# Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift

Bericht der Oberhessischen Gesellschaft
für Natur- und Heilkunde zu Gießen

Naturwissenschaftliche Abteilung

Natur OHG 1833

Band 71

Gießen 2023

ISSN 0340-4498

Redaktion und Schriftleitung:

Dr. Michael Serafin
Riegelpfad 64
35392 Gießen

Vertrieb:

Geschäftsstelle der Oberhessischen Gesellschaft
für Natur- und Heilkunde
- Naturwissenschaftliche Abteilung-
c/o Universitätsbibliothek
Frau Hochstein
Otto-Behaghel-Straße 8
35394 Gießen

Druck:

Druckerei Bender GmbH
Hauptstraße 27
35435 Wettenberg/Gießen

Dieser Band erscheint auch in gedruckter Form in der
"Oberhessischen Naturwissenschaftlichen Zeitschrift", Volume 71, Gießen 2023

# Inhaltsverzeichnis

Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 71, 2023

# EDITORIAL


Emmy Noether
(1882 – 1935)

Dieser Band 71 der Oberhessischen naturwissenschaftlichen Zeitschrift ist dem Thema „Zahlen“ gewidmet. Die drei Artikel könnten unterschiedlicher gar nicht sein und doch ergänzen sie sich irgendwie. Gleichzeitig erinnern wir an die vielleicht größte Mathematikerin aller Zeiten, die es in ihrer Zeit als Frau trotz ihres unbestrittenen Talents so schwer hatte, die gebührende Anerkennung zu finden.

Leopold Kronecker hat auf der Jahrestagung der Naturforscher 1886 gesagt: "Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." Insbesondere lehnte er das aktual Unendliche ab und akzeptierte nur solche mathematischen Objekte als existent, die in einer endlichen Zahl von Schritten gebildet werden können. Kronecker stand in der griechischen Tradition, die potentiell unendlich tolerierte, aber das aktual Unendliche ablehnte.

Lediglich der Beitrag „Zahlen - Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung des Zahlbegriffes“ trägt das übergreifende Thema im Titel. Darin wird der Frage nachgegangen, ob die kulturhistorische Entwicklung des Zahlbegriffes aus mathematischer Sicht hätte anders verlaufen können. Kronecker spricht von „ganzen Zahlen“. Doch es wird in diesem Artikel deutlich, dass es über 2.000 Jahre gedauert hat, bis die negativen Zahlen als eigenständige Zahlen Eingang in die Mathematik und den Alltag gefunden haben.

Ganz selbstverständlich gehen wir mit dem Abstandsbegriff und der damit verbundenen Metrik um. Wir nennen sie euklidisch oder archimedisch und verdeutlichen damit die lange Tradition, die wir damit verbinden. Umso frappierender ist die Erkenntnis, dass es eine andere Metrik geben kann – die p-adische Metrik mit ihrem gänzlich anderen Abstand. Sie hat im praktischen Leben keine Bedeutung, aber sie ermöglicht eine alternative Sicht auf ansonsten sperrige Bereiche der Mathematik.

Im zweiten Beitrag steht die „NULL“ synonym für den langen Prozess, den die Indo-arabischen Ziffern benötigten, um sich gegen die römischen Zahlen durchzusetzen. Auch dabei sind viele positive Entwicklungen, aber auch manche Stagnation und schwer verständliches Beharrungsvermögen verblüffend. Warum erfanden die mathematisch so versierten Griechen kein Stellenwertsystem mit der Null? Wieso gelang dies den Sumerern oder den Maya? Welche Bedeutung hatte das Fingerrechnen und das Kerbholz in ganz Europa? Was hat die doppelte Buchführung mit der Null zu tun? Wo ist die viel geschmähte Null von geradezu zentraler Bedeutung in der Mathematik?

Der dritte Beitrag handelt von hyperkomplexen Zahlen. Doch eigentlich sind nur vier davon von besonderem Interesse. Davon sind zwei, nämlich die „normalen" reellen und komplexen Zahlen, gar nicht das, was man unter dem Begriff „hyperkomplex" vermuten würde. Dabei fallen uns in der Regel zuerst die Quaternionen und vielleicht noch die Oktonionen ein. Sie werden nach ihren Entdeckern gerne Hamilton-Zahlen und Cayley-Zahlen genannt. Und doch haben alle vier sogenannten „Algebren" eine bemerkenswerte Eigenschaft gemeinsam: In ihnen und nur in ihnen ist eine Division möglich. Doch sie verlieren sukzessive von reell, über komplex, Quaternion bis Oktonion wichtige algebraische Eigenschaften. Nur in den reellen Zahlen gibt es eine Ordnungsrelation namens kleiner/größer, bei Quaternionen gilt nicht mehr das Kommutativgesetz der Multiplikation und bei Oktonionen fehlt gar die Assoziativität – Klammern bestimmen die Reihenfolge und damit das Ergebnis von Rechnungen.

Doch was zunächst mathematisch verstörend wirkt, scheint in der Naturbeschreibung eine Rolle zu spielen. Die großen physikalischen Modelle im Kleinen, das Standardmodell der Teilchenphysik und im Großen, das Standardmodell der Kosmologie, gehorchen Symmetrien, die mit Hilfe der Divisionsalgebren erforscht werden könnten. Es gibt sogar vage Hoffnungen, dass die Natur <u>aus</u> der Mathematik erklärt werden kann und nicht nur <u>durch</u> die Mathematik beschrieben wird. Es wäre, um Immanuel Kant zu zitieren, eine Erkenntnis a priori.

Mit dem Thema „Zahlen" ist also ein durchaus vielschichtiges Spektrum verbunden. Ihre Geschichte sagt viel über die Entwicklungsstufen unserer Kultur aus. In Form von Mathematik ist es das, was Galilei Galileo das Alphabet nannte, mit dessen Hilfe Gott das Universum beschrieben hat.

Gießen, im Herbst 2023 Dr. Willi Kafitz Dr. Michael Serafin

*Oberhess. Naturwiss. Zeitschr. 2023, 71: 6-66, Gießen ISSN 0340-4498*

# ZAHLEN

## Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung des Zahlbegriffes

WILLI KAFITZ*)

Abstract:
Numbers are as old as there are people of a level of development who can abstract accordingly and only see the number of objects as a commonality. This is how counting and natural numbers came about. In early high cultures, calculations were already being made intensively with fractions. However, negative numbers were sometimes vehemently rejected up to the 15th century. The zero does not appear in India until the middle of the first millennium AD. The discovery of irrational numbers was long considered the first crisis in ancient mathematics. That is put into perspective today. Only towards the end of the 19th century was it recognized that a gapless continuum is formed by all real numbers and thus continuity could be given a consistent basis. The complex numbers gave mathematics a significant expansion and allowed e.g. theorems of great generality, scope and aesthetics in the theory of functions. However, attempts to expand the concept of numbers beyond complex numbers had to accept limitations. These restrictions are based on the system that has been established by algebra for around 200 years. A variety of terms such as field, group, ring, vector space 3and numerous gradations have emerged that describe the degree of systematization of mathematical objects and make calculations with them possible. There are often generalizations of the numbers in individual aspects, which no longer deserve this term, but are of interest both in mathematics and in their applications. But in order to meet the algebraic, geometric and analytical requirements and last but not least the applications in the natural and engineering sciences, the real and complex numbers and, with considerable drawbacks, the quaternions proved to be suitable. A new and already fruitful way of looking at the connection between numbers and geometry is also proving useful.

Keywords:

history of different types of numbers, generalization of numbers, systematization by algebraic structures, quaternions, p-adic numbers

Zusammenfassung:
Zahlen sind so alt wie es Menschen einer Entwicklungsstufe gibt, die entsprechend abstrahieren können und nur die Anzahl von Objekten als Gemeinsamkeit sehen. So endstand das Zählen und die natürlichen Zahlen. In frühen Hochkulturen wurde auch bereits intensiv mit Brüchen gerechnet. Negative Zahlen wurden jedoch teilweise bis ins 15. Jahrhundert vehement abgelehnt. Auch die Null taucht erst Mitte des ersten Jahrtausends nach Christus in Indien auf. Die Entdeckung von irrationalen Zahlen galt lange Zeit als erste Krise der antiken Mathematik. Das wird heute relativiert. Erst gegen Ende des 19. Jahrhunderts wurde erkannt, dass durch alle reellen Zahlen ein lückenloses Kontinuum gebildet wird und somit der Stetigkeit eine konsistente Grundlage gegeben werden konnte. Die komplexen Zahlen schenkten der Mathematik eine bedeutende Erweiterung und erlaubten z.B. in der Funktionentheorie Sätze von großer Allgemeinheit, Tragweite und Ästhetik. Versuche zu Erweiterungen des Zahlbegriffes über die komplexen Zahlen hinaus mussten aber Einschränkungen hinnehmen. Diese Einschränkungen orientieren sich an der Systematik, die seit etwa 200 Jahren durch die Algebra begründet wurde. Es sind vielfältige Begriffe, wie Körper, Gruppe, Ring, Vektorraum sowie zahlreiche Abstufungen entstanden, die den Systematisierungsgrad mathematischer Objekte beschreiben und ein Rechnen damit möglich machen. Es sind oft in einzelnen Aspekten Verallgemeinerungen der Zahlen, verdienen zwar nicht mehr diesen Begriff, sind aber sowohl in der Mathematik als auch in ihren Anwendungen von Interesse. Doch um den algebraischen, geometrischen und analytischen Anforderungen gerecht zu werden und nicht auch zuletzt den Anwendungen in den Natur- und Ingenieurwissenschaften, erwiesen sich die reellen und komplexen Zahlen und mit erheblichen Abstrichen die Quaternionen als tauglich. Eine neue und bereits fruchtbare Sichtweise auf den Zusammenhang von Zahlen und Geometrie erweist sich aber auch als nützlich.

Schlüsselworte:

Geschichte verschiedener Arten von Zahlen, Verallgemeinerung von Zahlen, Systematisierung durch algebraische Strukturen, Quaternionen, p-adische Zahlen

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

**Zitate**

Aberglaube bringt Unglück[1]
*Nach Umberto Eco (1932 – 2016)*

Wir sprechen deutsch, wir schreiben römisch und wir rechnen indisch.[2]
*Karl Menninger (1898 – 1963)*

Es gibt nichts weniger als Nichts.[3]
*Gottlieb Wilhelm Leibniz (1646 – 1716)*

Wie ich schon andeutete, schloß sich Hamilton eine Schule an, die ihren Meister an Starrheit und Intoleranz noch überbot. […] Die Quaternionen sind gut und brauchbar an ihrem Platze; sie reichen aber in ihrer Bedeutung an die gewöhnlichen komplexen Zahlen nicht heran.[4]
*Felix Klein (1849 – 1925)*

Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Aussagen über reelle Zahlen führt über komplexe Zahlen.[5]
*Jaques Hadamard (1865–1963)*

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.[6]
*Leopold Kronnecker (1823 – 1891)*

To admire is, to me, questionless, the highest pleasure of life.[7]
*William Rowan Hamilton (1805 – 1865)*

Rationale und irrationale Größen gehören beide nicht zu dem an sich Gedachten, sondern zu dem mit Anderem Verglichenen.[8]
*Heron von Alexandria (10 n.Chr. – 70 n.Chr.)*

Math is like love, a simple idea but it can get complicated.[9]
*George Pólya (1887–1985)*

---

[1] zitiert nach Umberto Eco: Das Foucaultsche Pendel, Hanser, München 1989. S. 5
[2] Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen, 1958, zitiert nach Wußing, ebenda, S. 97.
[3] Zitiert nach https://www.matheretter.de/wiki/negative-zahlen-geschichte
[4] Felix Klein: Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhundert. Teil I. Verlag von Julius Springer, Berlin 1926, S. 184 ff
[5] Sigg, Markus: Humor in der Mathematik. In: Lexikon der Mathematik Band 2, Heidelberg (Spektrum) 2001, S. 444-451
[6] zitiert nach: Courant, Richard/Robbins, Herbert: Was ist Mathematik, Springer 2010, S. 1
[7] Letter to the Marquess of Northampton (June 17, 1838), in Robert Perceval Graves, Life of Sir William Rowan Hamilton Vol. 2 (1885) pp. 260-261.
[8] Zitiert nach https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf
[9] Wird G. Polya und R. Drabek zugerechnet, zitiert nach https://angewandte-didaktik.mathematik.uni-mainz.de/files/2020/08/MATpHorismEn-2020-08-31.pdf

**Inhalt**

## Einleitung und Fokus

Der Begriff Zahl ist vielschichtiger als man denkt. Deshalb soll vor allem der Fokus des vorliegenden Beitrags möglichst gut abgegrenzt werden und wird deshalb ausführlicher als üblich.

Eine der wichtigsten Abstraktionen in der Menschheitsgeschichte und in der geistigen Entwicklung eines Kindes ist der abstrakte, vom Dinglichen losgelöste Zahlbegriff. Es macht einen entscheidenden Unterschied aus, ob immer nur die Anzahl von Dingen, wie zwei Äpfel, drei Steine oder fünf Menschen bezeichnet werden, oder indem Gemeinsamkeiten bei Mengen durch eine Zahl, z.B. eine sogenannte natürliche Zahl, ausgedrückt werden. Sie sind die Grundlage für den intellektuell anspruchsvollen, nächsten Entwicklungsschritt, das Zählen,[10] sollten aber noch nicht damit gleichgesetzt werden. Das zeigen kinderpsychologische und anthropologische Untersuchungen. Ein „Zahlgefühl" ist aber erst die Vorstufe zum Zählen.[11] Es scheint auch sicher zu sein, dass diese Vorstufe viele Jahrhunderte anhielt. Ethnographische Untersuchungen in Afrika, Ozeanien und Amerika belegen, dass es noch heute Naturvölker gibt, die sozusagen auf einen Blick Mengen ziemlich genau taxieren können ohne über einen Zahlbegriff zu verfügen.

Zählen ist dann ein bedeutsamer, nicht selbstverständlicher Entwicklungsschritt. Die natürlichen Zahlen werden als gemeinsames Kriterium von Mengen von Einheiten gleicher Mächtigkeit begriffen. Diese bilden virtuelle Paare. Wenn in einem Theater alle Plätze besetzt sind, greift die Paarbildung zwischen Platz und Besucher. Es gibt dann genauso viele Besucher wie Plätze. Man kann jedem Platz einen Besucher zuordnen und umgekehrt. Diese Einheiten sind auch das rekursive Element, denn es wird beim Zählen immer um eine Einheit also Eins vergrößert. Doch so einfach ist „Zahl" doch nicht. Ein Beispiel: Das Jahr hat immer 12 Monate, d.h. die Menge aller Monate eines Jahres bleibt gleich. Es handelt sich bei der 12 um eine Kardinalzahl. Der 12. Monat des Jahres ist dagegen eine Ordinalzahl; sie dient dazu, diesen einen Monat Dezember innerhalb eines Jahres zu kennzeichnen. Es gibt ihn nur einmal pro Jahr. Kardinalzahlen bezeichnen eine Anzahl; Ordinalzahlen nummerieren. Man beachte auch: Sowohl die Kardinalzahl 12 als auch die Ordinalzahl 12 bestehen aus zwei Ziffern. Ihre Bedeutung als Zahl erlangen sie erst in einem Stellenwertsystem. Weltweit am meisten verbreitet ist die Basis 10, also das Dezimalsystem. Die 1 in der 12 steht hier also für 10.

---

[10] Ein ca. 20.000 Jahre alter Wolfsknochen mit 55 Kerben, aufgeteilt in zwei Reihen mit Fünfergruppen, 1937 in der Tschechoslowakei gefunden, gilt als ältestes Hilfsmittel zum Zählen (Universal Geschichte der Zahlen, S. 14). Damit ist es älter als das Rad; nur die Beherrschung des Feuers ist älter.

[11] Ebenda, S.23

Dieser Beitrag wird eher den Zahlbegriff als Wert thematisieren; damit sind Begriffe wie Ziffern oder Ordinalzahlen nachgeordnet. Weltweit haben sich verschiedene Konventionen herausgebildet, wie z.B. wie mit den Fingern gezählt wird. Es gibt zahlreiche Beispiele, wie ganzen Zahlen abstrakt schriftliche, anschauliche, Buchstaben bezogene, mündliche oder figürliche Zeichen zugeordnet wurden. Das sind hochinteressante ethnologische Aspekte, die aber wenig Bezug zur Mathematik haben und deshalb nur in wenigen Beispielen in diesen Beitrag gehören. Auch die Art des Zählens hat sich unterschiedlich entwickelt. So zählen Kaufleute rund um Bombay in Indien heute noch nach einem „quinären" (Basis 5) System mit den Fingern. Die rechte Hand zählt dabei die Fünfer von 5 bis 25; die linke Hand die Einer von 1 bis 5. Auch bei den Azteken finden sich Anzeichen für ein Fünfer-System. Die Mayas zählten auf Basis 20, ein Vigesimalsystem, da ein Monat 20 Tagen entsprach und auch Zyklen, wie 20 Jahre, 400 Jahre oder sogar 8.000 Jahre eine Rolle spielten.[12] Die 20 taucht auch heute in der französischen Sprache als quatre-vingts, also 80, auf (4 mal 20). Das Sexagesimalsystem auf Basis 60 geht auf das Zweistromland Mesopotamien zurück und hat sich bis heute bei der (Uhr)Zeit und bei der Kreis- und Winkelberechnung gehalten. Versuche während der französischen Revolution Uhrzeit auf das Dezimalsystem umzustellen, wurden in der Bevölkerung nicht akzeptiert.

Doch sobald in den Entwicklungsstufen einer Kultur gezählt werden kann, geht es relativ schnell. Es ist wiederum Voraussetzung für Relationen zwischen den natürlichen Zahlen und schließlich dem Rechnen. Zahl als reine Abstraktion sollte man nicht zu wörtlich nehmen. Auch heute noch wird dabei z.B. in der Auvergne, in China, Indien und Russland die Hand zu Hilfe genommen und man multipliziert ohne weitere Hilfsmittel. Körperbezogenes Zählverhalten kann dabei sehr komplex werden. So differenzieren verschiedene Insulaner von der Torres-Straße über Körperteile 33 verschiedene Zahlen im Sinne von Mengen, bei den Ureinwohnern von Papua Neuguinea sind es immerhin noch 22, bei den Elema Neuguineas können über 23 bezeichneten Körperteilen unterschiedliche Mengen kommuniziert werden. Es sind Kardinalzahlen, aber es liegt eine Konvention zugrunde, welches Körperteil welcher Zahl zugeordnet ist. In dieser Konvention steht Zeigefinger oder linker Ellenbogen immer für eindeutige Kardinalzahlen.[13] Man kann durchaus mit größeren Zahlen umgehen. Darüber hinaus werden Bündel mit Stöckchen benützt.[14]

---

[12] Universal Geschichte, ebenda, S. 53-65

[13] In einem Telefonbuch sucht man in der Regel alphabetisch. Hier nehmen die Buchstaben des Alphabets im Prinzip die Funktion von Ordinalzahlen ein.

[14] Universal Geschichte, ebenda, S. 31

Auch die kindliche Entwicklung folgt in grober Näherung den Entwicklungsstufen der Menschheit. Eins und Eins ist Zwei, ist der Beginn des Zählens und gleichzeitig die erste Gleichung, die ein modernes Kind lernt.

Man ist dann relativ schnell in frühen Hochkulturen beim Teilen und dabei bei Brüchen. Das war eine Forderung im Handel und anderen gesellschaftlichen Anforderungen, wie der Verwaltung. Aber es hat lange gedauert, bis sich negative Zahlen durchgesetzt haben. Sie wurden im antiken Griechenland zunächst schlichtweg als unmöglich ignoriert, später waren sie zumindest suspekt. In Indien und China erwiesen sie sich bereits länger als nützlich. Die arabische Mathematik hat sie deshalb auch früher als das Abendland, gemeinsam mit der Null, übernommen.

Darüber später mehr im Rahmen weiterer „Zahlentypen“ über die natürlichen Zahlen hinaus.

Sehr früh haben Zahlen auch eine mythische Bedeutung bekommen. Dies hält bis in die heutige Zeit an. Vor allem auf Pythagoras von Samos (um 570 – nach 519 v.Chr.) und seiner Schule gehen Mystifizierungen bestimmter Zahlen zurück. Er hat die Zahl als „Urprinzip aller Dinge“ postuliert. Zahlen repräsentieren für ihn und seine Jünger die harmonische Ordnung als höchste Regel in der Kosmologie. Bestimmte Zahlen sind für die Griechen „schöner“ als andere. Dazu gehören Quadrat oder Dreieckszahlen, wie

1
1 + 2 = 3
1 + 2 + 3 = 6
1 + 2 + 3 + 4 = 10
1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15
usw.

Die „10“ war das Symbol für den pythagoreischen Eid. Es entstand ebenfalls der Begriff der „perfekten Zahl“. Sie galten als Zahlen göttlicher Natur. Es sind Zahlen, die die Summe ihrer Teiler sind (inkl. 1, exkl. der Zahl selbst). Die Griechen kannten vier perfekte Zahlen (6, 28, 496, und 8128).[15,16]

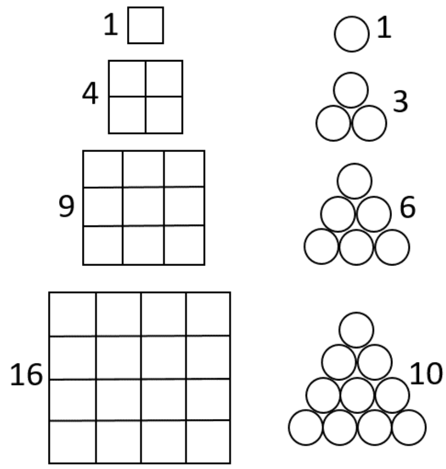



Abb. 1: Heilige Quadrat- und Dreieckszahlen

[15] Claudi Alsina, Der Satz des Pythagoras, deutsch bei Librero RBA, 2016, S. 32, heute kennt man 43. Sie sind alle gerade. Man weiß nicht, ob ungerade existieren und ob es unendlich viele gibt.
[16] Eigene Abbildung

Doch man muss für solche Beispiele nicht in die Antike zurückgehen. Glaube und Aberglaube können auch im christlichen Abendland nahe beisammen liegen. So wird z.B. im Johannes-Evangelium mit „666“ der Antichrist assoziiert.[17] Im Hebräischen hat der Name „Kaiser Nero“ diesen Zahlenwert, ebenfalls Diokletian – beides römische Kaiser, unter denen Christenverfolgungen stattfanden. Wichtige Zahlen in der Bibel sind die „Sieben“ (Schöpfungsgeschichte, sieben fette, sieben magere Jahre, das Buch mit sieben Siegeln des Johannes, sieben Engel blasen sieben Posaunen). Die „Zwölf“ (Zwölf Stämme des Volkes Israel, zwölf Apostel, zwölf Tore Jerusalems). Die „Vierzig“ (Zeit der Buße zwischen Ostern und Pfingsten, vierzig Tage Regen bei der Sintflut, vierzig Tage war Moses auf dem Berg Sinai, vierzig Tage hat Jesus in der Wüste gefastet). Diese und andere biblische Zahlen finden sich in weltlichen wie religiösen Zusammenhängen wieder.
Auch heute ordnet man in vielen Kulturkreisen Zahlen eine besondere Bedeutung zu. In China gilt die Vier als Unglücksbringer. In Shanghai z.B. wird man höchst selten ein Nummernschild mit einer „Vier“ finden. In vielen Gebäuden fehlt sogar der 4. Stock als Bezeichnung. In anderen Ländern ist die „Vier“ eher ein Ordnungsprinzip (Vier Jahreszeiten, vier Himmelsrichtungen). Die „9“ ist dagegen eine Glückszahl in China, aber in Japan soll sie Unglück bringen. Sie klingt im Japanischen wie das Wort „Leid“.
Auch in den meisten Flugzeugen wird man die Sitzreihe 13 vergeblich suchen. Die Fluglinien gehen damit möglichen Protesten abergläubiger Passagiere aus dem Weg, die die 13 als Unglückszahl ansehen. Aber für Italiener oder Brasilianer ist die 17 Unglückszahl.[18] Bei der Lufthansa wird man auf einem Flug nach Rio de Janeiro keine Reihe 13 und 17 in ihren Maschinen finden.
Die Zahl 39 ist in Afghanistan das Sinnbild für das Böse. Bei Telefon- oder Hausnummern ist sie vollkommen unerwünscht und wird unter Protest abgelehnt. Sogar als Altersangabe wird sie oft übersprungen – nach 38 gibt man als Alter 40 Jahre an.[19]
Dagegen assoziiert man mit manchen Zahlen oder Daten glückliche oder unglückliche Perspektiven – Beispiel ist Freitag, der 13. Allerdings fiel der 2.2.2022 auf einen Mittwoch, der 22.2.2022 auf einen Dienstag, so dass eine Rekordzahl an Eheschließungen nicht verzeichnet wurde.
Da in einigen Kulturen zwischenzeitlich Buchstaben mit Zahlen gleichgesetzt wurden, entwickelte sich insbesondere bei Namen oder Versen eine eigene literarische Gattung, die Isopsephie. Es wurde dabei als Grundprinzip der Zahlenwert einer Buchstabengruppe ermittelt. In Pergamon fand man

---

[17] Der katholische Theologe Petrus Bungus veröffentlichte ein Buch, in dem er numerologisch „bewies“, dass der Name „Martin Luther“ den Zahlenwert 666 hat.
[18] https://www.geo.de →reisen →reisewissen
[19] https://de.style.yahoo.com/ → Unglückszahlen

entsprechende Inschriften; in Pompeji gibt es ein Graffiti mit dem Satz: „Ich liebe die, deren Zahl 545 ist". Manche Zahlenspiele sind harmlos oder amüsant. Gnostiker versuchten jedoch darüber tiefschürfende Erkenntnisse zu gewinnen, was dann doch die Grenze zum Aberglauben überschreitet.
Die „Numerologie" erfreut sich also in vieler Beziehung und nicht nur beim Glücksspiel oder wichtigen Terminen und persönlichen Daten immer noch einer großen Beliebtheit. Auch wenn der Aberglaube durch statistische Belege, die ihn wissenschaftlich unzweifelhaft widerlegen, kaum auszurotten ist, haben numerologische Überlegungen keinen Anspruch auf einen Status als exakte Wissenschaft.

Diese Beispiele sollen deshalb genügen und gleichzeitig die Abgrenzung im Fokus bilden. Der vorliegende Beitrag will diese sogenannten numerologischen Aspekte vollkommen ausklammern und sich allein um Zahlenstrukturen im mathematischen und kulturhistorischen Sinn konzentrieren.

### Zahlen und Mathematik

Es gibt einen entscheidenden Unterschied in der Motivation, in dem sich z.B. mesopotamische, ägyptische, aber auch chinesische Mathematik, von der Mathematik in griechisch-hellenistischer Zeit bzw. der Spätantike unterscheiden. Im Einflussbereich des Zweistromlandes und der Kultur am Unterlauf des Nils dienten mathematische Fragen und Methoden ausschließlich praktischen Zwecken und somit Anforderungen des Bauwesens, der Wirtschaft, des Handels oder der Vermessung. Eine gewisse Ausnahme bildete die Astronomie, die nur im weitesten Sinne, z.B. über die Bedeutung exakter Kalender, praktischen Interessen diente. Auch sie war aber lediglich eine Anwendung von Mathematik.
Eine wichtige Unterscheidung ist dabei Zahl als technische Größe und Zahl als Geldwert. Eine erste Tauschwährung sowohl in vorhellenistischer Zeit als auch bei den Römern vor dem 4. Jahrhundert v. Chr. war der Ochse. Weltweit entwickelten sich die unterschiedlichsten „Währungen". Schildkrötenschalen, Muscheln insbesondere Kaurimuscheln, Leder, Stoffe, Korn, Waffen, Baumwolle, Jade, Bitumen, Kakao u.v.m. dienten als Währungseinheiten. Die russische Regierung erhob bis 1917 die Steuern in manchen Teilen Sibiriens in Pelzen.[20] Erst später z.B. im alten Ägypten, setzten sich Metalle, wie Kupfer und Bronze, seltener Silber und Gold, als Tauschobjekte durch. Dies war dann auch der Beginn der Geldwirtschaft. Schon in der Bibel wird der Silberschekel im Alten Testament (z.B. im Buch Mose) als Währung genannt. Der nächste Schritt war das Münzgeld, das durch Guss- und Prägetechnik, Legierung, Normung, Recht auf Prägung, usw. gewissen technischen und rechtlichen Anforderungen

[20] Universal Geschichte, ebenda, S. 129f

entsprechen musste. Heute geht man davon aus, dass das griechische Kleinasien, etwa im 7. Jahrhundert v.Chr., dieses System erfunden hat und das sich dann aufgrund seiner Vorteile fast weltweit verbreitete.

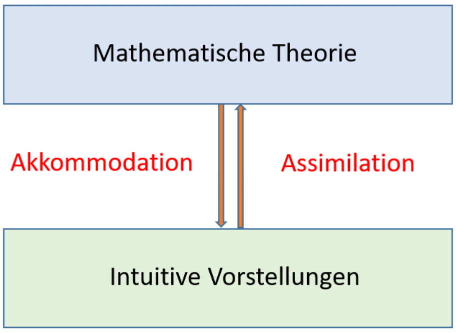



Abb. 2: Wechselwirkungen zwischen mathematischer Theorie und intuitiven Vorstellungen

Die Griechen bedienten sich durchaus auch mathematischer Methoden in der Praxis, aber das ursprüngliche Interesse lag im Verständnis idealer Konstrukte, wie regelmäßigen geometrischen Formen und Körpern oder abstrakten Fragen, wie z.B. der axiomatische Aufbau der ebenen Geometrie durch Euklid oder die Integration von „inkommensurablen“ Größen (irrationale Werte) in das mathematische Weltbild. Insbesondere wurde seit dem Wirken von Pythagoras der strenge mathematische Beweis mit Definitionen, Voraussetzungen, Sätzen und logischen Beweisen propagiert.

Aus dieser Sicht auf die Mathematik konnten aber dann auch praktische Problemlösungen im Bereich des Wasserbaus, bei der Statik von Gewölben oder bei militärischen Anwendungen gefunden werden. Voraussetzung ist aber in der Regel die Einsicht, dass zu Beginn des Erkenntnisprozesses die Abstraktion auf rein mathematische Fragestellungen steht. Ein gutes Beispiel für diese Denkweise bietet Heron von Alexandria (10 n.Chr. – 70 n.Chr.).

Pauschalierend kann man sagen, dass bei früheren Kulturen der Sinneseindruck das Denken beherrschte und im antiken Griechenland zum ersten Mal das abstrakte Denkmodell. Trotzdem treibt auch heute die Intuition die mathematische Forschung.[21] Dies ist bis heute prägend für die Mathematik und soll auch im vorliegenden Beitrag helfen, um schließlich zu Verallgemeinerungen des Zahlbegriffes zu führen.

## Zählbarkeit und Wissensgrenzen

Vor scheinbar beliebig großen Zahlen haben viele Menschen zu allen Zeiten resigniert. Sie haben angezweifelt, dass menschliches Wissen die schiere Größe ermessen kann und haben daraus den voreiligen Schluss gezogen, dass auch der Wissenserwerb an sich prinzipiell begrenzt ist. Diese Haltung schien unabhängig von Religionen und Kulturkreisen zu bestehen. Noch heute werden sogar in westlichen Ländern, wie den USA, bestimmte Fragen als

[21] Grafik nach https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf

„gotteslästerlich“ betrachtet und werden im Schulunterricht per Gesetz ausgeklammert.

Diese Meinung, dass bestimmtes Wissen für Menschen nicht zugänglich ist, manifestiert sich im Christentum in einer zentralen Passage des Alten Testaments. Es sind die ersten Worte des Buches Ecclesiasicus, oft als Jesus Sirach oder Buch des Sirach (englisch Book of Ben Sira) bezeichnet. Es ist nach seinem Verfasser benannt, der es in Jerusalem um 180/190 v.Chr., also während der hellenistischen Epoche, niederschrieb. Es spiegelt sicherlich nicht nur die damals aktuelle Meinung, sondern durchaus die Meinung vergangener und nachfolgender Jahrhunderte wider:

*„Wer kann sagen, wie viel Sand das Meer, wie viel Tropfen der Regen und wie viel Tage die Welt hat? Wer kann erforschen, wie hoch der Himmel, wie breit die Erde, wie tief das Meer ist? Wer kann Gottes Weisheit ergründen, die doch allem voraufgeht?“ (Sir, 1, 2-3)*[22]

Diese Fragen suggerieren, dass nur eine übermenschliche Macht Antworten darauf haben kann und sie sind zu jeder Zeit ein Alibi gewesen, um die Grenzen der Zählbarkeit und damit des Wissenserwerbs viel zu schnell oder zu früh zu setzen.

Dabei waren wesentliche Erkenntnisse bereits vorhanden, um ein Teil der Fragen wenigstens im Prinzip beantworten zu können.

Eratosthenes von Kyrene (276 – 195 v.Chr.) war aufgefallen, dass es in Syene, dem heutigen Assuan nahe dem nördlichen Wendekreis, einen tiefen Brunnen gab, in dessen Wasser sich an bestimmten Tagen die Sonne spiegelte. An gleichen Tagen warf ein Obelisk bekannter Höhe in Alexandria einen Schatten messbarer Länge. Dort stand also die Sonne nie ganz senkrecht. Aus der Entfernung zwischen Syene und Alexandria, gemessen in Kamelreisetagen, konnte Eratosthenes unter der plausiblen Annahme, dass die Strahlen der Sonne als parallel angenommen werden können, den Erdumfang berechnen. Der Fehler lag im Vergleich zu heutigen Präzisionsberechnungen im einstelligen Prozentbereich. Dass die Erde kugelförmig ist, war damals ebenfalls bekannt. So warf die Erde bei einer Mondfinsternis zuerst einen kreisförmigen Schatten auf den Mond.

Aristarch(os) von Samos (310 – 230 v.Chr.) fand, dass die Beobachtung der Planetenbahnen besser zu einer heliozentrischen als zu einer geozentrischen Annahme passten – mehr als 1500 Jahre vor Kopernikus. Er postulierte mit

[22] https://www.bibelwissenschaft.de/bibelstelle/Sir+1,1-10.
Siehe auch Carlo Rovelli, Es gibt Orte auf der Welt, an denen Regeln weniger wichtig sind als Freundlichkeit, Essays, Rowohlt Verlag Hamburg, Mai 2022, S. 89 ff

rationalen Argumenten die „Höhe des Himmels“ und er beschrieb nach dem damaligen Kenntnisstand ein Modell als grobe Dimension für die Größe des Sonnensystems.

Es war Archimedes, der diese und andere Erkenntnisse mit Quellenangaben aufgriff und anfing damit zu rechnen. Zu Aristarch, dessen Werk später verlorenging, schreibt er in seiner Abhandlung „Der Sandrechner (Psammites, Ψαμμίτης)“[23]:

*„Aristarch aber hat ein Buch verfasst, das aus bestimmten Hypothesen besteht, und das, aus diesen Annahmen folgernd, zeigt, dass das Universum um ein Vielfaches größer ist als das ‚Universum‘, welches ich eben erwähnte. Seine Thesen sind, dass die Fixsterne und die Sonne unbeweglich sind, dass die Erde sich um die Sonne auf der Umfangslinie eines Kreises bewegt, wobei sich die Sonne in der Mitte dieser Umlaufbahn befindet, und dass die Sphäre der Fixsterne, deren Mitte diese Sonne ist und innerhalb derer sich die Erde bewegt, eine so große Ausdehnung besitzt, dass der Abstand von der Erde zu dieser Sphäre dem Abstand dieser Sphäre zu ihrem Mittelpunkt gleichkommt.“*[24]

Archimedes ging der Frage nach, wieviel Sandkörner in dieses Universum, gemäß den Thesen des Aristarchos, passen würden. Er musste mit einem riesigen, aber endlichen Wert rechnen. Fast wichtiger ist aber die Tatsache, dass er die „Unzählbarkeit“ einer solchen Zahl in Frage stellte und damit der Selbstbeschränkung des Wissenserwerbs entgegentrat. Er wollte ohne Rückgriff auf metaphysische Argumentation und rein auf rationaler Basis die Zählbarkeit auch solcher riesigen Zahlen nachweisen. Er wusste sicherlich, wir werden nie alles wissen, aber wir sollten keine künstlichen Schranken für Wissen errichten. Der erste Schritt ist dabei, dass es keine prinzipiellen Grenzen für die Zählbarkeit, Messbarkeit und der Anwendung plausibler Logik gibt.

Das war ein revolutionärer Gedanke und ein Aufbegehren gegen jede Form wissenschaftlicher Selbstbeschränkung.

Es mussten allerdings praktische Voraussetzungen für den Umgang mit großen Zahlen geschaffen werden, die es zur damaligen Zeit noch nicht gab. Die Griechen besaßen kein Dezimalsystem mit der so wichtigen Null. Aber selbst wenn es der geniale Archimedes erfunden hätte, war es im Sinne dieser aufklärerischen und populärwissenschaftlichen Schrift sinnvoller, an bestehende Denkmodelle anzuknüpfen. Man konnte Zahlen bis zur sogenannten „Vielzahl“ (griechisch Myriad, μυριάς) benennen.[25] Sie hatte den

---

[23] de.wikibrief.org/wiki/The_Sand_Reckoner bzw. https://wiki.edu.vn/wiki29/2021/10/19/der-sandrechner-wikipedia/

[24] Zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Aristarchos_von_Samos

[25] Siehe en.m.wikipedia.org/wiki/Myriad

Wert 10.000, wurde aber meist im Sinne von undefiniert groß verwendet. Verwendet man Myriade als Einheit, so kann man leicht bis einer Myriade Myriaden zählen, also (dezimal gedacht) $10^8$. Archimedes nannte die Zahlen bis $10^8$ Zahlen 1. Ordnung und mit $10^8$ als neuer Einheit bildete er Zahlen 2. Ordnung also bis $10^8 \cdot 10^8 = 10^{16}$ usw. Dies kann man fortsetzen bis $10^{8 \cdot 10^8}$ Archimedes ging noch einen Schritt weiter bis zur größten Zahl, die er verwendete und hat damit einen gewaltigen Zahlenvorrat:

$$(10^8)^{(10^8)^{(10^8)}} = 10^{8 \cdot 10^{16}}$$

In heutiger Schreibweise ist es eine Eins gefolgt von 80 Billiarden Nullen ($80 \cdot 10^{15}$).
Man beachte, dass kein Stellenwertsystem zur Verfügung stand, in dem die Regeln für Multiplikation und Potenzierung feststehen, sondern ein quasi Positionszahlensystem mit der Basis $10^8$ (wohlgemerkt in der Einheit „Myriad"). D.h. Archimedes musste auch selbst Regeln bzw. Befehle für dieses System festlegen. Er entdeckte dabei auch die Regel (in moderner Schreibweise), dass $10^a \cdot 10^b = 10^{a+b}$ ist.

Er nannte die definierten Rechenregeln „Befehle der ersten Periode" und den letzten Wert „Einheit der zweiten Periode" und setzte dieses Prinzip fort.

Auf Basis des heliozentrischen Modells von Aristarchos von Samos sowie einigen Annahmen konnte Archimedes nun die Größe des Universums abschätzen. Aristarch nahm also an (gemäß den zitierten Erläuterungen aus dem „Sandrechner"), dass das „Universum" kugelförmig ist. Dabei war „Universum" für ihn die Sonne als Zentralgestirn und die Fixsterne auf einer Kugelsphäre. Dabei entspricht die Sternparalaxe der Sonnenparalaxe, denn die Griechen waren noch nicht in der Lage, winzige Winkeländerungen im Laufe eines Jahres zu registrieren oder gar zu messen.

Archimedes benötigte zudem Obergrenzen. So ging er davon aus, dass die Sonne etwa das 30-fache der Mondgröße besitzt oder dass Entfernungen der Winkeldurchmesser der Sonne (von der Erde gesehen) größer als 1/200 eines rechten Winkels war ($\pi/400$ Radiant = 0,45 Grad).

Die Annahmen zu Größen und erwiesen sich im Vergleich zu heutigem Wissen als viel zu klein. Das sind für aktuelles Wissen teils lächerliche Größenordnungen. Doch auch Archimedes verwies immer wieder auf Rundungen und unbewiesene Annahmen.
Aber darauf kam es nicht an. Das Ziel war der Nachweis prinzipieller Berechenbarkeit.

Heute lassen sich noch mehr Fragen aus Ecclesiasicus viel exakter beantworten. Wir beherrschen meteorologische Fragen nach der Regenmenge, Satelliten bestimmen Meerestiefen zentimetergenau und die Kosmologie ist in den letzten Jahrzehnten zur exakten Wissenschaft geworden, die die Zeit seit dem Urknall ziemlich genau bestimmen konnte.

Der Zählbarkeit als erstem Schritt zum Wissen über die Welt sind somit zumindest prinzipiell keine Grenzen gesetzt.

**Negative Zahlen**

Im antiken Griechenland wurden negative Zahlen abgelehnt und das hatte einen guten Grund. Man dachte und rechnete in Strecken und Flächeninhalten. Eine negative Länge oder Fläche macht jedoch keinen Sinn. Diophantos von Alexandria[26], wohl der bedeutendste Algebraiker und Zahlentheoretiker der Antike, hat in seinem Buch „Arithmetica“, die lineare Gleichung $4 = 4x + 20$ gelöst und ein negatives Ergebnis erhalten. Er nannte das Ergebnis „absurd“. Selbst Michael Stifel (1487 – 1567), der aber schon mit negativen Werten rechnete, nannte sie 1553 noch „numeri absurdi, numeri ficti infra nihil (erdachte oder fingierte) und schrieb sie (0–a).[27] Er hatte die „Coß“ von Christoph Rudolff (1499 – 1545) überarbeitet und herausgegeben. Diese Haltung gilt auch für andere Autoren. Die negativen Zahlen wurden bis ins 16. Jahrhundert, wie bei Michael Stifel, als Differenzen natürlicher Zahlen geschrieben wurden (3–5, 8–11, etc., erst später wurde dafür –2, –3, etc. geschrieben). Verwirrend war in der damaligen Zeit auch die Tatsache, dass Subtraktion nicht zur Verringerung, sondern zur Vermehrung führen konnte (z.B. 8– (–5) =13).

Sogar noch Gottlieb Wilhelm Leibniz (1646 – 1716) fand es unsinnig, von „Nichts“ noch etwas wegzunehmen. Für ihn war das nur zulässig als Zwischenschritt, um über eine anschließende Addition wieder in den „sicheren Bereich“ zu gelangen. Auch Mathematiker wie Blaise Pascal (1623 – 1662) lehnten die negativen Zahlen ab. Leonhard Euler (1707 – 1783) befürwortete sie dann 1767 in seiner *„Vollständigen Anleitung zur Algebra (Opera Omnia)“*.[28] Allerdings hat Leonardo von Pisa (um 1170 – nach 1240), als Leonardo Fibonacci bekannt, in seinem Buch *liber abbaci* eine negative Zahl unter dem Begriff „Schulden“ als Lösung einer Gleichung erwähnt. Dies scheint ein kurioser Einzelfall gewesen zu sein. Dagegen widmet sich ein ganzes Kapitel *De extractione minorum numerorum ex maioribus* (Von der Subtraktion kleinerer

[26] Genaue Lebensdaten sind unbekannt. Wußing gibt „vermutlich 250 n.Chr.“ an. Schriften anderer, ihn zitierende Autoren deuten auf eine Zeit um 250 n.Chr. hin, sicher vor 364 n.Chr. Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Diophantos_von_Alexandria
[27] Nach Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008, S. 342
[28] https://www.math.uni-bielefeld.de/~sieben/Euler_Algebra.ocr.pdf

Zahlen von größeren). Er hat sich am Hof Friedrich II in Sizilien vehement für die arabischen Ziffern eingesetzt.

In China tauchten negative Zahlen bereits im 2. Jahrhundert vor Christus auf, also deutlich früher als zu Lebzeiten von Diophantos. Sie wurden erstmals in dem chinesischen Mathematikbuch „Neun Kapitel der Rechenkunst" (Jiǔ Zhāng Suànshù, 1. Jh.n.Chr.) erwähnt.[29] Das dort erklärte chinesische Zahlensystem verwendet rote Stäbchen für positive Zahlen und schwarze Stäbchen für negative Zahlen; also entgegengesetzte Farben zu unserer heutigen Konvention. Kulturgeschichtlich wird gerne auf das allgegenwärtige philosophische Prinzip des Yin-Yang verwiesen, das die Akzeptanz für negative Zahlen in China gefördert haben soll. Es beschreibt generell polare Gegensätze, die aber zusammengehören. Es fußt auf Kräften, die sich nicht bekämpfen, sondern ergänzen.

Indien erlebt ab ca. 600 nach Christus eine Blüte der Mathematik und hat damit auch die arabische Mathematik maßgeblich beeinflusst. Man muss besonders den Mathematiker Brahmagupta (598 – 670) nennen, der vor allem ein Regelwerk zum Rechnen mit negativen Zahlen festlegte. Negative Zahlen nannte er „Schulden" und positive „Vermögen". Sein wichtigstes Verdienst ist aber die Einführung der Null, die Schulden und Vermögen trennt.[30]


Abb. 3: Negative Zahlen im Alltag – am Beispiel Thermometer und Fahrstuhl

Über Indien kamen viele mathematische Erkenntnisse zur muslimischen Welt. Insbesondere unter dem aufgeklärten Kalifen Harun ar-Rashid (763 – 809 n.Chr.), erkannte man die Bedeutung der indischen Erkenntnisse, aber widmete sich auch den antiken Schriften. Erst durch den Fall von Toledo 1085 und der Eroberung der umfangreichen Bibliothek gelangten wesentliche Impulse in die christliche Hemisphäre. Ähnliches

[29] Siehe z.B. Begriffs- und Namensklärungen bei
https://www.enzyklo.de/Begriff/Jiu_Zhang_Suanshu
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-0348-6379-7_4 (Klassische mathematische Werke)
Wußing, Band 2, ebenda S. 46f und in der Zusammenfassung S. 66

[30] Bildquelle https://www.materetter.de/wiki/negative-zahlen-alltag

gilt für Cordoba 1492, das eine Bibliothek mit 400.000 Werken besessen haben soll.

Es war dann John Wallis (1616 – 1703), dem wir auch das Zeichen für Unendlich (∞) verdanken, der über den heute selbstverständlichen Zahlenstrahl eine wichtige logische Grundlage für die negativen Zahlen legte. Darüber werden negative Zahlen korrekt definiert und anschaulich im Unterricht eingeführt.

Einen wichtigen Impuls lieferte 1494 „Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalita (kurz: Summa)“ von Luca Pacioli (1445 – 1517). Es beschreibt das Prinzip der „doppelten Buchführung“ unter Verwendung der negativen Zahlen.[31] Die Buchhaltung von Unternehmen beruht auf doppelter Buchführung und verdrängt auch im Behördenumfeld zunehmend die Kameralistik, also das Denken in „Töpfen“, z.B. als Budget für ein Jahr.

Negative und positive ganze Zahlen bilden zusammen mit „+“ und „·“ einen „Zahlenring“, den man mit ℤ bezeichnet; die natürlichen Zahlen alleine haben das Symbol ℕ. Bei den rationalen Zahlen sollen jetzt die Körperaxiome besprochen werden.[32] Eine wichtige Forderung ist die Abgeschlossenheit der Menge bzgl. der darauf definierten Verknüpfungen Addition und Multiplikation. Man kann leicht sehen, dass ℤ kein „algebraischen Körper“ oder kurz „Körper“

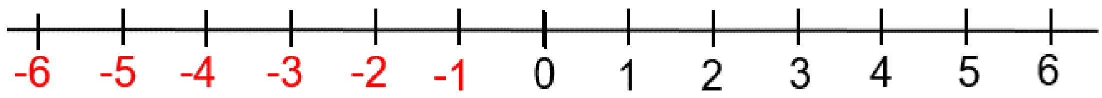



Abb. 4: Der Zahlenstrahl bildete die logische Grundlage für die negativen Zahlen.

ist. Z.B. hat in „ℤ“ die Zahl 3 kein Inverses bzgl. der Multiplikation. Das müsste $3^{-1}$ sein, also ⅓, was jedoch als Bruch nicht mehr in ℤ liegt.

[31] Der Franziskanermönch Pacioli hatte auch mit *Divina Proportione*, einer Abhandlung zum Goldenen Schnitt unter Beteiligung von Leonardo da Vinci für die Illustrationen, ein bahnbrechendes Werk verfasst. Die „*Summa de arithmetica*“ fasste zudem auf 600 eng bedruckten Seiten das mathematische Wissen der damaligen Zeit zusammen und begründete eine Blütezeit der italienischen Mathematik.
Siehe z.B. https://www.spektrum.de/wissen/luca-pacioli-1445-1517/1009133

[32] In der Mathematik und besonders in der Algebra finden sich viele Begriffe, die ihr eigentliches „semantisches Soziotop“ verlassen haben.

### Rationale Zahlen $\mathbb{Q}$

Die rationalen Zahlen kennt man schon seit Jahrtausenden in Form von Brüchen. Bekanntlich ist ein Bruch der Quotient aus zwei ganzen Zahlen. Doch man muss bedenken, dass frühe Hochkulturen weder das Zehnerstellenwertsystem mit der Null kannten und negative Zahlen als unsinnig ablehnten. Die Ägypter rechneten zwar (auch) dezimal, besaßen aber kein Positionssystem mit der Null, d.h. jede Zehnerpotenz hatte ein eigenes Zahlzeichen. Außerdem waren nur Brüche kleiner Eins interessant, weil man die nötige natürliche Zahl dazu addieren konnte. Eine weitere Einschränkung war die Schwierigkeit oder der Umstand, ggfs. ein kleinstes gemeinsames Vielfaches bilden zu müssen. Die Griechen konnten meisterhaft mit Brüchen umgehen. Die Abschätzung von Archimedes für π hatte weit über ein Jahrtausend Bestand. Verhältnisse wurden jedoch nicht als Zahl akzeptiert. Das verbietet der antike, griechische Zahlbegriff. Sie wurden durch Gebrauch wahrscheinlich zu eigenständigen Denkobjekten. Erst in der alexandrinischen Zeit, in der Theon von Alexandria (335 – 405) lebte und wirkte, kommt der Begriff „Wert eines Verhältnisses“ auf und geht in Bedeutungsrichtung „Zahl“, zeugt aber andererseits von dem Zwiespalt. Die Araber hatten indische, chinesische, griechische Mathematik adaptiert und waren in der Lage, einen erweiterten Zahlbegriff zu akzeptieren und haben in der Scholastik das Abendland immer mehr beeinflusst. Barlaam von Kalabrien (1290 – 1348) schreibt im 13. Jahrhundert noch sehr verklausuliert:
*„Der Wert eines Verhältnisses ist die Zahl, welche mit dem Hinterglied multipliziert das Vorderglied ergibt.*“

Erst Petrus Ramus (1515 – 1572), ein französischer Philosoph, ließ den griechischen Zahlbegriff hinter sich und definierte eine Zahl sauber:
*Numerus est secundum quem unumquodque numeratur (Eine Zahl ist, womit wir zählen und rechnen).*[33]

Nach diesen philosophischen Bemerkungen soll nun der Umgang mit rationalen Zahlen in Form von historischen Beispielen thematisiert werden.

Die Ägypter schrieben bevorzugt komplizierte Brüche als Summe von Stammbrüchen. Das kann zu Missverständnissen führen, wenn im Schriftbild nicht auf eine eindeutige Gliederung geachtet wird und die triviale Zerlegung vermieden wird. Im Papyrus-Rhind[34], der als eines der ersten

[33] https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf
[34] https://de-academic.com/dic.nsf/dewiki/1076123

Mathematikbücher (für höhere Beamte) gelten kann, wird z.B. die Kreiszahl Pi als Summe von Stammbrüchen dargestellt:

$$\pi = 3 + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \approx 3{,}12\ldots$$

Man kann sagen, dass in der Antike generell gebrochen rationale Zahlen als Summe von Stammbrüchen dargestellt wurden. Dies kann man sich als Einzelgewichte auf einer Balkenwaage vorstellen, die ebenfalls zum Gesamtgewicht addiert werden mussten. Addieren bedeutete „hintereinander schreiben“; die 1 im „Zähler“ bei Stammbrüchen wurde weggelassen.

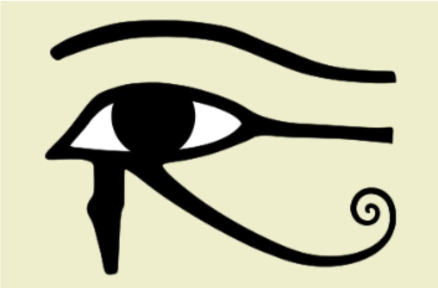


Abb. 5: Das Horus-Auge

Der Umgang mit Brüchen in Ägypten lässt sich am schönsten mit der Sage zum Horus-Auge[35] verdeutlichen, ein Teil der ägyptischen Mythologie. Die Augen des Horus sind Sonne und Mond; der Mond wird das „Udjat-Auge“ genannt. Seth, der Bruder von Osiris, riss im Kampf um den Thron Horus ein Auge aus und es zerbrach in viele Stücke. Thot, der Mondgott, Schutzgott der Wissenschaften und der Schreibkunst, versuchte es wieder zusammenzusetzen.

Das größte Bruchstück war die Hälfte des Auges, das Zweitgrößte ein Viertel, das Drittgrößte ein Achtel usw. Thot kam bis 63/64-tel des Auges. Der Begriff „Bruchzahl“ ist treffend gewählt, denn das Horus-Auge wurde aus Bruchstücken wieder weitgehend rekonstruiert.[36] Hätte Thot beliebig lange weiter gemacht, so hätte er unendlich viele Splitter zusammensetzen müssen, hätte also das ganze Auge erhalten:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots = 1$$

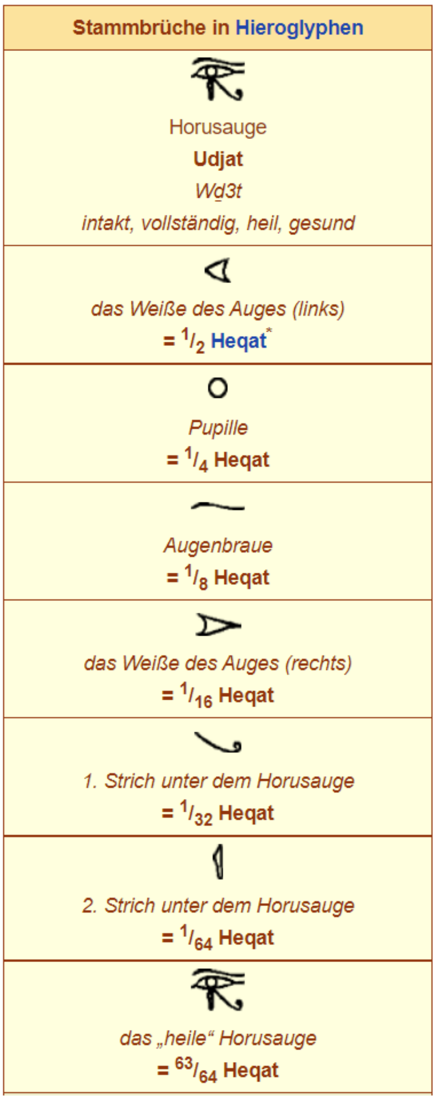



Abb. 6: Stammbrüche der Bruchstücke des Horus-Auges

[35] Beide Grafiken aus https://de.wikipedia.org/wiki/Horusauge, siehe auch die künstlerische Darstellung auf Papyrus im Anhang.

[36] Siehe auch, Rudolf Taschner, Die Zahl die aus der Kälte kam, S. 70f

Die Stammbrüche sind Teile des ägyptischen Hohlmaßes Heqat, es entspricht etwa 4,75 Liter. Teile des Heqat wurden mit den Hieroglyphen in der Abbildung geschrieben, die den Splittern des Horus-Auges nachempfunden sind.[37]

Brüche wurden im antiken Rom als *Minutiae* bezeichnet. Es wurde in einer Art Unzenrechnung in Form von Zwölferbrüchen gerechnet. Die Zahl 12 hat eine hohe Teilbarkeit.
In Mesopotamien entschied man sich für 60. Da meist noch ein Rest blieb, blieben Näherungen nicht aus. Jeder der Zwölferbrüche hatte ein eigenes Zeichen und eine eigene Bezeichnung. Neben den Zwölferbrüchen existierten noch kleinere Unterteilungen:
1/24, 1/48, 1/72, 1/288, 1/1728 mit den Bezeichnungen semuncia, sicilius, sextula, scripulum, siliqua.

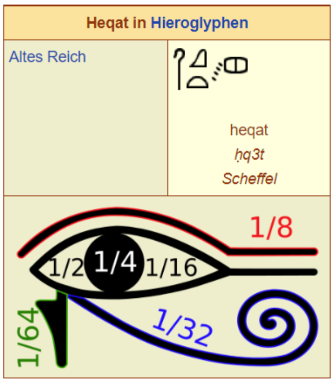



Abb. 7: Das Hohlmaß Heqat, also der ägyptische Scheffel

Für flüchtige Notizen und Rechnungen verwendeten die Römer eine Wachstafel (*tabula cerata)* mit einem Griffel (*stilius*). Dieses Gerät ist bis ins Mittelalter in Gebrauch und wurde in einigen Regionen noch im 20. Jahrhundert verwendet.[38]

Abb. 8: Römische Wachstafel, Griffel

Die römischen Zahlzeichen sollen als bekannt vorausgesetzt werden. Interessant ist der Einfluss der älteren griechischen Zahlzeichen. Seit der Zeit des Gesetzgebers Solon (ca. 638 – 558 v.Chr.) entsprechen in erster Näherung griechische Zahlzeichen den römischen, die bis zum Ende der römischen Republik verwendet wurden.

| 12er Bruch | Reduziert | In 60stel | Bezeichnung | Zeichen | In % |
|---|---|---|---|---|---|
| 1/12 | | 5 | uncia | — | 8,33 |
| 2/12 | 1/6 | 10 | sextans | = | 16,67 |
| 3/12 | 1/4 | 15 | quadrans | =— | 25,00 |
| 4/12 | 2/6 o. 1/3 | 20 | triens | == | 33,33 |
| 5/12 | | 25 | quincunx | ==— | 41,67 |
| 6/12 | 3/6 o. 1/2 | 30 | semis oder dimidium | S | 50,00 |
| 7/12 | | 35 | septunx | S— | 58,33 |

37 Grafik und Texthinweise, https://de.wikipedia.org/wiki/Heqat
38 Quelle der Abbildung: der-roemer-shop.de/

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 8/12 | 4/6 o. 2/3 | 40 | bes | S= | 66,67 |
| 9/12 | 3/4 | 45 | dotrans oder tres quintae | S=– | 75,00 |
| 10/12 | 5/6 | 50 | dextans | S== | 83,33 |
| 11/12 | | 55 | deunx | S==– | 91,67 |
| 12/12 | 1 | 60 | as | I | 100,00 |

Abb. 9: Die römischen Bruchzahlen[39]

Noch größere Zahlen wurden als Produkte dargestellt. Man konnte ebenso damit rechnen, wie später mit den römischen Zahlzeichen.[40]

Neben dem Bruch mit beliebigen ganzen Zahlen in Zähler und Nenner gibt es noch die Dezimalbruchdarstellung.[41] Sie setzt ein Zehnersystem und die Null voraus und kann als ein Bruch mit einer Zehnerpotenz im Nenner aufgefasst werden. Auch hier scheint Indien die entsprechenden Methoden schon sehr früh entwickelt zu haben. Sie wurden aber erst durch den arabischen Mathematiker al-Uqlidisi (920 – 980) im 10. Jahrhundert beschrieben. Sein Buch Kitab al-fusul fi'l-hisab al-hindi existiert in nur einem Exemplar und ist auf ca. 952/953 datiert.

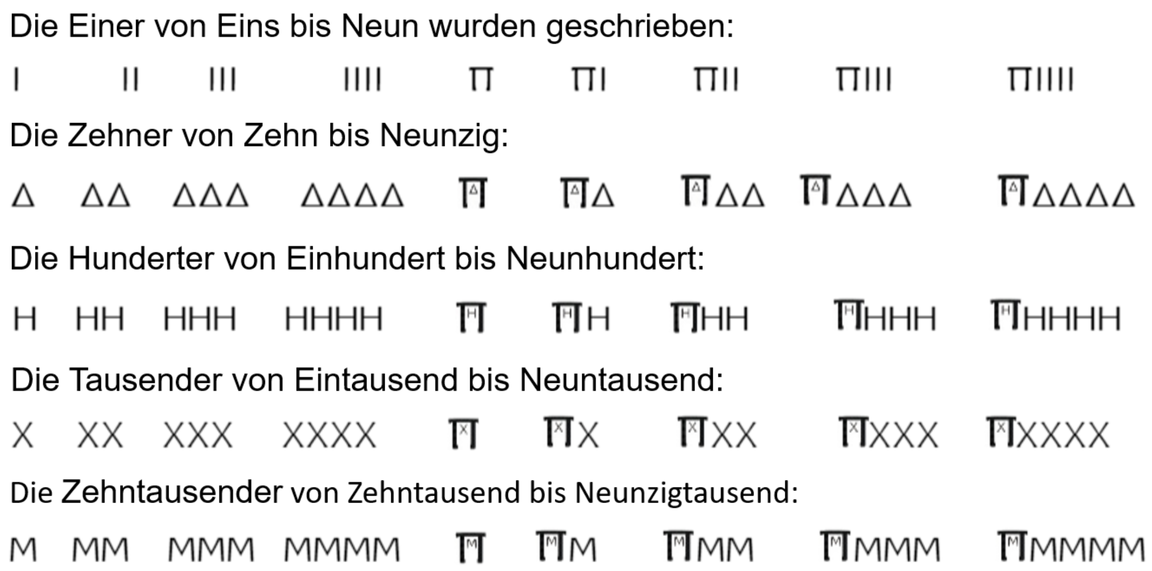



Abb. 10: Die älteren griechischen Zahlzeichen

[39] Nach G. Ifrah, Universalgeschichte der Zahlen
[40] Text und eigene Abbildung nach Rudolf Haller, Die Zahlzeichen bei den Griechen und Römern der Antike, https://docplayer.org/23974612-Die-zahlzeichen-bei-den-griechen-und-roemern-der-antike.html
[41] Die Schreibweise und Gliederung von Zahlen regelt die internationale Norm EN ISO 80000–1.

Es gilt als ältestes arabisches Buch über Arithmetik.[42] Der Zusatz al-hindi im Titel deutet schon auf die Bedeutung, die er z.B. dem indischen Stellenwertsystem zumisst. Das Werk gibt auch didaktische Hinweise. Er wollte schon auf den noch allseits im Gebrauch befindlichen Abakus verzichten. Insbesondere beim „Sand-Abakus" wurden Zwischenrechnungen gelöscht und waren damit nicht mehr nachvollziehbar.[43]

Rationale Zahlen mit ihren Verknüpfungen Addition und Multiplikation werden mit einem stilisierten Buchstaben $\mathbb{Q}$ genannt.

$\mathbb{Q}$ hat eine bemerkenswerte, ausgezeichnete Struktur, die man im algebraischen Sinn einen Körper nennt. Für diesen Beitrag sind die Axiome, die einen Körper ausmachen, so zentral, dass sie an dieser Stelle am Beispiel von der Menge $\mathbb{Q}$ und den Verknüpfungen Addition und Multiplikation besprochen werden sollen. Dazu sind einige Grundbegriffe notwendig, die man sich aneignen muss und deren algebraische Eigenschaften aus den Axiomen unmittelbar ersichtlich sind: Dies sind vor allem:

Gruppe, Vektorraum, Kommutativgesetz, Assoziativgesetz, Distributivgesetz, neutrales Element, inverses Element.

Abb. 11: Das Ziffernrechnen gewinnt die Oberhand über den Abakus

Auf einer endlichen oder hier unendlichen Menge sind zwei Verknüpfungen definiert, die hier die gewöhnliche Addition und Multiplikation sein sollen. Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abgeschlossen bzgl. beider Verknüpfungen, d.h. sowohl das Element $c=a+b$, als auch das Element $c'=a \cdot b$ ist wieder ein Element der Menge, also hier der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Zu jeder Verknüpfung gibt es ein neutrales Element, so dass bei Anwendung des neutralen Elements auf ein beliebiges Element a sich wieder a ergibt. Dies ist augenscheinlich die Null bei der Addition und 1 bei der Multiplikation.

Denn $a+0=a$ und $a \cdot 1=a$

---

[42] Siehe z.B. https://de.wikipedia.org/wiki/Al-Uqlidisi, https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Uqlidisi/

[43] Bildquelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Datei:Gregor_Reisch,_Margarita_Philosophica,_1508_(1230x1615).png

Außerdem wird gefordert, dass es zu jedem Element bzgl. der Addition und der Multiplikation a ein inverses Element a´ gibt, sodass

a+a´=0 und a·a´=1.

Man sieht leicht, dass a´= −a bei der Addition und a´= $\frac{1}{a}$ bei der Multiplikation ist. Dabei muss man verlangen, dass a≠0 ist.

Bei den geltenden Gesetzen unterscheidet man in additive und multiplikative Eigenschaften, sowie in Gesetze, die bei der Kombination von Addition und Multiplikation gelten müssen.

Die folgende Rubrik der Definitionen und Axiomen findet sich auch in übersichtlicher und kompakter Form bei wikipedia:[44]

Allgemeine Definition

Eine Gruppe besteht aus einer Menge M mit einer Verknüpfung ○, die zwei Elementen a, b aus M ein drittes Element c zuordnet, das ebenso Element von M ist (a○b=c). Jede Gruppe besitzt ein neutrales Element n, so dass a○n=n○a=a. Zu jedem Element a existiert ein inverses Element a´, so dass a○a´=n. Gilt a○b=b○a, so nennt man die Gruppe kommutativ oder abelsch.

Ein Körper ist eine Menge $K$, versehen mit zwei inneren zweistelligen Verknüpfungen „+“ und „·“, die Addition und Multiplikation genannt werden.

1. ($K$, +) ist eine kommutative (=abelsche) Gruppe (neutrales Element 0)
2. ($K \setminus \{0\}$, ·) ist eine kommutative (abelsche) Gruppe (neutrales Element 1)
3. Distributivgesetz
   $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ und $(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ für alle $a, b, c \in K$

Einzelaufzählung der benötigten Axiome

Ein Körper muss also folgende Einzelaxiome erfüllen:

*1. Additive Eigenschaften:*

1. $a+(b+c)=(a+b)+c$ für alle $a, b, c \in K$ (Assoziativgesetz)
2. $a+b=b+a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
3. Es gibt ein Element $0 \in K$, sodass $0+a=a$ für alle $a \in K$ (neutrales Element)

[44] https://de.wikipedia.org/wiki/Körper_(Algebra). Die Darstellung hat den Vorteil, dass sie alles auf einen Blick enthält. Man muss sich lediglich elementare Einzeldefinitionen und Begriffe, wie z.B. Gruppe, kommutativ=abelsch, verdeutlichen.

4. Zu jedem $a \in K$ existiert ein additives Inverses $-a$ mit $(-a)+a=0$

*2. Multiplikative Eigenschaften:*

1. $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ (Assoziativgesetz)
2. $a\cdot b=b\cdot a$ für alle $a, b \in K$ (Kommutativgesetz)
3. Es gibt ein Element $1\in K$, so dass $1\cdot a=a$ für alle $a \in K$ (neutrales Element)
4. Zu jedem $a \in K$ existiert ein multiplikatives Inverses $a^{-1}$ mit $a^{-1}\cdot a=1$

*3. Zusammenspiel von additiver und multiplikativer Struktur*

1. $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ für alle $a, b, c \in K$ (Links-Distributivgesetz)
2. $(b+c)\cdot a=b\cdot a+c\cdot a$ für alle $a, b, c \in K$ (Rechts-Distributivgesetz)

Aufgrund der multiplikativen Kommutativität in einem Körper würde es hier ausreichen, nur ein Distributivgesetz anzugeben. Diese Differenzierung in „Rechts" und „Links" wird an späterer Stelle benötigt (Quaternionen).

**Irrationale Zahlen**

Platon hatte erheblichen Einfluss auf die griechische Philosophie. Er war in Tarent von dem Herrscher Archytas (ca. 428 – 365 v.Chr.) in die Mathematik eingeführt worden und durch dessen pythagoreische Haltung geprägt worden. Platons Musiktheorie, worin die Töne richtigerweise als Bruchteile einer Grundsaite interpretiert wurden, galt als Beleg, dass rationale Zahlen (im griechischen Sinn Verhältnisse von Strecken) die Welt erklären konnten. Dies bestätigte die Weltsicht der Pythagoreer.[45]

Die Griechen definierten Irrationalität als „Inkommensurabilität". Schon früh bemerkte man, dass in der Regel „gewöhnliche" Zahlen stets zueinander kommensurabel waren, d. h. zwei natürliche Zahlen a und b ließen sich stets als Vielfache einer weiteren natürlichen Zahl c auffassen. Mit dem Euklidischen Algorithmus ließ sich c, der größte gemeinsame Teiler (ggT), berechnen. Die beiden Zahlen a und b, die bei den Griechen grundsätzlich Strecken oder Flächen bedeuteten, standen dann in einem ganzzahligen Verhältnis zueinander. Heute würde man sagen, der durch c gekürzte Bruch aus a und b ist eine rationale Zahl. Doch nach und nach tauchten immer mehr (geometrische) Beziehungen auf, bei denen inkommensurable Beziehungen auftraten. In manchen wissenschaftlichen Auffassungen soll es das Verhältnis von der Seite eines Quadrates zur Diagonale sein ($\sqrt{2}$), es gibt gute Gründe,

[45] Wußing, Band 1, ebenda, S 177

dass Untersuchungen am Pentagramm zur Entdeckung geführt haben.[46] Doch diese als Zahlen zu begreifen stand nicht zur Debatte. Archimedes hat π als eine inkommensurable Größe begriffen, die zwischen zwei kommensurablen, also Brüchen, liegt und angenähert werden kann. Bei den Chinesen (Jiǔ Zhāng Suànshù, Neun Kapitel der Rechenkunst, einem der ältesten Mathematikbücher überhaupt im 1. Jahrhundert n.Chr., im Gegensatz zur griechischen Tradition ohne Beweise) scheint schon erkannt worden zu sein, dass man beliebig genau, also mit unendlich vielen Stellen, π beschreiben kann.[47]

Lange Zeit hielt sich in der Forschung die Auffassung, dass Hippasos von Metapont (um 450 v.Chr.) diese heile Welt erschüttert hatte und mit der Entdeckung bzw. schriftlichen Bekanntmachung der Irrationalität die damalige mathematische Welt in eine tiefe Krise gestürzt habe. Alte Legenden behaupten, er wäre deshalb ertränkt worden. Heute geht man davon aus, dass er durch einen Schiffbruch ums Leben gekommen, was aber ebenfalls als gerechte göttliche Strafe angesehen wurde.[48]

Die Theorien, es hätte durch die Entdeckung ein „Erdbeben" in der griechischen Mathematik gegeben, gelten heute als überholt.[49,50] Es gab erheblichen Interpretationsbedarf, aber es ist wohl übertrieben, von einer Grundlagenkrise zu sprechen. Diese „Größenverhältnisse" wurden einfach bald als nützlich erkannt und der Begriff „Verhältnis" hatte sich bei den Brüchen schon eingebürgert und wurde einfach ergänzt. Es war kein Verhältnis von Zahlen (im absoluten griechischen Verständnis als natürliche Zahlen), sondern wieder ein Verhältnis von Strecken oder Flächen, aber inkommensurabler Natur. Heron von Alexandria schrieb:

*„Rationale und irrationale Größen gehören beide nicht zu dem an sich Gedachten, sondern zu dem mit Anderem Verglichenen."*[51]

---

[46] Kurt von Fritz: Die Entdeckung der Inkommensurabilität durch Hippasos von Metapont, in: Kurt von Fritz: Grundprobleme der Geschichte der antiken Wissenschaft, Berlin u. a. 1971, S. 545- 575

[47] https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Nine_chapters/,
viele Literaturangaben bei https://de-academic.com/dic.nsf/dewiki/2427532

[48] Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl

[49] Walter Burkert: *Weisheit und Wissenschaft. Studien zu Pythagoras, Philolaos und Platon*. Hans Carl, Nürnberg 1962

[50] Leonid Zhmud: Hippasos aus Metapont. In: Hellmut Flashar u. a. (Hrsg.): Frühgriechische Philosophie (= Grundriss der Geschichte der Philosophie. Die Philosophie der Antike, Band 1), Halbband 1, Schwabe, Basel 2013, ISBN 978-3-7965-2598-8, S. 412–415

[51] https://www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf

Nichtsdestotrotz wurde weiter gerechnet. Selbst Archytas von Tarent, als erklärter Pythagoreer, hat die Irrationalität von $\sqrt{\frac{m+1}{m}}$ für $\mathrm{m} \in \mathbb{N}$ bewiesen. Euklid hat in den Elementen explizit den Beweis für $\mathrm{m}=1$, also $\sqrt{2}$, erbracht und sogar allgemein $\sqrt[n]{\frac{m+1}{m}}$ bewiesen.[52]

Historisch kann man diese Ergebnisse in das Ende der Ionischen Epoche und den Beginn der athenischen Periode eingruppieren. In der athenischen Periode wurden die „Inkommensurablen“, also der irrationalen Zahlen in Form von konstruierbaren Strecken eines der zentralen Themen in der Mathematik dieser Zeitspanne. Wesentliche Einzelbeiträge kamen von Theodoros von Kyrene (gest. um 390 v.Chr.). Die Beweise wurden grundsätzlich geometrisch geführt und gingen bis hin zu quadratischen Wurzelschachtelungen. Die vielen einzelnen Ergebnisse manifestierten auf jeden Fall die Existenz der inkommensurablen Werte.

Vermutlich schon sehr früh konnte man die Gleichheit zweier Verhältnisse zeigen, indem das angewendet wurde, was wir heute als Euklidischen Algorithmus bezeichnen und der wahrscheinlich von Eudoxos stammt, aber im 5. Buch der „Elemente“ des Euklid beschrieben ist. Es ist eine „Wechselwegnahme“ (Antanatesis oder Anthyphairesis) und definiert zwei Verhältnisse genau dann als gleich, wenn sie dieselbe endliche oder unendliche Folge von Resten ergeben. Doch erst der herausragende Eudoxos von Knidos (397 – 345/338 v. Chr.) schaffte einen konzeptuellen Rahmen, der das Irrationale in das Gesamtgebäude der Mathematik integriert hat und aus den inkommensurablen Fremdkörpern „kommensurable“, hier im Sinne von gleichberechtigten Größen, gemacht hat. Das führte zu einer sauberen, aber umständlichen Definition, die sowohl auf rationale wie auch auf irrationale Verhältnisse anwendbar ist. Heute würde man schreiben:[53]

Vier Größen a, b, c, d stehen in Proportion (a : b=c : d), wenn für alle natürlichen Zahlen m, n jeweils genau eine der folgenden Aussagen gilt:

1) $m \cdot a < n \cdot b$ und $m \cdot c < n \cdot d$
2) $m \cdot a = n \cdot b$ und $m \cdot c = n \cdot d$
3) $m \cdot a > n \cdot b$ und $m \cdot c > n \cdot d$

Damit hat man im Prinzip auch die irrationalen Zahlen (also inkommensurable Größen) in das Zahlensystem integriert. „Dies war in der damaligen Zeit ein

[52] https://de.wikipedia.org/wiki/Irrationale_Zahl
[53] Wörtliche Übernahme aus www.kai-friederike.de/materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf

kühner, aber folgerichtiger Schritt und hat den Weg zum heutigen Verständnis des Zahlensystems maßgeblich geebnet.“[54]

Doch wie musste man sich das vorstellen? Es gibt unendlich viele rationale Zahlen, also Brüche mit einem endlichen Nenner. Aber man kann zwischen zwei beliebig kleinen Brüchen immer noch weitere Brüche finden, indem man z.B. den Abstand halbiert. „Zwischen“ diesen unendlich vielen und beliebig dicht gesäten rationalen Zahlen passen aber immer noch ebenfalls unendlich viele irrationale Zahlen. Im Gegenteil, Georg Cantor (1845 – 1918) bewies, dass die Menge der rationalen Zahlen abzählbar unendlich groß ist. D.h. er fand eine verblüffende Methode, jeder rationalen Zahl eine natürliche Zahl zuzuordnen, sie also durchzuzählen. Dies funktioniert bei den irrationalen Zahlen nicht: Sie sind überabzählbar groß. Damit war jedoch nicht die Frage beantwortet, ob es trotz der beiden unendlichen Zahlmengen immer noch Lücken auf dem Zahlenstrahl geben könnte. Diese Frage ist entscheidend für die Stetigkeit.

Es war Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831 – 1916), der letzte Schüler von Carl Friedrich Gauß, der eine Methode fand, um zu zeigen, dass der Zahlenstrahl, das „Kontinuum“, tatsächlich keine noch so kleinen Lücken aufweist, also das Kriterium erfüllt, das für die Stetigkeit erforderlich ist.

Mit den Dedekind´schen Schnitten hat er alle reellen Zahlen, genannt $\mathbb{R}$, über beliebig nah liegende rationale Zahlen definiert (siehe Abb.). Mit dieser Definition ist die Menge $\mathbb{R}$ nichts anderes als die Menge aller (Dedekind´schen) Schnitte in der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Er konstruierte geeignete Intervalle, die einseitig offen oder geschlossen sind und nennt sie Oberklasse bzw. Unterklasse. Damit ist die Lückenlosigkeit des Kontinuums garantiert und somit sozusagen eine Ordnungsvollständigkeit der reellen Zahlen erreicht worden – eine Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$.

Heute wird dieser „Vervollständigungsprozess“ von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ formal genauer mit Hilfe der Betrags- bzw. der daraus folgenden Abstandsfunktion sowie über konvergierende Folgen („Cauchy-Folgen“) durchgeführt. Weil diese Gedanken später nochmals benötigt werden, sollen sie hier schon kurz diskutiert werden. Man definiert den (euklidischen bzw. archimedischen) Betrag einer (zunächst) rationalen Zahl x bekanntlich als

$$|x| = \begin{cases} x, \text{für } x \geq 0, \\ -x, \text{für } < 0, \end{cases}$$

[54] Zum Thema siehe Wußing, ebenda, S184f, Zitat aus W. Kafitz, Unendlich, Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift Band 70, S. 21 oder https://jlupub.ub.uni-giessen.de/handle/jlupub/220, S. 16

Die Abstandsfunktion ist dann einfach $d(x, y) = |x - y|$.
Auch hier im 1-dimensionalen Zahlenstrahl gilt trivialerweise die Dreiecksungleichung

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Salopp formuliert, sagt sie aus, dass der Umweg immer größer-gleich dem direkten Weg ist.

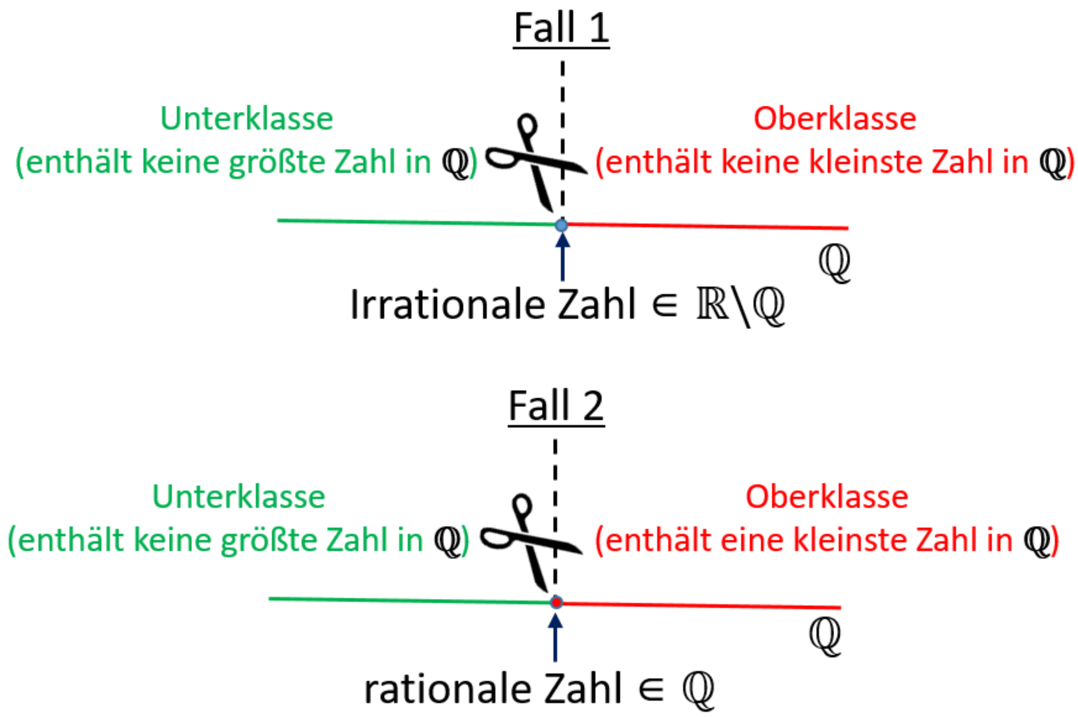



Abb. 12: Dedekind´sche Schnitte in der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ ergeben entweder eine irrationale oder eine rationale Zahl.

Mathematisch sauberer als die Dedekindschen Schnitte ist die folg. Aussage:

Eine Cauchy-Folge rationaler Zahlen $(x_n)$, $n \in \mathbb{N}$, konvergiert gegen $x \in \mathbb{Q}$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x_m| < \varepsilon$ für alle $n,m \geq N$ existiert.

Wegen der Dreiecksungleichung ist jede konvergierende Folge in $\mathbb{Q}$ auch gleichzeitig eine Cauchy-Folge.

Der Konvergenzpunkt x muss aber nicht immer rational sein. Ein Beispiel sind Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen, die bekanntlich gegen die irrationale Zahl, genannt Goldener Schnitt $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, konvergieren.

$$\frac{f_n}{f_{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+1} := f_n + f_{n-1},$$

Mit Hilfe des klassischen euklidischen oder archimedischen Abstandsbegriffes erreicht man eine Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$. Wir werden sehen, dass es auch eine andere Definition des Abstands geben kann.

Der Briefwechsel zwischen Dedekind und Cantor inspirierte Cantor zu seinen bahnbrechenden Erkenntnissen zu unendlichen Mengen. Dabei stand das Kontinuum am Anfang als unendliche <u>Zahlen</u>menge. Die Untermenge der rationalen Zahlen ist abzählbar; die Untermenge der irrationalen Zahlen ist bewiesenermaßen nicht abzählbar. Auch deren Untermenge transzendente Zahlen (z.B. π oder e) ist nicht abzählbar. Auch ein beliebig dimensionales zusammenhängendes und abgeschlossenes Gebilde lässt sich auf jede Untermenge des Kontinuums (z.B. die Strecke [0,1]) umkehrbar eindeutig („bijektiv") abbilden und hat somit die gleiche Mächtigkeit.

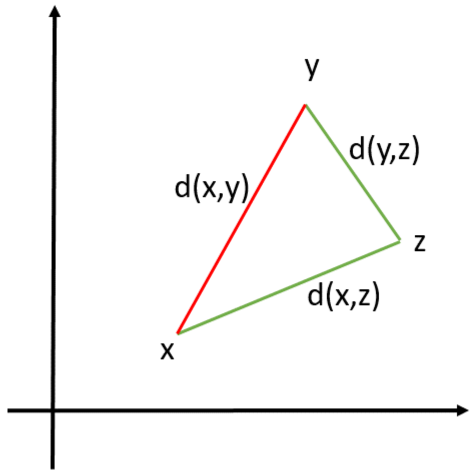



Abb. 13: Dreiecksungleichung im euklidischen Raum, z.B. hier $\mathbb{R}^2$

Schon mehr als eine Fußnote der Geschichte stellen die oben erwähnten transzendenten Zahlen dar. Sie gehören auf jeden Fall zu den irrationalen Zahlen. In der Mathematik heißt eine reelle Zahl transzendent, wenn sie nicht Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Andernfalls handelt es sich um eine algebraische Zahl, die also im weitesten Sinne eine Wurzeldarstellung hat. Algebraische Zahlen sind z.B. $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , wie oben erwähnt bekannt als der Goldene Schnitt. Transzendente Zahlen sind z.B. die Kreiszahl π oder die Eulersche Zahl e. In vielen Fällen konnte man bei durchaus „prominenten" Vertretern noch nicht entscheiden, ob sie transzendent, nur irrational oder sogar beides nicht sind. Ein Beispiel ist die in der Zahlentheorie oder Funktionentheorie wichtige Konstante γ (Gamma), benannt nach Euler und Mascheroni.

Sie hat den Wert γ = 0,57721 56649 ……[55]

Von $e + \pi$, $e - \pi$, $e \cdot \pi$, $\frac{e}{\pi}$ kennt man noch nicht den Status; die Irrationalität wird lediglich vermutet.

Man kann sich irren, was eine transzendente Zahl sein könnte. Das indische Wunderkind Srinavasa Ramanujan (1887 – 1920) vermutete es und 1974 bewies es John Brillo von der University of Arizona:

---

[55] Julian Havil, GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013, S. 33

$e^{\pi\sqrt{163}} = 262\,537\,412\,640\,768\,744$ ist exakt eine ganze Zahl.[56]

Mit Dedekind und Cantor konnte nach $\mathbb{Q}$ mit $\mathbb{R}$ die 2. Zahlenmenge identifiziert und sauber konstruiert werden, die die Körper-Axiome, wie bei den rationalen Zahlen besprochen, erfüllt. Sie wird gerne über das Bild des Zahlenstrahls verdeutlicht. Wichtige Kennzeichen sind, dass die Zahlenpunkte lückenlos dicht liegen und dass zu zwei Zahlen a und b immer a < b, a=b oder a > b gilt. Die Relation „<" ist eine Ordnungsrelation in $\mathbb{R}$.

Der Vollständigkeit sei erwähnt, dass Cantor über „unendlich" hinaus weitere sog. „Transfinite Zahlen" definiert und untersucht hat. Es sind hochinteressante Überlegungen rein mathematischer Natur.[57] Er wurde deshalb stark angefeindet, insbesondere von seinem Doktorvater Leopold Kronecker (1823 – 1891). Er verurteilte Cantor nicht nur für seine Ideen zum Unendlichen, er bekämpfte ihn sogar persönlich wegen seiner Forschungen zum Unendlichen und machte ihm das Leben zur Hölle („Verderber der Jugend"). Die Forschungen zu „Unendlich" haben andererseits Georg Cantor Weltruhm verschafft. Sie haben aber kaum praktische Bedeutung in der angewandten Mathematik. Man kann sagen, im Gegenteil. Da, wo unendliche Werte in einer Theorie auftreten, zeigen sich meist bereits die Grenzen dieser Theorie. Beispiele sind die quasi unendliche Dichte in Schwarzen Löchern bei Anwendung der Allgemeinen Relativitätstheorie oder das Versagen der Hydrodynamik, wenn Flüssigkeiten an feinen Öffnungen atomar austreten und deshalb die Theorie unendliche Werte voraussagt.

Eine ähnliche Definition, wie die transfiniten Zahlen bei Cantor, führte John Horton Conway (1937 – 2020) zu den surrealen Zahlen. Ihre Entdeckung entstand bei der Untersuchung des äußerst komplexen Strategiespiels Go.[58]

### Komplexe Zahlen

In der Renaissance stiegen die Anforderungen an Handel, Schifffahrt, Bauwesen, Militärwesen u.v.m. enorm und hatten entsprechend auch Auswirkungen auf Technik und Mathematik. Es war vor allem eine Blütezeit der neuen italienischen, französischen und englischen Mathematiker.
Der Italiener Raffael Bombelli (1526 – 1572) veröffentlichte *L'Algebra 1572* in Bologna, es wurde aber wahrscheinlich deutlich früher zwischen 1557 und 1560

---

[56] Siehe Toenniessen, Fridtjof; Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Spektrum, Heidelberg, 2010, S. 424
[57] Ausführlich siehe dazu den Beitrag „Unendlich", Kafitz, Willi; Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Gießen 2022, Band 70, S. 6 f oder http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-166
[58] SdW 10/22 S. 51

geschrieben. Der ebenfalls italienische Mathematiker Geralomo Cardano (1501 – 1576) publizierte *Ars magna* in Nürnberg 1545.
Sie beschäftigten sich, wie auch andere Mathematiker in dieser Zeit, mit dem Lösen von polynomialen Gleichungen, also Funktionen der Form

$$\sum_{k=0}^{n} a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0$$

mit $x \in \mathbb{R}$, $a_i \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Dabei stießen sie auf Lösungswege, die schließlich den Weg zu den komplexen Zahlen wiesen. Aber zunächst war es undenkbar, dass das Quadrat einer Zahl negativ sein könnte. Auch die imaginäre Einheit i war nichts weiter als ein Denkmodell. Bombelli verwendete als Erster Methoden bei kubischen Gleichungen um reelle Lösungen zu finden, die man als komplexe Zahlen identifizieren kann und erkannte dadurch die enormen Möglichkeiten.
Viele interessante Ergebnisse sind in der Algebra, Analysis, der Geometrie über einen solchen Umweg über das „Komplexe" entstanden. Die komplexe Funktionentheorie erstaunt immer wieder, wie elegant Ergebnisse im Komplexen erzielt werden können.
Obwohl über René Descartes (1596 – 1650) die imaginäre Einheit i eingeführt wurde, waren viele Begriffe und Anschauungen noch eher diffus. Eine formal korrekte Definition der komplexen Zahlen verdanken wir erst dem norwegisch-dänischen Mathematiker Caspar Wessel (1745 – 1818), dem 1797 wichtige Resultate gelangen und Sir Rowan William Hamilton im Jahr 1833. Auf ihn wird bei den Quaternionen noch einzugehen sein. Ein Gigant unter den Mathematikern war Leonhard Euler. In „Introductio in analysin infinitorum" publizierte er 1748 die Formel, die allgemein als die schönste Gleichung aller Zeiten bezeichnet wird (s.u.). Sie ist die Krönung seiner Ergebnisse über den Zusammenhang zwischen der Exponentialfunktion und den trigonometrischen Funktionen, der nur über komplexe Zahlen möglich sind.[59] Die Beiträge von Gauß sind ebenfalls wegweisend, allerdings nicht wie Euler im Bereich der aufstrebenden Analysis, sondern in der Geometrie und Algebra. Im Jahr 1811 fand er eine Möglichkeit komplexe Zahlen als Punkte und Vektoren in der Ebene darzustellen. Sie ist als Gaußsche Zahlenebene bekannt und berühmt. „Komplexe Zahlen" als Begriff wurde auch von Carl Friedrich Gauß in seiner *Theoria residuorum biquadraticorum*, 1831, eingeführt. Eine zentrale Anforderung ist die Ermittlung von Nullstellen in einem Polynom mit der höchsten Potenz $x^n$, $n \neq 0$, also oben genannter Form

$a_0+a_1x^1+a_2x^2+\ldots+a_{n-1}x^{n-1}+a_nx^n=0$.

[59] Siehe dazu auch ausführlicher https://www.mathematik.de/dmv-blog/2451-270-jahre-eulersche-identität-eine-kurze-geschichte-der-komplexen-zahlen

Eins seiner vielen Hauptverdienste ist der Beweis des Hauptsatzes der Algebra (Fundamentalsatz), also der Erkenntnis, dass ein Polynom n-ten Grades genau n Nullstellen im Komplexen hat.

Ab Anfang des 19. Jahrhunderts setzte dann eine Entwicklung ein, deren Ergebnisse nach 200 Jahren praktisch unverändert im Mathematik-Grundstudium gelehrt werden. Es sind in ihrer Tragweite unglaublich tiefliegende Erkenntnisse in der Analysis, Funktionentheorie und nach und nach in anderen Bereichen entstanden, die nur über komplexe Zahlen entdeckt werden konnten. Bernhard Riemann (1826 – 1866), Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) und Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 – 1897) muss man unbedingt nennen. Sie haben das Kalkül der Differential- und Integralrechnung auf die komplexen Zahlen erweitert. Cauchy und Weierstraß haben dabei den historischen sprachlichen Ballast („unendlich klein“) überwunden und moderne Definitionen für den Grenzwertprozess gefunden. Riemann hat wichtige Impulse bei der Funktionentheorie gegeben und war darüber hinaus mit der nach ihm benannten Riemannschen Geometrie Wegbereiter für die Physik der Allgemeinen Relativitätstheorie. Doch auch mit weiteren Namen sind wichtige Ergebnisse auf Basis der komplexen Zahlen verbunden, so z.B. Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859).

Es lohnt sich, an dieser Stelle einige allgemeine Überlegungen anzustellen, welchen Anforderungen eine Erweiterung des Zahlbereiches genügen müssen. Dazu ist ein Blick in die bisherige Entwicklung sinnvoll.

Die reellen Zahlen bildeten einen zwangsläufigen, historisch gewachsenen Abschluss des Zahlensystems, wie es sich im Zahlenstrahl als Kontinuum darstellt.[60,61] Dabei hat man zunächst mehr intuitiv die wunderbaren Eigenschaften von $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$, die sich als algebraische Körper bestehend aus einer Menge mit zwei Verknüpfungen definieren lassen, berücksichtigt. $\mathbb{R}$ ist darüber hinaus ein „vollständig geordneter Körper“, was wie dargestellt, für die Stetigkeit von entscheidender Bedeutung ist, die wiederum Voraussetzung für viele weitere mathematische Methoden darstellt.

Geht man darüber hinaus in Verallgemeinerungen des Zahlbegriffs, sollten die Erweiterungen des Zahlbereichs immer zwei wesentlichen Anforderungen genügen:[62]

[60] Abbildungsquelle: matheguru.com/algebra/komplexe-zahlen.html
[61] Eigene Abbildung
[62] Die folg. Überlegungen finden sich in abgewandelter und z.T. erweiterter Form in einem Beitrag des Autors: Kafitz, Willi; Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Gießen 2022, Band 70, S. 129 f oder http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-551, S. 17 f.

Einbettungsprinzip

Die bisherigen Zahlen sollten in die Erweiterung eingebettet sein. Die neu definierten Zahlen sind also eine Obermenge, die sich algebraisch genauso verhält, wie die „alten" Zahlen.

Permanenzprinzip

Die Rechenregeln sollen sich nicht wesentlich ändern. Die Erweiterung soll die bisherigen Rechenregeln weitgehend erhalten.

Es war also ein konkreter Handlungsdruck vorhanden, um über die reellen Zahlen hinaus zu denken. Aber andererseits gab es Restriktionen und Denkverbote, die man erst überwinden musste. Dies ist in etwa vergleichbar mit Subtraktionen, die eine negative Lösung haben und die ganzen Zahlen erforderlich machten.

Doch man sollte genau analysieren, was bei der Erweiterung des reellen Zahlenraums passiert.

$x^2 + 1 = 0$, als Polynom 2. Ordnung hat in den reellen Zahlen keine Lösung und das gilt auch für anspruchsvollere Polynome. Die Lösung $x = \pm\sqrt{-1}$ muss außerhalb des reellen Zahlenstrahls liegen. Sie wird seit René Descartes und dann Leonhard Euler per Definition i oder imaginäre Einheit genannt. i ist also nicht nur die Nullstelle des einfachsten Polynoms, sondern die Einheit eines neuen Zahlbereichs, den imaginären Zahlen.[63] Eine komplexe Zahl z=x+iy besteht aus zwei Komponenten, dem Realteil $x \in \mathbb{R}$ und dem Imaginärteil i·y, wobei $y \in \mathbb{R}$ ebenfalls reell ist. Ist y=0, erhält man die reellen Zahlen.

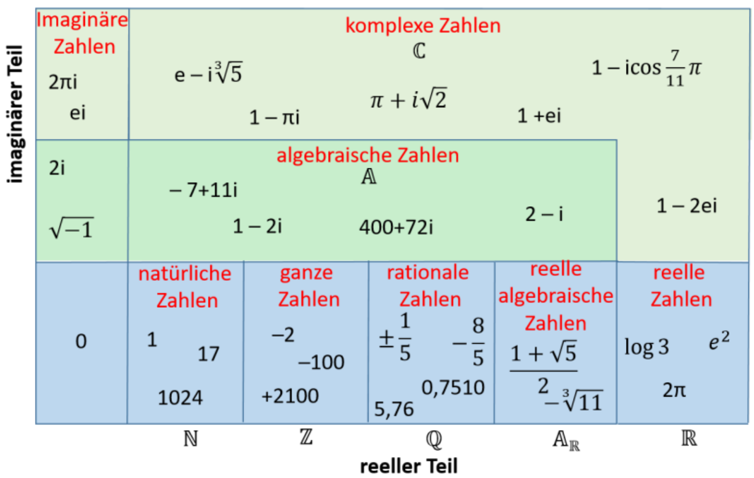



Abb. 14: Beispiele verschiedener Zahlentypen

Auch hier sind die von der Algebra entwickelten Axiome entscheidend, die, ggfs. mit Anpassungen bei den Rechenregeln, im Prinzip unter den Begriff „algebraischer Körper" fallen oder von ihm abgeleitet sind.

[63] In der Elektrotechnik wird der Buchstabe j verwendet. i bzw. i(t) ist die zeitlich abhängige Stromstärke und kann deshalb zu Verwechslungen führen.

Schon alleine das impliziert, dass das Einbettungsprinzip nicht wörtlich zu nehmen ist. Eine imaginäre Zahl b·i mit $b \in \mathbb{R}$ ist definiert als $(b\cdot i)^2 := -b^2$. Die imaginären Zahlen betten die reellen Zahlen also nicht ein, sondern stehen gleichberechtigt daneben. Nur die Null haben sie gemeinsam, denn $i\cdot 0=0$. Die reellen Zahlen enthalten die reell algebraischen und rationalen Zahlen und diese wieder die ganzen Zahlen und schließlich die natürlichen Zahlen. Aber die imaginären Zahlen enthalten nicht die reellen Zahlen; sie haben nur die Null gemeinsam. Erst wenn man beide, reelle und imaginäre Zahlbereiche zu den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ „geschickt" zusammenfasst, also zu einer Zahlenmenge mit zwei Verknüpfungen, genannt Addition (+) und Multiplikation (·), die die Axiome und algebraischen Eigenschaften eines Körpers erfüllen, dann kann man von einer Erweiterung des Zahlenbereichs sprechen, der das Einbettungsprinzip und das Permanenzprinzip einhält.

Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet man mit dem Symbol $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}$ hat noch mehr als $\mathbb{R}$ eine Reihe von Eigenschaften, die zu einem Siegeszug in Mathematik, Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften und darüber hinaus geführt haben. Die Körperaxiome werden vollständig erfüllt. Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass jede Gleichung positiven Grades in $\mathbb{C}$ eine Lösung hat. Das trifft auf $\mathbb{R}$, wie das Beispiel $x^2+1=0$ zeigt, nicht zu. Damit ist $\mathbb{C}$ algebraisch abgeschlossen.

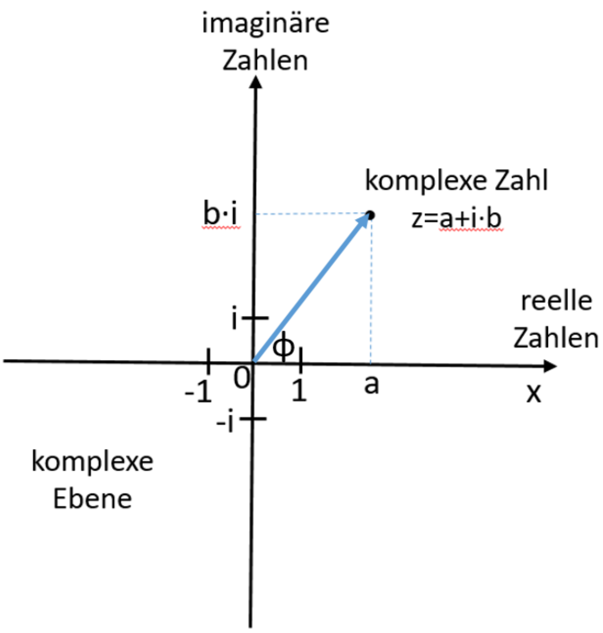



Abb. 15: Kartesische Darstellung einer komplexen Zahl.

Es zeigt sich, dass die „Kombination" von reellen Zahlen und imaginären Zahlen zu $\mathbb{C}$ einen Vektorraum in $\mathbb{R}^2$ bildet (der Ebene, die durch zwei senkrecht stehende Achsen aufgespannt wird). Die Punkte sind also Tupel mit einer reellen Komponente (Realteil) und einer imaginären Komponente (genannt Imaginärteil). Das garantiert, dass $\mathbb{C}$ sowohl $\mathbb{R}$ als auch sozusagen „$\mathbb{I}$" als echte Teilmengen enthält. Geometrisch bzw. vektoriell veranschaulicht, stehen imaginäre Zahlen senkrecht, also orthogonal zu reellen Zahlen. Diese Sichtweise verdanken wir Gauß. Der Vektorraum wird durch alle Linearkombinationen von 1 und i (der Basis) erzeugt.

Die „Kombination“ nennt man die komplexe Ebene oder Gaußsche Zahlenebene.[64] Die komplexen Zahlen entsprechen Punkten in der komplexen Ebene. Die reellen Zahlen sind eine Untermenge und ebenso die imaginären Zahlen, die auf dem imaginären Zahlenstrahl liegen. Beide haben nur die Null gemeinsam, auch wenn man sich diese Tatsache erst bewusstmachen muss. Die reellen Zahlen haben den Imaginärteil 0 und die imaginären den Realteil 0. Die Erweiterung des Zahlenraums durch $\mathbb{C}$ ist also nicht unbedingt vergleichbar mit der Erweiterung von $\mathbb{Q}$ durch $\mathbb{R}$, da $\mathbb{C}$ eben einen zweidimensionalen Vektorraum bildet.

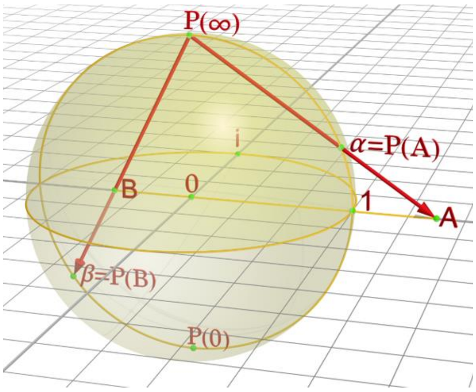


Abb. 16: Stereographische Rückprojektionen der komplexen Zahlen A und B auf die Punkte α und β der Riemannschen Zahlenkugel.

Wie oben angesprochen ist auch besonders der von Euler gefundene Zusammenhang zwischen trigonometrischen Funktionen und komplexen Zahlen bemerkenswert und soll in diesem Kapitel gewürdigt werden. Die Beziehung

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

gilt als die schönste Formel aller Zeiten. Sie resultiert aus der Polarkoordinatendarstellung einer komplexen Zahl (kurz: Polarform oder trigonometrische Form)

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi),$$

die sich in dem zweidimensionalen Vektorraum anbietet. Setzt man r=1 und betrachtet φ als Variable, so erhält man den Einheitskreis, also allen komplexen Zahlen, die auf dem Kreis mit Radius 1 und der Null als Mittelpunkt liegen. Ist

$$z = a + i \cdot b$$

so ist die „Länge“ von z, also der Betrag nach Pythagoras $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = r$. Damit wird eine Metrik im Körper der komplexen Zahlen definiert.

Die Zahlen auf dem Einheitskreis bilden eine Gruppe, was man leicht überprüfen kann.

[64] Eine alternative Darstellung findet sich in der Riemannschen Zahlenkugel (Quelle https://de.wikipedia.org/wiki/Riemannsche_Zahlenkugel#/media/Datei:Riemann_sphere1.svg)

Eine Vorzeichenänderung des Imaginärteils nennt man konjugiert komplexe Zahl $\bar{z} = a - i \cdot b$, in der Physik wird sie gerne $z^*$ geschrieben. Sie entspricht einer Spiegelung an der x-Achse. Die reellen Zahlen werden dabei auf sich selbst abgebildet. Diese konjugiert komplexe Zahl wird sehr oft benötigt. Es soll hier nur kurz auf $z \cdot \bar{z},\ z + \bar{z}\ und\ z - \bar{z}$ eingegangen werden

$$z \cdot \bar{z} = (a + ib) \cdot (a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2$$

also das Quadrat ihres Betrages. Die komplexen Zahlen sind ein Beispiel einer sogenannten $C^*$-Algebra

Abschließend sei noch erwähnt, dass

$z + \bar{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a,$ also 2·Re $z$ ist. Entsprechend ist

$z - \bar{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2b,$ also 2·Im $z$ ist.

Bildung des multiplikativ Inversen und die Division können so einfach gebildet werden:

$$z^{-1} = \frac{1}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z^2|}$$

Sei $y, z \in \mathbb{C}$, dann ist $$\frac{y}{z} = \frac{y}{z}\frac{\bar{z}}{\bar{z}} = \frac{y\bar{z}}{|z^2|}$$

Die Einführung der komplexen Zahlen war nicht nur ein Segen für die Mathematik, sondern es ergeben sich mit ihnen eine Fülle von Anwendungsmöglichkeiten in der Physik und darüber hinaus.

**Quaternionen**

Der Erfolg der komplexen Zahlen war zur Mitte des 19. Jahrhunderts unübersehbar. Vor allem im Bereich der Analysis konnten wunderbare Sätze bewiesen werden. Aufstrebend war zu diesem Zeitpunkt auch die analytische Zahlentheorie. Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857), einer der Pioniere der Analysis und vor allem speziell der komplexen Funktionentheorie, soll pro Woche eine Publikation eingereicht haben.

Es war folgerichtig, dass man nach weiteren Verallgemeinerungen des Zahlbegriffes suchte. Dies war 1840 durch den Franzosen Benjamin Olinde Rodrigues (1795 – 1851) erfolgreich. Der Erfolg wird aber vorwiegend Sir William Rowan Hamilton (1805 – 1865) zugerechnet, der 1843 unabhängig von Rodrigues die Quaternionen entdeckte und ihre Mathematik maßgeblich vorantrieb. Er hatte schon Beiträge zu den komplexen Zahlen geliefert, stellte sie als Zahlenpaare im zweidimensionalen Raum, dem $\mathbb{R}^2$, dar und suchte nun nach einem Äquivalent im $\mathbb{R}^3$. Er war erfolglos, weil er erfolglos sein musste. Heute weiß man, dass eine entsprechende algebraische Struktur nicht existiert. Dagegen kann man den Zahlbegriff im $\mathbb{R}^4$ verallgemeinern – allerdings mit Einschränkungen, weshalb man heute Quaternionen als „Größen“ und nicht als Zahlen bezeichnet. Trotzdem löste die Entdeckung einen regelrechten Hype aus. Das Thema wurde sogar Prüfungsfach an der Universität in Dublin. Sir Hamilton war so stolz, dass er eine Gedenktafel mit den Multiplikationsregeln aufstellen ließ. Im Jahr 1895 wurde sogar ein „Weltbund zur Förderung der Quaternionen“ gegründet.[65]

Ein Quaternion q hat in Anlehnung an komplexe Zahlen die Form

$$q := x_1 + x_2 i + x_3 j + x_4 k \text{ mit den } x_i \in \mathbb{R}.$$

Mit der Basis {1, i, j, k} wird somit ein vierdimensionaler Vektorraum aufgespannt, der isomorph zu $\mathbb{R}^4$ ist, also die gleiche Struktur wie der vierdimensionale Raum hat. Analog zu den komplexen Zahlen nennt man $x_1$ den Realteil und $x_2 i + x_3 j + x_4 k$ den Imaginärteil von q.


Abb. 17: Gedenktafel von Hamilton selbst an der Broom Bridge in Dublin.

Weiterhin sollen folgende Regeln gelten („Hamilton-Regeln“):

$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

$ij = +k,\ jk = +i;\ ki = +j$

$ji = -k,\ kj = -i;\ ik = -j$

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$ erfüllen gemeinsam mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation die Axiome, die sie zu einem algebraischen Körper machen.

Das analog dazu entstehende mathematische Gebilde bei den Quaternionen $\mathbb{H}$, erfüllt jedoch nur mit Einschränkungen die Körperaxiome. Bzgl. der Addition werden die entsprechenden Körperaxiome erfüllt. Ursache der Einschränkungen sind die Gruppeneigenschaften bzgl. der Multiplikation.[66]

Eine einfache Rechnung zeigt, dass das Kommutativgesetz bei der Multiplikation nicht gilt: Seien $q_1$ und $q_2$ zwei Quaternionen obiger Form, so ist

[65] Grafik und Quelle https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion#Geschichte
[66] Bildquelle https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternion#/media/File:Cayley_Q8_quaternion_multiplication_graph.svg

$$q_1 \cdot q_2 \neq q_2 \cdot q_1$$

Für sich genommen bilden $Q_8$: ={1, i, j, k, –1, –i, –j, –k} eine Struktur, in der alle Gesetze einer algebraischen Gruppe gelten, die Quaternionengruppe.

Wie oben bei der nichtkommutativen („nichtabelschen“) Multiplikation von ij≠ji, jk≠kj oder ki≠ik deutlich wird, ist die Quaternionengruppe jedoch nichtabelsch. Es ist neben der Diedergruppe $D_4$, entsprechend den 4 Drehungen und 4 Spiegelungen bei einem Quadrat, die einzige nichtabelsche, 8-elementige Gruppe. Aber beide Gruppen sind nicht isomorph, d.h. es existiert keine bijektive Abbildung, die $D_4$ in $Q_8$ überführen kann oder umgekehrt. Die Tatsache, dass die Quaternionengruppe nichtabelsch bzgl. der Multiplikation ist, verhindert, dass die Quaternionen mit den beiden Verknüpfungen Addition und Multiplikation einen „echten“ Körper bilden.

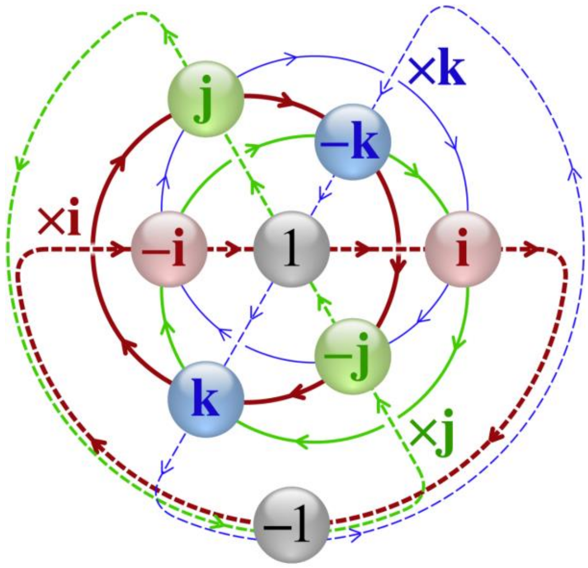



Abb. 18: Verknüpfungen in der Quaternionengruppe

Man nennt {ℍ, +, ·} deshalb einen Schiefkörper.

Quaternionen sind nicht nur als rein mathematische Objekte interessant, sondern haben mittlerweile Bedeutung in einigen Anwendungsbereichen gewonnen. Bei wikipedia[67] finden sich Anwendungsbeispiele aus der Physik und der Mathematik. Im Computerzeitalter ist ein gänzlich neuer Bereich entstanden, dessen mathematische Grundlage bereits Hamilton erkannt hat. So dienen sie, heute versteckt in entsprechend einfach durch Entwickler benutzbaren Bibliotheken, im 3D-Bereich, z.B. zur virtuellen Rotation von beliebigen Objekten am Bildschirm.[68]

---

[67] https://de.wikipedia.org/wiki/Quaternion#Anwendungen
[68] https://en.wikipedia.org/wiki/Quaternions_and_spatial_rotation
Man findet auch eine Reihe von youtube-Videos zu dem Thema, z.B. https://www.youtube.com/watch?v=zjMuIxRvygQ.
Die Gruppe U_1(H) der Quaternionen der Länge 1 ist isomorph zur Gruppe SU_2(C) der unitären komplexen 2x2 Matrizen der Determinante 1, welche wieder isomorph ist zur Gruppe Spin_3, der doppelten Spinüberlagerung der Gruppe SO_3. Das ist der Grund, warum man mit Quaternionen Drehungen im Raum beschreiben kann. Siehe Salzmann, et al. über Compact Projective Planes: https://pnp.mathematik.uni-

Eine besondere Bedeutung hat der Fahrzeugbau. Hier ist auch die Ausrichtung eines vektoriell beschriebenen Körpers im Koordinatensystem in einer DIN-Verordnung (DIN70000) geregelt. Die DIN-Norm ermöglicht eine 3D-Rotation eines Vektors mit Euler-Winkeln nach ZYX-Konvention. Euler-Winkel sind ein Satz von drei Winkeln, mit denen die Orientierung eines festen Körpers im dreidimensionalen euklidischen Raum beschrieben werden kann.[69] Man definiert dabei das Koordinatensystem wie folgt:

- x-Achse verläuft in Längsrichtung (des Fahrzeugs) zu positiven Werten
- y-Achse nach links zu positiven Werten
- z-Achse nach oben zu positiven Werten
- Drehungen beschreibt man mit der rechten Hand-Regel, d.h. der Daumen zeigt in Richtung der Achse und die Finger zeigen in die positive Drehrichtung

Nach ZYX-Konvention werden Drehungen wie folgt definiert:

- Drehung um Z-Achse, auch Gierachse [englisch Yaw genannt] ist bei Linkskurve positiv (mathematisch positive Drehrichtung).
- Drehung um Y-Achse, Nickachse [englisch Pitch], beim Eintauchen der Fahrzeugfront positiv
- Drehung um X-Achse, Rollachse auch „Wanken“, [englisch ebenfalls Roll], beim Eintauchen der Beifahrerseite positiv

Die Rotationsmatrix R setzt sich aus den 3 Matrizen für Z-Rotation, Y-Rotation und X-Rotation zusammen:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & -\sin\psi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dabei steht $\psi =$Gieren, $\theta =$Nicken, $\varphi =$Wanken (von rechts multiplizieren).[70]

In Computerprogrammen benutzt man entsprechende Bibliotheken und gibt der Rotationsmatrix beim Aufruf der Funktion die drei Rotationswinkel als Argument mit.

---

stuttgart.de/lexmath/Stroppel/cpp/ (Privatmitteilung von Prof. Ralf Köhl, Univ. Kiel). Anwendungen sind auch in der Quantenmechanik beim Spindrehimpuls.

[69] Siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Eulersche_Winkel

[70] Grafik und inhaltliche Orientierung https://www.cbcity.de/tutorial-rotationsmatrix-und-quaternion-einfach-erklaert-in-din70000-zyx-konvention

Quaternionen werden zur Abgrenzung von den Körpern der ganzen Zahlen, rationalen Zahlen, reellen Zahlen und komplexen Zahlen, wie bereits betont, „Größen“ genannt und stellen als Schiefkörper eine eingeschränkte Verallgemeinerung des Zahlbegriffs dar. Dabei sind $\mathbb{Z}$ und $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$ enthalten, während $\mathbb{C}$ trotz der Körpereigenschaft eine gewisse Sonderstellung als zweidimensionaler Vektorraum wahrnimmt.

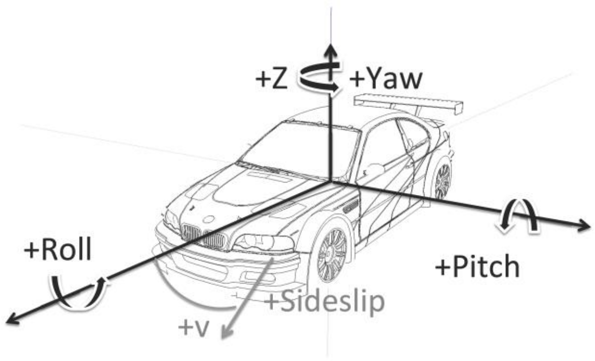



Abb. 19: Rotationsmatrix nach DIN70000 in ZYX-Konvention zur Berechnung mit Quaternionen.

Im Folgenden werden weitere Größen mit entsprechenden algebraischen Strukturen beschrieben. Die Orientierung der Themen erfolgt u.a. nach der deutschen Ausgabe von L. S. Pontrjagin, Verallgemeinerungen der Zahlen (siehe Literaturverzeichnis).

### Restklassenringe modulo p

Sucht man nach weiteren Verallgemeinerungen, so muss man ggfs. weitere Abstriche bei den algebraischen Eigenschaften machen. Man findet sie bei algebraischen Ringen. Wikipedia weist darauf hin, dass die Bezeichnung Ring sich an die wenig benutzte, deutsche Wortbedeutung anlehnt, die man heute noch in Vereinen wie „Weisser Ring“ (Hilfe für Kriminalitätsopfer) oder Begriffen wie „Verbrecherring“, „Tauschring“ oder auch „Ringvorlesung“ vorfindet. Das mathematische Konzept geht auf Dedekind zurück; der Name wurde von David Hilbert vergeben.[71]

Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl, dann werden ganze Zahlen mit gleichem Rest bei Division durch $n$ zu sogenannten Restklassen modulo $n$ zusammengefasst. Zwei ganze Zahlen A und B sind also genau dann in derselben Restklasse modulo $n$, wenn ihre Differenz A–B durch $n$ teilbar ist. A und B heißen dann kongruent. Dies ist eine Äquivalenzrelation, d.h. es gilt

Reflexivität: $A \equiv A \, mod \, n$

Symmetrie: $A \equiv B \, mod \, n \Leftrightarrow B \equiv A \, mod \, n$

Transitivität: $A \equiv B \, mod \, n \, und$

---

71 https://de.wikipedia.org/wiki/Ring_(Algebra)

$$B \equiv C \bmod n \implies A \equiv C \bmod n$$

Die Restklassen bilden zusammen mit der unten definierten Addition und Multiplikation den Restklassenring modulo $n$. Ist $n$ eine Primzahl, so setzt man $n=p$. Es gibt $n$ Repräsentanten $\{0, 1, \ldots, n-1\}$.[72] Das algebraische Konstrukt bezeichnet man mit $\mathbb{Z}/n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ oder kurz $\mathbb{Z}_n$. Es bildet mit der Addition eine Gruppe $(\mathbb{Z}/n,+)$ und mit der Multiplikation eine Halbgruppe $(\mathbb{Z}/n,\cdot)$. Bei der Halbgruppe $(\mathbb{Z}/n,\cdot)$ interessieren insbesondere die invertierbaren Elemente x für die es ein x´ gibt, so dass x·x´=1. Diese bilden eine Gruppe $U(\mathbb{Z}/n,\cdot)$. Man sieht, dass auch $n=0$ Sinn ergibt. Das entspricht allen ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, genauer jede ganze Zahl bildet eine eigene Restklasse. Man kann deshalb unmittelbar sehen, dass $\mathbb{Z}$ ein Ring ist. Zur Körpereigenschaft fehlt das inverse Element, das außerhalb von $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ liegen würde. Vorsicht mit der Bezeichnung $\mathbb{Z}_p$ für einen Restklassenring mit einer Primzahl. Hier besteht Verwechslungsgefahr mit der Menge der ganzen p-adischen Zahlen (s.u.), die ebenfalls $\mathbb{Z}_p$ genannt wird. Deshalb ist die Bezeichnung $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ eindeutig.


Abb. 20: Eine analoge Uhr zeigt Sekunden und Minuten modulo 60 und Stunden modulo 12 an.

Die Restklasse einer Zahl a soll [a] heißen. Die Verknüpfungen werden unabhängig vom Repräsentanten definiert:

$$[a]+[b] := [a+b]$$
$$[a]\cdot[b] := [a\cdot b]$$

Die Verknüpfungen sind wohldefiniert, denn seien $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$ ganze Zahlen mit

$[a_1] = [b_1]$
$[a_2] = [b_2]$, dann gilt nach Definition der Restklassen:

$$[a_1+a_2] = [b_1+b_2]$$
$$[a_1\cdot a_2] = [b_1\cdot b_2]$$

Der Einfachheit halber lässt man die eckigen Klammern weg, wenn der Zusammenhang eindeutig ist. Der Restklassenring $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ besteht also aus den Zahlen/Resten 0, 1, …, $n-1$.

---

[72] Beispiel p=7, Restklasse besteht aus {0, 1, …, 5, 6}, [5]+[6]=[4], da 11:7=1 Rest 4; [5]·[6]=[2], da 30:7=4 Rest 2

Die kleinsten Ringe sind der Nullring $\mathbb{Z}/1\mathbb{Z}$, der nur aus der $\{0\}$ besteht, da alle ganzen Zahlen bei der Division durch 1 nur den Rest 0 haben, d.h. $n \equiv 0 \; mod \; 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Bei der Division einer ganzen Zahl durch 2 können nur die Reste 0 oder 1 entstehen. $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ besteht also aus der Menge {0,1}.

Man betrachte nun das Beispiel n=4. Die Restklasse besteht aus den Repräsentanten {0,1,2,3}. Man sieht, dass 2·2 mod 4 = 0.
2 nennt man einen Nullteiler. Nullteiler besitzen kein multiplikatives Inverses und die Struktur ($\mathbb{Z}_4$, +, ·) kann deshalb kein Körper sein. Analog n=10 bzgl. Multiplikation: 2 und 5 sind Nullteiler. Für beliebiges n ist $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ ein kommutativer Ring mit der Restklasse $n\mathbb{Z}$ als Nullelement und der Restklasse $1+n\mathbb{Z}$ als Eins.

Was ist nun das Besondere, wenn n eine Primzahl p ist?

| • | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 0 | 2 | 1 |

| + | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 |
| 1 | 1 | 2 | 0 |
| 2 | 2 | 0 | 1 |

| • | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 2 | 0 | 2 | 0 | 2 |
| 3 | 0 | 3 | 2 | 1 |

| + | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 2 | 3 |
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 |
| 2 | 2 | 3 | 0 | 1 |
| 3 | 3 | 0 | 1 | 2 |

Abb. 21: Verknüpfungstafeln des Restklassenrings $\mathbb{Z}_4$ bzw. des Restklassen-körpers $\mathbb{Z}_3$ bzgl. Multiplikation und Addition.

Dann ist ($\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, +, ·) sogar ein endlicher Körper, der $\mathbb{F}_p$ genannt wird (im mathematischen Englisch bedeutet „field" einen algebraischen Körper). Er hat dann p–1 Restklassen als Elemente. Inverse bezüglich der Multiplikation lassen sich dann eindeutig mittels des erweiterten euklidischen Algorithmus berechnen.[73] Der euklidische Algorithmus zweier natürlicher Zahlen a und b berechnet bekanntlich den größten gemeinsamen Teiler ggT(a,b). Die Erweiterung bestimmt zusätzlich zwei Zahlen s und t, so dass

$$ggT(a,b) = s \cdot a + t \cdot b$$

Für das Kapitel zu p-adischen Zahlen sind zum besseren Verständnis elementare Definitionen und Sätze über Restklassengruppen bzw. Restklassenringe und insbesondere Aussagen zu Restklassenringen modulo einer Primzahl bzw. Primzahlpotenzen sinnvoll.

So gilt für $0 \leq a \leq p\text{-}1$: $\quad a^{p-1} \equiv 1 \; mod \; p$ („kleiner Fermat")

[73] https://de.wikipedia.org/wiki/Erweiterter_euklidischer_Algorithmus

Eine einfache Folgerung daraus ist: $a^p \equiv a \; mod \; p$

**Topologisch-algebraische Strukturen**

Mit topologischen Aspekten ist der Begriff der Konvergenz stark verbunden. In $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und sogar $\mathbb{H}$ (hier alle allgemein K genannt) ist eine Metrik, d.h. ein Abstand definiert. Damit kann man Konvergenz einführen:
Eine Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots \in K$ (aus den drei genannten (Zahlen)räumen) konvergiert gegen a, wenn der Abstand[74] $d(a_n, a)$ mit wachsenden n gegen Null geht. Man drückt es gerne so aus:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \text{ für alle } a_n \in K$$

Körper oder Schiefkörper, in denen diese Bedingungen erfüllt sind, nennt man topologische Räume.

Wie sieht es nun mit den algebraischen Eigenschaften der Schiefkörper bzgl. ihrer Verknüpfungen aus?

Sei $b_1, b_2, \ldots b_n, \ldots \in K$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$

Bzgl. Addition und Multiplikation gilt dann

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Die Konvergenz für Subtraktion und Division kann man mit den inversen Elementen verdeutlichen, denn

$$\lim_{n\to\infty}(-a_n) = -a \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} a_n^{-1} = a^{-1}$$

Man nennt diese algebraischen Objekte topologische (Schief)körper.[75] Mit der Konvergenz sind die Verknüpfungen stetig.

$\mathbb{R}$ ist eindimensional, $\mathbb{C}$ zweidimensional und $\mathbb{H}$ hat die Dimension 4. Es sind euklidische Räume, in denen ein Abstand definiert ist, über den die Konvergenz nachgewiesen wird. Im Kapitel über p-adische Zahlen wird näher darauf eingegangen.
Unter gewissen Umständen kann sogar eine Punktmenge der Dimension 0 ein topologischer Raum sein. Ein Beispiel ist die Cantor-Menge $\mathbb{C}$. Sie ist zwar als „Diskontinuum“ total unzusammenhängend und nirgends dicht. Aber jeder Punkt ist ein Randpunkt und als solcher ein Häufungspunkt. Mit diesen

---

[74] Hier ist zunächst der klassische euklidisch-archimedische Abstand gemeint.
[75] Diese Bezeichnung wird nicht für die triviale Konvergenz verwendet. Die $a_n$ sollen damit alle unterschiedlich sein und nicht ab einem gewissen $a_n$ gleich sein, d.h. für zwei Zahlen $a_i$ und $a_j$ gilt immer $|a_i-a_j|>0$

eingeschränkten Eigenschaften bezeichnet man auch die nulldimensionale[76] Cantor-Menge und alle zu ihr homöomorphen Räume als Cantor-Raum (s.u.). Dazu gehört auch die Koch-Kurve und andere Fraktale. Hier nutzt man die Tatsache aus, dass wenn der Abstand $a_n-a$ gegen Null strebt, dies äquivalent zur Aussage ist, dass die Differenz $a_n-a$ gegen Null geht. Beim Cantor-Staub,

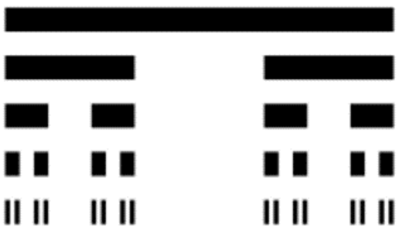


Abb. 22: Cantor-Staub oder Cantor-Menge nach 5 Iterationen

bei dem man in der Regel das Intervall [0,1] betrachtet und iterativ jeweils das mittlere Drittel eines Streckenstückes eliminiert, ist es das Gleiche. Aber für analoge Objekte, z.B. Fraktale in mehreren Dimensionen und beliebiger Orientierung, ist die Unterscheidung bedeutsam. Mit geeigneten Definitionen kann man die Konvergenz auf weitere topologische Schiefkörper übertragen, bei denen jedoch immer Abstriche bei den symmetrischen Eigenschaften gemacht werden müssen.

**p-adische Zahlen**

p-adische Zahlen wurden erstmals 1897 von Kurt Hensel (1861 – 1941) beschrieben. Er hat wesentliche Beiträge zu der Theorie und zu weiteren (zahlentheoretischen) Themen geliefert. Er stammt aus einer Familie, die zahlreiche Künstler und Wissenschaftler hervorgebracht hat. Hensel hat bei Kronecker promoviert und sich ebenfalls bei ihm habilitiert. Nach einer außerordentlichen Professur in Berlin wurde er 1901 auf einen Lehrstuhl nach Marburg berufen. Trotz weiterer Angebote und trotz zwangsweisem Ruhestand durch seine jüdische Herkunft blieb er dort bis zu seinem Tod.

Zahlen werden in der Regel in einem Stellenwertsystem zur Basis 10 dargestellt, also dezimal. So ist z.B.

$$30215=3\cdot10^4+0\cdot10^3+2\cdot10^2+1\cdot10^1+5\cdot10^0.$$

In der Informatik ist die Binärdarstellung wichtig, also ein Stellenwertsystem zur Basis b=2. So ist

$45_{10}$ (dezimal) entspricht $1\cdot2^5+0\cdot2^4+1\cdot2^3+1\cdot2^2+0\cdot2^1+1\cdot2^0 = 101101_2$ (binär)

Das Gleiche macht man mit rationalen Zahlen. So ist

$30{,}215=3\cdot10^1+0\cdot10^0+2\cdot10^{-1}+1\cdot10^{-2}+5\cdot10^{-3}$.

---

[76] Gemeint ist nicht die fraktale Hausdorffdimension, $D=\frac{\ln 2}{\ln 3}\approx 0{,}63$, sondern die topologische Dimension einer unzusammenhängenden Punktmenge.

Man nennt es allgemein eine b-adische Entwicklung zu beliebigen Basen.[77]

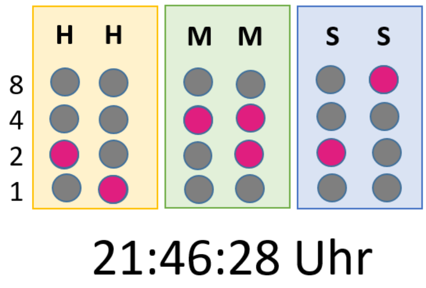



Abb. 23: sexagesimale BCD-Codierung einer binären Uhr

Dieses Prinzip lässt sich auf jede Basis übertragen.[78]

Im Rahmen der Restklassenarithmetik entsteht eine Ringstruktur. Ein solcher Ring ist genau dann nullteilerfrei[79], wenn die Basis („Grundzahl") eine Primzahl p ist.

In diesem Kapitel sollen durch die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung deshalb ohne Einschränkung der Allgemeinheit nur Primzahlen als Basis betrachtet werden, also p∈ℙ:={2,3,5,7,11,13,17,…} $= \{p_1, p_2, p_3, \dots\}$.

Jede ganze Zahl m lässt sich wie folgt in Primfaktoren schreiben,

$$m = \pm \prod_{p\ Primzahl} p^{\vartheta_p(m)}$$

$\vartheta_p(m)$ ist hier die größte natürliche Zahl, für die $p^{\vartheta_p(m)}$ ein Teiler von m ist oder 0, wenn das entsprechende p kein Teiler von m ist. Diese Bezeichnung wurde gewählt, um deutlich zu machen, dass $\vartheta_p(m)$ von p und m abhängig ist.

Z.B. $\vartheta_2(500) = \vartheta_2(2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = 2;\ \vartheta_3(500) = 0;\ \vartheta_5(500) = 3;\ \vartheta_7(500) = 0;$

Ist p eine beliebige, aber fest gewählte Primzahl, so kann jede natürliche Zahl m p-adisch entwickelt werden mit natürlichen Zahlen $a_i$.

$$\mathrm{m} = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot p^{\vartheta_p(m)}$$

Beispiele 2-adische, 5-adische, 7-adische Entwicklung von dezimal 500:

$500_{10}=1{\cdot}2^8+1{\cdot}2^7+1{\cdot}2^6+1{\cdot}2^5+1{\cdot}2^4+0{\cdot}2^3+1{\cdot}2^2+0{\cdot}2^1+0{\cdot}2^0=111110100_2$ (Basis 2)

$500_{10}=2{\cdot}3^5+0{\cdot}3^4+0{\cdot}3^3+1{\cdot}3^2+1{\cdot}3^1+2{\cdot}3^0=200112_3$ (Basis 3)

---

[77] Mittels Leuchtdioden kann eine binäre Uhr binäre Werte darstellen. In der Abbildung ist jede Spalte von Leuchtdioden eine BCD-Codierung (Binary Coded Decimal) der traditionell sexagesimalen (Basis 60) Zeitdarstellung.

[78] In Computerprogrammen muss über die Programmiersprache das Format einer rationalen Zahl gewählt werden. Damit wird sozusagen die Position des Kommas festgelegt. So werden mit 8 Bit EBCDIC-Code z.B. binäre Festkommazahlen codiert, bei größeren Zahlen werden entsprechend mehr Byte verwendet. Der EBCDIC ist aus dem älteren Binary Coded Decimal Interchange Code entstanden, der wiederum auf dem 4-Bit-Code BCD basiert (siehe binäre Uhr). Eine andere Codierung ist die Gleitkomma-Codierung (floating Point). Sie folgt in der Regel dem IEEE-Format 754 (Single Precision Format). Der 7-Bit ASCII-Zeichencode gilt als veraltet und wurde durch UTF-8 (8 Bit) ersetzt.

[79] Ein Nullteiler eines Ringes R ist ein Element a, für das es ein vom Nullelement 0 verschiedenes Element b gibt, sodass a·b=0. In einem Restklassenring mod 6 sind 2 und 3 Nullteiler da 2·3=6=0 mod 6.

$500_{10}=4\cdot5^3+0\cdot5^2+0\cdot5^1+0\cdot5^0=4000_5$ (Basis 5)
$500_{10}=1\cdot7^3+3\cdot7^2+1\cdot7^1+3\cdot7^0=1313_7$ (Basis 7); usw.

Diese bekannte Darstellung einer natürlichen Zahl m zur Basis p lässt sich problemlos auf ganze Zahlen übertragen.

$$m = \pm\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^{\vartheta_p(m)} \ , a_i \in \{0,1,\ldots \mathrm{p}-1\}$$

heißt ganze p-adische Zahl

Dass man i formal bis unendlich laufen lässt, ist unerheblich. Die $a_i$ und die Potenz von p ist beschränkt, aber kann beliebig groß werden.
Die entsprechende Menge heißt Menge der ganzen p-adischen Zahlen:

$$\mathbb{Z}_p \coloneqq \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i p^{\vartheta_p(m)} \ , a_i \in \{0,1,\ldots \mathrm{p}-1\}\}$$

Die ganzen p-adischen Zahlen wurden damit über Potenzreihen definiert.

Es ist aber auch eine Betrachtung über Restklassen möglich. Es lässt sich leicht über vollständige Induktion beweisen:

$$a \equiv a_0 + a_1 p + \cdots + a_{n-1} p^{n-1} mod\ p^n$$

$$a_i \in \{0,1,\ldots \mathrm{p}-1\}$$[80]

Beispiel: $29 \equiv 2\ mod\ 3 \equiv 2 + 0 \cdot 3\ mod\ 3^2 \equiv 2 + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 3^2\ mod\ 3^3$

Diese doppelte Betrachtung der p-adischen Zahlen aus analytischer Sichtweise über Potenzreihen und aus algebraischer Sicht über Restklassenringe zieht sich durch viele Überlegungen über p-adische Zahlen.

Der p-adische Betrag:

Der neue p-adische Betrag von $m = \pm\frac{a}{b}p^n$ wird dann definiert als:

$|m|_p{:}= p^{-n} = p^{-\vartheta_p(m)}$ und $|0|_p \coloneqq 0$ mit $n = \vartheta_p(m)$, um deutlich zu machen, dass $n$ sowohl von p als auch von m abhängig ist. Diese Schreibweise wird weiterhin angewendet.

Außerdem sei $m_1=a\cdot p^k$ und $m_2=b\cdot p^l$ mit k+l=n dann ist

$|m_1\cdot m_2|_p=|a\cdot p^k\cdot b\cdot p^l|_p=|a\cdot p^k|_p\cdot|b\cdot p^l|_p=|m_1|_p\cdot|m_2|_p=p^{-k}\cdot p^{-l}=p^{-n}$

---

80 Nur so viel sei dazu erwähnt: Das ist die Ausgangsüberlegung, um Folgen von Restklassen betrachten zu können, die zwar in verschiedenen Ringen liegen, aber miteinander sukzessive durch Homomorphismen in einem „projektiven System“ korreliert sind. $\mathbb{Z}_p$ ist dann der „projektive Limes“ der Folgen von Restklassen, abhängig von geeignet gewählten Homomorphismen.

Beispiele ($500_{10}$):

$|111110100|_2=2^{-2}=1/4$; $|200112|_3=0$; $|4000|_5=5^{-3}=1/125$; $|1313|_7=0$, usw.

Der negative Exponent von p, also $-\vartheta_p(m)$, wird deshalb so „kompliziert“ bezeichnet, weil er abhängig vom gerade betrachteten Primfaktor p von m und der Zahl m selbst ist. Er sagt, genau wie bei den Potenzreihen, wie oft dieses p in der Primfaktorzerlegung von m enthalten ist. Der p-adische Betrag einer Zahl m wird also umso kleiner je häufiger sie sich durch p teilen lässt.[81]

Bevor wir zum p-adischen Abstand $|m_1-m_2|_p$ und seiner Einordnung als neue Metrik kommen, hier zunächst ein Beispiel mit $m_2=0$ und der Basis 3 bei den Zahlen $m_1=1, 2, \ldots, 29, 30$.
Es geht also um den 3-adischen Abstand zur 0, um Verwechslungen zum archimedischen Betrag zu vermeiden, genannt $d_3(m_1,0)$. Das entspricht dem Betrag von $m_1$ zur Basis 3. Man bestimmt, wie oft der Primteiler 3 in der Primfaktorzerlegung bei den ersten 30 Zahlen auftaucht.

Z.B. $d_3(4,0)=1$, da $3^{-0}=1$ (3 ist kein Teiler von 4), $d_3(6,0)=d_3(2\cdot3,0)=3^{-1}=1/3$, $d_3(9,0)=d_3(3\cdot3,0)=3^{-2}=1/9$, $d_3(18,0)=d_3(2\cdot3\cdot3,0)=3^{-2}=1/9$, usw.

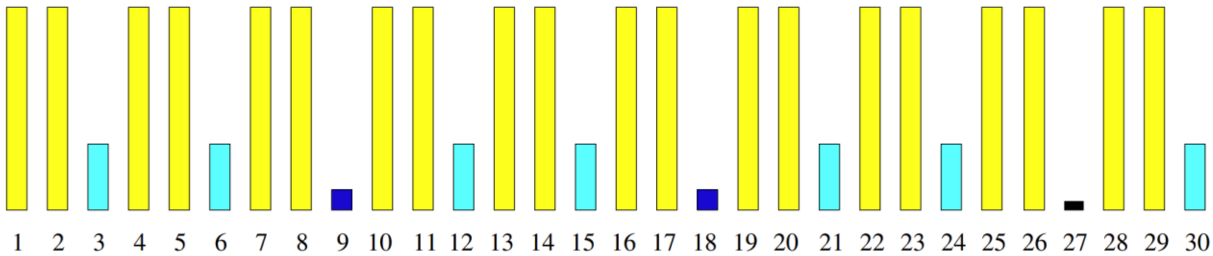



Abb. 24: 3-adischer Abstand zur 0 für alle Zahlen m=1, … , 30.[82]
(Legende: gelb=1, türkis=1/3, blau=1/9, schwarz=1/27)

Die Grafik soll eine Einschätzung über die Größenverhältnisse in der p-adischen Welt vermitteln. Dies wird nun über den Abstandsbegriff fortgesetzt. Dazu soll auch zur Wiederholung der Vergleich mit dem klassischen, archimedischen Abstand dienen.

Archimedischer Abstand:

Wie bereits dargelegt, erweitert man $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$, in dem man über sogenannte rationale Cauchy-Folgen argumentiert. Also konvergierender Folgen rationaler Zahlen gemäß der bekannten (archimedischen) Abstandsdefinition, in der die Abstände immer kleiner werden. Der Konvergenzpunkt kann rational, aber auch irrational sein. Dies führt erst zur Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu den irrationalen Zahlen

[81] Man hätte auch $p^{-\infty}:=0$ setzen können und kommt ohne Fallunterscheidung aus.
[82] Bildquelle: https://www.uni-frankfurt.de/50581176/werner.pdf, auch die Argumentation folgt in Teilen dem Artikel von Annette Werner: Ein Ausflug in die p-adische Welt.

und damit zu $\mathbb{R}$. Es sind im Prinzip die Überlegungen, die Richard Dedekind in seinen Dedekind´schen Schnitten skizziert hat. Man beachte, es wird hier die „normale“, euklidisch-archimedische Metrik, also der klassische Abstand bzw. Betrag, angewendet. Er hat auch übrigens sein Äquivalent in $\mathbb{C}$ und auch im Schiefkörper der Quaternionen $\mathbb{H}$ als Länge des Vektors x gemessen vom Nullpunkt.
Für eine komplexe Zahl $z = x_1 + ix_2$ ist $|z| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$,
für ein Quaternion $q = x_1 + ix_2 + jx_3 + kx_4$ ist $|q| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$
Es gilt unabhängig von den Körpern $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$, bzw. dem Schiefkörper $\mathbb{H}$, dass

$|x \cdot y| = |x| \cdot |y| = |y| \cdot |x|$, da die Beträge reell sind.

Es ist also eine Erweiterung von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ und weiter zu $\mathbb{C}$ unter Verwendung der klassischen Metrik. Sie lässt sich sogar auf $\mathbb{H}$ übertragen.

Man kann neben dem analytischen Ansatz einen algebraischen Ansatz wählen und dabei eine gänzlich andere Metrik, den p-adischen Absolutbetrag, nutzen und darüber zu einem neuen Abstandsbegriff $d_p(m,n)$ kommen:

Definition p-adischer Abstand:

Seien m, n (oben noch $m_1$ und $m_2$ genannt) zwei ganze Zahlen und $p \in \mathbb{P}$ eine beliebige, aber feste Primzahl, so gelte $d_p(m,n) = 0$ wenn $m=n$ und bei $m \neq n$

$$d_p(m,n) = \frac{1}{p^{\vartheta_p(m-n)}}$$

Dieser Abstand erfüllt die drei wesentlichen Forderungen an eine Metrik:

1) Ein Abstand muss immer ≥ 0 sein. Negative Abstände machen keinen Sinn.
2) Es ist egal von welcher Seite man misst, d.h. $d_p(m,n) = d_p(n,m)$
3) Es gilt die Dreiecksungleichung $d_p(l,n) \leq d_p(l,m) + d_p(m,n)$ für drei Punkte $l, m\ und\ n.$ Da die p-adischen Zahlen mit dieser Metrik einem total unzusammenhängenden topologischen Raum bilden, ist das gewohnte, streckenorientierte Bild der archimedischen Dreiecksungleichung nicht dafür zutreffend (s.u.).

Beispiel: $d_2(262,256) = d_2(2 \cdot 131, 2^8) = \frac{1}{2^{\vartheta_2(262-256)}} = \frac{1}{2^{\vartheta_2(6)}} = \frac{1}{2^1} = \frac{1}{2}$;

Wenn $(m-n)$ nicht durch p teilbar ist, so ist $\vartheta_p(m-n) = 0, also\ d_p(m,n) = 1$.

Über negative Potenzen der Basis p, also über Laurent-Polynome, lassen sich auch rationale Zahlen der Form $\frac{m}{n}, m, n \in \mathbb{N}$, p-adisch entwickeln.

Man definiert außerdem $\vartheta_p(m/n) := \vartheta_p(m) - \vartheta_p(n)$.
Z.B. $\vartheta_3(1/6) = \vartheta_3(1) - \vartheta_3(2 \cdot 3) = 0 - 1 = -1$

$$d_3\left(\frac{1}{6},0\right)=\frac{1}{3^{\vartheta_3(\frac{1}{6})-\vartheta_3(0)}}=\frac{1}{3^{-1}}=3$$

Analog zu den ganzen p-adischen Zahlen kann man $\frac{m}{n}$ in eine Potenzreihe (genauer Laurent-Polynom oder Laurent-Reihe, d.h. auch mit negativen Exponenten) entwickeln. Die Koeffizienten $a_i$ liegen natürlich ebenfalls alle in der Restklasse von p und damit $p^n$ für alle k=1,…,n (nach dem eingangs erwähnten Satz).
Ab $\mathrm{i}=-1$ bis $-\mathrm{k}$ stehen die „Nachkommastellen“.

$$\frac{m}{n}=\sum_{i=-k}^{\infty} a_i\, p^i, a_i \in \{0,1,\ldots \mathrm{p}-1\}$$

heißt dann p-adische Zahl

$$\mathbb{Q}_p \coloneqq \{\sum_{i=-k}^{\infty} a_i\, p^i, a_i \in \{0,1,\ldots \mathrm{p}-1\}\}$$

heißt Menge der p-adischen Zahlen

Dahinter steckt die Erkenntnis, dass die ganzen Zahlen als b-bzw. p-adische Polynome aufgefasst werden können und die rationalen Zahlen als Laurent-Polynome.[83]

Für jede Primzahl p bilden die p-adischen Zahlen einen p-spezifischen Erweiterungskörper $\mathbb{Q}_\mathrm{p}$ des Körpers $\mathbb{Q}$. Außerdem ist $\mathbb{Q}_\mathrm{p}$ der sogenannte Quotientenkörper des Ringes $\mathbb{Z}_p$.

Über die Restklassenarithmetik kann man Addition, Subtraktion, Multiplikation und mit entsprechenden Einschränkungen die Division über die abschnittsweise Berechnung der Folgenglieder definieren. So ist

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}+(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq (x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\cdot(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \coloneqq (x_n\cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

Der p-adische Abstand („p-Abstand“) zweier rationalen Zahlen x und y lässt sich übrigens auch über die algebraische Sicht über Restklassenschreibweise verdeutlichen:

$$d_p(x,y)\le p^{-\vartheta_p(x-y)} \quad \Leftrightarrow \quad x\equiv y\; mod\; p^{\vartheta_p(x-y)}$$

Es existiert somit durch den p-adischen Betrag eine eindeutige Abstandsregelung und als metrischer Raum ist $\mathbb{Q}_\mathrm{p}$ genau wie $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ vollständig. Mit Hilfe von Cauchy-Reihen bzgl. der p-adischen Definition des

---

[83] Nach Pierre Alphonse Laurent, (1813 – 1854). Die Laurent-Polynome bilden einen Ring, der isomorph zum Gruppenring von $\mathbb{Z}$ über $\mathbb{R}$ ist.

Abstands kann man mit den Reihen rechnen und p-Konvergenz und p-Stetigkeit nachweisen.[84] Der p-Abstand vervollständigt den Ring $\mathbb{Z}$ zu $\mathbb{Z}_p$. Die zentrale Aussage ist jedoch:

**$\mathbb{Q}$ kann mit Hilfe des archimedischen Betrags zu $\mathbb{R}$ vervollständigt werden. $\mathbb{Q}$ kann aber auch mit Hilfe des p-adischen Betrags zu $\mathbb{Q}_p$ vervollständigt werden.**

Mit der p-adischen Metrik kann man ganz analog konvergierende Folgen und Reihen mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}_p$ behandeln – allerdings mit einem anderen Konvergenzbegriff. Entwickelt man eine Zahl p-adisch in eine Reihe mit Koeffizienten $x_n$ der Potenzen von p aus {0,1,…,p-1}, so konvergiert sie nur dann, wenn nur endlich viele der $x_n$ ungleich Null sind. Es wird dadurch sogar punktuell einfacher, da eine Reihe mit $x_n \in \mathbb{Q}_p$ der Form $\sum_{n\geq 1} x_n$ genau dann in $\mathbb{Q}_p$ konvergiert, wenn die Folge der $x_n$ eine Nullfolge ist (Null ist Konvergenzpunkt). Es gilt nämlich nicht nur die euklidisch-archimedische Dreiecksungleichung (s.o), sondern die deutlich stärkere nicht-archimedische Form (manchmal ultrametrisch genannt):

Für drei Zahlen k, m, n ∈ $\mathbb{Q}_p$ gilt:[85]

$$d_p(k,n) \leq \max\{d_p(k,m), d_p(m,n)\}$$

Man kann in diesem Körper mit p-konvergenten Potenzreihen eine Analysis mit Differential- und Integralrechnung etc. entwickeln, teilweise im Umfang vergleichbar mit $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$.[86]
Man muss allerdings bei solchen Vergleichen immer berücksichtigen, dass die Körper der reellen und komplexen Zahlen topologisch zusammenhängend sind. Das ist bei den p-adischen Zahlen in extremer Weise nicht der Fall. Sie sind topologisch total unzusammenhängend, ein „Diskontinuum“. Das macht ihre Geometrie in hohem Maß unanschaulich. Dabei muss man sich im Vorstellungsvermögen vollkommen von den Geometrien in $\mathbb{C}$ oder $\mathbb{R}$ lösen. So ist z.B. jeder Punkt in einer Kreisscheibe in $\mathbb{Q}_p$ auch zugleich der Mittelpunkt. Jedes Dreieck ist gleichschenklig.

---

[84] Vergleiche Torsten Wedhorn, Über einige Aspekte der Arbeit von Peter Scholze Aus der Zeitschrift Mitteilungen der Deutschen Mathematiker-Vereinigung https://doi.org/10.1515/dmvm-2018-0026 oder https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/dmvm-2018-0026/html
[85] Zum Beweis siehe den Beitrag von Annette Werner: Ein Ausflug in die p-adische Welt, S. 5. Der Artikel lieferte eine wichtige Orientierungshilfe für dieses Kapitel.
[86] Weiterführende Literatur: https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/p-adische-zahl/9392, https://de.wikipedia.org/wiki/P-adische_Zahl, Pontrjagin, ebenda, S. 127f

Oben wurde $\mathbb{Z}_p$, die Menge der ganzen p-adischen Zahlen, definiert. Es zeigt sich, dass $\mathbb{Z}_p$ homöomorph zur Cantor-Menge $\mathbb{C}$ ist, d.h. es existiert eine bijektive, stetige Abbildung zwischen den topologischen Räumen $\mathbb{Z}_p$ und der Cantor-Menge $\mathbb{C}$. D.h. auch, dass $\mathbb{Z}_p$ überabzählbar ist.[87] Damit enthält $\mathbb{Z}_p$ nicht nur irrationale und nicht-algebraische, sondern auch transzendente Zahlen. $\mathbb{Q}_\text{p}$ ist bzgl. der p-adischen Metrik metrisch ein vollständiger Raum, obwohl er nicht angeordnet werden kann. Das gilt aber auch für den komplexen Zahlenkörper $\mathbb{C}$. Die Cantor-Menge $\mathbb{C}$ hat eine 3-adische Darstellung, es kommen nur die Ziffern 0 und 2 vor.[88] Gleichbedeutend ist die ternäre Darstellung, also die Menge aller Zahlen im Intervall [0, 1], die eine Darstellung als Kommazahlen zur Basis 3 besitzen. Also analog zum dezimalen Stellenwertsystem mit den Ziffern 0, 1, 2, 3, … , 9 bietet sich bei der Cantor-Menge das ternäre Stellenwertsystem an, in dem nur die Ziffern 0, 1, 2 vorkommen. Bei der Cantor-Menge $\mathbb{C}$ benötigt man durch das Konstruktionsprinzip der Menge nur 0 und 2.

Wir haben die klassische, archimedische Metrik und die p-adische Metrik kennengelernt und beide gegenübergestellt. Im ersten Fall vervollständigt man damit $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$; im zweiten Fall wird $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{Q}_\text{p}$ erweitert. Die Frage ist, ob es weitere Metriken mit entsprechenden Eigenschaften geben kann. Die Antwort gibt ein bereits 1916 von Alexander Ostrowski (1893 – 1986) bewiesener Satz. Danach ist jeder (nichttriviale) Absolutbetrag entweder zur archimedischen Betragsfunktion oder zum p-adischen Betrag äquivalent. Eine weitere Metrik kann es also nicht geben.

Ist das nur eine exotische Spielerei? Keineswegs!
Im Jahr 2018 erhielt der junge deutsche Mathematiker Peter Scholze die Fields-Medaille, vergleichbar dem Nobelpreis für Mathematik. Scholze arbeitet an der Schnittstelle von Zahlentheorie und algebraischer Geometrie an der Universität Bonn. Diese Disziplin hat sich ursprünglich mit Lösungen von polynomialen Gleichungen in Bereich der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ beschäftigt, auch als diophantische Gleichungen bezeichnet.[89] In manchen Fällen kann aus der Lösbarkeit diophantischer Gleichungen modulo aller Primzahlen auf die Lösbarkeit der ursprünglichen Gleichung geschlossen werden.[90] Man bezeichnet das heute als Lokal-Global-Prinzip. D.h. die Lösbarkeit in globalen Körpern, wie $\mathbb{Q}$, wird aus der Lösbarkeit in deren Vervollständigungen (den

---

[87] Der Beweis gelingt über das 2. Cantorsche Diagonalargument, mit der Georg Cantor auch die Nichtabzählbarkeit der reellen Zahlen bewiesen hat.

[88] $C = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{3^k} \mid (a_k)_{k\geq 1} \ ist\ Folge\ in\ \{0, 2\} \right\}$

Z.B. $\frac{2}{3} = (0{,}666 \dots)_{10} = (0{,}2)_3$

[89] Siehe auch SdW, 10.22, S. 70f

[90] Siehe https://en.wikipedia.org/wiki/Hasse-Minkowski_theorem

lokalen Körpern, wie $\mathbb{Q}_p$) gefolgert. Dies kann man als Geburtsstunde der Bedeutung der p-adischen Zahlen für die Zahlentheorie bezeichnen. Wenn eine Funktion eine quadratische Form ist, also ein Polynom mit ausschließlich Termen zweiten Grades, mit Koeffizienten in einem Zahlkörper (zum Beispiel dem Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$) ist, dann folgt aus der Existenz von nichttrivialen Nullstellen in $\mathbb{R}$ und in allen p-adischen Vervollständigungen (den $\mathbb{Q}_p$ für alle p) bereits die Existenz einer nichttrivialen Nullstelle im Zahlkörper. Dies wurde in einem Satz von Hermann Minkowski (1864 – 1909) und seiner Verallgemeinerung durch Helmut Hasse (1898 – 1979) bewiesen.
Die p-adischen Zahlen bieten die Möglichkeit, eine enge Verbindung zwischen ihrer Analysis und der Zahlentheorie über das Rechnen in Restklassen modulo Primzahlpotenzen zu schaffen.
Scholze hat in diesem mathematischen Bereich eine ganze Reihe bahnbrechender Ergebnisse erzielt.

**Fazit**

Im vorliegenden Beitrag wurde die Entwicklung des Zahlbegriffs unter historischen und ebenso unter mathematischen Gesichtspunkten betrachtet. Die algebraischen Körper der reellen und komplexen Zahlen und ihre Beziehungen bei Veränderlichen (Funktionentheorie) haben dabei die Mathematik und viele Anwendungen dominiert. Die Quaternionen spielen nur eine deutlich untergeordnete Rolle, weil die Multiplikation nicht kommutativ ist. Sie bilden einen Schiefkörper, genauer gesagt einen topologischen Schiefkörper, der bzgl. Konvergenz und Stetigkeit jedoch durchaus die gewünschten Eigenschaften für Zahlenräume hat. Auch weitere algebraische Konstrukte mit interessanten Eigenschaften wurden entdeckt. p-adische Mathematik eröffnet neue Möglichkeiten und hat sich zu einem riesigen Forschungsthema entwickelt.

Es stellt sich die berechtigte Frage, ob die historische Entwicklung des Zahlbegriffs zwangsläufig war. Oder ob es seitens der Mathematik weitere Körper und Schiefkörper mit diesen universellen Eigenschaften gibt, die die Stelle der reellen oder komplexen Zahlen oder bedingt der Quaternionen in der kulturhistorischen Entwicklung hätten einnehmen können.[91]

Provokativ gefragt: Würden wir vielleicht bei einer anderen Entwicklung heute mit einem „p-adisch kalibrierten“ Maßstab messen?

Die Antwort wurde im Jahr 1931 von Lew Semjonowitsch Pontrjagin (1908 – 1988) gegeben, der folgenden Satz bewiesen hat:

---

[91] Eigene Abbildung

*Jeder lokalkompakte, zusammenhängende topologische Schiefkörper ist entweder der Körper der reellen Zahlen oder der Körper der komplexen Zahlen oder der Schiefkörper der Quaternionen.*[92]

Die Voraussetzung „lokalkompakt und zusammenhängend" schließt p-adische Zahlen aus und es kann nach Ostrowski keine weiteren Metriken geben. Damit wird auch mathematisch deutlich, dass die historische Entwicklung des Zahlbegriffs über mehrere Jahrtausende menschlicher Kulturgeschichte, wie im vorliegenden Beitrag plakativ dargestellt, eine zwangsläufige Entwicklung war.

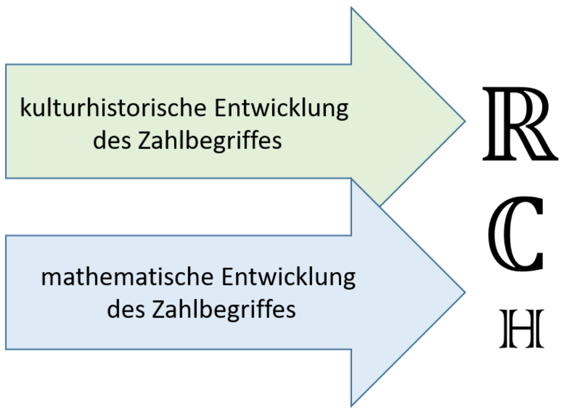



Abb. 25: Die kulturhistorische und die mathematische Entwicklung des Zahlbegriffs liefen synchron und zwangsläufig.

Zu dieser historischen und mathematischen Entwicklung gab es keine Alternative. Das bedeutet aber nicht, dass ein anderer Ansatz in der arithmetischen Geometrie, etwa ein Wechsel zur p-adischen Sichtweise, nicht in manchen Fällen mathematisch zielführender sein kann. Sich allgemein einem neuen Zusammenhang zwischen Zahlen und Geometrie zu widmen, kann zu neuen Erkenntnissen führen.[93]

Die Metrik eines Zollstockes wird sich aber dadurch nicht ändern.

## Literaturhinweise

Alsina, Claudi; Der Satz des Pythagoras, deutsch bei Librero RBA

De Padova, Thomas; Alles wird Zahl, Hanser, München, 2. Auflage 2021

Glosauer, Tobias; Elementare Gruppentheorie, Springer Spektrum, Wiesbaden, 2016

Havil, Julian; GAMMA, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2007, Softcover 2013

Ifrah, Georges; Universalgeschichte der Zahlen, Campus, Frankfurt / New York, dt. Ausgabe 1991

---

[92] Zitiert nach Pontrjagin, L. S.; Verallgemeinerungen der Zahlen, Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt am Main, 1995, S. 127

[93] „Zahlen und Geometrie" war der Titel der Antrittsvorlesung von Peter Scholze am 9. Juni 2017 (siehe https://www.youtube.com/watch?v=NdgQQfQLtWw).

Lüneburg, Heinz; Gruppen, Ringe, Körper, R. Oldenburg Verlag, München Wien, 1999

Kowalsky, Hans-Joachim; Lineare Algebra, Walter de Gruyter, Berlin New York, 1972

Meschkowski, Herbert; Mathematisches Begriffswörterbuch, B-I Hochschultaschenbücher, Band 99, Mannheim, 1971

Pontrjagin, L. S.; Verallgemeinerungen der Zahlen, Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt am Main, 1995

Rovelli, Carlo; Es gibt Orte auf der Welt, an denen Regeln weniger wichtig sind als Freundlichkeit, Essays, Rowohlt Verlag Hamburg, Mai 2022

Taschner, Rudolf; Die Zahl die aus der Kälte kam, Goldmann, München, 2015

Toenniessen, Fridtjof; Das Geheimnis der transzendenten Zahlen, Spektrum, Heidelberg, 2010

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Wußing, Hans; 6000 Jahre Mathematik, Band 2, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

**Abbildungsnachweise:**

Abb. 1: Heilige Quadrat- und Dreieckszahlen (eigene Grafik)

Abb. 2: Wechselwirkungen zwischen mathematischer Theorie und intuitiven Vorstellungen (nach https://www.kai- friederike.de /materialien/hese2017th_2/Zahle_fallen_nicht_vom_Himmel.pdf

Abb. 3: Negative Zahlen im Alltag – am Beispiel Thermometer und Fahrstuhl (Bildquelle https://www.matheretter.de/wiki/negative-zahlen-alltag)

Abb. 4: Der Zahlenstrahl bildete die logische Grundlage für die negativen Zahlen (eigene Grafik)

Abb. 5: Das Horus-Auge

Abb. 6: Stammbrüche der Bruchstücke des Horus-Auges (beide Grafiken aus https://de.wikipedia.org/wiki/Horusauge

Abb. 7: Das Hohlmaß Heqat, also der ägyptische Scheffel (https://de.wikipedia.org/wiki/Heqat)

Abb. 8: Römische Wachstafel, Griffel (Quelle der Abbildung: der-roemer-shop.de/)

Abb. 9: Die römischen Bruchzahlen (Nach G. Ifrah, Universalgeschichte der Zahlen)

**Personenregister**

## Stichwortregister

## Anhang

Abb. 26: Künstlerische Darstellung des Horus-Auges,
moderner Druck auf Papyrus mit Originalfarben (eigene Fotografie)

## Danksagung


**Herr Prof. Dr. Ralf Köhl** war wieder ein Mentor der kleinen, aber feinen Impulse. Sie haben dem Text geholfen, aber fast noch mehr haben sie dem Autor geholfen, größere Zusammenhänge zu verstehen. Ich bin wie immer Prof. Köhl zu großem Dank verpflichtet.

**Herr Dr. Michael Serafin** war und ist für mich der wichtigste Kontakt zur „Oberhessischen naturwissenschaftlichen Gesellschaft“. Gerade in der Pandemie, wo weitgehend Vorträge und Exkursionen fehlen, sorgt er mit seinem Engagement für die Sichtbarkeit der wissenschaftlichen Gesellschaft. Dafür danke ich ihm als Autor und als Mitglied.

**Schlussbemerkung**

In diesen turbulenten, politischen Zeiten, bei einem sinnlosen Angriffskrieg in Europa, bei Unterdrückung und Folterung nicht nur im mittleren Osten, bei Hunger, Leid und Tod, verursacht von Despoten, sollten wir mit dem Begriff „irrational“ nicht nur bestimmte Zahlen verbinden.

> “When I carefully consider the curious habits of dogs
> I am compelled to conclude
> That man is the superior animal.
>
> When I consider the curious habits of man
> I confess, my friend, I am puzzled”
>
> EZRA POUND (1885 – 1972)

Für Fari – in Liebe und Dankbarkeit

*Oberhess. Naturwiss. Zeitschr. 2023, 71: 67 - 155, Gießen  ISSN 0340-4498*

# NULL

## Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerungen

WILLI KAFITZ*)

Abstract:

The zero as a symbol, as a numeral and as a number, especially in a positional system, can only be clearly proven in a few early cultures. These clearly include the Sumerians in Mesopotamia, the Maya in Yucatan and also the Incas in South America. However, the range of the American peoples was too remote, and their influence was not great enough to be able to pass on relevant knowledge in their respective areas. In contrast, the geographical location of the Indians was much better suited. Nonetheless, this should not belittle their intellectual achievement because their decimal system with the zero was the almost perfect basis for today's arithmetic.

Noteworthy is the fact that the culture with the most amazing mathematical achievements, Ancient Greece, did not know the concept of zero. In contrast, Islamic Arabia adopted the Indian method of calculation relatively quickly. However, it was many centuries before it arrived in the Christian West through contacts with Moorish southern Spain. Despite obvious disadvantages, Roman numerals survived almost 1000 years after the discovery of zero and a decimal place value system.

Today, the zero has not only arrived in international arithmetic, but it is also often taken up in mathematical generalizations and beyond. In mathematics, it is mainly abstract algebra and topology. Other terms related to zero can be found in economics or cartography.

Keywords: Zero, positional system, generalizations of zero

Zusammenfassung:

Die Null als Symbol, als Ziffer und als Zahl, vor allem in einem Positionssystem, kann in nur wenigen frühen Kulturen eindeutig nachgewiesen werden. Dazu gehören eindeutig die Sumerer im Zweistromland, die Maya in Yucatan oder Guatemala und auch die Inkas in Südamerika. Doch das Verbreitungsgebiet der amerikanischen Völker war zu abgelegen. Ihr Einfluss reichte nicht aus, um ihr diesbezügliches Wissen in diesem Bereich weitergeben zu können. Dagegen war die geografische Lage der Inder wesentlich besser geeignet. Das soll ihre intellektuelle Leistung nicht schmälern. Ihr Dezimalsystem mit der Null war die fast perfekte Grundlage für heutiges Rechnen.

Bemerkenswert ist die Tatsache, dass die Kultur mit den erstaunlichsten mathematischen Leistungen, das antike Griechenland, die Null nicht kannte. Dagegen hat das islamische Arabien die indische Rechenmethode relativ rasch übernommen. Bis sie allerdings im christlichen Abendland über Kontakte mit dem maurischen Südspanien ankam, dauerte es noch viele Jahrhunderte. Die römischen Zahlen hielten sich trotz offensichtlicher Nachteile noch fast 1000 Jahre nach Entdeckung der Null und einem dezimalen Stellenwertsystem.
Heute ist die Null nicht nur beim internationalen Rechnen angekommen, sondern wird auch vielfach in mathematischen Verallgemeinerungen und darüber hinaus aufgegriffen. In der Mathematik ist es vor allem die abstrakte Algebra und Topologie. Andere Begriffe mit Bezug zur Null finden sich in Wirtschaftswissenschaften oder der Kartografie.

Schlüsselworte: Null, Positionssystem, Verallgemeinerungen der Null

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

### Bemerkenswertes

Wir sprechen deutsch, wir schreiben römisch und wir rechnen indisch.[1]

*Karl Menninger (1898 – 1963)*

Null ist auch eine Ordinalzahl und Mathematiker beginnen oft damit zu zählen. Folgende Anekdote des polnischen Mathematikers *Waclaw Sierpinski* zeigt, dass das nicht immer sinnvoll ist. Auf einer Reise geriet er plötzlich in Panik, weil er ein Gepäckstück vergessen zu haben glaubte. „Aber Liebling“ beruhigte ihn seine Frau, „alle sechs Koffer sind da.“ „Das kann nicht sein“ entgegnete der Gemahl, „ich habe zweimal nachgezählt: null, eins, zwei, drei, vier, fünf.“[2]

*Waclaw Sierpinski (1882 – 1969)*

Ich stimme mit der Mathematik nicht überein. Ich meine, daß die Summe von Nullen eine gefährliche Zahl ist.[3]

*Stanislaw Jerzy Lec (1909 - 1966)*

Eine Größe ist etwas oder nichts; wenn sie etwas ist, ist sie noch nicht verschwunden; wenn sie nichts ist, ist sie wirklich verschwunden. Die Annahme, es gebe einen dazwischen liegenden Zustand, ist ein Hirngespinst.[4]

*Jean Le Rond d´Alembert (1717 – 1783)*

Oh, I got plenty o' nuttin'
An' nuttin's plenty fo' me[5]

*Aus Porgy and Bess von George Gershwin*

Now thou art an 0 without a figure.[6]

*Shakespeare*

Die Mathematik entsteht, wo man, statt zu zählen, dazu übergeht, Beziehungen zwischen Mengen herzustellen.[7]

*Robert Kaplan*

---

[1] Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer, Eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen, 1958, zitiert nach Wußing, ebenda, S. 97. (Menninger promovierte übrigens über Bernhard Bolzano und war temporär Gastdozent an der Universität Gießen.)
[2] Zitiert nach http://peter-ripota.de/mathe/ordinalzahlen-einfach-weiterzaehlen/von-der-null-zur-eins/
[3] https://gutezitate.com/zitat/185952
[4] Zitiert nach Charles Seife, Zwilling der Unendlichkeit, S 141
[5] Porgy and Bess, George Gershwin, 1935, Liedtext DuBose Heyward und Ira Gershwin (nuttin ist der Slangausdruck für nothing)
[6] Shakespeare, König Lear, 1. Akt, 4. Szene, Fool to King Lear
[7] Robert Kaplan, zitiert nach dajolens.de/blog/vorgeschichte-mathematik

**Inhalt**

**Big Picture**

Vorliegender Beitrag handelt von der Null. Er ist in einen historischen und einen mathematischen Teil gegliedert. Eigentlich sollte der Begriff „Null“ in beiden Teilen unterschiedlich gekennzeichnet werden, denn er bezeichnet unterschiedliche Dinge oder zumindest eine historisch-dynamische Sicht und eine mathematisch gefestigte und damit wissenschaftlich-stabile Sicht.

Abb. 1: Tarot-Karte „Der Narr“ als Null

In der Mathematik ist die Null unbestritten eine Zahl, gleichberechtigt und sogar in ihrer mathematisch begründeten Sonderstellung herausgehoben. Es ist die einzige reelle Zahl, die weder positiv noch negativ ist. Es ist eine Kardinalzahl, denn sie beschreibt die Anzahl an Elementen in der leeren Menge. Oft ist es auch sinnvoll, sie als Ordinalzahl zu verwenden, d.h. Zählen damit zu beginnen. Die Null ist eine gerade Zahl, da sie durch 2 ohne Rest d.h. mit Rest 0 teilbar ist (0/2=0). Sie ist somit neben der Eins Repräsentant in der Restklasse 2. In den Verallgemeinerungen der Null ist sie starker sprachlicher und mathematischer Bezugspunkt. Sie ist eine starke Säule in der Mathematik und in ihren wichtigsten Anwendungen inkl. der Informatik bzw. digitalen Elektronik. Sie ist aus unserem Alltag nicht mehr wegzudenken.

Ganz anders ist die Null im historischen Teil zu verstehen. Die geschilderte historische Entwicklung ist zwar grundsätzlich richtig, aber doch in vieler Beziehung zu relativieren. Es ist historisch belegt, dass ca. 773 n. Chr. die Null der indischen Stellenwertschreibung nach Bagdad kam und es war al-Hwarizmi, der 825 mit seinem Buch über Arithmetik den Grundstein für den weiteren Weg der Null im arabischen und darauf folgend im westlichen Kulturraum legte. Wir wissen auch mittlerweile von der Entwicklung bei den Sumerern im Zweistromland und den Leistungen der Maya im von der übrigen Welt isolierten Yucatan. Außerdem können wir dank archäologischer Erkenntnisse einigermaßen den Stand bei den großen Hochkulturen der Welt in den letzten 7-8000 Jahren einschätzen.

Trotzdem ergibt sich oft ein unklares und verschwommenes Bild. Es ist noch keinesfalls die stolze Zahl Null der Mathematik von heute zu erkennen. Man sieht undeutliche Aspekte und Momentaufnahmen einer Evolution, in der nichts geradlinig und stringent gelaufen ist. Nichts kann darin als absolut betrachtet werden. Die Symbole und wie sie entstanden sind, die Begriffe, ihre Bedeutung, ihren ungewissen Beginn, die zeitlichen Entwicklungen, die Einflüsse der Kulturen untereinander, die Mehrdeutigkeit der Quellen und ihrer Interpretationen, liegen wie Puzzlesteine da, von denen zu viele, aber keine zwingend zusammenpassen wollen. Vor allem in frühen Phasen war die extrem unterschiedliche Wertschätzung der Null, nachdem es sie als Idee gab, aus heutiger Sicht verwirrend, mögliche Verbindungen der historischen Fakten sind auch heute noch höchst spekulativ. Es gibt zahlreiche Hinweise und mögliche Deutungen, aber wenig belastbare Beweise in der frühen Entwicklungsphase. Relativ eindeutig ist, dass die Null in ihrer frühesten Phase eine Leerstelle oder ein Interpunktionszeichen war. Das konnte auch über den Zeichen angebracht sein. „Zahl" konnte man das jedenfalls nicht nennen.

Sicher ist, dass die indische Mathematik erheblichen Einfluss auf die weitere Entwicklung hatte. So schreibt Bramagupta 600 n. Chr.: *Jede Zahl minus sich selbst ergibt Null.* Trotzdem wurde der Null zunächst nicht die Ehre zuteil, als gleichberechtigte Zahl akzeptiert zu werden. Ihr Name, der bis heute Bestand hat, kommt nach vielen Irrungen und Wirrungen eindeutig vom mittellateinischen *nulla figura*, d.h. keine Zahl.[8]

Diese Haltung bleibt fast 1.000 Jahre bestehen und so lange dauerte auch der Paradigmenwechsel. Im 15. Jahrhundert schrieb ein Franzose: *So wie die Stoffpuppe ein Adler sein möchte, der Esel ein Löwe und der Affe eine Königin, so tat die Null vornehm und gab vor, eine Zahl zu sein.*[9]

Die Null galt dann auch später mehr oder weniger und zumindest außerhalb der Gelehrtenwelt als „Paria" unter den Zahlen, war aber immerhin auf dem Weg zu einer Zahl. Sie hatte lange den gleichen unvorteilhaften Status wie die negativen Zahlen. Die Situation erinnert an die Entdeckung der irrationalen Zahlen, die oft Hipassos von Metapont zugeschrieben wird und bei den Pythagoreern einen Schock ausgelöst haben soll.

Interessanterweise verlief der Paradigmenwechsel im westlichen Abendland besonders zäh. Das lag zum einen am „Beharrungsvermögen" der römischen Zahlen. Ein fadenscheiniges Argument war z.B. ihre bessere Fälschungssicherheit. An der Universität Padua verpflichtete man deshalb die Buchhändler, ihre Preise römisch zu schreiben. 1494 verlangte der Bürgermeister von Frankfurt in seiner Verwaltung auf das neue Ziffernrechnen zu verzichten. Noch 1594 wurde in Antwerpen gewarnt, arabische Ziffern in Wechseln oder Verträgen zu verwenden. Arabische Ziffern und die Null wurden

[8] Robert Kaplan, Die Geschichte der Null, S. 80
[9] Robert Kaplan, ebenda, S. 82

lächerlich gemacht oder heidnisch genannt. *„Ein gehörntes Vieh, ein Schaf / Eine arabische Ziffer / Ist ein Priester, der an solch einem Festtag / nicht die Gottesmutter preist.*“[10] Es war „sarazenische Magie“.

Der Mönch Gerbert von Aurillac, der spätere Papst Sylvester der Zweite, soll sich in Cordoba als Araber verkleidet haben und ließ sich dadurch unerkannt im Gebrauch der indo-arabischen Zahlen und der Null unterrichten. Dies wurde als Blasphemie gewertet. Noch im 17. Jahrhundert ließ die katholische Kirche seinen Sarg in der Erzbasilika San Giovanni in Rom öffnen. Eine Ungeheuerlichkeit bei einem Papst! Man wollte sehen, ob der Teufel darin sitzt.[11,12] Gerbert sollte aber trotz der Legenden als bedeutender Wissenschaftler der Scholastik gesehen werden, der in zahlreichen Bereichen bedeutende Ergebnisse beisteuerte und vor allem auch Neuem aufgeschlossen gegenüber stand.[13]

Ein weiterer Grund war die Schwierigkeit, inmitten einer Umwelt mit zwei grundverschiedenen Zahlensystemen konfrontiert zu sein, die mehrere Jahrhunderte parallel betrieben wurden. Oder sollte man statt parallel rivalisierend sagen? Es gab Abakisten und Algoristen, die längere Zeit im Philosophiestreit lagen. Die eine Methode war unhandlich und sperrig, die andere zumindest neu, wurde skeptisch beäugt oder sogar als heidnisch-sarazenisch abgelehnt. Sie war bei Fehlern bestimmt im Zweifel eher der Sündenbock und Fehler waren so verbreitet, dass *„faire par algorisme“* (per Algorithmus rechnen), zwischenzeitlich ein Synonym für „Verrechnen“ bedeutete.[14]

Wichtige Messungen und Justierungen wurden römisch gezählt und begannen deshalb mit Eins. So wurden jedes Jahr zur Frühjahrs-Tag-und-Nacht-Gleiche die 360 Längengrade gemessen. Dieser Tag fällt in das Sternbild des Widders und müsste eigentlich 0 Grad sein. Die unterschiedlichen Zählweisen wirken bis jetzt noch nach. Heute setzen wir die Startlinie auf Null, die Römer setzten sie auf Eins. Drei Tage nach Sonntag war für sie Dienstag. Wir nennen die zwei Noten von C nach E noch heute eine große Terz. Ganz schlimm war die Konfusion bei den Jahreszahlen, die auch heute noch aus ästhetischen Gründen manchmal römisch geschrieben werden. Es fängt an, dass es zwischen dem Jahr 1 v.Chr. und 1 n.Chr. kein Jahr null gab. Erst eine erneute

---

[10] Kaplan S. 114
[11] Quelle der Geschichte:
https://www.deutschlandfunk.de/die-geschichte-der-null-100.html
[12] https://de.wikipedia.org/wiki/Silvester_II., siehe auch
[13] https://de.wikibrief.org/wiki/Pope_Sylvester_II
[14] Kaplan S. 113

Kalenderreform von 1740 führte es endlich ein.[15] Jahreszahlen, die auf null enden, waren und sind bis heute problematisch. Das 3. Jahrtausend begann eigentlich formal am 1. Januar 2001. Ein Jahr vorher feierten Enthusiasten und zitterten Abergläubige. Zu denen soll auch Papst Silvester II gehört haben, als er voller Angst vor dem Weltuntergang zur ersten Jahrtausendwende die Mitternachtsmesse zelebrierte.[16]

1299 erließ der Stadtrat von Florenz, dass es illegal sei Geldsummen mit arabischen Ziffern in Kontobücher zu schreiben,[17] obwohl das dezimale Stellenwertsystem bereits über das Buch *liber abaci* von Fibonacci bekannt war. Allerdings bedurfte es noch weiterer wichtiger Impulse und Fürsprecher, z.B. Luca Pacioli in Italien, Adam Ries in Deutschland oder der junge, geniale Regiomontanus, der seinen Namen Johannes Müller nach seiner Heimatstadt Königsberg (Joannes de Monteregio) latinisierte. Doch Pacioli hat in seinem Buch nicht nur mathematische und wirtschaftliche Themen (siehe doppelte Buchführung) angesprochen, sondern ist auch ausführlich auf das Fingerzählen eingegangen. Noch 1522 kommt in Nürnberg ein Buch dazu heraus: *Abacus atque vetustissima veterum Latinorum per digitos manusque numerandi consuetudo* (Abakus und der uralte Gebrauch der alten Lateiner, an den Händen und Fingern zu zählen.) Es erklärt ausführlich, wie Abakus und Fingerzählen optimal zusammenspielen können. Das einfache Volk auf den Märkten und in den Zunftgassen hatte bei der überwältigenden Verbreitung dieser Kulturtechniken deshalb keinen großen Druck, auf das „neue" Zahlensystem zu wechseln.[18]
Man sollte das Fingerzählen und –rechnen nicht als Spielerei abtun. Es war ca. 1.500 Jahre ein bewährtes System. Es fußt auf einer Praxis, die sich bereits bei den Römern herausgebildet hat und sich auf bemerkenswert große Zahlen erstreckt, die mit Fingerhaltungen, evtl. unterstützt durch Gesten, dargestellt werden können. Auf dem römischen Forum stand eine Statue des Gottes Janus, des doppelgesichtigen Gottes vom Anfang und Ende. Es ist ein sehr alter römischer Gott ohne griechische Entsprechung in der Mythologie. Der Monat „Januar" geht auf ihn zurück. Er soll in der Fingerhaltung abgebildet worden sein, die der Zahl 365 entspricht. Dies berichtete Macrobius, ein römischer Zeitgenosse von Augustinus (gest. 430), dessen Bericht fast wörtlich auf Plinius zurückgeht. Auch der Kirchenvater Augustinus, der Bischof von Hippo in Nordafrika, beschäftigte sich mit möglichen Allegorien der Fingerzahlen in der

[15] Kaplan, S. 115
[16] de.m.wikipedia.org/wiki/silvester_II.
[17] Kaplan, S. 114
[18] Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer, eine Kulturgeschichte der Zahl, Göttingen 1958, digitalisiert im Münchner Digitalisierungszentrum, siehe z.B. Zahlzeichen des Volkes, Kerbhölzer, digitalisiert ab S. 253 (Original Bd. 2, S. 26)

Bibel. Ihnen liegen eindeutig auch Rechenvorgänge zugrunde, die über eine reine Zahlendarstellung hinausgehen.[19] Das zeigt, wie tief die Ursprünge dieser Kulturtechnik gewesen sind.

Die erste vollständige schriftliche Überlieferung geht auf den Abt Beda, genannt Venerabilis (der Ehrfürchtige) zurück. Der Benediktinermönch, einer der wichtigsten Lehrer des frühen Mittelalters, ist 735 gestorben. Es ist die erste vollständige Aufzeichnung der Fingerzahlen und in seinem Werk *„De temporum ratione*“ (Über die Zeitrechnung) enthalten. Damit meinte man damals die Berechnung des beweglichen Osterfestdatums, zu dem mindestens eine Person in jedem Kloster fähig sein sollte. An Ostern hängen weitere kirchliche Feiertage, die im 1. Konzil von Nicäa (325), zunächst nach dem Julianischen Kalender, festgelegt wurden.[20] Es durfte keinesfalls mit dem jüdischen Passahfest (Pessach) zusammenfallen, das am Abend des Frühlingsvollmondes gefeiert wird. Es war scheinbar Beda wichtig, in seinem Werk gleich am Beginn das „Werkzeug“ zu beschreiben. *„De computo vel loquela digitorum*“ („Über das Rechnen und die Sprache der Finger“). Offenbar waren die Fingerzahlen bis ca. 10.000 (genau 9.999) allgemein seit Jahrhunderten in allen Völkern Europas bekannt! Sie wurden mündlich von

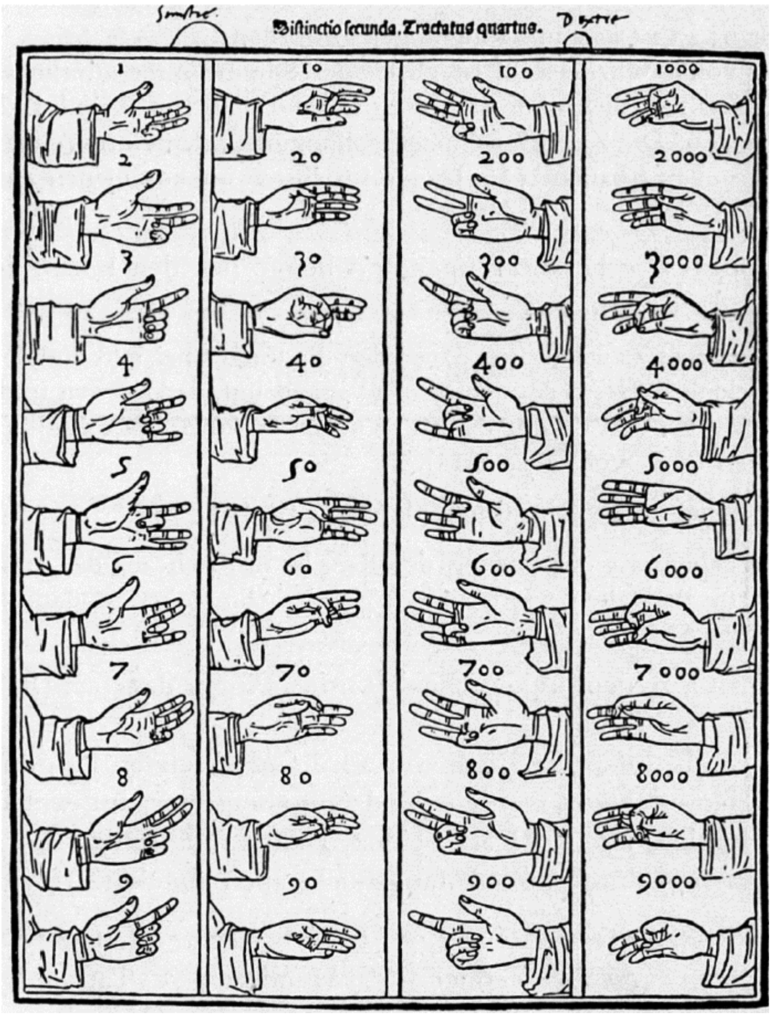



Abb. 2: Fingerzahlen aus dem 1492 gedruckten Werk von Pacioli. Bis auf die handvertauschten 100-er und 1000-er ist es exakt die Darstellung von Beda.

---

[19] Menninger, ebenda, digitalisiert S. 240 (Bd. 2, S. 5)
[20] https://de.wikipedia.org/wiki/Ostern

Generation zu Generation weitergegeben und waren deshalb so selbstverständlich. Dass Beda in England und nicht auf dem Kontinent lebte und wirkte, erklärt vielleicht, dass er diese Kulturtechnik zunächst dokumentieren wollte.

Es war ein äußerst ausgefeiltes System, das nichts mit primitiven Zahlzeichen von Naturvölkern zu tun hat. Beda versuchte diese Grenze zu erweitern, aber offenbar war der Bedarf für größere Zahlen nicht vorhanden. Seine Vorschläge setzten sich nicht durch.

Seien nun abgekürzt K=Kleiner Finger, R=Ringfinger[21], M=Mittelfinger, Z=Zeigefinger und D=Daumen.

| Linke Hand | | Rechte Hand | |
|---|---|---|---|
| Einer | Zehner | Hunderter | Tausender |
| K – R – M | Z – D | D – Z | M – R – K |

Der Anzeigende blickt dabei auf seine Handrücken und sein Gegenüber sieht die Zahl, so wie wir sie heute schreiben: T – H Z – E.[22]

Nun kann man verstehen, was der römische Satiriker Juvenal über den altersweisen Nestor sagt: „*Ja, glücklich ist, wer so oft wie er im Laufe der Zeit trotzte dem Tod und seine Jahre schon zählt an der Rechten.*“ Die rechte Hand brauchte man erst ab den Hunderten.

Manche Fingerstellungen führten auch im übertragenden Sinne zu Assoziationen. So ist noch heute in der Gegend rund um Neapel die „Dreißig“ ein Zeichen für Heirat und wohl eher auch für Liebe. Das hat sich seit der Zeit der Römer gehalten: *Molli osculo se complectans* (… umarmte ihn mit einem zarten Kuss) beschreibt die verschlungene Fingerstellung für „30“. In römischer Zeit diente die gleiche Haltung (allerdings mit der rechten Hand) zur Anbetung der Venus. Bereits der Kirchenvater Hieronymus (gest. 420) hat darauf hingewiesen. Die Legende, die sich um ihn rankt, dass er einem Löwen einen Dorn entfernt haben soll, hat ihn besonders populär gemacht und auch das Liebessymbol glaubhaft unterstrichen. Er übersetzte die Bibel ins zeitgenössisch Lateinische (*Vulgata*), also in eine Form, die im Prinzip heute noch in der katholischen Kirche in Gebrauch ist. Dürer hat ihn 1513 in einem meisterhaften Kupferstich voller allegorischer Hinweise in seiner Studierstube

---

[21] Der Ringfinger hieß auch Medicus, weil eine Ader vom Herzen zu ihm führe. Er bildete die Zahl 6, die seit den Griechen als vollkommene Zahl gilt (Summe ihrer Teiler, 1 gilt als Teiler). Er war deshalb prädestiniert, einen Ring zu tragen.

[22] Menninger, ebenda, S. 233

portraitiert.[23] Menninger weist auch auf andere symbolische Hinweise hin, die für den umfassenden und selbstverständlichen Umgang in der Bevölkerung aller Schichten mit Fingerzahlen sprechen.[24]

In mittelalterlichen Rechenbüchern für Klosterschüler unterschied man gemäß den Fingerstellungen in digiti (1 – 9), articuli (Zehner) und numeri composti (zusammengesetzte Zahlen bis zu 9.999). Das war für die Rechenregeln sinnvoll und nützlich und wird auch heute in der Grundschule gebraucht um z.B. bei der Addition den „Überlauf“ in den nächsten Zehnerbereich zu behandeln.

Z.B. 7+5=12, *scribe digitum 2, transfer articulum 1;* oder *2 schreib hin, 1 im Sinn*

Es muss betont werden, dass sowohl fast 500 bzw. 800 Jahre später mit Fibonacci und Pacioli zwei Verfechter der indo-arabischen Ziffern, die Fingerzahlen als nützlich gewürdigt haben. Auch wenn die „amtlichen“ Zahlzeichen meist noch die römischen Zahlen waren, so galten überall in Europa die Fingerzahlen als gängige Konvention. Bis auf eine kleine Änderung bzw. Vertauschung hat Pacioli 1492 in seiner „*Summa*“ die Ausführungen von Beda bestätigt. Dies kann bei dieser großen zeitlichen Distanz keinesfalls ein Plagiat gewesen sein. Die Zahlzeichen des Volkes, flüchtige Fingerzahlen und beständige Kerbhölzer, Müllerknoten oder ähnliche Dokumentationsformen, existierten unabhängig von der „Amtssprache“ und waren extrem ungleich wichtiger im Alltag. Auch existierte wohl durchaus eine Arbeitsteilung bei wichtigen Prozessen in der Verwaltung, sowohl beim Staat oder den großen Handelshäusern: Einer sagte die Posten an, ein Zweiter rechnete mit den Fingern evtl. gemeinsam mit dem Abakus und ein Dritter dokumentierte (gleich, ob römisch oder indisch-arabisch).[25]

Johannes Aventinus, (eigentlich Johann Georg Turmair, latinisierter Name nach seinem Geburtsort Abensberg in Niederbayern), war bayerischer Historiker und Hofhistoriograph. Er gibt, wie schon erwähnt, noch 1522 in Nürnberg ein Buch heraus, das die nützliche Kombination von Abakus und Fingerrechnen betont:

Abakus und der uralte Gebrauch der alten Lateiner, an den Händen und Fingern zu zählen. [26]

George Ifrah weist darauf hin, dass die Griechen, die Sabäer, die Lykier, die Palmyrener, die Etrusker und eben auch die Römer für die Fünf ein eigenes Zeichen hatten und von sechs bis neun das Quinärsystem (Basis 5) anwandten. Dies gilt übrigens auch für die Maya. Mengen werden nur bis vier „auf einen

[23] https://de.wikipedia.org/wiki/Der_heilige_Hieronymus_im_Gehäus
[24] Menninger, ebenda, S. 238 ff (Bd. 2, ab S. 5)
[25] Menninger, ebenda S. 231 ff
[26] Menninger, ebenda S. 245f und https://de.wikipedia.org/wiki/Johannes_Aventinus

Blick“ erfasst. Dann benötigt man eine optische Zäsur. Er sieht den eigentlichen Ursprung im Zählen mit den Fingern, das sich nach und nach im ursprünglichen Einflussbereich des Römischen Reiches zu einer international verbreiteten Kulturtechnik weiterentwickelt hat.[27] Das hatte zwangsläufig auch Einfluss auf alle Dokumentationsformen. Fingerzahlen und z.B. Kerbhölzer korrespondierten somit in ihren prinzipiellen Darstellungsformen.

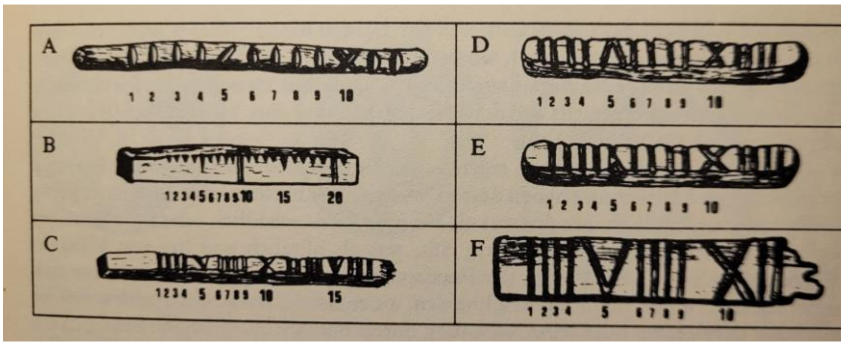



Abb. 3: Einfache Kerbhölzer orientierten sich immer am quinären System, wie auch die Fingerzahlen.

Man sollte also nicht schwarz-weiß denken! Selbst Leonardo von Pisa/Fibonacci weist, wie betont, auch bei Verwendung der neuen Zahlen auf die Bedeutung des Fingerzählens hin. Er verwendet das Verb *servare,* also bewahren, heute würden wir sagen „im Kopf behalten“. *Ponens semper in manibus numeros ex divisione euntes.* (Haltet dabei immer die Zahlen, die bei der Teilung herauskommen, an den Händen fest.)[28] Mit dem Buchdruck, preiswerterem Papier und der Verbreitung der indisch-arabischen Zahlen verschwanden nach und nach die alten Kulturtechniken des Volkes, allerdings in einem Prozess, der Jahrhunderte dauerte.

Erst nach einigem Widerstand und auf Druck der (großen) Händler wurde im Bankwesen und der Verwaltung in den italienischen Stadtstaaten, insbesondere der Medici in Florenz, das Dezimalsystem eingeführt. Es löste mit den „arabisch“ genannten neun Ziffern plus der Null endlich die unhandlichen römischen Zahlen in diesem Bereich ab. Das Ziffernrechnen löste langsam, sehr langsam auch den Abakus bei den professionellen Handelshäusern und staatlichen Verwaltungen ab. Doch selbst von dem jungen Goethe ist bekannt, dass sein Vater noch einen Abakus besaß und der junge Johann Wolfgang ihn zweckentfremdete, in dem er Sternbilder mit den Zählsteinen legte. Der Abakus hieß übrigens auch Zählbank und danach hat die Bankenbranche ihren Namen. Größere Handelshäuser waren auch immer Geldverleiher. Gerade auf der

[27] Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Campus, Frankfurt 1986, S. 173.
[28] Zitiert nach Menninger, ebenda, S. 246 (Als Seitenzahl wird in diesem Beitrag immer die Seite der digitalisierten Form angegeben.)

Zählbank oder dem Abakus war die Null ein flüchtiger Zustand, dem kein wichtiger Name gegeben werden musste.

Der Abakus wurde früher oft mit Sand bestreut und Autoren, wie Kaplan, spekulieren, ob der verbliebene Abdruck der entfernten, runden Zählsteine im Sand nicht das spätere runde Symbol der Null hervorgebracht hat.

Das wichtigste Argument, wieso sich römische Zahlen so lange hielten, ist aber die Tatsache, dass der weitaus größte Teil der Bevölkerung weder lesen und schreiben, noch bis zu größeren (römischen) Zahlen zählen musste bzw. konnte. Jedenfalls wurden die „offiziellen“ Zahlzeichen gar nicht im Alltag der breiten Bevölkerung gebraucht. Sie hatten die Fingerzahlen bzw. das Fingerrechnen und dazu kamen im weitesten Sinn noch die herausragende Stellung der Kerbhölzer oder ähnlich einfacher Dokumentationsformen, auf die hier einzugehen ist. Es sind Zahlzeichen, deren Verbindlichkeit lokal begrenzt war oder sogar individuelle Gedächtnishilfen darstellten. Man nennt sie zwar Bauernzahlen; sie sind aber nicht auf diese Bevölkerungsgruppe beschränkt. Es sind Zeichen aus dem Volk für das Volk; das Trägermedium ist meist Holz, manchmal Schnur, erst später Kreide auf Tafeln und oft erst viel später bis weit ins 20. Jahrhundert hinein dann Papier.

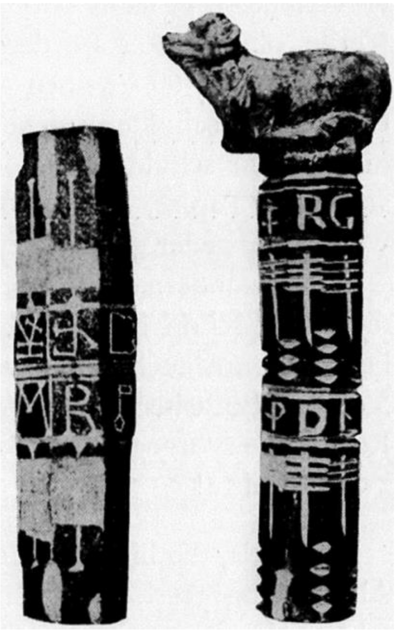


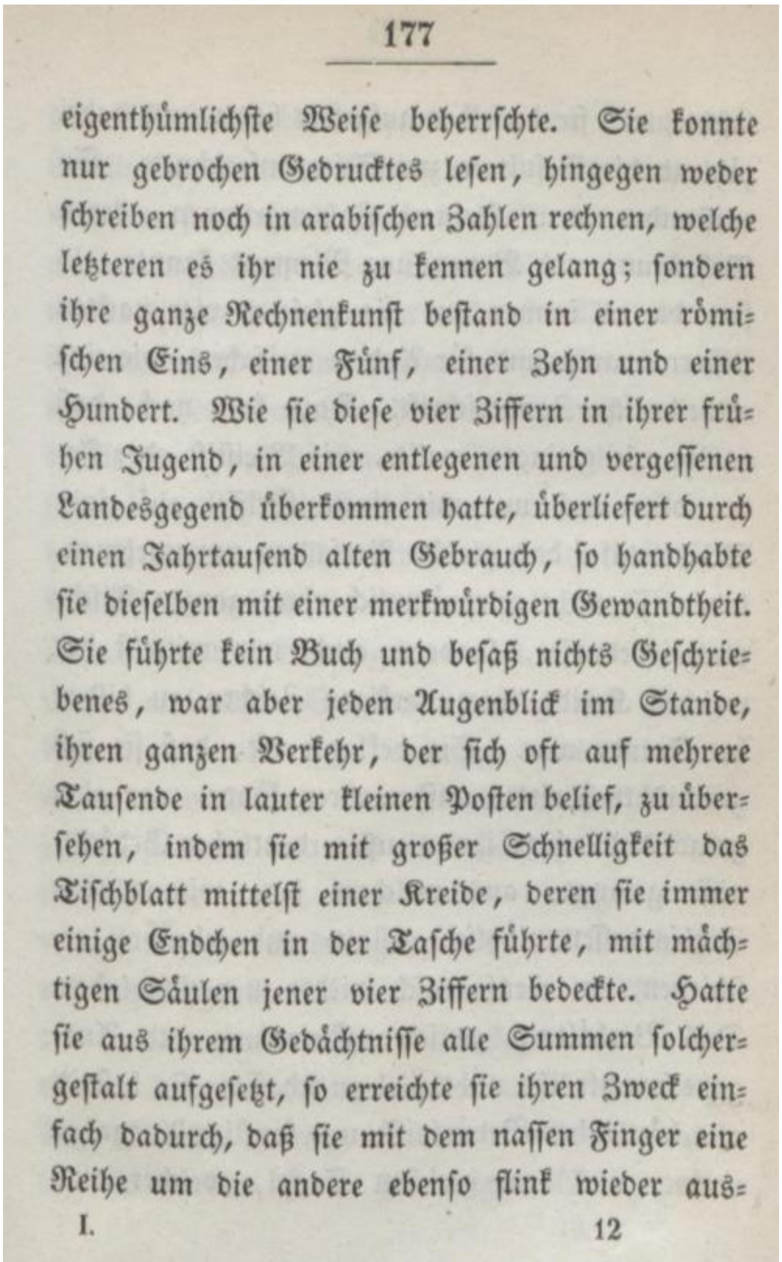
Abb. 4: Kerbholz zur Abrechnung von Milch einer Dorfgemeinschaft durch einen Sennhirten.

Karl Menninger hat zu dieser These in seinem epochalen Standardwerk eine Fülle von Belegen zusammengetragen.[29] Das reicht von Fundstücken mit selbsterstellten Zeichen, die individuell verstanden wurden oder die man bestenfalls noch in einem Dorf, Tal oder Gau kannte. Dazu gehören die Alpscheite. Bekannt ist auch der Müllerknoten. Durch diese Knotentechnik wurde direkt am Sack Mehl Menge und Qualität des Inhaltes festgehalten. Diese „Beschriftungen“ gehen bis zu weltweit nachweißbaren Praktiken.

Sie machen aber auch eine intellektuelle Entwicklung mit. Die Kerben beziehen sich z.B. auf Anzahl, Schafe, Ziegen, Galtiere (Rinder) oder Kühe eines Bauern, der sein Vieh, wie andere Viehhalter auch, einem Hirten überantwortet. Der Hirte hat ein Gegenstück. Das Kerbholz, auch Almscheit genannt, ist noch

[29] Menninger, ebenda, S. 245, Abbildung links „abgetesselt“, rechts noch aktuell. In der Almwirtschaft wurden Kerbhölzer bis in das 20. Jahrhundert hinein verwendet.

auf die konkreten Objekte (Anzahl Vieh je Art) bezogen. Oft wurde aber die Rückseite zu anderen Dokumentationszwecken benutzt, vielleicht für die Anzahl der produzierten Käse für alle Tiere der Dorfgemeinschaft. Man kann es eine einfache, genossenschaftliche „Buchführung“ nennen. Hier kann eine frühe Zahlschrift entstehen, die unabhängig vom Inhalt ist, also das, was abstrakte Zahlen ausmacht. Dieses Prinzip entstand unabhängig von städtischen Entwicklungen, insbesondere bei größeren Händlern, der staatlichen Verwaltung oder gar dem akademischen Leben. Der praxisorientierten Erfindungsgabe waren dabei einerseits kaum Grenzen gesetzt; andererseits entstanden ähnliche Praktiken unabhängig voneinander.



177

eigenthümlichste Weise beherrschte. Sie konnte nur gebrochen Gedrucktes lesen, hingegen weder schreiben noch in arabischen Zahlen rechnen, welche letzteren es ihr nie zu kennen gelang; sondern ihre ganze Rechnenkunst bestand in einer römischen Eins, einer Fünf, einer Zehn und einer Hundert. Wie sie diese vier Ziffern in ihrer frühen Jugend, in einer entlegenen und vergessenen Landesgegend überkommen hatte, überliefert durch einen Jahrtausend alten Gebrauch, so handhabte sie dieselben mit einer merkwürdigen Gewandtheit. Sie führte kein Buch und besaß nichts Geschriebenes, war aber jeden Augenblick im Stande, ihren ganzen Verkehr, der sich oft auf mehrere Tausende in lauter kleinen Posten belief, zu übersehen, indem sie mit großer Schnelligkeit das Tischblatt mittelst einer Kreide, deren sie immer einige Endchen in der Tasche führte, mit mächtigen Säulen jener vier Ziffern bedeckte. Hatte sie aus ihrem Gedächtnisse alle Summen solchergestalt aufgesetzt, so erreichte sie ihren Zweck einfach dadurch, daß sie mit dem nassen Finger eine Reihe um die andere ebenso flink wieder aus-

I. 12

Abb. 5: Umgang mit „Bauernzahlen“ bei Gottfried Kellers „Grüner Heinrich“

Aus einem Zahlensystem, wie den römischen Zahlzeichen, werden nur bestimmte Elemente entnommen, für eigene Zwecke umgedeutet und mehr oder weniger individuell benutzt. In dem Roman „Der grüne Heinrich“ von Gottfried Keller, findet sich eine schöne Passage, die diesen Sachverhalt illustriert:[30] Aus dem Text von Keller lässt sich durchaus eine gewisse Anerkennung für die Frau erkennen. Das kann man getrost verallgemeinern. Die Menschen waren nicht dumm, sie waren nur sehr „bildungsfern“ aufgewachsen und hatten vom römischen

[30] Keller, Gottfried: Der grüne Heinrich. Bd. 1. Vieweg-Verlag, Braunschweig, 1854, S. 177. https://www.deutschestextarchiv.de/book/show/keller_heinrich01_1854

Zahlensystem nur einen Teil aufgeschnappt. Menninger bestätigt, dass z.B. L=50, D=500 oder M=1000 in den Bauernzahlen fast gar nicht vorkommen.[31] Bauernzahlen sind keine Kulturtechnik, die gelehrt werden musste. Doch sie leisten ihren Beitrag, dass die „amtlichen“ Zahlzeichen schon viele Jahrhunderte fast ein Schattendasein führten. Sie hatten kaum Einfluss auf den Lebensalltag der einfachen Bevölkerung

Die Kreide hatte ihren Zweck für schnelle Markierungen, aber man kann mit Recht sagen, dass das mit großem Abstand am meisten verbreitete Medium das Kerbholz war. Archäologische Funde beweisen, dass diese Praxis bis weit in die vorgeschichtliche Zeit reichte. Man hat an der Grenze zwischen Swasiland und Südafrika 1973 in Form eines Pavianknochens mit systematischen Einkerbungen eines der ältesten Artefakte gefunden.[32]
Obwohl Papier vor 2.000 Jahren in China erfunden wurde, erreicht es Deutschland erst im 14. Jahrhundert und war anfangs viel zu teuer für den profanen Gebrauch. Das „*Papier des Volkes ist das Holz*“ (Menninger) und das gilt praktisch für die ganze Welt. Beschränkt man sich auf Europa, so geben allein schon die Namen Aufschluss. Im Mittel- und Niederdeutschen gibt es das Kerbholz, den *Dagstock*, in Bayern und Tirol den *Span, Kärm* oder das *Raitholz* (=Rechenholz), andere Alpenländer kennen *Tessel oder Taessle*[33]*.* Österreich und Wien haben den *Robasch* oder *Robitsch*, von slawisch *rovaš* (Kerbholz). Der Böhme sagt, wenn er borgen muss, *„es ist mir in die Rabuse gegangen*“. Schweden kennt den *karvstock*, Holland den *kerf*. Im Lateinischen bedeutet *talea* Stab. Daraus bildete sich im mittellateinischen *talare* und im italienischen *tagliare*, woraus französisch *tailleur* (Schneider) und englisch *tailor* wurde. In Italien heißt das Kerbholz *taglia* oder *tessera*, in Spanien *tarja*, in Frankreich *taille* und in England *tally*. Ein *tallyman* war Jahrhunderte lang ein Ladungskontrolleur in einem Seehafen.[34] Auch der „Scheck“ geht auf das Kerbholz zurück. Die Staatsbank hatte bei ihrer Gründung eine Million Pfund aufgenommen und gab einen *tally stick* mit den Anteilsbeträgen in Form genormter Kerben den Berechtigten. Die konnten den Betrag einlösen, nachdem die Berechtigung geprüft wurde (*„to check“* heißt überprüfen).
Von René Jouglet wird eine Szene im Hennegau, (Province de Hainaut, wallonisch Hinnot, westflämisch Enegouwn), um 1900, geschildert: *Der Bäcker ging mit seinem Karren von Tür zu Tür. Er rief die Hausfrau heraus. Sie brachte ihre „taille“. Es war dies ein schmales Brettchen, so lang wie die Klinge einer Schere; der Bäcker besaß das Gegenstück dazu. Er legte beide aufeinander*

[31] Menninger, ebenda, S. 282
[32] Bottazzini, ebenda, S. 18
[33] http://www.walser-alps.eu/handel-und-wirtschaft/wirtschaft/taessle
[34] https://de.wikipedia.org/wiki/Tallymann

*und sägte an ihrer Kante soviel Kerben ein, wie er Brote zu sechs Pfund verkaufte.*[35]

Selbst bei den Bantu bedeutet „kerben“ auch gleichzeitig „zählen“ oder „rechnen.“[36]

Das Kerbholz wurde dann immer mehr zu einem rechtssicheren Medium. Kerben wurden in Ulmenholzstäbe geschnitten und diese geteilt, also gespalten. So wurde Betrug von beiden Parteien verhindert, weil beide Hälften exakt zusammenpassen mussten. Dies wurde vor allem bei Schulden angewendet („etwas auf dem Kerbholz haben“). Man findet das Prinzip sogar im Code Napoleon, dem 1804 eingeführten Code Civil, wo der Kerbstock als rechtsgültige Urkunde anerkannt wird.

Abb. 6: Kerbholz zum Nachweis für Dienstleistungen.

Auch die preußische Prozessordnung von 1781 lässt sie als Beweisstück zu:

*"beweiseskraft haben die auf dem lande gewoehnlichen kerbhoelzer, wenn beyde stuecke uebereinstimmen. kann eine parthey das ihrige nicht herbeyschaffen, so muß der gegner zur eidlichen bestaerckung des seinigen verstattet werden, in so ferne er nicht ueberfuehrt werden kann, daß das fehlende kerbholz durch seine schuld abhaenden gekommen".*[37]

In England wurden für die Staatsfinanzen ebenfalls bis ins 19. Jahrhundert (Bank von England bis 1826) hinein Kerbhölzer benutzt. Es existierten durch lange Archivierungszeiten von Steuerquittungen eine große Menge davon. Am 16. Oktober 1834 entschloss man sich, diese im Hof des Parlamentsgebäudes *Palace of Westminster* zu verbrennen. Es fing dabei Feuer und brannte zum größten Teil ab.[38] Rechtsgeschäfte, insbesondere Zahlungsverpflichtungen, gehen bis ins fränkische oder alemannische Volksrecht zurück. Bei geleisteten Verpflichtungen wurden die Kerbhölzer oft ausgekerbt und wiederverwendet („glatt“ gemacht, „getesselt“). Sie waren besonders in der Land- und Forstwirtschaft und im Fischereiwesen üblich. Wasserrechte, Lohnforderungen, Fangmengen oder Liefermengen wurden so dokumentiert. So bedeutete eine Kerbe einen ganzen Tag geleistete Arbeit, eine halbe Kerbe einen halben Tag.

---

[35] Zitiert nach Georges Ifrah, Universalgeschichte der Zahlen, S. 112
[36] Menninger, ebenda, S. 255
[37] Corpus Iuris Fridericianum, 1. Buch „Von der Prozeß-Ordnung“, Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften, Berlin 1781, Teil IV, Abschnitt 6, § 71
[38] https://de.wikipedia.org/wiki/Kerbholz

Viel profaner wurden Kerbhölzer beim „Anschreiben“ in Kneipen benutzt, wo man nicht unbedingt Rechtssicherheit benötigte. Ein italienisches Sprichwort sagt:

*Come è bello vivere in questo regno:*
*si mangia, si beve e si segna*
*tutto su un pezzo di legna!*

*Herrlich lässt es sich in diesem Land leben:*
*man isst und trinkt und kerbt*
*alles auf ein Stück Holz!*

Das Kerbholz in der Gastronomie ist nicht auf das gemeine Volk beschränkt. Zu Ehren von Wallensteins General Piccolomini spendierte die Marketenderin in Friedrich Schillers Stück, *Wallensteins Lager*, eine Flasche Wein: *Das kommt nicht aufs Kerbholz. Ich geb es gern. Gute Verrichtung, meine Herren.* [39]

Später setzte sich Tafel und Kreide durch und es entstand der Ausdruck *„etwas ankreiden“*.

Wichtiger als Zählen, war die Kenntnis von Geld- oder Sachwerten. Die Kerben konnte man vergleichen ohne die (An)Zahl benennen zu können. Die *minutiae* (Kleinheiten), also die römischen Zwölferbrüche und ihre Umrechnung, musste man zu seinem eigenen Vorteil kennen. Wichtig waren die *minutiae usitates* (die „gebräuchlichen“ Hauptbrüche), im Gegensatz dazu die *minutiae intellectualis*. Einige Begriffe haben sich bis heute erhalten: Von *scrupulus* leitet sich Skrupel („Bedenken“) ab, ein halber Scrupel ist ein Obolus, ein Viertel der Cerates, von dem das Karat stammt. Ein Skrupel ist $\frac{1}{24}$ Unze $=\frac{1}{288}$ As = 8 Calcus.[40] Die Begriffe gehen unmittelbar auf das griechische System zurück.[41]

Brauchte man mehr Platz, so entstand das „Buch“, das sich von der Buche ableitet, die sich leicht und glatt spalten ließ und aus der in Europa Holztafeln geschnitten wurden. „*Codex*“ wird heute nur für Bücher aus Pergament verwendet. Aber der Begriff stammt von *caudex*, dem Holzstück, aus dem *tabulae* geschnitten wurden. Sie wurden schon bei den Römern mit Wachs überzogen (*tabula cerata*) und mit einem Griffel (*stilius*) beschrieben.
Eine schöne sprachliche Brücke bildet auch das Lateinische *putare* (u.a. beschneiden), dessen Sprachstamm sich auch in *computare* (berechnen) findet, womit wir beim heutigen Computer wären.

Es gibt also eine ganze Reihe von Hindernissen, die einer Überwindung eines unpraktischen Zahlensystems im Wege stehen. Über allen logischen,

[39] Friedrich Schiller, Wallensteins Lager, 11. Auftritt
[40] Menninger, ebenda, S. 174
[41] https://de.wikipedia.org/wiki/Obolus

praktischen oder vorgeschobenen Argumenten sollte man am Schluss religiöse, philosophische und abergläubige Überlegungen nicht vergessen: Schon vom Hof Karls des Großen ist eine Diskussion über das Nichts, ob es existiert oder nicht, überliefert. Sie hat den Kaiser zu einer Erkundigung bei dem irischen Mönch Dungalus inspiriert. Die Welt soll laut der Bibel *„ex nihilo"*, aus dem Nichts erschaffen worden sein. Was war dieses „Nichts" vor der Schöpfung?"
Erst in der Renaissance erkannte man die Bedeutung auch des Nichtseins an und Leonardo da Vinci schreibt im Codex Atlanticus, *„dass unter den großen Dingen, die sich unter uns befinden, das Nichtsein das allergrößte ist."*[42]

Dies ist offenbar keine Haarspalterei. Als die Mathematik vor gut 100 Jahren auf eine neue axiomatische und mengentheoretische Grundlage gestellt wurde, haben sich große Mathematiker und Philosophen, aber auch andere Fachrichtungen, mit ähnlichen Fragen auseinandergesetzt – allerdings mit teilweise unterschiedlichen Antworten. Zu nennen ist zunächst Richard Dedekind mit seinen Gedanken über Zahlen, Georg Cantor über unendliche Mengen, Bertrand Russell und Gottlob Frege als Logiker. Intensive Studien gab es aus einer Gruppe von interdisziplinären Wissenschaftlern, die als der „Wiener Kreis" bekannt wurden, darunter Kurt Gödel. Sie versuchten die Metaphysik vollkommen durch einen logischen Empirismus zu ersetzen. Dies galt für die Mathematik als weitgehend gelungen. Bei den Naturwissenschaften brachten noch immer der Atomismus und schon die neue Quantenmechanik neue Fragen, aber auch die Sozialwissenschaften und insbesondere die Sprachwissenschaft (Rudolf Carnap).[43] Martin Heidegger findet spöttische Worte über das Nichts in seiner Antrittsvorlesung „Was ist Metaphysik" (1929), aber das hat nichts mehr mit der Null zu tun.

Erst mit der Renaissance, dem wachsenden Bildungsstand und den mathematischen Leistungen in dieser Zeit, setzte ein wirklicher Paradigmenwechsel ein und die Null bekam im wahrsten Sinne des Wortes den Stellenwert, der ihr gebührt (siehe unten). Null als Zahl und als Begriff der Kardinalität der leeren Menge wird heute kaum mehr mit dem „Nichts", „Niemand" oder „Nichtsein" gleichgesetzt. Die finden sich nur bei Gedankenspielen und Wortspielereien, siehe Shakespeares King Lear oder der Arie von Porgy aus Gershwins Oper *Porgy and Bess* eingangs dieses Beitrags unter „Bemerkenswertes". Auch bei Lewis Carolls „*Alice hinter den Spiegeln*" (1871) finden sich entsprechende Wortspielereien zu „Nichts" und „Niemand",

[42] Umberto Bottazzini: Wie die Null aus dem Nichts entstand, dtv, München 2021, deutsche Erstausgabe, S. 39f
[43] Karl Sigmund; Sie nannten sich Der Wiener Kreis, Springer. 2. wesentlich erweiterte Ausgabe, 2018

die „niemand“ mehr mathematisch interpretieren würde. Dagegen ist die „leere Menge“ zu einem reinen *Terminus technicus* der Mathematik geworden.

In Indien begann dieser Prozess der „Entmystifizierung“ früher. Dort wurden Regeln entwickelt, wie man mit der Null umzugehen habe. Mahavira, der um 830 n. Chr. lebte, schrieb, dass eine Zahl mit Null multipliziert, Null ergibt und dass die Zahl unverändert bleibt, wenn Null (…) von ihr abgezogen wird. Bramagupta und Bhaskar stimmten (zu unterschiedlichen Zeiten) dem zu. Ganz anders wird die Division durch Null bewertet. Hier gehen die Meinungen der großen Koryphäen diametral auseinander. Doch nach und nach entstand der Satz an plausiblen Regeln, wie die Null in der Arithmetik einzusetzen ist.

Man muss sich jedoch fragen, wieso ausgerechnet in Indien diese Klarheit in der Einbettung der Null in ein dezimales Stellenwertsystem entstand. Die Antwort könnte in einem 1.800 Jahre alten Text eines Autors namens *Nagarjuna* liegen, das zu einem klassischen Referenzwerk der buddhistischen Philosophie wurde. Ein Essay von Carlo Rovelli, Mitbegründer der Schleifenquanten-gravitation und vielbelesener Wissenschaftler, befasst sich unter dem Titel *„Leere ist leer: Nagarjuna“* mit der altindischen Schrift. Er kommt zu dem Schluss, dass als Kernargument von Nagarjuna nur die wahre Wechselbeziehung zählt. Leere allein ist ohne Essenz, jede Perspektive existiert nur über Abhängigkeiten. Für sich allein sind alles nur leere Entitäten.[44]

Die damit verbundene Relation zu anderen Zahlen und vor allem im dezimalen Positionssystem stellte die Null immer mehr und unumkehrbar auf die gleiche Stufe mit den „normalen“ Zahlen, wenn es oft auch quälend langsam ging.

Es gab aber sowieso eine Fülle von anderen Problemen. So besteht z.B. eine Gleichung der Form $x^2 + 4x - 22 = 0$ verwirrender Weise aus einer Fläche ($x^2$), einer Länge ($4x$) und einer Konstante ($-22$). Es wurden also drei Dimensionen in einem Ausdruck zusammengefasst. Das konnte man sich noch vorstellen. Doch was ist mit $x^4$ oder $\sqrt[5]{x}$? Dabei kommt man mit Anschaulichkeit nicht mehr weiter und es hilft nur konsequentes, regelbasiertes Rechnen, in das die Null emotionslos integriert werden muss.

Dieses Kaleidoskop an Bildern soll dem Verständnis dienen, um welchen Antagonismus sich ein Beitrag zum historischen und mathematischen Aspekt der Null kümmern sollte.

Vor diesem Hintergrund und auch im Rückgriff auf genannte Argumente und Fakten, kann man sich die einzelnen Kulturkreise ansehen und analysieren, ob

[44] Carlo Rovelli, Es gibt Orte auf der Welt, an denen Regeln weniger wichtig sind als Freundlichkeit, Essays, Rowoldt, Hamburg, 2022, S. 158 f

bzw. wie die Null die jeweilige zeitgenössische und spätere Mathematik beeinflusst hat. Es bleiben dabei sicherlich immer noch eine Reihe von Fragen bei der historischen Bewertung offen.

Von den einstigen Ressentiments sind nur in der Umgangssprache noch Hinweise, entsprechende Begriffe, Bekräftigungen und Zuspitzungen zu finden. Einen vermeintlich unnützen Menschen bezeichnet man abschätzig als Null, Null Bock ist ein Ausdruck für Unlust, Null Toleranz steht für ein hartes Durchgreifen, Null Spielraum bedeutet extreme Handlungszwänge, bei einem Nullspiel beim Skat darf der Einzelspieler keinen Stich machen, sogar ein Null-Sterne-Hotelzimmer unter freiem Himmel wurde kreiert.

Die Umgangssprache benutzt also Null als unterstes Extrem von eher abschätzigen Charakterisierungen. Für die Mathematik zählen nur die Eigenschaften und Folgerungen aufgrund des besonderen Bezugs zur Null. Wie alle anderen Elemente unterliegt sie in allen mathematischen Begriffen und Verallgemeinerungen streng dem logischen Positivismus, der nur ausreichend klar Definiertes akzeptiert.

## Entstehungsgeschichte und Verbreitung

Noch vor wenigen Jahren konnte der „Rote Faden“ zur Geschichte und Verbreitung der Null in wenigen Sätzen skizziert werden. Die geografische Nähe zum indischen Subkontinent hat den arabischen Islam mit den indischen Ziffern und der Null im Positionssystem (Stellenwertschrift) in Berührung gebracht. Um die Jahrtausendwende gelangten diese Erkenntnisse vor allem über Nordafrika nach Andalusien im maurischen Südspanien.

Abb. 7: Urkunde des Königs Devendravarman aus Kalinga (heute Orissa in Ostindien) aus dem Jahr 596 n.Chr. galt lange als ältestes Zeugnis der Stellenwertschrift mit der Null.

Erste Kontakte zwischen christlichen und arabischen Gelehrten und Händlern brachten zwar Impulse, aber erst mit dem ausgefeilten Bankwesen der italienischen Stadtstaaten explodierte der Bedarf an effizienter Buchführung und die „arabischen“ Ziffern verbreiteten sich über ganz Europa. Auf der wissenschaftlichen Seite entwickelten Isaac Newton und Gottfried Wilhelm Leibniz die Infinitesimalrechnung. Newton, um physikalische Bewegungen und Veränderungen berechnen zu können, Leibniz eher aus Interesse an reiner Mathematik. Die weitere Entwicklung führte über mehrere

Generationen zu einem (im wahrsten Sinne des Wortes) differenzierten Umgang mit der Null und unscharfe Begriffe, wie das unendlich Kleine, wurden ausgemerzt. Dieser scheinbar geradlinige Weg über ca. 1300 Jahre Mathematikgeschichte muss relativiert werden. Dies wurde bereits im Eingangskapitel deutlich gemacht.

Da ist zunächst die bisher in der Forschung akzeptierte Chronologie, die sich als falsch herausgestellt hat: Die Null ist bedeutend älter als gedacht.[45] 1881 wurde auf einem Feld nahe Bakhshali bei Mardan, Pakistan, ein auf Birkenrinde verfasstes Manuskript gefunden. Es befindet sich seit 1902 in den Bodleian Libraries der University of Oxford.

Es war schnell klar, dass es sich um mathematische Texte handelt, in denen häufig auch die Null als Punkt auftaucht. Meist wurde die Entstehung des 70-seitigen Manuskriptes irgendwann zwischen dem 7. bis 12. Jahrhundert angenommen. Eine exakte Datierung war jedoch erst jetzt mit der Radio-Carbon-Methode möglich und offenbarte eine große Überraschung. Die Handschriften stammen aus dem 2. bis 4. Jahrhundert. Damit müssen auch die zeitlichen Aspekte bei der Entdeckung und Verbreitung der Null anders bewertet werden. [46]

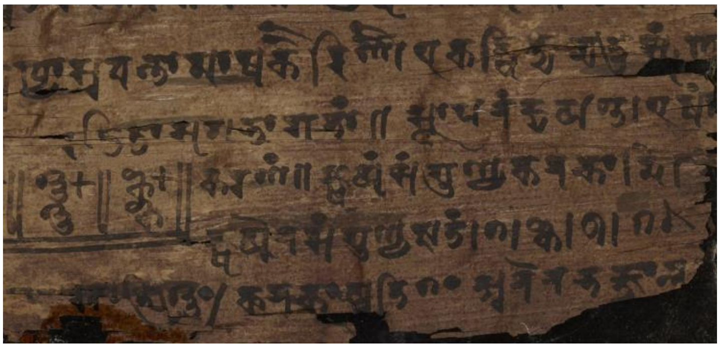


Abb. 8: Die Zahl "Null" als Punkte im Bakhshali-Manuskript

Abb. 9: 70 Seiten Birkenrinde – das Bakhshali-Manuskript

Im 7. Jahrhundert war die Zählweise und das Zahlensystem in Indien schon stark ausgeprägt. Sinnbilder für Zahlen waren eigentlich nicht nötig. Allerdings gehörte es zum „guten Ton“, mathematische bzw. astronomisch/astrologische Texte in Versen zu schreiben. Die Astronomie mit

[45] https://en.wikipedia.org/wiki/Bakhshali_manuscript

[46] George Ifrah schreibt in der Sonderausgabe seiner Universalgeschichte der Zahlen 1998, S. 500: *Der Begriff der Null und das Positionsprinzip waren also in Indien schon im 5. Jahrhundert unserer Zeitrechnung bekannt und möglicherweise über die Gelehrtenwelt hinaus verbreitet – die Konzeption unseres modernen Ziffernsystems geht damit mindestens auf diese Zeit zurück.*

ihren mathematischen Anforderungen wird auch noch heute als „Hilfswissenschaft“ für die Astrologie gesehen, die im indischen Alltag bis in die heutige Zeit eine dominierende Rolle spielt. Diese Sitte, Sinnbilder für Zahlen in poetischer Form zu verwenden, findet man im ostasiatischen Raum bis Tibet und Java und macht für interessierte Fremde das Verständnis nicht gerade einfach. Für bestimmte Zahlen gibt es sozusagen lyrische oder poetische Synomyme. Für die „Eins“ sind ca. 300 bekannt, darunter sogar „Nashorn“. Für die Zahl 1021 findet sich z.B. die poetisch umgestaltete, dezimale Darstellung im Stellenwertsystem:

eins – zwei – null – eins (von rechts nach links gelesen)

*śaš – paksa – kha – eka*

(Mond – Flügel – Loch – eins)

kha steht also für die Null und das Zeichen 0 sieht wie ein Loch aus.[47]

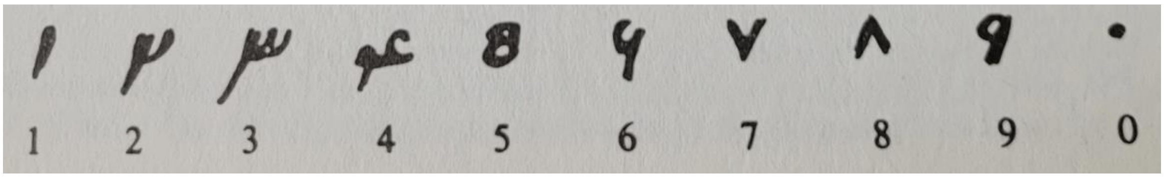



Abb. 10: Die ersten indischen Ziffern

Der arabische Dichter Khalīl ibn Aybak al-Ṣafadī (1296 – 1363)[48] berichtet, die indische Nation sei auf drei Dinge stolz: Ihre eigene Rechenmethode, das Schachspiel und das Buch Calila wa Dimna (Fabeln und Legenden).[49]

Der Begriff „Null“ leitet sich von lateinisch *„nullus“* (keiner, niemand) ab. Doch es wäre falsch zu vermuten, dass die Null den Römern bzw. den Griechen, von deren Tradition die römische Antike viel übernommen hat, bekannt war. Gerade

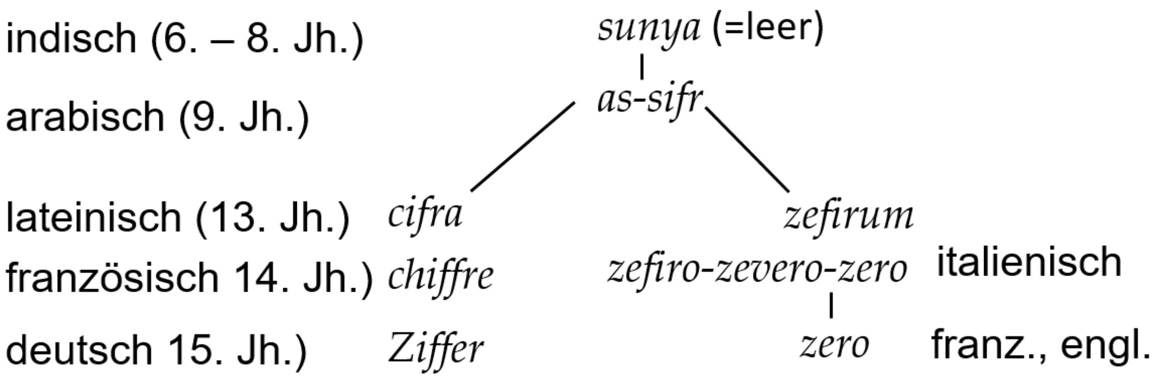



Abb. 11: Sprachliche Entwicklung des Begriffes Ziffer oder Zero.

[47] Menninger, ebenda, Bd. 1, S. 129 bzw. 133 digitalisiert
[48] https://en.wikipedia.org/wiki/Al-Safadi
[49] Zitiert nach Georges Ifrah, Universalgeschichte der Zahlen, S. 482

bei den Griechen verwundert das am meisten. Warum wurde dort nie die Idee eines Stellenwertsystems und eines Symbols oder gar einer Zahl für leere Positionen in der Zahl geboren? Vielleicht liegt der Grund darin, dass die Griechen in Strecken oder Flächen und ihren Relationen dachten. Jedenfalls ist das vollkommene Fehlen einer entsprechenden abstrakten Idee, die man als „Null" identifizieren könnte, der Grund, wieso das restliche Europa erst sehr spät von der Bedeutung der Null erfahren hat.

Sprachlich lässt sich der Weg des Begriffs ziemlich genau verfolgen. Aus dem indischen sunya (leer) oder auch sunya-bindu (Leerpunkt) haben die Araber wörtlich übersetzt as-sifr gemacht. Eigentlich müsste unter den beiden s jeweils ein Punkt stehen, aṣ-ṣifr, um die korrekte Aussprache zu verdeutlichen. Im Prinzip wird der Begriff im Abendland übernommen, allerdings latinisiert in cifra oder cefirum, wie es auch Leonardo von Pisa in *Liber abaci* schreibt. Die beiden lateinischen Worte werden als Lehnworte in die einzelnen Sprachen integriert.

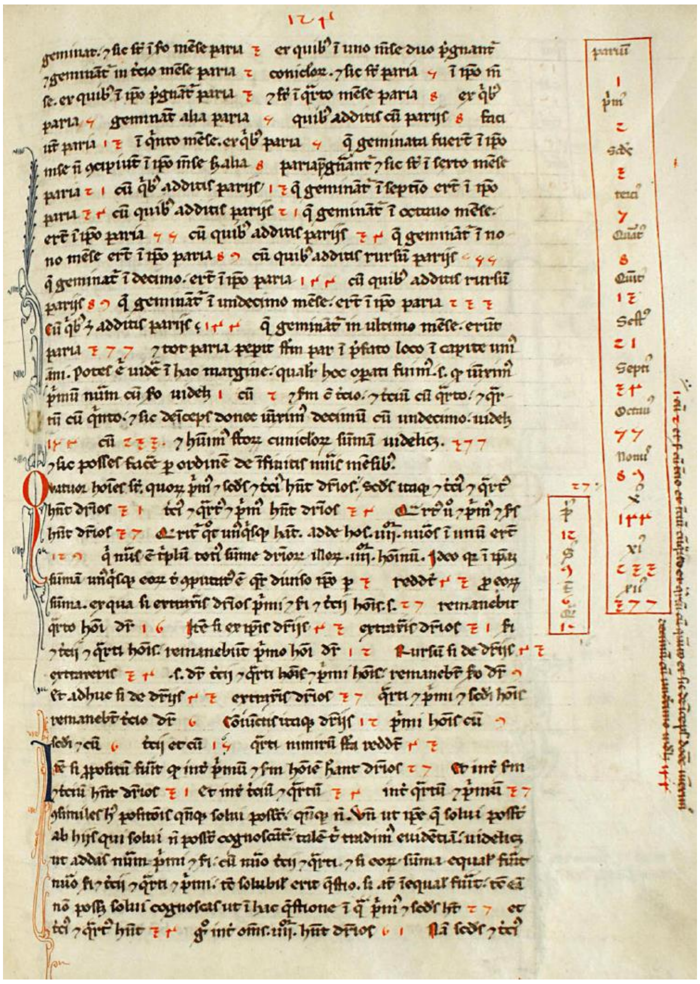


Abb. 12: Seite aus *liber abaci* von Leonardo di Pisa mit dem berühmten Kaninchen-Problem; rechts die ersten Fibonacci-Zahlen.

Allerdings finden sich bei Johannes von Sacrobosco in seinem Werk *De arithmetica* (zwischen 1225 – 1230 entstanden) auch alternative Begriffe, wie theca, Zirkel, Ziffer oder Nullzeichen.[50] In den italienischen Mundarten entstehen drei Worte, wobei das venezianische zero zunächst parallel neben chiffre im Französischen für die Null übernommen wird. Mit der Zeit setzte sich zero für null durch und chiffre bzw. deutsch *Ziffer* standen ursprünglich für die Null. Heute ist im Deutschen jede einstellige Zahl eine Ziffer; allerdings wird der Begriff auch gelegentlich im übertragenden Sinn

[50] Bozzazini, ebenda, S. 55

verwendet („Ziffern in Ordnung bringen“). Im Französischen benutzt man heute chiffre wie im Deutschen für die einstelligen Zahlen.[51] Das ist seit über 500 Jahren der Fall. In einem französischen Lehrbuch für Kaufleute von 1485 heißt es: *An chiffres gibt es nur 10 Zahlzeichen, von denen 9 Wert haben und das zehnte (selbst) nichts gilt, aber den anderen Zahlzeichen höheren Wert verleiht, und sie heißt zero oder chiffre.*[52] Der Text zeigt nicht nur die Koexistenz der beiden gleichen Begriffe, sondern offenbart die Unsicherheit, die der Mensch noch im ausgehenden Mittelalter und Beginn der Neuzeit mit der Null hatte. Menninger bringt es auf den Punkt: Es sind zwei Namen für die gleiche Sache (der Null) und einen Namen für zwei Dinge (Null und Wertziffer). Die Sprache könnte gar nicht besser die „Unordnung im Kopf“ demonstrieren, die noch an der Schwelle zur Renaissance bei den Menschen bzgl. der Null herrschte.

Es war vor allem Leonardo von Pisa, genannt Fibonacci, der als Sohn eines italienischen Handelsvertreters in Bugia, einer Handelsenklave von Pisa in Marokko, die Vorteile der arabischen Ziffern und der Null erkannte. Dort genoss er seine erste Ausbildung in Mathematik. Er vervollkommnete sein mathematisches Wissen auf ausgedehnten Reisen in Ägypten, Syrien, der Provence und Byzanz. Leonardo hat in bewundernswerter Ausprägung das Euklidische fundamentale Prinzip von Definition, Satz und Beweis verinnerlicht und angewendet. Bei der Algebra wurde er sehr von al-Khwārizmī beeinflusst. Er hat am Hof von Friedrich II. auf Sizilien die neuen Zahlen propagiert und hat in seinem einflussreichen Buch „*Liber abaci*“, veröffentlicht 1202, die Null als nützliches Zeichen (also noch nicht Zahl) erwähnt.[53,54] Dass der eigentliche Ursprung der Ziffern in Indien lag, wurde erst später erkannt. Ein früher Verfechter der indischen Zahlen war Johannes de Sacrobosco (auch Joannis de Sacro Bosco, englisch John of Holywood), ein englischer Mathematiker und Astronom, der an der Pariser

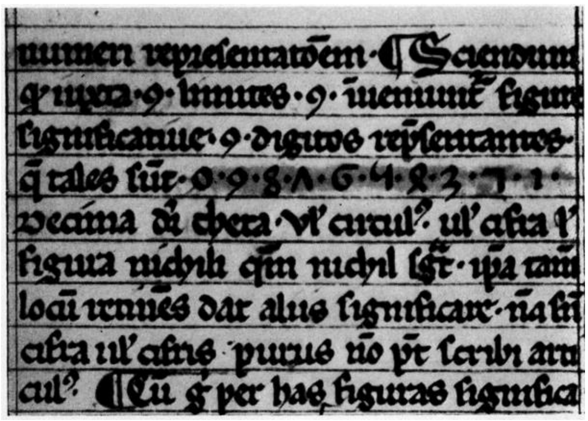


Abb. 13: 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 (vierte Zeile) aus dem Lehrbuch des Johannes de Sacrobosco († 1256)

---

[51] Menninger, ebenda, S. 442
[52] Menninger, ebenda, S. 442
[53] Lat. *liber* heißt Buch, aber auch Bast, wie griech. *biblos*, Papyrus bedeutet. Das Schreibmedium hat den Namen geprägt.
[54] Digitalisiertes Originalmanuskript https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=49

Universität lehrte, deren Anfänge bis ins 12. Jahrhundert zurückreichen.

Eindeutig haben die Araber, die den Süden der iberischen Halbinsel kontrollierten („*Al-Andalus*“), die „arabischen Ziffern“ etabliert. Belegt ist auch, wie bereits erwähnt, dass der als Araber verkleidete Mönch Gerbert von Aurillac, der spätere Papst Silvester II., sich in Córdoba, über die Bedeutung der arabischen Zahlen informiert haben soll.[55,56] Das schließt noch kein Zeichen für Null ein, wie man an einem von ihm erfundenen Abakus erkennen kann.[57] Frühere Anstrengungen hatten keinen Erfolg. So wurden die indischen Ziffern mit ihrem Dezimalsystem schon im 7. Jahrhundert zum Beispiel von dem syrischen Bischof Severus Sebokht beschrieben, der sich lobend darüber geäußert hat.[58] Das war lange Zeit der wissenschaftliche Erkenntnisstand. Erst jüngere Forschungen, mit modernen physikalischen Datierungsmethoden, zeichneten eine viel genauere Entstehungsgeschichte.

Der weitere Weg der Null in die Mathematik des späten Mittelalters und der frühen Neuzeit ist mühsam und verschlungen und hängt von mehreren Einflussfaktoren, u.a. vom praktischen Rechnen mit Hilfe unterschiedlicher Abaki (Plural von Abakus) ab. Das Stellenwertsystem auf Basis 10, das heute weltweit mit ihren Nuancen, wie Leerzeichen, Dezimalschreibweise etc., sogar als ISO-Norm 80 000 bzw. 80 000-1 genutzt wird und die Null sinnvoll macht, ist das Eine. Doch erst nachdem die negativen Zahlen im 15. oder 16. Jahrhundert als reale Zahlen akzeptiert wurden und die Null als Grenze zwischen positiven und negativen Zahlen auf dem Zahlenstrahl ihren Platz eingenommen hatte, hatte die Null auch mathematiktheoretisch ihren Platz gefunden. Mit der Entwicklung im Volk beim Zählen, Schreiben und Rechnen von Zahlenwerten hat das wenig zu tun. Hier behaupteten sich bis ins 20. Jahrhundert hinein allseits genutzte Methoden und Dokumentationsformen, die wir heute belächeln oder nur noch in Sprichworten identifizieren können.

Ein weiteres Hindernis für eine zügige Verbreitung der indisch-arabischen Ziffern inkl. der Null lag im Beharrungsvermögen bei etablierten Systemen und ihren Verfechtern. Erst 1494 gingen z.B. die Medici in ihren Verwaltungen

---

[55] Siehe Chronologie der Naturwissenschaften, S. 80, datiert auf „um 980“. https://slub.qucosa.de/api/qucosa%3A7968/attachment/ATT-0/

[56] auch Gerbert von Reims; (um 950 – 1003), https://www.welt.de/wissenschaft/article168698195/Die-Zahl-Null-ist-aelter-als-gedacht.html

[57] Rekonstruiertes Bild seines Abakus mit modernen Ziffern siehe de.m.wikipedia.org/wiki/silvester_II.

[58] ebenda oder https://de.wikipedia.org/wiki/Dezimalsystem

generell zu den arabischen Zahlen inkl. der Null über.[59] Dabei hatte sich die professionelle Geschäfts- und Bankenwelt gegenüber den Herrschenden durchgesetzt, denn der Umgang mit den Zahlen einschließlich der damit verbundenen schriftlichen Rechenmethoden war einfach praktischer und besser nachvollziehbar als bei den unhandlichen römischen Zahlen. Die Medici hatten in einer konservativen Grundhaltung heraus die arabischen Ziffern aus fadenscheinigen Gründen abgelehnt. Noch 1299 wurden die arabischen Ziffern z.B. in Florenz verboten.[60,61] Der Wechsel zu den neuen Zahlen verlief jedoch, wie bereits dargestellt, nicht reibungslos. Araber und die Völker in ihrem Einflussbereich standen zunächst unter griechischem oder hebräisch-syrischem Einfluss, wo in spätantiker Zeit z.B. griechische Buchstaben des Alphabets als Zahlzeichen ohne Positionssystem verwendet wurden. Die Araber übernahmen anfangs dieses Prinzip und nahmen stattdessen ihr eigenes Alphabet mit 28 Buchstaben. Der Einfluss der indischen Ziffern und der Null entwickelte sich geografisch von Osten nach Westen. Im 8. Jahrhundert begann er im östlichen Orient, im 9. Jahrhundert erreichte er Nordafrika und von dort aus *Al-Andalus*, den maurischen Teil der iberischen Halbinsel. Im Westen entwickelten sich auch geringfügig andere Schreibweisen, die durch die Kontakte mit dem lateinischen Europa dann auch dort übernommen wurden. Dort wurden die unpraktischen römischen Zahlen verwendet, die vor allem als Ordinalzahlen bis in die heutige Zeit überdauert haben. Wie das Beispiel der Medici in Florenz zeigt, dauerte es bis zum Beginn der Neuzeit, bis sich die arabischen Ziffern, die Null und ein Stellenwertsystem auf Basis 10 durchgesetzt hatte. Diese Entwicklung muss man immer abgrenzen von den einfachen Praktiken im Volk oder für das einfache Volk (Stichwort Kerbhölzer, Fingerzahlen), die sich deutlich länger gehalten haben und mit dem mathematisch-akademischen Prozess wenig gemeinsam haben.

Ein weiterer Punkt sind die verwendeten Hilfsmittel, allen voran der Abakus.[62] Auf dem sogenannten „Klosterabakus“ tauchten arabische Zahlzeichen auf den Rechensteinen auf; der Klosterabakus verschwand aber aus dem Gebrauch und damit gerieten zunächst auch die Zahlzeichen in Vergessenheit.

Zwei Namen verhalfen dem indo-arabischen System zum, wenn auch langsamen, Durchbruch: der bereits erwähnte Leonardo di Pisa oder Pisane (de filiis Bonacci, kurz Fibonacci) und vorher Muhammad ibn Musa al-Chwarizmi.

---

[59] https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/geschichte/artikel/leonardo-fibonacci-von-pisa

[60] Charles Seife, Zwilling der Unendlichkeit, Goldmann, München, 2002, S. 92

[61] Siehe auch Oberhessische Naturwissenschaftliche Zeitschrift, Band 70, Gießen 2022, W. Kafitz. Formeln, S. 124

[62] In diesem Beitrag wird die Schreibweise mit „k“ verwendet. Oft findet man auch in der Literatur „Abacus“ mit “c“ geschrieben.

Fibonacci hatte sein Wissen in den westarabischen Ländern erworben, denn sein Vater Guglielmo war nach Bugia (heute Bejaia, Algerien), eine wichtige Hafenstadt in Nordafrika, geschickt worden. Sein Sohn konnte mit seinem 1202 veröffentlichten und 1228 überarbeiten epochalem 500 Seiten Werk „Liber abaci“ (Das Rechenbuch, manchmal auch Liber abbaci) einen nicht zu unterschätzenden Impuls liefern. Andere folgten ihm bis in die Formulierungen hinein. Das erste gedruckte Rechenbuch von 1483 stammt von dem Nürnberger Ulrich Wagner: *Es sein neun bedeutlich figur. 1 2 3 4 5 6 7 8 9. Und die zehent ist 0 und bedeut all ein nichts.*[63] Er dreht damit die Reihenfolge gegenüber Fibinacci um. 1 – 9, 0 steht heute noch auf Computertastaturen.

Das Buch von al-Chwarizmi beginnt ebenfalls mit einem ähnlichen Satz über die neun Ziffern. Aber er führte explizit die Null ein und war damit der eigentliche Urheber der weiteren Entwicklung. Chwarizmi (um 780 bis 850) heißt ausführlich *Abū Ǧaʿfar Muḥammad bin Mūsā al-Ḫwārizmī* und stammt aus Usbekistan. Er nutzte wie selbstverständlich die neuen Ziffern in seinen mathematischen Werken. Um 825 entstand aber auch eine populärwissenschaftliche Schrift. Es ist das Kitāb al-Dschamʿ wa-l-tafrīq bi-ḥisāb al-Hind („Über das Rechnen mit indischen Ziffern“), das bewusst an mathematische Laien adressiert war und auf einfach verständliche Weise das Ziffernsystem und darauf beruhende schriftliche Grundrechenarten behandelte.

Abb. 14: Das Ziffernrechnen (repräsentiert durch Boetius) gewinnt die Oberhand gegen den Abakus (Archimedes).

Vom Titel seines Werkes *al-kitāb al-muḫtaṣar fī ḥisāb al-ǧabr wa-ʾl-muqābala*[64] (Abhandlung über die Berechnung durch Ergänzung und Bilanzierung bzw. Ausgleichen) leitet sich auch der Begriff Algebra ab. Aus seinem latinisierten Namen stammt der Begriff Algorithmus. Über den Handel mit dem Orient, vor allem über die Achse Venedig-Augsburg, wurde es erst dann entdeckt und übersetzt. Es ist nicht im Original, sondern nur in lateinischer Übersetzung erhalten und entfaltete

[63] Zitiert nach De Padova, Thomas: Alles wird Zahl, S. 72
[64] Schreibweisen aus https://de.wikipedia.org/wiki/Al-Chwarizmi, Inhalte siehe Bottazzini, ebenda, S. 52f

dadurch erst deutlich später seine Wirkung in Westeuropa. Entlang der südlichen Mittelmeerküste und in Al-Andalus war es deutlich früher bekannt.

Im 13. Jahrhundert war der Abakus im kaufmännischen und im Finanzwesen zumindest durch das Rechnen auf Linien flankiert worden. Dokumentiert wurde das Ergebnis aber römisch. Das änderte sich 200 Jahre später. Doch eines der frühesten gedruckten Lehrbücher rechnete überraschend noch 1514 mit römischen Zahlen: Es stammt von dem Oppenheimer Stadtschreiber und Eichmeister Jakob Köbel. Seiner Ansicht nach erschweren die indisch-arabischen Zahlen dem „Gemainen Laien" das Rechnen.[65]

Die reine Mathematik, die Mathematik der Gelehrten, wurde nach Jahrhunderten der Lähmung oder gar der Stagnation durch eine Epoche, die wir Renaissance nennen, geradezu explosionsartig vorangetrieben. Während vorher die Klöster die wichtigsten Bildungseinrichtungen waren, so sind es jetzt die Universitäten. In Nürnberg gab es um 1471, dem Geburtsjahr von Dürer, vier sogenannte Lateinschulen. Sie waren Institutionen der Kirche und ursprünglich dem Klerus zur Ausbildung von Priestern vorbehalten, öffneten sich dann aber auch für Laien. Trotzdem waren sie für den Bedarf an Bildung für die Nürnberger Kaufleute und ambitionierten Handwerker nicht mehr ausreichend. Es entstanden aber auch zeitgleich deutsche Schreib- und Rechenschulen.

Kaiser Friedrich II hat durch einen landesfürstlichen Willensakt die erste freie Universität 1224 in Neapel gegründet.[66] Vor allem im oberitalienischen Raum konkurrieren die Universitäten der Stadtstaaten, allerdings geht es nicht um wissenschaftliche Hegemonie, sondern um Einfluss und Macht und es wird vielfach die gegenseitige Anerkennung der Abschlüsse verweigert. Z.B. gehört die Universität Pavia zum Herzogtum Mailand. Wer als Mailänder in Padua studiert, das zu Venedig gehört, muss Strafe zahlen. In Padua hat man aber begonnen, nach Fachrichtungen zu trennen und wurde damit praxisorientierter. Jura war trotzdem fast überall dominant. Als Hochburg wurde Bologna anerkannt. Padua hatte in einem neuen Konzept Medizin und die sogenannten Freien Künste, wozu Mathematik gehörte, von der damals meist übermächtigen juristischen Ausbildung eigenständig gemacht.[67]

1463 kommt Regiomontanus für eine Vorlesungsreihe nach Padua. Sein Ruf eilt ihm bereits voraus. Mit 27 Jahren überblickt er bereits die zeitgenössische Mathematik, insbesondere der Griechen, Astronomie und die damals

---

[65] De Padova, ebenda, S. 273

[66] https://slub.qucosa.de/api/qucosa%3A7968/attachment/ATT-0/ Chronologie der Naturwissenschaften Der Weg der Mathematik und der Naturwissenschaften von den Anfängen in das 21. Jahrhundert

[67] De Padova, Thomas: Alles wird Zahl, Verlag Carl Hanser, München 2021, S. 32

unvermeidliche Astrologie. Er steht in Diensten von Kardinal Bessarion, der u.a. Agenten beschäftigt, um nach antiken Handschriften zu suchen. Regiomontanus hat das Glück, ein verschollenes Exemplar von Diophantos zu finden. Es korrigiert etwas sein Weltbild, denn der übermächtigen Geometrie der Griechen mit ausgefeilten geometrischen Beweisen hat Diophant mit seiner Arithmetik zumindest etwas dagegengesetzt. Regiomontanus war bereits in jungen Jahren ein exzellenter, unvoreingenommener Wissenschaftler. Er erstellte wichtige trigonometrische Tabellenwerke der Astronomie, wie die „*Tabula declinationum generalis*“.[68] Er beginnt in seinen Tabellen mit 0, 1, 2, …, verwendet also die Null ganz selbstverständlich als Ordinalzahl. In Briefen verwendete er anfangs auch für die 4 das Zeichen 🎗.[69]


Lern wol mit fleiß das ein mal ein So wirt dir alle rechnung gemein

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 |
| 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 |
| 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 |
| 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 |
| 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 |
| 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 49 | 56 | 63 |
| 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 |
| 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 |

Abb. 15: Einmaleins-Tafel aus einem Rechenbuch des 16. Jahrhunderts.

In seinen dezimal ausgeführten Rechnungen ist 0 natürlich eine Kardinalzahl. Das widerspricht vollkommen der römischen Tradition, nach der eine Zahl eine Anzahl sein muss. Zu allem Überfluss betrachteten die Griechen die Eins zwar als Ursprung der Zahlen, aber (noch) nicht als Zahl. Dieser Zwiespalt blieb einige Dekaden bestehen, verhinderte aber nicht die Ausbreitung der neuen Ziffern. Im Regensburger Dom wird auf einer Grabplatte in den neuen Zahlen erstmals das Datum 1464 eingraviert.[70]

Abb. 16: Süddeutsche Rechenpfennige zum Rechnen „auf der Linien“ (flacher Abakus).

Für die akademische Mathematik waren die neuen Ziffern regelrecht eine Befreiung. Erstmals war schriftliches Rechnen damit möglich und es entstand relativ schnell eine Formelsprache. Pacioli schlägt vor, p kurz für „plus“ (italienisch: più = *mehr*) und m für „minus“ (italienisch: *meno*) zu schreiben, außerdem verwendet er das Symbol R für die

[68] De Padova, ebenda, S. 61, s.a. zu Regiomontanus https://www.deutsche-biographie.de/pnd118641913.html

[69] Quelle ist unklar, heute wäre es die Gedenkschleife (Unicode U+1F397). Später verwendete er durchgängig die eckige 4.

[70] De Padova, ebenda, S. 58f

Quadratwurzel (*radix*).[71] Plus (+) und Minus (–) etablierten sich wenig später in den Arbeiten von Michael Stifel, Pfarrer, der zunächst den Weltuntergang prophezeite, später eng mit Luther befreundet war und ein sehr guter Mathematiker wurde. Er wurde der erste Mathematikprofessor an der 1558 neu gegründeten Universität Jena.

Negative Lösungen von Gleichungen wurden zögernd akzeptiert, (entsprechende Erkenntnisse von Diophantos sind umstritten). Im Gegensatz zu den großen griechischen Mathematikern, die ausschließlich Geometrie betrieben, war er als Arithmetiker evtl. für negative Lösungen offen.[72] Leonardo di Pisa hat offenbar mit negativen Zahlen bereits intensiv gerechnet.[73] Einer der Ersten war Gerolamo Cardano (1501 – 1576), eine schillernde Persönlichkeit, hervorragender Arzt, der aus seiner Spielsucht heraus die Wahrscheinlichkeitstheorie begründete, ein Wegbereiter der Gleichungslehre war und ebenfalls als Erster mit komplexen Zahlen rechnete.[74] Das war eine Fülle an neuen Impulsen. Cardano hat in seinen mathematischen Arbeiten stark abstrahiert und formalisiert.


Rechnung auff der linihen
gemacht durch Adam Riesen vonn Staffelsteyn in massen man es pflegt zu lern inn allen rechenschulen gruntlich begriffen anno 1518. vleyssigklich uberlesen unnd zum drytten mall in trugk vorfertiget.

Getruckt zu Erffordt durch Matthes Maler 1527.

Abb. 17: Deckblatt des Lehrbuchs von Adam Ries.

Andererseits schaffte das neue Zeitalter auch die wissenschaftlichen Anforderungen für effektiveren Handel, Technik, Verwaltung, Militär oder Schifffahrt. Menschen wurden mobiler. Bevor nördlich der Alpen Bildungseinrichtungen im gleichen Niveau entstanden, zog es viele Studenten nach Italien. Auffallend viele waren es von den großen

[71] Zitat aus https://www.spektrum.de/wissen/luca-pacioli-1445-1517/1009133
[72] Die russische Diophant-Spezialistin Isabella Baschmakowa und der deutsche Mathematikhistoriker Klaus Barner sprechen sich für diese These aus.
[73] Siehe Erläuterungen zum Liber abaci in „A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation, Springer 2002, Translated with Notes by Laurence Sigler, S. 9, kritisch kommentiert von Heinz Lüneburg unter http://www.mifami.org/eLibrary/Fibonacci-LiberAbaci-QuadClass-2pp.pdf, https://web.archive.org/web/20090321083707/http://www.mathematik.uni-kl.de/~luene/miszellen/abbaci.html
[74] https://de.wikipedia.org/wiki/Gerolamo_Cardano

Handelsmetropolen, insbesondere Nürnberg. Ein Rückschlag war zweifellos die grassierende Pest in ganz Europa.

Die indischen Ziffern fanden also langsam Akzeptanz. In Italien etwas früher, in Deutschland hielten sich die römischen Zahlen vereinzelt bis ins 15. oder 16. Jahrhundert. Es gingen aber nicht nur Personen vom gehobenen Stand, sondern auch viele Studenten aus dem merkantilen Bürgertum im ausgehenden 15. Jahrhundert und Anfang des 16. Jahrhunderts an die italienischen Universitäten, um dort das neue Zahlensystem zu studieren.

Nützlichkeit und Wertschätzung bei der Null klaffen jedoch immer noch auseinander. Als gleichberechtigte Zahl wurde die Null erst zu Beginn der Neuzeit betrachtet. Sie galt nur als ein Lückenzeichen im Positionssystem ohne echte mathematische Bedeutung. Die Araber nannten sie al-sifr, („die Leere“). Daraus leiten sich die in Europa verwendeten Bezeichnungen cifra, zephirum bei Leonardo v. Pisa und sciffula bei Jordanus Nemorarius ab. Die Namen haben nicht unbedingt die Bedeutung der Null im Zahlensystem gewürdigt. In der Renaissance war diese Bedeutung „Leere“ nicht mehr bekannt oder nicht mehr wichtig. In der mathematik-historischen Literatur[75] taucht eine andere Erklärung auf. In der alexandrinischen Epoche des antiken Griechenlands wurden ω und α als Zahlzeichen nicht mehr verwendet. Sie wurden ωα Zyphra, also wegen ihrer Form „nutzlose, mit Luft gefüllte Eier“ genannt. Die Araber haben den Begriff aufgegriffen. Als „Ziffer“ hat er sich in der deutschen Sprache für Zahlzeichen etabliert und wurde im Italienischen irrtümlich zu „Zero“. Zumindest zeigt diese eigenwillige Deutung, dass die Entwicklung zur heutigen Bedeutung der Zahl Null nicht geradlinig lief. Immerhin zeigt auch die herausragende Stellung von Alpha und Omega in der Bibel, als Beginn und Ende schlechthin, dass diesen Ziffern eine Sonderstellung eingeräumt wurden. Es war aber noch ein großer Schritt zum reinen Dezimalsystem und zu indo-arabischen Ziffern im allgemeinen Sprachgebrauch. So schrieb man in einem Codex, der unter der Nummer 4753 in der österreichischen Nationalbibliothek aufbewahrt wird: *anno domini 1000 mo 300 mo 15 mo* anstatt gleich 1315. Es tauchen sogar

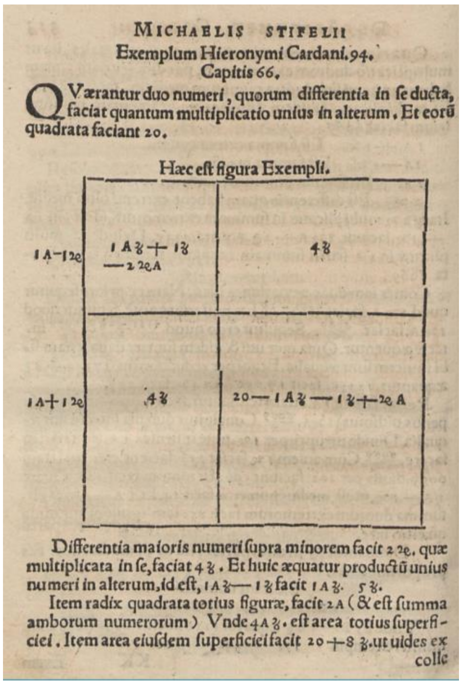


Abb. 18: Quadratische Ergänzung, geometrisch

[75] https://www.hpt.at/sites/default/files/schulbuch_plus_downloads/M_1000_01.pdf

hybride Varianten wie MCCC43 und MCCC44 für 1343 und 1344 auf.[76] 1479 wird in Venedig das erste Rechenbuch gedruckt. Von dem vier Jahre später gedruckten Rechenbuch des Nürnberger Rechenmeisters Ulrich Wagner auf Basis der indischen Ziffern und der Null sind nur noch zwei Exemplare erhalten. Es werden kaufmännisch orientierte Praxisbeispiele behandelt.[77] Im Jahr 1522 wirbt der Rechenmeister Adam Ries(e) (1492 – 1559) ebenfalls für dieses neue Rechensystem und das schriftliche Rechnen. Offenbar war die Zeit reif und er hatte einen großen Erfolg. Er ist sprichwörtlich für Rechnen und Rechenregeln geworden. Sein Lehrbuch *„Rechnung auff der Linihen und Federn“*[78] wurde bis ins 17. Jahrhundert mindestens 120-mal aufgelegt. Es wurde vollkommen unüblich für die damalige Zeit in Deutsch verfasst. Er machte nicht nur die arabischen Zahlen mit der Null populär, sondern hat damit in gewissem Sinne zur Vereinheitlichung der deutschen Sprache beigetragen.[79] „Auf der Linien“ heißt allerdings Benutzung des linierten Abakus, eines Zähltisches mit eingeritzten Linien oder eines mobilen Zähltuchs. Er kombiniert also die beiden vorherrschenden Methoden mit Erfolg. Wo beim Abakus noch eine Leerstelle blieb, ist beim Schreiben mit den „*Federn*“ eine „0“ zu setzen. Während Wagner vornehmlich für seine Schüler Übungsmaterial bereitstellte, hat Ries ein echtes, didaktisch fundiertes Lehrbuch geschrieben. Es enthält bis heute gängige Begriffe wie „*Zehler*“ und „*Nenner*“ und ist in der gleichen Sprache geschrieben, wie die im gleichen Jahr 1522 erschienene Bibel (Neues Testament) von Martin Luther (Deckname Junker Jörg).[80] Ries hat sich bewusst auf Rechentechniken („Hausrechnung“) beschränkt.

Stifel will darüber hinaus arithmetische Operationen beschreiben („Kunstrechnung“), aber er möchte es behutsam machen. Schließlich hat er sich sein enormes Wissen autodidaktisch erarbeitet. In Italienischen gibt es bereits für die Algebra (genauer für die Unbekannte, die wir meist x nennen) den Begriff „Coss“ (Coß), den Christoph Rudolff (1499 – 1543) auch benutzt. Rudolff´s Werk heißt „*Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen regeln Algebre, so gemeinicklich die Coß genennt werden*“ und ist 1515 in Straßburg erschienen. Die Zielgruppe sind Händler. Er benutzt als Quelle unter anderem eine lateinische Übersetzung von Robert von Chester der Algebra von Al-Chwarizmi und Algebra-Texte von Johann Vögelin in Wien.[81] Rudolff behandelt

---

[76] De Padova, ebenda, S. 76
[77] De Padova, ebenda, S. 271
[78] Deutsches Museum: http://digital.bib-bvb.de/view/bvbmets/viewer.0.6.4.jsp?folder_id=0&dvs=1674647467387~953&pid=2471296&locale=de&usePid1=true&usePid2=true
[79] https://de.wikipedia.org/wiki/Adam_Ries
[80] De Padova, ebenda, S. 276
[81] https://de.wikipedia.org/wiki/Christoph_Rudolff

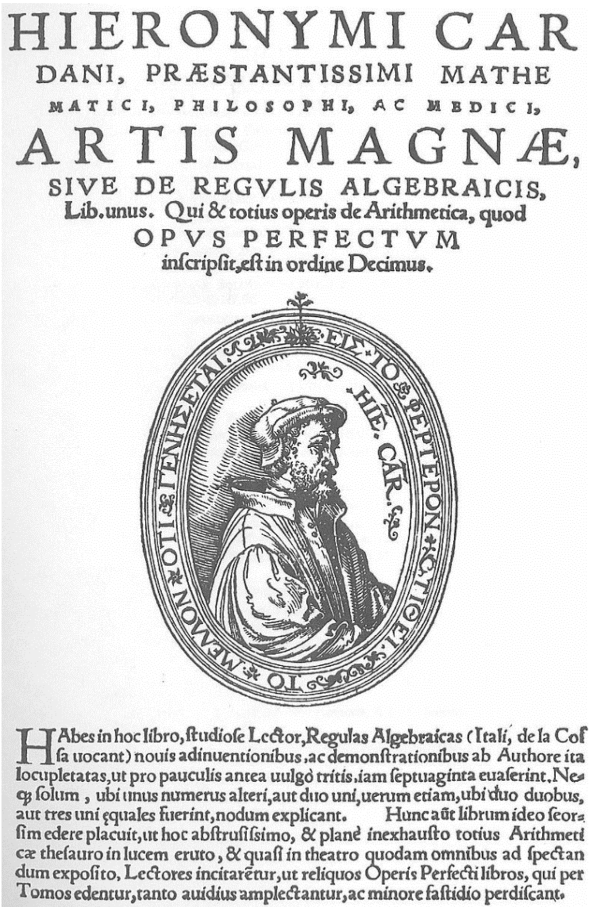
unter anderem die Lösung linearer und quadratischer Gleichungen. Dieses Buch überarbeitet und ergänzt Stifel enorm.[82] Er übernimmt den „Wurzelhaken“, der sich auch international durchsetzen wird. Rudolff hat auch sinnvollerweise definiert, dass $x^0=1$ ist.

Die Abbildung 18 zeigt einen quadratischen Ausdruck, den wir heute in der Form schreiben:

$$x^2+8x=20 \text{ oder } x^2+8x-20=0.$$

Das kleine Quadrat hat die Seitenlänge x. Ein Rechteck 8x (Länge 8, Höhe x) wird in zwei Rechtecke der Länge 4 aufgeteilt und das ergänzte Quadrat rechts unten hat somit die Fläche 4x4=16.

Das so gebildete große Quadrat hat also die Fläche $x^2+4x+4x+16$.



HIERONYMI CAR DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI, ARTIS MAGNÆ, SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS, Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod OPVS PERFECTVM inscripsit, est in ordine Decimus.

HAbes in hoc libro, studiose Lector, Regulas Algebraicas (Itali, de la Cossa uocant) nouis adinuentionibus, ac demonstrationibus ab Authore ita locupletatas, ut pro pauculis antea uulgò tritis, iam septuaginta euaserint. Neq; solum, ubi unus numerus alteri, aut duo uni, uerum etiam, ubi duo duobus, aut tres uni æquales fuerint, nodum explicant. Hunc aũt librum ideo seorsim edere placuit, ut hoc abstrusissimo, & planè inexhausto totius Arithmeticæ thesauro in lucem eruto, & quasi in theatro quodam omnibus ad spectandum exposito, Lectores incitarẽtur, ut reliquos Operis Perfecti libros, qui per Tomos edentur, tanto auidius amplectantur, ac minore fastidio perdiscant.

Abb. 19: Deckblatt von Gerolamo Cardanos Werk über Algebra

Da laut Aufgabenstellung $x^2+8x=20$ ist, ergibt sich die Fläche des großen Quadrates zu 20+16=36. Also hat das große Quadrat die Seitenlänge 6.

Aus dem Vergleich des großen und des ergänzten Quadrats ergibt sich für die Seitenlänge des ursprünglichen Quadrats 6–4=2

Das eindeutige Ergebnis ist für Michael Stifel x=2.

Die negative Wurzel, die $x_2 = -10$ ergibt, ignoriert Stifel, da das kleine Quadrat keine negative Seitenlänge haben kann.

Schaut man sich heute die sogenannte p-q-Formel an,

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

so sieht man, dass p vor und unter der Wurzel als $\frac{p}{2}$ bzw. $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ auftaucht.

[82] https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/1317/1

Der Kunstgriff p·x, aufgefasst als Rechteck, in zwei Rechtecke aufzuteilen, hat also einen tieferen Sinn.

Entsprechende Beispiele sehen bei Cardano[83] total anders und extrem unübersichtlich, aber auch kürzer aus. Allerdings kümmert er sich mehr um kubische und quartäre Gleichungen. Zweifellos sind seine Beiträge zur Algebra in der frühen Neuzeit eine herausragende Leistung. Über seine Charaktereigenschaften spricht er selbst ein vernichtendes Urteil. Sein Name ist aber mit einem anderen Gebiet der Mathematik untrennbar verbunden.

Er stellt sich die Aufgabe: Teile die Zahl 10 in zwei Teile, deren Produkt 40 ist.[84]

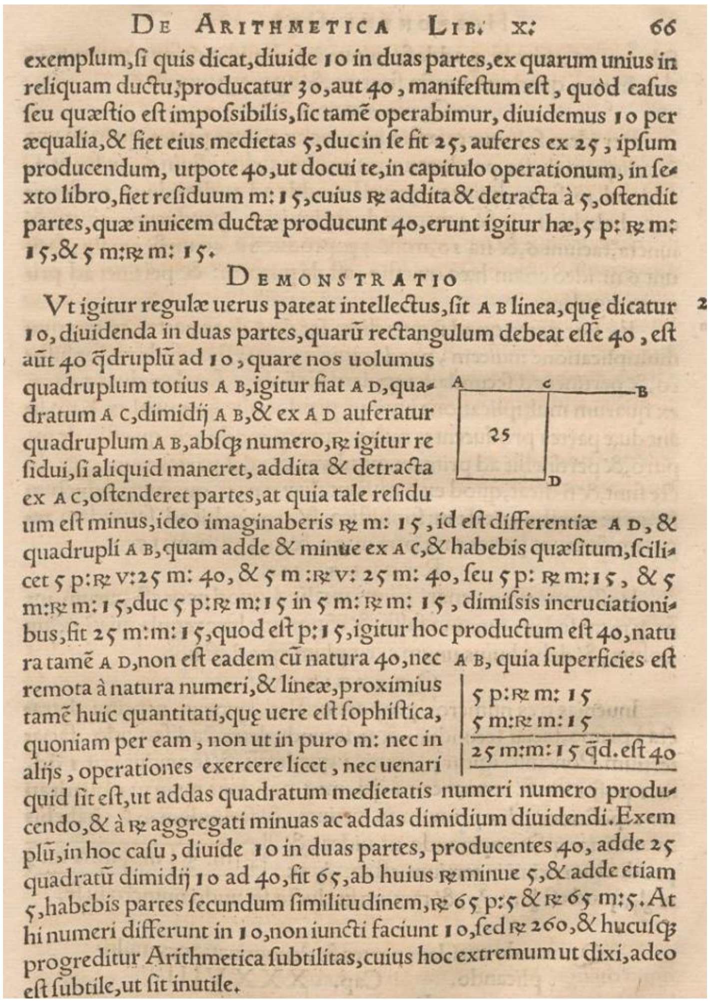
Die erste Reaktion mancher Leser wird sein, dass das unmöglich ist. Selbst 5x5 ergibt nur 25, das weit entfernt von 40 ist. Die Lösung erschließt sich über ein Verfahren, bei dem die Quadratwurzel einer negativen Zahl eine Rolle spielt. Das war die Geburtsstunde der komplexen Zahlen, die die Mathematik und ihre Anwendungen bis heute maßgeblich prägen.

Die Lösung: Man zieht von einem Faktor 5 etwas ab und addiert es zum 2. Faktor 5.

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15}) = 25 + 5\sqrt{-15} - 5\sqrt{-15} - \sqrt{-15}\sqrt{-15} =$$

$$25-(-15) = 40$$

Notation von Cardano: 5p: R$_{|2}$ m: 15 et 5m R$_{|2}$ m: 15 25m: m:15 d.i 40[85]



DE ARITHMETICA LIB. X: 66

exemplum,ſi quis dicat,diuide 10 in duas partes,ex quarum unius in reliquam ductu,producatur 30,aut 40, manifeſtum eſt, quòd caſus ſeu quæſtio eſt impoſsibilis,ſic tamẽ operabimur, diuidemus 10 per æqualia,& fiet eius medietas 5,duc in ſe fit 25, auferes ex 25, ipſum producendum, utpote 40,ut docui te,in capitulo operationum, in ſexto libro,fiet reſiduum m: 15,cuius ℞ addita & detracta à 5,oſtendit partes,quæ inuicem ductæ producunt 40,erunt igitur hæ, 5 p: ℞ m: 15,& 5 m: ℞ m: 15.

DEMONSTRATIO

Vt igitur regulæ uerus pateat intellectus,ſit A B linea,quę dicatur 10, diuidenda in duas partes,quarũ rectangulum debeat eſſe 40, eſt aũt 40 q̃druplũ ad 10, quare nos uolumus quadruplum totius A B,igitur fiat A D,quadratum A C,dimidij A B,& ex A D auferatur quadruplum A B,abſq; numero,℞ igitur reſidui,ſi aliquid maneret, addita & detracta ex A C,oſtenderet partes,at quia tale reſiduum eſt minus,ideo imaginaberis ℞ m: 15, id eſt differentiæ A D, & quadrupli A B,quam adde & minue ex A C,& habebis quæſitum,ſcilicet 5 p: ℞ v: 25 m: 40, & 5 m: ℞ v: 25 m: 40, ſeu 5 p: ℞ m: 15, & 5 m: ℞ m: 15,duc 5 p: ℞ m: 15 in 5 m: ℞ m: 15, dimiſsis incruciationibus,fit 25 m: m: 15,quod eſt p: 15,igitur hoc productum eſt 40,natura tamẽ A D,non eſt eadem cũ natura 40,nec A B, quia ſuperficies eſt remota à natura numeri,& lineæ,proximius tamẽ huic quantitati,quę uere eſt ſophiſtica, quoniam per eam, non ut in puro m: nec in alijs, operationes exercere licet, nec uenari quid ſit eſt,ut addas quadratum medietatis numeri numero producendo,& à ℞ aggregati minuas ac addas dimidium diuidendi. Exemplũ,in hoc caſu, diuide 10 in duas partes, producentes 40, adde 25 quadratũ dimidij 10 ad 40,fit 65,ab huius ℞ minue 5,& adde etiam 5,habebis partes ſecundum ſimilitudinem,℞ 65 p: 5 & ℞ 65 m: 5. At hi numeri differunt in 10,non iuncti faciunt 10,ſed ℞ 260,& hucuſq; progreditur Arithmetica ſubtilitas,cuius hoc extremum ut dixi,adeo eſt ſubtile,ut ſit inutile.



Abb. 20: Seite aus Cardanos *Ars magna* mit der Aufgabe x+y=10 und x·y=40

[83] Hieronymus Cardano, Nürnberg 1545, Ars magna, https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/2690143
[84] Die Argumentation folgt De Padova, ebenda, S. 337ff
[85] Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 1927, S. 77, H. Wieleitner, Zur Frühgeschichte des Imaginären

Um die Lösung nicht zu erraten, sondern zu errechnen, müssen zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$x+y=10 \text{ und } x\cdot y=40$$

Daraus ergibt sich $x\cdot(10-x)=40$

also die quadratische Gleichung $x^2-10x+40=0$

Analog zu Stifel kann Cardano wieder geometrisch argumentieren und das „Rechteck" $-10x$ in zwei „Rechtecke" a´ $-5x$ aufteilen:

$$x^2-5x-5x+25=-15$$

$$(x-5)(x-5)=-15 \text{ also}$$

$$x-5=\pm\sqrt{-15} \text{ und damit die Teilstücke bzw. Faktoren}$$

$$\left(5+\sqrt{-15}\right)\left(5-\sqrt{-15}\right)=40$$

Er schreibt zwar: *„So schreitet die Arithmetik listig voran….Das Ende von alldem aber ist, wie gesagt, so raffiniert, wie es nutzlos ist."*[86] Er behandelt aber weitere Probleme erfolgreich nach dieser Methode. Er sollte mit der „Nutzlosigkeit" gründlich Unrecht haben, wobei offen ist, ob er es so meinte. Es sicherte auf jeden Fall seinem Namen einen Platz in der Geschichte der Mathematik.

Neben Geralomo Cardano sollte man Scipione del Ferro, Niccolo Tartaglia und insbesondere Raffael Bombelli, der die Theorie maßgeblich etabliert hat, unbedingt für die Anfänge in der Renaissance nennen. Die Wurzeln negativer Zahlen wurden bei der Untersuchung von Gleichungen benötigt, egal ob sie quadratisch, kubisch oder von höherer Dimension sind. Es stellte sich heraus, dass jede Gleichung lösbar ist, wenn man alle Zahlentypen zulässt. Später wurde die Theorie der komplexen Zahlen von großen Namen der Mathematik vorangetrieben. Der Begriff stammt von Gauß, der den Fundamentalsatz der Algebra bewies, der die algebraische Abgeschlossenheit im Rahmen der komplexen Zahlen feststellt. Die imaginären Zahlen verdanken René Descartes ihren Namen. Den Vorschlag, ihre Einheit $i=\sqrt{-1}$ zu nennen, wird Leonhard Euler zugeschrieben. Zur Geschichte siehe z.B. [87]. Siehe auch den mathematischen Teil dieses Beitrags. Wesentliche technische Errungenschaften unserer Zeit sind ohne komplexe Zahlen nicht denkbar.

[86] Zitiert nach De Padova, ebenda, S. 338, im lateinischen Original siehe Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,1927, S. 77, H. Wieleitner, Zur Frühgeschichte des Imaginären

[87] https://www.mathematik.tu-dortmund.de/sites/funktionentheorie-i-wise-1718/download/Komplexe_Zahlen_Historie.pdf

Auch Albrecht Dürer (1471 – 1528) beschäftigt sich mit Erfolg als Mathematiker und veröffentlicht ebenfalls in Deutsch. Auch in seinen künstlerischen Arbeiten tauchen immer wieder mathematische Sujets auf. In seinem Kupferstich Melencolia I hat er auf der Wand ein magisches Quadrat platziert, das nicht nur bei den Zeilen, Spalten und Diagonalen die Summe 34 ergibt, sondern auch bei den vier Quadranten. Es stammt aus dem Jahr 1514, das sich in der letzten Zeile in Form von 15 und 14 findet, flankiert von 4 und 1, die den Initialen A und D entsprechen, mit denen Albrecht Dürer signiert. Er gilt als „mathematischer Kopf" unter den Künstlern seiner Zeit.[88] Wahrscheinlich, weil Leonardo da Vinci zwar als Universalgenie überaus produktiv war, aber kaum etwas publiziert hatte. Für beide war Mathematik sowohl Erkenntnisgewinn per se, als auch Mittel, um ihre Kunst zu vervollkommnen. Sie suchten mit großem Fleiß, der manchmal an Besessenheit grenzte, nach Symmetrieeigenschaften, den Anforderungen an die Zentralperspektive, an die Wirkung des goldenen Schnitts auf die Betrachter oder sie bauten Hilfsmittel, wie Perspektographen. Sie betrachteten die Mathematik als einen weiteren Weg, neben der intensiven Naturbetrachtung, als Schlüssel zur Ästhetik in ihrer Kunst. Auch wenn sie um die Grenzen von beiden Wegen wussten, denn die Natur bleibt immer etwas Rätselhaftes. Dürer schrieb einmal in einem der frühen Entwürfe zu einem Lehrbuch der Malerei: „*Waß aber dy schonheit sey, daz weis jch nit.*"[89] Für beide Künstler der noch jungen Renaissance war das kein Grund zur Resignation. Die Freundschaft zwischen dem Mönch und Mathematiker Pacioli und dem Maler wurde eine echte „win-win-Situation". Leonardo da Vinci ermunterte seinen Lehrer Luca Pacioli zu seinem Werk über den goldenen Schnitt und steuerte 60 Polyederzeichnungen von einzigartiger Plastizität bei.[90]


Abb. 21: Melencolia I,
Albrecht Dürer, 1514

[88] C. J. Scriba, P. Schreiber: 5000 Jahre Geometrie. 2. Auflage. Springer, Berlin/ Heidelberg 2005, zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Albrecht_Dürer

[89] Zitiert nach De Padova, ebenda, S. 221

[90] Elisabeth Tiller, Luca Paciolis De divina proportione (1509), https://edoc.hu-berlin.de/bitstream/handle/18452/8291/tiller.pdf, S. 7

Renaissance bedeutet Rückbesinnung auf antike Tugenden, aus denen heraus Kunst, Wissenschaft, Kultur, aber auch die Wirtschaft sich revolutionierten. Passend wurde 1543 in Nürnberg ein Werk namens „*De revolutionibus*" gedruckt, das, nach dem Autor benannt, ein neues, das kopernikanische Weltbild einleitete.

Eine Nivellierung in der Notation und der Sprache lieferte die Erfindung des Buchdrucks. Papier ist übrigens über den gleichen Weg, wie die indisch-arabischen Zahlen, über Nordafrika und Spanien ins Abendland gekommen. Allerdings entwickelt sich die Technik anders als in China oder den arabischen Ländern. Die erste nennenswerte Papierproduktion etablierte sich in Fabbriano bei Ancona bereits im 13. Jahrhundert. Trotzdem war es noch ein kostbares Medium. Es musste mühsam mit einem Leim behandelt werden, damit die Tinte nicht verlief. Der Buchdruck veränderte die Situation und verbreitete sich zuerst in Italien und dann ebenso schnell wie in Deutschland, wo er erfunden wurde, in ganz Mitteleuropa. Nur gedruckte Werke verbreiteten sich von nun an rasch, denn alle anderen Publikationen mussten händisch kopiert werden. Selbst das *Liber abaci* fand lange keinen Verleger. Pioniere in Italien waren Arnold Pannartz und Konrad Sweynheim, die ihr Handwerk in Mainz gelernt hatten. Allerdings hatten praktisch alle Buchdrucker nur ihr Know-how und wenig Eigenkapital mitbringen können. Die Durststrecke bis zum „Break-even" haben manche nicht überstanden. Selbst Gutenberg musste seine Druckerei dem Investor überlassen. Pannartz und Sweynheim überlebten wirtschaftlich nur durch kirchliche Hilfe. Doch der Wirtschaftszweig hatte Potential und „*der Kulturtransfer über die Alpen*" (de Padova) lohnte sich wirtschaftlich und kulturell. Bis zur Jahrhundertwende 1500 sollen in Rom 40 Druckerwerkstätten, vornehmlich von Deutschen, entstanden sein, die 1800 Buchtitel in einer Gesamtauflage von einer halben Million gedruckt haben. Parallel entstanden Hunderte von Papiermühlen für das neue Medium.[91] Das immer effizienter herstellbare Papier veränderte fundamental die europäische Schriftkultur. Im Alltag des Volkes wurde Papier anfangs noch selten benutzt. In Handel, Verwaltung, Wissenschaft und Kunst entwickelten sich rapide die neuen Möglichkeiten. Schriftliches, nachvollziehbares Rechnen war einer der wesentlichen Faktoren und die neuen Zahlen mit der Null machten es deutlich effektiver. Der Druck wurde zum Multiplikator auch für das mathematische Wissen. Die Renaissance sei nicht aus Purpur und Gold gemacht, so der

---

Digitalisiertes Original https://ia904605.us.archive.org/11/items/de-divina-proportione/De-Divina-Proportione.pdf

[91] De Padova, ebenda, S. 101f

Historiker Bernd Roeck: „*Die eigentlichen Stoffe, die sie bilden, sind jenseits der Kunstwerke Papier, Tinte und Druckerschwärze*.“[92]

Im Frühjahr 1471 kommt Regiomontanus nach Nürnberg und gründet dort den ersten mathematisch-naturwissenschaftlichen Fachverlag. Er ist zwar kein gelernter Buchdrucker, aber erkennt die Tragweite des Mediums. Sowohl der Standort, als auch das Repertoire sind sehr gut gewählt. Nürnberg liegt im Schnittpunkt der großen Handelswege, sowohl nach Norden, aber auch nach Wien, Genf und über den Brennerpass nach Italien. Das Verlagsprogramm umfasst Werke von Jordanus Nemorarius und Johannes de Muris, die auf die gleichen arabischen Quellen zurückgriffen, wie auch Leonardo de Pisa.[93] Das waren die unmittelbaren Impulse für die indo-arabischen Ziffern inkl. der Null. Ebenso wichtig waren Werke von Ptolemäus, die Elemente von Euklid, die bis dahin unbekannten Kegelschnitte des Apollonius von Perge und natürlich Archimedes. Diese erstmals gedruckt vorliegenden Meisterwerke beeinflussten massiv die kommenden großen Wissenschaftler, nicht zuletzt Galileo Galilei. Obwohl Regiomontanus bereits mit 40 Jahren in Rom stirbt, ist die Wirkung seiner akribischen Arbeit noch lange unmittelbar zu spüren. Seine Impulse tragen dazu bei, dass der Julianische Kalender reformiert werden kann. Sein genauer Almanach mit den auf ca. 30 Jahre im Voraus berechneten Positionen der Himmelskörper, Mondfinsternisse und Planetenkonjugationen hat Kolumbus nachweislich auf seine Reise nach Westen mit an Bord genommen und benutzt.[94,95]

Abschließend kann man zu dieser Entwicklung feststellen, dass zu Beginn der Neuzeit die Null und die indo-arabischen Ziffern in der europäischen akademischen Mathematik, im Handel, der Verwaltung sowie Architektur und Technik fast vollständig angekommen waren. Es entwickelte sich in der Renaissance eine Blütezeit der Mathematik. Die Null wurde eine Zahl wie jede andere, aber für sich auch besonders.

Allerdings hatte eine besondere Stellung unter den frühen Mathematikern die Frage nach der Division durch Null. Noch Leonard Euler hatte einen durchaus unbekümmerten Umgang mit dieser Frage. 1 durch 0 setzte er einfach als Unendlich und spekulierte sogar über „Klassen von Unendlich“ bei 2 durch 0, 3 durch 0 usw. Der Astronom und Mathematiker Brahmagupta formulierte es im siebten Jahrhundert in der Sache ähnlich, aber weniger unbekümmert: "*Dividiert*

[92] Zitiert nach De Padova, ebenda, S. 107
[93] De Padova, ebenda, S. 115f
[94] De Padova, ebenda, S. 157
[95] Chronik der Naturwissenschaften, Jahr 1474, https://slub.qucosa.de/api/qucosa%3A7968/attachment/ATT-0/

*man irgendeine Zahl durch das Nichts, so wird Unendlichkeit"*.[96] Bei der Infinitesimalrechnung wurde nochmals leidenschaftlich über das Thema diskutiert. Mit der systematischen Verbesserung der Infinitesimalrechnung im Hinblick auf korrekte Sprache und Methodik wurde der Umgang mit verschwindenden Werten beim Grenzwertprozess mathematisch sauber definiert. Im Bereich der reellen und komplexen Zahlen, oder auch Schiefkörpern, wie den Quaternionen, wird eine Division durch Null, sozusagen in ihrer Eigenschaft als Kardinalität der leeren Menge, ausgeschlossen.

Nur in wenigen Bereichen werden heute noch römische Zahlen eingesetzt. Beispiele sind dekorative Jahreszahlen über Eingangstüren, zählender Namenszusatz beim Adel oder bei Päpsten („Elisabeth II.“), Ziffernblätter von Uhren, Ordinalzahlen z.B. bei Vorworten von Büchern, etc.

Kennzeichnend sind meist übertrieben ausgeprägte, ornamentale Serifen. Sie unterstreichen den Schmuckcharakter oder auch die herausragende Bedeutung dieser Zahlen im betreffenden Verwendungszweck.

Es setzte sich der Einfluss der Null sogar in Bereichen durch, die nur indirekt mathematisch motiviert waren. 1625 zeichnete Brunelleschi das Baptisterium, also die Taufkirche, die neben dem Dom in Florenz steht. Er nutzte zur Strukturierung des Bildes erstmals einen nulldimensionalen Fluchtpunkt. Das war der Beginn der Zentralperspektive in der darstellenden Kunst. Die Perspektive bewirkt, dass der Blick des Betrachters ins Unendliche geführt wird.

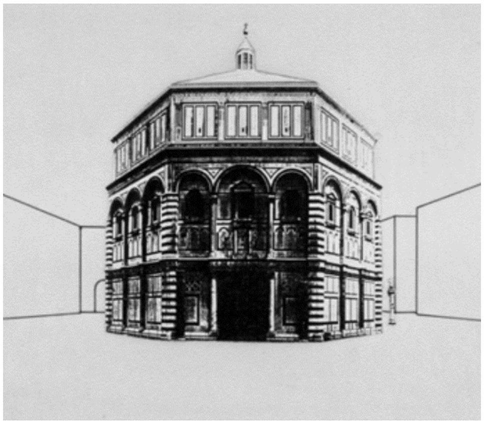


Abb. 22: Entdeckung der Zentralperspektive durch Filippo Brunelleschi (1425)

Die Null wird zum „Zwilling der Unendlichkeit“ (Charles Seife). Leonardo da Vinci, der sich intensiv mit Mathematik und anderen Naturwissenschaften befasste, schrieb einen mathematisch fundierten Leitfaden, um korrekt perspektivische Darstellungen malen zu können.[97] Im übertragenen Sinne fand die Null auch in andere Disziplinen Eingang. Besonders dramatische Diskussionen um das „Nichts“ und das „Unendliche“ fanden in der Theologie zu Beginn der Renaissance statt, die die katholische Kirche anfangs vollkommen unterschätzt hat. Die aristotelische

---

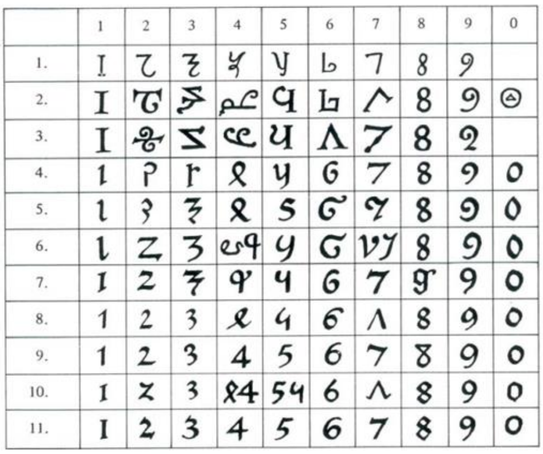
[96] https://www.derstandard.de/story/2000064375746/die-zahl-null-ist-aelter-als-angenommen

[97] Seife, ebenda, S. 99 f, siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Codex_Madrid_(Leonardo_da_Vinci)

Lehre geriet in Gefahr. Der deutsche Theologe und begeisterte Mathematiker Nikolaus von Kues, der 1448 zum Kardinal ernannt wurde, griff die neuen Ideen unbekümmert auf. Für seinen Ausspruch: „*Terra non est centrum mundi*“[98] wäre er 150 Jahre später, wie Bruno Giordano, wegen Ketzerei auf dem Scheiterhaufen gelandet.

Der Angriff gegen die katholische Kirche gipfelte 1517 als Martin Luther seine Thesen an die Schlosskirche zu Wittemberg anschlug und 1530 als Heinrich VIII sich zum Oberhaupt der englischen Kirche erklärte. Die katholische Kirche reagierte nicht durch Öffnung, sondern durch harte Bekräftigung der alten Doktrin. 1543 begann die spanische Inquisition Protestanten zu verbrennen; im gleichen Jahr wurde vom Vatikan der Index verbotener Bücher verkündet; in diesem Jahr starb Nikolaus Kopernikus, nachdem er kurz vor seinem Tod seine Ideen veröffentlicht hatte. Die Kirche bezog sich wieder konsequent auf Aristoteles und seine Metaphysik, die z.B. kein „Nichts“ zulässt („*Horror vacui*“).

Diese Bastion wurde durch Evangelista Torricelli, einem Schüler von Galileo Galilei, 1643 erobert. Er füllte eine einseitig verschlossene Röhre mit Quecksilber und tauchte sie umgekehrt in ein Quecksilberbad. Das Quecksilber in der Röhre sank auf ca. 76 cm. Am oberen Ende der Röhre entstand ein Leerraum, der ein Vakuum sein musste. Blaise Pascal entdeckte mit dem Versuchsaufbau von Torricelli Luftdruckschwankungen. Die Luftsäule über uns




1. Cod. Vigilianus (976 n.Chr.)
2. Cod. Erlangen (Mitte des 11.Jhs.)
3. „Boetius“-Geometrie (13.Jh)
4. Cod. Vindobonensis [al-Hwarizmi] (1143 n.Chr.)
5. Cod.Par.bibl.nat.16208 (vor 1180)
6. Cod.Par.bibl.nat.16202 (Anfang des 13.Jhs.), Cod.Par.bibl.nat.7359 (um 1300)
7. Columbia-Algorismus (14. Jh.)
8. Algorismus Ratisbonensis (vor 1450)
9. Treviso-Arithmetik (1478)
10. Bamberger Rechenbuch von 1483
11. Albrecht Dürer

Abb. 23: Entwicklung der indischen Ziffern im Abendland

musste ein leicht veränderliches Gewicht haben. Luft hatte also ein Gewicht, nur das Vakuum hatte das Gewicht Null.

[98] „Die Erde ist nicht der Mittelpunkt des Kosmos“, zitiert nach Seife, Null - Zwilling der Unendlichkeit, S. 99

Erst als der Weg frei zu Verallgemeinerungen war, die heute am häufigsten in der Algebra, aber auch der Topologie, zu finden sind, muss man genauer hinschauen. Am bekanntesten und durchaus wichtigsten ist das Nullelement in additiven Gruppen. In der Funktionentheorie sind Nullstellen von großer Bedeutung. Die wichtigste Erkenntnis in diesem Bereich heißt Fundamentalsatz der Algebra (Gauß-d'Alembert). Aber auch Begriffe wie Nullfläche, Nullfolge, Nullring, Nullideal, Nullmenge oder Nullteiler können im weitesten Sinne als algebraische oder topologische Verallgemeinerungen der Null angesehen werden. Weitere Begriffe tragen die Null im Namen, wie Nullhomotoper Weg, Nullsummenspiel, Nullfläche oder Nullhypothese. Die Zahl 0, oft in Verbindung mit der 1, bestimmen wichtige Sätze. Nicht zuletzt das binäre System hat eine digitale Revolution hervorgerufen. Dazu mehr im mathematischen Teil dieses Beitrags.

## Die Null in frühen Kulturen

Sumerer

Die Sumerer gelten als erste Hochkultur der Geschichte. Sie geht bis zum 3. Jahrtausend vor Christi zurück. Ihre Schrift und die bürokratische Organisation ihres Staatswesens prägten viele Kulturen nach ihnen. Ihre ausgefeilten Bewässerungstechniken machten wesentlich komplexere Organisationsformen der Gesellschaft nötig.

Die Schrift der Sumerer, später Babylonier, heißt mit Recht Keilschrift. Diese Schrift entwickelte sich von einer Bilderschrift zu einer Silbenschrift, aus der eine phonetische Konsonantenschrift hervorging, die mehrere Sprachen abbilden konnte. Akkadier, Babylonier, Assyrer, Hethiter oder Perser benutzten sie, bevor sie durch nachfolgende Schriftformen, wie die phönizische und daraus die aramäische verdrängt wurde. Damit war sie auch Stammbaum vieler späterer Schriften inkl. der europäischen Schreibweisen.

Mit einem Halm oder Griffel wurden Zeichen in feuchten Ton geritzt und bei Bedarf diesen durch Brennen konserviert. Abertausende dieser Tontäfelchen sind erhalten geblieben und viele warten noch auf die Entzifferung. Das Material ist viel beständiger als z.B. der in Ägypten verwendete, sehr empfindliche Papyrus.

Sie kannten anfangs zwar keine Null als Zeichen oder gar Zahl. Es gab aber einen Hinweis, wenn Minuend und Subtrahend bei einer Differenz gleich waren. Der Schritt, diesem Ergebnis ein Zeichen oder Namen zuzuordnen, wurde noch nicht vollzogen. Nur in wenigen frühen Texten wurden Fehlstellen durch eine

Leerstelle gekennzeichnet; meist musste darauf aus dem Zusammenhang geschlossen werden.[99]

Die Sumerer[100] und spätere, daraus hervorgehende Kulturen, verwendeten für ihre Zahlen ein Sexagesimalsystem (auch Hexagesimalsystem oder Sechziger-System, von lateinisch sexagesimus, der Sechzigste). Man nimmt an, dass die gute Teilbarkeit der Zahl 60 entscheidend für die Wahl dieser Basis war. Zunächst kann man es noch nicht Stellenwertsystem nennen, denn es gab noch kein Zeichen, das man als Null identifizieren könnte. Nur in wenigen frühen Texten wurden Fehlstellen im Sexagesimalsystem durch eine Leerstelle gekennzeichnet; meist musste darauf aus dem Zusammenhang geschlossen werden. Ein Hexagesimalsystem ist durchaus nichts Ungewöhnliches, denn es wird weltweit auch heute noch verwendet, um Winkel und geografische Längen und Breiten anzugeben. Ein Grad hat 60 Winkelminuten und eine Minute hat 60 Sekunden. Auch bei der Uhrzeit hat dieses System überdauert. Ein Versuch während der französischen Revolution, beide sechziger (Restklassen)Systeme auf eine dezimale Uhrzeit umzustellen, scheiterte am Widerstand der Bevölkerung. Es sind Uhren mit einer 10-Stundenskala a‘ 100 Minuten und 100 Sekunden pro Minute als kuriose Einzelstücke erhalten geblieben. 60 Minuten pro Stunde bzw. Sekunden pro Minute sind jedoch fast ohne Erinnerung an die historischen Bezüge weltweit selbstverständlich geworden.


Abb. 24: Mathematische Tafel aus Uruk, eines der ältesten Zeugnisse zur Verwendung der Null.

Die Sumerer hatten bis zur Zahl 60 jeweils ein Zeichen für Einer und für Zehner. Fünfer gab es nicht. Es wurde auch nicht wie bei den römischen Zahlen

[99] https://de.wikipedia.org/wiki/Null

[100] Wesentliche Informationen zur sumerischen Zahlendarstellung in verdichteter Form stammen von Kaplan, S. 14 ff, ausführlicher bei Ifrah, z.B. S. 319f

zwischen vorgestellten und nachgestellten Zahlzeichen unterschieden. (römisch IX entspricht z.B. 9, XI entspricht bekanntlich 11).

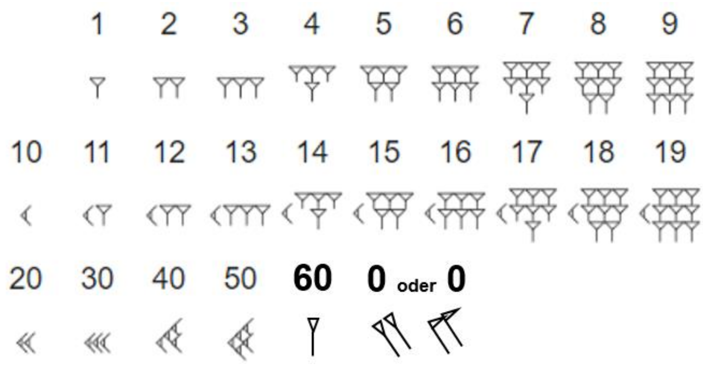



Abb. 25: Sumerische Zahlzeichen.

Nach 59 kommt das Hexagesimalsystem zum Tragen. Die 60 sieht aus wie eine Eins, ist aber deutlich größer. Ähnlich, wie wir heute, werden die Ziffern von rechts nach links, also von den kleineren zu den größeren Elementen einer Zahl gelesen, auch wenn von links nach rechts geschrieben wird. Durch die ähnliche Form bei Sechzigern und Einer war die Größe ein entscheidender Faktor.

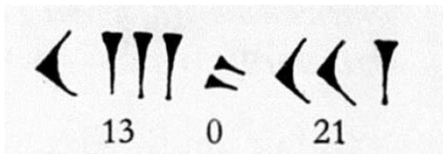



Abb. 26: Die Zahl 13021

Im Prinzip werden nur zwei Zeichen gebraucht, ein Winkel für 10 und Eins bzw. Sechzig, wobei sich 1 und 60 nur in der Größe unterscheiden. Die Null wurde schräggestellt.

| | Stellenwert 3.600 | | Stellenwert 60 | | Stellenwert 1 | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| sumerische Zahl | | ; | 1 | ; | 5 | | |
| Dezimalzahl | 0 | + | 60 | + | 5 | = | 65 |
| sumerische Zahl | | ; | 5 | ; | 36 | | |
| Dezimalzahl | 0 | + | 300 | + | 36 | = | 336 |
| sumerische Zahl | 1 | ; | 1 | ; | 1 | | |
| Dezimalzahl | 3.600 | + | 60 | + | 1 | = | 3.661 |
| sumerische Zahl | 1 | ; | 55 | ; | 14 | | |
| Dezimalzahl | 3.600 | + | 3300 | + | 14 | = | 6.914 |
| sumerische Zahl | 4 | ; | 7 | ; | | | |
| Dezimalzahl | 14.400 | + | 420 | + | 0 | = | 14.820 |
| sumerische Zahl | 59 | ; | 59 | ; | 59 | | |
| Dezimalzahl | 212.400 | + | 3540 | + | 59 | = | 215.999 |

Abb. 27: Hexagesimales Stellenwertsystem

Doch die Gesellschaft wuchs und damit die Anforderungen im Handel und der Verwaltung an schriftlichen Aufzeichnungen. Die Zahlen wurden größer und unhandlicher. Schnelles Schreiben produziert zudem immer und überall Fehler. Dann setzte eine Entwicklung ein, deren Beginn schwer zeitlich und örtlich zu lokalisieren ist. Es war aber offenbar schon bzw. erst in der babylonischen Zeit. Es entstanden zunächst Leerstellen und schließlich kennzeichnete man bei großen „runden" Zahlen (bezogen auf 60 und die Mehrzahl von 60) auch Positionen, die keine 60-er enthielten. Sie entsprachen somit 0 x 60, 0 x $60^2$, 0 x $60^3$ etc. Es waren zwei schräg liegende Zeichen, wie sie auch bei der Zahl Zwei benutzt werden, aber eben schrägliegend. Damit war die Null erfunden und in einem Stellenwertsystem auf Basis 60 integriert worden. Dies war eine fundamentale mathematische Abstraktion in einer bereits weit entwickelten Kultur. Aber es war noch keine „vollgültige" Zahl, denn mit Zahlen kann man rechnen und sie nicht nur als Platzhalter benutzen. Trotzdem: Es wurde dem „Nichts" ein Symbol zugeordnet und nicht nur eine Leerstelle gelassen.

Doch es gab auch Fallstricke. So wurden fehlende Einer nicht gekennzeichnet. Ebenso war 3 x 60 = 180 unter Umständen nicht von 3 x 1 = 3 zu unterscheiden, da sich die Zeichen/Ziffern nicht in der Form, sondern nur durch die Größe abgrenzten. Hier gilt, wie bei allen Mehrdeutigkeiten: Es kommt auf den Zusammenhang an. Im Gegenteil, Grundrechenverfahren bleiben unabhängig von der Größenordnung gleich leicht und nur der Kontext entscheidet.

Maya

Unter Maya werden die sprachverwandten Völker auf der Halbinsel Yucatan und im heutigen Guatemala verstanden. Die Kultur war hochentwickelt und hatte zwei Blütezeiten im 5. – 7. Jahrhundert und im 10. – 12. Jahrhundert. Ohne das brutale Vorgehen der Spanier beschönigen zu wollen, war die Kultur zu diesem Zeitpunkt 1524 schon im Niedergang. Die Zahlzeichen der Maya beruhten auf dem Vigesimalsystem, also Zahlen mit der Basis 20. Bis 19 wurde eine Punkt-Strich-Darstellung angewendet, wobei Fünferschritte gewählt wurden. Jede Zahl hatte einen eigenen Namen. Größere Zahlen, besonders kalendarische Daten, drückte man in Potenzen von 20 aus. Die Zahl 20 wurde also in einem nichtlinearen Stellenwertsystem benutzt, in dem jeweils das 20-fache die nächste Stufe darstellt. Diese haben eigene Namen, wie um die grundsätzliche Bedeutung dieser Stufen herauszustellen. Sie sind auch kaum vergleichbar mit unseren großen Zahlen, wie Million, Milliarde, Billion, etc., die in Zehnerpotenzen von wesentlich kleinerer Schrittfolge ausgedrückt werden.

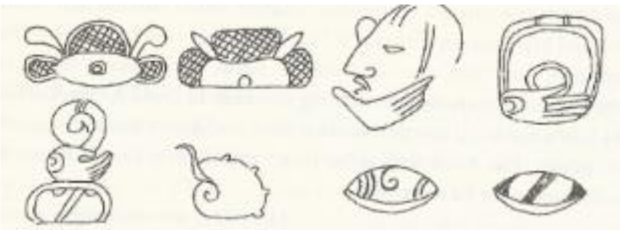


Abb. 28: Unterschiedliche Darstellungen

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Maya-Zahlen | $20^1$=20, | $20^2$=400, | $20^3$=8.000, | $20^4$=160.000. [101] |
| Maya-Namen | hun | bak | pik | calab |

[101] Umberto, Bottazzini: Wie die Null aus dem Nichts entstand, dtv, München 2021, deutsche Erstausgabe, S. 31f

Die 20-er Schritte wurden von Zehnern unterbrochen, Fünfer, wie bei den Römern, wurden besonders markiert, aber es gab nicht vorgestellte Einer, wie IV=4, die das Rechnen mit römischen Zahlen so quälend unhandlich machen. Hauptschritte waren zweifellos die 20-er. Bei Menninger ist die verwendete Systematik genau dargestellt.[102] Offenbar sind die Einer, also von 1 – 19 aus dem Volk heraus gewachsene Namen, wobei 1-9 Eigennamen besitzen (gezählt wurde aber ab 0). Von 20 bis 29 folgt man dem ersten 20-er Schritt aufwärts. Doch ab 30, das keinen Eigennamen erhält, denkt bzw. zählt man im zweiten 20-er-Schritt und geht zurück. Dies erinnert an das Französische, wo z.B. die 78 soixante-dix-huit, also 60´10´8, genannt wird.

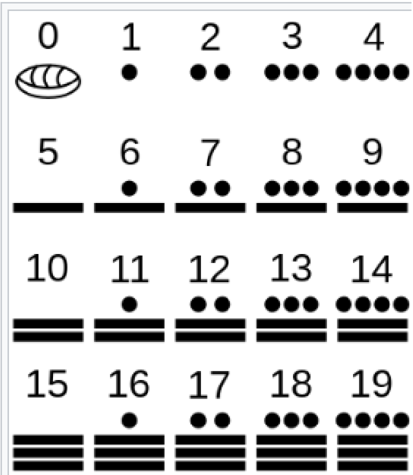



Abb. 29: Maya-Zahlen in Punkt-Strich-Darstellung

Dann wird es artifiziell und wie auf dem Reißbrett geplant. Man geht davon aus, dass die höheren Zahlenreihen, die in ihrer schieren Größe auch nur akademisch-kalendarischen Charakter haben konnten, von Priestern entworfen wurden. Wir haben somit ein Beispiel für ein Zahlensystem, das aus der herrschenden Klasse gebildet wurde und nur bei kleinen Zahlen aus dem Volk. Die ganz hohen Zahlen haben überhaupt keine praktische Bedeutung, auch nicht im Kalender. Es sind scheinbar „Zähltürme", um den Göttern nahe zu sein.

Deshalb weicht die Systematik auch bei der Darstellung von Kalenderdaten teilweise unlogisch ab. Man versuchte vermutlich gewachsene Strukturen und künstliche Ergänzungen zu integrieren. Der Monat hatte bei den Maya 20 Tage. Kalendarisch genutzte Zahlen und ihre Darstellung waren stark mit Ritualen und Göttern verbunden, die an diesen Tagen besonderen Einfluss auf die Menschen hatten. Der Kalender hatte somit eine herausragende Bedeutung, die auch die Zählweise regelrecht dominierte.

Die Maya verwendeten zwar positive ganze Zahlen, aber gezählt wurde ab der Null. Hier geht die zweite Stufe nur von 0 bis 17 und folgt dann der normalen Vorgehensweise. Dadurch ergibt sich statt 400 nur 360, was den Tagen im Sonnenjahr näherkommt und für die Monatslänge von 20 Tagen besser passt. Die restlichen 5 Tage galten als Unglückstage. Die Maya bauten Nulltage in den Kalender ein, an denen sie sich nicht wuschen oder kämmten oder wichtige Tätigkeiten anfingen.[103] Für die Null wurden verschiedene Zeichen verwendet,

[102] Menninger, ebenda, S. 73

[103] www.wienerzeitung.at/themen_channel/literatur/buecher_aktuell/350025_Kaplan-Die-Geschichte-der-Null.html

die sich in ihrem Ornament-Charakter unterschieden. [104,105] Man vermutet plausibel, dass die natürliche Unterteilung in Finger und Zehen den Anstoß zu diesem vigesimalen System bildeten.

Inka

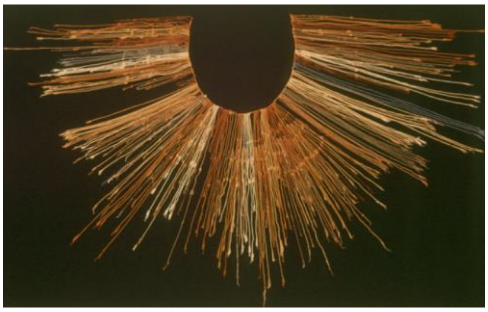


Abb. 30: Quipu aus dem archäolog. Museum in Lima

Die Inkas haben trotz der ungewöhnlichen Form ihrer „schriftlichen“ Aufzeichnungen ohne archäologische Zweifel ein dezimales Stellenwertsystem besessen. Sie verwendeten *Quipus,* Schnüre mit Knoten. Diese konnten sehr aufwendig und kunstvoll sein und auch mehrstellige Zahlen abbilden.

Oft wird die Hauptschnur durch Nebenschnüre oder gar noch eine Stufe weiter ergänzt. Die Null stellt sich in Form von Leerstellen, also größeren Abständen zwischen zwei Knoten, dar.

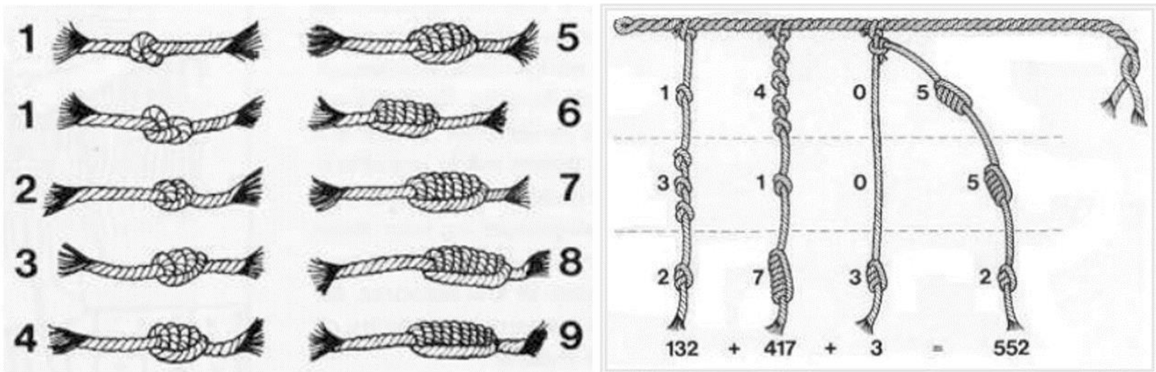



Abb. 31: Links „Ziffernknoten“ der Inkas, rechts ein Rechenbeispiel.

Kambodscha

Die Null ist eindeutig belegt. Eine Inschrift zu einer Götterstatue aus Sambor Prei Kuk, das im heutigen Kambodscha liegt, datiert ein Datum im Jahr 598 nach unserer Zeitrechnung und kann Tag genau auf die Śaka-Ära umgerechnet werden. Das entsprechende Jahr ist 520 und die Null wird mit dem mit dem Begriff „*kha*“ bezeichnet, der „Luftraum“ bedeutet. Weitere Nachweise belegen diese Deutung der Verwendung der Ziffer „0“. Auch in Sumatra sind Inschriften gefunden worden, die Jahreszahlen mit „0“ enthalten und die Kenntnis der Null

[104] Grafik: Robert Kaplan, Geschichte der Null, S. 94
[105] https://de.wikipedia.org/wiki/Maya-Zahlschrift, Text und Grafik

sehr wahrscheinlich machen.[106] Indischer Einfluss erscheint in beiden Kulturen wahrscheinlich.

China

Zu China gibt es unterschiedliche Meinungen in der Literatur. Das ansonsten gut recherchierte Buch von Bottazzini spricht von einem „positionellen Prinzip", das in China in Gebrauch sein sollte.[107] Ob es in Verbindung mit der Null angewendet wurde, bleibt zunächst offen. Wikipedia sagt dagegen, in China kannte man keine Null. Dieser Ansicht ist auch Ifrah, wenn es um die Zeit vor 800 n.Chr. geht. Auch negative Lösungen kannte man gemäß dem Wikipedia-Eintrag zunächst nicht. Diese Aussage ist eindeutig nicht korrekt. Sie wurden erstmals in dem chinesischen Mathematikbuch „Neun Kapitel der Rechenkunst" (Jiǔ Zhāng Suànshù, 1. Jh.n.Chr.) erwähnt.[108] Das dort erklärte chinesische Zahlensystem verwendet rote Stäbchen für positive Zahlen und schwarze Stäbchen für negative Zahlen. Zahlen wurden in einem dezimalen System durch Stäbchen repräsentiert. Darin sind sich die Quellen einig. Erst durch indischen Einfluss wurde ein Fehlzeichen in Form eines Punktes identifiziert.[109] Den indisch-buddistischen Einfluss bereits ab dem 1. Jahrhundert nach Christus betont auch Wußing.[110] Battazzini beruft sich schließlich auf Joseph Needham und (offenbar) der in Cambridge herausgegebenen Buchreihe „Science and Civilisation in China", demzufolge bereits im 13. Jahrhundert vor Christus sich ein positionelles dezimales System auf Orakelknochen der Shang-Periode findet. Doch auch hier kann man kein Symbol für eine Art Null, sondern nur eine Leerstelle identifizieren. Es bleibt deshalb der indische Einfluss als plausibelste Theorie. So wird ein Symbol für die Null im *Khai-Yuan Chan Ching* erwähnt, einer Sammlung von astronomischen und astrologischen Texten aus dem 8. Jahrhundert. Es enthält ein Kapitel über indische Rechenmethoden. Der Autor schreibt*: Wenn die eine oder andere der neun Ziffern die Zehn erreicht, wird sie in ein Feld vor die anderen Ziffern gestellt, und jedesmal, wenn ein leeres Feld in der Reihe auftaucht, wird ein Punkt angebracht, um es symbolisch*

[106] https://de.wikipedia.org/wiki/Null
[107] Bottazzini, ebenda, S. 43
[108] Siehe z.B. Begriffs- und Namensklärungen bei
https://www.enzyklo.de/Begriff/Jiu_Zhang_Suanshu
https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-3-0348-6379-7_4 (Klassische mathematische Werke)
Wußing, Band 2, ebenda S. 46f und in der Zusammenfassung S. 66
[109] https://de.wikipedia.org/wiki/Null
[110] Wußing, Hans: 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008, S. 47f

*darzustellen.*[111] Es ist an gleicher Stelle offenbar auch bemerkenswert, dass die indischen Ziffern (in einer Zahl) alle in einem Zug geschrieben werden.

Ägypten

Die regelmäßigen, jährlichen Überschwemmungen durch den Nil machten immer wieder neue Vermessungen nötig, um die Eigentumsverhältnisse neu zu bestimmen. Durch das unregelmäßige Gelände war z.B. ein regelmäßiges Verfahren wie ein Schachbrettmuster unmöglich. Ländereien wurden deshalb wahrscheinlich durch Vierecke und Dreiecke angenähert. Dabei wurden die Flächeninhalte der Vierecke über ihre Seitenlängen berechnet. Bei den Dreiecken wurde die fehlende 4. Seite mit der Hieroglyphe („nichts“) bezeichnet. Dies hat jedoch nichts mit dem zu tun, was eine irgendwie geartete Null in einem Positions- oder Stellenwertsystem leistet. Im Horus-Tempel von Edfu findet sich eine entsprechende Inschrift mit Maßen von Tempelländereien. Der Tempel entstand im 2. Jh.v.Chr. Es ist bezeichnend, dass ausgerechnet ein Horustempel über diese Sachverhalte Aufschluss gibt. Das Horus-Auge in seiner Strichdarstellung lieferte den Ägyptern im täglichen Gebrauch die Zahlzeichen für das Bruchrechnen bei Gewichten und in Form von Unterteilungen beim Hohlmaß hequt, also sozusagen dem Scheffel, mit dem z.B. Getreidemengen gemessen wurden.[112]

Abb. 32. Zahlschrift aus dem Karnak-Tempel, 3. Jahrtausend v.Chr.

Minoer

Auch auf Kreta wurden Tontafeln mit schriftlichen Aufzeichnungen gefunden, die Zahlen enthalten. Die Schriften Linear A sind auf Kreta beschränkt.

Linear B ist vollkommen anders, nämlich eine mykenische Silbenschrift, die weit im Mittelmeerraum Verbreitung fand.

[111] Ifrah, ebenda, S. 489
[112] Siehe Oberhess. Naturw. Zeitschrift, Kafitz, Zahlen, http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-8380, S. 18 f

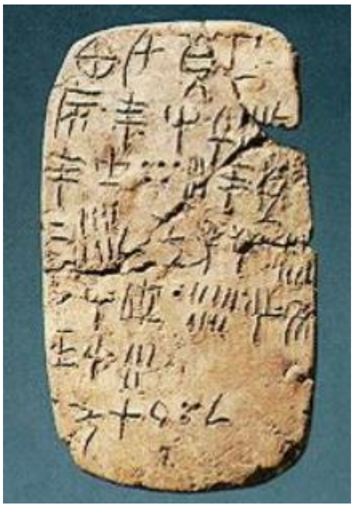


Abb. 33: Tontafel mit Zahlen, (Kreta, Mitte des 15. Jh.v.Chr.)

Sie wurde wegen des ähnlichen Schriftbildes zunächst ebenfalls für minoisch gehalten.

Die Namensgebung stammt von Sir Arthur Evans, dem Ausgräber von Knossos. Die Null war nicht bekannt und dies gilt offenbar für keine mögliche Vorläuferform.

## Griechen

Trotz teilweise genialer Mathematiker und beispielloser mathematischer Fortschritte kannten die Griechen keine Null und kein Stellenwertsystem. Erst in der späteren hellenistischen Zeit deutlich nach Christi Geburt tauchen erste mehr formale Elemente auf, denen man aber keinen Zahlcharakter zuordnen konnte. So weiß man, dass der große Astronom und Mathematiker Claudius Ptolemäus (um 100 – nach 160 n.Chr.) in seinem epochalen Werk Almagest das Fehlzeichen o verwendete, das im Griechischen für οὐδέν, *ouden* („nichts“) steht.[113] Es sind auch zweifellos Kontakte in den asiatischen Raum vorhanden gewesen. Schließlich ist Alexander der Große bis nach Indien gekommen, auch wenn damals die Erkenntnisse der indischen Mathematik noch nicht ausgeprägt waren. Aber er hatte zwischenzeitlich sein Hauptquartier in Babylon. Deshalb sollten Griechen mit dem sumerischen System in Berührung gekommen sein. Das frühe Griechenland bewunderte Ägypten, aber übernahm in Bezug auf das Thema dieses Beitrags wenig von asiatischen Kulturen. Doch die Ablehnung war vor allem auch philosophisch motiviert. *Nichts kann aus nichts geschaffen werden.* (Lukrez, *De Rerum Natura*). Diese Philosophie überdauerte viele Jahrhunderte, als die antiken Kulturen längst dem Mittelalter Platz gemacht hatten. Zahlen und Philosophie waren untrennbar miteinander verbunden. Hier wirkt das pythagoreische Denken sehr lange nach. Eher konnte man irrationale Zahlen in das Denken integrieren als das „Nichts“.

## Römer

In der lateinischen Sprache gab es kein Zeichen für die Null und es gibt auch keinerlei indirekte Hinweise. Die römischen Zahlen hielten sich trotz ihrer unpraktischen Verwendung in Europa fast 2.000 Jahre. Bei den Römern im Westen sind wenig herausragenden Mathematiker bekannt, was andererseits auf das Zahlensystem zurückgeführt werden kann. Zu nennen ist Varro (116-27

---

[113] https://de.wikipedia.org/wiki/Claudius_Ptolemäus

v.Chr.), Vitruv (geb. um 84 v. Chr.), Columella (nach 64), und Balbus (um 100).[114] Das oströmische Reich führte die griechisch-hellenistische Tradition bis in die byzantinische Zeit und die Spätantike weiter. Athen und Alexandria mit ihren mathematischen Traditionen und Akademien gehörten zum oströmischen Reich. Einer der Baumeister der Hagia Sophia, Anthemios von Tralleis (gest. 534), war zugleich ein guter Mathematiker.[115] Im römischen Reich wurde das Christentum 380 unter Kaiser Theodosius zur Staatsreligion erklärt. Antike Traditionen einschließlich der Mathematik wurden zu „heidnischen" Ideen erklärt. Unter Justinian wurden Akademien gewaltsam geschlossen. Erst arabischer Einfluss führte zu einer neuen Blüte der Mathematik.

Die Stagnation lag zum wesentlichen Teil an den römischen Zahlen. Schon eine einfache Addition von mehreren 3- bis 4-stelligen römischen Zahlen fällt ohne jeweilige Übertragung in unser Dezimalsystem äußerst schwer. Multiplikation oder gar Division ist nur über den Umweg von Hilfskonstruktionen und viel Kopfrechnen oder Fingerrechnen möglich. Das Ziffernsystem lässt grundsätzlich keine Regelwerke für schriftliches Rechnen zu. Die römischen Ziffern sind „keine Recheneinheiten, sondern Abkürzungen" (Ifrah). Damit können Ergebnisse notiert werden, die auf dem Abakus oder anderen Hilfsmitteln bereits gelöst wurden. Die mittelalterliche Arithmetik hat dies durchaus erkannt und entsprechende Versuche unternommen. Trotzdem tat man sich lange Zeit sehr schwer, den entscheidenden Schritt zu gehen und zu dem indischen Stellenwertsystem zu wechseln.

## Die Null in der Mathematik

### Infinitesimalrechnung

Nachdem die Null in der Mathematik endlich angekommen war, entbrannte schon wieder eine heftige Diskussion. Leibniz und Newton machten sich unabhängig voneinander Gedanken, wie die Entwicklung von Kurven einer Funktion auf jeden Punkt genau beschrieben werden können. Dazu mussten sie das Steigungsdreieck an dem jeweiligen Punkt immer kleiner machen, um schließlich die Tangente an dem Punkt zu identifizieren. Beide entwickelten jeweils ein mathematisches Kalkül, das dieses leistete. Doch die grandiose Leistung hatte mathematisch formal und psychologisch-menschlich einen gewaltigen Preis zu zahlen. Mathematisch musste zuerst durch eine kleine, aber nicht verschwindende Größe geteilt werden, um anschließend den Grenzwert zu bilden. Das kam der Division durch Null bedenklich nahe. Das Verfahren

[114] Wörtlich aus https://www.spektrum.de/lexikon/mathematik/roemische-mathematik/9057
[115] Wußing, ebenda, Bd. 1, S. 213

funktionierte bestens, aber viele Mathematiker hatten zumindest ein schlechtes Gefühl dabei oder lehnten es sogar ganz ab.

Die Infinitesimalrechnung oder Analysis ist heute eine Erfolgsgeschichte in der Mathematik. Doch der Umgang mit der Annäherung an infinitesimal kleine Größen, die notwendig schien, um die Tangente in einem Punkt der Kurve bestimmen zu können, stieß mit Recht auf harsche Kritik. Die äußerst erfolgreiche Methode mit ihrem fragwürdigen Umgang mit verschwindenden Größen drohte die Mathematik in Befürworter und Gegner zu spalten. Nur der Erfolg in der Praxis war überzeugend, nicht die Vorgehensweise im Kalkül. Der französische Mathematiker, Physiker und Philosoph Jean Le Rond d´Alembert (1717 – 1783) schrieb: *Eine Größe ist etwas oder nichts; wenn sie etwas ist, ist sie noch nicht verschwunden; wenn sie nichts ist, ist sie wirklich verschwunden. Die Annahme, es gebe einen dazwischen liegenden Zustand, ist ein Hirngespinst.*[116]

Die menschliche Seite führte dazu, dass um diese grandiose wissenschaftliche Leistung ein heftiger Prioritätenstreit entbrannte, der mit den jeweiligen Anhängern zu einem wahren Stellvertreterkrieg eskalierte.

Heute gelten beide Aspekte als geklärt. Folgende Mathematikergenerationen fanden ein korrektes Verfahren, das nicht in dem Verdacht steht, dass durch Null dividiert wird und das auch durch sprachlich saubere Begriffe Unklarheiten und Mehrdeutigkeiten vermeidet.

Weder Leibniz noch Newton haben sich eines Plagiats schuldig gemacht. Im Gegenteil, sie hatten vollkommen unterschiedliche Intentionen. Leibniz hat den Punkt auf der Kurve als Objekt gesehen und dieser nulldimensionale Punkt kann durch sein Kalkül als Grenzwertprozess umfassend genau beschrieben werden. Newton dagegen interessierte die Physik und die Dynamik von Massen, die sich auf den Kurven durch die Zeit bewegen und Kräften bzw. Wirkungen unterliegen.

Beide Sichtweisen haben sowohl der Mathematik unschätzbare Impulse gegeben, als auch die Naturwissenschaften revolutioniert und ihren Gültigkeitsbereich auf den Himmel und seine Mechanik ausgedehnt.

Erst Augustin-Louis Cauchy (1789 – 1857) und Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815 – 1897) haben durch eine logisch fundierte Aufarbeitung der Analysis den Widerspruch aufgelöst. Begriffe, wie das unendlich Kleine, wurden ausgemerzt.

---

[116] Zitiert nach Seife, ebenda, S 141

Nullstellen von Funktionen

Von großer Bedeutung in der Mathematik sind Nullstellen von Funktionen bzw. von differenzierbaren Funktionen und ihren Ableitungen. Ein Gutteil des Mathematikunterrichts in der Oberstufe ist der sogenannten Kurvendiskussion reeller Funktionen gewidmet. D.h. man untersucht markante Punkte der Funktion. Interessant sind bei einer stetig differenzierbaren Funktion f(x) die Nullstellen, also Schnittpunkte mit der x-Achse, oder Extrempunkte. Aufschluss geben oft Nullstellen der Ableitungen über (lokale) Minima oder Maxima (Nullstellen der Ableitung f´(x)) und Sattelpunkte und Wendepunkte (Nullstellen der 2. Ableitung f´´(x)).

Dort ist die z.B. die Tangente waagrecht zur x-Achse und damit hat die erste Ableitung f´(x) der Funktion eine Nullstelle. Dies sind Hoch- und Tiefpunkte, aber können auch Sattelpunkte sein.

Es gibt eine Reihe von Möglichkeiten, Nullstellen, Hochpunkte, Tiefpunkte, Sattelpunkte oder Wendepunkte zu bestimmen. Dies kann bis zur 3. Ableitung gehen, denn ein Wendepunkt wechselt lediglich die Krümmungsrichtung der Kurve ohne dass die Tangente waagrecht wird. In diesem Fall ist

$f''(x_0) = 0$ aber $f'''(x_0) \neq 0$.

In der höheren Mathematik können mehrere Veränderliche auftreten oder es müssen komplexe Funktionen betrachtet werden. Historisch gesehen, war mit dem Namen „Algebra" ursprünglich vor allem Lösungen von Polynomen der Form

$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$ , $a_i$, $x \in \mathbb{R}$, verbunden.

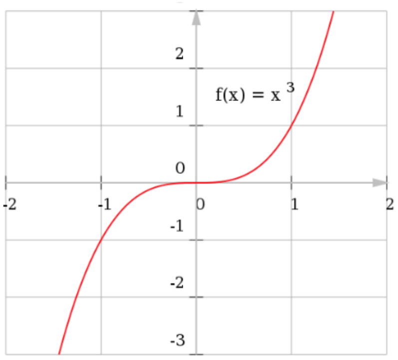


Abb. 34: Sattelpunkt von $f(x)=x^3$ im Punkt x=0

Später wurde das Interesse auf die komplexwertigen Funktionen erweitert:

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0$, $a_i$, $z \in \mathbb{C}$

Aus diesem Grund kommt dem Fundamentalsatz der Algebra eine große Bedeutung zu. Die Beweisgrundlage wurde 1746 von Jean-Baptiste le Rond d'Alembert gelegt und von Carl Friedrich Gauß 1799 in seiner Dissertation wesentlich verbessert. Erst mit den Erkenntnissen der Analysis konnten für die damalige Zeit vermeintlich selbstverständliche Voraussetzungen mitbewiesen werden (Stichwort Zwischenwertsatz).

Der Fundamentalsatz der Algebra besagt, dass ein komplexwertiges, nicht konstantes Polynom n-ten Grades (n>0) mindestens eine Nullstelle hat. Berücksichtigt man mehrfache Nullstellen, so existieren genau n Nullstellen.
Z.B.

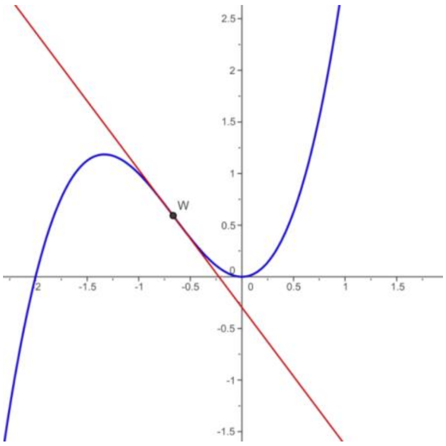



Abb. 35: Bei W hat die Kurve einen Wendepunkt, aber die Tangente in W (rot) ist nicht waagrecht.

f(x)=x hat eine Nullstelle in $x_0$=0;
f(x)=$x^2$ hat zwei Nullstellen in $x_0$=0;
f(x)=$x^3$ hat drei Nullstellen in $x_0$=0;
usw.

Man kann den Fundamentalsatz der Algebra auch als Faktorisierung eines Polynoms über dem Körper der komplexen Zahlen ausdrücken:

$$f(z) = \sum_{i=0}^{n} a_i z^i = a_n \prod_{k=1}^{n} (z - b_k)$$

Die $b_k$ sind dann unter Berücksichtigung mehrfacher Nullstellen genau die gesuchten n Nullstellen des ausmultiplizierten Polynoms.

<u>Nullfolge</u>

Man betrachte die Körper der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ oder der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ mit der „normalen“, allseits bekannten Metrik. Sie wird archimedische Metrik genannt.

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ bzw. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ heißt Nullfolge, falls gilt:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n) = 0.$$

D.h. der Konvergenzpunkt dieser Folgen ist 0.

Klassisches Beispiel: $a_n = \frac{1}{n}$

Aber auch $a_n = 0$, also die Folge, die nur aus Nullen besteht, ist eine Nullfolge.

Die Folgenglieder können wie im nächsten Beispiel alternierend positiv und negativ sein:

$$a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$$

$$a_n = \sqrt[n]{5} - 1$$

Hier konvergieren die (positiven) Wurzeln bei zunehmendem n gegen 1 und $a_n$ wird dadurch zur Nullfolge.

$$a_n = (-0{,}5)^n$$

ist eine Nullfolge im Körper der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ unter Berücksichtigung der archimedischen Metrik, also der normalen Abstandsdefinition.

Legt man aber die 2-adische Metrik zugrunde, so divergiert die Folge. Bei dem Betrag von p-adischen Zahlen kommt es nur darauf an, wie häufig die Primzahl p in einer Zahl m vorkommt. p soll hier im Beispiel gleich 2 sein, m ist 0,5 = ½.

Auch der p-adische Betrag einer Zahl m ist definitionsgemäß der „Abstand" von m zur 0.

Der für jede Primzahl p auf den rationalen Zahlen definierte p-adische Betrag:

$$|m|_p := \begin{cases} 0 \; für \; m = 0 \\ p^{-n} \; für \; m = p^n \frac{a}{b} \; mit \; a, b, p \; paarweise \; teilerfremd \; und \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Man nutzt, dass sich jede rationale Zahl eindeutig als $m = p^n \frac{a}{b}$ mit paarweise teilerfremden Zahlen und n ∈ ℕ darstellen lässt.

Oft wird die Darstellung |m|p= $\frac{1}{p^{\vartheta_p(m)}}$ benutzt um deutlich zu machen, dass der negative Exponent sowohl von p als auch von m abhängt.

Dabei zählt $\vartheta_p(m)$ wie oft die Primzahl, hier im Beispiel p=2, in m vorkommt. Kommt 2 in m nicht vor (2 ist z.B. kein Teiler von 1), so ist $\vartheta_2(m) = 0$ also $\frac{1}{2^{\vartheta_2(1)}} = \frac{1}{2^0} = 1$

Außerdem definiert man $\vartheta_2\left(\frac{a}{b}\right) = \vartheta_2(a) - \vartheta_2(b)$.

Die Folgenglieder errechnen sich also nach der 2-adischen Metrik wie folgt:

$$a_1 = d_2\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2^{\vartheta_2\left(\frac{1}{2}\right)}} = -\frac{1}{2^{\vartheta_2(1)-\vartheta_2(2)}} = -\frac{1}{2^{0-1}} = -2$$

$$a_2 = d_2\left(+\frac{1}{4}\right) = +\frac{1}{2^{\vartheta_2\left(\frac{1}{4}\right)}} = -\frac{1}{2^{\vartheta_2(1)-\vartheta_2(4)}} = -\frac{1}{2^{0-2}} = +4$$

$$a_3 = d_2\left(-\frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{2^{\vartheta_2\left(\frac{1}{8}\right)}} = -\frac{1}{2^{\vartheta_2(1)-\vartheta_2(8)}} = -\frac{1}{2^{0-3}} = -8$$

usw.

$$a_n = d_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^n 2^n \to \infty$$

Es ist sehr einfach einzusehen, dass in der p-adischen Metrik jede konvergierende Folge eine Nullfolge sein muss. Man betrachte z.B. $a_n = 2^n$ in der 2-adischen Metrik. Die Folgenglieder sind ½, ¼, ⅛, usw. Die Folge konvergiert und ist eine Nullfolge. Immer müssen konvergierende Folgen durch immer häufigeres Auftreten der betreffenden Primzahl p erzeugt werden. Dies führt zu immer kleineren Beträgen und damit zum Konvergenzpunkt 0.

Der Satz von Ostrowski besagt, dass ein auf den rationalen Zahlen definierter, nichttrivialer Absolutbetrag entweder zur archimedischen oder zur p-adischen Metrik äquivalent ist.

Es kann jedoch in anderen Räumen andere Metriken geben. Dies führt zu Verallgemeinerungen des Begriffs Nullfolge.

Sei {(G,+,d)} eine metrisierbare topologische Gruppe, d. h. eine Gruppe, die mit einer Metrik so ausgestattet ist, dass die Gruppenverknüpfung und die Inversenbildung stetig sind. Ein einfacher Fall ist die additive Gruppe in den Körpern $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ oder der Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

Eine Folge heißt genau dann Nullfolge, wenn sie gegen das neutrale Element konvergiert. In den Beispielen ist es gerade die 0 als neutrales Element der Addition in den additiven Gruppen von $\mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{C}$ oder der Nullvektor $\binom{0}{0}$ in $\mathbb{R}^2$.

<u>Stellenwertsysteme</u>

Die Bedeutung der indo-arabischen Zahlen inklusive der Null, wird erst deutlich, wenn man bedenkt, dass im Dezimalsystem mit den 10 Ziffern 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 unter Berücksichtigung der Position in der mehrstelligen Zahl beliebig große Zahlen aus wenigen Zeichen übersichtlich und kompakt gebildet werden können.

Zur Erinnerung: Die Sumerer hatten von 1 – 59 nur zwei Zeichen (Eins, Zehn), die sie kombinierten. Die 60 sah aus, wie die Eins, war nur größer. Die Maya hatten ebenfalls nur zwei Zeichen (Eins, Fünf) in ihrem 20-er system.

Beispiel: Die Zahl 1042=1x1000+0x100+4x10+2 d.h. die 1 steht für die Tausender, die 0 für die Hunderter, die 2 für die Zehner und die 4 für die Einer. Das Stellenwertsystem heißt auch Positionssystem oder auch polyadisches System. Die „10“ heißt in diesem Fall Basis. Es ist das weltweit gebräuchlichste Stellenwertsystem.

Das Computerzeitalter hat weitere Basen sinnvoll gemacht. Das ist vor allem das Binär- oder Dualsystem (seltener dyadisch) auf Basis 2, das Zahlen, Buchstaben und andere Objekte in Nullen und Einsen darstellt. Das Oktalsystem arbeitet auf Basis 8 und das Hexadezimalsystem auf Basis 16. Hier werden noch über die Ziffern 0 - 9 noch 6 Buchstaben A, B, C, D, E, F benötigt. Man notiert, wenn Verwechslungen drohen, die verwendete Basis als tiefgestellte Zahl am Ende der Umwandlung.

$1042_{10} = 10000010010_2$
$1042_{10} = 2022_8$
$1042_{10} = 412_{16}$

Das lässt sich auf beliebige Basen ausdehnen. Interessant sind vor allem Primzahlen.

$1042_{10} = 1102121_3$
$1042_{10} = 13132_5$
$1042_{10} = 3016_7$ usw.

Verfahrensweise: 1042 soll in das 5-System entwickelt werden: [117]

(1) Teile die Zahl mit Rest durch 5.
(2) Der Divisionsrest ist die nächste Ziffer (von rechts nach links).
(3) Falls der (ganzzahlige) Quotient = 0 ist, bist du fertig,
andernfalls nimm den (ganzzahligen) Quotienten als neue Zahl
und wiederhole ab (1).

1042 : 5 = 208 Rest: 2
208 : 5 = 41 Rest: 3
41 : 5 = 8 Rest: 1
8 : 5 = 1 Rest: 3
1 : 5 = 0 Rest: 1

Resultat: 13132 (Reste von oben nach unten von rechts nach links)

Diese Entwicklung nennt man auch p-adische Entwicklung, p ist immer eine Primzahl.

[117] Unter Zuhilfenahme von https://www.arndt-bruenner.de/mathe/scripts/Zahlensysteme.htm

Generell lässt sich jedes Positionssystem auch auf ganze Zahlen, rationale Zahlen (Brüche) und sogar irrationale Zahlen, z.B. Φ, anwenden.

| n | $a_n=\Phi^n$ | |
|---|---|---|
| 5 | ≈11,090 | $\Phi^5=5\,\Phi+3$ |
| 4 | ≈6,854 | $\Phi^4=3\,\Phi+2$ |
| 3 | ≈4,236.. | $\Phi^3=2\,\Phi+1$ |
| 2 | ≈2,618.. | $\Phi^2=\Phi+1$ |
| 1 | ≈1,618.. | $\Phi$ |
| 0 | $a_0$=1,00 | $\Phi^0=1$ |
| –1 | ≈0,618.. | $\Phi^{-1}=\Phi-1$ |
| –2 | ≈0,382.. | $\Phi^{-2}=-\Phi+2$ |
| –3 | ≈0,236.. | $\Phi^{-3}=2\,\Phi-3$ |
| –4 | ≈0,146.. | $\Phi^{-4}=-3\,\Phi+5$ |
| –5 | ≈0,090.. | $\Phi^{-4}=5\,\Phi-8$ |

Abb. 36: Von 3 Werten der Φ-Potenzen liegt der Mittlere ($a_n$) im Goldenen Schnitt Φ

$a_{n+1}= a_n+ a_{n-1}$

Im Dezimalsystem ist 1024= $1\cdot 10^3+0\cdot 10^2+2\cdot 10^1+4\cdot 10^0$.

Für negative Zahlen wechselt eben das Vorzeichen:

–1024 = – $(1\cdot 10^3+0\cdot 10^2+2\cdot 10^1+4\cdot 10^0)$

Stellen hinter dem Komma werden durch Zehnerpotenzen mit negativen Exponenten dargestellt.

1024,174 $= 1\cdot 10^3+0\cdot 10^2+2\cdot 10^1+4\cdot 10^0+1\cdot 10^{-1}+7\cdot 10^{-2}+4\cdot 10^{-3}$

Dabei ist bekannt, dass rationale Zahlen eine abbrechende Entwicklung haben oder dass eine Periode auftritt.

Irrationale Zahlen haben im Prinzip unendlich viele Stellen hinter Komma, die nicht periodisch sind. Je nach gewünschtem Genauigkeitsgrad bricht man die dezimale Darstellung ab einer bestimmten Stelle hinter dem Komma ab.

Diese Aussagen gelten für jedes Positionssystem.

Auch nicht natürliche Basen können Verwendung finden. Dies gilt auch für irrationale Basen. Z.B. kann die Regelmäßigkeit der Potenzen des Goldenen Schnitts ausgenützt werden. Ebenfalls können komplexe Zahlen als Basis dienen.

## Verallgemeinerungen der Null

Null als neutrales Element der Addition

Der Begriff der algebraischen Struktur (oder universellen Algebra, allgemeinen Algebra oder nur Algebra) ist ein Grundbegriff und zentraler Untersuchungsgegenstand des mathematischen Teilgebietes der universellen Algebra.[118] Eine algebraische Struktur ist in der Regel eine endliche oder unendliche Menge M, auf der Verknüpfungen, allgemein als ○ bezeichnet, definiert sind. Viele der Strukturen, wie Gruppen, Ringe oder Körper, sind spezielle algebraische Strukturen mit einem sogenannten neutralen Element e:

[118] https://de.wikipedia.org/wiki/Algebraische_Struktur

Für alle Elemente $a \in M$ gilt $a \circ e = e \circ a = a$. D.h. die Verknüpfung mit e bildet jedes Element der Menge M auf sich selbst ab.

Die Null ist das neutrale Element bzgl. der Addition in Mengen, wie z.B. den reellen Zahlen, den rationalen Zahlen oder den komplexen Zahlen.

Es gilt z.B. für alle $a \in \mathbb{R}$: $a+0=0+a=a$

Aber in der abstrakten Algebra kennt man weitere Differenzierungen. Gruppen gehören schon zu algebraischen Strukturen mit einem hohen Grad an speziellen Eigenschaften. In der Algebra treten auch neutrale Elemente bei der Betrachtung von Strukturen mit inneren Verknüpfungen auf, z. B. bei Halbgruppen bzw. Monoide, Ringen, Halbringen, Körpern und Schiefkörpern. Es soll hier im Folgenden in mathematischen Strukturen nach Verallgemeinerungen der Null gesucht werden.

Ist die Verknüpfung die „normale“ Addition in z.B. den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, den reellen Zahlen $\mathbb{R}$, den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$, oder auch $\mathbb{N}_0$, also den natürlichen Zahlen ergänzt um die Null, so ist das neutrale Element die Zahl 0.

Selbst bei den Quaternionen, obwohl man oft von „Werten“ und nicht Zahlen spricht, ist die „0“, wie wir sie kennen, das neutrale Element der Addition. Die additive Gruppe ist kommutativ; die multiplikative Gruppe nicht. Das macht die Quaternionen nur zu einem Schiefkörper. Bei anderen Mengen und Verknüpfungen kommt es auf die Natur der Verknüpfung an. Bei der Multiplikation ist das neutrale Element in diesen Mengen die 1. Nimmt man z.B. die Drehungen eines Quadrates um 0 Grad, 90 Grad, 180 Grad, 270 Grad und 360 Grad=0 Grad[119], so wird man die Null-Grad-Drehung als Null bezeichnen, denn die Verknüpfung

„Drehe das Quadrat um einen Winkel α, α=0, 90, 180, 270 Grad“

hat hier additiven Charakter.

Bei der Multiplikation ist die Null kein neutrales Element. Man bezeichnet sie in diesen Mengen M als „Absorbierendes Element“, denn es gilt für alle $a \in M$

$$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$$

[119] Im Gegensatz dazu nennt man einen Winkel von 360 Grad einen Vollwinkel (er umschließt die volle Fläche). Einen Winkel von 0 Grad, (der nur die leere Fläche umschließt), nennt man Nullwinkel.

Die saloppe Bezeichnung ist „Nullelement“ und bezieht sich auf die multiplikative Verknüpfung.

Bei der Multiplikation sorgt die Null ebenfalls für eine Ausnahme, die man fordern muss:
5. Axiom der Multiplikation: Jede Zahl außer dem neutralen Element der Addition (Null) hat ein multiplikatives Inverses.

Eine Erweiterung bzw. Verallgemeinerung der Null in der Addition findet man bei der Matrizenaddition. Zwei Matrizen kann man addieren, wenn sie jeweils die gleiche Anzahl an Zeilen und Spalten haben. Man addiert jeweils die gleichen Positionen. Hier am Beispiel 2x2-Matrizen.

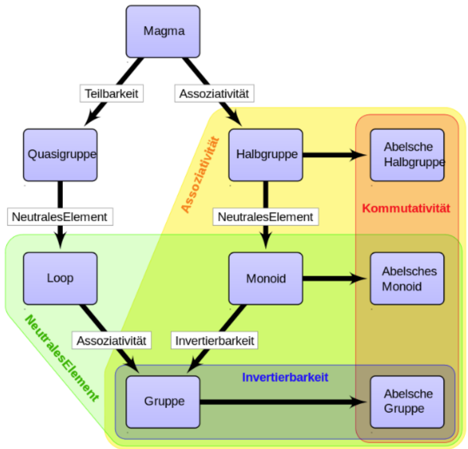



Abb. 37: Hierarchie algebraischer Strukturen (obere erfüllen weniger, untere mehr Gesetze) bis zur abelschen Gruppe.

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}+b_{00} & a_{01}+b_{01} \\ a_{10}+b_{10} & a_{11}+b_{11} \end{bmatrix}$$

Das neutrale Element der Addition bei 2x2-Matrizen ist die 2x2-Nullmatrix:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{bmatrix}$$

Dies gilt analog für alle nxm-Matrizen, mit n, m $\in \mathbb{N}_0$.

Ein Sonderfall ist die Vektoraddition in einem Vektorraum der Dimension n. Hier ist m=0. Das neutrale Element bzgl. der Addition ist der Nullvektor im Beispiel n=3:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$$

<u>Nullteiler</u>

Es sei m eine von 0 verschiedene ganze Zahl und a eine beliebige ganze Zahl. Die Restklasse von a modulo m ist die Menge der ganzen Zahlen, die bei Division durch m den gleichen Rest wie a ergeben. Sie besteht somit aus allen ganzen Zahlen b, die sich aus a durch die Addition ganzzahliger Vielfachen von m ergeben.

Ein Element einer Restklasse bezeichnet man auch als Repräsentant der Restklasse. Häufig verwendet man die Standardrepräsentanten 0,1,…,m-1.[120]

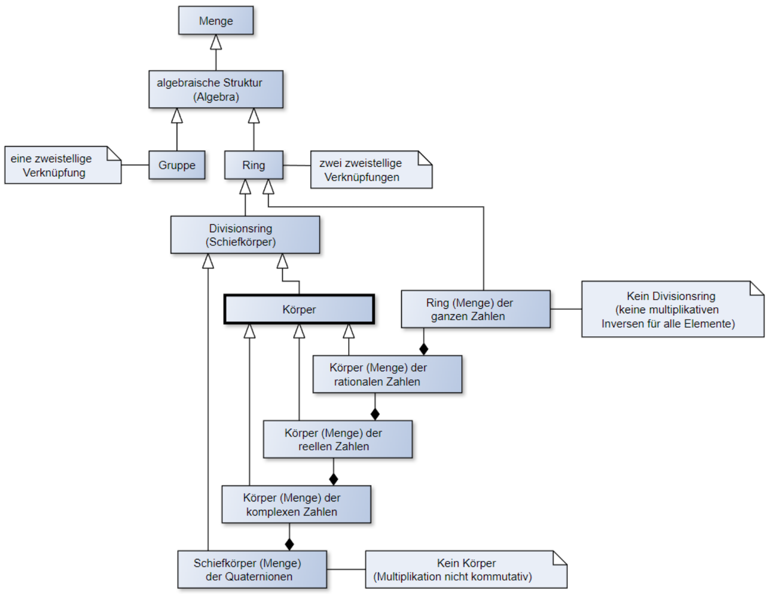



Abb. 38: Algebraische Strukturen bis zu Körper und Schiefkörper

Die Restklasse bildet die algebraische Struktur eines Ringes R, der ganze Zahlen hinsichtlich ihres Restes bei der Division durch m klassifiziert. Ein Ring bildet bzgl. der Addition eine Gruppe. Es entsteht erst dann ein Körper, wenn dies auch für die Multiplikation gilt.

Man nennt ein Element a∈R einen Nullteiler, wenn es ein von 0 verschiedenes Element b gibt, sodass a·b=0. Man sieht leicht, dass wenn a ein Nullteiler ist, so ist auch b ein Nullteiler. Das Produkt a·b wird auch Nullprodukt genannt.

Ein Restklassenring ist genau dann Nullteiler-frei, wenn m=p eine Primzahl ist. Dann bilden die Repräsentanten sogar einen endlichen Körper bzgl. Addition und Multiplikation.

Beispiel: In der Restklasse mod 6 sind 2 und 3 Nullteiler, da 2·3 ≡ 0 mod 6 ist (kongruent 0 modulo 6). Dagegen gibt es in der Restklasse mod 7 keine Nullteiler.

## Nullhomotoper Weg, Nullhomotope Abbildung

In der Topologie ist eine Homotopie eine stetige Deformation zwischen zwei Abbildungen von einem topologischen_Raum in einen anderen, z.B. von einer Kurve in eine andere. Homotopie ist eine Äquivalenzrelation, d.h. jede stetige Abbildung f ist zu sich selbst homotop (reflexiv); ist f zu g homotop, so ist es auch g zu f (symmetrisch) und ist f zu g homotop und g zu h, so ist f auch zu h homotop (transitiv).

120 https://de.wikipedia.org/wiki/Restklassenring

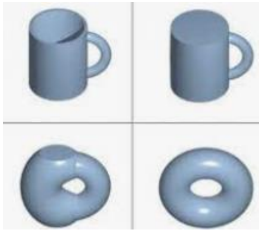


Abb. 39: Stetige Deformation

Bildlich stelle man sich eine Kaffeetasse mit einem Henkel aus einem deformierbaren, aber unzerreißbaren Material vor. Diese lässt sich stetig zu einem Volltorus deformieren, denn beide Körper haben nur ein Loch und können ohne Schnitt ineinander überführt werden. Sie sind homöomorph. Der Stetigkeitsbegriff in der Topologie ist dabei sehr weit gefasst.

Entsprechende topologische Transformationen lassen sich z.B. bei Kurven untersuchen. Es stellt sich dabei die Frage, ob es eine stetige Möglichkeit gibt, zwei Kurven durch stetige Verformung zur Deckung zu bringen.

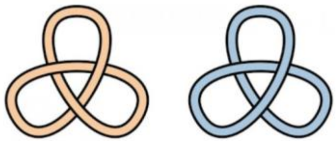


Abb. 40: Die linke Figur zeigt einen Knoten, die rechte ist kein Knoten

Ein Teilgebiet der Topologie ist die Knotentheorie, d.h. welche Knoten sind gleich, also sehen nur unterschiedlich aus. Diese mathematische Disziplin hat sogar praktische Bedeutung. Z.B. ist ein menschlicher DNA-Strang über einen Meter lang. Im Zellkern ist er auf ein Fünfmillionstel Meter zusammen geknäuelt. Trotzdem funktioniert Replikation und Trennung der beiden Stränge. Genetiker und Knotentheoretiker versuchen seit einiger Zeit gemeinsam dazu neue Erkenntnisse zu gewinnen, indem ihre jeweiligen Kompetenzen auch auf DNA-Moleküle angewendet werden.

Ein wichtiger Spezialfall ist die Homotopie von Wegen relativ der Endpunkte: Dabei ist ein „Weg“ eine stetige Abbildung $\gamma\colon [0,1] \to X$; dabei ist $[0,1]$ das Einheitsintervall und X ein topologischer Raum (z.B. die euklidische Ebene $\mathbb{R}^2$) Zwei Wege heißen homotop relativ der Endpunkte, wenn die Homotopie die Anfangs- und Endpunkte festhält.

Ein Weg heißt nullhomotop genau dann, wenn er homotop zum konstanten Weg ist.

Beispiel: Man betrachte die Abbildung $H(0,\varphi)$. $\varphi$ läuft im Intervall $[0,2\pi]$ und bildet den Einheitskreis. Einmal soll H den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ abbilden und einmal den Einheitskreis in $\mathbb{C}$ ohne die Null.

$H(0,\varphi)\colon[0,2\pi]\to \mathbb{C}$ ist nullhomotop.

$H(0,\varphi)\colon[0,2\pi]\to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ ist nicht nullhomotop, da die Null ein Zusammenziehen verhindert.

D.h. Nullhomotopie hängt vom topologischen Raum ab, in den abgebildet wird.

Nullfläche (Mathematik)

In der Mathematik ist mit dem Begriff „Nullfläche" eine Diskussion verknüpft, die 2.500 Jahre alt ist. Man betrachte drei Punkte A, B und C, die nicht auf einer Geraden liegen. Intuitiv wird man sofort sagen, dass die kürzeste Verbindung zwischen A und C die gerade Linie zwischen A und C ist. A, B, C bilden dann ein Dreieck und der gesunde Menschenverstand sagt, dass der direkte Weg immer kleiner (oder gleich) dem Umweg ist. Das ist die sogenannte Dreiecksungleichung. Doch wann gilt das Gleichheitszeichen? Eben, wenn A, B, C auf einer Geraden liegen. Das dadurch entstehende Dreieck ist eigentlich gar kein wirkliches Dreieck. Man nennt es deshalb auch entartet. Seine Fläche ist Null. Es ist, im mathematischen Sinne, eine Nullfläche.

Die intuitive Richtigkeit der Dreiecksungleichung in der euklidischen Ebene ist natürlich zu beweisen und man muss es sich klarmachen, dass sie im Zweifel nur auf der Ebene, die von den Punkten aufgespannt wird, gültig sein wird.

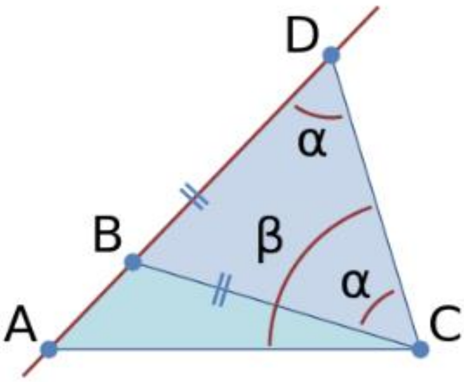


Abb. 41: Euklids Beweis der Dreiecksungleichung

Euklid hat für die Dreiecksungleichung folgenden Beweis angegeben.

Sei A, B, C ein Dreieck. Zu zeigen ist, dass

$$\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$$

Konstruieren wir über dem Dreieck $\Delta$ ABC ein gleichseitiges Dreieck $\Delta$ BDC mit dem Winkel α, der bei C mit der Seite $\overline{BC}$ gebildet und ebenfalls bei D, wobei die Seite $\overline{AB}$ um die Strecke $\overline{BC}$ verlängert wird. Bei C entsteht im großen Dreieck $\Delta$ ADC ein Winkel β, der größer α ist. Damit wird $\overline{AD}$ > $\overline{AC}$. Für $\overline{AD}$ gilt aber:

$\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD} = \overline{AB} + \overline{BC}$.  Daraus folgt $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$.  q.e.d.

Wenn sich die Längen $\overline{AD}$ und $\overline{AC}$ immer mehr annähern, heißt das also, dass der Punkt B sich immer mehr der Seite $\overline{AC}$ nähert, d.h. das Dreieck entartet, wenn B auf $\overline{AC}$ zu liegen kommt. Es wird zur Nullfläche.

Dieser Beweis gilt für die 2-dimensionale Zeichenebene $\mathbb{R}^2$ oder für höherdimensionale euklidische Räume. Es kommt auf die Metrik an, also das, was Betrag einer Länge und was Abstand bedeutet. Dies hat Euklid und Archimedes definiert und die Dreiecksungleichung bewiesen. Wie immer bei den Griechen, geschah das ausschließlich mittels geometrischer Argumente.

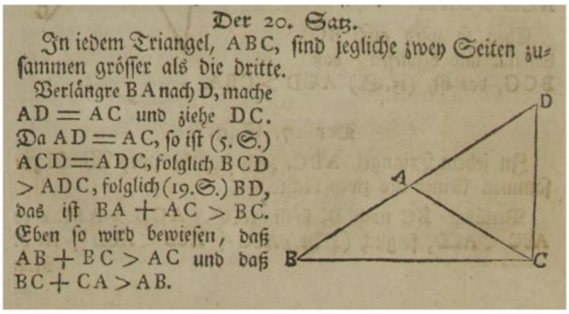

Der 20. Satz.
In iedem Triangel, ABC, sind jegliche zwey Seiten zusammen grösser als die dritte.
Verlängre BA nach D, mache AD = AC und ziehe DC. Da AD = AC, so ist (5. S.) ACD = ADC, folglich BCD > ADC, folglich (19. S.) BD, das ist BA + AC > BC. Eben so wird bewiesen, daß AB + BC > AC und daß BC + CA > AB.


Abb. 42: Euklids Elemente, Buch 1, 20. Satz, „Beweis der Dreiecksungleichung“

Heute wird sie in der Lehre meist aus dem Cosinus-Satz hergeleitet. Über die Dreiecksungleichung kann man schnell entscheiden, ob bei gegebenen Seitenlängen ein Dreieck konstruierbar ist. Ein Dreieck mit den Seitenlängen 2cm, 3cm und 6cm ist nicht konstruierbar, da die Dreiecksungleichung verletzt wäre, dagegen bildet ein „Dreieck“ mit 2cm, 3cm und 5cm eine Nullfläche.

Die Erdoberfläche ist aber nicht eben und ein Flugzeug fliegt Treibstoff sparend nicht auf einer geraden Linie, z.B. von Frankfurt nach Madrid, unabhängig von der Erdrotation (die beim Fliegen zusätzlich zu berücksichtigen ist und oft entscheidend ist, ob ein Ziel von Osten oder Westen angeflogen werden sollte). Drei Punkte auf einer 2-Sphäre, also einer Kugeloberfläche im 3-dimensionalen (euklidischen) Raum, bilden ein Dreieck, das einer anderen Metrik unterliegt. Hier gilt die Dreiecksungleichung im Allgemeinen nicht. Sie gilt aber für den Fall, dass man sich auf sogenannte Eulersche Dreiecke beschränkt, deren Seiten alle kürzer als ein halber Großkreis sind.[121]

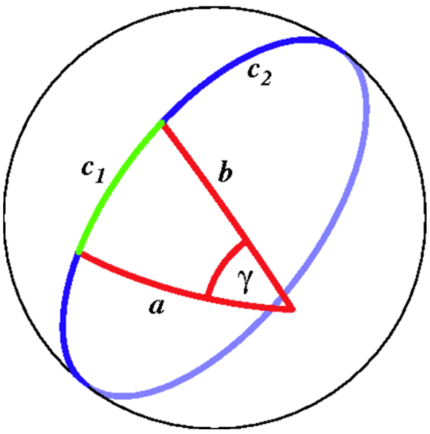



Abb. 43: Sphärisches Dreieck

Die Null ist bei allen Zahlenmengen unverzichtbar. Ausnahme bildet höchstens die Menge der natürlichen Zahlen mit ihrer Bedeutung in der Kulturgeschichte und der Mathematik. Genauso ist bei jeder Punktmenge die leere Menge eine Untermenge. Wir brauchen uns also nicht auf Dreiecke zu beschränken. Eine Nullfläche kann man in der Regel immer identifizieren.

Ein abstraktes Polytop ist dabei eine Abbildung (Injektion) von abstrakten Eigenschaften, wie Scheitelpunkt (0-Fläche), Kante (1-Fläche) oder allgemein einer k-Fläche in einen realen Raum (z.B. $R^3$). Man versteht jedoch „Fläche“ als lokal-kompakte, zusammenhängende 2-dimensionale Punktmenge, die flach

[121] Siehe Wikipedia Dreiecksungleichung

oder gekrümmt sein kann. In diesem Sinne ist eine Nullfläche eine Fläche der Form

$x_1x^2+y_1y^2+z_1z^2=0$.

Die Lösungsmenge besteht nur aus dem Punkt (0,0,0).

Nullmengenaxiom

Georg Cantor gilt als Begründer der Mengenlehre. Sein Verdienst ist mittlerweile unbestritten. Nach zunächst unterschiedlichen Terminologien hat er 1895 erstmals den Begriff der Menge korrekt definiert.

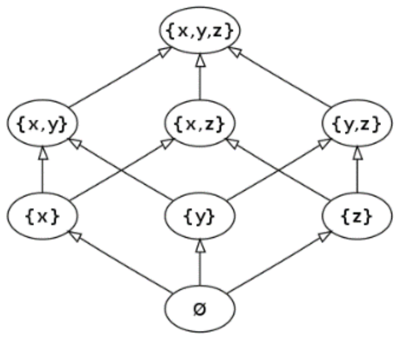



Abb. 44: Hasse-Diagramm für die Potenzmenge der drei Elemente x, y, z.

*Unter einer ‚Menge' verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die ‚Elemente' von M genannt werden) zu einem Ganzen.* (Math. Annalen Bd. 46, S. 481)

Allerdings hat er noch keine axiomatische Herangehensweise gewählt. Dies ist Ernst Zermelo 1907 gelungen. Er hat dabei sieben Axiome formuliert, die in ihrer Weiterentwicklung als Zermelo-Fraenkel-Mengenlehre (ZF) die Grundlage fast des ganzen mathematischen Gebäudes darstellen. Cantors Mengenlehre kann damit abgeleitet werden.

Das zweite Axiom von Zermelo wird oft Nullmengenaxiom genannt:

*Axiom der Elementarmengen:*

*Es gibt eine Menge, die Nullmenge 0, welche gar keine Elemente enthält.*
*Ist a irgendein Ding des Bereiches, so existiert eine Menge {a}, welche a und nur a als Element enthält.*

*Sind a, b irgend zwei Dinge des Bereiches, so existiert immer eine Menge {a,b} welche sowohl a als auch b, aber kein von beiden verschiedenes Ding x als Element enthält.*

Zermelo hat seine Axiome noch verbal formuliert. In einem nächsten Formalisierungsschritt kann man die Axiome in Form sogenannter Prädikatenlogik formulieren.

John von Neumann (1923 bzw. 1928) definierte Ordinalzahlen als eine Hierarchie und gab Cantors Ideen damit einen endgültigen formalen Rahmen.

Sein Vorschlag lautet, das ganze Mengenuniversum rekursiv aus der Nullmenge heraus über Potenzmengen zu entwickeln. Sie bilden dann eine Hierarchie und man kann innerhalb ZF zeigen, dass jede Menge in einer Stufe dieser Hierarchie vertreten ist. Er beginnt bei der leeren Menge ∅, dann der Menge bestehend nur aus der leeren Menge {∅}, weiter der zwei-Elemente großen Menge bestehend aus leerer Menge und Menge aus der leeren Menge usw. Er definierte dadurch die natürlichen Zahlen als Ordinalzahlen ab der Null über Mengen und nutzte dabei die Iteration von Potenzmengen.

$0 := V_0 = \varnothing$

$1 := V_1 = \{\varnothing\} = \wp(\varnothing)$

$2 := V_2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\} = \wp(\wp(\varnothing))$

$3 := V_3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} = \wp(\wp(\wp(\varnothing)))$

…

$n := V_n = \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Man kann sagen, die natürlichen und die transfiniten Zahlen wurden somit in der abstrakten Mengenlehre aus der leeren Menge (ø) heraus entwickelt.[122]

<u>Boolesche Algebra</u>

Man überlege sich zwei Aussagen A und B, die jeweils entweder wahr oder falsch sein sollen, z.B. Hunde singen und Katzen tanzen. Wahr kennzeichne man mit 1 und falsch mit 0. Die folgenden Tabellen charakterisieren eine logische „UND“ und eine „ODER“ Beziehung:

| A | B | A und B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

| A | B | A oder B |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

Abb. 45: Boolesche Wahrheitstabellen für logische UND bzw. logische ODER-Beziehung

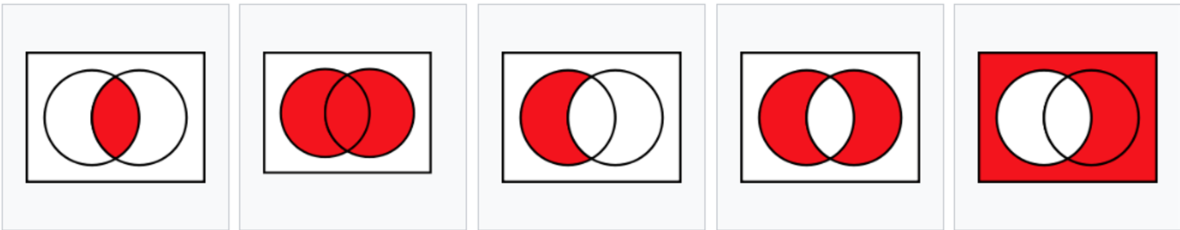
Dann kennzeichnet obige Tabelle eine Und-Bedingung, d.h. nur wenn sowohl A als auch B wahr sind, ist auch A UND B wahr (1), ansonsten falsch (0). Es ist eine „Wahrheitstabelle“ und es gibt 16 verschiedene Möglichkeiten, die Spalten

122 Siehe Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Kafitz, Unendlich, Bd. 70, S. 86

mit Nullen und Einsen zu füllen. Sie entsprechen Und, Oder, Wenn-Dann, Und/Oder, etc.

Als Erster hat sich der US-amerikanische Philosoph Charles Sanders Peirce mit diesem Thema befasst und 1880 einen Aufsatz geschrieben, ihn aber nicht veröffentlicht. 1913 stieß Henry Maurice Scheffer auf die Problemstellung. Er hat sich in der Mathematik durch den Scheffer-Strich oder Scheffer-Operator verewigt, A|B, d.h. wahr überall, wo „nicht UND“ gilt (siehe Venn Diagramme).

Die Boolesche Algebra ist ein integraler Bestandteil jeder digitalen Technik und unverzichtbare Funktionalität jeder modernen Programmiersprache. In der heutigen Elektronik müssen ständig Schaltvorgänge zwischen wahr und falsch, 0 oder 1, unterscheiden. Erst ein Quantencomputer kann in Überlagerungen,



| $A \cap B$ | $A \cup B$ | $A \setminus B$ | $A \Delta B$ | $A^c$ |
|---|---|---|---|---|
| Schnittmenge | Vereinigungsmenge | Differenzmenge | Symmetrische Differenz | Komplement von A |

Abb. 46: Venn-Diagramme betrachten alle Relationen zwischen Mengen, inkl. solcher, die leer sind.

sogenannten Superpositionen, Rechenoperationen ausführen.

**Was ist $0^0$?**

Dazu kann man sich heuristisch einfach der 0 schrittweise mit Hilfe eines wissenschaftlichen Taschenrechners nähern. Zunächst auf der positiven Seite: $1^1=1$, $2^2=4$, $3^3=27$, …Die Kurve steigt also schnell.

$0{,}5^{0{,}5} = 0{,}70710 \ldots$

$0{,}4^{0{,}4} = 0{,}69314 \ldots$

$0{,}3^{0{,}3} = 0{,}696845 \ldots$

$0{,}2^{0{,}1} = 0{,}72477 \ldots$

$0{,}1^{0{,}1} = 0{,}7943 \ldots$

$0{,}01^{0{,}01} = 0{,}95499 \ldots$

$0{,}001^{0{,}001} = 0{,}99311 \ldots$

$0{,}0001^{0{,}0001} = 0{,}99907 \ldots$

Der Grenzwert für $0^0$ (von rechts) scheint 1 zu sein.

Man betrachte nun x-Werte auf der linken, negativen Seite:

$(-0{,}1)^{-0{,}1} = error$, $(-0{,}1)^{-0{,}1}$ ist für den Rechner eine unzulässige Eingabe.

$$\frac{1}{(-0{,}1)^{0{,}1}} = \frac{1}{(-0{,}1)^{\frac{1}{10}}} = \frac{1}{\sqrt[10]{-0{,}1}}$$

Nebenstehende komplexe Zahlen sind die Lösungen der Wurzel und können im Nenner stehen. Sie liegen alle auf einem Kreis um den Ursprung und bilden bei n-ten Wurzeln ein regelmäßiges n-Eck (hier n=10). Somit ist der Bruch ebenfalls immer eine komplexe Zahl!

$z_0$= 0.7555 + 0.2455í
$z_1$= 0.4669 + 0.6426í
$z_2$= 0.7943í
$z_3$= -0.4669 + 0.6426í
$z_4$= -0.7555 + 0.2455í
$z_5$= -0.7555 - 0.2455í
$z_6$= -0.4669 - 0.6426í
$z_7$= -0.7943í
$z_8$= 0.4669 - 0.6426í
$z_9$= 0.7555 - 0.2455í

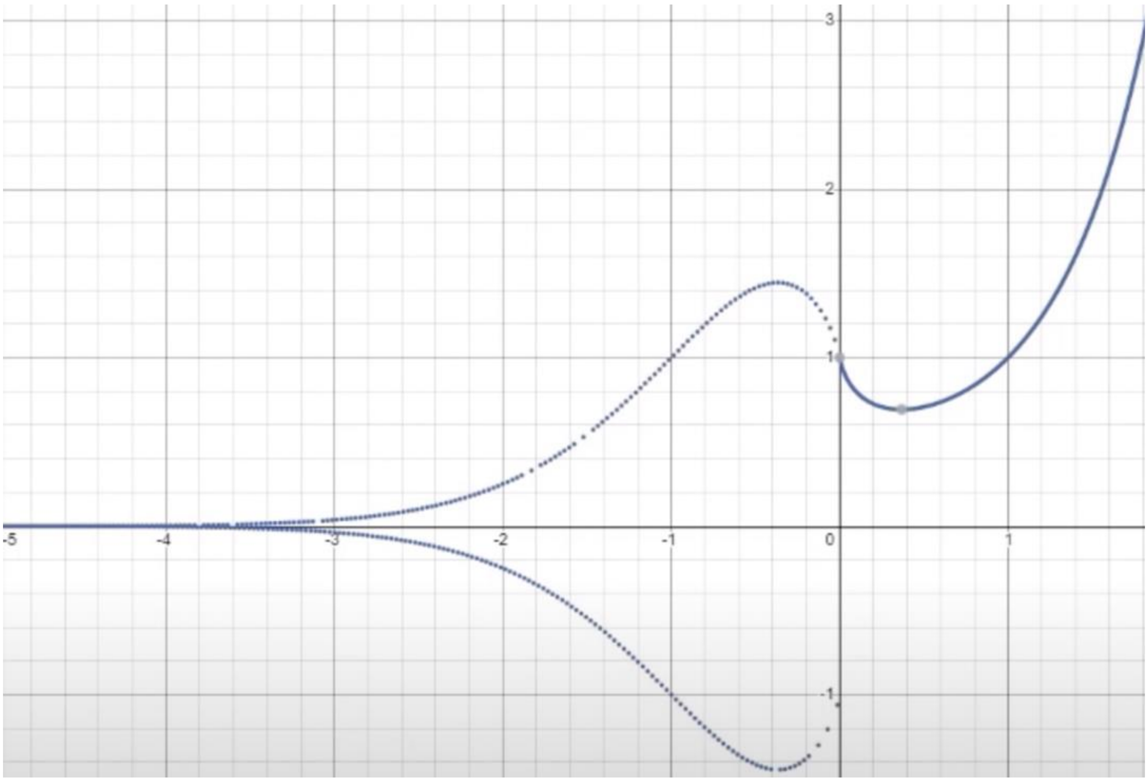



Abb. 47: Graph der Funktion $y=x^x$. Im negativen x-Bereich ergeben sich reelle positive, reelle negative und komplexe Funktionswerte.

$(-0{,}2)^{-0{,}2} = -1{,}3797 \ldots$

$$\frac{1}{(-0{,}2)^{0{,}2}} = \frac{1}{(-0{,}2)^{\frac{1}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{-0{,}2}}$$

$z_2$ ist reell und negativ. Somit hat der Bruch eine reelle, negative Lösung.

$z_0$= 0.5864 + 0.426í
$z_1$= -0.224 + 0.6893í
$z_2$= -0.7248 + 0í
$z_3$= -0.224 - 0.6893í
$z_4$= 0.5864 - 0.426í

$z_0= 0.6931 + 0i$
$z_1= 0.2142 + 0.6592i$
$z_2= -0.5608 + 0.4074i$
$z_3= -0.5608 - 0.4074i$
$z_4= 0.2142 - 0.6592i$

$(-0{,}4)^{-0{,}4} = +1{,}44267\ ...$

$$\frac{1}{(-0{,}4)^{0{,}4}} = \frac{1}{(-0{,}4)^{\frac{2}{5}}} = \frac{1}{\sqrt[5]{(-0{,}4)^2}} = \frac{1}{\sqrt[5]{0{,}16}} = 1{,}44267\ ...$$

$z_0$ Ist reell und positiv. Somit hat der Bruch eine reelle, positive Lösung.

Wir haben also über die drei Beispiele für negative x-Werte sowohl komplexe Zahlen, reelle positive Zahlen und reelle negative Zahlen als Funktionswerte von $y = x^x$ erhalten.[123] Schon allein diese Beispiele belegen die Unstetigkeit der Funktion $x^x$ bei negativen Werten.

Auch wenn $\lim\limits_{x \to 0+} x^x = 1$ sinnvoll erscheint, so ist diese Aussage durchaus in der Geschichte der Mathematik umstritten. Der französische Mathematiker Augustin-Louis Cauchy, (1789-1857), listete die Frage unter seine Liste der undefinierten Ausdrücke, ebenso wie z.B. 0/0.[124]

In vielen Fällen muss man aber in diesem Fall per Definition $0^0=1$ fordern. Beispiele sind der binomische Satz, die Potenzreihe für die Exponentialfunktion oder die Formel für die Geometrische Reihe.

Auch $0^0:=0$ erscheint plausibel, da $0^a=0$ für alle $a \in \mathbb{R} \setminus 0$.

Im Folgenden wird die Situation insbesondere bei negativem x an einer Umformung untersucht:

$$x^x = e^{x \ln x}$$

Jede komplexe Zahl ω, für die gilt $e^{\omega} = z$ heißt natürlicher, komplexer Logarithmus von z, d.h. es gilt $x = e^{\ln x}$.

Der komplexe Logarithmus ist aber nicht eindeutig, da nach der Eulerschen Identität (siehe „schönste Gleichung aller Zeiten“) gilt: $e^{2k\pi i} = 1, k \in \mathbb{Z}$

---

[123] Nach https://www.youtube.com/watch?v=Bnp1-Xd-Eo4

[124] Augustin-Louis Cauchy: Cours d’Analyse de l’École Royale Polytechnique. 1821, Œuvres Complètes, Teil 2, Band 3, Seite 70. Siehe auch https://de.wikipedia.org/wiki/Unbestimmter_Ausdruck_(Mathematik)

Meist schränkt man die Vieldeutigkeit auf einen Streifen in der komplexen Ebene ein und nennt dies den Hauptzweig ω ∈ $\mathbb{C}$: $\pi < Im\,\omega\ \leq\ \pi\}$. Im ist der Imaginärteil von ω. Trotzdem muss man sich der Vieldeutigkeit bewusst sein.

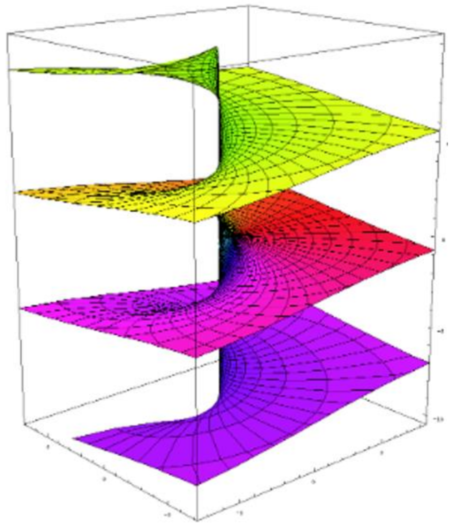


Abb. 48: „Blätter“ des natürlichen komplexen Logarithmus im Abstand 2 $\pi$, ab dem Punkt 0.

$\omega = \ln z$ nennt man Hauptwert des Logarithmus.

In Polarkoordinaten:

$\omega = \ln|z| + i(\arg z + 2k\pi),\ k \in \mathbb{Z}$ bzw.

$\ln z = \ln|z| + i \arg z,$ für k=0

Damit kann man den Logarithmus von negativen reellen Zahlen bestimmen:

$\ln(-x) = \ln|-x| + i\arg(-x) = \ln x + i\pi,$ x∈$\mathbb{R}^+$

Hier muss man beachten, dass im Komplexen die Rechenregeln für Logarithmen nur modulo $2\pi i$ gelten.

Nullmenge

Die euklidische oder archimedische Metrik bestimmt ein Maß in euklidischen Räumen $\mathbb{R}^n$, also z.B. elementargeometrischen Punktmengen, wie Strecken, Flächen oder Räumen. Es ist benannt nach Henri Léon Lebesgue (1875 – 1941). Es ist das natürliche Maß für viele Formen von Inhalten inkl. der aller offenen und abgeschlossenen Mengen. Man kann das Maß als Funktion auffassen, das einem Objekt eine reelle Zahl größer/gleich Null zuordnet, die als Streckenlänge, Flächeninhalt oder Rauminhalt interpretiert werden kann. Es ist translationsinvariant und invariant gegenüber Spiegelungen oder Drehungen. Auch das Maß unendlich kann auftreten. Ein Beispiel ist die unendliche Mantelfläche von Gabriels Horn (Torricellis Trompete) bei endlichem Volumen.

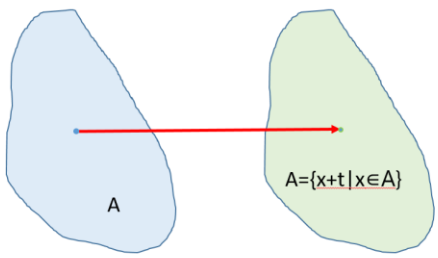



Abb. 49: Translations-Invarianz beim Lebesgue-Maß.

Eine Menge vom Lebesgue-Maß Null nennt man Lebesgue-Nullmenge oder einfach nur Nullmenge. Alle abzählbaren Mengen sind Nullmengen. Die Menge aller rationalen Zahlen ist abzählbar und deshalb eine Nullmenge. Dies gilt ebenso für die algebraischen Zahlen. Auch ein klassisches Beispiel für ein nicht abzählbares Diskontinuum, wie die Cantor-Menge, hat das Lebesgue-Maß Null. Ebenso für Punktmengen, wie z.B. den ganzen p-adischen Zahlen $\mathbb{Z}_p$, zwischen denen eine bijektive Abbildung (Homomorphismus) zur Cantor-Menge besteht.

Andrei Kolmogorov veröffentlichte 1933 sein Lehrbuch Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung, in dem er die Maßtheorie zur axiomatischen Fundierung nutzte. Damit kann man auch die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses als Teil eines Ereignisraumes als Maß ausdrücken, dem man auch das Lebesgue-Maß null zuordnen kann.

Rein formal ist eine Lebesgue-Nullmenge eine Teilmenge z.B. des euklidischen Raumes, die mit beliebig kleinen, offenen „Quadern" überdeckt werden kann. Teilmengen von Nullmengen sind wieder Nullmengen. Jede Menge, die sich mit höchstens abzählbar vielen Nullmengen überdecken lässt, ist wieder eine Nullmenge.

## Der „kleine Fermat" und die schönste Gleichung aller Zeiten

Von Pierre von Fermat wurde bereits im 17. Jahrhundert eine Beziehung gefunden, die als kleiner Satz von Fermat, kurz „kleiner Fermat", bekannt ist. Als großer Satz von Fermat wird die sogenannte Fermatsche Vermutung bezeichnet, dass es keine natürliche Zahl n>2 gibt, dass $a^n+b^n=c^n$ mit ganzzahligen a, b, c gilt. $a^2+b^2=c^2$ sind die pythagoräischen Zahlentripel, von denen das bekannteste a=3, b=4 und c=5 ist.

Fermat fand, dass

$$a^p \equiv a \ (mod\ p), a \in \mathbb{Z}, \text{p Primzahl}$$

Falls a kein Vielfaches von p ist, kann man durch a kürzen und der Satz hat die bekannte Form

$$a^{p-1} \equiv 1 \ (mod\ p)$$

Robert Kaplan formuliert den Sachverhalt schon fast poetisch:

*In der Welt von p*
*Kann man nicht $a^{p-1}$ weniger 1*
*Vom Nichts unterscheiden.*

Der Beweis ist nicht schwierig. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass man den kleinen Satz von Fermat über unterschiedlichste Teilgebiete der Mathematik beweisen kann. Das zeigt meistens, welcher tiefe Wahrheitsgehalt in einer mathematischen Beziehung steckt. Im Beweisarchiv von Wikipedia finden sich vier verschiedene Beispiele aus vier verschiedenen Bereichen.[125]

---

[125] https://de.wikibooks.org/wiki/Beweisarchiv:_Zahlentheorie:_Elementare_Zahlentheorie:_Kleiner_Satz_von_Fermat

- Vollständige Induktion mit Hilfe von Binomialkoeffizienten
- Kombinatorik
- Bijektivität der Multiplikation mit a
- Gruppentheorie

Auch weitere Beweismethoden existieren.

Noch viel auffälliger ist der Bezug zu den wichtigen Zahlen 0 und 1 bei der Eulerschen Identität.

Die Eulersche Identität lässt sich aus einer Taylor-Reihe mit Entwicklungsstelle $x_0=0$ der Funktionen $e^y, \cos(y)\ und\ \sin(y)$ mit $y \in \mathbb{R}$ herleiten. Durch Umgruppieren der Koeffizienten in der Reihe erhält man die trigonometrischen Funktionen als Reihenentwicklung:

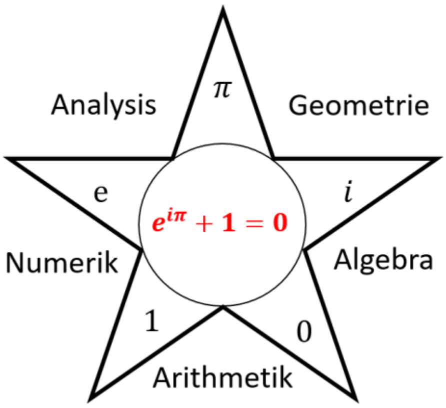



Abb. 50: Fünf der wichtigsten Symbole in der „schönsten Gleichung“ aller Zeiten.

$$e^{iy} = 1 + i \cdot y + \frac{(iy)^2}{2!} + \frac{(iy)^3}{3!} + \frac{(iy)^4}{4!} + \cdots$$

$$= \left(1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \cdots\right) + i \cdot \left(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \frac{y^7}{7!} + \cdots\right)$$

$$= \cos(y) + i \cdot sin(y), \text{ mit } i^2 = -1$$

Für $y = \pi$ ergibt sich die Eulersche Identität oder Eulersche Formel

$$e^{i\pi} = -1\ oder\ e^{i\pi} + 1\ = 0$$

Dies wird als die „schönste Gleichung aller Zeiten“ bezeichnet. Sie verbindet fünf der wichtigsten Symbole in der Mathematik.

<u>Das Dualsystem</u>

Gottfried Wilhelm Leibniz hatte am 16. Mai 1696 eine Audienz bei seinem Dienstherrn, Rudolf August, Herzog von Braunschweig-Wolfenbüttel. Wie so oft, vermischen sich theologische und mathematische Argumentationen. Ausgangspunkt ist eine Stelle im Lukasevangelium (10,42): *Unum nessessarium (Eins aber ist nötig)*.“ Leibniz erklärt dem Herzog ein Zahlensystem, das nur aus der Eins und der Null besteht und verdeutlicht es an den vier Grundrechenarten. Er sinniert darüber später in einer Notiz und wieder sind theologische und mathematische Argumente miteinander verknüpft. Er sieht die Tragweite und greift das Thema mehrfach auf und entwirft sogar eine Silbermünze oder ein Medaillon, das der Herzog tatsächlich als Siegel mit der Inschrift *unus ex nihilo omnia fecit* mit einer stilisierten Eins und Null prägen lässt.

Leibniz hatte damit das Dualsystem entdeckt, das 300 Jahre danach einem neuen Zeitalter seinen Namen geben wird: Die digitale Revolution wird nach der neolithischen und der industriellen Revolution von wesentlichen Forschungsrichtungen als dritten großen Umbruch in der Menschheitsgeschichte gesehen.

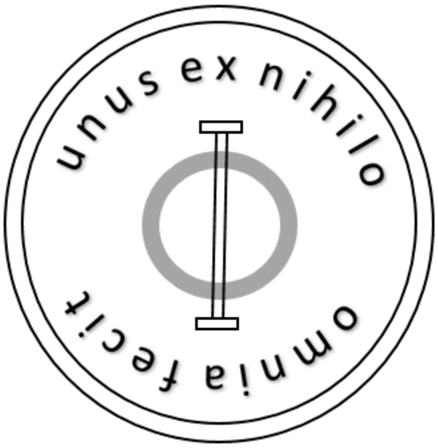



Abb. 51: Siegel zu Ehren der Erfindung des dualen Zahlensystems durch Leibniz.

Im Jahre 1703 veröffentlichte Leibniz die neue binäre Arithmetik im Artikel *Explication de l´arithmétique binaire.* Er erschien in Paris in den *Mémoires de mathématique er de physique de l´Académie royale des sciences.*[126]

Wie jede (b-adische bzw. im Falle einer Primzahl p-adische) Entwicklung einer Zahl wird hier statt der üblichen 10 die Basis 2 gewählt.

Die ersten 11 dezimalen Zahlen lauten in Binärform:

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 0 | 1 | 10 | 11 | 100 | 101 | 110 | 111 | 1000 | 1001 | 1010 |

An je einem Beispiel soll die Multiplikation, Division und Subtraktion von zwei Binärzahlen demonstriert werden. Die Addition ist selbsterklärend.

Es wird zunächst dezimal 9 x 11 = 99 gerechnet, das entspricht 1001*1011.

[126] Bottazzini, ebenda, S. 59

**1001 * 1011 = 1100011**

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **1** | **0** | **0** | **1** | | | |
| | **0** | **0** | **0** | **0** | | |
| | | **1** | **0** | **0** | **1** | |
| | | | **1** | **0** | **0** | **1** |
| **1** | **+1** | **+1**<br>**2→0** | **2→0** | **0** | **1** | **1** |
| **1** | **1** | **0** | **0** | **0** | **1** | **1** |

Abb. 52: Binärzahlen multiplizieren

Man multipliziert 1001 zeilenweise mit 1011, beginnend mit der linken 1.
Dabei rückt man pro Zeile eine Position nach rechts.
In der 1. Zeile steht somit 1001 * 1 = 1 0 0 1.
In der 2. Zeile steht 1001 * 0 = 0 0 0 0
In der 3. Zeile steht 1001 * 1 = 1 0 0 1
In der 4. Zeile steht 1001 * 1 = 1 0 0 1
Am Ende wird spaltenweise addiert. Nach der Addition steht im Zwischenergebnis zweimal eine 2, die es im Dualsystem nicht gibt. Sie wird zu 0.

Es soll die Binärzahl 10010 (dezimal 18) durch die Binärzahl 110 (dezimal 6) geteilt werden. Ergebnis ist binär 11 (dezimal 3).

Die führende 1 wird heruntergeschrieben und mit dem Divisor verglichen. Da 1 kleiner 110 steht 0 an erster Stelle des Ergebnisses.

Die 1 wird übernommen und die nächste Ziffer, eine 0, heruntergeschrieben. Wieder ist 10 kleiner als der Divisor, also steht eine weitere 0 im Quotienten.

10 wird übernommen und die 3. Ziffer, eine 0, heruntergeschrieben. Wieder ist 100 kleiner als der Divisor, also hat der Quotient 3 führende Nullen.

100 wird übernommen und 1 heruntergeschrieben. 1001 ist größer 110, d.h. im Quotienten erscheint eine 1.

Nun wird 1001 – 110 = 11 gerechnet und die letzte 0 heruntergeholt. 110 geteilt durch 110 ergibt Rest 0 und damit ergibt sich als Quotient 00011.

Zuletzt eine Subtraktion von binär 10110 (dezimal 22) minus binär 01100 (dezimal 12) = 01010 (dezimal 10).

1) Schritt: vom Subtrahenden das Einserkomplement bilden

   0 1 1 0 0 wird zu
   1 0 0 1 1

2) Schritt: Davon Zweierkomplement bilden

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ + & & & & & 1 \\ & & & {\scriptstyle +1} & {\scriptstyle +1} & \\ \hline & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

3) Schritt: Addition

$$\begin{array}{rccccc} & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ + & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & {\scriptstyle +1} & & & \\ \hline & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

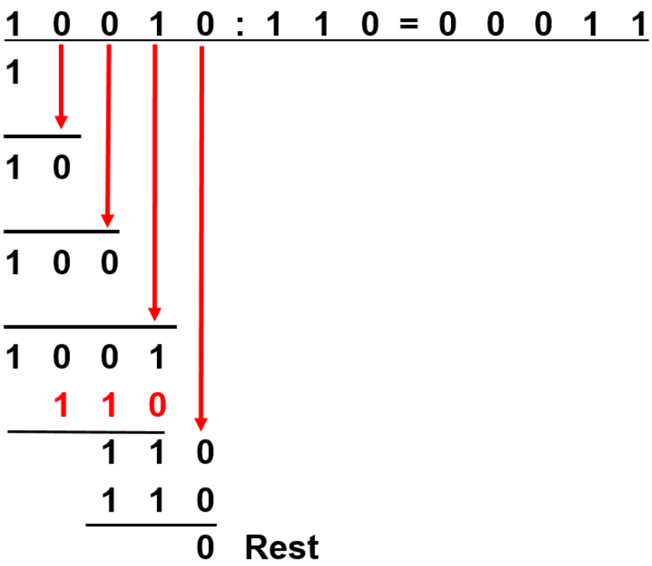



Abb. 53: Binärzahlen dividieren.

## Weitere Bezüge zur Null

Nullsummenspiele

Spiele oder auch ökonomische Situationen, bei denen die Gewinne einer oder mehrerer Spielpartner oder ökonomische Parteien (Firmen, Staaten, etc.) und die Verluste der gegnerischen Partei sich zu Null addieren nennt man Nullsummenspiele. Was die eine Partei gewinnt verliert exakt die andere Partei.

Dazu gehören alle Strategiespiele, bei denen der Sieger einen Punkt bekommt und der Verlierer einen Punkt abgezogen bekommt, bei null Punkten im Fall von Unentschieden.

Ein weniger gut passendes Beispiel ist Turnierschach. Wer gewinnt bekommt einen Punkt, wer verliert, bekommt keinen Punkt. Ein Remis bedeutet einen halben Punkt für jeden Spieler.
Fußball ist definitiv kein Nullsummenspiel. Gewonnene Spiele bringen 3 Punkte, ein Unentschieden nur einen Punkt. Die Tordifferenz passt ebenfalls nicht ins Bild.
Jedes Spiel nach dem Motto „The winner takes it all“ ist ein klassisches Nullsummenspiel.
Ökonomisch ist eine Win-Win-Situation, also das ideale Geschäft, kein Nullsummenspiel. Jedoch ist jede Konkurrenzsituation, in der Gewinne der einen Partei, gleiche Verluste für die konkurrierende Partei bedeuten, ein Nullsummenspiel.

Doppelte Buchführung

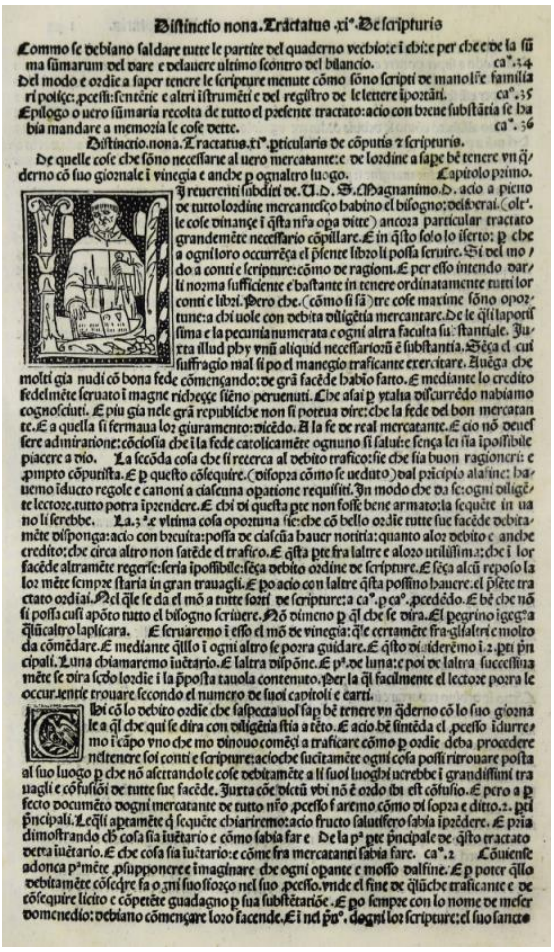
Luca Pacioli war ein sehr produktiver Franziskanermönch, der wichtige Beiträge zur reinen und angewandten Mathematik geleistet hat. Sein Hauptwerk ist *Summa de arithmetica, geometria, proportioni et proportionalità*, Venedig 1494, kurz *Summa* genannt.[127] In diesem Werk fasst er das damals bekannte mathematische Wissen zusammen. Unter anderem stellt er nochmals die Ideen aus *liber abaci* von Fibonacci vor und steigert damit deutlich den Bekanntheitsgrad und die Akzeptanz der arabischen Ziffern und der Null. Bemerkenswert ist die bereits erwähnte Tatsache, dass


Abb. 54: Luca Pacioli 1494 – 1994.
Italienische 500-Lire Münze

[127] https://www.cervantesvirtual.com/obra/summa-de-arithmetica-geometria-proportioni-et-proportionalita-1048443

Pacioli in diesem Werk dem Fingerzählen ein eigenes Kapitel widmet.[128] Das zeigt die herausragende Bedeutung, die diese Technik im ausgehenden Mittelalter und zu Beginn der Renaissance immer noch hatte. Auch dies stützt die These vom „Beharrungsvermögen“ der römischen Ziffern mangels ausreichendem Bedarf, auf das indisch-arabische Zahlensystem umzusteigen.

De Divina Proportione, ist die erste nennenswerte Zusammenfassung vom Goldenen Schnitt. Die Grafiken in diesem Werk, das digitalisiert vorliegt, stammen zum Großteil von Leonardo da Vinci. Er war Paciolis Schüler in Mathematik und hat seinen Lehrer zu diesem Werk angeregt.[129] Pacioli hat sogar ein Buch über das Schachspiel herausgegeben und es der begeisterten Schachspielerin, der Markgräfin von Mantua, Isabelle d´Este, gewidmet.



Distinctio nona. Tractatus .xi°. De scripturis

Commo se debiano saldare tutte le partite del quaderno vecchio: e i chi: e per che e de la sũma sũmarum del dare e delavere ultimo scontro del bilancio. ca°.34

Del modo e ordie a saper tenere le scripture menute cõmo sõno scripti de mano lr̃e familiari poliçe: pcessi: sentẽtie e altri istrumẽti e del registro de le lettere ĩpoztãti. ca°.35

Epilogo o uero sũmaria recolta de tutto el presente tractato: acio con breue substãtia se habia mandare a memoria le cose dette. ca°.36

Distinctio. nona. Tractatus. xi°. pticularis de cõputis e scripturis.

De quelle cose che sõno necessarie al uero mercatante: e de lordine a sape bẽ tenere vn q̃derno cõ suo giornale i vinegia e anche p ognaltro luogo. Capitolo primo.

Abb. 55: *Tractatus particularis de computis et scripturis* ist der Beginn der 20-seitigen Abhandlung von Luca Pacioli über die Doppelte Buchführung als Teil der „Summa“.

1494 beschreibt Pacioli umfassend das Prinzip der doppelten Buchführung in der ersten Druckschrift zu diesem Thema.

Die Buchführung über getrennte Konten wurde in ersten Formen, zunächst in Venedig, bis zurück ins 13. Jahrhundert praktiziert. Die Vorteile einer ausgeglichenen Bilanz wurden schnell erkannt und sie wurde in den italienischen Stadtstaaten nach und nach eingeführt. Bekanntlich beruht das Prinzip auf streng ausgeglichenen Konten auf der Soll- und Habenseite. Weißt die Gesamtbilanz eine Null aus, so sind die insgesamt doppelt geführten Konten bei Kasse, Lagerbestand, Einkauf, etc. ausgeglichen und somit alles korrekt verbucht. Z.B. bewirkt ein Verkauf eine Abbuchung im Lagerbestand und eine entsprechende Gutschrift im Kassenbestand. Jede

[128] Menninger, ebenda, digitalisierte Version S. 245

[129] https://archiviostorico.mediobanca.com/wp-content/uploads/2021/01/De-Divina-Proportione.pdf, siehe auch die Hinweise auf Pacioli und Leonardo da Vinci im Kapitel Entstehungsgeschichte und Verbreitung

Transaktion führt in der Summe aller Kontenbuchungen zu einer Null. Luca Pacioli macht aus dem Rechnungswesen eine transparente, mathematische und damit logische Technik.

Auch im übrigen Europa wurden die Vorteile rasch erkannt. Mattäus Schwartz, der Buchhalter von Jacob Fugger dem Reichen, schrieb 1518 in sein Handbuch, dass die doppelte Buchführung „ein Spiegel“ sei, „in den man sowohl sich selbst wie andere sieht, sowohl Fragen wie Antworten.“[130]
Vielleicht ist es Zufall, vielleicht aber auch eine naheliegende Analogie, dass in dieser Zeit wichtige Erhaltungssätze der Physik formuliert wurden.

Nullfläche (Physik, Kartografie)

Lösungen der allgemeinen Relativitätstheorie sehen vor, dass die Innenfläche einer Kugel, die dem Ereignishorizont einbeschrieben ist, eine „geschlossene, eingeschlossene Oberfläche“ ist. Der Begriff geht auf Roger Penrose zurück, der ihn 1985 prägte (*closed trapped surfaces*).[131] Synonym wird der Begriff „eingefangene Nullfläche“ verwendet.

In der Kartografie ist es eine horizontale Fläche ohne Höhenlinien oder Bergrücken, die als Referenz für die abgebildete Karte dienen kann. Global gesehen, ist die mittlere Meereshöhe („Normalnull“, NN) die Referenz für Karten von Landmassen. Es ist die geodätische Nullfläche. Geht es um Seekarten, so ist Normalnull im umgekehrten Sinne die Nullfläche.

Nullwert

Der britische Mathematiker und Informatiker Edgar Frank „Ted“ Codd (1923-2003) war ein Pionier bei relationalen Datenbanken. Er unterschied zwischen zwei Null-Zuständen in der Informatik, die das Fehlen eines Wertes anzeigen: die Abwesenheit eines Wertes, weil keiner existiert ("*property inapplicable*"), oder die Abwesenheit, da man den Wert (noch) nicht kennt ("*value at present unknown*"). Ein Nullwert steht für die Abwesenheit eines Wertes, ein Nullwert ist aber gleichzeitig ein Wert. Z.B. kann das Nullzeichen (NUL, Unicode U+2400) dafür verwendet werden
Man denke sich z.B. eine Datenbank für eine medizinische Reihenuntersuchung. Zu Beginn sind die Ergebnisfelder alle unbearbeitet, entsprechende Werte sind noch unbekannt und sind somit alle mit Nullwerten belegt. Ist der zu untersuchende Befund negativ, so kann dies der konkrete Wert „0“ repräsentieren und gleichzeitig anzeigen, dass der Proband untersucht wurde.

[130] Zitiert nach Kaplan, ebenda, S. 112
[131] https://de.wikibrief.org/wiki/Trapped_surface

Der Nullwert ist somit verschieden von der Zahl 0, da diese eine konkrete Information darstellt und dient lediglich der Vorbelegung des Feldes in der Datenbank.[132]
Es gibt aber auch in Programmiersprachen die Integritätsbeziehung NOT Null. Sie verhindert, dass Nullwerte im Sinne nicht festgelegter Werte eingegeben werden können.

**Fazit**

Die Entdeckung der Null war ein kognitiver Geniestreich in der Menschheitsgeschichte. Sie ist vergleichbar in der Bedeutung für die Mathematik mit der Erfindung des Rades für die Technikgeschichte. Sie war zunächst Leerzeichen, entwickelte aber ihre Bedeutung vor allem in einem Positionssystem oder Stellenwertsystem. Das kommt mit wenigen Ziffern aus, die je nach Position in der dargestellten Zahl und je nach Basis (binär, oktal, dezimal, hexadezimal, etc.) unterschiedliche Werte darstellen. Im täglichen Gebrauch hat sich das Dezimalsystem weltweit durchgesetzt, doch in Spezialgebieten, vor allem in der Informatik, erweist sich das Binärsystem, Oktal- oder Hexadezimalsystem als wichtig.

Die Null in einem Stellenwertsystem wurde von den Sumerern aber auch der Maya und Inka entdeckt und vervollkommnet. Doch die geografische Abgeschiedenheit der Maya verhinderte die Weitergabe. Dies gilt auch für die Inkas. Zweifellos gebührt das hauptsächliche Verdienst für Entdeckung und Verbreitung den Indern. Die besondere Bedeutung liegt an den entscheidenden Unterschieden bei den Kulturen mit einer Zahlschrift in einem Positions- oder Stellenwertsystem. Die Sumerer und Babylonier hatten in ihrem 60-er System nur die Eins und die Zehn, aus denen sie alle Zahlen bis 59 bildeten. Die Maya ordneten ebenfalls nur der Eins und der Fünf eigene Zeichen in ihrem 20-er System zu. Die Inder gingen den logischen Schritt, den Ziffern von 1 bis 9 bzw. 0 bis 9 eigene Zeichen zuzuordnen, die sich im Schriftbild klar absetzten und auch in größeren Zahlen übersichtlich und mathematisch handhabbar blieben. Durch Kontakte mit dem islamisch-arabischen Kulturkreis wurden die Zahlen 0 bis 9 im arabischen Raum adaptiert. Es entstanden leichte Unterschiede in den Schreibweisen zwischen ostarabischer und westarabischer Kultur. Die westarabische Kultur manifestierte sich im Süden der iberischen Halbinsel. Friedliche Kontakte und kriegerische Auseinandersetzungen führten dort dazu, dass die Vorteile der indisch-arabischen Ziffern in westarabischer Notation sowie der Null im christlichen Abendland erkannt wurden. Aber teils irrationales Beharrungsvermögen blockierte lange Zeit das neue Rechnen und verhinderte,

[132] Quelle: de.m.wikipedia.org/wiki/nullwert

dass die unpraktischen römischen Zahlen an Bedeutung verloren. Das lag aber auch am Bedarf in großen Teilen der Bevölkerung, die wenig oder gar nicht lesen und schreiben konnte. Das Kerbholz und andere Dokumentationsmittel erfüllten gemeinsam mit dem „international standardisierten“ Fingerzählen und –rechnen bis ins 20. Jahrhundert hinein ihren Zweck. Erst der wachsende Bildungsstand und durch die Anforderungen spätestens seit der Renaissance in Handel, Verwaltung, Bankwesen, Technik und Wissenschaft wurde in einem dezimalen Stellenwertsystem gerechnet und mit arabischen Ziffern notiert. Die römischen Zahlen haben heute fast nur noch dekorativen Charakter.

Die Null wurde zuerst verspottet und dann letztendlich als vollwertige Ziffer akzeptiert. Heute ist sie aber mehr als nur eine Ziffer unter mehreren. Als Zahl hat sie in zahlreichen Gebieten der Mathematik eine herausragende Bedeutung. Sie wird aber auch in zahlreichen Begriffen verallgemeinert. Dazu gehören die abstrakte Algebra, algebraische Zahlentheorie, mengentheoretische Topologie, Funktionentheorie, usw. Der Fundamentalsatz der Algebra ist ein zentraler Baustein im Mathematikgebäude geworden. Auch andere Wissensbereiche haben die Null in speziellen Begriffen verallgemeinert; so z.B. das Nullsummenspiel in der Spieltheorie und den Wirtschaftswissenschaften oder die Nullfläche in der Kartografie.

Der Null gebührt also Respekt. Sie ist längst mehr als nichts.

## Literaturhinweise

Beutelspacher, Albrecht: Null, unendlich und die wilde 13, Verlag C. H. Beck, München 2020

Bottazzini, Umberto: Wie die Null aus dem Nichts entstand, dtv, München 2021, deutsche Erstausgabe, italienische Originalausgabe 2019

Cardano, Hieronymus; Nürnberg 1545, Ars magna, https://www.e-rara.ch/zut/content/zoom/2690143

Deiser, Oliver; Lasser, Caroline; Vogt, Elmar; Werner, Dirk: 12 x 12 Schlüsselkonzepte zur Mathematik, Springer Spektrum, Berlin Heidelberg 2016

De Padova, Thomas: Alles wird Zahl, Verlag Carl Hanser, München 2021

Gericke, Helmuth: Geschichte des Zahlbegriffs. Bibliographisches Institut, Mannheim 1970

Euklid, Elemente,
Übersetzung aus dem Griechischen Johann Friedrich Lorenz, Halle, 1781
https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/6750/32

Gericke, Helmuth: Mathematik in Antike und Orient. Springer, Berlin u. a. 1984

Glosauer, Tobias: Elementar(st)e Gruppentheorie, Springer Spektrum, Wiesbaden 2016

Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Campus, Frankfurt 1986.

Kaplan, Robert: Die Geschichte der Null. 6. Taschenbuchausgabe, Piper, München 2006, (englisches Original 1999).

Leonardo di Pisa , Liber abaci, 1202 (MCCII), digitalisiert Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze, https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=1. Dazu wurde ein Download beantragt und vom Museo Galileo zur Verfügung gestellt.

Menninger, Karl: Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahl. 3. Aufl., Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen 1979, https://digi20.digitale-sammlungen.de/de/fs1/object/goToPage/bsb00107066.html?pageNo=50

Menninger, Karl, Zahlschrift und Rechnen, Bd. 2, ebenda, digitalisiert ab S. 224

Meschkowski, Herbert; Mathematisches Begriffswörterbuch, BI Hochschul-taschenbücher Band 99, Mannheim 1971

Mukherjee (oder Parthasarathi Mukhopadhyay): Discovery of Zero and its impact on indian mathematics, Calcutta 1991, https://www.researchgate.net/publication/337212771_Origin_of_Zero-An_Eternal_Enigma/link/617a9f563c987366c3f5fb3b/download

Pacioli, Luca; Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita, Venedig 1494, https://www.cervantesvirtual.com/obra/summa-de-arithmetica-geometria-proportioni-et-proportionalita-1048443

Ries, Adam, Rechnung auff der Linihen und Federn, digitalisiert durch Deutsches Museum: http://digital.bib-bvb.de/view/bvbmets/viewer.0.6.4.jsp?folder_id=0&dvs=1674737473716~317&pid=2471296&locale=de&usePid1=true&usePid2=true

Rinkens, Hans-Dieter; Krüger, Katja; Die schönste Gleichung aller Zeiten, Springer-Spektrum, Wiesbaden 2020

Rotman, Brian: Die Null und das Nichts. Eine Semiotik des Nullpunkts. Aus dem Englischen von Petra Sonnenfeld. Kulturverlag Kadmos, Berlin 2000, ISBN 978-3-931659-17-2.

Rovelli, Carlo; Es gibt Orte auf der Welt, an denen Regeln weniger wichtig sind als Freundlichkeit, Essays, Rowoldt, Hamburg, 2022

Schlote, Karl-Heinz Hsgr.; Chronologie der Naturwissenschaften Der Weg der Mathematik und der Naturwissenschaften von den Anfängen in das 21. Jahrhundert, https://slub.qucosa.de/api/qucosa%3A7968/attachment/ATT-0/

Seife, Charles: Zwilling der Unendlichkeit: Eine Biographie der Zahl Null. München 2002.

Sigmund, Karl; Sie nannten sich „Der Wiener Kreis“, Springer. 2. wesentlich erweiterte Ausgabe, 2018

Stifel, Michael, Arithmetica Integra, Norimbergae (Nürnberg) 1544 https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/1317/1

Sturm, Klaus (Hrsg.): Diagonal. Nr. 0. Siegen, o. J. ISSN 0938-7161 (Null-Nummer der Zeitschrift Diagonal mit zahlreichen Beiträgen zum Thema „Null“.) https://dewiki.de/Lexikon/Null

Vogel, Kurt: Vorgriechische Mathematik II: Die Mathematik der Babylonier. Schroedel, Hannover und Schöningh, Paderborn 1959

Wußing, Hans: 6000 Jahre Mathematik, Band 1, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

Wußing, Hans: 6000 Jahre Mathematik, Band 2, Springer, Berlin Heidelberg, 2008

**Abbildungsnachweise:**

Abb. 1: Tarot-Karte, „Der Narr“ als Null https://de.wikipedia.org/wiki/Der_Narr_%28Tarot%29#/media/Datei:RWS_Tarot_00_Fool.jpg

Abb. 2: Fingerzahlen aus dem 1492 gedruckten Werk von Pacioli. Bis auf die handvertauschten 100-er und 1000-er ist es exakt die Darstellung von Beda. Quelle: Menninger, Bd. 2, digitalisiert S. 232, Original Bd. 2, S. 5

Abb. 3: Einfache Kerbhölzer orientierten sich am quinären System, wie auch die Fingerzahlen.
Bidquelle: Ifrah, Georges: Universalgeschichte der Zahlen. Campus, Frankfurt 1986, S. 175

Abb. 4: Kerbholz zur Abrechnung von Milch einer Dorfgemeinschaft durch einen Sennhirten. Bildquelle: Karl Menninger, Zahlwort und Ziffer: Eine Kulturgeschichte der Zahl. Digitalisierte Version S. 260

Abb. 5: Umgang mit „Bauernzahlen“ bei Gottfried Kellers „Grüner Heinrich“, https://www.deutschestextarchiv.de/book/show/keller_heinrich01_1854

Abb. 6: Kerbholz zum Nachweis für Dienstleistungen. https://www.redensarten.net/etwas-auf-dem-kerbholz-haben/

Abb. 7: Urkunde des Königs Devendravarman aus Kalinga (heute Orissa in Ostindien) aus dem Jahr 596 n.Chr. galt lange als ältestes Zeugnis der Stellenwertschrift mit der Null. https://www.hpt.at/sites/default/files/schulbuch_plus_downloads/M_1000_01.pdf, S. 24

Abb. 8: Die Zahl "Null" als Punkte im Bakhshali-Manuskript (Foto APA/AFP/Bodleian Libraries, University of Oxford)

Abb. 9: 70 Seiten Birkenrinde – das Bakhshali-Manuskript (Quelle ebenda)

Abb. 10: Die ersten indischen Ziffern, nach Georges Ifrah, Universalgeschichte der Zahlen, S. 482

Abb. 11: Sprachliche Entwicklung des Begriffes Ziffer oder Zero. Quelle: Menninger, ebenda, S. 442

Abb. 12: Seite aus *liber abaci* von Leonardo di Pisa mit dem berühmten Kaninchen-Problem; rechts die ersten Fibonacci-Zahlen. Digitalisiert und freundlichst auf Anfrage per Download zur Verfügung gestellt von Biblioteca Nazionale Centrale di Firenze, https://bibdig.museogalileo.it/tecanew/opera?bid=1072400&seq=1

Abb. 13: 0, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 (vierte Zeile) aus dem Lehrbuch des Johannes de Sacrobosco († 1256), Menninger, Bd. 2, S. 216

Abb. 14: Das Ziffernrechnen (repräsentiert durch Boetius) gewinnt die Oberhand gegen den Abakus (Archimedes). (Bildquelle https://de.m.wikipedia.org/wiki/Datei:Gregor_Reisch_-_Margarita_Philosophica_-_Arithmetica.jpg)

Abb. 15: Einmaleins-Tafel aus einem Rechenbuch des 16. Jahrhunderts. Quelle: Menninger, ebenda, S. 248

Abb. 16: Süddeutsche Rechenpfennige zum Rechnen „auf der Linien“ (flacher Abakus). https://de.wikipedia.org/wiki/Rechenpfennig

Abb. 17: Deckblatt des Lehrbuchs von Adam Ries. https://www.erfurt-tourismus.de/sehens-wissenswertes/persoenlichkeiten/adam-ries

Abb. 18: Quadratische Ergänzung, geometrisch erklärt, digitalisierte Version Arithmetica Integra von Michael Stifel, https://digital.slub-dresden.de/werkansicht/dlf/1317/642

Abb. 19: Deckblatt von Gerolamo Cardanos Werk über Algebra https://en.wikipedia.org/wiki/Ars_Magna_(Cardano_book)#/media/File:ArsMagna.jpg

Abb. 20: Seite aus Cardanos *Ars magna* mit der Aufgabe x+y=10 und x·y=40, https://www.e-rara.ch/zut/content/structure/2690136 [Cap. XXXI.-Cap. XL.].pdf, S. 66

Abb. 21: Melencolia I, Albrecht Dürer, 1514

[133] Die Beschriftung in Wikipedia ist nicht korrekt. Den höchsten Grad an Regeln erfüllen Abelsche Gruppen.

## Personenverzeichnis

**Danksagung**

**Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl** bin ich zuallererst dankbar, dass er klaglos innerhalb relativ kurzer Zeit wieder als Mentor zur Verfügung stand. Wieder waren es die kleinen, aber feinen Impulse, die eine sinnvolle Ergänzung bewirkten. Ich bin darüber hinaus Prof. Köhl insbesondere für seine Unterstützung, dass ich meinen bescheidenen Beitrag zur Popularisierung der Mathematik leisten kann, zu großem Dank verpflichtet.

**Herr Dr. Michael Serafin** bleibt für mich der wichtigste Kontakt zur „Oberhessischen naturwissenschaftlichen Gesellschaft". Mit bewundernswerter Akribie hat er das Manuskript gelesen und seine Qualitätssicherung sorgt immer dafür, dass möglichst jede Unregelmäßigkeit entdeckt wird. Mit seinem Engagement sorgt er über die Zeitschrift hinaus für einen wichtigen Beitrag zur Sichtbarkeit der wissenschaftlichen Gesellschaft. Herrn Dr. Serafin danke ich dafür als Autor und als Mitglied.

FÜR FARI

*Oberhess. Naturwiss. Zeitschr. 2023, 71: 156-212, Gießen   ISSN 0340-4498*

# HYPERKOMPLEXE ZAHLEN

## in Mathematik und Physik

WILLI KAFITZ*)

Abstract:
The term "hypercomplex numbers" was coined by Emmy Noether, who made significant contributions to the theory and greatly formalized it. The term is now almost synonymous with an algebra. The four algebras in which there are divisions are particularly interesting. According to a theorem by Adolf Hurwitz (1898), there are only four real, normalized division algebras with a unit element. They are the real numbers, the complex numbers, the quaternions and the octonions.

Important physical theories of the 20th century can be formulated with quaternions. But at least since the 1970s, octonions have also shifted into focus. There is non-negligible evidence, including from string theory and supersymmetry. They could help in describing the Standard Model of elementary particles. Ideally, even physics should be developable a priori from mathematics.

Keywords: hypercomplex numbers, algebra with division, octonions in physics, physic a priori from mathematics

Zusammenfassung:
Der Begriff „Hyperkomplexe Zahlen“ wurde von Emmy Noether geprägt, die wesentliche Beiträge zur Theorie geliefert und diese stark formalisiert hat. Der Begriff steht heute schon fast synonym für eine Algebra. Besonders interessant sind die vier Algebren, in denen es eine Division gibt. Nach einem Satz von Adolf Hurwitz, (1898), gibt es nur vier reelle, normierte Divisionsalgebren mit einem Einselement. Es sind die reellen Zahlen, die komplexen Zahlen, die Quaternionen und die Oktonionen. Wichtige physikalische Theorien des 20. Jahrhunderts können mit Quaternionen formuliert werden. Doch mindestens seit den1970-er Jahren stehen auch die Oktonionen im Fokus. Es gibt nicht vernachlässigbare Hinweise, unter anderem aus der Stringtheorie und Supersymmetrie. Sie könnten bei der Beschreibung des Standardmodells der Elementarteilchen helfen. Im Idealfall sollte sogar Physik a priori aus der Mathematik entwickelbar sein.

Stichworte: Hyperkomplexe Zahlen, Divisionsalgebren, Oktonionen in der Physik, Physik a priori aus Mathematik

*) Dr. Willi Kafitz, Rother Weg 3, 35112 Fronhausen, email: willikafitz@web.de

**Bemerkenswertes**

*It is posible to form an analogous theory*
*with seven imaginary roots of (–1)*

Arthur Cayley, 1845, (1821 – 1895)

*Octonions are to physics what the Sirens were to Ulysses.*

Pierre Ramond (*1943)[1]

*The humble 8 is no longer just a number. It's our key to the Universe.*

Peter Riedlberger

*The safest conceivable theory is one which implements the fewest initial assumptions possible.*

Cohl Furey (*1979)

*Die moderne Physik ist für die Physiker eigentlich viel zu schwer*.

David Hilbert (1862 – 1943)

*Dieses Theorem war ein Leitstern für die Physik des* 20. *und* 21. *Jahrhunderts*.

Frank Wilczek (*1951), Physik-Nobelpreisträger 2004, über das Noether-Theorem.

*Die Algebra hat ein anderes Gesicht bekommen*.

Hermann Weyl auf der Gedenkfeier für Emmy Noether am 17.4.1935 in Bryn Mawr

*Raum ist der Inbegriff der Trennbarkeit mehrerer Objekte*.

Holger Lyre (*1965)

*Denn man muss wissen, dass alle Erkenntnis zwei Enden habe, bei denen man sie fassen kann, das eine a priori das andere a posteriori.*

Immanuel Kant (1724 – 1804)

---

[1] https://www.quantamagazine.org/the-octonion-math-that-could-underpin-physics-20180720/

## Inhalt

## Vorwort

Mit dem im Herbst 2022 veröffentlichten Beitrag „ZAHLEN, Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung des Zahlbegriffes“[2] und dem im Frühjahr 2023 publizierten Artikel „NULL, Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung“[3] liegen zwei Beiträge vor, die sich ergänzen.

„Zahlen“ betrachtet die mathematische und kulturhistorische Entwicklung von Zahlbereichen, wie negativen Zahlen, rationalen und irrationalen Zahlen bis hin zu komplexen Zahlen. Die Quaternionen werden kurz angesprochen und darüber hinaus werden die p-adischen Zahlen besprochen. Die Darstellung der Zahlen in der Praxis, also z.B. römisch, dezimal oder dual, wird weitgehend ausgeklammert. Der Beitrag kommt zu dem Schluss, dass die kulturhistorische und mathematische Entwicklung der Zahlensysteme synchron verlaufen musste.

„Null“ dagegen untersucht den langen Prozess, in dem sich die indo-arabischen Ziffern in der westlichen Welt durchgesetzt haben. Ein weiterer Aspekt ist die Frage, welche Kulturen über die Inder hinaus Positionssysteme inklusive der Null entwickelt haben. Beide Teile sind eher historisch orientiert. Ein dritter Teil untersucht anhand von Beispielen, wo die Null eine besondere Bedeutung in der Mathematik hat und sogar verallgemeinert wurde.

Der nun vorliegende Beitrag adressiert eine Lücke in den beiden Artikeln und möchte diese wenigstens teilweise schließen. Es geht um hyperkomplexe Zahlen. Dabei ist der Begriff „Zahl“ schon ab den Quaternionen[4] umstritten. Da die Quaternionen wegen fehlender Kommutativität bei der Multiplikation keinen Körper, sondern einen Schiefkörper bilden, bezeichnen manche Autoren die Quaternionen und weitere hyperkomplexe „Objekte“ als „Werte“ und nicht als

[2] http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-8380
[3] http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-9873
[4] Der Begriff stammt aus der Vulgata für die vier Rotten von je vier Kriegsknechten des Herodes, die den Apostel Petrus im Gefängnis bewachten. In den „Apostel Geschichten 12.4“ im englischen Neuen Testament heißt es: „*he put him in prison, and delivered him to four quaternions of soldiers to keep him.*“ Vgl. G. Temple, 100 Years of Mathematics, Duckworth, London 1981, S. 46, zitiert nach Ebbinghaus Heinz-Dieter, et. al., Zahlen, Springer-Lehrbuch, 3. Auflage (1983, 1988, 1992), Berlin Heidelberg New York, S. 159

Zahlen. Der Einfachheit halber wird in diesem Text der Begriff „hyperkomplexe Zahlen" verwendet.

*Definition*

Ganz allgemein ist eine hyperkomplexe Zahl ein Element einer Algebra A und hat die Form $a_0 + a_1 i + \cdots + a_n i_n$. Die $i_k, k > 0$, heißen imaginäre Einheiten.

Für A muss gelten:

A hat als Vektorraum die endliche Dimension n (Rang n)

A besitzt ein Einselement $e \in$ A , so dass für alle $a \in$ A gilt $e \cdot a = a \cdot e = a$

Für die Addition gilt das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz.

Die Addition ist invertierbar.

Es gilt das linksseitige und rechtsseitige Distributivgesetz.

Die Multiplikation in einer hyperkomplexen Algebra A ist bilinear über den reellen Zahlen, d. h., es gilt $(\alpha x)(\beta y) = \alpha\beta(xy)$, für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, x, y \in$ A

Gemäß dieser Definition sind auch reelle Zahlen oder komplexe Zahlen hyperkomplex, denn auch diese Körper erfüllen die Anforderungen an eine entsprechende Algebra. Man kann generell von unitalen[5] Algebren über $\mathbb{R}$ sprechen. Schwerpunkt der Betrachtungen sollen die sogenannten Divisionsalgebren sein, von denen es nur vier gibt. D.h. algebraischen Strukturen, in denen eine Division existiert, in denen also die Gleichung $a_2 * x = a_1$ und $x * a_2 = a_1$ jeweils eine Lösung hat. Ausgehend von entsprechenden Strukturen bei den komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$, zweidimensional) werden Quaternionen ($\mathbb{H}$, vierdimensional) und Oktonionen ($\mathbb{O}$, achtdimensional) eingeführt.[6] Schwerpunktmethode ist das sogenannte Verdoppelungsverfahren.[7] Die Koeffizienten sind reell.

Generell gilt: Möchte man, über die Dimension zwei hinaus, höherdimensionale Vektorräume bilden, so muss die Dimension entweder unendlich sein oder man muss auf grundlegende algebraische Eigenschaften verzichten.

Diese Divisionsalgebren sollen bzgl. ihrer algebraischen Grundeigenschaften mathematisch ausführlich im Anhang behandelt werden. Obwohl nur im Anhang behandelt, werden diese Ausführungen trotzdem als die mathematische Basis dieses Beitrags betrachtet. Auf die zunehmend strukturloseren weiteren hyperkomplexen Zahlen, wie den Sedenionen ($\mathbb{S}$, sechszehndimensional), wird

---

[5] In der Mathematik bedeutet unital „ein Einselement betreffend"
[6] Im Deutschen wird oft der Begriff „Oktave" verwendet.
[7] https://de.wikipedia.org/wiki/Verdopplungsverfahren

hier im Detail verzichtet. Sie haben keine Division. Das Verdoppelungsverfahren, also hier ein Sedenion der Dimension 16 als Paar von Oktonionen aufzufassen, kann zwar einigermaßen sinnvoll bis zu den Sedenionen fortgesetzt werden. Dabei gehen jedoch immer mehr algebraische Eigenschaften verloren. Im Gegensatz zu $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{O}$ besitzt $\mathbb{S}$ sogenannte Nullteiler, d.h. das Produkt von zwei Faktoren ungleich 0 kann 0 ergeben. Eine ernstzunehmende Anwendung, insbesondere in der Physik, kann auch nicht identifiziert werden.

Viele Zusammenhänge, aber vor allem die Einbettung der hyperkomplexen Zahlen in die abstrakte Algebra wurden von Emmy Noether entwickelt. Sie hat mit genialen eigenen Leistungen und mit Anregungen bei ihren Schülern („Noether-Knaben") die abstrakte Algebra entscheidend geprägt. Das wird angesprochen.

Der Beitrag versteht sich mathematisch als Ergänzung, um einerseits auch diese Zahlenbereiche und ihre Gemeinsamkeiten anzusprechen, andererseits aber auch den schrittweisen Verlust von strukturellen Eigenschaften stärker zu thematisieren. Aber das wäre zu wenig!

**Vier Zahlensysteme**

**Reelle Zahlen $\mathbb{R}$**
- Eindimensional (1-D)
- Vollständig geordnet
- Lokal kompakt
- Zusammenhängend
- Algebraischer Körper

**Komplexe Zahlen $\mathbb{C}$**
- Zweidimensional (2-D)
- Algebraisch abgeschlossen
- Lokal kompakt
- Zusammenhängend
- Algebraischer Körper

**Quaternionen $\mathbb{H}$**
- Vierdimensional (4-D)
- Lokal kompakt
- Zusammenhängend
- Schiefkörper, da Multiplikation nicht kommutativ
- Aber Divisionsalgebra

**Oktonionen $\mathbb{O}$**
- Achtdimensional (8-D)
- Lokal kompakt
- Zusammenhängend
- Kein Körper
- keine Assoziatät, nur Alternativität
- Aber Divisionsalgebra

Abb. 1: Man kann nur vier Zahlensysteme der Dimensionen $2^0$, $2^1$, $2^2$, $2^4$ über $\mathbb{R}$ mit Division identifizieren: (Divisionsalgebren). Die Sedenionen, ($\mathbb{S}$, Dimension $2^5$), gehören nicht mehr dazu

Die Tafel gibt einen Überblick über die vier Divisionsalgebren. Dabei wird explizit auf den Anhang verwiesen.

Die physikalischen Bezüge der hyperkomplexen Quaternionen sind heute schon offenkundig und für sich genommen bemerkenswert. Da, wo sie bei den Oktonionen noch spekulativ sind, adressieren sie faszinierende Bereiche der theoretischen Grundlagenforschung.

Ein weiterer Abschnitt ist deshalb der Physik gewidmet. Denn es wurde und wird die Physik zunehmend auf die hier dargestellten Strukturen, insbesondere die Divisionsalgebren, aufmerksam und es deuten sich faszinierende Anwendungsbereiche an.

In einem letzten Kapitel wird der Frage nachgegangen, ob aus der Mathematik heraus physikalische Erkenntnis, sozusagen a priori im kantschen Sinne, gewonnen werden kann.

## Verallgemeinerung des Begriffs hyperkomplex

Bisher wurden die Divisionsalgebren, komplexe Zahlen (Dimension n=2), die Quaternionen (n=4) und Oktonionen (n=8) angesprochen. Sie sind nach Definition hyperkomplexe Zahlen, denn sie haben ein Einselement e mit ea=ae=a und bilden Vektorräume der Dimension n. Auch die reellen Zahlen mit der Dimension n=1 gehören dazu. Man muss zusätzlich fordern, dass für die Addition das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz gelten muss. Die Addition ist invertierbar und es gilt das linksseitige und rechtsseitige Distributivgesetz. Streng genommen gibt es unendlich viele. Im Kapitel „Verdoppelung und Oktonionen" werden sie allgemein definiert. Dabei werden die Koeffizienten als reell angesehen. Die Multiplikation ist im allgemeinen Fall (z.B. bei den Sedenionen, n=16) nicht nullteilerfrei und es müssen keine Inversen existieren. Schon bei den Quaternionen ist die Multiplikation nicht kommutativ.

Man kann den Begriff „hyperkomplex" aber auf zahlreiche weitere Zahlensysteme erweitern. Viele tragen sogar keinen expliziten Namen. Die Definition, dass eine hyperkomplexe Zahl ein Element einer endlich dimensionalen unitalen Algebra (mit Einselement) über dem Körper der reellen Zahlen ist, kann man als veraltet ansehen. In der Mitte des 19. Jahrhundert kannte man im Prinzip nur Quaternionen, Tessarine[8], Coquaternionen, Biquaternionen und Oktonionen. Biquaternionen wurden noch von Hamilton selbst 1853 eingeführt, der auch erkannte, dass sie keine Divisionsalgebra sind. Sie waren Algebren über den Körpern der reellen und komplexen Zahlen. Man kann auch über dem Körper der rationalen Zahlen hyperkomplexe Zahlen bilden. Weitere, im 19. Jahrhundert bekannte Objekte sind die Clifford-Algebren (nach William Kingdon Clifford 1845 – 1879). Clifford wollte ursprünglich damit die Quaternionen auf höhere Dimensionen erweitern. Auch duale

[8] Die Tessarinen bilden eine assoziative und kommutative hyperkomplexe Algebra der Dimension 4 mit der Basis (1, i, j, k), so dass $i^2 = -1$ , $j^2 = 1$ und $k = ij$ . Sie gehen auf James Cockle im Jahr 1848 und den Folgejahren zurück. Es ist eine Algebra, die die üblichen komplexen Zahlen und die von Cockle im selben ersten Artikel eingeführten komplexen Zahlen kombiniert (https://de.frwiki.wiki/wiki/Tessarine).

Quaternionen[9] sind mittlerweile bekannt. Weitere Begriffe sind bikomplex (4-dim. über ℝ, 2-dim. über ℂ), Biquaternionen (8-dim.), komplexe Oktonionen, etc. Eine neuere Zusammenstellung findet sich bei Anmerkung[10]. Manche haben nur geringere Bedeutung; sie wurden vor Einführung der Matrizen gefunden.

Zwei Sätze, die gewisse Grenzen aufzeigten, wurden relativ früh bewiesen: Der 1877 publizierte Satz von Ferdinand Georg Frobenius (1849 - 1917), Schüler von Weierstraß, besagt, dass es bis auf Isomorphie nur drei endlich-dimensionale, assoziative Divisionsalgebren über den reellen Zahlen gibt: ℝ, ℂ und ℍ. Hamilton hat vergeblich Jahre auf der Suche nach 3-dimensionalen assoziativen Divisionsalgebren verbracht. Hätte es diesen Satz vorher gegeben, wäre ihm dies erspart geblieben. Der Satz setzte eine wichtige Grenze, denn es waren Dutzende neuer hyperkomplexer Zahlensysteme bekannt geworden. Gauß hatte noch 1831 vermutet, dass es keine hyperkomplexen Zahlen geben könne, bei denen wichtige, grundlegende algebraische Eigenschaften der komplexen Zahlen erhalten bleiben.

Benjamin Peirce (1809 – 1880), Professor der Mathematik in Harvard, fasste in einem 1871 publizierten Artikel „Linear Associative Algebras“ den Stand der damaligen Forschung zusammen.[11]

Der Satz von Hurwitz (1898) wurde ohne die Zusatzannahme „normiert“ 1958 von M. Kervaire mit topologischen Methoden bewiesen. Hier nochmals das wesentliche Ergebnis, auf das der vorliegende Beitrag aufsetzt:
Die vier reellen, (normierten), Divisionsalgebren mit Eins sind (bis auf Isomorphie):

die reellen Zahlen selbst
die komplexen Zahlen
die Quaternionen
die Oktonionen oder Oktaven oder Cayley-Zahlen.

Alle außer den Oktonionen erfüllen bekanntlich, wie oben ausgeführt, das Assoziativgesetz der Multiplikation.

Auf jeden Fall verlangte diese Zahlen- oder Werteklasse nach einer abstrakten, algebraischen Verallgemeinerung. Dies ist in wesentlichen Teilen das Verdienst

[9] Dual Quaternions (Duale Quaternionen) sind eine Erweiterung der hamiltonschen Quaternionen um die duale Komponente. Geometrisch betrachtet führen duale Quaternionen die Translation ein, während einfache Quaternionen nur Rotation darstellen können. In einem Dual Quaternion lassen sich also sowohl Rotation als auch Translation speichern. https://wiki.delphigl.com/index.php/Dual_Quaternion
[10] https://wikigerman.edu.vn/wiki36/2021/07/10/hyperkomplexe-zahl-wikipedia/
[11] Amer. Journ. Math. 4, 97-229, 1881; https://www.jstor.org/stable/pdf/2369153.pdf

von Emmy Noether und ihrer Schüler, die bis zu ihrem Tod 1935 die abstrakte Algebra der hyperkomplexen Zahlen vorantrieb.

Eine weitere Grenze stellt ein 1940 bewiesener Satz von Heinz Hopf (1894 – 1971) dar. Seine einfache Frage lautet: Was sind die einzigen endlich-dimensionalen, kommutativen (nicht notwendigerweise assoziativen) Divisionsalgebren? Der Beweis ist keineswegs trivial und benutzt tiefliegende, nichttriviale Methoden der Topologie. Die Antwort auf seine Frage: Eine reelle, kommutative Divisionsalgebra kann höchstens 2-dimensional sein.
In diesem Zusammenhang sei auch auf den Satz von Pontrjagin[12] verwiesen, der im Beitrag „ZAHLEN, Geschichte, Bedeutung und Verallgemeinerung des Zahlbegriffes“[13] eine Rolle spielt.

## Hyperkomplexe Zahlen in der Mathematik

### Würdigung von Emmy Noether

Die begabteste Mathematikerin des 20. Jahrhundert, wenn nicht gar aller Zeiten, war zweifellos Emmy Noether. Zur besseren Einschätzung ihrer Leistung ist ein kurzer Blick auf die damaligen Rahmenbedingungen wichtig. Für eine Karriere, die ihrem Talent entsprach, hatte sie in ihrer Zeit das „falsche“ Geschlecht. Sie absolvierte zunächst die Prüfung als Lehrerin. Das war noch innerhalb der Norm, doch implizierte es die erste Restriktion in der damaligen deutschen Gesellschaft. Seit 1879 durften verbeamtete Lehrerinnen nicht heiraten. 1919 wurde das „Lehrerinnen-Zölibat“ gestrichen, aber bereits vier Jahre später wiedereingeführt. Erst 1951 konnte eine Lehrerin auch Ehefrau sein. Bis 1958 entschied in Westdeutschland grundsätzlich der Ehemann, ob seine Frau arbeiten durfte.

Noch viel schlimmer war die Stellung der Frauen an den Universitäten um die Jahrhundertwende und weit darüber hinaus. Eine Reichtagspetition, die 1891 die Zulassung von Frauen zum Studium erwirken sollte, wurde „*mit ungeheurer Heiterkeit*“ registriert und abgelehnt.[14] Zum Vergleich: Bereits 1863 führte dies Frankreich ein. Emmy Noether wechselte nach Göttingen, zum „Mekka“ der internationalen Mathematik, hatte geniale Ergebnisse, aber bekam nur eine unbezahlte Assistentinnenstelle. Vor allem ihre Habilitation per ministerieller Sonderzulassung war ein enormer bürokratischer Kraftakt im 3. Anlauf und nur ihrem Ausnahmetalent zu verdanken. Trotzdem sperrten sich zahlreiche

---

[12] Siehe Pontrjagin, L. S.; Verallgemeinerungen der Zahlen, Verlag Harri Deutsch, Thun Frankfurt am Main, 1995
[13] Oberhessische naturwissenschaftliche Zeitschrift, Preprint, erscheint in Bd. 71, http://dx.doi.org/10.22029/jlupub-8380
[14] Jaeger, Lars, Emmy Noether, Südverlag, Konstanz 2022, S. 46

Ordinarien allein wegen ihres Geschlechts als Frau. Erst 1923 wurde sie außerordentliche Professorin und hatte ein festes Einkommen.

Eine andere Stelle dieses Beitrags wird dem Noether-Theorem gewidmet sein. Hier sollen zunächst ihre herausragenden Ergebnisse im Bereich der hyperkomplexen Zahlen sowie ergänzend der nichtkommutativen Algebren erwähnt werden, die den Schwerpunkt der Arbeiten in ihren letzten Jahren von 1928 – 1935 bildeten. Sie sollen nur exemplarisch und in groben Zügen angesprochen werden.

Für sieben Semester kennt man dokumentierte Vorlesungen und Seminare von Emmy Noether in Göttingen:[15]

Wintersemester (WS) 1924/25: Gruppentheorie und hyperkomplexe Zahlen

WS 1927/28: Hyperkomplexe Mengen und Darstellungstheorie

Sommersemester (SS) 1928: Nichtkommutative Algebra

SS 1929: Nichtkommutative Arithmetik

WS 1929/30: Algebra der hyperkomplexen Größen

WS 1930/31: Allgemeine Idealtheorie

WS 1932/33: Nichtkommutative Arithmetik

Meist publizierte sie im Anschluss oder gleichzeitig bedeutende Artikel zu diesen Themen.

*„Der von ihr geprägte Begriff „hyperkomplexes System" hat sich inzwischen als so fundamental herausgestellt, dass er heute schlichtweg als „Algebra" bezeichnet wird*."[16] Das Credo, das Emmy Noether bei der Formalisierung hin zu der abstrakten Algebra leitete, hat ihr Schüler van der Waerden auf den Punkt gebracht: *Alle Beziehungen zwischen Zahlen, Funktionen und Operationen werden erst dann durchsichtig, verallgemeinerungsfähig und wirklich fruchtbar, wenn sie von ihren besonderen Objekten losgelöst und auf allgemeine begriffliche Zusammenhänge zurückgeführt sind.*[17] Die abstrakte Theorie von Idealen und Moduln hat Frau Noether maßgeblich geprägt. Die „Deutsche Biografie" formuliert es noch grundsätzlicher und schreibt, dass Frau Noether „die Algebra grundsätzlich neu formte" und damit „ihren Nachruhm" begründete.[18] „*Die Mutter der modernen Algebra*" hat Cordula Tollmien,

[15] Jaeger, Lars, Emmy Noether, Südverlag, Konstanz 2022, S. 71
[16] Zitiert nach https://www.deutsche-biographie.de/pnd118588443.html
[17] Zitiert nach dem Vortragsmanuskript von Cordula Tollmien, einer wichtigen Noether Biografin, https://www.cordula-tollmien.de/noethervortragbraunschweig2000.html
[18] Ebenda, https://www.deutsche-biographie.de/pnd118588443.html

Historikerin und Biografin von Emmy Noether, ihren Vortrag betitelt, den sie anlässlich der Eröffnung der Ausstellung "Leben und Werk der Mathematikerin Emmy Noether 1882-1935" an der TU Braunschweig am 24. Mai 2000 gehalten hat.

Eine vollständige Publikationsliste 1882 – 1935 findet sich dort[19]. Es sind über 45 Veröffentlichungen. Nicht gezählt sind die Zuarbeiten, bei denen sie entscheidende Ergebnisse zulieferte, aber aufgrund ihrer untergeordneten Stellung in der Universitätshierarchie nicht erwähnt wurde (siehe dazu die Biografie von Lars Jaeger, Emmy Noether).

Sie war weiterhin Mitherausgeberin der Gesammelten Werke von Richard Dedekind und dem Briefwechsel zwischen Georg Cantor und Richard Dedekind.

*Richard Dedekind, Gesammelte mathematische Werke, hg. von Robert Fricke, Emmy Noether, Öystein Ore, Drei Bände, Braunschweig 1930-1932*

*Briefwechsel Cantor-Dedekind, hg. von E. Noether und J. Cavaillès, Paris 1937.*

Emmy Noether verehrte Richard Dedekind. Einer ihrer wichtigsten Schüler, Bartel Leendert van der Waerden (1903 – 1996), hat oft einen Ausspruch von Emmy Noether zitiert: *„Alles steht schon bei Dedekind“*.[20] Sie meinte natürlich damit von ihm gelegte Grundlagen, die oft auch von ihr aufgegriffen und maßgeblich vorangetrieben wurden.

Frau Noether hat sich vielfach mit nichtkommutativen Strukturen auseinandergesetzt. Das begann schon mit ihrer Publikation „*Hyperkomplexe Größen und Darstellungstheorie*“ vom Jahr 1929. Hier beschränkt sie sich schon nicht mehr auf abelsche Gruppen. Wichtigste Arbeit und Ergebnis einer Reihe von Forschungen und früheren Veröffentlichungen ist ihre Arbeit von 1933 zu „*Nichtkommutative Algebren*“. Während sich dieser Beitrag auf Betrachtungen von endlichen Algebren über den Körpern $\mathbb{R}$ oder auch $\mathbb{C}$ beschränkt, hat Frau Noether dies verallgemeinert und z.T. unendlich dimensionale Algebren über beliebigen Körpern studiert.

Wichtige algebraische Strukturen tragen ihren Namen, zum Beispiel:

Ringe oder Moduln heißen *noethersch*, wenn sie keine unendliche Schachtelung von Unterstrukturen enthalten können. Nichtkommutativität wirkt sich folgendermaßen aus: Sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring mit Einselement (unital). Salopp formuliert: Ein R-Linksmodul M heißt noethersch, wenn jedes Untermodul

---

[19] https://www.cordula-tollmien.de/noetherpublikationen.html

[20] Jaeger, ebenda, S.132, in leicht abgewandelter Formulierung siehe das Zitat bei Stefan Müller-Stach, Emmy Noether und ihre Bedeutung für die moderne Mathematik, S. 10, https://www.staff.uni-mainz.de/stach/Noether.pdf

endlich erzeugt wird oder jede aufsteigende Kette von Untermoduln irgendwann abbricht oder jede nichtleere Menge an Untermoduln ein maximales Element hat. (Analog R-Rechtsmodul).

Ein Ring heißt linksnoethersch, wenn er als R-Linksmodul noethersch ist;
Ein Ring heißt rechtsnoethersch, wenn er als R-Rechtsmodul noethersch ist;
R heißt noethersch, wenn er links- und rechtsnoethersch ist.
Erst dann ist R kommutativ.

R-Links-Moduln $(M_L,+)$ (bzw. analog R-Rechts-Moduln $(M_R,+)$) sind dann abelsche Gruppen des Rings (R,+, ), für die gelten soll:

Es gibt eine Abbildung $R \times M \to M$, $(r,m) \longmapsto r\cdot m = rm$ und

Für alle $r_1, r_2 \in R$, $m_1, m_2 \in M$ gilt:

$(r_1+r_2)\, m = r_1\cdot m + r_2\cdot m$ und
$r\cdot(m_1 + m_2) = r\cdot m_1 + r\cdot m_2$ und für
$r_1\cdot(r_2 \cdot m) = (r_1 \cdot r_2)\cdot m$, für alle $r_1, r_2 \in R$, $m \in M$

An diesen verallgemeinerten Definitionen und Regeln sieht man deutlich die Analogie zu den im Kapitel „Zur Mathematik der Divisionsalgebren“ (Anhang) im speziellen Fall angewendeten Regeln.

Emmy Noether erhielt 1932 zusammen mit Emil Artin den Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis für ihre gesamten wissenschaftlichen Leistungen. Bevor die Fields-Medaille (offiziell International Medal for Outstanding Discoveries in Mathematics) 1936 gestiftet wurde, war der Ackermann-Teubner-Gedächtnispreis die höchste Auszeichnung, die in Deutschland für mathematische Leistungen vergeben wurde.

Im September 1932 hielt Emmy Noether einen Plenarvortrag auf dem Internationalen Mathematikerkongress in Zürich mit dem Titel *Hyperkomplexe Systeme und ihre Beziehungen zur kommutativen Algebra und zur Zahlentheorie*. Der Kongress wurde von 800 Personen besucht, darunter Mathematiker wie Hermann Weyl, Edmund Landau und Wolfgang Krull sowie eng mit Noether verbundene Algebraiker wie Olga Taussky, Helmut Hasse und Bartel Leendert van der Waerden. Der Kongress wird gelegentlich als der Höhepunkt von Noethers mathematischer Karriere bezeichnet.[21] Eine gute Zusammenfassung ihres Wirkens siehe auch Wußing, Band 2, S. 428 ff[22]

[21] Zitiert nach https://de.wikipedia.org/wiki/Emmy_Noether
[22] Hans Wußing, 6.000 Jahre Mathematik, Bd. 2, Springer Berlin Heidelberg, 2009, S. 428 ff

### Moderne Algebra und hyperkomplexe Zahlen

Die klassische Algebra beginnt mit Galois und findet einen gewissen Abschluss in den Lehrbüchern von Heinrich Weber (1842 – 1913).[23] Wichtige Namen und zentrale Sätze in der 2. Hälfte des 19. Jahrhunderts, wie Frobenius, Pierce oder Hurwitz wurden schon genannt. Auf Hamilton, Graves und Carley wird im mathematischen Anhang an passender Stelle eingegangen. Auch Webers Zusammenarbeit mit Richard Dedekind, der Emmy Noether so geprägt hat, ist erwähnenswert.[24] Während sich Hilbert mehr um eine *abstrakte Begriffsbildung* kümmerte, arbeiteten Emmy Noether, Ernst Steinitz, Emil Artin, Helmut Hasse, van der Waerden und andere an einer *abstrakten strukturellen Beschreibung*. Begonnen hat diese Entwicklung in den USA mit Edward Vermilye Huntington, Eliakim Hastings Moore und Leonhard Eugene Dickson. Zentrale algebraische Strukturen, wie Gruppe, Körper, Algebra, (später Ring) werden axiomatisch definiert und abstrakt untersucht. Ab etwa 1907/08 entstand durch Dickson und vor allem durch Joseph Henry Maclagan Wedderburn mit zentralen Sätzen die abstrakte Algebren-Theorie. Abstrakter Modulbegriff führte zur Idealtheorie und es wurden Rechenmethoden der linearen Algebra angewendet. Rechts- und Linksideale oder einseitige und zweiseitige Moduloperationen forderten die Beschäftigung mit Nichtkommutativität. Zu nennen ist auch die Bourbaki-Gruppe, die abstraktes, axiomatisches Denken in der Algebra vorantrieb. Sie waren, gemeinsam mit Garett Birkhoff und Saunders MacLane, Impulse für die Entwicklung der algebraischen Geometrie.[25]

Es besteht kaum ein Zweifel, dass das Interesse in den letzten 50 Jahren an hyperkomplexen Zahlen und insbesondere an den Divisionsalgebren und ihren Tensorprodukten durch die Physik maßgeblich indiziert wurde. Das heißt nicht, dass Ergebnisse nur und ausschließlich von physikalischem Interesse sind. Eher kann man eine Zwei-Sichten-Strategie mit Fokussierung auf Mathematik und/oder Physik beobachten:

*Beispiel für beide Sichten:*
John C. Baez, John Huerta; The Algebra of Grand Unified Theories
arXiv:0904.1556v2 [hep-th] 1 May 2010
John C. Baez; Baez; The Octonions,
arXiv:math/0105155v4 [math.RA] 23 Apr 2002

*Beispiel mathematische Sicht:*

---

[23] Lehrbuch der Algebra. Braunschweig 1895/96 (Band 1 und Band 2), Elliptische Functionen und algebraische Zahlen. Braunschweig 1891

[24] Heinrich Weber, Richard Dedekind: Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen. J. Reine Angew. Math. 92 (1882) 181–190

[25] Siehe weitere Informationen Hans Wußing, ebenda Bd. 2, S. 423 ff

John Horton Conway, Derek Smith; On Quaternions and Octonions: Their Geometry, Arithmetic, and Symmetry, 1. Auflage, CRC Press, 2003

*Beispiel physikalische Sicht:*
Borsten, Leron; Dahanayake, Duminda; Duff, Michael J.; Ebrahim, Hajar; Rubens, Williams (2009). „Schwarze Löcher, Qubits und Oktonionen".
Physics Reports, Volume 471, Issue 3-4, p. 113-219. February 2009
DOI: 10.1016/j.physrep.2008.11.002 bzw. 10.48550/arXiv.0809.4685
arXiv:0809.4685.

## Hyperkomplexe Zahlen in der Physik

### Veranschaulichung der Rechenoperationen

Um sich die Anwendungsmöglichkeiten klarzumachen, ist es sinnvoll, sich die entsprechenden Rechenoperationen Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division bildlich in den jeweiligen Dimensionen anzuschauen, also auf Geometrie und Symmetrie zu achten (Grafiken am Beispiel komplexe Zahlen siehe Anhang).

*Reelle Zahlen*:

Addition a + b bedeutet das „Verschieben" von a auf dem Zahlenstrahl um b nach rechts.
Subtraktion a – b bedeutet „Verschieben" um b nach links.
Multiplikation a·b bedeutet „Streckung", falls b>0 und „Stauchung", falls b<0. Die Null bleibt unverändert, denn bei 0·b oder a·0 erfolgt weder Strecken noch Stauchen.
Division von a durch b bedeutet Multiplikation von a mit dem Kehrwert von b, also a·$\frac{1}{b}$.

*Komplexe Zahlen*

Statt auf einem eindimensionalen Zahlenstrahl finden die Symmetrieoperationen nun in der komplexen 2-dimensionalen Ebene statt.
Addition von a+bi und c+di bedeutet „Verschieben" von a+bi um c nach rechts und um d Einheiten nach oben.
Subtraktion ist das „Verschieben" nach links und nach unten.
Multiplikation ist nun nicht mehr „Streckung" oder „Stauchung" der reellen Achse, sondern der ganzen Ebene. Z.B. wenn die Zahl 1 mit i multipliziert wird, wird die ganze Ebene um 90º gedreht, denn 1·i=i. Eine weitere Drehung um 90º Grad nach links bedeutet wieder Multiplikation von i mit i und erneute Drehung um 90º Grad nach links, also zu $i^2$=–1.
Division ist wieder Multiplikation mit dem Kehrwert, z.B. 2i : 2i = 2i · $\frac{1}{2i} = 1$. Die Drehung findet also im Uhrzeigersinn statt.

*Quaternionen*

Die Rechenoperationen finden nun in einem 4-dimensionalen Raum statt. Das ist auch plausibel. Selbst eine einfache Drehung im Raum erfordert drei reelle Zahlen, nämlich jeweils für die drei Raumrichtungen. Für die Automobilindustrie ist das in einem DIN-Standard 70.000 festgeschrieben. Z.B. für 3D-Grafik ist noch eine 4. Zahl für „Stauchung" oder „Streckung" notwendig.
Es wird auch deutlich, dass es schon bei der Drehung im Raum auf die Reihenfolge ankommt (siehe Abbildung).

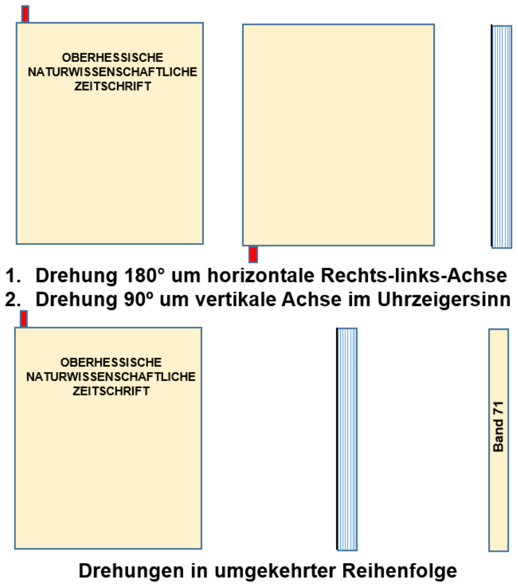



Abb. 2: Bei Drehungen (am Beispiel eines Buches) ist die Reihenfolge wichtig. Sie sind nicht kommutativ.

Allerdings wird heute meist a+bi+cj+dk als reelle Zahl a plus ein Dreiervektor (b,c,d) ausgedrückt. Quaternionen werden aber durchaus in Grafikprozessoren bei 3D-Animationen oder zur Steuerung von Satelliten eingesetzt.

Die Quaternionen haben immerhin noch respektable „Nischenanwendungen" gefunden. Über 100 Jahre war das bei den Oktonionen nicht der Fall.
Das änderte sich erst in der 2. Hälfte des 20. Jahrhundert. Oktonionen wurden vorher wegen ihrer fehlenden Assoziativität in der Physik kaum beachtet. Beispiele für fehlende Kommutativität kennt man aus dem Alltagsleben („erst Socken anziehen, dann Schuhe – nicht umgekehrt", oder bei Drehungen). Aber dass $a \cdot (b \cdot c) \neq (a \cdot b) \cdot c$ ist, fand man in der (klassischen) physikalischen Welt höchst selten.

### Anwendungen in der Physik

Über die Bedeutung der reellen Zahlen muss nicht viel gesagt werden. Komplexe Zahlen sind in der Physik ebenfalls nicht mehr wegzudenken. Ohne sie gäbe es z.B. keine Quantentheorie. Mit Hilfe der Quaternionen kann die spezielle Relativitätstheorie hergeleitet werden und sogar Teile der Quantentheorie. Grund ist die vierdimensionale Darstellung. Sie erlaubt es in vielen Fällen, getrennte Gleichungen für Raum und Zeit zu vermeiden.

Pascual Jordan zeigte beispielsweise, wie man mit Biquaternionen, also Quaternionen über dem Körper der komplexen Zahlen mit komplexen

Koeffizienten, die Lorentz-Gruppe elegant darstellen kann.[26] Sie hat grundsätzliche Bedeutung der Beschreibung von Elementarteilchen in der relativistischen Quantenmechanik und von Feldern in der Quantenfeldtheorie, in der Felder und Teilchen einheitlich beschrieben werden und auch Kraftteilchen quantisiert sind. Komplexwertige Biquaternionen sind damit Sprachmittel für moderne Physik – mit Ausnahme der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Ansonsten sind eine Fülle von gängigen Rechenmethoden über die Quaternionen realisierbar. Eine detaillierte Übersicht findet sich unter [27]. Beispielsweise lässt die Tatsache, dass bei den Quaternionen eine Division möglich ist, auch zu, dass man logarithmische und exponentielle Funktionen definieren kann.

Die Quaternionen kann man, ebenso wie die komplexen Zahlen, als Spezialfälle einer Clifford-Algebra A der Ordnung n mit $2^n$ verallgemeinerten Zahlen als Basis sich vorstellen.

$$\mathrm{A} = \sum_{l=1}^{2^n} i_l a_l$$

wobei die $i_l$ hyperkomplexe Elemente als Basis sind und die $a_l$ komplexe Zahlen.

n=1 sind die zweidimensionalen komplexen Zahlen mit $i_1 = 1$ und $a_1, a_2$ reell

n=2 sind die die vierdimensionalen Quaternionen mit $i_1 = 1, i_2 = i, i_3 = j, i_4 = k$ und $a_1, a_2, a_3, a_4$ reell.

n=3 sind Biquaternionen mit $i_1 = 1, i_2 = i, i_3 = j, i_4 = k$ und $a_1, a_2, a_3, a_4$ komplex. Sie haben gegenüber den reellen Quaternionen z.B. den Vorteil, dass im Reellen nur Rotationen von starren Körpern dargestellt werden können. Im Komplexen sind auch Dehnungen und Stauchungen möglich.

n=4 sind Clifford-Zahlen, die in der Physik als Dirac-Matrizen eine Rolle spielen. Dirac führte die Gamma-Matrizen ein, um die Klein-Gordon-Gleichung, die eine Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, in eine Gleichung erster Ordnung umzuwandeln. Sie haben folgende Form:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & -1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 \end{pmatrix}, \gamma^1 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & -1 & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \gamma^2 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & -i \\ \cdots & \cdots & i & \cdots \\ \cdots & i & \cdots & \cdots \\ -i & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}, \gamma^3 = \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 1 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

(verschwindende Matrixelemente werden nicht als Nullen ausgeschrieben)

[26] P. Jordan, Über die Darstellung der Lorentzgruppe mit Quaternionen, in F. Bopp (ed.), Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit, Vieweg & Sohn, Braunschweig 1961, S. 84-85

[27] https://mathepedia.de/Quaternionen.html

## Das Standardmodell der Teilchenphysik

In den 1960-er Jahren wurde der „Teilchen-Zoo immer unübersichtlicher. Es fehlten strukturelle Leitlinien, um Ordnung zu schaffen und Gesetzmäßigkeiten zu bilden. Murray Gell-Mann entdeckte, dass sich die bekannten Teilchen je nach Masse, Ladung, Spin usw. in der Lie-Gruppe SU(2), der sogenannten komplexen Drehgruppe, ordnen ließen. Das war noch kein Beweis. Doch er postulierte 1961, dass an einer Lücke noch ein Teilchen fehlte. Es wurde 1964 am Brookhaven National Laboratory nachgewiesen und erhielt den Namen Ω-Minus (Omega-Minus). Das Quark-Modell war damals noch nicht entdeckt. Heute weiß man, Ω-Minus besteht aus drei strange-Quarks. Voraussage und Entdeckung waren eine wichtige Bestätigung des Modells. Es herrschte eine ungeheure Aufbruchstimmung unter den Physikern. Man hoffte, alle Teilchen und alle Grundkräfte inklusive der Gravitation in einem Standardmodell der Elementarteilchenphysik zu integrieren. Dieses fußte auf einer Kombination von drei Lie-Gruppen. Dies gelang, allerdings ohne die Gravitation berücksichtigen zu können. Die drei Lie-Gruppen sind

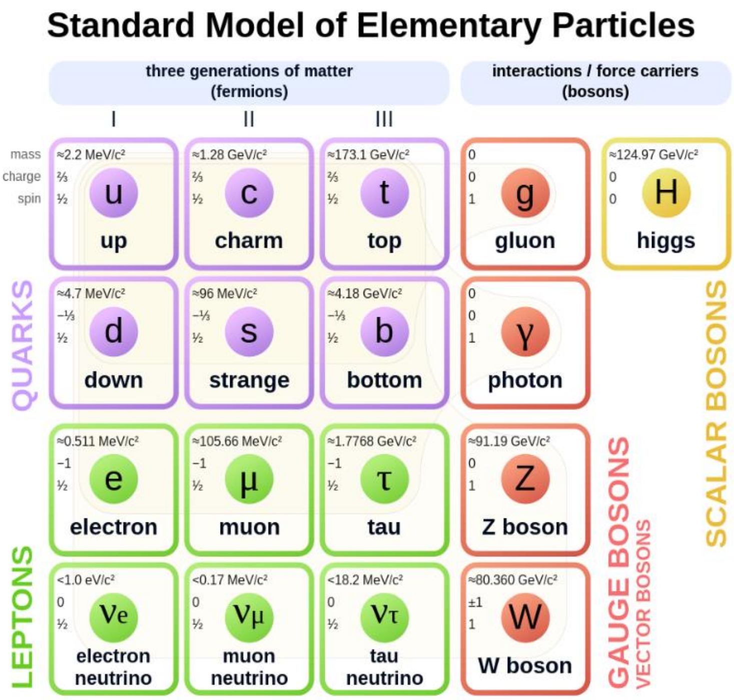



Abb. 3: Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (Teilchen-bezogen)

$U(1)_Y$ als Nullpunktseichung der Phase durch Photonen γ für die elektromagnetische, bzw. W-Bosonen und das Z-Boson für die schwache Wechselwirkung. Mathematisch ist es die Kreisgruppe, also der Abbildungen von komplexen Zahlen, deren Betragsquadrat gleichbleibt. Geometrisch entspricht es einer Drehung um den Nullpunkt.

$SU(2)_L$ als lokale Eichsysmmetrie für Ladungserhaltung. Es ist die sogenannte Spin-Gruppe in der Physik und in der Mathematik die einfachste kompakte nichtabelsche Lie-Gruppe und Gruppe der komplexen Drehungen des zweidimensionalen komplexen Raumes $\mathbb{C}^2$ und wird von den sogenannten drei 2x2 Pauli-Matrizen erzeugt. Im dreidimensionalen reellen Raum $\mathbb{R}^3$ ist sie die Überlagerungsgruppe von SO(3), der Drehgruppe der Ortsdrehimpulse. Es gibt einen durch die Quaternionen vermittelten Isomorphismus zwischen der Gruppe der Einheitsquaternionen und der speziellen unitären Gruppe SU(2).

$SU(3)_C$ ist die Struktur der Quantenchromodynamik, also der Symmetriegruppe für die Umeichung der Farbladung in Baryonen. Es sind bekanntlich die eigentlichen Materieteilchen, die aus Quarks bestehen und durch die starke Kernkraft gebunden werden. $SU(3)_C$ wird von den acht Gell-Mann-Matrizen erzeugt. Eine Analogie zur SO(4) als Drehgruppe im $\mathbb{R}^4$ ist nicht möglich. Es gilt SO(4)=SU(2)xSU(2). Man kann es als orientierungserhaltende orthogonale Abbildung von $\mathbb{H}$ in sich selbst auffassen.

Somit ist das Standardmodell als folgendes Tensorprodukt beschreibbar:

$$SU(3)_C \otimes SU(2)_L \otimes U(1)_Y$$

<table>
<tr><th colspan="6">Fundamentale Wechselwirkungen und ihre Beschreibungen</th></tr>
<tr><td></td><td>Starke Wechselwirkung</td><td colspan="2">Elektromagnetische Wechselwirkung</td><td>Schwache Wechselwirkung</td><td>Gravitation</td></tr>
<tr><td rowspan="2">klassisch</td><td rowspan="2"></td><td>Elektrostatik</td><td>Magnetostatik</td><td rowspan="2"></td><td>Newton. Gravitation</td></tr>
<tr><td colspan="2">Elektrodynamik</td><td>Allg. Relativitätsth.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">quanten-theo-retisch</td><td rowspan="2">Quantenchromodynamik</td><td colspan="2">Quantenelektrodynamik</td><td>Fermi-Theorie</td><td rowspan="3">Quanten-gravitation (?)</td></tr>
<tr><td colspan="3">Elektroschwache Wechselwirkung</td></tr>
<tr><td colspan="4">STANDARDMODELL</td></tr>
<tr><td colspan="4">Große vereinheitlichte Theorie, GUS (?)</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="5">Weltformel („Theorie von Allem“) (?)</td></tr>
</table>

Abb. 4: Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (Kräfte-bezogen)

Die Kombination der drei Lie-Gruppen half die nächsten Jahrzehnte, das Standardmodell der Teilchenphysik immer weiter mit Leben zu füllen. Doch eine übergreifende Lie-Gruppe war nicht in Sicht. Es gab Bemühungen, aber es wurden Phänomene vorausgesagt, wie z.B. der Protonenzerfall, die nicht beobachtet werden konnten. Zu nennen ist eine Lie-Gruppe SO(11,3).[28] Garett Lisi hat ein in der Öffentlichkeit vielbeachtetes Paper veröffentlicht, in dem er aus $E_8$ ein Modell für eine Theory of Everything (ToE) skizziert.[29] Jaques Distler und Skip Garibaldi wiesen aber sehr entschieden nach, dass Lisis Ansatz rein mathematisch begründet war und wichtige physikalische Rahmenbedingungen

[28] Roberto Percacci, International School for Advanced Studies, Triest, mit Fabricio Nesti, Universität Ferrara, https://www.spektrum.de/alias/quantengravitation/zurueck-zu-den-wurzeln/1045683

[29] A. Garett Lisi: An Exceptionally Simple Theory of Everything. 2007 arXiv:0711.0770

außer Acht ließ.[30] Trotzdem ist $E_8$ immer noch von hohem Interesse, auch wenn für eine ToE mehr gebraucht wird und möglicherweise auch E10 nicht ausreicht.

### Die Lie-Gruppe $E_8$

Im Jahr 2007 ging eine ungewöhnliche Meldung zu einem mathematischen Durchbruch durch die seriöse Tagespresse.[31] In einer fünfjährigen Arbeit konnten Mathematiker um Jeffrey Adams von der University of Maryland (College Park, USA) die Lie-Gruppe $E_8$ entschlüsseln.

Die Lie-Algebra $E_8$ hat die Dimension 248 (Freiheitsgrade). Interessant ist vor allem ihr Wurzelsystem, das Rang 8 hat und aus 240 Wurzeln besteht. Die Bedeutung von Wurzelsystemen in euklidischen Räumen liegt darin, dass sie invariant unter einer endlichen Gruppe linearer Abbildungen sind, die von Spiegelungen erzeugt werden. In der Regel normiert man die Wurzeln auf die Länge $\sqrt{2}$. Die Menge aller Vektoren des $\mathbb{R}^8$ bilden ein Gitter, dessen Koordinaten entweder alle ganze Zahlen oder alle halben ganzen Zahlen sind. Die Summe aller Koordinaten ist gerade.

Diese Gruppe ist offenbar von zentraler Bedeutung in der Teilchenphysik. In der Stringtheorie und Supergravitation gilt $E_8$x$E_8$ als anomaliefreie Eichgruppe. Namhafte Physiker aus der Stringtheorie glauben, dass $E_8$ wichtige Impulse für den mathematischen Formalismus liefern kann, um zu einer einheitlichen Stringtheorie der Teilchenphysik mit allen vier Grundkräften zu kommen. Die Existenz der $E_8$-Gruppe war seit 100 Jahren klar, aber ihre Struktur war unbekannt. Wilhelm Killing entdeckte in den Jahren 1888-1890 die komplexe Lie-Algebra $E_8$ bei seiner Klassifikation einfacher komplexer Lie-Algebren. Ihre Existenz wurde von Élie Cartan bewiesen. Cartan stellte fest, dass eine komplexe einfache Lie-Algebra vom Typ $E_8$ drei reelle Formen zulässt. Jede von ihnen führt zu einer einfachen Lie-Gruppe der Dimension 248, von denen genau eine (wie bei jeder komplexen einfachen Lie-Algebra) kompakt ist, d.h. deren zugrundeliegende Topologie ein kompakter Hausdorffraum ist. Die kompakte reelle Form von $E_8$ ist die Isometriegruppe des 128-dimensionalen außergewöhnlich kompakten Riemannschen symmetrischen Raums (EVIII in Cartans Klassifikation). Er ist informell als "oktooktonionische Projektive Ebene" bekannt, da es mit einer Algebra konstruiert werden kann, die das Tensorprodukt der Oktonionen, mit sich selbst ist, also $\mathbb{O}\otimes\mathbb{O}$ (siehe auch nächstes Kapitel). Direkte Berechnungen zeigen, dass $E_8$ isometrisch zu $\mathbb{O}$ ist.

---

[30] Jaques Distler, Skip Garibaldi, There is no “Theory of Everything” inside E8, https://arxiv.org/pdf/0905.2658.pdf

[31] Siehe z.B. https://www.faz.net/aktuell/wissen/physik-mehr/mathematik-forscher-entschluesseln-die-lie-gruppe-e8-1434490.html

Das Wurzelgitter ist der einzige nichttriviale positiv-definite, gerade, unimodulare Verband vom Rang 8.[32]

Die 248 Elemente der Gruppe enthalten mehr als 200 Milliarden Komponenten. Sie wurden mit Hilfe eines Supercomputers der University of Washington mit einem speziellen Algorithmus errechnet.
Die Abbildung zeigt im Prinzip die enorme Komplexität einer Struktur eines 57-dimensionalen Körpers, der auf 248 verschiedene Arten gedreht werden kann (zur Konstruktion und Generierung der Grafik siehe Abbildungsverzeichnis).

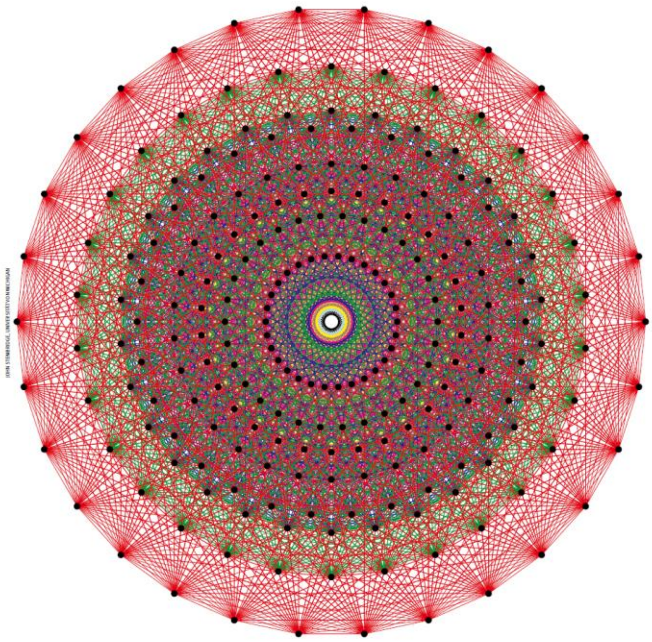


Abb. 5: Eine Darstellung der Lie-Gruppe $E_8$, wie ein 57-dimensionales Objekt gedreht werden kann ohne sein Aussehen zu verändern.

Was macht die Dimension 8 und damit Querbeziehungen zu den Oktonionen so interessant? Es könnte mit der Packungsdichte zusammenhängen. In der Ebene kann man um eine Münze sechs weitere, gleich große Münzen gruppieren. In drei Dimensionen sind es 12 (kubisch-flächenzentrierte Packung und die hexagonale Packung, aber gemäß mittlerweile bewiesener Keplerscher Vermutung nur mit knapp ¾ Packungsdichte, $\frac{\pi}{\sqrt{18}} = 0{,}74048\ldots$). In acht Dimensionen kann man 240 Kugeln an eine zentrale Kugel anlegen und zwar ohne Verlust an Packungsdichte, d.h. stramm anliegende Kugeln, deren Struktur man in alle 8 Raumrichtungen per Translation fortsetzen kann. Aus den

[32] Quelle Dissertation von Jiang Chengen bei Prof. Dr. Ralf Köhl (damals Univ. Gießen), „Modular Groups Over Real Normed Division Algebras and Over-extended Hyperbolic Weyl Groups“, http://geb.uni-giessen.de/geb/volltexte/2018/13667/pdf/JiangChengen_2018_07_11.pdf, ein freundlicher Hinweis von Prof. Köhl, heute Universität Kiel

Wurzelvektoren, die vom Mittelpunkt der Zentralkugel zu den anderen benachbarten Kugeln weisen, lässt sich die Gruppe $E_8$ konstruieren.

### Supersymmetrie und Stringtheorie

Reelle, komplexe und ebenfalls die Quaternionen waren lediglich Mittel der mathematischen Beschreibung von physikalischen Gesetzen. Doch mit den Oktonionen hat sich die Qualität geändert. Sie sind stellenweise vom Hilfsmittel zum Gegenstand mathematisch-physikalischer Forschung geworden. Die Oktonionen stehen seit nunmehr über 50 Jahren für mögliche Bezüge zur Teilchenphysik, auch wenn die elegante und ansprechende theoretische Forschung bisher noch keinen entsprechenden experimentellen Nachweis gefunden hat.

Etwa ab Mitte der 1960-Jahre waren Teilchen und Kräfte in ihrem prinzipiellem Aufbau und ihren Wechselwirkungen bekannt. Das Standardmodell der Teilchenphysik entstand. Ein großer Erfolg war, dass im Jahr 1973 durch Makoto Kobayashi und Toshihide Maskawa das Topquark vorhergesagt wurde, das 1995 am Fermilab in Chicago experimentell nachgewiesen wurde. Die Vorhersage war aufgrund der Eichsymmetrie zwingend, sonst hätte eine Anomalie gedroht, die das ganze Standardmodell zu Fall gebracht hätte. 1977 erschien Steven Weinbergs Buch „The First Three Minutes“, das diese Erkenntnisse erstmals auf den Urknall anwenden konnte. Es entstand zusammen mit der Allgemeinen Relativitätstheorie ein weiteres Standardmodell, nämlich das der Kosmologie. Beide Standardmodelle müssen sicherlich revidiert oder zumindest verfeinert werden, denn zu viele Fragen sind noch offen. So werden die Massen der Teilchen und andere freie Parameter nicht genau hergeleitet, sondern müssen experimentell ermittelt werden. Warum gibt es drei Familien an Fermionen? Gibt es weitere Higgs-Bosonen? In der Kosmologie kann man Dunkle Materie und Dunkle Energie noch nicht erklären und die Entstehung von Raum und Zeit im Urknall. Durch welche Symmetriebrüche entstanden die unterschiedlichen Kopplungsstärken? Bei beiden Standardmodellen ist unbeantwortet, woher der eklatante Überschuss an Materie gegenüber Antimaterie herrührt.

In diesen Jahren im letzten Drittel des 20. Jahrhunderts entstanden die Anfänge der Stringtheorie und eine theoretisch bis heute sehr überzeugende Theorie namens Supersymmetrie – auch wenn sich bisher keine experimentellen Belege dafür fanden. Im Standardmodell der Teilchenphysik wird zwischen Fermionen („Materieteilchen“) und Bosonen („Kraftteilchen“) unterschieden. Supersymmetrie bedeutet, dass jedes Teilchen ein supersymmetrisches Partnerteilchen besitzt. Bei einem Austausch der beiden bleiben die Naturgesetze gleich. Wäre unser Universum ohne Zeit und 1-, 2-, 4- oder 8-

dimensional, so wären Vektoren und Spinoren algebraische Elemente in Divisionsalgebren und die Wechselwirkung untereinander entspräche der Multiplikation entsprechender Kennzahlen. Man müsste nicht mehr zwischen Vektor und Spinor unterscheiden und (abhängig von der Dimension) wären die Zahlen reell, komplex, Quaternionen oder Oktonionen. Supersymmetrie wäre eine einheitliche Beschreibung von Materie und Kräften.
An Spinoren kann man den Bezug zur Dimension am besten verdeutlichen. In der dreidimensionalen Raumzeit, z.B. eines Elektrons, benötigt man nur zwei reelle Zahlen für den Spin (meist normiert auf +1/2, -1/2). In der vierdimensionalen Raumzeit sind es zwei komplexe Zahlen, die dann als 2x2-Matrizen vorkommen. In einer sechsdimensionalen Raumzeit sind es Paare von Quaternionen und bei 10 Dimensionen Paare von Oktonionen. Auch die M-Theorie (s.u.) in 11 Dimensionen profitiert von den Symmetrieeigenschaften der Oktonionen, da von den 11 Dimensionen sieben nicht unmittelbar beobachtbar sind („eingerollt" sind).[33] Wichtig ist die mathematische Bestätigung, dass keine höherdimensionalen Modelle möglich sind. Es gibt nur vier normierte Divisionsalgebren.
Naheliegend ist die Verwandtschaft mit der $E_8$-Lie-Gruppe, die Anwendungen in der theoretischen Physik und insbesondere in der Stringtheorie und Supergravitation hat. Zur Erinnerung: Die kompakte reelle Form von $E_8$ ist die Isometriegruppe eines 128-dimensionalen Raumes, der als „oktooktonionische projektive Ebene" bekannt ist. Er kann algebraisch als Tensorprodukt der Oktonionen mit sich selbst konstruiert werden ($\mathbb{O}\otimes\mathbb{O}$).
Nun fehlt in diesem Bild die Zeit als weitere Dimension sowie die Bewegung eines Raumpunktes in der Zeit als eindimensionale Weltlinie. Diese Weltlinie spannt in der Zeit eine 2-dimensionale Fläche auf. Damit sind die relevanten Dimensionen für die Supersymmetrie, die mehr oder weniger von der Stringtheorie vorausgesetzt wird (aber nicht umgekehrt), 3, 4, 6 oder 10. Wird nicht in 10 Dimensionen gerechnet, so entstehen Anomalien, d.h. die Reihenfolge spielt bei der Berechnung eine Rolle. In 10 Dimensionen ist das nicht der Fall. Damit entsteht die Querbeziehung zu den Oktonionen. Sollte die Stringtheorie die Natur korrekt beschreiben, so muss das Universum 10 Dimensionen haben und supersymmetrisch sein.

Statt eindimensionaler Strings gibt es Argumente, zu 2-dimensionalen Membranen (kurz 2-Bran) überzugehen. Auch hier zeigt sich zumindest, dass dabei 11 Dimensionen benötigt werden, auch wenn sie noch in den Kinderschuhen steckt.

---

[33] Baez, John C., The Octonions, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), 145-205; arXiv:math/0105155v4

Die experimentellen Möglichkeiten sind immer noch ca. 15 Größenordnungen von einem Nachweis der vermuteten physikalischen Strukturen entfernt. Was zunächst bleibt, sind vor allem Symmetrieüberlegungen. Dies gilt für beide Standardmodelle. Dabei muss man sich den jeweiligen Grenzen (Energie- bzw. Planck-Skala) nähern, um neue Symmetrien zu erkennen. Oder umgekehrt: Man geht davon aus, dass bei ca. 15 GeV alle drei Grundkräfte, deren Kopplungskonstanten heute höchst unterschiedlich sind, sich vereinigen. Symmetriebrechung hat man häufig in der Natur, z.B. beim Ferromagnetismus, der bei höheren Temperaturen reversibel verschwindet. Man sucht also nach Hinweise auf „Symmetrievergrößerungen“ in den jeweiligen Skalen. Ein wichtiger Kandidat bei der Untersuchung von Schwarzen Löchern oder dem Urknall ist die seit einigen Jahrzehnten in der Mathematik bekannte Symmetrie E10. Es liegt eine spezielle Form von unendlichen Lie-Gruppen zugrunde (sogenannte hyperbolische Kac-Moody-Algebren). Sie werden, wie bereits erwähnt, zur Beschreibung von kontinuierlichen Transformationen benötigt. Diese Strukturen weisen auf viele Zusammenhänge hin, die im Rahmen der (Super)stringtheorie in den letzten Jahrzehnten erarbeitet wurden und sind wohl einer der Schlüssel zur Quantengravitation. Bei niedrigen Temperaturen erhält man bereits plausible Ergebnisse, wenn man eine Verallgemeinerung der Allgemeine Relativitätstheorie supersymmetrisch untersucht. Bei der hohen Energie in Raumzeitsingularitäten, wie Schwarzen Löchern, benötigt eine supersymmetrische Theorie eine 11-dimensionale Raumzeit. Die Geometrie entspricht verblüffend genau der E10-Symmetrie.[34]

So schließt sich wieder der vermutete Kreis zwischen Oktonionen und E10.

Diese Querbeziehungen ermutigen zweifellos zu weiteren Forschungen.

Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik ist ein großer Triumph für die Physik. Trotzdem sind die theoretischen Physiker nicht ganz glücklich damit.

1) Es lässt die Schwerkraft außen vor, die momentan nur und ausschließlich gut von der Allgemeinen Relativitätstheorie erklärt wird.
2) Astronomische Erkenntnisse deuten darauf hin, dass es Materie, wie die sogenannte „Dunkle Materie gibt, die nicht im Standardmodell adressiert wird. Das vermutete leichteste supersymmetrische Teilchen konnte bisher am Large Hadron Collider (LHC) des CERN nicht nachgewiesen werden.
3) Es ist zu kompliziert und widerspricht dem Bestreben, in letzter Konsequenz ästhetisch schöne, elegante und einfache Naturgesetze zu entdecken.

Es findet deshalb immer wieder eine Hinwendung zu den Anfängen Mitte der 1970-er Jahre statt, als die Idee einer „Großen vereinheitlichten Theorie“ (Great Unified Theory, GUT) aufkam und man mit Hilfe von Lie-Gruppen, Lie-Algebren

---

[34] T. Damour, M. Henneaux, Phys. Rev. Lett 2001, 86, 4749

usw. nach Ordnung und Struktur suchte. Diese Idee ist nach wie vor aktuell. Ein früher Verfechter ist z.B. Edward Witten, der bisher als einziger Physiker 1990 die Fields-Medaille erhielt.[35]

### Neuere Ergebnisse

Die Fokussierung auf die Algebra in den letzten Jahren ist u.a. verbunden mit dem Namen der jungen kanadischen Wissenschaftlerin Cohl (Nicohl) Furey. Sie sucht einen fast utopisch anmutenden Ansatz, nämlich Elementarteilchenphysik a priori (!) mittels Oktonionen im weitesten Sinn zu erklären. D.h. Verhalten in der Natur <u>aus</u> der Mathematik und nicht nur <u>durch</u> die Mathematik zu erklären. Zumindest ist sie mit diesem hehren Ziel angetreten. Natürlich ist klar, dass die wichtigste Prüfung das Experiment ist. Es ist ein Ansatz, den bereits Immanuel Kant versucht hat, indem er die Geometrie des Raumes als a priori euklidisch dreidimensional darstellte, auch wenn er dabei scheitern musste. Gelungen ist er Emmy Noether, die die drei klassischen physikalischen Erhaltungssätze, Energieerhaltung, Impulserhaltung/ Drehimpulserhaltung und Ladungserhaltung als zwangsläufige Konsequenz aus rein mathematischen Überlegungen zur Invarianz von Symmetrietransformationen heraus abgeleitet hat und im 2. Schritt dies für kovariante Theorien (ohne feste Bezugssysteme) verallgemeinert hat. Anlass war die allgemeine Relativitätstheorie.

Mitte des Jahres 2020 kam die kanadische theoretische Physikerin Nichol (Cohl) Furey mit einem 6-jährigen Freigeist-Stipendium der Volkswagenstiftung zum Forschungszentrum IRIS Adlershof (Berlin).[36] Sie hatte bereits vorher neue Ideen zur theoretischen Beschreibung von Elementarteilchen vorgelegt und in ihrer Dissertation ein regelrechtes Programm dazu aufgezeigt.[37] Sie glaubt, dass mit hyperkomplexen Zahlen sich Zusammenhänge auftun, die (fast nur) aus der Mathematik heraus physikalische Erkenntnisse zulassen.
So wird gezeigt, dass jede der Lorentz-Darstellungen (Skalare, alle links- und rechtshändigen Spinoren oder der Feldstärketensor) des Standardmodells als invariante Unterräume der komplexen Quaternionen identifiziert werden kann (siehe oben dazu den Beitrag von P. Jordan). Bereits 1937 hat A. Conway diesen Ansatz gewählt, die Arbeit von Furey geht aber deutlich darüber

[35] Siehe z.B. Edward Witten, Grand unification with and without supersymmetry, in Introduction to supersymmetry in particle and nuclear physics, eds. O. Castanos, A. Frank, L. Urrutia, Plenum Press, 1984, pp. 53–76.
[36] siehe auch https://www.adlershof.de/news/die-magierin-der-oktaven
[37] C. Furey, Standard model physics from an algebra?, PhD thesis, 2015, https://arxiv.org/pdf/1611.09182.pdf

hinaus.[38] Neu ist, dass jede Darstellung der Lorentz-Gruppe des Standardmodells als Linksideal aufgefasst werden kann. Man findet eine Reihe verallgemeinerter Ideale, die aus drei verallgemeinerten Begriffen stammen. Diese verallgemeinerten Ideale führten direkt zu links- und rechtshändigen Weyl-Spinoren, Dirac-Spinoren und Majorana-Spinoren, Vierervektoren, Skalaren und den Feldstärke-Tensor. Dies gilt für alle Lorentz-Darstellungen des Standardmodells.

Furey ist, wie die Beispiele deutlich machen, natürlich nicht die erste Physikerin, die sich für Oktonionen interessiert. Aber zumindest ihre ersten Ziele sind ziemlich hochgesteckt. Zu Beginn des Weges hat sie sich Rat bei Murat Günaydin gesucht. Er ist heute Professor an der Penn State University und hat 1973 als Doktorand in Yale, zusammen mit Feza Gürsey, einen möglichen Zusammenhang zwischen den Oktonionen und der starken Kernkraft entdeckt. In einem Treffen im Jahr 2014 riet Günaydin der jungen Doktorandin von der University of Waterloo, Kanada, von der weiteren Beschäftigung mit dem Thema ab.[39] Allerdings ist die Situation heute eine andere. Damals in den 1970-er Jahren hat man auf die Entdeckungen von Teilchenbeschleunigern geschaut und so überwiegend auf die experimentelle Methode gesetzt, so dass diese Ideen nicht zielstrebig weiterverfolgt wurden. Man setzte auf riesige Anlagen der Experimentalphysik und nicht auf scheinbar zufällige mathematische Gemeinsamkeiten. Heute fehlen die erwarteten experimentellen Ergebnisse z.B. zur Supersymmetrie. Mit dem Higgs-Boson ist das Standardmodell seit 2012 im Prinzip abgeschlossen und es wurden seither keine fundamental neuen Teilchen entdeckt. Eine Physik jenseits des Standardmodells ist nicht oder kaum in Sicht und immer noch können zahlreiche Parameter, wie die Massen der Teilchen, nur experimentell ermittelt werden und ergeben sich nicht aus der Theorie.

Vorausschickend sei gesagt, dass Furey nicht die einzelnen Algebren im Fokus hat, sondern Tensorprodukte von Algebren. Ein Tensorprodukt zweier Algebren ist wieder eine Algebra. Das kann man beliebig steigern und immer wieder neue hyperkomplexe Zahlen erzeugen. Dabei wird gerne über die Schreibweise differenziert, um weniger Erklärungsaufwand zu haben.

$C \otimes_{\mathbb{R}} C$ sind 4-dimensionale Tessarinen
$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ sind 8-dimensionale Biquaternionen
$\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{H}$ sind 16-dimensionale komplexe Oktonionen etc.

---

38 A. Conway, Quaternion treatment of relativistic wave equation, Proceedings of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and physical sciences, 162, No 909 (1937).
39 Natalie Wolchover in https://www.quantamagazine.org/the-octonion-math-that-could-underpin-physics-20180720/

Die Koeffizienten sind reelle Zahlen, genauer: es sind Algebren in letzter Konsequenz über dem Körper der reellen Zahlen, denn auch komplexe Zahlen sind aus reellen Zahlen aufgebaut.

Furey konzentriert sich vor allem auf das Tensorprodukt der vier Divisionsalgebren $\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}\otimes\mathbb{H}\otimes\mathbb{O}$ über den reellen Zahlen (Dixon Algebra), sowie auf Teile davon. Allein aus Interpretation der Mathematik der Algebra sollen Teilchen, Kausalität und irreversible Zeit hervorgehen. Ideale werden als Teilchen interpretiert. Aus dem $\mathbb{C}\otimes\mathbb{H}$-Teil findet man verallgemeinerte Ideale und kann zeigen, dass sie alle Lorentz-Darstellungen des Standardmodells kurz beschreiben. $\mathbb{C}\otimes\mathbb{H}$ können komplexe Quaternionen sein. Die Symmetrie ist SU(2)L und wirkt damit, wie in der Natur, nur auf linkshändige Zustände.

Aus dem $\mathbb{C}\otimes\mathbb{O}$-Teil der Algebra findet man minimale linke Ideale und kann zeigen, dass sie das Verhalten einer Generation von Quarks und Leptonen widerspiegeln.[40]

In der Teilchenphysik treten drei Familien an Quarks und Leptonen auf. Warum, konnte bisher nicht geklärt werden. Cohl Furey konnte aus einem Oktonionenmodell ableiten, dass sich aus der Mathematik der 8-dimensionalen Oktonionen-Algebra drei Generationen mit zwei ungebrochenen Eichsymmetrien SU(3) und U(1) ergeben.[41]
Insbesondere Kombinationen der Divisionsalgebren mit reellen (oder auch komplexen Koeffizienten) weisen erstaunliche Ähnlichkeiten mit Strukturen des Standardmodells der Teilchenphysik auf.[42] Dabei setzt Furey auf frühere Ergebnisse auf.[43] Sie erhält eine Grundstruktur SU(5) der Großen Vereinheitlichten Theorie (GUT) von Georgi und Glashow, aber ohne deren problematische Implikationen zum Protonenzerfall.

Quarks und Antiquarks können schon aus dem Modell von Gunaydin und Gursey prinzipiell erkannt werden. Furey findet darüber hinaus eine Reihe von Zuständen, die sich analog zu den acht Quarks und Leptonen einer ganzen Generation interpretieren lassen. Außerdem lässt sich in diesem Modell die Quantisierung der elektrischen Ladung verstehen.[44]

---

[40] C. Furey, Standard model physics from an algebra? PhD thesis, 2015, https://arxiv.org/pdf/1611.09182.pdf, S. ii (abstract)
[41] Furey, Three generations, two unbroken gauge symmetries, and one eight-dimensional algebra, Phys.Lett.B (2018), https://arxiv.org/abs/1910.08395
[42] Furey, SU(3)xSU(2)xU(1) (xU(1)) as a symmetry of division algebraic ladder operators, Eur. Phys. J. C (2018), https://arxiv.org/abs/1806.00612
[43] arXiv:1611.09182
[44] Furey, Charge quantization from a number operator, Phys.Lett.B, 742 (2015) 195-199, https://arxiv.org/abs/1603.04078

Die neueste Zusammenarbeit zwischen Furey und Mia Hughes vom Imperial College London beschäftigt sich mit Symmetriebrechung und neuen Hinweisen auf BSM-Physik (beyond the standard modell).[45,46]

Allerdings sind noch viele Fragen offen. Es fehlt noch ein oktonionisches Gesamtmodell aller Kräfte und Teilchen im Standardmodell. Außerdem wurde die Schwerkraft noch nicht berührt. Andererseits sind viele mathematische Methoden noch nicht ausgeschöpft. Deshalb ist es noch zu früh, von einem umfassenden Erfolg dieses Ansatzes zu sprechen. Immerhin kam schon Lob aus berufenem Munde. Michael Duff ist hochdekorierter Professor am Imperial College in London und hat als einer der wenigen die Oktonionen im Rahmen der Stringtheorie betrachtet. Er bescheinigte Cohl Furey „Sie hat einige faszinierende Verbindungen gefunden.“ Er meinte, sie solle auf jeden Fall weitermachen. Ein Erfolg bei der Beschreibung des Standardmodells über diesen Weg wäre schlichtweg „revolutionär“.[47,48]

### Ist Physik überhaupt a priori zu begründen?

Es ist offensichtlich, dass die moderne Physik, die mit Beginn des 20. Jahrhunderts begann, philosophische Grundlagen der Erkenntnis schwer erschüttert hat. Dabei ist sicherlich das Hauptwerk von Immanuel Kant, „Kritik der reinen Vernunft“, einer der wichtigsten Maßstäbe für die Möglichkeit, Erkenntnisse über die Natur a priori zu gewinnen.[49] Insbesondere der kantsche Zeit- und Raumbegriff wurde nicht nur erschüttert, sondern regelrecht demontiert.

Kant schreibt z.B. über die Zeit:[50]
*Denn das Zugleichsein oder Aufeinanderfolgen würde selbst nicht in die Wahrnehmung kommen, wenn die Vorstellung der Zeit nicht a priori zum Grunde läge*. …
*Sie hat nur Eine Dimension:*
*verschiedene Zeiten sind nicht zugleich, sondern nacheinander*

---

[45] Furey and Hughes, Division algebraic symmetry breaking, Phys.Lett.B (2022), https://doi.org/10.1016/j.physletb.2022.137186
[46] Furey and Hughes, One generation of standard model Weyl representations as a single copy of RCHO, Phys.Lett.B (2022), https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0370269322000934
[47] Zitiert nach Natalie Wolchover in https://www.quantamagazine.org/the-octonion-math-that-could-underpin-physics-20180720/
[48] Siehe auch https://www.spektrum.de/kolumne/quaternionen-von-komplexen-zahlen-zu-tomb-raider/2109450
[49] Hier soll die lateinische Schreibweise „a priori“ und nicht apriori“ benutzt werden.
[50] Immanuel Kant, Kritik der reinen Vernunft - Der transzendentalen Ästhetik Zweiter Abschnitt - Von der Zeit, §4, Metaphysische Erörterung des Begriffs der Zeit

*(so wie verschiedene Räume nicht nacheinander, sondern zugleich sind).*

So wäre es keinesfalls im kantschen Sinne, dass sich die Zeit durch die spezielle Relativitätstheorie nicht als a priori Erlebnisform herausgestellt hat, sondern nur als Frage der messbaren Erfahrung in einem speziellen Bezugssystem. Noch schlimmer ist es um den Raumbegriff bestellt. Bernhard Riemann hat zwar in seinem berühmten Habilitationsvortrag den euklidischen Raumbegriff um nichteuklidische Geometrien mathematisch erweitert. Das hatte aber für das physikalische Verständnis des Raums zunächst keine Auswirkungen. Der Spezialfall einer euklidischen Geometrie wurde trotzdem als in der Natur gegeben, als „*anschaulich evident*“,[51] angenommen. Nun stellte sich heraus, dass ausgerechnet die euklidische Geometrie die Natur nicht korrekt beschreibt. Die allgemeine Relativitätstheorie hat den philosophischen Konflikt mit Kant noch verschärft, denn der euklidische Raumbegriff wurde überwunden. Die intuitiv „richtige“ Geometrie des Raumes, die damit scheinbar prädestiniert für einen a priori Ansatz ist, erweist sich sogar als ungeeignet zur Naturbeschreibung.

Ist Physik, also Naturbeschreibung, überhaupt a priori zu begründen? Diese allgemein gestellte Frage muss man ausgerechnet anhand Beispielen im Zusammenhang mit der Relativitätstheorie mit Ja beantworten. Emmy Noether hat schließlich die Invarianz von Symmetrietransformationen und damit den Raum als solchen, aber auch die Zeit, als a priori Grundlage genommen und rein mathematische Schlussfolgerungen gezogen. Anlass war die allgemeine Relativitätstheorie (ART), die auch von David Hilbert in fairer Weise Albert Einstein zugesprochen wurde, aber bei der Hilbert mehr als nur ein Sparringspartner von Einstein im Sommer und Herbst des Jahres 1915 war und von Frau Noether entscheidend unterstützt wurde. Beide veröffentlichten die Feldgleichungen fast zeitgleich, Hilbert sogar fünf Tage früher. Er hatte mehr die Mathematik im Fokus, doch Einstein war der geniale Physiker. Einen extrem wichtigen Beitrag lieferte Emmy Noether. Die Theorie schien nämlich den Energieerhaltungssatz zu verletzen. Es fehlten entscheidende Argumente, wie dieses zentrale Naturgesetz durch die ART nicht verletzt wird. Diese entwickelte Emmy Noether in zwei Schritten. Da es sich bei der speziellen Relativitätstheorie (SRT) um kontinuierliche Vorgänge in einem festen Koordinatensystem handelt, benötigt man zwar Lie-Gruppen, die aber endlich dimensional sind. Dies deckt auch tatsächlich die Symmetrie von Koordinatentransformationen in der klassischen Physik mit einem festen

---

[51] http://www.lyre.de/physapri.pdf, s. a.
Reichenbach, Hans, Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori, https://www.mpiwg-berlin.mpg.de/sites/default/files/Preprints/P331.pdf

Bezugsrahmen ab, zu der die SRT gehört. Extrem schwierig wird die Situation bei der ART, die weder für Zeit noch Raum feste Bezugssysteme akzeptiert und in der die lokale Geometrie wechselseitig beeinflusst wird.[52] Damit insbesondere der Energieerhaltungssatz gilt, müsste die ART als eine kovariante Theorie nachgewiesen sein. Hierbei müssen unendlich dimensionale Lie-Gruppen verwendet werden. Emmy Noether konnte mit äußerst anspruchsvoller Mathematik Erhaltungssätze aus rein logisch begründeten Annahmen entwickeln. Die ART ist dabei nur ein Anwendungsfall des Theorems. Frau Noether konnte allgemein zeigen, dass jede unendlich dimensionale Symmetriegruppe, die von einer beliebigen Funktion in einer kovarianten Theorie abhängig ist, eine physikalische Erhaltungsgröße nach sich ziehen muss.[53] Sie zeigte, dass jede Symmetrie einer Lie-Gruppe in einem physikalischen System, das Koordinatenvariationen wie Orts- oder Zeitunabhängigkeit unterliegt, immer einer Erhaltungsgröße zugeordnet ist. So hat Zeitinvarianz, also die Zeitunabhängigkeit eines physikalischen Experiments, Energieerhaltung zur Folge. Analog ist Impuls- bzw. Drehimpulserhalt Folge der räumlichen Homogenität bzw. der Rotationsinvarianz. Beide Theoreme (bzgl. endlichen wie unendlichen Lie-Gruppen) werden heute als Noether-Theorem bezeichnet und sind sowohl aus der klassischen als auch aus der modernen Physik, wie auch der Quantentheorie, nicht mehr wegzudenken. Sie sind ein Musterbeispiel für a priori Erkenntnisse über die Natur aus rein mathematischer Sicht. Emmy Noether bezeichnete das Theorem als „größtmögliche gruppentheoretische Verallgemeinerung der allgemeinen Relativitätstheorie“[54,55].

Raum bedeutet Trennung von Objekten und damit Unterscheidbarkeit; Zeit oder besser Zeitlichkeit bedeutet Trennung in ein Davor und Danach.[56] Noch deutlicher ist die Situation bei der speziellen Relativitätstheorie an sich. Einstein musste „lediglich“ die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit postulieren. Die Theorie, die unser Weltbild veränderte, konnte dann a priori entwickelt werden. Manche Philosophen sprachen anfangs von physikalischer Zeit oder phänomenologischer Zeit, um den Zeitbegriff Kants nicht in Frage stellen zu

---

[52] John Archibald Wheeler hat diese gegenseitigen Abhängigkeiten so formuliert:
*Matter tells space how to curve. Space tells matter how to move.*
Das Zitat ist im 1973 erschienenen Standardwerk „Gravitation“, von Charles W. Misner, Kip S. Thorne and John A. Wheeler, S. 5, zu finden. Siehe auch https://en.wikipedia.org/wiki/Gravitation_(book)
[53] Lars Jaeger, Emmy Noether, S. 109
[54] zitiert nach Lars Jaeger, E. Noether, ebenda, S. 113
[55] E. Noether, Invariante Variationstheorie, Göttinger Mathematische Nachrichten, Mathematisch-Physikalische Klasse (1918), Volume: 1918, page 235-257
[56] E. Noether, Invariante Variationsprobleme, siehe https://de.wikipedia.org/wiki/Noether-Theorem

müssen. Aber das löst nicht das Problem. Die gleichmäßig fließende Zeit Kants oder Newtons ist für einen a priori Ansatz nicht geeignet. Aber Zeitlichkeit als Davor und Danach am Ort des Beobachters ist etwas grundsätzlich anderes und nicht mehr weiter reduzierbar. Der Widerspruch zum Kantschen a priori entsteht dadurch, dass das Relativitätsprinzip von Newton oder Galilei nur eine Transformation der räumlichen Koordinaten und nicht der zeitlichen Koordinaten vorsah.

Die gleichen Voraussetzungen, Unterscheidbarkeit und Zeitlichkeit, liegen dem Prinzip der Information zugrunde. Es wird heute in der Physik als ausreichend für eine *vollständige* Theorie der Information als Grundlage der Physik angesehen. Vollständig steht hier für eine allumfassende Dimension von Syntax, Semantik, Pragmatik und Zeitlichkeit.[57] Dies gilt insbesondere für die Quantentheorie, aber auch bei der Frage nach der Entropie oder allgemeiner der Thermodynamik Schwarzer Löcher nach Hawking und Bekenstein. Hier werden Objektsysteme durch Zustandsräume beschrieben und zwar mit einem kleinsten Informationsobjekt, das nur ein zweidimensionaler Zustandsraum darstellt, heute Quantenbit oder Qubit genannt. Es darf nicht mit einem Bit verwechselt werden, das nur 0 und 1 annehmen kann. Zweidimensionaler Zustandsraum bedeutet, dass ein Qubit alle Zustände, sozusagen zwischen „0 und 1“, annehmen kann.

Die Symmetrie eines Quantenbits kann mit der Gruppe SU(2), der speziellen unitären Gruppe der Ordnung 2, topologisch als Ortsraum beschrieben werden. Alle Transformationen auf Basis dieser Gruppe lassen den Gesamtzustand der Welt unverändert. SU(2) spielt, wie oben gesehen, eine große Rolle in der Physik, insbesondere in der Teilchenphysik des Standardmodells.

Der Bezug zum vorliegenden Beitrag ist die Tatsache, dass SU(2) isomorph zur Gruppe der Einheitsquaternionen ist, also den Quaternionen mit dem Betrag $|x|=1$.[58]

Eine vollständige Herleitung des Standardmodells auf diesem Weg mag illusorisch sein. Vor allem bei komplizierten, nur statistisch fassbaren Beschreibungen von Symmetriebrüchen ist es schwer vorstellbar, dass man sie aus der Mathematik der Algebren im Detail ableiten kann. Aber der Gedanke ist

[57] Lyre, Holger, Kann moderne Physik a priori begrundbar sein?
Vortrag auf der Tagung “Was sind und warum gelten Naturgesetze?”, 15.-16. September 1999, ZiF Bielefeld. Erscheint in: Philosophia Naturalis 37 (2000), Heft 2., http://www.lyre.de/physapri.pdf, S. 8
[58] https://de.wikipedia.org/wiki/SU(2)

und bleibt reizvoll, dass sich die Natur im Prinzip algebraisch beschreibbar verhält.

## Fazit

Nach einem Satz von A. Hurwitz (1898) kann es nur vier reelle Algebren mit Division geben. Es sind die reellen Zahlen ($\mathbb{R}$), die komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$), die Hamiltonschen Quaternionen ($\mathbb{H}$) und die Cayleyzahlen, die Oktonionen ($\mathbb{O}$). Bei der Untersuchung ihrer algebraischen Eigenschaften stellt man fest, dass kontinuierlich Regelmäßigkeiten verloren gehen. $\mathbb{R}$ ist noch ein geordneter Körper, $\mathbb{C}$ ist zwar ein algebraisch abgeschlossener Körper, dagegen nicht mehr geordnet. Bei $\mathbb{H}$ ist die Multiplikation nicht mehr kommutativ; $\mathbb{H}$ ist ein Schiefkörper. Die Division ist nicht mehr eindeutig. Es gibt eine rechts- und eine linksseitige Lösung. $\mathbb{O}$ verliert dazu noch die Eigenschaft der Assoziativität bei der Multiplikation. Es gilt nur die Alternativität, was immerhin Nullteilerfreiheit bedeutet in dieser quadratischen Algebra. Selbstverständliche, wohlvertraute Gesetze in Verbindung mit einem Matrizenkalkül sind nicht mehr anwendbar. Trotz allem lassen sich, durch das sogenannte Verdoppelungsverfahren, ähnliche mathematische Mechanismen anwenden, die gemeinsame Strukturen aufdecken. Allgemein haben die Algebren der hyperkomplexen Zahlen die moderne Algebra maßgeblich beeinflusst. Vor allem Emmy Noether gebührt das Verdienst, dass sie den Abstraktionsgrad wesentlich erweitert und verfeinert hat.

Anwendungen in der Physik sind für $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$ seit langem bekannt. Oktonionen ($\mathbb{O}$) wurden anfangs gemieden, da das Assoziativgesetz nicht gilt. Das änderte sich, seit das „Standardmodell der Teilchenphysik“ in den 1960-er und 1970-er Jahren entwickelt wurde und die erfolgreiche Anwendung von Symmetrien gezeigt hat. Mit der Stringtheorie, der Quantengravitation und Großen vereinheitlichten Theorien gerieten auch die Oktonionen in den Fokus der theoretischen Physik. In den letzten Jahren machten u.a. Forschungen einer jungen kanadischen Wissenschaftlerin auf sich aufmerksam. Es zeigten sich weitere bemerkenswerte Parallelen zwischen Oktonionen bzw. Tensorprodukten, die $\mathbb{O}$ enthalten und dem Standardmodell der Teilchenphysik. Auch wenn es noch keinesfalls sicher ist, dass der Ansatz erfolgversprechend ist, ist es einen Versuch wert. Großes Ziel sind Erkenntnisse über die Welt a priori zu gewinnen, also nur durch die Mathematik bzw. durch logisches Denken, wie es bereits Immanuel Kant in seinem Werk „Kritik der reinen Vernunft“ als „synthetisches Urteil a priori“ versucht hat.

## Anhang: Zur Mathematik der Divisionsalgebren

Zunächst sollen sehr detailliert Gemeinsamkeiten und Unterschiede der Zahlensysteme mit Division mathematisch aufgezeigt werden. Sie erscheinen als Grundlage für das tiefere Verständnis unabdingbar. Die Mathematik der Divisionsalgebren ist dabei wohlbekannt. Der Beitrag erfordert deshalb in diesem Anhang kaum eine eigenständige mathematische Leistung. Stattdessen orientiert er sich in den mathematischen Herleitungen und der Terminologie bei den interessierenden Aspekten der komplexen Zahlen ($\mathbb{C}$), den Quaternionen ($\mathbb{H}$) und den Oktonionen ($\mathbb{O}$) an einer Buchvorlage von I.L. Kantor und A.S. Solodownikow, die besonders geeignet erschien, mathematische Stringenz und Korrektheit mit behutsamer Ausführlichkeit miteinander zu verbinden.[59] Allerdings wurde statt des Begriffes „Oktave“ der ebenfalls oft benutzte Begriff „Oktonion“ verwendet, der im Englischen eher gebräuchlich ist. Die Entwicklung nach dem Verdoppelungsverfahren mit den algebraischen Eigenschaften wird mit entsprechenden Beweisen bis zu den Oktonionen dargestellt. Weitere Eigenschaften der verallgemeinerten Hyperkomplexen Zahlen werden mit viel weniger Tiefgang behandelt. Nur ein Bruchteil trägt überhaupt Namen.

### Ausgewählte Eigenschaften komplexer Zahlen

Es ist sinnvoll, zunächst einige herausragende Eigenschaften der komplexen Zahlen zu identifizieren und erst dann nach Verallgemeinerungen suchen.

Mit der Erweiterung („Vervollständigung“) von $\mathbb{Q}$ zu $\mathbb{R}$ war der Zahlenstrahl, das Kontinuum, komplett. $\mathbb{R}$ ist zudem vollständig geordnet. Zwei reelle Zahlen sind entweder gleich oder eine ist größer als die andere.

Zwei Prinzipien wurden dabei eingehalten:

- Einbettungsprinzip

Die bisherigen Zahlen sollten in die Erweiterung eingebettet sein. Die neu definierten Zahlen sind also eine Obermenge, die sich algebraisch genauso verhält, wie die „alten“ Zahlen.

- Permanenzprinzip

Die Rechenregeln sollen sich nicht wesentlich ändern und vor allem vorhanden sein. Die Erweiterung soll die bisherigen Rechenregeln weitgehend erhalten.

---

[59] Kantor, Isaĭ L'vovich (I.L.), Solodownikow, Aleksandr Stepanovič (A.S.); Hyperkomplexe Zahlen, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1978. https://mathematikalpha.de/wp-content/uploads/2022/11/Hyperkomplexe_Zahlen.pdf

Bei der Erweiterung der reellen Zahlen zu den komplexen Zahlen trifft dies zu. Komplexe Zahlen haben bekanntlich die Form

$$z = a + bi, \text{ wobei } i \coloneqq \sqrt{-1}, \text{ also } i^2 = -1$$

In den komplexen Zahlen sind Addition, Subtraktion, Multiplikation und (das ist im Rahmen dieses Beitrags bemerkenswert) auch die Division definiert. Es gilt außerdem das Permanenzprinzip, d.h. die Rechenregeln sind denen der reellen Zahlen analog.

Seien $z_1 = a_1 + b_1 i$ und $z_2 = a_2 + b_2 i$ so ist

$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i,$

analog ist die Subtraktion definiert. Da $i^2 = -1$ folgt für die Multiplikation:

$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = a_1 a_2 + a_1 b_2 i + b_1 a_2 i + b_1 b_2 i^2$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2)i$$

Es lässt sich leicht überprüfen, dass das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz sowohl bei der Addition/Subtraktion und der Multiplikation gelten. Außerdem gilt das Distributivgesetz:

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

Damit sind die komplexen Zahlen mit den Verknüpfungen Addition und Multiplikation ein algebraischer Körper. Ihre Menge bezeichnet man als $\mathbb{C}$.

Dazu kommt eine Eigenschaft, die so selbstverständlich erscheint, dass sie leicht übersehen wird, nämlich, dass der absolute Betrag eines Produktes gleich dem Produkt der absoluten Beträge ist:

$$|zz'| = |z| \cdot |z'|$$

Der Betrag als Funktion ist dabei definiert als der „Abstand“ zur Null. Er ist immer größer/gleich 0 und reell. Er ist Voraussetzung für die Existenz einer Metrik und kann im Begriff mit ihr gleichgesetzt werden. $\mathbb{C}$ ist somit ein metrischer Raum (der Dimension 2).

Der Beweis gelingt am einfachsten mit der konjugiert komplexen Zahl, eine häufig benötigte Definition. Sei $z = a + bi$, dann ist die zu $z$ konjugiert komplexe Zahl definiert als $\bar{z} = a - bi$.

Man beweist leicht, dass $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$ und $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$.

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{a_1+b_1\imath+a_2+b_2\imath} = \overline{(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\imath} = (a_1+a_2)-(b_1+b_2)i$$
$$= a_1-b_1i+a_2-b_2i = \overline{z_1}+\overline{z_2}$$

$$\overline{z_1z_2} = \overline{(a_1+b_1\imath)(a_2+b_2\imath)} = \overline{a_1a_2+a_1b_2\imath+b_1a_2\imath-b_1b_2}$$
$$= \overline{(a_1a_2-b_1b_2)+\imath(a_1b_2+b_1a_2)} = a_1a_2-b_1b_2-a_1b_2i-b_1a_2i$$
$$= (a_1-b_1i)(a_2-b_2i) = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$$

Summiert man bzw. multipliziert man $z$ und $\bar{z}$, so erhält man reelle Zahlen

$$z+\bar{z} = a+bi+a-bi = 2a$$

$$z\cdot\bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$$

Als Betrag von $z = a+bi$ wird definiert: $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$ und somit ist $z\bar{z} = |z|^2$

Daraus kann man folgern:

$$|z_1z_2|^2 = (z_1z_2)\overline{(z_1z_2)} = z_1z_2\overline{z_1}\,\overline{z_2} = z_1\overline{z_1}\cdot z_2\overline{z_2} = |z_1|^2\cdot|z_2|^2$$

Oder verbalisiert: Der absolute Betrag eines Produktes ist gleich dem absoluten Produkt der einzelnen Beträge.

Es gilt also sowohl $|z_1z_2| = |z_1|\cdot|z_2|$ als auch $|z_1z_2|^2 = |z_1|^2\cdot|z_2|^2$

Wenn $z_1z_2 = (a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$ so gilt andererseits auch

$$(a_1^2+b_1^2)(a_2^2+b_2^2) = (a_1a_2-b_1b_2)^2+(a_1b_2+a_2b_1)^2$$

Etwas salopp formuliert lautet die Erkenntnis:

> **Das Produkt einer Summe von zwei Quadraten ist wieder eine Summe aus zwei Quadraten.**

Dies ist offenbar ein Merkmal komplexer Zahlen. Die Frage stellt sich, ob eine analoge Beziehung zwischen mehr als zwei Quadraten existiert. Wenn ja, liegt hier ein Ansatzpunkt zur Verallgemeinerung der komplexen Zahlen hin zu hyperkomplexen Zahlen mit höherem Rang (Dimension) mit besonderen algebraischen Eigenschaften.

Es fehlt noch die Diskussion einer plausiblen Division. Dazu werden die eben beschriebenen Zusammenhänge benötigt.

Wieder seien $z$ und $z'$ zwei komplexe Zahlen. Der Quotient $x$ ist die Lösung der Gleichung

$$z\cdot x = z'$$

Beide Seiten der Gleichung werden mit $\bar{z}$ multipliziert.

$$\bar{z} \cdot z \cdot x = \bar{z} \cdot z' \text{ oder } |z|^2 x = \bar{z} \cdot z'$$

$$\text{Der Quotient } x = \frac{1}{|z|^2} \bar{z} z'$$

Beispiele:

$z' = 1 - i$, $z = 1 + i$, $\frac{z'}{z} = \frac{1}{1+1}(1 - i)(1 - i) = \frac{1}{2}(1 - 2i - 1) = -\frac{2i}{2} = -i$

$z' = 5 - i, z = 2 - 3i$, $\frac{z'}{z} = \frac{1}{2^2+3^2}(2 + 3i)(5 - i) = \frac{1}{13}(13 + 13i) = 1 + i$

### Alternative Arithmetiken zu komplexen Zahlen

Mit den komplexen Zahlen liegt ein Zahlensystem vor, das die Form a+b·K hat. Aber muss K zwingend K$^2$= $i^2 = -1$ sein?

Einige Überlegungen zur plausiblen und widerspruchsfreien Addition und Multiplikation zeigen, dass es nicht unendlich viele Möglichkeiten für K geben kann. Sie reduzieren sich auf genau drei Fälle:[60]

Komplexe Zahlen $a + bJ, J^2 = -1$
Binäre Zahlen $a + bE, E^2 = +1$ (auch als geteilte komplexe Zahlen bezeichnet)
Duale Zahlen $a + b\Omega, \Omega^2 = 0$, (Binär und dual sind nicht zu verwechseln mit reellen Zahlen zur Basis 2 in der Informatik).

Doch im Gegensatz zu den komplexen Zahlen spielen binäre und duale „Zahlen“ eine untergeordnete Rolle in der Mathematik und kaum eine Rolle in ihren Anwendungen. Insbesondere ist es in der Regel nicht möglich, zwei binäre oder zwei duale Zahlen zu dividieren. Es genügt für den Beweis dieser Behauptung Gegenbeispiele zu zeigen. Dabei bedeutet „Division“ Lösung der Gleichung

$$z_2 x = z_1, (z_2 \neq 0)$$

Binäre Zahlen: Sei $z_1 = 1$ (d. h. $1 + 0E$), $z_2 = 1 + E$, multipliziere beide Seiten mit $1 - E$:

$(1 + E)x = 1 + 0E$ ➔ $(1 + E)(1 - E)x = (1 + 0E)(1 - E)$

➔ 0= $1 - E$, also eine widersprüchliche, unrichtige Gleichung.

Im System der dualen Zahlen kann man z.B. nicht 1 durch 2 dividieren.

[60] Beweis https://wikigerman.edu.vn/wiki36/Tessarin2021/07/10/hyperkomplexe-zahl-wikipedia/

## Gibt es hyperkomplexe Zahlen der Dimension 3?

Es ist naheliegend, die 2-dimensionalen, komplexen Zahlen um eine weitere Dimension zu erweitern.[61] Zahlen hätten dann die Form

$$z = a + bi + cj$$

a, b, c sollen reell sein und i bzw. j sind noch zu definieren. Zunächst muss eine plausible Additionsregel gelten. Es bietet sich an:

$$(a + bi + cj) + (a' + b'i + c'j) = (a + a') + (b + b')i + (c + c')j$$

Nach dem Einbettungsprinzip sollte gelten:

$$(a + 0i + 0j)(a' + 0i + 0j) = aa' + 0i + 0j$$

d.h. zumindest die reellen Zahlen sind „eingebettet".

Weiterhin sollte gelten

1) Für $l = l + 0i + 0j \; und \; z = a + bi + cj$ ist
   $zl = la + lbi + lcj$
2) $(az_1)(bz_2) = (ab)(z_1z_2)$ für $a, b \in \mathbb{R}$
3) $z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3$ und $(z_1 + z_2)z_3 = z_1z_3 + z_2z_3$
   Also das rechtsseitige und linksseitige Distributivgesetz sollte gelten.

Folgendes Multiplikationsgesetz bietet sich theoretisch an:

$$(a + bi + cj)(a' + b'i + c'j) = aa' + (ab' + ba')i + (ac' + ca')j$$

Es würden sogar das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz gelten $(z_1z_2) = (z_2z_1)$ und $(z_1z_2)z_3 = z_1(z_2z_3)$

Jedoch existiert keine Division, denn für 1 geteilt durch i, also für

$$(0 + i + 0j)x = 1 + 0i + 0j$$

gibt es prinzipiell keine Lösung für $x$ und das gilt auch für andere Multiplikationsregeln, die die plausiblen Forderungen 1) – 3) erfüllen würden. Man findet immer ein Zahlenpaar $z_1, z_2, \quad (z_2 \neq 0)$, für die die Divisionsgleichung für $x$ nicht lösbar ist.

D.h. den theoretisch möglichen hyperkomplexen Zahlen der Dimension 3 fehlt prinzipiell die Grundrechenregel für die Division.

[61] Argumentation nach I.L. Kantor, A.S. Solodownikow, Hyperkomplexe Zahlen, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1978. S. 12f

Eine andere Argumentation zielt darauf ab, dass es eine $\mathbb{R}$-lineare Multiplikation im $\mathbb{R}^3$ aller reellen Tripel $(\alpha, \beta, \gamma)$ nicht geben kann, die die Multiplikation von $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ der Paare $(\alpha, \beta)$ ins 3-dimensionale fortsetzt.

Sei $e \coloneqq (1,0,0), i \coloneqq (0,1,0), j \coloneqq (0,0,1)$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^3$, so müsste gelten $ij \coloneqq \rho e + \sigma i + \tau j$. Man unterstellt

$i^2 = -e$ und $i(ij) = (ii)j = -j$ Daraus folgt:

$$-j = \rho i - \sigma e + \tau ij = \rho i - \sigma e + \tau(\rho e + \sigma i + \tau j) = (\tau\rho - \sigma)e + (\tau\sigma + \rho)i + \tau^2 j$$

Da $e, i, j$ linear unabhängig sind, muss $\tau^2 = -1$ sein, das bedeutet aber, dass $\tau \notin \mathbb{R}$.

Allgemeiner gilt: Jede reelle Divisionsalgebra A ungerader Dimension mit Einselement $e$ ist isomorph zu $\mathbb{R}$, hat also die Dimension 1.

Sir Hamilton hat jahrelang versucht, für reelle Tripel plausible Rechenregeln zu finden. Er schreibt 1865 an seinen Sohn: „*Every morning, on my coming down to breakfast, you used to ask me: ´Well, Papa, can you multiply triplets?´ Whereto I was always obliged to reply, with a sad shake oft he head: ´No, I can only add and subtract them.´*“[62]

### Quaternionen

Die Überlegungen zu 3-dimensionalen Verallgemeinerungen hat also auch Sir William Rowan Hamilton angestellt bevor er zu Zahlen der Form

$$a + bi + cj + dk$$

überging. Ihm zu Ehren wird ihre Menge mit $\mathbb{H}$ (Hamilton-Zahlen) bezeichnet. Die Addition folgt einem erwarteten Gesetz:

$$\begin{aligned}(a + bi + cj + dk) &+ (a' + b'i + c'j + d'k) \\ &= (a + a') + (b + b')i + (c + c')j + (d + d')k\end{aligned}$$

Die Legende erzählt, dass Hamilton das Multiplikationsgesetz bei einem Spaziergang einfiel. Er hat auf einer Steintafel an der Broom-Bridge in Dublin die Definition/Multiplikationsregeln einmeißeln lassen.

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j$$

[62] Math. Papers 3, p. XV, Beweis und Zitat nach Ebbinghaus Heinz-Dieter, et. al., Zahlen, Springer-Lehrbuch, 3. Auflage (1983, 1988, 1992), Berlin Heidelberg New York, S. 155, Autoren M. Koecher, R. Remmert

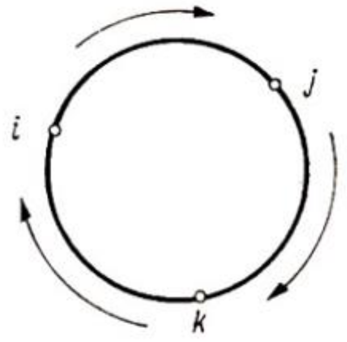



Abb. 6: Merkhilfe für die Multiplikationsregeln

Multipliziert man zwei Zahlen aus dem Tripel i, j und k im Uhrzeigersinn, so ergibt sich die dritte Zahl. Multipliziert man gegen den Uhrzeigersinn, so ergibt sich die dritte Zahl mit negativem Vorzeichen.

Man sieht, bzgl. der Multiplikation ist das Kommutativgesetz nicht erfüllt, da das Ergebnis von der Reihenfolge der Faktoren abhängt.

Trotzdem soll ein Multiplikationsgesetz gesucht werden, das die Regeln der drei Forderungen auch in der 4. Dimension erfüllt und die Definitionen der Multiplikationstafel anwendet.
Forderungen:

1) Für $l = l + 0i + 0j + 0k \; und \; q = a + bi + cj + dk$ ist
$lq = la + lbi + lcj + ldk$
2) $(aq_1)(bq_2) = (ab)(q_1q_2)$ für $a, b \in \mathbb{R}$
3) $q_1(q_2 + q_3) = q_1q_2 + q_1q_3$ und $(q_1 + q_2)q_3 = q_1q_3 + q_2q_3$
Also das rechtsseitige und linksseitige Distributivgesetz soll gelten.

Man erhält eine Summe multipliziert mit einer Summe unter Berücksichtigung der Regeln und des Distributivgesetzes:

$$qq' = aa' + a(b'i) + a(c'j) + a(d'k) + (bi)a' + (bi)(b'i) + (bi)(c'j) + (bi)(d'k) + (cj)a' + (cj)(b'i) + (cj)(d'k) + (dk)a' + (dk)(b'i) + (dk)(c'j) + (dk)(d'k)$$

Durch Umformen unter Berücksichtigung der Forderungen 1) und 2) und den Definitionen der Multiplikationstafel (z.B. $(bi)(c'j) = bc'(ij) = bc'k$) erhält man

$$qq' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i + (ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k$$

Für die Dirac-Gleichung kann man als Zahlbereichserweiterung der komplexen Zahlen die Quaternionen nutzen. Heute wird meist eine Formulierung mit Pauli-Matrizen gewählt, die aber die gleiche algebraische Struktur wie die Quaternionen haben.

### Assoziativgesetz für die Multiplikation der Quaternionen

Behauptung: $(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3)$

Jede Quaternion $q_\alpha$ $(\alpha = 1, 2, 3)$ ist eine Summe von 4 Summanden der Form

$$q_\alpha = a_\alpha + b_\alpha i + c_\alpha j + d_\alpha k$$

Die linke Seite der Behauptung ist somit eine Summe von 4x4x4=64 Summanden der Form $(u_1 u_2)u_3$.

$u_1$ ist beliebig einer der vier Summanden von $q_1$
$u_2$ ist beliebig einer der vier Summanden von $q_2$
$u_3$ ist beliebig einer der vier Summanden von $q_3$

Analog ist die rechte Seite der Behauptung somit eine Summe von 4x4x4=64 Summanden der Form $u_1(u_2 u_3)$.

In einer Fallunterscheidung lassen sich die entsprechenden Terme vergleichen. Falls $q_1, q_2$ $oder$ $q_3 = 1$ sind, ist der Beweis leicht. Bei den Übrigen kann man die Zahlenfaktoren $a_\alpha, b_\alpha, c_\alpha, d_\alpha$ weglassen, da sie bei $q_1, q_2, q_3$ gleich sind. Es bleiben 27 Gleichungen zu überprüfen, die sich auf die Assoziativität der imaginären Einheiten beziehen, also z.B.

$$(ii)i = i(ii), \ \ (ii)j = i(ij), \ \ (ij)k = i(jk) \quad \text{etc.}$$

Bei Quaternionen gilt also das Assoziativgesetz $(q_1 q_2)q_3 = q_1(q_2 q_3)$

Hinweis: Eleganter und ohne Fallunterscheidungen ist der Beweis, wenn man über die Matrixalgebra H und den Isomorphismus F: $\mathbb{H} \rightarrow$ H geht. Die Menge C aller reellen 2 x 2 Matrizen $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ist eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von Mat(2, $\mathbb{R}$)[63], die Abbildung $\alpha + \beta i \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ ist ein $\mathbb{R}$-Algebra-Isomorphismus $\mathbb{C} \rightarrow$ C Man zeigt, dass die Menge H eine $\mathbb{R}$-Unteralgebra von Mat(2, $\mathbb{C}$) mit Einselement E:=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.
Jede Matrix $A = \begin{pmatrix} w & -z \\ \bar{z} & \bar{w} \end{pmatrix}$ ∈H , $w, z \in \mathbb{C}$ genügt über $\mathbb{R}$ der Gleichung:

$A^2 - (\mathrm{Spur}\, A)\, A + (\det A)E = 0$ mit $Spur\ A = 2\ Re\ w, \det A = |w|^2 + |z|^2$

Damit ist H eine 4-dimensionale, assoziative Divisionsalgebra.

Diese Gleichung wird als Satz von Cayley bzw. Hamilton-Cayley für den Spezialfall 2 x 2 Matrizen bezeichnet.

### Konjugierte Quaternionen

Analog zu den komplexen Zahlen hilft die Definition von konjugierten Quaternionen.
Gegeben sei die Quaternion

$$q = a + bi + cj + dk$$

[63] Dem Ring der 2 x 2 – Matrizen über $\mathbb{R}$

$$\bar{q} = a - bi - cj - dk$$

nennt man zu $q$ konjugiert. Die Summe von $q$ und $\bar{q}$ ist damit eine reelle Zahl.

Das gilt aber auch für das Produkt $q\bar{q}$.

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Analog zu den komplexen Zahlen soll definiert werden: Der absolute Betrag von $q$ soll mit $|q|$ bezeichnet werden und

$$|q| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

Damit ist $$q\bar{q} = |q|^2$$

Bemerkenswert ist folgende Tatsache: Sei $q' = bi + cj + dk$ rein imaginär.

Dann folgt $q'^2 = -(b^2 + c^2 + d^2) \leq 0$.

Umgekehrt ist ein Quaternion genau dann rein imaginär, wenn ihr Quadrat eine reelle Zahl $\leq 0$ ist.

### Division bei den Quaternionen

Bei den komplexen Zahlen wird die Division als Lösung der Gleichung

$$z_2 x = z_1$$

bezeichnet.

Bei den Quaternionen hängt aber das Produkt von der Reihenfolge der Faktoren ab. Man muss also zwei Gleichungen betrachten:

$$q_2 x = q_1 \qquad \text{und} \qquad x q_2 = q_1$$

Die Lösung links möge $x_l$ heißen; die Lösung rechts möge $x_r$ heißen. Bei den komplexen Zahlen sind die Lösungen gleich.

Wie im Komplexen wird von links mit der konjugierten Quaternion $\overline{q_2}$ und dann mit $\frac{1}{|q_2|^2}$ multipliziert. Man erhält

$$x = \frac{1}{|q_2|^2}\overline{q_2}q_1$$

Einsetzen in die linke Gleichung zeigt

$$x_l = \frac{1}{|q_2|^2}\overline{q_2}q_1$$

Analog findet man für die rechte Gleichung

$$x_r = \frac{1}{|q_2|^2} q_1 \overline{q_2}$$

Beispiel: $q_1 = 1 - k$

$q_2 = 1 + i + j + k$

$$x_l = \frac{1}{\left|\sqrt{4}\right|^2} (1 - i - j - k)(1 - k)$$

$$= \tfrac{1}{4}(1 - k - i + ik - j + jk - k + k^2)$$

$$= \frac{1}{4}(1 - k - i - j - j + i - k - 1)$$

$$= \frac{1}{4}(-2k - 2j)$$

$$x_r = \frac{1}{\left|\sqrt{4}\right|^2} (1 - k)(1 - i - j - k)$$

$$= (1 - i - j - k - k + ki + kj + k^2)$$

$$= \frac{1}{4}(1 - i - j - k - k + j - i - 1)$$

$$= \frac{1}{4}(-2i - 2k)$$

Bei den Quaternionen gilt also auch für die Multiplikation das Assoziativgesetz und sie sind ein System mit Division, die allerdings zwischen linksseitiger und rechtsseitiger Division unterscheidet.

Weiterhin ist die wichtige Eigenschaft als Voraussetzung für eine Metrik gegeben: Der absolute Betrag eines Produktes ist gleich dem Produkt der absoluten Beträge. Der Beweis soll analog zu den komplexen Zahlen mit Hilfe der konjugierten Quaternionen geführt werden.

Zur Erinnerung: Die Definition ist analog zu $\mathbb{C}$:

Sei $q = a + bi + cj + dk$ dann wird
$\overline{q} = a - bi - cj - dk$ konjugiert zu $q$ genannt.

$q + \overline{q}$ ist somit reell.

Auch das Produkt ist reell:

$$(a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

Analog zu $\mathbb{C}$ soll $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ der absolute Betrag |q| von q heißen.

d.h. $q\bar{q} = |q|^2$

Es ist offensichtlich, dass

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q_1} + \overline{q_2} \qquad \text{und}$$

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\bar{q_1}$$

In $\mathbb{C}$ gelten die gleichen Gleichungen, aber durch die Kommutativität der Multiplikation ist $\bar{z_2}\bar{z_1} = \bar{z_1}\bar{z_2}$, doch das ist bei $\mathbb{H}$ zunächst nicht gewährleistet.

Mit Hilfe der Multiplikationsregeln lassen sich jedoch alle Fälle leicht überprüfen. So ist

$\overline{\imath\imath} = \overline{\jmath\jmath} = \overline{kk} = \overline{-1} = -1$ und andererseits z.B. $\overline{\imath\imath} = (-i)(-i) = i^2 = -1$

$\bar{\jmath}k = -\bar{\imath} = i$ und andererseits $\bar{\jmath}\bar{k} = (-j)(-k) = +jk = i$

Das Kommutativgesetz gilt nicht für die Multiplikation

Es wird sich zeigen, dass

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\bar{q_1}$$

Bei den Quadraten der Absolutbeträge genügt jedoch die Assoziativität für die Multiplikation der Quaternionen:

$$|q_1 q_2|^2 = (q_1 q_2)(\overline{q_1 q_2}) = (q_1 q_2)(\overline{q_2}\bar{q_1}) = q_1(q_2\overline{q_2})\bar{q_1} = |q_1|^2|q_2|^2$$

### Identität für vier Quadrate

Seien $q_1 = a + bi + cj + dk$ und $q_2 = a' + b'i + c'j + d'k$

Dann lässt sich die oben hergeleitete Beziehung

$$|q_1 q_2|^2 = |q_1|^2|q_2|^2$$

ausführlich in folgender Form schreiben. Dazu erinnere man sich an die Begründung des Multiplikationsgesetzes für Quaternionen:

$$qq' = (aa' - bb' - cc' - dd') + (ab' + ba' + cd' - dc')i$$
$$+(ac' + ca' + db' - bd')j + (ad' + da' + bc' - cb')k$$

Dies wird analog für $q_1 q_2$ angewendet (von rechts nach links gelesen):

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2) =$$

$$(aa' - bb' - cc' - dd')^2 + (ab' + ba' + cd' - dc')^2$$

$$+(ac + ca' + db' - ba')^2 + (ad' + da' + bc' - cb')^2$$

Man erinnere sich, dass bei komplexen Zahlen

$$|z_1 z_2|^2 = |z_1|^2 |z_2|^2$$

mit $z_1 = a + bi$ und $z_2 = a' + b'i$

sich eine analoge Identität mit zwei Quadraten ergeben hat:

$$(a^2 + b^2)(a'^2 + b'^2) = (aa' - bb')^2 + (ab' + ba')^2$$

Um es deutlich zu machen:

In $\mathbb{C}$: Das Produkt einer Summe von zwei Quadraten mit einer Summe von zwei Quadraten ist wieder eine Summe von zwei Quadraten.

In $\mathbb{H}$: Das Produkt einer Summe von vier Quadraten mit einer Summe von vier Quadraten ist wieder eine Summe von vier Quadraten.

Es stellt sich die Frage, für welche n ist eine solche Aussage möglich?

Für n=1 ist $a^2 b^2 = (ab)^2$ und damit die Aussage trivial.

Für n=2 ist es bei den komplexen Zahlen und für n=4 bei den Quaternionen bewiesen.

Doch wie sieht die Situation bei $n = 3$, $n = 5$, $n = 6$, usw. aus?

Diese Frage wurde im Jahr 1898 von Adolf Hurwitz (1859 – 1919) beantwortet. Er bewies, dass für den infrage kommenden Typ von Zahlen dies nur für

$$n = 1, 2, 4, 8$$

möglich und für alle anderen $n$ unmöglich ist.

### Definition der Quaternionen über komplexe Zahlen

Eine beliebige Quaternion hat die Form $q = a + bi + cj + dk$

Da $ij = k;$ kann man $q$ auch schreiben als

$q = (a + bi) + (c + di)j$ oder $q = z_1 + z_2 j$

mit $z_1 = a + bi \; und \; z_2 = c + di$

Sei nun $r$ ein weiteres Quaternion der Form

$$r = w_1 + w_2 j$$

Multiplikation von $q$ mit $r$ ergibt:

$$qr = (z_1 + z_2 i)(w_1 + w_2 j) = z_1 w_1 + z_1(w_2 j) + (z_2 j)w_1 + (z_2 j)(w_2 j)$$

$$= z_1 w_1 + z_1 w_2 j + z_2 j w_1 + z_2 j w_2 j \qquad (1)$$

Die Multiplikation der Quaternionen ist assoziativ, deshalb kann man die Klammern weglassen.

Da $ij = -ji$ ist, gilt $(a + bi)j = j(a - bi)$ d.h.

$$zj = j\bar{z}$$

Man sieht leicht, dass $z$ und $w$ der Form $a + bi$ kommutativ sind, d.h.

$$zw = wz$$

Unter Berücksichtigung der Konjugierten und dieser Kommutativität kann man abkürzend im Ausdruck (1) sagen, dass

$z_1 w_2 j = w_2 z_1 j$ und $z_2 j w_1 = z_2 \overline{w_1} j$ sowie $z_2 j w_2 j = z_2 \overline{w_2} j^2 = -\overline{w_2} z_2$

Dadurch bekommt das Multiplikationsgesetz von Quaternionen eine andere Darstellungsform:

$$qr = (z_1 w_1 - \overline{w_2} z_2) + (w_2 z_1 + z_2 \overline{w_1}) j$$

Bei einem Quaternion der Form $q = z_1 + z_2 j$ kann man also $z_1$ und $z_2$ als komplexe Zahlen ansehen, wobei $j^2 = i^2 = -1$ ist.

### Verdoppelung und Oktonionen

Im Prinzip lassen sich über die Quaternionen hinaus beliebige hyperkomplexe Systeme definieren. Ein hyperkomplexes System $\mathcal{U}$ sei dann allgemein gegeben durch

$$u = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n$$

Allerdings zeigt sich, wie beim Übergang von $\mathbb{C}$ zu $\mathbb{H}$, dass in der Regel zum Teil erhebliche Abstriche an den algebraischen Eigenschaften gemacht werden müssen. Auf diese soll hier im Detail nicht eingegangen werden. Der entsprechende Beweis von A. Hurwitz lässt aber die Vermutung zu, dass im Fall $n = 8$ interessante Eigenschaften zu erwarten sind. Doch ähnlich wie der Übergang vom zweidimensionalen $\mathbb{C}$ zu dreidimensionalen Zahlen mathematisch sinnlos war, so hat die Verdoppelung der Dimension von $\mathbb{C}$ zu $\mathbb{H}$ die Quaternionen sinnvoll gemacht, also ein Zahlensystem, das sogar die Division ermöglicht. Wenn man bei der Argumentation nicht über den Dimensionsbegriff gehen möchte, so ist das Ziel dieses Abschnitts die Verdoppelung des Systems der Quaternionen zu einem Zahlensystem, genannt Oktonionen (in Deutsch oft Oktaven).

Oktonionen sind also definiert als

$$q_1 + q_2 e$$

mit beliebigen Quaternionen $q_1$ und $q_2$. Diesen Weg beschritt John Graves, ein mit Hamilton befreundeter Anwalt, der in einem Brief 1843 an Hamilton zeigte, dass Paare von Quaternionen Oktonionen bilden. Unabhängig davon veröffentlichte Arthur Cayley sie als Erster. Deshalb werden sie oft auch Cayley-Zahlen genannt.

Es geht nun darum, das folgende Multiplikationsgesetz zu begründen und zu untersuchen, wie die Oktonionen mit der Darstellung in Form von 8 Summanden verknüpft ist:

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7$$

Das bedeutet, es muss die sinnvolle Multiplikationstafel für die imaginären Einheiten $i_1, i_2, \dots, i_7$ gefunden werden. Das Multiplikationsgesetz hat die Form

$$(q_1 + q_2 e)(r_1 + r_2 e) = (q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1}) e$$

Aus dem Ansatz der Verdoppelung heraus, sei

$q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$ und $q_2 = a_4 + a_5 i + a_6 j + a_7 k$. Zur Verdeutlichung und Unterscheidung soll die Schreibweise gewählt werden:

$$a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK$$

a,b,c,d,A,B,C,D entsprechen den früheren $a_0, a_1, \dots, a_7$ und i,j,k,E,I,J,K stehen nun für die „imaginären Einheiten“ $i_1, i_2, \dots, i_7$. Mit den neuen Bezeichnungen werden die Quaternionen $q_1$ und $q_2$ zu

$q_1 = a + bi + cj + dk$ und $q_2 = A + Bi + Cj + Dk$

Aus dem so gewählten Multiplikationsgesetz folgt durch fallweise Überprüfung, dass die Multiplikationstafel, wie erhofft, den Quaternionen entspricht:

$$i^2 = -1, \quad j^2 = -1, \quad k^2 = -1$$

$$ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i, \quad ki = j, \quad ik = -j$$

Dies sind 9 Gleichungen von insgesamt 7 Einheiten, also 7x7=49 paarweisen Produkten. Man findet 7 Triaden („Dreierpärchen“):

| | | |
|---|---|---|
| i j k | I J -k | i E I |
| | I -j K | j E J |
| | -i J K | k E K |

Die Multiplikationstafel kann man folgendermaßen erläutern: Mit $\alpha, \beta, \gamma$ soll eine beliebige der 7 Triaden bezeichnet werden. Dabei ist die Reihenfolge relevant. Dann ist

$$\alpha^2 = -1, \quad \beta^2 = -1, \quad \gamma^2 = -1$$

$$\alpha\beta = \gamma, \qquad \beta\alpha = -\gamma, \qquad \beta\gamma = \alpha, \qquad \gamma\beta = -\alpha, \qquad \gamma\alpha = \beta, \qquad \alpha\gamma = -\beta$$

analog zu $i, j, k$ bei den Quaternionen.

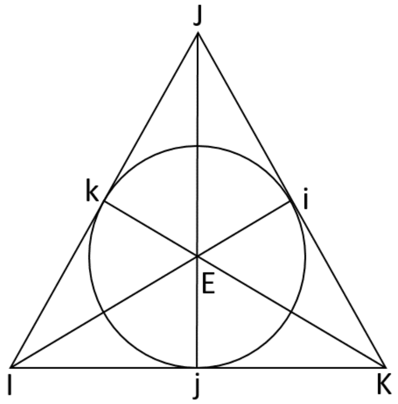



Abb. 7: Illustration der Multiplikationsregeln

Die Abbildung illustriert mit Hilfe eines Dreiecks mit den Ecken I, J, K und den Schnittpunkten der Winkelhalbierenden i, j, k die Multiplikationsregeln. Der Mittelpunkt des Inkreises / Schnittpunkt der Winkelhalbierenden wird durch E markiert. Auf jeder Geraden befinden sich drei „imaginäre Einheiten“. Der Inkreis wird symbolisch als „Gerade“ betrachtet; auf ihm liegen i, j, k. Die Abbildung enthält also 7 „Geraden“, auf denen je drei Einheiten liegen. Um das Produkt zweier Einheiten zu ermitteln, muss man sich die Gerade anschauen, auf der die Einheiten liegen. Das Produkt ist die dritte Einheit, entweder positiv oder negativ, gemäß der entsprechenden Triade.

Die Multiplikationstafel konventionell dargestellt:

$$i^2 = j^2 = k^2 = E^2 = I^2 = J^2 = K^2$$

i = jk = EI = KJ = −kj = −IE = −JK
j = ki = EJ = IK = −ik = −JE = −KI
k = ij = EK = JI = −ji = −KE = −IJ
E = Ii = Jj = Kk = −iI = −jJ = −kK
I = iE = Kj = kJ = −Ei = −jK = −Jk
J = jE = iK = Ik = −Ej = −Ki = −kI
K = Ji = jI = kE = −iJ = −Ij = −Ek

## Die Konjugation im System der Oktonionen und absoluter Betrag

Die Definition der Konjugation erfolgt ganz analog zu $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$:

$$u = a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK$$

$$\bar{u} = a - bi - cj - dk - AE - BI - CJ - DK$$

$\bar{u}$ nennt man zu $u$ konjugiert.

Eine kürzere Darstellungsform ist $u = q_1 + q_2 e$ mit

$$q_1 = a + bi + cj + dk \qquad \text{und} \qquad q_2 = A + Bi + Cj + Dk$$

Für das konjugierte Oktonion erhält man

$$\bar{u} = \overline{q_1} - q_2 e$$

Produkt zwischen einem Oktonion und ihre konjugierten Oktonion:

$$u\bar{u} = (q_1 + q_2 e)(\overline{q_1} - q_2 e) = (q_1\overline{q_1} + \overline{q_2}q_2) + (-q_2 q_1 + q_2 q_1)e$$

Wie bei den komplexen Zahlen oder den Quaternionen ist dies eine reelle Zahl, (genauer: ein Oktonion der Form $a + 0i + 0j + 0k + 0E + 0I + 0J + 0K$).

Für Quaternionen gilt $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$. Daraus folgt

$$u\bar{u} = q_1\overline{q_1} + |q_2\overline{q_2} = |q_1|^2 + |q_2|^2$$

Die Quadratwurzel $\sqrt{|q_1|^2 + |q_2|^2}$ wird absoluter Betrag bzw. Norm des Oktonion $u$ genannt. Für ein Oktonion $u$ ist somit das Quadrat ihres absoluten Betrages gleich

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2$$

Nach Definition des absoluten Betrags ist

$$u\bar{u} = |u|^2$$

aber auch

$$\bar{u}u = |u|^2$$

da der absolute Betrag von $u$ gleich dem absoluten Betrag von $\bar{u}$ ist.

### Absoluter Betrag eines Produktes von Oktonionen

Es finden sich weitere Gemeinsamkeiten zwischen Oktonionen, Quaternionen und komplexen Zahlen. So ist

$$|uv| = |u||v|$$

Das ist äquivalent zu

$$|uv|^2 = |u|^2|v|^2$$

Beweis durch Einzelberechnung von $|uv|^2$ und $|u|^2|v|^2$:

Sei $\quad u = q_1 + q_2 e \qquad$ und $\qquad v = r_1 + r_2 e$

$$uv = (q_1 + q_2 e)(r_1 + r_2 e) = (q_1 r_2 - \overline{r_2} q_2) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})e$$

Wegen $u\bar{u} = |q_1|^2 + |q_2|^2$ und der Konjugation folgt

$$|uv|^2 = (q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2)(\overline{q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2}) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})(\overline{r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1}})$$

$$|uv|^2 = (q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2)(\overline{r_1}\overline{q_1} - \overline{q_2} r_2) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})(\overline{q_1}\overline{r_2} + r_1 \overline{q_2})$$

Andererseits gilt

$$|u|^2|v|^2 = (q_1 \overline{q_1} + q_2 \overline{q_2})(r_1 \overline{r_1} + r_2 \overline{r_2})$$

Vergleicht man beide Ausdrücke, so stellt man fest, dass sie sich durch die Summe $S$ der vier Summanden

$$S = r_2 q_1 r_1 \overline{q_2} + q_2 \overline{r_1}\overline{q_1}\overline{r_2} - q_1 r_1 \overline{q_2} r_2 - \overline{r_2} q_2 \overline{r_1}\overline{q_1}$$

Es bleibt zu beweisen, dass für jeweils vier Quaternionen $q_1, q_2, r_1, r_2$ immer $S = 0$ ist.

Für den Fall, dass $r_2 \in \mathbb{R}$ ist $S = 0$, da dann $r_2 = \overline{r_2}$ und sich dann alle Summanden aufheben.

Wenn $r_2$ eine rein imaginäre Quaternion ist (d.h. $\overline{r_2} = -\overline{r_2}$), so erhält man

$$S = r_2(q_1 r_1 \overline{q_2} + q_2 \overline{r_1}\overline{q_1}) - (q_1 r_1 \overline{q_2} + q_2 \overline{r_1}\overline{q_1}) r_2$$

Unabhängig von $r_2$ ist aber auch der Ausdruck in Klammern wieder selbst die Summe zweier konjugierter Quaternionen und somit reell. Er soll mit $c$ bezeichnet werden. Dann ist $S = r_2 c - c r_2 = 0$.

Wenn aber $S$ für $r_2 = a$ und $r_2 = b$ gleich 0 ist, so verschwindet er auch für $r_2 = a + b$.

Da jede Quaternion sich als Summe einer reellen Zahl und einer rein imaginären Quaternion darstellen lässt und für beide Summanden $S = 0$ ist, so ist immer $S = 0$. Somit ist bewiesen, dass

$$|uv|^2 = |u|^2|v|^2$$

und damit

$$|uv| = |u||v|$$

### Identität für acht Quadrate

Wieder beginnt man, wie bei $\mathbb{C}$ und $\mathbb{H}$, mit der Gleichung

$$|uv|^2 = |u|^2|v|^2$$

Gegeben seien $u, v$ zwei Oktonionen (Elemente aus $\mathbb{O}$):

$$u = a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK$$

$$v = a' + b'i + c'j + d'k + A'E + B'I + C'J + D'K$$

und $\quad uv = \Phi_0 + \Phi_1 i + \Phi_2 j + \Phi_3 k + \Phi_4 E + \Phi_5 I + \Phi_6 J + \Phi_7 K$

Dann nimmt die Ausgangsgleichung die Form an

$$(a^2 + \cdots + D^2)(a'^2 + \cdots + D'^2) = \Phi_0^2 + \Phi_1^2 + \cdots + \Phi_7^2$$

Mit Hilfe des Multiplikationsgesetzes der Oktonionen kann man, (wenn auch mühsam), $\Phi_0, \Phi_{1,} \dots, \Phi_7$ durch die gewohnten Ausdrücke mit $a, \dots, D$ $bzw.$ $a', \dots, D'$ ersetzen. Man erhält:

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \cdot$$

$$(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 + A'^2 + B'^2 + C'^2 + D'^2)$$

$$= (aa' - bb' - cc' - dd' - AA' - BB' - CC' - DD')^2$$

$$+(ab' + ba' + cd' + dc' - A'B + B'A + C'D - D'C)^2$$

$$+(ac' + ca' - bd' + db' - A'C + C'A - B'D + D'B)^2$$

$$+(ad' + da' + bc' + cb' - A'D + D'A + B'C - C'B)^2$$

$$+(A'a - B'b - C'c - D'd + Aa' + Bb' + Cc' + Dd')^2$$

$$+(A'b + B'a + C'd - D'c - Ab' + Ba' - Cd' + Dc')^2$$

$$+(A'c + C'a - B'd + D'b - Ac' + Ca' + Bd' - Db')^2$$

$$+(A'd + D'a + B'c - C'b - Ad' + Da' - Bc' + Cb')^2$$

Somit hat man das Ergebnis, das den Satz von Hurwitz bestätigt:

In $\mathbb{C}$: Das Produkt einer Summe von zwei Quadraten mit einer Summe von zwei Quadraten ist wieder eine Summe von zwei Quadraten.

In $\mathbb{H}$: Das Produkt einer Summe von vier Quadraten mit einer Summe von vier Quadraten ist wieder eine Summe von vier Quadraten.

In $\mathbb{O}$: Das Produkt einer Summe von acht Quadraten mit einer Summe von acht Quadraten ist wieder eine Summe von acht Quadraten.

Tatsächlich hat die Identität von acht Quadraten den Entdecker der Oktonionen (oder auf Deutsch Oktaven), A. Cayley, auf die Spur gebracht. So wie die (reellen) Quaternionen oft auch Hamilton-Zahlen genannt werden, so spricht man bei den (reellen) Oktonionen manchmal von Cayley-Zahlen (nach Arthur Cayley, 1821 – 1895).

### Nichtassoziativität der Multiplikation; Alternativität

Bei allen Ähnlichkeiten der komplexen und hyperkomplexen Zahlen mit $n$ =2, 4 und 8 mit nicht selbstverständlichen algebraischen Eigenschaften, gibt es doch weniger Symmetrien, verglichen mit den Körperaxiomen, die die komplexen Zahlen erfüllen. So ist die Multiplikation in der Regel nicht assoziativ. Damit bilden die Oktonionen weder einen Körper noch einen Schiefkörper, wie die Quaternionen.

So ist $E(ji) = -Ek = K$ aber $(Ej)i = -Ji = -K$

oder $(ij)E = kE = K$ aber $i(jE) = iJ = -K$

Das heißt aber nicht, dass es keine Regelmäßigkeiten gibt. Man kann nur sagen, wie die Beispiele zeigen, dass für Oktonionen $u, v, w$ in der Regel gilt:

$$(uv)w \neq u(vw)$$

Allerdings kann man beweisen, dass folgende beiden Formeln gelten:

$$(uv)v = u(vv) \quad \text{bzw.} \quad v(vu) = (vv)u$$

Man kann dies als abgeschwächte Form der Assoziativität sehen. Man nennt sie Alternativität. Zum Beweis lässt sich folgende Beziehung ausnützen.

Dies entspricht nämlich

$$(uv)\bar{v} = u(v\bar{v}) \quad \text{bzw.} \quad \bar{v}(vu) = (\bar{v}v)u$$

Man kann $v$ durch $-v + 2a$ ersetzen, wobei $a$ der Realteil des Oktonion $v$ ist.

Es sei $u = q_1 + q_2 e$ und $v = r_1 + r_2 e$

$$(uv)\bar{v} = ((q_1 + q_2 e)(r_1 + r_2 e))(\overline{r_1} - r_2 e)$$

$$= \big((q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2)\overline{r_1} + \overline{r_2}(r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1})\big) + \big((-r_2)(q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2) + (r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1}) r_1\big) e$$

$$= (|r_1|^2 + |r_2|^2) q_1 + (|r_1|^2 + |r_2|^2) q_2 e$$

$$= (|r_1|^2 + |r_2|^2)(q_1 + q_2 e$$

$$= |v|^2 u$$

Andererseits ist $|v\bar{v}| = |v|^2$

Insgesamt gilt deshalb

$$u(v\bar{v}) = |v|^2 u$$

Analog beweist man die zweite Formel.

### Oktonionen und Division

Es soll nun die Division bei den Oktonionen untersucht werden. Nachdem bei den Quaternionen eine links- und eine rechtsseitige Lösung existiert, muss man bei den Oktonionen ebenfalls mit Nicht-Eindeutigkeit rechnen.

Seien $u$ , $v$ beliebige Oktonionen.

Der linke Quotient $u$ durch $v$ sei die Lösung der Gleichung

$$vx = u$$

Der rechte Quotient $u$ durch $v$ sei die Lösung der Gleichung

$$xv = u$$

Es soll wie bei den Quaternionen verfahren werden, zunächst linksseitig:

$$\bar{v}(vx) = \bar{v}u$$

Die Alternativität lässt die Umformung zu:

$$|v|^2 x = \bar{v}u$$

$$x = \frac{1}{|v|^2}\bar{v}u$$

Die Überprüfung bestätigt das Ergebnis

$$x_l = \frac{1}{|v|^2}\bar{v}u$$

Analog beweist man (unter Verwendung von $(uv)v = u(vv)$)

$$x_r = \frac{1}{|v|^2}u\bar{v}$$

Damit ist bewiesen, dass auch die Oktonionen ein System mit Division sind. Man nennt $\mathbb{C}$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{O}$ Divisionsalgebren.

### Hinführung zum Begriff der Algebra

Vorbemerkungen:
Ein hyperkomplexes System der Dimension n+1 sei die Menge aller Ausdrücke der Form

$$a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_n i_n$$

Es gelte die übliche Additionsregel und eine geeignete Multiplikationsregel, d.h. einer Multiplikationstafel der imaginären Einheiten $i_1, i_2, \dots, i_n$ über alle Kombinationen von $i_\alpha i_\beta$ $(\alpha, \beta = 1, \dots, n)$.

Es gilt auf jeden Fall die Abgeschlossenheit bzgl. der Addition, d.h. die Summe von zwei derartigen Zahlen ist wieder eine derartige Zahl. Auch die Multiplikation ist abgeschlossen. Hyperkomplex nennt man jedoch nur Systeme, die ein neutrales Element e der Multiplikation besitzen, d.h.

$$e \cdot a = a \cdot e = a$$

Dieses Element $e$ ist ein „Einselement" der Form $e = 1 + 0i_1 + \cdots + 0i_n$.

Ein weiteres „Kennzeichen" eines hyperkomplexen Systems ist die Multiplikation einer reellen Zahl $k$ mit einem beliebigen Element $a$, die eng mit der Existenz eines „Einselements" zusammenhängt.

Da $k = k + 0i_1 + \cdots + 0i_n$ ist $ka$ relativ sinnlos definiert. In einem allgemeinen System ohne entsprechende Rahmenbedingungen macht $ka$ keinen Sinn.

Man muss deshalb die Multiplikation mit $k$ definieren als

$$k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) = ka_1 i_1 + ka_2 i_2 + \cdots + ka_n i_n$$

Man nennt Systeme mit Addition, Multiplikation, Einselement und den genannten Rahmenbedingungen eine Algebra (genauer Algebra der Dimension n). Sie soll hier noch genauer definiert werden. Dabei wird sich zeigen, dass die hyperkomplexen Zahlen und erst Recht die betrachteten Divisionsalgebren lediglich Spezialfälle einer Algebra sind.

### Definition einer Algebra

Eine Menge von Ausdrücken der Form

$$a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n$$

wird eine Algebra der Dimension n genannt. Dabei sind $a_1, a_2, \dots, a_n$ beliebige reelle Zahlen und $i_1, i_2, \dots, i_n$ Symbole mit folgenden Operationsregeln:

1) Die Multiplikation mit reellen Zahlen wird gemäß folgender Formel durchgeführt:
$$k(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) = ka_1 i_1 + ka_2 i_2 + \cdots + ka_n i_n$$
2) Die Addition gemäß
$$(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n) + (b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n) =$$
$$(a_1 + b_1) i_1 + (a_2 + b_2) i_2 + \cdots + (a_n + b_n) i_n$$
3) Die Multiplikation wird analog zu dem Fall eines hyperkomplexen Systems durch eine Multiplikationstafel definiert der Form

$$i_\alpha i_\beta = p_{\alpha\beta,1} i_1 + p_{\alpha\beta,2} i_2 + \cdots + p_{\alpha\beta,n} i_n$$

$\alpha, \beta$ sind beliebige Zahlen von 1 bis n.
Die Tafel wird zum Ermitteln der Produkte

$$(a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots + a_n i_n)(b_1 i_1 + b_2 i_2 + \cdots + b_n i_n)$$

genauso verwendet, wie bei einem hyperkomplexen System.

Aus dieser Definition kann man leicht sehen, dass eine Algebra der Dimension $n$ vollständig durch ihre Multiplikationstafel bestimmt ist, die aus einem Satz von $n^3$ Zahlen $p_{\alpha,\beta,\gamma}$ besteht. Jeder Satz ergibt eine bestimmte Algebra.

Zweifellos sinnvoll ist in diesem Zusammenhang das Verständnis von Vektorräumen und weiteren Strukturen. Es wird im vorliegenden Beitrag bei diesen Aspekten auf den gleichen Tiefgang, wie bei den Divisionsalgebren, verzichtet. Sie sprengen wohl den Rahmen dieser Diskussion und ihre Mathematik ist vertrauter als die der hyperkomplexen Zahlensysteme. Auch weitere hyperkomplexe Zahlen sind nur kurz im Abschnitt „Verallgemeinerung des Begriffs hyperkomplex“ erwähnt. Auf dieser mathematischen Grundlage, die oft nur Andeutungscharakter hat, soll dann die theoretisch gefestigte und die noch spekulative Physik betrachtet werden.

**Grafische Illustration der Rechenregeln am Beispiel komplexer Zahlen**

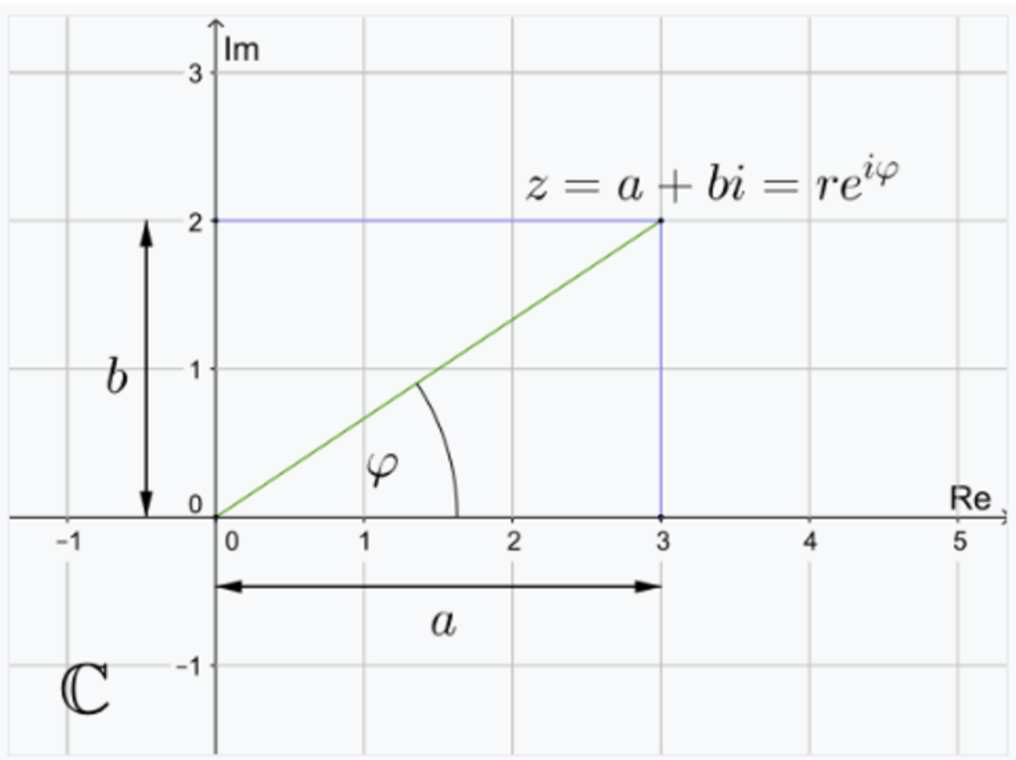



Abb. 8: Gaußsche Ebene mit komplexer Zahl in cartesischen und Polarkoordinaten

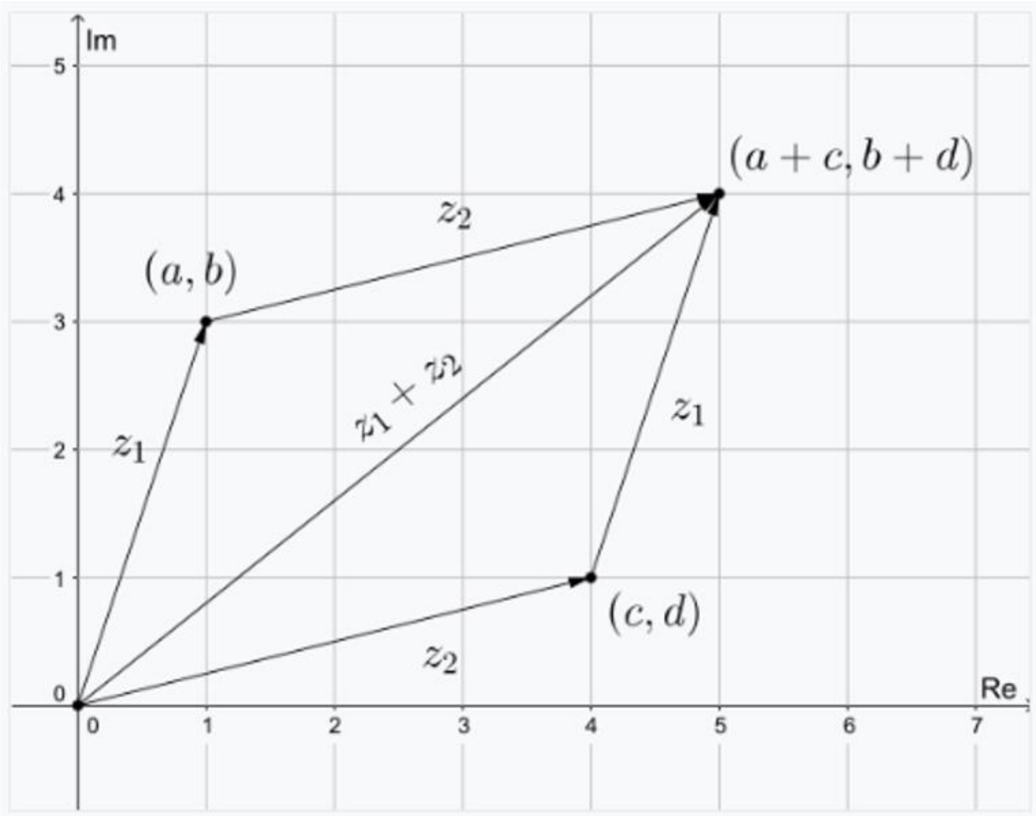



Abb. 9: Darstellung der Addition zweier komplexen Zahlen in der Zahlenebene

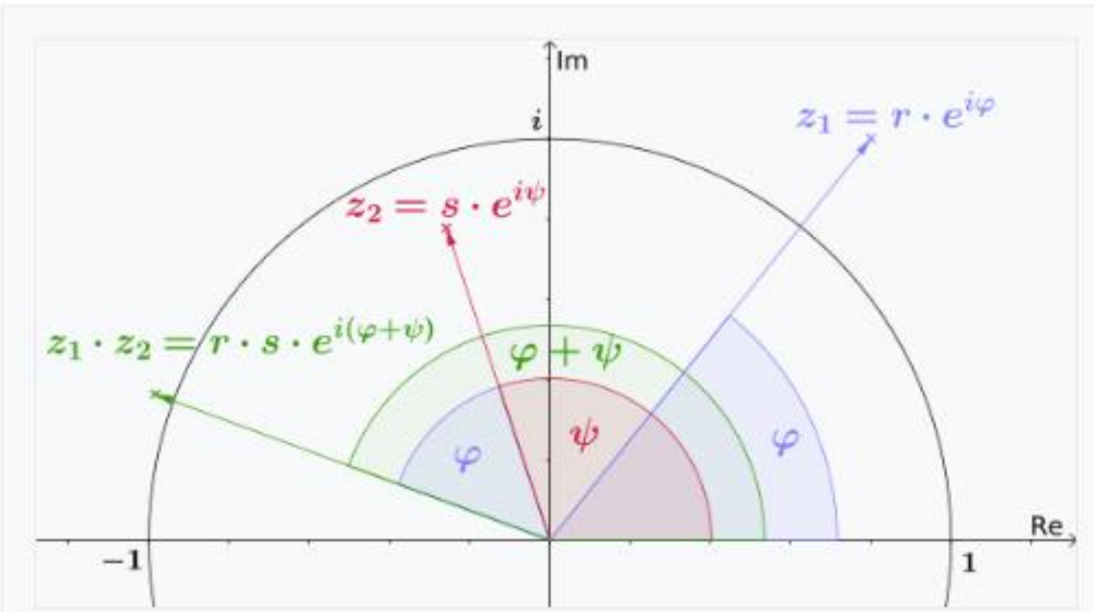



Abb. 10: Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen entspricht der Addition ihrer Winkel und der Multiplikation ihrer Beträge

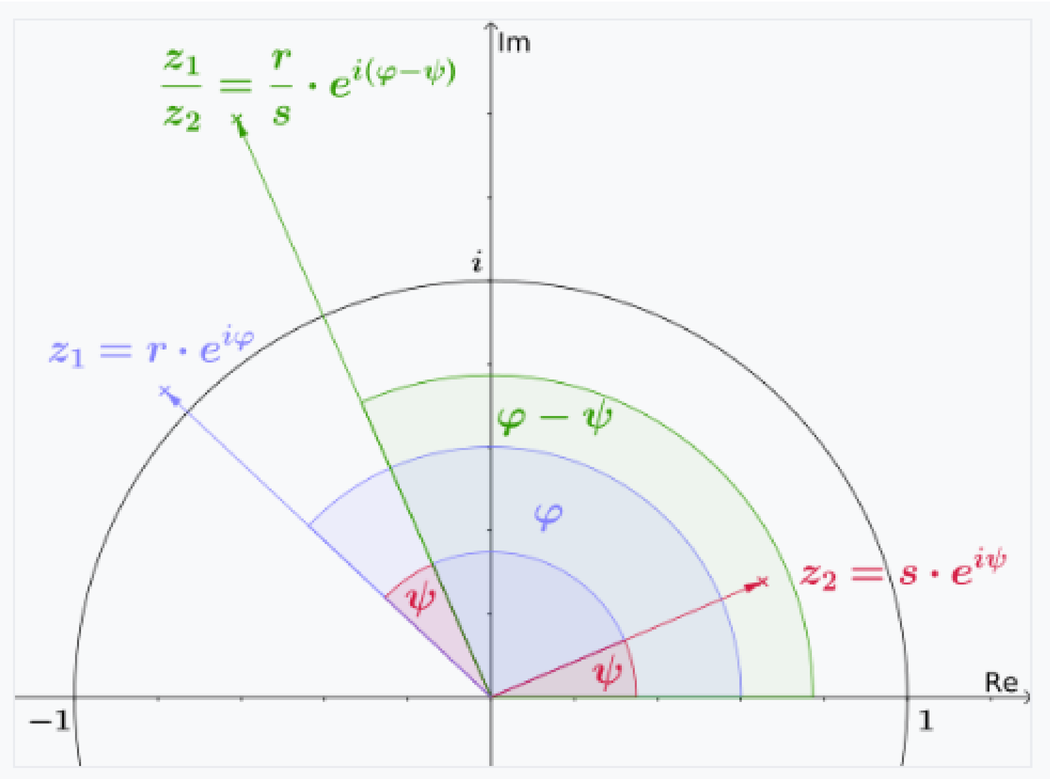



Abb. 11: Die Division zweier komplexer Zahlen entspricht der Subtraktion ihrer Winkel und der Division ihrer Beträge

**Literaturhinweise**

Baez John C., Huerta, John; Exotische Zahlen und die Stringtheorie, sdw 10/2011, S.54-60

Baez, John; Huerta, John; The Algebra of Grand Unified Theories, arXiv:0904.1556v2 [hep-th] 1 May 2010

Baez, John C.; The Octonions, Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002), 145-205; arXiv:math/0105155v4 [math.RA] 23 Apr 2002

Bischoff, Manon; https://www.spektrum.de/video/divisionsalgebren-in-der-physik/1614224

Ebbinghaus Heinz-Dieter, et. al.; Zahlen, Springer-Lehrbuch, 3. Auflage (1983, 1988, 1992), Berlin Heidelberg New York

Eschenburg, Jost-Hinrich; Quaternionen und Oktaven, Vorlesungsskript, https://myweb.rz.uni-augsburg.de/~eschenbu/oktaven.pdf

Furey, Cohl; Standard model physics from an algebra? https://www.repository.cam.ac.uk/handle/1810/254719

https://de.wikipedia.org/wiki/Divisionsalgebra

Jaeger, Lars; Emmy Noether, Südverlag, Konstanz 2022

Kant, Immanuel; Kritik der reinen Vernunft, 2. Auflage, https://www.projekt-gutenberg.org/kant/krvb/krvb011.html (ff)

Kantor, Isaï L'vovich (I.L.), Solodownikow, Aleksandr Stepanovič (A.S.); Hyperkomplexe Zahlen, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1978. https://mathematikalpha.de/wp-content/uploads/2022/11/Hyperkomplexe_Zahlen.pdf

Lyre, Holger, Kann moderne Physik a priori begründbar sein? Vortrag auf der Tagung “Was sind und warum gelten Naturgesetze?”, 15.-16. September 1999, ZiF Bielefeld. Erscheint in: Philosophia Naturalis 37 (2000), Heft 2., http://www.lyre.de/physapri.pdf

Nicolai, Hermann; Kleinschmidt, Axel; E10: Eine fundamentale Symmetrie der Physik?; Phys. Unserer Zeit |3/2010 (41), S. 134-140

Reichenbach, Hans, Relativitätstheorie und Erkenntnis a priori, Berlin 1920, Verlag Julius Springer, DOI 10.1007/978-3_642-50774-8, www.gutenberg.org/files/57240/57240-h/5724

Vaas, Rüdiger; https://www.wissenschaft.de/astronomie-physik/oktonionen-und-der-verrueckte-onkel/

Van der Waerden, Bartel Leendert; Moderne Algebra I, Springer-Verlag, Berlin, 1950

Wolchover, Natalie, in https://www.quantamagazine.org/the-octonion-math-that-could-underpin-physics-20180720/

Wußing, Hans; 6.000 Jahre Mathematik, Bd. 2, Springer Berlin Heidelberg, 2009

**Abbildungsnachweise:**

Abb. 1: Vier Zahlensysteme (eigene Abb.)

Abb. 2: Bei Drehungen (am Beispiel eines Buches) ist die Reihenfolge wichtig. Sie sind nicht kommutativ (eigene Abb.).

Abb. 3: Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (Teilchen-bezogen), Abbildungsnachweis: https://de.wikipedia.org/wiki/Standardmodell_der_Teilchenphysik

Abb. 4: Das Standardmodell der Elementarteilchenphysik (Kräfte-bezogen), Abbildungsnachweis: ebenda

Abb. 5: Eine Darstellung der Lie-Gruppe $E_8$, wie ein 57-dimensionales Objekt gedreht werden kann ohne sein Aussehen zu verändern. Bildquelle: Spektrum der Wissenschaft Juni 2007, S. 95 (Download) Die 240 nächsten Nachbarn einer Zentralkugel im achtdimensionalen Raum, herunterprojiziert auf die zweidimensionale Ebene. John Stembridge von der Universität von Michigan in Ann Arbor hat die Projektion so gewählt, dass das

Ergebnis maximale Symmetrie hat. Dadurch sortieren sich die 240 Kugelmittelpunkte in acht Ringe zu je dreißig Punkten, und das ganze Bild ist dreißigzählig dreh- sowie spiegelsymmetrisch. Die Linien verbinden jede Kugel mit ihren nächsten Nachbarn; das sind jeweils 56 Stück. Die Farben der Linien wurden zur Verbesserung des Kontrasts gewählt und sind ohne mathematische Bedeutung.

Abb. 6: Merkhilfe für die Multiplikationsregeln, aus I.L. Kantor, A.S. Solodownikow, Hyperkomplexe Zahlen, Teubner Verlagsgesellschaft Leipzig 1978. S. 14

Abb. 7: Illustration der Multiplikationsregeln, eigene Grafik identisch zu ebenda, S. 35

Abb. 8: Gaußsche Ebene mit komplexer Zahl in cartesischen und Polarkoordinaten, (Text und Bild https://anthrowiki.at/Zahlen#Hyperkomplexe_Zahlen)

Abb. 9: Darstellung der Addition zweier komplexen Zahlen in der Zahlenebene, (Text und Bild ebenda)

Abb. 10: Die Multiplikation zweier komplexer Zahlen entspricht der Addition ihrer Winkel und der Multiplikation ihrer Beträge, (Text und Bild ebenda)

Abb. 11: Die Division zweier komplexer Zahlen entspricht der Subtraktion ihrer Winkel und der Division ihrer Beträge, (Text und Bild ebenda)

**Danksagung**

Mein besonderer Dank gilt **Herrn Prof. Dr. Ralf Köhl** von der Christian-Albrechts-Universität zu Kiel. Sein Peer Review hat dafür gesorgt, dass entscheidende Aspekte im vorliegenden Beitrag berücksichtigt wurden. Er hat mir wieder die feste Überzeugung vermittelt, dass er seine Unterstützung für die Popularisierung der Mathematik als Herzensanliegen und nicht als Pflichtübung sieht.

**Herr Dr. Michael Serafin** war wieder die engagierte, gute Seele unserer wissenschaftlichen Gesellschaft. Wie immer hat er sich nicht nur auf seine Rolle als Schriftleiter beschränkt, sondern war mir immer ein geschätzter Ansprechpartner.

*Math is like love — a simple idea, but it can get complicated.*

FÜR FARI

## Buchbesprechung

JÜRGEN ADLER, GÜNTHER KUNZMANN & Mitarbeiter (2022): Bilder zur Flora von Nordschwaben. – Hrsg.: Arbeitsgemeinschaft Flora Nordschwaben. 367 S., Nördlingen.

Das im Eigenverlag der Arbeitsgemeinschaft Nordschwaben erschienene Buch ist eine Ergänzung der 2017 herausgegebenen Flora von Nordschwaben (BRIGITTE ADLER, JÜRGEN ADLER & GÜNTHER KUNZMANN), in welcher die Ergebnisse von mehr als 30 Jahren floristischer Kartierung in Verbreitungskarten der Arten (Rasterkarten nach Messtischblattvierteln) publiziert wurden. Bezugsgebiet sind die nordschwäbischen Landkreise Dillingen an der Donau und Donau-Ries.

Das Werk umfasst Fotos guter Qualität von mehr als 500 Pflanzenarten. Zu vielen Arten ist neben dem Hauptfoto ein vergrößertes Detailfoto in die Abbildung eingefügt. Die Autoren betonen, dass das Werk primär nicht als Bestimmungsbuch konzipiert ist, dennoch sind die Fotos zum Erkennen der Arten hilfreich. Von anderen Bildbänden der Pflanzenarten unterscheidet sich dieses Buch durch die Gliederung und Anordnung der Arten nach Lebensräumen, in welchen die Spezies ihren Verbreitungsschwerpunkt haben. Dafür werden 6 übergeordnete Lebensraumtypen (Wälder, Grünland, Gewässer, Fels und Sand, Ruderalfluren) unterschieden, die jeweils in stärker differenzierte Biotoptypen untergliedert sind (z.B. zum Grünland: Frischwiesen, Trockenrasen, Feucht- und Nasswiesen). Kurze Erläuterungen zu den Lebensräumen und ihren typischen Arten mit vielfältigen Hinweisen z.B. auf Verbreitung, Häufigkeit, Gefährdung, Standortmerkmale, Nutzungseinflüsse oder Habitate von Tierarten umrahmen die Abbildungen. Eine vorangestellte, nach den deutschen Pflanzennamen gegliederte Tabelle verweist auf die Haupt- und Nebenvorkommen der im Bild vorgestellten Pflanzen in den unterschiedenen Lebensraumtypen und gibt an, in welchem der Lebensraumkapitel die jeweilige Art abgebildet ist. Im Inhaltsverzeichnis wird ergänzend die Seitenzahl zu den deutschen und wissenschaftlichen Artenamen angegeben.

Die zugunsten der Abbildungen kurz gehaltenen Texte sind allgemein verständlich gehalten, Fachausdrücke werden weitgehend vermieden. Damit ist das Buch für eine breite Leserschaft nutzbar und informativ. Die Gliederung nach Lebensraumtypen eröffnet Einblicke in die Ökologie der Arten, wie man sie in Abbildungsbänden zu Bestimmungsbüchern nicht findet. Dabei gelten die wesentlichen Inhalte nicht allein für den Bezugsraum Nordschwaben, sondern sind in der Regel auch für andere Landschaften des deutschen Mittelgebirgsraumes zutreffend.

Das attraktive Layout und die vielen schönen Bilder des Buches sind geeignet, naturverbundene Menschen zu erfreuen, Begeisterung und Interesse an der Pflanzenwelt zu stärken und die Bewahrung der ökologischen und biologischen Vielfalt unserer Kulturlandschaften wert zu schätzen. In diesem Sinne wünscht sich der Vorsitzende der Arbeitsgemeinschaft Flora Nordschwaben in einem „VorWort VorSatz“, dass der Band dazu anregt, mit offenen Augen die Natur der Heimat wahrzunehmen und ihre Schönheit zu erkennen: „Sehen – kennen – schätzen – schützen“. Angesichts des zunehmenden Verlustes an Biodiversität und landschaftlicher Vielfalt ein lobenswertes Ziel, zu welchem das Buch einen guten Beitrag leisten kann.

Der Co-Autor Dr. Günther Kunzmann hat an der Justus-Liebig-Universität Gießen Agrarwissenschaften studiert und am Institut für Bodenkunde und Bodenerhaltung promoviert. Er ist seit mehr als 30 Jahren Mitglied der Oberhessischen Gesellschaft.

Dr. Bernd Nowak, Wetzlar.

## Nachruf

### Prof. Dr. Erhard Schulte (1940 – 2022)

Als ich 1987 mein Biologiestudium an der Justus-Liebig-Universität antrat, unterrichtete dort eine alte Garde von Professoren, die mit mehr oder weniger großem Geschick in prall gefüllten Hörsälen ihre Vorlesungen hielten und in voll besetzten Laboren die diversen Praktika durchführten. Professor Schulte war in dieser Riege eine Art bunter Vogel, oder enfant terrible, wie man will. Unter Studenten war er einerseits für seinen Humor beliebt und gleichsam gefürchtet, denn er hatte eine gnadenlose Art gegenüber denen, die im Biologiestudium offensichtlich nur ihre Zeit abzusitzen schienen. Dies drückte er unverhohlen aus und schwor die Studentenschaft darauf ein, sich sehr gut zu überlegen, ob sie in der Biologie wirklich eine Berufung sahen. "Mit dem Biologiediplom bekommen Sie automatisch auch die Lizenz als Taxifahrer". Seine Anfängervorlesung zur allgemeinen Zoologie war sehr gut strukturiert und leicht verständlich, stellenweise fesselnd und immer mit kleinen Anekdoten und hintergründigem Humor gespickt. "Die Erreger befallen gut durchblutete Organe, das ist bei mir das Gehirn, bei Ihnen die Leber..."

Näher kennengelernt haben wir uns erst später in meinem Studium, vor allem in den Parasitologischen Übungen, die er zu einem Erlebnis gestaltete, in dem jeder Student die Gelegenheit bekam, einen Beitrag zu leisten und auf sich aufmerksam zu machen. Als ich während meiner Arbeit am Diplom einen Job suchte, brachte er mir das Vertrauen entgegen, den zoologischen Anfängerkurs und das Elektronenmikroskopie-Praktikum selbstständig mitzugestalten.

Wir teilten viele Interessen, vor allem die Faszination für Inklusen im Bernstein. Gemeinsam boten wir ein Praktikum an, in welchem Studenten den Rohbernstein bearbeiten und nach Einschlüssen absuchen mussten, diese dann bestimmen und fotografieren sollten, um anhand der Insektenformen Rückschlüsse auf das Klima im Eozän im Ostseeraum zu ziehen.

Nebenbei durchstreiften wir Steinbrüche, suchten in Beuern vergeblich nach Kieselgur, der Fossilien hätte enthalten können, pflückten Vogelbeeren und brauten daraus einen vorzüglichen Wein, besuchten Mineralienbörsen und Flohmärkte, immer auf der Jagd nach irgendetwas Interessantem. Wir bastelten an Mikroskopkameras und Schleifanlagen für den Bernstein, den wir von russischen Flohmarkthändlern bezogen. Wir teilten auch die Freude an Kulinarik und am Reisen. Ich führte ihn an Computer heran, er brachte mich in die OHG, für die er als Vorsitzender großes Engagement aufbrachte und mir zwischen 1997 und 2000 die Schriftführung übertrug.

Unsere Wege trennten sich, als ich 2002 die Universitätslaufbahn aufgab. Doch unsere gemeinsamen Unternehmungen und viele humor- und gehaltvolle Gespräche zu Themen wie Politik, Religion, Technik, Gesellschaft, Fossilien, Parasiten, Libellen, die Aufzucht von Pfeilgiftfröschen, sowie zwei turbulente

Exkursionen in die Bretagne werden mir immer in lebhafter Erinnerung bleiben. Prof. Schulte war einer der vielseitigsten Menschen, die ich kennenlernen dufte.

Während eines Praktikums, 2001

Dr. Felix Lorenz, Buseck

**Prof. Dr. Erhard Schulte (1940 – 2022)**

Professor Dr. Erhard Schulte wurde 1993 in den Beirat der Naturwissenschaftlichen Abteilung der Oberhessischen Gesellschaft für Natur- und Heilkunde zu Gießen gewählt und 1997 zum Ersten Vorsitzenden der Gesellschaft. Professor Schulte hatte dieses Amt sechs Jahre bis 1997 inne. In diese Zeit fielen vielfältige Aktivitäten der Gesellschaft in Form von Vorträgen mit prominenten Rednern und erlebnisreichen Exkursionen, bei denen ein breites Spektrum an interessanten Themen behandelt wurde. In besonderer Erinnerung bleiben seine Vielseitigkeit sowie seine Gabe, komplexe ökologische Zusammenhänge lebendig und verständlich zu vermitteln.

Nicht unerwähnt bleiben soll auch seine Frau Brigitte Schulte-Graf, die die gemütlichen Nachsitzungen nach den Vorträgen mit hohem kulinarischen wie ästhetischen Anspruch kunstvoll gestaltete.

Die Gesellschaft hat Professor Schulte viel zu verdanken und wird ihn in ehrenvoller Erinnerung behalten.

Der Vorstand