

FASZINATION FORMELN

Berühmte Beziehungen aus Mathematik und Naturwissenschaften

Bedeutung und Hintergründe

WILLI KAFITZ^{*)}

Abstract:

Since their inception, a number of equations, formulas, symbols and relationships mark pivotal moments in the history of mathematics and the natural sciences.

They often exert a great fascination on laymen and experts alike. This article outlines important and universally recognized examples and tries to characterize their meaning, history and the names (and aliases) associated with them.

Other examples mentioned are less known and their importance is underestimated. Some of these are also named and an attempt is made to elevate their less obvious position in the history of science.

Keywords:

Euler's number, Euler's identity, Pythagorean theorem, golden ratio, $E = mc^2$, Heisenberg uncertainty principle, Planck's quantum of action, Avogadro's constant, logistic equation

Zusammenfassung:

Eine ganze Reihe von Gleichungen, Formeln, Symbolen und Beziehungen repräsentieren Sternstunden der Mathematik und der Naturwissenschaften. Auf Laien und auf Fachleute üben sie oft eine große Faszination aus. Der vorliegende Beitrag greift wichtige und allseits anerkannte Beispiele in kurzem Abriss auf und versucht ihre Bedeutung, Geschichte und mit ihnen verbundene Namen zu charakterisieren. Andere Beispiele sind eher weniger bekannt und ihre Bedeutung wird unterschätzt. Auch davon werden einige Repräsentanten genannt und versucht, ihre weniger offensichtliche Stellung in der Wissenschaftsgeschichte etwas aufzuwerten.

Schlüsselwörter:

Eulersche Zahl, Eulersche Identität, Satz des Pythagoras, Goldener Schnitt, $E=mc^2$, Heisenbergsche Unschärferelation, Plancksches Wirkungsquantum, Avogadro-Konstante, Logistische Gleichung

^{*)} Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

Zitate

Die Geometrie birgt zwei große Schätze.

Der eine ist der Satz des Pythagoras und der andere der Goldene Schnitt.

Den Ersten können wir mit einem Scheffel Gold vergleichen, den Zweiten können wir ein kostbares Juwel nennen.¹

Johannes Kepler (1571-1630)

Es gibt keinen Königsweg zur Mathematik.²

Euklid (3. Jh. vor Chr.)

Gleichungen sind wichtiger für mich, weil die Politik für die Gegenwart ist, aber eine Gleichung etwas für die Ewigkeit.³

Albert Einstein (1879-1955)

Wie auch immer man es sieht, aber der Satz des Pythagoras ist die berühmteste Aussage der Mathematik.⁴

Eli Maor (*1937)

Wie das Endliche eine unendliche Reihe umschließt

Und im Grenzenlosen Grenzen erscheinen,

So wohnt die Seele der Unermesslichkeit in den Details

Und in den engsten Grenzen findet man das Grenzenlose.

Welche Freude, das Unscheinbare in der Unendlichkeit zu erkennen!⁵

Jakob Bernoulli (1655-1705)

But the great equations of modern physics are a permanent part of scientific knowledge, which may outlast even the beautiful cathedrals of earlier ages.⁶

Steven Weinberg (1933-2021)

Man kann sich dem Gefühl nicht entziehen, daß diese mathematischen Formeln eine unabhängige Existenz haben, daß sie klüger als wir und sogar weiser als ihre Entdecker sind, daß wir mehr von ihnen bekommen, als ursprünglich in sie hinein gesteckt wurde.⁷

Heinrich Hertz (1857-1894)

¹ Zitiert nach Claudi Alsina, Der Satz des Pythagoras, Librero, Kerkdriel (NL), 2016 (dt. Ausgabe), S. 9

² So antwortete Euklid von Alexandria auf die Frage des Pharaos Ptolemaios I., ob man die Geometrie nicht auch leichter erlernen könne als mit dem Studium von Euklids Lehrsätzen. Quelle: Ernst Horst, Mathematische Bildung S. 11

³ Zitiert nach <http://www.denkschatz.de/zitate/Albert-Einstein/Gleichungen-sind-wichtiger-fur-mich-weil-die-Politik-fur-die-Gegenwart-ist-aber-eine>

⁴ The Pythagorean Theorem; A 4000-Year History

⁵ Jakob Bernoulli, Ars Conjectandi, zitiert nach Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B.; Bezaubernde Beweise, Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg, 2013, S. 261

⁶ Steven Weinberg in Graham Zermelo, It Must Be Beautiful: Great Equations of Modern Science, Granta Books, Februar 2002

⁷ Zitiert nach Havel, Julian, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013, S.149

Inhalt

Einleitung und Fokus	115
Mathematik	116
Physik	160
Biologie	191
Chemie	199
Fazit	208
Literaturverzeichnis	209
Abbildungsnachweise	210
Personenregister	214
Stichwortverzeichnis	217
Danksagung	221

Einleitung und Fokus

Es sind Gleichungen, seltener Ungleichungen, die oft in ihrer Kürze „Formeln“ genannt werden und die in Mathematik und vielen Wissenschaften, die sich der Mathematik als universelle Sprache bedienen, Wissenschaftsgeschichte geschrieben haben. Sie sind Ergebnisse von intensivem Ringen in Erkenntnisprozessen, die oft über Generationen von Wissenschaftlern und allzu selten auch Wissenschaftlerinnen gehen. Manchmal sind unterhaltsame Anekdoten damit verbunden. Oft ist es auch nur das Symbol für eine Zahl, eine mathematische, physikalische oder auch chemische Konstante, das sofort den Zusammenhang assoziiert. Je berühmter und wichtiger diese Zahlen sind, umso weniger variieren die Symbole. Die Kreiszahl Pi oder die Eulersche Zahl e gehören dazu, der Goldene Schnitt Phi, die Lichtgeschwindigkeit c , das Plancksche Wirkungsquantum h oder in der Chemie die universelle Avogadro-Konstante N_A . Erst die Zusammenhänge zwischen ihnen machen oft den entscheidenden wissenschaftlichen Durchbruch aus. Allerdings reicht der Buchstabenvorrat manchmal nicht aus. Die elektrische Elementarladung und die Eulersche Zahl tragen eben den gleichen Buchstaben. Das macht aber ihrer Sonderstellung keinen Abbruch.

Eigentlich müsste das erste Kapitel der Gleichung $1 + 1 = 2$ gewidmet sein. Denn das ist unabhängig von Dingen der abstrakte Einstieg eines Kindes in die Welt der Zahlen.

In diesem Beitrag sollen Beispiele von Gleichungen, Symbolen und Beziehungen in ihrer Geschichte, Bedeutung und zumindest angedeuteten Zusammenhängen aufgezeigt werden. Einige Beispiele liegen auf der Hand, drängen sich regelrecht auf. Andere werden manchen Leserinnen und Lesern

als willkürlich erscheinen oder es fehlen andere Kandidaten, die es ihrer Meinung nach wert sind und diese Zusammenstellung wirkt dann unvollständig. Dieses Risiko muss eingegangen werden. Es soll und kann keine vollständige Liste geben. Es kann aber beim systematischen Lesen oder unsystematischen Blättern in der kleinen Publikation wieder neu etwas Faszination für die Sternstunden der Mathematik und Naturwissenschaften entstehen. Das ist das eigentliche Ziel dieses Beitrags.

Ein zusammenhängender Text ist deshalb nicht der Anspruch. Es ist kein geschlossener Aufsatz, keine Abhandlung zu einem Gegenstand. Eine strenge Chronologie oder Systematisierung gibt es in der Regel nicht. Nur sehr grob wurden die Kapitel chronologisch in den vier Wissensgebieten geordnet. Allerdings sind zum Verständnis einiger Kapitel Voraussetzungen nötig, die in vorigen Abschnitten behandelt werden. Die Schönheit der Eulerschen Identität ist ohne die Exponentialfunktion, der Bedeutung von Pi oder e und den komplexen Zahlen wenig verständlich. Je nach Fachgebiet und Interesse kann man aber ansonsten zwischen den Themen beliebig springen. Nur die Orientierung der Kapitel nach den Fachrichtungen Mathematik, Physik, Chemie und Biologie schaffen eine minimale Ordnung zwischen den einzelnen Stichpunkten.

Mathematik

Die Satzgruppe des Pythagoras und der Satz des Thales

Eines ist sehr sicher: Der Satz des Pythagoras stammt nicht von Pythagoras. Trotzdem ist es beruhigend, dass sein Name mit einem der wichtigsten mathematischen Erkenntnisse verbunden bleibt. Es scheinen Gründe zu der Annahme zu bestehen, dass der indische Mathematiker Baudhayana um 800 v. Chr. in seinem Buch Baudhayana Sulba Sutra den Satz entwickelt hat.⁸ Pythagoras hat bei allen „unwissenschaftlichen“, mystischen Tendenzen seines von ihm gegründeten Bundes den Beweis fest in der Mathematik etabliert. Er hat die Logik als wesentliches Kriterium erkannt, um Behauptungen von zweifelsfrei wahren Ergebnissen zu unterscheiden. Es ist nicht vermessen zu sagen, dass die Philosophie sich seitdem der mathematisch motivierten Logik bedient hat. Auch wenn die pythagoreische Lehre eine Mischung aus Mystik und Rationalität war, so blieb die essentielle Bedeutung des Beweises unantastbar. Pythagoras unternahm bis zu seinem 40. Lebensjahr ausgedehnte Reisen in wesentliche Teile der damaligen Welt. Dazu gehörte vor allem der „Fruchtbare Halbmond“, vom Zweistromland bis zum heutigen Libanon, wo

⁸ Clifford A. Pickover, Das Mathebuch, Librero, Kerkdriel (NL) 2014, S. 40

neben Ägypten die frühen Hochkulturen entstanden. Einige Autoren behaupten, er sei bis Indien gekommen.⁹ Auf diesen Reisen konnte Pythagoras das

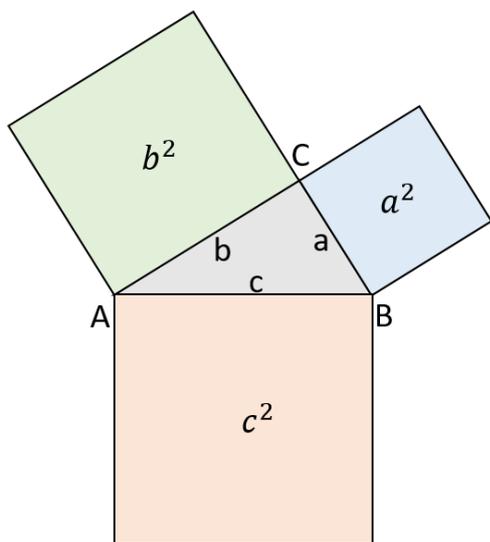
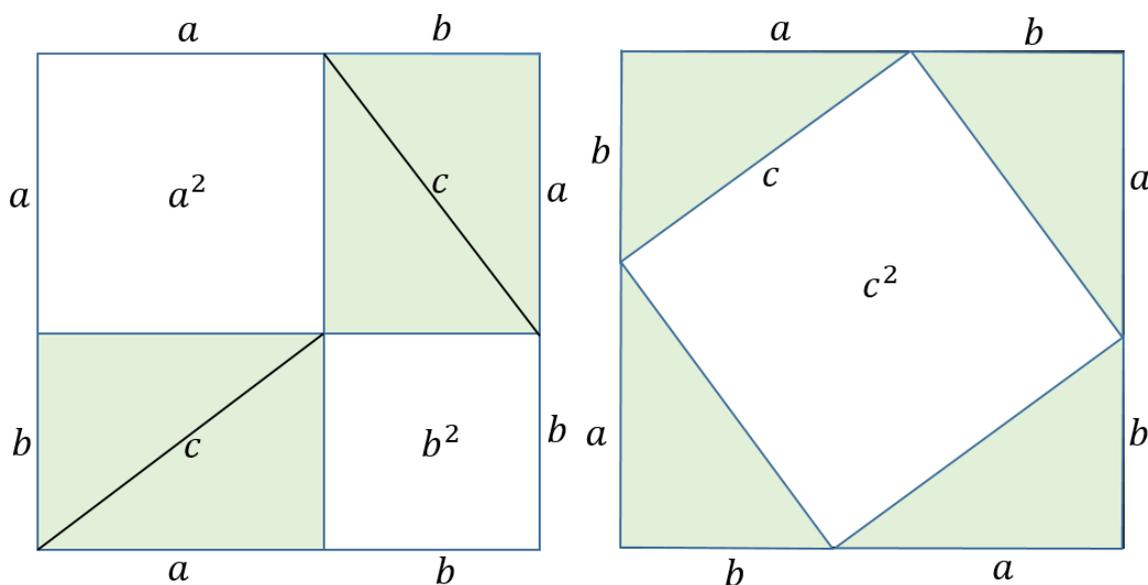


Abb. 1: Satz des Pythagoras

mathematische und astronomische Wissen seiner Zeit aufsaugen. Vor allem in Babylonien bzw. Mesopotamien („d.h. Zweistromland“) sind heute bemerkenswerte Funde überliefert. Zwar wurden 500.000 Tontafeln gefunden, von denen lediglich 300 mathematischen Inhalts sind. Viele sind jedoch noch nicht entziffert, aber einige wenige zeigen trotzdem das erstaunliche mathematisch-astronomische Wissen dieser Epoche. Eine als Plimpton 322 entzifferte Keilschrifttafel zeigt pythagoreische Tripel in dem hexagesimalen (Basis 60) Stellenwertsystem der Babylonier.¹⁰ Sie stammt aus der Hammurabi-Dynastie (ca.

1800-1600 v.Chr.) und deshalb 1500 Jahre bevor sich Euklid intensiv mit



$$\begin{aligned}
 a^2 + 2ab + b^2 &= c^2 + 4 \frac{ab}{2} \\
 a^2 + b^2 &= c^2
 \end{aligned}$$

diesem Thema befasst hat. Die Zahlentripel sind ganzzahlige Werte (ohne Null), die die Bedingung $a^2+b^2=c^2$ erfüllen. Das war für die Wissenschaftsgeschichte

⁹ Claudi Alsina, Der Satz des Pythagoras, Librero, Kerkdriel (NL), 2016 (dt. Ausgabe), S. 13

¹⁰ Ebenda, S. 15

eine riesige Überraschung! Die damaligen Mathematiker mussten einen Algorithmus gekannt haben, Kenntnisse in Zahlentheorie besessen haben und dazu die theoretischen Kenntnisse in praktische Rechnungen mit dem unhandlichen Stellenwertsystem umgesetzt haben. Es scheint sich um die erste trigonometrische Tafel der Mathematikgeschichte zu handeln.

Dagegen gibt eine sehr wichtige ägyptische Quelle, der Papyrus-Rhind, der als eines der ersten Mathematiklehrbücher gelten kann, keine Hinweise. Die 87 Aufgaben mit Schritt-zu-Schritt Lösungen waren dazu gedacht, königliche Schreiber auszubilden. Diese bildeten die Elite im Beamtentum und hatten auch die Aufgabe, z.B. Neuvermessungen aufgrund der jährlichen Überschwemmungen des Nils zu koordinieren oder den Pyramidenbau mathematisch zu unterstützen. Es fällt auf, dass der Satz des Pythagoras noch nicht einmal indirekt im Papyrus-Rhind erwähnt wird. Gleiches gilt für den Moskauer Papyrus und den Berliner Papyrus. Andererseits ist bekannt, dass Handwerker mit Schnüren im Verhältnis 3-4-5, dem einfachsten pythagoreischen Tripel, hantierten.

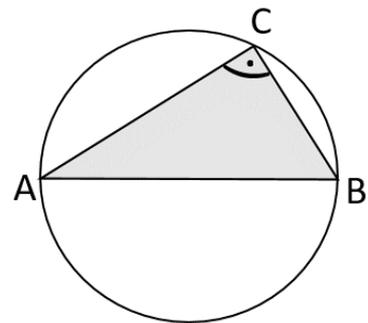


Abb. 3: Satz des Thales

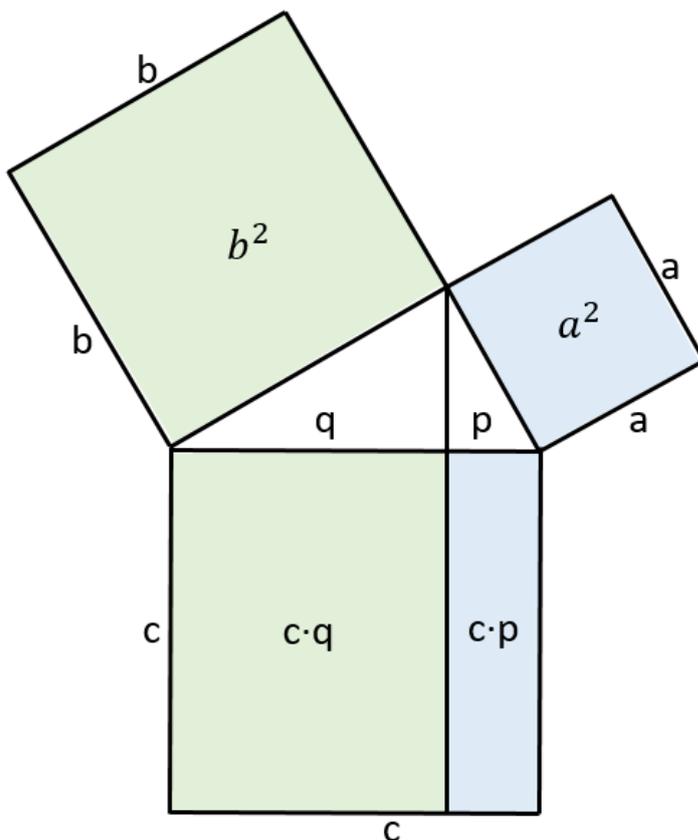


Abb. 4: Satzgruppe des Pythagoras, Kathetensatz

Was macht den pythagoreischen Lehrsatz so bedeutend? Er ist so grundlegend, dass man ihn für eine Definition verwenden kann:

In einem gegebenen ebenen Dreieck ABC ist der Winkel bei C genau dann ein rechter Winkel, wenn die Fläche des Quadrats der dem Eckpunkt C gegenüberliegenden Seite c der Summe Quadrate über den Seiten a und b entspricht.

Die meist verwendeten Begriffe „Hypotenuse“ für die Seite c und „Katheten“ für die Seiten a und b stammen aus dem Griechischen.

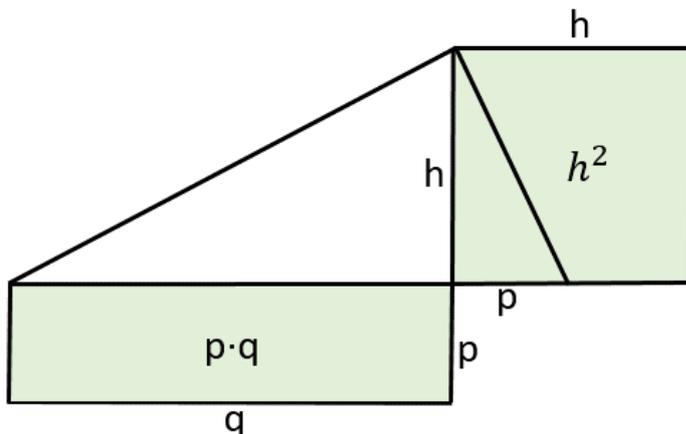


Abb. 5: Satzgruppe des Pythagoras
Höhensatz des Euklid

Kathete hat den Wortstamm „kothos“, das senkrecht, gerade oder übereinstimmend bedeutet. Dagegen ist „upoteinousa“ die Linie, die zugrunde liegt.¹¹ Sie wird für den Durchmesser eines Kreises verwendet und weist somit auf einen anderen wichtigen geometrischen Satz hin, den

Satz des Thales: Ist die Strecke \overline{AB} der Durchmesser eines Kreises und C ein Punkt auf dem Kreis, so ist der Winkel bei C ein rechter Winkel.

Mit der Zahl π sind nicht nur Eigenschaften ganzer Kreise, wie Umfang und Fläche verknüpft. Es geht auch um Winkel. Man stelle sich einen Kreis um den Ursprung, z.B. der Einfachheit halber mit dem Radius 1, vor und beginne bei dem Punkt, an dem er die x-Achse schneidet – also im Beispiel bei $x=1$. Wandert ein Punkt gegen den Uhrzeigersinn auf dem Kreis, so bildet er einen Winkel mit der x-Achse. Umläuft der Punkt den ganzen Umfang, so hat er 2π zurück gelegt. Das liegt an der trivialen aber bedeutsamen Tatsache, dass der Kreis eine konstante Krümmung hat. Nur Kreise und Geraden/Strecken haben eine konstante Krümmung. Bei Strecken ist die Krümmung Null. Beide eignen sich deshalb zur Messung, die ja immer einen Vergleich mit einem Maßstab darstellt. Beim Kreis ist es indirekt die Winkelmessung, bei der Strecke die Längenmessung. Ein Kreis hat 360° (400° und damit 100° für einen rechten Winkel hat sich als Dezimalsystem, ebenso wie eine dezimale Uhr, nicht durchgesetzt). Die 360° werden gemäß der Länge des ganzen Kreisbogens im Einheitskreis 2π gesetzt: $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$. Man spricht vom Gradmaß und Bogenmaß oder Radiant mit der Einheit rad, die man im internationalen SI-System weglassen darf.

Trigonometrie kommt von griechisch trigonon (Dreieck).

Im rechtwinkligen Dreieck gilt die Definition

$$\sin \alpha = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{a}{c}; \quad \cos \alpha = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypotenuse}} = \frac{b}{c};$$

Schaut man sich gängige Winkel, wie $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ an $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right)$, also

¹¹ Alsina, Satz des Pythagoras, ebenda, S. 42

$$\begin{aligned}\sin 30^\circ &= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}; & \sin \frac{\pi}{6} &= \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin 60^\circ &= \cos 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3}; & \sin \frac{\pi}{3} &= \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ \sin 45^\circ &= \cos 45^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{2}; & \sin \frac{\pi}{4} &= \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{aligned}$$

so fällt eine Beziehung auf, die für alle Winkel gilt. Da im rechtwinkligen Dreieck $\alpha + \beta = 90^\circ$ ist und der Satz des Pythagoras gilt, erhält man eine trigonometrische Variante des Satzes von Pythagoras:

$$(\sin \alpha)^2 + (\cos \alpha)^2 = 1$$

Andere Schreibweise: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

Unter dem Begriff „Fermats letztes Theorem“ oder letzter Satz ist die Aussage zu verstehen, dass es analog zu den Pythagoreischen Zahlentripeln, keine ganzzahligen Tripel der Form $a^n + b^n = c^n$ gibt mit $n > 2$ (ohne Null).

Fermat hinterließ in seinen Aufzeichnungen und Büchern folgende Bemerkung an einem Seitenrand:

„Es ist jedoch nicht möglich, einen Kubus in 2 Kuben, oder ein Biquadrat in 2 Biquadrate und allgemein eine Potenz, höher als die zweite, in 2 Potenzen mit ebendemselben Exponenten zu zerlegen: Ich habe hierfür einen wahrhaft wunderbaren Beweis entdeckt, doch ist dieser Rand hier zu schmal, um ihn zu fassen.“¹²

Pierre de Fermat galt als integrier Mann, Hobbymathematiker mit dem Schwerpunkt Zahlentheorie und von Beruf Richter. Er hatte sicherlich Erkenntnisse, wahrscheinlich Beweise für die Fälle $n=3$ und möglicherweise $n=4$. Doch erst 350 Jahre später wurde der Beweis von Andrew Wiles mit erheblichem Aufwand und mit verblüffenden Querbeziehungen zu anderen Teilbereichen der Mathematik erbracht. Heute geht man deshalb von einer eher „leichtsinnigen“ Bemerkung Fermats aus. Große Namen scheiterten am Beweis, darunter Paul Wolfskehl (1856-1906). Als er starb, setzte er als Preis für den Beweis ein Vermögen von 100.000 Goldmark aus. Ein Großteil ging zwar durch Krieganleihen verloren, aber der Wolfskehl-Preis konnte am 27. Juni 1997 in Göttingen an Andrew Wiles verliehen werden. Die Geschichte des Beweises, den Wiles fast im Alleingang schaffte, wurde von dem damals jungen Simon Singh zu seinem ersten Bestseller bearbeitet.¹³

Kosinussatz und Sinussatz

Der Satz des Pythagoras ist auch für nicht rechtwinklige Dreiecke nützlich. Er dient zur Herleitung allgemeinerer Sätze. In jedem Dreieck ist das Quadrat über

¹² Zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Großer_Fermatscher_Satz (aus dem Lateinischen übersetzt)

¹³ Simon Singh, Fermats letzter Satz, Carl Hanser Verlag, München-Wien, 1998

einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den anderen beiden Seiten vermindert um das doppelte Produkt aus diesen Seiten und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels. Das ist der Kosinussatz.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

h_a, h_b, h_c sind die Höhen im Dreieck ABC. Es gilt

Wegen $\frac{h_b}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin 90^\circ} \rightarrow h_b = a \cdot \sin \gamma$ und $d = b - a \cdot \cos \gamma$

$$c^2 = h_b^2 + d^2$$

$$c^2 = a^2 \cdot \sin^2 \gamma + b^2 - 2ba \cdot \cos \gamma + a^2 \cos^2 \gamma$$

$$c^2 = a^2 (\sin^2 \gamma + \cos^2 \gamma) + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

Man sieht: Bei $\gamma = 90^\circ$, also $\cos 90^\circ = 0$ ergibt sich der Satz des Pythagoras.

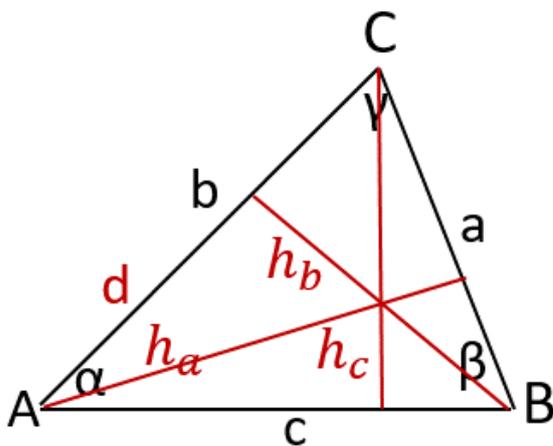


Abb. 6: Kosinussatz: Trigonometrie im beliebigen Dreieck.

Der Sinussatz schafft eine Verbindung zwischen Seiten im Dreieck und den gegenüber liegenden Winkeln.

Es gilt

$$a : b : c =$$

$$\sin \alpha : \sin \beta : \sin \gamma \text{ oder}$$

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

Beim Beweis ist es sinnvoll, drei Fälle zu unterscheiden:

spitzwinkliges Dreieck, rechtwinkliges Dreieck, stumpfwinkliges Dreieck¹⁴
Die Höhe liegt entweder im Dreieck oder ist eine Seite oder liegt außerhalb.

¹⁴ Eine didaktisch gute Darstellung für die beiden Sätze, an die sich das Kapitel maßgeblich anlehnt, findet sich bei <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/kosinussatz> bzw. <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/sinussatz>

Pi, π

Die wohl wichtigste mathematische Konstante ist π , also das Verhältnis eines Kreisumfangs zu seinem Durchmesser. Man kann davon ausgehen, dass jede hochentwickelte Kultur der gleichen Meinung ist.

Aus babylonischen Keilschriften geht hervor, dass man für π zwischen 3 und höchstens $3\frac{1}{8}$ annahm. Die Ägypter zogen gemäß Moskauer Papyrus vom Durchmesser d eines Kreises $1/9 \cdot d$ ab, quadrierten und hatten damit etwa die Fläche (d.h. $\pi \approx 3,16 \dots$).¹⁵

Die Ägypter schrieben Brüche als Summe von Stammbrüchen, was durchaus auch Missverständnisse zulässt. Nach anderer Darstellung im Papyrus-Rhind ist $\pi = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \approx 3,12\dots$

Die genaueste Berechnung von π stammte von Archimedes von Syrakus (ca. 287-212 v. Chr.) und bestand praktisch fast ein halbes Jahrtausend lang. Man kann es als Präzisionsberechnung bezeichnen und war eine Betrachtung von einbeschriebenen und umbeschriebenen Vielecken. Man muss beachten, Archimedes hatte noch kein Dezimalsystem und keine Null zur Verfügung. Die Rechnung beruhte nur auf Abschätzungen von Brüchen. Für die alten Griechen war ein Bruch immer ein Streckenverhältnis. Für eine Quadratur von Zahlen errichtete man ein Quadrat über der Strecke. Es war eine physische und psychische Höchstleistung. Er kam zu der Abschätzung

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}; \text{ oder dezimal } 3,1408\dots < \pi < 3,1429 \dots$$

Der Astronom Ptolemäos (ca. 100-170 n. Chr.) rechnete im Sechzigersystem $\pi = 3^\circ 8' 30'' = 3,14167 \dots$ mit einer Abweichung von nur 0,000074 vom exakten Wert.¹⁶

Der Rekord liegt aktuell (2021) bei einem Team der FH Graubünden. Sie errechneten 62.831.853.071.796 Dezimalstellen in 108 Tagen. Die Berechnung von Pi ist zum Test für neue Computer geworden.

Im Mittelalter versuchte sich Nikolaus von Kues (lateinisiert Cusanus) recht erfolgreich an Berechnungen. Archimedes ging von einem festen Kreis aus und näherte diesen durch Polygone an. Cusanus wählte eine umgekehrte Methode. Er ging von einem Polygon der festen Länge 2 mit $n = 2^k$ Ecken aus (wobei $2^k = 4, 8, 16, 32, \dots$) und zwei in- und umbeschriebenen Kreisen. Der innere Kreis hat für jedes n den Umfang $2\pi r_n$; der äußere Kreis $2\pi R_n$. Daraus hat er Pi sehr genau approximiert.

¹⁵ Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer Berlin Heidelberg, 2008, S. 135

¹⁶ Hans-Dieter Rinkens, Katja Krüger, Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer-Spektrum, Wiesbaden 2020, S. 19

Weitere berühmte Formeln, mit denen π berechnet werden konnte, sind z.B. das Wallissche Produkt, nach John Wallis (1616-1703). Er ist auch dadurch bekannt geworden, weil er das Unendlich-Zeichen in die Notation eingeführt hat.

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{2^2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6^2}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8^2}{7 \cdot 9} \dots$$

Am bekanntesten ist aber die von Euler gefundene Reihe der reziproken Quadratzahlen (siehe Basler Problem).

Berühmt ist auch die Gaußsche Normalverteilung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Weierstraß nutzte die Darstellung

$$\pi = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 2 \cdot \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{1+x^2}$$

Ein schönes Beispiel kann man über die Potenzreihe der Sinusfunktion herleiten. Beweisidee ist der sog. Eulersche Koeffizientenvergleich.¹⁷

Die alternierende Summe der Kehrwerte aller ungeraden Zahlen ist $\frac{\pi}{4}$.

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Pi ist längst nicht mehr nur in der Geometrie wichtig, sondern taucht an vielen, oft unerwarteten Stellen, in der Mathematik auf. In der Zeit zwischen Ende der Renaissance und Ende des viktorianischen Zeitalters (ca. 1600- ca. 1900) kann man die Blüte der Mathematik mit dem immer besseren Verständnis von π gleichsetzen.¹⁸ Das gilt vor allem in Bezug auf das Unendliche in der Analysis, z.B. für unendliche Potenzreihen.

Null, 0

Von dem deutschen Mathematikhistoriker Karl Menninger stammt das Zitat: *Wir sprechen deutsch, wir schreiben römisch und wir rechnen indisch.*¹⁹ Dabei war der wichtigste „Import“ aus der indischen Mathematik das Stellenwertsystem auf Basis 10 und die Zahl Null. Von der restlichen Welt unbeachtet, scheinen die

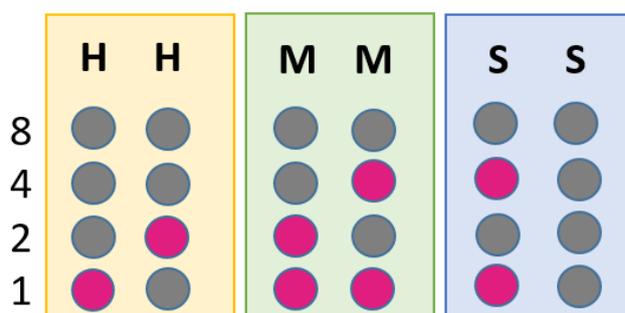
¹⁷ Beweis siehe Rinkens, Hans-Dieter, Krüger, Katja; Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020, S. 159

¹⁸ Siehe Zitat von David Blatner, The Joy of π , in Rinkens, Krüger, ebenda, S. 20

¹⁹ Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen, 1958, zitiert nach Wußing, ebenda, S. 97

Maya um ca. 665 ebenfalls ein Zahlensystem mit der Null entwickelt zu haben.²⁰ Bei den Babyloniern wurde zwar ein Endezeichen für Zahlen eingeführt, aber wahrscheinlich um diese Stelle besser markieren zu können. Als vollgültige Zahl Null tritt sie aber erst um 650 in der indischen Mathematik auf. Eine Steintafel, die in Gwalior, südlich von Delhi, gefunden wurde, kann genau auf das Jahr 876 datiert werden. Dort wurden die Zahlen 270 und 50 fast in moderner Schreibweise aufgezeichnet.²¹ Über Indien gelangte die Null zu den Arabern und Chinesen. Die westarabische Kultur beeinflusste schließlich das Europa des Mittelalters.

Einen großen Beitrag lieferte dazu offenbar Leonardo Pisano, genannt Fibonacci, der u.a. in seinem einflussreichen Buch *Liber abaci*, das Buch vom



12:35:50 Uhr

Abb. 7: Nicht-dezimales Stellenwertsystem ohne Null bei einer Digitaluhr.

Abacus, arabische Zahlen propagierte. Das "Buch der Rechenkunst" wurde 1202 vollendet und ist in der Überarbeitung von 1228 der Nachwelt erhalten geblieben.²² Es ist die erste europäische Gesamtdarstellung der damaligen Arithmetik. Er soll zeitweilig am Hof von Friedrich dem II. in Sizilien gewesen sein und sich vom Kaiser die Förderung der indisch-arabischen Mathematik

mit Erfolg erbeten haben. Trotzdem dauerte es noch mehrere Jahrhunderte. Erst 1494 gingen z.B. die MEDICI in ihren Verwaltungen generell zu den arabischen Zahlen inkl. der Null über.²³ Das war ein besonderer Sieg der Geschäftswelt über die Herrschenden, die die arabischen Ziffern aus fadenscheinigen Gründen ablehnten, denn noch 1299 wurden die arabischen Ziffern z.B. in Florenz verboten.²⁴ Auch eine andere Revolution wurde bewusst durch die Null eingeleitet: Den nulldimensionalen Fluchtpunkt in der Malerei. 1625 zeichnete Brunelleschi erstmals einen solchen Punkt in einer Zeichnung des Baptisteriums, der Taufkirche, die neben dem Dom in Florenz steht. Es war der Beginn der Zentralperspektive in der darstellenden Kunst.

²⁰ Clifford A. Pickover, Das Mathebuch, ebenda, S. 80

²¹ Clifford A. Pickover, Das Mathebuch, ebenda, S. 80

²² <https://library.ethz.ch/standorte-und-medien/plattformen/virtuelle-ausstellungen/fibonacci-un-ponte-sul-mediterraneo/biographie-von-leonardo-pisano.html>

²³ <https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/geschichte/artikel/leonardo-fibonacci-von-pisa>

²⁴ Charles Seife, Zwilling der Unendlichkeit, Goldmann, München, 2002, S. 92

Interessanterweise führt der Punkt ins Unendliche. Leonardo da Vinci verfasste einen mathematisch fundierten Leitfaden, um korrekt perspektivische Darstellungen malen zu können.²⁵ Die Null war also in der Geschäftswelt und in der Kunst angekommen. Ebenso wurde offener in der Theologie über das „Nichts“ diskutiert. Torricelli und Pascal zeigte mit Quecksilbersäulen, dass es ein Vakuum geben muss und dass die Säule auf Bergen abhängig von der Höhe ist. Damit war der „*horror vacui*“ überwunden. Eine Belastungsprobe für die neue Infinitesimalrechnung war dann im 18. Jahrhundert die Diskussion um das unendlich Kleine. Jean Le Rond d’Alembert schrieb: *Eine Größe ist etwas oder nichts; wenn sie etwas ist, ist sie noch nicht verschwunden; wenn sie nichts ist, ist sie wirklich verschwunden. Die Annahme, es gebe einen dazwischen liegenden Zustand, ist ein Hirngespinnst.*²⁶

Das Basler Problem und berühmte Reihen

Es geht um die Summe der reziproken Quadratzahlen

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Das Basler Problem hat seinen Namen, weil es lange Zeit ungelöst war und sich vor allem die Basler Mathematiker Jakob Bernoulli und sein Bruder Johann Bernoulli daran versuchten und scheiterten. Jakob Bernoulli beschrieb das Problem 1689 im *Tractatus de seriebus infinitis*. Er wird zitiert mit der dringenden Bitte, ihn zu informieren, wenn jemand die Lösung findet. Montucla nannte es die „Geißel der Analytiker“.²⁷ Nicole Oresme,²⁸ ab 1377 Bischof von Lisieux, soll den Sachverhalt untersucht haben. Er scheint die Konvergenz der Reihe erkannt und einen Wert kleiner 2 vermutet zu haben. Das ist einsichtig, wenn man die Partialsummen als Quadrate auffasst und sie in ein 1x2 Rechteck packt. Geometrisch sieht es so aus, als würde die Fläche des Rechtecks nicht ausgefüllt werden, also die Summe durch 2 beschränkt sein. Doch noch 1644 fragte sich der Italiener Pietro Mengoli, ob diese Summe wirklich konvergiere, und wenn ja, gegen welchen Wert. Auch er fand keine Lösung.

Sogar Newton und Leibniz sollen gescheitert sein, ebenso der herausragende französische Mathematiker L’Hôpital. John Wallis berechnete den Wert auf drei Dezimalstellen.

²⁵ Ebenda, S. 98 f

²⁶ Zitiert nach Seife, ebenda, S 141

²⁷ Julian Havil, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013, S. 50

²⁸ Wußing ebenda, S. 293, sowie Rudolf Taschner; Die Farben der Quadratzahlen, Hanser, München 2019, S. 67

Erst Euler, ebenfalls aus Basel und Schüler von Johann Bernoulli, war erfolgreich. Er fand die ästhetisch schöne Lösung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$
$$\frac{\pi^2}{6} \approx 1,644934$$

Euler verallgemeinerte das Problem zu der berühmten Zeta-Funktion mit $s \neq 1$

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

(Die Riemannsche Vermutung zu den Nullstellen der Zeta-Funktion gilt als eines der wichtigsten ungelösten Probleme der Mathematik und als Schlüssel zum besseren Verständnis der Primzahlen. Auf sie wird noch eingegangen.)

Somit gilt

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Zeta von 1 muss man ausschließen denn es ist nicht definiert. Es wäre die divergierende harmonische Reihe

$$\zeta(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots = \infty$$

$\frac{\pi^2}{6}$ tritt an einigen unerwarteten Stellen in der Mathematik auf. So ist $1 : \frac{\pi^2}{6}$ übrigens exakt die Wahrscheinlichkeit, dass zwei zufällig ausgewählte positive ganze Zahlen teilerfremd sind.

Als endliche Reihe wird sie gerne mit H_n bezeichnet:

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n}$$

Es ist überraschend: Selbst bei endlichem n gibt es keine Formel für H_n .

Man kann auch beweisen: Mit Ausnahme von $n=1$ wird H_n nie ganzzahlig. Mit einer sehr diffizilen Argumentation stellt sich heraus, dass der Zähler immer ungerade ist und der Nenner gerade.

Außerdem gibt es nur drei Fälle, in den H_n ein endlicher Dezimalbruch ist, nämlich

$H_1 = 1$, $H_2 = \frac{1}{2}$ und $H_6 = 2,45$. Sonst ist es immer eine unendliche Dezimalzahl.

Die unendliche harmonische Reihe für n gegen Unendlich ist noch bemerkenswerter, denn die Divergenz ist schlechthin unerwartet. Die ersten 100 Glieder summieren sich zu 5,187..., die ersten 1000 zu 7,486... und die erste Million zu 14,392... Man braucht ca. $15 \cdot 10^{42}$ Reihenglieder um die Summe von 100 erhalten. Die Divergenz bewies übrigens der geniale Nicole Oresme, seit 1377 Bischof von Lisieux. Er war einer der vielseitigsten Persönlichkeiten im ausgehenden Mittelalter.²⁹ Sein berühmter Beweis kann man in moderner Notation schreiben:

$$\begin{aligned} H_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} \dots \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}\right) \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \frac{8}{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \dots \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Aber

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right)$$

konvergiert und wird γ (Gamma) genannt (Euler-Mascheroni-Konstante).

Sie hat den Wert $\gamma = 0,57721\ 56649 \dots$

Sie taucht öfters in der Zahlentheorie und analytischen Funktionentheorie auf. Es ist unbekannt, ob sie rational, irrational oder transzendent ist. Die riesige Anzahl an Nachkommastellen, die von γ bekannt sind, machen es sehr wahrscheinlich, dass γ zumindest irrational ist.

Gamma ist eine „verrückte“ Zahl. Für ein n von einer Million (1.000.000) sind nur die ersten 5 Nachkommastellen exakt. Die Konvergenz ist extrem langsam.

Man kann beweisen: $\frac{1}{2(n+1)} < \gamma_n - \gamma < \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$

²⁹ Julian Havil, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013, S. 33

Will man eine Genauigkeit von m Dezimalstellen, so muss man fordern

$$\gamma_n - \gamma < 5 \cdot 10^{-m-1} \text{ also } \frac{1}{2n} < 5 \cdot 10^{-m-1} \quad \text{d.h. } n > 10^m$$

$$\begin{aligned} \gamma_n - \gamma &> \frac{1}{2 \cdot 10^m} \left(1 - \frac{1}{10^m}\right) = \frac{5}{10^{m+1}} \left(1 - \frac{1}{10^m}\right) \\ &= \frac{5}{10^{m+1}} \left(\frac{10^m - 1}{10^m}\right) = \underbrace{4,999\,999\,999\,99\,5}_{(m-1) \text{ mal}} \cdot 10^{-(m+1)} \end{aligned}$$



Abb. 8: Kultstatus Basler Problem

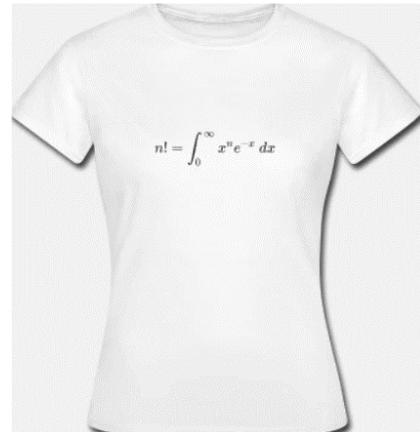


Abb. 9: Die analytische Fortsetzung der Fakultät

d.h. erst in der m -ten Dezimalstelle wird die Approximation von γ inkorrekt.³⁰ Die Berechnung von möglichst vielen Dezimalstellen ist ein enormer Rechenaufwand.

Das Basler Problem genießt neben der analytischen Fortsetzung der Fakultät Kultstatus unter Mathematik-Begeisterten. Mehrere T-Shirt-Hersteller bieten Produkte mit mathematischen oder physikalischen Formeln an.

Ähnliches gilt aber auch für andere ästhetisch schöne Formeln: Z.B. das Gaußsche Fehlerintegral.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Die analytische Fortsetzung der Fakultät erweitert den „Horizont“ der Fakultät erheblich: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$ ist nur für natürliche Zahlen definiert.

„Analytische Fortsetzung“ bedeutet, dass nun auch alle positiven und negativen reellen Zahlen oder komplexe Zahlen als Wertebereich der Fakultätsfunktion zugelassen sind.

³⁰ Julian Havil, GAMMA, ebenda S. 88

$$n! = \int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx$$

Das analoge Integral mit $n-1$ statt n ist übrigens als Gamma-Funktion definiert:

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx$$

Komplexe Zahlen

Etwa um das Jahr 1850 begann eine systematische Definition der reellen Zahlen. Das Ringen um dieses Thema dauerte fast 2.000 Jahre. Auch heute weiß man von wichtigen Zahlen noch nicht, ob sie rational, irrational oder sogar transzendent sind. Ein Beispiel ist die Zahl Gamma, auf die noch einzugehen sein wird. Heute können wir die reellen Zahlen als

vollständigen, geordneten Körper

bezeichnen. „Vollständig“ bedeutet, dass es keine Lücken gibt. Das ist z.B. wichtig bei dem Begriff der Stetigkeit. Vor allem Richard Dedekind und Georg Cantor haben dazu beigetragen, dass eine konsistente Definition entstand. „Geordnet“ heißt, es existiert eine Ordnungsrelation, mit der wir im Alltag ganz selbstverständlich umgehen, nämlich die kleiner/größer Relation. Von zwei prinzipiell berechenbaren, reellen Zahlen n und m kann man klar entscheiden, ob $n < m$, $n > m$ oder $m = n$ ist. Ein algebraischer Körper muss eine Reihe von Axiomen erfüllen. Er besitzt zwei Verknüpfungen, genannt Addition und Multiplikation, die zu den allseits bekannten Rechenregeln der Arithmetik führen. Theoretisches Fundament sind Begriffe wie Gruppe, neutrales Element, inverses Element, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz(e), etc. Der Begriff wurde von Dedekind eingeführt. In der Mathematik gibt es eine Reihe von algebraischen Strukturen, die durch Einschränkungen der Körperaxiome gewonnen werden.

Vor allem algebraische Gründe führten mehrfach zur Erweiterung des Zahlenbereiches. So entstanden Brüche (rationale Zahlen) und die anfangs abgelehnten negativen Zahlen. Die Entdeckung irrationaler Zahlen durch die Pythagoreer provozierte die erste Krise in der Mathematik, doch auch sie wurden schließlich als Erweiterung akzeptiert. Bei den irrationalen Zahlen entdeckte man, dass sich bestimmte Zahlen als reelle Lösungen eines Polynoms (z.B. $\sqrt{2}$, $\sqrt[5]{17}$, $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, etc.) auffassen lassen. Man nennt sie, bei ganzzahligen Koeffizienten, algebraische Zahlen. Für andere Zahlen gilt das nicht (z.B. π , e). Man nennt sie transzendente Zahlen.

Erweiterungen des Zahlbereichs hatten immer zwei wesentliche Anforderungen:³¹

1) Einbettungsprinzip

Die bisherigen Zahlen sollten in die Erweiterung eingebettet sein. Die neu definierten Zahlen sind also eine Obermenge, die sich strukturell genauso verhält, wie die alten Zahlen.

2) Permanenzprinzip

Die Rechenregeln sollen sich nicht ändern. Die Erweiterung soll die bisherigen Rechenregeln erhalten.

Auch hier sind die von der Algebra entwickelten Axiome entscheidend, die unter den Begriff „algebraischer Körper“ fallen.

Nun hat die einfache Gleichung $x^2 + 1 = 0$ in den reellen Zahlen keine Lösung und das gilt auch für anspruchsvollere Polynome. Die Lösung $x = \pm\sqrt{-1}$, per Definition genannt i oder imaginäre Einheit, muss außerhalb des reellen Zahlenstrahls liegen.

Schon alleine das impliziert, dass das Einbettungsprinzip nicht wörtlich zu nehmen ist. Eine imaginäre Zahl $b \cdot i$ mit $b \in \mathbb{R}$ ist definiert als $(b \cdot i)^2 := -b^2$. Die imaginären Zahlen betten die reellen Zahlen also nicht ein, sondern stehen gleichberechtigt daneben. Nur die Null haben sie gemeinsam, denn $i \cdot 0 = 0$. Die reellen Zahlen enthalten die algebraischen und rationalen Zahlen und diese wieder die ganzen Zahlen und schließlich die natürlichen Zahlen. Aber die imaginären Zahlen enthalten nicht die reellen Zahlen. Erst wenn man beide, reelle und imaginäre Zahlbereiche zu den komplexen Zahlen \mathbb{C} „geschickt“ zusammenfasst, also zu einer Zahlenmenge mit zwei Verknüpfungen, genannt Addition (+) und Multiplikation (\cdot), die die Axiome und algebraischen Eigenschaften eines Körpers erfüllen, dann kann man von einer Erweiterung des Zahlbereichs sprechen, der das Einbettungsprinzip und das Permanenzprinzip einhält.

Es zeigt sich, dass die „Kombination“ von reellen Zahlen und imaginären Zahlen zu \mathbb{C} einen Vektorraum in \mathbb{R}^2 bildet, also Tupel mit einer reellen Komponente (Realteil) und einer imaginären Komponente (genannt Imaginärteil). Das garantiert, dass \mathbb{C} sowohl \mathbb{R} als auch sozusagen „I“ als echte Teilmengen

³¹ Die folgenden Abschnitte bis Eulersche Identität orientieren sich stark an Rinkens, Hans-Dieter, Krüger, Katja; Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020

enthält. Geometrisch veranschaulicht, stehen imaginäre Zahlen senkrecht, also orthogonal zu reellen Zahlen.

Die „Kombination“ nennt man die komplexe Ebene oder Gaußsche Zahlenebene.³² Die komplexen Zahlen entsprechen Punkten in der komplexen Ebene. Die reellen Zahlen sind eine Untermenge und ebenso der imaginäre Zahlenstrahl, auch wenn man sich diese Tatsache erst bewusstmachen muss. Die Einführung der komplexen Zahlen war nicht nur ein Segen für die Mathematik, sondern es ergeben sich eine Fülle von Anwendungsmöglichkeiten in der Physik und darüber hinaus.³³

Die Rechenregeln sind nicht ganz so intuitiv, besonders bei der Multiplikation und Division.

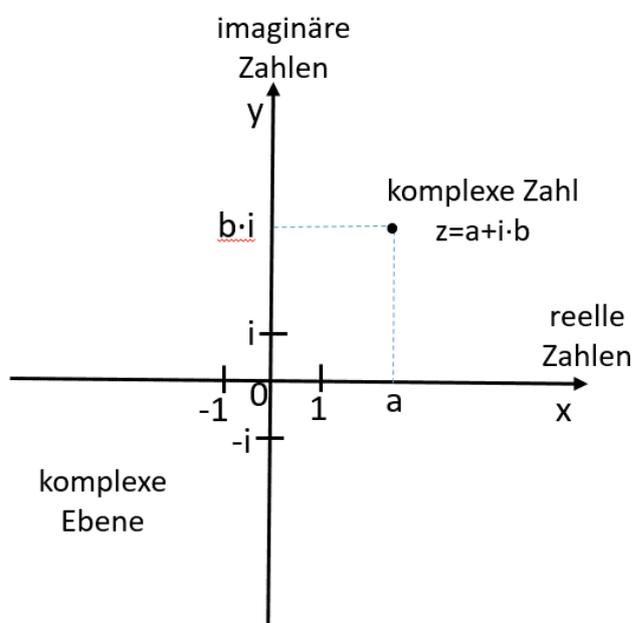


Abb. 10: Komplexe Zahlenebene

Dabei ist die Addition definiert als

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix},$$

$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist das neutrale Element der Addition und

$$\begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} \text{ das Inverse zu } \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix},$$

$$\text{denn } \begin{pmatrix} -x_1 \\ -y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 x_2 - y_1 y_2 \\ x_1 y_2 + x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Ebenso kann man das Assoziativgesetz zeigen und mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ das neutrale Element der

Multiplikation identifizieren, denn

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 \cdot 1 - y_1 \cdot 0 \\ x_1 \cdot 0 + 1 \cdot y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Auf diesen Verknüpfungen kann man die bekannten Körperaxiome bzw. Eigenschaften für den Körper der komplexen Zahlen $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ herleiten.

³² Bernhard Riemann hat mit der Riemannschen Zahlenkugel eine Abbildung der komplexen Zahlenebene vereinigt mit dem Punkt Unendlich auf die Oberfläche einer Kugel eingeführt; $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Unendlich bildet dabei den „Nordpol“, 0 den „Südpol“. Der so gebildete topologische Raum stellt eine Kompaktifizierung der komplexen Ebene dar.

³³ Es zeigt sich, dass wichtige Naturgesetze ohne die Verwendung von komplexen Zahlen extrem umständlich, wenn überhaupt möglich, formuliert werden müssten.

Die Tupel, die hier zur Verdeutlichung, dass es sich um einen Vektorraum handelt, vektoriell geschrieben wurden, schreibt man bekanntlich als

$$c = a + b \cdot i \text{ wobei } a, b \in \mathbb{R} \text{ und } i = \sqrt{-1}$$

Eulersche Zahl e

Mit Ausnahme der Kreiszahl Pi (π) gibt es kaum eine andere, gleich wichtige Zahl in der Mathematik und allen Anwendungsgebieten, wie die nach dem herausragenden Schweizer Mathematiker Leonhard Euler benannte Zahl e. Sie hat den Wert

$$e=2,718\ 281\ 828\ 459\ 045\ 235\ 360\ 287\ 471\ 352\ \dots$$

Euler selbst fand für e die Reihe

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Oder als Folge

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Dies kann man als bis ins Unendliche fortgesetzte Zinseszinsrechnung verstehen.

Im Vorgriff auf das Kapitel „Logarithmen“ soll hier festgehalten werden:

Die Bedeutung von e liegt einerseits in ihrer Rolle als Basis des natürlichen Logarithmus $\ln := \log_e$. Zu jeder positiven reellen Zahl y gibt es eine reelle Zahl x, so dass $e^x = y$. Man schreibt $x = \ln y$. Aus praktischen Gründen war lange Zeit vor allem der natürliche Logarithmus von mathematischem Interesse. Heute spielt eher die besondere, natürliche Exponentialfunktion e^x , bei der die Ableitung mit dem Funktionswert übereinstimmt, die führende Rolle. Für beide Seiten, Funktion und Umkehrfunktion, gilt, dass Differentiale und dann auch Integrale einfacher in ihrer Handhabung werden. e wird deshalb seltener als Zahl gebraucht, sondern meist in ihrer Bedeutung als $\ln(x)$ oder als e-Funktion $f(x) = e^x$, für die gilt $f'(x) = e^x$. Weil diese Differentialgleichung gilt, lässt sich folgern

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

d.h. die e-Funktion ist eine Folge von Funktionen. Außerdem gilt

$$\ln(y_1 \cdot y_2) = \ln y_1 + \ln y_2$$

Wachstums- und Zerfallsprozesse sind sehr häufig mit der e-Funktion verknüpft, so Bakterienwachstum oder radioaktiver Zerfall.

Zurück zur Eulerschen Zahl und den komplexen Zahlen:

Für jeden Winkel φ gilt die Darstellung einer komplexen Zahl im Einheitskreis

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \cdot \sin\varphi$$

Damit ergibt sich für $\varphi = \pi$:

$$e^{i\pi} = -1 \text{ oder } e^{i\pi} + 1 = 0$$

und äquivalent

$$e^{2\pi i} = 1$$

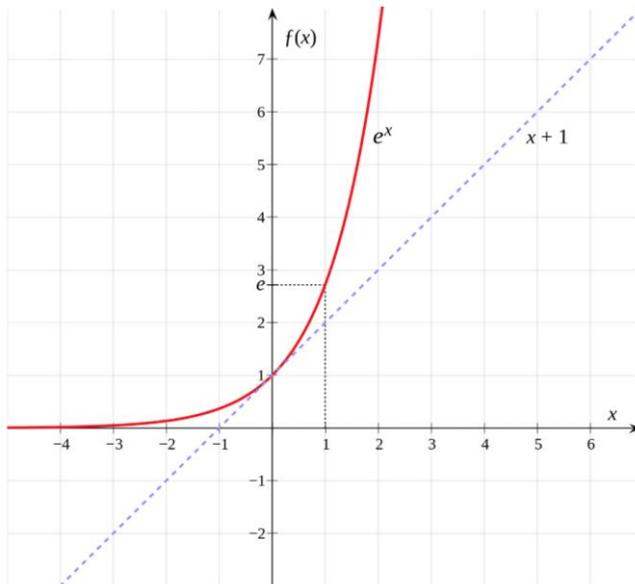


Abb. 11: Exponentialfunktion

Weil in vielen Fällen Berechnungen in dieser Darstellung der komplexen Zahlen einfacher werden, wird sie oft angewendet.³⁴

Wie kann man das einsehen? Man greift dazu auf die Annäherung der betreffenden Funktionen durch Taylorreihen zurück. Über eine unendliche Reihe werden sie dadurch exakt in jedem Punkt bestimmt.

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n+1)}}{(2n+1)!}$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{(2n)}}{(2n)!}$$

$$e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \frac{(ix)^5}{5!} + \frac{(ix)^6}{6!} + \frac{(ix)^7}{7!} + \frac{(ix)^8}{8!} + \frac{(ix)^9}{9!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + ix + i^2 \frac{x^2}{2!} + i^3 \frac{x^3}{3!} + i^4 \frac{x^4}{4!} + i^5 \frac{x^5}{5!} + i^6 \frac{x^6}{6!} + i^7 \frac{x^7}{7!} + i^8 \frac{x^8}{8!} + i^9 \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i \frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i \frac{x^7}{7!} + \frac{x^8}{8!} + i \frac{x^9}{9!} + \dots$$

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots \right) + i \cdot \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots \right)$$

³⁴ Grafik: <https://de.wikipedia.org/wiki/Exponentialfunktion>

$$e^{ix} = \cos x + i \cdot \sin x$$

Die Eulersche Formel stellt also eine unmittelbare Beziehung zwischen der Exponentialfunktion und trigonometrischen Funktionen her.

Betrachte man beide Seiten getrennt:

$$e^{i(a+b)} = e^{ia+ib} = e^{ia} e^{ib}$$
$$e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \cdot \sin(a+b)$$

und

$$e^{ia} e^{ib} = [\cos(a) + i \cdot \sin(a)] \cdot [\cos(b) + i \cdot \sin(b)]$$

Ausmultipliziert ergibt

$$e^{ia} e^{ib} = [\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)] + i[\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)]$$
$$\cos(a+b) + i \cdot \sin(a+b)$$
$$= [\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)] + i[\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)]$$

Daraus folgt

$$\cos(a+b) = [\cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)]$$
$$\sin(a+b) = [\sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)]$$

Analog folgen durch Ersetzen von b durch $-b$ die Formeln für die Winkeldifferenz

$$\cos(a-b) = [\cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)]$$
$$\sin(a-b) = [\sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)]$$

Während die Multiplikation von komplexen Zahlen über kartesische Koordinaten eher unhandlich ist, gelingt die Multiplikation über Polarkoordinaten wesentlich einfacher:

$$z_1 = r_1 \cdot (\cos \varphi_1 + i \cdot \sin \varphi_1) \text{ und } z_2 = r_2 \cdot (\cos \varphi_2 + i \cdot \sin \varphi_2)$$
$$z_1 \cdot z_2 =$$
$$r_1 \cdot r_2 \cdot ((\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \cdot \sin \varphi_2) + i \cdot (\sin \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cdot \cos \varphi_1))$$

Die Additionsformeln machen daraus einen prägnanten Ausdruck:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$$

Man multipliziert die Beträge und addiert die Winkel. Es ist eine Drehstreckung.

Von besonderer Bedeutung ist der Fall $r_i = 1$, d.h. die komplexen Zahlen liegen auf dem Einheitskreis – sie haben den Abstand 1 vom Ursprung.

$$z = a + i \cdot b \text{ mit } a^2 + b^2 = 1 \text{ bzw. der Form } z = \cos \varphi + i \cdot \sin \varphi$$

Auch das Potenzieren geht einfacher in Polarkoordinaten:

$$z^n = r^n \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^n = r^n \cdot (\cos n \cdot \varphi + i \cdot \sin n \cdot \varphi)$$

Man potenziert den Betrag und vervielfacht den Winkel.

Beim Wurzelziehen herrschen ebenso wie bei den reellen Zahlen besondere Regeln, denn man muss das Vorzeichen beachten und es gibt mehr Lösungen. Die Lösungen der Gleichung $z^n = a$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{C}$, heißen n -te Wurzeln aus a . Anders gefragt: Man sucht die komplexen Zahlen z , für die $z^n = a$ ist.

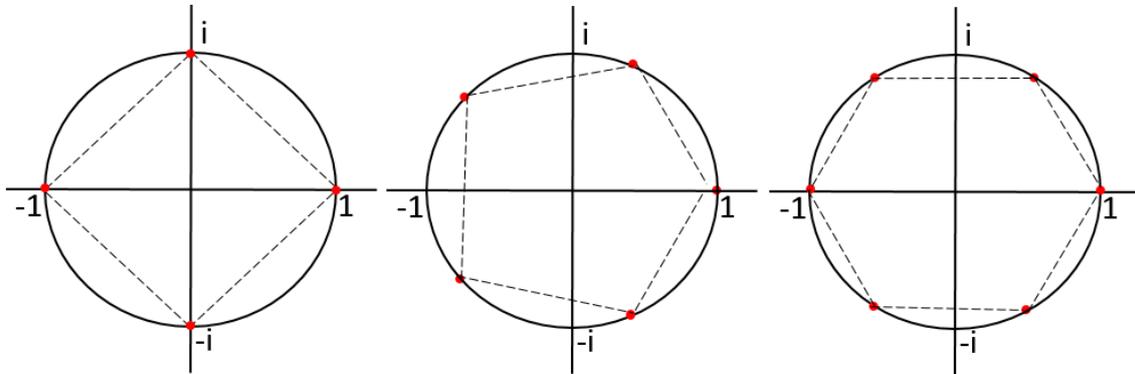


Abb. 12: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus 1.

Man sollte sich zunächst die Verhältnisse bei scheinbar einfachen Fällen anschauen.³⁵ Z.B. bei den Fällen $z^n = 1, z^n = -1, z^n = i, z^n = -i$. Da der Betrag jeweils 1 ist, liegen die Lösungen auf dem Einheitskreis.

Auch aus i kann man n -te Wurzeln ziehen.

Man erhält sie, in dem man die n -ten Einheitswurzeln um $\frac{\pi}{2n}$ dreht.

Zusammenfassend kann man konstatieren: Jede komplexe Zahl z hat eine

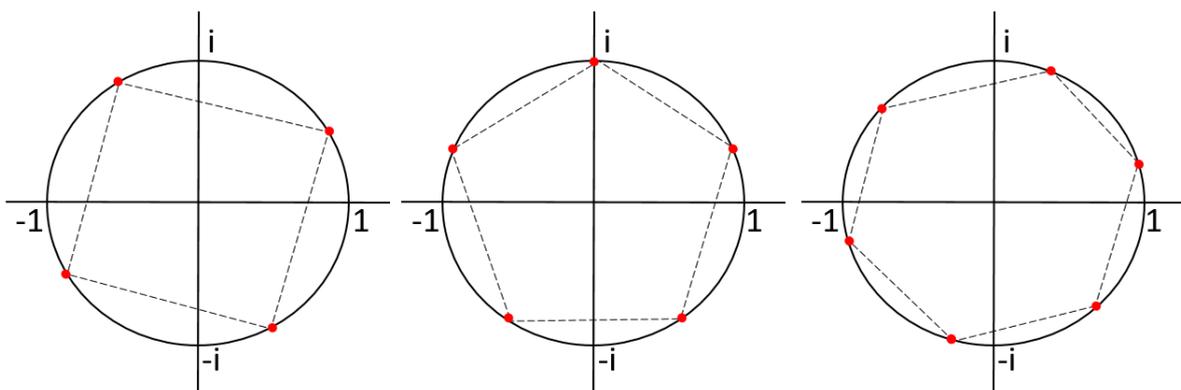


Abb. 13: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus i .

eindeutige n -te Potenz.

³⁵ Grafiken nach Rinkens, Krüger, ebenda, S. 92, 94, 95

Wurzelziehen ist dagegen mehrdeutig. Für die Lösungen der Gleichung $z^n = a$

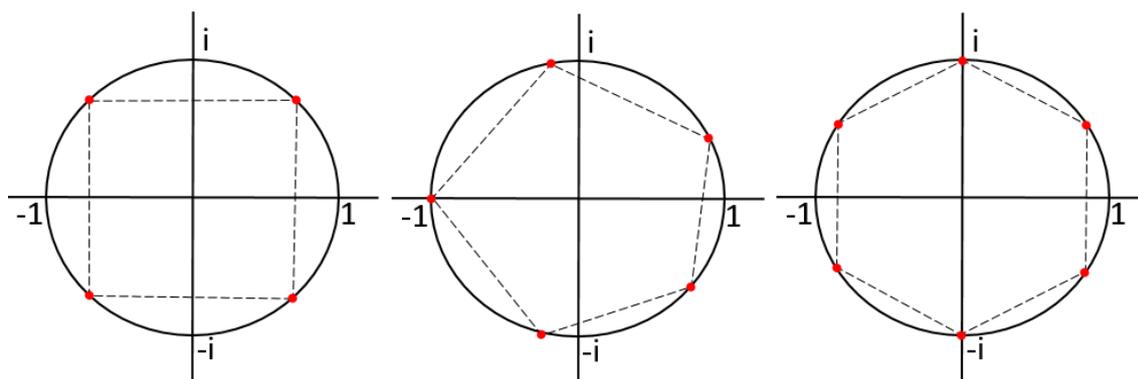


Abb. 14: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus -1.

gibt es (außer für den Fall $a=0$) n verschiedene Lösungen.

Eulersche Identität

Mit den vorigen Kapiteln steht das „Handwerkszeug“ und das Verständnis zur Verfügung, um eine der schönsten Beziehungen in der Mathematik würdigen zu können. Die Eulersche Identität lässt sich aus einer Taylor-Reihe mit Entwicklungsstelle $x_0=0$ der Funktionen e^y , $\cos(y)$ und $\sin(y)$ mit $y \in \mathbb{R}$ herleiten:

$$\begin{aligned} e^{iy} &= 1 + i \cdot y + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \dots \\ &= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots\right) + i \cdot \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \dots\right) \\ &= \cos(y) + i \cdot \sin(y), \quad \text{mit } i^2 = -1 \end{aligned}$$

Für $y = \pi$ ergibt sich die Eulersche Identität oder Eulersche Formel

$$e^{i\pi} = -1 \text{ oder } e^{i\pi} + 1 = 0$$

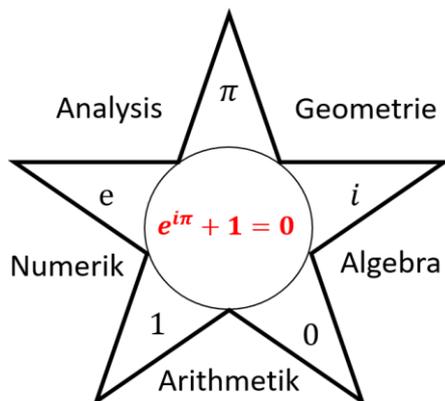


Abb. 15 Die Eulersche Identität verbindet fünf wesentliche Bereiche der Mathematik

Sie ist äquivalent zu

$$e^{2\pi i} = 1$$

Sie verbindet damit fünf der wichtigsten mathematischen Zahlen miteinander:

Die Eulersche Zahl e , als wichtige Konstante in der Mathematik und den mathematisch beschreibbaren Wissenschaften, die „Kreiszahl“ π , die weit über die Geometrie hinaus erhebliche Bedeutung hat, die imaginäre Einheit $i = \sqrt{-1}$ als „Schlüssel“ zu den komplexen Zahlen, sowie die fundamental wichtigen Zahlen 1 und 0. Die

Beziehung wird gerne als „Die schönste Gleichung aller Zeiten“³⁶ bezeichnet.^{37,38}

Dieser Zusammenhang erklärt sich durch das tiefere Verständnis für imaginäre bzw. komplexe Zahlen.

Reelle Quadratwurzeln, insbesondere $\sqrt{2}$

Was ist so spannend an $\sqrt{2}$? Sie ist der Schlüssel zu einer ganzen Vielfalt an

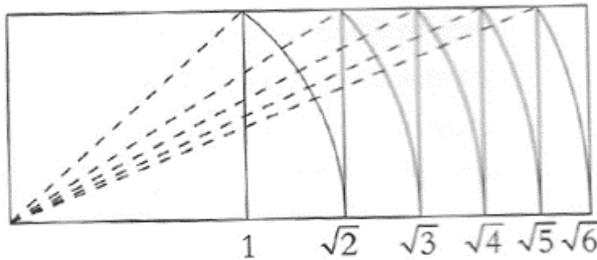


Abb. 16: Fortgesetzte Konstruktion von Wurzeln

theoretischen Erkenntnissen und praktischen Anwendungen, mit denen wir tagtäglich umgehen. Für die Griechen war nur das eine „richtige“ Zahl, was man konstruieren konnte. Zunächst ist die Frage zu beantworten, wie man Wurzeln geometrisch darstellen kann. $\sqrt{2}$ ist die Diagonale im Einheitsquadrat. Basis weiterer Wurzeln ist

weiterhin der Satz des Pythagoras. Man verlängert eine Kathete und schlägt einen Kreisbogen mit Radius $\sqrt{2}$. Das entstehende rechtwinklige Dreieck hat die Seiten 1 und $\sqrt{2}$ und wegen $1^2 + \sqrt{2}^2 = \sqrt{3}^2$ die Hypotenuse $\sqrt{3}$. So lassen sich weitere Quadratwurzeln konstruieren.

Eine etwas übersichtlichere Darstellung ist die Spiralförmige.³⁹

Behauptung: $\sqrt{2}$ ist irrational.

Annahme: Wäre $\sqrt{2}$ rational, also $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, Bruch gekürzt, $m, n \in \mathbb{N}$

Dann ist $2 = \frac{m^2}{n^2}$ also $2n^2 = m^2$

D.h. 2 teilt m^2 , also ist m^2 gerade

Daraus folgt m ist gerade, denn das Quadrat einer geraden Zahl ist gerade und einer ungeraden Zahl ungerade.

Somit ist m^2 sogar durch 4 teilbar und m hat die Form $m=2k$, $k \in \mathbb{N}$

D.h. $m^2=4k^2$

$2n^2=4k^2$, also $n^2=2k^2$, d.h. n^2 ist gerade und somit n ist gerade

Insgesamt wurde gezeigt: m ist gerade und n ist gerade.

³⁶ Zitat Keith J. Devlin (2004), Devlin schreibt eine monatliche Kolumne, gesponsert von der Mathematical Association of America: <https://web.stanford.edu/~kdevlin/>.

³⁷ Hans-Dieter Rinkens, Katja Krüger, Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer-Spektrum, Wiesbaden 2020

³⁸ Grafik nach ebenda, S. IX

³⁹ Grafiken nach Alsina, Satz des Pythagoras, ebenda, S. 76

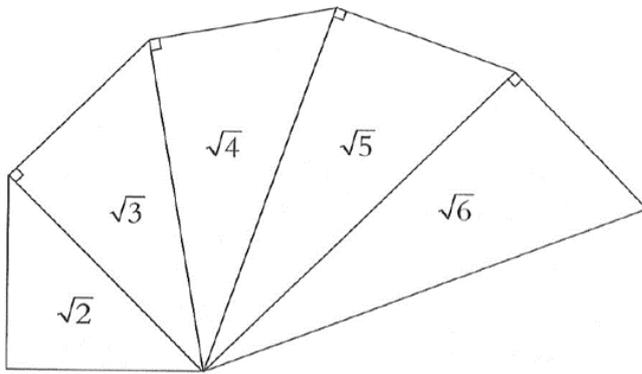


Abb. 17: Spiralförmige Darstellung

Daraus folgt ein Widerspruch, denn $\frac{m}{n}$ wurde als gekürzt angenommen.

Die Annahme ist falsch, also $\sqrt{2}$ ist irrational.

Der Beweis lässt sich auf jede Quadratwurzel von Nichtquadratzahlen k verallgemeinern: \sqrt{k} ist irrational, falls $k \neq n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Ein Kopierer mit

Vergrößerungsfunktion hat eine Taste mit der Vergrößerung 1,41. Dies sind die ersten beiden Nachkommastellen des Wertes von $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$

Dies ist abgestimmt auf die DIN-A-Formate.

A_0 soll definitionsgemäß 1 Quadratmeter groß sein. Die kleinere Seite sei a_0 , die größere ist somit $a_0 \cdot \sqrt{2}$. $a_0 \cdot a_0 \cdot \sqrt{2} = 1 \text{ m}^2$.

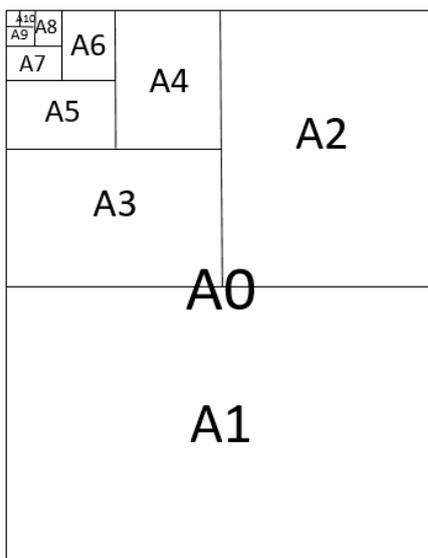


Abb. 18: DIN-A-Formate

Daraus folgt $a_0 = \text{ca. } 84 \text{ cm}$. Außerdem: Die Summe aller DIN-Formate ist etwas weniger als 2 m^2 . Dabei ist in der Abbildung die linke obere Ecke nicht besetzt, da die DIN-A-Formate nur A0, A1, A2, A3, A4, A5, A6, A7, A8, A9 und A10 abdecken.

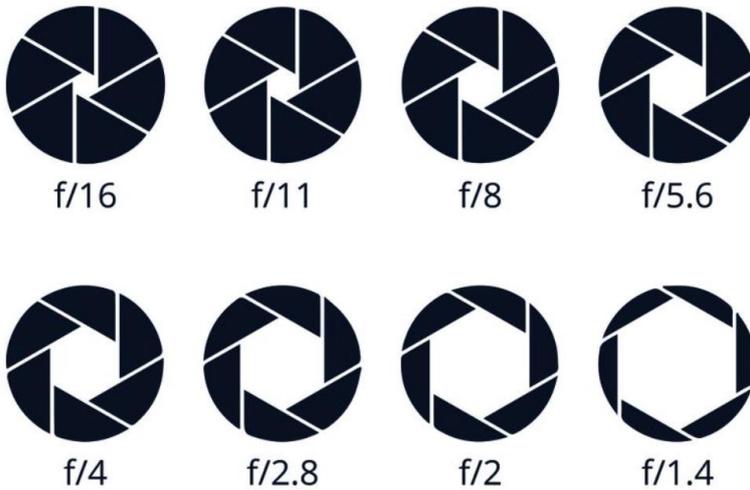
Ein Kreis mit Radius R hat eine Fläche von πR^2 . Will man die Fläche auf $2 \pi R^2$ verdoppeln, benötigt einen Radius $R_1 = \sqrt{2}R$.

Entsprechend muss man durch $\sqrt{2}$ teilen, wenn man die Fläche halbieren will. In der Fotografie bedeutet eine größere Blende eine Halbierung der Objektivöffnung.⁴⁰ Das wird durch fortgesetzte Potenzen von Wurzel 2 erreicht:

$$\sqrt{2}, (\sqrt{2})^2, (\sqrt{2})^3, (\sqrt{2})^4, (\sqrt{2})^5, (\sqrt{2})^6, (\sqrt{2})^7, (\sqrt{2})^8, \dots$$

⁴⁰ Grafik: <https://www.robertyfessling.de/tutorial-kamerablende-einstellen> (Mit freundlicher Genehmigung und technischer Unterstützung)

Berechnet man die Potenzen und rundet auf eine Dezimalstelle so ergeben sich



folg. Werte, (die der Einfachheit halber nicht reziprok angegeben werden, d.h. große Blende bedeutet kleine Öffnung des Objektivs und damit eine größere Schärfentiefe). Diese Blendenzahlen finden sich an jedem Objektiv einer Spiegelreflex-camera (single-lens reflex, SLR):

Abb. 19: $\sqrt{2}$ -reduzierte Blendenöffnungen
Mit freundlicher Genehmigung Robert Feßling

1,4 2 2,8 4 5,6 8 11 16 22 32

Platonische Körper

Platon (ca. 428-ca. 348 v.Chr.) beschrieb in seinem etwa 350 v.Chr. entstandenen Werk *Timaios* die fünf später nach ihm benannten platonischen Körper Tetraeder, Würfel oder Hexaeder, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Es sind 4-Flächner, 6-Flächner, 8-Flächner, 12-Flächner und 20-Flächner. Tetraeder, Oktaeder und Ikosaeder haben gleichseitige Dreiecke als

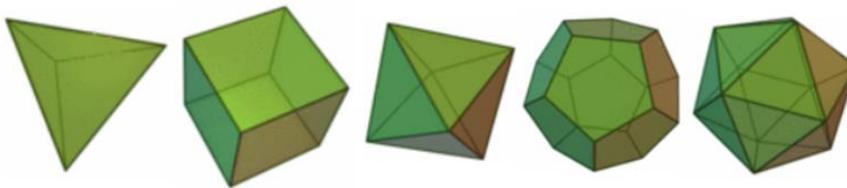


Abb. 20: Die fünf platonischen Körper.

Flächen, der Würfel Quadrate und der Dodekaeder ein regelmäßiges Fünfeck. Schon Platon gab ihnen eine allegorische

Bedeutung mit der Assoziation Tetraeder entspricht Feuer, Oktaeder für Luft, Ikosaeder für Wasser und der Würfel für die Erde. Die Himmelsphären repräsentierte der Dodekaeder. Johannes Kepler (1571-1630) versuchte die Planetenbahnen mit den platonischen Körpern zu beschreiben. Obwohl falsch, war es immerhin ein erster Versuch der wissenschaftlichen Beschreibung.

Die Griechen und Platon konnten die Körper konstruieren und zeigen, dass es nur diese Fünf geben kann, die aus regelmäßigen Flächen aufgebaut sind, die von gleichlangen Kanten gebildet werden. Die Flächen sind also regelmäßige p-Ecke, $p=3, 4, 5$.

Die mathematischen Eigenschaften sind ebenso regelmäßig.

p sei die Anzahl der Ecken (E) der Seitenflächen.

q sei die Anzahl der Flächen (F) / Kanten (K) des platonischen Körpers, die an einer Ecke zusammentreffen.

Der Eulersche Polyedersatz lautet

$$E - K + F = 2$$

Für die platonischen Körper gilt sogar: $q \cdot E = 2 \cdot K = p \cdot F$

Dies ergibt 3 Gleichungen mit ausschließlich ganzzahligen Koeffizienten und den Lösungen für Ecken (E), Kanten(K) und Flächen (F)

$$E = \frac{4p}{4 - (p - 2) \cdot (q - 2)}$$

$$K = \frac{2pq}{4 - (p - 2) \cdot (q - 2)}$$

$$F = \frac{4q}{4 - (p - 2) \cdot (q - 2)}$$

Ebenso werden andere Beziehungen nur durch p und q sowie trigonometrische Daten bestimmt: Z.B. Innenwinkel der Seitenflächen, Summe der Innenwinkel, Oberfläche, Umkugel- und Inkugelradius u.v.m.⁴¹

Das Pascalsche Dreieck und die binomischen Formeln

Die binomischen Gleichungen sind wichtige Beziehungen in der Arithmetik. Kein Schüler kommt durch die Basisalgebra ohne die Formeln wenigstens für die 2. Potenz auswendig und anwenden zu können. Ein besonderer Reiz liegt jedoch in der schönen symmetrischen Struktur, die sich bei den Koeffizienten bei aufsteigenden Potenzen ergeben. Dafür verwendet man im allgemeinen nicht diesen Begriff, denn Binom steht für zwei (bi) Namen (nomen).

Für die Potenz 2 hat man die gängige Formel

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \text{ („Plusformel“)}$$

Ist b negativ so gilt

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \text{ („Minusformel“)}$$

Nützlich ist die 3. Binomische Formel zum Faktorisieren

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \text{ („Plus-minus-Formel“)}$$

⁴¹ Mehr in https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper

	1																		$(a + b)^0$		
		1	1																$(a + b)^1$		
			1	2	1														$(a + b)^2$		
				1	3	3	1												$(a + b)^3$		
					1	4	6	4	1										$(a + b)^4$		
						1	5	10	10	5	1								$(a + b)^5$		
							1	6	15	20	15	6	1						$(a + b)^6$		
								1	7	21	35	35	21	7	1				$(a + b)^7$		
									1	8	28	56	70	56	28	8	1		$(a + b)^8$		
										1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	$(a + b)^9$	
											1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

Abb. 21: Das Pascalsche Dreieck bis n=9

Es geht allgemein um die Beziehung $(a + b)^n$ wobei n eine natürliche Zahl plus der Null sein soll. b kann auch negativ sein. Das Pascalsche Dreieck zeigt die Koeffizienten der einzelnen Potenzen auf eine übersichtliche Weise auf. In einer Zeile tiefer ist der Koeffizient die Summe der beiden Zahlen in der Reihe über ihm.

Später wurde die Beziehung auf alle Zahlen erweitert. Es finden sich eine große Anzahl an Zahlenfolgen und Beziehungen wieder. Die erste Diagonale (von rechts oben nach links unten oder spiegelbildlich) enthält nur Einsen entsprechend der Potenz von a^n bzw. b^n . Die zweite Diagonale bildet die Folge der natürlichen Zahlen. In der dritten Diagonale finden sich die, bei den Pythagoreern verehrten, Dreieckszahlen, wie $3=1+2$; $6=1+2+3$; $10=1+2+3+4$; usw. und in der vierten die Tetraederzahlen. In jeder Diagonale steht die Folge der Partialsummen zu der Folge, die in der Diagonale darübersteht. Umgekehrt ist jede Diagonalenfolge die Differenzenfolge zu der in der Diagonale unterhalb stehenden Folge.

Auch die Fibonacci-Zahlen ergeben sich aus Beziehungen zwischen Partialsummen.

Die Binomialkoeffizienten im Pascalschen Dreieck werden durch eine Funktion der Form $\binom{n}{k}$, gesprochen n über k, ausgedrückt. Es sind die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge. Für natürliche Zahlen n und k ist dies eine Aufgabe der Kombinatorik. Es kann aber auch auf komplexe n erweitert werden.

Beispiel: $\binom{49}{6}$ entspricht den Möglichkeiten einer Ziehung im deutschen Lotto 6 aus 49 (ohne Zusatzzahl).

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \dots \cdot \frac{n-(k-1)}{k} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!} \\ &= \prod_{j=1}^k \frac{n+1-j}{j} \end{aligned}$$

Für natürliche Zahlen inkl. der Null folgt die aus der Kombinatorik bekannte Beziehung. Wobei $k!$ im Fall Null als 1 gesetzt wird.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Der allgemeine binomische Satz lautet nach diesen Vorbemerkungen:

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k\end{aligned}$$

Der Goldene Schnitt und die Fibonacci-Reihe

Der Goldene Schnitt ist eine Zahl, die üblicherweise mit dem griechischen Buchstaben Φ (Phi) bezeichnet wird. Sie markiert die Teilung einer Strecke in zwei Teilstrecken a und b . Die ganze Strecke $(a+b)$ verhält sich zum größeren Teilstück (a , Major) wie das größere zum kleineren Teilstück (b , Minor). $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$. Ihr Wert beträgt $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ oder etwa 1,618... So, also als Verhältnis von Strecken, definiert man diese Zahl Φ heute üblicherweise.

Im klassischen Griechenland dachte man allerdings bevorzugt in der Relation von Flächeninhalten. Die so definierten Brüche in der Gleichung werden einfach

ausmultipliziert. $b \cdot (a+b) = a^2$. Man erhält dadurch die vollkommen äquivalente Euklidische Definition, wonach das Quadrat über dem größeren Teilstück (a^2) die gleiche Fläche hat wie das Rechteck mit den Seitenlängen des kleineren Teilstücks und der ganzen Strecke $b \cdot (a+b)$.

Φ wurde erstmals intensiv durch Euklid untersucht bzw. von ihm der damalige Wissensstand in seinem epochalen Werk, den Elementen, dokumentiert und vor allem systematisiert. Es gibt zahlreiche Beweise für den Goldenen Schnitt.

Auch bis in die heutige Zeit werden

immer wieder neue seriöse Konstruktionen veröffentlicht.⁴²

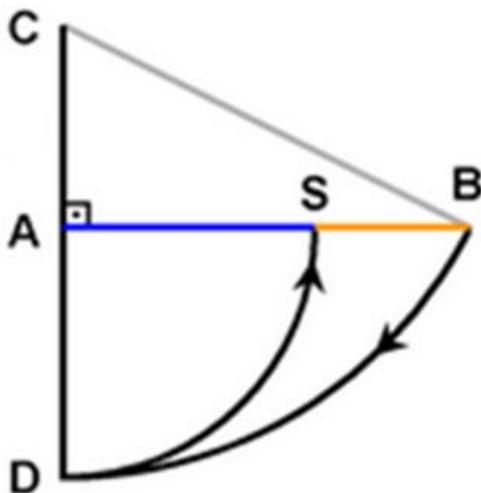


Abb. 22: Konstruktion von Φ .
Der Euklidische Beweis

⁴² Siehe z.B. Beweise des Wiener Künstlers Kurt Hofstetter: Hofstetter, Kurt, A Simple Construction of the Golden Section, Forum Geometricorum 2 (2002), Page 65-66.

Zur Abbildung 22:

Sei $a = \overline{AB}$ und $\overline{AC} = \frac{a}{2}$ sowie $\overline{CD} = \overline{CB}$

Behauptung:

S teilt a im Goldenen Schnitt

Beweis:

$$\overline{BC}^2 = a^2 + \frac{a^2}{4} \rightarrow \overline{BC} = a \frac{\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AD}} = \frac{a}{a \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{a}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\frac{\sqrt{5}-1}{2}(\sqrt{5}+1)} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{4} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \Phi$$

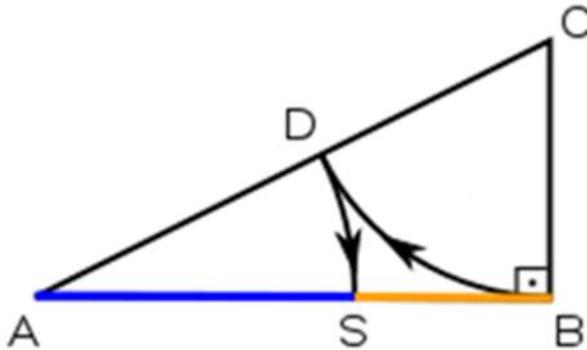


Abb. 23: Die gängigste Konstruktion für Φ

Sei $a = \overline{AB}$ und $\overline{BC} = \frac{a}{2}$, sowie

$\overline{BC} = \overline{CD}$. Beh.: Dann teilt S die Strecke a im Goldenen Schnitt.

Beweis: Wegen Pythagoras ist

$$\overline{AC} = \frac{a}{2}\sqrt{5}.$$

$$\overline{AS} = \overline{AD} = \overline{AC} - \overline{CD} = \overline{AC} - \overline{BC} =$$

$$\frac{a}{2}\sqrt{5} - \frac{a}{2} = \frac{a}{2}(\sqrt{5} - 1) = \frac{a}{\Phi} \rightarrow$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AS}} = \frac{a}{\frac{a}{\Phi}} = \Phi$$

Dabei war neben $\sqrt{2}$ vor allem das Pentagramm die geometrische Untersuchungsform⁴³. Euklid wusste bereits seit den Erkenntnissen von Hippasos von Metapont (spätes 6. Jahrhundert bis frühes 5. Jahrhundert v. Chr.), dass sich $\sqrt{2}$ und Φ nicht als Bruch ausdrücken lässt, also irrational ist. Phi ist zwar nicht als Diagonale in einem Quadrat mit ganzzahliger Seitenlänge darstellbar, hat aber wohl eine Darstellung unter Einbeziehung von Wurzeln, ist also Lösung einer algebraischen Gleichung. Für die Kreiszahl π gilt das nicht. Solche Zahlen analog π nennt man transzendent; Φ ist algebraisch. Durch Quadrieren der Wurzeldarstellung $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$ nach der 1. binomischen Formel findet man leicht, dass $\Phi^2 = \Phi + 1$. Teilt man diese Gleichung durch Φ , so erhält man $\Phi = 1 + 1/\Phi$. Diese Beziehung ist die Basis, um Φ möglichst durch Zahlen anzunähern, mit denen man besser rechnen kann, also fortgesetzte Brüche, die man irgendwann bei gewünschter Genauigkeit abbrechen kann. Diese sogenannten „Kettenbrüche“ dienen also dazu, eine irrationale Zahl so gut wie möglich mit rationalen Zahlen, also Brüchen, zu approximieren, also anzunähern.

Die Kettenbruchdarstellung hat eine bemerkenswerte Interpretation. Φ ist die Zahl, die sich am schlechtesten mit Brüchen approximieren lässt, da nur Einsen

⁴³ Das Pentagramm war Jahrhunderte lang Gegenstand mystischer Interpretationen oder hatte hohe Symbolkraft.

in der Kettenbruchentwicklung auftauchen. Φ wird deshalb gerne als „die irrationalste Zahl“ schlechthin bezeichnet.

$$\Phi = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\Phi}}}}}$$

In anderer Schreibweise werden Kettenbrüche wie folgt ausgedrückt:

$\Phi = [1, 1, 1, 1, 1, \dots]$ bzw. beim Abschnitt „Fibonacci und die Sonnenblume“ wird benötigt:

f_n	f_{n+1}	f_{n+1} / f_n	Abweichung zu Φ in %
1	1	1,0000	-38
1	2	2,0000	+23
2	3	1,5000	-7,3
3	5	1,6667..	+3,0..
5	8	1,6000	-1,1..
8	13	1,6250..	+0,43..
13	21	1,6154..	-0,16..
21	34	1,6190..	+0,06..
34	55	1,617..	-0,02..
55	89	1,61818..	+0,009..
89	144	1,617977..	-0,0034..

Abb. 24: Der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder nähert sich Φ .

$$\Phi^{-1} = 1 / \Phi = [0, 1, 1, 1, 1, \dots]$$

Der Goldene Schnitt hängt eng mit der Fibonacci-Folge zusammen.

Bildungsregel der Fibonacci-Folge
(Rekursionsgleichung)

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}, \text{ mit } f_0=0, f_1=1, f_2=1, n \in \mathbb{N}_0$$

F=0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ...

Es zeigt sich, dass der Quotient zweier aufeinanderfolgender Folgenglieder sich dem Goldenen Schnitt Φ alternierend nähert und zu Φ konvergiert.

Andererseits tauchen auch z.B. bei den Potenzen von Φ Fibonacci-Zahlen auf. Ist $a_n = \Phi^n$ eine Potenz von Φ , so gilt $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$.

Man erkennt auf der rechten Seite der Tabelle in der ausmultiplizierten Potenz von Φ Paare aufeinanderfolgender Fibonacci-Zahlen.

Es gibt eine Fülle von Beziehungen zwischen Fibonacci-Zahlen. Die Beweismethode ist in der Regel die Vollständige Induktion.

Interessant ist noch die Formel, um die n-te Fibonacci-Zahl ohne Kenntnis vorheriger Folgenglieder berechnen zu können.

n	$a_n = \Phi^n$	
5	≈11,090	$\Phi^5 = 5\Phi + 3$
4	≈6,854	$\Phi^4 = 3\Phi + 2$
3	≈4,236..	$\Phi^3 = 2\Phi + 1$
2	≈2,618..	$\Phi^2 = \Phi + 1$
1	≈1,618..	Φ
0	$a_0 = 1,00$	$\Phi^0 = 1$
-1	≈0,618..	$\Phi^{-1} = \Phi - 1$
-2	≈0,382..	$\Phi^{-2} = -\Phi + 2$
-3	≈0,236..	$\Phi^{-3} = 2\Phi - 3$
-4	≈0,146..	$\Phi^{-4} = -3\Phi + 5$
-5	≈0,090..	$\Phi^{-4} = 5\Phi - 8$

Abb. 25: Potenzen von Φ

Aus den Potenzen von Φ bzw. den beiden reellen Lösungen Φ und ψ der charakteristischen Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$ lässt sich folgern:

$$\Phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ und } \psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1 - \Phi = \frac{1}{\Phi}$$

$$f_n = \frac{\Phi^n - \psi^n}{\Phi - \psi} \text{ also}$$

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

Zwei irrationale Zahlen Φ und ψ und ihre Potenzen spielen also so zusammen, dass durchweg ganzzahlige Werte, nämlich die Fibonacci-Zahlen entstehen.

Die Mächtigkeit des Kontinuums

Für die Anhänger des Pythagoras war es ein Schock als irrationale Zahlen entdeckt wurden, Zahlen, die nicht durch Brüche dargestellt, d.h. konstruiert werden konnten. Offenbar lagen die rationalen Zahlen nicht beliebig dicht auf dem Zahlenstrahl. In dieser Epoche verunsicherten die Paradoxa des Zenon die Philosophen und Mathematiker der damaligen antiken Welt. Jeder kennt das Paradoxon vom Wettrennen des schnellsten Läufers der Antike, Achilles, mit der Schildkröte. Alle Paradoxa haben etwas mit der unendlichen Teilbarkeit zu tun. Potentiell unendlich wurde von den Griechen akzeptiert. Man konnte z.B. immer wieder eine neue Primzahl finden ohne die Menge aller Primzahlen unendlich nennen zu müssen. Aktual unendlich war aber im höchsten Maß negativ besetzt und wurde nicht nur vermieden, sondern war regelrecht verpönt und geächtet. Nach und nach fand „Unendlich“ Eingang in die Mathematik. Beispiele sind die erfolgreiche, wenn auch anfangs skeptisch beäugte Infinitesimalrechnung von Newton und Leibniz, aber auch andere Bereiche der Mathematik, wie Folgen und Reihen. Man stellte fest, dass die rationalen Zahlen, obwohl unendlich viele, nur einen kleinen Teil auf dem Zahlenstrahl, dem Kontinuum, ausmachten. Die irrationalen und transzendenten Zahlen sind offenbar „wesentlich häufiger.“ Erst der Mathematiker Georg Cantor beschäftigte sich systematisch mit unendlichen Mengen. Er gilt heute als Schöpfer der Mengenlehre. Schon Galilei Galileo wurde stutzig, als er feststellte, dass die Menge der positiven geraden Zahlen offenbar „genauso groß“ wie die Menge der natürlichen Zahlen ist. Cantor stellte fest, dass beide

Mengen gleich mächtig sind – sie sind abzählbar unendlich. Gleiches gilt überraschend für die rationalen Zahlen und sogar für eine Klasse von irrationalen Zahlen, Lösungen von algebraischen Gleichungen (mit rationalen Koeffizienten). Cantor bezeichnete diese Mächtigkeit mit dem ersten Buchstaben des hebräischen Alphabets, \aleph_0 (gesprochen Aleph Null). Die Mächtigkeit des Kontinuums, nennen wir sie \aleph_1 , (Cantor nennt sie c) war aber keinesfalls abzählbar. Die sogenannte Potenzmenge einer endlichen Menge mit n Elementen hat die Mächtigkeit 2^n , geschrieben $|2^n|$, also 2^n Elemente. Weil die Menge aller Teilmengen der natürlichen Zahlen ebenfalls nachweislich nicht

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1 ?$$

Abb. 26: Kontinuumshypothese

abzählbar ist, schlägt Cantor die Bezeichnung 2^{\aleph_0} vor. Die Mächtigkeit des Kontinuums hat also die gleiche Mächtigkeit, wie die Potenzmenge der natürlichen Zahlen, geschrieben $|\mathbb{R}| = |2^{\mathbb{N}}|$.

Die Frage ist, gibt es eine Mächtigkeit, die zwischen den natürlichen Zahlen und den reellen Zahlen liegt? Oder formal ausgedrückt:

$$\text{Ist } 2^{\aleph_0} = \aleph_1 ?$$

Mit den Standardaxiomen der Mengenlehre ist diese Frage nicht entscheidbar.

Logarithmen

Die Geschichte der Mathematik kennt viele Untersuchungen von Funktionen, deren Eigenschaften oft über Jahrhunderte und viele Generationen an Wissenschaftlern untersucht wurden. Immer stand die Funktion im Vordergrund und nach und nach wurden immer weitere Eigenschaften und Zusammenhänge erforscht.

Bei Logarithmen und ihrer Entwicklungsgeschichte verlief es genau umgekehrt. Es ging darum, komplexe Rechenoperationen zu einfacheren zu transformieren. D.h. die Multiplikation auf die Addition zurückführen oder die Potenzen auf die Multiplikation. Dabei sollte auch das Rechnen einfacher und handlicher werden, denn immer mehr Anwendungen mit Beginn der Neuzeit in Technik und Navigation erforderten Rechnungen durch Anwender und nicht durch spezialisierte Mathematiker.

Als Ausgangspunkt kann man die Funktionalgleichung

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

betrachten. Lösungen dieser Art haben schließlich zu beherrschbaren Funktionen geführt, die als Logarithmen, wie wir sie heute kennen, einen Siegeszug angetreten haben.

Pionier war John Napier (1550-1617) sowie, auch heuristisch motiviert, der Schweizer Uhrmacher und Instrumentenbauer Jost Bürgi. Gerade trigonometrische Berechnungen waren mit den Mitteln der damaligen Zeit komplex und fehleranfällig. Napier stellte zwei verwandte, in Beziehung stehende Zahlenreihen auf. Die eine musste arithmetisch zunehmen und die andere geometrisch abnehmen. Mit der später von Euler entdeckten bzw. exakt definierten Zahl e und ihren Eigenschaften konnte eine Basis gefunden werden. Bürgi hat eine Basis verwendet, die e nahekam, aber rein intuitiv gefunden wurde. Bei den von Napier „konstruierten“ Logarithmen muss man seinen Gedankengang genau analysieren. Im Prinzip ist es eine nach unten skalierte Abwandlung der Logarithmen zur Basis $\frac{1}{e}$. Die Zusammenarbeit von Napier und Henry Briggs (1561-1630) führte schließlich zur Logarithmusfunktion zur Basis 10. Sie beschrieb und verwendete Briggs in seinem Werk *Arithmetica Logarithmica*. Neben dem Vorläufer des natürlichen Logarithmus wurde somit die Umkehrfunktion von $y=10^x$ geboren.⁴⁴

Doch insgesamt war die Vorgehensweise alles andere als stringent. Napiers Logarithmenansatz wurde über die Bewegungen von Punkten definiert und es gab in dieser Phase noch keine Basis. Der Logarithmus von 10 000 000 war ursprünglich Null! Denn er war weder geometrisch noch arithmetisch von Null zu unterscheiden. Die ersten Tafeln waren ausschließlich Rechenhilfen. Dazu waren sie erfunden worden. Hinweise auf logarithmisches Verhalten bei anderen Ergebnissen musste man zuerst suchen, zumal die heutige Schreibweise noch nicht entwickelt worden war.

Irgendwann vor 1636 hatte Pierre de Fermat (1607-1665) gezeigt, dass

$$\int_0^{\alpha} x^n dx = \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} \text{ für } n \neq -1$$

Einen weiteren Schritt in Richtung mathematische Zusammenhänge machte der Jesuitenpater Gregorius a St. Vincento (1584-1667) in seinem 1647 erschienen Werk *Opus Geometricum*. Er verwendete nicht, wie mittlerweile üblich, zur Flächenapproximation unter einer Kurve Rechtecke gleicher Grundlinie, sondern Rechtecke gleicher Fläche mit angepasster Grundlinie.⁴⁵ Sollen die Flächen arithmetisch wachsen, müssen x-Koordinaten der Grundlinien geometrisch wachsen. Das sind die richtigen Ansätze für logarithmisches Verhalten. Auch bei Newton in seinem „waste book“ tauchen Bemerkungen zum Logarithmus auf.

⁴⁴ Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B.; Bezaubernde Beweise, Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg, 2013, S. 254

⁴⁵ Julian Havil, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013, S. 23

Erst Euler sah deutlich weiter, allerdings mit einer aus heutiger Sicht haarsträubenden Terminologie. Er war bekannt durch seinen sehr exzentrischen Umgang mit mathematischer Strenge. Er bezeichnete mit ω eine „unendlich kleine Zahl“ und mit n eine „unendlich große“. l steht für Logarithmus. Da ω nach Voraussetzung unendlich klein ist, ist $l(1+\omega)=\omega$ und deshalb

$y = l(1 + \omega)^n = n\omega$. Es sei $x = (1 + \omega)^n$, dann folgt $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$ und $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$. Das heißt $lx = y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$. Das erinnert stark an das Rechnen mit transfiniten Ordinalzahlen eines Georg Cantor.

Zu jedem x muss es n komplexe Werte von $x^{\frac{1}{n}}$ geben. Da n nach Voraussetzung unendlich groß ist, müssen auch unendlich viele komplexe Werte von lx existieren. Euler nahm damit, ohne die Zusammenhänge ganz zu kennen, die Idee der Riemannschen Flächen und damit einen Kerngedanken der (komplexen) Funktionentheorie vorweg.⁴⁶

Dass solche subtilen Zusammenhänge nicht erkannt wurden, soll das Verdienst von Napier und Briggs nicht schmälern. Rechenverfahren mit Logarithmentafeln habe einige Jahrhunderte Mathematikern, Naturwissenschaftlern und vor allem Ingenieuren oder Seeleuten gute Dienste geleistet. Auch gehen die mathematischen Verdienste von Napier durchaus weiter, z.B. bei der sphärischen Trigonometrie.

Schon bald nach der Entwicklung der Logarithmen wurden praktische Instrumente nach dem logarithmischen Prinzip hergestellt. Anfangs mussten Ergebnisse mit dem Zirkel abgegriffen werden oder es kamen runde Scheiben zum Einsatz. Die ersten geraden Rechenschieber⁴⁷ mit verschiebbarer Zunge kamen Mitte des 17. Jahrhunderts auf. Impulse kamen auch von Isaac Newton. Im 19. Jahrhundert entwickelte James Watt einen Rechenschieber, genannt Soho nach seiner ersten Dampfmaschine, der fast ein Massenprodukt wurde. Zumindest hat die technische Revolution, die auch eng verknüpft ist mit Dampflokomotiven und –maschinen, die Verbreitung enorm gefördert. Der Rechenschieber wurde zu dem wichtigen Konstruktionswerkzeug der Ingenieure und Wissenschaftler und fand Eingang in die Schulen. In vielen technischen Bereichen war er alltägliches Hilfsmittel. In der Seefahrt und sogar in der Luftfahrt wurde er zur Navigation benutzt.

⁴⁶ Julian Havil, GAMMA, ebenda S. 25

⁴⁷ Bildquelle <https://de.wikipedia.org/wiki/Rechenschieber>

Erst mit den ersten Taschenrechnern verschwand nach und nach der Rechenschieber.

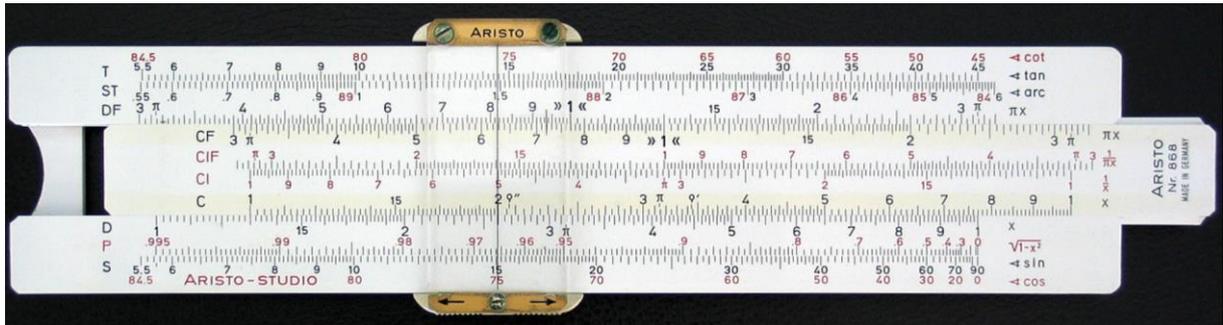


Abb. 27: Der Rechenschieber

Infinitesimalrechnung bei Newton und Leibniz⁴⁸

Johannes Kepler nannte es die göttliche „*Brücke der Kontinuität zwischen dem Gekrümmten und dem Geraden*“. Er wendete Infinitesimale relativ unbekümmert bei der Berechnung eines Weinfasses an. Er sah aber die Verwandtschaft von Ellipsen und Parabeln, in dem der eine Brennpunkt einer Ellipse ins Unendliche wandert, entsteht eine Parabel. Auch Galileo Galilei und Pierre de Fermat lösten sich von der starren Struktur der euklidischen Geometrie, brachen aber nie vollständig mit der Tradition. Für Newton war die Dynamik das Entscheidende, nicht die Geometrie. Natürlich musste er sich den Gepflogenheiten der damaligen Zeit beugen und hat alle Beweise in der „*Principia*“ geometrisch geführt. Er hat dabei die Hinweise auf seine Fluxionsrechnung bis zur Unkenntlichkeit entfernt. Das dürfte auch der Grund gewesen sein, wieso er seine „Fluxionsrechnung“ so spät veröffentlichte. Dynamik bedeutete für Newton, dass er nicht die Kurve im Mittelpunkt sah, sondern den Punkt, der sich auf der Kurve mit entsprechender Geschwindigkeit bewegte. Dies ändert nichts an der Tatsache, dass sowohl Newton als auch Leibniz erkannt hatten, dass Steigungen berechnen und Flächeninhalte unter Kurven zu bestimmen, inverse Methoden darstellen.

In drei Publikationen hat Newton unterschiedliche Wege zur Infinitesimalrechnung veröffentlicht:

- die Momentenmethode
- die Fluxionsmethode und
- die Methode der ersten und letzten Verhältnisse

⁴⁸ Der Abschnitt stammt zum Teil von einem Kapitel des Aufsatzes Kafitz, Willi, UNENDLICH - Versuch das Unbegreifliche zu begreifen: eine mathematisch-historische Reise, <https://jlupub.ub.uni-giessen.de//handle/jlupub/220>, Erstveröffentlichung 2021-08-24

Meist wird aber, vor allem in der populärwissenschaftlichen Sekundärliteratur, nur von der Fluxionsrechnung gesprochen. Zentraler Punkt ist die „Momentangeschwindigkeit“. Sie muss als Quotient zweier infinitesimaler Größen gesehen werden, nämlich der Entfernung und der Zeit. Dies ist bei Betrachtungen zum freien Fall noch einfach. Newtons großartige Leistung ist die Tatsache, dass er das Prinzip auf elliptische Planetenbahnen mit der Sonne in einem Brennpunkt angewendet hat und daraus die Keplerschen Gesetze ableiten konnte. Sie beruhen auf wohl-definierten, bestätigten, astronomischen Beobachtungen, insbesondere von Tycho Brahe. Newton hat damit irdische Physik und Himmelsmechanik in einer Theorie zusammenführen können.

Bei „Momenten“ geht es um unmittelbare, festgelegte Veränderungen eines Parameters in der Bewegung von Körpern, die sich in einer Funktionskurve widerspiegeln, also Erhöhung (englisch increment) oder Verminderung (englisch decrement). Sie entsprechen dem Differential von Leibniz.

Zeitabhängige Variable x, y, \dots nennt Newton „Fluente“ und bestimmt daraus „Fluxionen“, \dot{x}, \dot{y} , die Geschwindigkeiten entsprechen.

Bei der Methode der ersten und letzten Verhältnisse stimmt der Begriff der „letzten Verhältnisse“ mit der Definition von Leibniz für den Differentialquotienten als Grenzwert des Differenzenquotienten überein.

Damit hatte Newton Basisbegriffe der Infinitesimalrechnung entwickelt. Sie ermöglichten die mathematischen Beziehungen zwischen Fluxionen und Fluente zu konstruieren und damit Differentiation umzukehren bzw. eine Differentialgleichung zu integrieren. So ließen sich Maxima und Minima von Kurven oder deren Krümmung errechnen. Das war das mathematische Rüstzeug, um Gravitation und dann weitergehend die Himmelsmechanik mit seiner 1687 veröffentlichten „*Principia*“ (*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*) zu revolutionieren.

Leibniz kommt der modernen Auffassung näher, bleibt aber theoretisch. Sein zentrales Motiv ist seine Monadentheorie. Monade steht wie bei den Vorsokratikern für kleinste Einheiten sowohl im stofflichen als auch nicht-stofflichen Bereich. Schon vor Leibniz sind aber mathematische Überlegungen in die Theorie eingeflossen, die er besonders stark ausgebaut hat. Monade steht bei Leibniz auch für das unendlich Kleine. Für Leibniz ist die Mathematik des unendlich Kleinen eine wesentliche Ergänzung und Erweiterung seiner Philosophie. Für Newton ist die Mathematik unverzichtbar für die Analyse von Kräften und ihren Einfluss auf Bewegung. Er geht pragmatisch vor und hat damit große Erfolge in der Physik. Der Prioritätenstreit zwischen Newton und Leibniz um die Entwicklung der Infinitesimalrechnung wird heute unentschieden gewertet. Aber beide hatten vollkommen unterschiedliche Motivationen.

Das im Prinzip erste Manuskript von Leibniz stammt aus dem Jahr 1676 oder etwas früher. Er wollte es eigentlich in Paris veröffentlichen, musste aber

abreisen und deponierte es bei einem Freund. Dieser verstarb jedoch; das Manuskript wurde zwar an Leibniz nach Hannover geschickt, ist aber unterwegs verloren gegangen. Leibniz hatte aber eine komprimierte Kopie, die er aber nicht ausarbeitete. Diese handschriftliche Kopie wurde erst 1973 editiert und damit fast 300 Jahre später veröffentlicht! Sie war aber dadurch hilfreich, um den Erkenntnisprozess heute nachvollziehen zu können. Leibniz hatte nämlich inzwischen neue Ergebnisse, darunter besonders die neue Notation. Er hielt es nicht für nötig, seine persönlichen Notizen wieder zu reaktivieren und schrieb die Abhandlung neu. Die Grundzüge der Differentialrechnung entwickelte dann Leibniz in seiner 1684 in den Acta Eruditorum erschienenen Arbeit „*Nova methodus pro maximis et minimis*“. Die Integralrechnung entwickelte er in „*geometria recondita et analysis indivisibilium atque infinitorum*“ (1686). In dieser Veröffentlichung verwendete Leibniz erstmals das Integralzeichen als stilisiertes „S“, wie Summe.

Die von Leibniz gewählte Zeichensetzung für das Differential und für das (unbestimmte) Integral erwiesen sich als sehr praktisch. Er verwendete als Bezeichnung für sehr kleine Unterschiede ein "d" (für lat. differentia = Unterschied). Dies ist bis heute erhalten geblieben. Man konnte damit ein „Kalkül“ entwickeln, in dem man aus formalen, regelbasierten Aussagen wieder logische Schlüsse ziehen konnte, ohne diesen Prozess verbalisieren zu müssen. Deshalb hat sich die Schreibweise und die damit verbundene Denkweise in Kontinentaleuropa durchgesetzt und die heutige Infinitesimalrechnung fußt im Wesentlichen auf der Methode bzw. der Terminologie von Leibniz. Dies gilt auch bedingt für die Integration. Das stilisierte „S“ soll daran erinnern, dass die Fläche unter einer Kurve zunächst durch endlich viele Rechtecke angenähert wurde. Durch Grenzwertbildung hin zu unendlich vielen, immer schmalere Rechtecken wird der Fehler immer kleiner. Auf Leibniz geht die Bezeichnung "integrieren" (lat.: integrare = wiederherstellen) zurück. Er wählte diese Bezeichnung, weil von einer Kurve, von der die Tangentensteigung durch Differenzieren ermittelt wurde, mit der Integration die ursprüngliche Kurve wiedererhalten werden kann.

Dies nennt man heute den „Hauptsatz der Analysis“. Leibniz grenzt sich jedoch z.B. von Galileis „*non quanta*“ stark ab. Für ihn war dx wirklich eine unendlich kleine Größe, nämlich kleiner als alles Messbare. Er hat aber die Fallstricke des Unendlichen gesehen, wollte aber bei den Indivisiblen etwas Berechenbares erhalten, das man in Gleichungen behandeln kann. Seine Notation lässt dies zu und hat sich bewährt. Trotzdem musste man von der verwendeten Sprache wegkommen.

Newton hat physikalisch argumentiert. Mit Fluidität und Bewegung musste er nicht von immer kleineren Teilen sprechen. Ein Punkt bewegte sich auf der Kurve; Bewegung und Veränderung der Richtung waren interessant für die

Betrachtung der Kräfte, scheinbare Division durch Null kam somit bei ihm nicht vor. Man kann sagen, dass sowohl Newton als auch Leibniz zeitlebens große Bedenken gegen die Methode hatten. Newton erwähnte sie gegen Ende seines Lebens nicht mehr; Leibniz blieb seinem Wahlspruch treu: „*natura non facit salta*“ (Die Natur macht keine Sprünge). Unendliche Größen seien „*fictiones bene fondatae*“ (gut begründete Fiktionen).

Beide bewiesen bewundernswerte geniale Intuition, aber beiden Methoden fehlt ein solides theoretisches, mathematisches Fundament. Leibniz und seine Anhänger konnten Größen unendlich nahe bei null, (aber eben nicht gleich null), nicht fundiert erklären. Newton und seine Bewunderer behaupteten, unendlich kleine Größen würden nicht verwendet. „Fluxionen“ seien ja nur die Rate der Änderungen von zeitabhängigen Variablen. Hier wurden aber nur winzigste Strecken gegen winzigste zeitliche Momente ausgetauscht. Der mathematische Grundkonflikt bleibt in beiden Fällen und wurde erst durch Cauchy und schließlich durch Weierstraß aufgelöst. Sie erarbeiteten eine Methode, die die Grenzwertbildung klar herausarbeitet und sie von diffusen Begrifflichkeiten befreit hat.

Dies soll die Leistung der beiden Forscher nicht schmälern, sondern lediglich relativieren. Die Infinitesimalrechnung markiert im Prinzip den Beginn der höheren Mathematik und ist über die reine Mathematik hinaus die Basis für zahlreiche Anwendungen in unterschiedlichsten Disziplinen geworden.

Fundamentalsatz der Algebra

Die geschichtliche Anerkennung der komplexen Zahlen ist vor allem dem Fundamentalsatz der Algebra zu verdanken. Nur, indem man der einfachen (quadratischen) Gleichung $x^2+1=0$ eine konsistente Lösung zuweisen konnte, hat man dem Siegeszug der höheren Polynome und weiteren komplexen Funktionen den Weg bereitet. Der Satz besagt, dass jedes Polynom in $z \in \mathbb{C}$

$$g(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_nz^n$$

dessen Grad $n \geq 1$ ist, mindestens eine Nullstelle hat. Wenn also $n \in \mathbb{N}$ und $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ beliebige komplexe Zahlen sind, wobei a_n ungleich Null ist, so gibt es mindestens eine komplexe Zahl ζ , für die gilt

$$g(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + a_2\zeta^2 + \dots + a_n\zeta^n = 0$$

Beweisidee:

$|g(z)|$ hat an jeder Stelle z einen wohlbestimmten, nicht-negativen reellen Wert. Setzt man $z=x+i \cdot y$, so kann man $|g(z)|$ als reelle Funktion $F(x, y)$ der beiden Veränderlichen x, y auffassen, deren Definitionsbereich sich über die ganze xy -Ebene erstreckt. Sie ist überall stetig, denn wird $g(z) = u+i \cdot v$ gesetzt, so sind

$$u = u(x, y) \quad \text{und} \quad v = v(x, y)$$

zwei reelle Polynome in x und y in der ganzen Ebene stetig.

Das gleiche gilt für

$$|g(z)| = F(x, y) = \sqrt{u^2 + v^2}$$

Die reelle Funktion $|g(z)|$ wird nie negativ und hat eine wohlbestimmte untere Grenze $\gamma \geq 0$.

1) γ wird an mind. einer Stelle im Endlichen $\zeta = \xi + i \cdot \eta$ wirklich angenommen und

2) $\gamma = 0$ und somit (ohne Absolutzeichen)

$$g(\zeta) = 0$$

Man zeigt bei 2), dass bei einem Punkt z_0 mit $g(z_0) \neq 0$ also $|g(z_0)| > 0$ es in jeder Umgebung von z_0 Stellen z gibt, so dass

$$|g(z)| < |g(z_0)|$$

$\gamma = |g(\zeta)| > 0$ ist nicht möglich, da es Stellen gäbe, in denen

$$|g(z)| < |g(\zeta)| = \gamma$$

Das kann nicht sein, da γ die untere Schranke aller $|g(z)|$ ist.

Berühmte Vermutungen

Einige wenige Beispiele sind heute keine Vermutungen mehr, sondern wurden bewiesen.

Kann man jede beliebige Landkarte mit maximal vier Farben einfärben, ohne dass zwei Länder mit gleicher Farbe eine gemeinsame Grenze haben?

Ja, vier Farben reichen aus. Eigentlich sollte dieser Beweis Erleichterung unter den Mathematikern hervorrufen. Aber schon früh war klar, dass man so viele Fälle berücksichtigen muss, bei denen nur ein Computer helfen kann. Erste „Beweise“ mussten abgebrochen werden, weil die Anzahl der Fälle zu hoch und die Rechenzeit zu groß wurde. 1996 konnten Neil Robertson, Daniel Sanders, Paul Seymour und Robin Thomas dann die Fälle auf 633 reduzieren und mit einem Computer prüfen lassen. Das war für viele Mathematiker ein Tabubruch. Doch 2005 haben Georges Gonthier und Benjamin Werner einen formalen Beweis des Satzes konstruiert und sich dabei dem Beweisassistenten Coq bedient. Also auch hier musste eine Maschine helfen.

Eine Sternstunde war dagegen der Beweis des Fermatschen Satzes. Es war die Glanzleistung vor allem eines Mannes, von Andrew Wiles (siehe Kapitel Satz des Pythagoras).

Ist die Stapelung von Orangen auf orientalischen Märkten optimal? Die von Johannes Kepler geäußerte Vermutung besagt, dass die dichteste

Kugelpackung im dreidimensionalen euklidischen Raum die kubisch-flächenzentrierte Packung und die hexagonale Packung ist. Beide Packungen nutzen den Raum gleich gut aus. Sie haben die gleiche mittlere Dichte von knapp Dreiviertel (etwas mehr als 74 Prozent).

$$\frac{\pi}{\sqrt{18}} \approx 0,740480 \dots$$

Der erste nennenswerte Versuch wurde 1998 von Thomas Hales bekannt gegeben. Der Computerbeweis war schwer durchschaubar und nicht alle Mathematiker waren überzeugt. Erst durch den 2017 veröffentlichten formalen Beweis von Hales und Mitarbeitern gilt die Keplersche Vermutung als bewiesen.

Zweifellos gibt es unendlich viele Primzahlen. Das hat bereits Euklid bewiesen. Doch gibt es auch unendlich viele Primzahlzwillinge? Man vermutet ja; man kann sogar in diesem Fall beweisen, dass mit Ausnahme des Paares 3 und 5 die dazwischenliegende Zahl durch 6 teilbar ist. Aber die Vermutung, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, ist eine der großen offenen Fragen der Zahlentheorie.

Ist jede gerade Zahl größer 2 die Summe von zwei Primzahlen (wobei die 1 ausnahmsweise zu den Primzahlen gezählt werden darf)? Christian Goldbach äußerte diese Vermutung in einem Brief an Euler vom 7. Juni 1742. Die Goldbachsche Vermutung fasziniert vor allem deshalb, weil sie jeder formulieren kann, aber am Beweis sind zahlreiche Hobbymathematiker und Profis bisher gescheitert.

Sperriger ist die Poincaré-Vermutung aus dem Gebiet der Topologie, Sie besagt, dass ein geometrisches Objekt, solange es kein Loch hat, zu einer Kugel deformiert werden kann. Und das gelte nicht nur im Fall einer zweidimensionalen Oberfläche im dreidimensionalen Raum, sondern auch für eine höherdimensionale Oberfläche in einem Raum, der eine Dimension mehr besitzt. Formal ausgedrückt: Eine kompakte, unberandete, n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist genau dann (n-1)-zusammenhängend, wenn sie homöomorph zur n-Sphäre ist.

Auch der Beweis der Poincaré-Vermutung erzeugte einen Skandal in der Mathematik-Welt. Grigori Perelman, ein junger russischer Mathematiker, der noch bei seiner Mutter lebt, veröffentlichte den Beweis nicht in einem Fachblatt, sondern auf dem Preprint Server arXiv. Nach reiflicher Prüfung wurde ihm die renommierte Fields-Medaille zugesprochen, aber er lehnte sie wie andere Ehrungen zuvor (z.B. EMS-Preis der Europäischen Mathematischen Gesellschaft) ab. Die Poincaré-Vermutung gehörte zu den Millennium-Problemen, für deren Lösung das Clay-Institut eine Million Dollar ausgelobt hat. Auch dieses Preisgeld lehnte Perelman ab, obwohl er kein festes Einkommen hat, weil er seine Stelle am Steklow-Institut in Sankt Petersburg gekündigt hat.

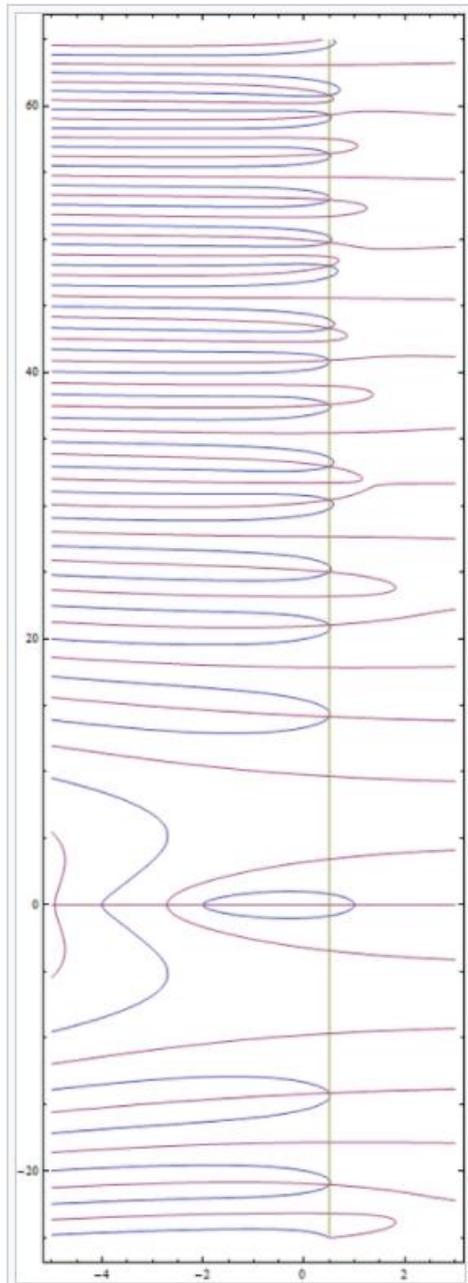


Abb. 28: Verhalten der ζ -Funktion

Die berühmteste Vermutung ist zweifellos die Riemannsche Vermutung. Auch sie ist ohne gewisse mathematische Kenntnisse nicht verständlich und schwer medial zu verdeutlichen. Die Faszination, die von dieser Vermutung ausgeht, ist die wohlbegründete Erwartung, dass der Beweis etwas mehr über die Natur der Primzahlen offenbaren sollte. Dass die Aussage der Vermutung zutreffend sein sollte, gilt mittlerweile als ziemlich sicher. Auch hier hat man mit massiver Rechenleistung kein Gegenbeispiel gefunden.

Die Vermutung bezieht sich auf die Nullstellen der komplexwertigen Zeta-Funktion, die Leonhard Euler erstmals im Rahmen des Basler Problems untersuchte.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{1^s} + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$$

Sie ist für $s=1$ nicht definiert. Dort hat sie eine Polstelle, da die harmonische Reihe nicht konvergiert.

Für den Realteil von s größer 1 wird sie mittels einer Dirichletreihe definiert, kann analytisch fortgesetzt werden und wird holomorph in ganz $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, (früher sagte man regulär, also überall im

Definitionsbereich differenzierbar).

Man betrachte nun eine beliebige Zahl $p > 1$ und die Entwicklung in eine geometrische Reihe

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{p^s}} = 1 + \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} + \frac{1}{p^{3s}} + \frac{1}{p^{4s}} + \dots$$

p soll der Reihe nach die Primzahlen $p_1, p_2, p_3, p_4, \dots$ durchlaufen. Diese unendlich vielen Gleichungen multipliziert man miteinander. Dann ist zu berücksichtigen, dass sich jede Zahl > 1 eindeutig als Produkt von Primzahlpotenzen darstellen lässt. Man erhält:

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-p_1^{-s}} \cdot \frac{1}{1-p_2^{-s}} \cdot \frac{1}{1-p_3^{-s}} \cdot \dots$$

Da es unendlich viele Primzahlen gibt, ist dies tatsächlich eine Zerlegung der Zeta-Funktion im Punkt s in ein unendliches Produkt, das die Primzahlen durchläuft.

Hierin liegt die Bedeutung der Zeta-Funktion für die Zahlentheorie. Von Interesse sind vor allem die Nullstellen. Die sogenannten trivialen Nullstellen liegen bei $-2, -4, -6, -8, \dots$. Interessant sind die nicht-trivialen Nullstellen. Riemann hat vermutet, dass alle nicht-trivialen Nullstellen den

Realteil $\left(\frac{1}{2}\right)$ haben.

Die Grafik 28⁴⁹ zeigt die Riemannsche Zeta-Funktion $\zeta(s)$ in Form von Konturlinien für den Realteil($\zeta(s)$)=0 in der Farbe Blau und den Imaginärteil($\zeta(s)$)=0 in der Farbe Flieder. Der Wertebereich für s zeigt den Realteil von $-5 < \text{Re}(s) < 3$ und den Imaginärteil von $-25 < \text{Im}(s) < 65$.

Interessant ist die "kritische Gerade" bei $\text{Re}(s) = \frac{1}{2}$ in der Farbe Braun.

Die Schnittpunkte der blauen und fliederfarbenen Konturlinien im "kritischen Streifen" $0 < \text{Re}(s) < 1$ sind nicht-triviale Nullstellen der Riemannschen Zeta-Funktion.

Die Imaginärteile der Nullstellen sind für die bisher berechneten Werte aufsteigend und alle spiegelsymmetrisch zur reellen Achse.

Gruppentheorie

Wohl kaum eine mathematische Disziplin hat dermaßen viele Implikationen in Mathematik, Physik und auch der Chemie erzeugt, als die noch nicht sehr alte Gruppentheorie. Es geht um Symmetrien, aber der Begriff ist deutlich anders zu verstehen, als das, was Jahrtausende in Architektur und Kunst mit Symmetrie verbunden wurde.

An einem Beispiel sollen Grundprinzipien der Gruppentheorie aufgezeigt werden.⁵⁰ Die folgende Abbildung zeigt Drehungen und Spiegelungen eines Quadrates, die wieder deckungsgleich zur ursprünglichen Orientierung führen. Als *Symmetrieelemente* hat ein Quadrat vier Spiegelebenen und eine sogenannte vierzählige Drehachse C_4 als Schnittlinie der vier Spiegelebenen.

⁴⁹ Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_nicht-trivialer_Nullstellen_der_Riemannschen_Zetafunktion

⁵⁰ Erstveröffentlichung, Willi Kafitz, Symmetrie, Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 67, Gießen 2017, S. 28 ff, online <http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2017/13150/>

Die theoretisch denkbare Spiegelebene in der „Papierebene“ wird in der Geometrie, im Gegensatz auch zu planaren räumlichen Strukturen, nicht genannt. Die Operationen, die wieder zur vollständigen Deckung führen, stellen die *Symmetrieoperationen* dar. In diesem Fall sind es die möglichen Dreh- und Spiegelungen des Quadrates, wobei die Orientierung gleichbleibt und nur die Ecken vertauscht werden. Um diese „Transformationen“ zu verdeutlichen, wurde nur zur Illustration ein „F“ eingebettet; die Ecken des Ausgangsquadrates wurden von A bis D gegen den Uhrzeigersinn (mathematisch positiv) durchgezählt. Die indizierten d- bzw. σ -Symbole bezeichnen die zu erläuternden Symmetrieoperationen. i wie Identität entspricht einer Drehung um 0 oder 360 Grad oder einfach der Tatsache, nichts an der ursprünglichen Lage des Quadrats verändert zu haben. d_1 dreht um 90 Grad nach links, d_2 um 180 Grad. Das entspricht zweimaliger Anwendung von d_1 . Analog d_3 mit dreifacher Anwendung von d_1 . Man sieht unschwer, dass viermalige Anwendung wieder zu i führt ($d_1^4 = i$, 4 nennt man Ordnung von d_1 , die Ordnung der sog. Gruppe ist 8, also Anzahl der Elemente). Die Spiegelungen an den vier Spiegelebenen werden mit $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ und σ_4 bezeichnet. Das Zeichen \circ bezeichnet die Verknüpfung der Symmetrieoperationen.

Man beachte, dass die d_i und σ_i Symmetrieoperationen, also kongruente Abbildungsvorschriften, sind. Man sollte im Zweifelsfall auf die Eckenvertauschungen schauen, die eine Symmetrieoperation definieren („Permutation“). So vertauscht σ_2 die Ecke rechts oben mit rechts unten sowie

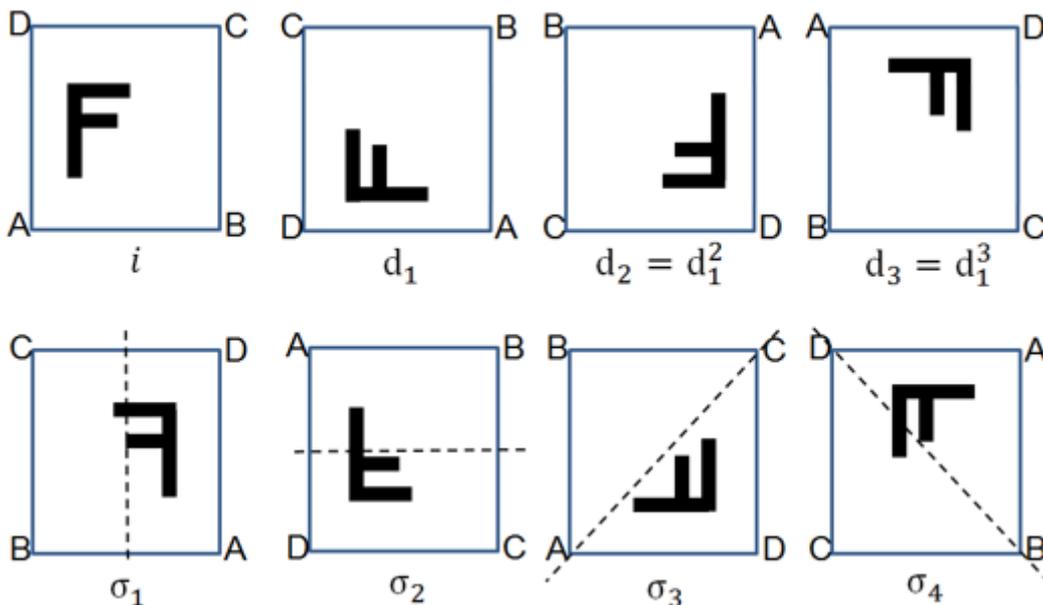


Abb. 29: Symmetrieoperationen bei einem Quadrat.

links oben mit links unten. Nur auf die Ausgangslage angewendet, ist es auch eine Spiegelung des eingebetteten „F“ an der waagrecht verlaufenden Symmetrielebene. Sonst ist es eine Rechenvorschrift bzw.

Handlungsanweisung, wie die Verknüpfung eines beliebigen Elementes x mit σ_2 (also $x \circ \sigma_2$) zu erfolgen hat. Es wird sich zeigen, dass dabei die Reihenfolge wichtig sein kann. In Permutationsdarstellung lauten die Verknüpfungsanweisungen sehr umständlich, aber korrekt formuliert, wie folgt:

Bilde das vorliegende Quadrat in einer der acht Orientierungen gemäß der Eckenvertauschung ab, wie sie den Handlungsanweisungen bzgl. der ursprünglichen Grundstellung zur neuen, deckungsgleichen Konstellation entspricht.

- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{A, B, C, D\}$ entspricht i (Identität) mit Drehung um 0°
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{D, A, B, C\}$ entspricht d_1 mit Drehung um 90° nach links
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{C, D, A, B\}$ entspricht d_2 mit Drehung um 180° nach links
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{B, C, D, A\}$ entspricht d_3 mit Drehung um 270° nach links
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{B, A, D, C\}$ entspricht σ_1 (Spiegelebene senkrecht)
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{D, C, B, A\}$ entspricht σ_2 (Spiegelebene waagrecht)
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{A, D, C, B\}$ entspricht σ_3 (Ebene links unten nach rechts oben)
- $\{A, B, C, D\} \rightarrow \{C, B, A, D\}$ entspricht σ_4 (Ebene rechts unten nach links oben)

Was sich hier bei diesem überschaubaren Beispiel noch als relativ einfach darstellt, ist Teil der mächtigsten Theorie der Mathematik. Die Gruppentheorie wurde ursprünglich entwickelt, um systematisch algebraische Gleichungen lösen zu können⁵¹. Erst später wurden über die Untersuchung von geometrischen Strukturen die Eigenschaften deutlich, die Symmetriebeziehungen betreffen. Das Beispiel D_4 ist ein Vertreter endlicher Gruppen, an dem sich auch die Definition endlicher *einfacher* Gruppen erläutern lässt. Ihre Untersuchungen erstrecken sich auf geschätzte 10.000 - 15.000 Druckseiten⁵². Ca. 180 Jahre wurde an der Gruppentheorie gearbeitet; ca. 60 Jahre an endlichen einfachen Gruppen. Hunderte von Artikeln sind dazu entstanden. Sie gipfeln letztendlich in einem mathematischen Satz („Riesentheorem“, „enormous theorem“), der einfach zu formulieren, aber schwer zu beweisen war und noch schwerer zu überblicken ist⁵³. Alle mathematischen Beschreibungen

⁵¹ Hinweis: Insbesondere wurden dazu zunächst in der Linearen Algebra die Matrizenrechnung und bei quadratischen Matrizen der Begriff der Determinante eingeführt, die ihnen einen skalaren Wert zuordnet. Mittels Determinanten wurden schon früh lineare Gleichungssysteme untersucht. Das Gleichungssystem ist eindeutig lösbar, wenn die Determinante ungleich Null ist.

⁵² Für diese und folgende allgemeine Aussagen bzw. teils wörtliche Zitate siehe Spektrum der Wissenschaft, März 2016, S. 48 ff.

⁵³ Vier emeritierte Professoren, Stephen D. Smith, Michael Aschbacher, Richard Lyons, Ronald Solomon, haben 2011 ein Buch veröffentlicht, das auf 350 Seiten in groben Zügen den Beweis skizziert. Sie gelten als die wenigen Menschen, die noch die Thematik ganz überblicken.

von Symmetrie in endlichen Mengen lassen sich danach in vier Klassen oder Großfamilien einordnen:

- 1) Ein Vertreter der **zyklischen Gruppen** sind z.B. die Drehungen beim Quadrat, deren Elemente sich alle aus d_1 erzeugen lassen. Analog werden im Prinzip alle zyklischen Gruppen definiert, indem es in ihnen genau ein erzeugendes Element geben muss.
- 2) Die **alternierenden Gruppen** haben mit Permutationen zu tun, also unterschiedliche Anordnungen einer Folge von Elementen. Alle Permutationen bilden eine Gruppe, aber in der Regel keine einfache. Man kann Permutationen auf das Vertauschen von jeweils zwei Elementen zurückführen (Transpositionen). Konzentriert man sich nur auf eine gerade Anzahl von Transpositionen, so erhält man alternierende Gruppen.⁵⁴
- 3) Die reichhaltigste Großfamilie bilden die **Gruppen vom Lie-Typ**. Es gehören z.B. feste Drehungen um den Nullpunkt im dreidimensionalen Raum mit nur endlich möglichen Koordinatenpositionen dazu. Das „Riesentheorem“ bezieht sich nur auf endliche (einfache) Gruppen. Lie-Gruppen müssen nicht nur eine endliche Anzahl an Elementen haben und sind erst recht nicht auf einen dreidimensionalen Raum beschränkt. Lie-Gruppen sind in der theoretischen Physik das bevorzugte Werkzeug, um Symmetrien in der Physik mathematisch zu beschreiben. Die mathematische Struktur einer Gruppe vom Lie-Typ hat somit erhebliche Bedeutung in der Physik. Sie wird insbesondere auch bei der Teilchenphysik diskutiert, bei der sie eine zentrale Bedeutung bei der Weiterentwicklung des Standardmodells der Elementarteilchen besitzen könnte.⁵⁵
- 4) Die vierte Großfamilie ist ein Sammelsurium von 26 schwer fassbaren Gruppen – die **sporadischen Gruppen**. Dazu gehört das sogenannte „Monster“ mit mehr als 10^{53} Elementen, die man als Kongruenz-

⁵⁴ Beispiel: Permutationen der Menge $\{1, 2, 3\}$ sind $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$, $\{1, 3, 2\}$, $\{2, 1, 3\}$, $\{3, 2, 1\}$. Die ersten drei Permutationen vertauschen jeweils zwei Zahlen, sind also geradzahlig. Die letzten drei vertauschen die Plätze aller drei Zahlen. Somit bilden $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 3, 1\}$, $\{3, 1, 2\}$ eine alternierende Gruppe.

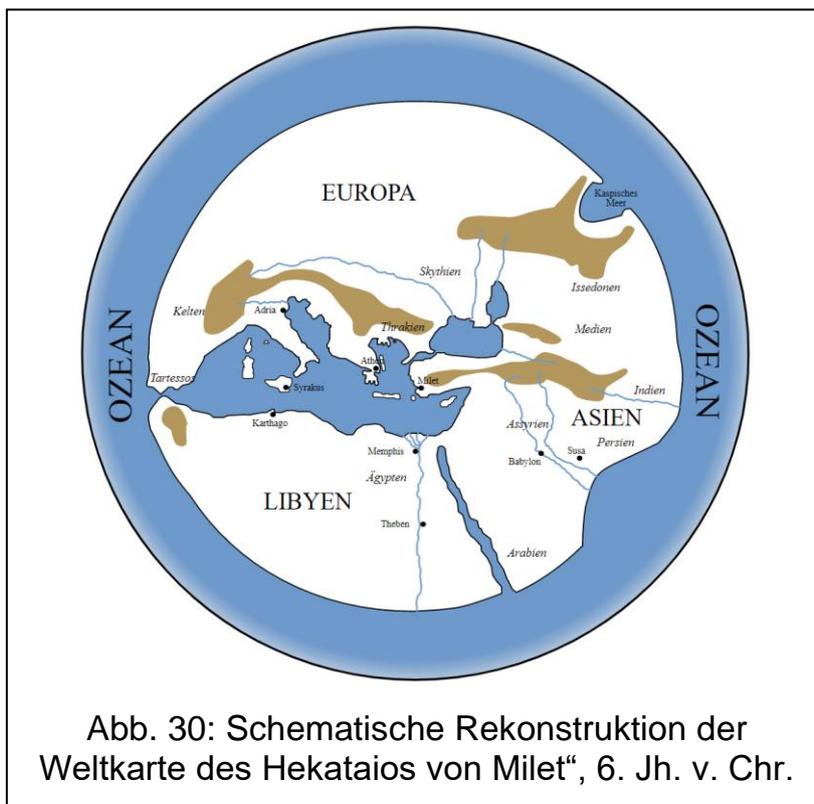
⁵⁵ Die Gruppen vom Lie-Typ sind keine Liegruppen. Aber der Chevalleysche Basissatz sagt, dass man jede halbeinfache komplexe Liealgebra bezüglich einer Basis konstruieren kann, die ganzzahlige Strukturkonstanten zulässt. Damit kann man diese Liealgebra auch über \mathbb{Z} und somit (per Tensorprodukt) über jedem endlichen Körper entwickeln und dann deren Automorphismengruppe studieren. Damit ist man bei den Gruppen vom Lie-Typ. Man muss nun noch die Kommutatorgruppe bilden und „das Zentrum heraus faktorisieren“. Damit hat man eine einfache endliche Gruppe vom Lie-Typ gebildet. (Privatmitteilung, mit Dank für den Hinweis und das fast wörtlich wiedergegebene Zitat an Prof. Ralf Köhl, Uni Gießen, jetzt Uni Kiel).

abbildungen in einem 196883-dimensionalen Raum auffassen kann. Es ist noch kein gesicherter Anwendungsfall dafür bekannt, aber es ranken sich mathematisch begründete Spekulationen um diese Gruppe, die Zusammenhänge mit dem Universum vermuten. Sie sind als Monstrous Moonshine bekannt.⁵⁶ Auf jeden Fall gibt es einen gesicherten unerwarteten Zusammenhang zwischen der Monstergruppe und bestimmten modularen Funktionen, die in Kernbereiche von Mathematik und Physik reichen. Modulare Funktionen messen Rechts-Links-Asymmetrie von Gruppen.

Physik

Vermessung des Erdumfangs durch Eratosthenes

Die Abbildung⁵⁷ zeigt eine flache Erde, wie sie im Prinzip in allen Kulturkreisen der vorantiken Welt gesehen wurde. Es hält sich hartnäckig die Meinung, dass diese Auffassung bis ins „dunkle“ Mittelalter bestanden hat. Das kann man zumindest für die Gelehrtenkreise in der damaligen Welt, historisch belegt durch zahlreiche Quellen, in Frage stellen.



Die Erkenntnis verbreitete sich deutlich weniger spektakulär als das kopernikanische Weltbild, weil schon alleine die Beobachtung sich nahender Schiffe oder der Erdschatten bei einer Mondfinsternis die Rundung der Erdoberfläche zeigte. Den endgültigen Beweis erbrachte die erste Erdumsegelung durch Magellan. Trotzdem war die erste seriöse Messung etwa 230 Jahre v.Chr., die

⁵⁶ Siehe dazu https://en.wikipedia.org/wiki/Monstrous_moonshine

⁵⁷ https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f6/Hecataeus_world_map-de.svg

offenbar auf Eratosthenes von Kyrene (276 – 195 v.Chr.) zurückgeht, eine wissenschaftliche Meisterleistung.

Am 21. Juni steht die Sonne am nördlichen Wendekreis genau senkrecht. An diesem Tag traf das Sonnenlicht in Syene, dem heutigen Assuan, mit guter Näherung auf den Wasserspiegel eines tiefen Brunnens. Der Wendekreis durchläuft heute den Nassersee, der durch den Assuanstaudamm aufgestaut wird. Gleichzeitig ließ Eratosthenes die Schattenlänge eines senkrechten Obelisken bekannter Höhe in Alexandria vermessen. Der Einfallswinkel der Sonnenstrahlen beträgt $7,2^\circ$ oder 7 Grad, 12 Minuten. Die Sonnenstrahlen wurden als parallel angenommen. Das war immerhin schon ein Erkenntnis der damaligen Zeit, dass offenbar die Sonne so weit von der Erde entfernt ist, dass diese Näherung gerechtfertigt ist. Der Abstand zwischen Alexandria und Syene war bekannt zu 50 Tagereisen mit einer Karawane, die ca. 17 km pro Tag zurück legte.⁵⁸ Das entspricht 850 km. Daraus ergibt sich das Verhältnis

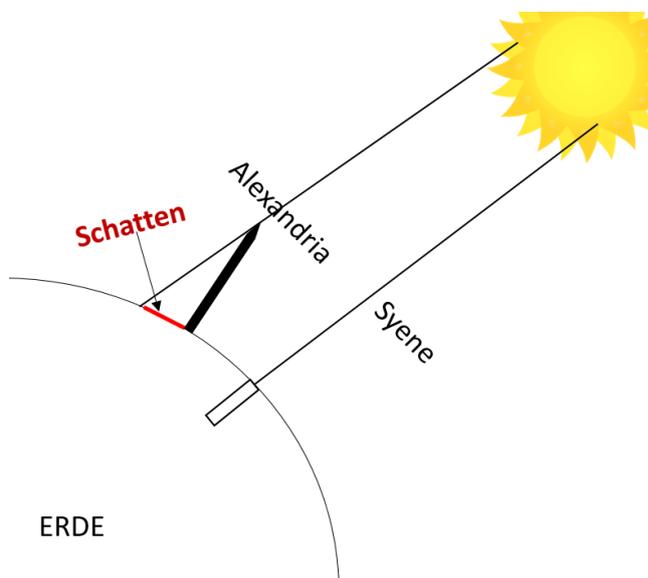


Abb. 31: Konstellation des Eratosthenes

$$\frac{7,2^\circ}{850 \text{ km}} = \frac{360^\circ}{\text{Erdumfang}}$$

Der Erdumfang errechnet sich damit zu 42.500 km.⁵⁹ Die Rechnung nimmt einige Vereinfachungen in Kauf. So ist die Basislänge zwischen Alexandria und Syene mit Unsicherheiten behaftet und Alexandria liegt etwas weiter westlich als Syene, das sich auch nicht exakt auf dem nördlichen Wendekreis befindet, sondern leicht nördlich. Der Fehler liegt trotzdem nur im einstelligen

Prozentbereich und war damit eine wissenschaftliche Glanzleistung.

Heutige GPS-Berechnungen ergeben ca. 40.030 km und wegen der leichten Abplattung an den Polen, am Äquator 40.075 km.

⁵⁸ Eratosthenes rechnete dies in „Stadien“ um. Heute kennt man nur ungefähr das Verhältnis Stadion zu Kilometer, da ein Stadion zwar 600 Fuß lang war, aber durch das regionale Fußmaß zwischen 165 und 196 m schwankte.

⁵⁹ Inspiration https://www.htw-dresden.de/fileadmin/HTW/Fakultaeten/Elektrotechnik/Dokumente/Personen/Hans-Dieter_Seelig/Erdumfang_Eratosthenes.pdf

Der von Eratosthenes bestimmte Erdumfang war auch Grundlage für die Entfernungsabschätzung zwischen Erde und Mond durch Hipparch (Hipparchos von Nicäa, 190-120 v.Chr.). Bei einer Mondfinsternis bedeckt der (runde)

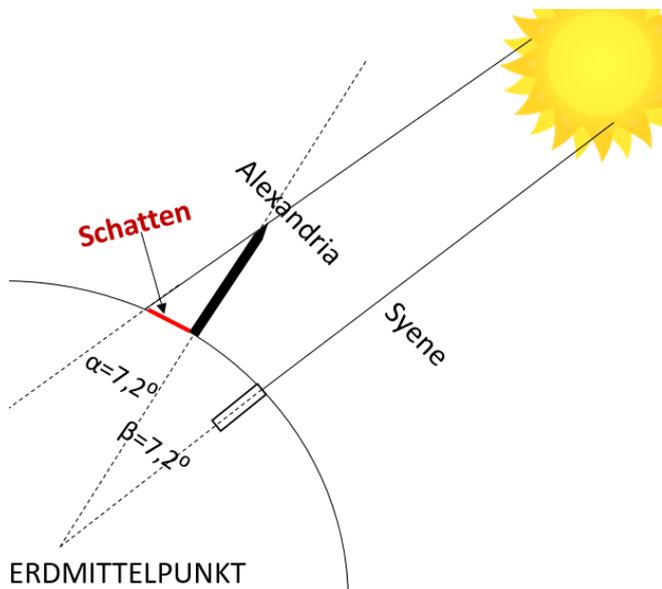


Abb. 32: Vermessung des Erdumfangs

Erdschatten den Mond; eine Münze mit einem Umfang von 75 mm kann dann bei ausgestrecktem Arm (ca. 75 cm) in guter Näherung den Erdschatten verdecken. Die Münze ist somit zehnmal weiter vom Auge als ihr Umfang beträgt. Man kann daraus schließen, dass der Mond etwa zehnmal weiter von der Erde entfernt ist, als deren Umfang ist. Bei der mittleren Entfernung des Mondes von ca. 384.000 km ist dies keine schlechte Abschätzung.

Das Gravitationsgesetz nach Newton

Die heutige Raumfahrt kommt in weiten Teilen mit dem von Isaac Newton aufgestellten Gravitationsgesetz aus. Er publizierte es in seinem 1687 erschienenen, epochalen Werk *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Nur in relativ seltenen Fällen muss die Weiterentwicklung von Albert Einstein herangezogen werden, die er 1915 als „*Die Feldgleichungen der Gravitation*“ veröffentlichte. Sie ist allgemein als Allgemeine Relativitätstheorie bekannt. Das Gravitationsgesetz von Newton ist von fundamentaler Bedeutung für unser Weltverständnis und eines der zentralen Gesetze der sogenannten klassischen Physik, also der Gesetzmäßigkeiten, die noch keine Quanteneffekte berücksichtigen. Dies gilt allerdings auch für die Allgemeine Relativitätstheorie, die aber insbesondere in einzelnen, teils verstörenden Effekten den gesunden Menschenverstand vor andere Herausforderungen stellt.

In seiner allgemeinen Form wirkt zwischen zwei Massen m_1 und m_2 im Abstand r eine Kraft F der Form

$$F = G \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$$

G ist die universelle Gravitationskonstante.

$$G = \frac{6,672 \cdot 10^{-11} \text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2}$$

Allerdings ist es sinnvoll, die Kraft \vec{F}_1 auf einen Massepunkt m_1 richtungsabhängig, also vektoriell zu formulieren. Da die Gravitation, im Gegensatz z.B. zum Magnetismus (Coulombsches Gesetz), immer anziehend ist, existiert zu \vec{F}_1 ein Gegenvektor mit $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$:

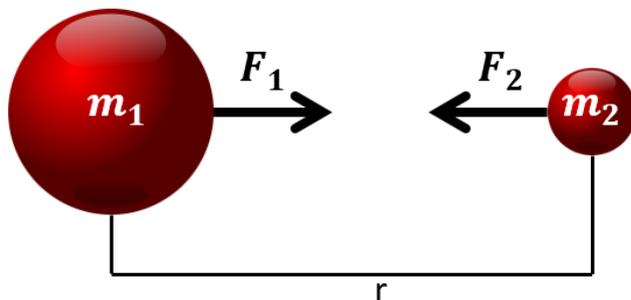


Abb. 33: Newtons Gravitationsgesetz

$$\vec{F}_1 = G \frac{m_1 \cdot m_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$$

\vec{r}_1 und \vec{r}_2 sind die beiden Ortsvektoren, also der Positionen der Massepunkte im 3-dimensionalen Raum.

Am folg. Beispiel Erde-Mond kann man die Mittelpunkte der beiden nahezu kugelförmigen

Massen annehmen. Die Masse der Erde beträgt in etwa $5,97 \cdot 10^{24} \text{kg}$, die Masse des Mondes etwa $7,349 \cdot 10^{22} \text{kg}$. Der Abstand zwischen Erde und Mond verändert sich zwar ständig. Für die Berechnung kann man in guter Näherung 384.000 km verwenden. Die Gravitationskraft F zwischen Erde und Mond beträgt:⁶⁰

$$F = \frac{6,672 \cdot 10^{-11} \text{m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 5,97 \cdot 10^{24} \text{kg} \cdot 7,349 \cdot 10^{22} \text{kg}}{(384000000)^2 \text{m}^2}$$
$$F = 1,985 \cdot 10^{20} \text{N}$$

Zum Vergleich:

Die Gravitationskraft zwischen zwei Personen, die jeweils eine Masse von 50 kg haben und die sich in einem Abstand von 1 m voneinander befinden, beträgt etwa $F = 1,668 \cdot 10^{-7} \text{N}$.

Fourier-Analyse

Der folgende Abschnitt ist dann ein mathematisches Thema, wenn man die Fourier-Analyse oder klassische harmonische Analyse, auf die Mathematik der Theorie der Fourier-Reihen und Fourier-Integrale begrenzt. Sie hat aber besonders in der Physik und den technischen Wissenschaften (und weit darüber hinaus) eine so herausragende Bedeutung, dass dieser Abschnitt unter dem Obergriff „Physik“ geführt werden soll. Dort geht es ursprünglich darum, zeitliche Signale in ihre Frequenzanteile umkehrbar zu zerlegen. Das ursprüngliche

⁶⁰ Quelle des Beispiels:

<https://www.frustfrei-lernen.de/mechanik/gravitationskraft.html>

Signal soll über die Summe dieser Frequenzanteile wieder rekonstruiert werden können. Dies lässt sich jedoch auf andere Probleme übertragen. So sind Mechanismen der Fourier-Analyse aus der digitalen Bildverarbeitung nicht mehr wegzudenken. Immer, wenn es darum geht, periodische Vorgänge oder andere regelmäßig wiederkehrende Strukturen zu erkennen und mathematisch zu behandeln bzw. zu beschreiben, kommen Instrumente der Fourier-Analyse zum Einsatz. Zur verwendeten Mathematik soll auf die einschlägige Literatur verwiesen werden.

Die Grundlagen der Methode wurden von dem französischen Mathematiker Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) entwickelt. Im Jahr 1822 hat er in einem bahnbrechenden Werk *Théorie analytique de la chaleur* Fourier-Reihen untersucht. Seine mathematischen Kenntnisse wendete er selbst schon erfolgreich in der Physik an. Seine Abhandlung zur Wärmeausbreitung in

Festkörpern, die heute als Fouriersches Gesetz bekannt ist, wurde von der Pariser Akademie der Wissenschaften mit einem Preis ausgezeichnet. Die Tabelle in Abb. 35 zeigt den Zusammenhang von Zeit- und Frequenzbereich bei den vier möglichen Varianten der Fourier-Analyse mit zeitdiskretem/zeitkontinuierlichem Verlauf und spektral diskretem bzw. kontinuierlichem Verlauf. Zeitdiskrete

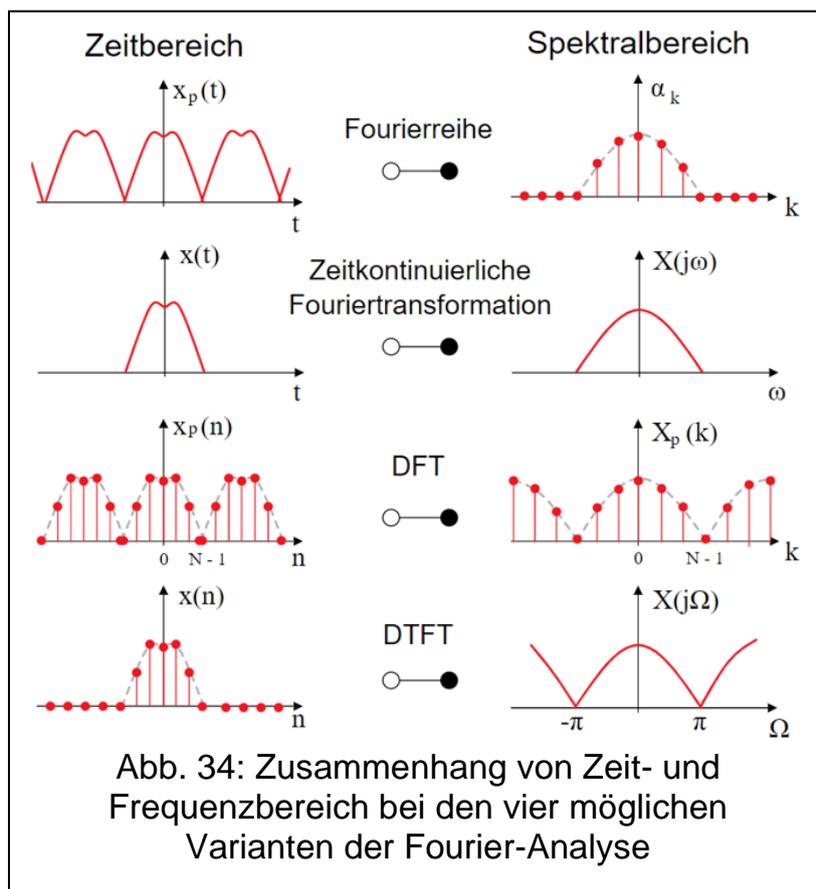


Abb. 34: Zusammenhang von Zeit- und Frequenzbereich bei den vier möglichen Varianten der Fourier-Analyse

Folge bzw. diskretes Spektrum bedingt auf der gegenüberliegenden Seite ein Spiegelspektrum bzw. eine periodische Fortsetzung.⁶¹

⁶¹ Grafik, Tabelle und wörtlich übernommener Text aus https://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analyse#/media/Datei:Diff_Fourier-Analyse.svg

Variante	Definitionsmenge von x	Periodizität von x	Frequenzspektrum
Fourier-Reihe	kontinuierliches Intervall	periodisch	diskret
Kontinuierliche Fourier-Transformation	kontinuierlich	aperiodisch	kontinuierlich
Diskrete Fourier-Transformation (DFT)	diskret, endlich	aperiodisch, periodisch fortgesetzt	diskret, endlich
Fourier-Transformation für zeitdiskrete Signale (DTFT)	diskret, endlich		kontinuierlich

Abb. 35: Charakteristika der vier möglichen Varianten der Fourier-Analyse gemäß Grafiken in Abbildung 34

Die Maxwell'schen Gleichungen

Elektrische und magnetische Phänomene werden unter dem Begriff „Elektromagnetismus“ zusammengefasst. Es ist das Verdienst von James Clerk Maxwell (1831-1879), der 1864 geradezu sensationell und fast im Alleingang seine vier Gleichungen veröffentlicht hat und damit eine bis heute wichtige physikalische Theorie ins Leben gerufen hat. Erst durch quantentheoretische Ergänzungen und der Berücksichtigung von relativistischen Effekten wurde die Theorie verfeinert. Sie sind wichtig im atomaren Bereich, aber betreffen in der makroskopischen Welt teils nur diffizile Erweiterungen. Ähnlich wie das Gravitationsgesetz von Newton, das meist vollkommen ausreicht um Planeten- oder Asteroidenbahnen zu berechnen, sind die Maxwell'schen Gleichungen meist ausreichend für viele praxisorientierte Fragen rund um den Elektromagnetismus.

Mit den Gleichungen lassen sich die elektrischen und magnetischen Kräfte berechnen, die in gegebenen Konstellationen bei elektrischer oder magnetischer Ladung oder entsprechender Stromverteilung auftreten.

Maxwell schloss mit seinen Gleichungen 1864 eine empfindliche, theoretische Lücke. Es gab vorher nur punktuelle mathematische Beschreibungen isolierter Phänomene, aber keine konsistente Theorie. Besonders die Tatsache, dass es keine isolierten Beschreibungen von Magnetismus und Elektrizität geben darf, sondern dass sich beide Kräfte gegenseitig bedingen, beeinflussen und nicht unabhängig voneinander betrachtet werden können, ist das große Verdienst von James Maxwell. Die Tatsache, dass von einem bewegten elektrischen Feld

auch magnetische Felder ausgehen und umgekehrt, hat millionenfache Anwendungen in der Technik und Wissenschaft.

Die ursprünglich für den „Äther“ aufgestellten Gleichungen konnten erweitert werden, wie sich elektrische und magnetische Felder in Materie verhalten.

Die physikalische Aussage der Gleichungen kann man folgendermaßen verbalisieren:

(1): Die elektrischen Ladungen lassen sich als Quellen und Senken des elektrischen Feldes interpretieren.

(2): Das magnetische Feld hat keine Quellen, das heißt, es gibt keine isolierten magnetischen Monopole.

(3): Erst durch zeitliche Änderungen des magnetischen Flusses werden Wirbel im elektrischen Feld erzeugt. Das ist das Faradaysche Induktionsgesetz.

(4): Leitungs- und Verschiebungsströme erzeugen Wirbel im magnetischen Feld, sie werden oft auch salopp (im Widerspruch zu (2)) als Quellen des Magnetfeldes bezeichnet (Ampèresche Gesetze).

Die dielektrische Verschiebung D nach der Zeit $\frac{\partial D}{\partial t}$ nennt man Maxwellscher Verschiebungsstrom. Er dient dazu, das Gleichungssystem widerspruchsfrei zu machen. Allein die Änderung eines elektrischen Feldes ruft ein Magnetfeld hervor. Markantes Beispiel ist der Be- und Entladevorgang eines Kondensators.

Die vier Gleichungen schrecken den Laien zunächst auch von der Notation her gesehen ab. Es wird ein mathematischer Differentialoperator (auch Ableitungsvektor genannt) verwendet. Er ist als (partieller) Ableitungsvektor zu verstehen und wird mit einem umgedrehten griechischen Delta bezeichnet. D.h. es werden die (zeitunabhängigen) Ableitungen bzgl. der 3 Raumkoordinaten bzw. der Variablen x, y, z gebildet.⁶²

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Die Bedeutung der Maxwellschen Gleichungen geht weit über die konsistente mathematische Beschreibung des Elektromagnetismus hinaus. Sie war auch „Enabler“ für eine der größten Revolutionen in der Physik, den Relativitätstheorien. Impuls war einerseits ein Defizit und andererseits die neue Idee von Feldern, Wellen und Kräften. Die Gleichungen sind nämlich nicht symmetrisch bzgl. Galilei-Transformationen. Es ist zumindest für die einfachste Näherung wichtig, dass sich physikalische Gesetze nicht ändern, wenn Bezugssysteme sich nur durch eine geradlinig-gleichförmige Bewegung,

⁶² Eine gute Darstellung, an die sich der Text anlehnt, findet sich bei <https://www.spektrum.de/lexikon/physik/maxwell-gleichungen/9525>

Drehung und/oder eine Verschiebung in Raum oder Zeit unterscheiden. Dieses Defizit behebt die Spezielle Relativitätstheorie. In der Allgemeinen Relativitätstheorie wird der Feldbegriff auch auf die Gravitation angewendet.

Der 2. Hauptsatz der Thermodynamik - Entropie und Zeitverläufe⁶³

In grundlegenden Naturgesetzen ist die Zeit symmetrisch. D.h. von der mathematischen Beschreibung gesehen, können alle Prozesse reversibel ablaufen. Es wird also nicht grundsätzlich zwischen Vergangenheit und Zukunft unterschieden. Elementare Naturgesetze sind also in ihren Formeln invariant gegenüber Zeitumkehr. Man spricht von T-Symmetrie (von t wie time). Andere Symmetrien, insbesondere in der Quantenphysik, ist die Ladungsumkehr (C wie charge) und die Spiegelsymmetrie (genannt P wie Parität), die für links/rechts-Händigkeit steht. Nur kleine Symmetriebrüche sind bekannt und es wird nach wie vor danach gesucht. Sie sind offenbar verantwortlich für das eindeutige Übergewicht von Materie gegenüber Antimaterie im Universum, doch die bisher bekannten, teils winzigen Phänomene können das heutige Materie-dominierte Universum nicht allein erklären. Auch bei der Zeit sind Symmetriebrüche⁶⁴ bekannt, aber Zeitumkehr ist insbesondere in der Quantentheorie mathematisch vorgesehen. Sie stellt kein Problem dar, denn für negative Zeit gibt es plausible Begründungen, z.B. kann das Positron als Elektron gedeutet werden, das in der Zeit „rückwärts“ läuft.⁶⁵

Warum gibt es keine Welt, in der die Richtung der Zeit keine Rolle spielt? Vielfach wird als Grund die Entropie als Begründung genannt bzw. anerkannt und damit der 2. Hauptsatz der Thermodynamik. Der 1. Hauptsatz besagt, dass Energie erhalten bleibt und lediglich in andere Energieformen umgewandelt wird. Beim zeitlichen Ablauf jedes Prozesses in der makroskopischen Welt geht das System von einer höheren Ordnung in eine geringere Ordnung (höhere Entropie) über. Entropie hat etwas mit Wahrscheinlichkeit zu tun. Der Zustand geringerer Ordnung ist deutlich wahrscheinlicher. Dies kann nur durch Energiezufuhr verhindert werden, die bei der Entwicklung höherer Lebensformen vor allem von der Sonne kommt. Aber immer entsteht Reibung oder Abwärme oder sonstige nicht mehr für Arbeit nutzbare Energieformen. Sobald also makroskopische Prozesse auftreten, bekommt plötzlich „Zeit“ eine

⁶³ Siehe auch für diesen Abschnitt Kafitz, Willi, Entropie: wachsende Bedeutung in Naturwissenschaft und Informationstheorie: eine Übersicht in Beispielen
<http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2020/15768/>

⁶⁴ <https://www.weltderphysik.de/gebiet/teilchen/news/2012/verletzung-der-zeitsymmetrie-beobachtet/>

⁶⁵Für die Energie $E = \pm \sqrt{c^2(\hbar^2 \vec{k}^2) + m^2 c^4}$ existiert eine positive und negative Lösung.

Richtung. Arnold Sommerfeld hat einmal gesagt: „In der Natur nimmt die Entropie die Rolle des Direktors ein, die Energie aber nur die eines Buchhalters.“⁶⁶

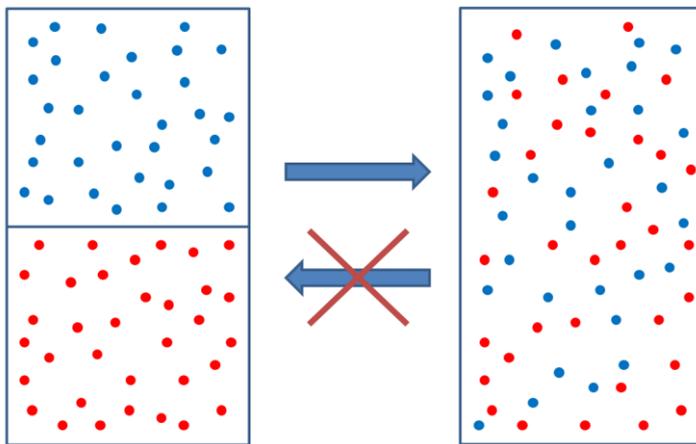


Abb. 36: Vermischung zweier unterschiedlicher Gase ist spontan irreversibel und erhöht die Entropie.

Das betrifft auch kleinste Systeme, wie ein Quantensystem. Der „Kollaps der Wellenfunktion“ ist nicht umkehrbar und legt somit die Zeitrichtung, den „Zeitpfeil“ fest. Auch das Verhalten elektromagnetischer Strahlung gehorcht dem Zeitpfeil. Strahlung tritt immer in retardierter Form auf; die Felder folgen also

der Quelle immer verzögert und nicht instantan. Die Ausbreitung erfolgt dann mit Lichtgeschwindigkeit. Entropie bestimmt alleine durch wahrscheinlichere Zustände die Richtung des Zeitpfeils und ist die eigentliche Ursache der Zeit. Mit Entropie kann Vergangenheit und Zukunft definiert werden. Sie werden durch das, was man Gegenwart nennt, getrennt. Es ist ein kurzer, physikalisch, philosophisch und religiös schwer fassbarer Moment.⁶⁷

Diese These hat als erster Arthur Eddington formuliert. Eddington hat dabei nicht die Relativitätstheorie vergessen, die den Begriff „Gleichzeitigkeit“ zumindest relativiert hat. Er war einer der ersten intimen Kenner und Leiter der Expedition zur Insel Principe im Jahr 1919, die die Voraussagen der Allgemeinen Relativitätstheorie bestätigen konnte und zur enormen Popularität von Albert Einstein maßgeblich beitrug. Allerdings hat die Relativitätstheorie deutlich gemacht, dass es keine absolute Zeit gibt, dass Gleichzeitigkeit eine Illusion ist, dass Raum nur in Verbindung mit Zeit plausibel beschrieben werden kann und umgekehrt.

Es bleibt aber bei den grundsätzlichen Kategorien von Ursache und Wirkung. Wenn eine Information den kausalen Anstoß für einen Folgevorgang liefern soll, dann besitzt der Zeitpfeil seine Gültigkeit. Quantentheoretisch verschränkte Teilchen können instantan, also ohne Rücksicht auf die Lichtgeschwindigkeit, in beliebiger Entfernung eine Quanteneigenschaft des verschränkten Teilchens

⁶⁶ Zitiert nach <https://www.chemie.de/lexikon/Entropie.html>

⁶⁷ Siehe Muller, Richard A., Jetzt – Die Physik der Zeit, S. Fischer, Frankfurt a. Main, 2018, S. 131.

offenbaren. Damit ist jedoch keine Informationsübermittlung, die schneller als das Licht funktioniert, realisierbar. Für diese gilt der durch Entropie definierte Zeitpfeil, wie ihn Eddington postuliert hat.^{68,69,70}

Entropie wird heute nicht nur thermodynamisch interpretiert. Auf die Bedeutung des Begriffs in der Informationstheorie wird noch hingewiesen.

Ein Artikel von Ted Jacobson aus dem Jahr 1995⁷¹ hat eine neue Perspektive aufgezeigt, die eine intensive Forschung ausgelöst hat. In Quantenfeldtheorien wird die Gravitation nicht berücksichtigt. Jacobson nimmt nun an, dass die Entropie einer Region immer deren Oberfläche proportional sei. Die Oberfläche als Grenzfläche ist aber abhängig von der Geometrie der umschlossenen Region und könnte damit auch von der Krümmung der Raumzeit abhängen, die auf der linken Seite von Einsteins Feldgleichung steht. Rechts steht der Materie/Energie-Term und Entropie ist, vom thermodynamischen Ursprung her, die Wärmeenergie, die ein System „verliert“. Dies ist zunächst Spekulation, aber während Einstein seine Feldgleichung und damit die Allgemeine Relativitätstheorie **postulieren** musste, kann Jacobson aus diesen Grundannahmen die Feldgleichungen **ableiten**.

Wichtige Beiträge mit diesen Ansätzen leistete z.B. Verlinde mit dem Konzept der Entropischen Gravitation.⁷² Berechnungen von Bekenstein (1973) und gestützt durch Hawking zeigten schon früher, dass man Schwarzen Löchern eine Entropie zuordnen kann, die nur von der Oberfläche des Ereignishorizontes

⁶⁸ Originalliteratur: Eddington, Arthur Stanley, Das Weltbild der Physik und ein Versuch einer philosophischen Bedeutung, 1928, in Deutsch 1931 bei Springer, S. 42ff

⁶⁹ Steven Hawking wollte im Jahr 2009 mit einem ungewöhnlichen Experiment beweisen, dass Zeitreisen tatsächlich nicht möglich sind. Er veranstaltete eine große Party, zu der er ausschließlich Zeitreisende aus der Zukunft einlud. Das Besondere: Er veröffentlichte die Einladungen erst nach der Feier, in der Hoffnung, dass Menschen in mehreren tausend Jahren darauf aufmerksam werden könnten. Leider kam niemand. (<https://www.mdr.de/wissen/zeit-fakten100.html>)

⁷⁰ Die Quantentheorie ist eine der am besten experimentell bestätigten physikalischen Theorien. Der Begriff „Kollaps der Wellenfunktion“ leitet sich aus der lange Zeit unbestrittenen, fast dominanten Interpretation ab, der „Kopenhagener Deutung“. Sie umgeht mit dem Ausdruck das „Messproblem“ durch eine für manche Physiker willkürliche Annahme. Einige wagten andere Interpretationen (Bohm, Everett), die sich nicht durchsetzten oder als nutzlose Philosophie angefeindet wurden („shut up and calculate“). Mittlerweile gibt es wieder stärkere, wissenschaftlich akzeptierte Diskussionen um die Grundlagen der Quantentheorie. Siehe dazu:

Adam Becker, Was ist real?, Springer, Berlin 2021 oder

Sean Carroll, Was ist die Welt und wenn ja, wie viele, Klett-Cotta, Stuttgart 2021

⁷¹ Jacobson, Ted, Thermodynamics of Space-Time. The Einstein Equation of State, Physical Review Letters, 75, 1995, S.1260-1263

⁷² https://de.wikipedia.org/wiki/Entropische_Gravitation

und von fundamentalen Naturkonstanten abhängt („Bekenstein-Hawking-Entropie“).⁷³

Minus 273,15 Grad Celsius - Der 3. Hauptsatz der Thermodynamik

Es gibt sozusagen auch eine „Physik der Null“, nämlich der absolute Nullpunkt. Die gebräuchliche Temperaturskala ist willkürlich und hat sich aus verständlichen, historischen Gründen am physikalischen Verhalten von Wasser orientiert, also einem der wichtigsten Stoffe für das Leben auf der Erde. Die Celsius-Skala ist nach dem schwedischen Astronomen Anders Celsius benannt, der bereits 1742 eine hundertteilige Temperaturskala vorschlug. Den Gefrierpunkt des Wassers hat er auf null Grad gesetzt und den Siedepunkt auf 100 Grad. Diese Skaleneinteilung, also die Differenz der Temperaturwerte zwischen 0 und 100, bleibt auch, seit man feststellte, dass es ein Minimum der

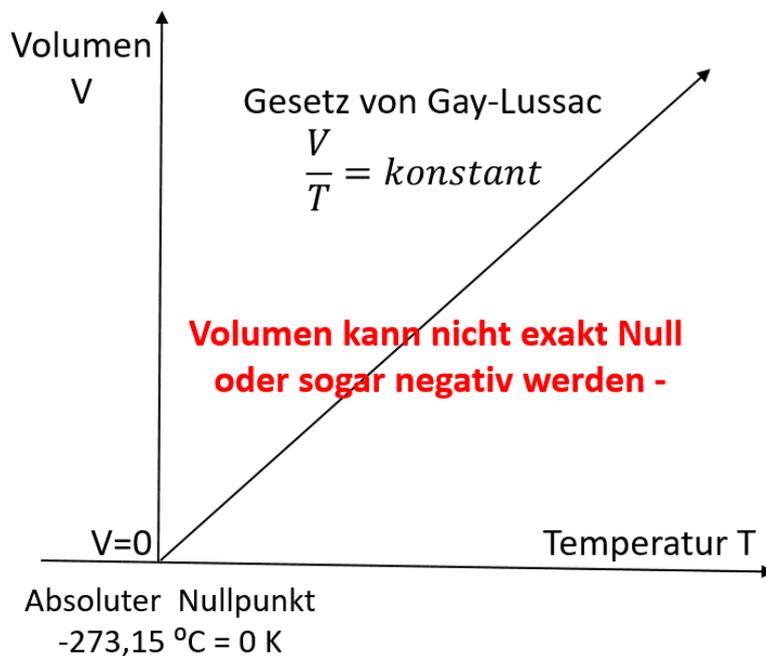


Abb. 37: Nach dem Gesetz von Gay-Lussac ist der absolute Nullpunkt unerreichbar.

Temperatur geben muss, den absoluten Nullpunkt bei minus 273,15 Grad Celsius. Temperatur hat immer etwas mit Bewegung der kleinsten Teilchen zu tun. Beim absoluten Nullpunkt gibt es keine Bewegung mehr.

Wissenschaftlich formuliert: Nach dem Gesetz von Gay-Lussac ist der Quotient aus Volumen und Temperatur stets konstant.

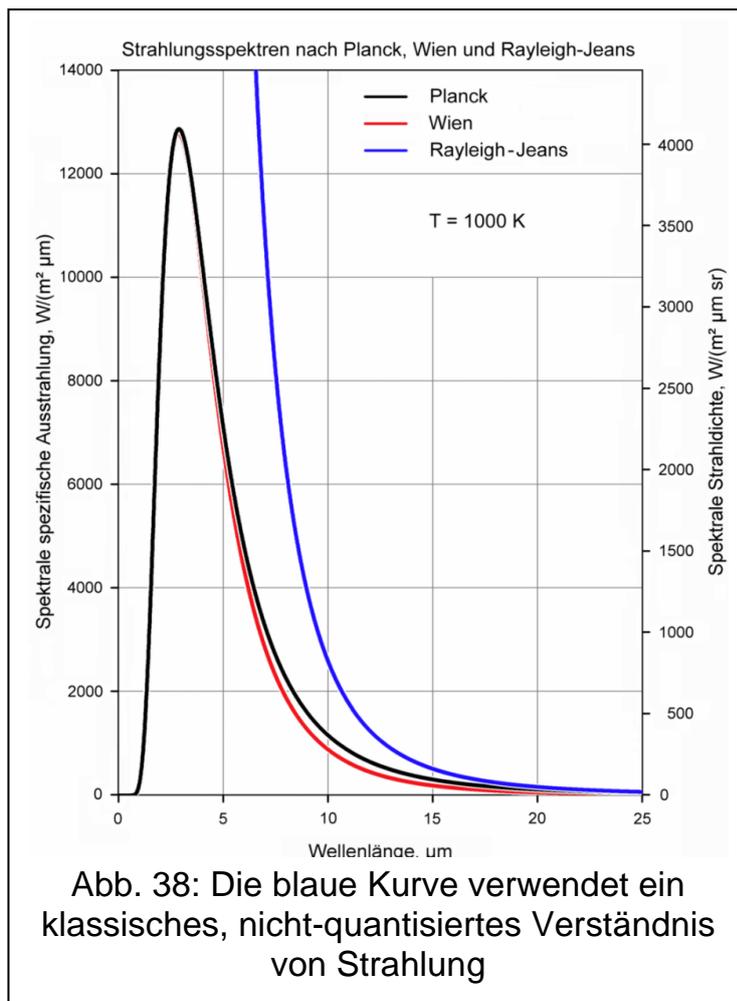
$$\frac{V}{T} = \textit{konstant}$$

Da es kein negatives Volumen geben kann, muss es für die Temperatur ebenfalls eine untere Grenze, den absoluten Nullpunkt ($-273,15\text{ °C}$), geben. Das ist auch der Grund, dass man ihm zwar beliebig nahekommen, aber ihn nie erreichen kann. Dafür sorgen alleine die Gesetze der Quantenphysik, denn die kleinsten Quantenteilchen würden die Heisenbergsche Unschärferelation verletzen. Diese Erkenntnis geht auf Walter Nernst zurück. Das Nernst-Theorem ist als 3. Hauptsatz der Thermodynamik bekannt. Es hat sich

⁷³ <https://de.wikipedia.org/wiki/Bekenstein-Hawking-Entropie>

angeboten, einerseits den absoluten Nullpunkt auch tatsächlich als Nullpunkt der wissenschaftlichen Temperaturmessung festzulegen, aber andererseits sich auf die Celsius-Skala zu beziehen. Nach William Thomson, dem späteren Lord Kelvin, ist die Skala benannt. Er hat vor allem die Abhängigkeiten von der Energie als entscheidenden Einflussfaktor erkannt. Minus 273,15 Grad Celsius ist also 0 Kelvin (seit 1967 definitionsgemäß ohne die Ergänzung „Grad“). In der Nähe des absoluten Nullpunkts treten oft quantenmechanisch bedingtes, besonderes Verhalten der Materie auf. Dazu gehört Suprafluidität und sogenannte Bose-Einstein-Kondensate, bei der die Quantenteilchen einen Aggregatzustand einnehmen, in dem sie nicht mehr unterscheidbar sind. Ihre als Wellenfunktionen beschreibbaren Einzelzustände überlagern sich zu einem Gesamtzustand. Der kritische Punkt wird erreicht, wenn die Dichte der Quantenteilchen mit fast gleichem Impuls groß genug ist.

Schwarze Körper, Hohlraumstrahlung und die Geburt der Quantenmechanik



Ein grünes Blatt ist grün, weil es das weiße Licht der Sonne vollständig absorbiert und nur grünes Licht der Frequenz zwischen 500 nm und 550 nm reflektiert. Absorbiert ein nicht-transparenter („opaker“) Körper das ganze sichtbare Licht, so ist er schwarz. Einen perfekten „Schwarzen Körper“ gibt es allerdings nur in der Idealvorstellung. Immer wird ein Teil der auftreffenden elektromagnetischen Strahlung wieder emittiert. Ein schwarzer Gegenstand heizt sich in der Sonne zwar stärker auf, aber er erreicht auch irgendwann ein thermisches Gleichgewicht. Zu einem geringen Teil

erfolgt dies durch Kontakt mit der Umgebung. Doch auch die Erde im Vakuum des Weltraums heizt sich nicht permanent auf, sondern gibt auch Strahlung ab.

Dies bezieht sich auf das gesamte energetische Spektrum. Dabei ist bekannt, dass Wärme Bewegung bzw. Schwingungen der Teilchen ist. Sie hören erst am (nie vollständig erreichbaren) absoluten Nullpunkt auf (s.o.).

Wenn ein idealer schwarzer Körper gemäß seiner Definition die ganze Strahlung absorbiert, so gibt er doch aufgrund der Schwingungen seiner Atome Wärmestrahlung ab. Dies erfolgt bei glühenden Körpern sogar im sichtbaren Licht. Auch die Sonne kann man als fast perfekten Schwarzen Körper ansehen, der jedoch durch seine Oberflächentemperatur von ca. 5800 K weiß erscheint. Die Temperatur bestimmt also auch bei Schwarzen Körpern die Frequenz und kann vom infraroten über den sichtbaren bis zum ultravioletten Bereich gehen. Diese Schwarzkörperstrahlung eignet sich besonders gut für Untersuchungen, weil weniger Fremdeinflüsse, also störende reflektierende Anteile, existieren. In der Praxis bohrt man ein Loch in einen hohlen Körper. Die geringe einfallende Strahlung ist nach wenigen Reflexionen absorbiert und kann nicht mehr austreten. Man misst also lediglich die Schwarzkörperstrahlung, die deshalb auch Hohlraumstrahlung genannt wird. Man beachte, dass lediglich das Loch schwarz ist. Das Material und damit die Oberfläche des Hohlkörpers ist für die Hohlraumstrahlung unerheblich. Die Strahlung hängt nur von der Temperatur ab und nicht vom Material. Wird die Temperatur erhöht, so wird auch das Loch im sichtbaren Bereich glühen und bei höheren Temperaturen darüber hinaus im Ultravioletten strahlen. Die Sonne erscheint deshalb nicht nur weißglühend, sondern gibt in erheblichem Umfang schädliche UV-Strahlung ab, die in wesentlichen Teilen von der Ozon-Schicht absorbiert wird. Die Strahlungsverteilung, die im Rahmen der klassischen Theorien zu erwarten wäre, kann die Messergebnisse nicht korrekt interpretieren. Man spricht von einer UV-Katastrophe, die vorausgesagt würde.⁷⁴

Man kann den Schwarzen Körper als Hohlraumstrahler mit den Maßen $d \cdot d \cdot d = d^3$ behandeln. In diesem „Potentialtopf“ können nur stehende Wellen elektromagnetischer Strahlung bestehen, da sich andere Wellenformen auslöschen würden. Folgende Frequenzen k nach den 3 Raumdimensionen sind möglich:

$$k = \frac{\pi}{d} \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2}$$

d.h. die Anzahl der möglichen Schwingungsmoden ist $n = \frac{8\pi}{3\lambda^3}$

⁷⁴ Bildquelle https://de.wikipedia.org/wiki/Rayleigh-Jeans-Gesetz#/media/Datei:PlanckWienRayleigh_linear_150dpi_de.png

Lord Rayleigh ging von einer stetigen Gleichverteilung der Energie der Oszillatoren pro Freiheitsgrad aus $E(T, \nu) = k \cdot T$

Dagegen nahm Planck an, dass jeder Oszillator nur ein ganzzahliges Vielfaches eines elementaren Energiequants $E_0 = h \cdot \nu$ annehmen kann. Dadurch ist gewährleistet, dass nicht alle theoretisch möglichen Schwingungszustände eingenommen werden können. Das war der erste Schritt zu einer Quantelung kleinster Energiepakete und damit der Beginn der Quantenmechanik. Über die Heisenbergsche Unschärferelation sind Tunneleffekte möglich, werden aber, wenn die Energie $k \cdot T$ viel kleiner ist als der Anregungszustand $h \cdot \nu$, immer unwahrscheinlicher. In einer Variante (Frequenz-bezogen) hat das Plancksche Gesetz die Form:

$$\bar{E}(T, \nu) = \frac{h\nu}{e^{\left(\frac{h\nu}{kT}\right)} - 1}$$

Das Stern-Gerlach-Experiment

Im Jahr 2022 jährt sich zum 100. Mal ein bahnbrechendes Experiment, das die Quantennatur der Materie deutlich machte, weil das Experiment ein vollkommen anderes Ergebnis zeigte, als man von der klassischen Physik erwarten würde. Der entscheidende Versuch gelang in der Nacht vom 7. auf den 8. Februar 1922 in einem Labor im Gebäude des Physikalischen Vereins (Alte Physik) in Frankfurt am Main von Otto Stern und Walther Gerlach. Aus diesem Grund hat die Deutsche Physikalische Gesellschaft (DPG) und der Physikalische Verein zu einer Jubiläumsveranstaltung zum Jahrestag in der Paulskirche in Frankfurt eingeladen.

Nach den Gesetzen der damals noch jungen Quantenmechanik sollte ein Effekt existieren, den man Richtungsquantelung nennt und war von Peter Debye und Arnold Sommerfeld vorausgesagt worden. Wenn man durch ein magnetisches Feld eine Raumrichtung festlegt, können entsprechende Anteile der drei Raumkoordinaten x, y, z eines beliebigen Drehimpulses bzgl. der ausgezeichneten Raumrichtung nicht beliebige Werte annehmen. Die Werte treten als isolierte Quanten der Form $m_J \cdot \hbar$ auf. Dabei ist m_J eine ganz oder halbzahlige Zahl⁷⁵

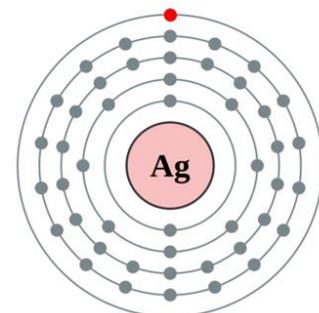


Abb. 39: Atomaufbau von Silber mit dem 5s Elektron (rot)

⁷⁵ Bei Bosonen ganzzahlig, bei Fermionen halbzahlig (0, 1/2, 1, 1 1/2, 2, ...).

und \hbar ist $\frac{h}{2\pi}$, (reduziertes Plancksches Wirkungsquantum). Der Buchstabe „m“ soll den Bezug zu einem „Magnetfeld“ suggerieren.

Beim Stern-Gerlach Experiment benutzt man einen Strahl von neutralen Silberatomen im Vakuum und legt ein asymmetrisches magnetisches Feld an. Nach der klassischen Theorie würden die Silberatome einen zusammenhängenden schwarzen Strich oder Punkt auf der Glasplatte

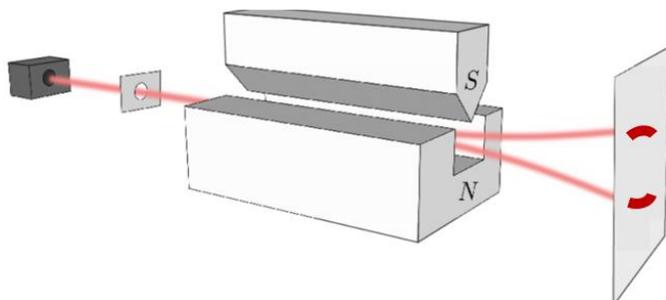


Abb. 40: Stilisierte Darstellung des Experiments. Entscheidend ist die Aufspaltung des Strahls in z-Richtung.

erzeugen (hier rot). Silber ist aber gut geeignet, quantenmechanische Effekte aufzuzeigen. Denn die unteren vier Schalen sind besetzt, ihre gepaarten Spins heben sich gerade auf und steuern deshalb keinen Beitrag zum magnetischen Dipolmoment eines Silberatoms bei. Entscheidend ist das einzelne

Elektron in der 5s-Schale (rot in Abb. 39 hervorgehoben), das auch alleine für die chemischen Bindungen verantwortlich ist. Silber ist fast immer einwertig und liegt meist als Ag^+ -Ion in Verbindungen vor. Das magnetische Dipolmoment $\vec{\mu}$ des Silberatoms ist eine Folge des vektoriell zu verstehenden Drehimpulses \vec{S} . $\vec{\mu}$ und \vec{S} sind parallel. Das einzelne 5s-Elektron liefert den einzigen Beitrag zu den magnetischen Eigenschaften des Silbers. Dieses 5s-Elektron hat einen Spin $\frac{1}{2}$ und ein Silberatom verhält sich insgesamt wie ein Spin $\frac{1}{2}$ -Teilchen, ein Fermion. Der Spin ist entweder Spin-up oder Spin-down oder eine sogenannte Superposition von beiden Zuständen. Im Magnetfeld entscheidet sich jedes 5s-Elektron in einem Silberatom nach dem Zufallsprinzip zu Spin-up oder Spin-down. Es hat also durch die Quantelung nur die Möglichkeiten sich $+\hbar/2$ oder $-\hbar/2$ einzustellen, ähnlich wie ein Kreisel sich nur rechts- oder linksherum drehen kann. Die klassische Mechanik lässt dagegen zu, dass der Drehimpulsvektor jeden beliebigen Winkel mit der durch das Magnetfeld ausgezeichneten Achse bilden kann. Das Experiment zeigte deutlich die Aufspaltung des Strahls infolge der Richtungsquantelung in einem Magnetfeld, die zur Abscheidung der Silberatome in diesem Fall in zwei prinzipiell getrennten Bereichen führt.⁷⁶ Mit geladenen Teilchen ist der Versuch noch nicht möglich, aber die Ablenkung der ungeladenen Silberatome war vergleichsweise leichter messbar, da nur der Spin des 5s-Elektrons magnetisch relevant ist. Nichts desto trotz war jedoch das Experiment äußerst anspruchsvoll, eine

⁷⁶ Walther Gerlach, Otto Stern: Der experimentelle Nachweis der Richtungsquantelung im Magnetfeld. In: Zeitschrift für Physik. Band 9, 1922, S. 349–35

Sternstunde experimenteller Physik und im Jahr 1922 eine wichtige Bestätigung der neuen Quantentheorie.

Michelson-Morley Experiment

Wenige Experimente in der Geschichte der Physik haben so drastisch ein allgemein akzeptiertes Naturverständnis in Frage gestellt. Wellen waren nur in Verbindung mit einem Medium denkbar: Wasserwellen, Erdbeben, Schall konnten als Schwingungen von Wasser, Erde und Luft verstanden werden. Das gleiche nahm man als selbstverständlich auch für das Licht an. Dabei waren die

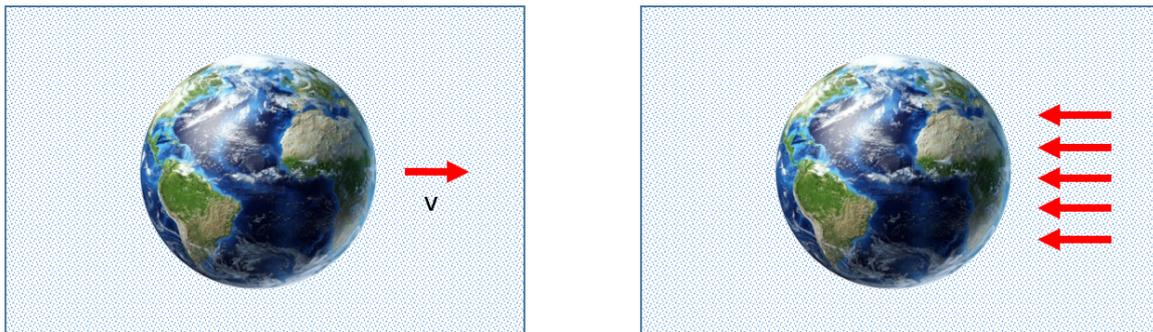


Abb. 41: Bewegung der Erde durch den hypothetischen Äther (links) müsste einen entgegengesetzten Ätherwind erzeugen.

Belege für den Wellencharakter des Lichts so überzeugend, dass Befürworter des Teilchencharakters überstimmt wurden. Das hypothetische Medium für die Ausbreitung von Lichtwellen nannte man „Äther“, manchmal auch Quintessenz,

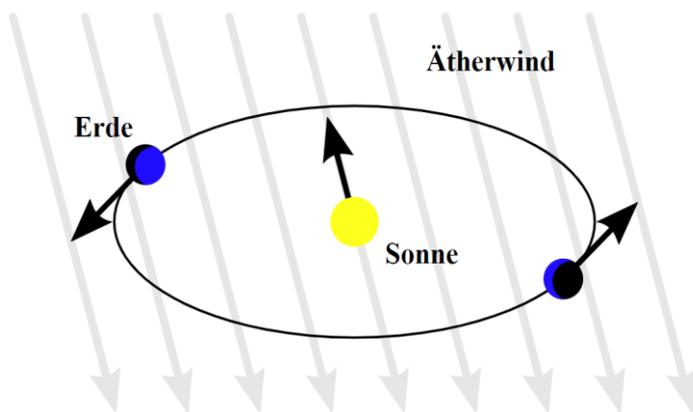


Abb. 42: Wenn der Äther das Medium für elektromagnetische Wellen wäre, müsste sich die Eigenbewegung von Erde und Sonne nachweisen lassen.

nach dem 5. Element von Aristoteles (von mittellateinisch quinta essentia, „das fünfte Seiende“). Später wurde das Konzept auch auf allgemeine elektromagnetische Wellen und auf die Gravitation übertragen.⁷⁷ Man wollte dadurch eine Fernwirkung vermeiden. Doch je mehr man über Phänomene des

⁷⁷ Bildquelle Abb. 42:

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/1/16/Ätherwind.svg>

Abb. 41 und 43 analog <http://www.twintech.ch/aruh/papers/Relativitaet.pdf>

Lichts wusste, umso mehr Eigenschaften musste man dem Äther zubilligen, die sich teilweise erheblich widersprachen. Heinrich Hertz, der 1888 die von Maxwell postulierte endliche Ausbreitungsgeschwindigkeit von elektromagnetischen Wellen nachwies, brachte die damalige Lehrmeinung auf den Punkt:

„Nehmt aus der Welt die Elektrizität, und das Licht verschwindet; nehmt aus der Welt den lichttragenden Äther, und die elektrischen und magnetischen Kräfte können nicht mehr den Raum überschreiten.“⁷⁸

Trotz widersprechender Postulate über die Natur des Äthers, waren sich die meisten Gelehrten einig, dass der Äther ruhen müsse und sich die Materie durch den Äther bewegt und dadurch einen Widerstand spüren muss. Der wichtigste Grund ist die Aberration des Lichts α , das man aufgrund der Orbitalgeschwindigkeit der Erde v_{Erde} von ca. 30 km/s von den Sternen beobachten und messen kann und das besonders bei der Bewegung des Beobachters/Erde senkrecht zur Lichtausbreitung sich auswirkt.

$$\sin \alpha_{max} = \frac{v_{Erde}}{c} = \frac{3 \cdot 10^4 \frac{m}{s}}{3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}}$$
$$\alpha_{max} = 20,48''$$

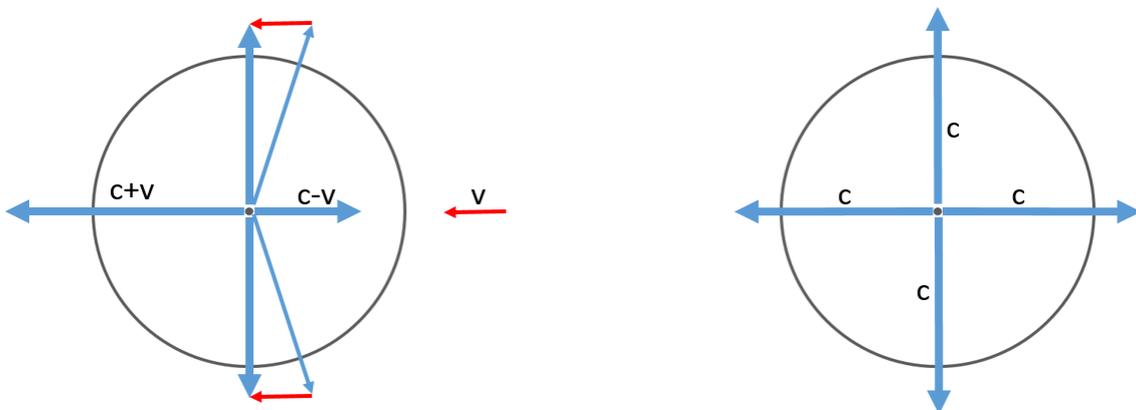


Abb. 43: Das erwartete Resultat des Experimentes war, dass sich die Lichtgeschwindigkeit c je nach Bewegungsrichtung der Erde verändert (links). Das gemessene Resultat ergab, dass die Lichtgeschwindigkeit c in allen Richtungen gleich ist (rechts).

Es wirkt sich als eine scheinbare kleine Ortsveränderung $\alpha_{max} = 20,48''$ im Laufe eines Jahres aus. Ein ganz minimaler Effekt kann auch durch die Erdrotation entstehen. Der Wert hat praktisch in der Astronomie den Charakter einer Konstante. Die Gestirne scheinen gegenüber dem astronomischen

⁷⁸ Zitiert nach [https://de.wikipedia.org/wiki/Äther_\(Physik\)](https://de.wikipedia.org/wiki/Äther_(Physik))

Koordinatensystem eine kleine Ellipse zu beschreiben. Ein Fernrohr muss also im Laufe eines Jahres immer leicht angepasst werden, so wie bei schnellem Lauf auch bei senkrecht fallendem Regen der Regenschirm je nach Geschwindigkeit nach vorne geneigt werden muss. Bei einem ruhenden Äther, der konform zu diesen bekannten Messungen zur Aberration sich verhält, müsste sich eine Relativgeschwindigkeit der Erde zum Äther nachweisen lassen. Das war das Ziel des Michelson-Morley-Experiments. Die Messung erfolgte mittels eines hochgenauen Interferometers, wobei die Messeinrichtung auf eine Steinplatte montiert war, die auf einem Quecksilbersee schwamm. So konnte man die Apparatur praktisch ohne Erschütterungen drehen.

Dabei wird die Geschwindigkeit des Lichtes einmal in Bewegungsrichtung der Erde und einmal senkrecht dazu ermittelt und nicht in absoluten Werten gemessen, sondern miteinander mittels Interferenz verglichen. Das Licht, das in Richtung der Erdbewegung zur Verstärkung des Effekts mehrfach reflektiert wird, müsste langsamer sein, als das, das senkrecht zwischen den Spiegeln läuft.

Michelson und Morley konnten trotz hoher Messgenauigkeit und minimalen Fehlertoleranzen keine Laufzeitunterschiede feststellen. Dieses Nullergebnis war ein wesentliches Argument für Einstein, die Existenz des Äthers abzulehnen und über das Postulat einer in alle Richtungen konstanten Lichtgeschwindigkeit seine Relativitätstheorie aufzustellen.

Äquivalenz von Masse und Energie: $E=mc^2$

Albert Einsteins Veröffentlichung, die später „Spezielle Relativitätstheorie“ genannt wurde, erschien in den Annalen der Physik und Chemie, Jg. 17, 1905, S. 891–921 unter dem Titel „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“. Sein Nachtrag, „Ist die Trägheit eines Körpers von dessen Energieinhalt abhängig?“, ist im September 1905 eingereicht worden und im November erschienen. Darin taucht die wohl berühmteste Formel der Physikgeschichte auf: $E=m \cdot c^2$. Genauer: Die Ruheenergie E_{Ruhe} ist äquivalent zur Ruhemasse m_{Ruhe} . c ist die Lichtgeschwindigkeit. Die Formel beschreibt somit die Äquivalenz von Masse und Energie. Schon andere Forscher, wie Poincaré, waren auf ähnliche Ergebnisse in Verbindung mit elektromagnetischer Strahlung gekommen. Einsteins Verdienst ist vor allem die Verallgemeinerung auf alle Energieformen. Streng genommen taucht diese berühmte Formel in der Veröffentlichung von 1905 gar nicht in dieser Form auf, (Einstein nannte z.B. c noch V) und wird erst in moderner Notation so ausgedrückt.

Die Beziehung gilt, teilweise zu stark verkürzt oder gar falsch angewendet, vor allem als Schlüssel für Kernreaktionen und damit der Atombombe. Aber sie betrifft auch alle anderen Prozesse, bei denen Energie benötigt oder freigesetzt wird.

Ein Beispiel ist der Massenverlust bei der Knallgasreaktion.



Bei der Knallgas-Reaktion von molaren Mengen Wasserstoff und Sauerstoff zu Wassermolekülen wird eine Energie von $571,6 \text{ kJ} = 5,716 \cdot 10^5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}$ frei. (Es entstehen 2 Mol Wasser).

Pro Mol des entstehenden Wassers (ca. 18 g) ändert sich die Enthalpie H somit um -286 kJ/Mol . Der Massenverlust Δm durch Umwandlung von Masse in Energie (genauer: Δm bzgl. dem Äquivalent zu ΔH) beträgt somit

$$\Delta m = \frac{2,86 \cdot 10^5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2}}{9 \cdot 10^{16} \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}} = 3,178 \cdot 10^{-12} \text{ kg oder } 3,178 \cdot 10^{-9} \text{ g}$$

Teilt man durch die Avogadro-Zahl $6,02214086 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$, erhält man den Massenverlust pro H_2O -Molekül bezogen auf die Summe von H_2 und O .

In der Praxis ist diese Größenordnung im Nano-Bereich kaum messbar. Ähnliche Werte erhält man bei Laden bzw. Entladen von Autobatterien.

Erst bei Kernprozessen erhält man größere Werte.

So wandelte die erste im 2. Weltkrieg eingesetzte Atombombe ca. 1 Gramm Materie durch den Zerfall von Uran-235 in Energie um (Fission). Genauer: Die Anzahl an Protonen, Neutronen und Elektronen war zwar vor und nach der Explosion gleich. Aber die Masse der Kerne war vor der Explosion größer.

Beeindruckend sind die Werte bei Prozessen in der Sonne (Fusion). Im Kern der Sonne herrschen Temperaturen von ca. 15 Millionen Grad Celsius. In einem Fusionsprozess wird Wasserstoff zu Helium umgesetzt.

Die Sonne fusioniert pro Sekunde 564 Millionen Tonnen Wasserstoff zu 559,7 Millionen Tonnen Helium. Die Massendifferenz von 4,3 Millionen Tonnen pro Sekunde ist die Energiemenge, die die Sonne abstrahlt.⁷⁹ Auch hier bleibt die Summe der einzelnen Elementarteilchen (Baryonen, Elektronen) gleich. Erst bei der Vernichtung (Annihilation) oder Erzeugung von Materie, z.B. die einer Elektron-Positron Umwandlung in zwei Gammaquanten und umgekehrt, kann man von einer direkten Umwandlung von Materie in Energie und vice versa sprechen.

Heisenbergsche Unschärferelation

In der makroskopischen Welt sind die meisten Werte unabhängig voneinander im Rahmen der Genauigkeit unserer Instrumente genau messbar. In der mikroskopischen Welt der Quantenteilchen ist dies bei sogenannten komplementären Eigenschaften eines Teilchens nicht möglich. Die

⁷⁹ Quelle der Zahlen: <https://www.live-counter.com/sonne>

Heisenbergsche Unschärferelation sagt etwas über den Grad an Messbarkeit solcher Eigenschaften aus. So sind Ort und Impuls nicht gleichzeitig beliebig genau bestimmbar. Gleiches gilt für die Bestimmung der Energie zu einem bestimmten Zeitpunkt.^{80,81}

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}, \text{ wobei } \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

h ist das Plancksche Wirkungsquantum $6,62607015 \cdot 10^{-34}$ J·s

Heisenberg verwendet in der ersten Version bei aller Sorgfalt, mit der er Grundbegriffe, wie Ort, Geschwindigkeit, Energie, Impuls etc. definiert, einen eher heuristischen Weg, um seine berühmte Ungleichung abzuschätzen. Wenn man ein Teilchen „sehen“ will, muss es von mindestens einem Photon getroffen werden und je nach Frequenz des Lichts einen mehr oder weniger starken, aber nicht vernachlässigbaren Impuls erfahren haben.

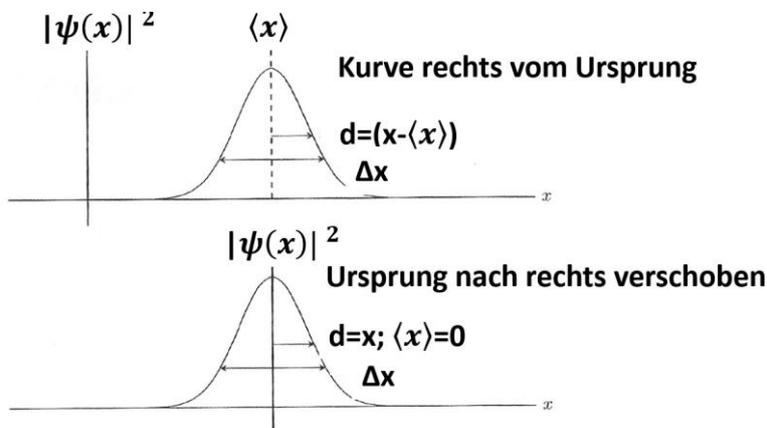


Abb. 44: Grundlagen der Unbestimmtheit

Heute kann man die Grundlagen der Unbestimmtheit mathematisch exakt bestimmen und z.B. grafisch darstellen. Die Unbestimmtheit Δx ist ein Maß dafür, wie der Funktionsgraph im Verhältnis zum Erwartungswert $\langle x \rangle$ auseinander gezogen

ist. Ein Abstand d bezeichnet die Abweichung eines Punktes vom Erwartungswert $\langle x \rangle$ und kann negative oder positive Werte annehmen. Damit sich die Werte nicht gegenseitig aufheben, werden die Quadrate von d genommen. Durch die Verschiebung des Ursprungs fallen „Wahrscheinlichkeitswerte des Ortes“ $|\psi(x)|^2$ mit dem Erwartungswert $\langle x \rangle$ zusammen.⁸²

Diese Einschränkungen sind nur für die Quantenebene wichtig. Folgende Modellrechnung soll dies demonstrieren.

⁸⁰ W. Heisenberg: Über den anschaulichen Inhalt der quantentheoretischen Kinematik und Mechanik. In: Zeitschrift für Physik. Band 43, Nr. 3, 1927, S. 172–198

⁸¹ Die Originalarbeit ist als Faksimile verfügbar unter folg. Link. Das Original befand sich im Besitz von Linus Pauling und trägt die handschriftliche Bemerkung „Given to me in Göttingen by Born.“

<http://osulibrary.oregonstate.edu/specialcollections/coll/pauling/bond/papers/corr155.1-05.html>

⁸² Grafik und Argumentation: Leonhard Susskind, Art Friedman, Quantenmechanik – Das theoretische Minimum, Springer, Berlin 2020, S. 177

Bei einer Radarkontrolle kann man ein Fahrzeug bis auf plus/minus einen Meter genau lokalisieren, d.h. $\Delta x = 2\text{m}$. Der Messfehler bei der Geschwindigkeit beträgt $\Delta v = 1\text{ km/h} = 1000\text{m}/3600\text{s} \approx 0,3\text{m/s}$. Die Masse eines PKW sei $m = 1\text{t} = 1000\text{ kg}$.

Die Impulsunschärfe errechnet sich somit zu $\Delta p = m \cdot \Delta v = 300 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$

Es ergibt sich für $\Delta x \cdot \Delta p = 9 \cdot 10^{35} \cdot h$, wobei h das oben erwähnte Plancksche Wirkungsquantum in der Größenordnung 10^{-34} ist.

Man müsste schon die Genauigkeit von Δx und Δp um jeweils 18 Größenordnungen (10^{36}) steigern, dass sich die Heisenbergsche Unschärferelation in dieser Alltagssituation einschränkend bemerkbar macht.

Die Bellsche Ungleichung

Zu den berühmtesten wissenschaftlichen Streitthemen gehört die freundschaftliche, aber erbitterte Auseinandersetzung zwischen Niels Bohr und Albert Einstein. In der populärwissenschaftlichen Literatur wird der Ausgang meist als Sieg von Bohr dargestellt und Einstein als jemand, der die Quantentheorie nicht ganz verstanden hat. Das wird dem Thema überhaupt nicht gerecht. Einstein hat sehr wohl die Quantenmechanik verstanden, denn schließlich hat er wesentliche Beiträge dazu geliefert. Die Frage war, ist die Quantentheorie komplett und deshalb auch nicht-lokal oder hat sie „verborgene Variablen“. Einstein konnte nicht akzeptieren, dass man das Prinzip der Lokalität aufgeben sollte. Dass die Messung von räumlich weit entfernten, verschränkten Teilchen instantane Auswirkungen trotz beliebig großer Distanz haben soll, hat Einstein als „spukhafte Fernwirkung“ bezeichnet. Dazu kamen etwas esoterische Interpretationen des sogenannten Messproblems durch die „Kopenhagener Deutung“ der Quantentheorie. „Messung“ wurde von einigen Physikern und Philosophen als bewusste Beobachtung interpretiert, also von Beobachtern, die mit „Bewusstsein“ ausgestattet sind. Die Existenz von Teilchen außerhalb eines Messprozesses wurde zudem infrage gestellt. Auch heute wird der „Kollaps der Wellenfunktion“ von manchen als willkürlich und unstetigen Prozess in der Natur angesehen, der dem Grundsatz seit Aristoteles, Leibniz oder Newton, *Natura non facit saltus* (Die Natur macht keine Sprünge), widerspricht. Lange Zeit war aber die Diskussion darüber verpönt. Junge Wissenschaftler wurden diszipliniert („shut up and calculate“, N. David Mermin); Forschungsgelder dazu nicht bewilligt.

Dabei blieb bei allen Forscherinnen und Forschern die Mathematik und ihre Voraussagen unbestritten. Die Quantentheorie ist diesbezüglich eine der genauesten physikalischen Theorien. Aber Interpretation und philosophische Grundlagen sind bis heute umstritten. Einstein und Bohr liefern sich dazu

Wortgefechte, die eine Debatte unter Riesen der Physikgeschichte genannt werden kann. Die Dialoge von Einstein und Bohr sind berühmt geworden.⁸³ Einstein hat die entscheidenden Grundsatzfragen in einem Artikel gemeinsam mit Boris Podolsky und Nathan Rosen erörtert, der als EPR-Paradoxon bekannt wurde.⁸⁴ In einem Gedankenexperiment wurde herausgearbeitet, dass die Quantenmechanik entweder nichtlokal oder unvollständig ist. Grundgedanke ist der *lokale Realismus* – ein von Einstein geprägter Begriff. Die Autoren machten keinen Hehl daraus, dass sie den lokalen Realismus als physikalisches Grundprinzip ansahen. Podolsky hatte voreilig der Presse mitgeteilt, sie hätten die Quantenmechanik damit widerlegt. Die *New York Times* brachte dazu eine Titelgeschichte. Einstein protestierte bei der Zeitung und soll nie mehr ein Wort mit Podolsky gewechselt haben.⁸⁵

Mittlerweile wurde in Experimenten unzweifelhaft die Nichtlokalität bestätigt. Aber gibt es „verborgene Variablen“? *Der lokal-realistische Standpunkt der klassischen Physik zwingt den Teilchen individuelle Eigenschaften auf, die ihr eigenes Verhalten bei Messungen steuern und damit den quantenmechanischen Zufall vortäuschen.*⁸⁶ Dies wären diese verborgenen Variablen. Einstein lehnte auch den nicht-deterministischen Aspekt und die Rolle des Zufalls in der Quantentheorie ab, was gerne plakativ als „*Gott würfelt nicht*“ ungenau zitiert wird.⁸⁷

Die entscheidende, physikalisch überprüfbare und somit messtechnisch verifizierbare Nagelprobe in Form eines Gedankenexperiments lieferte der nordirische Physiker John Bell im Jahr 1964.

Die Bellsche Ungleichung besagt, dass im klassischen Sinne eine Theorie dann realistisch ist, wenn das Ergebnis von Messungen von vorne herein feststeht. Jede klassische Theorie hat diese Eigenschaft. Sie ist deterministisch, der Zufall hat keinen Platz und ein Ereignis kann höchstens mit Lichtgeschwindigkeit (gemäß der speziellen Relativitätstheorie raumartig) Einfluss auf ein anderes System haben. Dann ist die Ungleichung erfüllt. Wenn die Theorie aber nicht-lokal ist, also Zustände z.B. von Teilchen korreliert und damit nicht zufällig sind, so ist diese Theorie nicht-klassisch, nicht-lokal. Sie verletzt die Ungleichung.

⁸³ Siehe Niels Bohr (1949), *Discussions with Einstein on Epistemological Problems in Atomic Physics*, Text online bei: <https://www.marxists.org/reference/subject/philosophy/works/dk/bohr.htm>

Bekanntes Beispiel: „Sie werden doch nicht behaupten wollen, dass der Mond nicht da oben ist, wenn niemand hinsieht?“ ... „Können Sie mir das Gegenteil beweisen?“

⁸⁴ A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?*, *Phys. Rev.* 47 (1935), S. 777–780 doi:10.1103/PhysRev.47.777

⁸⁵ Sean Carroll, *Was ist die Welt und wenn ja, wie viele*, Klett-Cotta, 2021, S. 121

⁸⁶ Formulierung nach https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Ungleichung

⁸⁷ Genaues Zitat und Quelle siehe: https://de.wikipedia.org/wiki/Gott_würfelt_nicht

Die Bellsche Ungleichung definiert somit ein Kriterium, mit dem klassische Physik von nicht-klassischer Physik nachweislich und messbar unterschieden werden kann.

Experimente und Messungen zuerst an verschränkten Photonenpaaren lieferten dann 1972 die Antwort und wurden mittlerweile vielfach bestätigt. Da die Messung von Quantenteilchen nie vollständig ist (Photonendetektoren registrieren oft nur 5%), die Messeinrichtungen streng getrennt sein müssen und die räumliche Trennung kein Signalaustausch in Lichtgeschwindigkeit oder Unterlichtgeschwindigkeit zulassen darf, so müssen eine Reihe von möglichen

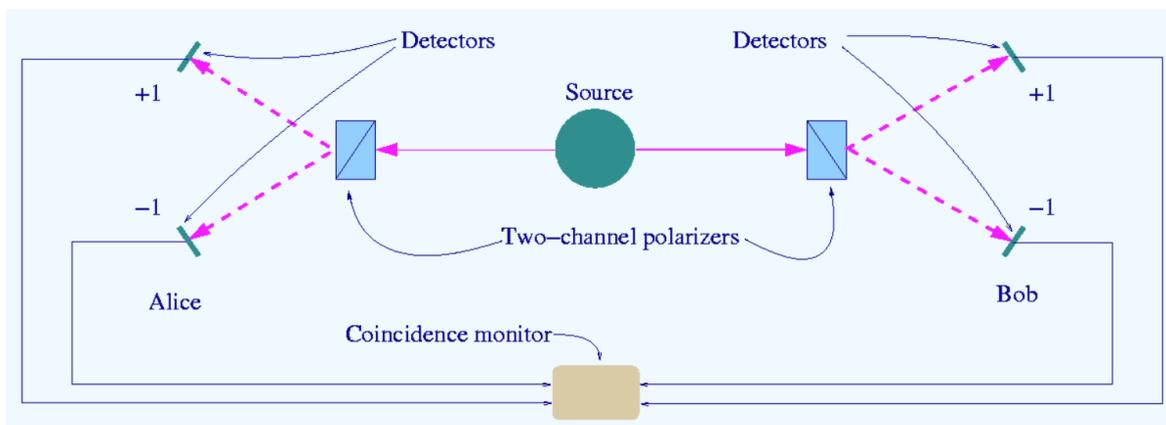


Abb. 45: Schema des Bell-Tests: Die Quelle (Source) erzeugt ein verschränktes Photonenpaar. Die beiden Photonen interagieren jeweils mit einem Filter und passieren entweder den Filter oder werden reflektiert. Anschließend wird bei beiden Photonen detektiert, ob sie den Filter passiert haben oder reflektiert wurden. (Quelle von Grafik und Text: https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Ungleichung#/media/Datei:Bell-test-photon-analyser.png)

„Schlupflöchern“ in den Experimenten geschlossen werden. Dies ist mittlerweile bei zahlreichen Beispielexperimenten gelungen.⁸⁸

Die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante α

1916 hat der Münchner Physiker Arnold Sommerfeld die Feinstrukturkonstante eingeführt, die heute seinen Namen trägt.⁸⁹ Grundlage war die relativistische Behandlung der Feinstruktur von Atomspektren. Sie ist eine dimensionslose

⁸⁸ Siehe z.B. die Arbeitsgruppe von Anton Zeilinger in Wien oder die Ergebnisse von Alain Aspect (https://de.wikipedia.org/wiki/Anton_Zeilinger, https://de.wikipedia.org/wiki/Alain_Aspect).

⁸⁹ Sommerfeld hatte eine außergewöhnliche Karriere als Forscher und Lehrer. Eine ganze Reihe von späteren Nobelpreisträgern hat bei ihm promoviert. Er selbst wurde 81-mal für den Nobelpreis vorgeschlagen, hat ihn aber nie bekommen.

Zahl, die in der Literatur immer α genannt wird. Sie ist ein Maß für die elektromagnetische Stärke, die auf der Kopplung geladener Teilchen durch Photonen beruht. Im Prinzip ist sie das Verhältnis zwischen der Coulomb-Energie der Wechselwirkung von zwei elektrischen Ladungen im Abstand r mit einem Photon als Austauscheteilchen der Wellenlänge $\lambda = 2\pi r$. Analog ist es im Rahmen des Bohrschen Atommodells möglich, das Verhältnis der Umlaufgeschwindigkeit des Elektrons im Grundzustand des Wasserstoffatoms zur Lichtgeschwindigkeit ins Verhältnis zu setzen. Sie hat den Wert

$$\alpha = 7,297\ 352\ 569(11) \cdot 10^{-3} \approx \frac{1}{137,035\ 999084(21)}$$

In Naturkonstanten ausgedrückt, ergibt sich

$$\alpha = \frac{1}{2c\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar} = \frac{1}{4\pi c\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{\hbar}$$

Dabei ist c die Lichtgeschwindigkeit, ϵ_0 die elektrische Feldkonstante, e die Elementarladung, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ die gängige Formulierung für das Plancksche Wirkungsquantum.

Ob sich die Feinstrukturkonstante ändert, ist von erheblichem theoretischen Interesse für Physik und vor allem Kosmologie.

Modellrechnungen und Überlegungen zeigen, dass selbst kleinste Änderungen von α die Entstehung von Leben unwahrscheinlich gemacht hätten. α ist also optimal austariert. Es hat sich eine Philosophie herausgebildet, die als anthropisches Prinzip bezeichnet wird. Die Tatsache, dass menschliche Wesen entstehen konnten, die in der Lage sind, das Universum zu beobachten, schafft erst die geringen Spielräume für die Konstanten. Die Feinstrukturkonstante wurde regelrecht zum Synonym für die Feinabstimmung der Naturkonstanten. Sie dient deshalb auch manchen Autoren als Gottesbeweis, weil a priori unwahrscheinliche kosmische Rahmenbedingungen durch die gegebene Kombination der Naturkonstanten nötig sind, um Leben zu ermöglichen.⁹⁰

Urknall

Am 9. Mai 1931 erschien in Nature ein Artikel von George Edouard Lemaître mit dem Titel „*The Beginning of the World from the Point of View of Quantum Theory.*“ Der Beitrag war gerade mal gut 50 Zeilen in einer Spalte der zweiseitigen Nature-Ausgabe lang. Bemerkenswerterweise war Lemaître ein katholischer Priester, der sich mit Astrophysik beschäftigte.

⁹⁰ Siehe z.B. <https://www.ag-evolutionsbiologie.net/html/2015/widenmeyer-welt-ohne-gott-kritik-naturalismus-teil-3.html>

1915 publizierte Einstein seine Feldgleichungen zur Allgemeinen Relativitätstheorie. Eine Lösung eines expandierenden Universums entwickelte 1922 Alexander Friedmann. Lemaître kam unabhängig zu den Friedmann-Lösungen und entwickelte sie weiter. Einen experimentellen Hinweis lieferte Edwin Hubble 1929. Er konzentrierte sich auf Cepheiden, also Sterne in Galaxien außerhalb der Milchstraße, deren Leuchtkraft periodisch schwankt und er konnte sie als „Standardkerzen“ für die Entfernungsmessungen ihrer Heimatgalaxien mittels Dopplereffekt nutzen. Er entdeckte, dass sich im Prinzip alle so vermessenen Galaxien von uns wegbewegen. Das konnte man mit einer

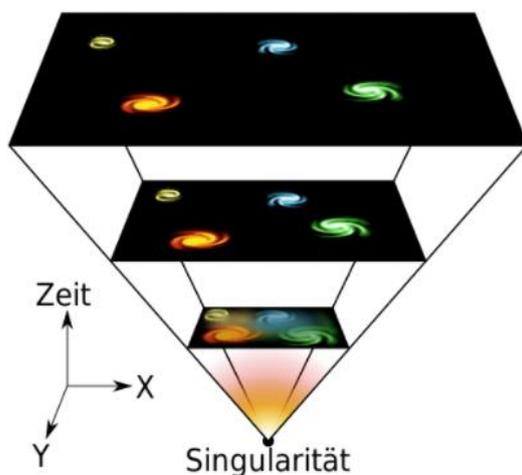


Abb. 46: Urknallmodell: Entstehung des Universums aus einer Singularität.

Expansion des Raumes erklären. Es gab zu dieser Zeit allerdings heftige Gegner dieses kosmologischen Konzepts. Einstein gehörte anfangs dazu, der angesehene Astrophysiker Fred Hoyle war Meinungsführer und mit dem Begriff „Big Bang“ verspottete er das Urknallmodell. 1935 konnten Howard P. Robertson und Arthur Geoffrey Walker beweisen, dass nur dieses Modell mit Theorie und Praxis in Einklang zu bringen ist.

Es macht physikalisch und mathematisch keinen Sinn, theoretische Überlegungen zum Zeitpunkt Null zu beginnen, sondern der Beginn liegt bei der Planck-Zeit bei etwa 10^{-43} Sekunden. Heute geht man spekulativ davon aus, dass die vier Grundkräfte vereint waren und sich erst unmittelbar darauf die Gravitation in einer Symmetriebrechung abspaltete. Beschleunigerexperimente deuten darauf hin, dass bei einer Energie von etwa $2 \cdot 10^{16}$ GeV die verbleibenden Grundkräfte, elektromagnetische, starke und schwache Kernkraft, nicht zu unterscheiden waren.

Die große Homogenität des Weltalls auf großen Skalen erklärt man mit einer kosmischen Inflationsphase. 10^{-35} bis 10^{-32} Sekunden nach dem Urknall soll sich das All um einen Faktor zwischen 10^{30} und 10^{50} vergrößert haben. Dabei hat sich der Raum selber überlichtschnell ausgedehnt, was die Relativitätstheorie zulässt, da sie Bewegung schneller als das Licht nur im Raum verbietet. Es bildeten sich in rascher Folge Elementarteilchen. Bis etwa drei Minuten nach dem Urknall dauerte dann die Kernfusion von Wasserstoffkernen (Protonen) zu Heliumkernen. Es bildete sich ca. 25% ${}^4\text{He}$, sowie geringe Mengen Deuterium (${}^2_1\text{H}$), ${}^3_2\text{He}$, Lithium und Beryllium.

Mitte der 70-er Jahre hatte man die wichtigsten Elementarteilchen in Beschleunigerexperimenten gefunden und die Theorie in Form z.B. der Quantenelektrodynamik und Quantenchromodynamik verstanden. 1977 veröffentlichte Steven Weinberg sein berühmtes Buch „*The First Three Minutes: A Modern View of the Origin of the Universe*“.

Nach Ende der Nukleosynthese folgte eine kontinuierliche Abkühlung des Universums, bis etwa nach 380.000 Jahren die Temperatur soweit abgefallen war, dass sich aus dem Plasma neutrale Wasserstoff-Atome und Helium-Atome bildeten. Dies machte das junge All durchsichtig – Materie trennte sich von Strahlung. Die Strahlung aus dieser Phase ist heute noch sichtbar, allerdings durch die Ausdehnung des Raumes auf ca. 2,7 K im Mikrowellenbereich abgekühlt. Die winzigen Schwankungen dieser kosmischen Hintergrundstrahlung konnten sehr genau vermessen werden und liefern uns wertvolle Hinweise, wie sich aus ersten kleinen, quantenmechanisch erklärbaren Dichteschwankungen schließlich Strukturen bis hin zu Galaxien und Galaxienhaufen bilden konnten.

Ein rätselhaftes Phänomen der Feinabstimmung verbirgt sich hinter dem Begriff „Flachheitsproblem“.⁹¹ Der Krümmungsparameter k bestimmt die Krümmung des Universums, also die Frage, ob es flach ($k=0$), sattelförmig/hyperbolisch und dadurch offen ist ($k<0$) oder sphärisch, also geschlossen ist ($k>0$).

Der Krümmungsparameter k der Raumzeit wird gemäß der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) durch ihre Äquivalenz sowohl von Materie als auch von Energie beeinflusst („ $E=mc^2$ “) und hängt vom Verhältnis der tatsächlichen Dichte ρ zum kritischen Wert ρ_0 ab. Man setzt $\frac{\rho}{\rho_0} = \Omega$.

Um k abzuschätzen, benötigt man

H (Hubble-Parameter), also die Ausdehnungsrate des Universums

G (Gravitationskonstante)

ρ (Gesamtdichte Materie und Energie)

c (Lichtgeschwindigkeit) und

a (Skalenfaktor zur Bestimmung der Größe des Universums)

Grundlage der Rechnung ist die erste, aus der ART abgeleitete Friedmann-Gleichung (ohne kosmologische Konstante Λ):

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{kc^2}{a^2} \Leftrightarrow$$

$$k = \frac{a^2}{c^2} \left(\frac{8\pi G}{3} \rho - H^2 \right)$$

⁹¹ Nach <https://de.wikipedia.org/wiki/Flachheitsproblem>

Man legt bei der Betrachtung das gängige kosmologische Modell Lambda CDM zugrunde, also berücksichtigt im Verhältnis, das durch Vermessung der 2,7 K Mikrowellen-Hintergrundstrahlung ermittelt wurde, gewöhnliche, baryonische Materie, „Dunkle Energie“ (wird trotz Friedmann-Gleichung gleichgesetzt mit der kosmologischen Konstante Λ , Lambda) und **Cold Dark Matter** („Dunkle Materie“).

Danach ist das heutige Universum nach ca. 13,81 Milliarden Jahren im Prinzip flach. Die kritische Dichte ρ_0 berechnet sich auf 10^{-26} kg m^3 .

Der heutige Wert von $\Omega = \frac{\rho}{\rho_0}$ bestimmt also die Krümmung des Universums.

Wichtig ist die Fehlertoleranz der aktuellen Messung des Dichteparameters Ω : der exakte Wert liegt heute irgendwo zwischen $0,99 \leq \Omega \leq 1,01$ und muss also in der (Rück)Rechnung mit maximalen $\pm 1\%$ Unsicherheit berücksichtigt werden. Bei der Expansion des Universums in den seit dem Urknall (genauer seit der Planck-Zeit) vergangenen $13,81 \pm 0,04$ Mrd. Jahren ergibt sich

$$\frac{|1 - \Omega|}{\Omega} < 10^{-58}$$

Mit unvorstellbarer Genauigkeit war also beim Zeitpunkt der Planck-Zeit die Dichte so feinabgestimmt, dass heute noch ein praktisch flaches Universum vorliegt.

Informationstheorie⁹²

Auch dieses Thema ist ein Grenzfall zwischen den Disziplinen. In einem System ist die Information H bzw. die Entropie S die minimale Menge an Information, um dessen Zustand vollständig charakterisieren zu können. Wird das System komplexer, erhöht sich der Informationsbedarf über das System und damit die Entropie. Information ist in der Informationstheorie eng verbunden mit Komplexität. Komplexität steht umgangssprachlich auch für Unübersichtlichkeit. Dies gilt auch in einer (zeitlichen) Entwicklung. Umso komplexer, umso weniger Information hat man nach einer gewissen Zeit über das System. Ein Teilbereich oder eine Komponente eines komplexen Systems ist nicht einem übergeordneten Regelwerk unterworfen, sondern folgt lokalen Regeln. Dies ist in der Thermodynamik auch der Fall. Selbst wenn der Ausgangszustand bekannt ist, so finden auf dieser lokalen Ebene ständig Vorgänge bzw. Übergänge statt. Diese folgen im Detail keiner Vorzugsrichtung, sind also

⁹² Siehe Kafitz, Willi, Entropie: wachsende Bedeutung in Naturwissenschaft und Informationstheorie: eine Übersicht in Beispielen, <http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2020/15768/>, Erstveröffentlichung 10.12.2020. Das vorliegende Kapitel „Informationstheorie“ ist ein gekürzter Auszug aus der genannten Publikation.

symmetrisch. Aber nach einer großen Zahl an zufälligen Übergängen geht



Abb. 47: Google-Doodle zum 100. Geburtstag von Claude Shannon (Jonglieren von Nullen und Einsen).

immer mehr Information über den Ausgangszustand verloren oder, umgekehrt formuliert, ist immer mehr Information erforderlich, um wieder die

ursprüngliche Ordnung zu beschreiben. Man spricht vom „random walk“, wenn z.B. ein Teilchen einen stochastischen, scheinbar vom „Zufall“⁹³ bestimmten Weg aus verketteten Einzelabschnitten zurücklegt. Das abgeschlossene System insgesamt wird in seinem Zustandsraum immer unbestimmter. Die Entropie nimmt mit großer Wahrscheinlichkeit zu.⁹⁴ Entropie in der Informationstheorie hat somit ebenfalls eine grundsätzliche Bedeutung. Information (in seiner gebräuchlichen Einheit Bit), Energie und Entropie können in einem engen Bezugsrahmen beschrieben werden (s.u.). Es war Claude Elwood Shannon, der die Informationstheorie auf eine mathematische Grundlage gestellt hat. Er hat dazu in seinen Denkmodellen den Computer als Maschine vorweggenommen, die eine Information in endlich vielen Schritten darstellen kann. Seine zentrale Definition ist das Bit als kleinste Informationseinheit – ein Begriff, der kaum in seiner Bedeutung überschätzt werden kann. Auch die Entropie, die vor ihm bisher nur in der Physik/Thermodynamik betrachtet wurde, bezog Shannon in seine Überlegungen ein.⁹⁵ Es gibt aber keine abstrakte Information, in dem Sinne, dass Information eine sozusagen geistige Substanz ist. Information benötigt

⁹³ „Nicht-Vorhersagbarkeit“ und „Zufall“ sind zwei verschiedene Dinge

⁹⁴ Hinrichsen rechnet am Beispiel von einem Mol Helium in einem Behälter bekannter Größe über typische Impulse bei Raumtemperatur das Phasenraumvolumen aus. Daraus kann man die Information in Bit abschätzen, die nötig ist, um den Quantenzustand eines einzelnen Teilchens zu kennen. Sie muss wegen der Ununterscheidbarkeit durch die Anzahl der möglichen Permutationen der Avogadro-Konstante bereinigt werden und beträgt ca. 22 Bit. Das ganze Mol Helium von ca. 22,4 Liter hat einen Informationsgehalt von $1,3 \cdot 10^{25}$ Bit. Das ist ca. 5.000 mal mehr, als die Speicherkapazität aller bislang produzierten Speichermedien. (https://www.physik.uni-wuerzburg.de/fileadmin/11030300/_imported/fileadmin/tp3/ThermoEDynamik/Entropie.pdf)

⁹⁵ Der Boltzmannsche Beweis umfasst 20 Druckseiten. Über die Informationstheorie lässt sich eine analoge Aussage, die dem 2. Hauptsatz der Thermodynamik entspricht, wesentlich leichter beweisen.

einen Informationsträger und somit immer einen Bezug zur physikalischen Welt. In diesem Sinne wurden die grundlegenden Prinzipien der Informationstheorie von Claude E. Shannon erarbeitet und die Entropie aus der Thermodynamik quantitativ analog in die Informationstheorie übertragen. Shannon verstand dabei Entropie als Maß an Komprimierbarkeit für Informationen, insbesondere zum Zwecke der Datenübertragung. Die Einheit des Informationsgehaltes wurde Claude Shannon zu Ehren „Shannon“ genannt. Ebenso geht die Shannonsche Entropie nicht ins Detail zu kleinsten Informationsobjekten, die sich mit einem Bit codieren lassen. Nur der durchschnittliche Informationsgehalt ist maßgeblich. D.h. wenn es eine normierbare Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(\underline{x})$ für einen Satz von Ordnungsparametern der Länge d gibt, so ist die Entropie H (nach Shannon) sozusagen die Menge an „Zufall“ oder besser „Unbestimmtheit“ im System. Die Analogie zur Thermodynamik wird besonders im Fall diskreter Variablen deutlich. Nummeriert man sie mit $i=1, 2, \dots, s$ und ordnet ihnen Wahrscheinlichkeiten p_i zu, so ist die Shannon-Entropie definiert als

$$H = - \sum_{i=1}^s p_i \ln p_i$$

Ebeling et.al. fassen die Überlegungen wie folgt zusammen: *Die statistische Entropie des Makrozustandes entspricht der Information, die notwendig ist, um den Mikrozustand aufzuklären. Je mehr Information über ein System vorliegt, umso bestimmter ist sein Zustand.*⁹⁶

Je größer die Unbestimmtheit, desto größer ist die Entropie. Sie ist ebenso wie in der Boltzmannschen Thermodynamik ein Ordnungsmaß, proportional zum Logarithmus der Zahl der möglichen Mikrozustände.

Da, wo die individuelle Komprimierbarkeit verlangt ist, ist dies unbefriedigend.

Diese Aufgabe löst die Kolmogorov-Komplexität. Sie wird oft algorithmische Komplexität oder, wegen des Bezugs zu Entropie, auch algorithmische Entropie genannt. Information lässt sich grundsätzlich binär codieren und im Prinzip auf eine binär codierte Zeichenkette reduzieren. Um diese darzustellen, ist ein Programm erforderlich, das die Position jedes Bits, also jeder 0 oder 1 in der Kette, im Detail berücksichtigt. Das kürzeste Programm definiert die Kolmogorov-Komplexität einer Information. Ist die (binäre) Zeichenkette vollkommen zufällig, lässt sich die Information nicht weiter komprimieren. Man kann es sich als geschickt gestellte Folge von Fragen vorstellen, die jeweils mit Ja oder Nein zu beantworten sind. Obwohl jede beliebige, endliche Zahlenfolge

⁹⁶ Ebeling, W. et.al., Komplexe Strukturen: Entropie und Information, B.G.Teubner, Stuttgart-Leipzig, 1998, S. 36f

in den Nachkommastellen der Kreiszahl Pi gefunden werden kann⁹⁷ und somit scheinbar „zufällig“ verteilt ist, ist Pi jedoch durch ein einfaches Programm darstellbar.⁹⁸

Leonhard Susskind kommt über informationstheoretische Überlegungen zu einer adäquaten Definition der Entropie: *Die Entropie ist ein Maß der Zahl von Anordnungen, die einem bestimmten erkennbaren Kriterium entsprechen.* Lautet das Kriterium, dass es (z.B.) 65 Bits gibt, so ist die Zahl der Anordnungen 2^{65} , siehe.⁹⁹

Klima und Komplexität

Der Nobelpreis für Physik im Jahr 2021 widmete sich einem der drängendsten

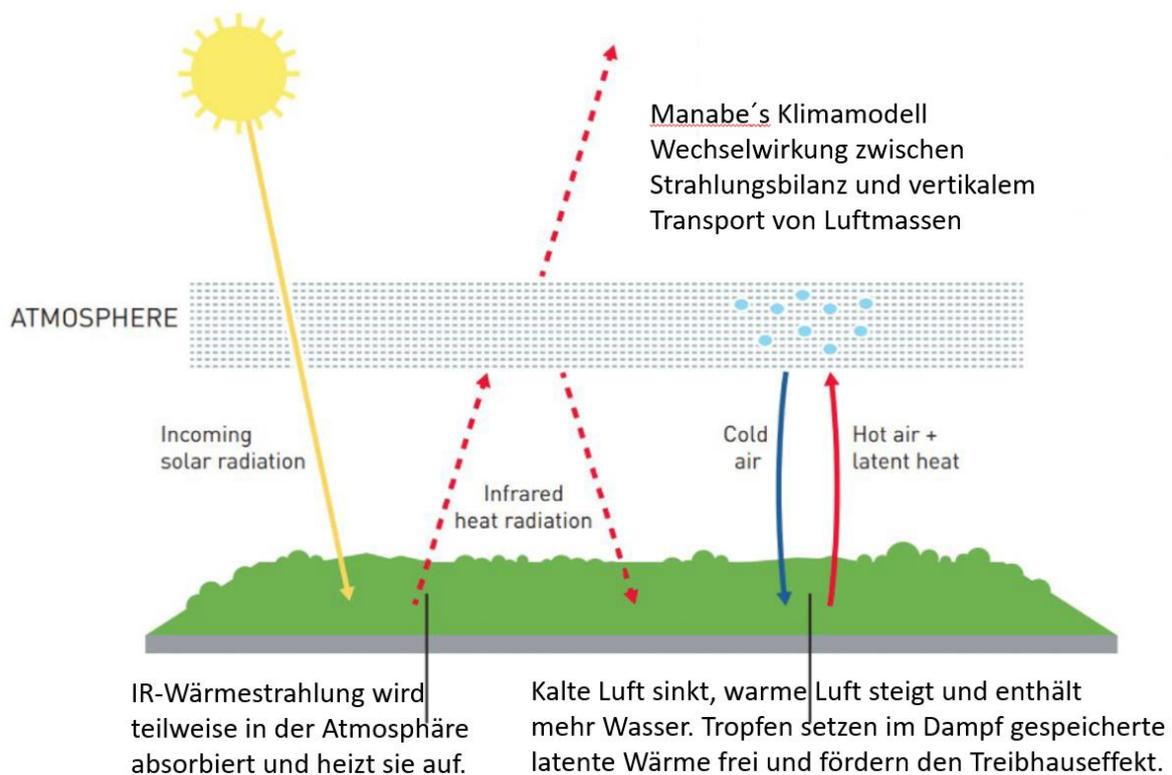


Abb. 48: Klimamodelle und Strahlungsbilanz

Probleme unserer Zeit: dem von Menschen gemachten Klimawandel. Wetter ist lediglich die lokale Ausprägung von Klima und beides erweist sich als hochkomplexes System, das einerseits die für chaotische Prozesse typische

⁹⁷ Man kann es z.B. mit dem Geburtsdatum ausprobieren: <http://www.angio.net/pi/>
Mein 8-stelliges Geburtsdatum kommt als Zahlenstring in den ersten 200 Millionen Nachkommastellen von Pi dreimal vor.

⁹⁸ <https://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalsystem#Dezimalbruchentwicklung>

⁹⁹ Susskind, Leonhard, Der Krieg um das Schwarze Loch, Suhrkamp 2010, S. 154

Sensibilität von den Anfangsbedingungen aufweist, aber andererseits klare Abhängigkeiten der Wechselbeziehungen erkennen lässt.¹⁰⁰

Der Preis geht zur Hälfte an Sykuro Manabe und Klaus Hasselmann für die Entwicklung von Klimamodellen und der Analyse von Klimadaten im Hinblick auf Gesetzmäßigkeiten und Bereinigung um allgemeine, natürliche Effekte.

Giorgio Parisi hat das Verständnis für chaotische, zufällige und stochastische Phänomene wesentlich erweitert und sie auf kleinen und großen Skalen intensiv untersucht.

Manabe zeigte, wie sensibel die CO₂-Konzentration die Temperatur in der unteren Atmosphäre beeinflusst und welche Konsequenzen dies auf Klimamodelle hat.

Hasselmann verknüpfte Wetter und Klima und entwarf ein Modell, das wechselhaftes und zufälliges Wettergeschehen trotzdem innerhalb eines Klimamodells erklärbar macht.

Parisi entdeckte verborgene Strukturen in scheinbar ungeordneten komplexen Systemen und Materialien. Seine Beiträge zur Theorie komplexer Systeme

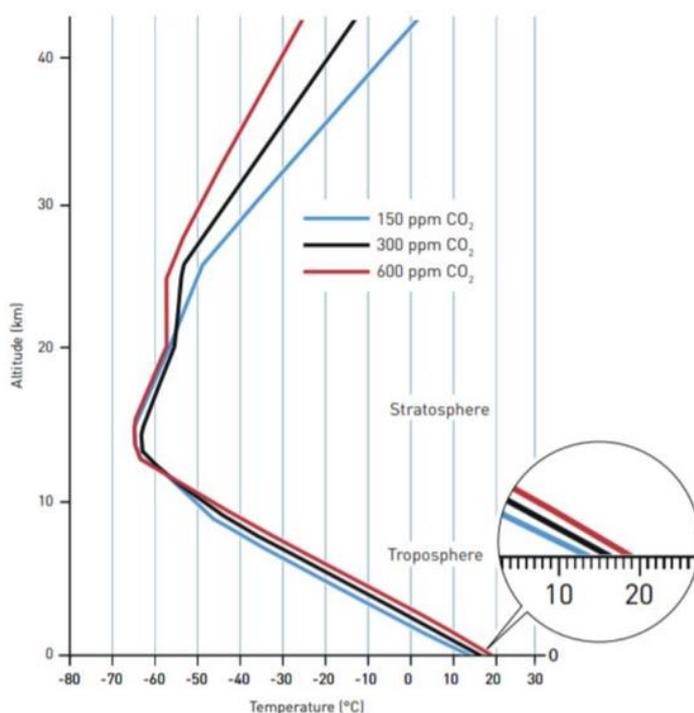


Abb. 49: Die Temperatur am Erdboden sinkt um 2,28 °C, wenn sich der CO₂-Gehalt halbiert. Sie steigt um 2,36 °C, wenn sich der CO₂-Gehalt verdoppelt.

lassen sich auf viele Phänomene

in unterschiedlichen

Disziplinen anwenden.

Grundlage aller Modelle ist

immer die Physik. Die

Datenbasis sind messbare

Parameter, also

meteorologische Größen wie

Temperatur, Niederschlag,

Wind oder Wolken. Die

Klimamodelle entstehen aus

dieser Datenbasis durch

statistische Methoden, wie

Durchschnittswerte oder

Standardabweichung.

Wetter selbst bleibt auf

mittlere Sicht

unvorhersehbar.

Konsequenzen für das Klima

sind jedoch klar erkennbar.

¹⁰⁰ Quelle der beiden Grafiken:

<https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/popular-information/>

Ergänzt durch eigene deutsche Texte

Biologie

Die Logistische Gleichung und das Chaos

Ein schon früh in der Biologie untersuchtes Phänomen ist mit der sogenannten logistischen Gleichung bzw. Abbildung verbunden. Vorreiter war der Belgier Pierre François Verhulst (1804-1849), der bereits 1840 dazu Ergebnisse publizierte. Es ging zunächst vordergründig um die Entwicklung von Tierpopulationen, ihrer Dynamik durch begrenzte Ressourcen im Nahrungsangebot oder im Verhältnis zu Fressfeinden. Später konnten wesentlich allgemeinere Szenarien modelliert werden. Man kann daran chaotische Vorgänge studieren und Übergänge bzw. Querbeziehungen zwischen Ordnung und Chaos analysieren. Mathematisch handelt es sich um Iterationen einer sehr einfachen quadratischen Gleichung. Man geht von einem Startwert x_0 bei gegebener Konstante k aus und ermittelt einen Wert x_1 , der wiederum als neuer Ausgangswert in die Abbildung eingeht, usw.

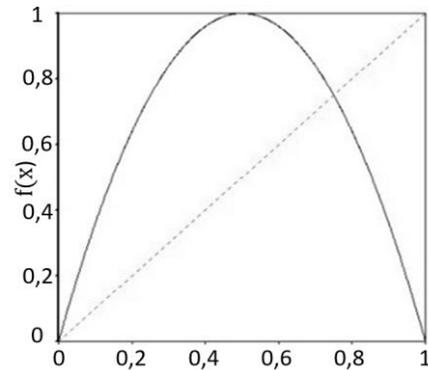


Abb. 50: Der einfache Graph der Logistischen Gleichung

In der Iterationsschreibweise:

$$x_{n+1} \rightarrow k \cdot x_n \cdot (1 - x_n), n \in \mathbb{N}$$

Als Funktionsgleichung geschrieben:

$$\begin{aligned} f(x) &= k \cdot x \cdot (1 - x) \\ &= -kx^2 + kx \end{aligned}$$

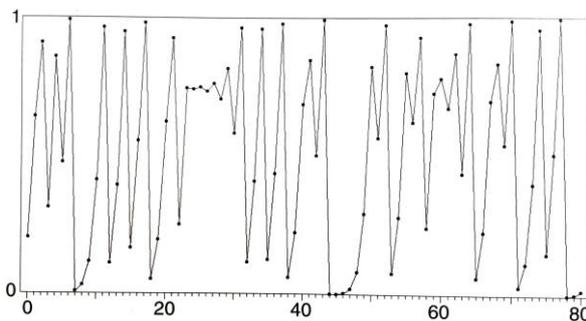


Abb. 51: Sensibilität von den Anfangsbedingungen

Man sieht, dass alle Werte zwischen 0 und 1 liegen. Parameter der Abbildung wurden von Verhulst mit Geburten- und Sterberaten bei gleichzeitig begrenzten Ressourcen für die Population assoziiert. Dabei fällt die extreme Sensibilität von den Anfangsbedingungen auf.

In Abb. 51 werden 80 Iterationen als Zeitreihe dargestellt.

$$x_{n+1} \rightarrow 4 \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$$

Der Startwert $x_0 = 0,2027$, die Konstante k wird $k=4$ gewählt. Schon ein anderer Startwert, der sich um 10^{-6} von $x_0 = 0,2027$ unterscheidet, das entspricht bei

Tierpopulationen einem Individuum unter einer Million, führt nach wenigen Iterationen zu einem vollkommen anderen Verlauf der Zeitreihe.¹⁰¹

Wählt man bei gleichem Startwert $x_0 = 0,2027$ für die Konstante $k=3,742718$, so ergibt sich ein anderes Bild der Zeitreihe. Es entsteht ein periodisches Verhalten.¹⁰²

Die Logistische Gleichung zeigt auf, wie nahe Ordnung und Chaos beisammen liegen können. Dabei gibt es drei grundsätzliche Möglichkeiten:

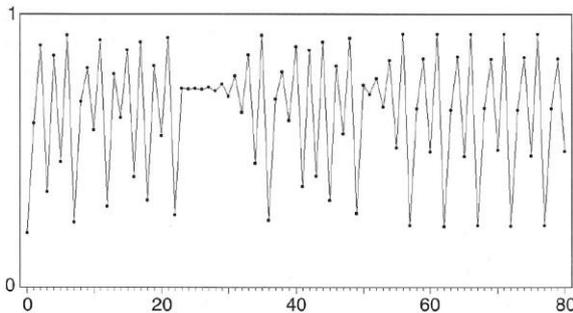


Abb. 52: Periodisches Verhalten bei anderer Konstante k

- 1) Die Zeitreihe der Iterationen verläuft chaotisch
- 2) Die Zeitreihe weist ein periodisches Verhalten auf
- 3) Die Werte nähern sich einem Fixpunkt

Dieses mathematische Verhalten zwischen Chaos und Ordnung existiert in äquivalenter Form auch in der Natur.

Fibonacci und die Sonnenblume: Mathematischer Erklärungsansatz¹⁰³

Der Goldene Schnitt findet sich in der Natur oft in seiner Entsprechung, der Teilung des Vollkreises im Verhältnis des Goldenen Schnittes. Es entsteht so der Goldene Winkel mit ca. 137,5 Grad. Offenbar ergeben sich in der Phyllotaxis dadurch Vorteile für eine Pflanze, z.B. in der Blattstellung, damit die Abdeckung der einzelnen Blätter untereinander so optimiert werden kann, dass das Sonnenlicht optimal genutzt wird. Weil bei endlich großen Abmessungen der Goldene Winkel immer nur angenähert werden kann, sind Quotienten aufeinanderfolgender Glieder der Fibonacci-Folge Mittel der Wahl, um Annäherungen an den Idealzustand zu erreichen. Natürlich finden sich auch Gegenbeispiele, aber bei einer Reihe von Bäumen, Kakteen oder Blüten finden sich Beispiele für eine entsprechende Phyllotaxis. Eine 2/5-Phyllotaxis findet sich bei Eiche, Apfelbaum und Aprikose. Eine 3/8-Phyllotaxis bei Pappel oder Birnbaum, 5/13-Phyllotaxis bei Weide und Mandelbaum.¹⁰⁴ *Echinopsis tubiflora*

¹⁰¹ Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S. 37

¹⁰² Peitgen et. al., S. 38

¹⁰³ Basis des Abschnitts ist die Erstveröffentlichung, Willi Kafitz, Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 66, Gießen 2016, S. 38 ff

¹⁰⁴ Beutelspacher, Albrecht; Petri, Bernhard; Der goldene Schnitt, Spektrum akademischer Verlag, Heidelberg – Berlin – Oxford, 1996, Seite 128

(Familie Cactaceae) bildet eine 5, 8 Spirale, Mammillaria huitzilopochtli (ebenfalls Cactaceae) sogar 13, 21 Spiralen. Ein ausgeprägtes Beispiel ist ein Korbblütler, die Marguerite bildet 21, 34 Spiralen aus.¹⁰⁵ Das beste Beispiel ist jedoch die Sonnenblume, die eine 34, 55 Spiralstruktur ausbildet. Dieser Sachverhalt soll genauer mathematisch analysiert werden.

Für diesen Ansatz, der auf Herbert Vogel zurückgeht^{106,107}, werden eine reife

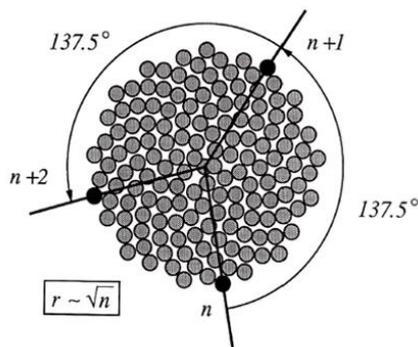


Abb. 53: 2-dimensionales Modell nach Herbert Vogel

Sonnenblume und ihre Fruchtanordnung so idealisiert, dass man auf dieser Basis rechnen kann. Ein Sonnenblumenkern wird als kreisförmig angenommen und der Radius wird 1 gesetzt. Der n-te Sonnenblumenkern hat dann einen Abstand \sqrt{n} von der Mitte. Die Gesamtanordnung der reifen Sonnenblume soll ebenfalls nahezu kreisförmig sein. Bei der Anordnung der Kerne werden zwar immer Leerräume bleiben, weil eine vollständige Parkettierung nicht möglich ist, trotzdem ist der Gesamtflächeninhalt aller Kerne zum

Flächeninhalt des idealisierten Kreises proportional. Damit kann man für eine beliebige, nur vom Winkel abhängige Packung, dem n-ten Sonnenblumenkern die Koordinatenposition

$$\begin{pmatrix} \omega_n \\ r_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \cdot \omega \\ \sqrt{n} \end{pmatrix}, \quad \text{wobei } \omega = 2\pi \cdot \varphi$$

zuordnen. Dazu ist das gesuchte ω das 2π -fache eines geeignet gewählten Winkels φ (siehe dazu ausführlicher die Literaturstelle Hellwig Heino; Phyllotaxis – Über Zahlen und Pflanzen, Skript der Humboldt-Universität zu Berlin). Der Flächeninhalt aller Kerne ist proportional zur Kreisfläche. Es geht darum, den optimalen Winkel bezogen auf den Vollkreis von 2π zu finden, so dass eine ideale Packungsdichte entsteht und möglichst die auftretenden Fibonacci-Zahlen erklärt werden. Dabei kann man leicht durch Beweis ausschließen, dass der Winkel rational ist, sondern irrational sein muss. Es würden sonst Strahlen, nicht Spiralen, entstehen. Für die Approximation kommt die Kettenbruchentwicklung ins Spiel. Der Winkel $\varphi = \omega/2\pi$ wird dann am besten approximiert,

¹⁰⁵ Das Smith College in Northampton, Massachusetts betreibt die Webseite „An Interactive Site for the Mathematical Study of Plant Formation“ (<http://www.math.smith.edu/~phylo/> zuletzt überprüft am 04.02.2022, siehe „gallery“ für die Beispiele).

¹⁰⁶ Vogel, Helmut, 1979. A better way to construct the sunflower head, Mathematical Biosciences 44 (1979), no. 3-4, 179–182

¹⁰⁷ Frei nach Vogel, Helmut, 1979. A better way to construct the sunflower head, Idee und Grafik im Skript von Heino Hellwig, Humboldt-Univ., Berlin

wenn er wegen $\Phi = 1 + 1/\Phi$ die Kettenbruchentwicklung $[0, 1, 1, 1, 1, \dots] = \Phi - 1 = 1/\Phi$ hat. Es gilt somit

$$\omega = \frac{2\pi}{\Phi} \text{ bzw. } \omega = \frac{2\pi}{\frac{\sqrt{5} + 1}{2}} = 2\pi \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 2\pi \cdot \varphi$$

$$(2\pi \cdot 0,618 = 3,88.. \approx 222,5^0)$$

Nun ist aber zu berücksichtigen, dass etwa gleich große Sonnenblumenkerne die gegenläufige 34,55-Spiralstruktur bilden. Würde es eine bessere Approximation des Winkels durch andere Zahlen als den Quotienten der Fibonacci-Zahlen 34/55 geben? Hier kommt der Begriff der „Konvergente“ zum Tragen.

Fibonacci-Zahlen sind sog. Konvergenten, d.h.

$$\frac{f_{n-1}}{f_n} < \frac{\omega}{2\pi} < \frac{f_n}{f_{n+1}}$$

Es zeigt sich, dass tatsächlich die Fibonacci-Quotienten die beste Näherung an den Goldenen Schnitt und den Goldenen Winkel darstellen. Mathematisch gesprochen sind sie eine „gute Näherung 2. Art“. Beim Beweis wird eine 2.300 Jahre alte Technik benutzt, die auf Euklid zurückgeht. Es geht dabei darum, den größten gemeinsamen Teiler (ggT) zu bestimmen. Die dabei ermittelten Koeffizienten sind nämlich die entsprechenden Glieder des Kettenbruchs und müssen für einen optimalen Winkel $\omega/2\pi = [0, 1, 1, 1, 1, \dots]$ ergeben. Dies ist aber nichts anderes als $\Phi - 1 = 1/\Phi$. In der Anmerkung wird eine „gute Näherung 2. Art“ exakt definiert.¹⁰⁸ Salopp formuliert ist dies eine Folge rationaler Zahlen, die bei immer größerem Nenner die irrationale Zahl x „optimal“ annähern. Die Koeffizienten in der ggT-Berechnung bilden dabei die „Teilnenner“ in der unendlichen Kettenbruchdarstellung von x . Bricht man die Kettenbruchdarstellung nach endlichen Schritten ab, so erhält man eine Folge von rationalen Konvergenten für das irrationale x bis zum jeweiligen Näherungswert. Das nachfolgende Beispiel soll dies illustrieren:

¹⁰⁸ Def.: p/q heißt „**gute Näherung 2. Art**“ für $\alpha \in \mathbb{R}$ wenn für alle p'/q' mit $q' < q$ gilt:
 $|q\alpha - p| < |q'\alpha - p'|$.
Def.: $x = [a_0, a_1, a_2, \dots] \in \mathbb{R}$, $P_i/Q_i = [a_0, a_1, \dots, a_i]$ heißt i -te **Konvergente** und a_i heißt i -ter **Teilnenner** von x .

<u>Euklid</u>	<u>Beispiel</u>	<u>Euklid umgestellt</u>	<u>Kettenbruch</u>
$m = a_0 n + r_1$	$m = 3927, n = 2090$	$m/n = a_0 + r_1/n$	$\frac{m}{n} = \frac{3927}{2090} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{7 + \frac{1}{3 + \frac{1}{6}}}}$
$n = a_1 r_1 + r_2$	$3927 = 1 \cdot 2090 + 1837$	$n/n_1 = a_1 + r_2/r_1$	
$r_1 = a_2 r_2 + r_3$	$2090 = 1 \cdot 1837 + 253$	$r_1/r_2 = a_2 + r_3/r_2$	
$r_2 = a_3 r_3 + r_4$	$1837 = 7 \cdot 253 + 66$:	
$r_3 = a_4 r_4 + r_5$	$253 = 3 \cdot 66 + 55$:	
:	$66 = 6 \cdot 11$:	$3927/2090 = [1, 1, 7, 3, 6]$
$r_{k-1} = a_k r_k$	$r_k = \mathbf{11}$ ist ggT von m, n	$r_{k-1}/r_k = a_k$	

Man kann im **2. Hauptsatz der Kettenbruchentwicklung** zeigen, dass die so gebildeten Konvergenten die jeweils **beste Näherung 2. Art** von x darstellen.

$$\frac{f_{2k}}{f_{2k+1}} < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < \frac{f_{2k+1}}{f_{2k+2}}$$

Die jeweils nächsten Fibonacci-Zahlen in Zähler und Nenner erfüllen die beste Näherung 2. Art an

$$\varphi = \Phi - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = [0, 1, 1, 1, \dots]$$

Über diesen Weg lässt sich beweisen, dass Quotienten von benachbarten Fibonacci-Zahlen tatsächlich die beste rationale Näherung an Phi darstellen.¹⁰⁹ Daraus ergibt sich schließlich durch Beweis belegt die entscheidende Folgerung, dass tatsächlich die Quotienten benachbarter Fibonacci-Zahlen als rationale Zahlen und Konvergenten die beste Näherung (sogenannter 2. Art) an die irrationale Zahl Φ bilden. Dies gilt auch für verallgemeinerte Fibonacci-Folgen mit beliebigen natürlichen Zahlen f_0 und f_1 als Rekursionsanfang. Diese scheint die Natur aber nicht zu bevorzugen.

Der Goldene Schnitt und der Goldene Winkel haben für verschiedene Optimierungsaufgaben in der Natur eine herausragende Bedeutung. Weil aber beim Wuchs, bei Blattanlagen oder bei Fruchtständen mit Kernen einer bestimmten Größe immer nur Näherungen zum Tragen kommen, tauchen so viele Fibonacci-Zahlen auf. Denn die Quotienten von benachbarten Fibonacci-Zahlen approximieren den benötigten optimalen Goldenen Winkel am besten.

Die Anzahl der gegenläufigen Spiralen sind somit oft zwei aufeinanderfolgende Fibonacci-Zahlen. Weil der Divergenzwinkel ω den Vollkreis im Verhältnis Goldener Schnitt Φ schneidet, findet man deshalb so häufig die Fibonacci-Zahlen in der Natur.

¹⁰⁹ Siehe dazu H. Vogel, Mathematical Biosciences, Volume 44, Issue 3-4, June 1979, Pages 179-189

SIR – Modell einer Epidemie

Mit der COVID-19-Pandemie sind Biomathematiker und mathematisch orientierte Epidemiologen in den Fokus der breiten Öffentlichkeit gekommen. Das klassische epidemiologische Modell, wie sich eine Epidemie prinzipiell ausbreitet, wurde bereits 1927 von Kermack und McKendrick veröffentlicht.¹¹⁰ Die Publikation trägt den Titel „*A Contribution to the Mathematical Theory of Epidemics.*“

Das Modell gilt als Ausgangspunkt aller Weiterentwicklungen und ist auch noch heute in den wesentlichen Gedanken prägend für die Voraussagen und Gegenmaßnahmen zur Eindämmung der Infektionen bei SARS-CoV-2. Bereits 2002/2003 sprach die WHO von einer Pandemie, die das SARS-CoV-1 Virus ausgelöst hatte. Sie betraf 25 Länder, forderte 774 Todesfälle und infizierte etwa 8.100 Menschen.¹¹¹

Das Modell hat eine Reihe von sechs Kennzahlen und Koeffizienten. Es wird nach den maßgeblichen Werten als SIR-Modell bezeichnet:

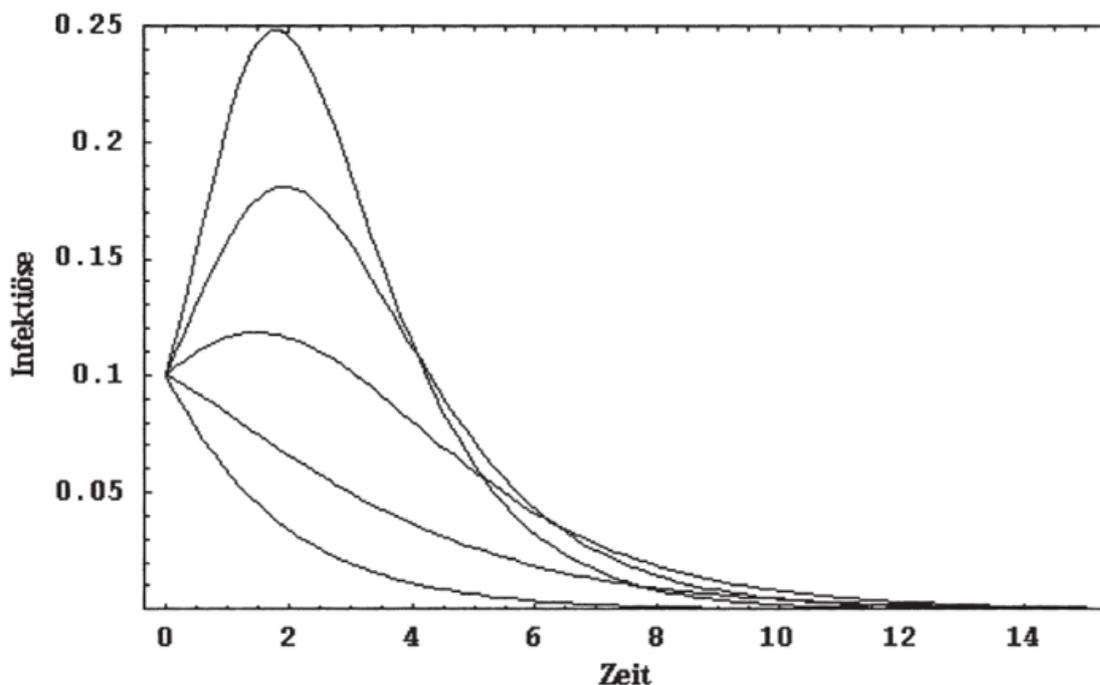


Abb. 54: Verlauf einer Epidemie in Abhängigkeit von der R_0 (s.u.).

SIR steht für

S: Sensitive

I: Infektiöse

R: Ausgefallene (immun oder gestorben, englisch removed)

¹¹⁰ <https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rspa.1927.0118>

¹¹¹ https://de.wikipedia.org/wiki/SARS-Pandemie_2002/2003

Mathematisch wird die Übertragung der Krankheit wie eine chemische Reaktion 2. Ordnung behandelt. Dabei hängt die Reaktionsgeschwindigkeit linear von der Konzentration der Ausgangsstoffe ab.

Das Modell beruht auf drei einfachen Differentialgleichungen nach der Zeit, wobei β =Kontaktrate, γ =Ausfallrate, D =Diffusionskoeffizient.

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= -\beta IS \\ \frac{dI}{dt} &= \beta IS - \gamma I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I\end{aligned}$$

D.h. die Gesamtzahl $N = S + I + R = \text{const.}$

Der „R-Wert“, der in der jetzigen Pandemie in aller Mund war, ist entscheidend für Ausbruch und Verlauf des Infektionsgeschehens. Ist er größer 1, so infiziert ein Individuum im Schnitt mehr als ein anderes Individuum und die Krankheit hat im Extremfall ein exponentielles Wachstumsverhalten.

$$R_0 = \frac{\beta N}{\gamma} > 1$$

Die Grafik¹¹² zeigt fünf zeitliche Verläufe in Abhängigkeit vom „R-Wert“. Ist $R_0 < 1$ so klingt die Epidemie mehr oder weniger schnell ab (die beiden unteren Kurven). Ist $R_0 > 1$ so bricht die Epidemie aus und nimmt je nach R_0 zu.

Pfannkuchensortierung

Trotz des ungewöhnlichen Titels handelt es sich um ein seriöses mathematisches Problem und ist ein weiteres Beispiel dafür, wie durchaus auch scheinbar spielerische Aufgabenstellungen in der Mathematik sinnvolle Anwendungen in der Biologie haben können. Hier unterstützt die Mathematik die gerade in Zeiten der Pandemie höchst wichtige Genomsequenzierung, z.B. der unterschiedlichen Mutanten des Corona-Virus.

Ein weiteres Beispiel ist die Knotentheorie, ein Teilgebiet der Topologie.¹¹³

Ein menschlicher DNA-Strang ist in der bekannten Doppelhelixstruktur ca. ein Meter lang. Im Zellkern ist er auf fünfmillionstel Meter regelrecht zusammen geknäuel. Trotzdem funktioniert bei der Zellteilung Replikation und dann

¹¹² Quelle Grafik und inhaltliche Anregung: Richter, Otto, Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 54, 2004, S.89-113, online <https://core.ac.uk/download/pdf/196660982.pdf>

¹¹³ de.wikipedia.org/wiki/Knotentheorie

Trennung der beiden Stränge. Man muss sich fragen, wie das der Natur gelingt. Auch hier unterstützt die Mathematik die Genetik.

Was ist nun gemeint mit der Pfannkuchensortierung? Es geht darum, einen Stapel von n unterschiedlich großen, flachen Objekten (genannt „Pfannkuchen“, englisch „pancakes“) nach der Größe der Objekte zu sortieren. Dabei steht ein Spatel zur Verfügung, der eine beliebige Anzahl $m \leq n$ an Pfannkuchen aufnimmt und diesen Teilstapel umdreht. Das wird so lange an geeigneten Stellen im Stapel fortgesetzt, bis der ganze Stapel nach der Größe sortiert ist. Die Problemstellung ist die Frage, wieviel Drehoperationen („Flips“) in Abhängigkeit von der Anzahl n der Pfannkuchen im Stapel nötig sind.

Eine Verschärfung der Problemstellung besteht darin, dass die oben/unten-Orientierung der Objekte („einseitig verbrannte Pfannkuchen“) berücksichtigt werden muss. Es soll also im ganzen Stapel, sortiert nach der Größe, z.B. immer die „verbrannte“ Seite unten liegen. In der Abbildung ist dies angedeutet, in dem die dunkle Seite der oberen drei Pfannkuchen nun nach oben zeigt.

Mathematisch betrachtet, sind jeweils Paare von Elementen zu betrachten und die Schritte / Flips bis zur endgültigen Sortierung zu minimieren. Die Aufgabenstellung ist also im Bereich der „Diskreten Mathematik“ anzusiedeln.



Abb. 55: Beispiel einer Drehoperation / Flip mit drei Pfannkuchen bei einem Stapel von insgesamt acht Pfannkuchen.

Ursprünglich wurde das Problem von Jacob E. Goodman diskutiert. Der genaue Wert war nicht bekannt, aber es konnte gezeigt werden, dass höchstens $2n - 3$ Flips nötig sind ($n \geq 2$) und der Wert ungefähr zwischen $1,07n$ und $1,64n$ liegt. Im Jahr 1979 erschien ein Artikel von William Gates und Christos Papadimitriou. Es war die einzige wissenschaftliche Publikation von Gates, der später als Bill Gates bekannt wurde und der Mitbegründer von Microsoft ist. Sie gaben eine Untergrenze von $1,06n$ Flips und eine Obergrenze von $1,06 \frac{(5n+5)}{3}$ an. Die Werte wurden immerhin erst 30 Jahre später verbessert. Im Jahr 2011 wurde eine lange unbeantwortete Frage von Laurent Bulteau, Guillaume Fertin und Irena Rusu entschieden. Sie bewiesen, dass das Problem, die kleinste Anzahl

an Flips zu finden, NP-schwer ist ("non-deterministic polynomial acceptable problems").^{114,115}

Für die Biologie, Biochemie bzw. Bioinformatik und damit auch für die Genomsequenzierung stellt sich z.B. die Frage nach „Präfixumkehrungen für Zeichenfolgen“ oder der Komplexität genetischer Mutationen. (Siehe dazu die Literatur zu „Pancake_sorting“).

Chemie

Die Avogadrokonstante N_A

Chemiker rechnen bei Stoffmengen mit dem Mol als Einheit. Das Mol ist das Atomgewicht eines Elementes oder das Molekulargewicht einer chemischen Verbindung in Gramm. Das ist deshalb so wichtig, weil damit Vergleichbarkeit gewährleistet ist, denn ein Mol jedes beliebigen reinen Stoffes enthält die gleiche Menge an Teilchen. Die Konstante ist nach Amadeo Avogadro (1776-1856) benannt und wird ihm zu Ehren N_A genannt.

$$N_A = 6,022\ 140\ 76 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

Ohne die Einheit „pro Mol“ nennt man sie einfach Avogadro-Zahl.

Es lag ein 200 Jahre alter Streit dazwischen, bis endlich akzeptiert wurde, dass die Materie durch kleinste Teilchen, die Atome, aufgebaut ist. Noch der einflussreiche Naturforscher und Philosoph Ernst Mach (1838-1916) würgte Diskussionen Anfang des 20. Jahrhunderts, wenn die Sprache auf Atome kam, mit den Worten ab „*Ham's schon eins gesehen?*“ Albert Einstein konnte 1905 die erstmals vom schottischen Botaniker Robert Brown im Jahr 1827 entdeckte Brownsche Molekularbewegung quantitativ über die Theorie der Wärme erklären und damit die Existenz von Atomen und Molekülen endgültig bestätigen.

Avogadro schuf bereits 1811 wichtige Grundlagen, um über Proportionen quantitative Aussagen zu erhalten. Er erkannte, dass ideale Gase bei gleichem Druck und gleicher Temperatur in gleichen Volumina die gleiche Anzahl an Molekülen oder Atomen enthalten. Später gelang es Johann Josef Loschmidt

$$N_A = \frac{\text{Teilchenanzahl}}{\text{Stoffmenge}} = \frac{N}{n} \left[\frac{1}{\text{mol}} \right]$$

Abb. 56: Definition der Avogadro-Konstante

¹¹⁴ <https://en.wikipedia.org/wiki/NP-hardness>

¹¹⁵ Grundlage für das Kapitel siehe https://de.wikibrief.org/wiki/Pancake_sorting

(1821-1895) die Größenordnung von Molekülen zu bestimmen. Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906) hat dann die Menge an Teilchen in einem Kubikzentimeter Luft „Loschmidtsche Zahl“ genannt, die lange mit der Avogadrozahl verwechselt wurde. Erst ab 1909 setzte sich der heutige Begriff durch. N_A wurde immer genauer experimentell bestimmt und es wurde festgesetzt, dass N_A ein Zwölftel eines Mols des Kohlenstoffisotops $^{12}_6C$, 12 Gramm, sein sollte.

Um möglichst unabhängig von Messungen zu werden, beschloss das Comité International des Poids et Mesures (CIPM) am 16. November 2018 in Versailles eine grundlegende Revision des Internationalen Einheitensystems (SI). In Zukunft werden sich alle SI-Einheiten auf die festgelegten Werte von sieben ausgewählten Naturkonstanten beziehen.¹¹⁶ Es sind Kilogramm, Mol, Ampere und Kelvin, mit den definierenden Konstanten Plancksches Wirkungsquantum h , Avogadrokonstante N_A , Elementarladung e und Boltzmannkonstante k . Die anderen drei Basiseinheiten sind Sekunde, Meter und Candela („Lichtstärke“). Sie werden lediglich sprachlich neu formuliert,¹¹⁷ was keine Auswirkung auf Messexperimente hat. Die Messungen der Physikalisch-technischen Bundesanstalt (PTB) in Berlin und Braunschweig spielen neben anderen Instituten in der Welt eine wichtige Rolle für die Neudefinitionen der Einheiten. Besonders die Avogadro-Konstante und das Plancksche Wirkungsquantum sind wesentliche Eckpfeiler im neuen Einheitensystem. Die Messung dieser Konstanten wurden und werden im internationalen Avogadroprojekt¹¹⁸ vorangetrieben. Dabei werden Atome in Kugeln aus hochreinem Silizium-28 gezählt. Aus diesem Material wurden Einkristalle gezüchtet und extrem gleichmäßige Kugeln gefertigt. Mit der sogenannten X-Ray-Crystal-Density-Methode können die Atome gezählt werden. Die relative Unsicherheit der Avogadro-Konstante soll $1 \cdot 10^{-8}$ oder besser werden.

Erkenntnisprozesse in der Chemie

Isomere Verbindungen haben die gleiche Summenformel, sind aber in der Regel unterschiedliche Stoffe mit teilweise grundlegend anderen Eigenschaften. Das erste entdeckte Paar war Silberfulminat $Ag^{\oplus}(O-N \equiv C)^{\ominus}$ und Silbercyanat $Ag^{\oplus}(O-C \equiv N)^{\ominus}$ ¹¹⁹. Doch das berühmteste Beispiel sind die Isomere

¹¹⁶ <https://www.ptb.de/cms/de/forschung-entwicklung/forschung-zum-neuen-si/ptb-experimente/kilogramm-und-mol-atome-zaehlen.html>

¹¹⁷ <https://www.ptb.de/cms/de/forschung-entwicklung/erausforderungen-und-perspektiven/das-neue-system-der-einheiten.html>

¹¹⁸ <https://www.ptb.de/cms/de/ptb/fachabteilungen/abt3/fb-31/ag-311/avogadro-projekt.html>

¹¹⁹ Erste Ergebnisse im Jahr 1820 durch Justus Liebig, Gay-Lussac und Friedrich Wöhler, Beweis der Isomerie 1824; Ann. Physik, 1, 87 (1824) J. Liebig, J.L. Gay-

Ammoniumcyanat $\text{H}_4\text{N}^{\oplus} \ominus\text{O}-\text{C}\equiv\text{N}$ und Harnstoff $\text{O}=\text{C}(\text{NH}_2)_2$. In der endothermen Wöhlerschen Harnstoffsynthese wurde 1828 erstmals ein organischer Stoff durch das Eindampfen einer wässrigen Lösung aus Ammoniumcyanat hergestellt.¹²⁰ Das war der historische Anlass für die terminologische Trennung von organischer Chemie und anorganischer Chemie. Es war ein Vorgang auf der experimentellen, stofflichen Ebene, der verdeutlichte, dass diese Unterscheidung zwischen zwei grundlegenden Disziplinen der Chemie notwendig wurde.

Ein Umdenken auf der mentalen Ebene kann man an der Diskussion um die Molekülstruktur z.B. von Benzol erkennen. Die eigentliche Molekülstruktur wurde erst durch die Quantenphysik erklärlich (siehe zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung).

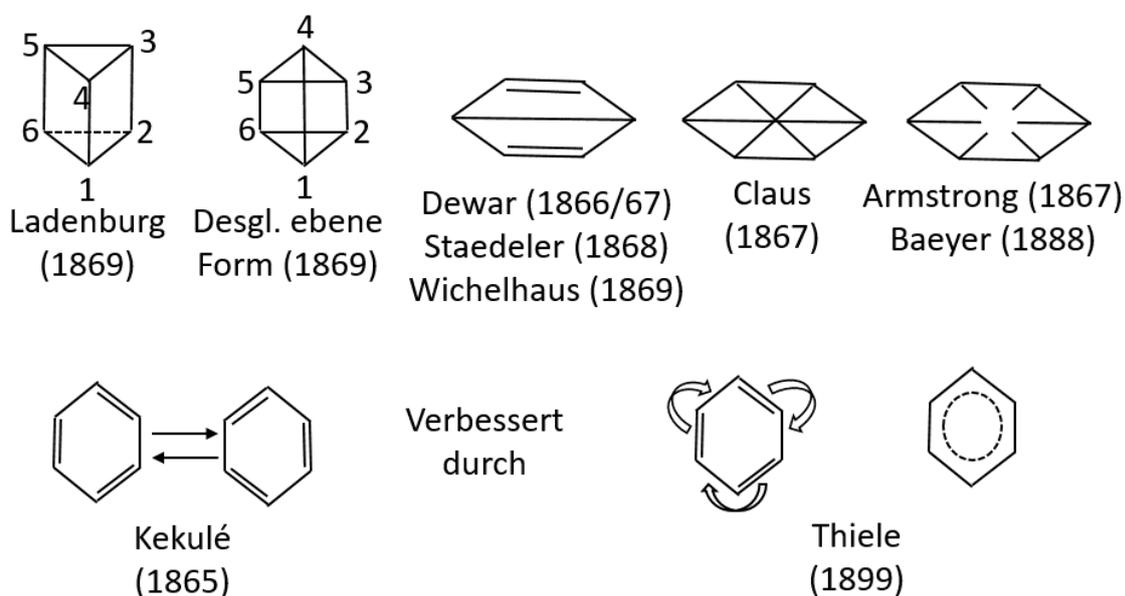


Abb. 57: Vorgeschlagene Strukturformeln für das Benzol.

Eine schöne Übersicht über die Vorschläge zur Strukturformel findet sich bei Klages.¹²¹

Die alternierenden Doppelbindungen werden durch sogenannte π -Elektronen gebildet. Eigentlich müssten die Doppelbindungen deutlich kürzer als Einfachbindungen sein. Aber Benzol besitzt sechs gleich lange Bindungen von 139 pm. Eine Einfachbindung wäre etwa 147 pm lang und eine Doppelbindung

Lussac und Ann. Physik, 1, 117 (1824) F. Wöhler; siehe auch Sieghard Neufeldt, Chronologie Chemie: Entdecker und Entdeckungen, John Wiley & Sons, 2016.

¹²⁰ Siehe z.B. O. Wallach (Hg.): Briefwechsel zwischen J. Berzelius und F. Wöhler; Sändig Reprint Verlag, Hans R. Wohlwend, Vaduz/Liechtenstein 1984.

¹²¹ Friedrich Klages, Lehrbuch der organischen Chemie, Bd. 2, Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1962, S. 200 und 201

etwa 135 pm. D.h. die Bindung im Benzol liegt zwischen Einfach- und Doppelbindung. In den sechs 2p-Orbitalen (siehe Abb. 57) befinden sich nur sechs Elektronen, die oberhalb und unterhalb der Molekülebene delokalisiert sind. Diese Tatsache erkannte im Jahr 1930 Linus Pauling. Dies macht die Eigenschaft der Aromaten aus und wird gerne durch einen Ring im Sechseck ausgedrückt. Der Energieunterschied zwischen den beiden Kekulé-Formeln und der Thiele-Formel rechts beträgt 151 kJ/Mol, die die delokalisierte Form energetisch günstiger ist.

Pseudolineare Farbstoffe – ein quantenmechanisches Modell der Farbe

Für die Lichtabsorption eines Farbstoffes sind im Wesentlichen die

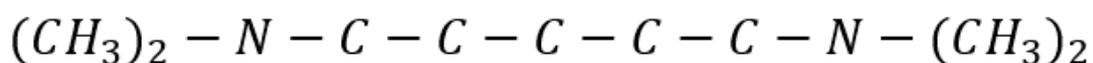


Abb. 58: Die π -Elektronen befinden sich vorwiegend oberhalb und unterhalb der Molekülebene.

delokalisierten π -Elektronen verantwortlich. Wie immer ist natürlich die Energiebilanz treibende Kraft einer Strukturbildung. Aber im Gegensatz zu den Aromaten, wie dem farblosen Benzol, entsteht Farbe durch „stehende Elektronenwellen“ in einem sogenannten Potentialtopf. Der Begriff „Topf“ ist hier gut gewählt, denn die Welle wird in einem niedrigen Energieniveau ausgebildet und durch deutlich höhere Barrieren lokal begrenzt. Die Aufenthaltswahrscheinlichkeit der Elektronen außerhalb der Barrieren ist zwar auch bei einer unendlichen Potentialbarriere durch die Heisenbergsche Unschärferelation nicht gleich Null („Tunnel-Effekt“), aber deutlich geringer.

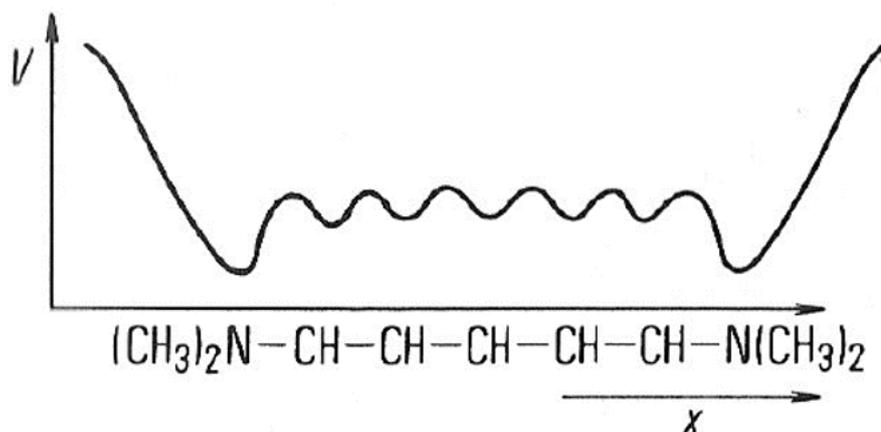


Abb. 59: Potentielle Energie V eines Elektrons im π -Elektronensystem

Modellhaft lassen sich diese Bindungsverhältnisse an Cyanin-Farbstoffen erklären.¹²²

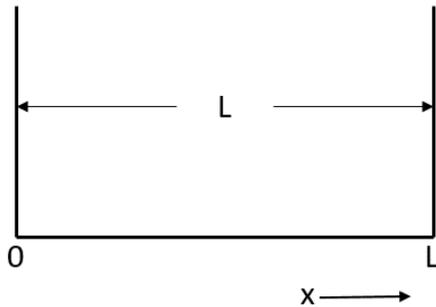


Abb. 60: Vereinfachte Darstellung des Potentialtopfes

Ein Potentialtopf zeichnet sich durch hohe Ränder und deutlich niedrigere potentielle Energie in einem Bereich aus, in dem sich die stehende Welle der π -Elektronen ausbilden kann.

Abb. 59 zeigt, dass der Energieaufwand hoch ist, die π -Elektronen aus dem energetisch günstigen Bereich zu entfernen. Für eine prinzipielle Rechnung reicht es, sich den Potentialtopf so

vorzustellen, dass die Ränder beliebig hoch sind und sich die π -Elektronen über die Länge L delokalisiert aufhalten. In dieser Vereinfachung werden die π -Elektronen als frei bewegliche, aber stehende, interferierende de Broglie Elektronenwellen angenommen, die an den Rändern reflektiert werden und in x-Richtung linear, also eindimensional sind. Die Auslenkung von ψ ist

$$\psi = A \sin \frac{n\pi}{L} \cdot x, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Der Amplitudenfaktor ist willkürlich, sollte aber der Einfachheit halber so gewählt werden, dass die Normierungsbedingung

$$\int_0^L \psi^2 dx = 1$$

gilt. Die Wellenfunktion ψ ist dann

$$\psi = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin \frac{n\pi}{L} x$$

Die Wellenlängen sind

$$\Lambda = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Geschwindigkeit u eines Elektrons errechnet sich nach de Broglie zu

$$\Lambda = \frac{h}{m \cdot u}$$

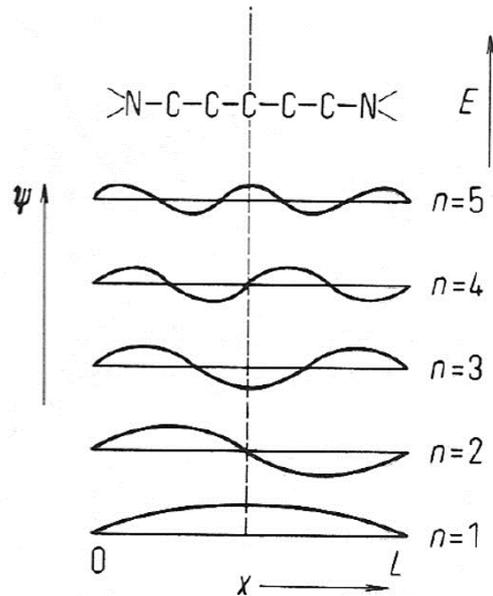


Abb. 61: Stehende π -Elektronenwellen

¹²² Grafiken und Herleitung nach Försterling/Kuhn, Physikalische Chemie in Experimenten, Verlag Chemie, 1971, Weinheim/Bergstraße, S. 373/374

(h = Plancksches Wirkungsquantum, m = Elektronenmasse, V = Potentielle Energie V eines Elektrons im π -Elektronensystem)

Die Gesamtenergie E eines π -Elektrons ist

$$E = V + \frac{m}{2} u^2 = V + \frac{h^2}{2m\lambda^2} = V + \frac{h^2}{8mL^2} n^2 \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung

Dieser Abschnitt könnte genauso gut bei den wichtigen physikalischen Theorien stehen. Im Gegensatz zur zeitabhängigen Schrödinger-Gleichung, die insbesondere Teilchenverhalten und Interaktionen auch außerhalb von Atomen und Molekülen zeitabhängig beschreibt, erklärt die zeitunabhängige, nicht-relativistische Schrödinger-Gleichung das Verhalten von Elektronen im Atom- bzw. Molekülverbund. Sie ist deshalb eine wesentliche theoretische Grundlage der gesamten Chemie. Überall, wo man von Bahnen, Orbitalen oder auch spektroskopischen Effekten spricht, ist diese Beziehung die mathematische Beschreibung und physikalische Begründung für chemisches Verhalten. Es geht also um ein stationäres Verhalten, wo für die potentielle Energie E_{Pot} nur der Ort und nicht die Zeit variabel sind, wie dies in einem Atom im einfachsten Fall angenommen werden kann. Louis de Broglie hatte postuliert, dass jedes (Quanten-)Objekt sowohl Wellen- als auch Teilchencharakter hat.

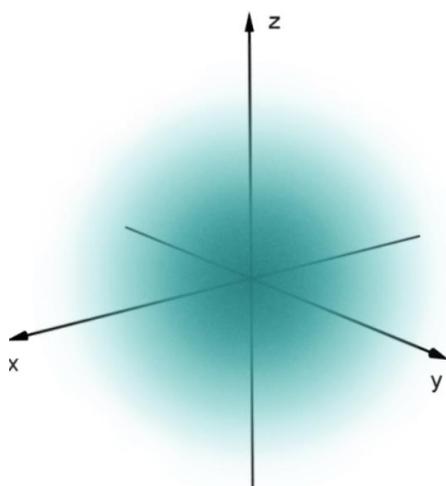


Abb. 62: Darstellung der Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im 1s-Orbital durch eine Punktwolke

Man spricht vom Welle-Teilchen Dualismus. Werner Heisenberg und Erwin Schrödinger setzten auf dieser Erkenntnis auf und entwickelten unabhängig voneinander zwei vollkommen unterschiedliche mathematische Beschreibungen. Es stellte sich jedoch heraus, dass beide Theorien vollkommen äquivalent sind. Weil der Ansatz von Schrödinger auf handlicher beschreibbaren Wellen beruht, während Heisenberg eine Matrizenrechnung zugrunde legte, setzte sich der Weg von Schrödinger durch. Allerdings ist die gesuchte Wellenfunktion $\psi(x)$, z.B. eines Elektrons in einem Wasserstoff-Atom, auch in der Schrödinger-Gleichung weitgehend unanschaulich. Lediglich der Betrag ihres

Quadrates $|\psi(x)|^2$ kann als Maß für die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des

Teilchens/der Welle an einem Ort interpretiert werden. Genauer: $|\psi(x)|^2 \cdot \Delta x$ ist die Wahrscheinlichkeit das Teilchen im Raumbereich Δx anzutreffen.¹²³

Man geht von der klassischen Wellengleichung aus, also einer eindimensionalen Welle, die sich in x-Richtung sinus-förmig ausbreitet. Sie benötigt eine Zeitspanne Δt . Von $x=0$ bis $x=\lambda$ entspricht diese Zeitspanne der Periodendauer: $\Delta t=T$:

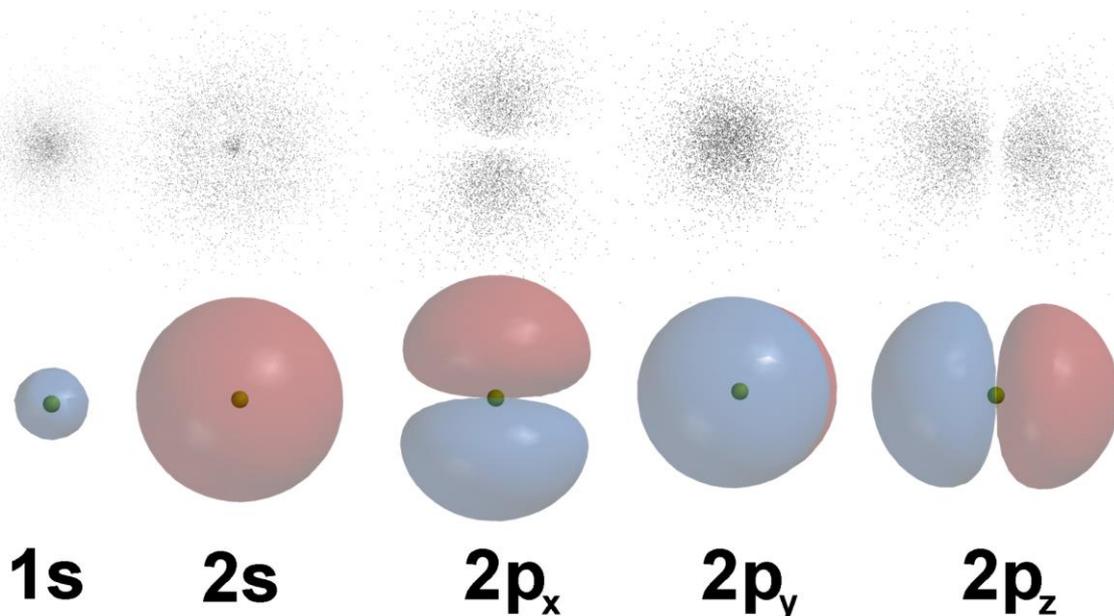


Abb. 63: Darstellung unterschiedlicher Orbitale der ersten und zweiten Elektronenschale.

$$y(x, t) = y_{max} \cdot \sin \left[2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \right]$$

Im stationären Fall gilt vereinfachend

$$y(x) = y_{max} \cdot \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

Im stationären Fall der Schrödinger-Gleichung hat man stehende Wellen in einem Potentialtopf der Breite L , in den nur ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge $\frac{\lambda}{2}$ passt (siehe voriges Kapitel).

$$\psi(x) = y_{max} \cdot \sin \left(\frac{2\pi x}{\lambda} \right)$$

Mit der Potentialtopf-Bedingung $L = n \cdot \frac{\lambda}{2}$ bzw. $\lambda = \frac{2L}{n}$

In verkürzter Darstellung lautet die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung:

$$\hat{H}\psi = E\psi$$

¹²³ Bildquellen: <https://de.wikipedia.org/wiki/Atomorbital>

Man wendet auf die gesuchte Wellenfunktion ψ eine Rechenvorschrift (den Hamilton-Operator) an und erhält sog. Eigenwerte von ψ .

\hat{H} ist also mehr als ein Parameter; es ist eine Vorschrift, die in dem 3-dimensionalen Koordinatensystem x, y, z (hier ohne t , da zeitunabhängig) anzuwenden ist.

Ozonschicht und Ozonloch

Es ist und bleibt eine verstörende Geschichte und eine Herausforderung für den Fortbestand der Menschheit. Aber es ist auch eine Geschichte voller Hoffnung, wie ein menschengemachtes, bedrohliches Szenario wissenschaftlich untersucht wurde, die teils sehr komplexen Zusammenhänge erkannt, in chemischen Gleichungen verdeutlicht und schließlich globale Abwehrmaßnahmen ergriffen wurden. Diese Maßnahmen haben Verbesserungen durch globalen Verzicht bei verursachenden Stoffklassen erbracht, aber auch Mechanismen erkannt, die weitere Bedrohungen verursachen können.

In der Pressemitteilung des Nobelpreiskomitees zum Preis für Chemie 1995 heißt es „Die Ozonschicht – die Achillesferse der Biosphäre“.¹²⁴

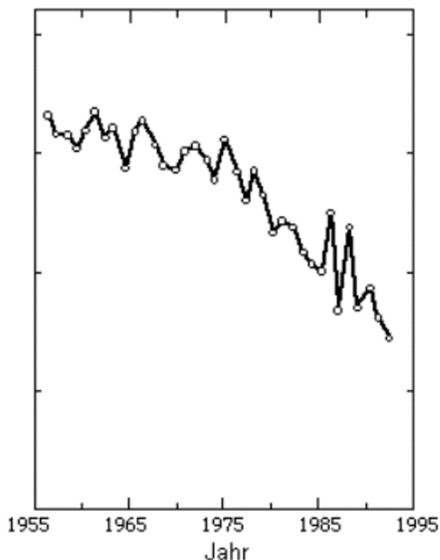
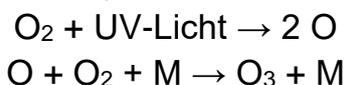


Abb. 64: Rückgang der Ozonschicht in der Antarktis

Ozon, O_3 , ist ein Gas, das nur in Spuren in der Erdatmosphäre vorkommt, aber in seiner Schutzwirkung eine grundsätzliche Bedeutung für das Leben auf der Erde hat. Die vor schädlichem ultravioletten Licht schützende Schicht wäre zwar verdichtet nur 3 mm dick. Aber das reicht in Verbindung mit dem Sauerstoff in der Atmosphäre, um UV-Strahlen so abzumildern, dass Leben auf unserem Planeten möglich bleibt.

Der normale Luftsauerstoff, also das zweiatomige O_2 , wird durch UV-Licht in zwei sehr reaktionsfreudige, sogenannte Sauerstoffradikale, aufgespalten und verbindet sich dann mit weiteren

Sauerstoffmolekülen unter katalytischer Beteiligung von anderen Luftmolekülen M (Sauerstoff O_2 oder Stickstoff N_2) zu Ozon:



¹²⁴ <https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1995/9043-pressmitteilung-der-nobelpreis-in-chemie-1995/> Dies ist auch die Quelle der Grafiken.

Eine erste photochemische Theorie wurde von dem Engländer Sidney Chapman (1888-1970) im Jahr 1930 formuliert. Er vermutete Ozon in deutlich größeren Mengen zwischen 15 und 50 Kilometern Höhe. Spätere Messungen zeigten, dass das Thema sehr viel komplexer sein muss. Marchel Nicolet aus Belgien zeigte, dass auch Stoffe neben Wasserdampf Ozon zersetzen können. Insbesondere aus Methan entstehen ebenfalls reaktionsfreudige Radikale, hier atomarer Wasserstoff. Radikale enthalten ein ungebundenes Elektron und werden deshalb gerne als $X\cdot$ geschrieben. Entscheidende Erkenntnisse erzielten dann die mit dem Chemie-Nobelpreis 1995 ausgezeichneten Wissenschaftler Paul Crutzen, Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz, Deutschland (niederländischer Staatsangehöriger), Mario Molina, Department of Earth, Atmospheric and Planetary Sciences und Department of Chemistry, MIT, Cambridge, MA, USA und F. Sherwood Rowland, Department of Chemistry, University of California, Irvine, USA.

Sie erkannten, dass $X\cdot$ neben Wasserstoff auch Halogene sein können, die als halogenierte Kohlenwasserstoffe vielfach eingesetzt wurden (z.B. als Kühlmittel für Kühlschränke).

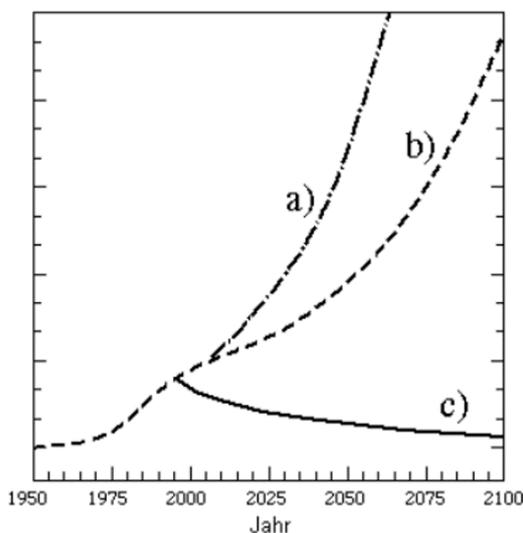
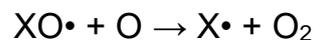
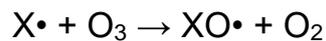
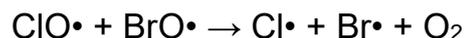


Abb. 65: Von drei Szenarien blieb nur das radikale Verbot von FCKW.

Die zweite Reaktion bestimmt die Reaktionsgeschwindigkeit, denn auch bei Tageslicht und entsprechender UV-Strahlung sind O-Radikale eher selten. Sie werden aber für die erneute Synthese von Ozon benötigt. Auch Fluor, Chlor, Brom und Jod finden sich in der Stratosphäre kaum als Radikale ($X\cdot$), sondern als $XO\cdot$. Besonders schädlich ist $ClO\cdot$. Diese reagieren dann untereinander, z.B.



So entsteht ein Teufelskreis.

Ein Forschungsteam hat in einer Modellrechnung untersucht, welche

Folgen für das Klima die weitere Nutzung dieser Substanzen gehabt hätte. Sie kamen zusätzlich zum schädlichen Einfluss von CO_2 auf weitere $2,5^\circ C$ durchschnittliche Erwärmung. Diese setzen sich aus $1,7^\circ C$ direkte Erwärmung

der Atmosphäre plus weitere $0,8^{\circ}\text{C}$ indirekte Erwärmung zusammen. Die abnehmende Ozon-Schicht führt nämlich zu einer enormen UV-Belastung am Boden, die das Pflanzenwachstum so beeinträchtigt, dass weniger CO_2 gebunden werden kann.¹²⁵

Es ist das Verdienst dieser Forschungen, dass es zum Verbot von Fluor-Chlor-Kohlenwasserstoffen (FCKW) und der verbindlichen Begrenzung von anderen Ozon-schädlichen Substanzen kam und zumindest bzgl. dieser Stoffklasse die Ozonschicht nicht mehr gravierend geschädigt wurde. Die Staatengemeinschaft hat aus diesem Fall gelernt. Allerdings dauert die Regenerierung der schützenden Schicht etwa 100 Jahre. Das Gleichgewicht ist schnell zerstört, aber es dauert lange, bis es wiederhergestellt werden kann.

Fazit

Der vorliegende Beitrag kann nur eine kleine Anzahl an Beispielen aus den vier Wissensgebieten aufzeigen. Es ist zu erwarten, dass die Leserin / der Leser bei einigen Punkten die Nase rümpfen wird, weil sie/er dieses Beispiel nicht für „würdig“ erachten wird. Andere Gleichungen, Formeln oder Beziehungen werden wiederum schmerzlich vermisst werden. Einige Abschnitte kann man durchaus verschieben oder doppelt aufführen. Dies wurde z.B. beim Goldenen Schnitt und der Fibonacci-Folge praktiziert, die beide eine herausragende Bedeutung in der Mathematik und der Biologie haben. Die logistische Gleichung ist für sich genommen bestimmt für manchen Leser kein berühmter Kandidat. Aber sie zeigt ansatzweise die Chaosforschung als eine relativ junge Disziplin in reiner und experimenteller Mathematik, statistischer Physik und dem chaotischen, nichtlinearen Verhalten in der Natur auf. Auch dieses komplexe Fachgebiet kann man praktisch in allen Hauptkapiteln darstellen. Der historisch erste Untersuchungsgegenstand, die logistische Gleichung, soll dazu den Aufhänger bilden. Beim Thema „Chaos“ drängt sich auch „Fraktale“ auf, besonders die Mandelbrotmenge und der theoretische Aspekt von Chaos über die Feigenbaum-Konstante. Etabliert wurde die Chaostheorie besonders durch Siegfried Großmann. Die Nobelpreisträger für Physik des Jahres 2021 haben in scheinbar chaotischen, komplexen Systemen Ordnungskriterien identifiziert und z.B. langfristige Klimamodelle entwickelt, die unabhängig von kurzfristigen Wettervorhersagen sind. Auch das riesige Gebiet der nichteuklidischen Geometrie wurde ausgeklammert. Nur punktuell kam zudem die Analysis von Cauchy oder Weierstraß zur Sprache. Aber auch bahnbrechende Erkenntnisse von Descartes bis Hilbert konnten nicht erwähnt werden. Die Mengenlehre ist

¹²⁵ Nature 10.1038/s41586-021-03737-3, 2021 nach SdW 11/21 S. 9

nur beim Kontinuum ein Thema. Peano-Axiome oder das Auswahlaxiom tauchen nicht auf. Die Physik der Relativitätstheorie sollte nicht in einen kurzen Abschnitt gezwängt werden. Hier wird auf umfassende Literatur jeglichen Schwierigkeitsgrades verwiesen.¹²⁶ Weitere interessante Meilensteine der Physik wären (ohne Anspruch auf Vollständigkeit) das heliozentrische kopernikanische Weltbild, Photoelektrischer Effekt, Carnot-Prozess, Energieerhaltung, Ohmsches Gesetz, Radioaktivität, Hubble Gesetz, Quanten-Elektrodynamik, Schwarze Löcher und vieles mehr. Manchmal sind es zunächst kleine Entdeckungen, die nach und nach einen ganzen Wissenszweig hervorbringen (z.B. Fraunhoferlinien in Astrophysik und Kosmologie).

Doch irgendwo muss man einen Schnitt bei dieser Wanderung durch interessante Themen aus Mathematik und Naturwissenschaften machen.

Auf jeden Fall soll durch den interdisziplinären Ansatz des Beitrags Interesse geweckt werden. Fachleuten wird das Niveau längst nicht ausreichen. Es bleibt aber zu hoffen, dass in den meisten Beispielen der kleine Schritt über das „normale“ populärwissenschaftliche Niveau hinaus für den interessierten Leser einige Anreize bietet, um den einen oder anderen Bereich zu vertiefen.

Literaturverzeichnis

Alsina, Claudi; Der Satz des Pythagoras, deutsch bei Librero RBA, 2016

Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B.; Bezaubernde Beweise, Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg, 2013

Alsina, Claudi; Nelsen, Roger B.; Perlen der Mathematik, Springer Spektrum, Berlin-Heidelberg, 2015

Becker, Adam; Was ist real?, Springer, Berlin 2021

Bellos, Alex; Im Wunderland der Zahlen, Piper, München, 11/2013

Caroll, Sean; Was ist die Welt und wenn ja, wie viele, Klett-Cotta, Stuttgart 2021

Ebeling, W. et.al., Komplexe Strukturen: Entropie und Information, B.G.Teubner, Stuttgart-Leipzig, 1998,

Euklid; Die Elemente, Hsgr. Clemens Thaer, Europa-Lehrmittel, 2003

¹²⁶ Einfach erklärte Darstellung der Speziellen Relativitätstheorie siehe z.B. den Beitrag von Arthur Ruh, <http://www.twintech.ch/aruh/papers/Relativitaet.pdf>
Mathematisches „Rüstzeug“ beider Relativitätstheorien siehe z.B. Susskind, Leonhard; Friedman, Art; Elektrodynamik und Relativität – Das theoretische Minimum, Springer, 2020

Försterling, Horst-Dieter, Kuhn, Hans; Physikalische Chemie in Experimenten, Verlag Chemie, 1971, Weinheim/Bergstraße

Havil, Julian, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013

Hellwig, Heino; Phyllotaxis – Über Zahlen und Pflanzen, Skript der Humboldt-Universität zu Berlin

http://didaktik.mathematik.hu-berlin.de/files/bericht_hellwig.pdf

Holt, Jim; Als Einstein und Gödel spazieren gingen, Rowohlt, Juni 2020

Klages, Friedrich; Lehrbuch der organischen Chemie, Bd. 2, Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1962

Meschkowski, Herbert; Mathematisches Begriffswörterbuch, BI Hochschul-taschenbücher Band 99, Mannheim 1971

Muller, Richard A., Jetzt – Die Physik der Zeit, S. Fischer, Frankfurt a. Main, 2018

Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994

Pickover, Clifford A.; Das Mathebuch, Librero, Kerkdriel (NL), deutsch 2014

Pickover, Clifford A.; Das Physikbuch, Librero, Kerkdriel (NL), deutsch 2014

Rinkens, Hans-Dieter, Krüger, Katja; Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2020

Russo, Lucio, Die vergessene Revolution, Springer, Berlin Heidelberg, 2005

Seife, Charles; Zwilling der Unendlichkeit, Eine Biographie der Zahl Null, Goldmann, München, 2002,

Singh, Simon; Fermats letzter Satz, Carl Hanser Verlag, München-Wien, 1998

Susskind, Leonhard, Friedman, Art; Quantenmechanik – Das theoretische Minimum, Springer, Berlin 2020

Taschner, Rudolf; Die Zahl, die aus der Kälte kam, Goldmann Taschenbuch, 2. Auflage, München 2015

Trageser, Wolfgang; Der Stern-Gerlach-Versuch, Springer Spektrum, Berlin 2022

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1 und Band 2, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Abbildungsnachweise:

Hinweis: Im Text wird nur in Fußnoten auf externe Inhalte in Grafiken hingewiesen. Eigene Grafiken werden nur im Abbildungsverzeichnis erwähnt.

- Abb. 1: eigene Grafik (Satz des Pythagoras)
- Abb. 2: Anschaulicher geometrischer Beweis des Satz von Pythagoras.
- Abb. 3: eigene Grafik (Satz des Thales)
- Abb. 4: eigene Grafik, Satzgruppe des Pythagoras, Kathetensatz
- Abb. 5: Satzgruppe des Pythagoras, Höhensatz des F
- Abb. 6: eigene Grafik, Kosinussatz: Trigonometrie im beliebigen Dreieck.
- Abb. 7: eigene Grafik, Nicht-dezimales Stellenwertsystem ohne Null bei einer Digitaluhr.
- Abb. 8: Basler Problem als T-Shirt, <https://www.zazzle.de/leonhard+tshirts>,
- Abb. 9: Die analytische Fortsetzung der Fakultät als T-Shirt
Eine Reihe von Firmen bieten T-Shirts mit mathematischen oder physikalischen Formeln an. Legendär ist auch „2,7 K“.
- Abb. 10: eigene Grafik, Komplexe Zahlen
- Abb. 11: Exponentialfunktion,
Grafik: <https://de.wikipedia.org/wiki/Exponentialfunktion>
- Abb. 12: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus 1.
- Abb. 13: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus i .
- Abb. 14: Vierte, fünfte und sechste Wurzeln aus -1 .
- Abb. 15: Eulersche Identität, Abb. 8-11 eigene Grafiken nach Hans-Dieter Rinkens, Katja Krüger, Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer-Spektrum, Wiesbaden 2020, S. 92, 94, 95 und S. IX
- Abb. 16: Fortgesetzte Konstruktion von Quadratwurzeln, Grafiken in Abb. 3 und 4 nach Alsina, Satz des Pythagoras, ebenda, S. 76
- Abb. 17: Spiralförmige Darstellung, ebenda
- Abb. 18: eigene Grafik DIN-A-Formate
- Abb. 19: Blendenöffnungen, mit freundlicher Genehmigung von Robert Feßling,
<https://www.robertfessling.de/tutorial-kamerablende-einstellen>
- Abb. 20: https://de.wikipedia.org/wiki/Platonischer_Körper
- Abb. 21: Eigene Grafik, das Pascalsche Dreieck
- Abb. 22: Konstruktion von Φ . Der Euklidische Beweis
- Abb. 23: Die gängigste Konstruktion für Φ
- Abb. 24: eigene Grafik, (Quotient zweier aufeinanderfolgender Finonacci-Folgenglieder)
- Abb. 25: eigene Grafik, (Potenzen von Phi)
- Abb. 26: eigene Grafik, (Kontinuumshypothese)
- Abb. 27: <https://de.wikipedia.org/wiki/Rechenschieber>

- Abb. 28: Verhalten der ζ -Funktion, https://de.wikipedia.org/wiki/Liste_nicht-trivialer_Nullstellen_der_Riemannschesen_Zetafunktion
- Abb. 29: Eigene Grafik, Symmetrieoperationen bei einem Quadrat.
- Abb. 30: Schematische Rekonstruktion der Weltkarte des Hekataios von Milet“, 6. Jh. v. Chr.,
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f6/Hecataeus_world_map-de.svg
- Abb. 31: Eigene Grafik, Konstellation des Eratosthenes
- Abb. 32: Eigene Grafik, Vermessung des Erdumfangs
- Abb. 33: Eigene Grafik, Newtonsches Gravitationsgesetz
- Abb. 34: Zusammenhang von Zeit- und Frequenzbereich bei den vier möglichen Varianten der Fourier-Analyse, Grafik, Tabelle und wörtlich übernommener Text aus
https://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analyse#/media/Datei:Diff_Fourier-Analyse.svg
- Abb. 35: Tabelle nach https://de.wikipedia.org/wiki/Fourier-Analyse#/media/Datei:Diff_Fourier-Analyse.svg
- Abb. 36: Eigene Grafik, Vermischung zweier unterschiedlicher Gase ist spontan irreversibel und erhöht die Entropie.
- Abb. 37: Nach dem Gesetz von Gay-Lussac ist der absolute Nullpunkt unerreichbar
- Abb. 38: Die blaue Kurve verwendet ein klassisches, nicht-quantisiertes Verständnis von Strahlung, Bildquelle
https://de.wikipedia.org/wiki/Rayleigh-Jeans-Gesetz#/media/Datei:PlanckWienRayleigh_linear_150dpi_de.png
- Abb. 39: Atomaufbau von Silber mit dem 5s Elektron (rot)
- Abb. 40: Stilisierte Darstellung des Experiments. Entscheidend ist die Aufspaltung des Strahls.
- Abb. 41: Bewegung der Erde durch den hypothetischen Äther (links) müsste einen entgegen gesetzten Ätherwind erzeugen.
- Abb. 42: Wenn der Äther das Medium für elektromagnetische Wellen wäre, müsste sich die Eigenbewegung von Erde und Sonne nachweisen lassen.
- Abb. 43: Das erwartete Resultat des Experimentes war, dass sich die Lichtgeschwindigkeit c je nach Bewegungsrichtung der Erde verändert (links). Das gemessene Resultat ergab, dass die Lichtgeschwindigkeit c in allen Richtungen gleich ist (rechts).
Abb. 37 und 39 eigene Grafik nach
<http://www.twintech.ch/aruh/papers/Relativitaet.pdf>

- Abb. 44: Grundlagen der Unbestimmtheit, Grafik und Argumentation: Leonhard Susskind, Art Friedman, Quantenmechanik – Das theoretische Minimum, Springer, Berlin 2020, S. 177
- Abb. 45: Schema des Bell-Tests, https://de.wikipedia.org/wiki/Bellsche_Ungleichung#/media/Datei:Bell-test-photon-analyser.png
- Abb. 46: Urknallmodell: Entstehung, <https://de.wikipedia.org/wiki/Urknall>
- Abb. 47: Google-Doodle zum 100. Geburtstag von Claude Shannon (Jonglieren von Nullen und Einsen).
<https://www.google.com/doodles/claude-shannons-100th-birthday>
- Abb. 48: Klimamodelle und Strahlungsbilanz
- Abb. 49: Die Temperatur am Erdboden, Quelle der beiden Grafiken: <https://www.nobelprize.org/prizes/physics/2021/popular-information/> Ergänzt durch eigene deutsche Texte
- Abb. 50: Eigene Grafik, Der einfache Graph der Logistischen Gleichung
- Abb. 51: Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut; Saupe, Dietmar; Chaos Bausteine der Ordnung, Springer Verlag / Klett Cotta, 1994, S. 37 Sensibilität von den Anfangsbedingungen
- Abb. 52: Periodisches Verhalten bei anderer Konstante k , Peitgen, S. 38
- Abb. 53: 2-dimensionales Modell nach Helmut Vogel
Vogel, Helmut, 1979. A better way to construct the sunflower head, *Mathematical Biosciences* 44 (1979), no. 3-4, 179–182
- Abb. 54: Verlauf einer Epidemie in Abhängigkeit von R_0 .
Richter, Otto, *Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft* Band 54, 2004, S. 89-113, online <https://core.ac.uk/download/pdf/196660982.pdf>
- Abb. 55: Eigene Grafik, Beispiel einer Drehoperation / Flip mit drei Pfannkuchen bei einem Stapel von insgesamt acht Pfannkuchen.
- Abb. 56: Eigene Grafik, Definition der Avogadrokonstante
- Abb. 57: Vorgeschlagene Strukturformeln für das Benzol, eigene Grafik nach Friedrich Klages, *Lehrbuch der organischen Chemie*, Bd. 2, Walter de Gruyter & Co, Berlin, 1962, S. 200 und 201
- Abb. 58: Die π -Elektronen befinden sich vorwiegend oberhalb und unterhalb der Molekülebene, eigene Grafik
- Abb. 59: Potentielle Energie V eines Elektrons im π -Elektronensystem, nach Försterling/Kuhn, *Physikalische Chemie in Experimenten*, Verlag Chemie, 1971, Weinheim/Bergstraße, S. 373/374
- Abb. 60: Vereinfachende Darstellung des Potentialtopfes, eigene Grafik
- Abb. 61: Stehende π -Elektronenwellen, Försterling/Kuhn, ebenda
- Abb. 62: <https://de.wikipedia.org/wiki/Atomorbital>
Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Elektrons im 1s-Orbital
- Abb. 63: <https://de.wikipedia.org/wiki/Atomorbital>

Orbitale der ersten und zweiten Elektronenschale

Abb. 64: Abnahme der Ozon Konzentration, Quelle der Grafiken
<https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/1995/9043-pressmitteilung-der-nobelpreis-in-chemie-1995/>

Abb. 65: Gleiche Quelle, Originalkommentar: Die bisherige Veränderung des Chlorgehalts in der Stratosphäre und drei verschiedene Szenarios für die Zukunft: a) Ohne Emissionsbegrenzung
 b) Begrenzungen gemäß dem Protokoll von Montreal aus dem Jahre 1987. c) Die zurzeit vereinbarten Emissionsbegrenzungen.
 Der Chlorgehalt als Maßstab der Größe der Ozonvernichtung.

Personenregister

Name	Lebensdaten	Seite
Achilles	Griech. Mythologie	33
Ampère, André-Marie	1775 - 1850	55
Archimedes von Syracus	287 v.Chr. - 212v.Chr.	10
Aristoteles	384 v.Chr.-322 v.Chr.	63,68
Aspect, Alain	*1947	70
Avogadro, Amadeo	1776 - 1856	1,3,66,75,87,88,101
Baudhayana	Um 800 n. Chr.	4
Bekenstein, Jacob David	1947 - 2015	57,58
Bell, John Stewart	1928 – 1990	68,69,97,100
Bernoulli, Jakob	1655 - 1705	2,13
Bernoulli, Johann	1667 - 1748	14
Bohr, Niels	1885 – 1962	68,69,71
Boltzmann, Ludwig	1844 - 1906	75,76,88
Bose, Satyendranath	1894 – 1974	59
Brahe, Tycho	1546 - 1601	38
Brown, Robert	1773 - 1858	87
Briggs, Henry	1561 - 1630	35,36
Brunelleschi, Filippo	1377 – 1446	12
Bulteau, Laurent	? CV, s.Homepage	86
Bürgi, Jost	1552 - 1632	35
Cantor, Georg	1845 - 1918	17,33,34,36
Carnot, Nicolas Léonard Sadi	1796 - 1832	97
Cauchy, Augustin-Louis	1789 - 1857	40,96
Celsius, Anders	1701 – 1744	58
Chapman, Sidney	1888 - 1970	95
Coulomb, Charles Augustin de	1736 - 1806	51,71
Crutzen, Paul	1933 - 2021	95

Cusanus, Nikolaus von Kues	1401 - 1464	10
D'Alembert, Jean-Baptiste le Rond	1717 - 1783	13
da Vinci, Leonardo	1452 – 1519	13
de Broglie, Louis-Victor Pierre Raymond	1892 - 1987	91,92
Debye, Peter	1884 – 1966	61
Dedekind, Richard	1851 - 1916	17
Descartes, René	1596 – 1650	96
Dirichlet, Johann Peter Gustav Lejeune	1805 – 1859	43
Eddington, Arthur	1882 - 1944	56,57
Einstein, Albert	1879 - 1955	2,50,56,57,59,65,68,69,72,87,98
Eratosthenes von Kyrene	276 – 194 v. Chr.	48,49,50,100
Euklid von Alexandria	3. Jh. v. Chr.	2,5,7,30,31,37,41,82,96,97,99
Euler, Leonhard	1707 - 1783	1,3,4,11,14f,18,21f,24f,28,35f,42f
Faraday, Michael	1791 - 1867	54
Fermat, Pierre de	1607 - 1665	8,35,37,41,98
Fertin, Guillaume	*1972	86
Fibonacci, Leonardo di Pisano	Um 1170 – nach 1240	12,29,30,32,33,80-83,96
Fourier, Jean Baptiste Joseph	1768 - 1830	51,52,53,98,100
Friedmann, Alexander Alexandrow	1888 - 1925	72,73
Friedman, Art	?	67,97,98,100
Galilei, Galileo	1564 - 1642	33,37,39
Gates, William („Bill“)	*1955	86
Gauß, Carl Friedrich	1777 - 1855	11,16,19,54
Gay-Lussac, Joseph Louis	1748 - 1850	58,88,89,100
Gerlach, Walther	1889 - 1979	61,62
Goldbach, Christian	1690 - 1764	42
Gonthier, Georges	? CV s. Homepage	41
Goodman, Jacob E.	*1933	86
Gregorius a St. Vincento	1584 - 1667	35
Großmann, Siegfried	*1930	96,109
Hales, Thomas	*1958	42
Hasselmann, Klaus	*1931	78
Hawking, Stephen William	1942 - 2018	57,58
Heisenberg, Werner	1901 - 1976	1,59,61,66f,90,92
Hekataios von Milet	550 – 476 v. Chr.	48,100
Hertz, Heinrich	1857 - 1894	2,62

Hilbert, David	1862 – 1943	96
Hipparchos von Nicäa	190 v.Chr.-120 v.Chr.	50
Hippasos von Metapont	Spät. 6.Jh.-früh. 5.Jh.	31
Hoyle, Fred	1915 - 2001	72
Hubble, Edwin	1889 - 1953	72,73,97
Jacobson, Theodore („Ted“)	*1954	57
Kelvin, Lord, Thomson Will.	1824 - 1907	59,88
Kepler, Johannes	1571 - 1630	2,27,37,38,41,42
Kermack, William Ogilvy	1898 - 1970	84
Kolmogorov, Andrei Nikolajewitsch	1903 - 1987	76
L'Hospital, Guillaume François Antoine, Marquis de	1661 - 1704	13, s.a. L'Hôpital
Leibniz, Gottfried Wilhelm	1646 - 1716	13,33,37-40,68
Lemaître, Georges Edouard	1894 - 1966	71,72
Loschmidt, Johann Josef	1821 - 1895	87,88
Mach, Ernst	1838 – 1916	87
Magellan, Ferdinand	1480 - 1521	48
Manabe, Synkuro	*1931	78
Maor, Eli	*1937	2
Mascheroni, Lorenzo	1750 - 1800	15
Maxwell, James Clerk	1831 - 1879	54,55,62
McKendrick, Anderson Gray	1876 - 1943	84
Mengoli, Pietro	1626 - 1686	13
Menninger, Karl	1898 - 1963	11
Mermin, N. David	*1935	68
Michelson, Albert Abraham	1852 - 1931	63,65
Molina, Mario	1943 - 2020	95
Montucla, Jean-Étienne	1725 - 1799	13
Morley, Edward Williams	1838 - 1923	63,65
Napier, John	1550 - 1617	35,36
Nernst, Walter	1864 - 1941	59
Newton, Isaac Sir	1643 - 1727	13,33,35-40,50, 51,53,68,100
Nicolet, Marchel	1912 - 1996	95
Ohm, Georg Simon	1789 - 1854	57,97
Oresme, Nicole (Nikolaus von)	1325 - 1382	13,15
Papadimitriou, Christos	*1949	86
Parisi; Giorgo	*1948	78
Pascal, Blaise	1623 - 1662	13,28,29,99
Pauling, Linus	1901 - 1994	67,90
Perelman, Grigori	*1966	42

Planck, Max	1858 – 1947	1,3,60-62,67,68,71, 72,74,88,92,95,100
Platon	Um 428-um 348 v.Chr	27,28,99
Podolsky, Boris	1896 - 1966	69
Poincaré, Henri	1854 - 1912	42,65
Ptolemäos, Claudius	Um 100 – nach 180	10
Pythagoras von Samos	Um 570 v.Chr.-n. 510	1,2,4- 9,25,31,33,41,97,99
Rayleigh, Lord	1842 – 1919	60,61,100
Riemann, Bernhard	1826 - 1866	14,19,36,43,44
Robertson, Howard P.	1903 - 1961	72
Robertson, Neil	*1938	41
Rosen, Nathan	1909 – 1995	69
Rowland, F. Sherwood	1927 - 2012	95
Rusu-Robina, Irena	?, CV s. Homepage	86
Sanders, Daniel P.	? CV s. Homepage	41
Schrödinger, Erwin	1887 - 1961	89,92,93
Seymour, Paul	*1950	41
Shannon, Claude Elwood	1916 - 2001	75,76,101
Singh, Simon	*1964	8
Sommerfeld, Arnold	1868 - 1951	56,61,70
Stern, Otto	1888 - 1969	61,62
Susskind, Leonhard	*1940	67,97,98,100
Taylor, Brook	1685 - 1731	21,24
Thales von Milet	624/23 v.Chr.-548/44	4,6,7,98,99
Thiele, Johannes	1865 - 1918	89,90
Thomas, Robin	*1962	41,42
Thomson, William, Lord Kelvin	1824 - 1907	59,88
Torricelli, Evangelista	1608 - 1647	13
Verhulst, Pierre-François	1804 - 1849	79
Verlinde, Erik Peter	*1962	57
Vogel, Herbert	*1951	81,83,101
Walker, Arthur Geoffrey	1909 - 2001	72
Wallis, John	1616 - 1703	11,13
Watt, James	1736 - 1819	36
Weierstraß, Karl	1815 - 1897	11,40,96
Weinberg, Steven	1933 - 2021	2,73
Werner, Benjamin	? CV s. Homepage	41
Wiles, Andrew	*1953	8,41
Wolfskehl, Paul	1856 - 1906	8
Zeilinger, Anton	*1945	70
Zenon von Kition	333/32–262/61 v.Chr.	33

Stichwortverzeichnis

Stichwort	Seite
Äther	64,65,100
Aktual (unendlich)	33
Algebraische Zahlen	18
Analytische Fortsetzung der Fakultät	16,99
Annihilation	66
Anthropisches Prinzip	71
Arithmetik	12,17,28
Atombombe	65,66
Baryonische Materie	66,74
Basler Problem	11,13,16,43,99
Bellsche Ungleichung	69,70,100
Binomische (Formeln)	28,30,31
Binomialkoeffizient	29
Blende in der Fotografie	26,27,99
Bogenmaß	7
Bohrsche Atommodell	71
Bose-Einstein-Kondensat	59
Bosonen	62
Cepheide	72
COQ	41
Cosinussatz, Kosinussatz	9,99
Coulombsches Gesetz	51
Deuterium, 2_1H	72
Differential	20,38,39,54,85
DIN-A-Formate	26,99
DNA	85
Dodekaeder	27
Drehimpuls	61,62
Einbettungsprinzip	18
Einheitskreis	7,21,22,23
Einheitswurzeln	23
Elektrisch(es Feld)	3,53,54,64,65,97
Elektromagnetisch	56,59,60,63,64,65,71,100
Enthalpie	66
Entropie	55-58,74-77,97,100
EPR-Paradoxon	69
Erdumfang	48
Eulersche Identität	1,18,24,99
Eulersche Zahl	1,3,20,24
Eulerscher Koeffizientenvergleich	11
Eulerscher Polyedersatz	28
Exponentialfunktion	4,21,22,99
Fakultät	16,17,99

Farbstoffe	90,91
FCKW	95,96
Fermionen	62
Fibonacci-Zahlen	12,29,30,32,33,80-83,96
Fission	66
Flachheitsproblem	73
Fluxion(smethode)	37,38,40
Fourier(analyse)	51,52,53,100
Fundamentalsatz der Algebra	40
Gamma(/Gammafunktion)	2,13,15,16,17,36,98
Gammaquant	66
Gaußsche Zahlenebene	19
Gaußsches Fehlerintegral	16
Goldbachsche Vermutung	42
Goldener Schnitt	1,2,3,30,31,32,80,82,83,96
Goldener Winkel	80,83
Gravitation(sgesetz)	38,50,51,53,57,63,72,73,100
Gruppentheorie	44-47
Harmonische Reihe	14,15,43
Hauptsatz(der Analysis, Kettenbruch)	39,55,56,58,59,75,82
Heisenbergsche Unschärferelation	1,59,61,65,66-68,90
Hexagesimales Stellenwertsystem	5
Höhensatz	7
Hohlraumstrahlung	59,60
Holomorph	43
Homöomorph	42
$i = \sqrt{-1}$	17
Ikosaeder	27
Imaginäre Zahlen	19
Infinitesimalrechnung	13,33,37-40
Informationstheorie	55,57,74-76
Instantan	56,68
Integral, Integralrechnung	16,17,20,39,51
invers	17,19,37
Kartesische Koordinaten	22
Kathetensatz	6
Kekulé-Formeln	89,90
Keplersche Gesetze	38
Keplersche Vermutung	42
Klimakrise	77,78,95,96,101
Körper (algebraischer)	17,18,20,47
Kollaps(der Wellenfunktion)	56,57,68
Kombinatorik	29,30
Komplexe Wurzeln	23f
Komplexe Zahlen	17f,19,25,40,99

Kontinuum /Hypothese	33,34,97,99
Konvergente	82,83
Konvergenz	13,15
Kosinussatz, Sinussatz	9,99
Kosmologisch(e Konstante)	72,73.74
Lichtgeschwindigkeit	3,56,64,65,69-73,100
Logarithmen	20,34,35,36
Logistisch(e Gleichung)	1,79,80,96,101
Lokaler Realismus	69
Mächtigkeit	33,34
Magnetfeld	55,62
Magnetisch(e Flussdichte)	53-56,59,60-65,71,72,100
Major	30
Mannigfaltigkeit	42
Messproblem	57,68
Minor	30
Momentenmethode	37,38
Monade	38
Moskauer Papyrus	6,10
Nukleosynthese	73
Null	11f
Oktaeder	27
Ozon(schicht)	60,94-96,101
Pancake-Sortierung, Pfannkuchen-	85,86,87
Pandemie, Epidemie	84,85,110
Papyrus-Rhind	6
Pascalsches Dreieck	28,29,99
Pentagramm	31
Permanenzprinzip	18
Pi, π	7, 10f
Phyllotaxis	80,81,98
Plancksches Wirkungsquantum	1,3,61,62,67,68,71,88,92
Platonische Körper	27,28,99
Poincaré Vermutung	42
Polarkoordinaten	22
Potenzmenge	34
Potenzreihe	11
Primzahlzwillinge	42
Pythagoras, Satz des	4,5
Pythagoreische Tripel	5
Quadratwurzeln, reelle	25,26,99
Quantenchromodynamik	73
Quantenelektrodynamik	73
Quanten(mechanik, -theorie)	50,53,54-59,61,62,66,67-70,73,75,89,90,92,97,98,100
Quantenzahl	62

Radiant	7
Random walk	75
Richtungsquantelung	61
Relativitätstheorie	50,56,57,65,69,72,73,97
Riesentheorem	46
Schrödinger Gleichung	89,92,93
Schwarze Löcher	57,97
Schwarz(körperstrahlung)	59,60
Sinussatz	8f
Sonne	32,38,49,56,59,60,63,66,80-82,100
Sonnenblume	32,80,81,82
Sphäre	42
Spin	62
Spiegelreflexcamera	27
Stellenwertsystem	11,12
Taylorreihe	21
Tetraeder	27,29
Thales, Satz des	6
Thermodynamik, 2./3. Hauptsatz der	55,58,59,74-76
Topologie	42,85
Transfinit	36
Transzendente Zahlen	18,33
Trigonometrie	6,22
Unendlich	2,11,12,13,15,19,20,21,33-40,42-44 82,90,98
Urknall	71,72,74,101
Vakuum	13,54,60
Verborgene Variablen	68,69
Vierfarbensatz	41
Vollständige Induktion	32
Wöhlersche Harnstoffsynthese	89
Zahlentheorie	6,8,15,42,44
Zeta-Funktion	14,43

Danksagung (in alphabetischer Reihenfolge)

Mein besonderer Dank gilt **Herrn Prof. em. Dr. Dr. h.c. mult. Siegfried Großmann**. Er ist eine lebende Legende unter den international renommierten, deutschen Physikern. Als Mitbegründer der Chaostheorie und zahlreicher weiterer Impulse kann man ihn als einen der Doyens der Physik in Deutschland bezeichnen. Mit seinen 93 Jahren hat er sich meinem Manuskript gewidmet und eine wunderbare Stellungnahme dazu geschrieben. Ein langes Gespräch hat mir gezeigt, dass die Begeisterung für mathematisch-naturwissenschaftliche Themen, insbesondere aus der Physik, trotz der altersbedingten gesundheitlichen Einschränkungen immer noch ungebrochen bei ihm ist. Er ist nicht nur mit dieser Haltung ein großes Vorbild.

Vielen Dank auch an **Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl** (Uni. Gießen, ab 1.4.2022 Uni. Kiel). Bei meiner Publikation „Unendlich“ hat er mich bereits als Mentor unterstützt und spontan auch für den vorliegenden Beitrag, ohne ihn damals zu kennen, seine Unterstützung zugesagt. Seine einfühlsamen Hinweise bringen immer wieder neue Impulse und neue Aspekte in das jeweilige Thema und haben auch den vorliegenden Beitrag befruchtet.

Herr Dr. Michael Serafin ist aus der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Gesellschaft nicht mehr wegzudenken. Wie immer macht er viel mehr, als er als Schriftleiter der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Zeitschrift machen müsste. Er ist ein wesentlicher Stützpfeiler unserer Gesellschaft und hat dazu maßgeblich beigetragen, dass die altherwürdige Institution auch in der Pandemie sichtbar bleibt.

Denn es muss von Herzen gehen, was auf Herzen wirken soll.

Johann Wolfgang von Goethe (Faust, 2. Teil)

Für Fari