

Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift

Bericht der Oberhessischen Gesellschaft
für Natur- und Heilkunde zu Gießen

Naturwissenschaftliche Abteilung

Natur  OHG 1833

Band 70

Gießen 2022

ISSN 0340-4498

Redaktion und Schriftleitung:

Dr. Michael Serafin

Riegelpfad 64

35392 Gießen

Vertrieb:

Geschäftsstelle der Oberhessischen Gesellschaft

für Natur- und Heilkunde

- Naturwissenschaftliche Abteilung-

c/o Universitätsbibliothek

Frau Hochstein

Otto-Behaghel-Straße 8

35394 Gießen

Druck:

Druckerei Bender GmbH

Hauptstraße 27

35435 Wettenberg/Gießen

Dieser Band erscheint auch in gedruckter Form in der

"Oberhessischen Naturwissenschaftlichen Zeitschrift", Volume 70, Gießen 2022

Inhaltsverzeichnis

Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 70, 2022

Editorial 4

KAFITZ, W.:

Unendlich

Versuch das Unbegreifliche zu begreifen

Eine mathematisch-historische Reise 6

KAFITZ, W.:

Faszination Formeln

Berühmte Beziehungen aus Mathematik und Naturwissenschaften

Bedeutung und Hintergründe 113

EDITORIAL

Dieser nun vorliegende Band 70 enthält zwei Beiträge, deren Zielsetzungen gar nicht unterschiedlicher sein könnten.

„Unendlich“ widmet sich nur einem Thema, dem Unendlichkeitsbegriff in der Mathematik. Das Ringen um diesen Begriff und seine Bedeutung dauerte fast 3.000 Jahre. Es ist ein Stück Mathematikgeschichte, aber es tangiert auch philosophische und religiöse Aspekte. In der griechischen Antike war unbestritten, dass es Mengen gibt, meist Zahlmengen, denen man immer noch ein weiteres Element hinzufügen kann. Beispiele sind natürliche oder gerade Zahlen, Primzahlen usw. Solche Mengen nannte man potentiell unendlich. Man konnte sie mathematisch behandeln, ohne den Begriff „Unendlich“ benutzen zu müssen. Problematisch wird es beim „aktual Unendlichen“. Davor scheuten die Griechen und haben diese Scheu über Jahrtausende im abendländischen Denken konserviert. Sie mutierte insbesondere zu einer religiösen Deutung im Christentum, also den Gott zugeschriebenen Eigenschaften. Dabei war eine Abgrenzung zwischen dem weltlichen und göttlichen zunächst schwammig. Wollte man das „Aktual Unendliche“ untersuchen, war es wichtig, die Grenzen zu den nicht mathematischen Bereichen klarer zu ziehen. Auch wenn ein wichtiger Protagonist des Unendlichen, Georg Cantor, vielleicht die schärfste Abgrenzung formuliert hat, so hat er trotzdem am Erkenntnisprozess extrem gelitten, ist massiv angefeindet worden und starb schließlich in einem Sanatorium. Georg Cantor schreibt in den „Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten“:

„Es wurde das A.-U. [Aktual Unendliche] nach *drei* Beziehungen unterschieden: *erstens* sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen, außerweltlichen Sein, in Deo realisiert ist, wo ich es *Absolut Unendliches* oder kurzweg *Absolutes* nenne; *zweitens* sofern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten ist; *drittens* sofern es als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken *in abstracto* aufgefaßt werden kann. In den *beiden* letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und *insofern dem Endlichen verwandtes* A.-U. sich darstellt, nenne ich es *Transfinitum* und stelle es dem *Absoluten* strengstens entgegen.“

In der physikalischen Welt kann es kein „Unendlich“ geben, unendliche Werte sind ein Zeichen, dass die Theorie an dieser Stelle versagt und durch eine neue ersetzt werden muss. Doch dem menschlichen Denken sind keine Grenzen gesetzt. Es kann das physikalisch Udenkbare in mathematischen Kategorien behandeln und dabei neue Erkenntnisse erzielen. Dabei hat andererseits die Wissenschaftsgeschichte profitiert, in dem eine Befruchtung stattgefunden hat. Markantes Beispiel ist die Differential- und Integralrechnung, deren früherer Name „Infinitesimalrechnung“ an den Bezug zu Unendlich erinnert – sowohl bei großen als auch bei kleinen Werten.

Der zweite Beitrag ist eher mit einem Kaleidoskop an Themen zu vergleichen. Jeder mathematisch-naturwissenschaftlich Interessierte kennt bekannte oder auch berühmte Beispiele aus der Mathematik, Physik und sogar Biologie und Chemie. Andere sind weniger bekannt oder man bringt sie sich jetzt erst wieder in Erinnerung. Manche wird man bedauernd oder sogar ärgerlich im vorliegenden Aufsatz vermissen. Überall spielt die Mathematik eine gewisse Rolle, auch wenn sie nicht immer ganz im Vordergrund steht.

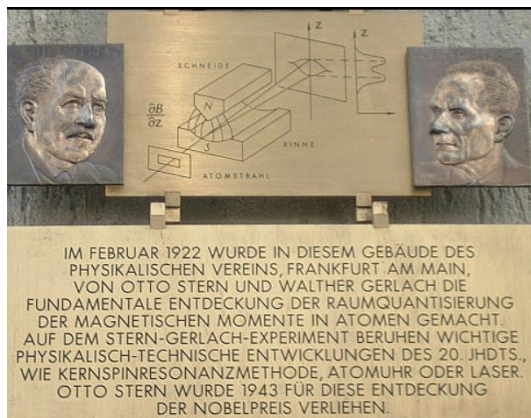


Abb.: Gedenktafel in der Robert-Mayer-Straße 2, Frankfurt am Main zu Ehren des Stern-Gerlach Experiments. (Quelle: wikipedia)

Ein Kapitel hat eine besondere Stellung in der Themensammlung, denn es ist in diesem Jahr ein Jubiläum zu feiern. Gemeint ist das Stern-Gerlach-Experiment, das in der Nacht von 7. auf den 8. Februar 1922 in den Räumen des Physikalischen Vereins in Frankfurt-Bockenheim erfolgreich stattfand. Es hat eine wichtige Voraussage der damals noch jungen Quantentheorie bestätigt und die Quantennatur von Atomen und Molekülen verdeutlicht. Es gibt eine „Raumquantelung“ in einem inhomogenen Magnetfeld und diese Erkenntnis ermöglicht heute die Anwendung z.B. in der

Magnetresonanztomographie (MRT). Otto Stern musste emigrieren, aber ihm hat es den Nobelpreis für Physik eingebracht. Walther Gerlach hat sich in Deutschland integriert und wurde übergangen. Er war verantwortlich für das deutsche Uran-Projekt und war auch auf Farm Hill interniert, wo die Alliierten versuchten, durch eine Abhöraktion zu erfahren, wie weit die Deutschen beim Bau der Atombombe gekommen waren. Auf jeden Fall war wissenschaftlich gesehen, das Stern-Gerlach-Experiment eine Sternstunde experimenteller Physik. Am 8. Februar 2022 wurde in einer Feierstunde in der Paulskirche in Frankfurt, die online übertragen wurde, dem bahnbrechenden Experiment und den beteiligten Persönlichkeiten gedacht.

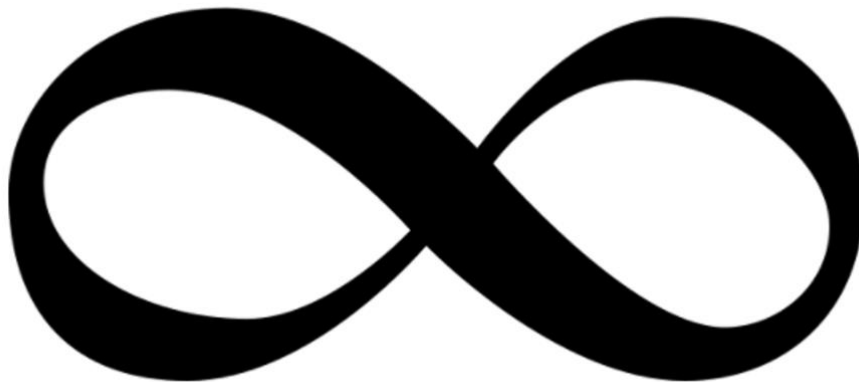
Dieses Kapitel ist zwar besonders durch das Jubiläum, aber ansonsten nur typisch für die einzelnen Beiträge in diesem Aufsatz. Wichtige, bedeutsame, bemerkenswerte Beziehungen, Formeln, Gleichungen, Erkenntnisse oder Entdeckungen sollen, kurz skizziert, vielen Lesern in Erinnerung gebracht werden oder auch einigen Interessierten neu vermittelt werden. Es sind nur Beispiele, noch nicht einmal nur repräsentative Beispiele, wie innerhalb der Mathematik und durch Anwendung von Mathematik in den Naturwissenschaften herausragende Erkenntnisse über unsere Welt gewonnen wurden.

UNENDLICH

Versuch das Unbegreifliche zu begreifen

Eine mathematisch-historische Reise

WILLI KAFITZ*)



Abstract:

The term "infinite" describes a fact that can exist alone as an idea. This applies to mathematics as well as theology or philosophy, where God is equated with the infinite. There are no infinite quantities in nature however. The history of mathematics knows both "infinitely large" and "infinitely small" (infinitesimal). The Greek mathematicians already knew the potential and the actual infinite, but limited themselves to potentially infinite problems. Actual infinity of a set with infinitely many elements was avoided. Only a genius like Archimedes recognized the epistemological problems and knew how to deal with them. He developed techniques which Newton and Leibniz took up again in the integral calculus, 1800 years later. In the Middle Ages, many written documents and knowledge from the heyday of Greek culture was lost. With Leibniz and Newton, "infinite" gradually became an integral part of mathematics, especially in integral and differential calculus. Without it, the epochal insights of the likes of Isaac Newton would not have come about. Well-known mathematicians further developed the handling of infinity. Cantor finally ventured into actual infinite quantities and came to the conclusion that that even in the „infinite“ there are different gradations. Not least on the basis of his results, the systematics, axiomatics and logic of set theory emerged, which is the foundation of mathematics today.

Keywords:

Potentially and actually infinite, Euclid, Archimedes, Newton, Leibniz, Cantor

Zusammenfassung:

Der Begriff „unendlich“ beschreibt einen Tatbestand, der alleine als Idee existieren kann. Dies gilt für die Mathematik, aber auch für die Theologie oder Philosophie, wo Gott mit dem Unendlichen gleichgesetzt wird. In der Natur gibt es keine unendlichen Mengen. Die Mathematikgeschichte kennt sowohl „unendlich groß“ als auch „unendlich klein“ (infinitesimal). Schon die griechischen Mathematiker kannten das potentiell und das aktual Unendliche. Aber man beschränkte sich auf potentiell unendliche Probleme. Aktuelle Unendlichkeit einer Menge mit unendlich vielen Elementen wurde vermieden. Nur ein Genie wie Archimedes hat die erkenntnistheoretischen Probleme erkannt und wusste damit umzugehen. Er entwickelte Techniken, die erst in der Integralrechnung 1800 Jahre später von Newton und Leibniz wieder aufgegriffen wurden. Im Mittelalter gingen sehr viele schriftliche Dokumente und Erkenntnisse aus der Blütezeit der griechischen Kultur verloren. Mit Leibniz und Newton wurde nach und nach „unendlich“ ein fester Bestandteil der Mathematik, vor allem zunächst bei der Integral- und Differentialrechnung. Ohne diese wären die epochalen Erkenntnisse eines Isaak Newton nicht entstanden. Namhafte Mathematiker entwickelten den Umgang mit Unendlichkeiten weiter. Cantor wagte sich schließlich auch an aktual unendliche Mengen und erkannte, dass es auch bei „Unendlich“ verschiedene Abstufungen gibt. Nicht zuletzt auf Basis seiner Ergebnisse entstand Systematik, Axiomatik und Logik der Mengenlehre, die heute das Fundament der Mathematik darstellt.

Schlüsselwörter:

Potentiell und aktual unendlich, Euklid, Archimedes, Newton, Leibniz, Cantor

Zitate

"Die Theorie des Unendlichen hat ihre Schwierigkeiten; mag man die Existenz eines Unendlichen annehmen oder nicht, sofort drohen unannehmbare Konsequenzen." Aristoteles¹

"Unsterblichkeit ist etwas Biologisches oder vielleicht auch Religiöses. Unendlichkeit spielt mit der Welt der Ideen und ist völlig unabhängig davon, ob wir sterblich oder unsterblich sind." Albrecht Beutelspacher²

"Das Unendliche hat wie keine andere Frage von jeher so tief das Gemüt der Menschen bewegt; das Unendliche hat wie kaum eine andere Idee auf den Verstand so anregend und fruchtbar gewirkt; das Unendliche ist aber auch wie kein anderer Begriff so der Aufklärung bedürftig." David Hilbert³

„Mit der Einführung der veränderlichen Größen und der Ausdehnung ihrer Veränderlichkeit bis ins unendlich Kleine und unendlich Große hat die sonst so sittenstrenge Mathematik den Sündenfall begangen.“ Friedrich Engels⁴

"Es dürfte sich schwerlich jemand finden, der unsinnig genug wäre zu behaupten, er besitze die positive Idee einer aktual unendlichen Zahl." John Locke⁵

„Gewiß sind die meisten paradoxen Behauptungen, denen wir auf dem Gebiet der Mathematik begegnen, ... Sätze, die den Begriff des Unendlichen entweder unmittelbar enthalten oder doch bei ihrer versuchten Beweisführung in irgendeiner Weise sich auf ihn stützen.“ Bernhard Bolzano⁶

„Die Natur hat dem Menschen zwei Unendlichkeiten vorgelegt, das unermesslich Große und das Nichts, sie hat sie vorgelegt, nicht, um sie zu begreifen, sondern um sie zu bewundern.“ Blaise Pascal⁷

„Zwei Dinge sind unendlich: Das Universum und die menschliche Dummheit. Aber beim Universum bin ich mir nicht ganz sicher.“ Albert Einstein⁸

Es kommen unendlich viele Mathematiker in eine Kneipe.

Der Erste bestellt ein Bier, der Zweite ein halbes Bier, der Dritte ein viertel Bier, usw.

Ihr nervt, sagt der Wirt und stellt die gewünschten zwei Bier auf den Tresen. Unbekannt

¹ Aristoteles Werke, Physik, 203b

² Pasta all'infinito. Meine italienische Reise in die Mathematik, 1999

³ Über das Unendliche, 4. Juni 1925 in Münster/W. zum Gedenken an Karl Weierstraß. In: Mathematische Annalen, 95. Band, Verlag von Julius Springer, Berlin 1926, S. 163

⁴ Anti-Dühring, zitiert nach Charles Seife, Zwilling der Unendlichkeit-Eine Biografie der Zahl Null, Goldmann, München, 2002, S. 119

⁵ Zitiert nach Harro Heuser; Unendlichkeiten, Teubner, Wiesbaden 2008, S.11

⁶ Paradoxien des Unendlichen", posthum 1851 erschienen, Einleitung

⁷ Pensées, Aphorismus 72, „Über die beiden Unendlichkeiten“, Gedanken über die Religion und einige andere Gegenstände, die nach seinem Tode unter seinen Aufzeichnungen gefunden wurde (freie Übersetzung).

⁸ Wird Einstein oft zugeschrieben, aber es gibt dazu keinen Beleg.

Inhalt

Einleitung und Fokus	9
Das Zeichen für Unendlichkeit	11
Antikes Wissen in der Überlieferung	13
To apeiron - Unendlich in der griechischen Antike	17
Unendlich in der Scholastik, Mathematik im Orient	32
Infinitesimalrechnung bei Newton und Leibniz	41
Rechnen mit dem Unendlichen	46
Cantor	65
Zermelo-Fraenkel Mengenlehre und darüber hinaus	89
Ein etwas genauerer Blick auf Kardinalitäten	94
Unendlich in physikalischen Theorien	97
Mathematisch-philosophische Schulen	102
Fazit	106
Literaturverzeichnis	107
Abbildungsnachweise	108
Danksagung	111

Einleitung und Fokus

Das Thema „unendlich“ wird in einer Reihe von sehr guten Publikationen behandelt, von denen einige im Literaturverzeichnis aufgeführt sind oder als Originalquellen im Text genannt werden. Hier soll der Schwerpunkt auf der Mathematikgeschichte mit Bezug zum Unendlichen liegen. Doch es liegt in der Natur der Sache, dass manches Mal die Philosophie oder gar die Theologie Querbeziehungen zwischen Mathematik und Geisteswissenschaften schafft – auch wenn diese eher im Hintergrund bleiben sollen. Der vorliegende Beitrag kann auf keinen Fall wissenschaftliches Neuland für sich beanspruchen und er darf noch nicht einmal eine umfassende Übersicht für sich reklamieren. Es können nur Schlaglichter auf das Thema sein, die in Breite und Tiefe nur eine sehr beschränkte und verkürzte Übersicht liefern können. Es wurde zwar versucht, eine möglichst umfangreiche Liste der wichtigsten Wissenschaftler – Mathematiker, Logiker, Physiker und Philosophen – die sich mit dem Thema intensiv beschäftigten, anzusprechen. Aber oft sind es nur wenige Zeilen, die für eine Charakterisierung der Protagonisten ausreichen müssen. Es bleibt der Wunsch, dass doch auch in dieser oberflächlichen Form Denkanstöße gegeben werden können und interessierte Leser sich näher mit dem „Unendlichen“ beschäftigen.

Der Begriff „unendlich“ beschreibt in den exakten Wissenschaften einen Gegenstand, der alleine als Idee in der Mathematik existieren kann. In den Naturwissenschaften zeigt ein Ergebnis „unendlich“ an, dass hier die

zugrundeliegende Theorie versagt und eine umfassendere Theorie zur Beschreibung an dieser Stelle gefunden werden muss. Als reine Idee ist Unendlichkeit in der Mathematik ein wichtiges Mittel geworden, um mathematische Erkenntnisse zu gewinnen, die sich über endliche Mengen nicht gewinnen lassen. Dabei muss sowohl „unendlich groß“ als auch „unendlich klein“ (infinitesimal) berücksichtigt werden.

Gerade wegen der „esoterischen“ Bezüge ist eine klare Begriffsbildung nötig, um den Begriff „unendlich“ im mathematischen Sinne eindeutig zu verorten. Dieser Beitrag trägt zwar den Untertitel „Eine mathematisch-historische Reise“. Deshalb werden im Laufe der (Mathematik)Geschichte immer wieder philosophische oder gar theologische Aspekte auftauchen. In der Mathematik zählen jedoch nur exakte Definitionen und Folgerungen daraus.

Man denke sich dazu eine Menge M an *wohlunterschiedenen Objekten der Anschauung oder des Denkens* (Cantor). Sie werden die Elemente der Menge genannt. Diese Menge soll wenigstens ein Element enthalten, also nicht leer sein. Enthält die Menge nur die Zahl Null, so ist sie nicht leer, denn sie enthält ein Element, nämlich die Null. In einem Stellenwertsystem war die Null (z.B. als Positionsangabe im Dezimalsystem) eine extrem wichtige Entdeckung der Inder. Aber sie eignet sich nur zum Aufzählen, nicht zum Abzählen; sie ist keine natürliche Zahl.⁹ Der Unterschied zwischen Ordinalzahlen und Kardinalzahlen wird später noch genauer diskutiert werden. Gibt es nun eine natürliche Zahl n , so dass man die Elemente von M umkehrbar eindeutig (eindeutig, bijektiv) den Zahlen $1, 2, \dots, n-1, n$ zuordnen kann, sie also mit den ersten n natürlichen Zahlen abzählen kann, so soll die Menge M „endlich“ genannt werden. Im anderen Fall soll sie „unendlich“ heißen. Man sieht, dass die leere Menge nicht unter diese Definition der Endlichkeit fällt, denn es existiert kein $n \in \mathbb{N}$, das man ihren (nicht existenten) Elementen zuordnen kann. Später wird deutlich, dass es deshalb sinnvoll ist, per Definition der leeren Menge die Ordinalzahl Null zuzuordnen (s. John von Neumann, S. 86). Die Existenz einer unendlichen Menge ist gewährleistet, denn mindestens die Menge der natürlichen Zahlen ist unendlich, denn zu jeder vorgegebenen Schranke n kann mit $n+1$ ein weiteres Element gefunden werden, das sich den Zahlen $1, 2, \dots, n-1, n$ nicht bijektiv zuordnen lässt. Unendliche Mengen sind also als „Objekte des Denkens“ real. Als „Objekte der Anschauung“, also in der Physik oder Kosmologie, wird noch kurz am Ende des Beitrags darauf einzugehen sein.

⁹ Waclaw Sierpiński, der große polnische Mathematiker (...) meinte auf einer Reise plötzlich, ein Gepäckstück verloren zu haben. „Nein, Liebling“, sagte seine Frau, „alle sechs Koffer sind hier.“ – „Das kann nicht sein“, entgegnete er, „ich habe sie mehrfach gezählt: null, eins, zwei, drei, vier, fünf.“

John Conway, Richard Guy, *The Book of Numbers* zitiert nach Charles Seife, *Zwilling der Unendlichkeit*, Goldmann, München, Feb. 2002, S. 69

Erstmals in der griechischen Mathematik wurde die Bedeutung von unendlich thematisiert. Aber man beschränkte sich auf potentiell unendliche Probleme. Aktuelle Unendlichkeit einer Menge mit unendlich vielen Elementen war noch nicht beherrschbar und nur ein Genie wie Archimedes hat die erkenntnistheoretischen Probleme erkannt und wusste damit umzugehen. Er entwickelte Techniken, die erst in der Integralrechnung 1800 Jahre später von Newton und Leibniz wieder aufgegriffen bzw. wiederentdeckt wurden. Vor allem die äußerst plakativen Paradoxa des Zenon von Elea zeigten die Widersprüche beim Umgang mit dem Unendlichen, insbesondere der unbegrenzten Teilbarkeit, überdeutlich auf. Sie führten zum *horror infiniti* und hemmten die griechische Mathematik, Bewegungsphänomene systematisch mathematisch zu behandeln. Das scheint die lückenhafte Quellenlage trotzdem zu belegen. Bis zum Mittelalter gingen nämlich sehr viele schriftliche Dokumente und Erkenntnisse aus der Blütezeit der griechischen Kultur verloren. Man darf sich durch die scheinbare Fülle an Quellenmaterial nicht täuschen lassen: Nur vergleichbar Weniges hat direkt oder über den Umweg durch Übersetzungen, z.B. ins Arabische oder Lateinische, überlebt.

Als Denker, der sich am Ende des Mittelalters mit der mathematischen Seite von unendlich beschäftigte, ist vor allem Nikolaus von Kues zu nennen.

Mit Leibniz und Newton wurde nach und nach „unendlich“ ein fester Bestandteil der Mathematik, vor allem zunächst bei der Integral- und Differentialrechnung. Ohne diese Methoden wären die epochalen Erkenntnisse eines Isaac Newton nicht entstanden. Er hatte dabei den physikalischen Standpunkt inne, während Leibniz aus mathematischer Sicht wertvolle Beiträge lieferte. Die Notation von Leibniz hat sich weitgehend durchgesetzt. Eine Reihe von namhaften Mathematikern bemühte sich erfolgreich um die Weiterentwicklung der von Newton und Leibniz begründeten jungen mathematischen Disziplin der Infinitesimalrechnung. Darüber hinaus wurden aber auch weitere Aspekte des Unendlichen untersucht und fanden in unterschiedlichsten Bereichen Eingang in die Mathematik. Einer der Höhepunkte lag im Mengenbegriff. In der Systematisierung und, soweit möglich, Axiomatisierung der modernen Mathematik spielt insbesondere die unendliche Menge eine entscheidende Rolle. Ein Höhepunkt sind die Forschungen von Georg Cantor, die dazu die Basis lieferten.

Auch in physikalischen Theorien treten Unendlichkeiten auf. Sie deuten darauf hin, dass eine Theorie sich auf bestimmte Geltungsbereiche konzentriert. In Verbindung mit Fragen zum Urknall und zum Universum als Ganzes sind aber auch weltanschauliche Probleme zu bewerten.

Das Zeichen für Unendlichkeit

Das Zeichen für Unendlichkeit, die „liegende Acht“, führte der englische Mathematiker John Wallis (1606-1703) ein, der wichtige Beiträge zu einigen

Bereichen der Mathematik lieferte.¹⁰ Die Kurve nennt man Lemniskate und wurde erstmals 1694 von Jakob Bernoulli (1654-1705) beschrieben. Kurven vom Typ Lemniskaten entstehen im kartesischen Koordinatensystem gemäß der Gleichung (für geeignetes a):

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

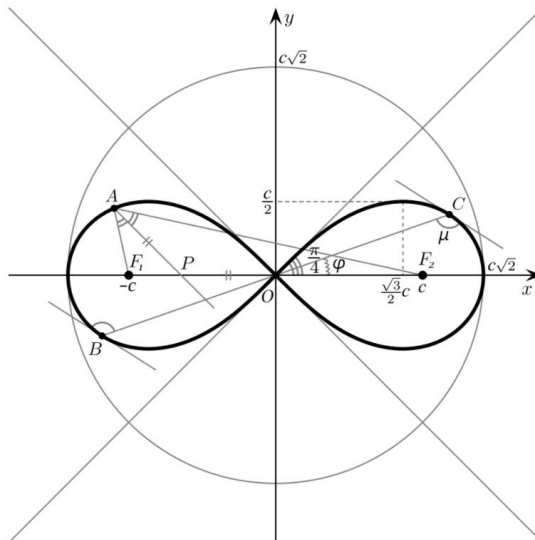


Abb. 1: Das Zeichen für Unendlichkeit als Lemniskate



Abb. 2: Tarot-Karten mit dem Zeichen für Unendlichkeit

Das Unendlichkeitszeichen^{11,12} wird für allegorische Darstellungen auch außerhalb der Mathematik verwendet.

Wallis hat eine entscheidende Neuerung bei den Beweisverfahren benutzt. Während noch Newton trotz Kenntnis und Anwendung von infinitesimalen Methoden alle Beweise geometrisch führte, so benutzte nun Wallis sehr konsequent die algebraische Methode. Newton wurde stark beeinflusst von Wallis Hauptwerk *Arithmetica Infinitorum* (1656). Bereits 1655 hat Wallis in „*De sectionibus conicis*“ Kegelschnitte als ebene Kurven behandelt und rein algebraisch argumentiert. Das war im gewissen Sinne eine Abkehr von der griechischen Tradition. Er verwendete den Ausdruck „Indivisible“, der die Fluxionsrechnung von Newton beeinflusste. Das Zeichen für unendlich verwendete Wallis eher für unendlich kleine Werte, so $1/\infty$. Er konnte dadurch die Methoden von Bonaventura Cavalieri weiter entwickeln, einem Schüler von Galileo Galilei. Das Zeichen ∞ konkurrierte eine Zeitlang mit M, dem römischen Zeichen für 1000, also einer großen Zahl. Spätestens zu Beginn des 18.

¹⁰ Kramp, Klaus (Übersetzung und Redaktion); Das Buch der Unendlichkeit, Librero Kerkdriel (NL), 2012, S.144

¹¹ Quelle der Abb. 1:

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lemniscate_of_Bernoulli_props.svg

¹² Quelle der Abb. 2: en.wikipedia.org

Jahrhunderts wurde das Zeichen auch zum Ausdruck einer formalistischen Umgangsweise mit dem Unendlichen, insbesondere auch im Infinitesimalen. Grenzprozesse, Konvergenz, Stetigkeit verlangten einen korrekten, widerspruchsfreien Umgang mit dem Unendlichen und eine adäquate Terminologie.

Heute hat sich das Symbol in vielen Bereichen etabliert. Das Beispiel kann eine Folge a_i sein, die bei immer weiterwachsendem i gegen einen Grenzwert a konvergiert:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = a$$

Im Falle, dass die Folge a_i jede reelle Zahl irgendwann überschreitet und dann darüber bleibt (bzw. jede reelle Zahl unterschreitet und dann darunterbleibt) schreibt man

$$\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = \infty \text{ bzw. } \lim_{i \rightarrow \infty} a_i = -\infty$$

Eine analoge Schreibweise gilt für unendliche Summen oder unbeschränkte Integrale.

Erst Cantor hat auch die Schreibweisen symbolisch abgegrenzt.¹³

Antikes Wissen in der Überlieferung

Wenn man noch vor 150 Jahren die überlieferten antiken Texte insbesondere in der Mathematik sichtete, konnte man den Eindruck haben, dass das antike Wissen zwar punktuell weit fortgeschritten, aber überschaubar war. Antikes Wissen soll dabei Mesopotamien, Ägypten und vor allem Griechisch-sprachige Denker im ganzen Mittelmeerraum und darüber hinaus betreffen, an deren Gedankengut arabische, römische und viel später abendländische Gelehrte anknüpften. Deutlich wurde: Die Anfänge der griechischen Mathematik wurden allerdings vor allem durch Ägypter und Sumerer und später Perser gelegt. Mathematik war dort relativ weit entwickelt, aber rein anwendungsorientiert. Es ging um Lohn-, Mengen- und Flächenberechnung, vor allem durch die jährlichen Nilüberschwemmungen. Eine Beweisführung ist in den gefundenen Quellen nicht zu erkennen. Ägyptische Papyri sind sehr empfindlich und sind oft nicht erhalten geblieben. In Keilschrift mathematischen Inhalts sind 400 Tontafeln überliefert. Wichtige Quelle zur Mathematik der alten Ägypter ist der Papyrus Rhind.¹⁴ Immerhin schien man grundsätzliche Fragen durchaus systematisch anzugehen, denn man fand z.B. eine babylonische Keilschrift mit einer

¹³ Siehe Spektrum der Wissenschaft Spezial, Das Unendliche, S. 41

¹⁴ https://de.wikipedia.org/wiki/Papyrus_Rhind, s.a.

https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik_im_Alten_Aegypten

sexagesimalen Abschätzung zu $\sqrt{2}$.¹⁵ Für π nahmen sie allerdings meist nur 3,

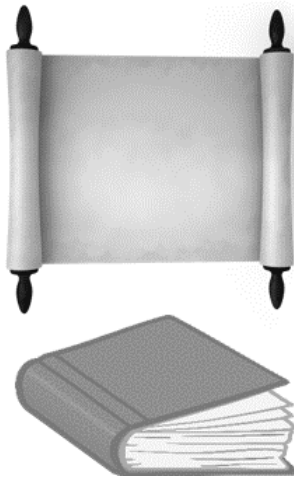


Abb. 3: Von der
Schriftenrolle aus Papyrus
zum Kodex aus Pergament:
Medienwechsel in der Antike

höchstens $3\frac{1}{8}$ an. Die Ägypter zogen vom Durchmesser d eines Kreises $1/9 \cdot d$ ab, quadrierten und hatten damit etwa die Fläche (d.h. $\pi \approx 3,16 \dots$). Der Satz des Pythagoras war bekannt, das belegt zweifelsfrei ein 1936 in Susa gefundener Keilschrift-Text.¹⁶ In Ägypten wurde er in Form des einfachsten pythagoreischen Tripels 3-4-5 angewendet, aber eine schriftliche Quelle existiert nicht.¹⁷ Herodot hat sich über die ägyptische Mathematik durchaus anerkennend geäußert und Platon hatte einen mehrmonatigen Aufenthalt in Heliopolis, am südlichen Rand des Nildeltas.¹⁸ Doch es stellt sich langsam heraus, dass nicht nur ungeheuer viel Wissen verloren ging, sondern auch die Methode der

systematischen Archivierung und Bewahrung der intellektuellen Leistungen erst Jahrhunderte später wieder etabliert werden konnte. Dazu vollzog sich im hellenistischen Zeitalter bis zur Zeitenwende ein grundlegender Medienwechsel weg von der zweidimensionalen Schriftenrolle hin zum Kodex, dem beschriebenen Pergament in der heutigen Buchform.¹⁹ Man kann ihn als dreidimensional bezeichnen, weil wesentlich leichter zurück- oder vorgeblättert werden konnte. Außerdem ist Pergament wesentlich haltbarer als Papyrus, aus dem die Schriftrollen bestanden. Dieser über mehrere Jahrhunderte andauernde Medienwechsel ist in seiner Tragweite nur mit der Erfindung des Buchdrucks durch Johannes Gutenberg vergleichbar. Oft waren Originale verfallen, bevor sie durch Kopieren inhaltlich erhalten werden konnten. Nur im hellenistischen Mesopotamien verwendete man in einer Symbiose zwischen griechischer und persischer Kultur Tontafeln in Keilschrift. Deshalb ist davon noch etwas mehr erhalten geblieben, aber längst noch nicht alles übersetzt worden. Es fehlen trotzdem manchmal ganze Dekaden und ihre darin gewonnenen Erkenntnisse sind wie ausgelöscht. Russo behauptet, zwischen 301 und 221 v.Chr. gebe es z.B. keinen einzigen historischen Bericht.²⁰

¹⁵ Auf 6 Stellen hinter dem Komma genau, Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 135

¹⁶ Wußing, ebenda, S. 134

¹⁷ Claudi Alsina, Der Satz des Pythagoras, deutsch bei Librero RBA, 2016, S. 19

¹⁸ https://de.wikipedia.org/wiki/Mathematik_im_Alten_Agypten

¹⁹ Bildquelle: Eigene Grafik unter Verwendung von Powerpoint-Cliparts,

²⁰ Russo, Lucio, Die vergessene Revolution, Springer, Berlin Heidelberg, 2005, S. 9

Von der sogenannten „hellenistischen Revolution bzw. Zivilisation“ im 2. und 3. Jahrhundert vor Christus sind nur vergleichsweise wenige Originale erhalten. Manchmal wird diese Epoche der Blütezeit auch alexandrinische Wissenschaft genannt und zeigt, dass man das ganze zerfallende Großreich Alexanders des Großen als enormes „geistiges Einzugsgebiet“ berücksichtigen muss. Syrien, Ägypten, Kleinasien, Mesopotamien, Persien, Sizilien, Zypern, Phoenizien, Palästina und Makedonien gehören dazu. Hellenistische Enklaven gehen bis nach Baktrien, dem heutigen Afghanistan, Usbekistan und Tadschikistan und sind Mittler zur indischen und chinesischen Kultur.²¹ Zu beachten ist, dass alleine in Süditalien inkl. Sizilien vier Dialekte des Griechischen gesprochen wurden: Dorisch, Nordwestgriechisch, Ionisch und Achaisch. Die betroffenen Regionen waren nicht unbedingt zusammenhängend.

Übersetzungen mathematisch-naturwissenschaftlicher Schriften aus dem Griechischen haben einige Herausforderungen zu bewältigen.²² So fehlen die Leerzeichen zwischen den Wörtern. Bei komplizierten Texten ist ein gutes Fachwissen durch den Übersetzer erforderlich. Außerdem ist die Verwendung spezifisch für das betrachtete Thema und hat sich auch teilweise im Laufe der Zeit verändert. Das frühe attische oder akrophonische System taucht kaum in mathematischen Schriften auf. Es ist eine Verwaltungskonvention, aber durchaus auch Basis für spätere Texte. Die Eins ist ein senkrechter Strich bis zur Vier; dann wird Π für fünf ($\pi\epsilon\eta\tau\epsilon$) verwendet, was man, flüchtig geschrieben, leicht mit dem Gamma Γ verwechseln konnte. Zehn war Delta, Δ , 100 Eta, H , 1000 Chi, X , 10.000 My, M . 32 würde man als $\Delta\Delta\Delta\text{II}$ schreiben, man konnte aber auch den Exponenten als Multiplikator nehmen. Später mit Alexandria als hellenistischem Mittelpunkt wurden auch griechische Buchstaben als Zahlzeichen benutzt: $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=3$, ... Da der Buchstabenvorrat begrenzt ist und kein Dezimalsystem bekannt war, war auch diese Notation unhandlich und hat sicherlich bei der Übersetzung zu Fehlern geführt. Z.B. stand Π dann auch wieder für 80. Ganz kompliziert wurde es beim Übergang zu Brüchen. Ein Fünftel war ein Etwas, von dem man fünfmal so viel benötigt, um ein Ganzes zu erhalten. David Fowler vertritt die Ansicht, dass dann, wenn wirklich Zahlenfolgen gemeint sind, man sich eher Duett, Trio, Quartett, Quintett vorstellen muss. Entscheidend anders bei der griechischen mathematischen Denkweise ist die Philosophie ihrer Notation. Sie dachten nicht algebraisch, sondern geometrisch. Jeder Sachverhalt musste anschaulich, aber abstrakt, „im Kopf“ illustriert werden. Dieser visuelle Denkansatz war durchaus ausgefeilt und keineswegs primitiv, aber unhandlich. Er adressiert gemäß der modernen

²¹ Russo, Lucio, ebenda, S. 13

²² Für den ganzen folgenden Abschnitt siehe Brian Clegg, Eine kleine Geschichte der Unendlichkeit, rororo, Reinbek, 12/2015, S. 39-43

Kognitionsforschung eher die rechtshemispherische Hirnhälfte. Auch die Beschriftungen wurden mit Ausdrücken wie „größer als“, „halb so groß“, etc. verbalisiert. So gut das klingt, kann es trotzdem zur Verwirrung bei dem Übersetzer führen, der oft nur ein Kopierer war und der als einfacher, einigermaßen griechisch sprechender Mönch mit wenig mathematischen Vorkenntnissen diese Aufgabe vom Abt übertragen bekommen hat. Wie so oft ist Archimedes eine Ausnahme in der nicht-numerisch geprägten griechischen Mathematik. In seinem Aufsatz „Sandzahl“, der von Plutarch in seiner Biografie „Leben des Marcellus“ erwähnt wurde, geht er mit riesigen Zahlen um.

Ein weiterer Punkt für „Überlieferung durch Kopieren“ sind die Auswahlkriterien insbesondere bei wissenschaftlichen Werken. Sie sind bei späteren Abschriften extrem willkürlich und beschränken sich oft nur auf leicht verständliche Teile oder einführende Anfänge. In der Spätantike und im frühen Mittelalter kann man nicht mehr nur von einer Dekadenz, sondern sogar von einem vorwissenschaftlichen Rückfall sprechen. Christianisierung weiter Teile des heutigen Europas begannen mit Klostergründungen und die Prioritäten lagen nicht unbedingt in diesem Sektor. Wissenschaftliche Kreativität fand praktisch nicht mehr statt. Bestenfalls wurde kopiert und dabei wurden römische Werke aus der Kaiserzeit bevorzugt. Die 37 Werke von Plinius Naturgeschichte sind überliefert, Archimedes wurde dagegen praktisch übersehen. Die Elemente von Euklid sind als ein wichtiges Lehrbuch seit Boethius auch in Latein erhalten geblieben (s.u.), aber von seiner Person fehlen fast alle Hinweise, selbst die auf seine Lebensdaten. Überliefert ist ein Werk zur Musiktheorie sowie geometrische Untersuchungen z.B. in der Astronomie und Hinweise bzw. Titel weiterer Arbeiten. Offenbar hat die enorme Bedeutung der „Elemente“ dazu geführt, dass auch andere Werke von ihm kopiert wurden. Nach der Bibel sollen die Elemente fast 2000 Jahre das am meisten gelesene Buch der Menschheitsgeschichte gewesen sein. Doch außer spärlichen Hinweisen bei anderen Autoren ist nichts über Euklid bekannt.

Dass die besten Werke aus der Blütezeit der hellenistischen Erkenntnisse erhalten blieben, war ein lange bestehender Mythos, der mittlerweile gründlich widerlegt werden kann.²³

Die Zerstörung von schriftlichem Kulturgut war in vielen Fällen religiös motiviert. Der Sieger versuchte seine Kultur dem Verlierer mit aller Gewalt und Zerstörungswut aufzuzwingen: Griechen an Persern, Römer an Griechen, Araber an Persern, Kreuzritter an Osmanen, Spanier an Mauren – die Liste der Vernichtung von überliefertem Wissen inklusive von Bücherverbrennungen lässt sich beliebig fortsetzen und geht bekanntlich bis in das 20. Jahrhundert.

²³ Russo, Lucio, ebenda, S. 9 ff

Kriegerische Auseinandersetzungen mit sogenannten Kollateralschäden sind relevant, betreffen aber schriftliche Quellen nur unsystematisch. Der Brand der Bibliothek von Alexandria lässt sich nicht mehr genau datieren. Dass er bei den Kämpfen zwischen Caesar und Pompeius gelegt wurde, um Caesar einen militärischen Vorteil zu verschaffen, gilt heute als unwahrscheinlich. 400 Jahre später wurde die Stadt von den Arabern erobert. Die kulturellen Auswirkungen waren dabei wesentlich drastischer. Die Bücher, „die nicht mit den Aussagen des Korans übereinstimmten, sollen zum Beheizen der Bäder verwendet worden sein.“²⁴ Erst später, insbesondere unter dem Kalifen Harun ar-Rashid (763-809 n.Chr.), erkannte die arabische Welt den Wert der antiken Kulturschätze und knüpfte oft mit eigener Forschung daran an. Leider war es für viele Originalquellen oft zu spät. Immerhin sind vergleichsweise viele Werke von griechischen Denkern seit dieser Zeit über arabische Abschriften erhalten. Zahlreiche Beispiele, Querbeziehungen und Analysen finden sich bei Freely, „Platon in Bagdad“. Freely schlägt den Bogen der Überlieferungen aber deutlich weiter: Von Milet in Kleinasien mit mesopotamischem Einfluss, über das klassische Athen, das hellenistische Alexandria, das kaiserliche Rom, das byzantinische Konstantinopel, das nestorianische Gondischapur, das abbasidische Bagdad, das fatimidische Kairo und Damaskus, das muslimische Córdoba, das Toledo der Reconquista, das normannische Palermo bis hin zur lateinisch-sprachigen Gelehrtenwelt in Oxford oder Paris.²⁵

Das hört sich nach sehr vielen Schriften an, deren Inhalte über viele Sprachen überlebt haben. Doch erst durch zahlreiche Hinweise in den überlieferten, teils verkürzt übersetzten oder nur teilweise lesbaren Dokumenten auf eine Fülle von verschollenen Werken lässt sich das enorme Ausmaß der Verluste nur erahnen. Nur einzelne Ereignisse lösen Empörung aus, wie die Plünderung von Konstantinopel durch Kreuzritter im Jahr 1204, auf die noch einzugehen sein wird. Das Ganze, nur erahnte Ausmaß der Verluste, kann man mit Fug und Recht als Katastrophe für die menschliche Kulturgeschichte bezeichnen.

To apeiron - Unendlich in der griechischen Antike

Weder in der indischen, chinesischen, japanischen, babylonischen und ägyptischen Mathematik sind mathematische Überlegungen zur Unendlichkeit in Standardwerken bekannt.²⁶ Unabhängig von praktischen Anwendungen beschäftigten sich dagegen eine ganze Reihe griechischer Denker mit dem

²⁴ <https://www.sueddeutsche.de/kultur/bibliothek-alexandria-aegypten-antike-caesar-papyrus-islam-pharaonen-1.4232218>

²⁵ Freely, John; Platon in Bagdad; dt. Ausgabe Klett-Cotta, Stuttgart, 2012, S. 7

²⁶ Z.B. Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1+2, Springer Berlin Heidelberg, 2008

Begriff des τὸ ἄπειρον, „das Unendliche“, „das Unbegrenzte“. Doch im Gegensatz zu späteren Epochen hatte der Begriff bei den Griechen etwas Unheimliches, Bedrohendes an sich, eher wie Chaos im nicht-mathematischen Sinne. Er bereitete Unbehagen, denn es gab zwar in manchen Fällen Sinn, bis unendlich zu gehen, in anderen Fällen entstanden krasse Widersprüche. Bei $1-1+1-1+1-1+1-1+ \dots$ erzeugt die korrekte unterschiedliche Klammersetzung $(1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)+ \dots$ und $1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+ \dots$ zwei unterschiedliche Ergebnisse.

Aristoteles (384-322 v. Chr.), als absolute Autorität über 2 Jahrtausende, sieht ein, dass man sich mit dem Unendlichen beschäftigen muss:

Da die Wissenschaft von der Natur sich beschäftigt mit Größen und Bewegungen und Zeit, deren nothwendig entweder unbegrenzt oder begrenzt ist ... so möchte es wohl obliegen dem, der von der Natur handelt, Betrachtungen anzustellen über das Unbegrenzte, ob es ist oder nicht, und wenn es ist, was es ist.²⁷

Aber er legt auch klare Kriterien fest und lässt keinen Zweifel, dass seine feste Überzeugung dazu endgültig ist. Diese Auffassung wird das griechische und darüber hinaus das abendländische Denken bis zur Moderne prägen:

Doch von dem Unbegrenzten, wiefern es ist und wiefern es nicht ist, und was es ist, ist genug gehandelt worden.²⁸

Dies hat den Charakter eines „Basta“ und wurde viele Jahrhunderte befolgt (gemeint ist der Unterschied zwischen potentiell und aktual unendlich, s.u.).

Einen bedeutenden frühen Anstoß gab offenbar Zenon von Elea (5. Jahrhundert v. Chr.) mit seinen Paradoxa. Das wichtigste oder bekannteste davon ist „Achilles und die Schildkröte“. Achilles galt als schnellster Läufer aus Homers Werk zum Trojanischen Krieg, der Ilias. Die Schildkröte bekommt bei dem Wettlauf einen Vorsprung. Auch wenn Achilles schneller ist, krabbelt die Schildkröte doch im gleichen Moment ein Stück weiter. Die Abstände verkürzen sich zwar, werden aber durch die beliebig feine Teilbarkeit der Strecke beliebig klein, aber in endlicher Zeit nie Null. Die Schildkröte gewinnt in diesem Paradoxon den Wettlauf. Zenon verteidigt mit seinen Paradoxa die Philosophie von Parmenides, seinem Lehrer. Von den Paradoxien sind neun erhalten, darunter drei der Bewegung. Ursprünglich waren es insgesamt ca. vierzig. Sie beschäftigen sich immer mit Widersprüchlichkeiten bzgl. Vorstellungen der Vielheit oder der Kontinuität in Verbindung mit Dichte, endlichen Größen oder

²⁷ Aristoteles, Physikvorlesung. Übersetzung Hans Wagner, Band 11. Akademie Verlag, 5. Auflage 1995; zitiert nach Brian Clegg, ebenda, S. 51

²⁸ Ebenda, S. 54

der vollständigen Teilbarkeit. Die Paradoxien, wie Achilles und die Schildkröte, das Teilungsparadoxon oder das Pfeil-Paradoxon zeigen Widersprüche bei der Beschreibung von Bewegung. Ein Pfeil bewege sich nicht, weil er in jedem Moment seiner Bewegung an einem bestimmten Ort befindet und dort ruht. Man betrachte die Laufstrecke zwischen den Punkten A und B. Halbiert man die Strecke AB durch den Punkt C, so gibt es zwei Ansätze: Fortgesetzte Halbierung der jeweils zweiten Strecke führt nach beliebig vielen Halbierungen beliebig nahe an den Punkt B, erreicht ihn aber nie in endlichen Schritten. Fortgesetzte Halbierung der jeweils ersten Strecke wirkt wie eine Rückwärtsbewegung und bleibt immer noch beliebig nahe bei A. In jedem Fall ergibt sich ein Paradoxon. Ein Pfeil scheint sich nicht bewegen zu können, denn er ruhe zu jedem Zeitpunkt.

Zenon scheint mit seinen Paradoxa den Grundstein bei der Unterscheidung von Unendlichkeiten gelegt zu haben. Die Halbierungen gehören zu den rationalen Zahlen, wenn man die Strecke AB mit einer rationalen Zahl gleichsetzt.

Heute wissen wir: Doch „dazwischen“ gibt es noch unendlich viele irrationale Zahlen, wie Wurzeln bzw. unendlich viele transzendente Zahlen, wie die Kreiszahl Pi. Doch das ist ein langer Erkenntnisprozess über fast 2.500 Jahre, der im Mittelpunkt dieses Beitrags stehen soll.

Bevor das Thema „unendlich“ stärker in den Vordergrund rücken soll, muss die entscheidende Veränderung der griechischen Mathematik gegenüber Vorläufern in Ägypten, Mesopotamien oder im fernen Osten verdeutlicht werden. Dies liegt vor allem am Abstraktionsvermögen, also von der Unabhängigkeit der mathematischen, idealisierten Zusammenhänge von am Gegenstand orientierten, praktischen Erfordernissen, z.B. im Bauwesen oder bei der Vermessung. Bei früheren Kulturen stand der Sinneseindruck im Vordergrund, Griechen favorisierten dagegen Denkmodelle. Platon entwickelte später seine Ideenlehre. Ideen sind für ihn beständiger als eine vergängliche reale Welt. Immerhin war sich Zenon schon sehr früh der unendlichen Teilbarkeit bewusst. Während der wissenschaftliche Aspekt bei den Pythagoreern noch nicht sehr ausgeprägt war, hat z.B. Thales und in großer Stringenz Euklid entscheidende Schritte in Richtung Unabhängigkeit von den realen Gegebenheiten, hin zu einer abstrakten Anschauung getan. So definiert er z.B. Punkt und Linie vollkommen abstrakt: „*Ein Punkt ist, was keine Teile hat. Eine Linie ist eine breitenlose Länge.*“²⁹ Insbesondere die Geometrie wurde zur exakten Wissenschaft mit einer axiomatischen Basis und Beweisen, möglichst frei von Näherungslösungen.

Ohne direkten Bezug zum Thema „unendlich“ müssen stellvertretend für viele Weitere einige Philosophen genannt werden, die herausragende

²⁹ Euklid, *Stoicheia*, (Die Elemente), 1. Buch

mathematische Leistungen vollbracht haben. Aus der frühen ionischen Periode sind dies besonders der bereits genannte Thales von Milet (624/23–548/544 v. Chr.).³⁰ Er hatte in der Geometrie grundlegende Erkenntnisse, die heute noch Basiswissen im Mathematikunterricht darstellen. Dazu gehört der berühmte Satz des Thales, der Kongruenzsatz oder die Berechnung eines Dreiecks über zwei Winkel und eine Strecke. Die Anwendung war Entfernungsmessung von Schiffen zum Land und untereinander.

Demokrit von Abdera (460/459–um 370 v. Chr.) ist heute besonders durch seine Atomtheorie bekannt. Er hat zahlreiche Schriften³¹ verfasst, darunter auch mathematische Abhandlungen „Über Geometrie“, „Über Zahlen“, „Über irrationale Strecken“, sowie „Über Ausbreitungen“, Abbildungen der Kugelfläche auf die Ebene. Leider sind sie nur durch Querverweise bei anderen Autoren in Erinnerung.

Weniger bekannt ist Hippokrates von Chios (5. Jahrhundert n. Chr.), nicht zu verwechseln mit Hippokrates von Kos, auf den der Hippokratische-Eid der Ärzte zurückgeht. Hippokrates von Chios galt als der größte Geometer des 5. Jahrhunderts. Er besaß schon zahlreiche tiefliegende Erkenntnisse über die Konstruierbarkeit und er kannte bereits Verallgemeinerungen des pythagoreischen Lehrsatzes auf spitzwinklige und stumpfwinklige Dreiecke.

Aus der athenischen Periode muss Platon genannt werden (427-347 v.Chr.). Für ihn hatte Mathematik einen besonderen Stellenwert, weil durch bloßes Denken Erkenntnisse gewonnen werden können. Symptomatisch ist ein durch den römischen Historiker Plutarch übermittelter Protest. Platon hatte vehement protestiert, dass sich z.B. Eudoxos, Archytos und Menaichmos mit mechanischen Methoden um mathematische Fragestellungen bemühten.³² Viele große Naturforscher, Mathematiker und Philosophen bezeichneten sich als Platoniker, für die die Ideen eine eigenständige Bedeutung unabhängig von der profanen Realität besitzen. Diese mangelnde Anwendungsbezogenheit oder gar Realitätsferne macht man ihm auch zum Vorwurf. Aristoteles andererseits hatte in mancher Beziehung eine Gegenposition zu Platon und hat dadurch indirekt auch wissenschaftlichen Fortschritt verhindert. Mit Platon (428/427-348/347 v. Chr.) kommt die Idee einer aktuellen Unendlichkeit auf.

³⁰ Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 2, Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 168

³¹ Wußing, ebenda, S. 170

³² Wußing, ebenda, S. 181

Eines der zentralen Themen in der Mathematik der athenischen Periode sind die „Inkommensurablen“, also der irrationalen Zahlen (eigentlich Strecken). So bewies Theodoros von Kyrene (gest. um 390 v.Chr.), dass (in moderner Schreibweise) $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \dots, \sqrt{17}$ irrational sind. Die Beweise wurden geometrisch geführt. Selbst quadratische Wurzelschachtelungen wurden so behandelt. In dieser Zeit wirkte Eudoxos von Knidos (397–345/338 v. Chr.), der als bedeutendster Mathematiker seiner Epoche bezeichnet wird. Er hat das

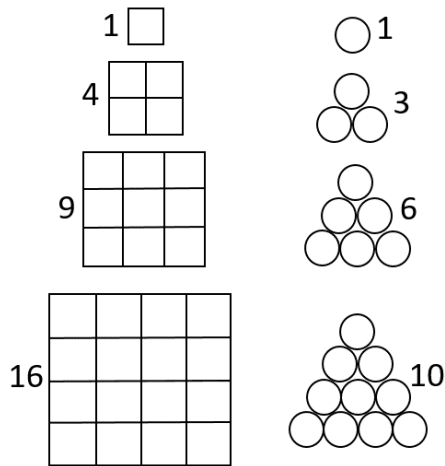


Abb. 4: Heilige Quadrat- und Dreieckszahlen

Irrationale integriert, aus den inkommensurablen Fremdkörpern kommensurable, gleichberechtigte Größen gemacht. Dies war in der damaligen Zeit ein kühner, aber folgerichtiger Schritt und hat den Weg zum heutigen Verständnis des Zahlensystems maßgeblich geebnet.³³

Auch wenn ihre Verdienste für die reine Mathematik umstritten sind, so leisteten doch die Pythagoreer ihre Beiträge. Ihr Motto wird gern als „Alles ist Zahl“ umschrieben. Sie berufen sich alle auf Pythagoras von Samos (um 570-nach 510 v. Chr.). Bald nach seinem Tod zerfiel der Bund in eine Gruppe, die

Zahlen, Numerologie und Zahlenmystik in den Vordergrund rückte, sowie eine Gruppierung, die Lebensstil, Religion und Philosophie als Schwerpunkte sah (Akusmatiker).

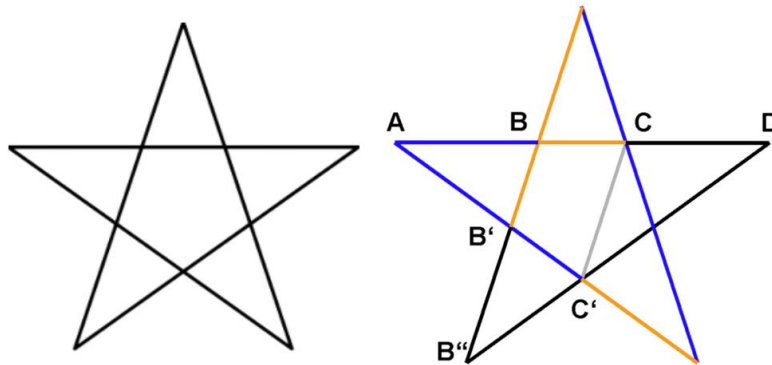


Abb. 5a, b: Pentagramm. Die Strecken \overline{AC} zu $\overline{CD}, \overline{AD}$ zu \overline{AC} , sowie analoge Strecken, stehen im Verhältnis des Goldenen Schnitts $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\dots$

Pythagoras selbst kann man durchaus das Interesse an mathematischen Zusammenhängen unterstellen, wenn auch nicht unbedingt unter einem „wissenschaftlichen

Aspekt“. Unbestritten ist, dass der pythagoreische Lehrsatz nicht von ihm entdeckt wurde. Es gibt beliebig viele ganzzahlige Zahlentripel a, b, c, die Seitenlängen in einem rechtwinkligen Dreieck entsprechen und den Satz des

³³ Wußing, ebenda, S. 184 f

Pythagoras erfüllen: $a^2 + b^2 = c^2$. Das passte aber durchaus in das Weltbild der Pythagoreer. Zahlen mussten natürliche Zahlen oder ihre Verhältnisse sein, die geometrisch interpretierbar sind.

Drastischer formuliert: nur das sind „wirkliche“ Zahlen für die Pythagoreer. Die Tetraktys, 10 Punkte in Form eines gleichseitigen Dreiecks, waren Symbol des pythagoreischen Eids (siehe Abb. 4). Daneben waren perfekte Zahlen göttlicher Natur. Es sind Zahlen, die die Summe ihrer Teiler sind (inkl. 1, exkl. der Zahl selbst). Die Griechen kannten vier perfekte Zahlen (6, 28, 496, und 8128).³⁴ Bruchrechnung im heutigen Sinne existierte nicht. An ihre Stelle treten auch bei Euklid Zahlen- bzw. Längenverhältnisse. Die Eins wird übrigens explizit selbst bei Aristoteles nicht als Zahl angesehen. Zahl ist die aus Einheiten repräsentierte Menge. Auch Euklid betrachtet deshalb die Eins nicht als Zahl.

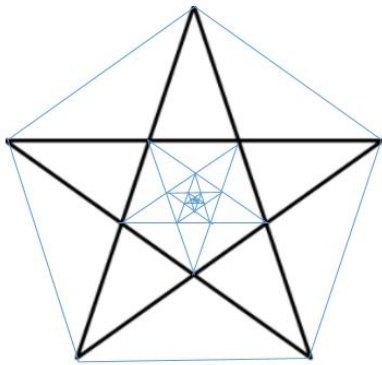


Abb. 5c: Im inneren Pentagramm kann man unendlich viele kleinere Pentagramme zeichnen.

Als Symbol galt Pythagoras das Pentagramm (5-zackiger Stern, Alpenkreuz, Drudenfuß, Elfenkreuz, Fünfwinkelzeichen). Ein Pentagramm kann in einem Zug gezeichnet werden und hat deshalb auch in der Mystik den Charakter der Vollkommenheit.³⁵ Es ist seit uralten Zeiten ein mystisches Symbol.³⁶ Es war mehr als ein Schock, es war eine Katastrophe für das Weltbild der Pythagoreer, als man feststellte, dass wichtige Strecken im Pentagramm keine „Zahlen“ in ihrem Sinne sind.

Die Legende behauptet, der Entdecker Hippasos von Metapont wurde dafür ins Meer geworfen. Er ist aber bei einem Schiffbruch ums Leben gekommen, was aber ebenfalls als „Strafe“ aufgefasst wurde. Jedenfalls hatte man eine der ersten

³⁴ Claudi Alsina, ebenda, S. 32, heute kennt man 43. Sie sind alle gerade. Man weiß nicht, ob ungerade existieren und ob es unendlich viele gibt.

³⁵ Bildquelle 5a, 5b <https://de.wikipedia.org/wiki/Pentagramm>, 4c ergänzt

³⁶ **MEPHISTOPHELES:**

Gesteh ich's nur! daß ich hinausspaziere,
Verbietet mir ein kleines Hindernis,
Der Drudenfuß auf Eurer Schwelle-

FAUST:

Das Pentagramma macht dir Pein? ...

J. W. von Goethe, Faust, 1. Teil, Studierzimmer

irrationalen Zahlen bzw. inkommensurablen, nicht als Bruch darstellbaren Strecken entdeckt.³⁷ Wahrscheinlich war jedoch die Erste $\sqrt{2}$.

Jede der fünf Linien schneidet die anderen im Goldenen Schnitt. Dies wird harmonische Teilung genannt, denn das Ganze steht zum größeren Teil im gleichen Verhältnis wie der größere zum kleineren Teil, nämlich etwa 1,618 : 1.

Was die grundsätzliche Bipolarität des Begrenzten, Endlichen (*peras*, Grenze) und des Unbegrenzten, Unendlichen (*a-peiros*) betrifft, so scheint Pythagoras von Anaximander und Zarathustra (Zarata) beeinflusst worden zu sein. Anaximander (um 610-nach 547 v. Chr.), den man als ersten Wissenschaftler im heutigen Sinne verstehen kann, führt als einer der Ersten den Begriff eines Unbegrenzten (*a-peiros*) ein. Unendlichkeit ist gleichermaßen grenzenlos wie unbestimmt. Er hat neben Pythagoras von Samos vor allem Demokrit von Abdera (460 oder 459-um 370 v. Chr.) geprägt. Die Pythagoreer waren dann offenbar Multiplikator und Resonanzboden der weiteren Beschäftigung mit *apeiron*. Stellvertretend steht hier der Name Philolaos von Kroton (um 470-399 v. Chr.). Er nannte *peras*, (Grenze) und *apeiron* (unbegrenzt) als grundsätzlich gegensätzlich, aber dialektisch zusammenwirkend. Die „Grenze“ stand für das Gute, das „Unbegrenzte“ für das Böse.³⁸

Zu weiteren griechischen Denkern siehe Jonas Cohen, „Zur Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant.“³⁹ Er erwähnt u.a. Anaximenes, Diogenes von Appollonia, Heraklit, Empedokles, Anaxagoras, Leucippus, Demokrit, Pythagoras, Xenophanes, Parmenides, Melissos oder Hippokrates von Chios.

Erst seit Aristoteles (384-322 v. Chr.) wird in der Regel streng zwischen dem „aktuell Unendlichen“ und dem „potentiell Unendlichen“ unterschieden.⁴⁰ Aristoteles lehnt es ab, dass eine Menge unendlich viele Elemente hat, also aktuell unendlich ist. Dagegen ist es problemlos, dass es Mengen gibt, denen man beliebig (heute sagen wir unendlich) oft ein weiteres Element hinzufügen kann. Diese sind „potentiell unendlich“. Aristoteles akzeptiert übrigens auch unbegrenzte Teilbarkeit, aber nur begrenzte Ausdehnung. Er steht im Gegensatz zu Demokrit, der begrenzte Teilbarkeit und unbegrenzte

³⁷ Nach Claudi Alsina, ebenda, S. 70, wurde $\sqrt{2}$ zuerst entdeckt, analog Charles Seife, Ein Zwilling der Unendlichkeit, S. 45 f. Wußing lässt es offen, diskutiert Hippasos aber beim Pentagramm und Φ (Band 1, S. 177). Die Quellenlage zu Hippasos ist unklar.

³⁸ Zur Interpretation der Bipolarität Vater-Mutter, Licht-Dunkelheit und Grenze-Unbegrenztheit siehe Paolo Zellini, Eine kurze Geschichte der Unendlichkeit, C.H.Beck, München 2010, S.17

³⁹ Jonas Cohn, Zur Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant., Reprint Hanse, Leipzig, Verlag Wilhelm Engelmann, 1896

⁴⁰ Die „Zeit“ sollte hier ausgeklammert werden. Sie gilt als unendlich ohne Anfang und Ende.

Ausdehnung propagierte. Eine wichtige und heikle Konfrontation mit dem Unendlichen ist das Parallelenaxiom, dem Euklid folgende Form gegeben hat:⁴¹

Bewirkt der Schnitt einer geraden Linie mit zwei anderen geraden Linien, dass die sich innen auf der gleichen Seite befindlichen Winkel addiert weniger als zwei rechte Winkel ergeben, dann schneiden einander die beiden zuletzt genannten geraden Linien in Richtung dieser Seite, wenn man sie nur genügend weit verlängert.

Heute wird es gerne salopp so formuliert, dass sich in der euklidischen Geometrie zwei parallele Geraden (erst) im Unendlichen treffen. Euklid vermeidet auch hier den Begriff der Unendlichkeit. Trotzdem hat er sicherlich Probleme mit diesem Axiom gehabt, genau wie viele Mathematiker-Generationen nach ihm. Er brauchte das Axiom aber dringend; z.B. um den zentralen Satz zu beweisen, dass die Summe der Innenwinkel in jedem Dreieck zwei rechte Winkel betragen. Erst mit den nichteuklidischen Geometrien hat man den mathematischen Gesamtzusammenhang verstanden.

Euklid hat auch in seinen Büchern 7, 8, 9 Lehrsätze über Zahlen behandelt. Allerdings sah er sie mehr als Hilfssätze für seine Geometrie. In der 11. Definition in Buch 7 hat er den Begriff der Primzahl möglichst exakt charakterisiert. Wie bei den Griechen üblich, musste auch eine anschauliche, aber trotzdem abstrakte Komponente dabei sein. In Abbildung 7 verdeutlicht er die ersten 12 natürlichen Zahlen sowie ihre Teiler durch Punkte in einer Rechteckform und leitete daraus die Definition von Primzahlen ab. Auch Euklid

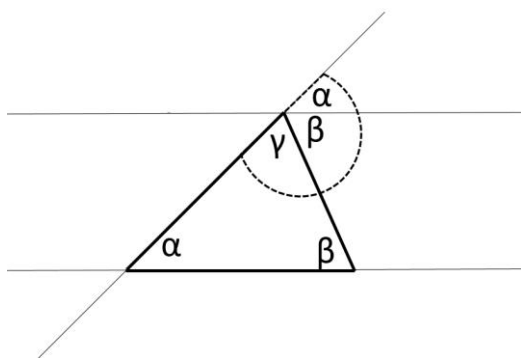


Abb. 6: Euklids Parallelenaxiom und der Beweis, dass die Summe der Innenwinkel zwei rechte Winkel ergibt.

betrachtete 1 und die Zahl selbst nicht als Teiler.

Ein Paradebeispiel für das potentiell Unendliche ist der berühmte Beweis von Euklid (etwa 365- etwa 300 v.Chr.), dass es mehr Primzahlen als jede vorgelegte endliche Menge von ihnen gibt.

Es ist ein Widerspruchsbeweis (*reductio ad absurdum*). Man geht von einer Annahme aus und leitet daraus einen Widerspruch ab. Also muss die Annahme falsch sein.

Annahme: Es gibt nur eine Menge von

endlich vielen Primzahlen, nämlich

$$P_1, P_2, \dots, P_m.$$

⁴¹ Euklid, Elemente, Buch 1, Postulat 5

Dann ist das Produkt der m Primzahlen plus 1 eine Zahl, die nicht durch eine der Primfaktoren P_1, P_2, \dots, P_m teilbar ist. Es muss also mindestens noch eine Primzahl P_{m+1} geben. Das widerspricht der Annahme, dass es nur m Primzahlen

gibt.

Heute haben wir keine Scheu zu sagen, dass der Beweis zeigt, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. „Potentiell unendlich“ bedeutet, wir können beliebig oft zeigen, dass es neue Primfaktoren gibt, die nicht in einer vorgegebenen, als endlich angenommenen Menge enthalten waren. Euklid gelingt somit ein Beweis der Unendlichkeit ohne den Begriff

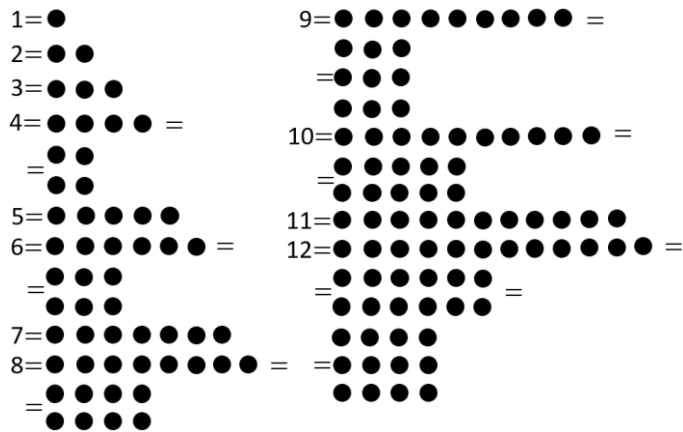


Abb. 7: Die ersten 12 natürlichen Zahlen mit ihren Teilern bzw. als Primzahlen.

zu verwenden.⁴²

Euklid spricht übrigens nicht von dem Produkt der m Primzahlen plus 1, sondern von dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen plus 1. Das läuft zwar auf dasselbe hinaus, erlaubt aber eine geometrische Interpretation, indem jede Primzahl als Strecke dargestellt wird.

Auch „Grenzwertbetrachtungen“ bei Reihen sind aus der griechischen Mathematik durchaus bekannt. Euklid und Archimedes kamen offenbar unabhängig voneinander zu dem Ergebnis, dass die unendliche Reihe

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4} + \dots$$

den Summenwert $\frac{4}{3}$ hat. Sie betrachteten nur die potentielle Unendlichkeit der

Terme $1 + \frac{1}{4}$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2}$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3}$, $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{4^4}, \dots$ und zeigen, dass

- jeder dieser Terme ist kleiner als $\frac{4}{3}$
- jede Zahl unterhalb von $\frac{4}{3}$ wird von einem der folgenden Terme übertroffen.

Diese Methode vermeidet das aktual Unendliche.⁴³

⁴² Euklid, Elemente IX, 20

⁴³ John Stillwell, Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, Springer, Heidelberg, 2014, S. 23

Buch \bar{X} der Elemente enthält eine bemerkenswerte Aussage. Sie soll auf Eudoxos von Knidos (408-354 v.Chr.) zurück gehen.⁴⁴

*Nimmt man bei Vorliegen zweier (gleichartiger) Größen von der größeren ein Stück größer als die Hälfte weg und vom Rest ein Stück größer als die Hälfte und wiederholt dies immer, dann muss einmal eine Größe übrig bleiben, die kleiner als die kleinere Ausgangsgröße ist.*⁴⁵

Modern formuliert: Ist p gegeben und r ein Quotient mit $\frac{1}{2} \leq r < 1$ so gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p(1 - r)^n = 0$$

Euklid hat mit seiner Formulierung eine Grenzwertbetrachtung verbalisiert.

Im Jahr 1998, am 29. Oktober, wurde im Auktionshaus Christie's in New York ein sogenanntes Palimpsest versteigert. Es war ein Buch aus Pergament, kaum lesbar und innen wie außen in schlechtem Zustand. Es war vor unserer Zeitrechnung zuerst beschrieben worden, aber Pergament war teuer. Deshalb wurde im Mittelalter die ursprüngliche Beschriftung abgekratzt und mit einem Gebetsbuch aus dem 13. Jahrhundert überschrieben. Solch ein wiederverwendetes Manuskript nennt man Palimpsest und diese sind nicht unbedingt selten. Dieses Exemplar war aber etwas Besonderes.

Bei der Plünderung von Konstantinopel im Jahr 1204 durch Kreuzritter des 4. Kreuzzuges wurden ungeheure Kunst- und Kulturschätze zerstört oder verschleppt. So auch drei Bücher von Archimedes, genannt die Codizes A, B und C.

Archimedes von Syrakus (um 287–212 v. Chr.) war einer der größten Wissenschaftler aller Zeiten. Als er die Frage lösen konnte, wie man den Goldgehalt der königlichen Krone mittels Auftrieb bestimmt, soll er „Heureka“

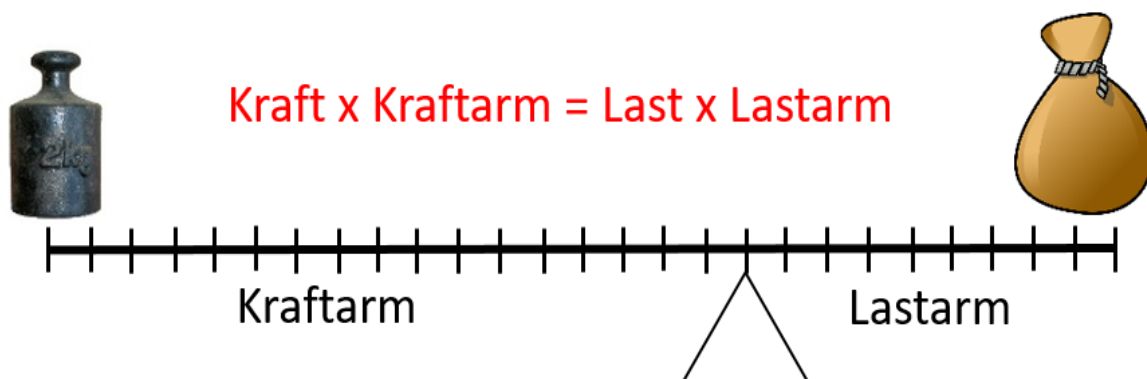


Abb. 8: Das Hebelgesetz von Archimedes

⁴⁴ David Foster Wallace, Die Entdeckung des Unendlichen, Piper, 3. Auflage 2010, S 103

⁴⁵ Zitiert nach Wallace, ebenda, S. 111

(ich habe es!) gerufen haben. Er soll oft in der Öffentlichkeit unbekleidet gewesen sein und kurz vor seiner Ermordung durch einen römischen Soldaten in Syrakus 212 v. Chr. gerufen haben „*Störe meine Kreise nicht!*“! Solche eher naiven Anekdoten sind allgemein bekannt. Er gilt als Genie, aber selbst mathematisch interessierte heutige Zeitgenossen können kaum Leistungen von Archimedes nennen. Seine Präzisionsberechnung der Kreiszahl Pi hatte ein Jahrtausend Bestand. Dies war eine ungeheure physische und psychische Leistung ohne Dezimalsystem und ohne die für ein Stellenwertsystem erforderliche Null. Sie beruhte nur auf Vergleichen von ganzen Zahlen, also genauen Abschätzungen von Brüchen. (Genauer: Eigentlich war ein Bruch immer ein Verhältnis von Strecken und wenn man quadrieren musste, hat man ein Quadrat über der Strecke errichtet.) Man kann sich dies heute kaum noch vorstellen, auch wenn man davon absieht, dass Computer mittlerweile 50 Billionen Stellen von π errechnet haben (Stand 2020, 303 Tage Rechenzeit). Archimedes hat es übrigens abgelehnt, sich den Kreis als unendliches Vieleck vorzustellen. Da saß die Scheu vor dem aktual Unendlichen doch noch tief. Auch das Hebelgesetz hat er mathematisch exakt formuliert. Aber am meisten erinnert man sich daran, weil von ihm der Ausspruch überliefert ist: *Gebt mir einen Hebel, der lang genug, und einen Angelpunkt, der stark genug ist, dann kann ich die Welt mit einer Hand bewegen.*

Heute wissen wir: Seine Werke waren schwierig und wurden deshalb sehr selten kopiert. Obwohl er berühmt war, blieben einige Texte nur in einer einzigen Kopie erhalten. Ein Exemplar der „*Quadratur der Parabel*“ gelangte noch an den Hof Friedrich II im 12. Jahrhundert und konnte dann bis ins 15. Jahrhundert verfolgt werden. Dann verliert sich seine Spur. Das gleiche gilt für ein weiteres Werk von ihm, das trotz päpstlichem Besitz, im 14. Jahrhundert verloren ging. Immerhin wurde vom historisch bedeutenden Teil, „*Über schwimmende Körper*“, eine lateinische Kopie angefertigt. Erhalten ist „*Über Spiralen*“. Ansonsten zeigen Hinweise bei Plutarch, Athenaios, Vitruv oder Heron die Verluste.⁴⁶

Seine Methodenlehre, die in den sogenannten Kodizes A, B und C niedergeschrieben war, hätte eine Revolution in der mathematisch-physikalischen Welt darstellen können. Leider war auch davon ein wesentlicher Teil 2.000 Jahre lang verschollen. Wie viele andere Werke, hatten die drei Kodizes eine wechselvolle Geschichte. Für das „Gedächtnis der Menschheit“ gab es eine Reihe von Katastrophen. Dazu gehörte in der Antike der Brand der Bibliothek von Alexandria. Eine weitere war die genannte Eroberung und Plünderung von Konstantinopel 1204 durch christliche Kreuzritter. Dort wurden auch die Kodizes verschleppt. Kodex B verschwand als erstes; 1311 wird er

⁴⁶ Russo, Lucio, ebenda, S. 60-61

zum letzten Mal in Zusammenhang mit der päpstlichen Bibliothek in Viterbo erwähnt. 1564 folgte Kodex A, wo er zum letzten Mal in einer Privatbibliothek archiviert war.

Der Kodex C wurde 1906 von dem Kopenhagener Gelehrten Johan Ludvig Heiberg in Konstantinopel entdeckt und mit den damaligen, sehr begrenzten, Mitteln ausgewertet, verschwand dann aber auch wieder. Im Jahr 1998 wird er von unbekannter Seite zum Verkauf angeboten und wurde von dem Antiquitätenhändler Simon Finch im Auftrag eines unbekanntes Käufers bei

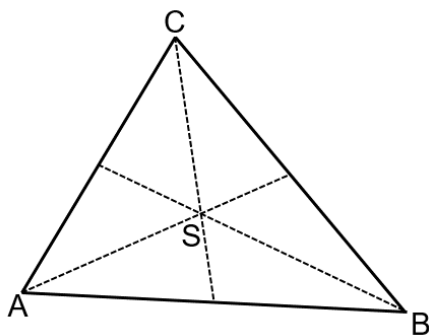


Abb. 9: Schwerpunkt eines Dreiecks

Christie's in New York für 2,2 Millionen Dollar erworben. William Noel war Kurator für alte Handschriften am Walters Kunstmuseum in Baltimore und bemühte sich bei Finch darum, den Käufer kennen zu lernen und das Palimpsest für eine Ausstellung zu gewinnen. Es wurde mehr: Mit modernsten technischen Mitteln entriss man dem mechanisch abgeschabten und mit einer mittelalterlichen Litanei überschriebenen Pergament wesentliche Teile des ursprünglichen Archimedes-Textes. Noel und Reviel Netz

haben über diesen Prozess ein Buch geschrieben, das einem Wissenschafts-Krimi gleicht.⁴⁷ Man fand eine mathematische Sensation.

Kodex C ist ein Teil seiner Methodenlehre, ergänzt um charakteristische Beispiele, die Schritte hin zum Gesamtkonzept darstellen. Archimedes hat jedoch nicht nur reine Mathematik beschrieben, sondern seine neue Mathematik unter Verwendung des Unendlichen auf die Physik angewendet. Damit hat er traditionelle Denkverbote in der griechischen Mathematik überwunden.⁴⁸

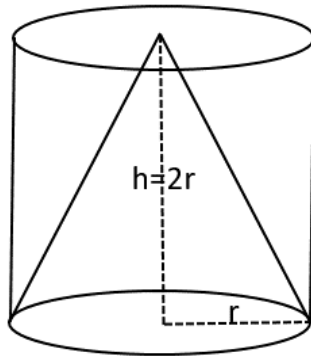
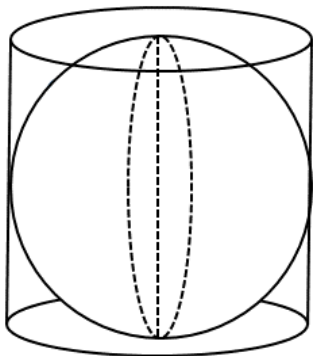
Einer dieser Zwischenschritte war die Suche nach dem Schwerpunkt in Dreiecken, eigentlich ein Begriff aus der Physik. Archimedes beweist, dass dieser Punkt im Schnittpunkt der Seitenhalbierenden liegt und diese im Verhältnis 2:1 teilt.

Neben dem Schwerpunkt in Dreiecken war die Summation von Schnitten zur Berechnung des Kugelvolumens durchaus ein Zwischenschritt in der Methodenlehre, aber auch für sich genommen ein wichtiges Ergebnis. Auch dabei kommt eine „Wiegetechnik“ zum Einsatz. Eine Kugel (Abb. 10a) denkt man sich unterteilt in senkrechte Schnitte. Die Mittellinie als Achse geht durch

⁴⁷ Netz, Reviel; Noel, William; Der Kodex des Archimedes, C.H.Beck, München 2008

⁴⁸ <https://www.spektrum.de/rezension/der-kodex-des-archimedes/950997>

den Mittelpunkt der Kugelschnitte und diese Mittelpunkte sind gleichzeitig ihr jeweiliger Schwerpunkt.



$$V_{Ke} = \frac{2}{3}\pi r^3 \quad V_{Ku} = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad V_{Zy} = 2\pi r^3$$

Abb. 10a Kugel/Zylinder 10b Kegel/Zylinder

Der mittlere Kugelschnitt ist ein Kreis, der die Schnittpunkte eines Kegels mit der Kugel auf halber Höhe darstellt. Diesem Kegel, der die Höhe des Durchmessers der Kugel hat, wird ein Zylinder umschrieben. Das Volumen des Kegels V_{Ke} und das Volumen des Zylinders V_{Zy} waren

damals schon bekannt.

Der Kegel hat ein Drittel des Volumens vom umbeschriebenen Zylinder. Das Volumen der Kugel V_{Ku} ist unbekannt. Ab hier kommt nun die Wägetechnik zum Einsatz. Ein Kreisschnitt, der im Abstand a vom Drehpunkt des Hebels entfernt ist, liefert einen Beitrag von $a \cdot r^2$ zur rechten Seite des Hebelgesetzes.

Durch geschickte Umformungen kommt Archimedes zum Ergebnis, dass das Kegelvolumen V_{Ke} ein Drittel und das Volumen der Kugel V_{Ku} , zwei Drittel des Zylindervolumens V_{Zy} ist. Es gilt somit

$$V_{Ke} : V_{Ku} : V_{Zy} = 1 : 2 : 3$$

Eine gedachte Balkenwaage wäre im Gleichgewicht, wenn auf einer Seite Kegel und Kugel und auf der anderen Seite der Zylinder liegt.

Mit diesen Ergebnissen beginnt eine ganze Reihe von weiteren Erkenntnissen, bei denen meist Dreiecke im Mittelpunkt der Beweiskette stehen. Teilweise hat er bei diesen Dreiecken im Vorfeld schon raffinierte Beziehungen bewiesen,

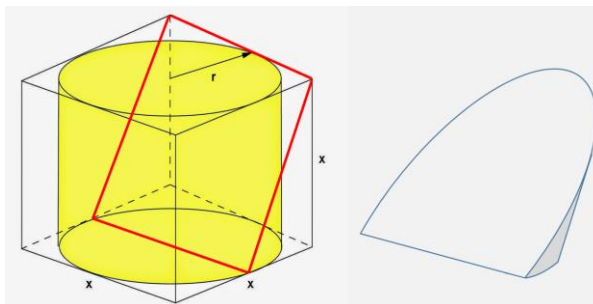


Abb.: 11a und 11b

wobei oft Verhältnisse von Strecken in Bezug zu Verhältnissen von Dreiecksflächen gesetzt werden können. Der Schwerpunkt nimmt dabei eine Schlüsselrolle ein. Er erlaubt, dass geometrische Gebilde mit der Physik des Hebelgesetzes verknüpft werden können. Es wird in solchen Fällen ein eindimensionaler Zusammen-

hang auf einen zweidimensionalen übertragen. Schon dies ist ein ungewöhnlicher Schluss. Doch das Wesen des Integrationsgedankens ist die

Tatsache, dass Archimedes Scheiben der Breite Null betrachtet (Exhaustionsmethode). Es ist die Basis für die zukünftige Grenzwertbetrachtung und Rechnungen mit im Prinzip unendlichen Mengen. Er zeigt methodisch, wie sich eine Fläche, die von Linien und gekrümmten Kurven begrenzt ist, beliebig genau berechnen lässt. Erst bis auf ein Sandkorn genau, dann bis zu einer Haarspitze genau usw. Archimedes summiert Scheiben der Breite Null zu einem Volumen! Im Rahmen dieses Beitrages wird sich zeigen, dass es überabzählbar viele dieser Scheiben gibt, entsprechend den Punkten auf einer Geraden. Dass das mit der Stetigkeit des Kontinuums zusammenhängt, ist erst viel später Dedekind aufgefallen.⁴⁹ Doch damit hat Archimedes hier unbewusst mit dem aktual Unendlichen gerechnet. Archimedes war genial, aber man kann ihm nicht unterstellen, dass er schon Überabzählbarkeit durchdacht hatte. Er hatte jedoch ein intuitives Gespür für Grenzen und Regeln im Umgang mit Unendlichkeit, vor allem in der Geometrie. Sein im Palimpsest wiederentdecktes Werk „Über die Methode“ adressiert zweifellos auch die Anwendung des aktual Unendlichen. Archimedes hat seine Methode auf die Berechnung der Fläche unter einer gekrümmten Kurve und weiter zur Volumenberechnung am Beispiel eines

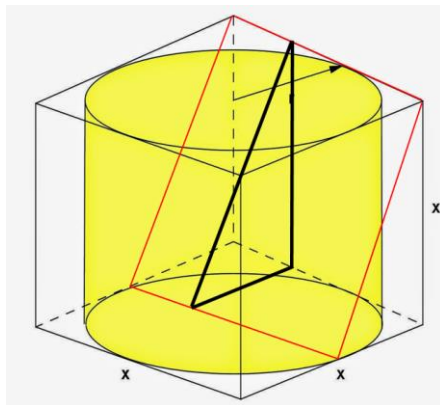


Abb. 11c

zunächst genau definierten Parabelsegmentes angewandt und dann vom speziellen zum allgemeinen Fall verallgemeinert. Die Abbildung 11a zeigt einen Würfel, der einem Zylinder umbeschrieben ist. Eine Ebene, die durch die obere Kante des Würfels und durch die Mittelpunkte der unteren Kanten geht, schneidet den Zylinder in Form eines Parabelsegmentes und bildet ein Gebilde in Form eines Fingernagels (Abbildung 11b).

Archimedes betrachtet nun rechtwinklige Dreiecke, deren Hypotenuse alle auf der (roten) Schnittebene liegen. Sie bilden Schnitte mit der Würfelhälfte und der Zylinderhälfte einerseits bzw. mit der Parabel, dem Kreis und dem Rechteck $[\frac{x}{2} \cdot x]$ andererseits. Doch nun folgt wieder der Schritt zu aktual unendlich vielen Schnitten und ihrer Summation gemäß der in diesem Fall erforderlichen Regeln. Das ist eine intuitive Vorwegnahme der modernen Integralrechnung im allgemeinen Fall.

Archimedes hat sich Methoden bedient, die erst 1800 Jahre später von Isaac Newton unter dem Namen Fluxionsrechnung und von Gottfried Wilhelm Leibniz als Infinitesimalrechnung wiederentdeckt wurden. Er kommt der modernen

⁴⁹ Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Vieweg, Braunschweig, 1872, S17f, zitiert nach John Stillwell, Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, ebenda, S. 24

Integralrechnung erstaunlich nahe. Unter dem Namen Analysis ist sie heute eine Säule der modernen Mathematik. Lange Zeit wurde sie misstrauisch beäugt, weil sie das „unendlich Kleine“ anwendet. Doch durch einen Formalismus, den die Griechen zumindest als potentiell unendlich bezeichnet hätten, ist ein korrekter Umgang mit beliebig kleinen Größen entstanden. Dabei muss eine Zerlegung des Untersuchungsobjektes in handhabbare Segmente erfolgen. Am besten weiß man insbesondere durch die euklidische Geometrie über Dreiecke Bescheid. Den Bogen kann man bis in moderne Überlegungen schlagen. Eine solche Methode nennt man Triangulation. Man findet sie in der normalen Vermessungslehre, wie sie bereits von Carl Friedrich Gauß angewendet wurde,⁵⁰ aber auch in modernen Quantengravitationstheorien, wie der Causal Dynamical Triangulation, CDT. Auch dabei wird ein Raumvolumen mathematisch handhabbar zerlegt in Dreiecke (2-simplex), Tetraeder (3-simplex) oder im vierdimensionalen Raum in Pentachoron (4-simplex) usw. Manchmal ist die Zerlegung von geradlinig begrenzten Flächen in Dreiecke relativ einfach bzw. ist in endlichen Schritten erfolgt. Ist die Fläche durch Kurven begrenzt, so sind beliebig viele immer kleinere Dreiecke erforderlich und der gesuchte Flächeninhalt muss durch eine Grenzwertbildung erfolgen. Die Fläche wird in unendlich viele Dreiecke zerlegt. Archimedes benutzt noch weitere Methoden; er setzt das Verhältnis von Strecken in Bezug zu Flächen und geht dann, modern gesprochen, zur Grenzwertbildung über. Oder, wie an den Beispielen gesehen, betrachtet er eine Fläche als Beitrag zum „Gewicht“ und wendet in Verbindung mit dem Schwerpunkt das Hebelgesetz an.

Archimedes war sich der Problematik bei der Rechnung mit unendlichen Größen durchaus bewusst. Vielleicht sogar mehr als Newton, der zunächst eine eher naive und unbekümmerte Vorgehensweise in seiner Fluxionsrechnung an den Tag legte, die allerdings aufgrund seiner überragenden physikalischen Intuition trotzdem ungeheure Erfolge brachte (s.u.). Die Diskussion um den mathematisch angemessenen Umgang mit infinitesimalen Größen zog sich mehrere Jahrhunderte durch die Mathematik- und auch durch die Physikgeschichte. Zentraler Begriff ist das „Unendlich Kleine“.⁵¹ Erst im 19.

⁵⁰ Gauß hat bei der Vermessung des Königreichs Hannover zwischen 1818 und 1826 per Triangulation besonders genau sein „Großes Dreieck“ vermessen. Dieses Dreieck ist eben, weil die Messung durch die Luft erfolgte. Es hat die Seitenlängen 69 km (Hoher Hagen – Brocken), 84 km (Hoher Hagen – Inselsberg) und 106 km (Brocken – Inselsberg) und war einerseits eine wichtige Basis zur Verknüpfung mit weiteren Vermessungsdaten, aber auch Grundlage zur Überprüfung der Winkelsumme im Dreieck (s.u.a. Dieter Lelgermann; Gauß und die Messkunst, primus und wbg, 2011, Darmstadt)

⁵¹ Die Gemahlin Friedrich des Ersten von Preußen, Sophie Charlotte, war eine gute Freundin von Leibniz. Sie setzte scherzhaft in einem Brief an eine Freundin das „Unendlich Kleine“ mit den Erfahrungen mit ihren Lakaien gleich.

Jahrhundert wurden Regeln für den Umgang mit dem potentiell Unendlichen gefunden, die die philosophischen („was ist unendlich klein?“) und mathematischen Probleme („vermeintliche Division durch Null“) beseitigten. Diese Regeln beruhen auf oder sind zumindest in den „imaginären Dialogen“ des Archimedes vorweggenommen. Dabei war er seiner Zeit sehr weit voraus und die griechischen Mathematiker haben seinen riesigen konzeptionellen Schritt letztendlich nicht nachvollzogen.⁵² Später waren wesentliche Teile seiner Arbeit in der Methodenlehre verschollen und konnten die weitere Entwicklung nicht beeinflussen.

Erst Bernard Bolzano (1781-1848) begann sich systematisch mit dem Unendlichen in Verbindung mit endlichen und unendlichen Mengen auseinander zu setzen. Das Fachwort „Menge“ führte er in die mathematische Terminologie ein. Er legte nach reiflichen Überlegungen sozusagen die Scheu vor dem Unendlichen, wie sie die Griechen der Nachwelt vererbt hatten, gänzlich ab. Er machte „unendlich“ erstmals handhabbar. Man kann Bolzano als geistigen Vater von Georg Cantor betrachten, der unmittelbar an die Gedanken Bolzanos anknüpfte (s.u.).

Eine fast endgültige, auch heute allseits akzeptierte Grundlage der Analysis stammt von Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) und abschließend von Karl Weierstraß (1815-1897). In der Integralrechnung erinnert Cauchys Definition des Grenzwertprozesses sehr an Archimedes. Das Integrationsintervall wird in immer kleinere Teilintervalle unterteilt. Die Länge des Teilintervalls über der x-Achse multipliziert mit dem Funktionswert am Anfang des Intervalls nähert sich dem Integral als Grenzwert bei immer kleineren Teilintervallen (mehr zu Cauchy und Weierstraß (s.u.).

Unendlich in der Scholastik, Mathematik im Orient

Im Sinne der historischen Chronologie soll kurz auf die in Europa mathematisch wenig ergiebige Zeit bis zur Renaissance eingegangen werden. Einen teilweise krassen Gegensatz bilden in dieser Zeit die Länder des Islam und auch Indien. Unter Scholastik soll die Philosophie und Theologie vorwiegend des Mittelalters (etwa 9.–14. Jahrhundert) gemeint sein. Sie beginnt aber eigentlich mindestens ab ca. 493 n.Chr. mit dem Sieg und der Ermordung Odoakers durch Theoderich den Großen und dem anschließenden Beginn der ostgotischen Herrschaft über Italien. Oft wird auch 476 n.Chr. als Zeitpunkt des Untergangs des

„Letzthin ... hat mich Leibnitz von dem unendlich Kleinen (seine Theorie der Monaden) unterhalten. Wer kennt diese kleinen Wesen besser als ich?“

Quelle: https://de.wikisource.org/wiki/Die_philosophische_Königin_von_Preußen

⁵² Netz, Reviel; Noel, William; ebenda, S. 187

weströmischen Reichs genannt. Das Ende der Scholastik ist der Beginn der Renaissance um 1450. Durch geografische Unterschiede ist dies aber schwierig konkreten Jahreszahlen zuzuordnen. Z.B. war Leonardo di Pisa (1170-nach 1250, genannt Fibonacci) eindeutig noch ein Kind des Mittelalters, unabhängig davon, dass ihm die mathematische Entwicklung einiges verdankt. Wußing datiert in seiner zweibändigen Monografie „6000 Jahre Mathematik“⁵³ den Beginn der Renaissance etwa zwischen Nikolaus von Kues (1401-1464) und Mathematikern, Naturforschern oder Astronomen, wie Adam Ries(e) (1493-1559), Luca Pacioli (1445-1514 oder 1517, bekannt für *De divina proportione*, Goldener Schnitt, Venedig 1509), Leonardo da Vinci (1452-1519) oder Nikolaus Kopernikus (1473-1543), um nur einige wichtige zu nennen. Die Scholastik hat sich auf die antike Philosophie gestützt und daraus christliche Dogmen



Abb. 12: Das Ziffernrechnen gewinnt die Oberhand über das Abakus-Rechnen

entwickelt. Der sehr begrenzte Umgang mit Zahlen und Geometrie war eng verknüpft mit der Christianisierung. Aber in den ersten Jahrhunderten gibt es in der westlichen Welt wenig für die Geschichte der Mathematik und fast nichts mit Bezug zu diesem Beitrag zu berichten. Es war aber eine Blütephase der islamischen Mathematik und in Indien wurde die Null vor 900 n. Chr. als 10. Ziffer mit dem heute üblichen Symbol in einem Dezimalsystem eingeführt. Beda Venerabilis (ca. 672/73-735) berechnete in einer Abhandlung das Osterdatum und hat sich andererseits in dieser Schrift noch mit Fingerrechnung befasst. Zu nennen ist im Westen noch Boethius. Er hat immerhin Euklids „Die Elemente“ und weitere Schriften ins Lateinische übersetzt.

Vereinzelt kam es zum Austausch mit islamischer Kultur. Der wurde oft aus religiösen Gründen gegen „heidnische Wissenschaft“ abgeblockt. Das änderte sich erst mit Gerbert von Aurillac (ca.945-1003), der in Katalonien, im

⁵³ Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 2, Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 298 ff

Grenzbereich zum maurischen Spanien, islamische Mathematik kennengelernt hatte. Im Jahre 1085 wurde Toledo zurückerobert und die hervorragende Bibliothek fiel den Christen in die Hände. Waren bisher vor allem Klöster gleichzeitig ökonomische Zentren und Bildungsschwerpunkte, so setzte im 11./12. Jahrhundert die Gründung von Universitäten ein. Sie dienten zum Machterhalt der Kirche, entwickelten aber im Laufe der Zeit eine gewisse Eigendynamik. Es fehlten aber zunächst ausreichend Impulse für mathematische Bildung und Forschung. Diese kamen generell erst in der Renaissance durch neue gesellschaftliche Forderungen auf die Mathematik zu und brachten deutliche Fortschritte. Zu nennen ist der Übergang von Natural- zu Geldwirtschaft, Umrechnung von Währungs-, Gewichts- und Maßeinheiten, Buchhaltung, Zins- und Zinseszinsrechnung, zweckmäßigere Rechenverfahren, Schifffahrt über das offene Meer, u.v.m.⁵⁴ Diese Anforderungen hatte die mittelalterliche Zeit (in dem genannten Zeitrahmen) noch nicht oder längst nicht in diesem Maße. Erst die Renaissance-Forderung „ad fontes“ (zu den Quellen) bedeutete, dass die Orientierung möglichst am Original zu erfolgen habe. Hellenistische Mathematik galt nicht mehr als Ketzerei.⁵⁵

Beim Thema „unendlich“ blieb allerdings zunächst die etablierte Haltung erhalten. Wie schon Aristoteles propagierte, wird zwischen dem potentiell und dem aktual Unendlichen unterschieden und vor allem Letzteres verdammt. Unendlichkeit in der „Zeit“ wird mit dem Begriff „Ewigkeit“ verbunden.

Die Beweisführung in der Scholastik bezog sich vorwiegend auf theologische Fragen, auch wenn der Begriff durchaus darüber hinaus geht. „Für“ und „Wider“ wird analysiert und eine Entscheidung gefällt. Allerdings wird in vielen Fällen eine konservative Lösung bevorzugt, wenn eine Kollision mit etablierten Meinungen droht. Das sind vor allem die Lehren des Aristoteles oder Platon in wissenschaftlichen Fragen oder der Bibel und der Kirchenfürsten in theologischen Fragen. Ontologische, religiöse und philosophische Probleme werden oft auf Basis dieser Grundlagen oder Lehren von über jeden Zweifel erhabenen Autoritäten entschieden. Die antiken Einflüsse sind noch omnipräsent. Aber sie führen meist nicht zu einer Weiterentwicklung, sondern eher zu einer Stagnation oder sogar einer Vernachlässigung des antiken Erbes. Dass ein Werk von Archimedes mit einer mittelalterlichen Litanei überschrieben wird ist symptomatisch. Trotzdem sind eine Reihe großer Namen in Erinnerung geblieben.

⁵⁴ Wußing, ebenda, S. 307 f

⁵⁵ Bildquelle Abb. 12: [https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Gregor_Reisch,_Margarita_Philosophica,_1508_\(1230x1615\).png](https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Gregor_Reisch,_Margarita_Philosophica,_1508_(1230x1615).png)

Augustinus (354-430) folgt z.B. Platon und setzt Gott mit dem aktuellen Unendlichen gleich.

Anselm von Canterbury (1033-1109) lehnt sich an Augustinus an und benutzt ebenfalls den Begriff des Unendlichen um Gott zu definieren. Er versucht, den Glauben logisch zu begründen und definiert Gott [als]: "*Etwas, worüber hinaus nichts Mächtigeres gedacht werden kann.*"

Roger Bacon (1214-1292/4?) machte sich Gedanken um (im heutigen Sprachgebrauch) rationale und irrationale Zahlen aus geometrischen Gründen.

Johannes Duns Scotus (1266-1308) dachte über Probleme der Kontinuität im Zusammenhang mit konzentrischen Kreisen nach.

Thomas von Aquin (1225-1274) schrieb zu den Eigenschaften aller Punkte auf einer Geraden: *Es ist offenkundig, dass in einer unendlichen oder einer Kreislinie ein Punkt nur potentiell existiert. Und weiter: Ein Punkt ist nicht in der Definition einer Linie enthalten, wie gewöhnlich angenommen.*⁵⁶ Verblüffend „modern“ im Sinne Cantors ist seine Definition der Vielheit [Menge], als „*Zusammenfassung von verschiedenen Einheiten*“. Cantor setzte sich intensiv mit Thomas von Aquin auseinander. Allerdings denkt Thomas theologisch und philosophisch, während Cantor Vorbehalte und Gegenargumente ausräumen möchte. Thomas schreibt Gott unendliche Allmacht zu – er könnte Unendliches erschaffen. Aber das ist mit der Natur unvereinbar und außerhalb von Gott gibt es deshalb das aktual Unendliche nicht. Unendlichkeit bei Gott und der Welt wird für viele Jahrhunderte ein Streitthema bleiben. Es erzeugte immer wieder auch Skrupel bei Cantor und seinen Vorgängern und Nachfolgern. Im Vorgriff auf Cantor schreibt er dazu:

*Meiner festen Überzeugung nach widerspricht es (...) ebensowenig den großen Principien der christlichen Scholastik, das Transfinitum zu acceptieren und in den Speculationen zu verwerthen, sobald es von irgend Jemandem als wahr demonstriert worden ist.*⁵⁷

Wilhelm von Ockham (1285-1347) differenzierte zwischen Kontinuität und Kontiguität. Kontinuität sei kein Nebeneinander von benachbarten unteilbaren Teilen (also Punkten). Seine Überlegungen zum Kontinuum analogisierte er

⁵⁶ Thomas von Aquin, Summa theologiae, Teil 1, Questio 85, Art. 5, zitiert nach Paolo Zellini, Eine kurze Geschichte der Unendlichkeit, S.64 ff. Dort finden sich auch über die hier genannten auch Kurzzusammenfassungen anderer Denker dieser Epoche.

⁵⁷ Brief an A. Schmid v. 26.3.1887, zit. Nach Alberto Jorgi, Das Unendliche, S. 80. Zahlreiche weitere Aussagen siehe G. Cantor, Abhandlungen zur Geschichte der Mathematik und zur Philosophie des Unendlichen, in Gesamtausgabe seiner Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zermelo, Julius Springer, Berlin 1932, ab S. 370 ff, digital verfügbar unter <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/>

bzgl. der Zeit. Ockhams Rasiermesser ist das Synonym für das Prinzip, dass man von allen Alternativen zuerst die einfachste in Betracht ziehen sollte.

Für Gregor von Rimini (ca. 1300-ca. 1358) waren Punkte, Linien und Flächen lediglich Schöpfungen des Geistes.

Johannes Buridan (ca. 1300-ca. 1358) sagte, aus Punkten, Linien und Flächen ließe sich eine fiktive Geometrie konstruieren, deren Vorteil ihre Klarheit sei. Das Gleichnis von Buridans Esel findet sich übrigens nicht in seinen Schriften.

Mit Nicole Oresme,⁵⁸ ab 1377 Bischof von Lisieux, brachte Frankreich einen herausragenden Gelehrten hervor. In seinem mathematischen Schaffen entwickelte er eine für die damalige Zeit erstaunliche Eigenständigkeit von religiösen Bezügen. Es entstand das Werk *Algorismus proportionum*. Offenbar erstmal seit der Antike hat er sich mit unendlichen Reihen beschäftigt, also dem damals spektakulären Versuch, unendlich viele Zahlen zu addieren. Er hatte auf Anweisung von Kaiser Karl V den Auftrag, Aristoteles neu zu übersetzen und war sicherlich deshalb mit der Ansicht von Aristoteles über das Unendliche vertraut. Er konnte beweisen, dass die harmonische Reihe divergiert. Konkret hat er das Ergebnis der Reihe der reziproken Zweierpotenzen richtig vorhergesagt:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

Nicht sicher ist, ob Oresme sich mit folgender Reihe intensiv beschäftigte:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \dots$$

Er ahnte aber, dass sie beschränkt ist (<2), aber der Wert wurde erst viel später über die Riemannsche Zeta-Funktion bestimmt. Es ist als Basler Problem bekannt, weil sich zuerst die

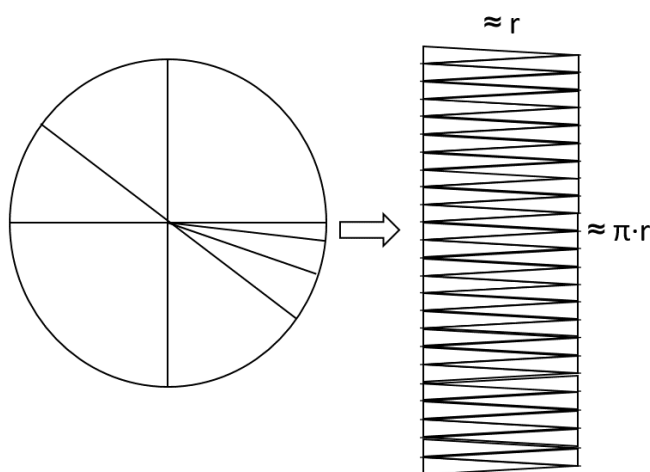


Abb. 13: Kreisflächenberechnung des Nikolaus von Kues.

bekannt, weil sich zuerst die Bernouli-Brüder Jakob und Johann aus Basel erfolglos damit auseinandersetzten. Auch Newton und Leibniz scheiterten, ebenso L'Hôpital. Erst Euler, ebenfalls aus Basel, war erfolgreich.

Der Wert beträgt $\xi(2) = \frac{\pi^2}{6} \approx 1,64493 \dots$

Über viele Erkenntnisse waren sich Theologen und

⁵⁸ Wußing ebenda, S. 293, sowie Rudolf Taschner; Die Farben der Quadratzahlen, Hanser, München 2019, S. 67

Philosophen, insbesondere im Hochmittelalter, prinzipiell einig. Laut Zellinis Einschätzung verneinte z.B. die Mehrheit die „... Möglichkeit, dass das Kontinuum aus einer Gesamtheit von Punkten bestehen könne“.⁵⁹

Nikolaus von Kues (1401-1464), latinisiert Nicolaus Cusanus, überträgt am Beginn der Renaissance und früher Neuzeit theologische und philosophische Ansichten auf mathematische Probleme. Er geht durchaus neue Wege vom Spätmittelalter hin zur beginnenden neuen Epoche und kann als erster Humanist bezeichnet werden. Er vertrat Ansichten, für die Galilei verurteilt wurde, wie das heliozentrische Weltbild und dass Sterne ferne Sonnen sind. Aber er war ein erfolgreicher Repräsentant der Kirche, Kardinal und als päpstlicher Legat war er jedoch weniger angreifbar. Cusanus war Vertreter der römisch-katholischen Kirche beim Konzil von Ferrara-Florenz zur Aussöhnung zwischen Rom und Byzanz.⁶⁰

Cusanus hinterfragte festgefahrene Ansichten: Vergrößert man nämlich einen Würfel der Kantenlänge 1 kontinuierlich zu einem der Kantenlänge 2, so muss irgendwann dazwischen das Volumen 2 mit der Kantenlänge $\sqrt[3]{2}$ erreicht werden. In der euklidischen Geometrie wurde $\sqrt[3]{2}$ nicht als reelle Zahl betrachtet,

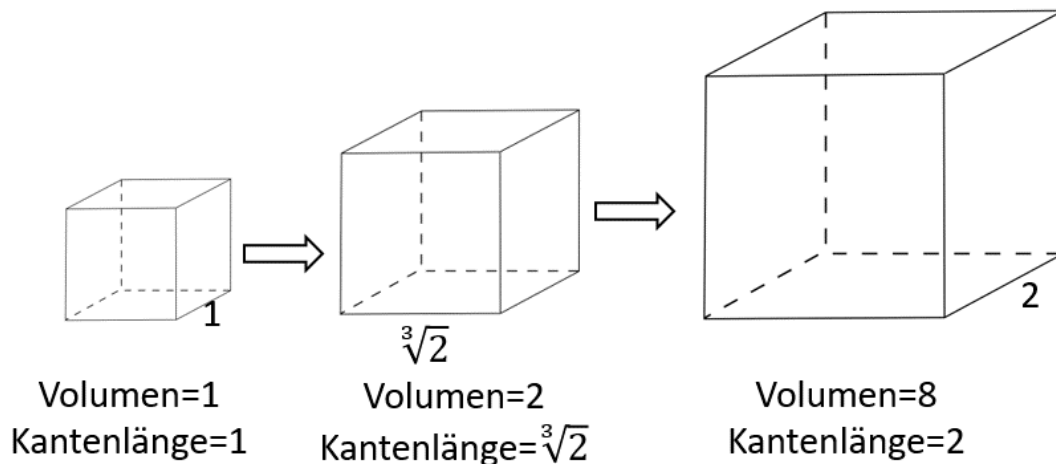


Abb. 14: Cusanus bejahte erstmals die philosophisch umstrittene Frage, ob sich eine irrationale Zahl höherer Ordnung wie $\sqrt[3]{2}$ in der Realität geometrisch darstellen lässt.

da man sie nicht konstruieren konnte. Räumliche Größen mussten immer endlich und darstellbar sein und unterlagen dem Zahlenbegriff, den erst Dedekind überwand (s.u.).

⁵⁹ Zellini, Paolo, ebenda, S. 65

⁶⁰ Inhalt des Abschnitts siehe Brian Clegg, ebenda, S.140; dort findet sich auch die analoge Grafik, die im Wesentlichen kopiert wurde.

So stellt er der reinen Bücherweisheit praktisches oder besser praxisorientiertes Wissen zur Seite. Als Forum sieht er den Marktplatz, wo Geld gezählt, Ware abgewogen, Öl abgefüllt wird, also gemessen wird.⁶¹ Ganz ähnlich zu Galilei Galileo war seine Ablehnung von Aristoteles und seine Bewunderung für Platon. In Analogien zu zahlreichen arithmetischen und geometrischen Fragestellungen will er zeigen, dass wir mit unserem beschränkten, endlichen Verstand Gott nicht nahekommen können. Die aktuelle Einheit des Unendlichen können Menschen nicht erfassen. Beschreibt man z.B. in einen Kreis ein Polygon mit immer mehr Ecken ein, so ist es dennoch unmöglich beides zur Deckung zu bringen. Auch eine Quadratur des Kreises gehört zu diesen Problemen, an denen er sich in mehreren Werken versucht hat, obwohl dieses tatsächlich unmöglich ist. Aber erfolgreich war seine Approximation des Kreises durch kleine Segmente/„Kuchenstücke“, die man versetzt aufeinanderlegen kann (Abb. 13). Es entsteht in der Näherung ein Rechteck, das ca. $\pi \cdot r$ hoch und r breit ist; also die Fläche ungefähr πr^2 hat. Doch seine 2. Methode ist besser (Abb. 15).

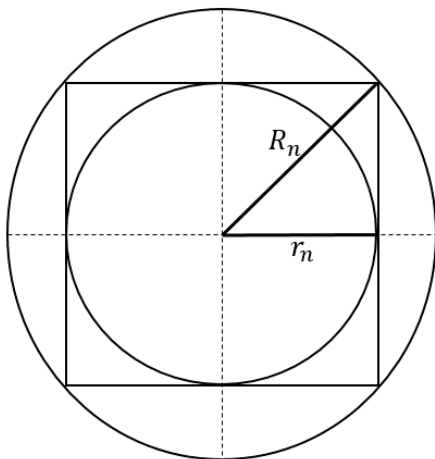


Abb. 15: Verfeinerte Methode

Archimedes ging von einem festen Kreis aus und näherte diesen durch Polygone an. Cusanus machte es umgekehrt. Er ging von einem Polygon der festen Länge 2 mit $n = 2^k$ Ecken aus (wobei $2^k=4, 8, 16, 32, \dots$) und zwei in- und umbeschriebenen Kreisen. Der innere Kreis hat für jedes n den Umfang $2\pi r_n$; der äußere Kreis $2\pi R_n$. Abb. 15 ist mit $n=4$ (Quadrat) dargestellt. Beim Quadrat ist $r_4 = \frac{1}{4}$ und $R_4 = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Somit ist allgemein

$$2\pi r_n < 2 < 2\pi R_n \quad \text{oder} \quad \frac{1}{R_n} < \pi < \frac{1}{r_n}$$

Mittels elementarer Geometrie (Sehne im regelmäßigen $2n$ -Eck und Kathetensatz) findet man die Iterationsvorschriften⁶²

$$r_{2n} = \frac{R_n + r_n}{2} \quad \text{und} \quad R_{2n} = \sqrt{R_n \cdot r_{2n}}$$

$$\text{Im Fall } 2^{15}=32768 \text{ ist } \frac{1}{R_{2n}} = 3,141592652 \text{ und } \frac{1}{r_{2n}} = 3,141592656$$

⁶¹ Freely, John; Platon in Bagdad; dt. Ausgabe Klett-Cotta, Stuttgart, 2012, S. 231

⁶² Siehe <https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/cusanus-algorithmus-zur-berechnung-von/1667> oder <https://www.herder-oberschule.de/madincea/aufg0009/cusanus.pdf>

und die Abweichung von $\pi=3,141592653\dots$ beträgt 0,000000001.

Es ist beides eine Anwendung von dem, was später Indivisiblen genannt wird und im 17. Jahrhundert einen regelrechten Hype in der Mathematik ausgelöst hat. Es wurde von Newton praxisorientiert mit epochalem Erfolg angewendet und von Leibniz mathematisch ausgearbeitet.

Auch wenn das Thema „unendlich“ in der arabischen oder indischen Mathematik kaum eine Rolle spielt, hatte das weit entwickelte mathematische Wissen erheblichen Einfluss auf das Abendland. Im Gegensatz zu Europa mit Ausnahme des maurischen Teils der iberischen Halbinsel war die Mathematik im Islam schon deutlich, nämlich mehrere Jahrhunderte, früher ausgeprägt. Mitte des 8. Jahrhunderts begann die Herrschaft der Abbasiden und Bagdad wurde gegründet. Dank der Förderung von Hārūn ar-Raschīd und seines Sohns al-Ma'mun begann eine Blüte der Wissenschaften inklusive der Mathematik. Al-Ma'mun hatte bereits begonnen griechische und indische Werke ins Arabische übersetzen zu lassen. Mit dem im Jahr 825 n.Chr. gegründeten „Haus der Weisheit“ (dār al-ḥikma), einer Art Akademie, wurde seine Zielsetzung institutionalisiert.⁶³ Das große Reich der Abbasiden spaltete sich aber und das hatte auch Auswirkungen auf die mathematische Entwicklung. Hans Wußing sieht den östlichen Teil als weiter entwickelt an. So ist die Trigonometrie nicht nach Westen vorgedrungen. Auch haben sich die indischen Ziffern in zwei Ausprägungen in ostarabische und westarabische Schreibweisen weiterentwickelt. Der unterschiedliche Wissensstand gilt aber nur für die Mathematik. Die eroberte Bibliothek von Córdoba enthielt beispielsweise 400.000 Werke. Trotzdem hat die westarabische Kultur mehr Einfluss auf das Europa des Mittelalters genommen.

Der erste Schritt war eine ausgedehnte Übersetzungstätigkeit. Sie betraf primär die griechisch-hellenistische Mathematik. Auch indische und persische Werke vor allem im Bereich der Astronomie wurden übersetzt. Chinesische und indische mathematische Werke enthielten oft praxisnahe Beispiele, Aufgaben und Methoden. Auf diesem Fundus an Wissen bildete sich spätestens ab Mitte des 9. Jahrhunderts eine eigenständige mathematische Kultur heraus. Es fällt auf, dass die Systematik und die Beweismethoden der hellenistischen Mathematik darin rasch einen hohen Stellenwert einnahmen.

Eine Reihe von islamischen Universalgelehrten haben in der arabischen Welt mathematische Werke geschaffen, deren Qualität in Europa erst wieder in der Renaissance erreicht wurde. Dabei war die Mathematik nur eines von mehreren ihrer philosophischen Interessengebieten. Angelehnt an Wußing, werden hier stellvertretend einige Namen genannt: al-Kindī, al-Fārābī, Al-Bīrūnī, ibn Sīnā

⁶³ Wußing ebenda, S. 223 f

(Avicenna), Ibn Rušd (Averrhoës), Ibn Chaldūn al-Hadramī und der jüdische Philosoph Rabbi Moses ben Maimon (Maimonides). Besondere Bedeutung nimmt Al-Chwarizmi mit seiner Algebra ein. Abu Dscha'far Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi (auch al-Choresmi – lateinisiert Algorismi) ist praktisch der Namensgeber des Begriffs „Algorithmus“. Das Europa der Renaissance bezieht sich explizit auf Al-Chwarizmi. Er schrieb die früheste muslimische Arithmetik, die sich auf das indische dezimale Zahlensystem bezieht. Das Original ist verloren gegangen, aber in New York wurde eine vollständige lateinische Fassung entdeckt.⁶⁴ Es entwickelten sich aus den indischen Ziffern die ostarabische und die westarabische Schreibweise. Die ostarabische Notation wird heute in der ganzen arabisch schreibenden Welt bis nach Marokko im Westen verwendet und Zahlen werden dort indische Ziffern genannt. Die indisch-westarabischen Ziffern wurden nach Modifikationen im 15. und 16. Jahrhundert unsere heutige westliche Zahlenschreibweise und werden arabische Ziffern genannt. Auch die indische Mathematik stand teilweise unter islamischem Einfluss – im Jahr 1206 entstand das Sultanat von Delhi. Doch auch unabhängig vom islamischen Einfluss entstanden bemerkenswerte Erkenntnisse, die oft mit dem leistungsfähigen Dezimalsystem erreicht wurden. Von dem deutschen Mathematikhistoriker Karl Menninger stammt das Zitat: *Wir sprechen deutsch, wir schreiben römisch und wir rechnen indisch.*⁶⁵ Großen Einfluss hatte und hat bis heute die Astrologie und damit verbunden die Astronomie. Das Observatorium in Jaipur (Rajasthan) ist ein Areal mit hochgenauen Instrumenten. Die Sonnenuhr ist bezogen auf moderne Uhren bis auf zwei Sekunden am Tag genau.

Indisch-stämmige Terminologie hat sich über eine Reihe von skurrilen Zwischenformen und Verballhornungen bis heute erhalten (z.B. beim Sinus). Der „*Kranz der Wissenschaften*“ von Bhāskara II (1114-1185?) gilt als methodischer Standard über mehrere Jahrhunderte und als Meilenstein in Arithmetik, Geometrie, Algebra und Astronomie.⁶⁶

In der Folge wurden besonders in der ostarabischen Mathematik Spitzenleistungen insbesondere in der Algebra erreicht, aber auch Lösungen zur Geometrie bzw. Trigonometrie und zur Zahlentheorie gefunden. Zu nennen sind Abū Kāmil, al-Karaǧī, as-Samaw'al, Omar Chayyām, Šaraf-ad-Dīn, Našīr ad-Dīn aṭ-Ṭūsī, oder Jamshīd al-Kāshī. Wußing weist darauf hin, dass im Gegensatz zu griechisch-hellenistischen Quellen sich noch viele nicht ausgewertete Schriften in arabischen und persischen Depots befinden.

⁶⁴ Wußing ebenda, S. 232-241

⁶⁵ Karl Menninger, *Zahlwort und Ziffer*, Eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen, 1958, zitiert nach Wußing, ebenda, S. 97. (Menninger promovierte übrigens über Bernhard Bolzano und war temporär Gastdozent an der Universität Gießen.)

⁶⁶ Wußing ebenda, S. 94

Beispiele sind vier Bücher von Diophant in arabischer Sprache, gefunden in den 1970er Jahren oder eigenständige Werke zur Infinitesimalrechnung, die offenbar in der Tradition des Archimedes stehen. Das zeigt, dass arabische Gelehrte, aufsetzend auf damals verfügbarem antiken Wissen, selbständige Forschung betrieben.

Infinitesimalrechnung bei Newton und Leibniz

In der Scholastik hat Aristoteles die Naturphilosophie dominiert. Pragmatismus und „gesunder Menschenverstand“ behinderte oft mathematische Abstrahierung. Erst die Renaissance verhalf dem Platonismus wieder zu mehr Gewicht und „unendlich“ oder das Infinitesimale rückte wieder stärker in den Fokus. Johannes Kepler nannte es die göttliche „*Brücke der Kontinuität zwischen dem Gekrümmten und dem Geraden*“.⁶⁷ Er wendete Infinitesimale relativ unbekümmert bei der Berechnung eines Weinfasses an. Er sah aber die Verwandtschaft von Ellipsen und Parabeln, in dem der eine Brennpunkt einer Ellipse ins Unendliche wandert, entsteht eine Parabel. Auch Galileo Galilei und Pierre de Fermat lösten sich von der starren Struktur der euklidischen Geometrie, brachen aber nie vollständig mit der Tradition. Man beachte auch die Bewunderung für das Unendliche von Blaise Pascal in seinen *Pensées*, Aphorismus 72, „*Über die beiden Unendlichkeiten*“ (siehe Zitat am Anfang dieses Beitrags). Weitere Vorläufer sind laut Wallace: „1629 - P. de Fermats Verfahren zur Bestimmung der Maximal- und Minimalwerte einer Polynomkurve; um 1635 – G. P. de Robervals Entdeckung, dass die Tangente einer Kurve als Funktion der Geschwindigkeit eines sich bewegenden Punktes darzustellen war, dessen Pfad die Kurve bildete; 1635 – B. Cavallieris Verfahren der Unteilbarkeiten zur Berechnung der Flächen unter Kurven; 1664 – I. Barrows geometrisches Tangentenverfahren.“⁶⁸ Für Newton war die Dynamik das Entscheidende, nicht die Geometrie. Natürlich musste er sich den Gepflogenheiten der damaligen Zeit beugen und hat alle Beweise in der „*Principia*“ geometrisch geführt. Er hat dabei die Hinweise auf seine Fluxionsrechnung bis zur Unkenntlichkeit entfernt.⁶⁹ Das dürfte auch der Grund gewesen sein, wieso er seine „Fluxionsrechnung“ so spät veröffentlichte. Dynamik bedeutete für Newton, dass er nicht die Kurve im Mittelpunkt sah, sondern den Punkt, der sich auf der Kurve mit entsprechender Geschwindigkeit

⁶⁷ Zitiert nach Jim Holt, *Als Einstein und Gödel spazieren gingen*, Rowohlt, Hamburg, 2020, S. 217, siehe auch weitere Ausführungen ebenda

⁶⁸ Wallace, David Foster; *Die Entdeckung des Unendlichen*, Piper München Zürich, 1. dt. Auflage 2007, S. 164-165

⁶⁹ Es gibt die Anekdote, dass selbst Richard Feynman in einer Vorlesung über die „*Principia*“ dabei ins Stolpern geriet.

bewegte. Dies ändert nichts an der Tatsache, dass sowohl Newton als auch Leibniz erkannt hatten, dass Steigungen berechnen und Flächeninhalte unter Kurven zu bestimmen, inverse Methoden darstellen.

In drei Publikationen hat Newton unterschiedliche Wege zur Infinitesimalrechnung veröffentlicht:

- die Momentenmethode
- die Fluxionsmethode und
- die Methode der ersten und letzten Verhältnisse

Meist wird aber, vor allem in der populärwissenschaftlichen Sekundärliteratur, nur von der Fluxionsrechnung gesprochen. Zentraler Punkt ist die „Momentangeschwindigkeit“.

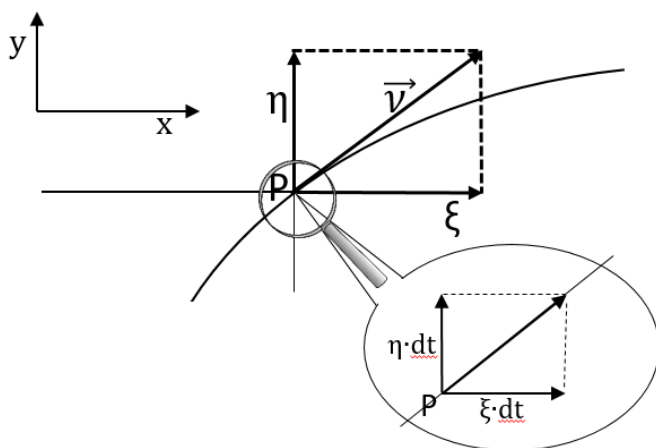


Abb. 16: Bei Newtons Methode der „ersten und letzten Verhältnisse“ stimmt der Begriff der „letzten Verhältnisse“ mit der Definition von Leibniz für den Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten überein.

Größen gesehen werden, nämlich der Entfernung und der Zeit. Dies ist bei Betrachtungen zum freien Fall noch einfach. Newtons großartige Leistung ist die Tatsache, dass er das Prinzip auf elliptische Planetenbahnen mit der Sonne in einem Brennpunkt angewendet hat und daraus die Kepler'schen Gesetze ableiten konnte. Sie beruhen auf wohldefinierten, bestätigten, astronomischen Beobachtungen, insbesondere von Tycho Brahe. Newton hat

damit irdische Physik und Himmelsmechanik in einer Theorie zusammenführen können.

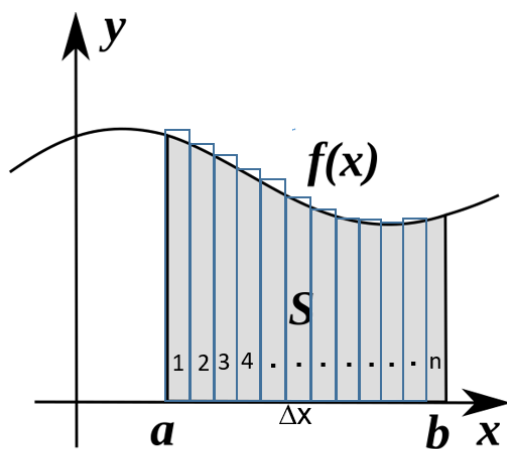
Bei „*Momenten*“ geht es um unmittelbare, festgelegte Veränderungen eines Parameters in der Bewegung von Körpern, die sich in einer Funktionskurve widerspiegeln, also Erhöhung (englisch increment) oder Verminderung (englisch decrement). Sie entsprechen dem Differential von Leibniz.

Zeitabhängige Variable x, y, \dots nennt Newton „Fluente“ und bestimmt daraus „Fluxionen“, \dot{x}, \dot{y} , die Geschwindigkeiten entsprechen.

Bei der Methode der ersten und letzten Verhältnisse stimmt der Begriff der „letzten Verhältnisse“ mit der Definition von Leibniz für den Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten überein (s. Abb. 16).

Damit hatte Newton Basisbegriffe der Infinitesimalrechnung entwickelt. Sie ermöglichten die mathematischen Beziehungen zwischen Fluxionen und Fluents zu konstruieren und damit Differentiation umzukehren bzw. eine Differentialgleichung zu integrieren. So ließen sich Maxima und Minima von Kurven oder deren Krümmung errechnen. Das war das mathematische Rüstzeug, um Gravitation und dann weitergehend die Himmelsmechanik mit seiner 1687 veröffentlichten „Prinzipia“ (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*)⁷⁰ zu revolutionieren.⁷¹

Leibniz kommt der modernen Auffassung näher, bleibt aber theoretisch. Sein zentrales Motiv ist seine Monadentheorie. Monade steht wie bei den Vorsokratikern für kleinste Einheiten sowohl im stofflichen als auch nicht-



$$S \approx \sum_{i=0}^n f(a + i \cdot \Delta x) \cdot \Delta x$$
$$S = \int_a^b f(x) dx \quad \text{für } \Delta x \rightarrow 0$$

Abb. 17: Integration durch Approximation mit immer schmäler werdenden Rechtecken (moderne Notation)

stofflichen Bereich. Schon vor Leibniz sind aber mathematische Überlegungen in die Theorie eingeflossen, die er besonders stark ausgebaut hat. Monade steht bei Leibniz auch für das unendlich Kleine. Für Leibniz ist die Mathematik des unendlich Kleinen eine wesentliche Ergänzung und Erweiterung seiner Philosophie. Für Newton ist die Mathematik unverzichtbar für die Analyse von Kräften und ihren Einfluss auf Bewegung. Er geht pragmatisch vor und hat damit große Erfolge in der Physik. Der Prioritätenstreit zwischen Newton und Leibniz um die Entwicklung der Infinitesimalrechnung wird heute unentschieden gewertet. Aber beide hatten vollkommen unterschiedliche Motivationen.⁷²

Das im Prinzip erste Manuskript von Leibniz stammt aus dem Jahr 1676 oder etwas früher. Er wollte es eigentlich in Paris veröffentlichen, musste aber abreisen und deponierte es bei einem Freund. Dieser verstarb jedoch; das Manuskript wurde zwar an Leibniz nach Hannover geschickt, ist aber unterwegs

⁷⁰ Deutsch: https://de.wikisource.org/wiki/Mathematische_Principien_der_Naturlehre

⁷¹ Siehe auch Franz Pichler, Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung bei Newton und Leibniz als mathematische Grundlage für die Himmelsmechanik, <http://www.cast.uni-linz.ac.at/Pubs2004>

⁷² Es erinnert etwas an den kurzfristig ausgetragenen Prioritätenstreit zwischen Einstein und Hilbert um die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie.

verloren gegangen. Leibniz hatte aber eine komprimierte Kopie, die er aber nicht ausarbeitete. Diese handschriftliche Kopie wurde erst 1973 editiert und damit fast 300 Jahre später veröffentlicht!⁷³ Sie war aber dadurch hilfreich, um den Erkenntnisprozess heute nachvollziehen zu können. Leibniz hatte nämlich inzwischen neue Ergebnisse, darunter besonders die neue Notation. Er hielt es nicht für nötig, seine persönlichen Notizen wieder zu reaktivieren und schrieb die Abhandlung neu. Die Grundzüge der Differentialrechnung entwickelte dann Leibniz in seiner 1684 in den Acta Eruditorum erschienenen Arbeit „*Nova methodus pro maximis et minimis*“.⁷⁴ Die Integralrechnung entwickelte er in „*geometria recondita et analysis indivisibilium atque infinitorum*“ (1686).⁷⁵ In dieser Veröffentlichung verwendete Leibniz erstmals das Integralzeichen als stilisiertes „S“, wie Summe.

Die von Leibniz gewählte Zeichensetzung für das Differential und für das (unbestimmte) Integral erwiesen sich als sehr praktisch. Er verwendete als Bezeichnung für sehr kleine Unterschiede ein "d" (für lat. differentia = Unterschied). Dies ist bis heute erhalten geblieben. Man konnte damit ein „Kalkül“ entwickeln, in dem man aus formalen, regelbasierten Aussagen wieder logische Schlüsse ziehen konnte, ohne diesen Prozess verbalisieren zu müssen. Deshalb hat sich die Schreibweise und die damit verbundene Denkweise in Kontinentaleuropa durchgesetzt und die heutige Infinitesimalrechnung fußt im Wesentlichen auf der Methode bzw. der Terminologie von Leibniz. Dies gilt auch bedingt für die Integration. Das stilisierte „S“ soll daran erinnern, dass die Fläche unter einer Kurve zunächst durch endlich viele Rechtecke angenähert wurde. Durch Grenzwertbildung hin zu unendlich vielen, immer schmalere Rechtecke wird der Fehler immer kleiner. Auf Leibniz geht die Bezeichnung "integrieren" (lat.: integrare = wiederherstellen) zurück. Er wählte diese Bezeichnung, weil von einer Kurve, von der die Tangentensteigung durch Differenzieren ermittelt wurde, mit der Integration die ursprüngliche Kurve wiedererhalten werden kann.

Dies nennt man heute den „Hauptsatz der Analysis“. Leibniz grenzt sich jedoch z.B. von Galileis *non quanta* stark ab. Für ihn war dx wirklich eine unendlich kleine Größe, nämlich kleiner als alles Messbare. Er hat aber die Fallstricke des Unendlichen gesehen, wollte aber bei den Indivisiblen etwas Berechenbares erhalten, das man in Gleichungen behandeln kann. Seine Notation lässt dies zu und hat sich bewährt. Trotzdem musste man von der verwendeten Sprache wegkommen.

⁷³ Brian Clegg, ebenda, S. 150

⁷⁴ Englisch/Latein: <http://17centurymaths.com/contents/Leibniz/nova1.pdf>

⁷⁵ <https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/mathematical-treasure-leibnizs-papers-on-calculus-integral-calculus>

Newton hat physikalisch argumentiert. Mit Fluidität und Bewegung musste er nicht von immer kleineren Teilen sprechen. Ein Punkt bewegte sich auf der Kurve; Bewegung und Veränderung der Richtung waren interessant für die Betrachtung der Kräfte, scheinbare Division durch Null kam somit bei ihm nicht vor. Man kann sagen, dass sowohl Newton als auch Leibniz zeitlebens große Bedenken gegen die Methode hatten. Newton erwähnte sie gegen Ende seines Lebens nicht mehr; Leibniz blieb seinem Wahlspruch treu: *natura non fecit salta* (Die Natur macht keine Sprünge). Unendliche Größen seien *fictiones bene fondatae* (gut begründete Fiktionen).⁷⁶

Beide bewiesen bewundernswerte geniale Intuition, aber beiden Methoden fehlt ein solides theoretisches, mathematisches Fundament. Leibniz und seine Anhänger konnten Größen unendlich nahe bei null, (aber eben nicht gleich null), nicht fundiert erklären. Newton und seine Bewunderer behaupteten, unendlich kleine Größen würden nicht verwendet. „Fluxionen“ seien ja nur die Rate der Änderungen von zeitabhängigen Variablen. Hier wurden aber nur winzigste Strecken gegen winzigste zeitliche Momente ausgetauscht. Der mathematische Grundkonflikt bleibt in beiden Fällen und wurde erst durch Cauchy und schließlich durch Weierstraß aufgelöst. Sie erarbeiteten eine Methode, die die Grenzwertbildung klar herausarbeitet und sie von diffusen Begrifflichkeiten befreit hat.

Dies soll die Leistung der beiden Forscher nicht schmälern, sondern lediglich relativieren. Die Infinitesimalrechnung markiert im Prinzip den Beginn der höheren Mathematik und ist über die reine Mathematik hinaus die Basis für zahlreiche Anwendungen in unterschiedlichsten Disziplinen geworden.

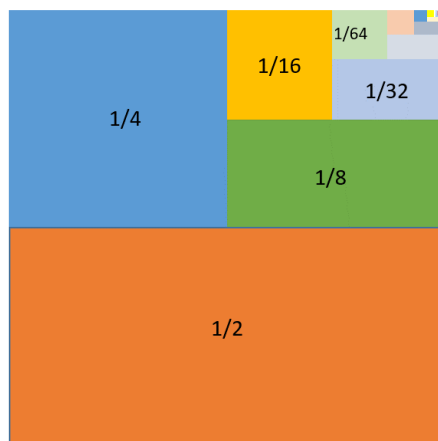


Abb. 18: Quadrat mit Seitenlänge 1

Das unendlich Kleine begegnet uns allerdings z.B. heute noch bei der Frage:

Was ist $0,9999\dots$ oder $0,\bar{9}$
(gesprochen 0,9 Periode)?⁷⁷

Man kann den Beweis, dass $0,\bar{9}=1$ ist, geometrisch führen: Im Binärsystem entspricht $0,\bar{9}$ bekanntlich $0,1111\dots$ und ist somit die Fläche eines Quadrates ohne den roten Punkt in der rechten oberen Ecke. Da Punkte keine Fläche haben ergibt sich 1. Dies ist das Ergebnis einer geometrischen Reihe der Form:

⁷⁶ Zitiert nach Jim Holt, ebenda, S. 221

⁷⁷ Siehe dazu Spektrum der Wissenschaft Kompakt, UNENDLICH, 05/20, S. 34

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

Es geht natürlich auch umständlicher über das Dezimalsystem:

$$0,\bar{9} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \dots = \frac{9}{10} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$$

Rechnen mit dem Unendlichen

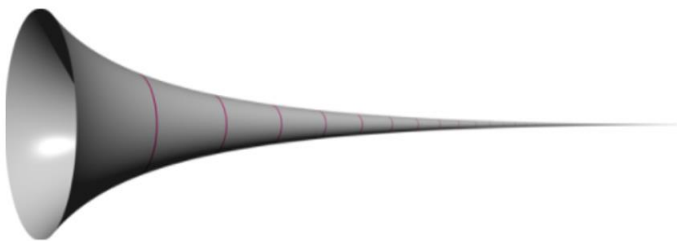
Die Infinitesimalrechnung brachte Leibniz durchaus Kritik ein. Er setzte dx am Ende der Umformungen gleich Null, obwohl er vorher durch dx dividiert hatte. Trotzdem überzeugte der Grundansatz und eine Reihe von bedeutenden Mathematikern verfolgte seinen Ansatz in der Infinitesimalrechnung weiter.

Doch auch vorher und nachher gab es wichtige Beiträge zur Mathematik, bei denen potentiell unendliche Werte eine Rolle spielten. Es werden hier einige wichtige Mathematiker kurz angesprochen.

Giordano Bruno (1548-1600) sah im aktual Unendlichen einen Widerspruch in sich. Unendlich könne bestenfalls nur potentiell unendlich bzw. unbegrenzt heißen. Von der göttlichen Substanz könne man wegen ihrer Unendlichkeit nur Spuren oder die fernen Wirkungen erkennen.

Auf Evangelista Torricelli (1608-1647) geht ein seltsamer Körper zurück, der Torricellis Trompete genannt wird. Man betrachte die hyperbolische Funktion $y = \frac{1}{x}$, für $x \geq 1$ und rotiere um die x -Achse. Das Volumen sei V und die Mantelfläche A .⁷⁸

$$V = \pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi$$
$$A = 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^4}} dx > 2\pi \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \infty$$



Der Körper hat also ein endliches Volumen der Größe π und eine unendlich große Mantelfläche A .

Abb. 19: Torricellis Trompete (oder Gabriels Horn)

⁷⁸ Bildquelle und Rechnung siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Gabriels_Horn

Galileo Galilei (1564-1642) wurde schon früh bewusst, dass es eine 1:1-Beziehung zwischen den natürlichen Zahlen und den Quadratzahlen gibt. Schon damals wurde Galilei klar, dass Bezeichnungen wie „größer als“, „kleiner als“ oder „gleich“ bei unendlichen Mengen wenig Sinn machen. Doch weitergehende Gedanken hat er erst nach der Veröffentlichung seines Hauptwerkes *Dialog über die beiden hauptsächlichsten Weltsysteme, das ptolemäische und das kopernikanische* (1632) zu Papier gebracht. Dieses Werk führte zu seiner Verurteilung durch die Inquisition. Er wurde zu lebenslangem Hausarrest verurteilt. Das nun vorgelegte Spätwerk war deshalb unabhängig vom Inhalt brisant, um nicht zu sagen lebensgefährlich. Sowohl die Publikation an sich, die in den italienischen Stadtstaaten abgelehnt wurde, als auch die Form eines Dialogs, wie bei seinem Hauptwerk, boten Zündstoff genug. Das Buch wurde schließlich in Leyden 1638 unter dem Titel *Unterredungen und mathematische Demonstrationen über zwei neue Wissenszweige, die Mechanik und die Fallgesetze betreffend*, gedruckt. Die Gesprächspartner sind Salviati, mit den Ansichten Galileis, Sagredo als eher neutraler Beobachter und Simplicio, nicht dumm, aber rückwärts bis zur Antike gewandt, ein typisches Kind der Scholastik. Die Überlegungen in Dialogform zum „Unendlichen“ sind

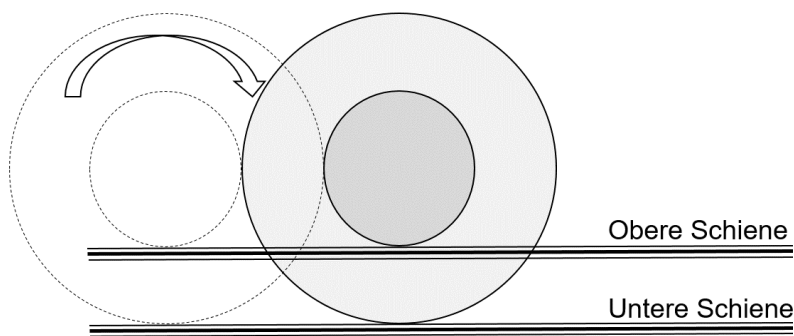


Abb. 20: Galileis Gedankenexperiment zu Infinitesimalen

etwa 20 Seiten lang. Sie ranken sich vor allem um ein Gedankenexperiment. Zwei Räder, ein großes und ein kleines Rad, sind miteinander verbunden, aber laufen durch einen technischen Trick auf **getrennten**

Schiene.⁷⁹ Im ersten Schritt sollen sie zur Veranschaulichung achteckig sein. Dreht sich das große Rad auf die folgende Achteckseite, so dreht sich das kleine ebenfalls weiter, aber es entsteht eine Lücke bis beide auf der jeweils folgenden Achteckseite liegen. Dann nehmen sie im nächsten Schritt die fast perfekte Kreisform mit 100.000 Seiten ein. Wieder entstehen Lücken, aber 100.000 viel kleinere Lücken. Das kleine Rad rollt über 100.000 Strecken plus 100.000 Lücken. Doch wenn man zur perfekten Kreisbahn übergeht, so rollt das große und das kleine Rad zwar stetig, aber wenn das große Rad z.B. einen Viertelkreis zurücklegt, so tut dies das kleine Rad auch. Allerdings ist der Umfang deutlich unterschiedlich. Wo bleiben nun die Lücken? Es ist eine unendliche Zahl

⁷⁹ Selbst erstellte Grafik nach einer Skizze bei Brian Clegg, ebenda, S. 132

infinitesimaler Lücken. Wie zu erwarten, protestiert Simplicio, aber Salviati kann argumentieren, dass man unterschiedlich „großen“, unendlichen Zahlen tatsächlich die gleiche Unendlichkeit zuschreiben kann. Galilei kann hier das Rätsel noch nicht ganz auflösen, aber er hat mit einem Problem, das nicht aus der Zahlentheorie kommt, sondern aus der mechanischen Praxis, den theoretischen Kern beim Übergang zum Unendlichen adressiert.

Zu nennen ist John Wallis (1616-1703), auch durchaus ein Universalgelehrter, der das Zeichen für „Unendlich“ einführte (s.o.). Wallis soll deutlichen Einfluss auf Newton gehabt haben und trug offenbar dazu bei, dass Newton von ihm Impulse zur Entwicklung der Infinitesimal- bzw. Fluxionsrechnung bekam. Seine *Arithmetica Infinitorum* von 1656 soll Newton 1664/65 studiert haben.⁸⁰ Bekannt ist seine direkte Integration des Einheitskreises $(1 - x^2)^n$ für $n=1/2$ durch Interpolation. Sie führte zu einer Formel und möglichen Näherung für π , die als Wallis'sches Produkt bekannt wurde. Er verbessert damit eine deutlich umständlichere Methode von François Viète (latinisiert Franciscus Viëta, 1540-1603):

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8^2}{7 \cdot 9} \dots$$

Leonhard Euler (1707 bis 1783) war ein enorm produktiver Mathematiker, aber er lieferte auch eine Fülle von Beiträgen zu anderen Gebieten. So beschäftigte er sich, der griechischen Tradition folgend, mit Musiktheorie, mit Hydromechanik, Optik, Belastungsuntersuchungen an stabförmigen Bauteilen und der Beschreibung des Kreisels. Er mathematisierte und systematisierte militärische Anforderungen bei der Artillerie.

Viele wichtige Symbole hat er in der mathematischen Terminologie etabliert. Dazu gehören die Kreiszahl π , das Summenzeichen \sum , die imaginäre Einheit $\sqrt{-1}=i$ oder, infolge seiner intensiven Beschäftigung mit Funktionen, wählte er $f(x)$ als Symbol für einen Funktionsterm. Hier unendliche Reihen für e^x und π :

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} \dots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

Sein 1748 veröffentlichtes Buch "*Introductio in Analysin Infinitorum*" (Einführung in die Analysis des Unendlichen) über Funktionen gilt als sein Grundlagenwerk. Dort ist auch eine Herleitung für die Zahl "e" (als Abkürzung für „Exponentialbasis“) zu finden.

⁸⁰ https://de.wikipedia.org/wiki/John_Wallis

Um einen Einblick in seine Argumentation in diesem Werk zu gewinnen, sei hier ein Paragraph beispielhaft wörtlich zitiert:

"§ 114

Da $a^0 = 1$ ist, und mit wachsendem Exponenten zugleich auch der Wert der Potenz zunimmt, falls a eine Zahl grösser als 1 ist, so folgt daraus, dass, wenn der Exponent unendlich wenig grösser ist als 0, auch die Potenz die Einheit nur um unendlich wenig übersteigen wird. Ist daher ω eine unendlich kleine Zahl [...], jedoch von 0 verschieden, so wird $a^\omega = 1 + \psi$, wenn ψ ebenfalls eine unendlich kleine Zahl bedeutet; [...]. Es ist somit entweder $\psi = \omega$ oder $\psi > \omega$ oder $\psi < \omega$ und zwar wird dies offenbar von der Grösse von a abhängen. Da nun a noch unbekannt ist, so wollen wir $\psi = k\omega$ setzen. [...]"^{81,82}

Es werden formal korrekte Voraussetzungen zur Berechnung von e genannt,

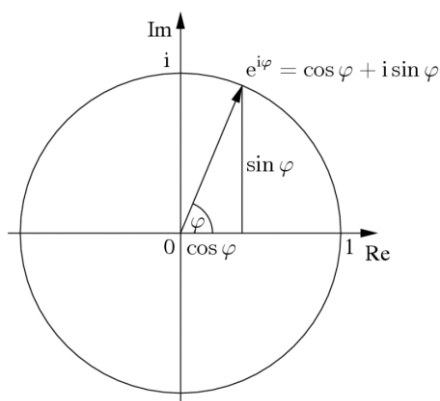


Abb. 21: Geometrische Interpretation der Euler'schen Formel anhand des Einheitskreises.

aber in unserer Zeit kommt uns die Verwendung des Begriffes „unendlich“ höchst ungewohnt vor.

Johann Bernoulli (1667-1748) kann man als Mathematiker bezeichnen, der regelrecht Werbung oder Reklame für die neue Disziplin der Infinitesimalrechnung machte. Zu seinen Schülern zählte Leonhard Euler oder der Marquis de L'Hôpital.

Jakob Bernoulli (1654-1705, älterer Bruder von Johann) studierte u.a. Werke von John Wallis und wurde ebenfalls zum Verfechter der neuen Infinitesimalrechnung. Aber auch in anderen mathematischen Disziplinen nutzte er

den Umgang mit dem Unendlichen.

In Frankreich brachte Guillaume François Antoine, Marquis de L'Hôpital (1661–1704, Schreibweise auch L'Hospital mit s) im Jahr 1696 das erste Lehrbuch der Differentialrechnung heraus. Das Werk trägt den Namen „*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*“.

Johann Carl Friedrich Gauß (latinisiert Carolus Fridericus Gauss; 1777-1855) arbeitete an vielen Themen, aber veröffentlichte erst dann, wenn die von ihm ausgearbeitete Theorie vollständig war. Bei der Begründung der komplexen Analysis hatte er schon fundamentale Ergebnisse gemäß Auswertung seines

⁸¹ Zitiert nach <http://www.nichtstandard.de/euler.html>

⁸² Quelle der Abb. 21: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler's_formula.png

Tagebuchs erzielt, aber Augustin-Louis Cauchy war ihm in den Jahren 1821 bzw. 1825 mit der Publikation zuvorgekommen. Trotzdem waren seine Ergebnisse zu komplexen Funktionen hilfreich für die weitere Entwicklung auch der Analysis. Dem „Unendlichen“ stand er skeptisch gegenüber: „*Ich verabscheue es, wenn ein unendliches Objekt wie ein vollständig gegebenes Objekt verwendet wird. In der Mathematik ist diese Operation verboten; das Unendliche ist nur eine Redensart.*“⁸³

Die Beiträge von Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) zu wesentlichen Teilen der Mathematik sind kaum zu überschätzen. Er hat, beginnend bei den Ergebnissen von Newton und Leibniz, die Analysis auf komplexe Funktionen ausgedehnt und dabei eine Fülle an Ergebnissen erzielt. Pro Woche soll er eine Veröffentlichung eingereicht haben. Cauchy beseitigte konsequent die intuitive Argumentation mit infinitesimalen Einheiten. In seinen Vorlesungen *Cours d'analyse de l'École Polytechnique* (1821) führte er Grenzwerte zur Definition der Stetigkeit und Differenzierbarkeit ein und vermied dadurch schwammige Begriffe wie das unendlich Kleine. Ein Problem konnte jetzt exakt definiert und bewiesen werden. Die oft intuitiv benützte Infinitesimalrechnung wurde nun zur strengen Analysis. Er führte im *Cours d'Analyse* die Definition der Ableitung als Grenzwert ein. Bei der Grenzwertbetrachtung vermied er durch die verwendete Terminologie diffuse Begriffe, wie das unendlich Kleine. Cauchy zeigte, dass man die Ableitung nicht durch Taylor-Reihen definieren kann, wie es Lagrange und Laplace getan haben. Taylor-Reihen sind Potenzreihen, mit denen man in der Umgebung eines Funktionswertes diesen annähern kann.

Unter den führenden französischen Mathematikern muss man Jacques Salomon Hadamard (1865-1963) sowie Marie Ennemond Camille Jordan (1838-1922) nennen. Hadamard wurde in Nachfolge von Jordan Professor für Analysis an die École polytechnique. Beide haben fundamentale Beiträge zur Analysis, aber auch zu anderen mathematischen Disziplinen geliefert.

Joseph-Louis de Lagrange (1736-1813) war Italiener. Bereits mit 19 Jahren erhielt er einen Lehrstuhl. Ab 1766 wurde er Nachfolger von Euler an der Königlich-Preußische Akademie der Wissenschaften. In Paris entstand dann sein Hauptwerk *Mécanique analytique* mit Begründung der analytischen Mechanik. Mit dem Lagrange-Formalismus vereinfachte er die Newton'sche Mechanik und ihre Mathematik wesentlich.

Bernardus Placidus Johann Nepomuk Bolzano (1781-1848) erforschte Grenzbereiche der sich entwickelnden Analysis. Leider wurden seine Arbeiten zu einer strengeren Handhabung der Analysis wenig beachtet. Hier schaffte erst Cauchy einen deutlichen Durchbruch. Bolzano konstruierte offenbar als Erster

⁸³ Spektrum der Wissenschaft Spezial, 1/2003, S. 14

eine Funktion, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist, d.h. an keinem Punkt eine eindeutige Tangentensteigung besitzt. Auch bei kleinen oder großen Zahlen beschäftigte ihn das Unendliche. Er formulierte einige Jahre vor Cauchy ein erstes Kriterium für Cauchy-Konvergenz. Cauchy hat es dann in seiner Analyse algébrique (1871) als Prinzip formuliert; bewiesen wurde es erst auf Basis eines korrekten Systems der reellen Zahlen durch Dedekind und Cantor (s.u.)

Eine beliebige Zahlenfolge (x_n) ist jedes Mal dann, aber auch nur dann konvergent, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Stelle $n_0 = n_0(\varepsilon)$ gibt, dass der Unterschied

$$|x_n - x_{n'}| < \varepsilon$$

ist, sobald n und $n' \geq n_0$ sind.

Cauchy-Konvergenz hat erhebliche Bedeutung in der Mathematik. Der Satz von Bolzano-Weierstraß behandelt diese Thematik und gilt auch bei komplexen Zahlenfolgen: „Jede beschränkte Folge komplexer Zahlen (mit unendlich vielen Gliedern) enthält (mindestens) eine konvergente Teilfolge d.h. Konvergenzpunkt.“ Ein prominentes Beispiel bei reellen Zahlen sind die rationalen Quotienten aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen, die gegen die

irrationale Zahl $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, den „Goldenen Schnitt“, konvergieren. Posthum erschien 1851 sein Werk „*Paradoxien des Unendlichen*“, in dem er erstmals den Begriff der Menge in die mathematische Terminologie einführte. Das Paradoxon von Galilei mit der bijektiven Abbildung der natürlichen Zahlen auf die Quadratzahlen nahm er wörtlich. Er erkannte, dass eine echte Teilmenge trotzdem die gleiche Größe (besser Mächtigkeit) der Menge haben kann.⁸⁴ Zweifellos hat Bolzano den Grundstein für eine Theorie des Unendlichen gelegt. Aber er wagt sich auch an das aktual Unendliche und zeigte, dass zwei kompakte Intervalle reeller Zahlen, z.B. $[0,1]$ und $[0,1000]$ die gleiche Mächtigkeit haben. Während andere Mathematiker nach ihm sich mit Grenzwerten, z.B. von Folgen oder Reihen

f_n	f_{n+1}	f_{n+1} / f_n	Abweichung zu Φ in %
1	1	1,0000	-38
1	2	2,0000	+23
2	3	1,5000	-7,3
3	5	1,6667..	+3,0..
5	8	1,6000	-1,1..
8	13	1,6250..	+0,43..
13	21	1,6154..	-0,16..
21	34	1,6190..	+0,06..
34	55	1,617..	-0,02..
55	89	1,61818..	+0,009..
89	144	1,617977..	-0,0034..

Abb. 22: Beispiel für Cauchy-Konvergenz. Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen nähert sich dem Goldenen Schnitt Φ .

⁸⁴ Weitere Details zu Leben und Werk von Bolzano siehe Brian Clegg, ebenda S. 189-200

beschäftigten, war Bolzano der Erste, der das Unendliche direkt und unmittelbar adressierte.

Folgen, Reihen und dazu gehörige Konvergenzkriterien blieben trotzdem einige Jahrzehnte ein großes Thema (und auch Gegenstand einer Reihe von Irrtümern). Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) machte sich in diesem Bereich besonders verdient. Er war Freund von Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), der mit den später nach ihm benannten Fourier-Reihen, der Fourier-Analyse und seiner „*Analytischen Theorie der Wärme*“ (1822) Wissenschaftsgeschichte schrieb. Man kann ihn mit Recht als einen Begründer der mathematischen Physik bezeichnen.

Ein Schüler von Dirichlet war Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866), der bahnbrechende Ergebnisse auf zahlreichen Gebieten erzielt hat. Das immer noch nicht abschließend geklärte Allgemeine Konvergenzproblem löste er durch einen völlig neuen Ansatz. Ein $f(x)$ muss integrierbar sein, wenn man es als Fourier-Reihe darstellen kann. Daraus leitet er allgemeine Bedingungen für die Konvergenz sowohl von Funktionen, als auch von Reihen ab.

Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) war der letzte Schüler von Carl Friedrich Gauß. Er leistete eine Fülle von Beiträgen zur Entwicklung aufstrebender Fachgebiete der Mathematik. Die Analysis war nicht unbedingt sein Spezialgebiet, aber mit seinen Überlegungen zur Stetigkeit leistete er entscheidende Vorarbeit. Er ging der Stetigkeit auf den Grund. Nicht nur die

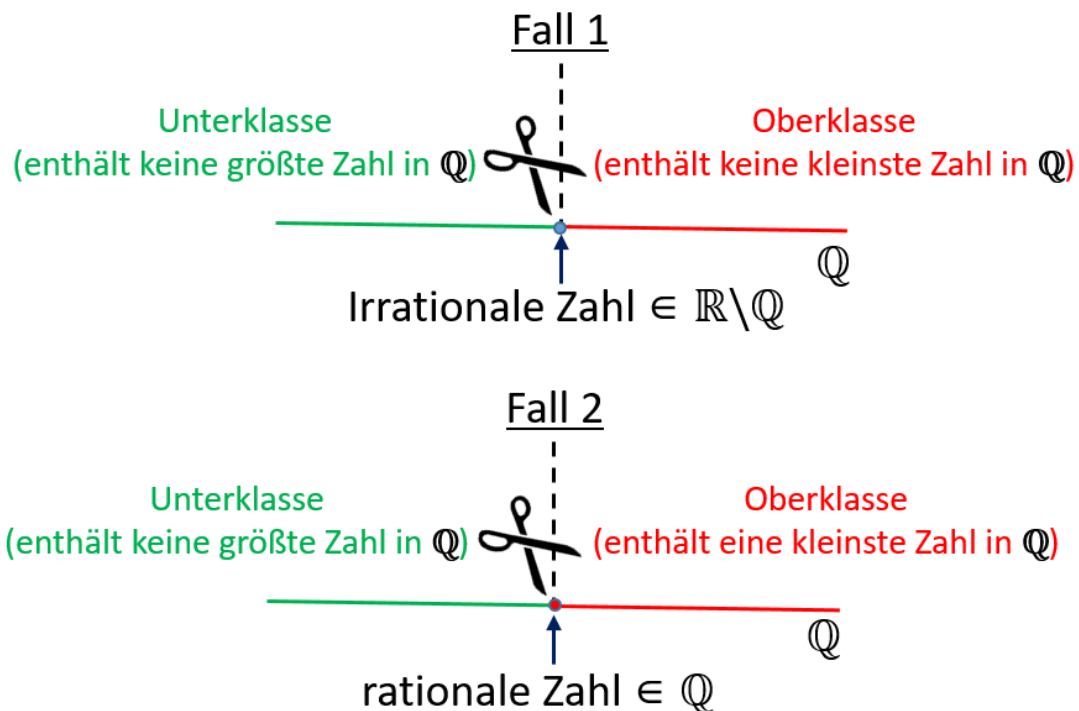


Abb. 23: Dedekind'sche Schnitte in der Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} ergeben entweder eine irrationale oder eine rationale Zahl.

Lückenlosigkeit des Kontinuums ist die unbedingte Voraussetzung für Stetigkeit. Im vorliegenden Beitrag spielt u.a. auch sein Briefwechsel mit Cantor eine Rolle. Cantor wurde durch diese Korrespondenz dazu inspiriert, die Überabzählbarkeit der reellen Zahlen zu entwickeln. Dedekind verwendete auch unendliche Mengen schon früh ganz selbstverständlich. Mit den Dedekind'schen Schnitten hat er reelle Zahlen über beliebig nah liegende rationale Zahlen definiert (Abb. 23). Die Grunderkenntnis ist dabei, dass die Zahlengerade allein mit den rationalen Zahlen nicht stetig ist und was man tun muss, um dies zu ändern. Man definiert dazu die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen als die Menge aller (Dedekind'schen) Schnitte in der Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} . Dabei benutzt man geeignete Intervalle (einseitig offen oder geschlossen), genannt Oberklasse bzw. Unterklasse. Dedekind konnte so die Stetigkeit des Kontinuums garantieren, indem er die reellen Zahlen konstruktiv über Schnitte definiert. Damit ist die Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen erreicht.⁸⁵

Es gab lange Bemühungen von Gauß und Bolzano um den Fundamentalsatz der Algebra, die von Dedekind schließlich abgeschlossen wurden. Der Satz besagt, dass jedes Polynom der Form

$$f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n, \quad a_i \text{ komplex, mind. eine Nullstelle in } \mathbb{C} \text{ hat.}$$

Gauß setzte eine für ihn triviale Erkenntnis voraus, die heute Zwischenwertsatz genannt wird und von Bolzano 1817 bewiesen wurde. Er besagt, wenn eine Funktion positive und negative Werte zwischen zwei x-Werten hat, dann muss sie die x-Achse zwischen den beiden Werten (in einer Nullstelle) schneiden.⁸⁶ Immerhin identifizierte Bolzano es auch als Problem, dass eine Vollständigkeitsbedingung vorliegen muss: das Kontinuum darf keine Lücken haben. Dedekind erreichte diese Bedingung über die Dedekind'schen Schnitte. Im Grunde besteht ein Schnitt aus zwei Mengen (U, O). Jedes Element von U ist kleiner als jedes Element von O. Zu jeder reellen Zahl r (egal, ob rational oder irrational) gibt es eine Obermenge O und eine Untermenge U aus rationalen Zahlen, die diese Zahl r approximieren. Wenn U ein größtes oder O ein kleinstes Element hat, so ist r rational, nämlich das größte oder kleinste Element in U bzw. O. Im anderen Fall liegt es nicht in einer der beiden Mengen, ist größer U und kleiner O und somit irrational. Man muss nur noch nachweisen, dass sich

⁸⁵ Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1872, online unter https://publikationsserver.tu-braunschweig.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs_derivate_00005740/Aa_2043.pdf

⁸⁶ Bernhard Bolzano; Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, daß zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege, Gottlieb Haase, Prag 1817, <https://www.digitale-sammlungen.de/de/view/bsb10137646?page=2,3>

diese Dedekind'schen Schnitte tatsächlich wie Zahlen verhalten. Das tun sie: Summe und Produkt haben die gewohnten algebraischen Eigenschaften. Damit wird das Kontinuum frei von Lücken und ist damit stetig.

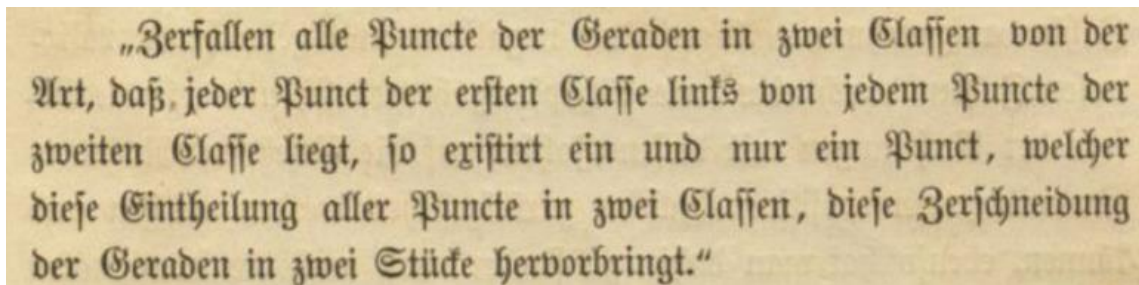


Abb. 24: Auszug aus der berühmten Schrift von R. Dedekind, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, S. 18, mit der Charakterisierung der Schnitte.

Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815-1897) hat ebenfalls eine Fülle von mathematischen Erkenntnissen geliefert. Viele wichtige Sätze und Begriffe tragen seinen Namen. Für die Analysis ist seine „Epsilontik“ entscheidend. Damit hat er diese mittlerweile umfangreiche Disziplin vollständig von widersprüchlichen Bezügen zur „Unendlichkeit“ befreit. Er eliminierte fluide Variablen. Dahinter steckt ein Kulturwandel in der Mathematik. Es zählen nicht mehr nur Ergebnisse, sondern Beweise. Die Infinitesimalrechnung hatte sich enorm weiterentwickelt (z.B. auf Reihenentwicklungen). Eine konsistente Theorie der reellen Zahlen fehlte. Geometrische Beweise mussten arithmetischen Beweisen weichen. Heute selbstverständliche Regeln ließen sich ohne eine saubere Notation nicht beweisen, z.B. bei unendlichen Dezimalzahlen wie $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3}$.

Exkurs: An dieser Stelle lohnt es sich, über die Analysis hinaus mit einem Beispiel und seiner Verallgemeinerung in die lineare Algebra zu schauen. Dieser Exkurs soll bewusst beweistechnisch ausgearbeitet werden, um exemplarisch Schritt für Schritt grundlegende Begriffe, algebraische Strukturen, Notationen und die Vorgehensweise nachvollziehen zu können. Grundlegende Begriffsdefinitionen, wie Gruppe, Körper, Skalare, Vektoren, Vektorraum etc., kann man leicht im Internet nachlesen. Weitere mehr mengentheoretische Begriffe folgen ab Kapitel „Cantor“.

Die Verallgemeinerung des Beispiels adressiert auch in diesem Bereich der Mathematik das potentiell Unendliche.

Die rationalen Zahlen \mathbb{Q} bilden im algebraischen Sinne einen kommutativen Körper bzgl. der Verknüpfungen Addition und Multiplikation. Diesen Körper kann man sinnvoll um die Elemente $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ zu $\mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ ergänzen. Man spannt dazu einen 4-dimensionalen \mathbb{Q} -Vektorraum V mit den Basiselementen

$$1, \sqrt{2}, \sqrt{3} \text{ und } \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \text{ auf.}$$

Diese sind linear unabhängig, da $a \cdot 1 + b \cdot \sqrt{2} + c \cdot \sqrt{3} + d \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 0$ nicht mit rationalen a, b, c, d gelöst werden kann, es sei denn, sie sind 0.

Man betrachte $a = -b \cdot \sqrt{2} - c \cdot \sqrt{3} - d \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$.

Die Summanden rechts des Gleichheitszeichens sind irrational, denn b, c oder d sind rational und $\sqrt{2}, \sqrt{3}$ bzw. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ irrational. Also ist das Produkt einer rationalen und einer irrationalen Zahl auch irrational. Da a rational ist, müssen $b, c, d = 0$ und damit auch $a = 0$ sein. Die Basis ist also linear unabhängig.

Es werden nun die Definitionen eines Vektorraums V mit der Basis

$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ und $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ über \mathbb{Q}^+ auf ihre Gültigkeit überprüft.

Die Definitionen **(V1), (V2), (V3), (V4)** beziehen sich auf die Addition von Vektoren der Form

$$\vec{u} = a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}.$$

Die Definitionen **(S1), (S2), (S3), (S4)** beziehen sich auf die Skalarmultiplikation

$$\alpha \cdot \vec{u} = \alpha(a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}), \alpha \in \mathbb{Q} :$$

Es seien $\vec{u} = a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}$, $\vec{v} = b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3}$ und $\vec{w} = c_0 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} + c_3\sqrt{2}\sqrt{3}$ drei Vektoren aus V mit $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{Q}$.

(V1) Man sieht, dass $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$ gilt, da in einer Summe nach den Rechenregeln der rationalen Zahlen die Klammern beliebig gesetzt werden können. Beweis:

$$\begin{aligned} (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= (a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} + b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3}) + \\ &\quad c_0 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} + c_3\sqrt{2}\sqrt{3} \\ &= a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} + (b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3} + c_0 + \\ &\quad c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} + c_3\sqrt{2}\sqrt{3}) \\ &= \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) \end{aligned}$$

(V2) Ist $a_i, b_i, c_i = 0$, so ist der dadurch gebildete Nullvektor $\vec{0}$ das neutrale Element der Vektoraddition. Also formal

$$\begin{aligned} \vec{0} \cdot \vec{u} &= (0 + 0\sqrt{2} + 0\sqrt{3} + 0\sqrt{2}\sqrt{3}) + (a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}) \\ &= a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} = \vec{u} \end{aligned}$$

(V3) Mit $(-1)\vec{u} = -a_0 - a_1\sqrt{2} - a_2\sqrt{3} - a_3\sqrt{2}\sqrt{3}$ existiert zu jedem \vec{u} ein inverses Element, so dass $(-1)\vec{u} + \vec{u} = \vec{0}$

(V4) V ist kommutativ, da die Addition über \mathbb{Q}^+ wie in \mathbb{Q} kommutativ ist,

$$\begin{aligned} \vec{u} + \vec{v} &= a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} + b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3} \\ &= b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3} + a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} \\ &= \vec{v} + \vec{u} \end{aligned}$$

V ist damit eine kommutative (sogenannte abelsche) Gruppe.

Die Definitionen der Skalarmultiplikation sollen nun überprüft werden:

(S1) $\alpha \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \alpha \cdot \vec{u} + \alpha \cdot \vec{v}$, gilt mit $\alpha \in \mathbb{Q}$ und bei jeder der 3 irrationalen Zahlen, denn:

$$\begin{aligned} \alpha (\vec{u} + \vec{v}) &= \alpha (a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3} + b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3}) \\ &= \alpha \left((a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)\sqrt{2} + (a_2 + b_2)\sqrt{3} + (a_3 + b_3)\sqrt{2}\sqrt{3} \right) \\ &= (\alpha a_0 + \alpha b_0) + (\alpha a_1 + \alpha b_1)\sqrt{2} + (\alpha a_2 + \alpha b_2)\sqrt{3} + (\alpha a_3 + \alpha b_3)\sqrt{2}\sqrt{3} \\ &= \alpha (a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}) + \alpha (b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + b_3\sqrt{2}\sqrt{3}) \\ &= \alpha \vec{u} + \alpha \vec{v}. \end{aligned}$$

(S2) analog beweist man $(\alpha + \beta) \vec{u} = (\alpha \cdot \vec{u}) + (\beta \cdot \vec{u})$, gilt mit $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ und bei jeder der 3 irrationalen Zahlen

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta) \vec{u} &= \alpha a_0 + \alpha a_1\sqrt{2} + \alpha a_2\sqrt{3} + \alpha a_3\sqrt{2}\sqrt{3} + \\ &\quad \beta a_0 + \beta a_1\sqrt{2} + \beta a_2\sqrt{3} + \beta a_3\sqrt{2}\sqrt{3} \\ &= \alpha (a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}) + \\ &\quad \beta (a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}) \\ &= \alpha \vec{u} + \beta \vec{u} \end{aligned}$$

(S3) analog beweist man das Assoziativgesetz $(\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{u} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{u})$.

$$\begin{aligned} (\alpha \cdot \beta) \vec{u} &= \alpha \beta a_0 + \alpha \beta a_1\sqrt{2} + \alpha \beta a_2\sqrt{3} + \alpha \beta a_3\sqrt{2}\sqrt{3} \\ &= \alpha (\beta a_0 + \beta a_1\sqrt{2} + \beta a_2\sqrt{3} + \beta a_3\sqrt{2}\sqrt{3}) \\ &= \alpha (\beta (a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3})) \\ &= \alpha (\beta \cdot \vec{u}) \end{aligned}$$

(S4) Mit $1 \in \mathbb{Q}^+$ existiert das neutrale Element der Skalarmultiplikation mit

$$1 \cdot \vec{u} = 1(a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + a_3\sqrt{2}\sqrt{3}) = \vec{u}$$

Somit ist V mit der Basis $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ und $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ ein Vektorraum über \mathbb{Q}^+ .

Es soll nun untersucht werden, was im Vektorraum V^- und im Körper \mathbb{Q}^- die Vertauschung von $\sqrt{2}$ zu $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ zu $-\sqrt{3}$ bewirkt.

Man kann ebenso wie oben überprüfen, dass die Basis $1, -\sqrt{2}, -\sqrt{3}$ und $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ linear unabhängig ist, ebenfalls die Definitionen (V1), (V2), (V3), (V4) und (S1), (S2), (S3), (S4) erfüllt sind und sich somit mit dieser Basis ein Vektorraum V^- über dem Körper \mathbb{Q}^- aufspannen lässt.

Vertauscht man $\sqrt{2}$ mit $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ mit $-\sqrt{3}$ im Körper bzgl. der Addition, ist dies als Funktion F^+ zu betrachten, die jedem rationalen Element in \mathbb{Q}^+ das gleiche Element in \mathbb{Q}^- und $\sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$ bzw. $\sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$ bijektiv zuordnet. Formal:

$$F^+: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^-, x \mapsto x \text{ für } x \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2} \text{ bzw. } \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}.$$

Analog gibt es eine bijektive Abbildung bzgl. der Multiplikation

$$F^*: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^-, x \mapsto x \text{ für } x \in \mathbb{Q}, \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2} \text{ bzw. } \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}.$$

Das Vertauschen von $\sqrt{2}$ mit $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$ mit $-\sqrt{3}$ induziert somit eine additive und multiplikative Bijektion von \mathbb{Q}^+ auf sich selbst, genauer auf \mathbb{Q}^- . (Körperautomorphismus).

Man betrachte dazu auch die aus den Definitionen für einen Körper folgende Forderung nach dem inversen Element der Multiplikation. Danach muss es zu jedem $a \in \mathbb{Q}^+$ bzw. aus \mathbb{Q}^- ein a^{-1} geben, so dass $a \cdot a^{-1} = 1$.

Für eine rationale Zahl $r = \frac{p}{q}$ ist das Inverse der Kehrwert $\frac{q}{p}$.

Es gilt nun für die irrationalen Elemente von \mathbb{Q}^+ bzw. \mathbb{Q}^- :

$$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1, \text{ aber auch } -\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 1; \text{ analog } \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 \text{ und } -\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = 1.$$

Daraus wird deutlich: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{2 \cdot 3} = \sqrt{6}$ ist deshalb keine ganz selbstverständliche Folgerung. Wegen Quadrierung könnte das Ergebnis theoretisch auch $\sqrt{-6}$ lauten und deshalb komplex sein.

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} := +\sqrt{+6}$ ist lediglich zur Konvention geworden.

Analog lässt sich \mathbb{Q} um weitere algebraische Zahlen erweitern. Dies sind insbesondere Wurzeln aus quadratfreien Zahlen, also natürliche Zahlen, bei denen jeder Primfaktor nur einmal vorkommt.

$$D = 1, 2, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 14, 15, 17, 19, 21, 23, 26, \dots$$

Es gibt unendlich viele, da auch die Primzahlen dazu gehören und es ist (nach der Lektüre des Kapitels zu Cantor) leicht einzusehen, dass diese Menge abzählbar unendlich groß ist. Es existiert also eine Bijektion von \mathbb{N} in D und man kann das Beweisverfahren der vollständigen Induktion anwenden.

Interessant sind, wie bei dem Beispiel mit $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, die Primteiler, die nach der Größe sortiert werden sollen:

$$p_1 < p_2 < p_3 < p_4 < \dots$$

Auch hier kann \mathbb{Q} zu einem Körper K_n erweitert werden

$$K_n := \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{p_3}, \dots, \sqrt{p_n}), n \in \mathbb{N}_0$$

Auch hier gelte die Konvention, dass die Quadratwurzeln immer positiv sein sollen. Es gilt

$$\mathbb{Q} = K_0 \subseteq K_1 \subseteq K_2 \subseteq \dots$$

Man kann mittels vollständiger Induktion zeigen:

K_n als \mathbb{Q} -Vektorraum wird von den Quadratwurzeln der quadratfreien Zahlen D_n erzeugt, deren Primteiler $< p_n$ sind.

Beweis: D_n sei wie folgt definiert:

$$D_n := \{d \in \mathbb{N} \mid d \text{ quadratfrei, } p \text{ ist prim und teilt } d \text{ mit } p \leq p_n\}$$

Die Behauptung gilt nach Beispiel am Anfang des Exkurses für $n=0, 1, 2$, da $\mathbb{Q} = \mathbb{Q} \cdot (\sqrt{1})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q} \cdot \sqrt{1} + \mathbb{Q} \cdot \sqrt{2}$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q} \cdot \sqrt{1} + \mathbb{Q} \cdot \sqrt{2} + \mathbb{Q} \cdot \sqrt{3}$
 Induktion von n nach $n+1$: Die Behauptung sei für n richtig. Dann gilt

$$\begin{aligned} K_{n+1} &= K_n(\sqrt{p_{n+1}}) \\ &= K_n + K_n \cdot \sqrt{p_{n+1}} \\ &= (\sum_{d \in D_n} \mathbb{Q} \cdot \sqrt{d}) + (\sum_{d \in D_n} \mathbb{Q} \cdot \sqrt{d}) \cdot \sqrt{p_{n+1}} \\ &= (\sum_{d \in D_{n+1}} \mathbb{Q} \cdot \sqrt{d}) \end{aligned}$$

Da die Menge der Primzahlen beliebig groß ist, kann man auch p_n beliebig groß wählen und $\sqrt{p_n}$ wird beliebig groß. Die Dimension von K_n wächst mit der wachsenden Anzahl der Quadratwurzeln der quadratfreien Zahlen, deren Primteiler $< p_n$ sind.

Das potentiell Unendliche manifestiert sich also auch an vielen Stellen der linearen Algebra, hier am Beispiel K_n als \mathbb{Q} -Vektorraum.

Sei \mathbb{Q} wieder ergänzt zu $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Man betrachte den Körper

$L = (\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), +, \cdot)$ mit der Addition und Multiplikation und 3 Elemente $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.
 (Es sind Tripel, hier der Deutlichkeit halber wie Vektoren geschrieben).

$$\vec{u} = a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3}, \quad \vec{v} = b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3}, \quad \vec{w} = c_0 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3}$$

(i) Aus $\vec{u} \leq \vec{v}$

$$a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} \leq b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} \quad | +c_0$$

$$(a_0 + c_0) + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} \leq (b_0 + c_0) + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} \quad | +c_1\sqrt{2}$$

$$(a_0 + c_0) + (a_1 + c_1)\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} \leq (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} \quad | +c_2\sqrt{3}$$

$$(a_0 + c_0) + (a_1 + c_1)\sqrt{2} + (a_2 + c_2)\sqrt{3} \leq (b_0 + c_0) + (b_1 + c_1)\sqrt{2} + (b_2 + c_2)\sqrt{3}$$

$$a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3} + c_0 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3} \leq b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3} + c_0 + c_1\sqrt{2} + c_2\sqrt{3}$$

folgt $\vec{u} + \vec{w} \leq \vec{v} + \vec{w}$

(ii) Ebenso gilt

$$\text{aus } 0 \leq \vec{u} \text{ und } 0 \leq \vec{v} \text{ folgt } 0 \leq \vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\text{denn aus } 0 \leq \vec{u} \rightarrow 0 \leq \vec{u}^2 = (a_0 + a_1\sqrt{2} + a_2\sqrt{3})^2$$

$$\text{und aus } 0 \leq \vec{v} \rightarrow 0 \leq \vec{v}^2 = (b_0 + b_1\sqrt{2} + b_2\sqrt{3})^2$$

$$0 \leq \vec{u}^2 \cdot \vec{v}^2, \text{ da beide Faktoren positiv sind } \rightarrow$$

$$\text{weil } \sqrt{\vec{u}^2}, \sqrt{\vec{v}^2} \text{ beide Wurzeln positiv oder beide negativ sind } \rightarrow$$

$$0 \leq \vec{u} \cdot \vec{v}$$

Die Gültigkeit von (i) und (ii) bedeuten, dass der Körper $L = (\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}), +, \cdot)$ ein geordneter Körper bzgl. der Ordnungsrelation " \leq " ist.

Auch dieses Ergebnis kann man per Induktion nach n erweitern:

$L_n := \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \sqrt{p_2}, \sqrt{p_3}, \dots, \sqrt{p_n})$, $n \in \mathbb{N}_0$, ist ein Körper $(L_n, +, \cdot)$, der mit " \leq " geordnet ist.

Solche Körper haben erst die bemerkenswerten Eigenschaften, die wir von den reellen Zahlen gewöhnt sind:

- Das Negative eines positiven Elements ist negativ und das Negative eines negativen Elements ist positiv.
- Man darf Ungleichungen addieren.
- Man darf Ungleichungen mit positiven Elementen multiplizieren.
- Quadratzahlen und jede endliche Summe von Quadratzahlen sind nichtnegativ.
- Durch Induktion kann man folgern, dass jede endliche Summe von Einsen positiv ist.

In geordneten Körpern gibt es die „totalpositiven“ Elemente, die von den Summen von Quadraten kommen und es gibt andere Elemente, siehe $(\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6})$, bei denen eine Konvention über das sinnvolle Vorzeichen entscheiden muss.

Grundvoraussetzung für diese algebraischen Überlegungen ist aber ebenfalls eine Theorie der irrationalen Zahlen, wie sie Dedekind etabliert hat, sowie eine seit Weierstraß sauber definierte Notation.

Mit diesem Exkurs sollte ein Beispiel aus der Linearen Algebra in das Thema dieses Beitrags eingebunden werden.

Zurück zu Weierstraß:

In moderner Schreibweise ist vor allem seine Definition einer stetigen Funktion zur Standardnotation geworden:

f heißt stetig in einem Punkt x_0 (im Definitionsbereich D_f) wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle x (im Definitionsbereich D_f) mit $|x - x_0| < \delta$ gilt,
 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Der Begriff „unendlich (klein)“ wird nunmehr nicht mehr genannt. Aber mehr noch: So wie die Arithmetik auf dem reellen Zahlensystem beruht, beruht nun auch die Analysis darauf.

Ein Beispiel ist der Satz von Bolzano-Weierstraß, nach dem jede beschränkte, unendliche Zahlenfolge mindestens einen Häufungspunkt hat. Um einen solchen Punkt x_n enthält also jedes beliebig kleine Intervall unendlich viele Folgenglieder.

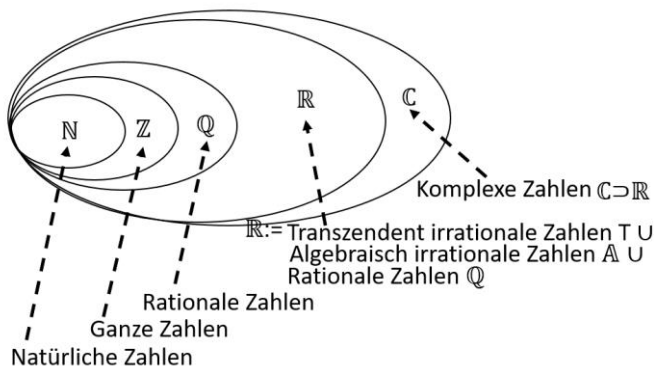


Abb. 25: Übersicht der Zahlenmengen: Komplexe Zahlen und ihre Teilmengen

Doch eine stetige Funktion ist nicht unbedingt differenzierbar. Weierstraß konstruierte ebenfalls ein solches Beispiel, das in keinem Punkt differenzierbar ist:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(\pi b^n x)$$

für geeignetes a und b .

Unter dem Begriff „Fraktale“ sind später viele weitere Beispiele entstanden. Oft kann man sie als Limes von unendlichen Iterationen verstehen. Hier sei auf ein Beispiel von Giuseppe Peano (1858-1932) verwiesen („Peano-Kurven“).⁸⁷ Peano wies in seiner berühmten und überraschenden Arbeit „*Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*“ nach, dass sich das Einheitsintervall $I = [0,1]$ in stetiger Weise auf das Quadrat $I \times I = [0,1] \cdot [0,1]$ der euklidischen Ebene abbilden lässt.^{88,89}

D.h. es entsteht eine flächenfüllende oder allgemein raumfüllende Kurve. Die weitere Untersuchung hat, salopp formuliert, ergeben, dass Peano-Räume bis auf Homöomorphie die stetigen Bilder der Peano-Kurven sind. Ein Homöomorphismus ist eine bijektive, stetige Abbildung f zwischen zwei topologischen Räumen, deren Umkehrabbildung f^{-1} ebenfalls stetig ist. Peano leistete einen wichtigen formalen Baustein mit seinen Formulierungen zur Axiomatik der Arithmetik (ergänzt durch Dedekind). Hier in allgemeinverständlicher Form seine fünf Axiome:⁹⁰

- 1) 0 ist eine natürliche Zahl.
- 2) Jede natürliche Zahl n hat eine natürliche Zahl n' als Nachfolger.
- 3) 0 ist kein Nachfolger einer natürlichen Zahl.

⁸⁷ Quelle der Abb. 26: <https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Kurve>

⁸⁸ Abb. 25, eigene Grafik nach http://christianrohrbach.net/taxigeometrie/teil9_2.html

⁸⁹ Band 36 der Mathematischen Annalen des Jahres 1890

⁹⁰ Wörtlich aus <https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Axiome>

- 4) Natürliche Zahlen mit gleichem Nachfolger sind gleich.
- 5) Enthält die Menge X und mit jeder natürlichen Zahl n auch deren Nachfolger n' so bilden die natürlichen Zahlen eine Teilmenge von X.

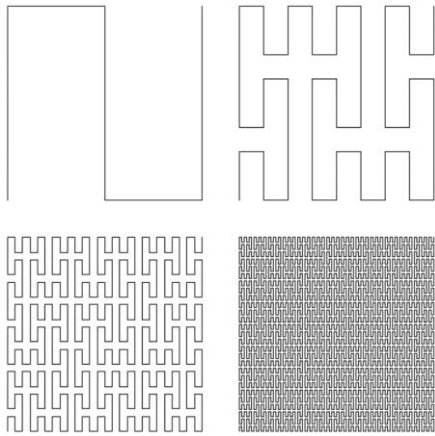


Abb. 26: Die ersten vier Iterationen einer Peano-Kurve.

Die Peano-Axiome fassen also das Prinzip „Zählen“ oder auch die abzählbare Unendlichkeit der natürlichen Zahlen in eine formale Form.

Das letzte Axiom heißt *Induktionsaxiom*, da auf ihm die Beweismethode der vollständigen Induktion beruht. Es ist äquivalent zur Aussage, dass jede nichtleere Menge natürlicher Zahlen ein kleinstes Element hat. Mit ihm lassen sich Addition und Multiplikation induktiv bzw. rekursiv definieren.

Als Beispiel siehe die rekursive Definition der Fibonacci-Folge, wonach

$$f_{n-1} + f_n = f_{n+1}.$$

Hinweis: Die Arithmetik der natürlichen Zahlen erweiterte Cantor um transfinite Zahlen, also um die Arithmetik der Ordinalzahlen auch im Unendlichen. (s.u.).



Abb. 27: Die Peano-Axiome formalisieren die rekursive Bildung der natürlichen Zahlen und bilden die Basis für ihre Arithmetik.

David Hilbert publizierte am 4. März 1891 einen Beitrag in den *Mathematischen Annalen* mit dem Titel „*Ueber die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*“. Es ist die erste Darstellung eines Fraktals. In der grafischen Darstellung werden sie Hilbert-Kurven genannt. Auch diese Kurven sind stetig, aber nirgends differenzierbar. Er verweist in dem Artikel auf einen Satz von Weierstraß, nach dem die Stetigkeit in jedem Punkt impliziert, dass sich die Funktionen in unendliche „... nach ganzen

*rationalen Funktionen fortschreitende Reihen entwickeln lassen, welche im ganzen Intervall absolut und gleichmäßig konvergieren.*⁹¹

David Hilbert (1862-1943) beeinflusste die Mathematik am Anfang des 20. Jahrhunderts wie kaum ein zweiter Forscher. Auf dem Mathematiker-Kongress zur Jahrhundertwende 1900 formulierte er 23 Probleme, die im 20. Jahrhundert gelöst werden sollten. 15 sind gelöst, drei sind immer noch nicht bewiesen und 5 gelten als unlösbar. Die wohl bekannteste offene Frage ist die nach den Nullstellen der Zeta-Funktion, bekannt als Riemannsches Vermutung. Vom Beweis erhofft man sich Erkenntnisse über die Primzahlen, für die es immer noch kein Bildungsprinzip gibt. Doch an erster Stelle seiner Liste nannte er die Kontinuumshypothese (s.u.).

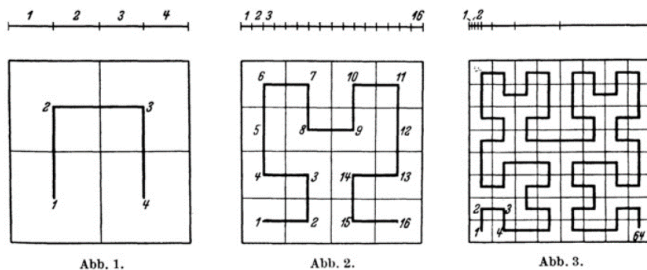


Abb. 28: Erstes Fraktal, die Hilbert-Kurve. Darstellung in seiner Originalveröffentlichung.

Hilbert löste sich in seiner euklidischen Geometrie vollkommen von der Anschauung. Rein formalistisch sind Punkt, Linie oder Ebene einfache Dinge, die über Beziehungen wie „liegen“, „zwischen“ oder „kongruent“ definiert sind.

Ihre Natur ist zweitrangig. Ein plakatives Beispiel für Paradoxa bei unendlichen Mengen ist bekannt als Hilberts Hotel. Diese Überlegungen wurden durch Georg Cantor umfassend ausgearbeitet (s.u.).

Eine besondere Bedeutung hat das Schaffen von Kurt Gödel (1906-1978), wohl einer der größten Logiker des 20. Jahrhunderts. In einer ganzen Reihe von Bereichen lieferte er wesentliche Beiträge, so in der Axiomatik der Mengenlehre.⁹² Er bewies in seiner Dissertation die Vollständigkeit des „engeren Kalküls der Prädikatenlogik erster Stufe“.

⁹¹ David Hilbert, Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück, *Mathematische Annalen* 38 (1891) 459-460, auch Quelle der Abb. 28, siehe auch Hilbert, David, *Gesammelte Abhandlungen*, Julius Springer, Berlin, 1935, digital verfügbar unter <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/>

Für die 3-dimensionale Version der Hilbert-Kurve gibt es sehr wichtige Anwendungen. Dabei geht es um Übertragungsfehlern, die vom sogenannten Gray-Code abhängig sind. Digitale TV-Übertragung wird dadurch fehlertoleranter (siehe Binimelis Bassa, Maria Isabel; *Fraktale Geometrie*, Librero, 2017, S. 75-78)

⁹² Bei der Ausarbeitung eines Beitrags für eine Würdigungsschrift für seinen Freund Albert Einstein entdeckte er eine 3. Klasse von Lösungen der Feldgleichungen der

„Sie befasst sich mit der Struktur gewisser mathematischer Ausdrücke und dem logischen Schließen, mit dem man von derartigen Ausdrücken zu anderen gelangt. Dabei gelingt es, sowohl die Sprache als auch das Schließen rein syntaktisch, das heißt ohne Bezug zu mathematischen Bedeutungen, zu definieren.“⁹³

Dies war keine Überraschung und passte in das Programm, das David Hilbert im Jahr 1900 ausgegeben hatte, nämlich die vollständige Axiomatisierung der Mathematik. Gödels sogenannte Unvollständigkeitssätze schlugen jedoch wie eine Bombe in der internationalen Mathematik ein. Er zeigte, dass es selbst in einem widerspruchsfreien Axiomensystem, das so umfangreich ist wie das, welches die Arithmetik konstituiert, es formal unentscheidbare Sätze gibt, also Aussagen, die weder widerlegt noch als wahr bewiesen werden können. Man kann weiterhin daraus ableiten, dass die Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems nicht aus sich selbst heraus bewiesen werden kann (s.u. Kontinuumshypothese).

Abraham Robinson (1918-1974) war ein US-amerikanischer Logiker und Modelltheoretiker und kann durchaus mit Gödel in seiner Bedeutung verglichen werden. Um seine Lebensleistung verstehen zu können, sollte man einen Blick auf seine Biografie werfen.⁹⁴ Er wurde im heutigen polnischen Walbrzych (früher Waldenburg) geboren und floh als Jugendlicher vor den Nationalsozialisten nach Palästina. Er kämpfte parallel zu seinem Studium für die verbotene Haganah-Miliz. Er bekam ein Stipendium für die Pariser Sorbonne-Universität, entkam der deutschen Invasion („Blitzkrieg“) nur knapp nach England, wo er sich der Freien Französischen Armee anschloss. Er wurde im 2. Weltkrieg ein gefragter Spezialist für Tragflächenaeronautik, führte aber auch seine theoretischen Forschungen weiter. Nach dem Krieg kam über Gastvorlesungen in Toronto und Israel schließlich das Angebot für Rudolf Carnaps Lehrstuhl für Philosophie und Mathematik (ehemals Mitglied des „Wiener Kreises“) an der UCLA (University of California, Los Angeles). Robinson wendete die sogenannte Prädikatenlogik an und formalisierte damit den „verbotenen“ Bereich des Unendlichen. Er konnte zeigen, dass reelle Zahlen durch die infinitesimalen Größen bei Leibniz („das unendlich Kleine“) über Grenzwerte um die infinitesimalen Zahlen ergänzt werden können. Ebenso kann man die reellen

Allgemeinen Relativitätstheorie in rotierenden Universen mit geschlossenen, zeitartigen Kurven. Theoretisch wären damit Reisen in die Vergangenheit möglich (Karl Sigmund, Sie nannten sich DER WIENER KREIS, S. 311 ff).

⁹³ Wörtlich aus https://de.wikipedia.org/wiki/Prädikatenlogik_erster_Stufe

⁹⁴ Jim Holt, Als Gödel und Einstein spazieren gingen, Rowohlt, Hamburg, Juni 2020, S. 226 f

Zahlen um infinite Zahlen („das aktual unendlich Große“) erweitern. Es entsteht ein widerspruchsfreies Konstrukt, das er praktisch im Alleingang zur Nichtstandardanalysis erweiterte, in dem man mit unendlich großen und unendlich kleinen Zahlen rechnen kann. Man kann damit wieder Analysis betreiben. Die Nichtstandardanalysis findet immer mehr Anhänger.

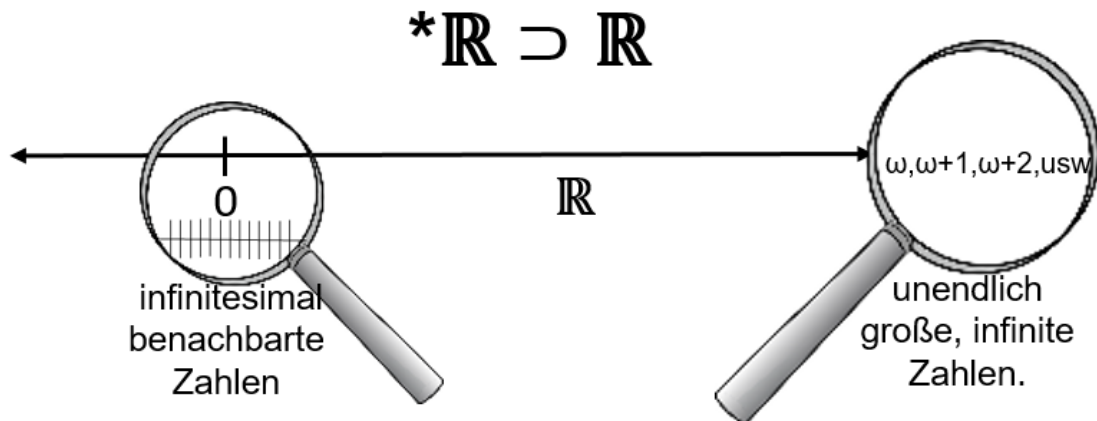


Abb. 29: Nicht-Standard-Analyse: Erweiterung von \mathbb{R} um hyperreelle Zahlen ${}^*\mathbb{R}$

Einen Beitrag, um die Mathematik über die Mengenlehre zu begründen, lieferte John von Neumann (1903-1957) mit seiner Von-Neumann-Hierarchie oder kumulativen Hierarchie. Er kann damit einen stufenweisen Aufbau des gesamten Mengenuniversums über Ordinalzahlen und Potenzmengenbildung erreichen (s.u.). Zu einer Fülle von physikalischen und mathematischen Gebieten hat er Beiträge geliefert. Man kann ihn als Begründer der Spieltheorie unter wirtschaftswissenschaftlichen Gesichtspunkten bezeichnen. Weiterhin gilt er als einer der ersten, die die Informatik und Kybernetik begründeten. Dies gilt für Rechnerarchitekturen und Prinzipien der Softwareerstellung gleichermaßen. In Los Alamos war er an der Entwicklung der amerikanischen Atombombe beteiligt. Er hat der Funktionalanalysis mit seinem Buch „*Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik*“ durch ihre Bedeutung in der Physik zum Durchbruch verholfen.⁹⁵ Stefan Banach (1892-1945) hat sie als eigenständige Disziplin in der Mathematik etabliert.

Die Grundzüge der Funktionalanalysis waren maßgeblich von Henri Lebesgue (1875-1941) gestaltet worden. Er hat die Integrierbarkeit von unstetigen Funktionen deutlich erweitert. „*Eine in einem Intervall $[a, b]$ beschränkte Funktion ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Menge ihrer Unstetigkeitsstellen das Maß Null hat*“.⁹⁶

⁹⁵ Siehe auch Wußing, Band 2, ebenda S. 414

⁹⁶ Zitiert nach Wußing, Band 2, ebenda S. 407

Felix Hausdorff (1868-1942) hat von 1906-1909 grundlegende Untersuchungen über geordnete Mengen vorgelegt. Er schrieb 1914 das erste Lehrbuch „*Grundzüge der Mengenlehre*“. Dort heißt es:

„*Die Mengenlehre ist das Fundament der gesamten Mathematik; Differential- und Integralrechnung, Analysis und Geometrie arbeiten in Wirklichkeit, wenn auch vielleicht in verschleiender Ausdrucksweise, beständig mit unendlichen Mengen.*“⁹⁷ Er verallgemeinerte die Mengenlehre über Punktmengen hinaus hin zu modernen Funktions- und Abbildungsbegriffen und erweiterte sie um eine Mengenalgebra. Hausdorffs Name ist mit einer ganzen Reihe an wichtigen Begriffen verbunden – so mit der gebrochenen Dimension von Fraktalen.

Cantor

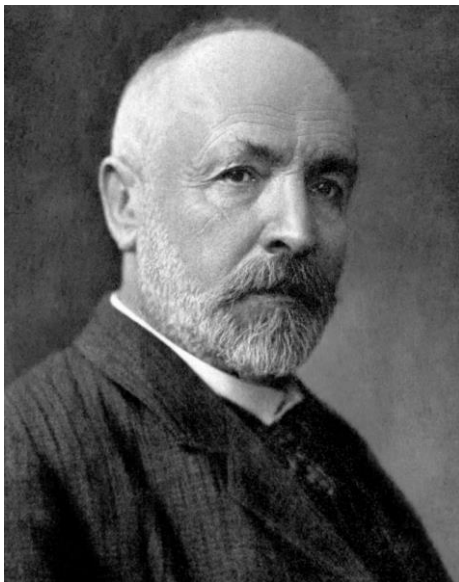


Abb. 30: Georg Cantor

Galilei Galileo hat in seinen *Discorsi e dimostrazioni matematiche* ein Rätsel angesprochen, das als Galileis Paradoxon in die Mathematikgeschichte einging. Es gibt nach damaliger Auffassung offenbar weniger Quadratzahlen als die natürlichen Zahlen, weil diese eine echte Untermenge sind. Er konnte aber jeder natürlichen Zahl eine Quadratzahl umkehrbar eindeutig zuordnen. Für Galilei war das ein Widerspruch. Immerhin kommt er zu dem Schluss, dass Begriffe wie „mehr als“, „weniger als“ oder „gleich“ im Falle unendlich keinen Sinn machen.⁹⁸ Selbst der „Fürst der Mathematik“ (Gauß) schrieb: *Das Unendliche ist nur eine Façon de parler, indem man eigentlich von*

*Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen gestattet ist.*⁹⁹

Erst Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)¹⁰⁰ hat sich zuerst mit Zahlen- und Funktionentheorie beschäftigt und ist darüber zur Mengenlehre

⁹⁷ Details und Zitat nach Wußing, Band 2, ebenda, S. 395. Kurz vor seiner Deportation beging er mit seiner Frau und Schwägerin am 26. Jan. 1942 Selbstmord.

⁹⁸ Alex Bellos, Im Wunderland der Zahlen, S. 406

⁹⁹ Briefwechsel zwischen C.F.Gauß und H.C.Schumacher, Hsgr. Christian August Friedrich Peters 1860, S 269. Brief datiert vom 12.7.1831

¹⁰⁰ Bildquelle

[https://de.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor#/media/Datei:Georg_Cantor_\(Porträt\).jpg](https://de.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor#/media/Datei:Georg_Cantor_(Porträt).jpg)

gekommen, die er in den Jahren 1874 bis 1897 begründete. Anfangs (1877) nannte er sie noch Mannigfaltigkeitslehre und bis 1878 wird der Begriff „Mannigfaltigkeiten“ verwendet.¹⁰¹ Er hat sich intensiv mit unendlichen Mengen und ihren Teilmengen beschäftigt und konnte die Widersprüche, die Galilei und anderen aufgefallen waren, auflösen.¹⁰² Es gab durchaus Vorläuferpublikationen. So war Cantor beeindruckt von Hermann Henkels „*Untersuchungen über die unendlich oft oszillierenden und unstetigen Funktionen*“, die 1870 erschien.¹⁰³ Hervorzuheben ist Henkels Methode der „Kondensation von Singularitäten“.

Eine der ersten Definitionen einer Menge stammt von Cantor:

*Unter einer ‚Menge‘ verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente‘ von M genannt werden) zu einem Ganzen.*¹⁰⁴

Er ersetzt damit diffuse Begriffe wie Gesamtheit oder Inbegriff.

Zuerst einige begriffliche Vorbemerkungen: Dazu soll zunächst auf die Begriffsbestimmung von endlich und unendlich im Kapitel „Einleitung und Fokus“ verwiesen werden. Für beide Arten von Mengen sollen hier kurz die Rechenregeln und Bezeichnungen erläutert werden. Eine Menge M_1 hat beliebige Elemente, z.B. zwei Zahlen π , 100 und ein Quadrat. Man schreibt $M_1 = \{\pi, 100, \text{Quadrat}\}$. M_1 hat die Mächtigkeit 3, also die Anzahl ihrer Elemente. Eine Menge $M_2 = \{e, 10!, \text{Kreis}\}$ ist verschieden von M_1 , weil mindestens ein Element verschieden ist, hat aber die gleiche Mächtigkeit, geschrieben $|M_1| = |M_2| = 3$. Es existiert nämlich eine bijektive Abbildung f , die jedem Element von M_1 ein Element aus M_2 zuordnet und umgekehrt. Eine Menge $M_3 = \{\pi, e\}$ hat die Mächtigkeit 2 und $|M_3| < |M_2| = |M_1|$. Eine Abbildung von M_3 in M_1 oder M_2 nennt man injektiv; umgekehrt von M_1 in M_3 surjektiv. Intuitiv einsichtig sind die Begriffe Vereinigungsmenge \cup , Schnittmenge \cap und Teilmenge \subset . Dann sollte

¹⁰¹ Cantor, Gesammelte Abhandlungen, S. 120, Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre.

¹⁰² Er zahlte gesundheitlich einen hohen Preis für seine Ideen. Sein akademischer Lehrer Leopold Kronecker nannte ihn einen „Scharlatan“ und „Verderber der Jugend“. Mit 39 hatte er einen Nervenzusammenbruch und es folgten viele weitere Krisen und Klinikaufenthalte. Immerhin schwärmte der hochangesehene David Hilbert: „*Aus dem Paradies, das Cantor uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.*“ (zitiert nach Bellos, S. 417).

¹⁰³ Siehe https://www.uni-muenster.de/imperia/md/content/logik/Skripte/pohlers.mengenlehre_1994.pdf

¹⁰⁴ Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre. In: Mathematische Annalen. Band 46, S. 481

Seine gesammelten Abhandlungen hat Ernst Zermelo herausgegeben: Man findet sie digital in der SUB: <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/de/index.html>

Suchwort: Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts

man die leere Menge \emptyset kennen, sie ist die Menge, die keine Elemente enthält. Sie darf man nicht mit der Nullmenge verwechseln, also z.B. einer Menge von Punkten mit dem Maß Null.¹⁰⁵ Dies können unendlich viele Punkte sein. Als ein weiterer Begriff wird die „Potenzmenge“ \wp verwendet werden. Es ist die Menge aller Teilmengen; z.B. ist $\wp(M_1) = \{\emptyset, \{\pi\}, \{100\}, \{\square\}, \{\pi, 100\}, \{\pi, \square\}, \{100, \square\}, \{\pi, 100, \square\}\}$. Man sieht leicht, dass die Mächtigkeit von $|\wp(M_1)| = 8 = 2^3$ ist, denn 3 ist die Anzahl der Elemente von M_1 .

Interessanter sind unendliche Mengen. Man betrachte die natürlichen Zahlen \mathbb{N} und die geraden positiven Zahlen G . Schon Galilei war verblüfft, dass die Mächtigkeit von $|G|$ nicht die Hälfte von \mathbb{N} ist. Beide Mengen sind unendlich und die Hälfte von unendlich ist wieder unendlich. Aber es ist sinnvoll, sich formal auf die Bijektion zu beziehen. Abbildung 36 zeigt, dass sich jeder geraden Zahl

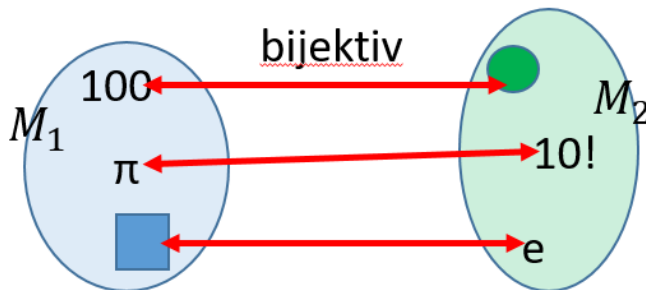


Abb. 31: Zwei Mengen sind gleichmächtig, wenn es eine bijektive (eindeutige) Abbildung zwischen beiden gibt.

umkehrbar eindeutig eine natürliche Zahl zuordnen lässt. Das gilt auch für Quadratzahlen, Primzahlen usw. und, wie sich zeigt, sogar für Brüche und algebraische Zahlen. Man nennt solche Mengen abzählbar im Gegensatz zu überabzählbar oder nicht abzählbar unendlich, wenn keine Bijektion in die natürlichen Zahlen existiert. Bei

der Rechnung mit unendlichen Mengen ist Vorsicht geboten. Nimmt man zu \mathbb{N} die Null dazu so ist \mathbb{N}_0 immer noch unendlich; d.h. $\infty + 1 = \infty$, analog $\infty - 1 = \infty$. Nimmt man zu \mathbb{N}_0 die negativen ganzen Zahlen dazu, so erhält man \mathbb{Z} ; d.h. $\infty + \infty = \infty$. Bei der Differenz dürfen allerdings die Mengen nicht gleich sein, sonst erhält man die leere Menge \emptyset .

Die genannte Mengendefinition ist für diese genannten Zahlenmengen noch einsichtig, reicht aber im Allgemeinen nicht für beliebige unendlich große Mengen. Es muss eine formale Regel oder Eigenschaft P geben, mit der man feststellen kann, ob ein Objekt m Element von M ist, weil $P(m)$ für m wahr ist. In der Praxis wird aber eine unendliche Menge mit mindestens einer solchen Regel definiert werden müssen. Dies ist nicht unbedingt eine Abbildungsvorschrift. Bei der Menge der geraden Zahlen ist die Abbildung $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n \bmod 2 = 0 \text{ und } n > 2\}$. Bei den Primzahlen kennen wir zwar die Regel, was eine Primzahl ist, aber wir kennen keine Abbildung; d.h. es gibt bisher keinen Algorithmus, um Primzahlen berechnen zu können. Genauso wichtig ist aber die Tatsache, dass

¹⁰⁵ Manchmal wird auch die Menge $\{0\}$ als Nullmenge bezeichnet.

diese erste Definition von Cantor auch Antinomien oder Paradoxien zulässt und der korrekte Mengenbegriff diese ausschließen muss. Man nennt deshalb die Cantor'sche Form auch „naive Mengenlehre“, ein Begriff, der seinen Leistungen nicht unbedingt Rechnung trägt. Siehe dazu das Kapitel zum Zermelo-Fraenkel Axiomensystem.

Ausgangspunkt vieler nachfolgender Überlegungen zu unendlichen Mengen war für Cantor eine Veröffentlichung aus dem Jahr 1872 „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“.¹⁰⁶ Diese Publikation verbessert in sechs Etappen und Nachträgen einen Vorläufersatz

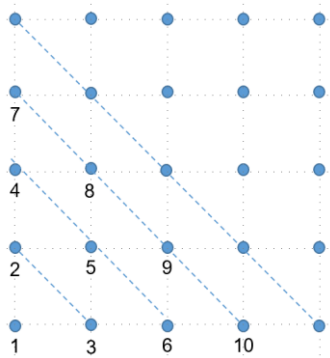


Abb. 32: Abzählbar unendlich: Zählverfahren für unendlich viele Gitterpunkte in der Ebene

(von E.H. Heine, 1821-1881) über die Eindeigkeitskriterien, wann eine Funktion durch trigonometrische Reihen dargestellt werden kann. Cantor zeigt zunächst, dass es endlich viele Ausnahmepunkte geben kann und dehnt den Beweis in vollständiger Allgemeinheit auf eine unendliche Menge an „Singularitäten“ aus, die auf eine bestimmte Weise verteilt sein müssen. Sicher war die Verallgemeinerung des Heine'schen Eindeigkeitsatzes die ursprüngliche Motivation. Mit der Betrachtung von unendlichen Punktmengen erweiterte sich aber die Zielsetzung und eröffnete Cantor „Unendlich“ als Forschungsgegenstand (siehe

Abb. 33).

An dieser Stelle verliert er vollends die Sympathie seines Doktorvaters Leopold Kronecker, der unendliche Mengen kategorisch ablehnte und zu einem eingefleischten Intuitionisten wurde (s.u.).

Cantor konstituiert hier in der mehrmaligen Verfeinerung des Beweises:

- (1) seine Theorie der irrationalen Zahlen, die sich als Grenzwerte von konvergenten rationalen Folgen ergeben.
- (2) Eine elementare Definition in der Beweiskette und wesentlich für die Mengenlehre ist der Begriff der „Ableitung einer Punktmenge“ P . Die „abgeleitete Menge P' “ von P ist die Menge aller Häufungspunkte von P .

¹⁰⁶ Georg Cantor; Gesamtausgabe seiner Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zermelo, Julius Springer, Berlin 1932, S. 92, digital verfügbar unter <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/>

In dem man die Ableitung beliebig oft (α -mal) iteriert, führt dies zu Punktmengen α -ter Art. (Wenn α über jede endliche Grenze hinauswächst, wird Cantor schließlich zur Begriffsschöpfung der „transfiniten“ Ordnungszahlen geführt: ω , $\omega+1, \dots$, ω^2, \dots , usw., näheres s.u.). Unter „Punktmenge“, „Häufungspunkt“ oder „Ausnahmepunkt / Singularität“ sind zunächst Punkte (genannt Zahlengrößen, heute als reelle Zahlen bezeichnet) auf der reellen Achse gemeint. Weitere Basis ist der Satz von Bolzano-Weierstraß, dass jede beschränkte unendliche Punktmenge mindestens einen Häufungspunkt enthält. Später kann man sich im Prinzip ohne Einschränkung der Allgemeinheit allgemeine unendliche Mengen vorstellen. Die Ableitungshierarchien werden dann allgemeiner zu einer Hierarchie der Potenzmengen (s.u.). Zermelo bezeichnet diesen Punkt als „Geburtsstätte der Cantor’schen Mengenlehre“. Die Bedeutung wird durch Ernst Zermelo in einem Kommentar erläutert, der hier im Original in Abb. 33 wiedergegeben werden soll.¹⁰⁷

Im Folgenden sollen die Ergebnisse von Cantor und seiner Nachfolger in gedrängter Form, mit Beispielen und Grafiken illustriert, dargestellt werden.

Wiewohl diese Ausdehnung des Satzes noch nicht seine äußerste Grenze darstellt, so ist die Abhandlung doch wichtig in zweifacher Beziehung:

1. Sie bringt im § 1 in gedrängter Darstellung zum ersten Male die sog. „Cantorsche Theorie der Irrationalzahlen“, worin diese als „Grenzwerte“ konvergenter Reihen von Rationalzahlen (später von Cantor „Fundamentalreihen“ genannt) erklärt werden. Unter einer „Zahlengröße“ wird hier immer das verstanden, was heute gewöhnlich als „reelle Zahl“ bezeichnet wird.

2. Im § 2 wird aus dem Begriffe des „Grenzpunktes“ einer unendlichen Punkt- oder Zahlenmenge (heute gewöhnlich „Häufungspunkt“ genannt), der Begriff der „abgeleiteten Punktmenge“ entwickelt, der dann α mal iteriert zur Definition von „Punktmengen α ter Art“ führt. Seine weitere Ausdehnung über jeden endlichen Index α hinaus hat den Forscher dann mit innerer Notwendigkeit zur Begriffsschöpfung „transfiniten“ Ordnungszahlen ω , $\omega + 1, \dots \omega^2, \dots$ geführt. In diesem Begriffe der „höheren Ableitungen“ einer Punktmenge haben wir somit den eigentlichen Keimpunkt und in der Theorie der trigonometrischen Reihen die Geburtsstätte der Cantorschen „Mengenlehre“ zu erblicken.

Abb. 33: Kommentar von Ernst Zermelo in den von ihm herausgegebenen Gesammelten Werken von Georg Cantor, der verdeutlicht, wie die Cantor’sche Mengenlehre in einem Erkenntnisprozess entstand.

¹⁰⁷ Georg Cantor; Gesamtausgabe seiner Abhandlungen, ebenda, Anmerkung von Zermelo, S. 101-102, ebenso S. 119 das Zitat in Abb. 33.

Es stellte sich schnell die Frage nach der „Größe“ von unendlichen (Zahl)Mengen. Dies führt zum entscheidenden Unterschied zu endlichen Mengen. Die Mächtigkeit einer endlichen Menge ist einfach die Anzahl ihrer Elemente. Cantor hat erstmals unendlich in verschiedene Größen, genannt Mächtigkeiten, unterteilt. So sind die natürlichen Zahlen \mathbb{N} , für die die Peano-Axiome gelten, abzählbar unendlich, was unmittelbar einleuchtet. Aber auch unendliche Mengen, für die eine eindeutige (bijektive) Beziehung zu den natürlichen Zahlen konstruiert werden kann, wie die Quadratzahlen, ungeraden oder geraden Zahlen, Primzahlen, etc. sind abzählbar unendlich. Dazu gehören auch auf den ersten Blick unerwartete Beispiele, wie die Menge der rationalen Zahlen oder der algebraischen Zahlen.¹⁰⁸ Bei irrationalen Zahlen aus \mathbb{R} funktioniert das in der Regel nicht, wie die Bemühungen von Dedekind und Cantors eigene Theorie der irrationalen Zahlen zeigten. Er veröffentlichte 1874 „Über eine Eigenschaft des Inbegriffs aller reellen algebraischen Zahlen“. Darin zeigte er, dass die algebraischen Zahlen \mathbb{A} abzählbar und dass das Kontinuum der reellen Zahlen zwischen 0 und 1, also das Intervall $[0, 1]$, nicht abzählbar ist. Er prägte dafür den Begriff der Mächtigkeit (gemessen durch die Kardinalzahl \overline{M}). \mathbb{A} ist äquivalent zu \mathbb{N} , das Intervall in \mathbb{R} ist es nicht. $[0, 1]$ ist aber gleichmächtig zu \mathbb{R} , was in der gleichen Publikation bewiesen wird (siehe auch Abb. 41, 51, 55 und 56, die darauf Bezug nehmen). Am Ende dieses Beitrags deutet er dann an, was später als „Kontinuumshypothese“ bekannt wird (Zitat: „...die genaue Untersuchung dieser Frage verschieben wir auf eine spätere Gelegenheit.“).

Wenn zwei wohldefinierte Mannigfaltigkeiten M und N sich eindeutig und vollständig, Element für Element, einander zuordnen lassen (was, wenn es auf eine Art möglich ist, immer auch noch auf viele andere Weisen geschehen kann), so möge für das Folgende die Ausdrucksweise gestattet sein, daß diese Mannigfaltigkeiten *gleiche Mächtigkeit* haben, oder auch, daß sie *äquivalent* sind. Unter einem *Bestandteil* einer Mannigfaltigkeit M verstehen wir jede andere Mannigfaltigkeit M' , deren Elemente zugleich Elemente von M sind.

Abb. 34: Auszug G. Cantor „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“ (1878)

David Hilbert soll in seinen Vorlesungen die verblüffenden Möglichkeiten mit dem abzählbar Unendlichen mit einem Beispiel illustriert haben, das als Hilberts Hotel bekannt wurde:^{109,110}

¹⁰⁸ Lösungen eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten

¹⁰⁹ Es wurde so in George Gamows Buch „Eins, zwei, drei ...Unendlichkeit“ (1947) genannt.

¹¹⁰ Eigene Grafik, inspiriert und wörtlich übernommen von John Stillwell, S. 5

Sind die unendlich vielen Zimmer im Hotel belegt, so kann man jeden Gast in das folgende Zimmer umquartieren. So wird das erste Zimmer frei.

Kommen unendlich viele neue Gäste, so quartiert man die alten Gäste z.B. in die Zimmer mit ungeraden Zimmernummern oder lässt zwischen jedem alten Gast ein Zimmer frei. Dadurch werden unendlich viele Zimmer mit den ungeraden Nummern frei. Selbst unendlich viele Busse mit jeweils unendlich vielen Gästen kann man durch abzählbar unendliche Konstellationen bei den Zimmernummern unterbringen.



Abb. 35: Hilberts Hotel

Das 1. Diagonalverfahren, mit dem die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen bewiesen wurde, stellt eine neue Beweistechnik in der Mathematik dar.

Dass natürliche Zahlen, gerade oder ungerade Zahlen, Primzahlen oder weitere Teilmengen der natürlichen Zahlen abzählbar unendlich sind, kann man gut nachvollziehen. Das „geniale“ 1. Diagonalverfahren, mit dem die Abzählbarkeit der rationalen Zahlen bewiesen wurde, soll mit der Abb. 36 verständlich gemacht werden. Die positiven Brüche werden gemäß der zweidimensionalen Tabelle dargestellt und entlang der Pfeile abgezählt. Dabei werden ungekürzte Brüche übersprungen. So kann man jedem Bruch bijektiv eine natürliche Zahl zuordnen. D.h. die positiven rationalen Zahlen \mathbb{Q}^+ sind abzählbar unendlich und die Menge ist gleichmächtig zu \mathbb{N} .¹¹¹

Eine andere Möglichkeit der Abzählung ist die Stern-Brocot-Folge bzw. der Stern-Brocot-Baum.¹¹²

¹¹¹ Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Cantors_erstes_Diagonalargument

¹¹² Nach Moritz Stern (1807-1894) und Achille Brocot (1817-1878) benannte Stern-Brocot-Folge, siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Stern-Brocot-Folge>

Auch bei den algebraischen Zahlen sollte man bzgl. ihrer Mächtigkeit genauer hinschauen.

Beispiele für algebraische Zahlen: $\sqrt{2}$ als Nullstelle von $x^2 - 2 = 0$ ist eine irrationale, algebraische Zahl vom Grad 2. Ebenso $\sqrt{3}$, $\sqrt[5]{6}$, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (Goldener Schnitt).¹¹³

Wir betrachten nun systematisch die Lösungen eines Polynoms vom Grad 1, Grad 2, Grad 3, usw. Wichtig: Es gibt generell bei den folgenden Überlegungen nur rationale Koeffizienten.

Eine Gleichung 1. Grades hat die Form $a \cdot x - b = 0$

und die Lösung ist immer rational $\frac{b}{a}$.

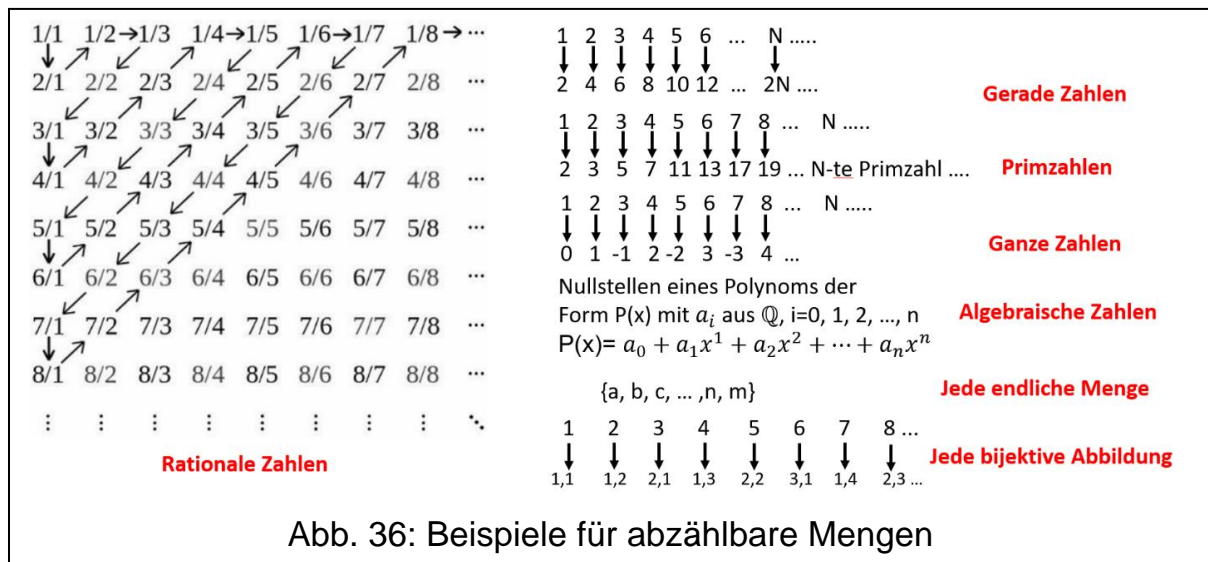


Abb. 36: Beispiele für abzählbare Mengen

Eine quadratische Gleichung hat die Form $ax^2+bx+c=0$. Es gibt zwar unendlich viele quadratische Gleichungen, aber nur abzählbar unendlich viele Kombinationen von den rationalen Koeffizienten a , b , c und damit abzählbar unendlich viele Lösungen von Gleichungen der Form $ax^2+bx+c=0$.

Die Menge soll M_2 heißen und enthält alle beliebigen, rationalen Werte von (a, b, c) .

Diese Argumentation kann man auf Gleichungen 3. Grades der Form

$$ax^3+bx^2+cx+d=0$$

übertragen, usw.

Allgemein hat ein Polynom die Form: $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0 = 0$

Damit liegen nun für jedes Gleichungssystem eines Grades abzählbar viele abzählbar unendliche Mengen von Lösungen vor. Die Elemente sind jeweils die Kombinationen der Koeffizienten des jeweiligen Grades $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0)$. Man

¹¹³ Quelle der Abb. 36: Rationale Zahlen: <https://blog.hnf.de/blick-ins-unendliche/>
Rest eigene Grafik, Beispiele aus https://de.wikipedia.org/wiki/Abzählbare_Menge

muss nun zeigen, dass die Vereinigung von abzählbar vielen abzählbar unendlichen Mengen wieder abzählbar ist. Dazu muss eine Systematik aufgebaut werden, die abzählbar ist. Dies gelingt mit dem 1. Diagonalverfahren. Die einzelnen Mengen der Lösungen des jeweiligen Polynom-Grades sollen M_1, M_2, M_3, \dots heißen. Jedes Element m_{ij} hat nun 2 Nummern, nämlich zu welcher Menge M_i es gehört und an welcher Stelle j es dort steht. So lassen sich alle Elemente so ordnen, dass sie abzählbar sind.¹¹⁴ Die Vereinigungsmenge dieser abzählbar vielen abzählbar unendlichen Mengen ist also ebenfalls abzählbar unendlich. Das kann man verallgemeinern. Formal und allgemein ausgedrückt: Zu jedem $k \in \mathbb{N}$ existiert eine Folge $(a_{n,k}), n \in \mathbb{N}$ in A_k mit $A_k = \{a_{n,k} : n \in \mathbb{N}\}$. Dann gilt

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k = \{a_{n,k} : n, k \in \mathbb{N}\}.$$

Somit ist die Lösungsmenge aller algebraischen Gleichungen mit rationalen Koeffizienten jeden Grades abzählbar. Das sind aber genau alle algebraischen Zahlen.¹¹⁵

$\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$			
1·1	= 1	→ 1	< $\sqrt{2}$ < 2
2·2	= 4		
1,4·1,4	= 1,96	→ 1,4	< $\sqrt{2}$ < 1,5
1,5·1,5	= 2,25		
1,41·1,41	= 1,9881	→ 1,41	< $\sqrt{2}$ < 1,42
1,42·1,42	= 2,0164		
1,414·1,414	= 1,999396	→ 1,414	< $\sqrt{2}$ < 1,415
1,415·1,415	= 2,002225		usw.
$\sqrt{2} = 1,41421\ 35623\ 73095\ 04880\ 16887\ \dots$			
Abb. 37: Eine irrationale Zahl ist eine Dezimalzahl mit unendlich vielen Stellen ohne Periode.			

Von besonderer Bedeutung ist das Kontinuum und jeder beliebig kleine Abschnitt davon. Was sind nun reelle, irrationale Zahlen in der Praxis? Cantor hat dazu eine pragmatische Definition, flankierend zu den Dedekind'schen Schnitten, geliefert. Eine irrationale Zahl hat eine nicht abbrechende unendliche Dezimalentwicklung.¹¹⁶ Hier konnte Cantor mit Hilfe des heute so

genannten 2. Diagonalverfahrens¹¹⁷ oder -arguments nachweisen, dass diese

¹¹⁴ Die Argumentation findet sich in unterhaltsamer Form bei Beutelspacher, Albrecht; Pasta all'infinito, C.H.Beck, München, 3. Auflage 2000, S. 178 f

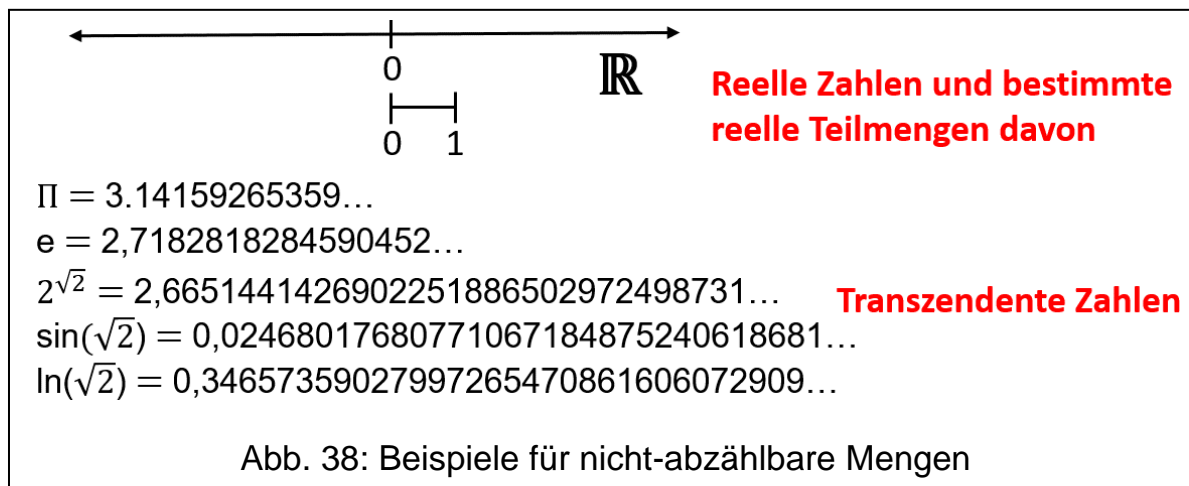
¹¹⁵ Die Veröffentlichung „Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen“ (1874) führte zu einer mehrjährigen Verstimmung zwischen Cantor und Dedekind, weil Dedekind nicht erwähnt wurde. Siehe https://www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=cd1_Anhaenge_2

¹¹⁶ Abb. 37: Eigene Grafik, inspiriert von Rudolf Taschner; Das Unendliche, Springer, Berlin Heidelberg 2006, S. 68

¹¹⁷ Allerdings gab es auch prominente Gegner des Verfahrens, z.B. den Physik-Nobelpreisträger P.W.Bridgeman, Reflections of a Physicist, Philosophic Library, New York, 1955

Menge nicht abzählbar unendlich ist. Auch der Beweis bedient sich Dezimalzahlen mit einer nicht abbrechenden Entwicklung hinter dem Komma. Cantor konnte eine reelle Zahl konstruieren, die in keiner vorgegebenen unendlichen Menge an reellen Zahlen enthalten ist. Er konnte zeigen, dass es zu jeder unendlichen Folge von Dezimalzahlen immer möglich ist, eine weitere Dezimalzahl zu konstruieren, die nicht in der Folge enthalten ist. Das 2. Diagonalverfahren, besser Diagonalargument¹¹⁸, dient also dazu, nicht-Abzählbarkeit zu beweisen, d.h. es gibt keine bijektive Abbildung der betreffenden Menge in die natürlichen Zahlen.

Das Kontinuum enthält einerseits die rationalen Zahlen und die algebraischen Zahlen, die Lösung eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten sind. Aber andererseits sind überall „dazwischen“ weitere unendlich viele (irrationale) transzendente Zahlen und machen es erst nicht abzählbar.

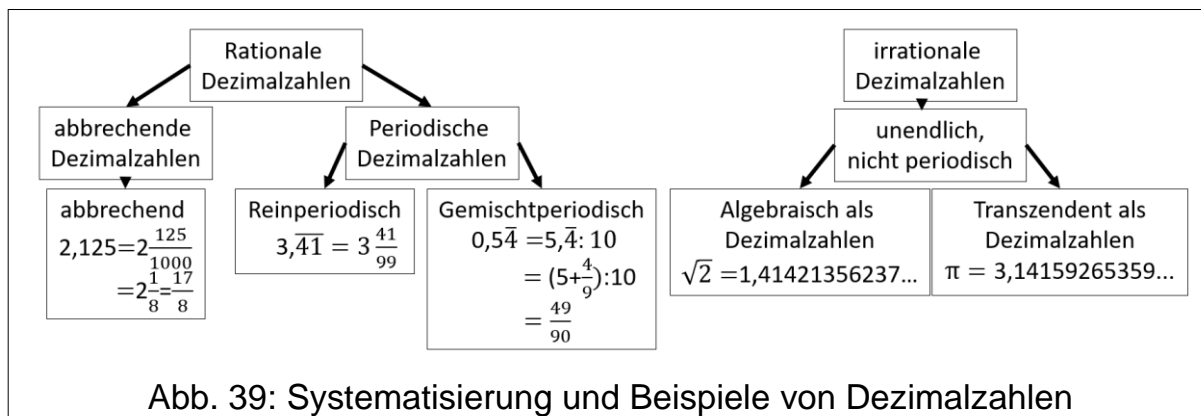


Auch die transzendenten Zahlen T kann man als unendliche Dezimalzahlen ohne Periode verstehen, auch wenn in der Praxis nur endlich viele Stellen errechnet werden können. Soweit man dieses mathematische Modell auf die physikalische Realität übertragen kann, so würde es auch formal das Problem lösen, das Newton und Leibniz so viel Kopfzerbrechen bereitet hat. Die Tangentensteigung $\frac{dy}{dx}$ müsste an jeder Stelle existieren, denn z.B. die Planetenbahnen sollten (im Modell) an jeder Stelle stetig und beliebig oft differenzierbar sein. Die immer kleineren Dreiecke, deren Hypotenusen die Bahnkurve annähern, würden dann die Ableitung als Dezimalzahl immer genauer berechnen.

Der Begriff „Dezimalzahl“ hat sich eingebürgert und jeder weiß, was damit gemeint ist. Streng genommen muss man von einer Ziffernfolge sprechen, die die entsprechende Zahl gemäß der Konvention eines Stellenwertsystems auf

¹¹⁸ Abb. 38: Eigene Grafik, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Transzendente_Zahl

Basis 10 repräsentiert. Z.B. ist im Binärsystem lediglich die Darstellung der Zahl auf Basis 2 verschieden.



Cantor¹¹⁹ hat die Mächtigkeit (oder Kardinalität) der natürlichen Zahlen und der jeder abzählbar unendlichen Menge mit \aleph_0 bezeichnet (gesprochen Aleph-Null, Aleph ist der erste Buchstabe des hebräischen Alphabets). Die nächste Mächtigkeit, die es auf jeden Fall gibt (transzendente Zahlen, Kontinuum), wäre dann \aleph_1 usw.¹²⁰ Für das Kontinuum schlägt Cantor in diesem Fall 2^{\aleph_0} vor. Er verwendet die Bezeichnung c .

Eine endliche Menge M von k Elementen hat 2^k Teilmengen, die Potenzmenge \wp . Denn bei einer Menge M , $m \in M$, mit Teilmengen S , S' , S'' , usw., ist m entweder in einem der S oder nicht. Das ergibt k ja/nein-Fragen, also $2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^k$ Teilmengen von M . Dieses Ergebnis will Cantor auf die unendliche Menge an Teilmengen von \mathbb{N} übertragen (meist geschrieben $\wp(\mathbb{N})$). Aber das war keine Formalität, schließlich war und ist das Ziel, aus einer unendlichen Menge M eine Menge $\wp(M)$ als Menge aller Teilmengen von M zu konstruieren, die eine größere Mächtigkeit als M besitzt. Im Beweis ist die Tatsache relevant, dass jede Menge M sich selbst als Teilmenge besitzt. Natürlich besteht zwischen beiden dann eine Eins-zu-eins-Beziehung, eine Bijektion. (Aber man beachte: Man nutzt eine problematische „Selbstbezüglichkeit“ von M aus.)

Der Beweis ist ein Widerspruchsbeweis, d.h. man nimmt an, dass die Bijektion von M zu allen Teilmengen besteht.

Bei den algebraischen Zahlen wurde die Abzählbarkeit mit dem Satz des „1. Diagonalelementes“ gezeigt. Gelingt dies bei jedem der Mengen aus $\wp(M)$, so gilt generell für die Vereinigung abzählbar unendlicher Mengen, dass $\wp(M)$ abzählbar ist.

¹¹⁹ Die folgenden Ausführungen lehnen sich an den Beitrag von Jean-Paul Delahaye in Spektrum der Wissenschaft Spezial, Das Unendliche, S. 12-19, an.

¹²⁰ Cantor nennt \aleph_0 und \aleph_1 auch erste und zweite Zahlklasse (also Kardinalzahlen). Durch Potenzmengenbildung entstehen weitere Zahlklassen.

Es zeigt sich jedoch, es lässt sich immer noch eine Menge konstruieren, die man mit dem 1. Diagonalargument nicht systematisieren, also abzählen kann.

Mit diesem Widerspruchsbeweis lässt sich unter Anwendung des Satzes zur Vereinigungsmenge (eigentlich Axiom) zeigen:

Die Potenzmenge $\wp(M)$ und damit speziell $\wp(\mathbb{N})$ von \mathbb{N} ist nicht abzählbar, die Mächtigkeit beider Potenzmengen ist also mindestens \aleph_1 .

Ohne ins Detail dieses sehr technischen Beweises zu gehen, liegt das eigentliche Problem in der Selbstbezüglichkeit bei einer Menge aller Mengen. In der Praxis ist dies selten ein Problem. Die Menge aller Tische ist kein Tisch und die Menge aller Bücher ist kein Buch. Aber der Kreter, der sagt, „Alle Kreter lügen“ oder der Barbier mit dem Schild im Schaufenster, „Ich rasiere alle, die sich nicht selbst rasieren“, führen zu Paradoxa.¹²¹ Es sind die Antinomien von Bertrand Russell oder Georg Cantor, die Anhänger und Gegner der Mengenlehre einige Jahrzehnte gespalten haben. Darunter waren Giganten der Mathematik, wie David Hilbert oder Henri Poincaré. Cantor war sich dessen bewusst und hat diese Antinomien in Briefen an Hilbert und Dedekind (27.7.1899) beschrieben.¹²² Er glaubte fest an eine Beseitigung durch sauberere Definitionen auf Basis eines Axiomensystems.

Davon abgesehen, ist der Beweis korrekt und die Potenzmengen von Mengen, z.B. auch der natürlichen Zahlen, haben, wie sich zeigte, eine größere Mächtigkeit als die Menge der natürlichen Zahlen selbst. Der Sachverhalt wird als „Satz von Cantor“ bezeichnet.

Die Frage ist, ist es die gleiche Mächtigkeit wie das Kontinuum, ist also $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Bei weiteren Mächtigkeiten müssten dann gelten: $2^{2^{\aleph_0}} = \aleph_2$, $2^{2^{2^{\aleph_0}}} = \aleph_3$, usw.¹²³ Es sind Kardinalzahlen für das Maß der Mächtigkeit einer unendlichen Menge.

Die Kontinuumshypothese besagt, dass $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ ist, d.h. zwischen den abzählbar unendlichen Mengen und dem Kontinuum gibt es demnach keine Abstufung. Diese Hypothese lässt sich auf Basis des Axiomensystems der klassischen Mengenlehre nicht beweisen. Ob es Axiome geben könnte bzw.

¹²¹ Die Geschichte stammt von Epimenides, Priester und Seher aus Kreta und wurde 600 Jahre später in einem Brief von Paulus an Titus, Kap.1, Vers 12 erwähnt. Das Barbier-Paradoxon stammt von Bernhard Russell (Wußing, Band 2, ebenda, S. 390 f). Man beachte: Es handelt sich in beiden Fällen sogar um endliche Mengen.

¹²² Wußing, Band 2, ebenda, S. 391. Es zeigt, dass Cantor keinen naiven Mengenbegriff hatte. Cantor glaubte durch geeignete Definition von Mengen die Antinomien zu vermeiden (z.B. durch „Wohlordnung“, später mit dem Auswahlaxiom von Zermelo bewiesen, s.u.).

¹²³ Vorgriff: Die moderne Form der Kontinuumshypothese lautet tatsächlich $2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$

gibt, die diese Frage entscheidbar machen, ist immer noch Gegenstand der Forschung (s.u.).

Man kann unter Berücksichtigung der Kontinuumshypothese plakativ sagen:

Potentiell unendlich	entspricht	∞
Aktual unendlich (mindestens)	entspricht	\aleph_1

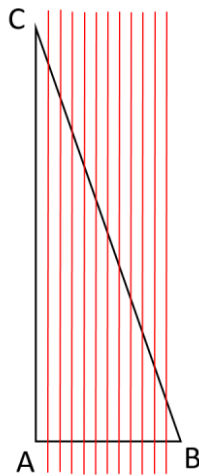


Abb. 41: \overline{BC} hat die gleiche Mächtigkeit \aleph_1 wie \overline{AB} denn es gibt eine bijektive Abbildung.

Es fehlen in der Betrachtung noch transzendente Zahlen wie e oder Pi. Irrational transzendente Zahlen sind erst relativ spät entdeckt worden, während algebraische irrationale Zahlen seit Entdeckung des Goldenen Schnitts oder der Quadratwurzel aus 2 wohlbekannt waren. Die erste transzendente Zahl wurde von Joseph Liouville (1809-1882) im Jahr 1844 entdeckt. Es ist eine Dezimalzahl, die nur aus Einsen und Nullen besteht.

Generell ist eine reelle Zahl x eine Liouville'sche Zahl, wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ganze Zahlen p und q gibt, mit $q > 1$, so dass

$$0 < \left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^n}$$

Allgemein zeigte Liouville: Ist a $0 \neq a \neq 1$, b algebraisch, b algebraisch und irrational, dann ist a^b eine transzendente Zahl. Dies ist eine Teillösung von Hilberts siebtem Problem.

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 ?$$

Abb. 40: Kontinuumshypothese Es gibt keine überabzählbare Menge reeller Zahlen, deren Mächtigkeit kleiner ist als die der reellen Zahlen.

Charles Hermite (1822-1901) bewies 1873 die Transzendenz der Euler'schen Zahl. e ist transzendent, aber nicht liouvillesch:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

π wurde erst 1882 durch Ferdinand von Lindemann (1852-1939) als transzendent nachgewiesen.¹²⁴ Er nutzte den berühmten Zusammenhang zwischen e und π aus:

$$e^{i\pi} = -1; \quad i = \sqrt{-1}$$

¹²⁴ John Stillwell, Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, Springer, Heidelberg 2014, S. 11 f

Vorsicht bei Prognosen, was eine transzendente Zahl sein könnte. Srinavasa Ramanujan vermutete es, 1974 bewies es John Brillo (University of Arizona):

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,744 \text{ ist exakt eine ganze Zahl.}^{125}$$

Cantor-Staub

Ein schönes Beispiel für eine nicht abzählbare Menge findet sich beim sogenannten Cantor-Staub¹²⁶ oder Cantor-Menge C.¹²⁷



Abb. 42: Die ersten 5 Iterationen von Cantor-Staub

Cantor-Staub entsteht, wenn man von einer Strecke L (der Einfachheit halber der Länge 1 im Intervall [0, 1]) z.B. jeweils das mittlere Drittel entfernt und diesen Vorgang unendlich oft wiederholt.¹²⁸ Es bleiben unendlich viele Punkte übrig. Die Cantor-Menge hat viele interessante Eigenschaften.¹²⁹

Es soll hier berechnet werden, wieviel von L=1 durch die unendlich fortgesetzten Iterationen entfernt wurde. Dieser Wert habe die Länge L₀.

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{9}\right) + 4\left(\frac{1}{27}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{3} + 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \dots \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \dots\right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\right) = \frac{1}{3} \frac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)} = 1 \end{aligned}$$

Die ersten Zeilen sind einfache Umformungen. Die 4. Zeile verwendet die Formel für eine konvergente unendliche geometrische Reihe. Dabei ist der Quotient zweier aufeinanderfolgender Glieder der zugehörigen Reihe konstant:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 x^n = \frac{a_0}{1-x} \text{ für } |x| < 1$$

¹²⁵ Toenniessen, Fridtjof; Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Spektrum, Heidelberg, 2010, S. 424

¹²⁶ Originalveröffentlichung: G. Cantor, Über unendliche, lineare Punktmannigfaltigkeiten V, Mathematische Annalen 21 (1883) 545-591, digitalisiert https://de.wikisource.org/wiki/Mathematische_Annalen/Inhalt_1869-1943

¹²⁷ Grafik Abb. 42 <https://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Menge>

¹²⁸ Es sind auch viele andere Varianten möglich.

¹²⁹ Mehr Informationen dazu siehe Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Bausteine der Ordnung Fraktale, Springer/Klett Cotta, 1992, S. 85-97

$$\text{hier } a_0 = 1 \text{ und } \frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{2}{3}$$

Man erkennt: $L_0 = L = 1.$ ¹³⁰

Man hat also durch die unendlichen Iterationen „alles“ entfernt und es bleiben trotzdem nicht abzählbar unendlich viele Punkte übrig.

Das liegt daran, dass man nur Strecken eine Länge zuordnen kann, einer Menge an Punkten dagegen nicht. Ihr Lebesgue-Maß, also das Maß im euklidischen Raum, das geometrischen Objekten ihren Inhalt (Länge, Flächeninhalt, Volumen, ...) zuordnet, ist Null. Die Cantor Menge stellt zwar ein Diskontinuum dar, ist aber abgeschlossen in \mathbb{R} , da Beginn und Ende von L , z.B. $[0, 1]$, nie entfernt werden. Topologisch besteht sie nur aus Randpunkten, die alle Häufungspunkte sind. Das Innere ist leer. Somit ist kein Punkt isoliert, aber die Menge ist nirgends dicht. Wären die Randpunkte keine Häufungspunkte, könnte man sie abzählen. Die Nicht-Abzählbarkeit kann man ebenfalls mit dem zweiten Diagonalargument zeigen. C ist somit gleich mächtig wie \mathbb{R} .

Die Punkte $x \in C$ haben eine triadische Darstellung (Basis 3) der Form

$$x = a_1 \cdot 3^{-1} + a_2 \cdot 3^{-2} + a_3 \cdot 3^{-3} + \dots, \quad a_1, a_2, a_3, \dots \text{ aus } \{0, 1, 2\}$$

Die Cantor-Menge C ist die Menge der Punkte in $[0, 1]$, für die es eine triadische Darstellung ohne die Ziffer „1“ gibt.¹³¹

Cantor-Staub ist ein Fraktal. Fraktale haben meist ein hohes Maß an Selbstähnlichkeit. So ist die um $\frac{1}{3}$ verkleinerte Punktmenge eine exakte Kopie von C . Das gilt für jedes Intervall $(\frac{1}{3})^k$ und die Mächtigkeit ist \aleph_1 . C hat zwar das Maß Null, aber eine euklidische Dimension gleich Null wird C nicht gerecht. Die Hausdorff-Dimension beträgt

$$D = \frac{\ln(2)}{\ln(3)} = ca. 0,6309 \dots$$

Diese spezielle Menge ist nur ein Beispiel. Cantor hat in einer Reihe von fünf Aufsätzen von 1879 bis 1884 mit dem fortlaufenden Titel „*Ueber unendliche Punktmannichfaltigkeiten*“¹³² Sätze sehr allgemeiner Natur bewiesen, die Cantor-Staub theoretisch abdecken. Mit der sogenannten Punktmenge begründete Cantor 1870 die Grundlagen der Theorie der „Fraktale“. Erst später

¹³⁰ Der Mathematikerscherz am Anfang der Zitate lässt sich mit der konvergenten geometrischen Reihe erklären. Dabei ist $a_0 = 1$ und $\frac{x^{n+1}}{x^n} = \frac{1}{2}$ also $\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

¹³¹ Näheres siehe Peitgen, Heinz-Otto, Jürgens, Hartmut, Saupe, Dietmar; Fraktale, Bausteine des Chaos, Klett-Cotta/Springer, Berlin Heidelberg/ New York, 1992, S. 85-96

¹³² Mit der Orthographischen Konferenz von 1876 gab es eine Rechtschreibreform im deutschen Sprachraum, die sich aber offenbar nicht sofort durchsetzte.

wurde dieser Begriff von Benoît Mandelbrot geprägt. Als Definition schlug er vor: *Ein Fraktal ist eine Menge, deren Hausdorff-Dimension größer ist als ihre Lebesgue'sche Überdeckungsdimension.*¹³³ Die Cantor'sche Punktmenge entsteht durch unendliche Wiederholung und führt zur Selbstähnlichkeit. Die Cantor-Menge war theoretisch das erste Fraktal; die Hilbert-Kurve praktisch. Allgemeiner nennt man auch gewisse Mengen oder topologische Räume Cantormengen, wenn sie ganz oder teilweise folg. Eigenschaften haben: Wenn sie ein „Diskontinuum“ sind, selbstähnlich sind mit Hausdorff-Dimension ungleich Null, überabzählbar sind, also die Mächtigkeit des Kontinuums haben und das Maß Null haben (Lebesgue-Nullmenge).

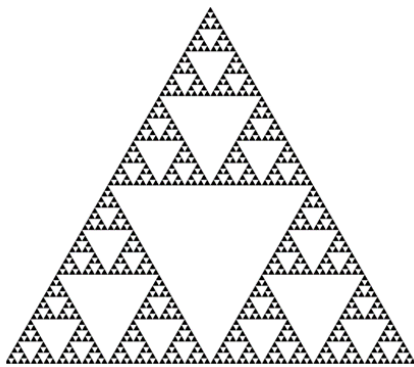


Abb. 43: Sierpiński-Dreieck nach 7 Rekursionen

Weitere Fraktale sind nach Waclaw Sierpiński (1882-1969), einem exzellenten polnischen Mathematiker benannt. Er griff die Forschungen von Cantor auf und leistete wichtige Beiträge zu mehreren mathematischen Bereichen, darunter zur Mengenlehre, obwohl er unter schwierigsten politischen Bedingungen arbeiten musste. Er beschäftigte sich intensiv mit der Kontinuumshypothese und bewies, dass das Auswahlaxiom aus der (verallgemeinerten) Kontinuumshypothese folgt (s.u.). Er schlug

den Bogen zwischen der Mengenlehre und mehreren Sätzen der euklidischen Geometrie. Ein zum Cantor-Staub eng verwandtes Beispiel ist das Sierpiński-Dreieck.¹³⁴

Sei die Seitenlänge des Dreiecks a und die Fläche A , $A_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$.

Jeder Iterationsschritt verringert die Fläche um $\frac{1}{4}$ bzw. A_k wird mit $\frac{3}{4}$ multipliziert.

$$A_k = \left(\frac{3}{4}\right)^k \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A_k = 0$$

Seine fraktale Dimension ist gerade der Kehrwert der fraktalen Dimension der Cantor-Menge

$$D = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1,585$$

¹³³ Zitiert nach Binimelis Bassa, ebenda S. 49

¹³⁴ Quelle der Grafik und weitere Informationen siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Sierpinski-Dreieck>

Weitere Beispiele für verschwindende Fläche oder Volumen als Grenzwert gegen unendlich ist der Sierpiński-Teppich¹³⁵ und seine Verallgemeinerung in die 3. Dimension, der Menger-Schwamm.¹³⁶

Die „Außenabmessungen“ der genannten Beispiele sind konstant. Deshalb ist der Grenzwert in allen Fällen Null. Es entstehen nicht-abzählbar unendliche Punktmengen. Ein Gegenbeispiel ist die Koch-Kurve.¹³⁷ Man sieht leicht, dass die Kurvenlänge jeweils um $\frac{4}{3}$ zunimmt, also nach dem k-ten Iterationsschritt sich um $(\frac{4}{3})^k$ verlängert.

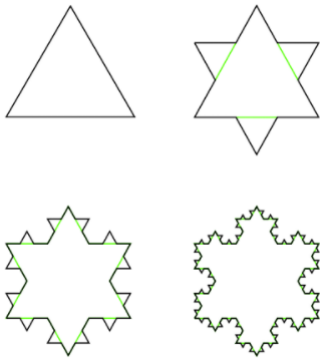


Abb. 44: Vier Iterationsschritte der Koch-Kurve

Die Länge der Koch-Kurve divergiert damit,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{4}{3}\right)^k = \infty$$

Die Fläche unter der Kurve bleibt aber endlich und strebt dem Grenzwert

$\frac{\sqrt{3}}{20} \cdot a^2$ zu, wenn a die Seitenlänge des ursprünglichen Dreiecks ist. Die Koch-Kurve ist stetig, aber nirgends differenzierbar. Als Fraktal hat sie die Hausdorff-

Dimension $\frac{\log 4}{\log 3} \approx 1,262$

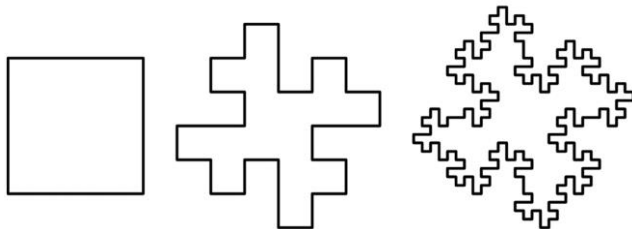


Abb. 45: Die ersten drei Iterationen der Minkowski-Kurve

Von der Systematik ist die weniger bekannte Minkowski-Kurve ähnlich einzustufen (im Englischen Minkowski-sausage).¹³⁸ Hermann

Minkowski (1864-1909) war ein vielseitiger und begabter

Mathematiker, der von Hilbert nach Göttingen geholt wurde. Sein Name ist eng verknüpft mit der gründlichen mathematischen Ausarbeitung von Einsteins Spezieller Relativitätstheorie („Zur Elektrodynamik bewegter Körper“). Der Minkowski-Raum hat dabei bis heute Gültigkeit und Relevanz. Die Kurve geht von einem Quadrat der Seitenlänge 1, also der Fläche 1, aus. Die Länge der Kurve (also der Umfang der durch Iterationen geänderten Figur, die aus dem

¹³⁵ <https://de.wikipedia.org/wiki/Sierpinski-Teppich>

¹³⁶ <https://de.wikipedia.org/wiki/Menger-Schwamm>

¹³⁷ Grafik <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:KochFlake.svg>

¹³⁸ Quelle der Grafik 38 https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5f/Minkowski_island_1-3.svg

Quadrat entsteht) geht gegen unendlich, während die Fläche konstant 1 bleibt. Die Hausdorff-Dimension ist $(\ln 8 / \ln 4) = 1,5 = 3/2$.

Auch in der Geometrie spielt der Unterschied zwischen abzählbar und nicht-abzählbar unendlich eine Rolle. Man kann die Ebene mit regelmäßigen Sechsecken parkettieren (Abb. 46).¹³⁹ Diese Sechsecke und damit ihre Eckenzahl kann man beginnend an einer beliebigen Stelle mit einer spiralförmigen Vorgehensweise abzählen. Die Mächtigkeit ist also \aleph_0 . Bedeckt man dagegen ein Blatt Papier endlicher Abmessung mit 2^{\aleph_0} gleich großen Kreisen, so funktioniert das nicht. Die Mittelpunkte können an beliebigen Stellen sein.¹⁴⁰ Die Mächtigkeit ist somit größer als \aleph_0 . Die Aussage ist zwar verblüffend, aber relativ trivial, da $|2^{\aleph_0}| > |\aleph_0|$ ist.

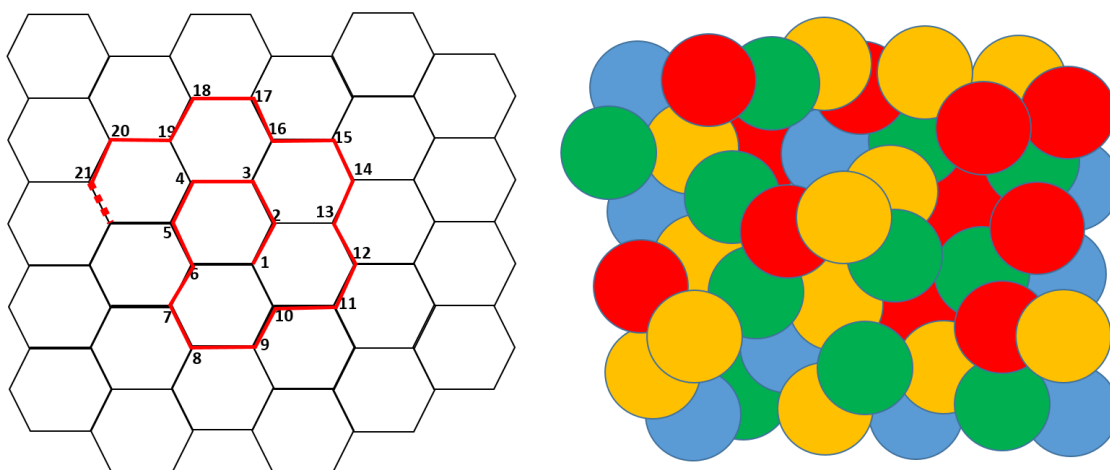


Abb. 46: Zur Parkettierung der Ebene \mathbb{R}^2 genügen abzählbar unendlich viele regelmäßige Sechsecke. Bei einer Überdeckung einer endlichen Fläche mit 2^{\aleph_0} Kreisen sind deren Mittelpunkte über- oder nicht-abzählbar.

Dass die transzendenten Zahlen eine nicht abzählbare unendliche Menge der Mächtigkeit \aleph_1 sein müssen, zeigt auch folgende Argumentation.

Auf dem Zahlenstrahl sind die Menge der natürlichen Zahlen \mathbb{N} , die algebraischen Zahlen \mathbb{A} und die der rationalen Zahlen \mathbb{Q} abzählbar unendlich und die Menge \mathbb{A} enthält \mathbb{Q} als Teilmenge und diese wiederum \mathbb{N} . Da \mathbb{R} nicht abzählbar ist, muss $\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$ als Menge der transzendenten Zahlen somit ebenfalls nicht abzählbar sein. Cantor hat diese Argumentation 1873 als neuen Beweis

¹³⁹ Eigene Grafik nach einer Abbildung ebenda, S. 16

¹⁴⁰ Zitiert nach Spektrum der Wissenschaft Spezial, Das Unendliche, S. 16

des Liouville'schen Satzes bezeichnet, in dem die transzendenten Zahlen ebenfalls als „Schnitte“ charakterisiert werden.¹⁴¹

Die Mächtigkeiten \aleph_0 und \aleph_1 wurden bereits diskutiert und als Kardinalzahlen bezeichnet, die unendlich abzählbare und kleinste nicht abzählbare Mengen charakterisieren. Es wurde bereits deutlich, dass die Theorie nicht nur Zahlenmengen, also Punkte auf der Zahlengeraden, abdeckt. So ist die Menge aller Teilmengen einer abzählbar unendlichen Menge M , die Potenzmenge von M , $\wp(M)$, ebenfalls nicht abzählbar. Durch einen Widerspruchsbeweis mit Hilfe des Diagonalargumentes ließ sich allgemein zeigen, also über die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen hinaus, dass es zu jeder Nummerierung eine Teilmenge gibt, die nicht durch diese erfasst wird. D.h. die Menge aller Teilmengen z.B. der natürlichen Zahlen \mathbb{N} , $\wp(\mathbb{N})$, lässt sich nicht bijektiv auf \mathbb{N} abbilden, sie ist mächtiger als \mathbb{N} und das lässt sich auf beliebige unendliche Mengen und ihre Potenzmengen verallgemeinern. Doch, wie bereits gesagt, geht die Hierarchie weiter:

$\wp(\wp(\mathbb{N}))$ ist mächtiger als $\wp(\mathbb{N})$ und hat die Mächtigkeit $2^{2^{\aleph_0}}$

$\wp(\wp(\wp(\mathbb{N})))$ ist mächtiger als $\wp(\wp(\mathbb{N}))$ und hat die Mächtigkeit $2^{2^{2^{\aleph_0}}}$

usw.

Auf diesen Ergebnissen fußt die Theorie der transfiniten Zahlen.

Dazu heißt eine Menge M „wohlgeordnet“, wenn jede ihrer Teilmengen ein kleinstes Element bzgl. einer Ordnungsrelation besitzt. In diesem Sinne ist \mathbb{N} durch die kleiner/größer-beziehung wohlgeordnet. Die Menge aller reellen Zahlen $\mathbb{R}_{>0}$ ist es nicht. Man erreicht die Null nicht.

Cantor erkannte, dass man bei unendlichen Mengen Zahl als Größe und Zahl als Index bzw. Position unterscheiden muss. In endlichen Mengen stimmen sie überein, in unendlichen nicht. „Eine Menge M heißt Ordinalzahl oder Ordnungszahl genau dann, wenn sie transitiv ist und durch die Elementrelation wohlgeordnet wird, d.h. genau dann, wenn jedes Element von M auch

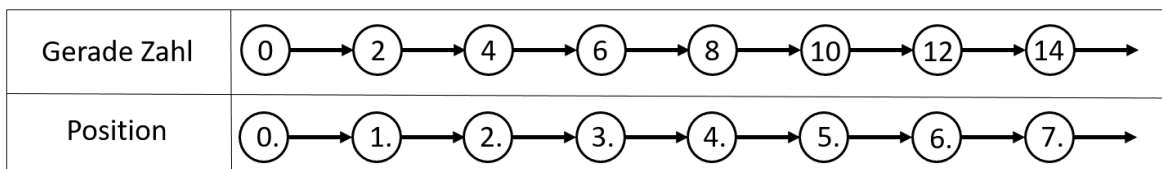


Abb. 47: Endliche Ordinalzahlen, also Positionen gemäß der Abzählbarkeit der Zahlen in \mathbb{N} am Beispiel gerade Zahlen ≥ 0 .

Die Menge der geraden Zahlen hat die Kardinalzahl \aleph_0 .

¹⁴¹ Georg Cantor, Brief an Dedekind, 2. Dez. 1873. In: Briefwechsel Cantor-Dedekind. Hsgr. E. Noether, J. Cavallès. Actualités Scientifiques et Industrielle 518, Paris 1937, zitiert nach Stillwell, ebenda S. 11

Teilmenge von M ist und jede Teilmenge von M ein kleinstes Element hat. Jede Wohlordnung ist dann zu genau einer Ordinalzahl isomorph, und man nennt diese Ordinalzahl den „Ordnungstyp der Wohlordnung“. In den natürlichen Zahlen gibt es eine Wohlordnung bzw. Ordnungsrelation durch die kleiner/größer-Beziehung. Sie fallen im Beispiel Abb. 47 mit der „Position“ in der Zahlenreihe der geraden Zahlen größer/gleich null zusammen: nullte Position entspricht Null, $(0.) \triangleq 0$, erste Position $(1.) \triangleq 2$, zweite Position $(2.) \triangleq 4$, usw. Dies kann bei anderen Mengen anders sein. Die alphabetische Sortierung von Schlagwörtern in einem Lexikon ist z.B. eine Ordnungsrelation. Kardinalzahlen sind Mengen, die als Repräsentanten von Mengen einer bestimmten Größe dienen. Entsprechend ist eine Ordinalzahl eine Menge, die den Ordnungstyp einer wohlgeordneten Menge repräsentiert.¹⁴²

Ordinalzahlen sind Positionsangaben wie z.B. „am ersten Ersten, das einundzwanzigste Jahr, Königin Elisabeth II (die Zweite), das tausendste Wort, ..., usw.“

Kardinalzahlen sind Antworten auf die Frage „Wie viele?“, also z.B. fünf (Äpfel), neunundzwanzig (Schafe), hundert (Euro), \aleph_0 (abzählbar unendlich viele Primzahlen), etc.

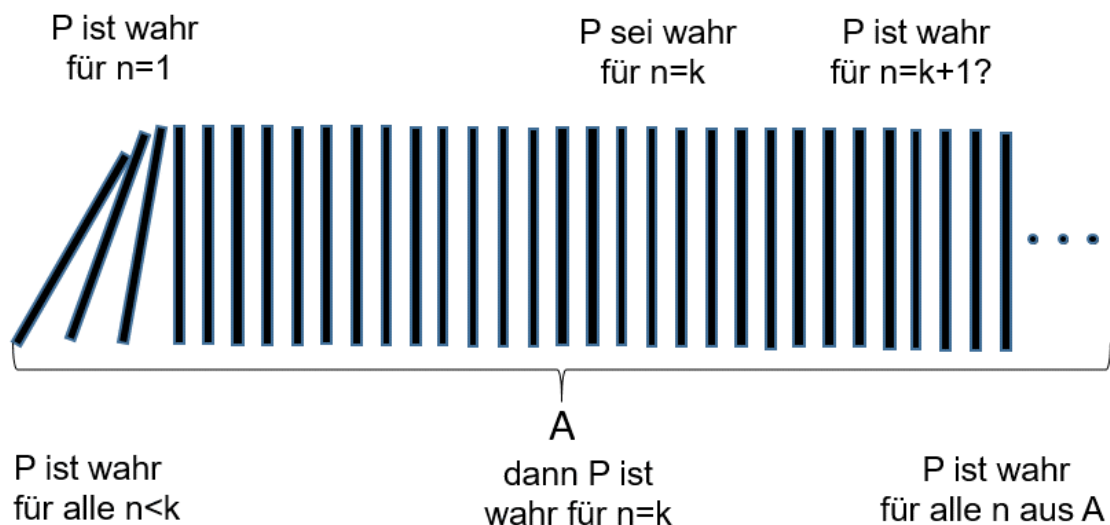


Abb. 48: Das Prinzip der vollständigen Induktion lässt sich auf transfiniten Induktion erweitern: Sei $(A, <)$ eine wohlgeordnete Klasse. Wenn $a \in A$ und für alle $b \in A$ mit $b < a$ gilt die Aussage $P(b)$. So gilt auch die Aussage $P(a)$ und P gilt für alle Elemente von A .

Eselsbrücke: Ordinalzahlen \triangleq aufzählen, Kardinalzahlen \triangleq abzählen

¹⁴² Siehe auch <https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/kardinalzahlen-und-ordinalzahlen/5135>

Die Definitionen sind deshalb so formal, weil nicht nur „Zahlenpunktmenge“ im speziellen, sondern im allgemeinen Sinn alle wohlgeordneten Mengen¹⁴³ damit adressiert werden können und auch auf unendliche Mengen Bezug genommen werden muss. Entscheidender Vorteil: Man kann das Prinzip der vollständigen Induktion auf „transfinite Induktion“ verallgemeinern.¹⁴⁴ Summe, Produkt und Exponentialfunktion gelten analog für alle Ordinalzahlen.

Doch wie kommt man über die natürlichen Zahlen als Positionsangaben hinaus? Die Antwort Cantors lautet: Man zählt einfach darüber hinaus und erhält transfinite Zahlen beginnend mit ω , $\omega+1$, $\omega+2$, usw. bis zunächst $\omega+\omega$ oder 2ω . Dies kann man im ersten Schritt bis ω^2 weiterzählen. Eine geometrische Veranschaulichung bis ω^n in einem n-dimensionalen Raum ist theoretisch möglich, doch ab ω^ω versagt unser Vorstellungsvermögen. Man kann also eine kleinste transfinite Ordinalzahl ω definieren, danach $\omega+1$, $\omega+2$, usw., dann ω^2 , ω^2+1 , ... , sogar ω^2 , ω^ω , usw. Damit geht die Zählung nach unendlichen Positionen aus \mathbb{N} sozusagen „unendlich weit“ über alle weiteren Positionen hinaus (zur Ordinalzahlarithmetik siehe genauer S. 86).

Zur Erinnerung: Historisch entstand die Idee und spätere Ausarbeitung der Theorie der Ordinalzahlen durch Cantor bei seinen funktionentheoretischen Untersuchungen „Über die Ausdehnung eines Satzes aus der Theorie der trigonometrischen Reihen“, Math. Annalen Bd. 5, S. 123-132 (1872). Siehe dazu Abb. 33¹⁴⁵, Kommentar von Ernst Zermelo in den Gesammelten Abhandlungen von Georg Cantor. Ausgearbeitet wurde die Theorie zwischen 1879 und 1884 in der sechsteiligen Veröffentlichung „Über unendliche Punktmannichfaltigkeiten“.

Cantor erweiterte die Arithmetik, die Peano / Dedekind durch ihre Axiome etabliert hatten, um die arithmetischen Operationen Addition und Subtraktion zwischen Ordinalzahlen. Er führte sie mittels transfiniter Rekursion als stetige Fortsetzung der finiten Rechenoperationen ein.

Die Definition von Ordinalzahlen hat eine Entwicklung erfahren:
Cantor (1897): „Allgemeinbegriff“, der sich durch Abstraktion ergibt.

¹⁴³ Eine wohlgeordnete Menge an Namen ist z.B. ein Telefonbuch.

¹⁴⁴ Albrecht Beutelspaner nennt in seinem vergnüglichen Buch *Pasta all'infinito*, C.H.Beck, München, 3. Auflage 2000 ein mögliches Anwendungsbeispiel: Man kann Sätze in der rationalen Ebene beweisen, weil es da „nur“ abzählbar unendlich viele geometrische Objekte geben kann. Um die allgemeine Gültigkeit dieser Sätze in der „normalen“ euklidischen Ebene mit reellen Punkten und Überabzählbarkeit zu beweisen, kann man transfinite Induktion anwenden.

¹⁴⁵ Abb. 33 Kommentar von Ernst Zermelo in Georg Cantor, *Gesammelte Abhandlungen*, Hrsg. Ernst Zermelo, Springer, Berlin, 1932, S. 102

Bertrand Russell (1903): Äquivalenzklasse von Wohlordnungen, (denn zu jeder Wohlordnung gibt es eine ihr isomorphe Ordnungszahl).

John von Neumann (1923) definierte Ordinalzahlen als eine Hierarchie und gab Cantors Ideen damit einen endgültigen formalen Rahmen. Er beginnt bei der leeren Menge \emptyset , dann der Menge bestehend nur aus der leeren Menge $\{\emptyset\}$, weiter der zwei-Elemente großen Menge bestehend aus leerer Menge und Menge aus der leeren Menge usw. Er definierte dadurch die natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen ab der Null über Mengen und nutzte dabei die Iteration von Potenzmengen.¹⁴⁶

$$0: = V_0 = \emptyset$$

$$1: = V_1 = \{\emptyset\} = \rho(\emptyset)$$

$$2: = V_2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \rho(\rho(\emptyset))$$

$$3: = V_3 = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\} = \rho(\rho(\rho(\emptyset)))$$

...

$$n: = V_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$$

Man kann sagen, die natürlichen und die transfiniten Zahlen wurden somit in der abstrakten Mengenlehre aus der leeren Menge (\emptyset) heraus entwickelt.

Beim Übergang von den natürlichen Zahlen \mathbb{N} zu den transfiniten Zahlen beginnt man mit ω :

0, 1, 2, 3, (bis ∞), ω , $\omega+1$, ... oder

$$\omega: = V_\omega = \{0, 1, 2, 3, \dots\}.$$

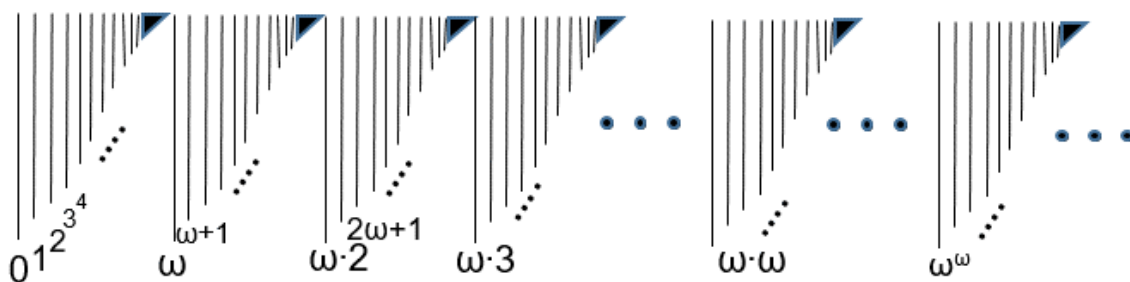


Abb. 49: Ordinalzahlen von 0 bis $\omega^{\omega+\dots}$ (lineare Darstellung)

Sind a und b zwei Ordinalzahlen, so ist $a < b$, wenn a Element von b ist. Damit existiert eine Ordnungsrelation, unabhängig ob die Ordinalzahl natürlich oder transfinit ist.

Generell gilt der Grundsatz:

Will man eine Menge zählen, muss man ihre
Elemente so ordnen, dass man sie zählen kann.

¹⁴⁶ Quelle der Grafik Abb. 50 <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Omega-exp-omega-labeled.svg>

Hinweis: Die Menge der natürlichen Zahlen besitzt die Kardinalzahl \aleph_0 . Die Ordinalzahlen sind alle abzählbar und gleichmächtig, denn sie stellen Positionsangaben dar. Damit ist \aleph_0 auch die Kardinalzahl aller Zahlen bis ω und zugleich aller Zahlen bis ω^ω . Es wäre ein Fehlschluss zu behaupten, dass ω^ω die Mächtigkeit $2^{\aleph_0} > \aleph_0$ hat, weil ω^ω „mehr“ Elemente als z.B. ω enthält. ω enthält nämlich genauso viel Elemente als ω^ω . 2^{\aleph_0} dagegen ist eine viel mächtigere Menge. Bertrand Russell schreibt:

„In dieser Theorie [Unendliche Mengen] ist es notwendig, Kardinal- und Ordinalzahlen getrennt zu behandeln, denn sie unterscheiden sich sehr viel mehr in ihren Eigenschaften, wenn sie transfinit sind, als wenn sie endlich sind.“¹⁴⁷

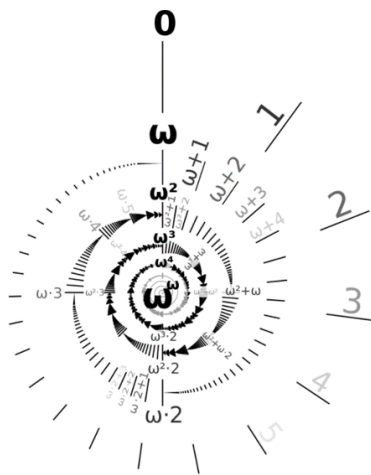


Abb. 50: Ordinalzahlen von 0 bis ω^ω (spiralförmig).

Allerdings zeigt ein Beispiel erneut ($1+\omega=\omega$ und nicht $\omega+1$), dass man bei Überspringen der Grenze zum Unendlichen in der Reihenfolge vorsichtig sein muss. Dagegen kann man z.B. $\omega+3$ bilden. Dies gilt auch für Produkte, da

$$\omega \cdot \omega^\omega = \omega^1 \cdot \omega^\omega = \omega^{1+\omega} = \omega^\omega$$

Der Vergleich mit endlicher Arithmetik zeigt sich am besten bei den Gruppeneigenschaften. Die Gegenbeispiele zeigen, die Addition und die Multiplikation ist nicht kommutativ.¹⁴⁸ Die Addition ist assoziativ, denn $(\rho + \sigma) + \tau = \rho + (\sigma + \tau)$.

Allerdings können beim Überspringen der

Unendlichkeitsgrenze unerwartete Ergebnisse entstehen.

Für die Multiplikation gilt eines der Distributivgesetze $\rho(\sigma + \tau) = \rho\sigma + \rho\tau$.

Das neutrale Element der Addition ist 0 und der Multiplikation ist 1.

Es fehlen aber inverse Elemente, da negative Ordinalzahlen nicht definiert sind. Damit bilden die Ordinalzahlen keine Gruppe (und erst recht höher strukturierte algebraische Strukturen). Eine Ordinalzahlarithmetik oder transfinit Arithmetik ist nur und ausschließlich dann, wenn man die Besonderheiten des Unendlichen berücksichtigt, mit den Operationen, die sich auf natürliche Zahlen (als Ordinalzahlen) beziehen, vergleichbar. Aber wegen „unendlich“ muss man sich enorm vor „Denkfehlern“ hüten, weil sonst selbstverständliche und elementare Rechenoperationen anders verlaufen. Die Ordnungsrelation ist natürlich das „<“-Zeichen. Addiert man etwa $\omega+\omega$, so muss man die Elemente so

¹⁴⁷ Zitiert nach David Foster Wallace; Die Entdeckung des Unendlichen, ebd. S. 247

¹⁴⁸ Der Einfachheit halber wurden die „normalen“ Rechenzeichen verwendet. Man muss aber die besonderen Rechenregeln bei unendlichen Ordinalzahlen beachten.

umgruppieren, dass die Mengen disjunkt sind und sich mit der Ordnungsrelation „<“ eindeutig anordnen lassen.

Z.B. $\omega + \omega = \text{ord}(\{0 < 1 < 2 < 3 < \dots < 0_{(0)} < 1_{(0)} < 2_{(0)} < 3_{(0)} \dots\})$.

Die Menge ist wohlgeordnet und hat mit 0 und $0_{(0)}$ lediglich zwei Elemente mit keinem Vorgänger. Man nennt sie ordnungsisomorph zur Ordinalzahl $\omega + \omega$. Wie bereits betont: Durch die Abzählbarkeit ist die Mächtigkeit immer \aleph_0 .

Die Besonderheiten der nicht geltenden Kommutativität zeigen sich deutlich in streng formalen Darstellungen. Dabei wird gemäß der Reihenfolge der Multiplizanden beginnend bei $0_{(0)}$ nummeriert und bei endlichen Zahlen mal einer transfiniten Zahl die endliche Ordinalzahlfolge umbenannt.

Ordinalzahl $\omega \cdot 2$: $\{0_{(0)} < 1_{(0)} < 2_{(0)} < \dots < 0_{(1)} < 1_{(1)} < 2_{(1)} < \dots\}$, das ist $\omega + \omega$

Ordinalzahl $2 \cdot \omega$: $\{0_{(0)} < 1_{(0)} < 0_{(1)} < 1_{(1)} < 2_{(1)} < \dots\}$, dies können wir umbenennen zu $\{0_{(1)} < 1_{(1)} < 2_{(1)} < \dots\}$, das ist ω .¹⁴⁹

Etwas anders sieht es beim Vergleich von Mächtigkeiten, insbesondere unendlicher Mengen aus, die sich in einer Kardinalzahlarithmetik manifestieren müssen. Darauf wird einzugehen sein, wenn die wichtigsten Axiome der Mengenlehre angesprochen sind.

Cantor selbst war von mehreren seiner eigenen Ergebnisse überrascht. Er konnte z.B. unwiderlegbar zeigen, dass die Punkte einer Strecke die gleiche Mächtigkeit wie z.B. die Punkte einer Fläche haben.¹⁵⁰ Das gilt darüber hinaus für jeden n-dimensionalen Raum. Es berührt den Dimensionsbegriff; die Abbildung ist übrigens nicht stetig.

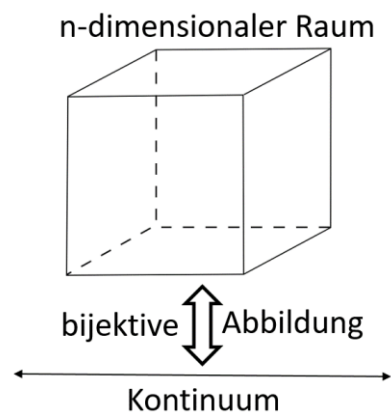


Abb. 51: Die reellen Zahlen haben die gleiche Mächtigkeit wie jede n-dimensionale Punktmenge. Das schließt die komplexen Zahlen ein

In einem Brief an Dedekind vom 29. Juni 1877¹⁵¹ schrieb er: „*je le vois, mais je ne crois pas*“ („Ich sehe es wohl, aber ich glaube es nicht.“)¹⁵²

¹⁴⁹ Der Passus über Ordinalzahlarithmetik orientiert sich stark an de.wikipedia.org/wiki/Transfinite_Arithmetik

¹⁵⁰ Siehe die bereits in Abb. 31 zitierte Abhandlung von G. Cantor „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre“, in den Gesammelten Abhandlungen, S 122 f

¹⁵¹ Zitiert nach Wußing, 6000 Jahre Mathematik, Band 2, S. 386

¹⁵² Die eigene Grafik bezieht sich auf die in Abb. 51 angesprochene Abhandlung, ebenso Abb. 41, 51, 55 und 56.

Zermelo-Fraenkel Mengenlehre und darüber hinaus

In der Infinitesimalrechnung haben Newton und Leibniz das „unendlich Kleine“ lange nach Archimedes wiederentdeckt. Newton war in der physikalischen Anwendung epochal erfolgreich; Leibniz hatte die bessere Notation gefunden. Einige Generationen an Mathematikern war nötig, um die neue Wissenschaft der Analysis von unschönen Widersprüchlichkeiten zu befreien. Dies gelang Cauchy und abschließend Weierstraß. Daneben wurden unendliche Folgen, Reihen, Integrale und Produkte selbstverständliche und mathematisch fruchtbare Untersuchungsobjekte. Erst Bolzano wagte sich auch zaghaft an unendliche Mengen. Georg Cantor fand schließlich erstaunliche Ergebnisse in fast allen Aspekten der Unendlichkeit. Doch die Kontinuumshypothese machte ihm schwer zu schaffen, mehrmals glaubte er vergeblich an einen Durchbruch. Und es fehlte insgesamt an einem axiomatischen Ansatz, um die Mengenlehre auf ein solides Fundament zu stellen. Dies leistete der deutsche Mathematiker Ernst Zermelo (1871-1953) im Jahr 1907 und stark ergänzend der deutsch-israelische Mathematiker Abraham Fraenkel (1891-1965) im Jahr 1921. Beiträge kamen auch von dem Norweger Thoralf Skolem (1887-1963). Ihre Axiome sind heute die Basis für eine mengentheoretisch begründete Mathematik.¹⁵³ Nach ihren Initialen wird sie ZF genannt. Um es deutlich zu sagen: In ZF sind Mengen nur und ausschließlich die einzigen Objekte. ZF wird in der Prädikatenlogik (1. Stufe) formuliert, die nur logische Zeichen enthält. Ausnahme ist das Elementzeichen \in . Dies ist die formale „Grundsprache“, die bei Bedarf ergänzt werden kann (je nach Disziplin, z.B. der Gruppentheorie). Dazu kommen die eigentlichen Axiome und Ableitungsregeln. Diese formale Sprache wird in der täglichen Praxis nur in Ausnahmefällen verwendet, aber sie kann im Prinzip wie eine Programmiersprache verwendet werden um einen Beweis zu verifizieren oder zu falsifizieren. Ohne zu sehr in den mathematischen Formalismus einzugehen, kann man die Axiome auch in einer leichter verständlichen Sprache formulieren:¹⁵⁴ Die folgende Liste reduziert sie auf Schlagworte¹⁵⁵:

- Axiom 1: Zwei Mengen sind genau dann gleich, wenn sie dieselben Elemente enthalten. (Extensionalitätsaxiom)
- Axiom 2: Es gibt eine Menge ohne Elemente, genannt die leere Menge (Leermengenaxiom)

¹⁵³ Eine Gruppe vorwiegend französischer Mathematiker arbeitete seit 1934 an einer axiomatischen Formulierung der Mathematik auf Basis der Mengenlehre. Sie gab sich das Pseudonym Nicolas Bourbaki.

¹⁵⁴ Ausführlicher erläutert siehe Stillwell, John; Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, Springer Spektrum, Heidelberg, 2014, S. 29 f

¹⁵⁵ Wörtlich aus <https://de.wikipedia.org/wiki/Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre>

- Axiom 3: Zu beliebigen Mengen X und Y gibt es eine Menge, deren einzige Elemente X und Y sind, ungeordnetes Paar (Paarmengenaxiom)
- Axiom 4: Zu jeder Menge X gibt es eine Menge, deren Elemente die Elemente der Elemente von X sind (Vereinigungsaxiom)
- Axiom 5: Es gibt eine Menge A , die die leere Menge und mit jedem Element X auch die Menge $X \cup \{X\}$ enthält (Unendlichkeitsaxiom)
- Axiom 6: Für jede Menge A gibt es eine Menge \wp , deren Elemente genau die Teilmengen von A sind. (Potenzmengenaxiom)
- Axiom 7: Jede nichtleere Menge A enthält ein Element B , so dass A und B disjunkt sind (Fundierungsaxiom)
- Axiom 8: Hier handelt es sich um ein Axiomenschema mit je einem Axiom zu jedem Prädikat P : Zu jeder Menge A existiert eine Teilmenge B von A , die genau die Elemente C von A enthält, für die $P(C)$ wahr ist. Aus dem Extensionalitätsaxiom ergibt sich sofort, dass es genau eine solche Menge gibt. Diese wird mit $\{C \in A \mid P(C)\}$ notiert. (Aussonderungsaxiom).
- Axiom 9: Ist A eine Menge und wird jedes Element von A eindeutig durch eine beliebige Menge ersetzt, so geht A in eine Menge über. (Für jede Funktion f und Menge X bilden die Werte eine Bildmenge) (Ersetzungsaxiom)
- Plus ggfs. Axiom 10: Auswahlaxiom \rightarrow ZF wird zu ZFC

Hier einige Bemerkungen und Beispiele zu den Axiomen ab Axiom 1:

Extensionalitätsaxiom, sagt einfach, dass Mengen nur über ihre Elemente definiert werden und über sonst nichts. Gleiche Mengen haben gleiche Elemente, aber auch umgekehrt, wenn die Elemente übereinstimmen, sind die Mengen gleich.

Leermengenaxiom heißt, es gibt nicht eine leere Menge, sondern die leere Menge.

Das Paarmengenaxiom wird z.B. gebraucht um in der von Neumann Definition die natürlichen Zahlen axiomatisch begründen zu können. So ist $2 = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

Mengen kann man vereinigen und davon Schnittmenge oder kartesisches Produkt ableiten.

Die Menge aller Teilmengen ist die Potenzmenge. Teilmengen sind auch die Menge selbst und die leere Menge. Damit kann man eine unendliche Hierarchie von unendlichen Mengen aufbauen.

Das Unendlichkeitsaxiom sagt, dass sozusagen der Nachfolger $+ 1$ auch in der Menge enthalten ist. Darauf beruht die Induktion.

Das Aussonderungsaxiom, engl. restricted comprehension genannt, verhindert Russell'sche Antinomien.

Das Ersetzungsaxiom fehlte ursprünglich bei Zermelo. Es wurde von Fraenkel (und Skolem) vorgeschlagen. Z.B. ist es damit nur möglich, $\omega+\omega$ zu bilden. Das Fundierungsaxiom (auch Regularitätsaxiom) verhindert zyklische Ketten von Elementen, also Ketten der Form $x_1 \in x_2 \in x_3 \in \dots \in x_n \in x_1$. Es wurde 1925 von John von Neumann vorgeschlagen und 1930 in ZF aufgenommen.

Es fehlt noch das optionale und berüchtigte Auswahlaxiom.¹⁵⁶ In den Worten von David Hilbert: [Es ist] *das bisher in der mathematischen Literatur am meisten angefochtene Axiom*.¹⁵⁷ Auswahlaxiom und Kontinuumshypothese sind immer noch umstritten bzw. Gegenstand der Forschung (in Verbindung mit Erweiterungen von ZF).

ZF ist durchaus hochgeachtet, hat aber einen Makel: Die Kontinuumshypothese ist in ZF unentscheidbar. Kurt Gödel bewies 1938, dass die Mengenlehre konsistent bleibt, wenn man ihr das Axiom hinzufügt, dass die Kontinuumshypothese wahr ist. 1963 bewies Paul Cohen (1934-2007), dass die Mengenlehre konsistent bleibt, wenn das Axiom hinzugefügt wird, die Kontinuumshypothese sei falsch. Er entwickelte dazu eine sehr erfolgreiche Standardbeweismethode namens „forcing“. Für seine Leistungen wurde Cohen mit der Fields-Medaille ausgezeichnet. Um den Begriff „konsistent“ zu präzisieren, soll hier Paul Cohen zitiert werden:

Sicher kann ein Modell der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre – also eine Menge mit einer bestimmten Enthaltensein (\in) Relation – nicht innerhalb der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre gezeigt werden. Dieses impliziert die Konsistenz der Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre und das verletzt das Unvollständigkeitstheorem¹⁵⁸ [gemeint ist der 2. Unvollständigkeitssatz von Kurt Gödel].

ZF kann aber sinnvoll durch das sogenannte Auswahlaxiom erweitert werden („C“ wie choice) und wird dann zu ZFC: Ist A eine Menge von paarweise disjunkten, nichtleeren Mengen, so existiert eine Menge, die aus jedem Element von A genau ein Element enthält. Das Auswahlaxiom postuliert also, dass zu jeder Menge von nichtleeren Mengen eine Auswahlfunktion existiert.

Streng genommen hat erst Gödel 1937 bewiesen, dass Hinzunahme des Auswahlaxioms keinen Widerspruch erzeugt; 1963 hat Paul Cohen gezeigt, dass auch die gegenteilige Aussage nicht zu Widersprüchlichkeit führt.

Allerdings sagt es nur die Existenz voraus und gibt keinen Hinweis, wie man die Abbildung F konstruieren kann und erst recht nicht, wie man alle dazu prädestinierten Abbildungen finden kann. Das Auswahlaxiom erinnert etwas an

¹⁵⁶ Siehe Wikipedia-Definition, <https://de.wikipedia.org/wiki/Auswahlaxiom>

¹⁵⁷ David Hilbert's Lectures on the Foundations of Arithmetic and Logic 1917-1933, Hrsg. William Ewald, Wilfried Sieg, Springer Berlin Heidelberg, 2013, S. 754

¹⁵⁸ Paul Cohen; Wie ich „Forcing“ entdeckte, e-enterprise, S. 48. Vortrag auf der „Second Honolulu Conference on Abelian Groups and Modules“ vom 25.07.-01.08.2001 (Manoa Campus, University of Hawaii)

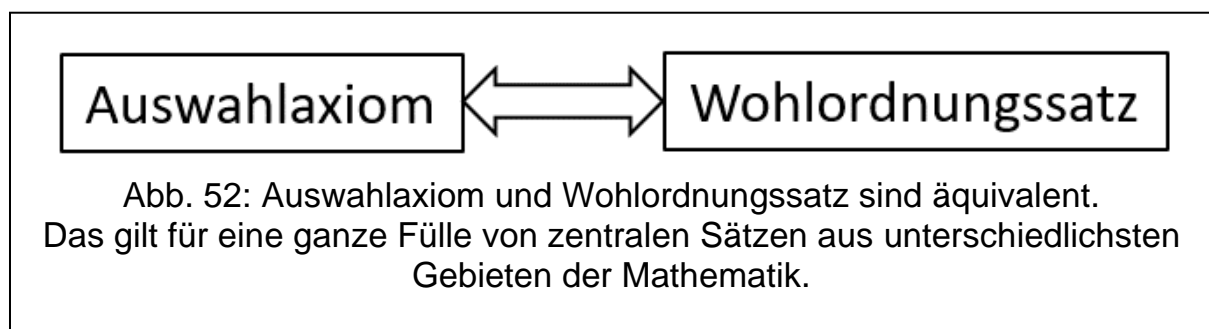
das Euklid'sche Parallelenaxiom. Wenn man es weglässt, ergibt sich eine andere, nicht euklidische Geometrie.

Einige Mathematiker lehnen das Axiom ab, vor allem, weil sich daraus die starke Aussage ableiten lässt, dass sich jede Menge „wohlordnen“ lässt.¹⁵⁹ D.h. wenn das Axiom gelten soll, so gilt eine „Kleiner- bzw. Größer-Beziehung“ oder ein analoges Kriterium (mächtiger/weniger mächtig, usw.):

- 1) Für $a, b \in A$ gilt $a < b$ oder $a > b$ oder $a = b$
- 2) Für $a < b$ und $b < c$ gilt $a < c$ (Transitivität)
- 3) Jede nicht-leere Teilmenge von A enthält ein kleinstes Element

Das Auswahlaxiom ist nicht das einzige Axiom, das ZF ergänzen kann, ohne offenbar Widersprüche befürchten zu müssen. Eine Liste von Sätzen, die äquivalent zu Auswahlaxiom und Wohlordnungssatz sind, siehe z.B. ¹⁶⁰

Zwei wichtige äquivalente Sätze seien hier genannt: Das Auswahlaxiom impliziert, dass unendliche Produkte von kompakten Mengen¹⁶¹ wieder kompakt sind und dass unendlich dimensionale Vektorräume eine Basis besitzen.



Für die (fast unfassbar) großen Kardinalzahlen kann man naheliegende und plausible Axiome dazu fügen, die praktisch in einer Hierarchie liegen – eines bedingt das Vorhergehende. Sonst würde man die Mengen nach oben beschränken. Sie stellen offenbar die natürliche Erweiterung von ZF dar. Es sind Teilerfolge damit erzielt worden, die Kontinuumshypothese damit zu beweisen. So kann man Teilmengen von \mathbb{R} bijektiv auf \mathbb{N} abbilden, was in ZF nicht möglich war.¹⁶²

Keine Widersprüche heißt nicht, keine „Paradoxien“. Banach und Tarski zeigten 1924 mit dem Auswahlaxiom, dass die Einheitskugel in endlich viele Mengen zerlegt werden kann, die, anders zusammengesetzt, zwei ganze Kugeln wieder massiv ausfüllen. „Inhalt“ im mathematischen Sinne ist lediglich eine Funktion,

¹⁵⁹ Beweis, daß jede Menge wohlgeordnet werden kann. (Aus einem an Herrn Hilbert gerichteten Briefe), Mathematische Annalen / Zeitschriftenband (1904), S. 514 – 516, <http://www.digizeitschriften.de/dms/resolveppn/?PID=GDZPPN002260018>

¹⁶⁰ <https://de.wikipedia.org/wiki/Auswahlaxiom>

¹⁶¹ Eine kompakte Menge muss abgeschlossen und beschränkt sein.

¹⁶² Spektrum der Wissenschaft Spezial, Das Unendliche, S. 20, ebenso Einheitskugel

die Punktmengen eine positive reelle Zahl ≥ 0 oder auch unendlich zuordnet. Die fraktalen (allerdings nur euklidisch 2-dimensionalen) Beispiele, wie Cantor-Staub, die Koch-Schneeflocke oder das Sierpinski-Dreieck u.a. lassen die Bandbreite erahnen. Insbesondere Punktmengen im Raum (\mathbb{R}^3 oder höher dimensional) können sich durchaus von der physikalischen Realität unterscheiden.

Das Forcing von Cohen kann man auch auf andere mathematische Aussagen aus bemerkenswert unterschiedlichen Gebieten anwenden (Whitehead-Vermutung aus der Gruppentheorie, Kaplansky-Vermutung aus der Analysis, Suslin-Hypothese der Kombinatorik oder die Borel-Vermutung der Maßtheorie).¹⁶³ Auch diese Probleme sind nicht entscheidbar im Rahmen der ZFC-Mengenlehre. Beide Ergebnisse von Gödel und Cohen passen eigentlich gut zu den Gödel'schen Unbestimmtheitssätzen (bzw. Unvollständigkeitssätzen). Ob zwischen der Abzählbarkeit der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit des Kontinuums noch etwas „dazwischen passt“ oder nicht kann eben unbestimmt sein.¹⁶⁴ Das ist aber auch angesichts der anderen Aussagen unbefriedigend. Das mächtige Forcing wird plötzlich selbst zum Problem.

Ein möglicher Lösungsweg ist die Strategie, die überabzählbar große Potenzmenge einer abzählbaren Menge, die der Mächtigkeit des Kontinuums entspricht, einzugrenzen. Das gelingt mit „konstruierbaren Teilmengen“ bei den natürlichen Zahlen, allerdings sind diese ebenfalls abzählbar, weil die

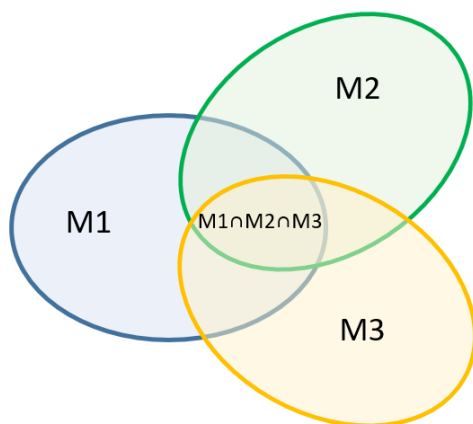


Abb. 53: Zermelo-Fraenkel-Axiome ZF - Eine wichtige axiomatische Grundlage für eine Mengenlehre

Konstruktion unendlicher Mengen nur über eine Formel gelingen kann, von denen es nur abzählbar viele bei \mathbb{N} geben kann. Um die Kernfrage in Verbindung mit der Kontinuumshypothese angehen zu können, benötigt man große Kardinalzahlen und deshalb zusätzliche Axiome ergänzend zu ZFC. ZFC genügt nicht, um ihre Existenz zu beweisen. Bei der Untersuchung stellte sich heraus, dass sich diese so gewonnenen Kardinalzahlen ordnen lassen. Das

¹⁶³ Jean-Paul Delahaye, in Spektrum der Wissenschaft, 2/21, S. 13-20

¹⁶⁴ Es gibt auch andere prominente Aussagen in der Mathematik, die unentscheidbar sind: Ob die Existenz einer Basis für Vektorräume notwendig ist ist (in ZF) unentscheidbar, (in ZFC wohl).

ist bei unendlichen Zahlen nicht selbstverständlich und brachte im wahrsten Sinn des Wortes mehr Ordnung in die Problematik. Zwei weitere Schritte machte Hugh Woodin erst 2010, als er eine wichtige Kompatibilität unter Kardinalzahlen bewies. Ein 2. Schritt folgte 2015, wo das mächtige, aber problematische Forcing eingegrenzt wurde.

Ein etwas genauerer Blick auf Kardinalitäten

Die Mächtigkeit einer beliebigen Menge M wird mit $|M|$ abgekürzt. Wie oben dargestellt, wird die Mächtigkeit (oder Kardinalität) der natürlichen Zahlen und der jeder abzählbar unendlichen Menge mit \aleph_0 bezeichnet, also $|\mathbb{N}| = \aleph_0$.

Die nächste Mächtigkeit, die es auf jeden Fall gibt, wäre dann die Mächtigkeit der Potenzmenge der natürlichen Zahlen als Menge aller ihrer Teilmengen

$$|\wp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0}$$

Es gilt heute beweisbar:

$$|\wp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = |\mathbb{R}|^{165}$$

Die Mächtigkeit des Kontinuums $|\mathbb{R}|$ wurde von Cantor mit c bezeichnet.

Es gilt $\aleph_0 < \aleph_1 \leq 2^{\aleph_0}$

Also nach \aleph_0 ist die nächstgrößere Kardinalzahl \aleph_1 .

Die von Cantor aufgestellte (einfache) Kontinuumshypothese, die er versucht hat zu beweisen, besagt

$$|\wp(\mathbb{N})| = 2^{\aleph_0} = \aleph_1.$$

Zermelo weist bedauernd in einer Anmerkung zu Cantors gesammelten Abhandlungen darauf hin, dass Cantor die Untersuchung von Kardinalzahlen nur bis \aleph_1 fortsetzen konnte.¹⁶⁶ Die moderne Form ist allgemeiner (Abb. 54).

Es ist sinnvoll, sich Beispiele anzusehen, die die Mächtigkeit 2^{\aleph_0} haben, also gemäß der Cantor-Kontinuumshypothese die Kardinalität des Kontinuums haben.

Diese Mengen sind z.B.:

\mathbb{R} , die Menge aller reellen Zahlen

\mathbb{C} , die Menge aller komplexen Zahlen

$(0,1)$, die Menge aller reellen Zahlen zwischen Null und Eins

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, die Menge aller irrationalen Zahlen

¹⁶⁵ Zum Beweis siehe www.aleph1.info/?call=Puc&permalink=mengenlehre1_9_74

¹⁶⁶ Kommentar von Ernst Zermelo in Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zermelo, Springer, Berlin, 1932, S. 352 f

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{A}$, die Menge aller transzendenten reellen Zahlen

$\mathbb{C} \setminus \mathbb{A}$, die Menge aller transzendenten komplexen Zahlen

$\wp(\mathbb{N})$, die Potenzmenge von \mathbb{N}

$\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ die Menge aller Funktionen mit Definitionsbereich \mathbb{N} und Zielbereich $\{0,1\}$

$\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, die Menge aller Folgen von natürlichen Zahlen

$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, die Menge aller Folgen von reellen Zahlen

$\{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}\}$, die Menge aller stetigen Funktionen von \mathbb{R} nach \mathbb{R}

${}^*\mathbb{R}$, die Menge der hyperreellen Zahlen; sie erweitert die reellen Zahlen um infinitesimal benachbarte Zahlen sowie um unendlich große (infinite) Zahlen.

Punktmengen, wie die Cantor-Menge und ihre Verallgemeinerungen.

$$2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$$

Abb. 54: Die Kontinuums-hypothese in moderner Form

Es gibt also erwiesenermaßen Mengen unterschiedlicher Mächtigkeit, denen man unterschiedliche „Werte“ zuordnen kann. Im Gegensatz zu Ordinalzahlen, die mit transfiniten Induktion fortgesetzt werden können, geht es bei dem Vergleich von Mächtigkeiten um Mengen. Das Auswahlaxiom ermöglicht

es, dass man zu jeder Menge X eine zu ihr gleichmächtige Ordinalzahl finden kann. Wegen deren Wohlordnung gibt es auch eine kleinste solche Ordinalzahl, die man die Kardinalität oder Mächtigkeit der Menge nennt und bekanntlich mit $|X|$ bezeichnet. Die die Mächtigkeit bezeichnenden Ordinalzahlen heißen dann

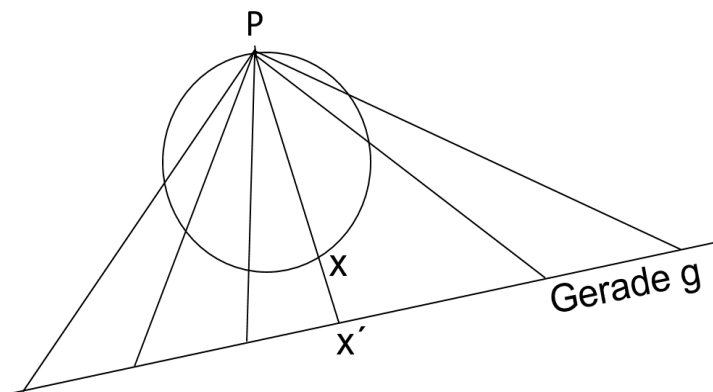


Abb. 55: Bijektive Abbildung - Auf einer Geraden liegen ebenso viele Punkte (\aleph_1) wie auf einem Kreis.

Kardinalzahlen. Man erinnere sich an die „Eselsbrücke“ Aufzählen - Abzählen. Man benötigt also Ordinalzahlen zum wohlgeordneten Aufzählen und nennt die gefundene Zahl dann Kardinalzahl. Sie hat einen ganz anderen Bezug, denn sie charakterisiert die Mächtigkeit der Menge beliebiger Elemente, die damit abgezählt wurde.

Auch auf den Kardinalzahlen kann man eine Arithmetik etablieren, muss dabei aber immer über den Mengenbegriff gehen. Addition und Multiplikation definiert man folgendermaßen:

Um zwei Kardinalzahlen κ und λ zu addieren, finde man zwei disjunkte, zu ihnen gleichmächtige Mengen K und L und definiere $\kappa + \lambda := |K \cup L|$ als Mächtigkeit ihrer disjunkten Vereinigung.

Für die Multiplikation soll $\kappa \cdot \lambda := |K \times L|$, also der Mächtigkeit des kartesischen

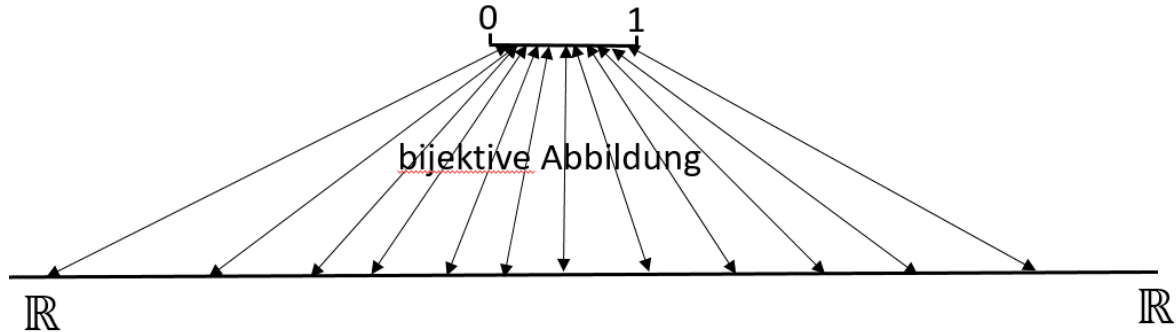


Abb. 56: Auch zwischen zwei Mächtigkeiten der Kardinalität \aleph_1 gibt es eine bijektive Abbildung. (Beispiel: Zwischen \mathbb{R} und dem Intervall $(0,1)$)

Produktes.

Für die Potenzierung soll $\kappa^\lambda := |K^L|$ gelten, also der Mächtigkeit aller Funktionen von L nach K .

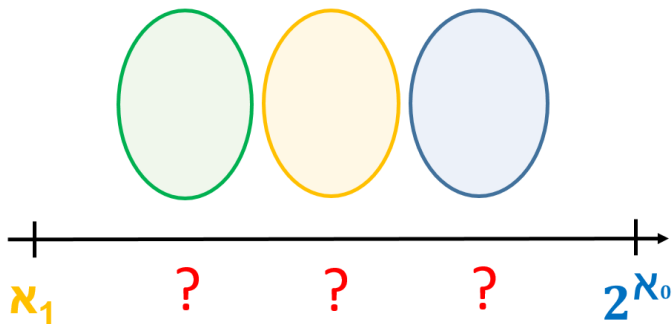


Abb.:57: Kann es Mengen unterschiedlicher Mächtigkeit / Kardinalität zwischen \aleph_1 und 2^{\aleph_0} geben?

Man kann beweisen, dass die Definitionen unabhängig von der Wahl der Mengen K und L sind. Während Addition und Multiplikation eher unproblematisch sind, ist bei der Potenzierung allein schon die Fragestellung, ob die Kontinuumshypothese gilt, interessant:

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1?$$

Sie lässt sich, wie beschrieben, innerhalb ZFC nicht entscheiden. Es sind also Erweiterungen der Axiome nötig, um eine Kardinalzahlarithmetik auch für die Potenzierung zu etablieren.¹⁶⁷

¹⁶⁷ Für einen kurzen weitergehenden Abriss siehe <https://de.wikipedia.org/wiki/Kardinalzahlarithmetik>

Mit entsprechenden Zusatzannahmen zu ZFC gibt es eine Reihe von interessanten Ergebnissen. Die Forschung zu unendlichen Mengen und ihrer Kardinalität geht weiter.^{168,169}

Unendlich in physikalischen Theorien



Abb. 58: Unendliche Spiegelungen einer Kerze zwischen zwei Spiegeln.
Mit freundlicher Genehmigung
Natalie Amecke, Dr. Holger Hofmann, www.experimentis.de

Unendliche Werte sind in physikalischen Theorien keine Seltenheit, aber in der Natur sind sie schwer vorstellbar. Meist zeigen sie, dass eine Theorie nicht vollständig ist bzw. dass eine Theorie vereinfachende Annahmen macht. Das ist vollkommen legitim, um sich auf einen bestimmten Bereich konzentrieren zu können. So nimmt man in der Hydrodynamik der Einfachheit halber an, dass eine Flüssigkeit wie Wasser nicht aus einzelnen Molekülen besteht, sondern zusammenhängend ist. Anderenfalls wäre eine praktikable Beschreibung kaum möglich; man würde sich verzetteln. Doch an der Spitze

des Tropfens ist eine solche vereinfachende Annahme nicht mehr sinnvoll. Im Rahmen der Theorie entstehen dort unendliche Werte.

Auch eine so scheinbar vollkommene Theorie, wie die Allgemeine Relativitätstheorie, sieht in unendlichen Werten sozusagen ihre eigenen Grenzen. Diese entstehen formal im Inneren von Schwarzen Löchern. Gemäß der Theorie müsste dort die Dichte unendlich groß werden. Dies ist in der Natur nicht vorstellbar.

In der äußerst erfolgreichen Theorie der Quantenelektrodynamik (QED) tauchten unendliche Werte auf. Durch einen eigentlich in der Mathematik unzulässigen „Trick“ ließen sich diese Unendlichkeiten „wegkürzen“. Man nennt den Vorgang Renormierung. Leider funktioniert er nicht bei weitergehenden

$$\begin{array}{l} \infty \\ \text{Renormierung} \\ -\infty + \infty = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{☹️} \\ \text{☺️} \end{array}$$

Abb. 59: Renormierung, mathematisch fragwürdig, physikalisch oft erfolgreich

¹⁶⁸ Ordnung in den Unendlichkeiten, Jakob Kellner und Martin Goldstern, Spektrum der Wissenschaft 3/21, S. 74-82

¹⁶⁹ <https://www.spektrum.de/news/gibt-es-ordnung-unter-den-unendlichkeiten/1667584>

Theorien, wie Versuche, zu einer Theorie der Quantengravitation zu kommen.¹⁷⁰

Schwieriger ist der Sachverhalt in der Kosmologie zu bewerten. Hier haben mathematische Erkenntnisse in Grenzbereichen weitreichende Konsequenzen für die Einschätzung des kompletten Lebenszyklusses unseres Universums. Ein Beispiel ist das Ergebnis von Edwin Hubble, dass sich Galaxien voneinander entfernen und damit offenbar sich das Universum ausdehnt. Stephen Hawking schreibt:

„Hubbles Beobachtungen legen die Vermutung nahe, dass das Universum zu einem bestimmten Zeitpunkt, Urknall genannt, unendlich klein und unendlich dicht gewesen ist. Unter solchen Bedingungen würden alle Naturgesetze ihre Geltung verlieren, und damit wäre auch keine Voraussage über die Zukunft mehr möglich.“¹⁷¹

Bisher ist noch keine Lösung in Sicht.

In einem Lehrgedicht des Anaximander heißt es
„Anfang und Ende der seienden Dinge ist das Apeiron“.

Ist das Universum „unendlich groß“? Offenbar können wir die Frage noch nicht beantworten. Viel spricht dafür, dass es keine Grenze hat. Das kann aber bedeuten, dass es eine sogenannte 3D-Sphäre ist. Ähnlich wie die Erdoberfläche endlich, aber unbegrenzt ist, weil die Erde topologisch eine 2D-Sphäre ist, kann unter Einbeziehung einer 4. räumlichen Dimension das Universum endlich aber unbegrenzt sein.

Der Arzt Wilhelm Olbers hat 1826 ein Paradoxon veröffentlicht, das auch vorher Kepler und Halley aufgefallen war. Bei einem unendlichen Universum müsste der Nachthimmel gleißend hell sein, weil in jeder Richtung das Auge auf einen Stern trifft. Nach heutigem Wissensstand ist das Universum zumindest durch die Rotverschiebung/Expansion des Raumes und durch die Lichtgeschwindigkeit zeitlich begrenzt. Das limitiert das sogenannte Hubble-Volumen im Radius auf 46 Milliarden Lichtjahre und enthält etwa 100 Milliarden Galaxien. Diese Anzahl ist zu wenig, um den Nachthimmel hell zu machen.¹⁷²

Doch wie ist es mit dem „unendlich Kleinen“ in der Natur?

Die uns bekannte Materie besteht aus Atomen. Schon zum Ende des 19. Jahrhunderts zeichnete sich ab, dass jedes Atom einen schweren Kern besitzt und von leichten Elektronen umgeben ist. Bald konnte man die Masse von

¹⁷⁰ Grafik selbst erstellt nach

<https://www.spektrum.de/lexikon/astronomie/renormierung/404>

¹⁷¹ Stephen Hawking, Eine kurze Geschichte der Zeit, zit. Nach C. Seife, S. 223

¹⁷² Online <https://archive.org/details/wilhelmolberssei00olbeuoft/page/n21/mode/2up?view=theater>; Über die Durchsichtigkeit des Weltraums, 1826, S. 133

Elektronen bestimmen, die nicht Null ist. Aber bis heute müssen wir die (freien) Elektronen als punktförmige Teilchen (oder als Wellen) betrachten. Man kann weder eine Substruktur erkennen noch eine Ausdehnung. Beschießt man mit Elektronen z.B. Heliumatomkerne (${}^4_2\text{He}$), so lässt sich eine Substruktur der Atomkerne identifizieren. Jeder Kern besteht aus zwei positiv geladenen Protonen und zwei neutralen Neutronen. Freie Neutronen sind instabil mit einer mittleren Lebensdauer von $887,7 \pm 2,3 \text{ s}^{173}$ und auch in radioaktiven Elementen und damit Substanzen kann die schwache Kernkraft zum Zerfall führen. Ein Protonenzerfall wurde noch nicht nachgewiesen. Bestimmte Theorien fordern ihn zwar und es wird danach gesucht.¹⁷⁴ Es ist also noch offen, ob Protonen eine unendlich lange Lebensdauer haben.

Ein noch energiereicherer Beschuss zeigt bei beiden Teilchentypen ebenfalls eine Substruktur: Die so identifizierten Elementarteilchen erhielten den Namen Quarks bzw. genauer Up-Quark (kurz u) und Down-Quark (d). Das Proton p^+ besteht aus uud, das Neutron n aus udd. Ein d-Quark trägt die Ladung $-\frac{1}{3}$, ein u-Quark $+\frac{2}{3}$. Beide Quarks haben eine deutlich von Null verschiedene Masse, aber es wurde bisher keine Ausdehnung gefunden. Dabei können sie auf fast Lichtgeschwindigkeit beschleunigte Elektronen ablenken.

Der Großteil der Masse eines Protons oder Neutrons steckt in der Bindungsenergie der Quarks. Versucht man ein Quark zu isolieren, so ist der Energieaufwand gemäß Einsteins berühmter Formel zur Äquivalenz von Masse m und Energie E, $E = m \cdot c^2$, größer als der, um neue instabile Elementarteilchen (Mesonen) mit gebundenen Quark-Antiquark-Konstellationen zu erzeugen. Bei hohen Energien, also kleinen typischen Abständen untereinander, verhalten sich Quarks wie freie Teilchen. Bei großen Abständen wird die Bindung immer stärker.

Dieses Verhalten, das im Gegensatz z.B. der elektromagnetischen Kraft oder der schwachen Wechselwirkung steht, nennt man Asymptotische Freiheit. Alle Quarks scheinen ebenfalls punktförmig zu sein. Ähnliches gilt für andere Elementarteilchen aus dem sogenannten Standardmodell der

¹⁷³ Neuere Messung siehe <https://www.weltderphysik.de/gebiet/teilchen/news/2013/neue-messung-der-neutronenlebensdauer/>

¹⁷⁴ Trotz intensiver Suche ist bis heute kein Protonenzerfall beobachtet worden. Experimente am Super-Kamiokande Detektor in Japan deuten darauf hin, dass eine „Halbwertszeit“ von $> 10^{35}$ Jahren vorliegt. Die Beobachtung von Neutrinooszillation ist zwar ein Hinweis darauf, dass der Protonenzerfall ein prinzipiell beobachtbarer physikalischer Effekt ist, aber die zugrundeliegenden Theorien sind noch Spekulation. Die Ergebnisse kann man nur bedingt als „Messung“ interpretieren: Hat man eine Menge von 10^{36} Protonen mit einer Zerfallszeit von 10^{36} Jahren, so würde pro Jahr im Schnitt eines dieser Protonen zerfallen.

(Quelle <https://www.chemie.de/lexikon/Protonenzerfall.html>)

Der Zerfall wird auch für Neutronen vorhergesagt, die im Atomkern gebunden sind.

Teilchenphysik.¹⁷⁵ Insbesondere sind Neutrinos nach der gängigen Interpretation punktförmig, aber die Masse wird nach aktuellen Messungen mit 0,07 bis 0,16 eV/c² angegeben.¹⁷⁶ Sie wären damit ca. 100.000 mal leichter als ein Elektron, dürften aber nach dem Standardmodell der Elementarteilchenphysik gar keine Masse haben. Wenn sie massebehaftet sind, sollten sie erst recht Antiteilchen besitzen, wie man es bisher annahm. Doch es verdichten sich Hinweise, dass jedes Neutrino sein eigenes Antiteilchen ist. Dazu zeigten die „fehlenden“ Neutrinos von der Sonne, dass sie sich ineinander umwandeln können (Neutrinooszillationen).¹⁷⁷ Das sind eine Fülle von Widersprüchen, die eine scheinbar verschwindende Größe in der Welt der Physik erzeugen.

Es bleibt die offene Frage, ob ein Teilchen mit einer Masse trotzdem keine Ausdehnung haben kann und somit „unendlich klein“ ist. Auch die Frage, ob es

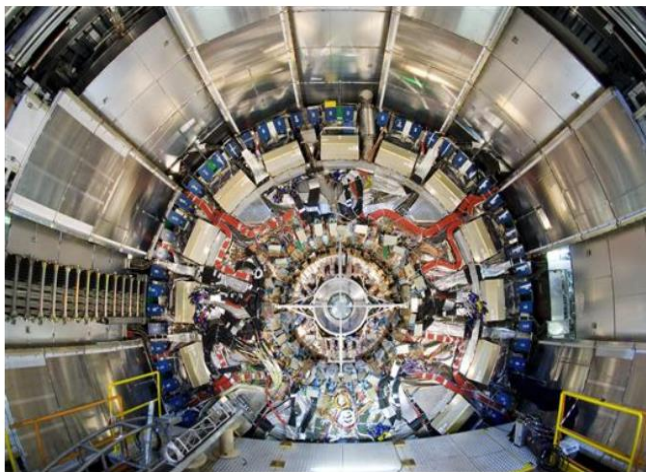


Abb. 60: Kleine Strukturen benötigen große Maschinen: Blick in das Innere des Atlas-Detektors am europäischen Kernforschungszentrum CERN

Teilchen mit beliebig kleiner Masse ungleich Null geben kann, ist noch nicht beantwortet und es wird sogar spekuliert, dass man die Frage nicht beantworten kann; sie also prinzipiell nicht entschieden werden kann. In dieser Allgemeinheit bezeichnet man es als Massenlückenproblem. Die Quantenfeldtheorie scheint voraus zu sagen, dass es eine untere Grenze geben muss. Allerdings fehlen auch dazu die Einflüsse der Gravitation. Aber das Problem ist noch allgemeiner und weist sogar

Verbindungen zur reinen Mathematik auf. Es geht um die Anwendung von sogenannten Yang-Mills-Feldern, um Elementarteilchen zu beschreiben. Das Clay-Institut zur Förderung der Mathematik mit Sitz in Peterborough, USA, hat für die Lösung einen Preis von einer Million Dollar ausgelobt. Es ist als eines

¹⁷⁵ Bildquelle Abb. 61: <https://cds.cern.ch/images/CERN-EX-0705021-03>

¹⁷⁶ [https://www.mpp.mpg.de/aktuelles/meldungen/detail/der-neutrinomasse-auf-den-fersen, 1 eV/c² \(Elektronenvolt/Quadrat der Lichtgeschwindigkeit\) entspricht einer Masse von 1,8 x 10⁻³⁷ Kilogramm](https://www.mpp.mpg.de/aktuelles/meldungen/detail/der-neutrinomasse-auf-den-fersen,1_eV/c^2_(Elektronenvolt/Quadrat_der_Lichtgeschwindigkeit)_entspricht_einer_Masse_von_1,8_x_10^-37_Kilogramm)

¹⁷⁷ <https://www.weltderphysik.de/gebiet/teilchen/bausteine/neutrinos/neutrinooszillationen/>

von sieben Millenium-Problemen eingestuft. Die Website claymath.org weist das Problem immer noch als „unsolved“ aus.¹⁷⁸

Mathematisch erwiesenermaßen nicht entscheidbar ist das Spektrallückenproblem. Z.B. beim Wasserstoffatom kann man sehr genau das Spektrallinienspektrum beim Übergang des Elektrons vom Grundzustand zu angeregten Zuständen oder auch zwischen angeregten Energieniveaus messen. Die einzelnen Serien sind nach ihren Entdeckern benannt und heißen Balmer, Lyman-, Paschen-, Brackett-, Pfund- und Humphrey-Serie. Dies gilt nicht für alle Materialien. Einen Halbleiter macht gerade die Eigenschaft aus, dass die Spektrallücke sehr klein ist. Die Frage ist, ob es immer eine Differenz ungleich Null zwischen dem Grundzustand und dem ersten angeregten Zustand geben muss. Drei Mathematiker haben formal exakt bewiesen, dass dieses Spektrallückenproblem unentscheidbar ist.^{179,180}

Ebenfalls kleinste Dimensionen treten bei neueren Quantengravitations-theorien auf. Die Gravitation ist bei großen Abständen schwach, die Kopplung wird aber bei kleinsten Abständen im Bereich der Planck-Länge nach bisherigen Theorien ins Unermessliche wachsen. Dies nennt man „Asymptotische

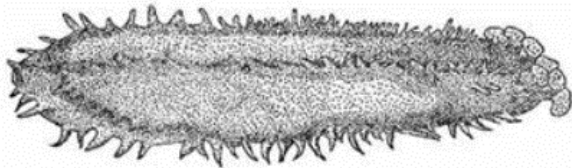


Abb. 61: Unsterbliches Lebewesen:
Stichopus Chloronotus

Sicherheit“. Auf diesem Prinzip liegt große Hoffnung, um Unendlichkeiten in den neuesten Theorien bändigen zu können.

Auch in der Biologie findet man Hinweise. Man kennt mehrere scheinbar unsterbliche Lebewesen, d.h. sie sind keinem

Alterungsprozess unterworfen und haben somit eine potentiell unendliche Lebenserwartung. Die Abb. 61 zeigt die Seegurke, die aber vielen Gefahren ausgesetzt ist, die einen gewaltsamen Tod wahrscheinlich machen.¹⁸¹ Andere Beispiele sind Einzeller, einfache Mehrzeller oder wirbellose Seetiere (Echinodermata), wie Seesterne oder Seeigel. Kürzlich wurden Rädertierchen¹⁸² aus Permafrostboden geborgen, die 24.000 Jahre überlebt haben.

¹⁷⁸ <https://www.claymath.org/millennium-problems/yang-mills-and-mass-gap> (Stand 11.07.2021)

¹⁷⁹ Toby S. Cubitt, David Perez-Garcia & Michael M. Wolf; Undecidability of the spectral gap, Nature volume 528, pages207–211 (2015)

¹⁸⁰ <https://www.spektrum.de/magazin/unentscheidbare-aussagen-ueber-die-natur/1609516>

¹⁸¹ Bildquelle und weitere Informationen <http://unendliches.net/german/index.htm?ordinalzahlen.htm> Suchbegriff Unsterblichkeit

¹⁸² <https://www.mdr.de/wissen/eingefroren-jahrtausende-ueberlebt-raedertierchen-100.html>

Mathematisch-philosophische Schulen

¹⁸³Cantor, Gödel, Hilbert, Zermelo, Fraenkel, Hausdorff, von Neumann, Dedekind, Frege und viele andere, die genannt oder auch hier nicht genannt werden konnten, haben die Mathematik Ende des 19. und Anfang des 20. Jahrhunderts nicht nur geprägt und erweitert, sondern auch teilweise gespalten. Unbedingt genannt werden muss Luitzen Egbertus Jan Brouwer (1881-1966). Dabei ist von Auseinandersetzungen nicht nur das Fachgebiet betroffen, sondern es trifft auch oft die jeweiligen Protagonisten als Menschen in ihrem tiefsten Selbstverständnis.

Cantor wurde stark angefeindet, besonders heftig und schonungslos von seinem akademischen Lehrer Leopold Kronecker (1823-1891). Er hat ihn öffentlich „Verführer der Jugend“ und „Scharlatan“ genannt. Auch wenn er depressiv vorbelastet sein mag, so hat Cantor persönlich darunter gelitten und

Es wurde das A.-U. nach *drei* Beziehungen unterschieden: *erstens* sofern es in der höchsten Vollkommenheit, im völlig unabhängigen, außerweltlichen Sein, *in Deo* realisiert ist, wo ich es *Absolut-unendliches* oder kurzweg *Absolutes* nenne; *zweitens* sofern es in der abhängigen, kreatürlichen Welt vertreten ist; *drittens* sofern es als mathematische Größe, Zahl oder Ordnungstypus vom Denken *in abstracto* aufgefaßt werden kann. In den *beiden* letzten Beziehungen, wo es offenbar als beschränktes, noch weiterer Vermehrung fähiges und *insofern dem Endlichen verwandtes* A.-U. sich darstellt, nenne ich es *Transfinitum* und setze es dem *Absoluten* strengstens entgegen.

Abb. 62: Positionen Georg Cantors zum aktual Unendlichen (A.-U.).

hatte mehrere Nervenzusammenbrüche und nervliche Krisen und starb in einem Sanatorium. Er hat aber auch mit sich selbst bei diesem Thema bis zur Erschöpfung gerungen.¹⁸⁴ Er korrespondierte mit Theologen, setzte sich intensiv mit Aristoteles, Giordano Bruno oder mit Thomas von Aquin auseinander. Er hatte Respekt vor den Einwänden großer Denker gegen das aktual Unendliche über fast zweieinhalb Jahrtausende und kann Aristoteles bedingt verstehen, weil dieser noch nicht über das moderne Wissen verfügte.

Er bemühte sich intensiv, nicht nur die Mathematik darzulegen, sondern auch den Boden philosophisch zu bereiten. Doch immer wieder musste er mit Selbstzweifel und beißender externer Kritik kämpfen. Philosophen warfen ihm

¹⁸³ Abb. 62, Georg Cantor, Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, Ztschr. F. Philos. U. philos. Kritik, Bd. 91, S.81-125 (1887), Bd. 92, S. 240-265 (1888) in Gesammelte Abhandlungen, ebenda, S. 378

¹⁸⁴ Alberto Jori; Das Unendliche, Books on Demand, Norderstedt 2010, S. 74 f sowie als Originalquelle Georg Cantor; Gesamtausgabe seiner Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zermelo, ebenda, S. 370 ff

vor, er wäre für solche Überlegungen nicht ausgebildet; Mathematiker verspotteten seinen missionarischen Eifer. Alberto Jori beschreibt in der Sprache des Philosophen den Erkenntnisprozess: *Zwischen dem „Infinitum in natura naturans“, nämlich der absoluten Unendlichkeit Gottes einerseits und dem Infinitum in natura naturata“, d.h. dem Transfinitum sowohl „in concreto“ als auch „in abstracto“ andererseits, gibt es einen grundsätzlichen Unterschied.*¹⁸⁵ Dieses Spannungsfeld machte Forschung zur „Unendlichkeit“ für den bekennenden Gläubigen Cantor zu einer Herkules-Aufgabe.

Kurt Gödel war zeitlebens kränklich und sehr introvertiert. Doch dann wurden Anlagen, die offenbar bis zur Kindheit zurückgehen, zur Depression. Seine Frau, die sich um ihn fürsorglich gekümmert hatte, musste nach einem Schlaganfall einen längeren Krankenhausaufenthalt über sich ergehen lassen. Nach ihrer Rückkehr im Rollstuhl ließ sie ihren Mann wegen hochgradiger Unterernährung sofort einweisen. Er verhungerte schließlich aus unbegründeter Angst vergiftet zu werden.

David Hilbert hatte ungeheure Erfolge in vielen Gebieten der Mathematik und schuf in Göttingen in den ersten Jahrzehnten des 20. Jahrhunderts einen mathematischen „Nabel der Welt“ ohne den die neu entstehende Quantenmechanik in diesem kurzen Zeitraum kaum möglich gewesen wäre. Er war wichtigster Unterstützer von Cantor. Aber seinen Lebenstraum, die vollständige Axiomatisierung der Mathematik, musste er aufgeben. Die Trauergemeinde für den größten Mathematiker zu Beginn des 20. Jahrhunderts am 14. Februar 1943 bestand nur aus einem knappen Dutzend Personen im Wohnzimmer seines Hauses. *„David Hilberts Beerdigung muss als verunglückt gelten.“*¹⁸⁶

Ernst Zermelo hatte massive Gesundheitsprobleme und stand in Opposition zum Nationalsozialismus; er musste seine Universitätslaufbahn beenden, weil er den Hitlergruß zu Beginn einer Vorlesung verweigerte. Aber seine Axiome haben im Wesentlichen Bestand und tragen seinen Namen.

Und da war noch Brouwer, der eine vollkommen konträre Gegenposition mit großer Härte vertrat. Für Außenstehende waren die Unterschiede manchmal nur scheinbar sprachliche Spitzfindigkeiten, aber es ging im Kern um das, was mathematische Realität ist. Ist Pi als unendliche Dezimalzahl schon immer dagewesen oder sind nur die bereits errechneten Stellen Realität? Woher wollen wir wissen, dass die Dezimalentwicklung nicht doch abbricht? Einstein nannte die Auseinandersetzung *„Krieg zwischen Fröschen und Mäusen“* und

¹⁸⁵ Jori, Alberto; Das Unendliche, ebenda, S. 76

¹⁸⁶ Georg von Wallwitz, Meine Herren, dies ist keine Badeanstalt, Berenberg, Berlin, 2019, S. 13

weigerte sich, Stellung zu beziehen.¹⁸⁷ Ins Herz der bisher praktizierten Mathematik traf Brouwers Ablehnung des Widerspruchbeweises, wenn es um Unendlichkeiten geht.¹⁸⁸ Bisher galt: Wenn man nachweist, dass eine Annahme zum Widerspruch führt, dann muss sie falsch sein und das Gegenteil gilt. „*tertium non datur*“, ein Drittes gibt es nicht. So formulierte es bereits Aristoteles. Ende der 20er Jahre kam es zum „Annalenstreit“ aus fachlichen Gründen zwischen Intuitionisten um Brouwer und Formalisten, aber auch aus politischen Gründen zwischen dem deutsch-nationalen Berlin und dem eher liberalen Göttingen um Hilbert und Courant.

Von dieser konzeptionellen Spaltung ist die Arbeit vieler, fast möchte man sagen unzählbarer, Mathematiker wenig betroffen. Sie kümmern sich um mehr oder weniger komplexe Teilgebiete in ihren jeweiligen Fachdisziplinen, die schon längst nicht mehr von einzelnen Personen alle übersehen werden können.

Geht man aber zurück zur philosophischen Basis und will man die Denkrichtungen unterscheiden, so gibt es drei große Kategorien,¹⁸⁹ die hier in aller Kürze (und damit für manchen in zu starker oder unzutreffender Verkürzung), charakterisiert werden sollen.

Formalisten nehmen nach wie vor einen formalen, axiomatischen Zugang ernst.¹⁹⁰ Die Haltung hat zweifellos mit dem Scheitern des Hilbert'schen Programms und den Gödel'schen Ergebnissen einen Dämpfer erhalten. Aber die Zermelo-Fraenkel Axiome, evtl. mit leichten Modifikationen, sind ihre Basis. Gödels Unvollständigkeitssätze zeigen zwar die Grenzen auf, sind aber für die tägliche Forschungsarbeit oft nur sehr weit weg. Im Prinzip kann die gesamte Mathematik als Kette von Folgerungen aus den Axiomen betrachtet werden. Man muss nur akzeptieren, dass die Konsistenz der Axiome nicht aus ihnen selbst heraus bewiesen werden kann. Immerhin bleibt die Mathematik spannend; eine Maschine wird sie nicht ersetzen können. Andererseits ist die

¹⁸⁷ Zitiert nach Taschner, Rudolf; Das Unendliche, Springer, 2. Verbesserte Auflage, Berlin Heidelberg, 2006, S. 102

¹⁸⁸ Siehe „Begründung der Mengenlehre unabhängig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten“, in L. E. J. Brouwer, collected works, Philosophy and Foundations of Mathematics, S. 150 ff (2. Teil, 1918B) sowie S. 191 ff (1. Teil, 1918A)

¹⁸⁹ Für die folgenden Abschnitte siehe auch Rudolf Taschner; Das Unendliche, ebenda, S. 97 ff

¹⁹⁰ Manchmal wird noch Predikativismus genannt, der auf Bertrand Russell zurückgeht, siehe <https://plato.stanford.edu/entries/philosophy-mathematics/#Pre>. Manche Grundsatzartikel sehen Realismus, andere Logizismus als vierte Denkschule. Russell hat mit seiner Antinomie zu „Mengen aller Mengen“ (eigentlich Klassen) für Verunsicherung gesorgt: Siehe z.B.: Ein Friseur hat im Schaufenster ein Schild hängen „Ich rasiere alle, die sich nicht selbst rasieren.“ Rasiert er sich selbst oder nicht? Man muss diesen Fall ausschließen, indem er sich nicht mehr formulieren lässt. Russell selbst hat das bereits 1903 mit seiner Typentheorie getan. Das Aussonderungsaxiom ist heute die formale Basis.

genannte Kette an Deduktionen zwar richtig, aber nicht unbedingt wahr oder falsch bzw. entscheidbar (siehe Kontinuumshypothese).

Die Platonisten betrachten endliche und unendliche Denkobjekte als real und verwenden beide mit der gleichen Selbstverständlichkeit. Sie entdecken mathematische Zusammenhänge und erfinden sie nicht. Für Platon waren die Ideen stärker real als die vergängliche Welt der Dinge. Auch Unendlichkeiten sind für sie real, aber werden nie vollständig „realisiert“ werden können.

Die dritte Schule, die Intuitionisten oder Konstruktivisten, gehen maßgeblich auf Brouwer zurück und lehnen die Cantor'schen Erkenntnisse, aber auch ZF(C), in weiten Teilen ab. Es kann konstruktivistisch gesehen nicht entschieden werden, ob eine Dezimalzahl, die Trillionen an Nullen nach dem Komma besitzt, von Null verschieden ist oder nicht. Durch die Einschränkung der mathematischen Möglichkeiten, in denen der Widerspruchsbeweis teilweise verboten ist, hat diese Denkrichtung weniger Anhänger. Das „*tertium non datur*“ schafft Unsicherheiten, die die mathematische Forschung und sogar mathematische Anwendungen betreffen und sie auf ein unsicheres Fundament stellen.¹⁹¹ In letzter Zeit wurde die intuitionistische Auffassung durch den Schweizer Physiker Nicolas Gisin aus rein physikalischen Argumenten neu belebt. Der Schwerpunkt seiner Argumentation liegt für ihn im Nichtdeterminismus bei unendlichen Dezimalzahlen durch die prinzipielle

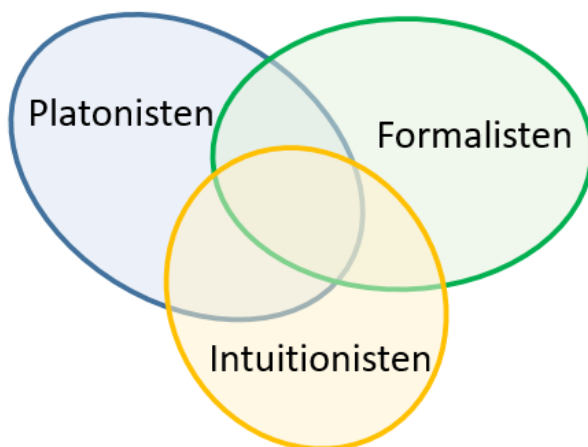


Abb. 63 Die wesentlichsten Denkschulen der Mathematik

Unkenntnis aller Dezimalstellen und die Möglichkeiten, die sich dadurch bei der Annäherung von Allgemeiner Relativitätstheorie und dem nichtdeterministischen Charakter der Quantenphysik ergeben. Er möchte damit einen neuen Zugang zur Bedeutung der „Zeit“ in physikalischen Theorien erreichen.¹⁹² Aber, wie gesagt, für die tägliche Arbeit werden die meisten Mathematiker die Philosophie ausblenden. Es gibt das Bonmot: Mathematiker sind

¹⁹¹ Dies gilt z.B. bei Quantengravitationstheorien, die vielfältige Grenzwertbildung benötigen. Beispiele sind die „kausale dynamische Triangulation“ (CDT) und die „Asymptotische Sicherheit in der Quantengravitation“ (Asymptotic safety in quantum gravity).

¹⁹² Natalie Wolchover, Eine neue Mathematik der Zeit, Spektrum der Wissenschaft, 4/21, S. 62-67

werktags Platonisten und am Wochenende Formalisten.

Was bleibt, ist die Faszination, die das Unendliche auf uns Menschen ausübt und die wir (nach dem aktuellen Stand der Lebenserwartung und der Gerontologie) nur in einer endlichen Zeitspanne erleben dürfen.

Fazit

Das naturwissenschaftliche Wissen in der Antike wird trotz des vorhandenen Quellenmaterials unterschätzt. Leider hat nur ein Bruchteil der schriftlichen Aufzeichnungen die Jahrhunderte überlebt. Das gilt besonders für mathematische Texte. Vergleichsweise Weniges ist über arabische oder lateinische Übersetzungen überliefert worden. Nur über Querverweise kann man erahnen, welche Dimension der Stand der Forschung insbesondere im hellenistischen Zeitalter gehabt haben muss. Als Glücksfall muss man deshalb das Palimpsest des Archimedes ansehen. Archimedes ist mit dem „Unendlichen“ schon meisterhaft umgegangen, aber seine Werke fanden nicht die ihnen angemessene Verbreitung. Im „dunklen“ Mittelalter wurde meist ignoriert, bestenfalls bewahrt, aber kaum weiterentwickelt. Indien und die islamischen Länder waren deutlich weiter. Erst in der frühen Neuzeit begann wieder mathematische Forschung außerhalb der Himmelsmechanik. Einen wissenschaftlichen Durchbruch erzielten Newton und Leibniz mit der Erfindung der Infinitesimalrechnung. Doch besonders das „unendlich Kleine“ wurde naiv, wenn auch durchaus erfolgreich, verwendet. Die Infinitesimalrechnung wurde unter dem Namen Analysis nach und nach von Paradoxa befreit und hat in der heutigen Form kaum zu überschätzende Bedeutung in Mathematik, Naturwissenschaften und Technik. Über die Analysis hinaus fand der Umgang mit dem Unendlichen immer mehr Eingang in die Mathematik. Unendliche Folgen oder Reihen, Integrale und das weite Feld der Mengenlehre sind nur wenige Schlagworte für diese Entwicklung. Bolzano legte die Scheu vor dem aktual Unendlichen ab. Mit Cantor wurden unendliche Mengen nach ihrer Mächtigkeit klassifizierbar; mit Zermelo-Fraenkel entstand eine Axiomatik der Mengenlehre, auch wenn der Hilbert'sche Traum einer vollständigen Axiomatisierung der Mathematik durch die Unvollständigkeitssätze von Gödel zunichtegemacht wurde; Robinson bemühte sich, Unendlichkeiten wieder in das logische Gebäude der Mathematik im Rahmen einer Nichtstandardanalysis zu integrieren. Unendlichkeiten in der Physik oder Kosmologie beruhen manchmal auf Unzulänglichkeiten in den angewendeten Theorien. Doch beim Universum können wir nicht entscheiden, ob es unbegrenzt bzw. unendlich groß ist. Bei einer Reihe von Elementarteilchen wissen wir nicht, ob sie trotz Masse eine

Ausdehnung ungleich Null besitzen. Schließlich hat der Umgang mit dem Unendlichen die Mathematik bereichert, aber auch in Denkschulen gespalten.

Literaturverzeichnis

Alsina, Claudi; Der Satz des Pythagoras, deutsch bei Librero RBA, 2016

Bellos, Alex; Im Wunderland der Zahlen, Piper, München, 11/2013

Beutelspacher, Albrecht; Pasta all'infinito, C.H.Beck, München, 3. Auflage 2000

Binimelis Bassa, Maria Isabel; Fraktale Geometrie, Librero, 2017

Cantor, Georg; Gesamtausgabe seiner Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zermelo, Julius Springer, Berlin, 1932, digital verfügbar unter <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/>

Clegg, Brian; Eine kleine Geschichte der Unendlichkeit, rororo, Reinbek bei Hamburg, dt. Erstausgabe 2015

Cohen, Paul; Wie ich »Forcing« entdeckte, e-enterprise, Lemgo, 2017

Cohn, Jonas; Geschichte des Unendlichkeitsproblems im abendländischen Denken bis Kant, Reprint Hanse, Leipzig, Verlag Wilhelm Engelmann, 1896

Dedekind, Richard; Stetigkeit und irrationale Zahlen, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig, 1872, digital verfügbar unter https://publikationsserver.tu-braunschweig.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs_derivate_00005740/Aa_2043.pdf

Euklid; Die Elemente, Hsgr. Clemens Thaer, Europa-Lehrmittel, 2003

Freely, John; Platon in Bagdad; dt. Ausgabe Klett-Cotta, Stuttgart, 2012

Hilbert, David, Gesammelte Abhandlungen, Julius Springer, Berlin, 1935, digital verfügbar unter <https://gdz.sub.uni-goettingen.de/>

Holt, Jim; Als Einstein und Gödel spazieren gingen, Rowohlt, Juni 2020

Jori, Alberto; Das Unendliche, Books on Demand, Norderstedt 2010

Kramp, Klaus (Übersetzung und Redaktion); Das Buch der Unendlichkeit, Librero Kerkdriel (NL), 2012

Meschkowski, Herbert; Mathematisches Begriffswörterbuch, BI Hochschul-taschenbücher Band 99, Mannheim 1971

Netz, Reviel; Noel, William; Der Kodex des Archimedes, C.H.Beck, München 2008

Peitgen, Heinz-Otto, Jürgens, Hartmut, Saupe, Dietmar; Fraktale, Bausteine des Chaos, Klett-Cotta/Springer, Berlin Heidelberg/ New York, 1992

- Russo, Lucio, Die vergessene Revolution, Springer, Berlin Heidelberg, 2005
- Seife, Charles; Zwilling der Unendlichkeit, Goldmann, München, 4. Auflage 2002
- Spektrum der Wissenschaft Spezial, Das Unendliche, 1/2003
- Spektrum der Wissenschaft Kompakt, UNENDLICH, 05/20
- Stillwell, John; Wahrheit, Beweis, Unendlichkeit, Springer Spektrum, Heidelberg, 2014
- Taschner, Rudolf; Das Unendliche, Springer, 2. Verbesserte Auflage, Berlin Heidelberg, 2006
- Taschner, Rudolf; Die Farben der Quadratzahlen, Hanser, München 2019
- Toenniessen, Fridtjof; Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Spektrum, Heidelberg, 2010
- Wallace, David Foster; Die Entdeckung des Unendlichen, Piper München Zürich, 1. dt. Auflage 2007 oder Wallace, David Foster; Die Entdeckung des Unendlichen, Piper München Zürich, 3. Auflage 2010
- Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008
- Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 2, Springer, Berlin Heidelberg, 2008
- Zellini, Paolo; Eine kurze Geschichte der Unendlichkeit, C.H.Beck, München, 2010

Abbildungsnachweise:

Hinweis: Im Text wird nur in Fußnoten auf externe Inhalte in Grafiken hingewiesen. Eigene Grafiken werden nur im Abbildungsverzeichnis erwähnt.

- Abb. 1: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Lemniscate_of_Bernoulli_props.svg (Lemniscate)
- Abb. 2: Quelle: en.wikipedia.org (Tarot-Karten)
- Abb. 3: Eigene Grafik unter Verwendung von Powerpoint-Cliparts.
Inspiriert von Netz, Reviel; Noel, William; Der Kodex des Archimedes, C.H.Beck, München 2008, S. 75 (Rolle/Kodex)
- Abb. 4: Eigene Grafik, nach C. Seife, Zwilling der Unendlichkeit, S. 35, Quadrat- und Dreieckszahlen
- Abb. 5a, b: <https://de.wikipedia.org/wiki/Pentagramm> (Pentagramm)
- Abb. 5c: ergänzt um eigene Grafik (Pentagramm ergänzt)
- Abb. 6: Eigene Grafik (Parallelen-Axiom)

- Abb. 7: Eigene Grafik nach Euklid, Elemente, 11. Definition in Buch 7 (erste 12 Zahlen und ihre Teiler)
- Abb. 8: Eigene Grafik (Hebelgesetz)
- Abb. 9: Eigene Grafik (Schwerpunkt Dreieck)
- Abb. 10a: Eigene Grafik (Kugel/ Zylinder)
- Abb. 10b: Eigene Grafik (Kegel/ Zylinder)
- Abb. 11a: Eigene Grafik, inspiriert von Netz, Reviel; Noel, William; ebenda, S. 192 ff (Zylinderschnitt)
- Abb. 11b: Eigene Grafik, ebenda (Zylinderschnitt-„Absatz“)
- Abb. 11c: Eigene Grafik, ebenda (Zylinderschnitt-Dreiecke)
- Abb. 12: [https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Gregor_Reisch,_Margarita_Philosophica,_1508_\(1230x1615\).png](https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Gregor_Reisch,_Margarita_Philosophica,_1508_(1230x1615).png) (Ziffernrechnen)
- Abb. 13: Eigene Grafik (Kues, Kreisflächenberechnung, Tortenstücke)
- Abb. 14: Eigene Grafik, nach Brian Clegg, S. 140 (Dritte Wurzel)
- Abb. 15: Eigene Grafik (Kues, Kreisflächenberechnung über Polygon 2^k)
- Abb. 16: Eigene Grafik (Letzte Verhältnisse)
- Abb. 17: Eigene Grafik (Integration durch Approximation)
- Abb. 18: Eigene Grafik (0,9999...)
- Abb. 19: https://de.wikipedia.org/wiki/Gabriels_Horn (Toricelli)
- Abb. 20: Selbst erstellte Grafik nach einer Skizze bei Brian Clegg, Eine kleine Geschichte der Unendlichkeit, rororo, Reinbek bei Hamburg, dt. Erstausgabe 2015, S. 132 (Galilei, 2 Räder)
- Abb. 21: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Euler's_formula.png (Eulers Formel)
- Abb. 22: Eigene Grafik (Cauchy-Konvergenz Fibonacci)
- Abb. 23: Eigene Grafik, nach <https://www.karlkuhleermann.net/der-untgang-von-mathemagika/glossar/reelle-zahlen/> (Dedekind'sche Schnitte)
- Abb. 24: Auszug aus Richard Dedekind, Stetigkeit und irrationale Zahlen, Friedrich Vieweg und Sohn, Braunschweig 1872, S. 13, online unter https://publikationsserver.tu-braunschweig.de/servlets/MCRFileNodeServlet/dbbs_derivate_00005740/Aa_2043.pdf
- Abb. 25: Eigene Grafik (Zahlenmengen)
- Abb. 26: Quelle <https://de.wikipedia.org/wiki/Peano-Kurve> (Peano-Kurve)
- Abb. 27: Eigene Grafik (Peano-Axiome)
- Abb. 28: Quelle: David Hilbert, Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück, Mathematische Annalen 38 (1891) 459-460
- Abb. 29: Eigene Grafik (Nicht-Standard-Analysis)
- Abb. 30: Quelle [https://de.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor#/media/Datei:Georg_Cantor_\(Porträt\).jpg](https://de.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor#/media/Datei:Georg_Cantor_(Porträt).jpg) (Bild Cantor)

- Abb. 31: Eigene Grafik (Bijektion)
- Abb. 32: Eigene Grafik, analog John Stillwell, S. 4 (Abzählbarkeit Gitter)
- Abb. 33: Kommentar von Ernst Zermelo in Georg Cantor, Gesammelte Abhandlungen, Hsgr. Ernst Zermelo, Springer, Berlin, 1932, S. 102
- Abb. 34: Auszug aus G. Cantor „Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre
- Abb. 35: Eigene Grafik, inspiriert und wörtlich übernommen von John Stillwell, S. 5, (Hilberts Hotel)
- Abb. 36: Quelle der Abb.: Rationale Zahlen: <https://blog.hnf.de/blick-ins-unendliche/> Rest eigene Grafik, Beispiele aus https://de.wikipedia.org/wiki/Abzählbare_Menge
- Abb. 37: Eigene Grafik ($\sqrt{2} \times \sqrt{2}$)
- Abb. 38: Eigene Grafik, Beispiele z.T. aus https://de.wikipedia.org/wiki/Transzendente_Zahl (Transz. Zahlen)
- Abb. 39: Eigene Grafik, inspiriert von Rudolf Taschner; Das Unendliche, Springer, Berlin Heidelberg 2006, S. 68
- Abb. 40: Eigene Grafik, (Kontinuumshypothese)
- Abb. 41: Eigene Grafik (Mächtigkeit $BC=AB$)
- Abb. 42: <https://de.wikipedia.org/wiki/Cantor-Menge> (Cantor-Staub)
- Abb. 43: <https://de.wikipedia.org/wiki/Sierpinski-Dreieck>
- Abb. 44: Grafik <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:KochFlake.svg> (Koch-Flocke)
- Abb. 45: Bildquelle https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/5/5f/Minkowski_island_1-3.svg (Minkowski-Kurve)
- Abb. 46: Eigene Grafik, nach einer Abbildung in Spektrum der Wissenschaft Spezial, Das Unendliche, S. 16, (Sechsecke, Kreise)
- Abb. 47: Eigene Grafik (Ordinalzahlenfolge)
- Abb. 48: Eigene Grafik (Transfinite Induktion)
- Abb. 49: Eigene Grafik (Ordinalzahlen, lineare Darstellung)
- Abb. 50: <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Omega-exp-omega-labeled.svg> (Ordinalzahlen bis ω^ω , spiralförmig)
- Abb. 51: Eigene Grafik (Kontinuum zu n-dim. Raum)
- Abb. 52: Eigene Grafik (Äquivalenz von Auswahlaxiom u. Wohlordnung)
- Abb. 53: Eigene Grafik (Symbolisierung ZF-Axiome)
- Abb. 54: Eigene Grafik ($2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}$)
- Abb. 55: Eigene Grafik, nach Beutelspacher, Albrecht; Pasta all´infinito, C.H.Beck, München, 3. Auflage 2000, S.126 (Punkte Kreis \cong Punkte Gerade)
- Abb. 56: Eigene Grafik, (Bijektive Abbildung (0,1) zum Kontinuum)
- Abb. 57: Eigene Grafik (Mengen unterschiedlicher Kardinalität zwischen ...)

- Abb. 58: Bildquelle: Mit freundlicher Genehmigung, Natalie Amecke, Dr. Holger Hofmann, <https://www.experimentis.de/site/wp-content/uploads/2013/05/203Unendlichkeit500.jpg> (Kerzen)
- Abb. 59: (Renormierung), selbst erstellt, nach <https://www.spektrum.de/lexikon/astronomie/renormierung/404>
- Abb. 60: <https://cds.cern.ch/images/CERN-EX-0705021-03>, (CERN)
- Abb. 61: <http://unendliches.net/german/index.htm?ordinalzahlen.htm>,
Stichwort Unsterblichkeit
- Abb. 62: Georg Cantor, Mitteilungen zur Lehre vom Transfiniten, Ztschr. F. Philos. U. philos. Kritik, Bd. 91, S.81-125 (1887), Bd. 92, S. 240-265 (1888) in Gesammelte Abhandlungen, ebenda, S. 378
- Abb. 63: Eigene Grafik, (Denkschulen)

Danksagung

Mein besonderer Dank geht an **Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl**, der die Professur für Algebra am Mathematischen Institut der Justus-Liebig-Universität Gießen innehat. Er hat mir behutsam sehr nützliche Anregungen gegeben, die es erlaubt haben, wichtige Eckpunkte zu setzen. Der Beitrag nennt sich im Untertitel „Eine mathematisch-historische Reise“. Durch seinen Hinweis war mit algebraischen Mitteln eine saubere Abgrenzung des Themas zur Philosophie und Theologie möglich. Über einen geschickt gewählten beispielhaften Einstieg mit der Möglichkeit zur Verallgemeinerung konnten viele Begriffe, Strukturen und Methoden angesprochen werden und mit „potentiell unendlich“ verknüpft werden. Abgerundet wurde sein Rat durch einige Hinweise auf Defizite und Unklarheiten. **Herr Prof. Dr. Köhl** war mir viel mehr Mentor als Gutachter und ich danke ihm herzlich für seine Unterstützung.

Wie so oft hat **Herr Dr. Michael Serafin** den Entstehungsprozess des vorliegenden Beitrags in einer bewunderungswürdigen Intensität und Sorgfalt begleitet. Obwohl er bei dem Thema fachfremd ist, hat er eine ganze Reihe an Unklarheiten und auch einige Fehler, die durch meine Unachtsamkeit entstanden sind, sowohl im formalen als auch im fachlichen Kontext entdeckt. Ein professioneller Lektor hätte die Qualitätssicherung nicht besser und effizienter machen können. Gerade in der Pandemie, in der das Vereinsleben der Naturwissenschaftlichen Abteilung der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde praktisch zum Erliegen gekommen ist, hat sein Engagement dafür gesorgt, dass mit der Oberhessischen Naturwissenschaftlichen Zeitschrift der Verein sichtbar bleibt. Ich bin **Herrn Dr. Serafin** zu großem Dank verpflichtet.

*To see a World in a Grain of Sand
And a Heaven in a Wild Flower,
Hold Infinity in the palm of your hand
And Eternity in an hour.
A Robin Redbreast in a Cage
Puts all Heaven in a Rage.*¹⁹³

William Blake

Aus „Auguries of Innocence“
Vers 1 - 6, 1803

FÜR FARI

¹⁹³ „Um eine Welt in einem Sandkorn und einen Himmel in einer wilden Blume zu sehen, halte die Unendlichkeit in deiner Handfläche und die Ewigkeit in einer Stunde. Ein Rotkehlchen in einem Käfig versetzt den ganzen Himmel in Wut.“

FASZINATION FORMELN

Berühmte Beziehungen aus Mathematik und Naturwissenschaften

Bedeutung und Hintergründe

WILLI KAFITZ^{*)}

Abstract:

Since their inception, a number of equations, formulas, symbols and relationships mark pivotal moments in the history of mathematics and the natural sciences.

They often exert a great fascination on laymen and experts alike. This article outlines important and universally recognized examples and tries to characterize their meaning, history and the names (and aliases) associated with them.

Other examples mentioned are less known and their importance is underestimated. Some of these are also named and an attempt is made to elevate their less obvious position in the history of science.

Keywords:

Euler's number, Euler's identity, Pythagorean theorem, golden ratio, $E = mc^2$, Heisenberg uncertainty principle, Planck's quantum of action, Avogadro's constant, logistic equation

Zusammenfassung:

Eine ganze Reihe von Gleichungen, Formeln, Symbolen und Beziehungen repräsentieren Sternstunden der Mathematik und der Naturwissenschaften. Auf Laien und auf Fachleute üben sie oft eine große Faszination aus. Der vorliegende Beitrag greift wichtige und allseits anerkannte Beispiele in kurzem Abriss auf und versucht ihre Bedeutung, Geschichte und mit ihnen verbundene Namen zu charakterisieren. Andere Beispiele sind eher weniger bekannt und ihre Bedeutung wird unterschätzt. Auch davon werden einige Repräsentanten genannt und versucht, ihre weniger offensichtliche Stellung in der Wissenschaftsgeschichte etwas aufzuwerten.

Schlüsselwörter:

Eulersche Zahl, Eulersche Identität, Satz des Pythagoras, Goldener Schnitt, $E=mc^2$, Heisenbergsche Unschärferelation, Plancksches Wirkungsquantum, Avogadro-Konstante, Logistische Gleichung

^{*)} Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

Zitate

Die Geometrie birgt zwei große Schätze.

Der eine ist der Satz des Pythagoras und der andere der Goldene Schnitt.

Den Ersten können wir mit einem Scheffel Gold vergleichen, den Zweiten können wir ein kostbares Juwel nennen.¹

Johannes Kepler (1571-1630)

Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik.²

Euklid (3. Jh. vor Chr.)

Gleichungen sind wichtiger für mich, weil die Politik für die Gegenwart ist, aber eine Gleichung etwas für die Ewigkeit.³

Albert Einstein (1879-1955)

Wie auch immer man es sieht, aber der Satz des Pythagoras ist die berühmteste Aussage der Mathematik.⁴

Eli Maor (*1937)

Wie das Endliche eine unendliche Reihe umschließt

Und im Grenzenlosen Grenzen erscheinen,

So wohnt die Seele der Unermesslichkeit in den Details

Und in den engsten Grenzen findet man das Grenzenlose.

Welche Freude, das Unscheinbare in der Unendlichkeit zu erkennen!⁵

Jakob Bernoulli (1655-1705)

But the great equations of modern physics are a permanent part of scientific knowledge, which may outlast even the beautiful cathedrals of earlier ages.⁶

Steven Weinberg (1933-2021)

Man kann sich dem Gefühl nicht entziehen, daß diese mathematischen Formeln eine unabhängige Existenz haben, daß sie klüger als wir und sogar weiser als ihre Entdecker sind, daß wir mehr von ihnen bekommen, als ursprünglich in sie hinein gesteckt wurde.⁷

Heinrich Hertz (1857-1894)

¹ Zitiert nach Claudi Alsina, Der Satz des Pythagoras, Librero, Kerkdriel (NL), 2016 (dt. Ausgabe), S. 9

² So antwortete Euklid von Alexandria auf die Frage des Pharaos Ptolemaios I., ob man die Geometrie nicht auch leichter erlernen könne als mit dem Studium von Euklids Lehrsätzen. Quelle: Ernst Horst, Mathematische Bildung S. 11

³ Zitiert nach <http://www.denkschatz.de/zitate/Albert-Einstein/Gleichungen-sind-wichtiger-fur-mich-weil-die-Politik-fur-die-Gegenwart-ist-aber-eine>

⁴ The Pythagorean Theorem; A 4000-Year History

⁵ Jakob Bernoulli, Ars Conjectandi, zitiert nach Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B.; Bezaubernde Beweise, Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg, 2013, S. 261

⁶ Steven Weinberg in Graham Zermelo, It Must Be Beautiful: Great Equations of Modern Science, Granta Books, Februar 2002

⁷ Zitiert nach Havel, Julian, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013, S.149

Inhalt

Einleitung und Fokus	115
Mathematik	116
Physik	160
Biologie	191
Chemie	199
Fazit	208
Literaturverzeichnis	209
Abbildungsnachweise	210
Personenregister	214
Stichwortverzeichnis	217
Danksagung	221

Einleitung und Fokus

Es sind Gleichungen, seltener Ungleichungen, die oft in ihrer Kürze „Formeln“ genannt werden und die in Mathematik und vielen Wissenschaften, die sich der Mathematik als universelle Sprache bedienen, Wissenschaftsgeschichte geschrieben haben. Sie sind Ergebnisse von intensivem Ringen in Erkenntnisprozessen, die oft über Generationen von Wissenschaftlern und allzu selten auch Wissenschaftlerinnen gehen. Manchmal sind unterhaltsame Anekdoten damit verbunden. Oft ist es auch nur das Symbol für eine Zahl, eine mathematische, physikalische oder auch chemische Konstante, das sofort den Zusammenhang assoziiert. Je berühmter und wichtiger diese Zahlen sind, umso weniger variieren die Symbole. Die Kreiszahl Pi oder die Eulersche Zahl e gehören dazu, der Goldene Schnitt Phi, die Lichtgeschwindigkeit c , das Plancksche Wirkungsquantum h oder in der Chemie die universelle Avogadro-Konstante N_A . Erst die Zusammenhänge zwischen ihnen machen oft den entscheidenden wissenschaftlichen Durchbruch aus. Allerdings reicht der Buchstabenvorrat manchmal nicht aus. Die elektrische Elementarladung und die Eulersche Zahl tragen eben den gleichen Buchstaben. Das macht aber ihrer Sonderstellung keinen Abbruch.

Eigentlich müsste das erste Kapitel der Gleichung $1 + 1 = 2$ gewidmet sein. Denn das ist unabhängig von Dingen der abstrakte Einstieg eines Kindes in die Welt der Zahlen.

In diesem Beitrag sollen Beispiele von Gleichungen, Symbolen und Beziehungen in ihrer Geschichte, Bedeutung und zumindest angedeuteten Zusammenhängen aufgezeigt werden. Einige Beispiele liegen auf der Hand, drängen sich regelrecht auf. Andere werden manchen Leserinnen und Lesern

als willkürlich erscheinen oder es fehlen andere Kandidaten, die es ihrer Meinung nach wert sind und diese Zusammenstellung wirkt dann unvollständig. Dieses Risiko muss eingegangen werden. Es soll und kann keine vollständige Liste geben. Es kann aber beim systematischen Lesen oder unsystematischen Blättern in der kleinen Publikation wieder neu etwas Faszination für die Sternstunden der Mathematik und Naturwissenschaften entstehen. Das ist das eigentliche Ziel dieses Beitrags.

Ein zusammenhängender Text ist deshalb nicht der Anspruch. Es ist kein geschlossener Aufsatz, keine Abhandlung zu einem Gegenstand. Eine strenge Chronologie oder Systematisierung gibt es in der Regel nicht. Nur sehr grob wurden die Kapitel chronologisch in den vier Wissensgebieten geordnet. Allerdings sind zum Verständnis einiger Kapitel Voraussetzungen nötig, die in vorigen Abschnitten behandelt werden. Die Schönheit der Eulerschen Identität ist ohne die Exponentialfunktion, der Bedeutung von Pi oder e und den komplexen Zahlen wenig verständlich. Je nach Fachgebiet und Interesse kann man aber ansonsten zwischen den Themen beliebig springen. Nur die Orientierung der Kapitel nach den Fachrichtungen Mathematik, Physik, Chemie und Biologie schaffen eine minimale Ordnung zwischen den einzelnen Stichpunkten.

Mathematik

Die Satzgruppe des Pythagoras und der Satz des Thales

Eines ist sehr sicher: Der Satz des Pythagoras stammt nicht von Pythagoras. Trotzdem ist es beruhigend, dass sein Name mit einem der wichtigsten mathematischen Erkenntnisse verbunden bleibt. Es scheinen Gründe zu der Annahme zu bestehen, dass der indische Mathematiker Baudhayana um 800 v. Chr. in seinem Buch Baudhayana Sulba Sutra den Satz entwickelt hat.⁸ Pythagoras hat bei allen „unwissenschaftlichen“, mystischen Tendenzen seines von ihm gegründeten Bundes den Beweis fest in der Mathematik etabliert. Er hat die Logik als wesentliches Kriterium erkannt, um Behauptungen von zweifelsfrei wahren Ergebnissen zu unterscheiden. Es ist nicht vermessen zu sagen, dass die Philosophie sich seitdem der mathematisch motivierten Logik bedient hat. Auch wenn die pythagoreische Lehre eine Mischung aus Mystik und Rationalität war, so blieb die essentielle Bedeutung des Beweises unantastbar. Pythagoras unternahm bis zu seinem 40. Lebensjahr ausgedehnte Reisen in wesentliche Teile der damaligen Welt. Dazu gehörte vor allem der „Fruchtbare Halbmond“, vom Zweistromland bis zum heutigen Libanon, wo

⁸ Clifford A. Pickover, Das Mathebuch, Librero, Kerkdriel (NL) 2014, S. 40

neben Ägypten die frühen Hochkulturen entstanden. Einige Autoren behaupten, er sei bis Indien gekommen.⁹ Auf diesen Reisen konnte Pythagoras das

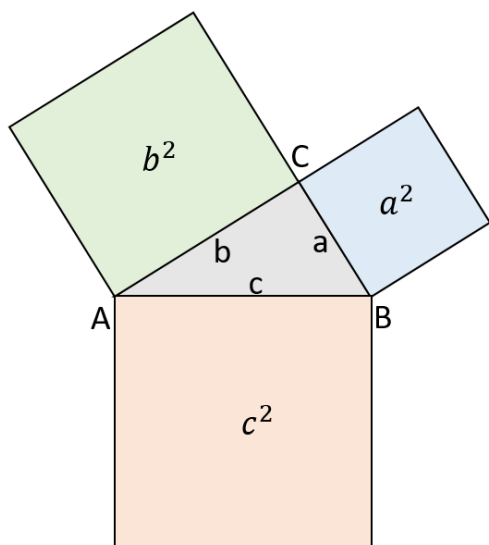
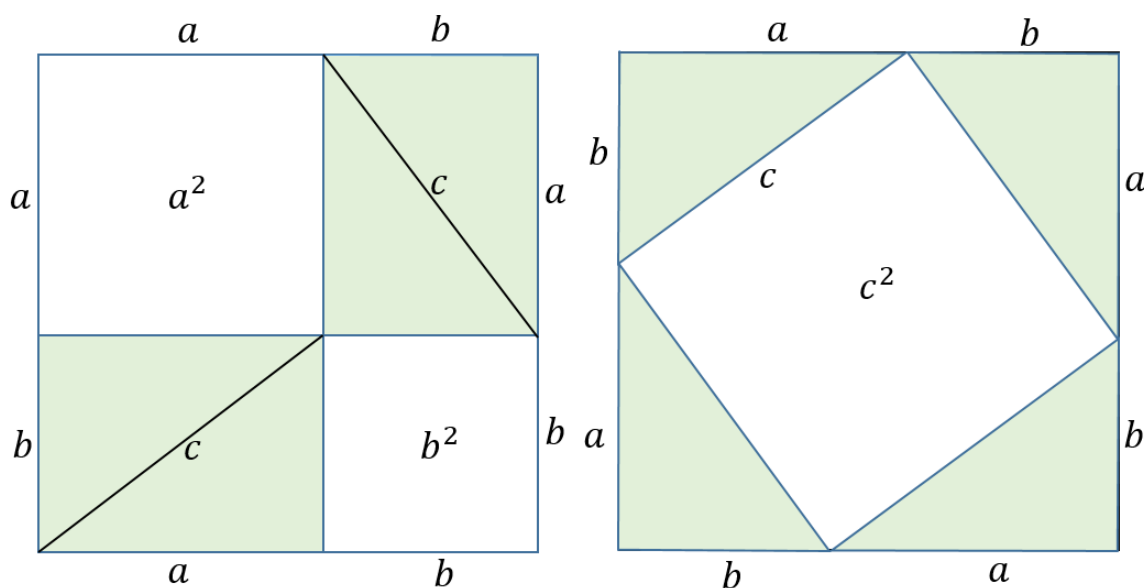


Abb. 1: Satz des Pythagoras

mathematische und astronomische Wissen seiner Zeit aufsaugen. Vor allem in Babylonien bzw. Mesopotamien („d.h. Zweistromland“) sind heute bemerkenswerte Funde überliefert. Zwar wurden 500.000 Tontafeln gefunden, von denen lediglich 300 mathematischen Inhalts sind. Viele sind jedoch noch nicht entziffert, aber einige wenige zeigen trotzdem das erstaunliche mathematisch-astronomische Wissen dieser Epoche. Eine als Plimpton 322 entzifferte Keilschrifttafel zeigt pythagoreische Tripel in dem hexagesimalen (Basis 60) Stellenwertsystem der Babylonier.¹⁰ Sie stammt aus der Hammurabi-Dynastie (ca.

1800-1600 v.Chr.) und deshalb 1500 Jahre bevor sich Euklid intensiv mit



$$\begin{aligned}
 a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 4 \frac{ab}{2} \\
 a^2 + b^2 &= c^2
 \end{aligned}$$

diesem Thema befasst hat. Die Zahlentripel sind ganzzahlige Werte (ohne Null), die die Bedingung $a^2+b^2=c^2$ erfüllen. Das war für die Wissenschaftsgeschichte

⁹ Claudi Alsina, Der Satz des Pythagoras, Librero, Kerkdriel (NL), 2016 (dt. Ausgabe), S. 13

¹⁰ Ebenda, S. 15

eine riesige Überraschung! Die damaligen Mathematiker mussten einen Algorithmus gekannt haben, Kenntnisse in Zahlentheorie besessen haben und dazu die theoretischen Kenntnisse in praktische Rechnungen mit dem unhandlichen Stellenwertsystem umgesetzt haben. Es scheint sich um die erste trigonometrische Tafel der Mathematikgeschichte zu handeln.

Dagegen gibt eine sehr wichtige ägyptische Quelle, der Papyrus-Rhind, der als eines der ersten Mathematiklehrbücher gelten kann, keine Hinweise. Die 87 Aufgaben mit Schritt-zu-Schritt Lösungen waren dazu gedacht, königliche Schreiber auszubilden. Diese bildeten die Elite im Beamtentum und hatten auch die Aufgabe, z.B. Neuvermessungen aufgrund der jährlichen Überschwemmungen des Nils zu koordinieren oder den Pyramidenbau mathematisch zu unterstützen. Es fällt auf, dass der Satz des Pythagoras noch nicht einmal indirekt im Papyrus-Rhind erwähnt wird. Gleiches gilt für den Moskauer Papyrus und den Berliner Papyrus. Andererseits ist bekannt, dass Handwerker mit Schnüren im Verhältnis 3-4-5, dem einfachsten pythagoreischen Tripel, hantierten.

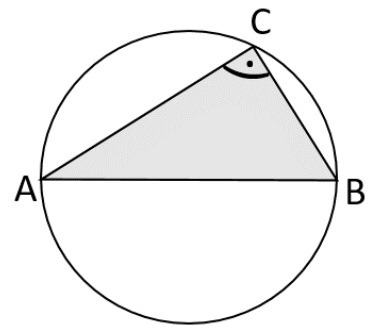


Abb. 3: Satz des Thales

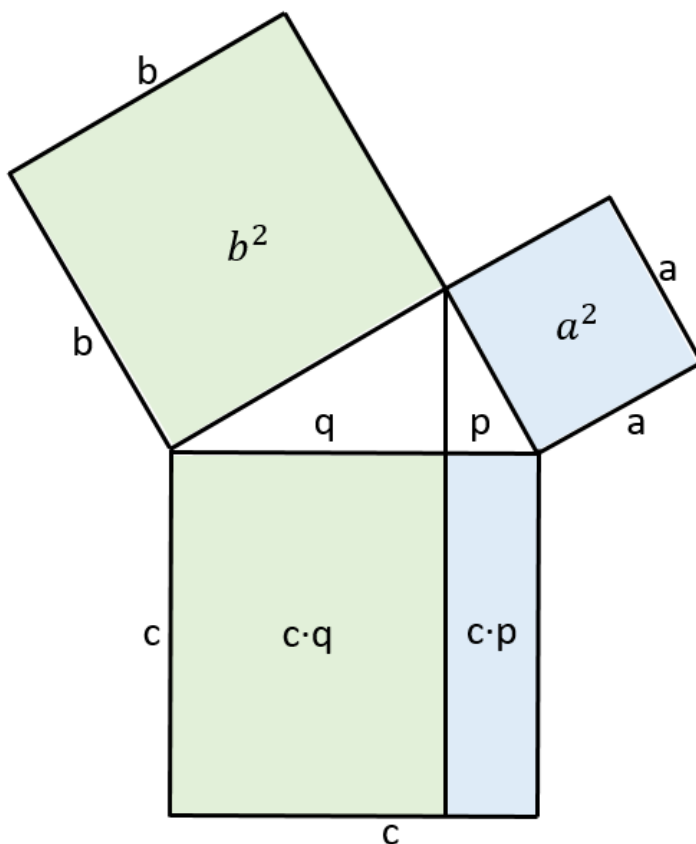


Abb. 4: Satzgruppe des Pythagoras, Kathetensatz

Was macht den pythagoreischen Lehrsatz so bedeutend? Er ist so grundlegend, dass man ihn für eine Definition verwenden kann:

In einem gegebenen ebenen Dreieck ABC ist der Winkel bei C genau dann ein rechter Winkel, wenn die Fläche des Quadrats der dem Eckpunkt C gegenüberliegenden Seite c der Summe Quadrate über den Seiten a und b entspricht.

Die meist verwendeten Begriffe „Hypotenuse“ für die Seite c und „Katheten“ für die Seiten a und b stammen aus dem Griechischen.

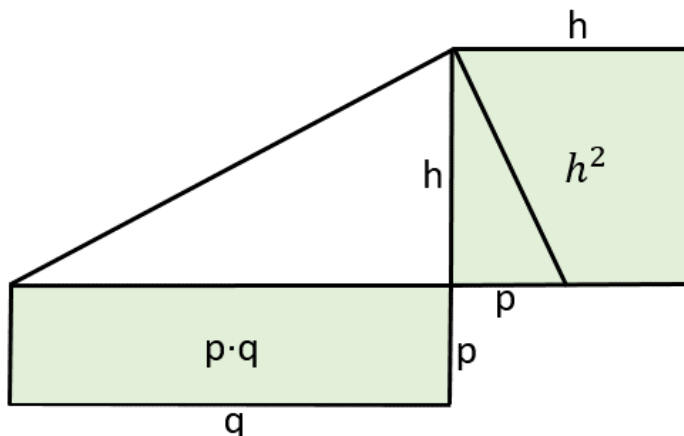


Abb. 5: Satzgruppe des Pythagoras
Höhensatz des Euklid

Kathete hat den Wortstamm „kothos“, das senkrecht, gerade oder übereinstimmend bedeutet. Dagegen ist „upoteinousa“ die Linie, die zugrunde liegt.¹¹ Sie wird für den Durchmesser eines Kreises verwendet und weist somit auf einen anderen wichtigen geometrischen Satz hin, den

Satz des Thales: Ist die Strecke \overline{AB} der Durchmesser eines Kreises und C ein Punkt auf dem Kreis, so ist der Winkel bei C ein rechter Winkel.

Mit der Zahl π sind nicht nur Eigenschaften ganzer Kreise, wie Umfang und Fläche verknüpft. Es geht auch um Winkel. Man stelle sich einen Kreis um den Ursprung, z.B. der Einfachheit halber mit dem Radius 1, vor und beginne bei dem Punkt, an dem er die x-Achse schneidet – also im Beispiel bei $x=1$. Wandert ein Punkt gegen den Uhrzeigersinn auf dem Kreis, so bildet er einen Winkel mit der x-Achse. Umläuft der Punkt den ganzen Umfang, so hat er 2π zurück gelegt. Das liegt an der trivialen aber bedeutsamen Tatsache, dass der Kreis eine konstante Krümmung hat. Nur Kreise und Geraden/Strecken haben eine konstante Krümmung. Bei Strecken ist die Krümmung Null. Beide eignen sich deshalb zur Messung, die ja immer einen Vergleich mit einem Maßstab darstellt. Beim Kreis ist es indirekt die Winkelmessung, bei der Strecke die Längenmessung. Ein Kreis hat 360° (400° und damit 100° für einen rechten Winkel hat sich als Dezimalsystem, ebenso wie eine dezimale Uhr, nicht durchgesetzt). Die 360° werden gemäß der Länge des ganzen Kreisbogens im Einheitskreis 2π gesetzt: $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$. Man spricht vom Gradmaß und Bogenmaß oder Radiant mit der Einheit rad, die man im internationalen SI-System weglassen darf.

Trigonometrie kommt von griechisch trigonon (Dreieck).

Im rechtwinkligen Dreieck gilt die Definition

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c};$$

Schaut man sich gängige Winkel, wie $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ an $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$, also

¹¹ Alsina, Satz des Pythagoras, ebenda, S. 42

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; & \sin \frac{\pi}{6} &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin 60^\circ &= \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}; & \sin \frac{\pi}{3} &= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \sin 45^\circ &= \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}; & \sin \frac{\pi}{4} &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

so fällt eine Beziehung auf, die für alle Winkel gilt. Da im rechtwinkligen Dreieck $\alpha + \beta = 90^\circ$ ist und der Satz des Pythagoras gilt, erhält man eine trigonometrische Variante des Satzes von Pythagoras:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

Andere Schreibweise: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Unter dem Begriff „Fermats letztes Theorem“ oder letzter Satz ist die Aussage zu verstehen, dass es analog zu den Pythagoreischen Zahlentripeln, keine ganzzahligen Tripel der Form $a^n + b^n = c^n$ gibt mit $n > 2$ (ohne Null).

Fermat hinterließ in seinen Aufzeichnungen und Büchern folgende Bemerkung an einem Seitenrand:

„Es ist jedoch nicht möglich, einen Kubus in 2 Kuben, oder ein Biquadrat in 2 Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in 2 Potenzen mit ebendenselben Exponenten zu zerlegen: Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.“¹²

Pierre de Fermat galt als integrier Mann, Hobbymathematiker mit dem Schwerpunkt Zahlentheorie und von Beruf Richter. Er hatte sicherlich Erkenntnisse, wahrscheinlich Beweise für die Fälle $n=3$ und möglicherweise $n=4$. Doch erst 350 Jahre später wurde der Beweis von Andrew Wiles mit erheblichem Aufwand und mit verblüffenden Querbeziehungen zu anderen Teilbereichen der Mathematik erbracht. Heute geht man deshalb von einer eher „leichtsinnigen“ Bemerkung Fermats aus. Große Namen scheiterten am Beweis, darunter Paul Wolfskehl (1856-1906). Als er starb, setzte er als Preis für den Beweis ein Vermögen von 100.000 Goldmark aus. Ein Großteil ging zwar durch Krieganleihen verloren, aber der Wolfskehl-Preis konnte am 27. Juni 1997 in Göttingen an Andrew Wiles verliehen werden. Die Geschichte des Beweises, den Wiles fast im Alleingang schaffte, wurde von dem damals jungen Simon Singh zu seinem ersten Bestseller bearbeitet.¹³

Kosinussatz und Sinussatz

Der Satz des Pythagoras ist auch für nicht rechtwinklige Dreiecke nützlich. Er dient zur Herleitung allgemeinerer Sätze. In jedem Dreieck ist das Quadrat über

¹² Zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Großer_Fermatscher_Satz (aus dem Lateinischen übersetzt)

¹³ Simon Singh, Fermats letzter Satz, Carl Hanser Verlag, München-Wien, 1998

einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den anderen beiden Seiten vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seiten und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. Das ist der Kosinussatz.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

h_a, h_b, h_c sind die Höhen im Dreieck ABC. Es gilt

Wegen $\frac{h_b}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin 90^\circ} \rightarrow h_b = a \cdot \sin \gamma$ und $d = b - a \cdot \cos \gamma$

$$c^2 = h_b^2 + d^2$$

$$c^2 = a^2 \cdot \sin^2 \gamma + b^2 - 2ba \cdot \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma$$

$$c^2 = a^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Man sieht: Bei $\gamma = 90^\circ$, also $\cos 90^\circ = 0$ ergibt sich der Satz des Pythagoras.

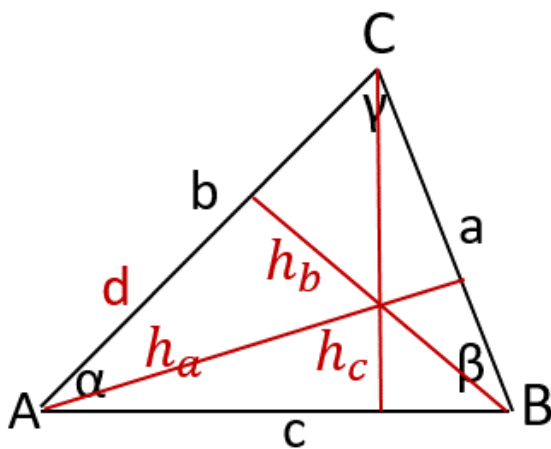


Abb. 6: Kosinussatz: Trigonometrie im beliebigen Dreieck.

Der Sinussatz schafft eine Verbindung zwischen Seiten im Dreieck und den gegenüber liegenden Winkeln.

Es gilt

$$a : b : c =$$

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \text{ oder}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Beim Beweis ist es sinnvoll, drei Fälle zu unterscheiden:

spitzwinkliges Dreieck, rechtwinkliges Dreieck, stumpfwinkliges Dreieck¹⁴
Die Höhe liegt entweder im Dreieck oder ist eine Seite oder liegt außerhalb.

¹⁴ Eine didaktisch gute Darstellung für die beiden Sätze, an die sich das Kapitel maßgeblich anlehnt, findet sich bei <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/kosinussatz> bzw. <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/sinussatz>

Pi, π

Die wohl wichtigste mathematische Konstante ist π , also das Verhältnis eines Kreisumfangs zu seinem Durchmesser. Man kann davon ausgehen, dass jede hochentwickelte Kultur der gleichen Meinung ist.

Aus babylonischen Keilschriften geht hervor, dass man für π zwischen 3 und höchstens $3\frac{1}{8}$ annahm. Die Ägypter zogen gemäß Moskauer Papyrus vom Durchmesser d eines Kreises $1/9 \cdot d$ ab, quadrierten und hatten damit etwa die Fläche (d.h. $\pi \approx 3,16 \dots$).¹⁵

Die Ägypter schrieben Brüche als Summe von Stammbrüchen, was durchaus auch Missverständnisse zulässt. Nach anderer Darstellung im Papyrus-Rhind ist $\pi = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \approx 3,12\dots$

Die genaueste Berechnung von π stammte von Archimedes von Syrakus (ca. 287-212 v. Chr.) und bestand praktisch fast ein halbes Jahrtausend lang. Man kann es als Präzisionsberechnung bezeichnen und war eine Betrachtung von einbeschriebenen und umbeschriebenen Vielecken. Man muss beachten, Archimedes hatte noch kein Dezimalsystem und keine Null zur Verfügung. Die Rechnung beruhte nur auf Abschätzungen von Brüchen. Für die alten Griechen war ein Bruch immer ein Streckenverhältnis. Für eine Quadratur von Zahlen errichtete man ein Quadrat über der Strecke. Es war eine physische und psychische Höchstleistung. Er kam zu der Abschätzung

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}; \text{ oder dezimal } 3,1408\dots < \pi < 3,1429 \dots$$

Der Astronom Ptolemäos (ca. 100-170 n. Chr.) rechnete im Sechzigersystem $\pi = 3^\circ 8' 30'' = 3,14167 \dots$ mit einer Abweichung von nur 0,000074 vom exakten Wert.¹⁶

Der Rekord liegt aktuell (2021) bei einem Team der FH Graubünden. Sie errechneten 62.831.853.071.796 Dezimalstellen in 108 Tagen. Die Berechnung von Pi ist zum Test für neue Computer geworden.

Im Mittelalter versuchte sich Nikolaus von Kues (lateinisiert Cusanus) recht erfolgreich an Berechnungen. Archimedes ging von einem festen Kreis aus und näherte diesen durch Polygone an. Cusanus wählte eine umgekehrte Methode. Er ging von einem Polygon der festen Länge 2 mit $n = 2^k$ Ecken aus (wobei $2^k=4, 8, 16, 32, \dots$) und zwei in- und umbeschriebenen Kreisen. Der innere Kreis hat für jedes n den Umfang $2\pi r_n$; der äußere Kreis $2\pi R_n$. Daraus hat er Pi sehr genau approximiert.

¹⁵ Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 135

¹⁶ Hans-Dieter Rinkens, Katja Krüger, Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer-Spektrum, Wiesbaden 2020, S. 19

Weitere berühmte Formeln, mit denen π berechnet werden konnte, sind z.B. das Wallissche Produkt, nach John Wallis (1616-1703). Er ist auch dadurch bekannt geworden, weil er das Unendlich-Zeichen in die Notation eingeführt hat.

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8^2}{7 \cdot 9} \dots$$

Am bekanntesten ist aber die von Euler gefundene Reihe der reziproken Quadratzahlen (siehe Basler Problem).

Berühmt ist auch die Gaußsche Normalverteilung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Weierstraß nutzte die Darstellung

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}$$

Ein schönes Beispiel kann man über die Potenzreihe der Sinusfunktion herleiten. Beweisidee ist der sog. Eulersche Koeffizientenvergleich.¹⁷

Die alternierende Summe der Kehrwerte aller ungeraden Zahlen ist $\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Pi ist längst nicht mehr nur in der Geometrie wichtig, sondern taucht an vielen, oft unerwarteten Stellen, in der Mathematik auf. In der Zeit zwischen Ende der Renaissance und Ende des viktorianischen Zeitalters (ca. 1600- ca. 1900) kann man die Blüte der Mathematik mit dem immer besseren Verständnis von π gleichsetzen.¹⁸ Das gilt vor allem in Bezug auf das Unendliche in der Analysis, z.B. für unendliche Potenzreihen.

Null, 0

Von dem deutschen Mathematikhistoriker Karl Menninger stammt das Zitat: *Wir sprechen deutsch, wir schreiben römisch und wir rechnen indisch.*¹⁹ Dabei war der wichtigste „Import“ aus der indischen Mathematik das Stellenwertsystem auf Basis 10 und die Zahl Null. Von der restlichen Welt unbeachtet, scheinen die

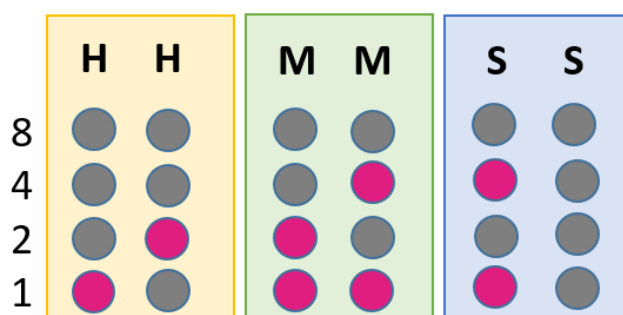
¹⁷ Beweis siehe Rinkens, Hans-Dieter, Krüger, Katja; Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020, S. 159

¹⁸ Siehe Zitat von David Blatner, The Joy of π , in Rinkens, Krüger, ebenda, S. 20

¹⁹ Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen, 1958, zitiert nach Wußing, ebenda, S. 97

Maya um ca. 665 ebenfalls ein Zahlensystem mit der Null entwickelt zu haben.²⁰ Bei den Babyloniern wurde zwar ein Endezeichen für Zahlen eingeführt, aber wahrscheinlich um diese Stelle besser markieren zu können. Als vollgültige Zahl Null tritt sie aber erst um 650 in der indischen Mathematik auf. Eine Steintafel, die in Gwalior, südlich von Delhi, gefunden wurde, kann genau auf das Jahr 876 datiert werden. Dort wurden die Zahlen 270 und 50 fast in moderner Schreibweise aufgezeichnet.²¹ Über Indien gelangte die Null zu den Arabern und Chinesen. Die westarabische Kultur beeinflusste schließlich das Europa des Mittelalters.

Einen großen Beitrag lieferte dazu offenbar Leonardo Pisano, genannt Fibonacci, der u.a. in seinem einflussreichen Buch *Liber abaci*, das Buch vom



12:35:50 Uhr

Abb. 7: Nicht-dezimales Stellenwertsystem ohne Null bei einer Digitaluhr.

Abacus, arabische Zahlen propagierte. Das "Buch der Rechenkunst" wurde 1202 vollendet und ist in der Überarbeitung von 1228 der Nachwelt erhalten geblieben.²² Es ist die erste europäische Gesamtdarstellung der damaligen Arithmetik. Er soll zeitweilig am Hof von Friedrich dem II. in Sizilien gewesen sein und sich vom Kaiser die Förderung der indisch-arabischen Mathematik

mit Erfolg erbeten haben. Trotzdem dauerte es noch mehrere Jahrhunderte. Erst 1494 gingen z.B. die MEDICI in ihren Verwaltungen generell zu den arabischen Zahlen inkl. der Null über.²³ Das war ein besonderer Sieg der Geschäftswelt über die Herrschenden, die die arabischen Ziffern aus fadenscheinigen Gründen ablehnten, denn noch 1299 wurden die arabischen Ziffern z.B. in Florenz verboten.²⁴ Auch eine andere Revolution wurde bewusst durch die Null eingeleitet: Den nulldimensionalen Fluchtpunkt in der Malerei. 1625 zeichnete Brunelleschi erstmals einen solchen Punkt in einer Zeichnung des Baptisteriums, der Taufkirche, die neben dem Dom in Florenz steht. Es war der Beginn der Zentralperspektive in der darstellenden Kunst.

²⁰ Clifford A. Pickover, Das Mathebuch, ebenda, S. 80

²¹ Clifford A. Pickover, Das Mathebuch, ebenda, S. 80

²² <https://library.ethz.ch/standorte-und-medien/plattformen/virtuelle-ausstellungen/fibonacci-un-ponte-sul-mediterraneo/biographie-von-leonardo-pisano.html>

²³ <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/geschichte/artikel/leonardo-fibonacci-von-pisa>

²⁴ Charles Seife, Zwilling der Unendlichkeit, Goldmann, München, 2002, S. 92

Interessanterweise führt der Punkt ins Unendliche. Leonardo da Vinci verfasste einen mathematisch fundierten Leitfaden, um korrekt perspektivische Darstellungen malen zu können.²⁵ Die Null war also in der Geschäftswelt und in der Kunst angekommen. Ebenso wurde offener in der Theologie über das „Nichts“ diskutiert. Torricelli und Pascal zeigte mit Quecksilbersäulen, dass es ein Vakuum geben muss und dass die Säule auf Bergen abhängig von der Höhe ist. Damit war der „*horror vacui*“ überwunden. Eine Belastungsprobe für die neue Infinitesimalrechnung war dann im 18. Jahrhundert die Diskussion um das unendlich Kleine. Jean Le Rond d’Alembert schrieb: *Eine Größe ist etwas oder nichts; wenn sie etwas ist, ist sie noch nicht verschwunden; wenn sie nichts ist, ist sie wirklich verschwunden. Die Annahme, es gebe einen dazwischen liegenden Zustand, ist ein Hirngespinnst.*²⁶

Das Basler Problem und berühmte Reihen

Es geht um die Summe der reziproken Quadratzahlen

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Das Basler Problem hat seinen Namen, weil es lange Zeit ungelöst war und sich vor allem die Basler Mathematiker Jakob Bernoulli und sein Bruder Johann Bernoulli daran versuchten und scheiterten. Jakob Bernoulli beschrieb das Problem 1689 im *Tractatus de seriebus infinitis*. Er wird zitiert mit der dringenden Bitte, ihn zu informieren, wenn jemand die Lösung findet. Montucla nannte es die „Geißel der Analytiker“.²⁷ Nicole Oresme,²⁸ ab 1377 Bischof von Lisieux, soll den Sachverhalt untersucht haben. Er scheint die Konvergenz der Reihe erkannt und einen Wert kleiner 2 vermutet zu haben. Das ist einsichtig, wenn man die Partialsummen als Quadrate auffasst und sie in ein 1x2 Rechteck packt. Geometrisch sieht es so aus, als würde die Fläche des Rechtecks nicht ausgefüllt werden, also die Summe durch 2 beschränkt sein. Doch noch 1644 fragte sich der Italiener Pietro Mengoli, ob diese Summe wirklich konvergiere, und wenn ja, gegen welchen Wert. Auch er fand keine Lösung.

Sogar Newton und Leibniz sollen gescheitert sein, ebenso der herausragende französische Mathematiker L’Hôpital. John Wallis berechnete den Wert auf drei Dezimalstellen.

²⁵ Ebenda, S. 98 f

²⁶ Zitiert nach Seife, ebenda, S 141

²⁷ Julian Havil, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013, S. 50

²⁸ Wußing ebenda, S. 293, sowie Rudolf Taschner; Die Farben der Quadratzahlen, Hanser, München 2019, S. 67

Erst Euler, ebenfalls aus Basel und Schüler von Johann Bernoulli, war erfolgreich. Er fand die ästhetisch schöne Lösung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\frac{\pi^2}{6} \approx 1,644934$$

Euler verallgemeinerte das Problem zu der berühmten Zeta-Funktion mit $s \neq 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

(Die Riemannsche Vermutung zu den Nullstellen der Zeta-Funktion gilt als eines der wichtigsten ungelösten Probleme der Mathematik und als Schlüssel zum besseren Verständnis der Primzahlen. Auf sie wird noch eingegangen.)

Somit gilt

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Zeta von 1 muss man ausschließen denn es ist nicht definiert. Es wäre die divergierende harmonische Reihe

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$

$\frac{\pi^2}{6}$ tritt an einigen unerwarteten Stellen in der Mathematik auf. So ist $1 : \frac{\pi^2}{6}$ übrigens exakt die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig ausgewählte positive ganze Zahlen teilerfremd sind.

Als endliche Reihe wird sie gerne mit H_n bezeichnet:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

Es ist überraschend: Selbst bei endlichem n gibt es keine Formel für H_n .

Man kann auch beweisen: Mit Ausnahme von $n=1$ wird H_n nie ganzzahlig. Mit einer sehr diffizilen Argumentation stellt sich heraus, dass der Zähler immer ungerade ist und der Nenner gerade.

Außerdem gibt es nur drei Fälle, in den H_n ein endlicher Dezimalbruch ist, nämlich

$H_1 = 1, H_2 = \frac{1}{2}$ und $H_6 = 2,45$. Sonst ist es immer eine unendliche Dezimalzahl.

Die unendliche harmonische Reihe für n gegen Unendlich ist noch bemerkenswerter, denn die Divergenz ist schlechthin unerwartet. Die ersten 100 Glieder summieren sich zu 5,187..., die ersten 1000 zu 7,486... und die erste Million zu 14,392... Man braucht ca. $15 \cdot 10^{42}$ Reihenglieder um die Summe von 100 erhalten. Die Divergenz bewies übrigens der geniale Nicole Oresme, seit 1377 Bischof von Lisieux. Er war einer der vielseitigsten Persönlichkeiten im ausgehenden Mittelalter.²⁹ Sein berühmter Beweis kann man in moderner Notation schreiben:

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

konvergiert und wird γ (Gamma) genannt (Euler-Mascheroni-Konstante).

Sie hat den Wert $\gamma = 0,57721\ 56649 \dots$

Sie taucht öfters in der Zahlentheorie und analytischen Funktionentheorie auf. Es ist unbekannt, ob sie rational, irrational oder transzendent ist. Die riesige Anzahl an Nachkommastellen, die von γ bekannt sind, machen es sehr wahrscheinlich, dass γ zumindest irrational ist.

Gamma ist eine „verrückte“ Zahl. Für ein n von einer Million (1.000.000) sind nur die ersten 5 Nachkommastellen exakt. Die Konvergenz ist extrem langsam.

Man kann beweisen: $\frac{1}{2(n+1)} < \gamma_n - \gamma < \frac{1}{2n}, \quad n \in \mathbb{N}$

²⁹ Julian Havil, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013, S. 33

Will man eine Genauigkeit von m Dezimalstellen, so muss man fordern

$$\gamma_n - \gamma < 5 \cdot 10^{-m-1} \text{ also } \frac{1}{2n} < 5 \cdot 10^{-m-1} \quad \text{d.h. } n > 10^m$$

$$\begin{aligned} \gamma_n - \gamma &> \frac{1}{2 \cdot 10^m} \left(1 - \frac{1}{10^m}\right) = \frac{5}{10^{m+1}} \left(1 - \frac{1}{10^m}\right) \\ &= \frac{5}{10^{m+1}} \left(\frac{10^m - 1}{10^m}\right) = \underbrace{4,999\,999\,999\,99\,5}_{(m-1) \text{ mal}} \cdot 10^{-(m+1)} \end{aligned}$$



Abb. 8: Kultstatus Basler Problem

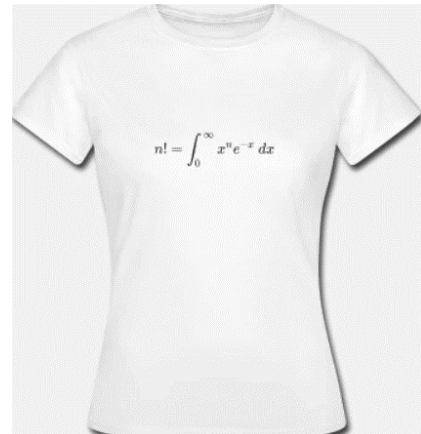


Abb. 9: Die analytische Fortsetzung der Fakultät

d.h. erst in der m -ten Dezimalstelle wird die Approximation von γ inkorrekt.³⁰ Die Berechnung von möglichst vielen Dezimalstellen ist ein enormer Rechenaufwand.

Das Basler Problem genießt neben der analytischen Fortsetzung der Fakultät Kultstatus unter Mathematik-Begeisterten. Mehrere T-Shirt-Hersteller bieten Produkte mit mathematischen oder physikalischen Formeln an.

Ähnliches gilt aber auch für andere ästhetisch schöne Formeln: Z.B. das Gaußsche Fehlerintegral.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Die analytische Fortsetzung der Fakultät erweitert den „Horizont“ der Fakultät erheblich: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ ist nur für natürliche Zahlen definiert.

„Analytische Fortsetzung“ bedeutet, dass nun auch alle positiven und negativen reellen Zahlen oder komplexe Zahlen als Wertebereich der Fakultätsfunktion zugelassen sind.

³⁰ Julian Havil, GAMMA, ebenda S. 88

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

Das analoge Integral mit $n-1$ statt n ist übrigens als Gamma-Funktion definiert:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

Komplexe Zahlen

Etwa um das Jahr 1850 begann eine systematische Definition der reellen Zahlen. Das Ringen um dieses Thema dauerte fast 2.000 Jahre. Auch heute weiß man von wichtigen Zahlen noch nicht, ob sie rational, irrational oder sogar transzendent sind. Ein Beispiel ist die Zahl Gamma, auf die noch einzugehen sein wird. Heute können wir die reellen Zahlen als

vollständigen, geordneten Körper

bezeichnen. „Vollständig“ bedeutet, dass es keine Lücken gibt. Das ist z.B. wichtig bei dem Begriff der Stetigkeit. Vor allem Richard Dedekind und Georg Cantor haben dazu beigetragen, dass eine konsistente Definition entstand. „Geordnet“ heißt, es existiert eine Ordnungsrelation, mit der wir im Alltag ganz selbstverständlich umgehen, nämlich die kleiner/größer Relation. Von zwei prinzipiell berechenbaren, reellen Zahlen n und m kann man klar entscheiden, ob $n < m$, $n > m$ oder $m = n$ ist. Ein algebraischer Körper muss eine Reihe von Axiomen erfüllen. Er besitzt zwei Verknüpfungen, genannt Addition und Multiplikation, die zu den allseits bekannten Rechenregeln der Arithmetik führen. Theoretisches Fundament sind Begriffe wie Gruppe, neutrales Element, inverses Element, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz(e), etc. Der Begriff wurde von Dedekind eingeführt. In der Mathematik gibt es eine Reihe von algebraischen Strukturen, die durch Einschränkungen der Körperaxiome gewonnen werden.

Vor allem algebraische Gründe führten mehrfach zur Erweiterung des Zahlenbereiches. So entstanden Brüche (rationale Zahlen) und die anfangs abgelehnten negativen Zahlen. Die Entdeckung irrationaler Zahlen durch die Pythagoreer provozierte die erste Krise in der Mathematik, doch auch sie wurden schließlich als Erweiterung akzeptiert. Bei den irrationalen Zahlen entdeckte man, dass sich bestimmte Zahlen als reelle Lösungen eines Polynoms (z.B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{17}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, etc.) auffassen lassen. Man nennt sie, bei ganzzahligen Koeffizienten, algebraische Zahlen. Für andere Zahlen gilt das nicht (z.B. π , e). Man nennt sie transzendente Zahlen.

Erweiterungen des Zahlbereichs hatten immer zwei wesentliche Anforderungen:³¹

1) Einbettungsprinzip

Die bisherigen Zahlen sollten in die Erweiterung eingebettet sein. Die neu definierten Zahlen sind also eine Obermenge, die sich strukturell genauso verhält, wie die alten Zahlen.

2) Permanenzprinzip

Die Rechenregeln sollen sich nicht ändern. Die Erweiterung soll die bisherigen Rechenregeln erhalten.

Auch hier sind die von der Algebra entwickelten Axiome entscheidend, die unter den Begriff „algebraischer Körper“ fallen.

Nun hat die einfache Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in den reellen Zahlen keine Lösung und das gilt auch für anspruchsvollere Polynome. Die Lösung $x = \pm\sqrt{-1}$, per Definition genannt i oder imaginäre Einheit, muss außerhalb des reellen Zahlenstrahls liegen.

Schon alleine das impliziert, dass das Einbettungsprinzip nicht wörtlich zu nehmen ist. Eine imaginäre Zahl $b \cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$ ist definiert als $(b \cdot i)^2 := -b^2$. Die imaginären Zahlen betten die reellen Zahlen also nicht ein, sondern stehen gleichberechtigt daneben. Nur die Null haben sie gemeinsam, denn $i \cdot 0 = 0$. Die reellen Zahlen enthalten die algebraischen und rationalen Zahlen und diese wieder die ganzen Zahlen und schließlich die natürlichen Zahlen. Aber die imaginären Zahlen enthalten nicht die reellen Zahlen. Erst wenn man beide, reelle und imaginäre Zahlbereiche zu den komplexen Zahlen \mathbb{C} „geschickt“ zusammenfasst, also zu einer Zahlenmenge mit zwei Verknüpfungen, genannt Addition (+) und Multiplikation (\cdot), die die Axiome und algebraischen Eigenschaften eines Körpers erfüllen, dann kann man von einer Erweiterung des Zahlenbereichs sprechen, der das Einbettungsprinzip und das Permanenzprinzip einhält.

Es zeigt sich, dass die „Kombination“ von reellen Zahlen und imaginären Zahlen zu \mathbb{C} einen Vektorraum in \mathbb{R}^2 bildet, also Tupel mit einer reellen Komponente (Realteil) und einer imaginären Komponente (genannt Imaginärteil). Das garantiert, dass \mathbb{C} sowohl \mathbb{R} als auch sozusagen „I“ als echte Teilmengen

³¹ Die folgenden Abschnitte bis Eulersche Identität orientieren sich stark an Rinkens, Hans-Dieter, Krüger, Katja; Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020

enthält. Geometrisch veranschaulicht, stehen imaginäre Zahlen senkrecht, also orthogonal zu reellen Zahlen.

Die „Kombination“ nennt man die komplexe Ebene oder Gaußsche Zahlenebene.³² Die komplexen Zahlen entsprechen Punkten in der komplexen Ebene. Die reellen Zahlen sind eine Untermenge und ebenso der imaginäre Zahlenstrahl, auch wenn man sich diese Tatsache erst bewusstmachen muss. Die Einführung der komplexen Zahlen war nicht nur ein Segen für die Mathematik, sondern es ergeben sich eine Fülle von Anwendungsmöglichkeiten in der Physik und darüber hinaus.³³

Die Rechenregeln sind nicht ganz so intuitiv, besonders bei der Multiplikation und Division.

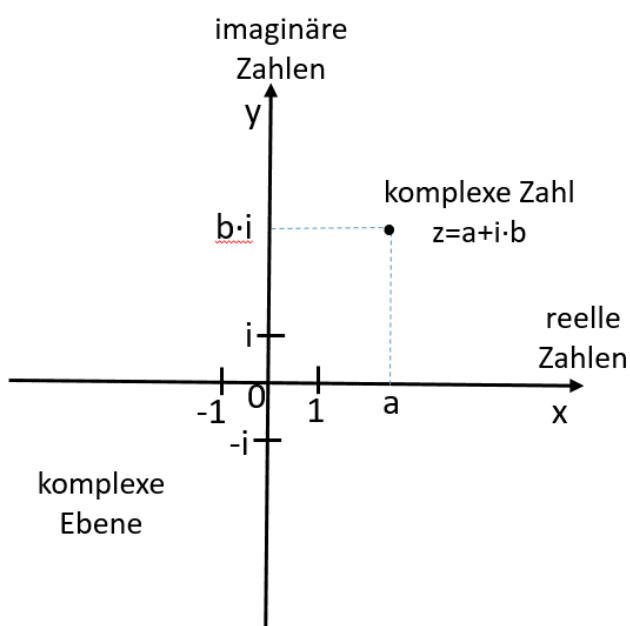


Abb. 10: Komplexe Zahlenebene

Dabei ist die Addition definiert als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix},$$

$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element der Addition und

$$\begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} \text{ das Inverse zu } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

$$\text{denn } \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Ebenso kann man das Assoziativgesetz zeigen und mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ das neutrale Element der

Multiplikation identifizieren, denn

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \cdot 1 - y_1 \cdot 0 \\ x_1 \cdot 0 + 1 \cdot y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Auf diesen Verknüpfungen kann man die bekannten Körperaxiome bzw. Eigenschaften für den Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ herleiten.

³² Bernhard Riemann hat mit der Riemannschen Zahlenkugel eine Abbildung der komplexen Zahlenebene vereinigt mit dem Punkt Unendlich auf die Oberfläche einer Kugel eingeführt; $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Unendlich bildet dabei den „Nordpol“, 0 den „Südpol“. Der so gebildete topologische Raum stellt eine Kompaktifizierung der komplexen Ebene dar.

³³ Es zeigt sich, dass wichtige Naturgesetze ohne die Verwendung von komplexen Zahlen extrem umständlich, wenn überhaupt möglich, formuliert werden müssten.

Die Tupel, die hier zur Verdeutlichung, dass es sich um einen Vektorraum handelt, vektoriell geschrieben wurden, schreibt man bekanntlich als

$$c = a + b \cdot i \text{ wobei } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } i = \sqrt{-1}$$

Eulersche Zahl e

Mit Ausnahme der Kreiszahl Pi (π) gibt es kaum eine andere, gleich wichtige Zahl in der Mathematik und allen Anwendungsgebieten, wie die nach dem herausragenden Schweizer Mathematiker Leonhard Euler benannte Zahl e. Sie hat den Wert

$$e = 2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ \dots$$

Euler selbst fand für e die Reihe

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Oder als Folge

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Dies kann man als bis ins Unendliche fortgesetzte Zinseszinsrechnung verstehen.

Im Vorgriff auf das Kapitel „Logarithmen“ soll hier festgehalten werden:

Die Bedeutung von e liegt einerseits in ihrer Rolle als Basis des natürlichen Logarithmus $\ln := \log_e$. Zu jeder positiven reellen Zahl y gibt es eine reelle Zahl x, so dass $e^x = y$. Man schreibt $x = \ln y$. Aus praktischen Gründen war lange Zeit vor allem der natürliche Logarithmus von mathematischem Interesse. Heute spielt eher die besondere, natürliche Exponentialfunktion e^x , bei der die Ableitung mit dem Funktionswert übereinstimmt, die führende Rolle. Für beide Seiten, Funktion und Umkehrfunktion, gilt, dass Differentiale und dann auch Integrale einfacher in ihrer Handhabung werden. e wird deshalb seltener als Zahl gebraucht, sondern meist in ihrer Bedeutung als $\ln(x)$ oder als e-Funktion $f(x) = e^x$, für die gilt $f'(x) = e^x$. Weil diese Differentialgleichung gilt, lässt sich folgern

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

d.h. die e-Funktion ist eine Folge von Funktionen. Außerdem gilt

$$\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln y_1 + \ln y_2$$

Wachstums- und Zerfallsprozesse sind sehr häufig mit der e-Funktion verknüpft, so Bakterienwachstum oder radioaktiver Zerfall.

Zurück zur Eulerschen Zahl und den komplexen Zahlen:

Für jeden Winkel φ gilt die Darstellung einer komplexen Zahl im Einheitskreis

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Damit ergibt sich für $\varphi = \pi$:

$$e^{i\pi} = -1 \text{ oder } e^{i\pi} + 1 = 0$$

und äquivalent

$$e^{2\pi i} = 1$$

Weil in vielen Fällen Berechnungen in dieser Darstellung der komplexen Zahlen einfacher werden, wird sie oft angewendet.³⁴

Wie kann man das einsehen? Man greift dazu auf die Annäherung der betreffenden Funktionen durch Taylorreihen zurück. Über eine unendliche Reihe werden sie dadurch exakt in jedem Punkt bestimmt.

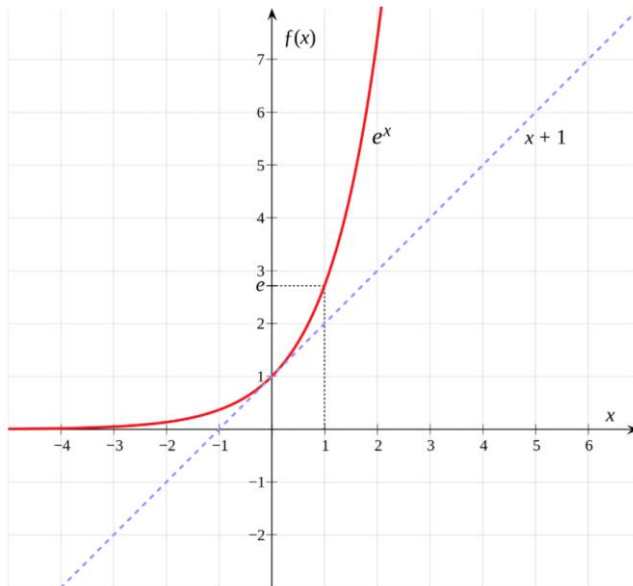


Abb. 11: Exponentialfunktion

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n)}}{(2n)!}$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \frac{(ix)^9}{9!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + ix + i^2 \frac{x^2}{2!} + i^3 \frac{x^3}{3!} + i^4 \frac{x^4}{4!} + i^5 \frac{x^5}{5!} + i^6 \frac{x^6}{6!} + i^7 \frac{x^7}{7!} + i^8 \frac{x^8}{8!} + i^9 \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + i \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \right) + i \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \right)$$

³⁴ Grafik: <https://de.wikipedia.org/wiki/Exponentialfunktion>

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

Die Eulersche Formel stellt also eine unmittelbare Beziehung zwischen der Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen her.

Betrachte man beide Seiten getrennt:

$$e^{i(a+b)} = e^{ia+ib} = e^{ia} e^{ib}$$
$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \cdot \sin(a+b)$$

und

$$e^{ia} e^{ib} = [\cos(a) + i \cdot \sin(a)] \cdot [\cos(b) + i \cdot \sin(b)]$$

Ausmultipliziert ergibt

$$e^{ia} e^{ib} = [\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)] + i[\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)]$$
$$\cos(a+b) + i \cdot \sin(a+b)$$
$$= [\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)] + i[\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)]$$

Daraus folgt

$$\cos(a+b) = [\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)]$$
$$\sin(a+b) = [\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)]$$

Analog folgen durch Ersetzen von b durch $-b$ die Formeln für die Winkeldifferenz

$$\cos(a-b) = [\cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)]$$
$$\sin(a-b) = [\sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)]$$

Während die Multiplikation von komplexen Zahlen über kartesische Koordinaten eher unhandlich ist, gelingt die Multiplikation über Polarkoordinaten wesentlich einfacher:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \text{ und } z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 =$$
$$r_1 \cdot r_2 \cdot ((\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i \cdot (\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1))$$

Die Additionsformeln machen daraus einen prägnanten Ausdruck:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Man multipliziert die Beträge und addiert die Winkel. Es ist eine Drehstreckung.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall $r_i = 1$, d.h. die komplexen Zahlen liegen auf dem Einheitskreis – sie haben den Abstand 1 vom Ursprung.

$$z = a + i \cdot b \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \text{ bzw. der Form } z = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

Auch das Potenzieren geht einfacher in Polarkoordinaten:

$$z^n = r^n \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = r^n \cdot (\cos n \cdot \varphi + i \cdot \sin n \cdot \varphi)$$

Man potenziert den Betrag und vervielfacht den Winkel.

Beim Wurzelziehen herrschen ebenso wie bei den reellen Zahlen besondere Regeln, denn man muss das Vorzeichen beachten und es gibt mehr Lösungen. Die Lösungen der Gleichung $z^n = a$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, heißen n -te Wurzeln aus a . Anders gefragt: Man sucht die komplexen Zahlen z , für die $z^n = a$ ist.

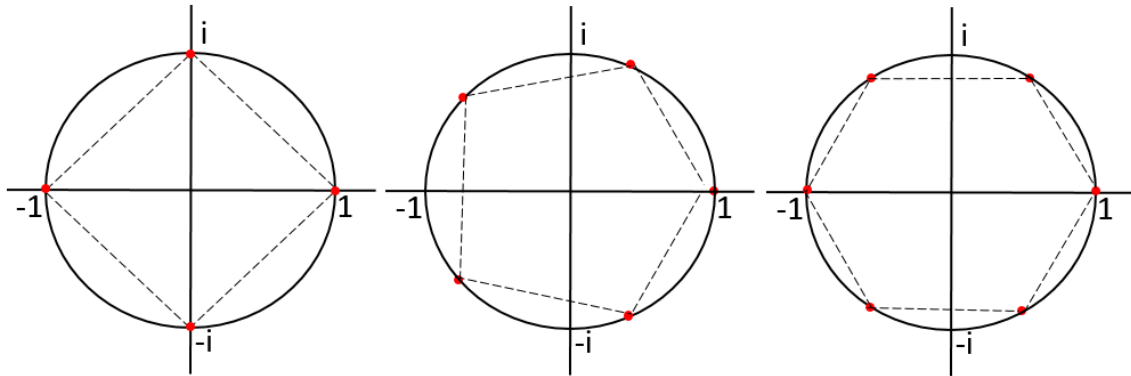


Abb. 12: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus 1.

Man sollte sich zunächst die Verhältnisse bei scheinbar einfachen Fällen anschauen.³⁵ Z.B. bei den Fällen $z^n = 1, z^n = -1, z^n = i, z^n = -i$. Da der Betrag jeweils 1 ist, liegen die Lösungen auf dem Einheitskreis.

Auch aus i kann man n -te Wurzeln ziehen.

Man erhält sie, in dem man die n -ten Einheitswurzeln um $\frac{\pi}{2n}$ dreht.

Zusammenfassend kann man konstatieren: Jede komplexe Zahl z hat eine

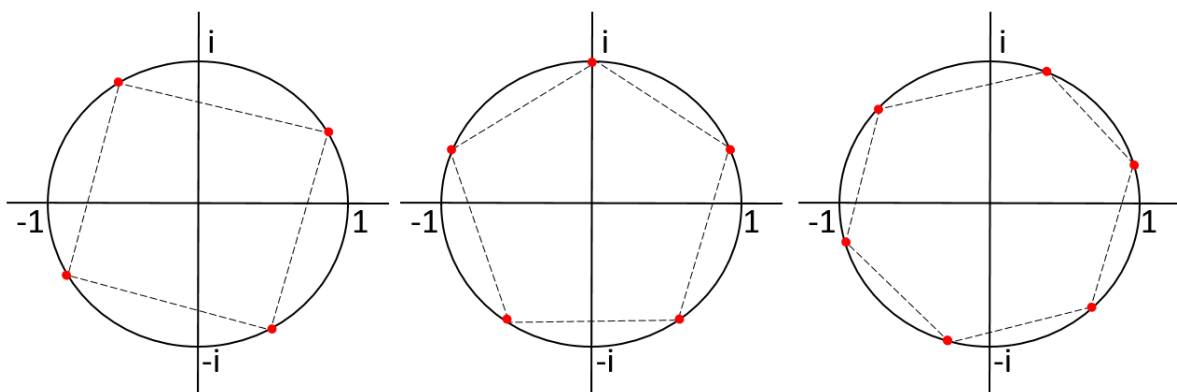


Abb. 13: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus i .

eindeutige n -te Potenz.

³⁵ Grafiken nach Rinkens, Krüger, ebenda, S. 92, 94, 95

Wurzelziehen ist dagegen mehrdeutig. Für die Lösungen der Gleichung $z^n = a$

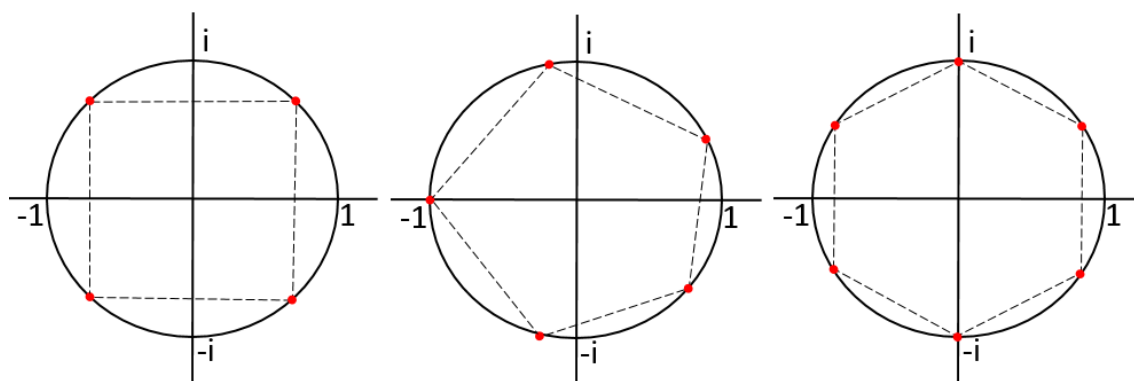


Abb. 14: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus -1.

gibt es (außer für den Fall $a=0$) n verschiedene Lösungen.

Eulersche Identität

Mit den vorigen Kapiteln steht das „Handwerkszeug“ und das Verständnis zur Verfügung, um eine der schönsten Beziehungen in der Mathematik würdigen zu können. Die Eulersche Identität lässt sich aus einer Taylor-Reihe mit Entwicklungsstelle $x_0=0$ der Funktionen e^y , $\cos(y)$ und $\sin(y)$ mit $y \in \mathbb{R}$ herleiten:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + i \cdot y + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i \cdot \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos(y) + i \cdot \sin(y), \quad \text{mit } i^2 = -1 \end{aligned}$$

Für $y = \pi$ ergibt sich die Eulersche Identität oder Eulersche Formel

$$e^{i\pi} = -1 \text{ oder } e^{i\pi} + 1 = 0$$

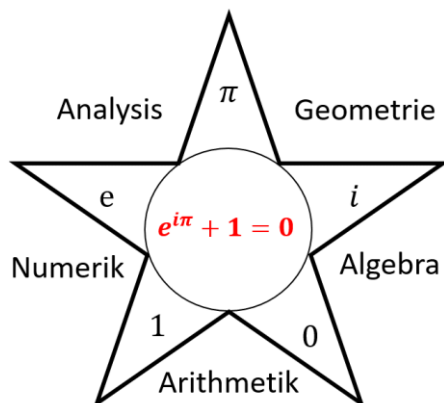


Abb. 15 Die Eulersche Identität verbindet fünf wesentliche Bereiche der Mathematik

Sie ist äquivalent zu

$$e^{2\pi i} = 1$$

Sie verbindet damit fünf der wichtigsten mathematischen Zahlen miteinander:

Die Eulersche Zahl e , als wichtige Konstante in der Mathematik und den mathematisch beschreibbaren Wissenschaften, die „Kreiszahl“ π , die weit über die Geometrie hinaus erhebliche Bedeutung hat, die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ als „Schlüssel“ zu den komplexen Zahlen, sowie die fundamental wichtigen Zahlen 1 und 0. Die

Beziehung wird gerne als „Die schönste Gleichung aller Zeiten“³⁶ bezeichnet.^{37,38}

Dieser Zusammenhang erklärt sich durch das tiefere Verständnis für imaginäre bzw. komplexe Zahlen.

Reelle Quadratwurzeln, insbesondere $\sqrt{2}$

Was ist so spannend an $\sqrt{2}$? Sie ist der Schlüssel zu einer ganzen Vielfalt an

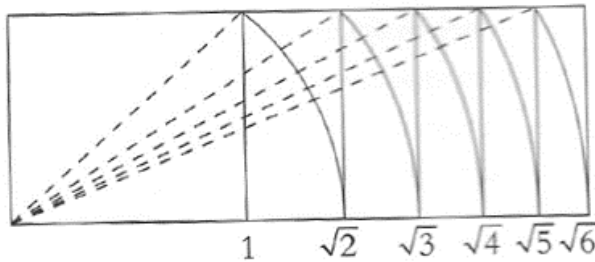


Abb. 16: Fortgesetzte Konstruktion von Wurzeln

theoretischen Erkenntnissen und praktischen Anwendungen, mit denen wir tagtäglich umgehen. Für die Griechen war nur das eine „richtige“ Zahl, was man konstruieren konnte. Zunächst ist die Frage zu beantworten, wie man Wurzeln geometrisch darstellen kann. $\sqrt{2}$ ist die Diagonale im Einheitsquadrat. Basis weiterer Wurzeln ist

weiterhin der Satz des Pythagoras. Man verlängert eine Kathete und schlägt einen Kreisbogen mit Radius $\sqrt{2}$. Das entstehende rechtwinklige Dreieck hat die Seiten 1 und $\sqrt{2}$ und wegen $1^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{3}^2$ die Hypotenuse $\sqrt{3}$. So lassen sich weitere Quadratwurzeln konstruieren.

Eine etwas übersichtlichere Darstellung ist die Spiralförmige.³⁹

Behauptung: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Annahme: Wäre $\sqrt{2}$ rational, also $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, Bruch gekürzt, $m, n \in \mathbb{N}$

Dann ist $2 = \frac{m^2}{n^2}$ also $2n^2 = m^2$

D.h. 2 teilt m^2 , also ist m^2 gerade

Daraus folgt m ist gerade, denn das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade und einer ungeraden Zahl ungerade.

Somit ist m^2 sogar durch 4 teilbar und m hat die Form $m=2k$, $k \in \mathbb{N}$

D.h. $m^2=4k^2$

$2n^2=4k^2$, also $n^2=2k^2$, d.h. n^2 ist gerade und somit n ist gerade

Insgesamt wurde gezeigt: m ist gerade und n ist gerade.

³⁶ Zitat Keith J. Devlin (2004), Devlin schreibt eine monatliche Kolumne, gesponsert von der Mathematical Association of America: <https://web.stanford.edu/~kdevlin/>.

³⁷ Hans-Dieter Rinkens, Katja Krüger, Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer-Spektrum, Wiesbaden 2020

³⁸ Grafik nach ebenda, S. IX

³⁹ Grafiken nach Alsina, Satz des Pythagoras, ebenda, S. 76

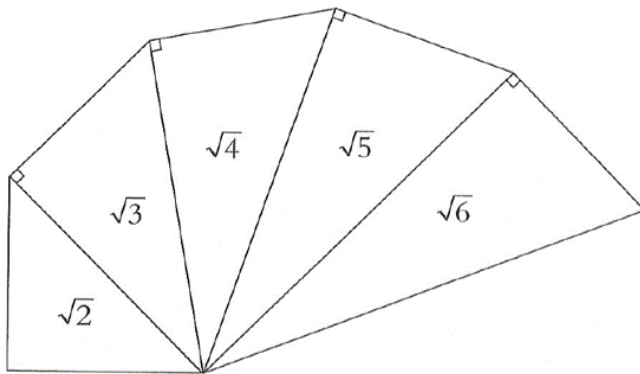


Abb. 17: Spiralförmige Darstellung

Daraus folgt ein Widerspruch, denn $\frac{m}{n}$ wurde als gekürzt angenommen.

Die Annahme ist falsch, also $\sqrt{2}$ ist irrational.

Der Beweis lässt sich auf jede Quadratwurzel von Nichtquadratzahlen k verallgemeinern: \sqrt{k} ist irrational, falls $k \neq n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Ein Kopierer mit

Vergrößerungsfunktion hat eine Taste mit der Vergrößerung 1,41. Dies sind die ersten beiden Nachkommastellen des Wertes von $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

Dies ist abgestimmt auf die DIN-A-Formate.

A_0 soll definitionsgemäß 1 Quadratmeter groß sein. Die kleinere Seite sei a_0 , die größere ist somit $a_0 \cdot \sqrt{2}$. $a_0 \cdot a_0 \cdot \sqrt{2} = 1 \text{ m}^2$.

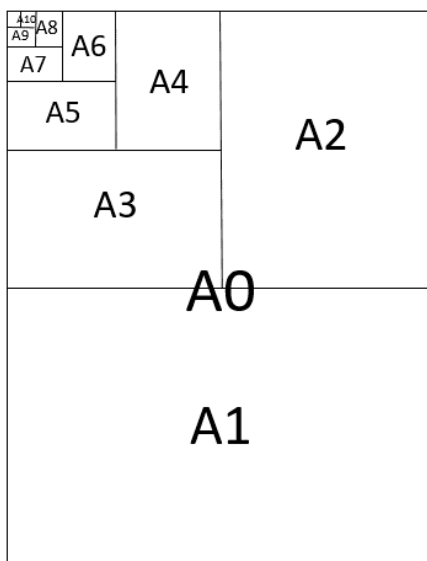


Abb. 18: DIN-A-Formate

Daraus folgt $a_0 = \text{ca. } 84 \text{ cm}$. Außerdem: Die Summe aller DIN-Formate ist etwas weniger als 2 m^2 . Dabei ist in der Abbildung die linke obere Ecke nicht besetzt, da die DIN-A-Formate nur A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 und A10 abdecken.

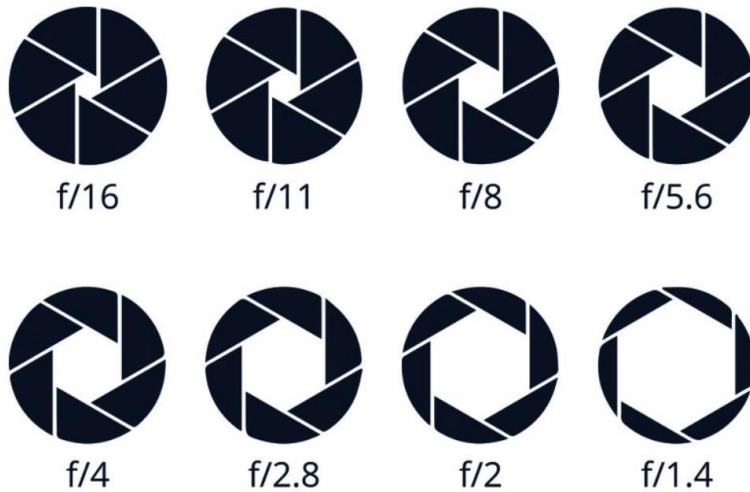
Ein Kreis mit Radius R hat eine Fläche von πR^2 . Will man die Fläche auf $2 \pi R^2$ verdoppeln, benötigt einen Radius $R_1 = \sqrt{2}R$.

Entsprechend muss man durch $\sqrt{2}$ teilen, wenn man die Fläche halbieren will. In der Fotografie bedeutet eine größere Blende eine Halbierung der Objektivöffnung.⁴⁰ Das wird durch fortgesetzte Potenzen von Wurzel 2 erreicht:

$$\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^3, (\sqrt{2})^4, (\sqrt{2})^5, (\sqrt{2})^6, (\sqrt{2})^7, (\sqrt{2})^8, \dots$$

⁴⁰ Grafik: <https://www.robertyfessling.de/tutorial-kamerablende-einstellen> (Mit freundlicher Genehmigung und technischer Unterstützung)

Berechnet man die Potenzen und rundet auf eine Dezimalstelle so ergeben sich



folg. Werte, (die der Einfachheit halber nicht reziprok angegeben werden, d.h. große Blende bedeutet kleine Öffnung des Objektivs und damit eine größere Schärfentiefe). Diese Blendenzahlen finden sich an jedem Objektiv einer Spiegelreflex-camera (single-lens reflex, SLR):

Abb. 19: $\sqrt{2}$ -reduzierte Blendenöffnungen
Mit freundlicher Genehmigung Robert Feßling

1,4 2 2,8 4 5,6 8 11 16 22 32

Platonische Körper

Platon (ca. 428-ca. 348 v.Chr.) beschrieb in seinem etwa 350 v.Chr. entstandenen Werk *Timaios* die fünf später nach ihm benannten platonischen Körper Tetraeder, Würfel oder Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Es sind 4-Flächner, 6-Flächner, 8-Flächner, 12-Flächner und 20-Flächner. Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder haben gleichseitige Dreiecke als

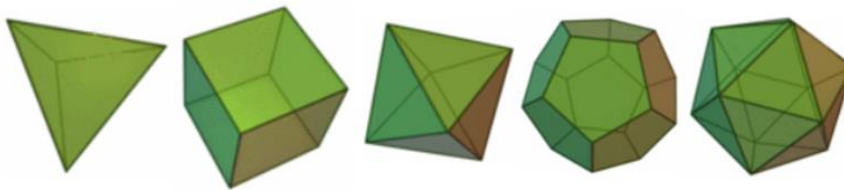


Abb. 20: Die fünf platonischen Körper.

Flächen, der Würfel Quadrate und der Dodekaeder ein regelmäßiges Fünfeck. Schon Platon gab ihnen eine allegorische

Bedeutung mit der Assoziation Tetraeder entspricht Feuer, Oktaeder für Luft, Ikosaeder für Wasser und der Würfel für die Erde. Die Himmelsphären repräsentierte der Dodekaeder. Johannes Kepler (1571-1630) versuchte die Planetenbahnen mit den platonischen Körpern zu beschreiben. Obwohl falsch, war es immerhin ein erster Versuch der wissenschaftlichen Beschreibung.

Die Griechen und Platon konnten die Körper konstruieren und zeigen, dass es nur diese Fünf geben kann, die aus regelmäßigen Flächen aufgebaut sind, die von gleichlangen Kanten gebildet werden. Die Flächen sind also regelmäßige p-Ecke, p=3, 4, 5.

Die mathematischen Eigenschaften sind ebenso regelmäßig.

p sei die Anzahl der Ecken (E) der Seitenflächen.

q sei die Anzahl der Flächen (F) / Kanten (K) des platonischen Körpers, die an einer Ecke zusammentreffen.

Der Eulersche Polyedersatz lautet

$$E - K + F = 2$$

Für die platonischen Körper gilt sogar: $q \cdot E = 2 \cdot K = p \cdot F$

Dies ergibt 3 Gleichungen mit ausschließlich ganzzahligen Koeffizienten und den Lösungen für Ecken (E), Kanten(K) und Flächen (F)

$$E = \frac{4p}{4 - (p - 2) \cdot (q - 2)}$$

$$K = \frac{2pq}{4 - (p - 2) \cdot (q - 2)}$$

$$F = \frac{4q}{4 - (p - 2) \cdot (q - 2)}$$

Ebenso werden andere Beziehungen nur durch p und q sowie trigonometrische Daten bestimmt: Z.B. Innenwinkel der Seitenflächen, Summe der Innenwinkel, Oberfläche, Umkugel- und Inkugelradius u.v.m.⁴¹

Das Pascalsche Dreieck und die binomischen Formeln

Die binomischen Gleichungen sind wichtige Beziehungen in der Arithmetik. Kein Schüler kommt durch die Basisalgebra ohne die Formeln wenigstens für die 2. Potenz auswendig und anwenden zu können. Ein besonderer Reiz liegt jedoch in der schönen symmetrischen Struktur, die sich bei den Koeffizienten bei aufsteigenden Potenzen ergeben. Dafür verwendet man im allgemeinen nicht diesen Begriff, denn Binom steht für zwei (bi) Namen (nomen).

Für die Potenz 2 hat man die gängige Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ („Plusformel“)}$$

Ist b negativ so gilt

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ („Minusformel“)}$$

Nützlich ist die 3. Binomische Formel zum Faktorisieren

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \text{ („Plus-minus-Formel“)}$$

⁴¹ Mehr in https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper

1		$(a + b)^0$									
1	1	$(a + b)^1$									
1	2	1	$(a + b)^2$								
1	3	3	1	$(a + b)^3$							
1	4	6	4	1	$(a + b)^4$						
1	5	10	10	5	1	$(a + b)^5$					
1	6	15	20	15	6	1	$(a + b)^6$				
1	7	21	35	35	21	7	1	$(a + b)^7$			
1	8	28	56	70	56	28	8	1	$(a + b)^8$		
1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	$(a + b)^9$	
1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1	

Abb. 21: Das Pascalsche Dreieck bis $n=9$

Es geht allgemein um die Beziehung $(a + b)^n$ wobei n eine natürliche Zahl plus der Null sein soll. b kann auch negativ sein. Das Pascalsche Dreieck zeigt die Koeffizienten der einzelnen Potenzen auf eine übersichtliche Weise auf. In einer Zeile tiefer ist der Koeffizient die Summe der beiden Zahlen in der Reihe über ihm.

Später wurde die Beziehung auf alle Zahlen erweitert.

Es finden sich eine große Anzahl an Zahlenfolgen und Beziehungen wieder. Die erste Diagonale (von rechts oben nach links unten oder spiegelbildlich) enthält nur Einsen entsprechend der Potenz von a^n bzw. b^n . Die zweite Diagonale bildet die Folge der natürlichen Zahlen. In der dritten Diagonale finden sich die, bei den Pythagoreern verehrten, Dreieckszahlen, wie $3=1+2$; $6=1+2+3$; $10=1+2+3+4$; usw. und in der vierten die Tetraederzahlen. In jeder Diagonale steht die Folge der Partialsummen zu der Folge, die in der Diagonale darübersteht. Umgekehrt ist jede Diagonalenfolge die Differenzenfolge zu der in der Diagonale unterhalb stehenden Folge.

Auch die Fibonacci-Zahlen ergeben sich aus Beziehungen zwischen Partialsummen.

Die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck werden durch eine Funktion der Form $\binom{n}{k}$, gesprochen n über k , ausgedrückt. Es sind die Anzahl der k -elementigen Teilmengen einer n -elementigen Menge. Für natürliche Zahlen n und k ist dies eine Aufgabe der Kombinatorik. Es kann aber auch auf komplexe n erweitert werden.

Beispiel: $\binom{49}{6}$ entspricht den Möglichkeiten einer Ziehung im deutschen Lotto 6 aus 49 (ohne Zusatzzahl).

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-(k-1)}{k} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \\ &= \prod_{j=1}^k \frac{n+1-j}{j} \end{aligned}$$

Für natürliche Zahlen inkl. der Null folgt die aus der Kombinatorik bekannte Beziehung. Wobei $k!$ im Fall Null als 1 gesetzt wird.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Der allgemeine binomische Satz lautet nach diesen Vorbemerkungen:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

Der Goldene Schnitt und die Fibonacci-Reihe

Der Goldene Schnitt ist eine Zahl, die üblicherweise mit dem griechischen Buchstaben Φ (Phi) bezeichnet wird. Sie markiert die Teilung einer Strecke in zwei Teilstrecken a und b . Die ganze Strecke $(a+b)$ verhält sich zum größeren Teilstück (a , Major) wie das größere zum kleineren Teilstück (b , Minor). $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Ihr Wert beträgt $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ oder etwa 1,618... So, also als Verhältnis von Strecken, definiert man diese Zahl Φ heute üblicherweise.

Im klassischen Griechenland dachte man allerdings bevorzugt in der Relation von Flächeninhalten. Die so definierten Brüche in der Gleichung werden einfach

ausmultipliziert. $b \cdot (a+b) = a^2$. Man erhält dadurch die vollkommen äquivalente Euklidische Definition, wonach das Quadrat über dem größeren Teilstück (a^2) die gleiche Fläche hat wie das Rechteck mit den Seitenlängen des kleineren Teilstücks und der ganzen Strecke $b \cdot (a+b)$.

Φ wurde erstmals intensiv durch Euklid untersucht bzw. von ihm der damalige Wissensstand in seinem epochalen Werk, den Elementen, dokumentiert und vor allem systematisiert. Es gibt zahlreiche Beweise für den Goldenen Schnitt.

Auch bis in die heutige Zeit werden

immer wieder neue seriöse Konstruktionen veröffentlicht.⁴²

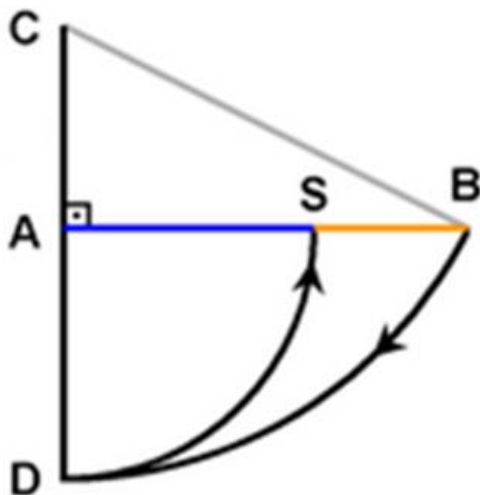


Abb. 22: Konstruktion von Φ .
Der Euklidische Beweis

⁴² Siehe z.B. Beweise des Wiener Künstlers Kurt Hofstetter: Hofstetter, Kurt, A Simple Construction of the Golden Section, Forum Geometricorum 2 (2002), Page 65-66.

Zur Abbildung 22: Sei $a = \overline{AB}$ und $\overline{AC} = \frac{a}{2}$ sowie $\overline{CD} = \overline{CB}$

Behauptung: S teilt a im Goldenen Schnitt

Beweis: $\overline{BC}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \rightarrow \overline{BC} = a \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{a}{a \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

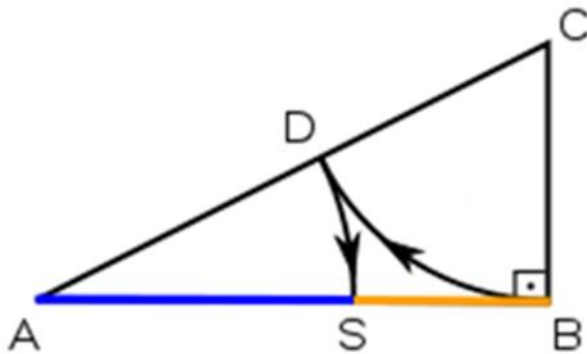


Abb. 23: Die gängigste Konstruktion für Φ

Sei $a = \overline{AB}$ und $\overline{BC} = \frac{a}{2}$, sowie

$\overline{BC} = \overline{CD}$. Beh.: Dann teilt S die Strecke a im Goldenen Schnitt.

Beweis: Wegen Pythagoras ist

$$\overline{AC} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

$$\overline{AS} = \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = \overline{AC} - \overline{BC} =$$

$$\frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{\Phi} \rightarrow$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{a}{\frac{a}{\Phi}} = \Phi$$

Dabei war neben $\sqrt{2}$ vor allem das Pentagramm die geometrische Untersuchungsform⁴³. Euklid wusste bereits seit den Erkenntnissen von Hippasos von Metapont (spätes 6. Jahrhundert bis frühes 5. Jahrhundert v. Chr.), dass sich $\sqrt{2}$ und Φ nicht als Bruch ausdrücken lässt, also irrational ist. Phi ist zwar nicht als Diagonale in einem Quadrat mit ganzzahliger Seitenlänge darstellbar, hat aber wohl eine Darstellung unter Einbeziehung von Wurzeln, ist also Lösung einer algebraischen Gleichung. Für die Kreiszahl π gilt das nicht. Solche Zahlen analog π nennt man transzendent; Φ ist algebraisch. Durch Quadrieren der Wurzeldarstellung $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ nach der 1. binomischen Formel findet man leicht, dass $\Phi^2 = \Phi + 1$. Teilt man diese Gleichung durch Φ , so erhält man $\Phi = 1 + 1/\Phi$. Diese Beziehung ist die Basis, um Φ möglichst durch Zahlen anzunähern, mit denen man besser rechnen kann, also fortgesetzte Brüche, die man irgendwann bei gewünschter Genauigkeit abbrechen kann. Diese sogenannten „Kettenbrüche“ dienen also dazu, eine irrationale Zahl so gut wie möglich mit rationalen Zahlen, also Brüchen, zu approximieren, also anzunähern.

Die Kettenbruchdarstellung hat eine bemerkenswerte Interpretation. Φ ist die Zahl, die sich am schlechtesten mit Brüchen approximieren lässt, da nur Einsen

⁴³ Das Pentagramm war Jahrhunderte lang Gegenstand mystischer Interpretationen oder hatte hohe Symbolkraft.

in der Kettenbruchentwicklung auftauchen. Φ wird deshalb gerne als „die irrationalste Zahl“ schlechthin bezeichnet.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}}}$$

In anderer Schreibweise werden Kettenbrüche wie folgt ausgedrückt:
 $\Phi = [1, 1, 1, 1, 1, \dots]$ bzw. beim Abschnitt „Fibonacci und die Sonnenblume“ wird benötigt:

f_n	f_{n+1}	f_{n+1} / f_n	Abweichung zu Φ in %
1	1	1,0000	-38
1	2	2,0000	+23
2	3	1,5000	-7,3
3	5	1,6667..	+3,0..
5	8	1,6000	-1,1..
8	13	1,6250..	+0,43..
13	21	1,6154..	-0,16..
21	34	1,6190..	+0,06..
34	55	1,617..	-0,02..
55	89	1,61818..	+0,009..
89	144	1,617977..	-0,0034..

Abb. 24: Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder nähert sich Φ .

$$\Phi^{-1} = 1 / \Phi = [0, 1, 1, 1, 1, \dots]$$

Der Goldene Schnitt hängt eng mit der Fibonacci-Folge zusammen.

Bildungsregel der Fibonacci-Folge
(Rekursionsgleichung)

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ mit } f_0=0, f_1=1, f_2=1, n \in \mathbb{N}_0$$

F=0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Es zeigt sich, dass der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder sich dem Goldenen Schnitt Φ alternierend nähert und zu Φ konvergiert.

Andererseits tauchen auch z.B. bei den Potenzen von Φ Fibonacci-Zahlen auf. Ist $a_n = \Phi^n$ eine Potenz von Φ , so gilt $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Man erkennt auf der rechten Seite der Tabelle in der ausmultiplizierten Potenz von Φ Paare aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen.

Es gibt eine Fülle von Beziehungen zwischen Fibonacci-Zahlen. Die Beweismethode ist in der Regel die Vollständige Induktion.

Interessant ist noch die Formel, um die n-te Fibonacci-Zahl ohne Kenntnis vorheriger Folgenglieder berechnen zu können.

n	$a_n = \Phi^n$	
5	≈11,090	$\Phi^5 = 5\Phi + 3$
4	≈6,854	$\Phi^4 = 3\Phi + 2$
3	≈4,236..	$\Phi^3 = 2\Phi + 1$
2	≈2,618..	$\Phi^2 = \Phi + 1$
1	≈1,618..	Φ
0	$a_0 = 1,00$	$\Phi^0 = 1$
-1	≈0,618..	$\Phi^{-1} = \Phi - 1$
-2	≈0,382..	$\Phi^{-2} = -\Phi + 2$
-3	≈0,236..	$\Phi^{-3} = 2\Phi - 3$
-4	≈0,146..	$\Phi^{-4} = -3\Phi + 5$
-5	≈0,090..	$\Phi^{-4} = 5\Phi - 8$

Abb. 25: Potenzen von Φ

Aus den Potenzen von Φ bzw. den beiden reellen Lösungen Φ und ψ der charakteristischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ lässt sich folgern:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ und } \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = \frac{1}{\Phi}$$

$$f_n = \frac{\Phi^n - \psi^n}{\Phi - \psi} \text{ also}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Zwei irrationale Zahlen Φ und ψ und ihre Potenzen spielen also so zusammen, dass durchweg ganzzahlige Werte, nämlich die Fibonacci-Zahlen entstehen.

Die Mächtigkeit des Kontinuums

Für die Anhänger des Pythagoras war es ein Schock als irrationale Zahlen entdeckt wurden, Zahlen, die nicht durch Brüche dargestellt, d.h. konstruiert werden konnten. Offenbar lagen die rationalen Zahlen nicht beliebig dicht auf dem Zahlenstrahl. In dieser Epoche verunsicherten die Paradoxa des Zenon die Philosophen und Mathematiker der damaligen antiken Welt. Jeder kennt das Paradoxon vom Wettrennen des schnellsten Läufers der Antike, Achilles, mit der Schildkröte. Alle Paradoxa haben etwas mit der unendlichen Teilbarkeit zu tun. Potentiell unendlich wurde von den Griechen akzeptiert. Man konnte z.B. immer wieder eine neue Primzahl finden ohne die Menge aller Primzahlen unendlich nennen zu müssen. Aktual unendlich war aber im höchsten Maß negativ besetzt und wurde nicht nur vermieden, sondern war regelrecht verpönt und geächtet. Nach und nach fand „Unendlich“ Eingang in die Mathematik. Beispiele sind die erfolgreiche, wenn auch anfangs skeptisch beäugte Infinitesimalrechnung von Newton und Leibniz, aber auch andere Bereiche der Mathematik, wie Folgen und Reihen. Man stellte fest, dass die rationalen Zahlen, obwohl unendlich viele, nur einen kleinen Teil auf dem Zahlenstrahl, dem Kontinuum, ausmachten. Die irrationalen und transzendenten Zahlen sind offenbar „wesentlich häufiger.“ Erst der Mathematiker Georg Cantor beschäftigte sich systematisch mit unendlichen Mengen. Er gilt heute als Schöpfer der Mengenlehre. Schon Galilei Galileo wurde stutzig, als er feststellte, dass die Menge der positiven geraden Zahlen offenbar „genauso groß“ wie die Menge der natürlichen Zahlen ist. Cantor stellte fest, dass beide

Mengen gleich mächtig sind – sie sind abzählbar unendlich. Gleiches gilt überraschend für die rationalen Zahlen und sogar für eine Klasse von irrationalen Zahlen, Lösungen von algebraischen Gleichungen (mit rationalen Koeffizienten). Cantor bezeichnete diese Mächtigkeit mit dem ersten Buchstaben des hebräischen Alphabets, \aleph_0 (gesprochen Aleph Null). Die Mächtigkeit des Kontinuums, nennen wir sie \aleph_1 , (Cantor nennt sie c) war aber keinesfalls abzählbar. Die sogenannte Potenzmenge einer endlichen Menge mit n Elementen hat die Mächtigkeit 2^n , geschrieben $|2^n|$, also 2^n Elemente. Weil die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen ebenfalls nachweislich nicht

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 ?$$

Abb. 26: Kontinuumshypothese

abzählbar ist, schlägt Cantor die Bezeichnung 2^{\aleph_0} vor. Die Mächtigkeit des Kontinuums hat also die gleiche Mächtigkeit, wie die Potenzmenge der natürlichen Zahlen, geschrieben $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$.

Die Frage ist, gibt es eine Mächtigkeit, die zwischen den natürlichen Zahlen und den reellen Zahlen liegt? Oder formal ausgedrückt:

$$\text{Ist } 2^{\aleph_0} = \aleph_1 ?$$

Mit den Standardaxiomen der Mengenlehre ist diese Frage nicht entscheidbar.

Logarithmen

Die Geschichte der Mathematik kennt viele Untersuchungen von Funktionen, deren Eigenschaften oft über Jahrhunderte und viele Generationen an Wissenschaftlern untersucht wurden. Immer stand die Funktion im Vordergrund und nach und nach wurden immer weitere Eigenschaften und Zusammenhänge erforscht.

Bei Logarithmen und ihrer Entwicklungsgeschichte verlief es genau umgekehrt. Es ging darum, komplexe Rechenoperationen zu einfacheren zu transformieren. D.h. die Multiplikation auf die Addition zurückführen oder die Potenzen auf die Multiplikation. Dabei sollte auch das Rechnen einfacher und handlicher werden, denn immer mehr Anwendungen mit Beginn der Neuzeit in Technik und Navigation erforderten Rechnungen durch Anwender und nicht durch spezialisierte Mathematiker.

Als Ausgangspunkt kann man die Funktionalgleichung

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

betrachten. Lösungen dieser Art haben schließlich zu beherrschbaren Funktionen geführt, die als Logarithmen, wie wir sie heute kennen, einen Siegeszug angetreten haben.

Pionier war John Napier (1550-1617) sowie, auch heuristisch motiviert, der Schweizer Uhrmacher und Instrumentenbauer Jost Bürgi. Gerade trigonometrische Berechnungen waren mit den Mitteln der damaligen Zeit komplex und fehleranfällig. Napier stellte zwei verwandte, in Beziehung stehende Zahlenreihen auf. Die eine musste arithmetisch zunehmen und die andere geometrisch abnehmen. Mit der später von Euler entdeckten bzw. exakt definierten Zahl e und ihren Eigenschaften konnte eine Basis gefunden werden. Bürgi hat eine Basis verwendet, die e nahekam, aber rein intuitiv gefunden wurde. Bei den von Napier „konstruierten“ Logarithmen muss man seinen Gedankengang genau analysieren. Im Prinzip ist es eine nach unten skalierte Abwandlung der Logarithmen zur Basis $\frac{1}{e}$. Die Zusammenarbeit von Napier und Henry Briggs (1561-1630) führte schließlich zur Logarithmusfunktion zur Basis 10. Sie beschrieb und verwendete Briggs in seinem Werk *Arithmetica Logarithmica*. Neben dem Vorläufer des natürlichen Logarithmus wurde somit die Umkehrfunktion von $y=10^x$ geboren.⁴⁴

Doch insgesamt war die Vorgehensweise alles andere als stringent. Napiers Logarithmenansatz wurde über die Bewegungen von Punkten definiert und es gab in dieser Phase noch keine Basis. Der Logarithmus von 10 000 000 war ursprünglich Null! Denn er war weder geometrisch noch arithmetisch von Null zu unterscheiden. Die ersten Tafeln waren ausschließlich Rechenhilfen. Dazu waren sie erfunden worden. Hinweise auf logarithmisches Verhalten bei anderen Ergebnissen musste man zuerst suchen, zumal die heutige Schreibweise noch nicht entwickelt worden war.

Irgendwann vor 1636 hatte Pierre de Fermat (1607-1665) gezeigt, dass

$$\int_0^{\alpha} x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \text{ für } n \neq -1$$

Einen weiteren Schritt in Richtung mathematische Zusammenhänge machte der Jesuitenpater Gregorius a St. Vincento (1584-1667) in seinem 1647 erschienen Werk *Opus Geometricum*. Er verwendete nicht, wie mittlerweile üblich, zur Flächenapproximation unter einer Kurve Rechtecke gleicher Grundlinie, sondern Rechtecke gleicher Fläche mit angepasster Grundlinie.⁴⁵ Sollen die Flächen arithmetisch wachsen, müssen x-Koordinaten der Grundlinien geometrisch wachsen. Das sind die richtigen Ansätze für logarithmisches Verhalten. Auch bei Newton in seinem „waste book“ tauchen Bemerkungen zum Logarithmus auf.

⁴⁴ Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B.; Bezaubernde Beweise, Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg, 2013, S. 254

⁴⁵ Julian Havil, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013, S. 23

Erst Euler sah deutlich weiter, allerdings mit einer aus heutiger Sicht haarsträubenden Terminologie. Er war bekannt durch seinen sehr exzentrischen Umgang mit mathematischer Strenge. Er bezeichnete mit ω eine „unendlich kleine Zahl“ und mit n eine „unendlich große“. l steht für Logarithmus. Da ω nach Voraussetzung unendlich klein ist, ist $l(1+\omega)=\omega$ und deshalb

$y = l(1 + \omega)^n = n\omega$. Es sei $x = (1 + \omega)^n$, dann folgt $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$ und $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$. Das heißt $lx = y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$. Das erinnert stark an das Rechnen mit transfiniten Ordinalzahlen eines Georg Cantor.

Zu jedem x muss es n komplexe Werte von $x^{\frac{1}{n}}$ geben. Da n nach Voraussetzung unendlich groß ist, müssen auch unendlich viele komplexe Werte von lx existieren. Euler nahm damit, ohne die Zusammenhänge ganz zu kennen, die Idee der Riemannschen Flächen und damit einen Kerngedanken der (komplexen) Funktionentheorie vorweg.⁴⁶

Dass solche subtilen Zusammenhänge nicht erkannt wurden, soll das Verdienst von Napier und Briggs nicht schmälern. Rechenverfahren mit Logarithmentafeln habe einige Jahrhunderte Mathematikern, Naturwissenschaftlern und vor allem Ingenieuren oder Seeleuten gute Dienste geleistet. Auch gehen die mathematischen Verdienste von Napier durchaus weiter, z.B. bei der sphärischen Trigonometrie.

Schon bald nach der Entwicklung der Logarithmen wurden praktische Instrumente nach dem logarithmischen Prinzip hergestellt. Anfangs mussten Ergebnisse mit dem Zirkel abgegriffen werden oder es kamen runde Scheiben zum Einsatz. Die ersten geraden Rechenschieber⁴⁷ mit verschiebbarer Zunge kamen Mitte des 17. Jahrhunderts auf. Impulse kamen auch von Isaac Newton. Im 19. Jahrhundert entwickelte James Watt einen Rechenschieber, genannt Soho nach seiner ersten Dampfmaschine, der fast ein Massenprodukt wurde. Zumindest hat die technische Revolution, die auch eng verknüpft ist mit Dampflokomotiven und –maschinen, die Verbreitung enorm gefördert. Der Rechenschieber wurde zu dem wichtigen Konstruktionswerkzeug der Ingenieure und Wissenschaftler und fand Eingang in die Schulen. In vielen technischen Bereichen war er alltägliches Hilfsmittel. In der Seefahrt und sogar in der Luftfahrt wurde er zur Navigation benutzt.

⁴⁶ Julian Havil, GAMMA, ebenda S. 25

⁴⁷ Bildquelle <https://de.wikipedia.org/wiki/Rechenschieber>

Erst mit den ersten Taschenrechnern verschwand nach und nach der Rechenschieber.

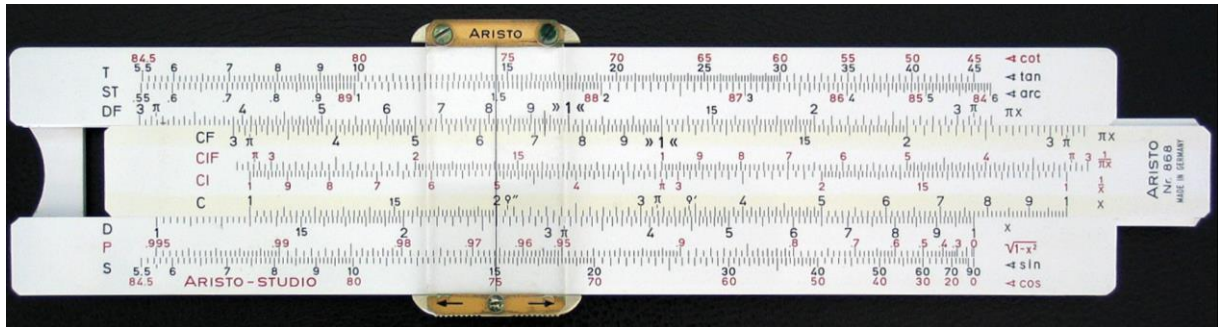


Abb. 27: Der Rechenschieber

Infinitesimalrechnung bei Newton und Leibniz⁴⁸

Johannes Kepler nannte es die göttliche „*Brücke der Kontinuität zwischen dem Gekrümmten und dem Geraden*“. Er wendete Infinitesimale relativ unbekümmert bei der Berechnung eines Weinfasses an. Er sah aber die Verwandtschaft von Ellipsen und Parabeln, in dem der eine Brennpunkt einer Ellipse ins Unendliche wandert, entsteht eine Parabel. Auch Galileo Galilei und Pierre de Fermat lösten sich von der starren Struktur der euklidischen Geometrie, brachen aber nie vollständig mit der Tradition. Für Newton war die Dynamik das Entscheidende, nicht die Geometrie. Natürlich musste er sich den Gepflogenheiten der damaligen Zeit beugen und hat alle Beweise in der „*Principia*“ geometrisch geführt. Er hat dabei die Hinweise auf seine Fluxionsrechnung bis zur Unkenntlichkeit entfernt. Das dürfte auch der Grund gewesen sein, wieso er seine „Fluxionsrechnung“ so spät veröffentlichte. Dynamik bedeutete für Newton, dass er nicht die Kurve im Mittelpunkt sah, sondern den Punkt, der sich auf der Kurve mit entsprechender Geschwindigkeit bewegte. Dies ändert nichts an der Tatsache, dass sowohl Newton als auch Leibniz erkannt hatten, dass Steigungen berechnen und Flächeninhalte unter Kurven zu bestimmen, inverse Methoden darstellen.

In drei Publikationen hat Newton unterschiedliche Wege zur Infinitesimalrechnung veröffentlicht:

- die Momentenmethode
- die Fluxionsmethode und
- die Methode der ersten und letzten Verhältnisse

⁴⁸ Der Abschnitt stammt zum Teil von einem Kapitel des Aufsatzes Kafitz, Willi, UNENDLICH - Versuch das Unbegreifliche zu begreifen: eine mathematisch-historische Reise, <https://jlupub.ub.uni-giessen.de//handle/jlupub/220>, Erstveröffentlichung 2021-08-24

Meist wird aber, vor allem in der populärwissenschaftlichen Sekundärliteratur, nur von der Fluxionsrechnung gesprochen. Zentraler Punkt ist die „Momentangeschwindigkeit“. Sie muss als Quotient zweier infinitesimaler Größen gesehen werden, nämlich der Entfernung und der Zeit. Dies ist bei Betrachtungen zum freien Fall noch einfach. Newtons großartige Leistung ist die Tatsache, dass er das Prinzip auf elliptische Planetenbahnen mit der Sonne in einem Brennpunkt angewendet hat und daraus die Keplerschen Gesetze ableiten konnte. Sie beruhen auf wohl-definierten, bestätigten, astronomischen Beobachtungen, insbesondere von Tycho Brahe. Newton hat damit irdische Physik und Himmelsmechanik in einer Theorie zusammenführen können.

Bei „Momenten“ geht es um unmittelbare, festgelegte Veränderungen eines Parameters in der Bewegung von Körpern, die sich in einer Funktionskurve widerspiegeln, also Erhöhung (englisch increment) oder Verminderung (englisch decrement). Sie entsprechen dem Differential von Leibniz.

Zeitabhängige Variable x, y, \dots nennt Newton „Fluente“ und bestimmt daraus „Fluxionen“, \dot{x}, \dot{y} , die Geschwindigkeiten entsprechen.

Bei der Methode der ersten und letzten Verhältnisse stimmt der Begriff der „letzten Verhältnisse“ mit der Definition von Leibniz für den Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten überein.

Damit hatte Newton Basisbegriffe der Infinitesimalrechnung entwickelt. Sie ermöglichten die mathematischen Beziehungen zwischen Fluxionen und Fluente zu konstruieren und damit Differentiation umzukehren bzw. eine Differentialgleichung zu integrieren. So ließen sich Maxima und Minima von Kurven oder deren Krümmung errechnen. Das war das mathematische Rüstzeug, um Gravitation und dann weitergehend die Himmelsmechanik mit seiner 1687 veröffentlichten „*Principia*“ (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) zu revolutionieren.

Leibniz kommt der modernen Auffassung näher, bleibt aber theoretisch. Sein zentrales Motiv ist seine Monadentheorie. Monade steht wie bei den Vorsokratikern für kleinste Einheiten sowohl im stofflichen als auch nicht-stofflichen Bereich. Schon vor Leibniz sind aber mathematische Überlegungen in die Theorie eingeflossen, die er besonders stark ausgebaut hat. Monade steht bei Leibniz auch für das unendlich Kleine. Für Leibniz ist die Mathematik des unendlich Kleinen eine wesentliche Ergänzung und Erweiterung seiner Philosophie. Für Newton ist die Mathematik unverzichtbar für die Analyse von Kräften und ihren Einfluss auf Bewegung. Er geht pragmatisch vor und hat damit große Erfolge in der Physik. Der Prioritätenstreit zwischen Newton und Leibniz um die Entwicklung der Infinitesimalrechnung wird heute unentschieden gewertet. Aber beide hatten vollkommen unterschiedliche Motivationen.

Das im Prinzip erste Manuskript von Leibniz stammt aus dem Jahr 1676 oder etwas früher. Er wollte es eigentlich in Paris veröffentlichen, musste aber

abreisen und deponierte es bei einem Freund. Dieser verstarb jedoch; das Manuskript wurde zwar an Leibniz nach Hannover geschickt, ist aber unterwegs verloren gegangen. Leibniz hatte aber eine komprimierte Kopie, die er aber nicht ausarbeitete. Diese handschriftliche Kopie wurde erst 1973 editiert und damit fast 300 Jahre später veröffentlicht! Sie war aber dadurch hilfreich, um den Erkenntnisprozess heute nachvollziehen zu können. Leibniz hatte nämlich inzwischen neue Ergebnisse, darunter besonders die neue Notation. Er hielt es nicht für nötig, seine persönlichen Notizen wieder zu reaktivieren und schrieb die Abhandlung neu. Die Grundzüge der Differentialrechnung entwickelte dann Leibniz in seiner 1684 in den Acta Eruditorum erschienenen Arbeit „*Nova methodus pro maximis et minimis*“. Die Integralrechnung entwickelte er in „*geometria recondita et analysis indivisibilium atque infinitorum*“ (1686). In dieser Veröffentlichung verwendete Leibniz erstmals das Integralzeichen als stilisiertes „S“, wie Summe.

Die von Leibniz gewählte Zeichensetzung für das Differential und für das (unbestimmte) Integral erwiesen sich als sehr praktisch. Er verwendete als Bezeichnung für sehr kleine Unterschiede ein "d" (für lat. differentia = Unterschied). Dies ist bis heute erhalten geblieben. Man konnte damit ein „Kalkül“ entwickeln, in dem man aus formalen, regelbasierten Aussagen wieder logische Schlüsse ziehen konnte, ohne diesen Prozess verbalisieren zu müssen. Deshalb hat sich die Schreibweise und die damit verbundene Denkweise in Kontinentaleuropa durchgesetzt und die heutige Infinitesimalrechnung fußt im Wesentlichen auf der Methode bzw. der Terminologie von Leibniz. Dies gilt auch bedingt für die Integration. Das stilisierte „S“ soll daran erinnern, dass die Fläche unter einer Kurve zunächst durch endlich viele Rechtecke angenähert wurde. Durch Grenzwertbildung hin zu unendlich vielen, immer schmalere Rechtecken wird der Fehler immer kleiner. Auf Leibniz geht die Bezeichnung "integrieren" (lat.: integrare = wiederherstellen) zurück. Er wählte diese Bezeichnung, weil von einer Kurve, von der die Tangentensteigung durch Differenzieren ermittelt wurde, mit der Integration die ursprüngliche Kurve wiedererhalten werden kann.

Dies nennt man heute den „Hauptsatz der Analysis“. Leibniz grenzt sich jedoch z.B. von Galileis „*non quanta*“ stark ab. Für ihn war dx wirklich eine unendlich kleine Größe, nämlich kleiner als alles Messbare. Er hat aber die Fallstricke des Unendlichen gesehen, wollte aber bei den Indivisiblen etwas Berechenbares erhalten, das man in Gleichungen behandeln kann. Seine Notation lässt dies zu und hat sich bewährt. Trotzdem musste man von der verwendeten Sprache wegkommen.

Newton hat physikalisch argumentiert. Mit Fluidität und Bewegung musste er nicht von immer kleineren Teilen sprechen. Ein Punkt bewegte sich auf der Kurve; Bewegung und Veränderung der Richtung waren interessant für die

Betrachtung der Kräfte, scheinbare Division durch Null kam somit bei ihm nicht vor. Man kann sagen, dass sowohl Newton als auch Leibniz zeitlebens große Bedenken gegen die Methode hatten. Newton erwähnte sie gegen Ende seines Lebens nicht mehr; Leibniz blieb seinem Wahlspruch treu: „*natura non facit salta*“ (Die Natur macht keine Sprünge). Unendliche Größen seien „*fictiones bene fondatae*“ (gut begründete Fiktionen).

Beide bewiesen bewundernswerte geniale Intuition, aber beiden Methoden fehlt ein solides theoretisches, mathematisches Fundament. Leibniz und seine Anhänger konnten Größen unendlich nahe bei null, (aber eben nicht gleich null), nicht fundiert erklären. Newton und seine Bewunderer behaupteten, unendlich kleine Größen würden nicht verwendet. „Fluxionen“ seien ja nur die Rate der Änderungen von zeitabhängigen Variablen. Hier wurden aber nur winzigste Strecken gegen winzigste zeitliche Momente ausgetauscht. Der mathematische Grundkonflikt bleibt in beiden Fällen und wurde erst durch Cauchy und schließlich durch Weierstraß aufgelöst. Sie erarbeiteten eine Methode, die die Grenzwertbildung klar herausarbeitet und sie von diffusen Begrifflichkeiten befreit hat.

Dies soll die Leistung der beiden Forscher nicht schmälern, sondern lediglich relativieren. Die Infinitesimalrechnung markiert im Prinzip den Beginn der höheren Mathematik und ist über die reine Mathematik hinaus die Basis für zahlreiche Anwendungen in unterschiedlichsten Disziplinen geworden.

Fundamentalsatz der Algebra

Die geschichtliche Anerkennung der komplexen Zahlen ist vor allem dem Fundamentalsatz der Algebra zu verdanken. Nur, indem man der einfachen (quadratischen) Gleichung $x^2+1=0$ eine konsistente Lösung zuweisen konnte, hat man dem Siegeszug der höheren Polynome und weiteren komplexen Funktionen den Weg bereitet. Der Satz besagt, dass jedes Polynom in $z \in \mathbb{C}$

$$g(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

dessen Grad $n \geq 1$ ist, mindestens eine Nullstelle hat. Wenn also $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ beliebige komplexe Zahlen sind, wobei a_n ungleich Null ist, so gibt es mindestens eine komplexe Zahl ζ , für die gilt

$$g(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots + a_n\zeta^n = 0$$

Beweisidee:

$|g(z)|$ hat an jeder Stelle z einen wohlbestimmten, nicht-negativen reellen Wert. Setzt man $z=x+i \cdot y$, so kann man $|g(z)|$ als reelle Funktion $F(x, y)$ der beiden Veränderlichen x, y auffassen, deren Definitionsbereich sich über die ganze xy -Ebene erstreckt. Sie ist überall stetig, denn wird $g(z) = u+i \cdot v$ gesetzt, so sind

$$u = u(x, y) \quad \text{und} \quad v = v(x, y)$$

zwei reelle Polynome in x und y in der ganzen Ebene stetig.

Das gleiche gilt für

$$|g(z)| = F(x, y) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Die reelle Funktion $|g(z)|$ wird nie negativ und hat eine wohlbestimmte untere Grenze $\gamma \geq 0$.

1) γ wird an mind. einer Stelle im Endlichen $\zeta = \xi + i \cdot \eta$ wirklich angenommen und

2) $\gamma = 0$ und somit (ohne Absolutzeichen)

$$g(\zeta) = 0$$

Man zeigt bei 2), dass bei einem Punkt z_0 mit $g(z_0) \neq 0$ also $|g(z_0)| > 0$ es in jeder Umgebung von z_0 Stellen z gibt, so dass

$$|g(z)| < |g(z_0)|$$

$\gamma = |g(\zeta)| > 0$ ist nicht möglich, da es Stellen gäbe, in denen

$$|g(z)| < |g(\zeta)| = \gamma$$

Das kann nicht sein, da γ die untere Schranke aller $|g(z)|$ ist.

Berühmte Vermutungen

Einige wenige Beispiele sind heute keine Vermutungen mehr, sondern wurden bewiesen.

Kann man jede beliebige Landkarte mit maximal vier Farben einfärben, ohne dass zwei Länder mit gleicher Farbe eine gemeinsame Grenze haben?

Ja, vier Farben reichen aus. Eigentlich sollte dieser Beweis Erleichterung unter den Mathematikern hervorrufen. Aber schon früh war klar, dass man so viele Fälle berücksichtigen muss, bei denen nur ein Computer helfen kann. Erste „Beweise“ mussten abgebrochen werden, weil die Anzahl der Fälle zu hoch und die Rechenzeit zu groß wurde. 1996 konnten Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour und Robin Thomas dann die Fälle auf 633 reduzieren und mit einem Computer prüfen lassen. Das war für viele Mathematiker ein Tabubruch. Doch 2005 haben Georges Gonthier und Benjamin Werner einen formalen Beweis des Satzes konstruiert und sich dabei dem Beweisassistenten Coq bedient. Also auch hier musste eine Maschine helfen.

Eine Sternstunde war dagegen der Beweis des Fermatschen Satzes. Es war die Glanzleistung vor allem eines Mannes, von Andrew Wiles (siehe Kapitel Satz des Pythagoras).

Ist die Stapelung von Orangen auf orientalischen Märkten optimal? Die von Johannes Kepler geäußerte Vermutung besagt, dass die dichteste

Kugelpackung im dreidimensionalen euklidischen Raum die kubisch-flächenzentrierte Packung und die hexagonale Packung ist. Beide Packungen nutzen den Raum gleich gut aus. Sie haben die gleiche mittlere Dichte von knapp Dreiviertel (etwas mehr als 74 Prozent).

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0,740480 \dots$$

Der erste nennenswerte Versuch wurde 1998 von Thomas Hales bekannt gegeben. Der Computerbeweis war schwer durchschaubar und nicht alle Mathematiker waren überzeugt. Erst durch den 2017 veröffentlichten formalen Beweis von Hales und Mitarbeitern gilt die Keplersche Vermutung als bewiesen.

Zweifellos gibt es unendlich viele Primzahlen. Das hat bereits Euklid bewiesen. Doch gibt es auch unendlich viele Primzahlzwillinge? Man vermutet ja; man kann sogar in diesem Fall beweisen, dass mit Ausnahme des Paares 3 und 5 die dazwischenliegende Zahl durch 6 teilbar ist. Aber die Vermutung, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, ist eine der großen offenen Fragen der Zahlentheorie.

Ist jede gerade Zahl größer 2 die Summe von zwei Primzahlen (wobei die 1 ausnahmsweise zu den Primzahlen gezählt werden darf)? Christian Goldbach äußerte diese Vermutung in einem Brief an Euler vom 7. Juni 1742. Die Goldbachsche Vermutung fasziniert vor allem deshalb, weil sie jeder formulieren kann, aber am Beweis sind zahlreiche Hobbymathematiker und Profis bisher gescheitert.

Sperriger ist die Poincaré-Vermutung aus dem Gebiet der Topologie, Sie besagt, dass ein geometrisches Objekt, solange es kein Loch hat, zu einer Kugel deformiert werden kann. Und das gelte nicht nur im Fall einer zweidimensionalen Oberfläche im dreidimensionalen Raum, sondern auch für eine höherdimensionale Oberfläche in einem Raum, der eine Dimension mehr besitzt. Formal ausgedrückt: Eine kompakte, unberandete, n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist genau dann (n-1)-zusammenhängend, wenn sie homöomorph zur n-Sphäre ist.

Auch der Beweis der Poincaré-Vermutung erzeugte einen Skandal in der Mathematik-Welt. Grigori Perelman, ein junger russischer Mathematiker, der noch bei seiner Mutter lebt, veröffentlichte den Beweis nicht in einem Fachblatt, sondern auf dem Preprint Server arXiv. Nach reiflicher Prüfung wurde ihm die renommierte Fields-Medaille zugesprochen, aber er lehnte sie wie andere Ehrungen zuvor (z.B. EMS-Preis der Europäischen Mathematischen Gesellschaft) ab. Die Poincaré-Vermutung gehörte zu den Millennium-Problemen, für deren Lösung das Clay-Institut eine Million Dollar ausgelobt hat. Auch dieses Preisgeld lehnte Perelman ab, obwohl er kein festes Einkommen hat, weil er seine Stelle am Steklow-Institut in Sankt Petersburg gekündigt hat.

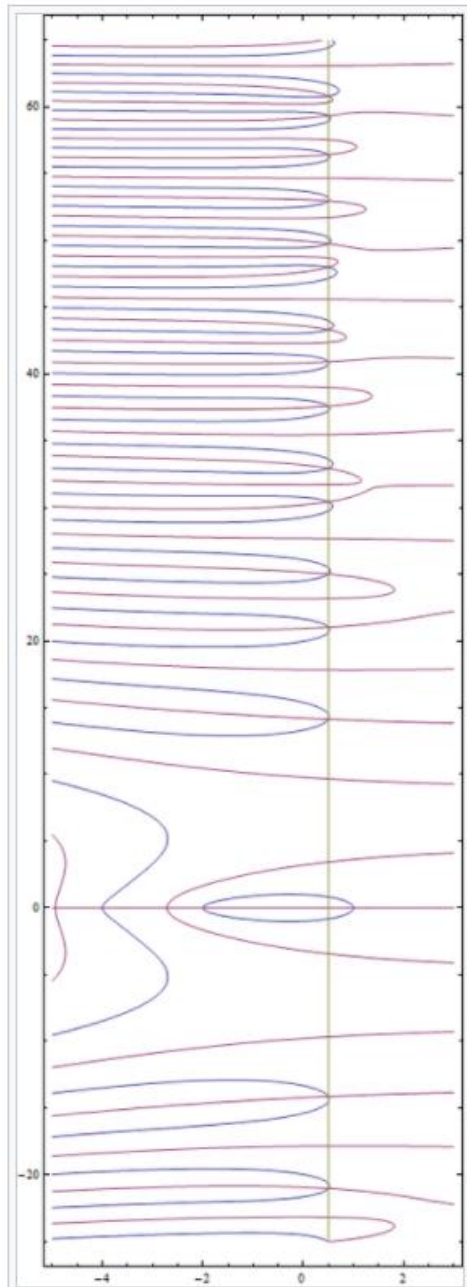


Abb. 28: Verhalten der ζ -Funktion

Die berühmteste Vermutung ist zweifellos die Riemannsche Vermutung. Auch sie ist ohne gewisse mathematische Kenntnisse nicht verständlich und schwer medial zu verdeutlichen. Die Faszination, die von dieser Vermutung ausgeht, ist die wohlbegründete Erwartung, dass der Beweis etwas mehr über die Natur der Primzahlen offenbaren sollte. Dass die Aussage der Vermutung zutreffend sein sollte, gilt mittlerweile als ziemlich sicher. Auch hier hat man mit massiver Rechenleistung kein Gegenbeispiel gefunden.

Die Vermutung bezieht sich auf die Nullstellen der komplexwertigen Zeta-Funktion, die Leonhard Euler erstmals im Rahmen des Basler Problems untersuchte.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

Sie ist für $s=1$ nicht definiert. Dort hat sie eine Polstelle, da die harmonische Reihe nicht konvergiert.

Für den Realteil von s größer 1 wird sie mittels einer Dirichletreihe definiert, kann analytisch fortgesetzt werden und wird holomorph in ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, (früher sagte man regulär, also überall im

Definitionsbereich differenzierbar).

Man betrachte nun eine beliebige Zahl $p > 1$ und die Entwicklung in eine geometrische Reihe

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \dots$$

p soll der Reihe nach die Primzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$ durchlaufen. Diese unendlich vielen Gleichungen multipliziert man miteinander. Dann ist zu berücksichtigen, dass sich jede Zahl > 1 eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen lässt. Man erhält:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-p_1^{-s}} \cdot \frac{1}{1-p_2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-p_3^{-s}} \cdot \dots$$

Da es unendlich viele Primzahlen gibt, ist dies tatsächlich eine Zerlegung der Zeta-Funktion im Punkt s in ein unendliches Produkt, das die Primzahlen durchläuft.

Hierin liegt die Bedeutung der Zeta-Funktion für die Zahlentheorie. Von Interesse sind vor allem die Nullstellen. Die sogenannten trivialen Nullstellen liegen bei $-2, -4, -6, -8, \dots$. Interessant sind die nicht-trivialen Nullstellen. Riemann hat vermutet, dass alle nicht-trivialen Nullstellen den

Realteil $\left(\frac{1}{2}\right)$ haben.

Die Grafik 28⁴⁹ zeigt die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ in Form von Konturlinien für den Realteil($\zeta(s)$)=0 in der Farbe Blau und den Imaginärteil($\zeta(s)$)=0 in der Farbe Flieder. Der Wertebereich für s zeigt den Realteil von $-5 < \text{Re}(s) < 3$ und den Imaginärteil von $-25 < \text{Im}(s) < 65$.

Interessant ist die "kritische Gerade" bei $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ in der Farbe Braun.

Die Schnittpunkte der blauen und fliederfarbenen Konturlinien im "kritischen Streifen" $0 < \text{Re}(s) < 1$ sind nicht-triviale Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion.

Die Imaginärteile der Nullstellen sind für die bisher berechneten Werte aufsteigend und alle spiegelsymmetrisch zur reellen Achse.

Gruppentheorie

Wohl kaum eine mathematische Disziplin hat dermaßen viele Implikationen in Mathematik, Physik und auch der Chemie erzeugt, als die noch nicht sehr alte Gruppentheorie. Es geht um Symmetrien, aber der Begriff ist deutlich anders zu verstehen, als das, was Jahrtausende in Architektur und Kunst mit Symmetrie verbunden wurde.

An einem Beispiel sollen Grundprinzipien der Gruppentheorie aufgezeigt werden.⁵⁰ Die folgende Abbildung zeigt Drehungen und Spiegelungen eines Quadrates, die wieder deckungsgleich zur ursprünglichen Orientierung führen. Als *Symmetrieelemente* hat ein Quadrat vier Spiegelebenen und eine sogenannte vierzählige Drehachse C_4 als Schnittlinie der vier Spiegelebenen.

⁴⁹ Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_nicht-trivialer_Nullstellen_der_Riemannschen_Zetafunktion

⁵⁰ Erstveröffentlichung, Willi Kafitz, Symmetrie, Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 67, Gießen 2017, S. 28 ff, online <http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2017/13150/>

Die theoretisch denkbare Spiegelebene in der „Papierebene“ wird in der Geometrie, im Gegensatz auch zu planaren räumlichen Strukturen, nicht genannt. Die Operationen, die wieder zur vollständigen Deckung führen, stellen die *Symmetrieeoperationen* dar. In diesem Fall sind es die möglichen Dreh- und Spiegelungen des Quadrates, wobei die Orientierung gleichbleibt und nur die Ecken vertauscht werden. Um diese „Transformationen“ zu verdeutlichen, wurde nur zur Illustration ein „F“ eingebettet; die Ecken des Ausgangsquadrates wurden von A bis D gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv) durchgezählt. Die indizierten d- bzw. σ -Symbole bezeichnen die zu erläuternden Symmetrieeoperationen. i wie Identität entspricht einer Drehung um 0 oder 360 Grad oder einfach der Tatsache, nichts an der ursprünglichen Lage des Quadrats verändert zu haben. d_1 dreht um 90 Grad nach links, d_2 um 180 Grad. Das entspricht zweimaliger Anwendung von d_1 . Analog d_3 mit dreifacher Anwendung von d_1 . Man sieht unschwer, dass viermalige Anwendung wieder zu i führt ($d_1^4 = i$, 4 nennt man Ordnung von d_1 , die Ordnung der sog. Gruppe ist 8, also Anzahl der Elemente). Die Spiegelungen an den vier Spiegelebenen werden mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und σ_4 bezeichnet. Das Zeichen \circ bezeichnet die Verknüpfung der Symmetrieeoperationen.

Man beachte, dass die d_i und σ_i Symmetrieeoperationen, also kongruente Abbildungsvorschriften, sind. Man sollte im Zweifelsfall auf die Eckenvertauschungen schauen, die eine Symmetrieeoperation definieren („Permutation“). So vertauscht σ_2 die Ecke rechts oben mit rechts unten sowie

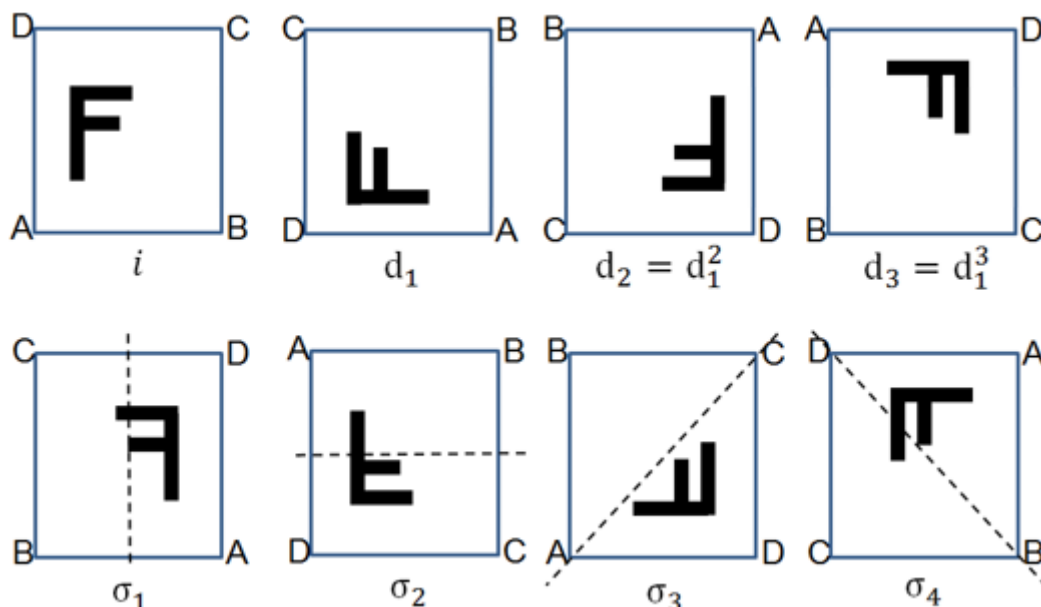


Abb. 29: Symmetrieeoperationen bei einem Quadrat.

links oben mit links unten. Nur auf die Ausgangslage angewendet, ist es auch eine Spiegelung des eingebetteten „F“ an der waagrecht verlaufenden Symmetrieebene. Sonst ist es eine Rechenvorschrift bzw.

Handlungsanweisung, wie die Verknüpfung eines beliebigen Elementes x mit σ_2 (also $x \circ \sigma_2$) zu erfolgen hat. Es wird sich zeigen, dass dabei die Reihenfolge wichtig sein kann. In Permutationsdarstellung lauten die Verknüpfungsanweisungen sehr umständlich, aber korrekt formuliert, wie folgt:

Bilde das vorliegende Quadrat in einer der acht Orientierungen gemäß der Eckenvertauschung ab, wie sie den Handlungsanweisungen bzgl. der ursprünglichen Grundstellung zur neuen, deckungsgleichen Konstellation entspricht.

- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{A, B, C, D\}$ entspricht i (Identität) mit Drehung um 0°
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{D, A, B, C\}$ entspricht d_1 mit Drehung um 90° nach links
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{C, D, A, B\}$ entspricht d_2 mit Drehung um 180° nach links
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{B, C, D, A\}$ entspricht d_3 mit Drehung um 270° nach links
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{B, A, D, C\}$ entspricht σ_1 (Spiegelebene senkrecht)
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{D, C, B, A\}$ entspricht σ_2 (Spiegelebene waagrecht)
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{A, D, C, B\}$ entspricht σ_3 (Ebene links unten nach rechts oben)
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{C, B, A, D\}$ entspricht σ_4 (Ebene rechts unten nach links oben)

Was sich hier bei diesem überschaubaren Beispiel noch als relativ einfach darstellt, ist Teil der mächtigsten Theorie der Mathematik. Die Gruppentheorie wurde ursprünglich entwickelt, um systematisch algebraische Gleichungen lösen zu können⁵¹. Erst später wurden über die Untersuchung von geometrischen Strukturen die Eigenschaften deutlich, die Symmetriebeziehungen betreffen. Das Beispiel D_4 ist ein Vertreter endlicher Gruppen, an dem sich auch die Definition endlicher *einfacher* Gruppen erläutern lässt. Ihre Untersuchungen erstrecken sich auf geschätzte 10.000 - 15.000 Druckseiten⁵². Ca. 180 Jahre wurde an der Gruppentheorie gearbeitet; ca. 60 Jahre an endlichen einfachen Gruppen. Hunderte von Artikeln sind dazu entstanden. Sie gipfeln letztendlich in einem mathematischen Satz („Riesentheorem“, „enormous theorem“), der einfach zu formulieren, aber schwer zu beweisen war und noch schwerer zu überblicken ist⁵³. Alle mathematischen Beschreibungen

⁵¹ Hinweis: Insbesondere wurden dazu zunächst in der Linearen Algebra die Matrizenrechnung und bei quadratischen Matrizen der Begriff der Determinante eingeführt, die ihnen einen skalaren Wert zuordnet. Mittels Determinanten wurden schon früh lineare Gleichungssysteme untersucht. Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Determinante ungleich Null ist.

⁵² Für diese und folgende allgemeine Aussagen bzw. teils wörtliche Zitate siehe Spektrum der Wissenschaft, März 2016, S. 48 ff.

⁵³ Vier emeritierte Professoren, Stephen D. Smith, Michael Aschbacher, Richard Lyons, Ronald Solomon, haben 2011 ein Buch veröffentlicht, das auf 350 Seiten in groben Zügen den Beweis skizziert. Sie gelten als die wenigen Menschen, die noch die Thematik ganz überblicken.

von Symmetrie in endlichen Mengen lassen sich danach in vier Klassen oder Großfamilien einordnen:

- 1) Ein Vertreter der **zyklischen Gruppen** sind z.B. die Drehungen beim Quadrat, deren Elemente sich alle aus d_1 erzeugen lassen. Analog werden im Prinzip alle zyklischen Gruppen definiert, indem es in ihnen genau ein erzeugendes Element geben muss.
- 2) Die **alternierenden Gruppen** haben mit Permutationen zu tun, also unterschiedliche Anordnungen einer Folge von Elementen. Alle Permutationen bilden eine Gruppe, aber in der Regel keine einfache. Man kann Permutationen auf das Vertauschen von jeweils zwei Elementen zurückführen (Transpositionen). Konzentriert man sich nur auf eine gerade Anzahl von Transpositionen, so erhält man alternierende Gruppen.⁵⁴
- 3) Die reichhaltigste Großfamilie bilden die **Gruppen vom Lie-Typ**. Es gehören z.B. feste Drehungen um den Nullpunkt im dreidimensionalen Raum mit nur endlich möglichen Koordinatenpositionen dazu. Das „Riesentheorem“ bezieht sich nur auf endliche (einfache) Gruppen. Lie-Gruppen müssen nicht nur eine endliche Anzahl an Elementen haben und sind erst recht nicht auf einen dreidimensionalen Raum beschränkt. Lie-Gruppen sind in der theoretischen Physik das bevorzugte Werkzeug, um Symmetrien in der Physik mathematisch zu beschreiben. Die mathematische Struktur einer Gruppe vom Lie-Typ hat somit erhebliche Bedeutung in der Physik. Sie wird insbesondere auch bei der Teilchenphysik diskutiert, bei der sie eine zentrale Bedeutung bei der Weiterentwicklung des Standardmodells der Elementarteilchen besitzen könnte.⁵⁵
- 4) Die vierte Großfamilie ist ein Sammelsurium von 26 schwer fassbaren Gruppen – die **sporadischen Gruppen**. Dazu gehört das sogenannte „Monster“ mit mehr als 10^{53} Elementen, die man als Kongruenz-

⁵⁴ Beispiel: Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$ sind $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$. Die ersten drei Permutationen vertauschen jeweils zwei Zahlen, sind also geradzahlig. Die letzten drei vertauschen die Plätze aller drei Zahlen. Somit bilden $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$ eine alternierende Gruppe.

⁵⁵ Die Gruppen vom Lie-Typ sind keine Liegruppen. Aber der Chevalleysche Basissatz sagt, dass man jede halbeinfache komplexe Liealgebra bezüglich einer Basis konstruieren kann, die ganzzahlige Strukturkonstanten zulässt. Damit kann man diese Liealgebra auch über \mathbb{Z} und somit (per Tensorprodukt) über jedem endlichen Körper entwickeln und dann deren Automorphismengruppe studieren. Damit ist man bei den Gruppen vom Lie-Typ. Man muss nun noch die Kommutatorgruppe bilden und „das Zentrum heraus faktorisieren“. Damit hat man eine einfache endliche Gruppe vom Lie-Typ gebildet. (Privatmitteilung, mit Dank für den Hinweis und das fast wörtlich wiedergegebene Zitat an Prof. Ralf Köhl, Uni Gießen, jetzt Uni Kiel).

abbildungen in einem 196883-dimensionalen Raum auffassen kann. Es ist noch kein gesicherter Anwendungsfall dafür bekannt, aber es ranken sich mathematisch begründete Spekulationen um diese Gruppe, die Zusammenhänge mit dem Universum vermuten. Sie sind als Monstrous Moonshine bekannt.⁵⁶ Auf jeden Fall gibt es einen gesicherten unerwarteten Zusammenhang zwischen der Monstergruppe und bestimmten modularen Funktionen, die in Kernbereiche von Mathematik und Physik reichen. Modulare Funktionen messen Rechts-Links-Asymmetrie von Gruppen.

Physik

Vermessung des Erdumfangs durch Eratosthenes

Die Abbildung⁵⁷ zeigt eine flache Erde, wie sie im Prinzip in allen Kulturkreisen der vorantiken Welt gesehen wurde. Es hält sich hartnäckig die Meinung, dass diese Auffassung bis ins „dunkle“ Mittelalter bestanden hat. Das kann man zumindest für die Gelehrtenkreise in der damaligen Welt, historisch belegt durch zahlreiche Quellen, in Frage stellen.

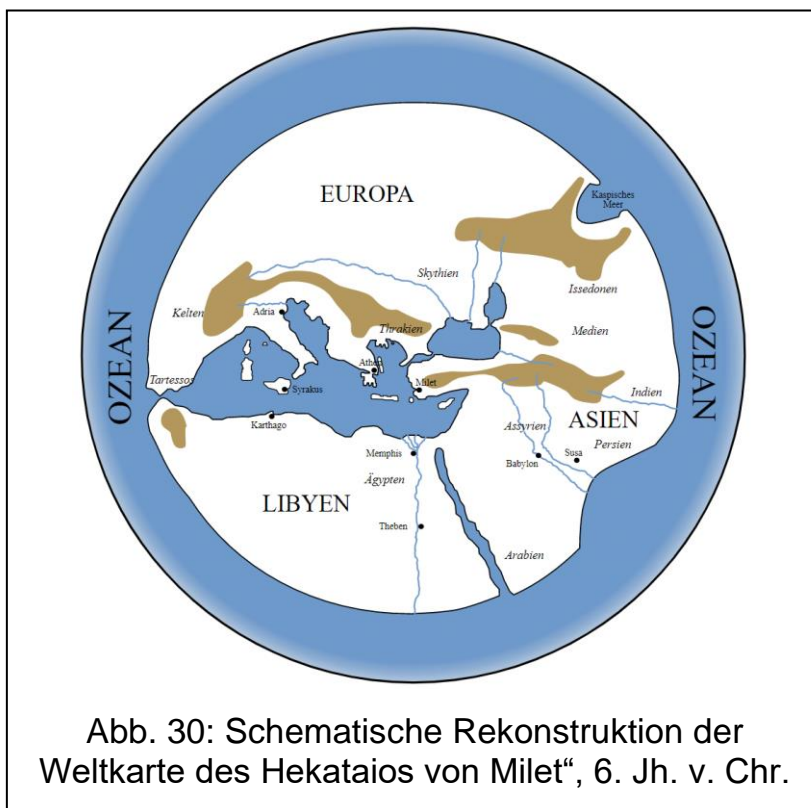


Abb. 30: Schematische Rekonstruktion der Weltkarte des Hekataios von Milet“, 6. Jh. v. Chr.

Die Erkenntnis verbreitete sich deutlich weniger spektakulär als das kopernikanische Weltbild, weil schon alleine die Beobachtung sich nahender Schiffe oder der Erdschatten bei einer Mondfinsternis die Rundung der Erdoberfläche zeigte. Den endgültigen Beweis erbrachte die erste Erdumsegelung durch Magellan. Trotzdem war die erste seriöse Messung etwa 230 Jahre v.Chr., die

⁵⁶ Siehe dazu https://en.wikipedia.org/wiki/Monstrous_moonshine

⁵⁷ https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f6/Hecataeus_world_map-de.svg

offenbar auf Eratosthenes von Kyrene (276 – 195 v.Chr.) zurückgeht, eine wissenschaftliche Meisterleistung.

Am 21. Juni steht die Sonne am nördlichen Wendekreis genau senkrecht. An diesem Tag traf das Sonnenlicht in Syene, dem heutigen Assuan, mit guter Näherung auf den Wasserspiegel eines tiefen Brunnens. Der Wendekreis durchläuft heute den Nassersee, der durch den Assuanstaudamm aufgestaut wird. Gleichzeitig ließ Eratosthenes die Schattenlänge eines senkrechten Obelisken bekannter Höhe in Alexandria vermessen. Der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen beträgt $7,2^\circ$ oder 7 Grad, 12 Minuten. Die Sonnenstrahlen wurden als parallel angenommen. Das war immerhin schon ein Erkenntnis der damaligen Zeit, dass offenbar die Sonne so weit von der Erde entfernt ist, dass diese Näherung gerechtfertigt ist. Der Abstand zwischen Alexandria und Syene war bekannt zu 50 Tagereisen mit einer Karawane, die ca. 17 km pro Tag zurück legte.⁵⁸ Das entspricht 850 km. Daraus ergibt sich das Verhältnis

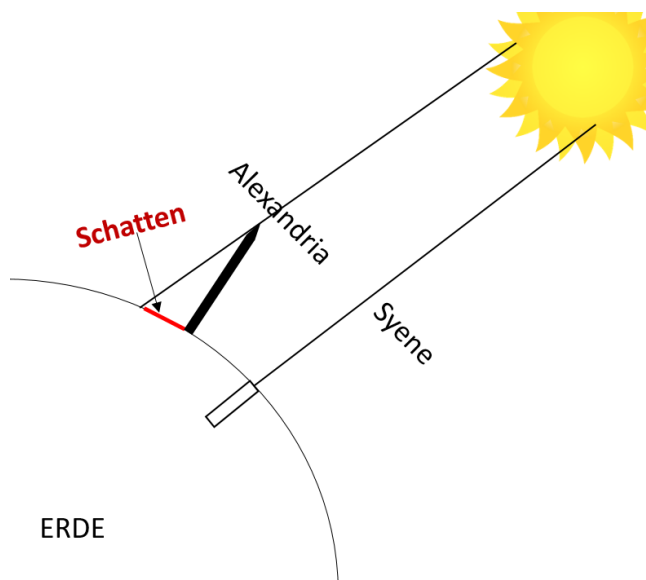


Abb. 31: Konstellation des Eratosthenes

$$\frac{7,2^\circ}{850 \text{ km}} = \frac{360^\circ}{\text{Erdumfang}}$$

Der Erdumfang errechnet sich damit zu 42.500 km.⁵⁹ Die Rechnung nimmt einige Vereinfachungen in Kauf. So ist die Basislänge zwischen Alexandria und Syene mit Unsicherheiten behaftet und Alexandria liegt etwas weiter westlich als Syene, das sich auch nicht exakt auf dem nördlichen Wendekreis befindet, sondern leicht nördlich. Der Fehler liegt trotzdem nur im einstelligen

Prozentbereich und war damit eine wissenschaftliche Glanzleistung.

Heutige GPS-Berechnungen ergeben ca. 40.030 km und wegen der leichten Abplattung an den Polen, am Äquator 40.075 km.

⁵⁸ Eratosthenes rechnete dies in „Stadien“ um. Heute kennt man nur ungefähr das Verhältnis Stadion zu Kilometer, da ein Stadion zwar 600 Fuß lang war, aber durch das regionale Fußmaß zwischen 165 und 196 m schwankte.

⁵⁹ Inspiration https://www.htw-dresden.de/fileadmin/HTW/Fakultaeten/Elektrotechnik/Dokumente/Personen/Hans-Dieter_Seelig/Erdumfang_Eratosthenes.pdf

Der von Eratosthenes bestimmte Erdumfang war auch Grundlage für die Entfernungsabschätzung zwischen Erde und Mond durch Hipparch (Hipparchos von Nicäa, 190-120 v.Chr.). Bei einer Mondfinsternis bedeckt der (runde)

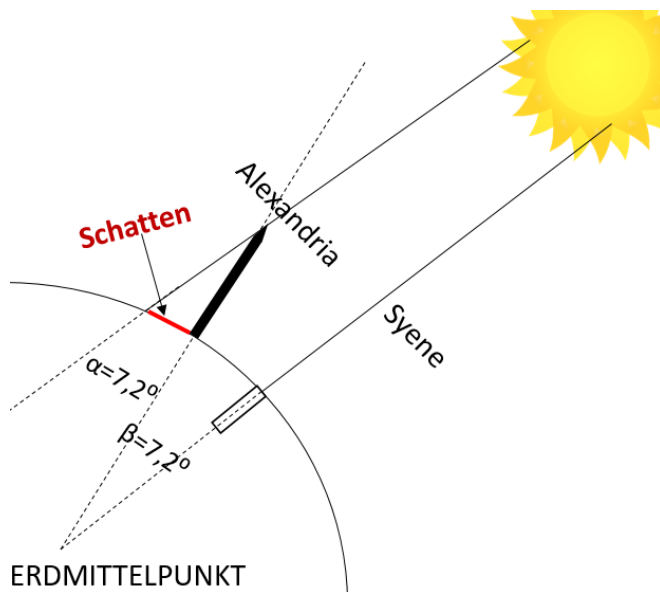


Abb. 32: Vermessung des Erdumfangs

Erdschatten den Mond; eine Münze mit einem Umfang von 75 mm kann dann bei ausgestrecktem Arm (ca. 75 cm) in guter Näherung den Erdschatten verdecken. Die Münze ist somit zehnmal weiter vom Auge als ihr Umfang beträgt. Man kann daraus schließen, dass der Mond etwa zehnmal weiter von der Erde entfernt ist, als deren Umfang ist. Bei der mittleren Entfernung des Mondes von ca. 384.000 km ist dies keine schlechte Abschätzung.

Das Gravitationsgesetz nach Newton

Die heutige Raumfahrt kommt in weiten Teilen mit dem von Isaac Newton aufgestellten Gravitationsgesetz aus. Er publizierte es in seinem 1687 erschienenen, epochalen Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Nur in relativ seltenen Fällen muss die Weiterentwicklung von Albert Einstein herangezogen werden, die er 1915 als „*Die Feldgleichungen der Gravitation*“ veröffentlichte. Sie ist allgemein als Allgemeine Relativitätstheorie bekannt. Das Gravitationsgesetz von Newton ist von fundamentaler Bedeutung für unser Weltverständnis und eines der zentralen Gesetze der sogenannten klassischen Physik, also der Gesetzmäßigkeiten, die noch keine Quanteneffekte berücksichtigen. Dies gilt allerdings auch für die Allgemeine Relativitätstheorie, die aber insbesondere in einzelnen, teils verstörenden Effekten den gesunden Menschenverstand vor andere Herausforderungen stellt.

In seiner allgemeinen Form wirkt zwischen zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r eine Kraft F der Form

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

G ist die universelle Gravitationskonstante.

$$G = \frac{6,672 \cdot 10^{-11} \text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Allerdings ist es sinnvoll, die Kraft \vec{F}_1 auf einen Massepunkt m_1 richtungsabhängig, also vektoriell zu formulieren. Da die Gravitation, im Gegensatz z.B. zum Magnetismus (Coulombsches Gesetz), immer anziehend ist, existiert zu \vec{F}_1 ein Gegenvektor mit $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$:

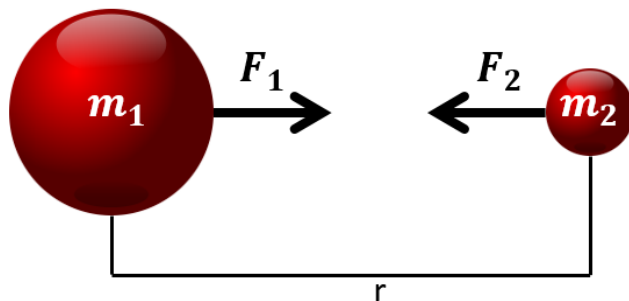


Abb. 33: Newtons Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

\vec{r}_1 und \vec{r}_2 sind die beiden Ortsvektoren, also der Positionen der Massepunkte im 3-dimensionalen Raum.

Am folg. Beispiel Erde-Mond kann man die Mittelpunkte der beiden nahezu kugelförmigen

Massen annehmen. Die Masse der Erde beträgt in etwa $5,97 \cdot 10^{24} \text{kg}$, die Masse des Mondes etwa $7,349 \cdot 10^{22} \text{kg}$. Der Abstand zwischen Erde und Mond verändert sich zwar ständig. Für die Berechnung kann man in guter Näherung 384.000 km verwenden. Die Gravitationskraft F zwischen Erde und Mond beträgt:⁶⁰

$$F = \frac{6,672 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg} \cdot 7,349 \cdot 10^{22} \text{kg}}{(384000000)^2 \text{m}^2}$$
$$F = 1,985 \cdot 10^{20} \text{N}$$

Zum Vergleich:

Die Gravitationskraft zwischen zwei Personen, die jeweils eine Masse von 50 kg haben und die sich in einem Abstand von 1 m voneinander befinden, beträgt etwa $F = 1,668 \cdot 10^{-7} \text{N}$.

Fourier-Analyse

Der folgende Abschnitt ist dann ein mathematisches Thema, wenn man die Fourier-Analyse oder klassische harmonische Analyse, auf die Mathematik der Theorie der Fourier-Reihen und Fourier-Integrale begrenzt. Sie hat aber besonders in der Physik und den technischen Wissenschaften (und weit darüber hinaus) eine so herausragende Bedeutung, dass dieser Abschnitt unter dem Obergriff „Physik“ geführt werden soll. Dort geht es ursprünglich darum, zeitliche Signale in ihre Frequenzanteile umkehrbar zu zerlegen. Das ursprüngliche

⁶⁰ Quelle des Beispiels:

<https://www.frustfrei-lernen.de/mechanik/gravitationskraft.html>

Signal soll über die Summe dieser Frequenzanteile wieder rekonstruiert werden können. Dies lässt sich jedoch auf andere Probleme übertragen. So sind Mechanismen der Fourier-Analyse aus der digitalen Bildverarbeitung nicht mehr wegzudenken. Immer, wenn es darum geht, periodische Vorgänge oder andere regelmäßig wiederkehrende Strukturen zu erkennen und mathematisch zu behandeln bzw. zu beschreiben, kommen Instrumente der Fourier-Analyse zum Einsatz. Zur verwendeten Mathematik soll auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.

Die Grundlagen der Methode wurden von dem französischen Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) entwickelt. Im Jahr 1822 hat er in einem bahnbrechenden Werk *Théorie analytique de la chaleur* Fourier-Reihen untersucht. Seine mathematischen Kenntnisse wendete er selbst schon erfolgreich in der Physik an. Seine Abhandlung zur Wärmeausbreitung in

Festkörpern, die heute als Fouriersches Gesetz bekannt ist, wurde von der Pariser Akademie der Wissenschaften mit einem Preis ausgezeichnet. Die Tabelle in Abb. 35 zeigt den Zusammenhang von Zeit- und Frequenzbereich bei den vier möglichen Varianten der Fourier-Analyse mit zeitdiskretem/zeitkontinuierlichem Verlauf und spektral diskretem bzw. kontinuierlichem Verlauf. Zeitdiskrete

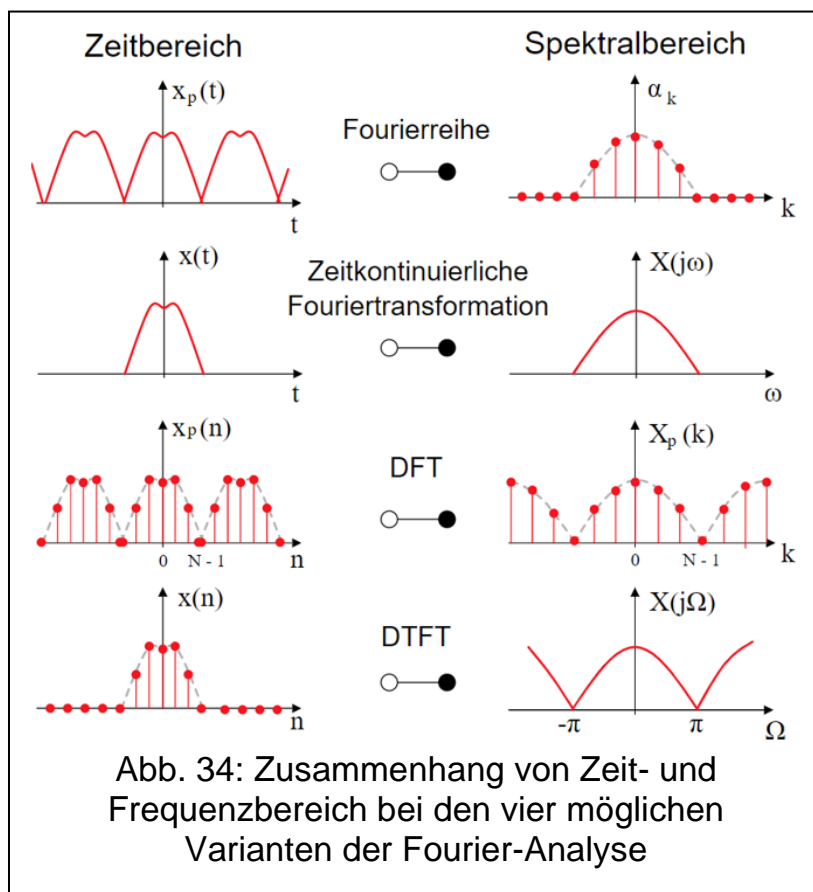


Abb. 34: Zusammenhang von Zeit- und Frequenzbereich bei den vier möglichen Varianten der Fourier-Analyse

Folge bzw. diskretes Spektrum bedingt auf der gegenüberliegenden Seite ein Spiegelspektrum bzw. eine periodische Fortsetzung.⁶¹

⁶¹ Grafik, Tabelle und wörtlich übernommener Text aus https://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analyse#/media/Datei:Diff_Fourier-Analyse.svg

Variante	Definitionsmenge von x	Periodizität von x	Frequenzspektrum
Fourier-Reihe	kontinuierliches Intervall	periodisch	diskret
Kontinuierliche Fourier-Transformation	kontinuierlich	aperiodisch	kontinuierlich
Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	diskret, endlich	aperiodisch, periodisch fortgesetzt	diskret, endlich
Fourier-Transformation für zeitdiskrete Signale (DTFT)	diskret, endlich		kontinuierlich

Abb. 35: Charakteristika der vier möglichen Varianten der Fourier-Analyse gemäß Grafiken in Abbildung 34

Die Maxwell'schen Gleichungen

Elektrische und magnetische Phänomene werden unter dem Begriff „Elektromagnetismus“ zusammengefasst. Es ist das Verdienst von James Clerk Maxwell (1831-1879), der 1864 geradezu sensationell und fast im Alleingang seine vier Gleichungen veröffentlicht hat und damit eine bis heute wichtige physikalische Theorie ins Leben gerufen hat. Erst durch quantentheoretische Ergänzungen und der Berücksichtigung von relativistischen Effekten wurde die Theorie verfeinert. Sie sind wichtig im atomaren Bereich, aber betreffen in der makroskopischen Welt teils nur diffizile Erweiterungen. Ähnlich wie das Gravitationsgesetz von Newton, das meist vollkommen ausreicht um Planeten- oder Asteroidenbahnen zu berechnen, sind die Maxwell'schen Gleichungen meist ausreichend für viele praxisorientierte Fragen rund um den Elektromagnetismus.

Mit den Gleichungen lassen sich die elektrischen und magnetischen Kräfte berechnen, die in gegebenen Konstellationen bei elektrischer oder magnetischer Ladung oder entsprechender Stromverteilung auftreten.

Maxwell schloss mit seinen Gleichungen 1864 eine empfindliche, theoretische Lücke. Es gab vorher nur punktuelle mathematische Beschreibungen isolierter Phänomene, aber keine konsistente Theorie. Besonders die Tatsache, dass es keine isolierten Beschreibungen von Magnetismus und Elektrizität geben darf, sondern dass sich beide Kräfte gegenseitig bedingen, beeinflussen und nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können, ist das große Verdienst von James Maxwell. Die Tatsache, dass von einem bewegten elektrischen Feld

auch magnetische Felder ausgehen und umgekehrt, hat millionenfache Anwendungen in der Technik und Wissenschaft.

Die ursprünglich für den „Äther“ aufgestellten Gleichungen konnten erweitert werden, wie sich elektrische und magnetische Felder in Materie verhalten.

Die physikalische Aussage der Gleichungen kann man folgendermaßen verbalisieren:

(1): Die elektrischen Ladungen lassen sich als Quellen und Senken des elektrischen Feldes interpretieren.

(2): Das magnetische Feld hat keine Quellen, das heißt, es gibt keine isolierten magnetischen Monopole.

(3): Erst durch zeitliche Änderungen des magnetischen Flusses werden Wirbel im elektrischen Feld erzeugt. Das ist das Faradaysche Induktionsgesetz.

(4): Leitungs- und Verschiebungsströme erzeugen Wirbel im magnetischen Feld, sie werden oft auch salopp (im Widerspruch zu (2)) als Quellen des Magnetfeldes bezeichnet (Ampèresche Gesetze).

Die dielektrische Verschiebung D nach der Zeit $\frac{\partial D}{\partial t}$ nennt man Maxwellscher Verschiebungsstrom. Er dient dazu, das Gleichungssystem widerspruchsfrei zu machen. Allein die Änderung eines elektrischen Feldes ruft ein Magnetfeld hervor. Markantes Beispiel ist der Be- und Entladevorgang eines Kondensators.

Die vier Gleichungen schrecken den Laien zunächst auch von der Notation her gesehen ab. Es wird ein mathematischer Differentialoperator (auch Ableitungsvektor genannt) verwendet. Er ist als (partieller) Ableitungsvektor zu verstehen und wird mit einem umgedrehten griechischen Delta bezeichnet. D.h. es werden die (zeitunabhängigen) Ableitungen bzgl. der 3 Raumkoordinaten bzw. der Variablen x, y, z gebildet.⁶²

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Die Bedeutung der Maxwellschen Gleichungen geht weit über die konsistente mathematische Beschreibung des Elektromagnetismus hinaus. Sie war auch „Enabler“ für eine der größten Revolutionen in der Physik, den Relativitätstheorien. Impuls war einerseits ein Defizit und andererseits die neue Idee von Feldern, Wellen und Kräften. Die Gleichungen sind nämlich nicht symmetrisch bzgl. Galilei-Transformationen. Es ist zumindest für die einfachste Näherung wichtig, dass sich physikalische Gesetze nicht ändern, wenn Bezugssysteme sich nur durch eine geradlinig-gleichförmige Bewegung,

⁶² Eine gute Darstellung, an die sich der Text anlehnt, findet sich bei <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/maxwell-gleichungen/9525>

Drehung und/oder eine Verschiebung in Raum oder Zeit unterscheiden. Dieses Defizit behebt die Spezielle Relativitätstheorie. In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird der Feldbegriff auch auf die Gravitation angewendet.

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik - Entropie und Zeitverläufe⁶³

In grundlegenden Naturgesetzen ist die Zeit symmetrisch. D.h. von der mathematischen Beschreibung gesehen, können alle Prozesse reversibel ablaufen. Es wird also nicht grundsätzlich zwischen Vergangenheit und Zukunft unterschieden. Elementare Naturgesetze sind also in ihren Formeln invariant gegenüber Zeitumkehr. Man spricht von T-Symmetrie (von t wie time). Andere Symmetrien, insbesondere in der Quantenphysik, ist die Ladungsumkehr (C wie charge) und die Spiegelsymmetrie (genannt P wie Parität), die für links/rechts-Händigkeit steht. Nur kleine Symmetriebrüche sind bekannt und es wird nach wie vor danach gesucht. Sie sind offenbar verantwortlich für das eindeutige Übergewicht von Materie gegenüber Antimaterie im Universum, doch die bisher bekannten, teils winzigen Phänomene können das heutige Materie-dominierte Universum nicht allein erklären. Auch bei der Zeit sind Symmetriebrüche⁶⁴ bekannt, aber Zeitumkehr ist insbesondere in der Quantentheorie mathematisch vorgesehen. Sie stellt kein Problem dar, denn für negative Zeit gibt es plausible Begründungen, z.B. kann das Positron als Elektron gedeutet werden, das in der Zeit „rückwärts“ läuft.⁶⁵

Warum gibt es keine Welt, in der die Richtung der Zeit keine Rolle spielt? Vielfach wird als Grund die Entropie als Begründung genannt bzw. anerkannt und damit der 2. Hauptsatz der Thermodynamik. Der 1. Hauptsatz besagt, dass Energie erhalten bleibt und lediglich in andere Energieformen umgewandelt wird. Beim zeitlichen Ablauf jedes Prozesses in der makroskopischen Welt geht das System von einer höheren Ordnung in eine geringere Ordnung (höhere Entropie) über. Entropie hat etwas mit Wahrscheinlichkeit zu tun. Der Zustand geringerer Ordnung ist deutlich wahrscheinlicher. Dies kann nur durch Energiezufuhr verhindert werden, die bei der Entwicklung höherer Lebensformen vor allem von der Sonne kommt. Aber immer entsteht Reibung oder Abwärme oder sonstige nicht mehr für Arbeit nutzbare Energieformen. Sobald also makroskopische Prozesse auftreten, bekommt plötzlich „Zeit“ eine

⁶³ Siehe auch für diesen Abschnitt Kafitz, Willi, Entropie: wachsende Bedeutung in Naturwissenschaft und Informationstheorie: eine Übersicht in Beispielen
<http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2020/15768/>

⁶⁴ <https://www.weltderphysik.de/gebiet/teilchen/news/2012/verletzung-der-zeitsymmetrie-beobachtet/>

⁶⁵Für die Energie $E = \pm \sqrt{c^2(\hbar^2 \vec{k}^2) + m^2 c^4}$ existiert eine positive und negative Lösung.

Richtung. Arnold Sommerfeld hat einmal gesagt: „In der Natur nimmt die Entropie die Rolle des Direktors ein, die Energie aber nur die eines Buchhalters.“⁶⁶

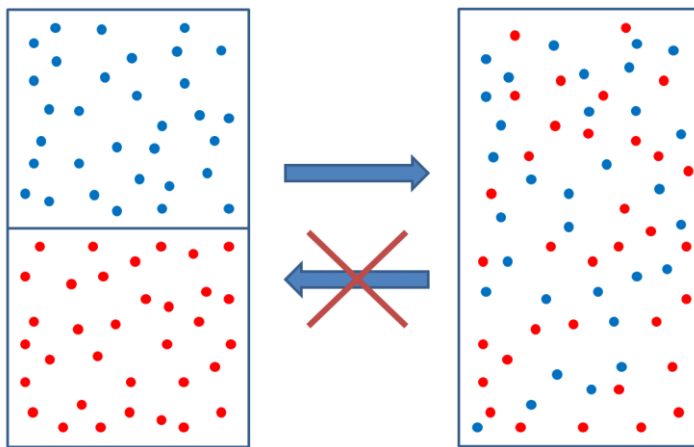


Abb. 36: Vermischung zweier unterschiedlicher Gase ist spontan irreversibel und erhöht die Entropie.

Das betrifft auch kleinste Systeme, wie ein Quantensystem. Der „Kollaps der Wellenfunktion“ ist nicht umkehrbar und legt somit die Zeitrichtung, den „Zeitpfeil“ fest. Auch das Verhalten elektromagnetischer Strahlung gehorcht dem Zeitpfeil. Strahlung tritt immer in retardierter Form auf; die Felder folgen also

der Quelle immer verzögert und nicht instantan. Die Ausbreitung erfolgt dann mit Lichtgeschwindigkeit. Entropie bestimmt alleine durch wahrscheinlichere Zustände die Richtung des Zeitpfeils und ist die eigentliche Ursache der Zeit. Mit Entropie kann Vergangenheit und Zukunft definiert werden. Sie werden durch das, was man Gegenwart nennt, getrennt. Es ist ein kurzer, physikalisch, philosophisch und religiös schwer fassbarer Moment.⁶⁷

Diese These hat als erster Arthur Eddington formuliert. Eddington hat dabei nicht die Relativitätstheorie vergessen, die den Begriff „Gleichzeitigkeit“ zumindest relativiert hat. Er war einer der ersten intimen Kenner und Leiter der Expedition zur Insel Principe im Jahr 1919, die die Voraussagen der Allgemeinen Relativitätstheorie bestätigen konnte und zur enormen Popularität von Albert Einstein maßgeblich beitrug. Allerdings hat die Relativitätstheorie deutlich gemacht, dass es keine absolute Zeit gibt, dass Gleichzeitigkeit eine Illusion ist, dass Raum nur in Verbindung mit Zeit plausibel beschrieben werden kann und umgekehrt.

Es bleibt aber bei den grundsätzlichen Kategorien von Ursache und Wirkung. Wenn eine Information den kausalen Anstoß für einen Folgevorgang liefern soll, dann besitzt der Zeitpfeil seine Gültigkeit. Quantentheoretisch verschränkte Teilchen können instantan, also ohne Rücksicht auf die Lichtgeschwindigkeit, in beliebiger Entfernung eine Quanteneigenschaft des verschränkten Teilchens

⁶⁶ Zitiert nach <https://www.chemie.de/lexikon/Entropie.html>

⁶⁷ Siehe Muller, Richard A., Jetzt – Die Physik der Zeit, S. Fischer, Frankfurt a. Main, 2018, S. 131.

offenbaren. Damit ist jedoch keine Informationsübermittlung, die schneller als das Licht funktioniert, realisierbar. Für diese gilt der durch Entropie definierte Zeitpfeil, wie ihn Eddington postuliert hat.^{68,69,70}

Entropie wird heute nicht nur thermodynamisch interpretiert. Auf die Bedeutung des Begriffs in der Informationstheorie wird noch hingewiesen.

Ein Artikel von Ted Jacobson aus dem Jahr 1995⁷¹ hat eine neue Perspektive aufgezeigt, die eine intensive Forschung ausgelöst hat. In Quantenfeldtheorien wird die Gravitation nicht berücksichtigt. Jacobson nimmt nun an, dass die Entropie einer Region immer deren Oberfläche proportional sei. Die Oberfläche als Grenzfläche ist aber abhängig von der Geometrie der umschlossenen Region und könnte damit auch von der Krümmung der Raumzeit abhängen, die auf der linken Seite von Einsteins Feldgleichung steht. Rechts steht der Materie/Energie-Term und Entropie ist, vom thermodynamischen Ursprung her, die Wärmeenergie, die ein System „verliert“. Dies ist zunächst Spekulation, aber während Einstein seine Feldgleichung und damit die Allgemeine Relativitätstheorie **postulieren** musste, kann Jacobson aus diesen Grundannahmen die Feldgleichungen **ableiten**.

Wichtige Beiträge mit diesen Ansätzen leistete z.B. Verlinde mit dem Konzept der Entropischen Gravitation.⁷² Berechnungen von Bekenstein (1973) und gestützt durch Hawking zeigten schon früher, dass man Schwarzen Löchern eine Entropie zuordnen kann, die nur von der Oberfläche des Ereignishorizontes

⁶⁸ Originalliteratur: Eddington, Arthur Stanley, Das Weltbild der Physik und ein Versuch einer philosophischen Bedeutung, 1928, in Deutsch 1931 bei Springer, S. 42ff

⁶⁹ Steven Hawking wollte im Jahr 2009 mit einem ungewöhnlichen Experiment beweisen, dass Zeitreisen tatsächlich nicht möglich sind. Er veranstaltete eine große Party, zu der er ausschließlich Zeitreisende aus der Zukunft einlud. Das Besondere: Er veröffentlichte die Einladungen erst nach der Feier, in der Hoffnung, dass Menschen in mehreren tausend Jahren darauf aufmerksam werden könnten. Leider kam niemand. (<https://www.mdr.de/wissen/zeit-fakten100.html>)

⁷⁰ Die Quantentheorie ist eine der am besten experimentell bestätigten physikalischen Theorien. Der Begriff „Kollaps der Wellenfunktion“ leitet sich aus der lange Zeit unbestrittenen, fast dominanten Interpretation ab, der „Kopenhagener Deutung“. Sie umgeht mit dem Ausdruck das „Messproblem“ durch eine für manche Physiker willkürliche Annahme. Einige wagten andere Interpretationen (Bohm, Everett), die sich nicht durchsetzten oder als nutzlose Philosophie angefeindet wurden („shut up and calculate“). Mittlerweile gibt es wieder stärkere, wissenschaftlich akzeptierte Diskussionen um die Grundlagen der Quantentheorie. Siehe dazu:

Adam Becker, Was ist real?, Springer, Berlin 2021 oder

Sean Carroll, Was ist die Welt und wenn ja, wie viele, Klett-Cotta, Stuttgart 2021

⁷¹ Jacobson, Ted, Thermodynamics of Space-Time. The Einstein Equation of State, Physical Review Letters, 75, 1995, S.1260-1263

⁷² https://de.wikipedia.org/wiki/Entropische_Gravitation

und von fundamentalen Naturkonstanten abhängt („Bekenstein-Hawking-Entropie“).⁷³

Minus 273,15 Grad Celsius - Der 3. Hauptsatz der Thermodynamik

Es gibt sozusagen auch eine „Physik der Null“, nämlich der absolute Nullpunkt. Die gebräuchliche Temperaturskala ist willkürlich und hat sich aus verständlichen, historischen Gründen am physikalischen Verhalten von Wasser orientiert, also einem der wichtigsten Stoffe für das Leben auf der Erde. Die Celsius-Skala ist nach dem schwedischen Astronomen Anders Celsius benannt, der bereits 1742 eine hundertteilige Temperaturskala vorschlug. Den Gefrierpunkt des Wassers hat er auf null Grad gesetzt und den Siedepunkt auf 100 Grad. Diese Skaleneinteilung, also die Differenz der Temperaturwerte zwischen 0 und 100, bleibt auch, seit man feststellte, dass es ein Minimum der

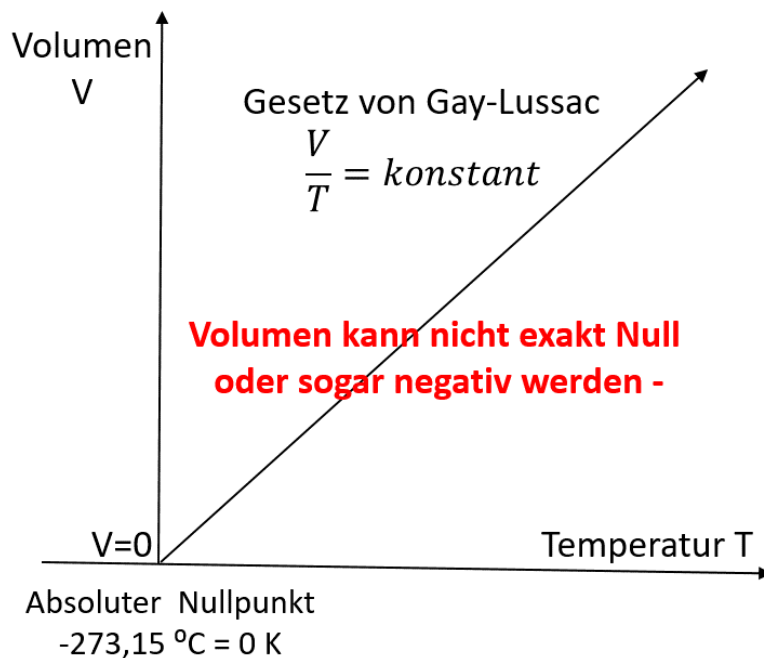


Abb. 37: Nach dem Gesetz von Gay-Lussac ist der absolute Nullpunkt unerreichbar.

Temperatur geben muss, den absoluten Nullpunkt bei minus 273,15 Grad Celsius. Temperatur hat immer etwas mit Bewegung der kleinsten Teilchen zu tun. Beim absoluten Nullpunkt gibt es keine Bewegung mehr.

Wissenschaftlich formuliert: Nach dem Gesetz von Gay-Lussac ist der Quotient aus Volumen und Temperatur stets konstant.

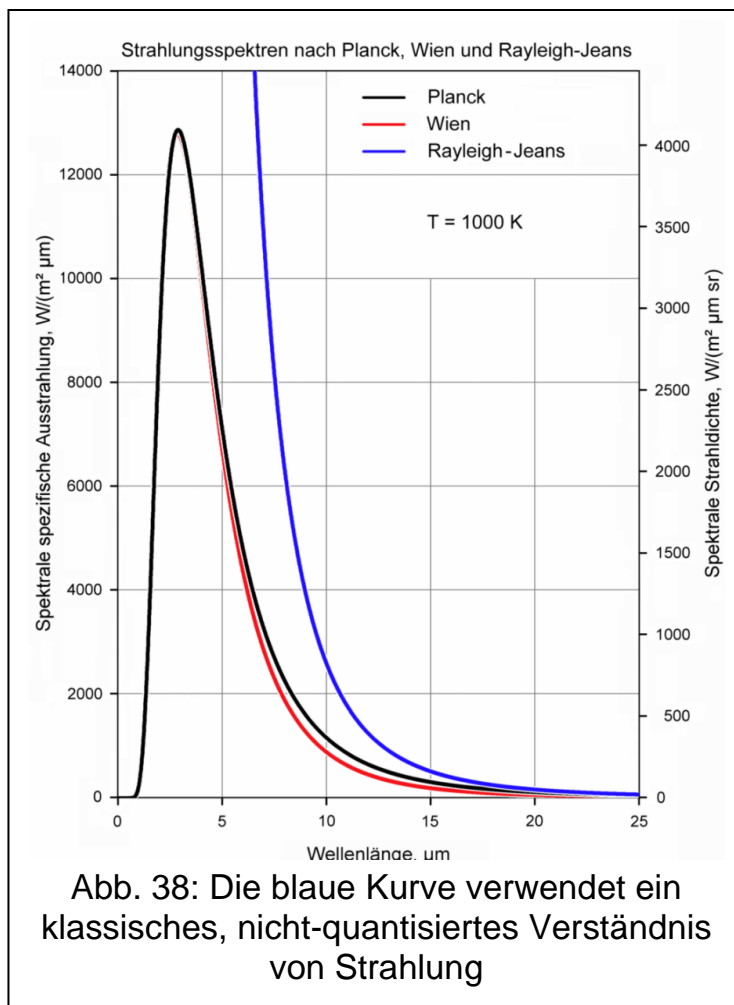
$$\frac{V}{T} = \textit{konstant}$$

Da es kein negatives Volumen geben kann, muss es für die Temperatur ebenfalls eine untere Grenze, den absoluten Nullpunkt (−273,15 °C), geben. Das ist auch der Grund, dass man ihm zwar beliebig nahekommen, aber ihn nie erreichen kann. Dafür sorgen alleine die Gesetze der Quantenphysik, denn die kleinsten Quantenteilchen würden die Heisenbergsche Unschärferelation verletzen. Diese Erkenntnis geht auf Walter Nernst zurück. Das Nernst-Theorem ist als 3. Hauptsatz der Thermodynamik bekannt. Es hat sich

⁷³ <https://de.wikipedia.org/wiki/Bekenstein-Hawking-Entropie>

angeboten, einerseits den absoluten Nullpunkt auch tatsächlich als Nullpunkt der wissenschaftlichen Temperaturmessung festzulegen, aber andererseits sich auf die Celsius-Skala zu beziehen. Nach William Thomson, dem späteren Lord Kelvin, ist die Skala benannt. Er hat vor allem die Abhängigkeiten von der Energie als entscheidenden Einflussfaktor erkannt. Minus 273,15 Grad Celsius ist also 0 Kelvin (seit 1967 definitionsgemäß ohne die Ergänzung „Grad“). In der Nähe des absoluten Nullpunkts treten oft quantenmechanisch bedingtes, besonderes Verhalten der Materie auf. Dazu gehört Suprafluidität und sogenannte Bose-Einstein-Kondensate, bei der die Quantenteilchen einen Aggregatzustand einnehmen, in dem sie nicht mehr unterscheidbar sind. Ihre als Wellenfunktionen beschreibbaren Einzelzustände überlagern sich zu einem Gesamtzustand. Der kritische Punkt wird erreicht, wenn die Dichte der Quantenteilchen mit fast gleichem Impuls groß genug ist.

Schwarze Körper, Hohlraumstrahlung und die Geburt der Quantenmechanik



Ein grünes Blatt ist grün, weil es das weiße Licht der Sonne vollständig absorbiert und nur grünes Licht der Frequenz zwischen 500 nm und 550 nm reflektiert. Absorbiert ein nicht-transparenter („opaker“) Körper das ganze sichtbare Licht, so ist er schwarz. Einen perfekten „Schwarzen Körper“ gibt es allerdings nur in der Idealvorstellung. Immer wird ein Teil der auftreffenden elektromagnetischen Strahlung wieder emittiert. Ein schwarzer Gegenstand heizt sich in der Sonne zwar stärker auf, aber er erreicht auch irgendwann ein thermisches Gleichgewicht. Zu einem geringen Teil

erfolgt dies durch Kontakt mit der Umgebung. Doch auch die Erde im Vakuum des Weltraums heizt sich nicht permanent auf, sondern gibt auch Strahlung ab.

Dies bezieht sich auf das gesamte energetische Spektrum. Dabei ist bekannt, dass Wärme Bewegung bzw. Schwingungen der Teilchen ist. Sie hören erst am (nie vollständig erreichbaren) absoluten Nullpunkt auf (s.o.).

Wenn ein idealer schwarzer Körper gemäß seiner Definition die ganze Strahlung absorbiert, so gibt er doch aufgrund der Schwingungen seiner Atome Wärmestrahlung ab. Dies erfolgt bei glühenden Körpern sogar im sichtbaren Licht. Auch die Sonne kann man als fast perfekten Schwarzen Körper ansehen, der jedoch durch seine Oberflächentemperatur von ca. 5800 K weiß erscheint. Die Temperatur bestimmt also auch bei Schwarzen Körpern die Frequenz und kann vom infraroten über den sichtbaren bis zum ultravioletten Bereich gehen. Diese Schwarzkörperstrahlung eignet sich besonders gut für Untersuchungen, weil weniger Fremdeinflüsse, also störende reflektierende Anteile, existieren. In der Praxis bohrt man ein Loch in einen hohlen Körper. Die geringe einfallende Strahlung ist nach wenigen Reflexionen absorbiert und kann nicht mehr austreten. Man misst also lediglich die Schwarzkörperstrahlung, die deshalb auch Hohlraumstrahlung genannt wird. Man beachte, dass lediglich das Loch schwarz ist. Das Material und damit die Oberfläche des Hohlkörpers ist für die Hohlraumstrahlung unerheblich. Die Strahlung hängt nur von der Temperatur ab und nicht vom Material. Wird die Temperatur erhöht, so wird auch das Loch im sichtbaren Bereich glühen und bei höheren Temperaturen darüber hinaus im Ultravioletten strahlen. Die Sonne erscheint deshalb nicht nur weißglühend, sondern gibt in erheblichem Umfang schädliche UV-Strahlung ab, die in wesentlichen Teilen von der Ozon-Schicht absorbiert wird. Die Strahlungsverteilung, die im Rahmen der klassischen Theorien zu erwarten wäre, kann die Messergebnisse nicht korrekt interpretieren. Man spricht von einer UV-Katastrophe, die vorausgesagt würde.⁷⁴

Man kann den Schwarzen Körper als Hohlraumstrahler mit den Maßen $d \cdot d \cdot d = d^3$ behandeln. In diesem „Potentialtopf“ können nur stehende Wellen elektromagnetischer Strahlung bestehen, da sich andere Wellenformen auslöschen würden. Folgende Frequenzen k nach den 3 Raumdimensionen sind möglich:

$$k = \frac{\pi}{d} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

d.h. die Anzahl der möglichen Schwingungsmoden ist $n = \frac{8\pi}{3\lambda^3}$

⁷⁴ Bildquelle https://de.wikipedia.org/wiki/Rayleigh-Jeans-Gesetz#/media/Datei:PlanckWienRayleigh_linear_150dpi_de.png

Lord Rayleigh ging von einer stetigen Gleichverteilung der Energie der Oszillatoren pro Freiheitsgrad aus $E(T, \nu) = k \cdot T$

Dagegen nahm Planck an, dass jeder Oszillator nur ein ganzzahliges Vielfaches eines elementaren Energiequants $E_0 = h \cdot \nu$ annehmen kann. Dadurch ist gewährleistet, dass nicht alle theoretisch möglichen Schwingungszustände eingenommen werden können. Das war der erste Schritt zu einer Quantelung kleinster Energiepakete und damit der Beginn der Quantenmechanik. Über die Heisenbergsche Unschärferelation sind Tunneleffekte möglich, werden aber, wenn die Energie $k \cdot T$ viel kleiner ist als der Anregungszustand $h \cdot \nu$, immer unwahrscheinlicher. In einer Variante (Frequenz-bezogen) hat das Plancksche Gesetz die Form:

$$\bar{E}(T, \nu) = \frac{h\nu}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} - 1}$$

Das Stern-Gerlach-Experiment

Im Jahr 2022 jährt sich zum 100. Mal ein bahnbrechendes Experiment, das die Quantennatur der Materie deutlich machte, weil das Experiment ein vollkommen anderes Ergebnis zeigte, als man von der klassischen Physik erwarten würde. Der entscheidende Versuch gelang in der Nacht vom 7. auf den 8. Februar 1922 in einem Labor im Gebäude des Physikalischen Vereins (Alte Physik) in Frankfurt am Main von Otto Stern und Walther Gerlach. Aus diesem Grund hat die Deutsche Physikalische Gesellschaft (DPG) und der Physikalische Verein zu einer Jubiläumsveranstaltung zum Jahrestag in der Paulskirche in Frankfurt eingeladen.

Nach den Gesetzen der damals noch jungen Quantenmechanik sollte ein Effekt existieren, den man Richtungsquantelung nennt und war von Peter Debye und Arnold Sommerfeld vorausgesagt worden. Wenn man durch ein magnetisches Feld eine Raumrichtung festlegt, können entsprechende Anteile der drei Raumkoordinaten x, y, z eines beliebigen Drehimpulses bzgl. der ausgezeichneten Raumrichtung nicht beliebige Werte annehmen. Die Werte treten als isolierte Quanten der Form $m_J \cdot \hbar$ auf. Dabei ist m_J eine ganz oder halbzahlige Zahl⁷⁵

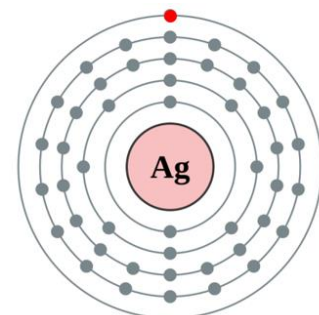


Abb. 39: Atomaufbau von Silber mit dem 5s Elektron (rot)

⁷⁵ Bei Bosonen ganzzahlig, bei Fermionen halbzahlig (0, 1/2, 1, 1 1/2, 2, ...).

und \hbar ist $\frac{h}{2\pi}$, (reduziertes Plancksches Wirkungsquantum). Der Buchstabe „m“ soll den Bezug zu einem „Magnetfeld“ suggerieren.

Beim Stern-Gerlach Experiment benutzt man einen Strahl von neutralen Silberatomen im Vakuum und legt ein asymmetrisches magnetisches Feld an. Nach der klassischen Theorie würden die Silberatome einen zusammenhängenden schwarzen Strich oder Punkt auf der Glasplatte

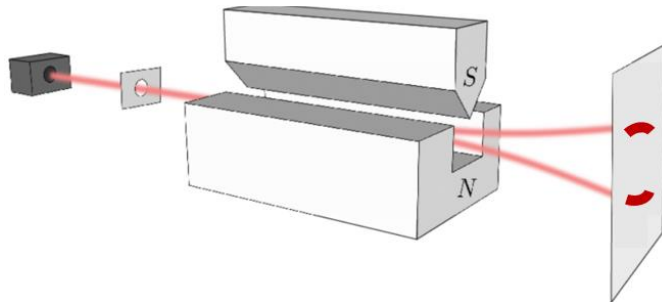


Abb. 40: Stilisierte Darstellung des Experiments. Entscheidend ist die Aufspaltung des Strahls in z-Richtung.

erzeugen (hier rot). Silber ist aber gut geeignet, quantenmechanische Effekte aufzuzeigen. Denn die unteren vier Schalen sind besetzt, ihre gepaarten Spins heben sich gerade auf und steuern deshalb keinen Beitrag zum magnetischen Dipolmoment eines Silberatoms bei. Entscheidend ist das einzelne

Elektron in der 5s-Schale (rot in Abb. 39 hervorgehoben), das auch alleine für die chemischen Bindungen verantwortlich ist. Silber ist fast immer einwertig und liegt meist als Ag^+ -Ion in Verbindungen vor. Das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ des Silberatoms ist eine Folge des vektoriell zu verstehenden Drehimpulses \vec{S} . $\vec{\mu}$ und \vec{S} sind parallel. Das einzelne 5s-Elektron liefert den einzigen Beitrag zu den magnetischen Eigenschaften des Silbers. Dieses 5s-Elektron hat einen Spin $\frac{1}{2}$ und ein Silberatom verhält sich insgesamt wie ein Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen, ein Fermion. Der Spin ist entweder Spin-up oder Spin-down oder eine sogenannte Superposition von beiden Zuständen. Im Magnetfeld entscheidet sich jedes 5s-Elektron in einem Silberatom nach dem Zufallsprinzip zu Spin-up oder Spin-down. Es hat also durch die Quantelung nur die Möglichkeiten sich $+\hbar/2$ oder $-\hbar/2$ einzustellen, ähnlich wie ein Kreisel sich nur rechts- oder linksherum drehen kann. Die klassische Mechanik lässt dagegen zu, dass der Drehimpulsvektor jeden beliebigen Winkel mit der durch das Magnetfeld ausgezeichneten Achse bilden kann. Das Experiment zeigte deutlich die Aufspaltung des Strahls infolge der Richtungsquantelung in einem Magnetfeld, die zur Abscheidung der Silberatome in diesem Fall in zwei prinzipiell getrennten Bereichen führt.⁷⁶ Mit geladenen Teilchen ist der Versuch noch nicht möglich, aber die Ablenkung der ungeladenen Silberatome war vergleichsweise leichter messbar, da nur der Spin des 5s-Elektrons magnetisch relevant ist. Nichts desto trotz war jedoch das Experiment äußerst anspruchsvoll, eine

⁷⁶ Walther Gerlach, Otto Stern: Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld. In: Zeitschrift für Physik. Band 9, 1922, S. 349–35

Sternstunde experimenteller Physik und im Jahr 1922 eine wichtige Bestätigung der neuen Quantentheorie.

Michelson-Morley Experiment

Wenige Experimente in der Geschichte der Physik haben so drastisch ein allgemein akzeptiertes Naturverständnis in Frage gestellt. Wellen waren nur in Verbindung mit einem Medium denkbar: Wasserwellen, Erdbeben, Schall konnten als Schwingungen von Wasser, Erde und Luft verstanden werden. Das gleiche nahm man als selbstverständlich auch für das Licht an. Dabei waren die

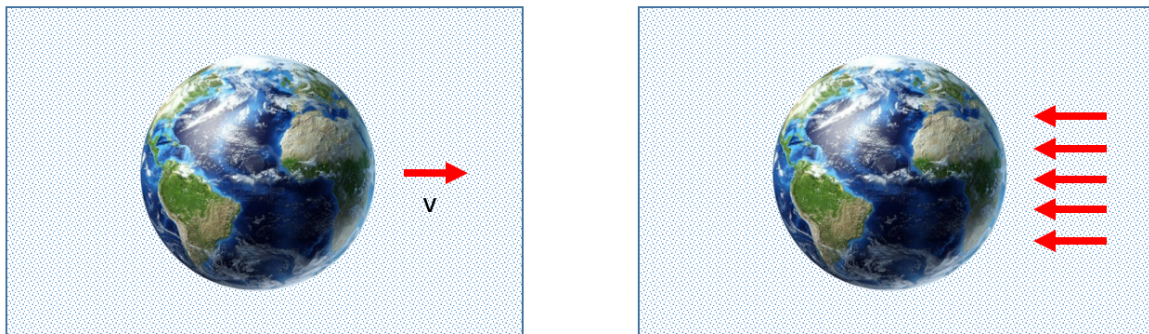


Abb. 41: Bewegung der Erde durch den hypothetischen Äther (links) müsste einen entgegengesetzten Ätherwind erzeugen.

Belege für den Wellencharakter des Lichts so überzeugend, dass Befürworter des Teilchencharakters überstimmt wurden. Das hypothetische Medium für die Ausbreitung von Lichtwellen nannte man „Äther“, manchmal auch Quintessenz,

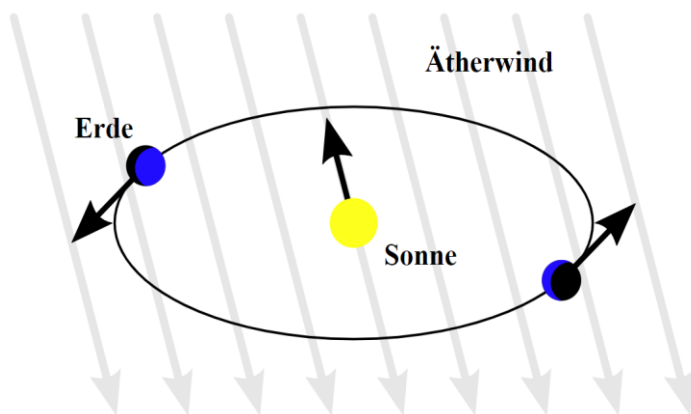


Abb. 42: Wenn der Äther das Medium für elektromagnetische Wellen wäre, müsste sich die Eigenbewegung von Erde und Sonne nachweisen lassen.

nach dem 5. Element von Aristoteles (von mittellateinisch quinta essentia, „das fünfte Seiende“). Später wurde das Konzept auch auf allgemeine elektromagnetische Wellen und auf die Gravitation übertragen.⁷⁷ Man wollte dadurch eine Fernwirkung vermeiden. Doch je mehr man über Phänomene des

⁷⁷ Bildquelle Abb. 42:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/16/Ätherwind.svg>

Abb. 41 und 43 analog <http://www.twintech.ch/aruh/papers/Relativitaet.pdf>

Lichts wusste, umso mehr Eigenschaften musste man dem Äther zubilligen, die sich teilweise erheblich widersprachen. Heinrich Hertz, der 1888 die von Maxwell postulierte endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen nachwies, brachte die damalige Lehrmeinung auf den Punkt:

„Nehmt aus der Welt die Elektrizität, und das Licht verschwindet; nehmt aus der Welt den lichttragenden Äther, und die elektrischen und magnetischen Kräfte können nicht mehr den Raum überschreiten.“⁷⁸

Trotz widersprechender Postulate über die Natur des Äthers, waren sich die meisten Gelehrten einig, dass der Äther ruhen müsse und sich die Materie durch den Äther bewegt und dadurch einen Widerstand spüren muss. Der wichtigste Grund ist die Aberration des Lichts α , das man aufgrund der Orbitalgeschwindigkeit der Erde v_{Erde} von ca. 30 km/s von den Sternen beobachten und messen kann und das besonders bei der Bewegung des Beobachters/Erde senkrecht zur Lichtausbreitung sich auswirkt.

$$\sin \alpha_{max} = \frac{v_{Erde}}{c} = \frac{3 \cdot 10^4 \frac{m}{s}}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}$$
$$\alpha_{max} = 20,48''$$

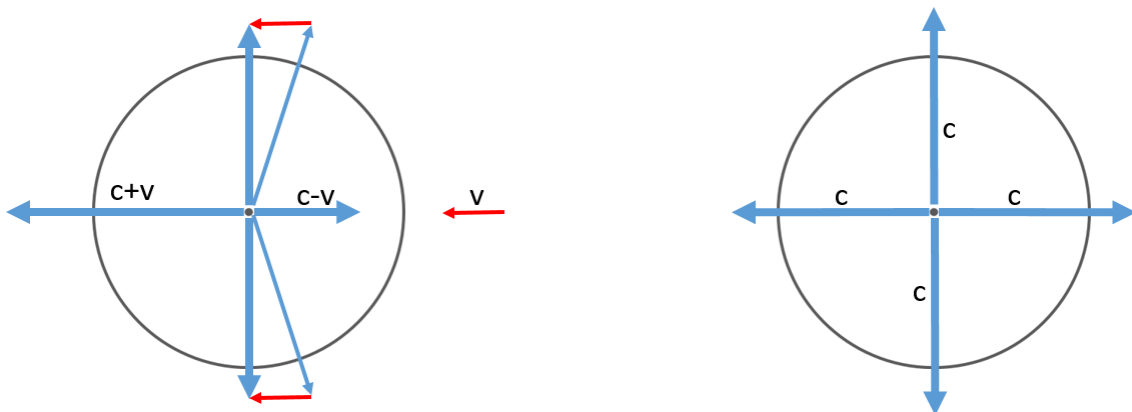


Abb. 43: Das erwartete Resultat des Experimentes war, dass sich die Lichtgeschwindigkeit c je nach Bewegungsrichtung der Erde verändert (links). Das gemessene Resultat ergab, dass die Lichtgeschwindigkeit c in allen Richtungen gleich ist (rechts).

Es wirkt sich als eine scheinbare kleine Ortsveränderung $\alpha_{max} = 20,48''$ im Laufe eines Jahres aus. Ein ganz minimaler Effekt kann auch durch die Erdrotation entstehen. Der Wert hat praktisch in der Astronomie den Charakter einer Konstante. Die Gestirne scheinen gegenüber dem astronomischen

⁷⁸ Zitiert nach [https://de.wikipedia.org/wiki/Äther_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Äther_(Physik))

Koordinatensystem eine kleine Ellipse zu beschreiben. Ein Fernrohr muss also im Laufe eines Jahres immer leicht angepasst werden, so wie bei schnellem Lauf auch bei senkrecht fallendem Regen der Regenschirm je nach Geschwindigkeit nach vorne geneigt werden muss. Bei einem ruhenden Äther, der konform zu diesen bekannten Messungen zur Aberration sich verhält, müsste sich eine Relativgeschwindigkeit der Erde zum Äther nachweisen lassen. Das war das Ziel des Michelson-Morley-Experiments. Die Messung erfolgte mittels eines hochgenauen Interferometers, wobei die Messeinrichtung auf eine Steinplatte montiert war, die auf einem Quecksilbersee schwamm. So konnte man die Apparatur praktisch ohne Erschütterungen drehen.

Dabei wird die Geschwindigkeit des Lichtes einmal in Bewegungsrichtung der Erde und einmal senkrecht dazu ermittelt und nicht in absoluten Werten gemessen, sondern miteinander mittels Interferenz verglichen. Das Licht, das in Richtung der Erdbewegung zur Verstärkung des Effekts mehrfach reflektiert wird, müsste langsamer sein, als das, das senkrecht zwischen den Spiegeln läuft.

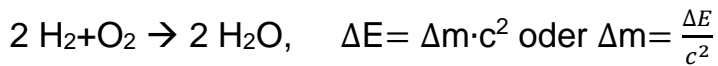
Michelson und Morley konnten trotz hoher Messgenauigkeit und minimalen Fehlertoleranzen keine Laufzeitunterschiede feststellen. Dieses Nullergebnis war ein wesentliches Argument für Einstein, die Existenz des Äthers abzulehnen und über das Postulat einer in alle Richtungen konstanten Lichtgeschwindigkeit seine Relativitätstheorie aufzustellen.

Äquivalenz von Masse und Energie: $E=mc^2$

Albert Einsteins Veröffentlichung, die später „Spezielle Relativitätstheorie“ genannt wurde, erschien in den Annalen der Physik und Chemie, Jg. 17, 1905, S. 891–921 unter dem Titel „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“. Sein Nachtrag, „Ist die Trägheit eines Körpers von dessen Energieinhalt abhängig?“, ist im September 1905 eingereicht worden und im November erschienen. Darin taucht die wohl berühmteste Formel der Physikgeschichte auf: $E=m \cdot c^2$. Genauer: Die Ruheenergie E_{Ruhe} ist äquivalent zur Ruhemasse m_{Ruhe} . c ist die Lichtgeschwindigkeit. Die Formel beschreibt somit die Äquivalenz von Masse und Energie. Schon andere Forscher, wie Poincaré, waren auf ähnliche Ergebnisse in Verbindung mit elektromagnetischer Strahlung gekommen. Einsteins Verdienst ist vor allem die Verallgemeinerung auf alle Energieformen. Streng genommen taucht diese berühmte Formel in der Veröffentlichung von 1905 gar nicht in dieser Form auf, (Einstein nannte z.B. c noch V) und wird erst in moderner Notation so ausgedrückt.

Die Beziehung gilt, teilweise zu stark verkürzt oder gar falsch angewendet, vor allem als Schlüssel für Kernreaktionen und damit der Atombombe. Aber sie betrifft auch alle anderen Prozesse, bei denen Energie benötigt oder freigesetzt wird.

Ein Beispiel ist der Massenverlust bei der Knallgasreaktion.



Bei der Knallgas-Reaktion von molaren Mengen Wasserstoff und Sauerstoff zu Wassermolekülen wird eine Energie von $571,6 \text{ kJ} = 5,716 \cdot 10^5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ frei. (Es entstehen 2 Mol Wasser).

Pro Mol des entstehenden Wassers (ca. 18 g) ändert sich die Enthalpie H somit um -286 kJ/Mol . Der Massenverlust Δm durch Umwandlung von Masse in Energie (genauer: Δm bzgl. dem Äquivalent zu ΔH) beträgt somit

$$\Delta m = \frac{2,86 \cdot 10^5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}}{9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} = 3,178 \cdot 10^{-12} \text{ kg oder } 3,178 \cdot 10^{-9} \text{ g}$$

Teilt man durch die Avogadro-Zahl $6,02214086 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, erhält man den Massenverlust pro H_2O -Molekül bezogen auf die Summe von H_2 und O .

In der Praxis ist diese Größenordnung im Nano-Bereich kaum messbar. Ähnliche Werte erhält man bei Laden bzw. Entladen von Autobatterien.

Erst bei Kernprozessen erhält man größere Werte.

So wandelte die erste im 2. Weltkrieg eingesetzte Atombombe ca. 1 Gramm Materie durch den Zerfall von Uran-235 in Energie um (Fission). Genauer: Die Anzahl an Protonen, Neutronen und Elektronen war zwar vor und nach der Explosion gleich. Aber die Masse der Kerne war vor der Explosion größer.

Beeindruckend sind die Werte bei Prozessen in der Sonne (Fusion). Im Kern der Sonne herrschen Temperaturen von ca. 15 Millionen Grad Celsius. In einem Fusionsprozess wird Wasserstoff zu Helium umgesetzt.

Die Sonne fusioniert pro Sekunde 564 Millionen Tonnen Wasserstoff zu 559,7 Millionen Tonnen Helium. Die Massendifferenz von 4,3 Millionen Tonnen pro Sekunde ist die Energiemenge, die die Sonne abstrahlt.⁷⁹ Auch hier bleibt die Summe der einzelnen Elementarteilchen (Baryonen, Elektronen) gleich. Erst bei der Vernichtung (Annihilation) oder Erzeugung von Materie, z.B. die einer Elektron-Positron Umwandlung in zwei Gammaquanten und umgekehrt, kann man von einer direkten Umwandlung von Materie in Energie und vice versa sprechen.

Heisenbergsche Unschärferelation

In der makroskopischen Welt sind die meisten Werte unabhängig voneinander im Rahmen der Genauigkeit unserer Instrumente genau messbar. In der mikroskopischen Welt der Quantenteilchen ist dies bei sogenannten komplementären Eigenschaften eines Teilchens nicht möglich. Die

⁷⁹ Quelle der Zahlen: <https://www.live-counter.com/sonne>

Heisenbergsche Unschärferelation sagt etwas über den Grad an Messbarkeit solcher Eigenschaften aus. So sind Ort und Impuls nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmbar. Gleiches gilt für die Bestimmung der Energie zu einem bestimmten Zeitpunkt.^{80,81}

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \text{ wobei } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

h ist das Plancksche Wirkungsquantum $6,62607015 \cdot 10^{-34}$ J·s

Heisenberg verwendet in der ersten Version bei aller Sorgfalt, mit der er Grundbegriffe, wie Ort, Geschwindigkeit, Energie, Impuls etc. definiert, einen eher heuristischen Weg, um seine berühmte Ungleichung abzuschätzen. Wenn man ein Teilchen „sehen“ will, muss es von mindestens einem Photon getroffen werden und je nach Frequenz des Lichts einen mehr oder weniger starken, aber nicht vernachlässigbaren Impuls erfahren haben.

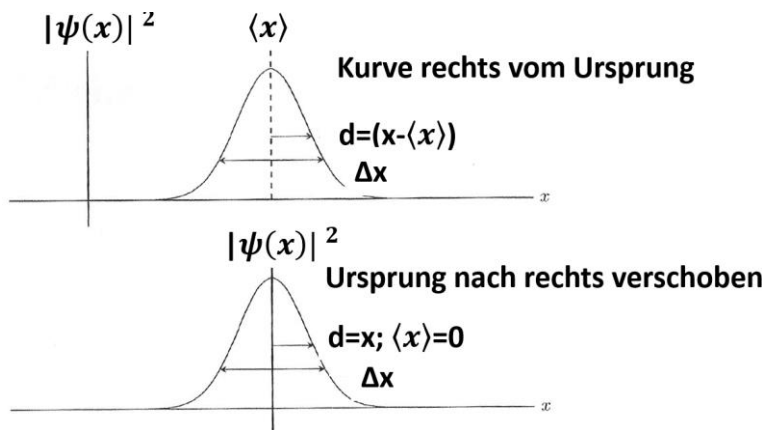


Abb. 44: Grundlagen der Unbestimmtheit

Heute kann man die Grundlagen der Unbestimmtheit mathematisch exakt bestimmen und z.B. grafisch darstellen. Die Unbestimmtheit Δx ist ein Maß dafür, wie der Funktionsgraph im Verhältnis zum Erwartungswert $\langle x \rangle$ auseinander gezogen

ist. Ein Abstand d bezeichnet die Abweichung eines Punktes vom Erwartungswert $\langle x \rangle$ und kann negative oder positive Werte annehmen. Damit sich die Werte nicht gegenseitig aufheben, werden die Quadrate von d genommen. Durch die Verschiebung des Ursprungs fallen „Wahrscheinlichkeitswerte des Ortes“ $|\psi(x)|^2$ mit dem Erwartungswert $\langle x \rangle$ zusammen.⁸²

Diese Einschränkungen sind nur für die Quantenebene wichtig. Folgende Modellrechnung soll dies demonstrieren.

⁸⁰ W. Heisenberg: Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. In: Zeitschrift für Physik. Band 43, Nr. 3, 1927, S. 172–198

⁸¹ Die Originalarbeit ist als Faksimile verfügbar unter folg. Link. Das Original befand sich im Besitz von Linus Pauling und trägt die handschriftliche Bemerkung „Given to me in Göttingen by Born.“

<http://osulibrary.oregonstate.edu/specialcollections/coll/pauling/bond/papers/corr155.1-05.html>

⁸² Grafik und Argumentation: Leonhard Susskind, Art Friedman, Quantenmechanik – Das theoretische Minimum, Springer, Berlin 2020, S. 177

Bei einer Radarkontrolle kann man ein Fahrzeug bis auf plus/minus einen Meter genau lokalisieren, d.h. $\Delta x = 2\text{m}$. Der Messfehler bei der Geschwindigkeit beträgt $\Delta v = 1\text{ km/h} = 1000\text{m}/3600\text{s} \approx 0,3\text{m/s}$. Die Masse eines PKW sei $m = 1\text{t} = 1000\text{ kg}$.

Die Impulsunschärfe errechnet sich somit zu $\Delta p = m \cdot \Delta v = 300 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

Es ergibt sich für $\Delta x \cdot \Delta p = 9 \cdot 10^{35} \cdot h$, wobei h das oben erwähnte Plancksche Wirkungsquantum in der Größenordnung 10^{-34} ist.

Man müsste schon die Genauigkeit von Δx und Δp um jeweils 18 Größenordnungen (10^{36}) steigern, dass sich die Heisenbergsche Unschärferelation in dieser Alltagssituation einschränkend bemerkbar macht.

Die Bellsche Ungleichung

Zu den berühmtesten wissenschaftlichen Streitthemen gehört die freundschaftliche, aber erbitterte Auseinandersetzung zwischen Niels Bohr und Albert Einstein. In der populärwissenschaftlichen Literatur wird der Ausgang meist als Sieg von Bohr dargestellt und Einstein als jemand, der die Quantentheorie nicht ganz verstanden hat. Das wird dem Thema überhaupt nicht gerecht. Einstein hat sehr wohl die Quantenmechanik verstanden, denn schließlich hat er wesentliche Beiträge dazu geliefert. Die Frage war, ist die Quantentheorie komplett und deshalb auch nicht-lokal oder hat sie „verborgene Variablen“. Einstein konnte nicht akzeptieren, dass man das Prinzip der Lokalität aufgeben sollte. Dass die Messung von räumlich weit entfernten, verschränkten Teilchen instantane Auswirkungen trotz beliebig großer Distanz haben soll, hat Einstein als „spukhafte Fernwirkung“ bezeichnet. Dazu kamen etwas esoterische Interpretationen des sogenannten Messproblems durch die „Kopenhagener Deutung“ der Quantentheorie. „Messung“ wurde von einigen Physikern und Philosophen als bewusste Beobachtung interpretiert, also von Beobachtern, die mit „Bewusstsein“ ausgestattet sind. Die Existenz von Teilchen außerhalb eines Messprozesses wurde zudem infrage gestellt. Auch heute wird der „Kollaps der Wellenfunktion“ von manchen als willkürlich und unstetigen Prozess in der Natur angesehen, der dem Grundsatz seit Aristoteles, Leibniz oder Newton, *Natura non facit saltus* (Die Natur macht keine Sprünge), widerspricht. Lange Zeit war aber die Diskussion darüber verpönt. Junge Wissenschaftler wurden diszipliniert („shut up and calculate“, N. David Mermin); Forschungsgelder dazu nicht bewilligt.

Dabei blieb bei allen Forscherinnen und Forschern die Mathematik und ihre Voraussagen unbestritten. Die Quantentheorie ist diesbezüglich eine der genauesten physikalischen Theorien. Aber Interpretation und philosophische Grundlagen sind bis heute umstritten. Einstein und Bohr liefern sich dazu

Wortgefechte, die eine Debatte unter Riesen der Physikgeschichte genannt werden kann. Die Dialoge von Einstein und Bohr sind berühmt geworden.⁸³ Einstein hat die entscheidenden Grundsatzfragen in einem Artikel gemeinsam mit Boris Podolsky und Nathan Rosen erörtert, der als EPR-Paradoxon bekannt wurde.⁸⁴ In einem Gedankenexperiment wurde herausgearbeitet, dass die Quantenmechanik entweder nichtlokal oder unvollständig ist. Grundgedanke ist der *lokale Realismus* – ein von Einstein geprägter Begriff. Die Autoren machten keinen Hehl daraus, dass sie den lokalen Realismus als physikalisches Grundprinzip ansahen. Podolsky hatte voreilig der Presse mitgeteilt, sie hätten die Quantenmechanik damit widerlegt. Die *New York Times* brachte dazu eine Titelgeschichte. Einstein protestierte bei der Zeitung und soll nie mehr ein Wort mit Podolsky gewechselt haben.⁸⁵

Mittlerweile wurde in Experimenten unzweifelhaft die Nichtlokalität bestätigt. Aber gibt es „verborgene Variablen“? *Der lokal-realistische Standpunkt der klassischen Physik zwingt den Teilchen individuelle Eigenschaften auf, die ihr eigenes Verhalten bei Messungen steuern und damit den quantenmechanischen Zufall vortäuschen.*⁸⁶ Dies wären diese verborgenen Variablen. Einstein lehnte auch den nicht-deterministischen Aspekt und die Rolle des Zufalls in der Quantentheorie ab, was gerne plakativ als „*Gott würfelt nicht*“ ungenau zitiert wird.⁸⁷

Die entscheidende, physikalisch überprüfbare und somit messtechnisch verifizierbare Nagelprobe in Form eines Gedankenexperiments lieferte der nordirische Physiker John Bell im Jahr 1964.

Die Bellsche Ungleichung besagt, dass im klassischen Sinne eine Theorie dann realistisch ist, wenn das Ergebnis von Messungen von vorne herein feststeht. Jede klassische Theorie hat diese Eigenschaft. Sie ist deterministisch, der Zufall hat keinen Platz und ein Ereignis kann höchstens mit Lichtgeschwindigkeit (gemäß der speziellen Relativitätstheorie raumartig) Einfluss auf ein anderes System haben. Dann ist die Ungleichung erfüllt. Wenn die Theorie aber nicht-lokal ist, also Zustände z.B. von Teilchen korreliert und damit nicht zufällig sind, so ist diese Theorie nicht-klassisch, nicht-lokal. Sie verletzt die Ungleichung.

⁸³ Siehe Niels Bohr (1949), *Discussions with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics*, Text online bei: <https://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/dk/bohr.htm>

Bekanntes Beispiel: „Sie werden doch nicht behaupten wollen, dass der Mond nicht da oben ist, wenn niemand hinsieht?“ ... „Können Sie mir das Gegenteil beweisen?“

⁸⁴ A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Phys. Rev.* 47 (1935), S. 777–780 doi:10.1103/PhysRev.47.777

⁸⁵ Sean Carroll, *Was ist die Welt und wenn ja, wie viele*, Klett-Cotta, 2021, S. 121

⁸⁶ Formulierung nach https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Ungleichung

⁸⁷ Genaues Zitat und Quelle siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Gott_würfelt_nicht

Die Bellsche Ungleichung definiert somit ein Kriterium, mit dem klassische Physik von nicht-klassischer Physik nachweislich und messbar unterschieden werden kann.

Experimente und Messungen zuerst an verschränkten Photonenpaaren lieferten dann 1972 die Antwort und wurden mittlerweile vielfach bestätigt. Da die Messung von Quantenteilchen nie vollständig ist (Photonendetektoren registrieren oft nur 5%), die Messeinrichtungen streng getrennt sein müssen und die räumliche Trennung kein Signalaustausch in Lichtgeschwindigkeit oder Unterlichtgeschwindigkeit zulassen darf, so müssen eine Reihe von möglichen

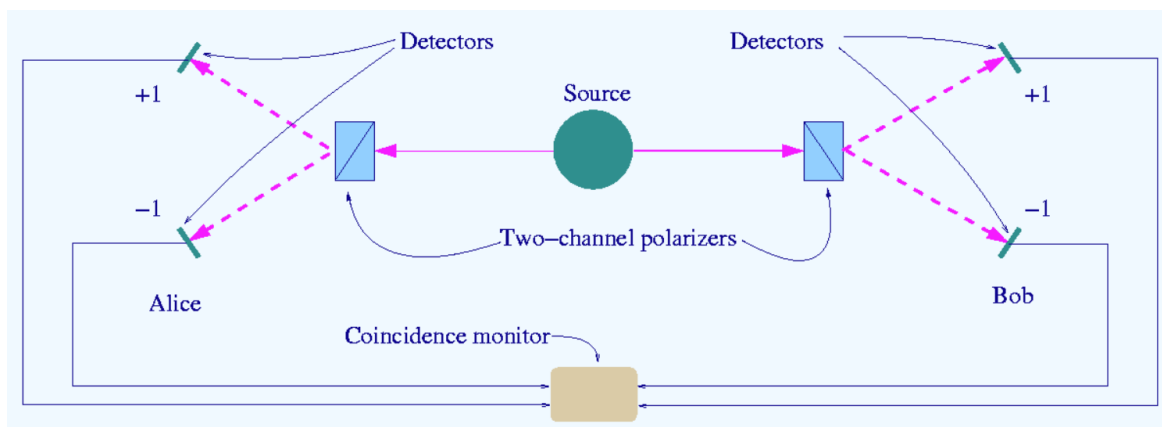


Abb. 45: Schema des Bell-Tests: Die Quelle (Source) erzeugt ein verschränktes Photonenpaar. Die beiden Photonen interagieren jeweils mit einem Filter und passieren entweder den Filter oder werden reflektiert. Anschließend wird bei beiden Photonen detektiert, ob sie den Filter passiert haben oder reflektiert wurden. (Quelle von Grafik und Text: https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Ungleichung#/media/Datei:Bell-test-photon-analyser.png)

„Schlupflöchern“ in den Experimenten geschlossen werden. Dies ist mittlerweile bei zahlreichen Beispielexperimenten gelungen.⁸⁸

Die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante α

1916 hat der Münchner Physiker Arnold Sommerfeld die Feinstrukturkonstante eingeführt, die heute seinen Namen trägt.⁸⁹ Grundlage war die relativistische Behandlung der Feinstruktur von Atomspektren. Sie ist eine dimensionslose

⁸⁸ Siehe z.B. die Arbeitsgruppe von Anton Zeilinger in Wien oder die Ergebnisse von Alain Aspect (https://de.wikipedia.org/wiki/Anton_Zeilinger, https://de.wikipedia.org/wiki/Alain_Aspect).

⁸⁹ Sommerfeld hatte eine außergewöhnliche Karriere als Forscher und Lehrer. Eine ganze Reihe von späteren Nobelpreisträgern hat bei ihm promoviert. Er selbst wurde 81-mal für den Nobelpreis vorgeschlagen, hat ihn aber nie bekommen.

Zahl, die in der Literatur immer α genannt wird. Sie ist ein Maß für die elektromagnetische Stärke, die auf der Kopplung geladener Teilchen durch Photonen beruht. Im Prinzip ist sie das Verhältnis zwischen der Coulomb-Energie der Wechselwirkung von zwei elektrischen Ladungen im Abstand r mit einem Photon als Austauscheteilchen der Wellenlänge $\lambda = 2\pi r$. Analog ist es im Rahmen des Bohrschen Atommodells möglich, das Verhältnis der Umlaufgeschwindigkeit des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms zur Lichtgeschwindigkeit ins Verhältnis zu setzen. Sie hat den Wert

$$\alpha = 7,297\ 352\ 569(11) \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{137,035\ 999084(21)}$$

In Naturkonstanten ausgedrückt, ergibt sich

$$\alpha = \frac{1}{2c\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar} = \frac{1}{4\pi c\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar}$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, ϵ_0 die elektrische Feldkonstante, e die Elementarladung, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ die gängige Formulierung für das Plancksche Wirkungsquantum.

Ob sich die Feinstrukturkonstante ändert, ist von erheblichem theoretischen Interesse für Physik und vor allem Kosmologie.

Modellrechnungen und Überlegungen zeigen, dass selbst kleinste Änderungen von α die Entstehung von Leben unwahrscheinlich gemacht hätten. α ist also optimal austariert. Es hat sich eine Philosophie herausgebildet, die als anthropisches Prinzip bezeichnet wird. Die Tatsache, dass menschliche Wesen entstehen konnten, die in der Lage sind, das Universum zu beobachten, schafft erst die geringen Spielräume für die Konstanten. Die Feinstrukturkonstante wurde regelrecht zum Synonym für die Feinabstimmung der Naturkonstanten. Sie dient deshalb auch manchen Autoren als Gottesbeweis, weil a priori unwahrscheinliche kosmische Rahmenbedingungen durch die gegebene Kombination der Naturkonstanten nötig sind, um Leben zu ermöglichen.⁹⁰

Urknall

Am 9. Mai 1931 erschien in Nature ein Artikel von George Edouard Lemaître mit dem Titel „*The Beginning of the World from the Point of View of Quantum Theory.*“ Der Beitrag war gerade mal gut 50 Zeilen in einer Spalte der zweiseitigen Nature-Ausgabe lang. Bemerkenswerterweise war Lemaître ein katholischer Priester, der sich mit Astrophysik beschäftigte.

⁹⁰ Siehe z.B. <https://www.ag-evolutionsbiologie.net/html/2015/widenmeyer-welt-ohne-gott-kritik-naturalismus-teil-3.html>

1915 publizierte Einstein seine Feldgleichungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie. Eine Lösung eines expandierenden Universums entwickelte 1922 Alexander Friedmann. Lemaître kam unabhängig zu den Friedmann-Lösungen und entwickelte sie weiter. Einen experimentellen Hinweis lieferte Edwin Hubble 1929. Er konzentrierte sich auf Cepheiden, also Sterne in Galaxien außerhalb der Milchstraße, deren Leuchtkraft periodisch schwankt und er konnte sie als „Standardkerzen“ für die Entfernungsmessungen ihrer Heimatgalaxien mittels Dopplereffekt nutzen. Er entdeckte, dass sich im Prinzip alle so vermessenen Galaxien von uns wegbewegen. Das konnte man mit einer

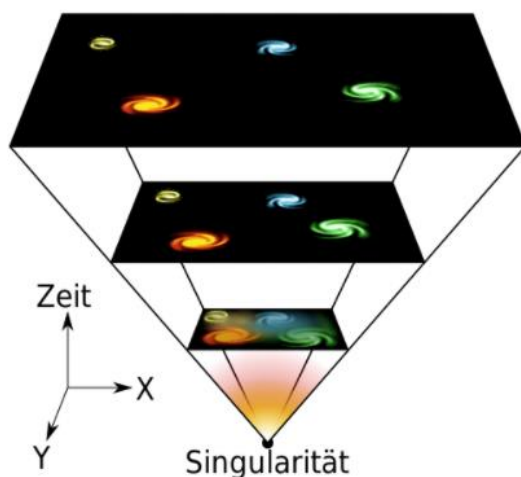


Abb. 46: Urknallmodell: Entstehung des Universums aus einer Singularität.

Expansion des Raumes erklären. Es gab zu dieser Zeit allerdings heftige Gegner dieses kosmologischen Konzepts. Einstein gehörte anfangs dazu, der angesehene Astrophysiker Fred Hoyle war Meinungsführer und mit dem Begriff „Big Bang“ verspottete er das Urknallmodell. 1935 konnten Howard P. Robertson und Arthur Geoffrey Walker beweisen, dass nur dieses Modell mit Theorie und Praxis in Einklang zu bringen ist.

Es macht physikalisch und mathematisch keinen Sinn, theoretische Überlegungen zum Zeitpunkt Null zu beginnen, sondern der Beginn liegt bei der Planck-Zeit bei etwa 10^{-43} Sekunden. Heute geht man spekulativ davon aus, dass die vier Grundkräfte vereint waren und sich erst unmittelbar darauf die Gravitation in einer Symmetriebrechung abspaltete. Beschleunigerexperimente deuten darauf hin, dass bei einer Energie von etwa $2 \cdot 10^{16}$ GeV die verbleibenden Grundkräfte, elektromagnetische, starke und schwache Kernkraft, nicht zu unterscheiden waren.

Die große Homogenität des Weltalls auf großen Skalen erklärt man mit einer kosmischen Inflationsphase. 10^{-35} bis 10^{-32} Sekunden nach dem Urknall soll sich das All um einen Faktor zwischen 10^{30} und 10^{50} vergrößert haben. Dabei hat sich der Raum selber überlichtschnell ausgedehnt, was die Relativitätstheorie zulässt, da sie Bewegung schneller als das Licht nur im Raum verbietet. Es bildeten sich in rascher Folge Elementarteilchen. Bis etwa drei Minuten nach dem Urknall dauerte dann die Kernfusion von Wasserstoffkernen (Protonen) zu Heliumkernen. Es bildete sich ca. 25% ${}^4\text{He}$, sowie geringe Mengen Deuterium (${}^2_1\text{H}$), ${}^3_2\text{He}$, Lithium und Beryllium.

Mitte der 70-er Jahre hatte man die wichtigsten Elementarteilchen in Beschleunigerexperimenten gefunden und die Theorie in Form z.B. der Quantenelektrodynamik und Quantenchromodynamik verstanden. 1977 veröffentlichte Steven Weinberg sein berühmtes Buch „*The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe*“.

Nach Ende der Nukleosynthese folgte eine kontinuierliche Abkühlung des Universums, bis etwa nach 380.000 Jahren die Temperatur soweit abgefallen war, dass sich aus dem Plasma neutrale Wasserstoff-Atome und Helium-Atome bildeten. Dies machte das junge All durchsichtig – Materie trennte sich von Strahlung. Die Strahlung aus dieser Phase ist heute noch sichtbar, allerdings durch die Ausdehnung des Raumes auf ca. 2,7 K im Mikrowellenbereich abgekühlt. Die winzigen Schwankungen dieser kosmischen Hintergrundstrahlung konnten sehr genau vermessen werden und liefern uns wertvolle Hinweise, wie sich aus ersten kleinen, quantenmechanisch erklärbaren Dichteschwankungen schließlich Strukturen bis hin zu Galaxien und Galaxienhaufen bilden konnten.

Ein rätselhaftes Phänomen der Feinabstimmung verbirgt sich hinter dem Begriff „Flachheitsproblem“.⁹¹ Der Krümmungsparameter k bestimmt die Krümmung des Universums, also die Frage, ob es flach ($k=0$), sattelförmig/hyperbolisch und dadurch offen ist ($k<0$) oder sphärisch, also geschlossen ist ($k>0$).

Der Krümmungsparameter k der Raumzeit wird gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) durch ihre Äquivalenz sowohl von Materie als auch von Energie beeinflusst („ $E=mc^2$ “) und hängt vom Verhältnis der tatsächlichen Dichte ρ zum kritischen Wert ρ_0 ab. Man setzt $\frac{\rho}{\rho_0} = \Omega$.

Um k abzuschätzen, benötigt man

H (Hubble-Parameter), also die Ausdehnungsrate des Universums

G (Gravitationskonstante)

ρ (Gesamtdichte Materie und Energie)

c (Lichtgeschwindigkeit) und

a (Skalenfaktor zur Bestimmung der Größe des Universums)

Grundlage der Rechnung ist die erste, aus der ART abgeleitete Friedmann-Gleichung (ohne kosmologische Konstante Λ):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{a^2}{c^2} \left(\frac{8\pi G}{3} \rho - H^2 \right)$$

⁹¹ Nach <https://de.wikipedia.org/wiki/Flachheitsproblem>

Man legt bei der Betrachtung das gängige kosmologische Modell Lambda CDM zugrunde, also berücksichtigt im Verhältnis, das durch Vermessung der 2,7 K Mikrowellen-Hintergrundstrahlung ermittelt wurde, gewöhnliche, baryonische Materie, „Dunkle Energie“ (wird trotz Friedmann-Gleichung gleichgesetzt mit der kosmologischen Konstante Λ , Lambda) und **Cold Dark Matter** („Dunkle Materie“).

Danach ist das heutige Universum nach ca. 13,81 Milliarden Jahren im Prinzip flach. Die kritische Dichte ρ_0 berechnet sich auf 10^{-26} kg m^3 .

Der heutige Wert von $\Omega = \frac{\rho}{\rho_0}$ bestimmt also die Krümmung des Universums.

Wichtig ist die Fehlertoleranz der aktuellen Messung des Dichteparameters Ω : der exakte Wert liegt heute irgendwo zwischen $0,99 \leq \Omega \leq 1,01$ und muss also in der (Rück)Rechnung mit maximalen $\pm 1\%$ Unsicherheit berücksichtigt werden. Bei der Expansion des Universums in den seit dem Urknall (genauer seit der Planck-Zeit) vergangenen $13,81 \pm 0,04$ Mrd. Jahren ergibt sich

$$\frac{|1 - \Omega|}{\Omega} < 10^{-58}$$

Mit unvorstellbarer Genauigkeit war also beim Zeitpunkt der Planck-Zeit die Dichte so feinabgestimmt, dass heute noch ein praktisch flaches Universum vorliegt.

Informationstheorie⁹²

Auch dieses Thema ist ein Grenzfall zwischen den Disziplinen. In einem System ist die Information H bzw. die Entropie S die minimale Menge an Information, um dessen Zustand vollständig charakterisieren zu können. Wird das System komplexer, erhöht sich der Informationsbedarf über das System und damit die Entropie. Information ist in der Informationstheorie eng verbunden mit Komplexität. Komplexität steht umgangssprachlich auch für Unübersichtlichkeit. Dies gilt auch in einer (zeitlichen) Entwicklung. Umso komplexer, umso weniger Information hat man nach einer gewissen Zeit über das System. Ein Teilbereich oder eine Komponente eines komplexen Systems ist nicht einem übergeordneten Regelwerk unterworfen, sondern folgt lokalen Regeln. Dies ist in der Thermodynamik auch der Fall. Selbst wenn der Ausgangszustand bekannt ist, so finden auf dieser lokalen Ebene ständig Vorgänge bzw. Übergänge statt. Diese folgen im Detail keiner Vorzugsrichtung, sind also

⁹² Siehe Kafitz, Willi, Entropie: wachsende Bedeutung in Naturwissenschaft und Informationstheorie: eine Übersicht in Beispielen, <http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2020/15768/>, Erstveröffentlichung 10.12.2020. Das vorliegende Kapitel „Informationstheorie“ ist ein gekürzter Auszug aus der genannten Publikation.

symmetrisch. Aber nach einer großen Zahl an zufälligen Übergängen geht



Abb. 47: Google-Doodle zum 100. Geburtstag von Claude Shannon (Jonglieren von Nullen und Einsen).

immer mehr Information über den Ausgangszustand verloren oder, umgekehrt formuliert, ist immer mehr Information erforderlich, um wieder die

ursprüngliche Ordnung zu beschreiben. Man spricht vom „random walk“, wenn z.B. ein Teilchen einen stochastischen, scheinbar vom „Zufall“⁹³ bestimmten Weg aus verketteten Einzelabschnitten zurücklegt. Das abgeschlossene System insgesamt wird in seinem Zustandsraum immer unbestimmter. Die Entropie nimmt mit großer Wahrscheinlichkeit zu.⁹⁴ Entropie in der Informationstheorie hat somit ebenfalls eine grundsätzliche Bedeutung. Information (in seiner gebräuchlichen Einheit Bit), Energie und Entropie können in einem engen Bezugsrahmen beschrieben werden (s.u.). Es war Claude Elwood Shannon, der die Informationstheorie auf eine mathematische Grundlage gestellt hat. Er hat dazu in seinen Denkmodellen den Computer als Maschine vorweggenommen, die eine Information in endlich vielen Schritten darstellen kann. Seine zentrale Definition ist das Bit als kleinste Informationseinheit – ein Begriff, der kaum in seiner Bedeutung überschätzt werden kann. Auch die Entropie, die vor ihm bisher nur in der Physik/Thermodynamik betrachtet wurde, bezog Shannon in seine Überlegungen ein.⁹⁵ Es gibt aber keine abstrakte Information, in dem Sinne, dass Information eine sozusagen geistige Substanz ist. Information benötigt

⁹³ „Nicht-Vorhersagbarkeit“ und „Zufall“ sind zwei verschiedene Dinge

⁹⁴ Hinrichsen rechnet am Beispiel von einem Mol Helium in einem Behälter bekannter Größe über typische Impulse bei Raumtemperatur das Phasenraumvolumen aus. Daraus kann man die Information in Bit abschätzen, die nötig ist, um den Quantenzustand eines einzelnen Teilchens zu kennen. Sie muss wegen der Ununterscheidbarkeit durch die Anzahl der möglichen Permutationen der Avogadro-Konstante bereinigt werden und beträgt ca. 22 Bit. Das ganze Mol Helium von ca. 22,4 Liter hat einen Informationsgehalt von $1,3 \cdot 10^{25}$ Bit. Das ist ca. 5.000 mal mehr, als die Speicherkapazität aller bislang produzierten Speichermedien. (https://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11030300/_imported/fileadmin/tp3/ThermoEDynamik/Entropie.pdf)

⁹⁵ Der Boltzmannsche Beweis umfasst 20 Druckseiten. Über die Informationstheorie lässt sich eine analoge Aussage, die dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik entspricht, wesentlich leichter beweisen.

einen Informationsträger und somit immer einen Bezug zur physikalischen Welt. In diesem Sinne wurden die grundlegenden Prinzipien der Informationstheorie von Claude E. Shannon erarbeitet und die Entropie aus der Thermodynamik quantitativ analog in die Informationstheorie übertragen. Shannon verstand dabei Entropie als Maß an Komprimierbarkeit für Informationen, insbesondere zum Zwecke der Datenübertragung. Die Einheit des Informationsgehaltes wurde Claude Shannon zu Ehren „Shannon“ genannt. Ebenso geht die Shannonsche Entropie nicht ins Detail zu kleinsten Informationsobjekten, die sich mit einem Bit codieren lassen. Nur der durchschnittliche Informationsgehalt ist maßgeblich. D.h. wenn es eine normierbare Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\underline{x})$ für einen Satz von Ordnungsparametern der Länge d gibt, so ist die Entropie H (nach Shannon) sozusagen die Menge an „Zufall“ oder besser „Unbestimmtheit“ im System. Die Analogie zur Thermodynamik wird besonders im Fall diskreter Variablen deutlich. Nummeriert man sie mit $i=1, 2, \dots, s$ und ordnet ihnen Wahrscheinlichkeiten p_i zu, so ist die Shannon-Entropie definiert als

$$H = - \sum_{i=1}^s p_i \ln p_i$$

Ebeling et.al. fassen die Überlegungen wie folgt zusammen: *Die statistische Entropie des Makrozustandes entspricht der Information, die notwendig ist, um den Mikrozustand aufzuklären. Je mehr Information über ein System vorliegt, umso bestimmter ist sein Zustand.*⁹⁶

Je größer die Unbestimmtheit, desto größer ist die Entropie. Sie ist ebenso wie in der Boltzmannschen Thermodynamik ein Ordnungsmaß, proportional zum Logarithmus der Zahl der möglichen Mikrozustände.

Da, wo die individuelle Komprimierbarkeit verlangt ist, ist dies unbefriedigend.

Diese Aufgabe löst die Kolmogorov-Komplexität. Sie wird oft algorithmische Komplexität oder, wegen des Bezugs zu Entropie, auch algorithmische Entropie genannt. Information lässt sich grundsätzlich binär codieren und im Prinzip auf eine binär codierte Zeichenkette reduzieren. Um diese darzustellen, ist ein Programm erforderlich, das die Position jedes Bits, also jeder 0 oder 1 in der Kette, im Detail berücksichtigt. Das kürzeste Programm definiert die Kolmogorov-Komplexität einer Information. Ist die (binäre) Zeichenkette vollkommen zufällig, lässt sich die Information nicht weiter komprimieren. Man kann es sich als geschickt gestellte Folge von Fragen vorstellen, die jeweils mit Ja oder Nein zu beantworten sind. Obwohl jede beliebige, endliche Zahlenfolge

⁹⁶ Ebeling, W. et.al., Komplexe Strukturen: Entropie und Information, B.G.Teubner, Stuttgart-Leipzig, 1998, S. 36f

in den Nachkommastellen der Kreiszahl Pi gefunden werden kann⁹⁷ und somit scheinbar „zufällig“ verteilt ist, ist Pi jedoch durch ein einfaches Programm darstellbar.⁹⁸

Leonhard Susskind kommt über informationstheoretische Überlegungen zu einer adäquaten Definition der Entropie: *Die Entropie ist ein Maß der Zahl von Anordnungen, die einem bestimmten erkennbaren Kriterium entsprechen.* Lautet das Kriterium, dass es (z.B.) 65 Bits gibt, so ist die Zahl der Anordnungen 2^{65} , siehe.⁹⁹

Klima und Komplexität

Der Nobelpreis für Physik im Jahr 2021 widmete sich einem der drängendsten

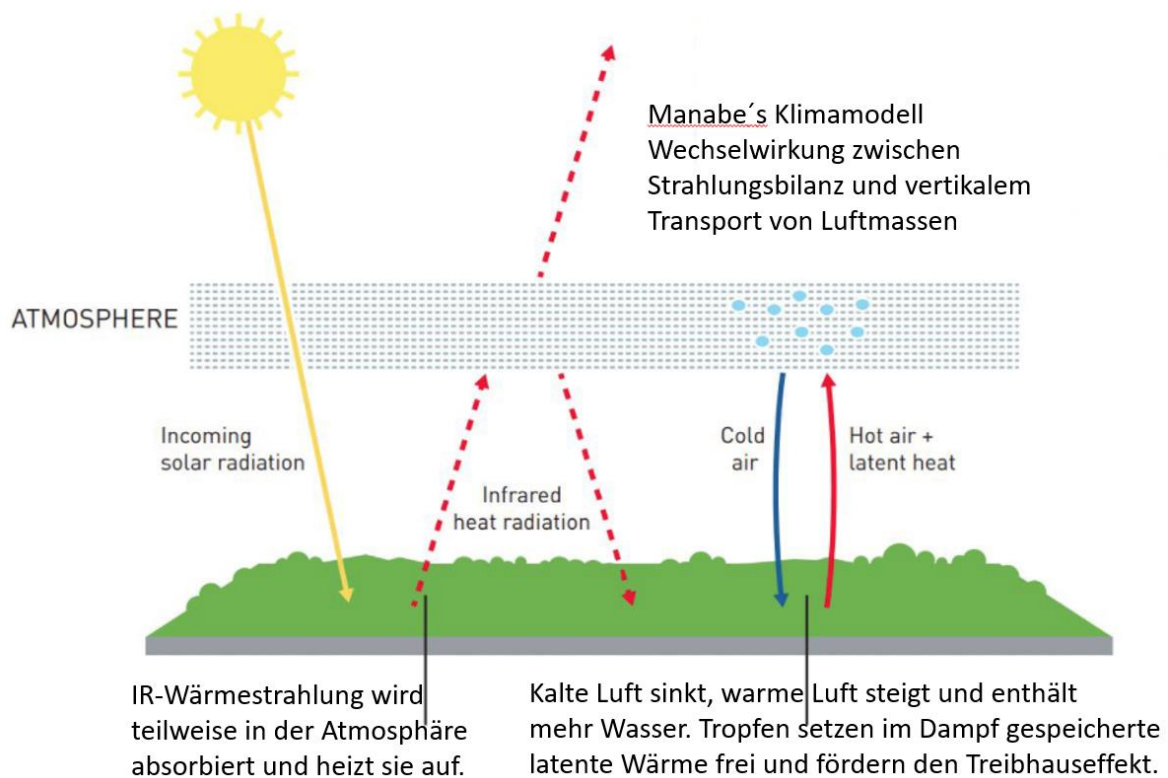


Abb. 48: Klimamodelle und Strahlungsbilanz

Probleme unserer Zeit: dem von Menschen gemachten Klimawandel. Wetter ist lediglich die lokale Ausprägung von Klima und beides erweist sich als hochkomplexes System, das einerseits die für chaotische Prozesse typische

⁹⁷ Man kann es z.B. mit dem Geburtsdatum ausprobieren: <http://www.angio.net/pi/> Mein 8-stelliges Geburtsdatum kommt als Zahlenstring in den ersten 200 Millionen Nachkommastellen von Pi dreimal vor.

⁹⁸ <https://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalsystem#Dezimalbruchentwicklung>

⁹⁹ Susskind, Leonhard, Der Krieg um das Schwarze Loch, Suhrkamp 2010, S. 154

Sensibilität von den Anfangsbedingungen aufweist, aber andererseits klare Abhängigkeiten der Wechselbeziehungen erkennen lässt.¹⁰⁰

Der Preis geht zur Hälfte an Sykuro Manabe und Klaus Hasselmann für die Entwicklung von Klimamodellen und der Analyse von Klimadaten im Hinblick auf Gesetzmäßigkeiten und Bereinigung um allgemeine, natürliche Effekte.

Giorgio Parisi hat das Verständnis für chaotische, zufällige und stochastische Phänomene wesentlich erweitert und sie auf kleinen und großen Skalen intensiv untersucht.

Manabe zeigte, wie sensibel die CO₂-Konzentration die Temperatur in der unteren Atmosphäre beeinflusst und welche Konsequenzen dies auf Klimamodelle hat.

Hasselmann verknüpfte Wetter und Klima und entwarf ein Modell, das wechselhaftes und zufälliges Wettergeschehen trotzdem innerhalb eines Klimamodells erklärbar macht.

Parisi entdeckte verborgene Strukturen in scheinbar ungeordneten komplexen Systemen und Materialien. Seine Beiträge zur Theorie komplexer Systeme

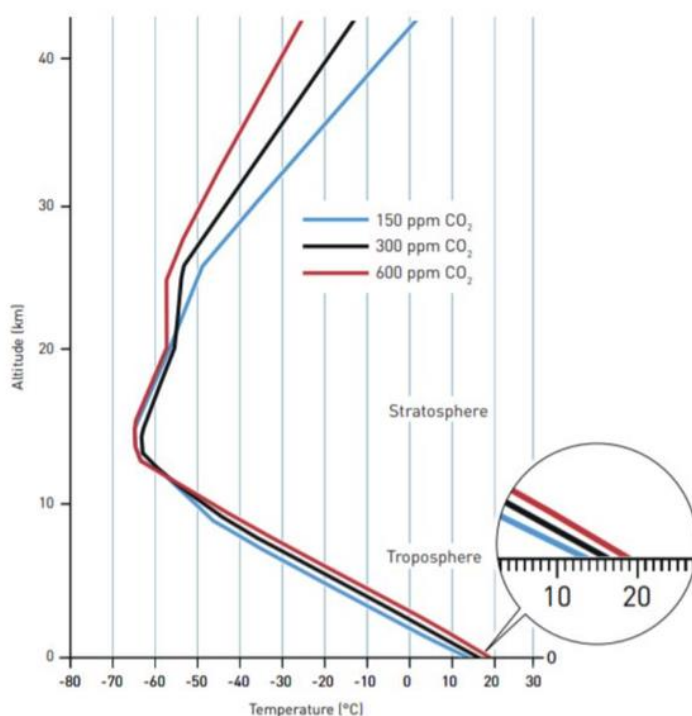


Abb. 49: Die Temperatur am Erdboden sinkt um 2,28 °C, wenn sich der CO₂-Gehalt halbiert. Sie steigt um 2,36 °C, wenn sich der CO₂-Gehalt verdoppelt.

lassen sich auf viele Phänomene in

unterschiedlichen

Disziplinen anwenden.

Grundlage aller Modelle ist

immer die Physik. Die

Datenbasis sind messbare

Parameter, also

meteorologische Größen wie

Temperatur, Niederschlag,

Wind oder Wolken. Die

Klimamodelle entstehen aus

dieser Datenbasis durch

statistische Methoden, wie

Durchschnittswerte oder

Standardabweichung.

Wetter selbst bleibt auf

mittlere Sicht

unvorhersehbar.

Konsequenzen für das Klima

sind jedoch klar erkennbar.

¹⁰⁰ Quelle der beiden Grafiken:

<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/popular-information/>

Ergänzt durch eigene deutsche Texte

Biologie

Die Logistische Gleichung und das Chaos

Ein schon früh in der Biologie untersuchtes Phänomen ist mit der sogenannten logistischen Gleichung bzw. Abbildung verbunden. Vorreiter war der Belgier Pierre François Verhulst (1804-1849), der bereits 1840 dazu Ergebnisse publizierte. Es ging zunächst vordergründig um die Entwicklung von Tierpopulationen, ihrer Dynamik durch begrenzte Ressourcen im Nahrungsangebot oder im Verhältnis zu Fressfeinden. Später konnten wesentlich allgemeinere Szenarien modelliert werden. Man kann daran chaotische Vorgänge studieren und Übergänge bzw. Querbeziehungen zwischen Ordnung und Chaos analysieren. Mathematisch handelt es sich um Iterationen einer sehr einfachen quadratischen Gleichung. Man geht von einem Startwert x_0 bei gegebener Konstante k aus und ermittelt einen Wert x_1 , der wiederum als neuer Ausgangswert in die Abbildung eingeht, usw.

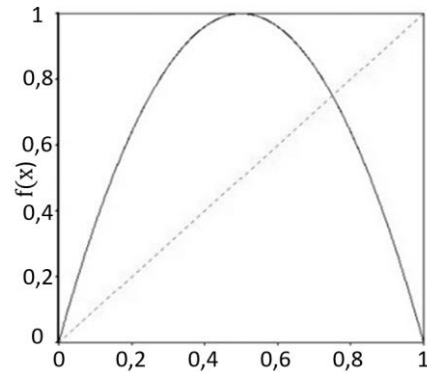


Abb. 50: Der einfache Graph der Logistischen Gleichung

In der Iterationsschreibweise:

$$x_{n+1} \rightarrow k \cdot x_n \cdot (1 - x_n), n \in \mathbb{N}$$

Als Funktionsgleichung geschrieben:

$$\begin{aligned} f(x) &= k \cdot x \cdot (1 - x) \\ &= -kx^2 + kx \end{aligned}$$

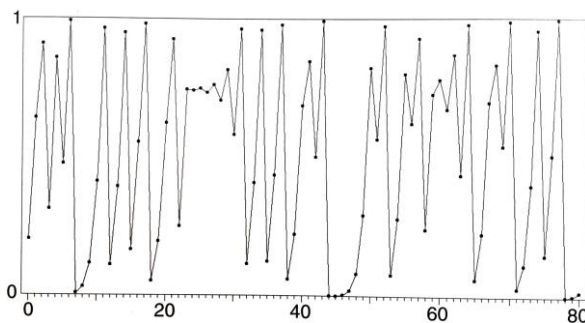


Abb. 51: Sensibilität von den Anfangsbedingungen

Man sieht, dass alle Werte zwischen 0 und 1 liegen. Parameter der Abbildung wurden von Verhulst mit Geburten- und Sterberaten bei gleichzeitig begrenzten Ressourcen für die Population assoziiert. Dabei fällt die extreme Sensibilität von den Anfangsbedingungen auf.

In Abb. 51 werden 80 Iterationen als Zeitreihe dargestellt.

$$x_{n+1} \rightarrow 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

Der Startwert $x_0 = 0,2027$, die Konstante k wird $k=4$ gewählt. Schon ein anderer Startwert, der sich um 10^{-6} von $x_0 = 0,2027$ unterscheidet, das entspricht bei

Tierpopulationen einem Individuum unter einer Million, führt nach wenigen Iterationen zu einem vollkommen anderen Verlauf der Zeitreihe.¹⁰¹

Wählt man bei gleichem Startwert $x_0 = 0,2027$ für die Konstante $k=3,742718$, so ergibt sich ein anderes Bild der Zeitreihe. Es entsteht ein periodisches Verhalten.¹⁰²

Die Logistische Gleichung zeigt auf, wie nahe Ordnung und Chaos beisammen liegen können. Dabei gibt es drei grundsätzliche Möglichkeiten:

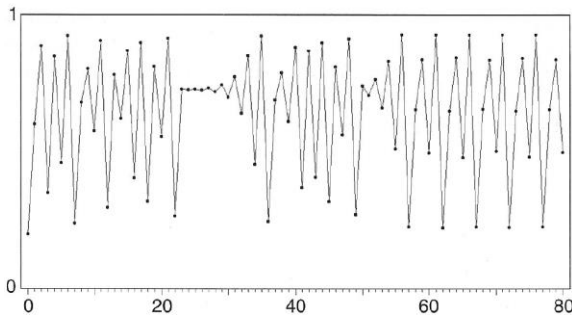


Abb. 52: Periodisches Verhalten bei anderer Konstante k

- 1) Die Zeitreihe der Iterationen verläuft chaotisch
- 2) Die Zeitreihe weist ein periodisches Verhalten auf
- 3) Die Werte nähern sich einem Fixpunkt

Dieses mathematische Verhalten zwischen Chaos und Ordnung existiert in äquivalenter Form auch in der Natur.

Fibonacci und die Sonnenblume: Mathematischer Erklärungsansatz¹⁰³

Der Goldene Schnitt findet sich in der Natur oft in seiner Entsprechung, der Teilung des Vollkreises im Verhältnis des Goldenen Schnittes. Es entsteht so der Goldene Winkel mit ca. 137,5 Grad. Offenbar ergeben sich in der Phyllotaxis dadurch Vorteile für eine Pflanze, z.B. in der Blattstellung, damit die Abdeckung der einzelnen Blätter untereinander so optimiert werden kann, dass das Sonnenlicht optimal genutzt wird. Weil bei endlich großen Abmessungen der Goldene Winkel immer nur angenähert werden kann, sind Quotienten aufeinanderfolgender Glieder der Fibonacci-Folge Mittel der Wahl, um Annäherungen an den Idealzustand zu erreichen. Natürlich finden sich auch Gegenbeispiele, aber bei einer Reihe von Bäumen, Kakteen oder Blüten finden sich Beispiele für eine entsprechende Phyllotaxis. Eine 2/5-Phyllotaxis findet sich bei Eiche, Apfelbaum und Aprikose. Eine 3/8-Phyllotaxis bei Pappel oder Birnbaum, 5/13-Phyllotaxis bei Weide und Mandelbaum.¹⁰⁴ *Echinopsis tubiflora*

¹⁰¹ Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S. 37

¹⁰² Peitgen et. al., S. 38

¹⁰³ Basis des Abschnitts ist die Erstveröffentlichung, Willi Kafitz, Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 66, Gießen 2016, S. 38 ff

¹⁰⁴ Beutelspacher, Albrecht; Petri, Bernhard; Der goldene Schnitt, Spektrum akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin – Oxford, 1996, Seite 128

(Familie Cactaceae) bildet eine 5, 8 Spirale, Mammillaria huitzilopochtli (ebenfalls Cactaceae) sogar 13, 21 Spiralen. Ein ausgeprägtes Beispiel ist ein Korbblütler, die Marguerite bildet 21, 34 Spiralen aus.¹⁰⁵ Das beste Beispiel ist jedoch die Sonnenblume, die eine 34, 55 Spiralstruktur ausbildet. Dieser Sachverhalt soll genauer mathematisch analysiert werden.

Für diesen Ansatz, der auf Herbert Vogel zurückgeht^{106,107}, werden eine reife

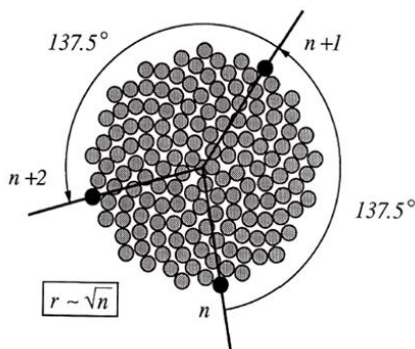


Abb. 53: 2-dimensionales Modell nach Herbert Vogel

Sonnenblume und ihre Fruchtanordnung so idealisiert, dass man auf dieser Basis rechnen kann. Ein Sonnenblumenkern wird als kreisförmig angenommen und der Radius wird 1 gesetzt. Der n-te Sonnenblumenkern hat dann einen Abstand \sqrt{n} von der Mitte. Die Gesamtanordnung der reifen Sonnenblume soll ebenfalls nahezu kreisförmig sein. Bei der Anordnung der Kerne werden zwar immer Leerräume bleiben, weil eine vollständige Parkettierung nicht möglich ist, trotzdem ist der Gesamtflächeninhalt aller Kerne zum

Flächeninhalt des idealisierten Kreises proportional. Damit kann man für eine beliebige, nur vom Winkel abhängige Packung, dem n-ten Sonnenblumenkern die Koordinatenposition

$$\begin{pmatrix} \omega_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot \omega \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \omega = 2\pi \cdot \varphi$$

zuordnen. Dazu ist das gesuchte ω das 2π -fache eines geeignet gewählten Winkels φ (siehe dazu ausführlicher die Literaturstelle Hellwig Heino; Phyllotaxis – Über Zahlen und Pflanzen, Skript der Humboldt-Universität zu Berlin). Der Flächeninhalt aller Kerne ist proportional zur Kreisfläche. Es geht darum, den optimalen Winkel bezogen auf den Vollkreis von 2π zu finden, so dass eine ideale Packungsdichte entsteht und möglichst die auftretenden Fibonacci-Zahlen erklärt werden. Dabei kann man leicht durch Beweis ausschließen, dass der Winkel rational ist, sondern irrational sein muss. Es würden sonst Strahlen, nicht Spiralen, entstehen. Für die Approximation kommt die Kettenbruchentwicklung ins Spiel. Der Winkel $\varphi = \omega/2\pi$ wird dann am besten approximiert,

¹⁰⁵ Das Smith College in Northampton, Massachusetts betreibt die Webseite „An Interactive Site for the Mathematical Study of Plant Formation“ (<http://www.math.smith.edu/~phylo/> zuletzt überprüft am 04.02.2022, siehe „gallery“ für die Beispiele).

¹⁰⁶ Vogel, Helmut, 1979. A better way to construct the sunflower head, Mathematical Biosciences 44 (1979), no. 3-4, 179–182

¹⁰⁷ Frei nach Vogel, Helmut, 1979. A better way to construct the sunflower head, Idee und Grafik im Skript von Heino Hellwig, Humboldt-Univ., Berlin

wenn er wegen $\Phi = 1 + 1/\Phi$ die Kettenbruchentwicklung $[0, 1, 1, 1, 1, \dots] = \Phi - 1 = 1/\Phi$ hat. Es gilt somit

$$\omega = \frac{2\pi}{\Phi} \text{ bzw. } \omega = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = 2\pi \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 2\pi \cdot \varphi$$

$$(2\pi \cdot 0,618 = 3,88.. \approx 222,5^0)$$

Nun ist aber zu berücksichtigen, dass etwa gleich große Sonnenblumenkerne die gegenläufige 34,55-Spiralstruktur bilden. Würde es eine bessere Approximation des Winkels durch andere Zahlen als den Quotienten der Fibonacci-Zahlen 34/55 geben? Hier kommt der Begriff der „Konvergente“ zum Tragen.

Fibonacci-Zahlen sind sog. Konvergenten, d.h.

$$\frac{f_{n-1}}{f_n} < \frac{\omega}{2\pi} < \frac{f_n}{f_{n+1}}$$

Es zeigt sich, dass tatsächlich die Fibonacci-Quotienten die beste Näherung an den Goldenen Schnitt und den Goldenen Winkel darstellen. Mathematisch gesprochen sind sie eine „gute Näherung 2. Art“. Beim Beweis wird eine 2.300 Jahre alte Technik benutzt, die auf Euklid zurückgeht. Es geht dabei darum, den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zu bestimmen. Die dabei ermittelten Koeffizienten sind nämlich die entsprechenden Glieder des Kettenbruchs und müssen für einen optimalen Winkel $\omega/2\pi = [0, 1, 1, 1, 1, \dots]$ ergeben. Dies ist aber nichts anderes als $\Phi - 1 = 1/\Phi$. In der Anmerkung wird eine „gute Näherung 2. Art“ exakt definiert.¹⁰⁸ Salopp formuliert ist dies eine Folge rationaler Zahlen, die bei immer größerem Nenner die irrationale Zahl x „optimal“ annähern. Die Koeffizienten in der ggT-Berechnung bilden dabei die „Teilnenner“ in der unendlichen Kettenbruchdarstellung von x . Bricht man die Kettenbruchdarstellung nach endlichen Schritten ab, so erhält man eine Folge von rationalen Konvergenten für das irrationale x bis zum jeweiligen Näherungswert. Das nachfolgende Beispiel soll dies illustrieren:

¹⁰⁸ Def.: p/q heißt „**gute Näherung 2. Art**“ für $\alpha \in \mathbb{R}$ wenn für alle p'/q' mit $q' < q$ gilt:
 $|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|$.
Def.: $x = [a_0, a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$, $P_i/Q_i = [a_0, a_1, \dots, a_i]$ heißt i -te **Konvergente** und a_i heißt i -ter **Teilnenner** von x .

<u>Euklid</u>	<u>Beispiel</u>	<u>Euklid umgestellt</u>	<u>Kettenbruch</u>
$m = a_0 n + r_1$	$m = 3927, n = 2090$	$m/n = a_0 + r_1/n$	$\frac{m}{n} = \frac{3927}{2090} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6}}}}$
$n = a_1 r_1 + r_2$	$3927 = 1 \cdot 2090 + 1837$	$n/n_1 = a_1 + r_2/r_1$	
$r_1 = a_2 r_2 + r_3$	$2090 = 1 \cdot 1837 + 253$	$r_1/r_2 = a_2 + r_3/r_2$	
$r_2 = a_3 r_3 + r_4$	$1837 = 7 \cdot 253 + 66$:	
$r_3 = a_4 r_4 + r_5$	$253 = 3 \cdot 66 + 55$:	
:	$66 = 6 \cdot 11$:	$3927/2090 = [1, 1, 7, 3, 6]$
$r_{k-1} = a_k r_k$	$r_k = \mathbf{11}$ ist ggT von m, n	$r_{k-1}/r_k = a_k$	

Man kann im **2. Hauptsatz der Kettenbruchentwicklung** zeigen, dass die so gebildeten Konvergenten die jeweils **beste Näherung 2. Art** von x darstellen.

$$\frac{f_{2k}}{f_{2k+1}} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < \frac{f_{2k+1}}{f_{2k+2}}$$

Die jeweils nächsten Fibonacci-Zahlen in Zähler und Nenner erfüllen die beste Näherung 2. Art an

$$\varphi = \Phi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = [0, 1, 1, 1, \dots]$$

Über diesen Weg lässt sich beweisen, dass Quotienten von benachbarten Fibonacci-Zahlen tatsächlich die beste rationale Näherung an Phi darstellen.¹⁰⁹ Daraus ergibt sich schließlich durch Beweis belegt die entscheidende Folgerung, dass tatsächlich die Quotienten benachbarter Fibonacci-Zahlen als rationale Zahlen und Konvergenten die beste Näherung (sogenannter 2. Art) an die irrationale Zahl Φ bilden. Dies gilt auch für verallgemeinerte Fibonacci-Folgen mit beliebigen natürlichen Zahlen f_0 und f_1 als Rekursionsanfang. Diese scheint die Natur aber nicht zu bevorzugen.

Der Goldene Schnitt und der Goldene Winkel haben für verschiedene Optimierungsaufgaben in der Natur eine herausragende Bedeutung. Weil aber beim Wuchs, bei Blattanlagen oder bei Fruchtständen mit Kernen einer bestimmten Größe immer nur Näherungen zum Tragen kommen, tauchen so viele Fibonacci-Zahlen auf. Denn die Quotienten von benachbarten Fibonacci-Zahlen approximieren den benötigten optimalen Goldenen Winkel am besten.

Die Anzahl der gegenläufigen Spiralen sind somit oft zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen. Weil der Divergenzwinkel ω den Vollkreis im Verhältnis Goldener Schnitt Φ schneidet, findet man deshalb so häufig die Fibonacci-Zahlen in der Natur.

¹⁰⁹ Siehe dazu H. Vogel, Mathematical Biosciences, Volume 44, Issue 3-4, June 1979, Pages 179-189

SIR – Modell einer Epidemie

Mit der COVID-19-Pandemie sind Biomathematiker und mathematisch orientierte Epidemiologen in den Fokus der breiten Öffentlichkeit gekommen. Das klassische epidemiologische Modell, wie sich eine Epidemie prinzipiell ausbreitet, wurde bereits 1927 von Kermack und McKendrick veröffentlicht.¹¹⁰ Die Publikation trägt den Titel „*A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics.*“

Das Modell gilt als Ausgangspunkt aller Weiterentwicklungen und ist auch noch heute in den wesentlichen Gedanken prägend für die Voraussagen und Gegenmaßnahmen zur Eindämmung der Infektionen bei SARS-CoV-2. Bereits 2002/2003 sprach die WHO von einer Pandemie, die das SARS-CoV-1 Virus ausgelöst hatte. Sie betraf 25 Länder, forderte 774 Todesfälle und infizierte etwa 8.100 Menschen.¹¹¹

Das Modell hat eine Reihe von sechs Kennzahlen und Koeffizienten. Es wird nach den maßgeblichen Werten als SIR-Modell bezeichnet:

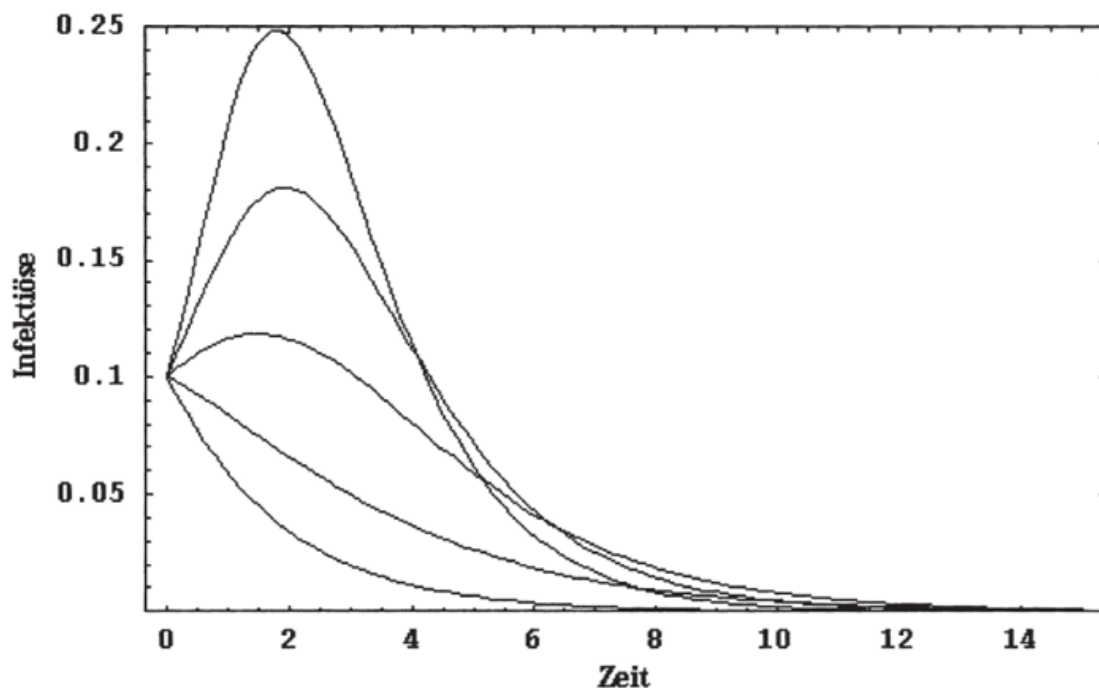


Abb. 54: Verlauf einer Epidemie in Abhängigkeit von der R_0 (s.u.).

SIR steht für

S: Sensitive

I: Infektiöse

R: Ausgefallene (immun oder gestorben, englisch removed)

¹¹⁰ <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1927.0118>

¹¹¹ https://de.wikipedia.org/wiki/SARS-Pandemie_2002/2003

Mathematisch wird die Übertragung der Krankheit wie eine chemische Reaktion 2. Ordnung behandelt. Dabei hängt die Reaktionsgeschwindigkeit linear von der Konzentration der Ausgangsstoffe ab.

Das Modell beruht auf drei einfachen Differentialgleichungen nach der Zeit, wobei β =Kontaktrate, γ =Ausfallrate, D =Diffusionskoeffizient.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta IS \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}$$

D.h. die Gesamtzahl $N = S + I + R = \text{const.}$

Der „R-Wert“, der in der jetzigen Pandemie in aller Mund war, ist entscheidend für Ausbruch und Verlauf des Infektionsgeschehens. Ist er größer 1, so infiziert ein Individuum im Schnitt mehr als ein anderes Individuum und die Krankheit hat im Extremfall ein exponentielles Wachstumsverhalten.

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma} > 1$$

Die Grafik¹¹² zeigt fünf zeitliche Verläufe in Abhängigkeit vom „R-Wert“. Ist $R_0 < 1$ so klingt die Epidemie mehr oder weniger schnell ab (die beiden unteren Kurven). Ist $R_0 > 1$ so bricht die Epidemie aus und nimmt je nach R_0 zu.

Pfannkuchensortierung

Trotz des ungewöhnlichen Titels handelt es sich um ein seriöses mathematisches Problem und ist ein weiteres Beispiel dafür, wie durchaus auch scheinbar spielerische Aufgabenstellungen in der Mathematik sinnvolle Anwendungen in der Biologie haben können. Hier unterstützt die Mathematik die gerade in Zeiten der Pandemie höchst wichtige Genomsequenzierung, z.B. der unterschiedlichen Mutanten des Corona-Virus.

Ein weiteres Beispiel ist die Knotentheorie, ein Teilgebiet der Topologie.¹¹³

Ein menschlicher DNA-Strang ist in der bekannten Doppelhelixstruktur ca. ein Meter lang. Im Zellkern ist er auf fünfmillionstel Meter regelrecht zusammen geknäuel. Trotzdem funktioniert bei der Zellteilung Replikation und dann

¹¹² Quelle Grafik und inhaltliche Anregung: Richter, Otto, Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 54, 2004, S.89-113, online <https://core.ac.uk/download/pdf/196660982.pdf>

¹¹³ de.wikipedia.org/wiki/Knotentheorie

Trennung der beiden Stränge. Man muss sich fragen, wie das der Natur gelingt. Auch hier unterstützt die Mathematik die Genetik.

Was ist nun gemeint mit der Pfannkuchensortierung? Es geht darum, einen Stapel von n unterschiedlich großen, flachen Objekten (genannt „Pfannkuchen“, englisch „pancakes“) nach der Größe der Objekte zu sortieren. Dabei steht ein Spatel zur Verfügung, der eine beliebige Anzahl $m \leq n$ an Pfannkuchen aufnimmt und diesen Teilstapel umdreht. Das wird so lange an geeigneten Stellen im Stapel fortgesetzt, bis der ganze Stapel nach der Größe sortiert ist. Die Problemstellung ist die Frage, wieviel Drehoperationen („Flips“) in Abhängigkeit von der Anzahl n der Pfannkuchen im Stapel nötig sind.

Eine Verschärfung der Problemstellung besteht darin, dass die oben/unten-Orientierung der Objekte („einseitig verbrannte Pfannkuchen“) berücksichtigt werden muss. Es soll also im ganzen Stapel, sortiert nach der Größe, z.B. immer die „verbrannte“ Seite unten liegen. In der Abbildung ist dies angedeutet, in dem die dunkle Seite der oberen drei Pfannkuchen nun nach oben zeigt.

Mathematisch betrachtet, sind jeweils Paare von Elementen zu betrachten und die Schritte / Flips bis zur endgültigen Sortierung zu minimieren. Die Aufgabenstellung ist also im Bereich der „Diskreten Mathematik“ anzusiedeln.

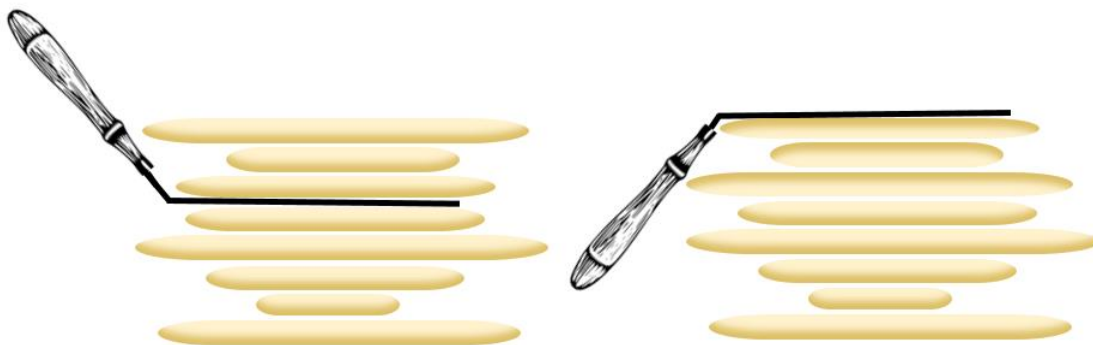


Abb. 55: Beispiel einer Drehoperation / Flip mit drei Pfannkuchen bei einem Stapel von insgesamt acht Pfannkuchen.

Ursprünglich wurde das Problem von Jacob E. Goodman diskutiert. Der genaue Wert war nicht bekannt, aber es konnte gezeigt werden, dass höchstens $2n - 3$ Flips nötig sind ($n \geq 2$) und der Wert ungefähr zwischen $1,07n$ und $1,64n$ liegt. Im Jahr 1979 erschien ein Artikel von William Gates und Christos Papadimitriou. Es war die einzige wissenschaftliche Publikation von Gates, der später als Bill Gates bekannt wurde und der Mitbegründer von Microsoft ist. Sie gaben eine Untergrenze von $1,06n$ Flips und eine Obergrenze von $1,06 \frac{(5n+5)}{3}$ an. Die Werte wurden immerhin erst 30 Jahre später verbessert. Im Jahr 2011 wurde eine lange unbeantwortete Frage von Laurent Bulteau, Guillaume Fertin und Irena Rusu entschieden. Sie bewiesen, dass das Problem, die kleinste Anzahl

an Flips zu finden, NP-schwer ist ("non-deterministic polynomial acceptable problems").^{114,115}

Für die Biologie, Biochemie bzw. Bioinformatik und damit auch für die Genomsequenzierung stellt sich z.B. die Frage nach „Präfixumkehrungen für Zeichenfolgen“ oder der Komplexität genetischer Mutationen. (Siehe dazu die Literatur zu „Pancake_sorting“).

Chemie

Die Avogadrokonstante N_A

Chemiker rechnen bei Stoffmengen mit dem Mol als Einheit. Das Mol ist das Atomgewicht eines Elementes oder das Molekulargewicht einer chemischen Verbindung in Gramm. Das ist deshalb so wichtig, weil damit Vergleichbarkeit gewährleistet ist, denn ein Mol jedes beliebigen reinen Stoffes enthält die gleiche Menge an Teilchen. Die Konstante ist nach Amadeo Avogadro (1776-1856) benannt und wird ihm zu Ehren N_A genannt.

$$N_A = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Ohne die Einheit „pro Mol“ nennt man sie einfach Avogadro-Zahl.

Es lag ein 200 Jahre alter Streit dazwischen, bis endlich akzeptiert wurde, dass die Materie durch kleinste Teilchen, die Atome, aufgebaut ist. Noch der einflussreiche Naturforscher und Philosoph Ernst Mach (1838-1916) würgte Diskussionen Anfang des 20. Jahrhunderts, wenn die Sprache auf Atome kam, mit den Worten ab „*Ham's schon eins gesehen?*“ Albert Einstein konnte 1905 die erstmals vom schottischen Botaniker Robert Brown im Jahr 1827 entdeckte Brownsche Molekularbewegung quantitativ über die Theorie der Wärme erklären und damit die Existenz von Atomen und Molekülen endgültig bestätigen.

Avogadro schuf bereits 1811 wichtige Grundlagen, um über Proportionen quantitative Aussagen zu erhalten. Er erkannte, dass ideale Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur in gleichen Volumina die gleiche Anzahl an Molekülen oder Atomen enthalten. Später gelang es Johann Josef Loschmidt

$$N_A = \frac{\text{Teilchenanzahl}}{\text{Stoffmenge}} = \frac{N}{n} \left[\frac{1}{\text{mol}} \right]$$

Abb. 56: Definition der Avogadro-Konstante

¹¹⁴ <https://en.wikipedia.org/wiki/NP-hardness>

¹¹⁵ Grundlage für das Kapitel siehe https://de.wikibrief.org/wiki/Pancake_sorting

(1821-1895) die Größenordnung von Molekülen zu bestimmen. Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906) hat dann die Menge an Teilchen in einem Kubikzentimeter Luft „Loschmidtsche Zahl“ genannt, die lange mit der Avogadrozahl verwechselt wurde. Erst ab 1909 setzte sich der heutige Begriff durch. N_A wurde immer genauer experimentell bestimmt und es wurde festgesetzt, dass N_A ein Zwölftel eines Mols des Kohlenstoffisotops $^{12}_6C$, 12 Gramm, sein sollte.

Um möglichst unabhängig von Messungen zu werden, beschloss das Comité International des Poids et Mesures (CIPM) am 16. November 2018 in Versailles eine grundlegende Revision des Internationalen Einheitensystems (SI). In Zukunft werden sich alle SI-Einheiten auf die festgelegten Werte von sieben ausgewählten Naturkonstanten beziehen.¹¹⁶ Es sind Kilogramm, Mol, Ampere und Kelvin, mit den definierenden Konstanten Plancksches Wirkungsquantum h , Avogadrokonstante N_A , Elementarladung e und Boltzmannkonstante k . Die anderen drei Basiseinheiten sind Sekunde, Meter und Candela („Lichtstärke“). Sie werden lediglich sprachlich neu formuliert,¹¹⁷ was keine Auswirkung auf Messexperimente hat. Die Messungen der Physikalisch-technischen Bundesanstalt (PTB) in Berlin und Braunschweig spielen neben anderen Instituten in der Welt eine wichtige Rolle für die Neudefinitionen der Einheiten. Besonders die Avogadro-Konstante und das Plancksche Wirkungsquantum sind wesentliche Eckpfeiler im neuen Einheitensystem. Die Messung dieser Konstanten wurden und werden im internationalen Avogadroprojekt¹¹⁸ vorangetrieben. Dabei werden Atome in Kugeln aus hochreinem Silizium-28 gezählt. Aus diesem Material wurden Einkristalle gezüchtet und extrem gleichmäßige Kugeln gefertigt. Mit der sogenannten X-Ray-Crystal-Density-Methode können die Atome gezählt werden. Die relative Unsicherheit der Avogadro-Konstante soll $1 \cdot 10^{-8}$ oder besser werden.

Erkenntnisprozesse in der Chemie

Isomere Verbindungen haben die gleiche Summenformel, sind aber in der Regel unterschiedliche Stoffe mit teilweise grundlegend anderen Eigenschaften. Das erste entdeckte Paar war Silberfulminat $Ag^{\oplus}(O-N \equiv C)^{\ominus}$ und Silbercyanat $Ag^{\oplus}(O-C \equiv N)^{\ominus}$ ¹¹⁹. Doch das berühmteste Beispiel sind die Isomere

¹¹⁶ <https://www.ptb.de/cms/de/forschung-entwicklung/forschung-zum-neuen-si/ptb-experimente/kilogramm-und-mol-atome-zaehlen.html>

¹¹⁷ <https://www.ptb.de/cms/de/forschung-entwicklung/erausforderungen-und-perspektiven/das-neue-system-der-einheiten.html>

¹¹⁸ <https://www.ptb.de/cms/de/ptb/fachabteilungen/abt3/fb-31/ag-311/avogadro-projekt.html>

¹¹⁹ Erste Ergebnisse im Jahr 1820 durch Justus Liebig, Gay-Lussac und Friedrich Wöhler, Beweis der Isomerie 1824; Ann. Physik, 1, 87 (1824) J. Liebig, J.L. Gay-

Ammoniumcyanat $\text{H}_4\text{N}^{\oplus} \ominus\text{O}-\text{C}\equiv\text{N}$ und Harnstoff $\text{O}=\text{C}(\text{NH}_2)_2$. In der endothermen Wöhlerschen Harnstoffsynthese wurde 1828 erstmals ein organischer Stoff durch das Eindampfen einer wässrigen Lösung aus Ammoniumcyanat hergestellt.¹²⁰ Das war der historische Anlass für die terminologische Trennung von organischer Chemie und anorganischer Chemie. Es war ein Vorgang auf der experimentellen, stofflichen Ebene, der verdeutlichte, dass diese Unterscheidung zwischen zwei grundlegenden Disziplinen der Chemie notwendig wurde.

Ein Umdenken auf der mentalen Ebene kann man an der Diskussion um die Molekülstruktur z.B. von Benzol erkennen. Die eigentliche Molekülstruktur wurde erst durch die Quantenphysik erklärlich (siehe zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung).

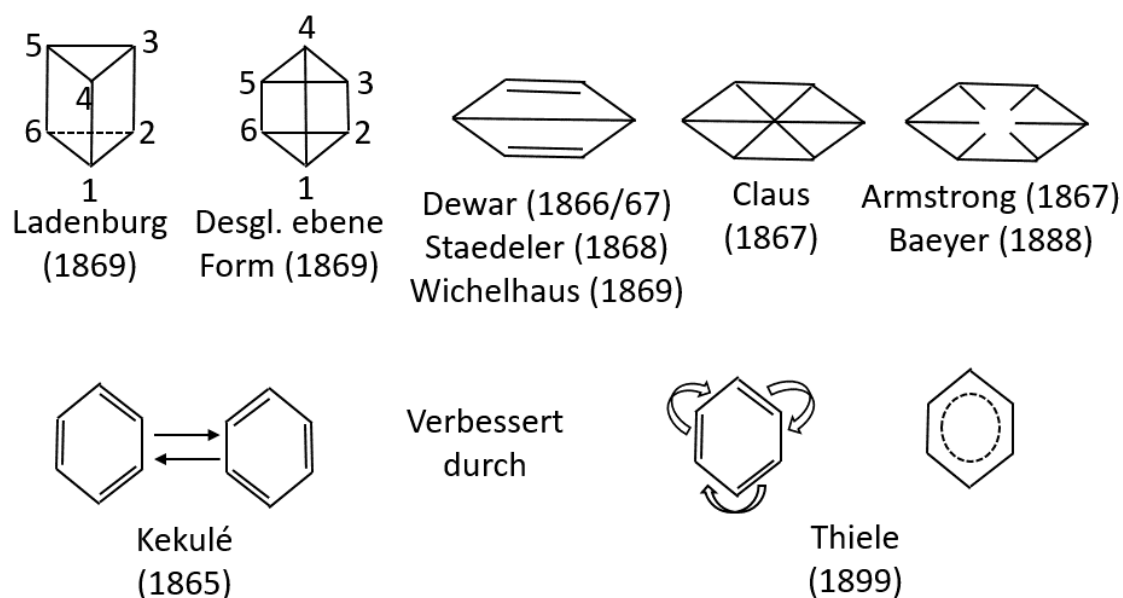


Abb. 57: Vorgeschlagene Strukturformeln für das Benzol.

Eine schöne Übersicht über die Vorschläge zur Strukturformel findet sich bei Klages.¹²¹

Die alternierenden Doppelbindungen werden durch sogenannte π -Elektronen gebildet. Eigentlich müssten die Doppelbindungen deutlich kürzer als Einfachbindungen sein. Aber Benzol besitzt sechs gleich lange Bindungen von 139 pm. Eine Einfachbindung wäre etwa 147 pm lang und eine Doppelbindung

Lussac und Ann. Physik, 1, 117 (1824) F. Wöhler; siehe auch Sieghard Neufeldt, Chronologie Chemie: Entdecker und Entdeckungen, John Wiley & Sons, 2016.

¹²⁰ Siehe z.B. O. Wallach (Hg.): Briefwechsel zwischen J. Berzelius und F. Wöhler; Sändig Reprint Verlag, Hans R. Wohlwend, Vaduz/Liechtenstein 1984.

¹²¹ Friedrich Klages, Lehrbuch der organischen Chemie, Bd. 2, Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1962, S. 200 und 201

etwa 135 pm. D.h. die Bindung im Benzol liegt zwischen Einfach- und Doppelbindung. In den sechs 2p-Orbitalen (siehe Abb. 57) befinden sich nur sechs Elektronen, die oberhalb und unterhalb der Molekülebene delokalisiert sind. Diese Tatsache erkannte im Jahr 1930 Linus Pauling. Dies macht die Eigenschaft der Aromaten aus und wird gerne durch einen Ring im Sechseck ausgedrückt. Der Energieunterschied zwischen den beiden Kekulé-Formeln und der Thiele-Formel rechts beträgt 151 kJ/Mol, die die delokalisierte Form energetisch günstiger ist.

Pseudolineare Farbstoffe – ein quantenmechanisches Modell der Farbe

Für die Lichtabsorption eines Farbstoffes sind im Wesentlichen die

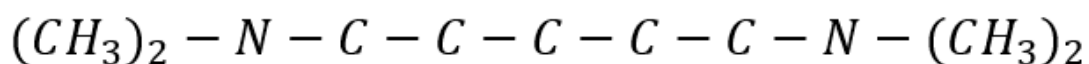


Abb. 58: Die π -Elektronen befinden sich vorwiegend oberhalb und unterhalb der Molekülebene.

delokalisierten π -Elektronen verantwortlich. Wie immer ist natürlich die Energiebilanz treibende Kraft einer Strukturbildung. Aber im Gegensatz zu den Aromaten, wie dem farblosen Benzol, entsteht Farbe durch „stehende Elektronenwellen“ in einem sogenannten Potentialtopf. Der Begriff „Topf“ ist hier gut gewählt, denn die Welle wird in einem niedrigen Energieniveau ausgebildet und durch deutlich höhere Barrieren lokal begrenzt. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen außerhalb der Barrieren ist zwar auch bei einer unendlichen Potentialbarriere durch die Heisenbergsche Unschärferelation nicht gleich Null („Tunnel-Effekt“), aber deutlich geringer.

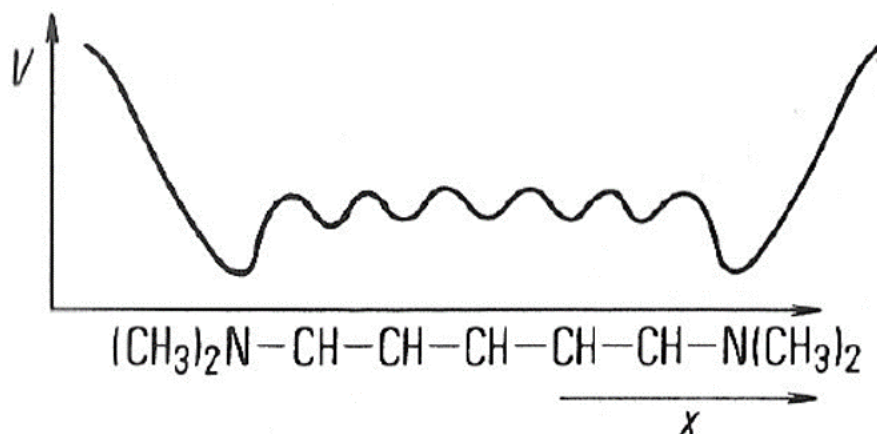


Abb. 59: Potentielle Energie V eines Elektrons im π -Elektronensystem

Modellhaft lassen sich diese Bindungsverhältnisse an Cyanin-Farbstoffen erklären.¹²²

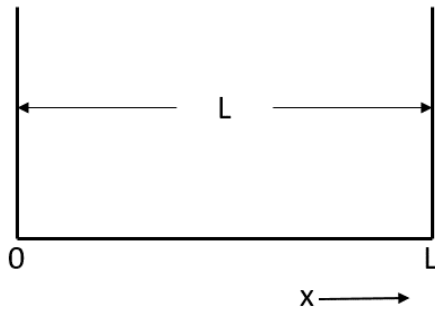


Abb. 60: Vereinfachende Darstellung des Potentialtopfes

Ein Potentialtopf zeichnet sich durch hohe Ränder und deutlich niedrigere potentielle Energie in einem Bereich aus, in dem sich die stehende Welle der π -Elektronen ausbilden kann.

Abb. 59 zeigt, dass der Energieaufwand hoch ist, die π -Elektronen aus dem energetisch günstigen Bereich zu entfernen. Für eine prinzipielle Rechnung reicht es, sich den Potentialtopf so

vorzustellen, dass die Ränder beliebig hoch sind und sich die π -Elektronen über die Länge L delokalisiert aufhalten. In dieser Vereinfachung werden die π -Elektronen als frei bewegliche, aber stehende, interferierende de Broglie Elektronenwellen angenommen, die an den Rändern reflektiert werden und in x-Richtung linear, also eindimensional sind. Die Auslenkung von ψ ist

$$\psi = A \sin \frac{n\pi}{L} \cdot x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Der Amplitudenfaktor ist willkürlich, sollte aber der Einfachheit halber so gewählt werden, dass die Normierungsbedingung

$$\int_0^L \psi^2 dx = 1$$

gilt. Die Wellenfunktion ψ ist dann

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Die Wellenlängen sind

$$\Lambda = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Geschwindigkeit u eines Elektrons errechnet sich nach de Broglie zu

$$\Lambda = \frac{h}{m \cdot u}$$

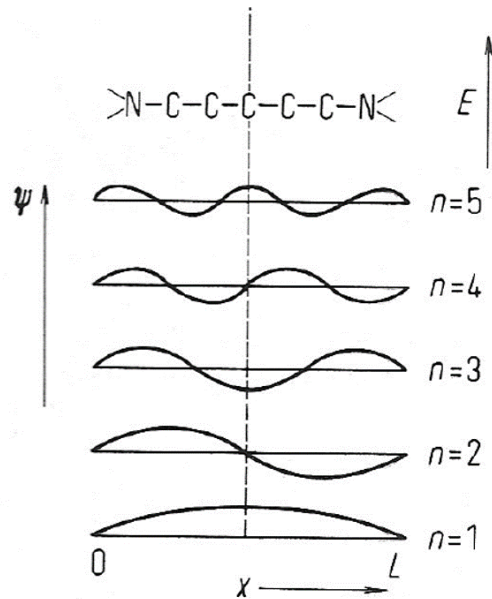


Abb. 61: Stehende π -Elektronenwellen

¹²² Grafiken und Herleitung nach Försterling/Kuhn, Physikalische Chemie in Experimenten, Verlag Chemie, 1971, Weinheim/Bergstraße, S. 373/374

(h = Plancksches Wirkungsquantum, m = Elektronenmasse, V = Potentielle Energie V eines Elektrons im π -Elektronensystem)

Die Gesamtenergie E eines π -Elektrons ist

$$E = V + \frac{m}{2} u^2 = V + \frac{h^2}{2m\lambda^2} = V + \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

Dieser Abschnitt könnte genauso gut bei den wichtigen physikalischen Theorien stehen. Im Gegensatz zur zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung, die insbesondere Teilchenverhalten und Interaktionen auch außerhalb von Atomen und Molekülen zeitabhängig beschreibt, erklärt die zeitunabhängige, nicht-relativistische Schrödinger-Gleichung das Verhalten von Elektronen im Atom- bzw. Molekülverbund. Sie ist deshalb eine wesentliche theoretische Grundlage der gesamten Chemie. Überall, wo man von Bahnen, Orbitalen oder auch spektroskopischen Effekten spricht, ist diese Beziehung die mathematische Beschreibung und physikalische Begründung für chemisches Verhalten. Es geht also um ein stationäres Verhalten, wo für die potentielle Energie E_{Pot} nur der Ort und nicht die Zeit variabel sind, wie dies in einem Atom im einfachsten Fall angenommen werden kann. Louis de Broglie hatte postuliert, dass jedes (Quanten-)Objekt sowohl Wellen- als auch Teilchencharakter hat.

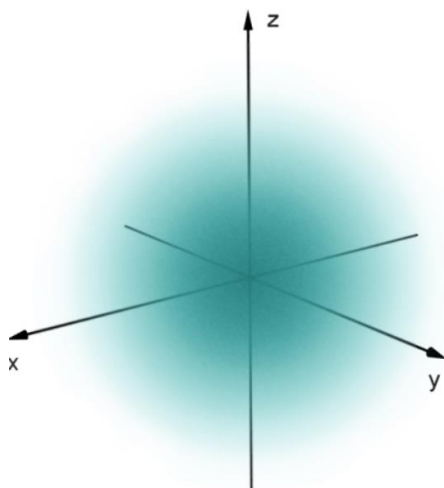


Abb. 62: Darstellung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im 1s-Orbital durch eine Punktwolke

Man spricht vom Welle-Teilchen Dualismus. Werner Heisenberg und Erwin Schrödinger setzten auf dieser Erkenntnis auf und entwickelten unabhängig voneinander zwei vollkommen unterschiedliche mathematische Beschreibungen. Es stellte sich jedoch heraus, dass beide Theorien vollkommen äquivalent sind. Weil der Ansatz von Schrödinger auf handlicher beschreibbaren Wellen beruht, während Heisenberg eine Matrizenrechnung zugrunde legte, setzte sich der Weg von Schrödinger durch. Allerdings ist die gesuchte Wellenfunktion $\psi(x)$, z.B. eines Elektrons in einem Wasserstoff-Atom, auch in der Schrödinger-Gleichung weitgehend unanschaulich. Lediglich der Betrag ihres

Quadrates $|\psi(x)|^2$ kann als Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des

Teilchens/der Welle an einem Ort interpretiert werden. Genauer: $|\psi(x)|^2 \cdot \Delta x$ ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Raumbereich Δx anzutreffen.¹²³

Man geht von der klassischen Wellengleichung aus, also einer eindimensionalen Welle, die sich in x-Richtung sinus-förmig ausbreitet. Sie benötigt eine Zeitspanne Δt . Von $x=0$ bis $x=\lambda$ entspricht diese Zeitspanne der Periodendauer: $\Delta t=T$:

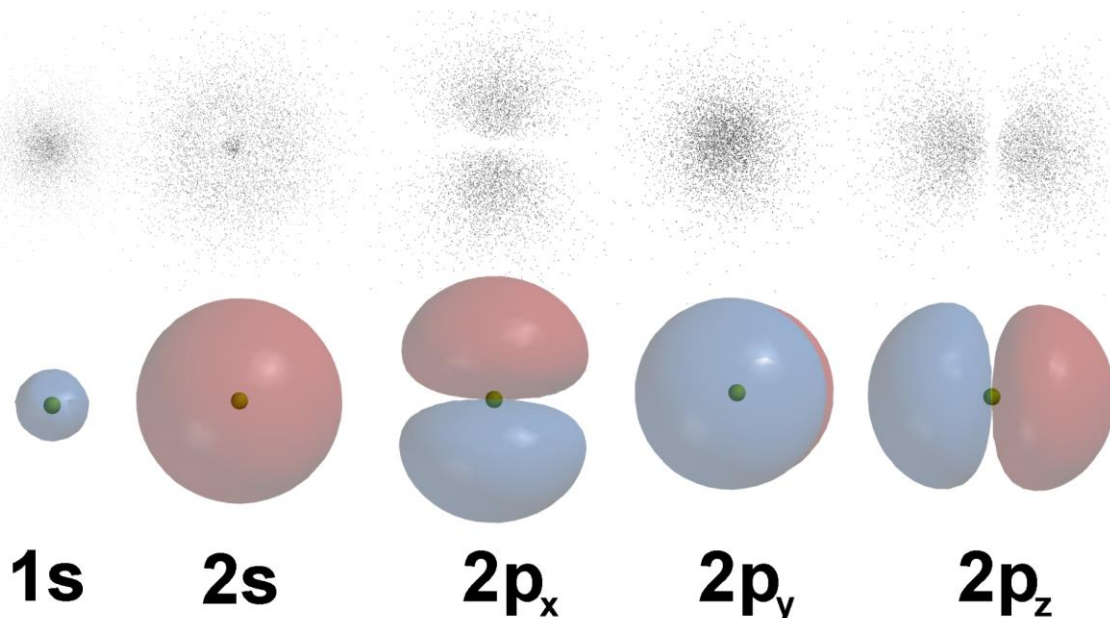


Abb. 63: Darstellung unterschiedlicher Orbitale der ersten und zweiten Elektronenschale.

$$y(x, t) = y_{max} \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Im stationären Fall gilt vereinfachend

$$y(x) = y_{max} \cdot \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

Im stationären Fall der Schrödinger-Gleichung hat man stehende Wellen in einem Potentialtopf der Breite L , in den nur ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ passt (siehe voriges Kapitel).

$$\psi(x) = y_{max} \cdot \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

Mit der Potentialtopf-Bedingung $L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ bzw. $\lambda = \frac{2L}{n}$

In verkürzter Darstellung lautet die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

¹²³ Bildquellen: <https://de.wikipedia.org/wiki/Atomorbital>

Man wendet auf die gesuchte Wellenfunktion ψ eine Rechenvorschrift (den Hamilton-Operator) an und erhält sog. Eigenwerte von ψ .

\hat{H} ist also mehr als ein Parameter; es ist eine Vorschrift, die in dem 3-dimensionalen Koordinatensystem x, y, z (hier ohne t , da zeitunabhängig) anzuwenden ist.

Ozonschicht und Ozonloch

Es ist und bleibt eine verstörende Geschichte und eine Herausforderung für den Fortbestand der Menschheit. Aber es ist auch eine Geschichte voller Hoffnung, wie ein menschengemachtes, bedrohliches Szenario wissenschaftlich untersucht wurde, die teils sehr komplexen Zusammenhänge erkannt, in chemischen Gleichungen verdeutlicht und schließlich globale Abwehrmaßnahmen ergriffen wurden. Diese Maßnahmen haben Verbesserungen durch globalen Verzicht bei verursachenden Stoffklassen erbracht, aber auch Mechanismen erkannt, die weitere Bedrohungen verursachen können.

In der Pressemitteilung des Nobelpreiskomitees zum Preis für Chemie 1995 heißt es „Die Ozonschicht – die Achillesferse der Biosphäre“.¹²⁴

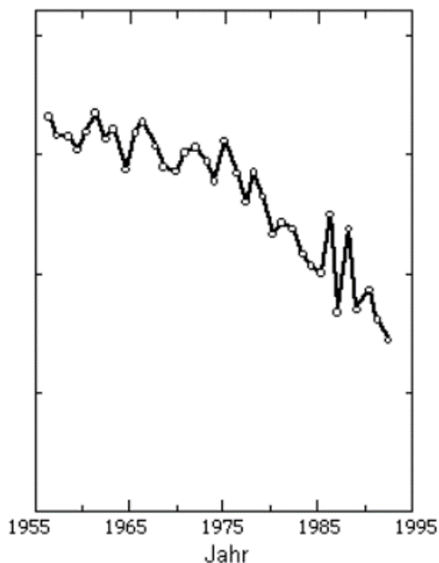
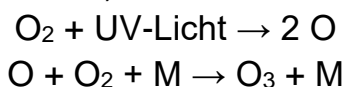


Abb. 64: Rückgang der Ozonschicht in der Antarktis

Ozon, O_3 , ist ein Gas, das nur in Spuren in der Erdatmosphäre vorkommt, aber in seiner Schutzwirkung eine grundsätzliche Bedeutung für das Leben auf der Erde hat. Die vor schädlichem ultravioletten Licht schützende Schicht wäre zwar verdichtet nur 3 mm dick. Aber das reicht in Verbindung mit dem Sauerstoff in der Atmosphäre, um UV-Strahlen so abzumildern, dass Leben auf unserem Planeten möglich bleibt.

Der normale Luftsauerstoff, also das zweiatomige O_2 , wird durch UV-Licht in zwei sehr reaktionsfreudige, sogenannte Sauerstoffradikale, aufgespalten und verbindet sich dann mit weiteren

Sauerstoffmolekülen unter katalytischer Beteiligung von anderen Luftmolekülen M (Sauerstoff O_2 oder Stickstoff N_2) zu Ozon:



¹²⁴ <https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1995/9043-pressmitteilung-der-nobelpreis-in-chemie-1995/> Dies ist auch die Quelle der Grafiken.

Eine erste photochemische Theorie wurde von dem Engländer Sidney Chapman (1888-1970) im Jahr 1930 formuliert. Er vermutete Ozon in deutlich größeren Mengen zwischen 15 und 50 Kilometern Höhe. Spätere Messungen zeigten, dass das Thema sehr viel komplexer sein muss. Marcel Nicolet aus Belgien zeigte, dass auch Stoffe neben Wasserdampf Ozon zersetzen können. Insbesondere aus Methan entstehen ebenfalls reaktionsfreudige Radikale, hier atomarer Wasserstoff. Radikale enthalten ein ungebundenes Elektron und werden deshalb gerne als $X\cdot$ geschrieben. Entscheidende Erkenntnisse erzielten dann die mit dem Chemie-Nobelpreis 1995 ausgezeichneten Wissenschaftler Paul Crutzen, Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz, Deutschland (niederländischer Staatsangehöriger), Mario Molina, Department of Earth, Atmospheric and Planetary Sciences und Department of Chemistry, MIT, Cambridge, MA, USA und F. Sherwood Rowland, Department of Chemistry, University of California, Irvine, USA.

Sie erkannten, dass $X\cdot$ neben Wasserstoff auch Halogene sein können, die als halogenierte Kohlenwasserstoffe vielfach eingesetzt wurden (z.B. als Kühlmittel für Kühlschränke).

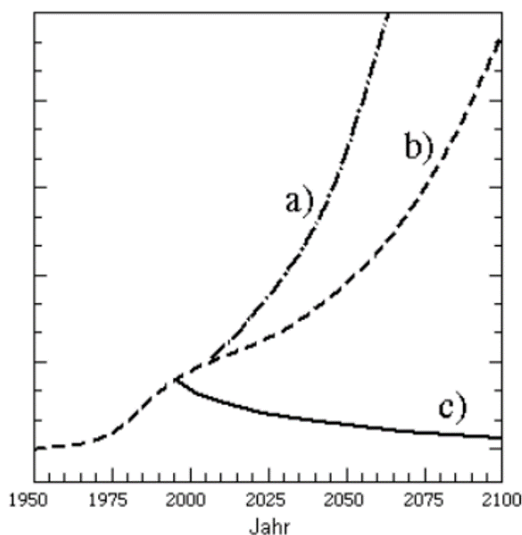
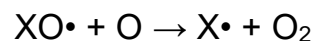
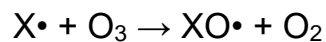
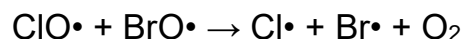


Abb. 65: Von drei Szenarien blieb nur das radikale Verbot von FCKW.

Die zweite Reaktion bestimmt die Reaktionsgeschwindigkeit, denn auch bei Tageslicht und entsprechender UV-Strahlung sind O-Radikale eher selten. Sie werden aber für die erneute Synthese von Ozon benötigt. Auch Fluor, Chlor, Brom und Jod finden sich in der Stratosphäre kaum als Radikale ($X\cdot$), sondern als $XO\cdot$. Besonders schädlich ist $ClO\cdot$. Diese reagieren dann untereinander, z.B.



So entsteht ein Teufelskreis.

Ein Forschungsteam hat in einer Modellrechnung untersucht, welche

Folgen für das Klima die weitere Nutzung dieser Substanzen gehabt hätte. Sie kamen zusätzlich zum schädlichen Einfluss von CO_2 auf weitere $2,5^\circ C$ durchschnittliche Erwärmung. Diese setzen sich aus $1,7^\circ C$ direkte Erwärmung

der Atmosphäre plus weitere $0,8^{\circ}\text{C}$ indirekte Erwärmung zusammen. Die abnehmende Ozon-Schicht führt nämlich zu einer enormen UV-Belastung am Boden, die das Pflanzenwachstum so beeinträchtigt, dass weniger CO_2 gebunden werden kann.¹²⁵

Es ist das Verdienst dieser Forschungen, dass es zum Verbot von Fluor-Chlor-Kohlenwasserstoffen (FCKW) und der verbindlichen Begrenzung von anderen Ozon-schädlichen Substanzen kam und zumindest bzgl. dieser Stoffklasse die Ozonschicht nicht mehr gravierend geschädigt wurde. Die Staatengemeinschaft hat aus diesem Fall gelernt. Allerdings dauert die Regenerierung der schützenden Schicht etwa 100 Jahre. Das Gleichgewicht ist schnell zerstört, aber es dauert lange, bis es wiederhergestellt werden kann.

Fazit

Der vorliegende Beitrag kann nur eine kleine Anzahl an Beispielen aus den vier Wissensgebieten aufzeigen. Es ist zu erwarten, dass die Leserin / der Leser bei einigen Punkten die Nase rümpfen wird, weil sie/er dieses Beispiel nicht für „würdig“ erachten wird. Andere Gleichungen, Formeln oder Beziehungen werden wiederum schmerzlich vermisst werden. Einige Abschnitte kann man durchaus verschieben oder doppelt aufführen. Dies wurde z.B. beim Goldenen Schnitt und der Fibonacci-Folge praktiziert, die beide eine herausragende Bedeutung in der Mathematik und der Biologie haben. Die logistische Gleichung ist für sich genommen bestimmt für manchen Leser kein berühmter Kandidat. Aber sie zeigt ansatzweise die Chaosforschung als eine relativ junge Disziplin in reiner und experimenteller Mathematik, statistischer Physik und dem chaotischen, nichtlinearen Verhalten in der Natur auf. Auch dieses komplexe Fachgebiet kann man praktisch in allen Hauptkapiteln darstellen. Der historisch erste Untersuchungsgegenstand, die logistische Gleichung, soll dazu den Aufhänger bilden. Beim Thema „Chaos“ drängt sich auch „Fraktale“ auf, besonders die Mandelbrotmenge und der theoretische Aspekt von Chaos über die Feigenbaum-Konstante. Etabliert wurde die Chaostheorie besonders durch Siegfried Großmann. Die Nobelpreisträger für Physik des Jahres 2021 haben in scheinbar chaotischen, komplexen Systemen Ordnungskriterien identifiziert und z.B. langfristige Klimamodelle entwickelt, die unabhängig von kurzfristigen Wettervorhersagen sind. Auch das riesige Gebiet der nichteuklidischen Geometrie wurde ausgeklammert. Nur punktuell kam zudem die Analysis von Cauchy oder Weierstraß zur Sprache. Aber auch bahnbrechende Erkenntnisse von Descartes bis Hilbert konnten nicht erwähnt werden. Die Mengenlehre ist

¹²⁵ Nature 10.1038/s41586-021-03737-3, 2021 nach SdW 11/21 S. 9

nur beim Kontinuum ein Thema. Peano-Axiome oder das Auswahlaxiom tauchen nicht auf. Die Physik der Relativitätstheorie sollte nicht in einen kurzen Abschnitt gezwängt werden. Hier wird auf umfassende Literatur jeglichen Schwierigkeitsgrades verwiesen.¹²⁶ Weitere interessante Meilensteine der Physik wären (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) das heliozentrische kopernikanische Weltbild, Photoelektrischer Effekt, Carnot-Prozess, Energieerhaltung, Ohmsches Gesetz, Radioaktivität, Hubble Gesetz, Quanten-Elektrodynamik, Schwarze Löcher und vieles mehr. Manchmal sind es zunächst kleine Entdeckungen, die nach und nach einen ganzen Wissenszweig hervorbringen (z.B. Fraunhoferlinien in Astrophysik und Kosmologie).

Doch irgendwo muss man einen Schnitt bei dieser Wanderung durch interessante Themen aus Mathematik und Naturwissenschaften machen.

Auf jeden Fall soll durch den interdisziplinären Ansatz des Beitrags Interesse geweckt werden. Fachleuten wird das Niveau längst nicht ausreichen. Es bleibt aber zu hoffen, dass in den meisten Beispielen der kleine Schritt über das „normale“ populärwissenschaftliche Niveau hinaus für den interessierten Leser einige Anreize bietet, um den einen oder anderen Bereich zu vertiefen.

Literaturverzeichnis

Alsina, Claudi; Der Satz des Pythagoras, deutsch bei Librero RBA, 2016

Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B.; Bezaubernde Beweise, Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg, 2013

Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B.; Perlen der Mathematik, Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg, 2015

Becker, Adam; Was ist real?, Springer, Berlin 2021

Bellos, Alex; Im Wunderland der Zahlen, Piper, München, 11/2013

Caroll, Sean; Was ist die Welt und wenn ja, wie viele, Klett-Cotta, Stuttgart 2021

Ebeling, W. et.al., Komplexe Strukturen: Entropie und Information, B.G.Teubner, Stuttgart-Leipzig, 1998,

Euklid; Die Elemente, Hsgr. Clemens Thaer, Europa-Lehrmittel, 2003

¹²⁶ Einfach erklärte Darstellung der Speziellen Relativitätstheorie siehe z.B. den Beitrag von Arthur Ruh, <http://www.twintech.ch/aruh/papers/Relativitaet.pdf> Mathematisches „Rüstzeug“ beider Relativitätstheorien siehe z.B. Susskind, Leonhard; Friedman, Art; Elektrodynamik und Relativität – Das theoretische Minimum, Springer, 2020

Försterling, Horst-Dieter, Kuhn, Hans; Physikalische Chemie in Experimenten, Verlag Chemie, 1971, Weinheim/Bergstraße

Havil, Julian, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013

Hellwig, Heino; Phyllotaxis – Über Zahlen und Pflanzen, Skript der Humboldt-Universität zu Berlin

http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/bericht_hellwig.pdf

Holt, Jim; Als Einstein und Gödel spazieren gingen, Rowohlt, Juni 2020

Klages, Friedrich; Lehrbuch der organischen Chemie, Bd. 2, Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1962

Meschkowski, Herbert; Mathematisches Begriffswörterbuch, BI Hochschul-taschenbücher Band 99, Mannheim 1971

Muller, Richard A., Jetzt – Die Physik der Zeit, S. Fischer, Frankfurt a. Main, 2018

Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994

Pickover, Clifford A.; Das Mathebuch, Librero, Kerkdriel (NL), deutsch 2014

Pickover, Clifford A.; Das Physikbuch, Librero, Kerkdriel (NL), deutsch 2014

Rinkens, Hans-Dieter, Krüger, Katja; Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020

Russo, Lucio, Die vergessene Revolution, Springer, Berlin Heidelberg, 2005

Seife, Charles; Zwilling der Unendlichkeit, Eine Biographie der Zahl Null, Goldmann, München, 2002,

Singh, Simon; Fermats letzter Satz, Carl Hanser Verlag, München-Wien, 1998

Susskind, Leonhard, Friedman, Art; Quantenmechanik – Das theoretische Minimum, Springer, Berlin 2020

Taschner, Rudolf; Die Zahl, die aus der Kälte kam, Goldmann Taschenbuch, 2. Auflage, München 2015

Trageser, Wolfgang; Der Stern-Gerlach-Versuch, Springer Spektrum, Berlin 2022

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1 und Band 2, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Abbildungsnachweise:

Hinweis: Im Text wird nur in Fußnoten auf externe Inhalte in Grafiken hingewiesen. Eigene Grafiken werden nur im Abbildungsverzeichnis erwähnt.

- Abb. 1: eigene Grafik (Satz des Pythagoras)
- Abb. 2: Anschaulicher geometrischer Beweis des Satz von Pythagoras.
- Abb. 3: eigene Grafik (Satz des Thales)
- Abb. 4: eigene Grafik, Satzgruppe des Pythagoras, Kathetensatz
- Abb. 5: Satzgruppe des Pythagoras, Höhensatz des F
- Abb. 6: eigene Grafik, Kosinussatz: Trigonometrie im beliebigen Dreieck.
- Abb. 7: eigene Grafik, Nicht-dezimales Stellenwertsystem ohne Null bei einer Digitaluhr.
- Abb. 8: Basler Problem als T-Shirt, <https://www.zazzle.de/leonhard+tshirts>,
- Abb. 9: Die analytische Fortsetzung der Fakultät als T-Shirt
Eine Reihe von Firmen bieten T-Shirts mit mathematischen oder physikalischen Formeln an. Legendär ist auch „2,7 K“.
- Abb. 10: eigene Grafik, Komplexe Zahlen
- Abb. 11: Exponentialfunktion,
Grafik: <https://de.wikipedia.org/wiki/Exponentialfunktion>
- Abb. 12: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus 1.
- Abb. 13: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus i .
- Abb. 14: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus -1 .
- Abb. 15: Eulersche Identität, Abb. 8-11 eigene Grafiken nach Hans-Dieter Rinkens, Katja Krüger, Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer-Spektrum, Wiesbaden 2020, S. 92, 94, 95 und S. IX
- Abb. 16: Fortgesetzte Konstruktion von Quadratwurzeln, Grafiken in Abb. 3 und 4 nach Alsina, Satz des Pythagoras, ebenda, S. 76
- Abb. 17: Spiralförmige Darstellung, ebenda
- Abb. 18: eigene Grafik DIN-A-Formate
- Abb. 19: Blendenöffnungen, mit freundlicher Genehmigung von Robert Feßling,
<https://www.robertfessling.de/tutorial-kamerablende-einstellen>
- Abb. 20: https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper
- Abb. 21: Eigene Grafik, das Pascalsche Dreieck
- Abb. 22: Konstruktion von Φ . Der Euklidische Beweis
- Abb. 23: Die gängigste Konstruktion für Φ
- Abb. 24: eigene Grafik, (Quotient zweier aufeinanderfolgender Finonacci-Folgenglieder)
- Abb. 25: eigene Grafik, (Potenzen von Phi)
- Abb. 26: eigene Grafik, (Kontinuumshypothese)
- Abb. 27: <https://de.wikipedia.org/wiki/Rechenschieber>

- Abb. 28: Verhalten der ζ -Funktion, https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_nicht-trivialer_Nullstellen_der_Riemannschesen_Zetafunktion
- Abb. 29: Eigene Grafik, Symmetrioperationen bei einem Quadrat.
- Abb. 30: Schematische Rekonstruktion der Weltkarte des Hekataios von Milet“, 6. Jh. v. Chr.,
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f6/Hecataeus_world_map-de.svg
- Abb. 31: Eigene Grafik, Konstellation des Eratosthenes
- Abb. 32: Eigene Grafik, Vermessung des Erdumfangs
- Abb. 33: Eigene Grafik, Newtonsches Gravitationsgesetz
- Abb. 34: Zusammenhang von Zeit- und Frequenzbereich bei den vier möglichen Varianten der Fourier-Analyse, Grafik, Tabelle und wörtlich übernommener Text aus
https://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analyse#/media/Datei:Diff_Fourier-Analyse.svg
- Abb. 35: Tabelle nach https://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analyse#/media/Datei:Diff_Fourier-Analyse.svg
- Abb. 36: Eigene Grafik, Vermischung zweier unterschiedlicher Gase ist spontan irreversibel und erhöht die Entropie.
- Abb. 37: Nach dem Gesetz von Gay-Lussac ist der absolute Nullpunkt unerreichbar
- Abb. 38: Die blaue Kurve verwendet ein klassisches, nicht-quantisiertes Verständnis von Strahlung, Bildquelle
https://de.wikipedia.org/wiki/Rayleigh-Jeans-Gesetz#/media/Datei:PlanckWienRayleigh_linear_150dpi_de.png
- Abb. 39: Atomaufbau von Silber mit dem 5s Elektron (rot)
- Abb. 40: Stilisierte Darstellung des Experiments. Entscheidend ist die Aufspaltung des Strahls.
- Abb. 41: Bewegung der Erde durch den hypothetischen Äther (links) müsste einen entgegen gesetzten Ätherwind erzeugen.
- Abb. 42: Wenn der Äther das Medium für elektromagnetische Wellen wäre, müsste sich die Eigenbewegung von Erde und Sonne nachweisen lassen.
- Abb. 43: Das erwartete Resultat des Experimentes war, dass sich die Lichtgeschwindigkeit c je nach Bewegungsrichtung der Erde verändert (links). Das gemessene Resultat ergab, dass die Lichtgeschwindigkeit c in allen Richtungen gleich ist (rechts).
Abb. 37 und 39 eigene Grafik nach
<http://www.twintech.ch/aruh/papers/Relativitaet.pdf>

- Abb. 44: Grundlagen der Unbestimmtheit, Grafik und Argumentation: Leonhard Susskind, Art Friedman, Quantenmechanik – Das theoretische Minimum, Springer, Berlin 2020, S. 177
- Abb. 45: Schema des Bell-Tests, https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Ungleichung#/media/Datei:Bell-test-photon-analyser.png
- Abb. 46: Urknallmodell: Entstehung, <https://de.wikipedia.org/wiki/Urknall>
- Abb. 47: Google-Doodle zum 100. Geburtstag von Claude Shannon (Jonglieren von Nullen und Einsen).
<https://www.google.com/doodles/claude-shannons-100th-birthday>
- Abb. 48: Klimamodelle und Strahlungsbilanz
- Abb. 49: Die Temperatur am Erdboden, Quelle der beiden Grafiken: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/popular-information/> Ergänzt durch eigene deutsche Texte
- Abb. 50: Eigene Grafik, Der einfache Graph der Logistischen Gleichung
- Abb. 51: Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S. 37 Sensibilität von den Anfangsbedingungen
- Abb. 52: Periodisches Verhalten bei anderer Konstante k , Peitgen, S. 38
- Abb. 53: 2-dimensionales Modell nach Helmut Vogel
Vogel, Helmut, 1979. A better way to construct the sunflower head, *Mathematical Biosciences* 44 (1979), no. 3-4, 179–182
- Abb. 54: Verlauf einer Epidemie in Abhängigkeit von R_0 .
Richter, Otto, *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft* Band 54, 2004, S. 89-113, online <https://core.ac.uk/download/pdf/196660982.pdf>
- Abb. 55: Eigene Grafik, Beispiel einer Drehoperation / Flip mit drei Pfannkuchen bei einem Stapel von insgesamt acht Pfannkuchen.
- Abb. 56: Eigene Grafik, Definition der Avogadrokonstante
- Abb. 57: Vorgeschlagene Strukturformeln für das Benzol, eigene Grafik nach Friedrich Klages, *Lehrbuch der organischen Chemie*, Bd. 2, Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1962, S. 200 und 201
- Abb. 58: Die π -Elektronen befinden sich vorwiegend oberhalb und unterhalb der Molekülebene, eigene Grafik
- Abb. 59: Potentielle Energie V eines Elektrons im π -Elektronensystem, nach Försterling/Kuhn, *Physikalische Chemie in Experimenten*, Verlag Chemie, 1971, Weinheim/Bergstraße, S. 373/374
- Abb. 60: Vereinfachende Darstellung des Potentialtopfes, eigene Grafik
- Abb. 61: Stehende π -Elektronenwellen, Försterling/Kuhn, ebenda
- Abb. 62: <https://de.wikipedia.org/wiki/Atomorbital>
Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im 1s-Orbital
- Abb. 63: <https://de.wikipedia.org/wiki/Atomorbital>

Orbitale der ersten und zweiten Elektronenschale

Abb. 64: Abnahme der Ozon Konzentration, Quelle der Grafiken
<https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1995/9043-pressmitteilung-der-nobelpreis-in-chemie-1995/>

Abb. 65: Gleiche Quelle, Originalkommentar: Die bisherige Veränderung des Chlorgehalts in der Stratosphäre und drei verschiedene Szenarios für die Zukunft: a) Ohne Emissionsbegrenzung
 b) Begrenzungen gemäß dem Protokoll von Montreal aus dem Jahre 1987. c) Die zurzeit vereinbarten Emissionsbegrenzungen.
 Der Chlorgehalt als Maßstab der Größe der Ozonvernichtung.

Personenregister

Name	Lebensdaten	Seite
Achilles	Griech. Mythologie	33
Ampère, André-Marie	1775 - 1850	55
Archimedes von Syracus	287 v.Chr. - 212v.Chr.	10
Aristoteles	384 v.Chr.-322 v.Chr.	63,68
Aspect, Alain	*1947	70
Avogadro, Amadeo	1776 - 1856	1,3,66,75,87,88,101
Baudhayana	Um 800 n. Chr.	4
Bekenstein, Jacob David	1947 - 2015	57,58
Bell, John Stewart	1928 – 1990	68,69,97,100
Bernoulli, Jakob	1655 - 1705	2,13
Bernoulli, Johann	1667 - 1748	14
Bohr, Niels	1885 – 1962	68,69,71
Boltzmann, Ludwig	1844 - 1906	75,76,88
Bose, Satyendranath	1894 – 1974	59
Brahe, Tycho	1546 - 1601	38
Brown, Robert	1773 - 1858	87
Briggs, Henry	1561 - 1630	35,36
Brunelleschi, Filippo	1377 – 1446	12
Bulteau, Laurent	? CV, s.Homepage	86
Bürgi, Jost	1552 - 1632	35
Cantor, Georg	1845 - 1918	17,33,34,36
Carnot, Nicolas Léonard Sadi	1796 - 1832	97
Cauchy, Augustin-Louis	1789 - 1857	40,96
Celsius, Anders	1701 – 1744	58
Chapman, Sidney	1888 - 1970	95
Coulomb, Charles Augustin de	1736 - 1806	51,71
Crutzen, Paul	1933 - 2021	95

Cusanus, Nikolaus von Kues	1401 - 1464	10
D'Alembert, Jean-Baptiste le Rond	1717 - 1783	13
da Vinci, Leonardo	1452 – 1519	13
de Broglie, Louis-Victor Pierre Raymond	1892 - 1987	91,92
Debye, Peter	1884 – 1966	61
Dedekind, Richard	1851 - 1916	17
Descartes, René	1596 – 1650	96
Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune	1805 – 1859	43
Eddington, Arthur	1882 - 1944	56,57
Einstein, Albert	1879 - 1955	2,50,56,57,59,65,68,69,72,87,98
Eratosthenes von Kyrene	276 – 194 v. Chr.	48,49,50,100
Euklid von Alexandria	3. Jh. v. Chr.	2,5,7,30,31,37,41,82,96,97,99
Euler, Leonhard	1707 - 1783	1,3,4,11,14f,18,21f,24f,28,35f,42f
Faraday, Michael	1791 - 1867	54
Fermat, Pierre de	1607 - 1665	8,35,37,41,98
Fertin, Guillaume	*1972	86
Fibonacci, Leonardo di Pisano	Um 1170 – nach 1240	12,29,30,32,33,80-83,96
Fourier, Jean Baptiste Joseph	1768 - 1830	51,52,53,98,100
Friedmann, Alexander Alexandrow	1888 - 1925	72,73
Friedman, Art	?	67,97,98,100
Galilei, Galileo	1564 - 1642	33,37,39
Gates, William („Bill“)	*1955	86
Gauß, Carl Friedrich	1777 - 1855	11,16,19,54
Gay-Lussac, Joseph Louis	1748 - 1850	58,88,89,100
Gerlach, Walther	1889 - 1979	61,62
Goldbach, Christian	1690 - 1764	42
Gonthier, Georges	? CV s. Homepage	41
Goodman, Jacob E.	*1933	86
Gregorius a St. Vincento	1584 - 1667	35
Großmann, Siegfried	*1930	96,109
Hales, Thomas	*1958	42
Hasselmann, Klaus	*1931	78
Hawking, Stephen William	1942 - 2018	57,58
Heisenberg, Werner	1901 - 1976	1,59,61,66f,90,92
Hekataios von Milet	550 – 476 v. Chr.	48,100
Hertz, Heinrich	1857 - 1894	2,62

Hilbert, David	1862 – 1943	96
Hipparchos von Nicäa	190 v.Chr.-120 v.Chr.	50
Hippasos von Metapont	Spät. 6.Jh.-früh. 5.Jh.	31
Hoyle, Fred	1915 - 2001	72
Hubble, Edwin	1889 - 1953	72,73,97
Jacobson, Theodore („Ted“)	*1954	57
Kelvin, Lord, Thomson Will.	1824 - 1907	59,88
Kepler, Johannes	1571 - 1630	2,27,37,38,41,42
Kermack, William Ogilvy	1898 - 1970	84
Kolmogorov, Andrei Nikolajewitsch	1903 - 1987	76
L'Hospital, Guillaume François Antoine, Marquis de	1661 - 1704	13, s.a. L'Hôpital
Leibniz, Gottfried Wilhelm	1646 - 1716	13,33,37-40,68
Lemaître, Georges Edouard	1894 - 1966	71,72
Loschmidt, Johann Josef	1821 - 1895	87,88
Mach, Ernst	1838 – 1916	87
Magellan, Ferdinand	1480 - 1521	48
Manabe, Synkuro	*1931	78
Maor, Eli	*1937	2
Mascheroni, Lorenzo	1750 - 1800	15
Maxwell, James Clerk	1831 - 1879	54,55,62
McKendrick, Anderson Gray	1876 - 1943	84
Mengoli, Pietro	1626 - 1686	13
Menninger, Karl	1898 - 1963	11
Mermin, N. David	*1935	68
Michelson, Albert Abraham	1852 - 1931	63,65
Molina, Mario	1943 - 2020	95
Montucla, Jean-Étienne	1725 - 1799	13
Morley, Edward Williams	1838 - 1923	63,65
Napier, John	1550 - 1617	35,36
Nernst, Walter	1864 - 1941	59
Newton, Isaac Sir	1643 - 1727	13,33,35-40,50, 51,53,68,100
Nicolet, Marchel	1912 - 1996	95
Ohm, Georg Simon	1789 - 1854	57,97
Oresme, Nicole (Nikolaus von)	1325 - 1382	13,15
Papadimitriou, Christos	*1949	86
Parisi; Giorgo	*1948	78
Pascal, Blaise	1623 - 1662	13,28,29,99
Pauling, Linus	1901 - 1994	67,90
Perelman, Grigori	*1966	42

Planck, Max	1858 – 1947	1,3,60-62,67,68,71, 72,74,88,92,95,100
Platon	Um 428-um 348 v.Chr	27,28,99
Podolsky, Boris	1896 - 1966	69
Poincaré, Henri	1854 - 1912	42,65
Ptolemäos, Claudius	Um 100 – nach 180	10
Pythagoras von Samos	Um 570 v.Chr.-n. 510	1,2,4- 9,25,31,33,41,97,99
Rayleigh, Lord	1842 – 1919	60,61,100
Riemann, Bernhard	1826 - 1866	14,19,36,43,44
Robertson, Howard P.	1903 - 1961	72
Robertson, Neil	*1938	41
Rosen, Nathan	1909 – 1995	69
Rowland, F. Sherwood	1927 - 2012	95
Rusu-Robina, Irena	?, CV s. Homepage	86
Sanders, Daniel P.	? CV s. Homepage	41
Schrödinger, Erwin	1887 - 1961	89,92,93
Seymour, Paul	*1950	41
Shannon, Claude Elwood	1916 - 2001	75,76,101
Singh, Simon	*1964	8
Sommerfeld, Arnold	1868 - 1951	56,61,70
Stern, Otto	1888 - 1969	61,62
Susskind, Leonhard	*1940	67,97,98,100
Taylor, Brook	1685 - 1731	21,24
Thales von Milet	624/23 v.Chr.-548/44	4,6,7,98,99
Thiele, Johannes	1865 - 1918	89,90
Thomas, Robin	*1962	41,42
Thomson, William, Lord Kelvin	1824 - 1907	59,88
Torricelli, Evangelista	1608 - 1647	13
Verhulst, Pierre-François	1804 - 1849	79
Verlinde, Erik Peter	*1962	57
Vogel, Herbert	*1951	81,83,101
Walker, Arthur Geoffrey	1909 - 2001	72
Wallis, John	1616 - 1703	11,13
Watt, James	1736 - 1819	36
Weierstraß, Karl	1815 - 1897	11,40,96
Weinberg, Steven	1933 - 2021	2,73
Werner, Benjamin	? CV s. Homepage	41
Wiles, Andrew	*1953	8,41
Wolfskehl, Paul	1856 - 1906	8
Zeilinger, Anton	*1945	70
Zenon von Kition	333/32–262/61 v.Chr.	33

Stichwortverzeichnis

Stichwort	Seite
Äther	64,65,100
Aktual (unendlich)	33
Algebraische Zahlen	18
Analytische Fortsetzung der Fakultät	16,99
Annihilation	66
Anthropisches Prinzip	71
Arithmetik	12,17,28
Atombombe	65,66
Baryonische Materie	66,74
Basler Problem	11,13,16,43,99
Bellsche Ungleichung	69,70,100
Binomische (Formeln)	28,30,31
Binomialkoeffizient	29
Blende in der Fotografie	26,27,99
Bogenmaß	7
Bohrsche Atommodell	71
Bose-Einstein-Kondensat	59
Bosonen	62
Cepheide	72
COQ	41
Cosinussatz, Kosinussatz	9,99
Coulombsches Gesetz	51
Deuterium, 2_1H	72
Differential	20,38,39,54,85
DIN-A-Formate	26,99
DNA	85
Dodekaeder	27
Drehimpuls	61,62
Einbettungsprinzip	18
Einheitskreis	7,21,22,23
Einheitswurzeln	23
Elektrisch(es Feld)	3,53,54,64,65,97
Elektromagnetisch	56,59,60,63,64,65,71,100
Enthalpie	66
Entropie	55-58,74-77,97,100
EPR-Paradoxon	69
Erdumfang	48
Eulersche Identität	1,18,24,99
Eulersche Zahl	1,3,20,24
Eulerscher Koeffizientenvergleich	11
Eulerscher Polyedersatz	28
Exponentialfunktion	4,21,22,99
Fakultät	16,17,99

Farbstoffe	90,91
FCKW	95,96
Fermionen	62
Fibonacci-Zahlen	12,29,30,32,33,80-83,96
Fission	66
Flachheitsproblem	73
Fluxion(smethode)	37,38,40
Fourier(analyse)	51,52,53,100
Fundamentalsatz der Algebra	40
Gamma(/Gammafunktion)	2,13,15,16,17,36,98
Gammaquant	66
Gaußsche Zahlenebene	19
Gaußsches Fehlerintegral	16
Goldbachsche Vermutung	42
Goldener Schnitt	1,2,3,30,31,32,80,82,83,96
Goldener Winkel	80,83
Gravitation(sgesetz)	38,50,51,53,57,63,72,73,100
Gruppentheorie	44-47
Harmonische Reihe	14,15,43
Hauptsatz(der Analysis, Kettenbruch)	39,55,56,58,59,75,82
Heisenbergsche Unschärferelation	1,59,61,65,66-68,90
Hexagesimales Stellenwertsystem	5
Höhensatz	7
Hohlraumstrahlung	59,60
Holomorph	43
Homöomorph	42
$i = \sqrt{-1}$	17
Ikosaeder	27
Imaginäre Zahlen	19
Infinitesimalrechnung	13,33,37-40
Informationstheorie	55,57,74-76
Instantan	56,68
Integral, Integralrechnung	16,17,20,39,51
invers	17,19,37
Kartesische Koordinaten	22
Kathetensatz	6
Kekulé-Formeln	89,90
Keplersche Gesetze	38
Keplersche Vermutung	42
Klimakrise	77,78,95,96,101
Körper (algebraischer)	17,18,20,47
Kollaps(der Wellenfunktion)	56,57,68
Kombinatorik	29,30
Komplexe Wurzeln	23f
Komplexe Zahlen	17f,19,25,40,99

Kontinuum /Hypothese	33,34,97,99
Konvergente	82,83
Konvergenz	13,15
Kosinussatz, Sinussatz	9,99
Kosmologisch(e Konstante)	72,73.74
Lichtgeschwindigkeit	3,56,64,65,69-73,100
Logarithmen	20,34,35,36
Logistisch(e Gleichung)	1,79,80,96,101
Lokaler Realismus	69
Mächtigkeit	33,34
Magnetfeld	55,62
Magnetisch(e Flussdichte)	53-56,59,60-65,71,72,100
Major	30
Mannigfaltigkeit	42
Messproblem	57,68
Minor	30
Momentenmethode	37,38
Monade	38
Moskauer Papyrus	6,10
Nukleosynthese	73
Null	11f
Oktaeder	27
Ozon(schicht)	60,94-96,101
Pancake-Sortierung, Pfannkuchen-	85,86,87
Pandemie, Epidemie	84,85,110
Papyrus-Rhind	6
Pascalsches Dreieck	28,29,99
Pentagramm	31
Permanenzprinzip	18
Pi, π	7, 10f
Phyllotaxis	80,81,98
Plancksches Wirkungsquantum	1,3,61,62,67,68,71,88,92
Platonische Körper	27,28,99
Poincaré Vermutung	42
Polarkoordinaten	22
Potenzmenge	34
Potenzreihe	11
Primzahlzwillinge	42
Pythagoras, Satz des	4,5
Pythagoreische Tripel	5
Quadratwurzeln, reelle	25,26,99
Quantenchromodynamik	73
Quantenelektrodynamik	73
Quanten(mechanik, -theorie)	50,53,54-59,61,62,66,67-70,73,75,89,90,92,97,98,100
Quantenzahl	62

Radiant	7
Random walk	75
Richtungsquantelung	61
Relativitätstheorie	50,56,57,65,69,72,73,97
Riesentheorem	46
Schrödinger Gleichung	89,92,93
Schwarze Löcher	57,97
Schwarz(körperstrahlung)	59,60
Sinussatz	8f
Sonne	32,38,49,56,59,60,63,66,80-82,100
Sonnenblume	32,80,81,82
Sphäre	42
Spin	62
Spiegelreflexcamera	27
Stellenwertsystem	11,12
Taylorreihe	21
Tetraeder	27,29
Thales, Satz des	6
Thermodynamik, 2./3. Hauptsatz der	55,58,59,74-76
Topologie	42,85
Transfinit	36
Transzendente Zahlen	18,33
Trigonometrie	6,22
Unendlich	2,11,12,13,15,19,20,21,33-40,42-44 82,90,98
Urknall	71,72,74,101
Vakuum	13,54,60
Verborgene Variablen	68,69
Vierfarbensatz	41
Vollständige Induktion	32
Wöhlersche Harnstoffsynthese	89
Zahlentheorie	6,8,15,42,44
Zeta-Funktion	14,43

Danksagung (in alphabetischer Reihenfolge)

Mein besonderer Dank gilt **Herrn Prof. em. Dr. Dr. h.c. mult. Siegfried Großmann**. Er ist eine lebende Legende unter den international renommierten, deutschen Physikern. Als Mitbegründer der Chaostheorie und zahlreicher weiterer Impulse kann man ihn als einen der Doyens der Physik in Deutschland bezeichnen. Mit seinen 93 Jahren hat er sich meinem Manuskript gewidmet und eine wunderbare Stellungnahme dazu geschrieben. Ein langes Gespräch hat mir gezeigt, dass die Begeisterung für mathematisch-naturwissenschaftliche Themen, insbesondere aus der Physik, trotz der altersbedingten gesundheitlichen Einschränkungen immer noch ungebrochen bei ihm ist. Er ist nicht nur mit dieser Haltung ein großes Vorbild.

Vielen Dank auch an **Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl** (Uni. Gießen, ab 1.4.2022 Uni. Kiel). Bei meiner Publikation „Unendlich“ hat er mich bereits als Mentor unterstützt und spontan auch für den vorliegenden Beitrag, ohne ihn damals zu kennen, seine Unterstützung zugesagt. Seine einfühlsamen Hinweise bringen immer wieder neue Impulse und neue Aspekte in das jeweilige Thema und haben auch den vorliegenden Beitrag befruchtet.

Herr Dr. Michael Serafin ist aus der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Gesellschaft nicht mehr wegzudenken. Wie immer macht er viel mehr, als er als Schriftleiter der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Zeitschrift machen müsste. Er ist ein wesentlicher Stützpfeiler unserer Gesellschaft und hat dazu maßgeblich beigetragen, dass die altherwürdige Institution auch in der Pandemie sichtbar bleibt.

Denn es muss von Herzen gehen, was auf Herzen wirken soll.

Johann Wolfgang von Goethe (Faust, 2. Teil)

Für Fari