

Justus-Liebig-Universität Gießen

Fachbereich Mathematik und Informatik, Physik, Geographie

Dissertation

Zur Erlangung des akademischen Grades
Doktor der Naturwissenschaften

(Dr. rer. nat.)

Wavelets und radiale Basisfunktionen mit Anwendungen in der Optionspreistheorie

Daniel Schmidt

Mai 2017

Gutachter

Prof. Dr. Martin Buhmann
Prof. Dr. Marcus R. W. Martin (extern THM)

"Die Mathematik ist das Instrument, welches die Vermittlung bewirkt zwischen Theorie und Praxis, zwischen Denken und Beobachten: sie baut die verbindende Brücke und gestaltet sie immer tragfähiger. Daher kommt es, daß unsere ganze gegenwärtige Kultur, soweit sie auf der geistigen Durchdringung und Dienstbarmachung der Natur beruht, ihre Grundlage in der Mathematik findet."

-David Hilbert-

*Für
Anna+ und Helmut+
Lorraine und Mimi*

Ich möchte mich ganz herzlich für die ausgezeichnete Betreuung von Herrn Prof. Martin Buhmann und Herrn Prof. Marcus Martin bedanken. Ihr Engagement, als auch ihre stets hilfreichen Anregungen und Ideen haben mir immer sehr geholfen.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Radiale Basisfunktionen	2
3	Wavelets und radiale Basisfunktionen	9
3.1	Die verallgemeinerten multiquadric Funktionen	9
3.2	Prewavelets aus verallgemeinerten multiquadric Funktionen in einer Dimension	17
3.2.1	Multiresolution Analysis	17
3.2.2	Verallgemeinerte multiquadric Prewavelets	17
3.3	Wavelets aus radialen Basisfunktionen in zwei Dimensionen	34
3.3.1	Ein konstruktiver Ansatz	36
3.3.2	Der zweidimensionalen Fall	48
3.3.3	Ein Konstruktion über Gauß'sche radiale Basisfunktionen	53
3.3.4	Eine explizite Konstruktion	56
4	Anwendungen	62
4.1	Das klassische Black-Scholes-Merton-Modell	62
4.2	Das Post-Crisis Modell nach Burgard und Kjaer	66
4.2.1	Positive Auszahlungsprofile	71
4.2.2	Negative Auszahlungsprofile	73
4.2.3	Ergebnisse des unilateralen Falls	75
4.3	Eine Adomian-RBF-Wavelet-Methode zur Lösung partieller Differentialgleichungen	77
4.3.1	Der lineare Fall	77
4.3.2	Der nichtlineare Fall	83
5	Zusammenfassung und Ausblick	97
	Literatur	III

1 Einleitung

In dieser Arbeit geht es um die Konstruktion und Anwendung von radialen Basisfunktionen Wavelets auf aktuelle Fragestellungen der Optionspreistheorie. Dazu werden zunächst verallgemeinerte multiquadric Prewavelets in einer Dimension (in Anlehnung an Buhmann [4]) konstruiert. Im Zusammenhang mit der Konstruktion von verallgemeinerten multiquadric Prewavelets werden neue Eigenschaften der verallgemeinerten multiquadric radialen Basisfunktion hergeleitet. Die neuen Eigenschaften der verallgemeinerten multiquadric radialen Basisfunktion sind dabei nicht nur zentral bei der Konstruktion der Prewavelets, sondern ebenfalls notwendig für die anderen Teile dieser Arbeit. Im Anschluss an die Konstruktion der Prewavelets wird mithilfe der multiresolution Analysis eine Möglichkeit der Konstruktion von Wavelets aus radialen Basisfunktionen in einer bzw. zwei Dimensionen durchgeführt. Im Anschluss an die Herleitung der Konstruktionsmethode für RBF-Wavelets werden diese in einem eigenen Kapitel explizit konstruiert. Im dritten Teil der Arbeit wenden wir sowohl die RBF-Wavelets als auch die neuen Eigenschaften der verallgemeinerten multiquadric radialen Basisfunktion auf ein aktuelles Problem der Optionspreistheorie an. Dabei leiten wir eine semi-analytische Lösung der nichtlinearen partiellen Differentialgleichung aus Burgard und Kjaer [8] her, wobei wir in diesem Zusammenhang eine neue Adomian-RBF-Wavelet Methode zur Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen einführen. Bei dem Ansatz von Burgard und Kjaer ist es möglich, dass sowohl der Emittent der Option als auch der Kontrahent während der Laufzeit ausfallen können. Im letzten Teil der Arbeit betrachten wir einige Beispiele im Zusammenhang mit der neuen Methode und dessen finanzökonomischen Auswirkungen auf die Optionspreistheorie. Der Aufbau der Arbeit ist dabei so gewählt, dass die mathematischen Grundlagen jeweils die Einleitung zu den einzelnen Teilabschnitten darstellen. Die einzige Ausnahme bilden hierbei die radialen Basisfunktionen und deren elementare Eigenschaften, da diese alle Teile der Arbeit berühren. Aus diesem Grund erhalten die radialen Basisfunktionen ein eigenes Kapitel zu Beginn dieser Arbeit.

2 Radiale Basisfunktionen

Mit Hilfe radialer Basisfunktionen lassen sich reellwertige, multivariate Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ approximieren, die nur an gewissen Stützstellen $t_j \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \dots, m\}$ bekannt sind. Die Stützstellen $t_j \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \dots, m\}$ werden auch Zentren genannt. Zu diesen Zentren seien Funktionswerte $f(t_j)$ mit $j = 1, 2, \dots, m$ bekannt. Gesucht ist demnach beispielsweise eine Approximation s mit $s(t_j) = f(t_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$). Die allgemeine Form der Interpolanten s ist hierbei

$$s(t) := \sum_{j=1}^m \lambda_j \phi(\|t - t_j\|_2)$$

mit $t \in \mathbb{R}^n$. Weiterhin stellt $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine sogenannte radiale Basisfunktion dar, und $\|\cdot\|_2$ bezeichnet die euklidische Norm. Demnach muss für alle $t_j \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \dots, m\}$ die nachfolgende Interpolationsbedingung gelten:

$$f(t_j) := s(t) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \phi(\|t_j - t_k\|_2).$$

Dies stellt für die Koeffizienten λ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) ein lineares Gleichungssystem dar, welches lösbar ist, wenn die Matrix $A := \phi(\|t_j - t_k\|_2)_{(j,k) \in \{1, 2, \dots, m\}^2}$ nicht singular ist. Hierbei sind die bekanntesten radialen Basisfunktionen gegeben durch:

1. Die lineare radiale Basisfunktion:

$$\phi(t) = t$$

2. Die multiquadric radiale Basisfunktion:

$$\phi(t) = (t^2 + a^2)^{\frac{1}{2}}, a \in \mathbb{R}$$

3. Die Gauß'sche radiale Basisfunktion:

$$\phi(t) = \exp(-a^2 t^2), a \in \mathbb{R}$$

4. Die inverse multiquadric radiale Basisfunktion:

$$\phi(t) = (t^2 + a^2)^{-\frac{1}{2}}, a \in \mathbb{R}$$

5. Die thin plate splines radiale Basisfunktion:

$$\phi(t) = t^2 \log(t)$$

Für die radialen Basisfunktionen mit Nummern 1- 4 ist die Matrix $A := \phi(\|t_j - t_k\|_2)_{(j,k) \in \{1,2,\dots,m\}^2}$ nicht singular für:

- alle $n \in \mathbb{N}$, also für beliebige Dimensionen
- alle $m \in \mathbb{N}$, also für jede beliebige Stützstellenzahl und schließlich auch für
- jede Stützstellenverteilung $t_j \in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \dots, m\}$, sofern diese nur paarweise verschieden sind, d.h. solange $t_j \neq t_k$ für alle j und k aus $\{1, \dots, m\}$ mit $j \neq k$ gilt.

Dies bedeutet, man kann mit den radialen Basisfunktionen mit Nummern 1 - 4 immer interpolieren. Die in dieser Arbeit hauptsächlich verwendeten multiquadric und inverse multiquadric radialen Basisfunktionen sind nachfolgend beispielhaft abgebildet.

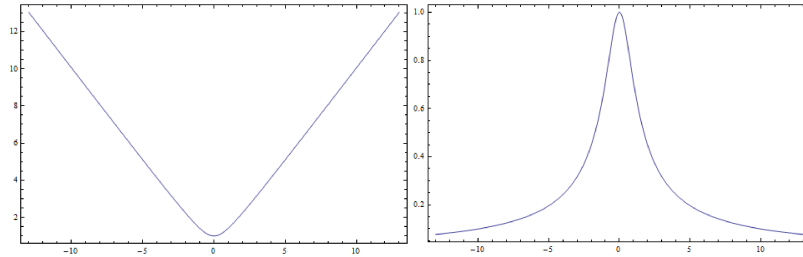


Abbildung 1: Links: Die multiquadric radiale Basisfunktion mit $a = 1$. Rechts: Die inverse multiquadric radiale Basisfunktion mit $a = 1$.

Etwas anders sieht es bei der Interpolation mit den thin plate splines aus, bei denen die Koeffizientenmatrix $A := \phi(\|t_j - t_k\|_2)_{(j,k) \in \{1,2,\dots,m\}^2}$ nicht immer regulär ist, aber dafür für das folgende, leicht modifizierte Interpolationsproblem stets eine nichtsinguläre Koeffizientenmatrix liefert:

$$\begin{cases} f(t_j) = s(t_j) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \phi(\|t_j - t_k\|_2) + p(t_j) \\ 0 = \sum_{k=1}^m \lambda_k q(t_k) = 0 \quad \text{für alle } q \in \prod_n^1, \end{cases}$$

wobei $p \in \prod_n^1$ ein Polynom vom Grad 1 ist. Im Fall $n = 2$ beispielsweise wissen wir dann mit $\prod_2^1 = \text{span}\{x^j \mid x \in \mathbb{R}^2, |j| \leq 1\}$ zwar nicht, ob A für das Grundproblem $s(t_j) = f(t_j)$ ($j = 1, 2, \dots, m$) regulär ist, aber von der modifizierten Matrix

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} A & \left(1, t_i^{(1)}, t_i^{(2)}\right)_{i \in \{1, \dots, m\}}^T \\ \left(1, t_i^{(1)}, t_i^{(2)}\right)_{i \in \{1, \dots, m\}}^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+3) \times (m+3)}$$

kann man zeigen, dass diese immer regulär ist. Hierbei seien die $t_i = \begin{pmatrix} t_i^{(1)} \\ t_i^{(2)} \end{pmatrix}$ paarweise verschieden und nicht kollinear. In den radialen Basisfunktionen 2 bis 4 ist $a \in \mathbb{R}$ jeweils der Shape Parameter. Hierbei ist die Wahl des optimalen Shape Parameters a ein offenes Problem im Forschungsgebiet der radialen Basisfunktionen. Wir werden im späteren Verlauf dieser Arbeit einige unterschiedliche Werte für a betrachten, wobei wir den Shape Parameter dazu benutzen werden, die Breite der konstruierten Wavelets zu verändern. Wir wollen uns vorher allerdings noch die Gründe für die Regularität der Koeffizientenmatrix des Interpolationsproblems noch etwas genauer ansehen, wobei wir für die Beweise der benötigten Sätze auf Buhmann [5] verweisen wollen.

Definition 2.1. Eine Funktion $F \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ heißt bedingt positiv definit der Ordnung k , kurz *b.p.d.*(k), falls für alle paarweise verschiedenen $(t_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}$ gilt: Es ist

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j F(t_i - t_j) > 0$$

für alle $(\lambda_j)_{j \in \{1, \dots, m\}} \neq 0$, die die Nebenbedingung

$$\sum_{j=1}^m \lambda_j q(t_j) = 0$$

für alle \prod_n^{k-1} erfüllen, wobei wir zusätzlich $\prod_n^{-1} := \{0\}$ gesetzt haben.

Wir wollen nun einige Spezialfälle betrachten, die nachfolgend bei der weiteren Herleitung wichtig werden.

Bemerkung 2.1. (1) für $k = 0$ sind die betrachteten Funktionen genau die positiv definiten Funktionen: Für lineare Funktionen F ist also die Abbildungsmatrix A positiv definit.

(2) Für $k = 1$ muss

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j F(t_i - t_j) > 0$$

für alle $(\lambda_k)_{k \in \{1, \dots, m\}}$ mit

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j = 0, \lambda \neq 0$$

gelten.

(3) Haben wir $k = 2$, so muss

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \lambda_i \lambda_j F(t_i - t_j) > 0$$

für alle $(\lambda_k)_{k \in \{1, \dots, m\}}$ mit

$$\sum_{j=0}^m \lambda_j q(t_j) = 0, \lambda \neq 0$$

für alle $q \in \prod_n^1$ gelten.

Es liegt also nahe, dass bedingte Positivität und die Nichtsingularität der Koeffizientenmatrix etwas miteinander zu tun haben.

Satz 2.1. *Es sei F bedingt positiv definit der Ordnung k , also b.p.d.(k) wie in Definition 2.1, und es gelte $\dim \prod_n^{k-1} |_{(t_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}} = \binom{n+k-1}{n} = \dim \prod_n^{k-1}$. Dann ist die Matrix*

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & \left((t_j^\alpha)_{j \in \{1, \dots, m\}, |\alpha| < k} \right)^T \\ \left((t_j^\alpha)_{j \in \{1, \dots, m\}, |\alpha| < k} \right)^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^\gamma$$

regulär, wobei $\gamma = \left(m + \binom{n+k-1}{n} \right) \times \left(m + \binom{n+k-1}{n} \right)$ sowie $A = (F(t_i - t_j))_{(i,j) \in \{1, \dots, m\}^2}$ und $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$ der Multiindex mit $|\alpha| := \|\alpha\|_1$ und $t^\alpha = (t^{(1)}, \dots, t^{(n)})^\alpha = (t^{(1)})^\alpha, \dots, (t^{(n)})^\alpha$ ist.

Wir merken an, dass für $k = 0$ die Matrix $\tilde{A} = A$ positiv definit, also regulär ist. Ferner besagt die Dimensionsbedingung $\dim \prod_n^{k-1} |_{(t_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}} = \binom{n+k-1}{n} = \dim \prod_n^{k-1}$ speziell angewandt mit linearen Polynomen gerade, dass die $(t_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}$ nicht kollinear sind.

Korollar 2.1. *Wenn $\Phi(\|\cdot\|) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ b.p.d.(k) ist, so ist das Interpolationsproblem*

$$\begin{cases} f(t_j) = s(t_j) = \sum_{k=1}^m \lambda_k \phi(\|t_j - t_k\|_2) + p(t_j) \\ 0 = \sum_{k=1}^m \lambda_k q(t_k) = 0 \end{cases} \text{ für alle } q \in \prod_n^1,$$

eindeutig lösbar für alle $(t_j)_{j \in \{1, \dots, m\}}$, die die Bedingung in Satz 2.1 erfüllen, wobei $p \in \prod_n^{k-1}$ ist.

Definition 2.2. Eine Funktion $g \in C(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R})$ heißt vollständig monoton, falls

$$(-1)^\ell g^{(\ell)} \geq 0 \text{ für alle } \ell \in \mathbb{N}_0$$

gilt.

An dieser Stelle wollen wir einige Beispiele zusammentragen, die wir dann direkt für unsere Herleitung benutzen wollen.

Beispiel 2.1. (1) Konstante nicht-negative Funktionen wie z.B. $g \equiv 0$ sind trivialerweise vollständig monoton.

(2) Die Funktion $g_1(t) = \exp(-c^2t)$, $c \geq 0$, ist vollständig monoton, da wegen

$$(-1)^\ell \cdot g_1^{(\ell)}(t) = (-1)^\ell \cdot \left((-c^2)^\ell \cdot \exp(-c^2t) \right) = c^{2\ell} \cdot \exp(-c^2t) > 0$$

offenbar die Vorzeichenbedingung für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ stets erfüllt ist.

(3) Auch $g_2(t) = (t + c^2)^{-\frac{1}{2}}$ ist eine vollständig monotone Funktion, da auch hier

$$\begin{aligned} (-1)^\ell \cdot g_2^{(\ell)}(t) &= (-1)^\ell \cdot \left(\prod_{k=1}^{\ell} \frac{-1 - 2(k-1)}{2} \right) (t + c^2)^{-\frac{1-2\ell}{2}} \\ &= (-1)^\ell \frac{(-1)^\ell}{2} \prod_{k=1}^{\ell} (2k-1) \cdot (t + c^2)^{-\frac{1-2\ell}{2}} \geq 0 \end{aligned}$$

für alle $\ell \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(4) Verzichtet man auf die Forderung nach Stetigkeit am Nullpunkt, ist auch $g_3(t) = t^{-1}$ vollständig monoton, denn

$$(-1)^\ell \cdot g_3^{(\ell)}(t) = (-1)^\ell (-1)^\ell \cdot \ell! \cdot t^{-(\ell+1)} = \ell! \cdot t^{-(\ell+1)} > 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}^+$.

Allerdings sind diese Beispiele noch nicht ausreichend, um für die Klasse der oben genannten radialen Basisfunktionen die Regularität der Koeffizientenmatrix zu zeigen. Dazu benötigen wir noch eine Abschwächung von Definition 2.2.

Definition 2.3. Eine Funktion $g \in C^\infty(\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R})$ heißt bedingt vollständig monoton der Ordnung k , kurz *b.v.m.(k)*, falls

$$(-1)^\ell g^{(\ell)} \geq 0 \text{ für alle } \ell \geq k$$

gilt.

Das bedeutet, dass jede vollständig monotone Funktion offenbar *b.v.m.(k)* für alle $k \in \mathbb{N}_0$ ist, sodass wir die obige Definition 2.2 subsummiert haben. Wir wollen nun noch einige Beispiele anführen, mit deren Hilfe wir dann sehen werden, dass alle oben genannten radialen Basisfunktionen zumindest für das erweiterte Interpolationsproblem eine reguläre Koeffizientenmatrix besitzen.

Beispiel 2.2. (1) Die Funktion $g_4(t) = -\sqrt{t + c^2}$ ist *b.v.m.(1)*, denn wir haben zwar

$$(-1)^0 \cdot g_4(t) = g_4(t) \leq 0 \text{ für alle } t \in \mathbb{R}^+$$

aber

$$-g_4'(t) = \frac{1}{2}(t + c^2)^{-\frac{1}{2}} \geq 0 = \frac{1}{2}g_2(t)$$

mit der vollständig monotonen Funktion g_2 aus Beispiel 2.1(3), was $k = 1$ liefert.

(2) Für $g_5(t) = t \cdot \log(t)$ erhalten wir nach zweimaligem Differenzieren

$$g_5''(t) = \frac{1}{t} = g_3(t),$$

womit nach Beispiel 2.1(4) folgt, dass g_5 *b.v.m.*(2) ist. Man beachte an der Stelle, dass bedingt vollständig monotone Funktionen nicht notwendigerweise stetig an Null sein müssen.

(3) Es gilt: Gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, sodass $g^{(k)}$ vollständig monoton ist, so ist g *b.v.m.*(k).

Da nachfolgende zentrale Satz gibt nun Aufschluss über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung.

Satz 2.2. *Es sei $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ derart, dass $\Phi \circ \sqrt{\cdot}$ *b.v.m.*(k) aber kein Polynom in \prod_1^k ist. Dann ist $\Phi \circ \|\cdot\|$ *b.p.d.*(k) auf allen \mathbb{R}^n .*

Beispiel 2.3. (1) Die Gauß'sche radiale Basisfunktion $\Phi(t) = \exp(-c^2 t^2)$ mit einem $c \in \mathbb{R}$ liefert damit

$$\Phi(\sqrt{t}) = \exp(-c^2 t) = g_1(t),$$

sodass $\Phi \circ \sqrt{\cdot}$ nach Beispiel 2.1(2) *b.v.m.*(0) ist, also $\Phi \circ \|\cdot\|$ nach Satz 2.2 *b.p.d.*(0) ist.

(2) Die negative multiquadric radiale Basisfunktion $\Phi(t) = -\sqrt{t^2 + c^2}$ mit einem $c \in \mathbb{R}$ ergibt

$$\Phi(\sqrt{t}) = -\sqrt{t + c^2} = g_4(t),$$

welches eine bedingt vollständig monotone Funktion der Ordnung $k = 1$ nach Beispiel 2.2(1) ist, weshalb nach Satz 2.2 die Funktion $\Phi \circ \|\cdot\|$ *b.p.d.*(1) ist.

(3) Betrachten wir die thin plate splines radiale Basisfunktion $\Phi(t) = t^2 \log(t)$, erhalten wir aus

$$\Phi(\sqrt{t}) = \frac{1}{2}t \cdot \log(t) = \frac{1}{2}g_5(t)$$

und zusammen mit Satz 2.2, dass die Funktion $\Phi \circ \|\cdot\|$ *b.p.d.*(2) sein muss.

(4) Für die inverse multiquadric radiale Basisfunktion $\Phi(t) = (t^2 + c^2)^{-\frac{1}{2}}$ mit einem $c \in \mathbb{R}$ erhalten wir wegen

$$\Phi(\sqrt{t}) = (t + c^2)^{-\frac{1}{2}} = g_2(t),$$

dass die Funktion $\Phi \circ \|\cdot\|$ *b.p.d.*(0) ist.

Diese kurze Einführung zu radialen Basisfunktionen soll an dieser Stelle genügen, da wir uns in dieser Arbeit hauptsächlich auf die multiquadric radiale Basisfunktion und deren Verallgemeinerungen sowie auf die Gauß'sche radiale Basisfunktion zur Konstruktion von Wavelets konzentrieren wollen.

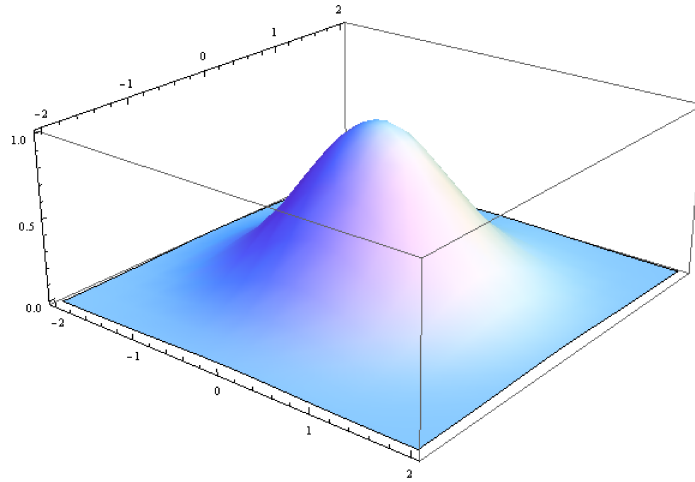


Abbildung 2: Gaußkern $\exp\left(-\|x\|_2^2\right)$ mit $x \in \mathbb{R}^2$.

3 Wavelets und radiale Basisfunktionen

In diesem Kapitel wollen wir zunächst die Prewavelets aus Buhmann [4] verallgemeinern. Danach werden wir uns einer anderen Konstruktionsmethode widmen, welche über eine multiresolution Analysis zunächst radialen Basisfunktionen Wavelets in einer Dimension erzeugt. Mithilfe bestimmter Matrizen, werden wir diese dann auf zwei Dimensionen erweitern.

3.1 Die verallgemeinerten multiquadric Funktionen

Unter dem Begriff der verallgemeinerten multiquadric Funktionen versteht man jene Funktionen, die eine Verallgemeinerung der multiquadric Funktion $(a^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}$ darstellen. Dabei erhält man die n -te multiquadric Funktion $\phi_n(t)$ mittels $\phi_n(t) = (a^2 + t^2)^{n-\frac{1}{2}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a > 0$. Wir wollen nun zunächst einige neue Eigenschaften dieser Funktionen zusammenstellen, um diese danach bei der Konstruktion von verallgemeinerten multiquadric Prewavelets zu benutzen.

Satz 3.1. Für jedes $\phi_n(t) = (a^2 + t^2)^{n-\frac{1}{2}}$ mit $n \in \mathbb{N}$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^{(2n)}(t) dt > 0 \quad (3.1.1)$$

mit $\phi_n^{(2n)}(t) = \mathcal{O}(|t|^{-1-n-\epsilon})$ und $\epsilon > 0$, soweit das Integral wohldefiniert ist.

Beispiel 3.1. Die ersten drei Beispiele hierfür sind:

$n = 1$: Dann ist $\phi_1(t) = (a^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}$ mit $\phi_1^{(2)}(t) = \frac{a^2}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^{(2)}(t) dt = \frac{t}{(a^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 2.$$

$n = 2$: Dann ist $\phi_2(t) = (a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}$ mit $\phi_2^{(4)}(t) = \frac{9a^4}{(a^2 + t^2)^{\frac{5}{2}}}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_2^{(4)}(t) dt = \frac{9a^2 t + 6t^3}{(a^2 + t^2)^{\frac{3}{2}}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 12.$$

$n = 3$: Dann ist $\phi_3(t) = (a^2 + t^2)^{\frac{5}{2}}$ mit $\phi_3^{(6)}(t) = \frac{225a^6}{(a^2 + t^2)^{\frac{7}{2}}}$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_3^{(6)}(t) dt = \frac{15(15a^4 t + 20a^2 t + 8t^5)}{(a^2 + t^2)^{\frac{5}{2}}} \Big|_{-\infty}^{\infty} = 240.$$

Beweis. Es ist ausreichend zu zeigen, dass

$$\phi_n^{(2n)}(t) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \prod_{i=1}^n (2i-1)^2 \frac{t^{2k}}{(a^2 + t^2)^{k+\frac{1}{2}}} = \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)^2 \cdot a^{2n}}{(a^2 + t^2)^{n+\frac{1}{2}}} \quad (3.1.2)$$

mit $a \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)^2 \cdot a^{2n}}{(a^2+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} dt = \frac{p(t)}{q(t)} \Big|_{-\infty}^{\infty} = \text{const.} \neq 0,$$

da $p(t) \in \prod_t^{2n-1}$ also ein Polynom genau vom Grad $2n-1$ und $q(t) = (a^2+t^2)^{n-\frac{1}{2}}$ ist. Diese Notation werden wir auch nachfolgend immer wieder benutzen. Ferner gilt dann auch $\phi_n^{(2n)}(t) = \mathcal{O}(|t|^{-1-n-\epsilon})$ mit $\epsilon > 0$.
Für das zweite Gleichheitszeichen reicht es zu zeigen:

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{t^{2k}}{(a^2+t^2)^{k+\frac{1}{2}}} = \frac{a^{2n}}{(a^2+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} \quad (3.1.3)$$

Dies ergibt sich aus:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^n (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{t^{2k}}{(a^2+t^2)^{k+\frac{1}{2}}} \\ &= \binom{n}{0} \cdot \frac{1}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}} - \binom{n}{1} \frac{t^2}{(a^2+t^2)^{\frac{3}{2}}} + \binom{n}{2} \frac{t^4}{(a^2+t^2)^{\frac{5}{2}}} - \dots \pm \binom{n}{n} \frac{t^{2n}}{(a^2+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\binom{n}{0} (a^2+t^2)^{\frac{3}{2}} \cdot \dots \cdot (a^2+t^2)^{n+\frac{1}{2}} - \dots \pm \binom{n}{n} \cdot t^{2n} (a^2+t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot (a^2+t^2)^{n-\frac{1}{2}}}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}} \cdot \dots \cdot (a^2+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\binom{n}{0} (a^2+t^2)^{(\sum_{k=0}^n k+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} - \dots \pm \binom{n}{n} t^{2n} (a^2+t^2)^{(\sum_{k=0}^n k+\frac{1}{2})-(n+\frac{1}{2})}}{(a^2+t^2)^{(\sum_{k=0}^n k+\frac{1}{2})}} \\ &= \frac{(a^2+t^2)^{(\sum_{k=0}^n k+\frac{1}{2})-\frac{1}{2}} \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{1} t^2 (a^2+t^2)^{-1} + \dots \pm \binom{n}{n} t^{2n} (a^2+t^2)^{-n} \right]}{(a^2+t^2)^{(\sum_{k=0}^n k+\frac{1}{2})}} \\ &= \frac{\left[\binom{n}{0} (a^2+t^2)^n - \dots \pm \binom{n}{n} t^{2n} (a^2+t^2)^0 \right]}{(a^2+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{(a^2+t^2-t^2)^n}{(a^2+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{a^{2n}}{(a^2+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Die Gleichheit $\phi_n^{(2n)}(t) = \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)^2 a^{2n}}{(a^2+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}$ folgt dann mittels Fourier-Transformation auf beiden Seiten der Gleichung.

Zunächst betrachten wir die linke Seite:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\phi_n^{(2n)}(t)\right) &= (-1)^n r^{2n} \mathcal{F}\left(\phi_n(t)\right) = \frac{(-1)^n r^{2n} 2^{\frac{1}{2}+n} a^n}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) |r|^n} K_n(ar) \\ &= \frac{(-1)^n 2^{\frac{1}{2}+n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)} |r|^n a^n K_n(ar) = \frac{\sqrt{2}(2n)!}{n! \cdot 2^n \sqrt{\pi}} |r|^n a^n K_n(ar).\end{aligned}$$

Sowie die rechte Seite der Gleichung:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(\frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)^2 \cdot a^{2n}}{(a^2+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}\right) &= \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)^2 2^{\frac{1}{2}-n}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)} |r|^n a^n K_n(ar) \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)^2 \sqrt{2} \cdot n! \cdot 2^n}{(2n)! \sqrt{\pi}} |r|^n a^n K_n(ar)\end{aligned}$$

hierbei ist K_n die modifizierte Besselfunktion zweiter Art und $\Gamma(\cdot)$ die Gamma-Funktion. Die Fourier-Transformation der multiquadric Funktionen ist hierbei in Buhmann [5] zu finden. Es muss dann offenbar nur noch die Gleichheit der Vorfaktoren betrachtet werden. Die Gleichheit von

$$\left(\frac{(2n)!}{n! \cdot 2^n}\right)^2 = \prod_{i=1}^n (2i-1)^2$$

folgt direkt mittels Induktion nach n , denn offenbar gilt die Gleichung für $n = 1$. Für den Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$ gilt:

$$\begin{aligned}\left(\frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot 2^{n+1}}\right)^2 &= \prod_{i=1}^n (2i-1)^2 \left(\frac{(2n+1)(2n+2)}{(2n+2)}\right)^2 \\ &= \prod_{i=1}^n (2i-1)^2 (2n+1)^2 = \prod_{i=1}^{n+1} (2i-1)^2.\end{aligned}$$

□

Korollar 3.1. Die Funktionen $\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}\phi_n(t)$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \in \mathbb{R}$ sind selbst wieder radiale Basisfunktionen und $\frac{d^{2n}}{dt^{2n}}\phi_n(\|t\|)$ ist positiv definit.

Beweis. Es gilt:

$$\begin{aligned} & (-1)^\ell \left((t+a^2)^{-n-\frac{1}{2}} a^{2n} \right)^\ell \\ &= \prod_{k=1}^{\ell} \left(n + \frac{(2k-1)}{2} \right) (t+a^2)^{-n-\frac{1}{2}-\ell} a^{2n} \geq 0 \end{aligned}$$

Dies folgt direkt mittels des Satzes über positiv definite radiale Basisfunktionen aus Buhmann [5]. \square

Lemma 3.1. Für die Ableitung

$$\frac{d^k}{dt^k} \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{d^k}{dt^k} (\cosh(\operatorname{arsinh}(t)))^{-2n-1}$$

mit $t \in \mathbb{R}$ und $n, k \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{d^k}{dt^k} \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} = (-1-2n) \left(2^{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} \left(-n - \frac{1}{2} - j \right) \cdot t^k (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{k-1-i} \binom{k}{2i} \prod_{j=1}^i (2j-1) \prod_{j=1}^{k-1-i} \left(-n - \frac{1}{2} - j \right) t^{k-2i} (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}+i} \right). \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis folgt mit Induktion über k und es gilt für $k=0$:

$$\frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} = (\cosh(\operatorname{arsinh}(t)))^{-2n-1}.$$

Für $k \rightarrow k+1$ gilt:

$$\begin{aligned} & \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d^k}{dt^k} \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} \right) \\ &= (-1-2n) \cdot \frac{d}{dt} \left(2^{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} \left(-n - \frac{1}{2} - j \right) \cdot t^k (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}} \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{k-1-i} \binom{k}{2i} \prod_{j=1}^i (2j-1) \prod_{j=1}^{k-1-i} \left(-n - \frac{1}{2} - j \right) t^{k-2i} (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}+i} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \alpha \left(k \cdot t^{k-1} (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}} + t^k \frac{2t \cdot (-n-k-\frac{1}{2})}{(1+t^2)^{n+k+\frac{3}{2}}} \right) \\
&+ \beta \left((k-2i) \cdot t^{k-2i-1} \cdot (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}+i} + \frac{t^{k-2i} \cdot 2t \cdot (-n-k-\frac{1}{2}+i)}{(1+t^2)^{n+k+\frac{3}{2}-i}} \right)
\end{aligned}$$

mit

$$\alpha = 2^{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} \left(-n - \frac{1}{2} - j \right)$$

und

$$\beta = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{k-1-i} \binom{k}{2i} \prod_{j=1}^i (2j-1) \prod_{j=1}^{k-1-i} \left(-n - \frac{1}{2} - j \right).$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
&= (-1-2n) \cdot \left(2^k \prod_{j=1}^k \left(-n - \frac{1}{2} - j \right) \cdot t^{k+1} (1+t^2)^{-n-k-\frac{3}{2}} + \alpha \cdot k \cdot t^{k-1} (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}} \right. \\
&+ \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{k-i} \binom{k}{2i} \prod_{j=1}^i (2j-1) \prod_{j=1}^{k-i} \left(-n - \frac{1}{2} - j \right) t^{k+1-2i} (1+t^2)^{-n-k-\frac{3}{2}+i} \\
&\left. + \beta \cdot (k-2i) \cdot t^{k-2i-1} \cdot (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}+i} \right).
\end{aligned}$$

Wir müssen nun die Koeffizienten der Summen einzeln betrachten und etwas separieren. Offenbar muss für den Koeffizienten $t^{k-1} (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}}$ gelten:

$$\begin{aligned}
&2^{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} \left(-n - \frac{1}{2} - j \right) \cdot t^{k-1} (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}} \left(k + \binom{k}{2} \right) \\
&= 2^{k-1} \binom{k+1}{2} \prod_{j=1}^{k-1} \left(-n - \frac{1}{2} - j \right) t^{k-1} (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Denn es gilt:

$$k + \binom{k}{2} = \frac{2k + k^2 - k}{2} = \frac{k \cdot (k+1)}{2} = \binom{k+1}{2}$$

Damit folgt dann für $k+1$:

$$\frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} = (-1-2n) \cdot \left(2^k \prod_{j=1}^k \left(-n - \frac{1}{2} - j \right) \cdot t^{k+1} (1+t^2)^{-n-k-\frac{3}{2}} \right.$$

$$\begin{aligned}
& +2^{k-1} \binom{k+1}{2} \prod_{j=1}^{k-1} \left(-n - \frac{1}{2} - j\right) t^{k-1} (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}} \\
& + \sum_{i=2}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{k-i} \binom{k}{2i} \prod_{j=1}^i (2j-1) \prod_{j=1}^{k-i} \left(-n - \frac{1}{2} - j\right) t^{k+1-2i} (1+t^2)^{-n-k-\frac{3}{2}+i} \\
& + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{k-1-i} \binom{k}{2i} \prod_{j=1}^i (2j-1) \prod_{j=1}^{k-1-i} \left(-n - \frac{1}{2} - j\right) \cdot (k-2i) \cdot t^{k-2i-1} \cdot (1+t^2)^{-n-k-\frac{1}{2}+i}
\end{aligned}$$

und schließlich wegen

$$\binom{k}{2i} \cdot (k-2i) = \frac{(2i+1)k!}{(2i+1)!(k-(2i+1))} = \binom{k}{2i+1} \cdot (2i+1)$$

und

$$\prod_{j=1}^i (2j-1) \cdot (2i+1) = \prod_{j=1}^{i+1} (2j-1)$$

folgt:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^{k+1}}{dt^{k+1}} \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} = (-1-2n) \left[2^k \prod_{j=1}^k \left(-n - \frac{1}{2} - j\right) \cdot t^{k+1} (1+t^2)^{-n-k-\frac{3}{2}} \right. \\
& \left. + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor} 2^{k-i} \binom{k+1}{2i} \prod_{j=1}^i (2j-1) \prod_{j=1}^{k-i} \left(-n - \frac{1}{2} - j\right) t^{k-2i+1} (1+t^2)^{-n-k-\frac{3}{2}+i} \right]
\end{aligned}$$

□

Satz 3.2. *Es existieren keine Ableitungen $\frac{d^k}{dt^k}\phi_n(t)$, $t \in \mathbb{R}$ mit $k, n \in \mathbb{N}$ und $k \neq 2n$, für die $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^{(k)}(t)dt \neq 0$ und wohldefiniert ist.*

Beweis. Für $\frac{d^k}{dt^k}\phi_n(t)$ mit $k < n$, ist $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^k}{dt^k}\phi_n(t)$ unbeschränkt. Ist $k = n$, gilt für $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^k}{dt^k}\phi_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{q(t)}$ mit $p(t) \in \overset{\circ}{\prod}_t^n$ und $q(t) = (a^2 + t^2)^{\frac{1}{2}}$, was nur für den Spezialfall $k = n = 1$ beschränkt ist und $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_1^{(2)}(t)dt = \frac{t}{(a^2+t^2)^{\frac{1}{2}}} \Big|_{-\infty}^{\infty}$ entspricht. Für $n < k < 2n - 1$ ist $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d^k}{dt^k}\phi_n(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{p(t)}{q(t)}$ unbeschränkt, da $p(t) \in \overset{\circ}{\prod}_t^k$ und $q(t) = (a^2 + t^2)^{\frac{n}{2}}$ ist. Für $k > 2n$ wissen wir mit Lemma 3.1, dass für alle Ableitungen

$$\frac{d^k}{dt^k} \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{\lambda_0 t^k}{(1+t^2)^{n+k+\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{\lambda_i t^{k-2i}}{(1+t^2)^{n+k+\frac{1}{2}-i}}$$

gilt. Wobei $\lambda_0, \dots, \lambda_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \in \mathbb{R}$ wie in Lemma 3.1 sind. Wir nehmen darauf Bezug und setzen o.B.d.A. $a = 1$ und multiplizieren $\phi_n^{(2n)}(t)$ mit $\prod_{i=1}^n (2i-1)^{-2}$, sodass

$$\phi_n^{(2n)}(t) \cdot \prod_{i=1}^n (2i-1)^{-2} = \frac{1}{(1+t^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

ist. Dies ändert nichts an der Konvergenz des Integrals. Wir können dann direkt sehen, dass

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{\lambda_0 t^k}{(1+t^2)^{n+k+\frac{1}{2}}} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{\lambda_i t^{k-2i}}{(1+t^2)^{n+k+\frac{1}{2}-i}} \right) = 0$$

gilt, da der Nenner für beliebiges aber festes $n, k \in \mathbb{N}$ immer schneller fällt, als der Zähler wächst und somit das Integral niemals gegen eine Konstante ungleich der Null konvergieren kann. \square

Korollar 3.2. Der Normierungsfaktor $\alpha \in \mathbb{Q}$, für den $\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^{(2n)}(t) dt = 1$ gilt, ist $\frac{1}{2^p}$, mit $p = (\prod_{i=1}^n 2i - 1) \cdot (n - 1)! \cdot 2^{n-1}$.

Beweis. Für das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^{(2n)}(t) dt$ mit $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^{(2n)}(t) dt = \varphi(t) + \prod_{i=1}^n (2i - 1)^2 t \cdot a^{-1} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + n; \frac{3}{2}; -\frac{t^2}{a^2} \right) \Big|_{-\tau}^{\tau}$$

mit

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{-1} \phi_n^{(2n)}(t) dt + \int_1^{\infty} \phi_n^{(2n)}(t) dt$$

wobei ${}_2F_1(a; b; c; t)$ die hypergeometrische Funktion mit Parametern a, b, c in t und $\tau \rightarrow 1$, $\tau < 1$ ist. Mit Euler Transformation und Symmetrie folgt:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^{(2n)}(t) dt &= \varphi(t) + \prod_{i=1}^n (2i - 1)^2 t \cdot a^{-1} {}_2F_1 \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + n; \frac{3}{2}; -\frac{t^2}{a^2} \right) \Big|_{-\tau}^{\tau} \\ &= \varphi(t) + \prod_{i=1}^n (2i - 1)^2 t \cdot a^{-1} \left(1 + \frac{t^2}{a^2} \right)^{n-\frac{1}{2}} {}_2F_1 \left(1; 1 - n; \frac{3}{2}; -\frac{t^2}{a^2} \right) \Big|_{-\tau}^{\tau} \\ &= \varphi(t) + \prod_{i=1}^n (2i - 1)^2 t \cdot a^{-1} \left(1 + \frac{t^2}{a^2} \right)^{n-\frac{1}{2}} {}_2F_1 \left(1 - n; 1; \frac{3}{2}; -\frac{t^2}{a^2} \right) \Big|_{-\tau}^{\tau} \\ &= \varphi(t) + \prod_{i=1}^n (2i - 1)^2 t \cdot a^{-1} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{n-1}{k} \frac{(1)_{(k)}}{\left(\frac{3}{2}\right)_{(k)}} \left(-\frac{t^2}{a^2} \right)^k \Big|_{-\tau}^{\tau} \end{aligned}$$

wobei $(q)_n = q(q+1) \cdot \dots \cdot (q+n-1)$ das Pochhammer-Symbol ist. Für die Normierung ist offenbar nur $\prod_{i=1}^n (2i - 1)^2 \frac{(1)_{(n)}}{\left(\frac{3}{2}\right)_{(n)}}$ von Interesse, und es gilt:

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^n (2i - 1)^2 \frac{(1)_{(n)}}{\left(\frac{3}{2}\right)_{(n)}} &= \frac{\prod_{i=1}^n (2i - 1)^2 (n - 1)! \cdot 2^{n-1}}{\prod_{i=1}^n (2i - 1)} \\ &= \prod_{i=1}^n (2i - 1) \cdot (n - 1)! \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

□

3.2 Prewavelets aus verallgemeinerten multiquadric Funktionen in einer Dimension

In diesem Kapitel wird das Vorgehen aus Buhmann [4] zur Konstruktion von multiquadric Prewavelets so erweitert, dass es für die verallgemeinerten multiquadric Funktionen ebenfalls funktioniert. Zudem wird gezeigt, dass durch Erhöhung des Trägers der B-Splines die Prewavelets als $(2d + 2\lambda + 2)$ -te dividierte Differenzen von $\phi_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, berechnet werden können.

3.2.1 Multiresolution Analysis

Eine geschachtelte Folge von Funktionenräumen $\cdots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset V_3 \subset \cdots$ heißt multiresolution Analysis, oder kurz MRA, wenn

$$(S1) \quad V_j \subset V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(S2) \quad f(\cdot) \in V_j \iff f(A\cdot) \in V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

$$(S3) \quad f(\cdot) \in V_j \iff f(\cdot - \alpha) \in V_j, \quad j \in \mathbb{Z}, \alpha \in \mathbb{Z}^d$$

$$(S4) \quad \overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}^d)$$

$$(S5) \quad \bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$$

gilt, wobei $f \in L^2(\mathbb{R})$ ist. Zudem ist $A = 2$ in einer Dimension $d = 1$ und für $d \geq 2$, ist A eine reguläre $(d \times d)$ -Matrix mit ganzzahligen Einträgen und $|\det A| > 1$. Hierbei bedeutet (S2), dass die Skalen selbstähnlich sind und (S3), dass die V_j translationsinvariant sind. Solche Teilräume werden durch Funktionen $\phi(x) \in L^2(\mathbb{R}^d)$ erzeugt. Ein einfaches Beispiel für eine solche Funktion ist die Haar-Funktion

$$\phi(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Diese Funktionen wollen wir uns zunutze machen, um nachfolgend unsere verallgemeinerten multiquadric Prewavelets zu konstruieren.

3.2.2 Verallgemeinerte multiquadric Prewavelets

Es seien zwei Folgen

$$x = \{\cdots < x_{-1} < x_0 < x_1 < x_2 < \cdots\}$$

$$\tau = \{\cdots < \tau_{-1} < \tau_0 < \tau_1 < \tau_2 < \cdots\}.$$

mit $\tau_{2i-1} = x_i$, $i \in \mathbb{Z}$ gegeben. Hierbei soll gelten:

$$\kappa := \sup_{i \in \mathbb{Z}} (\tau_{i-1} - \tau_i) < \infty$$

und

$$\delta := \inf_{i \in \mathbb{Z}} (\tau_{i-1} - \tau_i) > 0.$$

Zudem seien $\{B_j^c\}_{j=-\infty}^{\infty}$ und $\{B_j^f\}_{j=-\infty}^{\infty}$ Folgen von B-Splines mit dem Grad $d+\lambda$, $d, \lambda \in \mathbb{N}_0$ auf den Folgen x und τ mit Träger $[x_j, x_{j+d+\lambda+1}]$ und $[\tau_j, \tau_{j+d+\lambda+1}]$, welche normalisiert sind, um eine Partitionierung der Eins zu bilden. Für eine Dimension ist $d = 1$. Weiterhin ist $|\phi_n^{(2n)}(t)| = \mathcal{O}(|t|^{-1-d-\epsilon})$ für $\epsilon > 0$ zu $t \rightarrow \pm\infty$, und es existiert eine reelle Fourier-Transformierte $\widehat{\phi_n^{(2n)}}(t) > 0$ mit $t \in \mathbb{R}$. Wählt man nun $\vartheta_n(t)$ wie folgt:

$$\vartheta_n(t) = \frac{1}{2p} \phi_n^{(2n)}(t) = \frac{1}{2p} \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)^2 \cdot a^{2n}}{(a^2 + t^2)^{n+\frac{1}{2}}}, \quad (3.2.1)$$

gilt zudem $\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t) dt = 1$. Um mit diesen Funktionen in einer Dimension ($d = 1$) zu arbeiten, gilt offenbar $\varepsilon = 2n - 1$ sowie $\lambda = \varepsilon - 1$. Das heißt in einer Dimension ist λ immer gerade. Denn für $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ ist $\lambda = 0, 2, 4, 6, \dots$ gegeben. Wir setzen nun

$$C_j := B_j^{c, d+\lambda} \star \vartheta_n,$$

$$F_j := B_j^{f, d+\lambda} \star \vartheta_n,$$

wobei \star Faltung bedeutet und $j \in \mathbb{Z}$ ist. Dann folgt direkt, dass

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |F_j(t)| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j(t) = 1$$

und

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |C_j(t)| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j(t) = 1$$

gilt, denn die normalisierten B-Splines zerlegen die Eins und $\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t) dt = 1$.

Lemma 3.2. Die Funktionen C_j und F_j sind $(2n)$ -te dividierte Differenzen von ϕ_n .

Beweis. Definiert $D[\xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{j+d+\lambda+1}]_u \phi_n(t-u)$ die dividierte Differenz als Linearkombination der Funktionswerte an den ξ_j , so erhält man mit $d = 1$ die $(2n)$ -ten dividierten Differenzen von $\phi_n(t)$. Mit Peano-Kern Form gilt:

$$D[\xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{j+d+\lambda+1}]g = \frac{1}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} g^{(2n)}(u) B^{d+\lambda}(u) du,$$

wählt man nun $g(u) = \phi_n(t-u)$, so erhält man:

$$D[\xi_j, \xi_{j+1}, \dots, \xi_{j+d+\lambda+1}]_u \phi_n(t-u) = \frac{1}{(2n)!} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t-u) B^{d+\lambda}(u) du.$$

□

Wir definieren nun die zwei Vektorräume V_0 und V_1 wie folgt:

$$V_0 := \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j C_j \mid c = \{c_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

$$V_1 := \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j F_j \mid c = \{c_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z}) \right\}$$

Lemma 3.3. Der Vektorraum V_0 ist im Vektorraum V_1 enthalten.

Beweis. Es sei $c = \{c_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ und $f \in V_0$ punktweise definiert, dann gilt:

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j B_j^{c,d+\lambda} \star \vartheta_n, t \in \mathbb{R}.$$

Daher ist $f(\cdot)$ absolut konvergent und begrenzt in $\|c\|_{\infty}$, da $\vartheta_n(x-y) \geq 0$ und die normalisierten B-Splines die Eins zerlegen. Nach de Boor [16] existiert eine Konstante Q , welche nur vom Grad $d + \lambda$ von $B_j^{c,d+\lambda}$ abhängt, sodass

$$Q \|c\|_p \leq \left\| \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \left(\frac{d+\lambda+1}{t_{j+d+\lambda+1} - t_j} \right)^{\frac{1}{p}} B_j^{c,d+\lambda} \right\|_p \leq \|c\|_p$$

mit $1 \leq p \leq \infty$ und $Q > 0$ gilt. Dann ist Q durch $\frac{2^{-(d+\lambda)-2} \sqrt{\pi(d+\lambda)}}{2(d+\lambda)+1}$ nach unten begrenzt. Hierzu sei auch auf Christensen [11] verwiesen. Mit $p = 2$ und der Cauchy-Schwarz Ungleichung können wir die Summation und Integration vertauschen, und es gilt:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j B_j^{c,d+\lambda}(y) \vartheta_n(t-y) dy$$

Mit dem Satz von Curry-Schoenberg folgt dann

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \tilde{c}_j B_j^{f,d+\lambda}(y) \vartheta_n(t-y) dy$$

mit $h = (\tilde{c}_j) \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Die Rückvertauschung von Integral und Summe ergibt dann $f \in V_1$. \square

Satz 3.3. *Es sei $\{\tau^k\}_{k=0}^{\infty}$ eine Folge verschachtelter Teilfolgen in \mathbb{R} mit $\tau^0 \subset \tau^1 \subset \dots$. Dann gilt*

$$\kappa_k := \sup_{j \in \mathbb{Z}} (\tau_{j-1}^k - \tau_j^k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

wodurch τ^k dicht liegt in \mathbb{R} für $k \rightarrow \infty$. Hierbei ist $\tau^k = \{\tau_j^k\}_{j=-\infty}^{\infty}$. Ferner sei $V_k = \mathcal{L}_{\tau,d,\vartheta_n}$, wobei $\mathcal{L}_{\tau,d+\lambda,\delta}$ der Vektorraum des Splines mit Knoten τ^k vom Grad $d + \lambda$ und ϑ_n ist. Dann gilt

$$\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R}).$$

Beweis. Da die Fourier Transformation ein isometrischer Isomorphismus von $L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$ ist, beweisen wir dies mittels Fourier Transformation. Sei $\hat{h} \in C_c(\mathbb{R})$, wobei $C_c(\mathbb{R})$ der Vektorraum der stetigen Funktionen mit kompaktem Träger auf \mathbb{R} ist. Diese sind dicht in $L^2(\mathbb{R})$. Wir müssen zeigen, dass \hat{h} beliebig genau in $L^2(\mathbb{R})$ approximiert werden kann durch eine Funktion der Art $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \widehat{B_j^{f,[k]}} \vartheta_n$, wenn k groß genug ist. Wobei wieder $c = \{c_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ und $\{B_j^{f,[k]}\}_{j=-\infty}^{\infty}$ die B-Splines in $\mathcal{L}_{\tau,d+\lambda,\vartheta_n}$ sind. Da wir verlangt haben, dass für alle $\widehat{\vartheta}_n > 0$ gilt, ist $\frac{\hat{h}}{\widehat{\vartheta}_n} \in L^2(\mathbb{R})$, und es kann beliebig genau durch eine Funktion der Art $\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j \widehat{B_j^{f,[k]}}$ approximiert werden, wenn k groß genug ist. Daraus folgt die Behauptung. \square

Wir wollen nun verallgemeinerte multiquadric Prewavelets mit nicht äquidistanten Knoten konstruieren. Dazu werden wir *verallgemeinerte fundamentale Funktionen* benutzen, wobei der Begriff der fundamentalen Funktionen aus Buhmann und Micchelli [6] sowie Chui und Wang [12] stammt und hier zu *verallgemeinerten fundamentalen Funktionen* erweitert wird. In [6, 12] sind damit Splines vom Grad $(2d + 1)$ gemeint. Hier werden wir das Konzept auf Splines vom Grad $(2d + 2\lambda + 1)$ erweitern, wobei $\lambda = \epsilon - 1$ in Abhängigkeit von $\vartheta_n(t)$ und der Dimension gewählt werden muss. Angenommen es existieren $u^\ell = \{u_k^\ell\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z}) \setminus \{0\}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, sodass

$$\Psi_{\ell,n}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k^\ell \int_{-\infty}^{\infty} B_k^{f,2d+2\lambda+1}(t-y) \vartheta_n(y) dy \quad (3.2.2)$$

wobei $B_k^{f,2d+2\lambda+1} \in \mathcal{L}_{\tau,2d+2\lambda+1,\delta}$ die B-Splines mit Träger $[\tau_k, \tau_{k+2d+2\lambda+1}]$ sind. Man erhält die Identität:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(y - \tau_{j+d+\lambda+1}) \Psi_{\ell,n}(y) dy = \begin{cases} 1, & \text{wenn } \ell = j \text{ und } d + \lambda \text{ ungerade,} \\ 1, & \text{wenn } \ell = j + 1 \text{ und } d + \lambda \text{ gerade,} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad (3.2.3)$$

wobei $j, \ell \in \mathbb{Z}$ sind. Die Funktionen $\Psi_{\ell,n}(t)$ nennen wir *verallgemeinerten fundamentalen Funktionen*, da sie eine weiterentwicklung der fundamentalen Funktionen aus [6, 12, 4] darstellen. Sei ψ_ℓ definiert durch $\psi_\ell := \Psi_{2\ell,n}^{(d+\lambda+1)}$. Dies ist in V_1 enthalten, denn die $(d + \lambda + 1)$ -te Ableitung eines B-Splines vom Grad $2d + 2\lambda + 1$ ist darstellbar über Linearkombinationen von B-Splines vom Grad $d + \lambda$. Die benötigte Orthogonalität $\psi_\ell \perp V_0$ gilt, wenn

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_\ell(t) C_k(t) dt = 0, \quad k, \ell \in \mathbb{Z}$$

gilt. Zusammen mit Kapitel 3.2.1 folgt $W_0 \perp V_0$. Dies folgt mittels partieller Integration und einem Dirac-Kamm Argument, denn

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \psi_\ell(t) C_k(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} B_j^{c,d+\lambda} \star \vartheta_n \frac{d^{d+\lambda+1}}{dt^{d+\lambda+1}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k^\ell \int_{-\infty}^{\infty} B_k^{f,2d+2\lambda+1}(t-y) \vartheta_n(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{d^{d+\lambda+1}}{dt^{d+\lambda+1}} B_j^{c,d+\lambda} \right) \star \vartheta_n}_{\text{Dirac-Kamm}} \Psi_{2\ell,n}(t) \\ &= (-1)^{d+\lambda+1} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k^j \vartheta_n(t - t_k) \Psi_{2\ell,n}(t) = 0, \quad j \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Offenbar gilt die Orthogonalität in einer Dimension $d = 1$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ und $\lambda = 0, 2, 4, \dots$, denn die $(d + \lambda + 1)$ -te Ableitung eines B-Splines $B_j^{c,d+\lambda}$ ist eine endliche Kombination von delta Funktionen $\delta(\cdot - t_k)$ mit $k \in \mathbb{Z}$.

Wir wollen nun nachfolgend die Bedingungen an verallgemeinerte *multiquadric Prewavelets* angeben und sie dann Stück für Stück herleiten und zeigen, dass diese für $n = 1, 2, 3, \dots$ gelten.

Lemma 3.4. *Für $\tau \in \beta \cdot \mathbb{Z}$ mit $\beta \in \mathbb{Q}$ lassen sich die Bedingungen an Prewavelets $\psi_\ell \in V_1$ und $V_1 = V_0 \oplus W_0$ wie folgt schreiben:*

$$\sup_{t \in (-\infty; \infty)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t - \tau_j) < 2 \inf_{\theta \in (-\beta(d+\lambda+1); \beta(d+\lambda+1))} \Phi(\theta) \quad (3.2.4)$$

$$\beta < \min \left\{ 1, 4\beta^2 \inf_{\theta \in (0; 2\beta(d+\lambda+1))} \Phi(\theta) \right\} \quad (3.2.5)$$

$$\beta \inf_{\theta \in (-\beta(d+\lambda+1); \beta(d+\lambda+1))} \Phi(\theta) > \frac{1}{2} \quad (3.2.6)$$

Hierbei ist $\Phi(\theta) := \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(y) \vartheta_n(y-\theta) dy$ mit $\theta \in \mathbb{R}$, was der Faltung $\vartheta_n \star \vartheta_n(\cdot)$ entspricht. Die Prewavelets genügen den Summationsbedingungen:

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_\ell(t - \tau_j)| \leq \text{const.} < \infty \text{ gleichmäßig in } t \in \mathbb{R} \text{ und } \ell \in \mathbb{Z} \quad (3.2.7)$$

und

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_\ell(t)| \leq \text{const.} < \infty \text{ gleichmäßig in } t \in \mathbb{R} \quad (3.2.8)$$

Aus dem Beweis nach Buhmann [4] und unseren nachfolgenden Erweiterungen folgt, dass sich die Bedingungen an Prewavelets durch die folgenden Ausdrücke schreiben lassen, welche schwächer, aber schwerer überprüfbar sind.

$$D_{jk} := \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t - \tau_{k+d+\lambda+1}) B_j^{f; 2d+2\lambda+1}(t-x) \vartheta_n(x) dx dt, \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (3.2.9)$$

Dies ist wohldefiniert, wegen $\vartheta_n(t) = \mathcal{O}(|t|^{-1-d-\epsilon})$ mit $n \in \mathbb{N}$. Die Bedingungen lauten dann:

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} D_{jk} < 2\beta \inf_{\theta \in (-\beta(d+\lambda+1); \beta(d+\lambda+1))} \Phi(\theta) \quad (3.2.10)$$

$$\beta < \min \left\{ 1, \inf_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \widehat{\vartheta}_n(y) \right|^2 \left| \widehat{B_k^{c, n+d}}(y) \right|^2 dy \right\} \quad (3.2.11)$$

$$\inf_{j \in \mathbb{Z}} D_{jk} > \frac{1}{2} \quad (3.2.12)$$

Beweis. Die erweiterten Bedingungen an Prewavelets lauten wie folgt:

$$\begin{aligned} & \sup_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\tau_{j+2d+2\lambda+2} - \tau_j}{2d+2\lambda+2} \cdot \sup_{t \in (-\infty; \infty)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t - \tau_k) \\ & < 2 \inf_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\tau_{k+2d+2\lambda+2} - \tau_k}{2d+2\lambda+2} \cdot \inf_{\theta \in (\tau_k - \tau_{k+\lambda+d+1}; \tau_{k+2d+2\lambda+2} - \tau_{k+\lambda+d+1})} \Phi(\theta) \end{aligned}$$

und

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\tau_{2k+2d+2\lambda+1} - \tau_{2k-1}}{d + \lambda + 1}$$

$$< 2 \min \left\{ 1, \inf_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(\tau_{2k+2d+2\lambda+1} - \tau_{2k-1})^2}{(d + \lambda + 1)^2} \inf_{\theta \in (0; \tau_{2k+2d+2\lambda+1} - \tau_{2k-1})} \Phi(\theta) \right\}$$

sowie

$$\inf_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\tau_{2k+2d+2\lambda+2} - \tau_k}{2d + 2\lambda + 2} \inf_{\theta \in (\tau_k - \tau_{k+d+\lambda+1}; \tau_{k+2d+2\lambda+2} - \tau_{k+d+\lambda+1})} \Phi(\theta) > \frac{1}{2}$$

Mit $\tau \in \beta \cdot \mathbb{Z}$ mit $\beta \in \mathbb{Q}$ werden die Abstände der τ_k äquidistant und lassen sich wie folgt schreiben:

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\tau_{k+2d+2\lambda+2} - \tau_k}{2d + 2\lambda + 2} = \sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\overbrace{\tau_{k+2} - \tau_k}^{2\beta} + \overbrace{\tau_{2d+2\lambda}}^{\beta(2d+2\lambda)}}{2d + 2\lambda + 2} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\beta(2d + 2\lambda + 2)}{2d + 2\lambda + 2}$$

$$= \sup_{j \in \mathbb{Z}} \beta = \beta$$

Analog folgt dann auch $\inf_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\tau_{k+2d+2\lambda+2} - \tau_k}{2d+2\lambda+2} = \beta$. Zudem gilt

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\tau_{2k+2d+2\lambda+1} - \tau_{2k-1}}{d + \lambda + 1} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\overbrace{\tau_{2k+1} - \tau_{2k-1}}^{2\beta} + \overbrace{\tau_{2d+2\lambda}}^{\beta(2d+2\lambda)}}{d + \lambda + 1}$$

$$= \sup_{j \in \mathbb{Z}} \frac{2\beta(d + \lambda + 1)}{d + \lambda + 1} = \sup_{j \in \mathbb{Z}} 2\beta = 2\beta$$

Daraus folgt ebenfalls, dass $\inf_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(\tau_{2k+2d+2\lambda+1} - \tau_{2k-1})^2}{(d+\lambda+1)^2} = 4\beta^2$ ist. Für die Integralgrenzen gilt dann:

$$(\tau_k - \tau_{k+d+\lambda+1}; \tau_{k+2d+2\lambda+2} - \tau_{k+d+\lambda+1})$$

$$= (\tau_k - \tau_{k+1} - \tau_{d+\lambda}; \tau_{k+d+2} - \tau_{k+d+1} + \tau_{d+\lambda}) = (-\beta(d + \lambda + 1); \beta(d + \lambda + 1))$$

und

$$[0; \tau_{2k+2d+2\lambda+1} - \tau_{2k-1}] = [0; \tau_{2k+1} - \tau_{2k-1} + \tau_{2d+2\lambda}] = [0; 2\beta(d + \lambda + 1)]$$

Durch Einsetzen der Umformungen in die ursprünglichen Bedingungen erhält man die Bedingungen des Lemmas. \square

Zudem ist dann $\inf_{k \in \mathbb{Z}} D_{kk} = \beta \inf_{\theta \in (-\beta(d+\lambda+1); \beta(d+\lambda+1))} \Phi(\theta)$ denn,

$$\begin{aligned}
\inf_{j \in \mathbb{Z}} D_{kk} &= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(z) B_k^{f, 2d+2\lambda+1}(\tau_{k+d+\lambda+1} + z) dz \\
&= \inf_{j \in \mathbb{Z}} \int_{\tau_k - \tau_{k+d+\lambda+1}}^{\tau_{k+2d+2\lambda+2} - \tau_{k+d+\lambda+1}} \Phi(z) B_k^{f, 2d+2\lambda+1}(\tau_{k+d+\lambda+1} + z) dz \\
&= \inf_{j \in \mathbb{Z}} \Phi(\theta) \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2d+2\lambda+2}} B_k^{f, 2d+2\lambda+1}(z) dz \\
&= \inf_{j \in \mathbb{Z}} \frac{\tau_{k+2d+2\lambda+2} - \tau_k}{2d + 2\lambda + 2} \Phi(\theta) \\
&= \beta \inf_{\theta \in (-\beta(d+\lambda+1); \beta(d+\lambda+1))} \Phi(\theta)
\end{aligned}$$

Der nachfolgende Satz führt nun die Bedingungen an Prewavelets und die verallgemeinerten multiquadric Funktionen zusammen und zeigt, dass für richtig gewähltes β und eine leichte Abänderung einer der Bedingungen an die Prewavelets dazu führt, dass sich die Prewavelets als $(2n + 2\lambda + 2)$ -te dividierte Differenzen von $\phi_n(t)$ bestimmen lassen.

Satz 3.4. *Für ϑ_n mit $a \in \mathbb{R}_+$ und $n \in \mathbb{N}$ gelten die Bedingungen an Prewavelets für $\beta = \frac{1}{2n}$ in einer Dimension. Dies führt zu einer leicht abgeänderten Bedingung der verallgemeinerten multiquadric Prewavelets:*

$$\inf_{\theta \in (-\beta(d+\lambda+1); \beta(d+\lambda+1))} \Phi(\theta) > 1 \tag{3.2.13}$$

Beweis. (1) Wir wissen bereits, dass $1 < \inf_{\theta \in (-\beta(d+\lambda+1); \beta(d+\lambda+1))} \Phi(\theta) < 2$ gilt,

denn für $d = 1, n = 1, \lambda = 0$ und $\beta = \frac{1}{2}$ gelten die Bedingungen. Das heißt, um eine Rückführung zu erreichen muss $\beta(d+\lambda+1) = 1$ gelten. Da für $n = 1, 2, 3, \dots$ wie bereits erwähnt $\lambda = 0, 2, 4, \dots$ gilt. Dies wird mit $\beta = \frac{1}{2n}$ erreicht.

(2) Die zweite Bedingung leitet sich aus der Parseval-Plancherel Identität her und ist für $\beta < |b_k|^2$ erfüllt, denn es gilt,

$$\langle C_k, C_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}_n(y) \right|^2 \cdot \left| \hat{B}_k^{c, d+\lambda}(y) \right|^2 dy = |b_k|^2$$

wegen

$$\begin{aligned}
\langle C_k, C_k \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t-y) \star B_k^{c, d+\lambda}(y) dy \right|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} |D[\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+d+\lambda+1}]_u \phi_n(t-u)|^2 dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| D[\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+d+\lambda+1}]_u \hat{\phi}_n(w-u) \right|^2 dw
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |b \cdot 2\pi\delta(\cdot - t_k)|^2 dw = |b_k|^2$$

Hierbei ist b_k das Absolutglied der $(2n+2\lambda+2)$ -ten dividierten Differenz von ϕ_n . Das heißt, es ist hinreichend, dass $\beta < |b_k|^2$ ist, damit die Prewavelets existieren. Sollte dies nicht gegeben sein, muss gegebenenfalls der Parameter a etwas anders gewählt werden.

Nun müssen wir nur noch zeigen, dass das Infimum von $\Phi(\theta)$ für gut gewähltes $a \leq 1$, monoton wachsend und dass Supremum $\sup_{t \in (-\infty; \infty)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \phi_n^{(2n)}(t - \tau_k)$ monoton fallend ist. Da das Maximum von $\vartheta_n(t)$ in $t = 0$ liegt, reicht es in Verbindung mit $\tau \in \frac{1}{2n}\mathbb{Z}$ die Reihe $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \vartheta_n(\tau_k)$ zu untersuchen. Es gilt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vartheta_n(\tau_k) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2^p} \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)^2 \cdot a^{2n}}{\left(a^2 + \left(\frac{k}{2n}\right)^2\right)^{n+\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)}{(n-1)! \cdot 2^{n-2}} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2n}}{\left(a^2 + \left(\frac{k}{2n}\right)^2\right)^{n+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{a} \right] \\ &\leq \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)}{(n-1)! \cdot 2^{n-2}} \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{2n} (2n)^{2n+1}}{k^{2n+1}}}_{\zeta(s)} + \frac{1}{a} \right] \end{aligned}$$

Hierbei ist $\zeta(s)$ mit $s = 2n + 1$ der Riemannsche Zetafunktion. Die Reihe ist somit für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ beschränkt, da die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ mit $s \in \mathbb{C}$, $\Re(s) > 1$, beschränkt ist. Wählt man $a > 0$ mit $a \rightarrow 0$ (klein genug), ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot \prod_{i=1}^n (2i-1)^2 \cdot a^{2n}}{\left(a^2 + \left(\frac{k}{2n}\right)^2\right)^{n+\frac{1}{2}}} = 0$ und $\frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)}{(n-1)! \cdot 2^{n-2} a} > 0$. Wählt man nun ein

$a \in \mathbb{R}_+$ in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ mit $a_1 < a_2 < \dots < a_n$, erhält man das monoton fallende Supremum. Für das Infimum von $\Phi(\theta)$ soll dann mit $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ ebenfalls $\inf \Phi(\theta)_{a_1} < \inf \Phi(\theta)_{a_2} < \dots < \inf \Phi(\theta)_{a_n}$ gelten. Es gilt:

$$\begin{aligned} \inf_{\theta \in (-\beta(d+\lambda+1); \beta(d+\lambda+1))} \Phi(\theta) &= \inf_{t \in (-1; 1)} \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(\vartheta_n(t)) \cdot \mathcal{F}(\vartheta_n(t))) \\ &= \inf_{t \in (-1; 1)} \mathcal{F}^{-1} \left(\frac{2^{1-2n} a^{2n} q^2 |\omega| K_n(a|\omega|)^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)^2} \right) (t) \\ &= \inf_{t \in (-1; 1)} \frac{2^{-\frac{1}{2}-2n} q^2 \sqrt{\pi} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + 2n\right) {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + n, \frac{1}{2} + 2n, 1 + n, \frac{-4a^2}{t^2}\right)}{a \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) \Gamma(1 + n)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2^{-\frac{1}{2}-2n} q^2 \frac{(4n)!}{(2n)! \cdot 4^{2n}} \cdot {}_2F_1\left(\frac{1}{2} + n, \frac{1}{2} + 2n, 1 + n, -4a^2\right)}{a \cdot \frac{(2n)!}{n! \cdot 4^n} \underbrace{\Gamma(n) \cdot n}_{n!}} \\
&= \frac{q^2(4n)!}{2^{\frac{1}{2}+2n}(2n)!^2 4^n a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + n\right)_k \left(\frac{1}{2} + 2n\right)_k}{(1+n)_k k!} (-4a^2)^k.
\end{aligned}$$

Hierbei ist $q = \left(\frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)}{(n-1)! \cdot 2^n}\right)$, welches sich aus dem Normierungsfaktor und $\vartheta_n(t)$ ergibt. Zudem ist K_n wie oben die modifizierte Besselfunktion zweiter Art und $\Gamma(\cdot)$ die Gamma-Funktion. Die Fourier Transformation der inversen multiquadric radialen Basisfunktion ist in Buhmann [5] zu finden. Aus Buhmann [4] folgt, dass die Behauptung für $n = 1$ gilt und somit auch für alle $n \in \mathbb{N}$ solange $0 < a < 1$ ist, sodass die Monotonie von $\frac{q^2(4n)!}{2^{\frac{1}{2}+2n}(2n)!^2 4^n a}$ erhalten bleibt und $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}+n\right)_k \left(\frac{1}{2}+2n\right)_k}{(1+n)_k k!} (4a^2)^k$ beschränkt ist für alle $a \rightarrow 0$. Offenbar ist die Monotonie von $\pi_n = \frac{q^2(4n)!}{2^{\frac{1}{2}+2n}(2n)!^2 4^n a}$ für langsam anwachsendes a gegeben, denn

$$\begin{aligned}
\pi_n &= \frac{q^2(4n)!}{2^{\frac{1}{2}+2n}(2n)!^2 4^n a} = a^{-1} \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)^2 (4n)!}{2^{\frac{1}{2}+4n}(2n)!^2 4^n (n-1)!^2} < \pi_{n+1} = \\
&= a^{-1} \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)^2 (4n)!}{2^{\frac{1}{2}+4n}(2n)!^2 4^n (n-1)!^2} \frac{(2n+1)^2 (4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}{2^6 n^2 (2n+1)^2 (2n+2)^2} \\
&= \pi_n \underbrace{\frac{(256n^4 + 640n^3 + 560n^2 + 200n + 24)}{2^6(4n^4 + 8n^3 + 4n^2)}}_{\geq 1 \forall n \in \mathbb{N} \text{ mit } a \leq 1}
\end{aligned}$$

Zudem ist $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}+n\right)_k \left(\frac{1}{2}+2n\right)_k}{(1+n)_k k!} (-4a^2)^k$ für kleines und langsam wachsendes $a \leq 1$ ebenfalls beschränkt, was mit folgenden Abschätzungen und Umformungen klar wird:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + n\right)_k \left(\frac{1}{2} + 2n\right)_k}{(1+n)_k k!} (-4a^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2} + n\right)_k \left(\frac{1}{2} + 2n\right)_k}{\frac{(n+k)!}{n!} k!} (-4a^2)^k \\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1+n)_k (1+2n)_k}{\frac{(n+k)!}{n!} k!} (-4a^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n! \frac{(n+k)!}{n!} \frac{(2n+k)!}{(2n)!}}{(n+k)! k!} (-4a^2)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2n+k)!}{k! (2n)!} (-4a^2)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \underbrace{\frac{\prod_{i=1}^{2n} (k+i) \cdot 4^k}{(2n)! a^{-2k}}}_{c_k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k,
\end{aligned}$$

wobei c_k mit richtig gewähltem a immer eine monoton fallende Nullfolge (bzgl. $k \rightarrow \infty$) ist und somit die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k$ nach dem Leibniz-Kriterium beschränkt ist. Dann folgt mit Lemma 3.4 die Behauptung des Satzes. \square

Wir müssen nun noch zeigen, dass die restlichen Bedingungen aus Lemma 3.4 weiterhin gegeben sind und nicht von unserer neuen Bedingung (3.2.13) bzw. der Erhöhung des Trägers der B-Splines beeinträchtigt werden.

Die Identität (3.2.3) heißt, dass u^ℓ die ℓ -te Zeile der inversen Matrix $D = \{D_{jk}\}_{j,k=-\infty}^{\infty}$ ist, wenn $d + \lambda$ ungerade ist, sonst ist es die Inverse von D um eins verschoben. Die Verschiebung um eins, kommt auf Grund der Identität (3.2.3) zustande. Die Matrix D ist hierbei ein kontinuierlicher linearer Operator von $D : \ell^p(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^p(\mathbb{Z})$ für $p \in \{1, \infty\}$, wie wir nachfolgend sehen werden. Die Matrix D hat $\ell^1(\mathbb{Z})$ Norm eins, da die B-Splines die Eins partitionieren und $\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t) = 1$ gilt. Zudem hat die Matrix D eine begrenzte $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ Norm, was aus Schumaker [32] folgt:

$$\|D\|_\infty \leq \beta \cdot \sup_{t \in (-\infty, \infty)} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t - \tau_k) \quad (3.2.14)$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist endlich, da $\kappa < \infty$ ist und $\vartheta_n(t) = \mathcal{O}(|t|^{-1-n-\epsilon})$ gilt und die Abstände $\tau_{k+1} - \tau_k \geq \delta$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ sind. Zudem wissen wir bereits, dass

$$\inf_{j \in \mathbb{Z}} D_{kk} = \beta \inf_{\theta \in (-\beta(d+\lambda+1), \beta(d+\lambda+1))} \Phi(\theta)$$

gilt. Die Nichtnegativität der Einträge der Matrix D zusammen mit $\|D\|_1 = 1$ implizieren, dass $D_{kk} \leq 1$ und somit

$$\|D - I\|_\infty \leq \|D\|_\infty + 1 - \beta^{-1} \inf_{k \in \mathbb{Z}} D_{kk} \quad (3.2.15)$$

ist. Die Aussagen (3.2.4), (3.2.14) und (3.2.15) führen zu $\|D - I\|_\infty < 1$. Damit ist D ein Homomorphismus auf $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ so dass die Koeffizienten u_k^ℓ existieren und $\sup_{\ell \in \mathbb{Z}} \|u^\ell\|_1 < \infty$ ist. Dass (3.2.4) ersetzt werden kann durch (3.2.10) und die Invertierbarkeit mittels Neumann Reihe intakt bleibt, folgt ebenfalls aus (3.2.15). Eine weitere direkte Konsequenz von $u^\ell \in \ell^1(\mathbb{Z})$ und den Bedingungen an Prewavelets ist

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\Psi_\ell(x - \tau_j)| \leq \beta \sup_{t \in (-\infty, \infty)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t - \tau_j) \sup_{\ell \in \mathbb{Z}} \|u^\ell\|_1 \quad (3.2.16)$$

Die rechte Seite der Ungleichung ist endlich, weil (3.2.14) gleichmäßig beschränkt ist. Wir erhalten dann (3.2.7) durch die Tatsache, dass die $(d+\lambda+1)$ -te Ableitung eines B-Splines vom Grad $2d + 2\lambda + 1$ eine endliche Linearkombination von B-Splines vom Grad $d + \lambda$ ist. Die linke Seite von (3.2.7) ist dann ebenfalls gleichmäßig beschränkt durch

$$\beta \sup_{t \in (-\infty, \infty)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t - \tau_j) \sup_{\ell \in \mathbb{Z}} \|u^\ell\|_1 (\beta\delta)^{-d-\lambda-1}$$

Hierzu sei auch auf Schumaker [32] verwiesen. Da ϑ_n beliebig oft stetig differenzierbar ist und $\vartheta_n = \mathcal{O}(|t|^{-1-n-\epsilon})$ mit größerem $\epsilon > 0$ auch für die Ableitungen von ϑ_n gilt, was aus Satz 3.2 folgt, kann die Abschätzung auch ohne den ansteigenden Faktor $(\beta\delta)^{-d-\lambda-1}$ mittels Schumakers Ableitungsformel dargestellt werden durch:

$$\beta \sup_{t \in (-\infty, \infty)} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \vartheta_n^{(d+\lambda+1)}(t - \tau_j) \sup_{\ell \in \mathbb{Z}} \|u^\ell\|_1$$

Dies ist notwendig, da sonst bei immer kleiner werdenden Abständen δ der Stützstellen τ_k , der Faktor $(\beta\delta)^{-d-\lambda-1}$ stark anwachsen würde. In gleicher Weise wollen wir nun (3.2.8) zeigen. Wir wissen bereits, dass mit unserer neuen Bedingung (3.2.13) die Abschätzung (3.2.15) gilt. Daher sind die Koeffizienten u_k^ℓ ebenfalls absolut summierbar über $\ell \in \mathbb{Z}$. Wir benutzen wieder, dass die B-Splines $\left\{ B_k^{f, 2d+2\lambda+1} \right\}_{k=-\infty}^{\infty}$ die Eins partitionieren und mit $u_k = \left\{ u_k^\ell \right\}_{\ell=-\infty}^{\infty} \in \ell^1(\mathbb{Z})$, $k \in \mathbb{Z}$ sowie $\vartheta_n = \mathcal{O}(|t|^{-1-n-\epsilon})$ folgt

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\Psi_\ell(x)| \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|d_k\|_1,$$

daraus folgt direkt mit Schumakers Ableitungsregel für B-Splines

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\psi_\ell(x)| \leq \beta \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|d_k\|_1 (\beta\delta)^{-d-\lambda-1}.$$

Um auch hier den Faktor $(\beta\delta)^{-d-\lambda-1}$ zu vermeiden, schreiben wir das ganze wie folgt:

$$\sum_{\ell=-\infty}^{\infty} |\psi_\ell(x)| \leq \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|d_k\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} \left| \vartheta_n^{(d+\lambda+1)} \right| dx$$

Das heißt, mit anderen Worten sind unsere Prewavelets ψ_ℓ absolut summierbar und nur in einer Umgebung der Null signifikant von 0 verschieden. Die wichtigsten Gründe dafür sind, dass die B-Splines die Eins partitionieren und wir das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t)$ mithilfe von Korollar 3.2 zu eins normieren können. Zudem ist natürlich essentiell, dass die B-Splines lokalen Träger haben und unsere Funktionen ϑ_n exponentiell abklingen.

Nun wollen wir zeigen, dass $V_1 = V_0 \oplus W_0$ gilt. Wir wissen bereits, dass jede Funktion $g \in V_1$ sich als endliche Linearkombination von F_j schreiben lässt, und damit als dividierte Differenz. Die Koeffizienten der F_j sind dabei quadrat summierbar. Wir benötigen also eine Zerlegung eines jeden $F_j \in V_1$. Daher suchen wir Koeffizienten B_{jk} , $j, k \in \mathbb{Z}$, sodass die Orthogonalität

$$\eta_j := F_j - \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{jk} C_k \perp C_\ell \tag{3.2.17}$$

für ganze Zahlen j gilt. Anders ausgedrückt verlangen wir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} B_{jk} \langle C_k, C_\ell \rangle = \langle F_j, C_\ell \rangle$$

für alle $\ell \in \mathbb{Z}$ gelten soll, wobei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist das Skalarprodukt von $L^2(\mathbb{R})$. Mit solchen Koeffizienten B_{jk} können wir dann η_j ausweiten, sodass $F_j \in V_0 \oplus W_0$ gilt. Die Einträge der symmetrischen Matrix $\chi = \{\langle C_k, C_\ell \rangle\}_{k, \ell \in \mathbb{Z}}$ sind nicht negativ und dadurch, dass die B-Splines die Eins partitionieren hat die Matrix $\ell^1(\mathbb{Z})$ sowie $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ Norm und $\sup_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\tau_{2k+2d+2\lambda+1} - \tau_{2k-1}}{d+\lambda+1} = 2\beta$ wie oben bereits gezeigt wurde.

Wir wissen, durch unsere Bedingung (3.2.11), dass $\|I - \chi\|_1 = \|I - \chi\|_\infty < 1$ gilt. Es gilt dann

$$\|I - \chi\|_p \leq 2\beta + \max \left\{ -1, 1 - 2 \inf_{k \in \mathbb{Z}} \langle C_k, C_k \rangle \right\} = 2\beta + \max \left\{ -1, 1 - 2 \inf_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2 \right\}$$

denn wie wir bereits wissen gilt:

$$\langle C_k, C_k \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}_n(y) \right|^2 \cdot \left| \hat{B}_k^{c, d+\lambda}(y) \right|^2 dy = |b_k|^2$$

Das heißt, wie oben bereits erwähnt, müssen wir unser a so wählen, dass es zumindest ein Absolutglied der dividierten Differenz gibt, sodass $|b_k|^2$ klein genug ist. Das als Bedingung hat zur Folge, dass $2\beta + \max \left\{ -1, 1 - 2 \inf_{k \in \mathbb{Z}} |b_k|^2 \right\} < 1$ ist. Unter der Voraussetzung, dass χ eine Inverse Matrix χ^{-1} besitzt, ergeben sich die Koeffizienten B_{jk} als

$$B_{jk} = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \langle F_j, C_\ell \rangle \chi_{\ell k}^{-1}.$$

Die Matrix $B = B_{jk}$ ist wohldefiniert und hat $\|B\|_1$ und $\|B\|_\infty$ Norm, wegen $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |F_j(t)| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} F_j(t) = 1$ und $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |C_j(t)| = \sum_{j=-\infty}^{\infty} C_j(t) = 1$ und weil χ invertierbar ist. Die Tatsache, dass $\eta_j \in V_1$ ist, folgt dann mit Hardy, Littlewood und Pólya [30]. Um den Beweis nun zu vervollständigen müssen wir noch zwei weitere Lemmas in Anlehnung an Buhmann [4] erweitern.

Lemma 3.5. *Sei $\eta_j, j \in \mathbb{Z}$, definiert wie in (3.2.17), dann existiert für jedes j ein $d+\lambda+1$ mal differenzierbare Funktion H_j sodass $H_j^{(d+\lambda+1)} = \eta_j$ gilt. Zudem gilt*

$$\sup_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle \vartheta_n(\cdot - \tau_{2k}), H_j \rangle| < \infty$$

und

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} \sum_{j=-\infty}^{\infty} |\langle \vartheta_n(\cdot - \tau_{2k}), H_j \rangle| < \infty$$

Beweis. Zunächst sei das H_j explizit mit Peano-Kern Darstellung angegeben als

$$H_j(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-t)_+^n \eta_j(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

wobei $(\cdot)_+^n = \begin{cases} x^n & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$ als abgeschnittene Potenz (truncated power)

bezeichnet wird. Es folgt aus der Definition von η_j das $\|B\|_{\infty} < \infty$ und aus $(\vartheta_n(t)) = \mathcal{O}(|t|^{-1-n-\epsilon})$, dass H_j wohldefiniert ist. Zudem gilt

$$\langle H_j, \vartheta_n(\cdot - \tau_{2\ell-1}) \rangle = 0, \quad \ell \in \mathbb{Z} \quad (3.2.18)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} \langle \eta_j, C_{\ell} \rangle &= (-1)^{d+\lambda+1} \left\langle H_j, \int_{-\infty}^{\infty} B_{\ell}^{c, (d+\lambda+1)} \vartheta_n(\cdot - y) dy \right\rangle \\ &= \left\langle H_j, \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mu_k^{\ell} \vartheta_n(\cdot - \tau_{2k-1}) \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

wieder mit dem Argument, dass die $(d + \lambda + 1)$ -te Ableitung eines B-Splines vom Grad $d + \lambda$ eine endliche Summe von Deltafunktionen an den Punkten $\tau_{2k-1}, k \in \mathbb{Z}$ ist, womit wir dann ein Integral über eine Punktmenge auswerten, welches natürlich gleich 0 ist. Zudem sind die Koeffizienten $\{\mu_k^{\ell}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ Vielfache der Koeffizienten der $d + \lambda + 1$ dividierten Differenz von ϕ_n in Abhängigkeit der Stützstellen von B_{ℓ}^c . Außerdem impliziert der Beweis zu 3.2.18, dass $\langle H_j, \vartheta_n(\cdot - \tau_k) \rangle$ polynomiales Wachstum hat, aber kein Polynom ist, da es keine nichttrivialen Polynomanteile hat, außer die vom Grad $d + \lambda$. Um nun die Beschränktheit der Summe zu zeigen, nehmen wir die $(d + \lambda + 1)$ -te dividierte Differenz von $\langle \vartheta_n(\cdot - y), H_j \rangle$ an den $d + \lambda + 2$ Punkten $\tau_{2k-1}, \tau_{2k}, \tau_{2k+1}, \tau_{2k+3}, \dots, \tau_{2k+2d+2\lambda-1}$ und wenden den Satz von Peano Kern darauf an, sodass

$$|\langle \vartheta_n(\cdot - \tau_{2k}), H_j \rangle| \leq C \left| \left\langle \vartheta_n(\cdot - \tilde{\tau}_{2k}) [\tau_{2k+2d+2\lambda-1} - \tau_{2k-1}]^{d+\lambda+1}, |\eta_j| \right\rangle \right|$$

für geeignetes C und $\tilde{\tau}_{2k} \in (\tau_{2k-1}, \tau_{2k+2d+2\lambda-1})$ gilt. Wenn wir nun über $j \in \mathbb{Z}$ summieren, ist es unabhängig von k begrenzt, denn $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\eta_j|$ ist gleichmäßig begrenzt durch $|\vartheta_n(t)| = \mathcal{O}(|t|^{-1-n-\epsilon})$ den kompakten Träger der B-Splines und der Tatsache, dass $\|B\|_1 < \infty$ ist. Andersherum gilt ebenfalls, dass die Summe über alle k beschränkt ist und unabhängig von j , da $\eta_j \in L^1(\mathbb{R})$ ist. \square

Um unser Lemma 3.4 nun endgültig zu beweisen und damit auch Satz 3.4, müssen wir die η_j im Sinne unserer ψ_k erweitern, sodass $F_j \in V_0 \oplus W_0$ gilt. Hierzu benötigen wir noch nachfolgendes Lemma.

Lemma 3.6. *Sei $\eta_j, j \in \mathbb{Z}$, definiert durch (3.2.17) dann gilt*

$$\eta_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{jk} \psi_k, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.19)$$

für Koeffizienten A_{jk} , welche absolut summierbar sowohl über $j \in \mathbb{Z}$, als auch über $k \in \mathbb{Z}$ sind.

Beweis. Es ist ausreichend anstelle von (3.2.19) zu zeigen, dass

$$\tilde{H}_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_{jk} \Psi_{2k}, \quad j \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.20)$$

für passende Koeffizienten A_{jk} und \tilde{H}_j mit $\tilde{H}_j^{(d+\lambda+1)} = \eta_j$ gilt, da wir auf beiden Seiten $d + \lambda + 1$ mal ableiten können. Wir werden sehen, dass es solche passende Koeffizienten A_{jk} gibt, und wie diese aussehen. Wir behaupten, dass in Abhängigkeit der Form von Ψ_k und den Bedingungen an die H_j , die nachfolgende Wahl der Koeffizienten passend ist:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{H}_j &:= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \vartheta_n(\cdot - \tau_{2k+d+\lambda+1}), H_j \rangle \Psi_{2k} && \text{wenn } d + \lambda \text{ ungerade} \\ \tilde{H}_j &:= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle \vartheta_n(\cdot - \tau_{2k+d+\lambda}), H_j \rangle \Psi_{2k} && \text{wenn } d + \lambda \text{ gerade} \end{aligned} \right\}, j \in \mathbb{Z} \quad (3.2.21)$$

Die Reihe ist absolut konvergent, da die Ψ_{2k} gleichmäßig beschränkt sind durch $\sup_{\ell \in \mathbb{Z}} \|d^\ell\|_1$ und wegen Lemma 3.5. Der Satz 275 auf Seite 198 von Hardy, Littlewood und Pólya[30], Lemma 3.5 und $\|d^\ell\| < \infty$ implizieren, dass die rechte Seite von (3.2.21) in $V^{2d+2\lambda+1}$ liegen, wobei $V^{2d+2\lambda+1} = \mathcal{L}_{\tau, 2d+2\lambda+1, \vartheta_n}$ gilt. Wenn wir das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ mit $\vartheta_n(\cdot - \tau_\ell)$ auf beiden Seiten von (3.2.21) nehmen, erhalten wir mit der Identität der Prewavelets für ungerades d

$$\langle \vartheta_n(\cdot - \tau_{2l+d+\lambda+1}), \tilde{H}_j \rangle = \langle \vartheta_n(\cdot - \tau_{2l+d+\lambda+1}), H_j \rangle, \quad \ell \in \mathbb{Z},$$

und Lemma 3.5 impliziert, dass

$$\langle \vartheta_n(\cdot - \tau_{2l+d+\lambda}), \tilde{H}_j \rangle = \langle \vartheta_n(\cdot - \tau_{2l+d+\lambda}), H_j \rangle = 0, \quad \ell \in \mathbb{Z},$$

gilt. Analoges gilt für gerades $d + \lambda$. Die Nichtsingularität von D als Operator $\ell^2(\mathbb{Z}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{Z})$ heißt, dass

$$f \in V_1, F \in V_1^{2d+2\lambda+1}, F^{(d+\lambda+1)} = f \text{ sowie } \langle \vartheta_n(\cdot - \tau_\ell), F \rangle = 0 \forall \ell \in \mathbb{Z} \Rightarrow f = 0$$

gilt. Dies bedeutet $\tilde{H}_j^{(d+\lambda+1)} = H_j^{(d+\lambda+1)} = \eta_j$ wie verlangt. Damit haben wir die Koeffizienten A_{jk} , $j, k \in \mathbb{Z}$ gefunden, welche nach Lemma 3.5 absolut summierbar über k , als auch über j sind. \square

Nun sei $g \in V_1$, $g = \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j F_j$, für $c = \{c_j\}_{j=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Mit Lemma 3.6 gilt dann

$$g = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j A_{jk} \psi_k + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j B_{jk} C_k$$

mit

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j A_{jk} \right)^2 < \infty \text{ und } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=-\infty}^{\infty} c_j B_{jk} \right)^2 < \infty \quad (3.2.22)$$

Die erste Abschätzung gilt mit Lemma 3.6 und die zweite wegen $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |B_{jk}| \leq \text{const.} < \infty$, gleichmäßig bezüglich j und k . Mit dem nachfolgenden Satz können wir nun die Konstruktion der mittels verallgemeinerter fundamentaler Funktionen erzeugten verallgemeinerten multiquadric Prewavelets abschließen, um im Anschluss ein paar Beispiele zu zeigen.

Satz 3.5. *Es existieren verallgemeinerte multiquadric Prewavelets $\{\psi_{\ell k}\}_{\ell=-\infty}^{\infty}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, in V_{k+1} und Vektorräume W_k , welche von der direkten Summe solcher Prewavelets aufgespannt werden und quadratsummierbare Koeffizienten haben sodass $V_{k+1} = V_k \oplus W_k, k \in \mathbb{Z}_+$ gilt und*

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \bigoplus_{k=0}^{\infty} W_k, \quad (3.2.23)$$

solange die Annahmen aus Satz 3.3 gelten für alle τ^k .

Beweis. Sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ und sei ein $\epsilon > 0$. Mit Lemma 3.3 existieren $k \in \mathbb{Z}$ und $f_k \in V_k$, sodass

$$\|f - f_k\|_2^2 \leq \epsilon.$$

Zudem ist

$$f_{\ell+1} = f_{\ell} + g_{\ell}, f_{\ell} \in V_{\ell} \text{ sowie } g_{\ell} \in W_{\ell} \forall 0 \leq \ell \leq k.$$

Das freie $\epsilon > 0$ und die Orthogonalität zwischen den W_{ℓ} bedeutet, dass 3.2.23 gilt. \square

Satz 3.6. *Die verallgemeinerten multiquadric Prewavelets lassen sich als $(2d + 2\lambda + 2)$ -te dividierte Differenz von $\phi_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$ bestimmen, sodass gilt:*

$$D_{jk} = u_k^{2\ell} = \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t - \tau_{k+d+\lambda+1}) D[\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+2d+2\lambda+2}]_u \phi_n(t) dt$$

sowie

$$\psi_{\ell k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k^{2\ell} D[\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+2d+2\lambda+2}]_u \phi_n(t),$$

wobei $t \in \mathbb{R}$ ist und die ξ_i , $i \in \mathbb{N}$ sich aus dem Träger der B-Splines von $B_k^{f, 2d+2\lambda+1}$ ergeben.

Beweis. Der Beweis folgt mittels partieller Integration, denn es gilt:

$$\begin{aligned} D_{jk} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t - \tau_{k+d+\lambda+1}) B_j^{f, 2d+2\lambda+1}(t-x) \vartheta_n(x) dx dt, \quad j, k \in \mathbb{Z} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta_n(t - \tau_{k+d+\lambda+1}) D[\xi_k, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{k+2d+2\lambda+2}]_u \phi_n(t) dt \end{aligned}$$

\square

Damit haben wir alles gezeigt, was wir eingangs in diesem Kapitel zeigen wollten. Es existieren verallgemeinerte multiquadric Prewavelets in einer Dimension für nicht äquidistante Knoten, unter der Voraussetzung von gut gewähltem a und einer angepassten Schrittweite der Knoten. Überdies konnten wir zeigen, dass sich diese als dividierte Differenzen der Funktion ϕ_n schreiben lassen, wodurch sich der Rechenaufwand signifikant verringert. Der Preis für die einfacheren Berechnung ist allerdings, dass die B-Splines von immer höherem Grad auch immer mehr Zentren benötigen. Sollten nicht genügend Zentren vorhanden sein, kann die Berechnung auf diese Weise nicht erfolgen. In diesem Fall können die verallgemeinerten multiquadric Prewavelets aber immer noch mittels B-Splines von niedrigerem Grad über die Faltung wie in (3.2.2) berechnet werden, und die Einträge der Matrix D mittels (3.2.9).

Wir wollen uns nun einige Beispiele für verallgemeinerte multiquadric Prewavelets ansehen. Nachfolgend sind Beispiele aufgeführt, für die die Datenpunkte zufällig erzeugt wurden und deren Verteilung sich nach dem oben genannten Schema richtet. Das heißt für ein verallgemeinertes multiquadric Prewavelet der 3. Art sind die Datenpunkte ungefähr, das heißt nicht äquidistant, im Abstand von $\frac{1}{6}$ verteilt. Dementsprechend für ein verallgemeinertes multiquadric Prewavelet der 5. Art ungefähr $\frac{1}{10}$.

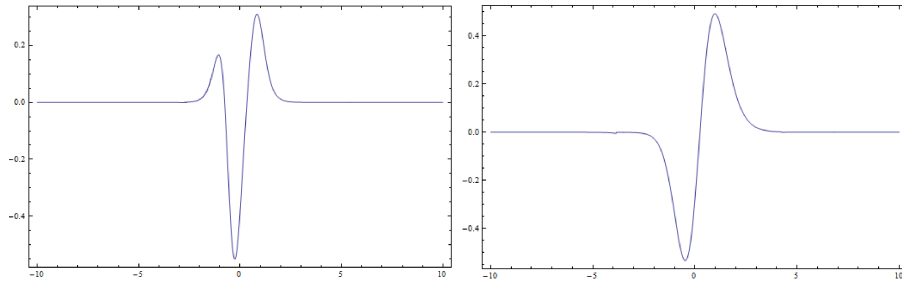


Abbildung 3: Links: Verallgemeinertes multiquadric Prewavelet 3. Art mit $a = 0,15$. Rechts: Verallgemeinertes multiquadric Prewavelet 5. Art mit $a = 0,21$.

Im Vergleich zum Prewavelet aus Buhmann [4] sind die verallgemeinerten multiquadric Prewavelets höherer Art glatter und haben dafür außerhalb einer Umgebung der Null keine kleineren Wellen mehr. Dies liegt daran, dass die Funktionen mit denen die verallgemeinerten multiquadric Prewavelets erzeugt werden, wesentlich schneller fallen als die in Buhmann [4] und deswegen nur in einer immer dichteren Umgebung der Null ungleich Null sind.

3.3 Wavelets aus radialen Basisfunktionen in zwei Dimensionen

In diesem Kapitel wollen wir nun die bisherigen Erkenntnisse nutzen, um Wavelets aus radialen Basisfunktionen in ein und zwei Dimensionen zu konstruieren. Diese Konstruktion werden wir dabei über eine sogenannte Skalierungsgleichung durchführen. Wir werden dafür zunächst in einer Dimension Lösungen der Skalierungsgleichung von nützlichen Funktionen bestimmen, welche wir dann für die Konstruktion in zwei Dimensionen benutzen wollen. Insgesamt wollen wir wieder das Konzept einer MRA benutzen. Wie wir bereits aus Kapitel 3.2.1 wissen, können Teilräume, welche (S1) – (S5) erfüllen, durch Funktionen $f \in L_2(\mathbb{R})$ erzeugt werden. Die Erzeugung der Räume erfolgt dabei durch Translation und Dilatation von f , wodurch zunächst die weiteren Funktionen

$$f_{j,k}(x) = 2^{-j/2} f(2^{-j}x - k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

gewählt werden. Der Raum V_j wird dann als der abgeschlossene lineare Teilraum von $L_2(\mathbb{R})$ definiert, der von den $f_{j,k}$ erzeugt wird

$$V_j := \overline{\text{span} \{f_{j,k} \mid k \in \mathbb{Z}\}} = \overline{\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k f_{j,k} \mid c_k \in \mathbb{R} \right\}}.$$

Offensichtlich sind dann (S2) und (S3) erfüllt.

Definition 3.1. Eine Funktion $f \in L_2(\mathbb{R})$ heißt Skalierungsfunktion, wenn die zugehörigen V_j die Bedingungen (S1) – (S5) erfüllen und überdies die $f_{0,k}$ mit $k \in \mathbb{Z}$, eine sogenannte Riesz-Basis von V_0 bilden, d.h. falls es positive Konstanten $0 < A \leq B < \infty$ gibt, mit

$$A \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \leq \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k f_{0,k} \right\|^2 \leq B \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_k|^2 \quad (3.3.1)$$

für alle Folgen $(c_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$, dann bilden auch die Funktionen $f_{j,k}$ eine Riesz-Basis von V_j .

Ist f eine Skalierungsfunktion, dann lässt sich für jedes $j \in \mathbb{Z}$ jede Funktion $g \in V_j$ als eine in $L_2(\mathbb{R})$ konvergente Reihe

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} f_{j,k}$$

mit eindeutig bestimmten Koeffizienten $c_{j,k}$, wobei $(c_{j,k})_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$ ist, schreiben. Ferner ist für eine Skalierungsfunktion f die Bedingung (S1) dazu äquivalent, dass f einer sogenannten Skalierungsgleichung

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k f_{1,k}(x) = \sqrt{2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k f(2x - k) \quad (3.3.2)$$

mit Koeffizienten $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$ genügt. Die Folge von Koeffizienten $(h_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ nennt man hierbei auch Maske der Funktion f . Hierzu sei auch auf Freund/Hoppe [20] verwiesen.

Die eben eingeführte Skalierungsfunktion und die dazugehörige Skalierungsgleichung ist elementar wichtig bei der nachfolgenden Konstruktion von Wavelets aus radialen Basisfunktionen. Darum wollen wir zunächst weitere bekannte Eigenschaften der Skalierungsgleichung zusammentragen.

Satz 3.7. *Seien f_1 und f_2 Skalierungsfunktionen, welche die Skalierungsgleichung erfüllen und seien ferner $h_1 := (h_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$ und $h_2 := (h_{2,k})_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$ die dazugehörigen Masken, dann gelten folgende Eigenschaften:*

1. Faltung: *Erfüllt f_1 die Skalierungsgleichung mit Maske h_1 und erfüllt f_2 die Skalierungsgleichung mit Maske h_2 dann erfüllt die Faltung $f_1 \star f_2$ die Skalierungsgleichung mit Maske (und diskreter Faltung) $h_1 \star h_2$.*
2. Differentiation: *Erfüllt f_1 die Skalierungsgleichung mit Maske h_1 und die Ableitung f_1' existiert, dann erfüllt diese die Skalierungsgleichung mit der Maske $2 \cdot h_1$.*
3. Integration: *Erfüllt f_1 die Skalierungsgleichung mit Maske h_1 und existiert eine Stammfunktion $F(x) = \int_0^x f(\tau) d\tau$, dann erfüllt die Stammfunktion $x \mapsto F(x) + c$ die Skalierungsgleichung mit Maske $\frac{1}{2}h_1$, wobei die Konstante c , die folgende Gleichung erfüllen muss*

$$c \cdot \left(1 - \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{1,k} \right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{1,k} \cdot F(-k).$$

Hat f kompakten Träger, so kann die Stammfunktion F als Faltung mit der Heaviside-Funktion

$$H(x) := \begin{cases} 0, & \text{für } x < 0 \\ 1, & \text{sonst} \end{cases}.$$

bestimmt werden.

4. Fourier-Transformation: *Die Fourier-Transformation, transformiert die Skalierungsgleichung (3.3.2) in ein Produkt der Form*

$$\hat{f}(\omega) = Q(\omega) \hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right) \tag{3.3.3}$$

mit

$$Q(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k \exp(-ik\omega).$$

Die Beweise der einzelnen Eigenschaften sind in Dahmen/Micchelli [15] zu finden.

3.3.1 Ein konstruktiver Ansatz

Nachdem wir nun wissen, was eine Skalierungsfunktion und die dazugehörige Skalierungsgleichung ist, wollen wir uns in diesem Zusammenhang die B-Splines noch einmal genauer ansehen. Wir beginnen hierbei mit $B_0(x) = \chi_{[0;1]}(x) = \phi(x)$ auch bekannt als die Haar-Funktion.

$$\phi(x) := \begin{cases} 1, & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Die Haar-Funktion hat kompakten Träger wie alle B-Splines und erfüllt die Skalierungsgleichung mit

$$\phi(x) = \sqrt{2}(h_0\phi(2x) + h_1\phi(2x-1)) \text{ und der Maske } h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Da sich alle B-Splines rekursiv mittels der Faltung

$$B_n(x) = B_{n-1}(x) \star B_0(x)$$

berechnen lassen, folgt direkt, dass alle B-Splines die Skalierungsgleichung erfüllen. Wir betrachten nun eine Konstruktion (mit kontinuierlicher Faltung) der Art

$$f(x) = g_{n,0}(x) \star g_{n,1}(x) \star g_{n,2}(x) \star g_{n,3}(x) \star \dots \quad (3.3.5)$$

mit

$$g_{n,w}(x) = \varphi(w) \sum_{k=-\ell}^{\ell} B_n(x-k),$$

wobei $|\ell| \leq c \cdot w$, c konstant sowie $c, w, n \in \mathbb{N}$ und $B_n(x)$ der B-Spline vom Grad n ist. Zudem ist φ eine radiale Basisfunktion. Diese Konstruktion erfüllt offenbar auch die Skalierungsgleichung, denn die Verschiebungen k sind ganzzahlig und die Auswertungen der radialen Basisfunktion schlagen sich nur in einer Veränderung der Maske nieder. Die so generierten Funktionen $f(x)$ haben zwar kompakten Träger, aber deren ganzzahlige Translate $\{f_{0,k}(x) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ bilden keine Orthonormalbasis unseres Grundraumes V_0 . Dies wollen wir nun zunächst beheben. Dabei sei für Lemma 3.7 sowie Satz 3.8 auf Louis/Maass/Rieder [23] verwiesen.

Lemma 3.7. *Für $f(x) \in L_2(\mathbb{R})$ ist $\{f(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ein orthonormales System mit*

$$\langle f(\cdot - k), f(\cdot - n) \rangle_{L_2} = \delta_{k,n} \quad (3.3.6)$$

genau dann, wenn

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(\omega + 2\pi n) \right|^2 = \frac{1}{2\pi} \quad (3.3.7)$$

fast überall gilt.

Beweis. Angenommen (3.3.6) gilt fast überall, dann folgt

$$\begin{aligned} \delta_{0,k} &= \langle f(\cdot), f(\cdot - k) \rangle_{L_2} \\ &= \left\langle \hat{f}(\cdot), \hat{f}(\cdot) \exp(-ik\cdot) \right\rangle_{L_2} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 \exp(-ik\omega) d\omega \\ &= \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(\omega + 2\pi n) \right|^2 \exp(-ik\omega) d\omega \end{aligned}$$

Damit ist der k -te Fourier-Koeffizient der 2π -periodischen Funktion

$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(\omega + 2\pi n) \right|^2$ also $\delta_{0,k}$. Mit $k = 0$ folgt (3.3.7). Nehmen wir umgekehrt (3.3.7) an, so liefert die inverse Fourier Transformation die Behauptung

$$\begin{aligned} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(\omega + 2\pi n) \right|^2 &= \frac{1}{2\pi} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(\omega + 2\pi n) \right|^2 \exp(-ik\omega) d\omega &= \frac{\delta_{0,k}}{\sqrt{2\pi}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \left| \hat{f}(\omega) \right|^2 \exp(-ik\omega) d\omega}_{\delta_{0,k}} &= \frac{\delta_{0,k}}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

□

Unsere Funktionen bilden noch kein orthonormales System, weswegen wir diese orthogonalisieren müssen, um ein solches System zu erhalten.

Satz 3.8. *Es sei $f \in L^2(\mathbb{R})$ und existieren positive Konstanten A, B mit*

$$A \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(\omega + 2\pi n) \right|^2 \leq B \text{ fast überall,} \quad (3.3.8)$$

dann ist $\left\{ \tilde{f}(x - k) \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ mit

$$\hat{\tilde{f}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{f}(\omega)}{\sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(\omega + 2\pi n) \right|^2}} \quad (3.3.9)$$

eine Orthonormalbasis von V_0 .

Beweis. Da (3.3.8) gilt, ist $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R})$. Wir führen die 2π -periodische Hilfsfunktion

$$\hat{h}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\omega + 2\pi n)|^2}}$$

ein. Dann lässt sich h in einer Fourier-Reihe entwickeln, für die gilt:

$$\hat{h}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \exp(-ik\omega)$$

Wir können nun h bestimmen gemäß

$$h(t) = \sqrt{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_k \delta(t - k). \quad (3.3.10)$$

Mit Hilfe des Faltungssatzes können wir dann den Zusammenhang zwischen f , \tilde{f} und h angeben:

$$\begin{aligned} \tilde{f} &= (f \star h)(t) \\ &\stackrel{(3.3.10)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_k f(t - k). \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung besagt $\{\tilde{f}(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}\} \subset V_0$. Die Funktion \tilde{f} wurde so konstruiert, dass sie den Voraussetzungen von Lemma 3.7 genügt. Daher ist $\{\tilde{f}(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}\}$ ein orthonormales System. Nun müssen wir noch dessen Vollständigkeit in V_0 zeigen. Dazu untersuchen wir die Darstellung der Skalierungsfunktion im neuen Funktionensystem:

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle f(\cdot), \tilde{f}(\cdot - k) \right\rangle_{L^2} \right|^2 &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_{\mathbb{R}} \exp(ik\omega) \hat{f}(\omega) \overline{\hat{f}(\omega)} d\omega \right|^2 \\ &\stackrel{(3.3.9)}{=} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} \exp(ik\omega) \frac{\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\omega + 2\pi\ell)|^2}{\sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\omega + 2\pi n)|^2}} d\omega \right|^2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \int_0^{2\pi} \exp(ik\omega) \sqrt{\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\omega + 2\pi n)|^2} d\omega \right|^2 \end{aligned}$$

Wir summieren hierbei über die Quadrate der Fourier-Koeffizienten einer 2π -periodischen Funktion. Nutzen wir die Parsevalsche Identität, ist diese gleich der L^2 -Norm der Funktion. Das heißt für uns

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \left\langle f(\cdot), \tilde{f}(\cdot - k) \right\rangle_{L^2} \right|^2 = \int_0^{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\hat{f}(\omega + 2\pi n)|^2 d\omega = \|f\|_{L^2}^2.$$

Offenbar folgt dann:

$$\left\| f(\cdot) - \sum_{k=-N}^N \langle f(\cdot), \tilde{f}(\cdot - k) \rangle_{L^2} \tilde{f}(\cdot - k) \right\|_{L^2}^2 = \underbrace{\|f\|_{L^2}^2 - \sum_{k=-N}^N \left| \langle f(\cdot), \tilde{f}(\cdot - k) \rangle_{L^2} \right|^2}_{\xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0}$$

□

Es ist sehr nützlich zu wissen, dass es eine Möglichkeit der Orthogonalisierung gibt. Das explizite Aufschreiben der Orthonormalbasis in der Form (3.3.9) ist hingegen nicht einfach und bei Weitem auch nicht immer bestimmbar. Daher wollen wir zunächst weiterhin in einer Dimension bleiben und uns ansehen, ob es für unseren Ansatz eine solche Orthonormalbasis gibt. Dazu müssen wir zunächst zeigen, dass der Ansatz (3.3.5) die Ungleichung (3.3.8) erfüllt. Dazu benötigen wir noch folgende Vorbetrachtungen.

Lemma 3.8. *Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und für beliebiges $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ gilt die Beziehung:*

$$S_n(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x + k\pi)^{2(n+1)}} = \frac{1}{(2n+1)!} \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} S_0(x)$$

mit

$$S_0(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}.$$

Beweis. Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion. Aus de Boor [17] können wir die Fourier Transformation für die B-Splines (zentriert um Null) entnehmen

$$\hat{B}_n \left(x + \frac{(n+1)}{2} \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}} \right)^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^{n+1} \left(\frac{x}{2} \right).$$

Zudem wissen wir bereits, dass der B-Spline $B_0(x)$ die Gleichung (3.3.7) erfüllt und

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \hat{B}_0(x + 2\pi k) \right|^2 = \frac{1}{2\pi}$$

gilt. Daraus folgt

$$1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2} + \pi k\right)}{\frac{x}{2} + \pi k} \right)^2 = \sin^2 \left(\frac{x}{2} \right) S_0 \left(\frac{x}{2} \right).$$

Der letzte Schritt folgt dann direkt mittels Induktion von $n \rightarrow n+1$:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x + k\pi)^{2(n+2)}} = \frac{1}{(2n+3)!} \frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}} S_0(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \frac{d^2}{dx^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x+k\pi)^{2(n+1)}} \\
&= \frac{1}{(2n+2)(2n+3)} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{(2n+2)(2n+3)}{(x+k\pi)^{2(n+2)}}
\end{aligned}$$

□

Lemma 3.9. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt für beliebiges $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ die Beziehung:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sin^{2n}(x)} = \frac{(2n)^2 \cot^2(x)}{\sin^{2n}(x)} + \frac{2n}{\sin^{2n+2}(x)}$$

Beweis. Der Beweis folgt mit Induktion über n . Für $n = 1$ gilt:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{d}{dx} \frac{-2 \cot(x)}{\sin^2(x)} = \frac{4 \cot^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{2}{\sin^4(x)}$$

Für den Induktionsschritt $n \rightarrow n+1$ folgt dann:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sin^{2n+2}(x)} = \left(\frac{1}{\sin^{2n}(x)} \cdot \frac{1}{\sin^2(x)} \right)^{(2)} \\
&= \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} \left(\frac{1}{\sin^2(x)} \right)^{(k)} \left(\frac{1}{\sin^{2n}(x)} \right)^{(2-k)} \\
&= \binom{2}{0} \frac{1}{\sin^2(x)} \left(\frac{(2n)^2 \cot^2(x)}{\sin^{2n}(x)} + \frac{2n}{\sin^{2n+2}(x)} \right) \\
&+ \binom{2}{1} \left(\frac{-2 \cot(x)}{\sin^2(x)} \cdot \frac{-2n \cot(x)}{\sin^{2n}(x)} \right) + \binom{2}{2} \left(\frac{4 \cot^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{2}{\sin^4(x)} \right) \frac{1}{\sin^{2n}(x)} \\
&= \frac{(4n^2 + 8n + 4) \cot^2(x)}{\sin^{2n+2}(x)} + \frac{2n+2}{\sin^{2n+4}(x)} = \frac{(2n+2)^2 \cot^2(x)}{\sin^{2n+2}(x)} + \frac{2n+2}{\sin^{2n+4}(x)}
\end{aligned}$$

□

Definition 3.2. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten für beliebiges $x \in \mathbb{R}$ die folgenden Definitionen:

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^n \exp(ikx) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos(kx) = \frac{\sin\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

sowie

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) = \frac{1}{n+1} \frac{\sin^2\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Wir nennen $D_n(x)$ *Dirichlet-Kern* und $F_n(x)$ *Fejér-Kern*.

Definition 3.3. Es sei $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x \in \mathbb{R}$, eine Familie von Kernen. Wir nennen $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ *gute Kerne*, wenn die folgenden Voraussetzungen gelten:

1. Für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1.$$

2. Es existiert ein konstantes M , so dass für alle $n \geq 1$ gilt:

$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M.$$

3. Für alle $\delta > 0$ gilt:

$$\int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Es ist allgemein bekannt (Stein/Shakarchi [35] et al.), weswegen wir uns den Beweis an dieser Stelle sparen, dass es sich bei der Familie $\{F_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ um eine Familie von guten Kernen handelt. Bei der Familie $\{D_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ handelt es sich um keine guten Kerne, da die Eigenschaften 2. und 3. nicht erfüllt werden. Der zentrale Satz über gute Kerne ist der nachfolgende.

Satz 3.9. *Es sei $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ mit $x \in \mathbb{R}$, eine Familie von guten Kernen und $f \in C_{[0;2\pi]}$ eine 2π -periodische Funktion, dann gilt:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f \star K_n)(x) = f(x)$$

gleichmäßig.

Für den Beweis sei ebenfalls auf Stein/Shakarchi [35] verwiesen. Wir haben nun alle nötigen Werkzeuge beisammen, um zu beweisen, dass unsere Konstruktion (3.3.5) die Ungleichung (3.3.8) erfüllt.

Satz 3.10. *Es sei $f(x) := g_{n,0}(x) \star g_{n,1}(x) \star g_{n,2}(x) \star \dots \in L^2(\mathbb{R})$ mit $g_{n,w}(x) = \varphi(w) \sum_{k=-\ell_w}^{\ell_w} B_n(x-k)$, $\ell_w = \inf \left\{ j \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{k=-j}^j B_n(x-k) = 1 \forall x \in [-w; w] \right\}$ und $B_n(\cdot)$ ein um Null zentrierter B -Spline vom Grad n , wobei $n, w \in \mathbb{N}$ ist. Zudem sei $\varphi(\cdot)$ eine verallgemeinerte inverse multiquadric Funktion, dann existiert eine Konstante $B > 0$, sodass*

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(\omega + 2\pi u) \right|^2 \leq B \tag{3.3.11}$$

gilt, wobei

$$B = \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell + 1)}{2\pi} \left(\prod_{i=1}^{\tilde{w}} \varphi(i)^2 \right) ((2n)^2 + 2n) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell + 1)$$

mit

$$\eta = \frac{(n+1)\tilde{w}}{2}, \quad \tilde{w} = |\{w_1, w_2, w_3, \dots\}|, \quad \eta \in \mathbb{N}$$

ist.

Beweis. Zunächst betrachten wir folgende Umformung:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sin^{2n}(x)} &= \frac{(2n)^2 \cot^2(x)}{\sin^{2n}(x)} + \frac{2n}{\sin^{2n+2}(x)} = \frac{(2n)^2 (S_0(x) - 1)}{\sin^{2n}(x)} + \frac{2n}{\sin^{2n+2}(x)} \\ &= \frac{(2n)^2 + 2n}{\sin^{2n+2}(x)} - \frac{(2n)^2}{\sin^{2n}(x)} \end{aligned}$$

mit $S_0(x) = \frac{1}{\sin^2(x)}$ wie in Lemma 3.8. Dann gelten folgende Abschätzung:

$$\frac{(2n)^2 + 2n}{\sin^{2n+2}(x)} - \frac{(2n)^2}{\sin^{2n}(x)} = \frac{(2n)^2 + 2n - (2n)^2 \sin^2(x)}{\sin^{2n+2}(x)} \geq \frac{2n}{\sin^{2n+2}(x)} \quad (3.3.12)$$

sowie

$$\frac{(2n)^2 + 2n - (2n)^2 \sin^2(x)}{\sin^{2n+2}(x)} \leq \frac{(2n)^2 + 2n}{\sin^{2n+2}(x)} \quad (3.3.13)$$

Für $n = 1$ führt Lemma 3.8 zu

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{\sin^2(x)} = \frac{4 \cot^2(x)}{\sin^2(x)} + \frac{2}{\sin^4(x)} = 6S_0^2(x) - 4S_0(x),$$

was genau dem ersten Fall von Lemma 3.9 entspricht. Wir sehen direkt, dass dann die Abschätzungen:

$$6S_0^2(x) - 4S_0(x) = \frac{6}{\sin^4(x)} - \frac{4}{\sin^2(x)} \geq \frac{2}{\sin^4(x)}$$

und

$$6S_0^2(x) - 4S_0(x) = \frac{6}{\sin^4(x)} - \frac{4}{\sin^2(x)} \leq \frac{6}{\sin^4(x)}$$

gelten. Das heißt, wir haben für jede gerade Ableitung von $S_0(x)$, wie in Lemma 3.8 verlangt, eine Form wie in Lemma 3.9. Von diesem Lemma wissen wir, dass die Abschätzungen (3.3.12) und (3.3.13) gelten. Durch diese Rekursion ergibt sich die Korrektheit unserer Abschätzung für alle geraden Ableitungen von $S_0(x)$. Wir formen nun die Ungleichung (3.3.11) um und benutzen unsere bisher gewonnen Erkenntnisse um die Konstante B zu bestimmen. Aus

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} \left| \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \left(\sum_{k=-\ell}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\omega\eta)^k \right) \operatorname{sinc}^{(n+1)\tilde{w}} \left(\frac{\omega}{2} + \pi u \right) \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \varphi(i) \right|^2$$

folgt

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \varphi(i)^2 \sum_{u \in \mathbb{Z}} \operatorname{sinc}^{2(n+1)\tilde{w}} \left(\frac{\omega}{2} + \pi u \right) \left| \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \sum_{k=-\ell}^{\ell} \exp(i\omega\eta)^k \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \varphi(i)^2 \sin^{2(n+1)\tilde{w}} \left(\frac{\omega}{2} \right) S_{(n+1)\tilde{w}-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) \left| \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} D_\ell(\omega\eta) \right|^2 \\
&= \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \varphi(i)^2 \sin^{2(n+1)\tilde{w}} \left(\frac{\omega}{2} \right) S_{(n+1)\tilde{w}-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} F_{2\ell}(\omega\eta).
\end{aligned}$$

Wir können direkt sehen, dass unsere Konstruktion Nullstellen hat, denn der Fejér-Kern ist nicht nullstellenfrei. Die Singularitäten von $F_{2\ell}(\omega\eta)$ bei $2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, stellen kein Problem dar und haben der Wert $2\ell\eta + 1$, wie man durch zweimaliges Anwenden der Regel von de l'Hospital sieht. Damit muss unsere untere Schranke gleich Null sein. Das Maximum des Fejér-Kerns wird in der Null angenommen, woraus zum einen $\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} F_{2\ell}(0) = \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} 2\ell\eta + 1$ folgt, sowie aus unseren Abschätzungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \varphi(i)^2 \sin^{2(n+1)\tilde{w}} \left(\frac{\omega}{2} \right) S_{(n+1)\tilde{w}-1} \left(\frac{\omega}{2} \right) \\
&\leq \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \varphi(i)^2 ((2n)^2 + 2n).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann direkt

$$B = \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)}{2\pi} \left(\prod_{i=1}^{\tilde{w}} \varphi(i)^2 \right) ((2n)^2 + 2n) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell\eta + 1).$$

□

Wir sind damit noch nicht ganz am Ziel, da wir zwar eine positive Konstante B gefunden haben, die unsere obere Schranke darstellt, aber unsere untere Schranke noch nicht positiv ist. Bevor wir dies beheben, wollen wir uns zunächst die Skalierungsgleichung unserer Konstruktion ansehen:

Satz 3.11. *Es sei $f(x) := g_{n,0}(x) \star g_{n,1}(x) \star g_{n,2}(x) \star \dots \in L^2(\mathbb{R})$ mit $g_{n,w}(x) = \varphi(w) \sum_{k=-\ell_w}^{\ell_w} B_n(x-k)$, $\ell_w = \inf \left\{ j \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{k=-j}^j B_n(x-k) = 1 \forall x \in [-w; w] \right\}$ und $B_n(\cdot)$ ein um Null zentrierter B -Spline vom Grad n , wobei $n, w \in \mathbb{N}$ ist. Zudem sei $\varphi(\cdot)$ eine verallgemeinerte inverse multiquadric Funktion und $\frac{(n+1)\tilde{w}}{2} \in \mathbb{N}$, $\tilde{w} = \lfloor \{w_1, w_2, w_3, \dots\} \rfloor$. Dann erfüllt die Skalierungsfunktion $\hat{f}(\omega)$ mit $\hat{f}(\omega)$ wie in (3.3.9) die Skalierungsgleichung, und es gilt:*

$$\hat{f}(\omega) = Q \left(\frac{\omega}{2} \right) \hat{f} \left(\frac{\omega}{2} \right) \tag{3.3.14}$$

mit

$$Q\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \cos\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{\omega\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \left|\cos\left(\frac{\omega\eta}{4}\right)\right|^{\tilde{w}-1} \sqrt{S_\tau\left(\frac{\omega}{4}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega\eta}{4}\right)^{\tilde{w}-1} 2^{\frac{m}{2}} \left|\cos\left(\frac{\omega}{4}\right)\right|^{\frac{m}{2}} \sqrt{S_\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)} \left|\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \cos\left(\frac{(2\ell+1)\omega\eta}{4}\right)\right|}$$

und

$$\hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)} \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} D_\ell\left(\frac{\omega\eta}{2}\right) \operatorname{sinc}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\sqrt{\sin\left(\frac{\omega}{4}\right)^m S_\tau\left(\frac{\omega}{4}\right) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} F_{2\ell}\left(\frac{\omega\eta}{2}\right)}}$$

wobei $\tau = (n+1)\tilde{w} - 1$ und $m = 2(n+1)\tilde{w}$ ist.

Beweis. Für die Skalierungsfunktion nach (3.3.9) gilt:

$$\begin{aligned} \hat{\hat{f}}(\omega) &= \frac{\hat{f}(\omega)}{\sqrt{2\pi \cdot \sum_{u \in \mathbb{Z}} \left|\hat{f}(\omega + 2\pi u)\right|^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\prod_{i=1}^{\tilde{w}} \varphi(i) \cdot \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} D_\ell(\omega\eta) \operatorname{sinc}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1) \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \varphi(i)^2 \sin^m\left(\frac{\omega}{2}\right) S_\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} F_{2\ell}(\omega\eta)}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)} \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} D_\ell(\omega\eta) \operatorname{sinc}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sqrt{\sin^m\left(\frac{\omega}{2}\right) S_\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} F_{2\ell}(\omega\eta)}} \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber betrachten wir nun zunächst Zähler und Nenner getrennt. Für den Zähler gilt:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} D_\ell(\omega\eta)\right) \operatorname{sinc}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\omega}{2}\right) &= \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \sin\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \omega\eta\right) \sin^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\omega\eta}{2}\right)^{\tilde{w}-1} \left(\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{m}{2}}} \\ &= \frac{2^{\tilde{w}-1} \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \sin\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{\omega\eta}{2}\right) \cos\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{\omega\eta}{2}\right) \left(2 \sin\left(\frac{\omega}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)\right)^{\frac{m}{2}}}{\left(2 \sin\left(\frac{\omega\eta}{4}\right) \cos\left(\frac{\omega\eta}{4}\right)\right)^{\tilde{w}-1} \left(\frac{\omega}{4}\right)^{\frac{m}{2}} 2^{\frac{m}{2}}} \\ &= \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \cos\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{\omega\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{m}{2}}}{\cos\left(\frac{\omega\eta}{4}\right)^{\tilde{w}-1}} D_\ell\left(\frac{\omega\eta}{2}\right) \operatorname{sinc}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\omega}{4}\right). \end{aligned}$$

Für den Nenner folgt dann:

$$\sqrt{\sin^m\left(\frac{\omega}{2}\right) S_\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} F_{2\ell}(\omega\eta)}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{\left(2 \sin\left(\frac{\omega}{4}\right) \cos\left(\frac{\omega}{4}\right)\right)^m S_\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) \left(2^{\tilde{w}-1} \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \sin\left(\frac{(2\ell+1)\omega\eta}{4}\right) \cos\left(\frac{(2\ell+1)\omega\eta}{4}\right)\right)^2}{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1) \left(2 \sin\left(\frac{\omega\eta}{4}\right) \cos\left(\frac{\omega\eta}{4}\right)\right)^{2(\tilde{w}-1)}}} \\
&= \sqrt{\frac{2^m \cos\left(\frac{\omega}{4}\right)^m S_\tau\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \cos\left(\frac{(2\ell+1)\omega\eta}{4}\right)^2 \sin\left(\frac{\omega}{4}\right)^m \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} F_{2\ell}\left(\frac{\omega\eta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\omega\eta}{4}\right)^{2(\tilde{w}-1)}}} \\
&= \frac{2^{\frac{m}{2}} \left|\cos\left(\frac{\omega}{4}\right)\right|^{\frac{m}{2}} \sqrt{S_\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)} \left|\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \cos\left(\frac{(2\ell+1)\omega\eta}{4}\right)\right|}{\left|\cos\left(\frac{\omega\eta}{4}\right)\right|^{\tilde{w}-1}} \sqrt{\sin\left(\frac{\omega}{4}\right)^m \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} F_{2\ell}\left(\frac{\omega\eta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Durch eine Multiplikation mit der eins im Sinne von $\frac{\sqrt{S_\tau\left(\frac{\omega}{4}\right)}}{\sqrt{S_\tau\left(\frac{\omega}{4}\right)}}$ folgt die Skalierungsgleichung

$$\hat{f}(\omega) = Q\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

mit

$$Q\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \cos\left(\left(\ell + \frac{1}{2}\right) \frac{\omega\eta}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{m}{2}} \left|\cos\left(\frac{\omega\eta}{4}\right)\right|^{\tilde{w}-1} \sqrt{S_\tau\left(\frac{\omega}{4}\right)}}{\cos\left(\frac{\omega\eta}{4}\right)^{\tilde{w}-1} 2^{\frac{m}{2}} \left|\cos\left(\frac{\omega}{4}\right)\right|^{\frac{m}{2}} \sqrt{S_\tau\left(\frac{\omega}{2}\right)} \left|\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \cos\left(\frac{(2\ell+1)\omega\eta}{4}\right)\right|}$$

und

$$\hat{f}\left(\frac{\omega}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)}} \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} D_\ell\left(\frac{\omega\eta}{2}\right) \operatorname{sinc}^{\frac{m}{2}}\left(\frac{\omega}{4}\right)}{\sqrt{\sin\left(\frac{\omega}{4}\right)^m S_\tau\left(\frac{\omega}{4}\right) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} F_{2\ell}\left(\frac{\omega\eta}{2}\right)}}$$

□

Wir wollen uns nun noch einmal dem Fejér-Kern zuwenden und dem damit verbundenen Problem der Nullstellen. Da für den Fejér-Kern $F_n(x)$ die Nichtnegativität gilt, müssen wir uns offenbar nur um die Stellen kümmern, an denen $F_n(x) \equiv 0$ ist.

Lemma 3.10. *Der Fejér-Kern $F_n(x)$, mit $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ besitzt die folgende Darstellung:*

$$F_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n D_k(x) = 1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (2n - 2(k-1)) \cos(kx)$$

Beweis. Die Darstellung folgt mittels Induktion über n , und es gilt für $n = 1$:

$$F_1(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^1 D_k(x) = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^1 (2 - 2(k-1)) \cos(kx) = 1 + \cos(x).$$

Für $n \rightarrow n+1$ folgt:

$$\begin{aligned} F_{n+1} &= \frac{1}{n+2} \left(\sum_{k=0}^n D_k(x) + D_{n+1}(x) \right) = \frac{n+1}{n+2} F_n + \frac{1}{n+2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \cos(kx) \right) \\ &= \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^n (2n - 2(k-1)) \cos(kx) \right) + \frac{1}{n+2} \left(1 + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \cos(kx) \right) \\ &= \frac{1}{n+2} \left((n+1) + \sum_{k=1}^n (2n - 2(k-1)) \cos(kx) + 1 + 2 \sum_{k=1}^{n+1} \cos(kx) \right) \\ &= \frac{1}{n+2} \left((n+2) + \sum_{k=1}^n (2(n+1) - 2(k-1)) \cos(kx) \right) \\ &= 1 + \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} (2n - 2(k-1)) \cos(kx) \end{aligned}$$

□

Damit ist der Fejér-Kern $F_n(x)$ offenbar selbst eine endliche Fourier-Cosinus-Reihe mit konstantem Koeffizient $a_0=1$. Wir verändern nun $F_n(x)$ dahingehend, dass wir auf das a_0 einen Störfaktor $\epsilon > 0$ addieren, wobei dieser Störfaktor gleichzeitig das Minimum von $F_{n,\epsilon}(x)$ darstellt. Da offenbar $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_{n,\epsilon}(x) = F_n(x)$ gilt, können wir so verhindern, dass unsere Konstruktion Nullstellen hat und damit eine Orthogonalisierung durchführen. Das heißt, wir haben nun eine zweite Möglichkeit gefunden, mittels einer Faltung und der Skalierungsgleichung Wavelets aus radialen Basisfunktionen zu erzeugen. Abschließend wollen wir unsere Erkenntnisse noch in einem Satz zusammenführen. Der Satz bedarf allerdings keines eigenen Beweises mehr, da sich bereits alles aus der vorangegangenen Konstruktion ergibt.

Satz 3.12. *Es sei V_j die durch die Skalierung*

$$V_0 = \overline{\text{span} \{f(\omega - u) \mid u \in \mathbb{Z}\}}$$

erzeugte multiresolution Analysis. Die dazugehörige orthogonale Zerlegung

$$L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \bigoplus_{j \in \mathbb{Z}} W_j$$

wird bestimmt durch das in Gleichung (3.3.14) definierte Wavelet \tilde{f} :

$$W_0 = \overline{\text{span} \left\{ \tilde{f}(\omega - u) \mid u \in \mathbb{Z} \right\}}.$$

Damit ist $\left\{ \tilde{f}(\cdot) = 2^{-\frac{j}{2}} \tilde{f}(2^{-j} \cdot -u) \mid j, u \in \mathbb{Z} \right\}$ eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R})$.

Die von uns konstruierten Wavelets haben natürlich keinen kompakten Träger mehr, allerdings fallen sie exponentiell (abhängig von $\epsilon > 0$) ab. Hierbei gilt für $F_{n,\epsilon}(x)$:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_{n,\epsilon}(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (1 + \epsilon) + \frac{1}{n+2} \sum_{k=1}^{n+1} (2n - 2(k-1)) \cos(kx) = F_n(x)$$

Durch die Tatsache, dass die Wavelets durch eine diskrete Faltung mit einem B-Spline entstehen, haben diese eine leichte Ähnlichkeit bezüglich des „Formfaktors“, im Hinblick auf Spline Wavelets. Wir werden uns dies im Kapitel über explizite Konstruktionen noch einmal genauer ansehen. Es ist noch anzumerken, dass der Parameter a so gewählt werden sollte, dass die radiale Basisfunktion nicht zu schnell abfällt, damit es genügend Faltungspunkte gibt. Denn gibt es zu wenig Faltungspunkte, ist der Einfluss der radialen Basisfunktion gering, da diese nur an den Stellen $w_i, i \in \mathbb{Z}$ betrachtet wird. Zudem hat die Konstruktion folgende weitere schöne Eigenschaft:

Bemerkung 3.1. Neben den verallgemeinerten multiquadric Funktionen erfüllen auch die Gauß'schen radialen Basisfunktionen die Bedingungen an die diskrete Wavelet Konstruktion.

Dies ist klar, denn von der Funktion φ wird bei der Konstruktion lediglich verlangt, dass sie radialsymmetrisch abfällt und strikt positiv ist. Dies erfüllt natürlich auch die Gauß'sche radiale Basisfunktion. Damit lassen sich auf der Basis der vorangegangenen Konstruktion eventuell auch noch andere Funktionen finden, welche diese Eigenschaften erfüllen und damit zur Wavelet Konstruktion geeignet wären.

3.3.2 Der zweidimensionalen Fall

Im letzten Schritt wollen wir nun unsere Konstruktion über die Skalierungsgleichung im Zweidimensionalen anwenden. Die dazu nötigen Grundlagen haben wir bereits im Kapitel 3.2.1 gelegt. Dort haben wir bereits die MRA für höhere Dimension definiert. Der Grundraum V_0 wird im Mehrdimensionalen wieder durch eine Skalierungsfunktion $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $d \geq 2$ erzeugt und $\{f(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d\}$ bildet eine Riesz-Basis von V_0 . Damit ist

$$\{f_{j,k}(\cdot) = |\det A|^{-\frac{j}{2}} f(A^j \cdot -k) \mid j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d\}$$

eine Orthonormalbasis von V_j , denn wir dürfen ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Orthonormalität von $\{f(\cdot - k) \mid k \in \mathbb{Z}^d\}$ und

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x) dx \neq 0$$

annehmen. Hierzu sei auch auf Meyer [27] verwiesen. Wir wollen ein weiteres zentrales Ergebnis von Meyer [27] angeben, wobei wir für den Beweis auf die genannte Quelle verweisen.

Satz 3.13. *Es sei $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ eine MRA mit einer Matrix $A \in \mathbb{Z}^2$, $|\det A| > 1$, welche die in Kapitel 3.2.1 beschriebenen Eigenschaften besitzt. Dann existieren $|\det A| - 1$ Wavelets*

$$\tilde{f}_1, \tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_{|\det A| - 1} \in V_{-1}$$

und

$$\{\tilde{f}_{i,j,k}(\cdot) = |\det A|^{-\frac{j}{2}} \tilde{f}_i(A^{-j} \cdot -k) \mid i = 1, \dots, |\det A| - 1, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^d\}$$

ist eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Das heißt für das Aufspannen unseres Raumes V_0 sind nun in Abhängigkeit der Matrix A unter Umständen mehrere Wavelets nötig. Es kommt also nachfolgend auf die Wahl der Matrix A an. Generell gibt es also eine unendlich große Anzahl an Möglichkeiten, wie die Matrix A aussehen kann, wobei die Anzahl der Wavelets an der Determinante hängt und die Drehung der einzelnen Wavelets an den Eigenwerten. Wir wollen hier allerdings explizit zwei Matrizen angeben, welche aus der Literatur bereits bekannte Eigenschaften haben. Die Matrizen sind auch der Hauptgrund für die erneute Konstruktion der eindimensionalen radialen Basisfunktionen Wavelets über die Skalierungsgleichung.

Satz 3.14. *Es seien $f_1, f_2 \in L^2(\mathbb{R})$ eindimensionale Skalierungsfunktionen, welche Skalierungsgleichungen mit Koeffizienten $h_1 := (h_{1,k})_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$ und $h_2 := (h_{2,k})_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$ genügen. Dann erfüllt $f_{1,2}$ die Skalierungsgleichung*

$$f_{1,2}(x) = 2 \cdot \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_k f_{1,2}(Ax - k) \quad (3.3.15)$$

mit $h_k = h_1 \star h_2$ und

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es seien \tilde{f}_1, \tilde{f}_2 die von den Skalierungsfunktionen f_1 und f_2 erzeugten eindimensionalen Wavelets, dann sind die zugehörigen zweidimensionalen Wavelets definiert durch:

$$\bar{f}_1(x_1, x_2) = \tilde{f}_1(x_1) f_2(x_2)$$

$$\bar{f}_2(x_1, x_2) = f_1(x_1) \tilde{f}_2(x_2)$$

$$\bar{f}_3(x_1, x_2) = \tilde{f}_1(x_1) \tilde{f}_2(x_2)$$

Dann ist

$$\left\{ \bar{f}_{i,j,k}(\cdot) = 4^{-\frac{j}{2}} \bar{f}_i(2^{-j} \cdot -k) \mid i = 1, 2, 3, j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R}^2)$.

Für den Beweis sei auf Cohen/Daubechies [14] verwiesen.

Das heißt, die erste Matrix führt uns zu einer Konstruktion über die eindimensionalen Wavelets, die wir bereits konstruiert haben. Allerdings ist noch ein wenig unschön, dass wir drei Wavelets zum Aufspannen unsere Grundraums V_0 benötigen. Deswegen wollen wir nachfolgend eine weitere Matrix zu Konstruktion angeben. Dazu benötigen wir das nachfolgende Lemma.

Lemma 3.11. *Es sei $\hat{h}_1(\omega_1)$ die Fourierreihe der Skalierungskoeffizienten einer orthogonalen eindimensionalen Skalierungsfunktion. Dann erfüllt*

$$\hat{h}(\omega) = \hat{h}(\omega_1, \omega_2) = \hat{h}_1(\omega_1)$$

die Orthogonalitätsbedingung

$$\left| \hat{h}(\omega) \right|^2 + \left| \hat{h}(\omega + (\pi, \pi)^T) \right|^2 = 1, \quad \hat{h}(0) = 1$$

einer orthogonalen zweidimensionalen Skalierungsfunktion.

Dies ist allerdings wieder nur ein hinreichendes Kriterium. Wir müssen auch hier sicherstellen, dass die zweidimensionale Skalierungsgleichung in $L^2(\mathbb{R}^2)$ tatsächlich eine Lösung besitzt und eine orthogonale Zerlegung der Art $L^2(\mathbb{R}) = V_0 \oplus \bigoplus_{j=0}^{\infty} W_j$ ermöglicht. Dabei ist wie gewohnt V_0 unser Grundraum und die W_j sind Vektorräume, welche von der direkten Summe unserer Wavelets aufgespannt werden. Dabei hilft uns folgender Satz.

Satz 3.15. *Wenn das unendliche Produkt*

$$\hat{h}_{\infty}(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \hat{h}(A^{-k}\omega)$$

mit

$$\hat{h}(\omega) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_k \exp(-ik \cdot \omega)$$

und

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

in $L^2(\mathbb{R}^2)$ konvergiert, dann existiert genau ein Wavelet

$$\bar{f}(x_1, x_2) = \tilde{f}(x_2) f(x_1 - x_2)$$

sodass

$$\left\{ \bar{f}_{j,k}(\cdot) = 2^{-\frac{j}{2}} \bar{f}(2^{-j} \cdot -k) \mid j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R}^2)$ ist.

Für den Beweis des Lemmas 3.11, als auch für den Satz 3.15 sei wieder auf Cohen/Daubechies [14] verwiesen.

Das heißt für uns, wir müssen die Konvergenz von $\hat{h}_{\infty}(\omega)$ in $L^2(\mathbb{R}^2)$ zeigen und erhalten dann unser Wavelet $\bar{f}(x_1, x_2)$ mit den gewünschten Eigenschaften einer MRA in zwei Dimensionen. Wir wollen nun als erstes elementare Eigenschaften der Matrix A herausstellen.

Korollar 3.3. *Für*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist

$$A^{-n} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ für } n \in 2\mathbb{N}$$

und

$$A^{-n} = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ für } n \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$$

wobei A^{-n} die n -te Potenz der Inversen der Matrix A ist.

Beweis. Es gilt $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot A$ und $A^{-2} = A^{-1} \cdot A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot I_2$. Damit folgt $\left(\frac{1}{2} \cdot I_2\right)^{\frac{n}{2}}$ mit $n \in 2\mathbb{N}$ offenbar gerade der erste Fall und $\frac{1}{2} \cdot A \left(\frac{1}{2} \cdot I_2\right)^{\frac{n-1}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} A \cdot I_2 = \frac{1}{2^{\frac{n+1}{2}}} A$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$, was gerade dem zweiten Fall entspricht. \square

Wir wollen nun ein weiteres Lemma aus Cohen [13] benutzen, um den Nachweis der Konvergenz von \hat{h}_∞ einfacher zu machen. Hierbei sei für den Beweis wieder auf die genannte Quelle verwiesen.

Lemma 3.12. *Die Fourierreihe der Skalierungskoeffizienten \hat{h}_∞ konvergiert im Sinne von Satz 3.15, wenn ein Kompaktum $K \subset \mathbb{R}^2$ existiert, sodass gilt:*

1. K enthält eine offene Umgebung des Ursprungs,
2. $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{u \in \mathbb{Z}^2} (u + K)$ fast überall,
3. $(u + K) \cap K = \emptyset, \forall u \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{0\}$ fast überall,
4. Für $k > 0, \omega \in K$, gilt $\hat{h}(A^{-k}\omega) \neq 0$.

Wobei die Bedingungen 1. - 4. äquivalent sind zu

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}^2} \left| \hat{f}(A^{-k}\omega + 2\pi n) \right|^2 \neq 0.$$

Dies ist ein sehr nützliches Lemma, da es uns den Nachweis der Konvergenz von \hat{h}_∞ garantiert. Denn mit Satz 3.10 und der Fourier-Cosinus-Reihe $F_{n,\epsilon}(x)$ gilt offenbar, dass $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(\omega + 2\pi n) \right|^2$ nie kleiner als eine positive Konstante wird und somit auch keine Nullstellen besitzt. Wir wissen weiterhin, dass alle Einträge der Matrix A^{-k} reell sind und dass die Matrix nicht nilpotent wird. Damit ist die Nullstellenfreiheit im Zweidimensionalen garantiert. Unsere Ergebnisse seien in folgendem Satz zusammengefasst.

Satz 3.16. *Es sei \tilde{f} das eindimensionale Wavelet aus Satz 3.12 und f die zugehörige eindimensionale Skalierungsfunktion mit Koeffizienten $h := (h_k)_{k \in \mathbb{Z}} \in \ell_2$. Dann erfüllt*

$$\hat{h}(\omega) = \hat{h}(\omega_1, \omega_2) = 2^{-\frac{1}{2}} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2} h_k \exp(-ik \cdot \omega)$$

die Orthogonalitätsbedingung aus Lemma 3.11 einer orthogonalen zweidimensionalen Skalierungsfunktion und das unendliche Produkt

$$\hat{h}_\infty(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} \hat{h}(A^{-k}\omega)$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

konvergiert in $L^2(\mathbb{R}^2)$, sodass ein Wavelet

$$\bar{f}(x_1, x_2) = \tilde{f}(x_2) f(x_1 - x_2)$$

existiert und

$$\left\{ \bar{f}_{j,k}(\cdot) = 2^{-\frac{j}{2}} \bar{f}(2^{-j} \cdot -k) \mid j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{Z}^2 \right\}$$

eine Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R}^2)$ ist.

Damit ist das zu Beginn dieses Kapitels gesetzte Ziel erreicht. Wir haben zwei Möglichkeiten gefunden, zweidimensionale Wavelets aus radialen Basisfunktionen zu konstruieren und damit sogar die vermeintliche „Unschönheit“ von mehr als einem Wavelet zum Aufspannen unseres Grundraums überwunden. Im Kapitel über explizite Konstruktionen werden wir das 3D Wavelet noch einmal genauer betrachten. Damit haben wir das erste aus der Literatur bekannte zweidimensionale radiale Basisfunktionen Wavelet konstruiert. Dieses Wavelet „bevorzugt“ die Diagonale um den Ursprung, was den Eigenvektoren der Matrix A geschuldet ist. Wir müssen uns aber im Klaren sein, dass wir einen Kompromiss eingegangen sind, als wir die $F_n(x)$ durch $F_{n,\epsilon}(x)$ ersetzt haben. Denn je kleiner das ϵ , umso langsamer klingt das Wavelet ab und umso größer das ϵ , je schlechter werden die Orthogonalitätsbeziehungen unserer Wavelets.

3.3.3 Ein Konstruktion über Gauß'sche radiale Basisfunktionen

Wir wollen nun eine zweite Konstruktion über die Gauß'schen radialen Basisfunktionen als ein weiteres Beispiel von radialen Basisfunktionen Wavelets angeben. Hierfür wollen wir uns zunächst noch einmal klarmachen, wie die Konstruktion funktioniert. Wir starten mit einer Gauß'schen radialen Basisfunktion mit festen shape Parameter a . Wir erhalten dann für die einzelnen $g_{n,w}(x)$ mit $n, w \in \mathbb{N}$,

$$g_{n,0}(x) = \exp\left(- (a \cdot 0)^2\right) \sum_{k=-\ell_0}^{\ell_0} B_n(x - k)$$

$$g_{n,1}(x) = \exp\left(- (a \cdot 1)^2\right) \sum_{k=-\ell_1}^{\ell_1} B_n(x - k)$$

...

$$g_{n,\bar{w}}(x) = \exp\left(- (a \cdot \bar{w})^2\right) \sum_{k=-\ell_{\bar{w}}}^{\ell_{\bar{w}}} B_n(x - k)$$

wobei wieder $\ell_w = \inf \left\{ j \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{k=-j}^j B_n(x - k) = 1 \forall x \in [-w; w] \right\}$ und $B_n(x)$ ein um Null zentrierter B-Spline vom Grad $n \in \mathbb{N}$ ist. Dann ist unsere Funktion $f(x)$, mithilfe derer wir unsere Konstruktion durchführen wollen, mittels der nachfolgenden Faltung gegeben:

$$f(x) = g_{n,0}(x) \star g_{n,1}(x) \star g_{n,2}(x) \star g_{n,3}(x) \star \dots$$

Um dies zu veranschaulichen, sind die nachfolgenden zwei Graphen hilfreich.

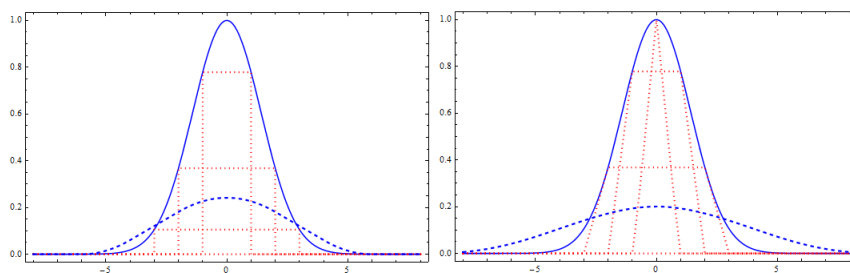


Abbildung 4: Links: Gauß'schen radialen Basisfunktionen mit $a = 0.5$ (in blau) mit $g_{0,w}(x)$ (rot gepunktet) und der Faltung $f(x)$ (blau gestrichelt).

Rechts: Gauß'schen radialen Basisfunktionen mit $a = 0.5$ (in blau) mit $g_{1,w}(x)$ (rot gepunktet) und der Faltung $f(x)$ (blau gestrichelt).

Auf der linken Seite der Abbildung, können wir eine Konstruktion über die Summe und anschließende Faltung mittels B-splines vom Grad 0 sehen. Auf der rechten Seite der Abbildung hingegen, eine Konstruktion über die Summe und anschließende Faltung mittels B-splines vom Grad 1. Man kann bei beiden Konstruktion sehr gut erkennen, dass die Faltung zu einer flacheren Funktion führt, die aber gleichwohl immer noch radialsymmetrisch ist. Wir wollen nun zunächst wieder zeigen, dass unser Vorgehen auch für Gauß'sche radiale Basisfunktionen anwendbar ist. Dazu nutzen wir den nachfolgenden Satz:

Satz 3.17. *Es sei $f(x) := g_{n,0}(x) \star g_{n,1}(x) \star g_{n,2}(x) \star \dots \in L^2(\mathbb{R})$ mit $g_{n,w}(x) = \varphi(w) \sum_{k=-\ell_w}^{\ell_w} B_n(x-k), \ell_w = \inf \left\{ j \in \mathbb{N}_0 \mid \sum_{k=-j}^j B_n(x-k) = 1 \forall x \in [-w; w] \right\}$ und $B_n(\cdot)$ ein um Null zentrierter B-Spline vom Grad n wobei $n, w \in \mathbb{N}$ ist. Zudem sei $\varphi(a \cdot)$ eine Gauß'sche radiale Basisfunktion mit Parameter $a \in \mathbb{R}$, dann existiert eine Konstante $B > 0$, sodass*

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(\omega + 2\pi u) \right|^2 \leq B \quad (3.3.16)$$

gilt, wobei

$$B = \frac{\prod_{\ell=0}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \exp\left(- (ai)^2\right)^2 \left((2n)^2 + 2n \right) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell\eta+1)$$

mit

$$\eta = \frac{(n+1)\tilde{w}}{2}, \quad \tilde{w} = |\{w_1, w_2, w_3, \dots\}|, \quad \eta \in \mathbb{N}$$

ist.

Beweis. Es gelten weiterhin die Abschätzungen

$$\frac{(2n)^2 + 2n}{\sin^{2n+2}(x)} - \frac{(2n)^2}{\sin^{2n}(x)} = \frac{(2n)^2 + 2n - (2n)^2 \sin^2(x)}{\sin^{2n+2}(x)} \geq \frac{2n}{\sin^{2n+2}(x)} \quad (3.3.17)$$

sowie

$$\frac{(2n)^2 + 2n - (2n)^2 \sin^2(x)}{\sin^{2n+2}(x)} \leq \frac{(2n)^2 + 2n}{\sin^{2n+2}(x)}. \quad (3.3.18)$$

Damit bleibt die Rekursion unserer Abschätzungen für alle geraden Ableitungen von $S_0(x)$ erhalten. Aus dem Betragsquadrat als Nenner der Orthonormalbasis

$$\sum_{u \in \mathbb{Z}} \left| \prod_{\ell=0}^{\tilde{w}-1} \left(\sum_{k=-\ell}^{\ell} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\omega\eta)^k \right) \operatorname{sinc}^{(n+1)\tilde{w}} \left(\frac{\omega}{2} + \pi u \right) \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \exp\left(- (ai)^2\right) \right|^2$$

mit

$$\eta = \frac{(n+1)\tilde{w}}{2}, \quad \tilde{w} = |\{w_1, w_2, w_3, \dots\}|, \quad \eta \in \mathbb{N}$$

folgt

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \exp\left(- (ai)^2\right)^2 \sum_{u \in \mathbb{Z}} \operatorname{sinc}^{2(n+1)\tilde{w}}\left(\frac{\omega}{2} + \pi u\right) \left| \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} \sum_{k=-\ell}^{\ell} \exp(i\omega\eta)^k \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \exp\left(- (ai)^2\right)^2 \sin^{2(n+1)\tilde{w}}\left(\frac{\omega}{2}\right) S_{(n+1)\tilde{w}-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \left| \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} D_{\ell}(\omega\eta) \right|^2 \\
&= \frac{\prod_{\ell=0}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \exp\left(- (ai)^2\right)^2 \sin^{2(n+1)\tilde{w}}\left(\frac{\omega}{2}\right) S_{(n+1)\tilde{w}-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} F_{2\ell}(\omega\eta).
\end{aligned}$$

Die untere Konstante ist wieder $A = 0$, was am Fejér-Kern liegt. Das Maximum wird in der Null angenommen, woraus zum einen $\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} F_{2\ell}(0) = \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)$ folgt, sowie aus unseren Abschätzungen

$$\begin{aligned}
&\frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \varphi(i)^2 \sin^{2(n+1)\tilde{w}}\left(\frac{\omega}{2}\right) S_{(n+1)\tilde{w}-1}\left(\frac{\omega}{2}\right) \\
&\leq \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \exp\left(- (ai)^2\right)^2 ((2n)^2 + 2n).
\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich dann direkt

$$B = \frac{\prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1)}{2\pi} \prod_{i=1}^{\tilde{w}} \exp\left(- (ai)^2\right)^2 ((2n)^2 + 2n) \prod_{\ell=1}^{\tilde{w}-1} (2\ell+1).$$

□

Wir räumen auch hier die Nullstellen des Fejér-Kerns mithilfe der Darstellung über seine Fourier-Cosinus-Reihe aus und können damit zeigen, dass sich auch die Gauß'schen radialen Basisfunktionen zur Konstruktion von radialen Basisfunktionen Wavelets eignen. Wir verändern hierbei $F_n(x)$ wieder dahingehend, dass wir auf das a_0 einen Störfaktor $\epsilon > 0$ addieren, wobei dieser Störfaktor gleichzeitig das Minimum von $F_{n,\epsilon}(x)$ darstellt. Dann gilt offenbar $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} F_{n,\epsilon}(x) = F_n(x)$, womit eine Orthogonalisierung möglich wird. Hierbei ist sowohl die Skalierungsfunktion als auch die Skalierungsgleichung die gleiche wie in Satz 3.11, woraus direkt folgt, dass beide Konstruktionen die gleiche Orthonormalbasis des $L^2(\mathbb{R})$ wie in Satz 3.12 erzeugen. Wie in Louis/Maass/Rieder [23] unter Korollar 2.2.13 nachzulesen ist, ist das mit einer MSA assoziierte Wavelet nicht eindeutig bestimmt. Damit können wir, ohne dass es eines weiteren Beweises bedarf, direkt sehen, dass wir die Konstruktion von Gauß'schen radialen Basisfunktionen Wavelets in zwei Dimensionen so durchführen können, wie im vorangegangenen Kapitel.

3.3.4 Eine explizite Konstruktion

Wir werden nun beispielhaft eine explizite Konstruktion eines Gauß'schen radialen Basisfunktionen Wavelets mittels des B-splines vom Grad 1 und $a = 2$ durchführen. Wir wählen dieses Beispiel, da der Aufwand des expliziten Aufschreibens der Faltung mit dem Grad der B-splines als auch mit der Breite der radialen Basisfunktion und des damit einhergehenden größeren Wertens \tilde{w} steigt. Unsere Konstruktion lautet dann

$$f(x) = g_{1,0}(x) \star g_{1,1}(x)$$

mit

$$g_{1,0}(x) = \exp\left(- (a \cdot 0)^2\right) \begin{cases} 1 + x, & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ 1 - x, & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{für } \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$\begin{aligned} g_{1,1}(x) &= \exp\left(- (a \cdot 1)^2\right) \sum_{k=0}^2 B_1(x+k) \\ &= \exp\left(- (a \cdot 1)^2\right) \begin{cases} 2 + x, & \text{für } -2 < x \leq -1 \\ 1, & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{für } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \end{aligned}$$

Für $f(x)$ folgt dann insgesamt:

$$f(x) = \prod_{j=0}^1 \exp\left(- (a \cdot j)^2\right) \begin{cases} \frac{1}{6} (x+3)^3, & \text{für } -3 \leq x < -2 \\ \frac{1}{6} (-2x^3 - 9x^2 - 9x + 3), & \text{für } -2 \leq x \leq -1 \\ \frac{1}{6} (x^3 + 6), & \text{für } -1 < x < 0 \\ \frac{1}{6} (-x^3 + 6), & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{6} (2x^3 - 9x^2 + 9x + 3), & \text{für } 1 < x \leq 2 \\ -\frac{1}{6} (x-3)^3, & \text{für } 2 < x \leq 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} .$$

Da wir nicht nur die Funktion $f(x)$ explizit aufschreiben wollen, sondern auch die Maske der Funktion kennen wollen, um dann explizit die Skalierungsgleichung aufzuschreiben, fahren wir damit zunächst fort. Aus der Haar-Funktion (3.3.4) ergeben sich zunächst die Masken unserer Funktionen $g_{1,0}(x)$ und $g_{1,1}(x)$, wobei wir der Übersichtlichkeit halber $\sqrt{2}$ zunächst vernachlässigen.

Für unsere Funktionen folgt:

$$g_{1,0}(x) = \frac{1}{2}g_{1,0}(2x-1) + g_{1,0}(2x) + \frac{1}{2}g_{1,0}(2x+1)$$

und

$$g_{1,1}(x) = \frac{1}{2}(g_{1,1}(2x-2) + g_{1,1}(2x-1) + g_{1,1}(2x+1) + g_{1,1}(2x+2))$$

Wir wählen nun für die Darstellung der Masken eine kompaktere und in der Literatur häufig anzutreffende Schreibweise. Diese lautet wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Für } g_{0,1}(x) : & \quad \left(\dots, 0, 0, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, 0, 0, 0, \dots \right) \\ \text{Für } g_{0,2}(x) : & \quad \left(\dots, 0, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots \right) \end{aligned}$$

Diese Form gibt im Allgemeinen die Koeffizienten der Masken wieder, als auch die Position der ganzzahligen Translate. Hierbei wird standardmässig von der Zentrierung um $(2x+0)$ ausgegangen. Mithilfe der diskreten Faltung erhalten wir die Maske der gefalteten Funktion $f(x)$:

$$\left(\dots, 0, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8}, \frac{1}{8}, 0, \dots \right)$$

Explizit bedeutet das für unsere Funktion $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{8}f(2x-3) + \frac{3}{8}f(2x-2) \\ &+ \frac{3}{8}f(2x-1) + \frac{1}{4}f(2x) + \frac{3}{8}f(2x+1) + \frac{3}{8}f(2x+2) + \frac{1}{8}f(2x+3). \end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die Fourier-Transformation $\mathcal{F}(f(x))$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \mathcal{F}(f(x)) = \mathcal{F}(g_{1,0}(x) \star g_{1,1}(x)) = \mathcal{F}(g_{1,0}(x)) \mathcal{F}(g_{1,1}(x)) \\ &= \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \left(\text{sinc}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) \left(\text{sinc}^2 \left(\frac{x}{2} \right) \sum_{k=-1}^1 \exp(ikx) \right) \\ &= \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}^4 \left(\frac{x}{2} \right) D_1(x) = Q(x) \cdot \hat{f} \left(\frac{x}{2} \right) \end{aligned}$$

mit

$$\hat{f} \left(\frac{x}{2} \right) = \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \text{sinc}^4 \left(\frac{x}{4} \right) D_1 \left(\frac{x}{2} \right) \text{ sowie } Q(x) = \cos^3 \left(\frac{x}{2} \right) \cos \left(\frac{3x}{2} \right)$$

und

$$\zeta = \prod_{j=0}^1 \exp\left(- (a \cdot j)^2\right).$$

Wir bestimmen $\sum_{u \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(x + 2\pi u) \right|^2$ und erhalten:

$$\begin{aligned} \sum_{u \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^4\left(\frac{x}{2} + \pi u\right) D_1(x) \right|^2 &= \frac{\zeta^2}{2\pi} \sum_{u \in \mathbb{Z}} \operatorname{sinc}^8\left(\frac{x}{2} + \pi u\right) |D_1(x)|^2 \\ &= \frac{3\zeta^2}{2\pi} \sum_{u \in \mathbb{Z}} \operatorname{sinc}^8\left(\frac{x}{2} + \pi u\right) F_2(x) = \frac{3\zeta^2}{2\pi} \sin^8\left(\frac{x}{2}\right) S_3\left(\frac{x}{2}\right) F_{2,\epsilon}(x) \end{aligned}$$

Damit lässt sich die Skalierungsfunktion $\hat{f}(x)$ über die folgende Skalierungsgleichung darstellen:

$$\begin{aligned} \hat{f}(x) &= \frac{\frac{\zeta}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{sinc}^4\left(\frac{x}{2}\right) D_1(x)}{\sqrt{\frac{3\zeta^2}{2\pi} \sin^8\left(\frac{x}{2}\right) S_3\left(\frac{x}{2}\right) F_{2,\epsilon}(x)}} = \frac{\frac{2^4 \sin^4\left(\frac{x}{4}\right) \cos^4\left(\frac{x}{4}\right) \sin\left(\frac{3x}{4}\right) \cos\left(\frac{3x}{4}\right)}{\left(\frac{x}{4}\right)^4 \sin\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{4}\right)}}{\sqrt{3S_3\left(\frac{x}{2}\right) 2^8 \sin^8\left(\frac{x}{4}\right) \cos^8\left(\frac{x}{4}\right) \frac{\sin^2\left(\frac{3x}{4}\right) \cos^2\left(\frac{3x}{4}\right)}{3 \sin^2\left(\frac{x}{4}\right) \cos^2\left(\frac{x}{4}\right)}}} \\ &= \frac{\operatorname{sinc}^4\left(\frac{x}{4}\right) D_1\left(\frac{x}{2}\right) \cos^3\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{3x}{4}\right)}{\sqrt{3S_3\left(\frac{x}{2}\right) \sin^8\left(\frac{x}{4}\right) F_{2,\epsilon}\left(\frac{x}{2}\right) \cos^6\left(\frac{x}{4}\right) \cos^2\left(\frac{3x}{4}\right)}} = \tilde{Q}(x) \cdot \hat{f}\left(\frac{x}{2}\right) \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\hat{f}\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\operatorname{sinc}^4\left(\frac{x}{4}\right) D_1\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{3S_3\left(\frac{x}{4}\right) \sin^8\left(\frac{x}{4}\right) F_{2,\epsilon}\left(\frac{x}{2}\right)}} \text{ sowie } \tilde{Q}(x) = \frac{\sqrt{S_3\left(\frac{x}{4}\right) \cos^3\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{3x}{4}\right)}}{\sqrt{S_3\left(\frac{x}{2}\right) |\cos^3\left(\frac{x}{4}\right) \cos\left(\frac{3x}{4}\right)|}}.$$

Um nun das orthogonale Wavelet auch im Zeitbereich zu erhalten, wollen wir zunächst unsere Skalierungsfunktion im Zeitbereich bestimmen. Daher entwickeln wir $\sum_{u \in \mathbb{Z}} \left| \hat{f}(x + 2\pi u) \right|^2$ als Fourier-Cosinus-Reihe

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{3\zeta^2}{2\pi} \sin^8\left(\frac{x}{2}\right) S_3\left(\frac{x}{2}\right) F_{2,\epsilon}(x)}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \exp(ikx)$$

mit

$$c_k = c_{-k} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\frac{3\zeta^2}{2\pi} \left(1 - \frac{4S_0^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)}{3} + \frac{2S_0^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)}{5} - \frac{4S_0^{-3}\left(\frac{x}{2}\right)}{315}\right) F_{2,\epsilon}(x)}} dx, k \in \mathbb{N}_0.$$

Die Skalierungsfunktion ist dann im Zeitbereich gegeben durch:

$$\phi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k f(x - k)$$

Wir benötigen nun noch die Waveletkoeffizienten $h_r \in \mathbb{R}$ in der Darstellung:

$$H(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{r \in \mathbb{Z}} h_r \exp(-irx) \quad (3.3.19)$$

Zunächst folgt:

$$\begin{aligned} H(x) &= \frac{\hat{f}(2x)}{\hat{f}(x)} = \frac{\hat{f}(2x)}{\hat{f}(x)} \sqrt{\frac{\sin^8(\frac{x}{2}) S_3(\frac{x}{2}) F_{2,\epsilon}(x)}{\sin^8(x) S_3(x) F_{2,\epsilon}(2x)}} \\ &= \cos^3\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x}{2}\right) \sqrt{\frac{\sin^8(\frac{x}{2}) S_3(\frac{x}{2}) F_{2,\epsilon}(x)}{\sin^8(x) S_3(x) F_{2,\epsilon}(2x)}} = Q(x) \sqrt{\frac{\sin^8(\frac{x}{2}) S_3(\frac{x}{2}) F_{2,\epsilon}(x)}{\sin^8(x) S_3(x) F_{2,\epsilon}(2x)}}. \end{aligned}$$

Dann entwickeln wir den Wurzelausdruck nach Fourier und erhalten:

$$\sqrt{\frac{\sin^8(\frac{x}{2}) S_3(\frac{x}{2}) F_{2,\epsilon}(x)}{\sin^8(x) S_3(x) F_{2,\epsilon}(2x)}} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} q_k \exp(-ikx) \quad (3.3.20)$$

mit

$$q_k = q_{-k} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sqrt{\frac{\sin^8(\frac{x}{2}) S_3(\frac{x}{2}) F_{2,\epsilon}(x)}{\sin^8(x) S_3(x) F_{2,\epsilon}(2x)}} \cos(kx) dx, \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Ein Koeffizientenvergleich von (3.3.19) und (3.3.20) liefert dann die Waveletkoeffizienten und es gilt

$$h_r = \sqrt{2} \sum_{k=-3}^3 a_k q_{r+k}$$

mit

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{8}, & \text{für } k \in \{-3, 3\} \\ \frac{3}{8}, & \text{für } k \in \{-2, -1, 1, 2\} \\ \frac{1}{4}, & \text{für } k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Die Werte von a_k stammen hierbei aus der zu Beginn der Konstruktion ermittelten Maske von $f(x)$. Das Wavelet ergibt sich dann final durch:

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (-1)^{k-1} h_{-k-1} \phi(2x - k)$$

Trotz der vermeindlich einfachen Konstruktion zu Beginn, ist die Bestimmung des Wavelets mit einigem Rechenaufwand verbunden. Es müssen jeweils die c_k als auch die q_k einzeln numerisch berechnet werden. Wir wollen uns nachfolgend unser Wavelet und die dazugehörige Skalierungsfunktion einmal ansehen.

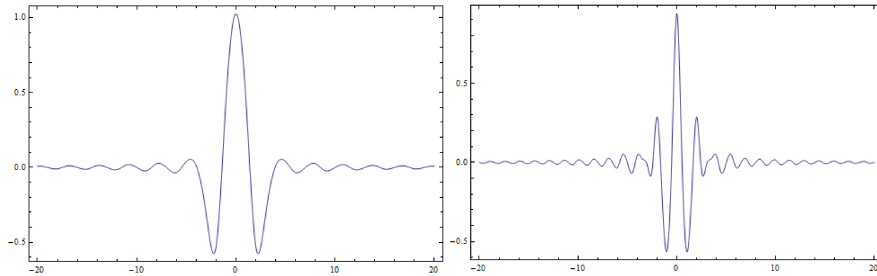


Abbildung 5: Links: Die Skalierungsfunktion des Gauß'schen radialen Basisfunktionen Wavelets. Rechts: Die Wavelet-Funktion des Gauß'schen radialen Basisfunktionen Wavelets.

Für dieses Beispiel, haben wir $\epsilon = 2 \cdot 10^{-3}$ gewählt. Wie man anhand der Graphen sehen kann, hat die Skalierungsfunktion als auch das Wavelet außerhalb des Intervalls $[-20, 20]$ immernoch kleine Wellen. Normalerweise sind Wavelets wie die Battle-Lemarie-Wavelets, welche am besten mit unseren Wavelets vergleichbar sind, in diesem Bereich von der Null kaum noch unterscheidbar. Dies können wir auch den nachfolgenden Bildern entnehmen.

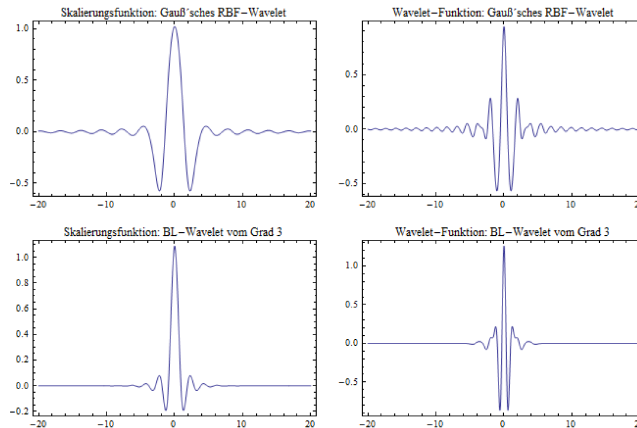


Abbildung 6: Oben links: Die Skalierungsfunktion des Gauß'schen radialen Basisfunktionen Wavelets. Oben rechts: Die Wavelet-Funktion des Gauß'schen radialen Basisfunktionen Wavelets. Unten links: Die Skalierungsfunktion des Battle-Lemarie-Wavelets vom Grad 3. Unten rechts: Die Wavelet-Funktion des Battle-Lemarie-Wavelets vom Grad 3.

Im vorangegangenen Vergleich haben wir zwei Extreme miteinander verglichen, da die Battle-Lemarie-Wavelets mit höherem Grad auch langsamer abklingen, als die mit niedrigerem Grad. Daher wollen wir nun noch einen Vergleich mit den Battle-Lemarie-Wavelets vom Grad 15, also dem Maximalgrad machen.

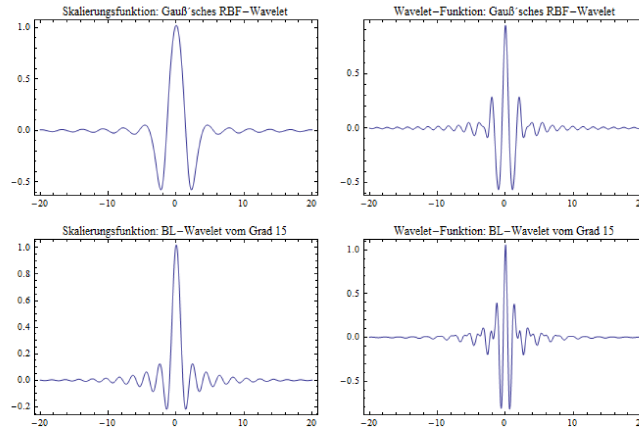


Abbildung 7: Oben links: Die Skalierungsfunktion des Gauß'schen radialen Basisfunktionen Wavelets. Oben rechts: Die Wavelet-Funktion des Gauß'schen radialen Basisfunktionen Wavelets. Unten links: Die Skalierungsfunktion des Battle-Lemarie-Wavelets vom Grad 15. Unten rechts: Die Wavelet-Funktion des Battle-Lemarie-Wavelets vom Grad 15.

Die Unterschiede sind dann schon geringer, obgleich das Gauß'sche radiale Basisfunktionen Wavelet immer noch langsamer abklingt, als das Battle-Lemarie-Wavelet vom Grad 15. Der Grund dafür ist, wie bereits erwähnt, das Epsilon von $F_{n,\epsilon}(x)$. Wenn wir nun eine zweidimensionale Konstruktion durchführen, erhalten wir die folgenden beiden Wavelets:

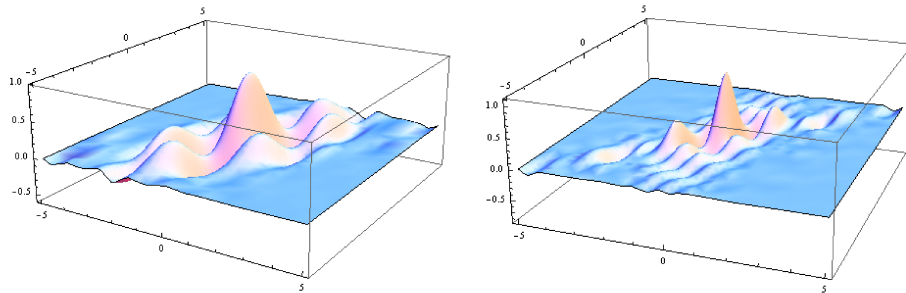


Abbildung 8: Links: Das zweidimensionale Gauß'sche radiale Basisfunktionen Wavelet. Rechts: Das zweidimensionale Battle-Lemarie-Wavelet vom Grad 15.

4 Anwendungen

In diesem Kapitel wollen wir nun unsere bisher erarbeitete Theorie der radialen Basisfunktionen Wavelets auf finanzmathematische Probleme anwenden. Wir wollen dies speziell im Gebiet der Optionspreistheorie tun, wobei wir uns auf das Lösen von partiellen Differentialgleichungen (*PDE*) aus der Optionspreistheorie konzentrieren werden. Wir werden zunächst die klassische Black-Scholes-Merton PDE, Hausmann [21] et al. mit unterschiedlichen Endwertbedingungen betrachten. Im Anschluss daran wird die PDE von Burgard und Kjaer [8] betrachtet. Hierbei stellt das Modell von Burgard und Kjaer eine Erweiterung des Black-Scholes-Merton-Modells dar, welche den Ausfall der beiden handelnden Parteien als zusätzliche Faktoren im Modell behandelt. Dabei ist die Black-Scholes-Merton PDE eine lineare PDE und die erweiterte PDE von Burgard und Kjaer eine nicht lineare PDE.

4.1 Das klassische Black-Scholes-Merton-Modell

Der Ausgangspunkt der Betrachtung soll im klassischen Black-Scholes-Merton-Modell die folgende parabolische partielle Differentialgleichung für $t \in [0, T]$ zu gegebener Endwertbedingung sein:

$$rV = \frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \quad (4.1.1)$$

Hierbei ist $r, q, \sigma, S, t \in \mathbb{R}_0^+$ und wir nennen $V(S, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ den fairen arbitragefreien Preis eines Derivates in Abhängigkeit des Aktienkurses S und des Zeitpunktes t . Des Weiteren ist σ die Volatilität, r der risikolose Zins und q die stetige Dividende. Wir wollen nun zunächst die exakte Lösung dieser PDE für die Endwertbedingungen eines europäischen Calls $C_e(T) = \max\{S - K, 0\}$ und eines europäischen Puts $P_e(T) = \max\{K - S, 0\}$ angeben. Im Anschluss daran werden wir die analytische Lösung eines Forwards ($C_e - P_e$) mit der Lösung einer Adomian-RBF-Wavelet-Methode vergleichen. Die analytische Lösung der PDE wird über eine Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung bestimmt. Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten einer Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung, wobei wir einen allgemeinen Ansatz für parabolische Differentialgleichungen verwenden wollen. Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung wird dann mittels Fourier-Transformation bestimmt. Wir setzen zunächst

$$S = K \cdot \exp(x), \quad V(S, t) = K \cdot v(x, \tau), \quad \tau = \frac{1}{2}(T - t)\sigma^2, \quad K \in \mathbb{R}$$

und leiten $V(S, t)$ partiell ab:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial t} &= K \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{K\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} \\ \frac{\partial V}{\partial S} &= K \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial S} = K \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial S} \log\left(\frac{S}{K}\right) = \frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial}{\partial S} \left(\frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \right) = -\frac{K}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S} \frac{\partial}{\partial S} \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{K}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Dies setzen wir nun in die Gleichung (4.1.1) ein und erhalten

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a \frac{\partial v}{\partial x} + bv \quad (4.1.2)$$

mit

$$a = \left(\frac{2(r-q)}{\sigma^2} - 1 \right) \quad \text{und} \quad b = -\frac{2r}{\sigma^2} = -\left(1 + \frac{2q}{\sigma^2} + a \right)$$

Wir verwenden nun einen allgemeinen Ansatz zur Lösung parabolischer partieller Differentialgleichungen, mithilfe dessen sich die PDE (4.1.2) weiter auf die klassische Wärmeleitungsgleichung reduzieren lässt. Hierfür definieren wir $v(x, \tau)$ wie folgt:

$$v(x, \tau) = f(\tau) \cdot g(x) \cdot h(x, \tau) \quad (4.1.3)$$

Mithilfe dieses Ansatzes können wir die PDE (4.1.2) durch Lösen von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen auf die klassische Wärmeleitungsgleichung zurückführen. Wir bestimmen zunächst wieder die partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \frac{df}{d\tau} g \cdot h + f \cdot g \frac{\partial h}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= f \frac{dg}{dx} h + f \cdot g \frac{\partial h}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{d}{dx} \left(f \frac{dg}{dx} h + f \cdot g \frac{\partial h}{\partial x} \right) = f \frac{d^2 g}{dx^2} h + 2 \cdot f \frac{dg}{dx} \frac{\partial h}{\partial x} + f \cdot g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \end{aligned}$$

und setzen diese in unsere Gleichung (4.1.2) ein:

$$\frac{df}{d\tau} g \cdot h + f \cdot g \frac{\partial h}{\partial \tau} = f \frac{d^2 g}{dx^2} h + 2 \cdot f \frac{dg}{dx} \frac{\partial h}{\partial x} + f \cdot g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + a \left(f \frac{dg}{dx} h + f \cdot g \frac{\partial h}{\partial x} \right) + b f g h \quad (4.1.4)$$

Nun ordnen wir (4.1.4) nach der Funktion $h(x, \tau)$ und deren Ableitungen um und erhalten:

$$f \cdot g \frac{\partial h}{\partial \tau} = f \cdot g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial x} \left(2 \cdot f \frac{dg}{dx} + a \cdot f \cdot g \right) + h \left(-\frac{df}{d\tau} g + f \frac{d^2 g}{dx^2} + a \cdot f \cdot \frac{dg}{dx} + b f g \right)$$

Wir teilen durch $f \cdot g$ und erhalten:

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial x} \left(2 \cdot g^{-1} \frac{dg}{dx} + a \right) + h \left(-\frac{df}{d\tau} f^{-1} + g^{-1} \frac{d^2 g}{dx^2} + a \cdot g^{-1} \cdot \frac{dg}{dx} + b \right)$$

Da wir die Transformation auf die Wärmeleitungsgleichung anstreben, muss offenbar

$$2 \cdot g^{-1} \frac{dg}{dx} + a = 0$$

sowie

$$-\frac{df}{d\tau} f^{-1} + g^{-1} \frac{d^2g}{dx^2} + a \cdot g^{-1} \cdot \frac{dg}{dx} + b = 0$$

gelten. Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichungen erhalten wir direkt durch logarithmische Integration, sodass gilt:

$$g(x) = c_1 \exp\left(-\frac{a \cdot x}{2}\right)$$

sowie

$$f(\tau) = c_2 \exp\left(-\frac{a^2\tau}{4} + b\tau\right).$$

Das heißt, die Transformation des fairen arbitragefreien Preises eines Derivates (4.1.1) erfüllt die klassische homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, x \in \mathbb{R}, \tau \in \left[0, \frac{\sigma^2 T}{2}\right],$$

mit $S = K \cdot \exp(x)$, $\tau = \frac{1}{2}(T - t)\sigma^2$ sowie $a = \left(\frac{2(r-q)}{\sigma^2} - 1\right)$, $b = -\frac{2r}{\sigma^2}$ und

$$V(S, t) = K \cdot v(x, \tau) = K \cdot \exp\left(-\left(\frac{a^2}{4} + 1 + \frac{2q}{\sigma^2} + a\right)\tau\right) \exp\left(-\frac{ax}{2}\right) \cdot h(x, \tau). \quad (4.1.5)$$

Wir wollen diese Gleichung nun explizit mit Anfangsbedingung $h(x, 0)$ mittels Fourier-Transformation lösen. Die Fourier-Transformation der klassischen homogenen Wärmeleitungsgleichung ist gegeben durch:

$$\frac{\partial \hat{h}}{\partial \tau} = -y^2 \hat{h}$$

Die Lösung dieser Gleichung ist

$$\hat{h}(y, \tau) = \hat{h}(y, 0) \exp(-y^2\tau),$$

wobei $\hat{h}(y, 0)$ die Fourier-Transformierte der Anfangsbedingung $h(x, 0)$ ist. Um nun $h(x, \tau)$ zu erhalten, wenden wir die inverse Fourier-Transformation an und setzen zunächst

$$\hat{h}_1(y, \tau) = \exp(-y^2\tau) \Rightarrow h_1(y, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\tau}} \exp\left(\frac{-x^2}{4\tau}\right)$$

sowie

$$\hat{h}_2(y, \tau) = \hat{h}(y, 0) \Rightarrow h_2(y, \tau) = h(x, 0).$$

Da die Faltung von zwei Funktionen im Zeitbereich der Multiplikation im Bildbereich entspricht, erhalten wir $h(x, \tau)$ über den Faltungssatz mittels

$$\begin{aligned} h(x, \tau) &= (h_1 \star h_2)(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x-u, \tau) h_2(u, \tau) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{4\tau}\right) h(u, 0) du. \end{aligned}$$

Wir können das Integral also lösen, wenn wir die Anfangsbedingung $h(u, 0)$ kennen. Da sich $\tau = \frac{1}{2}(T-t)\sigma^2 = 0$ genau dann ergibt, wenn $t = T$ gilt, benötigen wir nun die Auszahlungsprofile unserer Derivate bei Endfälligkeit, um das Integral zu bestimmen. Für europäische Call/Put Optionen ist die Auszahlung gegeben durch $\max\{\alpha(S-K), 0\}$, wobei $\alpha = 1$ einem europäischen Call und $\alpha = -1$ einem europäischen Put entspricht. Für $h(u, 0)$ folgt dann zusammen mit Gleichung (4.1.5):

$$\begin{aligned} h(u, 0) &= \frac{1}{K} \exp\left(\frac{au}{2}\right) V(K \cdot \exp(u), T) \\ &= \frac{1}{K} \exp\left(\frac{au}{2}\right) \max\{\alpha(K \cdot \exp(u) - K), 0\} \\ &= \max\left\{\alpha\left(\exp\left(\left(\frac{a}{2} + 1\right)u\right) - \exp\left(\frac{au}{2}\right)\right), 0\right\} \end{aligned}$$

Wenn wir nun das Integral

$$h(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{4\tau}\right) \max\left\{\alpha\left(\exp\left(\left(\frac{a}{2} + 1\right)u\right) - \exp\left(\frac{au}{2}\right)\right), 0\right\} du$$

lösen und in Gleichung (4.1.5) einsetzen, erhalten wir die fairen arbitragefreien Preise europäischer Calls ($\alpha = 1$) und europäischer Puts ($\alpha = -1$) durch

$$V(S, t) = \alpha S \exp(-q(T-t)) \Phi(\alpha d_1) - \alpha K \exp(-r(T-t)) \Phi(\alpha d_2) \quad (4.1.6)$$

mit

$$d_1 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + (T-t)\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = \frac{\log\left(\frac{S}{K}\right) + (T-t)\left(r - q + \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

sowie

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy.$$

4.2 Das Post-Crisis Modell nach Burgard und Kjaer

Wir wollen nun die Post-Crisis Welt betrachten, in der es möglich ist, dass beide beteiligten Parteien während der Laufzeit des Geschäfts in Konkurs gehen können. Wir konzentrieren uns dabei auf die durch den Semi-Replikations-Ansatz entstehende PDE nach Burgard und Kjaer [7, 8]. Wir werden zunächst mithilfe des Semi-Replikations-Ansatzes die PDE herleiten. Wir betrachten ein Derivat, das möglicherweise (nicht zwangsweise) besichert ist. Dieser Vertrag zwischen einem Emittenten B und einem Kontrahenten C , mit einem ökonomischen Wert \tilde{V} , beinhaltet das Ausfallrisiko der Gegenpartei sowie eventuell entstehende Nettokapitalkosten, die der Emittent vor einem eigenen Ausfall erleiden kann. Nachfolgend beschreiben wir eine allgemeine Semi-Replikations-Strategie, die der Emittent (der Emittent des Derivats) zur Absicherung einsetzen kann, wobei die Strategie keine perfekte Absicherung bietet, wenn der Emittent selber während der Laufzeit ausfällt. Die handelbaren Instrumente, die in dieser Strategie verwendet werden, sind zum einen ein Zerobond P_C des Kontrahenten C mit Recovery Rate $R_C = 0$, sowie zwei Bonds des Emittenten P_1 und P_2 mit unterschiedlichen Recovery Rates R_1 und R_2 und ein Marktinstrument S , welches zur Absicherung (Hedging) des dem Derivatekontrakt zu Grunde liegenden Marktfaktors (im Allgemeinen die Aktie) benutzt werden kann. Wir gehen dann von folgenden Standard-Dynamiken für diese Instrumente ($i = 1, 2$) aus:

$$dS = \mu S dt + \sigma S dW \quad (4.2.1)$$

$$dP_C = r_C P_C^- dt - P_C^- dJ_C \quad (4.2.2)$$

$$dP_i = r_i P_i^- dt - (1 - R_i) P_i^- dJ_B \quad (4.2.3)$$

Hierbei sind J_B bzw. J_C die Indikatoren für einen Ausfall von B bzw. C und P_i^- sowie P_C^- sind die Preise der Bonds bevor eine Partei ausfällt. Für die Prozesse J_B bzw. J_C unterstellen wir hier Poisson-Prozesse (also Lévy Prozesse). Damit haben die Prozesse stationäre bzw. unabhängige Zuwächse, und für $J_B = \{J_{B_t} : t \geq 0\}$, sowie $J_C = \{J_{C_t} : t \geq 0\}$ ist $J_{B_0} = J_{C_0} = 0$ P -fast sicher. Zudem sind $(J_{B_t})_{t \in [0, \infty)}$ und $(J_{C_t})_{t \in [0, \infty)}$ P -fast sicher stetig. Damit sind die Prozesse J_B bzw. J_C wohldefiniert. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir P_1 als den Bond mit niedrigerer Recovery Rate an, sodass $R_1 < R_2$ und $r_1 > r_2$ ist. In diesem Fall ist

$$r_i - r = (1 - R_i) \lambda_B, \quad (4.2.4)$$

wobei r der risikolose Zins und λ_B der Spread (Ausfallrisiko) des Emittenten B ist. Hierbei wenden wir das Credit Triangle an, wobei wir damit unterstellen, dass sowohl die Zinskurve als auch die CDS Spreadkurve flach verlaufen, und R_i als auch λ_B konstant sind. Es sei $\tilde{V}(t, S, J_B, J_C)$ der gesamte ökonomische Wert des Derivats für den Emittenten. Dann sind die Randwertbedingungen bei Ausfall des Emittenten bzw. des Kontrahenten gegeben durch:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(t, S, 1, 0) &= g_B(M_B, X), & \text{wenn } B \text{ zuerst ausfällt, bzw.} \\ \tilde{V}(t, S, 0, 1) &= g_C(M_C, X), & \text{wenn } C \text{ zuerst ausfällt.} \end{aligned}$$

Hierbei ist M_B bzw. M_C der Wert bei Abwicklung und X die hinterlegte Sicherheit. Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten g_B bzw. g_C zu wählen. Eine Möglichkeit für eine Randwertbedingungen mit bilateralem Risiko ist $g_B = \tilde{V}^+ + R_B \tilde{V}^-$ sowie $g_C = R_C \tilde{V}^+ + \tilde{V}^-$. Diese werden wir auch nachfolgend für unsere Betrachtungen nutzen. Für den Semi-Replikations-Ansatz benutzen wir folgendes Portfolio $\Pi(t)$:

$$\Pi(t) = \delta(t)S(t) + \alpha_1(t)P_1(t) + \alpha_2(t)P_2(t) + \alpha_C(t)P_C(t) + \beta_S(t) + \beta_C(t) - X(t),$$

mit $\delta(t)$ Einheiten der Aktie S , $\alpha_{1/2}$ und α_C Einheiten der Bonds des Emittenten bzw. des Kontrahenten, Bargeld in Höhe von $\beta_S(t)$ sowie $\beta_C(t)$ und eine Sicherheit $X(t)$. Hierbei werden die Bargeldpositionen benutzt, um die jeweiligen Positionen in S und dem Bond P_C zu finanzieren. Es gilt also: $\alpha_C P_C + \beta_C = 0$ und $\delta \cdot S + \beta_S = 0$, wobei die Positionen Zinsen in Höhe von q_C und $(r - q)$ zahlen, dabei ist q die stetige Dividendenzahlung. Die Sicherheit $X > 0$ erwirtschaftet stetige Zinsen in Höhe von r_X . Die Strategie soll so gewählt werden, dass $\tilde{V} + \Pi = 0$ ist, außer bei Ausfall des Emittenten. Die Position in den eigenen Bonds des Emittenten $\alpha_1 P_1$ und $\alpha_2 P_2$ wird verwendet, um alles Bargeld, welches nicht durch die Sicherheit gebunden ist, zu investieren, sodass gilt:

$$\tilde{V} - X + \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2 = 0, \quad (4.2.5)$$

mit $\alpha_{1/2} \geq 0$. Für die Entwicklung des Hedge-Portfolios im Zeitverlauf folgt dann:

$$\begin{aligned} d\Pi(t) &= \delta(t)dS(t) + \alpha_1(t)dP_1(t) + \alpha_2(t)dP_2(t) + \alpha_C(t)dP_C(t) \\ &\quad + d\beta_S(t) + d\beta_C(t) - dX(t) \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

Hierbei sind die Prozesse $dS(t)$ sowie $dP_1(t), dP_2(t)$ und $dP_C(t)$ bereits aus (4.2.1), (4.2.2) und (4.2.3) bekannt. Zudem sind $d\beta_S(t), d\beta_C(t)$ und $dX(t)$ die Änderungen des Bargeldbestands und der Sicherheiten im Zeitverlauf. Für die einzelnen Prozesse gilt aufgrund der einzelnen Zins- und Dividendenzahlungen folgendes:

$$d\beta_S(t) = \delta(r - q)Sdt \quad (4.2.7)$$

$$d\beta_C(t) = -\alpha_C q_C P_C dt \quad (4.2.8)$$

$$dX = -r_X X dt. \quad (4.2.9)$$

Wir setzen zudem die Bondposition vor einem Ausfall des Emittenten auf $P = \alpha_1 P_1 + \alpha_2 P_2$ sowie nach Ausfall auf $P_D = R_1 \alpha_1 P_1 + R_2 \alpha_2 P_2$. Durch einsetzen von (4.2.1), (4.2.2) und (4.2.3) sowie (4.2.7), (4.2.8) und (4.2.9) in (4.2.6) erhalten wir:

$$\begin{aligned} d\Pi &= (r_1 \alpha_1 P_1 + r_2 \alpha_2 P_2 + \lambda_C \alpha_C P_C + (r - q)\delta S - r_X X) dt \\ &\quad + (P_D - P) dJ_B - \alpha_C P_C dJ_C + \delta dS \end{aligned}$$

Hierbei ist $\lambda_C = r_C - r$ der Credit-Spread, da $R_C = 0$ ist (nach Credit Triangle). Die Entwicklung des Derivates in Richtung der Zeit ergibt sich dann direkt aus

dem Lemma von Itô für Sprungprozesse (Hausmann [21] bzw. Oksendal [28]) und es folgt

$$d\tilde{V} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} dt + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} dt + \Delta \tilde{V}_B dJ_B + \Delta \tilde{V}_C dJ_C,$$

mit

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{V}_B &= \tilde{V}(t, S, 1, 0) - \tilde{V}(t, S, 0, 0) \\ &= g_B - \tilde{V} \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{V}_C &= \tilde{V}(t, S, 0, 1) - \tilde{V}(t, S, 0, 0) \\ &= g_C - \tilde{V}. \end{aligned}$$

Bilden wir nun die Summe des Hedge-Portfolios und des Derivates im Zeitverlauf, erhalten wir:

$$\begin{aligned} d\Pi + d\tilde{V} &= \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} + r_1 \alpha_1 P_1 + r_2 \alpha_2 P_2 \right. \\ &\quad \left. + \lambda_C \alpha_C P_C + (r - q) \delta S - r_X X \right) dt \\ &\quad + (g_B + P_D - X) dJ_B + \left(\Delta \tilde{V}_C - \alpha_C P_C \right) dJ_C + \left(\delta + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} \right) dS. \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Der Vorfaktor von dJ_B kommt dabei durch die Gleichung (4.2.5) zustande. Wir können dann aus Gleichung (4.2.10) den Einfluss der Aktie und das Kontrahentenrisiko ausschalten, indem wir

$$\alpha_C P_C = \Delta \tilde{V}_C$$

und

$$\delta = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial S}$$

wählen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} d\Pi + d\tilde{V} &= \left(\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \mathcal{L}_t \tilde{V} - r_X X + r_1 \alpha_1 P_1 + r_2 \alpha_2 P_2 + \lambda_C \Delta \tilde{V}_C \right) dt \tag{4.2.11} \\ &\quad + (g_B + P_D - X) dJ_B \end{aligned}$$

mit

$$\mathcal{L}_t \tilde{V} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S}.$$

Wir benutzen nun final die Gleichungen (4.2.4), (4.2.5) und die Definition von $\Delta\tilde{V}_B = g_B - \tilde{V}$ bzw. $\Delta\tilde{V}_C = g_C - \tilde{V}$ um (4.2.11) zu schreiben als

$$d\Pi + d\tilde{V} = \left(\frac{\partial\tilde{V}}{\partial t} + \mathcal{L}_t\tilde{V} - (r + \lambda_B + \lambda_C)\tilde{V} - s_X \cdot X + \lambda_C g_C + \lambda_B g_B - \epsilon_h \lambda_B \right) dt \quad (4.2.12)$$

$$+ \epsilon_h dJ_B,$$

wobei $s_X = r_X - r$ ist. Aus der Gleichung (4.2.12) folgt dann, dass bei Ausfall des Emittenten ein Hedge-Fehler der Größenordnung $\epsilon_h = g_B + P_D - X$ entsteht. Fällt der Emittent nicht aus, so entstehen Kosten/Gewinn in Höhe von $-\epsilon_h \lambda_B$ pro Zeiteinheit. Da der Emittent eine selbstfinanzierende Strategie ohne Hedgerisiko anstrebt, muss offenbar $g_B + P_D - X = 0$ gelten, was mit

$$\alpha_1 = \frac{R_2 \tilde{V} - g_B + (1 - R_2) X}{(R_1 - R_2) P_1}$$

bzw.

$$\alpha_2 = \frac{R_1 \tilde{V} - g_B + (1 - R_1) X}{(R_2 - R_1) P_2}$$

erreicht wird. Da nun von einer selbstfinanzierenden Strategie ohne Hedgerisiko ausgegangen wird, muss offenbar (vergleiche (4.2.12))

$$\frac{\partial\tilde{V}}{\partial t} + \mathcal{L}_t\tilde{V} - (r + \lambda_B + \lambda_C)\tilde{V} - s_X \cdot X + \lambda_C g_C + \lambda_B g_B = 0$$

gelten. Mit $g_B = \tilde{V}^+ + R_B \tilde{V}^-$ sowie $g_C = R_C \tilde{V}^+ + \tilde{V}^-$ folgt,

$$\frac{\partial\tilde{V}}{\partial t} + \mathcal{L}_t\tilde{V} - r\tilde{V} = s_X \cdot X + \lambda_C \left(-R_C \tilde{V}^+ - \tilde{V}^- + \tilde{V} \right) + \lambda_B \left(-\tilde{V}^+ - R_B \tilde{V}^- + \tilde{V} \right). \quad (4.2.13)$$

In Burgard und Kjaer [8] wird \tilde{V}^+ bzw. \tilde{V}^- definiert durch:

$$\tilde{V}^+ = \frac{\tilde{V} + |\tilde{V}|}{2}, \quad \tilde{V}^- = \frac{\tilde{V} - |\tilde{V}|}{2},$$

womit $\tilde{V}^+ \geq 0$ und $\tilde{V}^- \leq 0$ ist. Damit folgt für

$$\tilde{V} - \tilde{V}^+ = \tilde{V} - \left(\frac{\tilde{V} + |\tilde{V}|}{2} \right) = \begin{cases} 0, & \tilde{V} > 0 \\ \tilde{V}, & \tilde{V} \leq 0 \end{cases} = \tilde{V}^-$$

und

$$\tilde{V} - \tilde{V}^- = \tilde{V} - \left(\frac{\tilde{V} - |\tilde{V}|}{2} \right) = \begin{cases} \tilde{V}, & \tilde{V} > 0 \\ 0, & \tilde{V} \leq 0 \end{cases} = \tilde{V}^+.$$

Dies setzen wir nun in (4.2.13) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \mathcal{L}_t \tilde{V} - r\tilde{V} &= s_X \cdot X + \lambda_C \left(-R_C \tilde{V}^+ + \tilde{V}^+ \right) + \lambda_B \left(-R_B \tilde{V}^- + \tilde{V}^- \right) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \mathcal{L}_t \tilde{V} - r\tilde{V} &= s_X \cdot X + \lambda_C \tilde{V}^+ (1 - R_C) + \lambda_B \tilde{V}^- (1 - R_B) \end{aligned}$$

Setzen wir nun noch $X = \tilde{V}^+$, sodass $s_X = s_F$ ist, und wir damit den Positivteil des Derivates als Sicherheit nehmen, erhalten wir

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \mathcal{L}_t \tilde{V} - r\tilde{V} = s_F \tilde{V}^+ + \lambda_C \tilde{V}^+ (1 - R_C) + \lambda_B \tilde{V}^- (1 - R_B).$$

Wir wollen nun die aus Maß- und Integrationstheorie bekannte Notation für \tilde{V}^+ und \tilde{V}^- verwenden, sodass der Ausgangspunkt der Betrachtung die nichtlineare PDE

$$r\tilde{V} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \mathcal{L}_t \tilde{V} + (1 - R_B) \lambda_B \tilde{V}^- - (1 - R_C) \lambda_C \tilde{V}^+ - s_F \tilde{V}^+$$

mit

$$\mathcal{L}_t \tilde{V} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S}$$

sowie

$$\tilde{V}^+ = \frac{\tilde{V} + |\tilde{V}|}{2}, \quad \tilde{V}^- = \frac{-\tilde{V} + |\tilde{V}|}{2},$$

ist. Hierbei sind $r, R_B, R_C, \lambda_B, \lambda_C, s_F, \sigma, S, t, q \in \mathbb{R}_0^+$ die oben eingeführten Konstanten und wir nennen $\tilde{V}(S, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ den fairen arbitragefreien Post-Crisis Preis eines Derivates in Abhängigkeit des Aktienkurses S und des Zeitpunktes t . Hierbei seien $\lambda_B = r_B - r$ bzw. $\lambda_C = r_C - r$ die Credit Spreads von Emittenten B bzw. Kontrahenten C , $s_F = r_F - r$ der Funding Spread sowie r_B bzw. r_C die Zerobonds von B bzw. C . Hierbei werden die Voraussetzungen des Credit Triangles angenommen, sowie r_B bzw. r_C mit Recovery Rate Null. Zudem zahlt das Underlying eine Dividende q . Wir setzen nun zunächst $a_1 = (1 - R_B) \lambda_B$, $b_1 = -(1 - R_C) \lambda_C - s_F$ und $c_1 = (r - q)$. Damit erhalten wir

$$r\tilde{V} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} + c_1 S \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} + a_1 \tilde{V}^- + b_1 \tilde{V}^+. \quad (4.2.14)$$

Im Gegensatz zum klassischen Modell von Black-Scholes-Merton erhalten wir nach Burgard und Kjaer eine nichtlineare parabolische Differenzialgleichung mit Positiv- und Negativteilen als Nichtlinearitäten. Es stellt sich nun die Frage, wann der Positivteil bzw. der Negativteil in einer solchen PDE zum Tragen kommt. Generell kommt nur der Positivteil zum Tragen, wenn die Auszahlungsfunktion der Option nicht negativ ist, und nur der Negativteil, wenn die Auszahlungsfunktion nicht positiv ist. Allerdings gibt es auch Fälle, bei denen sowohl

Positivteil als auch Negativteil bei der Bewertung eine Rolle spielen. Klassischerweise wäre hier ein Forward zu nennen. Da wir zunächst geschlossene Formeln aufstellen wollen, konzentrieren wir uns auf die Spezialfälle, die entweder nur einen Positivteil oder einen Negativteil haben. Dies sind klassischerweise europäische Calls und Puts. Es gibt zwar noch weitaus mehr Derivate mit einem unilateralen Risiko, allerdings werden diese häufig durch die Put-Call-Parität hergeleitet, welche jedoch nach der Krise nicht mehr als Standardvoraussetzung angenommen werden kann. Wir werden nachfolgend als Spezialfälle zunächst die positiven Auszahlungsprofile und danach die negativen Auszahlungsprofile behandeln.

4.2.1 Positive Auszahlungsprofile

Für die PDE (4.2.14) folgt für eine positive Auszahlungsfunktion:

$$\begin{aligned}
r\tilde{V} &= \frac{\partial\tilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial S^2} + c_1 S \frac{\partial\tilde{V}}{\partial S} + b_1 \tilde{V}^+ & (4.2.15) \\
\Leftrightarrow r\tilde{V} &= \frac{\partial\tilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial S^2} + c_1 S \frac{\partial\tilde{V}}{\partial S} + b_1 \frac{\tilde{V} + |\tilde{V}|}{2} \\
\Leftrightarrow (r - b_1)\tilde{V} &= \frac{\partial\tilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial S^2} + c_1 S \frac{\partial\tilde{V}}{\partial S}
\end{aligned}$$

Wir setzen zunächst wieder

$$S = K \cdot \exp(x), \quad \tilde{V}(S, t) = K \cdot v(x, \tau), \quad \tau = \frac{1}{2}(T - t)\sigma^2, \quad K \in \mathbb{R}$$

und leiten $\tilde{V}(S, t)$ partiell ab:

$$\frac{\partial\tilde{V}}{\partial t} = -\frac{K\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial\tilde{V}}{\partial S} = \frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2\tilde{V}}{\partial S^2} = -\frac{K}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Dies setzen wir nun in die Gleichung (4.2.15) ein und erhalten

$$\begin{aligned}
(r - b_1)Kv &= -\frac{K\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \left(-\frac{K}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + c_1 S \frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \\
\Leftrightarrow (r - b_1)v &= -\frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\sigma^2}{2} \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + c_1 \frac{\partial v}{\partial x} \\
\Leftrightarrow \frac{-2(r - b_1)}{\sigma^2} v &= \frac{\partial v}{\partial \tau} - \left(-\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) - \frac{2c_1}{\sigma^2} \frac{\partial v}{\partial x} \\
\Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \left(\frac{2c_1}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2(r - b_1)}{\sigma^2} v
\end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber setzen wir nun

$$\alpha_1 = \left(\frac{2c_1}{\sigma^2} - 1 \right), \quad \beta_1 = -\frac{2(r - b_1)}{\sigma^2}$$

und erhalten

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \alpha_1 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta_1 v. \quad (4.2.16)$$

Wir bedienen uns nun wieder dem allgemeinen Ansatz zur Lösung parabolischer Differentialgleichungen $v(x, \tau) = f(\tau) \cdot g(x) \cdot h(x, \tau)$ und deren partieller Ableitungen

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \frac{df}{d\tau} g \cdot h + f \cdot g \frac{\partial h}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = f \frac{dg}{dx} h + f \cdot g \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = f \frac{d^2 g}{dx^2} h + 2 \cdot f \frac{dg}{dx} \frac{\partial h}{\partial x} + f \cdot g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2},$$

welche wir in die Gleichung (4.2.16) einsetzen. Wir erhalten dann

$$\frac{df}{d\tau} g \cdot h + f \cdot g \frac{\partial h}{\partial \tau} = \alpha_1 \left(f \frac{dg}{dx} h + f \cdot g \frac{\partial h}{\partial x} \right) + f \frac{d^2 g}{dx^2} h + 2 \cdot f \frac{dg}{dx} \frac{\partial h}{\partial x} + f \cdot g \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \beta_1 f g h. \quad (4.2.17)$$

Diese ordnen wir wieder um und teilen durch $f \cdot g$, sodass wir

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial h}{\partial x} \left(2 \cdot g^{-1} \frac{dg}{dx} + \alpha_1 \right) + h \left(-\frac{df}{d\tau} f^{-1} + \alpha_1 \cdot g^{-1} \frac{dg}{dx} + g^{-1} \frac{d^2 g}{dx^2} + \beta_1 \right)$$

erhalten. Durch Lösen der gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$2 \cdot g^{-1} \frac{dg}{dx} + \alpha_1 = 0$$

sowie

$$-\frac{df}{d\tau} f^{-1} + \alpha_1 \cdot g^{-1} \frac{dg}{dx} + g^{-1} \frac{d^2 g}{dx^2} + \beta_1 = 0$$

erhalten wir

$$g(x) = c_1 \exp\left(\frac{-\alpha_1 \cdot x}{2}\right)$$

und

$$f(\tau) = c_2 \exp\left(-\frac{\alpha_1^2 \tau}{4} + \beta_1 \tau\right).$$

Das heißt, die PDE eines fairen arbitragefreien Post-Crisis Preises eines Derivates mit positiver Auszahlungsfunktion (4.2.15) kann ebenfalls transformiert werden in die klassische homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \tau \in \left[0, \frac{\sigma^2 T}{2}\right],$$

mit $S = K \cdot \exp(x)$, $\tau = \frac{1}{2}(T - t)\sigma^2$ sowie $b_1 = -(1 - R_C)\lambda_C - s_F$, $c_1 = (r - q)$ und mit

$$\alpha_1 = \left(\frac{2c_1}{\sigma^2} - 1\right), \quad \beta_1 = -\frac{2(r - b_1)}{\sigma^2}$$

folgt

$$\begin{aligned}\tilde{V}(S, t) &= K \cdot v(x, \tau) = K \cdot \exp\left(\left(-\frac{\alpha_1^2}{4} + \beta_1\right)\tau\right) \exp\left(-\frac{\alpha_1 x}{2}\right) \cdot h(x, \tau) \quad (4.2.18) \\ &= \exp\left(\frac{2b_1}{\sigma^2}\tau\right) K \cdot \exp\left(\left(-\frac{\alpha_1^2}{4} - \left(1 + \alpha_1 + \frac{2q}{\sigma^2}\right)\right)\tau\right) \exp\left(-\frac{\alpha_1 x}{2}\right) \cdot h(x, \tau).\end{aligned}$$

Da wir weiterhin die Lösung der Wärmeleitungsgleichung mittels Fourier-Transformation nutzen und sich der Payoff eines europäischen Calls ($\epsilon = 1$)/Puts ($\epsilon = -1$) nicht geändert hat, folgt:

$$h(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-u)^2}{4\tau}\right) \max\left[\epsilon \left(\exp\left(\left(\frac{\alpha_1}{2} + 1\right)u\right) - \exp\left(\frac{\alpha_1 u}{2}\right)\right), 0\right] du$$

Da des Weiteren a aus dem klassischen Black-Scholes-Merton-Modell gleich α_1 aus dem Modell von Burgard und Kjaer ist, erhalten wir unser $\tilde{V}(S, t)$ direkt über

$$\begin{aligned}\tilde{V}(S, t) &= \exp\left(\frac{2b_1}{\sigma^2}\tau\right) K \cdot \exp\left(\left(-\frac{\alpha_1^2}{4} - \left(1 + \alpha_1 + \frac{2q}{\sigma^2}\right)\right)\tau\right) \exp\left(-\frac{\alpha_1 x}{2}\right) \cdot h(x, \tau) \\ &= \exp\left(\frac{2b_1}{\sigma^2}\tau\right) \cdot V(S, t)\end{aligned}$$

Damit folgt für den Post-Crisis Preis eines Derivats mit nicht negativer Auszahlungsfunktion:

$$\tilde{V}(S, t) = \exp((- (1 - R_C) \lambda_C - s_F)(T - t)) V(S, t) \quad (4.2.19)$$

Hierbei ist $V(S, t)$ wie in (4.1.6) zu berechnen.

4.2.2 Negative Auszahlungsprofile

Bei den negativen Auszahlungsprofilen ändert sich bei den Herleitung bis auf einen anderen Abzinsungsfaktor und einige Vorzeichenwechsel nichts. Daher ist die Detailtiefe der Lösung der PDE etwas abgeschwächt. Für die PDE (4.2.14) folgt für eine negative Auszahlungsfunktion:

$$r\tilde{V} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} + c_1 S \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} + a_1 \tilde{V}^- \quad (4.2.20)$$

Um nun \tilde{V} und \tilde{V}^- zusammenfassen zu können, müssen wir die Vorzeichen ändern, denn für eine negative Auszahlungsfunktion ist \tilde{V} negativ und \tilde{V}^- positiv, gleiches gilt für die Ableitungen nach S und t .

$$\Rightarrow -r\tilde{V} = -\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} - c_1 S \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} + a_1 \tilde{V}^-$$

$$\Leftrightarrow (r + a_1) \tilde{V} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} + c_1 S \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S}$$

Wir setzen zunächst wieder

$$S = K \cdot \exp(x), \quad \tilde{V}(S, t) = K \cdot v(x, \tau), \quad \tau = \frac{1}{2}(T - t) \sigma^2, \quad K \in \mathbb{R}$$

und leiten $\tilde{V}(S, t)$ partiell ab:

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} = -\frac{K \sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} = \frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} = -\frac{K}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$

Dies setzen wir nun in die Gleichung (4.2.20) ein und erhalten

$$\begin{aligned} (r + a_1) K v &= -\frac{K \sigma^2}{2} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \left(-\frac{K}{S^2} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{K}{S^2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) + c_1 S \frac{K}{S} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial v}{\partial \tau} &= \left(\frac{2c_1}{\sigma^2} - 1 \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{2(r + a_1)}{\sigma^2} v. \end{aligned}$$

Der Übersichtlichkeit halber setzen wir nun

$$\alpha_2 = \left(\frac{2c_1}{\sigma^2} - 1 \right), \quad \beta_2 = -\frac{2(r + a_1)}{\sigma^2}$$

und erhalten

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = \alpha_2 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \beta_2 v. \quad (4.2.21)$$

Ab hier verhält sich die Herleitung genau wie im vorangegangenen Kapitel, sodass wir einige Schritte überspringen und direkt zum Ergebnis kommen. Die PDE eines fairen arbitragefreien Post-Crisis Preises eines Derivates mit negativer Auszahlungsfunktion (4.2.21) kann transformiert werden in die klassische homogene Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial h}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad \tau \in \left[0, \frac{\sigma^2 T}{2} \right],$$

mit $S = K \cdot \exp(x)$, $\tau = \frac{1}{2}(T - t) \sigma^2$ sowie $a_1 = (1 - R_B) \lambda_B$, $c_1 = (r - q)$ und mit $\alpha_2 = \left(\frac{2c_1}{\sigma^2} - 1 \right)$, $\beta_2 = -\frac{2(r + a_1)}{\sigma^2}$ folgt

$$\begin{aligned} \tilde{V}(S, t) &= K \cdot v(x, \tau) = K \cdot \exp \left(\left(-\frac{\alpha_2^2}{4} + \beta_2 \right) \tau \right) \exp \left(-\frac{\alpha_2 x}{2} \right) \cdot h(x, \tau) \quad (4.2.22) \\ &= \exp \left(-\frac{2a_1}{\sigma^2} \tau \right) K \cdot \exp \left(\left(-\frac{\alpha_2^2}{4} - \left(1 + \alpha_2 + \frac{2q}{\sigma^2} \right) \right) \tau \right) \exp \left(-\frac{\alpha_2 x}{2} \right) \cdot h(x, \tau). \end{aligned}$$

In Analogie zur positiven Auszahlungsfunktion folgt mit gleichem $h(x, \tau)$ der Post-Crisis Preis für einen europäischen Call/Put mit negativer Auszahlungsfunktion (short Call oder short Put) durch:

$$\tilde{V}(S, t) = \exp((-(1 - R_B) \lambda_B)(T - t)) V(S, t) \quad (4.2.23)$$

4.2.3 Ergebnisse des unilateralen Falls

Dank unseren vorangegangenen Herleitungen können wir nun ein zentrales Theorem zur Überführung von Derivatepreisen aus dem klassischen Black-Scholes-Merton-Modell in das Modell von Burgard und Kjaer angeben.

Satz 4.1. *Für jedes Derivat $V(S, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ aus dem Black-Scholes-Merton-Modell mit positiver oder negativer Auszahlungsfunktion und geschlossener Preisformel, deren Herleitung nicht von der Put-Call-Parität abhängig ist (siehe Bemerkung 4.1), gibt es eine geschlossene Preisformel $\tilde{V}(S, t) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ im Modell von Burgard und Kjaer. Hierbei ergeben sich die Preisformeln für Derivate mit positiver Auszahlungsfunktion über*

$$\tilde{V}(S, t) = \exp((- (1 - R_C) \lambda_C - s_F) (T - t)) V(S, t),$$

sowie für Derivate mit negativer Auszahlungsfunktion über

$$\tilde{V}(S, t) = \exp((- (1 - R_B) \lambda_B) (T - t)) V(S, t).$$

Beweis. Zunächst machen wir uns klar, dass für $h(x, \tau)$ in beiden Modellen

$$\begin{aligned} h(x, \tau) &= (h_1 \star h_2)(x, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} h_1(x - u, \tau) h_2(u, \tau) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - u)^2}{4\tau}\right) h(u, 0) du \end{aligned}$$

gilt. Das heißt, die Änderungen unserer Preise in Bezug zum klassischen Black-Scholes-Merton-Modell hängt von den Funktionen $f(\tau)$ und $g(x)$ ab. Da wir mit dem Ansatz

$$V(S, t) = K \cdot v(x, \tau) = K \cdot f(\tau) \cdot g(x) \cdot h(x, \tau)$$

arbeiten und unsere Funktionen Exponentialfunktionen sind, können wir diese einfach als Diskontfaktoren vor den klassischen Black-Scholes-Merton Preis ziehen und erhalten die angegebenen Formeln. \square

Bemerkung 4.1. Wir verzichten in Satz 4.1 auf die Put-Call-Parität, da wir sonst eine Art verstecktes bilaterales oder sogar trilaterales Risiko in einer Preisformel haben könnten welche eigentlich nur für ein unilaterales Risiko gilt. Wir wollen dies allerdings erst zusammen mit den Ergebnissen aus Kapitel 4.3.2 im Ausblick dieser Arbeit diskutieren.

Mit den hergeleiteten Formeln ist es nicht nur möglich, die klassischen Post-Crisis Plain-Vanilla-Derivate gemäß S-CSA besicherten unilateralen Kreditrisiken zu bewerten, sondern gemäß Munoz et al. [19] auch die unbesicherten Derivate in dem Spezialfall, dass die Bid-Ask-Spreads für das Funding verschwinden. Die Bewertungs-PDE für unbesicherte Derivatepositionen ist gegeben durch

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + (r_B - q) S \frac{\partial \bar{V}}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \bar{V}}{\partial S^2} = -\bar{V}^- f + \bar{V}^+ i,$$

mit Spreads $s^f = f - r_C$ und $s^i = i - r_C$. Hierbei ist r_B die Repo-Rate und r_C der risikolose Zins. Für diese PDE können wir dann in gleicher Weise die hergeleiteten Formeln der unilateralen Burgard und Kjaer PDE nutzen.

In [7] haben Burgard und Kjaer die PDE mithilfe der Formel von Feynman–Kac gelöst. Wir haben nun eine weitere Möglichkeit der Berechnung von Optionen mit positiver oder negativer Auszahlungsfunktion im Modell von Burgard und Kjaer hergeleitet. Damit sind wir auch in der Lage, das Credit Valuation Adjustment (CVA) bzw. das Debit Valuation Adjustment (DVA) für Optionen mit positiver oder negativer Auszahlungsfunktion anzugeben. Hierbei bestimmen wir das CVA bzw. das DVA einer Option mit positiver oder negativer Auszahlungsfunktion über die Differenz $\tilde{V}(S, t) - V(S, t)$ für das CVA sowie $V(S, t) - \tilde{V}(S, t)$ für das DVA. Dabei ist $\tilde{V}(S, t)$ der Optionspreis im Modell von Burgard und Kjaer für positive (CVA) oder negative (DVA) Auszahlungsfunktionen und $V(S, t)$ der Black-Scholes-Preis der gleichen Option. Wir betrachten beim CVA zwei Fälle: Zum einen nehmen wir $s_F = 0$ an, was impliziert, dass $s_F = r_F - r$ ist, und somit $r_F = r$ gilt, womit wir das Derivat als Sicherheit benutzen dürfen. Der zweite Fall ist, $s_F = (1 - R_B) \lambda_B$, wobei wir in diesem Fall das Derivat nicht als Sicherheit benutzen dürfen. Für das CVA im ersten Fall mit $s_F = 0$ folgt dann

$$CVA = V(S, t) (\exp(-(1 - R_C) \lambda_C (T - t)) - 1),$$

sowie für den zweiten Fall mit $s_F = (1 - R_B) \lambda_B$

$$CVA = V(S, t) (\exp(-((1 - R_C) \lambda_C + (1 - R_B) \lambda_B) (T - t)) - 1).$$

In gleicher Weise kann man das DVA als Differenz des risikolosen Black-Scholes Preises minus des risikobehafteten Wertes der Option im Modell von Burgard und Kjaer

$$DVA = V(S, t) (1 - \exp(-(1 - R_B) \lambda_B (T - t)))$$

bestimmen.

4.3 Eine Adomian-RBF-Wavelet-Methode zur Lösung partieller Differentialgleichungen

Wir wollen nun die Kapitel über Wavelets und radiale Basisfunktionen und die Post-Crisis Modelle nach Burgard und Kjaer verknüpfen. Dabei werden wir die partielle nichtlineare Differentialgleichung aus dem Modell von Burgard und Kjaer mithilfe einer Adomian-Zerlegung unter Zuhilfenahme von RBF-Wavelets lösen. Zum Einstieg werden wir zunächst die Anwendung der Adomian-Zerlegung auf das klassische Black-Scholes-Merton-Modell durchführen, wobei wir uns dabei an der Arbeit von Bohner/Zheng [3] bzw. in allgemeinerer Form an Lesnic [22] orientieren. Wir werden dort bereits sehen, warum eine Erweiterung der Methode, beispielsweise durch unser RBF-Wavelet, nötig wird.

4.3.1 Der lineare Fall

Wir beginnen zunächst wieder mit der Black-Scholes-Merton-PDE

$$rV = \frac{\partial V}{\partial t} + (r - q)S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

$$\Leftrightarrow -V_t + rV = aS^2 V_{SS} + bSV_S$$

wobei $a = \frac{\sigma^2}{2}$ und $b = r - q$ ist. Zudem setzen wir als Endwertbedingung unsere Auszahlungsfunktion $V(S, T) = g(S)$. Die Adomian-Zerlegung aus [22, 3] stellt allgemein eine PDE wie folgt dar:

$$\sum_{n=0}^N \alpha_n(S, t) G_n V(S, t) = \sum_{m=1}^M \beta_m(S, t) F_m V(S, t) + f(S, t) \quad (4.3.1)$$

mit $G_n V(S, 0) = g_n(S)$, $0 \leq n \leq N - 1$. Dabei sind G_n und F_m Differentialoperatoren derart, dass

$$G_n = \frac{\partial^n}{\partial t^n}, \quad 0 \leq n \leq N \quad \text{sowie} \quad F_m = \frac{\partial^m}{\partial S^m}, \quad 0 \leq m \leq M$$

gilt. Dementsprechend sind die Integraloperatoren G_n^{-1} und F_m^{-1} gegeben durch:

$$G_n^{-1} = \int_0^{t_0} \int_0^{t_1} \dots \int_0^{t_{N-1}} dt_N \dots dt_1 \quad \text{sowie} \quad F_m^{-1} = \int_0^{S_0} \int_0^{S_1} \dots \int_0^{S_{M-1}} dS_M \dots dS_1.$$

Die Lösung der PDE ergibt sich dann über eine Reihe

$$V(S, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(S, t), \quad (4.3.2)$$

wobei

$$V_0(S, t) = G_n^{-1} \left(\frac{f(S, t)}{\alpha_N(S, t)} \right) + \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{t^\ell}{\ell!} g_\ell(S)$$

sowie

$$V_{k+1}(S, t) = \left(\sum_{m=1}^M G_N^{-1} \left(\frac{\beta_m(S, t)}{\alpha_N(S, t)} F_m \right) - \sum_{n=0}^{N-1} G_N^{-1} \left(\frac{\alpha_n(S, t)}{\alpha_N(S, t)} G_n \right) \right) V_k(S, t)$$

ist. Die Black-Scholes-Merton-PDE ergibt sich als Spezialfall mit $N = 1$, $M = 2$, $f(S, t) = 0$, $\alpha_0 = r$, $\alpha_1 = -1$, $\beta_1 = bS$, $\beta_2 = aS^2$. Wir erhalten dann für $V_0(S, t) = g(S)$ sowie

$$\begin{aligned} V_{k+1}(S, t) &= \left(\sum_{m=1}^2 G_N^{-1} \left(\frac{\beta_m(S, t)}{\alpha_N(S, t)} F_m \right) - \sum_{n=0}^0 G_N^{-1} \left(\frac{\alpha_n(S, t)}{\alpha_N(S, t)} G_n \right) \right) V_k(S, t) \\ &= G_1^{-1} (-bSF_1 - aS^2F_2 + rG_0) V_k(S, t) \\ &= \int_T^t \left(-bS \frac{\partial V_k(S, \tau)}{\partial S} - aS^2 \frac{\partial^2 V_k(S, \tau)}{\partial S^2} + rV_k(S, \tau) \right) d\tau \\ &= \int_t^T \left(bS \frac{\partial V_k(S, \tau)}{\partial S} + aS^2 \frac{\partial^2 V_k(S, \tau)}{\partial S^2} - rV_k(S, \tau) \right) d\tau \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$. Das zentrale Ergebnis aus [3] (Satz 2.1; Formel (2.3)) ist, dass sich (4.3.3) schreiben lässt als

$$V_k(S, t) = \left(\sum_{m=0}^{2k} \left(\sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_v^k \right) S^m g^{(m)}(S) \right) \frac{(T-t)^k}{k!} \quad (4.3.4)$$

mit $k \in \mathbb{N}_0$ und $\rho_v = a(v^2 - v) + bv - r$ sofern $g(S)$ beliebig oft differenzierbar ist. Hierbei tritt nun auch das zentrale Problem dieser Methode auf, und zwar, dass die Auszahlungsfunktion beliebig oft differenzierbar sein muss. Dies ist für die allermeisten und wichtigsten Auszahlungsfunktionen nicht gegeben, weshalb eine Anpassung der Methode nötig wird. Bevor wir eine Anpassung der Methode vornehmen, wollen wir noch eine Aussage über die Ordnung der RBF-Wavelets aus Satz 3.12 machen.

Satz 4.2. *Die RBF-Wavelets $\tilde{f}(x)$ aus Satz 3.12 haben die Ordnung 2 und alle ungeraden Momente $m_n = \int_{\mathbb{R}} x^n \tilde{f}(x) dx$ mit $n \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ verschwinden.*

Beweis. Wir müssen offenbar zeigen, dass für alle ungeraden n die Beziehung

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) x^n dx = 0$$

gilt. Offenbar muss $\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(x) dx = 0$ für jedes Wavelet gelten, um mindestens die Ordnung 1 zu haben, respektive zu existieren. Die Ordnung 2 ergibt sich dann automatisch, wenn die Aussage für alle $n \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$ richtig ist. Da sich $\tilde{f}(x)$ aus der Summe von B-splines ergibt, welche gerade Funktionen sind, genügt es zu zeigen, dass

$$\int_{\mathbb{R}} B_k \left(x + \frac{k+1}{2} \right) x^n dx = 0$$

mit $B_k \left(x + \frac{k+1}{2} \right)$ einem zum Ursprung zentrierten B-spline vom Grad $k \in \mathbb{N}$ gilt. Da die Funktion $f(x) = B_k \left(x + \frac{k+1}{2} \right) x^n$ aus dem Produkt einer geraden und einer ungeraden Funktionen besteht, ist $f(x)$ ebenfalls punktsymmetrisch zum Ursprung. Zudem ist $B_k \left(x + \frac{k+1}{2} \right)$ nicht negativ, weshalb $B_k \left(x + \frac{k+1}{2} \right)$ den gleichen Einfluss auf den Funktionsverlauf hat, wie eine Funktion $g(x) = -\chi_{\left[-\frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2}\right]}(x) \cdot x^m$ mit $m \in 2\mathbb{N}$. Damit folgt

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) x^n dx = \int_{\mathbb{R}} -\chi_{\left[-\frac{k+1}{2}, \frac{k+1}{2}\right]}(x) \cdot x^m x^n dx = - \int_{-\frac{k+1}{2}}^{\frac{k+1}{2}} x^{m+n} dx = 0$$

und somit die Aussage der Satzes. \square

Das heißt, wir können auf einem endlichen Intervall sowohl mit unserer Skalierungsfunktion als auch mit unserm Wavelet Polynome ungeraden Grades reproduzieren. Dies ist für unsere weitere Konstruktion sehr hilfreich, da die zu betrachtenden Payoff-Funktionen beispielsweise eines Forwads, ein Polynom vom Grad 1 ist. Wir approximieren dann die Funktion $V(S, T) = g(S)$ durch:

$$\tilde{g}_N(S) = \sum_{k=-N}^N g(k) \cdot f(S - k), \quad N \in \mathbb{N}. \quad (4.3.5)$$

Hierbei ist $\tilde{g}_N(S)$ die Interpolation von $g(S)$ in Abhängigkeit des Intervalls $[-N, N]$ und f die Skalierungsfunktion unseres Wavelets. Dass wir die Funktion $g(S)$ stückweise über eine solche Reihe darstellen können, liegt zum Einen daran, dass sich jede Funktion $g \in V_j$, mit $j \in \mathbb{Z}$ und V_j wie in Kapitel 3.2.1 definiert, als eine in $L_2(\mathbb{R})$ konvergente Reihe $g(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k} f(2^{-j}x - k)$ schreiben lässt, wobei f die Skalierungsfunktion eines Wavelets darstellt und die $c_{j,k} \in \mathbb{R}$ geeignete Koeffizienten sind. Hierzu sei auch auf Freund/Hoppe [20] verwiesen. Zum Anderen gilt für unsere Skalierungsfunktion als auch für unser Wavelet, dass sowohl $\sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - k)$ als auch $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{f}(x - k)$ zu eins normierbar sind. Das heißt, dass sich eine lineare Funktion in Abhängigkeit der Skalierungsfunktion und einer genügend großen Anzahl von Stützstellen N , auf dem Intervall $[a, b]$ mit $-N < a < b < N$ reproduzieren lässt. Wie weit die Intervallgrenzen a, b von $-N$ bzw. N entfernt sind, hängt von der Breite der Skalierungsfunktion ab. Um so breiter die Skalierungsfunktion, um so weiter weg liegen die a, b von den $-N, N$ und umgekehrt. Dies impliziert, dass eine lineare Funktion $g(S)$ (beispielsweise die Payoff-Funktion eines Forwads $(S - K)$ auf einem Intervall)

in V_0 liegt und somit die geeignete Koeffizienten $c_{0,k} \in \mathbb{R}$ die $g(k)$ sind. Wir werden uns im weiteren Verlauf dieses Kapitels ein Beispiel dazu ansehen.

Genau wie bei beispielsweise den Finite-Differenzen-Methoden muss man sich bei der Adomian-RBF-Wavelet-Methode auf einen Bereich festlegen, in dem man die partielle Differentialgleichung lösen möchte. Allerdings benötigt man kein Gitter, sondern lediglich den Aktienkurs S_0 für welchen man den Optionspreis berechnen möchte. Unter Kenntnis des Aktienkurses S_0 ist es dann nur noch notwendig, $\tilde{g}_N(S)$ in einem Bereich um den Aktienkurs S_0 zu bestimmen. Ersetzen wir nun $g(S)$ in Gleichung (4.3.4) durch $\tilde{g}_N(S)$ erhalten wir die Adomian-RBF-Wavelet-Methode über

$$V_k(S, t) = \left(\sum_{m=0}^{2k} \left(\sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} p_v^k \right) S^m \tilde{g}_N^{(m)}(S) \right) \frac{(T-t)^k}{k!}. \quad (4.3.6)$$

Hierbei ist $\tilde{g}_N(S)$ zwar immer noch nicht beliebig oft differenzierbar, allerdings können wir schnell einen beliebigen Grad an Differenzierbarkeit erreichen, indem wir ein Wavelet höheren Grades konstruieren.

Wir wollen nun, bevor wir die Methode auf das Modell von Burgard und Kjeaar ausweiten, ein numerisches Beispiel für das klassische Black-Scholes-Merton-Modell betrachten.

Beispiel 4.1. Wir betrachten einen Forward ($F(S, T) = S - K$) mit Strike $K = 9$ Euro, Restlaufzeit $(T - t) = 0.2$, Volatilität $\sigma = 0.2$ und risikolosem Zins $r_f = 0.03$ auf eine Aktie zum aktuellen Kurs $S_0 = 12$ Euro. Wir wählen ein RBF-Wavelet, sodass $\tilde{g}_N \in C^5$ ist. Aus Gründen der Übersichtlichkeit (zu viele Summanden) geben wir nur die Funktion $f \in C^5$ an, mithilfe derer die Wavelets erzeugt werden. Diese ist gegeben durch

$$f(x) = g_{1,0}(x) \star g_{1,1}(x) \star g_{1,2}(x)$$

mit

$$g_{1,0}(x) = \exp\left(- (a \cdot 0)^2\right) \cdot \begin{cases} 1 + x, & \text{für } -1 < x \leq 0 \\ 1 - x, & \text{für } 0 < x \leq 1 \\ 0, & \text{für } \text{sonst} \end{cases}$$

und

$$g_{1,1}(x) = \exp\left(- (a \cdot 1)^2\right) \cdot \begin{cases} 2 + x, & \text{für } -2 < x \leq -1 \\ 1, & \text{für } -1 < x \leq 1 \\ 2 - x, & \text{für } 1 < x < 2 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$g_{1,2}(x) = \exp\left(-\left(a \cdot 2\right)^2\right) \cdot \begin{cases} 3 + x, & \text{für } -3 < x \leq -2 \\ 1, & \text{für } -2 < x \leq 2 \\ 3 - x, & \text{für } 2 < x < 3 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$$

Mithilfe dieser Funktion konstruieren wir dann genau wie Kapitel 3.3.4 ein Gauß'sches radiales Basisfunktionen Wavelet, wobei wir hier $a = \frac{1}{2}$ wählen. Hierbei wählen wir $a = \frac{1}{2}$, da damit die radiale Basisfunktion breit genug ist, um ein RBF-Wavelet in C^5 zu erzeugen. Würden wir ein Wavelet höherer Glätte benötigen, würden wir bei der Konstruktion ein kleineres a wählen. Wir betrachten zunächst die verwendete Skalierungsfunktion und die dazugehörige Interpolation der Payoff-Funktion:

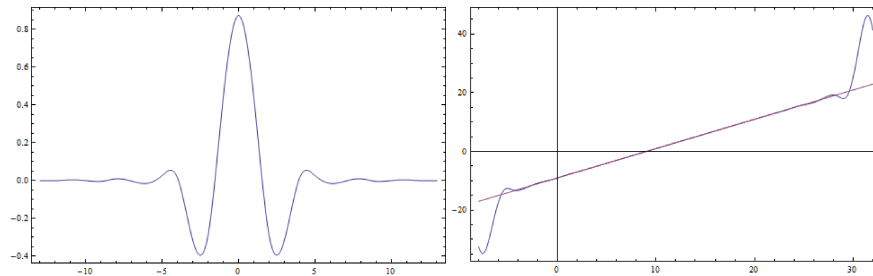


Abbildung 9: Links: Die Skalierungsfunktion eines Gauß'schen radialen Basisfunktionen Wavelets. Rechts: Die Interpolation der Payoff-Funktion $F(S, T) = S - K$ mittels der Skalierungsfunktion.

Die Interpolation wurde hierbei mit $N = 20$ (zentriert um den aktuellen Aktienkurs $S_0 = 12$) durchgeführt, was dazu führt, dass der maximale Fehler mit $S \in [5, 19]$ und einer numerischen Auswertung mit einer Schrittweite von 10^{-4} bei $1,59872 \cdot 10^{-14}$ liegt. Das heißt mit $N = 20$ reproduzieren wir die Payoff-Funktion eines Forwards auf dem Intervall $[5, 19]$. In diesem Fall haben wir damit das 0.1%– und 99.9% Quantil des Aktienkursverlaufs abgedeckt, insofern man eine geometrische Brown'sche Bewegung (wie im Black-Scholes-Merton-Modell Standard) für den Aktienkursverlauf unterstellt. Wir wollen uns nun die Konvergenz der Methode nach (4.3.6) bzw. (4.3.2) gegen den Forwardpreis im klassischen Black-Scholes-Merton-Modell mit den bereits genannten Parametern ansehen.

Iteration und Fehler					
1.	2.	3.	4.	5.	6.
0,0538	$1,61 \cdot 10^{-4}$	$3,23 \cdot 10^{-7}$	$4,85 \cdot 10^{-10}$	$5,37 \cdot 10^{-13}$	$4,52 \cdot 10^{-14}$

Abbildung 10: In der ersten Zeile werden die einzelnen Iterationsschritte abgetragen und in der zweiten Zeile die absoluten Fehler der numerischen Berechnung im Vergleich zum analytischen Forwardpreis.

Wie man sehr gut an dem Beispiel erkennen kann, konvergiert die Methode sehr schnell gegen die analytische Lösung. Nach der 6. Iteration ist keine signifikante Verbesserung mehr zu erkennen. Damit haben wir nach der 6. Iteration die gleiche Fehlerordnung wie bei der Interpolation der Payoff-Funktion durch das RBF-Wavelet. Somit sind auch keine besseren Ergebnisse mehr zu erwarten. Wir wollen uns hier nur ein Beispiel ansehen, da die Konvergenz dieser Methode nach Bohner/Zheng [3] für beliebig oft differenzierbare Funktionen gegeben ist. Da wir mit unserem Wavelet einen beliebigen Grad an Differenzierbarkeit erreichen können, gilt die Konvergenz ebenso für unsere Methode. Die einzige Möglichkeit einer Divergenz wäre somit eine „schlechte“ Interpolation der Payoff-Funktion. Da wir aber bereits gesehen haben, dass unsere Skalierungsfunktion die Payoff-Funktion sogar auf einem hinreichend großen Intervall reproduzieren kann, ist die Methode unempfindlich gegenüber Änderungen der Input Parameter. Probleme hat die Methode allerdings beispielsweise bei klassischen Call bzw. Put Optionen, da alle Summanden $V_k(S, t)$ mit

$$V_k(S, t) = \left(\sum_{m=0}^{2k} \left(\sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} p_v^k \right) S^m \tilde{g}_N^{(m)}(S) \right) \frac{(T-t)^k}{k!},$$

verschwinden, wenn die Payoff-Funktion $g(S)$ bzw. dessen Interpolation $\tilde{g}_N(S)$ identisch Null ist. Dies ist allerdings für einen europäischen Call der Fall, wenn $S < K$ ist, sowie bei einem europäischen Put, wenn $S > K$ ist. Wir können zwar die Payoff-Funktionen auf $[0, K]$ bzw. $[K, \infty)$ mit unserm RBF-Wavelet interpolieren, allerdings ist die Konvergenzgeschwindigkeit der Methode (zum lösen der PDE) sehr langsam. Dies liegt daran, dass der zentrale Kern der Methode auf den Ableitungen beruht. Ist die Interpolation der Payoff-Funktion nun sehr flach wie es für einen europäischen Call bzw. Put auf $[0, K]$ bzw. $[K, \infty)$ der Fall ist, werden weitaus mehr $V_k(S, t)$ benötigt um einen guten Preis zu erhalten. Für den Fall, dass sich die Option im Geld befindet, liefert die Methode allerdings genauso gute Ergebnisse, wie bei einem Forward, da die Payoff-Funktionen dann stückweise mit denen eines long Calls bzw. short Puts übereinstimmen.

4.3.2 Der nichtlineare Fall

Wir beginnen zunächst wieder mit der PDE von Burgard und Kjaer [8]. Der Ausgangspunkt der Betrachtung ist dann

$$r\tilde{V} = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \mathcal{L}_t \tilde{V} + (1 - R_B) \lambda_B \tilde{V}^- - (1 - R_C) \lambda_C \tilde{V}^+ - s_F \tilde{V}^+$$

mit

$$\mathcal{L}_t \tilde{V} = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial \tilde{V}}{\partial S}$$

sowie

$$\tilde{V}^+ = \frac{\tilde{V} + |\tilde{V}|}{2}, \quad \tilde{V}^- = \frac{-\tilde{V} + |\tilde{V}|}{2}.$$

Dann gilt:

$$\tilde{V}_t - a\tilde{V} - b|\tilde{V}| = -cS^2\tilde{V}_{SS} - d \cdot S\tilde{V}_S,$$

wobei

$$a = r + \frac{1}{2} (1 - R_B) \lambda_B + \frac{1}{2} (1 - R_C) \lambda_C + \frac{1}{2} s_F$$

und

$$b = -\frac{1}{2} (1 - R_B) \lambda_B + \frac{1}{2} (1 - R_C) \lambda_C + \frac{1}{2} s_F$$

ist, sowie $c = \frac{\sigma^2}{2}$ und $d = r - q$. Zudem setzen wir unsere Auszahlungsfunktion $\tilde{V}(S, T) = g(S)$. Wir benutzen dann wieder den Ansatz (4.3.1), wobei wir diesen um polynomiale Anteile erweitern, welche die Nichtlinearität behandeln. Hierzu sei auch auf Seng/Abbaoui/Cherruault [33] verwiesen. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^N \alpha_n(S, t) G_n V(S, t) + A(G_0, G_1, \dots, G_{N-1}) \\ &= \sum_{m=1}^M \beta_m(S, t) F_m V(S, t) + B(F_1, \dots, F_{M-1}) + f(S, t) \end{aligned}$$

mit A, B den Nichtlinearitäten der Funktion $u(S, t)$ und deren Ableitungen nach S bzw. t . Die allgemeine Lösung eines solchen Problems ergibt sich dann wieder über die Reihe

$$V(S, t) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(S, t),$$

wobei

$$V_0(S, t) = G_n^{-1} \left(\frac{f(S, t)}{\alpha_N(S, t)} \right) + \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{t^\ell}{\ell!} g_\ell(S)$$

sowie

$$V_{k+1}(S, t) = \left(\sum_{m=1}^M G_N^{-1} \left(\frac{\beta_m(S, t)}{\alpha_N(S, t)} F_m \right) - \sum_{n=0}^{N-1} G_N^{-1} \left(\frac{\alpha_n(S, t)}{\alpha_N(S, t)} G_n \right) \right) V_k(S, t) + G_N^{-1}(B_k - A_k)$$

sind. Die A_k, B_k , werden Adomian Polynome genannt. Diese Polynome können für Nichtlinearitäten berechnet werden, welche auf dem Definitionsbereich beliebig oft differenzierbar sind (hierzu sei auch auf Adomian [2] verwiesen). Diese Polynome können in diesem Falle wie folgt berechnet werden:

$$A_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{d\lambda^k} A \left(\sum_{j=0}^k \lambda^j G_0 V_j, \dots, \sum_{j=0}^k \lambda^j G_{N-1} V_j \right) \right]_{\lambda=0}, k \geq 0$$

bzw.

$$B_k = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k}{d\lambda^k} B \left(\sum_{j=0}^k \lambda^j F_1 V_j, \dots, \sum_{j=0}^k \lambda^j F_{M-1} V_j \right) \right]_{\lambda=0}, k \geq 0.$$

Zunächst werden die Ableitungen nach λ gebildet und dann $\lambda = 0$ gesetzt. Für unsere Nichtlinearität $A(\cdot) = |\cdot|$ können diese damit nicht einfach berechnet werden. Allerdings können wir dieses Problem mit der multiquadric radialen Basisfunktion lösen, denn es gilt:

$$|x| = \lim_{c \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + c^2}.$$

Das heißt, wir können mit beliebig kleinem c die Betragsfunktion beliebig gut approximieren. Hierbei konvergiert die Funktionenfolge gleichmäßig gegen die Betragsfunktion. Wir wollen uns nun zunächst die ersten Polynome A_k ansehen. Es gilt:

$$A_0 = \frac{1}{0!} \left[\frac{d^0}{d\lambda^0} A \left(\sum_{k=0}^0 \lambda_k V_k \right) \right]_{\lambda=0} = A(V_0)$$

$$A_1 = \frac{1}{1!} \left[\frac{d}{d\lambda} A \left(\sum_{k=0}^1 \lambda_k V_k \right) \right]_{\lambda=0} = \left[\frac{d}{d\lambda} A(V_0 + \lambda V_1) \right]_{\lambda=0} = V_1 \cdot A^{(1)}(V_0)$$

$$A_2 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{d\lambda^2} A \left(\sum_{k=0}^2 \lambda_k V_k \right) \right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2}{d\lambda^2} A(V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2) \right]_{\lambda=0}$$

$$\begin{aligned}
&= V_2 \cdot A^{(1)}(V_0) + \frac{1}{2} V_1^2 \cdot A^{(2)}(V_0) \\
A_3 &= V_3 A^{(1)}(V_0) + V_1 V_2 A^{(2)}(V_0) + \frac{1}{3!} V_1^3 A^{(3)}(V_0)
\end{aligned}$$

Das heißt, die A_k lassen sich schreiben als

$$A_k = V_k A^{(1)}(V_0) + \xi_k,$$

wobei wir ξ_k den Fehler der Approximation nennen, denn die Betragsfunktion, welche wir approximieren, besitzt keine „höheren“ Ableitungen. Die kritische Stelle dieser Approximation ist die Null. Aus diesem Grund betrachten wir nun das Verhalten des Fehlers ξ_k an der Null. Wir wissen bereits, dass die ersten beiden Ableitungen der multiquadric Funktion $f(x) = \sqrt{x^2 + c^2}$ gegeben sind durch:

$$f^{(1)}(x) = \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} \quad \text{sowie} \quad f^{(2)}(x) = \frac{c^2}{\sqrt{c^2 + x^2}^3}.$$

Das heißt für $c \rightarrow 0$ und $c^2 \ll x^2$ ist die erste Ableitung $f^{(1)}(x)$ definiert durch:

$$\lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ c^2 \ll x^2}} f^{(1)}(x) = \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ c^2 \ll x^2}} \frac{x}{\sqrt{c^2 + x^2}} = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases} \Big|_{c^2 \ll x^2}.$$

Für die Ableitungen der multiquadric Funktion $\frac{d^k}{dx^k} \sqrt{x^2 + c^2}$ mit $k > 2$ gilt nach Lemma 3.1

$$\begin{aligned}
&\frac{d^k}{dx^k} \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = -3 \left(2^{k-1} \prod_{j=1}^{k-1} \left(-\frac{3}{2} - j \right) \cdot x^k (1+x^2)^{-k-\frac{3}{2}} \right. \\
&\left. + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} 2^{k-1-i} \binom{k}{2i} \prod_{j=1}^i (2j-1) \prod_{j=1}^{k-1-i} \left(-\frac{3}{2} - j \right) x^{k-2i} (1+x^2)^{-k-\frac{3}{2}+i} \right). \tag{4.3.7}
\end{aligned}$$

Wir nutzen nun die vereinfachte Darstellung aus Satz 3.2 und ersetzen die Eins durch c^2 , sodass

$$\frac{d^k}{dx^k} \frac{c^2}{(c^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}} = c^2 \left(\frac{\lambda_0 x^k}{(c^2 + x^2)^{k+\frac{3}{2}}} + \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \frac{\lambda_i x^{k-2i}}{(c^2 + x^2)^{k+\frac{3}{2}-i}} \right) \tag{4.3.8}$$

gilt. Wobei $\lambda_0, \dots, \lambda_{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \in \mathbb{R}$ wie in Lemma 3.1 sind. Wir können nun sehen, dass alle ungeraden Ableitungen in der Null verschwinden, da alle Summanden bei

ungeradem k von x abhängen. Das heißt, die Fehler der Approximation kommen von den geraden Ableitungen der multiquadric Funktion. Bei den geraden Ableitungen benötigen wir nun wieder $c \rightarrow 0$ und $c^2 \ll x^2$, also c^2 wesentlich kleiner als x^2 . Dies liegt am letzten Term der Summe, welcher $\frac{c^2 \cdot \lambda_{\frac{k}{2}}}{(c^2 + x^2)^{\frac{k+3}{2}}}$ ist. Das bedeutet für die Approximation, dass wir keine gleichmäßige, sondern lediglich eine punktweise Konvergenz in den Ableitungen haben, wobei wir $x \neq 0$ verlangen. Außerhalb einer Umgebung der Null konvergiert der Fehler aufgrund der höheren Ableitungen exponentiell und gleichmäßig gegen Null, was direkt aus Lemma 3.1 folgt. Da wir wie im linearen Fall eine analytische Lösung anstreben, ist es notwendig, den Fehler ξ_k aus der weiteren Herleitung herauszuhalten. Dies dürfen wir allerdings nur, wenn der Fehler vernachlässigbar klein wird und wir in unserer Lösung nur noch von endlich vielen V_k ausgehen und nicht mehr von unendlich vielen, wie bei der exakten analytischen Lösung. Daher sprechen wir von nun an von einer analytischen Approximation mit endlich vielen V_k und somit A_k , bei denen der Fehler klein genug ist, um ihn aus der weiteren Herleitung ausklammern zu können. Dazu wollen wir an dieser Stelle explizit die Fehler betrachten, die durch die geraden Ableitungen $f^{(k)}(x)$ (bei geradem k und $k > 2$) entstehen. Hierzu legen wir fest, dass $|x| \geq 10^{-5}$ ist, und wir betrachten unterschiedliche Werte für c sowie die dazugehörigen Fehler, die durch die $A^{(k)}$ mit $k > 2$ und $k \in 2\mathbb{N}$ entstehen.

Maximaler Fehler der $f^{(k)}(x)$ in Abhängigkeit von c				
$f^{(k)}(x)/c$	$c = 10^{-30}$	$c = 10^{-40}$	$c = 10^{-50}$	$c = 10^{-60}$
$f^{(2)}(x)$	$1 \cdot 10^{-45}$	$1 \cdot 10^{-65}$	$1 \cdot 10^{-85}$	$1 \cdot 10^{-105}$
$f^{(4)}(x)$	$1,2 \cdot 10^{-34}$	$1,2 \cdot 10^{-54}$	$1,2 \cdot 10^{-74}$	$1,2 \cdot 10^{-94}$
$f^{(6)}(x)$	$3,6 \cdot 10^{-23}$	$3,6 \cdot 10^{-43}$	$3,6 \cdot 10^{-63}$	$3,6 \cdot 10^{-83}$
$f^{(8)}(x)$	$2,016 \cdot 10^{-11}$	$2,016 \cdot 10^{-31}$	$2,016 \cdot 10^{-51}$	$2,016 \cdot 10^{-71}$
$f^{(10)}(x)$	18.144	$1,814 \cdot 10^{-19}$	$1,814 \cdot 10^{-39}$	$1,814 \cdot 10^{-59}$
$f^{(12)}(x)$	$2,395 \cdot 10^{13}$	$2,395 \cdot 10^{-7}$	$2,395 \cdot 10^{-27}$	$2,395 \cdot 10^{-47}$
$f^{(14)}(x)$	$4,358 \cdot 10^{25}$	435.891	$4,358 \cdot 10^{-15}$	$4,358 \cdot 10^{-35}$
$f^{(16)}(x)$	$1.046 \cdot 10^{38}$	$1,046 \cdot 10^{18}$	0,0104614	$1,046 \cdot 10^{-22}$
$f^{(18)}(x)$	$3,201 \cdot 10^{50}$	$3,201 \cdot 10^{30}$	$3,201 \cdot 10^{10}$	$3,201 \cdot 10^{-10}$

Abbildung 11: In der linken Spalte werden die einzelnen $f^{(k)}(x)$ angegeben. In der zweiten Zeile werden die unterschiedlichen c abgetragen, sodass die Werte $f^{(k)}(x)/c$ die Fehler der einzelnen $f^{(k)}(x)$ in Abhängigkeit von c sind. In allen Betrachtungen wird $|x| \geq 10^{-5}$ festgelegt. Die rot markierten Fehler sind die nicht akzeptablen.

Anhand der Tabelle lässt sich sehr gut erkennen, dass sich der Fehler, der durch die Ableitungen in einer Umgebung der Null ($|x| \geq 10^{-5}$) entsteht, linear in $f^{(k)}(x)$ verhält. Im Falle des Black-Scholes-Merton-Modells haben wir bereits gesehen, dass die Methode sehr schnell gegen die analytische Lösung konvergiert. Da wir hier ein sehr ähnliches Vorgehen verwenden, gehen wir von einer

ähnlich schnellen Konvergenz aus. Des Weiteren wird unser Vorgehen durch die Tatsache unterstützt, dass El-Kalla [18] ein anderes Vorgehen zur Berechnung der Adomian Polynome verwendet, bei dem lediglich die Lipschitz-Stetigkeit vorausgesetzt wird. Dieses Vorgehen, welches auf einer Umordnung der Polynome beruht, bei der anstelle von Ableitungen, Differenzen verwendet werden können, führt für PDE's mit Lipschitz-stetiger Nichtlinearität zu einer analytischen Lösung. Da die Betragsfunktion Lipschitz-Stetig ist, wissen wir somit, dass es eine analytische Lösung geben muss. Da das Vorgehen mit den Adomian Polynomen aus El-Kalla [18] allerdings nicht zu einer geschlossenen Form führt, nutzen wir die Approximation $|x| = \lim_{c \rightarrow 0} \sqrt{x^2 + c^2}$ im Zusammenhang mit den klassischen Adomian Polynomen. Für unser weiteres Vorgehen verlangen wir nun, dass $\lim_{c \rightarrow 0} \xi_k = 0$ mit $k > 2$ und k endlich ist, sowie $c^2 \ll x^2$ gilt, sodass wir für die A_k annehmen dürfen, dass

$$A_k = V_k A^{(1)}(V_0) + \xi_k = \lim_{c \rightarrow 0} \left(V_k \frac{V_0}{\sqrt{c^2 + V_0^2}} + \xi_k \right) = \begin{cases} V_k, & V_0 > 0 \\ -V_k, & V_0 < 0 \end{cases} \Big|_{c^2 \ll V_0^2}$$

gilt. Für den Spezialfall des Modells von Burgard und Kjaer gilt dann $N = 1$, $M = 2$, $f(S, t) = 0$, $\alpha_0 = -a$, $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = -d \cdot S$, $\beta_2 = -c \cdot S^2$ und die approximierte Nichtlinearität $A(\cdot) = |\cdot|$. Da es in keiner Ableitung nach t eine Nichtlinearität gibt, fallen alle B_k weg, sodass sich das Problem reduziert auf:

$$V_0(S, t) = g(S) \quad (4.3.9)$$

$$\begin{aligned} V_{k+1}(S, t) &= \left(\sum_{m=1}^2 G_1^{-1} \left(\frac{\beta_m(S, t)}{\alpha_1(S, t)} F_m \right) - \sum_{n=0}^0 G_1^{-1} \left(\frac{\alpha_n(S, t)}{\alpha_1(S, t)} G_n \right) \right) V_k(S, t) \\ &\quad - b \cdot G_1^{-1}(-A_k) \\ &= G_1^{-1} \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} F_1 + \frac{\beta_2}{\alpha_1} F_2 - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} G_0 \right) V_k - b \cdot G_1^{-1}(-A_k) \\ &= G_1^{-1} (-d \cdot S \cdot F_1 - c \cdot S^2 \cdot F_2 + a \cdot G_0) V_k - b \cdot G_1^{-1}(-A_k). \\ &= \int_T^t \left(-d \cdot S \cdot \frac{\partial V_k(S, \tau)}{\partial S} - c \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 V_k(S, \tau)}{\partial S^2} + a \cdot V_k(S, \tau) \right) d\tau \\ &\quad + \int_T^t b \cdot A_k d\tau \\ &= \int_t^T \left(d \cdot S \cdot \frac{\partial V_k(S, \tau)}{\partial S} + c \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 V_k(S, \tau)}{\partial S^2} - a \cdot V_k(S, \tau) - b \cdot A_k \right) d\tau \\ &= \begin{cases} \int_t^T \left(d \cdot S \cdot \frac{\partial V_k(S, \tau)}{\partial S} + c \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 V_k(S, \tau)}{\partial S^2} - (a + b) V_k(S, \tau) \right) d\tau, & \text{für } V_0 > 0 \\ \int_t^T \left(d \cdot S \cdot \frac{\partial V_k(S, \tau)}{\partial S} + c \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 V_k(S, \tau)}{\partial S^2} + (b - a) V_k(S, \tau) \right) d\tau, & \text{für } V_0 < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Wir wollen nun zeigen, dass sich die $V_k(S, t)$ im nichtlinearen Fall ebenfalls als geschlossene Ausdrücke schreiben lassen. Dazu nutzen wir die Herleitung aus Bohner/Zheng [3] (Satz 2.1, Lemma 3.1 sowie Lemma 3.2) und passen diese geeignet für unsere $V_k(S, t)$ an. Dazu zeigen wir zunächst zwei Lemmas, um im Anschluss das zentrale Ergebnis anzugeben.

Lemma 4.1. *Für die Funktionen*

$$\gamma_m^{(k)} = \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_{v_i}^k$$

mit $i \in \{1, 2\}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\rho_{v_1} = c(v^2 - v) + dv - (a + b)$ bzw. $\rho_{v_2} = c(v^2 - v) + dv + (b - a)$ gilt, dass $\gamma_m^{(k)} = 0$ für $m < 0$ und $m > 2k$, sowie die Rekursion

$$\gamma_m^{(k+1)} = \begin{cases} [cm(m-1) + dm + (b-a)] \gamma_m^{(k)} + [2c(m-1) + d] \gamma_{m-1}^{(k)} + c \gamma_{m-2}^{(k)}, & \text{für } \rho_{v_1} \\ [cm(m-1) + dm - (a+b)] \gamma_m^{(k)} + [2c(m-1) + d] \gamma_{m-1}^{(k)} + c \gamma_{m-2}^{(k)}, & \text{für } \rho_{v_2} \end{cases}$$

ist.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Rekursion. Hierbei verwenden wir die Notation ρ_{m_1}, ρ_{m_2} , wobei wir dabei lediglich in ρ_{v_1}, ρ_{v_2} das v durch ein m ersetzen. Dies fassen wir dann zu $\rho_m - \rho_v$ zusammen. Es gilt offenbar

$$\gamma_m^{(k+1)} = \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_{v_i}^{k+1} = \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_{v_i}^k \rho_{v_i}$$

und

$$\begin{aligned} \rho_{m_1} - \rho_{v_1} &= c(m^2 - m) + dm - (a + b) - [c(v^2 - v) + dv - (a + b)] \\ &= c(m^2 - m) + dm - c(v^2 - v) - dv \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \rho_{m_2} - \rho_{v_2} &= c(m^2 - m) + dm + (b - a) - [c(v^2 - v) + dv + (b - a)] \\ &= c(m^2 - m) + dm - c(v^2 - v) - dv \end{aligned}$$

und damit

$$\rho_{m_1} - \rho_{v_1} = \rho_{m_2} - \rho_{v_2} = \rho_m - \rho_v.$$

Analog folgt

$$\begin{aligned} \rho_{m_1} - \rho_{(m-1)_1} &= \rho_{m_2} - \rho_{(m-1)_2} = \rho_m - \rho_{m-1} \\ &= c(m^2 - m) + dm - c((m-1)^2 - (m-1)) - d(m-1) \end{aligned}$$

$$= 2c(m-1) + d$$

Dies setzen wir nun ein und erhalten

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} [cm(m-1) + dm - (a+b)] \gamma_m^{(k)} + [2c(m-1) + d] \gamma_{m-1}^{(k)} + c\gamma_{m-2}^{(k)}, \quad \text{für } \rho_{v_1} \\ [cm(m-1) + dm + (b-a)] \gamma_m^{(k)} + [2c(m-1) + d] \gamma_{m-1}^{(k)} + c\gamma_{m-2}^{(k)}, \quad \text{für } \rho_{v_2} \end{array} \right\} \\ & \quad - \gamma_m^{(k+1)} \\ &= \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^v}{v!(m-v)!} \rho_{v_i}^k (\rho_m - \rho_v) - \sum_{v=0}^{m-1} \frac{(-1)^v}{v!(m-1-v)!} \rho_{v_i}^k (\rho_m - \rho_{m-1}) \\ & \quad + \sum_{v=0}^{m-2} \frac{(-1)^v}{v!(m-2-v)!} \rho_{v_i}^k \cdot c \\ &= \sum_{v=0}^{m-2} \frac{(-1)^v}{v!(m-v)!} \rho_{v_i}^k (\rho_m - \rho_v - (m-v)(\rho_{m-1} - \rho_m) \\ & \quad + (m-v)(m-v-1)c) = 0 \end{aligned}$$

Damit ist die Rekursion gezeigt. Da per Definition $\gamma_m^{(k)} = 0$ für $m < 0$ ist (negative Binomialkoeffizienten), folgt die erste Eigenschaft von $\gamma_m^{(k)}$. Zudem gilt

$$\gamma_m^{(0)} = \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^v}{v!(m-v)!} \rho_{v_i}^0 = \frac{1}{m!} \sum_{v=0}^m (-1)^v \binom{m}{v} = (1-1)^m = \begin{cases} 1 & \text{für } m = 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wegen der Rekursion benötigen wir $m = 2k$ Summanden, weswegen wir ab $m > 2k$ in den Bereich von $m < 0$ gelangen, von dem wir aber wissen, dass $\gamma_m^{(k)} = 0$ gilt. Damit folgt die zweite Eigenschaft und insgesamt die Behauptung des Satzes. \square

Lemma 4.2. *Die Funktionen*

$$v_k(S) = \sum_{m=0}^{2k} \sum_{v=0}^m \left(\frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_{v_i}^k \right) S^m g^{(m)}(S)$$

mit $i \in \{1, 2\}$, $k \in \mathbb{N}_0$ und $\rho_{v_1} = c(v^2 - v) + dv - (a+b)$ bzw. $\rho_{v_2} = c(v^2 - v) + dv + (b-a)$ wobei $g(S) \in C^\infty$ ist, erfüllen die Rekursion

$$v_{k+1}(S) = \begin{cases} c \cdot S^2 \cdot v_k''(S) + d \cdot S \cdot v_k'(S) - (a+b) \cdot v_k(S), & \text{für } \rho_{v_1} \\ c \cdot S^2 \cdot v_k''(S) + d \cdot S \cdot v_k'(S) + (b-a) \cdot v_k(S), & \text{für } \rho_{v_2}. \end{cases} \quad (4.3.11)$$

Beweis. Wir wählen o.B.d.A.

$$\gamma_m^{(k)} = \sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_{v_1}^k$$

wobei man die Aussage analog mit ρ_{v_2} zeigt. Damit lassen sich die $v_k(S)$ schreiben als

$$v_k(S) = \sum_{m=0}^{2k} \gamma_m^{(k)} S^m g^{(m)}(S), \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Wir bilden nun die erste und zweite Ableitung dieser $v_k(S)$ und erhalten

$$\begin{aligned} v_k'(S) &= \sum_{m=0}^{2k} \gamma_m^{(k)} \left(m S^{m-1} g^{(m)}(S) + S^m g^{(m+1)}(S) \right) \\ v_k''(S) &= \sum_{m=0}^{2k} \gamma_m^{(k)} \left(m(m-1) S^{m-2} g^{(m)}(S) \right. \\ &\quad \left. + 2m S^{m-1} g^{(m+1)}(S) + S^m g^{(m+2)}(S) \right). \end{aligned}$$

Dies setzen wir in (4.3.11) ein, und erhalten

$$\begin{aligned} &c \cdot S^2 \cdot v_k''(S) + d \cdot S \cdot v_k'(S) + (b-a) \cdot v_k(S) \\ &= \sum_{m=0}^{2k} \gamma_m^{(k)} \left([cm(m-1) + dm + (b-a)] S^m g^{(m)}(S) \right. \\ &\quad \left. + [2cm + d] S^{m+1} g^{(m+1)}(S) + c S^{m+2} g^{(m+2)}(S) \right) \\ &= \sum_{m=0}^{2k} [cm(m-1) + dm + (b-a)] \gamma_m^{(k)} S^m g^{(m)}(S) \\ &\quad + \sum_{m=0}^{2k+1} [2cm(m-1) + d] \gamma_{m-1}^{(k)} S^m g^{(m)}(S) + \sum_{m=0}^{2k+2} c \gamma_{m-2}^{(k)} S^m g^{(m)}(S) \\ &= \sum_{m=0}^{2k+2} \gamma_m^{(k+1)} S^m g^{(m)}(S) = v_{k+1}(S). \end{aligned}$$

Für den letzten Schritt haben wir die Rekursion der $\gamma_m^{(k)}$ aus Lemma (4.1) verwendet. Der Beweis funktioniert analog mit ρ_{v_2} . \square

Satz 4.3. Die Funktionen $V_k(S, t)$, welche in (4.3.9) und (4.3.10) definiert wurden, lassen sich explizit schreiben als

$$V_k(S, t) = \begin{cases} \left(\sum_{m=0}^{2k} \left(\sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_{v_1}^k \right) S^m g^{(m)}(S) \right) \frac{(T-t)^k}{k!}, & \text{für } V_0(S, t) > 0 \\ \left(\sum_{m=0}^{2k} \left(\sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_{v_2}^k \right) S^m g^{(m)}(S) \right) \frac{(T-t)^k}{k!}, & \text{für } V_0(S, t) < 0 \end{cases} \quad (4.3.12)$$

mit $k \in \mathbb{N}$ und

$$\rho_{v_1} = c(v^2 - v) + dv - (a + b)$$

bzw.

$$\rho_{v_2} = c(v^2 - v) + dv + (b - a)$$

sowie $g(S) \in C^\infty$.

Beweis. Wir schreiben $V_k(S, t)$ aus (4.3.12) als

$$V_k(S, t) = \begin{cases} v_{k_1}(S) \frac{(T-t)^k}{k!}, & \text{für } V_0(S, t) > 0 \\ v_{k_2}(S) \frac{(T-t)^k}{k!}, & \text{für } V_0(S, t) < 0 \end{cases}$$

mit

$$v_{k_1}(S) = \sum_{m=0}^{2k} \left(\sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_{v_1}^k \right) S^m g^{(m)}(S)$$

und

$$v_{k_2}(S) = \sum_{m=0}^{2k} \left(\sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_{v_2}^k \right) S^m g^{(m)}(S)$$

mit $k \in \mathbb{N}$. Wir zeigen zunächst, dass Gleichung (4.3.10) erfüllt ist. Es gilt

$$\begin{aligned} & V_{k+1}(S, t) = \\ &= \begin{cases} \int_t^T \left(d \cdot S \cdot \frac{\partial V_k(S, \tau)}{\partial S} + c \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 V_k(S, \tau)}{\partial S^2} - (a + b) V_k(S, \tau) \right) d\tau, & \text{für } V_0 > 0 \\ \int_t^T \left(d \cdot S \cdot \frac{\partial V_k(S, \tau)}{\partial S} + c \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 V_k(S, \tau)}{\partial S^2} + (b - a) V_k(S, \tau) \right) d\tau, & \text{für } V_0 < 0 \end{cases} \\ &= \frac{(T-t)^{k+1}}{(k+1)!} \begin{cases} c \cdot S^2 \cdot v_k''(S) + d \cdot S \cdot v_k'(S) - (a + b) \cdot v_k(S), & \text{für } V_0 > 0 \\ c \cdot S^2 \cdot v_k''(S) + d \cdot S \cdot v_k'(S) + (b - a) \cdot v_k(S), & \text{für } V_0 < 0 \end{cases} \\ &= \frac{(T-t)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot \begin{cases} v_{k_1}(S) & \text{für } V_0 > 0 \\ v_{k_2}(S), & \text{für } V_0 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Hierbei haben wir für den letzten Schritt das Lemma 4.2 verwendet. \square

Das heißt, wenn wir dies nun auf unseren Satz 4.3 anwenden, gilt für unsere $V_k(S, t)$ im Falle eines Forwards, dass

$$V_k(S, t) = \begin{cases} \left(\sum_{m=0}^{2k} \left(\sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_{v_1}^k \right) S^m g^{(m)}(S) \right) \frac{(T-t)^k}{k!}, & \text{für } S - K > 0 \\ \left(\sum_{m=0}^{2k} \left(\sum_{v=0}^m \frac{(-1)^{m-v}}{v!(m-v)!} \rho_{v_2}^k \right) S^m g^{(m)}(S) \right) \frac{(T-t)^k}{k!}, & \text{für } S - K < 0 \end{cases} \quad (4.3.13)$$

ist, wobei

$$\rho_{v_1} = \frac{\sigma^2}{2} (v^2 - v) + (r - q)v - (1 - R_C)\lambda_C - s_F - r$$

bzw.

$$\rho_{v_2} = \frac{\sigma^2}{2} (v^2 - v) + (r - q)v - (1 - R_B)\lambda_B - r$$

gilt. Hierbei ist $V_0 = S - K$. Da wir in der Herleitung die Sprünge aus der PDE mithilfe des Hedgings entfernt haben, erhält man den Preis des Derivates, indem man für $g(S)$ die Payoff-Funktion des klassischen Black-Scholes-Merton-Modells einsetzt. Im Falle des hergeleiteten Forwards wäre dies somit $S - K$. Für unsere Lösung der PDE gilt nun, dass die Auszahlungsfunktion entweder stückweise positiv (für $S > K$) oder stückweise negativ (für $S < K$) ist. Für diese Fälle haben wir allerdings bereits analytische Lösungen hergeleitet, sodass wir für den Preis eines Forwards im Modell von Burgard und Kjaer unter den Voraussetzungen an x und c , den Preis angeben können durch:

$$\tilde{V}(S, t) = \begin{cases} D_B \cdot (C_e - P_e), & S < K \\ D_C \cdot (C_e - P_e), & S > K \end{cases} \quad (4.3.14)$$

mit

$$D_B = \exp(-(1 - R_B)\lambda_B(T - t)) \quad (4.3.15)$$

und

$$D_C = \exp(-((1 - R_C)\lambda_C + s_F)(T - t)). \quad (4.3.16)$$

Die gleiche Herleitung kann für beliebige andere Derivate aus dem Modell von Black-Scholes-Merton durchgeführt werden, sodass man zu den Preisen im Modell von Burgard und Kjaer gelangt. Wir wollen nun das gleiche Beispiel wie im linearen Fall betrachten und wieder den maximalen absoluten Fehler zwischen der analytischen Lösung (4.3.14) und unserer Reihenentwicklung angeben.

Beispiel 4.2. Der Strike sei wieder $K = 9$ Euro, die Restlaufzeit $(T - t) = 0.2$, die Volatilität $\sigma = 0.2$, der risikolose Zins $r_f = 0.03$ sowie der Aktienkurs $S = 12$ Euro. Zudem nehmen wir $\lambda_B = 0.03$ und $\lambda_C = 0.08$ sowie $s_F = 0.04$ an.

Wir wählen das gleich RBF-Wavelet wie in Beispiel 4.1, sodass $g \in C^5$ ist. Die Payoff-Funktion eines Forwards ist hierbei $g(S) = S - K$.

Iteration und Fehler					
1.	2.	3.	4.	5.	6.
1,1	0,68	0,18	$2,9 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-2}$	$3,6 \cdot 10^{-3}$

Iteration und Fehler				
7.	8.	9.	10.	11.
$3,6 \cdot 10^{-4}$	$2,2 \cdot 10^{-6}$	$1,4 \cdot 10^{-7}$	$7,7 \cdot 10^{-9}$	$3,7 \cdot 10^{-10}$

Abbildung 12: In der ersten Zeile werden die einzelnen Iterationsschritte abgetragen und in der zweiten Zeile die absoluten Fehler der numerischen Berechnung im Vergleich zum analytischen Forwardpreis $\tilde{V}(S, t)$.

Im Vergleich zum linearen Fall konvergiert die Adomian-RBF-Wavelet-Methode im nichtlinearen Fall langsamer gegen die analytische Lösung (4.3.14). Der maximale Fehler wird hierbei für $|S - K| = 10^{-5}$ angenommen, welches der Punkt mit dem geringsten Abstand zur Null in unserer Berechnung ist. Dies ist insofern „erwartungstreu“, da wir in unserer Herleitung bereits festgestellt haben, dass der kritische Punkt der Betrachtung die Null ist. Wir erhalten ebenfalls eine etwas schlechtere Genauigkeit im Vergleich zum linearen Fall. Allerdings kann bei einem maximaler Fehler von $3,7 \cdot 10^{-10}$ die Adomian-RBF-Wavelet-Methode durchaus als angemessene semianalytische Lösung des Problems angesehen werden. Des Weiteren konnten wir damit zeigen, dass es für eine einfache Berechnung des Preises eines Forwards im Modell von Burgard und Kjaer ausreicht, die Formel aus (4.3.14) zu verwenden. Einen Preis für $S = K$ können wir allerdings mit dieser Methode nicht angeben. Bevor wir uns einigen weiteren Beispielen widmen, wollen wir uns zunächst noch die partiellen Ableitungen (Griechen) im Modell von Burgard und Kjaer ansehen. Wir verwenden dabei die Bezeichnungen des klassischen Black-Scholes-Merton-Modells (siehe hierzu Hausmann et al. [21]) :

	Call	Put
Delta:	$\Delta_C = \Phi(d_1)$	$\Delta_P = \Phi(d_1) - 1$
Gamma:	$\Gamma = \frac{\varphi(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}}$	
Vega:	$\Lambda = S\varphi(d_1)\sqrt{T-t}$	
Theta:	$\Theta_C = \alpha - r \cdot \beta \cdot \Phi(d_2)$	$\Theta_P = \alpha + r \cdot \beta \cdot \Phi(-d_2)$
Rho:	$\rho_C = (T-t) \cdot \beta \cdot \Phi(d_2)$	$\rho_P = -(T-t) \cdot \beta \cdot \Phi(-d_2)$

Abbildung 13: In der ersten Zeilen werden jeweils Call und Put abgetragen, sowie in der ersten Spalte die einzelnen Namen der partiellen Ableitungen im Black-Scholes-Merton Modell.

Hierbei ist $\alpha = -\frac{S\sigma\varphi(d_1)}{2\sqrt{T-t}}$ und $\beta = K \cdot \exp(-r(T-t))$, sowie d_1 bzw. d_2 wie oben.

Dann folgt aus eigenen Berechnungen für das Modell von Burgard und Kjaer:

	Call	Put
Delta:	$D_{B/C} \Delta_C$	$D_{B/C} \Delta_P$
Gamma:	$D_{B/C} \Gamma$	$D_{B/C} \Gamma$
Vega:	$D_{B/C} \Lambda$	$D_{B/C} \Lambda$
Theta:	$D_{B/C} \left(\frac{-\log(D_{B/C})}{(T-t)} \cdot C_e + \Theta_C \right)$	$D_{B/C} \left(\frac{-\log(D_{B/C})}{(T-t)} \cdot P_e + \Theta_P \right)$
Rho:	$D_{B/C} \rho_C$	$D_{B/C} \rho_P$

	Forward
Delta:	$D_{B/C}$
Gamma:	0
Vega:	0
Theta:	$D_{B/C} \left(\frac{\log(D_{B/C})}{(T-t)} \cdot (P_e - C_e) + \Theta_C - \Theta_P \right)$
Rho:	$D_{B/C} (\rho_C - \rho_P)$

Abbildung 14: In den jeweils ersten Zeilen werden Call, Put und Forward abgetragen, sowie in den jeweils ersten Spalten die einzelnen Namen der partiellen Ableitungen im Modell von Burgard und Kjaer.

Hierbei ist $D_{B/C}$ die Abkürzung für D_B , welches bei negativen Auszahlungsfunktionen zu verwenden ist (siehe Gleichung (4.3.15)), sowie D_C bei positiven Auszahlungsfunktionen (siehe Gleichung (4.3.16)). Des Weiteren sind C_e und P_e die klassischen Black-Scholes-Merton-Preise für europäische Calls bzw. Puts. Zudem sind $\Delta_C, \Delta_P, \Gamma, \Lambda, \Theta_C, \Theta_P, \rho_C, \rho_P$ wie in der Tabelle darüber angegeben. Wir wollen nun einige Beispiele betrachten.

Beispiel 4.3. Wir betrachten einen Forward mit Strike $K = 12$, Volatilität $\sigma = 0.5$, Recovery Rates $R_B = 0.4$ und $R_C = 0.5$, sowie die Spreads $\lambda_B = 0.02$ und $\lambda_C = 0.05$. Zudem wählen wir den Zins $r_f = 0.03$ und $s_F = 0$. Wir variieren in unseren Betrachtungen sowohl den Aktienkurs S als auch die Restlaufzeit $(T - t)$. In den nachfolgenden Graphen ist jeweils der Preis des Forwards nach (4.3.13) (Preis nach Burgard und Kjaer) in Rot, sowie der klassische Black-Scholes-Merton-Preis eines Forwards in Blau abgetragen. Wir erhalten dann folgende Forward Preise, wobei der Aktienkurs auf der horizontalen und der Forward Preis auf der vertikalen Achse abgetragen sind und die y -Achse durch den Strike $K = 12$ gelegt wurde:

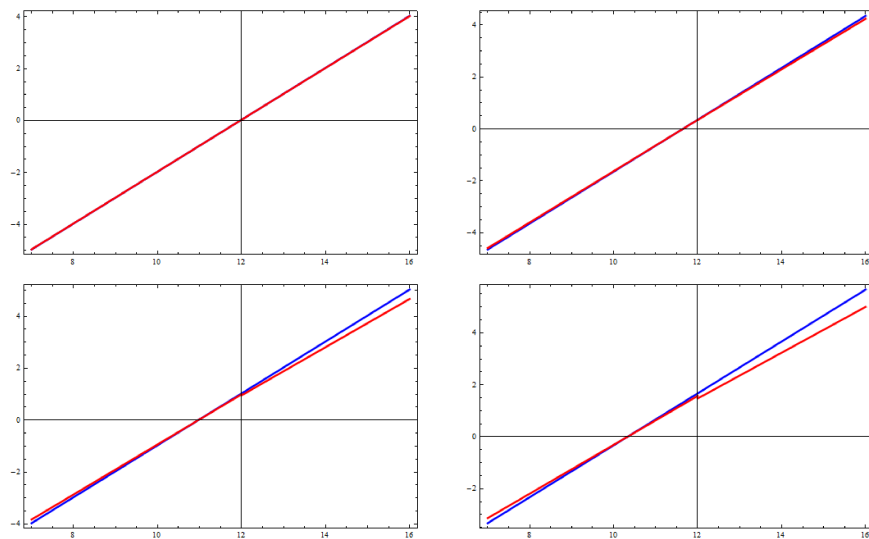


Abbildung 15: Forward Preise mit einer Restlaufzeit von: oben links: einem Monat, oben rechts: einem Jahr, unten links: drei Jahren, unten rechts: fünf Jahren.

Die Auswirkungen der Abzinsung des Preises sind beim Positivteil dieses Beispiels größer als beim Negativteil, da der erwartete Verlust bei Ausfall des Kontrahenten größer ist als der erwartete Verlust bei Ausfall des Emittenten. Dies wird schnell anhand folgender Tabelle klar:

Abzinsungen/Laufzeit	1 Monat	1 Jahr	3 Jahre	5 Jahre
D_B	0,999001	0,988072	0,96464	0,941765
D_C	0,99792	0,97531	0,927743	0,882497

Abbildung 16: In der ersten Zeile werden die einzelnen Laufzeiten abgetragen, sowie in der zweiten und dritten Zeile die dazugehörigen Abzinsungsfaktoren D_B bzw. D_C .

Beispiel 4.4. Wir belassen alle Parameter gleich und ändern lediglich $\lambda_B = 0.01$ und $\lambda_C = 0.1$ sowie $s_F = 0.04$ in Erwartung größerer Sprünge.

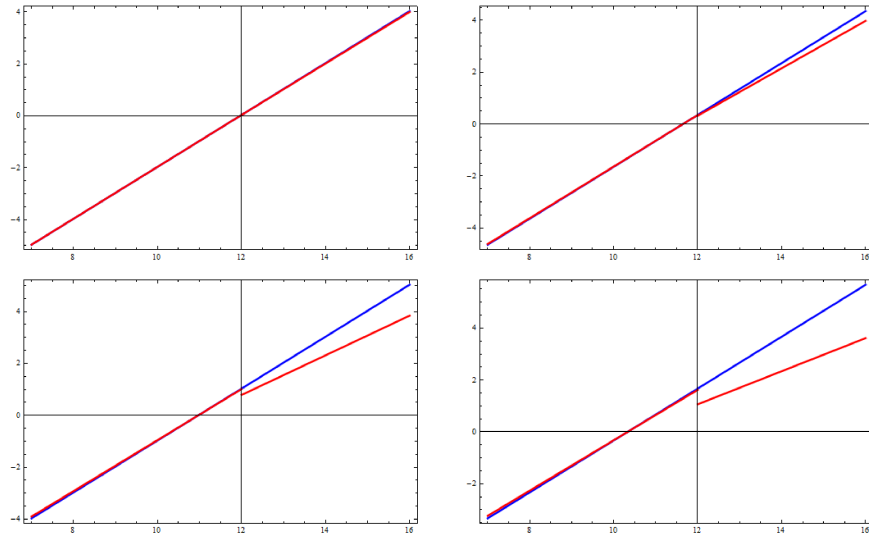


Abbildung 17: Forward Preise mit einer Restlaufzeit von: oben links: einem Monat, oben rechts: einem Jahr, unten links: drei Jahren, unten rechts: fünf Jahren.

Wie erwartet haben sich die Sprünge für alle Restlaufzeiten vergrößert, wobei man dies am Besten anhand der Graphen für die drei bzw. fünf Jahre lange Restlaufzeit sieht. Die Tabelle für die unterschiedlichen Abzinsungen sieht dann wie folgt aus:

Abzinsungen/Laufzeit	1 Monat	1 Jahr	3 Jahre	5 Jahre
D_B	0.9995	0.994018	0.982161	0.970446
D_C	0.992531	0.913931	0.763379	0.637628

Abbildung 18: In der ersten Zeile werden die einzelnen Laufzeiten abgetragen, sowie in der zweiten und dritten Zeile die dazugehörigen Abzinsungsfaktoren D_B bzw. D_C .

Bei diesem Beispiel kann man die durchaus gravierenden Unterschiede bei der Berechnung eines Forwards bzw. generell eines Derivates mit bilateralem Risiko gut erkennen. Es lässt sich ebenfalls erkennen, dass lediglich bei einer kurzen Laufzeit des Derivates ein annähernd risikoloser Preis gegeben ist. Das heißt, lediglich bei Derivaten mit sehr kurzer Laufzeit kann die Bestimmung des Preises über den klassischen Black-Scholes-Merton-Preis geschehen. In allen anderen Fällen, muss eine Berechnung des Preises durch ein Modell mit bilateralem Risiko erfolgen, wie beispielsweise das von Burgard und Kjaer.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Wir konnten in dieser Arbeit zeigen, dass ein grundsätzlicher Zusammenhang der verallgemeinerten multiquadric radialen Basisfunktion mit der verallgemeinerten inversen multiquadric radialen Basisfunktion über eine $(2n)$ -te Ableitung besteht:

$$\phi_n^{(2n)}(t) = \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} (a^2 + t^2)^{n-\frac{1}{2}} = \frac{\prod_{i=1}^n (2i-1)^2 \cdot a^{2n}}{(a^2 + t^2)^{n+\frac{1}{2}}}$$

wobei $a, t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ ist. Wir konnten des Weiteren zeigen, dass nur das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n^{(2n)}(t) dt \neq 0$ der $(2n)$ -ten Ableitungen der verallgemeinerten multiquadric radialen Basisfunktion wohldefiniert ist.

Diese Eigenschaft der multiquadric radialen Basisfunktion haben wir dann genutzt, um verallgemeinerte multiquadric Prewavelets (in Anlehnung an Buhmann [4]) in einer Dimension zu erzeugen. Diese Prewavelets benötigen zwar keine äquidistanten Knoten, allerdings dürfen die Knoten auch nicht beliebig verteilt sein. Generell haben wir gezeigt, dass die Prewavelets existieren, solange die Knoten „ungefähr“ den Abstand von $\frac{1}{2n}$ haben, und der shape Parameter a der verallgemeinerten multiquadric radialen Basisfunktion den Konstruktionsbedingungen genügt. Eine Weiterführung von radialen Basisfunktionen Prewavelets könnte demnach die Erweiterung auf andere radiale Basisfunktionen sein. Am interessantesten wäre hier eine Erweiterung auf die Wendland-Funktionen, welche einen kompakten Träger haben. Auch wenn die Wendland-Funktionen in dieser Arbeit nicht betrachtet wurden, stellen sie dennoch eine sehr interessante mögliche Erweiterung im Zusammenhang mit den radialen Basisfunktionen Prewavelets dar. Dies liegt daran, dass in der Anwendung generell Wavelets (orthogonalisierte Prewavelets) mit kompaktem Träger bevorzugt werden.

In Kapitel 3.3 haben wir eine andere Möglichkeit der Konstruktion von Wavelets aus radialen Basisfunktionen hergeleitet. Hierbei haben wir die Konstruktion über die multiresolution Analysis durchgeführt und dabei die Skalierungsgleichung genutzt. Diese Methode ist insofern anwendungsfreundlicher, da die Konstruktion direkt zu einem Wavelet führt, und nicht den Weg über ein Prewavelet nimmt. Unsere Konstruktionsmethode erlaubt es dabei, verallgemeinerte inverse multiquadric radiale Basisfunktionen als auch Gauß'sche radiale Basisfunktionen zu nutzen. Eine Erweiterung auf andere Funktionen $f \in L_2(\mathbb{R})$ ist sehr gut denkbar, da lediglich Positivität und Punktsymmetrie zum Ursprung benötigt wird. Ein einfaches Beispiel wäre

$$\psi(t) = \begin{cases} (1-t), & 0 \leq t \leq 1 \\ (1+t), & -1 \leq t < 0 \end{cases},$$

was einer zum Ursprung punktsymmetrischen Erweiterung der Wendland-Funktion $\psi_{1,0}(t) = (1-t)_+$ (vergleiche Wendland [36]) entspricht. Zudem wäre es ebenfalls sehr interessant, welchen Nutzen die radialen Basisfunktionen Wavelets in

den Gebieten der Anwendung, beispielsweise in der Signal- und Bildverarbeitung haben. Eine weitere Möglichkeit wäre, die Wavelets direkt zur Lösung von partiellen Differentialgleichungen zu nutzen, wie beispielsweise in Shen und Strang [34] zur Lösung der Wärmeleitungsgleichung (Heatlets) geschehen.

Im letzten Teil der Arbeit haben wir unsere Erkenntnisse aus den ersten beiden Teilen auf die Optionspreistheorie angewendet, ganz speziell auf das Modell von Burgard und Kjaer [8]. Hierbei haben wir zum einen die neuen Eigenschaften der verallgemeinerten multiquadric radialen Basisfunktion als auch die konstruierten Wavelets genutzt, um eine neue Adomian-RBF-Wavelet Methode zur Lösung nichtlinearer partieller Differentialgleichungen einzuführen. Mithilfe dieser Methode ist es möglich, eine semi-analytische Lösung der nichtlinearen PDE von Burgard und Kjaer zu gewinnen. Der Vorteil der Methode ist dabei zum einen, dass diese sehr schnell konvergiert und zum anderen in einer geschlossenen Form angegeben werden kann. Des Weiteren stellt die Methode die erste bekannte semi-analytische Lösung dieser PDE dar, wobei sogar gezeigt werden konnte, dass eine Rückführung auf die klassischen Black-Scholes-Merton Preise mit unterschiedlichen Diskontfaktoren möglich ist. Durch die Herleitung der Adomian-RBF-Wavelet Methode wird ebenfalls klar, warum wir in Satz 4.1 auf die Put-Call-Parität verzichtet haben, da diese (Put-Call-Parität) nur für die gleichen Diskontfaktoren weiterhin intakt bleiben würde. Gleichwohl kann man durch Aufzinsen mit den jeweiligen Diskontfaktoren die Optionen in die risikoneutrale Welt überführen, um dann eine Art synthetische Put-Call-Parität zu nutzen. Konkret bedeutet das beispielsweise für einen Forward, dessen Formel wir durch

$$\tilde{V}(S, t) = \begin{cases} D_B \cdot (C_e - P_e), & S < K \\ D_C \cdot (C_e - P_e), & S > K \end{cases},$$

angegeben haben, dass die europäischen Calls und Puts, welche in der Formel vorkommen, allgemein nicht durch Calls und Puts anderer Kontrahenten hinterlegt werden dürfen. Die einzigen Ausnahmen wären hier, wenn die Diskontfaktoren der anderen Kontrahenten gleich wären oder die Laufzeit der Option sehr kurz (wenige Tage) wäre, da in diesem Fall der Diskontfaktor einen geringen Einfluss hat. Eine Erweiterung auf andere finanzmathematische Modelle wäre sehr gut denkbar, da die Methode schnell konvergiert und anwendbar ist, solange zumindest für die nicht linearen Anteile der PDE die Lipschitz-Stetigkeit vorausgesetzt werden kann. Allerdings ist zu erwarten, dass dann die geschlossene Form der Lösung verloren geht.

Literatur

- [1] Milton Abramowitz; Irene A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, 1965.
- [2] George Adomian. Solving frontier problems of physics: The decomposition method. *Fundamental Theories of Physics vol. 60, Kluwer Academic, Dordrecht*, 1994.
- [3] Martin Bohner; Yao Zheng. On analytical solutions of the black-scholes equation. *Applied Mathematics Letters 22*, pp. 309-313, 2009.
- [4] Martin D. Buhmann. Multiquadric pre-wavelets on non-equally spaced knots in one dimension. *Mathematics of Computation 64*, pp. 1611-1625, 1995.
- [5] Martin D. Buhmann. *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*. Cambridge University Press, 2003.
- [6] Martin D. Buhmann; Charles A. Micchelli. Spline prewavelets for non-uniform knots. *Numerische Mathematik, Volume 61, Issue 1*, pp. 455-474, 1992.
- [7] Christoph Burgard; Mats Kjaer. Generalised cva with funding and collateral via semi-replication. *Working paper*, 2013.
- [8] Christoph Burgard; Mats Kjaer. Partial differential equation representations of derivatives with bilateral counterparty risk and funding costs. *The Journal of Credit Risk, Volume 7, Number 3*, pp. 75-93, Fall 2011.
- [9] Thomas J. Cashman; Neil A. Dodgson; Malcolm A. Sabin. Non-uniform b-spline subdivision using refine and smooth. *Mathematics of Surfaces XII, Volume 4647 of the series Lecture Notes in Computer Science pp 121-137*, 2007.
- [10] George M. Chaikin. An algorithm for high-speed curve generation. *Computer Graphics and Image Processing, Volume 3, Issue 4*, pp. 346-349, 1974.
- [11] Ole Christensen. *Four Short Courses on Harmonic Analysis, Chapter 2: B-Spline Generated Frames*. Birkhaeuser Boston, 2010.
- [12] Charles K. Chui; Jian-Zhong Wang. A cardinal spline approach to wavelets. *Proceedings of the American Mathematical Society. 113*, pp. 785-793, 1991.
- [13] Albert Cohen. Ondelettes, analyses multiresolutions et filtres miroirs en quadrature. *Annales de l'institut Henri Poincare Analyse non lineaire, Volume: 7, Issue: 5*, pp. 439-459, 1990.
- [14] Albert Cohen; Ingrid Daubechies. Non-separable bidimensional wavelet bases. *Revista Matematica Iberoamericana, Volume 9, No. 1*, pp. 51-137, 1993.

- [15] Wolfgang Dahmen; Charles A. Micchelli. Using the refinement equation for evaluating integrals of wavelets. *SIAM Journal on Numerical Analysis, Volume 30, No. 2, pp. 507-537*, 1993.
- [16] Carl de Boor. Odd-degree spline interpolation at a biinfinite knot sequence. *Approximation Theory Lecture Notes in Mathematics, Volume 556*, 1976.
- [17] Carl de Boor. *A Practical Guide to Splines*. Springer-Verlag New York, 1978.
- [18] Ibrahim L. El-Kalla. Error analysis of adomian series solution to a class of nonlinear differential equations. *Applied Mathematics E-Notes, Volume: 7, pp. 214-221*, 2007.
- [19] Luis M. G. Munoz et. al. *Pricing Derivatives in the New Framework: OIS Discounting, CVA, DVA & FVA*. Munich Personal RePEc Archive, 2015.
- [20] Roland W. Freund; Ronald H. W. Hoppe. *Stoer/Bulirsch: Numerische Mathematik 1*. Springer Verlag, 2007.
- [21] Wilfried Hausmann; Kathrin Diener; Joachim Kaesler. *Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection*. Vieweg+Teubner Verlag, 2002.
- [22] Daniel Lesnic. The decomposition method for linear, one-dimensional, time-dependent partial differential equations. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, pp. 1-29*, 2006.
- [23] Alfred K. Louis; Peter Maass; Andreas Rieder. *Wavelets Theorie und Anwendungen*. Vieweg+Teubner Verlag, 1998.
- [24] Stephane G. Mallat. Multiresolution approximations and wavelet orthonormal basis of $L^2(\mathbb{R})$. *Transactions of the American Mathematical Society, Volume 315, No. 1, pp. 69-87*, 1989.
- [25] Marcus Martin; Stefan Reitz; Carsten Wehn. *Kreditderivate und Kreditrisikomodelle: Eine mathematische Einfuehrung*. Springer Spektrum, 2014.
- [26] Yves Meyer. Ondelettes et operateurs. *Algebra i Analiz, Issue 2, pp. 253-264*, 1991.
- [27] Yves Meyer. *Wavelets and Operators*. Cambridge University Press, 1993.
- [28] Bernt Oksendal; Agnes Sulem-Bialobroda. *Applied Stochastic Control of Jump Diffusions*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007.
- [29] Vladimir Piterbarg. Funding beyond discounting: collateral agreements and derivatives pricing. *Risk Manager, pp. 97-102*, 2010.
- [30] George Polya; Godfrey H. Hardy; John E. Littlewood. *Inequalities*. Cambridge University Press, 1952.

- [31] Richard F. Riesenfeld. On chaikin's algorithm. *Computer Graphics and Image Processing; Volume 4, Issue 3*, pp. 304-310, 1975.
- [32] Larry Schumaker. *Spline Functions: Basic Theory, 3rd Edition*. Cambridge Mathematical Library, 2007.
- [33] Virginie Seng; Karim Abbaoui; Yves Cherruault. Adomian's polynomials for nonlinear operators. *Mathematical and Computer Modelling, Volume 24, Issue 1*, pp. 59-65, 1996.
- [34] Jianhong Shen; Gilbert Strang. On wavelet fundamental solutions to the heat equation - heatlets. *Journal of Differential Equations 161*, pp. 403-421, 2000.
- [35] Elias M. Stein; Rami Shakarchi. *Fourier Analysis: An Introduction*. Princeton University Press, 2003.
- [36] Holger Wendland. *Konstruktion und Untersuchung radialer Basisfunktionen mit kompaktem Traeger*. Goettingen State and University Library, 1996.

Erklärung

Ich erkläre: Ich habe die vorgelegte Dissertation selbstständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt, die ich in der Dissertation angegeben habe.

Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht.

Ich stimme einer evtl. Überprüfung meiner Dissertation durch eine Antiplagiat-Software zu. Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der „Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ niedergelegt sind, eingehalten.

Neu-Anspach, Mai 2017

Unterschrift