Das mathematische Kabinett

Eulersche Quadrate – ein altes Problem der Kombinatorik/Von Günter Pickert

Bereits 1723 löste J. Ozanam in seinem Buch „Récréations mathématiques et physiques" die Aufgabe, 16 ($=4^2$) Spielkarten, und zwar die Buben, Damen, Könige und Asse jeweils in den 4 „Farben" eines Kartenspiels derart in einem Quadrat anzuordnen, daß in jeder Zeile und jeder Spalte alle 4 Figuren und alle 4 Farben vorkommen. Zu einem mathematisch interessanten Problem wird diese Aufgabe aber erst, wenn man sie von der Bindung an die Zahl 4 befreit, also die Frage stellt, für welche natürlichen Zahlen n (statt 4) die Aufgabe gelöst werden kann und für welche nicht.

Das tat 1776 Leonhard Euler, der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit; er stammte aus Basel und wirkte an den Akademien in Petersburg und Berlin. Insbesondere beschäftigte er sich mit dem Fall $n=6$, eingekleidet als Problem der 36 Offiziere: Aus jedem von 6 Regimentern werden 6 Offiziere der verschiedenen Ränge ausgewählt, und diese haben sich in einem Quadrat so aufzustellen, daß in jeder Zeile und Spalte sowohl alle 6 Regimenter wie auch alle 6 Dienstgrade vorkommen. Ebenso wie jede der 16 Spielkarten durch die zwei Merkmale Figur, Farbe gekennzeichnet ist, läßt sich hier jeder Offizier durch die zwei Merkmale Regiment, Rang beschreiben. Allgemein bezeichnen wir die n Möglichkeiten jedes der beiden Merkmale mit den Zahlen $0,1,\ldots,n\text{-}1$ und geben jedes der n^2 Objekte (Spielkarte bzw. Offiziere in den beiden Beispielen) dementsprechend durch ein Zahlenpaar an; so bedeutet dann im 2. Beispiel 20 den Offizier des Regiments 2 vom Rang 0. Zur Verdeutlichung behandeln wir den Fall $n=3$. Eine Verteilung der Möglichkeiten 0,1,2 des 1. Merkmals auf die 9 Quadratfelder mit der geforderten *Zeilen- und Spaltenbedingung* (ZS) gibt Fig. 1 an.

0	1	2
1	2	0
2	0	1

Fig. 1

2	1	0
0	2	1
1	0	2

Fig. 2

02	11	20
10	22	01
21	00	12

Fig. 3

Dreht man dieses Quadrat um 90° im Uhrzeigersinn, so entsteht die Verteilung der Fig. 2, die natürlich ebenfalls ZS erfüllt. Diese kann man als Verteilung des 2. Merkmals verwenden, denn „Aufeinanderlegen" der beiden Quadrate (dabei die Zahlen des 2. jeweils rechts neben die Zahlen des 1. Quadrats geschrieben) aus Fig. 1 und 2 liefert das Quadrat der Fig. 3, bei dem tatsächlich alle 9 ($=3^2$) Zahlenpaare vorkommen,

Leonhard Euler (1707–1783)

also die 9 Objekte sämlich auftreten. Da Euler ursprünglich statt Zahlen lateinische Buchstaben verwandte, nennt man quadratische Verteilungen der Zahlen $0,1,\ldots,n\text{-}1$, die ZS genügen, *lateinische Quadrate der Ordnung* n. Zwei lateinische Quadrate der Ordnung n, die (wie Fig. 1 und 2) bei Aufeinanderlegen sämtliche n^2 Zahlenpaare liefern (Fig. 3), bezeichnet man als zueinander *orthogonal*, da im Spezialfall der Fig. 1 und 2 das zweite aus dem ersten durch 90°-Drehung entstand; das Ergebnis des Aufeinanderlegens (z. B. Fig. 3) nennt man *Eulersches Quadrat* (da Euler ursprünglich beim 2. Quadrat griechische Buchstaben verwandte, spricht man auch von einem *griechisch-lateinischen Quadrat*). Schon Euler bemerkte, daß der in den Fig. 1 und 2, für $n=3$ durchgeführte Prozeß (das 1. Quadrat entsteht aus der Reihenfolge $0,1,\ldots,n\text{-}1$ in der 1. Zeile durch zyklisches Weiterschreiben, also $1,2,\ldots,n\text{-}1,0$ in der 2. Zeile, das 2. Quadrat dann daraus durch 90°-Drehung) bei jeder ungeraden Zahl n ein Paar orthogonaler lateinischer Quadrate (OLQ) liefert, während bei gerader Zahl n zu dem durch zyklisches Weiterschreiben der 1. Zeile entstehenden Quadrat kein OLQ existiert. Bei $n=2$ gibt es kein Eulersches Quadrat, und bei $n=4$ kann man zu dem lateinischen Quadrat aus Fig. 4 ein orthogonales finden (Aufgabe für den Leser!), allerdings nicht durch 90°-Drehung. Euler gelang auch für jede durch 4 teilbare Zahl n die Konstruktion eines Paares OLQ der Ordnung n. Nach vergeblichen Versuchen, dies auch für gerade, nicht durch 4 teilbare Zahlen n zu erreichen, vermutete er, daß dies (wie schon für $n=2$ nachweisbar) tatsächlich unmöglich sei, insbesondere also das Problem der 36 Offiziere ($n=6$) eine unlösbare Aufgabe stelle.

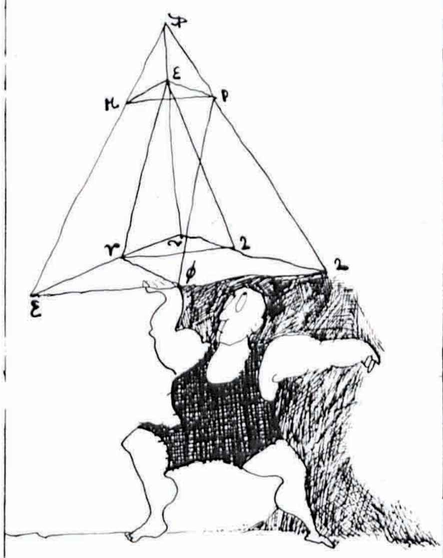
0	1	2	3
1	0	3	2
2	3	0	1
3	2	1	0

Fig. 4

Erst 1900 gelang dem französischen Mathematiker Tarry der Unmöglichkeitsnachweis für $n=6$, und zwar durch mühseliges Durchprobieren; ein wirklich „lesbarer", übersichtlicher Beweis wurde erst 1983 durch Betten (Kiel) gegeben. Die weitergehende *Eulersche Vermutung* (Unmöglichkeit für alle geraden, nicht durch 4 teilbaren n) blieb aber offen, bis 1959 der indische Statistiker R. C. Bose und sein Schüler Shrikhande ein Paar OLQ der Ordnung 22 konstruierten. Zusammen mit Parker (USA) gelang ihm dies auch für alle anderen geraden, nicht durch 4 teilbaren Ordnungen $\neq 2,6$. Somit sind 2 und 6 die einzigen Ordnungen, zu denen es kein Paar OLQ gibt.

Daß bei der Widerlegung der Eulerschen Vermutung ein Statistiker wesentlich beteiligt war, hat seinen guten Grund: 1926 erkannte der Statistiker R. A. Fisher Mengen von *paarweise orthogonalen lateinischen Quadraten* (POLQ) als wichtiges Hilfsmittel bei der Planung von Experimenten im Hinblick auf deren statistische Auswertung. Die Frage nach Eulerschen Quadraten, bisher lediglich mathematische Neugier, angewandt auf eine Aufgabe der sogenannten Unterhaltungsmathematik (siehe das eingangs erwähnte Buch von Ozanam), war damit überraschenderweise für Anwendungen außerhalb der Mathematik bedeutsam geworden. Die Theorie der OLQ wurde dadurch wesentlich gefördert. Wir beschreiben die Planungsanwendung am Beispiel $n=3$. Um 3 Pflanzensorten auf einem etwa quadratischen Feld hinsichtlich ihrer Wachstumseigenschaften zu vergleichen, wird man, um Bodenunterschiede möglichst ausgleichen zu können, die Pflanzensorten auf 9 Teilfeldern so anbauen, daß in jeder „Zeile" und „Spalte" der Einteilung jede Sorte vorkommt. Bezeichnet man die Pflanzensorten mit 0,1,2, so stellt das lateinische Quadrat von Fig. 1 eine Lösung dieser Planungsaufgabe dar. Will man in gleicher Weise auch 3 verschiedene Düngersorten testen, so hat das wieder mit einem lateinischen Quadrat zu geschehen. Wählt man dieses als orthogonal zum ersten Quadrat, z. B. wie in Fig. 2, so erprobt man beim gleichzeitigen Durchführen beider Untersuchungen jede Pflanzensorte mit jeder Düngersorte (Fig. 3). Will man entsprechend gleichzeitig auch noch die Auswirkung etwa von 3 verschiedenen Graden Bodenfeuchtigkeit untersuchen, so brauchte man dazu ein zu jedem der beiden Quadrate orthogonales lateinisches Quadrat. Dies gibt es nun bei $n=3$ nicht, wohl aber bei $n=4$. Man weiß sogar allgemein, daß es höchstens n-1 POLQ der Ordnung n geben kann und daß diese Höchstzahl jedenfalls dann erreicht wird, wenn n eine Primzahlpotenz ($n=p^m$; p Primzahl, $m=1,2,\ldots$) ist; für dies letzte Ergebnis benötigt man die im 19. Jahrhundert entstandene Theorie der *Galois-Felder* aus der Algebra. 1978 zeigten Wang und Wilson (USA), daß es für jede Ordnung $n \geqq 15$ drei POLQ gibt. 1961 konstruierten Dulmage, Johnson und Mendelsohn (Kanada) für $n=12$ sogar 5 POLQ, und 1985 gab der bulgarische Mathematiker Todorov 3 POLQ für $n=14$ an. Da 4,5,7,8,9,11,13 Primzahlpotenzen sind, weiß man somit, daß es zu jeder von 1,2,3,6,10 verschiedenen Ordnung 3 POLQ gibt; nur bei 10 ist diese Frage noch offen.

Der Rechenkünstler



Nähere Ausführungen und Literaturangaben findet man bei Th. Beth/D. Jungnickel/H. Lenz: Design Theory, Mannheim 1985

J. Dénes/A. D. Keedwell: Latin Squares and their Applications, Budapest 1974.

Zunehmende Bedeutung der Linsenverpflanzung

(ugp) – 80 000 bis 90 000 Linsen werden jährlich in der Bundesrepublik zur Behandlung des Grauen Stars inplantiert, 1 600 allein in der Augenklinik der Gießener Universität, das sind ca. 4–5 Operationen pro Tag. Die Bundesrepublik Deutschland nimmt damit einen führenden Platz in Europa ein. In einem geradezu atemberaubenden Tempo hat sich dieses mikrochirurgische Verfahren in Deutschland durchgesetzt: Noch 1980 wurden im gesamten Bundesgebiet lediglich 6 000 Linsen verpflanzt.
Der Vorteil dieser Methode für den Patienten: Sie erspart ihm das Tragen der schweren und kosmetisch wenig schönen Starbrille und eröffnet ihm ein breiteres Gesichtsfeld. Die Operation ist heute in den ausgewiesenen Zentren reine Routine: 90% der Eingriffe erfolgen in örtlicher Betäubung, sie dauern etwa 1 Stunde und spätestens nach 4–5 Tagen kann der Patient das Krankenhaus wieder verlassen.
Die zunehmende Bedeutung dieser Operationstechnik veranlaßte Augenärzte aus dem deutschsprachigen Raum die „Deutsche Gesellschaft für Intraokularlinsen Implantation" zu gründen. Sie wurde vor kurzem in Gießen aus der Taufe gehoben. Präsident der neuen Gesellschaft ist der Leiter der Gießener Augenklinik, Prof. Dr. Karl-Wilhelm Jacobi. Prof. Jacobi ist bereits Präsident des „International Intraocular Implant Council" und Vorstandsmitglied des „European Intraocular Implant Council".
Zu den Gründungsmitgliedern zählen international renommierte Ophthalmologen aus Deutschland, Österreich, der Schweiz und Ungarn. Der Sitz der Gesellschaft in Gießen unterstreicht das Ansehen, das die Gießener Augenklinik weltweit genießt.
Die Gesellschaft versteht sich laut Satzung als Vereinigung, „die sich wissenschaftlich oder praktisch mit der intraokularen Implantation von Linsen sowie der Katarakt- und refraktiven Chirurgie des Auges beschäftigt". Damit wird deutlich, daß die neue Gesellschaft sich auch mit brechkraftverändernden (refraktiven) chirurgischen Maßnahmen an der Hornhaut zur Behandlung der Kurzsichtigkeit befassen will.
Eine Hauptaufgabe der neuen Fachgesellschaft wird die Weiterbildung sein. Die Operationstechnik ist noch so jung, daß viele niedergelassene Augenärzte sie während ihres Studiums nicht erlernen konnten. Nur eine genaue Kenntnis der Operationsmethode kann jedoch auch weiterhin die Komplikationsrate im Promillebereich halten.

Nobelpreis für Gießener Ehrendoktor

(ugp) – Der diesjährige Nobelpreisträger für Wirtschaftswissenschaften, Prof. Dr. James McGill Buchanan von der George Mason University in Virginia ist Ehrendoktor des Fachbereichs Wirtschaftswissenschaften der Justus-Liebig-Universität Gießen. Buchanan (67) wurde der Gießener Dr. rer. pol. h.c. 1982 in Anerkennung seiner richtungsweisenden Beiträge auf den Gebieten der Finanzwissenschaft, der Wohlfahrtstheorie und der Staatsphilosophie verliehen. In der Ehrenpromotionsurkunde des Fachbereichs werden Buchanans Verdienste als Mitbegründer der ökonomischen Theorie der Politik hervorgehoben. Er habe, so heißt es wörtlich, mit seiner Theorie das dogmenhistorische Erbe der europäischen Sozialökonomik mit der modernen ökonomischen Analyse verbunden.

Die Verleihung der Ehrendoktorwürde durch die Universität Gießen würdigte das wissenschaftliche Werk eines der bedeutendsten zeitgenössischen Ökonomen und Sozialphilosophen, der gleich auf mehreren Spezialgebieten Pionierarbeit geleistet hat. Buchanan ist der Vater eines neuen Spezialgebietes der Ökonomik, der Public Choice Theorie. Er ist ein herausragender Wohlfahrtstheoretiker und Finanzwissenschaftler. Er zählt zu den führenden sozialen Staatsphilosophen, und schließlich ist er ein bedeutender Makler auf dem Markt für ökonomische Ideen.

Als Public Choice Theoretiker lieferte er zentrale Bausteine für eine empirischrelevante Theorie des Verhaltens des Staates und der Akteure in staatlichen Institutionen, die die traditionellen romantischen und utopischen Vorstellungen über die Arbeitsweise von Nicht-Markt-Institutionen ablöste. Die Ursprünge und Entwicklungen der Public Choice Theorie hat Buchanan bereits im März 1979 in einer Gastvorlesung an der Universität Gießen vorgestellt. Als theoretischer Wohlfahrtsökonom überwand Buchanan die übliche neoklassische Vorgehensweise, jede Diskrepanz zwischen erstrebten und faktischen marktwirtschaftlichen Strukturen als „Marktversagen" auszuweisen, indem er die theoretischen Grundlagen und Kriterien für eine systematische Bewertung von „Marktversagen" versus „Staatsversagen" bereitstellte. Parallel dazu sind seine Arbeiten zu einer Neuinterpretation der modernen Finanzwissenschaft zu sehen.