delta^{a_1 a_3}) \langle \langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) A_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle \rangle_c^{aabb} \\
&+ \delta^{a_1 a_3} \delta^{a_2 a_4} (1 - \delta^{a_1 a_2}) \langle \langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) A_{i_3}(\vec{x}_3) A_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle \rangle_c^{aabb} \\
&+ \delta^{a_1 a_4} \delta^{a_2 a_3} (1 - \delta^{a_1 a_2}) \langle \langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) A_{i_4}(\vec{x}_4) A_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}(\vec{x}_3) \rangle \rangle_c^{aabb} \\
&+ \delta^{a_1 a_2} \delta^{a_2 a_3} \delta^{a_3 a_4} \langle \langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) A_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle \rangle_c^{aaaa}, \tag{D.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \langle \Pi_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1) \Pi_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}^{a_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}^{a_4}(\vec{x}_4) \rangle_c \\
&= \delta^{a_1 a_2} \delta^{a_3 a_4} (1 - \delta^{a_1 a_3}) \langle \langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) \Pi_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle \rangle_c^{aabb} \\
&+ \delta^{a_1 a_3} \delta^{a_2 a_4} (1 - \delta^{a_1 a_2}) \langle \langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) \Pi_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle \rangle_c^{abab} \\
&+ \delta^{a_1 a_4} \delta^{a_2 a_3} (1 - \delta^{a_1 a_2}) \langle \langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) \Pi_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_4}(\vec{x}_4) A_{i_3}(\vec{x}_3) \rangle \rangle_c^{abab} \\
&+ \delta^{a_1 a_2} \delta^{a_2 a_3} \delta^{a_3 a_4} \langle \langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) \Pi_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle \rangle_c^{aaaa}, \tag{D.3}
\end{aligned}$$

$$\langle \Pi_{i_1}^{a_1}(\vec{x}_1) \Pi_{i_2}^{a_2}(\vec{x}_2) \Pi_{i_3}^{a_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}^{a_4}(\vec{x}_4) \rangle_c$$



$$\begin{aligned}
&= \delta^{a_1 a_2} \delta^{a_3 a_4} (1 - \delta^{a_1 a_3}) \langle\langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) \Pi_{i_2}(\vec{x}_2) \Pi_{i_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle\rangle_c^{aabb} \\
&+ \delta^{a_1 a_3} \delta^{a_2 a_4} (1 - \delta^{a_1 a_2}) \langle\langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) \Pi_{i_3}(\vec{x}_3) \Pi_{i_2}(\vec{x}_2) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle\rangle_c^{aabb} \\
&+ \delta^{a_1 a_4} \delta^{a_2 a_3} (1 - \delta^{a_1 a_2}) \langle\langle \Pi_{i_2}(\vec{x}_2) \Pi_{i_3}(\vec{x}_3) \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle\rangle_c^{aabb} \\
&+ \delta^{a_1 a_2} \delta^{a_2 a_3} \delta^{a_3 a_4} \langle\langle \Pi_{i_1}(\vec{x}_1) \Pi_{i_2}(\vec{x}_2) \Pi_{i_3}(\vec{x}_3) A_{i_4}(\vec{x}_4) \rangle\rangle_c^{aaaa} . \tag{D.4}
\end{aligned}$$

Für  $\langle \Pi \Pi \Pi \Pi \rangle_c$  gilt die gleiche Struktur wie für  $\langle A A A A \rangle_c$ . Wie bei den verbundenen 2- und 3-Punkt-Funktionen bezeichnen die doppelten spitzen Klammern  $\langle\langle \cdot \rangle\rangle_c$  eine Funktion, die unabhängig von Farbfreiheitsgraden ist. Die hochgestellten Indizes  $.aaaa$ ,  $.aabb$ , und  $.abab$  beziehen sich auf die Konfiguration von Farbindizes, die auf der linken Gleichungsseite auftreten muß, damit die entsprechenden Terme beitragen; die Reihenfolge der Farbindizes bezieht sich dabei auf die Reihenfolge, in der die entsprechenden Operatoren in  $\langle\langle O O O O \rangle\rangle_c$  auf der rechten Gleichungsseite auftreten (die Notation ist selbsterklärend, wenn man die Kronecker-Deltas vor den farbusabhängigen Funktionen betrachtet).

Im Falle einer Farbsinglett-Konfiguration, wie er in der vorliegenden Arbeit untersucht wird, sind daher 11 verschiedene 4-Punkt-Funktionen zu betrachten, die nur von den räumlichen Koordinaten und von den Vektorindizes der entsprechenden Feldoperatoren  $A_i$  und Feldimpulse  $\Pi_i$  abhängen. Während die ursprünglichen farbabhängigen verbundenen gleichzeitigen 4-Punkt-Funktionen invariant unter einer beliebigen Vertauschung von Operatoren sind (man beachte, daß  $A_i^a(\vec{x})$  und  $\Pi_j^b(\vec{y})$  in allen verbundenen Greenfunktionen der Ordnung  $\geq 3$  vertauschen), sind die entsprechenden farbusabhängigen Funktionen invariant unter einem simultanen Austausch zweier Felder und der zugehörigen hochgestellten Farbindizes.

# Literaturverzeichnis

- [1] E.V. Shuryak: Phys. Rep. **115** (1984), 151
- [2] T. Hatsuda: Nucl. Phys. **A544** (1992), 27c
- [3] B. Peterson: Nucl. Phys. **A525** (1991), 237c
- [4] M.H. Thoma und H.J. Mang: Z. Phys. **C44** (1989), 349
- [5] M.H. Thoma und H.J. Mang: Mod. Phys. Lett. **A7** (1992), 153
- [6] C.D. Roberts und A.G. Williams: Prog. Part. Nucl. Phys. **33** (1994), 477
- [7] M.R. Pennington und K. Büttner: Phys. Rev. **D52** (1995), 5220
- [8] A. Bender und R. Alkofer: Phys. Rev. **D53** (1996), 446
- [9] M. Stingl: Z. Phys. **A353** (1996), 423
- [10] U. Habel, R. Konning, H.G. Reusch, M. Stingl und S. Wigard: Z. Phys. **A336** (1990), 435, Z. Phys. **A336** (1990), 423
- [11] H.C. Pauli: MPIH-V25-1996-REV (1996), hep-th/9608035
- [12] D. Schütte: Phys. Rev. **D31** (1985), 810
- [13] B. Faber, H. Nguyen-Quang und D. Schütte: Phys. Rev. **D34** (1986), 1157
- [14] T.S. Biró: Ann. Phys. (N.Y.) **191** (1989), 1
- [15] I.I. Kogan und A. Kovner: Phys. Rev. **D52** (1995), 3719
- [16] A. Mishra, H. Mishra, V. Sheel, S.P. Misra und P.K. Panda: Int. J. Mod. Phys. **E5** (1996), 93
- [17] H.T. Elze, M. Gyulassy und D. Vasak: Phys. Lett. **B177** (1986), 402

- [18] H.T. Elze, M. Gyulassy und D. Vasak: Nucl. Phys. **B276** (1986), 706
- [19] H.T. Elze und U. Heinz: Phys. Rep. **183** (1989), 81
- [20] H.T. Elze: Z. Phys. **C47** (1990), 647
- [21] I. Bialynicky-Birula, E.D. Davis und J. Rafelski: Phys. Lett. **B311** (1993), 329
- [22] S.J. Wang und W. Cassing: Ann. Phys. (N.Y.) **159** (1985), 328
- [23] S.J. Wang und W. Cassing: Nucl. Phys. **A495** (1989), 371c
- [24] W. Cassing und S.J. Wang: Z. Phys. **A337** (1990), 1
- [25] S.J. Wang, B.A. Li, W. Bauer und J. Randrup: Ann. Phys. (N.Y.) **209** (1991), 251
- [26] S.J. Wang, W. Zuo und W. Cassing: Nucl. Phys. **A573** (1994), 245
- [27] J.M. Häuser: *Dynamische Zweiteilchenkorrelationen in bosonischen Vielteilchensystemen*, Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik der JLU Gießen (1994)
- [28] A. Peter: *Nichtperturbative Untersuchungen zur skalaren  $\Phi^4$ -Quantenfeldtheorie*, Dissertation, Institut für Theoretische Physik der JLU Gießen (1996)
- [29] J.M. Häuser, W. Cassing, A. Peter und M.H. Thoma: Z. Phys. **A353** (1995), 301
- [30] A. Peter, J.M. Häuser, M.H. Thoma und W. Cassing: Z. Phys. **C71** (1996), 515
- [31] A. Peter, W. Cassing, J.M. Häuser und M.H. Thoma: Z. Phys. **A358** (1997), 91
- [32] S.H. Juchem: *Korrelationsdynamik für Yukawa-Theorie*, Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik der JLU Gießen (1997)
- [33] R.P. Feynman: Nucl. Phys. **B188** (1981), 479
- [34] I.M. Singer: Commun. Math. Phys. **60** (1978), 7
- [35] M.S. Narasimhan und T.R. Ramadas: Commun. Math. Phys. **67** (1979), 121

- [36] N.H. Christ und T.D. Lee: Phys. Rev. **D22** (1980), 939
- [37] P.A.M. Dirac: Canad. J. Math. **2** (1950), 129
- [38] H. Cheng und E.C. Tsai: Chinese journal of physics **25** (1987), 95
- [39] F. Lenz, H.W.L. Naus und M. Thies: Ann. Phys. **233** (1994), 317
- [40] G.C. Rossi und M. Testa: Phys. Rev. **D29** (1984), 2997
- [41] M. Hossein Partovi: Phys. Rev. **D29** (1984), 2993
- [42] I. Bialynicki-Birula und P. Kurzepa: Phys. Rev. **D29** (1984), 3000
- [43] Y. Kakudo, Y. Taguchi, A. Tanaka und K. Yamamoto: Phys. Rev. **D27** (1983), 1954
- [44] H.O. Girotti und H.J. Rothe: Phys. Rev. **D33** (1986), 3132
- [45] H. Yamagishi: Phys. Lett. **B189** (1987), 161
- [46] V.N. Gribov: Nucl. Phys. **B139** (1978), 1
- [47] S. Caracciolo, G. Curci und P. Menotti: Phys. Lett. **B113** (1982), 311
- [48] J.P. Leroy, J. Micheli und G.C. Rossi: Z. Phys. **C36** (1987), 305
- [49] S.F. Edwards und Y.V. Gulyaev: Proc. Roy. Soc. London **A279** (1964), 229
- [50] D.W. McLaughlin und L.S. Schulman: J. Math. Phys. **12** (1971), 2520
- [51] J.L. Gervais und A. Jevicki: Nucl. Phys. **B110** (1976), 93
- [52] J. Schwinger: Phys. Rev. **127** (1962), 344
- [53] P.J. Doust: Ann. Phys. **177** (1987), 169
- [54] P.J. Doust und J.C. Taylor: Phys. Lett. **B197** (1987), 232
- [55] S.J. Wang, W. Cassing, J.M. Häuser, A. Peter und M.H. Thoma: Ann. Phys. **242** (1995), 235
- [56] S.J. Wang, W. Cassing und M.H. Thoma: Phys. Lett. **B324** (1994), 5

- [57] J.W. Negele und H. Orland: *Quantum Many-Particle Systems*, Addison-Wesley (1988)
- [58] H. Nachbagauer: TUW-97-06 (1997), hep-th/9703018
- [59] A. Peter, W. Cassing, J.M. Häuser und A. Pfitzner: Nucl. Phys. **A573** (1994), 93
- [60] A. Peter: *Mikroskopische Analyse von dynamischen Zweiteilchenkorrelationen in endlichen Atomkernen*, Diplomarbeit, Institut für Theoretische Physik der JLU Gießen (1993)
- [61] J.M. Häuser, W. Cassing und A. Peter: Nucl. Phys. **A585** (1995), 727
- [62] A. Blasi und N. Maggiore: Mod. Phys. Lett. **A11** (1996), 1665
- [63] M. Lüscher: Nucl. Phys. **B219** (1983), 233
- [64] A. Pfitzner, W. Cassing und A. Peter: Nucl. Phys. **A577** (1994), 753
- [65] A. Fetter und J. Walecka: *Quantum Theory of Many Particle Systems*, McGraw-Hill, New York (1971)
- [66] M. Oleszczuk: Z. Phys. **C64** (1994), 533
- [67] P. Mansfield: Nucl. Phys. **B418** (1994), 113
- [68] M. Kawamura, K. Maeda und M. Sakamoto: Prog. Theor. Phys. **97** (1997), 939
- [69] E. Shuryak und T. Schäfer: *The QCD vacuum as an instanton liquid*, DOE-ER-40561-313 (1997), eingereicht bei Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.
- [70] M. Feurstein, H. Markum und S. Thurner: *Instantons and monopoles in lattice QCD*, Proc. Int. Workshop on Gross Properties of Nuclei and Nuclear Excitations, Hirschegg, Austria (1997), 28

# Danksagung

An erster Stelle danke ich Prof. Dr. Dr. Wolfgang Cassing für seine intensive Betreuung und seine ständige Diskussionsbereitschaft.

Ebenso gilt mein Dank Prof. Dr. Ulrich Mosel für sein reges Interesse am Fortgang dieser Arbeit.

Besonderer Dank gebührt meinem ehemaligen Mitkorrelanten Dr. Andreas Peter und dem Jäger des QGP, Dr. Markus H. Thoma, für die gute Zusammenarbeit, die auch eine Reihe von Publikationen außerhalb des Themas dieser Arbeit generiert hat.

Ebenfalls besonderer Dank gebührt Dr. Stefan Leupold („Dr. L.“) für die gute Zusammenarbeit (insbesondere bei eher mathematisch/theoretischen Fragestellungen) und für das Korrekturlesen dieser Arbeit.

Daneben sei auch meinen weiteren Hauptdiskussionspartnern für theoretische Fragestellungen, Dr. Carsten Greiner und Dr. Steffen Hardt, gedankt.

Für weitere Diskussionen zum Thema dieser Arbeit sei Prof. Dr. Tamás Biró und Prof. Shun-Jin Wang gedankt.

Besonderer Dank gilt auch meinem während seiner Diplomarbeit ebenfalls mit dynamischen Korrelationen konfrontierten Kollegen Sascha **Heinz** Juchem für die gute Zusammenarbeit, für häufiges spontanes Kaffeekochen und für die Einführung der Bundesliga-Tiprunde im 5. Stock.

Dr. Wolfgang Ehehalt, Dr. Stefan Loh, Frank Hofmann, Jochen Geiß und Dr. Horst Lenke sei für den Computerservice am Institut gedankt; Alexander Hombach sei für die Text-Installation gedankt.

Für ständige Diskussionsbereitschaft zu einer Vielzahl von fachlichen, semi-fachlichen, quasi-fachlichen und fachfremden Themen gilt außerdem Dr. Wolfgang Ehehalt, Dr. Stefan Loh, Dr. Stefan Teis, Thomas Feuster, Wolfram Peters, Alexander Hombach, Martin Effenberger, Jochen Geiß und, last but not least, Christoph Traxler Dank.

Elke Jung sei für die administrative Unterstützung gedankt.

Christiane Pausch sei für die Hilfe beim Besorgen jedweder Literatur gedankt.

Sämtlichen Institutsmitgliedern sei für die stets gute Stimmung ebenfalls besonderer Dank ausgesprochen.

Abschließend gilt mein Dank meinen Eltern für die finanzielle und ideelle Unterstützung während meines Studiums und das rege Interesse am Fortgang meiner Arbeit.