

**Vergleichsmethoden und
Hyperbolizität
für periodische Orbits bei
positiver, verzögerter Rückkopplung**

Inauguraldissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fachbereiche
der Justus-Liebig-Universität Gießen

vorgelegt

von

Dipl.-Math.

Martin W. Gombert
aus Gießen

Gießen, 2003

D-26

Dekan: Prof. Dr. Volker Metag
Gutachter: Prof. Dr. Hans-Otto Walther (Gießen)
Prof. Dr. Christian Fenske (Gießen)

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	4
Notationen	20
1 Vergleich schnell schwingender periodischer Lösungen	23
1.1 Ebene Jordankurven	25
1.2 Voraussetzungen und Grundlagen	37
1.3 Das Lyapunov-Funktional V	41
1.4 Untersuchung periodischer Lösungen mittels V	54
1.5 Graphdarstellung und Symmetrie	65
1.6 Periodenvergleich	75
1.7 Eindeutigkeit durch Vergleich	96
1.8 Kommentare und Ausblicke	99
2 Hyperbolizität eines periodischen Orbits	103
2.1 Floquet-Multiplikatoren und Hyperbolizität	108
2.2 Die Wurzel des Monodromieoperators	117
2.3 Technische Hilfsmittel	122
2.4 Die charakteristische Funktion q von W	137
2.5 Hyperbolizität von x	145
Literaturverzeichnis	162

Einleitung

In vielen Anwendungen nimmt man bei der mathematischen Beschreibung eines physikalischen Systems einen Zusammenhang zwischen der Zeit t , dem zeitabhängigen Zustand $x(t) \in \mathbb{R}$ und der Änderungsrate des Zustands $\dot{x}(t)$ an. Diese Beschreibung kann formal durch eine gewöhnliche Differentialgleichung

$$(g) \quad \dot{x}(t) = g(t, x(t))$$

erfolgen, wobei die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ als stetig differenzierbar angenommen wird.

Ein durch Gleichung (g) erklärtes System reagiert ausschliesslich auf *gegenwärtige* Zustände. Es stellt sich jedoch in manchen Anwendungen heraus, dass die Annahme einer solchen gegenwärtigen Kausalität allein unzureichend ist. In vielen Fällen erscheint es realistischer, neben unmittelbaren Faktoren auch zeitlich zurückliegende, also *verzögerte*, zu berücksichtigen, d.h. die Änderungsrate $\dot{x}(t)$ von x zur Zeit t hängt nicht nur von $x(t)$ sondern auch vom vergangenen Zustand $x(t - \tau)$ ab; dabei sei τ eine positive konstante *Verzögerungszeit*. Gegenüber (g) beschreibt

$$(g, \tau) \quad \dot{x}(t) = g(t, x(t), x(t - \tau))$$

ein System, das sowohl auf unmittelbare als auch auf vergangene Zustände reagiert.

Die folgende Schilderung der neuronalen Signalübermittlung durch Nervenzellen motiviert die in dieser Arbeit betrachtete und in der Klasse (g, τ) enthaltene *verzögerte Differentialgleichung*

$$(\mu, f) \quad \dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t - 1)),$$

wobei $\mu \geq 0$ für eine unmittelbare Dämpfung steht und die stetig differenzierbare Nichtlinearität $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine verzögerte Reaktion des Systems beschreibt.

Die nun folgende mathematische Modellierung einer Nervenzelle erfordert eine strukturelle Kenntnis ihres biologischen Aufbaus. Ein solcher ist in unterschiedlicher Ausführlichkeit u.a. bei WU [54], MÜLLER, REINHARDT & STRICKLAND [41] oder HERZ [20] beschrieben; als eine physiologische Referenz erweist sich das Anatomie-Lehrbuch von BENNINGHOFF [3]. Anhand der biologischen Sachverhalte können wir insbesondere beurteilen, inwieweit (noch zu treffende) Voraussetzungen an die Funktion f in (μ, f) dem biologischen Vorbild entsprechen.

Der Mensch und die meisten vielzelligen Tiere besitzen ein Gefüge aus unregelmässig sternförmig gestalteten Nervenzellen und deren Fortsätzen: das *Nervengewebe*. Trotz ihrer

Vielfalt lassen sich die Nervenzellen anhand der Verbindungsart und -häufigkeit zu anderen Nervenzellen in drei Gruppen einteilen, von denen wir die grösste, die Gruppe der sog. *multipolaren Nervenzellen*, betrachten und im folgenden abkürzend als *Nervenzellen* bezeichnen.

Eine Nervenzelle mit allen ihren Fortsätzen wird meist *Neuron* genannt und besteht aus drei verschiedenen Strukturen, nämlich den *Dendriten*, dem *Zellkörper* oder *Soma* sowie dem *Axon* oder *Neurit*. Dendriten sind feine, stark verästelte Nervenbahnen, die vom Zellkörper ausgehen und hemmende (*inhibitorische*) oder erregende (*exzitativ*) Signale von anderen Neuronen empfangen. Dies ist möglich, weil die Neuronen untereinander verbunden sind und ein komplexes Netzwerk, ein *neuronales Netzwerk* bilden; siehe Abbildung 1, die BENNINGHOFF [3], Kapitel 16, entnommen ist. Das Axon (Neurit), ein zylinderförmiger Auswuchs des Soma, der an seinem Ende einzelne Teiläste ausprägen kann, vgl. Abbildung 2, fungiert bei der neuralen Signalübermittlung als Ausgangskanal des Neurons und endet an den Dendriten anderer Neuronen oder Muskelfasern. In dem von uns betrachteten ersten Fall befinden sich an den Enden des Axons *Synapsen*: ein kleiner, zu überbrückender Bereich zwischen *präsynaptischen* Neuron und den Dendriten oder dem Zellkörper des *postsynaptischen* Neurons. Der Durchmesser des Soma hat eine Grössenordnung von $10\ \mu\text{m} - 80\ \mu\text{m}$, der eines Dendriten $1\ \mu\text{m} - 5\ \mu\text{m}$. Der synaptische Spalt misst oft nur $20\ \text{nm}$, während die Gesamtlänge eines Neurons zwischen $0,01\ \text{mm}$ für im Gehirn verlaufende und bis zu $1\ \text{m}$ für solche, die zu den Gliedmassen führen, betragen kann.



Abbildung 1: Zellnetz im Hirnstamm einer Ratte bei 900-facher Vergrösserung.

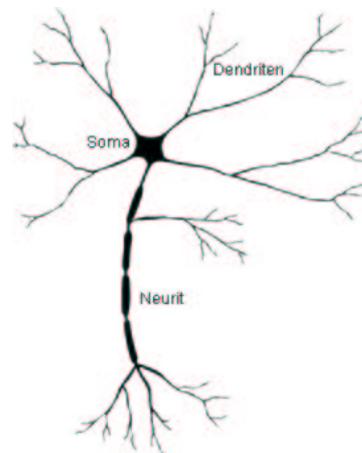


Abbildung 2: Schematische Darstellung eines Neurons.

Ein Neuron im Ruhezustand besitzt ein negatives Potential U_0 gegenüber seiner Umgebung, das *Ruhepotential* $-70\ \text{mV} \approx U_0 < 0$. Es wird durch die Undurchlässigkeit der Zellmembran gegenüber gewissen Ionen aufrechterhalten. Die Signalübermittlung zwischen Neuronen, bzw. der Signaltransport mittels eines Neurons, geschieht auf elektrochemischem Weg. Im Inneren des Neurons überwiegen dabei elektrische Vorgänge, während chemische

zwischen einzelnen Neuronen bzw. an den Synapsen vorkommen. Eine elektrische Entladung, die vom Soma ausgeht, am Neuriten entlangwandert und die verschiedenen Synapsen erreicht, ist für die elektrische Signalübermittlung verantwortlich. Auslöser der Entladung sind die von synaptischen Verbindungen über Dendriten eintreffenden exzitativen Signale anderer Neuronen. Sie erhöhen das Potential U_0 bis ein Neuron-spezifischer Schwellenwert U_S erreicht wird, der nur wenig grösser als U_0 ist. Ist die Schwelle $U_S \approx -60 \text{ mV}$ überschritten, so wird die Zellmembran des Soma durchlässig, und es findet eine Depolarisation statt; ihre hohe Intensität führt sogar zu einer Positivität des Soma-Potentials. Innerhalb weniger Millisekunden, der *Refraktär-Periode*, in denen das Neuron nicht empfangsbereit ist, wird das ursprüngliche Ruhepotential wieder hergestellt. Die Refraktär-Periode bewirkt, dass sich die beschriebene kurzzeitige Entladung des Zellkörpers in nur einer Richtung ausbreitet. Die Geschwindigkeit dieser spitzenförmigen Entladung beträgt etwa $0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ bis $2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Der an den Synapsen eintreffende Impuls löst eine Ausschüttung gewisser chemischer Substanzen, der sogenannten *Neurotransmitter*, aus, die nach einer Überbrückung der Synapse die postsynaptische Zelle erreichen. Dort bewirken sie entweder eine Verminderung oder eine Erhöhung des Zellpotentials, je nach dem, ob sie inhibitorisch oder exzitativ sind.

Aufgrund des beschriebenen Neuronen-Modells gibt es drei Grössen, die den Zustand eines einzelnen Neurons ν beschreiben: die Abweichung x des Neurons von seinem Ruhepotential U_0 , der Aktivierungszustand S von ν und der synaptische Input h ; diese drei Variablen entsprechen den Hauptbestandteilen Soma, Axon und Dendriten eines Neuron.

Die Aktivität S des Neuron ν , welche von x und der Aktivierungsschwelle U_S abhängt, beschränkt sich auf zwei Zustände, sagen wir 0 im Ruhezustand und +2 im aktivierten. Entweder es *feuert* nach einer Anregung $x > U_S$, sendet also einen Impuls an ein anderes Neuron, oder es befindet sich im Ruhezustand $x < U_S$. Zur Zeit t ergibt sich daher der unstetige Ansatz

$$S(t) = \text{sgn}(x(t) - U_S) + 1, \tag{1}$$

wobei die Signum-Funktion $\text{sgn} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ in diesem Zusammenhang *Signalfunktion* heisst.

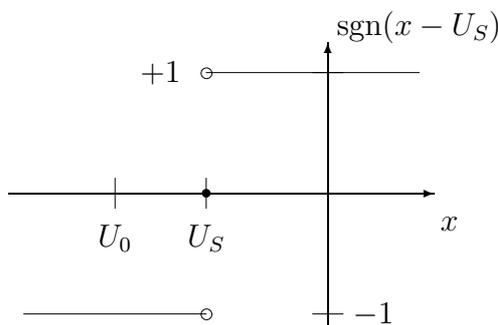


Abbildung 3: Vermöge der Signumfunktion sgn erhält man einen Alles-oder-Nichts-Ansatz, siehe MCCULLOCH & PITTS [40]. Wichtig bei der Modellierung ist ein *nicht-linearer* Ansatz, der auch bei einer unten eingeführten sigmoiden Funktion gegeben ist und die beschriebene Schwellenwerteigenschaft wiedergibt.

Meistens geht man bei der Messung des Zustands S nicht nur von einem einzelnen Impuls aus, sondern wegen der grossen Impulshäufigkeit von bis zu $\frac{1000}{\text{s}}$ von einer durchschnittlichen *Impulsrate*, siehe z.B. Abschnitt 1.2.1 in HERZ [20]. Als Signalfunktion wählt

man daher eine stetig differenzierbare, der Gestalt der sgn-Funktion nahekommende, *sigmoide* Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$ mit $f' > 0$ und $f(U_S) = 1$. Unter diesen am meisten gebräuchlichen Signalfunktionen (WU [54], Abschnitt 2.2) befinden sich beispielsweise der Arcus Tangens, der hyperbolische Tangens oder die logistische Funktion.

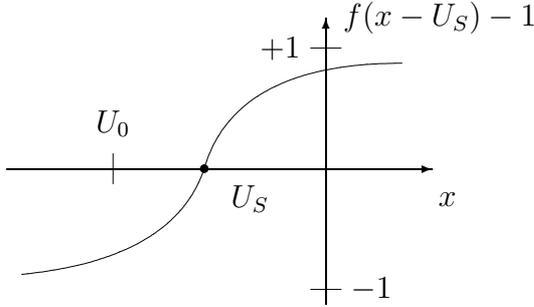


Abbildung 4: Gegenüber dem binären Signum-Modell bezeichnet man Neuronen, die anhand ihrer Feuerrate durch eine stetige Signalfunktion modelliert werden, als *analoge* Neuronen; siehe dazu HERZ [20].

Wenn wir nach einer Translation der Variablen $U_S = 0$ annehmen, ergibt sich für (1)

$$S(t) = f(x(t)), \tag{2}$$

wobei der Graph von f die in der letzten Abbildung gezeigte Gestalt hat.

In einem neuronalen Netz von $n \in \mathbb{N}$ analogen Neuronen ν_1, \dots, ν_n beschreibe

$$x_i, \quad i \in \{1, \dots, n\},$$

die Abweichung des i -ten Neuronenpotentials vom Ruhepotential; für die Schwellenwerte nehmen wir jeweils $U_S^i = 0$ an. Zu $i \in \{1, \dots, n\}$ habe ν_i die Signalfunktion f_i , die Aktivierungsfunktion S_i , und die Variable

$$Z_{ij} \in \mathbb{R}, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

beschreibe die Verbindungsintensität zwischen ν_i und ν_j , genauer: die durchschnittliche Rate ausgeschütteter Neurotransmitter in der ν_i - ν_j -Synapse. Die Vorzeichen $Z_{ij} < 0$ bzw. $Z_{ij} > 0$ stehen für eine inhibitorische bzw. exzitative Synapse. Diese Kopplungskoeffizienten seien im folgenden konstant.

Um die Dynamik des Netzes zu beschreiben, gehen wir von dem folgenden Ansatz aus.

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_i &= \text{interner Anteil von } \dot{x}_i + \text{externer Anteil von } \dot{x}_i \\ \dot{x}_i &= \dot{x}_i^{\text{int}} + \dot{x}_i^{\text{ext}} \end{aligned} \right\}, \tag{3}$$

wobei $i \in \{1, \dots, n\}$ sein soll; der externe Anteil von \dot{x}_i steht für den oben eingeführten synaptischen Input h_i .

Es seien im folgenden i und k in $\{1, \dots, n\}$. Zunächst nehmen wir an, dass die internen Prozesse des Neurons ν_i entweder konstant oder asymptotisch stabil sind, sagen wir

$$\dot{x}_i^{\text{int}} = -\mu_i x_i, \quad \mu_i \geq 0.$$

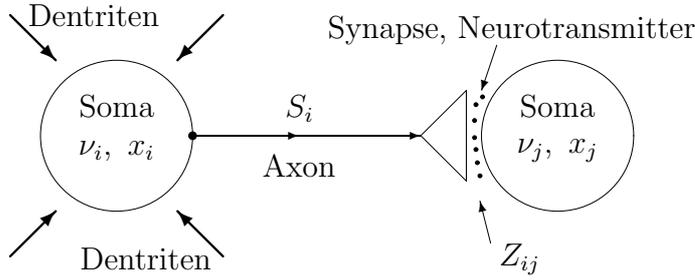


Abbildung 5: Struktureller Aufbau zweier in eine Richtung gekoppelter Neuronen.

Der nächste Ansatz eliminiert die Variable h_i und beschreibt den externen Anteil von \dot{x}_i als mit Z_{ki} gewichtete Summe der Aktivierungsfunktion S_i :

$$\dot{x}_i^{\text{ext}} = \sum_{k \neq i, k=1}^n S_k Z_{ki}. \quad (4)$$

Diese *additive* Überlagerung der Eingangssignale ist auch beim Modellansatz von MCCULLOCH & PITTS [40] (1947) zu finden.

Das durch das Axon verlaufende Signal erreicht lediglich eine Geschwindigkeit von $0,2 \frac{m}{s}$ bis $2 \frac{m}{s}$. Diese geringe Signalgeschwindigkeit verursacht eine im Modell zu berücksichtigende *Zeitverzögerung* $\tau_{ki} > 0$, die beim Signallauf von ν_k nach ν_i entsteht. Die Ansätze (2), (3) und (4) liefern dann zum Zeitpunkt t

$$\dot{x}_i(t) = -\mu_i x_i(t) + \sum_{k \neq i, k=1}^n S_{ki}(t - \tau_{ki}) Z_{ki} = -\mu_i x_i(t) + \sum_{k \neq i, k=1}^n f_k(x_k(t - \tau_{ki})) Z_{ki}. \quad (5)$$

Der Einfluss einer Zeitverzögerung bei der Signalübermittlung in neuronalen Netzen wird ausführlich in WU [54], Kapitel 5, besprochen. Bei der folgenden Vereinfachung und Spezialisierung gehen wir wie in [54] vor.

Nach der Einführung einer Zeitverzögerung, eines *Delay*, sind verzögerte und unmittelbare Einflüsse bei (4) zu beachten. Im folgenden vernachlässigen wir letztere bei der Beschreibung eines 2-Neuronen-Systems. Ausgehend von (5) betrachten wir ein System von zwei synaptisch verbundenen, identischen Neuronen ν_1 und ν_2 mit identischer Signalfunktion f , Dämpfungsparameter $\mu_1 \geq 0$ und $\mu_2 \geq 0$, Kopplungsparameter Z_{12} und Z_{21} sowie Delays τ_{12} und τ_{21} .

Es ergeben sich dann die beiden Modellgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\mu_1 x_1(t) + S_{21}(t - \tau_{21}) Z_{21} = -\mu_1 x_1(t) + Z_{21} f(x_2(t - \tau_{21})) \\ \dot{x}_2(t) &= -\mu_2 x_2(t) + S_{12}(t - \tau_{12}) Z_{12} = -\mu_2 x_2(t) + Z_{12} f(x_1(t - \tau_{12})) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Viele Methoden, die für die übersichtlichen 2-Neuronen-Modelle entwickelt werden, lassen sich auf grössere übertragen; siehe dazu HUANG & WU [25], [26] und die Kommentare in Kapitel 5 von WU [54].

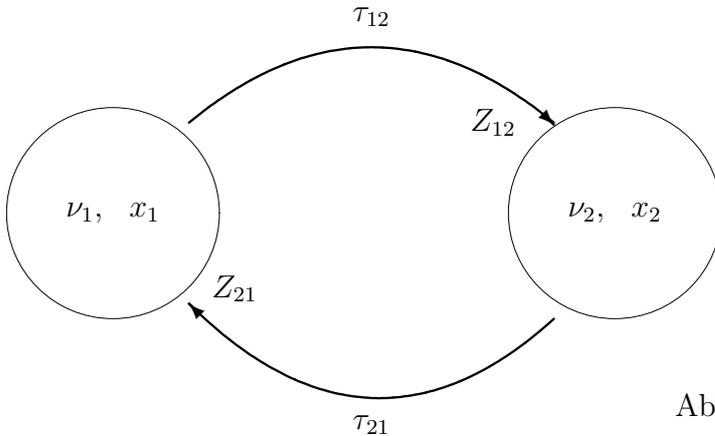


Abbildung 6: Ein 2-Neuronen-Netz.

Nehmen wir bei (6) aufgrund der Gleichartigkeit von ν_1 und ν_2 die Symmetrien

$$\mu_1 = \mu = \mu_2 \quad \text{und} \quad \tau_{21} = \tau = \tau_{12}$$

sowie exzitativa Gewichte $Z_{21} = 1 = Z_{12}$ an, so erhalten wir das gekoppelte System von verzögerten Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= -\mu x_1(t) + f(x_2(t - \tau)), \\ \dot{x}_2(t) &= -\mu x_2(t) + f(x_1(t - \tau)). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Verhalten sich nun beide Neuronen *synchron*, d.h. gilt $x := x_1 = x_2$, so wird (7) vollständig durch die skalare verzögerte Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t - \tau)), \quad \mu \geq 0, \quad (8)$$

beschrieben; siehe auch den entsprechenden Abschnitt 5.8. über synchronisiertes Verhalten von Neuronen in WU [54]. Skalieren wir bei (8) die Zeit t mit dem Faktor τ , so ergibt sich die eingangs angeführte verzögerte Gleichung

$$(\mu, f) \quad \dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t - 1)), \quad \mu \geq 0,$$

wobei wir f und μ anstatt τf und $\tau \mu$ schreiben. Wir nehmen im folgenden gemäss 5.8 in WU [54] eine sigmoide Signalfunktion f mit $f(0) = 0$ und halten fest, dass (μ, f) einerseits eine spontane Dämpfung (im Fall $\mu > 0$), andererseits eine verzögerte *positive Rückkopplung* um die Ruhelage 0 beschreibt.

Das Gleichungssystem (5) wurde Anfang der 80er-Jahre von HOPFIELD [23], [24] eingeführt - allerdings blieb die endliche Signallaufzeit zwischen Neuronen in Form von Verzögerungszeiten unberücksichtigt. MARCUS & WESTERVELT [38] wählen 1989 das Modell mit positiven Delays, welches dem biologischen Vorbild näher erscheint.

Bliebe bei der Betrachtung eines Neurons eine Zeitverzögerung während der Signalübermittlung unberücksichtigt, wäre also (μ, f) eine gewöhnliche, skalare Differentialgleichung

mit endlichdimensionalem Phasenraum \mathbb{R} , so kämen oszillierende Funktionen, die z.B. periodisch sind, nicht als Lösung in Frage. Durch die Einführung des Delay, der in (μ, f) auf 1 normiert ist, kann auch eine skalare Gleichung, wie z.B. (μ, f) , oszillierende *periodische Lösungen* $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ haben; eine solche Lösung x ist eine periodische, stetig differenzierbare Funktion $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die (μ, f) auf ganz \mathbb{R} erfüllt. Die genaue Definition einer (nicht notwendig periodischen) Lösung von (μ, f) wird in Abschnitt 1.2 gegeben.

Unter dem beschriebenen neuronalen Aspekt sind solche periodischen Lösungen und die mit ihnen in Verbindung stehenden Fragestellungen von *besonderem Interesse*, man denke etwa an eine motorische Körperfunktion, z.B. den durch periodische Sequenzen neuraler Impulse grösster Regelmässigkeit angeregten Herzmuskel beim Menschen.

Am Anfang einer mathematischen Untersuchung von (μ, f) stellt man fest, dass für die Festlegung des zukünftigen Verlaufs einer Lösung x zum Zeitpunkt t Informationen auf dem Intervall $[t - 1, t]$ vorliegen müssen. Somit erweist sich der unendlichdimensionale Banachraum \mathcal{C} der stetigen Funktionen auf einem kompakten Intervall der Länge des Delay 1, sagen wir $[-1, 0]$, mit Norm

$$\|\cdot\| : \mathcal{C} \ni \varphi \mapsto \max_{t \in [-1, 0]} |\varphi(t)| \in \mathbb{R}$$

als geeigneter Phasen- oder Zustandsraum. Haben wir beispielsweise eine periodische Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, so wird x zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{R}$ durch das *Segment*

$$x_t : [-1, 0] \ni s \mapsto x(t + s) \in \mathbb{R},$$

welches in \mathcal{C} liegt, repräsentiert.

Bei Festlegung eines *Anfangswerts* $\varphi \in \mathcal{C}$ lässt sich via

$$x(t) = e^{-\mu(t-n)}x(n) + \int_n^t e^{-\mu(t-s)}f(x(s-1))ds, \quad t \in [n, n+1], \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

die Lösung x^φ des Anfangswertproblems $[(\mu, f), x_0 = \varphi]$ durch sukzessives Integrieren eindeutig auf ganz $[-1, \infty)$ angeben. I.a. ist es nicht möglich, eine Lösung bei gegebenem $\varphi \in \mathcal{C}$ für Zeiten, die kleiner als -1 sind, festzulegen. Daher erhalten wir lediglich einen *Lösungshalbfluss*

$$F : [0, \infty) \times \mathcal{C} \ni (t, \varphi) \mapsto x_t^\varphi \in \mathcal{C}$$

zur Gleichung (μ, f) . Genauer ist in dem Abschnitt über Voraussetzungen und Grundlagen 1.2 zu finden.

Wir beschäftigen uns in dieser Arbeit mit zwei verschiedenen Aspekten

periodischer Lösungen von (μ, f) :

Mittels einer *Vergleichsmethode* (siehe Kapitel 1) können verschiedene periodische Lösungen zueinander in Beziehung gesetzt werden; ferner ist die Dynamik in der Nähe eines periodischen Orbits einfacher zu erfassen, falls dieser *hyperbolisch* ist (siehe Kapitel 2). Bevor wir auf die in diesem Zusammenhang gewonnenen Ergebnisse eingehen, beschreiben

wir kurz und ohne Beweise, wie ein allgemeiner und umfassender Ansatz zur Untersuchung von (μ, f) auf die Betrachtung periodischer Lösungen dieser Gleichung führt. Dabei setzen wir eine sigmoide Nichtlinearität f voraus, deren Eigenschaften in Abschnitt 1.2 präzisiert werden.

Ein für das Langzeitverhalten von Lösungen der Gleichung (μ, f) zentraler Begriff ist der des *globalen Attraktors*: Eine kompakte, unter dem Lösungshalbfluss invariante Teilmenge A des Phasenraums \mathcal{C} heisst globaler Attraktor, wenn sie alle beschränkten Mengen im Zustandsraum anzieht: Jede Lösung erreicht nach einer gewissen Zeit eine beliebig kleine Umgebung von A und kann aus dieser nicht mehr entkommen. Falls ein globaler Attraktor existiert, so ist er eindeutig. Kennt man darüberhinaus die Struktur des Attraktors, so versteht man auch die globale Dynamik der Gleichung (μ, f) .

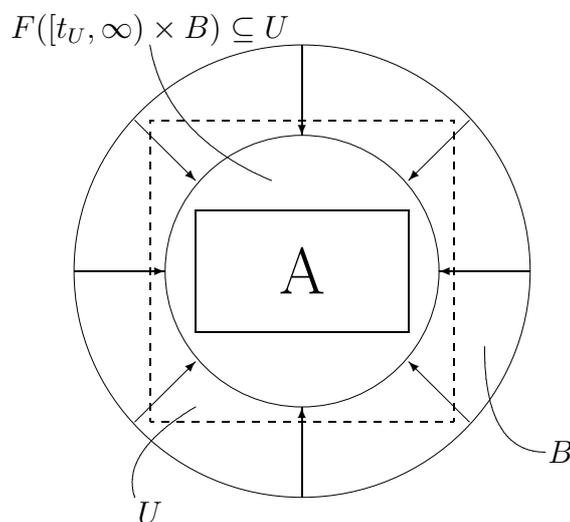


Abbildung 7: Der globale Attraktor A zieht jede beschränkte Menge $B \subseteq \mathcal{C}$ an, d.h. für alle offenen Mengen $U \supseteq A$ in B (man stelle sich U nur etwas grösser als A vor) gibt es einen Zeitpunkt $t_U \geq 0$ mit $F([t_U, \infty) \times B) \subseteq U$: Startet eine Lösung x bei $\varphi \in B$, so wird sie von A angezogen, erreicht also nach einer Zeit t_U eine beliebige Umgebung U von A , $F(t_U, \varphi) \in U$, und kann aus U nicht mehr entkommen.

In der Monographie von KRISZTIN, WALTHER & WU [33] wird gezeigt, dass für $\mu > 0$ und beschränkter sigmoider Nichtlinearität f ein Attraktor existiert. Im Fall $\mu = 0$ gibt es keinen globalen Attraktor, jedoch wird in der Monographie [33] nach einer kompakten Ersatzmenge \tilde{A} gesucht, die - grob gesprochen - aus allen Anfangswerten von Lösungen besteht, die für $t \rightarrow -\infty$ gegen den Ruhepunkt Null streben.

KRISZTIN, WALTHER & WU [33] untersuchen die geometrischen, topologischen und dynamischen Eigenschaften der dreidimensionalen, kompakten und invarianten Menge \tilde{A} im unendlichdimensionalen Phasenraum \mathcal{C} unter gewissen Voraussetzungen an μ und f ; die Menge \tilde{A} ist im Fall $\mu > 0$ ein Kandidat für den globalen Attraktor und kann als dreidimensionale Vollspindel interpretiert werden. Im Fall $\mu = 0$ erhalten wir einen Vollzylinder; vgl. Abbildung 8.

Weil ein Attraktor notwendigerweise alle periodischen Orbits enthält und in [33] gezeigt wird, dass \tilde{A} genau einen solchen periodischen Orbit \mathcal{O} mit kleinster Periodenlänge zwischen 1 und 2 umfasst, wird die Frage nach der

Anzahl der periodischen Orbits von (μ, f) mit Periodenlängen im Intervall $(1, 2)$

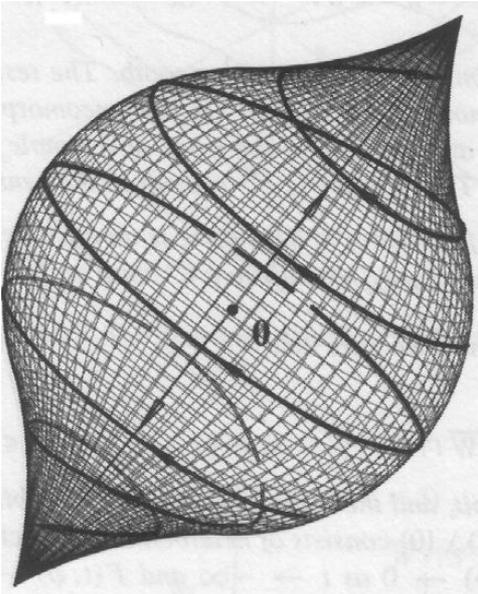


Abbildung 8: Die Vollspindel als dreidimensionale Entsprechung von \tilde{A} bei positiver Rückkopplung und $\mu > 0$. Der formgebende periodische Orbit hat eine Periode zwischen 1 und 2. Die singulären Spitzen ergeben sich aus den beiden nicht-verschwindenden Gleichgewichten von (μ, f) , welche im Fall $\mu > 0$ auftreten. Im Fall $\mu = 0$ degeneriert diese zu einem Vollzylinder.

wichtig; dabei ist die Verschiedenheit zweier periodischer Lösungen von (μ, f) modulo zeitlicher Translation zu verstehen.

Bei einem Ansatz zur Beantwortung dieser Frage gehen wir von der Existenz verschiedener periodischer Orbits derselben Oszillationsfrequenz wie \mathcal{O} aus und *vergleichen* diese im ersten Kapitel dieser Arbeit miteinander.

Mit der in Abschnitt 1.6 en détail beschriebenen Vergleichsmethode ist es u.a. möglich, die Eindeutigkeit periodischer Orbits von (μ, f) bei *ungeradem* f zu beweisen. Dabei geht man von verschiedenen periodischen Lösungen x_1 und x_2 mit Periodenlängen T_1 und T_2 aus und betrachtet die zugehörigen stetig differenzierbaren Kurven

$$\gamma_{x_1} : [0, T_1] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \gamma_{x_2} : [0, T_2] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Ausgehend von MALLET-PARET & SELL [36] und [37] zeigen wir in den Abschnitten 1.4 und 1.5, dass diese beiden Kurven einfach geschlossene, reguläre Kurven sind, deren Spuren

$$\Gamma_1 := \gamma_{x_1}([0, T_1]) \quad \text{und} \quad \Gamma_2 := \gamma_{x_2}([0, T_2])$$

disjunkt in der *künstlichen Phasenebene* \mathbb{R}^2 liegen und den Ursprung umlaufen. Ein Vergleich der periodischen Lösungen x_1 und x_2 geschieht anhand der Spuren Γ_1 und Γ_2 .

Die Γ_1 und Γ_2 betreffenden Vergleichsaussagen nutzen zum einen die Topologie der Ebene \mathbb{R}^2 in Gestalt des Kurvensatzes von Jordan aus; siehe den unabhängigen Abschnitt 1.1 über ursprungsumlaufende Jordankurven. Zum anderen werden analytische Argumente anwendbar, wenn durch radiale Streckung einer Spur Berührungspunkte zwischen Γ_1 und Γ_2 entstehen. Um dies etwas genauer zu beschreiben, wenden wir den Kurvensatz von Jordan an, der zu Γ_1 und Γ_2 offene, einfach zusammenhängende Teilmengen des \mathbb{R}^2 , die *Innengebiete* $\mathcal{I}(\Gamma_1)$, $\mathcal{I}(\Gamma_2)$ und *Aussengebiete* $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ und $\mathcal{A}(\Gamma_2)$ der Spuren Γ_1 und Γ_2 liefert.

Weil beide Spuren keinen Punkt gemeinsam haben, können wir von $\Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$ ausgehen. Strecken wir Γ_2 in einer bestimmten, in den Abschnitten 1.1 und 1.6 erklärten Art und Weise zu einer Spur $\rho \cdot \Gamma_2 = \Gamma_0$, so wird in 1.6 begründet, wieso gerade die beiden in der Abbildung skizzierten Fälle (I) und (II) zu unterscheiden sind. Gelingt es, beide Fälle auf

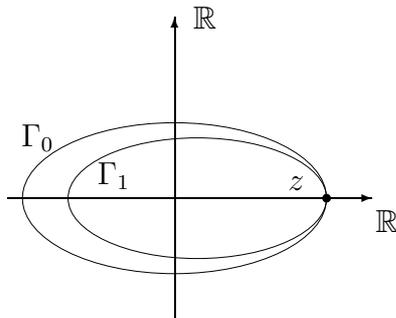


Abbildung 9a: Fall (I)

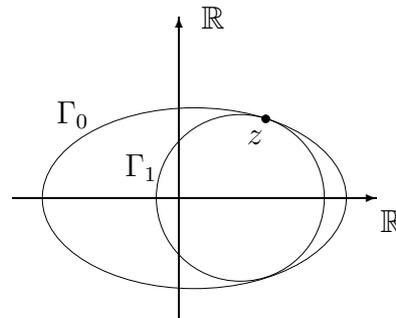


Abbildung 9b: Fall (II)

einen Widerspruch zu führen, so kann es keine zwei verschiedenen periodischen Lösungen x_1 und x_2 von (μ, f) geben.

Ein erstes solches Eindeutigkeitsresultat hat NUSSBAUM [45] für *langsam schwingende periodische Lösungen* x von $(0, -f)$, also im Fall *negativer* Rückkopplung, $\mu = 0$ und *ungerader* Nichtlinearität f erhalten; die periodische Lösung x heisst dabei langsam schwingend, wenn ihre Nullstellenabstände grösser als der Delay 1 sind. Die in [45] gemachte Krümmungsvoraussetzung an die Nichtlinearität f entspricht dem Krümmungsverhalten einer typischen, oben angeführten sigmoiden Funktion - mit geändertem Vorzeichen. Bemerkenswerterweise wird in CAO [6] gezeigt, dass ohne eine solche Krümmungsvoraussetzung keine Eindeutigkeit zu erwarten ist. CAO [7] ist es weiterhin gelungen, den Eindeutigkeitsbeweis für langsam schwingende periodische Lösungen von NUSSBAUM [45] für $(\mu, -f)$ zu verallgemeinern; CAO kommt dabei *ohne die Ungeradheit von f* bzw. $-f$ aus, und der Dämpfungsparameter μ darf positiv sein.

Durch eine Adaption der Methode von CAO bei negativer Rückkopplung zeigen KRISZTIN & WALTHER die Eindeutigkeit schnell schwingender periodischer Orbits mit Perioden zwischen 1 und 2, also bei positiver Rückkopplung, und beweisen somit, dass die oben beschriebene Menge \tilde{A} für $\mu > 0$ der Attraktor von (μ, f) ist. Allerdings kommen KRISZTIN & WALTHER nicht ohne die Ungeradheit von f aus, die nach Abschnitt 1.5 eine Symmetrie bei den periodischen Lösungen bewirkt und als Einschränkung empfunden wird; siehe dazu auch 5.4 in WU [54].

In Fortführung der geschilderten Ergebnisse und Ansätze werden wir in der vorliegenden Arbeit zeigen, dass Fall (II) auch dann nicht eintreten kann, wenn f nicht notwendig ungerade ist. Eine genaue Formulierung dieser Aussage ist in Abschnitt 1.6 zu finden.

Daher können wir uns in 1.6 beim Vergleich verschiedener periodischer Lösungen x_1 und x_2 von (μ, f) mit Perioden im Intervall $(1, 2)$ auf Fall (I) konzentrieren. Bei der Betrachtung

von (I) zeigt sich, dass die Ungeradheit von f den Vergleich von x_1 und x_2 erheblich vereinfacht, und eine Existenz zweier periodischer Lösungen von (μ, f) mit Perioden in $(1, 2)$ kann im allgemeinen Fall einer unsymmetrischen Signalfunktion f nicht ausgeschlossen werden.

Allerdings ist es möglich, durch die Betrachtung von (I) für $\mu = 0$ eine Beziehung zwischen x_1 und x_2 herzustellen: Die *Periodenabschätzung*

$$\text{Aus } \Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1) \text{ folgt } T_2 < T_1. \quad (9)$$

als Übertragung von gegenseitiger Spurlage auf das zugehörige Periodenverhältnis gelingt bei typischen sigmoiden Funktionen, gilt für Perioden T_1 und T_2 im Intervall $(1, 2)$ und wird in Abschnitt 1.6 bewiesen.

Verschiedene periodische Lösungen x_1 und x_2 haben demnach eine nichtverschwindende Periodendifferenz $\Delta T := T_1 - T_2$, und es gilt $|\Delta T| > 0$. Am Ende von Abschnitt 1.6 gelingt es uns zu zeigen, dass sich T_1 und T_2 nicht zu sehr unterscheiden können, sofern ihre dritten Ableitungen in den Extremstellen ein gleiches Vorzeichen besitzen:

$$0 < |\Delta T| < \frac{1}{2}.$$

Wie wir in Abschnitt 1.8 sehen werden, kann die Abschätzung (9) alternativ über eine Transformation der betrachteten *schnell schwingenden* periodischen Lösungen von $(0, f)$ auf langsam schwingende periodische Lösungen einer anderen Gleichung gewonnen werden, indem wir ein Ergebnis von CAO [7] bzw. meiner Diplomarbeit [17] ausnutzen.

In Abschnitt 1.7 ist es uns möglich, u.a. von (9) ausgehend *Eindeutigkeitsätze* für gewisse Klassen periodischer Orbits zu beweisen. Wie oben erwähnt wird, verwenden KRISZTIN & WALTHER [32] die beschriebene Vergleichsmethode zum ersten Mal im Fall positiver Rückkopplung, um die Eindeutigkeit periodischer Lösungen von (μ, f) derselben Oszillationsfrequenz zu zeigen. Bei diesem Beweis kann auf die Ungeradheit der Nichtlinearität f nicht verzichtet werden. Wir zeigen jedoch in Abschnitt 1.7, dass nicht die Symmetrie von f , also die daraus resultierende der periodischen Lösung x , ausschlaggebend ist, sondern dass es im Fall $\mu = 0$ lediglich auf die Nullstellenabstände von x ankommt, siehe dazu auch Satz 1.7.1:

Es gibt höchstens eine periodische Lösung von $(0, f)$ mit konstantem Nullstellenabstand und Periode zwischen 1 und 2.

Desweiteren gelingt auch für $\mu \geq 0$ der Beweis des folgenden Eindeutigkeitsatzes, siehe Satz 1.7.2 :

Es gibt höchstens eine periodische Lösung x von (μ, f) mit $\max x(\mathbb{R}) = |\min x(\mathbb{R})|$ und Periode zwischen 1 und 2.

Wir merken an, dass der letztgenannte Satz eine echte Erweiterung des angesprochenen Eindeutigkeitsatzes von KRISZTIN & WALTHER [32] ist.

Charakteristisch für die geschilderte Vergleichsmethode ist die Kombination analytischer Argumente mit topologischen bzw. (differential)geometrischen Aussagen. Um die zunächst empfundene Unübersichtlichkeit der nicht unkomplizierten Beweise zu beheben, bietet sich eine weitestgehende Trennung der verschiedenartigen Beweisbestandteile an – auch im Hinblick auf eine diesbezügliche Betrachtung anderer Gleichungsklassen. Insbesondere sollte klar werden, wo die speziellen Symmetrie-, Monotonie- und Krümmungseigenschaften von f bei der Argumentation einfließen. Beispielsweise enthält der elementare, von (μ, f) unabhängige Abschnitt 1.1 fast alle die Topologie der Ebene \mathbb{R}^2 betreffenden Aussagen, auf die im nachfolgenden Text bei der Untersuchung von (μ, f) zurückgegriffen wird, und in Abschnitt 1.8 werden gewisse Ergebnisse aus 1.6 geometrisch anhand des Krümmungsbegriffs für ebene Kurven interpretiert.

Neben einem Vergleich zweier periodischer Lösungen bzw. einer Untersuchung des Eindeutigkeitsproblems für periodische Orbits ist die zweite wichtige Frage die nach der *Dynamik in der Nähe eines gegebenen periodischen Orbits* von

$$(0, f) =: (f) \quad \dot{x}(t) = f(x(t-1))$$

im Phasenraum \mathcal{C} . Sie wird in Kapitel 2 erörtert: Ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von (f) mit kleinster Periode T , so kann diese Untersuchung wie bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung, siehe z.B. AMANN [1], durch Linearisierung anhand der nicht-verschwindenden Eigenwerten des Zeit- T -Lösungsoperators

$$V : \mathcal{C} \ni \varphi \mapsto y_T^\varphi \in \mathcal{C},$$

der auch *Monodromieoperators* heisst, durchgeführt werden; dabei ist y^φ die Lösung der bei x linearisierten Gleichung, der *Variationsgleichung längs x*

$$\dot{y}(t) = f'(x(t-1))y(t-1), \quad y_0 = \varphi.$$

Die nicht-verschwindenden Eigenwerte des Monodromieoperators heissen *Floquet-Multiplikatoren von x* . Wie im gewöhnlichen Fall ist es i.a. schwierig, die Floquet-Multiplikatoren einer periodischen Lösung zu ermitteln, denn zu deren Bestimmung muss im Prinzip die Lösung der Variationsgleichung längs x bekannt sein.

Die Zahl 1 ist immer ein Floquet-Multiplikator mit Eigenvektor $\dot{x}_0 \in \mathcal{C}$. Befinden sich ausser der 1 keine anderen Multiplikatoren auf dem komplexen Einheitskreis $S_{\mathbb{C}}^1$, und ist der zu 1 gehörige verallgemeinerte Eigenraum eindimensional, so heisst x *hyperbolisch*. Wenn eine hyperbolische periodische Lösung x keinen Floquet-Multiplikator ausserhalb der komplexen Einheitskreisscheibe besitzt, so ist x *exponentiell stabil mit asymptotischer Phase*, d.h. es gibt eine Umgebung U von

$$\mathcal{O} := \{x_t : t \in \mathbb{R}\}$$

in \mathcal{C} und Konstanten $a \geq 0$, $b \geq 0$ sowie eine Funktion $\theta : U \rightarrow \mathbb{R}$, so dass für alle $\varphi \in U$ und alle $t \geq 0$ gilt

$$\|F(t, \varphi) - F(t + \theta(\varphi), \varphi)\| = \|x_t^\varphi - x_{t+\theta(\varphi)}^\varphi\| \leq a \cdot e^{-bt};$$

wenn ein Floquet-Multiplikator λ mit $|\lambda| > 1$ existiert, so ist der periodische Orbit \mathcal{O} instabil. Siehe dazu z.B. 10.3 in HALE [18]. In Abschnitt 2.1 zitieren wir aus KRISZTIN, WALTHER & WU [33], dass ausser einem reellen $\lambda_0 \geq 1$ und dem trivialen 1 alle Floquet-Multiplikatoren innerhalb des komplexen Einheitskreises liegen. Insbesondere werden in [33] Aussagen über die Dimension der verallgemeinerten Eigenräume von λ und 1 bewiesen, wonach die

Einfachheit von 1

die Hyperbolizität von \mathcal{O} impliziert.

Um über die Floquet-Multiplikatoren einer periodischen Lösung x von (f) , also den Zeit- T -Lösungsoperator V , Aussagen zu gewinnen, ist die im folgenden erwähnte *Symmetrieeigenschaft* (S) von x hilfreich; die meisten Existenzresultate für periodische Lösungen von (f) beinhalten jedoch ein Fixpunktargument, sind daher nicht konstruktiv und liefern keine Aussagen über das Aussehen der gefundenen periodischen Lösung x .

Es ist allerdings bei einer

ungeraden Nichtlinearität f

möglich, eine *ungerade*

periodische Lösung x von (f) der Periode $\frac{4}{3}$

zu finden, die nach Satz 1.5.2 der Symmetriebedingung

$$(S) \quad x = -x \left(\cdot - \frac{2}{3} \right).$$

genügt. Die periodische Lösung x heisst *speziell-symmetrische Lösung* von (f) .

Im folgenden sehen wir, dass diese Zusatzinformationen eine Untersuchung der Floquet-Multiplikatoren von x ermöglichen. Am Anfang des 2. Kapitels zeigen wir zunächst die Existenz der speziell-symmetrischen Lösung x von (f) , indem wir einen oft zitierten Satz von KAPLAN & YORKE [29] verwenden.

In diesem wird die Existenz einer langsam schwingenden

4 – periodischen Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

bei einer verzögerten negativen Rückkopplung um die Ruhelage 0 gezeigt, welche durch eine Gleichung der Form

$$(0, -f) \quad \dot{x}(t) = -f(x(t-1))$$

beschrieben ist. Die essentielle Symmetrievoraussetzung an f ermöglicht es dabei gegenüber den angesprochenen nicht-konstruktiven Fixpunkt-Argumenten, siehe z.B. eine Anwendung des Satzes von Schauder bei WALTHER [49], das Existenz-Problem der verzögerten

Gleichung auf das Finden von periodischen Lösungen eines zweidimensionalen Hamiltonschen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen zurückzuführen. Die somit gefundene 4-periodische langsam schwingende Lösung y von $(0, -f)$ können wir dann auf eine $\frac{4}{3}$ -periodische schnell schwingende Lösung x von (f) transformieren; dabei erfüllt x die Symmetrieeigenschaft (S) .

Solchen Existenzaussagen ist eine Steilheitseigenschaft von f im Ruhepunkt 0 vorauszusetzen, die am Anfang des 2. Kapitels formuliert wird. Sie hat die Form $f'(0) > \alpha$ bei gegebenem $\alpha > 0$, und für solche f gelingt es am Ende dieses Kapitels,

die *Hyperbolizität* von x

mittels der im folgenden skizzierten Methode zu beweisen. In WALTHER [51] hat dieser Hyperbolizitätsbeweis für die $\frac{4}{3}$ -periodische Lösung x eine lokale Natur in dem Sinne, dass $f'(0)$ nur wenig grösser als α sein darf. Diese Bedingung entfällt durch die oben erwähnte a-priori-Abschätzung über Floquet-Multiplikatoren von x .

Wie in WALTHER [50] beschrieben, ist es nun möglich, die Floquet-Multiplikatoren von x mit den Nullstellen einer holomorphen Funktion

$$q : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$$

in Zusammenhang zu bringen. Dazu betrachten wir die *Wurzel*

$$W : \mathcal{C} \ni \varphi \mapsto y_{\frac{2}{3}}^{\varphi} \in \mathcal{C}$$

des Monodromieoperators

$$V : \mathcal{C} \ni \varphi \mapsto y_{\frac{4}{3}}^{\varphi} \in \mathcal{C}.$$

Die Spektralpunkte von V sind die Spektralpunkte der Komplexifizierung von V und Quadrate der Spektralpunkte von W . In Abschnitt 2.4 wird nach WALTHER [50] gezeigt, dass die Nullstellen von q mit Berücksichtigung ihrer Vielfachheiten mit den Spektralpunkten von W in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ übereinstimmen, d.h. q ist eine *charakteristische Funktion* von W . Wie in Abschnitt 2.2 zu sehen ist, sind die nichtverschwindenden Spektralpunkte von W Eigenwerte von W , weil $V = W^2$ kompakt ist.

Wir beschreiben kurz, wie die Symmetrien von f und x einen Ansatz für q liefern und gehen dabei von der Eigenwertgleichung

$$W\chi = z\chi$$

für $\chi \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ und $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ aus. Es seien

$$\chi_1 := \chi \left(\cdot - \frac{2}{3} \right) \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]}, \quad \chi_2 := \chi \left(\cdot - \frac{1}{3} \right) \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]} \quad \text{und} \quad \chi_3 := \chi \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]},$$

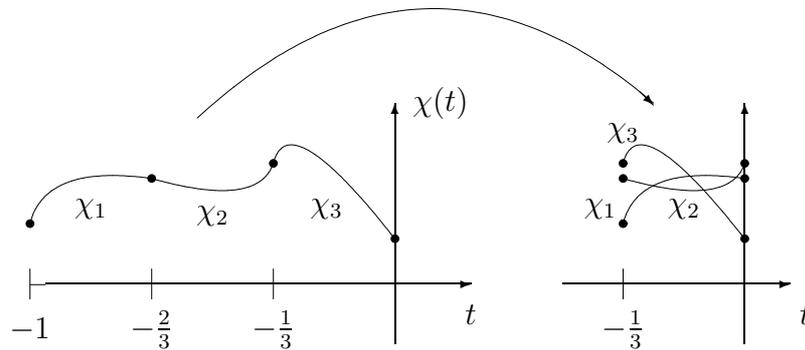


Abbildung 10: Die Teilsegmente χ_1 , χ_2 und χ_3 von χ .

und wir betrachten die Lösungsteilsegmente

$$u := W\chi|_{[-\frac{1}{3}, 0]} = y^x \left(\frac{2}{3} + \cdot \right) \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]} \quad \text{bzw.}$$

$$v := W\chi \left(\cdot - \frac{1}{3} \right) \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]} = y^x \left(\frac{1}{3} + \cdot \right) \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]}.$$

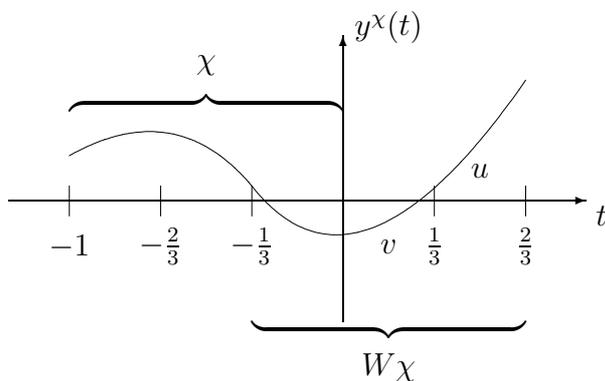


Abbildung 11: Wegen $W\chi = z\chi$ gelten

$$u = z\chi_3, \quad v = z\chi_2, \quad \chi_3 = z\chi_1, \quad (10)$$

insbesondere auch die Randbedingungen

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= z\chi_3(0) = zv(-\frac{1}{3}), \\ v(0) &= u(-\frac{1}{3}). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Für $t \in [-\frac{1}{3}, 0]$ ergeben sich mit (10)

$$\begin{aligned} \dot{u}(t) &= \dot{y}^x(\frac{2}{3} + t) = f'(x(t - \frac{1}{3}))y^x(t - \frac{1}{3}) \\ &= f'(x(t - \frac{1}{3}))\chi_2(t) = \frac{1}{z}f'(x(t - \frac{1}{3}))v \end{aligned}$$

und genauso mit (10), der Tatsache, dass f' eine gerade Funktion ist, und (S)

$$\begin{aligned} \dot{v}(t) &= \dot{y}^x(\frac{1}{3} + t) = f'(x(t - \frac{2}{3}))y^x(t - \frac{2}{3}) \\ &= f'(x(t))\chi_1(t) = \frac{1}{z^2}f'(x(t))u. \end{aligned}$$

Die Funktionen u und v bilden also eine Lösung des linearen Systems

$$\left. \begin{aligned} \dot{u}(t) &= \frac{1}{z}f'(x(t - \frac{1}{3})) \cdot v \\ \dot{v}(t) &= \frac{1}{z^2}f'(x(t)) \cdot u \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

mit den Randbedingungen (11). Ist $S_z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$ die Hauptfundamentalmatrix zur Zeit $t = -\frac{1}{3}$, so lässt sich (11) schreiben als

$$S_z(0) \cdot \begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix}.$$

Folglich muss

$$q(z) := \det \left[S_z(0) - \begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right] = 0$$

gelten, falls $u(-\frac{1}{3})$ und $v(-\frac{1}{3})$ nicht beide verschwinden. Es stellt sich in Abschnitt 2.4 heraus, dass die in den letzten Zeilen motivierte Funktion q die oben beschriebenen Eigenschaften einer charakteristischen Funktion von W hat.

Weil die Nullstellen-Quadrate von q die Floquet-Multiplikatoren von x sind, erkennen wir in Abschnitt 2.2, dass für die Einfachheit von 1 als Floquet-Multiplikator von x , also die Hyperbolizität von \mathcal{O} ,

$$q(-1) = 0, \quad q'(-1) \neq 0 \quad \text{und} \quad q(1) \neq 0$$

zu zeigen ist, was in Abschnitt 2.5 anhand einer Transformation von (12) auf Polarkoordinaten gelingt. Es wird auch klar, dass eine Auswertung von q u.U. aufwendig sein kann, denn sie ist mit der Auswertung von Lösungen des Systems (12) verbunden.

Auch in einer etwas allgemeineren Situation als beschrieben ist es möglich, eine charakteristische Funktion für periodische Lösungen mit beliebiger rationaler Periode zu konstruieren. Eine erste Anwendung bei negativer Rückkopplung und bestimmten $\mu > 0$ liefert die Hyperbolizität und Stabilität eines 3-periodischen Orbits, vgl. dazu SKUBACHEVSKY & WALTHER [48]. Es besteht die Aussicht, dass damit für $\mu > 0$ und positiver Rückkopplung die Hyperbolizität einer schnell-schwingenden $\frac{5}{4}$ -periodischen Lösung bewiesen werden kann.

Ganz herzlich danke ich Prof. Dr. Hans-Otto Walther sowohl für die generelle Unterstützung meines Promotionsvorhabens als auch für die sehr gute fachliche Betreuung.

Aus den Gesprächen mit Prof. Tibor Krisztin (Szeged) und HD Dr. Bernhard Lani-Wayda (Gießen) ergaben sich nützliche Anregungen. Ebenfalls zu Dank verpflichtet bin ich meinem ehemaligen Kommilitonen Dr. Marcus Martin für das Lesen der Arbeit.

Ein Teil der Dissertation, insbesondere das Ergebnis von Kapitel 2, kam in meiner Zeit als Stipendiat des *Graduiertenstipendium des Landes Hessen zur Förderung des wissenschaftlichen Nachwuchses* von Januar 2001 bis Oktober 2001 zustande.

Nicht zuletzt danke ich meinem ehemaligen Mathematiklehrer Egon Diegelmann, der mich in meinem Interesse für die Mathematik bestärkt hat.

Notationen

Das Ende eines Beweises bzw. eines Zitats bezeichnen wir mit ■, das einer Definition mit □. Eine Aussagennummerierung erfolgt nur innerhalb von Beweisen. Neu eingeführte oder wichtige Begriffe sind *kursiv* geschrieben. Eine *Anmerkung* enthält eine auch ohne Beweis nachvollziehbare Behauptung, auf die im nachfolgenden Text zurückgegriffen wird; manchmal tauchen Zitate in Anmerkungen auf, und auch Anmerkungen werden mit ■ beendet. Wir benutzen im Text die folgenden Standardbezeichnungen.

\mathbb{N}	Die Menge der natürlichen Zahlen, wobei $0 \notin \mathbb{N}$ gilt.
\mathbb{N}_0	$:= \mathbb{N} \cup \{0\}$.
\mathbb{Z}	Die Menge der ganzen Zahlen.
\mathbb{Q}	Der Körper der rationalen Zahlen.
\mathbb{R}	Der Körper der reellen Zahlen.
\mathbb{C}	Der Körper der komplexen Zahlen.
$ M $	Ist $M \neq \emptyset$ eine endliche Menge und $\psi : \{1, \dots, n\} \rightarrow M$ bijektiv für ein $n \in \mathbb{N}$, so setzen wir $ M := n$.
$ \emptyset $	$:= 0$.
$A \times B$	Das kartesische Produkt zweier Mengen A und B .
$M \cdot N$	$:= \{m \cdot n : m \in M \text{ und } n \in N\} \subseteq A$, falls eine Abbildung $M \times N \ni (m, n) \mapsto m \cdot n \in A$ existiert.
$m \cdot N$	$:= \{m\} \cdot N$.
$M \uplus N$	Die disjunkte Vereinigung der Mengen M und N .

Ein *Intervall* im Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} hat mehr als einen Punkt und kann unbeschränkt sein. Wir verwenden insbesondere die folgenden Abkürzungen:

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^+ &:= (0, \infty) \\ \mathbb{R}^- &:= (-1) \cdot \mathbb{R}^+ \\ \mathbb{R}_0^\pm &:= \mathbb{R}^\pm \cup \{0\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}^+ &\text{ Die positiven rationale Zahlen.} \\ \mathbb{Q}^- &\text{ Die negativen rationalen Zahlen, } \mathbb{Q}^- := (-1) \cdot \mathbb{Q}^+. \\ \mathbb{Q}_0^\pm &:= \mathbb{Q}^\pm \cup \{0\}. \\ \mathbb{C}^* &:= \mathbb{C} \setminus \{0\}.\end{aligned}$$

Im folgenden betrachten wir ausschliesslich Topologien, die durch eine Norm erzeugt werden. Sind X eine nicht-leere Menge, $(X, \mathcal{T}(X))$ ein topologischer Raum und $A \subseteq X$, so bezeichnen

$\text{int}(A)$ das Innere von A ,
 \overline{A} den Abschluss von A und
 ∂A den Rand von A .

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $x \in X$. Für $\varepsilon > 0$ kürzen wir die offenen ε -Umgebungen von x durch $U_\varepsilon(x)$ ab. Kommt es auf die Norm $\|\cdot\|$ an, so schreiben wir ausführlicher $U_\varepsilon^{\|\cdot\|}(x)$. Ist $X \in \{\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n\}$, so verwenden wir bei Rechnungen meist die euklidische Norm.

Die folgenden Abkürzungen beziehen sich auf häufig vorkommende Schreibweisen bei Abbildungen zwischen Mengen.

M^N Sind M und N Mengen, so ist M^N die Menge aller Abbildungen $\psi : M \rightarrow N$.
 $\psi^{-1}(B)$ Die Menge $\psi^{-1}(B) \subseteq M$ für $\psi \in M^N$ ist die (Urbild-)menge aller $m \in M$, die nach $B \subseteq N$ abgebildet werden.
 $\psi^{-1}(b) := \psi^{-1}(\{b\})$, wobei $\psi \in M^N$ und $b \in N$ gelten.

Für die $\{\mathbb{R}, \mathbb{C}\} \ni \mathbb{K}$ -Vektorräume M und N ist M^N ebenfalls ein \mathbb{K} -Vektorraum mit punktweise definierten Verknüpfungen. Im folgenden seien die Räume M und N normiert. Wir schreiben

$\mathcal{L}(M, N)$ für die Menge aller linearen Abbildungen zwischen M und N ,
 $\mathcal{L}_C(M, N)$ für die Menge aller stetigen linearen Abbildungen zwischen M und N ,
 $\mathcal{N}(T)$ für den Kern von $T \in \mathcal{L}(M, N)$ und
 $\text{id}_M = \text{id}$ für die Identität in $\mathcal{L}(M, M)$.

Bei den nächsten Abkürzungen betrachten wir eine Funktion $\psi : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit $D \subseteq \mathbb{R}$.

$\psi < 0$ genau dann, wenn $\psi(t) < 0$ für alle $t \in D$.
 $\psi > 0$ genau dann, wenn $(-1) \cdot \psi < 0$.
 $\psi \leq 0$ genau dann, wenn $\psi(t) \leq 0$ für alle $t \in D$.
 $\psi \geq 0$ genau dann, wenn $(-1) \cdot \psi \leq 0$.
 $\psi <> 0$ genau dann, wenn die Funktion ψ keine Nullstellen hat.
 $\psi \in I$ genau dann, wenn $\psi(t) \in I$ für alle $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ gilt.

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann heisst jede stetig differenzierbare Abbildung

$$\psi : I \rightarrow \mathbb{K}^n$$

eine *Kurve*. Das Bild einer Kurve heisst *Spur*. Den Gradienten einer differenzierbaren Abbildung $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, kürzen wir durch ∇ ab. Ableitungen nach der Zeit

werden durch einen Punkt \cdot gekennzeichnet.

Mit *glatt* ist einmal stetig differenzierbar gemeint. Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^n und Diffeomorphismen einer offenen Teilmenge des \mathbb{R}^n auf ihr Bild in \mathbb{R}^m sind *glatt*.

Ein *Gebiet* ist eine offene und einfach zusammenhängende Teilmenge von \mathbb{R}^2 oder \mathbb{C} . Ist G ein Gebiet in \mathbb{C} und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, so bezeichnet

$$\text{ord}_f : G \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

die Nullstellenordnung von f .

Die im Zusammenhang mit Matrizen und Vektoren vorkommenden Bezeichnungen lauten wie folgt.

$\mathbb{K}^{m \times n}$	Der Raum aller $m \times n$ -Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$
M^{tr}	Die Transponierte der Matrix $M \in \mathbb{K}^{m \times n}$ in $\mathbb{K}^{n \times m}$.
$\text{spur}(M)$	Die Spur der Matrix $M \in \mathbb{K}^{n \times n}$.
E_n	Die Einheitsmatrix in $\mathbb{K}^{n \times n}$.
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Das Standardskalarprodukt von $\mathbb{K}^n \times \mathbb{K}^n$ nach \mathbb{K} .

Die letzte Tabelle listet die im Text vorkommenden Funktionenräume auf.

$\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$	Der Banachraum der stetigen Funktionen des kompakten Intervalls I nach $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.
\mathcal{C}	$:= \mathcal{C}([-1, 0], \mathbb{R})$
$\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$	$:= \mathcal{C}([-1, 0], \mathbb{C})$
$\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet}$	$:= \mathcal{C}([-\frac{1}{3}, 0], \mathbb{C})$
\mathcal{C}_0^{∞}	Der Raum aller unendlich oft stetig differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger $\text{supp}(f)$.

Für $\alpha > 0$ und $t \in [-\alpha, 0]$ bezeichnen wir die (lineare) Evaluationsabbildung in t mit

$$\text{ev}_t : \mathcal{C}([-\alpha, 0], \mathbb{R}) \ni \varphi \mapsto \varphi(t) \in \mathbb{R}.$$

Kapitel 1

Vergleich schnell schwingender periodischer Lösungen

Sind eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und ein Parameter $\mu \geq 0$ gegeben, so beschreibt die skalare Differentialgleichung

$$(\mu, f) \quad \dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$$

eine Kombination aus spontaner und verzögerter Rückkopplung; gilt $f(0) = 0$, so ist 0 ein Ruhepunkt des durch (μ, f) beschriebenen Systems.

Bei der mathematischen Modellierung biologischer oder künstlicher neuronaler Netzwerke ist es sinnvoll, eine zeitverzögerte Dynamik anzunehmen. Wie in der Einleitung beschrieben, treten solche Verzögerungen bei der Signalübermittlung durch Nervenzellen, den Neuronen, auf. Unter gewissen Voraussetzungen an die Nicht-Linearität f , die in diesem Zusammenhang Signalfunktion heisst, ist es möglich, ein einzelnes Neuron oder synchronisiertes Verhalten in neuronalen Netzen mittels (μ, f) zu beschreiben. Insbesondere haben wir in der Einleitung festgestellt, wie typische sigmoide Signalfunktionen f aussehen: Die in Abschnitt 1.2 festgelegten Voraussetzungen an f erscheinen in diesem Zusammenhang plausibel, u.a. betrachten wir stetig differenzierbare f mit positiver Ableitung, so dass (μ, f) eine *positive* verzögerte Rückkopplung um die Ruhelage 0 mit unmittelbarer Dämpfung beschreibt, deren Grösse durch den nicht-negativen Parameter μ gegeben ist.

Um Gleichung (μ, f) im Hinblick auf periodische Lösungen zu untersuchen, gehen wir zunächst in Abschnitt 1.2 von einer grösseren Klasse nicht-autonomer Gleichungen mit Vorzeichenbedingung aus; sie umfasst (μ, f) im Fall einer positiven Rückkopplung. Die zu einer Beschreibung dieser allgemeinen Gleichung grundlegenden Begriffe, wie z.B. *Lösung*, *Phasenraum*, *Existenz und Eindeutigkeit* von Lösungen, werden kurz erwähnt, sind aber gegenüber der Einleitung schärfer formuliert.

In Abschnitt 1.3 führen wir ein grundlegendes Werkzeug zur Untersuchung von Lösungen der in 1.2 betrachteten Gleichung ein: Das *diskrete Lyapunov-Funktional* V misst die Oszillationsgeschwindigkeit einer Lösung; die in 1.3 zusammengefassten Eigenschaften von

V lassen uns in den darauffolgenden Abschnitten 1.4 und 1.5 ausführliche Aussagen über periodische Lösungen von (μ, f) ableiten: Wir beweisen drei Aussagen, die eine Vererbung von Eigenschaften beschreiben; zum einen überträgt sich die strenge Monotonie der Signalfunktion f auf die Bereiche zwischen den maximalen Auslenkungen einer periodischen Lösung x von (μ, f) , und eine Symmetrie von f hat eine von x zur Folge. Zum anderen bleibt eine Disjunktheit von periodischen Orbits im unendlichdimensionalen Phasenraum auch nach einer gewissen Evaluation im zweidimensionalen Raum \mathbb{R}^2 bestehen. Dabei ist das Evaluationsbild die Spur der Kurve

$$\gamma_x : [0, T] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

wobei T die kleinste Periode der periodischen Lösung x von (μ, f) sein soll. Ein Schlüssel beim Beweis der erwähnten Übertragungseigenschaften ist die Feststellung, dass γ_x eine einfach geschlossene, reguläre Kurve ist, die den Ursprung $0 \in \mathbb{R}^2$ einfach umläuft, falls sie eine Nullstelle besitzt.

Es ist in manchen Fällen möglich, die Eindeutigkeitsfrage periodischer Lösungen von (μ, f) zu erörtern, indem man die Existenz zweier verschiedenener periodischer Lösungen x und y annimmt und zu einem Widerspruch führt. Dies geschieht durch einen *Vergleich* der zugehörigen Orbitkurven γ_x und γ_y bzw. deren Spuren in \mathbb{R}^2 . Bei diesem Vergleich ist die angesprochene einfache Geschlossenheit und Regularität der Orbitkurven eine wichtige Tatsache. Am Anfang von Abschnitt 1.6 wird eine genauere Beschreibung dieser Methode gegeben.

Wie oben erwähnt, können wir die in 1.4 erzielten Ergebnisse als Vererbung von strenger Monotonie, Disjunktheit und Symmetrie interpretieren. Ein viertes Übertragungsergebnis erhalten wir in Abschnitt 1.6, indem wir die dort skizzierten Vergleichsargumente formal umsetzen: Wir beweisen, dass sich die gegenseitige Lage der Orbitspuren zweier periodischer Lösungen in \mathbb{R}^2 , die verschieden sind, auf das Verhältnis ihrer kleinsten Perioden in \mathbb{R} überträgt.

KRISZTIN & WALTHER [32] verwenden die angesprochene Vergleichsmethode zum ersten Mal im Fall positiver Rückkopplung, um die Eindeutigkeit periodischer Lösungen derselben Oszillationsfrequenz, also in Niveaumengen des Lyapunov-Funktional zu zeigen. Beim Beweis wird allerdings die Ungeradheit der Nichtlinearität f benötigt. Wir zeigen jedoch in 1.7, dass nicht die Symmetrie von f , also die daraus resultierende der periodischen Lösung x , ausschlaggebend ist, sondern es lediglich auf die Nullstellenabstände von x ankommt: Im Fall $\mu = 0$ gibt es nur eine periodische Lösungen mit konstantem Nullstellenabstand in der Niveau-Menge $V^{-1}(2)$. Desweiteren beweisen wir in Fortführung der Ergebnisse von [32], dass es höchstens eine periodische Lösung von (μ, f) gibt, deren positive und negative Amplitude übereinstimmt.

Beim Vergleich verschiedener periodischer Orbitkurven und deren Spuren in \mathbb{R}^2 werden bei der Begründung der benötigten Aussagen elementare Argumente verwendet, die lediglich vom Jordanschen Kurvensatz ausgehen, d.h. nur die Topologie der Ebene betreffen. Sie sind unabhängig von Gleichung (μ, f) formulierbar und im ersten Abschnitt 1.1 allen anderen Aussagen vorangestellt.

1.1 Ebene Jordankurven

Die hier formulierten elementaren Aussagen werden wir in den folgenden Abschnitten auf Orbitkurven γ_x einer periodischen Lösung x von (μ, f) anwenden, nachdem wir in 1.4 unter Ausnutzung einer im nächsten Abschnitt formulierten Monotonieeigenschaft für f ihre einfache Geschlossenheit gezeigt haben. Das einzige Hilfsmittel bei den Beweisen in diesem Abschnitt ist der Kurvensatz von Jordan, den wir nach einer elementaren Definition zitieren; ein Beweis findet sich z.B. in dem Buch von RINOW [47].

Definition 1.1.1 *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine Kurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ heisst Jordankurve, wenn $\gamma|_{I \setminus \{\max I\}}$ injektiv ist und $\gamma(\min I) = \gamma(\max I)$ gilt. \square*

Satz 1.1.1 (Jordanscher Kurvensatz) *Es seien $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine Jordankurve und Γ deren Spur, d.h. $\Gamma := \gamma(I) \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann gibt es disjunkte Gebiete $\mathcal{I}(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\mathcal{A}(\Gamma) \subseteq \mathbb{R}^2$ mit den folgenden Eigenschaften:*

- $\mathcal{I}(\Gamma)$ ist beschränkt, $\mathcal{A}(\Gamma)$ ist unbeschränkt,
- $\partial\mathcal{I}(\Gamma) = \Gamma = \partial\mathcal{A}(\Gamma)$ und
- $\mathbb{R}^2 = \mathcal{I}(\Gamma) \uplus \Gamma \uplus \mathcal{A}(\Gamma)$.

Die Gebiete $\mathcal{I}(\Gamma)$ und $\mathcal{A}(\Gamma)$ heissen Inneres und Äusseres von Γ . ■

Als direkte Folgerung des letzten Satzes beweisen wir eine erste Hilfsaussage:

Lemma 1.1.1 *Es sei γ eine Jordankurve mit Spur Γ . Zu $z \in \mathcal{A}(\Gamma)$ und $w \in \mathcal{I}(\Gamma)$ existiert ein $\sigma \in (0, 1)$ mit*

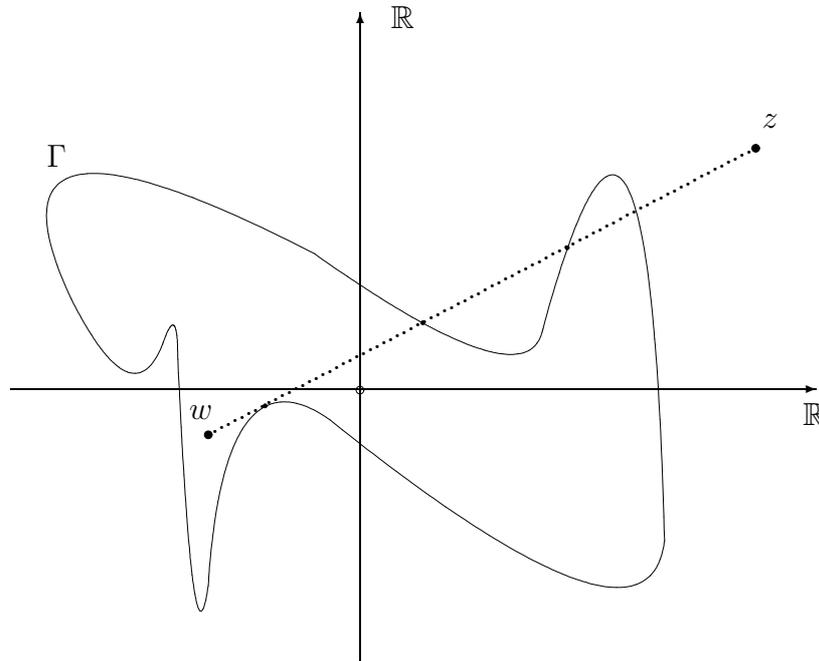
$$\sigma z + (1 - \sigma)w \in \Gamma.$$

Beweis: Es sei

$$I := \{s \in [0, 1] : sz + (1 - s)w \in \mathcal{I}(\Gamma)\}.$$

Nach Voraussetzung ist 0 in I enthalten, also ist I nicht leer. I ist nach oben beschränkt, es sei $\sigma := \sup I$. Dann gibt es eine Folge $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $I^{\mathbb{N}}$ mit $\sigma = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n$. Demzufolge ist $(\sigma_n z + (1 - \sigma_n)w)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{I}(\Gamma)^{\mathbb{N}}$, und es gilt

$$z_\sigma := \sigma z + (1 - \sigma)w = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sigma_n z + (1 - \sigma_n)w) \in \overline{\mathcal{I}(\Gamma)} = \mathcal{I}(\Gamma) \cup \Gamma.$$



Wir zeigen $z_\sigma \in \Gamma$: Angenommen, $z_\sigma \in \mathcal{I}(\Gamma)$. Dann gibt es wegen der Offenheit von $\mathcal{I}(\Gamma)$ ein $\delta > 0$, so dass $U_\delta(z_\sigma) \subseteq \mathcal{I}(\Gamma)$ gilt. Wegen $z \neq w$ können wir

$$\tilde{z} := \left(\sigma + \frac{\delta}{2\|z-w\|} \right) z + \left(1 - \sigma - \frac{\delta}{2\|z-w\|} \right) w$$

definieren. Dann ist wegen

$$\|\tilde{z} - z_\sigma\| = \left\| \frac{\delta}{2\|z-w\|} \cdot (z-w) \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta$$

der Punkt \tilde{z} in $U_\delta(z_\sigma)$ enthalten, also auch ein Element von $\mathcal{I}(\Gamma)$. Folglich gilt

$$\sigma + \frac{\delta}{2\|z-w\|} \in I,$$

im Widerspruch zur Maximalität von σ .

Also muss $z_\sigma \in \Gamma$ erfüllt sein. Nach Definition liegt σ in $[0, 1]$. Denn $\sigma = 0$ ergäbe

$$\Gamma \ni z_\sigma = w \in \mathcal{I}(\Gamma),$$

also einen Widerspruch. Einen solchen lieferte auch $\sigma = 1$, denn in diesem Fall stünde $z_\sigma = z \in \mathcal{A}(\Gamma)$ der Aussage $z_\sigma \in \Gamma$ gegenüber. Wie gewünscht folgt somit $\sigma \in (0, 1)$. ■

Definition 1.1.2 Eine Jordankurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit Spur Γ heisst *ursprungsumlaufend*, wenn $0 \in \mathcal{I}(\Gamma)$ gilt. Gilt $\dot{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, so heisst γ *regulär*. □

Es seien $\Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ die Spuren zweier ursprungsumlaufender Jordankurven. Die Menge $\Gamma_0 := \rho\Gamma_2$ ist für alle $\rho \in \mathbb{R}^+$ ebenfalls Spur einer ursprungsumlaufenden Jordankurve. Wir werden in den nächsten Abschnitten erkennen, dass es im Zusammenhang mit periodischen Lösungen von

$$(\mu, f) \quad \dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$$

bzw.

$$(\mu, f, \lambda, \alpha) \quad \dot{x}(t) = -\mu x(t) + \lambda f\left(\frac{x(t-\alpha)}{\lambda}\right), \quad \alpha \geq 0, \quad \lambda > 0,$$

und deren Spuren Γ_1 bzw. $\Gamma_0 = \rho\Gamma_2$ möglich ist, diese in einer ganz bestimmten Situation zu *vergleichen*: Dabei wird zunächst $\rho \geq 1$ so gewählt, dass wir

$$\Gamma_0 \subseteq \overline{\mathcal{A}(\Gamma_1)} \quad \text{und} \quad \Gamma_0 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)$$

haben. Ferner soll

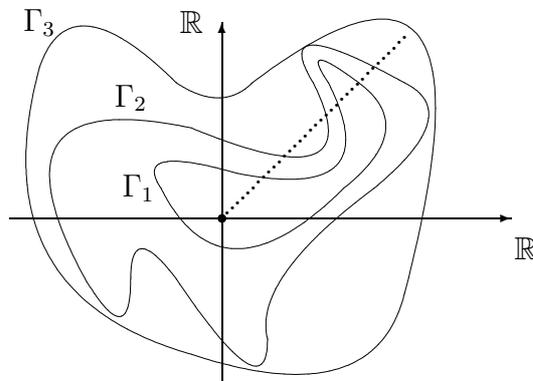
$$\|z_1\| \leq \|z_0\|$$

für alle $z_1 \in \Gamma_1$ und $z_0 \in \Gamma_0$ gelten, was nicht unbedingt im Fall $\Gamma_0 \subseteq \overline{\mathcal{A}(\Gamma_1)}$ erfüllt ist, jedoch gilt, wenn wir $r\Gamma_0 \subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)$ für alle $r > 1$ voraussetzen. Für diese spezielle Lagebeziehung zweier Spuren führen wir die folgende Bezeichnung ein.

Definition 1.1.3 *Es seien $\gamma_0 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei ursprungsumlaufende Jordankurven mit Spuren Γ_0 und Γ_1 in \mathbb{R}^2 . Dann heisst Γ_0 radial grösser als Γ_1 , falls*

$$\Gamma_1 \in \Gamma_0 \quad :\iff \quad \left[\begin{array}{l} \Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \mathcal{A}(\Gamma_1), \\ \Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset, \\ \rho\Gamma_0 \subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1) \text{ für alle } \rho > 1 \end{array} \right]$$

gilt. In diesem Fall heisst Γ_1 radial kleiner als Γ_0 . □



Es gilt $\Gamma_1 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_2)$, aber Γ_1 ist *nicht* radial kleiner als Γ_2 ; dagegen gilt $\Gamma_2 \in \Gamma_3$.

Anmerkung 1.1.1 Für Spuren Γ_1 und Γ_0 mit $\Gamma_1 \Subset \Gamma_0$ folgt $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0 \cup \mathcal{I}(\Gamma_0)$: Angenommen nämlich, es gibt $z_1 \in \Gamma_1$ mit $z_1 \in \mathcal{A}(\Gamma_0)$, so finden wir mit Lemma 1.1.1 ein $s \in (0, 1)$ mit $sz_1 \in \Gamma_0$. Definition 1.1.3 liefert aber

$$\Gamma_1 \ni z_1 = \frac{1}{s} \cdot sz_1 \in \mathcal{A}(\Gamma_1).$$

Daher kann es kein $z_1 \in \Gamma_1$ mit $z_1 \in \mathcal{A}(\Gamma_0)$ geben. ■

Als nächstes zeigen wir, dass sich zwei Spuren Γ_0 und Γ_1 mit $\Gamma_1 \Subset \Gamma_0$ tangential schneiden. Dies folgt aus der Tatsache, dass der Abschluss des Inneren $\mathcal{I}(\Gamma) \cup \Gamma$ einer regulären ursprungsumlaufenden Jordankurve eine Menge mit glattem Rand ist; formal bedeutet dies folgendes.

Definition 1.1.4 Eine kompakte Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ heisst ein Kompaktum mit glattem Rand, wenn für alle $z \in \partial K$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^2$ von z und eine stetig differenzierbare Funktion $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$U \cap \partial K = \psi^{-1}(0), \quad K \cap U = \{\xi \in U : \psi(\xi) \leq 0\} \quad \text{und} \quad 0 \notin \nabla \psi(U)$$

existiert. □

Lemma 1.1.2 Es seien $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ursprungsumlaufende, reguläre Jordankurve mit Spur Γ und

$$K := \mathcal{I}(\Gamma) \cup \Gamma.$$

Dann ist K ein Kompaktum mit glattem Rand.

Beweis: Wegen des Kurvensatzes 1.1.1 ist K kompakt und hat den Rand $\partial K = \Gamma$. Um zu zeigen, dass K einen glatten Rand hat, wählen wir $z \in \Gamma$. Dann gibt es ein $t \in I$ mit $z = \gamma(t)$. Weil γ eine reguläre Kurve ist, existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass

$$M := \gamma((t - \varepsilon, t + \varepsilon)) \subseteq \mathbb{R}^2$$

eine eindimensionale Untermannigfaltigkeit des \mathbb{R}^2 ist. Folglich gibt es zu $z \in M$ eine Umgebung $V \subseteq \mathbb{R}^2$ von z und eine stetig differenzierbare Funktion $\varphi : V \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\nabla \varphi(z) \neq 0$, so dass

$$V \cap M = \varphi^{-1}(0)$$

erfüllt ist. Die stetige Differenzierbarkeit von φ und $\nabla \varphi(z) \neq 0$ liefern eine offene Umgebung $U \subseteq V$ von z mit $0 \notin \nabla \varphi(U)$. Für $\widehat{\psi} := \varphi|_U$ gilt dann

$$U \cap M = \widehat{\psi}^{-1}(0).$$

Gäbe es ein $\xi \in \mathcal{I}(\Gamma) \cap U$ mit $\widehat{\psi}(\xi) = 0$, so wäre wegen $U \cap M = \widehat{\psi}^{-1}(0)$ widersprüchlicherweise $\xi \in M \subseteq \Gamma$. Also folgt $0 \notin \widehat{\psi}(\mathcal{I}(\Gamma) \cap U)$. Wir unterscheiden daher die folgenden Situationen: Im Fall $\widehat{\psi}(\mathcal{I}(\Gamma) \cap U) \subseteq \mathbb{R}^+$ setzen wir $\psi := -\widehat{\psi}$, im Fall $\widehat{\psi}(\mathcal{I}(\Gamma) \cap U) \subseteq \mathbb{R}^-$ definieren wir $\psi := \widehat{\psi}$. In beiden Fällen erfüllt ψ die behaupteten Eigenschaften aus Definition 1.1.4. ■

Bemerkung 1.1.1 Es seien $\gamma_0 : I_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei reguläre ursprungs-
laufende Jordankurven mit Spuren Γ_0 und Γ_1 . Weiterhin gelte

$$\Gamma_1 \Subset \Gamma_0.$$

Sind $t_0 \in I_0$ und $t_1 \in I_1$ mit

$$z := \gamma_0(t_0) = \gamma_1(t_1) \in S := \Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$$

gegeben, so folgt die lineare Abhängigkeit von $v_0 := \dot{\gamma}_0(t_0)$ und $v_1 := \dot{\gamma}_1(t_1)$ in \mathbb{R}^2 , d.h. die Punkte aus S sind tangentielle Schnittpunkte.

Beweis: Für $l \in \{0, 1\}$ seien $J_l := I_l - t_l$ und $\lambda_l := \gamma_l(\cdot + t_l) : J_l \rightarrow \mathbb{R}^2$. Das Intervall $J := J_0 \cap J_1 \ni 0$ ist kompakt. Dann sind Γ_0 und Γ_1 die Spuren von λ_0 und λ_1 , und es gilt

$$z = \lambda_0(0) = \lambda_1(0) \in S.$$

Desweiteren haben wir

$$0 \neq v_l = \dot{\lambda}_l(0), \quad l \in \{0, 1\}.$$

Die Kompakta $K_0 := \mathcal{I}(\Gamma_0) \cup \Gamma_0$ und $K_1 := \mathcal{I}(\Gamma_1) \cup \Gamma_1$ sind nach Lemma 1.1.2 Kompakta mit glattem Rand, d.h. es gibt für $l \in \{0, 1\}$ offene z -Umgebungen $U_l \subseteq \mathbb{R}^2$ und stetig differenzierbare Funktionen

$$\psi_l : U_l \rightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$K_l \cap U_l = \{\xi \in U_l : \psi_l(\xi) \leq 0\} \quad \text{und} \quad \nabla \psi_l(\xi) \neq 0, \quad \xi \in U_l,$$

für $l \in \{0, 1\}$ sowie

$$\Gamma_l \cap U_l = \partial K_l \cap U_l = \{\xi \in U_l : \psi_l(\xi) = 0\}, \quad l \in \{0, 1\}.$$

Wir wählen $\varepsilon > 0$, so dass $(-\varepsilon, \varepsilon) \subseteq J$ und $M_l := \lambda_l((-\varepsilon, \varepsilon)) \subseteq U := U_0 \cap U_1$ für $l \in \{0, 1\}$ erfüllt sind und betrachten die stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi := \psi_0 \circ \lambda_1|_{(-\varepsilon, \varepsilon)} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Bilder M_0 und M_1 sind eindimensionale Untermannigfaltigkeiten des \mathbb{R}^2 ; für ihre Tangentialräume in z gilt

$$T_z M_0 = \mathbb{R}v_0 \quad \text{und} \quad T_z M_1 = \mathbb{R}v_1.$$

Aus $\Gamma_1 \Subset \Gamma_0$ erhalten wir nach Anmerkung 1.1.1 zunächst $\Gamma_1 \subseteq K_0$ und dann

$$\varphi \leq 0.$$

Weiterhin gilt

$$\varphi(0) = \psi_0(\lambda_1(0)) = \psi_0(z) = 0.$$

Folglich muss $\dot{\varphi}(0) = 0$ erfüllt sein, was nach der Kettenregel genau dann der Fall ist, wenn

$$\langle \nabla \psi_0(z), v_1 \rangle = 0$$

gilt, d.h.

$$v_1 \in \{\xi \in U : \langle \xi, \nabla \psi_0(z) \rangle = 0\} = T_z M_0 = \mathbb{R}v_0.$$

Somit sind v_0 und v_1 linear abhängig. ■

Wir wollen neben dem Parameter t eines Spurpunktes auch seinen Winkel mit der positiven ersten Achse berücksichtigen. Daher bringen wir die folgende

Definition 1.1.5 *Es sei $\theta \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dann heisst*

$$\ell(\theta) := \left\{ r \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}_0^+ \right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

θ -Halbstrahl. □

Wir zeigen nun, dass die Spurpunkte auf einem θ -Halbstrahl einer Spur Γ_1 nicht weiter vom Ursprung entfernt liegen als die der Spur Γ_2 auf dem θ -Halbstrahl, sofern Γ_1 radial kleiner als Γ_2 ist. Diese Aussage erklärt die Bezeichnung *radial kleiner* bzw. *radial grösser* gemäss Definition 1.1.3.

Bemerkung 1.1.2 *Es seien $\gamma_1 : I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ und $\gamma_2 : I_2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ zwei ursprungsumlaufende Jordankurven mit Spuren Γ_1 und Γ_2 . Es sei $\theta \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, und es gelte $\Gamma_1 \Subset \Gamma_2$. Dann folgt aus $z_1 \in \ell(\theta) \cap \Gamma_1$ und $z_2 \in \ell(\theta) \cap \Gamma_2$*

$$\|z_1\| \leq \|z_2\|.$$

Beweis: Es sei $\theta \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Dann liefert $z_1 \in \ell(\theta) \cap \Gamma_1$ und $z_2 \in \ell(\theta) \cap \Gamma_2$ die Existenz von $r_1 \in \mathbb{R}_0^+$ und $r_2 \in \mathbb{R}_0^+$ mit

$$z_1 = r_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \in \Gamma_1 \quad \text{und} \quad z_2 = r_2 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} \in \Gamma_2.$$

Weil γ_1 und γ_2 ursprungsumlaufende Jordankurven sind, folgen $r_1 \in \mathbb{R}^+$ und $r_2 \in \mathbb{R}^+$. Es gelten $r_1 = \|z_1\|$ und $r_2 = \|z_2\|$, wir haben also $r_1 \leq r_2$ zu zeigen. Angenommen, es gilt $r_1 > r_2$; dann ist $\varepsilon := \frac{r_1}{r_2} - 1$ eine positive Zahl. Nach Voraussetzung ist Γ_1 radial kleiner als Γ_2 , insbesondere gilt damit

$$(1 + \varepsilon)\Gamma_2 \subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1),$$

was auf den folgenden Widerspruch führt:

$$\mathcal{A}(\Gamma_1) \ni (1 + \varepsilon)z_2 = (1 + \varepsilon)r_2 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = r_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} = z_1 \in \Gamma_1.$$



Im allgemeinen ist die Spur Γ_2 einer ursprungsumlaufenden Jordankurve nicht radial grösser als die Spur Γ_1 einer anderen ursprungsumlaufenden Jordankurve. Wenn Γ_2 jedoch nicht im Äusseren von Γ_1 liegt, können wir Γ_2 zu einer neuen Spur Γ_0 radial vergrössern, so dass Γ_1 radial kleiner als Γ_0 ist:

Bemerkung 1.1.3 *Es seien γ_1 und γ_2 ursprungsumlaufende Jordankurven, Γ_1 und Γ_2 seien deren Spuren in \mathbb{R}^2 . Es gelte ausserdem*

$$\Gamma_2 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1).$$

Dann existiert

$$\rho := \max\{r \in \mathbb{R}_0^+ : r\Gamma_2 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)\},$$

und es folgt $\rho \geq 1$. Mit $\Gamma_0 := \rho \cdot \Gamma_2$ haben wir dann

$$\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0,$$

wobei Γ_0 die Spur der ursprungsumlaufenden Jordankurve $\gamma_0 := \rho\gamma_2$ ist.

Beweis: Die Menge

$$R := \{r \in \mathbb{R}_0^+ : r\Gamma_2 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)\}$$

ist nicht leer, denn nach Voraussetzung gilt $1 \in R$.

Wir zeigen zunächst, dass R beschränkt ist. Die Spuren Γ_1 und Γ_2 sind als stetige Bilder kompakter Intervalle kompakt und sowohl $M_1 := \max_{z \in \Gamma_1} \|z\|$ als auch $m_2 := \min_{z \in \Gamma_2} \|z\|$ sind erklärt. Weil γ_1 und γ_2 ursprungsumlaufend sind, folgt unter Verwendung des Jordanschen Kurvensatzes $M_1 > 0$ und $m_2 > 0$. Derselbe Satz liefert ferner eine Beschränktheitskonstante $S_1 > 0$ für $\mathcal{I}(\Gamma_1)$, d.h. für alle $z \in \mathcal{I}(\Gamma_1)$ gilt $\|z\| \leq S_1$. Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > \frac{\max\{M_1, S_1\}}{m_2}$. Wir nehmen an, die Menge R ist nicht nach oben beschränkt. Dann gibt es ein $r \in R$ mit $r \geq n$. Für $z \in \Gamma_2$ folgt dann

$$\|rz\| = r\|z\| \geq rm_2 \geq nm_2 > \max\{M_1, S_1\},$$

was zum einen $\|rz\| > M_1$, also $rz \notin \Gamma_1$, und zum anderen $\|rz\| > S_1$, also $rz \notin \mathcal{I}(\Gamma_1)$, ergibt. Demzufolge muss rz in $\mathcal{A}(\Gamma_1)$ liegen, und weil z beliebig gewählt ist, liefert dies $r\Gamma_2 \subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)$; dies ist ein Widerspruch zu $r \in R$. Also ist R nach oben beschränkt, und wir setzen $s := \sup R$.

Als nächstes zeigen wir $s \in R$. Nach Definition von s gibt es eine konvergente Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in R^{\mathbb{N}}$ mit $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert nach Definition von R ein $z_n \in \Gamma_2$ mit $u_n := s_n z_n \notin \mathcal{A}(\Gamma_1)$. Γ_2 ist eine kompakte Menge, also gibt es eine konvergente Teilfolge $(z_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Γ_2 mit

$$\lim_{k \rightarrow \infty} z_{n_k} =: z \in \Gamma_2.$$

Nach dem Jordanschen Kurvensatz ist $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine in der kompakten Menge $\overline{\mathcal{I}(\Gamma_1)} = \mathcal{I}(\Gamma_1) \cup \Gamma_1$ verlaufende Folge und deshalb gibt es eine konvergente Teilfolge $(u_{n_{k_l}})_{l \in \mathbb{N}}$ von $(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ in $\overline{\mathcal{I}(\Gamma_1)}^{\mathbb{N}}$, für die gilt:

$$u := \lim_{l \rightarrow \infty} u_{n_{k_l}} \in \overline{\mathcal{I}(\Gamma_1)},$$

also $u \notin \mathcal{A}(\Gamma_1)$. Weiter erhalten wir dann:

$$u = \lim_{l \rightarrow \infty} u_{n_{k_l}} = \lim_{l \rightarrow \infty} s_{n_{k_l}} z_{n_{k_l}} = sz \in s\Gamma_2,$$

also $s\Gamma_2 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)$. Demzufolge gilt $s \in R$, und $\rho = \max R = s$ ist erklärt. Wegen $1 \in R$ folgt $\rho \geq 1$.

Es sei $\Gamma_0 := \rho \cdot \Gamma_2$. Um $\Gamma_1 \subseteq \Gamma_0$ zu zeigen, sind noch $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \neq \emptyset$ und $\Gamma_0 \cap \mathcal{I}(\Gamma_1) = \emptyset$ zu beweisen: Wegen $\rho \in R$ gibt es $z_0 \in \Gamma_2$, $z_0 \neq 0$, mit $\rho z_0 \notin \mathcal{A}(\Gamma_1)$, d.h. $\rho z_0 \in \mathcal{I}(\Gamma_1) \cup \Gamma_1$. Läge ρz_0 in $\mathcal{I}(\Gamma_1)$, so gäbe es wegen der Offenheit von $\mathcal{I}(\Gamma_1)$ ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\rho z_0) \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$. Dann ist aber auch

$$z_0 \cdot \left(\rho + \frac{\varepsilon}{2\|z_0\|} \right) \in U_\varepsilon(\rho z_0) \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1),$$

denn es gilt:

$$\left\| \rho z_0 - z_0 \left(\rho + \frac{\varepsilon}{2\|z_0\|} \right) \right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Wir setzen

$$\tilde{\rho} := \rho + \frac{\varepsilon}{2\|z_0\|} > \rho.$$

Damit ist $\tilde{\rho}z_0 \in \mathcal{I}(\Gamma_1)$, also $\tilde{\rho}z_0 \notin \mathcal{A}(\Gamma_1)$ und $\tilde{\rho}z_0 \in \tilde{\rho}\Gamma_2$, woraus $\tilde{\rho}\Gamma_2 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)$ folgt und sich schliesslich $\tilde{\rho} \in R$ ergibt, was aber der Maximalität von ρ widerspricht. Somit kann ρz_0 nicht in $\mathcal{I}(\Gamma_1)$ liegen, und es muss $\rho z_0 \in \Gamma_1$ gelten. Insbesondere sind, wie behauptet, die Mengen Γ_0 und Γ_1 wegen $\rho z_0 \in \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ und $\rho\Gamma_2 = \Gamma_0$ nicht disjunkt.

Schliesslich zeigen wir in ähnlicher Weise $\mathcal{I}(\Gamma_1) \cap \Gamma_0 = \emptyset$, also $\Gamma_0 \subseteq \Gamma_1 \cup \mathcal{A}(\Gamma_1)$: Wir nehmen an, es gibt $z \in \mathcal{I}(\Gamma_1) \cap \Gamma_0$. Dann finden wir wie oben wegen der Offenheit von $\mathcal{I}(\Gamma_1)$ ein $r > 1$ mit $rz \in \mathcal{I}(\Gamma_1) \cap r\Gamma_0$, also $rz \in \mathcal{I}(\Gamma_1)$ und demzufolge $r\Gamma_0 = r\rho\Gamma_2 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)$, was aber wegen $r\rho > \rho$ der Maximalität von ρ widerspricht. ■

Um zu beweisen, dass jeder θ -Halbstrahl einen gemeinsamen Punkt mit der Spur einer ursprungsumlaufenden Jordankurve $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ besitzt, benötigen wir Lemma 1.1.1. Wir können allerdings keine Eindeutigkeit dieses Punktes erwarten, also existiert i.a. keine Abbildung, die einem Winkel $\theta \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ eine Schnittzeit $t \in I$ zuordnet. Es ist jedoch möglich, Abbildungen Ξ bzw. ξ zu definieren die dem Winkel eine grösste bzw. kleinste Schnittzeit zuordnen.

Bemerkung 1.1.4 Es seien $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine ursprungsumlaufende Jordankurve mit Spur Γ und $I^* := I \setminus \{\max I\}$.

1. Für $\theta \in [-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) =: \Theta$ ist die Menge der Schnittzeiten

$$L(\theta) := \{t \in I^* : \gamma(t) \in \ell(\theta)\}$$

nicht leer.

2. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} \Xi : \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ni \theta &\mapsto \sup L(\theta) \in I^*, \\ \xi : \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \ni \theta &\mapsto \inf L(\theta) \in I^* \end{aligned}$$

sind wohldefiniert.

Beweis: Es sei $\theta \in \Theta$.

1. Der θ -Halbstrahl $\ell(\theta)$ ist unbeschränkt, nach dem Jordanschen Kurvensatz ist $\overline{\mathcal{I}(\Gamma)} = \mathcal{I}(\Gamma) \cup \Gamma$ beschränkt. Folglich existiert ein Punkt $w \in \ell(\theta)$ mit $w \notin \overline{\mathcal{I}(\Gamma)}$, also $w \in \mathcal{A}(\Gamma)$. Nach Voraussetzung ist der Ursprung in $\mathcal{I}(\Gamma)$ enthalten. Dann existiert mit Lemma 1.1.1 ein $\sigma \in (0, 1)$ mit

$$z_\sigma := \sigma w + (1 - \sigma) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma w \in \Gamma.$$

Wegen $\mathbb{R}_0^+ \ell(\theta) \subseteq \ell(\theta)$ folgt $z_\sigma \in \Gamma \cap \ell(\theta)$. Weil Γ die Spur von $\gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist, gibt es ein $s \in I$ mit $z_\sigma = \gamma(s)$. Ist $s = \max I$, so setzen wir $t := \min I \in I^*$, andernfalls sei $t := s \in I^*$. Somit gilt $t \in L(\theta)$, und $L(\theta)$ ist nicht leer.

2. Die nicht-leere Menge $L(\theta)$ ist beschränkt, sie besitzt also ein Supremum und ein Infimum. Daher sind ξ und Ξ wohldefiniert. ■

Als nächstes behaupten wir das strenge Fallen der Abbildungen ξ und Ξ ; dies wäre nicht beweisbar, wenn ξ und Ξ auf dem gesamten Winkelbereich Θ definiert sind. Ausserdem halten wir fest, dass ξ und Ξ im allgemeinen nicht stetig sind.

Bemerkung 1.1.5 Es seien $T > 0$, $A \in (0, T)$ und

$$\gamma : [0, T] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

eine ursprungsumlaufende Jordankurve mit Spur Γ . Desweiteren gelte

$$(\Gamma \cap (\{0\} \times \mathbb{R})) \setminus \{\gamma(0), \gamma(A)\} = \emptyset$$

sowie

$$\gamma(0) \in \{0\} \times \mathbb{R}^+, \quad \gamma(A) \in \{0\} \times \mathbb{R}^- \quad \text{und} \quad \gamma((0, A)) \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$$

Dann sind die in Bemerkung 1.1.4 definierten Abbildungen Ξ und ξ streng monoton fallend.

Beweis: Für $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gilt die folgende Äquivalenz:

$$t \in [0, T), \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \in \ell(\theta) \text{ genau dann, wenn } \left\{ \begin{array}{l} \theta = \arctan \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)}, \quad t \in (0, A) \\ \theta = -\frac{\pi}{2}, \quad t = A \end{array} \right\}. \quad (1.1)$$

Ist $\theta \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$, so erhalten wir entsprechend

$$t \in [0, T), \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} \in \ell(\theta) \text{ genau dann, wenn } \theta = \arctan \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} - \pi, \quad t \in (A, T). \quad (1.2)$$

Wir zeigen zunächst das strenge Fallen von ξ anhand eines Zwischenwertarguments einer unten definierten Zeit-Winkel-Abbildung. Die Definition von ξ und die Argumentdarstellung von Spurpunkten (1.1) und (1.2) liefern

$$\xi(\theta) = \left\{ \begin{array}{ll} \min \left\{ t \in (0, A) : \theta = \arctan \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} \right\}, & \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \\ A, & \theta = -\frac{\pi}{2} \\ \min \left\{ t \in (A, T) : \theta = \arctan \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} - \pi \right\}, & \theta \in (-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}) \end{array} \right\}. \quad (1.3)$$

Die folgenden Funktionen Θ_1 und Θ_2 ordnen Zeiten von Spurpunkten in der rechten und linken Halbebene ihre Argumente zu:

$$\begin{aligned} \Theta_1 : (0, A) \ni t &\mapsto \arctan \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \Theta_2 : (A, T) \ni t &\mapsto \arctan \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} - \pi \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Die Voraussetzungen an γ ergeben $\lim_{t \rightarrow 0+} \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} = +\infty$ und $\lim_{t \rightarrow A-} \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} = -\infty$, woraus

$$\lim_{t \rightarrow 0+} \Theta_1(t) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow A-} \Theta_1(t) = -\frac{\pi}{2}$$

folgt. Genauso gelten gemäss Voraussetzung an γ die Gleichungen $\lim_{t \rightarrow A+} \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} = +\infty$ und $\lim_{t \rightarrow T-} \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} = -\infty$, was

$$\lim_{t \rightarrow A+} \Theta_2(t) = \frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad \lim_{t \rightarrow T-} \Theta_2(t) = -\frac{\pi}{2} - \pi = -\frac{3\pi}{2}$$

nach sich zieht. Darüberhinaus liefert die Stetigkeit von Θ_1 und Θ_2

$$\Theta_1((0, A)) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{und} \quad \Theta_2((A, T)) = \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right). \quad (1.4)$$

Um die strenge Monotonie von ξ zu zeigen, wählen wir θ_1 und θ_2 aus $(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ mit $\theta_1 < \theta_2$, es ist also $\xi(\theta_1) > \xi(\theta_2)$ zu zeigen. Wir nehmen dazu $\xi(\theta_1) \leq \xi(\theta_2)$ an. Wäre $\xi(\theta_1) = \xi(\theta_2)$, so erhielten wir mit (1.3) widersprüchlicherweise $\theta_1 = \theta_2$. Nach Annahme gilt also

$$t_1 := \xi(\theta_1) < \xi(\theta_2) =: t_2.$$

Wir unterscheiden im folgenden die drei Fälle

$$\text{I } \theta_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$\text{II } \theta_2 = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{III } \theta_2 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right).$$

Die Betrachtung der Einzelfälle ergibt jeweils einen Widerspruch:

I Nach (1.3) gilt $t_2 \in (0, A)$. Liegt $\theta_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, so haben wir

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

und mit obigen Grenzwertaussagen

$$-\frac{\pi}{2} < \Theta_1(t_1) < \Theta_1(t_2) < \frac{\pi}{2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \Theta_1(t). \quad (1.5)$$

Die Funktion Θ_1 nimmt aus Stetigkeitsgründen zwischen 0 und t_1 jeden Wert an, der zwischen $\Theta_1(t_1)$ und $\frac{\pi}{2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \Theta_1(t)$ liegt. Wegen $\Theta_1(t_2) \in (\Theta_1(t_1), \frac{\pi}{2})$ gibt es ein $\tilde{t} \in (0, t_1)$ mit $\Theta_1(\tilde{t}) = \Theta_1(t_2) = \theta_2$, und wir haben $\tilde{t} < t_1 < t_2$. Aber nach Definition von ξ ist t_2 die kleinste Zeit t , bei der $\theta_2 = \Theta_1(t)$ gilt. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $\xi(\theta_1) < \xi(\theta_2)$, es gilt $\xi(\theta_1) > \xi(\theta_2)$.

Liegt $\theta_1 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, so folgt nach (1.3), dass $\xi(\theta_1) \in [A, T)$. Mit $\xi(\theta_2) \in (0, A)$ folgt die zu beweisende Ungleichung $\xi(\theta_1) > \xi(\theta_2)$.

II Nach (1.3) gilt $\xi(\theta_2) = A$ und wegen $\theta_1 < \theta_2$ folgt $\theta_1 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$. Eine erneute Anwendung von (1.3) gibt mit $\xi(\theta_1) \in (A, T)$ wie gewünscht $\xi(\theta_1) > \xi(\theta_2)$.

III Wegen $\theta_1 < \theta_2$ folgt $\theta_1 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$; wir gehen ähnlich zu Fall I vor:

$$-\frac{3\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < -\frac{\pi}{2}$$

bzw.

$$-\frac{3\pi}{2} < \Theta_2(t_1) < \Theta_2(t_2) < -\frac{\pi}{2}.$$

Mit dem gleichen Zwischenwertargument wie oben folgt die Existenz von $\tilde{t} \in (A, t_1)$ mit $\Theta_2(\tilde{t}) = \Theta_2(t_2) = \theta_2$ und $\tilde{t} < t_1 < t_2$ im Widerspruch zur Minimalität von t_2 . Also muss $\xi(\theta_1) > \xi(\theta_2)$ gelten.

Insgesamt haben wir das strenge Fallen von ξ bewiesen. Um dies auch für Ξ zu tun, verfahren wir fast analog und heben die geringfügigen Unterschiede hervor.

Wir erhalten wie oben

$$\Xi(\theta) = \left\{ \begin{array}{ll} \max \left\{ t \in (0, A) : \theta = \arctan \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} \right\}, & \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ A, & \theta = -\frac{\pi}{2} \\ \max \left\{ t \in (A, T) : \theta = \arctan \frac{\gamma_2(t)}{\gamma_1(t)} - \pi \right\}, & \theta \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right) \end{array} \right\} \quad (1.6)$$

Die Argumente θ_1 und θ_2 mit $\theta_1 < \theta_2$ seien gegeben, es ist $\Xi(\theta_1) > \Xi(\theta_2)$ zu zeigen. Dazu nehmen wir $\Xi(\theta_1) \leq \Xi(\theta_2)$ an, und aus $\Xi(\theta_1) = \Xi(\theta_2)$ erhalten wir wie oben den Widerspruch $\theta_1 = \theta_2$. Also gehen wir von

$$t_1 := \Xi(\theta_1) < \Xi(\theta_2) =: t_2$$

aus. Wir betrachten die Fälle

I $\theta_2 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

II $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$.

III $\theta_2 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$.

Die Betrachtung der drei Fälle ergibt wie oben jeweils einen Widerspruch:

I Nach (1.6) gilt $t_2 \in (0, A)$. Liegt $\theta_1 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, so haben wir

$$-\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}$$

und mit obigen Grenzwertaussagen Θ_1 und Θ_2 betreffend

$$\lim_{t \rightarrow A^-} \Theta_1(t) = -\frac{\pi}{2} < \Theta_1(t_1) < \Theta_1(t_2) < \frac{\pi}{2}.$$

Die Funktion Θ_1 nimmt aus Stetigkeitsgründen zwischen t_2 und A jeden Wert an, der zwischen $-\frac{\pi}{2} = \lim_{t \rightarrow A^-} \Theta_1(t)$ und $\Theta_1(t_2)$ liegt. Wegen $\Theta_1(t_1) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \Theta_1(t_2)\right)$ gibt es ein $\tilde{t} \in (t_2, A)$ mit $\Theta_1(\tilde{t}) = \Theta_1(t_1) = \theta_1$, und wir haben $\tilde{t} > t_2 > t_1$, was der Maximalität von t_1 widerspricht, die Annahme $\xi(\theta_1) < \xi(\theta_2)$ ist falsch, es gilt $\xi(\theta_1) > \xi(\theta_2)$.

Liegt $\theta_1 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right]$, so folgt nach (1.6), dass $\Xi(\theta_1) \in [A, T)$. Mit $\Xi(\theta_2) \in (0, A)$ folgt die zu beweisende Ungleichung $\Xi(\theta_1) > \Xi(\theta_2)$.

II Nach (1.6) gilt $\Xi(\theta_2) = A$ und wegen $\theta_1 < \theta_2$ folgt $\theta_1 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$. Eine erneute Anwendung von (1.6) gibt mit $\Xi(\theta_1) \in (A, T)$ wie gewünscht $\Xi(\theta_1) > \Xi(\theta_2)$.

III Wegen $\theta_1 < \theta_2$ folgt $\theta_1 \in \left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$; wir gehen ähnlich zu Fall I vor:

$$-\frac{3\pi}{2} < \theta_1 < \theta_2 < -\frac{\pi}{2}$$

bzw.

$$-\frac{3\pi}{2} < \Theta_2(t_1) < \Theta_2(t_2) < -\frac{\pi}{2}.$$

Es folgt die Existenz von $\tilde{t} \in (t_2, T)$ mit $\Theta_2(\tilde{t}) = \Theta_2(t_1) = \theta_1$ und $\tilde{t} > t_2 > t_1$ im Widerspruch zur Maximalität von t_1 . Also gilt $\Xi(\theta_1) > \Xi(\theta_2)$. ■

1.2 Voraussetzungen und Grundlagen

Es seien $\mu \geq 0$ und $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Bei der Betrachtung von

$$(\mu, f) \quad \dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$$

gehen wir zunächst von der allgemeinen, nicht-autonomen Gleichung

$$[\alpha, g] \quad \dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t-\alpha))$$

mit Verzögerungslänge $\alpha \geq 0$ aus; dabei sei $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die bzgl. der zweiten und dritten Variablen, den Ortsvariablen, stetig differenzierbar ist. Gleichung (μ, f) ist ein autonomer Spezialfall von $[1, g]$ mit $g : \mathbb{R}^3 \ni (t, \xi, \zeta) \mapsto -\mu\xi + f(\zeta) \in \mathbb{R}$.

Bevor wir spezielle Eigenschaften der Nicht-Linearität f im Hinblick auf eine Anwendung von Gleichung (μ, f) bei der Beschreibung von neuronalen Netzen voraussetzen, führen wir grundlegende Begriffe ein und definieren zunächst, was unter einer Lösung von $[\alpha, g]$ zu verstehen ist. Insbesondere wissen wir dann, was eine Lösung von (μ, f) ist.

Definition 1.2.1 *Eine stetige Funktion $y : [t_0 - \alpha, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}$ heisst bei gegebenen reellen Zahlen t_0 und $t_{\max} \in (t_0, \infty) \cup \{\infty\}$ eine Lösung von $[\alpha, g]$ zur Startzeit t_0 , wenn sie für $t \in (t_0, t_{\max})$ differenzierbar ist und dort $[\alpha, g]$ erfüllt. Eine Funktion $y : (-\infty, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}$ heisst Lösung von $[\alpha, g]$, wenn sie differenzierbar ist und $[\alpha, g]$ erfüllt. \square*

Sind $\alpha = 1$, $t_0 = 0$ und $x : [-1, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von (μ, f) , so lässt sich x schon bei Kenntnis der Werte auf einem Intervall der Länge $\alpha = 1$ für alle zukünftige Zeiten, also $t_{\max} = \infty$, sukzessive berechnen:

$$x(t) = e^{-\mu(t-n)}x(n) + \int_n^t e^{-\mu(t-s)}f(x(s-1))ds, \quad t \in [n, n+1], \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

Um eine solche Lösung für $t \geq t_0$ eindeutig festzulegen, ist somit die Vorgabe einer Funktion auf einem Intervall der Länge 1 (i.a. der Länge $\alpha \geq 0$) hinreichend. Deshalb fassen wir einen möglichen Zustand des Systems, das durch Gleichung $[\alpha, g]$ beschrieben wird, als Element des Banachraums

$$\mathcal{C}_\alpha := C([- \alpha, 0], \mathbb{R})$$

mit Maximum-Norm

$$\|\cdot\|^\alpha : \mathcal{C}_\alpha \ni \varphi \mapsto \max_{s \in [-\alpha, 0]} |\varphi(s)| \in \mathbb{R}$$

auf. Wir beachten, dass bei einer Verzögerungszeit von $\alpha = 0$ das System unmittelbar auf eine Änderung des Zustands reagiert und wir eine gewöhnliche Differentialgleichung vorliegen haben, deren Phasenraum $\mathcal{C}_0 \cong \mathbb{R}$ mit Norm $|\cdot|$ ist. Zur Vereinfachung setzen wir $\mathcal{C} := \mathcal{C}_1$ und $\|\cdot\| := \|\cdot\|^1$.

Der Zustand einer Lösung x zur Zeit t , die auf $[t_0 - \alpha, t_{\max})$ oder $(-\infty, t_{\max})$ definiert ist, wird folglich für $t \in [t_0, t_{\max})$ bzw. $t \in (-\infty, t_{\max})$ durch die stetige Funktion

$$x_t : [-\alpha, 0] \ni s \mapsto x(t + s) \in \mathbb{R}$$

repräsentiert, $x_t \in \mathcal{C}_\alpha$ heisst *Lösungssegment zur Zeit t* .

Setzen wir

$$G : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_\alpha \ni (t, \varphi) \mapsto g(t, \text{ev}_0(\varphi), \text{ev}_{-\alpha}(\varphi)) \in \mathbb{R},$$

so lässt sich $[\alpha, g]$ als *Funktionaldifferentialgleichung* schreiben:

$$\dot{y}(t) = G(t, y_t).$$

Die Eigenschaften von g übertragen sich auf die unseres Beispiels $G : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_\alpha \ni (t, \varphi) \mapsto g(t, \text{ev}_0(\varphi), \text{ev}_{-\alpha}(\varphi)) \in \mathbb{R}$, d.h. G ist stetig und in der zweiten Variablen stetig differenzierbar, insbesondere dort lokal Lipschitz-stetig; vgl. dazu auch DIEKMANN, VAN GILS, VERDUYN LUNEL & WALTHER [10] oder HALE [18].

Eine Lösung von $\dot{y}(t) = G(t, y_t)$ ist im Sinne von Definition 1.2.1 zu verstehen. Wie bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, die sich auch als Funktionaldifferentialgleichung mit Verzögerungslänge $\alpha = 0$ auffassen lassen, ergibt sich bei einer lokal Lipschitz-stetigen Nicht-Linearität eine Existenz- und Eindeutigkeitsaussage für Lösungen, wenn ein Startwert $\varphi \in \mathcal{C}_\alpha$ vorgegeben wird, also ein Anfangswertproblem vorliegt:

Satz 1.2.1 (Existenz und Eindeutigkeit) *Es seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $G : \mathbb{R} \times \mathcal{C}_\alpha \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bzgl. der zweiten Variable $\varphi \in \mathcal{C}_\alpha$. Dann gibt es genau eine (maximale) Lösung $y^\varphi : [t_0 - \alpha, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems*

$$\dot{y}(t) = G(t, y_t), \quad y_{t_0} = \varphi.$$

■

Ein Beweis dieses grundlegenden Satzes ist z.B. in den Büchern von DIEKMANN, VAN GILS, VERDUYN LUNEL & WALTHER [10] oder HALE [18] zu finden.

Anmerkung 1.2.1 *Weil die Funktion $y^\varphi : [t_0 - \alpha, t_{\max}) \rightarrow \mathbb{R}$ genau dann eine Lösung von $\dot{y}(t) = G(t, y_t)$ ist, wenn sie $[\alpha, g]$ löst, sind die mit $[\alpha, g]$ formulierbaren Anfangswertprobleme eindeutig lösbar. Insbesondere gilt dies für Gleichung (μ, f) .* ■

Da i.a. eine Lösung von $[\alpha, g]$ mit Startwert t_0 nur in positiver Zeitrichtung eindeutig festgelegt ist, erhalten wir anstatt eines Lösungsflusses lediglich einen Lösungshalbfluss, dessen Zeit- t -Abbildung für $t \geq t_0$ definiert ist.

Wie wir oben gesehen haben, findet Gleichung (μ, f) Anwendung in der Theorie der neuronalen Netzwerke, z.B. als Modell eines einzelnen Neurons. Die Nicht-Linearität f übernimmt dabei die Rolle einer so genannten Signalfunktion, die für die Signalübermittlung zu anderen Neuronen steht. Bei dieser Modellierung ist neben Signum-artigen Treppenfunktionen und stückweise linearen Funktionen eine glatte, streng monoton wachsende Funktion

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, die u.a. gewissen Krümmungseigenschaften genügt, am meisten gebräuchlich; man denke etwa an eine logistische Funktion, den Arcus-Tangens oder hyperbolischen Tangens; vgl. dazu auch WU [54]. In diesem Sinne halten wir eine erste Voraussetzung an die Nicht-Linearität f fest:

(H1) Die Funktion f ist stetig differenzierbar mit $f' > 0$ und $f(0) = 0$.

Aus $f(0) = 0$ folgt, dass $x = 0$ eine Lösung von (μ, f) ist. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$x \cdot f(x) > 0$$

und (μ, f) beschreibt eine positive, verzögerte Rückkopplung um die Ruhelage 0 mit spontaner Dämpfung, die durch die Grösse des nicht-negativen Parameters μ gegeben ist.

Wenn wir eine streng monotone Rückkopplung gemäss (H1) voraussetzen, lässt sich für Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von (μ, f) die Eindeutigkeit in negativer Zeitrichtung beweisen, was ohne (H1) i.a. nicht möglich ist.

Bemerkung 1.2.1 *Es gelte (H1), und es seien $x^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x^1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von (μ, f) . Dann folgt aus $x_\tau^0 = x_\tau^1$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$*

$$x_t^0 = x_t^1 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Beweis: Lösungen sind in positiver Zeitrichtung bei Festlegung eines Lösungssegments eindeutig bestimmt, d.h. es gilt $x_t^0 = x_t^1$ für alle $t \geq \tau$. Wir müssen also $x_t^0 = x_t^1$ für alle $t < \tau$ zeigen. Dazu reicht es $x_t^0 = x_t^1$ für alle $t \in [\tau - 1, \tau]$ zu beweisen, die Gleichheit für alle $t < \tau$ folgt dann sukzessive auf Intervallen der Länge 1.

Es gilt $x^0|_{[\tau-1, \tau]} = x^1|_{[\tau-1, \tau]}$ und daher $\dot{x}^0|_{[\tau-1, \tau]} = \dot{x}^1|_{[\tau-1, \tau]}$, also für alle $t \in [\tau - 1, \tau]$

$$-\mu x^0(t) + f(x^0(t-1)) = \dot{x}^0(t) = \dot{x}^1(t) = -\mu x^1(t) + f(x^1(t-1)) = -\mu x^0(t) + f(x^1(t-1)),$$

also

$$f(x^0(t-1)) = f(x^1(t-1)),$$

was unter Berücksichtigung von (H1) $x^0(s) = x^1(s)$ für alle $s \in [\tau - 2, \tau - 1]$ bedeutet, d.h. $x_t^0 = x_t^1$ für alle $t \in [\tau - 1, \tau]$. ■

In den nächsten Abschnitten werden wir sehen, dass sich die in (H1) vorausgesetzte strenge Monotonie der Rückkopplungsfunktion f in gewissem Sinne auf (noch zu definierende) periodische Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von (μ, f) überträgt: zwischen ihren strikten Extrema verläuft die periodische Lösung streng monoton und besitzt somit das qualitative Verhalten der Sinus-Funktion.

Voraussetzung (H1) legt nicht fest, wie die Nicht-Linearität f wächst. Wir werden in den Abschnitten 1.6 und 1.7 sehen, dass insbesondere bei der Beantwortung von Eindeutigkeitsfragen eine Voraussetzung an f wichtig ist, die ein progressives Wachstum von $f|_{\mathbb{R}^-}$ und ein degressives von $f|_{\mathbb{R}^+}$ impliziert:

(H2) Es sei f stetig differenzierbar, und für

$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \in \mathbb{R}^+$$

seien $h|_{\mathbb{R}^+}$ streng monoton fallend und $h|_{\mathbb{R}^-}$ streng monoton wachsend.

Die Voraussetzung (H2) schränkt eine Anwendung der gewonnenen Ergebnisse auf neuronale Netze nicht wesentlich ein, denn die erwähnten typischen Signalfunktionen (Arcus-Tangens, logistische Funktion und hyperbolischer Tangens) erfüllen (H2). Gilt (H2), so können wir wegen $\lim_{0 \neq x \rightarrow 0} h(x) = 1$ folgendes anmerken.

Anmerkung 1.2.2 *Es sei (H2) gegeben. Dann gilt $0 < h < 1$.* ■

Wenn die Funktion f zweimal stetig differenzierbar ist und sowohl (H1) als auch (H2) erfüllt sind, so ist die Hilfsfunktion h stetig differenzierbar. Für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ haben wir in diesem Fall

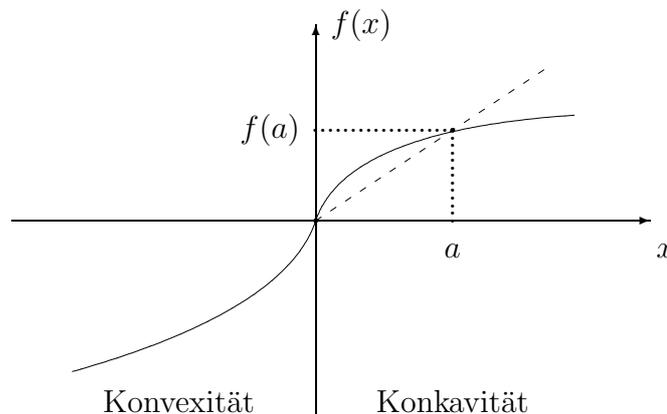
$$h'(x) = \frac{(f'(x) + x f''(x))f(x) - x f'(x)^2}{f(x)^2}.$$

Es folgt dann für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$x f''(x) = f(x)h'(x) + f'(x)(h(x) - 1).$$

Nach (H2) und Anmerkung 1.2.2 gelten $f' > 0$, $h'|_{\mathbb{R}^+} \leq 0$, $h'|_{\mathbb{R}^-} \geq 0$ und $h \in (0, 1)$. Also erhalten wir für $x < 0$ die Ungleichung $x f''(x) < 0$, d.h. $f''(x) > 0$. Auch für $x > 0$ ist $x f''(x)$ negativ, so dass hier $f''(x) < 0$ ausfällt. Somit können wir folgendes anmerken:

Anmerkung 1.2.3 *Sind (H1) und (H2) erfüllt, und ist f zweimal stetig differenzierbar, so ist der Graph von $f|_{\mathbb{R}^-}$ konvex und der Graph von $f|_{\mathbb{R}^+}$ konkav. Ferner gilt $f''(0) = 0$.* ■



Die Voraussetzung (H2) legt also das Krümmungsverhalten des Graphen von f fest. Nehmen wir (H1) an, und ist $x \in \mathbb{R}^+$, so fällt $\mathbb{R}^+ \ni \lambda \mapsto f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \mathbb{R}$ streng monoton, jedoch ist zunächst unklar, welches Wachstumsverhalten $\Phi_x : \mathbb{R}^+ \ni \lambda \mapsto \lambda f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \mathbb{R}$ besitzt. Wenn wir nun (H2) neben (H1) annehmen, so lässt sich leicht das strenge Wachsen von Φ_x zeigen, d.h. eine Stauchung des Arguments fällt weniger ins Gewicht als die Streckung des betreffenden Funktionswerts:

Bemerkung 1.2.2 *Es gelte (H1) und (H2), und es sei $x \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion*

$$\Phi_x : \mathbb{R}^+ \ni \lambda \mapsto \lambda \cdot f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \in \mathbb{R}$$

für $x \in \mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend und für $x \in \mathbb{R}^-$ streng monoton fallend.

Beweis: Es sei $x \in \mathbb{R}$, die stetige Differenzierbarkeit von f überträgt sich auf Φ_x . Die Behauptung lässt sich dann unter Berücksichtigung von (H1) und (H2) an der Ableitung von Φ_x ablesen: Für alle $\lambda \in \mathbb{R}^+$ gilt

$$\Phi'_x(\lambda) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) - \lambda \cdot \frac{x}{\lambda^2} f'\left(\frac{x}{\lambda}\right) = f\left(\frac{x}{\lambda}\right) \cdot \left(1 - h\left(\frac{x}{\lambda}\right)\right).$$

■

Im folgenden Abschnitt führen wir ein Funktional $V : \mathcal{C} \setminus \{0\} \rightarrow 2\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ ein, das sich als ein wichtiges Werkzeug zur Untersuchung von Lösungen $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der Gleichung (μ, f) herausstellen wird.

1.3 Das Lyapunov-Funktional V

Bereits MYSHKIS [42] hat festgestellt, dass bei bestimmten, der Klasse $[\alpha, g]$ angehörenden Delaygleichungen die Oszillationsgeschwindigkeit einer Lösung mit wachsender Zeit nicht zunimmt. MALLET-PARET & SELL [36] formalisieren diese Tatsache für Systeme von Gleichungen, deren eindimensionaler Spezialfall bis auf Vorzeichenbedingungen gerade durch $[\alpha, g]$ gegeben ist. Die Oszillationsfrequenz einer Lösung dieser Gleichung wird durch ein von der Gleichung unabhängiges Funktional V wiedergegeben, indem die *Vorzeichenwechsel* der φ -Werte eines Zustands $\varphi \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ gezählt werden; siehe dazu auch CAO [5]. Daher ist ein Bild von V eine nicht-negative ganze Zahl oder ∞ , V ist ein *diskretes* Funktional.

Im folgenden gehen wir von MALLET-PARET & SELL [37] aus, um einerseits ein wenig Grundlegendes über V , nämlich

1. das erwähnte *monotone Fallen* von V längs Lösungen einer Gleichung, die (μ, f) unter der Annahme (H1) verallgemeinert,
2. eine *Bedingung für das strikte Fallen* von V und
3. eine *Bedingung für die Endlichkeit* von V

zu zitieren. Andererseits beweisen wir alle spezielleren Aussagen, die näher an unseren in den folgenden Abschnitten formulierten Problemen liegen und weichen dabei z.T. von der Vorlage ab. Einige der hier das Funktional V betreffenden Eigenschaften sind zwar auch in Anhang VI der Monographie von KRISZTIN, WALTHER & WU [33] zu finden, allerdings wird dort eine für unsere Zwecke zu kleine Klasse von Gleichungen betrachtet.

Das Funktional V erinnert mit seinen Eigenschaften an eine Lyapunov-Funktion, die z.B. bei gewöhnlichen Differentialgleichungen auftritt. Daher heisst das unten definierte diskrete Funktional V *diskretes Lyapunov-Funktional*. Die folgende Definition von V für Gleichungen mit positivem Feedback übernehmen wir von MALLET-PARET & SELL [36]. Dabei ist zu beachten, dass die Oszillationsgeschwindigkeit einer Funktion $\varphi \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ nicht direkt als Anzahl der Vorzeichenwechsel gewählt werden sollte. Z.B. haben die Segmente $y_t, t \in \mathbb{R}$, der $\frac{\pi}{2}$ -periodischen Funktion $y : \mathbb{R} \ni t \mapsto \sin(4t) \in \mathbb{R}$ abwechselnde Vorzeichenwechsel-Anzahlen von 1 und 2, obwohl man eine konstante Oszillationsgeschwindigkeit $V(y_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ annehmen möchte. Bei der folgenden Definition kommen daher nur *gerade* natürliche Zahlen als Werte von V vor.

Definition 1.3.1 *Es sei $\mathcal{K} := \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi \geq 0\} \subseteq \mathcal{C}$ der Kegel der nicht-negativen Funktionen in \mathcal{C} , $\mathcal{T} := \{(s_j)_{j=0}^k \in [-1, 0]^{\{0, \dots, k\}} : (s_j)_{j=0}^k \text{ ist streng monoton wachsend}\}$. Zu $\varphi \in \mathcal{C} \setminus \{0\}$ sei die Menge $M_\varphi \subseteq \mathbb{N}$ durch*

$$M_\varphi := \{k \in \mathbb{N} : \text{Es gibt } (s_j)_{j=0}^k \in \mathcal{T} \text{ mit } \varphi(s_{j-1})\varphi(s_j) < 0 \text{ für alle } j \in \{1, \dots, k\}\}$$

definiert. Die Abbildung $\# : \mathcal{C} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ mit

$$\#(\varphi) = \begin{cases} \sup M_\varphi, & \varphi \in \mathcal{C} \setminus (\mathcal{K} \cup (-\mathcal{K})) \\ 0, & \varphi \in \mathcal{K} \cup (-\mathcal{K}) \end{cases}$$

heisst *Vorzeichen-Wechsel*.

Die Abbildung

$$V : \mathcal{C} \setminus \{0\} \rightarrow 2\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

mit

$$V(\varphi) = \begin{cases} \#(\varphi), & \#(\varphi) \in 2\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ \#(\varphi) + 1, & \#(\varphi) \in 2\mathbb{N}_0 + 1 \end{cases}$$

heisst *diskretes Lyapunov-Funktional*. □

Die Lösungssegmente y_t einer noch zu definierenden periodischen Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $[\alpha, g]$ verlaufen für alle $t \in \mathbb{R}$ im Unterraum

$$\mathcal{C}_\alpha^1 := \mathcal{C}^1([-\alpha, 0], \mathbb{R}), \quad \mathcal{C}^1 := \mathcal{C}_1^1,$$

von \mathcal{C}_α . Wir versehen \mathcal{C}_α^1 mit der Norm

$$\|\cdot\|_1^\alpha : \mathcal{C}_\alpha^1 \ni \varphi \mapsto \|\varphi\|^\alpha + \|\dot{\varphi}\|^\alpha \in \mathbb{R}, \quad \|\cdot\|_1 := \|\cdot\|_1^1.$$

Damit ist \mathcal{C}_α^1 ein Banachraum, wobei $\dot{\varphi}(-\alpha)$ und $\dot{\varphi}(0)$ als rechts- bzw. linksseitige Ableitungen zu verstehen sind. Zunächst machen wir eine elementare Feststellung:

Bemerkung 1.3.1 *Es seien*

$$\begin{aligned}\mathcal{N} &:= \{\varphi \in \mathcal{C}^1 : \text{Für alle } t \in \varphi^{-1}(0) \text{ gilt } \dot{\varphi}(t) \neq 0\}, \\ \mathcal{S}_1 &:= \{\varphi \in \mathcal{C}^1 : \varphi(0) \neq 0 \text{ oder } \dot{\varphi}(0)\varphi(-1) > 0\}, \\ \mathcal{S}_2 &:= \{\varphi \in \mathcal{C}^1 : \varphi(-1) \neq 0 \text{ oder } \dot{\varphi}(-1)\varphi(0) < 0\}.\end{aligned}$$

1. Die Mengen \mathcal{N} , \mathcal{S}_1 und \mathcal{S}_2 sind offen in \mathcal{C}^1 .
2. Es gilt $V(\mathcal{N}) \subseteq 2\mathbb{N}_0$, insbesondere gilt für alle $\varphi \in \mathcal{N}$

$$\#(\varphi) = |\varphi^{-1}(0) \cap (-1, 0)|.$$

Beweis: Die Menge \mathcal{N} besteht nach Definition aus allen stetig differenzierbaren Funktionen $\varphi : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}$, die nur einfache Nullstellen besitzen. Wir beachten dabei die Inklusion $\{\varphi \in \mathcal{C}^1 : \varphi^{-1}(0) = \emptyset\} \subseteq \mathcal{N}$.

1. Um die Offenheit von \mathcal{N} in \mathcal{C}^1 zu zeigen, beweisen wir die Abgeschlossenheit von

$$\mathcal{C}^1 \setminus \mathcal{N} = \{\varphi \in \mathcal{C}^1 : \text{Es gibt } t \in \varphi^{-1}(0) \text{ mit } \dot{\varphi}(t) = 0\} \subseteq \mathcal{C}^1.$$

Es sei dazu $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{C}^1 \setminus \mathcal{N}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi \in \mathcal{C}^1$. Die Folgen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(\dot{\varphi}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sind dann punktweise gegen φ und $\dot{\varphi}$ konvergent. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es $t_n \in \varphi_n^{-1}(0)$ mit $\dot{\varphi}_n(t_n) = 0$. Es existiert eine konvergente Teilfolge $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$, wobei wir $t := \lim_{k \rightarrow \infty} t_{n_k} \in [-1, 0]$ setzen.

Es sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Aus der gleichmässigen Konvergenz von $(\varphi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen φ folgt die Existenz von $K_1 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K_1$, $l \geq K_1$ und $s \in [-1, 0]$ gilt

$$|\varphi_{n_k}(s) - \varphi_{n_l}(s)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Weiterhin liefert die gleichmässige Konvergenz von $(\varphi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine natürliche Zahl $K \geq K_1$, so dass für alle $k \geq K$ und alle $s \in [-1, 0]$ gilt:

$$|\varphi_{n_k}(s) - \varphi(s)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Die Funktion φ_{n_K} ist in $t \in [-1, 0]$ stetig, d.h. es gibt ein $\delta > 0$, so dass für alle $s \in [-1, 0]$ mit $|s - t| < \delta$ folgt:

$$|\varphi_{n_K}(s) - \varphi_{n_K}(t)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Durch die Konvergenz von $(t_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ gegen t erhalten wir ein $K_2 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $k \geq K_2$ gilt: $|t_{n_k} - t| < \delta$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq \max\{K, K_2\}$ gilt daher

$$\begin{aligned}|\varphi_{n_k}(t_{n_k}) - \varphi(t)| &\leq |\varphi_{n_k}(t_{n_k}) - \varphi_{n_K}(t_{n_k})| + |\varphi_{n_K}(t_{n_k}) - \varphi_{n_K}(t)| + |\varphi_{n_K}(t) - \varphi(t)| < \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Wir erhalten daher

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \varphi_{n_k}(t_{n_k}) = \varphi(t).$$

Eine identische Beweisführung liefert das letzte Gleichheitszeichen bei

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} 0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \dot{\varphi}_{n_k}(t_{n_k}) = \dot{\varphi}(t).$$

Daher gilt $\varphi \in \mathcal{C}^1 \setminus \mathcal{N}$. Die Menge $\mathcal{C}^1 \setminus \mathcal{N}$ ist somit abgeschlossen in \mathcal{C}^1 und daher \mathcal{N} offen in \mathcal{C}^1 .

Wir zeigen die Offenheit von \mathcal{S}_1 , die von \mathcal{S}_2 ist analog zu beweisen, was nicht weiter ausgeführt wird.

Die Evaluationen $\text{ev}_0 : \mathcal{C} \ni \varphi \mapsto \varphi(0) \in \mathbb{R}$ und $\text{ev}_{-1} : \mathcal{C} \ni \varphi \mapsto \varphi(-1) \in \mathbb{R}$ sind stetig, für ihre Einschränkungen $\text{ev}_0|_{\mathcal{C}^1}$ und $\text{ev}_{-1}|_{\mathcal{C}^1}$ gilt dasselbe. Die Stetigkeit des Differentiationsoperators $D : \mathcal{C}^1 \ni \varphi \mapsto \dot{\varphi} \in \mathcal{C}$ liefert dann die Stetigkeit von

$$E := (\text{ev}_0 \circ D) \cdot \text{ev}_{-1} : \mathcal{C}^1 \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei die Produktbildung punktweise zu verstehen ist. Mit diesen Abbildungen lässt sich die Menge $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{C}^1$ als Vereinigung stetiger Urbilder offener Mengen in \mathbb{R} schreiben, ist also selbst offen:

$$\mathcal{S}_1 = \{\varphi \in \mathcal{C}^1 : \varphi(0) \neq 0\} \cup \{\varphi \in \mathcal{C}^1 : \dot{\varphi}(0)\varphi(-1) > 0\} = \text{ev}_0^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \cup E^{-1}(\mathbb{R}^+).$$

2. Angenommen, es gibt ein $\varphi \in \mathcal{N}$ mit $V(\varphi) = \infty$, d.h. es muss $\#(\varphi) = \infty$ gelten. Von der Definition des Vorzeichenwechsels $\#$ ausgehend gibt es dann eine streng monoton wachsende Folge $(s_j)_{j \in \mathbb{N}_0}$ in $[-1, 0]$ mit $\varphi(s_{j-1})\varphi(s_j) < 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Die Funktion φ ist stetig und ein Zwischenwertargument liefert die Existenz einer streng monoton wachsenden Folge $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ in $\varphi^{-1}(0)$ mit $r_j \in (s_{j-1}, s_j)$ für alle $j \in \mathbb{N}$. Es gibt eine konvergente Teilfolge $(r_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(r_j)_{j \in \mathbb{N}}$ mit $r := \lim_{k \rightarrow \infty} r_{j_k}$ und $\varphi(r) = 0$; r ist nach Voraussetzung einfach. Der Satz von Rolle liefert zur streng monoton wachsenden Nullstellenfolge $(r_{j_k})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $\dot{\varphi}^{-1}(0)$ mit $t_k \in (r_{j_k}, r_{j_{k+1}})$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Das Einschliessungskriterium für konvergente Folgen liefert zum einen die Konvergenz von $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$, sagen wir gegen $t \in \dot{\varphi}^{-1}(0)$, zum anderen $t = s$, was der Einfachheit der Nullstelle r widerspricht. Somit ist $V|_{\mathcal{N}}$ endlich. ■

Anhand des letzten Beweises erkennen wir, dass die betrachteten Mengen \mathcal{S}_1 , \mathcal{S}_2 und \mathcal{N} nicht unbedingt offen in \mathcal{C}^1 sind, wenn wir anstatt $\|\cdot\|_1$ die max-Norm $\|\cdot\|$ verwenden: Der Differentiationsoperator D ist dann nicht stetig und die Ableitungsfolge einer in \mathcal{C}^1 konvergenten Folge wäre nicht unbedingt gleichmässig konvergent.

Im folgenden wird sich herausstellen, dass die Lösungssegmente (noch zu definierender) periodischer Lösungen von $[1, g]$ in einer gewissen Teilmenge von \mathcal{C}^1 verlaufen, nämlich in

$$\mathcal{S} := \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}^1.$$

Anmerkung 1.3.1 Aus Bemerkung 1.3.1 erhalten wir die Offenheit von \mathcal{S} in \mathcal{C}^1 . ■

Auch ist V auf \mathcal{S} besser handhabbar, denn V ist auf \mathcal{N} und somit auf der kleineren Menge \mathcal{S} endlich. Es gilt sogar

Bemerkung 1.3.2 Die Einschränkung $V|_{\mathcal{S}}$ des Lyapunov-Funktional V auf die offene Menge \mathcal{S} ist stetig, d.h. für jedes $\varphi \in \mathcal{S}$ und alle Folgen $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathcal{S} mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_1 = 0$$

folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V(\varphi_n) = V(\varphi).$$

Beweis: Es seien $\varphi \in \mathcal{S}$ und $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{S}^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi_n - \varphi\|_1 = 0$ gegeben. Nach Bemerkung 1.3.1.2 gelten $V(\varphi) \in 2\mathbb{N}_0$ und $V(\varphi_n) \in 2\mathbb{N}_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

1. Wir betrachten zunächst den Fall

$$\varphi(-1) \neq 0 \quad \text{und} \quad \varphi(0) \neq 0. \quad (1.1)$$

Es sei $k := \#(\varphi) \in \mathbb{N}_0$. Ist $k = 0$, so besitzt φ wegen Bemerkung 1.3.1.2 und (1.1) keine Nullstellen, o.B.d.A. sei dann φ positiv, d.h. auf Bemerkung 2.1.3.2 vorgehend haben wir

$$\varphi \in \{\psi \in \mathcal{C}^1 : \psi > 0\} = \text{int}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C}^1,$$

wobei $\text{int}(\mathcal{K})$ bzgl. $\|\cdot\|_{\infty}$ zu verstehen ist. Die Offenheit von $\text{int}(\mathcal{K})$ liefert nun ein $\varepsilon > 0$ mit $U_{\varepsilon}^{\|\cdot\|_{\infty}}(\varphi) \subseteq \text{int}(\mathcal{K}) \cap \mathcal{C}^1$. Aus der $\|\cdot\|_1$ -Konvergenz von $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen φ folgt die $\|\cdot\|_{\infty}$ -Konvergenz von $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen φ , und es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n \in U_{\varepsilon}^{\|\cdot\|_{\infty}}(\varphi)$ für alle $n \geq N$. Mit der Definition von $\#$ erkennen wir dann für alle $n \geq N$:

$$V(\varphi_n) = 0 = k = \#(\varphi) = V(\varphi).$$

Es sei nun $k \geq 1$, d.h. es gibt einen streng monoton wachsenden $(k+1)$ -Tupel (s_0, \dots, s_k) in $[-1, 0]$ mit $\varphi(s_{j-1})\varphi(s_j) < 0$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$. Weil $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ punktweise gegen φ konvergiert, gibt es $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $\varphi_n(s_{j-1})\varphi_n(s_j) < 0$ für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ und $n \geq N_1$, d.h.

$$\#(\varphi_n) \geq k \quad \text{für alle } n \geq N_1. \quad (1.2)$$

Andererseits haben wir mit Bemerkung 1.3.1.2 und der Voraussetzung (1.1)

$$\varphi^{-1}(0) =: \{t_1, \dots, t_k\} \subseteq (-1, 0),$$

und für alle $t \in [-1, 0] \setminus \{t_1, \dots, t_k\}$ gilt $\varphi(t) \neq 0$; dabei gilt für die Nullstelle t_j , $j \in \{1, \dots, k\}$: $t_j \in (s_{j-1}, s_j)$. Folglich liefert die gleichmässige Konvergenz ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_n(t) \neq 0 \quad \text{für alle } t \in [-1, 0] \setminus \{t_1, \dots, t_k\} \quad \text{und } n \geq N_2. \quad (1.3)$$

Mit (1.2) haben wir

$$\#(\varphi_n) \geq k \quad \text{für alle } n \geq N := \max\{N_1, N_2\}.$$

Um hier Gleichheit zu zeigen, nehmen wir $\#(\varphi_{n^*}) \geq k + 1$ für ein $n^* \geq N$ an. D.h. es gibt $j^* \in \{1, \dots, k\}$ und $s^* \in (s_{j^*-1}, s_{j^*})$ mit $\varphi_{n^*}(s^*)\varphi_{n^*}(s_{j^*-1}) < 0$ und $\varphi_{n^*}(s^*)\varphi_{n^*}(s_{j^*}) < 0$. Insbesondere gibt es neben t_{j^*} eine weitere Nullstelle $t^* \neq t_{j^*}$ von φ_{n^*} in (s_{j^*-1}, s_{j^*}) . Mit (1.3) erhalten wir nun den Widerspruch

$$0 \neq \varphi_{n^*}(t^*) = 0.$$

Also ist die Annahme falsch, und es muss $\#(\varphi_n) = k = \#(\varphi)$ für alle $n \geq N$ gelten. Somit haben wir $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\varphi_n) = V(\varphi)$ bewiesen.

2. Abschliessend betrachten wir den Fall $\varphi(-1) = 0$ oder $\varphi(0) = 0$. Wegen $\varphi \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$ muss $\varphi(-1) = 0$ und $\varphi(0) \neq 0$ oder $\varphi(-1) \neq 0$ und $\varphi(0) = 0$ gelten. Wir betrachten lediglich den ersten Fall $\varphi(-1) = 0$ und $\varphi(0) \neq 0$, der andere kann analog behandelt werden; es reicht aus $\varphi(0) > 0$ zu betrachten. Mit $\varphi \in \mathcal{S}_2$ erhalten wir $\dot{\varphi}(-1) < 0$, und φ hat eine ungerade Anzahl von Nullstellen in $(-1, 0)$, d.h. mit Bemerkung 1.3.1.2

$$k := \#(\varphi) \in 2\mathbb{N}_0 + 1.$$

Wir wählen einen streng monoton wachsenden Tupel (s_0, \dots, s_k) in $(-1, 0)$ mit

$$\varphi(s_{j-1})\varphi(s_j) < 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, k\}.$$

Wie in 1. begründen wir die Existenz eines $N_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$\#(\varphi_n) \geq k \quad \text{für alle } n \geq N_1,$$

und wir wissen $\varphi^{-1}(0) = \{-1, t_1, \dots, t_k\}$. Deshalb gibt es $N_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\varphi_n(t) \neq 0 \quad \text{für alle } t \in [-1, 0] \setminus \{-1, t_1, \dots, t_k\} \quad \text{und } n \geq N_2. \quad (1.4)$$

Analog zu 1. führt die Annahme $\#(\varphi_{n^*}) \geq k + 2$ für ein $n^* \geq N := \max\{N_1, N_2\}$ auf ein $t^* \in \varphi_{n^*}^{-1}(0) \setminus \{-1, t_1, \dots, t_k\}$, was (1.4) widerspricht. Somit haben wir

$$\#(\varphi_n) \in \{k, k + 1\} = \{\#(\varphi), \#(\varphi) + 1\} \quad \text{für alle } n \geq N.$$

Gilt $\#(\varphi_n) = \#(\varphi)$ für ein $n \geq N$, so haben wir $V(\varphi_n) = V(\varphi)$. Dies folgt auch, wenn $\#(\varphi_n) = \#(\varphi) + 1$ für ein $n \geq N$ gilt, denn $\#(\varphi) \in 2\mathbb{N}_0 + 1$, und daher haben wir

$$V(\varphi_n) = \#(\varphi_n) = \#(\varphi) + 1 = V(\varphi).$$

Insgesamt folgt für alle $n \geq N$ die Gleichheit $V(\varphi_n) = V(\varphi)$ und die gewünschte Behauptung $\lim_{n \rightarrow \infty} V(\varphi_n) = V(\varphi)$. ■

Nachdem wir einige von einer Differentialgleichung unabhängige Aussagen über V bewiesen haben, wenden wir diese auf periodische Lösungen von $[1, g]$ an. Wir beginnen mit einer grundlegenden Anmerkung.

Anmerkung 1.3.2 *Ist (H1) vorausgesetzt, so folgt für eine nicht-triviale Lösung*

$$0 \neq x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

von (μ, f) mit Bemerkung 1.2.1

$$x_t \neq 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, und somit ist $V(x_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ erklärt. ■

Wie angekündigt orientieren wir uns an [36] und [37], wenn wir im folgenden die Eigenschaften 1., 2. und 3. von V für sogenannte zyklisch gekoppelte Systeme mit gewissen Vorzeichenbedingungen zusammenstellen, um sie im nächsten Abschnitt auf periodische Lösungen von (μ, f) anzuwenden. Diese Systeme reduzieren sich im eindimensionalen Fall auf die bereits betrachtete skalare, nicht-autonome Gleichung

$$(g) := [1, g] \quad \dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t-1))$$

mit Vorzeichenbedingung

$$(+) \quad \zeta \cdot g(\cdot, 0, \zeta) > 0 \quad \text{für alle } \zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

dabei sei $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und in den letzten beiden Variablen stetig differenzierbar.

Von besonderem Interesse sind periodische Lösungen von (g) . Bevor wir eine Definition für solche Lösungen angeben, zeigen wir, dass eine stetig differenzierbare, periodische und nicht-konstante Funktion eine kleinste Periode hat, die positiv ist.

Lemma 1.3.1 *Es sei $z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare, nicht-konstante Funktion mit $M := \{t \in \mathbb{R}^+ : z = z(\cdot + t)\} \neq \emptyset$. Dann existiert $T := \min M > 0$.*

Beweis: Die Zahl $\tau := \inf M \geq 0$ existiert, und es gibt eine Folge $(\tau^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ in M mit $\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^{(n)}$. Für alle $t \in \mathbb{R}$ liefert die Stetigkeit von $z(t + \cdot)$

$$z(t + \tau) = z\left(t + \lim_{n \rightarrow \infty} \tau^{(n)}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} z(t + \tau^{(n)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} z(t) = z(t),$$

Wäre $\tau = 0$, so erhielten wir für alle $t \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$ aus $z(t + \tau^{(n)}) = z(t)$

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z(t + \tau^{(n)}) - z(t)}{\tau_n} = \dot{z}(t)$$

und z wäre widersprüchlicherweise eine konstante Funktion. Somit haben wir $\tau \in M$, und die Periode $T := \tau = \min M > 0$ ist erklärt. ■

Als nächstes definieren wir die auf ganz \mathbb{R} gegebenen periodischen Lösungen von $[\alpha, g]$ bzw. (g) . Konstante Lösungen wollen wir nicht als periodisch ansehen. Nach Lemma 1.3.1 ist dann eine kleinste, positive Periode existent:

Definition 1.3.2 Es sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

1. Die Funktion y heisst eine periodische Lösung von $[\alpha, g]$, wenn y eine nicht-konstante Lösung von $[\alpha, g]$ mit $M := \{t \in \mathbb{R}^+ : y = y(\cdot + t)\} \neq \emptyset$ ist. Die positive Zahl $T = \min M$ heisst dann kleinste Periode von y .
2. Die Funktion $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ heisst eine Lösung von $(g+)$, wenn y eine Lösung von (g) ist und $(+)$ gilt. \square

Die mit (g) beschriebene Verzögerungsdauer beträgt 1, daher erweist sich bei dieser Gleichung \mathcal{C} als geeigneter Phasenraum. Die Lösungssegmente

$$y_t : [-1, 0] \ni s \mapsto y(t + s) \in \mathbb{R}.$$

einer Lösung y von (g) sind Elemente von \mathcal{C} . Die Nullfunktion $y = 0$ ist eine Lösung von $(g+)$, denn $(+)$ und die Stetigkeit von g liefern

$$g(\cdot, 0, 0) = 0.$$

Die Lösung $y = 0$ heisst *triviale Lösung*. Wie oben gesehen, sind Lösungen von (g) durch Festlegung eines Segments in positiver Zeitrichtung eindeutig bestimmt.

Die für uns relevanten Beispiele von $(g+)$ lauten wie folgt.

Bemerkung 1.3.3 Es seien $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $\bar{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von (μ, f) . Mit $(H1)$ ergeben sich dann die folgenden drei Aussagen.

1. Die Lösung x von (μ, f) ist eine Lösung von $(g+)$ mit

$$g : \mathbb{R}^3 \ni (t, \xi, \zeta) \mapsto -\mu\xi + f(\zeta) \in \mathbb{R}.$$

2. Die Lösungsdifferenz $x - \bar{x}$ ist eine Lösung von $(g+)$ mit

$$g : \mathbb{R}^3 \ni (t, \xi, \zeta) \mapsto -\mu\xi + f(\zeta + \bar{x}(t-1)) - f(\bar{x}(t-1)) \in \mathbb{R}.$$

3. Die Lösungsableitung \dot{x} ist eine Lösung von $(g+)$ mit

$$g : \mathbb{R}^3 \ni (t, \xi, \zeta) \mapsto -\mu\xi + f'(x(t-1))\zeta \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichung (g) heisst in diesem Fall *Variationsgleichung* von (μ, f) längs x .

Beweis: Die drei angegebenen Funktionen $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ sind stetig und vermöge $(H1)$ in den letzten beiden Variablen stetig differenzierbar. Sowohl x , als auch $x - \bar{x}$ und \dot{x} sind stetig differenzierbar; wir beachten dabei, dass die stetige Differenzierbarkeit von \dot{x} aus der von f via (μ, f) folgt. Die Funktionen x , $x - \bar{x}$ und \dot{x} erfüllen jeweils (g) . Es ist in jedem Fall die Vorzeichenbedingung $(+)$ mittels $(H1)$ zu verifizieren:

1. Für alle $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\zeta \cdot g(\cdot, 0, \zeta) = \zeta \cdot [\mathbb{R} \ni t \mapsto g(0, \zeta) \in \mathbb{R}] = [\mathbb{R} \ni t \mapsto \zeta \cdot f(\zeta) \in \mathbb{R}] > 0.$$

2. Für alle $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\zeta \cdot g(\cdot, 0, \zeta) = \zeta \cdot [f(\zeta + \bar{x}(\cdot - 1)) - f(\bar{x}(\cdot - 1))] > 0,$$

denn wegen des strengen Wachsens von f hat Funktion in der eckigen Klammer dasselbe Vorzeichen wie ζ .

3. Für alle $\zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt

$$\zeta \cdot g(\cdot, 0, \zeta) = f'(x(\cdot - 1))\zeta^2 > 0.$$

Dieses Beispiel ist eine infinitesimale Variante des zweiten Beispiels. ■

Im folgenden zitieren wir die erwähnte Tatsache, dass V längs nicht-trivialer Lösungen von $(g+)$ nicht wächst. Dazu muss gesichert sein, dass $V(y_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ existiert, d.h. y_t muss sich für alle $t \in \mathbb{R}$ von dem Nullsegment unterscheiden. Also sollte für die triviale Lösung eine Eindeutigkeit in negativer Zeitrichtung gelten; im Gegensatz zu Bemerkung 1.2.1 ist mit der Vorzeichen-Bedingung $(+)$ lediglich beweisbar, dass nur die triviale Lösung Null-Segmente besitzt, eine generelle Aussage wie in Bemerkung 1.2.1 ist mit $(+)$ i.a. nicht herleitbar.

Bemerkung 1.3.4 *Es sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-triviale Lösung von $(g+)$. Dann folgt für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$y_t \neq 0.$$

Beweis: Die Stetigkeit von g liefert $g(\cdot, 0, \zeta) = 0$ genau dann, wenn $\zeta = 0$. Ist $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Lösung von $(g+)$ mit $y_\tau = 0$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$, so gilt wegen der Eindeutigkeit der Lösung in positiver Zeitrichtung $y_t = 0$ für alle $t \geq \tau$. Aus $y_\tau = 0$ folgen $y(t) = 0$ und $\dot{y}(t) = 0$ für alle $t \in [\tau - 1, \tau]$, dies impliziert für alle $t \in [\tau - 1, \tau]$

$$0 = \dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t - 1)) = g(t, 0, y(t - 1)),$$

also $y(t - 1) = 0$ für alle $t \in [\tau - 1, \tau]$, und somit $y_t = 0$ für alle $t \in [\tau - 1, \tau]$. Sukzessive erhalten wir $y_t = 0$ für alle $t < \tau$ und insgesamt $y_t = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist nun $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-triviale Lösung von $(g+)$, so folgt $y_t \neq 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. ■

Weil aufgrund der letzten Feststellung $V(y_t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit nicht-trivialen Lösungen $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $(g+)$ existiert, ist der folgende Satz formulierbar, dessen Aussage im skalaren Spezialfall von Satz 2.1. aus MALLET-PARET & SELL [36] enthalten ist.

Satz 1.3.1 (Monotonie von V) *Es sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-triviale Lösung von $(g+)$. Dann ist*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto V(y_t) \in 2\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

monoton fallend. ■

Dieses Ergebnis lässt sich unmittelbar auf die für uns interessanten Spezialfälle aus Bemerkung 1.3.3 anwenden:

Korollar 1.3.1 *Es gelte $(H1)$, und es seien $x^0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x^1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ nicht-triviale Lösungen von (μ, f) mit $x_\tau^0 \neq x_\tau^1$ für ein $\tau \in \mathbb{R}$. Dann sind*

$$\begin{aligned} v_1 : \mathbb{R} \ni t &\mapsto V(x_t^0) \in 2\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \\ v_2 : \mathbb{R} \ni t &\mapsto V(x_t^0 - x_t^1) \in 2\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \quad \text{und} \\ v_3 : \mathbb{R} \ni t &\mapsto V(\dot{x}_t^0) \in 2\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\} \end{aligned}$$

definiert und monoton fallend.

Beweis: Nach Bemerkung 1.3.3 sind x^0 , $x^0 - x^1$ und \dot{x}^0 Lösungen einer Gleichung (g) , deren Nicht-Linearität g die Vorzeichenbedingung $(+)$ erfüllt. Es gelten nach Voraussetzung $x^0 \neq 0$, $x^0 - x^1 \neq 0$ und $\dot{x}^0 \neq 0$. Bemerkung 1.3.4 liefert dann die Definiertheit von v_1 , v_2 und v_3 . Aus Satz 1.3.1 folgt somit die Monotonie. ■

Nachdem man weiss, dass V längs nicht-trivialer Lösungen von $(g+)$ monoton fällt, stellt sich die Frage, in welchen Situationen dieses Fallen strikt ist. In Satz 2.2 und Proposition 2.3 der Arbeit von MALLEY-PARET & SELL [36] findet sich eine Bedingung für die Striktheit:

Satz 1.3.2 (Strenges Fallen von V) *Es sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-triviale Lösung von $(g+)$, und es gelte für ein $t \in \mathbb{R}$ entweder*

1. $y(t) = 0 = y(t-1)$ *oder*
2. $y(t) = 0$ und $y(t-1) > 0$.

Dann gilt entweder $V(y_t) < V(y_{t-3})$ oder $V(y_t) = \infty$. ■

Für auf ganz \mathbb{R} definierten Lösungen mit konstanter Oszillationsgeschwindigkeit ergibt sich leicht die

Folgerung 1.3.1 *Es sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-triviale Lösung von $(g+)$. Es gebe ein $n \in 2\mathbb{N}_0$ mit $V(y_t) = n$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann folgt*

$$Py_t \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R},$$

wobei die lineare Abbildung P durch

$$P := \begin{pmatrix} \text{ev}_0 \\ \text{ev}_{-1} \end{pmatrix} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

definiert sei.

Beweis: Die Voraussetzungen 1. und 2. von Satz 1.3.2 können wegen der endlichen Konstanzheit von V längs y nicht erfüllt sein. Weil insbesondere 1. nicht gilt, haben wir für alle $t \in \mathbb{R}$

$$0 \neq \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ev}_0(y_t) \\ \text{ev}_{-1}(y_t) \end{pmatrix} = Py_t. \quad \blacksquare$$

Es ist wichtig zu wissen, unter welchen Voraussetzungen an die Nichtlinearität g die V -Werte der Segmente einer Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $(g+)$ endlich sind. Als abschließendes Zitat verweisen wir auf Satz 2.4 aus MALLET-PARET & SELL [36], in dem eine für unsere Zwecke leicht verifizierbare Endlichkeitsbedingung angegeben wird.

Satz 1.3.3 (Endlichkeit von V) *Es sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine durch $R \in \mathbb{R}^+$ beschränkte Lösung von $(g+)$. Wenn ein $B \in \mathbb{R}^+$ existiert, so dass für alle $t \in \mathbb{R}$*

$$|D_j g(t, \xi, \zeta)| \leq B, \quad (\xi, \zeta) \in [-R, R]^2, \quad j \in \{2, 3\},$$

gilt, so folgt

$$V(y_t) < \infty$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. \blacksquare

Wir stellen fest, dass die Voraussetzungen von Satz 1.3.3 bei unseren Standard-Beispielen aus Bemerkung 1.3.3 erfüllt sind.

Anmerkung 1.3.3 *Es seien die Voraussetzungen von Bemerkung 1.3.3 gegeben. Dann erfüllen die dort aufgeführten Nicht-Linearitäten die Beschränktheitsvoraussetzungen von Satz 1.3.3, wenn sowohl $x(\mathbb{R})$ als auch $\bar{x}(\mathbb{R})$ kompakt sind.* \blacksquare

Als Folgerung halten wir fest, dass die Oszillationsgeschwindigkeit einer periodischen Lösung von $(g+)$ konstant ist:

Folgerung 1.3.2 *Es sei $0 \neq y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von $(g+)$. Dann ist*

$$v : \mathbb{R} \ni t \mapsto V(y_t) \in 2\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

eine konstante Funktion.

Beweis: Nach Anmerkung 1.3.3 und Bemerkung 1.3.3 ist v eine endliche Funktion und mit Satz 1.3.1 monoton fallend. Angenommen, es gibt s und t in \mathbb{R} mit $s < t$ und $V(y_s) > V(y_t)$. Es existiert ein $n \in \mathbb{N}$, so dass $s + nT > t$ erfüllt ist. Die Monotonie hat dann den Widerspruch

$$V(y_s) > V(y_t) \geq V(y_{s+nT}) = V(y_s)$$

zur Folge: das Funktional V kann längs y nicht strikt fallen, es muss konstant sein. \blacksquare

Wir schliessen diesen Abschnitt mit einer Aussage über die offene Menge

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{N} \subseteq \mathcal{C}^1$$

ab. Die Vorbereitungen dieses Abschnitts ermöglichen es, aus der Stagnation der Funktionalwerte – man denke an Segmente periodischer Lösungen von $(g+)$ – ein Enthaltensein dieser Segmente in \mathcal{S} zu folgern.

Bemerkung 1.3.5 *Es sei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine nicht-triviale Lösung von $(g+)$. Für ein $t \in \mathbb{R}$ mit $V(y_t) = V(y_{t-4}) < \infty$ folgt*

$$y_t \in \mathcal{S}.$$

Beweis: Es seien ein $t \in \mathbb{R}$ mit $V(y_t) = V(y_{t-4}) < \infty$ und $s \in [-1, 0]$ gegeben. Dann folgt

$$t - 4 \leq t - 3 + s \leq t + s \leq t,$$

also mit dem Monotonie-Satz 1.3.1

$$V(y_{t+s}) = V(y_{t+s-3}) < \infty. \quad (1.1)$$

Mit (1.1) und Satz 1.3.2 erhält man

$$\begin{pmatrix} y(t+s) \\ y(t+s-1) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Im Fall $y(t+s) = 0$ haben wir daher $y(t+s-1) \neq 0$ und vermöge $(g+)$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t+s) &= g(t+s, y(t+s), y(t+s-1)) = g(t+s, 0, y(t+s-1)) = \\ &= \operatorname{sgn}(y(t+s-1)) \cdot |g(t+s, 0, y(t+s-1))| \neq 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

In jedem Fall gilt

$$\begin{pmatrix} y_t(s) \\ \dot{y}_t(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t+s) \\ \dot{y}(t+s) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Aufgrund von Ungleichung (1.4) hat y_t nur einfache Nullstellen, es ist $y_t \in \mathcal{N}$.

Wenn $0 \neq y(t) = y_t(0)$ gilt, so folgt $y_t \in \mathcal{S}_1$. Wir gehen daher von $0 = y(t) = y_t(0)$ aus. Dann liefern (1.2) und (1.3) für $s = 0$

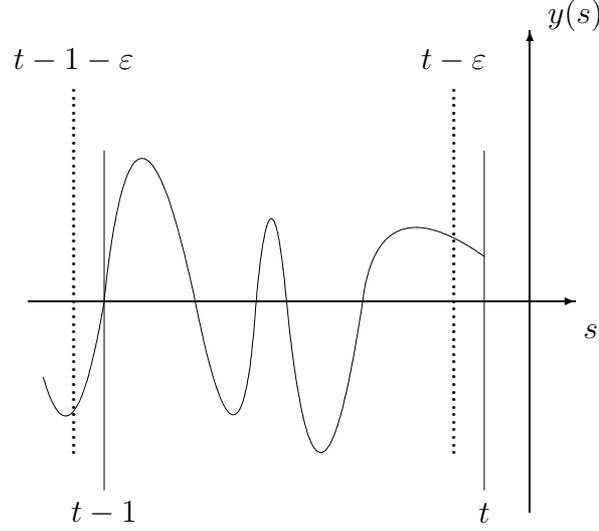
$$0 \neq \operatorname{sgn}(y(t-1)) = \operatorname{sgn}(\dot{y}(t)),$$

also $y_t(-1) \cdot \dot{y}_t(0) > 0$ und $y_t \in \mathcal{S}_1$.

Wir zeigen schliesslich $y_t \in \mathcal{S}_2$ und nehmen $y(t-1) = y_t(-1) = 0$ an. Wir wissen $y_t \in \mathcal{S}_1$, also $y(t) = y_t(0) \neq 0$. Mit $y_t(-1) = 0$ erhalten wir unter Berücksichtigung von $y_t \in \mathcal{N}$

$$\dot{y}_t(-1) \neq 0.$$

Um $y_t \in \mathcal{S}_2$ zu zeigen, ist $y_t(0) \cdot \dot{y}_t(-1) < 0$ zu beweisen, und wir gehen vom Gegenteil $y_t(0) \cdot \dot{y}_t(-1) > 0$ aus. Es gibt dann ein $\varepsilon > 0$ mit $y_t|_{[-\varepsilon, 0]} > 0$ und $y|_{[t-1-\varepsilon, t-1]} < 0$ oder



$y_t|_{[-\varepsilon,0]} < 0$ und $y|_{[t-1-\varepsilon,t-1]} > 0$. Die Zahl ε ist dabei so gewählt, dass $y_{t-\varepsilon}^{-1}(0) = y_t^{-1}(0) \uplus \{\varepsilon\}$ gilt. Bemerkung 1.3.1.2 liefert

$$\#(y_{t-\varepsilon}) = |y_{t-\varepsilon}^{-1}(0) \cap (-1, 0)| = |(y_t^{-1}(0) \uplus \{\varepsilon\}) \cap (-1, 0)| = |y_t^{-1}(0) \uplus \{\varepsilon\}| = \#(y_t) + 1. \quad (1.5)$$

Laut Bemerkung 1.3.1 und der Definition des Vorzeichenwechsels ist $\#(y_t)$ endlich, und es gibt einen streng monoton wachsenden Tupel $(s_0, \dots, s_{\#(y_t)})$ maximaler Länge mit

$$y_t(s_{j-1})y_t(s_j) < 0 \quad \text{für alle } j \in \{1, \dots, \#(y_t)\}.$$

Bei den $\#(y_t)$ aufeinanderfolgenden Paaren (s_{j-1}, s_j) , $j \in \{1, \dots, \#(y_t)\}$, findet also ein Vorzeichenwechsel statt, d.h. wir haben wegen $y_t(0) \neq 0$

$$\operatorname{sgn}(y_t(0)) = (-1)^{\#(y_t)} \cdot \operatorname{sgn}(y_t(s_0)) = (-1)^{\#(y_t)} \cdot \operatorname{sgn}(\dot{y}_t(-1)).$$

Nach Annahme haben $y_t(0)$ und $\dot{y}_t(-1)$ dasselbe Vorzeichen, so dass $\#(y_t)$ eine gerade Zahl sein muss. Mittels (1.5) stellen wir fest, dass $\#(y_{t-\varepsilon})$ eine ungerade Zahl ist, folglich liefert die Definition des Ljapunov-Funktional $V(y_{t-\varepsilon}) = \#(y_t) + 2$ und der Monotonie-Satz 1.3.1 die $V(y_{t-4}) = V(y_t)$ widersprechende Aussage

$$V(y_{t-4}) \geq V(y_{t-\varepsilon}) = \#(y_t) + 2 = V(y_t) + 2 > V(y_t).$$

Also muss $y_t(0) \cdot \dot{y}_t(-1) < 0$ gelten, und y_t ist ein Element von \mathcal{S}_2 . Insgesamt haben wir $y_t \in \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \mathcal{N} = \mathcal{S}$. ■

Die in diesem Abschnitt aufgeführten Eigenschaften des diskreten Lyapunov-Funktional V erlauben uns im nächsten Abschnitt, wichtige, von (H1) verursachte Eigenschaften periodischer Lösungen von (μ, f) zu beweisen.

1.4 Untersuchung periodischer Lösungen mittels V

Wir werden in den nächsten Abschnitten insbesondere das Problem der Eindeutigkeit periodischer Lösungen von

$$(\mu, f) \quad \dot{x}(t) = -\mu x + f(x(t-1))$$

erörtern. Die Eindeutigkeitsfrage ist nur modulo Phasenverschiebung interessant, weil mit einer periodischen Lösung x der autonomen Gleichung (μ, f) auch $x(\cdot+s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von (μ, f) derselben Periode ist. Daher werden bei Eindeutigkeitsfragen periodische Lösungen x betrachtet, die der folgenden willkürlichen Normierung genügen.

Definition 1.4.1 Eine periodische Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von (μ, f) heisst normiert, falls

$$x(0) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(0) > 0$$

gelten. □

Die folgende Bemerkung zeigt, wie periodische Lösungen von (μ, f) in solche der später benötigten Hilfsgleichung

$$(\mu, f, \lambda, \alpha) \quad \dot{x}(t) = -\mu x(t) + \lambda f\left(\frac{x(t-\alpha)}{\lambda}\right),$$

mit Parametern $\lambda \in \mathbb{R}^+$ und $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ überführbar sind – und vice versa; Gleichung (μ, f) ist gerade $(\mu, f, 1, 1)$.

Bemerkung 1.4.1 Es sei x eine periodische Lösung von $(\mu, f, \lambda, \alpha)$ mit kleinster Periode T_x . Für alle $\rho > 0$ und $\beta > 0$ gelten :

1. Die Funktion $y : \mathbb{R} \ni t \mapsto \rho x(t) \in \mathbb{R}$ ist eine periodische Lösung von $(\mu, f, \rho\lambda, \alpha)$ mit kleinster Periode $T_y = T_x$.
2. Die Funktion $y : \mathbb{R} \ni t \mapsto x(\beta t) \in \mathbb{R}$ ist eine periodische Lösung von $(\beta\mu, \beta f, \lambda, \frac{\alpha}{\beta})$ mit kleinster Periode $T_y = \frac{T_x}{\beta}$.

Beweis: Es sei x eine periodische Lösung von $(\mu, f, \lambda, \alpha)$ mit kleinster Periode T_x .

1. Wie x ist y nicht konstant, stetig differenzierbar und hat eine Periode von T_x .

Es sei $t \in \mathbb{R}$. Hätte y eine kleinste Periode T_y , die kleiner als T_x ist, so erhielten wir

$$\rho x(T_y + t) = y(T_y + t) = y(t) = \rho x(t),$$

also $x(T_y + t) = x(t)$, was der Minimalität von T_x widerspräche. Folglich ist T_x die kleinste Periode von y .

Weil x eine periodische Lösung von $(\mu, f, \lambda, \alpha)$ ist, erhalten wir für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{y}(t) = \rho \dot{x}(t) = -\mu y(t) + \rho \lambda f\left(\frac{x(t-\alpha)}{\lambda}\right) = -\mu y(t) + \rho \lambda f\left(\frac{y(t-\alpha)}{\rho \lambda}\right),$$

insgesamt folgt also, dass y eine periodische Lösung von $(\mu, f, \rho\lambda, \alpha)$ mit kleinster Periode T_x ist.

2. Wie x ist y nicht konstant und stetig differenzierbar.

Es sei $t \in \mathbb{R}$. Die Funktion y hat wegen

$$y\left(t + \frac{T_x}{\beta}\right) = x(\beta t + T_x) = x(\beta t) = y(t)$$

eine Periode von $\frac{T_x}{\beta}$.

Es sei $t \in \mathbb{R}$. Hätte y eine kleinste Periode T_y , die kleiner als $\frac{T_x}{\beta}$ ist, so erhielten wir

$$x(\beta T_y + \beta t) = x(\beta(T_y + t)) = y(T_y + t) = y(t) = x(\beta t),$$

also $x(\beta T_y + \beta t) = x(\beta t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit hätte x eine Periode von $\beta T_y < \beta \frac{T_x}{\beta} = T_x$, was der Minimalität von T_x widerspräche. Folglich ist $\frac{T_x}{\beta}$ die kleinste Periode von y .

Weil x eine periodische Lösung von $(\mu, f, \lambda, \alpha)$ ist, erhalten wir für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \beta \dot{x}(\beta t) = -\beta \mu y(t) + \lambda \beta f\left(\frac{x(\beta t - \alpha)}{\lambda}\right) = \\ &= -\beta \mu y(t) + \lambda \beta f\left(\frac{x\left(\beta\left(t - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right)}{\lambda}\right) = -\beta \mu y(t) + \lambda \beta f\left(\frac{y\left(t - \frac{\alpha}{\beta}\right)}{\lambda}\right), \end{aligned}$$

insgesamt folgt also, dass y eine periodische Lösung von $(\beta \mu, \beta f, \lambda, \frac{\alpha}{\beta})$ mit kleinster Periode $\frac{T_x}{\beta}$ ist. ■

Im folgenden gehen wir von den Vorbereitungen des letzten Abschnitts 1.3 über das Lyapunov-Funktional V aus, um zu zeigen, dass die via

$$P = \begin{pmatrix} \text{ev}_0 \\ \text{ev}_{-1} \end{pmatrix} : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$$

projizierten Lösungssegmente einer periodischen Lösung von (μ, f) die Spur einer Kurve bilden, die jordsch und regulär ist. Somit besteht die Aussicht auf eine Anwendung der in Abschnitt 1.1 gewonnenen Ergebnisse über Jordan-Kurven, die eine Grundlage zur Durchführung der in der Einleitung erwähnten und in Abschnitt 1.6 beschriebenen Vergleichsmethode darstellt.

Dass die Orbits zweier periodischer Lösungen von (μ, f) in \mathcal{C} entweder gleich oder disjunkt sind, lässt sich mit wenig Aufwand beweisen. Etwas mehr Mühe bereitet es hingegen, wenn wir das Analogon dieser Aussage für die Spuren der beteiligten Jordan-Kurven zeigen; wir orientieren uns beim Beweis an den betreffenden Passagen in MALLET-PARET & SELL [37], wobei wir manches modifizieren und ausführlicher besprechen.

Satz 1.4.1 Die Funktion f möge die Voraussetzung (H1) erfüllen.

1. Ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von (μ, f) mit kleinster Periode $T > 0$, so ist die Kurve

$$\gamma_x : [0, T] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

eine reguläre Jordankurve.

2. Sind $x^1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x^2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodische Lösungen von (μ, f) mit kleinsten Perioden T_1 und T_2 , sowie für $j \in \{1, 2\}$ der Orbit $\mathcal{O}_j := \{x_t^j : t \in [0, T_j]\}$ von x^j in \mathcal{C} gegeben, so folgt

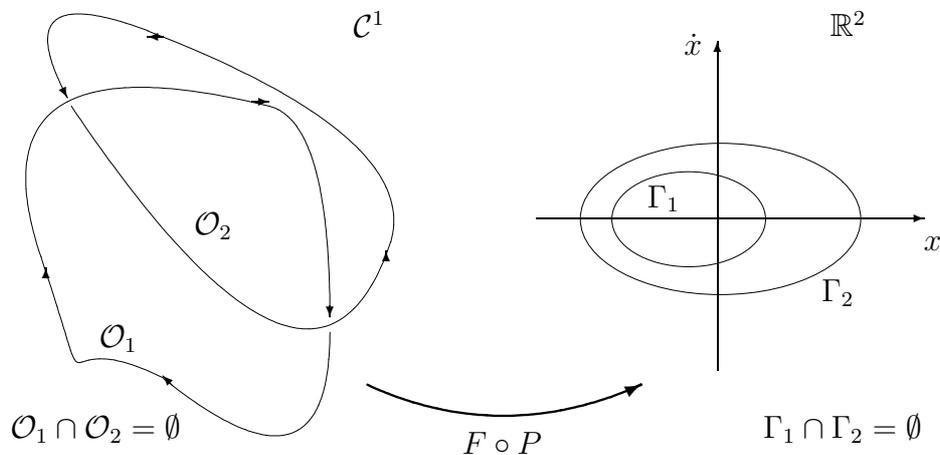
$$\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2 \quad \text{oder} \quad \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset.$$

3. Für $j \in \{1, 2\}$ sei die Kurve

$$\gamma_{x_j} : [0, T_j] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x^j(t) \\ \dot{x}^j(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

und deren Spur $\Gamma_j := \gamma_{x_j}([0, T_j]) \subseteq \mathbb{R}^2$ gegeben. Dann gilt

$$\Gamma_1 = \Gamma_2 \quad \text{oder} \quad \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset.$$



Beweis: Es seien t und s aus \mathbb{R} . Wir zeigen

$$x_t = x_s \quad \text{genau dann, wenn} \quad t - s \in T\mathbb{Z}. \tag{1.1}$$

Ist $t - s \in T\mathbb{Z}$ vorausgesetzt, so folgt mit der T -Periodizität von x die Gleichheit $x_t = x_s$. Umgekehrt gelte $x_t = x_s$. Es gibt ein $k \in \mathbb{Z}$ und ein $\tau \in [0, T)$ mit $t - s = \tau + kT$. Die Annahme $\tau \neq 0$ und

$$x_s = x_t = x_{s+\tau+kT} = x_{s+\tau},$$

geben, dass τ eine Periode von x ist, die kleiner als T ist. Dies widerspricht der Minimalität von T , und es muss $\tau = 0$, d.h. $t - s \in T\mathbb{Z}$, gelten. Die Aussage (1.1) ist somit bewiesen. Es seien $\tau \in (0, T)$ und $x^\tau := x(\cdot + \tau) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktionen x und x^τ sind periodische Lösungen von (μ, f) mit kleinster Periode T . Die Funktion $y^\tau := x - x^\tau$ ist nach Bemerkung 1.3.3.2 eine T -periodische Lösung einer Gleichung der Form $\dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t-1))$ mit Vorzeichenbedingung (+). Ist $0 = y_0^\tau = x_0 - x_0^\tau = x_0 - x_\tau$, so impliziert Aussage (1.1) dann $\tau \in T\mathbb{Z}$, also einen Widerspruch zu $\tau \in (0, T)$. Folglich muss $y_0^\tau \neq 0$ gelten, und y^τ kann nicht die triviale Lösung von $\dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t-1))$ sein. Weil y^τ periodisch ist, ergibt sich mit Folgerung 1.3.2, dass

$$v : \mathbb{R} \ni t \mapsto V(y_t^\tau) \in 2\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

eine endliche, konstante Funktion ist.

Diese endliche Konstantheit liefert dann mit Folgerung 1.3.1

$$Py_t^\tau \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

wobei $P = (ev_0, ev_{-1}) : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ist. Wir zeigen nun die Injektivität von

$$\Pi := \Pi_x : [0, T) \ni t \mapsto Px_t = \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

und nehmen dazu $\Pi(s) = \Pi(t)$ für s und t aus $[0, T)$ an. Angenommen, es gilt $t \neq s$, o.B.d.A. $t > s$, d.h. $\tau := t - s \in (0, T)$. Die Gleichheit $\Pi(s) = \Pi(t)$ übersetzt sich nun zu

$$0 = Px_s - Px_t = P(x_s - x_t) = P(x_s - x_{s+\tau}) = Py_s^\tau,$$

was (1.2) widerspricht, es muss somit $t = s$ gelten, und

Π ist injektiv.

Wir betrachten die nach (H1) stetig differenzierbare Funktion

$$F : \mathbb{R}^2 \ni (\xi, \zeta) \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ -\mu\xi + f(\zeta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Die Jacobi-Matrix von F lautet für $(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2$

$$J(\xi, \zeta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\mu & f'(\zeta) \end{pmatrix}.$$

Voraussetzung (H1) ergibt daraus die Abschätzung $\det J(\xi, \zeta) = f'(\zeta) > 0$, und F ist ein Diffeomorphismus von \mathbb{R}^2 auf sein Bild, insbesondere ist F injektiv. Aufgrund von (μ, f) lässt sich γ_x als Komposition

$$\gamma_x = F \circ \Pi$$

schreiben. Die Injektivität von Π liefert dann die von γ_x .

Für 1. ist noch die Regularität von γ_x , also $\dot{\gamma}_x(t) \neq 0$ für alle $t \in [0, T]$, zu zeigen. Weil x als periodische Lösung von (μ, f) nicht-trivial ist, folgt $y := \dot{x} \neq 0$. Bemerkung 1.3.3.3 zeigt, dass y eine periodische Lösung einer Gleichung (g) ist, wobei $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ der Vorzeichenbedingung $(+)$ genügt. Folgerung 1.3.2 ergibt wie oben die endliche Konstantheit von $\mathbb{R} \ni t \mapsto V(y_t) \in 2\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Folgerung 1.3.1 liefert somit

$$Py_t \neq 0 \quad \text{für alle } t \in \mathbb{R}.$$

Mit der Kettenregel ist nun die Regularität erkennbar, wobei wir beachten, dass die Ableitung $DF(\xi, \zeta) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ für alle $(\xi, \zeta) \in \mathbb{R}^2$ ein Isomorphismus ist:

$$\dot{\gamma}_x(t) = DF(\Pi(t))\dot{\Pi}(t) = DF(\Pi(t))Py_t \neq 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Insgesamt haben wir Punkt 1. bewiesen.

Wir beweisen nun die zweite Aussage, also $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ oder $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Angenommen, es gibt ein $\varphi \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$, d.h.

$$x_{t_1}^1 = \varphi = x_{t_2}^2$$

für $t_1 \in [0, T_1]$ und $t_2 \in [0, T_2]$. Wir betrachten für $j \in \{1, 2\}$ die periodische Lösung $y^j := x^j(\cdot + t_j) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von (μ, f) mit kleinster Periode T_j . Es gilt $y_0^1 = x_{t_1}^1 = x_{t_2}^2 = y_0^2$, also nach Bemerkung 1.2.1 für alle $t \in \mathbb{R}$ die Gleichheit $y_t^1 = y_t^2$, was genau dann der Fall ist, wenn

$$x_{t_1+t}^1 = x_{t_2+t}^2 \tag{1.3}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. Um $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ zu zeigen, wählen wir zunächst $x_{s_1}^1 \in \mathcal{O}_1$ mit $s_1 \in [0, T_1]$. Dann gibt es $n_2 \in \mathbb{Z}$ und $r_2 \in [0, T_2]$ mit $s_1 + t_2 - t_1 = n_2 T_2 + r_2$. Es folgt mit (1.3)

$$x_{s_1}^1 = x_{t_1+s_1-t_1}^1 = x_{t_2+s_1-t_1}^2 = x_{n_2 T_2+r_2}^2 = x_{r_2}^2 \in \mathcal{O}_2.$$

Umgekehrt sei $x_{s_2}^2 \in \mathcal{O}_2$ für ein $s_2 \in [0, T_2]$ gegeben. Dann gibt es $n_1 \in \mathbb{Z}$ und $r_1 \in [0, T_1]$ mit $t_1 + s_2 - t_2 = n_1 T_1 + r_1$, und es folgt mit (1.3)

$$x_{s_2}^2 = x_{t_2+s_2-t_2}^2 = x_{t_1+s_2-t_2}^1 = x_{n_1 T_1+r_1}^1 = x_{r_1}^1 \in \mathcal{O}_1.$$

Somit haben wir $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$, und dies ist neben $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ der einzig mögliche Fall, Aussage 2. ist folglich bewiesen.

Wir richten uns beim Beweis der dritten Aussage nach den Fällen $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ und $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$. Dabei betrachten wir die oben eingeführten injektiven Abbildungen

$$\Pi_j := \Pi_{x_j} : [0, T_j) \ni t \mapsto Px_t^j \in \mathbb{R}^2, \quad j \in \{1, 2\}$$

und beachten

$$\Pi_j([0, T_j)) = P\mathcal{O}_j \subseteq \mathbb{R}^2, \quad j \in \{1, 2\}. \tag{1.4}$$

Wir wissen, dass die Abbildung

$$F : \mathbb{R}^2 \ni (\xi, \zeta) \mapsto \begin{pmatrix} \xi \\ -\mu\xi + f(\zeta) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

injektiv ist, es gilt

$$\Gamma_j = F \circ \Pi_j([0, T_j]) = F \circ P(\mathcal{O}_j), \quad j \in \{1, 2\}. \quad (1.5)$$

Ist $\mathcal{O}_1 = \mathcal{O}_2$ gegeben, so folgt $\Gamma_1 = \Gamma_2$. Wir betrachten im folgenden den interessanteren Fall

$$\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset.$$

Es sei

$$G := \{(t, s) \in \mathbb{R}^2 : x_t^1 - x_s^2 \in \mathcal{S}\},$$

und die Annahme von $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ ermöglicht uns die Definition von

$$W : \mathbb{R}^2 \ni (t, s) \mapsto V(x_t^1 - x_s^2) \in 2\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

Aus den Bemerkungen 1.3.1 und 1.3.2 wissen wir, dass $V|_{\mathcal{S}}$ endlich und \mathcal{C}^1 -stetig ist. Die Ganzzahligkeit der V -Werte liefert dann die lokale Konstanz von $V|_{\mathcal{S}}$. Die Abbildung $U : \mathbb{R}^2 \ni (t, s) \mapsto x_t^1 - x_s^2 \in \mathcal{C}^1$ ist stetig, und nehmen wir $X \subseteq G$ als zusammenhängend an, so ist auch $U(X) \subseteq \mathcal{S}$ zusammenhängend. Weil lokal-konstante Funktionen auf zusammenhängenden Mengen konstant sind, ist die Funktion $V|_{U(X)}$ konstant und insgesamt halten wir fest, dass die Abbildung W auf zusammenhängenden Teilmengen X von G konstant und endlich ist; insbesondere gilt dies, wenn X eine offene Kreisscheibe ist.

Wir beweisen nun

$$W(\mathbb{R}^2) \subseteq 2\mathbb{N}_0.$$

Dazu seien $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ und

$$w := x^2(\cdot - s + t) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

vorgegeben. Die Funktion w ist eine periodische Lösung von (μ, f) mit kleinster Periode T_2 . Der Orbit von w ist der von x^2 , d.h. die Voraussetzung $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ garantiert $x_t^1 - w_t \neq 0$. Es folgt mittels Anmerkung 1.3.3 und Satz 1.3.3

$$\infty > V(x_t^1 - w_t) = V(x_t^1 - x_s^2) = W(t, s).$$

Es sei $c \in \mathbb{R}$. Dann sind $x^1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $w := x^2(\cdot + c) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ Lösungen von (μ, f) , $y := x^1 - w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist wegen Bemerkung 1.3.3.2 und $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ eine nicht-triviale Lösung von $(g+)$. Dann folgt mit der Endlichkeit von W und Monotonie-Satz 1.3.1 die Endlichkeit und das monotone Fallen der Funktion

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto V(y_t) = V(x_t^1 - w_t) = V(x_t^1 - x_{t+c}^2) = W(t, t+c) \in 2\mathbb{N}_0. \quad (1.6)$$

Daher existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W(t, t+c) =: \nu(c) \in 2\mathbb{N}_0.$$

Die Ganzzahligkeit der W -Werte liefert die Existenz eines $\bar{t} \in \mathbb{R}$ mit

$$W(t, t+c) = \nu(c) \quad \text{für alle } t \geq \bar{t}.$$

Definieren wir

$$M_c := \{t \in \mathbb{R} : W(t, t+c) = \nu(c)\},$$

so haben wir $[\bar{t}, \infty) \subseteq M_c$. Wir nehmen zunächst $M_c = \mathbb{R}$ für alle $c \in \mathbb{R}$ an und zeigen, dass in diesem Fall $\mathbb{R}^2 \subseteq G$, also $G = \mathbb{R}^2$, gilt. Es seien dazu $(t, s) \in \mathbb{R}^2$, $c := s - t \in \mathbb{R}$, $w := x^2(\cdot + c)$ und $y := x^1 - w$. Die Funktion y ist nach Bemerkung 1.3.3.2 eine nicht-triviale Lösung von $(g+)$. Es folgt mit der Endlichkeit von W und $M_c = \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \infty > V(y_t) &= V(x_t^1 - w_t) = V(x_t^1 - x_s^2) = W(t, s) = \\ &= W(t, t+c) = \nu(c) = W(t-4, t-4+c) = V(x_{t-4}^1 - w_{t-4}) = V(y_{t-4}). \end{aligned}$$

Mit Bemerkung 1.3.5 wissen wir dann

$$\mathcal{S} \ni y_t = x_t^1 - w_t = x_t^1 - x_s^2,$$

also $(t, s) \in G$. Somit haben wir $\mathbb{R}^2 = G$. Wäre nun $z \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2 = P\mathcal{O}_1 \cap P\mathcal{O}_2$, so würde es ein Paar $(t, s) \in \mathbb{R}^2$ mit $Px_t^1 = z = Px_s^2$ geben, was $P(x_t^1 - x_s^2) = 0$ bedeutet. Unter Berücksichtigung von $(t, s) \in \mathbb{R}^2 = G$ haben wir $x_t^1 - x_s^2 \in \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}_1$, aber dann kann $P(x_t^1 - x_s^2)$ nicht verschwinden. Wir erhalten also mit $M_c = \mathbb{R}$ einen Widerspruch aus der Annahme $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 \neq \emptyset$.

Um den Beweis von Behauptung 3. zu komplettieren, ist somit lediglich die Gleichheit

$$M_c = \mathbb{R} \quad \text{für } c \in \mathbb{R}$$

zu beweisen. Wir wählen zu $c \in \mathbb{R}$ ein $\bar{s} \in M_c$, dann folgt $[\bar{s}, \infty) \subseteq M_c$. Wegen des monotonen Fallens der Funktion $\mathbb{R} \ni t \mapsto W(t, t+c) \in 2\mathbb{N}_0$ ist es für den Beweis von $M_c = \mathbb{R}$ hinreichend

$$\bar{s} - \nu T_2 \in M_c \quad \text{für alle } \nu \in \mathbb{N}_0 \tag{1.7}$$

zu zeigen, was wir mit vollständiger Induktion bewerkstelligen. Der Induktionsanfang ist durch die Tatsache $\bar{s} \in M_c$ gegeben. Wir nehmen nun an, die Aussage (1.7) ist für $\nu \in \mathbb{N}$ bewiesen und setzen

$$\bar{s}_\nu := \bar{s} - \nu T_2 \in M_c.$$

Wir wissen, dass die Funktion W lokal-konstant ist, daher existiert zu \bar{s}_ν ein $\varepsilon_\nu > 0$ mit

$$W|_{U_{\varepsilon_\nu}(\bar{s}_\nu, \bar{s}_\nu+c)} = \{\nu(c)\}.$$

Zu $k \in \mathbb{N}_0$ existieren $l_k \in \mathbb{Z}$ und $r_k \in [0, T_1)$ mit

$$kT_2 = l_k T_1 + r_k.$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ gibt es genau ein solches Paar (l_k, r_k) , denn gäbe es eine weitere Darstellung $kT_2 = \tilde{l}_k T_1 + \tilde{r}_k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$, so würde

$$(l_k - \tilde{l}_k)T_1 + r_k - \tilde{r}_k = 0 \tag{1.8}$$

folgen. Nehmen wir $l_k \neq \tilde{l}_k$, o.B.d.A. $\tilde{l}_k < l_k$, an, so gibt es $m_k \in \mathbb{N}$ mit $l_k = \tilde{l}_k + m_k$, und (1.8) liefert dann wegen $T_1 > 0$

$$r_k < \tilde{r}_k, \quad \text{d.h. } \tilde{r}_k - r_k \in [0, T_1).$$

Eine erneute Anwendung von (1.8) ergibt

$$m_k T_1 = \tilde{r}_k - r_k < T_1 \leq m_k T_1,$$

was ein Widerspruch zur Annahme $l_k \neq \tilde{l}_k$ ist. Folglich gilt Gleichheit, sowohl für l_k und \tilde{l}_k als auch für r_k und \tilde{r}_k . Die gezeigte Eindeutigkeit erlaubt es uns das Bild der Restefolge

$$R := \{r_k : k \in \mathbb{N}_0\}$$

zu definieren. Im folgenden zeigen wir in zwei Schritten $\overline{s_{\nu+1}} \in M_c$ und beenden damit den Induktionsbeweis.

1. Zunächst nehmen wir an, dass die kleinsten Perioden T_1 und T_2 kommensurabel sind, d.h. $\frac{T_2}{T_1} \in \mathbb{Q}$ gilt. Dann gibt es p und q aus \mathbb{N} mit $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p}{q}$, was $qT_2 = pT_1$ bedeutet. Es folgt

$$\begin{aligned} \nu(c) &= W(\overline{s_\nu}, \overline{s_\nu} + c) = W(\overline{s_\nu} - pT_1, \overline{s_\nu} + c) = \\ &= W(\overline{s_\nu} - qT_2, \overline{s_\nu} - qT_2 + c) = W(\overline{s} - (q + \nu)T_2, \overline{s} - (q + \nu)T_2 + c), \end{aligned}$$

d.h. $\overline{s} - (q + \nu)T_2 \in M_c$ und aus Monotoniegründen haben wir $[\overline{s} - (q + \nu)T_2, \infty) \subseteq M_c$. Dies impliziert $\overline{s_{\nu+1}} = \overline{s} - (\nu + 1)T_2 \in M_c$.

2. Nun nehmen wir die Inkommensurabilität von T_1 und T_2 an, gehen also von $\frac{T_2}{T_1} \notin \mathbb{Q}$ aus. Angenommen, es gibt k und m aus \mathbb{N}_0 mit $r_k = r_m$. Dann folgt $kT_2 - l_k T_1 = mT_2 - l_m T_1$, was $(k - m)T_2 = (l_k - l_m)T_1$ bedeutet. Wäre $k \neq m$, so müssen $l_k \neq l_m$ und $\frac{T_2}{T_1} \in \mathbb{Q}$ gelten, also kann nur $k = m$ erfüllt sein, d.h. die Folge $(r_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ist injektiv; insbesondere ist R eine unendliche Menge.

Wir wählen $n \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{T_1}{n} < \varepsilon_\nu$ gilt. Dann können wir das Intervall zu

$$[0, T_1) = \biguplus_{l=1}^n \left[(l-1) \frac{T_1}{n}, l \frac{T_1}{n} \right)$$

partitionieren. Weil die Folge $(r_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ injektiv ist, besteht $\{r_0, \dots, r_n\}$ aus $n + 1$ Elementen, die in einer disjunkten Vereinigung von n Intervallen enthalten ist. Folglich gibt es zwei verschiedene Indizes n_1 und n_2 in $\{0, \dots, n\}$, o.B.d.A. $n_1 < n_2$, und ein $l \in \{1, \dots, n\}$ mit

$$r_{n_1} \in \left[(l-1) \frac{T_1}{n}, l \frac{T_1}{n} \right) \quad \text{und} \quad r_{n_2} \in \left[(l-1) \frac{T_1}{n}, l \frac{T_1}{n} \right),$$

daher besteht die Abschätzung

$$|r_{n_1} - r_{n_2}| < \frac{T_1}{n} < \varepsilon_\nu. \quad (1.9)$$

Wir setzen $N := n_2 - n_1 \in \mathbb{N}$ und erhalten:

$$\begin{aligned} W(\overline{s}_\nu - NT_2, \overline{s}_\nu - NT_2 + c) &= W(\overline{s}_\nu - (n_2T_2 - n_1T_2), \overline{s}_\nu + c) = \\ &= W(\overline{s}_\nu - (l_{n_2}T_1 + r_{n_2} - l_{n_1}T_1 - r_{n_1}), \overline{s}_\nu + c) = W(\overline{s}_\nu + (l_{n_1} - l_{n_2})T_1 - (r_{n_2} - r_{n_1}), \overline{s}_\nu + c) = \\ &= W(\overline{s}_\nu - (r_{n_2} - r_{n_1}), \overline{s}_\nu + c) = \nu(c), \end{aligned}$$

weil nach (1.9)

$$\left\| \begin{pmatrix} \overline{s}_\nu \\ \overline{s}_\nu + c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \overline{s}_\nu - (r_{n_2} - r_{n_1}) \\ \overline{s}_\nu + c \end{pmatrix} \right\| = |r_{n_2} - r_{n_1}| < \varepsilon_\nu$$

gilt und $W|_{U_{\varepsilon_\nu}(\overline{s}_\nu, \overline{s}_\nu + c)} = \{\nu(c)\}$ erfüllt ist. Daher haben wir $\overline{s}_\nu - NT_2 \in M_c$, und es gilt

$$[\bar{s} - (\nu + N)T_2, \infty) = [\overline{s}_\nu - NT_2, \infty) \subseteq M_c;$$

insbesondere ist wegen $N \in \mathbb{N}$ das Folglied $\overline{s}_{\nu+1} = \bar{s} - (\nu + 1)T_2$ in M_c , und der Induktionsbeweis ist abgeschlossen, 3. ist gezeigt. ■

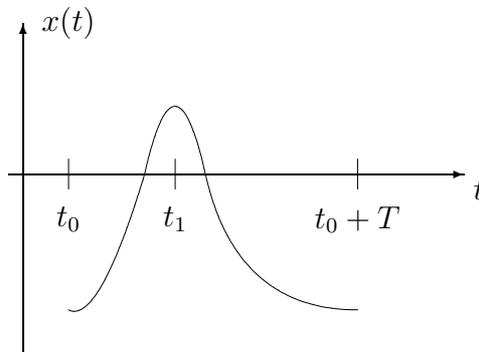
Wir werden nun sehen, dass die einfache Geschlossenheit der Kurve

$$\gamma_x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

nur einen *sinusartigen* Verlauf der periodischen Lösung x zulässt. D.h., auf einem Periodenintervall $[t, t+T)$ wird sowohl das Minimum als auch das Maximum genau einmal angenommen, und zwischen diesen Extremstellen verläuft die periodische Lösung x streng monoton.

Folgerung 1.4.1 *Es seien (H1) gegeben und $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von (μ, f) mit minimaler Periode $T > 0$. Dann gibt es $t_0 \in \mathbb{R}$ und $t_1 \in (t_0, t_0 + T)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. Für alle $t \in (t_0, t_1)$ gilt $x(t) \in (x(t_0), x(t_1))$ und $\dot{x}(t) > 0$.
2. Für alle $t \in (t_1, t_0 + T)$ gilt $x(t) \in (x(t_0), x(t_1))$ und $\dot{x}(t) < 0$.



Beweis: Wir zeigen nur Teil 1 der Behauptung, weil der Beweis des zweiten Teils lediglich eine Wiederholung der Beweisargumente des ersten wäre.

Es seien $t_0 \in \mathbb{R}$ und $t_1 \in (t_0, t_0 + T)$ mit

$$m := \min x(\mathbb{R}) = x(t_0), \quad M := \max x([t_0, t_0 + T]) = x(t_1).$$

Die Kurve

$$\gamma := \gamma_x(\cdot - t_0) : [t_0, t_0 + T] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x(t - t_0) \\ \dot{x}(t - t_0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

ist nach Satz 1.4.1 eine reguläre Jordankurve. Wir haben

$$\gamma([t_0, t_0 + T]) \subseteq [m, M] \times \mathbb{R}.$$

Weil m und M Extrema sind, folgt:

$$\text{Ist } \gamma(t) \in \{m, M\} \times \mathbb{R} \text{ für ein } t \in \mathbb{R}, \text{ so folgt } \gamma(t) \in \{m, M\} \times \{0\}. \quad (1.1)$$

Angenommen, Teil 1 der Behauptung ist nicht wahr. Dann gibt es $s_0 \in (t_0, t_1)$ mit

$$x(s_0) \notin (m, M) \text{ oder } \dot{x}(s_0) \leq 0.$$

Im Fall $x(s_0) \notin (m, M)$ folgt $x(s_0) \in \{m, M\}$, also $\begin{pmatrix} x(s_0) \\ \dot{x}(s_0) \end{pmatrix} = \gamma(s_0 + t_0) \in \{m, M\} \times \mathbb{R}$, was mit (1.1) auf $\begin{pmatrix} x(s_0) \\ \dot{x}(s_0) \end{pmatrix} = \gamma(s_0 + t_0) \in \{m, M\} \times \{0\}$ führt, also $\dot{x}(s_0) = 0$, somit

$$\begin{pmatrix} x(s_0) \\ \dot{x}(s_0) \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} M \\ 0 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x(t_0) \\ \dot{x}(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x(t_1) \\ \dot{x}(t_1) \end{pmatrix} \right\}$$

bedeutet und der Injektivität von γ widerspricht. Folglich müssen

$$x(s_0) \in (m, M) \quad \text{und} \quad \dot{x}(s_0) \leq 0$$

gelten. Das Minimum $s_1 := \min\{t \in [s_0, t_1] : \dot{x}(t) \leq 0\} \in (t_0, t_1)$ ist definiert. Wäre $\dot{x}(s_1) < 0$, so gäbe es aus Stetigkeitsgründen ein $\delta > 0$ mit $\dot{x}(t) < 0$ für alle $t \in (s_1 - \delta, s_1 + \delta) \subseteq (t_0, t_1)$, insbesondere $\dot{x}(s_1 - \frac{\delta}{2}) < 0$, was der Minimalität von s_1 widerspricht. Folglich gilt

$$\dot{x}(s_1) = 0.$$

Wir behaupten:

$$\text{Für alle } t \in (s_1, t_1) \text{ gilt } x(t) < x(s_1) =: \xi_1. \quad (1.2)$$

Wegen der Regularität von γ gilt $\dot{x}(s_1) \neq 0$, und es gibt ein $\delta > 0$ mit $\dot{x}|_{(s_1, s_1 + \delta)} < 0$, daher haben wir $x(t) < \xi_1$ für alle $t \in (s_1, s_1 + \delta)$. Um (1.2) zu beweisen, genügt es somit $x(t) \neq \xi_1$ für alle $t \in (s_1, t_1)$ zu zeigen. Angenommen, dies ist nicht richtig, also

$$S := \{t \in (s_1, t_1) : x(t) = \xi_1\} \neq \emptyset.$$

Dann ist $s := \min S$ definiert; es gilt $x(s) = x(s_1) = \xi_1$. Wenn $\dot{x}(s) = 0$ gelten würde, so widerspräche dies der Injektivität von γ , also haben wir $\dot{x}(s) \neq 0$. Wäre $\dot{x}(s) < 0$, so gäbe es $\delta > 0$ mit $(s - \delta, s) \subseteq (s_1, t_1)$ und $x|_{(s-\delta, s)} > \xi_1$; dies ist ein Widerspruch, denn wir haben wegen der Minimalität von s die Abschätzung $x|_{(s_1, s)} < \xi_1$. Wir erhalten somit

$$\dot{x}(s) > 0.$$

Die Menge $R := \{t \in (-\infty, s) : \dot{x}(t) = 0\}$ ist nicht leer, und $r := \max R$ lässt sich definieren. Wäre $r = s_1$, so hätten wir $\dot{x}|_{(s_1, s)} > 0$. Weil $\dot{x}|_{(t_0, s_1)}$ ebenfalls positiv ist, müsste wegen $\dot{x}(s_1) = 0$ für die zweite Ableitung $\ddot{x}(s_1) = 0$ gelten, aber γ ist eine reguläre Kurve. Daher sind $r > s_1$ und

$$[t_0, s_1] \cap [r, s] = \emptyset \quad (1.3)$$

erfüllt. Die Injektivität von γ liefert

$$\dot{x}(r) = 0 \quad \text{und} \quad x(r) > x(t_0).$$

Wegen $\dot{x}|_{(r, s]} > 0$ folgt

$$x(r) < x(s) = \xi_1,$$

also

$$x(r) \in [x(t_0), \xi_1] =: I \quad \text{und} \quad x(s) \in [x(t_0), \xi_1] = I.$$

Weil die stetige Funktion $x|_{[t_0, s_1]}$ streng monoton (wachsend) ist, existiert die stetige Umkehrabbildung $x|_{[t_0, s_1]}^{-1} : [x(t_0), x(s_1)] = I \rightarrow [t_0, s_1]$. Dann ist

$$\varphi : I \ni \xi \mapsto \dot{x} \circ x|_{[t_0, s_1]}^{-1}(\xi) \in \mathbb{R}_0^+$$

definiert und stetig, wir erhalten

$$\text{graph}(\varphi) = \gamma([t_0, s_1]), \quad \varphi(m) = 0 \quad \text{und} \quad \varphi(\xi_1) = 0. \quad (1.4)$$

Weil die stetige Funktion $x|_{[r, s]}$ streng monoton (wachsend) ist, existiert die stetige Umkehrabbildung $x|_{[r, s]}^{-1} : [x(r), x(s_1)] =: J \rightarrow [r, s]$. Dann ist

$$\psi : J \ni \xi \mapsto \dot{x} \circ x|_{[r, s]}^{-1}(\xi) \in \mathbb{R}_0^+$$

definiert und stetig. Wir erhalten

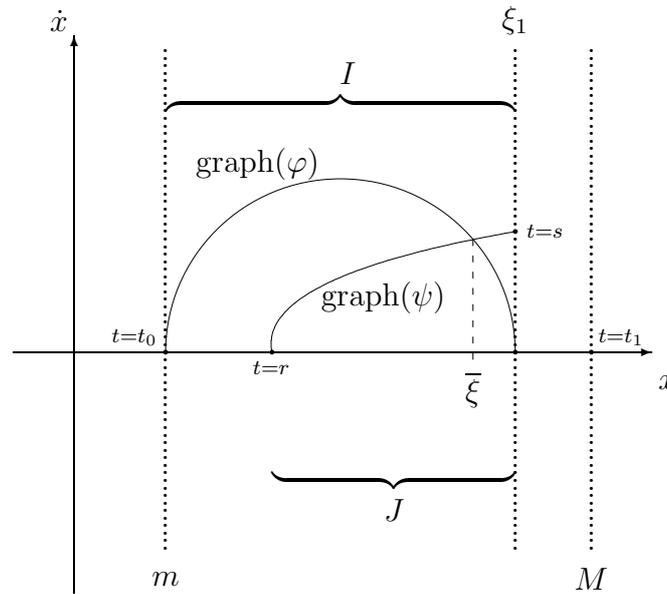
$$\text{graph}(\psi) = \gamma([r, s]), \quad \psi(x(r)) = 0 \quad \text{und} \quad \psi(\xi_1) = \dot{x}(s) > 0. \quad (1.5)$$

Wir beachten $J \subseteq I$ und betrachten die stetige Funktion

$$\chi := \psi - \varphi|_J : J \rightarrow \mathbb{R}.$$

Unter Berücksichtigung von (1.4) und (1.5) folgen

$$\chi(x(r)) = \psi(x(r)) - \varphi(x(r)) < 0 \quad \text{und} \quad \chi(\xi_1) = \psi(\xi_1) - \varphi(\xi_1) > 0,$$



es gibt also ein $\bar{\xi} \in (x(r), \xi_1)$ mit $\chi(\bar{\xi}) = 0$, d.h. $\psi(\bar{\xi}) = \varphi(\bar{\xi})$, (1.4) und (1.5) liefern somit

$$\gamma([t_0, s_1]) \cap \gamma([r, s]) = \text{graph}(\varphi) \cap \text{graph}(\psi) \neq \emptyset,$$

was mit (1.3) einen Widerspruch zur Injektivität von γ zur Folge hat. ■

Nachdem wir in diesem Abschnitt festgestellt haben, dass die zu einer periodischen Lösung x von (μ, f) gehörige Kurve γ_x jordansch und regulär ist, können wir nun in 1.5 zur weiteren Vorbereitung der Vergleichsargumente in 1.6 eine genauere Untersuchung von γ_x vornehmen.

1.5 Graphdarstellung und Symmetrie

Um die Jordankurve γ_x einer periodischen Lösung x der Gleichung

$$(\mu, f) \quad \dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$$

besser handhaben zu können, beweisen wir in diesem Abschnitt die elementare Aussage, dass sich die Spur von γ_x als Vereinigung zweier glatter Funktionsgraphen darstellen lässt. Mit dieser Eigenschaft zeigen wir das Enthaltensein des Ursprungs im Spurrinnern, sofern x eine Nullstelle besitzt. Unter Berücksichtigung von Satz 1.4.1 ist dann γ_x eine ursprungsumlaufende Jordankurve. Diese Tatsache befähigt uns im folgenden, die Aussagen des Abschnitts 1.1 über ebensolche Kurven auszunutzen, um periodische Lösungen von (μ, f) zu vergleichen.

Im letzten Abschnitt haben wir festgestellt, dass das strikte Wachsen der Nicht-Linearität

f in (H1) eine Übertragung von Monotonie und Disjunktheit bewirken. Wir werden in diesem Abschnitt zudem zeigen, dass sich eine Symmetrie von f auf eine der periodischen Lösung x vererbt, falls x eine Nullstelle hat.

Weil γ_x nach Satz 1.4.1 regulär und jordsch ist, können wir die Orbitzeit definieren.

Definition 1.5.1 *Es seien x eine periodische Lösung von $(\mu, f, \lambda, \alpha)$ mit kleinster Periode T_x , γ_x und Γ_x wie in Satz 1.4.1. Dann heisst*

$$\tau_x : \Gamma_x \ni \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \gamma_x|_{[0, T_x]}^{-1}(u, v) \in [0, T_x).$$

Orbitzeit von x . □

Befindet sich ein Spurpunkt der $x - \dot{x}$ -Kurve γ_x in der oberen Halbebene, so ist die Änderungstendenz seiner ersten Komponente positiv; dies haben wir schon implizit im Beweis von Folgerung 1.4.1 benutzt. Das Auftreten von Spurpunkten in der oberen Halbebene, die sich nur in der zweiten Komponente unterscheiden, ist also nicht möglich. Orbitpunkte in der oberen Halbebene sind somit als Punkte eines Funktionsgraphen interpretierbar. Analog kann man die Orbitpunkte der unteren Halbebene als Graphenpunkte auffassen, so dass sich der gesamte Orbit als Vereinigung zweier Graphen darstellen lässt. Diese Aussage wird durch die nächste Bemerkung präzisiert.

Bemerkung 1.5.1 *Es seien x eine periodische Lösung von (μ, f) mit Nullstelle, Γ_x die Spur von γ_x ,*

$$c := \max x(\mathbb{R}), \quad a := \min x(\mathbb{R}) \quad \text{und} \quad X := x(\mathbb{R}) = x([0, T_x]) = [a, c].$$

Dann gibt es stetige Funktionen

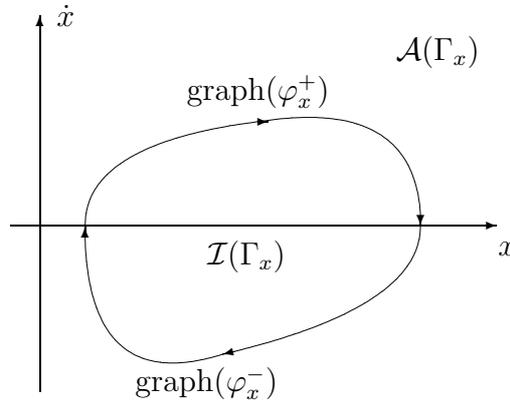
$$\varphi_x^+ : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad \varphi_x^- : X \rightarrow \mathbb{R}_0^-$$

mit den folgenden Eigenschaften:

- * $\varphi_x^+((a, c)) \subseteq \mathbb{R}^+$, $\varphi_x^-((a, c)) \subseteq \mathbb{R}^-$ und $\varphi_x^\pm(c) = 0 = \varphi_x^\pm(a)$.
- * $\varphi_x^+|_{(a, c)}$ und $\varphi_x^-|_{(a, c)}$ sind stetig differenzierbar.
- * $\Gamma_x = \text{graph}(\varphi_x^+) \cup \text{graph}(\varphi_x^-)$.

Beweis: Die Lösung x hat die in Folgerung 1.4.1 aufgeführten Eigenschaften und besitzt die Periode $T := T_x$. O.B.d.A. sei x normiert, es gelten also $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) > 0$. Die kleinste positive Nullstelle von \dot{x} sei A , die größte negative sei $-B$. Folglich gelten

$$\dot{x}|_{(-B, A)} > 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}|_{(A, T-B)} < 0.$$



Die stetigen Funktionen $y^+ := x|_{[-B,A]}$ und $y^- := x|_{[A,T-B]}$ haben deshalb eine stetige Inverse, so dass

$$\varphi_x^\pm := \dot{x} \circ (y^\pm)^{-1} : X \rightarrow \mathbb{R}_0^\pm$$

wohldefiniert und stetig sind. Wir haben

$$\varphi_x^+((a,c)) \subseteq \mathbb{R}^+, \quad \varphi_x^-((a,c)) \subseteq \mathbb{R}^- \quad \text{und} \quad \varphi_x^\pm(c) = 0 = \varphi_x^\pm(a).$$

Die Funktionen y^+ und y^- sind auf dem Inneren ihres Definitionsbereichs stetig differenzierbar, so dass mit der stetigen Differenzierbarkeit von \dot{x} nach (μ, f) und (H1) die Komposita $\varphi_x^+|_{(a,c)}$ und $\varphi_x^-|_{(a,c)}$ eine ebensolche Qualität besitzen. Um den Beweis zu beenden, zeigen wir $\Gamma_x = \text{graph}(\varphi_x^+) \cup \text{graph}(\varphi_x^-)$:

Es sei zunächst $(u, v)^{tr} \in \Gamma_x$. Dann existiert wegen $\Gamma_x = \gamma_x([-B, T-B])$ eine Zeit $t \in [-B, T-B]$ mit $u = x(t)$ und $v = \dot{x}(t)$. Im Fall $v \geq 0$ haben wir $t \in [-B, A]$ und

$$v = \dot{x}(t) = \dot{x} \circ (y^+)^{-1}(y^+(t)) = \dot{x} \circ (y^+)^{-1}(u) = \varphi_x^+(u).$$

Analog erhalten wir im Fall $v < 0$ die Darstellung $v = \varphi_x^-(u)$, in beiden Fällen gilt also $(u, v)^{tr} \in \text{graph}(\varphi_x^+) \cup \text{graph}(\varphi_x^-)$ und $\Gamma_x \subseteq \text{graph}(\varphi_x^+) \cup \text{graph}(\varphi_x^-)$.

Es sei schliesslich $(u, v)^{tr} \in \text{graph}(\varphi_x^+) \cup \text{graph}(\varphi_x^-)$; ohne Beschränkung nehmen wir $(u, v)^{tr} \in \text{graph}(\varphi_x^+)$ an, also $v = \varphi_x^+(u)$ mit $u \in X$. Wir definieren

$$t := (y^+)^{-1}(u) \in [-B, A].$$

Dies liefert $u = y^+(t) = x(t)$ und

$$v = \varphi_x^+(u) = \varphi_x^+(y^+(t)) = \dot{x}(t),$$

es gelten somit $(u, v)^{tr} \in \Gamma_x$ und $\text{graph}(\varphi_x^+) \cup \text{graph}(\varphi_x^-) \subseteq \Gamma_x$. ■

Gewisse Aussagen über Orbits einer periodischen Lösung x lassen sich mittels der oben beschriebenen Graphendarstellung einfacher beweisen. Daneben tritt auch ein neuer Aspekt auf. Im wachsenden Bereich genügt nämlich x der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x} = \varphi^+(x),$$

im fallenden der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$\dot{x} = \varphi^-(x).$$

Diese Feststellung werden wir auf den nächsten Seiten dazu verwenden, Aussagen über Orbitzeiten zu gewinnen; insbesondere ist an Periodenlängen zu denken.

Die durch den Kurvensatz 1.1.1 von Jordan gewährleistete Partition des \mathbb{R}^2 in Inneres, Spur und Äusseres einer Jordankurve beinhaltet keine quantitative Charakterisierung dieser Mengen. In unserem Spezialfall einer $x - \dot{x}$ -Kurve γ_x ist dies jedoch mit Hilfe der gezeigten Graphendarstellung von Γ_x möglich:

Bemerkung 1.5.2 *Es seien x eine periodische Lösung von (μ, f) mit Nullstelle und Spur Γ_x sowie*

$$\varphi^+ := \varphi_x^+ : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad \text{und} \quad \varphi^- := \varphi_x^- : X \rightarrow \mathbb{R}_0^-$$

die zugehörigen Orbitfunktionen von x . Dann folgt aus $z := (u, v)^{tr} \in (X \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{A}(\Gamma)$ entweder $v > \varphi^+(u)$ oder $v < \varphi^-(u)$.

Beweis: Es seien $\Gamma := \Gamma_x$, $z := (u, v)^{tr} \in (X \times \mathbb{R}) \cap \mathcal{A}(\Gamma)$ und $X = [a, c]$. Wir beachten im folgenden die in Bemerkung 1.5.1 aufgeführten Eigenschaften der Funktionen φ^- und φ^+ . Zunächst nehmen wir $v \neq 0$ an, ohne Beschränkung sei $v > 0$. Die Menge

$$M := \{r \in \mathbb{R}_0^+ : (u, rv)^{tr} \in \mathcal{A}(\Gamma)\}$$

ist wegen $1 \in M$ nach Voraussetzung nicht leer, zudem nach unten beschränkt. Folglich ist

$$\rho := \inf(M)$$

existent, und es sei eine Folge $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ so gewählt, dass $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n$ gilt. Dann ist $((u, \rho_n v)^{tr})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{A}(\Gamma)$, und mit dem Jordanschen Kurvensatz folgt

$$\begin{pmatrix} u \\ \rho v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ (\lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n) \cdot v \end{pmatrix} = \lim_{n \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} u \\ \rho_n v \end{pmatrix} \in \overline{\mathcal{A}(\Gamma)} = \mathcal{A}(\Gamma) \cup \Gamma.$$

Wir nehmen an, dass $(u, \rho v)^{tr}$ in $\mathcal{A}(\Gamma)$ liegt. Dann gibt es wegen der Offenheit von $\mathcal{A}(\Gamma)$ ein $\tilde{\delta} > 0$, so dass $U_{\tilde{\delta}}((u, \rho v)^{tr}) \subseteq \mathcal{A}(\Gamma)$ gilt. Es sei weiter

$$\delta \in \left\{ \delta' \in (0, \tilde{\delta}) : \rho - \frac{\delta'}{2v} \geq 0 \right\}$$

und

$$\tilde{z} := \begin{pmatrix} u \\ (\rho - \frac{\delta}{2v})v \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten dann

$$\left\| \tilde{z} - \begin{pmatrix} u \\ \rho v \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\delta}{2v}v \end{pmatrix} \right\| = \frac{\delta}{2} < \delta,$$

also $\tilde{z} \in U_\delta((u, \rho v)^{tr}) \subseteq U_{\tilde{\delta}}((u, \rho v)^{tr}) \subseteq \mathcal{A}(\Gamma)$ und somit unter Berücksichtigung von $\rho - \frac{\delta}{2v} \geq 0$

$$\rho - \frac{\delta'}{2v} \in M.$$

Dies ist aber wegen $\rho - \frac{\delta'}{2v} < \rho$ ein Widerspruch zur Minimalität von ρ . Somit ist die Annahme $(u, \rho v)^{tr} \in \mathcal{A}(\Gamma)$ falsch, es muss $(u, \rho v)^{tr} \in \Gamma$ erfüllt sein.

Wegen $1 \in M$ und der Minimalität von ρ muss $\rho \leq 1$ gelten. Wäre $\rho = 1$, so müsste, wie wir eben gesehen haben, $(u, \rho v)^{tr} = (u, v)^T$ in Γ liegen, was aber der Voraussetzung $(u, \rho v)^{tr} = (u, v)^{tr} \in \mathcal{A}(\Gamma)$ widerspricht. Also erhalten wir $\rho \in [0, 1)$.

Falls $u \in \{a, c\}$ gilt, so folgt $v > 0 = \varphi^+(u)$, also die Behauptung. Liegt u zwischen a und c , so haben wir $\varphi^+(u) > 0$. Folglich ist die behauptete Aussage mit $\rho \in [0, 1)$ erfüllt: $\varphi^+(u) = \rho v < v$.

Angenommen, es gilt $v = 0$. Wäre dann $u \in \{a, c\}$, so würde $z \in \Gamma$ gelten, was $z \in \mathcal{A}(\Gamma)$ widerspricht. Also haben wir $u \in (a, c)$. Es gilt $\varphi^+(u) > 0$ und $\varphi^-(u) < 0$. Wegen der Offenheit von $\mathcal{A}(\Gamma)$ gibt es ein $\tilde{\delta} > 0$, so dass $U_{\tilde{\delta}}(z) = U_{\tilde{\delta}}((u, 0)^{tr}) \subseteq \mathcal{A}(\Gamma)$. Wir setzen

$$\delta := \min \left\{ \tilde{\delta}, \frac{\varphi^+(u)}{2}, \frac{|\varphi^-(u)|}{2} \right\} \leq \tilde{\delta},$$

so dass δ positiv ist. Wir wählen $\tilde{v} \neq 0$, so dass

$$\tilde{z} := (u, \tilde{v})^{tr} \in U_\delta((u, 0)^{tr}) \subseteq U_{\tilde{\delta}}((u, 0)^{tr}) \subseteq \mathcal{A}(\Gamma)$$

erfüllt ist und nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit $\tilde{v} > 0$ an. Es gilt

$$\tilde{z} = \begin{pmatrix} u \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(\Gamma)$$

und $\tilde{v} > 0$. Mit dem oben Bewiesenen haben wir $\tilde{v} > \varphi^+(u)$. Damit folgt mit der Definition von δ

$$\tilde{v} > \varphi^+(u) > \frac{\varphi^+(u)}{2} \geq \delta,$$

aber aus

$$\begin{pmatrix} u \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \in U_\delta \left(\begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

folgt widersprüchlicherweise

$$\delta > \left\| \begin{pmatrix} u \\ \tilde{v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \right\| = \tilde{v}.$$

Also kann der Fall $v = 0$ nicht auftreten, und die Behauptung ist bewiesen. ■

Dieses rein technische Hilfsmittel vereinfacht den Beweis der folgenden beiden Aussagen. Zunächst beweisen wir, wie bereits erwähnt, dass die Orbitkurve γ_x einer periodischen Lösung x von (μ, f) mit Nullstelle ursprungsumlaufend ist.

Satz 1.5.1 *Ist Voraussetzung (H1) erfüllt und $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von (μ, f) mit Nullstelle und kleinster Periode $T > 0$, so ist die Kurve*

$$\gamma_x : [0, T] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

eine reguläre ursprungsumlaufende Jordankurve.

Beweis: Mit Satz 1.4.1 ist nur $0 \in \mathcal{I}(\Gamma_x)$ zu zeigen. Wäre der Ursprung nicht im Inneren von $\Gamma := \Gamma_x$ enthalten, so kämen nach dem Kurvensatz von Jordan nur die sich ausschließenden Fälle $0 \in \Gamma$ oder $0 \in \mathcal{A}(\Gamma)$ in Frage. Zuerst betrachten wir $0 \in \Gamma$, und erkennen, dass in diesem Fall x eine doppelte Nullstelle haben müsste, was aber nach Folgerung 1.4.1 nicht sein kann. Also bleibt noch $0 \in \mathcal{A}(\Gamma)$ zu beachten: Weil x eine Nullstelle hat, haben wir $0 \in x(\mathbb{R})$ und daher

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in [x(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}] \cap \mathcal{A}(\Gamma),$$

was aber mit Bemerkung 1.5.2 entweder $\varphi^+(0) < 0$ oder $\varphi^-(0) > 0$ zur Folge hat und $\varphi^\pm(x(\mathbb{R})) \subseteq \mathbb{R}_0^\pm$ widerspricht. ■

Die folgende Aussage ist eine Weiterführung von Bemerkung 1.5.2.

Bemerkung 1.5.3 *Es seien (H1) gegeben und x eine periodische Lösung von (μ, f) mit Nullstelle und Orbit $\Gamma := \Gamma_x$, sowie $x(\mathbb{R}) =: [a, c]$. Dann folgt*

$$\mathcal{I}(\Gamma_x) = \{(u, v)^{tr} \in (a, c) \times \mathbb{R} : \varphi^-(u) < v < \varphi^+(u)\} \subseteq (a, c) \times \mathbb{R},$$

wenn $\varphi^+ : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi^- : [a, c] \rightarrow \mathbb{R}_0^-$ die Orbitfunktionen von x sind.

Beweis: Es sei zunächst $(u, v)^{tr} \in (a, c) \times \mathbb{R}$ mit $\varphi^-(u) < v < \varphi^+(u)$ gegeben. Würde $(u, v)^{tr}$ in $\mathcal{A}(\Gamma)$ liegen, so müsste nach Bemerkung 1.5.2 entweder $\varphi^-(u) > v$ oder $\varphi^+(u) < v$ gelten. Wäre $(u, v)^{tr}$ ein Punkt in Γ , so müssten wir nach Bemerkung 1.5.1 $\varphi^-(u) = v$ oder $\varphi^+(u) = v$ haben. Beide Fälle widersprechen $\varphi^-(u) < v < \varphi^+(u)$, also liegt $(u, v)^{tr}$ in $\mathcal{I}(\Gamma)$. Umgekehrt sei $(u, v)^{tr}$ aus $\mathcal{I}(\Gamma)$ gewählt. Wir nehmen zunächst an, es gilt $(u, v)^{tr} \notin [a, c] \times \mathbb{R}$. Wir betrachten den Fall $u > c$, im andere Fall $u < a$ wird analog argumentiert. Die Beschränktheit von $\overline{\mathcal{I}(\Gamma)} = \mathcal{I}(\Gamma) \cup \Gamma$ ermöglicht es, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(n, 0)^{tr} \notin \overline{\mathcal{I}(\Gamma)}$, also $(n, 0)^{tr} \in \mathcal{A}(\Gamma)$, sowie $n > u$ zu finden. Dann gibt es nach Lemma 1.1.1 ein $s \in (0, 1)$ mit

$$s \begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix} + (1-s) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \Gamma.$$

Für die erste Komponente dieser Konvexkombination gilt wegen $n > u$

$$sn + (1-s)u = s(n-u) + u > u > c,$$

was $\Gamma \subseteq [a, c] \times \mathbb{R}$ widerspricht. Somit haben wir

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in [a, c] \times \mathbb{R}.$$

Angenommen, es gilt $\varphi^+(u) \leq v$ oder $\varphi^-(u) \geq v$, wobei wir nur den ersten Fall betrachten, um Beweisteile nicht wiederholen zu müssen. Wir finden wie oben mittels des Beschränktheitsarguments ein $n \in \mathbb{N}$ mit $(u, n)^{tr} \in \mathcal{A}(\Gamma)$ und $n > v$. Dann gibt es nach Lemma 1.1.1 ein $s \in (0, 1)$ mit

$$s \binom{u}{n} + (1-s) \binom{u}{v} \in \Gamma,$$

insbesondere heisst das mit der Graphdarstellung aus Bemerkung 1.5.1 und $n > v$

$$\varphi^+(u) = \varphi^+(su + u - su) = sn + v - sv = s(n - v) + v > v.$$

Dieser Widerspruch zeigt unter Berücksichtigung des zweiten Falles $\varphi^-(u) < v < \varphi^+(u)$. Schliesslich stellen wir damit die Unmöglichkeit des Falles $u \in \{a, c\}$ fest, denn sonst hätten wir $0 = \varphi^-(u) < v < \varphi^+(u) = 0$. \blacksquare

Wie angekündigt sind wir nun in der Lage aus der Symmetrie von f eine Symmetrie von x abzuleiten.

Satz 1.5.2 *Es seien (H1) gegeben und $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von (μ, f) mit Nullstelle und kleinster Periode T . Ist f ungerade, so gilt*

$$x = -x \left(\cdot + \frac{T}{2} \right).$$

Insbesondere hat x den konstanten Nullstellenabstand $\frac{T}{2}$, und es gilt $\max x(\mathbb{R}) = |\min x(\mathbb{R})|$.

Beweis: Es sei Γ der Orbit von x in \mathbb{R}^2 . Wir betrachten zunächst den Fall $\max x(\mathbb{R}) = x(0)$ und $\min x(\mathbb{R}) = x(B)$ für ein $B \in (0, T)$. Weil x eine Nullstelle hat, folgt $x(B) < 0 < x(0)$. O.B.d.A. gelte $|x(B)| \leq x(0)$.

Wir nehmen $\Gamma \cap (-\Gamma) = \emptyset$ an. Nach der letzten Bemerkung 1.5.3 gilt

$$\{(u, v)^{tr} \in (x(B), x(0)) \times \mathbb{R} : \varphi^-(u) < v < \varphi^+(u)\} = \mathcal{I}(\Gamma_x) \subseteq (x(B), x(0)) \times \mathbb{R}, \quad (1.1)$$

wenn φ^+ und φ^- die Orbitfunktionen von x sind. Insbesondere muss wegen $|x(B)| \leq x(0)$

$$(-x(0), 0) \in \mathcal{A}(\Gamma) \cup \Gamma$$

gelten. Der Fall $\Gamma \ni (-x(0), 0) = (-x(0), -\dot{x}(0)) \in -\Gamma$ widerspricht $\Gamma \cap (-\Gamma) = \emptyset$. Es muss also $-\Gamma \ni (-x(0), -\dot{x}(0)) = (-x(0), 0) \in \mathcal{A}(\Gamma)$, d.h. $-x(B) < x(0)$, gelten. Wegen $\Gamma \cap (-\Gamma) = \emptyset$ folgt dann $-\Gamma \subseteq \mathcal{A}(\Gamma)$. Dies verträgt sich wegen (1.1) und $0 < -x(B) < x(0)$ nicht mit

$$-\Gamma \ni (-x(B), -\dot{x}(B)) = (-x(B), 0) \in \mathcal{I}(\Gamma).$$

Also ist die Annahme falsch, und es muss

$$\Gamma \cap (-\Gamma) \neq \emptyset \quad (1.2)$$

gelten.

Es sei $y := -x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Funktion y ist stetig differenzierbar, es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$ unter Berücksichtigung von (μ, f) und der Ungeradheit von f

$$\dot{y}(t) = -\mu y(t) - f(x(t-1)) = -\mu y(t) + f(y(t-1)).$$

Die Funktion y hat die kleinste Periode T , erfüllt (μ, f) und besitzt den Orbit $-\Gamma \subseteq \mathbb{R}^2$. Nach Satz 1.4.1.3 gilt entweder $\Gamma \cap (-\Gamma) = \emptyset$ oder $\Gamma = -\Gamma$. Aussage (1.2) liefert somit

$$\left\{ \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} : t \in [0, T) \right\} = \Gamma = -\Gamma = \left\{ \begin{pmatrix} -x(s) \\ -\dot{x}(s) \end{pmatrix} : s \in [B, B+T) \right\}. \quad (1.3)$$

Insbesondere folgt

$$-x(B) = x(0). \quad (1.4)$$

Für alle $t \in [0, T)$ gibt es nach (1.3) ein $s \in [B, B+T)$ mit

$$x(t) + x(s) = 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}(t) + \dot{x}(s) = 0.$$

Wir nehmen an, zu $t \in [0, T)$ existieren s_1 und s_2 aus $[B, B+T)$ mit $x(t) + x(s_i) = 0$ und $\dot{x}(t) + \dot{x}(s_i) = 0$ für $i \in \{1, 2\}$. Dann folgt mit der Injektivität von

$$\eta_x := \gamma_x(\cdot + B) : [0, T) \rightarrow \mathbb{R},$$

$s_i - B \in [0, T)$, $i \in \{1, 2\}$, und

$$\eta_x(s_1 - B) = \gamma_x(t) = \eta_x(s_2 - B),$$

dass $s_1 = s_2$ gelten muss. Somit haben wir eine Abbildung

$$\sigma : [0, T) \rightarrow [B, B+T)$$

mit

$$x(\sigma(t)) = -x(t), \quad (1.5)$$

$$\dot{x}(\sigma(t)) = -\dot{x}(t) \quad (1.6)$$

für alle $t \in [0, T)$. Es gilt $x(0) + x(\sigma(0)) = 0$, und (1.4) lässt uns

$$\sigma(0) = B$$

erkennen. Genauso folgt

$$\sigma(B) = T$$

aus $\max x([B, B+T)) = x(T)$. Die stetig differenzierbare Einschränkung $x|_{(0, B)}$ hat eine ebensolche Inverse y_1 , und nach (1.5) stellen wir die stetige Differenzierbarkeit von

$$\sigma|_{(0, B)} = y_1 \circ (-x)|_{(0, B)}$$

fest; ebenso ist $\sigma|_{(B, B+T)} = y_2 \circ (-x)|_{(B, B+T)}$ stetig differenzierbar, wobei y_2 die stetig differenzierbare inverse Funktion von $x|_{(B, B+T)}$ ist. Desweiteren ist σ in B stetig, denn die Stetigkeit von x und (1.5) implizieren $x(B) + x(\lim_{t \rightarrow B} \sigma(t)) = 0$, also

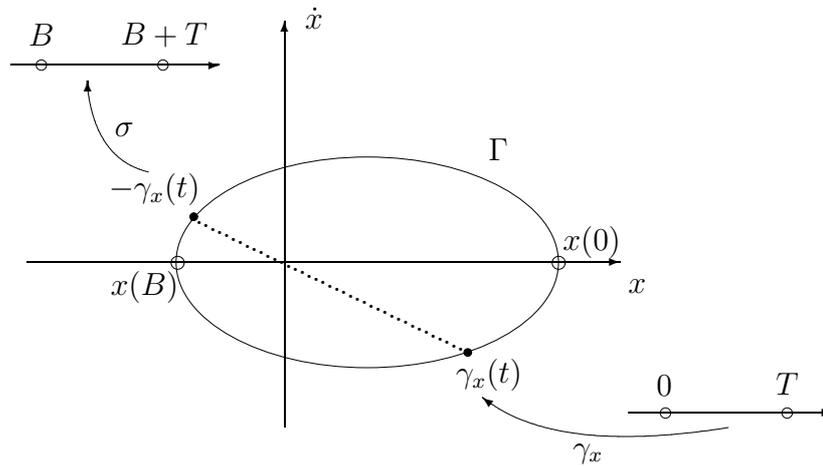
$$\lim_{t \rightarrow B} \sigma(t) = T = \sigma(B).$$

Genauso begründen wir die Stetigkeit von σ in 0 , so dass σ stetig ist. Differentiation von (1.5) ergibt unter Berücksichtigung der Gleichheit (1.6)

$$-\dot{x}(t) = \dot{x}(\sigma(t))\dot{\sigma}(t) = -\dot{x}(t)\dot{\sigma}(t)$$

für alle $t \in (0, T) \setminus \{B\}$. Dies bedeutet

$$\dot{x}(t) \cdot [\dot{\sigma}(t) - 1] = 0 \quad \text{für alle } t \in (0, T) \setminus \{B\}. \tag{1.7}$$



Für $t \in (0, T) \setminus \{B\}$ folgt $\dot{x}(t) \neq 0$ und (1.7) liefert $\dot{\sigma}(t) = 1$. D.h. für alle $t \in (0, T) \setminus \{B\}$ haben wir $\sigma(t) = t + c$ für eine Konstante $c \in \mathbb{R}$. Die Stetigkeit von σ liefert zunächst $c = B$ und dann $T = \sigma(B) = B + B = 2B$, also

$$B = \frac{T}{2}.$$

Daher gilt mit (1.5)

$$x(t) = -x\left(t - \frac{T}{2}\right) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right) \quad \text{für alle } t \in [0, T]. \tag{1.8}$$

Nun sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gibt es $m \in \mathbb{Z}$ und $r \in [0, T)$ mit $t = mT + r$. Ist $r = 0$, so wissen wir wegen (1.4)

$$x(t) = x(0) = -x(B) = -x\left(\frac{T}{2}\right) = -x\left(mT + \frac{T}{2}\right) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

Gleichung (1.8) liefert im Fall $r \in (0, T)$

$$x(t) = x(r) = -x\left(r + \frac{T}{2}\right) = -x\left(mT + r + \frac{T}{2}\right) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right).$$

Somit gilt (1.8) für alle $t \in \mathbb{R}$.

Schliesslich sei $x(0) \neq \max x(\mathbb{R})$. Dann finden wir $A \in \mathbb{R}$, so dass für $y := x(\cdot + A)$ gilt: $\max y(\mathbb{R}) = y(0) = \max x(\mathbb{R})$. Für y wissen wir $y(t) = -y\left(t + \frac{T}{2}\right)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Ist nun $t \in \mathbb{R}$, so folgt $x(t) = x(t - A + A) = y(t - A) = -y\left(t - A + \frac{T}{2}\right) = -x\left(t + \frac{T}{2}\right)$. ■

Abschliessend stellen wir einen Zusammenhang zwischen den Orbitfunktionen φ_1^\pm und φ_2^\pm der periodischen Lösungen x_1 und x_2 von (μ, f) her, falls $\Gamma_1 \Subset \Gamma_2$ für ihre Spuren Γ_1 und Γ_2 in \mathbb{R}^2 gilt.

Bemerkung 1.5.4 *Es seien λ_0 und λ_1 aus \mathbb{R}^+ sowie α_0 und α_1 aus \mathbb{R}_0^+ . Für $i \in \{0, 1\}$ möge eine periodische Lösung x_i von $(\mu, f, \lambda_i, \alpha_i)$ mit minimaler Periode T_i sowie*

$$\Gamma_i := \Gamma_{x_i} = \gamma_{x_i}([0, T_i))$$

und Orbitfunktionen

$$\varphi_i^\pm := \varphi_{x_i}^\pm : x_i(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^\pm$$

gegeben sein. Ausserdem gelte

$$\Gamma_1 \Subset \Gamma_0.$$

Dann folgt $[a_1, c_1] := x_1(\mathbb{R}) \subseteq x_0(\mathbb{R})$,

$$\varphi_0^+|_{[a_1, c_1]} \geq \varphi_1^+ \geq 0, \quad \varphi_0^-|_{[a_1, c_1]} \leq \varphi_1^- \leq 0$$

und die Reziproken $\frac{1}{\varphi_0^\pm}|_{(a_1, c_1)}$ und $\frac{1}{\varphi_1^\pm}|_{(a_1, c_1)}$ sind erklärt mit

$$0 < \frac{1}{\varphi_0^+}|_{(a_1, c_1)} \leq \frac{1}{\varphi_1^+}|_{(a_1, c_1)}, \quad 0 > \frac{1}{\varphi_0^-}|_{(a_1, c_1)} \geq \frac{1}{\varphi_1^-}|_{(a_1, c_1)}.$$

Beweis: Wäre $c_1 > \max x_0(\mathbb{R}) =: c_0$, so müsste $\rho := \frac{c_1}{c_0} > 1$ gelten. Dies liefert wegen $\Gamma_1 \Subset \Gamma_0$ die Inklusion $\rho\Gamma_0 \subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)$. Nach Bemerkung 1.5.1 sind $(c_0, 0)^{tr}$ und $(c_1, 0)^{tr}$ Punkte der Orbits Γ_0 und Γ_1 , und wir erhalten damit den Widerspruch

$$\Gamma_1 \ni \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} c_0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{A}(\Gamma_1).$$

Genauso erweist sich $a_1 < a_0$ als unmöglich, so dass $[a_1, c_1] \subseteq [a_0, c_0]$ bewiesen ist.

Als nächstes zeigen wir $\varphi_0^+|_{[a_1, c_1]} \geq \varphi_1^+$; der Beweis von $\varphi_0^-|_{[a_1, c_1]} \leq \varphi_1^-$ verläuft analog und wird nicht weiter ausgeführt. Es sei $x \in [a_1, c_1]$. Wir haben $(x, \varphi_0^+(x))^{tr} \in \Gamma_0$ und $(x, \varphi_1^+(x))^{tr} \in \Gamma_1$. Wegen $\Gamma_1 \Subset \Gamma_0$ folgt $(x, \varphi_0^+(x))^{tr} \in \Gamma_1 \cup \mathcal{A}(\Gamma_1)$. Im Fall $(x, \varphi_0^+(x))^{tr} \in \Gamma_1$ folgt

$$\varphi_0^+(x) = \varphi_1^+(x),$$

und im Fall $(x, \varphi_0^+(x))^{tr} \in \mathcal{A}(\Gamma_1)$ nach Bemerkung 1.5.2

$$\varphi_0^+(x) > \varphi_1^+(x).$$

Die Reziproken $\frac{1}{\varphi_0^\pm}|_{(a_1, c_1)}$ und $\frac{1}{\varphi_1^\pm}|_{(a_1, c_1)}$ sind nach Bemerkung 1.5.1 erklärt. Die Abschätzungen

$$\frac{1}{\varphi_0^+}|_{(a_1, c_1)} \leq \frac{1}{\varphi_1^+}|_{(a_1, c_1)} \quad \text{und} \quad 0 > \frac{1}{\varphi_0^-}|_{(a_1, c_1)} \geq \frac{1}{\varphi_1^-}|_{(a_1, c_1)}$$

ergeben sich direkt aus $\varphi_0^+|_{[a_1, c_1]} \geq \varphi_1^+$ bzw. $\varphi_0^-|_{[a_1, c_1]} \leq \varphi_1^-$. ■

1.6 Periodenvergleich

Im folgenden seien die Standardvoraussetzungen (H1) und (H2) gegeben, d.h. die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat die folgenden Eigenschaften:

(H1) Die Funktion f ist stetig differenzierbar mit $f' > 0$ und $f(0) = 0$.

(H2) Es sei f stetig differenzierbar, und für

$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \in \mathbb{R}^+$$

seien $h|_{\mathbb{R}^+}$ streng monoton fallend und $h|_{\mathbb{R}^-}$ streng monoton wachsend.

Unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse lassen sich zwei verschiedene periodische Lösungen

$$x_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{und} \quad x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

von

$$(\mu, f) \quad \dot{x}(t) = -\mu x + f(x(t-1))$$

vergleichen; dabei sollen x_1 und x_2 dieselbe Oszillationsgeschwindigkeit, kleinste Perioden T_1 und T_2 sowie eine nicht-leere Nullstellenmenge haben. Beim Vergleich werden nicht die nach Satz 1.4.1 disjunkten Orbits \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 von x_1 und x_2 im Phasenraum \mathcal{C} betrachtet, sondern deren nach Satz 1.4.1 ebenfalls disjunkten Evaluationen

$$\Gamma_1 \quad \text{und} \quad \Gamma_2$$

in der Phasenebene \mathbb{R}^2 , also die Spuren der Kurven

$$\gamma_{x_1} : [0, T_1] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \dot{x}_1(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \gamma_{x_2} : [0, T_2] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Wegen Satz 1.5.1 sind diese Orbitkurven reguläre ursprungsumlaufende Jordankurven, und der Kurvensatz 1.1.1 von Jordan liefert die Partition

$$\mathcal{I}(\Gamma_1) \uplus \Gamma_1 \uplus \mathcal{A}(\Gamma_1) = \mathbb{R}^2 = \mathcal{I}(\Gamma_2) \uplus \Gamma_2 \uplus \mathcal{A}(\Gamma_2).$$

Bevor wir zeigen, dass sich die relative Lage von $\Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^2$ in einer bestimmten Art und Weise auf die der Perioden T_1 und T_2 in \mathbb{R}^+ überträgt, skizzieren wir die beim Beweis verwendete Vergleichsmethode, die auf Arbeiten [30] und [31] von KAPLAN & YORKE zurückgeht. Weil Γ_1 und Γ_2 disjunkt sind, können wir o.B.d.A. von

$$\Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$$

ausgehen. Um analytische Aussagen zu erhalten, strecken wir mittels Bemerkung 1.1.3 die Spur Γ_2 radial mit einem Faktor $\rho > 1$, so dass

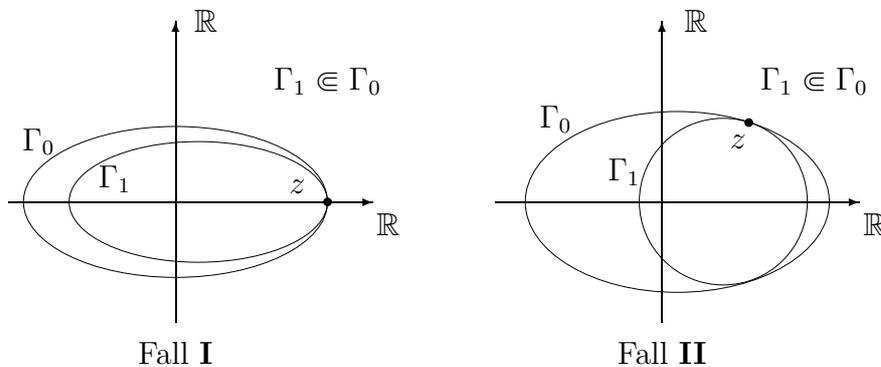
$$\Gamma_1 \Subset \Gamma_0 := \rho\Gamma_2$$

gilt. Die Funktion ρx_2 ist nach Bemerkung 1.4.1 eine periodische Lösung von $(\mu, f, \rho, 1)$ mit kleinster Periode $T_0 := T_2$ und Spur Γ_0 . Wie in meiner Diplomarbeit [17], Lemma 3.1.3, geschildert, ist die Disjunktheit von Γ_1 und Γ_2 nicht notwendig, um die Situation $\Gamma_1 \Subset \Gamma_0 = \rho\Gamma_2$ bzw. $\Gamma_2 \Subset \Gamma_0 = \rho\Gamma_1$ herzustellen.

Wegen $\Gamma_1 \Subset \Gamma_0$ ist der Schnitt $S := \Gamma_0 \cap \Gamma_1$ nicht leer, und es ergeben sich die beiden Fälle

- I Es gibt einen Punkt z aus S in $\mathbb{R} \times \{0\}$,
- II Es gibt einen Punkt z aus S in $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

Um zu verstehen, wieso man diese beiden Fälle unterscheidet, betrachten wir zunächst II und skizzieren, wieso dieser Fall nicht eintreten kann; die Details sind in den Beweisen von Hilfssatz 1.6.1 und Folgerung 1.6.1 zu finden. Die Orbitzeit von z bzgl. Γ_0 und Γ_1 sei $t = 0$.



Weil z ein Schnittpunkt der beiden Spuren ist, ergibt sich mit der Monotonievoraussetzung (H1), dass die Werte $d_0 := x_0(-1)$ und $d_1 := x_1(-1)$ ein gleiches Vorzeichen besitzen und die Krümmungsvoraussetzung (H2) hat o.B.d.A.

$$0 < d_0 < d_1$$

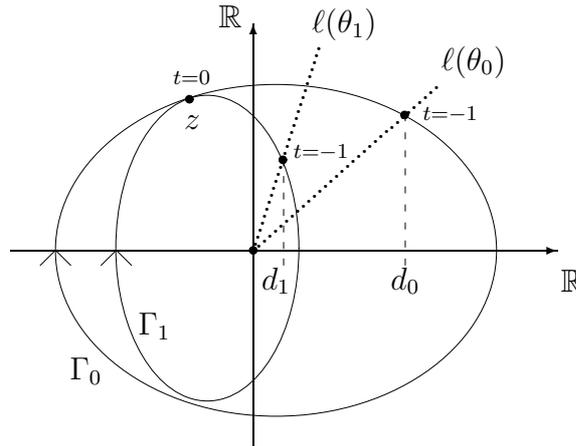
zur Folge. Andererseits ergibt die Tangentialität des Schnittpunkts z zunächst mit der Gleichheit der ersten Ableitungen $\dot{x}_1(0) = \dot{x}_0(0) \neq 0$

$$\ddot{x}_1(0) = \ddot{x}_0(0),$$

und daraus resultierend Aussagen für die Winkel $\theta_0 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ und $\theta_1 \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ der Orbitpunkte zur Zeit $t = -1$:

$$0 < \theta_0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2} \quad \text{oder} \quad 0 > \theta_0 > \theta_1 > -\frac{\pi}{2}.$$

Dies aber ist nicht mit $0 < d_0 < d_1$ verträglich, weil auf einem vom Ursprung ausgehenden Halbstrahl alle Orbitpunkte von Γ_0 keine kleinere Norm haben als die von Γ_1 , was mittels $\Gamma_1 \in \Gamma_0$ und Bemerkung 1.1.2 zu begründen ist.



Der Fall $0 < \theta_0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2}$.

Daher kann nur Fall **I** eintreten. Würde es gelingen, auch hier einen Widerspruch zu erkennen, so wäre die Annahme zweier verschiedener periodischer Lösungen von (μ, f) falsch, es gäbe folglich höchstens eine.

Ein erstes solches Eindeutigkeitsresultat hat NUSSBAUM [45] für langsam schwingende periodische Orbits von $(0, -f)$ im Fall *negativer* Rückkopplung, $\mu = 0$ und ungeradem f erhalten. Die dort gemachte Krümmungsvoraussetzung an die Nichtlinearität entspricht in etwa (H2) mit geändertem Vorzeichen. Bemerkenswerterweise wird in CAO [6] gezeigt, dass ohne eine Krümmungsvoraussetzung keine Eindeutigkeit zu erwarten ist. CAO [7] ist es auch gelungen, den Eindeutigkeitsbeweis für *langsam* schwingende periodische Lösungen von NUSSBAUM [45] für $(\mu, -f)$ zu verallgemeinern; CAO kommt dabei ohne die Ungeradheit von f bzw. $-f$ aus, und der Dämpfungsparameter μ darf positiv sein.

Durch eine Adaption der Methode von CAO bei negativer Rückkopplung beweisen KRISZTIN & WALTHER die Eindeutigkeit *schnell* schwingender periodischer Orbits von (μ, f) , also bei positiver Rückkopplung. Allerdings kommen KRISZTIN & WALTHER *nicht* ohne die Ungeradheit von f aus, die nach Satz 1.5.2 eine Symmetrie bei den periodischen Lösungen bewirkt und einerseits als Einschränkung empfunden wird, andererseits die Situation stark vereinfacht.

Wie in der Einleitung erwähnt, ist es gelungen, Fall **II** auch dann auszuschließen, wenn f nicht notwendig ungerade ist. Die in den Sätzen 1.6.1 und 1.6.2 formulierten Periodenabschätzungen für $\mu = 0$ werden dann durch eine Betrachtung von Fall **I** am Ende des

Abschnitts bewiesen.

Wir können nun die eingangs gestellte Frage beantworten, wieso zwischen den Fällen **I** und **II** unterschieden wird. Differentialgeometrisch zeichnet **I** nichts gegenüber **II** aus: Der Schnittpunkt z ist ein tangentialer. In **II** allerdings ermöglicht diese Tangentialität die Feststellung, dass die zweiten Ableitungen der Lösungen zur Schnittzeit übereinstimmen, was essentiell für die Winkelabschätzung ist. Der Schluss auf die Gleichheit der zweiten Ableitungen ist jedoch im ersten Fall nicht möglich, weil sich z auf der ersten Achse befindet. Würden wir andererseits in **I** von der Gleichheit der zweiten Ableitungen ausgehen, könnten wir genauso verfahren wie in **II**. I.a. sind aber die zweiten Ableitungen in den Extremstellen von x^0 und x^1 verschieden.

Der Rest des Abschnitts besteht darin, die skizzierte Vorgehensweise in den Fällen **I** und **II** en détail auszuführen und dann die Periodenabschätzung zu beweisen. Wir beginnen dabei mit einem Hilfssatz, der die Essenz von Fall **II** in einer etwas allgemeineren Situation repräsentiert.

Im weiteren werden die in Folgerung 1.4.1 festgehaltenen übersichtlichen Monotonieeigenschaften einer periodischen Lösung nicht explizit zitiert.

Hilfssatz 1.6.1 *Es seien λ_0 und λ_1 sowie α_0 und α_1 aus \mathbb{R} mit*

$$\lambda_0 > \lambda_1 > 0 \quad \text{und} \quad \alpha_0 \geq \alpha_1 \geq 0.$$

Für $i \in \{0, 1\}$ möge eine normierte periodische Lösung x_i von $(\mu, f, \lambda_i, \alpha_i)$ mit Periode $T_i := T_{x_i}$, Orbitzeit $\tau_i := \tau_{x_i} : \Gamma_i \rightarrow [0, T_i)$ und $\Gamma_i := \Gamma_{x_i} = \gamma_{x_i}([0, T_i))$ mit

$$\Gamma_1 \Subset \Gamma_0$$

gegeben sein. Dann folgt aus

$$S := \Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cap (\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})) \neq \emptyset,$$

zum einen

$$(i) \quad \ddot{x}_0(\tau_0(c, b)) = \ddot{x}_1(\tau_1(c, b)) \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \in S$$

und zum anderen

$$(ii) \quad S_{<>} := \left\{ \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \in S : x_i(\tau_i(c, b) - \alpha_i) \neq 0, \quad i \in \{0, 1\} \right\} = \emptyset.$$

Beweis: Wir zeigen zunächst (i). Es seien dazu $(c, b)^{tr} \in S$ mit den Orbitzeiten

$$t_i := \tau_i(c, b) \in [0, T_i), \quad i \in \{0, 1\},$$

gegeben. Wir haben dann $b \neq 0$ und

$$S \ni \gamma_{x_0}(t_0) = \gamma_{x_1}(t_1),$$

was genau dann gilt, wenn

$$\begin{pmatrix} x_0(t_0) \\ \dot{x}_0(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ \dot{x}_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

erfüllt ist.

Weil sich nach Bemerkung 1.1.1 die Orbits Γ_0 und Γ_1 tangential schneiden, sind

$$\dot{\gamma}_{x_0}(t_0) = \begin{pmatrix} \dot{x}_0(t_0) \\ \ddot{x}_0(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \ddot{x}_0(t_0) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \dot{\gamma}_{x_1}(t_1) = \begin{pmatrix} \dot{x}_1(t_1) \\ \ddot{x}_1(t_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ \ddot{x}_1(t_1) \end{pmatrix}$$

linear abhängig. Mit $b \neq 0$ haben wir dann

$$\ddot{x}_0(t_0) = \ddot{x}_1(t_1), \quad (1.2)$$

und damit ist (i) bewiesen.

Nun zeigen wir (ii), also $S_{<>} = \emptyset$. Dazu nehmen wir die Existenz eines Punktes

$$\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \in S_{<>}$$

an. Wie oben seien t_0 und t_1 die jeweiligen Orbitzeiten dieses Schnittpunktes auf Γ_0 und Γ_1 . Es gilt $b \neq 0$ und nach (i) folgt $\ddot{x}_0(t_0) = \ddot{x}_1(t_1)$, also (1.2).

Es sei für $i \in \{0, 1\}$

$$d_i := x_i(t_i - \alpha_i).$$

Wegen $(c, b)^{tr} \in S_{<>}$ folgt

$$d_i \neq 0, \quad i \in \{0, 1\}.$$

Aus (1.2) folgt unter Ausnutzung der Gleichungen $(\mu, f, \lambda_0, \alpha_0)$ und $(\mu, f, \lambda_1, \alpha_1)$

$$-\mu b + f' \left(\frac{d_0}{\lambda_0} \right) \dot{x}_0(t_0 - \alpha_0) = -\mu b + f' \left(\frac{d_1}{\lambda_1} \right) \dot{x}_1(t_1 - \alpha_1),$$

also

$$f' \left(\frac{d_0}{\lambda_0} \right) \dot{x}_0(t_0 - \alpha_0) = f' \left(\frac{d_1}{\lambda_1} \right) \dot{x}_1(t_1 - \alpha_1). \quad (1.3)$$

Zu $x \in \mathbb{R}$ betrachten wir die in Bemerkung 1.2.2 definierte Funktion

$$\Phi_x : \mathbb{R}^+ \ni \lambda \mapsto \lambda f \left(\frac{x}{\lambda} \right) \in \mathbb{R}.$$

Die Gleichungen $(\mu, f, \lambda_0, \alpha_0)$ und $(\mu, f, \lambda_1, \alpha_1)$ liefern unter Berücksichtigung von (1.1)

$$\Phi_{d_0}(\lambda_0) = \lambda_0 f \left(\frac{d_0}{\lambda_0} \right) = b + \mu c = \lambda_1 f \left(\frac{d_1}{\lambda_1} \right) = \Phi_{d_1}(\lambda_1). \quad (1.4)$$

Wegen $d_0 \neq 0$ und $d_1 \neq 0$ folgt

$$\Phi_{d_0}(\lambda_0) = \Phi_{d_1}(\lambda_1) \neq 0.$$

Weil der Graph von f nach (H1) nur im ersten oder dritten Quadranten verläuft, erkennen wir ausserdem

$$\operatorname{sgn}(d_0) = \operatorname{sgn}(d_1) \neq 0.$$

Wir führen nur den Fall $\operatorname{sgn}(d_0) = \operatorname{sgn}(d_1) > 0$ aus und leiten daraus einen Widerspruch her; der Fall $\operatorname{sgn}(d_0) = \operatorname{sgn}(d_1) < 0$ führt in sehr ähnlicher Weise auf einen solchen.

Es gelten also

$$d_0 > 0 \quad \text{und} \quad d_1 > 0.$$

Wegen Bemerkung 1.2.2 sind daher die Abbildungen Φ_{d_0} und Φ_{d_1} streng monoton wachsend. Nach Voraussetzung gilt $\lambda_0 > \lambda_1 > 0$, also insbesondere $\Phi_{d_1}(\lambda_1) < \Phi_{d_1}(\lambda_0)$, was mit (1.4) auf

$$\Phi_{d_0}(\lambda_0) < \Phi_{d_1}(\lambda_0), \quad \text{also} \quad \lambda_0 f\left(\frac{d_0}{\lambda_0}\right) < \lambda_0 f\left(\frac{d_1}{\lambda_0}\right)$$

führt. Das in (H1) vorausgesetzte strenge Wachsen von f ergibt dann

$$0 < d_0 < d_1. \tag{1.5}$$

Wegen $\lambda_0 > \lambda_1 > 0$ erhalten wir somit

$$0 < \frac{d_0}{\lambda_0} < \frac{d_0}{\lambda_1} < \frac{d_1}{\lambda_1},$$

was mit dem in (H2) festgelegten strengen Fallen der Hilfsfunktion $h|_{\mathbb{R}^+} \in (0, 1)$,

$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{f'(x)x}{f(x)} \in \mathbb{R},$$

auf

$$h\left(\frac{d_0}{\lambda_0}\right) > h\left(\frac{d_1}{\lambda_1}\right) > 0 \tag{1.6}$$

führt.

Mit (1.3) und (1.4) haben wir

$$\begin{aligned} h\left(\frac{d_0}{\lambda_0}\right) \frac{\dot{x}_0(t_0 - \alpha_0)}{d_0} &= \frac{\frac{d_0}{\lambda_0} \cdot f'\left(\frac{d_0}{\lambda_0}\right) \dot{x}_0(t_0 - \alpha_0)}{f\left(\frac{d_0}{\lambda_0}\right) d_0} = \frac{f'\left(\frac{d_0}{\lambda_0}\right) \dot{x}_0(t_0 - \alpha_0)}{\lambda_0 f\left(\frac{d_0}{\lambda_0}\right)} = \\ &= \frac{f'\left(\frac{d_1}{\lambda_1}\right) \dot{x}_1(t_1 - \alpha_1)}{\lambda_1 f\left(\frac{d_1}{\lambda_1}\right)} = h\left(\frac{d_1}{\lambda_1}\right) \frac{\dot{x}_1(t_1 - \alpha_1)}{d_1}, \end{aligned}$$

also

$$h\left(\frac{d_0}{\lambda_0}\right) \frac{\dot{x}_0(t_0 - \alpha_0)}{d_0} = h\left(\frac{d_1}{\lambda_1}\right) \frac{\dot{x}_1(t_1 - \alpha_1)}{d_1}. \tag{1.7}$$

Nach (H2) sind die h -Werte positiv, und wegen (1.7) und (1.5) treten nur die Fälle

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}_0(t_0 - \alpha_0)) = \operatorname{sgn}(\dot{x}_1(t_1 - \alpha_1)) = 1 \quad \text{oder} \quad (1.8)$$

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}_0(t_0 - \alpha_0)) = \operatorname{sgn}(\dot{x}_1(t_1 - \alpha_1)) = 0 \quad \text{oder} \quad (1.9)$$

$$\operatorname{sgn}(\dot{x}_0(t_0 - \alpha_0)) = \operatorname{sgn}(\dot{x}_1(t_1 - \alpha_1)) = -1 \quad (1.10)$$

auf. Wir leiten nun in jedem der Fälle (1.8), (1.9) und (1.10) einen Widerspruch zu (1.5) her.

1. Es gelte (1.8). Gleichung (1.7) liefert dann mit Abschätzung (1.6)

$$0 < \frac{\dot{x}_0(t_0 - \alpha_0)}{d_0} < \frac{\dot{x}_1(t_1 - \alpha_1)}{d_1}.$$

Das Argument $\theta_i \in (0, \frac{\pi}{2})$ von $\frac{\dot{x}_i(t_i - \alpha_i)}{d_i}$ ist für $i \in \{0, 1\}$ durch

$$\theta_i = \arctan \frac{\dot{x}_i(t_i - \alpha_i)}{d_i}$$

gegeben. Es folgt zum einen

$$0 < \theta_0 < \theta_1 < \frac{\pi}{2} \quad (1.11)$$

und zum anderen

$$z_i := \begin{pmatrix} d_i \\ \dot{x}_i(t_i - \alpha_i) \end{pmatrix} \in \ell(\theta_i) \cap \Gamma_i, \quad i \in \{0, 1\},$$

wobei $\ell(\theta_i)$ der Halbstrahl ist, der gemäss Definition 1.1.5 für $i \in \{0, 1\}$ mit der positiven ersten Achse einen Winkel von θ_i einschliesst.

Es seien $i \in \{0, 1\}$ und A_i die kleinste positive Nullstelle von \dot{x}_i , d.h.

$$\dot{x}_i|_{(0, A_i)} > 0,$$

also ist $x_i|_{(0, A_i)}$ streng monoton wachsend.

Wir betrachten die streng monoton fallende Abbildung

$$\Xi_i := \Xi_{x_i} : \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right) \rightarrow (0, T_i)$$

gemäss Bemerkung 1.1.4, die dem Winkel $\theta \in (-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ die grösste Schnittzeit von Γ_i und $\ell(\theta_i)$ zuordnet.

Es gibt ein $n_i \in \mathbb{Z}$ und ein $k_i \in (0, A_i)$ mit

$$t_i - \alpha_i = n_i T_i + k_i.$$

Wir beachten, dass sich $k_i \in (0, A_i)$ aus $\dot{x}_i(t_i - \alpha_i) > 0$ und $d_i > 0$ ergibt. Ferner gilt

$$z_i = \begin{pmatrix} x_i(k_i) \\ \dot{x}_i(k_i) \end{pmatrix} \in \ell(\theta_i) \cap \Gamma_i ;$$

es sei

$$\tau := \Xi_1(\theta_0) \in (0, T_1).$$

Wegen (1.11) ergibt sich $\tau \in (0, A_1)$, und wir haben

$$\gamma_{x_1}(\tau) \in \ell(\theta_0) \cap \Gamma_1 \quad \text{und} \quad z_0 \in \ell(\theta_0) \cap \Gamma_0.$$

Bemerkung 1.1.2 liefert daher unter Berücksichtigung von $\Gamma_1 \Subset \Gamma_0$

$$\|\gamma_{x_1}(\tau)\| \leq \|z_0\|. \quad (1.12)$$

Das strenge Fallen von Ξ_1 nach Bemerkung 1.1.4, (1.11) und die Maximalität von τ ergeben

$$A_1 > \tau = \Xi_1(\theta_0) > \Xi_1(\theta_1) \geq k_1 > 0.$$

Das strenge Wachsen von $x_1|_{(0, A_1)}$ liefert dann mit (1.12)

$$x_1(k_1) < x_1(\tau)$$

und

$$d_1 = x_1(k_1) < x_1(\tau) = \|\gamma_{x_1}(\tau)\| \cos(\theta_0) \leq \|z_0\| \cos(\theta_0) = d_0;$$

dies ist ein Widerspruch zu (1.5).

2. Es gelte (1.9). Also haben wir $\dot{x}_0(t_0 - \alpha_0) = 0 = \dot{x}_1(t_1 - \alpha_1)$, die Argumente

$$\theta_i := \arctan \frac{\dot{x}_i(t_i - \alpha_i)}{d_i} = 0, \quad i \in \{0, 1\},$$

verschwinden, und wir setzen

$$z_i := \begin{pmatrix} d_i \\ \dot{x}_i(t_i - \alpha_i) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_i \\ 0 \end{pmatrix} \in \ell(0) \cap \Gamma_i, \quad i \in \{0, 1\}.$$

Dies liefert mit Bemerkung 1.1.2

$$d_0 = \|z_0\| \geq \|z_1\| = d_1,$$

also den gewünschten Widerspruch zu (1.5).

3. Es gelte (1.10). Wir gehen ähnlich wie in Fall (1.8) vor. Gleichung (1.7) liefert mit Abschätzung (1.6)

$$0 > \frac{\dot{x}_0(t_0 - \alpha_0)}{d_0} > \frac{\dot{x}_1(t_1 - \alpha_1)}{d_1}.$$

Ist für $i \in \{0, 1\}$ das Argument $\theta_i \in (-\frac{\pi}{2}, 0)$ durch

$$\theta_i = \arctan \frac{\dot{x}_i(t_i - \alpha_i)}{d_i}$$

gegeben, so folgt zum einen

$$0 > \theta_0 > \theta_1 > -\frac{\pi}{2} \quad (1.13)$$

und zum anderen

$$z_i := \begin{pmatrix} d_i \\ \dot{x}_i(t_i - \alpha_i) \end{pmatrix} \in \ell(\theta_i) \cap \Gamma_i, \quad i \in \{0, 1\}.$$

Es seien $i \in \{0, 1\}$, A_i die kleinste positive Nullstelle von \dot{x}_i und B_i die kleinste positive Nullstelle von x_i ; dann gilt

$$x_i|_{(A_i, B_i)} > 0, \quad \dot{x}_i|_{(A_i, B_i)} < 0,$$

und $x_i|_{(A_i, B_i)}$ streng monoton fallend.

Wir betrachten die streng monoton fallende Abbildung

$$\xi_i := \xi_{x_i} : \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (0, T_i)$$

gemäss Bemerkung 1.1.4, die dem Winkel $\theta \in \left(-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ die kleinste Schnittzeit von Γ_i und $\ell(\theta_i)$ zuordnet.

Es gibt ein $n_i \in \mathbb{Z}$ und ein $k_i \in (A_i, B_i)$ mit

$$t_i - \alpha_i = n_i T_i + k_i,$$

so dass

$$z_i = \begin{pmatrix} x_i(k_i) \\ \dot{x}_i(k_i) \end{pmatrix} \in \ell(\theta_i) \cap \Gamma_i$$

folgt. Dabei haben wir $k_i \in (A_i, B_i)$, weil $d_i > 0$ und $\dot{x}_i(t_i - \alpha_i) < 0$ gelten. Ähnlich wie oben sei

$$\tau := \xi_1(\theta_0) \in (0, T_1).$$

Wegen (1.13) ergibt sich $\tau \in (A_1, B_1)$, also erhält man

$$\gamma_{x_1}(\tau) \in \ell(\theta_0) \cap \Gamma_1 \quad \text{und} \quad z_0 \in \ell(\theta_0) \cap \Gamma_0.$$

Bemerkung 1.1.2 liefert damit

$$\|\gamma_{x_1}(\tau)\| \leq \|z_0\|. \quad (1.14)$$

Das strenge Fallen von ξ_1 nach Bemerkung 1.1.4, (1.13) und die Minimalität von τ ergeben

$$A_1 < \tau = \xi_1(\theta_0) < \xi_1(\theta_1) \leq k_1 < B_1.$$

Das strenge Fallen von $x_1|_{(A_1, B_1)}$ liefert dann mit (1.14)

$$x_1(k_1) < x_1(\tau)$$

und

$$d_1 = x_1(k_1) < x_1(\tau) = \|\gamma_{x_1}(\tau)\| \cos(\theta_0) \leq \|z_0\| \cos(\theta_0) = d_0;$$

dies ist wiederum der erwartete Widerspruch zu (1.5).

In allen Fällen erhalten wir somit einen Widerspruch zur Annahme der Existenz eines Punktes $(c, b)^{tr}$ in $S_{<>}$, die Menge $S_{<>}$ ist folglich die leere Menge. ■

Mit der Aussage des letzten Hilfssatzes ist es nun einfach, Fall **II** auszuschliessen:

Folgerung 1.6.1 *Es seien λ_0 und λ_1 sowie α_0 und α_1 aus \mathbb{R} mit*

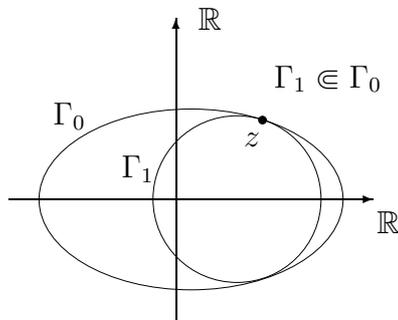
$$\lambda_0 > \lambda_1 > 0 \quad \text{und} \quad \alpha_0 \geq \alpha_1 \geq 0.$$

Für $i \in \{0, 1\}$ möge eine periodische Lösung x_i von $(\mu, f, \lambda_i, \alpha_i)$ mit Orbit Γ_i gegeben sein. Dann folgt aus

$$\Gamma_1 \Subset \Gamma_0$$

die Inklusion

$$\emptyset \neq \Gamma_0 \cap \Gamma_1 \subseteq \mathbb{R} \times \{0\}.$$



Fall **II**

Abbildung: Die Aussage der Folgerung kann als Unmöglichkeit des oben beschriebenen **II**. Falls interpretiert werden.

Die beiden Spuren Γ_0 und Γ_1 müssen sich also auf der ersten Achse berühren, wenn der zu Γ_0 gehörige Parameter λ_0 grösser als der entsprechende Parameter λ_1 von Γ_1 ist.

Beweis: Wir haben

$$S := \Gamma_0 \cap \Gamma_1 \cap (\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})) = \emptyset$$

zu zeigen und nehmen dazu an, es gibt einen Punkt $z \in S$. Es sei $t_i := \tau_i(z)$ für $i \in \{0, 1\}$, insbesondere gilt also

$$a := \dot{x}_0(t_0) = \dot{x}_1(t_1) \neq 0.$$

Dann folgt mit Hilfssatz 1.6.1 zum einen

$$\ddot{x}_0(t_0) = \ddot{x}_1(t_1) \tag{1.1}$$

und zum anderen

$$c := x_i(t_i - \alpha_i) = 0, \quad i \in \{0, 1\}. \quad (1.2)$$

Die Gleichheit der zweiten Ableitungen (1.1) ergibt mit (1.2) sowie den beiden Gleichungen $(\mu, f, \lambda_0, \alpha_0)$ und $(\mu, f, \lambda_0, \alpha_0)$

$$-\mu a + f'(0)\dot{x}_0(t_0 - \alpha_0) = \ddot{x}_0(t_0) = \ddot{x}_1(t_1) = -\mu a + f'(0)\dot{x}_1(t_1 - \alpha_1),$$

also

$$b := \dot{x}_0(t_0 - \alpha_0) = \dot{x}_1(t_1 - \alpha_1). \quad (1.3)$$

Es sei $i \in \{0, 1\}$. Wir setzen

$$y_i := x_i(\cdot - \alpha_i) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Die Funktion y_i ist eine periodische Lösung von $(\mu, f, \lambda_i, \alpha_i)$ mit Periode $T_{y_i} = T_i$. Desweiteren gelten $\Gamma_{y_i} = \Gamma_i$ und

$$S = \Gamma_{y_0} \cap \Gamma_{y_1} \cap (\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})).$$

Mit (1.2) und (1.3) folgen dann

$$y_0(t_0) = c = 0 = c = y_1(t_1) \quad \text{und} \quad \dot{y}_0(t_0) = b = \dot{y}_1(t_1).$$

Wegen $0 \in \mathcal{I}(\Gamma_i)$ für $i \in \{0, 1\}$ nach Satz 1.5.1 folgt $b \neq 0$, also $\binom{c}{b} \in S$.

Folglich sind für y_0 und y_1 die Voraussetzungen von Hilfssatz 1.6.1 erfüllt: es gilt

$$y_i(t_i - \alpha_i) = 0$$

für $i \in \{0, 1\}$. Daraus ergibt sich für $i \in \{0, 1\}$ mit $(\mu, f, \lambda_i, \alpha_i)$ und $f(0) = 0$ der Widerspruch

$$0 \neq b = \dot{y}_i(t_i) = -\mu c + \lambda_i \cdot f(0) = 0.$$

Damit ist die Annahme $S \neq \emptyset$ widerlegt und die Behauptung bewiesen. ■

Wenn Fall **II** nicht möglich ist, dann können die Orbitfunktionen zweier periodischer Lösungen x_0 und x_1 mit $\Gamma_{x_1} \Subset \Gamma_{x_0}$ im Inneren ihres Definitionsbereichs nicht übereinstimmen.

Folgerung 1.6.2 *Es seien λ_0 und λ_1 sowie α_0 und α_1 aus \mathbb{R} mit*

$$\lambda_0 > \lambda_1 > 0 \quad \text{und} \quad \alpha_0 \geq \alpha_1 \geq 0.$$

Für $i \in \{0, 1\}$ möge eine periodische Lösung x_i von $(\mu, f, \lambda_i, \alpha_i)$ mit Orbitfunktionen

$$\varphi_i^\pm : x_i(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^\pm \quad \text{und} \quad \Gamma_i := \Gamma_{x_i} = \varphi_i^+(x_i(\mathbb{R})) \cup \varphi_i^-(x_i(\mathbb{R}))$$

gegeben sein. Dann folgen aus

$$\Gamma_1 \Subset \Gamma_0$$

die strikten Abschätzungen

$$\varphi_0^+(x) > \varphi_1^+(x) \quad \text{und} \quad \varphi_0^-(x) < \varphi_1^-(x)$$

für alle inneren Punkte x von $x_1(\mathbb{R})$.

Beweis: Es sei x ein innerer Punkt aus $x_1(\mathbb{R})$. Dann wissen wir nach Bemerkung 1.5.4, dass

$$\varphi_0^+(x) \geq \varphi_1^+(x) \quad \text{und} \quad \varphi_0^-(x) \leq \varphi_1^-(x)$$

gelten. Somit ist es für den Beweis der Behauptung hinreichend

$$\varphi_0^+(x) \neq \varphi_1^+(x) \quad \text{und} \quad \varphi_0^-(x) \neq \varphi_1^-(x)$$

zu zeigen, wobei wir uns auf ersteres beschränken; die zweite Ungleichheit folgt analog. Es sei

$$\varphi_0^+(c) = \varphi_1^+(c) =: b > 0$$

für einen inneren Punkt c aus $x_1(\mathbb{R})$. Damit liegt $(c, b)^{tr}$ in $\Gamma_0 \cap \Gamma_1$, also mit Folgerung 1.6.1

$$\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R} \times \{0\},$$

was $b > 0$ widerspricht. ■

Im folgenden betrachten wir **I** im Fall $\mu = 0$ und benötigen, dass die Perioden T_0 und T_1 der zu untersuchenden Lösungen x_0 und x_1 zwischen 1 und 2 liegen, also die Lösungssegmente von x_1 und x_2 in der Niveaumenge $V^{-1}(2)$ verlaufen.

Hilfssatz 1.6.2 *Es seien $i \in \{0, 1\}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$, x_i eine periodische Lösung von $(0, f, \lambda_i, 1)$ mit minimaler Periode $T_{x_i} =: T_i \in (1, 2)$. Für die Spuren $\Gamma_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ der zugehörigen Jordankurven γ_{x_0} und γ_{x_1} gelte mit $S := \Gamma_0 \cap \Gamma_1$*

$$\Gamma_1 \Subset \Gamma_0, \quad S \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \emptyset.$$

Dann folgt

$$T_0 < T_1.$$

Beweis: Nach Voraussetzung können wir einen Punkt $\begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \in S \cap (\mathbb{R} \times \{0\})$ wählen. Dann gilt $b = 0$ und

$$\begin{pmatrix} x_0(t_0) \\ \dot{x}_0(t_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(t_1) \\ \dot{x}_1(t_1) \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

für gewisse Zeiten t_0 und t_1 in \mathbb{R} . Weil die 0 im Inneren der Orbits Γ_0 und Γ_1 enthalten ist, folgt $c \neq 0$; wir gehen o.B.d.A. von $c > 0$ aus. Für $i \in \{0, 1\}$ setzen wir $y_i := x_i(\cdot + t_i)$. Dann ist y_i , $i \in \{0, 1\}$, eine periodische Lösung von $(0, f, \lambda_i, 1)$ mit minimaler Periode $T_{y_i} = T_i$. Für die Spuren $\Gamma_{y_0} = \Gamma_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Gamma_{y_1} = \Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ der zugehörigen Jordankurven γ_{y_0} und γ_{y_1} gilt

$$\Gamma_1 \Subset \Gamma_0, \quad S \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \neq \emptyset;$$

aus (1.1) erhalten wir

$$\begin{pmatrix} y_0(0) \\ \dot{y}_0(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(0) \\ \dot{y}_1(0) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Zudem besitzen y_0 und y_1 dieselben Orbitfunktionen φ_0^\pm und φ_1^\pm .

Es sei $A_i > 0$ die kleinste positive Nullstelle von \dot{y}_i für $i \in \{0, 1\}$. Dann gelten

$$\min y_i(\mathbb{R}) = y_i(A_i), \quad \max y_i(\mathbb{R}) = y_i(0) = c > 0, \quad i \in \{0, 1\},$$

desweiteren

$$\dot{y}|_{(-T_i, -T_i + A_i)} < 0, \quad \dot{y}|_{(-T_i + A_i, 0)} > 0, \quad i \in \{0, 1\}. \quad (1.3)$$

Es sei $i \in \{0, 1\}$. Eine Berücksichtigung von $(0, f, \lambda_i, 1)$ und (1.2) lässt uns

$$d_i := y_i(-1) = 0 \quad (1.4)$$

erkennen. Die Funktion $y_i|_{(0, A_i)}$ erfüllt die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{y}_i(t) = \varphi_i^-(y_i(t)), \quad t \in (0, A_i).$$

Folglich erhalten wir für alle s_1 und s_2 in $(0, A_i)$ mit $s_1 < s_2$

$$s_2 - s_1 = \int_{s_1}^{s_2} ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\varphi_i^-(y_i(s))}{\varphi_i^-(y_i(s))} ds = \int_{s_1}^{s_2} \frac{\dot{y}_i(s)}{\varphi_i^-(y_i(s))} ds = \int_{y_i(s_1)}^{y_i(s_2)} \frac{1}{\varphi_i^-},$$

also

$$s_2 - s_1 = \int_{y_i(s_1)}^{y_i(s_2)} \frac{1}{\varphi_i^-}, \quad s_1 \in (0, A_i), \quad s_2 \in (0, A_i), \quad s_1 < s_2, \quad i \in \{0, 1\}. \quad (1.5)$$

Nach Bemerkung 1.5.4 und Folgerung 1.6.2 wissen wir

$$0 < -\frac{1}{\varphi_0^-}|_{[0, c]} < -\frac{1}{\varphi_1^-}|_{[0, c]}. \quad (1.6)$$

Es sei $i \in \{0, 1\}$. Die Lösung y_i hat bei $t = 0$ ein striktes lokales Maximum, so dass wir

$$0 > \ddot{y}_i(0) = f'(0)y_i(-1),$$

also mit (H1)

$$\dot{y}_i(-1) < 0,$$

folgern können. Die Voraussetzung $T_i \in (1, 2)$ liefert mit (1.3) daher $-1 \in (-T_i, 0)$ und

$$-1 \in (-T_i, -T_i + A_i),$$

also

$$T_i - 1 \in (0, A_i).$$

Die Integralformel (1.5) liefert dann unter Berücksichtigung von (1.4)

$$T_i - 1 - s = \int_{y_i(s)}^0 \frac{1}{\varphi_i^-} = \int_0^{y_i(s)} \frac{-1}{\varphi_i^-}, \quad s \in (0, T_i - 1), \quad i \in \{0, 1\}. \quad (1.7)$$

Nach (1.7) und (1.2) existiert für $i \in \{0, 1\}$ das uneigentliche Integral $\int_0^c \frac{-1}{\varphi_i^-}$, und die Abschätzung (1.6) lässt

$$T_0 - 1 = \int_0^c \frac{-1}{\varphi_0^-} < \int_0^c \frac{-1}{\varphi_1^-} = T_1 - 1$$

erkennen, was die gewünschte Periodenabschätzung ist. ■

Wir können die bisherigen Ergebnisse in einem Satz zusammenfassen:

Satz 1.6.1 (Periodenabschätzung) *Es seien (H1) und (H2) gegeben, x_1 und x_2 periodische Lösungen der Gleichung (f) mit Perioden $T_1 \in (1, 2)$ und $T_2 \in (1, 2)$ sowie den Orbits $\Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Gamma_2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann folgt aus*

$$\Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$$

die Periodenanordnung

$$T_2 < T_1.$$

Beweis: Es gilt $\Gamma_2 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)$. Deshalb existiert nach dem ersten Teil von Bemerkung 1.1.3

$$\rho := \rho_{2,1} := \max\{r \in \mathbb{R}_0^+ : r\Gamma_2 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)\} \geq 1.$$

Nach Bemerkung 1.4.1 ist

$$x_0 := \rho_{2,1} \cdot x_2$$

eine periodische Lösung von $(0, f, \rho, 1)$ mit minimaler Periode $T_0 := T_2$ und Orbit

$$\Gamma_0 := \Gamma_{x_0} = \rho\Gamma_2.$$

Der zweite Teil von Bemerkung 1.1.3 liefert

$$\Gamma_1 \Subset \Gamma_0.$$

Dies führt im Fall $\rho > 1$ mit Hilfssatz 1.6.2 auf

$$T_2 = T_0 < T_1.$$

Wäre $\rho = 1$, so gäbe es wegen $\Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$ und der Offenheit von $\mathcal{I}(\Gamma_1)$ ein $\tilde{\rho} > 1 = \rho$ mit $\tilde{\rho}\Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$, also $\tilde{\rho}\Gamma_2 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)$, was der Maximalität von ρ widerspricht. ■

Bevor wir die Aussage von Satz 1.6.1 spezialisieren, halten wir u.a. die elementare Tatsache fest, dass die Nullstellenmengen $x^{-1}(0)$ und $\dot{x}^{-1}(0)$ einer periodischen Lösungen x von

$$(0, f, \rho, 1) \quad \dot{x}(t) = \rho f\left(\frac{x(t-1)}{\rho}\right), \quad \rho > 0,$$

durch eine Verschiebung um 1 auseinander hervorgehen.

Bemerkung 1.6.1 Für die periodische Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $(0, f, \rho, 1)$ mit kleinster Periode T_x und $\max x(\mathbb{R}) = x(s) > 0$ für ein $s \in [0, T_x)$ gibt es positive Zahlen A_x und B_x , so dass folgendes gilt.

$$(1) \quad T_x = A_x + B_x.$$

(2) Für die Nullstellenmengen $\dot{x}^{-1}(0)$ und $x^{-1}(0)$ von \dot{x} und x ergeben sich

$$\begin{aligned} \dot{x}^{-1}(0) &= \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{nA_x + (n-1)B_x, nA_x + nB_x\} + s, \\ x^{-1}(0) &= \dot{x}^{-1}(0) - 1. \end{aligned}$$

Beweis: Nach Folgerung 1.4.1 hat x die qualitativen Eigenschaften der Sinus-Funktion, insbesondere besitzt $\dot{x}|_{[t, t+T_x)}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ genau zwei Nullstellen. Dasselbe gilt für die T_x -periodische Lösung

$$y := x(\cdot + s) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

von $(0, f, 1, 1)$. Wir haben nach Voraussetzung

$$\dot{y}(0) = \dot{x}(s) = 0 \quad \text{und} \quad y(0) = x(s) > 0.$$

Wir wählen $A_x > 0$ als kleinste positive Nullstelle von \dot{y} und $B_x > 0$ als Betrag der grössten negativen Nullstelle von \dot{y} . Es folgen

$$\min y(\mathbb{R}) = y(-B_x) = y(A_x)$$

und

$$\dot{y}|_{(-B_x, 0)} > 0, \quad \dot{y}|_{(0, A_x)} < 0, \quad \dot{y}(-B_x) = 0 = \dot{y}(A_x).$$

Insbesondere gilt $T_x = A_x + B_x$, und (1) ist gezeigt.

Wir zeigen die Mengengleichheiten in (2). Es sei $t \in \dot{y}^{-1}(0)$, d.h.

$$t \in [-B_x + nT_x, -B_x + (n+1)T_x)$$

für ein $n \in \mathbb{Z}$. In $[-B_x + nT_x, -B_x + (n+1)T_x)$ hat \dot{y} genau zwei Nullstellen, nämlich

$$-B_x + nT_x \quad \text{und} \quad nT_x,$$

d.h. mit (1)

$$t \in \{-B_x + nT_x, nT_x\} = \{(n-1)B_x + nA_x, nA_x + nB_x\} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{nA_x + (n-1)B_x, nA_x + nB_x\}.$$

Es sei umgekehrt $t \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{nA_x + (n-1)B_x, nA_x + nB_x\}$, d.h.

$$t \in \{nA_x + (n-1)B_x, nA_x + nB_x\} = \{-B_x + nT_x, nT_x\},$$

also $\dot{y}(t) = 0$ und $t \in \dot{y}^{-1}(0)$. Zusammengefasst folgt

$$\dot{y}^{-1}(0) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{nA_x + (n-1)B_x, nA_x + nB_x\}.$$

Mit $\dot{y}^{-1}(0) = \dot{x}^{-1}(0) - s$ erhalten wir

$$\dot{x}^{-1}(0) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \{nA_x + (n-1)B_x, nA_x + nB_x\} + s.$$

Wir zeigen schliesslich $x^{-1}(0) = \dot{x}^{-1}(0) - 1$, indem wir $(0, f, 1, 1)$ und (H1) ausnutzen:

$$t \in x^{-1}(0)$$

gilt genau dann, wenn $\dot{x}(t+1)$ verschwindet, was

$$t \in \dot{x}^{-1}(0) - 1$$

bedeutet. ■

Ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von (f) , so betragen die Abstände zweier aufeinanderfolgender Nullstellen von x und \dot{x} abwechselnd A_x oder B_x . Nullstellen von x des Abstands A_x schliessen eine Minimumstelle ein, Nullstellen des Abstands B_x eine Maximumstelle.

Abschliessend spezialisieren wir die Abschätzung des letzten Satzes, indem wir beweisen, dass die Periodenlängen zweier verschiedener periodischer Lösungen von (f) in $V^{-1}(2)$ zwar verschieden sind, aber nicht zu weit entfernt in $(1, 2)$ liegen, wenn die Vorzeichen der dritten Lösungsableitungen in den Maximalstellen übereinstimmen. Bei der Formulierung dieser Aussage kommen wir gegenüber Satz 1.6.1 ohne eine die Phasenebene \mathbb{R}^2 betreffende Voraussetzung aus. Allerdings setzen wir die *zweimalige* stetige Differenzierbarkeit von f voraus, weil die Existenz der dritten Ableitung einer periodischen Lösungen von (f) angenommen wird und für unseren Beweis notwendig ist.

Satz 1.6.2 (Erweiterte Periodenabschätzung) Die zweimal stetig differenzierbare Nichtlinearität f habe die Eigenschaften (H1) und (H2). Es seien $x_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ verschiedene periodische Lösungen von (f) mit Perioden $T_1 \in (1, 2)$ und $T_2 \in (1, 2)$.

1. Es seien Γ_1 und Γ_2 die $x-\dot{x}$ -Evaluationen von x_1 und x_2 in \mathbb{R}^2 . Wenn $A_i := A_{x_i}$ und $B_i := B_{x_i}$ für $i \in \{1, 2\}$ gemäss Bemerkung 1.6.1 gegeben sind, so gelten $A_i \in (0, 1)$ und $B_i \in (0, 1)$. Weiterhin folgen aus $\Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$

$$A_2 > A_1 \quad \text{und} \quad B_1 > B_2 ,$$

und umgekehrt impliziert die Inklusion $\Gamma_1 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_2)$

$$A_1 > A_2 \quad \text{und} \quad B_1 < B_2 .$$

2. Die dreimal stetig differenzierbaren verschiedenen periodischen Lösungen x_1 und x_2 mögen in ihren Maximalstellen dasselbe Vorzeichen bei der dritten Ableitung besitzen.

(a) Ist $\Delta T := T_1 - T_2$, so folgt

$$0 < |\Delta T| < \frac{1}{2} .$$

(b) Ist für $i \in \{1, 2\}$ eine Maximalstelle t_i von x_i gegeben, so gilt $\ddot{x}_i(t_i) \neq 0$. Als Präzisierung der obigen Periodenabschätzung ergibt sich die folgende Tabelle, wobei für $\max x_i(\mathbb{R}) = x(0) > 0$ für $i \in \{1, 2\}$ angenommen wird.

$i \in \{1, 2\}$	$\ddot{x}_i(0) > 0$	$\ddot{x}_i(0) < 0$
$\ddot{x}_i(A_i) > 0$	$1 < T_i < \frac{3}{2}$	$1 < T_i < \frac{3}{2}$
$\ddot{x}_i(A_i) < 0$	$\frac{5}{4} < T_i < 2$	$1 < T_i < \frac{3}{2}$

Beweis: Wenn die verschiedenen periodischen Lösungen x_1 und x_2 die Orbitspuren Γ_1 und Γ_2 besitzen, folgt mit Satz 1.4.1

$$\Gamma_1 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_2) \quad \text{oder} \quad \Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1) .$$

Wir gehen im folgenden von der letzten Inklusion $\Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$ aus und zeigen

$$0 < \Delta T < \frac{1}{2} , \quad A_2 > A_1 \quad \text{und} \quad B_1 > B_2 .$$

Die im Beweis benötigten Abschätzungen für den nicht weiter ausgeführten ersten Fall $\Gamma_1 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_2)$ entsprechen bis auf ein Vorzeichen denen des zweiten Falls und führen auf

$-\frac{1}{2} < \Delta T < 0$, $A_1 > A_2$ und $B_1 < B_2$.

Eine Anwendung von Satz 1.6.1 liefert

$$|\Delta T| = \Delta T = T_1 - T_2 > 0.$$

Wie im Beweis dieses Satzes finden wir ein $\rho > 1$ mit $\Gamma_0 := \rho\Gamma_2 \ni \Gamma_1$, und Folgerung 1.6.1 ergibt

$$\emptyset \neq \Gamma_0 \cap \Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^+ \times \{0\} \quad (1.1)$$

oder $\emptyset \neq \Gamma_0 \cap \Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^- \times \{0\}$. Im folgenden betrachten wir lediglich (1.1), weil der andere Fall in analoger Weise die gewünschten Abschätzungen liefert.

Die Funktion $x_0 := \rho x_2$ ist nach Bemerkung 1.4.1 eine $T_0 := T_2$ -periodische Lösung von

$$(0, f, \rho, 1) \quad \dot{x}(t) = \rho f\left(\frac{x(t-1)}{\rho}\right),$$

hat den \mathbb{R}^2 -Orbit $\Gamma_{x_0} = \Gamma_0$ und besitzt die Nullstellenabstände $A_{x_0} = A_2$ sowie $B_{x_0} = B_2$. Nach einer Translation können wir von $\max x_i(\mathbb{R}) = x_i(0) > 0$ ausgehen. Mit (1.1) haben wir dann

$$\begin{pmatrix} x_0(0) \\ \dot{x}_0(0) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} c \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) \\ \dot{x}_1(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^+ \times \{0\}. \quad (1.2)$$

Weil f zweimal stetig differenzierbar ist, sind x_0 und x_1 dreimal stetig differenzierbar, und es folgen für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\ddot{x}_0(t) = f'\left(\frac{x_0(t-1)}{\rho}\right) \dot{x}_0(t-1), \quad (1.3)$$

$$\ddot{x}_1(t) = f'(x_1(t-1)) \dot{x}_1(t-1), \quad (1.4)$$

$$\ddot{x}_0(t) = \frac{1}{\rho} f''\left(\frac{x_0(t-1)}{\rho}\right) \dot{x}_0(t-1)^2 + f'\left(\frac{x_0(t-1)}{\rho}\right) \ddot{x}_0(t-1), \quad (1.5)$$

$$\ddot{x}_1(t) = f''(x_1(t-1)) \dot{x}_1(t-1)^2 + f'(x_1(t-1)) \ddot{x}_1(t-1). \quad (1.6)$$

Aus (1.2) ergibt sich mit (f) und $(0, f, \rho, 1)$

$$x_0(-1) = 0 = x_1(-1). \quad (1.7)$$

Im folgenden sei $i \in \{0, 1\}$. Die kleinste positive Nullstelle von \dot{x}_i ist A_i , die grösste negative ist $-B_i$, $B_i > 0$. Daher haben wir unter Berücksichtigung von Folgerung 1.4.1

$$\dot{x}_i|_{(0, A_i)} < 0, \quad \dot{x}_i|_{(A_i, T_i)} > 0 \quad \text{und} \quad \dot{x}_i|_{(-T_i, -B_i)} < 0, \quad \dot{x}_i|_{(-B_i, 0)} > 0. \quad (1.8)$$

Desweiteren hat $x_i|_{(0, A_i)}$ genau eine Nullstelle, und wir haben $T_i = A_i + B_i$; vgl. dazu auch Bemerkung 1.6.1.

Wenn $\varphi_i^\pm : x_i(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_0^\pm$ die Orbitfunktionen von x_i sind, dann gelten – siehe auch die entsprechenden Aussagen im Beweis von Hilfssatz 1.6.2 – zum einen

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) &= \varphi^+(x_i(t)), & t \in (-B_i, 0), \\ \dot{x}_i(t) &= \varphi^-(x_i(t)), & t \in (0, A_i),\end{aligned}$$

und zum anderen die daraus resultierenden Integralformeln

$$s_2 - s_1 = \int_{x_i(s_1)}^{x_i(s_2)} \frac{1}{\varphi_i^-}, \quad s_1 \in (0, A_i), \quad s_2 \in (0, A_i), \quad s_1 < s_2, \quad (1.9)$$

$$s_2 - s_1 = \int_{x_i(s_1)}^{x_i(s_2)} \frac{1}{\varphi_i^+}, \quad s_1 \in (-B_i, 0), \quad s_2 \in (-B_i, 0), \quad s_1 < s_2, \quad (1.10)$$

Wir wissen wegen Bemerkung 1.5.4 und Folgerung 1.6.2

$$0 < -\frac{1}{\varphi_0} \Big|_{(x_1(A_1), c)} < -\frac{1}{\varphi_1} \Big|_{(x_1(-B_1), c)} \quad \text{und} \quad (1.11)$$

$$0 < \frac{1}{\varphi_0^+} \Big|_{(x_1(-B_1), c)} < \frac{1}{\varphi_1^+} \Big|_{(x_1(-B_1), c)}. \quad (1.12)$$

Laut Anmerkung 1.2.3 haben wir $f''(0) = 0$. Dann folgt aus $\ddot{x}_i(0) < 0$ mit (1.3), (1.4) und (1.7)

$$\dot{x}_i(-1) < 0.$$

Daher haben wir $-1 \in (-T_i, -B_i)$, was

$$T_i - 1 \in (0, T_i - B_i) = (0, A_i) \quad (1.13)$$

bedeutet.

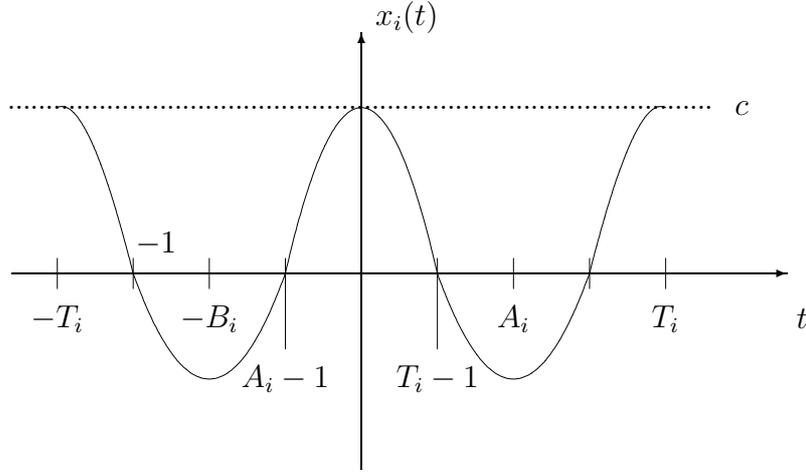
Angenommen, es gilt $A_i \geq 1$, dann muss $A_i \in [1, 2)$ wegen $T_i \in (1, 2)$ gelten. Dies liefert $A_i - 1 \in [0, 1)$, und $0 = \dot{x}_i(A_i)$ ergibt mit den Differentialgleichungen $x_i(A_i - 1) = 0$. $x_i(0) = c > 0$ impliziert dann $A_i - 1 \in (0, A_i)$. Weil $T_i - 1$ die einzige Nullstelle von $x_i|_{(0, A_i)}$ ist, müsste $T_i = A_i$ gelten, was aufgrund von $B_i > 0$ ein Widerspruch ist. Somit haben wir

$$A_i \in (0, 1). \quad (1.14)$$

Wir untersuchen im folgenden die gegenseitige Lage von A_0 und A_1 bzw. B_0 und B_1 , zeigen also die erste Behauptung. Es ist festzuhalten, dass x_i in $[-T_i, 0]$ die beiden aufeinanderfolgenden Nullstellen -1 und $A_i - 1$ besitzt; siehe dazu auch Bemerkung 1.6.1. Die erste positive Nullstelle von x_i lautet $T_i - 1$.

Formel (1.10) liefert mit (1.12) und $B := \min\{B_0, B_1\}$ für alle $s \in (-B, 0)$ die Abschätzung der folgenden uneigentlichen Integrale

$$\int_{x_0(s)}^c \frac{1}{\varphi_0^+} = -s = \int_{x_1(s)}^c \frac{1}{\varphi_1^+} > \int_{x_1(s)}^c \frac{1}{\varphi_0^+},$$



was

$$x_0(s) < x_1(s) \quad \text{für alle } s \in (-B, 0) \quad (1.15)$$

bedeutet. Somit haben wir mit (1.14) und (1.15)

$$0 < A_1 < A_0 = A_2 < 1. \quad (1.16)$$

Wir leiten sehr ähnlich die Entsprechung von (1.15) auf $(0, \min\{A_0, A_1\}) = (0, A_1)$ her: Es sei $s \in (0, A_1)$, dann folgt mit (1.9) und (1.11)

$$\int_{x_0(s)}^c \frac{-1}{\varphi_0^-} = s = \int_{x_1(s)}^c \frac{-1}{\varphi_1^-} > \int_{x_1(s)}^c \frac{-1}{\varphi_0^-},$$

also

$$x_0(s) < x_1(s) \quad \text{für alle } s \in (0, A_1). \quad (1.17)$$

Es sei betont, dass (1.17) erneut die Abschätzung $T_0 < T_1$ impliziert.

Das Analogon zu (1.16) für B_0 und B_1 ergibt sich mit $T_0 < T_1$ und (1.7) :

$$0 < B_2 = B_0 = T_0 - A_0 < T_1 - A_1 = B_1 < 1. \quad (1.18)$$

Von (1.18) und (1.16) ausgehend halten wir folgende Abschätzungen fest.

$$0 < \Delta T = T_1 - T_0 < B_1 - B_0, \quad (1.19)$$

$$0 < T_i - B_i < 1, \quad i \in \{0, 1\}. \quad (1.20)$$

Insgesamt haben wir 1. gezeigt und kommen nun zum Beweis von 2. und 3. . Um die dabei noch ausstehenden Behauptungen $\Delta T < \frac{1}{2}$ und $\ddot{x}_i(0) \neq 0, i \in \{0, 1\}$, zu zeigen, betrachten wir die Nullstellen der zweiten Ableitungen \ddot{x}_0 und \ddot{x}_1 auf dem Periodenintervall $[-T_i, 0]$, dero es wegen (1.3), (1.4), Folgerung 1.4.1 und (H1) genau zwei gibt:

$$\ddot{x}_i(-B_i + 1 - T_i) = 0 = \ddot{x}_i(-T_i + 1), \quad -T_i < -B_i + 1 - T_i < -T_i + 1 < 0, \quad i \in \{0, 1\}. \quad (1.21)$$

D.h. wir haben das folgende Krümmungsverhalten des Graphen von $x_i|_{[-T_i,0]}$, $i \in \{0,1\}$:

$$\ddot{x}_i|_{[-T_i, -B_i+1-T_i]} < 0, \quad \ddot{x}_i|_{(-B_i+1-T_i, -T_i+1)} > 0, \quad \ddot{x}_i|_{(-T_i+1, 0]} < 0. \quad (1.22)$$

Es sei $i \in \{0,1\}$. Abschliessend unterscheiden wir anhand des Vorzeichens von $\ddot{x}_i(0)$ drei Fälle.

1. Der Fall $\ddot{x}_i(0) = 0$. Eine Ausnutzung von (1.5), (1.6), (1.7) und $f''(0) = 0$ ergibt

$$f'(0)\ddot{x}_0(-1) = 0 = f'(0)\ddot{x}_1(-1),$$

also $\ddot{x}_0(-1) = 0 = \ddot{x}_1(-1)$, was mit (1.21)

$$-1 = -B_i + 1 - T_i \quad \text{oder} \quad -1 = -T_i + 1$$

bedeutet. Letzteres impliziert den Widerspruch $T_i = 2$, ersteres zunächst $T_i + B_i = 2$, was mittels (1.19) sofort den Widerspruch

$$0 = 2 - 2 = T_1 + B_1 - T_0 - B_0 = \Delta T + B_1 - B_0 > 0$$

ergibt. Somit haben wir $\ddot{x}_i(0) \neq 0$ gezeigt.

2. Der Fall $\ddot{x}_i(0) > 0$. Eine Ausnutzung von (1.5), (1.6), (1.7) und $f''(0) = 0$ ergeben $f'(0)\ddot{x}_0(-1) > 0$ und $f'(0)\ddot{x}_1(-1) > 0$, also $\ddot{x}_0(-1) > 0$ und $\ddot{x}_1(-1) > 0$. Die Vorzeichenaussagen in (1.22) liefern

$$-1 \in (-B_i + 1 - T_i, -T_i + 1), \quad i \in \{0,1\},$$

insbesondere $-B_i + 1 - T_i < -1$ für $i \in \{0,1\}$, was äquivalent zu

$$T_i + B_i > 2 \quad \text{für } i \in \{0,1\}$$

ist. Dies hat mit (1.20)

$$2 < T_i + B_i < 1 + B_i + B_i = 1 + 2B_i, \quad i \in \{0,1\},$$

zur Folge, was mit (1.7) genau dann der Fall ist, wenn

$$1 > B_i > \frac{1}{2}, \quad i \in \{0,1\}, \quad (1.23)$$

gilt. Nun liefert (1.19) die gewünschte Abschätzung

$$0 < \Delta T < B_1 - B_0 < \frac{1}{2}.$$

Im ersten Unterfall $\ddot{x}_i(A_i) < 0$ ergibt wie oben durch Betrachtung der zweiten Ableitung $T_i + A_i > 2$, was auf $T_i = T_i + A_i - A_i > 2 - A_i = 2 - T_i + B_i$, also mit (1.23) $T_i > 1 + \frac{B_i}{2} > 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$, führt.

Im zweiten Unterfall $\ddot{x}_i(A_i) > 0$ haben wir $T_i + A_i < 2$ und daher $A_i < B_i$. Dies liefert $2 > T_i + A_i = 2T_i - B_i$, also $T_i < 1 + \frac{B_i}{2} < \frac{3}{2}$.

3. Der Fall $\ddot{x}_i(0) < 0$. Wieder argumentieren wir zunächst mittels (1.5), (1.6), (1.7) und $f''(0) = 0$ und erhalten $\dot{x}_0(-1) < 0$ sowie $\dot{x}_1(-1) < 0$. Dann liefert (1.22) $-1 \in (-T_i + 1, 0]$ oder $-1 \in [-T_i, -B_i + 1 - T_i)$. Ersteres ist wegen $T_i \in (1, 2)$ unmöglich, so dass wir von $-1 < -B_i + 1 - T_i$, also

$$T_i + B_i < 2,$$

ausgehen. Dies ergibt

$$2 > T_i + B_i = T_i + T_i - A_i = 2T_i - A_i,$$

was genau dann gilt, wenn

$$T_i < 1 + \frac{A_i}{2}$$

besteht. Beachten wir schliesslich (1.16), so ergibt sich

$$1 < T_i < \frac{A_i}{2} + 1 < \frac{3}{2},$$

also auch hier $\Delta T < \frac{1}{2}$, was zu beweisen war. ■

Anmerkung 1.6.1 Die Herleitung von (1.17) im Beweis des Satzes 1.6.2 gilt auch im Fall $\mu > 0$, weil sich die betreffenden Argumente ausschliesslich auf die gegenseitige Lage von Γ_0 und Γ_1 beziehen, die für alle $\mu \geq 0$ nach Folgerung 1.6.1 dieselbe ist. ■

Für eine kurze geometrische Interpretation des letzten Satzes anhand der Krümmung von Orbispuren verweisen wir auf Abschnitt 1.8.

1.7 Eindeutigkeit durch Vergleich

Wenn wir die Eindeutigkeit periodischer Lösungen untersuchen wollen, ist dies natürlich modulo zeitlicher Translation zu verstehen. Daher betrachten wir solche Lösungen, die normiert sind: Es seien $\mathcal{P}_0 \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge der normierten periodischen Lösungen von

$$(f) \quad \dot{x}(t) = f(x(t-1))$$

mit kleinster Periode im Intervall $(1, 2)$ und

$$\mathcal{Q}_0 := \{x \in \mathcal{P}_0 : A_x = B_x\}$$

die Menge aller solchen periodischen Lösungen mit konstantem Nullstellenabstand; vgl. Bemerkung 1.6.1. Dass \mathcal{Q}_0 höchstens ein Element besitzt, ist eine unmittelbare Folge von Satz 1.6.2 :

Satz 1.7.1 (Eindeutigkeit in \mathcal{Q}_0) Die Voraussetzungen (H1) und (H2) mögen erfüllt sein. Dann gibt es höchstens ein Element in \mathcal{Q}_0 , d.h. aus $x_1 \in \mathcal{Q}_0$ und $x_2 \in \mathcal{Q}_0$ folgt

$$x_1 = x_2.$$

Beweis: Wir führen einen Widerspruchsbeweis. Es seien $x_1 \in \mathcal{Q}_0$ und $x_2 \in \mathcal{Q}_0$ mit $x_1 \neq x_2$ und kleinsten Perioden $T_1 := T_{x_1}$ und $T_2 := T_{x_2}$ gegeben. A_{x_i} und B_{x_i} , $i \in \{1, 2\}$, seien die Nullstellenabstände von x_i , $i \in \{1, 2\}$, gemäss Bemerkung 1.6.1. Wegen $x_1 \in \mathcal{Q}_0$ und $x_2 \in \mathcal{Q}_0$ folgt

$$A_i := A_{x_i} = B_{x_i}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Die Orbit-Kurven

$$\gamma_i := \gamma_{x_i} : [0, T_i) \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x_i(t) \\ \dot{x}_i(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad i \in \{1, 2\},$$

sind nach Satz 1.5.1 reguläre, ursprungsumlaufende Jordankurven, und nach Satz 1.4.1.3 sind ihre Spuren

$$\Gamma_i := \Gamma_{x_i} = \gamma_i([0, T_i)) \subseteq \mathbb{R}^2, \quad i \in \{1, 2\},$$

disjunkt. Das Innere und Äussere von Γ_i , $i \in \{1, 2\}$, werden gemäss dem Kurvensatz von Jordan 1.1.1 mit $\mathcal{A}(\Gamma_i)$ und $\mathcal{I}(\Gamma_i)$, $i \in \{1, 2\}$, bezeichnet. Wegen der Disjunktheit gelte o.B.d.A.

$$\Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1).$$

Einerseits haben wir dann nach Satz 1.6.1

$$T_2 < T_1,$$

andererseits liefert Bemerkung 1.6.1 zusammen mit Satz 1.6.2.1

$$T_2 = A_2 + B_2 = 2A_2 > 2A_1 = T_1.$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass \mathcal{Q}_0 höchstens eine periodische Lösung enthält. ■

Korollar 1.7.1 Die Voraussetzungen (H1) und (H2) seien erfüllt. Zudem sei f eine ungerade Funktion. Dann gibt es höchstens eine periodische Lösung von

$$(0, f, 1, 1) \quad \dot{x}(t) = f(x(t-1)).$$

mit kleinster Periode zwischen 1 und 2.

Beweis: Es seien $x_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $x_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von $(0, f, 1, 1)$ mit kleinsten Perioden $T_1 \in (1, 2)$ und $T_2 \in (1, 2)$. Weil f ungerade ist, überträgt sich nach Satz 1.5.2 eine Symmetrie auf die Lösungen x_1 und x_2 :

$$x_1 = -x_1 \left(\cdot - \frac{T_1}{2} \right) \quad \text{und} \quad x_2 = -x_2 \left(\cdot - \frac{T_2}{2} \right).$$

Folglich sind die Nullstellenabstände bei x_1 und x_2 jeweils konstant, nämlich $A_{x_1} = \frac{T_1}{2}$ und $A_{x_2} = \frac{T_2}{2}$, d.h. $x_1 \in \mathcal{Q}_0$ und $x_2 \in \mathcal{Q}_0$. Satz 1.7.1 liefert $x_1 = x_2$. ■

Es sei $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ die Menge aller normierten periodischen Lösungen von

$$(\mu, f) \quad \dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$$

Wir beweisen abschliessend den folgenden Eindeutigkeitssatz für periodische Lösungen in

$$\mathcal{Q} := \{x \in \mathcal{P} : \max x(\mathbb{R}) = |\min x(\mathbb{R})|\}.$$

Satz 1.7.2 (Eindeutigkeit in \mathcal{Q}) *Die Voraussetzungen (H1) und (H2) mögen erfüllt sein. Dann gibt es höchstens ein Element in \mathcal{Q} , d.h. aus $x_1 \in \mathcal{Q}$ und $x_2 \in \mathcal{Q}$ folgt*

$$x_1 = x_2.$$

Beweis: Wir zeigen die Aussage wie im Beweis von Satz 1.7.1 mit Widerspruch. Es seien x_1 und x_2 verschiedene periodische Lösungen aus \mathcal{Q} mit Spuren Γ_1 und Γ_2 in \mathbb{R}^2 . Wir gehen wieder ohne Beschränkung von $\Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$ aus und wählen $\rho > 1$ mit $\Gamma_1 \in \rho\Gamma_2 =: \Gamma_0$, wobei $\Gamma_0 = \Gamma_{x_0}$ mit $x_0 = \rho x_2$ ist. Für $i \in \{0, 1, 2\}$ gelte ausserdem $x_i(0) = \max x_i(\mathbb{R})$. Es sei für solche i die kleinste positive Nullstelle A_i von \dot{x}_i gegeben, wobei wir $A_2 = A_0$ haben. Folgerung 1.6.1 liefert $\Gamma_0 \cap \Gamma_1 \subseteq \mathbb{R} \times \{0\}$, also gibt es wegen $x_1 \in \mathcal{Q}$ bzw. $x_0 \in \mathcal{Q}$ ein $c > 0$ mit

$$x_0(0) = c = x_1(0) \quad \text{und} \quad x_0(A_0) = -c = x_1(A_1).$$

und

$$\dot{x}_0(0) = 0 = \dot{x}_1(0) \quad \text{und} \quad \dot{x}_0(A_0) = 0 = \dot{x}_1(A_1).$$

Daraus erhalten wir mit (μ, f) und $d_0 := x_0(A_0 - 1)$ sowie $d_1 := x_1(A_1 - 1)$

$$\mu c + \rho f\left(\frac{d_0}{\rho}\right) = 0 = \mu c + f(d_1),$$

also erstens $d_0 < 0$ sowie $d_1 < 0$ und zweitens unter Berücksichtigung von Bemerkung 1.2.2

$$d_1 < d_0 < 0. \tag{1.1}$$

Ist $-B_i$ für $i \in \{0, 1\}$ die grösste negative Nullstelle von \dot{x}_i , so wissen wir

$$s_2 - s_1 = \int_{x_i(s_1)}^{x_i(s_2)} \frac{1}{\varphi_i^+}, \quad s_1 < s_2 \quad \text{in} \quad (-B_i, 0), \quad i \in \{0, 1\},$$

wobei $\varphi_0^\pm : x_0(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\pm$ bzw. $\varphi_1^\pm : x_1(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^\pm$ die Orbitfunktionen von x_0 bzw. x_1 sind. Mittels (1.1), Folgerung 1.6.2 und der letzten Integralformel erhalten wir die Abschätzung der folgenden uneigentlichen Integrale

$$1 - A_0 = 0 - (A_0 - 1) = \int_{d_0}^c \frac{1}{\varphi_0^+} < \int_{d_1}^c \frac{1}{\varphi_0^+} < \int_{d_1}^c \frac{1}{\varphi_1^+} = 1 - A_1,$$

was

$$A_0 > A_1$$

ergibt. Dabei beachten wir $A_i - 1 \in (-B_i, 0)$ für $i \in \{0, 1\}$. Die dazu benötigten Abschätzungen folgen zum einen aus $T_i = A_i + B_i > 1$, zum anderen muss jedes Segment von \dot{x}_i nach Korollar 1.3.1 eine Nullstelle besitzen.

Wie in Anmerkung 1.6.1 beschrieben, haben wir

$$x_0(s) < x_1(s) \quad \text{für alle } s \in (0, \min\{A_0, A_1\}) = (0, A_1).$$

Somit folgt der Widerspruch

$$x_1(A_1) = x_0(A_0) < x_0(A_1) \leq x_1(A_1),$$

und es gibt nur eine periodische Lösung in \mathcal{Q} . ■

Die Eindeutigkeitsaussage aus KRISZTIN & WALTHER [32] für ungerade Signalfunktionen f ergibt sich nun als Korollar, weil bei ungeradem f nach Satz 1.5.2 die Gleichheit $\mathcal{P} = \mathcal{Q}$ gilt:

Korollar 1.7.2 *Die Voraussetzungen (H1) und (H2) seien erfüllt. Zudem sei f eine ungerade Funktion. Dann gibt es höchstens eine periodische Lösung von*

$$(\mu, f) \quad \dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1)).$$

mit kleinster Periode zwischen 1 und 2. ■

1.8 Kommentare und Ausblicke

Die Periodenabschätzung aus Satz 1.6.1 lässt sich alternativ mittels vorhandener Ergebnisse aus meiner Diplomarbeit [17] über Orbits in der Phasenebene \mathbb{R}^2 für *langsam schwingende periodische Lösungen* der verzögerten Differentialgleichung

$$(0, -f, \lambda, \alpha) \quad \dot{y}(t) = -\lambda f\left(\frac{1}{\lambda}x(t-\alpha)\right), \quad \alpha \geq 0,$$

gewinnen. Dabei soll f den üblichen Voraussetzungen (H1) und (H2) genügen, insbesondere beschreibt die Gleichung dann eine negative Rückkopplung um die Ruhelage 0.

Genau wie im Fall einer positiven Rückkopplung sind die $x - \dot{x}$ -Kurven einer α -langsam schwingenden periodischen Lösung von $(0, -f, \lambda, \alpha)$ regulär und jordsch, wenn wir (H1) voraussetzen, wobei eine periodische Lösung x der letzten Gleichung α -langsam schwingend heisst, falls ihre Nullstellenabstände grösser als α sind. Für den Beweis der Regularität und einfachen Geschlossenheit der $x - \dot{x}$ -Kurven ist die in Abschnitt 1.3 eingeführte Vorzeichenbedingung

$$(+) \quad \zeta \cdot g(\cdot, 0, \zeta) > 0 \quad \text{für alle } \zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

für Gleichung

$$(g) \quad \dot{y}(t) = g(t, y(t), y(t-1))$$

durch

$$(-) \quad \zeta \cdot g(\cdot, 0, \zeta) < 0 \quad \text{für alle } \zeta \in \mathbb{R} \setminus \{0\};$$

zu ersetzen.

Aus dem Beweis von Satz 2.3.1 meiner Diplomarbeit [17] erhalten wir die folgende Hilfsaussage:

Lemma 1.8.1 *Es seien (H1) und (H2), $\lambda_0 > \lambda_1 > 0$, α_0 und α_1 aus \mathbb{R}_0^+ , sowie für j aus $\{0, 1\}$ die Funktion y_j eine α_j -langsam schwingende periodische Lösungen der Gleichung $(0, -f, \lambda_j, \alpha_j)$ mit Orbit $\Lambda_j \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann folgt die Delay-Abschätzung*

$$\alpha_0 < \alpha_1$$

aus $\Lambda_1 \Subset \Lambda_0$. ■

Mit Hilfe des letzten Lemma beweisen wir die Periodenabschätzung aus Satz 1.6.1 erneut:

Korollar 1.8.1 (Periodenabschätzung) *Es seien x_1 und x_2 periodische Lösungen der Gleichung*

$$(0, f, 1, 1) \quad \dot{x}(t) = f(x(t-1)).$$

mit Perioden $T_1 \in (1, 2)$ und $T_2 \in (1, 2)$ sowie den Orbits $\Gamma_0 \subseteq \mathbb{R}^2$ und $\Gamma_1 \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann folgt aus

$$\Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$$

die Periodenanordnung

$$T_2 < T_1.$$

Beweis: Es gilt $\Gamma_2 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)$. Deshalb existiert nach dem ersten Teil von Bemerkung 1.1.3

$$\rho := \rho_{2,1} := \max\{r \in \mathbb{R}_0^+ : r\Gamma_2 \not\subseteq \mathcal{A}(\Gamma_1)\} \geq 1.$$

Wegen $\Gamma_2 \subseteq \mathcal{I}(\Gamma_1)$ gilt sogar $\rho > 1$. Nach Bemerkung 1.4.1 ist $x_0 := \rho_{2,1} \cdot x_2$ eine periodische Lösung von $(0, f, \rho, 1)$ mit minimaler Periode $T_0 := T_2$ und Orbit $\Gamma_0 := \Gamma_{x_0} = \rho\Gamma_2$. Der zweite Teil von Bemerkung 1.1.3 liefert

$$\Gamma_1 \Subset \Gamma_0.$$

Es sei $y_j := x_j(-\cdot)$ für $j \in \{0, 1\}$. Wie x_j hat y_j die Nullstellenabstände A_j und B_j , die nach Satz 1.6.2 im Intervall $(0, 1)$ liegen. Somit haben wir $A_j = T_j - B_j > T_j - 1$ und

$B_j = T_j - A_j > T_j - 1$, und es folgt: Die Funktion $y_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine $(T_1 - 1)$ -langsam schwingende periodische Lösung von $(0, -f, 1, T_1 - 1)$ mit zugehöriger $y - \dot{y}$ -Kurvenspur

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1(-t) \\ -\dot{x}_1(-t) \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} =: \Lambda_1 \subseteq \mathbb{R}^2,$$

und die Funktion $y_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist eine $(T_0 - 1)$ -langsam schwingende periodische Lösung von $(0, -f, \rho, T_0 - 1)$ mit Spur

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_0(-t) \\ -\dot{x}_0(-t) \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} =: \Lambda_0 \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Aus $\Gamma_1 \in \Gamma_0$ folgt $\Lambda_1 \in \Lambda_0$. Daher liefert eine Anwendung von Lemma 1.8.1 die Delay-Abschätzung $T_0 - 1 < T_1 - 1$, was $T_2 = T_0 < T_1$ bedeutet. ■

Die Voraussetzungen des Satzes 1.6.2.2 beinhalten Vorzeichenbedingungen an die dritte Ableitung in den Maximalstellen der betrachteten periodischen Lösungen, die sich mit Hilfe der *Krümmung* der betreffenden Orbit Spuren geometrisch interpretieren lassen. Haben wir eine periodische Lösung x von (μ, f) mit Periode $T \in (1, 2)$ und $\max x(\mathbb{R}) = x(0)$ gegeben, so ist die Krümmung $\kappa : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ der regulären Jordankurve $\gamma_x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definiert, und für alle $t \in [0, T]$ gilt

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}(t) \ddot{x}(t) - \ddot{x}(t)^2}{(\dot{x}(t)^2 + \ddot{x}(t)^2)^{\frac{3}{2}}},$$

vgl. dazu etwa der Abschnitt 2.2 über ebene Kurven in BÄR [2]. Die Krümmung von Γ ist negativ, und für den positiven Schnittpunkt mit der ersten Achse erhalten wir mit $\dot{x}(0) = 0$ die Krümmung

$$\kappa(0) = \frac{1}{\ddot{x}(0)}.$$

Ist f dreimal stetig differenzierbar, so erhalten wir nach einer elementaren Rechnung für die Krümmungsänderung auf der ersten Achse

$$\dot{\kappa}(0) = \frac{-2 \ddot{x}(0)}{\ddot{x}(0)^2}.$$

Nach Satz 1.6.2.2 beträgt der Periodenabstand $|\Delta T|$ zweier verschiedener periodischer Lösungen x_1 und x_2 von (f) mit Perioden in $(1, 2)$ höchstens $\frac{1}{2}$, wenn die Krümmung beider Orbit Spuren Γ_1 und Γ_2 auf der positiven ersten Achse zu- oder abnimmt. Ausserdem liefert dieser Satz, dass Γ_1 oder Γ_2 keinen Scheitel, d.h. ein Krümmungsextremum, auf der ersten Achse hat.

Unser allgemeiner Ansatz zum Vergleich periodischer Lösungen ist nicht nur für Gleichungen der Form (μ, f) relevant, sondern für alle Gleichungsklassen, deren periodische Lösungen x mit Periode T Jordan-Kurven

$$\gamma_x : [0, T] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ \dot{x}(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

liefern. Insbesondere ist dies bei der *Wechselkursgleichung*

$$(f, \alpha) \quad \dot{x}(t) = f(x(t)) - \alpha x(t-1), \quad \alpha > 0,$$

der Fall, wobei (f, α) im Gegensatz zu (μ, f) eine unmittelbare Rückkopplung durch die stetig differenzierbare Nichtlinearität $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ repräsentiert wird und der verzögerte Term linear ist; siehe dazu BRUNOVSKÝ, ERDÉLYI & WALTHER [4]. Die Funktion f ist dabei durch

$$f(x) = \alpha x - |x|x$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gegeben, besitzt also auf $[-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ die Eigenschaften (H1) und (H2), desweiteren ist die Ableitung f' auf \mathbb{R}^- bzw. \mathbb{R}^+ streng monoton. Es gelten $f(0) = 0 = f(-\alpha) = f(\alpha)$ und $f'(0) = \alpha$.

Kapitel 2

Hyperbolizität eines periodischen Orbits

Nachdem wir in Kapitel 1 verschiedene periodische Lösungen von

$$(f) \quad \dot{x}(t) = f(x(t-1))$$

unter Annahme der beiden Voraussetzungen

(H1) Die Funktion f sei stetig differenzierbar mit $f' > 0$ und $f(0) = 0$.

(H2) Es sei f stetig differenzierbar und für

$$h : \mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{x \cdot f'(x)}{f(x)} \in \mathbb{R}^+$$

seien $h|_{\mathbb{R}^+}$ streng monoton fallend und $h|_{\mathbb{R}^-}$ streng monoton wachsend.

verglichen und neben einer Periodenabschätzung die Eindeutigkeit für eine gewisse Klasse von Orbits bewiesen haben, stellt sich nun die Frage, wie die Dynamik in der Nähe eines gegebenen periodischen Orbits von (f) im Phasenraum \mathcal{C} untersucht werden kann: Ist $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine periodische Lösung von (f) mit kleinster Periode T , so kann diese Untersuchung wie bei einer gewöhnlichen Differentialgleichung, siehe z.B. AMANN [1], anhand der *Floquet-Multiplikatoren* von x bewerkstelligt werden.

Wie im gewöhnlichen Fall ist es i.a. schwierig, die Floquet-Multiplikatoren einer periodischen Lösung zu bestimmen; im folgenden Abschnitt 2.1 können wir diese Schwierigkeit an der Definition der Floquet-Zahlen erkennen, zu deren Bestimmung im Prinzip die Lösung der Variationsgleichung

$$\dot{y}(t) = f'(x(t-1))y(t-1)$$

von (f) längs x (siehe Bemerkung 1.3.3) bekannt sein muss, denn die Floquet-Multiplikatoren von x sind die nicht-verschwindenden Eigenwerte des Zeit- T -Lösungsoperators der Variationsgleichung von (f) längs x .

Um über letzteren Aussagen zu gewinnen, sind gewisse, unten aufgeführte Symmetrieeigenschaften von x hilfreich.

Wie in der Einleitung erwähnt, beinhalten die meisten Existenzresultate für periodische Lösungen von (f) jedoch ein Fixpunktargument, sind daher nicht konstruktiv und liefern keine Aussagen über die Beschaffenheit der gefundenen periodischen Lösung x .

Es ist allerdings bei einer beschränkten, *ungeraden* und im Punkt 0 steilen Nichtlinearität f möglich, eine periodische Lösung x von (f) der Periode $\frac{4}{3}$ zu finden, die dann nach Satz 1.5.2 der Symmetriebedingung $x = -x(\cdot - \frac{2}{3})$ genügt. Im folgenden sehen wir, dass diese Zusatzeigenschaften eine Untersuchung der Floquet-Multiplikatoren von x ermöglichen.

Um die Existenz von x bei ungeradem f zu zeigen, verwenden wir einen Satz von KAPLAN & YORKE [29]. In diesem wird die Existenz einer langsam schwingenden 4-periodischen Lösung

$$y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

bei einer verzögerten negativen Rückkopplung um die Ruhelage 0 gezeigt, beschrieben durch Gleichung

$$(-f) \quad \dot{x}(t) = -f(x(t-1)).$$

Die essentielle Symmetrievoraussetzung an f ermöglicht es dabei gegenüber den angesprochenen nicht-konstruktiven Fixpunkt-Argumenten, siehe z.B. eine Anwendung des Satzes von Schauder bei WALTHER [49], das Existenz-Problem der verzögerten Gleichung auf das Finden von periodischen Lösungen eines zweidimensionalen Hamiltonschen Systems gewöhnlicher Gleichungen zurückzuführen; die somit gefundene 4-periodische langsam schwingende Lösung können wir dann auf eine $\frac{4}{3}$ -periodische schnell schwingende Lösung x von $(f) = (0, f, 1, 1)$ transformieren; siehe dazu Satz 2.0.1.

Lemma 2.0.1 (Kaplan & Yorke [29], Theorem 1.1) *Für die ungerade stetige Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gelte $x \cdot g(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, die Grenzwerte*

$$\alpha := \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \quad \text{und} \quad \beta := \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

seien existent mit

$$\alpha > \frac{\pi}{2} > \beta.$$

Dann gibt es eine 4-periodische Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$(-g) \quad \dot{x}(t) = -g(x(t-1)),$$

die eine Nullstelle hat. Setzen wir

$$G : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -g(v) \\ g(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

so ist die Kurve

$$\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} y(t) \\ y(t-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{\xi} = G(\xi)$. ■

Bei KAPLAN & YORKE [29] wird im Beweis dieser Aussage zusätzlich $\int_0^\infty g(x)dx = \infty$ benutzt. Eine solche Voraussetzung bleibt in Lemma 2.0.1 unberücksichtigt, weil NUSSBAUM in [44] gezeigt hat, dass sie überflüssig ist.

Erfüllt die Funktion g Eigenschaft (H1) ohne notwendig ungerade zu sein, wird in WALTHER [49] wie oben erwähnt die Existenz einer langsam schwingenden periodischen Lösung mittels des Schauder'schen Fixpunktsatzes bewiesen. Auch dort wird neben der Beschränktheit von f eine gewisse *Steilheit* $\alpha = g'(0)$ von g im Ruhepunkt benötigt, um bei der Suche nach Fixpunkten den trivialen auszuschließen. In diesem Sinne ergänzen wir die Voraussetzungen (H1) und (H2) durch

(H3) Es sei f stetig differenzierbar und beschränkt mit $f'(0) > \frac{3}{2}\pi$.

Wir beweisen nun mittels Lemma 2.0.1 die Existenz der $\frac{4}{3}$ -periodischen symmetrischen Lösung x von (f), deren Floquet-Multiplikatoren wir untersuchen werden.

Satz 2.0.1 Die ungerade Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle (H1), (H2) und (H3); es sei

$$F : \mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} f(v) \\ -f(u) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Dann gibt es eine ungerade periodische Lösung

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

von (f) mit minimaler Periode $\frac{4}{3}$, Symmetrieeigenschaft

$$(S) \quad x = -x \left(\cdot - \frac{2}{3} \right)$$

(siehe Abbildung 2.2), und es gilt

$$(x) \quad x(0) = 0, \quad \dot{x}(0) < 0, \quad x|_{(-\frac{2}{3}, 0)} > 0, \quad x|_{(-1, -\frac{2}{3})} < 0, \quad \dot{x}|_{(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})} < 0$$

(vgl. Abbildung 2.1). Desweiteren ist die Kurve

$$\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x(t) \\ x(t-1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

eine Lösung der gewöhnlichen Differentialgleichung $\dot{\xi}(t) = F(\xi)$.

Beweis: Wir wenden Lemma 2.0.1 auf die ungerade, stetige Funktion $g := \frac{1}{3} \cdot f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ an. Wegen (H1) gilt $x \cdot g(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, und (H3) erlaubt die Abschätzungen

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = g'(0) = \frac{1}{3}f'(0) > \frac{\pi}{2} > 0 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = \beta,$$

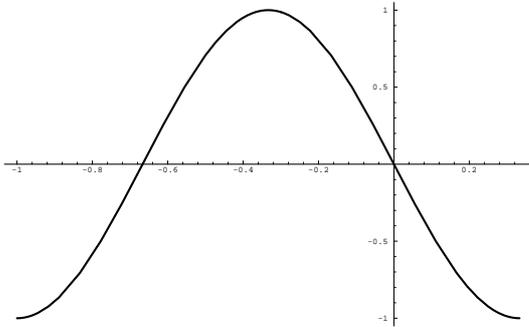


Abbildung 2.1: Graph der $\frac{4}{3}$ -periodischen Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ auf dem Periodenintervall $[-1, \frac{1}{3}]$.

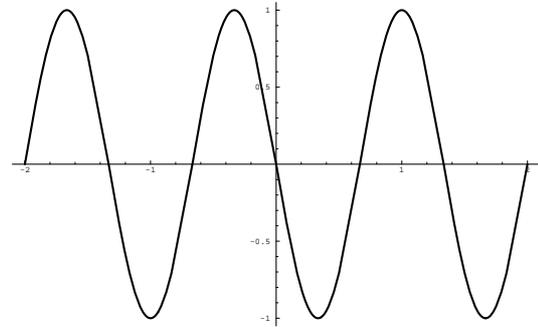


Abbildung 2.2: Die periodische und ungerade Lösung x hat die Symmetrieeigenschaft (S).

wobei die auftretenden Grenzwerte existieren. Somit gibt es nach Lemma 2.0.1 eine 4-periodische Lösung $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $(-g) = (-\frac{1}{3}f) = (0, -\frac{1}{3}f, 1, 1)$ mit Nullstelle $s_0 \in \mathbb{R}$. Wir definieren

$$z : \mathbb{R} \ni t \mapsto y(-t) \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion z hat ebenfalls eine kleinste Periode von 4 und ist wegen

$$\dot{z}(t) = -\dot{y}(-t) = \frac{1}{3}f(y(-t-1)) = \frac{1}{3}f(z(t+1)) = \frac{1}{3}f(z(t-3))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ eine periodische Lösung der Gleichung $(0, \frac{1}{3}f, 1, 3)$. Nach Bemerkung 1.4.1.2 definiert dann

$$\hat{x} : \mathbb{R} \ni t \mapsto z(3t) \in \mathbb{R}$$

eine periodische Lösung von $(0, f, 1, 1)$ mit kleinster Periode $\frac{4}{3}$.

Satz 1.5.2 liefert

$$\hat{x} = -\hat{x} \left(\cdot - \frac{2}{3} \right).$$

Wir setzen $t_0 := -\frac{s_0}{3}$. Diese Zahl ist wegen $\hat{x}(t_0) = z(-s_0) = y(s_0) = 0$ eine Nullstelle von \hat{x} . Nach Folgerung 1.4.1 gilt $\hat{x}(t_0) \neq 0$, und sowohl \hat{x} als auch \hat{x} haben nach Bemerkung 1.6.1 einen konstanten Nullstellenabstand von $\frac{4}{3} = \frac{2}{3}$. Wiederum Folgerung 1.4.1 gibt zum

einen

$$\hat{x}|_{(t_0, t_0 + \frac{2}{3})} > 0 \quad \text{und} \quad \hat{x}|_{(t_0 + \frac{2}{3}, t_0 + \frac{4}{3})} < 0,$$

zum anderen

$$\dot{\hat{x}}|_{(t_0 - \frac{1}{3}, t_0 + \frac{1}{3})} > 0 \quad \text{und} \quad \dot{\hat{x}}|_{(t_0 + \frac{1}{3}, t_0 + 1)} < 0.$$

Also haben wir mit der Symmetriebedingung $\dot{\hat{x}} = -\dot{\hat{x}}(\cdot - \frac{2}{3})$

$$\dot{\hat{x}}|_{(t_0 - 1, t_0 - \frac{1}{3})} < 0 \quad \text{und} \quad \dot{\hat{x}}|_{(t_0 - \frac{1}{3}, t_0 + \frac{1}{3})} > 0.$$

Wir definieren

$$x := \hat{x}\left(\cdot + t_0 + \frac{2}{3}\right) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

und erhalten somit wie gewünscht

$$x|_{(-\frac{2}{3}, 0)} = \hat{x}|_{(t_0, t_0 + \frac{2}{3})} > 0 \quad \text{und} \quad x|_{(-1, -\frac{2}{3})} = \hat{x}|_{(t_0 - \frac{1}{3}, t_0)} = -\hat{x}|_{(t_0 + \frac{1}{3}, t_0 + \frac{2}{3})} < 0.$$

Desweiteren haben wir

$$\dot{x}|_{(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})} = \dot{\hat{x}}|_{(t_0 + \frac{1}{3}, t_0 + 1)} = -\dot{\hat{x}}|_{(t_0 - \frac{1}{3}, t_0 + \frac{1}{3})} < 0,$$

und insgesamt gilt (x) ; ausserdem ist wegen

$$x\left(\cdot - \frac{2}{3}\right) = \hat{x}(\cdot + t_0) = -\hat{x}\left(\cdot + t_0 - \frac{2}{3}\right) = -\hat{x}\left(\cdot + t_0 + \frac{2}{3}\right) = -x$$

(S) erfüllt. Die Kurve φ ist wegen (S) und

$$\dot{x}(t-1) = f(x(t-2)) = f\left(x\left(t - \frac{2}{3}\right)\right) = -f(x(t))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ eine Lösung der gewöhnlichen Gleichung $\dot{\xi}(t) = F(\xi)$.

Wir zeigen mit einem Eindeutigkeitsargument, dass die periodische Lösung x eine ungerade Funktion ist, d.h. es ist $x(-t) = -x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ zu beweisen. Wir betrachten dazu die Translierte $y := x(\cdot + \frac{1}{3})$ und mit $z := x(-1) < 0$ das gewöhnliche zweidimensionale Anfangswertproblem

$$\dot{\xi} = -F(\xi), \quad \xi(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

Wir betrachten die Kurven

$$\varphi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} x(-t) \\ y(-t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{und} \quad \psi : \mathbb{R} \ni t \mapsto \begin{pmatrix} -x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Wir haben mit (S) für alle $t \in \mathbb{R}$ zum einen

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} -\dot{x}(-t) \\ -\dot{y}(-t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x(-t-1)) \\ -\dot{x}(-t + \frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x(-t + \frac{1}{3})) \\ -f(x(-t + \frac{1}{3} - 1)) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -f(y(-t)) \\ -f(x(-t - \frac{2}{3})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(y(-t)) \\ f(x(-t)) \end{pmatrix} = -F(x(-t), y(-t)) = -F(\varphi(t))$$

und zum anderen

$$\begin{aligned} \dot{\psi}(t) &= \begin{pmatrix} -\dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x(t-1)) \\ \dot{x}(t + \frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(x(t + \frac{1}{3})) \\ f(x(t + \frac{1}{3} - 1)) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -f(y(t)) \\ f(x(t - \frac{2}{3})) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f(y(t)) \\ f(-x(t)) \end{pmatrix} = -F(-x(t), y(t)) = -F(\psi(t)). \end{aligned}$$

Die Auswertungen von φ und ψ bei 0 ergeben

$$\varphi(0) = \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \psi(0) = \begin{pmatrix} -x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \end{pmatrix}.$$

Daher sind sowohl φ als auch ψ Lösungen des Anfangswertproblems (2.1) und müssen wegen der Eindeutigkeit solcher Lösungen gleich sein. Insbesondere gilt $x(-t) = -x(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. ■

Nachdem im folgenden Abschnitt 2.1 die Floquet-Multiplikatoren der $\frac{4}{3}$ -periodischen Lösung x definiert werden, ermöglicht die spezielle Form von x eine Konstruktion der in der Einleitung beschriebenen charakteristischen Funktion

$$q : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C},$$

deren Nullstellenquadrate sich als Floquet-Multiplikatoren von x herausstellen werden. Sowohl bei der Konstruktion von q als auch bei den Beweisen der Eigenschaften von q gehen wir wie in WALTHER [51] vor.

Wir halten zunächst die Holomorphie von q fest, übernehmen dann aus WALTHER [51] in den Abschnitten 2.2 und 2.3 die Beweisvorbereitung für Satz 2.4.2, mit dessen Hilfe sich algebraische Vielfachheiten als Nullstellenordnungen interpretieren lassen.

Im letzten Abschnitt 2.5 beweisen wir anhand einer Auswertung von q unser Hauptresultat: Die spezielle periodische Lösung x ist *hyperbolisch*, d.h. die Zahl 1 ist ein *einfacher* Floquet-Multiplikator von x , und alle anderen Multiplikatoren liegen nicht auf der komplexen Einheitsphäre.

2.1 Floquet-Multiplikatoren und Hyperbolizität

Im folgenden soll f den Voraussetzungen (H1), (H2) und (H3) genügen. Um das Verhalten von Lösungen der Gleichung

$$\dot{x}(t) = f(x(t-1)) = f \circ \text{ev}_{-1}(x_t)$$

in der Nähe von stationären oder periodischen Lösungen x zu untersuchen, betrachten wir üblicherweise die nicht-autonome, bei x linearisierte Gleichung

$$\dot{y}(t) = D(f \circ \text{ev}_{-1})(x_t)y_t = Df(x_t(-1))\text{ev}_{-1}y_t = f'(x(t-1))y(t-1),$$

die auch in Bemerkung 1.3.3.3 erwähnt wird. Für $\varphi \in \mathcal{C}$ bezeichne x^φ die Lösung von (f) mit Startwert φ gemäss Definition 1.2.1.

Definition 2.1.1 *Es sei $\varphi \in \mathcal{C}$. Dann heisst*

$$(y) \quad \dot{y}(t) = f'(x(t-1))y(t-1)$$

Variationsgleichung von (f) längs x . □

Anmerkung 2.1.1 *Nach Satz 1.2.1 gibt es zu ψ in \mathcal{C} genau eine Lösung y^ψ der Variationsgleichung längs des periodischen Orbits x . Es sei $(T(t))_{t \in \mathbb{R}_0^+}$ die zugehörige Familie von Lösungsoperatoren,*

$$T(t) : \mathcal{C} \ni \psi \mapsto y_t^\psi \in \mathcal{C}.$$

Die Linearität der Variationsgleichung und die Eindeutigkeit von Lösungen von (y) bei vorgegebenem Startwert liefert die Linearität der Operatoren $T(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$. Aus der Definition einer Lösung von (y) folgt $T(t)\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}^1$ für alle $t \in (1, \infty)$. ■

Für $\psi \in \mathcal{C}$ ist die Lösung y^ψ via sukzessiver Integration gegeben durch

$$y^\psi(t) = y(t) = y(n) + \int_n^t f'(x(s-1))y(s-1)ds, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad t \in [n, n+1].$$

Diese liefert mit vollständiger Induktion die folgende Abschätzung.

Anmerkung 2.1.2 *Die Menge $x(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}$ ist kompakt, und (H1) ermöglicht die Definition von $d := \max f'(x(\mathbb{R})) > 0$. Dann folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und $t \in [n, n+1]$ die Abschätzung*

$$|y^\psi(t)| = |y(t)| \leq 2\|\psi\| \cdot (1+d)^n$$

und daher zunächst für alle $t \geq 0$

$$|y^\psi(t)| = |y(t)| \leq 2\|\psi\| \cdot (1+d)^{t+1},$$

wobei diese Ungleichung sogar für alle $t \geq -1$ erfüllt ist. Insbesondere ist der lineare Operator $T(t)$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ beschränkt. ■

Eine elementare Anwendung des Satzes von Arzelá-Ascoli ermöglicht es nun im folgenden, die *Kompaktheit* der Operatoren $T(t) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ für alle $t \geq 1$ zu beweisen: Diese bilden beschränkte Mengen in \mathcal{C} auf Mengen ab, deren Abschluss kompakt in \mathcal{C} liegt.

Bemerkung 2.1.1 *Die Lösungsoperatoren*

$$T(t) : \mathcal{C} \ni \psi \mapsto y_t^\psi \in \mathcal{C}$$

sind für $t \geq 1$ kompakt.

Beweis: Es sei $\Omega \subseteq \mathcal{C}$ beschränkt durch $c \in \mathbb{R}^+$. Wir haben zu zeigen, dass der Abschluss von $T(t)\Omega$ kompakt in \mathcal{C} ist. Zunächst begründen wir die Beschränktheit von $\bigcup_{\tau \in [0, t]} T(\tau)\Omega \subseteq \mathcal{C}$ für alle $t \geq 1$. Dazu sei $\psi \in \bigcup_{\tau \in [0, t]} T(\tau)\Omega$ gegeben, d.h. es gibt $\varphi \in \Omega$ und $\tau \in [0, t]$ mit $\psi = T(\tau)\varphi = y_\tau^\varphi$. Anmerkung 2.1.2 hat dann

$$\|\psi\| \leq 2\|\varphi\|(1+d)^{t+1}$$

zur Folge; dabei sei $d := \max f'(x(\mathbb{R})) > 0$. Daher ist die Menge $\dot{y}^\varphi([0, t])$ für alle $t \geq 1$ gleichmässig in $\varphi \in \Omega$ beschränkt durch $d \cdot 2c(1+d)^{t+1}$.

Die Beschränktheit von $\bigcup_{\tau \in [0, t]} T(\tau)\Omega$, $t \geq 1$, liefert die Beschränktheit der Menge

$$\mathcal{M}_t := \{y^\varphi|_{[0, t]} \in \mathcal{C}([0, t], \mathbb{R}) : \varphi \in \Omega\}$$

für jedes $t \geq 1$. Es seien $\varphi \in \Omega$, $t \geq 1$, $s \in [0, t]$ und $\varepsilon > 0$ sowie

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2cd(1+d)^{t+1}}.$$

Dann folgt mit der oben gezeigten gleichmässigen Beschränktheit von $\dot{y}^\varphi([0, t])$ aus $\tau \in [0, t]$ mit $|\tau - s| < \delta$ sowie $y^\varphi|_{[0, t]} \in \mathcal{M}_t$

$$|y^\varphi(\tau) - y^\varphi(s)| \leq 2cd(1+d)^{t+1} \cdot |\tau - s| < \varepsilon,$$

d.h. für alle $t \geq 1$ ist \mathcal{M}_t gleichgradig stetig. Der Satz von Arzelá-Ascoli liefert somit die Kompaktheit von $\overline{\mathcal{M}_t}$ für alle $t \geq 1$.

Wir beweisen nun für

$$\widetilde{\mathcal{M}_t} := \{y_t^\varphi : \varphi \in \Omega\}, \quad t \geq 1,$$

die Kompaktheit von $\widetilde{\mathcal{M}_t}$ für alle $t \geq 1$. Es seien dazu $t \geq 1$ und $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in Ω . Dann ist $(y_t^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in $\widetilde{\mathcal{M}_t}$, und wir haben zu zeigen, dass sie eine konvergente Teilfolge besitzt. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $\psi_n := y^{\varphi_n}|_{[0, t]}$. Somit ist $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge in \mathcal{M}_t und besitzt wegen der Kompaktheit von $\overline{\mathcal{M}_t}$ eine konvergente Teilfolge $(\psi_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \psi_{n_k} =: z \in \mathcal{C}([0, t], \mathbb{R})$. Wegen $t \geq 1$ ist

$$[w : [-1, 0] \ni \theta \mapsto z(t + \theta) \in \mathbb{R}] \in \mathcal{C}$$

definiert. Es folgt für alle $k \in \mathbb{N}$ unter Berücksichtigung von $[t - 1, t] \subseteq [0, t]$

$$\|y_t^{\varphi_{n_k}} - w\| = \max_{\tau \in [-1, 0]} |y_t^{\varphi_{n_k}}(\tau) - w(\tau)| = \max_{\tau \in [-1, 0]} |y^{\varphi_{n_k}}(t + \tau) - z(t + \tau)| =$$

$$= \max_{\tau \in [t-1, t]} |y^{\varphi_{n_k}}(\tau) - z(\tau)| \leq \max_{\tau \in [0, t]} |y^{\varphi_{n_k}}(\tau) - z(\tau)| = \|y^{\varphi_{n_k}} - z\|,$$

also haben wir $\lim_{k \rightarrow \infty} \|y_t^{\varphi_{n_k}} - w\| = 0$, d.h. $(y_t^{\varphi_n})_{n \in \mathbb{N}}$ hat eine konvergente Teilfolge, und $\overline{\mathcal{M}_t}$ ist kompakt. Damit erkennen wir schliesslich wegen $T(t)\Omega \subseteq \widetilde{\mathcal{M}_t}$, $t \geq 1$, die Kompaktheit von $\overline{T(t)\Omega}$, $t \geq 1$, was zu zeigen war. ■

Wie bei gewöhnlichen, zeitperiodischen linearen Differentialgleichungen definieren wir:

Definition 2.1.2 *Die Periodenabbildung*

$$V := T\left(\frac{4}{3}\right) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

heisst Monodromieoperator von x .

Zur Untersuchung des Monodromieoperators V benötigen wir im folgenden einige elementare funktionalanalytische Tatsachen, die z.B. in HEUSER [22] oder DUNFORD & SCHWARTZ [14] zu finden sind.

Durch eine Komplexifizierung des reellen Zustandsraums \mathcal{C} erhalten wir den \mathbb{C} -Vektorraum $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$, der bis auf Normisomorphie mit dem \mathbb{C} -Raum $\mathcal{C}([-1, 0], \mathbb{C})$ aller stetigen, auf $[-1, 0]$ definierten und komplexwertigen Funktionen übereinstimmt. Die Komplexifizierung

$$V_{\mathbb{C}} : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$$

des Operators $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ ist gegeben durch

$$V_{\mathbb{C}} : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \ni \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \mapsto V\varphi_1 + iV\varphi_2 \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$$

und Element der komplexen Banachalgebra $\mathcal{L}_c(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}, \mathcal{C}_{\mathbb{C}})$ mit Einselement $\text{id} \neq 0$. Das Komplement der Resolventenmenge

$$\rho(V_{\mathbb{C}}) := \{z \in \mathbb{C} : (z \cdot \text{id} - V_{\mathbb{C}})^{-1} \text{ existiert in } \mathcal{L}_c(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}, \mathcal{C}_{\mathbb{C}})\}$$

in \mathbb{C} ist das Spektrum von $V_{\mathbb{C}}$ und wird mit $\sigma(V_{\mathbb{C}})$ bezeichnet. Die Menge $\sigma(V_{\mathbb{C}})$ ist nicht leer und kompakt in \mathbb{C} . Für alle $z \in \mathbb{C}$ ist

$$\bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{N} [(V_{\mathbb{C}} - z \cdot \text{id})^l]$$

ein \mathbb{C} -linearer Teilraum von $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$, weil die Kerniterierten eine aufsteigende Mengenfolge in $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ bilden. Die anschliessende Definition macht daher Sinn.

Definition 2.1.3 *Das Spektrum von V ist das Spektrum der Komplexifizierung $V_{\mathbb{C}} : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ und wird mit Σ bezeichnet:*

$$\Sigma := \sigma(V) := \sigma(V_{\mathbb{C}}) \subseteq \mathbb{C}.$$

Es sei $z \in \mathbb{C}^*$. Dann heisst der \mathbb{C} -lineare Raum

$$G^V(z) := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{N} [(V_{\mathbb{C}} - z \cdot \text{id})^l]$$

verallgemeinerter Eigenraum von V in z , und

$$M : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto \dim G^V(z) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

heisst algebraische Vielfachheit. □

Natürlich ist es uninteressant, verallgemeinerte Eigenräume für Punkte $z \in \mathbb{C}^*$ zu untersuchen, die nicht im Spektrum liegen:

Anmerkung 2.1.3 Für $z \notin \Sigma$ haben wir $G^V(z) = \{0\}$ und $M(z) = 0$. ■

Nach Bemerkung 2.1.1 ist der Monodromieoperator V ein kompakter Endomorphismus von \mathcal{C} . Dies überträgt sich auf $V_{\mathbb{C}} : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$, und nach Satz 78.1 in HEUSER [22] ist

$$V_{\mathbb{C}} - z \cdot \text{id} : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$$

für alle $z \in \mathbb{C}^*$ insbesondere ein kettenendlicher Operator; die endliche Kettenlänge von $V_{\mathbb{C}} - z \cdot \text{id}$, also die kleinste Zahl aus \mathbb{N}_0 , bei der sich die Kernfolge stabilisiert, bezeichnen wir mit $\alpha(V_{\mathbb{C}} - z \cdot \text{id})$. Unter Berücksichtigung der Tatsache, dass alle nichtverschwindenden Spektralpunkte eines kompakten Operators isolierte Eigenwerte sind, können wir zusammenfassen:

Bemerkung 2.1.2 Der Monodromieoperator V ist ein kompakter Endomorphismus von \mathcal{C} , und alle Punkte in $\Sigma \setminus \{0\}$ sind Eigenwerte von V . Diese Punkte sind zudem isoliert, und es gilt sowohl

$$M(z) \in \mathbb{N}_0 \quad \text{als auch} \quad \alpha(V_{\mathbb{C}} - z \cdot \text{id}) \in \mathbb{N}_0$$

für alle $z \in \mathbb{C}^*$. ■

Wie im Endlichdimensionalen, also bei gewöhnlichen Gleichungen, hängt die Dynamik von den Eigenwerten der Linearisierung ab, die wiederum durch ihre Spektralpunkte bestimmt ist.

Definition 2.1.4 Die Eigenwerte aus $\Sigma \setminus \{0\}$ heissen Floquet-Multiplikatoren von x oder charakteristische Multiplikatoren von x . □

Bevor wir in den nächsten Abschnitten mit einer genaueren Untersuchung der Floquet-Multiplikatoren von x beginnen, finden wir zwei solche Eigenwerte samt zugehörigen Eigenvektoren. Die dabei benötigten Aussagen hängen von Eigenschaften der schon in Abschnitt 1.3 eingeführte Menge

$$\mathcal{K} = \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi \geq 0\}$$

ab. Nach (H1) beschreibt die Variationsgleichung (y) eine positive Rückkopplung, für die das monotone Wachsen einer Lösung, die in \mathcal{K} startet, charakteristisch ist. In der folgenden Bemerkung halten wir u.a. diesen Sachverhalt neben einigen leicht einzusehenden, grundlegenden Eigenschaften von \mathcal{K} fest.

Bemerkung 2.1.3 Es seien $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ der Monodromieoperator der $\frac{4}{3}$ -periodischen Lösung x und $\mathcal{K}^* := \mathcal{K} \setminus \{0\}$.

1. Die Menge \mathcal{K} ist abgeschlossen in \mathcal{C} .
2. Für das Innere von \mathcal{K} gilt $\text{int}(\mathcal{K}) = \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi > 0\}$.
3. Die Menge \mathcal{K} ist kegelförmig, d.h. es gilt $\mathbb{R}_0^+ \mathcal{K} = \mathcal{K}$, zudem $\mathbb{R}^+ \text{int}(\mathcal{K}) = \text{int}(\mathcal{K})$.
4. Für alle $t \in \mathbb{R}_0^+$ ist \mathcal{K} invariant unter $T(t)$, d.h. $T(t)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$; insbesondere ist \mathcal{K} invariant unter V , d.h.

$$V(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}.$$

5. Für alle $\varphi \in \mathcal{K}$ ist die Lösungseinschränkung $y^\varphi|_{\mathbb{R}_0^+}$ monoton wachsend.
6. Es gilt $T(t)(\mathcal{K}^*) \subseteq \text{int}(\mathcal{K})$ für alle $t \geq 2$, insbesondere

$$V^2(\mathcal{K}^*) \subseteq \text{int}(\mathcal{K}).$$

Beweis:

1. Ist $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen $\varphi \in \mathcal{C}$ konvergente Folge in \mathcal{K} , so ergibt sich mit der Abgeschlossenheit von \mathbb{R}_0^+

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t) = \varphi(t) \in \mathbb{R}_0^+$$

für alle $t \in [-1, 0]$. Dies bedeutet $\varphi \in \mathcal{K}$.

2. Es sei zunächst $\varphi \in \text{int}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$, dann existiert $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(\varphi) \subseteq \mathcal{K}$. Angenommen, es gibt $s \in [-1, 0]$ mit $\varphi(s) = 0$, so setzen wir $\psi := \varphi - \frac{\varepsilon}{2}$, wobei wegen $\psi(s) = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$ die Funktion ψ kein Element von \mathcal{K} ist. Widersprüchlicherweise gilt dann aber $\|\varphi - \psi\| = \max_{t \in [-1, 0]} |\varphi(t) - \psi(t)| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$ und $\psi \in U_\varepsilon(\varphi) \subseteq \mathcal{K}$, folglich haben wir $\text{int}(\mathcal{K}) \subseteq \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi > 0\}$.

Es sei umgekehrt $\varphi \in \{\varphi \in \mathcal{C} : \varphi > 0\}$. Wir setzen $\varepsilon := \min_{t \in [-1, 0]} \varphi(t) > 0$ und wählen $\psi \in U_\varepsilon(\varphi)$. Aus $\|\psi - \varphi\| < \varepsilon$ folgt $|\psi(t) - \varphi(t)| < \varepsilon$ für alle $t \in [-1, 0]$. Wäre $\psi(s) < 0$ für ein $s \in [-1, 0]$, so erhielten wir damit aus $\varphi(s) - \psi(s) = |\psi(s) - \varphi(s)| < \varepsilon$ die zu $\psi(s) < 0$ widersprüchliche Aussage $\varepsilon - \psi(s) \leq \varphi(s) - \psi(s) < \varepsilon$. Also muß ψ nicht-negativ sein, $U_\varepsilon(\varphi) \subseteq \mathcal{K}$ und $\varphi \in \text{int}(\mathcal{K})$ gelten.

3. Für $\varphi \in \mathcal{K}$ und $r \in \mathbb{R}_0^+$ haben wir $r \cdot \varphi(t) \geq 0$ für alle $t \in [-1, 0]$, also $r\varphi \in \mathcal{K}$. Mit $\mathcal{K} = 1 \cdot \mathcal{K} \subseteq \mathbb{R}_0^+ \mathcal{K}$ folgt die erste Behauptung; die zweite folgt unmittelbar aus dem bewiesenen 2. Teil der Bemerkung.

4. Es seien $\varphi \in \mathcal{K}$ und $t \in [0, 1]$. Dann liefert die Variationsgleichung (y) die Abschätzung $\dot{y}^\varphi(t) = f'(x(t-1))y^\varphi(t-1) = f'(x(t-1))\varphi(t-1) \geq 0$, also $y^\varphi|_{[0,1]} \geq 0$. Dieses ergibt für $s \in [-1, 0]$

$$s + t \in [-1, 1]$$

sowie die Abschätzung

$$T(t)\varphi(s) = y_t^\varphi(s) = y^\varphi(t+s) \geq 0.$$

Folglich haben wir

$$T(t)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \text{ für alle } t \in [0, 1],$$

und in der gleichen Art und Weise können wir sukzessive

$$T(t)\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K} \text{ für alle } t \in [n, n+1] \text{ und alle } n \in \mathbb{N}_0$$

zeigen; damit folgt die Behauptung unter 4. .

5. Es sei $t \in \mathbb{R}_0^+$, also $t-1 \in [-1, \infty)$ und Teil 4. der Bemerkung liefert mit der Variationsgleichung (y)

$$\dot{y}^\varphi(t) = f'(x(t-1))y^\varphi(t-1) = f'(x(t-1))T(t)\varphi(-1) \geq 0,$$

also gilt die behauptete Monotonie.

6. Es sei $\varphi \in \mathcal{K}^*$. Dann gibt es wegen $\varphi \in \mathcal{C}$ ein Intervall $[a, b] \subseteq [-1, 0]$ mit $\varphi|_{[a,b]} > 0$, Gleichung (y) liefert somit $\dot{y}^\varphi|_{[a+1, b+1]} > 0$ und wegen $y^\varphi|_{[-1, a+1]} \geq 0$, siehe 4., gilt $y^\varphi|_{(a+1, b+1]} > 0$. Mit Teil 5. erkennen wir nun $y^\varphi|_{[b+1, \infty)} > 0$, insbesondere $y^\varphi|_{[1, \infty)} > 0$. Daher haben wir für alle $t \geq 2$ und alle $s \in [-1, 0]$

$$T(t)\varphi(s) = y_t^\varphi(s) = y^\varphi(t+s) > 0,$$

was nach 2.

$$T(t)\varphi \in \text{int}(\mathcal{K})$$

bedeutet. ■

Wir können nun zwei charakteristische Multiplikatoren von x finden:

Bemerkung 2.1.4 *Es sei $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ der Monodromieoperator von x mit Spektrum Σ .*

1. *Es ist 1 ein Floquet-Multiplikator von x , also $1 \in \Sigma \setminus \{0\}$, mit Eigenvektor \dot{x}_0 .*
2. *Es gibt einen Floquet-Multiplikator $\lambda \geq 1$ von x mit Eigenvektor $\varphi^+ \in \text{int}(\mathcal{K})$, so dass $\{\dot{x}_0, \varphi^+\}$ linear unabhängig ist.*

Beweis:

1. Die Ableitung \dot{x} ist die Lösung der Variationsgleichung längs x mit Anfangswert \dot{x}_0 und hat eine kleinste Periode $\frac{4}{3}$. Folglich gilt $V\dot{x}_0 = \dot{x}_{\frac{4}{3}} = \dot{x}_0$, also $1 \in \Sigma \setminus \{0\}$.
2. Wir wenden den Fixpunktsatz von Schauder an, um den gesuchten Eigenwert λ samt Eigenvektor $\varphi^+ \in \text{int}(\mathcal{K})$ zu finden.
Die Menge

$$\mathcal{K}_1 := \{\varphi \in \mathcal{K} : \varphi(0) = 1, \text{ und } \varphi \text{ ist monoton wachsend}\}$$

ist abgeschlossen, denn nach Bemerkung 2.1.3 ist \mathcal{K} abgeschlossen und die \mathcal{K}_1 definierenden Ungleichungen bleiben bei einem Grenzprozess bestehen; desweiteren ist \mathcal{K}_1 durch 0 nach unten und 1 nach oben beschränkt.

Wir zeigen, dass \mathcal{K}_1 konvex ist. Dazu seien φ und ψ aus \mathcal{K}_1 und

$$\chi(t) := t\psi + (1-t)\varphi \in \mathcal{K}$$

für $t \in [0, 1]$. Desweiteren sind für $t \in [0, 1]$ die \mathcal{K}_1 -charakteristischen Eigenschaften erfüllt: $\chi(t)(0) = t + 1 - t = 1$; $\chi(t)$ ist monoton wachsend, weil nicht-negative Vielfache und Summen monoton wachsender Funktionen wieder monoton wachsend sind. Insgesamt folgt, dass

$$\mathcal{K}_1 \text{ abgeschlossen und konvex} \tag{2.1}$$

ist.

Wir betrachten die Abbildung

$$V_1 : \mathcal{K}_1 \ni \varphi \mapsto \frac{1}{y^\varphi\left(\frac{4}{3}\right)} V\varphi \in \mathcal{C}.$$

Zunächst wollen wir zeigen, dass V_1 eine definierte Selbstabbildung von \mathcal{K}_1 ist. Dazu erkennen wir mit den Bemerkungen 2.1.3.4. und 2.1.3.5. für alle $\varphi \in \mathcal{K}_1$

$$V\varphi \in \mathcal{K}, V\varphi(0) = y^{\frac{\varphi}{3}}(0) = y^\varphi\left(\frac{4}{3}\right) \geq y^\varphi(0) = \varphi(0) = 1 > 0,$$

und es gilt mit derselben Bemerkung $V_1\varphi = \frac{1}{y^\varphi\left(\frac{4}{3}\right)} V\varphi \in \mathbb{R}_0^+ \mathcal{K} = \mathcal{K}$, also $V_1\varphi \in \mathcal{K}$. Weil nach Bemerkung 2.1.3.5. und $\frac{1}{y^\varphi\left(\frac{4}{3}\right)} > 0$ das monotone Wachsen von $V_1\varphi$ folgt und $V_1\varphi(0) = 1$ gilt, erhalten wir

$$V_1\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K}_1. \tag{2.2}$$

Nun zeigen wir, daß $V_1(\mathcal{K}_1)$ eine relativ-kompakte Menge in \mathcal{K} ist. Die Stetigkeit der Operatoren $T(t)$ für $t \in \mathbb{R}_0^+$ erlaubt es uns, die Konstanten $c_1 := \|T\left(\frac{4}{3}\right)\|$ und

$c_2 := f'(0) \cdot \left\| T\left(\frac{1}{3}\right) \right\|$ zu definieren. Es sei $\varphi \in \mathcal{K}_1$. Wie oben schon erwähnt, ist $y^\varphi|_{\mathbb{R}_0^+}$ monoton wachsend, also gilt insbesondere $y^\varphi\left(\frac{4}{3}\right) \geq y^\varphi(0) = \varphi(0) = 1$. Dann folgt bei Wahl von $\psi \in V_1(\mathcal{K}_1)$ mit $\psi = \frac{1}{y^\varphi\left(\frac{4}{3}\right)} y_{\frac{4}{3}}^\varphi$ für ein $\varphi \in \mathcal{K}_1$ zum einen

$$\|\psi\| = \frac{1}{y^\varphi\left(\frac{4}{3}\right)} \left\| y_{\frac{4}{3}}^\varphi \right\| \leq \left\| T\left(\frac{4}{3}\right) \right\| \cdot \|\varphi\| = \left\| T\left(\frac{4}{3}\right) \right\| = c_1$$

und zum anderen mit der stetigen Differenzierbarkeit von ψ nach Anmerkung 2.1.1

$$\|\dot{\psi}\| = \frac{1}{y^\varphi\left(\frac{4}{3}\right)} \left\| \dot{y}_{\frac{4}{3}}^\varphi \right\| \leq 1 \cdot f'(0) \cdot \left\| y_{\frac{4}{3}}^\varphi \right\| \leq f'(0) \cdot \left\| T\left(\frac{1}{3}\right) \right\| \cdot \|\varphi\| = c_2.$$

Folglich ist $V_1\mathcal{K}_1$ zum einen beschränkt, zum anderen gleichgradig stetig, was mit dem Satz von Arzelá-Ascoli die

$$\text{relative Kompaktheit von } V_1\mathcal{K}_1 \tag{2.3}$$

bedeutet. Die Aussagen (2.1), (2.2) und (2.3) ergeben mit dem Fixpunktsatz von Schauder einen Fixpunkt $\varphi^+ \in \mathcal{K}_1$, also gilt

$$V_1\varphi^+ = \varphi^+,$$

was genau dann der Fall ist, wenn

$$V\varphi^+ = y^{\varphi^+}\left(\frac{4}{3}\right)\varphi^+$$

gilt. Für den gesuchten Floquet-Multiplikator λ setzen wir daher

$$\lambda := y^{\varphi^+}\left(\frac{4}{3}\right) \geq y^{\varphi^+}(0) = \varphi^+(0) = 1.$$

Wegen

$$V^2\varphi^+ = \lambda^2\varphi^+ \quad \text{genau dann, wenn} \quad \varphi^+ = \frac{1}{\lambda^2}V^2\varphi^+$$

und $\varphi^+ \in K^*$ folgt mit den Teilen 3. und 6. von Bemerkung 2.1.3 - wie behauptet - $\varphi^+ \in \text{int}(\mathcal{K})$.

Es ist noch die lineare Unabhängigkeit zu zeigen: Sind a und b aus \mathbb{R} mit $a\dot{x}_0 + b\varphi^+ = 0$ gegeben, so folgt mit Satz 2.0.1 $b = 0$, was dann $a = 0$ nach sich zieht. ■

Wir zitieren nun Corollar 8.4.(i) der Monographie von KRISZTIN, WALTHER & WU [33]. Dort wird festgestellt, dass fast alle Floquet-Multiplikatoren von x im Inneren der komplexen Einheitskreisscheibe liegen. Der Beweis dieser Aussage ist umfangreich, weshalb wir auf die Originalarbeit [33] hierzu verweisen.

Bemerkung 2.1.5 *Alle Floquet-Multiplikatoren von x ausser denen aus Bemerkung 2.1.4 liegen im Innern der Einheitskreisscheibe. D.h. aus*

$$z \in \Sigma \setminus \{0, 1, \lambda\}$$

folgt $|z| < 1$. ■

Definition 2.1.5 *Die periodische Lösung x aus Satz 2.0.1 heisst ausgeartet, falls der Floquet-Multiplikator 1 nicht algebraisch einfach ist, d.h. $M(1) > 1$ gilt. Sie heisst hyperbolisch, wenn nur der Eigenwert 1 auf der komplexen Sphäre $S_{\mathbb{C}}^1$ liegt und nicht ausgeartet ist, also*

$$\Sigma \cap S_{\mathbb{C}}^1 = \{1\} \quad \text{und} \quad M(1) = 1$$

erfüllt sind. □

Wir beweisen in den folgenden Abschnitten, dass die aus Satz 2.0.1 resultierende $\frac{4}{3}$ -periodische Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von

$$(f) \quad \dot{x}(t) = f(x(t-1)),$$

hyperbolisch ist; d.h. der Floquet-Multiplikator 1 ist algebraisch einfach und die restlichen nicht-verschwindenden Spektralpunkte des Monodromieoperators $V = T\left(\frac{4}{3}\right)$ liegen nicht auf dem komplexen Einheitskreis $S_{\mathbb{C}}^1$.

Aus Bemerkung 2.1.5 wissen wir, dass – (H1), (H2) und (H3) vorausgesetzt – a priori alle Floquet-Multiplikatoren, ausser den in Bemerkung 2.1.4 gegebenen 1 und $\lambda \geq 1$, im Inneren der komplexen Einheitskreisscheibe liegen. Demzufolge hätten wir die Hyperbolizität gezeigt, wenn 1 algebraisch einfach ist. Dies zieht dann $\lambda > 1$ nach sich.

Um die Einfachheit zu beweisen, d.h. $M(1) = 1$ zu zeigen, nutzen wir die Symmetrie (S) von x aus und konstruieren in Abschnitt 2.4 gemäss WALTHER [51] die bereits erwähnte charakteristische Funktion

$$q : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$$

der Wurzel W von V , die im nächsten Abschnitt betrachtet wird; dabei sind die Nullstellen-Quadrate von q Floquet-Multiplikatoren von x . Zudem werden wir in Abschnitt 2.4 sehen, dass auch die Vielfachheit eines Multiplikators als Nullstellenordnung von q ausgedrückt werden kann.

2.2 Die Wurzel des Monodromieoperators

Die Variationsgleichung

$$(y) \quad \dot{y}(t) = f'(x(t-1))y(t-1)$$

längs der $\frac{4}{3}$ -periodischen Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ induziert den Monodromie-Operator

$$V := T\left(\frac{4}{3}\right) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C},$$

und es gelten die Symmetrieeigenschaften

$$(S) \quad x = -x \left(\cdot - \frac{2}{3} \right) \quad \text{sowie} \quad \dot{x} = -\dot{x} \left(\cdot - \frac{2}{3} \right).$$

Sie erlauben es, die Hyperbolizität der periodischen Lösung x , also die verbleibende Einfachheit des Floquet-Multiplikators 1, auf die (Spektral-)Eigenschaften des Operators

$$W := T \left(\frac{2}{3} \right) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

zurückzuführen; dabei ist das Spektrum von W – wie gewöhnlich – durch das Spektrum der Komplexifizierung $W_{\mathbb{C}} : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \ni \varphi = \varphi_1 + i\varphi_2 \mapsto W\varphi_1 + iW\varphi_2 \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ gegeben. Wir setzen

$$\sigma := \sigma(W).$$

Die Symmetrie von x nach Satz 2.0.1 liefert $W^2 = V$ und daher

$$W_{\mathbb{C}}^2 := (W_{\mathbb{C}})^2 = (W^2)_{\mathbb{C}} = V_{\mathbb{C}}.$$

Die linearen Operatoren W bzw. $W_{\mathbb{C}}$ können daher als *Wurzel von V* bzw. $V_{\mathbb{C}}$ verstanden werden.

Wie bei der Betrachtung von V führen wir die folgende Bezeichnung ein und machen eine erste Anmerkung.

Bezeichnung 2.2.1 Für $z \in \mathbb{C}^*$ kürzen wir $W_{\mathbb{C}} - z \cdot \text{id}$ durch $W_{\mathbb{C}} - z$ ab und bezeichnen den \mathbb{C} -linearen verallgemeinerten Eigenraum von W in z durch

$$G^W(z) := \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \mathcal{N}[(W_{\mathbb{C}} - z)^l].$$

Die Abbildung

$$m : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto \dim G^W(z) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$$

heißt *algebraische Vielfachheit*. Die Nullkettenlänge von $W_{\mathbb{C}} - z$ für $z \in \mathbb{C}^*$, also ∞ oder die kleinste nicht-negative ganze Zahl k , bei der sich die aufsteigende Kernfolge $\mathcal{N}[(W_{\mathbb{C}} - z)^k]$ stabilisiert, bezeichnen wir mit

$$\alpha(W_{\mathbb{C}} - z) \in \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}.$$

□

Anmerkung 2.2.1 Ist z kein Spektralpunkt von W , d.h. $z \notin \sigma$, so folgt

$$G^W(z) = \{0\} \quad \text{und} \quad m(z) = 0.$$

Falls für $z \in \mathbb{C}^*$ die Nullkettenlänge von $W_{\mathbb{C}} - z$ endlich ist, $\alpha := \alpha(W_{\mathbb{C}} - z) < \infty$, so folgt

$$G^W(z) = \mathcal{N}[(W_{\mathbb{C}} - z)^\alpha].$$

■

Zwar ist $W_{\mathbb{C}}$ im allgemeinen nicht kompakt, jedoch lassen sich aus der Kompaktheit von $W_{\mathbb{C}}^2 = V_{\mathbb{C}}$, siehe Bemerkung 2.1.1, Aussagen über σ beweisen, die denen des Spektrums eines kompakten Operators gleichkommen.

Bemerkung 2.2.1 Für den Zeit- $\frac{2}{3}$ -Operator $W : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ und dessen Spektrum σ gelten die folgenden Aussagen.

1. Alle Punkte in $\sigma \setminus \{0\}$ sind Eigenwerte von $W_{\mathbb{C}}$.
2. Die Punkte von $\sigma \setminus \{0\}$ sind isoliert, und es gilt sowohl

$$m(z) \in \mathbb{N}_0 \quad \text{als auch} \quad \alpha(W_{\mathbb{C}} - z) \in \mathbb{N}_0$$

für alle $z \in \mathbb{C}^*$. Für $z \in \mathbb{C}^*$ hat $W_{\mathbb{C}} - z$ eine endliche, positive Kettenlänge.

3. Die Kettenlänge $\alpha(W_{\mathbb{C}} - z)$ stimmt für alle $z \in \mathbb{C}^*$ mit der Ordnung des Pols der Resolvente von $W_{\mathbb{C}}$ bei z überein.
4. Falls $\dim \mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z) = 1$ für ein $z \in \sigma \setminus \{0\}$, so folgt $m(z) = \alpha(W_{\mathbb{C}} - z)$.

Beweis: Um die ersten drei Punkte zu zeigen, zitieren wir aus den Büchern von DUNFORD & SCHWARTZ [14] und HEUSER [22]. Nach DUNFORD & SCHWARTZ [14] VII.4.5, Theorem 6, sind die Punkte von $\sigma \setminus \{0\}$ isoliert und jeder nicht-verschwindende Spektralpunkt ist ein Pol der Resolvente von $W_{\mathbb{C}}$, desweiteren hat jeder verallgemeinerte Eigenraum eine endliche Dimension.

Satz 101.2 in HEUSER [22] besagt, dass der Punkt $z \in \sigma \setminus \{0\}$ genau dann ein Pol der Resolvente des (stetigen) Operators $W_{\mathbb{C}}$ ist, wenn $W_{\mathbb{C}} - z$ eine endliche, positive Kettenlänge $\alpha(W_{\mathbb{C}} - z)$ besitzt; dabei stimmt $\alpha(W_{\mathbb{C}} - z)$ mit der Polordnung überein, und in diesem Fall muss z ein Eigenwert sein. Insgesamt sind die ersten drei Punkte der Behauptung gezeigt. Wir beweisen schliesslich den vierten Punkt. Es seien dazu $z \in \sigma \setminus \{0\}$, $\alpha := \alpha(W_{\mathbb{C}} - z) \in \mathbb{N}$, $m := m(z) \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{N}_k := \mathcal{N}[(W_{\mathbb{C}} - z)^k]$ für $k \in \mathbb{N}$ sowie nach Voraussetzung

$$\dim \mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z) = 1.$$

Wir haben $m = \dim \mathcal{N}_\alpha$. Für $\alpha = 1$ ist nichts zu zeigen, es sei also $\alpha \geq 2$. Die Glieder der Kernfolge $(\mathcal{N}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ sind endlich-dimensionale Räume, und wegen der Minimalität von α ist der Tupel $(\dim \mathcal{N}_1, \dots, \dim \mathcal{N}_\alpha)$ streng monoton wachsend. Wir nehmen an, es gibt linear unabhängige v und w aus dem Raum

$$(W_{\mathbb{C}} - z)^k \mathcal{N}_{k+1}$$

für ein $k \in \{1, \dots, \alpha - 1\}$, d.h. es gibt v_1 und w_1 aus $\mathcal{N}_{k+1} = \mathcal{N}[(W_{\mathbb{C}} - z)^{k+1}]$ mit

$$v = (W_{\mathbb{C}} - z)^k v_1 \quad \text{und} \quad w = (W_{\mathbb{C}} - z)^k w_1,$$

also

$$(W_{\mathbb{C}} - z)v = 0 = (W_{\mathbb{C}} - z)w,$$

und die linear unabhängigen Vektoren v und w liegen in $\mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z)$; dies widerspricht der Voraussetzung $\dim \mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z) = 1$. Daher ist die Annahme falsch, und es gilt

$$\dim(W_{\mathbb{C}} - z)^k \mathcal{N}_{k+1} = 1 \quad \text{für alle } k \in \{1, \dots, \alpha - 1\}.$$

Es folgt für alle $k \in \{1, \dots, \alpha - 1\}$

$$1 = \dim(W_{\mathbb{C}} - z)^k \mathcal{N}_{k+1} = \dim \mathcal{N}_{k+1} / \mathcal{N}[(W_{\mathbb{C}} - z)^k] = \dim \mathcal{N}_{k+1} / \mathcal{N}_k = \dim \mathcal{N}_{k+1} - \dim \mathcal{N}_k,$$

d.h. die Länge des streng wachsenden Tupels

$$(\dim \mathcal{N}_1, \dots, \dim \mathcal{N}_\alpha) = (1, \dots, \dim \mathcal{N}_\alpha)$$

stimmt mit $\dim \mathcal{N}_\alpha$ überein, was $\alpha = m$ bedeutet. ■

Die nächste Aussage stellt zwischen den algebraischen Vielfachheiten M von V und m von W eine Verbindung her.

Bemerkung 2.2.2 Für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gilt

$$M(z^2) = m(-z) + m(z).$$

Zum Beweis dieser Bemerkung benötigen wir

Lemma 2.2.1 Es seien A ein Endomorphismus des Vektorraums E , p_1 und p_2 komplexe, teilerfremde Polynome. Dann gilt

$$\mathcal{N}[(p_1 p_2)(A)] = \mathcal{N}[p_1(A)] \oplus \mathcal{N}[p_2(A)].$$

Beweis von Lemma 2.2.1: Es sei $\mathbb{C}[\lambda]$ der Hauptidealring der komplexen Polynome. Das Lemma von Bézout liefert zu teilerfremden p_1 und p_2 aus $\mathbb{C}[\lambda]$ zwei Polynome q_1 und q_2 aus $\mathbb{C}[\lambda]$ mit

$$p_1 q_1 + p_2 q_2 = [\mathbb{C} \ni \lambda \mapsto 1 \in \mathbb{C}] =: \mathbf{1}. \quad (2.1)$$

Es seien p und q in $\mathbb{C}[\lambda]$ sowie $\psi \in p(A)\mathcal{N}(q(A))$, d.h. es gibt $\varphi \in \mathcal{N}(q(A))$ mit $\psi = p(A)\varphi$. Damit folgt

$$q(A)\psi = q(A)p(A)\varphi = p(A)q(A)\varphi = p(A)0 = 0,$$

also $\psi \in \mathcal{N}(q(A))$ und zusammen

$$p(A)\mathcal{N}(q(A)) \subseteq \mathcal{N}(q(A)) \quad \text{für alle } p, q \in \mathbb{C}[\lambda]. \quad (2.2)$$

Wir setzen $N := \mathcal{N}[(p_1 p_2)(A)]$ sowie $N_j := \mathcal{N}(p_j(A))$ für $j \in \{1, 2\}$ und zeigen im folgenden

$$N_1 + N_2 = N. \quad (2.3)$$

Ist $\varphi \in N_1$, so folgen $p_1(A)\varphi = 0$ und $p_2(A)p_1(A)\varphi = 0$, also $\varphi \in N$. Genauso impliziert $\varphi \in N_2$, dass $\varphi \in N$ gilt. Somit haben wir $N_j \subseteq N$ für $j \in \{1, 2\}$ und $N_1 + N_2 \subseteq N$.

Ist umgekehrt $\varphi \in N$, so erhalten wir sowohl mit (2.2) als auch mit $p_2(A)\varphi \in N_1$ und $p_1(A)\varphi \in N_2$

$$\varphi_1 := q_2(A)p_2(A)\varphi \in N_1 \text{ und } \varphi_2 := q_1(A)p_1(A)\varphi \in N_2.$$

und folgern mit (2.1)

$$\varphi = \text{id}(\varphi) = \mathbf{1}(A)(\varphi) = (p_2q_2 + p_1q_1)(A)(\varphi) = \varphi_1 + \varphi_2 \in N_1 + N_2,$$

was $N \subseteq N_1 + N_2$ zeigt.

Um zu beweisen, dass die Summe (2.3) direkt ist, verwenden wir erneut (2.1). Es sei $\varphi \in N_1 \cap N_2$. Dann folgen

$$\varphi = p_1(A)q_1(A)\varphi + p_2(A)q_2(A)\varphi = 0 + 0 = 0$$

und $N_1 \cap N_2 = \{0\}$. ■

Beweis von Bemerkung 2.2.2: Zunächst halten wir

$$z \in \mathbb{C}^*, \quad a^+ := \alpha(W_{\mathbb{C}} - z) \in \mathbb{N}_0, \quad a^- := \alpha(W_{\mathbb{C}} + z) \in \mathbb{N}_0 \quad \text{und} \quad a := \alpha(V_{\mathbb{C}} - z^2) \in \mathbb{N}_0$$

fest. Dann gelten

$$m(z) = \dim \mathcal{N} \left[(W_{\mathbb{C}} - z)^{a^+} \right], \quad m(-z) = \dim \mathcal{N} \left[(W_{\mathbb{C}} + z)^{a^-} \right]$$

und

$$M(z^2) = \dim \mathcal{N} \left[(V_{\mathbb{C}} - z^2)^a \right].$$

Wir setzen

$$l := \max\{a^+, a^-, a\} \in \mathbb{N}_0, \quad p_1(\lambda) := (\lambda - z)^l \quad \text{und} \quad p_2(\lambda) := (\lambda + z)^l$$

für alle $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann sind p_1 und p_2 teilerfremde Polynome aus $\mathbb{C}[\lambda]$ und Lemma 2.2.1 liefert unter Berücksichtigung von

$$V_{\mathbb{C}} - z^2 = (W_{\mathbb{C}} - z)(W_{\mathbb{C}} + z)$$

den gewünschten Zusammenhang zwischen M und m :

$$\begin{aligned} M(z^2) &= \dim \mathcal{N} \left[(V_{\mathbb{C}} - z^2)^a \right] = \dim \mathcal{N} \left[(V_{\mathbb{C}} - z^2)^l \right] = \\ &= \dim \mathcal{N} \left[(W_{\mathbb{C}} - z)^l (W_{\mathbb{C}} + z)^l \right] = \dim \mathcal{N} \left[p_1(W_{\mathbb{C}}) p_2(W_{\mathbb{C}}) \right] = \\ &= \dim \mathcal{N} \left[(p_1 p_2)(W_{\mathbb{C}}) \right] = \dim \left[\mathcal{N} \left[p_1(W_{\mathbb{C}}) \right] \oplus \mathcal{N} \left[p_2(W_{\mathbb{C}}) \right] \right] = \\ &= \dim \mathcal{N} \left[p_1(W_{\mathbb{C}}) \right] + \dim \mathcal{N} \left[p_2(W_{\mathbb{C}}) \right] = \dim \mathcal{N} \left[(W_{\mathbb{C}} - z)^l \right] + \dim \mathcal{N} \left[(W_{\mathbb{C}} + z)^l \right] = \\ &= \dim \mathcal{N} \left[(W_{\mathbb{C}} - z)^{a^+} \right] + \dim \mathcal{N} \left[(W_{\mathbb{C}} + z)^{a^-} \right] = m(z) + m(-z). \end{aligned}$$

■

Die Symmetrie (S) von $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ermöglicht die direkte Angabe eines Eigenwertes von $W_{\mathbb{C}}$; man vergleiche die folgende Aussage mit Bemerkung 2.1.4.1.

Bemerkung 2.2.3 Der Punkt -1 ist ein Eigenwert von $W_{\mathbb{C}}$ mit Eigenvektor $\dot{x}_0 \in \mathcal{C}$, d.h. es gelten

$$-1 \in \sigma \quad \text{und} \quad m(-1) \geq 1.$$

Beweis: Wie gewohnt bezeichne y^φ die Lösung von (y) zum Anfangswert φ . Wenn wir berücksichtigen, dass $\dot{x} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung von (y) zum Anfangswert \dot{x}_0 ist, folgt mit der Symmetrie (S) von x

$$W_{\mathbb{C}}\dot{x}_0 = W\dot{x}_0 = y_{\frac{2}{3}}^{\dot{x}_0} = \dot{x}_{\frac{2}{3}} = \dot{x}\left(\cdot + \frac{2}{3}\right)\Big|_{[-1,0]} = -\dot{x}\Big|_{[-1,0]} = -\dot{x}_0,$$

d.h. $-1 \in \sigma$ und $m(-1) \geq 1$. ■

Im folgenden erklären wir kurz, wie beim Beweis der noch ausstehenden Einfachheit des Floquet-Multiplikators 1 von x in den folgenden Abschnitten vorgegangen und der Operator W einbezogen wird.

Für die Einfachheit sind

$$(m) \quad m(-1) = 1 \quad \text{und} \quad m(1) = 0$$

hinreichend, denn in diesem Fall erhalten wir nach Bemerkung 2.2.2

$$M(1) = M(1^2) = m(-1) + m(1) = 1 + 0 = 1 :$$

x ist nicht ausgeartet.

Im nächsten Abschnitt stellen wir in enger Anlehnung an WALTHER [51] die technischen Hilfsmittel zur Konstruktion der in der Einleitung dieses Kapitels erwähnten holomorphen Funktion $q : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ bereit, deren Nullstellenmenge mit $\sigma \setminus \{0\}$ übereinstimmt. Darüberhinaus sind Nullstellenordnung und algebraische Vielfachheit dieser Nullstelle als Eigenwert von W identisch. Deshalb liest sich unter Verwendung von q die Hyperbolizitätsbedingung (m) wie folgt:

$$(q) \quad q(-1) = 0, \quad q'(-1) \neq 0 \quad \text{und} \quad q(1) \neq 0.$$

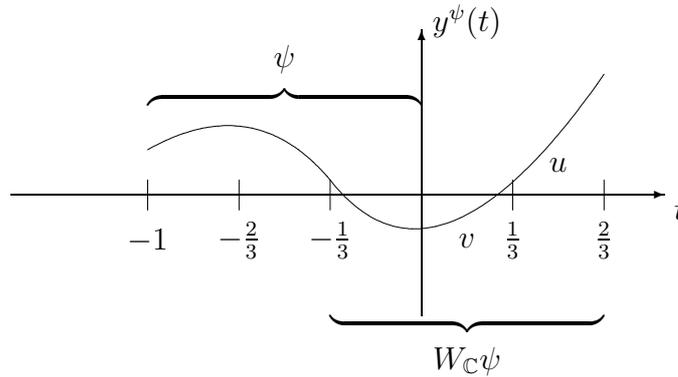
2.3 Technische Hilfsmittel

Um Aussagen über die Eigenwerte von $W_{\mathbb{C}} : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ zu gewinnen, berechnen wir das Lösungssegment $W_{\mathbb{C}}\psi$ für ein $\psi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$. Dabei stellen wir zunächst fest, dass

$$W_{\mathbb{C}}\psi : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{C}$$

auf dem linken Drittel des Definitionsbereichs mit dem gegebenen Datum ψ auf dessen rechten Drittel übereinstimmt:

$$W_{\mathbb{C}}\psi\Big|_{[-1, -\frac{2}{3}]} = \psi\Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]}.$$



Die Symmetrie (S) der periodischen Lösung x ermöglicht im folgenden eine Berechnung von $W_{\mathbb{C}}\psi$ auf dem Restintervall $[-\frac{2}{3}, 0]$, indem Translationen der Einschränkungen $W_{\mathbb{C}}\psi|_{[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]}$ und $W_{\mathbb{C}}\psi|_{[-\frac{1}{3}, 0]}$ als Lösungen eines Systems von gewöhnlichen Differentialgleichungen erkannt werden. Formal identifizieren wir dabei in der anschließenden Anmerkung Elemente φ des \mathbb{C} -Banachraums $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ mit einem die Stetigkeit von φ berücksichtigenden Tripel $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{C}([-\frac{1}{3}, 0], \mathbb{C})^3$; als Abkürzung verwenden wir

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet} := \mathcal{C}\left(\left[-\frac{1}{3}, 0\right], \mathbb{C}\right).$$

Mit der Norm $\|\cdot\|_{\infty}^{\bullet} : \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet} \ni \varphi \mapsto \max_{t \in [-\frac{1}{3}, 0]} |\varphi(t)| \in \mathbb{R}$ ist $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet}$ ein \mathbb{C} -Banachraum. Also ist das Produkt $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet 3}$ mit der Norm $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet 3} \ni (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \mapsto \max_{j \in \{1, 2, 3\}} \|\varphi_j\|_{\infty}^{\bullet} \in \mathbb{R}$ ebenfalls ein \mathbb{C} -Banachraum.

Anmerkung 2.3.1 *Es seien für $j \in \{1, 2, 3\}$ die \mathbb{C} -linearen Translationsoperatoren*

$$J_j : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \ni \varphi \mapsto \varphi\left(\cdot - \frac{3-j}{3}\right)\Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet}$$

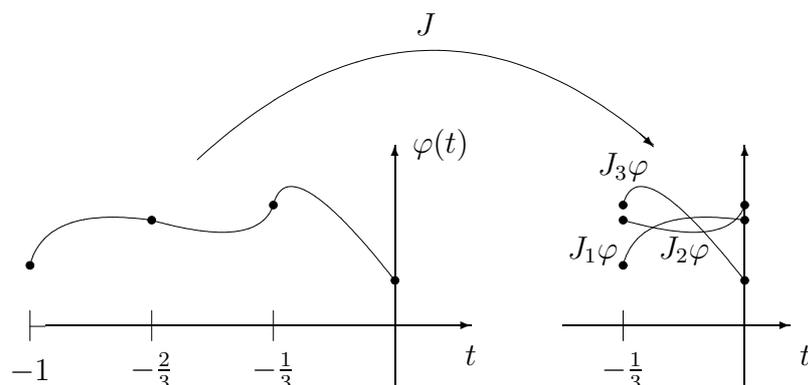
die Komponenten des \mathbb{C} -linearen Operators

$$J : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \ni \varphi \mapsto (J_1\varphi, J_2\varphi, J_3\varphi) \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet 3}.$$

Dann ist J_j für $j \in \{1, 2, 3\}$ stetig, und J ist ein normerhaltender Isomorphismus auf den \mathbb{C} -Raum

$$J\mathcal{C}_{\mathbb{C}} = \left\{ (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet 3} : \varphi_1(0) = \varphi_2\left(-\frac{1}{3}\right), \varphi_2(0) = \varphi_3\left(-\frac{1}{3}\right) \right\}.$$

Die Abgeschlossenheit von $J\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ liefert, dass $J\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ ein \mathbb{C} -Banachraum in $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet 3}$ ist. ■



Bevor wir $J_2 W_{\mathbb{C}}$ und $J_3 W_{\mathbb{C}}$ im Rahmen der übernächsten Bemerkung als Lösungen eines gewöhnlichen, nichtautonomen Systems linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen berechnen, wollen wir die zeitabhängigen Koeffizienten dieses Systems untersuchen.

Bemerkung 2.3.1 Die Funktion f erfülle (H1), (H2) und (H3). Für die stetigen Funktionen

$$A : \mathbb{R} \ni t \mapsto f' \left(x \left(t - \frac{1}{3} \right) \right) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad B : \mathbb{R} \ni t \mapsto f'(x(t)) \in \mathbb{R}^+$$

gelten die folgenden Aussagen

1. $A \left(\cdot - \frac{1}{3} \right) = B$ und $B \left(\cdot - \frac{1}{3} \right) = A$.
2. $B|_{[-\frac{1}{3}, 0]}$ ist streng monoton wachsend, und $A|_{[-\frac{1}{3}, 0]}$ ist streng monoton fallend.
3. $(A - B)|_{[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}]} > 0$, $(A - B)|_{(-\frac{1}{6}, 0]} < 0$ und $A \left(-\frac{1}{6} \right) = B \left(-\frac{1}{6} \right)$.

Beweis: Die Funktionen A und B sind definiert, denn die stetige Ableitung f' ist nach Voraussetzung (H1) positiv.

Die Nichtlinearität f ist wegen (H3) ungerade, d.h. f' ist eine gerade Funktion, und es folgen unter Ausnutzung von (S)

$$A \left(\cdot - \frac{1}{3} \right) = f' \circ x \left(\cdot - \frac{2}{3} \right) = f' \circ (-x) = f' \circ x = B$$

und

$$B \left(\cdot - \frac{1}{3} \right) = f' \circ x \left(\cdot - \frac{1}{3} \right) = A.$$

Damit ist 1. gezeigt.

Die nicht-negative Einschränkung $x|_{[-\frac{1}{3}, 0]}$ ist nach Satz 2.0.1 streng monoton fallend, d.h. das streng monotone Fallen von $f'|_{\mathbb{R}_0^+}$ liefert das strikte Wachsen von $f' \circ x = B$ auf $[-\frac{1}{3}, 0]$.

Die Einschränkung $x(\cdot - \frac{1}{3})|_{[-\frac{1}{3}, 0]} \geq 0$ ist monoton wachsend, d.h. $f' \circ x(\cdot - \frac{1}{3}) = A$ ist auf $[-\frac{1}{3}, 0]$ streng monoton fallend. Insgesamt ist somit 2. gezeigt.
Nach Satz 2.0.1 ist x ungerade, und (S) liefert

$$A\left(-\frac{1}{6}\right) = f'\left(x\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = f'\left(x\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3}\right)\right) = f'\left(x\left(-\frac{1}{6}\right)\right) = B\left(-\frac{1}{6}\right).$$

Mit dieser Gleichheit ergeben sich die beiden Vorzeichenaussagen von 3., wenn wir die im zweiten Punkt gezeigte Monotonie ausnutzen:

Ist $t \in [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$, so folgt

$$A(t) - B(t) > A\left(-\frac{1}{6}\right) - B\left(-\frac{1}{6}\right) = 0$$

Ist $t \in (-\frac{1}{6}, 0]$, so können wir entsprechend nach oben abschätzen:

$$A(t) - B(t) < A\left(-\frac{1}{6}\right) - B\left(-\frac{1}{6}\right) = 0.$$

Damit ist 3. gezeigt. ■

Wir werden beim Beweis von (q) sehen, dass die in der letzten Bemerkung gemachten Aussagen essentiell sind. D.h. die strenge Monotonie von f' nach Voraussetzung (H2) trägt entscheidend zur Hyperbolizität von x bei.

Es seien $z \in \mathbb{C}^*$ und $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$. Wir betrachten das mit z und φ parametrisierte, gekoppelte System linearer nichtautonomer gewöhnlicher Differentialgleichungen auf $[-\frac{1}{3}, 0]$

$$(u, v, \varphi, z) \quad \left[\begin{array}{l} \dot{u} = \frac{1}{z}A(t)[v - J_2\varphi] \\ \dot{v} = \frac{1}{z^2}B(t)[u - J_3\varphi] - \frac{1}{z}B(t)J_1\varphi. \end{array} \right]$$

Die Abbildung

$$S_z := \begin{pmatrix} u_1^z & u_2^z \\ v_1^z & v_2^z \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

sei die Hauptfundamentalmatrix zur Zeit $t = -\frac{1}{3}$ des homogenen Systems $(u, v, 0, z)$ mit $S_z(-\frac{1}{3}) = E$.

Anmerkung 2.3.2 Für die Wronski-Determinante gilt

$$\det S_z(t) = 1 \text{ für alle } t \in \mathbb{R} \text{ und } z \in \mathbb{C}^*,$$

denn die Spur der Matrix der rechten Seite von $(u, v, 0, z)$ verschwindet für alle $z \in \mathbb{C}^*$. ■

In der nächsten Bemerkung werden wir feststellen, dass die beiden oben angeführten Segmente $v := J_2 W_{\mathbb{C}} \chi$ und $u := J_3 W_{\mathbb{C}} \chi$ bei gegebenen $\chi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ und $z \in \mathbb{C}^*$ Gleichung (u, v, φ, z) erfüllen, wobei φ durch $(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = \varphi$ gegeben ist. Also liefert die Anwendung der Variation-der-Konstanten-Formel in der nächsten Bemerkung einen Ausdruck für $(u, v)^{tr}$. Den dabei auftretenden Integral-Term kürzen wir wie folgt ab: es sei

$$I : \mathbb{C}^* \times \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \times \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \rightarrow \mathbb{C}^2$$

mit

$$I(z, \varphi, t) := \begin{pmatrix} I_1(z, \varphi, t) \\ I_2(z, \varphi, t) \end{pmatrix} := \int_{-\frac{1}{3}}^t S_z^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} A J_2 \varphi \\ -\frac{1}{z^2} B J_3 \varphi - \frac{1}{z} B J_1 \varphi \end{pmatrix},$$

wobei die Integrationsvariable aus Gründen der Übersichtlichkeit weggelassen wird. Schliesslich seien für $z \in \mathbb{C}^*$

$$Q_z := S_z(0) - \begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^z(0) & u_2^z(0) - z \\ v_1^z(0) - 1 & v_2^z(0) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

und die stetige lineare Abbildung

$$L_z : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

durch

$$L_z \varphi := \begin{pmatrix} -J_3 \varphi(0) \\ 0 \end{pmatrix} + S_z(0) \cdot I(z, \varphi, 0)$$

definiert. Zur Motivation der Definition von Q_z sei auf die Einleitung verwiesen.

Die folgende Aussage entspricht Lemma I.4.1 in WALTHER [51]; siehe auch Lemma 8 in CHOW & WALTHER [9] bzw. Lemma 3.1. in WALTHER [50].

Bemerkung 2.3.2 Für $z \in \mathbb{C}^*$ mögen S_z , I , L_z und Q_z wie oben gegeben sein.

1. Für $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ und $\chi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ mit $(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = \varphi$ erfüllt

$$(u, v)^{tr} := (J_3 W_{\mathbb{C}} \chi, J_2 W_{\mathbb{C}} \chi)^{tr} : \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \rightarrow \mathbb{C}^2$$

die Gleichung (u, v, φ, z) , und es gelten

$$-Q_z \cdot \begin{pmatrix} u\left(-\frac{1}{3}\right) \\ v\left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = L_z \varphi$$

sowie

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = S_z(t) \left[\begin{pmatrix} u\left(-\frac{1}{3}\right) \\ v\left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} + I(z, \varphi, t) \right] \text{ für alle } t \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right].$$

2. Es seien umgekehrt $z \in \mathbb{C}^*$, $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ und $c \in \mathbb{C}^2$ mit $-Q_z \cdot c = L_z \varphi$ gegeben, $(\tilde{u}, \tilde{v})^{tr}$ die Lösung von (u, v, φ, z) mit $(\tilde{u}, \tilde{v})^{tr}(-\frac{1}{3}) = c$, $(u, v)^{tr} := (\tilde{u}|_{[-\frac{1}{3}, 0]}, \tilde{v}|_{[-\frac{1}{3}, 0]})^{tr}$. Dann ist

$$\psi := \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z} [u - J_3 \varphi] - J_1 \varphi, v - J_2 \varphi, u - J_3 \varphi \right) \in \mathcal{JC}_{\mathbb{C}}$$

und für $\chi := J^{-1} \psi$ gilt

$$(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = \varphi.$$

Ist $\varphi = 0$ und $c \neq 0$, so ist $\chi \neq 0$.

Beweis: Wir beweisen die erste Behauptung und nutzen die Eigenschaften von J bzw. J_j , $j \in \{1, 2, 3\}$, aus Anmerkung 2.3.1.

Es sei y^χ die Lösung von (y) mit dem Anfangswert $\chi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$. Wir haben die stetig differenzierbaren Funktionen

$$u := J_3 W_{\mathbb{C}} \chi : \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \rightarrow \mathbb{C} \quad \text{und} \quad v := J_2 W_{\mathbb{C}} \chi : \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \rightarrow \mathbb{C}$$

und erhalten mit $W_{\mathbb{C}} \chi = z\chi + \varphi$

$$u = J_3 W_{\mathbb{C}} \chi = zJ_3 \chi + J_3 \varphi \quad \text{und} \quad v = J_2 W_{\mathbb{C}} \chi = zJ_2 \chi + J_2 \varphi, \quad (2.1)$$

was auf

$$J_3 \chi = \frac{1}{z} [u - J_3 \varphi] \quad \text{und} \quad J_2 \chi = \frac{1}{z} [v - J_2 \varphi] \quad (2.2)$$

führt. Desweiteren gilt dann mit (2.2)

$$\begin{aligned} zJ_1 \chi &= J_1 W_{\mathbb{C}} \chi - J_1 \varphi = y_{\frac{2}{3}}^\chi \left(\cdot - \frac{2}{3} \right) \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]} - J_1 \varphi = y_0^\chi \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]} - J_1 \varphi = \\ &= J_3 \chi - J_1 \varphi = \frac{1}{z} [u - J_3 \varphi] - J_1 \varphi, \end{aligned}$$

also

$$zJ_1 \chi = \frac{1}{z} [u - J_3 \varphi] - J_1 \varphi. \quad (2.3)$$

Wiederum mit (2.2) ergibt sich weiter für alle $s \in [-\frac{1}{3}, 0]$

$$\begin{aligned} \dot{u}(s) &= \left(J_3 y_{\frac{2}{3}}^\chi \right)'(s) = y^\chi \left(\frac{2}{3} + s \right) = \\ &= f' \left(x \left(s - \frac{1}{3} \right) \right) y^\chi \left(s - \frac{1}{3} \right) = A(s) J_2 \chi(s) = \frac{1}{z} A(s) [v - J_2 \varphi](s) \end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung von (2.3) für alle $s \in [-\frac{1}{3}, 0]$:

$$\dot{v}(s) = \left(J_2 y_{\frac{2}{3}}^\chi \right)'(s) = y^\chi \left(\frac{1}{3} + s \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= f' \left(x \left(s - \frac{2}{3} \right) \right) y^\chi \left(s - \frac{2}{3} \right) = f'(x(s)) \cdot J_1 \chi(s) = \\
&= \frac{1}{z^2} B(s) [u - J_3 \varphi](s) - \frac{1}{z} B(s) J_1 \varphi(s).
\end{aligned}$$

Somit erfüllt $(u, v)^{tr}$ Gleichung (u, v, φ, z) und besitzt die folgenden Randbedingungen:

$$v(0) = J_2 W_{\mathbb{C}} \chi(0) = J_3 W_{\mathbb{C}} \chi \left(-\frac{1}{3} \right) = u \left(-\frac{1}{3} \right),$$

sowie unter Zuhilfenahme von (2.1)

$$\begin{aligned}
u(0) &= z J_3 \chi(0) + J_3 \varphi(0) = z J_2 y_{\frac{2}{3}}^\chi \left(-\frac{1}{3} \right) + J_3 \varphi(0) = \\
&= z J_2 W_{\mathbb{C}} \chi \left(-\frac{1}{3} \right) + J_3 \varphi(0) = z v \left(-\frac{1}{3} \right) + J_3 \varphi(0),
\end{aligned}$$

zusammen haben wir also

$$v(0) = u \left(-\frac{1}{3} \right) \quad \text{und} \quad u(0) = z v \left(-\frac{1}{3} \right) + J_3 \varphi(0). \quad (2.4)$$

Um den Beweis von 1. abzuschließen, lösen wir (u, v, φ, z) mit der Variation-der-Konstanten-Formel. Dabei ist – wie oben definiert – S_z die Hauptfundamentalmatrix des homogenen Systems $(u, v, 0, z)$ zur Zeit $t = -\frac{1}{3}$ und I der auftretende Integralterm. Für $t \in [-\frac{1}{3}, 0]$ folgt dann

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = S_z(t) \left[\begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} + I(z, \varphi, t) \right]. \quad (2.5)$$

Dann ergibt sich mit den Beziehungen (2.4) zwischen den Randwerten von u und v sowie Formel (2.5)

$$\begin{aligned}
-Q_z \cdot \begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} &= \left[\begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - S_z(0) \right] \cdot \begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} z \cdot v(-\frac{1}{3}) \\ u(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} - S_z(0) \cdot \begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} u(0) - J_3 \varphi(0) \\ v(0) \end{pmatrix} - S_z(0) \cdot \begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -J_3 \varphi(0) \\ 0 \end{pmatrix} - S_z(0) \cdot \begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \\
&= S_z(0) \cdot \begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} + S_z(0) \cdot I(z, \varphi, 0) + \begin{pmatrix} -J_3 \varphi(0) \\ 0 \end{pmatrix} - S_z(0) \cdot \begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= S_z(0) \cdot I(z, \varphi, 0) + \begin{pmatrix} -J_3\varphi(0) \\ 0 \end{pmatrix} = L_z\varphi,$$

womit 1. bewiesen ist.

Wir zeigen 2. und geben $c = (c_1, c_2)^{tr} \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$, $z \in \mathbb{C}^*$ und $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ mit

$$-Q_z c = L_z \varphi \quad (2.6)$$

vor.

Für $t \in [-\frac{1}{3}, 0]$ erhalten wir gemäss (2.5) für Lösungen $(u, v)^{tr}$ von (u, v, φ, z) mit Startwert $(c_1, c_2)^{tr}$

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} := S_z(t) \cdot \left[\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + I(z, \varphi, t) \right], \quad (2.7)$$

sowie

$$\chi_3 := \frac{1}{z}(u - J_3\varphi), \quad \chi_2 := \frac{1}{z}(v - J_2\varphi), \quad \chi_1 := \frac{1}{z}(\chi_3 - J_1\varphi) \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet}. \quad (2.8)$$

Dann haben wir

$$J_3\varphi = u - z\chi_3, \quad J_2\varphi = v - z\chi_2, \quad J_1\varphi = \chi_3 - z\chi_1. \quad (2.9)$$

Behauptung:

$$\text{Es gibt } \tilde{\chi} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \text{ mit } J\tilde{\chi} = (\chi_3, v, u). \quad (2.10)$$

Beweis: Nach Formel (2.7) haben wir mit $I(z, \varphi, -\frac{1}{3}) = 0$ und $S_z(-\frac{1}{3}) = E_2$

$$\begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Gleichung (2.6) liefert dann mit der Definition von Q_z

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - S_z(0) \right] \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = L_z\varphi,$$

was nach Einsetzen der Ausdrücke für S_z und L_z

$$\begin{pmatrix} zc_2 \\ c_1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} u_1^z(0) & u_2^z(0) \\ v_1^z(0) & v_2^z(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -J_3\varphi(0) \\ 0 \end{pmatrix} + S_z(0) \cdot I(z, \varphi, 0)$$

ergibt. Mit der Definition (2.7) von u und $I = (I_1, I_2)^{tr}$ folgt dann

$$zc_2 = c_1 u_1^z(0) + c_2 u_2^z(0) + u_1^z(0) I_1(z, \varphi, 0) + u_2^z(0) I_2(z, \varphi, 0) - J_3\varphi(0) = u(0) - J_3\varphi(0).$$

Genauso sehen wir

$$c_1 = v(0).$$

Insgesamt erhalten wir somit unter Berücksichtigung von (2.11)

$$v(0) = c_1 = u\left(-\frac{1}{3}\right), \quad u(0) = zc_2 + J_3\varphi(0) = zv\left(-\frac{1}{3}\right) + J_3\varphi(0). \quad (2.12)$$

Um

$$(\chi_3, v, u) \in \mathcal{JC}_{\mathbb{C}}$$

zu begründen, stellen wir zum einen fest, dass die Funktionen χ_3 , v und u in $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet}$ liegen und zum anderen wegen (2.8) und (2.12) die $\mathcal{JC}_{\mathbb{C}}$ definierenden Randbedingungen erfüllen:

$$\chi_3(0) = \frac{1}{z}(u(0) - J_3\varphi(0)) = v\left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{z}J_3\varphi(0) - \frac{1}{z}J_3\varphi(0) = v\left(-\frac{1}{3}\right) \quad (2.13)$$

und

$$v(0) = u\left(-\frac{1}{3}\right).$$

Damit ist die Behauptung (2.10) bewiesen, wenn wir $\tilde{\chi} := J^{-1}(\chi_3, v, u) \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ setzen.

Wir betrachten die in der Behauptung gegebenen Funktionen χ und ψ . Die mit Hilfe von (2.8) durchgeführte Umformung

$$\begin{aligned} J\chi &= JJ^{-1}\psi = \psi = \frac{1}{z} \left(\frac{1}{z}[u - J_3\varphi] - J_1\varphi, v - J_2\varphi, u - J_3\varphi \right) = \\ &= \frac{1}{z} (\chi_3 - J_1\varphi, z\chi_2, z\chi_3) \end{aligned}$$

zeigt

$$J\chi = (\chi_1, \chi_2, \chi_3). \quad (2.14)$$

Wir wollen

$$(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = \varphi \quad (2.15)$$

nachweisen, was aufgrund von Anmerkung 2.3.1 äquivalent zu

$$J(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = (J_1\varphi, J_2\varphi, J_3\varphi) \quad (2.16)$$

ist.

Es sei $j \in \{1, 2, 3\}$. Für die linearen Abbildungen J_j gilt nach (2.14) die Gleichheit

$$J_j\chi = \chi_j.$$

Um (2.16) zu zeigen, beweisen wir $J_j(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = J_j\varphi$.

Nach (2.9) folgt

$$J_1(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = J_1W_{\mathbb{C}}\chi - zJ_1\chi = J_3\chi - zJ_1\chi = \chi_3 - z\chi_1 = J_1\varphi,$$

und die Gleichheit der ersten Komponenten ist gezeigt.

Wir beweisen schliesslich $J_2(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = J_2\varphi$ und $J_3(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = J_3\varphi$ und wählen dazu $s \in [-\frac{1}{3}, 0]$. Mit der Variationsgleichung und (2.8) erhalten wir

$$\begin{aligned} y^x \left(\frac{1}{3} + s \right) &= B(s)y^x \left(s - \frac{2}{3} \right) = B(s)J_1\chi(s) = \frac{1}{z}B(s)(J_3\chi - J_1\varphi)(s) = \\ &= \frac{1}{z}B(s)\chi_3(s) - \frac{1}{z}B(s)J_1\varphi(s) = \frac{1}{z^2}B(s)[u - J_3\varphi](s) - \frac{1}{z}B(s)J_1\varphi(s) = \dot{v}(s). \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$y^x \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = y^x(0) = \chi(0) = J_3\chi(0) = \chi_3(0) = v \left(-\frac{1}{3} \right),$$

wobei das letzte Gleichheitszeichen gerade (2.13) ist. Wir haben somit wegen der Übereinstimmung des Startwerts

$$y^x \left(\frac{1}{3} + \cdot \right) \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]} = v. \quad (2.17)$$

Zur Herleitung von (2.18), s.u., gehen wir entsprechend vor und stellen für alle $t \in [-\frac{1}{3}, 0]$ mit (2.9) sowie (u, v, φ, z) teleskopierend

$$\begin{aligned} \dot{y}^x \left(\frac{2}{3} + s \right) &= A(s)J_2\chi(s) = \frac{1}{z}A(s)[J_2\varphi + z\chi_2](s) - \frac{1}{z}A(s)J_2\varphi(s) = \\ &= \frac{1}{z}A(s)v(s) - \frac{1}{z}A(s)J_2\varphi(s) = \frac{1}{z}A(s)[v - J_2\varphi](s) = \dot{u}(s) \end{aligned}$$

fest. Desweiteren haben wir mit (2.12) sowie (2.17) den Startwert

$$u \left(-\frac{1}{3} \right) = v(0) = y^x \left(\frac{1}{3} \right) = y^x \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3} \right)$$

und erhalten somit

$$y^x \left(\frac{2}{3} + \cdot \right) \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]} = u. \quad (2.18)$$

Gleichung (2.18) liefert schliesslich mit (2.9) und $J_3W_{\mathbb{C}}\chi = y^{\chi}_{\frac{2}{3}} \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]}$ einerseits

$$J_3(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = J_3W_{\mathbb{C}}\chi - z\chi_3 = y^x \left(\frac{2}{3} + \cdot \right) \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]} - z\chi_3 = u - z\chi_3 = J_3\varphi;$$

andererseits ergibt Gleichung (2.17) mit $J_2W_{\mathbb{C}}\chi = y^{\chi}_{\frac{1}{3}} \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]}$

$$J_2(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = J_2W_{\mathbb{C}}\chi - z\chi_2 = y^x \left(\frac{1}{3} + \cdot \right) \Big|_{[-\frac{1}{3}, 0]} - z\chi_2 = v - z\chi_2 = J_2\varphi.$$

Insgesamt ist (2.16) gezeigt, also (2.15) wahr.

Um den Beweis von 2. abzuschließen, folgern wir aus $\varphi = 0$ und $c \neq 0$ zunächst

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

dann

$$\chi = J^{-1}\psi = J^{-1} \left(\frac{1}{z} \begin{pmatrix} 1 \\ z \end{pmatrix} u, v, u \right) \neq 0$$

und damit ist die Bemerkung bewiesen. ■

Die anschließende Surjektivitätsbehauptung wird beim Beweis des Satzes 2.4.2 über die Vielfachheiten der Nullstellen von q benutzt und wird etwas ausführlicher als in WALTHER [51] bewiesen.

Bemerkung 2.3.3 Die oben definierte lineare Abbildung

$$L_z : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{C}^2$$

ist für alle $z \in \mathbb{C}^*$ surjektiv.

Diese Aussage bedarf der folgenden elementaren Feststellung:

Lemma 2.3.1 Es sei E ein normierter \mathbb{C} -Vektorraum. Dann ist die Menge

$$L := \{(v, w) \in E^2 : \{v, w\} \text{ ist linear unabhängig in } E\}$$

offen in E^2 .

Beweis von Lemma 2.3.1: Wir zeigen, dass das Komplement

$$E^2 \setminus L := \{(v, w) \in E^2 : \{v, w\} \text{ ist linear abhängig in } E\}$$

abgeschlossen in E^2 liegt. Es sei dazu $((v_n, w_n))_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen $(v, w) \in E^2$ konvergente Folge in $E^2 \setminus L$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert ein $\lambda_n \in \mathbb{C}$ mit $v_n = \lambda_n w_n$. Ist $v = 0$ oder $w = 0$, so gilt $(v, w) \in E^2 \setminus L$.

Es seien also $v \neq 0$ und $w \neq 0$ sowie $\varepsilon > 0$. Dann sind $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ keine Nullfolgen, und es gibt o.B.d.A. $N \in \mathbb{N}$ sowie $S \in \mathbb{R}^+$ mit

$$|\lambda_n| \geq S > 0, \quad \|w_n\| \geq S \quad \text{und} \quad \|v_n - v\| < \varepsilon$$

für alle $n \geq N$ in \mathbb{N} .

Vermöge der letzten Ungleichung folgt die Beschränktheit von $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $\frac{\varepsilon + \|v\|}{S}$, daher hat $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine gegen $\lambda \in \mathbb{C}$ konvergente Teilfolge $(\lambda_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$. Insgesamt haben wir $v = \lim_{k \rightarrow \infty} v_{n_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \lambda_{n_k} w_{n_k} = \lambda w$, also $(v, w) \in E^2 \setminus L$, und L ist offen in E^2 . ■

Beweis von Bemerkung 2.3.3: Es sei $z \in \mathbb{C}^*$. Wir zeigen unter Ausnutzung von Lemma 2.3.1 und der Voraussetzung an f' in drei Schritten, dass

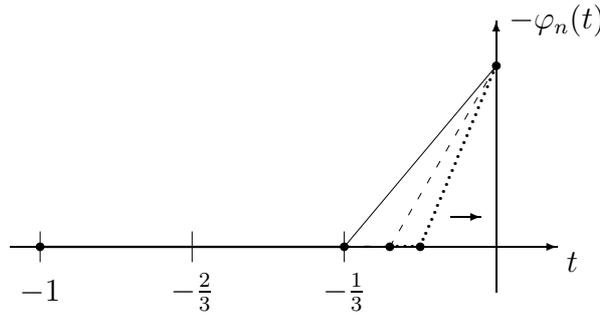
$$\dim_{\mathbb{C}} L_z \mathcal{C}_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2,$$

also $L_z \mathcal{C}_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$, gilt.

1. Ist $n \in \mathbb{N}$, so wird durch

$$\varphi_n|_{[-1, -\frac{1}{2+n}]} := 0 \text{ und } \varphi_n(t) := (n+2)t + 1 \text{ f\u00fcr alle } t \in \left[-\frac{1}{2+n}, 0\right].$$

eine Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{N}}$ definiert. F\u00fcr alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet} \ni 0 = J_1 \varphi_n = J_2 \varphi_n$ und $J_3 \varphi_n(t) := 0$ f\u00fcr alle $t \in [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{n+2}]$ sowie $J_3 \varphi_n(t) := -(n+2)t + 1$ f\u00fcr alle $t \in [-\frac{1}{n+2}, 0]$.



Behauptung:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L_z \varphi_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.1}$$

Beweis: Wir geben zun\u00e4chst $L_z \varphi$ f\u00fcr ein $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ an.

$$\begin{aligned} L_z \varphi &= \begin{pmatrix} -J_3 \varphi(0) \\ 0 \end{pmatrix} + S_z(0) \cdot I(z, \varphi, 0) = \\ &= \begin{pmatrix} -\varphi(0) \\ 0 \end{pmatrix} + S_z(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 \begin{pmatrix} v_2^z & -u_2^z \\ -v_1^z & u_1^z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} A J_2 \varphi \\ -\frac{1}{z^2} B J_3 \varphi - \frac{1}{z} B J_1 \varphi \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -\varphi(0) \\ 0 \end{pmatrix} + S_z(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} A J_2 \varphi v_2^z + \frac{1}{z^2} B J_3 \varphi u_2^z + \frac{1}{z} B J_1 \varphi u_2^z \\ \frac{1}{z} A J_2 \varphi v_1^z - \frac{1}{z^2} B J_3 \varphi u_1^z - \frac{1}{z} B J_1 \varphi u_1^z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich gilt wegen

$$J_1 \varphi_n = 0 \text{ und } J_2 \varphi_n = 0 \text{ f\u00fcr alle } n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} L_z \varphi_n &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_z(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 \begin{pmatrix} \frac{1}{z^2} B J_3 \varphi_n u_2^z \\ -\frac{1}{z^2} B J_3 \varphi_n u_1^z \end{pmatrix} dt = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + S_z(0) \int_{-\frac{1}{n+2}}^0 \begin{pmatrix} \frac{1}{z^2} B J_3 \varphi_n u_2^z \\ -\frac{1}{z^2} B J_3 \varphi_n u_1^z \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

Wir setzen

$$c_z := B(0) \cdot \frac{1}{|z|^2} \cdot \max_{t \in [-\frac{1}{3}, 0]} |u_2^z(t)| \in \mathbb{R}_0^+$$

und

$$d_z := B(0) \cdot \frac{1}{|z|^2} \cdot \max_{t \in [-\frac{1}{3}, 0]} |u_1^z(t)| \in \mathbb{R}_0^+.$$

Dann folgt die Behauptung (2.1) mit $\|\mathbb{C}^2 \ni w \mapsto S_z(0)w \in \mathbb{C}^2\| =: s_z \geq 0$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| L_z \varphi_n - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_1 \leq s_z \cdot (c_z + d_z) \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\frac{1}{n+2}}^0 [(n+2)t + 1] dt = 0.$$

2. *Behauptung:*

$$\text{Es gibt } \varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}, \text{ so dass f\"ur } c := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} := L_z \varphi \text{ gilt: } c_2 \neq 0. \quad (2.2)$$

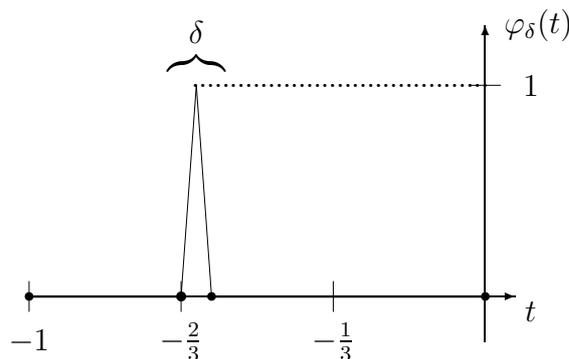
Beweis: Wir w\u00e4hlen $\psi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ mit $J_1 \psi = 0 = J_3 \psi$. Wenn wir f\u00fcr $j \in \{1, 2\}$ mit $(L_z \chi)_j$ den j -ten Eintrag von $L_z \chi$ f\u00fcr $\chi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ bezeichnen, so gilt mit obigem Ausdruck f\u00fcr das Bild von ψ

$$z(L_z \psi)_2 = v_1^z(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 -A J_2 \psi v_2^z + v_2^z(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 A J_2 \psi v_1^z. \quad (2.3)$$

Bei der Angabe des gesuchten φ unterscheiden wir anhand von (2.3) die folgenden drei F\u00e4lle.

- (a) Der Fall $v_2^z(0) = 0$. Es folgt $v_1^z(0) \neq 0$ aus $\det S_z(0) = 1$. Wegen $v_2^z(-\frac{1}{3}) = 1$ gibt es $\delta \in (0, \frac{1}{3})$ mit $v_2^z|_{[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} + \delta]} > 0$. Wir w\u00e4hlen zum Beispiel f\u00fcr das gesuchte $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ die Funktion $\varphi_\delta \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ mit

$$\varphi_\delta(t) := \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad t \in [-1, -\frac{2}{3}] \cup [-\frac{1}{3}, 0] \cup [-\frac{2}{3} + \delta, -\frac{1}{3}] \\ \frac{2}{\delta}t + \frac{4}{3\delta}, \quad t \in [-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3} + \frac{\delta}{2}] \\ -\frac{2}{\delta}t - \frac{4}{3\delta} + 2, \quad t \in [-\frac{2}{3} + \frac{\delta}{2}, -\frac{2}{3} + \delta] \end{array} \right\}.$$



Damit folgt unter Berücksichtigung von $A > 0$

$$AJ_2\varphi_\delta v_2^z|_{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}+\delta)} > 0$$

und mit $\varphi := \varphi_\delta$ sowie (2.3)

$$c_2 = (L_z\varphi)_2 = -\frac{1}{z}v_1^z(0) \int_{-\frac{1}{3}}^{-\frac{1}{3}+\delta} AJ_2\varphi v_2^z \neq 0.$$

(b) Der Fall $v_2^z(0) \neq 0$.

i. Im Fall $v_1^z(0) = 0$ verfahren wir analog zu 1. : Wegen $B > 0$, $u_1^z(-\frac{1}{3}) = 1$, $v_1^z(-\frac{1}{3}) = 0$ und

$$\dot{v}_1^z\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{z^2}B\left(-\frac{1}{3}\right)u_1^z\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{z^2}B\left(-\frac{1}{3}\right) \neq 0$$

gibt es ein $\delta > 0$ mit $v_1^z|_{(-\frac{1}{3}, \delta]} <> 0$. Folglich haben wir

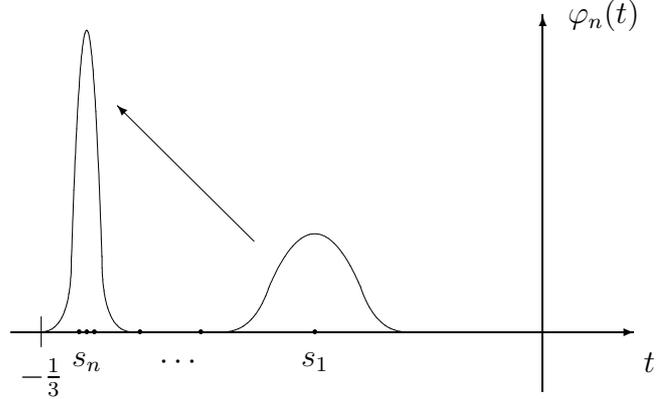
$$AJ_2\varphi_\delta v_1^z|_{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}+\delta)} <> 0$$

und $c_2 = L_z\varphi \neq 0$, wenn wir $\varphi := \varphi_\delta$ setzen.

ii. Schliesslich betrachten wir den Fall $\alpha := v_1^z(0) \neq 0$ und $\beta := v_2^z(0) \neq 0$. Es sei $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (-\frac{1}{3}, 0)^\mathbb{N}$ eine streng monoton fallende Folge mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = -\frac{1}{3}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine Funktion $\varphi_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ mit $\text{supp}(\varphi_n) \subseteq (-\frac{1}{3}, 0)$, $\varphi_n \geq 0$ und $\int \varphi_n = 1$, wobei der Graph von φ_n für alle $n \in \mathbb{N}$ achsensymmetrisch zur Senkrechten $t = s_n$ liegt; siehe dazu Bemerkung 2.12 in AMANN [1]. Insbesondere haben wir $\varphi_n(-\frac{1}{3}) = 0 = \varphi_n(0)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.



Es sei $m \in \mathbb{N}$. Satz 1, §17, in FORSTER [15] hat mit der Funktion

$$\varphi_n^m : \mathbb{R} \ni t \mapsto m \cdot \varphi_n(m \cdot t) \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}} \varphi_n^m(t) h(t) dt = h(s_n) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \quad (2.4)$$

zur Folge; es ist zu beachten, dass bei der Verwendung des Grenzwertsatzes von Lebesgue im Beweis dieses Satzes in FORSTER [15] zwar $h \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ vorausgesetzt aber $h \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ ausreichend ist.

Wir finden $M_1 \in \mathbb{N}$ und $\varepsilon > 0$ mit $|-A(s_m)v_2^z(s_m)| > \frac{2\varepsilon}{|\alpha|}$ für alle $m \geq M_1$. Ausserdem gibt es $M_2 \in \mathbb{N}$ mit $|A(s_m)v_1^z(s_m)| < \frac{\varepsilon}{|\beta|}$ für alle $m \geq M_2$. Es sei $M := \max\{M_1, M_2\}$. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$\omega_n := \varphi_n^M|_{[-\frac{1}{3}, 0]} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^\bullet.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\omega_n(-\frac{1}{3}) = 0 = \omega_n(0)$. Es folgt mit (2.4)

$$\begin{aligned} & \left| \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\alpha \int_{-\frac{1}{3}}^0 \omega_n \cdot (-Av_2^z) + \beta \int_{-\frac{1}{3}}^0 \omega_n \cdot (Av_1^z) \right] \right| = \\ & = |\alpha \cdot (-A(s_M)v_2^z(s_M)) + \beta A(s_M)v_1^z(s_M)| \geq |\alpha| \cdot \frac{2\varepsilon}{|\alpha|} - |\beta| \cdot \frac{\varepsilon}{|\beta|} = \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

Wir sind nun in der Lage, ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$v_1^z(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 \omega_n(-Av_2^z) + v_2^z(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 \omega_n(Av_1^z) \neq 0$$

für alle $n \geq N$ zu wählen und können das gesuchte Urbild $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ durch

$$\varphi|_{[-1, -\frac{2}{3}] \cup [-\frac{1}{3}, 0]} := 0 \quad \text{und} \quad \varphi|_{[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}]} := \omega_N \left(\cdot + \frac{1}{3} \right)$$

definieren. Nach (2.3) gilt dann $(L_z \varphi)_2 \neq 0$, und insgesamt ist (2.2) bewiesen.

3. Wir setzen $v := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ und wählen gemäss (2.2) ein $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ mit

$$w := \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = L_z \varphi \in \mathbb{C}^2 \quad \text{und} \quad (L_z \varphi)_2 = c_2 \neq 0.$$

Dann sind v und w linear unabhängig, und es gibt laut Lemma 2.3.1 ein $\varepsilon > 0$ mit

$$U_\varepsilon(v) \times U_\varepsilon(w) \subseteq L = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 : \{\xi, \eta\} \text{ ist linear unabhängig in } \mathbb{C}^2\}$$

Nach (2.1) gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|L_z \varphi_n - v\|_1 = 0$$

mit der dort angegebenen Folge $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\mathbb{N}}$. Wir wählen $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$\tilde{v} := L_z \varphi_n \in U_\varepsilon(v)$$

erfüllt ist und erhalten die lineare Unabhängigkeit von $\tilde{v} \in L_z \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ und $w \in L_z \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ in \mathbb{C}^2 . Dies zeigt $\dim_{\mathbb{C}} L_z \mathcal{C}_{\mathbb{C}} = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{C}^2 = 2$. \blacksquare

Im folgenden Abschnitt kommen wir zur Definition von q .

2.4 Die charakteristische Funktion q von W

Wir kommen in diesem Abschnitt zur Charakterisierung der nicht-verschwindenden Eigenwerte von $W_{\mathbb{C}}$, indem wir diese als Nullstellen der holomorphen charakteristischen Funktion $q : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ erkennen; die algebraische Vielfachheit $m(z)$ von $z \in \mathbb{C}^*$ und die Ordnung dieses Punktes als Nullstelle von q erweisen sich als identisch.

Bei der Konstruktion von q gehen wir wie in WALTHER [51] beschrieben vor und betrachten das gekoppelte System

$$(u, v, 0, z) \quad \begin{bmatrix} \dot{u} = \frac{1}{z} A(t) v \\ \dot{v} = \frac{1}{z^2} B(t) u \end{bmatrix}$$

mit den bekannten, in $t \in \mathbb{R}$ stetigen Ausdrücken $A(t) = f'(x(t - \frac{1}{3}))$ und $B(t) = f'(x(t))$. Die Abbildung

$$S_z = \begin{pmatrix} u_1^z & u_2^z \\ v_1^z & v_2^z \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

bezeichnet für $z \in \mathbb{C}^*$ die Hauptfundamentalmatrix des homogenen Systems $(u, v, 0, z)$ zur Zeit $t = -\frac{1}{3}$. Ebenfalls im letzten Abschnitt wurde

$$Q_z = S_z(0) = \begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

definiert.

Definition 2.4.1 *Die Abbildung*

$$q : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto \det Q_z \in \mathbb{C}$$

heißt *charakteristische Funktion von W* . □

Um mit der Nullstellenordnung von $z \in \mathbb{C}^*$ bzgl. q arbeiten zu können, sollte q differenzierbar sein. Dies halten wir in der folgenden Bemerkung fest.

Bemerkung 2.4.1 *Die charakteristische Funktion $q : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph, und für alle $z \in \mathbb{C}^*$ gilt*

$$q(z) = 1 - z + u_2^z(0) + zv_1^z(0).$$

Beweis: Die Holomorphie von q , also die analytische Abhängigkeit der Lösung vom komplexen Parameter $z \in \mathbb{C}^*$, folgt mit den Sätzen in DIEUDONNÉ [11], Abschnitt 10.7, aus der Holomorphie der Funktionen

$$\mathbb{C}^* \ni z \mapsto \frac{1}{z}A(t)v \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}^* \ni z \mapsto \frac{1}{z^2}B(t)u \in \mathbb{C}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$, $u \in \mathbb{C}$ und $v \in \mathbb{C}$.

Nach Anmerkung 2.3.2 gilt $\det S_z(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dies liefert für jedes $z \in \mathbb{C}^*$

$$\begin{aligned} q(z) &= \det Q_z = \det \begin{pmatrix} u_1^z(0) & u_2^z(0) - z \\ v_1^z(0) - 1 & v_2^z(0) \end{pmatrix} = \\ &= u_1^z(0)v_2^z(0) - u_2^z(0)v_1^z(0) + u_2^z(0) + zv_1^z(0) - z = \\ &= \det S_z(0) + u_2^z(0) + zv_1^z(0) - z = 1 - z + u_2^z(0) + zv_1^z(0), \end{aligned}$$

also den behaupteten Ausdruck für $q(z)$. ■

Wir können mit Hilfe von Bemerkung 2.3.2 den folgenden Satz beweisen, in dem die Gleichheit des Null-punktierten Spektrums $\sigma \setminus \{0\}$ von W und der Nullstellenmenge von q behauptet wird.

Satz 2.4.1 *Es gilt $q^{-1}(0) = \sigma \setminus \{0\}$.*

Beweis: Es sei zunächst $z \in q^{-1}(0) \subseteq \mathbb{C}^*$, d.h. die Matrix Q_z ist singulär:

$$0 = q(z) = \det Q_z.$$

Folglich existiert ein $c \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ mit $-Q_z c = 0 = L_z 0$. Eine Anwendung von Bemerkung 2.3.2 für $\varphi = 0$ liefert ein $\chi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ mit $(W_{\mathbb{C}} - z)\chi = 0$, also $z \in \sigma \setminus \{0\}$.

Es sei umgekehrt $z \in \sigma \setminus \{0\}$, d.h. es existiert ein $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$ mit $(W_{\mathbb{C}} - z)\varphi = 0$. Nach Bemerkung 2.3.2 erfüllt $(u, v)^{tr} = (J_3 W_{\mathbb{C}} \varphi, J_2 W_{\mathbb{C}} \varphi)^{tr}$ auf $[-\frac{1}{3}, 0]$ Gleichung $(u, v, 0, z)$, und es gilt

$$-Q_z \begin{pmatrix} u \left(-\frac{1}{3}\right) \\ v \left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = L_z 0 = 0,$$

was

$$Q_z \begin{pmatrix} u \left(-\frac{1}{3}\right) \\ v \left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = 0 \tag{2.1}$$

bedeutet. Wäre $u \left(-\frac{1}{3}\right) = 0 = v \left(-\frac{1}{3}\right)$, so wird $u = 0 = v$ durch die Eindeutigkeit der Lösungen des Anfangswertproblems

$$\left[(u, v, 0, z), \quad u \left(-\frac{1}{3}\right) = 0 = v \left(-\frac{1}{3}\right) \right]$$

geliefert. Dies führt auf $\varphi|_{[-1, -\frac{1}{3}]} = 0$, wenn wir die Variationsgleichung (y) längs x betrachten und $f' > 0$ nach (H1) berücksichtigen. Wegen $\varphi \neq 0$ gibt es ein $s \in \left(-\frac{1}{3}, 0\right]$ mit $\varphi(s) \neq 0$, was aber

$$0 \neq z\varphi(s) = W_{\mathbb{C}}\varphi(s) = J_3 W_{\mathbb{C}}\varphi(s) = u(s) = 0$$

widerspricht. Es gilt somit

$$\begin{pmatrix} u \left(-\frac{1}{3}\right) \\ v \left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und (2.1) liefert

$$0 = \det Q_z = q(z),$$

also $z \in q^{-1}(0)$. Insgesamt haben wir $q^{-1}(0) = \sigma \setminus \{0\}$ gezeigt. ■

Im nächsten Satz aus WALTHER [51] gelingt es, die Aussage von Satz 2.4.1 zu verbessern, indem auch Vielfachheiten berücksichtigt werden.

Satz 2.4.2 *Für alle $z \in \mathbb{C}^*$ mit $Q_z \neq 0$ gilt $m(z) = \text{ord}_q(z)$.*

Zum Beweis des Satzes formulieren wir zunächst eine Fortsetzungsaussage und definieren für $z \in \mathbb{C}^*$ die Matrix

$$Q_z^* := \begin{pmatrix} v_2^z(0) & z - u_2^z(0) \\ 1 - v_1^z(0) & u_1^z(0) \end{pmatrix}.$$

Wir erkennen dann unter Berücksichtigung von Satz 2.4.1

$$Q_z^* = \det Q_z \cdot Q_z^{-1} = q(z) \cdot Q_z^{-1} \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}^* \setminus \sigma. \tag{2.1}$$

Lemma 2.4.1 *Die holomorphe Abbildung $\tilde{H} : \mathbb{C}^* \setminus \sigma \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_{\mathbb{C}})$ mit*

$$\tilde{H}(z) := q(z)(W_{\mathbb{C}} - z)^{-1}$$

für alle $z \in \mathbb{C}^ \setminus \sigma$ besitzt eine stetige Fortsetzung $H : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}_{\mathbb{C}})$ mit*

$$\begin{pmatrix} J_3 H(z) \varphi \\ J_2 H(z) \varphi \end{pmatrix} (t) = \frac{1}{z} S_z(t) \cdot (-Q_z^* L_z \varphi) \tag{2.2}$$

für alle $t \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$, $z \in \mathbb{C}^ \setminus \{0\}$ und $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$.*

Beweis von Lemma 2.4.1: Alle im Beweis auftretenden Grenzwerte $\zeta \rightarrow z \in \sigma \setminus \{0\}$ seien für Folgen definiert, die z nicht treffen; wir schreiben anstatt $\lim_{z \neq \zeta \rightarrow z}$ abkürzend $\lim_{\zeta \rightarrow z}$.

1. Für $z \in \mathbb{C}^* \setminus \sigma$ und $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ definieren wir

$$\chi_{z,\varphi} := (W_{\mathbb{C}} - z)^{-1}\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}.$$

Daraus folgen $W_{\mathbb{C}}\chi_{z,\varphi} - z\chi_{z,\varphi} = \varphi$ und

$$\chi_{z,\varphi} = \frac{1}{z}(W_{\mathbb{C}}\chi_{z,\varphi} - \varphi). \quad (2.3)$$

Wir betrachten die Hilfsabbildung

$$H^* : \mathbb{C}^* \setminus \sigma \ni z \mapsto [\mathcal{C}_{\mathbb{C}} \ni \varphi \mapsto q(z)W_{\mathbb{C}}\chi_{z,\varphi} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}] \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}).$$

Für $z \in \mathbb{C}^* \setminus \sigma$ und $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ gilt

$$\tilde{H}(z)\varphi = q(z)(W_{\mathbb{C}} - z)^{-1}\varphi = q(z)\chi_{z,\varphi} = \frac{1}{z}(H^*(z)\varphi - q(z)\varphi),$$

d.h.

$$\tilde{H}(z)\varphi = \frac{1}{z}(H^*(z)\varphi - q(z)\varphi), \quad z \in \mathbb{C}^* \setminus \sigma, \quad \varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}. \quad (2.4)$$

Angenommen, der Grenzwert $\lim_{\zeta \rightarrow z} H^*(\zeta)$ existiert für $z \in \sigma \setminus \{0\}$ in $\mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}})$, und H^* läßt sich stetig auf \mathbb{C}^* fortsetzen zu

$$H' : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto \left\{ \begin{array}{l} H^*(z), \quad z \in \mathbb{C}^* \setminus \sigma \\ \lim_{\zeta \rightarrow z} H^*(\zeta), \quad z \in \sigma \setminus \{0\} \end{array} \right\} \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}).$$

Dann existiert wegen (2.4) auch der Grenzwert $\lim_{\zeta \rightarrow z} \tilde{H}(\zeta)$ für $z \in \sigma \setminus \{0\}$, und mit

$$H : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto \frac{1}{z}(H'(z)\varphi - q(z)\varphi) \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}) \quad (2.5)$$

haben wir die gewünschte stetige Fortsetzung von \tilde{H} auf \mathbb{C}^* . Um die Behauptung zu zeigen, ist es also hinreichend, die stetige Fortsetzbarkeit von H^* zu beweisen.

Wir definieren für $i \in \{1, 2, 3\}$

$$H_i^* : \mathbb{C}^* \setminus \sigma \ni z \mapsto [\mathcal{C}_{\mathbb{C}} \ni \varphi \mapsto J_i H^*(z)\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet}] \in \mathcal{L}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}, \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet}).$$

Für alle $z \in \mathbb{C}^* \setminus \sigma$ und $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ gilt dann

$$JH^*(z)\varphi = (H_1^*(z)\varphi, H_2^*(z)\varphi, H_3^*(z)\varphi) \in \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathbb{C}}. \quad (2.6)$$

Wir beachten im folgenden $q(z) = 0$ für alle $z \in \sigma \setminus \{0\}$ nach Satz 2.4.1.

2. Es sei $z \in \mathbb{C}^* \setminus \sigma$ und $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$. Nach Satz 2.4.1 können wir für solche z und $i \in \{1, 2, 3\}$

$$\frac{1}{q(z)} H_i^*(z) \varphi = J_i W_{\mathbb{C} \chi_{z, \varphi}} \quad (2.7)$$

berechnen, wobei wir $J_1 W_{\mathbb{C} \psi} = J_3 \psi$ für alle $\psi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ und (2.3) benutzen:

$$J_1 W_{\mathbb{C} \chi_{z, \varphi}} = J_3 \chi_{z, \varphi} = \frac{1}{z} (J_3 W_{\mathbb{C} \chi_{z, \varphi}} - J_3 \varphi). \quad (2.8)$$

Eine Anwendung von Bemerkung 2.3.2.1 ergibt

$$\begin{pmatrix} J_3 W_{\mathbb{C} \chi_{z, \varphi}} \\ J_2 W_{\mathbb{C} \chi_{z, \varphi}} \end{pmatrix} = S_z [c + I(z, \varphi, \cdot)] : \left[-\frac{1}{3}, 0 \right] \rightarrow \mathbb{C}^2, \quad (2.9)$$

wobei

$$S_z = \begin{pmatrix} u_1^z & u_2^z \\ v_1^z & v_2^z \end{pmatrix} : \left[-\frac{1}{3}, 0 \right] \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

die Hauptfundamentalmatrix von $(u, v, 0, z)$ zur Zeit $t = -\frac{1}{3}$ ist und

$$-Q_z c = L_z \varphi$$

gilt. Formel (2.1) liefert dann für den Anfangswert $c \in \mathbb{C}^2$

$$c = -\frac{1}{q(z)} Q_z^* L_z \varphi. \quad (2.10)$$

Es seien $z \in \mathbb{C}^*$ und $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$. Wir erinnern uns an die Zusammensetzung der Ausdrücke $I = (I_1, I_2)^{tr}$, S_z und L_z :

$$\begin{aligned} I_1(z, \varphi, \cdot) &= -\frac{1}{z} \int_{-\frac{1}{3}}^{\cdot} S_z^{-1} A J_2 \varphi, \\ I_2(z, \varphi, \cdot) &= -\frac{1}{z^2} \int_{-\frac{1}{3}}^{\cdot} S_z^{-1} B J_3 \varphi - \frac{1}{z} \int_{-\frac{1}{3}}^{\cdot} S_z^{-1} B J_1 \varphi, \\ L_z \varphi &= \begin{pmatrix} -J_3 \varphi(0) \\ 0 \end{pmatrix} + S_z(0) I(z, \varphi, 0). \end{aligned}$$

Die charakteristische Funktion $q : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ ist nach Bemerkung 2.4.1 insbesondere stetig, und es gilt $\lim_{\zeta \rightarrow z} q(\zeta) = q(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$. Stellen wir nun die Stetigkeit der Abbildungen

$$\mathbb{C}^* \ni z \mapsto u_i^z|_{[-\frac{1}{3}, 0]} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet} \quad \text{und} \quad \mathbb{C}^* \ni z \mapsto v_i^z|_{[-\frac{1}{3}, 0]} \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet}$$

für $i \in \{1, 2\}$ fest, so folgt insbesondere für alle $z \in \sigma \setminus \{0\}$

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} S_{\zeta} = S_z, \quad \lim_{\zeta \rightarrow z} I(\zeta, \cdot, \cdot) = I(z, \cdot, \cdot) \quad \text{und} \quad \lim_{\zeta \rightarrow z} L_{\zeta} = L_z$$

bzgl. der Normen in den entsprechenden Räumen. Insbesondere haben wir unter Berücksichtigung der Linearität und Stetigkeit von

$$\mathcal{C}_{\mathbb{C}} \ni \varphi \mapsto S_{\zeta} \cdot I(\zeta, \varphi, \cdot) \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}^{\bullet}$$

$$\|S_{\zeta} \cdot I(\zeta, \varphi, \cdot)\| \leq \alpha(\zeta) \|\varphi\|$$

für alle $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$, wobei $\alpha : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ stetig ist.

Wir zeigen nun $\begin{pmatrix} H_3^*(\zeta) \\ H_2^*(\zeta) \end{pmatrix} \rightarrow -S_z Q_z^* L_z$ für $z \neq \zeta \rightarrow z \in \sigma \setminus \{0\}$. Es seien dazu $z \in \sigma \setminus \{0\}$, $\zeta \in \mathbb{C}^* \setminus \sigma$ und $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ mit $\|\varphi\| = 1$.

Mit (2.7), (2.9) und (2.10) erhalten wir dann

$$\begin{aligned} & \left\| \begin{pmatrix} H_3^*(\zeta)\varphi \\ H_2^*(\zeta)\varphi \end{pmatrix} + S_z Q_z^* L_z \varphi \right\| \stackrel{(2.7)}{=} \left\| q(\zeta) \begin{pmatrix} J_3 W_{\mathbb{C}} \chi_{\zeta, \varphi} \\ J_2 W_{\mathbb{C}} \chi_{\zeta, \varphi} \end{pmatrix} + S_z Q_z^* L_z \varphi \right\| \stackrel{(2.9), (2.10)}{=} \\ & = \left\| q(\zeta) S_{\zeta} \left[-\frac{1}{q(\zeta)} Q_{\zeta}^* L_{\zeta} \varphi + I(\zeta, \varphi, \cdot) \right] + S_z Q_z^* L_z \varphi \right\| = \\ & = \left\| -S_{\zeta} Q_{\zeta}^* L_{\zeta} \varphi + q(\zeta) S_{\zeta} \cdot I(\zeta, \varphi, \cdot) + S_z Q_z^* L_z \varphi \right\| \leq \\ & \leq \|S_z Q_z^* L_z - S_{\zeta} Q_{\zeta}^* L_{\zeta}\| + |q(\zeta)| \alpha(\zeta), \end{aligned}$$

wobei die letzte Summe für $\zeta \rightarrow z$ gegen Null strebt. Somit gilt

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} \begin{pmatrix} H_3^*(\zeta) \\ H_2^*(\zeta) \end{pmatrix} = -S_z Q_z^* L_z. \quad (2.11)$$

Für alle $z \in \mathbb{C}^* \setminus \sigma$ haben wir mit (2.7) und (2.8) für die ausstehende erste Komponente von H^*

$$H_1^*(z) \stackrel{(2.7)}{=} q(z) J_1 W_{\mathbb{C}} \chi_z, \stackrel{(2.8)}{=} q(z) \cdot \frac{1}{z} (J_3 W_{\mathbb{C}} \chi_z, -J_3) = \frac{1}{z} H_3^*(z) - \frac{q(z)}{z} J_3, \quad (2.12)$$

also existiert auch $\lim_{\zeta \rightarrow z} H_1^*(\zeta)$ für $z \in \sigma \setminus \{0\}$ mit

$$\lim_{\zeta \rightarrow z} H_1^*(\zeta) = \frac{1}{z} \lim_{\zeta \rightarrow z} H_3^*(\zeta), \quad z \in \sigma \setminus \{0\}. \quad (2.13)$$

Insgesamt existieren somit für $i \in \{1, 2, 3\}$ und $z \in \sigma \setminus \{0\}$ die Grenzwerte $\lim_{\zeta \rightarrow z} H_i^*(\zeta)$. $\mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ ist nach Anmerkung 2.3.1 abgeschlossen, und folglich gilt für alle $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ mit (2.6)

$$\left(\lim_{\zeta \rightarrow z} H_1^*(\zeta)\varphi, \lim_{\zeta \rightarrow z} H_2^*(\zeta)\varphi, \lim_{\zeta \rightarrow z} H_3^*(\zeta)\varphi \right) \in \mathcal{J}\mathcal{C}_{\mathbb{C}},$$

was die Definition von

$$H' : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}})$$

mit

$$H'|_{\mathbb{C}^* \setminus \sigma} := H^*$$

und

$$H'(z) := [\mathcal{C}_{\mathbb{C}} \ni \varphi \mapsto J^{-1}(\lim_{\zeta \rightarrow z} H_1^*(\zeta)\varphi, \lim_{\zeta \rightarrow z} H_2^*(\zeta)\varphi, \lim_{\zeta \rightarrow z} H_3^*(\zeta)\varphi) \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}]$$

für alle $z \in \sigma \setminus \{0\}$ erlaubt.

Wir zeigen die behauptete Formel (2.2): Nach (2.5) und (2.11) gilt für $z \in \sigma \setminus \{0\}$ und $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} J_3 H(z)\varphi \\ J_2 H(z)\varphi \end{pmatrix} &= \frac{1}{z} \begin{pmatrix} J_3 H'(z)\varphi \\ J_2 H'(z)\varphi \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{z} \lim_{\zeta \rightarrow z} \begin{pmatrix} J_3 H^*(\zeta)\varphi \\ J_2 H^*(\zeta)\varphi \end{pmatrix} = -\frac{1}{z} S_z Q_z^* L_z \varphi. \end{aligned}$$

Insgesamt ist das Lemma bewiesen. ■

Beweis von Satz 2.4.2: Es sei H die stetige Fortsetzung von \tilde{H} aus Lemma 2.4.1.

1. *Behauptung:*

$$\text{Es seien } z \in \sigma \setminus \{0\} \text{ und } Q_z \neq 0. \text{ Dann gilt } H(z) \neq 0 \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}). \quad (2.14)$$

Beweis: Die Voraussetzung $Q_z \neq 0$ liefert $Q_z^* \neq 0$, was $Q_z^* c \neq 0$ für ein $c \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ impliziert. Die Surjektivität von L_z gemäss Bemerkung 2.3.3 gibt ein $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ mit $L_z \varphi = c$. Unter Verwendung von $\det S_z(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und (2.2) ergibt sich folglich für jedes $\varphi \in \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$

$$\begin{pmatrix} J_3 H(z)\varphi \\ J_2 H(z)\varphi \end{pmatrix} = -\frac{1}{z} S_z Q_z^* L_z \varphi \neq 0,$$

woraus wir $H(z) \neq 0$ schliessen.

2. *Behauptung:* Für alle $z \in \sigma \setminus \{0\}$ gilt

$$\dim \mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z) = 1 \quad \text{und} \quad \alpha(W_{\mathbb{C}} - z) = m(z). \quad (2.15)$$

d.h. die geometrische Vielfachheit eines jeden $z \in \sigma \setminus \{0\}$ ist einfach und die Kettenlänge $\alpha(W_{\mathbb{C}} - z)$ für solche Punkte z stimmt mit der entsprechenden Eigenraum-Dimension $m(z)$ überein.

Beweis: Es seien $z \in \sigma \setminus \{0\}$ und für $\chi \in \mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z)$ die Segmente $u := J_3 W_{\mathbb{C}} \chi$ sowie $v := J_2 W_{\mathbb{C}} \chi$ gegeben. Wir betrachten die lineare Abbildung

$$\mu : \mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z) \ni \chi \mapsto \begin{pmatrix} u \left(-\frac{1}{3}\right) \\ v \left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Unter Berücksichtigung des ersten Teils von Bemerkung 2.3.2 für $\varphi = 0$ gilt

$$\mu(\mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z)) \subseteq \mathcal{N}(Q_z) \subseteq \mathbb{C}^2. \quad (2.16)$$

Ist $\mu\chi = 0$ für ein $\chi \in \mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z)$, so folgt mit Gleichung $(u, v, 0, z)$

$$u = 0 = v,$$

was mit der Definition von J , siehe Anmerkung 2.3.1, und $W_{\mathbb{C}}\chi = z\chi$, d.h. $z \in \sigma \setminus \{0\}$, auf

$$\chi_3 := J_3\chi = \frac{1}{z} \cdot u = 0, \quad \chi_2 := J_2\chi = \frac{1}{z}v = 0, \quad \chi_1 := J_1\chi = \frac{1}{z}\chi_3 = 0,$$

also $\chi = J^{-1}(\chi_1, \chi_2, \chi_3) = J^{-1}0 = 0$, führt. Folglich ist μ injektiv.

Der Punkt z liegt genau dann in $\sigma \setminus \{0\}$, wenn $0 = q(z) = \det Q_z$ gilt. Mit $Q_z \neq 0$ erhalten damit $\dim \mathcal{N}(Q_z) = 1$, woraus wir mit der Injektivität von μ und (2.16) $\dim \mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z) = 1$ folgern:

$$1 \leq \dim \mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z) = \dim \mu(\mathcal{N}(W_{\mathbb{C}} - z)) \leq \dim \mathcal{N}(Q_z) = 1.$$

In diesem Fall können wir nach Bemerkung 2.2.1.4 auf die Gleichheit

$$\alpha(W_{\mathbb{C}} - z) = m(z)$$

schliessen, und die Behauptung (2.15) ist bewiesen.

3. Nach Bemerkung 2.2.1 stimmen die Kettenlänge $\alpha(W_{\mathbb{C}} - z) = m(z)$ mit der Ordnung $l \in \mathbb{N}$ von $z \in \sigma \setminus \{0\}$ als Pol der Resolvente überein, und es gilt für $z \in \sigma \setminus \{0\}$ mit

$$\mathcal{F}_z := \{n \in \mathbb{N} : \text{Gibt st. Forts. v. } \zeta \mapsto (\zeta - z)^n (W_{\mathbb{C}} - z)^{-1} \text{ auf } (\mathbb{C}^* \setminus \sigma) \cup \{z\}\}$$

$$\alpha(W_{\mathbb{C}} - z) = l = \min \mathcal{F}_z. \quad (2.17)$$

Nach Definition der Nullstellenordnung $\text{ord}_q(z)$ gibt es eine Umgebung U des isolierten Punktes $z \in \sigma \setminus \{0\}$, die keine Elemente mit $\sigma \setminus \{z\}$ gemeinsam hat, eine holomorphe Funktion $h : U \rightarrow \mathbb{C}$ mit $h(z) \neq 0$ und

$$q(\zeta) = (\zeta - z)^{\text{ord}_q(z)} h(\zeta), \quad \zeta \in U.$$

Wir definieren durch

$$K_1(\zeta) := (\zeta - z)^{\alpha(W_{\mathbb{C}} - z)} (W_{\mathbb{C}} - \zeta)^{-1} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}})$$

für $\zeta \in U$ eine stetige, lineare Abbildung $K_1 : U \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}})$. Nach Lemma 2.4.1 gibt es eine stetige Fortsetzung $H : U \rightarrow \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}})$ von

$$\tilde{H} : U \setminus \{z\} \ni \zeta \mapsto q(\zeta)(W_{\mathbb{C}} - \zeta)^{-1} \in \mathcal{L}_{\mathbb{C}}(\mathcal{C}_{\mathbb{C}}).$$

Dann gilt für $\zeta \in U \setminus \{z\}$

$$\tilde{H}(\zeta) = q(\zeta)(W_{\mathbb{C}} - \zeta)^{-1} = h(\zeta)(\zeta - z)^{\text{ord}_q(z)} (W_{\mathbb{C}} - \zeta)^{-1}$$

und

$$K_2 : U \setminus \{z\} \ni \zeta \mapsto (\zeta - z)^{\text{ord}_q(z)} (W_{\mathbb{C}} - \zeta)^{-1} \in \mathcal{L}_C(\mathcal{C}_{\mathbb{C}})$$

ist stetig zu

$$U \ni \zeta \mapsto (\zeta - z)^{\alpha(W_{\mathbb{C}} - z)} (W_{\mathbb{C}} - \zeta)^{-1} \in \mathcal{L}_C(\mathcal{C}_{\mathbb{C}})$$

fortsetzbar. Mit (2.17) gilt dann $\text{ord}_q(z) \geq \alpha(W_{\mathbb{C}} - z)$.

Wäre $\text{ord}_q(z) > \alpha(W_{\mathbb{C}} - z)$, also $\text{ord}_q(z) = \alpha(W_{\mathbb{C}} - z) + k$ für ein $k \in \mathbb{N}$, so hätten wir mit (2.14) und $h(z) \neq 0$

$$0 \neq H(z) = h(z)K_2(z) = h(z)K_1(z)(z - z)^k = 0,$$

einen Widerspruch zu $H(z) \neq 0$. Also gilt mit (2.15)

$$m(z) = \alpha(W_{\mathbb{C}} - z) = \text{ord}_q(z).$$

Damit ist der Satz über die Nullstellencharakterisierung von m bewiesen. ■

Wir sind nun in der Lage, in einem letzten Abschnitt die Hyperbolizität von x zu beweisen.

2.5 Hyperbolizität von x

Um in diesem letzten Abschnitt die Hyperbolizität der $\frac{4}{3}$ -periodischen Lösung

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

von (f) aus Satz 2.0.1 zu beweisen setzen wir (H1), (H2) und (H3) voraus. Wie in Abschnitt 2.2 gesehen, ist

$$(m) \quad m(-1) = 1 \quad \text{und} \quad m(1) = 0$$

hinreichend für die Hyperbolizität von x , wobei $m : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{N}_0$ die algebraische Vielfachheit von $W_{\mathbb{C}}$ ist. Unter den Voraussetzungen von Satz 2.4.2 lässt sich (m) mittels der holomorphen charakteristischen Funktion

$$q : \mathbb{C}^* \ni z \mapsto 1 - z + u_2^z(0) + zv_1^z(0) \in \mathbb{C}$$

übersetzen zu

$$(q) \quad q(-1) = 0, \quad q'(-1) \neq 0 \quad \text{und} \quad q(1) \neq 0,$$

wobei $u_2^z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ und $v_1^z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ Einträge der Hauptfundamentalmatrix

$$S_z = \begin{pmatrix} u_1^z & u_2^z \\ v_1^z & v_2^z \end{pmatrix} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

zur Zeit $t = -\frac{1}{3}$ des durch $z \in \mathbb{C}^*$ parametrisierten linearen, nicht-autonomen und homogenen Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$(u, v, 0, z) \quad \begin{bmatrix} \dot{u} = \frac{1}{z}A(t)v \\ \dot{v} = \frac{1}{z^2}B(t)u. \end{bmatrix}$$

sind. Die für den Hyperbolizitätsbeweis essentiellen Eigenschaften der Koeffizientenfunktionen

$$A : \mathbb{R} \ni t \mapsto f' \left(x \left(t - \frac{1}{3} \right) \right) \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad B : \mathbb{R} \ni t \mapsto f'(x(t)) \in \mathbb{R}^+$$

ergeben sich aus denen von f und sind in Bemerkung 2.3.1 zusammengefasst. Wir bezeichnen die rechte Seite von $(u, v, 0, z)$ mit

$$F : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{R} \times \mathbb{C}^* \ni (u, v, t, z) \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{z}A(t)v \\ \frac{1}{z^2}B(t)u \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2.$$

Zum Nachweis der Hyperbolizität von x ist es nach (q) ausreichend, die stetig differenzierbare Einschränkung

$$q_{\mathbb{R}} := q|_{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$$

von q zu betrachten. Zunächst stellen wir fest, dass die Nullstellenmenge von $q_{\mathbb{R}}$ beschränkt ist.

Bemerkung 2.5.1 *Es gibt $z^+ \in \mathbb{R}^+$ und $z^- \in \mathbb{R}^-$, so dass für die eingeschränkte charakteristische Funktion $q_{\mathbb{R}}$ von W*

$$q_{\mathbb{R}}|_{(-\infty, z^-)} > 0 \quad \text{und} \quad q_{\mathbb{R}}|_{(z^+, \infty)} < 0$$

gelten.

Beweis: Die Lösungen $(u_1^z, v_1^z)^{tr}$ und $(u_2^z, v_2^z)^{tr}$ von $(u, v, 0, z)$ sind stetig vom Parameter $z \in \mathbb{C}^*$ abhängig. Deshalb existieren

$$\begin{pmatrix} u_j^{\pm\infty} \\ v_j^{\pm\infty} \end{pmatrix} := \lim_{\mathbb{R} \ni z \rightarrow \pm\infty} \begin{pmatrix} u_j^z \\ v_j^z \end{pmatrix}, \quad j \in \{1, 2\},$$

als Lösungen von

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \lim_{\mathbb{R} \ni z \rightarrow \pm\infty} F(u, v, t, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

und es gilt

$$\begin{pmatrix} u_1^{\pm\infty} \left(-\frac{1}{3}\right) \\ v_1^{\pm\infty} \left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u_2^{\pm\infty} \left(-\frac{1}{3}\right) \\ v_2^{\pm\infty} \left(-\frac{1}{3}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich haben wir für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{pmatrix} u_1^{\pm\infty} \\ v_1^{\pm\infty} \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u_2^{\pm\infty} \\ v_2^{\pm\infty} \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \frac{q_{\mathbb{R}}(z)}{z} &= \lim_{z \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{1}{z} - 1 + \frac{u_2^z(0)}{z} + v_1^z(0) \right) = \\ &= 0 - 1 + u_2^{\pm\infty}(0) \cdot 0 + v_1^{\pm\infty}(0) = -1, \end{aligned}$$

also $\lim_{z \rightarrow \pm\infty} \frac{q_{\mathbb{R}}(z)}{z} = -1$. Es gibt folglich $z^+ > 0$ und $z^- < 0$ mit

$$\frac{q_{\mathbb{R}}(z)}{z} < 0, \quad z \in (-\infty, z^-) \cup (z^+, \infty),$$

also

$$q_{\mathbb{R}}(z) > 0 \quad \text{für alle } z \in (-\infty, z^-) \quad \text{und} \quad q_{\mathbb{R}}(z) < 0 \quad \text{für alle } z \in (z^+, \infty),$$

was gerade die Behauptung ist. ■

Um (q) zu beweisen, leiten wir in der nächsten Bemerkung eine Formel für $q'_{\mathbb{R}}(-1) = q'(-1)$ her. Dabei ist zu beachten, dass in Abschnitt 2.4 die $\mathbb{C}^* \ni z$ -Werte der charakteristischen Funktion q von W als Determinante der Matrix

$$Q_z = S_z(0) - \begin{pmatrix} 0 & z \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$$

definiert sind.

Bemerkung 2.5.2 Für die Lösungsmatrix S_{-1} und den Ableitungswert $q'(-1)$ der charakteristischen Funktion q ergeben sich die folgenden Ausdrücke:

1. Es gelten $v_2^{-1}(0) = 0$, $v_1^{-1}(0) = 1$ und $u_2^{-1}(0) = -1$, also

$$S_{-1}(0) = \begin{pmatrix} u_1^{-1}(0) & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und}$$

$$Q_{-1} = S_{-1}(0) - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^{-1}(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Es gelten $q(-1) = 0$ und

$$q'_{\mathbb{R}}(-1) = q'(-1) = -u_1^{-1}(0) \cdot \int_{-\frac{1}{3}}^0 [A(v_2^{-1})^2 + 2B(u_2^{-1})^2].$$

Beweis:

1. Nach Bemerkung 2.2.3 ist $z = -1$ ein Eigenwert von $W_{\mathbb{C}}$ mit Eigenvektor \dot{x}_0 , also gilt $(W_{\mathbb{C}} + 1)\dot{x}_0 = 0$ und

$$W_{\mathbb{C}}\dot{x}_0 = -\dot{x}_0. \quad (2.1)$$

Nach Bemerkung 2.3.2, angewendet auf $\varphi = 0$ und $\chi = \dot{x}_0$, erfüllt

$$(u, v)^{tr} = (J_3 W_{\mathbb{C}} \dot{x}_0, J_2 W_{\mathbb{C}} \dot{x}_0)^{tr} : \left[-\frac{1}{3}, 0 \right] \rightarrow \mathbb{C}^2$$

die Gleichung

$$(u, v, 0, -1) \quad \begin{bmatrix} \dot{u} = -A(t)v \\ \dot{v} = B(t)u \end{bmatrix}.$$

Weil S_{-1} eine Fundamentalmatrix von $(u, v, 0, -1)$ ist, gibt es c_1 und c_2 aus \mathbb{C} , so dass für alle $t \in \left[-\frac{1}{3}, 0 \right]$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}(t) = c_1 \begin{pmatrix} u_1^{-1} \\ v_1^{-1} \end{pmatrix}(t) + c_2 \begin{pmatrix} u_2^{-1} \\ v_2^{-1} \end{pmatrix}(t) \quad (2.2)$$

gilt. Die Anfangswerte von u und v ergeben sich aus (2.1) und den Eigenschaften (x) von x aus Satz 2.0.1 :

$$\begin{aligned} u\left(-\frac{1}{3}\right) &= J_3 W_{\mathbb{C}} \dot{x}_0\left(-\frac{1}{3}\right) = -J_3 \dot{x}_0\left(-\frac{1}{3}\right) = -\dot{x}_0\left(-\frac{1}{3}\right) = 0, \\ v\left(-\frac{1}{3}\right) &= J_2 W_{\mathbb{C}} \dot{x}_0\left(-\frac{1}{3}\right) = -J_2 \dot{x}_0\left(-\frac{1}{3}\right) = -\dot{x}_0\left(-\frac{2}{3}\right) = \dot{x}(0) < 0 \end{aligned}$$

Mit (2.2) und $S_{-1}\left(-\frac{1}{3}\right) = E_2$ folgen dann $c_1 = 0$ und $c_2 = \dot{x}(0)$, was mit

$$\begin{aligned} u(0) &= J_3 W_{\mathbb{C}} \dot{x}_0(0) = -J_3 \dot{x}_0(0) = -\dot{x}(0) = -c_2, \\ v(0) &= J_2 W_{\mathbb{C}} \dot{x}_0(0) = -J_2 \dot{x}_0(0) = -\dot{x}_0\left(-\frac{1}{3}\right) = -\dot{x}\left(-\frac{1}{3}\right) = 0 = c_1 \end{aligned}$$

auf

$$0 < -\dot{x}(0) = u(0) = \dot{x}(0)u_2^{-1}(0), \quad 0 = v(0) = \dot{x}(0)v_2^{-1}(0)$$

führt. D.h. es gelten

$$u_2^{-1}(0) = -1 \quad \text{und} \quad v_2^{-1}(0) = 0. \quad (2.3)$$

Wir zeigen schließlich $v_1^{-1}(0) = 1$ anhand von $\det S_{-1}(t) = 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$: Mit (2.3) erhalten wir

$$1 = \det S_{-1}(0) = \det \begin{pmatrix} u_1^{-1}(0) & -1 \\ v_1^{-1}(0) & 0 \end{pmatrix} = v_1^{-1}(0).$$

2. Wegen $-1 \in \sigma \setminus \{0\}$ gilt nach Satz 2.4.1 für das Bild $q(-1) = 0$. Wir berechnen die Ableitung von q in $z \in \mathbb{C}^*$:

$$q'(z) = -1 + D_z u_2^z(0) + v_1^z(0) + z \cdot D_z v_1^z(0). \quad (2.4)$$

Die Lösungen $(u_j^z, v_j^z)^{tr}$, $j \in \{1, 2\}$, sind differenzierbar vom Parameter z abhängig. D.h. $(D_z u_j^z, D_z v_j^z)^{tr}$, $j \in \{1, 2\}$, erfüllen

$$\begin{pmatrix} D_z u_j^z \\ D_z v_j^z \end{pmatrix} = D_z F(u_j^z, v_j^z, t, z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{z} A(t) D_z v_j^z - \frac{1}{z^2} A(t) v_j^z \\ \frac{1}{z^2} B(t) D_z u_j^z - \frac{2}{z^3} B(t) u_j^z \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Weil die Anfangswerte $\begin{pmatrix} u_1^z(-\frac{1}{3}) \\ v_1^z(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} u_2^z(-\frac{1}{3}) \\ v_2^z(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sich bei einer Variation des Parameters z nicht ändern, folgt

$$\begin{pmatrix} D_z u_j^z(-\frac{1}{3}) \\ D_z v_j^z(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad j \in \{1, 2\}. \quad (2.6)$$

Unter Ausnutzung von $\det S_z = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$ und dem Startwert (2.6) erhalten wir aus der inhomogenen Gleichung (2.5) mit der Variation-der-Konstanten-Formel für alle $z \in \mathbb{C}^*$ und $j \in \{1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} D_z u_j^z \\ D_z v_j^z \end{pmatrix}(0) &= S_z(0) \left[\begin{pmatrix} D_z u_j^z(-\frac{1}{3}) \\ D_z v_j^z(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} + \int_{-\frac{1}{3}}^0 S_z^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} A v_j^z \\ -\frac{2}{z^3} B u_j^z \end{pmatrix} \right] = \\ &= \begin{pmatrix} u_1^z(0) & u_2^z(0) \\ v_1^z(0) & v_2^z(0) \end{pmatrix} \cdot \int_{-\frac{1}{3}}^0 \frac{1}{\det S_z} \begin{pmatrix} v_2^z & -u_2^z \\ -v_1^z & u_1^z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} A v_j^z \\ -\frac{2}{z^3} B u_j^z \end{pmatrix} = \\ &= \int_{-\frac{1}{3}}^0 \begin{pmatrix} u_1^z(0) & u_2^z(0) \\ v_1^z(0) & v_2^z(0) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{z^2} A v_2^z v_j^z + \frac{2}{z^3} B u_2^z u_j^z \\ \frac{1}{z^2} A v_1^z v_j^z - \frac{2}{z^3} B u_1^z u_j^z \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Folglich ergeben sich für die $q'(-1)$ -relevanten Terme

$$\begin{aligned} D_z u_2^{-1}(0) &= -u_1^{-1}(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 [A(v_2^{-1})^2 + 2B(u_2^{-1})^2] + \\ &\quad + u_2^{-1}(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 [A v_1^{-1} v_2^{-1} + 2B u_1^{-1} u_2^{-1}], \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} D_z v_1^{-1}(0) &= -v_1^{-1}(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 [A v_2^{-1} v_1^{-1} + 2B u_2^{-1} u_1^{-1}] + \\ &\quad + v_2^{-1}(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 [A(v_1^{-1})^2 + 2B(u_1^{-1})^2]. \end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung von Teil 1. dieser Bemerkung und (2.4) gilt dann wie behauptet

$$q'(-1) = -1 - u_1^{-1}(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 [A(v_2^{-1})^2 + 2B(u_2^{-1})^2] - \int_{-\frac{1}{3}}^0 [Av_1^{-1}v_2^{-1} + 2Bu_1^{-1}u_2^{-1}] +$$

$$+1 - 1 \cdot \left(- \int_{-\frac{1}{3}}^0 [Av_2^{-1}v_1^{-1} + 2Bu_2^{-1}u_1^{-1}] + 0 \right) = -u_1^{-1}(0) \int_{-\frac{1}{3}}^0 [A(v_2^{-1})^2 + 2B(u_2^{-1})^2].$$

■

Um die angestrebten Abschätzungen in (q) zu erhalten, entkoppeln wir die Systeme

$$(u, v, 0, -1) \quad \begin{bmatrix} \dot{u} = -A(t)v \\ \dot{v} = B(t)u \end{bmatrix}$$

und

$$(u, v, 0, 1) \quad \begin{bmatrix} \dot{u} = A(t)v \\ \dot{v} = B(t)u \end{bmatrix},$$

indem wir auf Polarkoordinaten transformieren. Dabei betrachten wir nicht-triviale Lösungen von $(u, v, 0, -1)$ bzw. $(u, v, 0, 1)$, d.h. der radiale Anteil ist positiv.

Bemerkung 2.5.3 *Es seien die gekoppelten Systeme $(u, v, 0, -1)$ und $(u, v, 0, 1)$ gegeben.*

1. *Das System $(u, v, 0, -1)$ entkoppelt sich durch eine Polarkoordinatentransformation auf das System*

$$(u, v, 0, -1)_{r,\theta} \quad \begin{bmatrix} \dot{r} = r[B(t) - A(t)] \sin \theta \cos \theta \\ \dot{\theta} = B(t) \cos^2 \theta + A(t) \sin^2 \theta. \end{bmatrix}$$

mit $u(t) = r(t) \cos \theta(t)$ und $v(t) = r(t) \sin \theta(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

2. *Das System $(u, v, 0, 1)$ entkoppelt sich durch eine Polarkoordinatentransformation auf das System*

$$(u, v, 0, 1)_{r,\theta} \quad \begin{bmatrix} \dot{r} = r[A(t) + B(t)] \sin \theta \cos \theta \\ \dot{\theta} = B(t) \cos^2 \theta - A(t) \sin^2 \theta. \end{bmatrix}$$

mit $u(t) = r(t) \cos \theta(t)$ und $v(t) = r(t) \sin \theta(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis: Der Ansatz $u(t) = r(t) \cos \theta(t)$ und $v(t) = r(t) \sin \theta(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ liefert nach einem Einsetzen in $(u, v, 0, -1)$ die beiden Gleichungen

$$\dot{u}(t) = \dot{r}(t) \cos \theta(t) - r(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) = -A(t)r(t) \sin \theta(t) \quad (2.1)$$

$$\dot{v}(t) = \dot{r}(t) \sin \theta(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) = B(t)r(t) \cos \theta(t) \quad (2.2)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Summe $(2.1) \cdot \cos \theta(t) + (2.2) \cdot \sin \theta(t)$ ergibt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{r}(t) = r(t) \cdot (B(t) - A(t)) \cdot \sin \theta(t) \cos \theta(t),$$

also die erste Gleichung von $(u, v, 0, -1)_{r,\theta}$. Desweiteren erhalten wir aus

$$(2.1) \cdot \sin \theta(t) - (2.2) \cdot \cos \theta(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$

$$-r(t) \cdot \dot{\theta}(t) = -A(t)r(t) \sin^2 \theta(t) - B(t)r(t) \cos^2 \theta(t)$$

und somit die zweite Gleichung von $(u, v, 0, -1)_{r,\theta}$.

Eine bis auf ein Vorzeichen analoge Rechnung ergibt aus den Gleichungen von $(u, v, 0, 1)$ die von $(u, v, 0, 1)_{r,\theta}$:

Entsprechend führt der Ansatz $u(t) = r(t) \cos \theta(t)$ und $v(t) = r(t) \sin \theta(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ nach einem Einsetzen in $(u, v, 0, 1)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ auf die beiden Gleichungen

$$\dot{u}(t) = \dot{r}(t) \cos \theta(t) - r(t) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) = A(t)r(t) \sin \theta(t) \quad (2.3)$$

$$\dot{v}(t) = \dot{r}(t) \sin \theta(t) + r(t) \dot{\theta}(t) \cos \theta(t) = B(t)r(t) \cos \theta(t) \quad (2.4)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Summe $(2.3) \cdot \cos \theta(t) + (2.4) \cdot \sin \theta(t)$ ergibt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\dot{r}(t) = r(t) \cdot (B(t) + A(t)) \cdot \sin \theta(t) \cos \theta(t),$$

also die erste Gleichung von $(u, v, 0, 1)_{r,\theta}$. Desweiteren erhalten wir die zweite von $(u, v, 0, 1)_{r,\theta}$, wenn wir

$$(2.3) \cdot \sin \theta(t) - (2.4) \cdot \cos \theta(t)$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ rechnen:

$$-r(t) \cdot \dot{\theta}(t) = A(t)r(t) \sin^2 \theta(t) - B(t)r(t) \cos^2 \theta(t),$$

was der zweiten Gleichung von $(u, v, 0, 1)_{r,\theta}$ entspricht. ■

Mit Hilfe der Polarkoordinatendarstellung von $(u, v, 0, -1)$ und $(u, v, 0, 1)$ ist es möglich, die Aussage (q) zu beweisen, d.h. Abschätzungen von $q'(-1)$ und $q(1)$ herzuleiten; wir beachten dabei Bemerkung 2.5.2.

Bemerkung 2.5.4 *Es gelten*

$$q'(-1) = -u_1^{-1}(0) \cdot \int_{-\frac{1}{3}}^0 [A(v_2^{-1})^2 + 2B(u_2^{-1})^2] < 0$$

und

$$q(1) = u_2^1(0) + v_1^1(0) > 0.$$

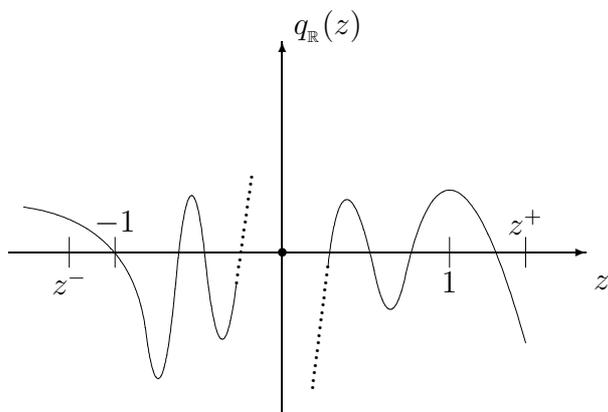


Abbildung: Wegen $q'(-1) < 0$ und $q(1) > 0$ ergeben sich $z^- < -1$ und $z^+ > 1$.

Beweis: In Punkt 1. des Beweises zeigen wir $q'(-1) < 0$, in 2. die Abschätzung $q(1) > 0$.

1. (a) Die in der Behauptung gegebenen Formeln für $q'(-1)$ und $q(1)$ gelten nach Bemerkung 2.5.2 und Bemerkung 2.4.1. Es seien für $j \in \{1, 2\}$ und $t \in [-\frac{1}{3}, 0]$

$$\begin{pmatrix} u_j^{-1} \\ v_j^{-1} \end{pmatrix}(t) = r_j(t) \begin{pmatrix} \cos \theta_j(t) \\ \sin \theta_j(t) \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

die Polarkoordinatendarstellung der Spalten von S_{-1} . Aus der Anfangsbedingung $S_{-1}(-\frac{1}{3}) = E_2$ ergeben sich

$$\theta_1\left(-\frac{1}{3}\right) = 0, \quad \theta_2\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \quad \text{und} \quad r_1\left(-\frac{1}{3}\right) = r_2\left(-\frac{1}{3}\right) = 1. \quad (2.2)$$

Nach Voraussetzung (H1) gelten $A > 0$ und $B > 0$. Deshalb würde aus

$$u_1^{-1}(0) > 0$$

unter Berücksichtigung des Anfangswerts $v_2^{-1}(-\frac{1}{3}) = 1$ die Behauptung

$$q'(-1) < 0$$

folgen. Wir zeigen $u_1^{-1}(0) > 0$, indem wir die Polarkoordinaten (2.1) verwenden und

$$\theta_1(0) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right) \quad (2.3)$$

beweisen. Um dies zu bewerkstelligen, finden wir in den nächsten Beweisteilen eine Lösung θ_0 von $(u, v, 0, -1)_{r, \theta}$, für die

$$\frac{\pi}{2} > \theta_0|_{[-\frac{1}{3}, 0]} \geq \theta_1|_{[-\frac{1}{3}, 0]}$$

gilt; aus $\dot{\theta}_1 > 0$ nach (H2) und $(u, v, 0, -1)_{r, \theta}$ folgern wir dann mit $\theta_1(-\frac{1}{3}) = 0$ die gewünschte Aussage (2.3).

(b) *Behauptung:*

$$\theta_2(0) = \pi. \quad (2.4)$$

Beweis: Nach Bemerkung 2.5.3 erfüllen $(r_j, \theta_j)^{tr}$ für $j \in \{1, 2\}$ die Gleichung $(u, v, 0, -1)_{r, \theta}$. Insbesondere gilt dann

$$\dot{\theta}_2 > 0. \quad (2.5)$$

Bemerkung 2.5.2 liefert $v_2^{-1}(0) = 0$, was mit (2.1) auf $\sin \theta_2(0) = 0$ führt. Aus (2.2) und (2.5) folgern wir

$$\theta_2(0) = n\pi \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}. \quad (2.6)$$

Wir setzen

$$u := J_3 W_{\mathbb{C}} \dot{x}_0 \quad \text{und} \quad v := J_2 W_{\mathbb{C}} \dot{x}_0.$$

Weil $z = -1$ nach Bemerkung 2.2.3 ein Eigenwert von $W_{\mathbb{C}}$ mit Eigenvektor \dot{x}_0 ist, folgt

$$u = -J_3 \dot{x}_0 \quad \text{und} \quad v = -J_2 \dot{x}_0. \quad (2.7)$$

Die Eigenschaften von x bzw. \dot{x} nach Satz 2.0.1 liefern

$$u\left(-\frac{1}{3}\right) = -\dot{x}_0\left(-\frac{1}{3}\right) = -\dot{x}\left(-\frac{1}{3}\right) = 0, \quad (2.8)$$

$$c := v\left(-\frac{1}{3}\right) = -\dot{x}_0\left(-\frac{2}{3}\right) = -\dot{x}\left(-\frac{2}{3}\right) < 0.$$

Für den bei der Variation-der-Konstanten-Formel zur Lösung der inhomogenen Gleichung (u, v, φ, z) vorkommenden Integralausdruck I ,

$$I(z, \varphi, t) = \begin{pmatrix} I_1(z, \varphi, t) \\ I_2(z, \varphi, t) \end{pmatrix} = \int_{-\frac{1}{3}}^t S_z^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{z} A J_2 \varphi \\ -\frac{1}{z^2} B J_3 \varphi - \frac{1}{z} B J_1 \varphi \end{pmatrix},$$

gilt $I(z, 0, t) = 0 \in \mathbb{C}^2$ für alle $(z, t) \in \mathbb{C}^* \times [-\frac{1}{3}, 0]$. Deshalb ergibt Bemerkung 2.3.2 mit $(W_{\mathbb{C}} + 1)\dot{x}_0 = 0$ und (2.8)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} &= S_{-1}(t) \left[\begin{pmatrix} u(-\frac{1}{3}) \\ v(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} + I(-1, 0, t) \right] = \\ &= c \begin{pmatrix} u_1^{-1}(t) & u_2^{-1}(t) \\ v_1^{-1}(t) & v_2^{-1}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} u_2^{-1}(t) \\ v_2^{-1}(t) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} u_2^{-1}(t) \\ v_2^{-1}(t) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

für alle $t \in [-\frac{1}{3}, 0]$.

Formel (2.9) zusammen mit (2.7) impliziert

$$-\dot{x}|_{[-\frac{1}{3}, 0]} = -J_3 \dot{x}_0 = u = c \cdot u_2^{-1}|_{[-\frac{1}{3}, 0]}$$

und

$$u_2^{-1}|_{[-\frac{1}{3},0]} = -\frac{1}{c}\dot{x}|_{[-\frac{1}{3},0]}.$$

Aus $\dot{x}|_{(-\frac{1}{3},0]} < 0$ folgern wir dann mit (2.8)

$$u_2^{-1}|_{(-\frac{1}{3},0]} < 0,$$

was mit (2.1) auf

$$\cos \theta_2|_{(-\frac{1}{3},0]} < 0 \tag{2.10}$$

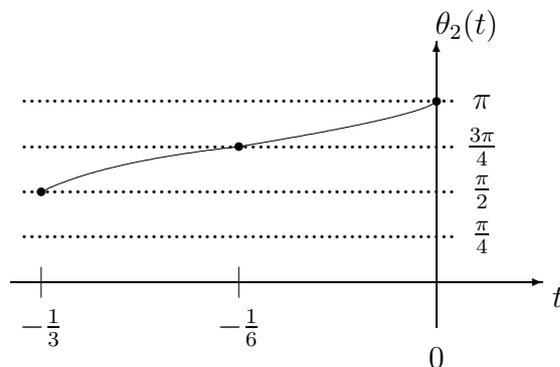
führt. Die Abschätzung (2.10) zusammen mit (2.2) und (2.5) erlauben nur

$$\theta_2|_{(-\frac{1}{3},0]} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$$

und in (2.6) muss $n = 1$ gelten, was die Behauptung (2.4) beweist.

(c) *Behauptung:*

$$\theta_2|_{(-\frac{1}{3},-\frac{1}{6})} \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right), \quad \theta_2\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{3\pi}{4}, \quad \theta_2|_{(-\frac{1}{6},0)} \in \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right). \tag{2.11}$$



Beweis: Nach Bemerkung 2.3.1 gelten

$$A\left(\cdot - \frac{1}{3}\right) = B \quad \text{und} \quad B\left(\cdot - \frac{1}{3}\right) = A. \tag{2.12}$$

Wir setzen

$$\theta^* := \frac{3\pi}{2} - \theta_2\left(-\frac{1}{3} - \cdot\right).$$

Dann erfüllt θ^* – genauso wie θ_2 – die Gleichung $(u, v, 0, -1)_{r,\theta}$: Wir haben unter Berücksichtigung von (2.12) und $B = B(-\cdot)$, $A(-\cdot) = A$ sowie $\sin = \cos(\frac{3}{2}\pi - \cdot)$ und $\cos = \sin(\frac{3}{2}\pi - \cdot)$:

$$\begin{aligned}\dot{\theta}^* &= \dot{\theta}_2 \left(-\frac{1}{3} - \cdot \right) = \\ &= A \left(-\frac{1}{3} - \cdot \right) \sin^2 \theta_2 \left(-\frac{1}{3} - \cdot \right) + B \left(-\frac{1}{3} - \cdot \right) \cos^2 \theta_2 \left(-\frac{1}{3} - \cdot \right) = \\ &= B \cos^2 \left(\frac{3\pi}{2} - \theta_2 \left(-\frac{1}{3} - \cdot \right) \right) + A \sin^2 \left(\frac{3\pi}{2} - \theta_2 \left(-\frac{1}{3} - \cdot \right) \right) = \\ &= A \sin^2 \theta^* + B \cos^2 \theta^*.\end{aligned}$$

Die Anfangswerte von θ^* und θ_2 stimmen wegen (2.4) überein:

$$\theta^* \left(-\frac{1}{3} \right) = \frac{3\pi}{2} - \theta_2(0) = \frac{3\pi}{2} - \pi = \frac{\pi}{2} = \theta_2 \left(-\frac{1}{3} \right),$$

so dass die Eindeutigkeit von Lösungen $\theta^* = \theta_2$ liefert. Dies bedeutet

$$\theta_2 \left(-\frac{1}{6} \right) = \frac{3\pi}{4}, \quad (2.13)$$

denn

$$\theta_2 \left(-\frac{1}{6} \right) = \theta^* \left(-\frac{1}{6} \right) = \frac{3\pi}{2} - \theta_2 \left(-\frac{1}{6} \right)$$

nach dem eben Bewiesenen.

Die Aussagen (2.13), (2.5), $\theta_2(-\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{2}$ und (2.4) ergeben (2.11).

- (d) Es sei $\theta_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die Lösung von $(u, v, 0, -1)_{r,\theta}$ mit $\theta_0(-\frac{1}{6}) = \frac{\pi}{4}$.
Behauptung:

$$\theta_0|_{[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})} > \theta_2|_{[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})} - \frac{\pi}{2}, \quad (2.14)$$

$$\theta_2|_{(-\frac{1}{6}, 0]} - \frac{\pi}{2} > \theta_0|_{(-\frac{1}{6}, 0]}. \quad (2.15)$$

Beweis: Wir zeigen zunächst (2.14). Die Lösungen θ_0 und θ_2 erfüllen auf $[-\frac{1}{3}, 0]$ Gleichung $(u, v, 0, -1)_{r,\theta}$, d.h. für alle $t \in [-\frac{1}{3}, 0]$ und $j \in \{0, 2\}$ gilt

$$\begin{aligned}0 < \dot{\theta}_j(t) &= A(t) \sin^2 \theta_j(t) + B(t) \cos^2 \theta_j(t) = \\ &= [A(t) - B(t)] \sin^2 \theta_j(t) + B(t).\end{aligned} \quad (2.16)$$

Es ist nach (2.13)

$$\theta_0 \left(-\frac{1}{6} \right) = \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2} = \theta_2 \left(-\frac{1}{6} \right) - \frac{\pi}{2}. \quad (2.17)$$

Aus Bemerkung 2.3.1 wissen wir

$$(A - B)|_{[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})} > 0. \quad (2.18)$$

Das Minimum $t_0 := \min \left\{ s \in [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}] : \theta_0|_{[s, -\frac{1}{6}]} \geq 0 \right\}$ existiert wegen $\theta_0(-\frac{1}{6}) = \frac{\pi}{4} > 0$, und es gilt $\theta_0(t_0) = 0$. Aus $\theta_0(-\frac{1}{6}) = \frac{\pi}{4} > 0$ und $\dot{\theta}_0 > 0$ folgt zum einen $t_0 < -\frac{1}{6}$ und zum anderen

$$0 \leq \theta_0|_{[t_0, -\frac{1}{6})} < \frac{\pi}{4}. \quad (2.19)$$

Mit $\frac{\pi}{2} = \theta_2(-\frac{1}{3}) \leq \theta_2|_{[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}]} \leq \theta_2(-\frac{1}{6}) = \frac{3\pi}{4}$ folgt insbesondere

$$\frac{\pi}{2} \leq \theta_2|_{[t_0, -\frac{1}{6})} < \frac{3\pi}{4}. \quad (2.20)$$

Die Abschätzungen (2.19) und (2.20) implizieren

$$\sin^2 \theta_0|_{[t_0, -\frac{1}{6})} < \sin^2 \theta_2|_{[t_0, -\frac{1}{6})}. \quad (2.21)$$

Die Abschätzung (2.21) liefert mit (2.16) und (2.18) für alle $t \in [t_0, -\frac{1}{6})$:

$$\begin{aligned} \dot{\theta}_0(t) &= [A(t) - B(t)] \sin^2 \theta_0(t) + B(t) < \\ &< [A(t) - B(t)] \sin^2 \theta_2(t) + B(t) = \dot{\theta}_2(t), \end{aligned}$$

was mit (2.17)

$$\theta_0|_{[t_0, -\frac{1}{6})} > \theta_2|_{[t_0, -\frac{1}{6})} - \frac{\pi}{2} \quad (2.22)$$

ergibt. Ist $t_0 > -\frac{1}{3}$, so ergeben (2.22) und (2.20) mit der strengen Monotonie von θ_2

$$\theta_0(t_0) > \theta_2(t_0) - \frac{\pi}{2} > 0,$$

also einen Widerspruch zur Minimalität von t_0 . Folglich muß $t_0 = -\frac{1}{3}$ sein; die Behauptung (2.14) ist bewiesen, wenn wir dies bei (2.22) berücksichtigen.

Um Behauptung (2.15) zu zeigen, verfahren wir sehr ähnlich wie beim Beweis von (2.14). Es gilt für alle $t \in [-\frac{1}{3}, 0]$ und $j \in \{0, 2\}$

$$\begin{aligned} 0 < \dot{\theta}_j(t) &= A(t) \sin^2 \theta_j(t) + B(t) \cos^2 \theta_j(t) = \\ &= [B(t) - A(t)] \cos^2 \theta_j(t) + A(t). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Bemerkung 2.3.1 liefert

$$(B - A)|_{(-\frac{1}{6}, 0]} > 0. \quad (2.24)$$

Wir setzen $t_0 := \max \left\{ s \in \left[-\frac{1}{6}, 0\right] : \theta_0|_{\left[-\frac{1}{6}, s\right]} \leq \frac{\pi}{2} \right\}$. Mit $\theta_0\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2}$ folgt $t_0 > -\frac{1}{6}$, und $\dot{\theta}_0 > 0$ gibt dann

$$\frac{\pi}{4} < \theta_0|_{\left(-\frac{1}{6}, t_0\right]} \leq \frac{\pi}{2}. \quad (2.25)$$

Aus $\theta_2\left(-\frac{1}{6}\right) = \frac{3\pi}{4}$, $\theta_2(0) = \pi$ nach (2.4) und $\dot{\theta}_2 > 0$ erhalten wir insbesondere

$$\frac{3\pi}{4} < \theta_2|_{\left(-\frac{1}{6}, t_0\right]} \leq \pi,$$

was mit (2.25) auf

$$\cos^2 \theta_0|_{\left(-\frac{1}{6}, t_0\right]} < \cos^2 \theta_2|_{\left(-\frac{1}{6}, t_0\right]} \quad (2.26)$$

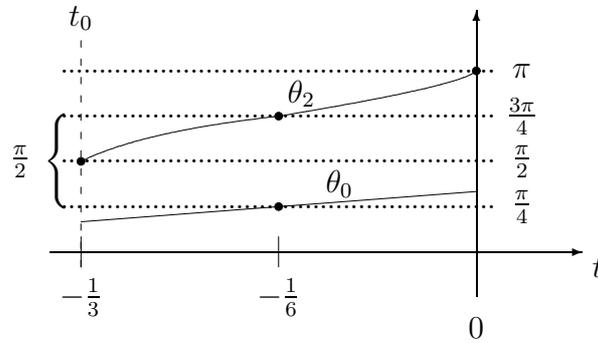
führt. Die letzte Abschätzung (2.26) impliziert mit (2.23) und (2.24)

$$\dot{\theta}_0|_{\left(-\frac{1}{6}, t_0\right]} < \dot{\theta}_2|_{\left(-\frac{1}{6}, t_0\right]}. \quad (2.27)$$

Diese Ungleichung in Kombination mit (2.17) liefert

$$\theta_2|_{\left(-\frac{1}{6}, t_0\right]} - \frac{\pi}{2} > \theta_0|_{\left(-\frac{1}{6}, t_0\right]}. \quad (2.28)$$

Die Annahme $t_0 < 0$ ergäbe nun analog zum obigen Beweis einen Widerspruch zur Maximalität von t_0 , also $t_0 = 0$ und Behauptung (2.15) ist bewiesen.



- (e) Wir zeigen nun (2.3), was nach den Aussagen im ersten Beweisteil die Behauptung $q'(-1) < 0$ nach sich zieht.

Behauptung (2.14) gibt

$$\theta_0\left(-\frac{1}{3}\right) > \theta_2\left(-\frac{1}{3}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0 = \theta_1\left(-\frac{1}{3}\right), \quad (2.29)$$

und (2.15) liefert mit (2.4)

$$\theta_0(0) < \theta_2(0) - \frac{\pi}{2} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (2.30)$$

Die Lösungen θ_1 und θ_0 haben keinen Wert gemeinsam, was mit der Positivität der Ableitung $\dot{\theta}_0 > 0$, $\dot{\theta}_1 > 0$ und $\dot{\theta}_2 > 0$, (2.29) und (2.30) die Behauptung (2.3) ergibt:

$$\theta_1(t) \in [0, \theta_0(0)] \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right), \quad t \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right].$$

2. Wir zeigen $q(1) > 0$. Für $z \in \mathbb{C}^*$ ist q durch $q(z) = 1 - z + u_2^z(0) + zv_1^z(0)$ gegeben. Um die Positivität von

$$q(1) = u_2^1(0) + v_1^1(0)$$

zu zeigen, gehen wir wie beim Beweis von $q'(-1) < 0$ oben zu Polarkoordinaten über und erhalten analog zu (2.1)

$$q(1) = r_2(0) \cos \theta_2(0) + r_1(0) \sin \theta_1(0). \quad (2.31)$$

Die Kurven $(u_j^1, v_j^1)^{tr}$, $j \in \{1, 2\}$, sind Lösungen von

$$(u, v, 0, 1) \quad \begin{bmatrix} \dot{u} = A(t)v \\ \dot{v} = B(t)u. \end{bmatrix}$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{pmatrix} u_1^1(-\frac{1}{3}) \\ v_1^1(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u_2^1(-\frac{1}{3}) \\ v_2^1(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Folglich sind nach Bemerkung 2.5.3 für $j \in \{1, 2\}$ die Funktionen (r_j, θ_j) Lösungen von

$$(u, v, 0, 1)_{r, \theta} \quad \begin{bmatrix} \dot{r} = r[A(t) + B(t)] \sin \theta \cos \theta \\ \dot{\theta} = B(t) \cos^2 \theta - A(t) \sin^2 \theta \end{bmatrix}$$

mit den Anfangswerten

$$\begin{pmatrix} r_1(-\frac{1}{3}) \\ \theta_1(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} r_2(-\frac{1}{3}) \\ \theta_2(-\frac{1}{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\pi}{2} \end{pmatrix}. \quad (2.32)$$

Angenommen, es gilt

$$\theta_j^{-1}(0) \cap \left[-\frac{1}{3}, 0\right] \neq \emptyset, \quad j \in \{1, 2\}. \quad (2.33)$$

Die Anfangswerte (2.32) und $(u, v, 0, 1)_{r, \theta}$ liefern

$$\dot{\theta}_1 \left(-\frac{1}{3}\right) =$$

$$\begin{aligned}
 &= B \left(-\frac{1}{3} \right) \cos^2 \theta_1 \left(-\frac{1}{3} \right) - A \left(-\frac{1}{3} \right) \sin^2 \theta_1 \left(-\frac{1}{3} \right) = \\
 &= B \left(-\frac{1}{3} \right) > 0.
 \end{aligned}$$

Wegen $\theta_1(-\frac{1}{3}) = 0$ und $\theta_1(-\frac{1}{3}) > 0$ gibt es somit ein $\varepsilon \in (0, \frac{1}{3})$ mit $\theta_j|_{(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}+\varepsilon)} > 0$.
Wir setzen nach Annahme

$$s_j^{(0)} := \min \theta_j^{-1}(0) \cap \left[-\frac{1}{3} + \varepsilon, 0 \right]$$

für $j \in \{1, 2\}$.

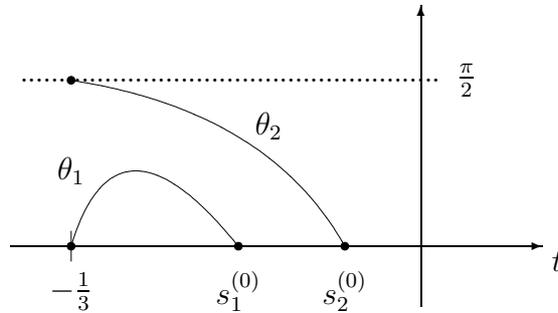
Unter Berücksichtigung von (2.32) sowie der Minimalität von $s_1^{(0)}$ und $s_2^{(0)}$ haben wir dann

$$\theta_j|_{(-\frac{1}{3}, s_j^{(0)})} > 0, \quad j \in \{1, 2\}.$$

Dies erzwingt für $j \in \{1, 2\}$ die Abschätzung $0 \geq \dot{\theta}_j(s_j^{(0)})$, genauer mit $(u, v, 0, 1)_{r, \theta}$

$$0 \geq \dot{\theta}_j(s_j^{(0)}) = B(s_j^{(0)}),$$

was einen Widerspruch zu $B > 0$ darstellt.



Insgesamt ist die Annahme (2.33) falsch, und es gilt

$$\theta_j|_{(-\frac{1}{3}, 0]} > 0, \quad j \in \{1, 2\}. \tag{2.34}$$

Schliesslich nehmen wir an,

$$\text{es gibt } j \in \{1, 2\} \text{ und } t_j \in \left(-\frac{1}{3}, 0 \right] \text{ mit } \theta_j(t_j) = \frac{\pi}{2}.$$

Es sei $j \in \{1, 2\}$. Die Aussagen $\dot{\theta}_2(-\frac{1}{3}) = -A(-\frac{1}{3}) < 0$ und $\theta_2(-\frac{1}{3}) = \frac{\pi}{2}$, sowie $\theta_1(-\frac{1}{3}) = 0$ und $\dot{\theta}_1(-\frac{1}{3}) = B(-\frac{1}{3}) > 0$ ermöglichen die Definition einer kleinsten Stelle $t_j^{(0)} \in (-\frac{1}{3}, 0]$, so dass $\theta_j(t_j^{(0)}) = \frac{\pi}{2}$ gilt. Also haben wir mit (2.34)

$$0 < \theta_j|_{(-\frac{1}{3}, t_j^{(0)})} < \frac{\pi}{2}. \quad (2.35)$$

Es muss $\dot{\theta}_j(t_j^{(0)}) \geq 0$ für $j \in \{1, 2\}$ gelten, was aber widersprüchlicherweise

$$0 \leq \dot{\theta}_j(t_j^{(0)}) = -A(t_j^{(0)})$$

ergibt.

Insgesamt erhalten wir aus diesem Widerspruch zur Annahme

$$\theta_j|_{(-\frac{1}{3}, 0]} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad j \in \{1, 2\},$$

insbesondere gelten $\theta_1(0) \in (0, \frac{\pi}{2})$ und $\theta_2(0) \in (0, \frac{\pi}{2})$. Mit diesen Abschätzungen folgt aufgrund von (2.31) die Behauptung $q(1) > 0$. ■

Abschliessend fassen wir die Ergebnisse dieses Kapitels in einem Satz zusammen.

Satz 2.5.1 (Hyperbolizität von x) *Die Funktion f erfülle (H1), (H2) und (H3). Dann ist die in Satz 2.0.1 gegebene $\frac{4}{3}$ -periodische Lösung $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ von $\dot{x}(t) = f(x(t-1))$ hyperbolisch.*

Beweis: Wir betrachten die Menge der Floquet-Multiplikatoren $\Phi := \Sigma \setminus \{0\}$ von

$$x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

wobei Σ das Spektrum des Monodromieoperators $V = T(\frac{4}{3}) : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ der Variationsgleichung von $\dot{x}(t) = f(x(t-1))$ längs x ist. Aus der Kompaktheit von $V : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ nach Bemerkung 2.1.2 folgt die der Komplexifizierung $V_{\mathbb{C}} : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$, und alle Punkte in Φ sind isolierte Eigenwerte von $V_{\mathbb{C}}$. Für die algebraische Vielfachheit $M : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ gilt $M(\mathbb{C}^*) \subseteq \mathbb{N}_0$. Laut Bemerkung 2.1.4 haben wir $1 \in \Phi$, darüberhinaus gibt es einen Floquet-Multiplikator $\lambda \geq 1$. Nach Definition 2.1.5 haben wir für den Hyperbolizitätsbeweis

$$\Phi \cap S_{\mathbb{C}}^1 = \{1\} \quad \text{und} \quad M(1) = 1 \quad (2.1)$$

zu zeigen. Bemerkung 2.1.5 besagt, dass alle Floquet-Multiplikatoren ausser 1 und λ im Innern der komplexen Einheitskreisscheibe liegen. Daher ist x hyperbolisch, wenn x nicht ausgeartet ist, d.h.

$$M(1) = 1 \quad (2.2)$$

gilt.

Um dies zu bewerkstelligen, betrachten wir die Wurzel $W_{\mathbb{C}} : \mathcal{C}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{C}}$ von $V_{\mathbb{C}}$, also die Komplexifizierung des nicht notwendig kompakten Operators $T(\frac{2}{3}) = W : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$, sowie

dessen Spektrum $\sigma \subseteq \mathbb{C}$ und algebraische Vielfachheit $m : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$. Wie bei M ergibt sich in Bemerkung 2.2.1 die Endlichkeit dieser Abbildung : $m(\mathbb{C}^*) \subseteq \mathbb{N}_0$; es gilt $m(z) = 0$ für alle $z \in \mathbb{C}^* \setminus \sigma$. Mit Bemerkung 2.2.2 stellen wir $M(1) = M(1^2) = m(-1) + m(1)$ fest. Für (2.2) ist somit

$$m(-1) = 1 \quad \text{und} \quad m(1) = 0 \quad (2.3)$$

hinreichend. Wir beachten, dass vermöge Bemerkung 2.2.3 die Abschätzung $m(-1) \geq 1$ besteht. Die Sätze 2.4.1 und 2.4.2 ermöglichen es, die algebraischen Vielfachheiten $m(-1)$ und $m(1)$ durch die in Definition 2.4.1 eingeführte holomorphe charakteristische Funktion $q : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}$ von W auszudrücken. Zunächst wenden wir Satz 2.4.1 an und stellen $q^{-1}(0) = \sigma \setminus \{0\}$ fest. Nach Bemerkung 2.5.4 gilt $q(1) > 0$, d.h. $1 \notin q^{-1}(0) = \sigma \setminus \{0\}$, und wir haben die zweite Gleichung in (2.3) gezeigt: $m(1) = 0$.

Eine Anwendung von Satz 2.4.2 ergibt $m(-1) = \text{ord}_q(-1)$, falls die in Abschnitt 2.3 definierte Matrix $Q_{-1} \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ nicht die Nullmatrix ist; letzteres ist wegen der Bemerkungen 2.5.2 und 2.5.4 gegeben:

$$Q_{-1} = \begin{pmatrix} u_1^{-1}(0) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

gilt genau dann, wenn $u_1^{-1}(0) \neq 0$ besteht; dies ist aber wegen $q'(-1) < 0$ gegeben. Die erneute Anwendung der Sätze 2.4.1 und 2.4.2 ergibt $\text{ord}_q(-1) = 1$ und schliesslich

$$m(-1) = \text{ord}_q(-1) = 1.$$

Somit ist die Hyperbolizität von x gezeigt. ■

Literaturverzeichnis

- [1] H. AMANN: "Gewöhnliche Differentialgleichungen", *De Gruyter Lehrbuch*, 2. Auflage, Berlin 1995
- [2] CH. BÄR: "Elementare Differentialgeometrie", *De Gruyter Lehrbuch*, Berlin 2001
- [3] A. BENNINGHOFF: "Anatomie, Band 2", *Verlag Urban & Schwarzenberg*, 15. Auflage, München 1994
- [4] P. BRUNOVSKÝ, A. ERDÉLYI, H.-O. WALTHER: "On a delay differential equation modelling exchange rates", *in preparation*, 2003
- [5] Y. CAO: "The Discrete Lyapunov Function for Scalar Differential Delay Equations", *J. Differential Equations* **87** (1990), pp. 365-390
- [6] Y. CAO: "A condition on multi-existence of periodic solutions for a differential delay equation", *Pitman Research Notes in Math. Series* **272** (1992), pp. 10-18
- [7] Y. CAO: "Uniqueness of Periodic Solutions for Differential Delay Equations", *J. Differential Equations* **128** (1996), pp. 46-57
- [8] S.CHAPIN, R.D. NUSSBAUM: "Asymptotic estimates of the periods of periodic solutions of a differential delay equation", *Michigan Math. J.* **31** (1984), pp. 215-229
- [9] S.-N. CHOW, H.O. WALTHER: "Characteristic multipliers and stability of symmetric periodic solutions of $\dot{x}(t) = g(x(t-1))$ ", *Trans. AMS* **307** (1988), pp. 127-142
- [10] O.DIEKMANN, S. VAN GILS, S.M. VERDUYN LUNEL, H.-O. WALTHER: "Delay Equations, Functional-, Complex and Nonlinear Analysis", *Springer Verlag* New York 1995
- [11] J. DIEUDONNÉ: "Grundzüge der modernen Analysis", *Vieweg Verlag*, Braunschweig 1972
- [12] P. DORMAYER: "Smooth bifurcation of symmetric periodic solutions of functional differential equations", *J. Differential Equations* **82** (1989), pp. 109-155

- [13] P. DORMAYER: "An attractivity region for characteristic multipliers of special symmetric solutions of $\dot{x}(t) = \alpha f(x(t-1))$ ", *J. Math. Anal. Appl. Equations* **168** (1992), pp. 70-91
- [14] N. DUNFORD, J. SCHWARTZ: "Linear Operators, Part I: General Theory", *Interscience Publishers*, New York 1967
- [15] O. FORSTER: "Analysis III", *Vieweg Verlag*, 3. Auflage, Braunschweig 1992
- [16] L. GLASS, M. C. MACKEY: "Oscillation and chaos in physiological control systems", *Science* **197** (1977), pp. 287-295
- [17] M. GOMBERT: "Die Eindeutigkeit langsam schwingender periodischer Lösungen der Delay-Gleichung $\dot{x}(t) = -\mu x(t) - f(x(t-\alpha))$ ", *Diplomarbeit*, Gießen, 1999
- [18] J. HALE: "Theory of Functional Differential Equations", *Springer Verlag*, New York 1977
- [19] U. AN DER HEIDEN, M.C. MACKEY, H.-O. WALTHER: "Complex oscillations in a simple deterministic neural network", *Mathematical aspects of physiology*, *AMS* (1981), pp. 355-360
- [20] A.V.M. HERZ: "Global Analysis of recurrent neural networks", *Models of Neural Networks, Vol. 3 (E. Domany, J.L. van Hemmen and K. Schulten, eds.)*, Springer Verlag, New York 1994
- [21] A. HERZ, B. SULZER, R. KÜHN, L. VAN HEMMEN: "Hebbian learning reconsidered: Representation of static and dynamic objects in associative neural nets", *Biol. Cybernetics* **60** (1989), pp. 457-467
- [22] H. HEUSER: "Funktionalanalysis", *Teubner Verlag*, 3. Auflage, Stuttgart 1992
- [23] J. J. HOPFIELD: "Neural networks and physical systems with emergent collective computational abilities", *Proc. Natl. Acad. Sci.* **79** (1982), pp. 2554-2558
- [24] J. J. HOPFIELD: "Neurons with graded response have collective computational properties like two-stage neurons", *Proc. Natl. Acad. Sci.* **81** (1984), pp. 3088-3092
- [25] L. HUANG, J. WU: "The role of threshold in preventing delay-induced oscillations of frustrated neural networks with McCulloch-Pitts nonlinearity", *Preprint* 1999
- [26] L. HUANG, J. WU: "Dynamics of inhibitory artificial neural networks with threshold nonlinearity", *To appear in Fields Inst. Commun.* 2000
- [27] A.F. IVANOV, B. LANI-WAYDA, H.O. WALTHER: "Unstable hyperbolic periodic solutions of differential delay equations", *Recent Trends in Differential Equations (R.P. Agarwal, ed.)*, World Scientific, Singapore 1992, pp. 301-316

- [28] M.A. KAASHOEK, S.M. VERDUYN LUNEL: "Characteristic matrices and spectral properties of evolutionary systems", *Trans. AMS* **334** (1992), pp. 479-517
- [29] J.L. KAPLAN, J.A. YORKE: "Ordinary Differential Equations which yield Periodic Solutions of Differential-Delay Equations", *J. Math. Analysis Appl.* **48** (1974), pp. 317-324
- [30] J.L. KAPLAN, J.A. YORKE: "On the stability of a periodic solution of a differential delay equation", *SIAM J. Math. Anal.* **6** (1975), pp. 268-282
- [31] J.L. KAPLAN, J.A. YORKE: "On the nonlinear differential delay equation $x'(t) = -f(x(t), x(t-1))$ ", *J. Differential Equations* **72** (1977), pp. 293-314
- [32] T. KRISZTIN, H.-O. WALTHER: "Unique Periodic Orbits For Delayed Positive Feedback and the Global Attractor", *J. Dyn. Diff. Equations* **13** (2001), pp. 1-57
- [33] T.KRISZTIN, H.-O. WALTHER, J. WU: "Shape, smoothness and invariant stratification of an attracting set for delayed monotone positive feedback", *Fields Institute Monograph Series vol. 11*, AMS, Providence 1999
- [34] B. LANI-WAYDA, H.-O. WALTHER: "Chaotic motion generated by delayed negative feedback I: A transversality criterion" *Diff. Int. Equations* **8** (1995), pp. 1407-1452
- [35] J. MALLET-PARET, R.D. NUSSBAUM: "Global continuation and asymptotic behaviour of periodic solutions of a differential delay equation", *Ann. Mat. Pura Appl.* **145** (1986), pp. 33-128
- [36] J. MALLET-PARET, G. SELL: "Systems of Differential Delay Equations: Floquet Multipliers and discrete Lyapunov Functions", *J. Differential Equations* **125** (1996), pp. 385-440
- [37] J. MALLET-PARET, G. SELL: "A Poincaré-Bendixson-Theorem For Monotone Cyclic Feedback Systems With Delay", *J. Differential Equations* **125** (1996), pp. 441-489
- [38] C.M. MARCUS, R.M. WESTERVELT: "Stability of analog neural networks with delay", *Phys. Rev. A* **39** (1989), pp. 347-359
- [39] R.M. MAY: "Nonlinear phenomena in ecology and epidemiology", *Ann. New York Acad. Sci.* **357** (1980), pp. 267-281
- [40] W. MCCULLOCH, W. PITTS: "A logical calculus of the ideas immanent in nervous activity", *Bull. Math. Biophysics* **5** (1943), pp. 115-133
- [41] B. MÜLLER, J. REINHARDT, M.T. STRICKLAND: "Neural Networks", *Physics of Neural Networks, 2nd edition*, Springer, New York 1995
- [42] A. A. MYSHKIS: "Lineare Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument", *Deutscher Verlag der Wissenschaften*, Berlin 1955

- [43] R.M. NISBETT, W.S.C. GURNEY: "Modelling fluctuating populations", *Springer*, New York 1982
- [44] R. D. NUSSBAUM: "Periodic solutions of special differential delay equations: An example in nonlinear functional analysis", *Proc. Royal Soc. Edinburgh* **81A** (1978), pp. 131-151
- [45] R. D. NUSSBAUM: "Uniqueness and nonuniqueness for periodic solutions of $x'(t) = -g(x(t-1))$ ", *J. Differential Equations* **34** (1979), pp. 25-54
- [46] K.PAKDAMAN, C.P. MALTA, C. GROTTA-RAGAZZO AND J.F. VIBERT: "Effect of delay on the boundary of the basin of attraction in a self-excited single neuron", *Neural Computation* **9** (1997), pp. 319-336
- [47] W. RINOW: "Lehrbuch der Topologie", *VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften*, Berlin 1975
- [48] A.L. SKUBACHEVSKY, H.-O. WALTHER: "On Floquet multipliers for slowly oscillating periodic solutions of nonlinear functional differential equations", *Transactions of the Moscow Mathematical Society* To appear
- [49] H.-O. WALTHER: "On instability, ω -limit-sets and periodic solutions of nonlinear autonomous differential delay equations", *Lecture Notes in Mathematics 730*, *Springer*, Berlin 1979
- [50] H.-O. WALTHER: "Bifurcation from periodic solutions in functional differential equations", *Math. Z.* **182** (1983), pp. 269-289
- [51] H.-O. WALTHER: "Hyperbolic periodic solutions, heteroclinic connections and transversal homoclinic points in autonomous differential delay equations", *Memoirs of the AMS*, vol. 402, *AMS*, Providence 1989
- [52] H.-O. WALTHER: "The 2-dimensional attractor of $\dot{x}(t) = -\mu x(t) + f(x(t-1))$ ", *Memoirs of the AMS*, vol. 544, *AMS*, Providence 1995
- [53] H.-O. WALTHER, M. YEBDRI: "Smoothness of the attractor of almost all solutions of a delay differential equation", *Dissertationes mathematicae* **368**, *Warschau*, 1997
- [54] J. WU: "Introduction to Neural Dynamics and Signal Transmission Delay", *De Gruyter*, Berlin, New York 2001
- [55] X. XIE: "Uniqueness and stability of slowly oscillating periodic solutions of delay equations with bounded nonlinearity", *J. Dyn. Diff. Equations* **3** (1991), pp. 515-540
- [56] X. XIE: "The multiplier equation and its application to S-solutions of differential delay equations", *J. Diff. Equations* **95** (1992) pp. 269-280

-
- [57] X. XIE: "Uniqueness and stability of slowly oscillating periodic solutions of delay equations with unbounded nonlinearity", *J. Differential Equations* **103** (1993), pp. 350-374

Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass ich die Arbeit selbständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel verwendet habe.

_____, _____