

ZUR THEORIE VON ANPASSUNGSTESTS  
AUF  $K$ -VERTEILTE MARGINALIEN  
VON ZWEIDIMENSIONALEN ZUFALLSFELDERN  
MIT ANWENDUNG AUF RADAR DATEN

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades  
"Doktor der Naturwissenschaften"

am Fachbereich  
Mathematik und Informatik, Physik, Geographie  
der Justus-Liebig-Universität Gießen

vorgelegt von  
Anika Maresch

Mai 2011



*Meinem Vater – Danke für alles!*



# Inhaltsverzeichnis

<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>iv</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Radar mit synthetischer Apertur</b>	<b>5</b>
2.1 Prinzip des Radars mit synthetischer Apertur . . . . .	5
2.2 Anwendung der K-Verteilung auf Radardaten . . . . .	11
2.3 Verwendete Daten . . . . .	12
2.4 Abhängigkeiten zwischen Clutterdaten . . . . .	13
2.4.1 Empirische Autokorrelationsfunktion . . . . .	14
2.4.2 Tests auf Zufälligkeit . . . . .	14
2.4.3 Anwendung auf Daten . . . . .	15
<b>3 Der empirische Prozess mit geschätztem Parametervektor für zweidi- mensionale mischende Zufallsfelder</b>	<b>21</b>
3.1 Grundlagen . . . . .	21
3.2 Der funktionale Grenzwertsatz im $\alpha$ -mischenden Fall . . . . .	25
3.2.1 Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen . . . . .	30
3.2.2 C-Straffheit . . . . .	32
<b>4 Der empirische Prozess mit geschätztem Parametervektor für unab- hängige Blöcke</b>	<b>51</b>
4.1 Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen . . . . .	54
4.2 C-Straffheit . . . . .	55
<b>5 Die K-Verteilung <math>K(\cdot; a, \alpha)</math></b>	<b>61</b>
5.1 Grundlegende Eigenschaften . . . . .	61
5.1.1 Ableitungen der Dichte der K-Verteilung . . . . .	67
5.1.2 Momente . . . . .	71
5.2 Momentenschätzer für die Parameter $a$ und $\alpha$ . . . . .	72
5.2.1 Die Momentenschätzer $\hat{\alpha}_{24M;N}$ und $\hat{\alpha}_{12M;N}$ . . . . .	73
5.2.2 Die Momentenschätzer $\hat{a}_{12M;N}^2$ , $\hat{a}_{123M;N}^2$ und $\hat{a}_{24M;N}^2$ . . . . .	77
5.3 Asymptotische Normalität und schwache Konsistenz der Momentenschätzer	78
5.3.1 Die lineare Entwicklung von $\hat{\alpha}_{24M;N}$ . . . . .	84
5.3.2 Die lineare Entwicklung von $\hat{\alpha}_{12M;N}$ . . . . .	85
5.3.3 Die lineare Entwicklung von $\hat{a}_{12M;N}^2$ . . . . .	87
5.3.4 Die lineare Entwicklung von $\hat{a}_{24M;N}^2$ . . . . .	88
5.3.5 Die lineare Entwicklung von $\hat{a}_{123M;N}^2$ . . . . .	88
5.4 Empirische Prozesse mit geschätztem Parametervektor bei K-verteilten Marginalien . . . . .	89
5.4.1 Mischende Zufallsfelder mit K-verteilten Marginalien . . . . .	91
5.4.2 Zufallsfelder mit unabhängigen Blöcken . . . . .	92
5.5 Likelihoodfunktion und Log-Likelihoodfunktion . . . . .	93
5.6 Asymptotisch effiziente Schätzer . . . . .	95
5.6.1 Berechnung asymptotisch effizienter Schätzer . . . . .	95

5.6.2	Asymptotisch effiziente Schätzer für K-verteilte Zufallsvariable . . .	97
<b>6</b>	<b>Bootstrap</b>	<b>105</b>
6.1	Copulas . . . . .	105
6.1.1	Theoretische Grundlagen . . . . .	105
6.1.2	Ein Algorithmus zur Erzeugung eines Zufallsvektors mit geschätzter Copula . . . . .	112
6.2	Independent-Blocks-Bootstrap . . . . .	115
6.2.1	Grundlagen . . . . .	115
6.2.2	Daten-Stichprobe . . . . .	117
6.2.3	Bootstrap-Stichproben . . . . .	118
6.2.4	Monte-Carlo-Verfahren . . . . .	120
6.3	IID-Bootstrap . . . . .	121
6.4	Quantil-Quantil-Plot . . . . .	121
<b>7</b>	<b>Ein Algorithmus zur Erzeugung von <math>(m_1, m_2)</math>-abhängigen Zufallsfeldern mit K-verteilten Marginalen</b>	<b>123</b>
<b>8</b>	<b>Testergebnisse</b>	<b>129</b>
8.1	Simulierte Zufallsfelder . . . . .	129
8.1.1	Testergebnisse unter der Hypothese . . . . .	130
8.1.2	Testergebnisse unter der Alternative der Lognormalverteilung . . .	132
8.1.3	Testergebnisse unter der Alternative der Pareto-Verteilung . . . . .	134
8.1.4	Einfluss des Monte-Carlo-Stichprobenumfangs unter der Hypothese	135
8.1.5	Einfluss des Monte-Carlo-Stichprobenumfangs unter der Alternative der Lognormalverteilung . . . . .	136
8.1.6	Fazit . . . . .	138
8.2	SAR-Daten . . . . .	138
8.2.1	Faltungsformel für die K-Verteilung . . . . .	138
8.2.2	Ablauf der Datenauswertung . . . . .	141
8.2.3	Testergebnisse . . . . .	142
<b>A</b>	<b>Analytische Hilfsmittel</b>	<b>145</b>
A.1	Abschätzungen einzelner Funktionen . . . . .	145
A.2	Konvergenzordnung von $\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt$ für $a > 0$ . . .	147
A.2.1	Für $x \rightarrow \infty$ . . . . .	147
A.2.2	Für $x \rightarrow 0$ . . . . .	149
A.3	Konvergenzordnung von $\int_0^\infty t^\rho e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt$ für $a > 0$ . . . . .	153
A.3.1	Für $x \rightarrow \infty$ . . . . .	153
A.3.2	Für $x \rightarrow 0$ . . . . .	153
A.4	Konvergenzordnung von $\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt$ für $a > 0$ . . . . .	153
A.4.1	Für $x \rightarrow \infty$ . . . . .	153
A.4.2	Für $x \rightarrow 0$ . . . . .	154
A.5	Endlichkeit von Integralen . . . . .	158
A.5.1	Berechnung von $\int_0^\infty \int_0^\infty x^\tau \frac{1}{t^\rho} e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx$ . . . . .	158
A.5.2	Endlichkeit von $\int_0^\infty \int_0^\infty x^\tau \frac{1}{t^\rho} \left  \ln\left(\frac{1}{t}\right) \right ^m e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx$ . . . . .	159
A.5.3	Berechnung von $\int_0^\infty x^\tau K_\nu\left(\frac{x}{a}\right) dx$ . . . . .	159

A.5.4	Endlichkeit von $\int_0^\infty x^\tau \left  \ln \left( \frac{x}{2a} \right) \right ^m K_\nu \left( \frac{x}{a} \right) dx$ . . . . .	159
A.5.5	Endlichkeit von $\int_0^\infty \left  \frac{\partial}{\partial a} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right  dx$ . . . . .	159
A.5.6	Endlichkeit von $\int_0^\infty \left  \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right  dx$ . . . . .	160
A.5.7	Endlichkeit von $\int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \left( \frac{\partial}{\partial a} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 dx$ . . . . .	160
A.5.8	Endlichkeit von $\int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 dx$ . . . . .	162
A.6	Integrierbare Majoranten . . . . .	164
A.6.1	Satz von Lebesgue . . . . .	164
A.6.2	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0} \left  \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x; \xi, \alpha) \right $ . . . . .	164
A.6.3	Integrierbare Majorante für $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left  \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; a, \xi) \right $ . . . . .	165
A.6.4	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0} \left  \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} f(x; \xi, \alpha) \right $ . . . . .	166
A.6.5	Integrierbare Majorante für $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left  \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x; a, \xi) \right $ . . . . .	167
A.6.6	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} \left  \frac{\partial}{\partial a} f(x; \xi, \zeta) \right $ . . . . .	168
A.6.7	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} \left  \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \xi, \zeta) \right $ . . . . .	168
A.6.8	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} \left  \frac{\partial^3}{\partial a^3} f(x; \xi, \zeta) \right $ . . . . .	169
A.6.9	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} \left  \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha^2} f(x; \xi, \zeta) \right $ . . . . .	170
A.6.10	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} \left  \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha \partial a} f(x; \xi, \zeta) \right $ . . . . .	172
A.6.11	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} \left  \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(x; \xi, \zeta) \right $ . . . . .	173
A.7	Integrierbarkeit der potenzierten partiellen Ableitungen der Dichte . . . . .	175
A.7.1	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} f(x; a, \alpha) \left  f(x; \xi, \zeta)^{-1} \frac{\partial}{\partial a} f(x; \xi, \zeta) \right ^3$ . . . . .	186
A.7.2	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} f(x; a, \alpha) \left  f(x; \xi, \zeta)^{-1} \frac{\partial}{\partial a} f(x; \xi, \zeta) \right ^3$ . . . . .	187
A.7.3	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} f(x; a, \alpha) \left  f(x; \xi, \zeta)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x; \xi, \zeta) \right ^2$ . . . . .	187
A.7.4	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} f(x; a, \alpha) \left  f(x; \xi, \zeta)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x; \xi, \zeta) \right ^2$ . . . . .	188
A.7.5	Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} f(x; a, \alpha) \left  f(x; \xi, \zeta)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; \xi, \zeta) \right ^2$ . . . . .	188
<b>B</b>	<b>Gegenbeispiel</b> . . . . .	<b>190</b>
<b>C</b>	<b>Notation</b> . . . . .	<b>191</b>
	<b>Literatur</b> . . . . .	<b>v</b>
	<b>Danksagung</b> . . . . .	<b>ix</b>

## Abbildungsverzeichnis

1	SAR Prinzip. . . . .	5
2	Flughöhe, Schrägentfernung, Bodenentfernung und effektiver Depressionswinkel. . . . .	6
3	Auflösung in Schrägentfernung, Auflösung in Bodenentfernung und effektiver Depressionswinkel. . . . .	7
4	Azimutauflösung. . . . .	8
5	Länge der synthetischen Apertur. . . . .	8
6	SAR-Bild des Mercedes-Benz Werkes in Würth, 75 cm Auflösung, MEMPHIS. . . . .	10
7	MEMPHIS an Bord einer Transall C-160. . . . .	12
8	SAR-Bild einer Schweizer Szene, 19 cm Auflösung, MEMPHIS. . . . .	13
9	SAR-Bild Seeclutter, 19 cm Auflösung, MEMPHIS. . . . .	13
10	$\hat{\rho}(h)$ für Spaltenvektor aus Wiesedaten. . . . .	16
11	$\hat{\rho}(h)$ für auf die Hälfte ausgedünnten Spaltenvektor aus Wiesedaten. . . . .	16
12	$\hat{\rho}(h)$ für zeilenweise eingelesene Matrix aus Wiesedaten. . . . .	17
13	$\hat{\rho}(h)$ für zeilenweise eingelesene Matrix aus Seeclutterdaten. . . . .	18
14	$\hat{\rho}(h)$ für Spaltenvektoren aus Walddaten. . . . .	18
15	Dichten $f(\cdot; 0.5, 1)$ , $f(\cdot; 1, 1)$ und $f(\cdot; 2, 1)$ . . . . .	65
16	Dichten $f(\cdot; 0.5, 0.5)$ , $f(\cdot; 1, 0.5)$ und $f(\cdot; 2, 0.5)$ . . . . .	66
17	Dichten $f(\cdot; 0.5, 0.2)$ , $f(\cdot; 1, 0.2)$ und $f(\cdot; 2, 0.2)$ . . . . .	66
18	Gitter $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$ . . . . .	123
19	$X_{2k,2l}$ mit den einfließenden Komponenten von $\mathbf{N}$ . . . . .	124
20	Q-Q-Plots für $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder mit K-verteilten Marginalien. . . . .	131
21	Q-Q-Plots für Zufallsfelder mit unabhängigen Komponenten und K-verteilten Marginalien. . . . .	131
22	Q-Q-Plots für $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder mit lognormalverteilten Marginalien. . . . .	132
23	Q-Q-Plots für Zufallsfelder mit unabhängigen Komponenten und lognormalverteilten Marginalien. . . . .	133
24	Q-Q-Plots für $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder mit Pareto-verteilten Marginalien. . . . .	134
25	Q-Q-Plots für Zufallsfelder mit unabhängigen Komponenten und Pareto-verteilten Marginalien. . . . .	135
26	Q-Q-Plots für $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder mit K-verteilten Marginalien zu den Monte-Carlo-Stichprobenumfängen 200 und 100. . . . .	136
27	Q-Q-Plots für Zufallsfelder mit unabhängigen Komponenten und K-verteilten Marginalien zu den Monte-Carlo-Stichprobenumfängen 200 und 100. . . . .	136
28	Q-Q-Plots für $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder mit lognormalverteilten Marginalien zu den Monte-Carlo-Stichprobenumfängen 200 und 100. . . . .	137
29	Q-Q-Plots für Zufallsfelder mit unabhängigen Komponenten und lognormalverteilten Marginalien zu den Monte-Carlo-Stichprobenumfängen 200 und 100. . . . .	137
30	Seeclutter, 4 Matrizen der Größe $49 \times 49$ mit hohen Bootstrap-p-Werten. . . . .	143
31	Seeclutter, 4 Matrizen der Größe $49 \times 49$ mit Bootstrap-p-Werten Null. . . . .	144

## 1 Einleitung

Bildgebende Radare mit synthetischer Apertur (SAR) erzeugen zweidimensionale Bilder, bei denen die kartesischen Koordinaten der Bildpunkte (Pixel) als Range und Azimut bezeichnet werden, für technische Details vgl. Abschnitt 2.1. Werden Ausschnitte der Erdoberfläche abgebildet, so enthalten diese, abhängig von der betrachteten Szene, verschiedene Arten von Clutter, also flächige Darstellungen natürlichen Hintergrundes wie beispielsweise Wiese, Wald oder See. Die für die Auswertung homogener Clutterausschnitte aus SAR-Bildern üblicherweise verwendeten statistischen Methoden setzen häufig die Unabhängigkeit und die identische Verteilung der einzelnen Pixel voraus. Die in Abschnitt 2.4 dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse zeigen allerdings, dass die betrachteten Clutterdaten Abhängigkeiten untereinander aufweisen. Diese können physikalischer Natur sein, aber auch durch die Prozessierung der Daten entstehen. Ungeachtet der Herkunft der Abhängigkeiten ist die Anwendung statistischer Methoden, welche die Unabhängigkeit voraussetzen, auf solche Daten nicht sinnvoll. Die Methoden müssen angepasst werden, um der fehlenden Unabhängigkeit der Daten gerecht zu werden.

Aufgrund der Ergebnisse aus Abschnitt 2.4 erscheint es sinnvoll, homogene Cluttergebiete aus SAR-Bildern als  $(m_1, m_2)$ -abhängige Zufallsfelder, vgl. Definition 2.3, zu modellieren. In solchen Zufallsfeldern sind zwei Mengen von Zufallsvariablen voneinander unabhängig, wenn sie einen größeren Abstand als  $m_1$  in der ersten oder  $m_2$  in der zweiten Komponente aufweisen. Dabei ist es wichtig,  $m_1$  und  $m_2$  verschieden wählen zu können, da die beiden Richtungen Range und Azimut in einem SAR-Bild physikalisch unterschiedliche Bedeutungen besitzen.

Eine der Hauptaufgaben bei der Analyse von Clutterdaten ist es, Modelle für ihre statistische Verteilung zu entwickeln. Seit vielen Jahrzehnten existieren verschiedene parametrische Modellierungsansätze, zu denen insbesondere die K-Verteilung gehört. Um diese zu überprüfen, wird in der vorliegenden Arbeit ein Anpassungstest für die Marginalverteilungen  $(m_1, m_2)$ -abhängiger Zufallsfelder auf eine parametrische Verteilungsklasse mit Bootstrap-Quantil konzipiert und die Verteilungskonvergenz des empirischen Prozesses mit geschätztem Parametervektor auf Datenebene bewiesen.

In der vorhandenen Literatur zur statistischen Analyse von Radarbildern werden häufig keine Hypothesentests, sondern visuelle Verfahren verwendet, um herauszufinden, welche Verteilung am besten zu einem Datenhistogramm passt, vgl. zum Beispiel [Schimpf, 2002, 2004] und [Schimpf; Fuchs, 2007]. Kommen Anpassungstests zum Einsatz, so wird die Rolle der Parameterschätzung bei der Durchführung in den meisten Fällen vernachlässigt. Beispielsweise wenden [Oliver; Quegan, 1998, S. 135] einen Kolmogorov-Smirnov-Test an, aber um welchen Kolmogorov-Smirnov-Test es sich genau handelt, wird nicht angegeben. Ein Hinweis auf einen Kolmogorov-Smirnov-Test findet sich am angegebenen Ort auf Seite 127 verbunden mit der Literaturangabe [Press et al, 1994]. Dort wird ein Kolmogorov-Smirnov-Test zum Testen einer aus unabhängigen und identisch verteilten Daten bestehenden Stichprobe gegen eine vorgegebene Verteilung ohne Parameterschätzung behandelt. Es wird sogar explizit darauf hingewiesen, dass dieser Test nicht bei geschätzten Parametern angewendet werden kann [Press et al, 1994, S. 627]. [Lilliefors, 1967, S. 399] schreibt dazu: „Unfortunately, when certain parameters of the distribution must be estimated from the sample, then the Kolmogorov-Smirnov test [without estimated parameters A.M.] no longer applies - at least not using the commonly tabulated critical points. It is suggested in [Massey, 1951] [zitiert nach

[Lilliefors, 1967] A.M.] that if the test is used in this case, the results will be conservative in the sense that the probability of a type I error will be smaller than as given by tables of the Kolmogorov-Smirnov statistics (as found in [Massey, 1951] or [Birnbaum, 1952] [zitiert nach [Lilliefors, 1967] A.M.]). As will be seen below, the results of this procedure will indeed be extremely conservative.“ Ignorieren des Problems zu schätzender Parameter führt also dazu, dass das Niveau des Tests nicht ausgeschöpft wird. Der Fehler erster Art wird kleiner, das heißt, der prozentuale Anteil derjenigen Testergebnisse, bei denen die Hypothese fälschlicherweise verworfen wird, liegt unter dem nominellen Testniveau. Gleichzeitig wird der Fehler zweiter Art typischerweise größer, also werden Alternativen seltener erkannt, die Güte des Tests nimmt ab. Ebenso kann sich die Performance eines Tests verändern, wenn er für unabhängige Daten konzipiert ist, aber auf abhängige Daten angewendet wird. Auch dann ist die Einhaltung des Testniveaus bei möglichst großer Güte nicht mehr gewährleistet. Dies belegt die Notwendigkeit, die Anpassungstests bezüglich der Abhängigkeitsstruktur zu modifizieren. Sind die Daten  $(m_1, m_2)$ -abhängig, so besteht die Möglichkeit, diese durch Streichen eines Teils der Daten soweit auszudünnen, dass die verbleibenden Daten voneinander unabhängig sind. Dann können die Tests für unabhängige Zufallsvariable verwendet werden, für welche die mathematische Theorie bereits entwickelt ist. Letzteres ist aber aufgrund des mit dem Ausdünnen einhergehenden hohen Datenverlusts nicht sinnvoll. Deshalb werden in der vorliegenden Arbeit Anpassungstests konzipiert, die annähernd den vollen Datensatz verwenden. Dies geschieht durch Extrahieren unabhängiger Blöcke aus dem  $(m_1, m_2)$ -abhängigen Zufallsfeld.

Die betrachtete parametrische Klasse der K-Verteilungen ist bei der Analyse von Radarbildern weit verbreitet, findet sich in der übrigen statistischen Literatur aber eher selten. Aus den oben genannten Gründen besteht die Notwendigkeit der Konzeption von Anpassungstests auf K-verteilte Marginalien für  $(m_1, m_2)$ -abhängige Zufallsfelder. Als Teststatistiken werden dabei sowohl die Kolmogorov-Smirnov- als auch die Cramér-von-Mises-Teststatistik verwendet.

Die vorliegende Arbeit ist folgendermaßen strukturiert:

Abschnitt 2 widmet sich dem Radar mit synthetischer Apertur. Es wird herausgearbeitet, welche Rolle die Klasse der K-Verteilungen bei der Datenanalyse in der diesbezüglichen Literatur einnimmt. Dann werden die im weiteren Verlauf zum Einsatz kommenden SAR-Daten beschrieben und in Bezug auf ihre Abhängigkeiten analysiert.

Nachdem die Notwendigkeit der Betrachtung abhängiger Zufallsfelder für die Datenanalyse belegt ist, folgen mathematische Aussagen über abhängige Zufallsfelder. In Abschnitt 3 wird ein funktionaler Grenzwertsatz für den empirischen Prozess mit geschätztem Parametervektor für  $\alpha$ -mischende Zufallsfelder nachgewiesen, wobei sich der Beweis an [Zhu; Lahiri, 2007] orientiert. Dort werden empirische Prozesse ohne geschätzte Parametervektoren auf  $\alpha$ -mischenden Zufallsfeldern behandelt. Dabei werden ein funktionaler Grenzwertsatz bewiesen und ein entsprechendes nichtparametrisches Bootstrapverfahren auf Blöcken vorgestellt, aus denen sich ein Anpassungstest für einpunktige Hypothesen ergibt. Aber die praktische Anwendung solcher Tests ist aufgrund der  $\alpha$ -Mischungseigenschaft lediglich für extrem große Zufallsfelder möglich, welche die Grenzen realer Radardaten überschreiten. Deswegen wird dieser Ansatz in der vorliegenden Arbeit nicht weiterverfolgt, sondern die  $(m_1, m_2)$ -Abhängigkeit der in Abschnitt 2 analysierten SAR-Daten ausgenutzt, indem aus dem Datensatz unabhängige Blöcke extrahiert werden.

Der Beweis eines funktionalen Grenzwertsatzes für den empirischen Prozess mit geschätztem Parametervektor für unabhängige Blöcke wird in Abschnitt 4 geführt. Das Vorgehen orientiert sich an dem für  $\alpha$ -mischende Zufallsfelder, allerdings lassen sich essentielle Stellen des Beweises deutlich vereinfachen.

Abschnitt 5 beinhaltet eine systematische Untersuchung der parametrischen Klasse der K-Verteilungen. Neben der Herleitung von Punktschätzern für die Parameter der K-Verteilung werden für diese auch die asymptotische Normalität und damit die Konsistenz, sowohl für  $\alpha$ -mischende Zufallsfelder als auch für unabhängige Blöcke, gezeigt. Desweiteren werden die Regularitätsvoraussetzungen der funktionalen Grenzwertsätze aus den Abschnitten 3 und 4 für die Klasse der K-Verteilungen bewiesen. Die systematische Untersuchung der Klasse der K-Verteilungen ist erforderlich, da es an einer solchen in den zahlreichen Publikationen zu diesem Thema, siehe Abschnitt 2.2, unter Berücksichtigung aller Aspekte mangelt. Häufig wird das Hauptaugenmerk der Anwendung der beschriebenen Verfahren auf die Daten gewidmet, während das Vorgehen eine hinreichende mathematische Präzision vermissen lässt. Auch in [Ward; Tough; Watts, 2006], wo die K-Verteilung eine zentrale Rolle spielt, werden lediglich einige der hier behandelten Aspekte angesprochen.

In Abschnitt 6 wird die Entwicklung von Bootstrap-Quantilen für die auf Abschnitt 4 basierenden Anpassungstests behandelt. Dabei werden Copulas verwendet, um Abhängigkeitsstrukturen innerhalb der Blöcke abzubilden. Ein aus [Strelen; Nassaj, 2007] stammender Algorithmus zur Schätzung der Copula einer Stichprobe von Zufallsvektoren und zur Simulation von Zufallsvektoren mit dieser Copula wird vorgestellt. Zudem wird ein Bootstrap-Verfahren konzipiert, welches auf unabhängigen und identisch verteilten Blöcken basiert, der von uns so bezeichnete Independent-Blocks-Bootstrap. Diese Blöcke werden für die Modellierung der lokalen Abhängigkeiten innerhalb des  $(m_1, m_2)$ -abhängigen Zufallsfeldes benötigt.

In Abschnitt 7 schließt sich ein Algorithmus zur Erzeugung von  $(m_1, m_2)$ -abhängigen Zufallsfeldern mit K-verteilten Marginalien an. Bei der mit Hilfe von Standardprinzipien entwickelten Methode werden andere Verfahren verwendet als diejenigen, welche in [Oliver; Qegan, 1998, Abschnitt 5.8, S. 145ff] beschrieben sind. Der Vorteil des hergeleiteten Algorithmus besteht darin, dass eine Vergrößerung des Abhängigkeitsbereiches, also eine Erhöhung von  $m_1$  oder  $m_2$ , keinen wesentlichen Einfluss auf die Rechenzeit hat. Auch [Blacknell, 1994] beschreibt eine Methode, mit der zu vorgegebenen Korrelationskoeffizienten und den zugehörigen Schrittweiten entsprechend korrelierte K-verteilte Zufallsvariable erzeugt werden können. Ein großer Nachteil ist dabei jedoch die hohe Komplexität der Berechnungen, die mit wachsender Schrittweite rasant zunimmt.

Damit stehen alle für die Durchführung der Tests benötigten Methoden zur Verfügung. In Abschnitt 8 werden Kolmogorov-Smirnov- und Cramér-von-Mises-Anpassungstests auf die Verteilungsklasse der K-Verteilungen mit Bootstrap-Quantil durchgeführt. Die Klasse der K-Verteilungen könnte aber auch durch jede andere eindimensionale parametrische Verteilungsklasse ersetzt werden, welche den Voraussetzungen des funktionalen Grenzwertsatzes 4.3 genügt. Für die Generierung des Bootstrap-Quantils werden sowohl der Independent-Blocks-Bootstrap als auch der IID-Bootstrap verwendet, welcher unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable voraussetzt. Diese vier Tests werden zunächst auf simulierte Zufallsfelder unter der Hypothese und unter zwei verschiedenen Alternativen angewendet, um Aussagen über die Güte und die Power der Tests machen zu können. Im

Anschluss folgt die Anwendung auf die in Abschnitt 2.3 beschriebenen SAR-Daten mit Wiese- bzw. Seeclutter.

Die benötigten analytischen Hilfsmittel finden sich in Anhang A. Anhang B enthält ein Gegenbeispiel zu einer Aussage aus der verwendeten Literatur, welche im Beweis von Lemma 3.22 berichtigt wird. Das folgende Notationsverzeichnis C ist sehr detailliert. Diese Ausführlichkeit ist, ebenso wie viele Erläuterungen in der gesamten Arbeit, den unterschiedlichen Leserkreisen geschuldet.

## 2 Radar mit synthetischer Apertur

### 2.1 Prinzip des Radars mit synthetischer Apertur

Bei einem Radar mit synthetischer Apertur (*synthetic aperture radar, SAR*) handelt es sich um ein bildgebendes Radar, welches sich auf einer bewegten Plattform, beispielsweise einem Flugzeug oder einem Satelliten, befindet. Die aktive Beleuchtung der abzubildenden Szene durch das Radar führt zu einer Unabhängigkeit vom Tageslicht. Die Beeinträchtigung durch Witterungsbedingungen kann durch die Wahl einer Frequenz aus einem der Frequenzbereiche, in denen die atmosphärische Dämpfung gering ist, minimiert werden.

Viele Anwendungen für SAR-Systeme sind im Bereich der Erdfernerkundung (*remote sensing*) angesiedelt. Dazu gehören Bereiche wie Geologie und Kartographie, Ozeanographie, Hydrologie, Glaziologie, Seefahrt und Seewirtschaft, Land- und Forstwirtschaft, Katastrophenschutz und Umwelt-Monitoring, vgl. hierzu [Ender, 2011, S. 119].

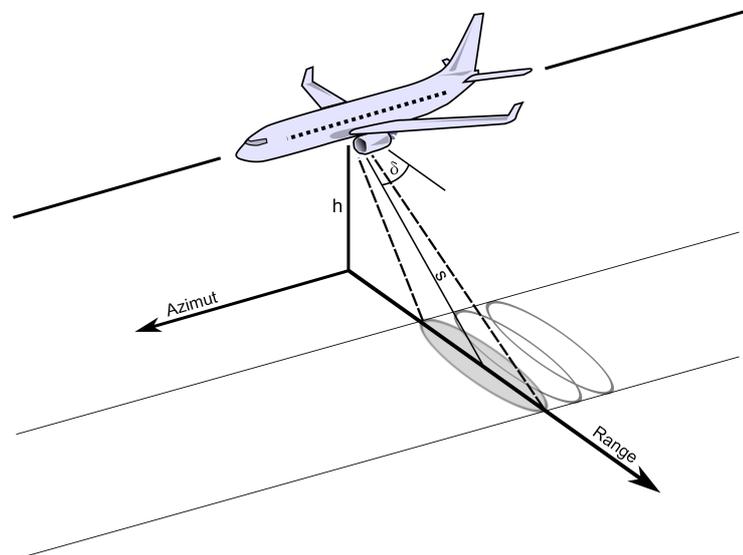


Abbildung 1: SAR Prinzip, Flughöhe  $h$ , Schrägentfernung  $s$ .

In Abbildung 1 ist ein *sidelooking radar* dargestellt, welches sich in einem Flugzeug befindet. Dieses bewegt sich während der Messung idealerweise entlang einer geradlinigen Bahn mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  und Höhe  $h$ . Ist dies nicht der Fall, müssen die von der idealen Bahn abweichenden Bewegungen des Flugzeuges im Nachhinein beim Verarbeiten der Daten (*processing*) kompensiert werden (*motion compensation*).

Das Radar beleuchtet die Szene senkrecht zur Flugrichtung in der Antennenblickrichtung und erzeugt einen räumlich ausgedehnten Leuchtfleck, der in Abbildung 1 grau dargestellt ist. Die Antennenblickrichtung wird zusätzlich durch den Depressionswinkel  $\delta$  beschrieben, den Winkel zwischen der Horizontalen und der Antennenhauptkeule. Die Schrägentfernung  $s$  (*slant range*) wird gemessen und für die Darstellung der Szene in Bodenkoordinaten umgerechnet. Die sich ergebende Bildebene wird durch die beiden Koordinatenachsen Azimut und Range bestimmt. Azimut ist parallel zur Flugrichtung, Range steht senkrecht darauf. Im Fall, dass die Beleuchtungsrichtung, anders als in Abbildung 1, nicht senkrecht zur Flugrichtung ist, muss zusätzlich der *squint angle* berücksichtigt werden. Letzteres kann beabsichtigt oder beispielsweise auch durch starken Seitenwind verursacht sein.

Während des Fluges sendet ein gepulstes SAR-System eine Folge von Impulsen aus. Die Amplituden und Phasen der über das Empfangszeitintervall empfangenen elektromagnetischen Wellen der Echos werden als komplexe Zahlen gespeichert. Diese werden durch Prozessierung in Informationen zu den einzelnen Bildpunkten (Pixeln) des zu erzeugenden Bildes umgewandelt. „The SAR, in fact, measures the number pair  $(A \cos \phi, A \sin \phi)$  in the in-phase and quadrature channels of the receiver, weighted by the SAR PSF [point spread function]. This estimate of the local reflectivity at each pixel can also be represented by the complex number  $Ae^{i\phi}$ ; in this form, the SAR data are known as the *complex image*.“ [Oliver; Quegan, 1998, S. 84f].

Die Verschiebung der Plattform wird dazu verwendet, die Apertur des Radars zu vergrößern, das heißt, ein Radar mit einer größeren Antenne zu simulieren. Auf diese Weise führt die Bewegung zu einer Verbesserung der Auflösung der erzeugten Bilder in Richtung Azimut.

Die Auflösungen in Richtung Range und in Richtung Azimut werden im Folgenden hergeleitet. Die Darstellung orientiert sich hauptsächlich an den Quellen [Oliver; Quegan, 1998] und [Skolnik, 1980].

Bei einem Radar spielen zwei verschiedene Entfernungsmaße eine Rolle. Einerseits die tatsächlich gemessene Schrägentfernung  $s$  zwischen dem Radar und einem beleuchteten Punkt  $P$  auf dem Boden sowie andererseits die daraus berechnete Bodenentfernung  $r$  zwischen  $P$  und der senkrechten Projektion des Radars auf den Boden.

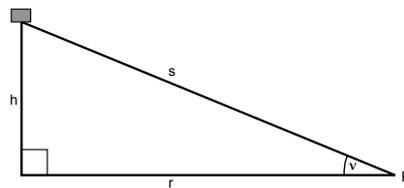


Abbildung 2: Radar in Flughöhe  $h$ , beleuchteter Punkt  $P$  mit Schrägentfernung  $s$ , Bodenentfernung  $r$  und effektiver Depressionswinkel  $\nu$ .

In Abbildung 2 wird die Erdkrümmung vernachlässigt, was bei Anwendungen mit einem von einem Flugzeug getragenen Radar keine Einschränkung darstellt. Berechnungen, welche die Krümmung der Erdoberfläche berücksichtigen, finden sich beispielsweise in [Oliver; Quegan, 1998, S. 14ff].

Der effektive Depressionswinkel  $\nu$  (*grazing angle*) zwischen der Erdoberfläche und der auftreffenden Welle ist von der Lage des zugehörigen Punktes im Leuchtfleck abhängig. Für den effektiven Depressionswinkel  $\nu$  des Punktes  $P$  gilt

$$\frac{r}{s} = \cos(\nu). \quad (2.1)$$

Zusätzliche Informationen im Zusammenhang mit den auftretenden Winkeln finden sich bspw. in [Currie; Brown 1987, S. 48] und [Henderson; Lewis 1998, S. 28f]. Dass die Beziehung zwischen der Schrägentfernung  $s$  und der Bodenentfernung  $r$  eines Punktes  $P$  nicht-linear ist, folgt aus dem Satz von Pythagoras

$$s^2 = h^2 + r^2.$$

Die Auflösung  $\delta_s$  in Richtung der Schrägentfernung, also der kleinste vom Radar messbare Längenunterschied, hängt von der Auflösung  $\delta_t$  in der Zeit ab. Es gilt

$$\delta_s = \delta_t \frac{c}{2}, \quad (2.2)$$

wobei  $c$  die Lichtgeschwindigkeit ist und der Faktor  $\frac{1}{2}$  daraus resultiert, dass der zurückgelegte Weg, welcher aus dem Hinweg und aus dem Rückweg besteht, der doppelten Entfernung entspricht. Dabei bezeichnet  $\delta_t$  entweder die Dauer des Impulses oder, entsprechend der Fouriertheorie, das Inverse der Bandbreite des ausgesendeten Signals. Letzteres ist vor allem dann von Bedeutung, wenn eine große Bandbreite aus mehreren schmalbandigen Impulsen unterschiedlicher Frequenz synthetisiert wird. „A fundamental relation in radar theory is that the best attainable time resolution is inversely proportional to the bandwidth  $B$  of the transmitted signal“ [Oliver; Quegan, 1998, S. 16]. Für die Bandbreite  $B$  des Signals, das heißt für die Differenz zwischen der höchsten und der niedrigsten gesendeten Frequenz, gilt also  $\delta_t = \frac{1}{B}$ . Eingesetzt in Gleichung (2.2) liefert diese Beziehung

$$\delta_s = \frac{c}{2B}.$$

Der geometrische Zusammenhang zwischen der Auflösung  $\delta_s$  in Richtung der Schräg-

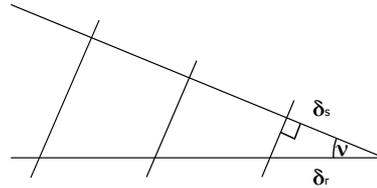


Abbildung 3: Auflösung in Schrägentfernung  $\delta_s$ , Auflösung in Bodenentfernung  $\delta_r$  und effektiver Depressionswinkel  $\nu$ .

entfernung und der Auflösung  $\delta_r$  in Richtung der Bodenentfernung ist in Abbildung 3 dargestellt. Daraus ergibt sich die Gleichung

$$\delta_r = \frac{1}{\cos(\nu)} \delta_s = \frac{1}{\cos(\nu)} \frac{c}{2B}.$$

Für ein Radar mit realer Apertur, also ein Radar, bei dem die effektive Antennenlänge der physikalischen Antennenlänge entspricht, ist die Azimutauflösung  $\delta_a$  wie in Abbildung 4 ersichtlich

$$\delta_a = s\theta_a, \quad (2.3)$$

wobei  $\theta_a$  die Größe des Öffnungswinkels der Antenne in Azimut, angegeben im Bogenmaß, ist. Dessen Größe ist umgekehrt proportional zur physikalischen Antennenlänge  $L$

$$\theta_a = c_1 \frac{\lambda}{L}, \quad (2.4)$$

wobei  $\lambda$  die Wellenlänge ist und  $c_1$  eine von der Antenne abhängende Konstante, siehe beispielsweise [Eaves; Reedy, 1987, (6-15), S. 153].

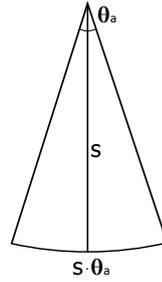


Abbildung 4: Antennenöffnungswinkel in Azimut  $\theta_a$ , Schrägentfernung  $s$  und Azimutauflösung  $\delta_a = s\theta_a$ .

Die Auflösung  $\delta_a$  einer realen Apertur in Azimut kann unter Verwendung der Gleichungen (2.3) und (2.4) geschrieben werden als

$$\delta_a = c_1 \frac{s\lambda}{L}$$

Bei einem Radar mit synthetischer Apertur wird eine reale Antenne bewegt. Durch gemeinsames Verarbeiten der aus den einzelnen, während der Bewegung durchlaufenen, Positionen stammenden Daten wird eine synthetische Antenne von deutlich größerer Länge generiert. Dies ist, ohne Berücksichtigung der Krümmung der Wellenfront, in Abbildung 5 dargestellt. Die maximal mögliche Länge der synthetischen Apertur  $L_{sa}$  entspricht

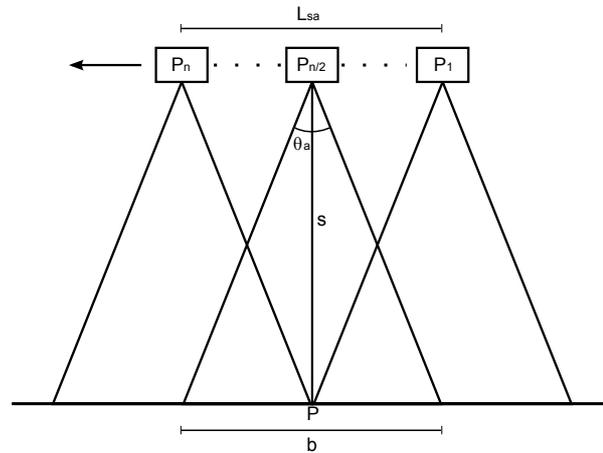


Abbildung 5: Länge der synthetischen Apertur  $L_{sa}$ .

dem Abstand zwischen der ersten Position  $P_1$  des Radars, bei der ein fester Punkt  $P$  am Boden in die Antennenkeule eintritt, und der letzten Position  $P_n$ , wenn er diese wieder verlässt.

Für die Herleitung der Länge von  $L_{sa}$  sei o.B.d.A.  $n$  eine gerade Zahl. Es wird die Position  $P_{n/2}$  betrachtet. In dieser liegt der Punkt  $P$  bezüglich Azimut zentriert im Leuchtfleck. In Abbildung 5 ist zu erkennen, dass in diesem Fall die Länge  $L_{sa}$  der Breite  $b$  des Leuchtflecks entspricht. Nach Gleichung (2.3) gilt  $b = s\theta_a$  und damit ist auch

$$L_{sa} = s\theta_a. \quad (2.5)$$

Für den Öffnungswinkel der synthetischen Antenne in Azimut  $\theta_{sa,a}$  gilt

$$\theta_{sa,a} = c_1 \frac{\lambda}{2L_{sa}}. \quad (2.6)$$

„The factor 2 appears in the denominator because of the two-way propagation path from the antenna 'element' to the target and back as compared with the one-way path of a conventional antenna. As a consequence of the two-way path the phase difference between the equally spaced elements of a synthetic array is twice that of a conventional array with the same spacing. (The terms synthetic array and synthetic aperture are used interchangeably here.)“ [Skolnik, 1980, S. 518]. In (2.4) tritt der Faktor 2 im Nenner nicht auf, da sich die Gleichung auf die Ausbreitung vom Radar zum Boden bezieht, während in (2.6) auch der Rückweg einfließt. Dies hat Auswirkungen auf die Phasendifferenzen, welche mit Hilfe der Antennentheorie beschrieben werden können, vgl. [Kraus, 1966].

Die maximale Azimutaufösung  $\delta_{sa,a}$  eines Radars mit synthetischer Apertur lässt sich aus den Gleichungen (2.4), (2.5) und (2.6) berechnen

$$\delta_{sa,a} = s\theta_{sa,a} = sc_1 \frac{\lambda}{2L_{sa}} = c_1 \frac{\lambda}{2\theta_a} = \frac{L}{2}.$$

Die bestmögliche Auflösung in Azimut hängt lediglich von der Länge  $L$  der realen Antenne ab und ist anders als beim Radar mit realer Apertur unabhängig von der Schrägentfernung. Beim Prozessieren einer vollen Streifenbreite muss allerdings auch die Ausdehnung des Leuchtflecks berücksichtigt werden, denn die maximale synthetische Apertur bezieht sich nur auf die Mitte des Leuchtflecks, also auf den mittleren Rangebereich.

Häufig wird die maximale synthetische Apertur nicht ausgenutzt. Grund dafür ist der Wunsch nach quadratischen Pixeln in dem prozessierten SAR-Bild. Ein Beispiel für ein Amplituden-SAR-Bild ist in Abbildung 6 zu sehen. Die Pixelwerte entsprechen dabei den Amplituden der empfangenen Leistungen in dB. Das Bild hat eine Auflösung von 75 cm sowohl in Schrägentfernung als auch in Azimut und wurde mit dem Experimentalsystem *MEMPHIS* von Bord einer Transall C-160 aufgenommen. Genauere Angaben zum System finden sich in Abschnitt 2.3. Die Helligkeitswerte im Bild ergeben sich aus den Radarquerschnitten (*radar cross section, RCS*) der abgebildeten Objekte, einem Maß für die Stärke der Reflexion eines Gegenstandes zum Radar. Diese hängt unter anderem von Geometrie und Material der Objekte sowie von der verwendeten Frequenz und der Beleuchtungsrichtung ab. Für flächenhaft verteilte Streuer wird auch die Reflektivität  $\sigma^0$  verwendet, die als Radarquerschnitt pro Einheitsfläche definiert ist. „Goldstein introduced the quantity  $\sigma^0$ , radar cross section per unit area of sea surface, to provide a normalized parameter that could be used to describe radar cross section of the sea.“ [Long, 2001, S. 292f] Der Radarquerschnitt wird üblicherweise in der Einheit  $m^2$  angegeben, die Reflektivität folglich in  $m^2/m^2$ .

Im unteren Teil von Abbildung 6 sind das Mercedes-Benz Werk und der Bahnhof gut zu erkennen. Bei den dunklen Flächen handelt es sich um Wasser. Neben den gebauten Objekten (*man made objects*) sind auch Wälder und Wiesen oder Felder zu sehen. Diese fallen unter den Begriff *Clutter* (Bodenstörhintergrund).

[Skolnik, 2001, S. 403] schreibt zur Herkunft dieses Begriffs: „*Clutter* is the term used by radar engineers to denote *unwanted* echoes from the natural environment. It implies that these unwanted echoes 'clutter' the radar and make difficult the detection of wanted targets. Clutter includes echoes from land, sea, weather (particular rain), birds, and insects. [...] Clutter is generally distributed in spatial extent in that it is much larger in physical size than the radar resolution cell. [...]“ Allerdings entwickelten sich auch viele Anwendungen vor allem im Bereich remote sensing, bei denen speziell der Clutter von Interesse ist. [Skolnik, 2001, S. 403f] schreibt weiter: „Radar echoes from the environment are not always undesired. [...] The backscatter echoes from land can interfere with many



Abbildung 6: Amplituden-SAR-Bild des Mercedes-Benz Werkes in Wörth, 75 cm Auflösung, MEMPHIS.

applications of radar, but they are the target of interest for ground-mapping radar, synthetic aperture radars, and radars that observe earth resources.“

In einem homogenem Clutterbereich eines Amplituden-SAR-Bildes unterliegen die Helligkeitswerte der einzelnen Pixel zufälligen Schwankungen und sind häufig nicht unabhängig voneinander. Zum einen gibt es physikalische Abhängigkeiten, die aus der abgebildeten Szene resultieren. Aber auch durch die Messapparatur und die Prozessierung entstehen Abhängigkeiten, vor allem bei multi-look Daten, bei denen die inkohärente Addition benachbarter Pixelwerte mit dem Verzicht auf die höchstmögliche Auflösung einhergeht. Aussagen über die Ausdehnung dieser Abhängigkeiten können aus der Gestalt der Punktzielantwort (*point spread function*) gemacht werden. Diese enthält wichtige Informationen wie beispielsweise die geometrische Auflösung und die Nebenzipfelunterdrückung des Systems, vgl. [Moreira, 2000, S. 17ff]. In den in dieser Arbeit verwendeten SAR-Bildern bedingen Messapparatur und Prozessierung Abhängigkeiten zwischen benachbarten Pixeln. *Benachbart* bedeutet, dass die Pixel mindestens eine gemeinsame Ecke besitzen.

Adäquat können solche SAR-Bilder daher als Realisierungen zweidimensionaler Zufallsfelder mit einer Indizierung in  $\mathbb{Z}^2$  modelliert werden, wobei die Komponenten die zufälligen Helligkeitswerte der einzelnen Pixel darstellen.

## 2.2 Anwendung der K-Verteilung auf Radardaten

Für die Analyse von Clutterdaten aus Radarbildern ist eine statistische Beschreibung der zufälligen Helligkeitswerte der einzelnen Pixel notwendig. Häufig wird dafür die empirische Verteilung eines Datensatzes an eine parametrische Verteilungsklasse angepasst. Die geschätzten Parameter dieser Verteilungsklassen werden verwendet, um beispielsweise verschiedene Arten von Clutter zu unterscheiden. Eine weitere Anwendung von Clutterverteilungen ist die Bestimmung konstanter Falschalarmraten (*constant false alarm rate*, *CFAR*). Diese werden als Schwellenwerte für die Detektion von sich im Clutter befindenden Zielen benötigt.

Für die Anwendung auf Radardaten werden verschiedene parametrische Verteilungsklassen verwendet. Dazu gehören unter anderem die Klassen der Normalverteilungen, der Rayleigh-Verteilungen, der Rice-Verteilungen, der Lognormalverteilungen, der Weibull-Verteilungen und der Chi-Quadrat-Verteilungen, vgl. [Long, 2001, S. 507].

Neben den aufgezählten Verteilungen wird auch die parametrische Klasse der K-Verteilungen zur Anpassung an Clutterdaten genutzt. Eingeführt wurde diese Klasse durch [Jakeman; Pusey, 1976]. Sie entwickelten ein mathematisches Modell für nicht-Rayleigh verteilten Seeclutter. Das Modell beruht auf der Aufteilung der durch das Radar beleuchteten Fläche in eine endliche Anzahl von Regionen oder Streuern, welche unabhängige Beiträge für das zurückgestreute Signal im Fernfeld liefern. Die K-Verteilung wird in diesem Zusammenhang als Wahrscheinlichkeitsverteilung des nicht-Rayleigh verteilten Seeclutters verwendet. Vor allem wird ihre Abhängigkeit von der beleuchteten Fläche herausgestellt. [Jakeman; Pusey, 1976, S. 813] schließen: „We have also introduced a new family of 'K-distributions' to describe the PDF of the cross section. These distributions, which can be used for fitting experimental data, appear to have a firmer theoretical basis than the largely ad hoc distributions suggested hitherto.“

Auf diesen ersten Vorschlag zur Verwendung der K-Verteilung für Seeclutter folgten Publikationen, in denen die Nützlichkeit der K-Verteilung für die Analyse von Radardaten aufgezeigt wurde. Die Anwendungen blieben nicht auf Seeclutter beschränkt und wurden zudem auf SAR-Daten ausgeweitet, vgl. [Oliver; Quegan, 1998, S. 135].

Großen Anteil daran hat ein Modell zur Beschreibung von hochaufgelöstem Seeclutter, welches aus einer zusammengesetzten Verteilung mit zwei Komponenten besteht. So werden die physikalischen Eigenschaften des Seeclutters berücksichtigt. Es ist möglich, die K-Verteilung mit Hilfe dieses Modells zu beschreiben. „[...] the K-distribution can be represented as a Rayleigh distribution with its mean-square value varying according to a gamma distribution [...]“ [Jakeman; Tough, 1987, S. 1768]. Die entsprechende Darstellung (8.5) der Dichte der K-Verteilung als Mischung der Dichten von Rayleigh-Verteilungen mit der Dichte einer Gammaverteilung als Mischungsverteilung wird in Abschnitt 8.2 detailliert beschrieben.

Alle hier erwähnten Verteilungsklassen bestehen aus eindimensionalen Verteilungen. Das Radarbild wird als zweidimensionales Zufallsfeld aufgefasst, die einzelnen Pixelwerte also als Realisierungen von Zufallsvariablen. Dann kann jede Teilmenge von  $n$  Zufallsvariablen als Zufallsvektor geschrieben werden und besitzt somit eine gemeinsame  $n$ -dimensionale Verteilung. Sollen eindimensionale Verteilungsklassen angepasst werden, so müssen einzelne Zufallsvariable betrachtet werden. Diese besitzen eindimensionale Randverteilungen, die auch als Marginalien bezeichnet werden.

Die Schätzung der Parameter der K-Verteilung wurde in der Literatur von verschiedenen Autoren untersucht und neben Maximum-Likelihood-Schätzern und Momentenschätzern wurden weitere Schätzer vorgeschlagen. Dazu gehören beispielsweise eine Methode von [Iskander; Zoubir; Boashash, 1999], die Momenten- und Maximum-Likelihood-Schätzer kombiniert, ein Schätzer, der auf dem Logarithmus basiert, [Blacknell; Tough, 2001] oder die Methode von Raghavan, welche das arithmetische und das geometrische Mittel der Daten verwendet [Raghavan, 1991].

Ein detaillierter Überblick zu den Arbeiten, die sich mit Anwendungen der K-Verteilung auf Radardaten beschäftigen, findet sich beispielsweise in [Ward; Tough; Watts, 2006, S. 6] oder bei [Oliver; Quegan, 1998, S. 135]. Diese fassen zusammen: „In the radar field the K distribution has been used extensively to represent both sea clutter [...] and land clutter [...]“

Aufgrund der weiten Verbreitung der Klasse der K-Verteilungen als parametrische Verteilungsklasse für die Modellierung von Radardaten erscheint es notwendig, statistische Tests zu entwickeln, mit welchen überprüft werden kann, ob die eindimensionalen Randverteilungen eines Zufallsfeldes aus der Klasse der K-Verteilung stammen. Die Anwendung solcher Tests erlaubt eine Aussage darüber, ob die Anpassung einer K-Verteilung an die entsprechenden Daten überhaupt sinnvoll ist. Da es sich hierbei um Daten aus Radarbildern handelt, muss das Zufallsfeld nach einem zweidimensionalen Gitter indiziert sein. Außerdem muss es die passende Abhängigkeitsstruktur aufweisen. Um welche es sich dabei handelt, wird in Abschnitt 2.4 analysiert.

### 2.3 Verwendete Daten

Die in dieser Arbeit verwendeten Radardaten sind SAR-Daten von Flugmesskampagnen mit dem Experimentalsystem MEMPHIS des Fraunhofer FHR an Bord einer Transall C-160. Das Akronym MEMPHIS steht für **M**illimetrewave **E**xperimental **M**ultifrequency **P**olarimetric **H**igh Resolution **I**nterferometric **S**ystem. Es handelt sich um ein gepulstes vollpolarimetrisches Radar mit einer maximalen Bandbreite von 800 MHz und den Frequenzen 35 GHz sowie 94 GHz. Weitere Informationen zu MEMPHIS finden sich in [Schimpf et al., 2002].



Abbildung 7: MEMPHIS an Bord einer Transall C-160.

Bei den Daten, aus denen die in den folgenden Kapiteln berechneten Beispiele für die Methoden zur Datenanalyse stammen, handelt es sich um 94 GHz multi-look SAR-Daten der Polarisation HH. Die Polarisation beschreibt die Schwingung der elektromagnetischen Welle. HH ist die Bezeichnung dafür, dass sowohl die gesendeten als auch die empfangenen Wellen eine lineare Polarisation mit einem elektrischen Feld haben, welches horizontal schwingt. Die Angabe der Polarisation ist wichtig, da die physikali-

schen Rückstreuereigenschaften und damit die Verteilung der Daten von der Polarisation abhängen können.

Wegen des großen Dynamikumfangs haben die abgebildeten SAR-Szenen logarithmische Skalen. Das heißt, anstelle der Leistung  $x$  eines Pixels wird der Wert  $10 \cdot \log_{10}(x)$  dargestellt, die Daten liegen also im dB-Raum vor. Sämtliche Berechnungen erfolgen aber im linearen Raum. Dabei bilden die Auswertungen in Abschnitt 2.4 eine Ausnahme, die vorgestellten Ergebnisse stammen von logarithmierten Daten. Allerdings ist diese Umrechnung eine deterministische Funktion, welche keinen Einfluss auf die dort analysierten Abhängigkeiten der Daten untereinander hat.

Abbildung 8 zeigt ein Amplituden-SAR-Bild der Szene, aus der die später analysierten Wiesedaten stammen. Diese wurden unter einem Depressionswinkel von  $20^\circ$  und mit einer Schrägentfernung von 1200 m aufgenommen. Um die gewünschten homogenen Clutter-

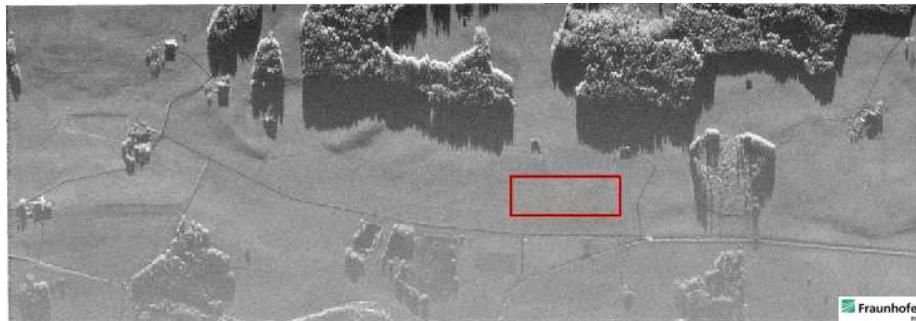


Abbildung 8: Amplituden-SAR-Bild einer Schweizer Szene in dB, 19 cm Auflösung, MEMPHIS.

daten für die Analyse zur Verfügung zu haben, wurde ein entsprechend einheitliches Stück Wiese ausgesucht. Es weist fast keine Neigung auf, und die durchschnittliche Halmlänge beträgt etwa 10 cm. Das rote Rechteck markiert den Bereich, aus dem die Wiesedaten stammen.

Die zweite verwendete Szene enthält Seeclutter, vgl. Abbildung 9. Hier beträgt der Depres-



Abbildung 9: Amplituden-SAR-Bild Seeclutter in dB, 19 cm Auflösung, MEMPHIS.

sionswinkel  $22.5^\circ$ , die Schrägentfernung 800 m.

## 2.4 Abhängigkeiten zwischen Clutterdaten

Die Abhängigkeitsstruktur des in Abschnitt 2.3 beschriebenen Wiese- und Seeclutters wird im Folgenden analysiert. Dazu werden sowohl die empirischen Autokorrelationsfunktionen von Datenvektoren als auch Tests auf Zufälligkeit verwendet.

### 2.4.1 Empirische Autokorrelationsfunktion

Die Autokovarianzfunktion  $\gamma$  einer stationären Zeitreihe  $X_t$  für  $1 \leq t \leq n$  mit Mittelwert  $\mu$  ist für die Schrittweiten  $0 \leq h \leq n - 1$  definiert durch

$$\gamma(h) = E[(X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)]. \quad (2.7)$$

Die Autokorrelationsfunktion  $\rho$  entsteht durch Normierung aus der Autokovarianzfunktion (2.7) für die Schrittweiten  $0 \leq h \leq n - 1$

$$\rho(h) = \frac{\gamma(h)}{\gamma(0)}. \quad (2.8)$$

Besteht die Zeitreihe aus unabhängigen Zufallsvariablen, so sind diese auch unkorreliert und es gilt für alle  $h \geq 1$  die Gleichung  $\gamma(h) = 0$ , die  $\rho(h) = 0$  impliziert.

Als Schätzer für die Modellgröße  $\gamma$  wird die empirische Autokovarianz

$$\hat{\gamma}(h) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-h} (X_t - \bar{X}_n)(X_{t+h} - \bar{X}_n) \quad (2.9)$$

verwendet, wobei  $\bar{X}_n$  das arithmetische Mittel der Daten ist. Der Faktor  $\frac{1}{n}$  wird hier der Normierung mit der Anzahl der Summanden vorgezogen um sicherzustellen, dass die Matrizen der empirischen Autokovarianzen und der empirischen Autokorrelationen positiv semidefinit sind. Bei der Normierung mit der Anzahl der Summanden ist dies nicht zwingend der Fall, vgl. [Brockwell; Davis, 1991, S. 220f]. Als Schätzer für  $\rho(\cdot)$  ergibt sich aus den Gleichungen (2.9) und (2.8) die empirische Autokorrelationsfunktion

$$\hat{\rho}(h) = \frac{\hat{\gamma}(h)}{\hat{\gamma}(0)}. \quad (2.10)$$

Nach [Box; Jenkins, 1970, S. 33] gilt für die Verwendung dieser Schätzer die Faustregel, dass für die Anzahl der Daten  $n \geq 50$  gelten sollte. Zudem existiert die Richtlinie, die Schätzer lediglich für die Schrittweiten  $0 \leq h \leq \frac{n}{4}$  zu betrachten, damit auch für größere Schrittweiten ausreichend viele Datenpaare für die Berechnung des Schätzers zur Verfügung stehen. Handelt es sich um unabhängige Daten, so sollte die geschätzte Autokorrelationsfunktion für alle Schrittweiten  $h \geq 1$  und eine Schwelle  $\varepsilon > 0$  die Bedingung  $|\hat{\rho}(h)| < \varepsilon$  erfüllen. Im Folgenden wird nach [Brockwell; Davis, 1991, S. 223] als Schwelle der Wert

$$\varepsilon = 1.96n^{-\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

verwendet. Dieser ergibt sich aus dem 95% Konfidenzintervall der Standardnormalverteilung, gegen welche die Verteilungen der Schätzer  $\hat{\rho}(h)$  bei unabhängigen Daten für  $n \rightarrow \infty$  konvergieren.

### 2.4.2 Tests auf Zufälligkeit

Um Abhängigkeiten zwischen den Pixeln des SAR-Bildes zu erkennen, werden zwei verschiedene Tests auf Zufälligkeit (*tests for randomness*) eingesetzt. *Zufälligkeit* bedeutet hierbei unabhängige und identisch verteilte Daten. Angewendet werden der *runs up and down* Test und der *Bartels* Test.

Beim *runs up and down* Test werden die Daten einer Zeitreihe zunächst dichotomisiert, da sie lediglich zwei verschiedene Ausprägungen besitzen dürfen. Um dies zu erreichen, wird jedes einzelne Datum mit dem empirischen Median verglichen. Daraufhin erhalten alle Daten, die größer als dieser sind, eine Ausprägung, den anderen wird die zweite Ausprägung zugeordnet. Ein *run* ist eine Sequenz der Zeitreihe, in der lediglich eine Ausprägung vorkommt. In die Teststatistik fließen sowohl die Anzahl als auch die Länge der runs der betrachteten Stichprobe ein. Für genauere Informationen vgl. [Gibbons, 1992, S. 82ff].

Der zweite verwendete Test ist der *Bartels* Test. Bei diesem werden die Ränge zweier aufeinanderfolgender Elemente einer Zeitreihe  $X_t, t = 1, \dots, n$ , verglichen. [Bartels, 1982] führt die folgende Teststatistik ein

$$RvN = \frac{\sum_{t=1}^{n-1} (\text{Rang}(X_t) - \text{Rang}(X_{t+1}))^2}{\sum_{t=1}^n (\text{Rang}(X_t) - \bar{R})^2},$$

wobei  $\bar{R} = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \text{Rang}(X_t) = \frac{n+1}{2}$  das Mittel über alle Ränge ist. Diese Teststatistik, bei der jeweils die Ränge zweier aufeinander folgender Zufallsvariablen verglichen werden, ist eine Rangversion der *von Neumann's ratio*. Bei paarweise verschiedenen Beobachtungen entspricht der Nenner der Konstanten  $\frac{n(n^2-1)}{12}$ .

Bei der Anwendung der Tests auf Zufälligkeit wurden jeweils die in der Programmierumgebung [R] implementierten zweiseitigen Tests mit ihren Standardeinstellungen verwendet.

### 2.4.3 Anwendung auf Daten

Sowohl die in Abschnitt 2.4.1 definierte empirische Autokorrelationsfunktion mit der angegebenen Schwelle als auch die beiden Tests auf Zufälligkeit aus Abschnitt 2.4.2 sind Methoden, die aus der Zeitreihenanalyse stammen.

Im vorliegenden Fall von zweidimensional indizierten Bilddaten entspricht die Zeitreihe der räumlichen Abfolge dieser Daten in einer Dimension. Aus der Datenmatrix des SAR-Bildes werden Vektoren entnommen, um die beschriebenen Methoden auf diese anzuwenden. Dabei verlaufen Spaltenvektoren in Richtung Range und Zeilenvektoren in Richtung Azimut. Die Schrittweite zwischen zwei benachbarten Pixeln, die sich in derselben Zeile oder Spalte befinden, wird als  $h = 1$  festgelegt.

Sowohl für Zeilenvektoren als auch für Spaltenvektoren des in Abschnitt 2.3 beschriebenen Wiesecutters haben die empirischen Autokorrelationsfunktionen dasselbe typische Aussehen.

Der in Abbildung 10 verwendete Schwellenwert  $\varepsilon$  wurde mit Gleichung (2.11) berechnet. Für die Schrittweite  $h = 1$  liegt der Wert der empirischen Autokorrelationsfunktion  $\hat{\rho}(1)$  deutlich über dem Schwellenwert, die Beträge  $|\hat{\rho}(h)|$  für  $h \geq 2$  sind fast immer kleiner als  $\varepsilon$ .

Dass die empirische Autokorrelationsfunktion nicht für alle  $h \geq 1$  unter dem Schwellenwert liegt, lässt darauf schließen, dass die betrachteten Daten nicht unabhängig voneinander sind. Dies wird durch die Ergebnisse der Tests auf Zufälligkeit bestätigt, die sehr niedrige p-Werte haben. Der p-Wert des runs up and down Tests beträgt für den vorliegenden Vektor 0.001, der des Bartels Tests  $9.4 \cdot 10^{-7}$ . Dabei entsprechen die Größenordnungen der p-Werte denjenigen, welche auch andere Zeilen- oder Spaltenvektoren derselben Cluttermatrix aufweisen. Die beiden Tests verwerfen also erwartungsgemäß die Hypothese der

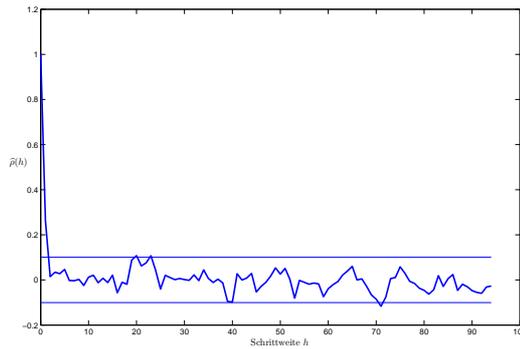


Abbildung 10:  $\hat{\rho}(h)$  für Spaltenvektor aus Wiesedaten,  $\hat{\rho}(1) = 0.263$ ,  $\varepsilon = 0.1005$ .

Zufälligkeit. Damit ist statistisch abgesichert, dass Abhängigkeiten zwischen den Daten bestehen.

Das Aussehen der empirischen Autokorrelationsfunktion lässt darauf schließen, dass sich die linearen Abhängigkeiten auf benachbarte Pixel der Datenmatrix beschränken. Um dies zu überprüfen, werden die Vektoren ausgedünnt, indem jede zweite Komponente gestrichen wird. Dann entfällt die Schwellenüberschreitung der empirischen Autokorrelationsfunktion bei der Schrittweite  $h = 1$ , da diese nicht mehr benachbarte Pixel der Datenmatrix sondern Pixel, die den Abstand 2 haben, beschreibt. Die folgende Abbildung 11 zeigt dies am Beispiel desselben ausgedünnten Zeilenvektors, für den die empirische Autokorrelationsfunktion des vollständigen Vektors in Abbildung 10 dargestellt ist.

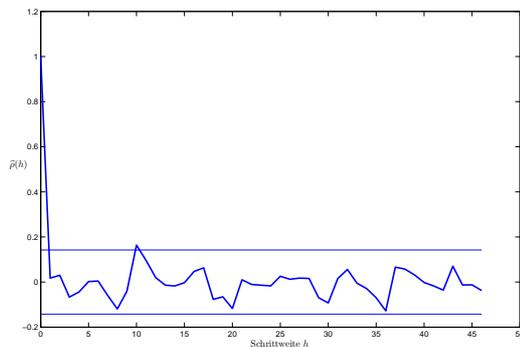


Abbildung 11:  $\hat{\rho}(h)$  für ausgedünnten Spaltenvektor aus Wiesedaten,  $\hat{\rho}(1) = 0.0175$ ,  $\varepsilon = 0.1422$ .

Ein weiteres Indiz dafür, dass sich die Abhängigkeiten auf benachbarte Pixel der Datenmatrix beschränken, findet sich in Abbildung 12.

Dargestellt ist die empirische Autokorrelationsfunktion einer zeilenweise eingelesenen Datenmatrix der Größe  $100 \times 100$ . Deutlich über dem Schwellenwert liegen die Werte zu den Schrittweiten  $h = 1$ , dabei handelt es sich um benachbarte Pixel, die in derselben Zeile liegen, und der Peak bei  $h = 101$  mit der Breite von 3 Schrittweiten. Bei  $h = 101$  sind die Pixel in einer Spalte benachbart, bei  $h = 100$  und  $h = 102$  handelt es sich um benachbarte Pixel einer Diagonalen. Die Werte der empirischen Autokorrelationsfunktion für die beiden letztgenannten Schrittweiten sind deutlich kleiner als für  $h = 101$ . Dies stimmt mit der Erwartung überein, dass in der Datenmatrix zwei Pixel, die eine gemein-

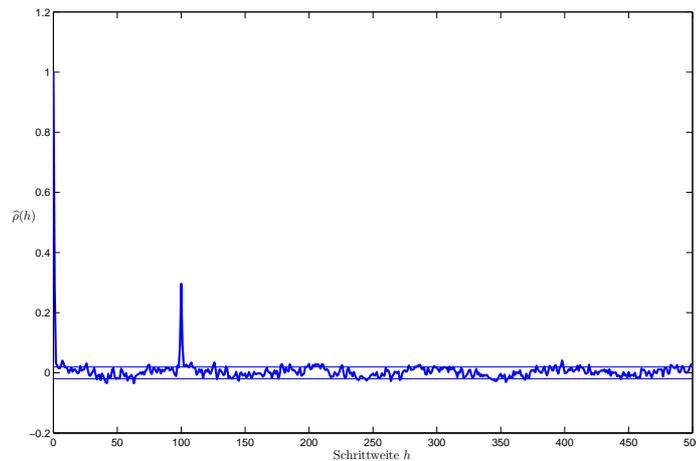


Abbildung 12:  $\hat{\rho}(h)$  für zeilenweise eingelesene Matrix aus Wiesedaten,  $\varepsilon = 0.0194$ .

same Kante haben, größere lineare Abhängigkeiten aufweisen als zwei in einer Diagonalen benachbarte Pixel mit genau einer gemeinsamen Ecke. Für alle anderen Schrittweiten  $h$  liegt  $\hat{\rho}(h)$  annähernd unter  $\varepsilon$ .

Ebenso wie die empirische Autokorrelationsfunktion geben auch die Tests auf Zufälligkeit keine Hinweise auf Abhängigkeiten zwischen den Komponenten der ausgedünnten Datenvektoren. Für den betrachteten Vektor ist der p-Wert des runs up and down Tests 0.39, der des Bartels Tests liegt sogar bei 0.801. In beiden Fällen wird die Nullhypothese der Zufälligkeit dementsprechend nicht verworfen.

Dies stützt die Vermutung, dass sich die Abhängigkeiten auf benachbarte Pixel der Wiesedaten beschränken.

Die empirische Autokorrelationsfunktion des Seeclutters entspricht in ihrem Verhalten der des Wiesecutters. Auch hier liegt sowohl bei Zeilen- als auch bei Spaltenvektoren lediglich der Wert  $\hat{\rho}(1)$  deutlich über der Schwelle. Abbildung 13 zeigt die empirische Autokorrelationsfunktion einer zeilenweise eingelesenen Seecluttermatrix der Größe  $49 \times 49$ . Es zeigt sich ein Peak bei 50, der sich über drei Schrittweiten ausdehnt. Die Schrittweite 50 entspricht im Bild benachbarten Pixeln aus derselben Spalte, die Schrittweiten 49 und 51 gehören zu Pixeln, die in einer Diagonale nebeneinander liegen. Das Verhalten der empirischen Autokorrelationsfunktion lässt die Vermutung zu, dass sich auch bei dem betrachteten Seeclutter die Abhängigkeiten auf benachbarten Pixel der SAR-Szene beschränken.

Auch bei anderen Arten von Clutter kann davon ausgegangen werden, dass zwei hinreichend weit voneinander entfernte Pixel unabhängig voneinander sind. Die Schrittweite, ab der dies der Fall ist, ist sehr stark von der Art des Clutters abhängig, bei See spielt auch der Seegang (*sea state*) eine große Rolle. Beispielsweise Wald weist aufgrund seiner Textur, also der vorhandenen räumlichen Struktur, Abhängigkeiten für deutlich größere Schrittweiten auf als Wiese.

Abbildung 14 macht zusätzlich deutlich, dass das Aussehen der Autokorrelationsfunktionen bei Wald sehr viel stärker variiert als bei dem betrachteten Wiese- oder Seeclutter. Die drei verwendeten Vektoren stammen alle aus demselben Waldstück. Sie verlaufen in Richtung Azimut und sind zwischen 10 und maximal 30 Bildpixel voneinander entfernt.

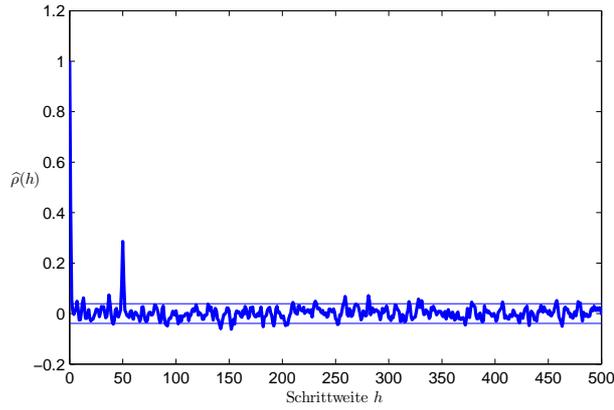


Abbildung 13:  $\hat{\rho}(h)$  für zeilenweise eingelesene  $49 \times 49$  Matrix aus Seecutterdaten,  $\varepsilon = 0.0392$ .

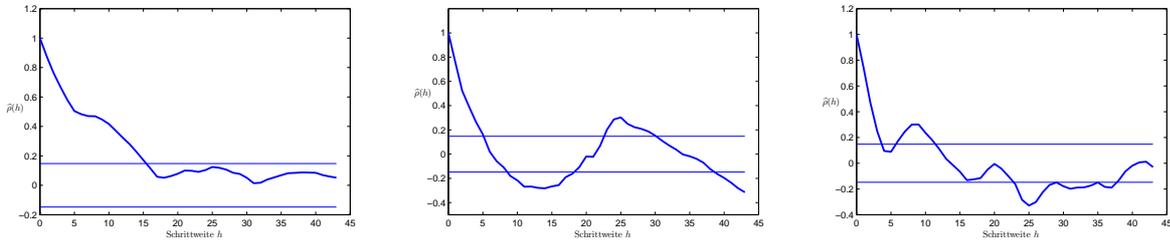


Abbildung 14:  $\hat{\rho}(h)$  für Spaltenvektoren aus Walddaten,  $\varepsilon = 0.1477$ .

Mit den bisherigen Ergebnissen scheint die im Folgenden definierte  $(m_1, m_2)$ -Abhängigkeit die geeignete Abhängigkeitsstruktur für die Beschreibung von Clutterdaten aus SAR-Bildern zu sein. Zunächst werden die benötigten Begriffe eingeführt.

**2.1 Definition:** Ein Zufallsfeld  $\{Z_s : s \in \mathbb{Z}^2\}$  heißt *stationär*, wenn für alle  $k \in \mathbb{N}$ , alle  $s_1, \dots, s_k \in \mathbb{Z}^2$  und alle  $\mathbf{h} \in \mathbb{Z}^2$  gilt

$$(Z_{s_1}, \dots, Z_{s_k}) \sim (Z_{s_1+\mathbf{h}}, \dots, Z_{s_k+\mathbf{h}}).$$

Für zwei Mengen  $S, T \subset \mathbb{Z}^2$  wird ihr komponentenweiser Abstand definiert.

**2.2 Definition:** Seien die Mengen  $S, T \subset \mathbb{Z}^2$ . Die Elemente von  $S$  werden mit  $(s_1, s_2)$  bezeichnet, die von  $T$  mit  $(t_1, t_2)$ .

Die Menge der ersten Komponenten von  $S$  ist gegeben durch

$$S_1 = \{s_1 \in \mathbb{Z} : \text{Es existiert } s_2 \in \mathbb{Z} \text{ so, dass gilt } (s_1, s_2) \in S\}.$$

Die Menge der zweiten Komponenten von  $S$  ist gegeben durch

$$S_2 = \{s_2 \in \mathbb{Z} : \text{Es existiert } s_1 \in \mathbb{Z} \text{ so, dass gilt } (s_1, s_2) \in S\}.$$

Analog gelten die Bezeichnungen  $T_1$  und  $T_2$  für die Menge  $T$ .

Der Abstand der Mengen  $S$  und  $T$  in der ersten Komponente wird definiert als

$$\text{dist}_1(S, T) = \min_{s_1 \in S_1, t_1 \in T_1} |s_1 - t_1|.$$

Der Abstand der Mengen  $S$  und  $T$  in der zweiten Komponente ist entsprechend

$$\text{dist}_2(S, T) = \min_{s_2 \in S_2, t_2 \in T_2} |s_2 - t_2|.$$

**2.3 Definition:** Ein stationäres Zufallsfeld  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2\}$  heißt  $(m_1, m_2)$ -abhängig bezüglich der Maximumsnorm mit  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ , wenn für alle Indexmengen  $S, T \subset \mathbb{Z}^2$  mit

$$\text{dist}_1(S, T) > m_1 \text{ oder } \text{dist}_2(S, T) > m_2$$

die beiden Mengen von Zufallsvariablen

$$\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in S\} \text{ und } \{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in T\}$$

unabhängig sind.

Nach den hier vorgestellten Ergebnissen lassen sich Daten aus SAR-Bildern, welche aus Ausschnitten mit homogenem Clutter stammen, mathematisch als Realisierungen von zweidimensionalen, stationären,  $(m_1, m_2)$ -abhängigen Zufallsfeldern modellieren. Die Homogenität des Clutters wird dabei über die Stationarität beschrieben.



### 3 Der empirische Prozess mit geschätztem Parametervektor für zweidimensionale mischende Zufallsfelder

In diesem Kapitel werden mischende Zufallsfelder auf  $\mathbb{Z}^2$  betrachtet, also Zufallsfelder, deren Komponenten vorgegebene Eigenschaften bezüglich des  $\alpha$ -Mischungskoeffizienten erfüllen. Für den zugehörigen empirischen Prozess mit geschätztem Parametervektor wird ein funktionaler Grenzwertsatz bewiesen. Im ersten Abschnitt werden die dafür benötigten bekannten Begriffe und Resultate eingeführt.

#### 3.1 Grundlagen

Betrachtet wird das Zufallsfeld  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2\}$ .

**3.1 Definition:** Für eine Menge  $S \subset \mathbb{Z}^2$  bezeichne  $\mathcal{A}_S$  die  $\sigma$ -Algebra, die von den Zufallsvariablen  $Z_{\mathbf{s}}$  mit  $\mathbf{s} \in S$  erzeugt wird.

Der *Abstand zweier Punkte*  $\mathbf{s}, \tilde{\mathbf{s}} \in \mathbb{Z}^2$  ist die Maximumsnorm ihrer Differenz

$$\|\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}\|_{\infty} = \max\{|s_1 - \tilde{s}_1|, |s_2 - \tilde{s}_2|\}.$$

Der *Abstand zweier Mengen*  $S_1, S_2 \subset \mathbb{Z}^2$  wird definiert als

$$\delta(S_1, S_2) = \inf\{\|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|_{\infty} : \mathbf{s}_1 \in S_1, \mathbf{s}_2 \in S_2\}. \quad (3.1)$$

Für eine Menge  $S \subset \mathbb{Z}^2$  wird die *Menge ihrer Randpunkte bezüglich der Maximumsnorm* definiert als

$$\partial S = \{\mathbf{s} \in S : \text{Es existiert ein } \tilde{\mathbf{s}} \in \mathbb{Z}^2 \setminus S \text{ mit } \|\mathbf{s} - \tilde{\mathbf{s}}\|_{\infty} = 1\}.$$

**3.2 Definition:** Für zwei  $\sigma$ -Algebren  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$  wird der  $\alpha$ -Mischungskoeffizient definiert als

$$\alpha(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \sup\{|P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2)| : A_1 \in \mathcal{F}, A_2 \in \mathcal{G}\}.$$

Für zwei Zufallsvariable  $X_1, X_2$  wird der  $\alpha$ -Mischungskoeffizient definiert als

$$\alpha(X_1, X_2) = \sup\{|P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2)| : A_1 \in \sigma(X_1), A_2 \in \sigma(X_2)\},$$

wobei  $\sigma(X)$  die von der Zufallsvariablen  $X$  erzeugte  $\sigma$ -Algebra bezeichnet.

Für  $\eta \in \mathbb{N}$  und  $j, k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$  werden die folgenden  $\alpha$ -Mischungskoeffizienten definiert

$$\alpha_{j,k}(\eta) = \sup\{|P(A_1 \cap A_2) - P(A_1)P(A_2)| : A_1 \in \mathcal{A}_{S_1}, A_2 \in \mathcal{A}_{S_2}, \\ |S_1| \leq j, |S_2| \leq k, \delta(S_1, S_2) \geq \eta\}.$$

**3.3 Definition:** Für eine Zufallsvariable  $X$  und für  $1 \leq p < \infty$  ist die  $L_p$ -Norm definiert als

$$\|X\|_p = E(|X|^p)^{1/p}.$$

Das *wesentliche Supremum* ist

$$\|X\|_{\infty} = \text{ess sup}|X|.$$

Für einen Zufallsvektor  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^d$  ist für alle  $1 \leq p < \infty$  die  $L_p$ -Norm definiert als

$$\|\mathbf{X}\|_p = E(\|\mathbf{X}\|^p)^{1/p}.$$

Das *wesentliche Supremum* ist

$$\|\mathbf{X}\|_\infty = \text{ess sup} \|\mathbf{X}\|$$

mit einer beliebigen Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^d$ .

Der folgende Satz ist enthalten in [Doukhan 1994, Theorem 3, S. 9].

**3.4 Satz:** Seien  $X_1, X_2$  zwei Zufallsvariable. Es gilt für alle  $1 \leq p, q, r < \infty$ , welche die Gleichung  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  erfüllen,

$$|\text{cov}(X_1, X_2)| \leq 8\alpha(X_1, X_2)^{1/r} \|X_1\|_p \|X_2\|_q.$$

Der folgende zentrale Grenzwertsatz für stationäre mischende Zufallsfelder, vgl. Definition 2.1, ist in [Bolthausen, 1982] für beliebige Dimensionen  $\mathbb{Z}^d$  formuliert.

**3.5 Satz:** Sei  $(\Lambda_N)_{N \in \mathbb{N}}$  eine aufsteigende Folge von Teilmengen aus  $\mathbb{Z}^2$  mit

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \Lambda_N = \mathbb{Z}^2$$

für deren Folgenglieder die Anzahl der Randpunkte  $|\partial\Lambda_N|$  die Bedingung

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{|\partial\Lambda_N|}{|\Lambda_N|} = 0 \tag{3.2}$$

erfüllt.

Weiterhin gelte für ein stationäres Zufallsfeld  $\{Y_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2\}$

$$\sum_{\eta=1}^{\infty} \eta \alpha_{j,k}(\eta) < \infty \text{ für alle } j, k \in \mathbb{N} \text{ mit } j + k \leq 4 \tag{3.3}$$

sowie

$$\alpha_{1,\infty}(\eta) = o(\eta^{-2}). \tag{3.4}$$

Ferner existiere  $\delta_0 > 0$  mit

$$\|Y_{\mathbf{0}}\|_{2+\delta_0} < \infty \tag{3.5}$$

und

$$\sum_{\eta=1}^{\infty} \eta \alpha_{1,1}(\eta)^{\delta_0/(2+\delta_0)} < \infty. \tag{3.6}$$

Dann ist  $\sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} |\text{cov}(Y_{\mathbf{0}}, Y_{\mathbf{s}})| < \infty$  und es gelten  $\sigma^2 = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} \text{cov}(Y_{\mathbf{0}}, Y_{\mathbf{s}}) \geq 0$  sowie die Verteilungskonvergenz

$$\left(\sqrt{|\Lambda_N|}\right)^{-1} \sum_{\mathbf{s} \in \Lambda_N} \left(Y_{\mathbf{s}} - E(Y_{\mathbf{0}})\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2) \text{ für } N \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

**3.6 Bemerkung:** [Bolthausen, 1982] formuliert die Verteilungskonvergenz aus Satz 3.5 für  $\sigma^2 > 0$  in der äquivalenten Form

$$\left(\sigma\sqrt{|\Lambda_N|}\right)^{-1} \sum_{\mathbf{s} \in \Lambda_N} \left(Y_{\mathbf{s}} - E(Y_{\mathbf{0}})\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, 1) \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Allerdings folgt aus der Bemerkung [Bolthausen, 1982, (2), S. 1048] die Verteilungskonvergenz (3.7) auch für  $\sigma^2 = 0$ . In diesem Fall wird die Grenzverteilung zu  $N(0, 0)$ , was einer Dirac-Verteilung in 0 entspricht.

**3.7 Definition:** Definiert werden für alle  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  die Rechtecke

$$R_N = R_{N_1, N_2} = \{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq s_1 \leq N_1 \text{ und } 1 \leq s_2 \leq N_2\} \quad (3.8)$$

mit den Mächtigkeiten  $|R_N| = N_1 \cdot N_2 = N$ .

**3.8 Lemma:** Für die in (3.8) definierten Rechtecke  $R_{N_1, N_2}$  gilt

$$\lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \frac{|\partial R_{N_1, N_2}|}{|R_{N_1, N_2}|} = 0. \quad (3.9)$$

**Beweis:** Es ist

$$\lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \frac{|\partial R_{N_1, N_2}|}{|R_{N_1, N_2}|} = \lim_{N_1, N_2 \rightarrow \infty} \frac{2N_1 + 2N_2 - 4}{N_1 N_2} = 0.$$

□

**3.9 Bemerkung:** Aufgrund der Stationarität des Zufallfeldes lässt sich Satz 3.5 auf die in (3.8) definierten Rechtecke übertragen.

Im Folgenden bezeichne  $N \rightarrow \infty$  das Wachstum der Rechtecke  $R_N$  in beide Richtungen, also für  $N_1, N_2 \rightarrow \infty$ .

Die folgenden Definitionen übertragen die Theorie des Skorohodraums  $D([0, 1])$ , vgl. [Billingsley, 1968, Chapter 4], auf das Zeitintervall  $[-\infty, \infty]$ .

**3.10 Definition:** Sei  $F$  eine stetige, streng monoton wachsende Verteilungsfunktion. Mit  $F(-\infty) = 0$  und  $F(\infty) = 1$  ist  $F : [-\infty, \infty] \rightarrow [0, 1]$  eine bijektive Funktion mit  $F^{-1}(0) = -\infty$  und  $F^{-1}(1) = \infty$ .

Durch

$$\begin{aligned} \varrho & : [-\infty, \infty] \times [-\infty, \infty] \rightarrow [0, 1] \\ \varrho(t, t') & = |F(t) - F(t')| \end{aligned} \quad (3.10)$$

ist eine Metrik auf  $[-\infty, \infty]$  definiert und  $([-\infty, \infty], \varrho)$  ist ein metrischer Raum. Der *Skorohodraum* ist definiert als

$$D([-\infty, \infty]) = \left\{ f : [-\infty, \infty] \rightarrow \mathbb{R} \mid f(t) = \lim_{t' \downarrow t} f(t') \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty) \right. \\ \left. \text{und } \lim_{t' \uparrow t} f(t') \text{ existiert in } \mathbb{R} \text{ für alle } t \in (-\infty, \infty] \right\}. \quad (3.11)$$

Gesetzt wird

$$H_\infty = \left\{ \lambda : [-\infty, \infty] \rightarrow [-\infty, \infty] \mid \lambda \text{ ist Homöomorphismus und} \right. \\ \left. \lambda(-\infty) = -\infty, \lambda(\infty) = \infty \right\}.$$

Die *Skorohodmetrik* auf  $D([-\infty, \infty])$  ist für  $f, g \in D([-\infty, \infty])$  definiert als

$$s_\infty(f, g) = \inf_{\lambda \in H_\infty} \left\{ \sup_{-\infty \leq t \leq \infty} |f(t) - g(\lambda(t))| + \sup_{-\infty \leq t \leq \infty} \varrho(t, \lambda(t)) \right\}. \quad (3.12)$$

Für eine Funktion  $f : [-\infty, \infty] \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\delta > 0$  ist durch

$$\omega_\infty(f, \delta) = \sup_{\substack{-\infty \leq t < t' \leq \infty \\ \varrho(t, t') \leq \delta}} |f(t) - f(t')| \quad (3.13)$$

der *C-Stetigkeitsmodul* definiert.

**3.11 Definition:** Es seien  $X$  und  $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$  Zufallsgrößen in dem metrischen Raum  $(D([-\infty, \infty]), s_\infty)$ . Mit der Notation

$$X_N \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ in } (D([-\infty, \infty]), s_\infty) \text{ für } N \rightarrow \infty$$

wird die Verteilungskonvergenz von  $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$  gegen  $X$  in  $(D([-\infty, \infty]), s_\infty)$  für  $N \rightarrow \infty$  bezeichnet.

Die folgende Eigenschaft von Folgen von Zufallsgrößen ist ein wichtiges Hilfsmittel, um Verteilungskonvergenz nachzuweisen.

**3.12 Definition:** Eine Folge von Zufallsgrößen  $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$  in  $(D([-\infty, \infty]), s_\infty)$  heißt *C-straff*, wenn sie

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P(\omega_\infty(X_N, \delta) > \varepsilon) = 0 \text{ für alle } \varepsilon > 0 \quad (3.14)$$

erfüllt.

Der folgende Satz für den Raum  $D([-\infty, \infty])$  folgt aus [Billingsley, 1968, Theorem 15.5, S. 127].

**3.13 Satz:** Sei  $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$  eine C-straffe Folge von Zufallsgrößen in  $(D([-\infty, \infty]), s_\infty)$ . Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $-\infty \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq \infty$  sei die Folge von Zufallsvektoren  $(X_N(t_1), \dots, X_N(t_k))_{N \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{R}^k$  verteilungskonvergent.

Dann existiert ein stochastischer Prozess  $X = (X(t))_{t \in [-\infty, \infty]}$  in  $(D([-\infty, \infty]), s_\infty)$  mit fast sicher stetigen Pfaden, das heißt mit  $P(X \in C([-\infty, \infty])) = 1$ , und mit

$$X_N \xrightarrow{\mathcal{L}} X \text{ in } (D([-\infty, \infty]), s_\infty).$$

### 3.2 Der funktionale Grenzwertsatz im $\alpha$ -mischenden Fall

Gegeben sei ein stationäres Zufallsfeld mit  $F$ -verteilten Komponenten

$$\{Z_s : s \in \mathbb{Z}^2\}, \quad (3.15)$$

das die folgenden Mischungsbedingungen erfüllt. Diese ergeben sich aus den Voraussetzungen des Grenzwertsatzes 3.5 und aus den Mischungsbedingungen aus [Zhu; Lahiri, 2007], welche für den Nachweis der C-Straffheit benötigt werden.

Es gelte für alle  $\eta \in \mathbb{N}$

$$\alpha_{j,k}(\eta) \leq \text{const}_{j,k} \cdot \eta^{-\tau} \text{ mit } \tau > 14 \text{ für alle } j + k \leq 4 \quad (3.16)$$

sowie

$$\alpha_{1,\infty}(\eta) = o(\eta^{-2}). \quad (3.17)$$

**3.14 Lemma:** Für ein stationäres Zufallsfeld  $\{Z_s : s \in \mathbb{Z}^2\}$  mit  $F$ -verteilten Komponenten impliziert die Mischungsbedingung (3.16) Bedingung (3.3) sowie Bedingung (3.6) für alle  $\delta_0 > \frac{1}{3}$ .

**Beweis:** Es gilt mit der oberen Schranke aus (3.16) für alle  $j, k \in \mathbb{N}$  mit  $j + k \leq 4$

$$\sum_{\eta=1}^{\infty} \eta \alpha_{j,k}(\eta) \leq \sum_{\eta=1}^{\infty} \text{const}_{j,k} \cdot \eta^{1-\tau} < \infty,$$

da  $\tau > 14$  gilt. Damit ist Bedingung (3.3) erfüllt.

Es gilt nach (3.16)

$$\sum_{\eta=1}^{\infty} \eta \alpha_{1,1}(\eta)^{\delta_0/(2+\delta_0)} \leq \sum_{\eta=1}^{\infty} \text{const}_{j,k} \cdot \eta^{1-\tau\delta_0/(2+\delta_0)}.$$

Diese Summe ist endlich, falls für den Exponenten gilt

$$1 - \frac{\tau\delta_0}{2+\delta_0} < -1,$$

was für  $\tau > 2$  gleichbedeutend ist mit

$$\delta_0 > \frac{4}{\tau - 2}.$$

Für  $\tau > 14$  und  $\delta_0 > \frac{1}{3}$  ist dies erfüllt. Damit gilt Bedingung (3.6).  $\square$

Für das stationäre mischende Zufallsfeld aus (3.15) mit  $F$ -verteilten Komponenten wird das Testproblem

$$H_0 : F \in \mathcal{F} \text{ gegen } H_1 : F \notin \mathcal{F} \quad (3.18)$$

für eine vorgegebene parametrische Klasse  $\mathcal{F} = \{F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}) : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta\}$  von Verteilungsfunktionen mit dem Parameterraum  $\Theta \subset \mathbb{R}^d$  für  $d \in \mathbb{N}$  betrachtet.

**3.15 Definition:** Für alle  $N$  sei die *empirische Verteilungsfunktion* zu  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in R_N\}$  definiert als

$$F_N(t) = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} I(Z_{\mathbf{s}} \leq t) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty],$$

wobei  $R_N$  die in (3.8) definierten Rechtecke sind

Zu einer Folge von Schätzern  $(\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  mit  $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N = \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N(\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in R_N\})$  wird der *empirische Prozess zum Stichprobenumfang  $N$  mit geschätztem Parametervektor  $\boldsymbol{\vartheta}$*  definiert als

$$\widehat{\alpha}_N(t) = \sqrt{N}(F_N(t) - F(t; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty], \quad (3.19)$$

wobei  $F(-\infty; \cdot) = 0$  sowie  $F(\infty; \cdot) = 1$  gesetzt wird.

Unter  $H_0 : F \in \mathcal{F}$  gilt

$$F \in \mathcal{F}, \text{ das heißt es gibt ein } \boldsymbol{\vartheta}_0 \in \Theta \text{ mit } F = F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0).$$

Wie üblich wird  $\boldsymbol{\vartheta}_0$  *wahrer Parameter* genannt.

Es folgt der funktionale Grenzwertsatz für den empirischen Prozess  $\widehat{\alpha}_N$ .

**3.16 Satz:** Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

- 1) Die Verteilungsklasse  $\mathcal{F} = \{F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}) : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta\}$  mit  $\Theta \subset \mathbb{R}^d$  und stetigen, streng monotonen Verteilungsfunktionen  $F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$  erfülle für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\Theta \ni \boldsymbol{\vartheta} \mapsto F(t; \boldsymbol{\vartheta}) \in [0, 1] \text{ ist Borelfunktion.} \quad (3.20)$$

Für einen inneren Punkt  $\boldsymbol{\vartheta}_0 \in \Theta$  existiere eine stetige Funktion

$$\Delta(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0) : [-\infty, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

mit

$$\sup_{-\infty \leq u \leq \infty} \left| F(u; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - F(u; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(u, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \mathbf{h} \right| = o(\|\mathbf{h}\|) \text{ für } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0} \quad (3.21)$$

mit  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$  und einer beliebigen Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^d$ .

- 2) Es sei  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2\}$  ein stationäres Zufallsfeld mit  $F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0)$ -verteilten Komponenten, welches die Mischungsbedingungen (3.16) und (3.17) erfüllt.

3) Es sei  $(\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvektoren mit Werten in  $\Theta$ , zu der eine messbare Funktion  $L(\cdot, \boldsymbol{\vartheta}_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  existiert mit

$$\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0 = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \text{ f\"ur } N \rightarrow \infty \quad (3.22)$$

sowie

$$E(L(Z_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)) = \mathbf{0}. \quad (3.23)$$

Ferner existiere  $\delta_0 > \frac{1}{3}$  mit

$$\|L(Z_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)\|_{2+\delta_0} < \infty. \quad (3.24)$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt f\"ur den empirischen Prozess mit gesch\"atztem Parametervektor aus (3.19)

$$\widehat{\alpha}_N \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{W} \text{ in } (D([-\infty, \infty]), s_\infty) \text{ f\"ur } N \rightarrow \infty, \quad (3.25)$$

wobei  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}(t))_{t \in [-\infty, \infty]}$  ein zentrierter Gau\Bprozess mit fast sicher stetigen Pfaden ist, dessen Kovarianzfunktion die Form

$$\sigma^2(t, t') = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} \text{cov}(g_t(Z_0), g_{t'}(Z_{\mathbf{s}})) \text{ f\"ur alle } t, t' \in [-\infty, \infty]$$

hat mit

$$g_t(Z_{\mathbf{s}}) = I(Z_{\mathbf{s}} \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0). \quad (3.26)$$

**3.17 Bemerkung:** Die Darstellung (3.22) hei\Bt *lineare Entwicklung von  $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N$* , die Funktion  $L$  wird als *lineare Einflussfunktion* bezeichnet.

**3.18 Bemerkung:** Gilt Bedingung (3.24) f\"ur ein  $0 < \delta_0 \leq \frac{1}{3}$ , so wird die zus\"atzliche Voraussetzung (3.6) f\"ur Satz 3.16 ben\"otigt

$$\sum_{\eta=1}^{\infty} \eta \alpha_{1,1}(\eta)^{\delta_0/(2+\delta_0)} < \infty.$$

Dies begr\"undet sich darin, dass f\"ur die Folgerung von (3.6) aus der Mischungsbedingung (3.16) nach dem Beweis zu Lemma 3.14

$$\delta_0 > \frac{4}{\tau - 2}$$

gelten muss. Da in (3.16) die untere Schranke  $\tau > 14$  vorausgesetzt wird, ergibt sich die Forderung  $\delta_0 > \frac{1}{3}$ .

Für den Beweis des funktionalen Grenzwertsatzes 3.16 wird der empirische Prozess folgendermaßen zerlegt

$$\widehat{\alpha}_N(t) = \sqrt{N} \left( F_N(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) - \sqrt{N} \left( F(t; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right). \quad (3.27)$$

Aus Voraussetzung (3.20) und der Messbarkeit von  $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N$  folgt, dass  $\widehat{\alpha}_N$  eine Zufallsgröße in  $(D([-\infty, \infty]), s_\infty)$  ist.

Im Folgenden wird die Verteilungskonvergenz des Ausdrucks  $\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)$  gegen eine  $d$ -dimensionale Normalverteilung bewiesen. Dazu wird der eindimensionale Grenzwertsatz 3.5 auf Linearkombinationen der Zufallsvektoren angewendet. Das gewünschte  $d$ -dimensionale Resultat folgt dann mit dem Cramér-Wold-Device.

Sei dazu  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^d$ . Unter den Voraussetzungen (3.22), (3.23) und (3.24) gilt nach dem Grenzwertsatz 3.5

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{N}} \boldsymbol{\lambda}^T \sum_{\mathbf{s} \in R_N} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} \sum_{k=1}^d \lambda_k L_k(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \\ &\xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma^2) \text{ für } N \rightarrow \infty \end{aligned}$$

mit der Varianz

$$\sigma^2 = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} \boldsymbol{\lambda}^T E(L(Z_0, \boldsymbol{\vartheta}_0) L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T) \boldsymbol{\lambda} \geq 0.$$

Dabei kann Satz 3.5 angewendet werden, da sich die Mischungseigenschaften von dem Zufallsfeld  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2\}$  auf das Zufallsfeld  $\{\sum_{k=1}^d \lambda_k L_k(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2\}$  übertragen bzw. nach Lemma 3.14 erfüllt sind. Die Gültigkeit von (3.5) folgt aus Voraussetzung (3.24).

Bedingung (3.2), die an die Anzahl der Randpunkte des betrachteten Gebietes gestellt wird, ist nach Lemma 3.8 für die Rechtecke  $R_N$  erfüllt.

Mit dem Cramér-Wold-Device folgt daraus die Verteilungskonvergenz

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_d(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \text{ für } N \rightarrow \infty$$

mit der Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} E(L(Z_0, \boldsymbol{\vartheta}_0) L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T).$$

Damit und mit (3.22) folgt

$$\sqrt{N} \|\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0\|_2 = O_p(1) \text{ für } N \rightarrow \infty. \quad (3.28)$$

Es gilt (3.21), also auch

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \mathbf{h} \right| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \mathbf{h}) \right| = o(\|\mathbf{h}\|_2) \text{ für } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0},$$

wobei  $R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \mathbf{h}) = F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \mathbf{h}$  rechtsseitig stetig in  $t \in \mathbb{R}$  ist aufgrund der Stetigkeit von  $\Delta(\cdot, \boldsymbol{\vartheta}_0)$ .

Für alle  $t \in [-\infty, \infty]$  gilt nach der Zerlegung (3.27)

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_N(t) &= \sqrt{N} \left( F_N(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) - \sqrt{N} \left( F(t; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) \\ &= \sqrt{N} \left( F_N(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) - \sqrt{N} \left( F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) \\ &= \sqrt{N} \left( F_N(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) - \sqrt{N} \left( \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T (\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0) + R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) \\ &= \sqrt{N} \left( F_N(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \sqrt{N} (\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0) - \sqrt{N} R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0) \\ &= Y_N(t) - \sqrt{N} R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0) \end{aligned}$$

mit der Zufallsvariablen  $Y_N(t) = \sqrt{N} (F_N(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0)) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \sqrt{N} (\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0)$ .

Im nächsten Beweisschritt wird gezeigt, dass der Restterm asymptotisch vernachlässigbar ist und dass daher die asymptotischen Verteilungen von  $(\widehat{\alpha}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  und  $(Y_N)_{N \in \mathbb{N}}$  im Raum  $D([-\infty, \infty])$  übereinstimmen, sofern sie existieren.

Da  $\widehat{\alpha}_N(t)$  gemäß (3.20) eine Zufallsvariable ist, folgt, dass auch  $R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0)$  für alle  $t \in [-\infty, \infty]$  eine Zufallsvariable ist. Daraus und aus der rechtsseitigen Stetigkeit von  $R(\cdot, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0)$  ergibt sich, dass

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0) \right| = \sup_{t \in \mathbb{Q}} \left| R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0) \right|$$

eine Zufallsvariable ist. Für diese gelten die folgenden Aussagen, vgl. [Häusler, 2007, Lemma 6.33].

**3.19 Lemma:** Seien (3.20), (3.21) und (3.28) für ein  $\boldsymbol{\vartheta}_0 \in \Theta$  erfüllt.

Dann gelten die stochastischen Konvergenzen

$$\sqrt{N} \sup_{t \in \mathbb{R}} |R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0)| \xrightarrow{P} 0 \text{ für } N \rightarrow \infty \quad (3.29)$$

und

$$s_\infty(\widehat{\alpha}_N, Y_N) \leq \sqrt{N} \sup_{t \in \mathbb{R}} |R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0)| \xrightarrow{P} 0 \text{ für } N \rightarrow \infty. \quad (3.30)$$

Aus (3.30) folgt

$$s_\infty(\widehat{\alpha}_N, Y_N) \xrightarrow{P} 0 \text{ für } N \rightarrow \infty. \quad (3.31)$$

Die Konvergenz (3.31) und der Satz von Cramér implizieren, dass  $(\widehat{\alpha}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  und  $(Y_N)_{N \in \mathbb{N}}$  dieselbe asymptotische Verteilung in  $D([-\infty, \infty])$  haben, sofern sie eine solche besitzen.

Sei für das weitere Vorgehen der folgende Prozess definiert

$$T_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} \left[ I(Z_s \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0) \right] \quad (3.32)$$

für alle  $t \in [-\infty, \infty]$

mit der Funktion  $\Delta$  aus Gleichung (3.21).

Dann implizieren Voraussetzung (3.22) und der Satz von Cramér, dass  $(Y_N)_{N \in \mathbb{N}}$  und  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$  dieselbe asymptotische Verteilung in  $D([-\infty, \infty])$  besitzen.

Für die Berechnung der Grenzverteilung wird die Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen von  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$  benötigt, und es muss gezeigt werden, dass  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$  C-straff ist. Dann kann Satz 3.13 angewendet werden.

### 3.2.1 Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen

Betrachtet wird der Prozess aus (3.32) für alle  $t \in [-\infty, \infty]$

$$\begin{aligned} T_N(t) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} \left[ I(Z_{\mathbf{s}} \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} g_t(Z_{\mathbf{s}}) \end{aligned}$$

mit  $g_t(Z_{\mathbf{s}})$  aus (3.26).

**3.20 Lemma:** Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $-\infty \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq \infty$  gilt

$$\left[ T_N(t_j) \right]_{1 \leq j \leq k} \xrightarrow{\mathcal{L}} N_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}^{(k)}) \text{ für } N \rightarrow \infty \quad (3.33)$$

mit der Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(k)} = \left[ \sigma^2(t_i, t_j) \right]_{1 \leq i, j \leq k}.$$

Dabei ist

$$\sigma^2(t, t') = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} \text{cov}(g_t(Z_{\mathbf{0}}), g_{t'}(Z_{\mathbf{s}})) \text{ für alle } t, t' \in [-\infty, \infty] \quad (3.34)$$

mit  $g_t(\cdot)$  definiert wie in (3.26).

**Beweis:** Im ersten Schritt wird die absolute Konvergenz der Reihe aus (3.34) gezeigt.

Für alle  $t, t' \in [-\infty, \infty]$  und alle  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}$  gilt nach Definition 3.2 und Satz 3.4 für  $\delta_0$  aus Voraussetzung (3.24)

$$\begin{aligned} |\text{cov}(g_t(Z_{\mathbf{0}}), g_{t'}(Z_{\mathbf{s}}))| &\leq 8\alpha(Z_{\mathbf{0}}, Z_{\mathbf{s}})^{\delta_0/(2+\delta_0)} \|g_t(Z_{\mathbf{0}})\|_{2+\delta_0} \|g_{t'}(Z_{\mathbf{0}})\|_{2+\delta_0} \\ &\leq 8\alpha_{1,1}(\|\mathbf{s}\|_{\infty})^{\delta_0/(2+\delta_0)} \|g_t(Z_{\mathbf{0}})\|_{2+\delta_0} \|g_{t'}(Z_{\mathbf{0}})\|_{2+\delta_0}. \end{aligned}$$

Für alle  $t \in [-\infty, \infty]$  gilt

$$\begin{aligned} \|g_t(Z_{\mathbf{0}})\|_{2+\delta_0} &\leq \|I(Z_{\mathbf{0}} < t)\|_{2+\delta_0} + \|F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0)\|_{2+\delta_0} + \|\Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T L(Z_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)\|_{2+\delta_0} \\ &\leq \text{const}_{t, \boldsymbol{\vartheta}_0} + E \left( \left| \sum_{k=1}^d \Delta_k(t, \boldsymbol{\vartheta}_0) L_k(Z_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \right|^{2+\delta_0} \right)^{1/(2+\delta_0)} \\ &\leq \text{const}_{t, \boldsymbol{\vartheta}_0} + E \left( \left( \sum_{k=1}^d |\Delta_k(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)| \cdot |L_k(Z_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)| \right)^{2+\delta_0} \right)^{1/(2+\delta_0)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \text{const}_{t, \boldsymbol{\vartheta}_0} + \max_{1 \leq k \leq d} |\Delta_k(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)| \cdot E \left( \left( \sum_{k=1}^d |L_k(Z_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)| \right)^{2+\delta_0} \right)^{1/(2+\delta_0)} \\
&= \text{const}_{t, \boldsymbol{\vartheta}_0} + \text{const}_{t, \boldsymbol{\vartheta}_0} \cdot \|L(Z_0, \boldsymbol{\vartheta}_0)\|_{2+\delta_0} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

nach Voraussetzung (3.24).

Mit diesen beiden Abschätzungen und Voraussetzung (3.16) gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbf{0}\}} |\text{cov}(g_t(Z_0), g_{t'}(Z_{\mathbf{s}}))| &\leq \text{const}_{t, \boldsymbol{\vartheta}_0} \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z} \setminus \{\mathbf{0}\}} \alpha_{1,1}(\|\mathbf{s}\|_{\infty})^{\delta_0/(2+\delta_0)} \\
&= \text{const}_{t, \boldsymbol{\vartheta}_0} \sum_{k \in \mathbb{N}} 8 \cdot k \cdot \alpha_{1,1}(k)^{\delta_0/(2+\delta_0)} \\
&\leq \text{const}_{t, \boldsymbol{\vartheta}_0} \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot k^{-\tau \delta_0/(2+\delta_0)} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

da nach den Voraussetzungen (3.16) und (3.24)  $\tau > 14$  und  $\delta_0 > \frac{1}{3}$  gelten. Damit ist die absolute Konvergenz der Reihe gezeigt.

Im zweiten Schritt wird die Symmetrie von  $\sigma^2(t, t')$  bewiesen. Dazu wird in jedem Summanden die Stationarität des Zufallfeldes ausgenutzt. Damit gilt für alle  $t, t' \in [-\infty, \infty]$

$$\begin{aligned}
\sigma^2(t, t') &= \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} \text{cov}(g_t(Z_0), g_{t'}(Z_{\mathbf{s}})) \\
&= \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} \text{cov}(g_t(Z_{-\mathbf{s}}), g_{t'}(Z_0)) \\
&= \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} \text{cov}(g_t(Z_{\mathbf{s}}), g_{t'}(Z_0)) \\
&= \sigma^2(t', t).
\end{aligned}$$

Im dritten Schritt wird die Verteilungskonvergenz (3.33) gezeigt. Dafür ist nach dem Cramér-Wold-Device für alle  $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^k$  die folgende Verteilungskonvergenz zu zeigen

$$\sum_{j=1}^k \lambda_j T_N(t_j) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \boldsymbol{\lambda}^T \boldsymbol{\Sigma}^{(k)} \boldsymbol{\lambda}) \text{ für } N \rightarrow \infty. \quad (3.35)$$

Gemäß Satz 3.5 gilt die Verteilungskonvergenz

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^k \lambda_j T_N(t_j) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} \sum_{j=1}^k \lambda_j g_{t_j}(Z_{\mathbf{s}}) \\
&\xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \sigma_{(k)}^2) \text{ für } N \rightarrow \infty
\end{aligned}$$

mit

$$\sigma_{(k)}^2 = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} \text{cov} \left( \sum_{j=1}^k \lambda_j g_{t_j}(Z_0), \sum_{l=1}^k \lambda_l g_{t_l}(Z_{\mathbf{s}}) \right) = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} \sum_{j=1}^k \sum_{l=1}^k \lambda_j \lambda_l \text{cov}(g_{t_j}(Z_0), g_{t_l}(Z_{\mathbf{s}})).$$

In dieser Argumentation kann Satz 3.5 angewendet werden, da sich die Mischungseigenschaften von dem Zufallsfeld  $\{Z_s : s \in \mathbb{Z}^2\}$  auf  $\{\sum_{j=1}^k \lambda_j g_{t_j}(Z_s) : s \in \mathbb{Z}^2\}$  übertragen bzw. nach Lemma 3.14 erfüllt sind. Die Gültigkeit von (3.5) folgt aus Voraussetzung (3.24).

Bedingung (3.2), die an die Anzahl der Randpunkte des betrachteten Gebietes gestellt wird, ist nach Lemma 3.8 für die Rechtecke  $R_N$  erfüllt.

Für

$$\Sigma^{(k)} = [\sigma^2(t_i, t_j)]_{1 \leq i, j \leq k}$$

folgt

$$\sigma_{(k)}^2 = \boldsymbol{\lambda}^T \Sigma^{(k)} \boldsymbol{\lambda}.$$

Damit gilt die Verteilungskonvergenz (3.35) und das Lemma 3.20 ist gezeigt.  $\square$

### 3.2.2 C-Straffheit

Für den Beweis der C-Straffheit von  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$  wird für alle  $t \in [-\infty, \infty]$  die folgende Zerlegung betrachtet

$$\begin{aligned} T_N(t) &= \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s \in R_N} [I(Z_s \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0)] - \frac{1}{\sqrt{N}} \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \sum_{s \in R_N} L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0) \\ &= V_N(t) - W_N(t) \end{aligned}$$

mit dem ersten Summanden  $V_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s \in R_N} [I(Z_s \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0)]$  und dem zweiten  $W_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \sum_{s \in R_N} L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0)$ .

Um die C-Straffheit von  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$  nachzuweisen, genügt es, die C-Straffheit der beiden Summanden  $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$  und  $(W_N)_{N \in \mathbb{N}}$  zu zeigen und auszunutzen, dass die Summe zweier C-straffer Folgen C-straff ist.

**3.21 Lemma:** Der Prozess

$$W_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \sum_{s \in R_N} L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty]$$

ist C-straff.

**Beweis:** Es gilt für alle  $t \in [-\infty, \infty]$

$$W_N(t) = \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{s \in R_N} L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0),$$

wobei der erste Faktor deterministisch, von  $N$  unabhängig und gleichmäßig stetig in  $t$ , also stetig bezüglich der Metrik  $\rho$  ist. Der zweite Faktor ist stochastisch, hängt nicht von dem Argument  $t$  ab und ist verteilungskonvergent, also  $O_p(1)$ .

Deshalb gilt für den in (3.13) definierten C-Stetigkeitsmodul für alle  $\delta > 0$

$$\omega_\infty(W_N, \delta) = \sup_{\substack{-\infty \leq t, t' \leq \infty \\ \rho(t, t') \leq \delta}} |W_N(t) - W_N(t')|$$

$$\begin{aligned}
&= \sup_{\substack{-\infty \leq t, t' \leq \infty \\ \varrho(t, t') \leq \delta}} \left| \left( \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t', \boldsymbol{\vartheta}_0) \right)^T \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \right| \\
&\leq \sup_{\substack{-\infty \leq t, t' \leq \infty \\ \varrho(t, t') \leq \delta}} \left\| \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t', \boldsymbol{\vartheta}_0) \right\|_2 \cdot \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \right\|_2.
\end{aligned}$$

Zur Abkürzung wird die folgende Notation eingeführt

$$\omega_{\infty, d}(\Delta, \delta) = \sup_{\substack{-\infty \leq t, t' \leq \infty \\ \varrho(t, t') \leq \delta}} \left\| \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t', \boldsymbol{\vartheta}_0) \right\|_2.$$

Damit folgt für alle  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}
&\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P(\omega_{\infty}(W_N, \delta) \geq \varepsilon) \\
&\leq \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{N \rightarrow \infty} P\left( \left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \right\|_2 \geq \frac{\varepsilon}{\omega_{\infty, d}(\Delta, \delta)} \right) = 0,
\end{aligned}$$

denn es gilt  $\left\| \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \right\|_2 = O_p(1)$  sowie  $\frac{\varepsilon}{\omega_{\infty, d}(\Delta, \delta)} \xrightarrow{\delta \downarrow 0} \infty$ , da  $\omega_{\infty, d}(\Delta, \delta) \xrightarrow{\delta \downarrow 0} 0$  aufgrund der Stetigkeit von  $\Delta$  bezüglich  $\varrho$  gilt.

Damit ist die C-Straffheit von  $(W_N)_{N \in \mathbb{N}}$  gezeigt.  $\square$

**3.22 Lemma:** Der Prozess

$$V_N(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} \left[ I(Z_{\mathbf{s}} \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right] \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty]$$

ist C-straft.

Zu zeigen ist also die C-Straffheit des klassischen empirischen Prozesses ohne geschätzte Parameter.

Der Nachweis der C-Straffheit orientiert sich, zum Teil auch in der Notation, an der Vorgehensweise von [Zhu; Lahiri, 2007]. Die Durchführung der Beweise sämtlicher Lemmata in der vorliegenden Arbeit ist notwendig, da einige technische Aussagen in der angegebenen Quelle nicht nachvollziehbar waren bzw. nicht korrekt sind. Insbesondere die in dieser Arbeit in Lemma 3.27 bewiesene Abschätzung der Mächtigkeit der Indexmenge geben die oben genannten Autoren auch in ihrem Verweis auf [Lahiri, 1999, Beweis zu Lemma 4.1] falsch an, vgl. Abschnitt B. Außerdem unterscheiden sie zwischen zwei Arten des asymptotischen Verhaltens. Die 'increasing domain asymptotic' entspricht in unserem Fall dem Wachsen der Rechtecke  $R_N$ . Zusätzlich betrachten [Zhu; Lahiri, 2007] noch die 'infill asymptotic', die in der hier vorliegenden Arbeit nicht benötigt wird.

Mit einer Zeittransformation von  $[-\infty, \infty]$  auf  $[0, 1]$  mit der Funktion  $F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0)$  entsteht der folgende empirische Prozess für alle  $u \in [0, 1]$

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_N(u) &= V_N(F^{-1}(u; \boldsymbol{\vartheta}_0)) \\ &= \sqrt{N} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} \left[ I(Z_{\mathbf{s}} \leq F^{-1}(u; \boldsymbol{\vartheta}_0)) - u \right] \\ &= \sqrt{N} \left( F_N(F^{-1}(u; \boldsymbol{\vartheta}_0)) - u \right).\end{aligned}\tag{3.36}$$

Zu zeigen ist die C-Straffheit von  $\tilde{\alpha}_N$ . Nach [Billingsley, 1968, Theorem 8.3, S. 56] ist es dafür hinreichend, die folgende Aussage zu zeigen:

Für alle  $\varepsilon > 0$  und für alle  $\eta > 0$  existieren  $\delta > 0$  und  $N_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $N \geq N_0$  und alle  $u_0 \in [0, 1)$  gilt

$$P\left(\sup_{u_0 \leq u \leq (u_0 + \delta) \wedge 1} \left| \tilde{\alpha}_N(u) - \tilde{\alpha}_N(u_0) \right| \geq \varepsilon\right) \leq \eta \delta.\tag{3.37}$$

Für alle  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$  und alle  $u \in [0, 1]$  sei

$$X_{\mathbf{s}}(u) = I(Z_{\mathbf{s}} \leq F^{-1}(u; \boldsymbol{\vartheta}_0)) - u$$

sowie für alle  $u_1, u_2 \in [0, 1]$

$$Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2) = X_{\mathbf{s}}(u_2) - X_{\mathbf{s}}(u_1).\tag{3.38}$$

Mit dieser Notation ist für alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$

$$\tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2).\tag{3.39}$$

**3.23 Lemma:** Für alle  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$ , alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$  und  $Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2)$  definiert wie in (3.38) gelten

$$\left| Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2) \right| \leq 1,\tag{3.40}$$

$$E\left[ Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2)^2 \right] \leq u_2 - u_1\tag{3.41}$$

sowie

$$E\left[ Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2)^4 \right] \leq 7(u_2 - u_1).\tag{3.42}$$

**Beweis:** Es gilt

$$\left| Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2) \right| = \left| I(Z_{\mathbf{s}} \leq F^{-1}(u_2; \boldsymbol{\vartheta}_0)) - I(Z_{\mathbf{s}} \leq F^{-1}(u_1; \boldsymbol{\vartheta}_0)) - (u_2 - u_1) \right| \leq 1,$$

da der erste Term wegen  $u_1 \leq u_2$  nur die Werte 0 oder 1 annimmt und für den zweiten Term  $u_2 - u_1 \in [0, 1]$  gilt. Damit ist (3.40) gezeigt.

Es gilt

$$Y_s(u_1, u_2) = I(F^{-1}(u_1; \boldsymbol{\vartheta}_0) < Z_s \leq F^{-1}(u_2; \boldsymbol{\vartheta}_0)) - (u_2 - u_1),$$

wobei mit der Stetigkeit und der strengen Monotonie von  $F$  folgt

$$I(F^{-1}(u_1; \boldsymbol{\vartheta}_0) < Z_s \leq F^{-1}(u_2; \boldsymbol{\vartheta}_0)) \sim \text{Ber}(u_2 - u_1).$$

Die Ungleichungen (3.41) und (3.42) folgen unter Verwendung von Eigenschaften der Bernoulli-Verteilung.  $\square$

**3.24 Lemma:** Sei  $r_0 \in (2, \frac{7}{4})$ . Es gilt für alle  $N$  und alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$

$$E\left[(\tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1))^4\right] \leq \text{const} \frac{1}{N} (u_2 - u_1)^{(r_0-2)/r_0} + \text{const} (u_2 - u_1)^{1+(r_0-2)/(2r_0)}. \quad (3.43)$$

Für den Beweis von Lemma 3.24 werden Abschätzungen für die Mächtigkeiten bestimmter Indexmengen benötigt. Dazu werden die folgenden Abstandsmaße eingeführt.

**3.25 Definition:** Seien  $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l} \in \mathbb{Z}^2$ . Es wird definiert

$$\begin{aligned} d_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) &= \max\left\{\delta(\{\mathbf{j}\}, \{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}), \delta(\{\mathbf{k}\}, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})\right\} \\ &= \max\left\{\min\{\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty\}, \min\{\|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty\}\right\}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Dabei ist  $\delta$  der in (3.1) definierte Abstand zwischen den Mengen mit Mächtigkeiten 1 bzw. 2. Das Abstandsmaß  $d_1$  ist nicht symmetrisch in seinen Argumenten, da das erste der Argumente in der zweielementigen Menge enthalten sein muss.

Der maximale Abstand zwischen Teilmengen mit einem beziehungsweise drei Elementen ist definiert als

$$d_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = \max\left\{\delta(J, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}\} \setminus J) : J \subset \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}\}, |J| = 1\right\}.$$

Der maximale Abstand zwischen Teilmengen mit jeweils zwei Elementen ist definiert als

$$d_3(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}) = \max\left\{\delta(J, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}\} \setminus J) : J \subset \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{l}\}, |J| = 2\right\}.$$

**3.26 Lemma:** Seien  $\delta_1, \delta_2 \in \mathbb{N}$ . Für die Mächtigkeit der Menge

$$\begin{aligned} D_1(\delta_1, \delta_2) &= \left\{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in R_N^3 : \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \text{ sind paarweise verschieden mit} \right. \\ &\quad \left. d_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = \delta(\{\mathbf{k}\}, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}) = \delta_1 \text{ und } \|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|_\infty = \delta_2\right\} \end{aligned}$$

gilt

$$|D_1(\delta_1, \delta_2)| \leq \text{const} \cdot N \delta_1 \delta_2.$$

**Beweis:** Für die Wahl des Index  $\mathbf{i}$  gibt es maximal  $N$  Möglichkeiten. Damit ist  $\mathbf{i}$  festgelegt.

Es gelte o.B.d.A.

$$\delta_1 = \min\{\|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty\}.$$

Nach der Definition des Abstandsmaßes  $d_1$  gilt dann auch

$$\delta_1 \geq \min\{\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty\}.$$

1. Fall: Sei  $\delta_1 = \|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty \leq \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty$ .

Wegen  $\|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty = \delta_1$  gibt es für festes  $\mathbf{i}$  maximal  $8\delta_1$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{k}$ .

Da nach Voraussetzung  $\|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|_\infty = \delta_2$  gilt, gibt es für festes  $\mathbf{i}$  maximal  $8\delta_2$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{j}$ .

2. Fall: Sei  $\delta_1 = \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty < \|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty$ .

Da nach Voraussetzung  $\|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|_\infty = \delta_2$  gilt, gibt es für festes  $\mathbf{i}$  maximal  $8\delta_2$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{j}$ .

Wegen  $\|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty = \delta_1$  gibt es dann maximal  $8\delta_1$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{k}$ .

Insgesamt gilt daher

$$|D_1(\delta_1, \delta_2)| \leq \text{const} \cdot N\delta_1\delta_2.$$

□

**3.27 Lemma:** Sei  $\delta_1 \in \mathbb{N}$ . Für die Mächtigkeit der Menge

$$D_1(\delta_1) = \left\{ (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in R_N^3 : \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \text{ sind paarweise verschieden mit } d_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = \delta_1 \right\}$$

gilt

$$|D_1(\delta_1)| \leq \text{const} \cdot N^2\delta_1.$$

**Beweis:** Für die Wahl des Index  $\mathbf{i}$  gibt es maximal  $N$  Möglichkeiten. Damit ist  $\mathbf{i}$  festgelegt.

Es gelte o.B.d.A.

$$\delta_1 = \min\{\|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty\}.$$

Nach der Definition des Abstandsmaßes  $d_1$  gilt dann auch

$$\delta_1 \geq \min\{\|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty\}.$$

1. Fall: Sei  $\delta_1 = \|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty < \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty$ .

Wegen  $\|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty = \delta_1$  gibt es für festes  $\mathbf{i}$  maximal  $8\delta_1$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{k}$ .

Da nach  $\delta_1 < \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty$  gilt und  $\delta_1 \geq \min\{\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty\}$  ist, muss gelten  $\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty = \min\{\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty\}$ .

Daraus folgt  $\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty \leq \delta_1$  und damit gibt es für festes  $\mathbf{i}$  maximal  $4\delta_1^2 + 4\delta_1 + 1$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{j}$ .

2. Fall: Sei  $\delta_1 = \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty \leq \|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty$ .

Dann ist die Bedingung  $\delta_1 \geq \min\{\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty\}$  immer erfüllt, sie liefert keine Einschränkung für die Wahl von  $\mathbf{j}$ .

Für die Wahl von  $\mathbf{k}$  gibt es wegen der Bedingung  $\|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty \geq \delta_1$  für festes  $\mathbf{i}$  maximal  $N - [4(\delta_1 - 1)^2 + 4(\delta_1 - 1) + 1]$  Möglichkeiten.

Für festes  $\mathbf{k}$  gibt es maximal  $8\delta_1$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{j}$ .

Insgesamt gilt daher

$$|D_1(\delta_1)| \leq \text{const} \cdot N^2 \delta_1.$$

□

Das folgende Lemma und der zugehörige Beweis entsprechen der Version für  $\mathbb{Z}^2$  von [Lahiri, 1999, Lemma 4.1].

**3.28 Lemma:** Seien  $\delta_2, \delta_3 \in \mathbb{N}$ . Definiert wird die Menge

$$D_2(\delta_2, \delta_3) = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in R_N^4 : \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m} \text{ sind paarweise verschieden mit } d_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) = \delta_2 \text{ und } d_3(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) = \delta_3\}.$$

Für ihre Mächtigkeit gilt

$$|D_2(\delta_2, \delta_3)| \leq \text{const} \cdot N(\delta_2 + \delta_3)^5.$$

**Beweis:** Betrachtet wird die Indexmenge  $J = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}\}$ . Für die Wahl des Index  $\mathbf{m}$  gibt es maximal  $N$  Möglichkeiten.

Es existiert eine Teilmenge  $J' \subset J$  mit  $|J'| = 2$ , so dass  $d_3(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) = \delta(J', J \setminus J') = \delta_3$  ist. O.B.d.A. kann angenommen werden, dass die Mengen  $J' = \{\mathbf{m}, \mathbf{j}\}$  und  $J \setminus J' = \{\mathbf{i}, \mathbf{k}\}$  sind und dass für den Abstand zwischen den beiden Mengen gilt

$$d_3(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) = \delta(J', J \setminus J') = \|\mathbf{i} - \mathbf{m}\|_\infty.$$

Daraus ergeben sich die Bedingungen

$$\|\mathbf{i} - \mathbf{m}\|_\infty = \delta_3, \|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty \geq \delta_3, \|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty \geq \delta_3 \text{ und } \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty \geq \delta_3.$$

Für die Wahl von  $\mathbf{i}$  gibt es  $\text{const} \cdot \delta_3$  Möglichkeiten bei festem  $\mathbf{m}$ .

Es gilt

$$\|\mathbf{j} - \mathbf{m}\|_\infty \leq 2\delta_3 \text{ oder } \|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty \leq 2\delta_3. \quad (3.45)$$

Denn angenommen es wären  $\|\mathbf{j} - \mathbf{m}\|_\infty > 2\delta_3$  und  $\|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty > 2\delta_3$ , dann würde aus  $\|\mathbf{i} - \mathbf{m}\|_\infty = \delta_3$  folgen  $d_3(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \geq \delta(\{\mathbf{m}, \mathbf{i}\}, \{\mathbf{j}, \mathbf{k}\}) > \delta_3$ , woraus sich ein Widerspruch ergäbe.

1. Fall: Seien  $\|\mathbf{j} - \mathbf{m}\|_\infty \leq 2\delta_3$  und  $\|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty \leq 2\delta_3$ .

Dann gibt es für festes  $\mathbf{m}$  maximal  $\text{const} \cdot \delta_3^2$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{j}$  und ebenso viele für die Wahl von  $\mathbf{k}$ .

2. Fall: Seien  $\|\mathbf{j} - \mathbf{m}\|_\infty > 2\delta_3$  und  $\|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty \leq 2\delta_3$ .

Dann gilt  $\delta_2 \geq \delta(\{\mathbf{j}\}, \{\mathbf{m}, \mathbf{i}, \mathbf{k}\}) = \min\{\|\mathbf{j} - \mathbf{m}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty\}$  und damit kann die Norm  $\|\mathbf{j} - \mathbf{m}\|_\infty$  folgendermaßen abgeschätzt werden.

Im Fall  $\min\{\|\mathbf{j} - \mathbf{m}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty\} = \|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty$  gilt

$$\|\mathbf{j} - \mathbf{m}\|_\infty \leq \|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty + \|\mathbf{i} - \mathbf{m}\|_\infty \leq \delta_2 + \delta_3$$

und im Fall  $\min\{\|\mathbf{j} - \mathbf{m}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty\} = \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty$  gilt

$$\|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty + \|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty \leq \delta_2 + 2\delta_3.$$

Also gibt es maximal  $const \cdot \delta_3^2$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{k}$  und es gibt maximal  $const \cdot (\delta_2 + \delta_3)^2$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{j}$ .

3. Fall: Seien  $\|\mathbf{j} - \mathbf{m}\|_\infty \leq 2\delta_3$  und  $\|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty > 2\delta_3$ .

Dann gilt  $\delta_2 \geq \delta(\{\mathbf{k}\}, \{\mathbf{m}, \mathbf{i}, \mathbf{j}\}) = \min\{\|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty, \|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty\}$  und damit kann die Norm von  $\|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty$  folgendermaßen abgeschätzt werden.

Im Fall  $\min\{\|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty, \|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty\} = \|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty$  gilt

$$\|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty \leq \|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty + \|\mathbf{i} - \mathbf{m}\|_\infty \leq \delta_2 + \delta_3$$

und im Fall  $\min\{\|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty, \|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty\} = \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty$  gilt

$$\|\mathbf{k} - \mathbf{m}\|_\infty \leq \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty + \|\mathbf{j} - \mathbf{m}\|_\infty \leq \delta_2 + 2\delta_3.$$

Also gibt es maximal  $const \cdot \delta_3^2$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{j}$  und es gibt maximal  $const \cdot (\delta_2 + \delta_3)^2$  Möglichkeiten für die Wahl von  $\mathbf{k}$ .

Insgesamt ergibt sich für die zu berechnende Mächtigkeit

$$|D_2(\delta_2, \delta_3)| \leq const N \delta_3 \delta_3^2 (\delta_2 + \delta_3)^2 \leq const N (\delta_2 + \delta_3)^5.$$

□

Mit diesen Abschätzungen kann Lemma 3.24 bewiesen werden.

**Beweis:** Es gilt für alle  $N$  und alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$

$$\begin{aligned} & E \left[ \left( \sum_{\mathbf{i} \in R_N} Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) \right)^4 \right] \\ &= \sum_{\mathbf{i} \in R_N} E \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^4 \right) + 4 \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} E \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^3 Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) \right) \\ &+ 3 \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} E \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^2 Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)^2 \right) \\ &+ 6 \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} \sum_{\mathbf{k} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}} E \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^2 Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2) \right) \\ &+ \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} \sum_{\mathbf{k} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}} \sum_{\mathbf{m} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}} E \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2) \right). \end{aligned} \tag{3.46}$$

Die fünf Summen werden im Folgenden mit  $Q_{1N}, Q_{2N}, Q_{3N}, Q_{4N}$  und  $Q_{5N}$  bezeichnet.

Für den ersten Summanden aus Gleichung (3.46) gilt aufgrund der Stationarität und nach Abschätzung (3.42)

$$Q_{1N} = \sum_{\mathbf{i} \in R_N} E\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^4\right) = NE(Y_{\mathbf{0}}(u_1, u_2)^4) \leq \text{const}N(u_2 - u_1). \quad (3.47)$$

Für die weiteren Abschätzungen wird der maximale Abstand zweier Punkte aus  $R_N$  benötigt, der bezeichnet wird als  $t_N = \max\{N_1 - 1, N_2 - 1\}$ .

Als nächstes wird der vierte Summand aus Gleichung (3.46) betrachtet. Diese Reihenfolge wurde gewählt, da durch die hier benötigten Bedingungen bereits die Bedingungen für die Behandlung der anderen Summanden festgelegt werden.

Für die Abschätzung des vierten Summanden werden die Indexmengen

$$\widetilde{M}_{k'} = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in R_N^3 : d_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = k' = \delta(\{\mathbf{k}\}, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\})\}$$

und

$$\widetilde{M}_{k', j'}^* = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in R_N^3 : d_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = k' = \delta(\{\mathbf{k}\}, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}) \text{ und } \|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|_{\infty} = j'\}$$

benötigt. Nach Satz 3.4 gelten für alle  $1 \leq r < \infty$  sowie  $2 \leq p, q < \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  und alle  $1 \leq r' < \infty$  sowie  $2 \leq p', q' < \infty$  mit  $\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} + \frac{1}{r'} = 1$  unter Verwendung von Ungleichung (3.41) die Abschätzungen

$$\begin{aligned} Q_{4N} &= 6 \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} \sum_{\mathbf{k} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}} E\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^2 Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2)\right) \\ &= \text{const} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \widetilde{M}_{k'}} \text{cov}\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^2 Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2)\right) \\ &\leq \text{const} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \widetilde{M}_{k'}} \alpha\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2)\right)^{1/r} \\ &\quad \cdot \|Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^2 Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)\|_p \|Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2)\|_q \\ &\leq \text{const}(u_2 - u_1)^{1/q} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \widetilde{M}_{k'}} \alpha_{2,1}(k')^{1/r} E(|Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^2 Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)|^p)^{1/p} \\ &\leq \text{const}(u_2 - u_1)^{1/q} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \widetilde{M}_{k'}} \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \\ &\quad \cdot \left(\text{cov}(|Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)|^{2p}, |Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)|^p) + E(|Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)|^{2p})E(|Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)|^p)\right)^{1/p} \\ &\leq \text{const}(u_2 - u_1)^{1/q} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \widetilde{M}_{k'}} \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \\ &\quad \cdot \left(\alpha(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2))^{1/r'} \|Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^{2p}\|_{p'} \|Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)^p\|_{q'} + (u_2 - u_1)^2\right)^{1/p} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \text{const}(u_2 - u_1)^{1/q} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \widetilde{M}_{k'}} \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \\
&\quad \cdot \left( \alpha(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2))^{1/r'} (u_2 - u_1)^{1/p'+1/q'} + (u_2 - u_1)^2 \right)^{1/p} \\
&\leq \text{const}(u_2 - u_1)^{1/q+1/p(1/p'+1/q')} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \widetilde{M}_{k'}} \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \\
&\quad \cdot \alpha(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2))^{1/(pr')} \\
&+ \text{const}(u_2 - u_1)^{1/q+2/p} \sum_{k'=1}^{t_N} |D_1(k')| \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \\
&\leq \text{const}(u_2 - u_1)^{1/q+1/p(1/p'+1/q')} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \widetilde{M}_{k',j'}}^* \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \\
&\quad \cdot \alpha(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2))^{1/(pr')} \\
&+ \text{const}N^2(u_2 - u_1)^{1/q+2/p} \sum_{k'=1}^{t_N} k' \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \\
&\leq \text{const}(u_2 - u_1)^{1/q+1/p(1/p'+1/q')} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in \widetilde{M}_{k',j'}}^* \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \alpha_{1,1}(j')^{1/(pr')} \\
&+ \text{const}N^2(u_2 - u_1)^{1/q+2/p} \sum_{k'=1}^{t_N} k' \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \\
&\leq \text{const}(u_2 - u_1)^{1/q+1/p(1/p'+1/q')} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{j'=1}^{t_N} |D_1(k', j')| \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \alpha_{1,1}(j')^{1/(pr')} \\
&+ \text{const}N^2(u_2 - u_1)^{1/q+2/p} \sum_{k'=1}^{t_N} k' \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \\
&\leq \text{const}N(u_2 - u_1)^{1/q+1/p(1/p'+1/q')} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{j'=1}^{t_N} k' j' \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \alpha_{1,1}(j')^{1/(pr')} \\
&+ \text{const}N^2(u_2 - u_1)^{1/q+2/p} \sum_{k'=1}^{t_N} k' \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \\
&\leq \text{const}N(u_2 - u_1)^{1/q+1/p(1/p'+1/q')} \left( \sum_{k'=1}^{t_N} k' \alpha_{2,1}(k')^{1/r} \right)^2 \\
&+ \text{const}N^2(u_2 - u_1)^{1/q+2/p} \sum_{k'=1}^{t_N} k' \alpha_{2,1}(k')^{1/r},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung für  $r' = \frac{r}{p}$  gilt und  $\alpha_{1,1}(j') \leq \alpha_{2,1}(j')$  ausgenutzt wurde.  $D_1(k', j')$  und  $D_1(k')$  sind die Mengen, deren Mächtigkeiten in den Lemmata 3.26 und 3.27 berechnet wurden.

Zu  $r_0 > 2$  existieren  $p_0 = 2$  und  $q_0$  mit  $\frac{1}{r_0} + \frac{1}{q_0} = \frac{1}{2}$ , also  $q_0 = \frac{2r_0}{r_0-2} > 2$ . Für  $r'_0 = \frac{r_0}{p_0} = \frac{r_0}{2}$  und  $p'_0 = q'_0 = q_0$  gilt dann  $\frac{1}{p'_0} + \frac{1}{q'_0} + \frac{1}{r'_0} = 1$ .

Es folgt

$$\begin{aligned} Q_{4N} &\leq \text{const} \cdot N(u_2 - u_1)^{2/q_0} \left( \sum_{k'=1}^{t_N} k'^{1-\tau/r_0} \right)^2 + \text{const} \cdot N^2(u_2 - u_1)^{1+1/q_0} \sum_{k'=1}^{t_N} k'^{1-\tau/r_0} \\ &\leq \text{const} \cdot N(u_2 - u_1)^{(r_0-2)/r_0} + \text{const} \cdot N^2(u_2 - u_1)^{1+(r_0-2)/(2r_0)}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

da nach Voraussetzung und nach (3.16) für den Exponenten der Summanden  $1 - \frac{\tau}{r_0} < -1$  gilt.

Der zweite Summand aus Gleichung (3.46) kann mit Satz 3.4 für alle  $1 \leq r, p < \infty$  sowie  $2 \leq q < \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  und Ungleichung (3.41) folgendermaßen abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} Q_{2N} &= 4 \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} E\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^3 Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)\right) \\ &= 4 \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} \text{cov}\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^3, Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)\right) \\ &\leq 32 \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} \alpha(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2))^{1/r} \|Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^3\|_p \|Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)\|_q \\ &\leq 32 \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{\substack{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in R_N^2 \\ \text{mit } \|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|_{\infty} = k'}} \alpha_{1,1}(k')^{1/r} \|Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^3\|_p \|Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)\|_q \\ &\leq \text{const} \sum_{k'=1}^{t_N} \left| \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in R_N^2 : \|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|_{\infty} = k'\} \right| \alpha_{1,1}(k')^{1/r} (u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \\ &\leq \text{const} N(u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \sum_{k'=1}^{t_N} k' \alpha_{1,1}(k')^{1/r}. \end{aligned}$$

Mit  $p_0 = 2$  und  $q_0 = \frac{2r_0}{r_0-2}$  folgt

$$Q_{2N} \leq \text{const} N(u_2 - u_1)^{1/p_0+1/q_0} \sum_{k'=1}^{t_N} k'^{1-\tau/r_0} \leq \text{const} N(u_2 - u_1)^{(r_0-1)/r_0}, \quad (3.49)$$

da nach Voraussetzung und nach (3.16) für den Exponenten der Summanden  $1 - \frac{\tau}{r_0} < -1$  gilt.

Für den dritten Summanden aus Gleichung (3.46) gilt nach Satz 3.4 für alle  $1 \leq r, p, q < \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  und nach Abschätzung (3.41)

$$\begin{aligned} Q_{3N} &= 3 \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} E\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^2 Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)^2\right) \\ &= 3 \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} \text{cov}\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^2, Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)^2\right) + E\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^2\right) E\left(Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)^2\right) \\ &\leq 24 \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} \alpha\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)\right)^{1/r} \|Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^2\|_p \|Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)^2\|_q \\ &+ 3 \sum_{\mathbf{i} \in R_N} \sum_{\mathbf{j} \in R_N \setminus \{\mathbf{i}\}} E\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)^2\right) E\left(Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \text{const} \sum_{k'=1}^{t_N} \left| \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in R_N^2 : \|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|_\infty = k'\} \right| \alpha_{1,1}(k')^{1/r} (u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \\
&+ 3N(N-1)(u_2 - u_1)^2 \\
&\leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \sum_{k'=1}^{t_N} k' \alpha_{1,1}(k')^{1/r} + \text{const} N^2 (u_2 - u_1)^2.
\end{aligned}$$

Mit  $p_0 = 2$  und  $q_0 = \frac{2r_0}{r_0-2}$  folgt

$$\begin{aligned}
Q_{3N} &\leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{1/p_0+1/q_0} \sum_{k'=1}^{t_N} k'^{1-\tau/r_0} + \text{const} N^2 (u_2 - u_1)^2 \\
&\leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{(r_0-1)/r_0} + \text{const} N^2 (u_2 - u_1)^2, \tag{3.50}
\end{aligned}$$

da nach Voraussetzung und nach (3.16) für den Exponenten der Summanden  $1 - \frac{\tau}{r_0} < -1$  gilt.

Der fünfte Summand aus Gleichung (3.46) wird unter Verwendung der Indexmengen

$$M_{j',k'} = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in R_N^4 : d_3(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) = j' = \delta(\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}, \{\mathbf{k}, \mathbf{m}\}) \text{ und } d_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) = k'\}$$

und

$$M_{j',k'}^* = \{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in R_N^4 : d_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) = j' = \delta(\{\mathbf{m}\}, \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}) \text{ und } d_3(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) = k'\}$$

folgendermaßen zerlegt

$$\begin{aligned}
Q_{5N} &= \sum_{\substack{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in R_N^4, \\ \text{paarweise verschieden}}} E\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2)\right) \\
&= \sum_{\substack{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in R_N^4, \\ \text{paarweise verschieden mit} \\ d_3(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \geq d_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m})}} E\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2)\right) \\
&+ \sum_{\substack{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in R_N^4, \\ \text{paarweise verschieden mit} \\ d_3(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) < d_2(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m})}} E\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2)\right) \\
&= \text{const} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in M_{j',k'}} \text{cov}\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2)\right) \\
&+ \text{const} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in M_{j',k'}} E\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)\right) E\left(Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2)\right) \\
&+ \text{const} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'-1} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in M_{j',k'}^*} \text{cov}\left(Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2)\right).
\end{aligned}$$

Die drei Summen werden mit  $Q_{5N1}$ ,  $Q_{5N2}$  und  $Q_{5N3}$  bezeichnet.

Für den ersten Summanden von  $Q_{5N}$  gelten nach Satz 3.4 für alle  $1 \leq r, p, q < \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  und nach Abschätzung (3.41) die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned}
Q_{5N1} &= \text{const} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in M_{j', k'}} \text{cov} \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2) \right) \\
&\leq \text{const} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in M_{j', k'}} \alpha \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2) \right)^{1/r} \\
&\quad \cdot \|Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)\|_p \|Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2)\|_q \\
&\leq \text{const} (u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'} |D_2(k', j')| \alpha_{2,2}(j')^{1/r} \\
&\leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'} (k' + j')^5 \alpha_{2,2}(j')^{1/r} \\
&\leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \sum_{j'=1}^{t_N} j' (2j')^5 \alpha_{2,2}(j')^{1/r} \\
&\leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \sum_{j'=1}^{t_N} j'^6 \alpha_{2,2}(j')^{1/r},
\end{aligned}$$

wobei  $D_2(k', j')$  die Menge ist, deren Mächtigkeit in Lemma 3.28 berechnet wurde.

Mit  $p_0 = 2$  und  $q_0 = \frac{2r_0}{r_0-2}$  folgt

$$Q_{5N1} \leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{1/p_0+1/q_0} \sum_{j'=1}^{t_N} j'^{6-\tau/r_0} \leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{(r_0-1)/r_0}, \quad (3.51)$$

da nach Voraussetzung und nach (3.16) für den Exponenten der Summanden  $6 - \frac{\tau}{r_0} < -1$  gilt.

Für den zweiten Summanden von  $Q_{5N}$  gilt nach Satz 3.4 für alle  $1 \leq r < \infty$  sowie  $2 \leq p, q < \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  und nach Abschätzung (3.41)

$$\begin{aligned}
Q_{5N2} &= \text{const} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in M_{j', k'}} E \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) \right) E \left( Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2) \right) \\
&\leq \left[ \text{const} \sum_{\substack{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in R_N^2 \\ \text{mit } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}}} \left| E \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) \right) \right| \right]^2 \\
&\leq \left[ \text{const} \sum_{\substack{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in R_N^2 \\ \text{mit } \mathbf{i} \neq \mathbf{j}}} \left| \text{cov} \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) \right) \right| \right]^2 \\
&\leq \left[ \text{const} \sum_{k'=1}^{t_N} \sum_{\substack{(\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in R_N^2 \text{ mit} \\ \|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|_\infty = k'}} \alpha \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) \right)^{1/r} \|Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2)\|_p \|Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2)\|_q \right]^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq (u_2 - u_1)^{2/p+2/q} \left[ \text{const} \sum_{k'=1}^{t_N} \left| \left\{ (\mathbf{i}, \mathbf{j}) \in R_N^2 : \|\mathbf{i} - \mathbf{j}\|_\infty = k' \right\} \right| \alpha_{1,1}(k')^{1/r} \right]^2 \\
&\leq \text{const} N^2 (u_2 - u_1)^{2/p+2/q} \left[ \sum_{k'=1}^{t_N} k' \alpha_{1,1}(k')^{1/r} \right]^2.
\end{aligned}$$

Mit  $p_0 = 2$  und  $q_0 = \frac{2r_0}{r_0-2}$  folgt

$$Q_{5N2} \leq \text{const} N^2 (u_2 - u_1)^{2/p_0+2/q_0} \left[ \sum_{k'=1}^{t_N} k'^{1-\tau/r_0} \right]^2 \leq \text{const} N^2 (u_2 - u_1)^{2(r_0-1)/r_0}, \quad (3.52)$$

da nach Voraussetzung und nach (3.16) für den Exponenten der Summanden  $1 - \frac{\tau}{r_0} < -1$  gilt.

Für den dritten Summanden von  $Q_{5N}$  gilt nach Satz 3.4 für alle  $1 \leq r < \infty$  sowie  $2 \leq p, q < \infty$  mit  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$  und nach Abschätzung (3.41)

$$\begin{aligned}
Q_{5N3} &= \text{const} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'-1} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in M_{j', k'}^*} \text{cov} \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2) \right) \\
&\leq \text{const} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'-1} \sum_{(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}, \mathbf{m}) \in M_{j', k'}^*} \alpha \left( Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2), Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2) \right)^{1/r} \\
&\quad \cdot \|Y_{\mathbf{i}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{j}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{k}}(u_1, u_2)\|_p \|Y_{\mathbf{m}}(u_1, u_2)\|_q \\
&\leq \text{const} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'-1} |D_2(j', k')| \alpha_{3,1}(j')^{1/r} (u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \\
&\leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'-1} (j' + k')^5 \alpha_{3,1}(j')^{1/r} \\
&\leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \sum_{j'=1}^{t_N} \sum_{k'=1}^{j'-1} (2j')^5 \alpha_{3,1}(j')^{1/r} \\
&\leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{1/p+1/q} \sum_{j'=1}^{t_N} j'^6 \alpha_{3,1}(j')^{1/r},
\end{aligned}$$

wobei  $D_2(j', k')$  die Menge ist, deren Mächtigkeit in Lemma 3.28 berechnet wurde.

Mit  $p_0 = 2$  und  $q_0 = \frac{2r_0}{r_0-1}$  folgt

$$Q_{5N3} \leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{1/p_0+1/q_0} \sum_{j'=1}^{t_N} j'^{6-\tau/r_0} \leq \text{const} N (u_2 - u_1)^{(r_0-1)/r_0}, \quad (3.53)$$

da nach Voraussetzung und nach (3.16) für den Exponenten der Summanden  $6 - \frac{\tau}{r_0} < -1$  gilt.

Nach den Ergebnissen (3.47), (3.49), (3.50), (3.48), (3.51), (3.52) und (3.53) gilt

$$\begin{aligned}
& Q_{1N} + Q_{2N} + Q_{3N} + Q_{4N} + Q_{5N1} + Q_{5N2} + Q_{5N3} \\
& \leq \text{const}N(u_2 - u_1) + \text{const}N(u_2 - u_1)^{(r_0-1)/r_0} + \text{const}N(u_2 - u_1)^{(r_0-1)/r_0} \\
& + \text{const}N^2(u_2 - u_1)^2 + \text{const}N(u_2 - u_1)^{(r_0-2)/r_0} + \text{const}N^2(u_2 - u_1)^{1+(r_0-2)/(2r_0)} \\
& + \text{const}N(u_2 - u_1)^{(r_0-1)/r_0} + \text{const}N^2(u_2 - u_1)^{2(r_0-1)/r_0} + \text{const}N(u_2 - u_1)^{(r_0-1)/r_0}.
\end{aligned}$$

Daher gilt

$$\begin{aligned}
E\left[\left(\sum_{i \in R_N} Y_i(u_1, u_2)\right)^4\right] &= Q_{1N} + Q_{2N} + Q_{3N} + Q_{4N} + Q_{5N1} + Q_{5N2} + Q_{5N3} \\
&\leq \text{const}N(u_2 - u_1)^{(r_0-2)/r_0} + \text{const}N^2(u_2 - u_1)^{1+(r_0-2)/(2r_0)}.
\end{aligned} \tag{3.54}$$

Mit (3.54) und Gleichung (3.39) ergibt sich

$$\begin{aligned}
E\left[(\tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1))^4\right] &= \frac{1}{N^2}E\left[\left(\sum_{i \in R_N} Y_i(u_1, u_2)\right)^4\right] \\
&\leq \text{const}\frac{1}{N}(u_2 - u_1)^{(r_0-2)/r_0} + \text{const}(u_2 - u_1)^{1+(r_0-2)/(2r_0)}.
\end{aligned}$$

Damit ist (3.43) gezeigt und Lemma 3.24 ist bewiesen.  $\square$

**3.29 Korollar:** In der Situation von Lemma 3.24 gilt für alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$  und alle  $N$  mit  $u_2 - u_1 \geq \frac{1}{N}$

$$E\left[(\tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1))^4\right] \leq \text{const}(u_2 - u_1)^{1+\varepsilon_0} \tag{3.55}$$

mit  $\varepsilon_0 = \frac{r_0-2}{2r_0}$ .

**Beweis:** Nach Gleichung (3.43) gilt

$$\begin{aligned}
E\left[(\tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1))^4\right] &\leq \text{const}\frac{1}{N}(u_2 - u_1)^{(r_0-2)/r_0} + \text{const}(u_2 - u_1)^{1+(r_0-2)/(2r_0)} \\
&\leq \text{const}(u_2 - u_1)(u_2 - u_1)^{(r_0-2)/r_0} + \text{const}(u_2 - u_1)^{1+(r_0-2)/(2r_0)} \\
&= \text{const}(u_2 - u_1)^{1+(r_0-2)/r_0} + \text{const}(u_2 - u_1)^{1+(r_0-2)/(2r_0)}.
\end{aligned}$$

Mit  $\varepsilon_0 = \frac{r_0-2}{2r_0} < \frac{r_0-2}{r_0}$  folgt

$$E\left[(\tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1))^4\right] \leq \text{const}(u_2 - u_1)^{1+\varepsilon_0}.$$

$\square$

Für den nächsten Schritt im Beweis der C-Straffheit von  $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$  wird [Billingsley, 1968, Theorem 12.2, S. 94] angewendet. Nach der Markovungleichung und nach (3.55) gilt für alle  $\lambda > 0$ , für alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$  und alle  $N$  mit  $u_2 - u_1 \geq \frac{1}{N}$  die Ungleichung

$$P\left(\left|\tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1)\right| \geq \lambda\right) \leq \lambda^{-4}E\left[\left|\tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1)\right|^4\right] \leq \text{const} \cdot \lambda^{-4}(u_2 - u_1)^{1+\varepsilon_0}$$

mit  $\varepsilon_0 > 0$  aus (3.55).

Damit sind die Voraussetzungen für [Billingsley, 1968, Theorem 12.2, S. 94] erfüllt. Für alle  $\lambda > 0$ ,  $u_1 \in [0, 1)$  und  $N$  sowie für alle  $p \geq \frac{1}{N}$  und alle  $m \in \mathbb{N}$  mit  $u_1 + mp \leq 1$  gilt nach [Billingsley, 1968, Theorem 12.2, S. 94]

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq m} \left| \tilde{\alpha}_N(u_1 + kp) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| \geq \lambda\right) \leq \text{const}(mp)^{1+\varepsilon_0} \lambda^{-4}. \quad (3.56)$$

Das folgende Lemma stammt aus [Billingsley, 1968, (22.17), S. 199].

**3.30 Lemma:** Für alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_1 + p \leq 1$  gilt

$$\left| \tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| \leq \left| \tilde{\alpha}_N(u_1 + p) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| + p\sqrt{N}. \quad (3.57)$$

Für alle  $u_1 \in [0, 1)$  und alle  $N$  sowie für alle  $p > 0$  und alle  $m \in \mathbb{N}$  mit  $u_1 + mp \leq 1$  impliziert Ungleichung (3.57)

$$\begin{aligned} & \sup_{u_1 \leq u_2 \leq u_1 + mp} \left| \tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| \\ & \leq \max_{1 \leq k \leq m} \sup_{u_1 + (k-1)p \leq u_2 \leq u_1 + kp} \left| \tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| \\ & \leq \max_{1 \leq k \leq m} \sup_{u_1 + (k-1)p \leq u_2 \leq u_1 + kp} \left( \left| \tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1 + (k-1)p) \right| \right. \\ & \quad \left. + \left| \tilde{\alpha}_N(u_1 + (k-1)p) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| \right) \\ & \leq \max_{1 \leq k \leq m} \left( \left| \tilde{\alpha}_N(u_1 + kp) - \tilde{\alpha}_N(u_1 + (k-1)p) \right| + \left| \tilde{\alpha}_N(u_1 + (k-1)p) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| \right) + p\sqrt{N} \\ & \leq \max_{1 \leq k \leq m} \left( \left| \tilde{\alpha}_N(u_1 + kp) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| + 2 \left| \tilde{\alpha}_N(u_1 + (k-1)p) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| \right) + p\sqrt{N} \\ & \leq 3 \max_{1 \leq k \leq m} \left| \tilde{\alpha}_N(u_1 + kp) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| + p\sqrt{N}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

Für alle  $\lambda > 0$ ,  $u_1 \in [0, 1)$  und alle  $N$  sowie für alle  $\frac{1}{N} \leq p \leq \frac{2\lambda}{\sqrt{N}}$  und alle  $m \in \mathbb{N}$  mit  $u_1 + mp \leq 1$  folgt aus (3.56) und (3.58)

$$\begin{aligned} & P\left(\sup_{u_1 \leq u_2 \leq u_1 + mp} \left| \tilde{\alpha}_N(u_2) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| \geq 5\lambda\right) \\ & \leq P\left(3 \max_{1 \leq k \leq m} \left| \tilde{\alpha}_N(u_1 + kp) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| + p\sqrt{N} \geq 5\lambda\right) \\ & \leq P\left(3 \max_{1 \leq k \leq m} \left| \tilde{\alpha}_N(u_1 + kp) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| + 2\lambda \geq 5\lambda\right) \\ & = P\left(\max_{1 \leq k \leq m} \left| \tilde{\alpha}_N(u_1 + kp) - \tilde{\alpha}_N(u_1) \right| \geq \lambda\right) \\ & \leq c_1(mp)^{1+\varepsilon_0} \lambda^{-4} \end{aligned} \quad (3.59)$$

für eine Konstante  $c_1 > 0$ .

Für den Beweis von (3.37) werden  $\varepsilon > 0$  und  $\eta > 0$  vorgegeben. Sei  $\delta \in (0, 1)$  so gewählt, dass für die Konstante  $c_1$  aus (3.59) gilt

$$c_1 \cdot \varepsilon^{-4} \delta^{\varepsilon_0} \leq \eta.$$

Sei  $m = \max\{m' \in \mathbb{N} : m' \leq \frac{\delta\sqrt{N}}{\varepsilon}\}$  und sei  $p = \frac{\delta}{m}$ . Dann gelten für hinreichend großes  $N$

$$p = \frac{\delta}{m} \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{N}} \geq \frac{1}{N}$$

sowie

$$p = \frac{\delta}{m} \leq \frac{\delta}{\frac{\delta\sqrt{N}}{\varepsilon} - 1} = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{N}}} \varepsilon \sqrt{N}^{-1}.$$

Sei  $N \geq N_0 \in \mathbb{N}$ . Dann ist auch  $\delta\sqrt{N} \geq \delta\sqrt{N_0}$ . Für hinreichend großes  $N_0$  gilt

$$\frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{N}} \leq \frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{N_0}} \leq \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{N}}} \leq 2.$$

Also ist

$$p \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{N}}} \varepsilon \sqrt{N}^{-1} \leq 2\varepsilon \sqrt{N}^{-1}$$

erfüllt. Damit gelten sämtliche Voraussetzungen von (3.59). Insgesamt ergibt sich für die rechte Seite von (3.59)

$$c_1 \cdot (mp)^{1+\varepsilon_0} \varepsilon^{-4} \leq c_1 \cdot \delta^{1+\varepsilon_0} \varepsilon^{-4} \leq \eta\delta.$$

Damit ist die C-Straffheit (3.37) von  $(\tilde{\alpha}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  gezeigt.

Da die Prozesse  $(\tilde{\alpha}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  und  $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$  über die deterministische Zeittransformation aus (3.36) zusammenhängen, ergibt sich hieraus auch die C-Straffheit von  $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$ , und Lemma 3.22 ist bewiesen.

Damit kann nun der funktionale Grenzwertsatz 3.16 bewiesen werden.

Aus der C-Straffheit der beiden Summanden  $(V_N)_{N \in \mathbb{N}}$  und  $(W_N)_{N \in \mathbb{N}}$  folgt die C-Straffheit von  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$ . Aus dieser und aus der Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen von  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$  folgt mit Satz 3.13 die Existenz des stochastischen Prozesses  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}(t))_{t \in [-\infty, \infty]}$  aus Satz 3.16 mit fast sicher stetigen Pfaden und

$$T_N \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{W} \text{ in } (D([-\infty, \infty]), s_\infty) \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Die  $k$ -dimensionalen Randverteilungen von  $\mathcal{W}$  sind die Normalverteilungen

$$N_k \left( \mathbf{0}, [\sigma^2(t_i, t_j)]_{1 \leq i, j \leq k} \right)$$

mit der Kovarianzfunktion  $\sigma^2$  aus Lemma 3.20, Gleichung (3.34). Also ist  $\mathcal{W}$  ein zentrierter Gaußprozess mit der Kovarianzfunktion  $\sigma^2$  und fast sicher stetigen Pfaden.

Da  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$ ,  $(Y_N)_{N \in \mathbb{N}}$  und  $(\hat{\alpha}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  alle dieselbe Grenzverteilung besitzen, ist die Verteilungskonvergenz (3.25) von  $\hat{\alpha}_N$  gezeigt. Der empirische Prozess mit geschätztem Parametervektor konvergiert also gegen den zentrierten Gaußprozess  $\mathcal{W}$  mit fast sicher stetigen

Pfaden, was den Beweis von Satz 3.16 abschließt.

Eine Alternative zum direkten Nachweis der Voraussetzung (3.21) des funktionalen Grenzwertsatzes 3.16 bietet das folgende Lemma.

**3.31 Lemma:** Sei  $\mathcal{F} = \{F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}) : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta\}$  eine parametrische Verteilungsklasse mit dem Parameterraum  $\Theta \subset \mathbb{R}^d$ . Ferner sei  $\boldsymbol{\vartheta}_0 \in \Theta$ . Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

- 1) Es existiere ein offenes  $d$ -dimensionales Intervall  $I$  mit  $\boldsymbol{\vartheta}_0 \in I \subset \Theta$  so, dass  $F(t; \boldsymbol{\vartheta})$  in allen  $(t; \boldsymbol{\vartheta}) \in \mathbb{R} \times I$  stetig partiell nach  $\vartheta_j$  differenzierbar ist für alle  $j = 1, \dots, d$ .
- 2) Es seien die ersten partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

stetig für alle  $j = 1, \dots, d$ .

- 3) Für eine beliebige Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^d$  gelte

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \sup_{-\infty \leq t \leq \infty} \|\mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0)\| = 0$$

mit  $\mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) = \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0), \dots, \frac{\partial}{\partial \vartheta_d} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right)$ .

Unter diesen Voraussetzungen ist Gleichung (3.21)

$$\sup_{-\infty \leq t \leq \infty} \left| F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \mathbf{h} \right| = o(\|\mathbf{h}\|) \text{ für } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

erfüllt mit

$$\Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0) = \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0).$$

**Beweis:** Seien  $t \in [-\infty, \infty]$  beliebig und  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$  so, dass für das  $d$ -dimensionale Intervall gilt  $[\boldsymbol{\vartheta}_0, \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}_0] \subset I$ .

Dann gilt nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} & \left| F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \mathbf{h} \right| \\ &= \left| \int_0^1 \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + u\mathbf{h}) du \mathbf{h} - \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \mathbf{h} \right| \\ &\leq \int_0^1 \|\mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + u\mathbf{h}) - \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0)\| du \cdot \|\mathbf{h}\|. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} & \sup_{-\infty \leq t \leq \infty} \left| F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \mathbf{h} \right| \\ &\leq \int_0^1 \sup_{-\infty \leq t \leq \infty} \|\mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + u\mathbf{h}) - \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0)\| du \cdot \|\mathbf{h}\| \\ &\leq \sup_{u \in [0,1]} \sup_{-\infty \leq t \leq \infty} \|\mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + u\mathbf{h}) - \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0)\| \cdot \|\mathbf{h}\|. \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung 3) gilt für den ersten Faktor

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \sup_{u \in [0,1]} \sup_{-\infty \leq t \leq \infty} \|\mathbf{grad}_{\vartheta} F(t; \vartheta_0 + u\mathbf{h}) - \mathbf{grad}_{\vartheta} F(t; \vartheta_0)\| = 0.$$

Voraussetzung 2) liefert die Stetigkeit aller Komponenten von  $\mathbf{grad}_{\vartheta} F(\cdot; \vartheta_0)$ .

Damit ist die Gleichung (3.21) gezeigt. □



## 4 Der empirische Prozess mit geschätztem Parametervektor für unabhängige Blöcke

Betrachtet wird das Testproblem

$$H_0 : F \in \mathcal{F} \text{ gegen } H_1 : F \notin \mathcal{F}. \quad (4.1)$$

für eine vorgegebene parametrische Klasse  $\mathcal{F} = \{F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}) : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta\}$  von stetigen und streng monoton wachsenden Verteilungsfunktionen mit dem Parameterraum  $\Theta \subset \mathbb{R}^d$  für  $d \in \mathbb{N}$ .

**4.1 Definition:** Seien  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{N}$  fest gewählt und sei  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von disjunkten, achsenparallelen Rechtecken der Größe  $\eta_1 \times \eta_2$  mit  $b_j \subset \mathbb{Z}^2$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ . Dann existiert für alle  $j \in \mathbb{N}$  ein  $\mathbf{h}_j \in \mathbb{Z}^2$  so, dass gilt  $b_j = b_1 + \mathbf{h}_j$ . Ferner enthält jedes Rechteck  $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2$  Gitterpunkte.

Es sei

$$\left\{ Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \right\}$$

ein Zufallsfeld mit identisch  $F$ -verteilten Komponenten auf diesen Rechtecken. Definiert wird der Block von Zufallsvariablen zur Indexmenge  $b_j$

$$B_j = \{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in b_j\} \text{ für alle } j \in \mathbb{N}.$$

Die Blöcke der Folge  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  seien unabhängig und identisch verteilt, das heißt es gelte für alle  $j \in \mathbb{N}$

$$B_j = \{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in b_j\} = \{Z_{\mathbf{s} + \mathbf{h}_j} : \mathbf{s} \in b_1\} \sim \{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in b_1\} = B_1.$$

**4.2 Definition:** Für alle  $n \in \mathbb{N}$  bezeichne  $F_n$  die *empirische Verteilungsfunktion* zu der Stichprobe  $B_1, \dots, B_n$

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\eta} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} I(Z_{\mathbf{s}} \leq t) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty].$$

Es sei  $(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Schätzern für den Parametervektor  $\boldsymbol{\vartheta}$  der Klasse  $\mathcal{F}$ . Für alle  $n \in \mathbb{N}$  sei dabei der zu der Stichprobe  $B_1, \dots, B_n$  gehörige Schätzer

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n(B_1, \dots, B_n) = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n(\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in b_j \text{ für } j \in \{1, \dots, n\}\}).$$

Der *empirische Prozess zum Stichprobenumfang  $n$  mit geschätztem Parametervektor  $\boldsymbol{\vartheta}$*  wird definiert als

$$\hat{\alpha}_n(t) = \sqrt{n\eta}(F_n(t) - F(t; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty], \quad (4.2)$$

wobei  $F(-\infty; \cdot) = 0$  sowie  $F(\infty; \cdot) = 1$  gesetzt wird.

Unter  $H_0 : F \in \mathcal{F}$  gilt

$$F \in \mathcal{F}, \text{ das heißt es gibt ein } \boldsymbol{\vartheta}_0 \in \Theta \text{ mit } F = F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0).$$

Wie üblich wird  $\boldsymbol{\vartheta}_0$  *wahrer Parameter* genannt.

Es folgt der funktionale Grenzwertsatz für den empirischen Prozess  $\hat{a}_n$ .

**4.3 Satz:** Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

- 1) Die Verteilungsklasse  $\mathcal{F} = \{F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}) : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta\}$  mit  $\Theta \subset \mathbb{R}^d$  und stetigen, streng monotonen Verteilungsfunktionen  $F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$  erfülle für alle  $t \in \mathbb{R}$

$$\Theta \ni \boldsymbol{\vartheta} \mapsto F(t; \boldsymbol{\vartheta}) \in [0, 1] \text{ ist Borelfunktion.} \quad (4.3)$$

Für einen inneren Punkt  $\boldsymbol{\vartheta}_0 \in \Theta$  existiere eine stetige Funktion

$$\Delta(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0) : [-\infty, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^d$$

mit

$$\sup_{-\infty \leq u \leq \infty} \left| F(u; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - F(u; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(u, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \mathbf{h} \right| = o(\|\mathbf{h}\|) \text{ für } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0} \quad (4.4)$$

mit  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^d$  und einer beliebigen Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^d$ .

- 2) Es seien  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{N}$  und sei  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Rechtecken der Größe  $\eta_1 \times \eta_2$  in  $\mathbb{Z}^2$  wie in Definition 4.1. Sei

$$\left\{ Z_s : \mathbf{s} \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \right\}.$$

ein Zufallsfeld mit identisch  $F$ -verteilten Komponenten und sei  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Blöcken mit  $B_j = \{Z_s : \mathbf{s} \in b_j\}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

- 3) Es sei  $(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvektoren mit Werten in  $\Theta$ , zu der eine messbare Funktion  $L(\cdot, \boldsymbol{\vartheta}_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$  existiert mit

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\eta} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \text{ für } n \rightarrow \infty \quad (4.5)$$

sowie

$$E(L(Z, \boldsymbol{\vartheta}_0)) = \mathbf{0} \quad (4.6)$$

für eine  $F$ -verteilte Zufallsvariable  $Z$ .

Ferner gelte

$$\|L(Z, \boldsymbol{\vartheta}_0)\|_2 < \infty. \quad (4.7)$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt für den empirischen Prozess mit geschätztem Parametervektor aus (4.2)

$$\widehat{\alpha}_n \xrightarrow{L} \mathcal{W} \text{ in } (D([-\infty, \infty]), s_\infty) \text{ für } n \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

wobei  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}(t))_{t \in [-\infty, \infty]}$  ein zentrierter Gaußprozess mit fast sicher stetigen Pfaden ist, dessen Kovarianzfunktion für alle  $t, t' \in [-\infty, \infty]$  die Form

$$\sigma^2(t, t') = \frac{1}{\eta} \sum_{s \in b_1} \sum_{s' \in b_1} \text{cov}(g_t(Z_s), g_{t'}(Z_{s'}))$$

hat mit

$$g_t(Z_s) = I(Z_s \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0). \quad (4.9)$$

Für den Beweis des funktionalen Grenzwertsatzes 4.3 wird der Prozess folgendermaßen zerlegt

$$\widehat{\alpha}_n(t) = \sqrt{n\eta} \left( F_n(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) - \sqrt{n\eta} \left( F(t; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right). \quad (4.10)$$

Aus Voraussetzung (4.3) und der Messbarkeit von  $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n$  folgt, dass  $\widehat{\alpha}_n$  eine Zufallsgröße in  $(D([-\infty, \infty]), s_\infty)$  ist.

Die Voraussetzungen (4.5), (4.6) und (4.7) sowie die Tschebyschev-Ungleichung implizieren

$$\sqrt{n} \|\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0\|_2 = O_p(1) \text{ für } n \rightarrow \infty. \quad (4.11)$$

Es gelten (4.3) und (4.4), also auch

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \mathbf{h} \right| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \left| R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \mathbf{h}) \right| = o(\|\mathbf{h}\|_2) \text{ für } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0},$$

wobei  $R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \mathbf{h}) = F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \mathbf{h}$  rechtsseitig stetig in  $t \in \mathbb{R}$  ist aufgrund der Stetigkeit von  $\Delta(\cdot, \boldsymbol{\vartheta}_0)$ .

Für alle  $t \in [-\infty, \infty]$  gilt nach der Zerlegung (4.10)

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_n(t) &= \sqrt{n\eta} \left( F_n(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) - \sqrt{n\eta} \left( F(t; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) \\ &= \sqrt{n\eta} \left( F_n(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) - \sqrt{n\eta} \left( F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) \\ &= \sqrt{n\eta} \left( F_n(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) - \sqrt{n\eta} \left( \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T (\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0) + R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) \\ &= \sqrt{n\eta} \left( F_n(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \sqrt{n\eta} (\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0) - \sqrt{n\eta} R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0) \\ &= Y_n(t) - \sqrt{n\eta} R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0) \end{aligned}$$

mit der Zufallsvariablen  $Y_n(t) = \sqrt{n\eta} \left( F_n(t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \sqrt{n\eta} (\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0)$ .

Im nächsten Beweisschritt wird gezeigt, dass der Restterm asymptotisch vernachlässigbar ist und dass daher die asymptotischen Verteilungen von  $(\widehat{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  im Raum  $D([-\infty, \infty])$  übereinstimmen, sofern sie existieren.

Da  $\hat{\alpha}_n(t)$  gemäß (4.3) eine Zufallsvariable ist, folgt, dass auch  $R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0)$  für alle  $t \in [-\infty, \infty]$  eine Zufallsvariable ist. Daraus und aus der rechtsseitigen Stetigkeit von  $R(\cdot, \boldsymbol{\vartheta}_0, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0)$  ergibt sich, dass

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \left| R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0) \right| = \sup_{t \in \mathbb{Q}} \left| R(t, \boldsymbol{\vartheta}_0, \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0) \right|$$

eine Zufallsvariable ist.

Daher kann Lemma 3.19 angewendet werden, welches impliziert, dass  $(\hat{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dieselbe asymptotische Verteilung im Raum  $D([-\infty, \infty])$  haben, sofern sie eine solche besitzen.

Sei für das weitere Vorgehen der folgende Prozess definiert

$$T_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{s \in b_j} \left[ I(Z_s \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0) \right] \quad (4.12)$$

für alle  $t \in [-\infty, \infty]$

mit der Funktion  $\Delta$  aus Gleichung (4.4).

Dann implizieren die Voraussetzungen (4.5), (4.6) sowie (4.7) und der Satz von Cramér, dass  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  dieselbe asymptotische Verteilung besitzen.

Für die Berechnung der Grenzverteilung wird die Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen von  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  benötigt, und es muss gezeigt werden, dass  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  C-straft ist. Dann kann Satz 3.13 angewendet werden.

#### 4.1 Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen

Betrachtet wird der Prozess aus (4.12) für alle  $t \in [-\infty, \infty]$

$$T_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{s \in b_j} g_t(Z_s)$$

mit  $g_t(Z_s)$  aus (4.9)

$$g_t(Z_s) = I(Z_s \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0).$$

**4.4 Lemma:** Für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $-\infty \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq \infty$  gilt

$$\left[ T_n(t_j) \right]_{1 \leq j \leq k} \xrightarrow{\mathcal{L}} N_k(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}^{(k)}) \text{ für } n \rightarrow \infty$$

mit der Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma}^{(k)} = \left[ \sigma^2(t_i, t_j) \right]_{1 \leq i, j \leq k}.$$

Dabei ist die Kovarianzfunktion für alle  $t, t' \in [-\infty, \infty]$  gegeben durch

$$\sigma^2(t, t') = \frac{1}{\eta} \sum_{s \in b_1} \sum_{s' \in b_1} \text{cov}(g_t(Z_s), g_{t'}(Z_{s'})). \quad (4.13)$$

**Beweis:** Da die Summanden  $\frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{s \in b_j} g_t(Z_s)$  des Prozesses  $T_n$  in  $j$  unabhängig und identisch verteilt sind, impliziert der mehrdimensionale zentrale Grenzwertsatz für alle  $k \in \mathbb{N}$  und alle  $-\infty \leq t_1 < t_2 < \dots < t_k \leq \infty$  die Verteilungskonvergenz

$$[T_n(t_l)]_{1 \leq l \leq k} \xrightarrow{\mathcal{L}} N_k(\mathbf{0}, \Sigma^{(k)}) \text{ für } n \rightarrow \infty,$$

wobei für die Einträge der Kovarianzmatrix für  $1 \leq i, j \leq k$  gilt

$$\begin{aligned} \Sigma_{i,j}^{(k)} &= \text{cov}\left(\frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{s \in b_1} g_{t_i}(Z_s), \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{s' \in b_1} g_{t_j}(Z_{s'})\right) \\ &= \frac{1}{\eta} \sum_{s \in b_1} \sum_{s' \in b_1} \text{cov}(g_{t_i}(Z_s), g_{t_j}(Z_{s'})). \end{aligned}$$

□

## 4.2 C-Straffheit

Der Beweis der C-Straffheit von  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wird entsprechend dem Beweis des Resultats für mischende Zufallfelder aus Abschnitt 3.2.2 durchgeführt und orientiert sich an dem Vorgehen von [Billingsley, 1968]. Auf die hier betrachteten Blöcke hat sich ein Beweis über Momentenabschätzungen, wie er in [Shorack; Wellner, 1986, S. 112] für unabhängige Zufallsvariablen durchgeführt wird, nicht anwenden lassen.

Für den Beweis der C-Straffheit von  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wird für alle  $t \in [-\infty, \infty]$  die folgende Zerlegung betrachtet

$$\begin{aligned} T_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{s \in b_j} \left[ I(Z_s \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right] - \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{s \in b_j} L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0) \\ &= V_n(t) - W_n(t) \end{aligned}$$

mit den beiden Summanden  $V_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{s \in b_j} \left[ I(Z_s \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right]$  sowie  $W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{s \in b_j} L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0)$ .

Um die C-Straffheit von  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  nachzuweisen, genügt es, die C-Straffheit der beiden Summanden  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  zu zeigen und auszunutzen, dass die Summe zweier C-straffer Folgen C-straff ist.

**4.5 Lemma:** Der Prozess

$$W_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{s \in b_j} L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty]$$

ist C-straff.

**Beweis:** Es gilt für alle  $t \in [-\infty, \infty]$

$$W_n(t) = \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{s \in b_j} L(Z_s, \boldsymbol{\vartheta}_0),$$

wobei der erste Faktor deterministisch, von  $n$  unabhängig und gleichmäßig stetig in  $t$ , also stetig bezüglich der Metrik  $\varrho$  aus (3.10) ist. Der zweite Faktor ist stochastisch, hängt nicht von  $t$  ab und ist nach dem mehrdimensionalen zentralen Grenzwertsatz für unabhängige Zufallsvektoren verteilungskonvergent, also  $O_p(1)$ .

Deshalb gilt für den in (3.13) definierten C-Stetigkeitsmodul für alle  $\delta > 0$

$$\begin{aligned} \omega_\infty(W_n, \delta) &= \sup_{\substack{-\infty \leq t, t' \leq \infty \\ \varrho(t, t') \leq \delta}} |W_n(t) - W_n(t')| \\ &= \sup_{\substack{-\infty \leq t, t' \leq \infty \\ \varrho(t, t') \leq \delta}} \left| \left( \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t', \boldsymbol{\vartheta}_0) \right)^T \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \right| \\ &\leq \sup_{\substack{-\infty \leq t, t' \leq \infty \\ \varrho(t, t') \leq \delta}} \left\| \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t', \boldsymbol{\vartheta}_0) \right\|_2 \cdot \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \right\|_2. \end{aligned}$$

Mit der abkürzenden Notation

$$\omega_{\infty, d}(\Delta, \delta) = \sup_{\substack{-\infty \leq t, t' \leq \infty \\ \varrho(t, t') \leq \delta}} \left\| \Delta(t, \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(t', \boldsymbol{\vartheta}_0) \right\|_2$$

impliziert die Tschebyschev-Ungleichung für alle  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned} &\lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P(\omega_\infty(W_n, \delta) \geq \varepsilon) \\ &\leq \lim_{\delta \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} P\left( \left\| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \right\|_2 \geq \frac{\varepsilon}{\omega_{\infty, d}(\Delta, \delta)} \right) = 0, \end{aligned}$$

da  $\omega_{\infty, d}(\Delta, \delta) \xrightarrow{\delta \downarrow 0} 0$  aufgrund der Stetigkeit von  $\Delta$  bezüglich  $\varrho$  gilt.

Damit ist die C-Straffheit von  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gezeigt.  $\square$

**4.6 Lemma:** Der Prozess

$$V_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} \left[ I(Z_{\mathbf{s}} \leq t) - F(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right] \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty]$$

ist C-straft.

Mit einer Zeittransformation von  $[-\infty, \infty]$  auf  $[0, 1]$  mit der Funktion  $F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0)$  entsteht der folgende empirische Prozess für alle  $u \in [0, 1]$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_n(u) &= V_n(F^{-1}(u; \boldsymbol{\vartheta}_0)) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\eta}} \sum_{j=1}^n \sum_{\mathbf{s} \in b_j} \left[ I(Z_{\mathbf{s}} \leq F^{-1}(u; \boldsymbol{\vartheta}_0)) - u \right] \\ &= \sqrt{n\eta} \left( F_n(F^{-1}(u; \boldsymbol{\vartheta}_0)) - u \right). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Zu zeigen sind die C-Straffheit von  $\tilde{\alpha}_n$ . Nach [Billingsley, 1968, Theorem 8.3, S. 56] ist es dafür hinreichend, die folgende Aussage zu zeigen:

Für alle  $\varepsilon > 0$  und für alle  $\eta' > 0$  existieren  $\delta > 0$  und  $n_0 \in \mathbb{N}$ , so dass für alle  $n \geq n_0$  und alle  $u_0 \in [0, 1]$  gilt

$$P\left(\sup_{u_0 \leq u \leq (u_0 + \delta) \wedge 1} \left| \tilde{\alpha}_n(u) - \tilde{\alpha}_n(u_0) \right| \geq \varepsilon\right) \leq \eta' \delta. \quad (4.15)$$

Für alle  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$  und alle  $u \in [0, 1]$  sei

$$X_{\mathbf{s}}(u) = I(Z_{\mathbf{s}} \leq F^{-1}(u; \boldsymbol{\vartheta}_0)) - u$$

sowie für alle  $u_1, u_2 \in [0, 1]$

$$Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2) = X_{\mathbf{s}}(u_2) - X_{\mathbf{s}}(u_1).$$

Mit dieser Notation ist für alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$

$$\tilde{\alpha}_n(u_2) - \tilde{\alpha}_n(u_1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2).$$

Nach Lemma 3.23 gelten für alle  $\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2$  und alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$  die Abschätzung (3.40)

$$\left| Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2) \right| \leq 1,$$

die Abschätzung (3.41)

$$E\left[ Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2)^2 \right] \leq u_2 - u_1$$

sowie (3.42)

$$E\left[ Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2)^4 \right] \leq 7(u_2 - u_1).$$

**4.7 Lemma:** Es gilt für alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$

$$E\left[ (\tilde{\alpha}_n(u_2) - \tilde{\alpha}_n(u_1))^4 \right] \leq \frac{1}{n} 7\eta^2(u_2 - u_1) + 3\eta^2(u_2 - u_1)^2. \quad (4.16)$$

**Beweis:** Betrachtet wird für alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$  die Differenz

$$\tilde{\alpha}_n(u_2) - \tilde{\alpha}_n(u_1) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{\eta}} S_j(u_1, u_2)$$

mit  $S_j(u_1, u_2) = \sum_{\mathbf{s} \in b_j} Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2)$ .

Für diese Summen gelten nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und nach Abschätzung (3.41)

$$\begin{aligned} E(S_1(u_1, u_2)^2) &= \sum_{\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in b_1} E(Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2) Y_{\mathbf{s}'}(u_1, u_2)) \\ &\leq \sum_{\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in b_1} E(Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2)^2)^{\frac{1}{2}} E(Y_{\mathbf{s}'}(u_1, u_2)^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \eta^2(u_2 - u_1). \end{aligned}$$

Für den Erwartungswert der vierten Potenz folgt aus Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung sowie aus Abschätzung (3.42)

$$\begin{aligned}
& E(S_1(u_1, u_2)^4) \\
&= \sum_{\mathbf{s}, \mathbf{s}', \mathbf{t}, \mathbf{t}' \in b_1} E(Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2)Y_{\mathbf{s}'}(u_1, u_2)Y_{\mathbf{t}}(u_1, u_2)Y_{\mathbf{t}'}(u_1, u_2)) \\
&\leq \sum_{\mathbf{s}, \mathbf{s}', \mathbf{t}, \mathbf{t}' \in b_1} E(Y_{\mathbf{s}}(u_1, u_2)^4)^{\frac{1}{4}} E(Y_{\mathbf{s}'}(u_1, u_2)^4)^{\frac{1}{4}} E(Y_{\mathbf{t}}(u_1, u_2)^4)^{\frac{1}{4}} E(Y_{\mathbf{t}'}(u_1, u_2)^4)^{\frac{1}{4}} \\
&\leq 7\eta^4(u_2 - u_1).
\end{aligned}$$

Die Unabhängigkeit und die identische Verteilung der Blöcke  $B_j$  für  $j = 1, \dots, n$ , die Zentriertheit von  $S_j(u_1, u_2)$  und die beiden obigen Abschätzungen implizieren

$$\begin{aligned}
& E([\tilde{\alpha}_n(u_1) - \tilde{\alpha}_n(u_2)]^4) \\
&= \frac{1}{n^2\eta^2} E\left(\left[\sum_{j=1}^n S_j(u_1, u_2)\right]^4\right) \\
&= \frac{1}{n^2\eta^2} \sum_{j=1}^n E(S_j(u_1, u_2)^4) + \frac{3}{n^2\eta^2} \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{j'=1 \\ j' \neq j}}^n E(S_j(u_1, u_2)^2) E(S_{j'}(u_1, u_2)^2) \\
&= \frac{1}{n\eta^2} E(S_1(u_1, u_2)^4) + \frac{3n(n-1)}{n^2\eta^2} E(S_1(u_1, u_2)^2)^2 \\
&\leq \frac{7\eta^2}{n}(u_1 - u_2) + 3\eta^2(u_1 - u_2)^2.
\end{aligned}$$

□

**4.8 Korollar:** In der Situation von Lemma 4.7 gilt für alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $u_2 - u_1 \geq \frac{1}{n}$

$$E\left[(\tilde{\alpha}_n(u_2) - \tilde{\alpha}_n(u_1))^4\right] \leq \text{const}_\eta(u_2 - u_1)^2. \quad (4.17)$$

**Beweis:** Nach Lemma 4.7 gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $u_2 - u_1 \geq \frac{1}{n}$

$$\begin{aligned}
E\left[(\tilde{\alpha}_n(u_2) - \tilde{\alpha}_n(u_1))^4\right] &\leq \text{const}_\eta \frac{1}{n}(u_2 - u_1) + \text{const}_\eta(u_2 - u_1)^2 \\
&\leq \text{const}_\eta(u_2 - u_1)^2 + \text{const}_\eta(u_2 - u_1)^2 \\
&= \text{const}_\eta(u_2 - u_1)^2.
\end{aligned}$$

□

Für den nächsten Schritt im Beweis der C-Straffheit von  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  wird [Billingsley, 1968, Theorem 12.2, S. 94] angewendet. Nach der Markovungleichung und nach (4.17) gilt für alle  $\lambda > 0$ , alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $u_2 - u_1 \geq \frac{1}{n}$  die Ungleichung

$$P\left(\left|\tilde{\alpha}_n(u_2) - \tilde{\alpha}_n(u_1)\right| \geq \lambda\right) \leq \lambda^{-4} E\left(\left|\tilde{\alpha}_n(u_2) - \tilde{\alpha}_n(u_1)\right|^4\right) \leq \text{const}_\eta \cdot \lambda^{-4}(u_2 - u_1)^2.$$

Damit ist die Voraussetzung für [Billingsley, 1968, Theorem 12.2, S. 94] erfüllt. Für alle  $\lambda > 0$ ,  $u_1 \in [0, 1)$  und  $n \in \mathbb{N}$  sowie für alle  $p \geq \frac{1}{n}$  und alle  $m \in \mathbb{N}$  mit  $u_1 + mp \leq 1$  gilt nach [Billingsley, 1968, Theorem 12.2, S. 94]

$$P\left(\max_{1 \leq k \leq m} \left| \tilde{\alpha}_n(u_1 + kp) - \tilde{\alpha}_n(u_1) \right| \geq \lambda\right) \leq \text{const}(mp)^2 \lambda^{-4}. \quad (4.18)$$

Gemäß Lemma 3.30 gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$  und für alle  $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq u_1 + p \leq 1$

$$\left| \tilde{\alpha}_n(u_2) - \tilde{\alpha}_n(u_1) \right| \leq \left| \tilde{\alpha}_n(u_1 + p) - \tilde{\alpha}_n(u_1) \right| + p\sqrt{n}. \quad (4.19)$$

Für alle  $u_1 \in [0, 1)$  und alle  $n \in \mathbb{N}$  sowie für alle  $p > 0$  und alle  $m \in \mathbb{N}$  mit  $u_1 + mp \leq 1$  impliziert Ungleichung (4.19) mit derselben Herleitung wie bei Ungleichung (3.58)

$$\sup_{u_1 \leq u_2 \leq u_1 + mp} \left| \tilde{\alpha}_n(u_2) - \tilde{\alpha}_n(u_1) \right| \leq 3 \max_{1 \leq k \leq m} \left| \tilde{\alpha}_n(u_1 + kp) - \tilde{\alpha}_n(u_1) \right| + p\sqrt{n}. \quad (4.20)$$

Für alle  $\lambda > 0$ ,  $u_1 \in [0, 1)$  und  $n \in \mathbb{N}$  sowie für alle  $\frac{1}{n} \leq p \leq \frac{2\lambda}{\sqrt{n}}$  und alle  $m \in \mathbb{N}$  mit  $u_1 + mp \leq 1$  folgt aus (4.18) und (4.20)

$$P\left(\sup_{u_1 \leq u_2 \leq u_1 + mp} \left| \tilde{\alpha}_n(u_2) - \tilde{\alpha}_n(u_1) \right| \geq 5\lambda\right) \leq c_1(mp)^2 \lambda^{-4} \quad (4.21)$$

für eine Konstante  $c_1 > 0$ . Die Herleitung entspricht dabei derjenigen von (3.59) und erfordert die Einschränkungen an  $p$ .

Für den Beweis von (4.15) werden  $\varepsilon > 0$  und  $\eta' > 0$  vorgegeben. Sei  $\delta \in (0, 1)$  so gewählt, dass für die Konstante  $c_1$  aus (4.21) gilt

$$c_1 \cdot \varepsilon^{-4} \delta \leq \eta'.$$

Sei  $m = \max\{m' \in \mathbb{N} : m' \leq \frac{\delta\sqrt{n}}{\varepsilon}\}$  und sei  $p = \frac{\delta}{m}$ . Dann gelten für hinreichend großes  $n$

$$p = \frac{\delta}{m} \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$$

sowie

$$p = \frac{\delta}{m} \leq \frac{\delta}{\frac{\delta\sqrt{n}}{\varepsilon} - 1} = \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{n}}} \varepsilon \sqrt{n}^{-1}.$$

Sei  $n \geq n_0 \in \mathbb{N}$ . Dann ist auch  $\delta\sqrt{n} \geq \delta\sqrt{n_0}$ . Für hinreichend großes  $n_0$  gilt

$$\frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{n}} \leq \frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{n_0}} \leq \frac{1}{2}.$$

Daraus folgt

$$\frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{n}}} \leq 2.$$

Also ist

$$p \leq \frac{1}{1 - \frac{\varepsilon}{\delta\sqrt{n}}} \varepsilon \sqrt{n}^{-1} \leq 2\varepsilon \sqrt{n}^{-1}$$

erfüllt. Damit gelten sämtliche Voraussetzungen von (4.21). Insgesamt ergibt sich für die rechte Seite von (4.21)

$$c_1 \cdot (mp)^2 \varepsilon^{-4} \leq c_1 \cdot \delta^2 \varepsilon^{-4} \leq \eta' \delta.$$

Damit ist die C-Straffheit (4.15) von  $(\tilde{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gezeigt.

Da die Prozesse  $(\tilde{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  über die deterministische Zeittransformation aus (4.14) zusammenhängen, ergibt sich hieraus auch die C-Straffheit von  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , und Lemma 4.6 ist bewiesen.

Damit kann nun der funktionale Grenzwertsatz 4.3 bewiesen werden.

Aus der C-Straffheit der beiden Summanden  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$  folgt die C-Straffheit von  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Aus dieser und aus der Konvergenz der endlich-dimensionalen Randverteilungen von  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  folgt mit Satz 3.13 die Existenz des stochastischen Prozesses  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}(t))_{t \in [-\infty, \infty]}$  aus Satz 4.3 mit fast sicher stetigen Pfaden und

$$T_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{W} \text{ in } (D([-\infty, \infty]), s_\infty) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Die  $k$ -dimensionalen Randverteilungen von  $\mathcal{W}$  sind die Normalverteilungen

$$N_k \left( \mathbf{0}, [\sigma^2(t_i, t_j)]_{1 \leq i, j \leq k} \right)$$

mit der Kovarianzfunktion  $\sigma^2$  aus Lemma 4.4, Gleichung (4.13). Also ist  $\mathcal{W}$  ein zentrierter Gaußprozess mit der Kovarianzfunktion  $\sigma^2$  und fast sicher stetigen Pfaden.

Da  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(\hat{\alpha}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  alle dieselbe Grenzverteilung besitzen, ist die Verteilungskonvergenz (4.8) von  $\hat{\alpha}_n$  gezeigt. Der empirische Prozess mit geschätztem Parametervektor konvergiert also gegen den zentrierten Gaußprozess  $\mathcal{W}$  mit fast sicher stetigen Pfaden, was den Beweis von Satz 4.3 abschließt.

Eine Alternative zum direkten Nachweis der Voraussetzung (4.4) des funktionalen Grenzwertsatzes 4.3 findet sich in Lemma 3.31.

## 5 Die K-Verteilung $K(\cdot; a, \alpha)$

### 5.1 Grundlegende Eigenschaften

Die folgenden Ausführungen dienen der Definition und der Herleitung von Eigenschaften der K-Verteilung.

Für  $x > 0$  ist die *Gammafunktion* definiert durch

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} t^{x-1} e^{-t} dt. \quad (5.1)$$

Die Gammafunktion aus (5.1) besitzt die folgenden bekannten Eigenschaften.

Es gelten  $\Gamma(1) = 1$  und  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ .

Für alle  $x > 0$  ist

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \quad (5.2)$$

Die Gammafunktion erfüllt für alle  $x > 0$  die *Legendresche Verdopplungsformel*

$$\Gamma\left(\frac{x}{2}\right)\Gamma\left(\frac{x+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{x-1}}\Gamma(x) \quad (5.3)$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt die *Stirlingformel*

$$\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\tilde{\Phi}(x)}, \quad (5.4)$$

wobei  $\tilde{\Phi}$  eine Funktion ist, die  $e^{\tilde{\Phi}(x)} \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \infty$  erfüllt.

Die Gammafunktion ist logarithmisch konvex, das heißt für alle  $x, y > 0$  und alle  $r \in [0, 1]$  gilt

$$\Gamma(rx + (1-r)y) \leq \Gamma(x)^r \Gamma(y)^{1-r}.$$

Mit  $y = x + 1$  und  $r = \frac{1}{2}$  ergibt sich daraus für den Quotienten

$$\frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x + \frac{1}{2})} \geq \frac{1}{\sqrt{x}}. \quad (5.5)$$

Für die Ableitung der Gammafunktion gilt

$$\Gamma'(x) = \Gamma(x)\psi(x) \text{ für } x > 0 \quad (5.6)$$

mit der *Digammafunktion*  $\psi(\cdot)$ . Für diese existiert nach [Nielsen, 1965, Gleichung (2), S. 15] die folgende Entwicklung,

$$\psi(x) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{x+k} \right), \quad (5.7)$$

wobei  $\gamma$  die *Eulersche Konstante* mit dem gerundeten Wert 0.57722 ist.

Die folgende Definition der *modifizierten Besselfunktion zweiter Art* (*modified Bessel function of the second kind*) findet sich beispielsweise in [Watson, 1922, S. 78] ebenso wie in [Abramowitz; Stegun, 1965, S. 374ff].

**5.1 Definition:** Für  $z, \nu \in \mathbb{C}$  ist die *modifizierte Besselfunktion erster Art* gegeben durch die Reihenentwicklung

$$I_\nu(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}z\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)}, \quad (5.8)$$

wobei  $\Gamma(\cdot)$  die komplexe Gammafunktion bezeichnet.

Für  $z \in \mathbb{C}$  und  $\nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$  ist die *modifizierte Besselfunktion zweiter Art*

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2}\pi \frac{I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad (5.9)$$

und für  $\nu = m \in \mathbb{Z}$  wird definiert

$$K_m(z) = \lim_{k \rightarrow m} \frac{1}{2}\pi \frac{I_{-k}(z) - I_k(z)}{\sin(k\pi)}.$$

Aus Gleichung (5.9) und Gleichung (5.8) folgt

$$K_\nu(z) = \frac{\pi}{2\sin(\nu\pi)} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k-\nu}}{k!\Gamma(-\nu+k+1)} - \frac{\left(\frac{z}{2}\right)^{2k+\nu}}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \right),$$

wobei in diesen Ausdruck noch der Grenzwert eingefügt werden muss, falls  $\nu \in \mathbb{Z}$  gilt.

**5.2 Bemerkung:** Die definierende Darstellung der modifizierten Besselfunktion zweiter Art entspricht der Implementierung in [MATLAB].

Die beschriebene modifizierte Besselfunktion zweiter Art wird veraltet auch als *modified Bessel function of the third kind* bezeichnet.

Es existieren verschiedene Integraldarstellungen der modifizierten Besselfunktion zweiter Art.

Für  $\operatorname{Re}(\nu) > -\frac{1}{2}$  und  $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$  gilt nach [Watson, 1922, (5), S. 172]

$$K_\nu(z) = \frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{1}{2}z\right)^\nu}{\Gamma(\nu+\frac{1}{2})} \int_1^\infty e^{-zt}(t^2-1)^{\nu-\frac{1}{2}} dt,$$

für  $|\arg(z)| < \frac{\pi}{2}$  gilt nach [Watson, 1922, (5), S. 181]

$$K_\nu(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh(t)} \cosh(\nu t) dt. \quad (5.10)$$

Bei einer weiteren Integraldarstellung, vgl. [Watson, 1922, (15), S. 183], gibt es lediglich die Bedingung an  $z$ , dass  $\operatorname{Re}(z^2) > 0$  gelten muss

$$K_\nu(z) = \frac{z^\nu}{2^{\nu+1}} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\nu+1}} e^{-t-\frac{z^2}{4t}} dt. \quad (5.11)$$

Die folgende Summenformel für die modifizierte Besselfunktion zweiter Art findet sich in [Watson, 1922, (1), S. 79]

$$K_{\nu-1}(z) - K_{\nu+1}(z) = -\frac{2\nu}{z}K_{\nu}(z).$$

Für die Ableitung der modifizierten Besselfunktion zweiter Art nach  $z$  gelten die folgenden Gleichungen, vgl. [Watson, 1922, (2) und (3), S. 79],

$$\frac{\partial}{\partial z}K_{\nu}(z) = -\frac{1}{2}\left(K_{\nu-1}(z) + K_{\nu+1}(z)\right) \quad (5.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}K_{\nu}(z) = -K_{\nu-1}(z) - \frac{\nu}{z}K_{\nu}(z). \quad (5.13)$$

Für die Ableitung nach  $\nu$  gilt nach Gleichung (5.11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu}K_{\nu}(z) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\nu+1}} e^{-t-\frac{z^2}{4t}} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \ln\left(\frac{z}{2}\right) \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\nu+1}} e^{-t-\frac{z^2}{4t}} dt + \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\nu+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{z^2}{4t}} dt \right] \\ &= \ln\left(\frac{z}{2}\right) K_{\nu}(z) + \frac{z^{\nu}}{2^{\nu+1}} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\nu+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{z^2}{4t}} dt. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Im zweiten Schritt werden dabei nach dem Satz von Lebesgue Ableitung und Integral vertauscht.

Für die folgenden bekannten Aussagen über die modifizierte Besselfunktion zweiter Art werden die Argumente auf  $z > 0$  und  $\nu \in \mathbb{R}$  eingeschränkt, was in den späteren Anwendungen aufgrund der dortigen Wahl der Parameterräume ausreichend ist.

**5.3 Lemma:** Für alle  $z > 0$  und alle  $\nu \in \mathbb{R}$  ist  $K_{\nu}(z)$  positiv und in  $z$  streng monoton fallend.

**5.4 Lemma:** Für alle  $z > 0$  und alle  $\nu \in \mathbb{R}$  gilt die Symmetrie  $K_{\nu}(z) = K_{-\nu}(z)$ . Ferner ist  $K_{\nu}(z)$  in  $\nu \in (-\infty, 0)$  streng monoton fallend und in  $\nu \in (0, \infty)$  streng monoton steigend.

**5.5 Lemma:** Die modifizierte Besselfunktion zweiter Art  $K_{\nu}(z)$  ist in den Argumenten  $(\nu, z) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$  stetig.

**Beweis:** Es seien  $z > 0$  und  $\nu \in \mathbb{R}$ . Zu zeigen ist

$$\lim_{h,k \rightarrow 0} |K_{\nu+k}(z+h) - K_{\nu}(z)| = 0.$$

Es gilt nach Darstellung (5.10)

$$\begin{aligned} &\lim_{h,k \rightarrow 0} |K_{\nu+k}(z+h) - K_{\nu}(z)| \\ &\leq \lim_{h,k \rightarrow 0} \int_0^{\infty} \left| e^{-(z+h)\cosh(t)} \cosh((\nu+k)t) - e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t) \right| dt. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Für den Integranden wird im Folgenden eine integrierbare Majorante hergeleitet. Es seien  $h_0, k_0 > 0$  hinreichend klein gewählt, so dass  $0 < z - h_0$  erfüllt ist und dass im Fall  $\nu > 0$  gilt  $\nu - k_0 > 0$  und im Fall  $\nu < 0$  gilt  $\nu + k_0 < 0$ . Seien  $h, k \in \mathbb{R}$  mit  $z - h_0 \leq z + h \leq z + h_0$  sowie  $\nu - k_0 \leq \nu + k \leq \nu + k_0$ . Aufgrund des Monotonieverhaltens, der Positivität und der Symmetrie des Kosinus Hyperbolicus gelten die folgenden Abschätzungen

$$\begin{aligned} & \left| e^{-(z+h)\cosh(t)} \cosh((\nu+k)t) - e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t) \right| \\ & \leq e^{-(z+h)\cosh(t)} \cosh((\nu+k)t) + e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t) \\ & \leq e^{-(z-h_0)\cosh(t)} \cosh((\nu+k_0 I(\nu \geq 0) - k_0 I(\nu < 0))t) + e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t) \\ & = g(t; h_0, k_0). \end{aligned}$$

Die Funktion  $g$  ist über  $(0, \infty)$  integrierbar, denn mit Gleichung (5.10) folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty g(t; h_0, k_0) dt \\ & = \int_0^\infty e^{-(z-h_0)\cosh(t)} \cosh((\nu+k_0 I(\nu \geq 0) - k_0 I(\nu < 0))t) dt + \int_0^\infty e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t) dt \\ & = K_{\nu+k_0 I(\nu \geq 0) - k_0 I(\nu < 0)}(z - h_0) + K_\nu(z) \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Also ist  $g$  eine integrierbare Majorante für den Integranden aus Gleichung (5.15). Nach dem Satz von Lebesgue gilt daher

$$\begin{aligned} & \lim_{h, k \rightarrow 0} \int_0^\infty \left| e^{-(z+h)\cosh(t)} \cosh((\nu+k)t) - e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t) \right| dt \\ & = \int_0^\infty \lim_{h, k \rightarrow 0} \left| e^{-(z+h)\cosh(t)} \cosh((\nu+k)t) - e^{-z\cosh(t)} \cosh(\nu t) \right| dt \\ & = 0, \end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung durch die Stetigkeit der Exponentialfunktion bzw. des Kosinus Hyperbolicus impliziert wird.  $\square$

Für die modifizierte Besselfunktion zweiter Art existieren asymptotische Entwicklungen, vgl. [Abramowitz; Stegun, 1965, S. 375ff] sowie [Olver, 1997, S. 435]. Diese lassen sich unter Verwendung der Integraldarstellung (5.11) und der Konvergenzordnungen aus Abschnitt A.3 berechnen. Mit (A.47) und (A.48) folgt

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \Gamma(|\nu|) \left( \frac{z}{2} \right)^{-|\nu|} (1 + o(1)) \text{ für } z \rightarrow 0 \text{ und alle } \nu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}. \quad (5.16)$$

Ferner impliziert (A.49)

$$K_0(z) = \ln \left( \frac{1}{z} \right) (1 + o(1)) \text{ für } z \rightarrow 0. \quad (5.17)$$

Die asymptotische Entwicklung für  $z \rightarrow \infty$  folgt aus (A.45)

$$K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} (1 + o(1)) \text{ für } z \rightarrow \infty \text{ und alle } \nu \in \mathbb{R}. \quad (5.18)$$

Das folgende elementare Lemma bildet die Grundlage der in der vorliegenden Arbeit verwendeten Definition der K-Verteilung. In der Literatur aus dem Radarbereich finden sich viele unterschiedliche Darstellungen der K-Verteilung. Die hier gewählte entspricht der aus [Joughin; Percival; Winebrenner, 1993].

**5.6 Lemma:** Für alle  $a, \alpha > 0$  und alle  $L \in \mathbb{N}$  definiert

$$f(x; a, \alpha) = \frac{x^{\alpha+L/2-1} a^{-\alpha-L/2}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right) \text{ für alle } x \in (0, \infty) \quad (5.19)$$

eine Wahrscheinlichkeitsdichte. Dabei bezeichnet  $K_{\alpha-L/2}$  die modifizierte Bessel-Funktion zweiter Art.

**5.7 Definition:** Für festes  $L \in \mathbb{N}$  heißt die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $K(\cdot; a, \alpha)$  mit der Dichte (5.19) *K-Verteilung zu den Parametern  $a$  und  $\alpha$* .

Das Verhalten der Dichtefunktion  $f$  aus (5.19) bei Konvergenz des Argumentes gegen 0 wird durch die asymptotischen Entwicklungen (5.16) und (5.17) der modifizierten Bessel-Funktion zweiter Art  $K_\nu(\cdot)$  bestimmt. Abhängig von den Parametern  $\alpha$  und  $L$  ergeben sich drei verschiedene Formen der Dichte.

Erfüllen die Parameter die Bedingung  $\frac{1}{2} < \alpha \leq \frac{L}{2}$  oder die Bedingungen  $\alpha \geq \frac{L}{2}$  und  $L > 1$ , so konvergiert die Dichte für  $x \rightarrow 0$  gegen 0, siehe Abbildung 15.

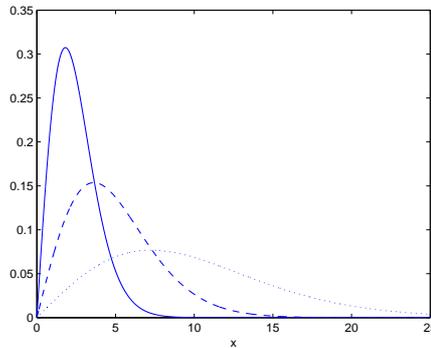


Abbildung 15: Dichten  $f(\cdot; 0.5, 1)$ ,  $f(\cdot; 1, 1)$  gestrichelt,  $f(\cdot; 2, 1)$  gepunktet mit  $L = 16$ .

Für  $\alpha = \frac{1}{2}$  oder  $L = 1$  konvergiert die Dichte für  $x \rightarrow 0$  gegen eine positive Konstante, siehe Abbildung 16.

Gilt  $\alpha < \frac{1}{2}$ , so divergiert die Dichte für  $x \rightarrow 0$  gegen  $\infty$ , siehe Abbildung 17.

**5.8 Satz:** Die charakteristische Funktion einer K-verteilten Zufallsvariablen  $X$  hat die Form

$$\phi_X(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a^{-2\alpha} 2^{2\alpha}}{(iy + \frac{1}{a})^{2\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{L}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{L}{2} + \frac{1}{2})} {}_2F_1 \left( 2\alpha, \alpha - \frac{L}{2} + \frac{1}{2}; \alpha + \frac{L}{2} + \frac{1}{2}; \frac{iy - \frac{1}{a}}{iy + \frac{1}{a}} \right),$$

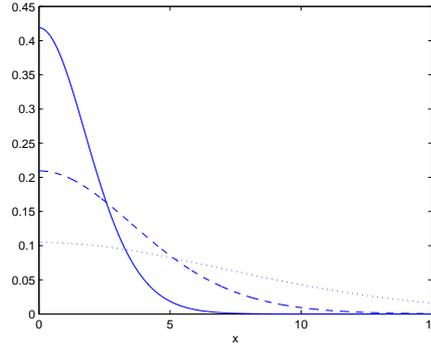


Abbildung 16: Dichten  $f(\cdot; 0.5, 0.5)$ ,  $f(\cdot; 1, 0.5)$  gestrichelt,  $f(\cdot; 2, 0.5)$  gepunktet mit  $L = 16$ .

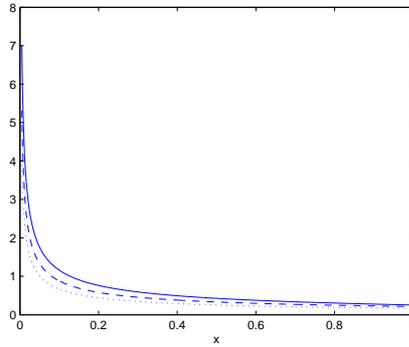


Abbildung 17: Dichten  $f(\cdot; 0.5, 0.2)$ ,  $f(\cdot; 1, 0.2)$  gestrichelt,  $f(\cdot; 2, 0.2)$  gepunktet mit  $L = 16$ .

wobei die *Gauß'sche Hypergeometrische Funktion*  ${}_2F_1$  definiert ist durch

$${}_2F_1(r, s; t, z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(k+r)\Gamma(k+s)\Gamma(t)}{\Gamma(r)\Gamma(s)\Gamma(k+t)} \frac{1}{k!} z^k.$$

Der zugehörige Beweis ist an die Herleitung nach [Iskander, 2004] angelehnt.

**Beweis:** Für die charakteristische Funktion gilt unter Verwendung von Darstellung (5.19) und der Legendreschen Verdopplungsformel (5.3)

$$\begin{aligned} \phi_X(y) &= \int_0^{\infty} e^{-iyt} f(t; a, \alpha) dt \\ &= \frac{a^{-\alpha-L/2}}{2^{\alpha+L/2-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} \int_0^{\infty} t^{\alpha+L/2-1} e^{-iyt} K_{\alpha-L/2}\left(\frac{t}{a}\right) dt \\ &= \frac{a^{-\alpha-L/2}}{2^{\alpha+L/2-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} \frac{\sqrt{\pi}\left(\frac{2}{a}\right)^{\alpha-L/2}}{\left(iy + \frac{1}{a}\right)^{2\alpha}} \frac{\Gamma(2\alpha)\Gamma(L)}{\Gamma(\alpha + L/2 + 1/2)} \\ &\quad \cdot {}_2F_1\left(2\alpha, \alpha - \frac{L}{2} + \frac{1}{2}; \alpha + \frac{L}{2} + \frac{1}{2}; \frac{iy - \frac{1}{a}}{iy + \frac{1}{a}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{a^{-2\alpha} 2^{2\alpha}}{\left(iy + \frac{1}{a}\right)^{2\alpha}} \frac{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})\Gamma(\frac{L}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(\alpha + \frac{L}{2} + \frac{1}{2})} {}_2F_1\left(2\alpha, \alpha - \frac{L}{2} + \frac{1}{2}; \alpha + \frac{L}{2} + \frac{1}{2}; \frac{iy - \frac{1}{a}}{iy + \frac{1}{a}}\right). \end{aligned}$$

Dabei gilt die dritte Gleichung nach der Formel für das entsprechende Integral, siehe [Gradshteyn; Ryzhik, 1965, 6.621/3, S. 712].  $\square$

### 5.1.1 Ableitungen der Dichte der K-Verteilung

Im folgenden Abschnitt werden die ersten, zweiten und dritten partiellen Ableitungen der Dichte der K-Verteilung berechnet. Diese kommen im weiteren Verlauf zum Einsatz. Die ersten partiellen Ableitungen der Dichtefunktion (5.19) der K-Verteilung sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} f(x; a, \alpha) = & - \frac{x^{\alpha+L/2-1} L}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-1} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right) \\ & + \frac{x^{\alpha+L/2}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-2} K_{\alpha-L/2-1} \left( \frac{x}{a} \right), \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; a, \alpha) = & \frac{4}{x \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} \left( \frac{x}{2a} \right)^{\alpha+L/2} \left( 2 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) - \psi(\alpha) \right) K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right) \\ & + \frac{2}{x \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} \left( \frac{x}{2a} \right)^{2\alpha} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Bei der Berechnung der zweiten und dritten partiellen Ableitungen reduziert der Satz von Schwarz die Anzahl der zu berechnenden partiellen Ableitungen. Für seine Anwendung werden die beiden folgenden Lemmata benötigt.

**5.9 Lemma:** Es gelten für alle  $x, a, \alpha \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{N}$

$$\frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt = \frac{x^2}{2a^3} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+c+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt = \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^{m+1} e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt.$$

**Beweis:** Zu zeigen ist die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitung und des Integrals. Für alle  $t, x, a, \alpha \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{N}$  wird die Funktion

$$g(t, x, a, \alpha, c) = \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2t)}$$

betrachtet. Es gelten

$$\frac{\partial}{\partial a} g(t, x, a, \alpha, c) = \frac{x^2}{2a^3} \frac{1}{t^{\alpha+c+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2t)} \quad (5.22)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} g(t, x, a, \alpha, c) = \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^{m+1} e^{-t-x^2/(4a^2t)}. \quad (5.23)$$

Um den Satz von Lebesgue anwenden zu können, werden entsprechend Abschnitt A.6.1 integrierbare Majoranten benötigt.

Es sei  $h_0 > 0$  hinreichend klein gewählt, so dass  $0 < a - h_0$  erfüllt ist. Es gilt für alle  $\xi \in [a - h_0, a + h_0]$  mit (5.22) und unter Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen aus Abschnitt A.1

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial a} g(t, x, \xi, \alpha, c) \right| &= \frac{x^2}{2\xi^3} \frac{1}{t^{\alpha+c+1}} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^m e^{-t-x^2/(4\xi^2 t)} \\ &\leq \frac{x^2}{2(a-h_0)^3} \frac{1}{t^{\alpha+c+1}} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^m e^{-t-x^2/(4(a+h_0)^2 t)}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\frac{x^2}{2(a-h_0)^3} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+c+1}} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^m e^{-t-x^2/(4(a+h_0)^2 t)} dt < \infty,$$

da das Verhalten des Produktes aus dem gebrochen rationalen Faktor, dem Logarithmus und der Exponentialfunktion sowohl für  $t \rightarrow 0$  als auch für  $t \rightarrow \infty$  von der höheren Konvergenzordnung der Exponentialfunktion bestimmt wird.

Damit impliziert der Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty g(t, x, a, \alpha, c) dt &= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} g(t, x, a, \alpha, c) dt \\ &= \frac{x^2}{2a^3} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+c+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2 t)} dt. \end{aligned}$$

Für die partielle Ableitung nach  $\alpha$  sei  $k_0 > 0$  hinreichend klein gewählt, so dass im Fall  $\alpha + c > 0$  gilt  $\alpha + c - k_0 > 0$  und im Fall  $\alpha + c < 0$  gilt  $\alpha + c + k_0 < 0$ . Für  $\zeta \in [\alpha - k_0, \alpha + k_0]$  gilt mit (5.23) und unter Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen aus Abschnitt A.1

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} g(t, x, a, \zeta, c) \right| &= \frac{1}{t^{\zeta+c}} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^{m+1} e^{-t-x^2/(4a^2 t)} \\ &\leq \frac{1}{t^{\alpha+c-k_0 I(t>1)+k_0 I(t\leq 1)}} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^{m+1} e^{-t-x^2/(4a^2 t)}. \end{aligned}$$

Es gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+c-k_0 I(t>1)+k_0 I(t\leq 1)}} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^{m+1} e^{-t-x^2/(4a^2 t)} dt < \infty,$$

da wiederum die Exponentialfunktion für  $t \rightarrow 0$  und für  $t \rightarrow \infty$  der dominierende Faktor des Produktes ist.

Damit impliziert der Satz von Lebesgue

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty g(t, x, a, \alpha, c) dt = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} g(t, x, a, \alpha, c) dt = \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^{m+1} e^{-t-x^2/(4a^2 t)} dt.$$

□

**5.10 Lemma:** Für alle  $x \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{N}$  ist die Funktion

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2 t)} dt$$

in den Argumenten  $(a, \alpha) \in (0, \infty)^2$  stetig.

**Beweis:** Es seien  $x, a, \alpha \in (0, \infty)$ ,  $c \in \mathbb{R}$  und  $m \in \mathbb{N}$ . Zu zeigen ist

$$\lim_{h, k \rightarrow 0} \left| \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+k+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4(a+h)^2t)} dt - \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt \right| = 0.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} & \lim_{h, k \rightarrow 0} \left| \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+k+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4(a+h)^2t)} dt - \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt \right| \\ & \leq \lim_{h, k \rightarrow 0} \int_0^\infty \left| \frac{1}{t^{\alpha+k+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4(a+h)^2t)} - \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2t)} \right| dt. \end{aligned}$$

Für diesen Integranden wird im Folgenden eine integrierbare Majorante hergeleitet. Es seien  $h_0, k_0 > 0$  hinreichend klein gewählt, so dass  $0 < a - h_0$  erfüllt ist und dass im Fall  $\alpha + c > 0$  gilt  $\alpha + c - k_0 > 0$  und im Fall  $\alpha + c < 0$  gilt  $\alpha + c + k_0 < 0$ . Seien  $h, k \in \mathbb{R}$  mit  $a - h_0 \leq a + h \leq a + h_0$  sowie  $\alpha - k_0 \leq \alpha + k \leq \alpha + k_0$ . Nach den Abschätzungen der einzelnen Funktionen aus Abschnitt A.1 gilt

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{t^{\alpha+k+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4(a+h)^2t)} - \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2t)} \right| \\ & \leq \frac{1}{t^{\alpha+k+c}} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^m e^{-t-x^2/(4(a+h)^2t)} + \frac{1}{t^{\alpha+c}} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^m e^{-t-x^2/(4a^2t)} \\ & \leq \frac{1}{t^{\alpha+c-k_0I(t>1)+k_0I(t\leq 1)}} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^m e^{-t-x^2/(4(a+h_0)^2t)} + \frac{1}{t^{\alpha+c}} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^m e^{-t-x^2/(4a^2t)}. \end{aligned}$$

Diese Funktion ist in  $t$  über  $(0, \infty)$  integrierbar, da das Verhalten beider Summanden sowohl für  $t \rightarrow 0$  als auch für  $t \rightarrow \infty$  jeweils von der höheren Konvergenzordnung des exponentiellen Faktors bestimmt wird. Daher impliziert der Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned} & \lim_{h, k \rightarrow 0} \int_0^\infty \left| \frac{1}{t^{\alpha+k+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4(a+h)^2t)} - \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2t)} \right| dt \\ & = \int_0^\infty \lim_{h, k \rightarrow 0} \left| \frac{1}{t^{\alpha+k+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4(a+h)^2t)} - \frac{1}{t^{\alpha+c}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^m e^{-t-x^2/(4a^2t)} \right| dt \\ & = 0. \end{aligned}$$

□

**5.11 Satz:** Sei  $f(x; a, \alpha)$  für  $x, a, \alpha \in (0, \infty)$  die Dichte aus (5.19). Für alle  $n \in \mathbb{N}$  existieren die  $n$ -ten partiellen Ableitungen von  $f(x; a, \alpha)$  nach  $a$  und  $\alpha$ , und sie sind für alle  $x \in (0, \infty)$  stetig in  $(a, \alpha) \in (0, \infty)^2$ .

**Beweis:** Aus der Darstellung (5.19) der Dichte  $f$ , den partiellen Ableitungen der modifizierten Besselfunktion zweiter Art (5.13) und (5.14) sowie denen des Integrals aus Lemma 5.9 folgt, dass für alle  $x \in (0, \infty)$  und für alle  $n \in \mathbb{N}$  die  $n$ -ten partiellen Ableitungen von  $f(x; a, \alpha)$  nach  $a$  und nach  $\alpha$  existieren und aus Summanden zusammengesetzt sind, in denen sämtliche Faktoren stetig in  $(a, \alpha) \in (0, \infty)^2$  sind. Für die modifizierte Besselfunktion zweiter Art und die auftretenden Integrale wurde die Stetigkeit in den

Lemmata 5.5 und 5.10 bewiesen. Dies impliziert die Stetigkeit der  $n$ -ten partiellen Ableitungen in den Argumenten  $(a, \alpha) \in (0, \infty)^2$ .  $\square$

Mit diesem Satz kann im Folgenden zur Berechnung der zweiten und dritten partiellen Ableitungen der Satz von Schwarz angewendet werden.

Die zweiten partiellen Ableitungen der Dichtefunktion (5.19) der K-Verteilung sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x; a, \alpha) &= -(L + 2\alpha + 1) \frac{x^{\alpha+L/2}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-3} K_{\alpha-L/2-1} \left( \frac{x}{a} \right) \\ &\quad + \left( L(L+1) + \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{x^{\alpha+L/2-1}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-2} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right), \end{aligned} \quad (5.24)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x; a, \alpha) \\ &= \frac{x^{\alpha+L/2-1}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right) \left( 4 \ln \left( \frac{x}{2a} \right)^2 - 4 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) \psi(\alpha) + \psi(\alpha)^2 - \psi_1(\alpha) \right) \\ &\quad + \frac{x^{2\alpha-1}}{2^{2\alpha-1} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-2\alpha} \left[ \left( 4 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) - 2\psi(\alpha) \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^2 e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \right], \end{aligned} \quad (5.25)$$

dabei ist für alle  $n \in \mathbb{N}$  die Funktion  $\psi_n(y) = \frac{\partial^{n+1}}{\partial y^{n+1}} \ln(\Gamma(y))$  für  $y \in \mathbb{R}$  die  $n$ -te *Polygammafunktion*,

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; a, \alpha) \\ &= -L \frac{x^{\alpha+L/2-1}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-1} \left( 2 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) - \psi(\alpha) \right) K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right) \\ &\quad + \frac{x^{\alpha+L/2}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-2} \left( 2 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) - \psi(\alpha) \right) K_{\alpha-L/2-1} \left( \frac{x}{a} \right) \\ &\quad + \frac{x^{2\alpha-1}}{2^{2\alpha-1} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-2\alpha-1} \left( -L \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt + 2 \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \right). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Satz 5.11 und der Satz von Schwarz implizieren die Vertauschbarkeit der partiellen Ableitungen der Dichte  $f$ , also gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} f(x; a, \alpha) = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; a, \alpha).$$

Entsprechend gilt für die dritten partiellen Ableitungen

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3}{\partial a^3} f(x; a, \alpha) \\ &= \left( L^2 + 5L + 2\alpha L + 10\alpha + 4\alpha^2 + 4 + \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{x^{\alpha+L/2}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-4} K_{\alpha-L/2-1} \left( \frac{x}{a} \right) \\ &\quad - \left( L(L+1)(L+2) + \frac{x^2}{a^2} (2L+2\alpha+5) \right) \frac{x^{\alpha+L/2-1}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-3} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right), \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha^2} f(x; a, \alpha) \\ &= \frac{x^{\alpha+L/2-1}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-1} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right) \\ &\quad \cdot \left( -L \left( 4 \ln \left( \frac{x}{2a} \right)^2 - 4 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) \psi(\alpha) + \psi(\alpha)^2 - \psi_1(\alpha) \right) + 8 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) + 4\psi(\alpha) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{x^{\alpha+L/2}}{2^{\alpha+L/2-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-2} K_{\alpha-L/2-1} \left( \frac{x}{a} \right) \\
& \quad \cdot \left( 4 \ln \left( \frac{x}{2a} \right)^2 - 4 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) \psi(\alpha) + \psi(\alpha)^2 - \psi_1(\alpha) \right) \\
& + \frac{x^{2\alpha-1}}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-2\alpha-1} \left( -8\alpha \ln \left( \frac{x}{2a} \right) + 4\alpha\psi(\alpha) - 4 \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \\
& - \frac{x^{2\alpha-1}}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-2\alpha-1} 2\alpha \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^2 e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \\
& + \frac{x^{2\alpha+1}}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-2\alpha-3} \left( 2 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) - \psi(\alpha) \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+2}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \\
& + \frac{x^{2\alpha+1}}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-2\alpha-3} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+2}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^2 e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt, \tag{5.28}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha \partial a} f(x; a, \alpha) \\
= & \frac{x^{\alpha+L/2-1}}{2^{\alpha+L/2-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-2} \left( 2L + \left( 2 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) - \psi(\alpha) \right) \left( L(L+1) + \frac{x^2}{a^2} \right) \right) K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right) \\
& + \frac{x^{\alpha+L/2}}{2^{\alpha+L/2-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2-3} \left( -(L+2\alpha+3) \left( 2 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) - \psi(\alpha) \right) - 2 \right) K_{\alpha-L/2-1} \left( \frac{x}{a} \right) \\
& - \frac{x^{2\alpha-1}}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-2\alpha-2} 2(2\alpha+1) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \\
& + \frac{x^{2\alpha-1}}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-2\alpha-2} \left( L(2\alpha+1) + \frac{x^2}{a^2} \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \\
& - \frac{x^{2\alpha+1}}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-2\alpha-4} L \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+2}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt, \tag{5.29}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(x; a, \alpha) \\
= & \frac{x^{\alpha+L/2-1}}{2^{\alpha+L/2-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-\alpha-L/2} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right) \left( 8 \ln \left( \frac{x}{2a} \right)^3 - 12 \ln \left( \frac{x}{2a} \right)^2 \psi(\alpha) + 6 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) \psi(\alpha)^2 \right. \\
& \quad \left. - \psi(\alpha)^3 + 3\psi(\alpha)\psi_1(\alpha) - 6 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) \psi_1(\alpha) - \psi_2(\alpha) \right) \\
& + \frac{x^{2\alpha-1}}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} a^{-2\alpha} \\
& \quad \cdot \left[ \left( 12 \ln \left( \frac{x}{2a} \right)^2 - 12 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) \psi(\alpha) + 3\psi(\alpha)^2 - 3\psi_1(\alpha) \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \right. \\
& \quad \left. + \left( 6 \ln \left( \frac{x}{2a} \right) - 3\psi(\alpha) \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^2 e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt + \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^3 e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \right]. \tag{5.30}
\end{aligned}$$

### 5.1.2 Momente

Das folgende Lemma liefert eine Darstellung der Momente einer K-verteilten Zufallsvariable.

**5.12 Lemma:** Die Momente einer K-verteilten Zufallsvariablen  $X$  sind für alle  $m \geq 1$  gegeben durch

$$E(X^m) = a^m 2^m \frac{\Gamma(\frac{m}{2} + \alpha) \Gamma(\frac{m}{2} + \frac{L}{2})}{\Gamma(\alpha) \Gamma(\frac{L}{2})}. \tag{5.31}$$

**Beweis:** Unter Verwendung der Darstellung der Dichte (5.19) und von Gleichung (A.86) gilt

$$\begin{aligned} E(X^m) &= \int_0^\infty x^m f(x; a, \alpha) dx \\ &= \frac{a^{-\alpha-L/2}}{2^{\alpha+L/2-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} 2^{m+\alpha+L/2-2} \Gamma\left(\frac{m}{2} + \alpha\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{L}{2}\right) a^{m+\alpha+L/2} \\ &= a^m 2^m \frac{\Gamma\left(\frac{m}{2} + \alpha\right) \Gamma\left(\frac{m}{2} + \frac{L}{2}\right)}{\Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)}, \end{aligned}$$

wobei die Bedingungen für die Anwendung von (A.86)

$$m + 2\alpha > 0 \text{ und } m + L > 0$$

erfüllt sind. □

Mit Hilfe der Darstellung (5.31) für die Momente der K-Verteilung wird das folgende Lemma bewiesen.

**5.13 Lemma:** Die Klasse der K-Verteilungen

$$\mathcal{K} = \{K(\cdot; a, \alpha) : (a, \alpha) \in (0, \infty)^2\}$$

besitzt eine identifizierende Parametrisierung, das heißt, durch die Verteilung sind die beiden Parameter  $a$  und  $\alpha$  eindeutig bestimmt.

**Beweis:** Es gelte für zwei K-Verteilungen  $K(\cdot; a_1, \alpha_1) = K(\cdot; a_2, \alpha_2)$  mit demselben  $L \in \mathbb{N}$ . Aus der Gleichheit der Verteilungen folgt die Gleichheit der Momente. Werden die Quotienten aus dem vierten und dem quadrierten zweiten Moment gebildet, so lassen sich unter Anwendung der Funktionalgleichung (5.2) die Gammafunktionen gegeneinander kürzen. Es ergibt sich

$$\left(1 + \frac{1}{\alpha_1}\right) \frac{L+2}{L} = \left(1 + \frac{1}{\alpha_2}\right) \frac{L+2}{L}$$

und damit

$$\alpha_1 = \alpha_2.$$

Das liefert zusammen mit der Gleichheit der zweiten Momente  $2a_1^2\alpha_1L = 2a_2^2\alpha_1L$  und damit  $a_1 = a_2$ . Also sind die Parameter  $a$  und  $\alpha$  eindeutig bestimmt. □

## 5.2 Momentenschätzer für die Parameter $a$ und $\alpha$

Unter Verwendung der Darstellung der Momente (5.31) werden im Folgenden Momentenschätzer für die beiden Parameter der K-Verteilung hergeleitet.

Sei  $(X_N)_{N \in \mathbb{N}}$  eine Folge von identisch  $K(\cdot; a, \alpha)$ -verteilten Zufallsvariablen, deren empirische Momente stochastisch gegen die wahren Momente konvergieren. Dabei wird mit

$$\hat{m}_{k;N} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N X_j^k$$

das  $k$ -te empirische Moment zum Stichprobenumfang  $N$  der Stichprobe

$$X_1, \dots, X_N \quad (5.32)$$

bezeichnet.

Die Konvergenz der empirischen Momente wird hier explizit gefordert, da die Abhängigkeitsstruktur der Folge nicht spezifiziert wird. Die Ergebnisse werden in unterschiedlichen Abhängigkeitskontexten angewendet.

### 5.2.1 Die Momentenschätzer $\hat{\alpha}_{24M;N}$ und $\hat{\alpha}_{12M;N}$

Die definierenden Gleichungen der beiden in diesem Abschnitt vorgestellten Momentenschätzer für den Parameter  $\alpha$  werden bspw. in [Joughin; Percival; Winebrenner, 1993, S. 991] angegeben.

Es gilt für den Quotienten aus dem vierten und dem quadrierten zweiten Moment einer  $K(\cdot; a, \alpha)$ -verteilten Zufallsvariablen  $X$  unter Verwendung der Darstellung der Momente (5.31) für festes  $L \in \mathbb{N}$

$$\frac{E(X^4)}{E(X^2)^2} = \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) \frac{L+2}{L}.$$

Für eine Stichprobe wie in (5.32) liefert das Einsetzen der empirischen Momente einen Schätzer  $\hat{\alpha}_{24M;N}$  für  $\alpha$

$$\frac{\hat{m}_{4;N}}{\hat{m}_{2;N}^2} = \left(1 + \frac{1}{\hat{\alpha}_{24M;N}}\right) \frac{L+2}{L}.$$

Umformen führt zu

$$\hat{\alpha}_{24M;N} = \frac{L+2}{L\left(\frac{\hat{m}_{4;N}}{\hat{m}_{2;N}^2} - 1\right) - 2}. \quad (5.33)$$

Allerdings muss sichergestellt werden, dass der Nenner dieses Ausdrucks nicht Null wird. Besser ist es, nicht  $\alpha$  sondern  $\alpha^\diamond = \frac{1}{\alpha}$  zu schätzen, um nicht durch den statistischen Anteil zu dividieren. Für  $\alpha \in (0, \infty)$  gilt  $\alpha^\diamond \in (0, \infty)$ , das Schätzen der beiden Größen ist gleichwertig. Daher könnte die Verteilungsklasse  $\mathcal{K}$  auch mit  $\frac{1}{\alpha}$  anstelle von  $\alpha$  parametrisiert werden. In dieser Arbeit wird darauf verzichtet, um die üblichen Konventionen in der Notation beizubehalten.

Der Parameter  $\alpha^\diamond$  wird durch

$$\hat{\alpha}^\diamond_{24M;N} = \frac{\hat{m}_{4;N}}{\hat{m}_{2;N}^2} \frac{L}{L+2} - 1 \quad (5.34)$$

geschätzt.

Durch Verwendung des Quotienten aus dem zweiten und dem quadrierten ersten Moment einer  $K(\cdot; a, \alpha)$ -verteilten Zufallsvariablen  $X$  ergibt sich mit der Darstellung der Momente (5.31) für festes  $L \in \mathbb{N}$  der Ausdruck

$$\frac{E(X^2)}{E(X)^2} = \frac{\alpha L}{2} \frac{\Gamma(\alpha)^2 \Gamma(L/2)^2}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})^2 \Gamma(\frac{L}{2} + \frac{1}{2})^2}. \quad (5.35)$$

Zu der Stichprobe aus (5.32) ist der Schätzer  $\hat{\alpha}_{12M;N}$  die Lösung von

$$\frac{\hat{m}_{2;N}}{\hat{m}_{1;N}^2} = \frac{\hat{\alpha}_{12M;N} L}{2} \frac{\Gamma(\hat{\alpha}_{12M;N})^2 \Gamma(L/2)^2}{\Gamma(\hat{\alpha}_{12M;N} + \frac{1}{2})^2 \Gamma(\frac{L}{2} + \frac{1}{2})^2}, \quad (5.36)$$

wobei die Lösbarkeit dieser Gleichung im folgenden Satz diskutiert wird.

**5.14 Satz:** Sei  $(X_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von identisch  $K(\cdot; a, \alpha)$ -verteilten Zufallsvariablen, deren empirische Momente stochastisch gegen die wahren Momente konvergieren.

Dann existiert der als Lösung der Gleichung (5.36) definierte Schätzer  $\hat{\alpha}_{12M;N}$  zur Stichprobe  $X_1, \dots, X_N$  mit einer gegen 1 konvergierenden Wahrscheinlichkeit.

Für den Beweis des Satzes 5.14 wird das im Folgenden formulierte Lemma 5.15 benötigt.

Nach Gleichung (5.35) gilt für eine  $K(\cdot; a, \alpha)$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  für festes  $L \in \mathbb{N}$

$$\frac{\alpha \Gamma(\alpha)^2}{\Gamma(\alpha + \frac{1}{2})^2} = \frac{E(X^2)}{E(X)^2} \frac{2\Gamma(\frac{L}{2} + \frac{1}{2})^2}{L\Gamma(\frac{L}{2})^2}. \quad (5.37)$$

Es wird gesetzt

$$g(x) = \frac{x\Gamma(x)^2}{\Gamma(x + \frac{1}{2})^2} \text{ für alle } x \in (0, \infty). \quad (5.38)$$

**5.15 Lemma:** Die in (5.38) definierte Funktion  $g : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  ist streng monoton fallend mit den Grenzwerten

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \infty$$

und

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 1.$$

**Beweis:** Für den Nachweis, dass die Funktion  $g$  streng monoton fallend ist, wird ihre Ableitung mit Gleichung (5.6) berechnet

$$g'(x) = \frac{2x\Gamma(x)^2}{\Gamma(x + \frac{1}{2})^2} \left( \frac{1}{2x} + \psi(x) - \psi\left(x + \frac{1}{2}\right) \right).$$

Unter Verwendung der Entwicklung (5.7) lässt sich der zweite Faktor schreiben als

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2x} + \psi(x) - \psi\left(x + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2x} + \sum_{k=0}^{\infty} \left[ -\frac{1}{x+k} + \frac{1}{x+\frac{1}{2}+k} \right] \\
&= \frac{1}{2x} + \sum_{k=0}^{\infty} 2 \left[ -\frac{1}{2x+2k} + \frac{1}{2x+2k+1} \right] \\
&= \frac{1}{2x} + 2 \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{2x+l} \\
&= -\frac{1}{2x} + 2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1}}{2x+l} \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \left[ -\frac{1}{2x+2l} + \frac{2}{2x+2l+1} - \frac{1}{2x+2l+2} \right] \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{-2}{(2x+2l)(2x+2l+1)(2x+2l+2)} \\
&< 0.
\end{aligned} \tag{5.39}$$

Da  $x > 0$  ist, sind alle Summanden negativ. Daher ist der zweite Faktor von  $g'$  negativ, der erste Faktor ist positiv, also ist die Funktion  $g$  streng monoton fallend.

Im zweiten Schritt des Beweises wird der Grenzwert für  $x \rightarrow 0, x > 0$  berechnet. Es gilt nach Gleichung (5.2)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x\Gamma(x)}{\sqrt{x}\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{x}\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} = \infty,$$

da für die einzelnen Terme die Konvergenzen  $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow \infty$ ,  $\Gamma(x+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$  und  $\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right) \rightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$  für  $x \rightarrow 0$  gelten.

Damit folgt

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sqrt{x}\Gamma(x)}{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} \right)^2 = \infty.$$

Als drittes wird der Grenzwert für  $x \rightarrow \infty$  berechnet. Dazu wird die Stirlingformel (5.4) angewendet

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x} \frac{\Gamma(x)}{\Gamma\left(x + \frac{1}{2}\right)} \right)^2 \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \sqrt{x} \frac{x^{x-\frac{1}{2}} e^{-x} e^{\tilde{\Phi}(x)}}}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^x e^{-(x+\frac{1}{2})} e^{\tilde{\Phi}(x+\frac{1}{2})}} \right)^2 \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^x}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^x} e^{\frac{1}{2}} \frac{e^{\tilde{\Phi}(x)}}{e^{\tilde{\Phi}(x+\frac{1}{2})}} \right)^2,
\end{aligned}$$

mit einer Funktion  $\tilde{\Phi}$ , für die  $e^{\tilde{\Phi}(x)} \rightarrow 1$  für  $x \rightarrow \infty$  gilt.

Für den ersten Faktor gilt

$$\frac{x^x}{\left(x + \frac{1}{2}\right)^x} = \exp\left(x \ln(x) - x \ln\left(x \left[1 + \frac{1}{2x}\right]\right)\right) = \exp\left(-x \ln\left(1 + \frac{1}{2x}\right)\right) = I.$$

Mit der Taylorentwicklung des Logarithmus  $\ln(1+x) = x + O(x^2)$  für  $x \rightarrow 0$  ergibt sich

$$I = \exp\left(-x \left[\frac{1}{2x} + O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right]\right) = \exp\left(-\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right).$$

Dann gilt

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \exp\left(-\frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{\frac{1}{2} \frac{e^{\tilde{\Phi}(x)}}{e^{\tilde{\Phi}(x+\frac{1}{2})}}}\right)^2 = \left(e^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}} \frac{1}{1}\right)^2 = 1.$$

□

Mit diesem Lemma kann nun Satz 5.14 bewiesen werden.

**Beweis:** Auf dem Ereignis

$$A_N = \left\{ \frac{\hat{m}_{2;N}}{\hat{m}_{1;N}^2} d_L > 1 \right\}$$

mit

$$d_L = \frac{2\Gamma\left(\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\right)^2}{L\Gamma(L/2)^2}$$

besitzt das Datenpendant zur theoretischen Modellgleichung (5.37), also

$$g(x) = \frac{\hat{m}_{2;N}}{\hat{m}_{1;N}^2} d_L, \tag{5.40}$$

mit der in (5.38) definierten Funktion  $g$  nach Lemma 5.15 genau eine Lösung  $\hat{\alpha}_{12M;N}$ .

Noch zu zeigen bleibt die Konvergenz

$$P(A_N) \rightarrow 1 \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Nach Voraussetzung konvergieren die empirischen Momente der Folge von Stichproben stochastisch gegen die wahren Momente, also gilt

$$\frac{\hat{m}_{2;N}}{\hat{m}_{1;N}^2} d_L \xrightarrow{P} \frac{E(X_1^2)}{E(X_1)^2} d_L \text{ für } N \rightarrow \infty. \tag{5.41}$$

Da  $X_1$  eine  $K(\cdot; a, \alpha)$ -verteilte Zufallsvariable ist, gilt gemäß (5.37)

$$\frac{E(X_1^2)}{E(X_1)^2} d_L = g(\alpha).$$

Damit impliziert die Konvergenz (5.41)

$$\begin{aligned} P(\mathcal{C}A_N) &= P\left(\frac{\widehat{m}_{2;N}}{\widehat{m}_{1;N}^2}d_L \leq 1\right) \\ &\leq P\left(\left|\frac{\widehat{m}_{2;N}}{\widehat{m}_{1;N}^2}d_L - g(\alpha)\right| \geq g(\alpha) - 1\right) \rightarrow 0 \text{ für } N \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

denn  $g(\alpha) - 1$  ist nach Lemma 5.15 positiv und es gilt nach (5.41)

$$\frac{\widehat{m}_{2;N}}{\widehat{m}_{1;N}^2}d_L - g(\alpha) \xrightarrow{P} 0 \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

□

### 5.2.2 Die Momentenschätzer $\widehat{a}_{12M;N}^2$ , $\widehat{\alpha}_{123M;N}^2$ und $\widehat{\alpha}_{24M;N}^2$

Das Schätzen des Parameters  $a$  einer K-verteilten Zufallsvariablen wird in der Literatur des Radarbereiches bei der Betrachtung von Momentenschätzern weniger intensiv behandelt als es beim Parameter  $\alpha$  der Fall ist.

Das Schätzen von  $a$  und  $a^2$  ist gleichwertig, da für den Parameter  $a > 0$  gilt. Daher werden im Folgenden Schätzer für  $a^2$  hergeleitet.

Die Darstellung des zweiten Momentes (5.31) einer  $K(\cdot; a, \alpha)$ -verteilten Zufallsvariablen  $X$  mit festem  $L \in \mathbb{N}$  liefert

$$a^2 = \frac{E(X^2)}{2\alpha L}.$$

Wird in dieser Gleichung das theoretische Moment durch das empirische Moment der Stichprobe (5.32) ersetzt und der Parameter  $\alpha$  geschätzt, so ergibt sich ein Schätzer für  $a^2$ .

Mit dem Momentenschätzer  $\widehat{\alpha}_{12M;N}$  führt das zu dem folgenden Schätzer für  $a^2$

$$\widehat{a}_{12M;N}^2 = \frac{\widehat{m}_{2;N}}{2L\widehat{\alpha}_{12M;N}}. \quad (5.42)$$

Wird der Schätzer  $\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond$  aus (5.34) eingesetzt, so ist der resultierende Momentenschätzer für  $a^2$

$$\widehat{a}_{24M;N}^2 = \frac{\widehat{m}_{2;N}}{2L}\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond = \frac{\widehat{m}_{4;N}}{4\widehat{m}_{2;N}\left(\frac{L}{2} + 1\right)} - \frac{\widehat{m}_{2;N}}{2L}. \quad (5.43)$$

Eine andere Möglichkeit ist, die Darstellung des zweiten Momentes (5.31) nach  $\alpha$  umzustellen und diesen Ausdruck in den Quotienten aus dem dritten und dem ersten Moment einzusetzen. Damit ergibt sich für  $a^2$  die Gleichung

$$a^2 = \frac{E(X^3)}{E(X)(L+1)} - \frac{E(X^2)}{L}.$$

Der daraus durch die Verwendung der empirischen Momente resultierende Schätzer für  $a^2$  zu der Stichprobe aus (5.32) ist

$$\widehat{a}_{123M;N}^2 = \frac{\widehat{m}_{3;N}}{\widehat{m}_{1;N}(L+1)} - \frac{\widehat{m}_{2;N}}{L}. \quad (5.44)$$

Damit wurden drei verschiedene Schätzer  $\widehat{a}_{12M;N}^2$ ,  $\widehat{a}_{24M;N}^2$  sowie  $\widehat{a}_{123M;N}^2$  für  $a^2$  hergeleitet. Weitere Schätzer ergeben sich aus der Verwendung höherer Momente.

Die Darstellungen der Momentenschätzer für  $a^2$  sind weniger kompliziert als diejenigen für den Parameter  $a$  selbst. Aus diesem Grund wäre die Möglichkeit in Betracht zu ziehen, die Klasse der  $K$ -Verteilungen  $\mathcal{K}$  mit  $a^2$  anstelle von  $a$  zu parametrisieren. Da  $a$  positiv ist, sind die beiden Parametrisierungen äquivalent. In dieser Arbeit wird darauf allerdings verzichtet, um die üblichen Konventionen in der Notation beizubehalten.

### 5.3 Asymptotische Normalität und schwache Konsistenz der Momentenschätzer

Für stationäre mischende Zufallsfelder mit  $K$ -verteilten Komponenten sowie für unabhängige und identisch verteilte Blöcke mit  $K$ -verteilten Marginalien werden für die fünf im letzten Abschnitt hergeleiteten Momentenschätzer die asymptotische Normalität und die schwache Konsistenz, also die stochastische Konvergenz gegen den wahren Parameter, bewiesen. Dazu werden die linearen Entwicklungen der einzelnen Momentenschätzer berechnet. Die beiden Situationen werden im Folgenden betrachtet.

Die erste Situation basiert auf Abschnitt 3. Sei

$$\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2\} \quad (5.45)$$

ein stationäres Zufallsfeld mit  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilten Marginalien mit den Parametern  $a_0, \alpha_0 > 0$  und festem  $L \in \mathbb{N}$ . Das Zufallsfeld erfülle die Mischungsbedingungen (3.3), (3.4) und (3.6).

Für alle  $N$  seien die Rechtecke  $R_N$  definiert wie in (3.8).

**5.16 Satz:** Es sei  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2\}$  ein Zufallsfeld, definiert wie in (5.45), mit den Mischungseigenschaften (3.3), (3.4) und (3.6).

Es sei  $(\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N(\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in R_N\}))_{N \in \mathbb{N}}$  eine Schätzerfolge so, dass für alle Parametervektoren  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0) \in (0, \infty)^2$  eine lineare Einflussfunktion von  $\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N$  existiert, also eine messbare Funktion  $L(\cdot, \boldsymbol{\vartheta}_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit den Eigenschaften (3.22) und (3.23). Ferner gelte für  $\delta_0$  aus (3.6)

$$\|L(Z_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)\|_{2+\delta_0} < \infty. \quad (5.46)$$

Dann gilt die asymptotische Normalität

$$\sqrt{N}(\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N - \boldsymbol{\vartheta}_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_2\left(\mathbf{0}, \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} E(L(Z_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T)\right) \text{ für } N \rightarrow \infty$$

und  $(\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  ist insbesondere eine schwach konsistente Schätzerfolge für  $\boldsymbol{\vartheta}_0$ , das heißt es gilt die stochastische Konvergenz

$$\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N \xrightarrow{P} \boldsymbol{\vartheta}_0 \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

**Beweis:** Gemäß dem Beweis auf Seite 28 gilt die asymptotische Normalität

$$\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \text{ für } N \rightarrow \infty$$

mit der Kovarianzmatrix

$$\boldsymbol{\Sigma} = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} E(L(Z_{\mathbf{0}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T).$$

Mit der Eigenschaft (3.22) der linearen Entwicklung folgt die gewünschte Verteilungskonvergenz. Die stochastische Konvergenz

$$\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N \xrightarrow{P} \boldsymbol{\vartheta}_0 \text{ für } N \rightarrow \infty$$

folgt unmittelbar. □

Es folgt eine Anwendung auf das  $k$ -te empirische Moment  $\widehat{m}_{k;N} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} Z_{\mathbf{s}}^k$ .

**5.17 Korollar:** Es sei  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2\}$  ein Zufallsfeld, definiert wie in (5.45), mit den Mischungseigenschaften (3.3), (3.4) und (3.6).

Für das  $k$ -te empirische Moment von  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in R_N\}$  gilt die stochastische Konvergenz

$$\widehat{m}_{k;N} \xrightarrow{P} E(Z_{\mathbf{0}}^k) \text{ für } N \rightarrow \infty. \quad (5.47)$$

**Beweis:** Es gilt nach der Definition des  $k$ -ten empirischen Momentes

$$\sqrt{N}(\widehat{m}_{k;N} - E(Z_{\mathbf{0}}^k)) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left( \sum_{\mathbf{s} \in R_N} Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z_{\mathbf{0}}^k) \right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)$$

mit der linearen Einflussfunktion  $L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) = Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z_{\mathbf{0}}^k)$ . Damit ist (3.22) erfüllt. Aus der offensichtlichen Zentriertheit der Summanden  $L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)$  folgt die Gültigkeit von (3.23). Da alle Momente der  $K$ -Verteilung existieren und endlich sind, genügt  $L$  auch (5.46). Da das Zufallsfeld  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in R_N\}$  die Voraussetzungen von Satz 5.16 erfüllt, folgt aus diesem die schwache Konsistenz des  $k$ -ten empirischen Momentes. □

Neben den mischenden Zufallsfeldern wird eine zweite Situation betrachtet. Diese entspricht der in Abschnitt 4 behandelten. Seien  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{N}$  wie in Definition 4.1 fest gewählt, sei  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von disjunkten, achsenparallelen Rechtecken der Größe  $\eta_1 \times \eta_2$  in  $\mathbb{Z}^2$  und sei  $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2$ .

Es sei

$$\left\{ Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \right\} \quad (5.48)$$

ein Zufallsfeld mit identisch  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilten Komponenten.

Ferner seien die Blöcke der Folge  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $B_j = \{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in b_j\}$  unabhängig und identisch verteilt.

**5.18 Satz:** Es sei

$$\left\{ Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \right\}$$

ein Zufallsfeld wie in (5.48) so, dass die Blöcke der Folge  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  unabhängig und identisch verteilt sind. Ferner sei  $(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n(B_1, \dots, B_n))_{n \in \mathbb{N}}$  eine Schätzerfolge so, dass für alle Parametervektoren  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0) \in (0, \infty)^2$  eine lineare Einflussfunktion von  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n$  existiert, also eine messbare Funktion  $L(\cdot, \boldsymbol{\vartheta}_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  mit den Eigenschaften (4.5), (4.6) und (4.7).

Dann gelten die asymptotische Normalität

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_2\left(\mathbf{0}, \frac{1}{\eta^2} \sum_{\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in b_1} E(L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)L(Z_{\mathbf{s}'}, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T)\right) \text{ für } n \rightarrow \infty$$

und insbesondere die stochastische Konvergenz

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\vartheta}_0 \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

**Beweis:** Unter Verwendung der Darstellung (4.5) gilt

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\eta} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0) + o_p(1) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

Die Summanden  $\frac{1}{\eta} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)$  sind in  $j$  unabhängig und identisch verteilt. Daher impliziert der mehrdimensionale zentrale Grenzwertsatz

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n - \boldsymbol{\vartheta}_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N_2(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Sigma}) \text{ für } n \rightarrow \infty$$

mit der Kovarianzmatrix  $\boldsymbol{\Sigma} = \frac{1}{\eta^2} \sum_{\mathbf{s}, \mathbf{s}' \in b_1} E(L(Z_{\mathbf{s}}, \boldsymbol{\vartheta}_0)L(Z_{\mathbf{s}'}, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T)$  aufgrund der Zentriertheit (4.6).  $\square$

**5.19 Lemma:** Es sei

$$\left\{ Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \right\}$$

ein Zufallsfeld, definiert wie in (5.48), und sei  $Z$  eine  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilte Zufallsvariable.

Für das  $k$ -te empirische Moment der Blöcke

$$B_1, \dots, B_n$$

gilt die stochastische Konvergenz

$$\hat{m}_{k;n} \xrightarrow{P} E(Z^k) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

**Beweis:** Das  $k$ -te empirische Moment von  $B_1, \dots, B_n$  ist

$$\widehat{m}_{k;n} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\eta} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} Z_{\mathbf{s}}^k.$$

Nach Voraussetzung sind die Summanden  $\frac{1}{\eta} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} Z_{\mathbf{s}}^k$  in  $j$  unabhängig und identisch verteilt. Die Komponenten sind identisch  $K$ -verteilt, also existieren alle Momente. Daher impliziert das schwache Gesetz der großen Zahlen

$$\widehat{m}_{k;n} \xrightarrow{P} E\left(\frac{1}{\eta} \sum_{\mathbf{s} \in b_1} Z_{\mathbf{s}}^k\right) = E(Z^k) \text{ für } n \rightarrow \infty.$$

□

Im Folgenden werden die beiden Situationen aus Satz 5.16 und Satz 5.18 simultan behandelt. Dazu werden die Indextmengen mit  $I_N$  bezeichnet, wobei für das mischende Zufallsfeld aus (5.45) gilt

$$I_N = R_N \text{ mit } |I_N| = N \quad (5.49)$$

und für das aus unabhängigen und identisch verteilten Blöcken bestehende Zufallsfeld aus (5.48) gilt

$$I_N = \bigcup_{j=1}^N b_j \text{ mit } |I_N| = \eta N. \quad (5.50)$$

In diesem Fall erfolgt zur Vereinheitlichung ein Übergang in der Notation von  $n$  zu  $N$ . Die folgenden Konvergenzaussagen beziehen sich auf das Verhalten für  $N \rightarrow \infty$ .

Für eine  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilte Zufallsvariable  $Z$  gelten nach Satz 5.16 und Korollar 5.17 bzw. nach Satz 5.18 und Lemma 5.19 für die empirischen Momente von  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in I_N\}$  die folgenden Aussagen. Für alle  $k, l \in \mathbb{N}$  gelten

$$\widehat{m}_{l;N} - E(Z^l) = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \text{ für } N \rightarrow \infty \quad (5.51)$$

sowie

$$\begin{aligned} \widehat{m}_{l;N}^k &\xrightarrow{P} E(Z^l)^k, \text{ also} \\ \widehat{m}_{l;N}^k &= E(Z^l)^k + o_p(1) \text{ für } N \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (5.52)$$

und damit

$$\frac{1}{\widehat{m}_{l;N}^k} = \frac{1}{E(Z^l)^k} (1 + o_p(1)). \quad (5.53)$$

Diese und die Aussagen des folgenden Lemmas werden in den nächsten Abschnitten benötigt, um die linearen Entwicklungen der einzelnen Momentenschätzer herzuleiten.

**5.20 Lemma:** Gegeben sei ein Zufallsfeld, definiert wie in (5.45) bzw. (5.48), und eine Folge von Indextmengen  $(I_N)_{N \in \mathbb{N}}$  wie in (5.49) bzw. (5.50).

Dann gelten für die empirischen Momente zu  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in I_N\}$  für alle natürlichen Zahlen  $k, l \in \mathbb{N}$  für  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \frac{\widehat{m}_{k;N}}{\widehat{m}_{l;N}} - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)} \\ &= \frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} \left[ \frac{1}{E(Z^l)} (Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z^k)) - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^2} (Z_{\mathbf{s}}^l - E(Z^l)) \right] + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \end{aligned} \quad (5.54)$$

mit

$$\frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} \left[ \frac{1}{E(Z^l)} (Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z^k)) - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^2} (Z_{\mathbf{s}}^l - E(Z^l)) \right] = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)$$

sowie

$$\begin{aligned} & \frac{\widehat{m}_{k;N}}{\widehat{m}_{l;N}^2} - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^2} \\ &= \frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} \left[ \frac{1}{E(Z^l)^2} (Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z^k)) - \frac{2E(Z^k)}{E(Z^l)^3} (Z_{\mathbf{s}}^l - E(Z^l)) \right] + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \end{aligned} \quad (5.55)$$

mit

$$\frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} \left[ \frac{1}{E(Z^l)^2} (Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z^k)) - \frac{2E(Z^k)}{E(Z^l)^3} (Z_{\mathbf{s}}^l - E(Z^l)) \right] = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

**Beweis:** Die Voraussetzungen implizieren die Gleichungen (5.52) und (5.53). Es gilt für die Differenz

$$\frac{\widehat{m}_{k;N}}{\widehat{m}_{l;N}} - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)} = \frac{\widehat{m}_{k;N} - E(Z^k)}{\widehat{m}_{l;N}} + \frac{E(Z^k)}{\widehat{m}_{l;N}} - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)}.$$

Beide Summanden werden im Folgenden einzeln betrachtet. Für den ersten Summanden gilt unter Verwendung von Gleichung (5.53) und der Konvergenzordnung (5.51)

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{m}_{k;N} - E(Z^k)}{\widehat{m}_{l;N}} &= \frac{\widehat{m}_{k;N} - E(Z^k)}{E(Z^l)} (1 + o_p(1)) \\ &= \frac{1}{E(Z^l)} \frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} [Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z^k)] + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

Für den zweiten Summanden gilt mit Gleichung (5.53) und der Konvergenzordnung (5.51)

$$\begin{aligned} \frac{E(Z^k)}{\widehat{m}_{l;N}} - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)} &= E(Z^k) \frac{E(Z^l) - \widehat{m}_{l;N}}{\widehat{m}_{l;N} E(Z^l)} \\ &= \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^2} (E(Z^l) - \widehat{m}_{l;N}) (1 + o_p(1)) \\ &= -\frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^2} \frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} [Z_{\mathbf{s}}^l - E(Z^l)] + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

Zusammengefasst ergibt sich mit (5.51)

$$\begin{aligned} & \frac{\widehat{m}_{k;N}}{\widehat{m}_{l;N}} - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)} \\ &= \frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} \left[ \frac{1}{E(Z^l)} (Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z^k)) - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^2} (Z_{\mathbf{s}}^l - E(Z^l)) \right] + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \end{aligned}$$

mit der Konvergenzordnung

$$\frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} \left[ \frac{1}{E(Z^l)} (Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z^k)) - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^2} (Z_{\mathbf{s}}^l - E(Z^l)) \right] = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Damit ist (5.54) gezeigt. Für den Beweis von (5.55) wird die Zerlegung

$$\frac{\widehat{m}_{k;N}}{\widehat{m}_{l;N}^2} - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^2} = \frac{\widehat{m}_{k;N} - E(Z^k)}{\widehat{m}_{l;N}^2} + \frac{E(Z^k)}{\widehat{m}_{l;N}^2} - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^2}$$

verwendet. Für den ersten Summanden gilt nach Gleichung (5.53) und der Konvergenzordnung (5.51)

$$\begin{aligned} \frac{\widehat{m}_{k;N} - E(Z^k)}{\widehat{m}_{l;N}^2} &= \frac{1}{E(Z^l)^2} (\widehat{m}_{k;N} - E(Z^k)) (1 + o_p(1)) \\ &= \frac{1}{E(Z^l)^2} \frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} [Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z^k)] + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

Der zweite Summand wird unter Verwendung von (5.52), (5.53) und (5.51) umgeformt zu

$$\begin{aligned} \frac{E(Z^k)}{\widehat{m}_{l;N}^2} - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^2} &= -E(Z^k) \frac{\widehat{m}_{l;N}^2 - E(Z^l)^2}{\widehat{m}_{l;N}^2 E(Z^l)^2} \\ &= -\frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^4} (\widehat{m}_{l;N}^2 - E(Z^l)^2) (1 + o_p(1)) \\ &= -\frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^4} (\widehat{m}_{l;N} - E(Z^l)) (\widehat{m}_{l;N} + E(Z^l)) (1 + o_p(1)) \\ &= -\frac{2E(Z^k)}{E(Z^l)^3} \frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} [Z_{\mathbf{s}}^l - E(Z^l)] + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich mit (5.51)

$$\begin{aligned} & \frac{\widehat{m}_{k;N}}{\widehat{m}_{l;N}^2} - \frac{E(Z^k)}{E(Z^l)^2} \\ &= \frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} \left[ \frac{1}{E(Z^l)^2} (Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z^k)) - \frac{2E(Z^k)}{E(Z^l)^3} (Z_{\mathbf{s}}^l - E(Z^l)) \right] + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \end{aligned}$$

mit der Konvergenzordnung

$$\frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} \left[ \frac{1}{E(Z^l)^2} (Z_{\mathbf{s}}^k - E(Z^k)) - \frac{2E(Z^k)}{E(Z^l)^3} (Z_{\mathbf{s}}^l - E(Z^l)) \right] = O_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

□

Mit diesen Resultaten können nun die linearen Entwicklungen der einzelnen Momentenschätzer berechnet werden.

### 5.3.1 Die lineare Entwicklung von $\widehat{\alpha}_{24M;N}$

Gegeben sei ein Zufallsfeld, definiert wie in (5.45) bzw. (5.48), und eine Folge von Indizes  $(I_N)_{N \in \mathbb{N}}$  wie in (5.49) bzw. (5.50). Es sei  $Z$  eine  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilte Zufallsvariable. Der Momentenschätzer zu  $\{Z_s : s \in I_N\}$  für  $\alpha_0^\diamond = \frac{1}{\alpha_0}$  aus Gleichung (5.34) ist

$$\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond = \frac{L}{L+2} \frac{\widehat{m}_{4;N}}{\widehat{m}_{2;N}^2} - 1.$$

Für dessen lineare Entwicklung gilt nach (5.55) mit  $k = 4$  und  $l = 2$  für  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond - \alpha_0^\diamond \\ &= \frac{L}{L+2} \left( \frac{\widehat{m}_{4;N}}{\widehat{m}_{2;N}^2} - \frac{E(Z^4)}{E(Z^2)^2} \right) \\ &= \frac{1}{|I_N|} \sum_{s \in I_N} \underbrace{\frac{L}{L+2} \left[ \frac{1}{E(Z^2)^2} (Z_s^4 - E(Z^4)) - \frac{2E(Z^4)}{E(Z^2)^3} (Z_s^2 - E(Z^2)) \right]}_{=L_1(Z_s; \boldsymbol{\vartheta}_0)} + o_p \left( \frac{1}{\sqrt{N}} \right). \end{aligned} \tag{5.56}$$

Da die Momente unter  $H_0$  Funktionen des wahren Parametervektors  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0)$  sind, ist auch die lineare Einflussfunktion  $L_1(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0)$  von  $\boldsymbol{\vartheta}_0$  abhängig. Sie erfüllt die Bedingung (3.22) und aufgrund der Zentriertheit auch (3.23). Die lineare Einflussfunktion genügt Bedingung (5.46), da alle Momente der K-Verteilung existieren und endlich sind. Aus der berechneten linearen Entwicklung des Schätzers  $\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond$  folgt mit Satz 5.16 bzw. mit Satz 5.18 die dort beschriebene asymptotische Normalität sowie die schwache Konsistenz des Schätzers.

Für den Übergang von dem Schätzer  $\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond$  für  $\alpha_0^\diamond$  zu dem Schätzer  $\widehat{\alpha}_{24M;N}$  für  $\alpha_0$  wird die Differenz

$$\widehat{\alpha}_{24M;N} - \alpha_0 = f(\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond) - f(\alpha_0^\diamond)$$

mit der Funktion  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}$  betrachtet.

Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung existiert ein  $\xi_N$  zwischen  $\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond$  und  $\alpha_0^\diamond$  so, dass gilt

$$f(\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond) - f(\alpha_0^\diamond) = f'(\xi_N)(\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond - \alpha_0^\diamond).$$

Aufgrund der stochastischen Konvergenz von  $\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond$  gegen  $\alpha_0^\diamond$  konvergiert  $\xi_N$  für  $N \rightarrow \infty$  ebenfalls stochastisch gegen  $\alpha_0^\diamond$ . Damit gilt unter Verwendung der linearen Entwicklung von  $\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond - \alpha_0^\diamond$  aus Gleichung (5.56) für  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \widehat{\alpha}_{24M;N} - \alpha_0 &= f(\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond) - f(\alpha_0^\diamond) \\ &= f'(\xi_N)(\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond - \alpha_0^\diamond) \\ &= f'(\alpha_0^\diamond)(\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond - \alpha_0^\diamond) + (f'(\xi_N) - f'(\alpha_0^\diamond))(\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond - \alpha_0^\diamond) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f'(\alpha_0^\diamond)(\widehat{\alpha}_{24M;N}^\diamond - \alpha_0^\diamond) + o_p(1) \cdot O_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \\
&= -\alpha_0^2 \frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} L_1(Z_{\mathbf{s}}; \boldsymbol{\vartheta}_0) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \\
&= \frac{1}{|I_N|} \sum_{\mathbf{s} \in I_N} \underbrace{-\alpha_0^2 \frac{L}{L+2} \left[ \frac{1}{E(Z^2)^2} (Z_{\mathbf{s}}^4 - E(Z^4)) - \frac{2E(Z^4)}{E(Z^2)^3} (Z_{\mathbf{s}}^2 - E(Z^2)) \right]}_{=L_2(Z_{\mathbf{s}}; \boldsymbol{\vartheta}_0)} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).
\end{aligned} \tag{5.57}$$

Da die Momente unter  $H_0$  Funktionen des wahren Parametervektors  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0)$  sind, ist auch die lineare Einflussfunktion  $L_2(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0)$  von  $\boldsymbol{\vartheta}_0$  abhängig. Sie erfüllt die Bedingung (3.22) und aufgrund der Zentriertheit auch (3.23). Die lineare Einflussfunktion genügt Bedingung (5.46), da alle Momente der  $K$ -Verteilung existieren und endlich sind. Aus der berechneten linearen Entwicklung des Schätzers  $\widehat{\alpha}_{24M;N}$  folgt mit Satz 5.16 bzw. mit Satz 5.18 die dort beschriebene asymptotische Normalität sowie die schwache Konsistenz des Schätzers.

### 5.3.2 Die lineare Entwicklung von $\widehat{\alpha}_{12M;N}$

Gegeben sei ein Zufallsfeld, definiert wie in (5.45) bzw. (5.48), und eine Folge von Indexmengen  $(I_N)_{N \in \mathbb{N}}$  wie in (5.49) bzw. (5.50). Es sei  $Z$  eine  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilte Zufallsvariable. Die Berechnung der linearen Entwicklung des Momentenschätzers  $\widehat{\alpha}_{12M;N}$  zu  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in I_N\}$  aus Gleichung (5.36) erfolgt in zwei Schritten.

- 1) Es wird die stochastische Konvergenz  $\widehat{\alpha}_{12M;N} \xrightarrow{P} \alpha_0$  für  $N \rightarrow \infty$  gezeigt.
- 2) Die lineare Entwicklung von  $\widehat{\alpha}_{12M;N}$  wird berechnet.

Zu 1) Aufgrund der stochastischen Konvergenz der empirischen Momente gegen die wahren Momente (5.52) gilt

$$\frac{\widehat{m}_{2;N}}{\widehat{m}_{1;N}^2} d_L \xrightarrow{P} \frac{E(Z^2)}{E(Z)^2} d_L \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Also gilt für die in (5.38) definierte Funktion  $g$  die Konvergenz

$$g(\widehat{\alpha}_{12M;N}) \xrightarrow{P} g(\alpha_0) \text{ für } N \rightarrow \infty.$$

Die Funktion  $g : (0, \infty) \rightarrow (1, \infty)$  ist stetig und nach Lemma 5.15 streng monoton fallend, besitzt also eine stetige Umkehrfunktion  $g^{-1} : (1, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ . Daher gilt

$$\widehat{\alpha}_{12M;N} = g^{-1}(g(\widehat{\alpha}_{12M;N})) \xrightarrow{P} g^{-1}(g(\alpha_0)) = \alpha_0 \text{ für } N \rightarrow \infty. \tag{5.58}$$

Zu 2) Um die lineare Entwicklung von  $\widehat{\alpha}_{12M;N}$  zu berechnen, wird die Taylorentwicklung der Funktion  $g$  aus (5.38) benötigt

$$\begin{aligned}
g(\widehat{\alpha}_{12M;N}) &= g(\alpha_0 + \widehat{\alpha}_{12M;N} - \alpha_0) \\
&= g(\alpha_0) + g'(\alpha_0)(\widehat{\alpha}_{12M;N} - \alpha_0) + \frac{1}{2}g''(\xi_N)(\widehat{\alpha}_{12M;N} - \alpha_0)^2 \\
&\quad \text{für ein } \xi_N \text{ zwischen } \widehat{\alpha}_{12M;N} \text{ und } \alpha_0.
\end{aligned}$$

Wegen der stochastischen Konvergenz von  $\widehat{\alpha}_{12M;N}$  gegen  $\alpha_0$  gilt

$$\xi_N \xrightarrow{P} \alpha_0 \text{ f\u00fcr } N \rightarrow \infty.$$

Aus

$$g(\widehat{\alpha}_{12M;N}) = \frac{\widehat{m}_{2;N}}{\widehat{m}_{1;N}^2} d_L$$

ergibt sich

$$g(\alpha_0) + g'(\alpha_0)(\widehat{\alpha}_{12M;N} - \alpha_0) + \frac{1}{2}g''(\xi_N)(\widehat{\alpha}_{12M;N} - \alpha_0)^2 = \frac{\widehat{m}_{2;N}}{\widehat{m}_{1;N}^2} d_L$$

und damit

$$(\widehat{\alpha}_{12M;N} - \alpha_0) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{g'(\alpha_0)} g''(\xi_N) (\widehat{\alpha}_{12M;N} - \alpha_0) \right) = \frac{\widehat{m}_{2;N}}{\widehat{m}_{1;N}^2} d_L \frac{1}{g'(\alpha_0)} - \frac{g(\alpha_0)}{g'(\alpha_0)}.$$

Wegen  $g''(\xi_N) \xrightarrow{P} g''(\alpha_0)$  und  $\widehat{\alpha}_{12M;N} - \alpha_0 = o_p(1)$  f\u00fcr  $N \rightarrow \infty$  gilt

$$\frac{1}{2} \frac{1}{g'(\alpha_0)} g''(\xi_N) (\widehat{\alpha}_{12M;N} - \alpha_0) = o_p(1).$$

Damit und mit (5.37), (5.38), der Definition von  $d_L$  sowie (5.55) mit  $k = 2$  und  $l = 1$  ergibt sich

$$\begin{aligned} & \widehat{\alpha}_{12M;N} - \alpha_0 \\ &= \left( \frac{\widehat{m}_{2;N}}{\widehat{m}_{1;N}^2} \frac{d_L}{g'(\alpha_0)} - \frac{g(\alpha_0)}{g'(\alpha_0)} \right) (1 + o_p(1)) \\ &= \left( \frac{\widehat{m}_{2;N}}{\widehat{m}_{1;N}^2} - \frac{E(Z^2)}{E(Z)^2} \right) \frac{d_L}{g'(\alpha_0)} (1 + o_p(1)) \\ &= \frac{1}{|I_N|} \sum_{s \in I_N} \underbrace{\left[ \frac{1}{E(Z)^2} (Z_s^2 - E(Z^2)) - \frac{2E(Z^2)}{E(Z)^3} (Z_s - E(Z)) \right]}_{=L_3(Z_s; \boldsymbol{\vartheta}_0)} \frac{d_L}{g'(\alpha_0)} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \end{aligned} \tag{5.59}$$

wobei gilt

$$g'(\alpha_0) = \frac{2\alpha_0 \Gamma(\alpha_0)^2}{\Gamma(\alpha_0 + \frac{1}{2})^2} \left( \frac{1}{2\alpha_0} + \psi(\alpha_0) - \psi\left(\alpha_0 + \frac{1}{2}\right) \right).$$

Da die Momente unter  $H_0$  Funktionen des wahren Parametervektors  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0)$  sind, ist auch die lineare Einflussfunktion  $L_3(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0)$  von  $\boldsymbol{\vartheta}_0$  abh\u00e4ngig. Sie erf\u00fcllt die Bedingung (3.22) und aufgrund der Zentriertheit auch (3.23). Die lineare Einflussfunktion gen\u00fcgt Bedingung (5.46), da alle Momente der K-Verteilung existieren und endlich sind.

Aus der berechneten linearen Entwicklung des Sch\u00e4tzers  $\widehat{\alpha}_{12M;N}$  folgt mit Satz 5.16 bzw. mit Satz 5.18 die dort beschriebene asymptotische Normalit\u00e4t sowie die schwache Konsistenz des Sch\u00e4tzers.

### 5.3.3 Die lineare Entwicklung von $\hat{a}_{12M;N}^2$

Gegeben sei ein Zufallsfeld, definiert wie in (5.45) bzw. (5.48), und eine Folge von Indexmengen  $(I_N)_{N \in \mathbb{N}}$  wie in (5.49) bzw. (5.50). Es sei  $Z$  eine  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilte Zufallsvariable. Der Momentenschätzer zu  $\{Z_s : s \in I_N\}$  aus Gleichung (5.42) ist

$$\hat{a}_{12M;N}^2 = \frac{\hat{m}_{2;N}}{2L\hat{\alpha}_{12M;N}}.$$

Es gilt für  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} \hat{a}_{12M;N}^2 - a_0^2 &= \frac{\hat{m}_{2;N}}{2L\hat{\alpha}_{12M;N}} - \frac{E(Z^2)}{2L\alpha_0} \\ &= \frac{1}{2L} \left[ \frac{\hat{m}_{2;N} - E(Z^2)}{\hat{\alpha}_{12M;N}} + \frac{E(Z^2)}{\hat{\alpha}_{12M;N}} - \frac{E(Z^2)}{\alpha_0} \right]. \end{aligned}$$

Für den ersten Summanden folgt aus der stochastischen Konvergenz (5.58) von  $\hat{\alpha}_{12M;N}$  gegen  $\alpha_0$  und aus (5.51)

$$\begin{aligned} \frac{\hat{m}_{2;N} - E(Z^2)}{\hat{\alpha}_{12M;N}} &= \frac{\hat{m}_{2;N} - E(Z^2)}{\alpha_0} (1 + o_p(1)) \\ &= \frac{1}{\alpha_0} \frac{1}{|I_N|} \sum_{s \in I_N} (Z_s^2 - E(Z^2)) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

Für die verbleibende Differenz gilt unter Verwendung der linearen Einflussfunktion  $L_3$  aus (5.59)

$$\begin{aligned} \frac{E(Z^2)}{\hat{\alpha}_{12M;N}} - \frac{E(Z^2)}{\alpha_0} &= \frac{E(Z^2)}{\alpha_0^2} (\alpha_0 - \hat{\alpha}_{12M;N}) (1 + o_p(1)) \\ &= -\frac{E(Z^2)}{\alpha_0^2} \frac{1}{|I_N|} \sum_{s \in I_N} L_3(Z_s; \boldsymbol{\vartheta}_0) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

Insgesamt gilt damit

$$\hat{a}_{12M;N}^2 - a_0^2 = \frac{1}{|I_N|} \sum_{s \in I_N} \underbrace{\left[ \frac{1}{2L\alpha_0} (Z_s^2 - E(Z^2)) - \frac{E(Z^2)}{2L\alpha_0^2} L_3(Z_s; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right]}_{=L_4(Z_s; \boldsymbol{\vartheta}_0)} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (5.60)$$

Da die Momente unter  $H_0$  und die lineare Einflussfunktion  $L_3$  Funktionen des wahren Parametervektors  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0)$  sind, gilt dies auch für die lineare Einflussfunktion  $L_4(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0)$ . Sie erfüllt die Bedingung (3.22) und aufgrund der Zentriertheit beider Terme auch (3.23). Die lineare Einflussfunktion genügt, ebenso wie  $L_3$ , Bedingung (5.46), da alle Momente der  $K$ -Verteilung existieren und endlich sind.

Aus der berechneten linearen Entwicklung des Schätzers  $\hat{a}_{12M;N}^2$  folgt mit Satz 5.16 bzw. mit Satz 5.18 die dort beschriebene asymptotische Normalität sowie die schwache Konsistenz des Schätzers.

### 5.3.4 Die lineare Entwicklung von $\hat{a}_{24M;N}^2$

Gegeben sei ein Zufallsfeld, definiert wie in (5.45) bzw. (5.48), und eine Folge von Indexmengen  $(I_N)_{N \in \mathbb{N}}$  wie in (5.49) bzw. (5.50). Es sei  $Z$  eine  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilte Zufallsvariable. Der Momentenschätzer zu  $\{Z_s : s \in I_N\}$  aus Gleichung (5.43) ist

$$\hat{a}_{24M;N}^2 = \frac{\hat{m}_{2;N}}{2L\hat{\alpha}_{24M;N}}.$$

Aus der stochastischen Konvergenz des Momentenschätzers  $\hat{a}_{24M;N}$  gegen den wahren Parameter  $\alpha_0$  und aus (5.51) folgt unter Verwendung der linearen Einflussfunktion  $L_2$  aus (5.57) mit derselben Rechnung, die zu (5.60) führt, für  $N \rightarrow \infty$

$$\hat{a}_{24M;N}^2 - a_0^2 = \frac{1}{|I_N|} \sum_{s \in I_N} \underbrace{\left[ \frac{1}{2L\alpha_0} (Z_s^2 - E(Z^2)) - \frac{E(Z^2)}{2L\alpha_0^2} L_2(Z_s; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right]}_{=L_5(Z_s; \boldsymbol{\vartheta}_0)} + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \quad (5.61)$$

Da die Momente unter  $H_0$  und die lineare Einflussfunktion  $L_2$  Funktionen des wahren Parametervektors  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0)$  sind, gilt dies auch für die lineare Einflussfunktion  $L_5(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0)$ . Sie erfüllt die Bedingung (3.22) und aufgrund der Zentriertheit beider Terme auch (3.23). Die lineare Einflussfunktion genügt, ebenso wie  $L_2$ , Bedingung (5.46), da alle Momente der K-Verteilung existieren und endlich sind.

Aus der berechneten linearen Entwicklung des Schätzers  $\hat{a}_{24M;N}^2$  folgt mit Satz 5.16 bzw. mit Satz 5.18 die dort beschriebene asymptotische Normalität sowie die schwache Konsistenz des Schätzers.

### 5.3.5 Die lineare Entwicklung von $\hat{a}_{123M;N}^2$

Gegeben sei ein Zufallsfeld, definiert wie in (5.45) bzw. (5.48), und eine Folge von Indexmengen  $(I_N)_{N \in \mathbb{N}}$  wie in (5.49) bzw. (5.50). Es sei  $Z$  eine  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilte Zufallsvariable. Der Momentenschätzer zu  $\{Z_s : s \in I_N\}$  aus Gleichung (5.44) ist

$$\hat{a}_{123M;N}^2 = \frac{\hat{m}_{3;N}}{\hat{m}_{1;N}(L+1)} - \frac{\hat{m}_{2;N}}{L}.$$

Für dessen lineare Entwicklung gilt nach (5.54) für  $k=3$  und  $l=1$  für  $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} & \hat{a}_{123M;N}^2 - a_0^2 \\ &= \frac{1}{L+1} \left( \frac{\hat{m}_{3;N}}{\hat{m}_{1;N}} - \frac{E(Z^3)}{E(Z^1)} \right) - \frac{1}{L} (\hat{m}_{2;N} - E(Z^2)) \\ &= \frac{1}{|I_N|} \sum_{s \in I_N} \underbrace{\left[ \frac{1}{(L+1)E(Z)} (Z_s^3 - E(Z^3)) - \frac{1}{L} (Z_s^2 - E(Z^2)) - \frac{E(Z^3)}{(L+1)E(Z)^2} (Z_s - E(Z)) \right]}_{=L_6(Z_s; \boldsymbol{\vartheta}_0)} \\ & \quad + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \end{aligned}$$

Da die Momente unter  $H_0$  Funktionen des wahren Parametervektors  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0)$  sind, ist auch die lineare Einflussfunktion  $L_6(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0)$  von  $\boldsymbol{\vartheta}_0$  abhängig. Sie erfüllt die Bedingung (3.22) und aufgrund der Zentriertheit auch (3.23). Die lineare Einflussfunktion genügt Bedingung (5.46), da alle Momente der K-Verteilung existieren und endlich sind.

Aus der berechneten linearen Entwicklung des Schätzers  $\widehat{a}_{123M;N}^2$  folgt mit Satz 5.16 bzw. mit Satz 5.18 die dort beschriebene asymptotische Normalität sowie die schwache Konsistenz des Schätzers.

#### 5.4 Empirische Prozesse mit geschätztem Parametervektor bei K-verteilten Marginalien

Die Konvergenzaussagen über die beiden empirischen Prozesse mit geschätzten Parametervektoren aus den funktionalen Grenzwertsätzen 3.16 und 4.3 werden in diesem Abschnitt auf die Klasse der K-Verteilungen angewendet.

Sei dazu die *parametrische Klasse der K-Verteilungen* definiert als

$$\mathcal{K} = \{K(\cdot; a, \alpha) : (a, \alpha) \in (0, \infty)^2\}.$$

Es wird bewiesen, dass die Verteilungsklasse die für die Anwendung dieser Sätze erforderlichen Eigenschaften besitzt. Zunächst wird gezeigt, dass die Voraussetzungen von Lemma 3.31 erfüllt sind.

**5.21 Lemma:** Sei  $\mathcal{K} = \{K(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}) : \boldsymbol{\vartheta} = (a, \alpha) \in (0, \infty)^2\}$  die Klasse der K-Verteilungen und sei  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0) \in (0, \infty)^2$ .

Für  $\mathcal{K}$  gelten die folgenden Eigenschaften

- (1)  $K(t; \boldsymbol{\vartheta})$  ist in allen  $(t; \boldsymbol{\vartheta}) \in (0, \infty) \times (0, \infty)^2$  stetig partiell nach  $a$  und nach  $\alpha$  differenzierbar.
- (2) Die partiellen Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} K(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  sind stetig für  $j = 1, 2$ .
- (3) Es gilt

$$\limsup_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \sup_{t > 0} \left\| \left( \frac{\partial}{\partial a} K(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}), \frac{\partial}{\partial \alpha} K(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) \right) - \left( \frac{\partial}{\partial a} K(t; \boldsymbol{\vartheta}_0), \frac{\partial}{\partial \alpha} K(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) \right\| = 0. \quad (5.62)$$

**Beweis:** Der Satz von Lebesgue mit den entsprechenden integrierbaren Majoranten aus Anhang A.6.6 und A.6.7 impliziert für  $j = 1, 2$

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} K(t; \boldsymbol{\vartheta}) = \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \int_0^t f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx = \int_0^t \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx.$$

Da nach den Gleichungen (5.20) und (5.21) die Dichte  $f$  einer K-verteilten Zufallsvariablen partiell nach  $a$  und nach  $\alpha$  differenzierbar ist und da diese Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial a} f(x; a, \alpha)$  und  $\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; a, \alpha)$  in  $x \in (0, \infty)$  stetig sind, folgt die Gültigkeit der ersten beiden Eigenschaften. Zum Nachweis von Gleichung (5.62) wird für  $j = 1, 2$  die folgende Abschätzung verwendet

$$\begin{aligned} \sup_{t > 0} \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} K(t; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} K(t; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right| &= \sup_{t > 0} \left| \int_0^t \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right) dx \right| \\ &\leq \int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right| dx, \end{aligned}$$

wobei die Vertauschbarkeit von Integration und Ableitung nach dem Satz von Lebesgue gewährleistet ist, sofern  $\mathbf{h}$  hinreichend nah an  $\mathbf{0}$  liegt. Die entsprechenden integrierbaren

Majoranten für  $j = 1, 2$  finden sich in den Abschnitten A.6.6 und A.6.7. Mit diesen folgt ferner aus dem Satz von Lebesgue

$$\begin{aligned} & \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right| dx \\ &= \int_0^\infty \lim_{\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}} \left| \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}_0) \right| dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung gilt dabei aufgrund der Stetigkeit der partiellen Ableitungen im Vektor  $(a, \alpha) \in (0, \infty)^2$  nach Satz 5.11.

Damit gilt Gleichung (5.62) in beiden Komponenten, also auch für die Norm des Vektors.  $\square$

Mit dieser Aussage kann gezeigt werden, dass die Klasse der K-Verteilungen die entsprechenden Voraussetzungen erfüllt.

**5.22 Satz:** Die parametrische Klasse der K-Verteilungen  $\mathcal{K}$  besitzt die folgenden Eigenschaften.

- 1) Die Verteilungsfunktionen  $K(\cdot; a, \alpha)$  sind für alle  $a, \alpha > 0$  stetig.
- 2) Für alle  $t \in [-\infty, \infty]$  ist

$$(0, \infty)^2 \ni (a, \alpha) \mapsto K(t; a, \alpha) \in [0, 1]$$

eine Borelfunktion.

- 3) Für einen inneren Punkt  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0) \in (0, \infty)^2$  existiert eine stetige Funktion

$$\Delta(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0) : [-\infty, \infty] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

mit

$$\sup_{-\infty \leq u \leq \infty} \left| K(u; \boldsymbol{\vartheta}_0 + \mathbf{h}) - K(u; \boldsymbol{\vartheta}_0) - \Delta(u, \boldsymbol{\vartheta}_0)^T \mathbf{h} \right| = o(\|\mathbf{h}\|) \text{ für } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

mit  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$  und einer beliebigen Norm  $\|\cdot\|$  auf  $\mathbb{R}^2$ .

**Beweis:** Zu 1) Die Stetigkeit der K-Verteilungen folgt aus ihrer Definition als absolutstetige Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit der Dichte  $f$  aus Gleichung (5.19).

Zu 2) Nach Lemma 5.5 ist die modifizierte Besselfunktion zweiter Art  $K_\nu(z)$  stetig in  $(\nu, z) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ . Daher ist die Dichte  $f$  im Parametervektor  $(a, \alpha)$  stetig. Daraus folgt für alle  $t \in [-\infty, \infty]$  die Stetigkeit von  $K(t; a, \alpha)$  im Parametervektor  $(a, \alpha)$ . Also ist die Funktion  $(a, \alpha) \mapsto K(t; a, \alpha)$  eine Borelfunktion.

Zu 3) Nach Lemma 5.21 erfüllt die Klasse der K-Verteilungen die Voraussetzungen von Lemma 3.31. Aus letzterem folgt, dass die Funktion

$$\Delta(t; a_0, \alpha_0) = \mathbf{grad}_{(a, \alpha)} K(t; a_0, \alpha_0) = \left( \frac{\partial}{\partial a} K(t; a_0, \alpha_0), \frac{\partial}{\partial \alpha} K(t; a_0, \alpha_0) \right)$$

die gewünschte Eigenschaft besitzt.  $\square$

Damit ist gezeigt, dass die Verteilungsklasse  $\mathcal{K}$  die Voraussetzungen der funktionalen Grenzwertsätze 3.16 und 4.3 erfüllt.

### 5.4.1 Mischende Zufallsfelder mit $K$ -verteilten Marginalien

Gegeben sei ein stationäres Zufallsfeld mit  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilten Marginalien mit den Parametern  $a_0, \alpha_0 > 0$  und festem  $L \in \mathbb{N}$

$$\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Das Zufallsfeld erfülle die Mischungsbedingungen (3.16) und (3.17).

Seien die Rechtecke  $R_N$  definiert wie in (3.8) und sei  $F_N$  die empirische Verteilungsfunktion zu  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in R_N\}$  entsprechend Definition 3.15. Für Schätzerfolgen  $(\hat{a}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  und  $(\hat{\alpha}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  für die Parameter  $a$  und  $\alpha$  ist

$$\hat{\alpha}_N^{\mathcal{K}}(t) = \sqrt{N}(F_N(t) - K(t; \hat{a}_N, \hat{\alpha}_N)) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty] \quad (5.63)$$

der empirische Prozess zum Stichprobenumfang  $N$  mit geschätztem Parametervektor  $(a, \alpha)$  zur Klasse der  $K$ -Verteilungen  $\mathcal{K}$ .

**5.23 Satz:** Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

- 1) Es sei  $\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2\}$  ein stationäres Zufallsfeld mit  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilten Komponenten, welches die Mischungsbedingungen (3.16) und (3.17) erfüllt.
- 2) Es sei  $((\hat{a}_N, \hat{\alpha}_N))_{N \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvektoren mit Werten in  $(0, \infty)^2$ , zu der eine messbare Funktion  $L(\cdot, a_0, \alpha_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  existiert mit

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_N \\ \hat{\alpha}_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{\mathbf{s} \in R_N} L(Z_{\mathbf{s}}, a_0, \alpha_0) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \text{ für } N \rightarrow \infty,$$

sowie

$$E(L(Z, a_0, \alpha_0)) = \mathbf{0}$$

für eine  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilte Zufallsvariable  $Z$ .

Ferner existiere  $\delta_0 > \frac{1}{3}$  mit

$$\|L(Z, a_0, \alpha_0)\|_{2+\delta_0} < \infty.$$

Dann gilt für den empirischen Prozess mit geschätztem Parametervektor zur Klasse der  $K$ -Verteilungen aus (5.63)

$$\hat{\alpha}_N^{\mathcal{K}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{W} \text{ in } (D([-\infty, \infty]), s_{\infty}) \text{ für } N \rightarrow \infty,$$

wobei  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}(t))_{t \in [-\infty, \infty]}$  ein zentrierter Gaußprozess mit fast sicher stetigen Pfaden und der Kovarianzfunktion

$$\sigma^2(t, t') = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2} \text{cov}(g_t(Z_0), g_{t'}(Z_{\mathbf{s}})) \text{ für alle } t, t' \in [-\infty, \infty]$$

mit

$$g_t(Z_{\mathbf{s}}) = I(Z_{\mathbf{s}} \leq t) - K(t; a_0, \alpha_0) - \mathbf{grad}_{(a, \alpha)} K(t; a_0, \alpha_0) L(Z_{\mathbf{s}}; a_0, \alpha_0)$$

ist.

**Beweis:** Die in Satz 3.16 benötigten Voraussetzungen an die parametrische Verteilungsklasse gelten nach Satz 5.22.

Daher sind alle Voraussetzungen des funktionalen Grenzwertsatzes 3.16 erfüllt, und dieser impliziert die Verteilungskonvergenz des empirischen Prozesses  $\widehat{\alpha}_N^{\mathcal{K}}$ .  $\square$

**5.24 Bemerkung:** Die in Abschnitt 5.2 vorgestellten Momentenschätzer für die beiden Parameter der K-Verteilung erfüllen die Voraussetzungen, die in Satz 5.23 an die Folgen von Zufallsvariablen gestellt werden für alle  $(a_0, \alpha_0) \in (0, \infty)^2$ , vgl. Abschnitt 5.3.

Damit ist die Verteilungskonvergenz des empirischen Prozesses mit geschätztem Parametervektor in der Situation von mischenden Zufallsfeldern gezeigt. Es folgt die entsprechende Aussage für unabhängige Blöcke.

#### 5.4.2 Zufallsfelder mit unabhängigen Blöcken

Seien  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{N}$  wie in Definition 4.1 fest gewählt, sei  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von disjunkten, achsenparallelen Rechtecken der Größe  $\eta_1 \times \eta_2$  in  $\mathbb{Z}^2$  und sei  $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2$ .

Es sei

$$\left\{ Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \right\}$$

ein Zufallsfeld mit identisch  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilten Komponenten mit den Parametern  $a_0, \alpha_0 > 0$  und festem  $L \in \mathbb{N}$ .

Ferner seien die Blöcke der Folge  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  mit  $B_j = \{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in b_j\}$  unabhängig und identisch verteilt.

Sei  $F_N$  die empirische Verteilungsfunktion zu  $B_1, \dots, B_N$  entsprechend Definition 4.2.

Für Schätzerfolgen  $(\widehat{a}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  und  $(\widehat{\alpha}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  für die Parameter  $a$  und  $\alpha$  ist

$$\widehat{\alpha}_N^{\mathcal{K}}(t) = \sqrt{N}(F_N(t) - K(t; \widehat{a}_N, \widehat{\alpha}_N)) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty] \quad (5.64)$$

der empirische Prozess zum Stichprobenumfang  $N$  mit geschätztem Parametervektor  $(a, \alpha)$  zur Klasse der K-Verteilungen  $\mathcal{K}$ .

**5.25 Satz:** Es gelten die folgenden Voraussetzungen:

1) Es seien  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{N}$  und sei  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Rechtecken der Größe  $\eta_1 \times \eta_2$  in  $\mathbb{Z}^2$  wie in Definition 4.1. Sei

$$\left\{ Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \right\}.$$

ein Zufallsfeld mit identisch  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilten Komponenten. Sei  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von unabhängigen und identisch verteilten Blöcken mit  $B_j = \{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in b_j\}$  für alle  $j \in \mathbb{N}$ .

- 2) Es sei  $((\hat{a}_N, \hat{\alpha}_N))_{N \in \mathbb{N}}$  eine Folge von Zufallsvektoren mit Werten in  $(0, \infty)^2$  zu der eine messbare Funktion  $L(\cdot, a_0, \alpha_0) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  existiert mit

$$\begin{pmatrix} \hat{a}_N \\ \hat{\alpha}_N \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_0 \\ \alpha_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{\eta} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} L(Z_{\mathbf{s}}, a_0, \alpha_0) + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \text{ für } N \rightarrow \infty,$$

sowie

$$E(L(Z, a_0, \alpha_0)) = \mathbf{0}$$

für eine  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilte Zufallsvariable  $Z$ .

Ferner gelte

$$\|L(Z, a_0, \alpha_0)\|_2 < \infty.$$

Unter diesen Voraussetzungen gilt für den empirischen Prozess mit geschätztem Parametervektor zur Klasse der K-Verteilungen aus (5.64)

$$\hat{\alpha}_N^{\mathcal{K}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{W} \text{ in } (D([-\infty, \infty]), s_{\infty}) \text{ für } N \rightarrow \infty,$$

wobei  $\mathcal{W} = (\mathcal{W}(t))_{t \in [-\infty, \infty]}$  ein zentrierter Gaußprozess mit fast sicher stetigen Pfaden und der Kovarianzfunktion

$$\sigma^2(t, t') = \frac{1}{\eta} \sum_{\mathbf{s} \in b_1} \sum_{\mathbf{s}' \in b_1} \text{cov}(g_t(Z_{\mathbf{s}}), g_{t'}(Z_{\mathbf{s}'})) \text{ für alle } t, t' \in [-\infty, \infty]$$

mit

$$g_t(Z_{\mathbf{s}}) = I(Z_{\mathbf{s}} \leq t) - K(t; a_0, \alpha_0) - \mathbf{grad}_{(a, \alpha)} K(t; a_0, \alpha_0) L(Z_{\mathbf{s}}; a_0, \alpha_0)$$

ist.

**Beweis:** Die in Satz 4.3 benötigten Voraussetzungen an die parametrische Verteilungsklasse gelten nach Satz 5.22.

Daher sind alle Voraussetzungen des funktionalen Grenzwertsatzes 4.3 erfüllt und dieser impliziert die Verteilungskonvergenz des empirischen Prozesses  $\hat{\alpha}_N^{\mathcal{K}}$ .  $\square$

**5.26 Bemerkung:** Die in Abschnitt 5.2 vorgestellten Momentenschätzer für die beiden Parameter der K-Verteilung erfüllen die Voraussetzungen, die in Satz 5.25 an die Folgen von Zufallsvariablen gestellt werden, vgl. Abschnitt 5.3.

## 5.5 Likelihoodfunktion und Log-Likelihoodfunktion

In diesem Abschnitt werden die Likelihood- und die Log-Likelihoodfunktion zur Klasse  $\mathcal{K}$  der K-Verteilungen zum Stichprobenumfang  $N$  vorgestellt. Zudem werden die Einträge des Gradienten und der Hessematrix der Log-Likelihoodfunktion angegeben. Diese werden

für spätere Anwendungen benötigt.

Für alle natürlichen Zahlen  $N \in \mathbb{N}$  und alle Parametervektoren  $\boldsymbol{\vartheta}$  aus dem Parameterraum  $\Theta = (0, \infty)^2$  ist die *Likelihoodfunktion* zu  $\mathcal{K}$  zum Stichprobenumfang  $N$  definiert als

$$L_N : \Theta \times (0, \infty)^N \rightarrow (0, \infty)$$

mit

$$L_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) = \prod_{k=1}^N f(x_k; \boldsymbol{\vartheta}) = \left( \frac{a^{-L/2-\alpha}}{2^{\alpha-2+L/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} \right)^N \prod_{k=1}^N x_k^{\alpha+L/2-1} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x_k}{a} \right)$$

mit der Dichte  $f$  aus (5.19).

Die zugehörige *Log-Likelihoodfunktion* zu  $\mathcal{K}$  zum Stichprobenumfang  $N$  ist definiert als

$$l_N : \Theta \times (0, \infty)^N \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\begin{aligned} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) &= \ln(L_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x})) = \sum_{k=1}^N \ln f(x_k; \boldsymbol{\vartheta}) \\ &= N \ln \left( \frac{a^{-L/2-\alpha}}{2^{\alpha-2+L/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} \right) + \sum_{k=1}^N \left[ \left( \alpha + \frac{L}{2} - 1 \right) \ln(x_k) + \ln \left( K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x_k}{a} \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Für die partielle Ableitung der Log-Likelihood-Funktion nach  $a$  wird Ableitung (5.13) verwendet, und es ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial a} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) = -NL \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^N \frac{x_k}{a^2} \frac{K_{\alpha-L/2-1} \left( \frac{x_k}{a} \right)}{K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x_k}{a} \right)}. \quad (5.65)$$

Für die partielle Ableitung nach  $\alpha$  gilt mit den Ableitungen der Gammafunktion (5.6) und der modifizierten Besselfunktion (5.14)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) &= -N\psi(\alpha) + \sum_{k=1}^N \left[ \ln \left( \frac{x_k}{2a} \right) + \frac{1}{K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x_k}{a} \right)} \frac{\partial}{\partial \alpha} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x_k}{a} \right) \right] \\ &= -N\psi(\alpha) + \sum_{k=1}^N \left[ 2 \ln \left( \frac{x_k}{2a} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x_k}{a} \right)} \frac{x_k^{\alpha-L/2}}{a^{\alpha-L/2} 2^{\alpha-L/2+1}} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t - \frac{x_k^2}{a^2 4t}} dt \right]. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Die Einträge der Hessematrix  $\left[ \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) \right]_{j,k=1,2}$  der Log-Likelihoodfunktion lassen sich mit Hilfe der partiellen Ableitungen der Dichte  $f$ , vgl. Abschnitt 5.1.1, beschreiben

$$\frac{\partial^2}{\partial a^2} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N - \frac{\left( \frac{\partial}{\partial a} f(x_k; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2}{f(x_k; \boldsymbol{\vartheta})^2} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x_k; \boldsymbol{\vartheta})}{f(x_k; \boldsymbol{\vartheta})}, \quad (5.67)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) = \sum_{k=1}^N -\frac{\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_k; \boldsymbol{\vartheta})\right)^2}{f(x_k; \boldsymbol{\vartheta})^2} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x_k; \boldsymbol{\vartheta})}{f(x_k; \boldsymbol{\vartheta})}, \quad (5.68)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^N -\frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_k; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{\partial}{\partial a} f(x_k; \boldsymbol{\vartheta})}{f(x_k; \boldsymbol{\vartheta})^2} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x_k; \boldsymbol{\vartheta})}{f(x_k; \boldsymbol{\vartheta})} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (5.69)$$

## 5.6 Asymptotisch effiziente Schätzer

### 5.6.1 Berechnung asymptotisch effizienter Schätzer

Der in diesem Abschnitt formulierte Satz aus [Lehmann, 1983] liefert eine Möglichkeit zur Berechnung einer asymptotisch effizienten Schätzerfolge für eine parametrische Klasse von Verteilungsfunktionen. Zunächst werden die benötigten Voraussetzungen aufgelistet. In Abschnitt 5.6.2 folgt dann der Nachweis, dass die Klasse der K-Verteilungen diese Voraussetzungen erfüllt.

Es sei  $f(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte mit  $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta \subset \mathbb{R}^d$ , einem offenen  $d$ -dimensionalen Parameterraum. Für alle  $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$  bezeichne  $F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$  die zur Dichte  $f(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$  gehörende Verteilungsfunktion. Sei  $\mathbf{X}$  ein  $N$ -dimensionaler Zufallsvektor.

Dann werden die folgenden Voraussetzungen an den Zufallsvektor  $\mathbf{X}$  und an die parametrische Verteilungsklasse  $\{F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}) : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta\}$  gestellt.

- 1) Die Klasse  $\{F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}) : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta\}$  besitze eine identifizierende Parametrisierung in  $\boldsymbol{\vartheta}$ .
- 2) Die Verteilungen  $F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$  haben für alle  $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$  einen gemeinsamen Träger.
- 3) Die Komponenten  $X_1, \dots, X_N$  des Zufallsvektors  $\mathbf{X}$  seien unabhängig und identisch  $F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}_0)$ -verteilt für ein  $\boldsymbol{\vartheta}_0 \in \Theta$ .
- 4) Es existiere eine offene Menge  $\tilde{\Theta} \subset \Theta$  mit  $\boldsymbol{\vartheta}_0 \in \tilde{\Theta}$  so, dass für fast alle  $x \in \mathbb{R}$  die dritten partiellen Ableitungen der Dichte  $\frac{\partial^3}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k \partial \vartheta_l} f(x; \boldsymbol{\vartheta})$  für alle  $j, k, l = 1, \dots, d$  und alle  $\boldsymbol{\vartheta} \in \tilde{\Theta}$  existieren.

Sei im Folgenden  $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$  und sei  $X$  eine  $F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$ -verteilte Zufallsvariable.

Die *Fisher-Informationmatrix* ist definiert als

$$\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta}) = [I_{jk}(\boldsymbol{\vartheta})]_{j,k=1,\dots,d} = \left[ \text{cov} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta}), \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right) \right]_{j,k=1,\dots,d}. \quad (5.70)$$

- 5) Für  $j = 1, \dots, d$  gelte

$$E \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right) = 0. \quad (5.71)$$

6) Für die Einträge der Fisher-Informationsmatrix gelten für alle  $j, k = 1, \dots, d$

$$\begin{aligned} I_{jk}(\boldsymbol{\vartheta}) &= E\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta})\right) \\ &= E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta})\right). \end{aligned} \quad (5.72)$$

7) Die Einträge der Fisher-Informationsmatrix  $I_{jk}(\boldsymbol{\vartheta})$  seien für alle  $j, k = 1, \dots, d$  endlich.

8) Die Fisher-Informationsmatrix  $\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})$  sei positiv definit für alle  $\boldsymbol{\vartheta} \in \Theta$ .

9) Es existieren Funktionen  $M_{jkl}$  so, dass für alle  $\boldsymbol{\vartheta} \in \tilde{\Theta}$  gilt

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k \partial \vartheta_l} \ln f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right| \leq M_{jkl}(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}, \quad (5.73)$$

wobei für die Funktionen  $M_{jkl}$  gilt

$$E(M_{jkl}(X)) < \infty \text{ für alle } j, k, l = 1, \dots, d.$$

Für alle  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$  ist der Gradient der zugehörigen Log-Likelihoodfunktion  $l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x})$

$$\mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) = \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_1} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}), \dots, \frac{\partial}{\partial \vartheta_d} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) \right) \text{ für alle } \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta,$$

die Hesse-Matrix ist

$$\mathbf{H}(l_N)(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} l_N(\boldsymbol{\vartheta}, \mathbf{x}) \right]_{j,k=1,\dots,d} \text{ für alle } \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta.$$

Mit diesen Voraussetzungen kann der folgende Satz, vgl. [Lehmann, 1983, Theorem 4.2, S. 435f], formuliert werden.

**5.27 Satz:** Seien die Voraussetzungen 1) bis 9) erfüllt.

Für jede Komponente  $j = 1, \dots, d$  des Parametervektors  $\boldsymbol{\vartheta}_0$  sei  $\hat{\vartheta}_{N,j}$  ein  $\sqrt{N}$ -konsistenter Schätzer für  $\vartheta_{0,j}$ . Ferner seien  $\hat{\delta}_{N,k}$  für  $k = 1, \dots, d$  die Lösungen der Gleichungen

$$\sum_{k=1}^d (\hat{\delta}_{N,k} - \hat{\vartheta}_{N,k}) \left[ \mathbf{H}(l_N)(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N, \mathbf{x}) \right]_{jk} = - \left[ \mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} l_N(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N, \mathbf{x})^T \right]_j. \quad (5.74)$$

Dann sind die Komponenten des Vektors  $\hat{\boldsymbol{\delta}}_N = (\hat{\delta}_{N,1}, \dots, \hat{\delta}_{N,d})$  asymptotisch effizient in dem Sinne, dass die normierten Differenzen zwischen ihnen und den wahren Parametern gegen eine Normalverteilung mit der kleinstmöglichen Varianz konvergieren. Diese Varianz ist das Inverse des entsprechenden Eintrags der Fisher-Informationsmatrix. Es gilt für  $j = 1, \dots, d$

$$\sqrt{N}(\hat{\delta}_{N,j} - \vartheta_{0,j}) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta}_0)_{jj}^{-1}) \text{ für } N \rightarrow \infty. \quad (5.75)$$

### 5.6.2 Asymptotisch effiziente Schätzer für K-verteilte Zufallsvariable

Betrachtet wird die parametrische Klasse der K-Verteilungen

$$\mathcal{K} = \{K(\cdot; a, \alpha) : (a, \alpha) \in (0, \infty)^2\}.$$

Es sei  $f(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  für  $\boldsymbol{\vartheta} = (a, \alpha) \in (0, \infty)^2$  die in Gleichung (5.19) definierte Dichte von  $K(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$ . Sei  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0) \in (0, \infty)^2$  und seien  $X_1, \dots, X_N$  unabhängige und identisch  $K(\cdot; a_0, \alpha_0)$ -verteilte Zufallsvariable. Im Folgenden werden die Voraussetzungen des Satzes 5.27 nachgewiesen.

Zu 1) Nach Lemma 5.13 besitzt die Klasse  $\mathcal{K}$  eine identifizierende Parametrisierung in  $\boldsymbol{\vartheta}$ .

Zu 2) Für alle  $(a, \alpha) \in (0, \infty)^2$  ist das vom Parametervektor unabhängige Intervall  $(0, \infty)$  der Träger der Dichte  $f(\cdot; a, \alpha)$ .

Zu 3) Diese Voraussetzung ist nach der Wahl von  $X_1, \dots, X_N$  erfüllt.

Zu 4) Die dritten partiellen Ableitungen von  $f$  existieren für alle  $\boldsymbol{\vartheta} = (a, \alpha) \in (0, \infty)^2$  nach den Gleichungen (5.27) bis (5.30).

Zu 5) Für den Nachweis wird Bedingung (5.71) umgeformt.

Für eine  $K(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  mit  $\boldsymbol{\vartheta} = (a, \alpha) \in (0, \infty)^2$  gilt für  $j = 1, 2$

$$E\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta})\right) = \int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx = \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx.$$

Da  $f(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$  eine Dichte ist, gilt außerdem

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \int_0^\infty f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx = 0.$$

Damit ergibt sich die zu Bedingung (5.71) für die Klasse  $\mathcal{K}$  äquivalente Bedingung

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx = \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \int_0^\infty f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx \text{ für alle } j = 1, 2. \quad (5.76)$$

Für die K-Verteilung folgt Bedingung (5.76) aus dem Satz von Lebesgue. Die erforderlichen integrierbaren Majoranten existieren nach den Abschnitten A.6.1, A.6.6 und A.6.7.

Für den Parameter  $a$  ließe sich die Gleichung  $E\left(\frac{\partial}{\partial a} \ln f(X; a, \alpha)\right) = 0$  auch direkt unter Verwendung von (A.86) nachweisen.

Zu 6) Für eine  $K(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  mit  $\boldsymbol{\vartheta} = (a, \alpha) \in (0, \infty)^2$  gilt aufgrund der Zentriertheit (5.71) für  $j, k = 1, 2$

$$I_{j,k}(\boldsymbol{\vartheta}) = E\left(\frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta})\right) = \int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx.$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} & E\left(-\frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta})\right) \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})^2} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) - \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta})\right) f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx - \int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx. \end{aligned}$$

Also ist Gleichung (5.72) genau dann erfüllt, wenn gilt

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx = 0.$$

Gleichung (5.71) impliziert

$$0 = \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx.$$

Damit ergibt sich als Äquivalent zu Gleichung (5.72) die Forderung nach der Vertauschbarkeit von Integral und Ableitung

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx = \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) dx \text{ für alle } j, k = 1, 2. \quad (5.77)$$

Für die K-Verteilung folgt Bedingung (5.77) aus dem Satz von Lebesgue. Die erforderlichen integrierbaren Majoranten existieren nach den Abschnitten A.6.1, A.6.2, A.6.3, A.6.4 und A.6.5.

Zu 7) Für eine  $K(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  mit  $\boldsymbol{\vartheta} = (a, \alpha) \in (0, \infty)^2$  gilt für  $j = 1, 2$  nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} |I_{jk}(\boldsymbol{\vartheta})| &= \left| E \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} \ln f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right) \right| \\ &= \left| E \left( \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right) \right| \\ &\leq E \left( \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})^2} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} E \left( \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})^2} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left( \int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Also ist für alle  $j = 1, 2$  zu zeigen

$$\int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \left( \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 dx < \infty.$$

Die Endlichkeit der beiden Integrale für  $\vartheta_1 = a$  und  $\vartheta_2 = \alpha$  wurde in Abschnitt A.5 in (A.88) bzw. (A.89) nachgewiesen.

Zu 8) Der Nachweis der positiven Definitheit der Fisher-Informationsmatrix wird als Widerspruchsbeweis geführt.

Für einen zentrierten zweidimensionalen Zufallsvektor  $(Y, Z)$  ist die Determinante der Kovarianzmatrix  $\det(\mathbf{var}((Y, Z)^T)) = E(Y^2)E(Z^2) - E(YZ)^2$ . Wäre die Kovarianzmatrix lediglich positiv semidefinit, so wäre

$$E(Y^2)E(Z^2) - E(YZ)^2 = 0 \Leftrightarrow |E(YZ)| = E(Y^2)^{\frac{1}{2}}E(Z^2)^{\frac{1}{2}}. \quad (5.78)$$

Die letzte Gleichung gilt nach der Cauchy-Schwarz-Ungleichung genau dann, wenn  $Y$  mit Wahrscheinlichkeit 1 eine lineare Transformation von  $Z$  ist, das heißt wenn gilt

$$P(Y = AZ + B) = 1 \text{ für geeignete } A, B \in \mathbb{R}. \quad (5.79)$$

Sei  $X$  eine  $K(\cdot; \boldsymbol{\vartheta})$ -verteilte Zufallsvariable mit  $\boldsymbol{\vartheta} = (a, \alpha) \in (0, \infty)^2$ . Die Fisher-Informationsmatrix  $\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})$  ist die Kovarianzmatrix des nach (5.71) zentrierten zweidimensionalen Zufallsvektors  $(\frac{\partial}{\partial a} \ln f(X; a, \alpha), \frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f(X; a, \alpha))$ .

Angenommen, es gäbe ein  $\boldsymbol{\vartheta} = (a, \alpha) \in (0, \infty)^2$  so, dass die Fisher-Informationsmatrix nicht positiv definit wäre, dann würde nach (5.79) gelten

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\partial}{\partial a} \ln f(X; a, \alpha) &= A_{a,\alpha} \frac{\partial}{\partial a} \ln f(X; a, \alpha) + B_{a,\alpha}\right) = 1 \\ &\text{für geeignete } A_{a,\alpha}, B_{a,\alpha} \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a} \ln f(X; a, \alpha) &= A_{a,\alpha} \frac{\partial}{\partial a} \ln f(X; a, \alpha) + B_{a,\alpha} \\ &\text{mit Wahrscheinlichkeit 1 für geeignete } A_{a,\alpha}, B_{a,\alpha} \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Da das zur Verteilung von  $X$  gehörige Maß äquivalent zum Lebesguemaß  $\lambda$  auf  $(0, \infty)$  ist, gilt die letzte Gleichung genau dann, wenn die folgende Gleichung erfüllt ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \ln f(x; a, \alpha) &= A_{a,\alpha} \frac{\partial}{\partial a} \ln f(x; a, \alpha) + B_{a,\alpha} \text{ für } \lambda\text{-fast alle } x \in (0, \infty) \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial a} \ln f(x; a, \alpha) &= A_{a,\alpha} \frac{\partial}{\partial a} \ln f(x; a, \alpha) + B_{a,\alpha} \text{ für alle } x \in (0, \infty) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f(x; a, \alpha)} \frac{\partial}{\partial a} f(x; a, \alpha) &= A_{a,\alpha} \frac{1}{f(x; a, \alpha)} \frac{\partial}{\partial a} f(x; a, \alpha) + B_{a,\alpha} \text{ für alle } x \in (0, \infty). \end{aligned} \quad (5.80)$$

Der Übergang von  $\lambda$ -fast allen  $x \in (0, \infty)$  zu allen  $x \in (0, \infty)$  ist dabei durch die Dichtheit des Komplementes der Lebesgueschen Nullmenge in  $(0, \infty)$  und durch die Stetigkeit der betrachteten Funktionen begründet.

Um Gleichung (5.80) zum Widerspruch zu führen, werden im Folgenden die Konvergenzordnungen der beiden Ableitungen für  $x \rightarrow \infty$  verglichen.

Die partielle Ableitung nach  $a$  lässt sich wie in Gleichung (5.20) als Summe schreiben. Für die einzelnen Summanden wird für  $x \rightarrow \infty$  die asymptotische Entwicklung (5.18) eingesetzt

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} f(x; a, \alpha) &= -\frac{La^{-\alpha-L/2-1}}{2^{\alpha+L/2-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} x^{\alpha+L/2-1} K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) \\ &\quad + \frac{a^{-\alpha-L/2-2}}{2^{\alpha+L/2-2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} x^{\alpha+L/2} K_{\alpha-L/2-1}\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= -\frac{L\sqrt{\pi}a^{-\alpha-L/2-1/2}}{2^{\alpha+L/2-3/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} x^{\alpha+L/2-3/2} e^{-x/a} (1 + o(1)) \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}a^{-\alpha-L/2-3/2}}{2^{\alpha+L/2-3/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} x^{\alpha+L/2-1/2} e^{-x/a} (1 + o(1)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\sqrt{\pi}a^{-\alpha-L/2-3/2}}{2^{\alpha+L/2-3/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)}x^{\alpha+L/2-1/2}e^{-x/a}(1+o(1)) \\
&= \text{const}_{a,\alpha}x^{\alpha+L/2-1/2}e^{-x/a}(1+o(1)).
\end{aligned}$$

Damit und mit (5.18) gilt für  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{f(x; a, \alpha)} \frac{\partial}{\partial a} f(x; a, \alpha) = \text{const}_{a,\alpha} x (1 + o(1)).$$

Für die Ableitung nach  $\alpha$  wird Darstellung (5.21) verwendet. In die folgende Rechnung fließen außerdem die asymptotischen Entwicklungen (5.18) und (A.16) für  $x \rightarrow \infty$  ein

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; a, \alpha) &= \frac{a^{-\alpha-L/2}}{2^{\alpha+L/2-3}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)}x^{\alpha+L/2-1} \ln(x) K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) (1+o(1)) \\
&\quad + \frac{a^{-2\alpha}}{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)}x^{2\alpha-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \\
&= \frac{\sqrt{\pi}a^{-\alpha-L/2+1/2}}{2^{\alpha+L/2-5/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)}x^{\alpha+L/2-3/2} \ln(x) e^{-x/a} (1+o(1)) \\
&\quad - \frac{\sqrt{\pi}a^{-\alpha-L/2+1/2}}{2^{\alpha+L/2-3/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)}x^{\alpha+L/2-3/2} \ln(x) e^{-x/a} (1+o(1)) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}a^{-\alpha-L/2+1/2}}{2^{\alpha+L/2-3/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)}x^{\alpha+L/2-3/2} \ln(x) e^{-x/a} (1+o(1)) \\
&= \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2-3/2} \ln(x) e^{-x/a} (1+o(1)).
\end{aligned}$$

Damit und mit (5.18) gilt für  $x \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{f(x; a, \alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; a, \alpha) = \text{const}_{a,\alpha} \ln(x) (1 + o(1)).$$

Die beiden Terme  $\frac{1}{f(x; a, \alpha)} \frac{\partial}{\partial a} f(x; a, \alpha)$  und  $\frac{1}{f(x; a, \alpha)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; a, \alpha)$  haben also verschiedene Konvergenzordnungen für  $x \rightarrow \infty$ , ein Widerspruch zu Gleichung (5.80).

Damit ist die positive Definitheit der Fisher-Informationsmatrix gezeigt.

Zu 9) Es gilt für alle  $\boldsymbol{\vartheta} \in (0, \infty)^2$

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial^3}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k \partial \vartheta_l} \ln f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right| \\
&= \left| \frac{2}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})^3} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \vartheta_l} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right. \\
&\quad - \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \vartheta_l} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_k \partial \vartheta_l} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_l} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right) + \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial^3}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k \partial \vartheta_l} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq 2 \left| \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_l} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_l} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_k \partial \vartheta_l} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_l} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right| \\
&\quad + \left| \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial^3}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k \partial \vartheta_l} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right|. \tag{5.81}
\end{aligned}$$

Nach der Hölderschen Ungleichung gelten

$$\begin{aligned}
&E \left( \left| \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_l} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right| \right) \\
&\leq E \left( \left| \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} E \left( \left| \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \\
&\quad \cdot E \left( \left| \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_l} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \tag{5.82}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&E \left( \left| \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \cdot \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_l} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right| \right) \\
&\leq E \left( \left| \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \cdot E \left( \left| \frac{1}{f(X; \boldsymbol{\vartheta})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_l} f(X; \boldsymbol{\vartheta}) \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}}. \tag{5.83}
\end{aligned}$$

Nachzuweisen ist Ungleichung (5.73) für alle Parametervektoren in einer Umgebung  $\tilde{\Theta}$  von  $\boldsymbol{\vartheta}_0 = (a_0, \alpha_0)$ . Sei  $h_0 > 0$  mit  $a_0 - h_0 > 0$  und  $\alpha_0 - h_0 > 0$  sei

$$\tilde{\Theta} = \tilde{\Theta}(\boldsymbol{\vartheta}_0, h_0) = [a_0 - h_0, a_0 + h_0] \times [\alpha_0 - h_0, \alpha_0 + h_0] \subset (0, \infty)^2.$$

Nach (5.81), (5.82) und (5.83) ist es hinreichend zu zeigen, dass für alle  $j, k, l \in \{1, 2\}$  Funktionen  $\tilde{M}_j$ ,  $\tilde{M}_{jk}$  bzw.  $\tilde{M}_{jkl}$  existieren, welche für alle  $(\tilde{a}, \tilde{\alpha}) \in \tilde{\Theta}$  die folgenden Eigenschaften besitzen

$$\left| \frac{1}{f(x; \tilde{a}, \tilde{\alpha})} \frac{\partial}{\partial \vartheta_j} f(x; \tilde{a}, \tilde{\alpha}) \right|^3 \leq \tilde{M}_j(x; a_0, \alpha_0, h_0) \text{ für alle } x \in (0, \infty) \tag{5.84}$$

mit  $E(\tilde{M}_j(X; a_0, \alpha_0, h_0)) < \infty$ ,

$$\left| \frac{1}{f(x; \tilde{a}, \tilde{\alpha})} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k} f(x; \tilde{a}, \tilde{\alpha}) \right|^{\frac{3}{2}} \leq \tilde{M}_{jk}(x; a_0, \alpha_0, h_0) \text{ für alle } x \in (0, \infty) \tag{5.85}$$

mit  $E(\widetilde{M}_{jk}(X; a_0, \alpha_0, h_0)) < \infty$  sowie

$$\left| \frac{1}{f(x; \widetilde{a}, \widetilde{\alpha})} \frac{\partial^3}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k \partial \vartheta_l} f(x; \widetilde{a}, \widetilde{\alpha}) \right| \leq \widetilde{M}_{jkl}(x; a_0, \alpha_0, h_0) \text{ für alle } x \in (0, \infty) \quad (5.86)$$

mit  $E(\widetilde{M}_{jkl}(X; a_0, \alpha_0, h_0)) < \infty$ .

Nach Abschnitt A.7 existieren bei hinreichend klein gewähltem  $h_0$  die entsprechenden Majoranten  $\widetilde{M}_j(\cdot; a_0, \alpha_0, h_0)$  und  $\widetilde{M}_{jk}(\cdot; a_0, \alpha_0, h_0)$  für alle  $j, k \in \{1, 2\}$ . Daher sind die Bedingungen (5.84) und (5.85) erfüllt.

Es folgt der Nachweis von Bedingung (5.86). Für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gilt für alle  $(\widetilde{a}, \widetilde{\alpha}) \in \widetilde{\Theta}$  nach Abschnitt A.1 für alle  $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} f(x; \widetilde{a}, \widetilde{\alpha})^{-1} &\leq \text{const}_{a_0, \alpha_0, h_0} x^{-\alpha_0 - h_0 I(x < 1) + h_0 I(x \geq 1) - L/2 + 1} \\ &\quad \cdot K_{\alpha_0 - L/2 + h_0 I(\alpha_0 - L/2 < 0) - h_0 I(\alpha_0 - L/2 \geq 0)} \left( \frac{x}{a_0 - h_0} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Betrachtet wird für alle  $(\widetilde{a}, \widetilde{\alpha}) \in \widetilde{\Theta}$  das folgende Produkt, welches ein Faktor des später abzuschätzenden Integranden ist,

$$\begin{aligned} &f(x; \widetilde{a}, \widetilde{\alpha})^{-1} f(x; a_0, \alpha_0) \\ &\leq \text{const}_{a_0, \alpha_0, h_0} x^{-h_0 I(x < 1) + h_0 I(x \geq 1)} \frac{K_{\alpha_0 - L/2} \left( \frac{x}{a_0} \right)}{K_{\alpha_0 - L/2 + h_0 I(\alpha_0 - L/2 < 0) - h_0 I(\alpha_0 - L/2 \geq 0)} \left( \frac{x}{a_0 - h_0} \right)} \\ &= A. \end{aligned}$$

Im Folgenden wird das asymptotische Verhalten von  $A$  für  $x \rightarrow 0$  und für  $x \rightarrow \infty$  betrachtet.

- Für  $x \rightarrow 0$  sei o.B.d.A.  $x < 1$ . Es sei  $\alpha_0 - \frac{L}{2} \neq 0$  und  $h_0$  so klein gewählt, dass auch  $\alpha_0 - \frac{L}{2} + h_0 I(\alpha_0 - L/2 < 0) - h_0 I(\alpha_0 - L/2 \geq 0) \neq 0$  ist. Dann gilt aufgrund der asymptotischen Entwicklung der modifizierten Besselfunktion zweiter Art (5.16)

$$A \leq \text{const}_{a_0, \alpha_0, h_0} x^{-h_0 \pm h_0} (1 + o(1)). \quad (5.87)$$

- Für  $x \rightarrow 0$  sei o.B.d.A.  $x < 1$ . Es sei  $\alpha_0 - \frac{L}{2} = 0$ . Aufgrund der asymptotischen Entwicklung der modifizierten Besselfunktion zweiter Art (5.16) sowie (5.17) gilt

$$A \leq \text{const}_{a_0, \alpha_0, h_0} |\ln(x)| (1 + o(1)). \quad (5.88)$$

- Für  $x \rightarrow \infty$  sei o.B.d.A.  $x > 1$ . Dann gilt nach der asymptotischen Entwicklung der modifizierten Besselfunktion zweiter Art (5.18)

$$A \leq \text{const}_{a_0, \alpha_0, h_0} x^{h_0} e^{x h_0 / (a_0(a_0 - h_0))} (1 + o(1)). \quad (5.89)$$

Für  $j, k, l \in \{1, 2\}$  existieren für hinreichend kleines  $h_0$  für alle  $(\tilde{a}, \tilde{\alpha}) \in \tilde{\Theta}$  nach den Abschnitten A.6.8, A.6.9, A.6.10 und A.6.11 über dem Intervall  $(0, \infty)$  integrierbare Majoranten  $\tilde{M}_{jkl}^*(\cdot; a_0, \alpha_0, h_0)$  mit

$$\left| \frac{\partial^3}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k \partial \vartheta_l} f(x; \tilde{a}, \tilde{\alpha}) \right| \leq \tilde{M}_{jkl}^*(x; a_0, \alpha_0, h_0) \text{ für alle } x \in (0, \infty).$$

Aus den asymptotischen Entwicklungen (5.87), (5.88) und (5.89) folgt für alle  $(\tilde{a}, \tilde{\alpha}) \in \tilde{\Theta}$  die Existenz einer Majorante des Produktes

$$\left| f(x; \tilde{a}, \tilde{\alpha})^{-1} f(x; a_0, \alpha_0) \right| \leq \tilde{m}(x; a_0, \alpha_0, h_0) \text{ für alle } x \in (0, \infty),$$

so dass  $\tilde{m}(\cdot; a_0, \alpha_0, h_0) \tilde{M}_{jkl}^*(\cdot; a_0, \alpha_0, h_0)$  über  $(0, \infty)$  integrierbar ist. Damit ergibt sich für alle  $(\tilde{a}, \tilde{\alpha}) \in \tilde{\Theta}$  als Majorante

$$\begin{aligned} \left| f(x; \tilde{a}, \tilde{\alpha})^{-1} \frac{\partial^3}{\partial \vartheta_j \partial \vartheta_k \partial \vartheta_l} f(x; \tilde{a}, \tilde{\alpha}) \right| &\leq \tilde{m}(x; a_0, \alpha_0, h_0) \tilde{M}_{jkl}^*(x; a_0, \alpha_0, h_0) f^{-1}(x; a_0, \alpha_0) \\ &= \tilde{M}_{jkl}(x; a_0, \alpha_0, h_0) \end{aligned}$$

für alle  $x \in (0, \infty)$ , wobei

$$E(\tilde{M}_{jkl}(X; a_0, \alpha_0, h_0)) = \int_0^\infty \tilde{m}(x; a_0, \alpha_0, h_0) \tilde{M}_{jkl}^*(x; a_0, \alpha_0, h_0) dx < \infty$$

erfüllt ist.

Daher sind die Bedingungen (5.84), (5.85) und (5.86) erfüllt, und Gleichung (5.73) ist nachgewiesen.

Damit ist gezeigt, dass unabhängige und identisch K-verteilte Zufallsvariable sämtliche Voraussetzungen des Satzes 5.27 erfüllen.

Mit den entsprechenden Einträgen der Hessematrix (5.67), (5.68) und (5.69) sieht das nach  $\hat{\boldsymbol{\delta}}_N$  zu lösende Gleichungssystem (5.74) im Fall von K-verteilten Zufallsvariablen folgendermaßen aus

$$\mathbf{H}(l_N)(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N, \mathbf{x}) \left[ \hat{\boldsymbol{\delta}}_N - \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N \right] = -\mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} l_N(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N, \mathbf{x})^T \quad (5.90)$$

mit

$$\begin{aligned} H_{11}(l_N)(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N, \mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^N -\frac{\left(\frac{\partial}{\partial a} f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)\right)^2}{f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)^2} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)}{f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)}, \\ H_{12}(l_N)(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N, \mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^N -\frac{\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N) \cdot \frac{\partial}{\partial a} f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)}{f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)^2} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)}{f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)} \\ &= H_{21}(l_N)(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N, \mathbf{x}), \\ H_{22}(l_N)(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N, \mathbf{x}) &= \sum_{k=1}^N -\frac{\left(\frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)\right)^2}{f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)^2} + \frac{\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)}{f(x_k; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)} \end{aligned}$$

und

$$\mathbf{grad}_{\boldsymbol{\vartheta}} l_N(\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N, \mathbf{x}) = \left( \sum_{k=1}^N \frac{1}{f(x_k; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)} \frac{\partial}{\partial a} f(x_k; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N), \sum_{k=1}^N \frac{1}{f(x_k; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N)} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x_k; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_N) \right)$$

mit der Dichte  $f$  aus (5.19) und den partiellen Ableitungen (5.20), (5.21), (5.24), (5.25) und (5.26).

Seien  $(\widehat{a}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  und  $(\widehat{\alpha}_N)_{N \in \mathbb{N}}$  zwei  $\sqrt{N}$ -konsistente Schätzerfolgen für die Parameter  $a_0$  und  $\alpha_0$ . Beispielsweise kommen hier die Momentenschätzer in Frage, welche nach Abschnitt 5.3 die erforderlichen Konvergenzordnungen besitzen.

Eingesetzt in das Gleichungssystem (5.90) ergeben sich asymptotisch effiziente Schätzerfolgen  $(\widehat{\delta}_{N,1})_{N \in \mathbb{N}}$  für den Parameter  $a_0$  und  $(\widehat{\delta}_{N,2})_{N \in \mathbb{N}}$  für den Parameter  $\alpha_0$ .

Für deren asymptotisches Verhalten gilt nach (5.75)

$$\begin{aligned} \sqrt{N}(\widehat{\delta}_{N,1} - a_0) &\xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbf{I}((a_0, \alpha_0))_{11}^{-1}) \text{ für } N \rightarrow \infty \text{ und} \\ \sqrt{N}(\widehat{\delta}_{N,2} - \alpha_0) &\xrightarrow{\mathcal{L}} N(0, \mathbf{I}((a_0, \alpha_0))_{22}^{-1}) \text{ für } N \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

## 6 Bootstrap

### 6.1 Copulas

Für die spätere Beschreibung eines Bootstrap-Verfahrens auf Blöcken, welche aus abhängigen Zufallsvariablen bestehen, werden in diesem Abschnitt Copulas diskutiert. Diese dienen dazu, die Abhängigkeiten innerhalb eines Blocks zu beschreiben.

#### 6.1.1 Theoretische Grundlagen

**6.1 Definition:** Sei  $D$  eine natürliche Zahl. Eine  $D$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit identischen eindimensionalen Randverteilungen  $U(0, 1)$  heißt  *$D$ -dimensionale Copula*. Eine *absolutstetige  $D$ -dimensionale Copula* ist eine  $D$ -dimensionale Copula mit einer Dichte.

**6.2 Bemerkung:** Durch die Beschränkung auf stetige Marginalien ist die obige Definition äquivalent zu der Definition einer Copula in [Nelsen, 1999, Abschnitt 2.10]. Die dort eingeführten Subcopulas werden lediglich für die Behandlung diskreter Marginalien benötigt.

Der folgende Satz von Sklar, siehe [Nelsen, 1999, Theorem 2.10.9, S. 41], sichert die Existenz von Copulas.

**6.3 Satz:** Sei  $F : [-\infty, \infty]^D \rightarrow [0, 1]^D$  eine  $D$ -dimensionale Verteilungsfunktion mit eindimensionalen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_D$ . Dann existiert eine Copula  $C$ , so dass gilt

$$F(\mathbf{y}) = C(F_1(y_1), \dots, F_D(y_D)) \text{ für alle } \mathbf{y} \in [-\infty, \infty]^D.$$

Sind alle eindimensionalen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_D$  stetig, so ist die Copula auf  $[0, 1]^D$  eindeutig bestimmt. Andernfalls ist  $C$  auf  $F_1([-\infty, \infty]) \times \dots \times F_D([-\infty, \infty])$  eindeutig bestimmt.

Dabei ist  $F_d(-\infty) = 0$  und  $F_d(\infty) = 1$  für alle  $d \in \{1, \dots, D\}$ .

Für stetige eindimensionale Randverteilungen  $F_1, \dots, F_D$  gilt demnach für alle  $\mathbf{u} \in [0, 1]^D$

$$C(\mathbf{u}) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_D^{-1}(u_D)). \quad (6.1)$$

Die beiden folgenden bekannten Resultate über Copulas ergeben sich direkt über Quantiltransformationen.

**6.4 Satz:** Seien  $D \in \mathbb{N}$  und  $\mathbf{Y}$  ein  $D$ -dimensionaler Zufallsvektor mit Verteilungsfunktion  $F$ . Seien  $F_1, \dots, F_D$  die stetigen eindimensionalen Randverteilungen von  $F$  und sei  $C$  die Copula von  $F$ .

Dann gilt

$$(F_1(Y_1), \dots, F_D(Y_D))^T \sim C.$$

**6.5 Satz:** Seien  $D \in \mathbb{N}$  und  $C$  eine Copula auf  $[0, 1]^D$ . Sei  $\mathbf{U}$  ein  $D$ -dimensionaler Zufallsvektor mit  $\mathbf{U} \sim C$ . Seien  $F_1, \dots, F_D$  stetige Verteilungsfunktionen. Definiert werden die komponentenweisen Transformationen

$$Z_d = F_d^{-1}(U_d) \text{ für alle } d = 1, \dots, D.$$

Dann besitzt der Zufallsvektor  $(Z_1, \dots, Z_D)$  die Copula  $C$  und die eindimensionalen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_D$ .

Es sei  $C$  eine absolutstetige  $D$ -dimensionale Copula mit Dichte  $c$ . Aus den Marginaldichten für  $d = 1, \dots, D - 1$

$$c_d(u_1, \dots, u_d) = \int_0^1 \cdots \int_0^1 c(u_1, \dots, u_D) du_{d+1} \dots du_D \text{ für alle } (u_1, \dots, u_d) \in [0, 1]^d$$

können für  $d = 2, \dots, D$  mit  $c_{d-1}(u_1, \dots, u_{d-1}) > 0$  die bedingten Randverteilungen berechnet werden als

$$C_d(u_d | u_1, \dots, u_{d-1}) = \int_0^{u_d} c_d(u | u_1, \dots, u_{d-1}) du = \frac{\int_0^{u_d} c_d(u_1, \dots, u_{d-1}, u) du}{c_{d-1}(u_1, \dots, u_{d-1})}. \quad (6.2)$$

Sei im Folgenden  $D \in \mathbb{N}$  und sei  $F$  eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $[0, \infty]^D$  mit stetigen und streng monoton wachsenden eindimensionalen Randverteilungen  $F_1, \dots, F_D$ , die  $F_d(0) = 0$  für alle  $d = 1, \dots, D$  erfüllen. Nach dem Satz von Sklar 6.3 existiert eine eindeutig bestimmte Copula  $C$  auf  $[0, 1]^D$ . Sei diese Copula absolutstetig, und sei  $c$  die zugehörige Dichte. Unter diesen Voraussetzungen kann zur Vereinfachung der Notation wegen der Stetigkeit der Verteilungsfunktionen o.B.d.A.

$$F : (0, \infty]^D \rightarrow [0, 1]$$

und

$$C : (0, 1]^D \rightarrow [0, 1]$$

angenommen werden.

Zum Stichprobenumfang  $n$  seien

$$\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n \quad (6.3)$$

unabhängige und identisch  $F$ -verteilte  $D$ -dimensionale Zufallsvektoren.

**6.6 Definition:** Zu  $D$ -dimensionalen Zufallsvektoren  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  sei für  $d = 1, \dots, D$  die empirische Verteilungsfunktion der  $d$ -ten Komponenten  $X_{1,d}, \dots, X_{n,d}$  definiert als

$$F_{n,d}(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n I(X_{j,d} \leq t) \text{ für alle } t \in (0, \infty).$$

Das folgende Vorgehen orientiert sich an [Strelen; Nassaj, 2007].

**6.7 Definition:** Sei  $b \in \mathbb{N}$ . Betrachtet wird die Partition  $S_1, \dots, S_b$  des Intervalls  $(0, 1]$  mit

$$S_j = \left( \frac{j-1}{b}, \frac{j}{b} \right] \text{ für alle } j = 1, \dots, b. \quad (6.4)$$

Daraus ergeben sich für alle  $\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D$  die Würfel

$$\mathfrak{S}_{\mathbf{j}} = S_{j_1} \times \dots \times S_{j_D} \subset (0, 1]^D. \quad (6.5)$$

Aus der Unterteilung von  $(0, 1]^D$  in gleichgroße Würfel werden zwei verschiedene Einteilungen für  $(0, \infty]^D$  bzw.  $(0, \infty)^D$  in Quader abgeleitet.

**6.8 Definition:** Sei für alle  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_D) \in (0, 1]^D$  die komponentenweise Transformation mit den Inversen der eindimensionalen Randverteilungen  $F_d^{-1}$  der Verteilungsfunktion  $F$  gegeben durch  $t(\mathbf{u}) = (t_1(u_1), \dots, t_D(u_D))$ , wobei für alle  $d = 1, \dots, D$  gilt

$$t_d : (0, 1] \rightarrow (0, \infty]$$

mit

$$t_d(u_d) = F_d^{-1}(u_d).$$

Die sich in den einzelnen Dimensionen  $d = 1, \dots, D$  ergebenden Intervalle werden mit

$$T_{j,d} = \left( F_d^{-1}\left(\frac{j-1}{b}\right), F_d^{-1}\left(\frac{j}{b}\right) \right] \text{ für alle } j = 1, \dots, b$$

bezeichnet. Für alle  $\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D$  resultieren daraus die Quader

$$\mathfrak{T}_{\mathbf{j}} = T_{j_1,1} \times \dots \times T_{j_D,D} \subset (0, \infty]^D. \quad (6.6)$$

Seien  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  Zufallsvektoren wie in (6.3). Sei für alle  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_D) \in (0, 1]^D$  die komponentenweise Transformation mit den verallgemeinerten Inversen  $F_{n,d}^{-1}$  der zugehörigen empirischen Verteilungsfunktionen gegeben durch  $\tilde{t}_n(\mathbf{u}) = (\tilde{t}_{n,1}(u_1), \dots, \tilde{t}_{n,D}(u_D))$ , wobei für alle  $d = 1, \dots, D$  gilt

$$\tilde{t}_{n,d} : (0, 1] \rightarrow (0, \infty)$$

mit

$$\tilde{t}_{n,d}(u_d) = F_{n,d}^{-1}(u_d).$$

Diese Transformation erzeugt in den einzelnen Dimensionen  $d = 1, \dots, D$  die Intervalle

$$T_{n,j,d} = \left( F_{n,d}^{-1}\left(\frac{j-1}{b}\right), F_{n,d}^{-1}\left(\frac{j}{b}\right) \right] \text{ für } j = 1, \dots, b$$

und damit für alle  $\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D$  die Quader

$$\mathfrak{T}_{n,\mathbf{j}} = T_{n,j_1,1} \times \dots \times T_{n,j_D,D} \subset (0, \infty)^D. \quad (6.7)$$

Nach Gleichung (6.1) ist offensichtlich, dass die Wahrscheinlichkeitsmasse, die  $C$  auf einen Würfel  $\mathcal{S}_{\mathbf{j}}$  für  $\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D$  legt, dieselbe ist wie die Masse, welche  $F$  auf den entsprechenden Quader  $\mathcal{T}_{\mathbf{j}}$  legt. Das heißt, es gilt für  $D$ -dimensionale Zufallsvektoren  $\mathbf{U} \sim C$  und  $\mathbf{X} \sim F$  für alle  $\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D$

$$P_C(\mathbf{U} \in \mathcal{S}_{\mathbf{j}}) = P_F(\mathbf{X} \in \mathcal{T}_{\mathbf{j}}).$$

Daher wird das folgende mehrdimensionale Histogramm als Dichteschätzer für die Copula  $C$  zur Stichprobe  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  aus (6.3) verwendet

$$c_n(\mathbf{u}) = \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D} I(\mathbf{u} \in \mathcal{S}_{\mathbf{j}}) \frac{1}{|\mathcal{S}_{\mathbf{j}}|} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,\mathbf{j}}) \text{ für alle } \mathbf{u} \in (0, 1]^D \quad (6.8)$$

mit  $|\mathcal{S}_{\mathbf{j}}| = \frac{1}{b^D}$ .

**6.9 Definition:** Zu Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_n$  bezeichnen  $Y_{1:n}, \dots, Y_{n:n}$  die *Ordnungsstatistiken* mit

$$Y_{1:n} \leq Y_{2:n} \leq \dots \leq Y_{n:n}.$$

Für  $D$ -dimensionale Zufallsvektoren  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  seien für alle  $d = 1, \dots, D$  die *Ordnungsstatistiken der  $d$ -ten Komponenten*

$$X_{1:n,d}, \dots, X_{n:n,d}$$

also zu  $X_{1,d}, \dots, X_{n,d}$ .

Für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  heißt die Zufallsvariable

$$r_{n,d}(i) = n \cdot F_{n,d}(X_{i,d}) \quad (6.9)$$

*Rang von  $X_{i,d}$  in der Stichprobe  $X_{1,d}, \dots, X_{n,d}$ .*

Für alle  $d \in \{1, \dots, D\}$  und alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  stehen die Zufallsvariable  $X_{i,d}$  und ihr Rang  $r_{n,d}(i)$  in folgendem Zusammenhang

$$X_{i,d} = X_{r_{n,d}(i):n,d}. \quad (6.10)$$

Für alle  $d \in \{1, \dots, D\}$  und alle  $u \in (0, 1]$  gilt für die empirische Verteilungsfunktion der  $d$ -ten Komponenten  $F_{n,d}$  von  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  nach (6.9) und (6.10)

$$F_{n,d}^{-1}(u) = F_{n,d}^{-1}\left(\frac{un}{n}\right) = X_{[un]:n,d}. \quad (6.11)$$

Um im weiteren Verlauf das Abzählen durch Verwendung der Ordnungsstatistiken zu vereinfachen, wird das folgende Resultat benötigt.

**6.10 Lemma:** Seien  $n, D \in \mathbb{N}$  und seien  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  unabhängige und identisch  $F$ -verteilte  $D$ -dimensionale Zufallsvektoren wie in (6.3). Ferner sei  $\mathcal{T}_{n,\mathbf{j}}$  mit  $\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D$  ein Quader, definiert wie in (6.7).

Dann gilt für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$

$\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,\mathbf{j}}$  genau dann, wenn für alle  $d = 1, \dots, D$  gilt  $[(j_d - 1)n/b] < r_{n,d}(i) \leq \lceil j_d n/b \rceil$ .

**Beweis:** Für alle  $i \in \{1, \dots, n\}$  und alle  $\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D$  gilt unter Verwendung der Gleichungen (6.11) und (6.10)

$$\begin{aligned}
& \mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,\mathbf{j}} \\
\Leftrightarrow & \text{für alle } d = 1, \dots, D \text{ gilt } X_{i,d} \in T_{n,j_d,d} = (F_{n,d}^{-1}((j_d - 1)/b), F_{n,d}^{-1}(j_d/b)] \\
\Leftrightarrow & \text{für alle } d = 1, \dots, D \text{ gilt} \\
& X_{i,d} \in \begin{cases} (0, X_{\lceil n/b \rceil:n,d}], & \text{falls } j_d = 1 \\ (X_{\lceil (j_d - 1)n/b \rceil:n,d}, X_{\lceil j_d n/b \rceil:n,d}], & \text{falls } j_d \in \{2, \dots, b\} \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \text{für alle } d = 1, \dots, D \text{ gilt} \\
& X_{r_{n,d}(i):n,d} \in \begin{cases} (0, X_{\lceil n/b \rceil:n,d}], & \text{falls } j_d = 1 \\ (X_{\lceil (j_d - 1)n/b \rceil:n,d}, X_{\lceil j_d n/b \rceil:n,d}], & \text{falls } j_d \in \{2, \dots, b\} \end{cases} \\
\Leftrightarrow & \text{für alle } d = 1, \dots, D \text{ gilt } [(j_d - 1)n/b] < r_{n,d}(i) \leq \lceil j_d n/b \rceil.
\end{aligned}$$

□

Die nächste Definition folgt der Darstellung von [Strelen; Nassaj, 2007]. Dabei wird das Intervall  $[0, 1]$  in Abschnitte der Länge  $\frac{1}{b}$  unterteilt, die Teilintervalle werden durchnummeriert und auf ihre jeweilige Nummer abgebildet.

**6.11 Definition:** Der *Up-Operator* wird definiert als

$$\begin{aligned}
\uparrow: [0, 1] & \rightarrow \{1, \dots, b\}, \\
\uparrow u & = \max\{1, \lceil ub \rceil\}.
\end{aligned}$$

Der *Down-Operator* wird definiert als

$$\begin{aligned}
\downarrow: [0, 1] & \rightarrow \{0, \dots, b - 1\}, \\
\downarrow u & = \uparrow u - 1.
\end{aligned}$$

**6.12 Lemma:** Für alle  $u \in (0, 1]$  und alle  $j \in \{1, \dots, b\}$  gilt

$$u \in S_j \Leftrightarrow j = \uparrow u.$$

**Beweis:** Für  $j \in \{1, \dots, b\}$  gilt nach Definition 6.7

$$\begin{aligned}
u \in S_j & \Leftrightarrow \frac{j-1}{b} < u \leq \frac{j}{b} \\
& \Leftrightarrow j-1 < ub \leq j \\
& \Leftrightarrow j = \uparrow u.
\end{aligned}$$

□

Für  $d = 1, \dots, D-1$  lassen sich die  $d$ -dimensionalen Marginaldichten von  $c_n$  aus (6.8) für alle  $(u_1, \dots, u_d) \in (0, 1]^d$  ausdrücken durch

$$\begin{aligned} & c_{n,d}(u_1, \dots, u_d) \\ &= \int_0^1 \cdots \int_0^1 c_n(u_1, \dots, u_d, u_{d+1}, \dots, u_D) du_{d+1} \cdots du_D \\ &= \frac{b^D}{n} \sum_{\substack{(j_1, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^D}} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 I(\mathbf{u} \in \mathfrak{S}_j) I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_d, j_{d+1}, \dots, j_D)}) du_{d+1} \cdots du_D, \end{aligned}$$

da nach Lemma 6.12 gilt  $u_{d'} \in \mathfrak{S}_{j_{d'}} \Leftrightarrow j_{d'} = \uparrow u_{d'}$ .

Im nächsten Schritt wird die stückweise Konstanz für den Übergang von den Integralen zu einer Summe ausgenutzt, und es ergibt sich

$$c_{n,d}(u_1, \dots, u_d) = \frac{b^d}{n} \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_d, j_{d+1}, \dots, j_D)}). \quad (6.12)$$

**6.13 Lemma:** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  unabhängige und identisch  $F$ -verteilte  $D$ -dimensionale Zufallsvektoren wie in (6.3). Sei  $b \in \mathbb{N}$  wie in (6.4).

Ist  $b$  ein Teiler von  $n$ , dann gilt für alle  $u \in (0, 1]$

$$c_{n,1}(u) = 1.$$

**Beweis:** Nach Darstellung (6.12) gilt für alle  $u \in (0, 1]$  mit denselben Argumenten wie in der Rechnung zum Beweis von Lemma 6.10 und unter Verwendung von Definition 6.11

$$\begin{aligned} c_{n,1}(u) &= \frac{b}{n} \sum_{\substack{(j_2, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-1}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u, j_2, \dots, j_D)}) \\ &= \frac{b}{n} \left| \left\{ \mathbf{X}_i : X_{i,1} \in T_{n, \uparrow u, 1} \text{ für } i = 1, \dots, n \right\} \right| \\ &= \frac{b}{n} \left| \left\{ \mathbf{X}_i : (\uparrow u - 1) \frac{n}{b} < r_{n,1}(i) \leq \uparrow u \cdot \frac{n}{b} \text{ für } i = 1, \dots, n \right\} \right| = A. \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung  $b$  ein Teiler von  $n$  ist, gelten

$$(\uparrow u - 1) \frac{n}{b} \in \{0, \dots, n-1\} \text{ und } \uparrow u \cdot \frac{n}{b} \in \{1, \dots, n\}.$$

Daher erfüllen genau diejenigen  $r_{n,1}(i)$  die geforderte Bedingung, welche in der Menge

$$\left\{ (\uparrow u - 1) \frac{n}{b} + 1, (\uparrow u - 1) \frac{n}{b} + 2, \dots, (\uparrow u - 1) \frac{n}{b} + \frac{n}{b} - 1, \uparrow u \cdot \frac{n}{b} \right\}$$

liegen. Die Mächtigkeit dieser Menge ist  $\frac{n}{b}$ . Damit gilt

$$A = \frac{b}{n} \cdot \frac{n}{b} = 1.$$

Also ist  $c_{n,1}(u) = 1$  für alle  $u \in (0, 1]$  erfüllt.  $\square$

Aus dem Dichteschätzer  $c_n$  aus (6.8) zur Stichprobe  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  aus (6.3) resultiert der folgende Schätzer  $C_n$  für die Copula für alle  $\mathbf{u} \in (0, 1]^D$

$$\begin{aligned} C_n(\mathbf{u}) &= \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_D} c_n(\mathbf{v}) dv_1 \cdots dv_D & (6.13) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D} \frac{1}{|\mathcal{S}_{\mathbf{j}}|} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, \mathbf{j}}) \int_0^{u_1} \cdots \int_0^{u_D} I(\mathbf{v} \in \mathcal{S}_{\mathbf{j}}) dv_1 \cdots dv_D \\ &= \frac{b^D}{n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, \mathbf{j}}) \left| \left( (0, u_1] \times \cdots \times (0, u_D] \right) \cap \mathcal{S}_{\mathbf{j}} \right|, \end{aligned}$$

wobei für alle  $\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D$  gilt

$$\begin{aligned} & \left| \left( (0, u_1] \times \cdots \times (0, u_D] \right) \cap \mathcal{S}_{\mathbf{j}} \right| \\ &= \prod_{d=1}^D \left| (0, u_d] \cap \left( \frac{j_d - 1}{b}, \frac{j_d}{b} \right] \right| \\ &= \prod_{d=1}^D \begin{cases} 0, & \text{falls } u_d \leq (j_d - 1)/b \\ u_d - (j_d - 1)/b, & \text{falls } (j_d - 1)/b < u_d < j_d/b \\ 1/b, & \text{falls } u_d \geq j_d/b. \end{cases} \end{aligned}$$

**6.14 Satz:** Sei  $n \in \mathbb{N}$  und seien  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$  unabhängige und identisch  $F$ -verteilte  $D$ -dimensionale Zufallsvektoren wie in (6.3). Sei  $b \in \mathbb{N}$  wie in (6.4).

Ist  $b$  ein Teiler von  $n$ , so ist die in (6.13) definierte Verteilungsfunktion  $C_n$  eine Copula.

**Beweis:** Es wird gezeigt, dass der in (6.8) definierte Schätzer  $c_n$  eine Dichte über  $(0, 1]^D$  ist, und dass die Dichten der eindimensionalen Randverteilungen von  $C_n$  Dichten der Gleichverteilung auf  $(0, 1]$  sind.

Nach Definition (6.8) gilt  $c_n(\mathbf{u}) \geq 0$  für alle  $\mathbf{u} \in (0, 1]^D$ . Da die Würfel  $\mathcal{S}_{\mathbf{j}}$  aus (6.5) für  $\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D$  eine Partition von  $(0, 1]^D$  bilden, folgt mit (6.8)

$$\begin{aligned} \int_{(0, 1]^D} c_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} &= \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D} \int_{\mathcal{S}_{\mathbf{j}}} c_n(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\ &= \frac{b^D}{n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D} \sum_{i=1}^n \int_{\mathcal{S}_{\mathbf{j}}} I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, \mathbf{j}}) d\mathbf{u} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{\mathbf{j} \in \{1, \dots, b\}^D} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, \mathbf{j}}) \\ &= \frac{1}{n} \cdot n = 1. \end{aligned}$$

Dabei gilt die vorletzte Gleichung nach der Definition (6.7) der Quader  $\mathcal{T}_{n, \mathbf{j}}$ . Also ist  $c_n$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte über  $(0, 1]^D$ . Nach Lemma 6.13 ist die eindimensionale Randverteilung zur ersten Komponente von  $c_n$  die Dichte einer Gleichverteilung. Dieses Resultat lässt sich auf die eindimensionale Randverteilung zu jeder beliebigen Komponente übertragen. Daher ist  $C_n$  nach Definition 6.1 eine Copula.  $\square$

Für den in Abschnitt 6.1.2 beschriebenen Algorithmus werden die bedingten Randverteilungen der Copula benötigt. Unter Verwendung der Beziehung (6.2) lassen sich diese für  $d = 2, \dots, D$  wie folgt ausdrücken. Seien  $u_1, \dots, u_{d-1} \in (0, 1]$  mit  $c_{n,d-1}(u_1, \dots, u_{d-1}) > 0$ . Dann gilt für  $C_{n,d}(\cdot | u_1, \dots, u_{d-1}) : (0, 1] \rightarrow [0, 1]$  nach den Gleichungen (6.2), (6.8) sowie (6.12) für alle  $u_d \in (0, 1]$

$$\begin{aligned}
C_{n,d}(u_d | u_1, \dots, u_{d-1}) &= \frac{\int_0^{u_d} c_{n,d}(u_1, \dots, u_{d-1}, u) du}{c_{n,d-1}(u_1, \dots, u_{d-1})} \\
&= \left[ \frac{b^d}{n} \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n \int_0^{u_d} I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, \uparrow u, j_{d+1}, \dots, j_D)}) du \right] \\
&\quad / \left[ \frac{b^{d-1}}{n} \sum_{\substack{(j_d, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d+1}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \right] \\
&= \frac{b^d}{n} \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{j_d=1}^{\lfloor u_d \rfloor} \frac{1}{b} I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \right. \\
&\quad \left. + \left( u_d - \lfloor u_d \rfloor \cdot \frac{1}{b} \right) I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, \lfloor u_d \rfloor + 1, \dots, j_D)}) \right] \\
&\quad / \left[ \frac{b^{d-1}}{n} \sum_{\substack{(j_d, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d+1}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \right]. \quad (6.14)
\end{aligned}$$

Im Fall  $d = 2$  ist hierbei nach Lemma 6.13 der Nenner gleich 1.

### 6.1.2 Ein Algorithmus zur Erzeugung eines Zufallsvektors mit geschätzter Copula

Vorgestellt wird hier ein Algorithmus, welcher zu einer Stichprobe von Zufallsvektoren die Copula schätzt. Im zweiten Schritt wird eine Realisierung eines Zufallsvektors mit dieser geschätzten Copula und gegebenen Marginalverteilungen erzeugt. Der Algorithmus stammt aus [Strelen; Nassaj, 2007]. Dort wird seine Komplexität sowohl in Bezug auf die Rechenzeit als auch auf den benötigten Speicherplatz analysiert.

Seien  $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n$   $D$ -dimensionale Zufallsvektoren und sei  $C_n : (0, 1]^D \rightarrow [0, 1]$  die zugehörige absolutstetige Copula mit Dichte  $c_n$ , definiert in (6.8) bzw. (6.13). Erzeugt werden soll eine Realisierung  $\mathbf{y}$  eines  $D$ -dimensionalen Zufallsvektors  $\mathbf{Y}$  mit stetigen und streng monoton wachsenden eindimensionalen Randverteilungen  $F_{\mathbf{Y},d}$  für  $d = 1, \dots, D$  und der Copula  $C_n$ .

Dazu wird zunächst eine Realisierung  $\mathbf{u}$  eines  $D$ -dimensionalen Zufallsvektors  $\mathbf{U}$  mit der Verteilung

$$\mathbf{U} \sim C_n$$

erzeugt. Aus  $\mathbf{u}$  wird im zweiten Schritt  $\mathbf{y}$  durch eine Transformation mit den Inversen der Randverteilungen  $F_{\mathbf{Y},d}$  berechnet.

Die Berechnung der Realisierung  $\mathbf{u}$  von  $\mathbf{U}$  erfolgt sukzessive komponentenweise aus den bedingten Randverteilungen der Copula unter Verwendung der Rosenblatt-Transformation, vgl. [Rosenblatt, 1952]. Zur Vereinfachung der Implementierung der Quantilfunktionen wird der Wert 0 für die simulierten Realisierungen der Komponenten ausgeschlossen, was bei stetigen Verteilungsfunktionen keine Einschränkung darstellt.

Zunächst wird die erste Komponente  $u_1$  als Realisierung einer gleichverteilten Zufallsvariablen  $U_1 \sim U(0, 1]$  simuliert. Für  $d = 2, \dots, D$  werden die Realisierungen  $u_d$  zu gegebenen Realisierungen  $u_1, \dots, u_{d-1}$  rekursiv berechnet. Dazu wird für  $d \in \{2, \dots, D\}$  jeweils eine Realisierung  $u$  einer gleichverteilten Zufallsvariablen  $U \sim U(0, 1]$  simuliert, welche unabhängig von allen vorhergehenden ist. Dann wird die Gleichung

$$u = C_{n,d}(u_d|u_1, \dots, u_{d-1}) \quad (6.15)$$

nach  $u_d$  gelöst.

Nach Gleichung (6.12) gilt

$$c_{n,d-1}(u_1, \dots, u_{d-1}) = 0 \Leftrightarrow \sum_{\substack{(j_d, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d+1}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) = 0,$$

das heißt, es liegen keine Vektoren der Stichprobe in den betrachteten Quadern. Dann muss folgen

$$P_{C_n}(\mathbf{U} \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) = 0 \text{ für alle } (j_d, \dots, j_D) \in \{1, \dots, b\}^{D-d+1}.$$

Also können die bisher berechneten Komponenten  $u_1, \dots, u_{d-1}$  nicht als Realisierung eines  $C_n$ -verteilten Zufallsvektors auftreten.

Gilt  $c_{n,d-1}(u_1, \dots, u_{d-1}) > 0$ , so kann Gleichung (6.15) unter Verwendung der Summen-  
darstellung (6.14) umgeformt werden in

$$\begin{aligned} u &= C_{n,d}(u_d|u_1, \dots, u_{d-1}) \\ \Leftrightarrow u_d &= \downarrow u_d \cdot \frac{1}{b} + \left[ \frac{u}{b} \sum_{\substack{(j_d, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d+1}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n \sum_{j_d=1}^{\downarrow u_d} \frac{1}{b} I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \right] \\ &\quad / \left[ \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n,(\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_d, j_{d+1}, \dots, j_D)}) \right], \end{aligned} \quad (6.16)$$

wobei  $\downarrow u_d \in \{0, \dots, b-1\}$  so gewählt wird, dass die Bedingungen

$$\begin{aligned}
& u \cdot \sum_{\substack{(j_d, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d+1}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \\
> & \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n \sum_{j_d=1}^{\downarrow u_d} I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \quad \text{und} \quad (6.17)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& u \cdot \sum_{\substack{(j_d, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d+1}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \\
\leq & \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n \sum_{j_d=1}^{\downarrow u_d+1} I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \quad (6.18)
\end{aligned}$$

erfüllt sind. Damit existiert eine eindeutig bestimmte Lösung  $u_d$  von Gleichung (6.15).

**6.15 Bemerkung:** Für  $d = 2, \dots, D$  sind die Bedingungen (6.17) und (6.18) begründet durch

$$\begin{aligned}
\uparrow u_d &= \lceil u_d b \rceil \\
&= \downarrow u_d + \left[ \left[ u \sum_{\substack{(j_d, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d+1}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n \sum_{j_d=1}^{\downarrow u_d} I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \right] \right] \\
&\quad \left/ \left[ \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_d, j_{d+1}, \dots, j_D)}) \right] \right] \\
&= \downarrow u_d + \lceil A \rceil.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Beziehung  $\uparrow u_d = \downarrow u_d + 1$  folgt  $0 < A \leq 1$ . Es sind äquivalent

$$\begin{aligned}
& A > 0 \\
\Leftrightarrow & u \cdot \sum_{\substack{(j_d, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d+1}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \\
& > \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n \sum_{j_d=1}^{\downarrow u_d} I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}).
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung entspricht Bedingung (6.17).

Ferner gilt mit  $\uparrow u_d = \downarrow u_d + 1$

$$\begin{aligned}
& A \leq 1 \\
& \Leftrightarrow u \cdot \sum_{\substack{(j_d, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d+1}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \\
& \quad - \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n \sum_{j_d=1}^{\downarrow u_d} I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \\
& \leq \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_d, j_{d+1}, \dots, j_D)}) \\
& \Leftrightarrow u \cdot \sum_{\substack{(j_d, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d+1}}} \sum_{i=1}^n I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}) \\
& \leq \sum_{\substack{(j_{d+1}, \dots, j_D) \\ \in \{1, \dots, b\}^{D-d}}} \sum_{i=1}^n \sum_{j_d=1}^{\downarrow u_d+1} I(\mathbf{X}_i \in \mathcal{T}_{n, (\uparrow u_1, \dots, \uparrow u_{d-1}, j_d, \dots, j_D)}).
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung entspricht Bedingung (6.18).

Damit sind die Bedingungen an die Wahl von  $\downarrow u_d$  begründet.

Die Komponenten von  $\mathbf{u}$  entstehen durch die Simulation von  $u_1$  und die rekursive Berechnung von  $u_d$  mit Gleichung (6.16) für  $d = 2, \dots, D$ .

Aus  $\mathbf{u}$  wird eine Realisierung  $\mathbf{y}$  des Zufallsvektors  $\mathbf{Y}$  mit den eindimensionalen Randverteilungen  $F_{\mathbf{Y}, d}$  berechnet, indem die Komponenten folgendermaßen transformiert werden

$$y_d = F_{\mathbf{Y}, d}^{-1}(u_d). \quad (6.19)$$

Nach Satz 6.5 besitzt  $\mathbf{Y}$  die geforderte Copula  $C_n$ .

## 6.2 Independent-Blocks-Bootstrap

Im Folgenden werden Bootstrap-Verfahren behandelt, die zur Bereitstellung kritischer Werte in Anpassungstests auf eine parametrische Verteilungsklasse dienen, wenn diese nicht direkt berechnet werden können. Es werden zwei verschiedene Datensituationen betrachtet. Im vorliegenden Abschnitt wird der von uns so bezeichnete *Independent-Blocks-Bootstrap* beschrieben. Dies ist ein Verfahren, bei welchem die Daten wie in Abschnitt 4 in Form von unabhängigen und identisch verteilten Blöcken vorliegen. In Abschnitt 6.3 sind die Daten unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariable.

### 6.2.1 Grundlagen

Sei  $\mathcal{F} = \{F(\cdot; \boldsymbol{\vartheta}) : \boldsymbol{\vartheta} \in \Theta\}$  eine parametrische Klasse von stetigen und streng monoton wachsenden Verteilungsfunktionen über dem Parameterraum  $\Theta \subset \mathbb{R}^d$  für  $d \in \mathbb{N}$ , welche die Voraussetzungen (4.3) und (4.4) erfüllt.

Wie in Definition 4.1 seien  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{N}$  fest gewählt,  $(b_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Folge von disjunkten, achsenparallelen Rechtecken der Größe  $\eta_1 \times \eta_2$  in  $\mathbb{Z}^2$  und  $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2$  die Anzahl der Gitterpunkte in einem Rechteck.

Es sei

$$\left\{ Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in \bigcup_{j \in \mathbb{N}} b_j \right\}$$

ein Zufallsfeld mit identisch  $F$ -verteilten Komponenten so, dass die Blöcke

$$B_j = \{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in b_j\}$$

der Folge  $(B_j)_{j \in \mathbb{N}}$  unabhängig und identisch verteilt sind.

Betrachtet wird das Testproblem

$$H_0 : F \in \mathcal{F} \text{ gegen } H_1 : F \notin \mathcal{F}. \quad (6.20)$$

Es sei  $(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_j)_{j \in \mathbb{N}}$  eine Schätzerfolge für den Parametervektor  $\boldsymbol{\vartheta}$  mit den Eigenschaften (4.5), (4.6) sowie (4.7).

Zu  $n \in \mathbb{N}$  wird die Stichprobe

$$B_1, \dots, B_n$$

betrachtet. Diese  $n$  Blöcke enthalten insgesamt  $n \cdot \eta$  Zufallsvariable. Die Ordnungsstatistiken zu diesen Zufallsvariablen werden mit

$$Z_{1:n\eta}, \dots, Z_{n\eta:n\eta}$$

bezeichnet. Für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt für die empirische Verteilungsfunktion  $F_n$  zu der Stichprobe  $B_1, \dots, B_n$

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\eta} \sum_{\mathbf{s} \in b_j} I(Z_{\mathbf{s}} \leq t) = \frac{1}{n\eta} \sum_{j=1}^{n\eta} I(Z_{j:n\eta} \leq t) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty].$$

Der empirische Prozess zum Stichprobenumfang  $n$  mit geschätztem Parametervektor  $\boldsymbol{\vartheta}$  ist

$$\hat{\alpha}_n(t) = \sqrt{n\eta}(F_n(t) - F(t; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty]$$

mit dem Schätzer  $\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n(\{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in b_j \text{ für } j \in \{1, \dots, n\}\})$ , wobei  $F(-\infty; \cdot) = 0$  sowie  $F(\infty; \cdot) = 1$  gesetzt wird.

Ist die Verteilungsfunktion  $F$  stetig und streng monoton wachsend, so lässt sich in der Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik

$$KS_n = KS_n(B_1, \dots, B_n) = \sup_{t \in [-\infty, \infty]} |\hat{\alpha}_n(t)| = \sqrt{n\eta} \cdot \sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)|$$

die Bildung des Supremums auf die Bildung des Maximums

$$KS_n = \sqrt{n\eta} \max_{1 \leq k \leq n\eta} \max \left\{ \left| \frac{k-1}{n\eta} - F(Z_{k:n\eta}; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n) \right|, \left| \frac{k}{n\eta} - F(Z_{k:n\eta}; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n) \right| \right\}$$

reduzieren.

Die Cramér-von-Mises-Teststatistik

$$\begin{aligned} CvM_n = CvM_n(B_1, \dots, B_n) &= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\alpha}_n(t)^2 F(dt; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n) \\ &= n\eta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \left( F_n(t) - F(t; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n) \right)^2 F(dt; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n) \end{aligned}$$

kann mit der folgenden Formel berechnet werden

$$CvM_n = \sum_{k=1}^{n\eta} \left( F(Z_{k:n\eta}; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n) - \frac{2k-1}{2n\eta} \right)^2 + \frac{1}{12n\eta}.$$

Im Folgenden steht die Bezeichnung  $T_n = T_n(B_1, \dots, B_n)$  entweder für die Kolmogorov-Smirnov- oder für die Cramér-von-Mises-Teststatistik.

Nach dem funktionalen Grenzwertsatz 4.3 konvergiert der empirische Prozess  $\hat{\alpha}_n$  unter den Voraussetzungen (4.3) und (4.4) an die Verteilungsklasse  $\mathcal{F}$  und den Voraussetzungen (4.5), (4.6) sowie (4.7) an die Schätzerfolge  $(\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gegen einen zentrierten Gaußprozess mit fast sicher stetigen Pfaden. Da dieser Grenzprozess von unbekanntem Parametern abhängt und somit die asymptotischen Verteilungen der Kolmogorov-Smirnov- oder der Cramér-von-Mises-Teststatistik nicht auswertbar sind, müssen kritische Werte für Anpassungstests auf andere Weise bestimmt werden. Dazu werden die in den Abschnitten 6.2 und 6.3 vorgestellten Bootstrap-Verfahren verwendet.

### 6.2.2 Daten-Stichprobe

Zu  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$  sei ein stationäres  $(m_1, m_2)$ -abhängiges Zufallsfeld

$$\{Z_{\mathbf{s}} : 1 \leq s_1 \leq N_1 \text{ und } 1 \leq s_2 \leq N_2\}$$

der Größe  $N_1 \times N_2$  mit  $F$ -verteilten Komponenten gegeben. Aus diesem soll zu  $\eta_1, \eta_2 \in \mathbb{N}$  mit  $\eta_1 \leq N_1$  und  $\eta_2 \leq N_2$  eine Daten-Stichprobe für die Anwendung des Independent-Blocks-Bootstrap erzeugt werden. Dies geschieht durch eine Zerlegung in unabhängige Blöcke der Größe  $\eta_1 \times \eta_2$ . Die Blöcke werden durch ihre Indizes  $\mathbf{j} \in J \subset \mathbb{Z}^2$  identifiziert, die aus der Indexmenge

$$J = \left\{ (1 + k_1(\eta_1 + m_1), 1 + k_2(\eta_2 + m_2)) \quad : \quad 0 \leq k_1 \leq \left\lfloor \frac{N_1 + m_1}{\eta_1 + m_1} \right\rfloor - 1 \right. \\ \left. \text{und } 0 \leq k_2 \leq \left\lfloor \frac{N_2 + m_2}{\eta_2 + m_2} \right\rfloor - 1 \right\}$$

stammen. Als Indexblöcke werden

$$b_{\mathbf{j}} = \{ \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^2 : j_1 \leq s_1 \leq j_1 + \eta_1 - 1 \text{ und } j_2 \leq s_2 \leq j_2 + \eta_2 - 1 \} \text{ für alle } \mathbf{j} \in J$$

verwendet. Mit diesen werden die folgenden Blöcke von Zufallsvariablen definiert

$$B_{\mathbf{j}} = \{Z_{\mathbf{s}} : \mathbf{s} \in b_{\mathbf{j}}\} \text{ für alle } \mathbf{j} \in J.$$

Für die Anzahl der erzeugten Blöcke gilt

$$n = |J| = \left\lfloor \frac{N_1 + m_1}{\eta_1 + m_1} \right\rfloor \cdot \left\lfloor \frac{N_2 + m_2}{\eta_2 + m_2} \right\rfloor.$$

Die Anzahl der Gitterpunkte innerhalb eines Blockes ist  $\eta = \eta_1 \cdot \eta_2$ . Aufgrund der  $(m_1, m_2)$ -Abhängigkeit der Zufallsfeldes sind die so konstruierten Blöcke  $B_j$  für alle  $j \in J$  unabhängig in  $\mathbf{j}$ . Die Stationarität des Zufallsfeldes impliziert die identische Verteilung der Blöcke. O.B.d.A. kann  $J$  mit der Menge  $\{1, \dots, n\}$  identifiziert werden. Dann lässt sich die aus diesen Blöcken bestehende *Daten-Stichprobe* mit dem *Daten-Stichprobenumfang*  $n$  schreiben als

$$B_1, \dots, B_n, \tag{6.21}$$

wobei es sich um unabhängige und identisch verteilte Blöcke der Größe  $\eta_1 \times \eta_2$  mit den eindimensionalen Randverteilungen  $F$  und der Copula  $C : [0, 1]^\eta \rightarrow [0, 1]$  handelt. Hier und im Folgenden wird zugunsten einer besseren Lesbarkeit abkürzend von der Copula eines Blockes gesprochen, wenn die Copula des in einen Zufallsvektor umgewandelten Blockes gemeint ist.

**6.16 Bemerkung:** In dem funktionalen Grenzwertsatz 4.3 wurde das Zufallsfeld so gewählt, dass es sich ohne Rest in unabhängige Blöcke zerlegen lässt. In dem hier beschriebenen Verfahren zur Erzeugung einer Daten-Stichprobe wird von einer Matrix der Größe  $N_1 \times N_2$  ausgegangen. Da die Matrixgröße nicht in Abhängigkeit der Blockgröße  $\eta_1 \times \eta_2$  gewählt wird, ist es möglich, dass bei der Zerlegung Teilblöcke am Rand der Matrix entstehen, die nicht in die Daten-Stichprobe einfließen. Dies wirkt sich nicht auf die asymptotische Verteilung des empirischen Prozesses aus, da weniger als  $N_1\eta_2 + N_2\eta_1$  Zufallsvariable weggelassen werden. Damit sind nach dem Satz von Cramér-Slutsky die asymptotischen Verteilungen mit und ohne diese Teilblöcke gleich.

### 6.2.3 Bootstrap-Stichproben

Zu der Daten-Stichprobe  $B_1, \dots, B_n$  werden *Bootstrap-Stichproben* erzeugt. Dazu wird aus der Daten-Stichprobe die geschätzte Copula  $C_n : [0, 1]^\eta \rightarrow [0, 1]$  aus (6.13) berechnet. Jede der Bootstrap-Stichproben hat den Bootstrap-Stichprobenumfang  $N^*$  und besteht aus den *Bootstrap-Variablen*

$$B_1^*, \dots, B_{N^*}^*.$$

Die Bootstrap-Variablen seien unter  $P(\cdot | B_1, \dots, B_n)$  unabhängige und identisch verteilte Blöcke der Größe  $\eta_1 \times \eta_2$ , also

$$B_j^* = \left[ B_{j; (k_1, k_2)}^* \right]_{\substack{1 \leq k_1 \leq \eta_1 \\ 1 \leq k_2 \leq \eta_2}} \text{ für alle } j = 1, \dots, N^*,$$

mit der Copula  $C_n : [0, 1]^\eta \rightarrow [0, 1]$  und den eindimensionalen Randverteilungen  $F(\cdot; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)$ . Die Bootstrap-Variablen werden unabhängig voneinander für  $j = 1, \dots, N^*$  mit dem in Abschnitt 6.1.2 vorgestellten Algorithmus erzeugt. Zunächst wird jeweils eine Realisierung  $\mathbf{u}$  eines  $\eta$ -dimensionalen Zufallsvektors mit der Verteilungsfunktion  $C_n$  simuliert. Daraus

wird ein Block  $B_j^*$  berechnet, der dieselbe Copula  $C_n$  und die Marginalien  $F(\cdot; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)$  besitzt. Der in einen Zufallsvektor umgewandelte Block  $B_j^*$  wird mit  $\widetilde{\mathbf{b}}_j^*$  bezeichnet.

Die Berechnung des Zufallsvektors  $\widetilde{\mathbf{b}}_j^*$  erfolgt komponentenweise für  $d = 1, \dots, \eta$  durch die Transformation der eindimensionalen Randverteilungen (6.19) als Lösungen der Gleichungen

$$\begin{aligned}\widetilde{b}_{j;d}^* &= F^{-1}(u_d; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n) \\ \Leftrightarrow u_d &= F(\widetilde{b}_{j;d}^*; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n).\end{aligned}$$

Dabei gilt die Äquivalenz aufgrund der Stetigkeit und der strengen Monotonie der Verteilungsfunktion  $F(\cdot; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)$ . Diese beiden Eigenschaften liefern die Existenz und die Eindeutigkeit der Lösung.

**6.17 Definition:** Die *empirische Verteilungsfunktion der Bootstrap-Variablen* ist gegeben durch

$$F_{N^*}^*(t) = \frac{1}{N^*} \sum_{j=1}^{N^*} \frac{1}{\eta} \sum_{(k_1, k_2)=(1,1)}^{(\eta_1, \eta_2)} I(B_{j;(k_1, k_2)}^* \leq t) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty].$$

Der *Bootstrap-Schätzwert* des Schätzers des Parametervektors  $\boldsymbol{\vartheta}$  wird bezeichnet mit

$$\widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_{N^*}^* = \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_{N^*}^*(B_1^*, \dots, B_{N^*}^*).$$

Es seien

$$\widehat{\alpha}_{N^*}^*(t) = \sqrt{N^* \eta} \cdot \left( F_{N^*}^*(t) - F(t; \widehat{\boldsymbol{\vartheta}}_{N^*}^*) \right) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty]$$

der *Bootstrap-Prozess mit geschätztem Parametervektor*  $\boldsymbol{\vartheta}$  und

$$T_{N^*}^* = T_{N^*}^*(B_1^*, \dots, B_{N^*}^*)$$

der *Bootstrap-Wert der Teststatistik*.

Ferner sei

$$H_{N^*}^*(t) = P(T_{N^*}^* \leq t | B_1, \dots, B_n) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty]$$

und  $H_{N^*}^{*-1}$  die zugehörige Quantilfunktion.

Zu einer Daten-Stichprobe  $B_1, \dots, B_n$  wie in Gleichung (6.21) mit der Teststatistik  $T_n$  und dem Testproblem (6.20) ist der *Independent-Blocks-Bootstrap-Test zum Niveau  $\alpha_{test}$*  gegeben durch die Entscheidungsvorschrift

$$H_0 : F \in \mathcal{F} \text{ verwerfen} \Leftrightarrow T_n > H_{N^*}^{*-1}(1 - \alpha_{test}). \quad (6.22)$$

**6.18 Bemerkung:** Für den Independent-Blocks-Bootstrap-Test (6.22) bleibt der Nachweis dafür, dass es sich um einen asymptotischen Test zum Niveau  $\alpha_{test}$  handelt, offen. Dafür müsste gezeigt werden, dass der Bootstrap-Prozess mit geschätztem Parametervektor dieselbe Grenzverteilung besitzt wie der empirische Prozess mit geschätztem Parametervektor auf Datenebene. Die Verteilungskonvergenz des letzteren gegen einen zentrierten

Gaußprozess mit fast sicher stetigen Pfaden wurde im funktionalen Grenzwertsatz 4.3 nachgewiesen. Der Beweis, dass der Bootstrap-Prozess mit geschätztem Parametervektor gegen denselben Grenzprozess konvergiert, wird in dieser Arbeit nicht geführt.

In Abschnitt 8.1 werden Simulationen zu den auf dem Independent-Blocks-Bootstrap basierenden Anpassungstests durchgeführt, in denen unter anderem überprüft wird, ob das nominelle Niveau  $\alpha_{test}$  für endliche Stichprobenumfänge eingehalten wird oder nicht. Da der Konstistenzbeweis für den Independent-Blocks-Bootstrap nicht geführt wurde, haben diese Simulationen experimentellen Charakter.

#### 6.2.4 Monte-Carlo-Verfahren

Ist eine analytische Berechnung des Quantils  $H_{N^*}^{*-1}$  aus der Entscheidungsvorschrift (6.22) des Independent-Blocks-Bootstrap-Tests nicht möglich, wird das Monte-Carlo-Verfahren angewendet, um eine Approximation des Quantilwertes zu erzeugen.

Die Vorgehensweise beim Monte-Carlo-Verfahren ist die folgende: Zu einer Daten-Stichprobe  $B_1, \dots, B_n$  wie in (6.21) wird die Teststatistik  $T_n$  berechnet. Als nächstes werden zum *Monte-Carlo-Stichprobenumfang*  $N_{MC}$  unabhängige Bootstrap-Stichproben mit dem Bootstrap-Stichprobenumfang  $N^*$

$$B_1^*(j), \dots, B_{N^*}^*(j) \text{ für } j = 1, \dots, N_{MC}$$

erzeugt. In jeder der Bootstrap-Stichproben sind die Bootstrap-Variablen unabhängig und identisch verteilt mit der aus der Daten-Stichprobe geschätzten Copula  $C_n$  und den Marginalien  $F(\cdot; \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_n)$ .

Berechnet werden die  $N_{MC}$  *Bootstrap-Schätzwerte*

$$\hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{N^*}^*(j) = \hat{\boldsymbol{\vartheta}}_{N^*}(B_1^*(j), \dots, B_{N^*}^*(j)) \text{ für } j = 1, \dots, N_{MC}$$

und die *Bootstrap-Werte der Teststatistik*

$$T_{N^*}^*(j) = T_{N^*}^*(B_1^*(j), \dots, B_{N^*}^*(j)) \text{ für } j = 1, \dots, N_{MC}.$$

Das Ergebnis sind  $N_{MC}$  unter  $P(\cdot | B_1, \dots, B_n)$  unabhängige Realisierungen der Teststatistik. Damit ist die zu den Realisierungen  $T_{N^*}^*(1), \dots, T_{N^*}^*(N_{MC})$  gehörige empirische Verteilungsfunktion

$$G_{N_{MC}}^*(t) = \frac{1}{N_{MC}} \sum_{j=1}^{N_{MC}} I(T_{N^*}^*(j) \leq t) \text{ für alle } t \in [-\infty, \infty]$$

ein Schätzer für die wahre Verteilungsfunktion von  $T_{N^*}^*$ . Deshalb wird für das Testniveau  $\alpha_{test}$  das Quantil  $G_{N_{MC}}^{*-1}(1 - \alpha_{test})$  als Approximation für  $H_{N^*}^{*-1}(1 - \alpha_{test})$  verwendet. Für dieses Quantil gilt

$$G_{N_{MC}}^{*-1}(1 - \alpha_{test}) = T_{N^*}^*([N_{MC}(1 - \alpha_{test})] : N_{MC}),$$

wobei  $T_{N^*}^*([N_{MC}(1 - \alpha_{test})] : N_{MC})$  die  $[N_{MC}(1 - \alpha_{test})]$ -te Ordnungsstatistik der Bootstrap-Werte der Teststatistik ist.

Das Quantil  $G_{N_{MC}}^{*-1}(1 - \alpha_{test})$  ist ein Bootstrap-Quantil für den *Kolmogorov-Smirnov*- bzw. den *Cramér-von-Mises-Anpassungstest auf die Verteilungsklasse  $\mathcal{F}$  mit Bootstrap*

Quantil für unabhängige Blöcke (6.20) zum Niveau  $\alpha_{test}$ . Zu einer Realisierung der Daten-Stichprobe  $B_1, \dots, B_n$  mit dem Wert der beobachteten Teststatistik

$$T_n^{obs} = T_n^{obs}(B_1, \dots, B_n)$$

hat dieser Test die folgende Entscheidungsregel

$$H_0 \text{ zum Niveau } \alpha_{test} \text{ verwerfen} \Leftrightarrow T_n^{obs} \geq G_{N_{MC}}^{*-1}(1 - \alpha_{test}). \quad (6.23)$$

Für den p-Wert der Daten-Stichprobe gilt

$$p = P_{H_0}(T_n \geq T_n^{obs}) = 1 - F_{T_n}(T_n^{obs}).$$

In diesem Ausdruck lässt sich die theoretische Verteilungsfunktion der Teststatistik  $F_{T_n}$  der Daten-Stichprobe durch die einer Bootstrap-Stichprobe annähern. Das führt zu

$$1 - F_{T_{N^*}}(T_n^{obs}).$$

Wird nun noch die Verteilungsfunktion durch die zugehörige empirische Verteilungsfunktion  $G_{N_{MC}}^*$  der Realisierungen  $T_{N^*}^*(1), \dots, T_{N^*}^*(N_{MC})$  ersetzt, so ergibt sich als Approximation für den p-Wert die relative Häufigkeit

$$1 - G_{N_{MC}}^*(T_n^{obs}) = \frac{1}{N_{MC}} \left| \left\{ j \in \{1, \dots, N_{MC}\} : T_{N^*}^*(j) \geq T_n^{obs} \right\} \right| = p^*, \quad (6.24)$$

der *Bootstrap-p-Wert*.

Mit dem Bootstrap-p-Wert lässt sich für das Testproblem (6.20) eine Entscheidungsregel formulieren, die zur Entscheidungsregel (6.23) äquivalent ist

$$H_0 \text{ zum Niveau } \alpha_{test} \text{ verwerfen} \Leftrightarrow p^* \leq \alpha_{test}. \quad (6.25)$$

### 6.3 IID-Bootstrap

Mit *IID-Bootstrap* wird von uns das klassische Bootstrap-Verfahren bezeichnet, welches zu einer aus unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen bestehenden Daten-Stichprobe Bootstrap-Stichproben erzeugt, deren Bootstrap-Variablen ebenfalls unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen sind. Die Beschreibung des IID-Bootstrap entspricht der des Independent-Blocks-Bootstrap mit  $\eta_1 = \eta_2 = 1$ . Daher wird für den IID-Bootstrap keine gesonderte Notation eingeführt. Die unabhängigen Blöcke reduzieren sich auf einzelne Zufallsvariable, welche unabhängig und identisch verteilt sind. Die Erzeugung der Bootstrap-Stichproben vereinfacht sich, da die Copula nicht mehr benötigt wird.

Im Fall von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen und geschätzten Parametern wurde die Konsistenz des Bootstrap-Verfahrens von [Stute et. al., 1993] und von [Babu; Rao, 2004] nachgewiesen.

### 6.4 Quantil-Quantil-Plot

Zur Beurteilung der Eigenschaften des Anpassungstests (6.25) bei endlichem Stichprobenumfang sind unabhängig von einem Konsistenzbeweis, wie bereits in Bemerkung 6.18 erwähnt, Simulationen notwendig. Für die Klasse der K-Verteilungen finden sich diese

Simulationsergebnisse in Abschnitt 8.1. Die Ergebnisse werden mit Hilfe der hier vorgestellten Quantil-Quantil-Plots visualisiert.

Insgesamt wird bei einer solchen Simulation das entsprechende Bootstrap-Verfahren für  $N_D$  Daten-Stichproben durchgeführt. Mit Gleichung (6.24) ergeben sich daraus ebenso viele Bootstrap-p-Werte

$$p_j^* \text{ für } j = 1, \dots, N_D.$$

Aufgrund der Stetigkeit der theoretischen Verteilungsfunktion der Teststatistik  $F_{T_n}$  sind die theoretischen p-Werte von Daten-Stichproben unter der Hypothese  $U(0, 1)$ -verteilt, also sollte dies auch für die Bootstrap-p-Werte gelten.

Das Verhalten der Bootstrap-p-Werte kann mit einem theoretischen Quantil-Quantil-Plot überprüft werden, bei dem die empirische Verteilungsfunktion  $\mathcal{G}_{N_D}^*$  von  $p_1^*, \dots, p_{N_D}^*$  mit der Verteilungsfunktion  $U(0, 1)$  verglichen wird. Geplottet werden dabei die Punkte

$$\left( U_{(0,1)}^{-1} \left( \frac{j}{N_D} \right); \mathcal{G}_{N_D}^{*-1} \left( \frac{j}{N_D} \right) \right) = \left( \frac{j}{N_D}; p_{j:N_D}^* \right) \text{ für } j = 1, \dots, N_D$$

mit den Ordnungsstatistiken  $p_{1:N_D}^*, \dots, p_{N_D:N_D}^*$  der Bootstrap-p-Werte.

Der Quantil-Quantil-Plot ist ein visueller Anpassungstest darauf, ob die Bootstrap-p-Werte auf dem Intervall  $(0, 1)$  gleichverteilt sind, wie es unter der Hypothese erwartet wird. Ist dies der Fall, liegen die geplotteten Punkte in der Nähe der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten.

## 7 Ein Algorithmus zur Erzeugung von $(m_1, m_2)$ -abhängigen Zufallsfeldern mit K-verteiltern Marginalien

Zu einer gegebenen K-Verteilung  $K(\cdot; a, \alpha)$  mit den Parametern  $a, \alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  soll ein stationäres  $(m_1, m_2)$ -abhängiges Zufallsfeld  $\mathbf{Y}$  als Matrix der Größe  $N_1 \times N_2$  mit  $K(\cdot; a, \alpha)$ -verteilten Marginalien simuliert werden. Dabei seien  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  sowie  $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_0$ . Die Einträge der Matrix  $\mathbf{Y}$  werden nach den Gitterpunkten des Gitters  $\mathcal{G}_1 = \{(2k, 2l) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq k \leq N_1 \text{ und } 1 \leq l \leq N_2\}$  indiziert, also ist

$$\mathbf{Y} = [Y_{2k,2l}]_{\substack{k=1,\dots,N_1 \\ l=1,\dots,N_2}}$$

Für die Erzeugung des Zufallsfeldes  $\mathbf{Y}$  wird im ersten Schritt auf einem weiteren Gitter  $\mathcal{G}_2 = \{(k, l) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq k \leq 2N_1 + 2m_1 - 1 \text{ und } 1 \leq l \leq 2N_2 + 2m_2 - 1\}$  ein Zufallsfeld

$$\mathbf{N} = [N_{k,l}]_{\substack{k=1,\dots,2N_1+2m_1-1 \\ l=1,\dots,2N_2+2m_2-1}}$$

mit unabhängigen und identisch standardnormalverteilten Komponenten simuliert. Die Beziehung zwischen den Gittern  $\mathcal{G}_1$  und  $\mathcal{G}_2$  ist in Abbildung 18 graphisch dargestellt.

Alle für  $\mathbf{N}$  zusätzlich benötigten Zeilen und Spalten werden unterhalb bzw. rechts des Gitters  $\mathcal{G}_1$  von  $\mathbf{Y}$  angefügt, um eine Abhängigkeit der Indizes der Matrix  $\mathbf{Y}$  von  $m_1$  und  $m_2$  zu vermeiden. In den folgenden Berechnungen werden alle Indizes von  $\mathbf{N}$  modulo  $2N_1 + 2m_1 - 1$  bei Zeilen und modulo  $2N_2 + 2m_2 - 1$  bei Spalten betrachtet, ohne dass dies explizit im Index vermerkt wird. Ebenso werden die Indizes von  $\mathbf{Y}$  modulo  $2N_1$  bei Zeilen und modulo  $2N_2$  bei Spalten gesehen.

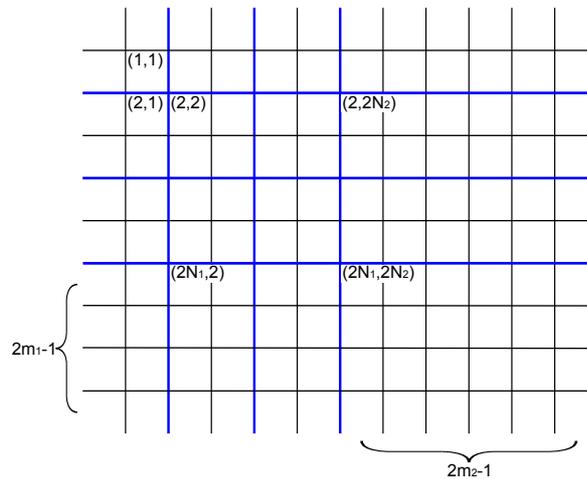


Abbildung 18: Gitter  $\mathcal{G}_1$  (blau fett), welches zu den Matrizen  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$  gehört und Gitter  $\mathcal{G}_2$  (blau und schwarz), welches zu der Matrix  $\mathbf{N}$  gehört.

Aus der Matrix  $\mathbf{N}$  wird eine  $(m_1, m_2)$ -abhängige Matrix  $\mathbf{X}$  berechnet, die wie  $\mathbf{Y}$  auf dem Gitter  $\mathcal{G}_1$  indiziert ist, also

$$\mathbf{X} = [X_{2k,2l}]_{\substack{k=1,\dots,N_1 \\ l=1,\dots,N_2}}$$

mit Indizes modulo  $2N_1$  bei Zeilen und modulo  $2N_2$  bei Spalten.

Dazu werden Wichtungskoeffizienten

$$a_{k',l'} \text{ für } k' = -m_1, \dots, m_1 \text{ und } l' = -m_2, \dots, m_2$$

gewählt. O.B.d.A. wird  $a_{k',l'} \geq 0$  für alle  $k' = -m_1, \dots, m_1$  und  $l' = -m_2, \dots, m_2$  sowie  $a_{0,0} = 1$  gefordert. Die Einträge von  $\mathbf{X}$  ergeben sich, wie in Abbildung 19 dargestellt, durch Bildung der gewichteten Summen

$$X_{2k,2l} = \left( \sum_{k'=-m_1}^{m_1} \sum_{l'=-m_2}^{m_2} a_{k',l'}^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \sum_{k'=2k-m_1}^{2k+m_1} \sum_{l'=2l-m_2}^{2l+m_2} a_{k'-2k,l'-2l} N_{k',l'}$$

für alle  $k = 1, \dots, N_1$  und  $l = 1, \dots, N_2$ . (7.1)

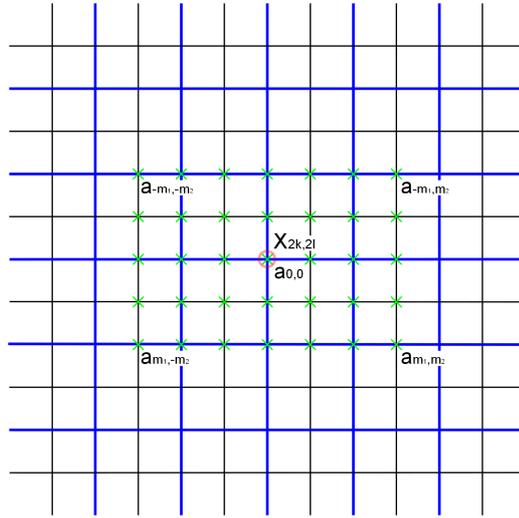


Abbildung 19:  $X_{2k,2l}$  (rot  $\circ$ ) mit den einfließenden Komponenten von  $\mathbf{N}$  (grün  $\times$ ), gewichtet mit den Koeffizienten  $a_{k',l'}$  mit  $k' = -m_1, \dots, m_1$  und  $l' = -m_2, \dots, m_2$ .

Die Komponenten von  $\mathbf{X}$  sind standardnormalverteilt

$$X_{2k,2l} \sim N(0, 1) \text{ für alle } k = 1, \dots, N_1 \text{ und } l = 1, \dots, N_2.$$

Die Matrix  $\mathbf{X}$  ist als lineares Bild der multivariat normalverteilten Matrix  $\mathbf{N}$  multivariat normalverteilt. Die Stationarität von  $\mathbf{N}$  und die Berechnungsvorschrift (7.1) implizieren die Stationarität von  $\mathbf{X}$ . Außerdem ist  $\mathbf{X}$  nach Konstruktion  $(m_1, m_2)$ -abhängig, denn in zwei Einträge  $X_{2k,2l}$  und  $X_{2\tilde{k},2\tilde{l}}$  mit  $|2k - 2\tilde{k}| > 2m_1$  oder  $|2l - 2\tilde{l}| > 2m_2$ , was auf dem Gitter  $\mathcal{G}_1$  einem Abstand von mehr als  $m_1$  in Zeilen- oder mehr als  $m_2$  in Spaltenrichtung entspricht, fließen disjunkte Blöcke der Matrix  $\mathbf{N}$  ein. Die Unabhängigkeit der Einträge von  $\mathbf{N}$  impliziert die Unabhängigkeit von  $X_{2k,2l}$  und  $X_{2\tilde{k},2\tilde{l}}$ .

Für die Kovarianzen der Einträge von  $\mathbf{X}$  gilt für  $k, l \geq 0$  nach Gleichung (7.1)

$$\begin{aligned} & \text{cov}(X_{0,0}, X_{2k,2l}) \\ = & \left[ \sum_{k'=-m_1}^{m_1} \sum_{l'=-m_2}^{m_2} a_{k',l'}^2 \right]^{-1} \sum_{k'=-m_1}^{m_1} \sum_{l'=-m_2}^{m_2} \sum_{\tilde{k}=2k-m_1}^{2k+m_1} \sum_{\tilde{l}=2l-m_2}^{2l+m_2} a_{k',l'} a_{\tilde{k}-2k,\tilde{l}-2l} E(N_{k',l'} N_{\tilde{k},\tilde{l}}). \end{aligned}$$

(7.2)

Es gilt für  $2k > 2m_1$  oder  $2l > 2m_2$

$$\text{cov}(X_{0,0}, X_{2k,2l}) = 0 \quad (7.3)$$

und für  $0 \leq 2k \leq 2m_1$  und  $0 \leq 2l \leq 2m_2$  gilt

$$\text{cov}(X_{0,0}, X_{2k,2l}) = \left[ \sum_{k'=-m_1}^{m_1} \sum_{l'=-m_2}^{m_2} a_{k'l'}^2 \right]^{-1} \sum_{\tilde{k}=2k-m_1}^{m_1} \sum_{\tilde{l}=2l-m_2}^{m_2} a_{\tilde{k},\tilde{l}} a_{\tilde{k}-2k,\tilde{l}-2l}. \quad (7.4)$$

**7.1 Lemma:** Seien  $m_1, m_2, k, l \in \mathbb{N}_0$ . Für  $0 \leq 2k \leq 2m_1$  und  $0 \leq 2l \leq 2m_2$  gilt für das Zufallsfeld  $\mathbf{X}$  aus Gleichung (7.1) mit  $N_1 \geq 2m_1$  oder  $N_2 \geq 2m_2$

$$|\text{cov}(X_{0,0}, X_{2k,2l})| < 1.$$

**Beweis:** Für die standardnormalverteilten Einträge von  $\mathbf{X}$  gilt

$$|\text{cov}(X_{0,0}, X_{2k,2l})| = |\text{cor}(X_{0,0}, X_{2k,2l})| \leq 1.$$

Angenommen, es wäre  $|\text{cov}(X_{0,0}, X_{2k,2l})| = 1$ , dann würde gelten

$$X_{0,0} = cX_{2k,2l} \text{ fast sicher}$$

für ein  $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , wobei  $c$  durch die gemeinsame Verteilung von  $X_{0,0}$  und  $X_{2k,2l}$  bestimmt wäre. Aufgrund der Stationarität von  $\mathbf{X}$  wäre dann auch

$$X_{2k,2l} = cX_{4k,4l} \text{ fast sicher.}$$

Also würde folgen

$$X_{0,0} = cX_{2k,2l} = c^2X_{4k,4l} \text{ fast sicher.}$$

Sukzessives Anwenden dieses Argumentes würde zu der Gleichung

$$X_{0,0} = c^b X_{2bk,2bl} \text{ fast sicher für alle } 1 \leq b \leq \min \left\{ \left\lfloor \frac{N_1}{k} \right\rfloor, \left\lfloor \frac{N_2}{l} \right\rfloor \right\}$$

führen.

Dies ist ein Widerspruch dazu, dass  $\mathbf{X}$  eine  $(m_1, m_2)$ -abhängige Matrix ist, denn für hinreichend groß gewähltes  $b$  würde folgen, dass  $X_{0,0}$  zu sich selbst unabhängig und damit eine Konstante sein müsste. Dabei besteht die Möglichkeit,  $b$  so groß zu wählen, dass die beiden Zufallsvariablen  $X_{0,0}$  und  $X_{2bk,2bl}$  voneinander unabhängig sind, aufgrund der Voraussetzung an die Größe des Zufallsfeldes  $N_1 \geq 2m_1$  oder  $N_2 \geq 2m_2$ .

Also gilt  $|\text{cov}(X_{0,0}, X_{2k,2l})| < 1$ . □

Um eine  $K(\cdot; a, \alpha)$ -verteilte Zufallsvariable  $Y$  zu erhalten, wird zunächst eine auf dem Intervall  $(0, 1)$  gleichverteilte Zufallsvariable  $U$  benötigt. Aus dieser kann  $Y$  mit Hilfe der zugehörigen Quantilfunktion  $K^{-1}(\cdot; a, \alpha)$  berechnet werden als

$$Y = K^{-1}(U; a, \alpha).$$

Da  $K(\cdot; a, \alpha)$  streng monoton wachsend ist, ist diese Gleichung äquivalent zu

$$U = K(Y; a, \alpha) = \int_0^Y f(t; a, \alpha) dt$$

mit der in (5.19) definierten Wahrscheinlichkeitsdichte  $f(\cdot; a, \alpha)$  der K-Verteilung. Aufgrund der Stetigkeit der Verteilungsfunktion  $K(\cdot; a, \alpha)$  ist die Existenz einer Lösung gesichert. Die strenge Monotonie von  $K(\cdot; a, \alpha)$  liefert die Eindeutigkeit dieser Lösung.

Unter Verwendung dieses Konzeptes für die Transformation einzelner Zufallsvariablen werden die Einträge der Matrix  $\mathbf{Y}$  aus den entsprechenden Einträgen der Matrix  $\mathbf{X}$  als Lösungen der Gleichungen

$$K(Y_{2k,2l}; a, \alpha) = \Phi(X_{2k,2l}) \text{ für alle } k = 1, \dots, N_1 \text{ und } l = 1, \dots, N_2 \quad (7.5)$$

berechnet. Dabei bezeichnet  $\Phi$  die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Wegen  $\Phi(X_{2k,2l}) \sim U(0, 1)$  und aus der vorhergehenden Argumentation folgt

$$Y_{2k,2l} \sim K(\cdot; a, \alpha) \text{ für alle } k = 1, \dots, N_1 \text{ und } l = 1, \dots, N_2.$$

Da die Transformation (7.5) als deterministische Funktion die Abhängigkeitsstruktur erhält, ist auch  $\mathbf{Y}$  eine  $(m_1, m_2)$ -abhängige Matrix. Es werden unabhängige Zufallsvariable  $X_{2k,2l}, X_{\tilde{2k},\tilde{2l}}$  in unabhängige  $Y_{2k,2l}, Y_{\tilde{2k},\tilde{2l}}$  und abhängige Zufallsvariable in abhängige überführt. Die Stationarität der Matrix  $\mathbf{X}$  impliziert die Stationarität von  $\mathbf{Y}$ .

Im Folgenden werden die Kovarianzen der Einträge von  $\mathbf{Y}$  berechnet. Diese existieren aufgrund der Ungleichung von Cauchy-Schwarz und der Endlichkeit der Momente der K-Verteilung. Zunächst wird Gleichung (7.5) geschrieben als

$$Y_{2k,2l} = T(X_{2k,2l}) \text{ für alle } k = 1, \dots, N_1 \text{ und } l = 1, \dots, N_2, \quad (7.6)$$

wobei die Funktion  $T$  definiert ist als

$$T = K^{-1}(\cdot; a, \alpha) \circ \Phi : \mathbb{R} \rightarrow (0, \infty).$$

Es gilt für alle  $k, l \geq 0$  nach Gleichung (7.6) unter Verwendung der Stationarität von  $\mathbf{X}$  und  $\mathbf{Y}$

$$\text{cov}(Y_{0,0}, Y_{2k,2l}) = E(T(X_{0,0})T(X_{2k,2l})) - E(Y_{0,0})^2. \quad (7.7)$$

Für die Betrachtung des ersten Summanden wird die gemeinsame Verteilung von  $X_{0,0}$  und  $X_{2k,2l}$  benötigt. Dabei handelt es sich um eine zweidimensionale Normalverteilung

$$(X_{0,0}, X_{2k,2l})^T \sim N_2(\mathbf{0}, \Sigma)$$

mit der Kovarianzmatrix

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \gamma_{2k,2l} \\ \gamma_{2k,2l} & 1 \end{bmatrix}$$

mit den Einträgen  $\gamma_{2k,2l} = \text{cov}(X_{0,0}, X_{2k,2l})$  aus Gleichung (7.3) beziehungsweise (7.4). Nach Lemma 7.1 ist, sofern  $N_1 \geq 2m_1$  oder  $N_2 \geq 2m_2$  gelten, die Determinante der Kovarianzmatrix ungleich Null, die Kovarianzmatrix ist also nicht ausgeartet. Es folgt

$$\begin{aligned} E(T(X_{0,0})T(X_{2k,2l})) &= \int_{\mathbb{R}^2} T(x)T(y)f_{N_2(\mathbf{0},\Sigma)}(x,y)dxdy \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\gamma_{2k,2l}^2}} \int_{\mathbb{R}^2} T(x)T(y)e^{-\frac{x^2-2\gamma_{2k,2l}xy+y^2}{2(1-\gamma_{2k,2l}^2)}} dxdy. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Der zweite Summand auf der rechten Seite von (7.7) lässt sich nach der Gleichung für die Momente der K-Verteilung (5.31) schreiben als

$$E(Y_{0,0})^2 = 4a^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \alpha)^2 \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{L}{2})^2}{\Gamma(\alpha)^2 \Gamma(\frac{L}{2})^2}. \quad (7.9)$$

Insgesamt wird die Kovarianz aus den Gleichungen (7.7), (7.8) und (7.9) berechnet. Im Fall  $2k > 2m_1$  oder  $2l > 2m_2$  sind  $X_{0,0}$  und  $X_{2k,2l}$  unabhängig. Dies impliziert die Unabhängigkeit von  $Y_{0,0}$  und  $Y_{2k,2l}$ .

Im Fall  $2k \leq 2m_1$  und  $2l \leq 2m_2$  gilt

$$\begin{aligned} &\text{cov}(Y_{0,0}, Y_{2k,2l}) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\gamma_{2k,2l}^2}} \int_{\mathbb{R}^2} T(x)T(y)e^{-\frac{x^2-2\gamma_{2k,2l}xy+y^2}{2(1-\gamma_{2k,2l}^2)}} dxdy - 4a^2 \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + \alpha)^2 \Gamma(\frac{1}{2} + \frac{L}{2})^2}{\Gamma(\alpha)^2 \Gamma(\frac{L}{2})^2}, \end{aligned} \quad (7.10)$$

wobei  $\gamma_{2k,2l} \neq 0$  gilt und  $|\gamma_{2k,2l}| < 1$  nach Lemma 7.1 erfüllt ist.

Die Kovarianzen der Einträge von  $\mathbf{Y}$  lassen sich demnach aus denen der entsprechenden Einträge von  $\mathbf{X}$  berechnen und hängen somit von den Wichtungskoeffizienten  $a_{k,l}$  ab.

Der beschriebene Algorithmus erzeugt ein stationäres  $(m_1, m_2)$ -abhängiges Zufallsfeld  $\mathbf{Y}$  als Matrix der Größe  $N_1 \times N_2$  mit identisch K-verteiltern Komponenten zu der vorgegebenen Marginalverteilung  $K(\cdot; a, \alpha)$  mit den Parametern  $a, \alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$ .



## 8 Testergebnisse

In diesem Abschnitt werden numerische Ergebnisse sowohl des Kolmogorov-Smirnov- als auch des Cramér-von-Mises-Anpassungstests auf die Verteilungsklasse  $\mathcal{K}$  mit Bootstrap-Quantil vorgestellt. Alle numerischen Rechnungen wurden in [MATLAB] implementiert und auf einem Standard-Computer mit einer Dual-Core-CPU mit 3.4 GHz ausgeführt. Für beide Arten von Anpassungstests wurden sowohl der in Abschnitt 6.2 beschriebene Independent-Blocks-Bootstrap als auch der IID-Bootstrap aus Abschnitt 6.3 angewendet. Für die beim Independent-Blocks-Bootstrap notwendige Berechnung einer geschätzten Copula und die Erzeugung von Bootstrap-Stichproben zu dieser, wie in dem Algorithmus aus Abschnitt 6.1.2 beschrieben, wurde eine bestehende Implementierung in Matlab von [Strelen; Nassaj, 2007] verwendet. Diese steht zum Herunterladen zur Verfügung unter <http://web.cs.uni-bonn.de/IV/strelen/Algorithmen> (Stand 12.4.2011). Da die Verteilungsfunktionen der K-Verteilungen stetig und streng monoton wachsend sind, erfüllen sie die für den Algorithmus benötigten Voraussetzungen.

Als Schätzer kamen die Momentenschätzer  $\hat{a}_{24M;N}$  und  $\hat{\alpha}_{24M;N}$  zum Einsatz, welche laut Bemerkung 5.26 die Voraussetzungen von Satz 5.25 erfüllen. Nach diesem konvergiert der entsprechende empirische Prozess auf Datenebene  $\hat{\alpha}_n^{\mathcal{K}}$  aus (5.64) gegen einen zentrierten Gaußprozess mit fast sicher stetigen Pfaden. Die Auswahl der auf dem zweiten und vierten empirischen Moment basierenden Momentenschätzer wurde im Hinblick auf eine möglichst kurze Rechenzeit getroffen. Da diese Schätzer in expliziter Form vorliegen, siehe (5.34) und (5.43), können sie wesentlich schneller berechnet werden als die Momentenschätzer aus dem ersten und dem zweiten empirischen Moment, welche als numerische Lösungen von Gleichungen berechnet werden müssen. Dabei wird in Kauf genommen, dass mit der Ordnung der empirischen Momente auch ihre Streuung steigt.

In Abschnitt 8.1 werden simulierte Zufallsfelder betrachtet, um die Eigenschaften des auf dem Independent-Blocks-Bootstrap basierenden Kolmogorov-Smirnov-Tests beziehungsweise des Cramér-von-Mises-Tests zu analysieren und mit denjenigen Tests zu vergleichen, welchen der IID-Bootstrap zugrunde liegt.

In Abschnitt 8.2 werden die Anpassungstests auf die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Wiese- und Seeclutterdaten eines Radars mit synthetischer Apertur angewendet.

### 8.1 Simulierte Zufallsfelder

Für die Durchführung der Tests wurden mit dem in Abschnitt 7 vorgestellten Algorithmus (1,1)-abhängige Zufallsfelder der Größe  $49 \times 49$  mit vorgegebenen Marginalien simuliert. Die Größe dieser Zufallsfelder entspricht der Größe der in Abschnitt 8.2 betrachteten Datenmatrizen aus SAR-Szenen. Die Zufallsfelder sind groß genug, um ausreichend viele Datenblöcke für die Schätzung der Copula zur Verfügung zu haben, und sie sind nicht zu groß, so dass der Rechenaufwand handhabbar bleibt. Bei der Simulation wurden in Gleichung (7.1) die folgenden Wichtungskoeffizienten  $a_{0,0} = 1$  sowie  $a_{1,0} = a_{-1,0} = a_{0,1} = a_{0,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  und  $a_{1,1} = a_{-1,1} = a_{1,-1} = a_{-1,-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$  verwendet. Diese Wichtungskoeffizienten führen unter Verwendung der Gleichungen (7.4) und (7.10) im simulierten Zufallsfeld zu den Korrelationskoeffizienten 0.3 zwischen benachbarten Komponenten aus derselben Zeile oder Spalte und 0.1 zwischen benachbarten Komponenten aus derselben Diagonale. Diese Werte entsprechen den empirischen Korrelationen des in Abschnitt 2.3 beschriebenen Wiesecutters.

Insgesamt wurden zu jeder Datenmatrix vier verschiedene Tests durchgeführt. Als erstes wurden der Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest und der Cramér-von-Mises-Anpassungstest für unabhängige Blöcke auf die vollständige  $(1, 1)$ -abhängige Matrix angewendet. Dabei wurden bei der Durchführung des Independent-Blocks-Bootstrap quadratische Blöcke der Größe  $9 \times 9$  verwendet. Damit ergab sich für jede Matrix ein Daten-Stichprobenumfang von 25 unabhängigen und identisch verteilten Blöcken. Der Bootstrap-Stichprobenumfang wurde gleich dem Daten-Stichprobenumfang gewählt. Die Anzahl der Teilintervalle von  $(0, 1]$ , welche bei der Schätzung der Copula der Blöcke die Genauigkeit bestimmt, wurde auf  $b = 5$  gesetzt, vgl. Definition 6.7. Dies erfüllt die Voraussetzung von Satz 6.14, nach der  $b$  ein Teiler des Stichprobenumfangs sein muss.

Für einen Vergleich zwischen dem auf dem Independent-Blocks-Bootstrap und dem auf dem IID-Bootstrap basierenden Verfahren, wurde als zweites aus derselben  $(1, 1)$ -abhängigen Matrix durch Streichen jeder zweiten Zeile und Spalte eine Matrix der Größe  $25 \times 25$  mit unabhängigen und identisch verteilten Komponenten erzeugt. Zu dieser wurden der Kolmogorov-Smirnov-Anpassungstest und der Cramér-von-Mises-Anpassungstest für unabhängige Zufallsvariable durchgeführt. Bei dem hierfür angewendeten IID-Bootstrap wurde der Bootstrap-Stichprobenumfang gleich dem Daten-Stichprobenumfang gesetzt.

Für die Tests mit beiden Bootstrap-Verfahren wurde 200 als Monte-Carlo-Stichprobenumfang gewählt. Dass dieser Stichprobenumfang groß genug ist, wird in den Abschnitten 8.1.4 und 8.1.5 bestätigt. Dort werden Ergebnisse, die aus Tests mit einem Monte-Carlo-Stichprobenumfang von 100 gewonnen wurden, mit Ergebnissen verglichen, für welche der Monte-Carlo-Stichprobenumfang auf 200 erhöht wurde. Diese unterscheiden sich nicht erkennbar. Daher würde wahrscheinlich auch ein Monte-Carlo-Stichprobenumfang von 100 ausreichen. Um sicherzugehen wurde 200 gewählt.

Im Durchschnitt benötigt ein solcher Durchlauf des auf dem Independent-Blocks-Bootstrap basierenden Verfahrens circa 45 Minuten, wenn 200 als Monte-Carlo-Stichprobenumfang gewählt wird.

Die Ergebnisse der Tests werden im Folgenden in Quantil-Quantil-Plots (Q-Q-Plots), vgl. Abschnitt 6.4, dargestellt. In diesen werden die Quantile der empirischen Verteilungsfunktion der Bootstrap-p-Werte mit den Quantilen der Verteilungsfunktion  $U(0, 1)$  verglichen.

### 8.1.1 Testergebnisse unter der Hypothese

Für den Vergleich der Verfahren mit dem Independent-Blocks-Bootstrap und derjenigen mit dem IID-Bootstrap unter der Hypothese wurden Zufallsfelder mit  $K(\cdot; 0.0045, 7)$ -verteilten Marginalien für  $L = 16$  simuliert. Die Parameterwerte stammen aus der Analyse der in Abschnitt 2.3 vorgestellten multi-look Daten mit 8 looks.

Die Anpassungstests mit Bootstrap-Quantil für unabhängige Blöcke, angewandt auf 135  $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder der Größe  $49 \times 49$  mit  $K(\cdot; 0.0045, 7)$ -verteilten Marginalien, ergeben die Quantil-Quantil-Plots zur Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik respektive zur Cramér-von-Mises-Teststatistik aus Abbildung 20.

Wichtige Quantile der empirischen Verteilungsfunktion der erzeugten Bootstrap-p-Werte sind zusätzlich in Tabelle 1 aufgelistet.

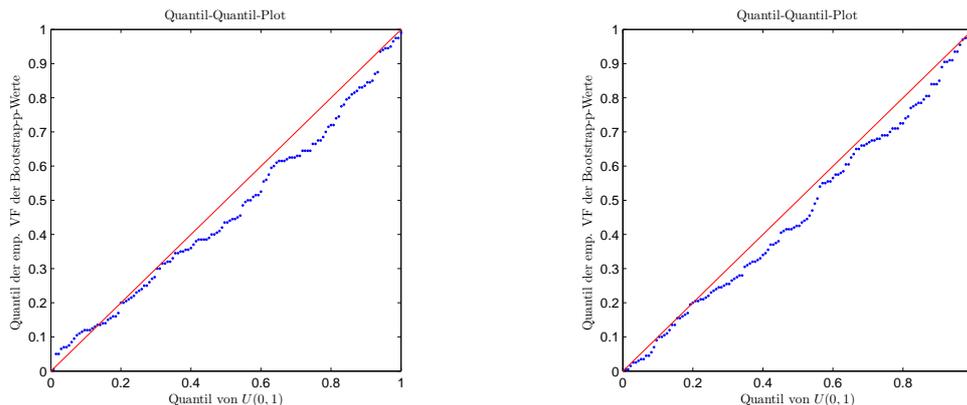


Abbildung 20: Q-Q-Plots für 135 (1,1)-abhängige Zufallsfelder der Größe  $49 \times 49$  mit  $K(\cdot; 0.0045, 7)$ -verteilten Marginalien. Kolmogorov-Smirnov-Statistik (links) und Cramér-von-Mises-Statistik (rechts).

<b>Tabelle 1</b>	<b>Indep.-Blocks-Bootstrap: Hypothese</b>		
Teststatistik	1%-Quantil	5%-Quantil	10%-Quantil
Kolmogorov-Smirnov	0.0074	0.0222	0.0667
Cramér-von-Mises	0.0148	0.0741	0.1111

Dieselben 135 Zufallsfelder wurden durch Streichen jeder zweiten Zeile und Spalte auf Zufallsfelder der Größe  $25 \times 25$  mit unabhängigen Komponenten und  $K(\cdot; 0.0045, 7)$ -verteilten Marginalien reduziert. Auf diese werden die Anpassungstests für unabhängige Zufallsvariable, basierend auf dem IID-Bootstrap, angewendet. Daraus resultieren die beiden Quantil-Quantil-Plots aus Abbildung 21 sowie die Quantile aus Tabelle 2.

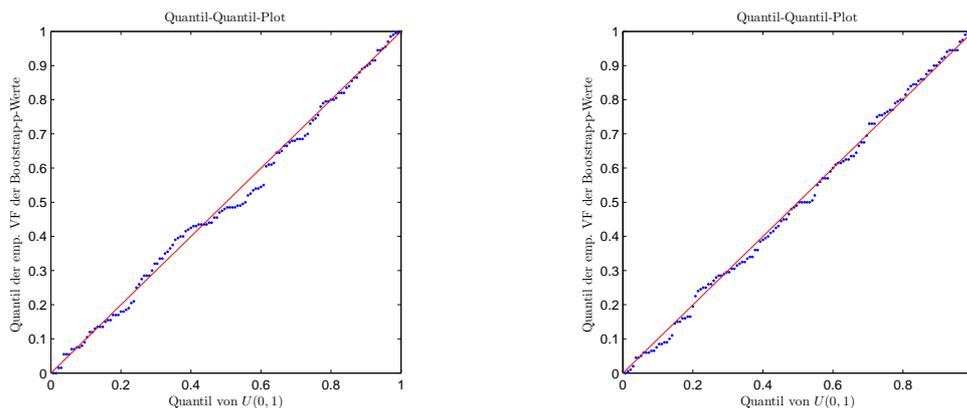


Abbildung 21: Q-Q-Plots für 135 Zufallsfelder der Größe  $25 \times 25$  mit unabhängigen Komponenten und  $K(\cdot; 0.0045, 7)$ -verteilten Marginalien. Kolmogorov-Smirnov-Statistik (links) und Cramér-von-Mises-Statistik (rechts).

<b>Tabelle 2</b>	<b>IID-Bootstrap: Hypothese</b>		
Teststatistik	1%-Quantil	5%-Quantil	10%-Quantil
Kolmogorov-Smirnov	0.0222	0.0370	0.1037
Cramér-von-Mises	0.0148	0.0593	0.1333

Sowohl bei den Tests, die auf dem Independent-Blocks-Bootstrap basieren, als auch bei denjenigen, denen der IID-Bootstrap zugrunde liegt, lassen sich keine wesentlichen Unterschiede zwischen der Kolmogorov-Smirnov- und der Cramér-von-Mises-Teststatistik erkennen, allenfalls sind die Kolmogorov-Smirnov-Tests etwas konservativer. Bei allen vier durchgeführten Tests passen sich die geplotteten Punkte gut an die Winkelhalbierende des ersten Quadranten an. Auch die in den Tabellen 1 und 2 aufgelisteten Quantile zeigen, dass die Tests das Niveau, den verwendeten Stichprobenumfängen entsprechend, gut einhalten.

Die Ergebnisse der Anpassungstests auf die Verteilungsklasse  $\mathcal{K}$  mit Bootstrap-Quantil für unabhängige Blöcke sowie für unabhängige Zufallsvariable zeigen unter der Hypothese dieselbe Tendenz und entsprechen dem einzuhaltenden Niveau.

### 8.1.2 Testergebnisse unter der Alternative der Lognormalverteilung

Für den Vergleich der auf dem Independent-Blocks-Bootstrap basierenden Anpassungstests mit denjenigen für unabhängige Zufallsvariable unter der Alternative der Lognormalverteilung wurden Zufallsfelder mit lognormalverteilten Marginalien  $LN(\mu, \sigma^2)$  simuliert. Die zugehörige Dichte ist

$$f(x; \mu, \sigma^2) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\ln(x)-\mu)^2/(2\sigma^2)}.$$

Verwendet wurden die Parameter  $\mu = -2.7583$  und  $\sigma^2 = 0.0609$ , für die das in die Momentenschätzer einfließende zweite und vierte Moment in etwa denen der Verteilung  $K(\cdot; 0.0045, 7)$  mit  $L = 16$  entsprechen.

Die Anpassungstests auf  $K$ -verteilte Marginalien für unabhängige Blöcke wurden aufgrund der langen Rechenzeit auf 50 (1,1)-abhängige Zufallsfelder der Größe  $49 \times 49$  mit  $LN(-2.7583, 0.0609)$ -verteilten Marginalien beschränkt, wobei bereits bei diesen 50 Zufallsfeldern eine deutliche Tendenz in den, in Abbildung 22 dargestellten, resultierenden Quantil-Quantil-Plots zu erkennen ist. Die zugehörigen Quantile der empirischen Verteilung

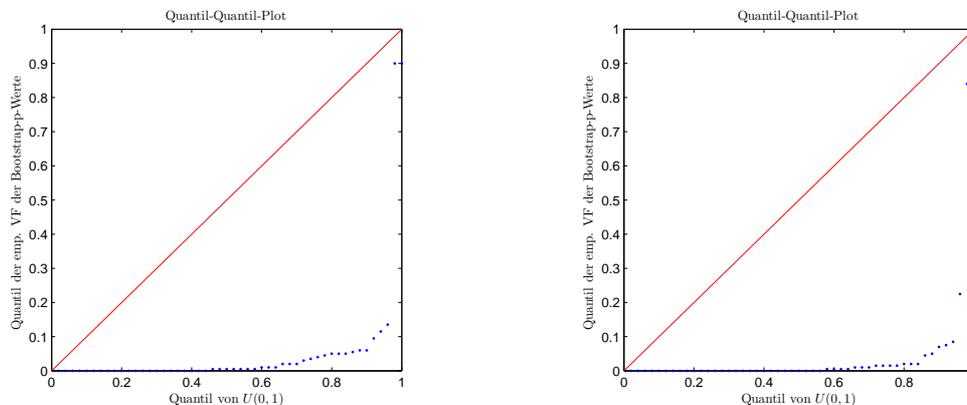


Abbildung 22: Q-Q-Plots für 50 (1,1)-abhängige Zufallsfelder der Größe  $49 \times 49$  mit  $LN(-2.7583, 0.0609)$ -verteilten Marginalien. Kolmogorov-Smirnov-Statistik (links) und Cramér-von-Mises-Statistik (rechts).

lungsfunktion der erzeugten Bootstrap-p-Werte sind zusätzlich in Tabelle 3 aufgelistet.

<b>Tabelle 3</b>	<b>Indep.-Blocks-Bootstrap: Lognormalverteilung</b>		
Teststatistik	1%-Quantil	5%-Quantil	10%-Quantil
Kolmogorov-Smirnov	0.64	0.84	0.92
Cramér-von-Mises	0.70	0.88	0.94

Ausdünnen reduziert die Datenstichprobe auf 50 Zufallsfelder der Größe  $25 \times 25$  mit unabhängigen Komponenten und  $LN(-2.7583, 0.0609)$ -verteilten Marginalien. Mit diesen wurden die Anpassungstests, denen der IID-Bootstrap zugrunde liegt, durchgeführt. Die Ergebnisse finden sich in Abbildung 23 sowie in Tabelle 4.

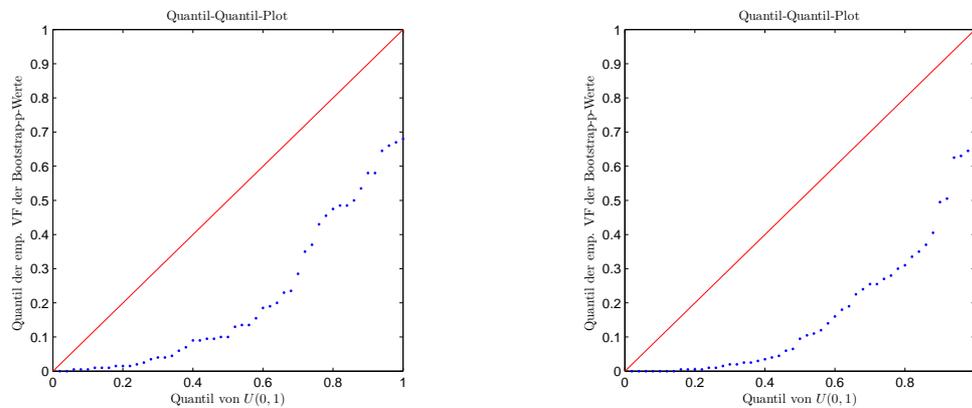


Abbildung 23: Q-Q-Plots für 50 Zufallsfelder der Größe  $25 \times 25$  mit unabhängigen Komponenten und  $LN(-2.7583, 0.0609)$ -verteilten Marginalien. Kolmogorov-Smirnov-Statistik (links) und Cramér-von-Mises-Statistik (rechts).

<b>Tabelle 4</b>	<b>IID-Bootstrap: Lognormalverteilung</b>		
Teststatistik	1%-Quantil	5%-Quantil	10%-Quantil
Kolmogorov-Smirnov	0.16	0.34	0.50
Cramér-von-Mises	0.26	0.44	0.50

Die Alternative der Lognormalverteilung wird von beiden Anpassungstests auf die Verteilungsklasse  $\mathcal{K}$  mit Bootstrap-Quantil für unabhängige Blöcke bei dem gegebenen Stichprobenumfang auf allen Niveaus deutlich erkannt. Die Güte ist dabei deutlich höher als die Güte der Tests für unabhängige Zufallsvariable, welche auch mit hoher Wahrscheinlichkeit verwerfen. Die Tabellen 3 und 4 zeigen, dass sämtliche Quantile der Tests mit dem Independent-Blocks-Bootstrap größer sind als diejenigen der korrespondierenden Tests mit dem IID-Bootstrap. Das bedeutet, dass sich die beiden Tests für unabhängige Blöcke sehr gut dafür eignen, lognormalverteilte Marginalien der Daten von  $K$ -verteilten abzugrenzen. Wesentliche Unterschiede zwischen der Kolmogorov-Smirnov- und der Cramér-von-Mises-Teststatistik sind bei keinem der beiden Testverfahren zu erkennen.

### 8.1.3 Testergebnisse unter der Alternative der Pareto-Verteilung

Für einen Vergleich der Tests unter der Alternative der Pareto-Verteilung wurden Zufallsfelder mit  $Par(25)$ -verteilten Marginalien berechnet. Dabei handelte es sich um eine um 1 nach links verschobene Pareto-Verteilung mit dem Parameter  $\gamma = 25$  und der für alle  $\gamma > 0$  wie folgt definierten Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f(x; \gamma) = \gamma \left( \frac{1}{x+1} \right)^{\gamma+1} \text{ für } x \geq 0.$$

Die Verschiebung dient dazu, die Verteilung auf das Intervall  $(0, \infty)$  zu konzentrieren. Mit den Anpassungstests für unabhängige Blöcke, angewandt auf 50  $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder der Größe  $49 \times 49$  mit  $Par(25)$ -verteilten Marginalien, ergeben sich die Quantil-Quantil-Plots zur Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik respektive zur Cramér-von-Mises-Teststatistik aus Abbildung 24.

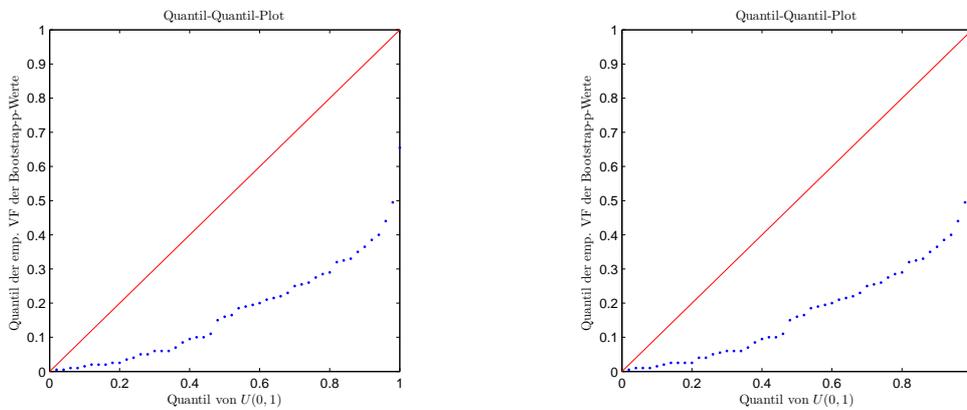


Abbildung 24: Q-Q-Plots für 50  $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder der Größe  $49 \times 49$  mit  $Par(25)$ -verteilten Marginalien. Kolmogorov-Smirnov-Statistik (links) und Cramér-von-Mises-Statistik (rechts).

Wichtige Quantile der empirischen Verteilungsfunktion der erzeugten Bootstrap-p-Werte sind zusätzlich in Tabelle 5 aufgelistet.

<b>Tabelle 5</b>	<b>Indep.-Blocks-Bootstrap: Pareto-Verteilung</b>		
Teststatistik	1%-Quantil	5%-Quantil	10%-Quantil
Kolmogorov-Smirnov	0.08	0.28	0.44
Cramér-von-Mises	0.08	0.26	0.44

Aus den Tests für unabhängige Zufallsvariable, angewandt auf die 50 ausgedünnten Zufallsfelder der Größe  $25 \times 25$  mit unabhängigen Komponenten und  $Par(25)$ -verteilten Marginalien, resultieren die Quantil-Quantil-Plots aus Abbildung 25 sowie die Quantile, welche in Tabelle 6 aufgelistet sind.

<b>Tabelle 6</b>	<b>IID-Bootstrap: Pareto-Verteilung</b>		
Teststatistik	1%-Quantil	5%-Quantil	10%-Quantil
Kolmogorov-Smirnov	0.08	0.44	0.68
Cramér-von-Mises	0.04	0.44	0.62

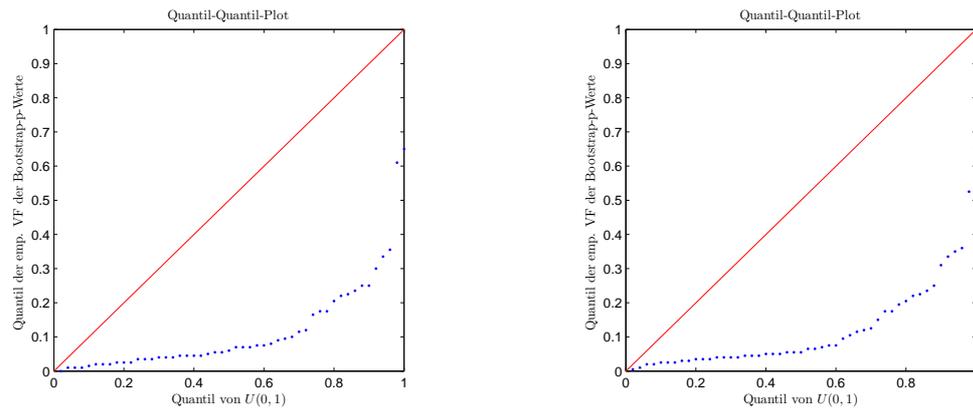


Abbildung 25: Q-Q-Plots für 50 Zufallsfelder der Größe  $25 \times 25$  mit unabhängigen Komponenten und  $Par(25)$ -verteilten Marginalien. Kolmogorov-Smirnov-Statistik (links) und Cramér-von-Mises-Statistik (rechts).

Unter der Alternative der Pareto-Verteilung haben alle vier Tests eine hohe Güte. Die Güte der beiden Tests für unabhängige Zufallsvariable ist im Vergleich etwas größer als die der Tests für unabhängige Blöcke. Bei letzteren ist ein deutlicher Unterschied zwischen den Ergebnissen bei der Alternative der Pareto-Verteilung und denen bei der Alternative der Lognormalverteilung, wo die Güte extrem hoch ist, erkennbar.

Unterschiede zwischen der Kolmogorov-Smirnov- und der Cramér-von-Mises-Teststatistik sind nicht erkennbar.

#### 8.1.4 Einfluss des Monte-Carlo-Stichprobenumfangs unter der Hypothese

Die Ergebnisse dieses Abschnitts dienen der Überprüfung, ob der verwendete Monte-Carlo-Stichprobenumfang  $N_{MC} = 200$  unter der Hypothese hinreichend groß ist. Dazu wurden zu jeder Datenstichprobe 200 Bootstrap-Stichproben generiert. Dann wurden jeweils zwei Bootstrap-p-Werte berechnet. In die eine Berechnung flossen lediglich die ersten 100 Bootstrap-Stichproben ein. In der zweiten Berechnung wurde der Monte-Carlo-Stichprobenumfang auf 200 erhöht, indem sämtliche Bootstrap-Stichproben verwendet wurden. Als Datenmatrizen wurden hierbei 50 der 135 ursprünglichen Datenmatrizen aus Abschnitt 8.1.1 verwendet, um eine bessere Übersichtlichkeit in den Quantil-Quantil-Plots zu gewährleisten, wobei die Quantil-Quantil-Plots dieser Teilmenge das Verhalten der Plots der gesamten Menge abbilden. Bei den Datenmatrizen handelt es sich um Zufallsfelder mit  $K(\cdot; 0.0045, 7)$ -verteilten Marginalien mit  $L = 16$ .

Mit den Anpassungstests auf die Verteilungsklasse  $\mathcal{K}$  mit Bootstrap-Quantil für unabhängige Blöcke, angewandt auf 50  $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder der Größe  $49 \times 49$  mit  $K(\cdot; 0.0045, 7)$ -verteilten Marginalien, ergeben sich die Quantil-Quantil-Plots zur Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik bzw. zur Cramér-von-Mises-Teststatistik aus Abbildung 26. Dabei wurden jeweils zwei Quantile der empirischen Verteilungsfunktion der Bootstrap-p-Werte berechnet. Das erste mit dem Monte-Carlo-Stichprobenumfang 200, das zweite mit  $N_{MC} = 100$ .

Aus den beiden Anpassungstests für unabhängige Zufallsvariable, angewandt auf die 50 ausgedünnten Zufallsfelder der Größe  $25 \times 25$  mit unabhängigen Komponenten und  $K(\cdot; 0.0045, 7)$ -verteilten Marginalien, resultieren die Quantil-Quantil-Plots aus Abbildung 27. Auch hier sind jeweils die Quantile von mit dem Monte-Carlo-Stichprobenumfang

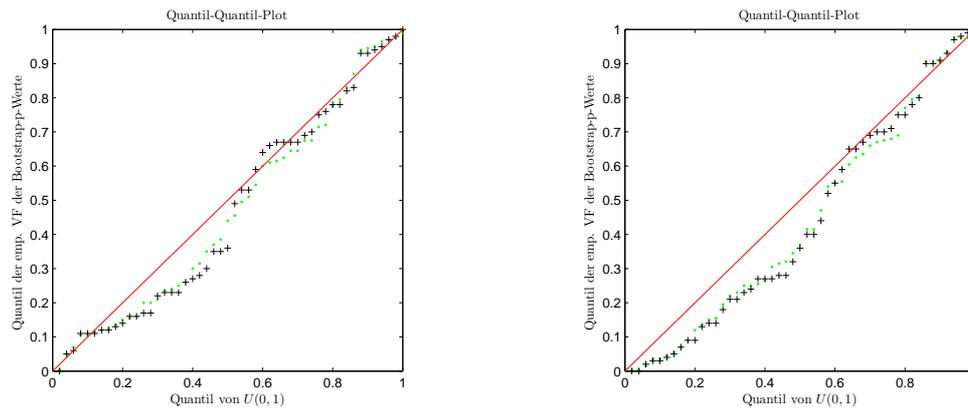


Abbildung 26: Q-Q-Plots für 50 (1,1)-abhängige Zufallsfelder der Größe  $49 \times 49$  mit  $K(\cdot; 0.0045, 7)$ -verteilten Marginalien zu den Monte-Carlo-Stichprobenumfängen  $N_{MC} = 200$  (grün ●) und  $N_{MC} = 100$  (schwarz +). Kolmogorov-Smirnov-Statistik (links) und Cramér-von-Mises-Statistik (rechts).

200 berechneten Bootstrap-p-Werten denen mit dem Monte-Carlo-Stichprobenumfang 100 gegenüber gestellt.

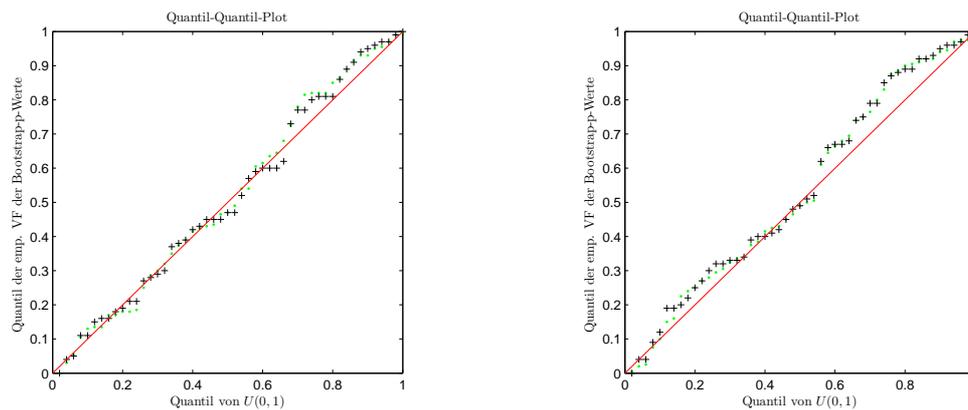


Abbildung 27: Q-Q-Plots für 50 Zufallsfelder der Größe  $25 \times 25$  mit unabhängigen Komponenten und  $K(\cdot; 0.0045, 7)$ -verteilten Marginalien zu den Monte-Carlo-Stichprobenumfängen  $N_{MC} = 200$  (grün ●) und  $N_{MC} = 100$  (schwarz +). Kolmogorov-Smirnov-Statistik (links) und Cramér-von-Mises-Statistik (rechts).

Die Quantil-Quantil-Plots lassen bei allen vier Anpassungstests bereits beim Übergang von  $N_{MC} = 100$  zu  $N_{MC} = 200$  keine deutlichen Unterschiede erkennen. Damit ist davon auszugehen, dass sich auch bei einem größeren Monte-Carlo-Stichprobenumfang als 200 lediglich geringfügige Änderungen ergeben würden. Da sich eine Vergrößerung des Monte-Carlo-Stichprobenumfangs proportional auf die Rechenzeit auswirkt, ist es von Vorteil, diesen möglichst niedrig zu wählen. Ein Monte-Carlo-Stichprobenumfang von 200 ist in Bezug auf die Rechenzeit durchaus praktikabel und nach den beschriebenen Ergebnissen hinreichend groß.

### 8.1.5 Einfluss des Monte-Carlo-Stichprobenumfangs unter der Alternative der Lognormalverteilung

Auch für die lognormalverteilten Datenmatrizen wurde der Unterschied zwischen den mit den Monte-Carlo-Stichprobenumfängen 200 und 100 durchgeführten Simulationen untersucht. Dazu wurden die Datenmatrizen aus Abschnitt 8.1.2 verwendet.

Betrachtet wurden 50  $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder der Größe  $49 \times 49$ , deren Marginalien  $LN(-2.7583, 0.0609)$ -verteilt sind. Darauf wurden die Anpassungstests auf die Verteilungsklasse  $\mathcal{K}$  mit Bootstrap-Quantil für unabhängige Blöcke angewendet. Es ergeben sich die Quantil-Quantil-Plots aus Abbildung 28.

Für jede Datenmatrix werden zwei Quantile der empirischen Verteilungsfunktion der Bootstrap-p-Werte berechnet, die sich in den verwendeten Monte-Carlo-Stichprobenumfängen von 200 und 100 unterscheiden.

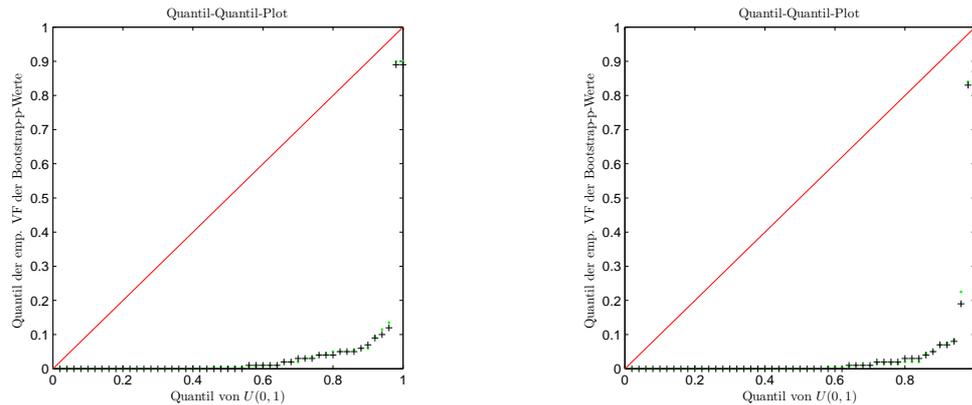


Abbildung 28: Q-Q-Plots für 50  $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder der Größe  $49 \times 49$  mit  $LN(-2.7583, 0.0609)$ -verteilten Marginalien zu den Monte-Carlo-Stichprobenumfängen  $N_{MC} = 200$  (grün  $\bullet$ ) und  $N_{MC} = 100$  (schwarz  $+$ ). Kolmogorov-Smirnov-Statistik (links) und Cramér-von-Mises-Statistik (rechts).

Die auf dem IID-Bootstrap basierenden Tests, angewandt auf 50 Zufallsfelder der Größe  $25 \times 25$  mit unabhängigen Komponenten und  $LN(-2.7583, 0.0609)$ -verteilten Marginalien, liefern die Quantil-Quantil-Plots aus Abbildung 29. Es sind die Ergebnisse zum Monte-Carlo-Stichprobenumfang 200 und diejenigen mit  $N_{MC} = 100$  dargestellt.

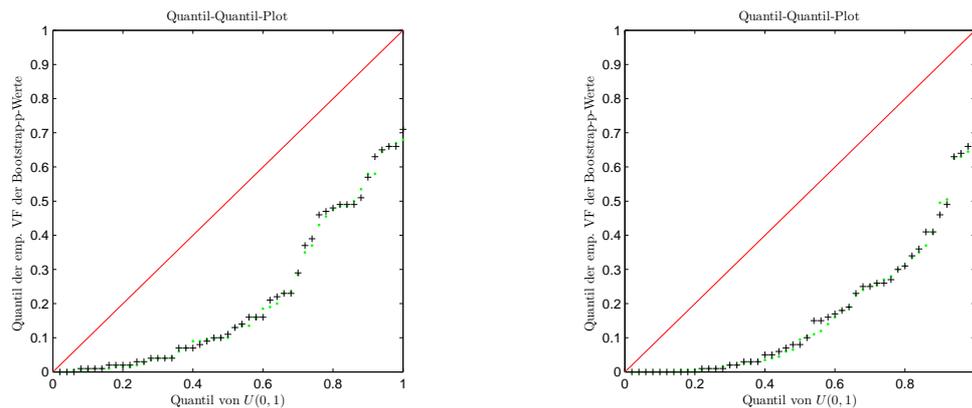


Abbildung 29: Q-Q-Plots für 50 Zufallsfelder der Größe  $25 \times 25$  mit unabhängigen Komponenten und  $LN(-2.7583, 0.0609)$ -verteilten Marginalien zu den Monte-Carlo-Stichprobenumfängen  $N_{MC} = 200$  (grün  $\bullet$ ) und  $N_{MC} = 100$  (schwarz  $+$ ). Kolmogorov-Smirnov-Statistik (links) und Cramér-von-Mises-Statistik (rechts).

Auch unter der Alternative der Lognormalverteilung zeigen sich keine erkennbaren Unterschiede zwischen den beiden verwendeten Monte-Carlo-Stichprobenumfängen. Dies unterstützt die These, dass der in den Simulationen verwendete Monte-Carlo-Stichprobenumfang  $N_{MC} = 200$  hinreichend groß gewählt ist.

### 8.1.6 Fazit

Im Vergleich der Ergebnisse des Kolmogorov-Smirnov- beziehungsweise des Cramér-von-Mises-Anpassungstests auf die Verteilungsklasse  $\mathcal{K}$  mit Bootstrap-Quantil für unabhängige Blöcke mit den korrespondierenden Tests für unabhängige Zufallsvariable zeigt sich, dass es unter der betrachteten Hypothese keine erkennbaren Unterschiede gibt. Bei beiden Verfahren halten die Tests das Niveau gut ein.

Bei der Alternative der Lognormalverteilung ist die Güte der auf dem Independent-Blocks-Bootstrap basierenden Tests extrem hoch. Sie übertrifft die Güte der Tests für unabhängige Zufallsvariable bei weitem. Hier geht der naheliegende Ansatz, aus dem  $(1, 1)$ -abhängigen Zufallsfeld durch Ausdünnen ein Zufallsfeld mit unabhängigen Komponenten zu machen, zu Lasten der Güte der Tests. Trotz der Abhängigkeiten haben die auf dem Independent-Blocks-Bootstrap basierenden Test durch den höheren Stichprobenumfang die größere Güte.

Bei der Alternative der Pareto-Verteilung ändert sich bei den beiden Tests, denen der IID-Bootstrap zugrunde liegt, an der Güte wenig im Vergleich zu der Alternative der Lognormalverteilung. Beim Independent-Blocks-Bootstrap dagegen ist ein großer Unterschied erkennbar, hier ist die Güte bei der Pareto-Verteilung etwas niedriger als die der IID-Tests.

Die Analyse des Einflusses des Monte-Carlo-Stichprobenumfangs in den beiden Abschnitten 8.1.4 und 8.1.5 macht deutlich, dass sich bereits bei der Erhöhung von 100 auf 200 kaum Unterschiede in den Testergebnissen zeigen. Damit ist davon auszugehen, dass sich auch bei einem größeren Monte-Carlo-Stichprobenumfang als 200 lediglich geringfügige Änderungen ergeben würden. Da sich eine Vergrößerung des Monte-Carlo-Stichprobenumfangs proportional auf die Rechenzeit auswirkt, ist es von Vorteil, diesen möglichst niedrig zu wählen. Aufgrund dieser Ergebnisse würde auch 100 als Monte-Carlo-Stichprobenumfang ausreichen. Um sicherzugehen, wurde 200 gewählt, was in Bezug auf die Rechenzeit immer noch praktikabel war.

In sämtlichen Konstellationen sind nur geringe Unterschiede zwischen der Kolmogorov-Smirnov- und der Cramér-von-Mises-Teststatistik vorhanden.

## 8.2 SAR-Daten

Der Kolmogorov-Smirnov- und der Cramér-von-Mises-Anpassungstest auf  $K$ -verteilte Marginalien für unabhängige Blöcke werden auf die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Radar-daten angewendet.

### 8.2.1 Faltungsformel für die $K$ -Verteilung

Es ist noch offen, ob die Daten bei der Anwendung der Anpassungstests als Spannungsamplituden oder als Leistungen vorliegen müssen. Um diese Frage zu klären, wird die Dichte (5.19) der  $K$ -Verteilung aus Definition 5.7 in einer anderen Form dargestellt. Sie kann als gemischte Verteilung aus einer verallgemeinerten Rayleigh-Verteilung mit einer Gammaverteilung geschrieben werden, vgl. [Joughin; Percival; Winebrenner, 1993].

Zunächst wird die verallgemeinerte Rayleigh-Verteilung entsprechend der Darstellung von [Joughin; Percival; Winebrenner, 1993, (6), S. 990] definiert.

**8.1 Definition:** Seien  $\sigma^2 > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$ . Die Wahrscheinlichkeitsverteilung  $gR(\cdot; L, \sigma^2)$  mit der Dichte

$$f_{gR}(x; L, \sigma^2) = \frac{2x^{L-1}}{\Gamma(L/2)(2\sigma^2)^{L/2}} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \text{ für alle } x > 0 \quad (8.1)$$

heißt *verallgemeinerte Rayleigh-Verteilung zum Parameter  $\sigma^2$  mit  $L$  Freiheitsgraden*.

Im Folgenden werden bekannte, leicht verifizierbare Eigenschaften der verallgemeinerten Rayleigh-Verteilung diskutiert.

**8.2 Lemma:** Seien  $L \in \mathbb{N}$  und  $\sigma^2 > 0$  sowie  $N_1, \dots, N_L$  unabhängige und identisch  $N(0, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable. Dann gilt

$$\sqrt{\sum_{j=1}^L N_j^2} \sim gR(\cdot; L, \sigma^2). \quad (8.2)$$

Für eine  $gR(\cdot; L, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable  $X$  gilt

$$E(X^2) = E\left(\sum_{j=1}^L N_j^2\right) = L\sigma^2. \quad (8.3)$$

Die Dichte der Gammaverteilung wird bezeichnet mit

$$f_G(y; b, p) = \frac{b^p}{\Gamma(p)} y^{p-1} e^{-by} \text{ für alle } y > 0 \quad (8.4)$$

mit den Parametern  $b, p > 0$ . Dies führt zu der folgenden Darstellung der Dichte der K-Verteilung, vgl. [Joughin; Percival; Winebrenner, 1993, Gleichung (5), S. 989].

**8.3 Lemma:** Seien  $a, \alpha > 0$  und sei  $L \in \mathbb{N}$ . Dann gilt für die Dichte  $f$  der K-Verteilung aus (5.19) die Faltungsformel

$$\int_0^\infty f_{gR}(x; L, y) f_G(y; (2a^2)^{-1}, \alpha) dy = f(x; a, \alpha) \text{ für alle } x > 0. \quad (8.5)$$

**Beweis:** Mit (8.1) und (8.4) gilt für  $a, \alpha > 0$ , unter Verwendung der Integraldarstellung (5.11) der modifizierten Besselfunktion zweiter Art, für die Faltungsformel

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty f_{gR}(x; L, y) f_G(y; (2a^2)^{-1}, \alpha) dy \\ &= \frac{x^{L-1} 2^{-\alpha-L/2+1} a^{-2\alpha}}{\Gamma(L/2)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty y^{\alpha-L/2-1} e^{-x^2/(2y)-y/(2a^2)} dy \\ &= \frac{x^{L-1} 2^{-L+1} a^{-L}}{\Gamma(L/2)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha-L/2-1} e^{-x^2/(4a^2t)-t} dt \\ &= \frac{x^{\alpha+L/2-1} 2^{-\alpha-L/2+2} a^{-\alpha-L/2}}{\Gamma(L/2)\Gamma(\alpha)} K_{-\alpha+L/2}\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= f(x; a, \alpha). \end{aligned}$$

Dabei bezeichnet  $f$  die Dichte der K-Verteilung. Die letzte Gleichung gilt nach Lemma 5.4 aufgrund der Symmetrie von  $K_\nu(\cdot)$  in  $\nu \in \mathbb{R}$ .  $\square$

Bei der Anwendung dieser Ergebnisse auf Daten eines Radars mit synthetischer Apertur muss  $L \in 2\mathbb{N}$  gelten. Dann ist  $\frac{L}{2}$  die Anzahl der looks. Im Fall von single-look Daten gilt  $L = 2$ , und die verallgemeinerte Rayleigh-Verteilung reduziert sich auf die Rayleigh-Verteilung.

Da die Bezeichnungen in der Literatur nicht einheitlich sind, wird im Folgenden eine sehr ausführliche Notation gewählt. Zusätzlich wird auch auf weitere Bezeichnungen aus der Literatur hingewiesen, um die Einordnung bezüglich anderer Quellen zu erleichtern.

Betrachtet wird die vom Radar empfangene komplexe Spannung  $V$  (*voltage, amplitude*) mit dem Realteil  $Re(V)$  (*inphase, I*) und dem Imaginärteil  $Im(V)$  (*quadratur, Q*). Aus dieser wird die Leistung  $P$  (*power, intensity*) als  $P = Re(V)^2 + Im(V)^2$  berechnet.

Bei multi-look Daten mit  $\frac{L}{2}$  looks werden für jede Auflösungszelle, vgl. Abschnitt 2.1, die zu den komplexen Spannungen  $V_1, \dots, V_{L/2}$  gehörenden Leistungen zusammengefasst zu der Leistung

$$Z_{power} = \frac{2}{L} \sum_{j=1}^{L/2} (Re(V_j)^2 + Im(V_j)^2).$$

Für die zugehörige Spannungsamplitude gilt

$$Z_{voltage} = \sqrt{Z_{power}} = \sqrt{\frac{2}{L} \sum_{j=1}^{L/2} Re(V_j)^2 + Im(V_j)^2}. \quad (8.6)$$

Physikalisch messbar ist die Größe  $Z_{voltage}$  nur im Fall von single-look Daten. Bei multi-look Daten handelt es sich um einen artifiziellen Ausdruck, welcher durch das Aufsummieren der Leistungen bei der Bildkonstruktion entsteht.

Seien  $\sigma^2 \in (0, \infty)$  sowie  $L \in 2\mathbb{N}$ , und seien die Zufallsvariablen

$$Re(V_1), Im(V_1), Re(V_2), \dots, Im(V_{L/2}) \text{ unabhängig und identisch } N(0, \sigma^2)\text{-verteilt.} \quad (8.7)$$

Diese Annahme wird durch den zentralen Grenzwertsatz motiviert, wenn davon ausgegangen wird, dass sich die gemessenen komplexen Spannungen aus den Beiträgen vieler einzelner, voneinander unabhängiger Streuer mit vergleichbaren Rückstreuquerschnitten zusammensetzen, vgl. dazu [Jakeman; Pusey, 1976].

Unter der Annahme (8.7) besitzt  $\sqrt{\frac{L}{2}} Z_{voltage}$  nach (8.2) eine verallgemeinerte Rayleigh-Verteilung mit dem Parameter  $\sigma^2$  und  $L$  Freiheitsgraden. Die daraus mit (8.5) berechnete Dichte der K-Verteilung aus Gleichung (5.19) ist demnach auf die Spannungsamplitude bezogen und wird im Folgenden mit  $f_{voltage}$  bezeichnet. Für die erwartete Leistung gilt nach (8.3)

$$E(Z_{power}) = 2\sigma^2.$$

In diesem Kontext ist die K-Verteilung eine gemischte Verteilung mit der Darstellung (8.5), deren Argument die Spannungsamplitude ist. Die verallgemeinerte Rayleigh-Verteilung mit  $L$  Freiheitsgraden ist eine Funktion der Spannungsamplitude bei gegebener Leistung.

Aus diesem Grund wird in Gleichung (8.5) die Dichte der verallgemeinerten Rayleigh-Verteilung in der Literatur häufig als bedingte Dichte  $f_{gR}(\cdot; L|y)$  geschrieben. Die verallgemeinerte Rayleigh-Verteilung wird mit der Gammaverteilung gemischt, welche eine Funktion der Leistung ist. Über alle Auflösungszellen betrachtet werden somit die Mittelwerte der Leistung als gammaverteilt angenommen. Die Mittelwerte der Leistungen variieren also räumlich in den Auflösungszellen, das heißt jeder Auflösungszelle liegt eine andere Varianz  $\sigma^2$  der normalverteilten Real- und Imaginärteile aus (8.7) zugrunde. Die Wahl der Gammaverteilung erfolgt in [Ward; Tough; Watts, 2006, S. 109] aufgrund empirischer Betrachtungen: „It has been found that the gamma distribution provides the best fit to most of the available data . . . “ [Joughin; Percival; Winebrenner, 1993, S. 990] dagegen begründen: „Many probability distributions [...] can be used to model the amplitude fluctuations, although a large number of these do not lead to closed-form solutions. Using a  $\gamma$  distribution [...] yields the K distribution.“

Unter Verwendung der Beziehung (8.6) lässt sich unter der Voraussetzung, dass die zugehörige Spannungsamplitude  $K(\cdot; a, \alpha)$ -verteilt ist, die Dichte  $f_{power}$  der Leistungsamplitude schreiben als

$$f_{power}(y; a, \alpha) = \frac{a^{-L/2-\alpha}}{2^{\alpha-1+L/2}\Gamma(\alpha)\Gamma(L/2)} y^{\frac{\alpha}{2}+\frac{L}{4}-1} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{\sqrt{y}}{a} \right) \text{ für alle } y > 0$$

mit  $a, \alpha > 0$ .

Für die Anwendung des Kolmogorov-Smirnov- und des Cramér-von-Mises-Anpassungstests auf K-verteilte Marginalien für unabhängige Blöcke bzw. für unabhängige Zufallsvariable müssen die Leistungsdaten im linearen Raum vorliegen, und es muss die Quadratwurzel gezogen werden, da die Darstellung (5.19) der Dichte der K-Verteilung verwendet wird.

### 8.2.2 Ablauf der Datenauswertung

Die zu testenden SAR-Daten sind die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Wiese- bzw. Seeclutterdaten.

Im ersten Schritt wurden in Abschnitt 2.4 aus jeder der beiden Szenen Bereiche mit homogenem Clutter ausgewählt und deren Abhängigkeitsstruktur bestimmt. Die empirische Autokorrelationsfunktion liegt sowohl für Datenvektoren in Range als auch in Azimut nur für die Schrittweite 1 deutlich über dem Schwellenwert. Die beiden Tests auf Zufälligkeit, angewendet auf vollständige sowie auf um die Hälfte ausgedünnte Datenvektoren, untermauern die Annahme, dass es sich bei den betrachteten Szenen um  $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder handelt. Dabei spielt es keine Rolle, in welcher Form die Daten vorliegen, da die Umrechnungen von dem dB-Raum in den linearen Raum sowie von Leistungen zu Spannungsamplituden deterministisch sind und somit keinen Einfluss auf das Vorhandensein von Abhängigkeiten haben, vgl. Abschnitt 2.3, Seite 13 sowie Gleichung (8.6).

Im zweiten Schritt werden nun der Kolmogorov-Smirnov- und der Cramér-von-Mises-Anpassungstest auf K-verteilte Marginalien für unabhängige Blöcke aus Abschnitt 6.2 durchgeführt. Dazu werden Datenmatrizen ausgeschnitten, deren Größe von  $m_1$  und  $m_2$  abhängt. Im Fall der betrachteten  $(1, 1)$ -abhängigen Daten wurden Quadrate der Größe  $49 \times 49$  gewählt. Diese sind groß genug, um bei der Anwendung des Independent-Blocks-Bootstrap in genügend viele voneinander unabhängige Blöcke zerlegt werden zu können,

vgl. Abschnitt 6.2.2. Die Blockgröße ist wiederum von  $m_1$  und  $m_2$  abhängig und wird für die betrachteten Abhängigkeitsstruktur auf  $9 \times 9$  gesetzt, so dass aus jeder Datenmatrix eine Datenstichprobe aus 25 voneinander unabhängigen Blöcken entsteht. Aus diesen Blöcken wird die Copula geschätzt, wobei der die Genauigkeit bestimmende Parameter  $b$  auf 5 gesetzt wurde, vgl. Definition 6.7.

Wie in Abschnitt 6.2.3 beschrieben, werden viele Bootstrap-Stichproben mit dieser Copula und K-verteilten Marginalien erzeugt. Für die Berechnung des Bootstrap-p-Wertes werden die Bootstrap-Teststatistiken mit der Daten-Teststatistik verglichen, vgl. Abschnitt 6.2.4. Der Bootstrap-p-Wert, eingesetzt in die Entscheidungsregel (6.25), liefert das Testergebnis.

### 8.2.3 Testergebnisse

Neben den in Abschnitt 8.2.2 beschriebenen Anpassungstests für unabhängige Blöcke mit der Kolmogorov-Smirnov- und der Cramér-von-Mises-Teststatistik wurden auch die beiden korrespondierenden Tests für unabhängige Zufallsvariable auf die ausgedünnten Datenmatrizen mit unabhängigen Komponenten angewendet. Dabei entsprechen bei der Durchführung des Independent-Blocks-Bootstrap und des IID-Bootstrap die gewählten Parameter denen aus Abschnitt 8.1.

Aus der ersten Szene aus Abschnitt 2.3 wurden 97 quadratische  $49 \times 49$  Datenmatrizen mit Wieseclutter ausgeschnitten. Diese Matrizen wurden mit genügend Abstand zueinander ausgewählt, um laut den Ergebnissen aus Abschnitt 2.4 ihre Unabhängigkeit voneinander zu gewährleisten. Auf die vollständigen Datenmatrizen wurden zunächst die beiden Anpassungstests auf K-verteilte Marginalien mit Bootstrap-Quantil für unabhängige Blöcke angewendet. Dann wurden die Matrizen ausgedünnt und es wurden die Anpassungstests auf die Verteilungsklasse  $\mathcal{K}$  mit Bootstrap-Quantil für unabhängige Zufallsvariable angewendet. Für jede Datenmatrix verwarfen sämtliche Tests die Hypothese, dass die betrachteten Daten K-verteilte Marginalien besitzen. Alle generierten Bootstrap-p-Werte waren Null.

Die zweite Szene zeigt Seeclutter. Die Ergebnisse aus Abschnitt 2.4 lassen auf die  $(1, 1)$ -Abhängigkeit dieser Daten schließen. Getestet wurden 40 voneinander unabhängige Datenmatrizen der Größe  $49 \times 49$ .

Der Kolmogorov-Smirnov- und der Cramér-von-Mises-Anpassungstest auf K-verteilte Marginalien für unabhängige Blöcke wurden auf diese Datenmatrizen angewendet. Zur Erzeugung der aus unabhängigen Blöcken bestehenden Datenstichprobe aus einer Datenmatrix wurde dabei das Verfahren für  $(1, 1)$ -abhängige Zufallsfelder verwendet, vgl. Abschnitt 6.2.2. Bei einem Testniveau von 10% wird für 31 (Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik) bzw. 29 (Cramér-von-Mises-Teststatistik) der 40 Datenmatrizen die Hypothese der K-verteilten Marginalien verworfen. In etwa der Hälfte aller Fälle ist der Bootstrap-p-Wert Null. Dabei werden alle Datenmatrizen, in denen die Cramér-von-Mises-Teststatistik zum Verwerfen führt, auch bei Verwendung der Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik verworfen. Für einige der Datenmatrizen scheint das Modell der  $(1, 1)$ -abhängigen Zufallsfelder mit K-verteilten Marginalien zuzutreffen, die Tests verwerfen hier nicht. Die vier Datenmatrizen mit den bezüglich der Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik größten Bootstrap-p-Werten sind in Abbildung 30 dargestellt. Hierbei handelt es sich um homogene Felder ohne größere Strukturen. Im Gegensatz dazu sind in Abbildung 31 vier Beispiele von Datenmatrizen abgebildet, für die jeweils beide Bootstrap-p-Werte Null sind. Jede dieser Matrizen

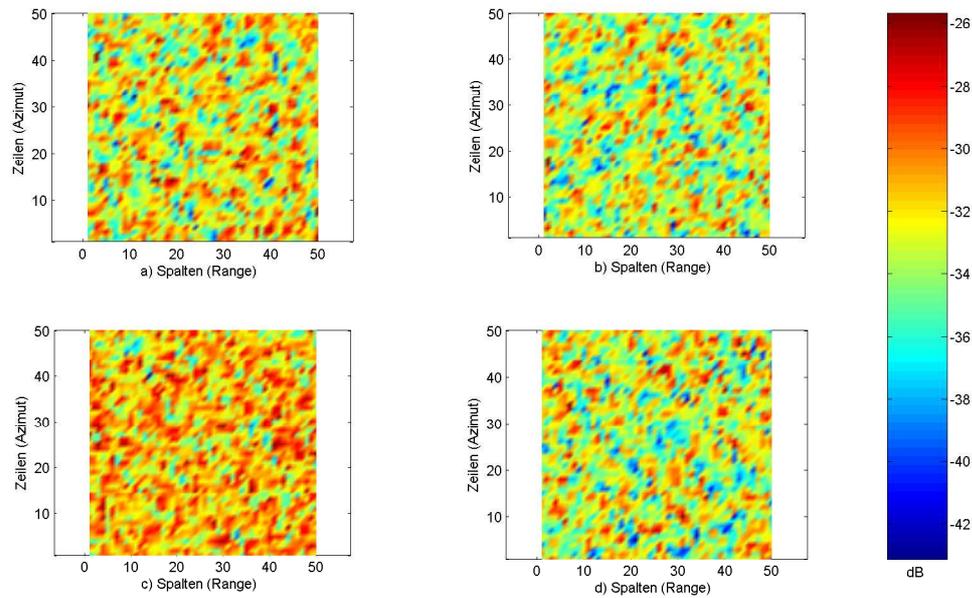


Abbildung 30: Seeclutter, 4 Matrizen der Größe  $49 \times 49$  mit hohen Bootstrap-p-Werten, Kolmogorov-Smirnov-Statistik a) 0.6150, b) 0.3950, c) 0.3500, d) 0.2700, Cramér-von-Mises-Statistik a) 0.7600, b) 0.5200, c) 0.3850, d) 0.5650.

beinhaltet zumindest kleine Strukturen. Dies trifft auf alle Datenmatrizen mit kleinen p-Werten zu. Möglich ist, dass in diesen Fällen die Hypothese verworfen wird, da die Annahme, die Datenmatrix ließe sich in unabhängige und identisch verteilte Blöcke zerlegen, offensichtlich nicht erfüllt ist.

Für einen Vergleich der Tests für unabhängige Blöcke und derjenigen für unabhängige Zufallsvariable wurden die Datenmatrizen ausgedünnt. Nach dem Streichen jeder zweiten Zeile und Spalte bleiben auf diese Weise lediglich ein Viertel der vorherigen Daten in jeder Matrix übrig, die resultierenden Matrizen haben die Größe  $25 \times 25$ . Sie wurden mit dem Kolmogorov-Smirnov- und dem Cramér-von-Mises-Anpassungstest auf die Verteilungsklasse  $\mathcal{K}$  mit Bootstrap-Quantil für unabhängige Zufallsvariable getestet. Zum Testniveau 10% wurde in 19 (Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik) bzw. 16 (Cramér-von-Mises-Teststatistik) von 40 Fällen verworfen.

Im Vergleich zu den Anpassungstests für unabhängige Blöcke verwerfen die beiden Tests für unabhängige Zufallsvariable die Nullhypothese der K-verteilten Marginalien wesentlich seltener. Wird der Vergleich auf eine Teststatistik und den zu dieser gehörigen Tests für unabhängige Blöcke sowie denjenigen für unabhängige Zufallsvariable beschränkt, so finden sich Auffälligkeiten. Die nachfolgenden Anzahlen beziehen sich dabei auf die Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik, die Ergebnisse bezüglich der Cramér-von-Mises-Teststatistik sind diesen sehr ähnlich. Für alle Datenmatrizen, bei denen der Test für unabhängige Zufallsvariable den Bootstrap-p-Wert Null liefert, ist auch der Bootstrap-p-Wert des Tests für unabhängige Blöcke Null. Aber bei den höheren Bootstrap-p-Werten zeigen sich Unterschiede. Der Test für unabhängige Blöcke ergibt bei 9 Datenmatrizen Bootstrap-p-Werte, die größer als 0.1 sind. Beim Test für unabhängige Zufallsvariable sind es 21 Datenmatrizen. Allerdings sind nur zwei Drittel der 9 Datenmatrizen auch unter diesen 21 Datenmatrizen zu finden. Hier scheint das Ausdünnen der Matrizen und der damit ein-

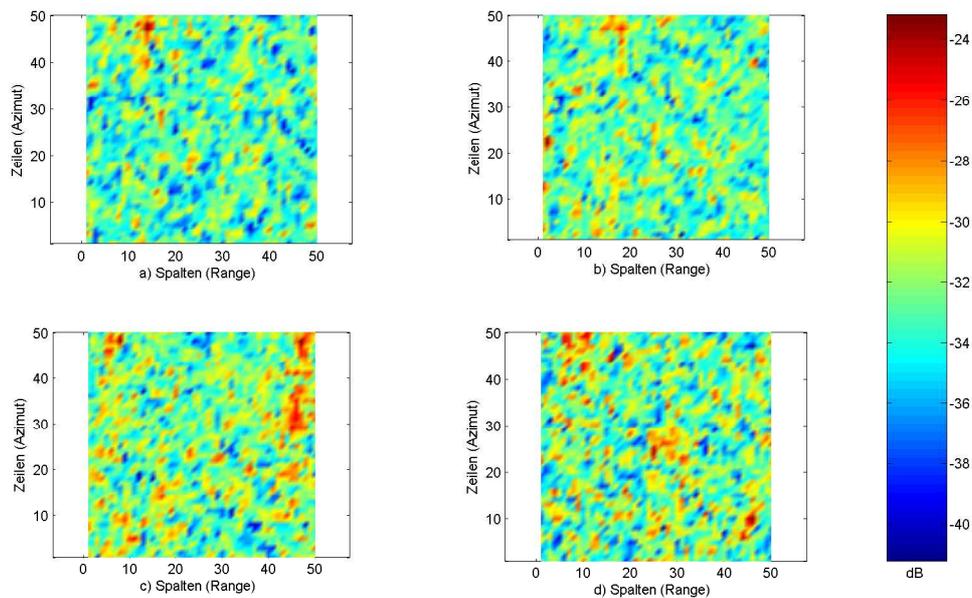


Abbildung 31: Seeclutter, 4 Matrizen der Größe  $49 \times 49$  mit Bootstrap-p-Werten Null, Kolmogorov-Smirnov-Statistik a) 0, b) 0, c) 0, d) 0, Cramér-von-Mises-Statistik a) 0, b) 0, c) 0, d) 0.

hergehende hohe Datenverlust starke Auswirkungen darauf zu haben, für welche Matrizen die Nullhypothese zum Niveau 0.1 nach der Entscheidungsregel (6.25) nicht verworfen wird.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass bei dem analysierten Wiesecutter die Ergebnisse aus Abschnitt 2.4 für das Modell der  $(1,1)$ -Abhängigkeit sprechen, aber entweder andere Voraussetzungen wie die identische Verteilung der Blöcke verletzt sind, oder die eindimensionalen Randverteilungen nicht in der Klasse der K-Verteilungen liegen. Hier können die Anpassungstests für eine andere eindimensionale parametrische Verteilungsklasse modifiziert werden. Dazu müssen neben den erforderlichen Voraussetzungen an die Verteilungsklasse auch diejenigen an die zugehörigen Schätzer erfüllt sein.

Bei den aus derselben Szene stammenden Datenmatrizen mit Seeclutter gibt es Datenmatrizen, für welche alle vier Tests auf K-verteilte Marginalien als Bootstrap-p-Wert Null liefern und somit die Nullhypothese zu jedem Testniveau verwerfen. In solchen Matrizen können visuell gröbere Strukturen erkannt werden. Andererseits existieren auch Datenmatrizen, auf die das Modell zu passen scheint. Um welche der Matrizen es sich dabei handelt, wird jedoch stark davon beeinflusst, ob der angewendete Test die Abhängigkeitsstruktur der Daten berücksichtigt. Zwischen den Resultaten, die unter Verwendung der Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik und der Cramér-von-Mises-Teststatistik gewonnen werden, gibt es kaum Unterschiede. Zwischen den Ergebnissen des Tests für unabhängige Blöcke, welche die  $(1,1)$ -Abhängigkeit der Daten berücksichtigt, und denen der Tests für unabhängige Zufallsvariable sind die Unterschiede dagegen sehr groß.

Dies macht die Notwendigkeit deutlich, die Abhängigkeiten zwischen den Daten in deren Auswertung einfließen zu lassen.

## A Analytische Hilfsmittel

### A.1 Abschätzungen einzelner Funktionen

In diesem Abschnitt werden verschiedene Funktionen abgeschätzt. Die Ergebnisse kommen beispielsweise bei der Herleitung integrierbarer Majoranten zum Einsatz.

Es seien  $\beta > 0$  und  $h_0 > 0$  dazu so klein gewählt, dass auch  $\beta - h_0 > 0$  ist. Ferner sei  $\xi \in [\beta - h_0, \beta + h_0]$ .

- Für  $c > 0$  ist

$$c^\xi \leq c^{\beta - h_0 I(c < 1) + h_0 I(c \geq 1)}.$$

- Für  $c > 0$  ist

$$\left(\frac{1}{\xi}\right)^c \leq \left(\frac{1}{\beta - h_0}\right)^c.$$

- Die Gammafunktion hat auf der positiven reellen Achse ein Minimum  $(x_{min}, \Gamma(x_{min}))$ , das numerisch berechnet ungefähr bei  $(1.461632, 0.885603)$  liegt. Daher gilt für alle  $y \in (0, \infty)$

$$\frac{1}{\Gamma(y)} \leq \frac{1}{\Gamma(x_{min})} < 1.2$$

und es gilt für hinreichend klein gewähltes  $h_0$

$$\Gamma(\xi) \leq \Gamma(\beta + h_0 I(\beta \geq x_{min}) - h_0 I(\beta < x_{min})).$$

Für die folgenden Abschätzungen der Polygammafunktionen wird die Reihendarstellung der  $m$ -ten Polygammafunktion für alle  $y \in \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$  benötigt

$$\psi_m(y) = (-1)^{m+1} m! \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(y+k)^{m+1}}.$$

- Die Digammafunktion  $\psi(y)$  ist für alle  $y \in (0, \infty)$  streng monoton wachsend. Das kann über die Ableitung der Digammafunktion, die Trigammafunktion  $\psi_1(y) = \psi'(y)$ , begründet werden, für welche die obige Reihendarstellung positiv ist:

$$\psi_1(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(y+k)^2} > 0.$$

Daher kann die Digammafunktion abgeschätzt werden durch

$$\psi(\xi) \leq \psi(\beta + h_0).$$

- Für die Trigammafunktion  $\psi_1(y)$  ist die Ableitung für alle  $y \in (0, \infty)$  negativ

$$\psi_2(y) = -2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(y+k)^3} < 0.$$

Aufgrund des Monotonieverhaltens gilt für die Trigammafunktion

$$\psi_1(\xi) \leq \psi_1(\beta - h_0).$$

- Der Logarithmus erfüllt für alle  $\delta > 0$

$$\lim_{y \downarrow 0} y^\delta \ln(y) = 0$$

und damit gilt für ein entsprechend gewähltes  $y_\delta > 0$  die Abschätzung

$$|\ln(y)| \leq y^{-\delta} \text{ für alle } y \in (0, y_\delta).$$

Ferner gilt für alle  $\tilde{\delta} > 0$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} y^{-\tilde{\delta}} \ln(y) = 0.$$

Dies impliziert für ein entsprechend gewähltes  $y_{\bar{\delta}} < \infty$  die Abschätzung

$$|\ln(y)| \leq y^{\bar{\delta}} \text{ für alle } y \in (y_{\bar{\delta}}, \infty).$$

- Die modifizierte Besselfunktion zweiter Art  $K_\nu(z)$  mit  $\nu \in \mathbb{R}$  ist nach Lemma 5.3 streng monoton fallend in  $z \in (0, \infty)$ . Daher gilt

$$K_\nu\left(\frac{x}{\xi}\right) \leq K_\nu\left(\frac{x}{\beta + h_0}\right) \text{ für alle } x \in (0, \infty).$$

- Für alle  $c \in \mathbb{R}$  und alle  $z > 0$  gilt nach Lemma 5.4

$$K_{\xi+c}(z) \leq K_{\beta+c+h_0 I(\beta+c \geq 0) - h_0 I(\beta+c < 0)}(z).$$

- Für alle  $c \in \mathbb{R}$  und alle  $t > 0$  ist

$$\frac{1}{t^{c+\xi}} \leq \frac{1}{t^{c+\beta-h_0 I(t>1)+h_0 I(t \leq 1)}}.$$

- Für alle  $c \in \mathbb{R}$  und alle  $x, a > 0$  ist

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^{\xi+c}} e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt \leq \int_0^1 \frac{1}{t^{c+\beta+h_0}} e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt + \int_1^\infty \frac{1}{t^{c+\beta-h_0}} e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt < \infty.$$

Das Integral ist endlich, da das Verhalten des Produktes aus dem gebrochen rationalen Faktor und der Exponentialfunktion sowohl für  $t \rightarrow 0$  als auch für  $t \rightarrow \infty$  von der höheren Konvergenzgeschwindigkeit der Exponentialfunktion bestimmt wird.

- Für alle  $c \in \mathbb{R}$  und alle  $x > 0$  gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^c} e^{-t-x^2/(\xi^2 4t)} dt \leq \int_0^\infty \frac{1}{t^c} e^{-t-x^2/((\beta+h_0)^2 4t)} dt.$$

Das folgende Lemma wird zur Berechnung der Konvergenzordnungen in den Abschnitten A.2.2 und A.4.2 benötigt.

**A.1 Lemma:** Sei  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  eine stetige Funktion, die  $f(y) \rightarrow 1$  für  $y \rightarrow \infty$  erfüllt. Dann gilt für alle  $m \in \mathbb{N}_0$

$$\int_1^y \frac{\ln(v)^m}{v} f(v) dv = \frac{\ln(y)^{m+1}}{m+1} (1 + o(1)) \text{ für } y \rightarrow \infty. \quad (\text{A.1})$$

**Beweis:** Sei  $\varepsilon > 0$ . Nach Voraussetzung existiert  $y_\varepsilon \in (1, \infty)$  mit

$$1 - \varepsilon \leq f(v) \leq 1 + \varepsilon \text{ für alle } v \geq y_\varepsilon. \quad (\text{A.2})$$

Ferner gilt für alle  $y > y_\varepsilon$  die Zerlegung

$$\int_1^y \frac{\ln(v)^m}{v} f(v) dv = \int_1^{y_\varepsilon} \frac{\ln(v)^m}{v} f(v) dv + \int_{y_\varepsilon}^y \frac{\ln(v)^m}{v} f(v) dv. \quad (\text{A.3})$$

Nach (A.2) lässt sich der zweite Summand abschätzen durch

$$(1 - \varepsilon) \int_{y_\varepsilon}^y \frac{\ln(v)^m}{v} dv \leq \int_{y_\varepsilon}^y \frac{\ln(v)^m}{v} f(v) dv \leq (1 + \varepsilon) \int_{y_\varepsilon}^y \frac{\ln(v)^m}{v} dv. \quad (\text{A.4})$$

Diese beiden Schranken lassen sich folgendermaßen umformen

$$(1 \pm \varepsilon) \int_{y_\varepsilon}^y \frac{\ln(v)^m}{v} dv = (1 \pm \varepsilon) \left[ \frac{\ln(v)^{m+1}}{m+1} \right]_{v=y_\varepsilon}^{v=y} = \text{const}_{\varepsilon, m} + (1 \pm \varepsilon) \frac{\ln(y)^{m+1}}{m+1}. \quad (\text{A.5})$$

Für den ersten Summanden aus Gleichung (A.3) gilt aufgrund der Stetigkeit von  $f$

$$\int_1^{y_\varepsilon} \frac{\ln(v)^m}{v} f(v) dv = \text{const}_{\varepsilon, m}. \quad (\text{A.6})$$

Insgesamt ergibt sich aus (A.3), (A.4), (A.5) und (A.6) für alle  $y > y_\varepsilon$

$$\frac{\text{const}_{\varepsilon,m}}{\ln(y)^{m+1}} + (1 - \varepsilon) \leq \frac{m+1}{\ln(y)^{m+1}} \int_1^y \frac{\ln(v)^m}{v} f(v) dv \leq \frac{\text{const}_{\varepsilon,m}}{\ln(y)^{m+1}} + (1 + \varepsilon).$$

Es existiert  $\tilde{y}_\varepsilon > 0$  so, dass gilt

$$\left| \frac{\text{const}_{\varepsilon,m}}{\ln(y)^{m+1}} \right| \leq \varepsilon \text{ für alle } y \geq \tilde{y}_\varepsilon.$$

Damit gilt für alle  $y > \max\{y_\varepsilon, \tilde{y}_\varepsilon\}$

$$1 - 2\varepsilon \leq \frac{m+1}{\ln(y)^{m+1}} \int_1^y \frac{\ln(v)^m}{v} f(v) dv \leq 1 + 2\varepsilon,$$

woraus (A.1) folgt. □

## A.2 Konvergenzordnung von $\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt$ für $a > 0$

### A.2.1 Für $x \rightarrow \infty$

Die Ausdrücke  $o(1)$  und  $O(1)$  beziehen sich in diesem Abschnitt jeweils auf das asymptotische Verhalten für  $x \rightarrow \infty$ .

Für die Herleitung der gewünschten Konvergenzaussage wird das Integral zunächst in eine Summe zerlegt. Dann werden die Konvergenzordnungen der in den einzelnen Summanden auftretenden Integrale bestimmt.

Es gilt für alle  $\rho \in \mathbb{R}$  und alle  $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt &= x^{\rho+1} \int_0^\infty s^\rho \ln\left(\frac{1}{xs}\right) e^{-x(s+1/s)} ds \\ &= x^{\rho+1} \left\{ -\ln(x) \int_0^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds - \int_0^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds \right\}. \end{aligned}$$

Für diese beiden Integrale ergeben sich durch Substitution die Gleichungen

$$\int_0^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds = \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} e^{-x(s+1/s)} ds + \int_1^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds \quad (\text{A.7})$$

sowie

$$\int_0^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds = - \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds + \int_1^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds. \quad (\text{A.8})$$

Die Gleichungen (A.7) und (A.8) implizieren

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt &= x^{\rho+1} \left\{ -\ln(x) \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} e^{-x(s+1/s)} ds + \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds \right. \\ &\quad \left. - \ln(x) \int_1^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds - \int_1^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Betrachtet werden daher die beiden Integrale

$$\int_1^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds \text{ und } \int_1^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds.$$

1) Es gilt

$$\begin{aligned} &\int_1^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho+1} \int_2^\infty \left[ t + ((t+2)(t-2))^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{((t+2)(t-2))^{1/2}} e^{-xt} dt \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho+1} e^{-2x} x^{-1/2} \int_0^\infty \left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) u \right)^{1/2}} e^{-u} du. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Es sei o.B.d.A.  $x \geq 1$ . Betrachtet wird das Integral

$$\int_0^\infty \left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) u \right)^{1/2}} e^{-u} du.$$

Für alle  $\rho \geq -1$  und alle  $u \in (0, \infty)$  gilt

$$\left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) u \right)^{1/2}} e^{-u} \leq \left[ u + 2 + ((u+4)u)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{2} u^{-1/2} e^{-u}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist über  $(0, \infty)$  integrierbar.

Im Fall  $\rho < -1$  kann der Integrand für alle  $u \in (0, \infty)$  folgendermaßen abgeschätzt werden

$$\left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) u \right)^{1/2}} e^{-u} \leq 2^\rho u^{-1/2} e^{-u}.$$

Auch in diesem Fall ist die rechte Seite der Ungleichung über  $(0, \infty)$  integrierbar.

Damit ist auf  $(0, \infty)$  und für alle  $\rho \in \mathbb{R}$  eine integrierbare Majorante gefunden und der Satz von Lebesgue impliziert

$$\int_0^\infty \left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \frac{u}{x} + 4 \right)^{1/2}} u^{-1/2} e^{-u} du \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 2^\rho \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du = 2^\rho \sqrt{\pi}. \quad (\text{A.11})$$

Zusammengefasst ergeben (A.10) und (A.11) für alle  $\rho \in \mathbb{R}$

$$\int_1^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds = x^{-1/2} e^{-2x} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (1 + o(1)). \quad (\text{A.12})$$

2) Es gilt

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^{\rho+1} \int_2^\infty \left[ t + ((t+2)(t-2))^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{((t+2)(t-2))^{1/2}} \ln \left( \frac{1}{2} t + \frac{1}{2} (t^2 - 4)^{1/2} \right) e^{-xt} dt \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^{\rho+1} e^{-2x} x^{-1/2} \\ & \cdot \int_0^\infty \left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) u \right)^{1/2}} \ln \left( \frac{1}{2} \left( \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right) \right) e^{-u} du. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Es sei o.B.d.A.  $x \geq 1$ . Betrachtet wird das Integral

$$\int_0^\infty \left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) u \right)^{1/2}} \ln \left( \frac{1}{2} \left( \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right) \right) e^{-u} du.$$

Für alle  $\rho \geq -1$  und alle  $u \in (0, \infty)$  gilt

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) u \right)^{1/2}} \ln \left( \frac{1}{2} \left( \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right) \right) e^{-u} \\ & \leq \left[ u + 2 + ((u+4)u)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{2} u^{-1/2} \ln \left( \frac{1}{2} \left( u + 2 + ((u+4)u)^{1/2} \right) \right) e^{-u}. \end{aligned}$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist über  $(0, \infty)$  integrierbar.

Im Fall  $\rho < -1$  kann der Integrand für alle  $u \in (0, \infty)$  folgendermaßen abgeschätzt werden

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) u \right)^{1/2}} \ln \left( \frac{1}{2} \left( \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right) \right) e^{-u} \\ & \leq 2^\rho u^{-1/2} \ln \left( \frac{1}{2} \left( u + 2 + ((u+4)u)^{1/2} \right) \right) e^{-u}. \end{aligned}$$

Auch in diesem Fall ist die rechte Seite der Ungleichung über  $(0, \infty)$  integrierbar.

Damit ist auf  $(0, \infty)$  und für alle  $\rho \in \mathbb{R}$  eine integrierbare Majorante gefunden und der Satz von Lebesgue impliziert

$$\int_0^\infty \left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \frac{u}{x} + 4 \right)^{1/2}} u^{-1/2} \ln \left( \frac{1}{2} \left( \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right) \right) e^{-u} du$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow \infty} 2^\rho \ln(1) \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du = 2^\rho \ln(1) \sqrt{\pi} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Zusammengefasst ergeben (A.13) und (A.14) für alle  $\rho \in \mathbb{R}$

$$\int_1^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds = x^{-1/2} e^{-2x} o(1). \quad (\text{A.15})$$

Insgesamt gilt mit Gleichung (A.9) sowie den Konvergenzordnungen (A.12) und (A.15)

$$\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt$$

$$= x^{\rho+1} \left\{ -\ln(x) x^{-1/2} e^{-2x} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (1 + o(1)) + x^{-1/2} e^{-2x} o(1) \right.$$

$$\left. - \ln(x) x^{-1/2} e^{-2x} \frac{1}{2} \sqrt{\pi} (1 + o(1)) - x^{-1/2} e^{-2x} o(1) \right\}$$

$$= -x^{\rho+1/2} \ln(x) e^{-2x} \sqrt{\pi} (1 + o(1)).$$

Die gewünschte Konvergenzaussage für  $x \rightarrow \infty$  ergibt sich durch Ersetzen von  $x$  durch  $\frac{x}{2a}$  im obigen Integral.

$$\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt = -x^{\rho+1/2} \ln\left(\frac{x}{2a}\right) e^{-x/a} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho+1/2} a^{-(\rho+1/2)} (1 + o(1))$$

$$= -x^{\rho+1/2} \ln(x) e^{-x/a} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho+1/2} a^{-(\rho+1/2)} (1 + o(1)). \quad (\text{A.16})$$

## A.2.2 Für $x \rightarrow 0$

Die Ausdrücke  $o(1)$  und  $O(1)$  beziehen sich in diesem Abschnitt jeweils auf das asymptotische Verhalten für  $x \rightarrow 0$ .

Um für  $\rho \in \mathbb{R}$  die Konvergenzordnung des Integrals

$$\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt \quad (\text{A.17})$$

für  $x \downarrow 0$  zu bestimmen, wird eine Fallunterscheidung bezüglich  $\rho$  benötigt.

- 1) Sei  $\rho > -1$ . Für alle  $x \in (0, \infty)$  und alle  $t \in (0, \infty)$  kann der Integrand von (A.17) betragsmäßig abgeschätzt werden durch

$$\left| t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} \right| \leq t^\rho |\ln(t)| e^{-t}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist für  $\rho > -1$  über  $(0, \infty)$  integrierbar. Daher impliziert der Satz von Lebesgue für alle  $\rho > -1$

$$\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt \xrightarrow{x \downarrow 0} \int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t} dt$$

$$= -\Gamma'(\rho+1) = -\Gamma(\rho+1)\psi(\rho+1). \quad (\text{A.18})$$

- 2) Sei  $\rho < -1$ . In diesem Fall wird die Summendarstellung (A.9) für alle  $x \in (0, \infty)$

$$\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt = x^{\rho+1} \left\{ -\ln(x) \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} e^{-x(s+1/s)} ds + \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds \right.$$

$$\left. - \ln(x) \int_1^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds - \int_1^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds \right\}$$

verwendet, um die Konvergenzordnung des Integrals zu bestimmen. Dazu werden die Summanden einzeln betrachtet. Für den Integranden des dritten Integrals ist  $s^\rho$  eine für  $\rho < -1$  über  $(1, \infty)$  integrierbare Majorante. Daher impliziert der Satz von Lebesgue

$$\int_1^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds \xrightarrow{x \downarrow 0} \int_1^\infty s^\rho ds = -\frac{1}{\rho+1}. \quad (\text{A.19})$$

Für den Integranden des vierten Integrals ist  $s^\rho \ln(s)$  eine für  $\rho < -1$  über  $(1, \infty)$  integrierbare Majorante und mit dem Satz von Lebesgue folgt

$$\int_1^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds \xrightarrow{x \downarrow 0} \int_1^\infty s^\rho \ln(s) ds = \frac{1}{(\rho+1)^2}. \quad (\text{A.20})$$

Zu untersuchen bleiben das erste und das zweite Integral. Mit dem Übergang zur Notation  $\rho' = -(\rho+2)$  lassen sich diese schreiben als

$$\int_1^\infty s^{\rho'} e^{-x(s+1/s)} ds \text{ und } \int_1^\infty s^{\rho'} \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds \text{ für } \rho' > -1.$$

Für das erste Integral gilt für alle  $\rho' > -1$

$$\int_1^\infty t^{\rho'} e^{-x(t+1/t)} dt = x^{-(\rho'+1)} \int_x^\infty s^{\rho'} e^{-(s+x^2/s)} ds. \quad (\text{A.21})$$

Dieses Integral lässt sich als Differenz schreiben

$$\int_x^\infty s^{\rho'} e^{-(s+x^2/s)} ds = \int_0^\infty s^{\rho'} e^{-(s+x^2/s)} ds - \int_0^x s^{\rho'} e^{-(s+x^2/s)} ds. \quad (\text{A.22})$$

Für alle  $x \in (0, \infty)$  und alle  $s \in (0, \infty)$  gilt für die Integranden

$$\left| s^{\rho'} e^{-(s+x^2/s)} \right| \leq s^{\rho'} e^{-s}.$$

Da die rechte Seite der Ungleichung über  $(0, \infty)$  integrierbar ist, impliziert der Satz von Lebesgue

$$\int_0^\infty s^{\rho'} e^{-(s+x^2/s)} ds \xrightarrow{x \downarrow 0} \int_0^\infty s^{\rho'} e^{-s} ds = \Gamma(\rho'+1).$$

Außerdem gilt

$$0 \leq \int_0^x s^{\rho'} e^{-(s+x^2/s)} ds \leq \int_0^x s^{\rho'} ds \xrightarrow{x \downarrow 0} 0$$

und damit

$$\int_0^x s^{\rho'} e^{-(s+x^2/s)} ds = o(1).$$

Insgesamt ergibt sich mit Darstellung (A.22)

$$\int_x^\infty s^{\rho'} e^{-(s+x^2/s)} ds = \Gamma(\rho'+1)(1+o(1)). \quad (\text{A.23})$$

Mit (A.21) folgt daraus

$$\int_1^\infty t^{\rho'} e^{-x(t+1/t)} dt = x^{-(\rho'+1)} \Gamma(\rho'+1)(1+o(1)). \quad (\text{A.24})$$

Für das letzte noch zu betrachtende Integral aus Gleichung (A.9) gilt für alle  $\rho' > -1$

$$\int_1^\infty t^{\rho'} \ln(t) e^{-x(t+1/t)} dt = x^{-(\rho'+1)} \int_x^\infty s^{\rho'} \ln(s) e^{-(s+x^2/s)} ds - x^{-(\rho'+1)} \ln(x) \int_x^\infty s^{\rho'} e^{-(s+x^2/s)} ds. \quad (\text{A.25})$$

Für das erste Integral in der Differenz gilt mit einer Argumentation analog zu derjenigen von (A.23) und der über  $(0, \infty)$  integrierbaren Majorante  $s^{\rho'} |\ln(s)| e^{-s}$

$$\int_x^\infty s^{\rho'} \ln(s) e^{-(s+x^2/s)} ds = \Gamma(\rho'+1) \psi(\rho'+1)(1+o(1)). \quad (\text{A.26})$$

Damit und mit der Konvergenzordnung (A.23) ergibt sich aus Darstellung (A.25) für alle  $\rho' > -1$

$$\int_1^\infty t^{\rho'} \ln(t) e^{-x(t+1/t)} dt = -x^{-(\rho'+1)} \ln(x) \Gamma(\rho' + 1) (1 + o(1)). \quad (\text{A.27})$$

Zusammengefasst ergeben Gleichung (A.9) sowie die Konvergenzordnungen (A.19), (A.20), (A.24) und (A.27) für alle  $\rho < -1$

$$\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt = -x^{2(\rho+1)} \ln(x) 2\Gamma(-(\rho+1)) (1 + o(1)). \quad (\text{A.28})$$

3) Sei  $\rho = -1$ .

Es gilt für alle  $\tilde{\rho} \in \mathbb{R}$  und alle  $x \in (0, \infty)$

$$\int_0^\infty t^{\tilde{\rho}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt = x^{\tilde{\rho}+1} \left\{ -\ln(x) \int_0^\infty s^{\tilde{\rho}} e^{-x(s+1/s)} ds - \int_0^\infty s^{\tilde{\rho}} \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds \right\}.$$

Es gilt für alle  $x \in (0, \infty)$

$$\int_0^\infty s^{-1} \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds = - \int_0^\infty t^{-1} \ln(t) e^{-x(t+1/t)} dt.$$

Also gilt für alle  $x \in (0, \infty)$

$$\int_0^\infty s^{-1} \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds = 0. \quad (\text{A.29})$$

Damit vereinfacht sich die obige Summendarstellung zu

$$\int_0^\infty t^{-1} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt = -\ln(x) \int_0^\infty s^{-1} e^{-x(s+1/s)} ds.$$

Mit

$$\int_0^1 s^{-1} e^{-x(s+1/s)} ds = \int_1^\infty t^{-1} e^{-x(t+1/t)} dt \quad (\text{A.30})$$

folgt

$$\int_0^\infty t^{-1} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt = -2\ln(x) \int_1^\infty s^{-1} e^{-x(s+1/s)} ds. \quad (\text{A.31})$$

Für das Integral auf der rechten Seite der Gleichung werden im Folgenden integrierbare Majoranten hergeleitet.

$$\begin{aligned} \int_1^\infty s^{-1} e^{-x(s+1/s)} ds &= \int_2^\infty \frac{1}{((u+2)(u-2))^{1/2}} e^{-xu} du \\ &= \int_{2x}^\infty \frac{1}{\underbrace{((v+2x)(v-2x))^{1/2}}_{=f'_x(v)}} \underbrace{e^{-v}}_{=g(v)} dv \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

$$= [f_x(v)g(v)]_{v=2x}^{v=\infty} - \int_{2x}^\infty f_x(v)g'(v)dv \quad (\text{A.33})$$

mit

$$f_x(v) := \int_1^v \frac{1}{((u+2x)(u-2x))^{1/2}} du \text{ für alle } v \in (2x, \infty).$$

Für die beiden Terme aus (A.33) werden separat die Konvergenzordnungen hergeleitet. Dazu wird zunächst die Funktion  $|f_x|$  nach oben abgeschätzt.

Für alle  $x \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $v \in (2x, \infty)$  und  $u$  zwischen 1 und  $v$  gilt  $u \geq \min\{1, v\} > 2x$ , also  $u - 2x > 0$ . Daher gilt

$$\frac{1}{((u+2x)(u-2x))^{1/2}} \leq \frac{1}{u-2x}.$$

Es sei o.B.d.A.  $x < \frac{1}{2}$ .

Für die Funktion  $f_x$  ergibt sich für alle  $v \in (2x, \infty)$

$$|f_x(v)| \leq \left| \int_1^v \frac{1}{u-2x} du \right| = |\ln(v-2x) - \ln(1-2x)|. \quad (\text{A.34})$$

Also gilt für  $v \in (2x, \infty)$

$$|f_x(v)g(v)| \leq |\ln(v-2x) - \ln(1-2x)| e^{-v} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} [f_x(v)g(v)]_{v=2x}^{v=\infty} &= 0 - f_x(2x)g(2x) \\ &= \int_{2x}^1 \frac{1}{((u+2x)(u-2x))^{1/2}} du \cdot e^{-2x}. \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

Dieses Integral lässt sich so umformen, dass es die Voraussetzungen von Lemma A.1 mit  $m = 0$  erfüllt

$$\begin{aligned} \int_{2x}^1 \frac{1}{((u+2x)(u-2x))^{1/2}} du &= \int_1^{\frac{1}{2x}} \frac{1}{v \left( \left(1 + \frac{1}{v}\right) \left(1 - \frac{1}{v}\right) \right)^{1/2}} dv \\ &= \ln\left(\frac{1}{2x}\right) (1 + o(1)) = -\ln(x) (1 + o(1)) \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

nach (A.1). Gleichung (A.35) und die Konvergenzordnung (A.36) implizieren

$$[f_x(v)g(v)]_{v=2x}^{v=\infty} = -\ln(x)(1 + o(1)). \quad (\text{A.37})$$

Damit ist der erste Term aus Gleichung (A.33) bestimmt. Für den zweiten Term gilt nach Abschätzung (A.34)

$$\begin{aligned} \left| \int_{2x}^{\infty} f_x(v)g'(v)dv \right| &\leq \int_{2x}^{\infty} |\ln(v-2x) - \ln(1-2x)| e^{-v} dv \\ &\xrightarrow{x \downarrow 0} \int_0^{\infty} |\ln(v)| e^{-v} dv \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{A.38})$$

Aus (A.33) und den Konvergenzordnungen (A.37) sowie (A.38) folgt für  $x \downarrow 0$

$$\int_1^{\infty} s^{-1} e^{-x(s+1/s)} ds = -\ln(x)(1 + o(1)). \quad (\text{A.39})$$

Zusammengefasst ergeben Gleichung (A.31) und die Konvergenz (A.39) für  $\rho = -1$

$$\int_0^{\infty} t^{-1} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt = 2\ln(x)^2(1 + o(1)). \quad (\text{A.40})$$

Mit den Ergebnissen (A.18), (A.28) und (A.40) aus der vorhergehenden Fallunterscheidung gilt für  $x \downarrow 0$

$$\int_0^{\infty} t^{\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/t} dt = \begin{cases} -\Gamma(\rho+1)\psi(\rho+1)(1 + o(1)), & \text{falls } \rho > -1 \\ -x^{2(\rho+1)} \ln(x) 2\Gamma(-(\rho+1))(1 + o(1)), & \text{falls } \rho < -1 \\ 2\ln(x)^2(1 + o(1)), & \text{falls } \rho = -1. \end{cases}$$

Wird im obigen Integral  $x$  durch  $\frac{x}{2a}$  ersetzt, so ergeben sich die gewünschten Konvergenzordnungen für  $x \downarrow 0$

$$\int_0^{\infty} t^{\rho} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt = \begin{cases} -\Gamma(\rho+1)\psi(\rho+1)(1 + o(1)), & \text{falls } \rho > -1 & (\text{A.41}) \\ -x^{2(\rho+1)} \ln(x) 2^{-(2\rho+1)} a^{-2(\rho+1)} & & \\ \cdot \Gamma(-(\rho+1))(1 + o(1)), & \text{falls } \rho < -1 & (\text{A.42}) \\ 2\ln(x)^2(1 + o(1)), & \text{falls } \rho = -1. & (\text{A.43}) \end{cases}$$

### A.3 Konvergenzordnung von $\int_0^\infty t^\rho e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt$ für $a > 0$

Es gilt für alle  $\rho \in \mathbb{R}$  und alle  $x \in (0, \infty)$  unter Verwendung von (A.7)

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^\rho e^{-t-x^2/t} dt &= x^{\rho+1} \int_0^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds \\ &= x^{\rho+1} \left\{ \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} e^{-x(s+1/s)} ds + \int_1^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

#### A.3.1 Für $x \rightarrow \infty$

Die Ausdrücke  $o(1)$  und  $O(1)$  beziehen sich in diesem Abschnitt jeweils auf das asymptotische Verhalten für  $x \rightarrow \infty$ .

Mit der Summendarstellung (A.44) und mit der Konvergenzordnung (A.12) folgt

$$\int_0^\infty t^\rho e^{-t-x^2/t} dt = x^{\rho+1/2} e^{-2x} \sqrt{\pi} (1 + o(1)). \quad (\text{A.45})$$

#### A.3.2 Für $x \rightarrow 0$

Die Ausdrücke  $o(1)$  und  $O(1)$  beziehen sich in diesem Abschnitt jeweils auf das asymptotische Verhalten für  $x \rightarrow 0$ .

Um für  $\rho \in \mathbb{R}$  die Konvergenzordnung des Integrals

$$\int_0^\infty t^\rho e^{-t-x^2/t} dt \quad (\text{A.46})$$

für  $x \downarrow 0$  zu bestimmen, wird eine Fallunterscheidung bezüglich  $\rho$  benötigt.

1) Sei  $\rho > -1$ . Für alle  $x \in (0, \infty)$  ist der Integrand von (A.46) positiv und  $t^\rho e^{-t}$  ist für  $\rho > -1$  eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante. Daher impliziert der Satz von Lebesgue für alle  $\rho > -1$

$$\int_0^\infty t^\rho e^{-t-x^2/t} dt \xrightarrow{x \downarrow 0} \int_0^\infty t^\rho e^{-t} dt = \Gamma(\rho + 1). \quad (\text{A.47})$$

2) Sei  $\rho < -1$ . Aus der Summendarstellung (A.44) und den Konvergenzordnungen (A.19) sowie (A.24) folgt

$$\int_0^\infty t^\rho e^{-t-x^2/t} dt = x^{2(\rho+1)} \Gamma(-(\rho+1)) (1 + o(1)). \quad (\text{A.48})$$

3) Sei  $\rho = -1$ . Die Summendarstellung (A.44) und die Konvergenzordnung (A.39) implizieren

$$\int_0^\infty t^{-1} e^{-t-x^2/t} dt = -2 \ln(x) (1 + o(1)). \quad (\text{A.49})$$

### A.4 Konvergenzordnung von $\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt$ für $a > 0$

#### A.4.1 Für $x \rightarrow \infty$

Die Ausdrücke  $o(1)$  und  $O(1)$  beziehen sich in diesem Abschnitt jeweils auf das asymptotische Verhalten für  $x \rightarrow \infty$ .

Für die Herleitung der gewünschten Konvergenzaussage wird das Integral zunächst in eine Summe von Integralen zerlegt. Dann werden die Konvergenzordnungen der einzelnen Summanden bestimmt.

Es gilt für alle  $\rho \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/t} dt \\ &= x^{\rho+1} \left\{ \ln(x)^2 \int_0^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds + 2 \ln(x) \int_0^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds + \int_0^\infty s^\rho \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A.50})$$

Es ergibt sich durch Substitution

$$\int_0^\infty s^\rho \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds = \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds + \int_1^\infty s^\rho \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds. \quad (\text{A.51})$$

Die Zerlegungen der Integrale (A.7), (A.8) und (A.51) sowie (A.50) führen zu

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/t} dt \\
&= x^{\rho+1} \left\{ \ln(x)^2 \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} e^{-x(s+1/s)} ds - 2 \ln(x) \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds \right. \\
& \quad + \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds + \ln(x)^2 \int_1^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds \\
& \quad \left. + 2 \ln(x) \int_1^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds + \int_1^\infty s^\rho \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds \right\}. \tag{A.52}
\end{aligned}$$

Für die Integrale, in denen der Logarithmus im Integranden maximal in erster Potenz vorkommt, wurden bereits in Abschnitt A.2.1 die asymptotischen Ausdrücke (A.12) und (A.15) hergeleitet.

Mit einer analogen Rechnung wie derjenigen, die zu (A.13) führt, folgt

$$\begin{aligned}
& \int_1^\infty s^\rho \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho+1} e^{-2x} x^{-1/2} \\
& \quad \cdot \int_0^\infty \left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) u \right)^{1/2}} \ln \left( \frac{1}{2} \left( \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right) \right)^2 e^{-u} du. \tag{A.53}
\end{aligned}$$

Zu diesem Integral können für alle  $\rho \in \mathbb{R}$  über  $(0, \infty)$  integrierbare Majoranten mit denselben Methoden hergeleitet werden wie in Abschnitt A.2.1, Seite 148f. Der Satz von Lebesgue impliziert dann

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty \left[ \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right]^{\rho+1} \frac{1}{\left( \frac{u}{x} + 4 \right)^{1/2}} u^{-1/2} \ln \left( \frac{1}{2} \left( \frac{u}{x} + 2 + \left( \left( \frac{u}{x} + 4 \right) \frac{u}{x} \right)^{1/2} \right) \right)^2 e^{-u} du \\
& \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 2^\rho \ln(1)^2 \int_0^\infty u^{-1/2} e^{-u} du = 2^\rho \ln(1)^2 \sqrt{\pi} = 0. \tag{A.54}
\end{aligned}$$

Zusammengefasst ergeben (A.53) und (A.54) für alle  $\rho \in \mathbb{R}$

$$\int_1^\infty s^\rho \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds = \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho+1} e^{-2x} x^{-1/2} o(1) = x^{-1/2} e^{-2x} o(1). \tag{A.55}$$

Insgesamt gilt mit Gleichung (A.52) sowie den Konvergenzordnungen (A.12), (A.15) und (A.55) für alle  $\rho \in \mathbb{R}$

$$\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/t} dt = x^{\rho+1/2} \ln(x)^2 e^{-2x} \sqrt{\pi} (1 + o(1)).$$

Die gewünschte Konvergenzaussage für  $x \rightarrow \infty$  ergibt sich durch Ersetzen von  $x$  durch  $\frac{x}{2a}$  im obigen Integral.

$$\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt = x^{\rho+1/2} \ln(x)^2 e^{-x/a} \sqrt{\pi} \left(\frac{1}{2}\right)^{\rho+1/2} a^{-(\rho+1/2)} (1 + o(1)). \tag{A.56}$$

#### A.4.2 Für $x \rightarrow 0$

Die Ausdrücke  $o(1)$  und  $O(1)$  beziehen sich in diesem Abschnitt jeweils auf das asymptotische Verhalten für  $x \rightarrow 0$ .

Um für  $\rho \in \mathbb{R}$  die Konvergenzordnung des Integrals

$$\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/t} dt \tag{A.57}$$

für  $x \downarrow 0$  zu bestimmen, wird eine Fallunterscheidung bezüglich  $\rho$  benötigt.

1) Sei  $\rho > -1$ . Für alle  $x \in (0, \infty)$  und alle  $t \in (0, \infty)$  kann der Integrand von (A.57) betragsmäßig abgeschätzt werden durch

$$\left| t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/t} \right| \leq t^\rho \ln(t)^2 e^{-t}.$$

Die rechte Seite dieser Ungleichung ist für  $\rho > -1$  über  $(0, \infty)$  integrierbar. Daher impliziert der Satz von Lebesgue für alle  $\rho > -1$

$$\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/t} dt \xrightarrow{x \downarrow 0} \int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t} dt = \Gamma''(\rho+1). \quad (\text{A.58})$$

2) Sei  $\rho < -1$ . In diesem Fall wird die Summendarstellung (A.52) für alle  $x > 0$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/t} dt \\ = & x^{\rho+1} \left\{ \ln(x)^2 \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} e^{-x(s+1/s)} ds - 2 \ln(x) \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds \right. \\ & + \int_1^\infty s^{-(\rho+2)} \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds + \ln(x)^2 \int_1^\infty s^\rho e^{-x(s+1/s)} ds \\ & \left. + 2 \ln(x) \int_1^\infty s^\rho \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds + \int_1^\infty s^\rho \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds \right\} \end{aligned}$$

verwendet, um die Konvergenzordnung des Integrals zu bestimmen. Dazu werden die einzelnen Summanden betrachtet. Die vier Integrale, in deren Integranden der Logarithmus maximal in erster Potenz vorkommt, wurden bereits in (A.19), (A.20), (A.24) und (A.27) behandelt.

Für den Integranden des sechsten Integrals ist  $s^\rho \ln(s)^2$  eine für  $\rho < -1$  über  $(1, \infty)$  integrierbare Majorante. Daher impliziert der Satz von Lebesgue

$$\int_1^\infty s^\rho \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds \xrightarrow{x \downarrow 0} \int_1^\infty s^\rho \ln(s)^2 ds = -\frac{2}{(\rho+1)^3}. \quad (\text{A.59})$$

Zu untersuchen bleibt das dritte Integral. Mit dem Übergang zur Notation  $\rho' = -(\rho+2)$  lässt sich dieses schreiben als

$$\int_1^\infty s^{\rho'} \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds \text{ für } \rho' > -1.$$

Es gilt für alle  $\rho' > -1$

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty t^{\rho'} \ln(t)^2 e^{-x(t+1/t)} dt \\ = & x^{-(\rho'+1)} \int_x^\infty s^{\rho'} \ln(s)^2 e^{-(s+x^2/s)} ds - 2x^{-(\rho'+1)} \ln(x) \int_x^\infty s^{\rho'} \ln(s) e^{-(s+x^2/s)} ds \\ & + x^{-(\rho'+1)} \ln(x)^2 \int_x^\infty s^{\rho'} e^{-(s+x^2/s)} ds. \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

Für den ersten Summanden gilt analog zu (A.26)

$$\int_x^\infty s^{\rho'} \ln(s)^2 e^{-(s+x^2/s)} ds = \Gamma(\rho'+1) (\psi(\rho'+1)^2 + \psi_1(\rho'+1)) (1 + o(1)). \quad (\text{A.61})$$

Damit und mit den Konvergenzordnungen (A.23) sowie (A.26) ergibt sich für alle  $\rho' > -1$

$$\int_1^\infty t^{\rho'} \ln(t)^2 e^{-x(t+1/t)} dt = x^{-(\rho'+1)} \ln(x)^2 \Gamma(\rho'+1) (1 + o(1)). \quad (\text{A.62})$$

Zusammengefasst ergeben Gleichung (A.52) sowie die Konvergenzordnungen (A.19), (A.20), (A.24), (A.27), (A.59) und (A.62) für alle  $\rho < -1$

$$\int_0^\infty t^\rho \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/t} dt = x^{2(\rho+1)} \ln(x)^2 4\Gamma(-(\rho+1))(1 + o(1)). \quad (\text{A.63})$$

3) Sei  $\rho = -1$ . Aus (A.29) und (A.30) folgt für alle  $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty t^{-1} \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/t} dt \\ = & \ln(x)^2 \int_0^\infty s^{-1} e^{-x(s+1/s)} ds + 2 \ln(x) \int_0^\infty s^{-1} \ln(s) e^{-x(s+1/s)} ds + \int_0^\infty s^{-1} \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds \\ = & 2 \ln(x)^2 \int_1^\infty s^{-1} e^{-x(s+1/s)} ds + \int_0^\infty s^{-1} \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds. \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

Mit

$$\int_0^1 s^{-1} \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds = \int_1^\infty t^{-1} \ln(t)^2 e^{-x(t+1/t)} dt$$

vereinfacht sich die Darstellung (A.64) für alle  $x \in (0, \infty)$  zu

$$\int_0^\infty t^{-1} \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/t} dt = 2 \ln(x)^2 \int_1^\infty s^{-1} e^{-x(s+1/s)} ds + 2 \int_1^\infty s^{-1} \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds. \quad (\text{A.65})$$

Die Konvergenzordnung des Integrals im ersten Summanden wurde bereits in (A.39) berechnet. Mit einer analogen Rechnung wie derjenigen, welche zu (A.32) führt, folgt für das andere Integral

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty s^{-1} \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds \\ = & \ln(2x)^2 \int_{2x}^\infty \frac{1}{((v+2x)(v-2x))^{1/2}} e^{-v} dv \\ & - 2 \ln(2x) \int_{2x}^\infty \frac{1}{((v+2x)(v-2x))^{1/2}} \ln\left(v + ((v+2x)(v-2x))^{1/2}\right) e^{-v} dv \\ & + \int_{2x}^\infty \frac{1}{((v+2x)(v-2x))^{1/2}} \ln\left(v + ((v+2x)(v-2x))^{1/2}\right)^2 e^{-v} dv. \end{aligned} \quad (\text{A.66})$$

Für den ersten Summanden gilt nach (A.32) und (A.39)

$$\ln(2x)^2 \int_{2x}^\infty \frac{1}{((v+2x)(v-2x))^{1/2}} e^{-v} dv = -\ln(x)^3 (1 + o(1)). \quad (\text{A.67})$$

Die beiden anderen Summanden enthalten für  $m = 1, 2$  das Integral

$$\begin{aligned} & \int_{2x}^\infty \underbrace{\frac{1}{((v+2x)(v-2x))^{1/2}} \ln\left(v + ((v+2x)(v-2x))^{1/2}\right)^m}_{=f'_{x,m}(v)} e^{-v} dv \\ = & [f_{x,m}(v)g(v)]_{v=2x}^{v=\infty} - \int_{2x}^\infty f_{x,m}(v)g'(v)dv, \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

wobei für alle  $v \in (2x, \infty)$  definiert wird

$$f_{x,m}(v) := \int_1^v \frac{1}{((u+2x)(u-2x))^{1/2}} \ln\left(u + ((u+2x)(u-2x))^{1/2}\right)^m du.$$

Für die beiden Terme aus (A.68) werden separat die Konvergenzordnungen hergeleitet. Dazu wird zunächst  $|f_{x,m}|$  nach oben abgeschätzt.

Für alle  $x \in (0, \frac{1}{2})$ ,  $v \in (2x, \infty)$  und  $u$  zwischen 1 und  $v$  gilt  $u \geq \min\{1, v\} > 2x$ , also  $u - 2x > 0$ . Damit ist  $u \leq u + ((u+2x)(u-2x))^{1/2} \leq 2u + 1$  und daher gelten

$$\frac{1}{((u+2x)(u-2x))^{1/2}} \leq \frac{1}{u-2x}$$

sowie

$$\left| \ln\left(u + ((u+2x)(u-2x))^{1/2}\right) \right|^m \leq |\ln(u)|^m + \ln(2u+1)^m.$$

Es sei o.B.d.A.  $x < \frac{1}{2}$ .

Für die Funktion  $f_{x,m}$  ergibt sich für alle  $v \in (2x, 1]$

$$\begin{aligned} |f_{x,m}(v)| & \leq \int_v^1 \frac{1}{u-2x} (|\ln(u)|^m + \ln(2u+1)^m) du \\ & \leq \int_v^1 \frac{1}{u-2x} (|\ln(v)|^m + \ln(3)^m) du \\ & = (|\ln(v)|^m + \ln(3)^m) (\ln(1-2x) - \ln(v-2x)). \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Für alle  $v \in (1, \infty)$  gilt

$$\begin{aligned} |f_{x,m}(v)| &\leq \int_1^v \frac{1}{u-2x} (|\ln(u)|^m + \ln(2u+1)^m) du \\ &\leq \frac{2}{1-2x} \int_1^v \ln(2u+1)^m du \\ &\leq \frac{2}{1-2x} \int_1^v \ln(2v+1)^m du \\ &= \frac{2}{1-2x} \ln(2v+1)^m (v-1). \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

Aus (A.69) und (A.70) folgt für alle  $v \in (2x, \infty)$

$$|f_{x,m}(v)| \leq \left| (|\ln(v)|^m + \ln(3)^m) (\ln(1-2x) - \ln(v-2x)) \right| + \left| \frac{2}{1-2x} \ln(2v+1)^m (v-1) \right|. \quad (\text{A.71})$$

Also gilt für alle  $v \in (2x, \infty)$

$$|f_{x,m}(v)g(v)| \leq \left( (|\ln(v)|^m + \ln(3)^m) (\ln(1-2x) - \ln(v-2x)) \right) + \left| \frac{2}{1-2x} \ln(2v+1)^m (v-1) \right| e^{-v} \xrightarrow{v \rightarrow \infty} 0.$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} [f_{x,m}(v)g(v)]_{v=2x}^{v=\infty} &= 0 - f_{x,m}(2x)g(2x) \\ &= \int_{2x}^1 \frac{1}{((u+2x)(u-2x))^{1/2}} \ln\left(u + ((u+2x)(u-2x))^{1/2}\right)^m du \cdot e^{-2x}. \end{aligned} \quad (\text{A.72})$$

Dieses Integral lässt sich umformen zu

$$\begin{aligned} &\int_{2x}^1 \frac{1}{((u+2x)(u-2x))^{1/2}} \ln\left(u + ((u+2x)(u-2x))^{1/2}\right)^m du \\ &= \int_1^{\frac{1}{2x}} \frac{1}{((v+1)(v-1))^{1/2}} \left[ \ln(2x) + \ln\left(v + ((v+1)(v-1))^{1/2}\right) \right]^m dv. \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Zu betrachten sind für  $\tilde{m} = 0, 1, 2$  die Integrale

$$\begin{aligned} &\int_1^{\frac{1}{2x}} \frac{1}{((v+1)(v-1))^{1/2}} \left[ \ln\left(v + ((v+1)(v-1))^{1/2}\right) \right]^{\tilde{m}} dv \\ &= \int_1^{\frac{1}{2x}} \frac{\ln(v)^{\tilde{m}}}{v} \frac{1}{\left(\left(1 + \frac{1}{v}\right)\left(1 - \frac{1}{v}\right)\right)^{1/2}} \left[ 1 + \frac{\ln\left(1 + \left(1 + \frac{1}{v}\right)\left(1 - \frac{1}{v}\right)^{1/2}\right)}{\ln(v)} \right]^{\tilde{m}} dv \\ &= \frac{\ln\left(\frac{1}{2x}\right)^{\tilde{m}+1}}{\tilde{m}+1} (1 + o(1)) \\ &= \frac{1}{\tilde{m}+1} (-\ln(x))^{\tilde{m}+1} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

wobei die Konvergenzordnung aus der Anwendung von Lemma A.1 stammt.

Im Fall  $m = 1$  ergibt sich damit aus (A.73)

$$\int_{2x}^1 \frac{1}{((u+2x)(u-2x))^{1/2}} \ln\left(u + ((u+2x)(u-2x))^{1/2}\right) du = -\frac{1}{2} \ln(x)^2 (1 + o(1)). \quad (\text{A.74})$$

Im Fall  $m = 2$  ergibt sich aus (A.73)

$$\int_{2x}^1 \frac{1}{((u+2x)(u-2x))^{1/2}} \ln\left(u + ((u+2x)(u-2x))^{1/2}\right)^2 du = -\frac{1}{3} \ln(x)^3 (1 + o(1)). \quad (\text{A.75})$$

Mit (A.72) und (A.74) bzw. (A.75) gilt

$$[f_{x,m}(v)g(v)]_{v=2x}^{v=\infty} = I(m=2) \left(-\frac{1}{3}\right) \ln(x)^3 (1 + o(1)) + I(m=1) \left(-\frac{1}{2}\right) \ln(x)^2 (1 + o(1)). \quad (\text{A.76})$$

Damit ist die Konvergenzordnung des ersten Terms aus (A.68) bestimmt. Für den zweiten Term gilt nach der Abschätzung (A.71)

$$\begin{aligned} & \left| \int_{2x}^{\infty} f_{x,m}(v)g'(v)dv \right| \\ & \leq \int_{2x}^{\infty} \left( \left( |\ln(v)|^m + \ln(3)^m \right) (\ln(1-2x) - \ln(v-2x)) \right) + \left| \frac{2}{1-2x} \ln(2v+1)^m (v-1) \right| e^{-v} dv \\ & \xrightarrow{x \downarrow 0} \int_0^{\infty} \left( -(|\ln(v)|^m + \ln(3)^m) \ln(v) + |2 \ln(2v+1)^m (v-1)| \right) e^{-v} dv \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Aus (A.68), (A.76) und (A.77) folgt

$$\begin{aligned} & \int_{2x}^{\infty} \frac{1}{((v+2x)(v-2x))^{1/2}} \ln \left( v + ((v+2x)(v-2x))^{1/2} \right)^m e^{-v} dv \\ & = I(m=2) \left( -\frac{1}{3} \right) \ln(x)^3 (1+o(1)) + I(m=1) \left( -\frac{1}{2} \right) \ln(x)^2 (1+o(1)). \end{aligned} \quad (\text{A.78})$$

Für  $x \downarrow 0$  implizieren (A.66), (A.67) und (A.78)

$$\int_1^{\infty} s^{-1} \ln(s)^2 e^{-x(s+1/s)} ds = -\frac{1}{3} \ln(x)^3 (1+o(1)). \quad (\text{A.79})$$

Zusammengefasst ergeben Gleichung (A.65) und die Konvergenzordnungen (A.39) sowie (A.79)

$$\int_0^{\infty} t^{-1} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^2 e^{-t-x^2/t} dt = -\frac{8}{3} \ln(x)^3 (1+o(1)). \quad (\text{A.80})$$

Mit den Ergebnissen (A.58), (A.63) und (A.80) aus der vorhergehenden Fallunterscheidung gilt für  $x \downarrow 0$

$$\int_0^{\infty} t^{\rho} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^2 e^{-t-x^2/t} dt = \begin{cases} \Gamma''(\rho+1)(1+o(1)), & \text{falls } \rho > -1 \\ x^{2(\rho+1)} \ln(x)^2 4\Gamma(-(\rho+1))(1+o(1)), & \text{falls } \rho < -1 \\ -\frac{8}{3} \ln(x)^3 (1+o(1)), & \text{falls } \rho = -1. \end{cases}$$

Wird im obigen Integral  $x$  durch  $\frac{x}{2a}$  ersetzt, so ergeben sich die gewünschten Konvergenzordnungen für  $x \downarrow 0$

$$\int_0^{\infty} t^{\rho} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^2 e^{-t-x^2/(4a^2t)} dt = \begin{cases} \Gamma''(\rho+1)(1+o(1)), & \text{falls } \rho > -1 \\ x^{2(\rho+1)} \ln(x)^2 2^{-2\rho} a^{-2(\rho+1)} \\ \cdot \Gamma(-(\rho+1))(1+o(1)), & \text{falls } \rho < -1 \\ -\frac{8}{3} \ln(x)^3 (1+o(1)), & \text{falls } \rho = -1. \end{cases} \quad (\text{A.81})$$

$$\Gamma(-(\rho+1))(1+o(1)), \quad \text{falls } \rho < -1 \quad (\text{A.82})$$

$$-\frac{8}{3} \ln(x)^3 (1+o(1)), \quad \text{falls } \rho = -1. \quad (\text{A.83})$$

## A.5 Endlichkeit von Integralen

In diesem Abschnitt werden entweder geschlossene Ausdrücke für die betrachteten Integrale berechnet oder es wird durch Abschätzungen ihre Endlichkeit nachgewiesen.

### A.5.1 Berechnung von $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{\tau} \frac{1}{t^{\rho}} e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx$

Für alle  $\tau, \rho \in \mathbb{R}$  und alle  $a > 0$  ist der Integrand nichtnegativ. Daher gilt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x^{\tau} \frac{1}{t^{\rho}} e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx & = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\rho}} e^{-t} \int_0^{\infty} x^{\tau} e^{-x^2/(a^2 4t)} dx dt \\ & = \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\rho}} e^{-t} \int_0^{\infty} 2^{\tau} a^{\tau+1} u^{(\tau-1)/2} t^{(\tau+1)/2} e^{-u} du dt \\ & = 2^{\tau} a^{\tau+1} \int_0^{\infty} \frac{1}{t^{\rho-(\tau+1)/2}} e^{-t} \Gamma \left( \frac{\tau+1}{2} \right) dt, & \text{falls } \tau+1 > 0 \\ & = 2^{\tau} a^{\tau+1} \Gamma \left( \frac{\tau+1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{\tau}{2} - \rho + \frac{3}{2} \right), & \text{falls } \frac{\tau}{2} - \rho > -\frac{3}{2} \\ & < \infty. \end{aligned}$$

Also sind  $\tau + 1 > 0$  und  $\frac{\tau}{2} - \rho > -\frac{3}{2}$  hinreichende Bedingungen dafür, dass gilt

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^\tau \frac{1}{t^\rho} e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx < \infty. \quad (\text{A.84})$$

### A.5.2 Endlichkeit von $\int_0^\infty \int_0^\infty x^\tau \frac{1}{t^\rho} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^m e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx$

Seien  $\tau, \rho \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$  und  $a > 0$ . Da der Integrand nichtnegativ ist, gilt mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^\infty x^\tau \frac{1}{t^\rho} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^m e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{t^\rho} |\ln(t)|^m e^{-t} \int_0^\infty x^\tau e^{-x^2/(a^2 4t)} dx dt \\ &= \int_0^\infty \frac{1}{t^\rho} |\ln(t)|^m e^{-t} \int_0^\infty 2^\tau a^{\tau+1} u^{(\tau-1)/2} t^{(\tau+1)/2} e^{-u} du dt \\ &= 2^\tau a^{\tau+1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\rho-(\tau+1)/2}} |\ln(t)|^m e^{-t} \Gamma \left( \frac{\tau+1}{2} \right) dt, \quad \text{falls } \tau+1 > 0 \\ &= 2^\tau a^{\tau+1} \Gamma \left( \frac{\tau+1}{2} \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\rho-(\tau+1)/2}} |\ln(t)|^m e^{-t} dt \\ &< \infty, \quad \text{falls } \rho - \frac{\tau+1}{2} < -1. \end{aligned}$$

Also sind  $\tau + 1 > 0$  und  $\frac{\tau}{2} - \rho > -\frac{3}{2}$  hinreichende Bedingungen dafür, dass gilt

$$\int_0^\infty \int_0^\infty x^\tau \frac{1}{t^\rho} \left| \ln \left( \frac{1}{t} \right) \right|^m e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx < \infty. \quad (\text{A.85})$$

### A.5.3 Berechnung von $\int_0^\infty x^\tau K_\nu \left( \frac{x}{a} \right) dx$

Aus der Herleitung von (A.84) folgt für  $\tau, \nu \in \mathbb{R}$  und  $a > 0$  mit der Integraldarstellung (5.11) von  $K_\nu(\cdot)$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^\tau K_\nu \left( \frac{x}{a} \right) dx &= \frac{a^{-\nu}}{2^{\nu+1}} \int_0^\infty \int_0^\infty x^{\tau+\nu} \frac{1}{t^{\nu+1}} e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx \\ &= a^{\tau+1} 2^{\tau-1} \Gamma \left( \frac{\tau+\nu+1}{2} \right) \Gamma \left( \frac{\tau-\nu+1}{2} \right) < \infty, \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

falls die Bedingungen  $\tau + \nu > -1$  und  $\tau - \nu > -1$  erfüllt sind.

### A.5.4 Endlichkeit von $\int_0^\infty x^\tau \left| \ln \left( \frac{x}{2a} \right) \right|^m K_\nu \left( \frac{x}{a} \right) dx$

Mit derselben Argumentation wie bei der Herleitung von (A.85) gilt für  $\tau, \nu \in \mathbb{R}, m \in \mathbb{N}$  und  $a > 0$  unter Verwendung der Integraldarstellung (5.11) von  $K_\nu(\cdot)$

$$\int_0^\infty x^\tau \left| \ln \left( \frac{x}{2a} \right) \right|^m K_\nu \left( \frac{x}{a} \right) dx < \infty, \quad (\text{A.87})$$

falls die Bedingungen  $\tau + \nu > -1$  und  $\tau - \nu > -1$  erfüllt sind.

### A.5.5 Endlichkeit von $\int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial a} f(x; \vartheta) \right| dx$

Zu zeigen ist die Endlichkeit von  $\int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial a} f(x; \vartheta) \right| dx$ . Für den Integranden gilt unter Verwendung der Summen-  
darstellung (5.20)

$$\left| \frac{\partial}{\partial a} f(x; a, \alpha) \right| \leq \text{const}_{a,\alpha} \cdot x^{\alpha+L/2-1} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right) + \text{const}_{a,\alpha} \cdot x^{\alpha+L/2} K_{\alpha-L/2-1} \left( \frac{x}{a} \right).$$

Dies impliziert

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial a} f(x; a, \alpha) \right| dx \\ &\leq \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} \cdot x^{\alpha+L/2-1} K_{\alpha-L/2} \left( \frac{x}{a} \right) dx + \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} \cdot x^{\alpha+L/2} K_{\alpha-L/2-1} \left( \frac{x}{a} \right) dx < \infty \end{aligned}$$

nach Gleichung (A.86), wobei die Bedingungen

$$\begin{aligned} 2\alpha > 0 \quad \text{und} \quad L > 0 \quad \text{sowie} \\ 2\alpha > 0 \quad \text{und} \quad L > -2 \end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

### A.5.6 Endlichkeit von $\int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \vartheta) \right| dx$

Zu zeigen ist die Endlichkeit von  $\int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \vartheta) \right| dx$ . Für den Integranden gilt unter Verwendung der Summen-  
darstellung (5.21)

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; a, \alpha) \right| &\leq \left| \text{const}_{a,\alpha} \cdot x^{\alpha+L/2-1} \ln\left(\frac{x}{2a}\right) K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) \right| + \left| \text{const}_{a,\alpha} \cdot x^{\alpha+L/2-1} K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) \right| \\ &+ \left| \text{const}_{a,\alpha} \cdot x^{2\alpha-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt \right|. \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; a, \alpha) \right| dx \\ &\leq \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} \cdot x^{\alpha+L/2-1} \left| \ln\left(\frac{x}{2a}\right) \right| K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) dx + \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} \cdot x^{\alpha+L/2-1} K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) dx \\ &+ \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} \cdot x^{2\alpha-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} |\ln(t)| e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx \\ &< \infty \end{aligned}$$

nach Gleichung (A.85), (A.86) und (A.87), wobei die Bedingungen

$$\begin{aligned} 2\alpha > 0 \quad \text{und} \quad L > 0, \\ 2\alpha > 0 \quad \text{und} \quad L > 0 \quad \text{sowie} \\ 2\alpha > 0 \quad \text{und} \quad L/2 > 0 \end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

### A.5.7 Endlichkeit von $\int_0^\infty \frac{1}{f(x; \vartheta)} \left( \frac{\partial}{\partial a} f(x; \vartheta) \right)^2 dx$

Zu zeigen ist die Endlichkeit von  $\int_0^\infty \frac{1}{f(x; \vartheta)} \left( \frac{\partial}{\partial a} f(x; \vartheta) \right)^2 dx$ . Für dieses Integral gilt unter Verwendung der Dar-  
stellungen (5.19) und (5.20)

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty \frac{1}{f(x; \vartheta)} \left( \frac{\partial}{\partial a} f(x; \vartheta) \right)^2 dx \\ &= \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2-1} K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) dx + \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2} K_{\alpha-L/2-1}\left(\frac{x}{a}\right) dx \\ &+ \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} \frac{K_{\alpha-L/2-1}\left(\frac{x}{a}\right)^2}{K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right)} dx. \end{aligned}$$

Die ersten beiden Summanden sind endlich nach Gleichung (A.86), wobei die Bedingungen

$$\begin{aligned} 2\alpha > 0 \quad \text{und} \quad L > 0 \quad \text{sowie} \\ 2\alpha > 0 \quad \text{und} \quad L > -2 \end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Der dritte Summand wird in drei Integrationsbereiche aufgespalten. Da alle Faktoren des Integranden in  $x$  stetig sind und für den Nenner des Integranden  $K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) > 0$  gilt, ist der Integrand stetig in  $x$ . Dies impliziert für alle  $\varepsilon, c \in (0, \infty)$  mit  $\varepsilon < c$

$$\int_\varepsilon^c \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} \frac{K_{\alpha-L/2-1}\left(\frac{x}{a}\right)^2}{K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right)} dx < \infty.$$

Für hinreichend großes  $c$  gilt aufgrund der asymptotischen Entwicklung (5.18) der modifizierten Besselfunktion zweiter Art, eingesetzt in den Quotienten  $\frac{K_{\alpha-L/2-1}(\frac{x}{a})}{K_{\alpha-L/2}(\frac{x}{a})}$ ,

$$\int_c^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} \frac{K_{\alpha-L/2-1}(\frac{x}{a})^2}{K_{\alpha-L/2}(\frac{x}{a})} dx = \int_c^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} K_{\alpha-L/2-1}\left(\frac{x}{a}\right) (1+o(1)) dx < \infty.$$

Dabei bezieht sich  $o(1)$  auf  $x \rightarrow \infty$ . Die Endlichkeit des Integrals gilt nach Gleichung (A.86), wobei die Bedingungen

$$2\alpha > -1 \text{ und } L > -3$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Bei der Betrachtung des Integrals  $\int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} \frac{K_{\alpha-L/2-1}(\frac{x}{a})^2}{K_{\alpha-L/2}(\frac{x}{a})} dx$  werden die folgenden vier Fälle unterschieden.

- 1) Sei  $\alpha - \frac{L}{2} = 0$ . Es gilt für hinreichend kleines  $\varepsilon$  aufgrund der asymptotischen Entwicklungen (5.16) und (5.17) der modifizierten Besselfunktion zweiter Art, eingesetzt in den Quotienten  $\frac{K_{-1}(\frac{x}{a})}{K_0(\frac{x}{a})}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} \frac{K_{-1}(\frac{x}{a})^2}{K_0(\frac{x}{a})} dx &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} K_{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\left(\frac{x}{2a}\right)^{-1}}{\ln\left(\frac{x}{a}\right)} (1+o(1)) dx \\ &\leq \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2} K_{-1}\left(\frac{x}{a}\right) (1+o(1)) dx < \infty. \end{aligned}$$

Dabei bezieht sich  $o(1)$  auf  $x \rightarrow 0$ . Die Endlichkeit des Integrals gilt nach Gleichung (A.86), da die Bedingungen

$$\alpha + L/2 - 1 > -1 \text{ und } \alpha + L/2 + 1 > -1$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

- 2) Sei  $\alpha - \frac{L}{2} = 1$ . Es gilt für hinreichend kleines  $\varepsilon$  aufgrund der asymptotischen Entwicklungen (5.16) und (5.17) der modifizierten Besselfunktion zweiter Art, eingesetzt in den Quotienten  $\frac{K_0(\frac{x}{a})^2}{K_1(\frac{x}{a})}$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} \frac{K_0(\frac{x}{a})^2}{K_1(\frac{x}{a})} dx &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} \frac{\ln\left(\frac{x}{2a}\right)^2}{\left(\frac{x}{2a}\right)^{-1}} (1+o(1)) dx \\ &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+2} \ln\left(\frac{x}{a}\right)^2 (1+o(1)) dx < \infty. \end{aligned}$$

Dabei bezieht sich  $o(1)$  auf  $x \rightarrow 0$ . Die Endlichkeit des Integrals gilt nach der Abschätzung des Logarithmus aus Abschnitt A.1 und da die Bedingung

$$\alpha + L/2 + 2 > -1$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt ist.

- 3) Sei  $\alpha - \frac{L}{2} \notin \{0, 1\}$  und  $\alpha - \frac{L}{2} < 1$ . Es gilt für hinreichend kleines  $\varepsilon$  aufgrund der asymptotischen Entwicklung (5.16) der modifizierten Besselfunktion zweiter Art, eingesetzt in den Quotienten  $\frac{K_{\alpha-L/2-1}(\frac{x}{a})^2}{K_{\alpha-L/2}(\frac{x}{a})}$ ,

$$\begin{aligned} &\int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} \frac{K_{\alpha-L/2-1}(\frac{x}{a})^2}{K_{\alpha-L/2}(\frac{x}{a})} dx \\ &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} \frac{\left(\Gamma\left(|\alpha - \frac{L}{2} - 1|\right) \left(\frac{x}{2a}\right)^{-|\alpha-L/2-1|}\right)^2}{\Gamma\left(|\alpha - \frac{L}{2}|\right) \left(\frac{x}{2a}\right)^{-|\alpha-L/2|}} (1+o(1)) dx \\ &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1-2|\alpha-L/2-1|+|\alpha-L/2|} (1+o(1)) dx < \infty. \end{aligned}$$

Dabei bezieht sich  $o(1)$  auf  $x \rightarrow 0$ . Die Endlichkeit des Integrals gilt, da die Bedingung

$$\alpha + L/2 + 1 - 2|\alpha - L/2 - 1| + |\alpha - L/2| > -1,$$

erfüllt ist, was mit Hilfe der folgenden Fallunterscheidung gezeigt wird.

- 3a) Sei  $\alpha - \frac{L}{2} < 0$ . In diesem Fall entspricht die obige Bedingung der Ungleichung  $2\alpha > 0$ .

3b) Sei  $\alpha - \frac{L}{2} - 1 < 0 < \alpha - \frac{L}{2}$ . Hier ist die obige Bedingung äquivalent zu  $\alpha > \frac{L}{4}$ , was laut der Voraussetzung  $\alpha > \frac{L}{2}$  erfüllt ist.

4) Sei  $\alpha - \frac{L}{2} \notin \{0, 1\}$  und  $\alpha - \frac{L}{2} > 1$ .

Es gilt für hinreichend kleines  $\varepsilon$  aufgrund der asymptotischen Entwicklung (5.16) der modifizierten Besselfunktion zweiter Art, eingesetzt in den Quotienten  $\frac{K_{\alpha-L/2-1}(\frac{x}{a})}{K_{\alpha-L/2}(\frac{x}{a})}$ ,

$$\begin{aligned} & \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} \frac{K_{\alpha-L/2-1}(\frac{x}{a})^2}{K_{\alpha-L/2}(\frac{x}{a})} dx \\ &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1} K_{\alpha-L/2-1}\left(\frac{x}{a}\right) \frac{\Gamma\left(|\alpha - \frac{L}{2} - 1|\right) \left(\frac{x}{2a}\right)^{-|\alpha-L/2-1|}}{\Gamma\left(|\alpha - \frac{L}{2}|\right) \left(\frac{x}{2a}\right)^{-|\alpha-L/2|}} (1 + o(1)) dx \\ &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2+1-|\alpha-L/2-1|+|\alpha-L/2|} K_{\alpha-L/2-1}\left(\frac{x}{a}\right) (1 + o(1)) dx < \infty. \end{aligned}$$

Dabei bezieht sich  $o(1)$  auf  $x \rightarrow 0$ . Die Endlichkeit des Integrals gilt nach Gleichung (A.86), da die Bedingungen

$$2\alpha > -2 \quad \text{und} \quad L > -4$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Damit ist gezeigt, dass alle drei Summanden endlich sind, und es folgt

$$\int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \left( \frac{\partial}{\partial a} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 dx < \infty. \quad (\text{A.88})$$

### A.5.8 Endlichkeit von $\int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 dx$

Zu zeigen ist die Endlichkeit von  $\int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 dx$ . Für dieses Integral gilt unter Verwendung der Darstellungen (5.19) und (5.21)

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 dx \\ &= \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2-1} \ln\left(\frac{x}{2a}\right)^2 K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) dx \\ &+ \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2-1} \ln\left(\frac{x}{2a}\right) K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) dx \\ &+ \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2-1} K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) dx \\ &+ \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{2\alpha-1} \ln\left(\frac{x}{2a}\right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx \\ &+ \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{2\alpha-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt dx \\ &+ \int_0^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{3\alpha-L/2-1} \frac{1}{K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right)} \left( \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt \right)^2 dx. \end{aligned}$$

Die ersten drei Summanden sind endlich nach Gleichung (A.86) bzw. (A.87), wobei die Bedingungen

$$2\alpha > 0 \quad \text{und} \quad L > 0$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Der vierte und der fünfte Summand sind endlich nach Gleichung (A.85) und der entsprechenden Abschätzung des Logarithmus, wobei die Bedingungen

$$2\alpha > 0 \quad \text{und} \quad L > 0$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Im Folgenden wird die Endlichkeit des sechsten Summanden nachgewiesen.

Für hinreichend kleines  $\varepsilon > 0$  wird dazu das asymptotische Verhalten des Integranden aus den Gleichungen (5.16) bzw. (5.17) sowie (A.41), (A.42) bzw. (A.43) verwendet. Dazu wird eine Fallunterscheidung benötigt.

1) Sei  $\alpha - \frac{L}{2} < 0$ . Es folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{3\alpha-L/2-1} \frac{1}{K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right)} \left( \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt \right)^2 dx \\ &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{3\alpha-L/2-1} x^{|\alpha-L/2|} (1+o(1)) (-\text{const}_{a,\alpha} (1+o(1)))^2 dx \\ &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{2\alpha-1} (1+o(1)) dx < \infty. \end{aligned}$$

Dabei bezieht sich  $o(1)$  auf  $x \rightarrow 0$ . Die Endlichkeit des Integrals gilt, da  $2\alpha - 1 > -1$  ist.

2) Sei  $\alpha - \frac{L}{2} > 0$ . Für das Integral gilt

$$\begin{aligned} & \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{3\alpha-L/2-1} \frac{1}{K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right)} \left( \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt \right)^2 dx \\ &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{3\alpha-L/2-1} x^{|\alpha-L/2|} (1+o(1)) \left( -\text{const}_{a,\alpha} x^{-2\alpha+L} \ln(x) (1+o(1)) \right)^2 dx \\ &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{L-1} \ln(x)^2 (1+o(1)) dx < \infty. \end{aligned}$$

Dabei bezieht sich  $o(1)$  auf  $x \rightarrow 0$ . Die Endlichkeit des Integrals gilt, da  $L - 1 > -1$  ist.

3) Sei  $\alpha - \frac{L}{2} = 0$ . Dann folgt

$$\begin{aligned} & \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{3\alpha-L/2-1} \frac{1}{K_0\left(\frac{x}{a}\right)} \left( \int_0^\infty \frac{1}{t} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt \right)^2 dx \\ &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{3\alpha-L/2-1} \ln\left(\frac{a}{x}\right)^{-1} (1+o(1)) (\text{const}_{a,\alpha} \ln(x)^2 (1+o(1)))^2 dx \\ &= \int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{2\alpha-1+(\alpha-L/2)} \ln\left(\frac{a}{x}\right)^{-1} \ln(x)^4 (1+o(1)) dx < \infty. \end{aligned}$$

Dabei bezieht sich  $o(1)$  auf  $x \rightarrow 0$ . Die Endlichkeit des Integrals gilt, da  $\alpha - L/2 = 0$  und  $2\alpha - 1 > -1$  ist.

Für hinreichend klein gewähltes  $\varepsilon$  gilt also in jedem der Fälle

$$\int_0^\varepsilon \text{const}_{a,\alpha} x^{3\alpha-L/2-1} \frac{1}{K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right)} \left( \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt \right)^2 dx < \infty.$$

Für hinreichend groß gewähltes  $c > 0$  lässt sich das asymptotische Verhalten des Integranden durch die Gleichungen (5.18) und (A.16) beschreiben. Es gilt

$$\begin{aligned} & \int_c^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{3\alpha-L/2-1} \frac{1}{K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a}\right)} \left( \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(a^2 4t)} dt \right)^2 dx \\ &= \int_c^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{3\alpha-L/2-1} x^{1/2} e^{x/a} (1+o(1)) \left( -\text{const}_{a,\alpha} x^{-\alpha+L/2-1/2} \ln(x) e^{-x/a} (1+o(1)) \right)^2 dx \\ &= \int_c^\infty \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2-3/2} \ln(x)^2 e^{-x/a} (1+o(1)) dx < \infty. \end{aligned}$$

Dabei bezieht sich  $o(1)$  auf  $x \rightarrow \infty$ .

Also ist auch der sechste Summand endlich und es gilt insgesamt

$$\int_0^\infty \frac{1}{f(x; \boldsymbol{\vartheta})} \left( \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \boldsymbol{\vartheta}) \right)^2 dx < \infty. \quad (\text{A.89})$$

## A.6 Integrierbare Majoranten

In diesem Abschnitt werden über  $(0, \infty)$  integrierbare Majoranten für die ersten, zweiten und dritten partiellen Ableitungen der Dichte  $f$  der K-Verteilung aus (5.19) hergeleitet.

### A.6.1 Satz von Lebesgue

Für eine Funktion  $g(x; \beta)$  mit dem Argument  $x \in (0, \infty)$  und dem Parameter  $\beta \in \mathbb{R}$  soll die folgende Vertauschbarkeit von Ableitung und Integration gezeigt werden

$$\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \beta} g(x; \beta) dx = \frac{\partial}{\partial \beta} \int_0^\infty g(x; \beta) dx.$$

Um die Vertauschbarkeit mit Hilfe des Satzes von Lebesgue zu erhalten, wird eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für den Differenzenquotienten benötigt, das heißt eine Funktion  $\tilde{g}(x; \beta)$ , die für ein  $h_0 > 0$

$$\sup_{-h_0 \leq h \leq h_0} \left| \frac{g(x; \beta + h) - g(x; \beta)}{h} \right| \leq \tilde{g}(x; \beta) \text{ für alle } x \in (0, \infty)$$

erfüllt und für die gilt  $\int_0^\infty \tilde{g}(x; \beta) dx < \infty$ .

Für den Differenzenquotienten existiert nach dem Mittelwertsatz ein  $\xi_h$  zwischen  $\beta$  und  $\beta + h$  mit

$$\frac{1}{|h|} |g(x; \beta + h) - g(x; \beta)| = \frac{1}{|h|} \left| \frac{\partial}{\partial \beta} g(x; \xi_h) h \right| = \left| \frac{\partial}{\partial \beta} g(x; \xi_h) \right|.$$

Dementsprechend wird die integrierbare Majorante für  $\sup_{\beta-h_0 \leq \xi \leq \beta+h_0} \left| \frac{\partial}{\partial \beta} g(x; \xi) \right|$  benötigt, dann kann der Satz von Lebesgue angewendet werden und die Vertauschbarkeit von Ableitung und Integral ist gezeigt.

### A.6.2 Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x; \xi, \alpha) \right|$

Es seien  $a > 0, \alpha > 0$  und  $h_0 > 0$  so klein gewählt, dass auch  $a - h_0 > 0$  ist. Hergeleitet wird im Folgenden eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für  $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x; \xi, \alpha) \right|$  aus (5.24). Unter Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen, vgl. Abschnitt A.1, ergibt sich für hinreichend kleines  $h_0$

$$\begin{aligned} & \sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x; \xi, \alpha) \right| \\ & \leq \sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0} \left| (L + 2\alpha + 1) \frac{x^{\alpha+L/2}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\alpha-L/2-3} K_{\alpha-L/2-1} \left(\frac{x}{\xi}\right) \right| \\ & + \sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0} \left| L(L+1) \frac{x^{\alpha+L/2-1}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\alpha-L/2-2} K_{\alpha-L/2} \left(\frac{x}{\xi}\right) \right| \\ & + \sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0} \left| \frac{x^2}{\xi^2} \frac{x^{\alpha+L/2-1}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\alpha-L/2-2} K_{\alpha-L/2} \left(\frac{x}{\xi}\right) \right| \\ & \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha+L/2} K_{\alpha-L/2-1} \left(\frac{x}{a+h_0}\right) + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha+L/2-1} K_{\alpha-L/2} \left(\frac{x}{a+h_0}\right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha+L/2+1} K_{\alpha-L/2} \left(\frac{x}{a+h_0}\right) \\ & = M(x; a, \alpha, h_0). \end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der einzelnen Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.86), wobei die Bedingungen für den ersten Summanden

$$2\alpha > 0 \text{ und } L > -2,$$

die Bedingungen für den zweiten Summanden

$$2\alpha > 0 \text{ und } L > 0$$

sowie die für den dritten Summanden

$$2\alpha > -2 \text{ und } L > -2$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Da alle Summanden integrierbar sind, ist  $M(x; a, \alpha, h_0)$  eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für das Supremum  $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x; \xi, \alpha) \right|$  und der Satz von Lebesgue impliziert

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x; a, \alpha) dx = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} f(x; a, \alpha) dx.$$

### A.6.3 Integrierbare Majorante für $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; a, \xi) \right|$

Es seien  $a > 0, \alpha > 0$  und  $h_0 > 0$  so klein gewählt, dass auch  $\alpha - h_0 > 0$  ist. Hergeleitet wird im Folgenden eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für  $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; a, \xi) \right|$  aus (5.26). Unter Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen, vgl. Abschnitt A.1, ergibt sich für hinreichend kleines  $h_0$

$$\begin{aligned} & \sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; a, \xi) \right| \\ & \leq \sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| L \frac{x^{\xi+L/2-1}}{2^{\xi+L/2-2} \Gamma(\xi) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} a^{-\xi-L/2-1} \left( 2 \ln\left(\frac{x}{2a}\right) - \psi(\xi) \right) K_{\xi-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) \right| \\ & + \sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{x^{\xi+L/2}}{2^{\xi+L/2-2} \Gamma(\xi) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} a^{-\xi-L/2-2} \left( 2 \ln\left(\frac{x}{2a}\right) - \psi(\xi) \right) K_{\xi-L/2-1}\left(\frac{x}{a}\right) \right| \\ & + \sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{x^{2\xi-1}}{2^{2\xi-1} \Gamma(\xi) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} a^{-2\xi-1} \right. \\ & \quad \cdot \left( -L \int_0^\infty \frac{1}{t^{\xi-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt + 2 \int_0^\infty \frac{1}{t^{\xi-L/2}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \right) \left. \right| \\ & \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1)+L/2-1} \left| \ln\left(\frac{x}{2a}\right) \right| K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2 \geq 0)}\left(\frac{x}{a}\right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1)+L/2-1} K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2 \geq 0)}\left(\frac{x}{a}\right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1)+L/2} \left| \ln\left(\frac{x}{2a}\right) \right| K_{\alpha-L/2-1-h_0 I(\alpha-L/2-1<0)+h_0 I(\alpha-L/2-1 \geq 0)}\left(\frac{x}{a}\right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1)+L/2} K_{\alpha-L/2-1-h_0 I(\alpha-L/2-1<0)+h_0 I(\alpha-L/2-1 \geq 0)}\left(\frac{x}{a}\right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t \leq 1)}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2-h_0 I(t>1)+h_0 I(t \leq 1)}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \\ & = M(x; a, \alpha, h_0). \end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der ersten vier Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.86) bzw. (A.87), wobei die Bedingungen für den ersten und für den zweiten Summanden

$$\begin{aligned} 2\alpha \pm h_0 - h_0 I(\alpha - L/2 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0 \text{ und} \\ L \pm h_0 + h_0 I(\alpha - L/2 < 0) - h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0 \end{aligned}$$

sowie die Bedingungen für den dritten und für den vierten Summanden

$$\begin{aligned} 2\alpha \pm h_0 - h_0 I(\alpha - L/2 - 1 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) &> 0 \text{ und} \\ L \pm h_0 + h_0 I(\alpha - L/2 - 1 < 0) - h_0 I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) &> -2 \end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Die Integrierbarkeit des fünften und sechsten Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.85), wobei die Bedingungen für den fünften Summanden

$$\begin{aligned} 2\alpha \pm 2h_0 &> 0 \text{ und} \\ L/2 \pm h_0 \pm h_0 &> 0 \end{aligned}$$

sowie die für den sechsten Summanden

$$\begin{aligned} 2\alpha \pm 2h_0 &> 0 \text{ und} \\ L/2 \pm h_0 \pm h_0 &> -1 \end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Da alle Summanden integrierbar sind, ist  $M(x; a, \alpha, h_0)$  eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für das Supremum  $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; a, \xi) \right|$ . Der Satz von Lebesgue impliziert

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; a, \alpha) dx = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a} f(x; a, \alpha) dx.$$

#### A.6.4 Integrierbare Majorante für $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} f(x; \xi, \alpha) \right|$

Es seien  $a > 0, \alpha > 0$  und  $h_0 > 0$  so klein gewählt, dass auch  $a - h_0 > 0$  ist. Wegen der Stetigkeit der zweiten partiellen Ableitungen von  $f$  ist

$$\frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} f(x; \xi, \alpha) = \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; \xi, \alpha).$$

Hergeleitet wird daher im Folgenden eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für  $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} f(x; \xi, \alpha) \right|$  aus (5.26). Unter Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen, vgl. Abschnitt A.1, ergibt sich für hinreichend kleines  $h_0$

$$\begin{aligned} & \sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; \xi, \alpha) \right| \\ & \leq \sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| L \frac{x^{\alpha+L/2-1}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\alpha-L/2-1} \left( 2 \ln\left(\frac{x}{2\xi}\right) - \psi(\alpha) \right) K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{\xi}\right) \right| \\ & + \sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{x^{\alpha+L/2}}{2^{\alpha+L/2-2} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\alpha-L/2-2} \left( 2 \ln\left(\frac{x}{2\xi}\right) - \psi(\alpha) \right) K_{\alpha-L/2-1}\left(\frac{x}{\xi}\right) \right| \\ & + \sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{x^{2\alpha-1}}{2^{2\alpha-1} \Gamma(\alpha) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-2\alpha-1} \right. \\ & \quad \cdot \left. \left( -L \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{x^2}{\xi^2 4t}} dt + 2 \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{x^2}{\xi^2 4t}} dt \right) \right| \\ & \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha+L/2-1} \left( \left| \ln\left(\frac{x}{2(a-h_0)}\right) \right| + \left| \ln\left(\frac{x}{2(a+h_0)}\right) \right| \right) K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a+h_0}\right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha+L/2-1} K_{\alpha-L/2}\left(\frac{x}{a+h_0}\right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha+L/2} \left( \left| \ln\left(\frac{x}{2(a-h_0)}\right) \right| + \left| \ln\left(\frac{x}{2(a+h_0)}\right) \right| \right) K_{\alpha-L/2-1}\left(\frac{x}{a+h_0}\right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha+L/2} K_{\alpha-L/2-1}\left(\frac{x}{a+h_0}\right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{2\alpha-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{(a+h_0)^2 4t}} dt \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{2\alpha-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{(a+h_0)^2 4t}} dt \\ & = M(x; a, \alpha, h_0). \end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der ersten vier Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.86) bzw. (A.87), wobei die Bedingungen für den ersten und für den zweiten Summanden

$$2\alpha > 0 \text{ und } L > 0$$

sowie die Bedingungen für den dritten und für den vierten Summanden

$$2\alpha > 0 \text{ und } L > -2$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Die Integrierbarkeit des fünften und sechsten Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.85), wobei die Bedingungen für den fünften Summanden

$$2\alpha > 0 \text{ und } L > 0,$$

sowie die für den sechsten Summanden

$$2\alpha > 0 \text{ und } L/2 > -1$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Da alle Summanden integrierbar sind, ist  $M(x; a, \alpha, h_0)$  eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für das Supremum  $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} f(x; \xi, \alpha) \right|$ . Also gilt nach dem Satz von Lebesgue

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial a \partial \alpha} f(x; a, \alpha) dx = \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; a, \alpha) dx.$$

### A.6.5 Integrierbare Majorante für $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x; a, \xi) \right|$

Es seien  $a > 0, \alpha > 0$  und  $h_0 > 0$  so klein gewählt, dass auch  $\alpha - h_0 > 0$  ist. Hergeleitet wird im Folgenden eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für  $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x; a, \xi) \right|$  aus (5.25). Unter Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen, vgl. Abschnitt A.1, ergibt sich für hinreichend kleines  $h_0$

$$\begin{aligned} & \sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x; a, \xi) \right| \\ \leq & \sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{x^{\xi+L/2-1}}{2^{\xi+L/2-2} \Gamma(\xi) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} a^{-\xi-L/2} K_{\xi-L/2}\left(\frac{x}{a}\right) \left( 4 \ln\left(\frac{x}{2a}\right)^2 - 4 \ln\left(\frac{x}{2a}\right) \psi(\xi) + \psi(\xi)^2 - \psi_1(\xi) \right) \right| \\ + & \sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{x^{2\xi-1}}{2^{2\xi-1} \Gamma(\xi) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} a^{-2\xi} \right. \\ & \cdot \left[ \left( 4 \ln\left(\frac{x}{2a}\right) - 2\psi(\xi) \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\xi-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt + \int_0^\infty \frac{1}{t^{\xi-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \right] \left. \right| \\ \leq & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1)+L/2-1} \left| \ln\left(\frac{x}{2a}\right) \right|^2 K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2 \geq 0)}\left(\frac{x}{a}\right) \\ + & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1)+L/2-1} \left| \ln\left(\frac{x}{2a}\right) \right| K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2 \geq 0)}\left(\frac{x}{a}\right) \\ + & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1)+L/2-1} K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2 \geq 0)}\left(\frac{x}{a}\right) \\ + & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1))-1} \left| \ln\left(\frac{x}{2a}\right) \right| \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t \leq 1)}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \\ + & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t \leq 1)}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \\ + & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t \leq 1)}} |\ln(t)|^2 e^{-t-\frac{x^2}{a^2 4t}} dt \\ = & M(x; a, \alpha, h_0). \end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der ersten drei Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.86) bzw. (A.87), wobei die Bedingungen für diese Summanden

$$\begin{aligned} 2\alpha \pm h_0 - h_0 I(\alpha - L/2 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0 \text{ und} \\ L \pm h_0 + h_0 I(\alpha - L/2 < 0) - h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0 \end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Die Integrierbarkeit des vierten, fünften und sechsten Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.85), wobei die Bedingungen

$$\begin{aligned} 2\alpha \pm 2h_0 &> 0 \text{ und} \\ L/2 \pm h_0 \pm h_0 &> 0 \end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Da alle Summanden integrierbar sind, ist  $M(x; a, \alpha, h_0)$  eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für das Supremum  $\sup_{\alpha-h_0 \leq \xi \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x; a, \xi) \right|$  und der Satz von Lebesgue impliziert

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x; a, \alpha) dx = \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; a, \alpha) dx.$$

### A.6.6 Integrierbare Majorante für $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial}{\partial a} f(x; \xi, \zeta) \right|$

Es seien  $a > 0, \alpha > 0$  und  $h_0 > 0$  so klein gewählt, dass auch  $a - h_0 > 0$  und  $\alpha - h_0 > 0$  sind. Hergeleitet wird im Folgenden eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial}{\partial a} f(x; \xi, \zeta) \right|$  aus (5.20). Unter Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen, vgl. Abschnitt A.1, ergibt sich für hinreichend kleines  $h_0$

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial}{\partial a} f(x; \xi, \zeta) \right| \\
& \leq \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{\zeta+L/2-1} L}{2^{\zeta+L/2-2} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\zeta-L/2-1} K_{\zeta-L/2} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right| \\
& + \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{\zeta+L/2}}{2^{\zeta+L/2-2} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\zeta-L/2-2} K_{\zeta-L/2-1} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right| \\
& \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1)+L/2-1} K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2 < 0)+h_0 I(\alpha-L/2 \geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \cdot x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1)+L/2} K_{\alpha-L/2-1-h_0 I(\alpha-L/2-1 < 0)+h_0 I(\alpha-L/2-1 \geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
& = M(x; a, \alpha, h_0).
\end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der beiden Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.86), wobei die Bedingungen für den ersten Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm h_0 - h_0 I(\alpha - L/2 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0 \text{ und} \\
L \pm h_0 + h_0 I(\alpha - L/2 < 0) - h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0
\end{aligned}$$

sowie für den zweiten Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm h_0 - h_0 I(\alpha - L/2 - 1 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) &> 0 \text{ und} \\
L \pm h_0 + h_0 I(\alpha - L/2 - 1 < 0) - h_0 I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) &> -2
\end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  erfüllt sind.

Da alle Summanden integrierbar sind, ist  $M(x; a, \alpha, h_0)$  eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für das Supremum  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial}{\partial a} f(x; \xi, \zeta) \right|$ .

### A.6.7 Integrierbare Majorante für $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \xi, \zeta) \right|$

Es seien  $a > 0, \alpha > 0$  und  $h_0 > 0$  so klein gewählt, dass auch  $a - h_0 > 0$  und  $\alpha - h_0 > 0$  sind. Hergeleitet wird im Folgenden eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \xi, \zeta) \right|$  aus (5.21). Unter Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen, vgl. Abschnitt A.1, ergibt sich für hinreichend kleines  $h_0$

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \xi, \zeta) \right| \\
& \leq \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{8}{\Gamma\left(\frac{L}{2}\right) \Gamma(\zeta)} \left( \frac{1}{2\xi} \right)^{\zeta+L/2} x^{\zeta+L/2-1} \ln \left( \frac{x}{2\xi} \right) K_{\zeta-L/2} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right| \\
& + \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{4}{\Gamma\left(\frac{L}{2}\right) \Gamma(\zeta)} \left( \frac{1}{2\xi} \right)^{\zeta+L/2} x^{\zeta+L/2-1} \psi(\zeta) K_{\zeta-L/2} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right| \\
& + \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{2}{\Gamma\left(\frac{L}{2}\right) \Gamma(\zeta)} \left( \frac{1}{2\xi} \right)^{2\zeta} x^{2\zeta-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-x^2/(\xi^2 4t)} dt \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2-1} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right) \\
&\quad \cdot K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2-1} K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t\leq 1)}} |\ln t| e^{-t-x^2/((a+h_0)^2 4t)} dt \\
&= M(x; a, \alpha, h_0).
\end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der ersten beiden Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.86) bzw. (A.87), wobei die Bedingungen

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm h_0 - h_0 I(\alpha - L/2 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0 \text{ und} \\
L \pm h_0 + h_0 I(\alpha - L/2 < 0) - h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0
\end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  für hinreichend kleines  $h_0$  erfüllt sind.

Die Integrierbarkeit des dritten Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.85), wobei die Bedingungen

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm 2h_0 &> 0 \text{ und} \\
L/2 \pm h_0 \pm h_0 &> 0
\end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  für hinreichend kleines  $h_0$  erfüllt sind.

Da alle Summanden integrierbar sind, ist  $M(x; a, \alpha, h_0)$  eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für das Supremum  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \xi, \zeta) \right|$ .

### A.6.8 Integrierbare Majorante für $\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(x; \xi, \zeta) \right|$

Es seien  $a > 0$ ,  $\alpha > 0$  und  $h_0 > 0$  so klein gewählt, dass auch  $a - h_0 > 0$  und  $\alpha - h_0 > 0$  sind. Hergeleitet wird im Folgenden eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(x; \xi, \zeta) \right|$  aus (5.27). Unter Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen, vgl. Abschnitt A.1, ergibt sich für hinreichend kleines  $h_0$

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(x; \xi, \zeta) \right| \\
&\leq \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \left( L^2 + 5L + 2\zeta L + 10\zeta + 4\zeta^2 + 4 + \frac{x^2}{\xi^2} \right) \frac{x^{\zeta+L/2}}{2^{\zeta+L/2-2} \Gamma(\zeta) \Gamma(L/2)} \xi^{-\zeta-L/2-4} K_{\zeta-L/2-1} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right| \\
&+ \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \left( L(L+1)(L+2) + \frac{x^2}{\xi^2} (2L+2\zeta+5) \right) \frac{x^{\zeta+L/2-1}}{2^{\zeta+L/2-2} \Gamma(\zeta) \Gamma(L/2)} \xi^{-\zeta-L/2-3} K_{\zeta-L/2} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right| \\
&\leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2} K_{\alpha-L/2-1-h_0 I(\alpha-L/2-1<0)+h_0 I(\alpha-L/2-1\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2+2} K_{\alpha-L/2-1-h_0 I(\alpha-L/2-1<0)+h_0 I(\alpha-L/2-1\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2-1} K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2+1} K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&= M(x; a, \alpha, h_0).
\end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der einzelnen Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.86), wobei die Bedingungen für den ersten Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm h_0 - h_0 I(\alpha - L/2 - 1 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) &> 0 \text{ und} \\
L \pm h_0 + h_0 I(\alpha - L/2 - 1 < 0) - h_0 I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) &> -2,
\end{aligned}$$

die Bedingungen für den zweiten Summanden

$$2\alpha \pm h_0 - h_0 I(\alpha - L/2 - 1 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) > -2 \text{ und} \\ L \pm h_0 + h_0 I(\alpha - L/2 - 1 < 0) - h_0 I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) > -4,$$

die Bedingungen für den dritten Summanden

$$2\alpha \pm h_0 - h_0 I(\alpha - L/2 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) > 0 \text{ und} \\ L \pm h_0 + h_0 I(\alpha - L/2 < 0) - h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) > 0$$

sowie die Bedingungen für den vierten Summanden

$$2\alpha \pm h_0 - h_0 I(\alpha - L/2 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) > -2 \text{ und} \\ L \pm h_0 + h_0 I(\alpha - L/2 < 0) - h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) > -2$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  für hinreichend kleines  $h_0$  erfüllt sind.

Da alle Summanden integrierbar sind, ist  $M(x; a, \alpha, h_0)$  eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für das Supremum  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha^2} f(x; \xi, \zeta) \right|$ .

### A.6.9 Integrierbare Majorante für

$$\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha^2} f(x; \xi, \zeta) \right|$$

Es seien  $a > 0, \alpha > 0$  und  $h_0 > 0$  so klein gewählt, dass auch  $a - h_0 > 0$  und  $\alpha - h_0 > 0$  sind. Hergeleitet wird im Folgenden eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha^2} f(x; \xi, \zeta) \right|$  aus (5.28). Unter Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen, vgl. Abschnitt A.1, ergibt sich für hinreichend kleines  $h_0$

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha^2} f(x; \xi, \zeta) \right| \\ \leq & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{\zeta+L/2-1}}{2^{\zeta+L/2-2} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\zeta-L/2-1} K_{\zeta-L/2} \left(\frac{x}{\xi}\right) \right. \\ & \cdot \left( -L \left( 4 \ln \left(\frac{x}{2\xi}\right)^2 - 4 \ln \left(\frac{x}{2\xi}\right) \psi(\zeta) + \psi(\zeta)^2 - \psi_1(\zeta) \right) + 8 \ln \left(\frac{x}{2\xi}\right) + 4\psi(\zeta) \right) \Big| \\ + & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{\zeta+L/2}}{2^{\zeta+L/2-2} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\zeta-L/2-2} K_{\zeta-L/2-1} \left(\frac{x}{\xi}\right) \right. \\ & \cdot \left( 4 \ln \left(\frac{x}{2\xi}\right)^2 - 4 \ln \left(\frac{x}{2\xi}\right) \psi(\zeta) + \psi(\zeta)^2 - \psi_1(\zeta) \right) \Big| \\ + & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{2\zeta-1}}{2^{2\zeta-1} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-2\zeta-1} \left( -8\zeta \ln \left(\frac{x}{2\xi}\right) + 4\zeta \psi(\zeta) - 4 \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+1}} \ln \left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{x^2}{\xi^2 4t}} dt \right| \\ + & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{2\zeta-1}}{2^{2\zeta-1} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-2\zeta-1} 2\zeta \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+1}} \ln \left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-\frac{x^2}{\xi^2 4t}} dt \right| \\ + & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{2\zeta+1}}{2^{2\zeta-1} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-2\zeta-3} \left( 2 \ln \left(\frac{x}{2\xi}\right) - \psi(\zeta) \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+2}} \ln \left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{x^2}{\xi^2 4t}} dt \right| \\ + & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{2\zeta+1}}{2^{2\zeta-1} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-2\zeta-3} \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+2}} \ln \left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-\frac{x^2}{\xi^2 4t}} dt \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1)+L/2-1} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right)^2 \\
&\quad \cdot K_{\alpha-L/2-h_0I(\alpha-L/2<0)+h_0I(\alpha-L/2\geq0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1)+L/2-1} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right) \\
&\quad \cdot K_{\alpha-L/2-h_0I(\alpha-L/2<0)+h_0I(\alpha-L/2\geq0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1)+L/2-1} K_{\alpha-L/2-h_0I(\alpha-L/2<0)+h_0I(\alpha-L/2\geq0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1)+L/2} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right) \\
&\quad \cdot K_{\alpha-L/2-1-h_0I(\alpha-L/2-1<0)+h_0I(\alpha-L/2-1\geq0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1)+L/2} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right) \\
&\quad \cdot K_{\alpha-L/2-1-h_0I(\alpha-L/2-1<0)+h_0I(\alpha-L/2-1\geq0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1)+L/2} K_{\alpha-L/2-1-h_0I(\alpha-L/2-1<0)+h_0I(\alpha-L/2-1\geq0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1))-1} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right) \\
&\quad \cdot \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0I(t>1)+h_0I(t\leq1)}} |\ln(t)| e^{-t-x^2/((a+h_0)^2 4t)} dt \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0I(t>1)+h_0I(t\leq1)}} |\ln(t)| e^{-t-x^2/((a+h_0)^2 4t)} dt \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0I(t>1)+h_0I(t\leq1)}} |\ln(t)|^2 e^{-t-x^2/((a+h_0)^2 4t)} dt \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1))+1} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right) \\
&\quad \cdot \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+2-h_0I(t>1)+h_0I(t\leq1)}} |\ln(t)| e^{-t-x^2/((a+h_0)^2 4t)} dt \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1))+1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+2-h_0I(t>1)+h_0I(t\leq1)}} |\ln(t)| e^{-t-x^2/((a+h_0)^2 4t)} dt \\
&+ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq1))+1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+2-h_0I(t>1)+h_0I(t\leq1)}} |\ln(t)|^2 e^{-t-x^2/((a+h_0)^2 4t)} dt \\
&= M(x; a, \alpha, h_0).
\end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der ersten sechs Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.86) bzw. (A.87), wobei die Bedingungen für die ersten drei Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm h_0 - h_0I(\alpha - L/2 < 0) + h_0I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0 \text{ und} \\
L \pm h_0 + h_0I(\alpha - L/2 < 0) - h_0I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0
\end{aligned}$$

sowie die Bedingungen für den vierten, fünften und sechsten Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm h_0 - h_0I(\alpha - L/2 - 1 < 0) + h_0I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) &> 0 \text{ und} \\
L \pm h_0 + h_0I(\alpha - L/2 - 1 < 0) - h_0I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) &> -2,
\end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  für hinreichend kleines  $h_0$  erfüllt sind.

Die Integrierbarkeit der restlichen Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.85) und der entsprechenden Abschätzung des Logarithmus, wobei die Bedingungen für den siebten, achten und neunten Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm 2h_0 &> 0 \text{ und} \\
L/2 \pm h_0 \pm h_0 &> 0
\end{aligned}$$

sowie die Bedingungen für den zehnten, elften und zwölften Summanden

$$\begin{aligned} 2\alpha \pm 2h_0 &> -2 \text{ und} \\ L/2 \pm h_0 \pm h_0 &> 0 \end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  für hinreichend kleines  $h_0$  erfüllt sind.

Da alle Summanden integrierbar sind, ist  $M(x; a, \alpha, h_0)$  eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für das Supremum  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha \partial a} f(x; \xi, \zeta) \right|$ .

### A.6.10 Integrierbare Majorante für

$$\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} \left| \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha \partial a} f(x; \xi, \zeta) \right|$$

Es seien  $a > 0, \alpha > 0$  und  $h_0 > 0$  so klein gewählt, dass auch  $a - h_0 > 0$  und  $\alpha - h_0 > 0$  sind. Hergeleitet wird im Folgenden eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha \partial a} f(x; \xi, \zeta) \right|$  aus (5.29). Unter Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen, vgl. Abschnitt A.1, ergibt sich für hinreichend kleines  $h_0$

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha \partial a} f(x; \xi, \zeta) \right| \\ & \leq \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{\zeta+L/2-1}}{2^{\zeta+L/2-2} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\zeta-L/2-2} \left( 2L + \left( 2 \ln\left(\frac{x}{2\xi}\right) - \psi(\zeta) \right) \left( L(L+1) + \frac{x^2}{\xi^2} \right) \right) K_{\zeta-L/2} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right| \\ & + \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{\zeta+L/2}}{2^{\zeta+L/2-2} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\zeta-L/2-3} \left( -(L+2\zeta+3) \left( 2 \ln\left(\frac{x}{2\xi}\right) - \psi(\zeta) \right) - 2 \right) K_{\zeta-L/2-1} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right| \\ & + \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{2\zeta-1}}{2^{2\zeta-1} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-2\zeta-2} 2(2\zeta+1) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{x^2}{\xi^2 4t}} dt \right| \\ & + \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{2\zeta-1}}{2^{2\zeta-1} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-2\zeta-2} \left( L(2\zeta+1) + \frac{x^2}{\xi^2} \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+1}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{x^2}{\xi^2 4t}} dt \right| \\ & + \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{2\zeta+1}}{2^{2\zeta-1} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-2\zeta-4} L \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+2}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-\frac{x^2}{\xi^2 4t}} dt \right| \\ & \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2-1} K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2-1} \left( \left| \ln\left(\frac{x}{2(a-h_0)}\right) \right| + \left| \ln\left(\frac{x}{2(a+h_0)}\right) \right| \right) \\ & \cdot K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2+1} K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2+1} \left( \left| \ln\left(\frac{x}{2(a-h_0)}\right) \right| + \left| \ln\left(\frac{x}{2(a+h_0)}\right) \right| \right) \\ & \cdot K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2} K_{\alpha-L/2-1-h_0 I(\alpha-L/2-1<0)+h_0 I(\alpha-L/2-1\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2} \left( \left| \ln\left(\frac{x}{2(a-h_0)}\right) \right| + \left| \ln\left(\frac{x}{2(a+h_0)}\right) \right| \right) \\ & \cdot K_{\alpha-L/2-1-h_0 I(\alpha-L/2-1<0)+h_0 I(\alpha-L/2-1\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2-h_0 I(t>1)+h_0 I(t\leq 1)}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{(a+h_0)^2 4t}} dt \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t\leq 1)}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{(a+h_0)^2 4t}} dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq 1))+1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0I(t>1)+h_0I(t\leq 1)}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{(\alpha+h_0)^2 4t}} dt \\
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0I(x<1)+h_0I(x\geq 1))+1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+2-h_0I(t>1)+h_0I(t\leq 1)}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{(\alpha+h_0)^2 4t}} dt \\
& = M(x; a, \alpha, h_0).
\end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der ersten sechs Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.86) bzw. (A.87), wobei die Bedingungen für die ersten beiden Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm h_0 - h_0I(\alpha - L/2 < 0) + h_0I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0 \text{ und} \\
L \pm h_0 + h_0I(\alpha - L/2 < 0) - h_0I(\alpha - L/2 \geq 0) &> 0,
\end{aligned}$$

die Bedingungen für den dritten und vierten Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm h_0 - h_0I(\alpha - L/2 < 0) + h_0I(\alpha - L/2 \geq 0) &> -2 \text{ und} \\
L \pm h_0 + h_0I(\alpha - L/2 < 0) - h_0I(\alpha - L/2 \geq 0) &> -2
\end{aligned}$$

sowie die Bedingungen für den fünften und sechsten Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm h_0 - h_0I(\alpha - L/2 - 1 < 0) + h_0I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) &> 0 \text{ und} \\
L \pm h_0 + h_0I(\alpha - L/2 - 1 < 0) - h_0I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) &> -2
\end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  für hinreichend kleines  $h_0$  erfüllt sind.

Die Integrierbarkeit der restlichen Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.85) und der entsprechenden Abschätzung des Logarithmus, wobei die Bedingungen für den siebten Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm 2h_0 &> 0 \text{ und} \\
L/2 \pm h_0 \pm h_0 &> -1,
\end{aligned}$$

die Bedingungen für den achten Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm 2h_0 &> 0 \text{ und} \\
L/2 \pm h_0 \pm h_0 &> 0,
\end{aligned}$$

die Bedingungen für den neunten Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm 2h_0 &> -2 \text{ und} \\
L/2 \pm h_0 \pm h_0 &> -1
\end{aligned}$$

sowie die Bedingungen für den zehnten Summanden

$$\begin{aligned}
2\alpha \pm 2h_0 &> -2 \text{ und} \\
L/2 \pm h_0 \pm h_0 &> 0
\end{aligned}$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  für hinreichend kleines  $h_0$  erfüllt sind.

Da alle Summanden integrierbar sind, ist  $M(x; a, \alpha, h_0)$  eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für das Supremum  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial a \partial \alpha \partial a} f(x; \xi, \zeta) \right|$ .

### A.6.11 Integrierbare Majorante für $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(x; \xi, \zeta) \right|$

Es seien  $a > 0, \alpha > 0$  und  $h_0 > 0$  so klein gewählt, dass auch  $a - h_0 > 0$  und  $\alpha - h_0 > 0$  sind. Hergeleitet wird im Folgenden eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(x; \xi, \zeta) \right|$  aus (5.30). Unter

Verwendung der Abschätzungen der einzelnen Funktionen, vgl. Abschnitt A.1, ergibt sich für hinreichend kleines  $h_0$

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(x; \xi, \zeta) \right| \\
\leq & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{\zeta+L/2-1}}{2^{\zeta+L/2-2} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-\zeta-L/2} K_{\zeta-L/2} \left( \frac{x}{\xi} \right) \right. \\
& \cdot \left( 8 \ln \left( \frac{x}{2\xi} \right)^3 - 12 \ln \left( \frac{x}{2\xi} \right)^2 \psi(\zeta) + 6 \ln \left( \frac{x}{2\xi} \right) \psi(\zeta)^2 - \psi(\zeta)^3 + 3\psi(\zeta)\psi_1(\zeta) - 6 \ln \left( \frac{x}{2\xi} \right) \psi_1(\zeta) - \psi_2(\zeta) \right) \Big| \\
+ & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{x^{2\zeta-1}}{2^{2\zeta-1} \Gamma(\zeta) \Gamma\left(\frac{L}{2}\right)} \xi^{-2\zeta} \right. \\
& \cdot \left[ \left( 12 \ln \left( \frac{x}{2\xi} \right)^2 - 12 \ln \left( \frac{x}{2\xi} \right) \psi(\zeta) + 3\psi(\zeta)^2 - 3\psi_1(\zeta) \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-\frac{x^2}{\xi^{24t}}} dt \right. \\
& \left. + \left( 6 \ln \left( \frac{x}{2\xi} \right) - 3\psi(\zeta) \right) \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^2 e^{-t-\frac{x^2}{\xi^{24t}}} dt + \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^3 e^{-t-\frac{x^2}{\xi^{24t}}} dt \right] \Big| \\
\leq & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2-1} K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
+ & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2-1} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right) \\
& \cdot K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
+ & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2-1} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right)^2 \\
& \cdot K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
+ & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1)+L/2-1} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right)^3 \\
& \cdot K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2<0)+h_0 I(\alpha-L/2\geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right) \\
+ & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t\leq 1)}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{(a+h_0)^{24t}}} dt \\
+ & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1))-1} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right) \\
& \cdot \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t\leq 1)}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{(a+h_0)^{24t}}} dt \\
+ & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1))-1} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right)^2 \\
& \cdot \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t\leq 1)}} |\ln(t)| e^{-t-\frac{x^2}{(a+h_0)^{24t}}} dt \\
+ & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t\leq 1)}} |\ln(t)|^2 e^{-t-\frac{x^2}{(a+h_0)^{24t}}} dt \\
+ & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1))-1} \left( \left| \ln \left( \frac{x}{2(a-h_0)} \right) \right| + \left| \ln \left( \frac{x}{2(a+h_0)} \right) \right| \right) \\
& \cdot \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t\leq 1)}} |\ln(t)|^2 e^{-t-\frac{x^2}{(a+h_0)^{24t}}} dt \\
+ & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x\geq 1))-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t\leq 1)}} |\ln(t)|^3 e^{-t-\frac{x^2}{(a+h_0)^{24t}}} dt \\
= & M(x; a, \alpha, h_0).
\end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der ersten vier Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.86) bzw. (A.87), wobei die Bedingungen

$$2\alpha \pm h_0 - h_0 I(\alpha - L/2 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) > 0 \text{ und} \\ L \pm h_0 + h_0 I(\alpha - L/2 < 0) - h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) > 0$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  für hinreichend kleines  $h_0$  erfüllt sind.

Die Integrierbarkeit der restlichen Summanden über  $(0, \infty)$  gilt nach Gleichung (A.85) und der entsprechenden Abschätzung des Logarithmus, wobei die Bedingungen

$$2\alpha \pm 2h_0 > 0 \text{ und} \\ L/2 \pm h_0 \pm h_0 > 0$$

an die Parameter  $\alpha > 0$  und  $L \in \mathbb{N}$  für hinreichend kleines  $h_0$  erfüllt sind.

Da alle Summanden integrierbar sind, ist  $M(x; a, \alpha, h_0)$  eine über  $(0, \infty)$  integrierbare Majorante für das Supremum  $\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} \left| \frac{\partial^3}{\partial \alpha^3} f(x; \xi, \zeta) \right|$ .

## A.7 Integrierbarkeit der potenzierten partiellen Ableitungen der Dichte

In diesem Abschnitt werden integrierbare Majoranten für potenzierte partielle Ableitungen der Dichte der K-Verteilung hergeleitet. Dazu werden zunächst die in diesen Ableitungen auftretenden Faktoren einzeln abgeschätzt. In den Unterabschnitten wird auf diese Abschätzungen zurückgegriffen.

Es seien  $a > 0$ ,  $\alpha > 0$  und  $h_0 > 0$  so klein gewählt, dass auch  $a - h_0 > 0$  und  $\alpha - h_0 > 0$  sind. Die zu betrachtenden Faktoren sind für  $\xi \in [a - h_0, a + h_0]$  und  $\zeta \in [\alpha - h_0, \alpha + h_0]$ .

$$g_1(x; \xi, \zeta) = x^{\zeta+L/2-1} K_{\zeta-L/2} \left( \frac{x}{\xi} \right) \\ g_2(x; \xi, \zeta) = x^{\zeta+L/2} K_{\zeta-L/2-1} \left( \frac{x}{\xi} \right) \\ g_3(x; \xi, \zeta) = x^{2\zeta-1} \left| \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-x^2/(4\xi^2 t)} dt \right| \\ g_4(x; \xi, \zeta) = x^{\zeta+L/2+1} K_{\zeta-L/2} \left( \frac{x}{\xi} \right) \\ g_5(x; \xi, \zeta) = x^{2\zeta-1} \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2+1}} \ln \left( \frac{1}{t} \right)^2 e^{-t-x^2/(4\xi^2 t)} dt \\ g_6(x; \xi, \zeta) = x^{2\zeta-1} \left| \int_0^\infty \frac{1}{t^{\zeta-L/2}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-x^2/(4\xi^2 t)} dt \right| \\ f(x; \xi, \zeta)^{-1} \quad \text{und} \\ f(x; a, \alpha)$$

mit der Wahrscheinlichkeitsdichte  $f$  der K-Verteilung aus (5.19).

Für diese Faktoren gilt nach Abschnitt A.1

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_1(x; \xi, \zeta) \leq x^{\alpha-h_0 I(x < 1) + h_0 I(x \geq 1) + L/2 - 1} K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2 < 0) + h_0 I(\alpha-L/2 \geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right), \\ \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_2(x; \xi, \zeta) \leq x^{\alpha-h_0 I(x < 1) + h_0 I(x \geq 1) + L/2} K_{\alpha-L/2-1-h_0 I(\alpha-L/2-1 < 0) + h_0 I(\alpha-L/2-1 \geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right), \\ \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_3(x; \xi, \zeta) \leq x^{2(\alpha-h_0 I(x < 1) + h_0 I(x \geq 1)) - 1} \\ \cdot \left| \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t > 1) + h_0 I(t \leq 1)}} \ln \left( \frac{1}{t} \right) e^{-t-x^2/(4(a+h_0)^2 t)} dt \right|, \\ \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_4(x; \xi, \zeta) \leq x^{\alpha-h_0 I(x < 1) + h_0 I(x \geq 1) + L/2 + 1} K_{\alpha-L/2-h_0 I(\alpha-L/2 < 0) + h_0 I(\alpha-L/2 \geq 0)} \left( \frac{x}{a+h_0} \right),$$

$$\begin{aligned}
\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_5(x; \xi, \zeta) &\leq x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1))-1} \\
&\cdot \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2+1-h_0 I(t>1)+h_0 I(t \leq 1)}} \ln\left(\frac{1}{t}\right)^2 e^{-t-x^2/(4(a+h_0)^2 t)} dt, \\
\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_6(x; \xi, \zeta) &\leq x^{2(\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1))-1} \\
&\cdot \left| \int_0^\infty \frac{1}{t^{\alpha-L/2-h_0 I(t>1)+h_0 I(t \leq 1)}} \ln\left(\frac{1}{t}\right) e^{-t-x^2/(4(a+h_0)^2 t)} dt \right|, \\
\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-1} &\leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{-\alpha-h_0 I(x<1)+h_0 I(x \geq 1)-L/2+1} \\
&\cdot K_{\alpha-L/2+h_0 I(\alpha-L/2<0)-h_0 I(\alpha-L/2 \geq 0)} \left(\frac{x}{a-h_0}\right)^{-1}, \\
f(x; a, \alpha) &= \text{const}_{a,\alpha} x^{\alpha+L/2-1} K_{\alpha-L/2} \left(\frac{x}{a}\right).
\end{aligned}$$

Unter Verwendung dieser Abschätzungen und der entsprechenden asymptotischen Entwicklungen der modifizierten Besselfunktion zweiter Art sowie der Integrale können die Faktoren für hinreichend kleines  $h_0$  weiter abgeschätzt werden.

- Für  $x \rightarrow 0$ ,  $x < 1$  und  $h_0$  so gewählt, dass

$$\alpha - L/2 - h_0 I(\alpha - L/2 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) \neq 0$$

ist, kann die asymptotische Entwicklung (5.16) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_1$  für  $x \rightarrow 0$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_1(x; \xi, \zeta) \leq \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-2h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L-1-2h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 0. \end{cases} \quad (\text{A.90})$$

Für  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \geq 1$  kann die asymptotische Entwicklung (5.18) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_1$  für  $x \rightarrow \infty$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_1(x; \xi, \zeta) \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+h_0} e^{-x/(a+h_0)} (1+o(1)). \quad (\text{A.91})$$

- Für  $x \rightarrow 0$ ,  $x < 1$  und  $h_0$  so gewählt, dass

$$\alpha - L/2 - 1 - h_0 I(\alpha - L/2 - 1 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 - 1 \geq 0) \neq 0$$

ist, kann die asymptotische Entwicklung (5.16) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_2$  für  $x \rightarrow 0$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_2(x; \xi, \zeta) \leq \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-2h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 - 1 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L+1-2h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 - 1 \geq 0. \end{cases} \quad (\text{A.92})$$

Für  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \geq 1$  kann die asymptotische Entwicklung (5.18) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_2$  für  $x \rightarrow \infty$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_2(x; \xi, \zeta) \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha+L/2-1/2+h_0} e^{-x/(a+h_0)} (1+o(1)). \quad (\text{A.93})$$

- Für  $x \rightarrow 0$ ,  $x < 1$  können die asymptotischen Entwicklungen (A.41), (A.42) bzw. (A.43) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_3$  für  $x \rightarrow 0$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_3(x; \xi, \zeta) \leq \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-2h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L-1-4h_0} |\ln(x)| (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 0. \end{cases} \quad (\text{A.94})$$

Für  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \geq 1$  kann die asymptotische Entwicklung (A.16) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_3$  für  $x \rightarrow \infty$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_3(x; \xi, \zeta) \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+3h_0} \ln(x) e^{-x/(a+h_0)} (1+o(1)). \quad (\text{A.95})$$

- Für  $x \rightarrow 0$ ,  $x < 1$  und  $h_0$  so gewählt, dass

$$\alpha - L/2 - h_0 I(\alpha - L/2 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 \leq 0) \neq 0$$

ist, kann die asymptotische Entwicklung (5.16) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_4$  für  $x \rightarrow 0$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_4(x; \xi, \zeta) \leq \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha+1-2h_0} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L+1-2h_0} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 0. \end{cases} \quad (\text{A.96})$$

Für  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \geq 1$  kann die asymptotische Entwicklung (5.18) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_4$  für  $x \rightarrow \infty$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_4(x; \xi, \zeta) \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha+L/2+1/2+h_0} e^{-x/(a+h_0)} (1 + o(1)). \quad (\text{A.97})$$

- Für  $x \rightarrow 0$ ,  $x < 1$  können die asymptotischen Entwicklungen (A.81), (A.82) bzw. (A.83) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_5$  für  $x \rightarrow 0$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_5(x; \xi, \zeta) \leq \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-2h_0} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L-1-4h_0} \ln(x)^2 (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 0. \end{cases} \quad (\text{A.98})$$

Für  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \geq 1$  kann die asymptotische Entwicklung (A.56) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_5$  für  $x \rightarrow \infty$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_5(x; \xi, \zeta) \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+3h_0} \ln(x)^2 e^{-x/(a+h_0)} (1 + o(1)). \quad (\text{A.99})$$

- Für  $x \rightarrow 0$ ,  $x < 1$  können die asymptotischen Entwicklungen (A.41), (A.42) bzw. (A.43) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_6$  für  $x \rightarrow 0$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_6(x; \xi, \zeta) \leq \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-2h_0} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L+1-4h_0} |\ln(x)| (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1. \end{cases} \quad (\text{A.100})$$

Für  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \geq 1$  kann die asymptotische Entwicklung (A.16) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $g_6$  für  $x \rightarrow \infty$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} g_6(x; \xi, \zeta) \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha+L/2-1/2+2h_0 \pm h_0} \ln(x) e^{-x/(a+h_0)} (1 + o(1)). \quad (\text{A.101})$$

- Für  $x \rightarrow 0$ ,  $x < 1$  und  $h_0$  so gewählt, dass

$$\alpha - L/2 - h_0 I(\alpha - L/2 < 0) + h_0 I(\alpha - L/2 \geq 0) \neq 0$$

ist, kann die asymptotische Entwicklung (5.16) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $f^{-1}$  für  $x \rightarrow 0$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-1} \leq \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{-2\alpha+1-2h_0} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{-L+1-2h_0} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 0. \end{cases} \quad (\text{A.102})$$

Für  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \geq 1$  kann die asymptotische Entwicklung (5.18) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $f^{-1}$  für  $x \rightarrow \infty$

$$\sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-1} \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{-\alpha-L/2+3/2+h_0} e^{x/(a-h_0)} (1 + o(1)). \quad (\text{A.103})$$

- Für  $x \rightarrow 0$ ,  $x < 1$  können die asymptotischen Entwicklungen (5.16) bzw. (5.17) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $f$  für  $x \rightarrow 0$

$$f(x; a, \alpha) \leq \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L-1} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L-1} |\ln(x)| (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0. \end{cases} \quad (\text{A.104})$$

Für  $x \rightarrow \infty$ ,  $x \geq 1$  kann die asymptotische Entwicklung (5.18) angewendet werden und es ergibt sich für den Faktor  $f$  für  $x \rightarrow \infty$

$$f(x; a, \alpha) \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-3/2} e^{-x/a} (1 + o(1)). \quad (\text{A.105})$$

Im Folgenden wird die Integrierbarkeit bestimmter Produkte aus diesen Faktoren nachgewiesen. Diese Produkte sind in den Abschätzungen der Ableitungen enthalten und werden in den nächsten Abschnitten benötigt.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^3 dx < \infty, \quad (\text{A.106})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.90), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^3 \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-12h_0} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-12h_0} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-12h_0} |\ln(x)| (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.91), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^3 \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+6h_0} e^{-[(a-3h_0)^2-10h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta)^3 dx < \infty, \quad (\text{A.107})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.92), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta)^3 \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-12h_0} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha+4(\alpha-L/2)-1-12h_0} (1 + o(1)), & \text{falls } 0 < \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+5-12h_0} (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-12h_0} |\ln(x)| (1 + o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.93), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta)^3 \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2+3/2+6h_0} e^{-[(a-3h_0)^2-10h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1 + o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta)^3 dx < \infty, \quad (\text{A.108})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.94), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta)^3 \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-12h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-18h_0} |\ln(x)|^3 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-18h_0} \ln(x)^4 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.95), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta)^3 \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+12h_0} \ln(x)^3 e^{-[(a-3h_0)^2-10h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 g_2(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.109})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.90), (A.92), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 g_2(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-12h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-12h_0} (1+o(1)), & \text{falls } 0 < \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+1-12h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-12h_0} |\ln(x)| (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.91), (A.93), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 g_2(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-1/2+6h_0} e^{-[(a-3h_0)^2-10h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 g_3(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.110})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.90), (A.94), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 g_3(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-12h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-14h_0} |\ln(x)| (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-14h_0} \ln(x)^2 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.91), (A.95), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 g_3(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+8h_0} \ln(x) e^{-[(a-3h_0)^2-10h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_2(x; \xi, \zeta)^2 dx < \infty, \quad (\text{A.111})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.90), (A.92), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_2(x; \xi, \zeta)^2 \\ \leq & \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-12h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha+2(\alpha-L/2)-1-12h_0} (1+o(1)), & \text{falls } 0 < \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L+3-12h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-12h_0} |\ln(x)|(1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.91), (A.93), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_2(x; \xi, \zeta)^2 \\ \leq & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha+L/2+1/2+6h_0} e^{-[(a-3h_0)^2-10h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta)^2 dx < \infty, \quad (\text{A.112})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.90), (A.94), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta)^2 \\ \leq & \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-12h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L-1-16h_0} \ln(x)^2 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L-1-16h_0} |\ln(x)^3| (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.91), (A.95), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta)^2 \\ \leq & \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+10h_0} \ln(x)^2 e^{-[(a-3h_0)^2-10h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 dx < \infty, \quad (\text{A.113})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.90), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 \\ \leq & \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L-1-8h_0} |\ln(x)|(1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.91), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+4h_0} e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta)^2 dx < \infty, \quad (\text{A.114})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.92), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta)^2 \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha+2(\alpha-L/2)-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } 0 < \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+3-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+3-8h_0} |\ln(x)| (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.93), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta)^2 \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2+1/2+4h_0} e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta)^2 dx < \infty, \quad (\text{A.115})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.94), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta)^2 \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-12h_0} \ln(x)^2 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-12h_0} |\ln(x)|^3 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.95), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta)^2 \\ & \leq x^{\alpha+L/2-3/2+8h_0} \ln(x)^2 e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_4(x; \xi, \zeta)^2 dx < \infty, \quad (\text{A.116})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.96), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_4(x; \xi, \zeta)^2 \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha+3-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+3-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+3-8h_0} |\ln(x)| (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.97), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_4(x; \xi, \zeta)^2 \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2+5/2+4h_0} e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_5(x; \xi, \zeta)^2 dx < \infty, \quad (\text{A.117})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.98), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_5(x; \xi, \zeta)^2 \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-12h_0} \ln(x)^4 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-12h_0} |\ln(x)|^5 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.99), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_5(x; \xi, \zeta)^2 \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+8h_0} \ln(x)^4 e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_6(x; \xi, \zeta)^2 dx < \infty, \quad (\text{A.118})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.100), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_6(x; \xi, \zeta)^2 \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha+2(\alpha-L/2)-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } 0 < \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+3-10h_0} \ln(x)^2 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} |\ln(x)| (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.101), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_6(x; \xi, \zeta)^2 \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2+1/2+8h_0} \ln(x)^2 e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_2(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.119})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.90), (A.92), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_2(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } 0 < \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} |\ln(x)|(1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.91), (A.93), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_2(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-1/2+4h_0} e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.120})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.90), (A.94), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-10h_0} |\ln(x)|(1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-10h_0} \ln(x)^2 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.91), (A.95), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+6h_0} \ln(x) e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_4(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.121})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.90), (A.96), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_4(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha+1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+1-8h_0} |\ln(x)|(1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.91), (A.97), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_4(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2+1/2+4h_0} e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_5(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.122})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.90), (A.98), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_5(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-10h_0} \ln(x)^2 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L-1-10h_0} |\ln(x)^3| (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.91), (A.99), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_5(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+6h_0} \ln(x)^2 e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.123})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.90), (A.100), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } 0 < \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+1-10h_0} |\ln(x)| (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} |\ln(x)| (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.91), (A.101), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-1/2+6h_0} \ln(x) e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.124})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.92), (A.94), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-10h_0} |\ln(x)|(1+o(1)), & \text{falls } 0 < \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+1-10h_0} |\ln(x)|(1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-10h_0} \ln(x)^2 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.93), (A.95), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2-1/2+6h_0} \ln(x) e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_4(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.125})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.92), (A.96), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_4(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha+1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha+1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } 0 < \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+3-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha+1-8h_0} |\ln(x)|(1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.93), (A.97), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_4(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2+3/2+4h_0} e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.126})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.92), (A.100), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha+2(\alpha-L/2)-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } 0 < \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{L+3-10h_0} |\ln(x)|(1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1 \\ \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{2\alpha+1-8h_0} |\ln(x)|(1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.93), (A.101), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a, \alpha, h_0} x^{\alpha+L/2+1/2+6h_0} \ln(x) e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta) g_5(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.127})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.94), (A.98), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta) g_5(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L-1-12h_0} |\ln(x)|^3 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 > 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L-1-12h_0} \ln(x)^4 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.95), (A.99), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta) g_5(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha+L/2-3/2+8h_0} |\ln(x)|^3 e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

- Es gilt

$$\int_0^\infty \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) dx < \infty, \quad (\text{A.128})$$

denn für  $x \rightarrow 0$  gilt nach den Abschätzungen (A.94), (A.100), (A.102) und (A.104) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \begin{cases} \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-8h_0} (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 < 0 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-10h_0} |\ln(x)| (1+o(1)), & \text{falls } 0 < \alpha - L/2 < 1 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{L+1-12h_0} \ln(x)^2 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 \geq 1 \\ \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{2\alpha-1-10h_0} \ln(x)^2 (1+o(1)), & \text{falls } \alpha - L/2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

und für  $x \rightarrow \infty$  gilt nach den Abschätzungen (A.95), (A.101), (A.103) und (A.105) für den Integranden

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) \\ & \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} x^{\alpha+L/2-1/2+6h_0 \pm 2h_0} \ln(x)^2 e^{-[(a-2h_0)^2-5h_0^2]/[a(a-h_0)(a+h_0)]x} (1+o(1)). \end{aligned}$$

Also ist die Integrierbarkeit für hinreichend klein gewähltes  $h_0$  gegeben.

### A.7.1 Integrierbare Majorante für

$$\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} f(x; a, \alpha) \left| f(x; \xi, \zeta)^{-1} \frac{\partial}{\partial a} f(x; \xi, \zeta) \right|^3$$

Es seien  $a, \alpha$  und  $h_0$  so gewählt wie in Abschnitt A.7, Seite 175. Dann gilt nach Gleichung (5.20) für alle  $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; a, \alpha) \left| f(x; \xi, \zeta)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial a} f(x; \xi, \zeta) \right|^3 \\ & \leq \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^3 \\ & + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 g_2(x; \xi, \zeta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_2(x; \xi, \zeta)^2 \\
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta)^3.
\end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der Summe über  $(0, \infty)$  folgt aus der Integrierbarkeit der einzelnen Summanden (A.106), (A.109), (A.111) und (A.107).

### A.7.2 Integrierbare Majorante für

$$\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} f(x; a, \alpha) \left| f(x; \xi, \zeta)^{-1} \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \xi, \zeta) \right|^3$$

Es seien  $a, \alpha$  und  $h_0$  so gewählt wie in Abschnitt A.7, Seite 175. Dann gilt nach Gleichung (5.21) für alle  $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; a, \alpha) \left| f(x; \xi, \zeta)^{-1} \cdot \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x; \xi, \zeta) \right|^3 \\
\leq & \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^3 (|\ln(x)| + \text{const}_{a,\alpha,h_0})^3 \\
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 g_3(x; \xi, \zeta) (|\ln(x)| + \text{const}_{a,\alpha,h_0})^2 \\
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta)^2 (|\ln(x)| + \text{const}_{a,\alpha,h_0}) \\
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-3} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta)^3.
\end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der Summe über  $(0, \infty)$  folgt aus der Integrierbarkeit der einzelnen Summanden (A.106), (A.110), (A.112) und (A.108).

### A.7.3 Integrierbare Majorante für

$$\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} f(x; a, \alpha) \left| f(x; \xi, \zeta)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x; \xi, \zeta) \right|^2$$

Es seien  $a, \alpha$  und  $h_0$  so gewählt wie in Abschnitt A.7, Seite 175. Dann gilt nach Gleichung (5.24) für alle  $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned}
& \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; a, \alpha) \left| f(x; \xi, \zeta)^{-1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial a^2} f(x; \xi, \zeta) \right|^2 \\
\leq & \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta)^2 \\
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_2(x; \xi, \zeta) \\
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_4(x; \xi, \zeta) \\
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 \\
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_4(x; \xi, \zeta) \\
& + \text{const}_{a,\alpha,h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_4(x; \xi, \zeta)^2.
\end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der Summe über  $(0, \infty)$  folgt aus der Integrierbarkeit der einzelnen Summanden (A.114), (A.119), (A.125), (A.113), (A.121) und (A.116).

### A.7.4 Integrierbare Majorante für

$$\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} f(x; a, \alpha) \left| f(x; \xi, \zeta)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x; \xi, \zeta) \right|^2$$

Es seien  $a, \alpha$  und  $h_0$  so gewählt wie in Abschnitt A.7, Seite 175. Dann gilt nach Gleichung (5.25) für alle  $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; a, \alpha) \left| f(x; \xi, \zeta)^{-1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} f(x; \xi, \zeta) \right|^2 \\ \leq & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 (\ln(x)^2 + \text{const}_{a, \alpha, h_0} |\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0})^2 \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta) \\ & \cdot (|\ln(x)|^3 + \text{const}_{a, \alpha, h_0} \ln(x)^2 + \text{const}_{a, \alpha, h_0} |\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0}) \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_5(x; \xi, \zeta) (\ln(x)^2 + \text{const}_{a, \alpha, h_0} |\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0}) \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta)^2 (|\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0})^2 \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta) g_5(x; \xi, \zeta) (|\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0}) \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_5(x; \xi, \zeta)^2. \end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der Summe über  $(0, \infty)$  folgt aus der Integrierbarkeit der einzelnen Summanden (A.113), (A.120), (A.122), (A.115), (A.127) und (A.117).

### A.7.5 Integrierbare Majorante für

$$\sup_{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0, \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0} f(x; a, \alpha) \left| f(x; \xi, \zeta)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; \xi, \zeta) \right|^2$$

Es seien  $a, \alpha$  und  $h_0$  so gewählt wie in Abschnitt A.7, Seite 175. Dann gilt nach Gleichung (5.26) für alle  $x \in (0, \infty)$

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; a, \alpha) \left| f(x; \xi, \zeta)^{-1} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial a} f(x; \xi, \zeta) \right|^2 \\ \leq & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta)^2 (|\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0})^2 \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_2(x; \xi, \zeta) (\ln(x)^2 + \text{const}_{a, \alpha, h_0} |\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0}) \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta) (|\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0}) \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_1(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) (|\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0}) \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta)^2 (|\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0})^2 \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_3(x; \xi, \zeta) (|\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0}) \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_2(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) (|\ln(x)| + \text{const}_{a, \alpha, h_0}) \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta)^2 \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_3(x; \xi, \zeta) g_6(x; \xi, \zeta) \\ + & \text{const}_{a, \alpha, h_0} \sup_{\substack{a-h_0 \leq \xi \leq a+h_0 \\ \alpha-h_0 \leq \zeta \leq \alpha+h_0}} f(x; \xi, \zeta)^{-2} f(x; a, \alpha) g_6(x; \xi, \zeta)^2. \end{aligned}$$

Die Integrierbarkeit der Summe über  $(0, \infty)$  folgt aus der Integrierbarkeit der einzelnen Summanden (A.113), (A.119), (A.120), (A.123), (A.114), (A.124), (A.126), (A.115), (A.128) und (A.118).

## B Gegenbeispiel

Beim Nachweis der C-Straffheit des empirischen Prozesses in [Zhu; Lahiri, 2007] wird für die Abschätzung der Mächtigkeit der Indexmenge aus Lemma 3.27 auf [Lahiri, 1999, Beweis zu Lemma 4.1] verwiesen. Definiert wird für  $\delta \in \mathbb{N}$  die Menge

$$D_1(\delta) = \left\{ (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) \in R_N^3 : \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k} \text{ sind paarweise verschieden mit } d_1(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}) = \delta \right\}$$

mit dem in (3.44) definierten Abstandsmaß  $d_1$ .

[Lahiri, 1999, S. 74f] schreibt: „By an argument similar to the above, it can be shown that

$$|D_1(\delta)| \leq c(d) \cdot \delta^{2d-1} |R_N|. \quad (\text{B.1})$$

Dabei ist  $c(d)$  eine Konstante, die nur von der Dimension  $d$  der Indexmenge  $R_N$  abhängt. Aussage (B.1) kann durch ein Gegenbeispiel widerlegt werden.

Seien  $d = 2$  und  $\delta = 1$ , also

$$\delta = 1 = \max\{\min\{\|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty\}, \min\{\|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty, \|\mathbf{j} - \mathbf{k}\|_\infty\}\}. \quad (\text{B.2})$$

Zunächst wird der Index  $\mathbf{i}$  gewählt. Dafür gibt es  $|R_N|$  Möglichkeiten.

Es gelte  $1 = \|\mathbf{k} - \mathbf{j}\|_\infty$ ,  $1 < \|\mathbf{k} - \mathbf{i}\|_\infty$  und  $1 < \|\mathbf{j} - \mathbf{i}\|_\infty$ . Dann ist Gleichung (B.2) erfüllt.

Das Indexpaar  $(\mathbf{j}, \mathbf{k})$  kann überall in  $R_N$  außer in der direkten Nachbarschaft von  $\mathbf{i}$  gewählt werden. Daher gibt es für die Wahl von  $(\mathbf{j}, \mathbf{k})$  noch mindestens  $\text{const} \cdot (|R_N| - 9)$  Möglichkeiten. Die Konstante resultiert dabei aus den verschiedenen räumlichen Anordnungen des Paares  $(\mathbf{j}, \mathbf{k})$ .

Damit gilt für die Mächtigkeit

$$|D_1(\delta)| \geq |R_N|(|R_N| - 9),$$

ein Widerspruch zu (B.1).

## C Notation

In diesem Abschnitt sind Konventionen bezüglich der Notation festgehalten. Die Ausführlichkeit ist den verschiedenen Leserkreisen der vorliegenden Arbeit geschuldet.

Vektoren und Matrizen werden mit fetten Buchstaben bezeichnet.

Absolute Konstanten werden mit *const* bezeichnet und können ihren Wert ändern. Konstanten, die von Parametern abhängen, werden entsprechend indiziert, wie zum Beispiel  $const_{a,\alpha}$ . Der Parameter  $L$  der K-Verteilung wird in dieser Indizierung nicht berücksichtigt, da  $L$  üblicherweise fest vorgegeben ist.

$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$\mathbb{N}_0$	$= \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	Menge der ganzen Zahlen
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$R_{N_1, N_2}$	Rechteck, definiert in (3.8)
$R_N$	$= R_{N_1, N_2}$
$N \rightarrow \infty$	bezogen auf $R_N$ bedeutet $N_1 \rightarrow \infty$ und $N_2 \rightarrow \infty$ , Bemerkung 3.9
$\mathbf{A}^T$	Transponierte der Matrix oder des Vektors $\mathbf{A}$
$ A $	Mächtigkeit der Menge $A$
$\partial A$	Rand der Menge $A$ , Definition 3.1
$\delta(S_1, S_2)$	Abstand der beiden Mengen $S_1$ und $S_2$ , Definition 3.1
$t' \uparrow t$	bedeutet $t' \rightarrow t$ mit $t' < t$
$t' \downarrow t$	bedeutet $t' \rightarrow t$ mit $t' > t$
$\ \mathbf{x}\ _p$	p-Norm des Vektors $\mathbf{x}$ für $1 \leq p < \infty$
$\ \mathbf{x}\ _\infty$	Maximumsnorm des Vektors $\mathbf{x}$
$\ \cdot\ $	beliebige Norm auf dem entsprechenden Raum
$\lceil x \rceil$	$= \min\{z \in \mathbb{Z} : z \geq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$
$\lfloor x \rfloor$	$= \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ für $x \in \mathbb{R}$
$\uparrow x$	$= \max\{1, \lceil xb \rceil\}$ Up-Operator, Definition 6.11
$\downarrow x$	$= \uparrow x - 1$ Down-Operator, Definition 6.11
$a \wedge b$	$= \min\{a, b\}$
$\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$	komponentenweiser Vergleich zweier Vektoren derselben Dimension
$\pm h_0$	kontextabhängige Notationsvereinfachung bspw. für $h_0 I(t \leq c) - h_0 I(t > c)$

Für zwei reelle Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist

$$b_n = o(a_n) \Leftrightarrow \frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ und}$$

$$b_n = O(a_n) \Leftrightarrow \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{|b_n|}{|a_n|} < \infty$$

### Spezielle Funktionen

$\mapsto$	Zuordnungsvorschrift einer Funktion
$g \circ f(\cdot)$	$= g(f(\cdot))$ Verkettung der Funktionen $f$ und $g$
$f'$	erste Ableitung der Funktion $f$
$f''$	zweite Ableitung der Funktion $f$
$\mathbf{grad} f$	Gradient der multivariaten Funktion $f$
$\mathbf{H}(f)$	Hessematrix der multivariaten Funktion $f$
$I(A)$	Indikatorfunktion der Menge $A$

$I_\nu(\cdot)$	modifizierte Besselfunktion erster Art
$K_\nu(\cdot)$	modifizierte Besselfunktion zweiter Art
$\Gamma(\cdot)$	Gammafunktion
$\psi(\cdot)$	Digammafunktion
$\psi_1(\cdot)$	Trigammafunktion
$\psi_m(\cdot)$	$m$ -te Polygammafunktion
$C(S)$	$= \{f : S \rightarrow \mathbb{R}   f \text{ ist stetig}\}$
$C^b(S)$	$= \{f : S \rightarrow \mathbb{R}   f \text{ ist stetig und beschränkt}\}$

### Zufallsgrößen, empirische Prozesse

$P(\cdot)$	Wahrscheinlichkeitsmaß
$\hat{\cdot}$	markiert Schätzer
*	markiert Bootstrap-Größen
$\mathcal{C}A$	Komplement zum Ereignis $A$
$\mathcal{B}_d(S)$	$= \sigma(\{G \subset S : G \text{ ist offen bzgl. } d\})$ Borel- $\sigma$ -Algebra zum metrischen Raum $(S, d)$
$(m_1, m_2)$ -	Abhängigkeit, Definition 2.3
$\sim$	verteilt
$\stackrel{\mathcal{L}}{=}$	Verteilungsgleichheit
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$ in $(S, d)$	Verteilungskonvergenz in dem metrischen Raum $(S, d)$
$\xrightarrow{\mathcal{L}}$	Verteilungskonvergenz
$\xrightarrow{P}$	stochastische Konvergenz
$\xrightarrow{w}$	schwache Konvergenz
$\sigma(X)$	von der Zufallsvariablen $X$ erzeugte $\sigma$ -Algebra
$F^{-1}$	Quantilfunktion (verallgemeinerte Inverse) zu einer Verteilungsfunktion $F$ $F^{-1} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $F^{-1}(u) = \min\{x \in \mathbb{R} : F(x) \geq u\}$
$f(\cdot; a, \alpha)$	Dichte der K-Verteilung, definiert in (5.19)
$K(\cdot; a, \alpha)$	Verteilungsfunktion der K-Verteilung, Definition 5.7
$K^{-1}(\cdot; a, \alpha)$	zugehörige Quantilfunktion (verallgemeinerte Inverse)
$\mathcal{K}$	parametrische Klasse der K-Verteilungen
$U(a, b)$	stetige Gleichverteilung auf dem Intervall $(a, b)$
$N(\mu, \sigma^2)$	eindimensionale Normalverteilung mit Mittelwert $\mu$ und Varianz $\sigma^2$
$\Phi$	Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
$N_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$	$d$ -dimensionale Normalverteilung mit Mittelwert $\boldsymbol{\mu}$ und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}$
$Ber(p)$	Bernoulli-Verteilung zum Parameter $p$
$gR(\cdot; L, \sigma^2)$	verallgemeinerte Rayleigh-Verteilung zum Parameter $\sigma^2$ mit $L$ Freiheitsgraden, Definition 8.1
$f_{gR}(x; L, \sigma^2)$	Dichte der verallgemeinerten Rayleigh-Verteilung zum Parameter $\sigma^2$ mit $L$ Freiheitsgraden, Definition 8.1
$f_G(\cdot; b, p)$	Dichte der Gammaverteilung zu den Parametern $b$ und $p$ , definiert in (8.4)
$\ \mathbf{X}\ _p$	$= E(\ \mathbf{X}\ ^p)^{1/p}$ $p$ -Norm des Zufallsvektors $\mathbf{X}$ für $1 \leq p < \infty$ , Definition 3.3
$\text{ess sup}(X)$	$= \inf\{r \in [-\infty, \infty] : P(X > r) = 0\}$ wesentliches Supremum der Zufallsvariablen $X$
$\ \mathbf{X}\ _\infty$	$= \text{ess sup}\ \mathbf{X}\ $ wesentliches Supremum des Zufallsvektors $\mathbf{X}$ , Definition 3.3
$\ \cdot\ $	beliebige Norm auf dem entsprechenden Raum

$\widehat{m}_{n;k}$	$k$ -tes empirisches Moment zum Stichprobenumfang $n$
$X_{k;n}$	$k$ -te Ordnungsstatistik der Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ , Definition 6.9
$r_n(i)$	Rang der Zufallsvariablen $X_i$ in der Stichprobe $X_1, \dots, X_n$ , Definition 6.9

Für eine Folge von Zufallsvariablen  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  
eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist

$$\begin{aligned} X_n = o_p(a_n) &\Leftrightarrow \frac{X_n}{a_n} \xrightarrow{P} 0 \text{ für } n \rightarrow \infty \text{ und} \\ X_n = O_p(a_n) &\Leftrightarrow \left(\frac{X_n}{a_n}\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ stochastisch beschränkt ist} \end{aligned}$$

Für eine Folge von Zufallsvektoren  $(\mathbf{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  
eine Folge nichtnegativer reeller Zahlen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist

$\mathbf{X}_n = o_p(a_n)$	$\Leftrightarrow \ \mathbf{X}_n\  = o_p(a_n)$ und
$\mathbf{X}_n = O_p(a_n)$	$\Leftrightarrow \ \mathbf{X}_n\  = O_p(a_n)$
$\varrho(\cdot, \cdot)$	Metrik, definiert in (3.10)
$D([0, 1])$	Skorohodraum über dem Intervall $[0, 1]$
$D([-\infty, \infty])$	Skorohodraum über dem Intervall $[-\infty, \infty]$ , definiert in (3.11)
$s_\infty(f, g)$	Skorohodmetrik der beiden Funktionen $f$ und $g$ , definiert in (3.12)
$\omega_\infty(f, \delta)$	C-Stetigkeitsmodul für eine Funktion $f$ und $\delta > 0$ , definiert in (3.13)
$F_N(\cdot)$	empirische Verteilungsfunktion zum Stichprobenumfang $N$ , Definition 3.15 bzw. Definition 4.2
$\widehat{\alpha}_N(\cdot)$	empirischer Prozess zum Stichprobenumfang $N$ mit geschätztem Parametervektor, Definition 3.19 bzw. Definition 4.2
$\widetilde{\alpha}_N(\cdot)$	empirischer Prozess, definiert in (3.36) bzw. (4.14)
$\widehat{\alpha}_N^{\mathcal{K}}(\cdot)$	empirischer Prozess zum Stichprobenumfang $N$ mit geschätztem Parametervektor zur Klasse der K-Verteilungen, definiert in (5.63) bzw. (5.64)
$\alpha(\mathcal{F}, \mathcal{G})$	$\alpha$ -Mischungskoeffizient der $\sigma$ -Algebren $\mathcal{F}$ und $\mathcal{G}$ , Definition 3.2
$\alpha(X_1, X_2)$	$\alpha$ -Mischungskoeffizient der Zufallsvariablen $X_1$ und $X_2$ , Definition 3.2
$\alpha_{j,k}(\eta)$	$\alpha$ -Mischungskoeffizient, Definition 3.2
$\mathbf{I}(\boldsymbol{\vartheta})$	Fisher-Informationsmatrix, definiert in (5.70)
$L_n$	Likelihoodfunktion zum Stichprobenumfang $n$
$l_n$	Log-Likelihoodfunktion zum Stichprobenumfang $n$
$KS_n$	Kolmogorov-Smirnov-Teststatistik zum Stichprobenumfang $n$
$CvM_n$	Cramér-von-Mises-Teststatistik zum Stichprobenumfang $n$
$T_n$	Teststatistik zum Stichprobenumfang $n$



## Literatur

- [Abramowitz; Stegun, 1965] Abramowitz, M.; Stegun, I. A. (1965): Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. Dover Publications, Inc., New York.
- [Babu; Rao, 2004] Babu, J. G.; Rao, C. R. (2004): Goodness-of-Fit Tests When Parameters are Estimated. In: *Sankhyā: The Indian Journal of Statistics*, vol. 66, part 1, 63–74.
- [Bartels, 1982] Bartels, R. (1982): The Rank Version of von Neumann’s Ratio Test for Randomness. In: *Journal of the American Statistical Association*, vol. 77, no. 377, 40–46.
- [Billingsley, 1968] Billingsley, P. (1968): Convergence of Probability Measures. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [Birnbaum, 1952] Birnbaum, Z. W. (1952): Numerical Tabulation of the Distribution of Kolmogorov’s Statistic for Finite Sample Size. In: *Journal of the American Statistical Association*, vol. 47, no. 259, 425–441.
- [Blacknell, 1994] Blacknell, D. (1994): New Method for the Simulation of Correlated K-Distributed Clutter. In: *IEE Proceedings-Radar, Sonar Navig.*, vol. 141, no. 1, 53–58.
- [Blacknell; Tough, 2001] Blacknell, D.; Tough R. J. A. (2001): Parameter Estimation for the K-Distribution Based on  $[z \log(z)]$ . In: *IEE Proceedings-Radar, Sonar and Navigation*, vol. 148, no. 6, 309–312.
- [Bolthausen, 1982] Bolthausen, E. (1982): On the Central Limit Theorem for Stationary Mixing Random Fields. In: *The Annals of Probability*, vol. 82, no. 4, 1047–1050.
- [Box; Jenkins, 1970] Box, G. E. P.; Jenkins, G. M. (1970): Time Series Analysis: Forecasting and Control. Holden Day, San Francisco.
- [Brockwell; Davis, 1991] Brockwell, P. J.; Davis, R. A. (1991): Time Series: Theory and Methods. Second edition. Springer, New York.
- [Currie; Brown 1987] Currie, N. C.; Brown, C. E., editors (1987): Principles and Applications of Millimeter-Wave Radar. Artech House, Norwood.
- [Doukhan 1994] Doukhan, P. (1994): Mixing: Properties and Examples. Lecture Notes in Statistics. 85. Springer, New York.
- [Eaves; Reedy, 1987] Eaves, J. L.; Reedy, E. K. (1987): Principles of Modern Radar. Van Nostrand Reinhold Company Inc., New York.
- [Ender, 2011] Ender, J. (2011): Introduction to Radar, Part 1. Scriptum of a lecture at the Ruhr-Universität Bochum. Online in Internet: URL: <http://www.ei.rub.de/studium/lehrveranstaltungen/39/> (Stand: 13.05.2011).
- [Gibbons, 1992] Gibbons, J. D. (1992): Nonparametric Statistical Inference. Third edition. Marcel Dekker, New York.
- [Gradshteyn; Ryzhik, 1965] Gradshteyn, I. S.; Ryzhik, I. M. (1965): Table of Integrals, Series, and Products. Academic Press, New York.
- [Häusler, 2007] Häusler, E. (2007): Funktionale Grenzwertsätze, Skript zur Vorlesung, Justus-Liebig-Universität, Gießen.

- [Henderson; Lewis 1998] Henderson, F. M.; Lewis, A. J., editors (1998): Principles and Applications of Imaging Radar. Manual of Remote Sensing, Third Edition, Volume 2, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [Iskander, 2004] Iskander, R. D. (2004): The Characteristic Function of the  $K$ -Distributed Interference. In: XII European Signal Processing Conference EUSIPCO - 2004 Proceedings Volumes 1-3, September 2004, Vienna, Austria.
- [Iskander; Zoubir; Boashash, 1999] Iskander, R. D.; Zoubir, A. M.; Boashash, B. (1999): A Method for Estimating the Parameters of the  $K$  Distribution. In: IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 47, no. 4, 1147–1151.
- [Jakeman; Pusey, 1976] Jakeman, E.; Pusey, P. (1976): A Model for Non-Rayleigh Sea Echo. In: IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. 24, no. 6, 806–814.
- [Jakeman; Tough, 1987] Jakeman, E.; Tough, R. J. A. (1987): Generalized  $K$  Distribution: A Statistical Model for Weak Scattering. In: Journal of the Optical Society of America A: Optics, Image Science, and Vision, vol. 4, no. 9, 1764–1772.
- [Joughin; Percival; Winebrenner, 1993] Joughin, I. R.; Percival, D. B.; Winebrenner, D. P. (1993): Maximum Likelihood Estimation of  $K$  Distribution Parameters for SAR Data. In: IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, vol. 31, no. 5, 989–998.
- [Kraus, 1966] Kraus, J. D. (1966): Radio Astronomy. McGraw-Hill, New York.
- [Lahiri, 1999] Lahiri, S. N. (1999): Asymptotic Distribution of the Empirical Spatial Cumulative Distribution Function Predictor and Prediction Bands Based on a Subsampling Method. In: Probability Theory and Related Fields, no. 114, 55–84.
- [Lehmann, 1983] Lehmann, E. L. (1983): Theory of Point Estimation. John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [Lilliefors, 1967] Lilliefors, H. W. (1967): On the Kolmogorov-Smirnov Test for Normality with Mean and Variance Unknown. In: Journal of the American Statistical Association, vol. 62, no. 318, 399–402.
- [Long, 2001] Long, M. W. (2001): Radar Reflectivity of Land and Sea. Third edition. Artech House, Boston.
- [Massey, 1951] Massey, F. J. (1951): The Kolmogorov-Smirnov Test for Goodness of Fit. In: Journal of the American Statistical Association, vol. 46, no. 253, 68–78.
- [MATLAB] The MathWorks. MATLAB Version 2009a. Online im Internet: URL: <http://www.mathworks.de/> (Stand 17.11.2010).
- [Moreira, 2000] Moreira, A. (2000): Radar mit synthetischer Apertur. Grundlagen und Signalverarbeitung. Habilitationsschrift. Online im Internet: URL: <http://www.geo.unizh.ch/oldrsl/research/SARLab/GMTILiterature/Ver09/PDF/Moreira00.pdf> (Stand 17.11.2010).
- [Nelsen, 1999] Nelsen, R. B. (1999): An Introduction to Copulas. Lecture Notes in Statistics. Springer-Verlag, New York.
- [Nielsen, 1965] Nielsen, N. (1965): Gammafunktion. Chelsea Publishing Company, New York.
- [Oliver; Quegan, 1998] Oliver, C.; Quegan, S. (1998): Understanding Synthetic Aperture Radar Images. Artech House, Norwood.

- [Olver, 1997] Olver, F. W. J. (1997): *Asymptotics and Special Functions*. A K Peters, Wellesley.
- [Press et al, 1994] Press, W. H.; Teukolsky, S. A.; Vetterling, W. T.; Flannery, B. P. (1994): *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [R] The R Project for Statistical Computing. Online im Internet: URL: <http://www.r-project.org/> (Stand 17.11.2010).
- [Raghavan, 1991] Raghavan, R. (1991): A Method for Estimating the Parameters of the  $K$  Distribution. In: *IEEE Transactions on aerospace and electronic systems*, vol. 27, no. 2, 238–246.
- [Rosenblatt, 1952] Rosenblatt, M. (1952): Remarks on a Multivariate Transformation. In: *Annals of Mathematical Statistics*, vol. 23, 470–472.
- [Schimpf, 2002] Schimpf, H. (2002): Polarimetric Properties of Ground Clutter at 35 GHz. In: *EUSAR 2002, Köln (Germany)*, 259–262, June 2002.
- [Schimpf, 2004] Schimpf, H. (2004): Statistical Analysis of Polarimetric Ground Clutter at 35 GHz. In: *EUSAR 2004, Ulm (Germany)*, 207–210, May 2004.
- [Schimpf et al., 2002] Schimpf, H.; Essen, H.; Boehmsdorff, S.; Brehm, T. (2002): MEMPHIS - a fully Polarimetric Experimental Radar. In: *Geoscience and Remote Sensing Symposium. IGARSS 2002. IEEE International*.
- [Schimpf; Fuchs, 2007] Schimpf, H.; Fuchs, H.-H. (2007): Properties of Polarimetric Sea Clutter at 35 GHz. In: *Geoscience and Remote Sensing Symposium. IGARSS 2007. IEEE International*. 4152 - 4155.
- [Shorack; Wellner, 1986] Shorack, G. R.; Wellner, J. A. (1986): *Empirical Processes with Applications to Statistics*, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [Skolnik, 1980] Skolnik, M. I. (1980): *Introduction to radar systems*. Second edition. McGraw-Hill, New York.
- [Skolnik, 2001] Skolnik, M. I. (2001): *Introduction to radar systems*. Third edition. McGraw-Hill, New York.
- [Strelen; Nassaj, 2007] Strelen, J. C.; Nassaj, F. (2007): Analysis and Generation of Random Vectors with Copulas. In: *Proceedings of the 2007 Winter Simulation Conference*, 488-496.
- [Stute et. al., 1993] Stute, W.; Gonzáles-Manteiga, W.; Presedo-Quindimil, M. (1993): Bootstrap Based Goodness-of-Fit Tests. In: *Metrika* 40, 243-256.
- [Ward; Tough; Watts, 2006] Ward, K. D.; Tough, R. J. A.; Watts, S. (2006): *Sea Clutter: Scattering, the K Distribution and Radar Performance*. Institution of Engineering and Technology, London.
- [Watson, 1922] Watson, G. N. (1922): *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*. Cambridge University Press, London.
- [Zhu; Lahiri, 2007] Zhu, J.; Lahiri, S. N. (2007): Bootstrapping the Empirical Distribution Function of a Spatial Process. In: *Statistical Inference for Stochastic Processes*, 10, 107–145.



## Danksagung

Für vielfältige Unterstützung während der Entstehung dieser Arbeit möchte ich mich herzlich bedanken.

Die Betreuung durch Herrn Professor Dr. Erich Häusler war exzellent.

Herr Dr. Hartmut Schimpf fungierte als wichtiges Bindeglied zwischen beiden Disziplinen und hatte immer ein offenes Ohr für mich. Herr Professor Dr. Joachim Ender und Herr Dr. Helmut Essen boten mir die Möglichkeit zur Promotion in einer Abteilung, in der meine Kollegen mir längst zu Freunden geworden sind. Die WTD 61 und die Crew der Transall waren ebenso wie die Kollegen von armasuisse an der Durchführung der Flugmesskampagnen beteiligt.

Meine Familie gab mir während der gesamten Zeit Halt und stand mir, jeder auf seine Weise, mit Rat und Tat zur Seite - besonders mein Vater, der in seiner gewohnt gründlichen Art Korrektur gelesen hat, und Thomas, der nicht nur für das Funktionieren der Infrastruktur sorgte, sondern mich auch in allen anderen Belangen unterstützte.

Vielen Dank dafür!

Anika Maresch



# Erklärung

Ich erkläre: Ich habe die vorgelegte Dissertation selbständig und ohne unerlaubte fremde Hilfe und nur mit den Hilfen angefertigt, die ich in der Dissertation angegeben habe. Alle Textstellen, die wörtlich oder sinngemäß aus veröffentlichten Schriften entnommen sind, und alle Angaben, die auf mündlichen Auskünften beruhen, sind als solche kenntlich gemacht. Bei den von mir durchgeführten und in der Dissertation erwähnten Untersuchungen habe ich die Grundsätze guter wissenschaftlicher Praxis, wie sie in der „Satzung der Justus-Liebig-Universität Gießen zur Sicherung guter wissenschaftlicher Praxis“ niedergelegt sind, eingehalten.

Gießen, den 23. Mai 2011

---

Anika Maresch